

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Um Teorema sobre o Tangram

Dora Maria da Costa Araújo

Orientada pelo Dr. Christian Lomp

Junho 2005

Um Teorema sobre o Tangram



Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática

Dora Maria da Costa Araújo

Orientada pelo Dr.º Christian Lomp

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Christian Lomp'.

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Junho 2005

Muitas foram as pessoas que directa ou indirectamente me apoiaram ao longo deste período. Muito devo à minha família, mas principalmente ao meu marido cujo apoio, paciência e sacrifícios tornaram exequível a tarefa a que me propus.

Resumo

O Tangram Chinês é um puzzle que pode ser utilizado, na sala de aula, para explorar diversos conceitos do conhecimento matemático. Com o Tangram podemos construir centenas de figuras, no entanto, algo surpreendentemente, só podemos construir um número muito reduzido de polígonos convexos. Pretendemos provar que, com as peças do Tangram, só podemos construir treze polígonos convexos. Na tentativa de concretização do nosso objectivo tivemos primeiro de responder a outra questão: “Quantos polígonos convexos é possível construir usando t triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais”. O Tangram pode ser decomposto em dezasseis triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, com estes triângulos podemos construir vinte polígonos convexos, no entanto, apenas treze destes podem ser construídos com as peças do Tangram.

Índice

1.	INTRODUÇÃO.....	7
2.	POLÍGONOS	11
3.	FIGURAS CONVEXAS FORMADAS POR TRIÂNGULOS	23
4.	APLICAÇÃO AO TANGRAM CHINÊS	47
5.	APLICAÇÃO A OUTROS PUZZLES.....	63
5.1	TANGRAM DE CINCO PEÇAS – BASE QUADRADA.....	63
5.2	PUZZLE DE QUATRO PEÇAS	72
5.3	PUZZLE DE TRÊS PEÇAS	77
5.4	OUTRO PUZZLE DE QUATRO PEÇAS.....	83
5.5	TANGRAM DE TRÊS PEÇAS - BASE QUADRADA.....	88
6.	APLICAÇÕES DO TANGRAM NA SALA DE AULA	95
7.	BIBLIOGRAFIA.....	101
8.	ÍNDICE REMISSIVO	103

1. Introdução

Numa época em que aos professores se exige, entre muitas outras coisas, que motivem os seus alunos, que os incentivem ao estudo, de uma disciplina que tradicionalmente é olhada com desconfiança e desprazer pelos alunos dos primeiros ciclos de escolaridade, os jogos didácticos desempenham um papel relevante e representam um coadjuvante precioso.

O tangram é um desses jogos que pode e deve ser utilizado para atingir o objectivo de cativar e motivar os alunos. É obtido a partir da decomposição de uma figura geométrica segundo determinadas condições, permitindo depois a obtenção de novas figuras através de recombinações das peças obtidas.

O tangram é um antigo puzzle chinês composto por sete peças às quais se dá o nome de “tan” (um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos rectângulos isósceles, dois grandes, um médio e dois pequenos), construídas a partir de um quadrado da forma indicada a seguir.

Consideremos o quadrado $[ABCD]$ e uma das diagonais. Sem perda de generalidade tomamos a diagonal $[AC]$.

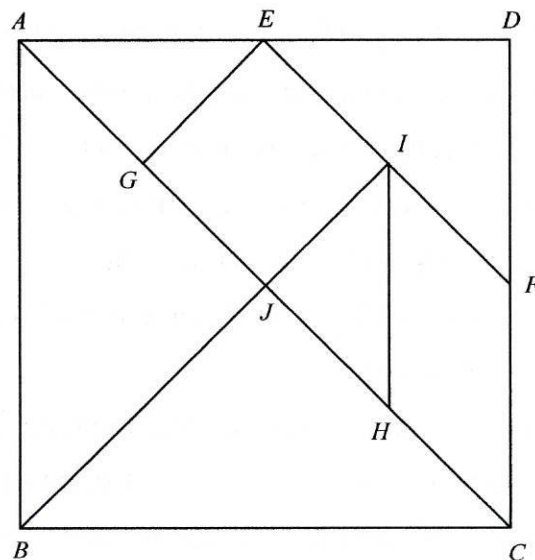


Figura 1 – Tangram

Consideremos dois lados consecutivos do quadrado, por exemplo $[AD]$ e $[DC]$ e determinemos os seus pontos médios. E é ponto médio de $[AD]$ e F é ponto médio de $[DC]$.

Tracemos o segmento de recta $[EF]$, paralelo a $[AC]$, pois $[EF]$ é a diagonal de um quadrado cujo lado mede metade do lado do quadrado $[ABCD]$.

Tracemos a segunda diagonal do quadrado $[ABCD]$, mas somente até intersectar o segmento $[EF]$. Seja I esse ponto de intercepção e J o ponto de intercepção de $[AC]$ com $[BI]$. I é ponto médio de $[EF]$ e J é ponto médio de $[AC]$ pois as intersecções das diagonais de qualquer quadrado são os pontos médios das respectivas diagonais.

Por E , tracemos um segmento de recta paralelo a $[IJ]$ até intersectar a diagonal $[AC]$. G é ponto médio de $[AJ]$.

Por I , tracemos uma paralela ao lado $[DC]$ até intersectar, a diagonal $[AC]$. H é ponto médio de $[JC]$.

O Tangram, como referido por M. Gardner em [G], é um puzzle excepcionalmente rico que pode ser utilizado com diversos intuitos, como mero exercício de observação, agilidade mental e organização espacial, como introdução a conceitos matemáticos, tais como decomposição de áreas, equivalência de áreas, etc. No entanto, convém ao docente conhecer um pouco mais em pormenor a ferramenta que pensa utilizar.

Apesar do grande número de figuras que é possível construir com o Tangram, uma das suas particularidades é que, contrariamente ao que se poderia supor, é muito reduzido o número de polígonos convexos que é possível construir com este puzzle. O objectivo desta dissertação começou por ser demonstrar o seguinte teorema:

– Com o Tangram é possível construir exactamente treze polígonos convexos.

O trabalho que me proponho realizar é baseado na demonstração apresentada por dois matemáticos chineses, Fu Traing Wang e Chuan-Chih Hsiung, em 1942, [WH].

→ No entanto, na tentativa de concretização do nosso objectivo, optamos por uma abordagem que nos compele a encontrar, previamente, a resposta a uma outra questão:

– Quantos polígonos convexos é possível construir, utilizando como blocos de construção, triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais.

Portanto passou a ser esta a questão fulcral desta tese, o caso do Tangram será um caso particular do uso de dezasseis triângulos.

Para atingir o objectivo mostrou-se necessário relembrar, previamente, alguns conceitos que foram reunidos num capítulo denominado Polígonos. Depois de concluir o capítulo que se ocupa do objectivo central desta dissertação, que denominamos Figuras Convexas formadas por triângulos fazemos a aplicação ao caso particular do Tangram Chinês no capítulo

denominado Aplicações do Tangram na sala de aula. Em seguida, no capítulo Aplicação a outros puzzles, estudamos mais alguns casos particulares. Por fim, no capítulo Aplicações do Tangram na sala de aula propomos actividades para a sala de aula, como o próprio nome sugere.

Notação utilizada:

$\lceil x \rceil$ – Menor número inteiro maior ou igual ao número real x .

$\lfloor x \rfloor$ – Maior número inteiro menor ou igual ao número real x .

$a \mid b$ – O número inteiro a divide o número inteiro b .

\approx – Valor numérico aproximado.

2. Polígonos

Neste capítulo vamos definir e estudar polígonos planos. Usamos frequentemente a noção de distância no plano: para quaisquer pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ onde $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ seja $\overline{PQ} = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$ a distância entre P e Q ; a norma de $[PQ]$ é dada por $\|PQ\| = \overline{PQ}$ e o produto escalar entre P e Q é dado por $P \cdot Q = p_1 q_1 + p_2 q_2$.

2.1 Definição

Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$, o **segmento de recta** entre P e Q é definido como $[P, Q] = \{tP + (1 - t)Q : t \in [0, 1]\}$ e o segmento de recta sem os pontos terminais é definido como sendo $]P, Q[= [P, Q] \setminus \{P, Q\} = \{tP + (1 - t)Q : t \in]0, 1[\}$. O **comprimento** de um segmento $[P, Q]$ é igual à distância entre P e Q .

Sejam P_0, P_1, \dots, P_{n-1} pontos distintos do plano. O **caminho poligonal** entre P_0 e P_{n-1} é o subconjunto de \mathbb{R}^2 formado por $\bigcup_{i=0}^{n-2} [P_i, P_{i+1}]$ e é um caminho poligonal **simples** se os seus lados não se intersectam, isto é, se $\forall i \neq j,]P_i, P_{i+1}[\cap]P_j, P_{j+1}[= \emptyset$. O **polígono** P associado a estes pontos é o caminho poligonal entre P_0 e P_n onde $P_n = P_0$. Os pontos P_0, P_1, \dots, P_{n-1} são designados por **vértices do polígono**, os segmentos $[P_i, P_{i+1}]$ com $i \in \{0, \dots, n-1\}$ são designados por **lados do polígono**. O polígono P é representado pelos seus vértices, isto é, $P = [P_0, P_1, \dots, P_{n-1}]$. Um polígono P é **simples** se o caminho poligonal é simples, isto é,

$$\forall i \neq j,]P_i, P_{i+1}[\cap]P_j, P_{j+1}[= \emptyset.$$

Um **triângulo** é um polígono simples com três vértices. Um triângulo diz-se **isósceles** se dois dos seus lados tiverem comprimentos iguais.

O **teorema da curva de Jordan** diz que qualquer curva plana simples divide o plano em duas regiões. Usando este teorema podemos definir o **interior** e o **exterior** de um polígono. Apresentamos em seguida uma demonstração do teorema de Jordan para polígonos. Esta demonstração foi apresentada no livro [CR] de R. Courant e H. Robbins.

2.2 Teorema da Curva de Jordan para polígonos

Qualquer polígono simples P divide os pontos do plano, não pertencentes a P , em dois subconjuntos distintos (sem pontos em comum) cada um dos quais tem P como fronteira.

Demonstração: Sejam p um ponto qualquer do plano tal que $p \notin P$ e A e B dois subconjuntos disjuntos de \mathbb{R}^2 tais que $A \cup B = \mathbb{R}^2 \setminus P$, que designaremos por classes. Mostraremos que ou $p \in A$ ou $p \in B$, de modo que:

1) Se um ponto p_1 da classe A e um ponto p_2 da classe B estão ligados por um caminho poligonal, então esse caminho intersecta P .

2) Dois pontos quaisquer pertencentes à mesma classe podem ser ligados por um caminho poligonal que não intersecta P .

O subconjunto A será designado por exterior do polígono P e B será o interior de P . Fixamos agora uma direcção e um sentido no plano. Como P tem um número finito de lados podemos escolher uma direcção que não seja paralela a nenhum dos lados de P . Definamos as classes A e B do seguinte modo:

$p \in A$ se a semi-recta de origem p , e direcção fixada, \vec{p} , não intersecta P ou intersecta-o num número par de pontos.

$p \in B$ se a semi-recta de origem p , e direcção fixada, \vec{p} , intersecta P num número ímpar de pontos.

Sejam p_1 e p_2 dois pontos distintos, diremos que p e q têm a mesma paridade se pertencem à mesma classe, A ou B .

Relativamente ao caso em que a semi-recta de origem p e direcção \vec{p} intersecta P num dos seus vértices, digamos P_i , consideramos que não houve intersecção se $[P_{i-1}, P_i]$ e $[P_i, P_{i+1}]$ estão ambos do “mesmo lado” da semi-recta. Consideramos que houve intersecção se os segmentos estão em lados opostos da semi-recta.

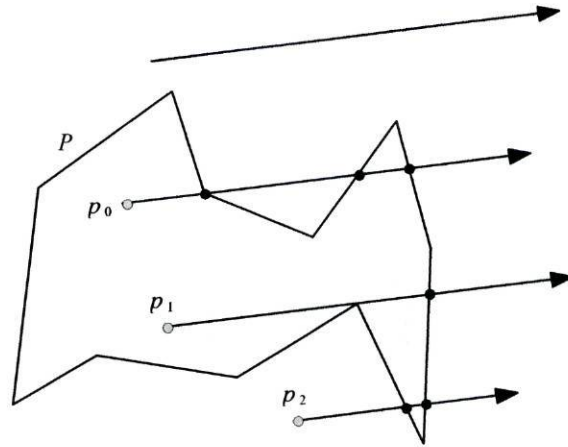


Figura 2 – Contar cruzamentos

Note-se que todos os pontos pertencentes a um segmento de recta que não intersecta P têm a mesma paridade. Seja p um ponto que se desloca ao longo de um tal segmento, a sua paridade só poderia mudar no caso em que a semi-recta com origem em p , e direcção previamente fixada, intersecte P num dos seus vértices. Na realidade a paridade não sofrerá alteração devido ao modo como definimos a contagem das intersecções.

Isto implica que um caminho poligonal entre um qualquer ponto $p_1 \in A$ e um ponto $p_2 \in B$ tem de intersectar P , pois caso contrário, todos os pontos desse caminho teriam a mesma paridade, em particular os pontos p_1 e p_2 .

Vejam agora como demonstrar que dois pontos quaisquer pertencentes à mesma classe podem ser ligados por um caminho poligonal que não intersecte P .

Sejam p e q dois pontos quaisquer pertencentes à mesma classe, A ou B . Se o segmento de recta que une p e q não intersecta P então o problema está resolvido e $[p,q]$ é o caminho procurado. Senão, seja p' o primeiro ponto onde $[p,q]$ intersecta P e q' o último desses pontos, como se pode ver na Figura 3. Agora construímos um caminho poligonal do modo que descrevemos a seguir. Começamos em p e seguimos ao longo de $[p,p']$ parando antes de atingir p' . Aqui o nosso caminho afasta-se de $[p,p']$ e de P , mas segue ao longo de P até voltar a intersectar a continuação de $[p,q]$ na vizinhança de q' , seja p_i esse ponto. Se provarmos que $p_i \in [q',q]$ em vez de $p_i \in [p',q']$ então o nosso caminho continua ao longo de $[q',q]$ até q , sem intersectar P como pretendíamos.

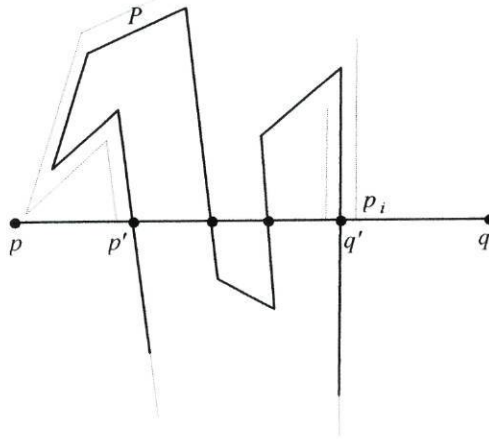


Figura 3

Note-se que dados dois pontos r e s próximos, mas em lados opostos de um lado de P , têm de ter paridade diferente, pois a semi-recta com origem num dos pontos (digamos r) intersecta P em mais um ponto que a semi-recta com origem no outro (digamos s). Assim como sabemos que a paridade muda quando cruzamos q' ao longo de $[p, q]$, temos que o ponto p_i não pode estar entre p e q' , isto é, $p_i \in [q', q]$, pois p e q (assim como todos os pontos ao longo do caminho que estamos a construir) têm a mesma paridade. \square

2.3 Definição

Consideremos o polígono $P = [P_0, P_1, \dots, P_{n-1}]$. Pelo Teorema da curva de Jordan podemos identificar o **exterior** de P como sendo a classe A , uma vez que se nos deslocarmos ao longo de qualquer semi-recta numa direcção pré-determinada, chegaremos a um ponto para além do qual não existe qualquer intersecção com P , desse modo todos esses pontos têm paridade 0, e portanto pertencem a A . Assim resta-nos identificar a classe B como o **interior** do polígono P , $\overset{\circ}{P}$.

Um resultado interessante e que nos ajudará a responder a algumas das questões que se nos colocarão à posteriori é o **Teorema das duas orelhas**. Mas, em primeiro lugar necessitaremos de algumas noções.

2.4 Definição

Consideremos o polígono $P = [P_0, P_1, \dots, P_n]$. Uma **diagonal** de P é um segmento de recta $[P_i, P_j]$, contido no interior de P , tal que P_i e P_j são vértices não consecutivos. P_i é um **vértice principal** se o segmento de recta $[P_{i-1}, P_{i+1}]$ somente intersecta P em P_{i-1} e P_{i+1} e o

vértice P_i é uma **orelha** se P_i é um vértice principal tal que o segmento de recta $]P_{i-1}, P_{i+1}[$ é uma diagonal de P . Dizemos que duas orelhas P_i e P_j são **orelhas não sobrepostas** se os interiores dos triângulos $[P_{i-1}, P_i, P_{i+1}]$ e $[P_{j-1}, P_j, P_{j+1}]$ são disjuntos.

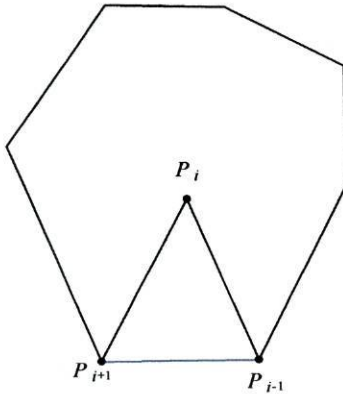


Figura 4 – P_i é um vértice principal, mas não é uma orelha.

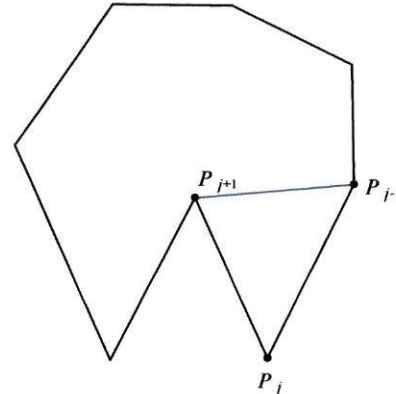


Figura 5 – P_j é um vértice principal e é uma orelha

2.5 Definição

Um vértice P_i de um polígono $P = [P_0, P_1, \dots, P_{n-1}]$ é

- **convexo** se existem $R_i \in [P_i, P_{i+1}]$ e $Q_i \in [P_{i-1}, P_i]$ tal que $[P_i, R_i, Q_i] \subseteq \overset{\circ}{P}$.
- **côncavo** se existem $R_i \in [P_i, P_{i+1}]$ e $Q_i \in [P_{i-1}, P_i]$ tal que $[P_i, R_i, Q_i] \not\subseteq \overset{\circ}{P}$.
- **impróprio** se $P_i \in [P_{i-1}, P_{i+1}]$.

Note-se que uma orelha é um vértice convexo.

Podemos sempre passar de um polígono simples para um polígono simples sem vértices impróprios. Seja $P = [P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \dots, P_{n-1}]$, se P_i for um vértice impróprio elimina-se P_i e teremos $P = [P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_{n-1}]$.

2.6 Proposição

Cada vértice de um polígono simples ou é convexo ou é côncavo ou é impróprio.

Demonstração: Seja P_i um vértice qualquer de P . Suponhamos que P_i não é um vértice impróprio. Sejam L_1, L_2, \dots, L_n os n lados de P , de modo que $L_i = [P_{i-1}, P_i]$. Seja d_j a distância

de P_i a L_j , $j \notin \{i, i + 1\}$. Seja $d = \min\{d_j : j \neq i, j \neq i + 1\}$, obviamente temos $d \neq 0$. Encontremos Q_i e R_i tais que:

Se $\frac{d}{2} \cdot \frac{1}{\|L_i\|} > 1$ então $Q_i = P_{i-1}$, senão

$$Q_i = P_i + \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{\|L_i\|} (P_{i-1} - P_i)$$

Se $\frac{d}{2} \cdot \frac{1}{\|L_{i+1}\|} > 1$ então $R_i = P_{i+1}$, senão

$$R_i = P_i + \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{\|L_{i+1}\|} (P_i - P_{i+1})$$

$[Q_i, P_i, R_i]$ é um triângulo cujo interior ou está contido no interior do polígono P ou está contido no seu exterior, isto é, P_i é um vértice convexo ou P_i é um vértice côncavo. \square

2.7 Definição

Sejam $L_i = [P_{i-1}, P_i]$ e $L_{i+1} = [P_i, P_{i+1}]$ dois lados adjacentes de um polígono simples, P . Aos segmentos L_i e L_{i+1} fazemos corresponder os vectores $\vec{l}_i = P_{i-1} - P_i$ e $\vec{l}_{i+1} = P_{i+1} - P_i$, respectivamente.

Chama-se **ângulo interno** em P_i ao valor $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

- $\theta = \arccos \left(\frac{\vec{l}_i \cdot \vec{l}_{i+1}}{\|\vec{l}_i\| \|\vec{l}_{i+1}\|} \right)$, se P_i é convexo.
- $\theta = 2\pi - \arccos \left(\frac{\vec{l}_i \cdot \vec{l}_{i+1}}{\|\vec{l}_i\| \|\vec{l}_{i+1}\|} \right)$, se P_i é côncavo.
- $\theta = \pi$, se P_i é impróprio.

A demonstração que aqui veremos foi apresentada na publicação [M] devendo-se a Gary H. Meister.

2.8 Teorema das duas orelhas

Consideremos um polígono simples $P = [P_0, P_1, \dots, P_n]$, com $n \geq 3$, P tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas.

Demonstração: Esta demonstração utiliza o Princípio da Indução Finita. Consideremos $n = 3$. Neste caso o polígono simples P é um quadrilátero, que como é óbvio tem exactamente

duas orelhas não sobrepostas.

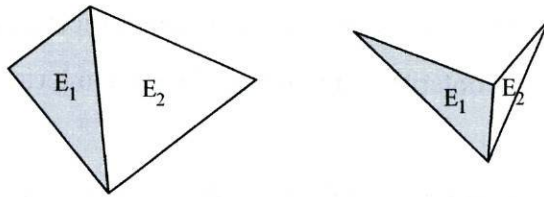


Figura 6

Consideremos como hipótese de indução a seguinte afirmação: Se P é um polígono simples com $n+1$ lados, $n \geq 3$, P tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas.

Seja P um polígono simples com pelo menos 5 vértices. Consideremos um vértice P_i de P tal que o ângulo interno em P_i formado por $[P_{i-1}, P_i]$ e $[P_{i+1}, P_i]$ é inferior a π . Escolhendo P_i desta forma podem ocorrer duas situações, ou P_i é uma orelha de P ou P_i não é sequer um vértice principal de P . Vejamos então, separadamente, cada um dos casos.

1) P_i é uma orelha de P . Se removermos esta orelha, o polígono daí resultante P' é um polígono simples com pelo menos quatro vértices, mas com menos um vértice do que P . Pela hipótese de indução, P' tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas E_1 e E_2 . Uma vez que são não sobrepostas, pelo menos uma dessas orelhas, digamos E_1 , não é o vértice P_{i-1} nem o vértice P_{i+1} . Nestas condições, a orelha E_1 de P' também é uma orelha de P , assim o polígono P tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas: E_1 e P_i .

2) P_i não é uma orelha de P , na verdade, do modo como foi escolhido P_i nem sequer é um vértice principal de P . Então o triângulo $[P_{i-1}, P_i, P_{i+1}]$ contém pelo menos um vértice de P no seu interior. Seja P_j esse vértice.

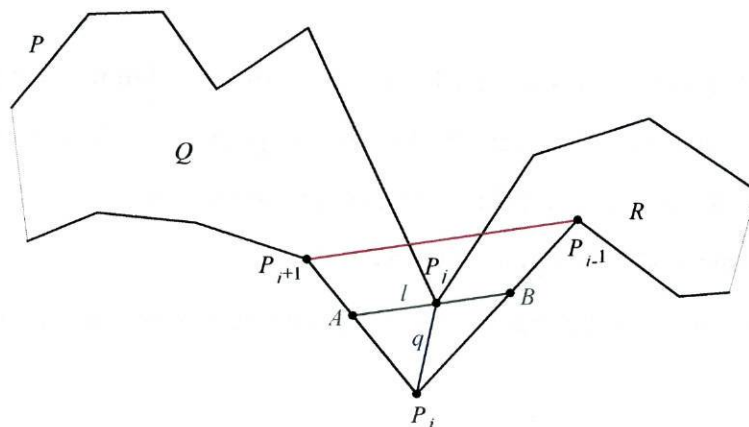


Figura 7

Por P_j tracemos uma recta l paralela a $[P_{i-1}, P_{i+1}]$ e o mais próximo possível de P_i . Seja $A = l \cap [P_{i+1}, P_i]$ e $B = l \cap [P_{i-1}, P_i]$. Se o triângulo $[A, P_i, B]$ não contém no seu interior nenhum dos vértices de P então P_j foi bem escolhido, senão repetimos o processo a partir do novo triângulo $[A, P_i, B]$, até obtermos um triângulo cujo interior não contenha nenhum vértice de P .

Como P_j é um vértice impróprio de $[A, P_j, P_i, B]$ então o segmento de recta $q = [P_j, P_i]$ não intersecta P excepto em P_j e P_i . Assim q divide P em dois polígonos simples $Q = [P_i, P_{i+1}, \dots, P_j]$ e $R = [P_i, P_{i-1}, \dots, P_j]$.

Duas situações podem ocorrer:

a) O polígono Q é um triângulo, então Q é uma orelha do polígono P . Pela hipótese de indução R tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas, E_1 e E_2 (caso contrário R seria um triângulo e desse modo P seria um quadrilátero que, como já vimos, tem duas orelhas não sobrepostas). Uma vez que E_1 e E_2 não se sobrepõem, pelo menos uma delas, digamos E_1 , não é P_i nem P_j . Assim E_1 não é sobreposta à orelha formada pelo polígono Q , sendo a segunda orelha do polígono P .

b) O polígono Q não é um triângulo. Então pela hipótese de indução Q tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas, E_1 e E_2 , e o polígono R tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas, E_3 e E_4 . Uma vez que não se sobrepõem, pelo menos uma das orelhas de Q , digamos E_1 , não é P_i nem P_j . De modo análogo se conclui que pelo menos uma das orelhas de R , digamos E_3 , não é P_i nem P_j . Assim estas duas orelhas, E_1 e E_3 , serão orelhas não sobrepostas do polígono P . \square

2.9 Proposição

A soma dos ângulos internos de um polígono simples com n lados ($n \geq 3$), é igual a $(n - 2)\pi$.

Demonstração: Vamos recorrer ao Princípio da Indução Finita. Seja $n = 3$. Temos de provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π . Consideremos o triângulo $[A, B, C]$ da Figura 8. Seja α a amplitude do ângulo interno em A , β a amplitude do ângulo interno em B e γ a amplitude do ângulo interno em C .

Por B tracemos uma recta paralela a $[AC]$ e consideremos as semi-rectas $\hat{A}B$ e $\hat{C}B$.

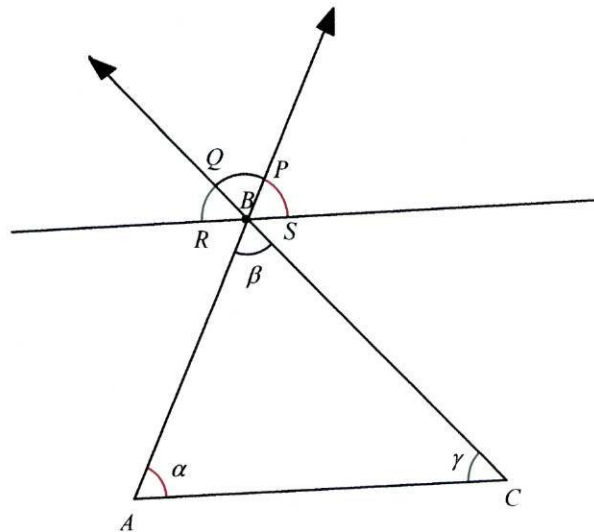


Figura 8

Como são ângulos verticalmente opostos, podemos concluir que $\angle ABC = \angle QBP = \beta$. Como os ângulos alternos internos têm a mesma amplitude então resulta que $\angle BAC = \angle PBS = \alpha$ e $\angle ACB = \angle QBR = \gamma$. Assim se verifica que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, como queríamos demonstrar.

Suponhamos que para todos os polígonos simples com n lados a soma dos ângulos internos é $(n - 2)\pi$. Seja P um polígono com $n + 1$ vértices. Pelo Teorema das Duas orelhas existe uma orelha que podemos cortar. Logo P é a composição de um triângulo e um polígono com n lados. Por hipótese a soma dos ângulos internos destes polígonos é π e $(n - 2)\pi$, respectivamente. Logo a soma dos ângulos internos de P é $\pi + (n - 2)\pi = ((n + 1) - 2)\pi$. \square

Ao longo desta dissertação faremos muitas vezes referência à construção de um polígono partindo de outro pré-existente e “juntando-lhe” um triângulo. Assim, é de toda a pertinência definirmos exactamente o que significa construir um polígono nestas condições.

2.10 Definição

Um polígono simples $P = [P_0, P_1, \dots, P_{n-1}]$ é **composto por dois polígonos** Q_1 e Q_2 se existe um caminho poligonal simples de P_i a P_j , no interior de P , tal que $Q_1 = [P_1, \dots, P_i, K_1, \dots, K_m, P_j, \dots, P_n]$ e $Q_2 = [P_i, P_{i+1}, \dots, P_j, K_m, K_{m-1}, \dots, K_1]$.

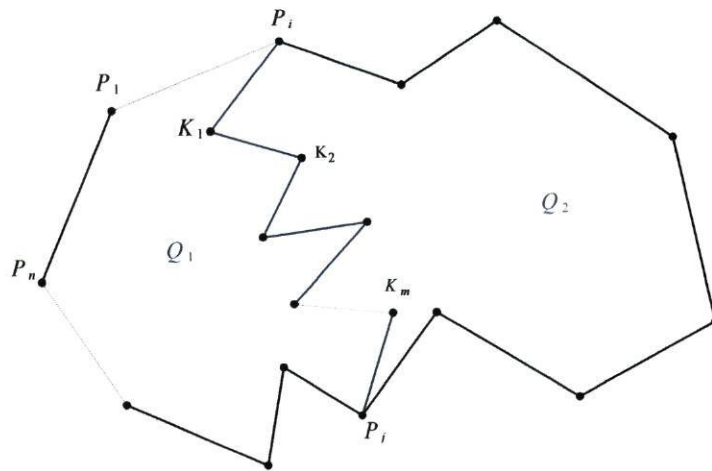


Figura 9

Um polígono P é **composto por polígonos** Q_1, Q_2, \dots, Q_n se existe uma cadeia $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ de polígonos tal que $P_1 = Q_1$ e P_i é a composição de P_{i-1} e $Q_i, \forall i > 1$.

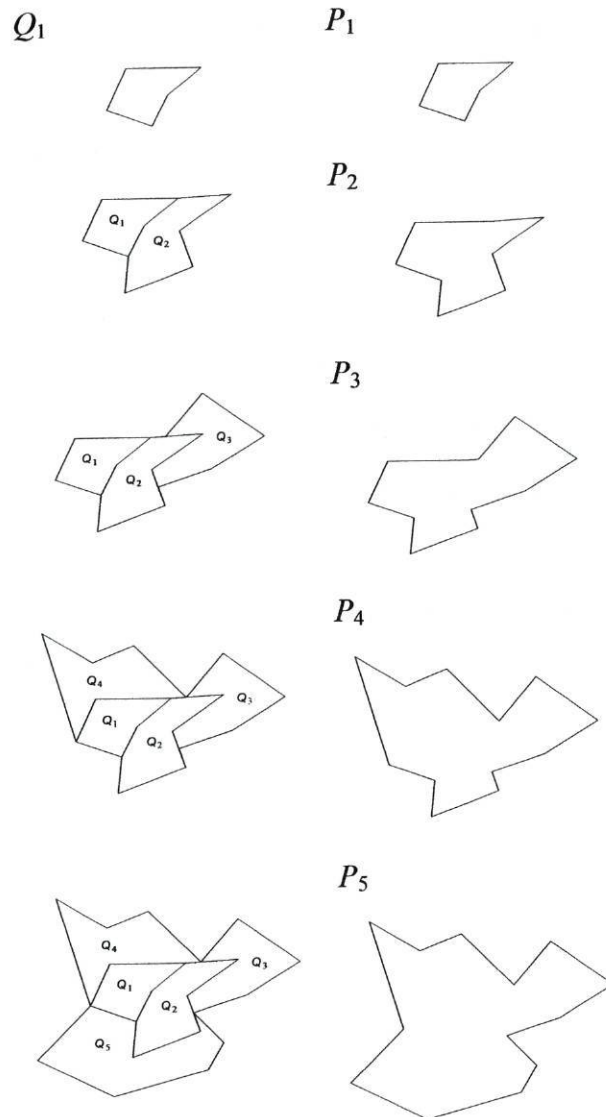


Figura 10 – Composição de polígonos

2.11 Corolário

Qualquer polígono simples é composto por triângulos.

Demonstração: Para demonstrar este resultado vamos recorrer ao Princípio da Indução Finita e ao Teorema das duas orelhas. Consideremos um polígono simples $P = [P_0, P_1, \dots, P_{n-1}]$. Se $n = 3$ é óbvio que P é um triângulo.

Consideremos como hipótese de indução a seguinte afirmação: Se P é um polígono simples com n vértices, $n \geq 3$, P é composto por triângulos.

Seja P um polígono simples com $n + 1$ vértices, pelo Teorema das duas orelhas P tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas. Se cortarmos uma dessas orelhas, suponhamos P_i , obtemos o polígono $Q = [P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n]$ e o triângulo $T = [P_{i-1}, P_i, P_{i+1}]$ tal que P é composto por Q e T . Por hipótese de indução Q é constituído por triângulos. \square

Um subconjunto C de \mathbb{R}^2 é convexo se $\forall P, Q \in C$ temos que $[P, Q] \subseteq C$.

2.12 Proposição

Um polígono simples cujo complementar do seu exterior é convexo não tem vértices côncavos.

Demonstração: Qualquer vértice P_i que não é impróprio é um vértice principal pois o segmento entre P_{i-1} e P_{i+1} passa pelo interior do polígono. Portanto qualquer vértice não impróprio é convexo. \square

Dizemos que um **polígono P é convexo** se o complementar do seu exterior é convexo.

Um triângulo é **rectângulo** se e só se um dos seus ângulos tem amplitude $\frac{\pi}{2}$.

2.13 Teorema

A amplitude do ângulo interno de qualquer vértice, de um polígono convexo, construído a partir de triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais é $k\frac{\pi}{4}$ com $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Demonstração: Já vimos que qualquer vértice que não é impróprio é convexo, portanto o ângulo interno nestes vértices está entre 0 e π . Para demonstrar o Teorema vamos usar indução sobre o número n de triângulos usados para compor o polígono.

Seja $n = 1$. Então o nosso polígono é igual a um dos triângulos rectângulos isósceles. Se é rectângulo tem um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2}$ e se é isósceles os outros dois ângulos têm a mesma amplitude, $\frac{\pi}{4}$. Assim cada triângulo tem um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2}$ e dois de amplitude $\frac{\pi}{4}$.

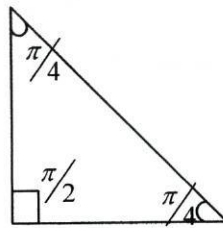


Figura 11 – Triângulo rectângulo isósceles

Suponhamos que o polígono P é composto por $n + 1$ triângulos rectângulos isósceles. Como P é composto por triângulos, existe um polígono P' e um triângulo T tal que P é composto por P' e T . Sejam Q e R os vértices comuns entre P' e T . Por hipótese de indução, todo o ângulo interno de P' e de T é um múltiplo de $\frac{\pi}{4}$. Como o ângulo interno no vértice Q do polígono P é a soma dos ângulos internos de Q nos polígonos P' e T , também é um múltiplo de $\frac{\pi}{4}$. Analogamente para R . \square

3. Figuras Convexas formadas por triângulos

Seja T o triângulo rectângulo isósceles da Figura 12. Ao longo deste capítulo iremos usar como blocos de construção triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais a T .

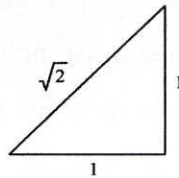


Figura 12 – Triângulo T

Note-se que os resultados que iremos estudar se manteriam mesmo que usássemos como blocos de construção outros triângulos, desde que semelhantes a T .

3.1 Lema

Se construirmos um polígono convexo utilizando triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, então o lado racional de um dos triângulos não pode ser anexo ao lado irracional de outro.

Demonstração: Sejam $[A, B, C]$ e $[A', B', C']$ dois triângulos geometricamente iguais a T , arranjados de tal maneira que o lado irracional $[A', C']$ do triângulo $[A', B', C']$ é anexo ao lado racional $[A, B]$ do triângulo $[A, B, C]$. Como os triângulos estão arranjados de modo a construir um polígono convexo, podemos, sem perda de generalidade, considerar que $A \equiv A'$.

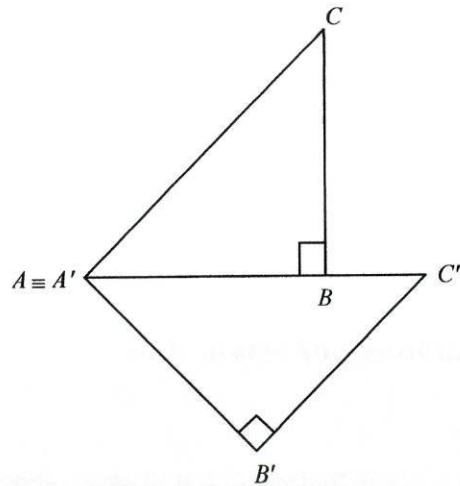


Figura 13

Temos que $[A, B] = [A', B] \subset [A', C']$. Mas se estamos a construir um polígono convexo, então C' não pode ser um vértice desse polígono, então temos de acrescentar pelo menos mais um par de triângulos, que denominamos por $[D, E, F]$ e $[D', E', F']$, arranjados de tal modo que o lado racional $[D', E']$ do triângulo $[D', E', F']$ é anexo ao lado irracional $[D, F]$ do triângulo $[D, E, F]$ e $D \equiv B$, $D' \equiv C'$ e $E' \equiv F$, como se pode ver na figura seguinte.

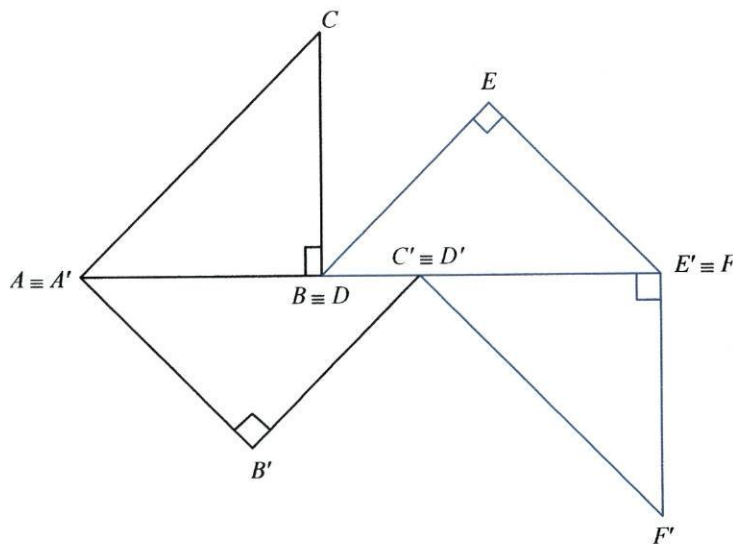


Figura 14

Mas o objectivo é construir um polígono convexo, logo vamos ter de preencher o ângulo CBE e o ângulo $B'C'F'$. Vejamos o que acontece se tentarmos preencher o ângulo CBE .

Uma vez que estamos a trabalhar com triângulos rectângulos isósceles então é fácil

verificar que o ângulo CBE tem de amplitude $\frac{\pi}{4}$, logo ao colocar um novo triângulo, digamos o triângulo $[X, Y, Z]$, o seu lado irracional $[X, Y]$ tem forçosamente de ser anexo ao lado racional $[B, C]$ do triângulo $[A, B, C]$ ou ao lado racional $[D, E]$ do triângulo $[D, E, F]$ o que nos conduz, novamente, à discussão inicial.

De modo análogo se conclui que ao tentar preencher o ângulo $B'C'F'$, cuja amplitude é de $\frac{\pi}{2}$, voltamos a ter, forçosamente, um lado irracional anexo a outro racional.

Podemos então concluir que, independentemente do número de triângulos rectângulos isósceles utilizados na construção (desde que sejam pelo menos dois), como esse número é finito, ao esgotarmos os triângulos o polígono daí resultante não é convexo, continua a ter “buracos” por preencher. \square

Deste lema decorre o seguinte.

3.2 Lema

Se construirmos um polígono convexo utilizando triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, então cada lado do polígono é formado unicamente por um dos tipos de lados dos triângulos (racionais ou irracionais). Além disso, se designarmos por racional ou irracional o lado do polígono formado por lados racionais ou irracionais dos triângulos (respectivamente), então, em geral, os lados racionais e irracionais do polígono alternam. Em particular, se um ângulo interno de um polígono é recto, então os dois lados adjacentes são ambos racionais ou ambos irracionais.

Demonstração: Para facilitar a demonstração vamos considerar este lema dividido em três partes.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que temos um polígono convexo em que um dos seus lados $[A, E]$ é constituído por um lado racional $[A, B]$ de um triângulo rectângulo isósceles $[A, B, C]$ e por um lado irracional $[D, E]$ do triângulo $[D, E, F]$ distinto mas geometricamente igual ao primeiro. Podem ocorrer duas configurações:

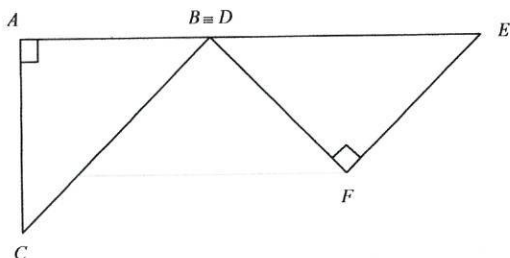


Figura 15

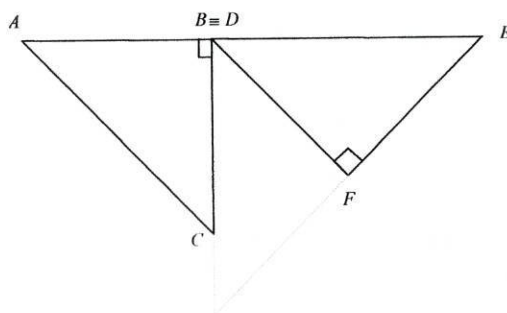


Figura 16

Mas se o polígono é convexo então o ângulo CBF tem de ser preenchido. Como estamos a falar de triângulos rectângulos isósceles, sabemos que na Figura 15 o ângulo CBF tem amplitude $\frac{\pi}{2}$ e na Figura 16 tem amplitude $\frac{\pi}{4}$.

Então, na Figura 15, o triângulo que usarmos para preencher este ângulo tem de “colar” um dos seus lados racionais ao lado irracional do triângulo $[A, B, C]$ e na Figura 16 o novo triângulo terá de colar o seu lado irracional a um dos lados racionais $[B, C]$ ou $[D, F]$. Mas, em qualquer dos casos, o Lema 3.1 garante que tal não é possível.

Logo cada lado de um polígono convexo, construído nestas condições, é formado unicamente por um dos tipos de lados dos triângulos que estamos a usar como blocos de construção.

Demonstremos agora, em conjunto, a segunda e terceira partes do Lema. Seja A um vértice (qualquer), de um polígono convexo construído utilizando triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais. Seja α a amplitude do ângulo interno em A . Pelo Teorema 2.13 sabemos que $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi \right\}$ e obviamente temos que, no máximo, juntam-se, no vértice A , três triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais. Vejamos o que acontece quando α assume cada um dos diferentes valores.

Se $\alpha = \frac{\pi}{4}$, A foi construído com um único triângulo rectângulo isósceles, sendo A um dos dois ângulos iguais de amplitude $\frac{\pi}{4}$, formados por um lado racional e um lado irracional do triângulo que, pela primeira parte deste lema, correspondem, respectivamente, a um lado racional e um lado irracional do polígono.

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o Lema 3.1 garante que A só pode ter sido construído de três modos:

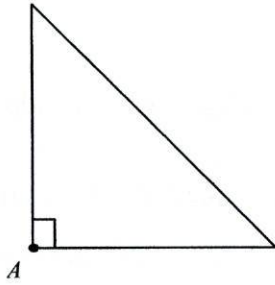


Figura 17

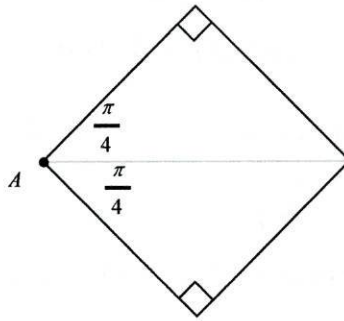


Figura 18

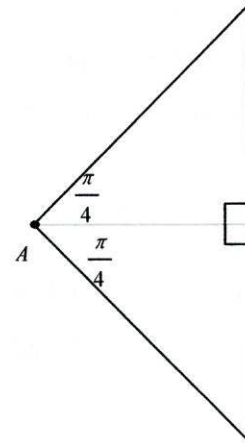


Figura 19

No caso da Figura 17, A foi construído à custa do ângulo recto de um único triângulo rectângulo isósceles, logo α é formado por dois lados racionais dos triângulos rectângulos isósceles, isto é, pela primeira parte deste lema, os lados adjacentes do polígono são racionais.

No caso da Figura 18 e da Figura 19 α é formado por dois lados racionais ou por dois lados irracionais dos triângulos, respectivamente, isto é, pela primeira parte deste lema, os lados adjacentes do polígono são ambos racionais ou ambos irracionais.

Por último vejamos o que acontece quando $\alpha = \frac{3}{4}\pi$. Neste caso, a menos de isometrias, o Lema 3.1 garante que A só pode ter sido construído de duas maneiras diferentes:

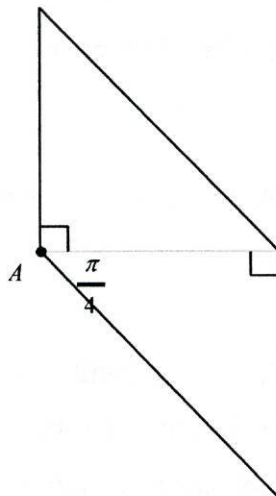


Figura 20

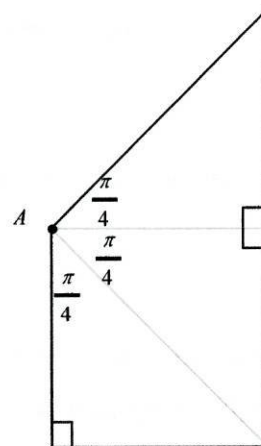


Figura 21

No caso da Figura 20, o Lema 3.1 garante que α é formado por um lado racional e por um lado irracional. No caso da Figura 21, o Lema 3.1 e o facto de o número de triângulos ser

ímpar garante que α é formado por um lado racional e por um lado irracional dos triângulos geometricamente iguais a T , que correspondem, pela primeira parte deste lema, respectivamente, a lado racional e lado irracional do polígono.

Podemos então concluir que se $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right\}$ então os lados dos triângulos que formam α são diferentes, isto é, um lado é racional e o outro é irracional. Como a primeira parte deste lema garante que os lados do polígono são formados unicamente por um dos tipos de lados do triângulo, podemos concluir que os lados racionais e irracionais do polígono, em geral, alternam. O caso particular é $\alpha = \frac{\pi}{2}$ em que os lados adjacentes são do mesmo tipo, ou ambos racionais, ou ambos irracionais. \square

3.3 Lema

Se construirmos um polígono convexo utilizando triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, então o polígono tem no máximo oito lados.

Demonstração: Como vimos na Proposição 2.9 e no Teorema 2.13, a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados, $n \geq 3$, é dada por $(n - 2)\pi$ e a amplitude máxima dos ângulos formados pelos triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais é $\frac{3\pi}{4}$, temos que

$$(n - 2)\pi \leq \frac{3\pi}{4}n \Leftrightarrow 4n\pi - 8\pi \leq 3\pi n \Leftrightarrow 4n\pi - 3\pi n \leq 8\pi \Leftrightarrow n\pi \leq 8\pi \Leftrightarrow n \leq 8. \quad \square$$

Recorrendo aos Lemas 3.2 e 3.3 facilmente se obtém o lema que se segue.

3.4 Lema

Se construirmos um polígono convexo, utilizando triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, então este polígono pode ser inscrito num rectângulo de modo que sobre os lados do rectângulo repousam ou todos os lados racionais ou todos os lados irracionais do polígono.

Demonstração: Sabemos que:

- 1) Os ângulos internos de um polígono convexo composto por triângulos

geometricamente iguais a T têm amplitude $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ (ou π).

- 2) A soma dos ângulos internos de um polígono simples $P = [P_0, P_1, \dots, P_{n-1}]$ de n lados é $(n-2)\pi$.
- 3) O polígono P tem no máximo 8 vértices.

Sejam a = número de vértices com ângulo interno de amplitude $\frac{\pi}{4}$.

b = número de vértices com ângulo interno de amplitude $\frac{\pi}{2}$.

c = número de vértices com ângulo interno de amplitude $\frac{3\pi}{4}$.

De 3) e de 2), para $3 \leq n \leq 8$, resulta que:

$$a + b + c = n \quad (\text{I})$$

e que

$$a\frac{\pi}{4} + b\frac{\pi}{2} + c\frac{3\pi}{4} = (n-2)\pi \Leftrightarrow a + 2b + 3c = 4n - 8 \Rightarrow a + 2b + 3c = 4(a + b + c) - 8 \Leftrightarrow$$

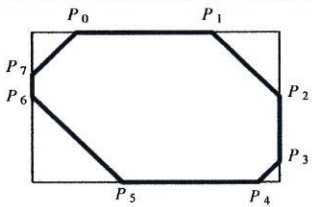
$$3a + 2b + c = 8 \quad (\text{II})$$

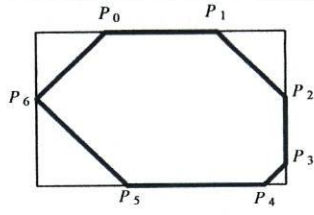
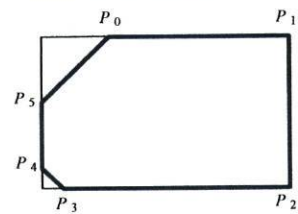
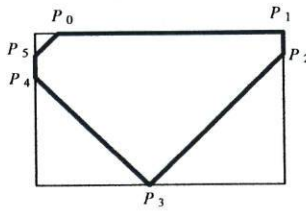
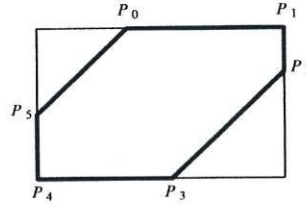
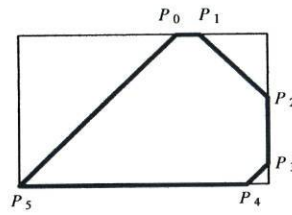
Obtivemos deste modo uma equação Diofantina. Procuremos então as suas soluções.

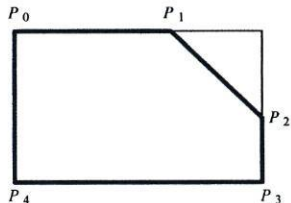
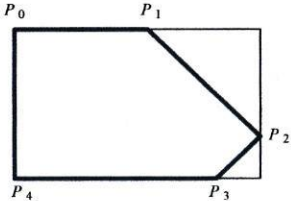
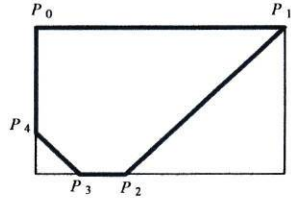
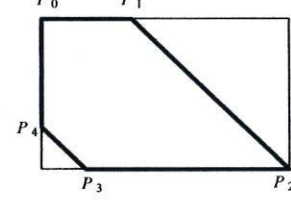
De (I) resulta que $c = n - a - b$. Substituindo em (II) obtemos

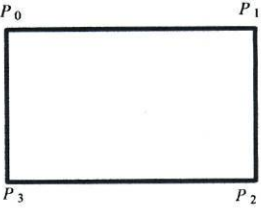
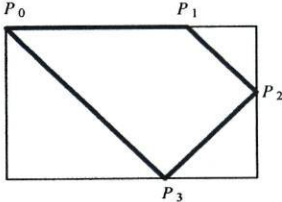
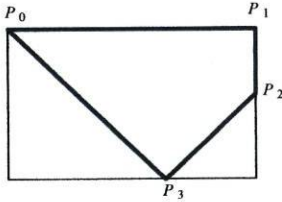
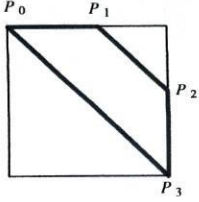
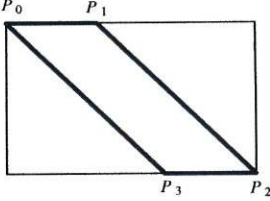
$$2a + b = 8 - n \Leftrightarrow b = (8 - n) - 2a \text{ e } b \geq 0 \Rightarrow 8 - n \geq 2a$$

Portanto obtemos a seguinte lista para valores de a , b , c para cada n compreendido entre 3 e 8.

n	$8 - n$	a (com $8 - n \geq 2a$)	b $= (8 - n) - 2a$	c $= n - a - b \geq 0$	Configurações: (a menos de isometrias do plano)
8	0	0	0	8	 <p>Figura 22</p>

n	$8 - n$	a (com $8 - n \geq 2a$)	b $= (8 - n) - 2a$	c $= n - a - b \geq 0$	Configurações: (a menos de isometrias do plano)
7	1	0	1	6	 <p>Figura 23</p>
6	2	0	2	4	 <p>Figura 24 – Dois ângulos de $\frac{\pi}{2}$ consecutivos</p>  <p>Figura 25 – Um ângulo de $\frac{3}{4}\pi$ entre dois de $\frac{\pi}{2}$</p>  <p>Figura 26 – Dois ângulos de $\frac{3}{4}\pi$ entre dois de $\frac{\pi}{2}$</p>
		1	0	5	 <p>Figura 27</p>

n	$8 - n$	a (com $8 - n \geq 2a$)	b $= (8 - n) - 2a$	c $= n - a - b \geq 0$	Configurações: (a menos de isometrias do plano)
5	3	0	3	2	 <p>Figura 28 – Dois ângulos de $\frac{3}{4}\pi$ consecutivos</p>
					 <p>Figura 29 – Um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ entre dois de $\frac{3}{4}\pi$</p>
		1	1	3	 <p>Figura 30 – Três ângulos de $\frac{3}{4}\pi$ consecutivos</p>
					 <p>Figura 31 – Três ângulos de $\frac{3}{4}\pi$ não consecutivos</p>

n	$8 - n$	a (com $8 - n \geq 2a$)	b $= (8 - n) - 2a$	c $= n - a - b \geq 0$	Configurações: (a menos de isometrias do plano)
4	4	0	4	0	 <p>Figura 32</p>
		1	2	1	 <p>Figura 33 – Dois ângulos de $\frac{\pi}{2}$ consecutivos</p>
					 <p>Figura 34 – Dois ângulos de $\frac{\pi}{2}$ não consecutivos</p>
		2	0	2	 <p>Figura 35 – Dois ângulos de $\frac{3}{4}\pi$ consecutivos</p>
					 <p>Figura 36 – Ângulos alternados</p>

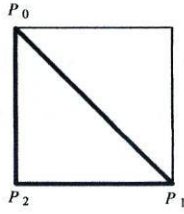
n	$8 - n$	a (com $8 - n \geq 2a$)	b $= (8 - n) - 2a$	c $= n - a - b \geq 0$	Configurações: (a menos de isometrias do plano)
3	5	0	5	-2 (impossível)	
		1	3	-1 (impossível)	
		2	1	0	

Figura 37

□

Estamos agora em condições de nos dedicarmos ao nosso objectivo principal. Vamos então demonstrar o seguinte Teorema:

3.5 Teorema Principal

Suponhamos que t triângulos isósceles geometricamente iguais congruentes com T são utilizados para construir uma figura convexa. Então a figura pode ser inscrita num rectângulo como o descrito na Figura 38.

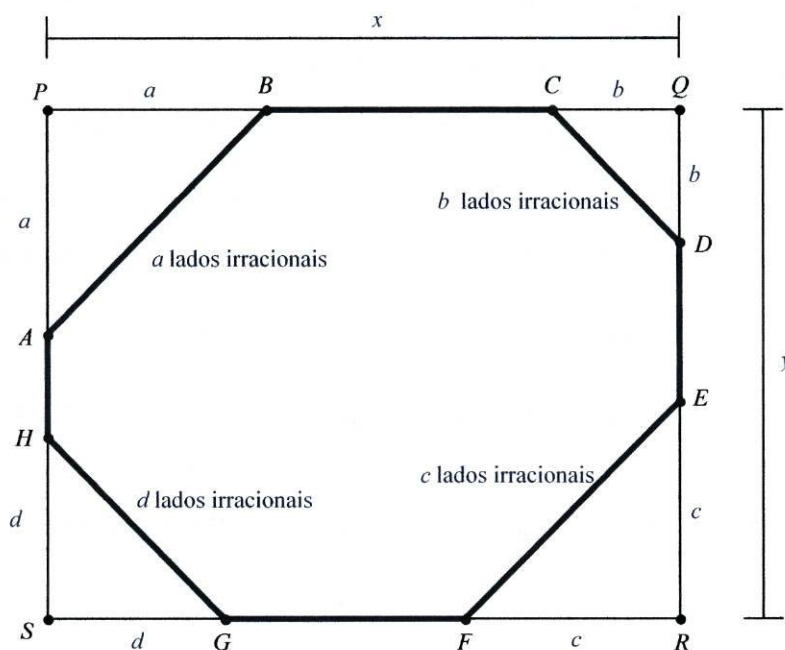


Figura 38 – Octógono inscrito num rectângulo

tal que se verificam as condições seguintes:

$$2xy - t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (\text{Eq. 1})$$

$$e \begin{cases} a+b \leq x, & c+d \leq x \\ a+d \leq y, & b+c \leq y \end{cases} \quad (\text{Sist. 2})$$

com a, b, c, d, x e y números inteiros não negativos.

Reciprocamente, se existe (x, y, a, b, c, d) que satisfaz (Eq. 1) e (Sist. 2) então existe um polígono como o que consta da Figura 38 composto por t triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais congruentes com T .

Demonstração: Em primeiro lugar, pelo Lema 3.3, o polígono convexo construído, à custa de triângulos rectângulos geometricamente iguais, é no máximo um octógono $[A, B, C, D, E, F, G, H]$.

Pelos Lemas 3.2 e 3.4, podemos afirmar que este polígono está inscrito num rectângulo $[P, Q, R, S]$, e que todos os lados racionais $[BC]$, $[DE]$, $[FG]$, $[HA]$ do polígono assentam sobre os lados $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$, $[SP]$ do rectângulo, respectivamente. Então $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ e $[GH]$ são os lados irracionais do octógono inscrito.

Se o número de lados irracionais dos triângulos, usados para construir os lados irracionais do polígono inscrito, são a, b, c, d , então $[AB]$ mede a lados irracionais, isto é, $\overline{AB} = a\sqrt{2}$, e do mesmo modo se conclui que $\overline{CD} = b\sqrt{2}$, $\overline{EF} = c\sqrt{2}$ e $\overline{GH} = d\sqrt{2}$, respectivamente. Mas então $\overline{AP} = \overline{PB} = a$, $\overline{CQ} = \overline{QD} = b$, $\overline{ER} = \overline{RF} = c$ e $\overline{GS} = \overline{SH} = d$. Note-se que eventualmente teremos a, b, c , e/ou d nulos.

Sejam $x = \overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CQ} = a + \overline{BC} + b$ e $y = \overline{QR} = \overline{QD} + \overline{DE} + \overline{ER} = b + \overline{DE} + c$, x e y são números positivos. A Figura 38 pretende ilustrar as situações que estivemos a descrever. Como o polígono inscrito é constituído por t triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais a T , então a sua área é $t \times \frac{1}{2} = \frac{t}{2}$.

Também sabemos que a área do rectângulo $[P, Q, R, S]$ é dada por xy . Mas por outro lado a área do rectângulo $[P, Q, R, S]$ é igual à área do polígono inscrito mais as áreas dos quatro triângulos rectângulos $[A, P, B]$, $[C, Q, D]$, $[E, R, F]$ e $[G, S, H]$, assim resulta

$$xy = \frac{t}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2} \Leftrightarrow 2xy - t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (\text{Eq. 1})$$

com as seguintes condições

$$\begin{cases} a+b \leq x, & c+d \leq x \\ a+d \leq y, & b+c \leq y \end{cases} \quad (\text{Sist. 2})$$

Reciprocamente, o rectângulo $[P, Q, R, S]$ da Figura 38 é composto por $2xy$ triângulos congruentes com T e as orelhas por a^2 , b^2 , c^2 e d^2 triângulos congruentes a T . Então o polígono $[A, B, C, D, E, F, G, H]$ é composto por $2xy - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = t$ triângulos. \square

Averiguar quantos polígonos convexos é possível construir a partir de um certo número de triângulos rectângulo isósceles geometricamente iguais consiste em encontrar todas as soluções inteiras (x, y, a, b, c, d) da equação (Eq. 1) nas condições (Sist. 2). No entanto muitas das soluções resultam de isometrias de outras previamente encontradas. Duas soluções que estejam relacionadas entre si por uma isometria, serão designadas ao longo desta tese por soluções isométricas.

No plano temos quatro tipos de isometrias:

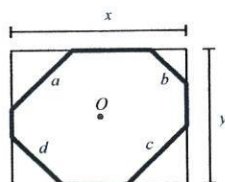
- Translações;
- Rotações;
- Reflexões axiais;
- Reflexões deslizadas (= composição de uma reflexão e uma translação).

No nosso caso as translações não alteram a ordem na solução (x, y, a, b, c, d) e as reflexões deslizadas produzem os mesmos efeitos que as reflexões axiais. Vejamos então, em pormenor, as reflexões e rotações, de modo a podermos identificar todas as isometrias que poderão ocorrer.

➤ Rotações

Consideremos o rectângulo $[P, Q, R, S]$ e o ponto O definido pelas intersecções das suas diagonais. Seja (x, y, a, b, c, d) a solução que procuramos. É obvio que a rotação em torno de O de 2π gera a identidade. As rotações de $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3}{4}\pi$, em torno de O , produzem as soluções (isometrias de (x, y, a, b, c, d)) que constam do esquema seguinte:

Figura inicial:



Solução:

$$(x, y, a, b, c, d)$$

Rotação em, torno de O , de amplitude:

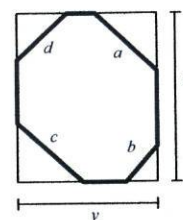
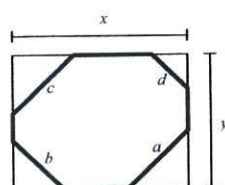
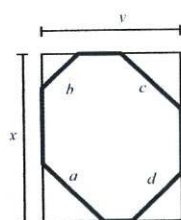


$$\frac{\pi}{2}$$

$$\pi$$

$$\frac{3}{4}\pi$$

Figura resultante:



Isometrias da solução inicial:

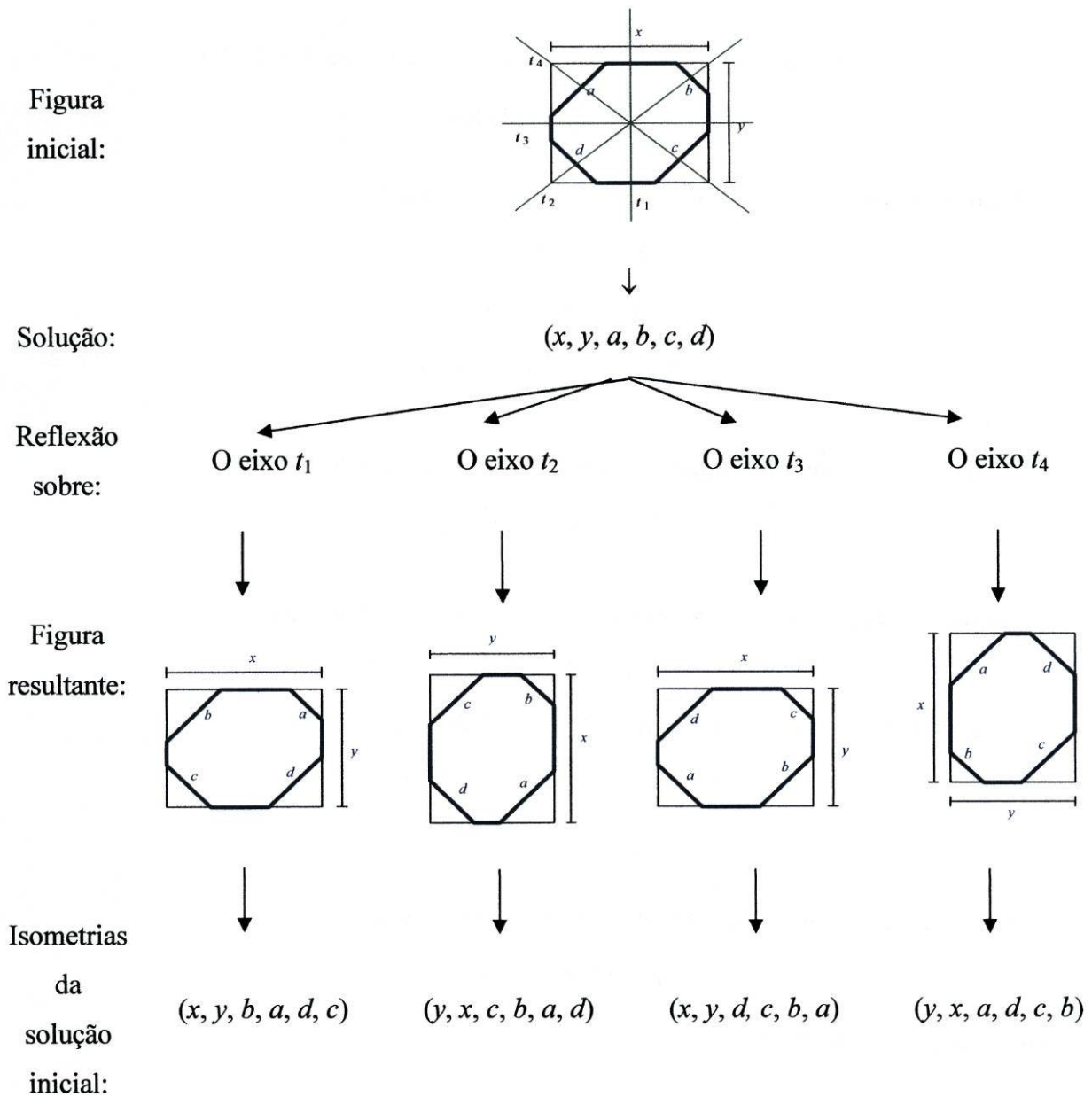
$$(y, x, b, c, d, a)$$

$$(x, y, c, d, a, b)$$

$$(y, x, d, a, b, c)$$

➤ Reflexões axiais

Consideremos novamente o rectângulo $[P, Q, R, S]$ e (x, y, a, b, c, d) a solução que procuramos, mas desta vez consideremos as simetrias axiais que podemos aplicar sobre o rectângulo considerando como eixos de simetria as mediatrizes dos seus lados e as suas diagonais:



Assim podemos definir a classe de soluções $[(x, y, a, b, c, d)]$ como sendo o conjunto de todas as soluções que são isometrias de (x, y, a, b, c, d) .

Voltamos à nossa discussão da equação (Eq. 1) nas condições (Sist. 2).

É óbvio que temos três hipóteses $y > x$, $y = x$ ou $y < x$. Sem perda de generalidade basta considerar as duas primeiras visto que as soluções da terceira hipótese será isométrica à primeira. No entanto, para $y > x$, ainda teremos de analisar separadamente duas situações, o caso em que $y \geq \lceil \sqrt{2t} \rceil$ e o caso em que $y < \lceil \sqrt{2t} \rceil$.

3.6 Lema

Sejam x, y e z números inteiros positivos tais que $2 \leq x < y$ e $z \leq y$. Então

$$x^2 - x + 2(z - 1) \leq xy.$$

Demonstração:

$$x < y \Rightarrow (x + 1)(x - 2) \leq y(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 + 2y \leq xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 2(y - 1) \leq xy$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 2(z - 1) \leq xy. \quad \square$$

(Des. 3)

3.7 Lema

Sejam a, b e x números inteiros tais que $a > 0$ e $b > 0$ e $a + b \leq x$ então

$$a^2 + b^2 \leq (x - 1)^2 + 1.$$

Demonstração: Se $a > 0$ e $b > 0$ então $2(a - 1)(b - 1) \geq 0$ o que implica

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2(a - 1)(b - 1)$$

Mas, $a^2 + b^2 + 2(a - 1)(b - 1) = a^2 + b^2 + 2ab - 2a - 2b + 2$

$$= (a + b)^2 - 2(a + b) + 1 + 1$$

$$= (a + b - 1)^2 + 1$$

Uma vez que $a + b \leq x$, das relações anteriores resulta que

$$a^2 + b^2 \leq (x - 1)^2 + 1$$

como se desejava demonstrar. \square

3.8 Proposição

Suponhamos que $2 < t < 18$. Então existe pelo menos uma solução (x, y, a, b, c, d) com $y^2 \geq 2t$ e $1 < x < y$, da equação (Eq. 1), se e só se t é par. Neste caso as classes das soluções são exactamente da forma

$$\left[\left(x, \frac{t}{2x} + x, x, 0, x, 0 \right) \right] \quad \text{para todo o divisor } x \neq 1 \text{ de } \frac{t}{2} \text{ e}$$

$$\left[\left(x, \frac{t}{2x} + x, x, 0, 0, x \right) \right] \quad \text{para todo o divisor } x \neq 1 \text{ de } \frac{t}{2} \text{ tal que } 2x^2 \leq t.$$

Demonstração : Suponhamos que (x, y, a, b, c, d) com $y^2 \geq 2t$ e $x < y$ é uma solução da equação (Eq. 1) e do (Sist. 2). Vamos primeiro mostrar que $a^2 + b^2 > (x - 1)^2 + 1$. Como, por

(Sist. 2) $c + d \leq x$ temos que $c^2 + d^2 \leq x^2$ e portanto

$$2xy - t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq a^2 + b^2 + x^2.$$

De $2xy - t \leq a^2 + b^2 + x^2$ obtém-se $a^2 + b^2 \geq 2xy - t - x^2$.

Seja $2 \leq x < y$ e $\Delta = \lceil \sqrt{2t} \rceil$, como $y^2 \geq 2t$ então $y \geq \lceil \sqrt{2t} \rceil = \Delta$. Assim, pelo Lema 3.6

temos que

$$x^2 - x + 2(\lceil \sqrt{2t} \rceil - 1) \leq xy.$$

Então resulta que

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2xy - t - x^2 \\ &\geq 2(x^2 - x + 2(\Delta - 1)) - t - x^2 \\ &= x^2 - 2x + 4\Delta - 4 - t \\ &= (x-1)^2 + 1 + 4\Delta - 6 - t \\ &> (x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

onde a última desigualdade resulta do facto de termos $2 < t < 18$ o que implica que $\Delta \leq 6$ e portanto como

$$0 > (t-18)(t-2) = t^2 - 20t + 36 = (t+6)^2 - 32t$$

implica que $(4\Delta)^2 \geq 32t > (t+6)^2$. Como todos os números são positivos tem-se $4\Delta > (t+6)$, isto é, $4\Delta - t - 6 > 0$. Logo temos

$$x^2 \geq a^2 + b^2 > (x-1)^2 + 1 \quad (\text{Des. 4})$$

Como $(x-1)^2 + 1 > 0$, a e b não podem ser ambos iguais a zero senão de (Des. 4) resultaria um absurdo. Se $a > 0$ e $b > 0$, então pelo Lema 3.7 e da pela inequação (Des. 4) temos

$$(x-1)^2 + 1 < a^2 + b^2 \leq (x-1)^2 + 1$$

o que é absurdo. Portanto $a = 0$ e $b \neq 0$ ou $a \neq 0$ e $b = 0$. De modo análogo mostra-se que $c = 0$ e $d \neq 0$ ou $c \neq 0$ e $d = 0$.

Seja agora $b = d = 0$ e $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $a < x$ então

$$(x-1)^2 \geq a^2 = a^2 + b^2 > (x-1)^2 + 1$$

o que é absurdo. Portanto $a = x$ e de modo análogo se conclui que $c = x$, logo

$$(x, y, a, b, c, d) = (x, y, x, 0, x, 0)$$

é uma solução da equação (Eq. 1).

O processo é análogo para obter $(x, y, a, b, c, d) = (x, y, 0, x, 0, x)$.

Seja agora $a = d = 0$ e $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $b < x$ então

$$(x-1)^2 \geq b^2 = a^2 + b^2 > (x-1)^2 + 1$$

o que é absurdo. Portanto $b = x$ e de modo análogo se conclui que $c = x$. Mas então pelo (Sist. 2) resulta $(x, y, a, b, c, d) = (x, y, 0, x, x, 0)$ é uma solução da equação (Eq. 1) se $y \geq 2x$.

O processo é análogo para obter $(x, y, a, b, c, d) = (x, y, x, 0, 0, x)$.

Portanto as classes das soluções são $[(x, y, x, 0, x, 0)]$ e $[(x, y, x, 0, 0, x)]$ se $y \geq 2x$.

Temos em particular que $2xy - t = 2x^2$, ou seja, $t = 2x(y - x)$. Logo t é par, x é um divisor de

$\frac{t}{2}$ e $y = \frac{t}{2x} + x$. Verifica-se facilmente que para cada divisor x de $\frac{t}{2}$: $(x, \frac{t}{2x} + x, x, 0, x, 0)$ é

uma solução e $(x, \frac{t}{2x} + x, x, 0, 0, x)$ é uma solução se $2x^2 \leq t$.

Falta justificar que há pelo menos uma solução se t for par. Basta verificar que

$(\frac{t}{2}, \frac{t}{2} + 1, \frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}, 0)$ é uma solução da equação (Eq. 1). \square

3.9 Exemplo

Seja $t = 16$ e $x > 1$. Os divisores de $\frac{t}{2} = 8$ são 2, 4 e 8. Neste caso a condição $y^2 \geq 2t$ é

equivalente a $y \geq 6$.

x	Classes das soluções com $y \geq 6$ e $1 < x < y$
2	$[(2, 6, 2, 0, 2, 0)]$ $[(2, 6, 2, 0, 0, 2)]$ porque $2x^2 = 8 < 16$
4	$[(4, 6, 4, 0, 4, 0)]$
8	$[(8, 9, 8, 0, 8, 0)]$

3.10 Lema

As classes das soluções $[(x, y, a, b, c, d)]$ com $y > 1$ e $x = 1$, da equação (Eq. 1), são

Se t for par: $[(1, \frac{t}{2}, 0, 0, 0, 0)]$

$$[(1, 1 + \frac{t}{2}, 1, 0, 1, 0)]$$

$$[(1, 1 + \frac{t}{2}, 1, 0, 0, 1)]$$

Se t for ímpar: $[(1, \frac{1+t}{2}, 1, 0, 0, 0)]$.

Demonstração: Seja $(1, y, a, b, c, d)$ com $y > 1$ solução da equação

$$2y - t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

nas condições $a + b \leq 1 \wedge c + d \leq 1$. Então

$$(a, b, c, d) \in \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}.$$

Suponhamos que t é par. Então $2y - t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d$ é par. Logo o número de elementos a, b, c, d iguais a 1 tem de ser um número par. Assim

$$(a, b, c, d) \in \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}.$$

Se $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ então $a + b + c + d = 0 = 2y - t \Rightarrow y = \frac{t}{2}$. Assim

$(1, \frac{t}{2}, 0, 0, 0, 0)$ é solução de (Eq. 1).

Se $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ então $a + b + c + d = 2 = 2y - t \Rightarrow y = 1 + \frac{t}{2}$. Assim as

soluções de (Eq. 1) são

$$(1, 1 + \frac{t}{2}, 1, 0, 1, 0), (1, 1 + \frac{t}{2}, 0, 1, 0, 1), (1, 1 + \frac{t}{2}, 1, 0, 0, 1), (1, 1 + \frac{t}{2}, 0, 1, 1, 0).$$

Se t for ímpar então $2y - t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d$ é ímpar. Logo o número de elementos a, b, c, d iguais a 1 é um número ímpar. Assim

$$(a, b, c, d) \in \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Em qualquer dos casos $2y - t = a + b + c + d = 1 \Rightarrow y = \frac{1+t}{2}$. Assim a classe das

soluções de (Eq. 1) é $[(1, \frac{1+t}{2}, 1, 0, 0, 0)]$. \square

3.11 Exemplo

Para $t = 16$ temos as classes de soluções

$[(1, 8, 0, 0, 0, 0)], [(1, 9, 1, 0, 1, 0)]$ e $[(1, 9, 1, 0, 0, 1)]$.

3.12 Lema

As soluções (x, y, a, b, c, d) com $x < y$ e $y^2 < 2t$, da equação (Eq. 1), satisfazem

$$x > \frac{y}{4} \text{ e } xy \geq \frac{t}{2}.$$

Demonstração: Como de (Eq. 1) temos que $2xy - t \geq 0$ e $\frac{y^2}{2} < t$ então $2xy \geq t > \frac{y^2}{2}$ o

que implica $x > \frac{y}{4}$. Por outro lado de (Eq. 1) temos ainda que $2xy - t \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq \frac{t}{2}$. \square

3.13 Exemplo

Seja $t = 16$. A lista seguinte indica valores possíveis para x e y de soluções (x, y, a, b, c, d) com $x < y < 6$.

$y < 6$	x com $y > x > \frac{y}{4}$ e $xy \geq 8$
5	4, 3, 2
4	3, 2
3	Impossível
2	Impossível

3.14 Lema

As soluções (x, x, a, b, c, d) da (Eq. 1) satisfazem as condições que constam da tabela que se segue

Tipo	(x, x, a, b, c, d)	x
1)	Se $a = b = c = d = 0$	$x = \sqrt{\frac{t}{2}}$ se e só se t é par e $\frac{t}{2}$ é um quadrado.

2)	Se a, b, c e d todos não nulos	$\left\lceil \sqrt{\frac{t}{2}} \right\rceil \leq x \leq \left\lfloor \frac{t}{4} + 1 \right\rfloor$
3)	Se só um dos valores de a, b, c, d é zero	$\left\lceil \sqrt{\frac{t}{2}} \right\rceil \leq x \leq \left\lfloor \frac{1}{4}(t+3) \right\rfloor$
4)	Se só um dos valores de a, b, c, d é diferente de zero	$\left\lceil \sqrt{\frac{t}{2}} \right\rceil \leq x \leq \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor$
5)	Se $a = b = 0$ e $c, d \neq 0$ ou $a, b \neq 0$ e $c = d = 0$	$\left\lceil \sqrt{\frac{t}{2}} \right\rceil \leq x \leq \left\lfloor \sqrt{t+3} - 1 \right\rfloor$
6)	Se $a = c = 0$ e $b, d \neq 0$ ou $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$	$\left\lceil \sqrt{\frac{t}{2}} \right\rceil \leq x \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(t+1) \right\rfloor$

Demonstração: 1) Como de (Eq. 1) temos que $2x^2 - t \geq 0$ temos $\sqrt{\frac{t}{2}} \leq x$. Em particular, se $a = b = c = d = 0$ então $x = \sqrt{\frac{t}{2}}$. Mas x é um comprimento, logo $\sqrt{\frac{t}{2}}$ tem de ser um número natural.

2) Como vimos no Lema 3.7, se $a > 0$ e $b > 0$ então $a^2 + b^2 \leq (x-1)^2 + 1$ e se $c > 0$ e $d > 0$ então $c^2 + d^2 \leq (x-1)^2 + 1$. Portanto de (Eq. 1) resulta

$$2x^2 - t \leq 2(x-1)^2 + 2 \Leftrightarrow -t \leq -4x + 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{t}{4} + 1 \Rightarrow x \leq \left\lfloor \frac{t}{4} + 1 \right\rfloor.$$

3) Vejamos agora o caso em que um dos valores a, b, c ou d é zero. Sem perda de generalidade suponhamos que $d = 0$. De (Eq. 1) $2x^2 - t = a^2 + b^2 + c^2$ e de (Sist.2) resulta que $a + b \leq x$ e $b + c \leq x$. Como $a, b \neq 0$ e $a + b \leq x$ resulta que $a, b \leq x - 1$ e seguindo um raciocínio análogo $b, c \leq x - 1$. Então, pelo Lema 3.7, temos que $a^2 + b^2 \leq (x-1)^2 + 1$. Portanto

$$2x^2 - t = a^2 + b^2 + c^2 \leq (x-1)^2 + 1 + (x-1)^2 = 2(x-1)^2 + 1$$

O que significa que

$$2(x^2 - (x-1)^2) \leq t + 1 \Leftrightarrow 2(2x - 1) \leq t + 1 \Leftrightarrow x \leq \left\lfloor \frac{1}{4}(t+3) \right\rfloor$$

4) Analisemos o caso em que só um dos valores de a , b , c ou d é diferente de zero. Sem perda de generalidade consideremos $a \neq 0$ e $b = c = d = 0$, então de (Sist. 2) resulta que $a^2 \leq x^2$ e de (Eq. 1) obtemos

$$2x^2 - t = a^2 \leq x^2 \Rightarrow x^2 \leq t \Rightarrow x \leq \lfloor \sqrt{t} \rfloor.$$

5) Analisemos agora o caso em que dois dos valores de a , b , c , d são iguais a zero. Mas neste caso teremos de dividir a análise em dois casos. Vejamos em primeiro lugar o caso em que $a = b = 0$ e $c, d \neq 0$ ou $a, b \neq 0$ e $c = d = 0$. Sem perda de generalidade consideremos $a = b = 0$ e $c, d \neq 0$. Neste caso de (Eq. 1) e do Lema 3.7 resulta

$$\begin{aligned} 2x^2 - t &= c^2 + d^2 \leq (x-1)^2 + 1 \\ &\Rightarrow 2x^2 - t \leq x^2 - 2x + 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 \leq t \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq t + 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq \sqrt{t+3} - 1 \\ &\Rightarrow x \leq \lfloor \sqrt{t+3} - 1 \rfloor. \end{aligned}$$

6) Seja $a = c = 0$ e $b, d \neq 0$, então de (Sist. 2) resulta que $b, d \leq x$ e de (Eq. 1) temos que $2x^2 - t = b^2 + d^2$.

Suponhamos que $b = x$ e $d = x$ então $2x^2 - t = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow t = 0$, o que é absurdo. Logo, pelo menos um dos valores de b ou d é menor que x . Sem perda de generalidade, seja $b \leq x - 1$, então

$$\begin{aligned} 2x^2 - t &= b^2 + d^2 \leq (x-1)^2 + x^2 \\ &\Rightarrow x^2 - t \leq (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow -t \leq -2x + 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(t+1) \right\rfloor. \quad \square \end{aligned}$$

3.15 Exemplo

Seja $t = 16$. Consideremos a tabela que se segue.

Tipo	(x, x, a, b, c, d)	x
1)	$a = b = c = d = 0$	Não existem soluções neste caso, pois $\frac{t}{2} = 8$.
2)	a, b, c e d todos não nulos	$x \in \{3, 4, 5\}$
3)	Só um dos valores de a, b, c, d é zero	$x \in \{3, 4\}$
4)	Só um dos valores de a, b, c, d é diferente de zero	$x \in \{3, 4\}$
5)	$a = b = 0$ e $c, d \neq 0$ ou $a, b \neq 0$ e $c = d = 0$	$x = 3$
6)	$a = c = 0$ e $b, d \neq 0$ ou $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$	$x \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

3.16 Lema

Se compusermos um rectângulo com t triângulos rectângulos geometricamente iguais então t é par.

Demonstração: A área do triângulo T é dada por $\frac{1}{2}ab$. Consideremos agora o rectângulo de lados a e b . A sua área é dada por ab . Mas, por outro lado, como o rectângulo é composto por t triângulos rectângulos geometricamente iguais a T , então a sua área é dada por $\frac{t}{2}ab$.

Assim temos $ab = \frac{t}{2}ab \Leftrightarrow 2ab = t \cdot ab$. \square

O teorema seguinte ser-nos-á útil aquando da discussão das soluções do tipo (x, x, a, b, c, d) quando $a = c = 0$ e $b, d \neq 0$ ou $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$. A sua demonstração pode ser encontrada em [E, Theorem 7.1].

3.17 Teorema – Soma de dois quadrados

Dado $m \in \mathbb{N}$ considere-se a decomposição de m como produto de factores primos $m = P_1^{k_1} \cdot P_2^{k_2} \cdot \dots \cdot P_n^{k_n}$ e $\Delta = \{i : i \in \{1, \dots, n\} \text{ e } p_i \equiv 3 \pmod{4}\}$.

O número m pode ser escrito como soma de dois quadrados se e só se para todo $i \in \Delta$ k_i é um número par.

4. Aplicação ao Tangram Chinês

Vamos então demonstrar que com o Tangram é possível construir exactamente treze polígonos convexos. Consideremos o Tangram da Figura 1. Como se pode ver, na Figura 39, o Tangram é facilmente dividido em dezasseis triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais.

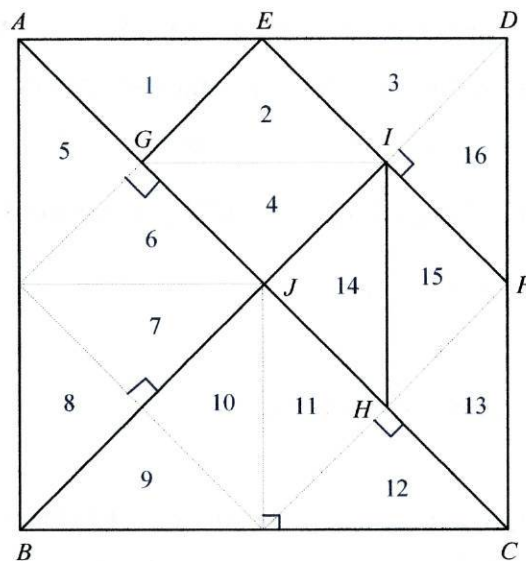


Figura 39 – Decomposição do Tangram

A estratégia a usar, consiste em encontrar o número de polígonos convexos que é possível obter com dezasseis triângulos geometricamente iguais a T e depois eliminar aqueles que não é possível construir com o Tangram.

A demonstração em si requer a utilização de resultados, já demonstrados no capítulo denominado Figuras Convexas formadas por triângulos.

4.1 Teorema

Com o Tangram é possível construir exactamente treze polígonos convexos.

Demonstração: Para demonstrar este Teorema vamos começar por determinar quais os polígonos convexos que são possíveis de obter com dezasseis triângulos geometricamente iguais a T .

Em primeiro lugar, pelo Teorema Principal, o polígono convexo assim obtido pode ser inscrito num rectângulo tal que se verificam as seguintes condições:

$$2xy - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (1)$$

$$\text{e } \begin{cases} a+b \leq x, & c+d \leq x \\ a+d \leq y, & b+c \leq y \end{cases} \quad (2)$$

com a, b, c, d, x e y números não negativos.

Agora o nosso problema resume-se à determinação das soluções inteiras da equação (1) e do sistema de inequações (2).

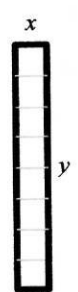
É obvio que temos três hipóteses $y > x$, $y = x$ ou $y < x$. Sem perda de generalidade basta considerar as duas primeiras visto que a terceira hipótese será em tudo análoga à primeira substituindo x por y . No entanto, para $y > x$ com $x > 1$, ainda teremos de analisar separadamente duas situações. Como $\lceil \sqrt{2t} \rceil = \lceil \sqrt{32} \rceil = 6$, vamos estudar separadamente o caso em que $y \geq 6$ e o caso em que $y < 6$.

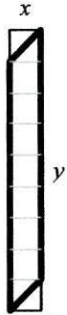
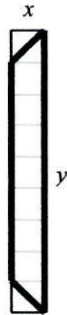
1. Caso em que $y > x$

Analisemos separadamente os casos em que:

a) $x = 1$

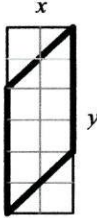
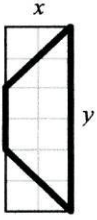
Já obtivemos as classes de soluções pretendidas no Exemplo 3.11, os polígonos que é possível construir nestas condições são os que constam da tabela seguinte.

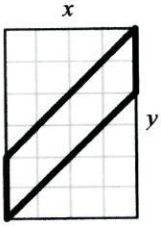
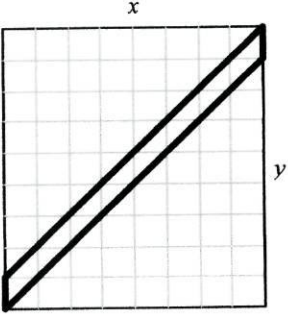
Caso: a) $y > x$ com $x = 1$	
	$[(x, y, a, b, c, d)]$
1*	$[(1, 8, 0, 0, 0, 0)]$ 

Caso: a) $y > x$ com $x = 1$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
2*	$[(1, 9, 1, 0, 1, 0)]$	
3*	$[(1, 9, 1, 0, 0, 1)]$	

b) $x > 1$ com $y \geq 6$

Já obtivemos as classes de soluções pretendidas no Exemplo 3.9.

Caso: b) $y > x$, $x > 1$ com $y \geq 6$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
4	$[(2, 6, 2, 0, 2, 0)]$	
5	$[(2, 6, 2, 0, 0, 2)]$	

Caso: $b)y > x, x > 1$ com $y \geq 6$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
6*	$[(4, 6, 4, 0, 4, 0)]$	
7*	$[(8, 9, 8, 0, 8, 0)]$	

c) $x > 1$ com $y < 6$

Neste caso, já obtivemos no Exemplo 3.13 os valores possíveis para x e y que é necessário testar.

$y = 5$

Se $a = b = c = d = 0$, então temos $10x - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Logo temos $10x = 16$, o que é impossível.

Sejam $a, b, c, d \neq 0$ então de (1) temos $10x - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ e do sistema (2) resulta que $a + b \leq x$ e $c + d \leq x$, logo pelo Lema 3.7 resulta que

$$10x - 16 \leq 2[(x-1)^2 + 1] = 2x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2x^2 - 14x + 20 = 2(x-2)(x-5)$$

Logo $x \leq 2$ ou $x \geq 5$, mas como temos $2 \leq x < y = 5$ resulta que $x = 2$. Assim $10x - 16 = 4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \Rightarrow a = b = c = d = 1$. Deste modo a classe de soluções é

$$[(2, 5, 1, 1, 1, 1)].$$

Agora suponhamos que pelo menos um dos valores de a, b, c, d é igual a zero. Suponhamos, sem perda de generalidade que $d = 0$.

$$x = 4$$

Então $10x - 16 = 24 = a^2 + b^2 + c^2$ com $a + b \leq 4$, $c \leq 4$, $b + c \leq 5$ e $a \leq 5$. Como 24 não é um quadrado e $24 = 2^3 \times 3$, pelo Teorema 3.17, não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos, assim têm-se todos os valores $a, b, c \neq 0$. Mas então, pelo Lema 3.7, $24 = a^2 + b^2 + c^2 \leq (x-1)^2 + 1 + c^2 = 10 + c^2$, o que implica $14 \leq c^2 \leq 16 \Rightarrow c = 4$ e $a^2 + b^2 = 8 = 2^2 + 2^2$, o que é impossível pois nesse caso teríamos $b + c > 5$.

$$x = 3$$

Então $10x - 16 = 14 = a^2 + b^2 + c^2$ com $a + b \leq 3$, $c \leq 3$, $b + c \leq 5$ e $a \leq 5$. Como 14 não é um quadrado e $14 = 2 \times 7$, pelo Teorema 3.17, não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos, assim têm-se todos os valores $a, b, c \neq 0$. Logo, pelo Lema 3.7 resulta $14 = a^2 + b^2 + c^2 \leq (x-1)^2 + 1 + c^2 = 5 + c^2$, o que implica $9 \leq c^2 \leq 9 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5 = 2^2 + 1^2$, logo $a = 1 \wedge b = 2$ ou $a = 2 \wedge b = 1$. Logo as classes de soluções são

$$[(3, 5, 1, 2, 3, 0)] \text{ e } [(3, 5, 2, 1, 3, 0)].$$

$$x = 2$$

Então $10x - 16 = 4 = a^2 + b^2 + c^2$ com $a + b \leq 2$, $c \leq 2$, $b + c \leq 5$ e $a \leq 5$. Como $4 = 2^2$ se um dos valores a, b, c é igual a 2, digamos $a = 2$ então $b = c = 0$, logo a classe de soluções é

$$[(2, 5, 2, 0, 0, 0)].$$

Esta é a única classe de soluções pois se $a, b, c < 2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$.

$$y = 4$$

$x = 3$ Sejam $a, b, c, d \neq 0$ então de (1) $8x - 16 = 8 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ com $a + b \leq 3$, $c + d \leq 3$, $b + c \leq 5$ e $a + d \leq 4$. Então $a, b, c, d \in \{1, 2\}$. Logo temos $8 = n + 4m$ tais que $n, m > 0$ e $n + m = 4 \Leftrightarrow n = 4 - m$. Então $8 = 4 + 3m \Rightarrow 3m = 4$, o que é impossível.

Agora suponhamos que nem todos os valores de a, b, c, d são diferentes de zero. Suponhamos, sem perda de generalidade que $d = 0$. Então $8 =$

$a^2 + b^2 + c^2$ com $a + b \leq 3$, $c \leq 3$, $b + c \leq 4$ e $a \leq 4$. Ora $8 = 2^2 + 2^2$, logo se dois dos valores de a, b, c forem iguais a dois, o restante tem de ser zero, assim o sistema (2) diz-nos que as classes de soluções são

$$[(3, 4, 2, 0, 2, 0)] \text{ e } [(3, 4, 2, 0, 0, 2)].$$

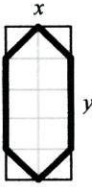
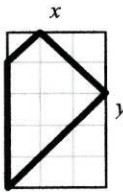
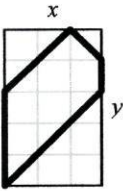
Se só um dos valores de a, b, c for igual a dois, digamos $a = 2$, resulta que $a^2 + b^2 = 4$, mas pelo Teorema 3.17, 4 não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos.

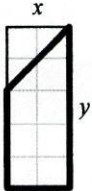
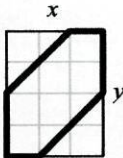
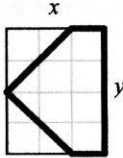
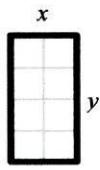
Se todos os valores de $a, b, c, d < 2$ resulta que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4 < 8$.

$x = 2$ Então $8x - 16 = 0 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \Rightarrow a = b = c = d = 0$, logo a classe de soluções é

$$[(2, 4, 0, 0, 0, 0)].$$

Em resumo, as soluções resultantes deste caso são:

Caso: $c) y > x, x > 1$ com $y \leq 5$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
8	$[(2, 5, 1, 1, 1, 1)]$	
9	$[(3, 5, 1, 2, 3, 0)]$	
10	$[(3, 5, 2, 1, 3, 0)]$	

Caso: $c) y > x, x > 1$ com $y \leq 5$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
11	$[(2, 5, 2, 0, 0, 0)]$	
12	$[(3, 4, 2, 0, 2, 0)]$	
13	$[(3, 4, 2, 0, 0, 2)]$	
14	$[(2, 4, 0, 0, 0, 0)]$	

2. Caso em que $y = x$

Encontraremos as soluções deste caso com a ajuda do Exemplo 3.15, mas atendendo à tabela que se segue.

x	$2x^2 - 16$	Factorização em números primos	Soma de dois quadrados não nulos
3	$2 \times 3^2 - 16 = 2$	2	Sim
4	$2 \times 4^2 - 16 = 16$	2^4	Não
5	$2 \times 5^2 - 16 = 34$	2×17	Sim
6	$2 \times 6^2 - 16 = 56$	$2^3 \times 7$	Não
7	$2 \times 7^2 - 16 = 82$	2×41	Sim
8	$2 \times 8^2 - 16 = 112$	$2^4 \times 7$	Não

Pelo Teorema 3.17 para valores de $x \in \{4, 6, 8\}$ temos que $2x^2 - 16$ não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos. Portanto se (x, x, a, b, c, d) é solução com exactamente dois valores $a, b, c, d \neq 0$ então $x \in \{3, 5, 7\}$.

$x = 3$

Do sistema (2) resulta $a + b \leq 3$ e $c + d \leq 3$ e da equação (1) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2 \Rightarrow a, b, c, d \leq 1$ (pois se $a \geq 2 \Rightarrow a^2 > 4$), logo existem exactamente dois dos valores a, b, c, d iguais a um e dois iguais a zero. Logo as únicas soluções são

$$[(3, 3, 1, 0, 1, 0)] \text{ e } [(3, 3, 1, 1, 0, 0)].$$

$x = 4$

Tipo 2) Da equação (1) temos $16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, e do sistema (2) temos $a + b \leq 4$ e $c + d \leq 4$. Assim $a^2, b^2, c^2, d^2 \in \{1, 4, 9\}$. Seja $d = 3$, então $c + d \leq 4 \Rightarrow c = 1$, assim da equação (1) resulta $a^2 + b^2 = 6$, mas $6 = 2 \times 3$, logo o Teorema 3.17 garante-nos que não há soluções. Assim $a^2, b^2, c^2, d^2 \in \{1, 4\}$. Como $16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4 \times 2^2 \Rightarrow a = b = c = d = 2$. Logo a classe de soluções é

$$[(4, 4, 2, 2, 2, 2)].$$

Tipo 3) Suponhamos $d = 0$ e $a, b, c \neq 0$, então $16 = a^2 + b^2 + c^2$, $a + b \leq 4$ e $b + c \leq 4$, logo $a^2, b^2, c^2 \in \{1, 4, 9\}$. Pelo Lema 3.7 resulta que $16 = a^2 + b^2 + c^2 \leq (x-1)^2 + 1 + c^2 = 10 + c^2 \Rightarrow c^2 \geq 6 \Rightarrow c = 3$. Logo $a^2 + b^2 = 7$ que, pelo Teorema 3.17, não se pode escrever como soma de dois quadrados não nulos.

Tipo 4) Se só um dos valores de a, b, c e d é diferente de zero, suponhamos $a \neq 0$, então resulta $16 = a^2 \Leftrightarrow a = 4$. Logo a classe de soluções é

$$[(4, 4, 4, 0, 0, 0)].$$

$x = 5$

Tipo 2) Da equação (1) temos $34 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ e do sistema (2) temos $a + b \leq 5$ e $c + d \leq 5$. Assim $a^2, b^2, c^2, d^2 \in \{1, 4, 9, 16\}$. Seja $c = 4$, então $c + d \leq 5 \Rightarrow d = 1$, assim da equação (1) resulta $a^2 + b^2 = 17$, ora $17 = 4^2 + 1^2$. Logo a classe de soluções é

$$[(5, 5, 4, 1, 4, 1)].$$

Agora consideremos $a^2, b^2, c^2, d^2 \in \{1, 4, 9\}$. Seja $d = 3$, então $c \in \{1, 2\}$. Se $c = 1$ então $a^2 + b^2 = 24$ o que é impossível pois 24 não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos. Se $c = 2$ então $a^2 + b^2 = 21$, mas nesse caso o Teorema 3.17 garante que não há solução. Por fim consideremos $a^2, b^2, c^2, d^2 \in \{1, 4\}$, assim temos $34 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4 \times 4 = 16$, o que é absurdo.

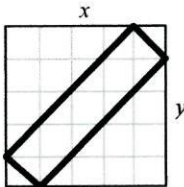
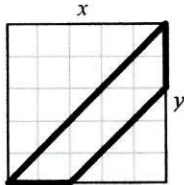
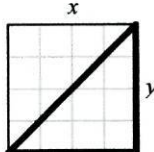
Tipo 6) Se $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$, então $34 = a^2 + c^2$ e $a, c \leq 5$, ora $34 = 5^2 + 3^2$, logo a classe de soluções é

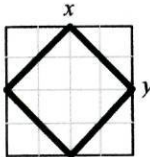
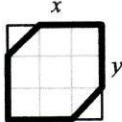
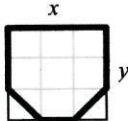
$$[(5, 5, 5, 0, 3, 0)].$$

$x = 7$

Tipo 6) Se $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$, então $82 = a^2 + c^2$ e $a, c \leq 7$, ora $82 = 1^2 + 9^2$ é a única forma de escrever 82 como soma de dois quadrados, mas nesse caso teríamos $a > 7$ ou $c > 7$. Assim não há soluções.

Em resumo, as soluções que, efectivamente, resultam deste caso são as que figuram na tabela que se segue.

Caso: $y = x$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
15*	$[(5, 5, 4, 1, 4, 1)]$	
16*	$[(5, 5, 5, 0, 3, 0)]$	
17	$[(4, 4, 4, 0, 0, 0)]$	

18	$[(4, 4, 2, 2, 2, 2)]$	
19	$[(3, 3, 1, 0, 1, 0)]$	
20	$[(3, 3, 0, 0, 1, 1)]$	

Se os dezasseis triângulos geometricamente iguais a T estiverem sob a forma de um Tangram, é fácil demonstrar que os casos assinalados com um * não serão realizáveis.

Como se pode ver na Figura 39, cada um dos triângulos maiores em que dividimos o Tangram contém quatro dos dezasseis triângulos geometricamente iguais a T que estamos a considerar como bloco de construção. Sem perda de generalidade consideremos um desses triângulos maiores do Tangram, por exemplo $[B, J, C]$, rectângulo em J .

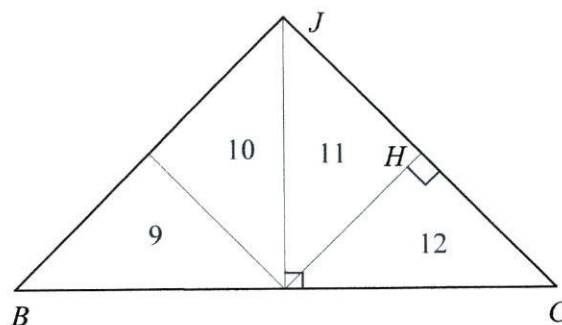


Figura 40 – Triângulo maior do Tangram

Assim dois dos seus lados são constituídos por dois lados racionais dos triângulos que são a nossa base de construção e o outro é constituído por dois lados irracionais. Além disso sabemos que as alturas do triângulo $[B, J, C]$ são dois lados racionais ou um lado irracional.

Então qualquer polígono convexo que construamos com a totalidade das peças do Tangram terá de ter altura mínima de um lado irracional. Desse modo eliminam-se os casos 1, 2, 3 e 7 pois não têm altura mínima necessária.

Consideremos agora o polígono 6 que podemos analisar com mais detalhe na Figura 41.

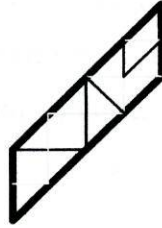


Figura 41 – Paralelogramo do caso 6

O problema na construção deste polígono com as peças do Tangram prende-se com a colocação do paralelogramo e do quadrado que podemos observar na Figura 39. Ao construirmos o polígono, por imposição de tamanho deveremos colocar em primeiro lugar as peças maiores, então como podemos observar pela Figura 41, depois de colocarmos os dois triângulos grandes, o triângulo médio e o paralelogramos (independentemente do modo como o fizermos, a Figura 41 destina-se exclusivamente a exemplificar um dos modos possíveis de colocar as peças do Tangram) a área que sobra, como não podia deixar de ser, é a necessária para colocar quatro triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, mas nenhum par dos quais forma um quadrado.

Pela Figura 42 pode ver-se que desenvolvendo um raciocínio análogo se conclui não ser possível construir o caso 15 recorrendo às peças do Tangram.

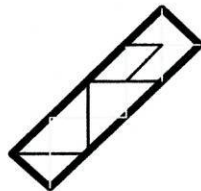


Figura 42 – Rectângulo do caso 15

Para finalizar, observando a Figura 43 pode ver-se que desenvolvendo um raciocínio análogo aos anteriores se conclui não ser possível construir o caso 16 recorrendo às peças do Tangram.

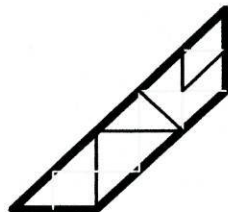


Figura 43 – Trapézio do caso 16

□

Estamos, agora, em condições de afirmar que com o Tangram é possível construir treze figuras convexas. Tais figuras são: um triângulo, seis quadriláteros, dois pentágonos e quatro hexágonos. Os quadriláteros são: um quadrado, um rectângulo, um paralelogramo, um trapézio isósceles e dois trapézios rectângulos.

4.2 Particularidades

4.2.1 Construção dos polígonos

Utilizando as peças do Tangram, vejamos como construir os treze polígonos convexas.

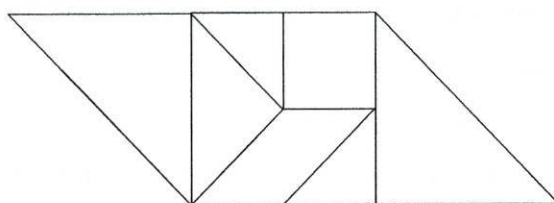


Figura 44 – Paralelogramo

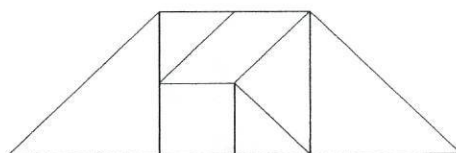


Figura 45 – Trapézio isósceles

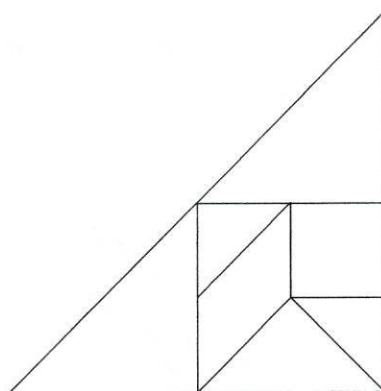


Figura 46 – Triângulo

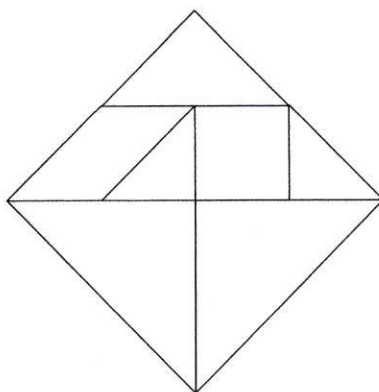


Figura 47 – Quadrado

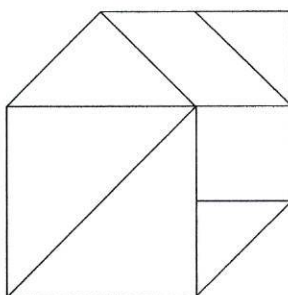


Figura 48 – Hexágono

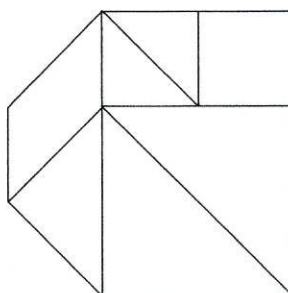


Figura 49 – Hexágono

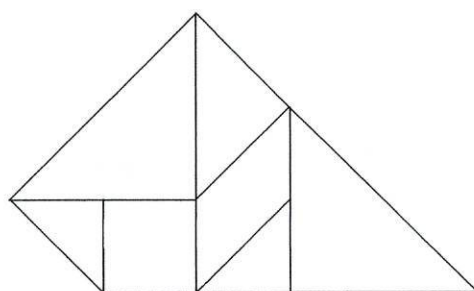


Figura 50 – Trapézio rectângulo

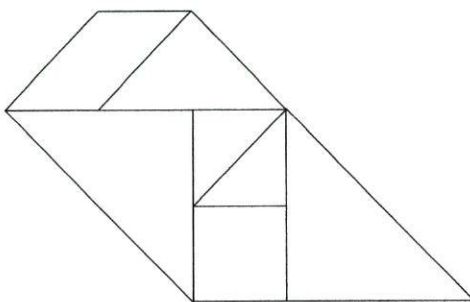


Figura 51 – Pentágono

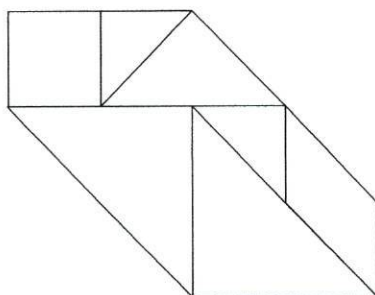


Figura 52 – Hexágono

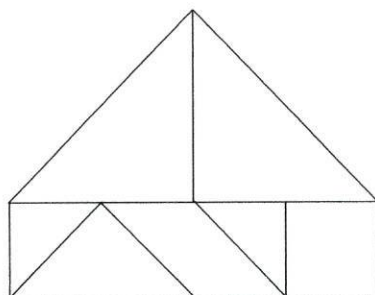


Figura 53 – Pentágono

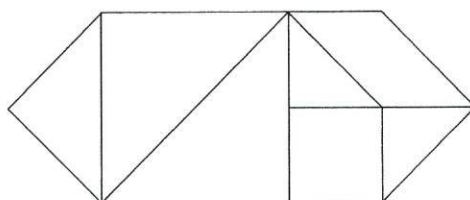


Figura 54 – Hexágono

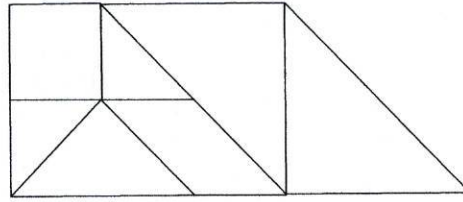


Figura 55 – Trapézio rectângulo

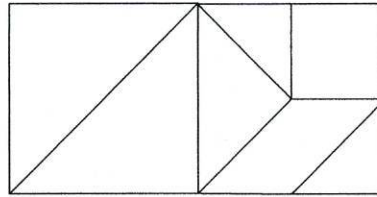


Figura 56 – Rectângulo

4.2.2 Perímetro dos polígonos

Pelo Teorema Principal, podemos afirmar que estes polígonos estão inscritos num rectângulo, e que todos os lados racionais do polígono assentam sobre os lados do rectângulo. Como podemos verificar pela Figura 38, na página 33, o perímetro de um polígono nestas condições é

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)\sqrt{2} + (x - a - b) + (y - b - c) + (x - c - d) + (y - d - a) = \\ = \sqrt{2}(a + b + c + d) + 2(x + y - a - b - c - d). \end{aligned}$$

Resulta que destes treze polígonos convexos o perímetro é máximo nos casos 4, 5 e 17 (de acordo com a tabela seguinte), e será mínimo nos casos 19 e 20.

Então o perímetro, de cada um dos polígonos que estamos a construir, será o constante da tabela que se segue:

	$[(x, y, a, b, c, d)]$	Perímetro
4	$[(2, 6, 2, 0, 2, 0)]$	$8 + 4\sqrt{2} \approx 13,657$
5	$[(2, 6, 2, 0, 0, 2)]$	$8 + 4\sqrt{2} \approx 13,657$
8	$[(3, 5, 2, 1, 3, 0)]$	$4 + 6\sqrt{2} \approx 12,485$
9	$[(2, 5, 1, 1, 1, 1)]$	$6 + 4\sqrt{2} \approx 11,657$

	$[(x, y, a, b, c, d)]$	Perímetro
10	$[(2, 5, 2, 0, 0, 0)]$	$10 + 2\sqrt{2} \approx 12,828$
11	$[(3, 5, 3, 0, 1, 2)]$	$4 + 6\sqrt{2} \approx 12,485$
12	$[(3, 4, 2, 0, 2, 0)]$	$6 + 4\sqrt{2} \approx 11,657$
13	$[(3, 4, 2, 0, 0, 2)]$	$6 + 4\sqrt{2} \approx 11,657$
14	$[(2, 4, 0, 0, 0, 0)]$	12
17	$[(4, 4, 4, 0, 0, 0)]$	$8 + 4\sqrt{2} \approx 13,657$
18	$[(4, 4, 2, 2, 2, 2)]$	$8\sqrt{2} \approx 11,314$
19	$[(3, 3, 1, 0, 1, 0)]$	$8 + 2\sqrt{2} \approx 10,828$
20	$[(3, 3, 0, 0, 1, 1)]$	$8 + 2\sqrt{2} \approx 10,828$

Assim, fica estabelecido que qualquer polígono construído com dezasseis triângulos geometricamente iguais a T tem perímetro máximo $8 + 4\sqrt{2}$ e mínimo $8 + 2\sqrt{2}$.

5. Aplicação a outros puzzles

Um puzzle, composto por dezasseis triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, congruentes com T , com o qual é possível construir centenas de figuras diferentes, só permite construir treze polígonos convexos. Então coloca-se uma questão: E se alterarmos, ainda que ligeiramente, o puzzle? E se variarmos o número de triângulos congruentes com T que compõem o puzzle? Quantos polígonos convexos poderão construir-se?

Comecemos por um puzzle constituído por oito triângulos rectângulos congruentes com T .

5.1 Tangram de cinco peças – Base quadrada

Partindo de uma base quadrada, vamos alterar um pouco o nosso puzzle. Consideremos o quadrado $[A, B, C, D]$. Determinemos os pontos médios E, F, G e H de $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$ respectivamente.

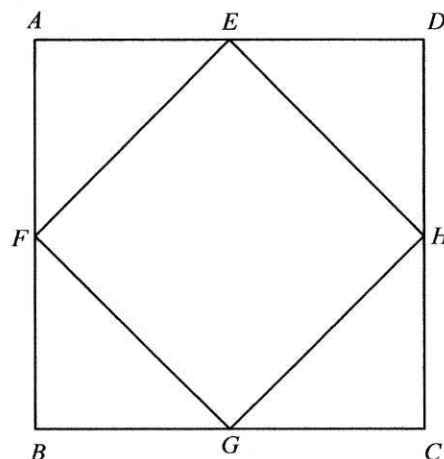


Figura 57 – Tangram de cinco peças

Unamos o ponto médio cada lado ao ponto médio dos dois lados adjacentes. Assim temos um puzzle composto por um quadrado e quatro triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais.

Quantos polígonos convexos é possível construir com este Puzzle?

Consideremos o Puzzle da Figura 57. Como se pode ver, na Figura 58, o Tangram de cinco peças é óbvia e facilmente dividido em oito triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais congruentes com T .

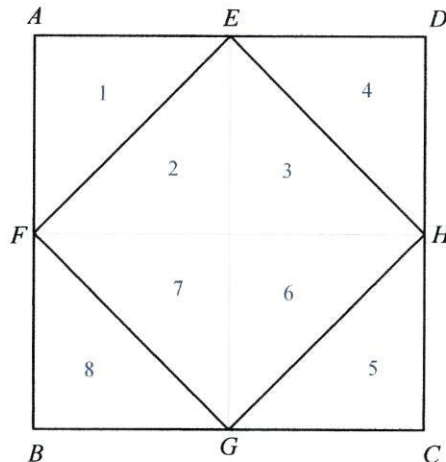


Figura 58 – Decomposição do Tangram de cinco peças

A estratégia a usar consiste, mais uma vez, em encontrar o número de polígonos convexos que é possível obter com estes oito triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais e depois eliminar aqueles que não é possível construir com o Tangram de cinco peças.

A demonstração em si requer a utilização de resultados já demonstrados no capítulo Figuras Convexas formadas por triângulos.

O Teorema Principal garante-nos que um polígono convexo, obtido com os oito triângulos rectângulos geometricamente iguais, pode ser inscrito num rectângulo tal que se verificam as seguintes condições:

$$2xy - 8 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (3)$$

$$\text{e } \begin{cases} a+b \leq x, & c+d \leq x \\ a+d \leq y, & b+c \leq y \end{cases} \quad (4)$$

Agora o nosso problema resume-se à determinação das soluções inteiras da equação (3) e do sistema de inequações (4). Mais uma vez temos as três hipóteses $y > x$, $y = x$ ou $y < x$. Sem perda de generalidade basta considerar as duas primeiras visto que a terceira hipótese

será em tudo análoga à primeira substituindo x por y . No entanto, para $y > x$ com $x > 1$, ainda teremos de analisar separadamente duas situações. Como $\lceil \sqrt{2t} \rceil = \lceil \sqrt{16} \rceil = 4$, vamos estudar separadamente o caso em que $y \geq 4$ e o caso em que $y < 4$.

1. Caso em que $y > x$

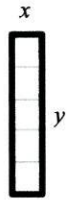
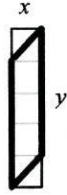

Analisemos separadamente os casos em que:

a) $x = 1$

Neste caso, uma vez que t é par o Lema 3.10 diz-nos que as classes de soluções são

$[(1, 4, 0, 0, 0, 0)]$, $[(1, 5, 1, 0, 1, 0)]$ e $[(1, 5, 1, 0, 0, 1)]$

Assim os polígonos que é possível construir nestas condições são os que constam da tabela seguinte

Caso: a) $y > x$ com $x = 1$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
1*	$[(1, 4, 0, 0, 0, 0)]$	
2*	$[(1, 5, 1, 0, 1, 0)]$	
3*	$[(1, 5, 1, 0, 0, 1)]$	

b) $x > 1$ com $y \geq 4$

Sendo t par, pela Proposição 3.7, como $\frac{t}{2} = 4 \Rightarrow x \in \{2, 4\}$ sabemos que as classes de

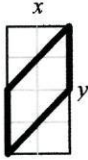
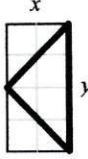
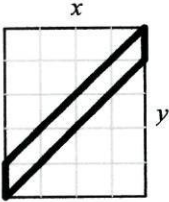
soluções da equação (3) são

$$[(2, 4, 2, 0, 2, 0)]$$

$$[(2, 4, 2, 0, 0, 2)] \quad \text{pois } 2x^2 = 8$$

$$[(4, 5, 4, 0, 4, 0)]$$

Em resumo, os polígonos convexos que é possível construir utilizando oito triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, respeitando as condições $y > x$, $x > 1$ com $y \geq 4$, são os que figuram no quadro que se segue.

Caso: $b) y > x, x > 1$ com $y \geq 4$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
4	$[(2, 4, 2, 0, 2, 0)]$	
5	$[(2, 4, 2, 0, 0, 2)]$	
6*	$[(4, 5, 4, 0, 4, 0)]$	

c) $x > 1$ com $y < 4$

Neste caso temos de testar todos os conjuntos de valores inteiros para x, y, a, b, c e d directamente na equação (3) e no sistema de inequações (4) e facilmente se chegará às soluções pretendidas.

No entanto não será necessário testar realmente todos os conjuntos de valores inteiros para x, y, a, b, c e d . Uma vez que estamos a analisar os casos em que $x < y$ com $y < 4$ pelo Lema 3.12 resulta que $y = 3$ e $x = 2$.

Temos $4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ com $a + b \leq 2, c + d \leq 2, b + c \leq 3$ e $d + a \leq 3$.

Se $a = b = c = d = 0$ é obviamente impossível.

Se a, b, c e d todos não nulos resulta que $4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \Rightarrow a = b = c = d = 1$, logo a classe de soluções é

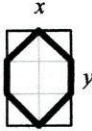
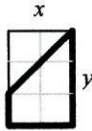
$$[(2, 3, 1, 1, 1, 1)].$$

Se nem todos os valores de a, b, c, d são diferentes de zero. Suponhamos $d = 0$, então $a, b, c \in \{1, 2\}$, logo temos $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Portanto pelo menos um dos valores de a, b, c é igual a 2, digamos $a = 2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow b = c = 0$, logo a classe de soluções é

$$[(2, 3, 2, 0, 0, 0, 0)].$$

$$\text{Se } a, b, c < 2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 3.$$

Resumindo, as soluções que, efectivamente, resultam deste caso são as que figuram na tabela que se segue.

Caso: $c) y > x$ com $y < 4$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
7	$[(2, 3, 1, 1, 1, 1,)]$	
8	$[(2, 3, 2, 0, 0, 0)]$	

2. Caso em que $y = x$

Atendendo à tabela que se segue

x	$2x^2 - 8$	Factorização em números primos	Soma de dois quadrados não nulos
2	$2 \times 2^2 - 8 = 0$	----	Não
3	$2 \times 3^2 - 8 = 10$	2×5	Sim
4	$2 \times 4^2 - 8 = 24$	$2^3 \times 3$	Não

É obvio que 0 não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos e, pelo Teorema 3.17, para $x = 4$ resulta que $2x^2 - 8$ não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos. Assim, com a ajuda do Lema 3.14, temos $y = x \in \{2, 3\}$.

Tipo	(x, x, a, b, c, d)	x
1)	$a = b = c = d = 0$	$x = 2$
2)	a, b, c e d todos não nulos	$x \in \{2, 3\}$
3)	Só um dos valores de a, b, c, d é zero	$x = 2$
4)	Só um dos valores de a, b, c, d é diferente de zero	$x = 2$
5)	$a = b = 0$ e $c, d \neq 0$ ou	$x = 2$

	$a, b \neq 0$ e $c = d = 0$	
6)	$a = c = 0$ e $b, d \neq 0$ ou $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$	$x = 3$

Seja $y = x = 2$

Da equação (3) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0$. Logo a única solução é
 $[(2, 2, 0, 0, 0, 0)]$.

Seja $y = x = 3$

Tipo 2) Da equação (3) temos $10 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, e do sistema (4) temos $a + b \leq 3$ e $c + d \leq 3$. Assim $a^2, b^2, c^2, d^2 \in \{1, 4\}$. Logo temos $10 = n + 4m$ tais que $n, m > 0$ e $n + m = 4$ o que implica $m = 2 \Rightarrow n = 2$.
 Donde resulta a classe de soluções


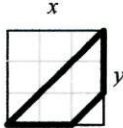
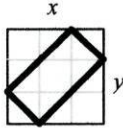
$$[(3, 3, 2, 1, 2, 1)].$$

Tipo 6) Se $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$, então $10 = a^2 + c^2$ e $a, c \leq 3$. Assim $a^2, c^2 \in \{1, 4, 9\}$. Suponhamos que $a = 3$, então $c = 1$. Logo a classe de soluções é

$$[(3, 3, 3, 0, 1, 0)].$$

Suponhamos $a, c \leq 2$, assim $10 = a^2 + c^2 \leq 4 + 4 = 8$, o que é absurdo.

Em resumo, as soluções que, efectivamente, resultam deste caso são as que figuram na tabela que se segue.

Caso: $y = x$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
9	$[(2, 2, 0, 0, 0, 0)]$	
10	$[(3, 3, 3, 0, 1, 0)]$	
11	$[(3, 3, 2, 1, 2, 1)]$	

Apenas falta ver que não é possível construir os casos assinalado com *. O problema da construção de polígonos convexos com as 5 peças em que decomposemos o nosso puzzle prende-se com a colocação do quadrado $[E, F, G, H]$ cujo lado, como podemos ver na Figura 58, mede um lado irracional. A altura dos polígonos 1 (se considerarmos a altura como o lado de menor comprimento) 2 e 3 é um lado racional (menor que o lado do quadrado) e no caso do polígono 6 ainda é menor (metade de um lado irracional), logo os casos 1, 2, 3 e 6 estão automaticamente excluídos.

De facto, com este puzzle, só é possível construir sete polígonos convexos, um paralelogramo, um triângulo, um quadrado, dois trapézios, um rectângulo e um hexágono.

5.1.1 Construção dos polígonos

Utilizando as formas do Tangram de cinco peças de base quadrangular, vejamos como construir os sete polígonos convexos.

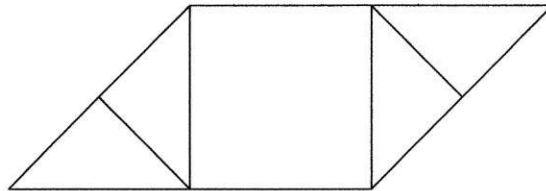


Figura 59 – Paralelogramo

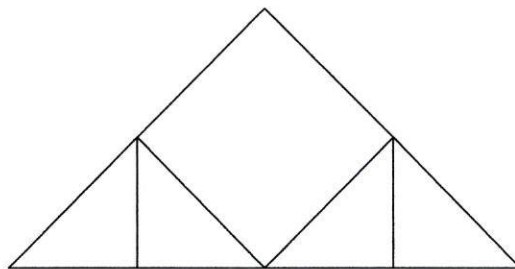


Figura 60 – Triângulo rectângulo isósceles

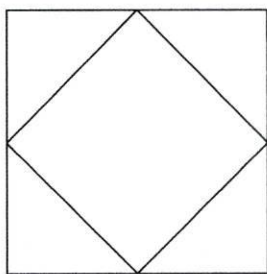


Figura 61 – Quadrado

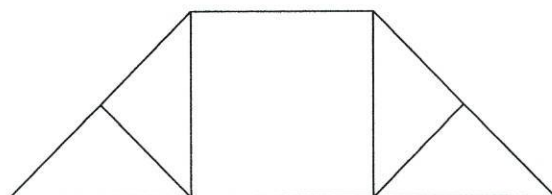


Figura 62 – Trapézio isósceles

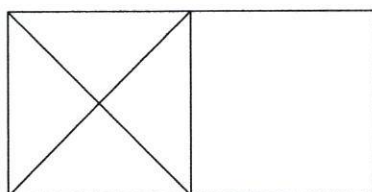


Figura 63 – Rectângulo

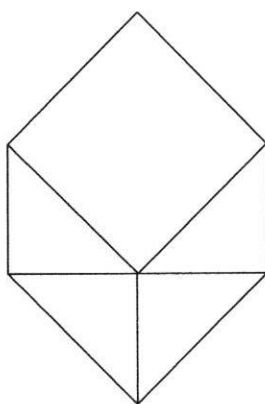


Figura 64 – Hexágono

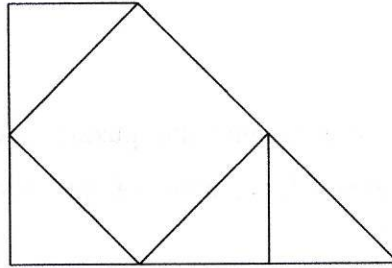


Figura 65 – Trapézio rectângulo

5.1.2 Perímetro dos Polígonos

Resulta que destes sete polígonos convexos o perímetro é máximo nos casos 4, 5 e 10 (de acordo com a tabela seguinte), e será mínimo no caso 7.

Então o perímetro, de cada um dos polígonos que estamos a construir, será o constante da tabela que se segue:

	$[(x, y, a, b, c, d)]$	Perímetro
4	$[(2, 4, 2, 0, 2, 0)]$	$4 + 4\sqrt{2} \approx 9,657$
5	$[(2, 4, 2, 0, 0, 2)]$	$4 + 4\sqrt{2} \approx 9,657$
7	$[(2, 3, 1, 1, 1, 1,)]$	$2 + 4\sqrt{2} \approx 7,657$
8	$[(2, 3, 2, 0, 0, 0)]$	$6 + 2\sqrt{2} \approx 7,657$
9	$[(2, 2, 0, 0, 0, 0)]$	8
10	$[(3, 3, 3, 0, 1, 0)]$	$4 + 4\sqrt{2} \approx 9,657$
11	$[(3, 3, 2, 1, 2, 1)]$	$6\sqrt{2} \approx 8,485$

Vejamos o que acontece com um puzzle constituído por um número ímpar de triângulos.

5.2 Puzzle de quatro peças

Pela primeira vez vamos experimentar um puzzle que pode ser decomposto num número ímpar de triângulos. O Lema 3.16 garante-nos que nesse caso o puzzle não pode ser de base rectangular.

Consideremos o polígono $[A, B, C, D, E]$.

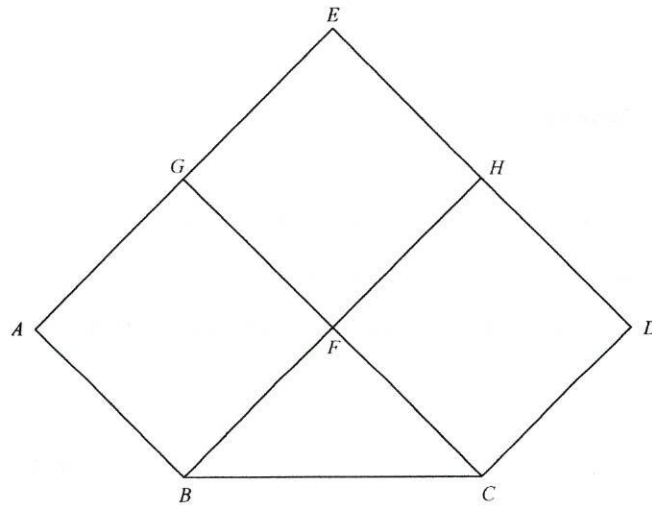


Figura 66 – Outro puzzle de quatro peças

O puzzle foi construído de modo que os ângulos ABF , BFG , FGA , GAB , FCD , CDH , DHF , HFC , HEG , EGF , GFH , FHE e BFC são todos ângulos rectos. Assim temos um puzzle composto por três quadrados e um triângulo rectângulo isósceles.

Quantos polígonos convexos é possível construir com este Puzzle?

Consideremos o Puzzle da Figura 66. Como se pode ver, na Figura 67, o puzzle de quatro peças é óbvia e facilmente dividido em sete triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais congruentes com T .

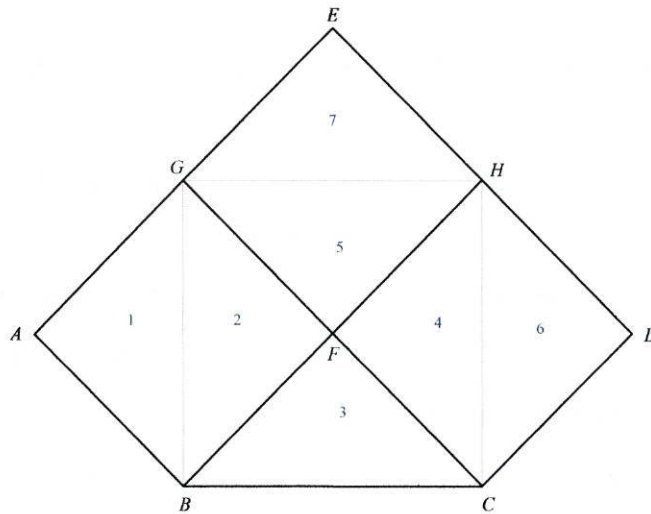


Figura 67 – Decomposição do puzzle de quatro peças

O Teorema Principal garante-nos que um polígono convexo, obtido com os sete triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, pode ser inscrito num rectângulo tal que se verificam as seguintes condições:

$$2xy - 7 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (5)$$

$$\text{e } \begin{cases} a+b \leq x, & c+d \leq x \\ a+d \leq y, & b+c \leq y \end{cases} \quad (6)$$

Como $\lceil \sqrt{2t} \rceil = \lceil \sqrt{14} \rceil = 4$, vamos estudar separadamente o caso em que $y \geq 4$ e o caso em que $y < 4$.

1. Caso em que $y > x$

Analisemos separadamente os casos em que:

a) $x = 1$

Neste caso, sendo t ímpar o Lema 3.10 diz-nos que a classe de soluções é

$$[(1, 4, 1, 0, 0, 0)]$$

Assim, só é possível construir um único polígono convexo utilizando sete triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, respeitando as condições $y > x$ com $x = 1$.

Caso: a) $y > x$ com $x = 1$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
1	$[(1, 4, 1, 0, 0, 0)]$	

b) $x > 1$ com $y \geq 4$

Mais uma vez, como t é ímpar, a Proposição 3.7 diz-nos que neste caso não há soluções.

c) $x > 1$ com $y < 4$

Neste caso temos de testar todos os conjuntos de valores inteiros para x, y, a, b, c e d directamente na equação (5) e no sistema de inequações (6) e facilmente se chegará às soluções pretendidas. No entanto não será necessário testar realmente todos os conjuntos de valores inteiros para x, y, a, b, c e d . Uma vez que estamos a analisar os casos em que $x < y$ com $y < 4$ pelo Lema 3.12 resulta $y = 3$ e $x = 2$.

Então temos $2xy - t = 5 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ com $a + b \leq 2, c + d \leq 2, b + c \leq 3$ e $d + a \leq 3$. Como a soma dos quadrados é 5, então $a, b, c, d \leq 2$.

Obviamente que $a = b = c = d = 0$ é impossível.

Se a, b, c e d todos não nulos resulta um absurdo pois não é possível escrever 5 como a soma de quatro quadrados não nulos.

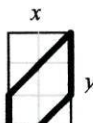
Se nem todos os valores de a, b, c, d são diferentes de zero. Suponhamos $d = 0$, então $a, b, c \in \{1, 2\}$. Logo temos $5 = a^2 + b^2 + c^2$. É impossível termos $a, b, c \leq 1$, portanto suponhamos que um dos valores de a, b, c é igual a 2, digamos $a = 2$, assim $b^2 + c^2 = 1$ e como $a + b \leq 2$ temos que $b = 0$ e $c = 1$, logo a classe de soluções é

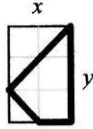
$$[(2, 3, 2, 0, 1, 0)]$$

Suponhamos ainda que nem todos os valores de a, b, c, d são diferentes de zero, mas desta vez seja $b = 0$, então $a, c, d \in \{1, 2\}$. Logo temos $5 = a^2 + c^2 + d^2$. Seja um dos valores de a, c, d igual a 2, digamos $a = 2$, assim resulta $c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow c = 0 \wedge d = 1$ ou $c = 1 \wedge d = 0$, logo a classe de soluções é

$$[(2, 3, 2, 0, 0, 1)].$$

Resumindo, as soluções que, efectivamente, resultam deste caso são as que figuram na tabela que se segue.

Caso: c) $x > 1$ com $y < 4$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
2*	$[(2, 3, 2, 0, 1, 0)]$	

3*	$[(2, 3, 2, 0, 0, 1)]$	
----	------------------------	--

2. Caso em que $y = x$

Atendendo à tabela que se segue

x	$2x^2 - 7$	Factorização em números primos	Soma de dois quadrados não nulos
2	$2 \times 2^2 - 7 = 1$	---	Não
3	$2 \times 3^2 - 7 = 11$	11	Não
4	$2 \times 4^2 - 7 = 25$	5^2	Sim

É obvio que 1 não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos e, pelo Teorema 3.17 para $x = 3$ resulta que $2x^2 - 7$ não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos. Assim, com a ajuda do Lema 3.14, temos $y = x \in \{2, 4\}$.

Tipo	(x, x, a, b, c, d)	x
1)	$a = b = c = d = 0$	Não existem soluções neste caso, pois t é ímpar.
2)	a, b, c e d todos não nulos	$x = 2$
3)	Só um dos valores de a, b, c, d é zero	$x = 2$
4)	Só um dos valores de a, b, c, d é diferente de zero	$x = 2$
5)	$a = b = 0$ e $c, d \neq 0$ ou $a, b \neq 0$ e $c = d = 0$	$x = 2$
6)	$a = c = 0$ e $b, d \neq 0$ ou $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$	$x = 4$

Sejam $y = x = 2$

Da equação (5) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow$ exactamente um dos valores de a, b, c, d é um e os restantes são iguais a zero. Logo a única classe de soluções é


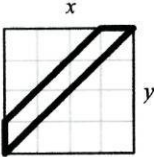
$$[(2, 2, 1, 0, 0, 0)].$$

Sejam $y = x = 4$

Tipo 6) Se $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$, então $25 = a^2 + c^2$ e $a, c \leq 4$, ora $25 = 3^2 + 4^2$, logo a classe de soluções é

$$[(4, 4, 3, 0, 4, 0)].$$

Em resumo, as únicas soluções que resultam deste caso são as que figuram na tabela que se segue.

Caso: $y = x$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
4	$[(2, 2, 1, 0, 0, 0)]$	
5*	$[(4, 4, 3, 0, 4, 0)]$	

Apenas falta ver que não é possível construir os casos assinalados com *. O problema da construção de polígonos convexos com as 4 peças em que decomposemos o nosso puzzle prende-se com a colocação dos três quadrados $[A, G, F, E]$, $[G, E, H, F]$ e $[H, F, C, D]$ cuja medida do lado é de um lado racional. O polígono 5, um trapézio, não se pode construir pois a sua altura é de metade de um lado irracional (menor que o lado do quadrado). Os polígonos 2 e 3 não se podem construir porque só é possível usar dois dos quadrados.

De facto, com este puzzle, só é possível construir dois polígonos convexos, um trapézio e um pentágono.

5.2.1 Construção dos polígonos

Utilizando as formas do puzzle de quatro peças, vejamos como construir os dois polígonos convexos.

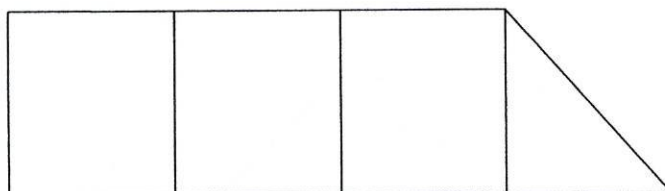


Figura 68 – Trapézio rectângulo

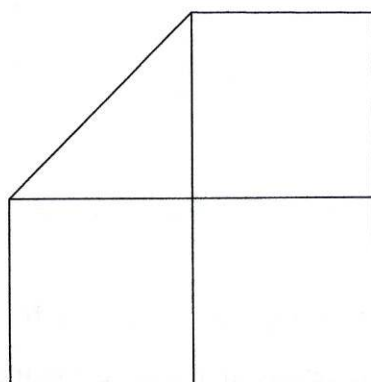


Figura 69 – Pentágono

5.2.2 Perímetro dos Polígonos

Resulta que destes dois polígonos convexos o perímetro é máximo no caso 1 (de acordo com a tabela seguinte), e será mínimo no caso 4.

Então o perímetro, de cada um dos polígonos que estamos a construir, será o constante da tabela que se segue:

	$[(x, y, a, b, c, d)]$	Perímetro
1	$[(1, 4, 1, 0, 0, 0)]$	$8 + \sqrt{2} \approx 9,414$
4	$[(2, 2, 1, 0, 0, 0)]$	$6 + \sqrt{2} \approx 7,414$

5.3 Puzzle de três peças

Partindo novamente de uma base não quadrada, vamos alterar um pouco mais o nosso puzzle. Consideremos o quadrado $[A, B, C, D]$. Determinemos os pontos médios E, F, G e H de $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$ respectivamente.

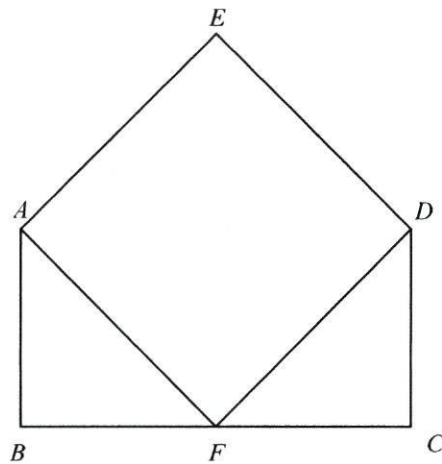


Figura 70 – Puzzle de três peças

O puzzle foi construído de modo que os ângulos ABF , FCD , AFD , FDE , DEA e EAF são todos ângulos retos. Assim temos um puzzle composto por um quadrado e dois triângulos rectângulos isósceles.

Quantos polígonos convexos é possível construir com este Puzzle?

Consideremos o Puzzle da Figura 70. Como se pode ver, na Figura 71, este puzzle de três peças é óbvia e facilmente dividido em seis triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais congruentes com T .

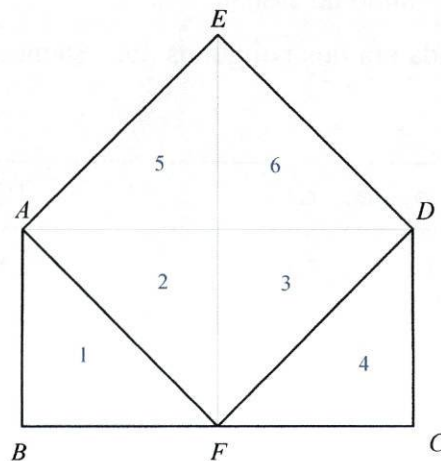


Figura 71 – Decomposição do puzzle de três peças

O Teorema Principal garante-nos que um polígono convexo, obtido com os seis triângulos rectângulos geometricamente iguais, pode ser inscrito num rectângulo tal que se verificam as seguintes condições:

$$2xy - 6 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (7)$$

$$\text{e } \begin{cases} a+b \leq x, & c+d \leq x \\ a+d \leq y, & b+c \leq y \end{cases} \quad (8)$$

Como $\lceil \sqrt{2t} \rceil = \lceil \sqrt{12} \rceil = 4$, vamos estudar separadamente o caso em que $y \geq 4$ e o caso em que $y < 4$.


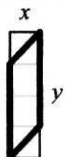

1. Caso em que $y > x$

Analisemos separadamente os casos em que:

a) $x = 1$

Neste caso, uma vez que t par o Lema 3.10 diz-nos que as classes de soluções são $[(1, 3, 0, 0, 0, 0)]$, $[(1, 4, 1, 0, 1, 0)]$ e $[(1, 4, 1, 0, 0, 1)]$.

Assim, os polígonos convexos que é possível construir utilizando seis triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais, respeitando as condições $y > x$ com $x = 1$, são os que figuram no quadro que se segue.

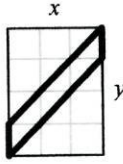
Caso: a) $y > x$ com $x = 1$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
1*	$[(1, 3, 0, 0, 0, 0)]$	
2*	$[(1, 4, 1, 0, 1, 0)]$	
3*	$[(1, 4, 1, 0, 0, 1)]$	

b) $x > 1$ com $y \geq 4$

Sendo $t = 6$, pela Proposição 3.7, como $\frac{t}{2} = 3 \Rightarrow x = 3$ sabemos que a classe de soluções da equação (7) é

$$[(3, 4, 3, 0, 3, 0)].$$

Assim, o polígono resultante nestas condições é o que se encontra na tabela seguinte

Caso: $b) x > 1$ com $y \geq 4$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
4*	$[(3, 4, 3, 0, 3, 0)]$	

c) $x > 1$ com $y < 4$

Neste caso temos de testar todos os conjuntos de valores inteiros para x, y, a, b, c e d directamente na equação (7) e no sistema de inequações (8) e facilmente se chegará às soluções pretendidas.

Uma vez que estamos a analisar os casos em que $x < y$ com $y < 4$, pelo Lema 3.12 resulta $y = 3$ e $x = 2$.

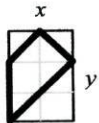
Então temos $2xy - t = 6 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ com $a + b \leq 2, c + d \leq 2, b + c \leq 3$ e $d + a \leq 3 \Rightarrow a, b, c, d \leq 2$ e nem todos nulos.

Se a, b, c e d todos não nulos resulta um absurdo pois não é possível escrever 6 como a soma de quatro quadrados não nulos.

Se nem todos os valores de a, b, c, d são diferentes de zero. Suponhamos $d = 0$, então $a, b, c \in \{1, 2\}$. Logo temos $6 = a^2 + b^2 + c^2$. Suponhamos que um dos valores de a, b, c é igual a 2. Se $b = 2 \Rightarrow a = 0$ e $c^2 = 2$, o que é impossível. De modo análogo se conclui que não podemos ter $a = 2$. Seja $c = 2$, assim $a^2 + b^2 = 2 \Rightarrow a = 1$ e $b = 1$, logo a classe de soluções é

$$[(2, 3, 1, 1, 2, 0)].$$

Resumindo, a única solução que resulta deste caso é a que figura na tabela que se segue.

Caso: $c) x > 1$ com $y < 4$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
5	$[(2, 3, 1, 1, 2, 0)]$	

2. Caso em que $y = x$

Para $x = 2$ temos $2x^2 - 6 = 2$ e para $x = 3$ resulta $2 \times 3^2 - 6 = 12 = 2^2 \times 3$, logo pelo Teorema 3.17 sabemos que 12 não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos.

Assim, com a ajuda do Lema 3.14, temos $x = 2$.

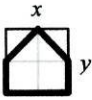
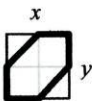
Tipo	(x, x, a, b, c, d)	x
1)	$a = b = c = d = 0$	Não existem soluções neste caso, pois $\frac{t}{2} = 3$ não é um quadrado.
2)	a, b, c e d todos não nulos	$x = 2$
3)	Só um dos valores de a, b, c, d é zero	$x = 2$
4)	Só um dos valores de a, b, c, d é diferente de zero	$x = 2$
5)	$a = b = 0$ e $c, d \neq 0$ ou $a, b \neq 0$ e $c = d = 0$	$x = 2$
6)	$a = c = 0$ e $b, d \neq 0$ ou $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$	$x = 2$

Sejam $y = x = 2$

Da equação (7) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2 \Rightarrow$ exactamente dois dos valores de a, b, c, d são um e os restantes são iguais a zero. Logo as classes de soluções são

$$[(2, 2, 1, 1, 0, 0)] \text{ e } [(2, 2, 1, 0, 1, 0)].$$

Em resumo, as soluções que, efectivamente, resultam deste caso são as que figuram na tabela que se segue.

Caso: $y = x$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
6	$[(2, 2, 1, 1, 0, 0)]$	
7	$[(2, 2, 1, 0, 1, 0)]$	

Apenas falta ver que não é possível construir os casos assinalados com *. O problema da construção de polígonos convexos com as 3 peças em que decomposemos o nosso puzzle

prende-se com a colocação do quadrado $[A, E, D, F]$ cuja medida do lado é um lado irracional.

De facto, com este puzzle, só é possível construir três polígonos convexos, um pentágono, um hexágono e um trapézio.

5.3.1 Construção dos polígonos

Utilizando as formas do puzzle de três peças, vejamos como construir os três polígonos convexos.

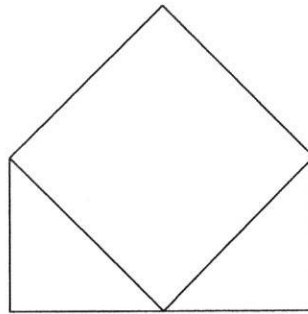


Figura 72 – Pentágono

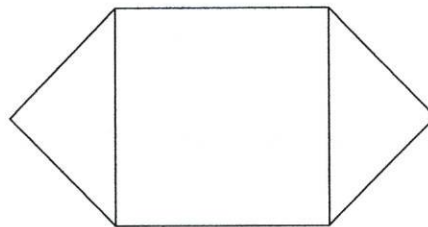


Figura 73 – Hexágono

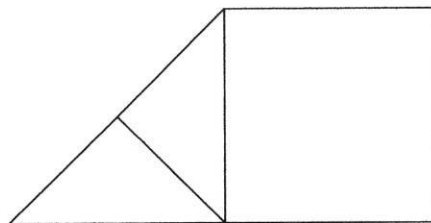


Figura 74 – Trapézio rectângulo

5.3.2 Perímetro dos Polígonos

Resulta que destes três polígonos convexos o perímetro é máximo no caso 5 (de acordo com a tabela seguinte). Os dois casos restantes têm o mesmo perímetro.

Então o perímetro, de cada um dos polígonos que estamos a construir, será o constante da tabela que se segue:

	$[(x, y, a, b, c, d)]$	Perímetro
5	$[(2, 3, 1, 1, 2, 0)]$	$2 + 4\sqrt{2} \approx 7,657$
6	$[(2, 2, 1, 1, 0, 0)]$	$4 + 2\sqrt{2} \approx 6,828$
7	$[(2, 2, 1, 0, 1, 0)]$	$4 + 2\sqrt{2} \approx 6,828$

5.4 Outro Puzzle de quatro peças

O Lema 3.16 garante-nos que se quisermos analisar um puzzle cuja decomposição em triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais se faça segundo um número impar teremos de abandonar a forma quadrada do Tangram chinês, e mais lato ainda, teremos de abandonar a forma rectangular.

Vamos então considerar outro puzzle de base não rectangular. Consideremos o polígono $[A, B, C, D, E]$.

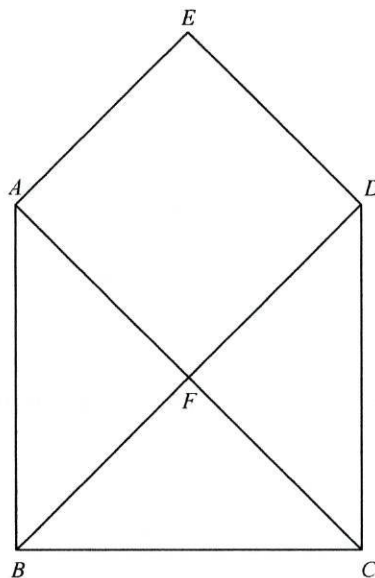


Figura 75 – Puzzle de quatro peças

O puzzle foi construído de modo que os ângulos ABC , BCD , EAF , AFD , FDE e DEA são todos ângulos rectos. Assim temos um puzzle composto por um quadrado e três triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais.

Quantos polígonos convexos será possível construir com este puzzle?

Consideremos o puzzle da Figura 75. Como se pode ver, na Figura 76, o puzzle de quatro peças é óbvia e facilmente dividido em cinco triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais congruentes a T .

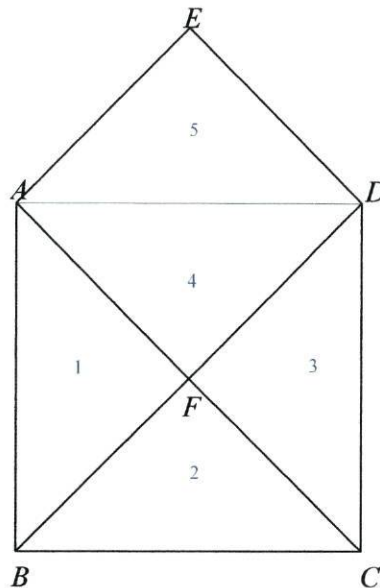


Figura 76 – Decomposição do puzzle de quatro peças

Nunca é demais lembrar que a demonstração em si requer a utilização de resultados já demonstrados no capítulo denominado Figuras Convexas formadas por triângulos.

O Teorema Principal garante-nos que um polígono convexo, obtido com os cinco triângulos rectângulos geometricamente iguais, pode ser inscrito num rectângulo tal que se verificam as seguintes condições:

$$2xy - 5 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (9)$$

$$\text{e } \begin{cases} a+b \leq x, & c+d \leq x \\ a+d \leq y, & b+c \leq y \end{cases} \quad (10)$$

Como $\lceil \sqrt{2t} \rceil = \lceil \sqrt{10} \rceil = 4$, vamos estudar separadamente o caso em que $y \geq 4$ e o caso em que $y < 4$.

1. Caso em que $y > x$


Analisemos separadamente os casos em que:

$$a) x = 1$$

Neste caso, sendo t ímpar o Lema 3.10 diz-nos que a classe de soluções é

$$[(1, 3, 1, 0, 0, 0)].$$

Assim o polígono que é possível construir nestas condições é o que figura na tabela que se segue.

Caso: a) $y > x$ com $x = 1$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
1	$[(1, 3, 1, 0, 0, 0)]$	

$$b) x > 1 \text{ com } y \geq 4$$

Sabemos, pela Proposição 3.7, que neste caso não há soluções.

$$c) x > 1 \text{ com } y < 4$$

Uma vez que estamos a analisar os casos em que $x < y$ com $y < 4$, pelo Lema 3.12 resulta $y = 3$ e $x = 2$.

Então temos $2xy - t = 7 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ com $a + b \leq 2$, $c + d \leq 2$, $b + c \leq 3$ e $d + a \leq 3 \Rightarrow a, b, c, d \leq 2$.

Já vimos que é impossível ter-se $a = b = c = d = 0$.

Se a, b, c e d todos não nulos então a^2, b^2, c^2 e $d^2 \in \{1, 4\}$. Suponhamos que $a = 2$, logo temos $3 = b^2 + c^2 + d^2 \Rightarrow b = c = d = 1$ mas nesse caso teríamos $a + b > 2$.

Se nem todos os valores de a, b, c, d são diferentes de zero. Suponhamos $d = 0$, então $a, b, c \in \{1, 2\}$. Logo temos $7 = a^2 + b^2 + c^2$. Suponhamos que um dos valores de a, b, c é igual a 2, digamos $c = 2$, assim $a^2 + b^2 = 3$, mas 3 não é um quadrado e pelo Teorema 3.17 não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos, assim temos que $a, b, c < 2 \Rightarrow 7 = a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$, o que é impossível.

2. Caso em que $y = x$

Para $x = 2$ temos $2x^2 - 5 = 3$ e para $x = 3$ resulta $2 \times 3^2 - 5 = 13$, logo pelo Teorema 3.17 sabemos que 3 não pode ser escrito como soma de dois quadrados não nulos. Assim, com a ajuda do Lema 3.14, temos $x \in \{2, 3\}$.

Tipo	(x, x, a, b, c, d)	x
1)	$a = b = c = d = 0$	Não existem soluções neste caso, pois t é ímpar.
2)	a, b, c e d todos não nulos	$x = 2$
3)	Só um dos valores de a, b, c, d é zero	$x = 2$
4)	Só um dos valores de a, b, c, d é diferente de zero	$x = 2$
5)	$a = b = 0$ e $c, d \neq 0$ ou $a, b \neq 0$ e $c = d = 0$	Não há soluções.
6)	$a = c = 0$ e $b, d \neq 0$ ou $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$	$x = 3$

Sejam $y = x = 2$

Da equação (9) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3 \Rightarrow$ exactamente três dos valores de a, b, c, d são um e o restante é igual a zero. Logo a classe de soluções é


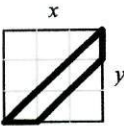
$$[(2, 2, 1, 1, 1, 0)].$$

Sejam $y = x = 3$

Tipo 6) Se $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$, então $13 = a^2 + c^2$ e $a, c \leq 3$, ora $13 = 3^2 + 2^2$. Logo a classe de soluções é

$$[(3, 3, 3, 0, 2, 0)].$$

Em resumo, neste caso só existem duas soluções, as que figuram na tabela que se segue.

Caso: $y = x$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
2	$[(2, 2, 1, 1, 1, 0)]$	
3*	$[(3, 3, 3, 0, 2, 0)]$	

Apenas falta ver que não é possível construir o caso assinalado com *. O problema da construção de polígonos convexos com as 4 peças em que decomposemos o nosso puzzle prende-se com a colocação do quadrado $[A, E, D, F]$ cuja medida do lado é um lado racional.

Surpreendentemente, ou talvez não, com este puzzle, só é possível construir dois polígonos convexos, um pentágono e um trapézio.

5.4.1 Construção dos polígonos

Utilizando as formas do puzzle de quatro peças, vejamos como construir os dois polígonos convexos.

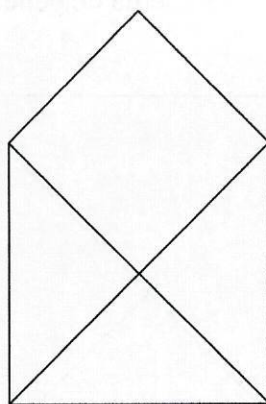


Figura 77 – Pentágono

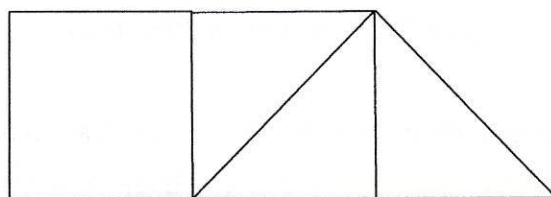


Figura 78 – Trapézio rectângulo

5.4.2 Perímetro dos Polígonos

Resulta que destes dois polígonos convexos o perímetro é máximo no caso 1. O perímetro, de cada um dos polígonos que estamos a construir, será o constante da tabela que se segue:

	$[(x, y, a, b, c, d)]$	Perímetro
1	$[(1, 3, 1, 0, 0, 0)]$	$6 + \sqrt{2} \approx 7,414$
2	$[(2, 2, 1, 1, 1, 0)]$	$2 + 3\sqrt{2} \approx 6,243$

Uma variação interessante é o Tangram de três peças referido por Georg Brügner em [B], constituído por quatro triângulos rectângulos congruentes com T .

5.5 Tangram de três peças - Base quadrada

Vamos considerar o puzzle com a seguinte forma. Consideremos o quadrado $[A, B, C, D]$ e uma das suas diagonais. Sem perda de generalidade tomamos a diagonal $[BD]$.

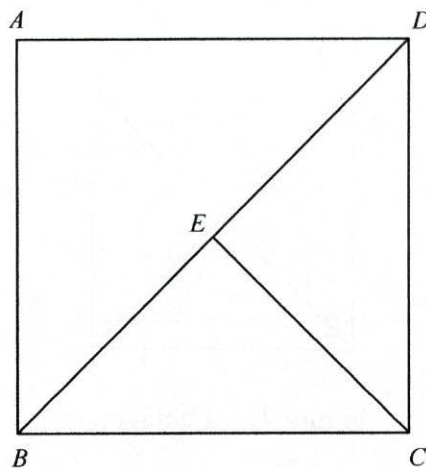


Figura 79 – Tangram de três peças

Tracemos a outra diagonal do quadrado $[A, B, C, D]$, mas só até intersectar a diagonal, já desenhada, $[BD]$. E é o ponto médio de $[BD]$ pois as intersecções das diagonais de qualquer quadrado são os pontos médios das referidas diagonais.

Desta vez o nosso puzzle é composto por um triângulo grande e dois pequenos.

Vamos então tentar responder à questão que se nos coloca, quantos polígonos convexos é possível construir com este Tangram. Consideremos o Tangram da Figura 79. Como se pode ver, na Figura 80, o Tangram de três peças é óbvia e facilmente dividido em quatro triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais congruentes com T .

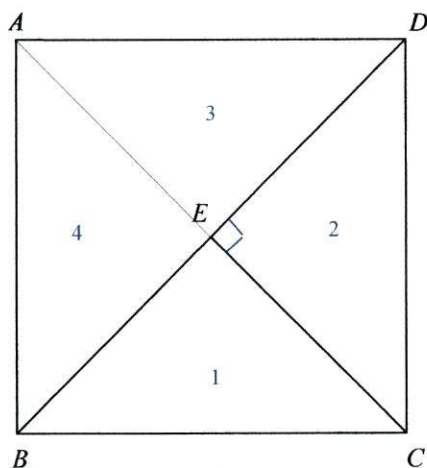


Figura 80 – Decomposição do Tangram de três peças

O Teorema Principal garante-nos que o polígono convexo, obtido com os nossos quatro triângulos, pode ser inscrito num rectângulo tal que se verificam as seguintes condições:

$$2xy - 4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (11)$$

$$\text{e } \begin{cases} a+b \leq x, & c+d \leq x \\ a+d \leq y, & b+c \leq y \end{cases} \quad (12)$$

Como $\lceil \sqrt{2t} \rceil = \lceil \sqrt{8} \rceil = 3$, vamos estudar separadamente o caso em que $y \geq 3$ e o caso em que $y < 3$.

1. Caso em que $y > x$


Analisemos separadamente os casos em que:

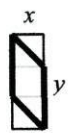
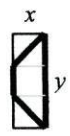
a) $x = 1$

Neste caso, uma vez que t é par o Lema 3.10 diz-nos que as classes de soluções são

$[(1, 2, 0, 0, 0, 0)]$, $[(1, 3, 1, 0, 1, 0)]$ e $[(1, 3, 1, 0, 0, 1)]$

Assim os polígonos que cuja construção é possível, nestas condições, são os que constam da tabela seguinte.

Caso: a) $y > x$ com $x = 1$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
1	$[(1, 2, 0, 0, 0, 0)]$	

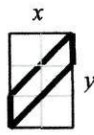
2	$[(1, 3, 1, 0, 1, 0)]$	
3	$[(1, 3, 1, 0, 0, 1)]$	

b) $x > 1$ com $y \geq 3$

Como t é par, pela Proposição 3.7, como $\frac{t}{2} = 2 \Rightarrow x = 2$ sabemos que a classe de soluções da equação (11) é

$$[(2, 3, 2, 0, 2, 0)].$$

Assim, o polígono que é possível construir utilizando quatro triângulos geometricamente iguais a T , respeitando as condições $y > x$, $x > 1$ com $y \geq 3$, é o que figura no quadro que se segue.

Caso: b) $y > x$, $x > 1$ com $y \geq 3$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
4*	$[(2, 3, 2, 0, 2, 0)]$	

c) $x > 1$ com $y < 3$

Neste caso temos $1 < x < y < 3 \Rightarrow x = 2$ e $y = 3$, pelo Lema 3.12 é impossível.

2. Caso em que $y = x$

Vamos encontrar as soluções pretendidas com a ajuda do Lema 3.14. Então temos $x = 2$.

Tipo	(x, x, a, b, c, d)	x
1)	$a = b = c = d = 0$	Não existem soluções neste caso, pois $\frac{t}{2} = 2$ não é um quadrado.
2)	a, b, c e d todos não nulos	$x = 2$
3)	Só um dos valores de a, b, c, d é zero	Não há soluções.

4)	Só um dos valores de a, b, c, d é diferente de zero	$x = 2$
5)	$a = b = 0$ e $c, d \neq 0$ ou $a, b \neq 0$ e $c = d = 0$	Não há soluções.
6)	$a = c = 0$ e $b, d \neq 0$ ou $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$	$x = 2$

Sejam $y = x = 2$

Tipo 2) Da equação (11) temos $4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \Rightarrow a = b = c = d = 1$, logo a classe de soluções é

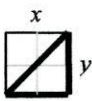
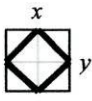
$$[(2, 2, 1, 1, 1, 1)].$$

Tipo 4) Suponhamos $a \neq 0$, então resulta $4 = a^2 \Rightarrow a = 2$. Logo a classe de soluções é

$$[(2, 2, 2, 0, 0, 0)].$$

Tipo 6) Suponhamos $a, c \neq 0$ e $b = d = 0$, então $4 = a^2 + c^2$, mas é impossível escrever 4 como soma de dois quadrados não nulos.

Em resumo, as soluções que, efectivamente, resultam deste caso são as que figuram na tabela que se segue.

Caso: $y = x$		
	$[(x, y, a, b, c, d)]$	
5	$[(2, 2, 2, 0, 0, 0)]$	
6	$[(2, 2, 1, 1, 1, 1)]$	

Apenas falta ver que não é possível construir o caso assinalado com *. O problema na construção deste polígono com as 3 peças do Tangram prende-se com a colocação do triângulo maior. Neste triângulo um dos lados mede dois lados racionais dos triângulos que consideramos como blocos de construção, no entanto no caso assinalado com * a dimensão racional mede no máximo um.

De facto, com este puzzle, é possível construir cinco polígonos convexos, um paralelogramo, um trapézio, um triângulo, um quadrado e um rectângulo.

5.5.1 Construção dos polígonos

Utilizando as formas do Tangram de três peças de base quadrada, vejamos como construir os cinco polígonos convexos.

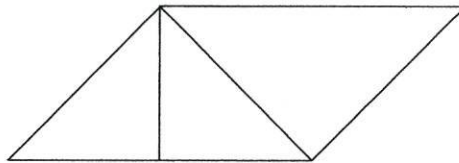


Figura 81 – Paralelogramo

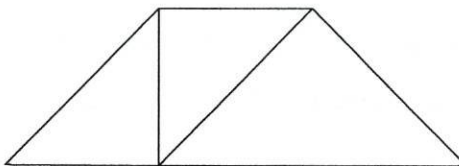


Figura 82 – Trapézio isósceles

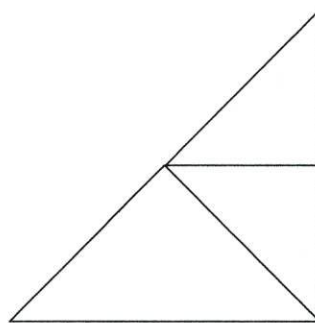


Figura 83 – Triângulo rectângulo isósceles

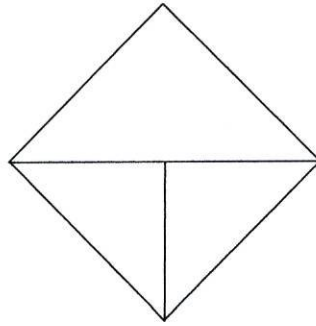


Figura 84 – Quadrado

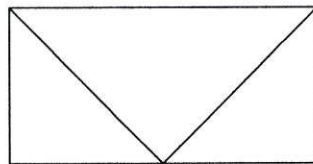


Figura 85 – Rectângulo

5.5.2 Perímetro dos Polígonos

Resulta que destes cinco polígonos convexos o perímetro é máximo nos casos 2, 3 e 5 (de acordo com a tabela seguinte) e mínimo no caso 6.

Então o perímetro, de cada um dos polígonos que estamos a construir, será o constante da tabela que se segue:

	$[(x, y, a, b, c, d)]$	Perímetro
1	$[(1, 2, 0, 0, 0, 0)]$	$(\sqrt{2} - 2)(0 + 0 + 0 + 0) + 2(1 + 2) = 6$
2	$[(1, 3, 1, 0, 1, 0)]$	$(\sqrt{2} - 2)(1 + 0 + 1 + 0) + 2(1 + 3) = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,828$
3	$[(1, 3, 1, 0, 0, 1)]$	$(\sqrt{2} - 2)(1 + 0 + 0 + 1) + 2(1 + 3) = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,828$
5	$[(2, 2, 2, 0, 0, 0)]$	$(\sqrt{2} - 2)(2 + 0 + 0 + 0) + 2(2 + 2) = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,828$

	$[(x, y, a, b, c, d)]$	Perímetro
6	$[(2, 2, 1, 1, 1, 1)]$	$(\sqrt{2} - 2)(1 + 1 + 1 + 1) + 2(2 + 2) =$ $= 4\sqrt{2} \approx 5,657$

6. Aplicações do Tangram na sala de aula

O Tangram é um puzzle excepcionalmente rico associando ao seu carácter lúdico bastante interesse didáctico.

A essência do Tangram é, como já dissemos, a obtenção de figuras por junção de outras. É esse carácter que confere a este puzzle potencialidades na realização de actividade de percepção visual no plano. Por percepção visual no plano entende-se a capacidade de isolar partes de um todo que se considere como fundo ou cenário. Embora esta capacidade também possa ser desenvolvida a partir de outro tipo de actividades, os puzzles, como o Tangram, porque são facilmente manipuláveis devem merecer uma atenção especial.

No que diz respeito a conhecimentos matemáticos, as actividades que envolvem o Tangram podem permitir:

- Compor diferentes tipos de polígonos;
- Estudar polígonos equivalentes;
- Comparar e medir áreas;
- Comparar, ordenar e adicionar comprimentos;
- Comparar, ordenar e adicionar amplitudes de ângulos;
- Estudar figuras semelhantes.

Vejam algumas actividades, retiradas de [L], [APM] e [CA], que podemos propor aos nossos alunos, dentro ou fora da sala de aula, dependendo das características da tarefa e das especificidades de cada turma.

1. *Constrói um Tangram. Para isso:*

- *Desenha em cartolina um quadrado com 12 cm de lado.*
- *Traça os segmentos de modo a obteres as 7 peças, como mostra a figura seguinte.*

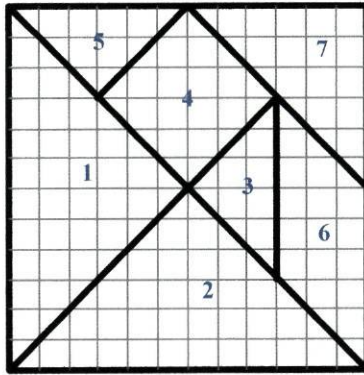


Figura 86

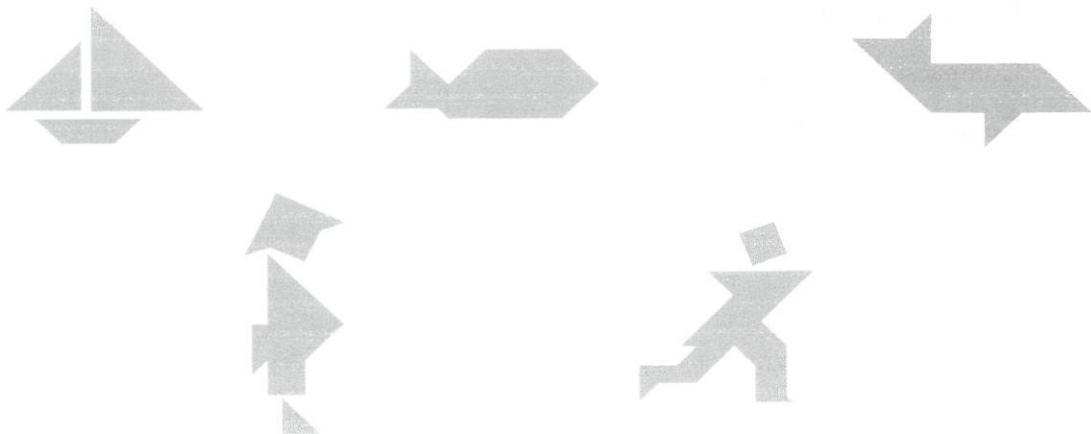
- *Recorta as peças.*

O interesse e simplicidade desta construção residem no facto de ela se basear exclusivamente na obtenção de diagonais e pontos médios.

2. *Observa as peças do Tangram. Classifica os polígonos que o compõem.*

O interesse reside em relembrar as classificações de polígonos. Intuitivamente os alunos identificam as figuras geométricas que compõem o Tangram, mas do ponto de vista formal, as definições estão muitas vezes esquecidas, ou mal assimiladas.

3. *Utilizando as peças do Tangram, tenta construir cada uma das seguintes figuras:*



4. *Utilizando as 7 peças do Tangram, constrói e desenha no caderno as seguintes figuras:*
 - a) *Um triângulo rectângulo;*
 - b) *Um rectângulo que não seja quadrado;*

- c) *Um paralelogramo não rectângulo;*
- d) *Um trapézio.*

5. *As figuras obtidas em 4.:*

- a) *São geometricamente iguais?*
- b) *Têm a mesma área?*
- c) *Ordena as figuras obtidas por ordem crescente de perímetros (se necessário utiliza um fio para comparar os perímetros).*

O facto de todas as figuras serem equivalentes, mas não isoperimétricas, torna esta actividade interessante de realizar quando se pretendem explorar os conceitos de área e de perímetro ainda sem a preocupação de medir essas duas variáveis.

Embora não seja muito simples comparar os perímetros, pode ser uma boa sugestão a utilização de um fio para os comparar, até porque o aluno não precisa de conhecer as relações entre os vários lados que, como sabemos, recorrem a números irracionais.

6. *De entre os sete polígonos que constituem o Tangram, indica:*

- a) *Dois polígonos geometricamente iguais;*
- b) *Dois polígonos semelhantes não geometricamente iguais.*

7. *Completa o quadro seguinte:*

	Medida da área da ...				
Unidade de área	Peça 3	Peça 7	Peça 1	Peça 4	Peça 6
Peça 3					
Peça 7					
Peça 1					
Peça 4					
Peça 6					
Uma quadrícula					

É interessante verificar que qualquer das peças pode servir de unidade de área obtendo-se operadores inversos quando se trocam posições, isto é, quando a peça que era a unidade passa a ser aquela cuja área queremos medir, e a que acabamos de medir passa a ser a unidade

de área.

8. *Observa que entre as peças do Tangram há 3 triângulos semelhantes. Com todas as peças do Tangram, constrói um outro triângulo semelhante.*

O triângulo pedido já foi construído na actividade 4. Construído o triângulo, é quase imediata a confirmação de que ele é semelhante às peças triangulares.

9. *Com todas as peças do Tangram, tenta construir um paralelogramo. Repara que uma das peças que utilizaste é um paralelogramo; verifica se o paralelogramo que construístes é ou não semelhante a esse.*

O paralelogramo pedido já foi construído na actividade 4.

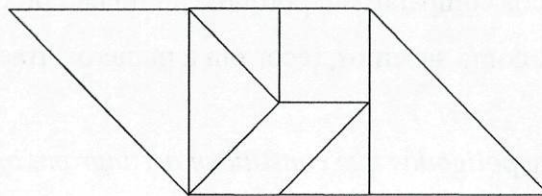


Figura 87

Nesta construção que apresentamos, o paralelogramo é semelhante ao paralelogramo dado. No entanto, esta não é a única construção possível. Pode-se obter um paralelogramo não semelhante; basta, para isso, construir um rectângulo.

A verificação de que o paralelogramo obtido também é semelhante ao paralelogramo dado é mais elaborada. A mobilidade desta peça permite fazer a verificação de que os ângulos correspondentes são iguais, mas isso não basta para que os paralelogramos sejam semelhantes. É preciso arranjar uma maneira de confirmar que se mantém a proporcionalidade dos lados.

10. *Elabora um cartaz, sobre um tema à tua escolha, com figuras construídas usando as sete peças do Tangram.*

Poder-se-á escolher um tema e fazer uma exposição dos trabalhos e/ou construir um Tangram de grandes dimensões e construir figuras a expor.

Note-se que poderíamos propor aos nossos alunos, actividades semelhantes às referidas anteriormente, mas utilizando os puzzles de cinco, quatro e três peças que analisamos no decurso desta dissertação.

7. Bibliografia

[WH] Fu Traing Wang and Chuan-Chih Hsiung, *A Theorem on the Tangram*, American Mathematical Monthly 49, 1942.

[G] Martin Gardner, *Time travel and other Mathematical Bewilderments*, W. H. Freeman and Company, New York, 1988.

[B] Georg Brügner, *Three Triangle Tangram*, BIT, vol. 24, pág. 380-382, 1984.

[CR] R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1996.

[M] G. H. Meisters, *Polygons have ears*, American Math Monthly, 82, 648-651, 1975.

[L] Ana Vieira Lopes, António Júlio Bernardes Antunes, Cristina Loureiro, et al, *As Actividades Matemáticas na sala de aula*, Texto Editora.

[APM] Associação de Professores de Matemática, *Materiais para a aula de Matemática*, Educação e Matemática.

[CA] M^a Alexandra Conceição, Matilde Almeida, *Matematicamente falando 8*, Areal Editores, 2003.

[E] Charles Varden Eyrden, *Elementary Number Theory*, Random House, 1987

Páginas da Internet consultadas

[] <http://www.mathematische-basteleien.de/tangrams.htm>

[] <http://www.univ.trieste.it/~nirtv/tanweb/texten.html>

[Edu] <http://modular.fas.harvard.edu/edu/Fall2001/124/lectures/>

8. Índice Remissivo

<hr/>	
A	
Ângulo interno.....	16
<hr/>	
C	
Caminho poligonal	11
Simples.....	11
Classe de soluções.....	37
Composição de polígonos	19, 20
<hr/>	
D	
Distância entre dois pontos	11
<hr/>	
N	
Norma.....	11
Notação utilizada.....	9
<hr/>	
O	
Orelha.....	15
Orelhas não sobrepostas	15
<hr/>	
P	
Paridade.....	12
Polígono	
Convexo	21
Definição de	11
Diagonal de um	14
Exterior de um	12, 14
Interior de um	12, 14
<hr/>	
	Lados de um
	11
	Lados irracionais do
	25
	Lados racionais do
	25
	Simples
	11
	Soma dos ângulos internos de um... ..
	18
	Vértice principal de um
	14
	Vértices de um
	11
	Produto escalar.....
	11
<hr/>	
S	
Segmento de recta	
Com pontos terminais.....	11
Comprimento de um	11
Sem pontos terminais.....	11
Soma de dois quadrados	46
<hr/>	
T	
<i>Tangram</i>	7
Teorema da Curva de Jordan para	
polígonos.....	12
Teorema das duas orelhas.....	16
Triângulo	
Definição de	11
Isósceles.....	11
Rectângulo	21
<hr/>	
V	
Vértice	
Côncavo	15
Convexo.....	15
Impróprio	15

