

OTIMIZAÇÃO DA FORMA DE ESTRUTURAS RETICULADAS

LUÍS PEDRO MOREIRA RODRIGUES

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS E GEOTECNIA

Orientador: Professor Doutor Álvaro Ferreira Marques Azevedo

JULHO DE 2022

MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2021/2022

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

✉ m.ec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado em Engenharia Civil - 2021/2022 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2022*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respetivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão eletrónica fornecida pelo respetivo Autor.

Aos meus pais e irmão.

*The task is not so much to see what no one has yet seen; but to think what nobody has
yet thought, about that which everybody sees.*

Erwin Schrodinger

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer aos meus pais que me proporcionaram as ferramentas necessárias para o término deste caminho, bem como o apoio dado.

Agradecer ao meu irmão mais velho por estar sempre a pressionar-me para dar o meu melhor e para me esforçar para ter os melhores resultados possíveis.

Agradecer a amigos, colegas e conhecidos pelos momentos vividos e pela amizade e camaradagem partilhada.

Agradecer ao Professor Doutor Álvaro Ferreira Marques Azevedo pela orientação e esclarecimento de dúvidas necessárias para a realização deste trabalho.

Agradecer à FEUP enquanto instituição e aos seus professores pela formação dada no âmbito do conhecimento, mas também enquanto pessoa.

Agradecer à AEFEUP pelos momentos de diversão e de amizade proporcionados

Agradecer os pequenos momentos que trazem grandes recordações, pois são eles que marcam a vida de cada pessoa.

RESUMO

O principal objetivo de um projetista de estruturas, com base na sua experiência, é a procura pela solução que respeite em simultâneo os diversos requisitos de segurança de uma dada estrutura. No entanto, na prática, não se pode afirmar que a solução encontrada pelo projetista seja a solução mais económica para o projeto, visto que é baseada na experiência e intuição. Para ultrapassar este problema é possível recorrer à otimização de estruturas, que na maior parte dos casos procura encontrar a solução que torne mínimo o custo, sem que a estrutura deixe de ter utilidade, cumprindo as exigências relativas à sua segurança e desempenho, como mencionado anteriormente.

Dos diversos parâmetros que definem a solução estrutural, escolhe-se previamente as grandezas que se pretende mudar e que são o principal critério de classificação de problemas de otimização de estruturas como por exemplo, secções transversais de estruturas reticuladas, espessuras de meios laminares, coordenadas dos nós, comprimento das barras e ângulo de uma barra com a linha horizontal. Estes exemplos condicionam a classificação dos problemas.

No presente trabalho é elaborada com uma abordagem genérica a questão da otimização na engenharia civil, através da formulação de programas matemáticos correspondentes a minimização de volumes e minimização de custos que são as possíveis funções objetivo do problema. Os diferentes requisitos relativos ao desempenho e segurança correspondem às restrições de igualdade e desigualdade.

Para a resolução dos programas matemáticos que correspondem aos vários problemas de otimização abordados no decorrer deste trabalho são utilizadas as folhas de cálculo do software Microsoft Excel, com a utilização da ferramenta Solver. Este software utiliza vários métodos numéricos para a resolução de vários tipos de problemas.

PALAVRAS-CHAVE: Otimização, Engenharia Civil, Minimização de Volume, Minimização de Custo, Solver.

ABSTRACT

The main objective of a structural designer, based on his experience, is the search for a solution that simultaneously respects the different safety requirements of a given structure. However, in practice, we cannot say that the solution found by the designer is the most economical solution for the project, since it is based on experience and intuition. To overcome this problem, it is possible to resort to the optimization of structures, which in most cases seeks to find the solution that minimizes the cost, without making the structure unusable, fulfilling the requirements regarding its safety and performance as mentioned above.

Of the various parameters that define the structural solution, the magnitudes to be changed are previously chosen and which are the main criteria for classifying structural optimization problems, such as cross-sections of reticulated structures, thicknesses of laminar sheets, coordinates of nodes, length of bars and angle of a bar with the horizontal line. These examples dictate the classification of the problems.

In the present work, optimization problems in civil engineering are developed with a generic approach, through the formulation of mathematical programs corresponding to volume minimization and cost minimization, which are the possible objective functions of the problem. The different performance and safety requirements correspond to the equality and inequality constraints.

To solve the mathematical programs that correspond to the various optimization problems addressed in the course of this work, Microsoft Excel spreadsheets are used, using the Solver tool. This software uses various numerical methods to solve various types of problems.

KEYWORDS: Optimization, Civil Engineering, Volume Minimization, Cost Minimization, Solver.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	ii
ABSTRACT	vi
1 . INTRODUÇÃO	1
1.1. BREVE INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL	1
1.2. OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO	2
1.3. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	2
2 . OTIMIZAÇÃO	5
2.1. GENERALIDADES.....	5
2.1.1. FORMULAÇÃO DO PROGRAMA MATEMÁTICO	5
2.1.2. COMPONENTES DO PROGRAMA MATEMÁTICO.....	7
2.1.2.1. Variáveis de Projeto	7
2.1.2.2. Função Objetivo	8
2.1.2.3. Restrições Igualdade e Desigualdade.....	8
2.1.2.4. <i>Side Constraints</i>	10
2.2. INTERESSES E LIMITAÇÕES	10
2.3. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO APLICADOS À ENGENHARIA CIVIL	10
2.3.1. OTIMIZAÇÃO DAS SECÇÕES TRANSVERSAIS	11
2.3.2. OTIMIZAÇÃO DE ESPESSURAS	11
2.3.3. OTIMIZAÇÃO DA FORMA.....	11
2.3.4. OTIMIZAÇÃO DE APOIO À DECISÃO	11
2.3.5. OTIMIZAÇÃO DE MATERIAIS	11
2.3.6. OTIMIZAÇÃO DA TOPOLOGIA	11
3 . MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO	13
3.1. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADOS PELA FERRAMENTA SOLVER	15
3.1.1. MÉTODO LP SIMPLEX	15
3.1.2. MÉTODO GRG (GRADIENTE REDUZIDO GENERALIZADO) NÃO LINEAR.....	17
3.1.2.1. Condições Karush-Kuhn-Tucker (KKT).....	18
3.1.3. MÉTODO EVOLUCIONÁRIO.....	20
4 . APLICAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO A PROBLEMAS SIMPLES DE ENGENHARIA CIVIL	23

4.1. CONSOLA DE VANDERPLAATS	23
4.1.1. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA MATEMÁTICO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	24
4.1.2. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO COM A FERRAMENTA SOLVER DO EXCEL.....	28
4.1.3. SOLUÇÃO ENCONTRADA E CONCLUSÕES	30
4.2. CONSOLA DE DUAS SECÇÕES	31
4.2.1. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA MATEMÁTICO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	31
4.2.2. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO COM A FERRAMENTA SOLVER DO EXCEL.....	34
4.2.3. SOLUÇÃO ENCONTRADA E CONCLUSÕES	36
5 . APLICAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO DA FORMA A PROBLEMAS DE ENGENHARIA CIVIL.....	37
5.1. PÓRTICO DE UM ARMAZÉM INDUSTRIAL	37
5.1.1. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA MATEMÁTICO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DA FORMA DO PÓRTICO DE ARMAZÉM INDUSTRIAL	45
5.1.2. FERRAMENTA SOLVER DO EXCEL APLICADA AO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO	50
5.1.3. SOLUÇÃO ENCONTRADA.....	66
5.1.4. OBSERVAÇÕES, CONCLUSÕES E COMPARAÇÃO ENTRE CASOS DO PROBLEMA DA OTIMIZAÇÃO DA FORMA DO PÓRTICO DO ARMAZÉM INDUSTRIAL.....	74
5.2. PONTE.....	75
5.2.1. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA MATEMÁTICO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DA FORMA DA PONTE	77
5.2.2. FERRAMENTA SOLVER DO EXCEL APLICADA AO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO	82
5.2.3. SOLUÇÃO ENCONTRADA.....	86
5.2.4. OBSERVAÇÕES, CONCLUSÕES E COMPARAÇÃO ENTRE CASOS DO PROBLEMA DA OTIMIZAÇÃO DA FORMA DA PONTE	88
6 . CONCLUSÃO	89
6.1. OBSERVAÇÕES FINAIS	89
6.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	90
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1- Representação gráfica de um problema de maximização e de um de minimização.	6
Figura 2.2- Representação gráfica dos pontos ótimos.	6
Figura 2.3 - Representação gráfica de um problema de minimização de uma função sujeita a restrições igualdade e desigualdade. Adaptado de Arora (1989).	9
Figura 3.1 - Fluxograma comum aos métodos de otimização. Adaptado de Arora (1989) e Azevedo (1994)	14
Figura 3.2- Representação gráfica do Método LP Simplex. Adaptado de Rodrigues Moura (2019)	16
Figura 3.3- Representação gráfica do método GRG Não linear. Adaptado do site <i>EngineerExcel</i>	17
Figura 3.4- Representação gráfica do Método Evolucionário. Adaptado do site <i>EngineerExcel</i> .	20
Figura 4.1- Consola de 5 secções ou consola de Vanderplaats.	23
Figura 4.2- Folha de cálculo do Excel com o problema de otimização formulado	28
Figura 4.3- Definição dos diferentes parâmetros da ferramenta Solver	29
Figura 4.4- Consola de duas secções transversais. Adaptado de Azevedo (1994)	31
Figura 4.5- Folha de cálculo Excel com o problema de otimização formulado	34
Figura 4.6- Definição dos diferentes parâmetros da ferramenta Solver	35
Figura 5.1- Pórtico de um armazém industrial	37
Figura 5.2- Secção transversal de aço maciço	38
Figura 5.3- Secção transversal de aço maciço	39
Figura 5.4- Secção transversal tubular quadrada de aço	39
Figura 5.5- Secção transversal tubular quadrada de aço	40
Figura 5.6- Secção transversal tubular quadrada de aço	40
Figura 5.7- Secção transversal de um Perfil IPE	41
Figura 5.8- Secção transversal do perfil IPE	42
Figura 5.9- Secção transversal do perfil IPE	42
Figura 5.10- Linha de tendência $A_{perfil\ IPE}(H_{perfil\ IPE})$	43
Figura 5.11- Linha de tendência $I_{perfil\ IPE}(H_{perfil\ IPE})$	44
Figura 5.12- Linha de tendência $I_{perfil\ IPE}(A_{perfil\ IPE})$	44
Figura 5.13- Método dos Deslocamentos introduzido na folha de Excel do 2º caso de otimização do pórtico	47
Figura 5.14- Folha de cálculo Excel com o 1º caso do problema de otimização formulado	50
Figura 5.15- Definição dos diferentes parâmetros do 1º caso do problema de otimização	51

Figura 5.16- Folha de cálculo Excel com o 2º caso do problema de otimização formulado	52
Figura 5.17- Definição dos diferentes parâmetros do 2º caso do problema de otimização	53
Figura 5.18- Folha de cálculo Excel com o 3º caso do problema de otimização formulado	54
Figura 5.19- Definição dos diferentes parâmetros do 3º caso do problema de otimização	55
Figura 5.20- Folha de cálculo Excel com o 4º caso do problema de otimização formulado	56
Figura 5.21- Definição dos diferentes parâmetros do 4º caso do problema de otimização	57
Figura 5.22- Folha de cálculo Excel com o 5º caso do problema de otimização formulado	58
Figura 5.23- Definição dos diferentes parâmetros do 5º caso do problema de otimização	59
Figura 5.24- Folha de cálculo Excel com o 6º caso do problema de otimização formulado	60
Figura 5.25- Definição dos diferentes parâmetros do 6º caso do problema de otimização	61
Figura 5.26- Folha de cálculo Excel com o 7º caso do problema de otimização formulado	62
Figura 5.27- Definição dos diferentes parâmetros do 7º caso do problema de otimização	63
Figura 5.28- Folha de cálculo Excel com o 1º caso do problema de otimização formulado	64
Figura 5.29- Definição dos diferentes parâmetros do 8º caso do problema de otimização	65
Figura 5.30- Solução gráfica da forma do pórtico no 1º caso do problema de otimização	66
Figura 5.31- Solução gráfica da forma do pórtico no 2º caso do problema de otimização	67
Figura 5.32- Solução gráfica da forma do pórtico no 3º caso do problema de otimização	68
Figura 5.33- Solução gráfica da forma do pórtico no 4º caso do problema de otimização	69
Figura 5.34- Solução gráfica da forma do pórtico no 5º caso do problema de otimização	70
Figura 5.35- Solução gráfica da forma do pórtico no 6º caso do problema de otimização	71
Figura 5.36- Solução gráfica da forma do pórtico no 7º caso do problema de otimização	72
Figura 5.37- Solução gráfica da forma do pórtico no 8º caso do problema de otimização	73
Figura 5.38- Ponte.....	75
Figura 5.39- Secção transversal tubular retangular de aço	76
Figura 5.40- Secção transversal tubular retangular de aço	76
Figura 5.41- Método dos Deslocamentos introduzido na folha de Excel do 1º caso de otimização da ponte.....	79
Figura 5.42- Folha de cálculo Excel com o 1º caso do problema de otimização	82
Figura 5.43- Definição dos diferentes parâmetros do 1º caso do problema de otimização	83
Figura 5.44- Folha de cálculo Excel com o 2º caso do problema de otimização	84
Figura 5.45- Definição dos diferentes parâmetros do 2º caso do problema de otimização	85
Figura 5.46- Solução gráfica da forma da ponte no 1º caso do problema de otimização	86
Figura 5.47- Solução gráfica da forma da ponte no 2º caso do problema de otimização	87
Figura 6.1- Exemplo de uma viga simples com uma carga pontual a meio vão	90

Figura 6.2- Solução ótima da viga da figura anterior obtida com o programa	90
--	----

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 - Particularidade das variáveis, função objetivo e restrições	7
Tabela 4.1- Solução encontrada para as variáveis de projeto do problema	30
Tabela 4.2- Solução da função objetivo do problema.....	30
Tabela 4.3- Solução encontrada para as variáveis de projeto do problema	36
Tabela 4.4- Solução encontrada para a função objetivo do problema	36
Tabela 5.1- Tabela com as diferentes alturas, áreas e inércias de cada perfil IPE.....	43
Tabela 5.2- Variáveis de projeto dos casos em estudo	45
Tabela 5.3- Solução obtida para as variáveis de projeto do 1º caso do problema de otimização	66
Tabela 5.4- Solução obtida para a função objetivo do 1º caso do problema de otimização	66
Tabela 5.5- Solução obtida para as variáveis de projeto do 2º caso do problema de otimização	67
Tabela 5.6- Solução obtida para a função objetivo do 2º caso do problema de otimização	67
Tabela 5.7- Solução obtida para as variáveis de projeto do 3º caso do problema de otimização	68
Tabela 5.8- Solução obtida para a função objetivo do 3º caso do problema de otimização	68
Tabela 5.9- Solução obtida para as variáveis de projeto do 4º caso do problema de otimização	69
Tabela 5.10- Solução obtida para a função objetivo do 4º caso do problema de otimização	69
Tabela 5.11- Solução obtida para as variáveis de projeto do 5º caso do problema de otimização	70
Tabela 5.12- Solução obtida para a função objetivo do 5º caso do problema de otimização	70
Tabela 5.13- Solução obtida para as variáveis de projeto do 6º caso do problema de otimização	71
Tabela 5.14- Solução obtida para a função objetivo do 6º caso do problema de otimização	71
Tabela 5.15- Solução obtida para as variáveis de projeto do 7º caso do problema de otimização	72
Tabela 5.16- Solução obtida para a função objetivo do 7º caso do problema de otimização	72
Tabela 5.17- Solução obtida para as variáveis de projeto do 8º caso do problema de otimização	73
Tabela 5.18- Solução obtida para a função objetivo do 8º caso do problema de otimização	73
Tabela 5.19- Tabela de preços correspondentes aos diferentes pórticos	74

Tabela 5.20- Solução obtida para as variáveis de projeto do 1º caso do problema de otimização	86
Tabela 5.21- Solução obtida para a função objetivo do 1º caso do problema de otimização	86
Tabela 5.22- Solução obtida para as variáveis de projeto do 2º caso do problema de otimização	87
Tabela 5.23- Solução obtida para a função objetivo do 2º caso do problema de otimização	87
Tabela 5.24- Tabela de preços da ponte	88

SÍMBOLOS, ACRÓNIMOS E ABREVIATURAS

CAPÍTULO 2

f - Função objetivo

g - Restrições de desigualdade

h - Restrições de igualdade

x - Variáveis de projeto

x^* - Solução ótima

FRP - *Fiber reinforced polymer* (polímero reforçado com fibra)

CAPÍTULO 3

h - Função Hessiana

λ_i - Multiplicadores de Lagrange

PL - Programação linear

PIM - Programação inteira mista

PQ - Programação quadrática

PQR - Problema quadraticamente restringido

PNL - Programação não linear

PONS - Problema de otimização não suave

GRG - Gradiente Reduzido Generalizado

KKT - Karush-Kuhn-Tucker

CAPÍTULO 4

σ_i - Tensão normal numa secção [MPa]

$\sigma_{max,i}$ – Tensão máxima admissível no material [MPa]

L_i - Comprimento de uma secção i [m]

L – Comprimento total da consola [m]

P – Carga pontual [kN]

E – Modulo de Elasticidade (Módulo de Young) [GPa]

δ_{max} – Flecha máxima da consola [m]

B_i – Base da secção [m]

H_i – Altura da secção [m]

M_i – Momento da secção [kN*m]

y_i – Distância do eixo neutro até à fibra extrema[m]

I_i – Inércia da secção [m^4]

δ_0 – Deslocamento inicial [m]

δ'_i - Curvatura da secção

δ_i – Deslocamento da secção [m]

f – Função objetivo

V – Volume [m^3]

CAPÍTULO 5

L_{AE} – Comprimento do vão do pórtico [m]

q – Carga uniformemente distribuída [kN/m]

L_{AB} – Comprimento do pilar do pórtico [m]

B_i – Base da secção [m]

H_i – Altura da secção [m]

e_i – Espessura da secção [m]

E – Modulo de elasticidade (Módulo de Young) [GPa]

$\sigma_{max,aço}$ – Tensão máxima admissível do aço [MPa]

Δ_{max} – Deslocamento máximo admissível da estrutura [m]

C_u – Custo unitário do aço [€/kg]

$\rho_{aço}$ – Massa específico do aço [kg/m^3]

A_i – Área da secção [m^2]

I_i – Inércia da secção [m^4]

y_i – Distância do eixo neutro até à fibra [m]

$\sigma_{max,i}$ – Tensão máxima nos nós da barra [MPa]

L_i – Comprimento da barra [m]

$\sigma_{encurv,i}$ – Tensão máxima de encurvadura nos nós da barra [MPa]

f – Função objetivo [€]

$\underline{F}$ – Matriz de força

$\underline{K}$ – Matriz de rigidez

$\underline{\Delta}$ – Matriz de deslocamentos

β – Ângulo com a horizontal [°]

Δ_i – Deslocamento do grau de liberdade i [m]

1. INTRODUÇÃO

1.1. BREVE INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Em matemática, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável.

Em problemas de engenharia, quando se consegue construir modelos matemáticos bastante representativos dos problemas em estudo, é possível aplicar as técnicas matemáticas de otimização para maximizar ou minimizar uma função previamente definida, visando encontrar uma solução ótima do problema, isto é, que resulte no melhor desempenho possível do sistema. [1]

O principal objetivo de um projetista de estruturas deve ser sempre a procura pela solução mais favorável para a realização de um dado problema. De um modo geral esta tarefa implica um trabalho de pesquisa exaustivo e demorado, que obrigaria o projetista a ter em consideração todas as soluções exequíveis. Para que a tarefa seja viável é necessário que o número de soluções possíveis seja finito para que o estudo de todas essas soluções possa ser efetuado num intervalo de tempo pequeno. Esta situação só ocorre em problemas muito simples e com um reduzido número de parâmetros, que por sua vez só possam assumir um também reduzido número de valores. Nos restantes casos torna-se necessário abordar o problema de um modo aproximadamente simplificado de modo a ser possível a sua resolução. É a tarefa do projetista perceber se o problema simplificado possui uma solução que aproxima com um rigor satisfatório a solução do problema original.

Na formulação de um problema de engenharia de estruturas, a primeira etapa consiste habitualmente na identificação de um conjunto de parâmetros gerais, cuja quantificação antecede a intervenção do projetista de estruturas. Temos como exemplos os seguintes casos: seleção do perfil de uma estrada antecedendo o projeto de uma ponte, cota de uma albufeira fixada antes de projetar a barragem, etc. Segue-se a seleção do tipo de estrutura. No caso de uma ponte pode ser adotada uma solução com múltiplos pilares, em arco, etc. No caso da barragem a decisão a tomar poderá ser entre uma solução em abóbada ou do tipo gravidade. Uma vez que em cada situação existe um reduzido número de tipos de estrutura suscetíveis de serem concretizadas, as decisões relativas a esta fase são geralmente baseadas na comparação entre estudos preliminares. Após a definição geral do problema e a seleção do tipo de estrutura, segue-se uma etapa que, na generalidade dos casos, pode ser formulada matematicamente como uma minimização de um custo. No presente trabalho apenas são aprofundados os aspetos relativos a esta última etapa. [2]

Na busca pela solução ótima dos problemas de otimização devem ser utilizados programas como o Microsoft EXCEL, um programa de software de folha de cálculo, o MATLAB, que é uma plataforma de programação e computação numérica usada por vários de engenheiros e cientistas para analisar dados, desenvolver algoritmos e criar modelos, ou outros programas e linguagens de programação.

No projeto de estruturas, a otimização pode assumir variados aspetos, sendo caracterizada essencialmente pela seleção das grandezas que são consideradas variáveis. As variáveis de projeto dependem da função objetivo que se pretende minimizar e a essas variáveis são impostas restrições. Elas estão associadas ao tipo de otimização que será aplicado ao problema. No âmbito dos projetos de estruturas, é comum otimizar as secções transversais (treliças ou pórticos), as espessuras (membranas, lajes e cascas), a forma em meios contínuos (sólido 3D), a forma em meios laminares (membranas, lajes e cascas), a forma em treliças ou pórticos, a topologia, a materiais e a localização de ações. [3]

O conceito de otimização na engenharia civil torna-se indispensável no cenário da falta de recursos naturais. Aplicar a otimização em projetos de estruturas significa que se tem de utilizar a quantidade de material suficiente para cumprir com a segurança e qualidade da estrutura, reduzindo assim o impacto que a produção do material. Concluindo, pode-se dizer que a otimização aplicada neste contexto pode contribuir de forma positiva para a questão ambiental vivida atualmente no mundo.

1.2.OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de programas matemáticos para a resolução de alguns problemas de otimização da forma de estruturas reticuladas.

Numa 1ª fase são desenvolvidos programas matemáticos simples para a aprendizagem necessária para a criação de programas mais complexos. Nesta fase são resolvidos os seguintes problemas, um problema relativo a uma consola de 2 secções e um problema relativo a uma consola de 5 secções.

Na 2ª fase desta dissertação são desenvolvidos dois problemas com vários casos de subproblemas, o primeiro problema vai incidir na otimização da forma de um pórtico de um armazém industrial e o segundo caso vai incidir na otimização da forma de uma ponte.

1.3.ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação é constituída por 6 capítulos: introdução, otimização, métodos de otimização, aplicação da otimização a problemas simples de engenharia civil, aplicação da otimização da forma a problemas de engenharia civil e a conclusão.

No primeiro capítulo, onde se encontra a introdução, é apresentado um resumo do que é a otimização no contexto da engenharia civil, objetivos do trabalho e a respetiva organização da dissertação.

No segundo capítulo, são apresentados os conceitos básicos sobre o que é a otimização e os diferentes tipos de otimização.

No terceiro capítulo, são descritos os diferentes métodos utilizados para a resolução de problemas de otimização. Os métodos apresentados vão ser utilizados pela ferramenta Solver da folha de cálculo do Microsoft Excel.

No quarto capítulo, são desenvolvidos os programas matemáticos de problemas de otimização simples de engenharia civil que permitiram a aprendizagem necessária para o desenvolvimento dos problemas de otimização da forma apresentados no capítulo seguinte.

No quinto capítulo, são desenvolvidos programas matemáticos mais complexos do que os do capítulo anterior, é estudada a otimização da forma de um pórtico de um armazém industrial com diferentes secções transversais e é estudada a otimização da forma de um esquema simples de uma ponte.

No último capítulo, são apresentadas as diferentes conclusões sobre a dissertação desenvolvida, bem como algumas sugestões de propostas para trabalhos futuros.

2. OTIMIZAÇÃO

2.1. GENERALIDADES

2.1.1. FORMULAÇÃO DO PROGRAMA MATEMÁTICO

Os problemas de otimização na sua forma geral, e de estruturas em particular, são designados programas matemáticos e têm a seguinte formulação:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

sujeita a

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (2.2)$$

$\vdots$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$\vdots$

$$h_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2.3)$$

Neste esquema, as variáveis de projeto são $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, a função objetivo é f , as restrições desigualdade são $g_j \leq 0 (j = 1, 2, \dots, m)$ e por fim as restrições igualdade $h_k = 0 (k = 1, 2, \dots, p)$.

O problema de um modo mais compacto pode ser escrito como:

$$\text{Min } f(\underline{x}) \quad (2.4)$$

s. a

$$\underline{g}(\underline{x}) \leq 0 \quad (2.5)$$

$$\underline{h}(\underline{x}) = 0 \quad (2.6)$$

As variáveis de projeto normalmente podem assumir qualquer valor real. A função objetivo, as restrições igualdade e desigualdade são funções que assumem valores contínuos e reais.

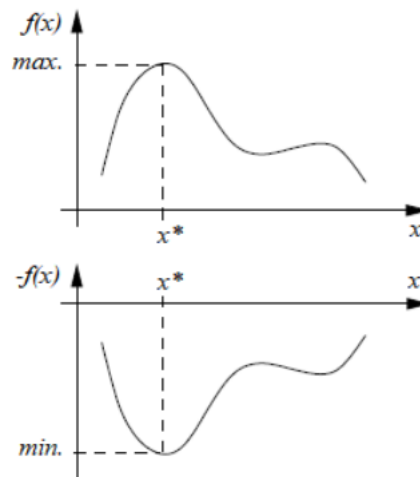


Figura 2.1- Representação gráfica de um problema de maximização e de um de minimização.

A função $f(x)$ tem um mínimo local x^* se a função assumir um valor mínimo em uma determinada vizinhança dentro da região admissível. Quando o valor da função em x^* assumir um valor menor ou igual da função em qualquer outro ponto $\underline{x}$ dentro da região admissível x^* não é um mínimo local e sim um mínimo global. Em alguns problemas de otimização é importante encontrar o ponto possível em que $f(x)$ assume seu menor valor. Na Fig. 2.2 é possível visualizar o mínimo local representado pelo ponto A e o mínimo global pelo ponto C. [4]

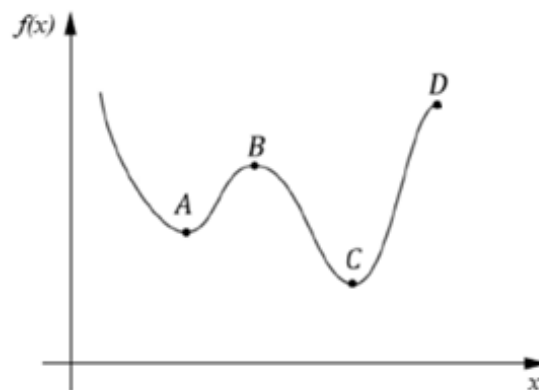


Figura 2.2- Representação gráfica dos pontos ótimos.

O programa matemático pode ser do tipo linear ou não linear. O que vai definir a sua natureza é a função objetivo e as restrições igualdade e desigualdade que podem ser funções lineares ou não lineares em relação às variáveis de projeto. Em problemas práticos de engenharia, raramente se obtêm programas lineares. [5]

No Tabela 2.1 apresentam-se as particularidades das variáveis, da função objetivo e das restrições igualdade e desigualdade que definem a natureza das funções do problema. [2]

Tabela 2.1 - Particularidade das variáveis, função objetivo e restrições

	Particularidades
Variáveis	Contínuas
	Discretas
	Inteiras
	Binárias
Função objetivo	Função de uma variável
	Linear
	Quadrática
	Polinomial
	Não linear com continuidade
Restrições de igualdade e desigualdade	Não linear sem continuidade
	Sem restrições
	Limites nos valores das variáveis
	Lineares
	Polinomiais
	Não linear com continuidade
	Não linear sem continuidade

Existem, assim, diferentes métodos destinados à resolução de problema de otimização que dependem das variáveis de projeto, das características da função objetivo e do tipo de restrições. Os métodos probabilísticos e os métodos determinísticos (ou programação matemática) são duas possíveis vertentes dos processos de otimização conhecidos atualmente.

2.1.2.COMPONENTES DO PROGRAMA MATEMÁTICO

Como pode ser visto no Tabela 2.1, as variáveis, a função objetivo e as restrições possuem características que variam de acordo com o tipo de problema a que será aplicada a otimização, bem como a aplicação em problemas de engenharia civil.

2.1.2.1.Variáveis de Projeto

As variáveis de projeto, como visto anteriormente, podem ser contínuas, discretas, inteiras ou binárias. Quando assumirem qualquer valor real dentro de um domínio admissível são variáveis contínuas. [6]

No âmbito da engenharia civil, as variáveis dos problemas de otimização dependem de cada grandeza estudada. Na otimização da forma, que pode ocorrer em treliças, pórticos, meios laminares contínuos 3D ou meios laminares, as variáveis de projeto são as coordenadas de alguns nós e terão carácter contínuo. [7]

Na otimização da área da secção transversal de um perfil metálico a variável possui uma natureza discreta pois a área é predefinida em catálogos comerciais. Porém, a existência de variáveis discretas dificulta a resolução do problema de otimização, sendo essencial considerá-las variáveis contínuas. Em

seguida, é possível passar para a solução discreta aplicandas aproximações favoráveis. Na otimização de espessuras em meios laminares é habitual considerar variáveis contínuas.

A otimização pode ser aplicada também como apoio à decisão, como por exemplo, no tipo de barragem (gravidade, abóboda com ou sem contraforte), tipo de cobertura (treliça metálica, suspensa, betão pré-esforçado) e tipo de estrutura (pórtico, parede, mista).

Como os materiais não possuem uma variação contínua de propriedades e por ser comum considerar um número reduzido de classes de resistência, a otimização da seleção de materiais deve ser assumida com variáveis discretas. A orientação da direção mais resistente de um material ortotrópico, como por exemplo fibras em compósitos, também são considerados como otimização de materiais, assumindo-se neste caso que os ângulos que definem essas orientações possuem uma variação contínua. Porém, para facilitar a aplicação é necessário restringir o número de ângulos possíveis, passando a ter variáveis discretas. [2]

Os problemas de otimização da topologia da estrutura possuem como variáveis de projeto o número de montantes numa asna, vãos de um pórtico, apoios de uma viga contínua, barras de uma treliça, nervuras de uma laje, etc. Esses problemas em certos casos são formulados com variáveis binárias, ou seja, cada elemento da estrutura deve ser multiplicado por uma variável binária, assim como as restrições relativas ao seu comportamento. Os elementos da solução ótima que estiverem associados a uma variável binária nula são eliminados e os restantes preservados. [8]

2.1.2.2.Função Objetivo

A função objetivo está sujeita ao tipo de problema de otimização e da grandeza que se pretende minimizar ou maximizar. Em todos os casos a função está escrita a partir das variáveis de projeto. Quando a estrutura é constituída por um único material é comum minimizar-se o volume e consequentemente o seu custo. Se houver mais do que um material presente na estrutura, a função objetivo depende do custo por unidade de volume de cada material. E nos casos em que o objetivo for minimizar o peso da estrutura considera-se como custo por unidade de volume o peso específico de cada um dos materiais.

Em casos especiais pode haver otimização de estruturas em que a função objetivo não é um custo, como por exemplo, maximizar a rigidez considerando o custo fixo ou maximizar a frequência própria fundamental considerando o peso fixo. Nestes casos a função objetivo representa a grandeza associada ao desempenho de uma estrutura.

2.1.2.3.Restrições Igualdade e Desigualdade

Nos problemas de otimização aplicados à engenharia civil, nem todos os valores possíveis para as variáveis são admissíveis para o projeto, havendo a necessidade de impor restrições. Como visto anteriormente, essas restrições podem ser de igualdade ou desigualdade.

As restrições igualdade presentes num programa matemático podem ser eliminadas desde que em cada uma delas seja possível explicitar uma variável de projeto distinta. Em seguida, essas variáveis podem ser permutadas nas outras expressões do programa matemático. Para os casos em que a quantidade de restrições igualdade ultrapassam o número de variáveis de projeto, pode não existir nenhuma solução admissível. O procedimento de substituição auxilia na resolução do problema de otimização, pois reduz a quantidade de variáveis e restrições presente na formulação. Porém, se houver um número elevado de restrições associados com as variáveis do problema, não é recomendável recorrer a essas substituições,

pois as expressões passam a ter um caráter complexo, sendo necessário o uso de um programa de computador.

Na otimização aplicada à engenharia civil aparecem restrições igualdade quando existe a necessidade de estabelecer valores fixos a deslocamentos, quando eles são variáveis de projeto ou em casos que se deseja fixar algumas variáveis, como por exemplo, altura ou base de uma viga, espessura de um perfil metálico ou altura de um pilar.

Quanto às restrições de desigualdade, não há limitações para a sua quantidade na formulação do problema. Na otimização em problemas de engenharia civil, elas estão presentes devido à necessidade de limitar tensões dos materiais, instabilidade, deslocamentos, frequências próprias de vibração, etc. Pode haver também limitações para valores mínimos e máximos das variáveis, como por exemplo, áreas mínimas e máximas de perfis metálicos que estão disponíveis em catálogos de um certo fabricante para barras de uma treliça, impedindo que o algoritmo busque soluções nulas ou negativas. Porém, em alguns *softwares* de otimização os limites são considerados à parte e não como restrições desigualdade.

Assim, é essencial formular adequadamente um problema de otimização para que permita que o *software* encontre boas soluções. [9]

A representação gráfica de um problema de otimização contendo a função objetivo em função de duas variáveis sujeita a três restrições desigualdade e uma restrição igualdade e a limites mínimos e máximos impostos a variáveis, encontra-se exemplificado na Fig.2.3. Nota-se que a região admissível é representada pelo troço de linha definida por $h(x_1, x_2)$ que respeita as restrições $g_j(x_1, x_2)$; $j = 1, 2, 3$.

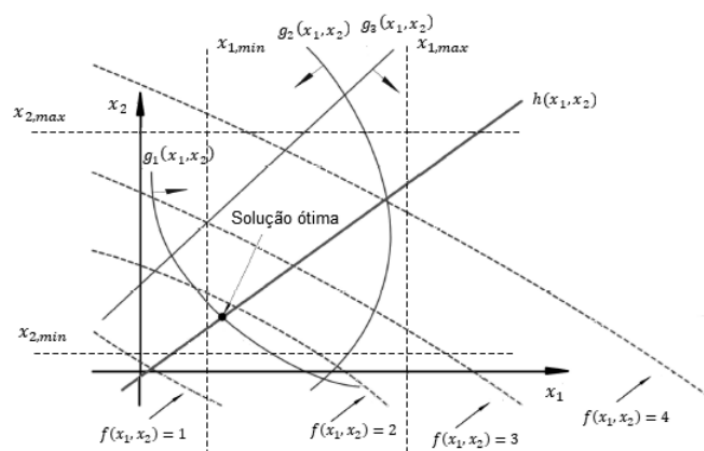


Figura 2.3 - Representação gráfica de um problema de minimização de uma função sujeita a restrições igualdade e desigualdade. Adaptado de Arora (1989).

2.1.2.4. Side Constraints

As restrições que impõe um valor mínimo e/ou valor máximo para as variáveis de projeto são designadas *side constraints*.

$$x_{min} \leq x \leq x_{max} \quad (2.7)$$

Neste par de restrições, x representa uma das variáveis de projeto. As *side constraints* podem ser incluídas no conjunto das restrições $g(x) \leq 0$. Porém, em certos algoritmos de otimização é vantajoso considerá-las à parte.

Na minimização do volume de pórticos, as barras menos eficientes são em geral suprimidas pelo algoritmo de otimização. Por este motivo, considerando que é desejável a manutenção da topologia inicial, devem ser consideradas restrições de área mínima em todas as barras. Deste modo evita-se que o algoritmo de otimização encontre soluções com áreas negativas ou que suprima certas barras atribuindo-lhes uma área nula. Estas considerações são extensíveis à quase totalidade dos problemas de otimização, incluindo os que se encontram descritos no capítulo 5.

De um modo geral, verifica-se que é vantajoso limitar inferior e superiormente todas as variáveis de projeto independentes. Deste modo evita-se o aparecimento de soluções sem significado físico e aumenta-se a estabilidade do processo iterativo. [10]

2.2. INTERESSES E LIMITAÇÕES

A otimização na engenharia civil é um aspeto importante no intuito de uma empresa e do projetista de diminuir o custo de uma obra. A minimização dos custos não está relacionada com a utilização de materiais mais baratos ou de má qualidade, mas sim no conjunto dos parâmetros que vão definir a solução estrutural dependendo do grau de complexidade que o projetista incluir na otimização e no prazo disponível. É essencial satisfazer algumas imposições em relação à segurança e ao desempenho da estrutura para que ela funcione adequadamente.

A primeira etapa da formulação de um problema aplicado em estruturas consiste na identificação de um conjunto de parâmetros gerais, na qual a sua quantificação é feita antes que o projetista tenha algum tipo de interferência. A segunda etapa é caracterizada pela seleção do tipo de estrutura que irá ser adotada no projeto. As decisões nesse aspeto são baseadas na comparação entre estudos preliminares e a experiência do projetista. Após a escolha do tipo de estrutura que será adotada e a definição do problema, finalmente segue-se para a etapa em que é matematicamente formulada a minimização pretendida.

2.3. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO APLICADOS À ENGENHARIA CIVIL

Na otimização é necessário ter em conta o comportamento da estrutura de modo simplificado com o uso do método dos deslocamentos. Assim, as estruturas que têm comportamento linear passam a ter como restrições os deslocamentos máximos dos nós da estrutura e respetivas tensões normais. Porém, existem outras classes de variáveis que dependem do tipo de problema de otimização.

Como visto na secção 2.1.2.1, o que define o principal critério de classificação dos problemas de otimização são as variáveis de projeto, pois elas são os parâmetros da solução que podem ser alterados. A seguir, são descritos e ilustrados de modo sucinto diversos tipos de problemas de otimização. [2]

2.3.1. OTIMIZAÇÃO DAS SECÇÕES TRANSVERSAIS

A otimização das secções transversais é usada nas estruturas reticuladas como treliças e pórticos bidimensionais e tridimensionais. Nas estruturas reticuladas as variáveis de projeto são as áreas das secções transversais das barras biarticuladas e nos pórticos tridimensionais é o conjunto de parâmetros que caracterizam a secção transversal de uma barra. As coordenadas dos nós e as propriedades dos materiais utilizados são consideradas fixas. As secções transversais podem ser definidas através da área, momento de inércia ou dimensões transversais.

2.3.2. OTIMIZAÇÃO DE ESPESSURAS

A otimização de espessuras é usada nos meios laminares (duas dimensões muito maiores que a terceira dimensão), como uma membrana (paredes), lajes e cascas (lajes pré-esforçadas), onde as variáveis de projeto são a espessura em cada nó ou as espessuras de elementos finitos. Assim como a otimização das secções transversais as coordenadas dos nós e os materiais utilizados são fixados.

2.3.3. OTIMIZAÇÃO DA FORMA

Na otimização da forma, as coordenadas dos nós da estrutura são variáveis de projeto. Ela é aplicada em meios contínuos tridimensionais, como os sólidos, e as variáveis de projeto são apenas as coordenadas de alguns nós, pois na formulação do problema não são consideradas secções nem dimensões transversais de elementos finitos e evita-se que a estrutura seja modificada totalmente. Também pode ser aplicada nos meios laminares, tendo como variáveis as coordenadas dos nós e as espessuras. No caso das treliças ou pórticos tridimensionais as variáveis são as coordenadas dos nós e as secções das barras. Esta otimização é utilizada nesta dissertação.

2.3.4. OTIMIZAÇÃO DE APOIO À DECISÃO

A otimização de apoio à decisão é necessária para, por exemplo, a escolha do tipo barragem, tipo de cobertura e tipo de estrutura que é escolhida no projeto. As variáveis como as dimensões de secções transversais, espessuras e coordenadas de nós também podem estar presentes.

.

2.3.5. OTIMIZAÇÃO DE MATERIAIS

Na otimização de materiais, quando as variáveis de projeto são as propriedades do material, esta é a otimização utilizada, pois os materiais apresentam propriedades diferenciadas e podem estar relacionadas com a variação de propriedades que ocorre entre as classes de resistência de um determinado material, por exemplo entre as classes de resistência do betão ou do aço. A orientação da direção mais resistente de um material ortotrópico (fibra de um compósito FRP) também pode ser uma variável de projeto.

2.3.6. OTIMIZAÇÃO DA TOPOLOGIA

É assim designada a resolução de problemas que envolvem a supressão ou o acréscimo de componentes a uma estrutura. No caso das estruturas articuladas, para além de retirar e adicionar barras, o algoritmo de otimização deve ser capaz de modificar as conexões existentes. Nos meios contínuos é relevante a possibilidade de criar ou suprimir aberturas. Também são consideradas como otimização de topologia

as situações em que o número de ligações ao exterior e a sua posição são variáveis. Estes problemas são em geral muito complexos, só sendo possível a resolução de casos simples. Apresenta-se como exemplo o caso de uma treliça em que cada nó se encontra inicialmente ligado a todos os outros. A tarefa essencial do algoritmo de otimização será a de decidir quais são as barras que devem ser suprimidas. [2]

3. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

A resolução de problemas de otimização formulados como um programa matemático é na generalidade dos casos efetuada com recurso a um método iterativo. Estes métodos requerem a preparação de uma solução inicial, que vai sendo sucessivamente modificada até ser satisfeito um determinado critério de convergência. Na figura 3.1 encontra-se um algoritmo que envolve algumas das etapas que são comuns a muitos dos métodos de otimização.

A interrupção do processo iterativo que é baseado no critério de convergência depende das características do método de otimização. Nos casos em que não se possui um critério de apreciação da qualidade da solução corrente, o processo iterativo deve ser parado quando deixarem de ocorrer variações significativas da solução. Deve também ser prevista a paragem do processo iterativo quando for atingido um número limite de iterações previamente fixado. Assim evita-se que o processo iterativo progrida indefinidamente nos casos em que não ocorre a convergência para a solução ótima.

A fase mais importante que define cada método de otimização é a correspondente ao cálculo do procedimento (6) da figura 3.1, que em geral é calculado depois de serem executadas alterações no programa matemático que simplificam o problema inicial em um problema aproximado.

Os métodos capazes de encontrar a solução ótima de um determinado problema destacam-se basicamente em duas vertentes dos processos de otimização utilizados atualmente. Os métodos probabilísticos são geralmente inspirados em fenômenos que ocorrem na natureza, pois consistem em técnicas probabilísticas de procura da solução ideal com base nos princípios da genética de sobrevivência dos indivíduos mais adaptados à situação pretendida, isto é, usam somente a avaliação da função objetivo e introduzem no processo de otimização dados e parâmetros estocásticos. Enquanto os métodos determinísticos (ou programação matemática) geram uma sequência determinística de possíveis soluções solicitando, na maioria das vezes, o uso de pelo menos a primeira derivada da função objetivo com respeito às variáveis de projeto. [11]

Existem vários softwares que são capazes de resolver os problemas de otimização utilizando os variados métodos existentes na literatura, como por exemplo, Microsoft EXCEL, MATLAB, Rhino 7, Python entre outros. No presente trabalho foram utilizados para a resolução dos problemas o EXCEL com o auxílio da ferramenta Solver, o uso desta ferramenta e os métodos por ela utilizados serão apresentados posteriormente neste capítulo.

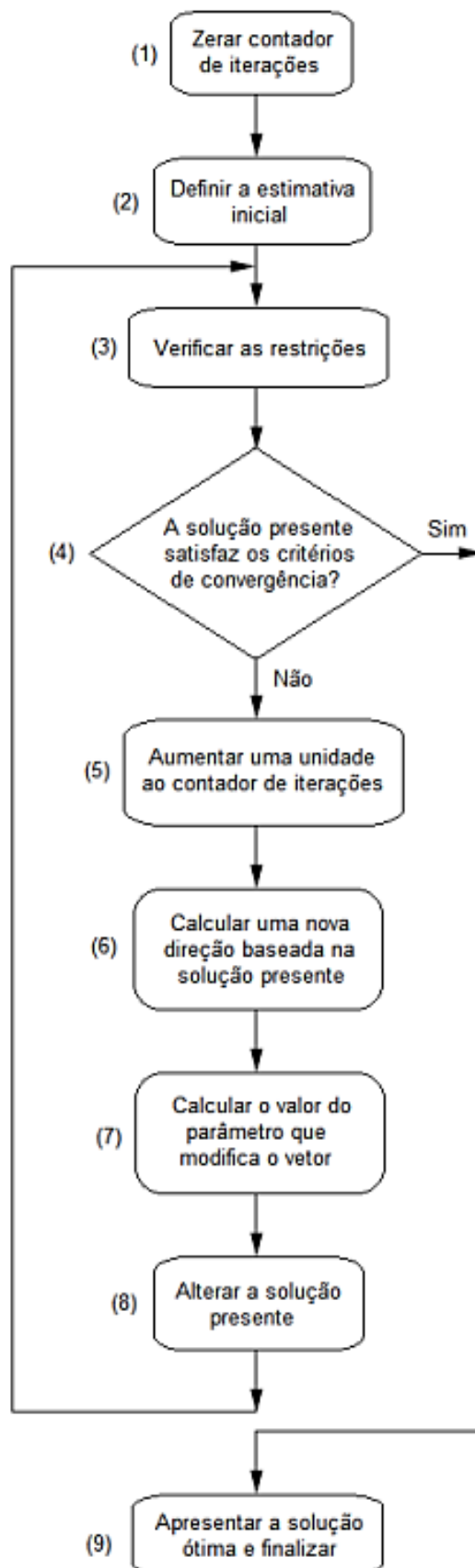


Figura 3.1 - Fluxograma comum aos métodos de otimização. Adaptado de Arora (1989) e Azevedo (1994)

3.1.MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADOS PELA FERRAMENTA SOLVER

Um modelo em que a função objetivo e todas as restrições (para além das restrições inteiras) são funções lineares das variáveis de decisão chama-se um problema de programação linear (PL). O termo "programação" data dos anos 40 e a disciplina de "planeamento e programação" onde estes métodos de solução foram utilizados pela primeira vez, não tem nada a ver com programação informática. [12]

Se o problema incluir restrições de número inteiro, chama-se um problema de programação linear de número inteiro. Um problema de programação linear com algumas variáveis de decisão "regulares" (contínuas), e algumas variáveis que estão limitadas a valores inteiros, é chamado problema de programação inteira mista (PIM). As restrições inteiras são não convexas, e tornam o problema muito mais difícil de resolver.

Um problema de programação quadrática (PQ) é uma generalização de um problema de programação linear. O seu objetivo é uma função quadrática convexa das variáveis de decisão, e todas as suas restrições devem ser funções lineares das variáveis. Um problema com restrições quadráticas lineares e convexas, e um objetivo quadrático linear ou convexo, é chamado problema quadraticamente restringido (PQR).

Um modelo em que a função objetivo e todas as restrições (para além das restrições inteiras) são funções não lineares suaves das variáveis de decisão é chamado problema de programação não linear (PNL) ou problema de otimização não linear. Se o problema incluir restrições inteiras, chama-se um problema de programação não linear inteira. Um modelo em que o objetivo ou qualquer uma das restrições são funções não planas das variáveis é chamado problema de otimização não plana (PONP).

3.1.1.MÉTODO LP SIMPLEX

Um modelo em que a célula objetivo e todas as restrições, para além das restrições inteiras, são funções lineares das variáveis de decisão chama-se um problema de programação linear (PL). Tais problemas são intrinsecamente mais fáceis de resolver do que os problemas não lineares (PNL). Primeiro, são sempre convexas, enquanto um problema geral não linear é frequentemente não convexo.

Em segundo lugar, uma vez que todas as restrições são lineares, a solução globalmente ótima encontra-se sempre num "ponto extremo" ou "ponto de canto" onde duas ou mais restrições se intersectam. Em alguns problemas pode haver múltiplas soluções com o mesmo valor objetivo, todas situadas numa linha entre dois pontos de canto. Isto significa que um LP Solver precisa de considerar muito menos pontos do que um NLP Solver, e é sempre possível determinar, sujeito às limitações da aritmética informática de precisão finita, que um problema de LP não tem solução viável, tem um objetivo sem limites, ou tem uma solução globalmente ótima. [13]

O método LP Simplex utiliza o famoso algoritmo Simplex para programação linear, criado por Dantzig nos anos 40. Um método Simplex duplo é utilizado para os subproblemas de programação inteira.

O método Simplex é uma técnica padrão na programação linear para resolver um problema de otimização, tipicamente um que envolve uma função e vários constrangimentos expressos como desigualdades. As desigualdades definem uma região poligonal, e a solução está tipicamente num dos vértices. O método Simplex é um procedimento sistemático para testar os vértices como soluções possíveis.

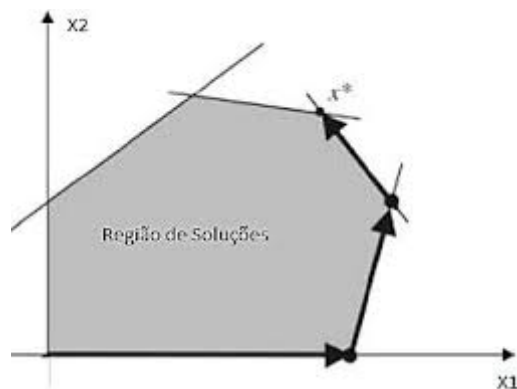


Figura 3.2- Representação gráfica do Método LP Simplex. Adaptado de Rodrigues Moura (2019)

Alguns problemas simples de otimização podem ser resolvidos desenhando as restrições num gráfico. No entanto, este método é útil apenas para sistemas que envolvem duas variáveis. Na prática, os problemas envolvem frequentemente centenas de equações com milhares de variáveis, o que pode resultar num número elevado de pontos extremos. Em 1947, George Dantzig, um conselheiro matemático da Força Aérea Americana, concebeu o método Simplex para restringir o número de pontos extremos que têm de ser examinados. O método Simplex é um dos algoritmos mais úteis e eficientes, e continua a ser o método padrão empregado em computadores para resolver problemas de otimização linear.

Em primeiro lugar, o método pressupõe que um ponto extremo é conhecido. Se nenhum ponto extremo for dado, uma variante do método Simplex, chamada Fase I, é utilizada para encontrar um ou para determinar que não existem soluções viáveis.

Em seguida, utilizando uma especificação algébrica do problema, um teste determina se esse ponto extremo é ótimo. Se o teste de otimização não for aprovado, procura-se um ponto extremo adjacente ao longo de uma aresta na direção para a qual o valor da função objetivo aumenta ao ritmo mais rápido. Por vezes pode-se mover ao longo de uma borda e fazer o valor da função objetivo aumentar sem limite. Se isto ocorrer, o procedimento termina com uma prescrição da borda ao longo da qual o objetivo vai até ao infinito positivo.

Caso contrário, um novo ponto extremo é atingido tendo pelo menos um valor tão elevado da função objetivo como o seu antecessor. A sequência descrita é então repetida. A conclusão ocorre quando é encontrado um ponto extremo ótimo ou quando ocorre o caso sem limites. Embora, em princípio, as etapas necessárias possam crescer exponencialmente com o número de pontos extremos, na prática o método converge tipicamente para a solução ótima num número de etapas que é apenas um pequeno múltiplo do número de pontos extremos. [14]

3.1.2.MÉTODO GRG (GRADIENTE REDUZIDO GENERALIZADO) NÃO LINEAR

O método GRG não linear na sua forma mais básica é o método de resolução que analisa o gradiente ou a inclinação da função objetivo à medida que os valores de entrada (ou variáveis de decisão) mudam e determina que se atingiu uma solução ótima quando as derivadas parciais são iguais a zero.

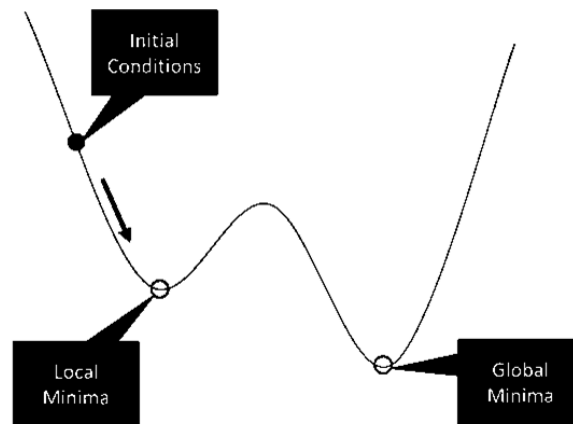


Figura 3.3- Representação gráfica do método GRG Não linear. Adaptado do site *EngineerExcel*

A desvantagem deste método é que a solução obtida com este algoritmo é muito dependente das condições iniciais e pode não ser a solução ótima global. O Solver provavelmente irá parar no valor ótimo local mais próximo das condições iniciais, dando uma solução que pode ou não ser otimizada globalmente. [15]

É útil para compreender o que o método GRG Não Linear pode e não pode fazer, e o que cada uma das possíveis mensagens de resultado do Solver significa para este motor. Na melhor das hipóteses, o método GRG sozinho, como praticamente todos os algoritmos "clássicos" de otimização não linear, pode encontrar uma solução localmente ótima para um modelo razoavelmente bem dimensionado e não convexo. Por vezes, o Solver irá parar antes de encontrar uma solução localmente ótima, quando está a progredir muito lentamente, a função objetiva está a mudar muito pouco de uma solução experimental para outra, ou por outras razões.

O que distingue uma solução ótima local de uma solução ótima global é que quando a mensagem "O Solver encontrou uma solução" aparece, significa que o método GRG encontrou uma solução localmente ótima, ou seja, não há outro conjunto de valores para as variáveis de projeto próximos dos valores atuais que produzam um melhor valor para a função objetivo. Figurativamente, isto significa que o Solver encontrou um "pico" (se maximizar) ou "vale" (se minimizar), mas se o modelo não for convexo, pode haver outros picos mais altos ou vales mais profundos distantes da solução atual. Matematicamente, esta mensagem significa que as condições Karush - Kuhn - Tucker (KKT) para a otimização local foram satisfeitas, dentro de uma certa tolerância, relacionada com a definição de precisão no diálogo de opções do Solver.

Quando a mensagem "O Solver convergiu para a solução atual" aparece, significa que o valor da função objetivo está a mudar muito lentamente para as últimas iterações ou soluções experimentais. Mais precisamente, o método GRG é interrompido se o valor absoluto da mudança relativa na função objetivo for inferior ao valor da convergência na caixa de diálogo das opções do Solver para as últimas 5 iterações. Embora o valor por defeito de 1E-04 (0,0001) seja adequado para a maioria dos problemas,

pode ser demasiado grande para alguns modelos, fazendo com que o método GRG não seja interrompido prematuramente quando este teste for satisfeito, em vez de continuar para mais iterações até que as condições KKT sejam satisfeitas.

Assim, compensa desenhar o seu modelo para ser razoavelmente bem dimensionado em primeiro lugar. Os valores típicos do objetivo e restrições não devem diferir uns dos outros, ou dos valores das variáveis de decisão, em mais de três ou quatro ordens de magnitude.

Se estiver a receber esta mensagem quando procura uma solução local ótima, pode alterar a definição na caixa de edição da convergência para um valor menor, como 1E-05 ou 1E-06, mas também deve considerar por que razão a função objetivo está a mudar tão lentamente. Talvez possa adicionar restrições ou utilizar diferentes valores iniciais para as variáveis, para que o Solver não fique "preso" numa região de lenta melhoria.

Quando o Solver não consegue melhorar a solução atual com o método GRG Não Linear, a mensagem "O Solver não consegue melhorar a solução" ocorre apenas raramente. Isto significa que o modelo está degenerado e que o Solver está provavelmente a andar devagar. Uma possibilidade que vale a pena verificar é se algumas das suas restrições são redundantes, e devem ser removidas. Se esta sugestão não ajudar e não conseguir reformular o problema, tente usar o método Evolucionário. [16]

Este método é utilizado para a resolução dos programas matemáticos dos problemas de otimização desenvolvidos ao longo deste trabalho.

3.1.2.1. Condições Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Na otimização matemática, as condições Karush-Kuhn-Tucker (KKT), também conhecidas como condições Kuhn-Tucker, são os primeiros testes derivados, por vezes chamados condições necessárias de primeira ordem, para que uma solução em programação não linear seja ótima, desde que algumas condições de regularidade sejam satisfeitas.

Permitindo restrições de desigualdade, a abordagem KKT à programação não linear generaliza o método dos multiplicadores de Lagrange, que permite apenas restrições de igualdade. Semelhante à abordagem de Lagrange, o problema da maximização (minimização) limitada é reescrito como uma função de Lagrange cujo ponto ótimo é um ponto de sela.

As condições KKT são as condições necessárias para a otimização de um problema limitado em geral.

Para um dado problema de programação não-linear:

$$\max f(x) \tag{3.1}$$

$$s. a \quad g_i(x) \leq b_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \tag{3.2}$$

$$x \geq 0 \tag{3.3}$$

Onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a condição necessária para x^* ser o ponto crítico é de que x^* satisfaz as seguintes condições KKT:

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} \leq 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

$$x_j^* \frac{\partial h}{\partial x_j} = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda_i} \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

$$\lambda_i \frac{\partial h}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \quad (3.7)$$

$$x^* \geq 0 \quad (3.8)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3.9)$$

Onde a função Lagrangiana $h(x, \lambda)$ e as suas derivadas são:

$$h(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(x) - b_i] \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda_i} = -g_i(x) + b_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \quad (3.12)$$

3.1.3.MÉTODO EVOLUCIONÁRIO

O método evolucionário utiliza algoritmos genéticos e evolutivos para procurar "boas" soluções para problemas de otimização. Um algoritmo evolucionário para otimização é diferente dos métodos clássicos de otimização de várias formas. Em primeiro lugar, baseia-se em parte na amostragem aleatória. Isto torna-o um método não determinístico, que pode produzir soluções diferentes em diferentes execuções. Para obter a mesma solução em cada execução, pode definir uma opção *Random Seed* para o método Evolucionário.

Em segundo lugar, onde a maioria dos métodos clássicos de otimização mantém uma única melhor solução encontrada até agora, um algoritmo evolucionário mantém uma população de soluções candidatas. Apenas uma (ou poucas, com objetivos equivalentes) destas é "melhor", mas os outros membros da população são "pontos de amostra" noutras regiões do espaço de pesquisa, onde mais tarde poderá ser encontrada uma melhor solução. A utilização de uma população de soluções ajuda o algoritmo evolutivo a evitar ficar "preso" a um ótimo local, quando uma solução ainda melhor pode ser encontrada fora das proximidades da solução atual.

Em terceiro lugar, inspirado pelo papel da mutação do ADN de um organismo na evolução natural, um algoritmo evolutivo faz periodicamente alterações ou mutações aleatórias em um ou mais membros da população atual, produzindo uma nova solução candidata, que pode ser melhor ou pior do que os membros da população existente. Há muitas formas possíveis de realizar uma "mutação", e o solucionador evolucionário emprega na realidade cinco estratégias diferentes de mutação. O resultado de uma mutação pode ser uma solução inviável, e o solucionador evolucionário tenta "reparar" essa solução para a tornar viável.

Em quarto lugar, inspirado pelo papel da reprodução sexual na evolução dos seres vivos, um algoritmo evolutivo tenta combinar elementos de soluções existentes para criar uma nova solução, com algumas das características de cada "pai". Os elementos (por exemplo, valores de variáveis de decisão) das soluções existentes são combinados numa operação de cruzamento, inspirada no cruzamento de fios de ADN que ocorre na reprodução de organismos biológicos. Tal como acontece com a mutação, existem muitas formas possíveis de realizar uma operação de "cruzamento", algumas muito melhores do que outras, e o solucionador evolucionário emprega, na realidade, múltiplas variações de quatro estratégias diferentes de cruzamento.

Em último lugar, inspirado pelo papel da seleção natural na evolução, um algoritmo evolucionário realiza um processo de seleção em que os membros "mais aptos" da população sobrevivem, e os membros "menos aptos" são eliminados. Num problema de otimização condicionada, a noção de "aptidão" depende em parte da viabilidade de uma solução, ou seja, se satisfaz todas as condicionantes, e em parte do valor da sua função objetivo. O processo de seleção é o passo que orienta o algoritmo evolutivo para soluções cada vez melhores. [17]

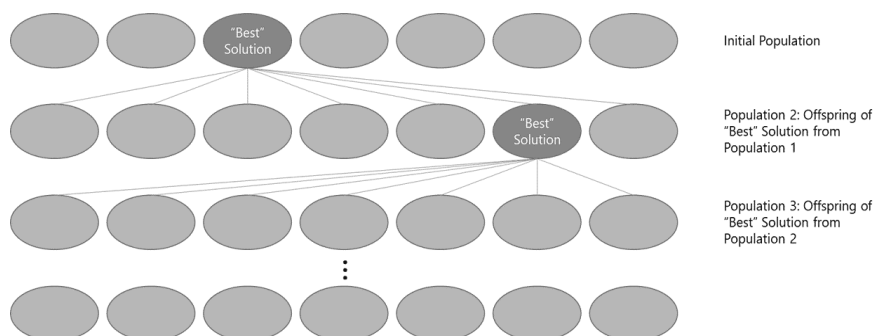


Figura 3.4- Representação gráfica do Método Evolucionário. Adaptado do site *EngineerExcel*.

É útil para compreender o que o método evolucionário pode e não pode fazer, e o que cada uma das possíveis mensagens de resultado do Solver significa para este método. Na melhor das hipóteses, o método evolucionário, tal como outros algoritmos genéticos ou evolucionários, será capaz de encontrar uma boa solução para um modelo à escala razoável. Como o método evolucionário não depende de informação derivada ou de gradiente, não pode determinar se uma dada solução é ótima, por isso nunca sabe realmente quando deve parar. Sabe apenas que uma nova solução candidata é "melhor" do que outras soluções encontradas anteriormente. Assim, o método evolucionário faz a paragem e devolve uma solução, ou quando certas regras heurísticas (discutidas abaixo) indicam que é improvável um maior progresso, ou então quando excede um limite de tempo ou esforço de computação que tenha estabelecido.

O que distingue "boas" soluções de soluções é que quando se usa o método evolucionário, pode-se descobrir, como outros utilizadores de algoritmos genéticos e evolucionários, que se passa muito tempo a correr e a voltar a correr o Solver, tentando encontrar melhores soluções. Esta é uma consequência inescapável da utilização de um método que faz poucas ou nenhuma presunções sobre a natureza das funções do problema. Nunca se pode ter a certeza se se encontrou a melhor solução, ou qual poderá ser o retorno da execução do algoritmo evolutivo por um período de tempo mais longo. Quando o método evolucionário parar, poderá muito bem descobrir que, se mantiver a solução resultante e reiniciar o método evolucionário, ele encontrará uma solução ainda melhor. Pode também descobrir que iniciar o método GRG não linear a partir do ponto em que o método evolucionário parar irá produzir uma solução ainda melhor (por vezes muito melhor).

Quando o Solver tiver convergido para a solução atual, esta mensagem significa que a "aptidão" dos membros da população atual de soluções experimentais está a mudar muito lentamente. Isto pode significar que o Solver encontrou uma solução globalmente ótima. Se assim for, novos membros da população, que substituem outros membros menos aptos, tenderão a "aglomerar-se" nesta solução. No entanto, pode também significar que a população perdeu diversidade, um problema comum em algoritmos genéticos e evolutivos e, por conseguinte, o algoritmo evolutivo é incapaz de gerar novas e melhores soluções através da mutação ou do cruzamento dos membros da população atual. Neste último caso, pode ajudar a executar novamente o método evolucionário com uma população maior e/ou uma taxa de mutação aumentada, o que aumenta as hipóteses de uma população diversificada.

Quando o Solver não consegue melhorar a solução atual, esta mensagem significa que o Solver não conseguiu encontrar um novo e melhor membro da população cuja "aptidão" representa uma melhoria significativa em relação à aptidão do melhor membro atual, na quantidade de tempo especificada pela opção tempo máximo sem melhoria no diálogo opções do Solver evolucionário. Sob esta regra de paragem heurística, o Solucionador Evolucionário continuará a procurar melhores soluções enquanto fizer um progresso razoável. Se não for capaz de fazer progressos suficientes no tempo especificado, irá parar e reportar a melhor solução encontrada.

Avaliação de uma solução encontrada pelo método evolucionário:

- Mantenha a solução resultante, reinicie o método Evolucionário a partir dessa solução, e veja se é capaz de encontrar uma solução ainda melhor num período de tempo razoável.
- Apertar o valor da convergência, aumentar os valores dos subproblemas máximos e das soluções máximas possíveis, e reiniciar o método Evolucionário. Isto levará mais tempo, mas permitirá ao Solver explorar mais possibilidades.

- Aumentar o tamanho da população e/ou a taxa de mutação, e reiniciar o método evolucionário. Isto também demorará mais tempo, mas tenderá a aumentar a diversidade da população e a parte do espaço de pesquisa que é explorada.
- Manter a solução resultante, mudar para o método GRG não linear e iniciar a partir dessa solução, e ver se encontra a mesma ou uma solução melhor. Se o método GRG mostrar a mensagem "O Solver encontrou uma solução", poderá ter encontrado pelo menos um ponto ideal localmente, mas lembre-se que este teste depende da suavidade das funções do problema.
- Selecione e examine o relatório da população. Se os melhores valores forem semelhantes de execução em execução do método evolucionário, e se os desvios padrão forem pequenos, isto pode ser motivo de confiança de que a sua solução está próxima do ótimo global. Uma vez que a otimização tende a levar os valores variáveis a extremos, se a solução é viável e os melhores valores estão próximos dos valores máximos ou mínimos listados no relatório da população, pode-se concluir que foi encontrada uma solução ótima.

O método evolucionário tem uma boa capacidade de encontrar "boas" soluções para problemas de otimização anteriormente intratáveis, mas também tem as suas limitações. O método evolucionário permite-lhe gastar menos tempo a analisar as propriedades matemáticas do seu modelo, e ainda assim obter "boas" soluções, mas não é um método infalível. [18]

4. APLICAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO A PROBLEMAS SIMPLES DE ENGENHARIA CIVIL

Neste capítulo são abordados alguns exemplos simples de problemas de otimização em engenharia, através da utilização da ferramenta Solver do *software* Microsoft Excel, descrevendo o modo como é definido o programa matemático. O primeiro irá abordar um problema de flexão simples e o seguinte irá abordar um problema de flexão composta.

4.1. CONSOLA DE VANDERPLAATS

Apresenta-se em seguida o seguinte exemplo de uma consola com uma variação de 5 secções ou consola de Vanderplaats em que se utiliza a ferramenta Solver do Excel. Pretende-se minimizar o volume de material da viga da figura 4.1.

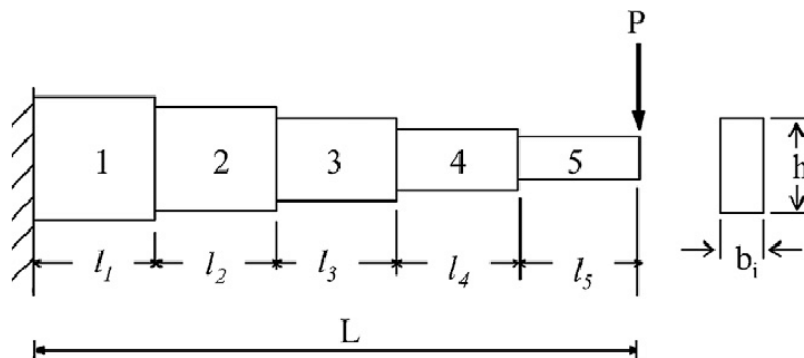


Figura 4.1- Consola de 5 secções ou consola de Vanderplaats

Dados:

- Tensão admissível na secção 1: $\sigma_{max,1} \leq 140 \text{ MPa}$
- Tensão admissível na secção 2: $\sigma_{max,2} \leq 140 \text{ MPa}$
- Tensão admissível na secção 3: $\sigma_{max,3} \leq 140 \text{ MPa}$
- Tensão admissível na secção 4: $\sigma_{max,4} \leq 140 \text{ MPa}$

- Tensão admissível na secção 5: $\sigma_{max,5} \leq 140 \text{ MPa}$
- Comprimento da secção 1: $l_1 = 1 \text{ m}$
- Comprimento da secção 2: $l_2 = 1 \text{ m}$
- Comprimento da secção 3: $l_3 = 1 \text{ m}$
- Comprimento da secção 4: $l_4 = 1 \text{ m}$
- Comprimento da secção 5: $l_5 = 1 \text{ m}$
- Comprimento total da consola: $L = 5 \text{ m}$
- Carga vertical pontual P: $P = 50 \text{ kN}$
- Módulo de Elasticidade (Módulo de Young): $E = 200 \text{ GPa}$
- Deformação admissível da consola: $\delta_{max} \leq 0,025 \text{ m}$
- M_i – Momento da secção [kN*m]
- y_i – Distância do eixo neutro até à fibra extrema [m]
- I_i – Inércia da secção [m^4]

4.1.1. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA MATEMÁTICO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

As variáveis de projeto são b_i (a base de cada secção da consola) e h_i (a altura de cada secção da consola). No problema vai ser considerado só a carga pontual descrita nos dados deste problema. O estudo do problema tem em conta a tensão de cada secção e a flecha máxima da consola.

As expressões utilizadas no desenvolvimento do programa matemático para cada secção da consola são as seguintes:

- Secção 1

A tensão na secção 1 da consola é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \frac{M_1 \times y_1}{I_1} &\Leftrightarrow \sigma_1 = \frac{\frac{PL}{2} \times h_1}{\frac{b_1 \times h_1^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_1 = \frac{\frac{50 \times 5}{2} \times h_1}{\frac{b_1 \times h_1^3}{12}} \\ &\Leftrightarrow \sigma_1 = \frac{1500}{b_1 h_1^2} [\text{MPa}] \end{aligned} \quad (4.1)$$

- Secção 2

A tensão na secção 2 da consola é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{M_2 \times y_2}{I_2} \Leftrightarrow \sigma_2 = \frac{\frac{P \times (l_2 + l_3 + l_4 + l_5)}{2} \times h_2}{\frac{b_2 \times h_2^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_2 = \frac{\frac{50 \times 4}{2} \times h_2}{\frac{B_2 \times H_2^3}{12}} \\ &\Leftrightarrow \sigma_2 = \frac{1200}{b_2 \times h_2^2} [MPa]\end{aligned}\quad (4.2)$$

- Secção 3

A tensão na secção 3 da consola é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \frac{M_3 \times y_3}{I_3} \Leftrightarrow \sigma_3 = \frac{\frac{P \times (l_3 + l_4 + l_5)}{2} \times h_3}{\frac{b_3 \times h_3^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_3 = \frac{\frac{50 \times 3}{2} \times h_3}{\frac{b_3 \times h_3^3}{12}} \\ &\Leftrightarrow \sigma_3 = \frac{900}{b_3 \times h_3^2} [MPa]\end{aligned}\quad (4.3)$$

- Secção 4

A tensão na secção 4 da consola é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_4 &= \frac{M_4 \times y_4}{I_4} \Leftrightarrow \sigma_4 = \frac{\frac{P \times (l_4 + l_5)}{2} \times h_4}{\frac{b_4 \times h_4^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_4 = \frac{\frac{50 \times 2}{2} \times h_4}{\frac{b_4 \times h_4^3}{12}} \\ &\Leftrightarrow \sigma_4 = \frac{600}{b_4 \times h_4^2} [MPa]\end{aligned}\quad (4.4)$$

- Secção 5

A tensão na secção 5 da consola é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_5 &= \frac{M_5 \times y_5}{I_5} \Leftrightarrow \sigma_5 = \frac{\frac{P \times l_5}{2} \times h_5}{\frac{b_5 \times h_5^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_5 = \frac{\frac{50 \times 1}{2} \times h_5}{\frac{b_5 \times h_5^3}{12}} \\ &\Leftrightarrow \sigma_5 = \frac{300}{b_5 \times h_5^2} [MPa]\end{aligned}\quad (4.5)$$

A flecha de cada secção da consola no lado direito é calculada pelas seguintes formulas segundo Vanderplaats:

$$\delta_0 = \delta'_0 = 0 \quad (4.6)$$

$$\delta'_i = \frac{P \times l_i}{E \times I_i} \left[L + \frac{l_i}{2} - \sum_{j=1}^i l_j \right] + \delta'_{i-1} \quad (4.7)$$

$$\delta_i = \frac{P \times l_i^2}{2 \times E \times I_i} \left[L - \sum_{j=1}^i l_j + \frac{2l_i}{3} \right] + \delta'_{i-1} + \delta_{i-1} \quad (4.8)$$

Com os dados acima descritos é possível formular a função objetivo e as restrições do problema.

- Função Objetivo

A função objetivo fornece o volume de material da consola:

$$f(b_i, h_i) = (b_1 \times h_1 \times 1m) + (b_2 \times h_2 \times 1m) + (b_3 \times h \times 1m) + (b_4 \times h_4 \times 1m) + (b_5 \times h_5 \times 1m) [m^3] \quad (4.9)$$

- Restrições de Desigualdade

As expressões das restrições de desigualdade utilizadas no desenvolvimento do programa matemático para a resolução do problema de otimização são descritas em seguida.

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível na secção 1 da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(1) \Rightarrow \sigma_1 \leq \sigma_{max,1} \Leftrightarrow \sigma_1 - \sigma_{max,1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1500}{b_1 h_1^2} - 140 \leq 0 \quad (4.10)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível na secção 2 da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(2) \Rightarrow \sigma_2 \leq \sigma_{max,2} \Leftrightarrow \sigma_2 - \sigma_{max,2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1200}{b_2 h_2^2} - 140 \leq 0 \quad (4.11)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível na secção 3 da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(3) \Rightarrow \sigma_3 \leq \sigma_{max,3} \Leftrightarrow \sigma_3 - \sigma_{max,3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{900}{b_3 h_3^2} - 140 \leq 0 \quad (4.12)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível na secção 4 da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(4) \Rightarrow \sigma_4 \leq \sigma_{max,4} \Leftrightarrow \sigma_4 - \sigma_{max,4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{600}{b_4 h_4^2} - 140 \leq 0 \quad (4.13)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível na secção 5 da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(5) \Rightarrow \sigma_5 \leq \sigma_{max,5} \Leftrightarrow \sigma_5 - \sigma_{max,5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{300}{b_5 h_5^2} - 140 \leq 0 \quad (4.14)$$

Expressão da restrição de desigualdade da flecha máxima do ponto último da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(6) \Rightarrow \delta_5 \leq \delta_{max} \Leftrightarrow \delta_5 - \delta_{max} \leq 0 \Leftrightarrow \delta_5 - 0,025 \leq 0 \quad (4.15)$$

Expressão da restrição de desigualdade das dimensões da 1ª secção transversal da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(7) \Rightarrow h_1 \leq 20b_1 \Leftrightarrow h_1 - 20b_1 \leq 0 \quad (4.16)$$

Expressão da restrição de desigualdade das dimensões da 2ª secção transversal da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(8) \Rightarrow h_2 \leq 20b_2 \Leftrightarrow h_2 - 20b_2 \leq 0 \quad (4.17)$$

Expressão da restrição de desigualdade das dimensões da 3ª secção transversal da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(9) \Rightarrow h_3 \leq 20b_3 \Leftrightarrow h_3 - 20b_3 \leq 0 \quad (4.18)$$

Expressão da restrição de desigualdade das dimensões da 4ª secção transversal da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(10) \Rightarrow h_4 \leq 20b_4 \Leftrightarrow h_4 - 20b_4 \leq 0 \quad (4.19)$$

Expressão da restrição de desigualdade das dimensões da 5ª secção transversal da consola de Vanderplaats:

$$Rdes(11) \Rightarrow h_5 \leq 20b_5 \Leftrightarrow h_5 - 20b_5 \leq 0 \quad (4.20)$$

4.1.2.RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO COM A FERRAMENTA SOLVER DO EXCEL

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 4.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Função Objetivo						
3		Volume	61914,789	cm³				
4								
5		Variáveis de Projeto				Restrições		
6		B1	2,9920424	cm		Rdes(1)	-3,51079E-09	
7		H1	59,8408481	cm		Rdes(2)	0	
8		B2	2,77756612	cm		Rdes(3)	0	
9		H2	55,5513224	cm		Rdes(4)	0	
10		B3	2,5235863	cm		Rdes(5)	0	
11		H3	50,471726	cm		Rdes(6)	-0,024997182	
12		B4	2,20455569	cm		Rdes(7)	0	
13		H4	44,0911138	cm		Rdes(8)	0	
14		B5	1,74975701	cm		Rdes(9)	0	
15		H5	34,9951402	cm		Rdes(10)	0	
16						Rdes(11)	0	
17								
18								
19		y1	2,1056E-07			y1	1,09178E-07	
20		y2	4,3108E-07			y2	4,35246E-07	
21		y3	6,6223E-07			y3	9,89602E-07	
22		y4	9,0037E-07			y4	1,78413E-06	
23		y5	1,1004E-06			y5	2,81785E-06	
24								

Figura 4.2- Folha de cálculo do Excel com o problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que pode ser vista na fig. 4.3. No campo “Definir Objetivo” é colocada a função objetivo do problema. Neste caso a redução do volume da consola. No campo “Para” define-se a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define-se as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($b_1, h_1, b_2, h_2, b_3, h_3, b_4, h_4, b_5$ e h_5) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona as células com as respetivas restrições de desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver ✕

Definir Objetivo: ↑

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável: ↑

Sujeito às Restrições:

\$G\$6:\$G\$10 <= 0
\$G\$11 <= 0
\$G\$12:\$G\$16 <= 0

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Selec. Método Resolução: Opções

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

AjudaResolverFechar

Figura 4.3- Definição dos diferentes parâmetros da ferramenta Solver

4.1.3. SOLUÇÃO ENCONTRADA E CONCLUSÕES

A solução encontrada para as variáveis de projeto do problema da consola de Vanderplaats pelo programa está presente na tabela 4.1, está também presente os resultados encontrados por outros autores.

Tabela 4.1-Solução encontrada para as variáveis de projeto do problema

Variáveis de Projeto	Excel	Thanedar e Vanderplaats [19]
$b_1(cm)$	3,0	3,06
$h_1(cm)$	59,8	61,16
$b_2(cm)$	2,8	2,81
$h_2(cm)$	55,5	56,24
$b_3(cm)$	2,5	2,51
$h_3(cm)$	50,5	50,47
$b_4(cm)$	2,2	2,20
$h_4(cm)$	44,1	44,09
$b_5(cm)$	1,7	1,75
$h_5(cm)$	35,0	35,03

A solução encontrada para a função objetivo do problema da consola de Vanderplaats está presente na tabela 4.2 e solução encontrada por outros autores.

Tabela 4.2- Solução da função objetivo do problema

Função Objetivo	Excel	Thanedar e Vandeerplaats [19]
$V(cm^3)$	61914,79	63110

O volume da consola encontra-se na sua maioria concentrado no apoio da consola (encastramento). Outra observação importante é de que as restrições de tensão em cada secção tiveram mais peso que a restrição da flecha da consola. A inércia das secções é o fator que faz com que a otimização tenda a aumentar a secção transversal dos troços que estão mais próximos do apoio.

4.2. CONSOLA DE DUAS SECÇÕES

Apresenta-se em seguida o exemplo de uma consola de 2 secção em que se utiliza a ferramenta Solver do Excel. Pretende-se minimizar o volume de material da consola da figura 4.4.

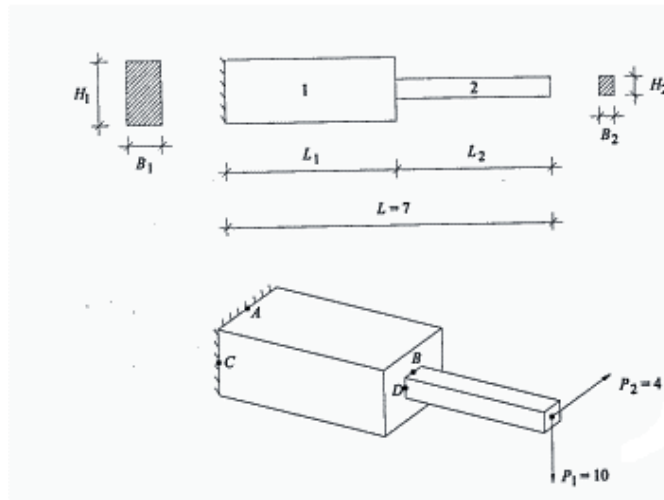


Figura 4.4- Consola de duas secções transversais. Adaptado de Azevedo (1994)

Dados:

- Comprimento total da consola: $L = 7 \text{ m}$
- Tensão máxima admissível no Ponto A: $\sigma_{max,a} \leq 250 \text{ MPa}$
- Tensão máxima admissível no Ponto B: $\sigma_{max,b} \leq 250 \text{ MPa}$
- Tensão máxima admissível no Ponto C: $\sigma_{max,c} \leq 250 \text{ MPa}$
- Tensão máxima admissível no Ponto D: $\sigma_{max,d} \leq 250 \text{ MPa}$
- Carga pontual vertical na ponta da consola: $P_1 = 10 \text{ kN}$
- Carga pontual horizontal na ponta da consola: $P_2 = 4 \text{ kN}$
- M_i – Momento da secção [$\text{kN}\cdot\text{m}$]
- y_i – Distância do eixo neutro até à fibra extrema [m]
- I_i – Inércia da secção [m^4]

4.2.1. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA MATEMÁTICO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

As variáveis de projeto são B_1 (base da secção 1), H_1 (altura da secção 1), L_1 (comprimento da secção 1), B_2 (base da secção 2), H_2 (altura da secção 2) e L_2 (comprimento da secção 2). No problema vai ser considerado a atuação das duas cargas pontuais descritas nos dados do problema. O estudo do problema tem em conta a tensão em dois pontos (um na horizontal e outro na vertical da respetiva secção) por secção.

As expressões de cada secção para serem utilizadas nas restrições de desigualdade são descritas em seguida:

- Secção 1

As tensões na secção 1 no ponto A e C são dadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_a = \frac{M_a \times y_a}{I_a} \Leftrightarrow \sigma_a = \frac{\frac{P_1 \times L}{2} \times H_1}{\frac{B_1 \times H_1^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_a = \frac{420}{B_1 \times H_1^2} \quad (4.21)$$

$$\sigma_c = \frac{M_c \times y_c}{I_c} \Leftrightarrow \sigma_c = \frac{\frac{P_1 \times L}{2} \times B_1}{\frac{H_1 \times B_1^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_c = \frac{168}{H_1 \times B_1^2} \quad (4.22)$$

- Secção 2

As tensões na secção 2 nos pontos B e D são dadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_b = \frac{M_b \times y_b}{I_b} \Leftrightarrow \sigma_b = \frac{\frac{P_1 \times L_2}{2} \times H_2}{\frac{B_2 \times H_2^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_b = \frac{60 \times L_2}{B_2 \times H_2^2} \quad (4.23)$$

$$\sigma_d = \frac{M_d \times y_d}{I_d} \Leftrightarrow \sigma_d = \frac{\frac{P_2 \times L_2}{2} \times B_2}{\frac{H_2 \times B_2^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_d = \frac{24 \times L_2}{H_2 \times B_2^2} \quad (4.24)$$

Com os dados acima descritos é possível formular a função objetivo do problema.

- Função Objetivo

A função objetivo fornece o volume de material da consola:

$$f(L_1, B_1, H_1, L_2, B_2, H_2) = (L_1 \times B_1 \times H_1) + (L_2 \times B_2 \times H_2)[m^3] \quad (4.25)$$

- Restrições de Igualdade

As expressões de igualdade utilizadas para o desenvolvimento do programa matemático para a resolução do problema de otimização são as descritas em seguida:

Expressão da restrição igualdade do comprimento da consola:

$$Rig(1) \Rightarrow L = L_1 + L_2 \Leftrightarrow L - L_1 - L_2 = 0 \quad (4.26)$$

Expressão da restrição igualdade da relação entre as bases das secções transversais da consola:

$$Rig(2) \Rightarrow B_1 = 1,5B_2 \Leftrightarrow B_1 - 1,5B_2 = 0 \quad (4.27)$$

- Restrições de Desigualdade

As expressões para as restrições de desigualdade utilizadas para desenvolvimento do programa matemático da resolução do problema de otimização são as seguintes.

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da face horizontal da 1^a secção da consola:

$$Rdes(1) \Rightarrow \sigma_a \leq \sigma_{max,a} \Leftrightarrow \sigma_a - \sigma_{max,a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{420}{B_1 H_1^2} - 250 \leq 0 \quad (4.28)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da face horizontal da 2^a secção da consola:

$$Rdes(2) \Rightarrow \sigma_b \leq \sigma_{max,b} \Leftrightarrow \sigma_b - \sigma_{max,b} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{60L_2}{B_2 H_2^2} - 250 \leq 0 \quad (4.29)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da face vertical da 1^a secção da consola:

$$Rdes(3) \Rightarrow \sigma_c \leq \sigma_{max,c} \Leftrightarrow \sigma_c - \sigma_{max,c} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{180}{H_1 B_1^2} - 250 \leq 0 \quad (4.30)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da face vertical da 2^a secção da consola:

$$Rdes(4) \Rightarrow \sigma_d \leq \sigma_{max,d} \Leftrightarrow \sigma_d - \sigma_{max,d} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{24L_2}{H_2 B_2^2} - 250 \leq 0 \quad (4.31)$$

4.2.2. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO COM A FERRAMENTA SOLVER DO EXCEL

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 4.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Função Objetivo						
3		Volume	6,074021	m ³				
4								
5		Variáveis de Projeto				Restrições		
6		L1	4,666669	m		Rdes(1)	0	
7		B1	0,645371	m		Rdes(2)	-27,7776	
8		H1	1,613429	m		Rdes(3)	0	
9		L2	2,333331	m		Rdes(4)	-1,8E-05	
10		B2	0,430248	m		Rig(1)	0	
11		H2	1,21007	m		Rig(2)	0	
12								

Figura 4.5- Folha de cálculo Excel com o problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que se encontra na fig. 4.6. No campo “Definir Objetivo” é colocada a função objetivo do problema. Neste caso a redução do volume da consola. No campo “Para” define-se a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define-se as células da folha que contêm as variáveis de projeto (L_1, B_1, H_1, L_2, B_2 e H_2) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver ✕

Definir Objetivo: ↑

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável: ↑

Sujeito às Restrições:

\$C\$6 >= 0,1
\$G\$10 = 0
\$G\$11 = 0
\$C\$9 >= 0,1
\$G\$6:\$G\$9 <= 0

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Selec. Método v

Resolução: Opções

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda

Resolver

Fechar

Figura 4.6- Definição dos diferentes parâmetros da ferramenta Solver

4.2.3. SOLUÇÃO ENCONTRADA E CONCLUSÕES

A solução encontrada para as variáveis de projeto do problema da consola de duas secções está presente na tabela 4.3 e solução encontrada por outro autor.

Tabela 4.3- Solução encontrada para as variáveis de projeto do problema

Variáveis de Projeto	Excel	Azevedo [2]
$L_1(m)$	4,67	4,667
$B_1(m)$	0,64	0,645
$H_1(m)$	1,61	1,613
$L_2(m)$	2,33	2,333
$B_2(m)$	0,43	0,430
$H_2(m)$	1,21	1,210

A solução encontrada para a função objetivo do problema da consola de duas de secções está presente na tabela 4.4 e solução encontrada por outro autor.

Tabela 4.4- Solução encontrada para a função objetivo do problema

Função Objetivo	Excel	Azevedo [2]
$V(m^3)$	6,07	6,074

Uma grande parte do volume da consola está concentrado junto do seu apoio (um encastramento), porque as restrições de tensões da secção menor têm folga como pode ser observado na figura 4.2.2, ou seja, a secção que mais condiciona a otimização deste problema é a secção maior, logo é aquela que deve receber maior volume. A inércia da secção junto ao apoio é o fator que faz com que a otimização tenda a aumentar a secção transversal desse mesmo troço.

5.

APLICAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO DA FORMA A PROBLEMAS DE ENGENHARIA CIVIL

Neste capítulo são abordados exemplos de problemas de otimização aplicados a estruturas utilizadas na vida real, através da utilização da ferramenta Solver do *software* Microsoft Excel, descrevendo o modo como é definido o programa matemático.

5.1. PÓRTICO DE UM ARMAZÉM INDUSTRIAL

Apresenta-se em seguida um exemplo de um pórtico de um armazém industrial, presente na figura 5.1., em que é aplicada uma carga uniformemente distribuída que é o peso próprio da estrutura para demonstrar a aplicação da ferramenta Solver do *software* Microsoft Excel.

Num 1º caso é estudado um pórtico com uma secção transversal maciça em todas as barras. No 2º caso é estudado o 1º caso tendo em conta a encurvadura das barras à compressão. No 3º caso é estudado um pórtico com uma secção transversal tubular quadrada. No 4º caso é estudado o 3º caso tendo em conta a encurvadura das barras à compressão. No 5º caso é estudado um pórtico com variação das dimensões da secção tubular quadrada transversal de cada barra do pórtico tendo em conta a encurvadura das barras à encurvadura. No 6º caso é estudado um pórtico com uma secção transversal IPE em todas as barras. No 7º caso é estudado o 6º caso tendo em conta a encurvadura das barras à compressão e o último caso é estudado um pórtico com variação de secção transversal IPE em cada barra tendo em conta a encurvadura das barras à compressão.

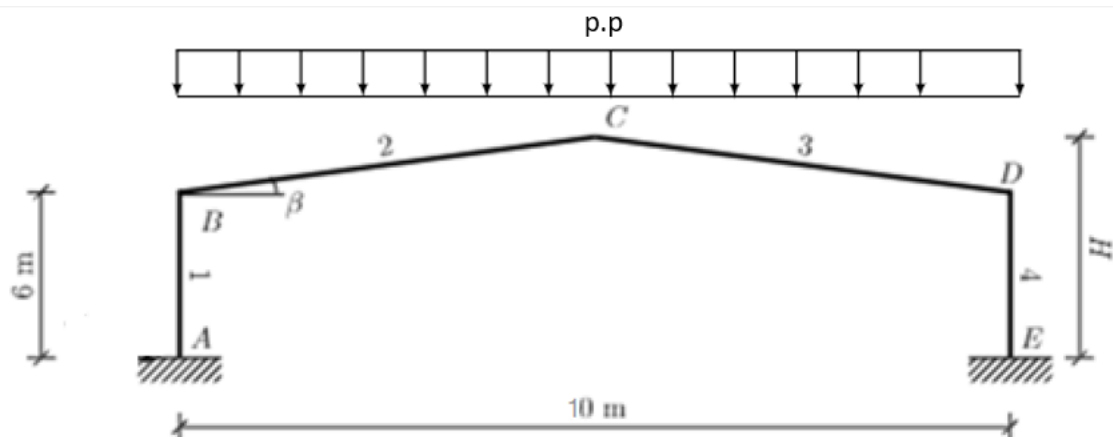


Figura 5.1- Pórtico de um armazém industrial

Dados:

- 1º Caso:
 - Comprimento do vão do pórtico: $L_{AE} = 10 \text{ m}$
 - Carga uniformemente distribuída, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{secc\tilde{a}o} \text{ kN/m}$
 - Altura dos pilares do pórtico: $L_{AB} = 6 \text{ m}$
 - Base da secção transversal das barras: $B_{secc\tilde{a}o} = 0,2 \text{ m}$
 - Altura da secção transversal das barras: $H_{secc\tilde{a}o} = 0,2 \text{ m}$
 - Módulo de Elasticidade (Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
 - Tensão máxima admissível do aço: $\sigma_{max,a\tilde{c}o} \leq 250 \text{ MPa}$
 - Deslocamento máximo admissível, deslocamento vertical que pode afetar o aspeto do pórtico [20]: $\Delta_{max} \leq \frac{L_{AE}}{250} = 0,04 \text{ m}$
 - Custo unitário do aço: $C_u = 2,5 \text{ €/kg}$
 - Massa específica do aço: $\rho_{a\tilde{c}o} = 7850 \text{ kg/m}^3$
 - Perfil de secção transversal utilizado:



Figura 5.2- Secção transversal de aço maciço

- 2º Caso:
 - Comprimento do vão do pórtico: $L_{AE} = 10 \text{ m}$
 - Carga uniformemente distribuída, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{secc\tilde{a}o} \text{ kN/m}$
 - Altura dos pilares do pórtico: $L_{AB} = 7 \text{ m}$
 - Base da secção transversal das barras: $B_{secc\tilde{a}o} = 0,2 \text{ m}$
 - Base da secção transversal das barras: $B_{secc\tilde{a}o} = 0,2 \text{ m}$
 - Módulo de Elasticidade (Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
 - Tensão máxima admissível do aço: $\sigma_{max,a\tilde{c}o} \leq 275 \text{ MPa}$
 - Deslocamento máximo admissível: $\Delta_{max} \leq \frac{L_{AE}}{250} = 0,04 \text{ m}$
 - Custo unitário do aço: $C_u = 2,5 \text{ €/kg}$
 - Massa específica do aço: $\rho_{a\tilde{c}o} = 7850 \text{ kg/m}^3$

- Perfil de secção transversal utilizado:



Figura 5.3- Secção transversal de aço maciço

- 3º Caso:
 - Comprimento do vão do pórtico: $L_{AE} = 10 \text{ m}$
 - Carga uniformemente distribuída, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{\text{secção}} \text{ kN/m}$
 - Altura dos pilares do pórtico: $L_{AB} = 6 \text{ m}$
 - Espessura da chapa da secção tubular quadrada: $e = 0,008 \text{ m}$
 - Módulo de Elasticidade (Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
 - Tensão máxima admissível do aço: $\sigma_{\text{max,aço}} \leq 250 \text{ MPa}$
 - Deslocamento máximo admissível: $\Delta_{\text{max}} \leq \frac{L_{AE}}{250} = 0,04 \text{ m}$
 - Custo unitário do aço: $C_u = 2,5 \text{ €/kg}$
 - Massa específico do aço: $\rho_{\text{aço}} = 7850 \text{ kg/m}^3$
 - Perfil da secção transversal utilizado:

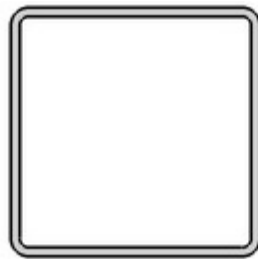


Figura 5.4- Secção transversal tubular quadrada de aço

- 4º Caso:
 - Comprimento do vão do pórtico: $L_{AE} = 10 \text{ m}$
 - Carga uniformemente distribuída, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{\text{secção}} \text{ kN/m}$
 - Altura dos pilares do pórtico: $L_{AB} = 8 \text{ m}$
 - Espessura da chapa da secção tubular quadrada: $e = 0,0008 \text{ m}$

- Módulo de Elasticidade (Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
- Tensão máxima admissível do aço: $\sigma_{max,aço} \leq 275 \text{ MPa}$
- Deslocamento máximo admissível: $\Delta_{max} \leq \frac{L_{AE}}{250} = 0,04m$
- Custo unitário do aço: $C_u = 2,5 \text{ €/kg}$
- Massa específica do aço: $\rho_{aço} = 7850 \text{ kg/m}^3$
- Perfil da secção transversal utilizado:



Figura 5.5- Secção transversal tubular quadrada de aço

- 5º Caso:
 - Comprimento do vão do pórtico: $L_{AE} = 10 \text{ m}$
 - Carga uniformemente distribuída, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{secção} \text{ kN/m}$
 - Altura dos pilares do pórtico: $L_{AB} = 9 \text{ m}$
 - Espessura da chapa da secção tubular quadrada: $e = 0,004 \text{ m}$
 - Módulo de Elasticidade (Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
 - Tensão máxima admissível do aço: $\sigma_{max,aço} \leq 275 \text{ MPa}$
 - Deslocamento máximo admissível: $\Delta_{max} \leq \frac{L_{AE}}{250} = 0,04m$
 - Custo unitário do aço: $C_u = 2,5 \text{ €/kg}$
 - Massa específica do aço: $\rho_{aço} = 7850 \text{ kg/m}^3$
 - Perfil de secção transversal utilizado:

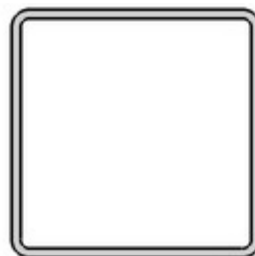


Figura 5.6- Secção transversal tubular quadrada de aço

- 6º Caso:
 - Comprimento do vão do pórtico: $L_{AE} = 10 \text{ m}$
 - Carga uniformemente distribuída, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{seção} \text{ kN/m}$
 - Altura dos pilares do pórtico: $L_{AB} = 5 \text{ m}$
 - Módulo de Elasticidade (Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
 - Tensão máxima admissível do aço: $\sigma_{max,aço} \leq 235 \text{ MPa}$
 - Deslocamento máximo admissível: $\Delta_{max} \leq \frac{L_{AE}}{250} = 0,04 \text{ m}$
 - Custo unitário do aço: $C_u = 2,5 \text{ €/kg}$
 - Massa específica do aço: $\rho_{aço} = 7850 \text{ kg/m}^3$
 - Perfil de secção transversal utilizado:



Figura 5.7- Secção transversal de um Perfil IPE

- 7º Caso:
 - Comprimento do vão do pórtico: $L_{AE} = 10 \text{ m}$
 - Carga uniformemente distribuída, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{seção} \text{ kN/m}$
 - Altura dos pilares do pórtico: $L_{AB} = 9 \text{ m}$
 - Módulo de Elasticidade (Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
 - Tensão máxima admissível do aço: $\sigma_{max,aço} \leq 235 \text{ MPa}$
 - Deslocamento máximo admissível: $\Delta_{max} \leq \frac{L_{AE}}{250} = 0,04 \text{ m}$
 - Custo unitário do aço: $C_u = 2,5 \text{ €/kg}$
 - Massa específica do aço: $\rho_{aço} = 7850 \text{ kg/m}^3$
 - Perfil de secção transversal utilizado:



Figura 5.8- Secção transversal do perfil IPE

- 8º Caso:
 - Comprimento do vão do pórtico: $L_{AE} = 10 \text{ m}$
 - Carga uniformemente distribuída, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{\text{secção}} \text{ kN/m}$
 - Altura dos pilares do pórtico: $L_{AB} = 9 \text{ m}$
 - Módulo de Elasticidade (Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
 - Tensão máxima admissível do aço: $\sigma_{\text{max,aço}} \leq 235 \text{ MPa}$
 - Deslocamento máximo admissível: $\Delta_{\text{max}} \leq \frac{L_{AE}}{250} = 0,04 \text{ m}$
 - Custo unitário do aço: $C_u = 2,5\text{€/kg}$
 - Massa específica do aço: $\rho_{\text{aço}} = 7850 \text{ kg/m}^3$
 - Perfil de secção transversal utilizado:



Figura 5.9- Secção transversal do perfil IPE

Para os 6º, 7º e 8º casos é utilizada a Tabela 5.1 com perfis IPE disponíveis no mercado [20]. Para encontrar as expressões matemáticas das linhas de tendência das figuras 5.10, 5.11 e 5.12 que relacionam cada grandeza para ser utilizado na resolução dos problemas de cada caso:

Tabela 5.1- Tabela com as diferentes alturas, áreas e inércias de cada perfil IPE

Perfis	$H_{perfil}(m)$	$A_{perfil}(m^2)$	$I_{perfil}(m^4)$
IPE 180	0.18	0.0024	1.32E-05
IPE 200	0.20	0.00285	1.94E-05
IPE 220	0.22	0.00334	2.77E-05
IPE 240	0.24	0.00391	3.89E-05
IPE 270	0.27	0.00459	5.79E-05
IPE 300	0.30	0.00538	8.36E-05
IPE 330	0.33	0.00626	0.000118
IPE 360	0.36	0.00727	0.000163
IPE 400	0.40	0.00845	0.000231
IPE 450	0.45	0.00988	0.000337
IPE 500	0.50	0.01155	0.000482
IPE 550	0.55	0.01344	0.000671
IPE 600	0.60	0.0156	0.000921

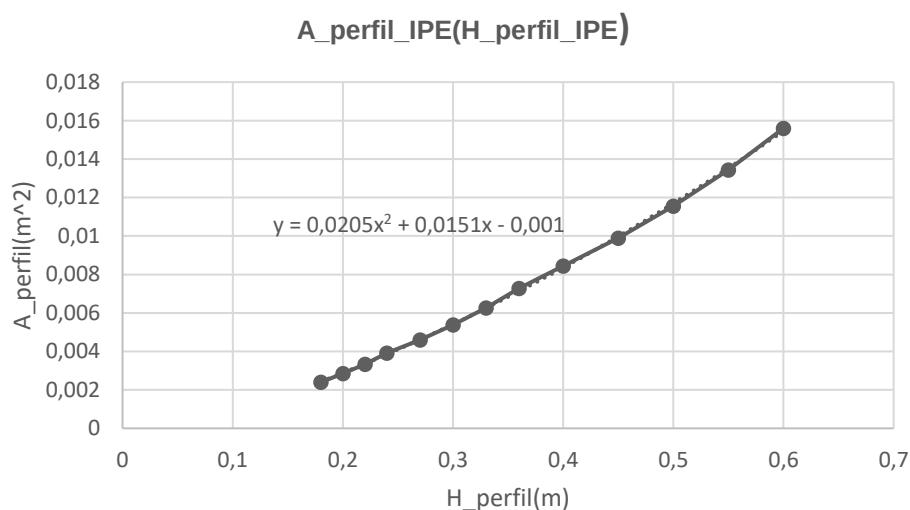


Figura 5.10- Linha de tendência $A_{perfil\ IPE}(H_{perfil\ IPE})$

Equação que relaciona a área do perfil IPE com a altura do perfil IPE:

$$A_{\text{perfil IPE}} = 0,0205H_{\text{perfil IPE}}^2 + 0,0151H_{\text{perfil IPE}} - 0,001 \quad (5.1)$$

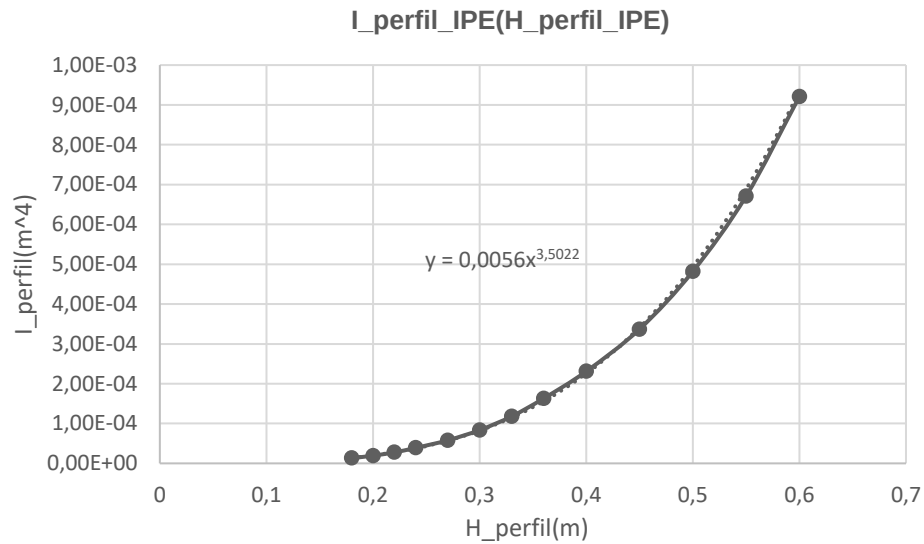


Figura 5.11- Linha de tendência $I_{\text{perfil IPE}}(H_{\text{perfil IPE}})$

Equação que relaciona a inércia do perfil IPE com a altura do perfil IPE:

$$I_{\text{perfil IPE}} = 0,0056H_{\text{perfil IPE}}^{3,5022} \quad (5.2)$$

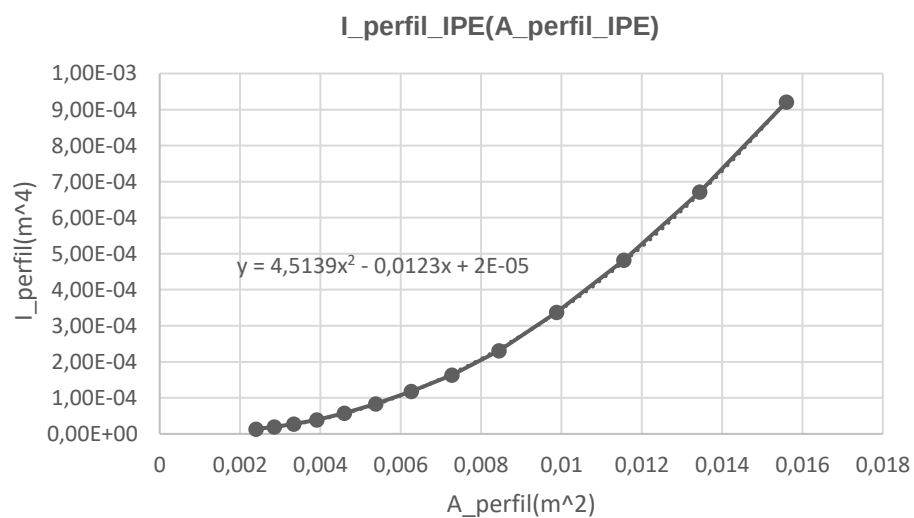


Figura 5.12- Linha de tendência $I_{\text{perfil IPE}}(A_{\text{perfil IPE}})$

Equação que relaciona a inércia do perfil IPE com a área do perfil IPE:

$$I_{\text{perfil IPE}} = 4,5139A_{\text{perfil IPE}}^2 - 0,0123A_{\text{perfil IPE}} + 2 \times 10^{-5} \quad (5.3)$$

5.1.1. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA MATEMÁTICO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DA FORMA DO PÓRTICO DE ARMAZÉM INDUSTRIAL

As variáveis dos casos em estudo estão presentes na tabela 5.2.

Tabela 5.2- Variáveis de projeto dos casos em estudo

	Variáveis de projeto
1º caso	$M_{\max,1}, M_{\max,2}, M_{\max,3}, M_{\max,4}, H_{\text{pórtico}}, L_2 \text{ e } L_3.$
2º caso	$H_{\text{pórtico}}, L_2, L_3, M_{\max,1}, M_{\max,2}, M_{\max,3}, M_{\max,4}, B_{\text{secção}} \text{ e } H_{\text{secção}}$
3º caso	$H_{\text{pórtico}}, L_2, L_3, M_{\max,1}, M_{\max,2}, M_{\max,3}, M_{\max,4}, B_1, H_1, B_2, H_2, B_3, H_3, B_4 \text{ e } H_4$
4º caso	$H_{\text{pórtico}}, L_2, L_3, M_{\max,1}, M_{\max,2}, M_{\max,3}, M_{\max,4}, H_{\text{pórtico}} \text{ e } I_{\text{pórtico}}.$
5º caso	$H_{\text{pórtico}}, L_2, L_3, M_{\max,1}, M_{\max,2}, M_{\max,3}, M_{\max,4}, B_1, H_1, B_2, H_2, B_3, H_3, B_4, H_4.$
6º caso	$H_{\text{pórtico}}, L_2, L_3, M_{\max,1}, M_{\max,2}, M_{\max,3}, M_{\max,4}, H_{\text{perfil IPE}} \text{ e } I_{\text{perfil IPE}}$
7º caso	$H_{\text{pórtico}}, L_2, L_3, M_{\max,1}, M_{\max,2}, M_{\max,3}, M_{\max,4} \text{ e } H_{\text{perfil IPE}}$
8º caso	$H_{\text{pórtico}}, L_2, L_3, M_{\max,1}, M_{\max,2}, M_{\max,3}, M_{\max,4}, H_{\text{IPE},1}, H_{\text{IPE},2}, H_{\text{IPE},3} \text{ e } H_{\text{IPE},4}$

As expressões de cada secção a serem utilizadas nas expressões das restrições de desigualdade são as seguintes:

- Secção 1

A tensão máxima admissível na secção 1 é dada pela expressão:

$$\sigma_{\max,1} = \frac{M_{\max,1} \times y_1}{I_1} \Leftrightarrow \sigma_{\max,1} = \frac{M_{\max,1} \times \frac{H_1}{2}}{\frac{B_1 H_1^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_{\max,1} = \frac{6M_{\max,1}}{B_1 H_1^2} \quad (5.4)$$

Com encurvadura em elementos comprimidos [22]:

$$\sigma_{\text{encurv},1} = \frac{\pi^2 \times E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times E}{\left(\frac{L}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 \times E}{\left(\frac{L_1}{\sqrt{\frac{I_1}{A_1}}}\right)^2} = \frac{\pi^2 \times E \times I_1}{L_1^2 \times A_1} \quad (5.5)$$

$$\lambda = \frac{L}{i}$$

$$i - \text{Raio de giração, } i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

- Secção 2

A tensão máxima admissível na secção 2 é dada pela expressão:

$$\sigma_{max,2} = \frac{M_{max,2} \times y_2}{I_2} \Leftrightarrow \sigma_{max,2} = \frac{M_{max,2} \times \frac{H_2}{2}}{\frac{B_2 H_2^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_{max,2} = \frac{6M_{max,2}}{B_2 H_2^2} \quad (5.6)$$

Com encurvadura:

$$\sigma_{encurv,2} = \frac{\pi^2 \times E \times I_2}{L_2^2 \times A_2} \quad (5.7)$$

- Secção 3

A tensão máxima admissível na secção 3 é dada pela expressão:

$$\sigma_{max,3} = \frac{M_{max,3} \times y_3}{I_3} \Leftrightarrow \sigma_{max,3} = \frac{M_{max,3} \times \frac{H_3}{2}}{\frac{B_3 H_3^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_{max,3} = \frac{6M_{max,3}}{B_3 H_3^2} \quad (5.8)$$

Com encurvadura:

$$\sigma_{encurv,3} = \frac{\pi^2 \times E \times I_3}{L_3^2 \times A_3} \quad (5.9)$$

- Secção 4

A tensão máxima admissível na secção 4 é dada pela expressão:

$$\sigma_{max,4} = \frac{M_{max,4} \times y_4}{I_4} \Leftrightarrow \sigma_{max,4} = \frac{M_{max,4} \times \frac{H_4}{2}}{\frac{B_4 H_4^3}{12}} \Leftrightarrow \sigma_{max,4} = \frac{6M_{max,4}}{B_4 H_4^2} \quad (5.10)$$

Com encurvadura:

$$\sigma_{encurv,4} = \frac{\pi^2 \times E \times I_4}{L_4^2 \times A_4} \quad (5.11)$$

Com os dados acima descritos é possível formular a função objetivo e as restrições do problema.

- Função Objetivo

A função objetivo fornece o custo total do material utilizado para a construção da estrutura:

$$f(A_1, A_2, A_3, A_4, L_1, L_2, L_3, L_4, C_u, \gamma) = ((A_1 \times L_1) + (A_2 \times L_2) + (A_3 \times L_3) + (A_4 \times L_4)) \times C_u \times \gamma [\text{€}] \quad (5.12)$$

- Restrições de Igualdade

As expressões das restrições de igualdade utilizadas no desenvolvimento do programa matemático para a resolução do problema de otimização são as seguintes:

Expressão do equilíbrio dos nós da estrutura pelo Método dos Deslocamentos:

$$Rig(1) \Rightarrow \underline{F} = \underline{K} \cdot \underline{\Delta} \quad (5.13)$$

Nas folhas de cálculo de Excel de cada caso deste problema de otimização foram criados programas próprios para encontrar os esforços presentes em cada barra do pórtico e com esses mesmos esforços calcular as tensões necessárias para calcular as restrições de desigualdade das tensões. Na figura 5.13 é apresentado o método.

The image displays a complex Excel spreadsheet used for structural analysis via the Method of Displacements. The spreadsheet is organized into several key sections:

- Rig(1):** Global stiffness matrix assembly, showing the summation of member stiffness matrices for each node.
- Rig(2):** Nodal equilibrium equations, where the global stiffness matrix is multiplied by nodal displacements to find the global load vector.
- Rig(3):** Member stiffness matrices, calculated for each of the 6 members based on their geometry and material properties.
- Rig(4):** Global load vector, derived from the nodal equilibrium equations.
- Rig(5):** Final nodal displacements, calculated by solving the global equilibrium equations.

The spreadsheet includes numerous numerical values, formulas, and cell references, demonstrating the iterative process of solving for the optimal structure dimensions and material properties.

Figura 5.13- Método dos Deslocamentos introduzido na folha de Excel do 2º caso de otimização do pórtico

Expressão de igualdade entre as vigas do pórtico:

$$Rig(2) \Rightarrow L_2 = L_3 \quad (5.14)$$

É de notar que a restrição de igualdade da expressão (5.13) faz com que apenas se obtenham soluções simétricas.

- Restrições de Desigualdade

As expressões das restrições de desigualdade utilizadas no desenvolvimento do programa matemático para a resolução do problema de otimização são as seguintes:

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da barra 1 do pórtico do armazém industrial:

$$Rdes(1) \Rightarrow \sigma_{max,1} \leq \sigma_{max,aço} \Leftrightarrow \sigma_{max,1} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6M_{max,1}}{B_1H_1^2} - 250 \leq 0 \quad (5.15)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da barra 2 do pórtico do armazém industrial:

$$Rdes(2) \Rightarrow \sigma_{max,2} \leq \sigma_{max,aço} \Leftrightarrow \sigma_{max,2} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6M_{max,2}}{B_2H_2^2} - 250 \leq 0 \quad (5.16)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da barra 3 do pórtico do armazém industrial:

$$Rdes(3) \Rightarrow \sigma_{max,3} \leq \sigma_{max,aço} \Leftrightarrow \sigma_{max,3} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6M_{max,3}}{B_3H_3^2} - 250 \leq 0 \quad (5.17)$$

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da barra 4 do pórtico do armazém industrial:

$$Rdes(4) \Rightarrow \sigma_{max,4} \leq \sigma_{max,aço} \Leftrightarrow \sigma_{max,4} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6M_{max,4}}{B_4H_4^2} - 250 \leq 0 \quad (5.18)$$

Expressão da restrição de desigualdade da altura do pórtico do armazém industrial:

$$Rdes(5) \Rightarrow H_{pórtico} \geq H_{min,pórtico} \Leftrightarrow H_{pórtico} - H_{min,pórtico} \geq 0 \quad (5.19)$$

Expressão da restrição de desigualdade do ângulo da barra 2 com a horizontal:

$$Rdes(6) \Rightarrow \beta \geq 0 \quad (5.20)$$

Expressão da restrição de desigualdade dos deslocamentos livres do pórtico:

$$Rdes(7) \text{ a } Rdes(15) \Rightarrow \Delta_i \leq \Delta_{max} \Leftrightarrow \Delta_i - \Delta_{max} \leq 0 \quad (5.21)$$

Com encurvadura:

Expressão de restrição de desigualdade correspondente à encurvadura da barra 1:

$$\begin{aligned} Rdes(16) \Rightarrow \sigma_{encurv,1} \leq \sigma_{max,aço} &\Leftrightarrow \sigma_{encurv,1} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi^2 \times E \times I_2}{L_2^2 \times A_2} - 250 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Expressão de restrição de desigualdade correspondente à encurvadura da barra 2:

$$\begin{aligned} Rdes(17) \Rightarrow \sigma_{encurv,3} \leq \sigma_{max,aço} &\Leftrightarrow \sigma_{encurv,3} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi^2 \times E \times I_2}{L_3^2 \times A_2} - 250 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Expressão de restrição de desigualdade correspondente à encurvadura da barra 3:

$$\begin{aligned} Rdes(18) \Rightarrow \sigma_{encurv,4} \leq \sigma_{max,aço} &\Leftrightarrow \sigma_{encurv,4} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi^2 \times E \times I_3}{L_4^2 \times A_3} - 250 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Expressão de restrição de desigualdade correspondente à encurvadura da barra 4:

$$\begin{aligned} Rdes(18) \Rightarrow \sigma_{encurv,4} \leq \sigma_{max,aço} &\Leftrightarrow \sigma_{encurv,4} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi^2 \times E \times I_3}{L_4^2 \times A_3} - 250 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Para o 7º e 8º casos foram introduzidas as seguintes “side constraints” no programa matemático:

$$0,0024 < A_{seção\ IPE} < 0,0156 \quad (5.26)$$

$$1,32E - 05 < I_{seção\ IPE} < 9,21E - 04 \quad (5.27)$$

5.1.2.FERRAMENTA SOLVER DO EXCEL APLICADA AO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO

A descrição de cada caso do problema de otimização do pórtico de um armazém industrial é demonstrada nos seguintes pontos:

- 1º Caso (secção quadrada maciça sem encurvadura)

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.14.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								
32								
33								
34								
35								
36								
37								

Figura 5.14- Folha de cálculo Excel com o 1º caso do problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que pode se encontrar na fig. 5.15. No campo “Definir Objetivo” é colocada a função objetivo do problema. Neste caso é encontrar o ângulo mínimo. No campo “Para” define a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define-se as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($M_{max,1}$, $M_{max,2}$, $M_{max,3}$, $M_{max,4}$, $H_{pórtico}$, L_2 , L_3) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver ✕

Definir Objetivo: ↑

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável:
 ↑

Sujeito às Restrições:

\$C\$14 = \$C\$15
\$C\$14 = \$D\$14
\$C\$15 = \$D\$15
\$C\$23 <= 0
\$C\$24 <= 0
\$C\$25 <= 0
\$C\$26 <= 0
\$C\$27 >= 6
\$C\$28 >= 0
\$C\$29:\$C\$37 <= 0
\$F\$17 = \$F\$18

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Seleção de Método: v

Resolução: Opções

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

AjudaResolverFechar

Figura 5.15- Definição dos diferentes parâmetros do 1º caso do problema de otimização

- 2º Caso (secção quadrada maciça com encurvadura)

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.16.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29	4							
30	5							
31	6							
32	7							
33	8							
34	9							
35	10							
36	11							
37	12							
38								
39								
40								
41								

Figura 5.16- Folha de cálculo Excel com o 2º caso do problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que se encontra na fig. 5.17. No campo “Definir Objetivo” é colocada a função objetivo do problema, neste caso é encontrar o ângulo mínimo. No campo “Para” define a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define-se as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($M_{max,1}$, $M_{max,2}$, $M_{max,3}$, $M_{max,4}$, $H_{pórtico}$, L_2 e L_3) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver ✕

Definir Objetivo: ↑

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável: ↑

Sujeito às Restrições:

\$C\$14 = \$C\$15
 \$C\$14 = \$D\$14
 \$C\$15 = \$D\$15
 \$C\$23:\$C\$26 <= 0
 \$C\$27 >= 6
 \$C\$28 >= 0
 \$C\$29:\$C\$37 <= 0
 \$D\$24:\$D\$26 <= 0
 \$F\$17 = \$F\$18
 \$F\$21 = \$F\$22
 \$F\$25 = \$F\$26

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Selec. Método v
 Resolução:

Opções

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda

Resolver

Fechar

Figura 5.17- Definição dos diferentes parâmetros do 2º caso do problema de otimização

- 3º Caso (secção tubular quadrada sem encurvadura)

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.18.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								
32								
33								
34								
35								
36								
37								
38								

Figura 5.18- Folha de cálculo Excel com o 3º caso do problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que se encontra na fig. 5.19. No campo “Definir Objetivo” é colocada a função objetivo do problema. Neste caso trata encontrar o ângulo mínimo. No campo “Para” define-se a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($M_{max,1}$, $M_{max,2}$, $M_{max,3}$, $M_{max,4}$, $H_{pórtico}$, L_2 , L_3 , $B_{secção}$ e $H_{secção}$) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver ✕

Definir Objetivo: ↑

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável: ↑

Sujeito às Restrições:

\$C\$14 = \$C\$15
 \$C\$14 = \$D\$14
 \$C\$15 = \$D\$15
 \$C\$23 <= 0
 \$C\$24 <= 0
 \$C\$25 <= 0
 \$C\$26 <= 0
 \$C\$27 >= 6
 \$C\$28 >= 0
 \$C\$29:\$C\$37 <= 0
 \$F\$18 = \$F\$19

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Seleção de Método: v

Resolução:

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda

Resolver

Echar

Figura 5.19- Definição dos diferentes parâmetros do 3º caso do problema de otimização

- 4º Caso (secção tubular quadrada com encurvadura)

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.20.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								
32								
33								
34								
35								
36								
37								
38								
39								
40								
41								

Figura 5.20- Folha de cálculo Excel com o 4º caso do problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que se encontra na fig. 5.21. No campo “Definir Objetivo” é posta a função objetivo do problema. Neste caso trata encontrar o ângulo mínimo. No campo “Para” define a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define-se as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($M_{max,1}$, $M_{max,2}$, $M_{max,3}$, $M_{max,4}$, $H_{pórtico}$, L_2 , L_3 , $B_{secção}$ e $H_{secção}$) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver ✕

Definir Objetivo: ⬆

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável: ⬆

Sujeito às Restrições:

\$C\$14 = \$C\$15
 \$C\$14 = \$D\$14
 \$C\$15 = \$D\$15
 \$C\$23:\$C\$26 <= 0
 \$C\$27 >= 7
 \$C\$28 >= 0
 \$C\$29:\$C\$37 <= 0
 \$D\$24:\$D\$26 <= 0
 \$F\$18 = \$F\$19
 \$F\$22 = \$F\$23
 \$F\$26 = \$F\$27

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Selec. Método: v

Resolução:

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda
Resolver
Fechar

Figura 5.21- Definição dos diferentes parâmetros do 4º caso do problema de otimização

- 5º Caso (secção tubular quadrada com encurvadura e variação da secção de cada barra)

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.22.

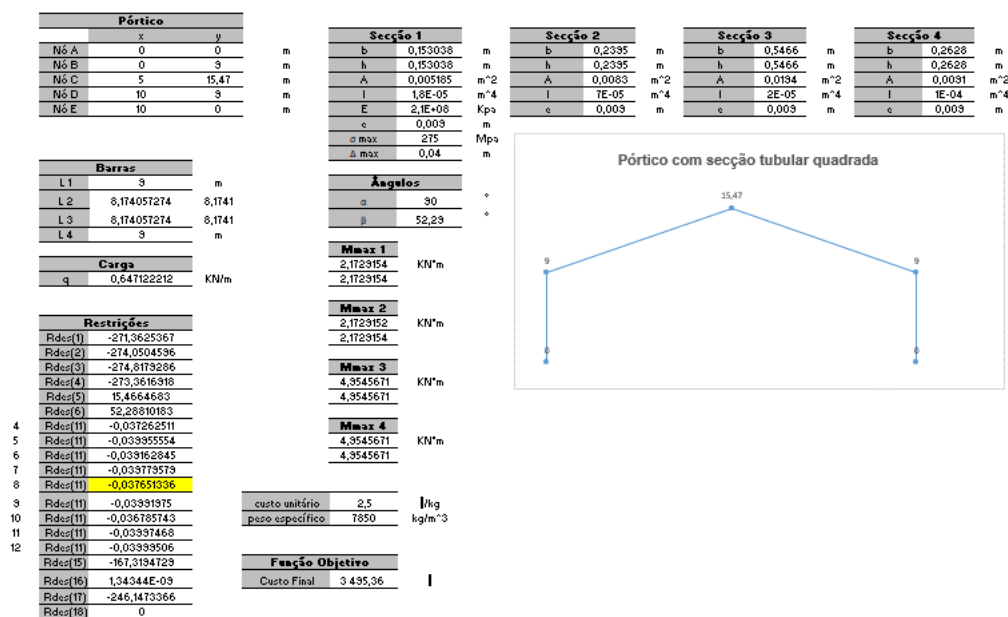


Figura 5.22- Folha de cálculo Excel com o 5º caso do problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que se encontram na fig. 5.23. No campo “Definir Objetivo” é posta a função objetivo do problema. Neste caso trata encontrar o ângulo. No campo “Para” define a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define-se as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($M_{max,1}$, $M_{max,2}$, $M_{max,3}$, $M_{max,4}$, $H_{pórtico}$, L_2 , L_3 , B_1 , H_1 , B_2 , H_2 , B_3 , H_3 , B_4 e H_4) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver



Definir Objetivo:

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável:

Sujeito às Restrições:

\$C\$14 = \$C\$15
 \$C\$14 = \$D\$14
 \$C\$15 = \$D\$15
 \$C\$23:\$C\$26 <= 0
 \$C\$27 >= 8
 \$C\$28 >= 0
 \$C\$29:\$C\$37 <= 0
 \$D\$24:\$D\$26 <= 0
 \$F\$18 = \$F\$19
 \$F\$22 = \$F\$23
 \$F\$26 = \$F\$27

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Selec. Método:

Resolução:

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda Fechar

Figura 5.23- Definição dos diferentes parâmetros do 5º caso do problema de otimização

- 6º Caso (secção IPE sem encurvadura)

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.24.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29	4							
30	5							
31	6							
32	7							
33	8							
34	9							
35	10							
36	11							
37	12							
38								

Figura 5.24- Folha de cálculo Excel com o 6º caso do problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que se encontra na fig. 5.25. No campo “Definir Objetivo” é colocada a função objetivo do problema. Neste caso é encontrar o ângulo mínimo que reduza a função objetivo. No campo “Para” define-se a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($M_{max,1}$, $M_{max,2}$, $M_{max,3}$, $M_{max,4}$, $H_{p\acute{o}rtico}$, L_2 , L_3 , $H_{perfil\ IPE}$ e $I_{perfil\ IPE}$) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver ✕

Definir Objetivo: ↑

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável: ↑

Sujeito às Restrições:

\$C\$14 = \$C\$15
 \$C\$14 = \$D\$14
 \$C\$15 = \$D\$15
 \$C\$23 <= 0
 \$C\$24 <= 0
 \$G\$6 = \$H\$6
 \$C\$28 >= 0
 \$C\$25 <= 0
 \$G\$5 = \$H\$5
 \$G\$7 = \$H\$7
 \$F\$29 = \$F\$30

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Selec. Método: v

Resolução: Opções

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda
Resolver
Echar

Figura 5.25- Definição dos diferentes parâmetros do 6º caso do problema de otimização

- 7º Caso (Secção IPE com encurvadura)

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.26.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								
32								
33								
34								
35								
36								
37								
38								
39								
40								
41								

Figura 5.26- Folha de cálculo Excel com o 7º caso do problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que se encontram na fig. 5.27. No campo “Definir Objetivo” é posta a função objetivo do problema. Neste caso trata encontrar o ângulo mínimo. No campo “Para” define-se a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($M_{max,1}$, $M_{max,2}$, $M_{max,3}$, $M_{max,4}$, $H_{pórtico}$, L_2 , L_3 , $H_{perfil\ IPE}$) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver

X

Definir Objetivo:

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável:

Sujeito às Restrições:

\$C\$14 = \$C\$15

\$C\$14 = \$D\$14

\$C\$15 = \$D\$15

\$C\$23:\$C\$26 <= 0

\$C\$27 >= 8

\$C\$28 >= 0

\$C\$29:\$C\$37 <= 0

\$D\$24:\$D\$26 <= 0

\$F\$17 = \$F\$18

\$F\$21 = \$F\$22

\$F\$25 = \$F\$26

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Selec. Método

Resolução:

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda

Resolver

Fechar

Figura 5.27- Definição dos diferentes parâmetros do 7º caso do problema de otimização

- 8º Caso (Secção IPE com encurvadura e variação de secção de cada barra)

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.28.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	
17																	
18																	
19																	
20																	
21																	
22																	
23																	
24																	
25																	
26																	
27																	
28																	
29																	
30																	
31																	
32																	
33																	
34																	
35																	
36																	
37																	
38																	
39																	
40																	

Figura 5.28- Folha de cálculo Excel com o 1º caso do problema de otimização formulado

Em seguida, são definidos os parâmetros da ferramenta Solver que se encontram na fig. 5.29. No campo “Definir Objetivo” é colocada a função objetivo do problema. Neste caso trata encontrar o ângulo mínimo. No campo “Para” define a opção “Mínimo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define-se as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($M_{max,1}$, $M_{max,2}$, $M_{max,3}$, $M_{max,4}$, $H_{p\acute{o}rtico}$, L_2 , L_3 , H_1 , H_2 , H_3 e H_4) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver X

Definir Objetivo: ↑

Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável: ↑

Sujeito às Restrições:

\$M\$7 <= 0,000921

\$P\$6 = \$Q\$6

\$M\$7 = \$N\$7

\$M\$7 = \$N\$7

\$M\$6 <= 0,0156

\$M\$7 >= 0,0000132

\$C\$15 = \$D\$15

\$F\$17 = \$F\$18

\$P\$7 >= 0,0000132

\$P\$7 <= 0,000921

\$P\$7 = \$Q\$7

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Seleção de Método: v

Resolução:

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda

Resolver

Fechar

Figura 5.29- Definição dos diferentes parâmetros do 8º caso do problema de otimização

5.1.3. SOLUÇÃO ENCONTRADA

As soluções das variáveis de projeto e função objetivo dos casos do problema do pórtico do armazém industrial são:

- 1º Caso

A solução encontrada para as variáveis de projeto e função objetivo do 1º caso do problema de otimização do pórtico do armazém industrial encontra-se na tabela 5.3, 5.4 e figura 5.30.

Tabela 5.3- Solução obtida para as variáveis de projeto do 1º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{\max,1} (\text{kN} * \text{m})$	17,28
$M_{\max,2} (\text{kN} * \text{m})$	17,28
$M_{\max,3} (\text{kN} * \text{m})$	17,28
$M_{\max,4} (\text{kN} * \text{m})$	17,28
$H_{\text{pórtico}} (\text{m})$	12,91
$L_2 (\text{m})$	8,53
$L_3 (\text{m})$	8,53

Tabela 5.4- Solução obtida para a função objetivo do 1º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta (^{\circ})$	54,11
$f (\text{€})$	22810,6

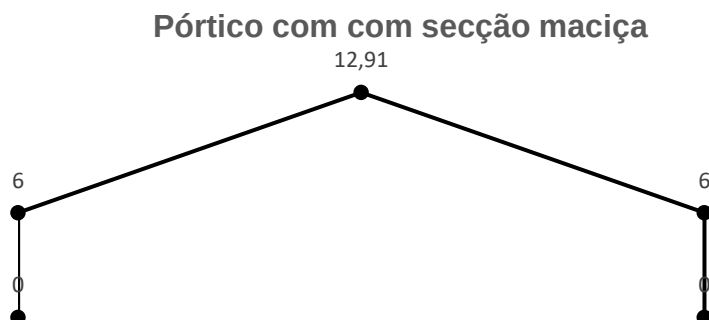


Figura 5.30- Solução gráfica da forma do pórtico no 1º caso do problema de otimização

- 2º Caso

A solução encontrada para as variáveis de projeto e função objetivo do 2º caso do problema de otimização do pórtico do armazém industrial encontra-se na tabela 5.5, 5.6 e figura 5.31.

Tabela 5.5- Solução obtida para as variáveis de projeto do 2º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{max,1}(kN * m)$	24,17
$M_{max,2}(kN * m)$	24,17
$M_{max,3}(kN * m)$	24,17
$M_{max,4}(kN * m)$	24,17
$H_{pórtico}(m)$	11,01
$L_2(m)$	6,41
$L_3(m)$	6,41

Tabela 5.6- Solução obtida para a função objetivo do 2º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta(^{\circ})$	38,73
$f(€)$	21,17

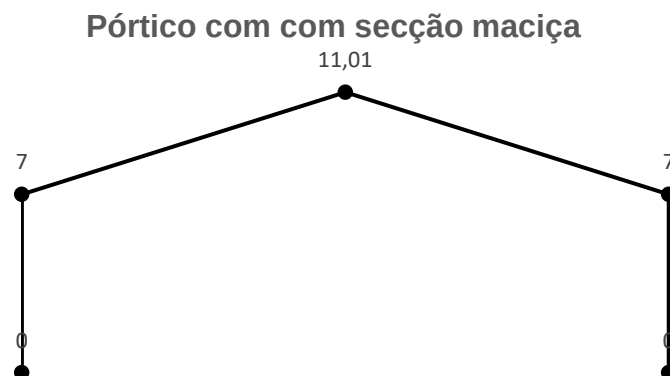


Figura 5.31- Solução gráfica da forma do pórtico no 2º caso do problema de otimização

- 3º Caso

A solução encontrada para as variáveis de projeto e função objetivo do 3º caso do problema de otimização do pórtico do armazém industrial encontra-se na tabela 5.7., 5.8 e figura 5.32.

Tabela 5.7- Solução obtida para as variáveis de projeto do 3º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{max,1}(kN * m)$	6,05
$M_{max,2}(kN * m)$	6,05
$M_{max,3}(kN * m)$	6,05
$M_{max,4}(kN * m)$	6,05
$H_{pórtico}(m)$	13,14
$L_2(m)$	8,72
$L_3(m)$	8,72
$B_{secção}(m)$	0,51
$H_{secção}(m)$	0,51

Tabela 5.8- Solução obtida para a função objetivo do 3º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta(^{\circ})$	55
$f(€)$	9189,13

Pórtico com secção tubular quadrada

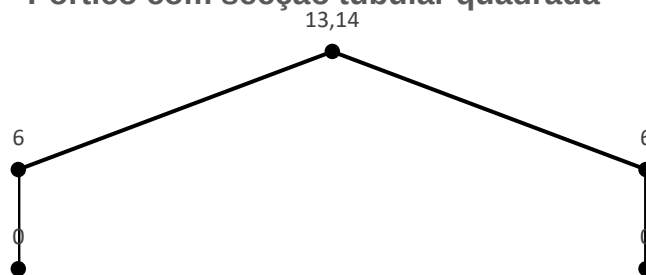


Figura 5.32- Solução gráfica da forma do pórtico no 3º caso do problema de otimização

- 4º Caso

A solução encontrada para as variáveis de projeto e função objetivo do 4º caso do problema de otimização do pórtico do armazém industrial encontra-se na tabela 5.9, 5.10 e figura 5.33.

Tabela 5.9- Solução obtida para as variáveis de projeto do 4º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{max,1}(kN * m)$	4,04
$M_{max,2}(kN * m)$	4,04
$M_{max,3}(kN * m)$	4,04
$M_{max,4}(kN * m)$	4,04
$H_{pórtico}(m)$	10,74
$L_2(m)$	5,7
$L_3(m)$	5,7
$B_{seção}(m)$	0,17
$H_{seção}(m)$	0,17

Tabela 5.10- Solução obtida para a função objetivo do 4º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta(^{\circ})$	28,76
$f(€)$	2 766,44

Pórtico com secção tubular quadrada

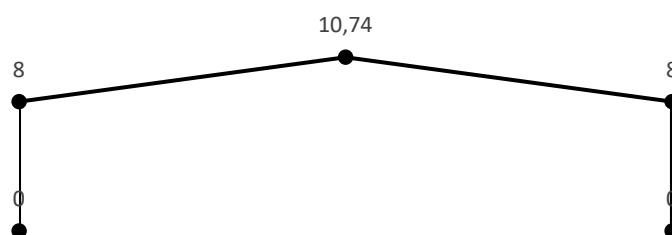


Figura 5.33- Solução gráfica da forma do pórtico no 4º caso do problema de otimização

- 5º Caso

A solução encontrada para as variáveis de projeto e função objetivo do 5º caso do problema de otimização do pórtico do armazém industrial encontra-se na tabela 5.11, 5.12 e figura 5.34.

Tabela 5.11- Solução obtida para as variáveis de projeto do 5º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{max,1}(kN * m)$	2,17
$M_{max,2}(kN * m)$	2,17
$M_{max,3}(kN * m)$	4,95
$M_{max,4}(kN * m)$	4,95
$H_{pórtico}(m)$	15,47
$L_2(m)$	8,17
$L_3(m)$	8,17
$B_1(m)$	0,15
$H_1(m)$	0,15
$B_2(m)$	0,24
$H_2(m)$	0,24
$B_3(m)$	0,55
$H_3(m)$	0,55
$B_4(m)$	0,26
$H_4(m)$	0,26

Tabela 5.12- Solução obtida para a função objetivo do 5º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta(^{\circ})$	52,29
$f(€)$	3 495,36

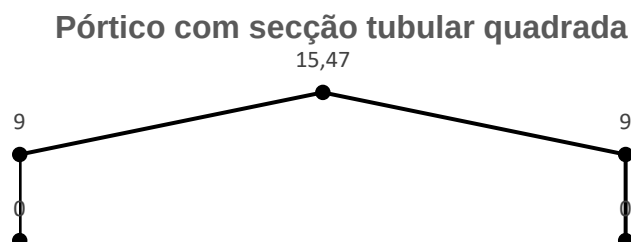


Figura 5.34- Solução gráfica da forma do pórtico no 5º caso do problema de otimização

- 6º Caso

A solução encontrada para as variáveis de projeto e função objetivo do 6º caso do problema de otimização do pórtico do armazém industrial encontra-se na tabela 5.13, 5.14 e figura 5.35.

Tabela 5.13- Solução obtida para as variáveis de projeto do 6º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{max,1}(kN * m)$	4,86
$M_{max,2}(kN * m)$	4,86
$M_{max,3}(kN * m)$	4,86
$M_{max,4}(kN * m)$	4,86
$H_{pórtico}(m)$	11,64
$L_2(m)$	8,31
$L_3(m)$	8,31
$H_{perfil\ IPE}(m)$	0,5
$I_{perfil\ IPE}(m^4)$	0,0005

Tabela 5.14- Solução obtida para a função objetivo do 6º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta(^{\circ})$	53,03
$f(€)$	6 101,43

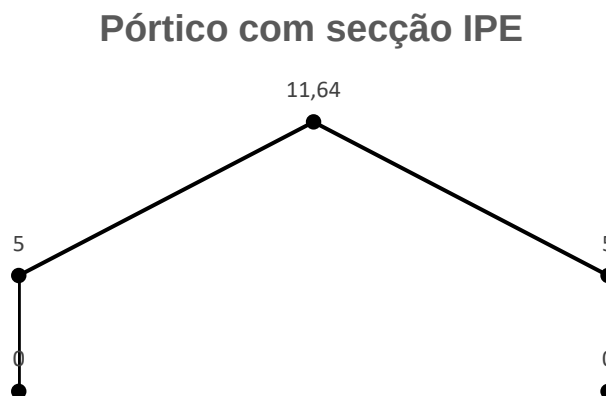


Figura 5.35- Solução gráfica da forma do pórtico no 6º caso do problema de otimização

- 7º Caso

A solução encontrada para as variáveis de projeto e função objetivo do 7º caso do problema de otimização do pórtico do armazém industrial encontra-se na tabela 5.15, 5.16 e 5.36.

Tabela 5.15- Solução obtida para as variáveis de projeto do 7º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{max,1}(kN * m)$	1,3
$M_{max,2}(kN * m)$	1,3
$M_{max,3}(kN * m)$	1,3
$M_{max,4}(kN * m)$	1,3
$H_{pórtico}(m)$	15,33
$L_2(m)$	8,07
$L_3(m)$	8,07
$H_{perfil\ IPE}(m)$	0,18

Tabela 5.16- Solução obtida para a função objetivo do 7º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta(^{\circ})$	51,71
$f(€)$	1 595,98

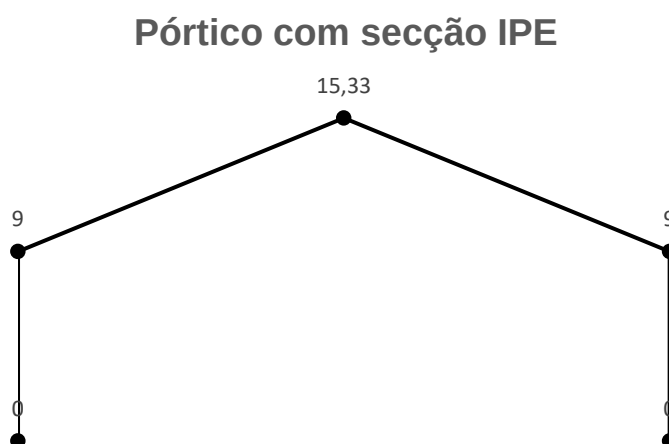


Figura 5.36- Solução gráfica da forma do pórtico no 7º caso do problema de otimização

- 8º Caso

A solução encontrada para as variáveis de projeto e função objetivo do 8º caso do problema de otimização do pórtico do armazém industrial encontra-se na tabela 5.17, 5.18 e 5.37.

Tabela 5.17- Solução obtida para as variáveis de projeto do 8º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{max,1}(kN * m)$	0,93
$M_{max,2}(kN * m)$	1,56
$M_{max,3}(kN * m)$	1,56
$M_{max,4}(kN * m)$	0,89
$H_{pórtico}(m)$	17,11
$L_2(m)$	9,53
$L_3(m)$	9,53
$H_1(m)$	0,2
$H_2(m)$	0,18
$H_3(m)$	0,18
$H_4(m)$	0,2

Tabela 5.18- Solução obtida para a função objetivo do 8º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta(^{\circ})$	58,35
$f(€)$	2 065,46,27

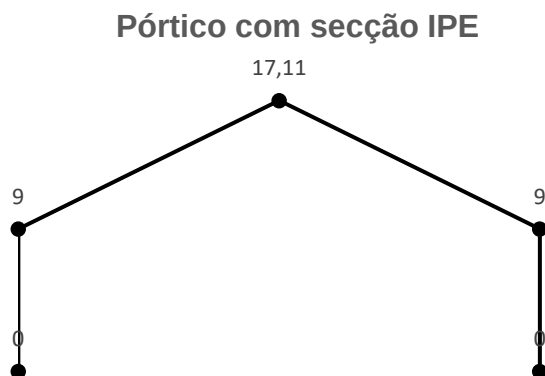


Figura 5.37- Solução gráfica da forma do pórtico no 8º caso do problema de otimização

5.1.4.OBSERVAÇÕES, CONCLUSÕES E COMPARAÇÃO ENTRE CASOS DO PROBLEMA DA OTIMIZAÇÃO DA FORMA DO PÓRTICO DO ARMAZÉM INDUSTRIAL

A solução inicial a ser introduzida tem de estar sobredimensionada para que exista folga nas várias restrições de desigualdade do programa desenvolvido, para que ele convirja para uma solução ótima ou próxima do ótimo. Uma outra observação é a de que a solução inicial do problema tem de estar próxima da solução ideal pretendida para que o programa funcione.

Em alguns casos deste problema a encurvadura dos pilares que estão a ser diretamente carregados levou a que a altura do pilar tivesse que ser aumentada para que o programa tivesse uma folga nas restrições referentes à encurvadura para o mesmo conseguir funcionar.

Os ângulos dos pórticos é o que permite ao programa formulada cumprir as restrições introduzidas e encontrar uma solução ótima.

A comparação de preços entre os diferentes casos do problema do pórtico do armazém industrial é apresentada na tabela 5.19.

Tabela 5.19- Tabela de preços correspondentes aos diferentes pórticos

Preços	
1º Caso (€)	22 810,60
2º Caso (€)	21 052,61
3º Caso (€)	9 189,13
4º Caso (€)	2 766,44
5º Caso (€)	3 495,36
6º Caso (€)	6 101,43
7º Caso (€)	3 365 97
8º Caso (€)	2 065,46

Em todos os casos do problema do pórtico, as restrições dos deslocamentos da estrutura são as restrições que mais condicionam a otimização como pode ser visto nas folhas de cálculo de Excel utilizadas para a resolução de cada caso do problema. Nos casos em que é considerada a encurvadura das barras, essas restrições também condicionam a otimização.

5.2. PONTE

Apresenta-se em seguida um esquema simples de uma ponte que é carregada pelo seu peso próprio presente na figura 5.38, onde é utilizada a ferramenta *Solver* do *software* Microsoft Excel. Num 1º caso pretende-se estudar uma ponte com uma secção tubular quadrada com uma espessura fixa e num 2º e último caso pretende-se estudar a ponte com variação da espessura de cada secção das barras. Em ambos os casos, não é considerada a encurvadura das barras. Em ambos os casos, não é considerada a encurvadura das barras.

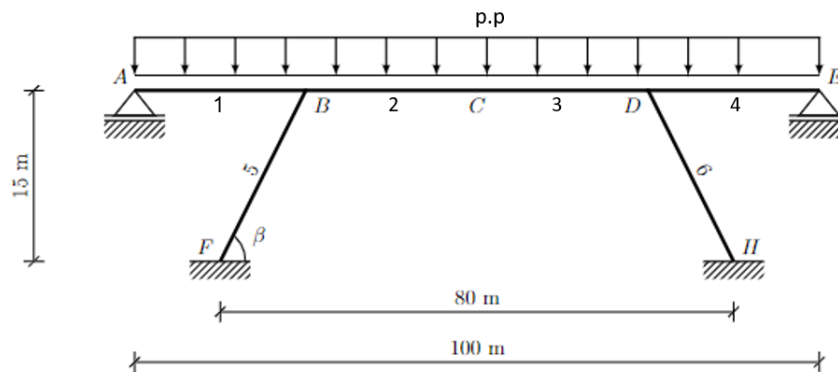


Figura 5.38- Ponte

Dados:

- 1º Caso:
 - Comprimento do tabuleiro da ponte: $L_{\text{tabuleiro}} = 100 \text{ m}$
 - Comprimento entre a base dos pilares da ponte: $L_{\text{dist. entre pilares}} = 80 \text{ m}$
 - Altura entre a base dos pilares e o tabuleiro da ponte: $H_{\text{ponte}} = 15 \text{ m}$
 - Tensão máxima admissível para o aço: $\sigma_{\text{max,aço}} \leq 275 \text{ MPa}$
 - Deslocamento máximo admissível da estrutura, relação altura/comprimento: $\Delta_{\text{max}} \leq \frac{H}{L} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ m}$
 - Módulo de Elasticidade (ou Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
 - Carga distribuída uniforme, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{\text{secção}} \text{ kN/m}$
 - Largura da secção do tabuleiro e pilares: $L_{\text{sec.tabuleiro}} = L_{\text{sec.pilares}} = 10 \text{ m}$
 - Altura da secção do tabuleiro e pilares: $H_{\text{tabuleiro}} = H_{\text{pilares}} = 2 \text{ m}$
 - Custo unitário do aço: $C_u = 2,5 \text{ €/kg}$
 - Massa específica do aço: $\rho_{\text{aço}} = 7850 \text{ kg/m}^3$
 - Perfil para as secções transversais utilizado:



Figura 5.39- Seção transversal tubular retangular de aço

- 2º Caso:
 - Comprimento do tabuleiro da ponte: $L_{\text{tabuleiro}} = 100 \text{ m}$
 - Comprimento entre a base dos pilares da ponte: $L_{\text{dist. entre pilares}} = 80 \text{ m}$
 - Altura entre a base dos pilares e o tabuleiro da ponte: $H_{\text{ponte}} = 15 \text{ m}$
 - Tensão máxima admissível para o aço: $\sigma_{\text{max,aço}} \leq 275 \text{ MPa}$
 - Deslocamento máximo admissível da estrutura, relação altura/comprimento: $\Delta_{\text{max}} \leq \frac{H}{L} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ m}$
 - Módulo de Elasticidade (ou Módulo de Young): $E = 210 \text{ GPa}$
 - Carga uniformemente distribuída, peso próprio: $p.p = 78 \times A_{\text{seção}} \text{ kN/m}$
 - Largura da seção do tabuleiro e pilares: $L_{\text{sec.tabuleiro}} = L_{\text{sec.pilares}} = 10 \text{ m}$
 - Altura da seção do tabuleiro e pilares: $H_{\text{tabuleiro}} = H_{\text{pilares}} = 2 \text{ m}$
 - Altura da seção dos pilares: $H_{\text{pilares}} = 5 \text{ m}$
 - Custo unitário do aço: $C_u = 2,5 \text{ €/kg}$
 - Massa específica do aço: $\rho_{\text{aço}} = 7850 \text{ kg/m}^3$
 - Perfil das seções transversais utilizado:



Figura 5.40- Seção transversal tubular retangular de aço

5.2.1. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA MATEMÁTICO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DA FORMA DA PONTE

As variáveis de projeto no 1º caso são $L_4, L_5, M_{max,1}, M_{max,2}, M_{max,3}, M_{max,4}, M_{max,5}, M_{max,6}, x_{nó B}, x_{nó d}$ e $e_{secção}$. As variáveis de projeto do 2º caso são $L_4, L_5, M_{max,1}, M_{max,2}, M_{max,3}, M_{max,4}, M_{max,5}, M_{max,6}, x_{nó B}, x_{nó d}, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ e e_6 .

As expressões das secções utilizadas nas expressões das restrições de desigualdade dos problemas são:

- Secção 1

A tensão máxima admissível na secção 1 é dada pela expressão:

$$\sigma_{max,1} = \frac{M_{max,1} \times y_1}{I_1} \Leftrightarrow \sigma_{max,1} = \frac{M_{max,1} \times \frac{H_1}{2}}{I_1} \quad (5.28)$$

- Secção 2

A tensão máxima admissível na secção 2 é dada pela expressão:

$$\sigma_{max,2} = \frac{M_{max,2} \times y_2}{I_2} \Leftrightarrow \sigma_{max,2} = \frac{M_{max,2} \times \frac{H_2}{2}}{I_2} \quad (5.29)$$

- Secção 3

A tensão máxima admissível na secção 3 é dada pela expressão:

$$\sigma_{max,3} = \frac{M_{max,3} \times y_3}{I_3} \Leftrightarrow \sigma_{max,3} = \frac{M_{max,3} \times \frac{H_3}{2}}{I_3} \quad (5.30)$$

- Secção 4

A tensão máxima admissível na secção 4 é dada pela expressão:

$$\sigma_{max,4} = \frac{M_{max,4} \times y_4}{I_4} \Leftrightarrow \sigma_{max,4} = \frac{M_{max,4} \times \frac{H_4}{2}}{I_4} \quad (5.31)$$

- Secção 5

A tensão máxima admissível na secção 5 é dada pela expressão:

$$\sigma_{max,5} = \frac{M_{max,5} \times y_5}{I_5} \Leftrightarrow \sigma_{max,5} = \frac{M_{max,5} \times \frac{H_5}{2}}{I_5} \quad (5.32)$$

- Secção 6

A tensão máxima admissível na secção 6 é dada pela expressão:

$$\sigma_{max,6} = \frac{M_{max,6} \times y_6}{I_6} \Leftrightarrow \sigma_{max,6} = \frac{M_{max,6} \times \frac{H_6}{2}}{I_6} \quad (5.33)$$

Com os dados acima descritos é possível formular a função objetivo e as restrições do problema.

- Função Objetivo

A função objetivo fornece o custo total do material utilizado para a construção da estrutura:

$$f(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, C_u, \gamma_{aço}) = [(A_1 \times L_1) + (A_2 \times L_2) + (A_3 \times L_3) + (A_4 \times L_4) + (A_5 \times L_5) + (A_6 \times L_6)] \times C_u \times \gamma_{aço} [\text{€}] \quad (5.34)$$

- Restrições de Igualdade

As equações utilizadas no desenvolvimento do programa matemático para a resolução do problema de otimização são as seguintes.

Expressão do equilíbrio dos nós da estrutura reticulada pelo Método dos Deslocamentos:

$$Rig(1) \Rightarrow \underline{F} = \underline{K} \cdot \underline{\Delta} \quad (5.35)$$

Nas folhas de cálculo de Excel de cada caso deste problema de otimização foram criados programas próprios para encontrar os esforços presentes em cada barra da ponte e com esses mesmos esforços calcular as tensões necessárias para calcular as restrições de desigualdade das tensões. Na figura 5.13 é apresentado o método.

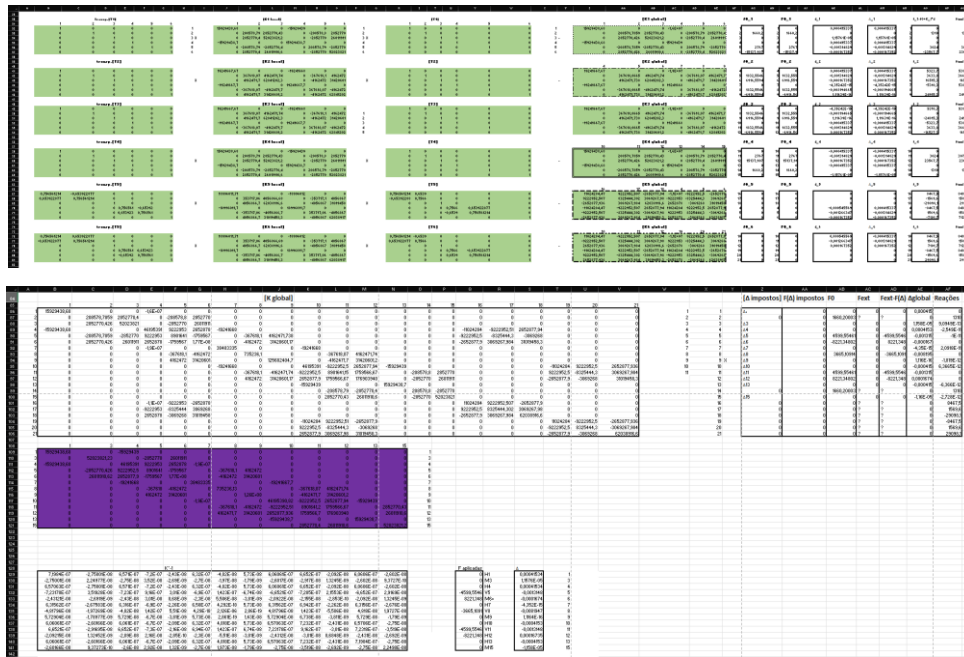


Figura 5.41- Método dos Deslocamentos introduzido na folha de Excel do 1º caso de otimização da ponte

Igualdade entre o comprimento dos pilares da ponte:

$$Rig(2) \Rightarrow L_4 = L_5 \quad (5.36)$$

É de notar que a expressão (5.42) faz com que apenas se obtenha uma solução simétrica.

- Restrições de Desigualdade

As expressões das restrições de desigualdade utilizadas no desenvolvimento do programa matemático dos problemas de otimização são as seguintes.

Expressão da restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da barra 1:

$$\begin{aligned} Rdes(1) &\Rightarrow \sigma_{max,1} \leq \sigma_{max,aço} \Leftrightarrow \sigma_{max,1} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{M_{max,1} \times \frac{H_1}{2}}{I_1} - 460 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Expressão de restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da barra 2:

$$Rdes(2) \Rightarrow \sigma_{max,2} \leq \sigma_{max,aço} \Leftrightarrow \sigma_{max,2} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \quad (5.38)$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_{max,2} \times \frac{H_2}{2}}{I_2} - 460 \leq 0$$

Expressão de restrição de desigualdade da tensão máxima admissível da barra 3:

$$\begin{aligned} Rdes(3) \Rightarrow \sigma_{max,3} \leq \sigma_{max,aço} &\Leftrightarrow \sigma_{max,3} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{M_{max,3} \times \frac{H_3}{2}}{I_3} - 460 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Expressão de restrição de desigualdade de tensão máxima admissível da barra 4:

$$\begin{aligned} Rdes(4) \Rightarrow \sigma_{max,4} \leq \sigma_{max,aço} &\Leftrightarrow \sigma_{max,4} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{M_{max,4} \times \frac{H_4}{2}}{I_4} - 460 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Expressão de restrição de desigualdade de tensão máxima admissível da barra 5:

$$\begin{aligned} Rdes(5) \Rightarrow \sigma_{max,5} \leq \sigma_{max,aço} &\Leftrightarrow \sigma_{max,5} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{M_{max,5} \times \frac{H_5}{2}}{I_5} - 460 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Expressão de restrição de desigualdade de tensão máxima admissível da barra 6:

$$\begin{aligned} Rdes(6) \Rightarrow \sigma_{max,6} \leq \sigma_{max,aço} &\Leftrightarrow \sigma_{max,6} - \sigma_{max,aço} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{M_{max,6} \times \frac{H_6}{2}}{I_6} - 460 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Expressão da restrição de desigualdade do ângulo do um dos pilares inclinados da ponte:

$$Rdes(7) \Rightarrow \beta \geq \beta_{min} \Leftrightarrow \beta - \beta_{min} \geq 0 \Leftrightarrow \beta - 13,9 \geq 0 \quad (5.43)$$

Expressão das restrições de desigualdade do deslocamento livres da ponte:

$$Rdes(8) \text{ a } Rdes(21) \Rightarrow \Delta_i \leq \Delta_{max} \Leftrightarrow \Delta_i - \Delta_{max} \leq 0 \quad (5.44)$$

Para o 2º caso foi introduzido a seguinte “*side constraint*” no programa matemático:

$$0,007 < e_{secção} < 0,13 \quad (5.45)$$

5.2.2.FERRAMENTA SOLVER DO EXCEL APLICADA AO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO

A descrição de cada caso do problema de otimização da ponte é mostrada nos seguintes pontos:

- 1º Caso

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.41.

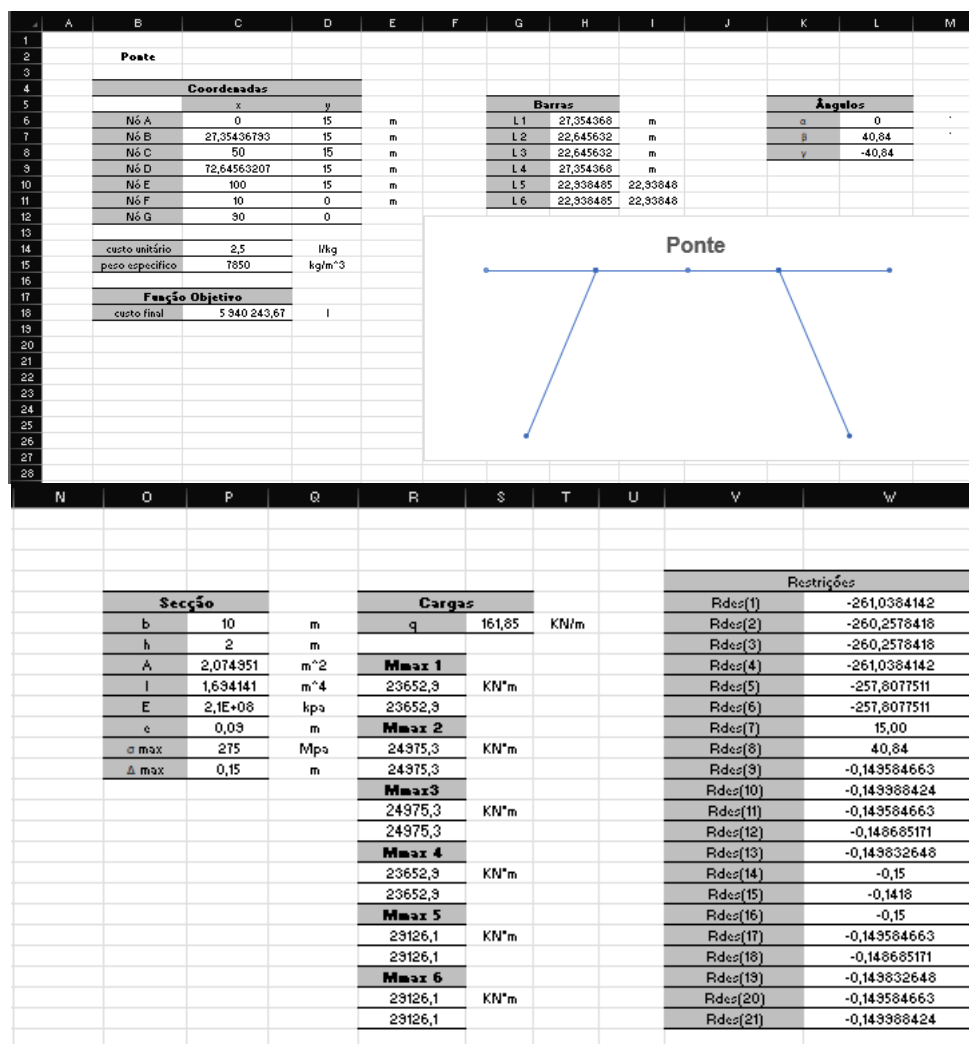


Figura 5.42- Folha de cálculo Excel com o 1º caso do problema de otimização

Em seguida, são definidos os diferentes parâmetros da ferramenta Solver que pode ser vista na fig. 5.42. No campo “Definir Objetivo” é colocada a função objetivo do problema. Neste caso é o ângulo máximo a função objetivo. No campo “Para” define-se a opção “Máximo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define-se as células da folha que contêm as variáveis de projeto $M_{max,1}, M_{max,2}, M_{max,3}, M_{max,4}, M_{max,5}, M_{max,6}, x_{nó B}, x_{nó D}, L_5, L_6$ e $e_{seccão}$) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respectivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver ✕

Definir Objetivo: ↑

Para: ☒ Máximo ☐ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável: ↑

Sujeito às Restrições:

\$H\$6 = \$H\$8
 \$H\$9 = \$I\$9
 \$H\$10 = \$I\$10
 \$L\$11 <= \$M\$11
 \$P\$11 <= 0,09
 \$P\$11 <= 0,9
 \$P\$11 >= 0,001
 \$R\$12 = \$R\$13
 \$R\$15 = \$R\$16
 \$R\$18 = \$R\$19
 \$R\$21 = \$R\$22

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Selec. Método: Opções

Resolução:

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda
Resolver
Fechar

Figura 5.43- Definição dos diferentes parâmetros do 1º caso do problema de otimização

- 2º Caso

Numa folha de cálculo do Excel é inserido a função objetivo, as diferentes variáveis e as restrições de desigualdade nas respetivas células, conforme pode ser visto na fig. 5.43.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1																			
2																			
3																			
4																			
5																			
6																			
7																			
8																			
9																			
10																			
11																			
12																			
13																			
14																			
15																			
16																			
17																			
18																			
19																			
20																			
21																			
22																			
23																			
24																			
25																			

	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		

Figura 5.44- Folha de cálculo Excel com o 2º caso do problema de otimização

Em seguida, são definidos os diferentes parâmetros da ferramenta Solver que pode ser vista na fig. 5.44. No campo “Definir Objetivo” é colocada a função objetivo do problema. Neste caso é o ângulo máximo a função objetivo. No campo “Para” define-se a opção “Máximo” para minimizar a função objetivo. Em “Alterando Células Variáveis” define-se as células da folha que contêm as variáveis de projeto ($M_{max,1}, M_{max,2}, M_{max,3}, M_{max,4}, M_{max,5}, M_{max,7}, x_{nó B}, x_{nó D}, L_5, L_6, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 e e_6$) e no campo “Sujeito às restrições” adiciona-se as células com as respetivas restrições de igualdade e desigualdade. Marcando a caixa “Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas”, o Solver apenas buscará soluções positivas ou nulas para as variáveis a que não foram impostos limites. Posteriormente, seleciona-se o método de solução desejado para resolver o problema de otimização. Como o programa possui equações não lineares utiliza-se o método GRG não linear, referido no subcapítulo 3.1.2.

Após a execução da ferramenta, o Solver altera as células onde constam as variáveis para a solução ótima, recalculando a função objetivo.

Parâmetros do Solver



Definir Objetivo:

Para: ☒ Máximo ☐ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável:

Sujeito às Restrições:

\$AC\$11 <= 0,1
 \$AI\$8:\$AI\$9 = \$AJ\$8:\$AJ\$9
 \$H\$6 = \$H\$8
 \$AC\$11 >= 0,01
 \$O\$15 = \$O\$16
 \$H\$10 = \$I\$10
 \$AC\$8:\$AC\$9 = \$AD\$8:\$AD\$9
 \$S\$10 = 53
 \$S\$11 >= 13,9
 \$O\$12 = \$O\$13
 \$AF\$11 <= 0,1

Adicionar

Alterar

Eliminar

Repor Tudo

Carregar/Guardar

☒ Tornar Não Negativas Variáveis Não Constrangidas

Seleção de Método:

Resolução: Opções

Método de Resolução

Selecione o motor GRG Não Linear para problemas não lineares uniformes do Solver. Selecione o motor LP Simplex para problemas lineares do Solver, e selecione o motor Evolutionary para problemas não uniformes do Solver.

Ajuda

Resolver

Fechar

Figura 5.45- Definição dos diferentes parâmetros do 2º caso do problema de otimização

5.2.3. SOLUÇÃO ENCONTRADA

As soluções encontradas pelo programa matemático desenvolvido para cada caso são as seguintes.

- 1º Caso

A solução obtida para as variáveis de projeto e função objetivo para o 1º caso do problema de otimização estão presentes nas tabelas 5.20, 5.21 e figura 5.45.

Tabela 5.20- Solução obtida para as variáveis de projeto do 1º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{max,1}(kN * m)$	23652,9
$M_{max,2}(kN * m)$	24975,3
$M_{max,3}(kN * m)$	24975,3
$M_{max,4}(kN * m)$	23652,9
$M_{max,5}(kN * m)$	29126,1
$M_{max,6}(kN * m)$	29126,1
$x_{nó B}(m)$	27,35
$x_{nó D}(m)$	72,65
$L_5(m)$	22,94
$L_6(m)$	22,94
$e_{secção}(m)$	0,09

Tabela 5.21- Solução obtida para a função objetivo do 1º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta(^{\circ})$	40,84
$f(€)$	5 940 243,67

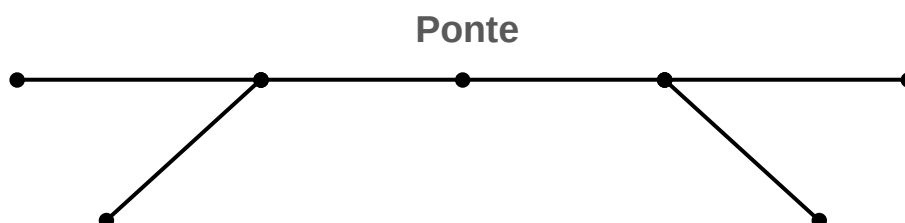


Figura 5.46- Solução gráfica da forma da ponte no 1º caso do problema de otimização

- 2º Caso

A solução obtida para as variáveis de projeto e função objetivo para o 2º caso do problema de otimização estão presentes na tabela 5.22, 5.23 e figura 5.46.

Tabela 5.22- Solução obtida para as variáveis de projeto do 2º caso do problema de otimização

Variáveis de Projeto	
$M_{max,1}(kN * m)$	4810,8
$M_{max,2}(kN * m)$	8031,7
$M_{max,3}(kN * m)$	8031,7
$M_{max,4}(kN * m)$	3600,5
$M_{max,5}(kN * m)$	4569,9
$M_{max,6}(kN * m)$	2694,8
$x_{nó B}(m)$	29,87
$x_{nó D}(m)$	70,13
$L_5(m)$	24,89
$L_6(m)$	24,89
$e_1(m)$	0,017
$e_2(m)$	0,039
$e_3(m)$	0,056
$e_4(m)$	0,01
$e_5(m)$	0,085
$e_6(m)$	0.01

Tabela 5.23- Solução obtida para a função objetivo do 2º caso do problema de otimização

Função Objetivo	
$\beta(^{\circ})$	37,05
$f(€)$	2 237 398,04

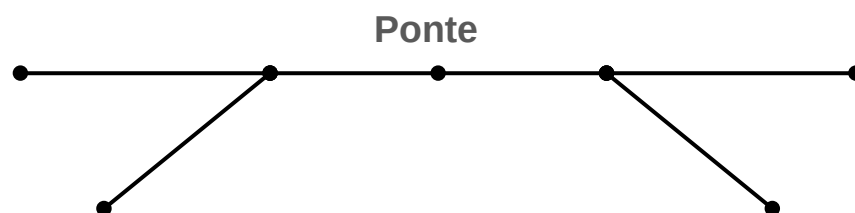


Figura 5.47- Solução gráfica da forma da ponte no 2º caso do problema de otimização

5.2.4.OBSERVAÇÕES, CONCLUSÕES E COMPARAÇÃO ENTRE CASOS DO PROBLEMA DA OTIMIZAÇÃO DA FORMA DA PONTE

A solução inicial a ser introduzida tem de estar sobredimensionada para que exista folga nas várias restrições do programa desenvolvido para ele convergir para uma solução ótima ou próxima do ótimo. Uma outra observação é a de que a solução inicial do problema tem de estar próxima da solução ideal pretendida para que o programa funcione.

Os ângulos dos pilares das pontes é o que permite ao programa formulado cumprir as restrições introduzidas e encontrar uma solução ótima. É importante na formulação destes problemas em pontes controlar a flecha das pontes a meio-vão.

A comparação de preços entre os casos da ponte é apresentada na tabela 5.24.

Tabela 5.24- Tabela de preços da ponte

Preços	
1º Caso (€)	5 940 243,67
2º Caso (€)	2 237 398,04

Com os resultados obtidos pode-se concluir que uma variação de espessura do tabuleiro e pilares da ponte em cada barra o preço é inferior ao preço do 1º caso do projeto da ponte, ou seja, é uma solução que é mais interessante.

Em todos os casos do problema da ponte, as restrições dos deslocamentos da estrutura são as restrições que mais condicionam a otimização como pode ser visto nas folhas de cálculo de Excel utilizadas para a resolução de cada caso do problema.

6. CONCLUSÃO

6.1.OBSERVAÇÕES FINAIS

O objetivo da presente dissertação foi a criação, numa primeira etapa, de programas matemáticos para a resolução de problemas simples de engenharia civil para o autor desta dissertação ganhar experiência e confiança no trabalho a realizar para numa segunda fase conseguir desenvolver programas matemáticos mais robustos e complexos para os dois problemas abordados, neste caso a otimização da forma de um pórtico de um armazém industrial e a otimização da forma da ponte, com as suas diferentes nuances e especificidades de cada problema.

Este trabalho pretendeu ser o mais realista possível, trabalhando o problema de forma mais rigorosa possível para os programas funcionarem, mas não foram abordados todos os aspetos da regulamentação a utilizar na vida real. As combinações de carga previstas no Eurocódigo, imperfeições geométricas, efeitos de 2º ordem, torção, tensões de corte, entre outros aspetos, não são abordados nesta dissertação por uma questão de simplificação do programa matemático para que o mesmo funcionasse e pelo facto de que os deslocamentos das estruturas serem mais importantes na otimização do que os aspetos atrás mencionados.

Os métodos de otimização abordados neste trabalho são uma ajuda para o projetista compreender o necessário para poder desenvolver programas matemáticos capazes de encontrar as soluções mais económicas e que respeitem a segurança da estrutura em que estão a trabalhar. O desenvolvimento do programa matemático é um processo moroso e que exige rigor ao projetista para o programa não ter erros. Um programa bem formulado pode ser uma boa ajuda para qualquer engenheiro.

Neste trabalho foram abordados problemas de otimização aplicados a problemas de engenharia civil que tinham como objetivo minimizar o custo das estruturas, através da obtenção do ângulo mínimo no caso do pórtico e do ângulo máximo no caso da ponte (obter a melhor forma para cada estrutura), onde as principais variáveis foram as dimensões e espessuras das secções transversais e os comprimentos das barras.

6.2.SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

No âmbito do estudo da otimização, seria interessante abordar outros aspetos e aprofundar mais o tema. Referem-se em seguida alguns dos assuntos que poderiam ser abordados:

- Otimização de estruturas utilizando o Eurocódigo do betão ou aço;
- Otimização da geometria dos cabos de pré-esforço do tabuleiro de uma ponte;
- Otimização da armadura de uma viga, laje ou pilar de um edifício;
- Otimização de cimbres utilizados na construção de pontes;
- Otimização de estruturas de suporte de terras;
- Otimização de fundações de um edifício.

Seria interessante utilizar a linguagem de programação Python ou utilizar um *software* chamado Rhino com o *plug-in* Peregrine que é capaz de fazer um tipo de otimização que outros programas não têm capacidade como pode ser visto nas figuras 6.1 e 6.2.

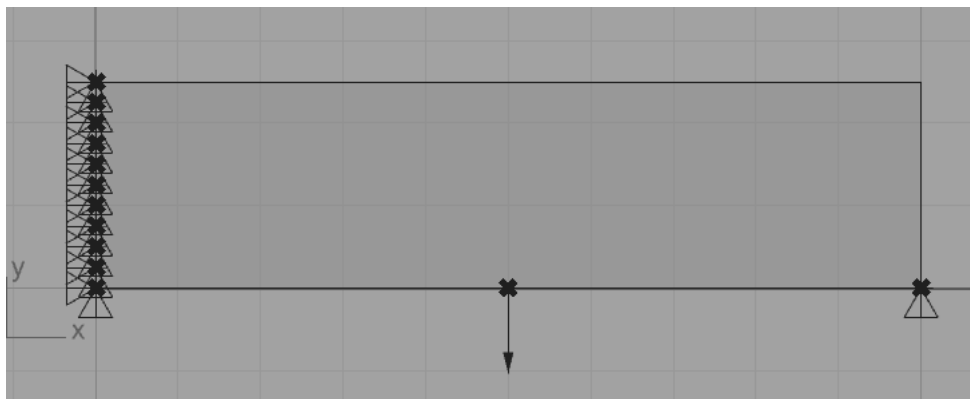


Figura 6.1- Exemplo de uma viga simples com uma carga pontual a meio vão

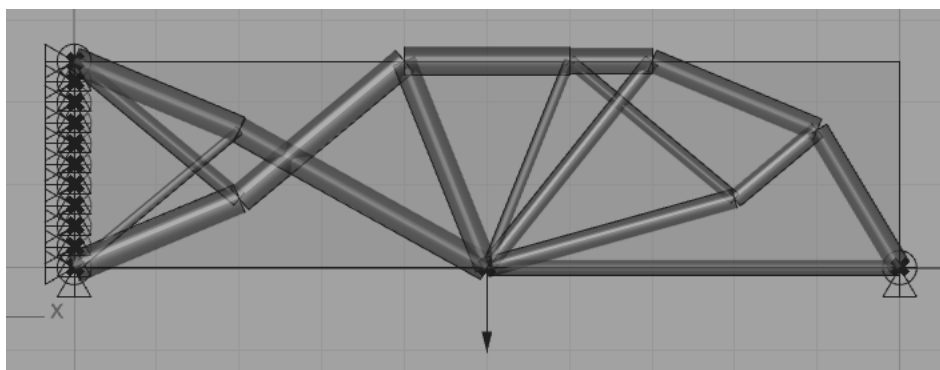


Figura 6.2- Solução ótima da viga da figura anterior obtida com o programa

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Wikipedia. (<https://pt.wikipedia.org/wiki/Otimiza%C3%A7%C3%A3o>). 24/04/2022.
- [2] A. Azevedo, *Otimização de Estruturas com Comportamento Linear e Não Linear*. Dissertação para Douturamento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1994.
- [3] O. C. Zienkiewicz, *Optimum Structural Design: Theory and Applications*. London: Jonh Wiley and Sons, 1973.
- [4] J. Arora, *Introduction to Optimum Design*. Iowa City: McGraw-Hill, 1989.
- [5] R. Haftka e Z. Gurdal, *Elements of Structural Optimization*. Blacksburg: Springer, 1992.
- [6] F. Hillier e G. Lieberman, *Introduction to Operations Research*. Palo Alto: McGraw-Hill, 1990.
- [7] L. Berke e N. Khot, *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems*. Troia: Springer-Verlag, 1997.
- [8] G. I. N. Rozvany, M. Zhou e O. Sigmund, *Optimization of Topology*. London: H.Adeli, 1994.
- [9] P. Gill, W. Murray e M. Wright, *Practical Optimization*. San Diego: Academic Press, 1981.
- [10] Á.Azevedo, Apontamentos da cadeira de Otimização de estruturas. Porto. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, setembro 2020.
- [11] E. Valente, *Otimização em Problemas de Engenharia Civil*. Disertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, setembro 2020.
- [12] FrontlineSolvers. (<https://www.solver.com/excel-solver-optimization-methods>). 18/04/2022.
- [13] FrontlineSolvers. (<https://www.solver.com/excel-solver-linear-programming>). 18/04/2022.
- [14] Britannica. (<https://www.britannica.com/topic/simplex-method>). 18/04/2022.
- [15] EngineerExcel. (<https://engineerexcel.com/excel-solver-solving-method-choose/>). 14/06/2022
- [16] FrontlineSolvers. (<https://www.solver.com/excel-solver-grg-nonlinear-solving-method-stopping-conditions>). 18/04/2022.
- [17] FrontlineSolvers. (<https://www.solver.com/excel-solver-non-smooth-optimization>). 24/05/2022.
- [18] FrontlineSolvers. (<https://www.solver.com/excel-solver-evolutionary-solving-method-stopping-conditions>). 18/04/2022.
- [19] Thanedar, P. B., Vanderplaats, G. N: *Survey of Discrete Variable Optimization for Structural Design*. Journal of Structural Engineering, 1995.
- [20] CEN, EN ENV 1993-1-1, Anexo Nacional Português do Eurocódigo 3: Projeto de Estruturas de aço, Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios. Lisboa: Comissão Técnica Portuguesa de Normalização CT 115, 2006
- [21] ARBED Group, *Profil ARBED*, 2001.
- [22] E.Caetano, Apontamentos da cadeira de Estruturas Metálicas e Mistas. Porto. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2008