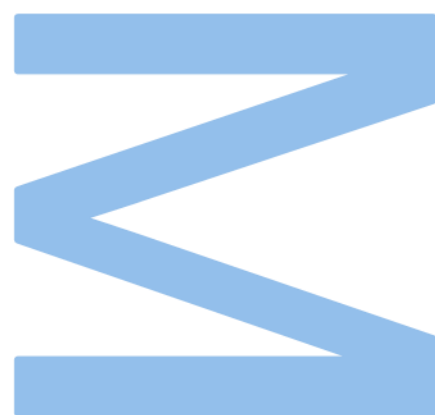


Dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas matemáticas



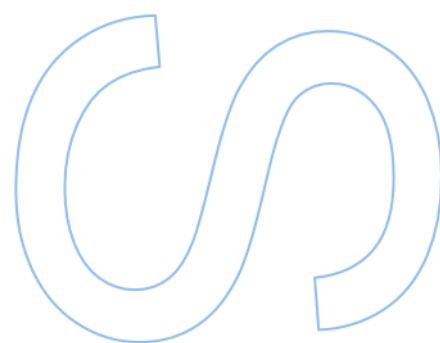
Relatório de Estágio

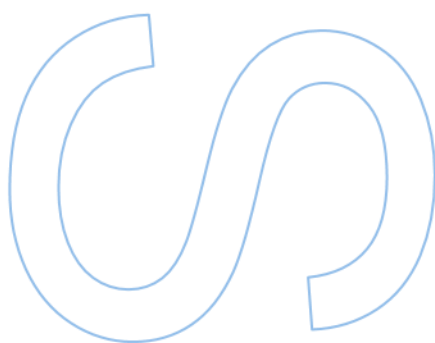
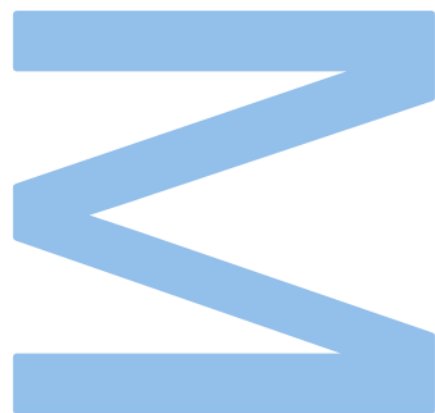
André Bordalo Ramalhão Kingwell

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do
Ensino Básico e no Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
2022

Orientadora

Maria de Fátima Duarte Delgado, Professora
Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto





Declaração de Honra

Eu, André Bordalo Ramalhão Kingwell, natural do Porto, residente em Rua São João Bosco, 130, HAB. 12, 4100-450 Porto, com o telefone 917 755 192, nacional de Portugal portador do Cartão de Cidadão nº 14313762, inscrito no Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto declaro, nos termos do disposto na alínea a) do artigo 14.º do Código Ético de Conduta Académica da U.Porto, que o conteúdo do presente relatório de estágio reflete as perspetivas, o trabalho de investigação e as minhas interpretações no momento da sua entrega.

Ao entregar este relatório de estágio, declaro, ainda, que a mesma é resultado do meu próprio trabalho de investigação e contém contributos que não foram utilizados previamente noutros trabalhos apresentados a esta ou outra instituição.

Mais declaro que todas as referências a outros autores respeitam escrupulosamente as regras da atribuição, encontrando-se devidamente citadas no corpo do texto e identificadas na secção de referências bibliográficas. Não são divulgados no presente relatório de estágio quaisquer conteúdos cuja reprodução esteja vedada por direitos de autor.

Tenho consciência de que a prática de plágio e auto-plágio constitui um ilícito académico.



André Kingwell

Porto, 7 de julho de 2022

Agradecimentos

Tendo atingido a conclusão deste Mestrado, quero expressar a minha gratidão a algumas pessoas que me acompanharam ao longo do meu percurso.

Aos meus professores orientadores, Professora Maria de Fátima Delgado e ao Professor Cooperante, o meu grande agradecimento pelas sugestões dadas, pela disponibilidade e paciência que sempre tiveram e pela forma como me acompanharam durante este ano letivo. Sem dúvida que aprendi muito com eles e a sua experiência fez de mim um melhor estagiário e fará, no futuro, um melhor professor.

À Professora Rosa Ferreira, que sempre procurou que, nestes dois anos de Mestrado, tivéssemos todas as condições possíveis para o realizar com qualidade e distinção.

Ao meu colega de curso e de estágio Paulo Santa Ovaia, que me acompanhou deste o primeiro dia do Mestrado até ao último. Podia fazer uma página de agradecimentos a ele por tudo aquilo que experienciámos, mas penso que dizer que se tornou um amigo para mim diz muito sobre a minha gratidão por ele.

Aos alunos que participaram neste estudo e a todos os outros que pude conhecer neste ano letivo e em anos anteriores, que são aquilo que nos move como professores. Não tenho dúvidas que serão sempre eles a quem mais teremos de agradecer por tudo aquilo que nos vão fazer aprender ao longo da nossa vida.

À escola que me acolheu durante este ano letivo e que me deu todas as condições para que o meu estágio fosse muito completo e enriquecedor. Todo o corpo docente me recebeu como se fizesse parte desta instituição há anos e me fez sentir em casa.

Aos meus colegas de Mestrado, por tudo aquilo que confidenciámos e que me fizeram percorrer este caminho sempre acompanhado de pessoas com os mesmos objetivos que eu.

À minha namorada Sara Faria, que foi sempre o meu maior apoio, nos bons e maus momentos, e foi a pessoa que mais acreditou em mim, apoiando-me e incentivando-me em todas as escolhas que fiz.

Aos meus pais, aos meus irmãos, avós e restantes familiares, que serão toda a vida o meu suporte para tudo e que me enriquece poder enchê-los de orgulho.

Aos meus melhores amigos e todos os outros amigos, conhecidos e pessoas que passaram pela minha vida ao longo destes anos e me fizeram crescer e ser a pessoa que sou hoje.

Aos Professores que tive, desde a primária até ao ensino superior, em especial ao meu Professor de Matemática do Secundário, Professor Albano, e à Professora Ângela, que me fizeram perceber que esta profissão tão nobre seria aquela que iria escolher para a minha vida.

A todas as instituições onde desempenhei variadas funções ao longo destes anos e às pessoas com quem trabalhei, em especial, a Paula, a Raquel, a Sofia, a Susaninha, a Andreia, a Alzira, o João e o Nuno Dias, que me deram todas as ferramentas que precisei para que este percurso fosse concluído com sucesso.

A todos eles dedico este trabalho. Sem eles, não conseguiria ter feito nada disto e foi por eles que toda esta dedicação valeu a pena. Podia dizer que é uma sorte tê-los na minha vida, mas alguém um dia me ensinou que nunca foi sorte.

Resumo

As dificuldades são uma parte integrante da nossa aprendizagem. Não só como alunos e professores, mas também como pessoas. Nessa aprendizagem, a compreensão é algo que está sempre intrínseco a qualquer tarefa que nos seja proposta, em especial, se for de matemática. Os alunos manifestam inúmeras adversidades na interpretação de problemas, exercícios, investigações e explorações matemáticas. Para conhecer essas dificuldades e as suas causas, promovi uma intervenção pedagógica em alunos do 11º ano de escolaridade, que se apoiou em quatro tarefas desafiantes e de natureza diversificada, no que diz respeito ao seu contexto. De modo a concretizá-la, foram formuladas três questões de investigação: 1) Que dificuldades manifestam os alunos na interpretação de tarefas matemáticas de contexto diversificado? 2) Quais as causas dessas dificuldades? 3) Que influências podem ter os contextos das tarefas nas dificuldades de interpretação dos alunos? Esta investigação seguiu uma abordagem qualitativa e interpretativa. Foram selecionados 10 alunos que demonstraram, nas aulas, uma maior facilidade em partilhar a sua forma de pensar e explicar as estratégias utilizadas na realização de tarefas. Como instrumentos de recolha de dados, recorreu-se a: entrevistas com tarefas; produções escritas de alunos; e um questionário. A análise dos dados mostrou que as principais dificuldades que eles apresentaram foram na compreensão textual/ linguística, compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e suas conexões, recolha e organização de informação, enquadramento temporal da tarefa e na interpretação de resultados obtidos. Em grande parte estas foram causadas por leituras rápidas e pouco detalhadas das tarefas, falta de domínio de conceitos/ conteúdos matemáticos e da língua portuguesa, procura imediata da solução, entre outras. Os contextos das tarefas assumiram também implicações nas dificuldades de interpretação dos alunos, contudo, constatou-se que essas dificuldades envolvem diferentes dimensões e estão associadas às características dos alunos.

Palavras-chave: Tarefas matemáticas, Dificuldades, Contexto das tarefas, Interpretação de tarefas, Ensino Secundário.

Abstract

Difficulties are essential to our learning, as students and teachers, and equally important, as individuals. In this study, the ability to understand is intrinsic to any task proposed to us, especially if mathematics. Students manifest numerous adversities while analyzing problems, exercises, investigation results, and mathematical explorations. To comprehend these difficulties and their causes, I promoted a pedagogical intervention in students in the 11th grade, which relied on four challenging tasks from a diversified context. Two research questions have risen: 1) What difficulties do students express in interpreting tasks in a diverse context? 2) What influence can the contexts of these tasks have on the interpretation difficulty? This research followed a qualitative and interpretative approach. We selected ten students who demonstrated, during classes, greater ease in sharing their way of thinking and explaining the strategies used in performing tasks. Face-to-face interviews, written texts from the students, and a survey were used to collect data. Data analysis showed that the main difficulties presented were in textual/linguistic comprehension, understanding of mathematical concepts, contents, their relationships and organization of information, the task time framework, and interpretation of results obtained. In large part, the difficulties arose from the quick and non-comprehensive reading of the tasks, lack of aptitude for concepts/contents in math and the Portuguese language, and a rushed search for the solution, among others. The task contexts also assumed implications in the difficulties of interpretation. Nonetheless, it is a reference that the difficulties involve different dimensions and are associated with the student's characteristics.

Keywords: Mathematical tasks, Difficulties, Context of tasks, Interpretation of tasks, Secondary Schools.

Índice

Lista de Tabelas	viii
Lista de Figuras	ix
Capítulo 1 - Introdução	1
Capítulo 2 - Enquadramento Teórico.....	6
2.1. Tarefas matemáticas: tipologia e a sua relação com a aprendizagem	6
2.2. Contextos das tarefas: realidade, semirrealidade e matemático	10
2.3. Interpretação de enunciados de tarefas: desafios para os alunos	14
Capítulo 3 - Intervenção pedagógica.....	26
3.1. Tarefa 1	29
3.2. Tarefa 2	31
3.3. Tarefa 3	32
3.4. Tarefa 4	34
3.5. Considerações sobre a intervenção	37
Capítulo 4 - Métodos e procedimentos de recolha de dados	39
4.1. Opções Metodológicas.....	39
4.2. Participantes	40
4.3. Métodos de recolha de dados.....	41
Capítulo 5 - Análise de Dados.....	45
5.1. Tarefa 1	45
5.2. Tarefa 2	54
5.3. Tarefa 3	66
5.4. Tarefa 4	75
5.5. Perceções dos alunos nas dificuldades sentidas.....	84
Capítulo 6 - Conclusões	89
Referências	99
Anexos.....	103
Anexo 1 - Termo de autorização	103

Anexo 2 – Tarefa 1 – 14 março	104
Anexo 3 – Tarefa 2 – 21 março	105
Anexo 4 – Tarefa 3 – 28 março	106
Anexo 5 – Tarefa 4 – 4 abril – Bruna e Carla.....	107
Anexo 6 – Tarefa 4 – 4 abril – Diogo e Inês	108
Anexo 7 – Tarefa 4 – 4 abril – Eva e Gonçalo	109
Anexo 8 – Tarefa 4 – 4 abril – António e Hugo	110
Anexo 9 – Tarefa 4 – 4 abril - Filipe e Joana	111
Anexo 10 – Questionário.....	112

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Caracterização das tarefas propostas.....	37
Tabela 2 - Dificuldades manifestadas na interpretação de tarefas e suas causas.....	91

Lista de Figuras

Fig. 1 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e abertura (p. 18)	8
Fig. 2 - Tarefa 1 – 14/03/22.....	30
Fig. 3 - Tarefa 2 – 21/03/22.....	31
Fig. 4 - Tarefa 3 - 28/03/22	33
Fig. 5 - Tarefa 4 - 04/04/22	35
Fig. 6 - Pergunta 1.1 da Tarefa 1	45
Fig. 7 - Esboços de alunos no enunciado da Tarefa 1	46
Fig. 8 - Processo de resolução da Pergunta 1.1 de uma aluna incluída na Situação I (Bruna)	49
Fig. 9 - Resolução da Questão 1.1 de um aluno incluído na Situação II (Hugo).....	50
Fig. 10 - Pergunta 1.2. da Tarefa 1	51
Fig. 11 - Resolução do Filipe da Questão 1.2	52
Fig. 12 - Pergunta 1.3. da Tarefa 1	53
Fig. 13 - Resolução do Filipe da Pergunta 1.3. da Tarefa 1	54
Fig. 14 - Pergunta 1.1. da Tarefa 2	55
Fig. 15 - Esboço da Inês da Pergunta 1.1. da Tarefa 2	57
Fig. 16 - Esboço do Diogo da Pergunta 1.1. da Tarefa 2	58
Fig. 17 - Esboço do Filipe da Pergunta 1.1. da Tarefa 2	59
Fig. 18 - Pergunta 1.2. da Tarefa 2	60
Fig. 19 - Utilização do quadro para apoiar a interpretação da questão 1.2. da Tarefa 2	62
Fig. 20 - Pergunta 1.3. da Tarefa 2	62
Fig. 21 - Interpretação da Bruna da Pergunta 1.3. da Tarefa 2	63
Fig. 22 - Interpretação do Filipe de um dado da Pergunta 1.3. da Tarefa 2.....	64
Fig. 23 - Resolução do Gonçalo da Pergunta 1.3. da Tarefa 2.....	64
Fig. 24 - Pergunta 1.4. da Tarefa 2	65
Fig. 25 - Enunciado da Tarefa 3.....	66
Fig. 26 - Pergunta 1.1. da Tarefa 3	70
Fig. 27 - Pergunta 1.2. da Tarefa 3	71
Fig. 28 - Pergunta 2 da Tarefa 3	73
Fig. 29 - Excerto de uma resolução da Bruna da Pergunta 2.2. da Tarefa 3	75
Fig. 30 - Enunciado da Tarefa 4 (Eva e Gonçalo)	77
Fig. 31 - Pergunta 1.1. da Tarefa 4	78

Fig. 32 - Pergunta 1.2. da Tarefa 4

80

Fig. 33 - Pergunta 1.3. da Tarefa 4

80

Fig. 34 - Pergunta 1.4. da Tarefa 4

81

Fig. 35 - Resolução do Diogo e da Joana da Questão 1.4. da Tarefa 4

82

Capítulo 1 - Introdução

Objetivo

O presente estudo tem como objetivo conhecer dificuldades dos alunos, e respetivas causas, na interpretação de tarefas matemáticas de contexto diversificado. Para o concretizar, formulámos as seguintes questões de investigação:

- Que dificuldades manifestam os alunos na interpretação de tarefas matemáticas de contexto diversificado?
- Quais as causas dessas dificuldades?
- Que influências podem ter os contextos das tarefas nas dificuldades de interpretação dos alunos?

Motivações

Ao longo da nossa vida e nas aprendizagens que vamos adquirindo, percebemos que a forma como interpretamos as situações com as quais nos deparamos está na origem das decisões que tomamos. Aquilo que observamos, que ouvimos, que sentimos e o rigor com que o fazemos permite que as nossas ações sejam as melhores, ou, pelo menos, as que nos parecem ser mais racionais. Por vezes, demasiado rigor também nos condiciona e tira-nos alguma liberdade, no entanto, na sua maioria, o facto de estarmos com uma atenção redobrada no que está ao nosso redor leva a que possamos tomar as melhores decisões.

Tal como na vida, os alunos, na sua maioria, querem passar rápido à tomada de decisões, à resolução das tarefas e não percebem que uma má interpretação os levará a demorar mais tempo do que o esperado, uma vez que irá originar um maior número de erros e de obstáculos para enfrentar. Como tal, uma das motivações pessoais passa por convencê-los que utilizar um pouco mais de tempo num enunciado e na sua interpretação mais rigorosa fará com que ganhem tempo e possam cometer um menor número de erros possível. Isto resultará em uma melhor tomada de decisões e, consequentemente, em maiores possibilidades de definir um processo correto para a resolução de tarefas.

Sendo a interpretação algo subjetivo, um dos desafios será analisar as diferentes formas de interpretar dos alunos e fornecer os melhores caminhos, para que possam seguir as suas linhas de pensamento e equacionar as estratégias mais eficazes, desenvolvendo o seu raciocínio.

Podemos ver algumas destas ideias no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO):

As competências na área de Raciocínio dizem respeito aos processos lógicos que permitem aceder à informação, interpretar experiências e produzir conhecimento. As competências na área de Resolução de problemas dizem respeito aos processos de encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões.

As competências associadas a Raciocínio e resolução de problemas implicam que os alunos sejam capazes de:

- interpretar informação, planear e conduzir pesquisas;
- gerir projetos e tomar decisões para resolver problemas;
- desenvolver processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados. (Martins, et al., 2017, p. 23)

A formulação de questões por parte dos alunos é, também, uma motivação para os professores na elaboração das suas tarefas e na sua natureza, no que diz respeito ao seu contexto, na medida em que se procura que estas tragam um desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Sendo estas ricas, autênticas, complexas, desafiantes, de elevado nível cognitivo, entre outras, poderão desenvolver diferentes interpretações, pelo que os professores devem ser capazes de conduzir os alunos às melhores estratégias na compreensão das tarefas, possibilitando melhores tomadas de decisão na sua resolução.

Uma das motivações principais para a realização deste estudo é sentir que a interpretação de enunciados de tarefas é uma das maiores dificuldades dos alunos e um dos grandes entraves para a resolução dessas mesmas tarefas. Como refere Lodge et al. (2018), “as dificuldades são muitas vezes uma parte inevitável, mas importante no processo de aprendizagem”¹ (p.1), como tal, os professores devem procurar, junto dos alunos, identificar as suas dificuldades, para que eles as consigam superar e aprender com elas. Uma debilidade na interpretação desmotiva, muitas vezes, um aluno e impede-o de prosseguir no seu raciocínio. É importante perceber o que está na origem dessas dificuldades e se estas estarão, ou não, relacionadas com os diversos contextos onde estão inseridas.

Podemos observar nas Aprendizagens Essenciais de Matemática A – 11^o ano | Ensino Secundário que “os alunos devem resolver tarefas que requeiram a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos”, de forma que sejam capazes

¹ Tradução livre do autor. No original “Difficulties are often an unavoidable but important part of the learning process.” (Lodge, et al., 2018, p. 1).

de concretizar “aprendizagens relativas a cada conteúdo, incidindo sobre conhecimentos, capacidades e atitudes a adquirir e a desenvolver” (Ministério da Educação (ME), 2018, pp. 2-5). Como vem presente no PASEO (Martins et al., 2017), a resolução de problemas e o raciocínio são competências que carecem de uma boa interpretação para uma tomada de decisões mais sustentada na sua execução. Esta capacidade de interpretar e compreender aquilo que cada tarefa enuncia é algo que permite que os conteúdos e os conhecimentos tenham uma melhor aprendizagem, para que se torne possível relacioná-los e estabelecer as conexões necessárias para a sua compreensão.

Também o desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos irá beneficiar da sua capacidade de interpretação e compreensão dos enunciados, levando a uma mais clara explicação do seu raciocínio. Como tal, é para o investigador uma motivação extra perceber que uma boa interpretação e compreensão dos enunciados irá permitir uma melhor comunicação matemática (oral e escrita), o que se torna uma ferramenta muito útil para os alunos. É de esperar que ao longo da sua vida – escolar, académica e laboral –, um bom domínio da comunicação matemática poder-lhes-á trazer benefícios. E sem dúvida que, quer como professor, quer como investigador, uma das motivações principais é poder proporcionar aos alunos todas estas valências para o seu futuro.

Aquilo que pude observar durante a Prática de Ensino Supervisionada (PES), durante o ano letivo 2021/2022, foi, sem dúvida, a principal motivação para fazer este estudo. No acompanhamento das aprendizagens dos alunos, a interpretação foi umas das principais lacunas que eles demonstraram. Não só, a compreender os conteúdos que eram lecionados durante as aulas, mas também na interpretação das tarefas que lhes eram propostas.

A maioria dos alunos, assim que tinham uma dúvida numa tarefa, a afirmação que faziam era quase sempre a mesma: “Professor, não estou a perceber o que é para fazer neste exercício!”. Muitas das vezes, este desafio surgia por, simplesmente, não lerem o enunciado de uma forma cuidada. Uma parte significativa dos alunos decide avançar de imediato para as questões que a tarefa propõe, desprezando aquilo que sustenta essas perguntas. Em diversas ocasiões, bastava perguntar-lhes se já tinham lido a tarefa, ou indicar que o fizessem, mas de uma forma mais detalhada, que a dificuldade quase que desaparecia. Todavia, nem sempre esta adversidade surge por uma não leitura do enunciado, pelo que me interessou estudar outras dificuldades que os alunos manifestam neste tipo de situações, assim como as suas causas. Os diferentes contextos em que aparecem estes bloqueios dos alunos na interpretação de tarefas

também me pareceram pertinentes de serem considerados, uma vez que, pelas evidências que recolhi na PES, os alunos adaptam-se de uma forma bastante distinta aos diferentes enquadramentos em que cada tarefa se insere.

Deste modo, considerei que seria um desafio enriquecedor para mim investigar o comportamento dos alunos na interpretação de tarefas de contextos diversificados, que muitas vezes revelam ter medo quando se deparam com tarefas constituídas por enunciados demasiado extensos. Foram várias as ocasiões em que vi alunos a desistirem da realização de tarefas, não por não entenderem os conceitos matemáticos nelas presentes, mas, sim, pela complexidade dos enunciados e a quantidade de informação que estes possuíam. Assim, torna-se desafiante para mim despertar o interesse nos alunos na realização dessas tarefas.

Relevância

A relevância deste estudo passa por encontrar soluções para que os alunos possam evoluir na forma como interpretam a informação que lhes é fornecida, bem como que, em tarefas de contextos diversificados, eles consigam adequar todos os conhecimentos que têm dos diferentes contextos matemáticos da forma mais eficaz possível. Uma boa interpretação do que é solicitado, conjugada com uma boa mobilização dos seus conhecimentos, por norma, motiva os alunos e transmite-lhes segurança na resolução das tarefas.

Penso que este estudo será bastante importante para a comunidade de investigação, já que os resultados e conclusões que forem obtidos poderão ser úteis e ter aplicabilidade noutros alunos. Até porque se trata de um tema transversal a diferentes faixas etárias, podendo, inclusivamente, ser adaptado a outras áreas disciplinares, onde a interpretação de tarefas tem, seguramente, a sua relevância.

Estrutura

Este relatório é composto por 6 capítulos, em que o primeiro é a Introdução, no qual se integra o objetivo e as questões de investigação, motivação e relevância do estudo e estrutura do próprio relatório. Seguidamente, apresenta-se um Enquadramento Teórico, onde é efetuada uma revisão de literatura, que contribuiu para um maior conhecimento das várias temáticas envolvidas nesta investigação. Segue-se o capítulo da Intervenção Pedagógica, com o intuito de contextualizar este estudo, referindo-se ao local onde se realizou a investigação, a sua duração e o seu papel na aprendizagem. No capítulo 4,

são descritas e fundamentadas as opções metodológicas tomadas na recolha de dados, mencionando os participantes e os instrumentos utilizados. Na secção seguinte, é efetuada a análise dos dados recolhidos, de uma forma aprofundada. Por fim, apresentamos as conclusões deste estudo, onde se procura dar respostas às questões de investigação.

Capítulo 2 - Enquadramento Teórico

Nesta secção, irei abordar aspetos de natureza teórica que contribuíram para compreender a problemática desta investigação. Sendo o objetivo deste estudo perceber as dificuldades que os alunos apresentam na interpretação de tarefas, importa conhecer os vários tipos de tarefas, em particular ao nível dos contextos que integram, e efetuar um levantamento de dificuldades de alunos na interpretação de enunciados já apontadas na literatura. Assim, serão tratados, neste capítulo, as seguintes temáticas:

- Tarefas matemáticas: tipologia e a sua relação com a aprendizagem
- Contextos das tarefas: realidade, semirrealidade e matemático
- Interpretação de enunciados de tarefas: desafios para os alunos

Todas as obras presentes nas referências bibliográficas foram um veículo importante para uma melhor compreensão destes temas, conduzindo-me a uma elaboração mais sustentada deste relatório.

2.1. Tarefas matemáticas: tipologia e a sua relação com a aprendizagem

As tarefas matemáticas são seleccionadas de um modo geral pelos professores e propostas aos alunos para que estes se envolvam na sua realização e, deste modo, propiciem o ponto de partida para o desenvolvimento da sua atividade matemática. Ponte (2005) refere no seu artigo as formas como estas tarefas podem surgir na aprendizagem e a sua relação entre professor e aluno:

A tarefa pode surgir de diversas maneiras: pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno, ser da iniciativa do próprio aluno e resultar até de uma negociação entre o professor e o aluno. Além disso, a tarefa pode ser enunciada explicitamente logo no início do trabalho ou ir sendo constituída de modo implícito à medida que este vai decorrendo. (p. 11)

Um professor, quando cria uma tarefa, tem como objetivo que os alunos possam mobilizar os seus conhecimentos e o seu raciocínio, de modo a encontrar um processo de resolução para a mesma. Como tal, a escolha de tarefas é algo que se apresenta como um desafio no trabalho do professor e que implica uma análise pormenorizada. Com este estudo, pretende-se compreender as dificuldades que os alunos apresentam

na resolução, em particular na interpretação, de tarefas criadas ou adaptadas pelo professor.

Antes de apresentarmos uma abordagem acerca dessas dificuldades, importa perceber as dimensões dessas tarefas e a forma como essas dimensões podem condicionar a sua interpretação. Segundo Ponte (2005), podemos admitir que uma tarefa tem quatro dimensões básicas: grau de desafio, grau de estrutura, duração e contexto.

Relativamente ao grau de desafio, este relaciona-se com a “perceção da dificuldade de uma questão e constitui uma dimensão desde há muito usada para graduar as questões que se propõem aos alunos, tanto na sala de aula como em momentos especiais de avaliação como testes e exames. Varia, naturalmente, entre os polos de desafio ‘reduzido’ e ‘elevado’” (Ponte, 2005, p. 17). Uma vez que pretendemos estudar as dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas, estas foram, em grande parte, de desafio elevado, ainda que o outro grau de desafio também tenha sido em conta.

No que diz respeito à sua estrutura, as tarefas podem ser abertas ou fechadas, variando da seguinte forma:

A uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas. (Ponte, 2005, p. 18)

Neste estudo, tivemos tarefas destes dois tipos, no entanto, houve um foco importante nas tarefas fechadas de grau de desafio elevado: os problemas. Iremos, assim, efetuar uma abordagem mais aprofundada sobre este tipo de tarefas, contudo, os exercícios (tarefas de desafio reduzido e estrutura fechada), as investigações (tarefas de desafio elevado e de estrutura aberta) e as explorações (tarefas de desafio reduzido e de estrutura aberta) também fizeram parte deste estudo, de modo a haver uma diversificação na seleção e articulação de tarefas. Ponte (2005) esquematiza estes quatro tipos de tarefa em quatro quadrantes, tendo em conta o grau de desafio e abertura:

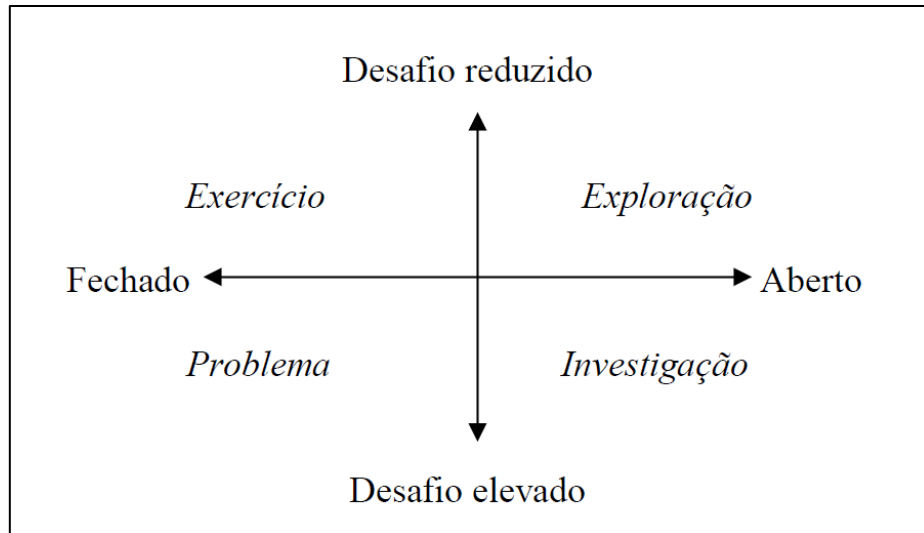


Fig. 1 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e abertura (p. 18)

O contexto das tarefas será uma dimensão tratada no ponto seguinte desta secção. No que diz respeito à duração, as tarefas podem ser de curta, média ou longa duração. Neste estudo, dada a sua tipologia já referida, foram realizadas algumas tarefas de duração curta – exercícios – e outras de duração média – problemas, tarefas de exploração e investigação.

Como referi, este estudo integrou várias tarefas de média duração, as quais procurei diversificar ao máximo, para que os alunos não dispersassem e tivessem sempre coisas diferentes para trabalhar. De facto, houve uma procura do investigador para que estas fossem de natureza distinta e desafiantes para os alunos, uma vez que estas são características das tarefas que aparecem, desde muito cedo, na aprendizagem de matemática:

Tarefas — A experiência matemática dos alunos desenrola-se a partir de tarefas, sendo essencial que estas sejam poderosas e desafiantes, com vista a cativar os alunos e impulsionar as suas aprendizagens. Importa considerar tarefas de natureza distinta, seleccionadas/adaptadas ou criadas de acordo com os objetivos a atingir, destacando-se as propostas que possibilitam que os alunos reconheçam a relevância da Matemática, focando-se na articulação com outras áreas de conhecimento ou com a realidade, usando a Matemática para compreender e modelar situações de diversos contextos, e tomar decisões informadas e fundamentadas. (ME, 2021, p. 6)

Deste modo, na planificação do ensino por parte do professor, é importante recorrer a diferentes tipos de tarefas, com vista a serem desenvolvidas as competências matemáticas de todos os alunos. Surge, assim, a necessidade da diversificação de

tarefas, já que, como Ponte (2005) menciona, “cada um destes tipos desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares:

- As tarefas de natureza mais fechada (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.
- As tarefas de natureza mais acessível (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança.
- As tarefas de natureza mais desafiante (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.
- As tarefas de cunho mais aberto são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. (p. 27)

De facto, torna-se importante diversificar as tarefas propostas aos alunos, com a vista a poderem ser analisadas todas as dificuldades que surgem na sua interpretação. No fundo, a articulação de vários tipos de tarefas permite um ensino mais equilibrado e interessante para os alunos.

Cabe, assim, ao professor articular os vários tipos de tarefas e selecionar aquelas que têm as características ideais para cada aluno. Torna-se fundamental que estas tenham as condições ideais para a aprendizagem dos alunos:

É preciso que as tarefas, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática. É preciso fazer escolhas, estabelecer um percurso balizado por tarefas que permitam trabalhar de modo natural os diversos aspetos de conteúdos e de processos visados pelo professor. (Ponte, 2005, p. 28)

Em suma, toda esta complexidade que envolve as tarefas faz com que os alunos procurem métodos diferentes para a sua interpretação e resolução, bem como permite que eles efetuem um maior número de conexões e possam desenvolver o seu raciocínio. No fundo, a diversificação de tarefas possibilita que estas se adaptem ao nível de desempenho de cada aluno. No que diz respeito ao docente, esta diversificação

leva a que o professor tenha de tomar várias decisões quando faz a sua seleção e elaboração, para que o seu objetivo com as tarefas possa ser atingido em todos os alunos. Todo este processo foi um grande desafio enfrentado, para que pudesse analisar, da forma mais aprofundada, as dificuldades que surgem nos alunos, nomeadamente, na sua interpretação.

2.2. Contextos das tarefas: realidade, semirrealidade e matemático

Outra dimensão que tivemos presente ao nível da seleção de tarefas, para este estudo, foi o seu contexto, uma vez que pretendemos compreender se este tem, ou não, implicações nas dificuldades dos alunos na interpretação dos seus enunciados. O contexto de uma tarefa pode ser entendido como o “universo conceptual associado a cada tarefa, que pode remeter para um campo da vida quotidiana, do qual o aluno pode ter maior ou menor experiência pessoal, ou remeter apenas para o universo matemático” (Ponte & Quaresma, 2012, p. 199). Como tal, o contexto escolhido cria uma relação de proximidade ou afastamento com o aluno, pelo que desempenha um papel fundamental nas tarefas.

Quando falamos em contextos das tarefas, falamos de três em específico: o contexto da realidade, da semirrealidade e matemático. Nas extremidades desta dimensão, encontramos as tarefas que se enquadram em contextos reais e aquelas que são puramente matemáticas. Para além destas, devemos considerar uma dimensão intermédia entre estas duas, a semirrealidade, que “não se trata de uma realidade que ‘de facto’ observamos, mas uma realidade construída” (Skovsmose, 2000, p. 8). Ponte (2005), tendo por base o artigo de Skovsmose (2020), faz também uma referência a este contexto, referindo que está muito presente nos problemas e exercícios de Matemática, devido à forma como as situações reais são consideradas:

Embora aparentemente estejam em causa situações reais, para o aluno estas podem não significar grande coisa. Além disso, a maior parte das propriedades reais das situações não são tidas em conta. A atenção foca-se apenas na propriedade ou propriedades que interessam a quem enunciou o problema e é nelas que o aluno é suposto centrar-se. Por isso, para o aluno, acaba por ser um contexto quase tão abstrato como o contexto da Matemática pura. (p. 20)

Nesta investigação, em algumas das tarefas, foram abordados contextos da realidade com os alunos envolvidos, com o objetivo destes se sentirem familiarizados com o que lhes era proposto. Desta forma, foi tido em conta o que foi referido por Ponte & Quaresma (2012) no seu artigo: “as situações que constituem pontos de partida para a aprendizagem da Matemática devem fazer parte da realidade dos alunos” (p. 200).

Os autores fazem, ainda, uma referência ao modo como o contexto real permite que os alunos consigam desenvolver relações e estratégias matemáticas, percebendo que o raciocínio matemático deve estar presente em situações do seu dia-a-dia:

o uso de situações contextualizadas é fundamental para servir de base à própria aprendizagem da Matemática. Não são todas as situações que se prestam a este papel, sendo preciso identificar para cada tema e conceito matemático o que podem ser as situações mais favoráveis para promover o respetivo desenvolvimento. (Ponte & Quaresma, 2012, pp. 201-202)

Também Ponte (2005) refere no seu artigo a importância da realização de tarefas em contextos reais, pela forma como aproxima os alunos dessas mesmas tarefas:

Para que os alunos se apercebam do modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos é fundamental que lhes seja proposta a realização de tarefas enquadradas em contextos da realidade. (p. 27)

O Programa para a Avaliação Internacional dos Alunos, PISA (OCDE, 2004), salienta que a necessidade que surge aos alunos de traduzir situações ou problemas de forma que evidencie a relevância e utilidade da Matemática lhes permite “ganhar experiência neste processo de reconhecer o potencial desta ciência para lidar com as situações e problemas da vida diária” (Ponte & Quaresma, 2012, p. 204).

O PISA apresenta, ainda, algumas especificações no que diz respeito a tarefas relativas a situações/ contextos reais:

- situações pessoais – relacionam-se diretamente com as atividades em que os alunos se envolvem no seu dia-a-dia;
- situações educacionais ou profissionais – aparecem na vida de um aluno na escola, ou num local de trabalho;
- situações públicas relacionadas com a comunidade local ou alargada – exigem que os alunos observem alguns aspetos do seu ambiente;

- situações científicas – são mais abstratas e podem incluir o entendimento de um processo tecnológico, de uma situação teórica ou um problema matemático explícito. (Ponte & Quaresma, 2012, p. 205)

As três primeiras estão mais direcionadas para contextos reais e permitem, de facto, que os alunos as associem a diferentes situações do seu quotidiano. Por sua vez, as situações científicas adequam-se mais a contextos de semirrealidade ou, mesmo, matemáticos. Iremos, de seguida, abordar estes dois.

A semirrealidade aparece nas tarefas em situações que não fazem parte da vida diária, levando a que os alunos pensem de forma diferente do que pensariam num contexto real. Este contexto surge em problemas de aplicação e exercícios típicos de matemática: “trata-se de uma situação artificial, inventada para levar o aluno a praticar certos conhecimentos, e não uma situação da realidade diária do aluno. A grande maioria dos exercícios e problemas dos manuais escolares são deste tipo” (Ponte & Quaresma, 2012, p. 204).

Este tipo de contexto recorre a exemplos abstratos, que não fazem sentido existirem na realidade, mas que a sua adaptação a situações não reais permite trabalhar conceitos e processos matemáticos diferentes que não são possíveis de trabalhar tão bem em contextos reais. Por exemplo, no seu artigo, Ponte & Quaresma (2012), utilizam uma situação em que dois feirantes vão comprar 15 quilos de maçãs (algo não muito comum), para que os valores obtidos e os procedimentos realizados pelos alunos possam ser distintos de uma situação real:

Um feirante A vende maçãs a 0,85 € o quilograma. Por sua vez, o feirante B vende 1,2 kg por 1,00 €. (a) Que feirante vende mais barato? (b) Qual é a diferença entre os preços cobrados pelos dois feirantes por 15 kg de maçãs?

A esmagadora maioria dos alunos nunca viu diretamente um feirante a vender maçãs. Quantidades como 15 kg de maçãs, não se vendem habitualmente ao quilo, mas sim em embalagens fechadas, que aliás podem ter dimensões variadas, e cujo peso está pré-definido. Muitas vezes, os preços variam quando está em jogo comprar 1 ou 2 kg de maçãs ou quantidades como 15 kg. (pp. 203-204)

No que diz respeito às tarefas de contexto matemático, entende-se por aquelas que incluem questões e atividades matemáticas que se referem à matemática e somente a ela. Estas surgem de uma forma mais natural nos livros e exercícios. O PISA (OCDE, 2004) faz uma referência a este tipo de tarefas, que muitas vezes originam a que conceitos sejam lecionados sem qualquer ligação à realidade, mas que são igualmente

importantes para desenvolverem a sua prática de resolução de tarefas e os procedimentos e processos utilizados:

os alunos praticam os algoritmos da aritmética, os processos de resolução de equações e questões envolvendo relações e propriedades geométricas, sendo os problemas formulados de tal modo que é bastante óbvia qual a técnica matemática a usar. Estas tarefas tendem a assumir um cunho bastante artificial e as questões envolvidas no uso da Matemática no mundo real não precisam de merecer grande atenção. (Ponte & Quaresma, 2012, p. 204)

Como tal, podemos ver que os diferentes contextos têm o seu papel na aprendizagem dos alunos e permitem uma diversificação nas tarefas que são propostas. Vem presente nas áreas de competências do PASEO na secção da informação e comunicação, que uma das capacidades dos alunos deverá passar por colaborar em diferentes contextos:

As competências associadas à informação e comunicação implicam que os alunos sejam capazes de (...) colaborar em diferentes contextos comunicativos, de forma adequada e segura, utilizando diferentes tipos de ferramentas (analógicas e digitais), com base nas regras de conduta próprias de cada ambiente. (Martins, et al., 2017, p. 22)

A forma como estas são diversificadas, ao nível do contexto, origina a que se possam trabalhar os vários conceitos matemáticos e os seus processos de resolução, a desenvolver conexões entre eles e com a realidade, bem como a fazer os alunos perceberem a importância que a matemática tem nas suas vidas. Esta dimensão possibilita criar tarefas interessantes, desafiantes e motivadoras para os alunos, bem como espelha, de uma forma mais abrangente, as dificuldades que vão surgindo:

As dificuldades referidas pelos autores, passam pelos professores não utilizarem problemas relacionados com a realidade presente no quotidiano dos alunos e trabalharem demasiado a ideia de memorização, de seguir exemplos e repeti-los e ainda descartar todo o processo de pensar no problema. (Martins & Martinho, 2018, p. 305)

Quando são abordadas situações do quotidiano em tarefas matemáticas surgem dificuldades nos alunos (Novriana & Surya, 2017). No seu estudo, estes autores analisam as dificuldades dos alunos e referem que estas são manifestadas devido à sua falta de imaginação e de prática em resolver estas tarefas, uma vez que as questões do quotidiano não são trabalhadas pelos professores com muita frequência. Uma outra análise de Ulandari et al. (2019) vai mais longe, referindo que a utilização de tarefas matemáticas baseadas em contextos reais na aprendizagem dos alunos melhora

substancialmente a sua capacidade de resolução de tarefas, tornando-os mais eficazes. Como tal, é importante serem consideradas tarefas de contexto real na aprendizagem dos alunos.

De qualquer modo, não são apenas os contextos mais próximos da realidade que devem ser considerados, mas, sim, haver um equilíbrio entre todos, em função do momento de aprendizagem de cada aluno. O professor deve ser capaz de analisar esses momentos e decidir qual é o mais indicado para cada situação, de forma o aluno poder sentir-se confortável em cada um deles:

é uma ideia errada pensar que todas as questões matemáticas têm de ser necessariamente formuladas em termos de realidade extra-matemática. As questões formuladas em contextos de realidade têm o seu papel, mas as questões formuladas em contextos de semirrealidade e em contextos matemáticos têm também um importante papel a desempenhar. (Ponte & Quaresma, 2012, p. 215)

2.3. Interpretação de enunciados de tarefas: desafios para os alunos

Analisadas as diferentes tipologias das tarefas e os seus contextos, temos, agora, uma base mais sustentada para poder enquadrar o objetivo deste estudo, pelo que este subcapítulo servirá para isso mesmo: abordar as dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas matemáticas.

Uma correta interpretação daquilo que é pedido numa tarefa permitirá encontrar um processo de resolução. Neste âmbito, e embora o nosso estudo envolva o trabalho de alunos não só com problemas, mas também com outro tipo de tarefas, parece-nos pertinente trazer para discussão o modelo de resolução de problemas de Polya (2003). Este autor definiu, assim, um modelo que contempla quatro fases na resolução de um problema, às quais estão associadas diversas heurísticas:

1. Compreensão do Problema: esta é a primeira fase de resolução de problemas de Polya (2003), na qual os alunos devem fazer uma interpretação correta dos dados e informações fornecidos, para que os possam utilizar corretamente nas fases seguintes de resolução. Citando Polya (2003), nesta fase, podem surgir as seguintes heurísticas:

- Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?
- Faça uma figura.
- Escolha uma notação adequada. Separe as várias partes da condição. É possível anotá-las?

2. Estabelecimento de um plano: nesta fase, deve-se tentar perceber se já conhecemos o problema, ou variantes dele, se conhecemos teoremas que podem ser úteis, se conhecemos métodos que já utilizámos noutros problemas, devemos considerar as incógnitas e dos dados fornecidos e perceber se estão a ser considerados corretamente, etc. Pode haver a necessidade de voltar a ler o enunciado. Coloco aqui algumas das heurísticas mais comuns nesta investigação, referidas por Polya (2003):

- Já viu o problema anteriormente? Ou já viu o mesmo problema apresentado de forma ligeiramente diferente? Conhece um teorema que lhe pode ser útil?
- É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.
- Consegue imaginar um problema relacionado com o problema original e que seja mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? Consegue resolver parte do problema?
- Utilizou todos os dados? Utilizou a condição na sua totalidade? Tomou em consideração todas as noções essenciais implicadas no problema?

3. Execução do plano: esta fase passa apenas por executar o que foi delineado na fase anterior. Segundo Polya (2003), surgem nesta fase as seguintes heurísticas:

- Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. Consegue ver, com clareza que o passo está correto? Consegue demonstrar que ele está correto?

4. Verificação: nesta fase, os alunos devem refletir sobre os resultados obtidos e interpretá-los no contexto do problema. Segundo Polya (2003), são estas as heurísticas que podem surgir nesta fase, as quais foram manifestadas na investigação:

- É possível verificar o resultado? É possível verificar o raciocínio? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema? (pp. 16-17)

Todas estas fases têm a sua importância na resolução de problemas, pelo que deve ser feita a conexão entre cada uma delas. Não obstante, Menina (2009), citando Polya (2003), realça que a base dessa resolução passa pela compreensão do problema. Nesta fase da resolução, devemos procurar responder às questões já apresentadas, de modo a percebermos o que os dados e a informação do enunciado nos podem fornecer para uma correta resolução ao problema.

A este propósito, Gazzoni & Ost (2008) apresentam, num estudo, resultados de uma resolução de uma tarefa resolvida pelo método de Polya (2003). Nesse âmbito, concluem que a primeira fase de resolução de problemas de Polya (2003) – compreensão do problema – facilita a organização das ideias e permite aos alunos compreenderem melhor aquilo que está a ser pedido na tarefa e a manifestarem as suas dificuldades.

A vantagem desta primeira fase é também mencionada por Silva Pontes (2019), que refere, no seu estudo, que é o ponto de partida para a resolução correta das tarefas e que as restantes fases serão tanto melhores quanto melhor for a sua interpretação:

A compreensão do problema é o ponto inicial do processo e se faz necessário que o aprendiz interprete o enunciado do problema e tenha vontade de resolvê-lo. (...) A execução do plano só será eficaz se todo o planeamento desde a sua compreensão até as estratégias a seguir forem realizadas plenamente. (p. 5)

Também Costa & Silva (2013) apresenta resultados sobre “A arte de resolver problemas”, de Polya (1978), no qual indica algo que representa bem a relação que a interpretação de problemas tem com a sua resolução: “para solucioná-lo precisarmos de mobilizar conhecimentos matemáticos já adquiridos e também devemos fazer uso de todos os dados presentes no problema e todas as condicionantes que farão parte do contexto do problema” (p. 6).

Nesta citação, torna-se evidente que os dados e as informações presentes devem ser tidos em conta, juntamente com a mobilização de conhecimentos matemáticos, para que deste modo possa ser concretizada uma resolução correta das tarefas.

Um estudo de Pearce et al. (2013) constatou que a leitura e compreensão dos problemas foi a dificuldade mais debatida pelos professores quando se referem às dificuldades dos alunos na resolução de tarefas matemáticas. Nessa investigação, uma professora, referiu que, em algumas tarefas, para as conseguirem resolver, “bastava os

alunos serem capazes de ler e compreender as palavras, o vocabulário, os termos dos problemas de matemática” (p. 10)².

O estudo de Novriana & Surya (2017) faz, também, referência a estas lacunas, acrescentando que os alunos se tornam incapazes de perceber qual é a informação importante da tarefa para ser recolhida e organizada. Podemos ver, ainda, uma análise das dificuldades dos alunos de 5º e 6º ano em tarefas matemáticas, efetuada por Phonapicha et al. (2014), que constata inúmeras dificuldades dos alunos em compreenderem as palavras-chave que aparecem nos enunciados e, consequentemente, de seleccionar os dados relevantes para resolver as tarefas.

Outros autores (Hadi et al., 2018) partilham destas ideias, mas vão mais além, referindo que estas dificuldades iniciais de compreensão do que é dado e do que é pedido num problema originam que os alunos não consigam realizar as conexões matemáticas necessárias para estabelecer um plano para a resolução da tarefa. Há, ainda uma referência para lacunas na definição da conclusão dos problemas e interpretação do resultado obtido. Assim, podemos ver, claramente, que as dificuldades de interpretação acompanham as várias fases da resolução de problemas (Polya, 2003).

É possível, então, observar que uma parte considerável das dificuldades na interpretação das tarefas surgem na primeira fase de resolução de problemas de Polya (2003). A compreensão das tarefas exige que os alunos questionem aquilo que é solicitado, que analisem os dados e as informações disponibilizadas no enunciado e os relacionem com aquilo que o problema pede, para que compreendam melhor como os devem utilizar. Nesta fase, surgem bastantes obstáculos, que, se não forem ultrapassados da forma mais correta, irão prejudicar as restantes fases de resolução e, consequentemente, levarão a uma solução errada do problema. Como tal, torna-se fundamental que os alunos sejam o mais eficientes possível na compreensão do problema, procurando distinguir o que é essencial do que é acessório.

Quando nos é proposta a resolução de uma tarefa, devemos fazer uma leitura faseada do seu enunciado, para que nos possamos familiarizar a essa tarefa e perceber as informações e dados que ele nos pode trazer para o problema pedido.

Um estudo realizado por Menina (2009) teve como objetivo compreender os momentos da resolução de tarefas onde ocorrem as dificuldades dos alunos e de que forma é que

² Tradução livre do autor. No original “*Just being able to read and comprehend the words, the vocabulary, the terms of the math problems*” (Pearce et al., 2013, p. 10).

elas se evidenciam. Nesse estudo, foram analisadas as origens das dificuldades que os alunos enfrentam no processo de resolução de tarefas e em que momentos isso acontece. O primeiro momento onde surgem as dificuldades é, exatamente, na interpretação:

Na interpretação – por exemplo, o aluno toma consciência da sua dificuldade em perceber o enunciado e não avança com um processo de resolução do problema, isto é, desiste; o aluno não tem consciência da sua interpretação incorreta ou deficiente, deturpa o problema dado e ensaia uma resolução, não respeitando o que é estabelecido ou o que é pedido. (Menina, 2009, p. 15)

Na minha visão, este é um grande desafio que os alunos enfrentam. A insegurança que revelam ao interpretar um enunciado leva-os, em diversas situações, a não avançar como pretendiam para os momentos seguintes, ou, mesmo, a desistir por não terem certezas das suas convicções. Cabe, assim, aos professores procurar estratégias com os alunos para que desenvolvam a sua interpretação, de forma a poderem combater essas inseguranças.

Podemos, então, observar que este estudo visa “conhecer e entender os principais obstáculos dos alunos no que diz respeito à capacidade de interpretar, de estabelecer e discutir ideias e estratégias e de comunicar, em termos da linguagem Matemática, no âmbito da resolução de problemas na aula de Matemática” (Menina, 2009, p. 15). A autora salienta que as dificuldades na interpretação do enunciado e da situação apresentada no mesmo se deve à forma como o professor não consegue tornar inteligível para os alunos a linguagem que usa no dia-a-dia aplicada num contexto matemático. Este poderá ser um dos motivos para que os alunos não interpretem corretamente o que é exposto numa tarefa:

Para o aluno, um conjunto de frases com uma determinada sequência, encadeamento e carregando múltiplas e variadas informações, poderá não ter exatamente o significado que se pretende ou se imagina e o texto poderá não fazer sentido para o aluno, por assim dizer. A linguagem que usamos no dia-a-dia aplicada num contexto matemático adquire um novo significado que nem sempre é familiar ou acessível ao aluno. Também a linguagem empregue pelo professor na sala de aula poderá não ser compreendida da mesma forma por todos os alunos. (Menina, 2009, pp. 74-75)

As diferentes interpretações linguísticas dos enunciados surgem, em muitas situações, pelo facto das palavras empregues pelo professor num determinado sentido matemático serem interpretadas pelos alunos como linguagem comum, o que gera algumas

incertezas dos alunos na sua interpretação. Também o contexto social e cultural de cada situação pode gerar uma interpretação díspar dos alunos, pelo que deve haver um cuidado do professor em adaptar-se às diferentes realidades dos alunos, o que nem sempre é fácil.

O professor introduz na aula um registo próprio e pessoal e cada indivíduo interpreta-o, num registo também próprio que nem sempre corresponde ao do professor e daí se percebe que existam muitas divergências entre o que é ensinado e o que é aprendido. Ao deparar-se com um problema, um aluno poderá não entender o enunciado se, por acaso, a situação colocada não se enquadrar dentro do seu repertório de experiências culturais e sociais. (Menina, 2009, pp. 75-76)

Como tal, Menina (2009) refere, nas conclusões do seu estudo, que as dificuldades, dos alunos, na interpretação dos enunciados se deveram a duas complicações distintas: interpretação do contexto do problema e interpretação do texto linguístico.

A interpretação do contexto das tarefas foi algo já referido aqui e também Menina considera que a sua dificuldade se prende com a “maior ou menor familiarização que os alunos têm com o que é sugerido, apresentado ou transmitido no problema” (Menina, 2009, p. 189). Como tal, esta dimensão das tarefas é algo que tem sempre de ser tida em conta pelos professores na elaboração de tarefas. Por sua vez, a interpretação linguística é um aspeto no qual os alunos, normalmente, revelam dificuldades por não perceberem o contexto matemático com que algumas palavras e/ou expressões são utilizadas:

Quando o resolvidor se depara com um problema que apresenta termos, expressões e códigos linguísticos deste tipo, tem de ser conhecedor do registo matemático em que tais referências são efetuadas. São termos que têm de ser interpretados, tendo em conta uma conotação e uma significação específica, própria da Matemática, com um significado que lhe é particular e que não se reduz a outra interpretação usual num contexto mais corrente. (Menina, 2009, p. 190)

A autora considera que as dificuldades que surgem na resolução de tarefas aparecem, de certa forma, interligadas, acabando por todas terem um papel decisivo nessa mesma resolução. Menina realça, ainda, que a interpretação das tarefas está ligada a todas as dificuldades, pelo que deve ser trabalhada, não só nas aulas de matemática, mas nas em todas as disciplinas, pois é o primeiro passo para superar as dificuldades que surgem:

não basta identificar, por exemplo, a interpretação como uma dificuldade, e treinar esta competência, isoladamente, nas aulas de Matemática ou pedir a ajuda ao professor de Língua Portuguesa para ultrapassar esta limitação. A interpretação de um problema faz parte de um todo indivisível e a progressão na resolução de problemas está dependente da compreensão conjugada de uma multiplicidade de componentes. (Menina, 2009, p. 195)

Para Menina (2009), os alunos revelam dificuldades na interpretação, quer na produção escrita, quer naquilo que é referido verbalmente. A autora refere que eles “fazem a sua própria interpretação do que é apresentado e esta nem sempre é consonante com o significado que se pretende no âmbito de um problema”. A autora conclui, através do seu estudo, que os alunos não articulam da forma mais eficiente as informações que os enunciados apresentam, sentindo imensas dificuldades em descortiná-las, principalmente por não estarem familiarizados com os diversos contextos que vão surgindo (Menina, 2009, pp. 206-207).

As dificuldades de interpretação de problemas matemáticos é, também, tema de um estudo realizado por Alves (2020), que teve por objetivo apresentar causas para os défices de interpretação textual, que, “como consequência, tem comprometido a resolução de situações-problemas de Matemática”, bem como “apresentar propostas interventivas interdisciplinares” para essas mesmas lacunas (p. 2). Este estudo envolveu alunos de 9º ano de escolaridade.

Esta lacuna na interpretação textual é uma temática, igualmente, abordada por Cagliari (2010). Nomeadamente, ele refere os entraves que um mau domínio da língua materna (neste caso, portuguesa) traz na interpretação e consequente resolução de tarefas matemáticas. Para Cagliari (2010), deveria haver uma melhor conexão entre os professores de matemática e de português, para que os alunos desenvolvessem as suas capacidades de interpretação, de forma a melhorarem o seu desempenho na resolução de problemas de matemática:

O aluno muitas vezes não resolve o problema de matemática, não porque não saiba matemática, mas porque não sabe ler o enunciado do problema. Ele sabe somar, dividir etc., mas ao ler um problema não sabe o que fazer com os números e a relação destes com a realidade a que se referem. Não adianta dizer que o aluno não sabe nem sequer somar ou dividir números que não apresentam dificuldades, que ele não entende matemática... Porque de fato ele não entende mesmo é o português que lê. Não foi treinado para ler números, relações quantitativas, problemas de matemática. O professor de língua portuguesa não ensina isso porque diz que é obrigação do professor de

matemática e o professor de matemática ou não desconfia do problema ou, quando muito, acha que ler e compreender um texto são um problema que o professor de língua portuguesa deve resolver na educação das crianças. (p. 130)

Para que houvesse esta conexão entre as disciplinas de português e matemática, Alves (2020) fez uma proposta interventiva, para que esta lacuna pudesse ser tratada logo no início do ano letivo:

Recomenda-se que, no início do ano letivo, o(a) professor(a) de Português e o(a) de Matemática realizem uma avaliação diagnóstica e em conjunto para identificar os entraves à interpretação – como desconhecimento lexical ou de estruturas gramaticais – e que também incentivem os alunos que, apesar de já interpretarem textos com certa facilidade, não o fazem sozinhos por medo de errar. (p. 15)

Esta foi umas das propostas que o autor procurou neste estudo, de modo que as dificuldades na interpretação dos alunos pudessem ser superadas. Segundo Alves (2020), é possível encontrar “soluções interdisciplinares para a superação das dificuldades de interpretação discente de situações-problema” (Alves, 2020, p. 19). Na sua ótica, a falta de domínio da língua materna é a causa inicial para que a linguagem matemática não seja interpretada da melhor forma, pois causa insegurança e incerteza nos alunos e impede-os de avançar: “o aluno precisa, primeiramente, interpretar na sua língua materna e, depois, converter para a linguagem matemática (Alves, 2020, p. 19).

De facto, a língua materna e a linguagem matemática aparecem sempre interligadas e carecem uma da outra para uma melhor compreensão e interpretação. São inúmeras as vezes que os desafios encontrados na interpretação de tarefas matemáticas são desafios de interpretação da língua portuguesa e da complexidade que esta apresenta. Deve partir dos professores implementar na sua aprendizagem a “perspetiva de que a Língua Portuguesa e a Matemática devem ser vistas por aspetos mais convergentes do que divergentes” (Alves, 2020, p. 20). Assim, um bom domínio de ambas só trará benefícios para os alunos e torna-se um desafio para os docentes das diferentes áreas incentivar os alunos a não desprezar nenhuma delas.

Esta dificuldade na interpretação linguística não se estende, apenas, à língua portuguesa. Os estudos já referidos (Novriana & Surya, 2017; Pearce et al., 2013; Phonapichat et al., 2014) revelam, também, que os bloqueios na interpretação de enunciados têm origem na forma complexa a nível linguístico como estes estão escritos.

Um outro estudo de Mesquita (2013) com alunos do 4º ano de escolaridade, visou compreender as dificuldades dos alunos na leitura de textos institucionais, tendo em vista a resolução de problemas matemáticos. A autora menciona a relevância dos enunciados matemáticos, que “aparecem com muita frequência durante a aprendizagem dos alunos na área da Matemática, com o objetivo de desenvolver a capacidade de resolução de problemas e de observação do mundo e dos seus problemas noutra perspetiva” (Mesquita, 2013, p. 18). De facto, este é um tema transversal a qualquer faixa etária e o facto de ser iniciado logo no ensino básico possibilita que os alunos possam desenvolver, desde cedo, as suas capacidades de interpretação.

Tal como os outros autores já mencionados, Mesquita (2013) refere que “para uma correta resolução de um problema, o aluno deve ser capaz de interpretar corretamente o enunciado” (p. 23). Na sua visão, a criação de hábitos de leitura desde cedo nos alunos é um veículo importante nessa interpretação:

a criação de hábitos de leitura poderá proporcionar atitudes de persistência no trabalho de leitura, no conhecimento de uma gama mais diversificada de vocabulário no desenvolvimento da comunicação oral e escrita, bem como na interpretação/compreensão de enunciados matemáticos. (Mesquita, 2013, p. 23)

Na sua investigação, a autora procurou que os alunos encontrassem diferentes estratégias na interpretação dos enunciados, com vista a que considerassem a forma mais benéfica de compreenderem o que era proposto. Esta escolha permitiu ajudá-los a resolver as tarefas propostas. Foram utilizadas as seguintes estratégias (Mesquita, 2013):

- sublinhar todos os dados presentes no enunciado e apresentar os dados;
- sublinhar todo o texto, após a leitura e a interpretação do enunciado;
- sublinhar apenas os dados de escrita fonográfica e logográfica e organizar numa caixa. (pp. 81-83)

Destas, a primeira tornou-se a mais eficaz, na medida em que originou uma maior taxa de sucesso e demonstrou “a existência de um maior cuidado durante a leitura e interpretação do enunciado”, permitindo que “a aluna fizesse um exercício de reflexão sobre todo o processo de interpretação e de resolução do problema” (Mesquita, 2013, p. 84). Efetivamente, todo este cuidado na interpretação possibilita um rigor maior na

resolução da tarefa, acrescido ao facto de proporcionar aos alunos uma reflexão sobre o que lhes é pedido:

a reflexão, sendo um fator externo, é importante para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, isto é, através da reflexão o aluno consegue perceber os seus erros e, também, adaptar a sua estratégia de interpretação e resolução de problemas. (Mesquita, 2013, p. 79)

Deste modo, verifica-se que a interpretação de enunciados matemáticos ajuda os alunos a construir todo o seu pensamento e raciocínio matemático, bem como os “auxilia na escolha do processo de resolução mais adequado ao problema em questão” (Mesquita, 2013, p. 84), conduzindo a um maior sucesso nas suas resoluções.

Também Nunes (2017) realizou uma investigação sobre a interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas em alunos de 5º ano de escolaridade, procurando “detetar dificuldades que os alunos sentem na leitura de textos instrucionais, não se focando na sua resolução, mas sim na compreensão do processo utilizado para interpretar o que era pedido e o raciocínio que utilizou” (p. 1).

Ela também refere várias questões linguísticas que estão na origem das dificuldades de interpretação. Segundo a autora, o domínio da língua portuguesa, a forma como as palavras surgem encadeadas numa frase, a estrutura sintática das frases e o contexto dos enunciados são os fatores principais para que os alunos possam fazer uma melhor interpretação do que é pedido nas tarefas:

para reconhecer o significado de um enunciado, ou seja, para compreendê-lo, torna-se necessário apelar a um conjunto de estratégias que levam a uma análise rápida e automática, não consciente, desse mesmo enunciado. (...) Ao possuímos em memória itens lexicais, regras de organização das palavras em frases (regras sintáticas), ou seja, conhecimento implícito da língua, conseguimos compreender, estruturar, refazer e até interpretar o significado de enunciados. (Nunes, 2017, p. 11)

Para que pudesse atingir o objetivo da investigação, Nunes (2017) criou tarefas e analisou os seus resultados, tendo verificado algumas conclusões que outros autores aqui referidos observaram:

- o sucesso escolar em Matemática envolve competências específicas da Matemática assim como da língua portuguesa, pois a interpretação de enunciados exige um conhecimento da língua;

- a releitura de um texto é fundamental no desenvolvimento da interpretação do aluno;
- os contextos em que cada tarefa se enquadra interferem no processo de interpretação dos enunciados matemáticos;
- a reflexão dos alunos sobre a interpretação dos enunciados após a resolução de problemas permite uma melhor compreensão e resolução das tarefas, uma vez que os alunos “ao serem levados a refletir sobre a interpretação dos enunciados, os alunos procuram identificar os fatores conducentes ao seu insucesso”. (p. 56)

Através da sua investigação, Nunes (2017) verificou que não é acessível a grande parte de os alunos “selecionar o essencial dentro de um todo vasto e detalhado” (p. 58), o que lhes prejudica na sua interpretação e consequente resolução de tarefas. Também alguns fatores externos, como o excesso de confiança (induzindo o aluno ao erro), a distração ou o nervosismo, estão na origem das dificuldades dos alunos na interpretação dos enunciados matemáticos, levando, mesmo, à ausência de interpretação e consequente insucesso na resolução das tarefas.

A autora destaca, ainda, a importância da compreensão linguística dos alunos para que estes sejam mais capazes de interpretar o que lhes é pedido nas tarefas:

Por último, pretendo destacar a principal conclusão deste estudo que aponta claramente para a transversalidade da língua portuguesa na aprendizagem de outras matérias, a que não é alheia a própria matemática, que apesar de recorrer a uma linguagem simbólica e específica, os seus enunciados tornam-se tanto mais compreensíveis quanto maior é o grau de compreensão linguística do aluno. (Nunes, 2017, p. 60)

Todos estes autores e as suas visões e investigações permitiram que o meu conhecimento acerca deste tema se alargasse e me inspirasse e motivasse ainda, transpondo algumas das suas ideias para esta minha investigação.

Como síntese análise destes temas e destes estudos, torna-se evidente que a interpretação de tarefas está interligada à forma como estas são selecionadas e estruturadas, pelo que foi fundamental fazer um enquadramento teórico onde pudesse ficar claro as suas tipologias, os seus contextos e o seu papel na aprendizagem. Este conhecimento prévio permite que a identificação e a análise dos desafios e dificuldades dos alunos sejam mais aprofundadas. Importa realçar que foram considerados estudos de vários anos de escolaridade, que demonstram que estas dificuldades surgem desde

cedo e são comuns a todos os anos, pelo que deve haver um trabalho dos professores dos vários anos e disciplinas, no sentido de ajudarem os alunos a superar essas dificuldades.

Para finalizar, penso que não podia estar mais de acordo com uma frase de uma das autoras, que referiu que “a compreensão e a interpretação devem ser os pilares fundamentais de uma aprendizagem ativa e motivadora, ajudando os alunos a superarem as suas dificuldades” (Nunes, 2017, p. 61).

Capítulo 3 - Intervenção pedagógica

Nesta secção, irei fazer uma breve caracterização do contexto escolar em que se desenvolveu toda a intervenção pedagógica, em particular da turma e do grupo de alunos que participou na presente investigação. Será, também, elaborada uma descrição desta intervenção e da sua organização ao longo do tempo. Haverá uma caracterização das tarefas, sendo explicitados os seus objetivos e as opções tomadas, indicando como foram recolhidas evidências dos alunos durante a PES e as interações que houve com eles. No final, irei fazer uma breve reflexão fundamentada sobre a adequabilidade desta intervenção e eventual reformulação para uso futuro.

O estudo realizado surge no âmbito da unidade curricular Investigação e Prática Profissional, desenvolvida durante o 2º ano do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário.

Este estudo realizou-se no contexto da Prática de Ensino Supervisionado (PES), que decorreu numa escola secundária da área metropolitana do Porto, fundada no século XX. Esta escola está integrada num agrupamento que inclui 4 escolas do mesmo concelho. A população escolar deste agrupamento é composta por 7 turmas do pré-escolar, 18 turmas do 1º ciclo, 12 turmas do 2º ciclo, 28 turmas do 3º ciclo, 28 turmas dos cursos científico-humanísticos, 9 turmas do ensino profissional e 2 turmas de PFOL (português para falantes de outras línguas). O agrupamento tem, ainda, em parceria com o centro social do concelho, 2 turmas PIEF (B2+B3 e B3), uma turma EFA (B2+B3) e uma turma de competências básicas. Este possui, também, uma turma CTeSP de Desenvolvimento *Ágil de Software*, em parceria com o ISEP. O corpo docente é composto por 212 professores com média de idades de 55,6 anos

A PES decorreu durante o ano letivo 2021/2022, dividido em dois semestres. No seu desenvolvimento, tive a oportunidade de integrar um grupo de trabalho que envolveu o professor orientador e um colega do mestrado. Tivemos ao nosso encargo duas turmas: uma de 9º ano de escolaridade e uma de 11º ano de escolaridade.

A intervenção pedagógica foi desenvolvida entre 16 de fevereiro de 2021 e 5 de abril de 2021, na turma de 11º ano, na disciplina de Matemática A, do curso científico-humanístico de Ciências e Tecnologias. A turma escolhida é composta por 26 alunos, com idades entre os 16 e os 17 anos, sendo 9 do sexo masculino e 17 do sexo feminino. Há apenas dois alunos que possuem dificuldades que justificam medidas ao abrigo do Decreto-Lei nº 54/2018, de 6 de julho, na disciplina de Matemática A. É uma turma sem

retenções, quer no ano de escolaridade atual, quer em anos anteriores. Ao nível dos resultados no ano letivo anterior, todos os alunos obtiveram classificações positivas em todas as disciplinas, sendo que 11 alunos tiveram classificação final na disciplina de Matemática A igual ou superior a 18 valores. É uma turma bastante empenhada, interessada e participativa nas tarefas propostas na sala de aula e que revela, no geral, trabalho autónomo extra-aula. Por aquilo que pude observar na PES, estes alunos (mesmo os que possuem melhor desempenho) revelam algumas dificuldades de interpretação nos enunciados, aquando da realização das tarefas propostas sala de aula.

Para a realização deste estudo, foi selecionado um grupo de 10 alunos dessa turma. A descrição dos participantes de estudo e os critérios de seleção serão apresentados na secção que trata dos métodos e procedimentos de recolha de dados. Com o envolvimento deste grupo de alunos, procurámos, nesta investigação, compreender as suas principais dificuldades na interpretação de enunciados de tarefas e as respetivas causas, bem como se existe influência dos contextos das tarefas nessas dificuldades.

Com estes objetivos, foram propostas, a esses alunos, quatro tarefas que integraram diferentes contextos, de modo a possibilitar uma melhor compreensão das suas dificuldades na interpretação dos enunciados. Foram realizadas entrevistas com tarefas, gravadas em áudio, e recolhidas produções escritas dos alunos realizadas no âmbito da resolução de tarefas. Durante essas entrevistas, o professor ia questionando sobre a forma como eles estavam a interpretar o que era pedido e os alunos iam expressando as dificuldades e dúvidas que surgiam. Estas foram concretizadas em quatro semanas diferentes, como irei especificar de seguida.

Com vista a poder organizar os momentos de realização da recolha de dados, foi criado um grupo de *WhatsApp* com os alunos, de modo a facilitar a comunicação entre todos. Esta também foi uma forma de me adaptar a um meio de comunicação que estes alunos estão habituados a usar e, da parte deles, também se sentiram à vontade em comunicar através deste meio, ao utilizarem uma aplicação que usam diariamente na sua vida. Isso, por si só, trouxe-lhes uma motivação extra em participar, pois acabou por promover uma maior aproximação entre os participantes e o investigador.

As tarefas criadas são de natureza diversificada, no que diz respeito ao seu contexto, e incidiram sobre os temas de 11.º que estivemos a lecionar durante o ano letivo até à data de aplicação das tarefas: trigonometria, geometria analítica e sucessões. Estas tarefas envolveram diferentes contextos, de forma a permitir-nos compreender se esta dimensão assume, ou não, alguma influência nas dificuldades dos alunos ao nível da

interpretação dos enunciados. As três primeiras tarefas foram realizadas individualmente pelos alunos e a última em pares. No final, os alunos tiveram a possibilidade de fazer uma reflexão sobre a sua participação neste estudo, respondendo a um questionário simples, onde estavam presentes as questões de investigação.

Após analisar o horário destes alunos e em conversas com eles no grupo de *WhatsApp* já referido, concluímos que o melhor horário para a realização da recolha de dados seria durante a tarde de segunda-feira, após terminarem as aulas da manhã. Como tal, neste período, os alunos eram divididos de forma que se pudessem organizar nesse período. Cada aluno (ou par, na última tarefa) tinha entre 30 a 40 minutos para resolver a tarefa, conforme o horário que fosse mais conveniente a cada um nessa tarde. Dois dias antes da tarefa, esta divisão do horário era calendarizada no grupo de *WhatsApp* para que todos pudessem estar de acordo.

Foram, então, definidas as quatro segundas-feiras, entre 14 de março e 4 de abril, para a realização da recolha de dados deste estudo. A escola possibilitou que pudesse ser realizado numa sala que se encontrava livre no horário pretendido. Esta reuniu condições ótimas para tal, uma vez que era possível fazer a gravação das entrevistas, individualmente e em pares, sem ruído, e o professor/ investigador tinha, ainda, o quadro da sala, caso necessitasse de apoiar algum aluno na sua interpretação.

Iremos, agora, fazer uma caracterização de todas as tarefas propostas aos alunos, no âmbito da intervenção pedagógica, sendo explicitados os seus objetivos de aprendizagem e de que forma as observações, efetuadas pelo investigador durante a PES, contribuíram para a sua elaboração.

Todas as tarefas tinham uma indicação inicial, que referia que os alunos deviam fazer uma leitura cuidada do enunciado, para resolverem a tarefa. Acrescentava, ainda, que deviam justificar todos os procedimentos que efetuassem. De qualquer modo, o professor fazia sempre uma indicação a este aspeto, no início de cada tarefa, frisando que os alunos não estavam a ser avaliados e que as suas resoluções não iam ter nenhuma nota, mas, sim, iriam servir de elemento de análise para um estudo de investigação.

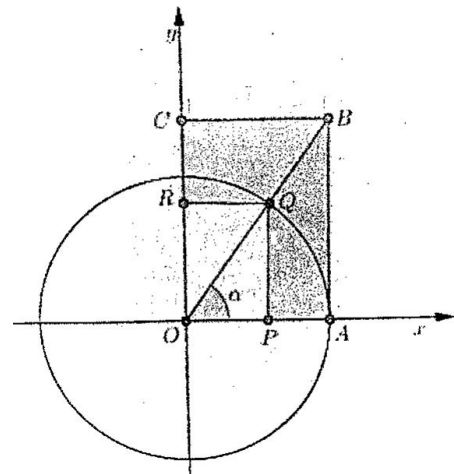
3.1. Tarefa 1

A Tarefa 1 foi realizada no dia 14 de março e abordou um tema que tinha sido desenvolvido nas aulas do primeiro semestre: a Trigonometria.

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. Na figura está representada, em referencial ortonormado e monométrico xOy , a circunferência trigonométrica e o polígono não convexo $[ABCRQP]$, representado a sombreado. Sabe-se que:

- O ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- O ponto B pertence ao primeiro quadrante e tem a mesma abcissa de A ;
- O ponto C pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de B ;
- O ponto P pertence ao segmento $[OA]$;
- O ponto Q pertence à semirreta OB e à circunferência e tem a mesma abcissa de P ;
- O ponto R pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de Q .



Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo POQ ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

- 1.1. Mostre que a área do polígono $[ABCRQP]$, representada a sombreado, é dada, em função de α , por $f(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha \times \operatorname{sen}^2 \alpha$.
- 1.2. Sabendo que $\cos(\pi + \alpha) = -\frac{3}{4}$, determine o valor exato de $f(\alpha)$.
- 1.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine, caso exista, as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção do gráfico da função f com o gráfico da função g , tal que $g(\alpha) = \cos \alpha$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora (**atenção à janela considerada**) que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido, **arredondado às centésimas**. Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Fig. 2 - Tarefa 1 – 14/03/22

Trata-se de uma tarefa com contexto matemático (Ponte, 2005; Ponte & Quaresma, 2012) constituída por três questões. A nível da sua tipologia, e tendo em conta o grupo de alunos a que se destinou, podemos considerar que pode ser classificada como problema (Ponte, 2005), por apresentar um grau de estrutura fechado e um grau de desafio elevado.

Relativamente aos objetivos de aprendizagem, pretendeu-se, com esta tarefa:

- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas funções trigonométricas $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$;
- Utilizar as fórmulas trigonométricas de “redução ao 1.º quadrante” e a fórmula fundamental da Trigonometria na resolução de problemas;
- Utilizar a tecnologia para fazer verificações e resolver problemas;
- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões;
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem. (ME, 2018, pp. 5-7)

Associado ao nosso objetivo de investigação, outro propósito da seleção desta tarefa prendeu-se com o facto do seu enunciado envolver diferentes suportes de informação – texto e gráfico. Esta opção deveu-se a observações que fui realizando durante a PES e que revelaram que um número significativo de alunos, perante tarefas com este tipo de enunciado, tinha tendência a focar-se apenas na figura, desprezando o resto da informação. Para além disso, era expectável que surgissem dúvidas nas expressões que surgiam no enunciado e seria importante fazer conexões.

3.2. Tarefa 2

A Tarefa 2 foi realizada no dia 21 de março e abordou um tema que tinha sido desenvolvido nas aulas do primeiro semestre e outro que estava a ser lecionado no momento da tarefa: Trigonometria e Geometria Analítica, respetivamente.

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. Considere, num referencial ortonormado no plano Oxy , a circunferência de centro na origem e raio 5 e os pontos A e B , dos quais se sabe que:

- A e B pertencem à circunferência;
- A pertence ao semieixo negativo das abcissas;
- B é um ponto do 1º quadrante.

Sabe-se ainda que a mediatriz de $[AB]$ é uma reta de declive -2 .

1.1. Para te apoiar na resolução das alíneas seguintes, faz um esboço de uma figura que podia fazer parte do enunciado da tarefa.

1.2. Determine uma equação reduzida do lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = 0$. O que representa essa equação?

1.3. Seja α a inclinação da reta AB . Qual o valor exato de $\sin \alpha + \cos \alpha$?

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

1.4. Determine as coordenadas do ponto B .

Fig. 3 - Tarefa 2 – 21/03/22

Trata-se, também, de uma tarefa com contexto matemático (Ponte, 2005; Ponte & Quaresma, 2012) constituída por quatro questões. A nível da sua tipologia, pode dizer-se que estamos perante um problema (Ponte, 2005), uma vez que o seu grau de estrutura era fechado e o grau de desafio elevado. Com a questão 1.1, procurámos integrar também um item com um carácter mais aberto.

Ao nível dos objetivos de aprendizagem, esta tarefa teve como propósitos:

- Reconhecer o significado da equação cartesiana reduzida da circunferência;
- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas funções trigonométricas $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$;
- Utilizar as fórmulas trigonométricas de “redução ao 1.º quadrante” e a fórmula fundamental da Trigonometria na resolução de problemas;
- Reconhecer e aplicar na resolução de problemas a relação entre a inclinação e o declive de uma reta no plano;
- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a noção de produto escalar, nomeadamente na definição de lugares geométricos;
- Estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos;-
- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões;
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem. (ME, 2018, pp. 5-7)

Neste caso, optámos por uma tarefa cujo enunciado envolve apenas um suporte de informação – texto –, embora a sua interpretação seja facilitada com a construção de uma figura. Deste modo, pretendíamos desafiar os alunos a produzir um gráfico que representasse as informações dadas no enunciado. O facto da trigonometria aparecer nesta tarefa, ainda que numa dimensão bastante reduzida, teve por objetivo proporcionar, aos alunos, uma situação que implica o estabelecimento de conexões entre diferentes temas matemáticos.

3.3. Tarefa 3

A terceira tarefa foi realizada no dia 28 de março, tendo sido abordado um tema que estava a ser lecionado naquele momento: as Sucessões. Trata-se de uma tarefa com contexto real (Ponte, 2005; Ponte & Quaresma, 2012) constituída por quatro questões.

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. O Gonçalo quer fazer uma viagem de finalistas com os amigos no 12º ano e, como tal, já começou a colocar dinheiro de parte para não ter de pagar um montante muito elevado de uma vez só. Para realizar a viagem, entrou em contacto com uma agência de viagens e turismo, a FEXIL TRAVEL, LDA, com a qual combinou um plano de pagamentos da viagem em prestações:



- Ficou acordado que no dia 1 de cada mês irá pagar por MBWAY uma prestação à agência;
- O pagamento das prestações irá começar já no próximo mês;
- No dia de natal e no dia de aniversário, o Gonçalo vai pagar mais uma prestação;
- Sempre que paga uma prestação à agência, aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final de agosto desse ano, já tinha pago 160€;
- No dia 2 de janeiro de 2023, já tinham sido transferidos para a agência um total de 418€;
- O Gonçalo já fez anos em 2022 e não foi nos primeiros dois dias de janeiro.

1.1. Qual o valor em euros que o Gonçalo transfere a mais de prestação em prestação?

1.2. Supondo que a viagem tem um valor total de 630€ e que terá de ser paga à agência 10 dias antes da partida, em que dia se vai realizar a viagem?

2. A Eva é amiga do Gonçalo e também quer participar na viagem, mas só se inscreveu no dia 15 de agosto e pagou logo 65€ nesse dia. Combinou com a agência que os seus pagamentos seriam sempre no dia 15 e que todos os meses pagava mais 10€ que no mês anterior. A agência informou que não ia fazer nenhuma alteração no preço e que o valor era o mesmo para os dois.

2.1. Define uma sucessão (v_n) por recorrência que traduza o problema e determina a expressão do termo geral dessa mesma sucessão.

2.2. Em que dia a Eva tem a viagem paga? A agência terá de fazer alguma devolução?

Fig. 4 - Tarefa 3 - 28/03/22

A nível da sua tipologia, e tendo em conta o grupo de alunos a que se destinou, podemos integrar esta tarefa também na categorização de problemas (Ponte, 2005), embora com a questão 2.2. se tenha procurado incluir aqui uma situação de cunho mais aberto.

Esta tarefa teve os seguintes objetivos de aprendizagem:

- Resolver problemas envolvendo sucessões monótonas, sucessões limitadas, sucessões definidas por recorrência, progressões aritméticas (termo geral e soma de n termos consecutivos);
- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões;
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem. (ME, 2018, pp. 5-7)

Com esta tarefa, pretendeu-se que os alunos interpretassem de forma cuidada todos os dados, que estavam distribuídos por dois enunciados. Os alunos teriam de ser capazes de relacionar os diferentes dados, de forma a interpretarem bem os enunciados e poderem resolver a tarefa. Ambos os enunciados tinham um suporte textual, tendo cada um com duas questões associadas. A decisão em colocar dois enunciados deveu-se a evidências que constatei na PES, na qual pude observar que existem alunos que, neste tipo de tarefas com mais que um enunciado, utilizam informações de enunciados anteriores em questões seguintes, quando estas são independentes e têm uma numeração distinta. Decidi realizar esta tarefa com um contexto real e adaptado a uma situação que pode ocorrer num futuro próximo das duas vidas: uma viagem de final de 12º ano. As situações reais que apareceram nesta tarefa podiam ser um mote para que as dificuldades na interpretação da soma e do termo geral de uma progressão pudessem ser superadas.

3.4. Tarefa 4

A última tarefa foi realizada no dia 4 de abril e abordou, novamente, um tema que estava a ser lecionado naquele momento: as Sucessões. A escolha deste tema deveu-se a, nessa semana que decorria, os alunos terem uma avaliação, na qual as progressões eram parte integrante da sua matriz. Trata-se uma tarefa constituída por quatro questões e que envolve diferentes suportes de informação – texto e tabela.

Embora com o mesmo grau de desafio, a tarefa envolveu situações de atividades profissionais adaptadas aos interesses de cada par. Apresento um desses enunciados (Fig. 5) como exemplo, os restantes serão apresentados em anexo (Anexo 5-9).

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

A Eva e o Gonçalo tiraram o curso de Personal Trainer e receberam propostas de dois ginásios, o NUNCA FOI GYM e o ANJOS SPORTS & FITNESS, respetivamente, que as convidaram para serem PTs dos seus estabelecimentos.

As empresas propuseram um contrato de um ano a começar no dia 1 de junho. Os vencimentos serão pagos no fim de cada mês. As condições de ambas as empresas podem ser observadas na seguinte tabela:

NUNCA FOI GYM	ANJOS SPORTS & FITNESS
• 500€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para os novos clientes de PT que angariarem – EVA15 - que lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebe qualquer bónus; • pelo primeiro cliente de PT que se inscrever com esse código recebe 5€; • por cada cliente seguinte que se inscrever com o seu código, recebe mais 15% do valor recebido pela inscrição anterior; • este código só poderá ser usado por 4 clientes por mês; • nos meses do natal e da páscoa, o seu código poderá ser usado pelo dobro dos clientes.	• 550€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para os novos clientes de PT que angariarem – GONÇALO10 - que lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebe qualquer bónus; • pelo primeiro cliente de PT que se inscrever com esse código recebe 5€; • por cada cliente seguinte que se inscrever através do seu código recebe mais 10€ do que o que recebeu pelo produto anterior; • este código só poderá ser usado por 4 clientes por mês; • nos meses do natal e da páscoa, o seu código poderá ser usado pelo dobro dos clientes.

1.1. Qual o bónus máximo, em €, que podem receber a Eva e Gonçalo até 30 de novembro?

1.2. Qual o salário máximo, em €, que podem receber até 15 de dezembro?

1.3. Qual será o salário anual, em €, que cada uma delas pode auferir, se, em cada mês, o seu código for usado por metade dos clientes que o podem fazer?

1.4. Qual das empresas oferece melhores condições? Justifica.

Fig. 5 - Tarefa 4 - 04/04/22

Dada a situação criada pelo investigador, o seu contexto era mais próximo da semirrealidade (Ponte, 2005; Ponte & Quaresma, 2012). De facto, esta tarefa, foi adaptada a uma situação relacionada com gostos/*hobbies* dos alunos, mas que não teria adequabilidade real temporal em relação ao momento que vivenciam.

A nível da sua tipologia, e pelo facto de apresentar um grau de abertura fechado e nível de desafio elevado, podemos, de um modo geral, classificá-la enquanto problema (Ponte, 2005). No entanto, a proposta da questão 1.4. foi pensada no âmbito de se constituir, para este grupo de alunos, um item de carácter mais aberto.

No que dizia respeito aos objetivos de aprendizagem, pretendia-se com esta tarefa:

- Resolver problemas envolvendo sucessões monótonas, sucessões limitadas, sucessões definidas por recorrência, progressões aritméticas e progressões geométricas (termo geral e soma de n termos consecutivos);
- Estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos e de outras disciplinas;
- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões;
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem. (ME, 2018, pp. 5-6)

Esta tarefa foi realizada a pares, pois considerou-se que a discussão entre pares no momento da resolução da tarefa poderia trazer uma melhor compreensão sobre as dificuldades de interpretação sentidas pelos alunos e seria uma boa forma dos alunos analisarem entre diferenças entre as progressões aritméticas e geométricas. Os pares foram formados de acordo com os interesses dos alunos, estando estes, por sua vez, presentes nas situações que envolveram as tarefas. Este conhecimento sobre as diferentes características foi possível através da observação que o investigador/professor efetuou durante a PES.

De forma a ficarem sistematizadas algumas das características das tarefas referidas, foi criada esta tabela:

Tarefa	DATA	CONTEÚDOS	CONTEXTO
1	14/03/2022	Trigonometria	Matemático
2	21/03/2022	Trigonometria + Geometria Analítica	Matemático
3	28/03/2022	Sucessões (progressões aritméticas)	Real
4	04/04/2022	Sucessões (progressões aritméticas e geométricas)	Semirreal

Tabela 1 - Caracterização das tarefas propostas

3.5. Considerações sobre a intervenção

Relativamente à adequabilidade para uso futuro, penso que todas estas tarefas têm boas características para serem aplicadas a alunos que frequentem o 11º ano de escolaridade. Não só permitem que os alunos desenvolvam as suas capacidades na interpretação de enunciados de tarefas, mas também que compreendam melhor alguns conceitos que, muitas das vezes, só os mecanizam. A meu ver, a realização deste tipo de tarefas possibilita que os alunos olhem para os conceitos matemáticos de outra forma, não os querendo apenas decorar/fixar, mas, sim compreendê-los e entender em que situações podem e devem ser utilizados.

Como ficou claro ao longo da descrição das tarefas, a PES teve um contributo importante na forma como as tarefas foram formuladas e selecionadas. As principais interações que ocorreram com os alunos e que deram um contributo para esta intervenção pedagógica foram, em grande parte, na sala de aula. A realização de tarefas durante as aulas, as intervenções dos alunos nas aulas lecionadas, as dúvidas que os alunos apresentaram (mesmo nas aulas em que não estava a lecionar), os momentos de avaliação e feedback dessas avaliações foram as interações principais que tive com os alunos durante o ano letivo e que contribuíram para o desenvolvimento desta investigação. As reações e dificuldades que os alunos foram apresentando ao longo das aulas e as quais tive oportunidade de observar, permitiram que criasse/selecionasse

tarefas adequadas às características dos alunos. O acompanhamento que fui efetuando a estes alunos, possibilitou identificar e prever dificuldades que poderiam surgir na interpretação das tarefas, contribuindo para uma melhor elaboração das mesmas. Confesso que não foi nada fácil criar algumas das tarefas: este trabalho constituiu um desafio bastante exigente que tive que enfrentar. Uma das formas de superar esse desafio passou por colocar-me na posição dos alunos quando procurava realizar a interpretação das tarefas que criava. O foco era construir tarefas cujo enunciado fosse claro, de modo a tornar exequível a sua realização e a não comprometer a recolha de dados. Deste modo, estas interações com os alunos durante a PES permitiram tornar evidente que este era um bom tema para o meu estudo.

Em suma, esta intervenção pedagógica constituiu um momento muito importante para este estudo e alavancou para que a metodologia e a análise de dados pudessem ser o mais completas possíveis e adequadas à investigação em causa. Os alunos que se disponibilizaram em participar deram um ótimo contributo a que o objetivo deste estudo pudesse ser atingido, possibilitando encontrar de respostas para as questões de investigação.

Capítulo 4 - Métodos e procedimentos de recolha de dados

Este capítulo servirá para descrever as opções metodológicas tomadas, apresentando o objetivo do estudo, os participantes e os métodos de recolha de dados. Estarão presentes os critérios de seleção, quer dos participantes, quer dos instrumentos de recolha de dados, o processo de análise de dados e serão explicadas como foram acauteladas as questões de natureza ética relevantes para o estudo realizado.

4.1. Opções Metodológicas

O presente estudo tem como objetivo conhecer dificuldades dos alunos, e respetivas causas, na interpretação de tarefas matemáticas de contexto diversificado. Para o concretizar, formulámos as seguintes questões de investigação:

- Que dificuldades manifestam os alunos na interpretação de tarefas matemáticas de contexto diversificado?
- Quais as causas dessas dificuldades?
- Que influências podem ter os contextos das tarefas nas dificuldades de interpretação dos alunos?

Partindo deste objetivo e procurando responder às questões de investigação que apresentámos, adotámos, neste estudo, uma abordagem de natureza qualitativa, dada a análise de carácter descritivo, interpretativo e naturalista dos dados recolhidos. Como argumentam Bogdan e Biklen (1994), uma investigação de natureza qualitativa possui cinco características que a definem:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
2. A investigação qualitativa é descritiva;
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;

5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (pp. 47-50)

Nesta investigação, o investigador foi o principal meio de recolha de dados, procurando que essa recolha fosse concretizada através do contato direto e pessoal com os sujeitos participantes no estudo (os alunos) inseridos no seu contexto natural (a sala de aula).

A escolha desta metodologia deveu-se ao facto de se quererem analisar as dificuldades de alunos que iam surgindo na realização de tarefas propostas.

Os dados foram recolhidos através de entrevistas, recolha documental e questionário, privilegiando-se dados que possuem um carácter descritivo. Esta opção esteve associada ao facto de se tratar de instrumentos de investigação que permitem “um conhecimento mais aprofundado do objeto de estudo na medida em que a recolha dos dados, predominantemente descritivos, é feita mediante o contacto direto com os sujeitos no seu contexto natural” (Caixeiro, 2014, p. 361).

Tendo em conta que, neste estudo, se procurou conhecer quais as dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de tarefas, bem como as suas causas, e compreender de que modo é que os contextos podem, ou não, influenciar essas dificuldades, o foco de interesse do investigador foi mais no processo do que no produto, o que demonstra o carácter interpretativo desta investigação.

Além disso, neste processo de recolha de informação procurou-se dar ênfase às perspetivas dos participantes e, a partir dos significados que estes atribuem, compreender o fenómeno em estudo.

4.2. Participantes

Dado o nosso contexto de atuação no âmbito da PES, para a realização desta investigação, tinha como possibilidade selecionar um grupo de alunos da turma do 9º ano ou da turma de 11º ano. Como já foi referido no capítulo anterior, optei por escolher a turma de 11º ano. Esta opção esteve associada ao facto de os alunos do 11º ano revelarem uma maior maturidade e autonomia, o que facilitaria a marcação dos momentos para a recolha de dados. Por outro lado, sendo uma turma já habituada a cooperar em outras atividades extracurriculares (Clube de Robótica, programa de mobilidade, entre outros), teriam uma atitude de maior abertura, envolvimento e

motivação na participação de um projeto deste género, facilitando assim a seleção de participantes para a presente investigação.

Assim, foi selecionado um grupo de 10 alunos, sendo 5 de cada género. Esta seleção foi feita de acordo com a análise ao longo das aulas da PES, onde tive em conta o aproveitamento na disciplina de Matemática A (com base nas classificações do 1º Semestre), de modo a constituir um grupo heterogéneo, e características mais ao nível da comunicação. Ou seja, procurei selecionar alunos que tivessem maior facilidade em partilhar a sua forma de pensar, em explicar as estratégias utilizadas na realização de tarefas. As notas destes alunos na disciplina de Matemática A, no final do 1º Semestre, variaram entre 9 e 20 valores. Esta diferença de classificações não impediu que alunos com menor aproveitamento tivessem colaborações iguais ou superiores, em relação aos alunos com melhor aproveitamento.

Por motivos de confidencialidade e proteção de dados, os nomes referidos dos alunos neste projeto foram nomes fictícios associados às primeiras 10 letras do alfabeto: António, Bruna, Carla, Eva, Diogo, Filipe, Gonçalo, Hugo, Inês e Joana. Tendo ainda presente as normas éticas de uma investigação e como já foi referido na secção anterior, todos os sujeitos envolvidos no estudo foram informados sobre os seus objetivos bem como os processos que este envolve. Deste modo, obtive o consentimento informado quer dos alunos participantes no estudo, quer dos respetivos encarregados de educação, através de um termo de autorização (Anexo 1).

4.3. Métodos de recolha de dados

A recolha de dados foi concretizada no 2º semestre do presente ano letivo (2021-2022) e recorreu aos seguintes instrumentos:

- Entrevistas com tarefas a alunos;
- Recolha de produções escritas dos alunos;
- Questionário a alunos (Anexo 10).

Vamos, agora, caracterizar cada um destes instrumentos e fundamentar a sua escolha.

Entrevistas com tarefas

Este estudo exigia que os dados recolhidos tivessem uma linguagem dos próprios alunos, para que o investigador pudesse compreender as dificuldades que eles expressavam (Bogdan & Biklen, 1994). O investigador esteve em contacto com estes alunos no 1º semestre da PES, na qual pôde ir observando as suas características, tendo, nomeadamente, realizado uma análise descritiva deles, no final do semestre. Assim, nos momentos em que as entrevistas ocorreram, o investigador já tinha algum conhecimento dos alunos, podendo-se adaptar a eles na condução das entrevistas.

Optou-se por entrevistas não-estruturadas (Mattos, 2005), uma vez que as questões iam surgindo naturalmente em função do trabalho realizado pelos alunos na realização das tarefas. Assim, este tipo de entrevista predominantemente informal pode ser considerado uma entrevista em profundidade, uma vez que proporcionou “um grande grau de liberdade no diálogo e profundidade na forma da abordagem temática por parte do entrevistado” (Carmo & Ferreira, 2008, p. 146), bem como da parte do investigador, permitindo-lhe aprofundar e clarificar a compreensão de situações que surgem no momento, proporcionando reações espontâneas dos alunos.

Sendo nosso propósito identificar dificuldades dos alunos, na interpretação de tarefas, considerámos que a melhor opção passaria por recorrer a entrevistas com tarefas, pois, para tal, teríamos que aceder ao seu pensamento. Estas, normalmente, não se focam em “resultados facilmente definidos, como padrões de respostas corretas e incorretas dos alunos. Em vez disso, o investigador deve registar e interpretar comportamentos complexos e padrões de comportamento, incluindo falas, palavras, interjeições, movimentos, escritas, desenhos, ações dos alunos, gestos, expressões faciais e assim em diante” (Goldin, 2020, p. 527). Neste sentido, através deste instrumento, procurámos que os alunos verbalizassem as suas ideias, permitindo-nos assim aceder e compreender os processos de raciocínio por eles utilizados.

Para além disso, a observação dos estudos de alguns autores (Alves, 2020; Menina, 2009; Mesquita, 2013; Nunes, 2017), pelas semelhanças que tinham com esta investigação, tiveram influência na decisão de fazer entrevistas tarefas com para este estudo.

As entrevistas com tarefas tinham a duração de cerca de 30 a 40 minutos para cada aluno. A sua gravação foi feita em áudio, utilizando o gravador de voz do computador ou do telemóvel do investigador. A escolha da gravação ter sido feita através de áudio e não de vídeo deveu-se ao facto de ter considerado que as gravações de vídeo não

traziam vantagens. Primeiro, a qualidade do áudio não seria tão boa, uma vez que, para se gravar a entrevista, a câmara não estaria tão próxima do aluno nem do investigador, logo o microfone estaria mais longe e não captaria os áudios com a mesma precisão. Depois, o facto de os alunos estarem de máscara não traria a vantagem de observar as reações que os alunos teriam durante as entrevistas, que seriam, claramente, mais limitadas, de maneira que o áudio seria suficiente.

Todas estas entrevistas foram realizadas de forma individual, à exceção da última, que foi realizada em pares. Ao longo das entrevistas, o aluno ia procurando resolver a tarefa proposta, partilhando com o professor/investigador o seu raciocínio e as suas dificuldades. O professor/investigador, por sua vez, ia validando aquilo que o aluno ia fazendo corretamente, solicitando quando necessário a verbalização do raciocínio utilizado. Quando o aluno cometia erros na resolução, o professor/investigador ia questionando o aluno de forma a compreender o seu raciocínio e, deste modo, proporcionar momentos de reflexão para que o próprio compreendesse o erro e conseguisse avançar na resolução da tarefa. Houve sempre uma preocupação do investigador em não baixar o nível cognitivo das tarefas, procurando sempre que os alunos ultrapassassem, por eles próprios, as dúvidas e dificuldades que iam surgindo.

Recolha das produções escritas dos alunos

No processo de recolha documental, entendemos como documento “todo o material informativo acerca de um determinado fenómeno que existe independentemente da ação do investigador” (Caixeiro, 2014, p. 384). Assim, optámos por esta técnica, em particular pela recolha de produções escritas efetuadas pelos alunos no âmbito da realização de tarefas, uma vez que, em articulação com os dados provenientes das entrevistas, permitiriam uma melhor compreensão do fenómeno em estudo. Tal como refere Cohen et al. (2007), as informações resultantes da recolha documental poderão constituir-se num elemento essencial, pois podem superar as limitações de uma observação, nomeadamente, ao nível do registo e interpretação de dados. Estas trazem, ainda, como vantagem a sua exclusividade (Moreira, 2007), já que o conteúdo dos documentos era relativo à produção escrita de cada aluno e não podia ser acedido por outro meio.

Neste caso, em particular, pretende-se que as produções escritas dos alunos possam complementar os dados recolhidos nas entrevistas com tarefas, sendo que é mais um meio de os alunos partilharem as suas ideias e os seus raciocínios, o que nem sempre conseguem fazer oralmente.

Houve, também, uma preocupação do investigador de que a “quantidade e diversidade de informação colhida exigia tempo e capacidade para ser transformada em dados pertinentes e capazes de sugerirem reflexões que ajudassem a responder às questões formuladas no estudo” (Caixeiro, 2014, p. 384), pelo que foram definidos quatro momentos para esta recolha de produções escritas dos alunos associadas à realização de tarefas.

Questionário

A última fase de recolha de dados passou pela proposta de um inquérito por questionário (Anexo 10), enviado aos alunos, no qual se solicitou, por escrito, ou através de áudio, a resposta às três questões de investigação.

No sentido de diversificar os instrumentos de recolha com os alunos e suscitar outro tipo de cooperação da parte deles, optou-se por fazer esta última recolha de dados através de interação não direta, neste caso, um questionário. Os alunos já tinham dado uma contribuição a esta investigação através de interações diretas (entrevistas com tarefas), nas quais podiam ser captadas as suas reações instantâneas na interpretação das tarefas. Não obstante, estas questões de investigação não eram propriamente questões matemáticas e exigiam um tipo de intervenção diferente dos alunos. A meu ver, estas careciam que os alunos fizessem uma reflexão ponderada e fundamentassem as suas reflexões. Pelas características dos alunos, que pude observar durante a PES e nas anteriores recolhas de dados, percebendo que necessitariam de algum tempo para pensar e refletir sobre estas questões, optei por lhes disponibilizar estas questões através de um questionário.

Assim, eles poderiam analisar as questões com mais tempo e responder a todas estas questões de uma forma ponderada. Aqui, não se pretendia tanto avaliar as suas reações e a sua espontaneidade nas respostas, mas, sim, uma ponderação. Deste modo, penso que este instrumento possibilitou que obtivesse uma análise mais aprofundada dos alunos acerca destas questões. Segundo Hill (2014), este é um questionário com apenas perguntas abertas, permitindo uma análise qualitativa dos dados.

Houve um cuidado do professor/investigador em esclarecer o que consistia cada uma das questões no próprio questionário, para que se tornassem mais inteligíveis para todos.

Capítulo 5 - Análise de Dados

Nesta secção, iremos analisar os dados recolhidos através dos diferentes instrumentos utilizados, com o objetivo de identificar dificuldades que os alunos manifestaram na interpretação das tarefas propostas, as suas causas e influências que os contextos das tarefas tiveram nessas dificuldades.

5.1. Tarefa 1

A primeira tarefa proposta aos alunos, no âmbito desta investigação, integrou o tema Trigonometria (Fig. 6).

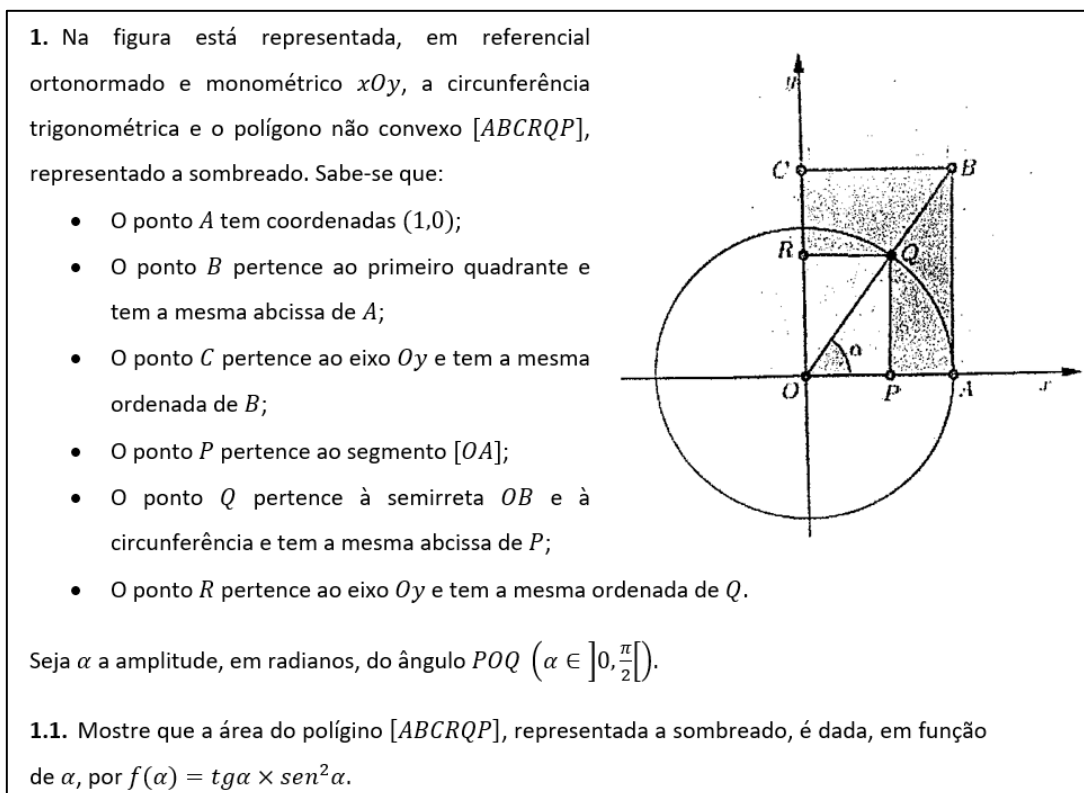


Fig. 6 - Pergunta 1.1 da Tarefa 1

No contacto inicial que os alunos tiveram com a Tarefa I, observou-se que alguns deles, enquanto faziam a leitura do enunciado, iam sublinhando informações e escrevendo, na própria imagem, dados que os apoiassem na sua interpretação, como ilustram as seguintes figuras, a título de exemplo:

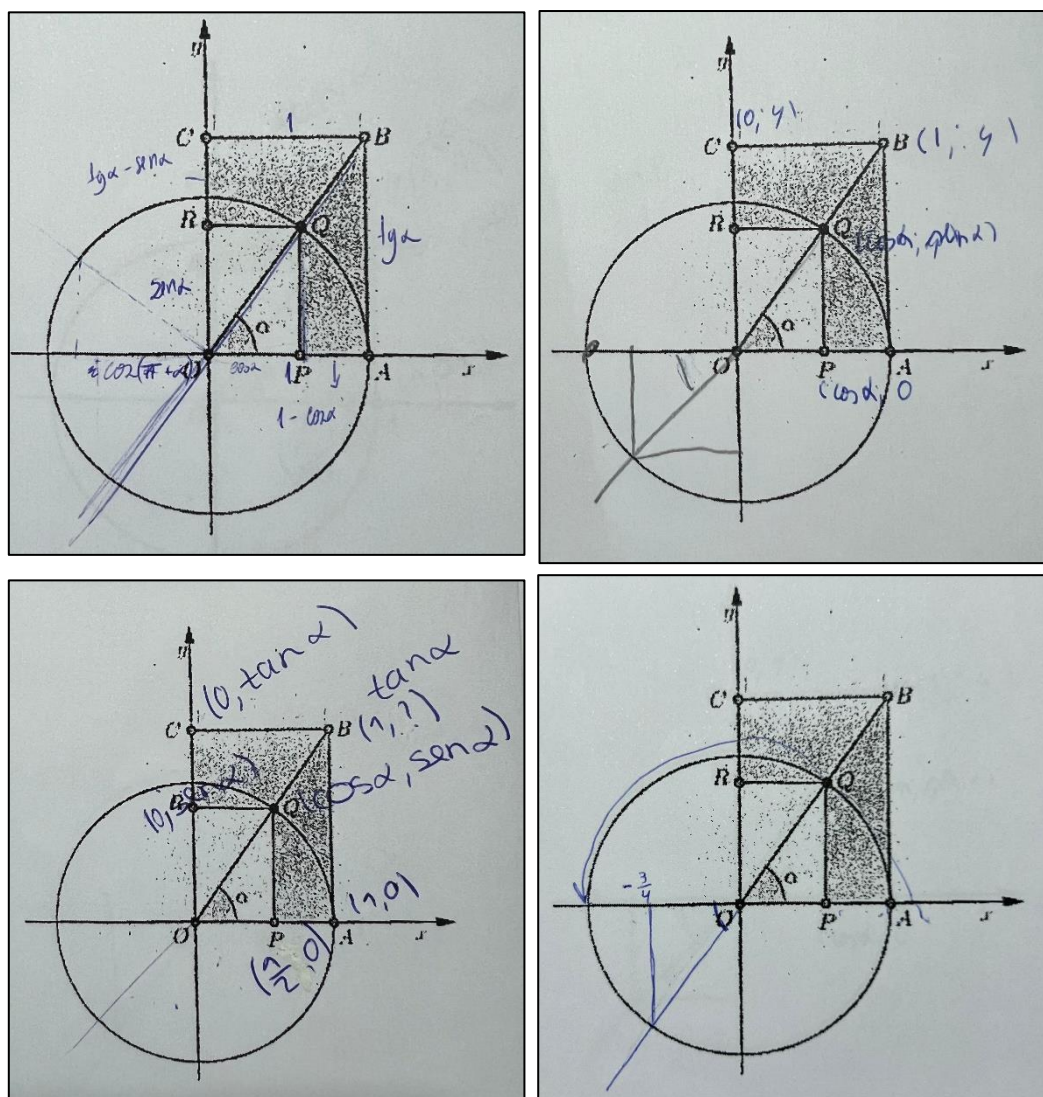


Fig. 7 - Esboços de alunos no enunciado da Tarefa 1

Neste âmbito, os registos dos alunos integraram aspetos que estão associados: a coordenadas de pontos em função de α ; identificação do eixo das tangentes; medidas de comprimento de segmentos de reta; prolongamento de segmentos de reta; e reduções ao primeiro quadrante.

Neste momento inicial, e tendo em conta o trabalho desenvolvido pelos 10 alunos na tarefa 1, observaram-se duas formas distintas de abordarem a tarefa:

Situação I – alguns efetuaram uma leitura rápida, olharam para a figura e foram diretos ao que pedia a pergunta e só depois voltaram a ler o enunciado com mais atenção;

Situação II – outros, logo na primeira leitura, foram registando os dados que o enunciado fornecia.

No caso dos alunos que efetuaram a abordagem apresentada na situação I, iremos apresentar as dificuldades que demonstraram. A primeira foi perceber o que a pergunta pedia. Pedir a área em função de um ângulo fez confusão para alguns alunos, pois nem todos compreenderam que a variação de α faz alterações na figura, como podemos ver neste exemplo:

Carla – Professor, isto é para fazer a área com que valores das medidas? Aqui diz “em função de α ”. Não temos de saber o ângulo?

Investigador – Consegues ter as medidas relacionadas com o ângulo que aí está?

Carla – Sim, professor. Mas como não sabemos o ângulo, se este valor mudar, as medidas que precisamos também mudam. Por isso é que não estou a perceber.

Investigador – Procura pensar em situações semelhantes que já fizemos. Não te lembras de nada relacionado com a trigonometria que possas usar aí?

Carla – Então, posso saber o seno, o cosseno... Ah, é isso que está aqui para mostrarmos!! Já percebi, professor, não estava a pensar direito. (Entrevista, Carla)

Uma vez que a figura a sombreado não era um polígono no qual era possível calcular diretamente a área, nem todos atingiram logo que figuras tinham de considerar para fazer a decomposição. O facto de estar redigido na pergunta que a área da figura era uma multiplicação ($tg\alpha \times sen^2\alpha$) fez com que alguns alunos interpretassem que haveria uma fórmula conhecida para calcular a área da figura. No entanto, com maior ou menor tempo, os alunos chegaram à conclusão que, para resolver a tarefa, poderiam subtrair o retângulo maior, $[OABC]$, ao retângulo que não estava sombreado, $[OPQR]$, como demonstra este excerto:

Bruna – Professor, é suposto chegarmos a esta fórmula como? Está aqui uma multiplicação no valor de $f(\alpha)$, mas esta figura não é uma multiplicação de duas medidas. Ou é?

Investigador – Bruna, não olhes já para a fórmula final. Tenta perceber como chegas lá, interpretando aquilo que te pede a tarefa. Está a pedir-te uma área, certo? Como é que chegas a essa área?

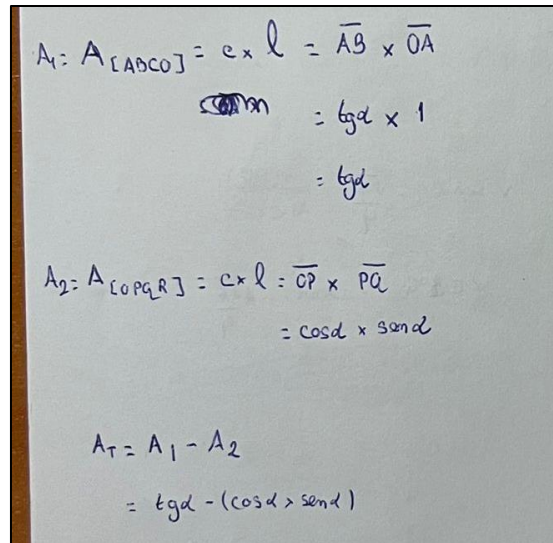
Bruna – Então, para saber desta região, deixe ver... Ah, posso subtrair este retângulo grande ao mais pequeno. (Entrevista, Bruna)

Após definirem um processo que lhes permitia determinar a área, era altura de olhar novamente para a figura e para o enunciado e identificar que medidas de comprimento eram conhecidas e quais teriam de ser calculadas. Como tal, surgiu aqui a dificuldade

de determinar as coordenadas dos pontos, nomeadamente as ordenadas de B e C . Quase todos os alunos, quando escreveram as coordenadas dos pontos na sua produção escrita, deixaram em branco as ordenadas de B e C , ou referiram-se apenas ao valor da ordenada como y . Aqui, alguns alunos mostraram-se esquecidos de algo que não estava representado na figura, mas que poderia ser assumido por se tratar de uma circunferência trigonométrica: o eixo das tangentes. O professor/investigador teve que lembrar o que representava o eixo das tangentes. Após isso, os alunos conseguiram perceber que a ordenada dos pontos B e C , em função de α , era dada por $\operatorname{tg} \alpha$, como podemos ver neste exemplo deste aluno:

Bruna – Professor, eu já sei que esta medida vai ser o y do B , mas não estou a perceber como chego lá. Não falta aqui nada?
 Investigador – Então, o que é que diz aí sobre o ponto B ?
 Bruna – Aqui só diz que tem a mesma abcissa de A , mas isso até é óbvio pela figura, pois estão na mesma reta.
 Professor – Exatamente, estão na mesma reta! Essa reta tem alguma particularidade?
 Bruna – Tem? Que eu me lembre não, isto só significa que todos os pontos têm abcissa 1, mas eu quero é saber o y ...
 [O professor fez um esboço da figura no quadro]
 Investigador – Então, repara aqui: esta reta não é conhecida?
 Bruna – Ah, isso é o eixo das tangentes, já me lembro!! Ou seja, nesse eixo vemos sempre o valor da tangente do ângulo.
 (Entrevista, Bruna)

Surgiu, ainda, outra dificuldade ao interpretar o resultado que o enunciado pedia. Os alunos estavam muito presos ao fim da tarefa e não conseguiam descobrir os procedimentos a serem feitos para lá chegarem, o que os levou a acharem que estavam a seguir os caminhos errados. A aluna referida na entrevista anterior fez a subtração das duas figuras e chegou ao passo da Fig. 8, originando o diálogo que se encontra a seguir:



$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_{[ABCO]} = c \times l = \overline{AB} \times \overline{OA} \\
 &= \text{tg} \alpha \times 1 \\
 &= \text{tg} \alpha \\
 A_2 &= A_{[OPQR]} = c \times l = \overline{OP} \times \overline{PQ} \\
 &= \cos \alpha \times \sin \alpha \\
 A_T &= A_1 - A_2 \\
 &= \text{tg} \alpha - (\cos \alpha \times \sin \alpha)
 \end{aligned}$$

Fig. 8 - Processo de resolução da Pergunta 1.1 de uma aluna incluída na Situação I (Bruna)

Bruna – Mas, ó professor, agora como é que vou passar de uma subtração para uma multiplicação? Oh, já percebi que isto está mal, vou apagar.

Investigador – Bruna, estás novamente a olhar para o fim da tua resolução. Pensa lá: essas fórmulas só podem ser escritas dessa maneira?

Bruna – Não... A única coisa que eu posso usar aqui é que o seno sobre o cosseno é a tangente. Mas o problema é que eu preciso da tangente para a resposta final, por isso não a posso tirar daqui...

Investigador – Bruna, já que não te consegues desprender da fórmula final, lembra-te como é que podes chegar ao $\sin^2 \alpha$ e talvez isso te ajude. (...)

Bruna – Isso significa que estou a fazer bem? É que achava que tinha de ir por outro caminho por causa do que está no fim.

Investigador – Sim, estás no bom caminho! (Entrevista, Bruna)

Na situação II, apesar dos alunos efetuarem um registo imediato dos dados enquanto liam o enunciado, trouxe dificuldades semelhantes, mas que surgiram por ordem distinta.

Primeiro, os alunos começaram logo por ir determinando as coordenadas dos pontos da figura, seguindo cada passo que o enunciado dava – basta ver que cada pontinho que aparece enumerado faz referência a um dos pontos da figura. Deste modo, surgiram logo as primeiras dificuldades, que coincidiram com a dificuldade já apresentada na situação I, associada à determinação das coordenadas.

De seguida, surgiu a mesma dificuldade a alguns destes alunos que surgiu em primeiro lugar nos alunos anteriores – o cálculo de uma área em função de α .

A terceira dificuldade na interpretação foi a mesma que os outros alunos no segundo momento. Todavia, houve um aluno que interpretou a figura de uma maneira distinta de todos os outros. O Hugo prolongou o segmento de reta $[RQ]$ até ao lado $[AB]$, obtendo um ponto de interseção, que denominou S . Deste modo, considerou a área pedida como a soma dos retângulos $[CBSR]$ e $[APQS]$. Ambas as formas permitiram aos alunos chegar ao mesmo resultado. Deixamos, aqui, a resolução desse aluno:

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 \\
 &= 1 \times (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha) + \operatorname{sen} \alpha \times (1 - \cos \alpha) \\
 &= \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\
 &= \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \times \operatorname{sen}^2 \alpha
 \end{aligned}$$

Fig. 9 - Resolução da Questão 1.1 de um aluno incluído na Situação II (Hugo)

Para além destas dificuldades das duas situações, não foi imediato para todos que se tratava de uma circunferência trigonométrica, apesar de estar referido logo na primeira frase do enunciado. Interpretada essa informação, houve, ainda, algumas dificuldades em perceber que as medidas de comprimento da base e da altura do retângulo $[OPQR]$ eram, respetivamente, $\cos \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$. Esta dificuldade surgiu, não só, por algum esquecimento desta matéria, mas também, por uma má interpretação da figura e dos dados, pois estavam à procura de valores em concreto e não em expressões em função de α , tal como indicava o enunciado.

Após superadas estas dificuldades, algumas delas com o feedback dado pelo professor, as informações do enunciado necessárias para a resolução da pergunta estavam interpretadas, pelo que as dificuldades que apareceram depois ocorreram nas fases seguintes da resolução. Observou-se que as dificuldades que aqui surgiram tiveram origem numa leitura pouco cuidada das informações do enunciado e na aplicação de algumas ideias matemáticas no âmbito da trigonometria, pelo facto de já estarem a lecionar outro tema nas aulas. Importante referir que as dificuldades ao interpretar o que era pedido implicaram a necessidade de mais tempo para concluírem a resolução desta questão. Nomeadamente, os alunos que leram o enunciado de uma forma rápida e pouco detalhada acabaram por demorar mais tempo a realizar esta questão. Isto deveu-se ao facto de terem ido diretos à pergunta 1.1. e só depois interpretarem o enunciado e as informações que este tinha.

Ainda em relação à Tarefa 1, em particular, na tentativa de resolverem a Pergunta 1.2 (Fig. 10), os alunos, ou porque não compreenderam o objetivo da questão, ou porque simplesmente não leram que era pedido o valor exato, procuraram descobrir qual seria o valor de α .

1.2. Sabendo que $\cos(\pi + \alpha) = -\frac{3}{4}$, determine o valor exato de $f(\alpha)$.

Fig. 10 - Pergunta 1.2. da Tarefa 1

Para tal, utilizaram a calculadora gráfica e tentaram descobrir esse valor. O valor calculado pareceu-lhes estranho, o que pude constatar através dos diálogos que surgiram no momento da realização da questão. Como foram semelhantes entre os vários alunos, apresentamos um exemplo:

Eva - Devemos arredondar o ângulo com quantas casas decimais?

Investigador - Lê novamente a pergunta. Fala em arredondamentos?

Eva - Não, mas aqui na máquina...

Investigador - De certeza que já leste outra vez a pergunta? Lê em voz alta que talvez ajude.

Eva - Sabendo que o cosseno de pi mais alfa é menos três sobre quatro, determine o valor exato... ah, já tenho aqui o valor do cosseno, é só ir à expressão. (Entrevista, Eva)

Outra dificuldade que surgiu foi na redução ao primeiro quadrante. Alguns alunos, por terem mecanizado este procedimento, realizaram isto de forma incorreta. O investigador apercebeu-se que um dos alunos estava a cometer um erro e interpelou-o:

Investigador - Filipe, de onde é que surgiu esse $\sin \alpha = \frac{3}{4}$?

Filipe - Então, professor, usei a fórmula do pi mais alfa, que quando é cosseno passa a seno. (...) Como somamos pi, fica no terceiro quadrante, por isso é que se está negativo passa a positivo.

Investigador - Certo, mas mudaste para seno porquê?

Filipe - Pelo que me lembro das aulas, quando trabalhava aqui neste eixo, isto mudava a razão... Ou era no outro? Sinceramente, já estou confuso.

Investigador - Tenta não decorar o que aprendeste, mas, sim, perceber o que significa. A medida que corresponde ao cosseno de alfa numa circunferência trigonométrica é a medida da abcissa ou da ordenada?

Filipe - Então, o cosseno, como é o cateto adjacente, é a medida da abcissa. Ora neste caso, o cosseno fica negativo... Ah, pois, aqui o cosseno mantém-se. Quando estamos a somar pi meios é que troca. (Entrevista, Filipe)

Nesta produção escrita do aluno, podemos notar que o Filipe tinha feito uma interpretação incorreta da redução ao primeiro quadrante, riscando o que tinha feito mal. Isto deveu-se a uma tentativa de se recordar da fórmula, ao invés de compreender o conceito lecionado nas aulas.

Handwritten student work for question 1.2:

$$\textcircled{1.2} \cos(\pi + \alpha) = -\frac{3}{4}$$

$$\cos(\pi + \alpha) = \cancel{\cos \alpha} = -\frac{3}{4} \quad (=) \quad \cancel{\sin \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad (=) \quad \cancel{\cos^2 \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha \quad (=) \quad \cancel{\cos^2 \alpha} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\cancel{\cos^2 \alpha} = \frac{7}{16} \quad (=) \quad \cancel{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{7}{16}} \quad (=) \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$f(\alpha) = \tan \alpha \times \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} \times \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{7}}{3} \times \frac{7}{16} = \frac{7\sqrt{7}}{48}$$

Fig. 11 - Resolução do Filipe da Questão 1.2

Houve, ainda, alunos que revelaram dificuldades em perceber o sinal do $\sin \alpha$, após a utilização da fórmula fundamental, tal como indica este excerto:

Joana – Professor, agora cheguei aqui ao seno e tenho uma solução negativa e uma positiva. Como o pi mais alfa está no terceiro quadrante, então aqui vamos escolher o valor negativo para o seno, não é?

Investigador – Sim, o pi mais alfa está no terceiro quadrante. Mas é o seno desse ângulo que estás a tentar determinar?

Joana – Ah, pois. Aqui é o alfa! Então é o positivo que vou escolher. (Entrevista, Joana)

Deste modo, foi perceptível que um enunciado curto também pode trazer dificuldades. Como é tão curto, os alunos acham que é algo de resposta quase imediata e olham para a tarefa como um exercício, quando, na verdade, se trata de um problema. Uma leitura mais cuidada da informação dada no enunciado permitiu que interpretassem melhor o que era pedido e levou a que conseguissem resolver a tarefa.

A última questão desta tarefa – Pergunta 1.3 (Fig. 12) – foi resolvida apenas por 7 alunos, uma vez que não tiveram tempo suficiente para terminar por terem demorado bastante tempo a interpretar e a resolver as duas questões anteriores. Esta situação mostra que uma má interpretação do enunciado, por si só, pode comprometer o tempo necessário à resolução de uma tarefa. Aqui, verificou-se que os alunos que optaram por

não ler detalhadamente o enunciado na primeira fase (Situação I) foram os que não tiveram tempo de chegar a esta questão.

1.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine, caso exista, as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção do gráfico da função f com o gráfico da função g , tal que $g(\alpha) = \cos \alpha, \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora (**atenção à janela considerada**) que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido, **arredondado às centésimas**. Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Fig. 12 - Pergunta 1.3. da Tarefa 1

Os alunos que chegaram a esta questão interpretaram bem o primeiro ponto que era pedido e apresentaram facilmente a equação correta. Já no segundo ponto, conseguiram colocar corretamente as funções na calculadora gráfica, no entanto, surgiram algumas dúvidas a partir daí, como mostra o excerto seguinte:

Carla – Ó professor, tenho aqui uma dúvida: eu já consegui inserir as expressões na máquina e agora tenho de descobrir um ponto de intersecção. Mas não me aparece nenhum ponto de interseção.

Investigador – Certo. Não diz nada aí a negrito para te ajudar?

Carla – Sim, a janela. Mas é demasiado pequena.

Investigador – Que janela achas que podes usar?

Carla – Ah, se isto está entre zero e pi meios, tenho de mudar isso na janela.

Investigador – (...) Mas atenção a outra coisa: a tua máquina está em graus ou em radianos?

Carla – Em graus... Ah, pois, isto tem de ser em radianos, não é?

Investigador – O que é que achas?

Carla – Pois, isto agora já é diferente já. Obrigado!! (Entrevista, Carla)

Aqui podemos visualizar algumas dificuldades da aluna ao analisar o que estava escrito no enunciado. Nestas tarefas em que os alunos têm de recorrer à calculadora gráfica, eles não prestam muita atenção a pequenos pormenores que fazem toda a diferença na compreensão do que é pedido. Um desses pormenores é o domínio, que indica qual a janela de visualização, e a unidade em que se encontra a máquina em termos de amplitudes de ângulos, que faz mudar completamente as representações gráficas de

funções trigonométricas. Estas indicações, apesar de estarem referidas e, até, destacadas, foram elementos que alguns alunos desprezaram, criando dificuldades na interpretação da questão e consequente resolução.

Nesta última pergunta, destaco a forma como um dos alunos interpretou o que era pedido (Fig. 13), escrevendo, na sua resolução, o que estava a fazer e de que maneira estava a pensar. A meu ver, tornou muito mais inteligível a forma como compreendeu a tarefa, quer para ele próprio, quer para o professor, pelo que uma interpretação detalhada da tarefa originou uma resolução correta. Nota-se que leu atentamente aquilo que estava escrito no enunciado.

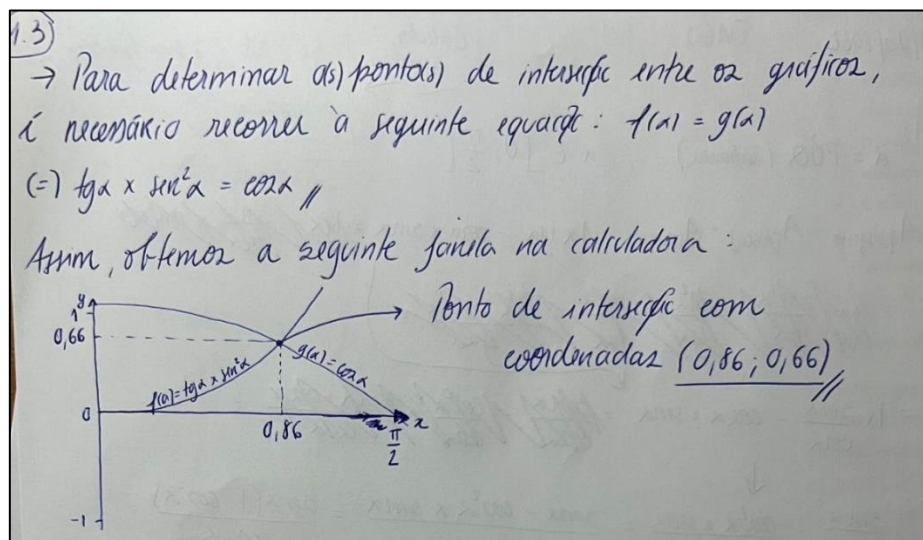


Fig. 13 - Resolução do Filipe da Pergunta 1.3. da Tarefa 1

5.2. Tarefa 2

A segunda tarefa proposta tinha um contexto matemático, na qual foram abordados dois temas lecionados no primeiro semestre: a Trigonometria e a Geometria Analítica. Esta tarefa podia incluir já uma figura, no entanto, com a Pergunta 1.1 (Fig. 14), houve claramente a intenção de desafiar o aluno a construir uma figura ilustrativa do enunciado da própria tarefa.

- 1.** Considere, num referencial ortonormado no plano Oxy , a circunferência de centro na origem e raio 5 e os pontos A e B , dos quais se sabe que:
- A e B pertencem à circunferência;
 - A pertence ao semieixo negativo das abcissas;
 - B é um ponto do 1º quadrante.
- Sabe-se ainda que a mediatriz de $[AB]$ é uma reta de declive -2 .
- 1.1.** Para te apoiar na resolução das alíneas seguintes, faz um esboço de uma figura que podia fazer parte do enunciado da tarefa.

Fig. 14 - Pergunta 1.1. da Tarefa 2

Na abordagem a esta tarefa, houve, inclusive, alunos que começaram a retirar informações do enunciado e a fazer um esboço apenas ao ler o enunciado, antes de chegarem à Pergunta 1.1. Revelaram, pois, que têm a prática de interpretar o enunciado, passo a passo, e ir tirando os dados que nele estão presentes, antes de chegar às questões propriamente ditas.

Pela análise dos dados, uma das dúvidas que se observou esteve associada à dificuldade de interpretação do conceito de circunferência, no entanto, a aluna conseguiu esclarecer a sua dúvida praticamente sozinha. Aqui o papel do professor/investigador foi questionar a aluna, de modo a levá-la a refletir sobre as suas ideias, como mostra o diálogo seguinte:

Bruna – Professor, quando diz que os pontos pertencem à circunferência, podem estar em qualquer lugar da circunferência? Ou é só à volta?

[O professor/investigador olhou para o enunciado, para perceber se tinha cometido algum erro na sua elaboração e leu-o em voz alta com a aluna]

Investigador – Então, isso diz que pertence à circunferência. O que significa pertencer à circunferência?

Bruna – É estar dentro da circunferência.

Investigador – O que significa isso?

Bruna – Estar dentro significa pertencer ao círculo... ah, pois é! Circunferência e não círculo! (Entrevista, Bruna)

Este exemplo, foi uma situação comum a outros alunos. Outra adversidade passou por interpretar o que seria a mediatriz de $[AB]$. Alguns alunos não se recordavam do significado de mediatriz, houve quem dissesse que era “o meio da reta” (Entrevista, Gonçalves) ou que era “o ponto médio” (Entrevista, António). Outros não leram bem o que estava lá escrito e assumiram que era a reta $[AB]$ que tinha declive -2 , como ilustra o

seguinte excerto:

Investigador – Qual é a particularidade desta reta [mediatriz de [AB]]?
 Inês – É perpendicular.
 Professor – Sim, mas a quê?
 Inês – O produto escalar entre a reta e a sua mediatriz é igual a zero.
 Professor – (...) Como deves representar então?
 Inês – Pois, então, neste caso, é a mediatriz que tem declive negativo, por isso vou emendar o esboço que fiz. (Entrevista, Inês)

Uma situação que emergiu esteve associada à identificação das coordenadas do ponto A. Como se pode constatar com exemplo da Joana, vários alunos representaram as coordenadas do ponto A por $(-x, 0)$. A este propósito partilha-se uma breve discussão exemplificativa da situação:

Investigador – Joana, esse esboço está completo?
 Joana – Acho que sim, Professor. Já meti tudo o que me davam no enunciado.
 Investigador – De certeza? Não há nenhum ponto que saibas as suas coordenadas?
 Joana – Não. O B sei que está no primeiro quadrante, mas o A só sei que está aqui. [apontando para o ponto que se encontrava na circunferência, no semieixo negativo das abcissas, mas sem nenhum valor marcado]
 Investigador – Pois, e aí, qual é o valor de x ?
 Joana – Ó professor, isso aqui não diz.
 Investigador – Lê novamente, mas desde o início.
 Joana – O raio, ah, nem vi isso. Assim já tenho mais uma informação, obrigada! (Entrevista, Joana)

Depois deste episódio, a Joana reformulou as coordenadas do ponto A, colocando o valor da abcissa. Uma vez mais, esta dúvida, que outros alunos tiveram, deveu-se ao facto de desprezarem informação que estava explícita no enunciado.

Sendo uma questão que exigia a construção de uma figura que complementasse o enunciado da tarefa, apresenta-se a análise de alguns casos exemplificativos das situações que surgiram.

O caso que apresentámos refere-se a uma das alunas que começou por registar os dados do enunciado sem ler a questão que pedia o esboço (já anteriormente descrito). Ao fazê-lo, decidiu de imediato desenhar uma circunferência e um referencial representativos daquilo que estava no enunciado. Ainda assim, inicialmente, não leu corretamente o que estava escrito, uma vez que não colocou os pontos A e B de forma

adequada, baseando-se apenas na informação da reta de declive -2 . Após um breve diálogo (já apresentado), a aluna conseguiu identificar o que não tinha sido bem interpretado, corrigindo a sua construção ilustrada na Fig. 15.

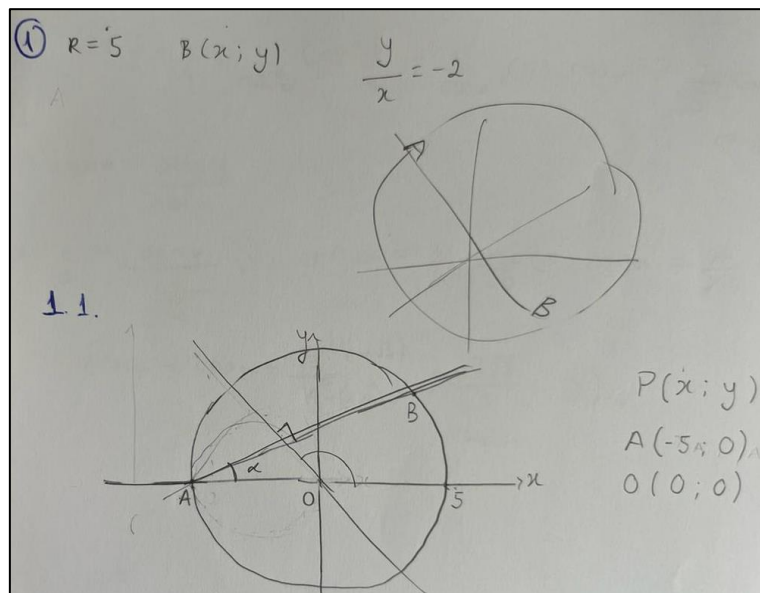


Fig. 15 - Esboço da Inês da Pergunta 1.1. da Tarefa 2

No exemplo da construção da Fig. 16, o aluno teve o cuidado de o fazer o mais perfeito possível, utilizando régua e compasso. As informações foram todas bem interpretadas, à exceção da última. Apesar de ter construído uma figura coerente com os dados, procurou calcular as coordenadas do ponto B, considerando que o declive apresentado se referia à reta AB e não à sua mediatriz.

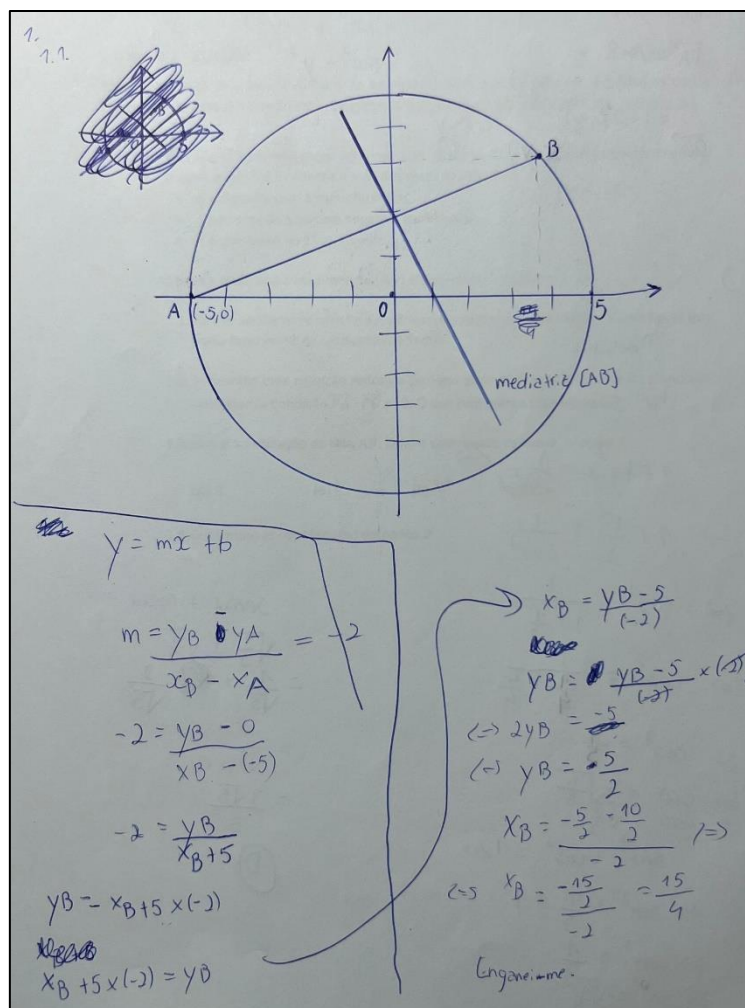


Fig. 16 - Esboço do Diogo da Pergunta 1.1. da Tarefa 2

O professor/investigador não deu indicações de que estivesse errado, tendo sido o próprio aluno, ao resolver as questões seguintes, a aperceber-se que não tinha lido corretamente o que estava escrito. Para que este, erro pudesse ficar visível, o professor indicou ao aluno que não rasurasse os cálculos, pelo que o aluno escreveu no canto “Enganei-me”, após ter percebido o erro.

A resolução do Filipe revela, claramente, que o aluno concretizou uma boa interpretação, incluindo na sua construção todos os dados fornecidos no enunciado.

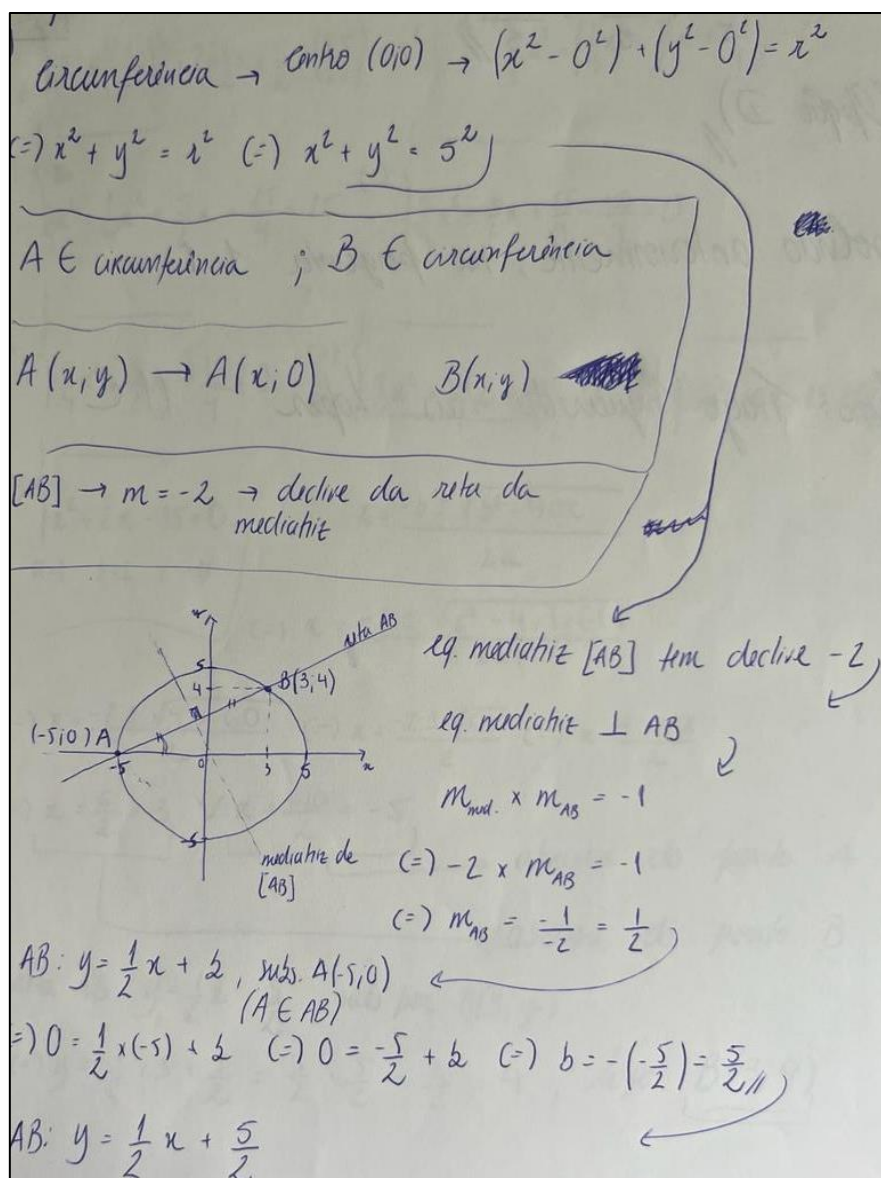


Fig. 17 - Esboço do Filipe da Pergunta 1.1. da Tarefa 2

Ainda mais, fê-lo apenas pelo que estava escrito no enunciado, sem sequer ler as perguntas da tarefa. Esta situação foi partilhada pelo próprio aluno:

Filipe – Ah, mas temos mesmo de fazer o esboço da figura?

Investigador – Sim, é o que pede na pergunta 1.1.

Filipe – Ah, é que eu estava a fazer mesmo para interpretar o problema. Nem tinha chegado a essa parte. Eu aqui a fazer cálculos, frases, tudo e afinal não é isto que está a pedir. Vou ter de riscar tudo?

Investigador – Pelo contrário, Filipe. Tudo o que estás a fazer vai ser útil para a tarefa. Continua e não risques nada. (Entrevista, Filipe)

Depois deste diálogo e de acordo com o que já tinha sido feito, o Filipe quis fazer a pergunta 1.1 o mais completa possível. Como tal, fez questão de representar a reta AB graficamente e determinou a sua expressão algébrica. Como logo no início da sua interpretação, escreveu a equação da circunferência referida, aproveitou para calcular, também, as coordenadas do ponto B . Assim, para além de ter uma figura com toda a informação no enunciado e outros dados que calculou, sem se aperceber, realizou quase todas as questões da tarefa. Obviamente que esta figura tem demasiada informação para ser parte do enunciado de uma tarefa, no entanto, o Filipe fê-lo por querer ter a certeza que estava a fazer tudo corretamente. Deste modo, a sua completa interpretação do enunciado fez com que fosse o mais rápido e eficiente a realizar a tarefa. Não penso que isto tenha sido por acaso, pois o Filipe é um aluno que trabalha bastante e reconhece que uma interpretação completa de toda a informação fornecida no enunciado de uma tarefa é uma mais-valia para chegar a um processo de resolução correto.

Uma vez mais, as origens das dificuldades que surgiram nesta questão deveram-se a leituras pouco cuidadas e incompletas dos enunciados e a erros de compreensão associados a conteúdos matemáticos específicos, como foi o caso do conceito de circunferência. O contexto, sendo matemático, mas tendo sido algo que os alunos não têm por hábito realizar, enquanto tarefa – construir uma figura ilustrativa de um enunciado –, trouxe aos alunos um novo desafio e que eles se mostraram motivados para enfrentar. Alguns comentaram que este tipo de tarefa os ajudou a compreender melhor o seu enunciado.

A segunda questão desta tarefa (Fig. 18) tinha o objetivo de os alunos compreenderem o significado geométrico de uma circunferência, relacionando-o com o produto escalar:

1.2. Determine uma equação reduzida do lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = 0$. O que representa essa equação?

Fig. 18 - Pergunta 1.2. da Tarefa 2

Dada a complexidade dos conceitos desta pergunta, surgiram algumas dificuldades na sua interpretação. A primeira passou pela interpretação linguística. As expressões “lugar geométrico” e “pontos P do plano” geraram logo alguma estranheza, pois os alunos ficaram sem perceber a que se referia. Ao que o professor procurou dar algum apoio, como demonstra o seguinte excerto:

Diogo – Qualquer ponto? Como assim, Professor? Por x e y ?
 Investigador – Isso! Então quais são as coordenadas do ponto P?
 Diogo – Ah, sim. O ponto tem coordenadas x e y .
 Investigador – E o que é que vem a seguir relacionado com o P?
 Diogo – Então, se o produto escalar entre os vetores é zero, há dois vetores que passam por P que são perpendiculares. É isso?
 Investigador – Sim, e isso é o que dá origem a um lugar geométrico, que têm de perceber qual é. Ou seja, o ponto P pode estar aqui, não pode? E aqui?
 [O investigador, neste momento, utilizou o quadro da sala para explicar ao Diogo onde é que podia estar o ponto P.]
 Diogo – Então o ponto P pode estar nesses lugares todos, desde que forme um ângulo de 90 graus. É isso?
 Investigador – Sim! E estes pontos todos juntos dão origem a quê?
 Diogo – Não sei... Não é uma circunferência, pois não?
 Investigador – Talvez... Agora que já interpretaste geometricamente, tenta fazê-lo de forma algébrica que possivelmente consegues responder à pergunta que fizeste. (Entrevista, Diogo)

Percebida a questão de que o ponto P teria coordenadas (x, y) , os alunos, no geral, calcularam bem o produto escalar, chegando a uma expressão que lhes era estranha:

$$x^2 + 5x + y^2 = 0$$

Aqui, surgiu a dificuldade de perceber o que representava esta expressão, como aliás demonstra este diálogo:

Diogo – Ó professor, isto não fica assim? Já não chegámos ao que queríamos?
 Investigador – O que é isso que obtiveste?
 Diogo – É uma fórmula resolvente... Ah, não, tem aqui um y .
 Investigador – Nesse caso, isso não é uma equação?
 Diogo – Sim, é uma equação reduzida. Não é isto que pede a pergunta?
 Investigador – Sim, mas só pede isso? Se a pergunta só pedisse para determinar uma equação reduzida, já estava terminada. Mas o que pede mais?
 Diogo – Sim, pede para dizer o que representa. Ah, pois é, agora que olho para o quadro faz sentido! É uma circunferência. Mas isto não me dá o centro nem o raio, pois não? (Entrevista, Diogo)

Após esta questão, que surgiu, não só com o Diogo, mas com quase todos os alunos, o professor lembrou no quadro como se completava o quadrado, uma vez que a interpretação da pergunta já estava feita pelos alunos. Isto serviu-lhes de apoio para perceberem exatamente que circunferência se tratava. No final, uma das alunas referiu:

Carla – Ah, pois! É a circunferência que está no meio da circunferência grande. Faz sentido o raio ser metade de 5 e o centro estar em menos cinco meios. Realmente, ao interpretar o enunciado e o que ele pedia percebíamos logo isso, que burra!! Agora faz sentido aquilo do lugar geométrico. (Entrevista, Carla)

Verificou-se, assim, que as dificuldades que surgiram deveram-se à *estranheza* de expressões aparecerem. Os alunos estão habituados a fazer tarefas rotineiras sobre o produto escalar e sobre determinar equações de circunferências, que não percebem como surgem estes conceitos e as conexões que devem ser feitas entre as matérias. E a interpretação aqui do enunciado, juntamente com o esboço que o professor fez no quadro ajudaram os alunos a compreenderem melhor estes conceitos.

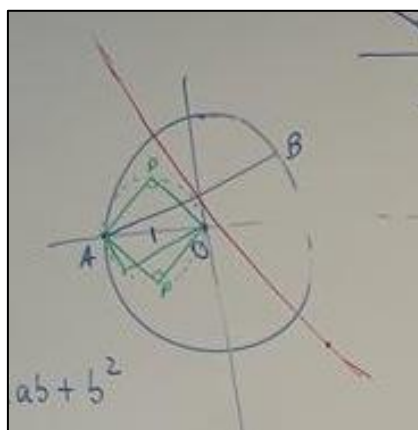


Fig. 19 - Utilização do quadro para apoiar a interpretação da questão 1.2. da Tarefa 2

A questão que se seguiu (Fig. 20), sendo de escolha múltipla, motivava que muitos alunos a quisessem responder, possivelmente, de forma aleatória, até:

1.3. Seja α a inclinação da reta AB . Qual o valor exato de $\sin \alpha + \cos \alpha$?

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Fig. 20 - Pergunta 1.3. da Tarefa 2

A interpretação do seu enunciado teve dificuldades semelhantes nos alunos. A adversidade inicial deveu-se a alguns alunos não lerem corretamente a primeira frase, considerando que α seria a inclinação da mediatriz e não da reta $[AB]$. Como tal, resolveram a questão, tomando $\operatorname{tg} \alpha = -2$, e, quando terminaram de a resolver, deparam-se que o resultado obtido não estava nas opções de resposta. Uma parte destes alunos interpretou como se o erro estivesse nos cálculos feitos. Outros, voltaram

a ler o enunciado e perceberam qual havia sido o erro. Quem continuou sem compreender, pediu ajuda ao professor, que, no sentido de os apoiar, sublinhou, no enunciado deles, “reta AB ” e, em cima, “mediatriz”. Aí eles perceberam o que tinham de corrigir. Nesta resolução de uma aluna, podemos ver um exemplo desta dificuldade:

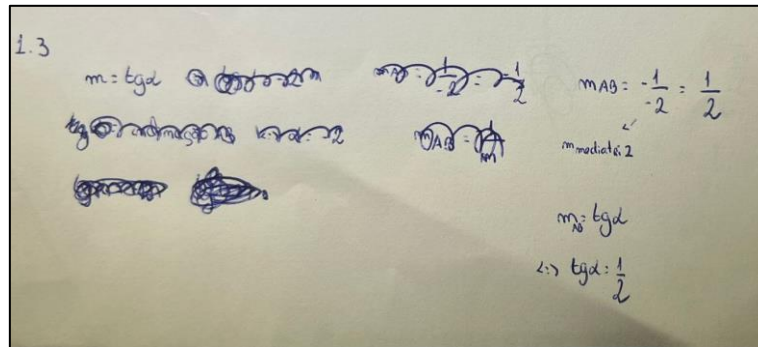


Fig. 21 - Interpretação da Bruna da Pergunta 1.3. da Tarefa 2

Esta aluna, inicialmente, tinha considerado que $\tan \alpha = -2$ e depois riscou quando se apercebeu que tinha interpretado mal o enunciado.

Surgiu, também, a dificuldade em alguns alunos de perceberem qual seria o declive da reta. Para os ajudar, o professor questionou onde poderia estar no enunciado informação que os ajudasse nesse sentido:

Hugo – É na mediatriz, não é? Mas o que tem este declive a ver com o da reta? É igual?

Investigador – Pensa um bocadinho. Que relação existe entre uma reta e a sua mediatriz?

Hugo – São paralelas... Ah, não! Passa no meio e são perpendiculares. O declive não é qualquer coisa do simétrico?

Investigador – (...) Pensa assim: os declives destas retas não têm sinais opostos?

Hugo – Ah, isso, já me lembro! É o simétrico do inverso, por isso o declive é um meio. (Entrevista, Hugo)

Outro desafio que surgiu foi o mesmo que já tinha surgido na tarefa 1, mas desta vez com menor frequência. Alguns alunos não leram que pedia o “valor exato” e usaram a calculadora gráfica para tentar saber o valor de α , tal como se encontra visível nesta resolução:

$$\textcircled{3} \text{ inclinação } AB = \alpha \quad (=) \quad \text{tg } \alpha = m_{AB}$$

$$(=) \text{tg } \alpha = \frac{1}{2} \quad (=) \quad \alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx (26) 27^\circ$$

← lixo →

Fig. 22 - Interpretação do Filipe de um dado da Pergunta 1.3. da Tarefa 2

Nesta situação, o aluno percebeu o erro que tinha cometido, após o cálculo do valor, por não ser um ângulo exato. O investigador indicou ao aluno para ele não riscar, de forma que o erro pudesse ficar visível e não o voltar a cometer.

No entanto, como aqui era uma pergunta de escolha múltipla, quem usou a calculadora, conseguiu, por tentativa e erro, chegar à resposta, por isso superaram, de alguma forma, essa não leitura do enunciado. De qualquer forma, o professor pediu para realizarem analiticamente e para só utilizarem a calculadora gráfica para confirmar a resposta. No geral, eles compreenderam bem que o ângulo estava no primeiro quadrante, pela tangente ser positiva, pelo que chegaram com facilidade à resposta certa.

Coloco, aqui, ainda, um exemplo de uma resolução na qual um aluno manifestou as duas últimas dificuldades acima referidas:

$$1.3 - m = \text{tg} = -2$$

$$\text{tg}^{-1}(-2) = 63.4349^\circ$$

$$180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$$

$$(\text{sen}(117^\circ) + \text{cos}(117^\circ))$$

$$\text{sen}^2 + \text{cos}^2 = 1$$

$$\text{tan}^2 + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2}$$

$$4 + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2}$$

$$5 = \frac{1}{\text{cos}^2}$$

$$\text{cos}^2 = \frac{1}{5}$$

$$\text{cos} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\text{sen}^2 + \frac{1}{5} = 1$$

$$\text{sen}^2 = \frac{24}{25}$$

$$\text{sen} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{cos } \alpha + \text{sen } \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{24}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{6}}{5}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 2} \\ 12 \overline{) 2} \\ 6 \overline{) 2} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

Fig. 23 - Resolução do Gonçalo da Pergunta 1.3. da Tarefa 2

Neste caso, o aluno só identificou os erros cometidos quando chegou ao fim da resolução e verificou que nenhum dos resultados obtidos se encontrava nas opções. Deste modo, estas questões de escolha múltipla são importantes para que os alunos se apercebam de lacunas que cometeram nas suas interpretações e resoluções.

Nesta tarefa, uma vez mais, as dificuldades surgiram na interpretação do que estava escrito. A meu ver, essa dificuldade foi causada por ter um valor de declive escrito no enunciado, o que se torna apelativo para os alunos, que acham que a informação aparece no enunciado já toda descortinada. Uma referência, ainda, a esta ser uma pergunta de escolha múltipla. Neste tipo de questões, os alunos olham logo para as opções e tentam adivinhar, escolhendo a opção que lhes parece mais óbvia. Isso leva a que, muitas vezes neste tipo de questões, eles tentem chegar ao fim sem passar pelo meio, nem o início, isto é, não interpretam sequer o que é pedido. Neste caso, isso foi crucial, pois quase todos, inicialmente, consideraram o declive da mediatriz para resolver a questão.

Por fim, os alunos tinham de completar a informação que lhes faltava no enunciado, calculando o ponto B:

1.4. Determine as coordenadas do ponto B .

Fig. 24 - Pergunta 1.4. da Tarefa 2

Tal como aconteceu na tarefa 1, como perderam muito tempo a interpretar e resolver as restantes questões, alguns dos alunos não tiveram tempo de chegar a esta última questão.

No geral, quem conseguiu chegar aqui, interpretou bem o que era pedido, percebendo que o ponto B era a interseção da circunferência inicial com a reta $[AB]$. Esta interseção, feita por todos através de um sistema, gerou duas soluções. No início, dois alunos estranharam, mas depois interpretaram o esboço que haviam feito e perceberam que um dos pontos era o ponto A e o outro era o ponto B, cujas coordenadas era o que a questão pedia. Podemos ver por esta questão que a interpretação das tarefas também se encontra presente na determinação de um resultado e de um sentido lógico às questões. Como tal, a interpretação deve estar presente em todas as fases da resolução.

5.3. Tarefa 3

Como já foi referido, a terceira tarefa, proposta no âmbito deste estudo, foi uma tarefa de contexto real, adaptada a uma situação corrente do quotidiano dos alunos – viagem de finalistas. Trata-se de uma tarefa que aborda o tema Sucessões, em particular, as progressões aritméticas.

Ao contrário das tarefas anteriores, nesta vamos primeiro analisar as dificuldades que surgiram na interpretação do enunciado (Fig. 25), em geral, e, só depois, em cada questão.

1. O Gonçalo quer fazer uma viagem de finalistas com os amigos no 12º ano e, como tal, já começou a colocar dinheiro de parte para não ter de pagar um montante muito elevado de uma vez só. Para realizar a viagem contactou a agência de viagens e turismo FEXIL TRAVEL, LDA, com a qual combinou um plano de pagamentos da viagem em prestações:

- Ficou acordado que no dia 1 de cada mês irá pagar por MBWAY uma prestação à agência;
- O pagamento das prestações irá começar já no próximo mês;
- No dia de natal e no dia de aniversário, o Gonçalo vai pagar mais uma prestação;
- Sempre que paga uma prestação à agência, aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final de agosto desse ano, já tinha pago 160€;
- No dia 2 de janeiro de 2023, já tinham sido transferidos para a agência um total de 418€;
- O Gonçalo já fez anos em 2022 e não foi nos primeiros dois dias de janeiro.



Fig. 25 - Enunciado da Tarefa 3

Como podemos constatar, o enunciado era bastante extenso e tinha muita informação para ser interpretada. Essa informação estava enumerada em 7 itens, onde cada um tinha algo relevante para a tarefa. Vejamos, então, as dificuldades que os alunos tiveram ao interpretar cada um desses itens.

No primeiro item “Ficou acordado que no dia 1 de cada mês irá pagar por MBWAY uma prestação”, os alunos não revelaram dificuldades na sua interpretação, percebendo que

cada mês iria corresponder às ordens de uma sucessão, considerando curioso e bastante adaptado à realidade pelo facto de ser mencionado que os pagamentos seriam feitos por MBWAY. Também a informação “Sempre que paga uma prestação à agência, aumenta o montante pago no mesmo valor” foi compreendida com alguma facilidade por todos os alunos, que revelaram mostrar compreensão sobre a aplicação do que tinham abordado no âmbito do tema das progressões:

É sempre o mesmo valor que aumenta em cada prestação, por isso é uma progressão aritmética. Se fosse geométrica, aumentávamos, por exemplo, todos os meses para o dobro.
(Entrevista, Joana)

As dificuldades surgiram nos restantes itens. Por exemplo, os alunos revelaram algumas dificuldades na compreensão do item “o pagamento das prestações irá começar já no próximo mês”. Em relação a este aspeto, acharam que faltava informação no enunciado, pois em lado algum estava escrito o mês inicial para pagamento das prestações. Inclusive, uma aluna questionou o seguinte:

Carla – Em que mês é que vou começar a pagar? Não diz nada aqui sobre isso...

Investigador – De certeza que já leste tudo o que está aí?

[Após uma nova leitura, a Carla referiu:]

Carla – Então, se já fiz anos e não foi em janeiro, o primeiro pagamento é 1 de fevereiro.

Investigador – Ai é?

Carla – Então, se eu começo a pagar no início de cada mês e o mês de janeiro não conta, começo a pagar em fevereiro. Não é?

Investigador – De certeza? Já leste isso bem?

Carla – Sim...

Investigador – Então repara: tem aí um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete pontos com informações sobre a tarefa. Tu passaste logo para o último.

Carla – Não, já li todos! Então... fica acordado que no dia 1 de cada mês irá pagar por MBWAY uma prestação à agência. Então faz anos em abril?

Investigador – Carla, isto convém ser visto como uma situação real. Tens de supor que decides hoje fazer uma viagem no próximo ano. Quando é que diz aí no enunciado que vais começar a pagar?

Carla – No próximo mês. Mas o que é que isso tem a ver... Ah, estamos a aplicar a este mês! Então sim, começo a pagar dia 1 de abril. (Entrevista, Carla)

O investigador frisou, como se exemplifica neste diálogo, a necessidade de os alunos lerem corretamente o que está escrito e colocarem-se na situação do problema. Os alunos olharam para o assunto da tarefa como algo abstrato – uma situação de semirrealidade, o que os afastou dos pontos chave da tarefa, como por exemplo,

compreender que teriam de pensar a partir daquele dia exato. Assim, através de uma interpretação mais real da situação, este aspeto conseguiu ser superado por todos.

O item “No dia de Natal e no dia de aniversário, o Gonçalo vai pagar mais uma prestação” também levantou algumas dúvidas, pois os alunos não compreenderam que informação acrescentaria aos dados da tarefa. Após um breve diálogo com o professor/investigador, alcançaram que seriam mais duas prestações a acrescentar às mensais: “Ah, então nos anos e no Natal pagamos mais uma, já percebi!” (Entrevista, Hugo).

Na informação “No final de agosto desse ano, já tinha pago 160€”, surgiram duas dificuldades distintas. A primeira foi por alguns alunos terem pensado que 160 se tratava de um termo da sucessão e não da sua soma:

Bruna – Então, se já tinha pago 160€ em agosto, isto dá-nos o 5º termo da sucessão.
 Investigador – De certeza? É isso que a progressão representa?
 Bruna – Sim, a progressão diz-nos que a cada mês pagamos mais alguma coisa que no mês anterior, ou seja, em agosto, temos de pagar 160€.
 Investigador – E é isso que diz lá? Que nesse mês pagaram essa quantia?
 Bruno – Sim, aqui diz que no final de agosto paguei cento e... ah, não foi que paguei, foi que já tinha pago!
 Professor – Então...
 Bruna - Neste caso, é a soma de todos os pagamentos. Por isso é o S_5 e não o u_5 ! Obrigado, professor! (Entrevista, Bruna)

Esta dificuldade pode estar associada ao facto de os alunos confundirem os conceitos em questão, ou pela sua interpretação textual. Neste caso, bastou a aluna voltar a ler o que dizia o enunciado para compreender que lá dizia “já tinha pago”, ao invés de “pagou”, o que, por si só, distingue a soma de termos e o termo de uma sucessão, respetivamente.

A segunda surgiu, por parte de alguns alunos, por considerarem que o mês de aniversário estava neste período temporal considerado. Apresenta-se um exemplo dessa situação:

Investigador – Porquê 6 meses, Gonçalo?
 Gonçalo – Então: abril, maio, junho, julho, agosto e o aniversário.
 Investigador – O aniversário?
 Gonçalo - Sim, aqui diz que ele fez anos em 2022...
 Investigador – Então já fez, certo? Fez em algum destes meses que consideraste?
 Gonçalo – Lá está não sabemos. Aqui só diz que não foi nos primeiros dois dias de janeiro.
 Investigador – Sim, e o que diz antes disso?

Gonçalo – Já fez... Ah, pois, temos de considerar isto ao dia de hoje, não é?

Investigador – Sim (...).

Gonçalo – Então nesse caso já fez, por isso os 160 correspondem a apenas 5 prestações. Já entendi! (Entrevista, Gonçalo)

Esta foi uma interpretação de alguns anos, que consideraram que, como já tinham feito anos, teriam já de considerar essa prestação, não tendo percebido que isso só seria válido para o ano seguinte. Esta última dificuldade aparece no item “No dia 2 de janeiro, já tinham sido transferidos (...) um total de 418€”.

A dificuldade que surgiu aqui deveu-se à prestação do Natal, que alguns não estavam a considerar:

Inês – Então, professor, até janeiro pagamos dia 1 de todos os meses, por isso são 10 prestações. Certo?

Investigador – E não acontece nada num desses meses?

Inês – Ah, pois é, no Natal! Então são onze!! Por isso, o 418 corresponde à soma de 11 prestações. (Entrevista, Inês)

Alguns alunos voltaram a manifestar a dúvida anterior, achando que se tratava do 11º termo da sucessão. Mas, a sugestão para efetuarem uma leitura mais cuidada foi suficiente para reconhecerem que se tratava, novamente, de uma soma. Uma vez mais, estas dúvidas surgiram por não fazerem uma leitura detalhada das informações e não considerarem tudo aquilo que estava no enunciado, bem como não refletirem sobre os erros que já tinham cometido.

Na informação “O Gonçalo já fez anos em 2022 e não foi nos primeiros dois dias de janeiro”, as dúvidas que surgiram estiveram ainda associadas à data de aniversário, já referidas anteriormente:

Joana – Aqui diz que já fiz anos em 2022. Então significa o quê? Que no dia 1 de abril vou fazer o primeiro pagamento?

Investigador – Então, como já fizeste anos...

Joana – Ok, então como fiz anos entre janeiro e março, só tenho de pagar para o próximo ano. Ok, faz sentido! (Entrevista, Joana)

A adversidade aqui surge pelo facto de não se conhecer o dia exato de aniversário. Importa salientar que a informação “não foi nos primeiros dois dias de janeiro” acerca do aniversário foi bem interpretada por todos ao reconhecerem que não tinham de contabilizar a prestação relativa ao aniversário em janeiro de 2023. Inclusive, um aluno partilhou: “Pois, isto é mesmo para dizer que em janeiro só pagamos uma” (Entrevista, Diogo).

No geral, esta interpretação do enunciado revelou-se trabalhosa pelas dúvidas que surgiram, por parte dos alunos, que procuraram, logo desde o início, interpretar cada informação dada pelo enunciado, antes de passarem para as questões. O facto de ter bastante texto contribuiu para que sentissem essa necessidade. Para além disso, o facto de terem feito duas tarefas de interpretação, numa fase anterior e ser um tema que estavam a lecionar na altura da tarefa, levou a que olhassem para esta tarefa com maior cuidado e procurassem interpretar toda a informação que ela fornecia.

Esta interpretação cuidada levou a que as questões propostas fossem resolvidas de uma forma mais sustentada, como podemos já observar na primeira questão (Fig. 26), que visava que os alunos descobrissem o valor de cada prestação.

1.1. Qual o valor em euros que o Gonçalo transfere a mais de prestação em prestação?

Fig. 26 - Pergunta 1.1. da Tarefa 3

Devido à interpretação feita anteriormente, as dificuldades nesta questão não foram tanto ao nível da interpretação, mas sim da resolução. No entanto, a pergunta em si não foi clara para todos os alunos, como podemos observar neste diálogo:

Diogo – Professor, o que significa pagar a mais? É o que pagou de diferente da prestação anterior?

Investigador – Sim, é por aí.

Diogo – Então, é, por exemplo, neste mês pagar 10€ e no próximo 15€. O que paguei a mais foi 5€. É isso?

Investigador – Sim, é!

Diogo – Então é como fazemos na monotonia. $u_{n+1} - u_n$?

Investigador – Exatamente! Estás a referir-te à diferença de termos?

Diogo – Pois... Ah, já sei, isto é o r ! A razão, portanto!

Investigador – Sim, é a razão. (Entrevista, Diogo)

Quando os alunos chegaram ao valor da razão, alguns deles tiveram curiosidade de calcular o primeiro termo, pois já tinham dado uma vista de olhos na questão seguinte e perceberam que poderia ser útil para essa questão. Após este cálculo, desconfiaram que estava mal, por ser um valor reduzido (28) e pela razão ser 2:

Hugo – Ó professor, como é que a pagar 28€ em abril e a pagar só mais 2€ por mês, consigo já ter 160€ em agosto? Não está mal?

Investigador – Hugo, se achas que está mal, faz a verificação disso. Sabes como podes fazer, não sabes?

Hugo – Pois, sei. E por isso é que acho que vai ser impossível. Deixe ver, até vou meter na calculadora: $28 + 30 + \dots$. Dá mesmo 160! Está certo, então.
 Investigador – Estás a ver? E se quisesse confirmar com outro valor, também podias...
 Hugo – Pois, ainda tinha o 418, mas aí já tinha de somar 11 números.
 Investigador – Ou então?
 Hugo – Ah, sim!! Isto é a soma, podia fazer por aí. (Entrevista, Hugo)

Estas dificuldades levaram a que os alunos fossem mais críticos daquilo que estavam a fazer e sentissem necessidade de verificar se estavam a interpretar bem ou não. O facto de o contexto ser real levou a que eles desconfiassem dos valores que obtiveram e quisessem verificar se estava certo a sua solução. Esta é uma das vantagens que um contexto real traz e, a meu ver, penso que os faz desenvolver a sua interpretação e compreensão.

Para que os alunos percebessem que o valor pago pela viagem se referia à soma das várias prestações mensais e não ao valor da última prestação, foi proposta a questão 1.2, apresentada na Fig. 27.

1.2. Supondo que a viagem tem um valor total de 630€ e que terá de ser paga à agência 10 dias antes da partida, em que dia se vai realizar a viagem?

Fig. 27 - Pergunta 1.2. da Tarefa 3

Nesta pergunta, alguns dos alunos não conseguiram associar o valor total da viagem à soma de um determinado número de termos de uma progressão aritmética, como podemos ver por este excerto:

António – Ó professor, aqui basta dizer que o u_n é 630 e descobrir o n , não é? E depois já sabemos o mês, basta contar o n que nos der a partir de abril.
 Investigador – O que representa o u_n ?
 António – É o termo geral da sucessão.
 Professor – Sim, mas o que é que isso representa nesta situação?
 António – Então, é o valor que pagamos em cada mês. Por isso basta-nos saber o último mês que pagamos.
 Investigador – Sim, mas tu em cada mês pagas o valor total?
 António – Não, pago uma prestação.
 Investigador – Então estás a dizer que a prestação que pagaste no último mês foi 630€. É isso?

[O António fez um pequeno silêncio, olhou para a questão, e, depois de a ler, disse, de forma convicta:]
 António – Se o total são 630, o último mês corresponde a somar as prestações dos meses todos que paguei. (Entrevista, António)

De seguida, após conseguirem resolver a equação, alguns alunos acharam que estava alguma coisa mal, por estar a dar um valor negativo, como mostra este exemplo:

Eva – Professor, o valor de n não pode ser negativo, pois não?
 Investigador – O que é o n neste contexto?
 Eva – É o mês da prestação. Então sim, o negativo podemos cortar. (Entrevista, Eva)

Depois, surgiram duas dificuldades na interpretação temporal. A primeira está relacionada com a articulação do número de prestações com os meses:

Inês – Se deu 15, é somar 15 meses já a contar com abril, não é? Por isso vai dar em junho. A viagem é em junho, então?
 Investigador – Inês, não te esqueceste de umas informações que estão no enunciado?
 Inês – Pois é, falta o Natal, que conta como mais uma.
 Investigador – Mais nada?
 Inês – Ó professor, temos aqui o dia de anos, mas desse só sabemos que já foi este ano.
 Investigador – Nesse caso, não consegues ver em que meses pode ter sido?
 Inês – Então, é entre 3 de janeiro e o dia de hoje. Ah, então também podemos considerar que pagamos uma prestação no dia de anos. (...) Basta tirarmos dois meses a junho, por isso vai ser em abril. Ou seja, a última prestação é dia 1 de abril e assim apanha o dia de anos de certeza! Agora faz sentido. (Entrevista, Inês)

A segunda dificuldade temporal surgiu em alguns alunos e está relacionada com o dia da partida da viagem, tal como podemos ver neste diálogo:

Eva – Professor, se acabamos de pagar dia 1 de abril e temos de pagar 10 dias antes da viagem, então temos de tirar 10 dias. Ou seja, tiro um dia a abril e 9 a março, que tem 31 dias... por isso, a viagem é dia 23 de março!
 Investigador – Tens a certeza? Então estás a dizer que vais à viagem e depois ainda pagas quando vieres.
 Eva – Pois, não faz muito sentido isso. Mas se tem de estar paga 10 dias antes, tenho de subtrair 10... Ou é somar? Oh, claro que é somar! É dia 11, a viagem. E, assim, se for feito o último pagamento dia 1, fica paga 10 dias antes. (Entrevista, Eva)

Estas dificuldades de interpretação temporal são muito frequentes nos alunos. Devemos tentar incentivá-los a colocarem-se na situação real para identificarem, eles próprios, os erros que estão a cometer. Aqui, o contexto real ajuda bastante os alunos a identificarem as suas lacunas, pois, de uma forma natural, procuram obter uma verificação do que estão a fazer. Basta ver que, quando descobriram o valor do aumento da prestação e o valor da prestação inicial, muitos dos alunos procuraram verificar se estava certo. Isto, num contexto matemático, como já vimos, não acontece com tanta frequência. Daí ser importante a diversificação das tarefas, nomeadamente ao nível do contexto que integram.

As duas últimas questões da tarefa (Fig. 28) eram apoiadas de um novo enunciado, que tinha alguma informação, que seria independente à informação anterior. A informação que se mantinha do enunciado anterior encontra-se referida no mesmo:

- 2.** A Eva é amiga do Gonçalo e também quer participar na viagem, mas só se inscreveu no dia 15 de agosto e pagou logo 65€ nesse dia. Combinou com a agência que os seus pagamentos seriam sempre no dia 15 e que todos os meses pagava mais 10€ que no mês anterior. A agência informou que não ia fazer nenhuma alteração no preço e que o valor era o mesmo para os dois.
- 2.1.** Define uma sucessão (v_n) por recorrência que traduza o problema e determina a expressão do termo geral dessa mesma sucessão.
- 2.2.** Em que dia a Eva tem a viagem paga? A agência terá de fazer alguma devolução?

Fig. 28 - Pergunta 2 da Tarefa 3

Decidi colocar o enunciado e as duas alíneas em simultâneo, pois as dificuldades que surgiram nesta questão foram gerais.

Verificou-se que os alunos já olharam de uma maneira diferente para o enunciado e todos eles leram-no com atenção, ao invés de irem diretos à questão. Quando chegaram à questão 2.1., perceberam que a sua resolução era, praticamente, uma interpretação do enunciado e que implicaria uma organização dos dados fornecidos.

A única dificuldade que surgiu aqui foi que alguns alunos não se recordavam como se definia uma sucessão por recorrência. Um dos alunos até perguntou: “É aquela coisa do sistema, não é?” (Entrevista, Joana). Mas bastou questionar-lhes como se calculava a razão e eles reconheceram a relação entre u_{n+1} e u_n e conseguiram facilmente definir

a sucessão. Para além desta, não houve mais dificuldades na interpretação desta questão, pois era quase direta.

Já na 2.2., surgiu, no final, novamente, uma questão de interpretação temporal. Após desprezarem o valor negativo, e bem, levantou-se uma dúvida em alguns deles, pelo facto de obterem um valor decimal e terem de encontrar o mês correspondente, como podemos ver neste excerto:

Gonçalo – Professor, devo arredondar o valor de n a que casa decimal?

Investigador – O que representa o n neste contexto?

Gonçalo – Sim, eu sei que é o mês. Mas isso é que me está a fazer confusão. Então ele pagou 630€ no mês 6,75?

Investigador – Gonçalo, lembra-te que os pagamentos são feitos sempre no mesmo dia do mês.

Gonçalo – Sim, exatamente. Ele no mês 6 ainda não pagou a viagem toda. Como é que vai pagar o resto? Não podemos sequer falar em devoluções quando ele no mês 6 pagou menos que o valor...

Investigador – Então, achas que vai pagar menos?

Gonçalo – Não... paga no mês seguinte. Ah, então nesse caso consideramos o mês 7. Como o valor era inferior a 7, pensei que não podíamos contar este mês. Mas agora percebo que, ao pagar mais um mês, já vai ter uma devolução, tal como aparece na pergunta. (...) pensar na situação ajuda. Neste caso, a viagem fica paga na 7ª prestação, ou seja, em fevereiro de 2023. Vou calcular o S_7 e subtrair a 630€ para saber quanto é a devolução. (Entrevista, Gonçalo)

De facto, a contextualização da tarefa ajudou os alunos a superarem as dificuldades que estavam a ter na sua interpretação, permitindo que obtivessem um sentido para o resultado obtido.

Nesta produção escrita, que se apresenta na Fig. 29, é possível ver um exemplo onde esta dificuldade temporal mencionada em cima foi manifestada.

$$\Delta \rightarrow m = \frac{-120 \pm \sqrt{64800}}{20}$$

$$\Delta \rightarrow m = \frac{-120 \pm \sqrt{64800}}{20} \quad \vee \quad m = \frac{-120 - \sqrt{64800}}{20}$$

$$\Delta \rightarrow m \approx \cancel{630} \quad \vee \quad m \approx -18, \text{€}$$

~~verificando~~ ~~com~~ ~~630 + 55 = 685~~

$$S_7 = \frac{0 + 1 \cdot \text{€}}{2} \times (7 - 1 + 1)$$

$$\Delta \rightarrow S_7 = \frac{65 + 125}{2} \times 7$$

$$\Delta \rightarrow S_7 = 665$$

$$665 - 630 = 35 \text{ €}$$

R: A Mariana tem a viagem paga dia 15 de ~~fevereiro~~ e a agência vai ter de fazer uma devolução de 35 €

Fig. 29 - Excerto de uma resolução da Bruna da Pergunta 2.2. da Tarefa 3

Podemos observar que a aluna, inicialmente, tinha considerado o mês 6, referindo, na sua resposta, que a viagem estaria paga em janeiro e, após ter percebido o seu erro, em diálogo com o investigador, riscou e corrigiu para o mês correto.

Com esta tarefa, quer por ter integrado um contexto real, quer pelo seu grau de desafio, reconheço que o trabalho que proporcionou aos alunos permitiu-lhes compreender a importância de uma boa interpretação de um enunciado. Através desta tarefa, tiveram ainda a oportunidade de contactar com a aplicabilidade das sucessões a situações da vida real. Ficou visível que lhes trouxe uma motivação extra em realizá-la, devido ao seu contexto ser algo próximo dos alunos (não só a viagem, mas também os nomes deles lá presentes), o que originou um maior interesse na sua resolução.

5.4. Tarefa 4

A quarta tarefa proposta, tal como já foi indicado na secção anterior, teve um contexto semirreal, tendo sido abordado um tema que estava a ser lecionado naquela altura do ano letivo: as progressões geométricas e aritméticas. Teve a particularidade de ser realizada a pares e, embora com o mesmo grau de desafio, a tarefa envolveu situações de atividades profissionais adaptadas aos interesses de cada par.

Os pares, quando receberam o enunciado, gostaram de se sentir parte integrante dele e revelaram que as propostas de trabalho que lhes foram atribuídas tinham um contexto que lhes era próximo. Apresento alguns depoimentos recolhidos nas entrevistas:

Eva – Ó professor, estou mesmo a imaginar o Gonçalo a ser PT, é mesmo a cara dele! (Entrevista, Eva e Gonçalo)

Bruna – Por acaso, professor, escolheu mesmo bem a pessoa para ser *influencer*! A Carla é toda social no *Instagram*. (Entrevista, Bruna e Carla)

Joana – Óbvio que o Filipe podia ser um dirigente desportivo! Ele é todo organizado. (Entrevista, Filipe e Joana)

Hugo – Professor, espero que o meu contrato seja melhor que o do António, que eu sou muito melhor guarda-redes que ele. (Entrevista, António e Hugo)

Inês – Acho que quem me contratar a mim para gerir recursos humanos vai ficar mais bem servido do que com o Diogo! (Entrevista, Inês e Diogo)

Apesar dos enunciados serem diferentes para todos os grupos (Anexos 5-9), as condições das propostas de trabalho eram iguais, deste modo apresentamos aqui apenas uma das situações (Fig. 30):

1. A Eva e o Gonçalo tiraram o curso de Personal Trainer e receberam propostas de dois ginásios, o NUNCA FOI GYM e o ANJOS SPORTS & FITNESS, respetivamente, que as convidaram para serem PTs dos seus estabelecimentos. As empresas propuseram um contrato de um ano a começar no dia 1 de junho. Os vencimentos serão pagos no fim de cada mês. As condições de ambas as empresas podem ser observadas na seguinte tabela:	
NUNCA FOI GYM	ANJOS SPORTS & FITNESS
• 500€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para os novos clientes de PT que angariarem – EVA15 - que lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebe qualquer bónus; • pelo primeiro cliente de PT que se inscrever com esse código recebe 5€; • por cada cliente seguinte que se inscrever com o seu código, recebe mais 15% do valor recebido pela inscrição anterior; • este código só poderá ser usado por 4 clientes por mês; • nos meses do natal e da páscoa, o seu código poderá ser usado pelo dobro dos clientes.	• 550€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para os novos clientes de PT que angariarem – GONÇALO10 - que lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebe qualquer bónus; • pelo primeiro cliente de PT que se inscrever com esse código recebe 5€; • por cada cliente seguinte que se inscrever através do seu código recebe mais 10€ do que o que recebeu pelo produto anterior; • este código só poderá ser usado por 4 clientes por mês; • nos meses do natal e da páscoa, o seu código poderá ser usado pelo dobro dos clientes.

Fig. 30 - Enunciado da Tarefa 4 (Eva e Gonçalo)

Os alunos, antes de começarem a resolver a tarefa e a analisar o que era pedido, leram, atentamente, o enunciado, com vista a poderem tirar todas as informações que o mesmo tinha. No entanto, todos eles foram ver, também, o que pediam as perguntas, de forma a selecionarem os dados que iriam precisar. Um dos grupos (o primeiro a resolver) partilhou:

Carla – Ó professor, isto é muita informação, por isso vamos já ver o que pedem as perguntas para ver o que precisamos para cada uma delas.

Bruna – Professor, como somos duas e são situações diferentes, podíamos cada uma ver as próprias condições. (Entrevista, Bruna e Carla)

Deste diálogo, através de uma sugestão dada pelos alunos, ficou definida uma forma para tentarem resolver a tarefa. O facto de estarem a trabalhar em pares e poderem discutir ideias, revelou-se como um fator de motivação e maior envolvimento na realização da tarefa.

Posto isto, na primeira questão (Fig. 31), os alunos analisaram a proposta apresentada por cada empresa.

1.1. Qual o bónus máximo, em €, que podem receber a Eva e Gonçalo até 30 de novembro?

Fig. 31 - Pergunta 1.1. da Tarefa 4

Cada elemento do grupo leu as condições que tinha e, logo de seguida, leu a pergunta. Após isso, voltaram ao enunciado para verem quais eram as informações relevantes para o que era pedido. Vamos, agora, ver a forma como interpretaram cada dado do enunciado e as dificuldades que surgiram nessa interpretação. Neste excerto, podemos ver a interpretação que um grupo fez sobre o bónus da empresa Anjos Sports & Fitness:

Carla – (...) Espera lá, isto não é aquilo das sucessões, em que 5 é o primeiro termo?

Bruna – Sim, acho que é isso. E o que é diferente para as duas é aquilo que fala sobre o código de desconto.

Carla – Olha, no meu é fácil: no primeiro é 5, no segundo é 15, no terceiro, 25, e por aí fora.

Bruna – Sim, é sempre a somar 10. Por isso, é uma progressão aritmética, não é?

Carla – Sim, mas eu acho que consigo fazer isto sem nenhuma fórmula. Basta somar o que posso ganhar em cada mês e depois multiplico por 4. Ora vê: $5+15+25+35$ dá 80€ de bónus por mês. Isto vezes quatro dá 320€. Está certo, não está?

Investigador – Digam-me uma coisa, nesse período só vão vender 4 artigos?

Carla – Não. Mas em cada mês só posso vender 4. (...) Ah, eu pensei que em cada mês contava do zero. (...) tenho de contar todos. Mas vou ter de somar os bónus um a um (...).

Bruna – Eu acho que podemos fazer aquilo da soma?

Carla – Ah, temos de usar a fórmula [da soma] para os 16 primeiros termos. (Entrevista, Bruna e Carla)

Outro grupo apresentou uma dificuldade na interpretação diferente desta, mas que se deveu, igualmente, a lacunas na leitura do enunciado:

Gonçalo – (...) isto é fácil de calcular o bónus. Nos primeiros dois meses, não recebo nada. Depois, recebo 5€ pelo primeiro e, nos quatro meses a seguir, recebo 10€ por cada artigo. Ou seja, 5 e depois somo dez vezes quatro, quatro vezes [à medida que dizia, escrevia isto: $5 + 10 \times 4 + 10 \times 4 + 10 \times 4 + 10 \times 4$]. Pronto, dá 155€! Esta foi fácil!

(...)

Eva – Esse é assim tão fácil? É que, no meu caso, está a dar algum trabalho, pois o bónus aumenta a cada artigo, acho eu. O teu não é assim, Gonçalo?

Gonçalo – Vou ler outra vez, mas acho que fiz bem. Então, aqui diz que recebo sempre mais 10€, por isso... ah, mais 10€ do que

o que recebi no artigo anterior! Então está mal o que fiz. Neste caso, isto é uma progressão, não é?

(...)

Eva – Olha, no meu é uma progressão geométrica, por isso se calhar o teu deve ser a outra.

Gonçalo – Exato, a minha é aritmética, pois estou a receber mais 10€ por cada artigo. Por isso, em 4 meses, consigo, no máximo vender 16 artigos. (Entrevista, Eva e Gonçalo)

Na primeira situação apresentada, a dificuldade surgiu, porque só estavam a considerar o bónus por mês. Já no segundo, deveu-se a interpretarem o bónus como algo fixo e não variável. O que fez criar as dúvidas aqui foram pormenores na leitura que os alunos não tiveram em conta e que, após lerem novamente, já os consideraram. Os restantes grupos conseguiram interpretar bem esta parte da questão.

No caso da outra empresa, no geral, todos os grupos chegaram à conclusão de que o bónus se traduzia numa progressão geométrica. No entanto, surgiram dificuldades para descobrirem a razão, como podemos ver neste exemplo:

Inês – Ó professor, isto está a dar um valor estranho... Eu peguei no valor e multipliquei por 0,15 e deu-me uma coisa mais pequena que 5. Não é suposto o bónus aumentar?

Investigador – Sim, é. O que diz na tabela sobre isso?

Inês – Diz que recebo mais 15% do que recebi pelo produto anterior.

Investigador – Então, tu já não calculaste os 15%?

Inês – Sim. E agora tenho de somar aos 5?

Investigador – Pois...

Inês – Então agora somo cinco vezes o 0,15 ao cinco. E já está?

(...) agora é fácil. É só usar a fórmula da progressão geométrica.

Então a razão é 0,15 e o primeiro termo é 5.

Investigador – Mas já não viste que se a razão for 0,15 o valor vai diminuir?

Inês – Pois... (...). (Entrevista, Diogo e Inês)

É de realçar que esta dificuldade – reconhecer que a razão era 1,15 e não 0,15 – surgiu em alguns grupos.

Através desta adversidade, ficou implícito que havia algum desconhecimento dos alunos do significado de uma progressão geométrica. Eles estavam demasiado presos à fórmula, sem perceber como chegavam a ela. Esta dificuldade poderá também estar associadas, em alguns casos, à compreensão do próprio conceito de percentagem.

No entanto, o facto da tarefa integrar um contexto semirreal levou a que vários alunos desconfiassem do valor que estava a dar. Dada a situação da tarefa, estava a parecer-lhes estranho o bónus estar a diminuir. O contexto em si ajudou os alunos a identificarem

lacunas que estavam a ter na interpretação e na sua resolução. Penso que, ao levantarem estas dificuldades, os alunos ficaram a compreender melhor o significado de uma progressão geométrica e isso foi-lhes benéfico na resolução da tarefa. Superada esta dificuldade, todos conseguiram chegar sem dificuldades ao bónus máximo, concluindo que, tal como na empresa anterior, teriam de usar a fórmula da soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica.

Aproveitando estes bónus que os alunos tinham calculado, surgia, agora, o desafio dos alunos determinarem o salário mensal (Fig. 32):

1.2. Qual o salário máximo, em €, que podem receber até 15 de dezembro?

Fig. 32 - Pergunta 1.2. da Tarefa 4

Nesta questão, a única dificuldade que surgiu foi alguns grupos interpretarem que tinham de considerar o bónus de dezembro, como podemos ver neste excerto:

(...) como é dia 15, o mês de dezembro já não conta a nível do rendimento fixo. Mas até esse dia podem vender os produtos para o bónus. (...) está aqui antes da tabela: os vencimentos serão pagos no fim de cada mês. Ah, então já percebi. Se é no fim de cada mês, não interessa o que se vendeu em dezembro, pois só vai ser pago no fim desse mês. (Entrevista, Joana)

Bastou lerem novamente o dado do enunciado que abordava o assunto para reconhecerem a dificuldade que estavam a ter. Fora isso, a questão anterior ajudou bastante a resolver esta pergunta, uma vez que já tinham calculado o valor do bónus.

Como estávamos a analisar diferentes perspetivas de remunerações, a questão 1.3. (Fig. 33) tinha como finalidade calcular o salário anual, tendo em conta algumas restrições:

1.3. Qual será o salário anual, em €, que cada uma delas pode auferir se venderem metade dos artigos premium que podem vender por mês?

Fig. 33 - Pergunta 1.3. da Tarefa 4

Nesta questão, apenas houve dificuldades por causa do terceiro e do último pontos da tabela do enunciado. Alguns alunos só consideraram o terceiro e não o último:

Carla – (...) este é fácil. Nos primeiros dois meses não ganhamos bónus. Nos outros 10, como só vendemos metade do máximo que podemos, vendemos 20. Por isso, é só somar o S_{20}

a 12 vezes 500. E o da Bruna é igual, mas com a soma da progressão dela com os 12 vezes 550.

Bruna – Olha, mas no meu ainda tem aquilo do Natal e da Páscoa. Por isso, no total posso vender 24 artigos.

Carla – Ei, nem me lembrei disso. Pois é, no meu também é assim. Já me ia enganar sem necessidade. (Entrevista, Bruna e Carla)

Outros alunos só leram o último e consideraram que podiam vender 28 artigos. Mas, com uma chamada de atenção do próprio par, ou, em último caso, do professor/investigador, reconheceram que se tinham esquecido de ler tudo como devia ser.

O objetivo, também, desta questão ter sido colocada aqui foi para servir de mote para a questão seguinte, que pedia para comparar as condições de ambas as empresas. Inclusivamente, alguns alunos, nesta questão, fizeram comentários aos resultados que obtiveram:

Inês – Isto não é nada justo. O teu ginásio paga muito mais, Diogo. Isto são mais de 2500€ de diferença! (Entrevista, Diogo e Inês)

Gonçalo – Ó professor, este ginásio não compensa nada. Não posso ir eu trabalhar para o da Eva? (Entrevista, Eva e Gonçalo)

Bruna – Ó Carla, tu deves ser mesmo boa *influencer*, que a tua empresa paga muito mais. (Entrevista, Bruna e Carla)

A antever que estes comentários no fim da tarefa 1.3. poderiam surgir, foi pedido, na última questão (Fig. 34), que os alunos indicassem de forma fundamentada a empresa que fornecia uma melhor proposta de trabalho.

1.4. Qual das empresas oferece melhores condições? Justifica.

Fig. 34 - Pergunta 1.4. da Tarefa 4

Esta era, notoriamente, uma questão aberta e, como tal, podia levar a diversas justificações. Nesta questão, o professor/investigador não validou as interpretações e resoluções que foram feitas, deixando os alunos escreverem aquilo que achavam sobre a questão. A abordagem à questão foi diferente por todos os grupos, pelo que vou destacar alguns exemplos.

O grupo da Eva e do Gonçalo foi mais ao fundo da questão, percebendo que um maior número de clientes levaria a que o ginásio que dá um bónus traduzido pela progressão geométrica daria melhores condições. A sua interpretação teve que ver com um aumento exponencial que este bónus origina, o que não acontece com o outro: “No caso de existir um grande número de clientes, este clube será mais rentável, uma vez que o valor do bónus aumentará de forma exponencial” (Produção escrita, Eva e Gonçalo).

O grupo do António e do Hugo teve uma interpretação semelhante à do grupo anterior, no entanto, deu uma resposta mais relacionada com o contexto da tarefa. O grupo colocou-se na situação em si, reconhecendo que ambos os clubes tinham as suas vantagens: um, para os atletas que quisessem jogar mais jogos e lutar pelos objetivos; o outro, para quem quisesse estar no clube de uma forma mais confortável sem estar preocupado em jogar. Eles interpretaram os valores que podiam atingir em ambos os clubes e tiraram as suas conclusões:

Numa perspetiva de jogar o máximo de jogos possível, é mais vantajoso o Nunca Foi FC, uma vez que atinge maiores prémios de jogo. Se quiserem ir para um clube e não jogar muito, nem se importar com os jogos, o Atlético Clube Ovaia oferece melhores condições. (Produção escrita, António e Hugo)

O grupo do Diogo e da Joana criou sucessões para as ambas as situações e colocaram as suas expressões na calculadora gráfica. Deste modo, concluíram que, a partir do 31º cliente, a proposta cujo bónus é representado por uma progressão geométrica é a que apresenta melhores condições. Eles fizeram questão de colocar na sua resolução um esboço do que observaram na calculadora, como se apresenta na Fig. 35.

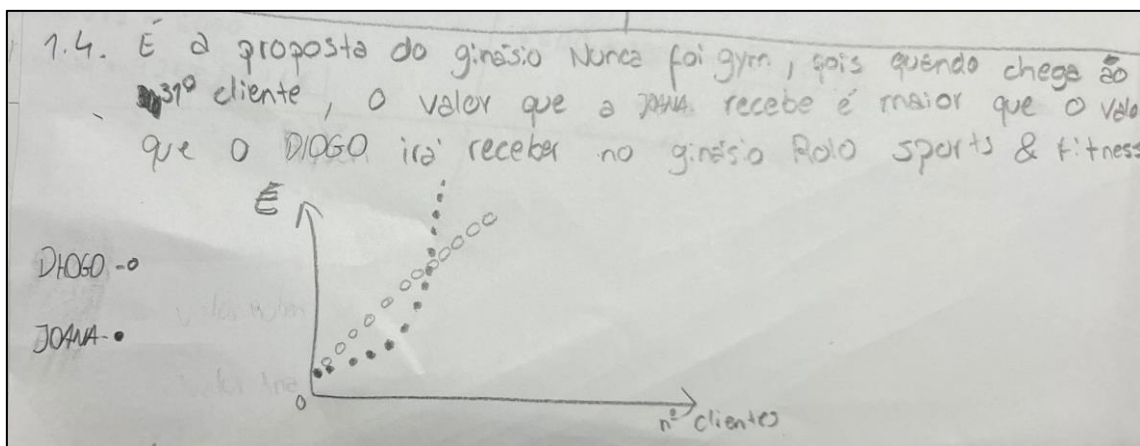


Fig. 35 - Resolução do Diogo e da Joana da Questão 1.4. da Tarefa 4

Os grupos do Filipe e da Joana e da Bruna e da Carla nem sequer realizaram cálculos nesta questão, baseando-se nos valores que obtiveram nas questões anteriores e aquilo

que já tinham analisado. Deste modo, concluíram, convictamente, que as empresas que tinham um maior rendimento mensal e o bónus calculado pela progressão aritmética ofereciam melhores condições, como podemos ver pela produção escrita de um dos grupos:

O clube que oferece melhores condições é o clube do Filipe (Atlético Clube Ovaia), uma vez que, para além do salário mensal ser maior do que o do clube da Joana (Nunca Foi FC), a cada vitória que a equipa conquista, o bónus atingido pelo clube do Pedro também é maior, ou seja a progressão aritmética acaba por *ser maior* do que a progressão geométrica. (Produção escrita, Filipe e Joana)

Uns minutos mais tarde, o grupo do Filipe e da Joana voltou à sala, dizendo que tinham pensado melhor no que tinham feito e que tinham mudado de ideias:

Filipe – Ó professor, acho que dissemos uma grande asneira. Eu e a Joana, quando saímos, estivemos a calcular o salário máximo anual dos dois clubes e o Nunca Foi FC dava mais de 10 mil euros de diferença.
Joana – Sim, só depois é que vimos que caímos na armadilha. Obviamente que uma progressão geométrica, a partir de um certo valor, vai tomar valores muito maiores. (Entrevista, Filipe e Joana)

De facto, o professor já previa que isto acontecesse. Muitas destas dificuldades de interpretação devem-se a precipitações e impaciências dos alunos em quererem resolver logo tudo. O que é certo é que, depois de pensarem e refletirem sobre a tarefa, estes alunos fizeram questão de vir alterar o que consideraram estar errado. E sem dúvida que deram um contributo importante para esta análise, pois mostraram que uma interpretação mais detalhada permite uma melhor compreensão daquilo que é pedido numa tarefa.

No geral, o facto desta questão ser mais aberta, comparativamente com as anteriores, gerou tipos de interpretação e resolução bastante diferentes, o que se revelou bastante enriquecedor para esta análise.

O primeiro grupo olhou para o comportamento das sucessões e fez uma interpretação mais matemática, que os conduziu a uma resposta clara e eficaz.

O segundo grupo, por sua vez, procurou interpretar a situação na perspetiva de cada jogador e na predisposição que este teria para competir nesse clube. Isto não os impediu de responderem à questão, pelo contrário, fizeram-no corretamente, indicando qual era o clube que dava melhores condições salariais. Simplesmente, consideraram que as

melhores condições oferecidas era algo subjetivo e que podia variar de jogador para jogador.

O terceiro grupo procurou resolver o problema de forma algébrica, recorrendo à calculadora gráfica. Foram igualmente eficazes na interpretação e resolução da tarefa, escolhendo bem as sucessões que traduziam ambas as propostas.

Os dois últimos basearam-se naquilo que seria mais óbvio de interpretar, devido ao que já tinham feito anteriormente. É sempre um risco assumir uma coisa sem antes perceber todas as hipóteses que uma tarefa matemática pode formular. Uma vez mais, fica claro que a pressa em resolver uma tarefa pode tornar-se um dos inimigos principais de uma interpretação cuidada e rigorosa. Basta ver que um dos grupos pensou mais um bocadinho e chegou a outra conclusão, mais acertada. De qualquer forma, estas situações reforçam a importância da reflexão crítica enquanto competência crucial de aprendizagem.

5.5. Perceções dos alunos nas dificuldades sentidas

Com o intuito de aprofundar/esclarecer situações que pudessem sobressair na recolha de dados através das entrevistas com tarefas e das produções escritas dos alunos, optou-se pela realização de um pequeno questionário (Anexo 10). Apresentamos, em seguida, a análise dos dados recolhidos nesse questionário.

Dificuldades na interpretação/compreensão das tarefas

Quando questionados sobre as dificuldades que sentiram perante as tarefas propostas neste estudo, alguns alunos referiram que uma delas foi “perceber de imediato o que tinha que fazer para resolver a pergunta” (Questionário, Carla). Outros, por sua vez, mencionaram que sentiram dificuldades na organização dos dados que tinham de recolher dos enunciados, principalmente quando os passavam para o papel. Sentiram que uma má organização destes dados os levava a ter dificuldades a delinear um fio condutor que teriam de seguir para resolver a tarefa. Ou seja, a relação que tinham de criar entre os dados recolhidos e os procedimentos a seguir tornava-se um dos entraves principais para poderem interpretar as tarefas.

Outros ainda indicaram dificuldades na leitura dos enunciados, nomeadamente, aqueles que eram mais extensos e tinham mais informação, bem como na leitura e compreensão das perguntas. A compreensão daquilo que era pedido foi um desafio que tiveram de

enfrentar, pelo que isso trouxe implicações na forma de abordar as tarefas: “por vezes, confundia o que era perguntado e acabava por responder a algo totalmente diferente” (Questionário, Joana).

Estas constatações reforçam os dados provenientes das entrevistas com tarefas. Torna-se evidente que um dos primeiros entraves que os alunos enfrentam é querer resolver logo a tarefa. De facto, eles são habituados, desde cedo, que a matemática é apenas resolver exercícios, pelo que se acomodam bastante neste tipo de tarefas e não procuram sair da sua zona de conforto. Quando surgem tarefas onde é necessário efetuar uma interpretação inicial mais elaborada para se perceber o que tem de ser feito, alguns alunos acabam por nem tentar fazer, ou fazer algo que acham que é para fazer, sem terem o cuidado de ler tudo aquilo que está enunciado. Deste modo, esta pressa constante que eles têm em descobrir a solução de uma tarefa, impede-os de interpretar aquilo que é pedido e acabam por apresentar resoluções precipitadas e erradas das tarefas. Esta dificuldade pode ser identificada como uma não leitura do enunciado, ou, se preferirmos, uma leitura do enunciado de uma forma rápida e pouco detalhada, sendo desprezada grande parte da informação que este emprega para a realização da tarefa.

Também para aqueles alunos que dedicam alguma atenção ao enunciado das tarefas, as dificuldades que indicaram estão de acordo com o que analisámos nas entrevistas com tarefas e produções escritas dos alunos. Estas passaram por uma má articulação das palavras e expressões que surgiam, impossibilitando, muitas vezes, de serem feitas as conexões necessárias entre os diferentes conceitos e conhecimentos. Isto levou a que os alunos demonstrassem dificuldades em interpretar de que forma é que os dados do enunciado teriam implicações na resolução das tarefas.

Causas das dificuldades manifestadas

No que diz respeito às causas das dificuldades que manifestam na interpretação das tarefas, um dos motivos que muitos alunos indicaram foi não terem presente os conhecimentos e conceitos matemáticos que foram abordados nas tarefas. Revelaram que não estavam tão à vontade com alguns tópicos matemáticos, por ainda não os terem estudado, ou por já não se lembrarem deles. Esta situação foi partilhada por vários alunos, como exemplificamos com o seguinte excerto:

Acho que pode ter a ver, na maior parte das vezes, com o facto de não nos lembrarmos da matéria que já tinha sido dada. Lembro-me que neste projeto fizemos atividades de trigonometria, geometria e sucessões. E acho que, por exemplo,

na trigonometria, não me lembrava tão bem das coisas, comparativamente às sucessões. Estas estávamos a dar na mesma altura que fizemos estas tarefas e a trigonometria já tínhamos dado no início do ano. Acho que foi o principal motivo para mim, já não me lembrar da matéria em questão. (Questionário, Filipe)

De facto, este foi um dos motivos principais apontados pelos alunos – o desconhecimento de vários conceitos matemáticos. Claro que, inicialmente, surgiam dificuldades em ler corretamente o que era pedido e essa leitura pouco rigorosa era um dos motivos que os levava a ter dificuldades na interpretação. No entanto, com algumas chamadas de atenção do professor, lá conseguiam descortinar aquilo que o enunciado pedia. O problema era a seguir, quando tinham de recolher os dados do enunciado e perceber os conceitos que estavam neles inseridos.

A insegurança que alguns alunos revelaram ao interpretar as tarefas, nas quais referiram que tinham “receios de errar um detalhe” (Questionário, Diogo), foi um dos motivos apresentados para surgirem algumas das dificuldades. Na verdade, eles consideram que, no geral, são inseguros e que isso faz parte da maneira de ser deles, como tal, transportam essa insegurança para a interpretação das tarefas.

Também houve alunos que fizeram referência à falta de prática na realização deste tipo de tarefas, uma vez que estavam habituados a fazer tarefas mais rotineiras e de mecanização. Deste modo, sentiram que estas tarefas exigiam uma interpretação mais detalhada e que não se sentiam tão preparados para o fazer, sentindo dificuldades nessas situações:

Se calhar [uma das causas das dificuldades que senti foi] a falta de prática, porque não tenho muita, não sabia bem por onde começar ou o que vinha a seguir a certo passo. Se calhar se tivesse mais prática, ia ser muito mais simples, porque já sabia o que vinha a seguir e chegava a conclusões muito mais rápidas e acertadas. (Questionário, Eva)

Outro dos motivos que os alunos apresentaram para estas dificuldades foi a forma como os enunciados e as questões estavam apresentados e estruturados, o que exigia uma decodificação, da parte deles, que nem sempre foi bem feita. A própria dimensão dos enunciados das tarefas era algo que assustava os alunos, que referiram que, quando tinham enunciados muito grandes pela frente, “até ficava[m] com medo de os resolver” (Questionário, Inês). Além da falta de prática na realização de tarefas desafiantes, a dimensão e a complexidade de um enunciado foi também indicada como um dos motivos que justificam as dificuldades que sentiram na interpretação das tarefas propostas neste estudo.

Influências dos contextos das tarefas nas dificuldades manifestadas pelos alunos

Nesta questão, a reflexão dos alunos tomou dois partidos distintos. Uma parte deles referiu que preferia resolver tarefas de contextos matemáticos, até porque são as que estão mais habituados a fazer. Quando surgem este tipo de tarefas, esses alunos referiram que se sentiam à vontade em interpretá-las e que não tinham muitas dificuldades em fazê-lo. Aliás, foi quase unânime a opinião de todos que as dificuldades que sentiam na interpretação de tarefas inseridas neste contexto surgiam por falta de estudo e desconhecimento dos conteúdos matemáticos. Como tal, para estes alunos, as dificuldades na interpretação, evidenciavam-se nas tarefas de contextos reais:

Como o método de ensino abordado ao longo de maior parte dos anos escolares sempre foi feito de forma mais sistemática, na medida em que era só necessário aplicar as fórmulas, o facto de me terem sido apresentados problemas mais adaptados a situações reais do dia a dia, tiveram peso sobre as dificuldades que senti, por requererem uma forma de pensar mais abrangente e não tão focada só na teoria. Nos problemas de cariz essencialmente matemático, as únicas dificuldades que possa ter sentido foram mais em termos de matéria. (Questionário, Bruna)

As dificuldades que aqui surgem devem-se, essencialmente, a um domínio pouco claro dos conteúdos matemáticos e a lacunas na realização de conexões entre diferentes conceitos matemáticos.

O outro grupo de alunos assumiu que as tarefas de contexto real permitiam interpretar e compreender melhor o que era pedido, sendo mais cativantes e despertando uma maior atenção para os detalhes das tarefas. Para estes alunos, poder associar a tarefa a uma situação do dia-a-dia facilitava a compreensão do que era pedido e permitiu desenvolver formas diferentes de pensar:

Acho que as situações reais, pelo menos para mim, foram mais fáceis, porque pude associar isso a algo que, de certa forma, não era próximo da matemática. Ao termos coisas mais reais, podemos associar a alguma coisa que conhecemos e, a partir daí, desenvolver um pensamento diferente do que poderia criar se fossem só coisas matemáticas. (Questionário, Hugo)

Houve, ainda, um aluno que viu os dois lados da moeda, referindo-se aos diferentes contextos que teve de abordar:

Em relação a esta questão, penso que a resposta pode não ser tão centrada num contexto em específico. No meu caso, há exercícios que eu entendo melhor se forem contextos

matemáticos, que não se assemelhem de todo a uma situação da realidade, como foi o caso dos dois primeiros que fizemos. Nesses casos, até prefiro que o enunciado tenha um contexto mais matemático, pois compreendo melhor o que envolve a tarefa. No entanto, também acho que noutras situações entendo melhor se forem tarefas assemelhadas as situações reais, como foi o caso das últimas tarefas que fizemos, que o professor até colocava os nossos nomes e tudo. Isso acabava por ajudar, não só a compreender o que se pedia, mas também conseguíamos, de uma maneira ou outra, adaptar e incorporar a matemática a uma realidade. Isso também é importante, porque conseguimos ver como é que a matemática está inserida no nosso quotidiano e no nosso dia-a-dia. (Questionário, Filipe)

De facto, os diversos contextos trazem dificuldades e trazem riqueza na interpretação. Tal como referem vários autores (ME, 2017; Novriana & Surya, 2017; Ponte, 2005; Ponte & Quaresma, 2012; Ulandari et al., 2019). As tarefas com contextos matemáticos, semirreais ou reais, permitem desenvolver diferentes tipo de competências, conceitos, conteúdos e conexões entre eles-

A adaptabilidade a situações do dia-a-dia possibilita que conceitos e temas que não são tão bem entendidos em tarefas de contextos matemáticos ganhem sentido e possam ser compreendidos mais facilmente. Os próprios alunos referiram que têm sempre exemplos da vida real para associar e isso faz com consigam interpretar melhor as tarefas. Por sua vez, as dificuldades surgem aqui muito pelos alunos estarem presos à matemática e aos seus conceitos e não lhes darem um sentido real. Como eles referem, têm de abrir o seu leque de imaginação para poderem estar mais dentro das situações e não tão focados na teoria.

Capítulo 6 - Conclusões

Este estudo teve como objetivo conhecer as dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas matemáticas de contexto diversificado. Procurou-se identificar essas dificuldades, as suas causas e as influências que os contextos das tarefas tiveram nessas dificuldades, de forma a serem obtidas respostas às três questões de investigação. Para tal, o investigador desenvolveu quatro tarefas que foram aplicadas a um grupo de alunos de 11º ano da escola onde desenvolveu a PES. As tarefas foram realizadas por estes alunos, as quais foram acompanhadas de entrevistas, de modo que pudessem ser identificadas as dificuldades que surgiam durante a realização dessas mesmas tarefas. No final das entrevistas com tarefas, os alunos responderam ainda a um questionário, com o intuito de se esclarecer e aprofundar informações acerca da temática em estudo.

Dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas matemáticas

Com vista a poderem ser compreendidas de uma forma mais ampla as dificuldades dos alunos, este estudo foi composto por tarefas de natureza desafiante (Ponte, 2005). Também o contexto das tarefas teve um papel importante na criação e seleção das mesmas, tendo a sua diversificação sido fundamental para a compreensão de possíveis dificuldades dos alunos na interpretação das mesmas. Na tabela seguinte (Tabela 2), procurei apresentar uma síntese dessas dificuldades, bem como das respetivas causas que lhes estão associadas.

Dificuldades	Causas
Compreensão textual/ linguística	• Leitura rápida e pouco detalhada do enunciado; • Falta de concentração; • Estrutura e extensão do enunciado; • Falta de domínio da língua portuguesa; • Construção frásica do enunciado; • Compreensão da situação real da tarefa; • Procura imediata da solução; • Falta de prática na realização de tarefas desafiantes.

Compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos	• Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos.
Recolha e organização de informação	• Leitura rápida e pouco detalhada da tarefa, desprezando informações e dados relevantes; • Falta de concentração; • Estrutura e extensão do enunciado; • Compreensão da situação real da tarefa; • Procura imediata da solução; • Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Falta de prática na recolha e organização de dados.
Conexões de conceitos e conteúdos matemáticos	• Leitura rápida e pouco detalhada das tarefas; • Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução.
Compreensão do enquadramento real da tarefa	• Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução; • Falta de prática na realização de tarefas desafiantes.
Compreensão do enquadramento temporal da tarefa	• Compreensão da situação real da tarefa; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução; • Falta de prática na realização de tarefas desafiantes.

Interpretação do resultado obtido	• Compreensão da situação real da tarefa; • Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução; • Falta de prática na verificação de resultados.
-----------------------------------	--

Tabela 2 - Dificuldades manifestadas na interpretação de tarefas e suas causas

Apoiados por esta sistematização e pela análise dos dados, realizada na secção anterior, vamos, agora, apresentar essas dificuldades e suas causas, bem como a forma como os diferentes contextos tiveram influência nessas dificuldades.

Os bloqueios iniciais surgiram da compreensão dos dados e informações do enunciado, na sua articulação e nas conexões que eram necessárias fazer com os conceitos matemáticos presentes. Indo ao encontro do que está referido pela maioria dos autores (Novriana & Surya, 2017; Pearce et al., 2013; Phonapichat et al., 2014; entre outros) no Capítulo 2, referente ao enquadramento teórico, muitos dos alunos manifestaram dificuldades na leitura do enunciado, causadas pela forma como o mesmo estava escrito, nomeadamente, as palavras e expressões utilizadas. Estes revelaram problemas em descortinar algumas expressões que não eram tão diretas e que o seu sentido tinha de ser adaptado à situação da tarefa. Havia termos específicos e com significados particulares, próprios da matemática, que os alunos tinham dificuldade em interpretá-los e a perceber a sua relação com a tarefa. Tal como foi referido por Menina (2009), os alunos, ao depararem-se com este tipo de expressões nos enunciados, se não fossem conhecedores do seu registo matemático, teriam dificuldades em compreender o que era pedido. De facto, foi algo comum em grande parte das tarefas: um mau domínio dos conceitos matemáticos impediu que os alunos interpretassem muitas das palavras e expressões que surgiam, dando origem a que os dados e informações não fossem recolhidos da melhor forma.

Também o domínio da língua portuguesa se revelou um entrave na leitura dos enunciados. Em diversas situações, os alunos não compreendiam a que se referia uma informação ou um dado, simplesmente por não interpretarem bem o sentido das frases. Outras, devia-se ao facto de estarem presentes enunciados extensos, o que implicou e dificuldades ao nível da seleção de informação. Tornaram-se evidentes dificuldades dos

alunos, não tanto na matemática, mas, sim, no domínio da língua materna, tal como referiu Cagliari (2010). De facto, a língua portuguesa é bastante complexa e a sua compreensão frásica é fundamental para que seja feita uma boa interpretação. É preciso analisar bem o modo como a frase está escrita e os seus elementos, como, por exemplo, a pontuação, pois a mesma frase com pontuações díspares altera o seu significado por completo. E, na matemática, significados diferentes originam resoluções diferentes, que podem alterar o objetivo da tarefa. Deste modo, a interpretação textual tornou-se uma dificuldade recorrente em diversos alunos na realização das suas tarefas.

Esta heterogeneidade da língua portuguesa está relacionada com as dificuldades que referi anteriormente e atinge uma dimensão maior quando surgem diferentes contextos. Basta pensar que a mesma palavra, aplicada a situações distintas, pode ter significados completamente diferentes. Deste modo, os vários contextos que surgiram nas tarefas trouxeram dificuldades diferentes.

Como os próprios alunos referiram na sua reflexão, alguns deles sentiam-se mais à vontade para interpretar tarefas de contexto matemático. Isto devia-se ao facto de eles compreenderem, quase de forma automática, a que se referiam as palavras e expressões presentes nos enunciados, não revelando tantas dificuldades em enquadrar os conceitos matemáticos nas tarefas. De facto, isto permitia-os fazer conexões quase diretas e fazer uma recolha dos dados do enunciado mais eficaz. No entanto, a forma como algumas frases estavam estruturadas gerava, por vezes, interpretações dos dados de uma forma incorreta, mesmo que compreendessem bem todos os conceitos presentes. Por isso, mesmo para estes alunos que demonstravam ter prática e utilizavam procedimentos corretos para resolver tarefas puramente matemáticas, a interpretação do que era enunciado nem sempre era a mais acertada. A estrutura linguística das tarefas, que indicava como os alunos deviam proceder e analisar a informação fornecida, foi uma das dificuldades principais destes alunos. Como tal, e como refere Alves (2020), a articulação entre a língua portuguesa e a matemática deve estar presente na aprendizagem dos alunos.

Por sua vez, houve alunos neste estudo que sentiram que as tarefas de contextos matemáticos foram aquelas onde tiveram mais dificuldades. Para eles, o facto de as situações tratadas nessas tarefas serem abstratas e não terem ligação com a realidade prejudicava a sua interpretação. Quando olhavam para o enunciado, por norma, não sabiam o que fazer, pois não compreendiam de que forma teriam de fazer ligações entre os dados fornecidos pela tarefa e ideias matemáticas que já conhecem, de modo a

permitir-lhes traçar um processo de resolução. Nestes casos, as informações que eram fornecidas diretamente na tarefa eram as únicas que eles conseguiam recolher. Já aquelas que exigiam uma maior interpretação e algumas conexões com conceitos matemáticos, traziam-lhes dificuldades em decifrar de que forma é que essas conexões seriam feitas e que conceitos poderiam utilizar. Por sua vez, quando o investigador tornava esta informação mais palpável e a adaptava a situações menos abstratas, eles já conseguiam pensar melhor e interpretar aquilo que era pedido. Esta interpretação foi ainda mais facilitada quando o contexto da própria tarefa era mais próximo da realidade dos alunos.

Tornou-se evidente que estes alunos interpretavam de uma forma muito mais detalhada, tarefas onde eram contempladas situações ligadas ao seu dia-a-dia e que tinham relação com os seus interesses. Os mesmos alunos que não conseguiam fazer conexões entre conceitos em tarefas de contexto matemático e se perdiam na recolha de dados, liam todos os detalhes que o enunciado fornecia de modo a procurar as informações necessárias para resolver as tarefas. Obviamente que iam surgindo dificuldades na interpretação de conceitos matemáticos, todavia, a compreensão destes próprios conceitos foi facilitada pelo contexto das tarefas. Ou seja, o facto de os alunos terem presentes situações reais originou a que eles próprios compreendessem as ideias matemáticas que integraram a tarefa, ainda que não dominassem na totalidade os seus conceitos. Assim, através de situações reais das tarefas, foi possível que alguns conteúdos matemáticos fossem melhor compreendidos pelos alunos, o que lhes permitiu superar dificuldades que iam surgindo na interpretação. Este tipo de tarefas trazia muitos benefícios a estes alunos mais desligados dos conceitos matemáticos, fazendo-os entender a utilidade da matemática em situações do quotidiano. Os conceitos e conteúdos acabavam por surgir de uma forma natural na interpretação dos enunciados, ganhando um significado diferente. Os próprios alunos sentiram uma motivação diferente, quando foram inseridas nas tarefas situações que faziam parte das suas vidas. Isto possibilitou, tal como analisaram Ulandari et al. (2019), que, através de contextos reais, a capacidade de resolução de tarefas destes alunos tivesse melhorias significativas.

Ainda assim, as tarefas de contexto real e semirreal trouxeram dificuldades aos alunos. Estas revelaram-se, principalmente, naqueles que se sentiam mais à vontade nas tarefas de contexto matemático, os quais tinham bem presentes os conceitos matemáticos e os procedimentos que tinham de utilizar para os aplicar. Todavia, quando estes foram associados a situações reais, os alunos revelaram dificuldades em

descobrir que conceitos/conteúdos matemáticos teriam que mobilizar. Causava-lhes alguma estranheza não aparecerem fórmulas, equações, figuras geométricas, etc., mas, sim, uma informação mais textual. Nestas situações, sentiu-se que estes alunos perderam um pouco o interesse em resolver as tarefas, por terem à sua disposição tanta informação para interpretar e que não sabiam como utilizar os conceitos matemáticos que conheciam. Na visão deles, e apesar de lhes serem situações próximas, sentiam-se confusos por terem que dar tantas voltas para chegarem a conceitos que dominavam bem, também provocada pela falta de prática na realização de tarefas ligadas a situações do quotidiano (Novriana & Surya, 2017). O conforto em realizar tarefas rotineiras e de mecanização tornou-se um obstáculo para os alunos, tal como referem Martins & Martinho (2018). De qualquer forma, o investigador, durante a entrevista foi incentivando os alunos a colocarem-se naquelas situações que foram criadas especificamente para eles. Assim que eles conseguiam *entrar* na tarefa, percebendo exatamente o que era pedido, conseguiram interpretá-la e aplicar corretamente os conceitos.

Como foi referido nas perceções dos alunos, houve alguns deles que compreenderam o papel que cada um destes contextos tinha na sua aprendizagem, indo em conta ao que foi mencionado por Ponte & Quaresma (2012), e na superação das dificuldades. Eles sentiram que as tarefas de contexto matemático contribuíram para aplicarem os conceitos matemáticos que haviam lecionado, para realizarem conexões e para atingirem as dificuldades que tinham nos conhecimentos matemáticos que não estavam tão bem apreendidos. Foi também notório que o facto de as tarefas não serem tão acessíveis e exigirem algum desafio os fez identificar as dificuldades que tinham na sua interpretação e desenvolver as suas capacidades de compreensão e raciocínio. Já as tarefas mais próximas de situações reais possibilitaram que pudesse ser dado um maior significado aos conceitos matemáticos que estavam a ser lecionadas. Obviamente que esse significado não era atingido de forma imediata, pelo que surgiram dificuldades na sua interpretação e os enunciados tiveram de ser analisados de uma forma mais detalhada para os seus dados serem recolhidos corretamente. Quando conseguiam efetuar essa recolha de dados corretamente, a interpretação das tarefas tornava-se mais sustentada, pois a situação real trazia um novo sentido à tarefa. Deste modo, ficava perceptível a utilidade dos conhecimentos matemáticos presentes nas tarefas, o que permitia ultrapassar algumas dificuldades de interpretação.

Podemos, assim, referir que os contextos das tarefas têm implicações nas dificuldades de interpretação dos alunos, criando uma relação entre as duas últimas questões de

investigação deste estudo, ou seja, o contexto pode ser uma causa dessas dificuldades. Foi possível observar nesta investigação que a influência dos contextos das tarefas é bastante significativa nas dificuldades de interpretação dos alunos. Basta ver que, por norma, os alunos que apresentam mais dificuldades num tipo de contexto são os que apresentam menos dificuldades noutro. As dificuldades associadas aos contextos de uma tarefa podem atingir dimensões diferentes, dependendo dos alunos. Por exemplo, alunos que se sintam mais à vontade em tarefas de contextos reais revelam menos dificuldades nas questões linguísticas destas tarefas do que em tarefas de contexto matemático. Um outro exemplo acontece no sentido contrário, havendo alunos que apresentam menos dificuldades em interpretar enunciados extensos de tarefas matemáticas do que enunciados da mesma extensão, mas de tarefas que envolvem situações reais. Aqui, fica visível que os contextos das tarefas influenciam bastante as dificuldades dos alunos.

Ficou aparente neste estudo que as dificuldades que os alunos apresentaram na resolução das tarefas surgiram, inicialmente, na sua compreensão. Contudo, as restantes fases do modelo de Polya (2003) também se mostraram relevantes na interpretação dos alunos. Estes começavam por ter dificuldades na interpretação e análise dos dados fornecidos, devido aos aspetos já referidos. De seguida, surgia o desafio aos alunos de interpretarem o que teriam de fazer com os dados recolhidos do enunciado e como teriam de o fazer, isto é, o estabelecimento do plano e a sua execução. No final, foram várias as ocasiões em que os alunos procuraram interpretar os resultados obtidos, verificando-os através de cálculos e refletindo acerca da sua coerência. Em todas estas fases de resolução das tarefas, foram surgindo, durante as entrevistas entre o investigador e os alunos, várias das heurísticas presentes na obra de Polya (2003), adaptadas a cada situação. As mais comuns, como demonstram as citações da análise de dados, foram as seguintes: “Quais são os dados?”; “Faz uma figura que represente o que está enunciado”; “De certeza que leste o enunciado corretamente?”; “Já utilizaste os dados todos que estão no enunciado?”; “O resultado que obtiveste faz sentido na situação considerada?”, entre outras. De facto, as tarefas exigem que seja feita, continuamente, uma interpretação do que está a ser realizado, seja na compreensão, na delineação e execução de procedimentos e na sua verificação. As ideias aqui apresentadas vão ao encontro dos estudos de vários autores (Hadi et al., 2018; Mesquita, 2013; Nunes, 2017) quando apontam que as dificuldades na interpretação vão surgindo ao longo das várias fases de resolução de uma tarefa. Torna-se, assim, imperativo, no final das tarefas, fazer uma reflexão do que foi realizado, para que os próprios alunos possam aperceber-se dos erros que cometeram e de que forma

as suas interpretações tiverem influência nessas lacunas. Podemos, assim, concluir que as dificuldades na interpretação acompanharam as diferentes etapas das tarefas propostas aos alunos, levando a que eles tivessem de ter sempre uma atenção contante ao longo da sua resolução.

Considerações finais

Na minha ótica, este estudo vem realçar, como outros estudos já realizados, as dificuldades que os alunos apresentam na interpretação de enunciados de tarefas matemáticas. Deste modo, vem também reforçar a importância de se constituir intervenções, em sala de aula, que permitam dar resposta a essas dificuldades e contrair esta situação vivenciada por vários alunos. Como podemos constatar neste estudo, os alunos cometem bastantes erros nas resoluções das suas tarefas, devido a interpretações erradas. Como tal, a influência da interpretação numa tarefa é muito significativa na sua resolução e este foi um aspeto que me motivou a fazer esta investigação. Procurou-se identificar as dificuldades que os alunos têm na interpretação, para que eles próprios reflitam sobre elas e percebam o porquê de terem sido cometidas. A reflexão sobre os nossos equívocos é o que nos permite analisar onde erramos e procurar não voltar a cometer os mesmos erros no futuro. Como tal, se os alunos não tiverem noção das dificuldades que apresentam na interpretação e consequente resolução das tarefas será mais complicado que as possam ultrapassar. O facto de, neste estudo, estarem presentes algumas das dificuldades dos alunos (a meu ver, as mais comuns) poderá proporcionar que outros alunos se possam identificar com essas mesmas adversidades e perceber as suas causas.

A nível do meu desenvolvimento profissional, penso que esta investigação permitiu-me ter um conhecimento mais sustentado deste tema e acompanhar de perto as implicações que o mesmo tem nos alunos. De facto, não é fácil um professor retirar dos alunos as suas dificuldades, pois, por norma, procuram dar sempre uma resposta correta àquilo que os docentes lhes questionam. Eu próprio já fui aluno e, na nossa visão, queremos sempre ficar bem vistos com os professores, procurando causar uma impressão positiva e, em simultâneo, sentirmo-nos realizados com as nossas capacidades. Como tal, tornou-se um desafio identificar estas dificuldades dos alunos, pois, em muitas das tarefas, eles preferiam não as realizar a errar. Houve, por isso, um esforço da minha parte para incentivar os alunos a exprimirem essas dificuldades e a solicitar que libertassem todos os pensamentos que tinham dentro deles, fosse de forma oral, ou de forma escrita. Só assim era possível ao investigador identificar as

dificuldades que os alunos tinham e acho que eles ganharam com isso, pois, ao conhecerem os seus obstáculos, tornavam-se mais capazes de os superar.

Este relatório, sendo o primeiro com esta dimensão e importância que realizei, trouxe-me algumas dificuldades, por esse mesmo facto de nunca ter produzido algo deste género. Foi, sem dúvida, uma aprendizagem muito significativa poder aprofundar os conhecimentos destes temas relacionados com o ensino-aprendizagem da matemática, em particular, com o trabalho realizado em torno da exploração de tarefas. Todos os estudos e obras consultados deram-me uma bagagem muito grande que desconhecia e fizeram-me olhar para as tarefas de uma forma muito mais sustentada. Também poder compreender como se realiza e os cuidados a ter numa intervenção pedagógica, conhecer e seleccionar todos estes procedimentos e instrumentos de recolha de dados utilizados e realizar uma análise aprofundada deles foi muito enriquecedor para mim e, com certeza, me trará benefícios no futuro.

Penso que este estudo tem a vantagem de poder ser implementado nos vários anos de escolaridade. É verdade que, ao ser feito com alunos mais novos, possibilitará que estes tenham numa fase inicial da sua aprendizagem um contacto com as suas dificuldades na interpretação e possam ultrapassar, desde cedo, essas lacunas. No entanto, à medida que os alunos vão evoluindo na sua escolaridade, é expectável que vão surgindo outras dificuldades a este nível, pelo que a implementação deste estudo em alunos de diferentes ciclos de ensino tem, igualmente, os seus benefícios. No meu entender, as tarefas matemáticas, ao longo dos anos, vão-se tornando mais complexas e vão carecendo de mais conhecimentos e conexões, pelo que irão surgir novas adversidades na interpretação. Como tal, esta deve ser trabalhada, de forma contínua pelos alunos e professores, com vista a um desenvolvimento do raciocínio dos alunos e a uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos. Como vimos, pelas tarefas realizadas pelos alunos, a matemática está bem presente no nosso dia-a-dia, pelo que esta articulação entre os conteúdos matemáticos e o quotidiano não devem deixar de ser considerados.

Para terminar, fazendo uma análise desta experiência, posso resumi-la em uma palavra: aprendizagem. Esta é uma das minhas motivações principais para ser professor: poder aprender. A sociedade vê um professor como alguém que tem de ensinar, ou seja, fazer os outros aprender. Na minha ótica, um professor aprende o mesmo ou mais que aquilo que ensina. Basta pensar que lidámos com alunos diferentes uns dos outros e todos eles nos trazem novas aprendizagens. A forma como nos adaptamos a cada um deles

leva a que tenhamos sempre de aprender as melhores estratégias para os ensinar, para os educar, para os formar, de modo que sejam melhores alunos e melhores pessoas. Devemos procurar sempre novas estratégias de aprendizagem, desafiar-nos a nós próprios, colocar-nos no lugar de cada aluno, pois só assim conseguimos perceber o que ele está a pensar e escolher o caminho mais acertado para satisfazer as suas necessidades. E tal como em tudo, tenho aprendido que a vida é uma constante aprendizagem e que estamos sempre a aprender uns com os outros. Aliás, no dia que acharmos que já sabemos tudo e que ninguém nos ensina nada, vamos sentir um vazio enorme dentro de nós. Não tenho qualquer dúvida que este estudo e estes alunos fizeram-me aprender muito, com eles e comigo próprio, e é esta aprendizagem constante e mútua que me faz querer abraçar esta profissão nos próximos anos.

Referências

- Alves, D. S. (2020). Dificuldades de interpretação de problemas matemáticos no 9º ano: Causas e soluções. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 01(05), 26-41.
<https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/interpretacao-de-problemas>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto Editora.
https://www.academia.edu/6674293/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_e_m_educacao
- Cagliari, L. C. (2010). *Alfabetização e Linguística*. Scipione.
- Caixeiro, C. M. (2014). *Liderança e cultura organizacional: o impacto da liderança do diretor na(s) cultura(s) organizacional(ais) escolar(es)* (Tese de Doutorado). Universidade de Évora, Évora. <http://hdl.handle.net/10174/11416>
- Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação - Guia para Auto-Aprendizagem* (2ª ed.). Unversidade Aberta.
https://www.academia.edu/17585183/Metodologia_da_Investiga%C3%A7%C3%A3o
- Costa, A. A., & Silva, M. A. (2013). *Uma releitura do livro “a arte de resolver problemas” de George Polya (1978)*. XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, Paraná.
http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3511_1924_ID.pdf
- Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica*. Monitor.
<https://pt.scribd.com/doc/183853257/41038-Metodos-Qualitativos-Uwe-Flick-2005-Metodos-Qualitativos-na-Investigacao-Cientifica-Lisboa-Monitor>
- Gazzoni, A., & Ost, A. (2008). A resolução de um problema: soluções alternativas e variações na formulação. *VIDYA*, 28(2), 37-45.
<https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/341/315>

- Goldin, G. (2020). Research Design in Mathematics and Science Education. *A scientific perspective on structured, tasked-based interviews in mathematics education research*, pp. 517-545.
https://www.researchgate.net/publication/313744920_A_scientific_perspective_on_structured_task-based_interviews_in_mathematics_education_research
- Hadi, S., Retnawati, H., Munadi, S., Apino, E., & Wulandari, N. F. (2018). The difficulties of high school students in solving higher-order thinking skills problems. *Problems of Education in the 21st Century*, 76, 520-532.
<https://www.ceeol.com/search/article-detail?id=942113>
- Hill, M. M. (2014). Desenho de questionário e análise dos dados - alguns contributos. In L. L. Torres, & J. A. Palhares (Orgs.), *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais da Educação* (pp. 133-164). Edições Húmus.
- Lodge, J.M., Kennedy, G., Lockyer, L., Arguel, A., & Pachman, M. (2018). Understanding Difficulties and Resulting Confusion in Learning: An Integrative Review. *Frontiers in Education*, 3(49). doi: 10.3389/feduc.2018.00049
- Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrilho, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação/Direção-Geral da educação.
https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidad_e/perfil_dos_alunos.pdf
- Martins, L., & Martinho, M. (2018). Estratégias, dificuldades e comunicação escrita de uma turma de 11º ano na resolução de um problema matemático. *Bolema*, 35(70), 903-936. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a16>
- Mattos, P. (2005). A entrevista não-estruturada como forma de conversação: razões e sugestões para sua análise. *Revista De Administração Pública*, 39(4), 823-848.
<https://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rap/article/view/6789>
- Menina, F. M. (2009). *Compreensão e interpretação em matemática: dificuldades de alunos do 9º ano na resolução de problemas* (Dissertação de Mestrado). Universidade do Algarve, Algarve. <https://sapientia.ualg.pt/handle/10400.1/256>
- Mesquita, M. S. (2013). *A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas* (Relatório do Projeto de Investigação). Instituto Politécnico de Setúbal, Setúbal. <http://hdl.handle.net/10400.26/20870>

- Ministério da Educação (ME) (2018). *Aprendizagens essenciais, Matemática A, 11º ano*.
https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/11_matematica_a.pdf
- Ministério da Educação (ME) (2021). *Aprendizagens Essenciais, Matemática, 7º ano*.
https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/aemat_7a_2021-08-19.pdf
- Moreira, C. (2007). *Teorias e práticas de investigação*. Instituto Superior de Ciências Sociais e Políticas.
- Novriana, M. R., & Surya, E. (2017). Analysis of Student Difficulties in Mathematics Problem Solving Ability at MTs SWASTA IRA Medan. *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research*, 33(3), 63-75.
<https://core.ac.uk/reader/249335829>
- Nunes, M. M. (2017). *A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas* (Relatório do Projeto de Investigação). Instituto Politécnico de Setúbal, Setúbal. <http://hdl.handle.net/10400.26/20870>
- OCDE. (2000). *Programa para a Avaliação Internacional dos Alunos*. Ministério da Educação. <https://www.oecd.org/portugal/33685403.pdf>
- Pearce, D. L., Bruun, F., Skinner, K., & Lopez-Mohler, C. (2013). What teachers say about student difficulties solving mathematical word problems in grades 2-5. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 8(1), 3-19.
<https://doi.org/10.29333/iejme/27>
- Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 116, 3169-3174.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042814007459>
- Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Gradiva.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). Contextualização curricular: princípios e práticas. *Interacções*, 8(22), 196-216.
<https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/1542>

- Pontes, E. (2019). Método de Polya para resolução de problemas matemáticos: uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. *HOLOS*, 3, 1-9. DOI: 10.15628/holos.2019.6703
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. *Bolema*, 14, 66-91. <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10636>
- Ulandari, L., Amry, Z., & Saragih, S. (2019). Development of learning materials based on realistic mathematics education approach to improve students' mathematical problem solving ability and self-efficacy. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(2), 375-383. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1227352.pdf>

Anexos

Anexo 1 - Termo de autorização

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

No âmbito de um Projeto de investigação do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo e secundário, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, o investigador André Bordalo Ramalhão Kingwell, pretende elaborar algumas entrevistas envolvendo a comunidade educativa, nomeadamente o seu educando. As entrevistas consistem em participações em tarefas, com objetivo de recolha de dados para o projeto. Apenas será gravado o áudio e recolhida a sua produção escrita. O mesmo não será divulgado, mas, sim, servirá de suporte para a componente escrita da investigação. As gravações que efetuar serão transcritas de modo a proporcionar uma melhor análise dos dados recolhidos, mas serão imediatamente destruídas após a conclusão deste trabalho de investigação. Os alunos não serão identificados no relatório escrito que resultar deste estudo de investigação, pois os nomes que nele figurarem serão fictícios para assegurar total anonimidade. Os alunos podem desistir da sua colaboração neste estudo de investigação em qualquer momento sem qualquer prejuízo. De salientar que apenas eu e a minha orientadora da faculdade, a Professora Doutora Fátima Delgado, teremos acesso às gravações.

Se tiver alguma questão sobre este trabalho, pode contactar-me através do número 917755192 ou do e-mail andre.kingwell.est@aeermesinde.net

Para o devido efeito, eu, _____,
encarregado de educação do aluno(a) _____,
do 11º C, autorizo a participação do meu educando no projeto acima exposto, em particular, o uso da voz e da produção escrita para fins de suporte escrito.

Assinatura/data _____

Para o devido efeito, eu, _____,
aluno(a) do 11º C, autorizo o uso da voz e da minha produção escrita para os fins de suporte escrito do projeto acima exposto.

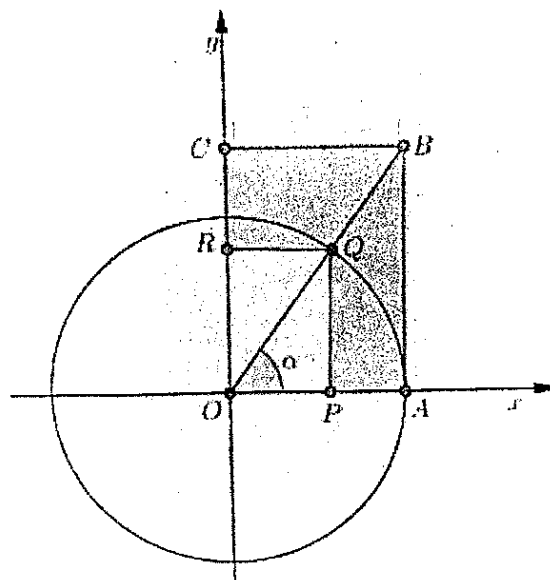
Assinatura/data _____

Anexo 2 – Tarefa 1 – 14 março

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. Na figura está representada, em referencial ortonormado e monométrico xOy , a circunferência trigonométrica e o polígono não convexo $[ABCRQP]$, representado a sombreado. Sabe-se que:

- O ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- O ponto B pertence ao primeiro quadrante e tem a mesma abcissa de A ;
- O ponto C pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de B ;
- O ponto P pertence ao segmento $[OA]$;
- O ponto Q pertence à semirreta OB e à circunferência e tem a mesma abcissa de P ;
- O ponto R pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de Q .



Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo POQ ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

1.1. Mostre que a área do polígono $[ABCRQP]$, representada a sombreado, é dada, em função de α , por $f(\alpha) = tg\alpha \times \sin^2\alpha$.

1.2. Sabendo que $\cos(\pi + \alpha) = -\frac{3}{4}$, determine o valor exato de $f(\alpha)$.

1.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine, caso exista, as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção do gráfico da função f com o gráfico da função g , tal que $g(\alpha) = \cos\alpha$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora (**atenção à janela considerada**) que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido, **arredondado às centésimas**. Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Anexo 3 – Tarefa 2 – 21 março

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

2. Considere, num referencial ortonormado no plano Oxy , a circunferência de centro na origem e raio 5 e os pontos A e B , dos quais se sabe que:
- A e B pertencem à circunferência;
 - A pertence ao semieixo negativo das abcissas;
 - B é um ponto do 1º quadrante.

Sabe-se ainda que a mediatriz de $[AB]$ é uma reta de declive -2 .

2.1. Para te apoiar na resolução das alíneas seguintes, faz um esboço de uma figura que podia fazer parte do enunciado da tarefa.

2.2. Determine uma equação reduzida do lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = 0$. O que representa essa equação?

2.3. Seja α a inclinação da reta AB . Qual o valor exato de $\sin \alpha + \cos \alpha$?

- (B) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

2.4. Determine as coordenadas do ponto B .

Anexo 4 – Tarefa 3 – 28 março

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. O Gonçalo quer fazer uma viagem de finalistas com os amigos no 12º ano e, como tal, já começou a colocar dinheiro de parte para não ter de pagar um montante muito elevado de uma vez só. Para realizar a viagem, entrou em contacto com uma agência de viagens e turismo, a FEXIL TRAVEL, LDA, com a qual combinou um plano de pagamentos da viagem em prestações:



- Ficou acordado que no dia 1 de cada mês irá pagar por MBWAY uma prestação à agência;
- O pagamento das prestações irá começar já no próximo mês;
- No dia de natal e no dia de aniversário, o Gonçalo vai pagar mais uma prestação;
- Sempre que paga uma prestação à agência, aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final de agosto desse ano, já tinha pago 160€;
- No dia 2 de janeiro de 2023, já tinham sido transferidos para a agência um total de 418€;
- O Gonçalo já fez anos em 2022 e não foi nos primeiros dois dias de janeiro.

1.1. Qual o valor em euros que o Gonçalo transfere a mais de prestação em prestação?

1.2. Supondo que a viagem tem um valor total de 630€ e que terá de ser paga à agência 10 dias antes da partida, em que dia se vai realizar a viagem?

2. A Eva é amiga do Gonçalo e também quer participar na viagem, mas só se inscreveu no dia 15 de agosto e pagou logo 65€ nesse dia. Combinou com a agência que os seus pagamentos seriam sempre no dia 15 e que todos os meses pagava mais 10€ que no mês anterior. A agência informou que não ia fazer nenhuma alteração no preço e que o valor era o mesmo para os dois.

2.1. Define uma sucessão (v_n) por recorrência que traduza o problema e determina a expressão do termo geral dessa mesma sucessão.

2.2. Em que dia a Eva tem a viagem paga? A agência terá de fazer alguma devolução?

Anexo 5 – Tarefa 4 – 4 abril – Bruna e Carla

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. A Carla e a Bruna estão empenhadas na atividade física e receberam propostas de duas empresas digitais de suplementação e artigos desportivos, a FEXIL FIT e a NUNCA FOI FIT, respetivamente, que as convidaram para serem *influencers* das marcas nas redes sociais. As empresas propuseram um contrato de um ano a começar no dia 1 de junho. Os vencimentos serão pagos no fim de cada mês. As condições de ambas as empresas podem ser observadas na seguinte tabela:

FEXIL FIT	NUNCA FOI FIT
• 500€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para artigos premium – CARLA15 - que deverá partilhar nas suas redes sociais e lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebem qualquer bónus; • pelo primeiro artigo vendido com esse código recebe 5€; • por cada artigo seguinte que vender recebe mais 15% do valor recebido pelo produto anterior; • só poderá vender 4 artigos premium por mês com o seu código; • nos meses do natal e da páscoa, poderá vender o dobro dos artigos premium com o seu código.	• 550€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para artigos premium – BRUNA10 - que deverá partilhar nas suas redes sociais e lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebem qualquer bónus; • pelo primeiro artigo vendido com esse código recebe 5€; • por cada artigo seguinte que vender através do seu código recebe mais 10€ do que o que recebeu pelo produto anterior; • só poderá vender 4 artigos premium por mês através do seu código; • nos meses do natal e da páscoa, poderá vender o dobro dos artigos premium com o seu código.

- 1.1. Qual o bónus máximo, em €, que podem receber a Carla e a Bruna até 30 de novembro?
- 1.2. Qual o salário máximo, em €, que podem receber até 15 de dezembro?
- 1.3. Qual será o salário anual, em €, que cada uma delas pode auferir se venderem metade dos artigos premium que podem vender por mês?
- 1.4. Qual das empresas oferece melhores condições? Justifica.

Anexo 6 – Tarefa 4 – 4 abril – Diogo e Inês

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. A Inês e o Diogo gostam de gerir recursos humanos e receberam propostas de dois ginásios, o NUNCA FOI GYM e o ROLO SPORTS & FITNESS, respetivamente, que as convidaram para serem relações públicas dos seus estabelecimentos, com o intuito de fidelizarem novos clientes.

As empresas propuseram um contrato de um ano a começar no dia 1 de junho. Os vencimentos serão pagos no fim de cada mês. As condições de ambas as empresas podem ser observadas na seguinte tabela:

NUNCA FOI GYM	ROLO SPORTS & FITNESS
• 500€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para os novos clientes que se inscreverem - INES15 - que lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebe qualquer bónus; • pelo primeiro cliente que se inscrever no ginásio com esse código recebe 5€; • por cada cliente seguinte que se inscrever com o seu código, recebe mais 15% do valor recebido pela inscrição anterior; • este código só poderá ser usado por 4 clientes por mês; • nos meses do natal e da páscoa, o seu código poderá ser usado pelo dobro dos clientes.	• 550€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para os novos clientes que se inscreverem – DIOGO10 - que lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebe qualquer bónus; • pelo primeiro cliente que se inscrever no ginásio com esse código recebe 5€; • por cada cliente seguinte que se inscrever através do seu código recebe mais 10€ do que o que recebeu pelo produto anterior; • este código só poderá ser usado por 4 clientes por mês; • nos meses do natal e da páscoa, o seu código poderá ser usado pelo dobro dos clientes.

1.1. Qual o bónus máximo, em €, que podem receber a Inês e o Diogo até 30 de novembro?

1.2. Qual o salário máximo, em €, que podem receber até 15 de dezembro?

1.3. Qual será o salário anual, em €, que cada um deles pode auferir, se, em cada mês, o seu código for usado por metade dos clientes que o podem fazer?

1.4. Qual das empresas oferece melhores condições? Justifica.

Anexo 7 – Tarefa 4 – 4 abril – Eva e Gonçalo

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. A Eva e o Gonçalo tiraram o curso de Personal Trainer e receberam propostas de dois ginásios, o NUNCA FOI GYM e o ANJOS SPORTS & FITNESS, respetivamente, que as convidaram para serem PTs dos seus estabelecimentos.

As empresas propuseram um contrato de um ano a começar no dia 1 de junho. Os vencimentos serão pagos no fim de cada mês. As condições de ambas as empresas podem ser observadas na seguinte tabela:

NUNCA FOI GYM	ANJOS SPORTS & FITNESS
• 500€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para os novos clientes de PT que angariarem – EVA15 - que lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebe qualquer bónus; • pelo primeiro cliente de PT que se inscrever com esse código recebe 5€; • por cada cliente seguinte que se inscrever com o seu código, recebe mais 15% do valor recebido pela inscrição anterior; • este código só poderá ser usado por 4 clientes por mês; • nos meses do natal e da páscoa, o seu código poderá ser usado pelo dobro dos clientes.	• 550€ de rendimento fixo mensal; • vai ter um código de desconto para os novos clientes de PT que angariarem – GONÇALO10 - que lhe permitirá receber um bónus; • nos primeiros dois meses, não recebe qualquer bónus; • pelo primeiro cliente de PT que se inscrever com esse código recebe 5€; • por cada cliente seguinte que se inscrever através do seu código recebe mais 10€ do que o que recebeu pelo produto anterior; • este código só poderá ser usado por 4 clientes por mês; • nos meses do natal e da páscoa, o seu código poderá ser usado pelo dobro dos clientes.

1.1. Qual o bónus máximo, em €, que podem receber a Eva e Gonçalo até 30 de novembro?

1.2. Qual o salário máximo, em €, que podem receber até 15 de dezembro?

1.3. Qual será o salário anual, em €, que cada uma delas pode auferir, se, em cada mês, o seu código for usado por metade dos clientes que o podem fazer?

1.4. Qual das empresas oferece melhores condições? Justifica.

Anexo 8 – Tarefa 4 – 4 abril – António e Hugo

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. O Hugo e o António são guarda-redes de futebol e receberam propostas de dois clubes, o NUNCA FOI FC e o ATLÉTICO CLUBE OVAIA, respetivamente, para integrarem o plantel da próxima época. Estas equipas irão disputar o campeonato distrital e a taça.

Os clubes propuseram um contrato de um ano a começar no dia 1 de junho. Os vencimentos serão pagos no fim de cada mês. As condições de ambas as instituições podem ser observadas na seguinte tabela:

NUNCA FOI FC	ATLÉTICO CLUBE OVAIA
• 500€ de rendimento fixo mensal; • irá receber um bónus (prémio de jogo) por cada jogo que jogar; • o campeonato tem início em agosto e fim em maio do ano seguinte; • pelo primeiro jogo que jogar, recebe 5€; • por cada jogo seguinte que jogar, recebe mais 15% do valor que recebeu pelo jogo anterior; • serão realizados 4 jogos do campeonato por mês; • nos meses do natal e da páscoa, irá realizar-se a taça, onde serão jogados 4 jogos dessa competição em cada mês.	• 550€ de rendimento fixo mensal; • irá receber um bónus (prémio de jogo) por cada jogo que jogar; • o campeonato tem início em agosto e fim em maio do ano seguinte; • pelo primeiro jogo que jogar, recebe 5€; • por cada jogo seguinte que jogar, recebe mais 10€ do que o que recebeu pelo jogo anterior; • serão realizados 4 jogos do campeonato por mês; • nos meses do natal e da páscoa, irá realizar-se a taça, onde serão jogados 4 jogos dessa competição em cada mês.

1.1. Qual o bónus máximo, em €, que podem receber o Hugo e o António até 30 de novembro?

1.2. Qual o salário máximo, em €, que podem receber até 15 de dezembro?

1.3. Qual será o salário anual, em €, que cada um deles pode auferir, se jogar metade dos jogos do campeonato e metade dos jogos da taça, sendo titular em todos os jogos?

1.4. Qual dos clubes oferece melhores condições? Justifica.

Anexo 9 – Tarefa 4 – 4 abril - Filipe e Joana

Faz uma leitura cuidada do enunciado e resolve a tarefa apresentada. Justifica todos os procedimentos que efetuares.

1. A Joana e o Filipe são dirigentes desportivos e receberam propostas de dois clubes de futebol, o NUNCA FOI FC e o ATLÉTICO CLUBE OVAIA, respetivamente, para integrarem a direção do clube na próxima época. Estas equipas irão disputar o campeonato distrital e a taça.

Os clubes propuseram um contrato de um ano a começar no dia 1 de junho. Os vencimentos serão pagos no fim de cada mês. As condições de ambas as instituições podem ser observadas na seguinte tabela:

NUNCA FOI FC	ATLÉTICO CLUBE OVAIA
• 500€ de rendimento fixo mensal; • irá receber um bónus (prémio de jogo) por cada vitória da equipa; • o campeonato tem início em agosto e fim em maio do ano seguinte; • pelo primeiro jogo que a equipa ganhar, recebe 5€; • por cada vitória seguinte, recebe mais 15% do valor que recebeu pela vitória anterior; • serão realizados 4 jogos do campeonato por mês; • nos meses do natal e da páscoa, irá realizar-se a taça, onde serão jogados 4 jogos dessa competição em cada mês.	• 550€ de rendimento fixo mensal; • irá receber um bónus (prémio de jogo) por cada vitória da equipa; • o campeonato tem início em agosto e fim em maio do ano seguinte; • pelo primeiro jogo que a equipa ganhar, recebe 5€; • por cada vitória seguinte, recebe mais 10€ do que o que recebeu pela vitória anterior; • serão realizados 4 jogos do campeonato por mês; • nos meses do natal e da páscoa, irá realizar-se a taça, onde serão jogados 4 jogos dessa competição em cada mês.

1.1. Qual o bónus máximo, em €, que podem receber a Joana e o Filipe até 30 de novembro?

1.2. Qual o salário máximo, em €, que podem receber até 15 de dezembro?

1.3. Qual será o salário anual, em €, que cada um deles pode auferir, se ganhar metade dos jogos do campeonato e metade dos jogos da taça?

1.4. Qual dos clubes oferece melhores condições? Justifica.

Anexo 10 – Questionário

QUESTIONÁRIO

No âmbito da tua participação no projeto de investigação “Dificuldades na interpretação de tarefas matemáticas”, do Mestrando André Bordalo Ramalhão Kingwell, Professor Estagiário de Matemática na Escola Secundária de Ermesinde, venho solicitar que respondas a este pequeno questionário, de forma a que possas fazer uma reflexão poderada desta experiência.

As questões colocadas fazem parte do objetivo deste estudo de diagnóstico:

1. Quais as dificuldades principais que sentiste na interpretação/ compreensão das tarefas propostas?
(Ou seja, em tudo o que envolvia as tarefas, desde os enunciados e as próprias perguntas.)
2. Por que motivos achas que essas dificuldades surgiram?
3. Que influências achas que os contextos das tarefas tiveram nas dificuldades que sentiste?
(Isto é, houve tarefas que eram mais de matemática (as duas primeiras), outras mais adaptadas a situações reais e do dia a dia (as duas últimas). Pretendo saber se isso influenciou na tua compreensão e interpretação do que era pedido.)