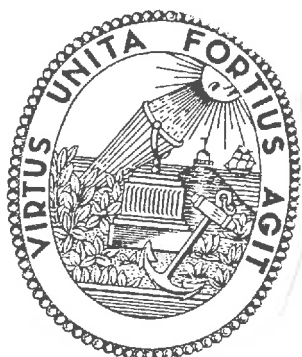


UNIVERSIDADE DO PORTO
FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



Secção de Construções Cíveis

I N V E S T I G A C A O O P E R A C I O N A L
P A R A
E N G E N H E I R O S C I V I S

Notas da Cadeira
Investigação Operacional
da Secção de Planeamento do Território e Ambiente
por Alfredo Soeiro

Setembro de 1993

Índice

1. Noções Elementares	1
1.1. Introdução	1
1.2. Objectivos	1
1.3. Modelo Matemático	2
1.4. Resolução Gráfica de Modelos Lineares	5
1.5. Resolução Gráfica de Modelos Não Lineares	6
2. Problemas Lineares	7
2.1. Convenções	7
2.2. Base de Problemas Lineares	8
2.3. Método Simplex	10
2.4. Método Simplex - Duas Fases	14
2.5. Casos Particulares	17
2.6. Análise de Redes	19
2.7. Dualidade	26
2.8. Programação Inteira	27
3. Problemas Não Lineares	29
3.1. Introdução	29
3.2. Univariável sem Restrições	29
3.3. Univariável com Restrições	31
3.4. Condições de Optimalidade	33
3.5. Multivariável sem Restrições	33
3.6. Multivariável com Restrições	35
4. Teoria da Decisão	38
4.1. Noções de Engenharia Económica	38
4.2. Incerteza e Decisão	39
4.3. Programação Dinâmica	42
4.4. Análise Multicritério	45
Bibliografia	47

1. Noções Elementares

1.1. Introdução

Os apontamentos foram elaborados para uma cadeira de opção livre do 3º e 4º anos do curso de Engenharia Civil, denominada Investigação Operacional. A cadeira pertence à área científica de Ciências Sociais e Planeamento e é gerida pela Secção de Planeamento do Território e Ambiente. Tem sido leccionada nos anos de 89/90, 90/91, 91/92 e 92/93 por um docente da Secção de Construções Cíveis doutorado na área de Optimização de Estruturas.

O programa adoptado e leccionado tem as características próprias resultantes da inserção no respectivo plano de curso da Licenciatura para Engenheiros Cíveis. Estas notas pretendem ser o apoio escrito para os alunos na cadeira referida resultando da experiência académica e profissional do referido docente. Nomes mais adequados para a cadeira, dados os temas versados, seriam, por exemplo, Análise de Sistemas para Engenheiros Cíveis ou Optimização na Engenharia ou Investigação Operacional Aplicada à Engenharia Civil.

1.2. Objectivos

As matérias compreendidas nestes apontamentos pretendem cobrir as aplicações mais frequentes de alguns temas da Investigação Operacional na Engenharia Civil, como auxiliares da tomada de decisões. Além disso pretende-se caracterizar o conceito das palavras Investigação Operacional no domínio específico da Engenharia Civil empregando considerações tecnológicas e económicas. O trabalho divide-se pela análise de problemas simples usando métodos básicos, pelo estudo de problemas lineares e não lineares, com ou sem restrições, e por noções da teoria da decisão.

Assim, as metas a atingir neste primeiro capítulo são:

- a) Entender os processos elementares da Investigação Operacional de formular e resolver alguns problemas de Engenharia com modelos matemáticos.
- b) Avaliar o modo como as restrições de mão-de-obra, de limitações físicas e financeiras, de recomendações e de prescrições regulamentares afectam os processos de Engenharia de projecto, de planeamento e de gestão.
- c) Perceber as vantagens e limitações da Investigação Operacional para resolver totalmente problemas práticos na Engenharia Civil.

Uma vez que a utilidade principal da Investigação Operacional é a de ser uma ferramenta para ajudar a tomar decisões, esta é normalmente utilizada quando se pretende administrar recursos. Esta área científica teve origem, com a designação e âmbito que actualmente lhe é atribuída, durante o período da segunda guerra mundial. Resultou da necessidade de planear da maneira mais

eficiente possível o transporte de mercadorias através do Atlântico usando meios navais limitados.

A aplicação e desenvolvimento posteriores foram depois alargados a diversas áreas da Engenharia, Economia, Matemática e Finanças. A motivação principal que levou ao respectivo desenvolvimento e uso foi a intenção de determinar como os recursos podem ser utilizados com mais eficiência e maior eficiência tendo em vista obter um resultado ou atingir um objectivo.

Os recursos, geralmente limitados, relacionados com a decisão em Engenharia Civil podem ser classificados em mão de obra, equipamento, recursos financeiros e materiais. As aplicações destes recursos são importantes nesta área da Engenharia uma vez envolvem, dum modo geral, valores de avultada dimensão geralmente expressos em milhares de contos.

1.3. Modelo Matemático

A análise sistemática dos problemas em Investigação Operacional começa pela formulação adequada dos objectivos e das restrições. Esta consiste na transformação em expressões analíticas das características fundamentais do problema. Nem todas as restrições podem ser consideradas para análise, devido ao grande número de expressões e à dificuldade em traduzi-las simbolicamente. Este facto é a causa principal dos resultados serem um apoio à decisão e não apresentarem a solução óptima. A escolha criteriosa das restrições é portanto um passo fundamental de modo a escolherem-se as mais representativas.

A escolha dos objectivos, traduzidas pela denominada função objectivo, é mais fácil porque são geralmente aspectos quantitativos traduzidos adequadamente por expressões numéricas. Outro factor é o da escolha das variáveis de decisão ou de projecto. Estas são, dum modo geral, as quantidades que, ao variarem, irão formar a solução com melhor resultado ao fim do procedimento de investigação das operações.

Como exemplo de funções objectivo poder-se-ão apresentar a maximização do lucro, a minimização do peso duma estrutura, a maximização dum benefício social ou a maximização do fluxo numa rede de fluidos. As restrições impostas aos problemas, através de expressões de igualdade ou desigualdade, são de vária índole. Representam limites físicos, como quantidades existentes em aprovisionamento, limites regulamentares, como tensões admissíveis para os materiais, ou limites financeiros, como quantia máxima a ser utilizada. As variáveis de decisão são de natureza variada como os diâmetros dos tubos duma rede de abastecimento ou as dimensões dum muro de suporte ou a distribuição de máquinas por diversas obras.

É importante referir que, independentemente da natureza do problema que se pretende analisar, a forma como é expresso, depois de ser reduzido a um modelo matemático, é a mesma. É composto por variáveis de decisão, por, pelo menos uma função objectivo e, na maioria dos casos, por um conjunto de restrições. Depois da definição do problema este é resolvido por um algoritmo numérico adequado à configuração do problema. Os métodos variam de acordo com a

linearidade da função objectivo ou das restrições e da natureza das variáveis. Outro factor importante na escolha do método de análise, ou de optimização, é a do tipo de função objectivo que pode representar vários critérios a considerar.

A forma canónica dos problemas é a seguinte:

$$\text{Minimizar (ou Maximizar)} \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sujeito a:

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$G_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$

ou, dum modo mais compacto:

$$\text{Min } F(\underline{x})$$

$$\text{s.a: } \underline{G}(\underline{x}) \leq \underline{b}$$

Exemplo 1:

No planeamento dum espaço ocupado por duas salas, conforme indicado na Figura 1, o contrato especifica uma área total superior a 500 m² e uma área por sala máxima de 300 m² na sala a nascente e uma área máxima de 500 m² na sala a poente. O lucro esperado é de 50 contos por m² na sala a poente e de 60 contos por m² na sala a nascente e pretende-se determinar a distribuição de áreas que maximiza o lucro.

Formulando o modelo matemático, adoptam-se as seguintes variáveis:

x_1 - área sala poente;

x_2 - idem nascente.

$$\text{Max } F(\underline{x}) = 500x_1 + 600x_2$$

$$G_1(\underline{x}) = x_1 + x_2 \geq 500$$

$$G_2(\underline{x}) = x_1 \leq 500$$

$$G_3(\underline{x}) = x_2 \leq 300$$

$$G_4(\underline{x}) = x_1 \geq 0$$

$$G_5(\underline{x}) = x_2 \geq 0$$

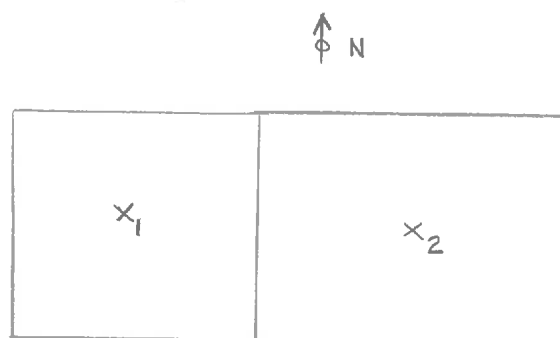


Figura 1.

Exemplo 2

O material das barras da estrutura articulada e isostática representada na Figura 2 tem o limite de compressão de 100 MPa e o limite de tração de 200 MPa. Sendo o objectivo determinar as secções das barras que produzem a estrutura com o mínimo possível de peso formule o modelo matemático.

As variáveis escolhidas são:

- x_1 - área de AB;
- x_2 - área de AC;
- x_3 - área de BC;
- x_4 - área de BD;
- x_5 - área de CD.

A função objectivo $F(\underline{x})$ é dada pelo produto do peso específico do material pelo volume da estrutura. Como o peso específico é constante para todas as barras a função objectivo pode ser expressa pela soma dos volumes das barras.

As restrições neste caso são impostas pelas tensões máximas admissíveis em cada barra. Conhecendo os esforços em cada barra a tensão respectiva é obtida dividindo esses valores pela área correspondente.

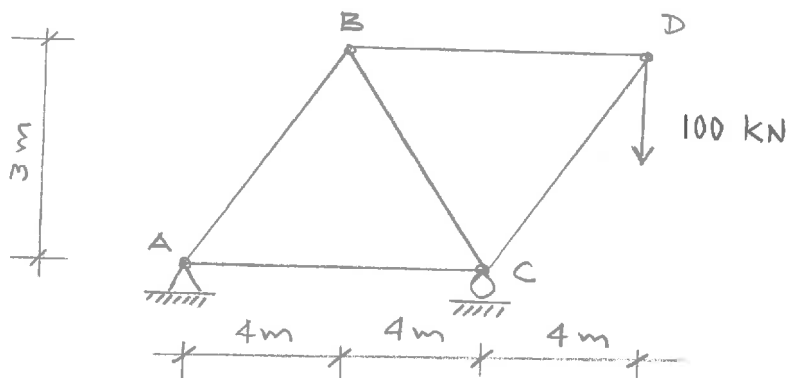


Figura 2.

$$\text{Min } F(\underline{x}) = \sum_i V_i = \sum_i l_i x_i \text{ ou}$$

$$\text{Min } F(\underline{x}) = 5x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 5x_5$$

sujeito a:

$$G_1(\underline{x}) = 83.3/x_1 \leq 200$$

$$G_2(\underline{x}) = 66.7/x_2 \leq 100$$

$$G_3(\underline{x}) = 83.3/x_3 \leq 100$$

$$G_4(\underline{x}) = 125/x_4 \leq 200$$

$$G_5(\underline{x}) = 167/x_5 \leq 100$$

1.4. Resolução Gráfica de Modelos Lineares

Nalguns casos deste tipo de problemas em que dimensão do vector das variáveis de decisão não é superior a dois é possível a solução com a ajuda de representação gráfica. A formulação dum problema linear é dada por:

$$\min F(\underline{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

sujeito a:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

No caso de n ser dois estas funções são representadas por rectas. Em particular cada restrição divide o plano em dois semiplanos representando um a região das soluções admissíveis e o outro o conjunto das soluções inadmissíveis. No caso da restrição ser uma igualdade o conjunto das soluções admissíveis é constituído pelos pontos da própria recta. O algoritmo aconselhado para a resolução deste tipo de problemas é o seguinte:

- 1) Definir a região admissível a partir das restrições.
- 2) Escolher uma solução $\underline{x}^0$ admissível e determinar a linha que reúne os pontos tal que $F(\underline{x}^0)$ seja constante.
- 3) Traçar uma paralela à recta encontrada em 2) por um ponto da região determinada em 1) tal que minimize o valor de F .

Exemplo 3

Considerando a resolução gráfica do exemplo 1 a sucessão de operações é a indicada nas figuras 3 e 4. Definem-se os semiplanos admissíveis correspondentes a cada uma das restrições que são depois aglutinados de modo a determinar a região admissível, figura 3. Na figura 4 estão representados os passos 2) e 3).

As restrições que às quais pertence o ponto óptimo são denominadas de activas e as outras de inactivas. A classificação pode traduzir-se por:

$$\text{activas se } G_i(\underline{x}) = b_i$$

$$\text{inactivas se } G_i(\underline{x}) < b_i$$

No exemplo presente as restrições G_2 e G_3 são activas e as três restantes são inactivas.

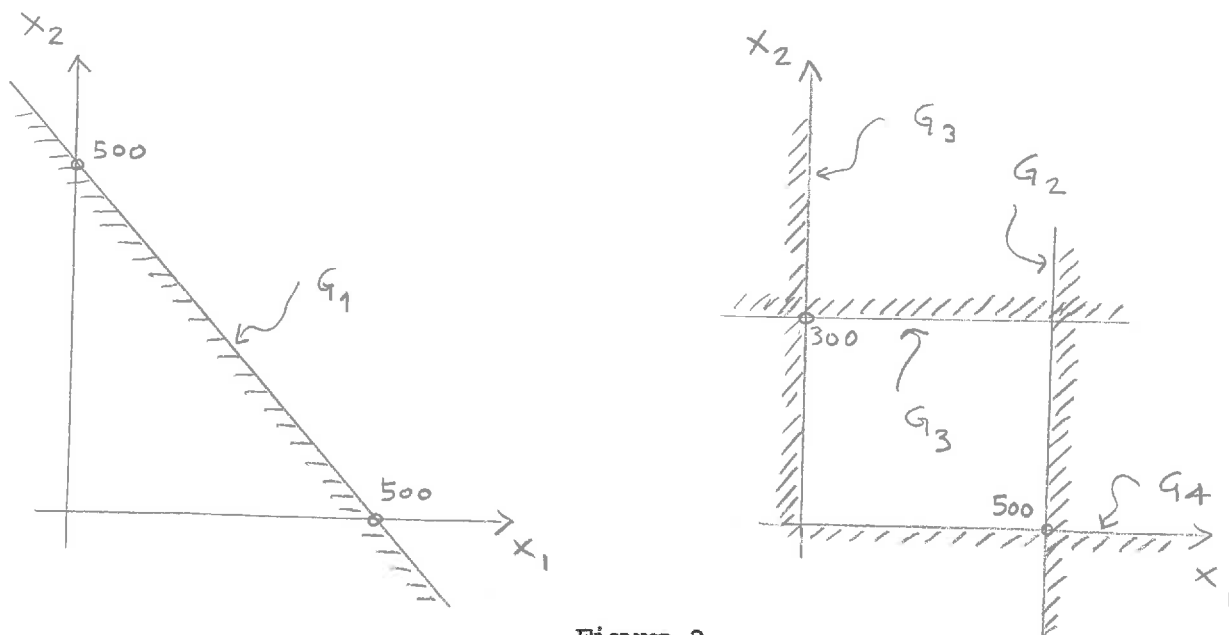


Figura 3.

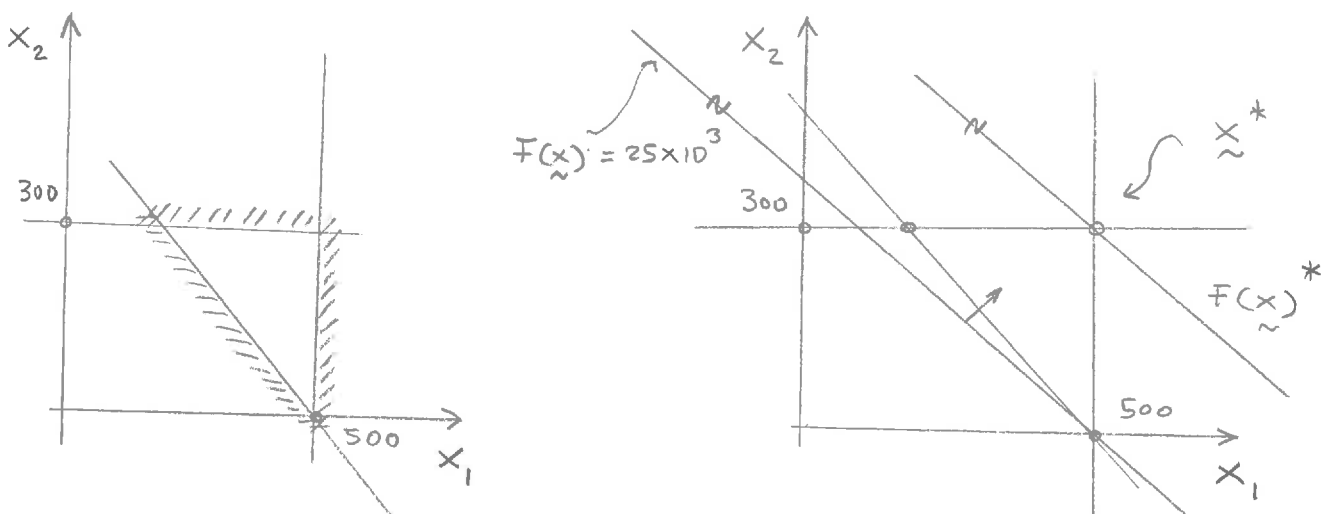


Figura 4.

1.5. Resolução Gráfica de Modelos Não Lineares

Dum modo idêntico ao proposto para os modelos lineares pode-se resolver alguns problemas não lineares bidimensionais. As condições de optimalidade são também idênticas às anteriores impondo que o vector das variáveis de decisão sejam tais que as restrições são respeitadas e se obtenha o mínimo da função objectivo. Assim, o algoritmo sugerido é o seguinte:

- 1) Determinação da região admissível.

- 2) Escolher uma solução $\underline{x}^0$ e desenhar a isoquanta correspondente, ou seja, a linha que representa os conjuntos de pontos tais que o valor de F seja igual a $F(\underline{x}^0)$.
- 3) Testar as condições de optimalidade e no caso do resultado ser negativo repetir os passos 2) e 3) de modo a encontrar a solução.

Os exemplos apresentados na figura 5 representam várias combinações em que pelo menos uma das restrições ou a função objectivo são não lineares.

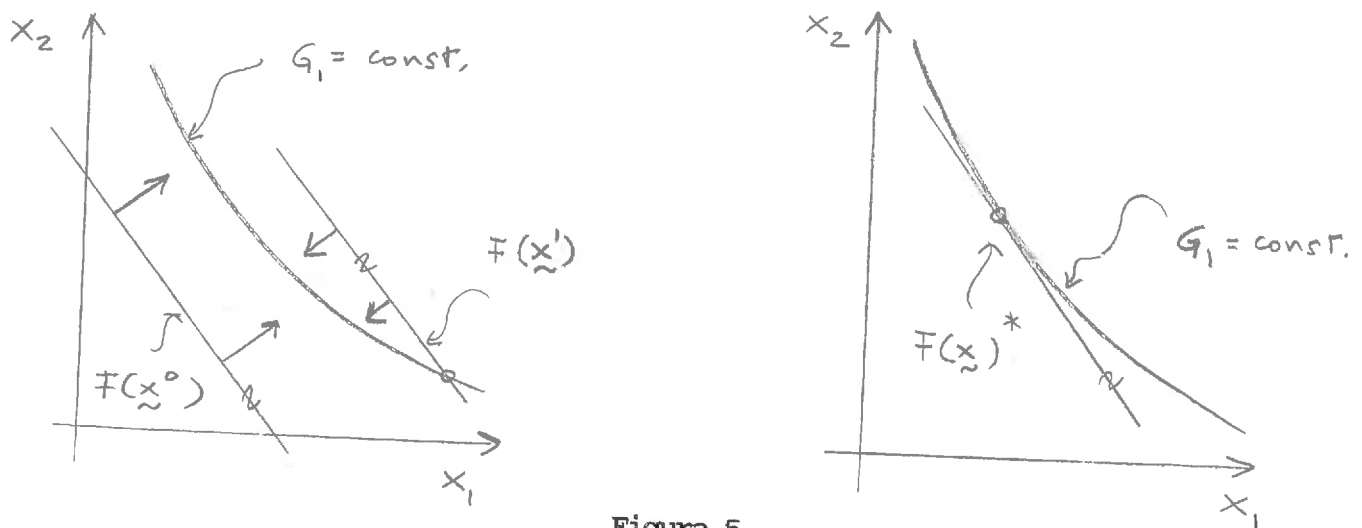


Figura 5.

2. Problemas Lineares

2.1 Convenções

A forma canónica adoptada do problema, aonde $\underline{A}$ é uma matriz e $\underline{b}$ e $\underline{c}$ são vectores, é a seguinte:

$$\text{Min } F(\underline{x}) = \underline{c}'\underline{x}$$

$$\text{sujeito a: } \underline{A}\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

A dimensão do vector $\underline{x}$ é n e o número de linhas da matriz $\underline{A}$ é m , sendo este inferior a n . Se forem números iguais, admitindo que as colunas da matriz $\underline{A}$ são linearmente independentes, só existe uma solução. Uma vez que a maioria das restrições são inequações a transformação destas em equações é feita através da adição de variáveis extras que preenchem, por defeito ou excesso, as diferenças entre as inequações e as igualdades da forma canónica. Este facto vem a criar um excesso ou igualdade de colunas na matriz $\underline{A}$ em relação ao número de linhas. Torna-se assim necessário definir alguma terminologia.

Os termos principais adoptados são utilizados nestes apontamentos e correspondem à prática corrente. As variáveis são definidas como

Básicas $(x_1, \dots, x_m)$

Não básicas $(x_{m+1}, \dots, x_n)$.

As variáveis adicionais, que são não negativas, para definição das igualdades são chamadas de variáveis de folga por defeito ou por excesso

$2x_1 - 6x_2 \leq 3$ passa a $2x_1 - 6x_2 + x_3 = 3$ (defeito)

$-x_1 - 2x_2 \geq 2$ passa a $-x_1 - 2x_2 - x_4 = 2$ (excesso)

Uma solução, $\underline{x}^k$, é considerada

Possível se $\underline{A} \underline{x}^k = \underline{b}$

Básica se $x_{m+1}, \dots, x_n = 0$

e $\underline{A} \underline{x}^k = \underline{b}$.

A solução é ótima se $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$

e $F(\underline{x}) = F(\underline{x})_{\min}$

2.2. Base de Problemas Lineares

O conjunto das colunas da matriz $\underline{A}$ correspondentes às variáveis básicas desempenha a mesma função que a base num espaço vectorial. Qualquer solução do sistema de equações pode ser obtida através duma combinação linear adequada. Os coeficientes da combinação linear são, neste caso, os valores das variáveis básicas. Assim, pode-se dividir $\underline{A}$ em dois conjuntos $\underline{A}_b$ e $\underline{A}_n$ e, análogamente, o vector $\underline{x}$ pode ser a soma de dois vectores $\underline{x}_b$ e $\underline{x}_n$:

$$\underline{A} \underline{x} = [\underline{A}_b \ \underline{A}_n] [\underline{x}_b \ \underline{x}_n] = \underline{b} \text{ onde } b - \text{básico e } n - \text{não básico.}$$

Como $\underline{A}_b (m \times m)$ é uma matriz composta de vectores linearmente independentes pode-se obter $\underline{A}_b^{-1}$. O vector básico pode ser expresso por:

$$\underline{x}_b = \underline{A}_b^{-1} [\underline{b} - \underline{A}_n \underline{x}_n]$$

Num ponto extremo do domínio das soluções possíveis do sistema os elementos do vector não básicos são nulos ou seja:

$$\underline{x}_n = 0$$

Exemplo:

$$x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad \text{passa a} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$x_2 \leq 1/2 \quad \text{passa a} \quad x_2 + x_4 = 1/2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad \text{passa a} \quad x_1 + x_2 - x_5 = 1$$

em que as variáveis de folga são: x_3 , x_4 - defeito e x_5 - excesso.

O objectivo é determinar cada um dos pontos extremos da região admissível classificando as variáveis em básicas e não básicas. A figura 6 ilustra a região admissível e os pontos extremos.

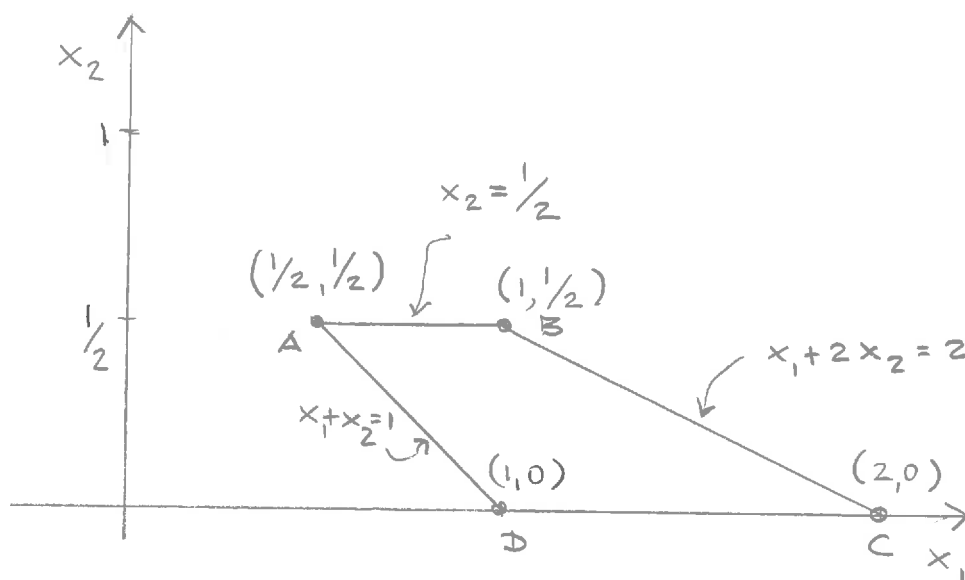


Figura 6.

Fixe-se como primeiro ponto o A $(1/2, 1/2)$. Neste caso $G_3(\underline{x})$ e $G_2(\underline{x})$ são restrições activas e $G_1(\underline{x})$ é uma restrição inactiva.

$$G_1 = 1/2 + 2(1/2) + x_3 = 2 \implies x_3 = 1/2 \text{ e } x_4 = x_5 = 0$$

Neste caso

$$x_b' = [x_1 \ x_2 \ x_3] = [1/2 \ 1/2 \ 1/2]$$

$$x_n' = [x_4 \ x_5] = [0 \ 0]$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Usando a relação $\underline{x}_b = \underline{A}_b^{-1} [\underline{b} - \underline{A}_n \underline{x}_n]$ obtêm-se os mesmos valores para a solução básica:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

2.3. Método Simplex

Os princípios elementares deste procedimento são idênticos aos definidos no capítulo anterior. A metodologia pode resumir-se a:

1. Estabelecer uma solução inicial $\underline{x}^0$;
2. Testar a optimalidade de $\underline{x}^0$;
3. Se o teste 2. falhar, obter nova solução e repetir 1 e 2.

Este algoritmo é regulado por três regras que irão ser justificadas. Convém no entanto lembrar que o valor da função objectivo pode ser expresso somente em função das variáveis básicas.

$$F(\underline{x}) = \underline{c}' \underline{x} = \underline{c}_b' \underline{x}_b + \underline{c}_n' \underline{x}_n = \underline{c}_b' \underline{x}_b$$

As iterações do método Simplex são feitas de modo a ir mudando uma das variáveis básicas de modo a que valor da função objectivo seja melhorado mantendo a admissibilidade da solução.

O segundo passo implica a verificação se a solução corrente é ótima:

$$F(\underline{x}^k) = F(\underline{x}^k)^* ?$$

Suponhamos a seguinte função objectivo e solução na iteração k:

$$F(\underline{x}) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

$$\underline{x}_b' = [x_1 \ x_2] = [2 \ 1] \quad \text{e} \quad \underline{x}_n' = [0 \ 0]$$

Então, o valor da função objectivo será:

$$F(\underline{x}^k) = 2.2 + 3.1 + 5.0 - 2.0 = 7$$

Analisando os coeficientes de custo c_i podemos verificar se a solução actual é ótima.

$$F(\underline{x}^{k+1}) - F(\underline{x}^k) = F(\underline{x}^{k+1}) - 7 = 5x_3 - 2x_4$$

Se $\underline{x}^k$ não for óptimo então x_3 ou x_4 podem entrar na base e diminuir o valor de $F(\underline{x})$. Neste caso só há duas hipóteses:

a) x_3 entra na base

$$F(\underline{x}^{k+1}) = 7 + 5x_3 - 2.0 = 7 + 5x_3, \text{ uma vez que } x_3 \geq 0.$$

$$\text{Então será } F(\underline{x}^{k+1}) \geq F(\underline{x}^k)$$

b) x_4 entra na base

$$F(\underline{x}^{k+1}) = 7 + 5.0 - 2x_4 = 7 - 2x_4, \text{ uma vez que } x_4 \geq 0.$$

$$\text{Então será } F(\underline{x}^{k+1}) \leq F(\underline{x}^k)$$

Na hipótese b verifica-se que se pode minimizar o valor da função objectivo o que significa que a actual solução não é óptima.

REGRA 1

Se o sinal de todos os coeficientes de custo, c_i , forem positivos então a solução básica admissível corrente $\underline{x}^k$ é a solução óptima $\underline{x}^*$.

A obtenção duma solução básica admissível a partir de várias hipóteses resultantes do facto de haver vários coeficientes de custo com sinal negativo deve ser feita do modo mais eficiente possível

Seja, por exemplo, $F(\underline{x}^{k+1}) - F(\underline{x}^k) = 3x_3 - 4x_4 - 8x_5$.

As variáveis x_4 ou x_5 podem entrar na base de modo a baixar o valor de $F(\underline{x}^k)$. Como o coeficiente de x_5 é menor que o de x_4 então a redução será mais acentuada se x_5 entrar na base.

REGRA 2

A variável de $\underline{x}_n$ a entrar na nova base $\underline{x}_b^{K+1}$ é, dentro das candidatas, aquela associada ao valor negativo menor de c_n .

A determinação duma nova base motivada pela entrada de uma variável não básica implica a passagem duma variável básica a variável não básica.

Num exemplo $\underline{x}_b' = [x_1 \ x_3 \ x_4]$ e $\underline{x}_n' = [x_2 \ x_5]$. A variável x_5 deve passar à base e, portanto, x_1 ou x_3 ou x_4 devem sair da base. O conjunto de restrições expresso em termos de x_5 é dado por:

$$x_1 = 1 + x_5$$

$$x_3 = 5 - x_5$$

$$x_4 = 3 - 2x_5$$

Analise-se as três hipóteses:

- a) x_1 passa a não básica - $x_5 = -1 < 0$ (impossível)
- b) x_3 passa a não básica - $x_5 = 5$, $x_1 = 6$ e $x_4 = -7 < 0$ (impossível)
- c) x_4 passa a não básica - $x_5 = 3/2$, $x_1 = 4$ e $x_3 = 2$ (aceitável)

A nova solução admissível é composta por x_1 , x_3 e x_5 .

O mesmo resultado pode ser obtido observando que a variável a entrar no grupo das variáveis não básicas é aquela a que corresponde à razão b_i/a_{ip} mínima não negativa.

$$b_1/a_{15} = 1/-1 = -1; \quad b_3/a_{35} = 5/1 = 5; \quad b_4/a_{45} = 3/2$$

REGRA 3

Calcular os quocientes $b_t/a_{tp} > 0$, na base actual $x_b + x_p a_{bp} = b$. A variável x_q , a que corresponde o valor mínimo de b_t/a_{tp} , é a substituída pela nova variável básica x_p .

A sistematização destas regras no uso corrente é feita através da organização em tabelas a que se chamam, por vezes, quadros Simplex.

Exemplo:

$$\text{Max } F(\underline{x}) = 3x_1 + x_2$$

$$\text{s.a } x_1 - 2x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 \leq 24$$

$$x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

A solução passa pela adaptação à forma canónica:

$$\text{Min } -F(\underline{x}) = -3x_1 - x_2$$

$$\text{s.a } x_1 - 2x_2 + x_3 = 10$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 24$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 5$$

$$x_i \geq 0, \quad i=1,5$$

Solução inicial ($x_1 = x_2 = 0$)

$\underline{x}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{b}$	b/a
x_3	1	-2	1	0	0	10	$10/1=10$
x_4	2	1	0	0	1	24	$24/2=12$
x_5	(1)	-1	0	0	1	5	$5/1=5$
$\underline{c}'$	-3	-1	0	0	0	$z=0$	

↑

x_1 entra e x_5 sai

Primeira iteração

$\underline{x}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{b}$	b/a
x_3	0	-1	1	0	-1	5	-
x_4	0	(3)	0	1	-2	14	$14/3$
x_1	1	-1	0	0	1	5	-
$\underline{c}'$	0	-4	0	0	3	$z+15$	

↑

x_2 entra e x_4 sai

Segunda iteração

$\underline{x}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\underline{b}$	b/a
x_3	0	0	1	$1/3$	$-5/3$	$29/3$	
x_2	0	1	0	$1/3$	$-2/3$	$14/3$	
x_1	1	0	0	$1/3$	$1/3$	$29/3$	
$\underline{c}'$	0	0	0	$4/3$	$1/3$	$z+101/3$	

$$c_i \geq 0$$

A solução não pode ser melhorada de acordo com a regra 1. Então,

$$\underline{x}^* = [29/3 \quad 14/3 \quad 29/3 \quad 0 \quad 0]$$

$$\text{e } F(\underline{x})^* = 101/3.$$

2.4. Método simplex - Duas Fases

Nos casos em que a transformação do modelo matemático inicial num modelo na forma canónica não seja suficiente para a obtenção da solução básica inicial é necessária a execução duma fase preliminar. Existem vários métodos para obter uma solução básica inicial e o que se apresenta é o denominado de duas fases em que a primeira se destina à obtenção duma solução básica inicial e segunda à aplicação das regras do subcapítulo anterior.

Exemplo:

$$\text{Min } Z = F(\underline{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 + 3x_2 = 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 3 \end{aligned}$$

Adicionando as variáveis de folga, defeito e excesso, para transformar o problema para a forma canónica

$$\text{Min } Z = F(\underline{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & 2x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ & x_1 + 3x_2 = 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 5 \end{aligned}$$

Sem efectuar nenhum cálculo x_1, x_2, x_3 são colocados nos vector $\underline{x}_1$; x_4 e x_5 são colocados em $\underline{x}_0$. Como o número de restrições é necessária outra variável para completar $\underline{x}_0$. Deste modo a necessidade de obter uma solução admissível leva à necessidade de adicionar outra fase ao método Simplex já descrito. Neste caso os elementos do vector $\underline{x}_0$ são:

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 \\ x_5 &= -2 < 0 \quad (? - \text{inaceitável}) \end{aligned}$$

Introduzem-se então um outro tipo de variáveis, designadas por artificiais, na primeira fase do método Simplex que auxiliam a determinação da solução básica admissível. Deste modo a segunda e terceira restrições tomam as seguintes formas devido a x_6 e x_7 :

$$g_2(\underline{x}) = 2x_2 + x_3 - x_5 = 2 \quad \text{passa a} \quad 2x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 2$$

$$g_3(\underline{x}) = x_1 + 3x_2 = 4 \quad \text{passa a} \quad x_1 + 3x_2 + x_7 = 4$$

A forma canónica das novas restrições é dada por:

$$g(\underline{x}) = \begin{array}{rcl} \circ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 5 \\ \circ & 2x_2 + x_3 & - x_5 + x_6 = 2 \\ \circ & x_1 + 3x_2 & + x_7 = 4 \end{array}$$

As variáveis básicas e não básicas passam a ser:

$$\underline{x}_b' = \begin{vmatrix} x_4 \\ x_6 \\ x_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} \quad \underline{x}_n' = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Juntamente com a necessidade da introdução das variáveis artificiais torna-se necessário criar uma função objectivo artificial que substitui a função objectivo inicial. Esta destina-se a obter um problema auxiliar que, ao ser resolvido, leva à eliminação da base das variáveis artificiais e ao fim da primeira fase. Na segunda fase as variáveis do problema são as de decisão e as de folga enquanto a função objectivo é a inicial.

$$W = \text{Soma } x_i, i - \text{variável artificial}$$

$$W = x_6 + x_7$$

Expressando x_6 , x_7 e W em função das outras variáveis vem

$$x_6 = 2 - 2x_2 - x_3 + x_5$$

$$x_7 = 4 - x_1 - 3x_2$$

$$W = 6 - x_1 - 5x_2 - x_3 + x_5$$

ou

$$(W - 6) = -x_1 - 5x_2 - x_3 + x_5$$

Então a primeira fase consiste em minimizar esta função de modo a que o valor das variáveis artificiais seja zero o que as remete para o conjunto das variáveis não básicas. Neste problema a forma canónica é:

$$\text{Min } (W - 6) = -x_1 - 5x_2 - x_3 + x_5$$

$$\begin{aligned} \text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & 2x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 2 \\ & x_1 + 3x_2 + x_7 = 4 \end{aligned}$$

A segunda fase começa quando o valor de W for zero.

Exemplo:

$$\text{Min } x_2$$

$$\text{s. a} \quad 3x_1 + 4x_2 \geq 9$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$3x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1ª Fase:

$$\text{Min } Z = x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. a} \quad & 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ & 3x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{aligned}$$

Variáveis folga: x_3, x_4, x_5

A forma canônica será:

$$\begin{aligned} \text{Min } (W - 9) &= 3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ \text{Min } (Z - 0) &= x_2 \text{ (informativo)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s. a} \quad & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_6 = 9 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ & 3x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{aligned}$$

Variável artificial: x_6

Aonde

$$W = x_6 = 9 - 3x_1 - 4x_2 + x_3$$

e

$$\underline{x}_b = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1ª Iteração:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	b/a
x_6	3	4	-1	0	0	1	9	$9/4 = 2.25$
x_4	5	2	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$
x_5	3	-1	0	0	1	0	0	
c_i	0	1	0	0	0	0	(Z-0)	
d_i	-3	-4	1	0	0	0	(W-9)	

x_2 entra e x_6 sai: fim da primeira fase

2ª Fase:

2ª Iteração:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	b/a
x_2	0.75	1.0	-0.25	0	0	0.25	2.25	$2.25/0.75 = 3$
x_4	3.5	0	0.5	1	0	-0.5	3.5	$3.5/3.5 = 1$
x_5	3.75	0	-0.25	0	1	0.25	2.25	$2.25/3.75 = 0.6$
c_i	-0.75	0	-0.25	0	0	0	(Z-2.25)	
d_i	0	0	0	0	0	1	(W-0)	

x_1 entra

x_5 sai

3ª Iteração:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1.0	-0.2	0	-0.2	1.80
x_4	0	0	0.73	1	-0.93	1.40
x_1	1	0	-0.07	0	0.27	0.60
c_i	0	0	0.2	0	0.2	(Z-1.8)

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 1.80 \\ 1.40 \end{bmatrix} \quad e \quad Z^* = 1.8$$

2.5. Casos Particulares

Apresentam-se os três tipos mais relevantes do grupo de problemas com características particulares.

2.5.1. Degenerescência (soluções múltiplas)

Exemplo:

$$\text{Max } Z = -x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{s. a} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &\leq 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \end{aligned}$$

1ª Iteração:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	2	1	-1	1	0	0	2
x_5	2	-1	5	0	1	0	6
x_6	4	1	1	0	0	1	6
c_i	1	-2	-1	0	0	0	0

2ª Iteração:

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	2	1	-1	1	0	0	2
x_5	4	0	4	1	1	0	8
x_6	2	0	2	-1	0	1	4
c_i	5	0	-3	2	0	0	4

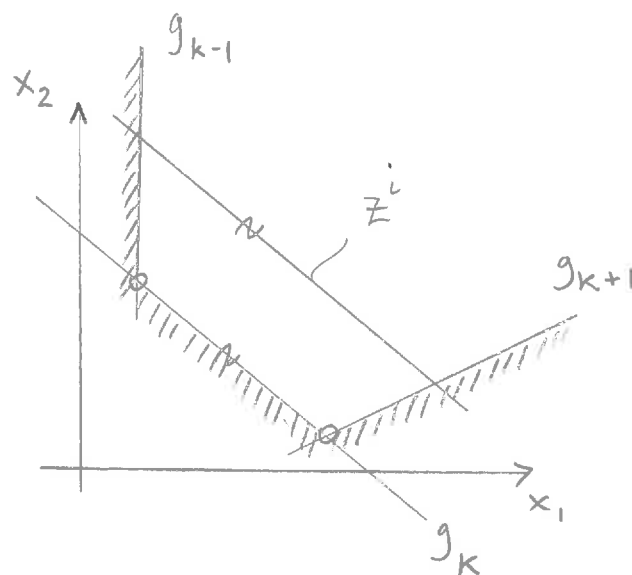


Figura 6.

Como se pode ver na representação gráfica na figura 6 as isoquantas da função objectivo são paralelas a pelo menos uma das restrições. Há duas hipóteses para a saída da base mas o novo valor da função objectivo é o mesmo.

a) x_5 sai

b) x_6 sai

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	3	1	0	5/4	1/4	0	4
x_3	1	0	1	1/4	1/4	0	2
x_6	0	0	0	-3/2	-1/2	1	0
c_i	8	0	0	+11/4	+3/4	0	10

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	3	1	0	1/2	0	2	4
x_3	0	0	0	3	1	-2	0
x_6	1	0	1	-1/2	0	1/2	2
c_i	8	0	0	1/2	0	3/2	10

°Mesmo valor°

Indefinição (soluções ilimitadas)

Exemplo:

$$\text{Max } Z = F(\underline{x}) = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a } \begin{aligned} -4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Min } A = -Z = -x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a } \begin{aligned} -4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 6 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

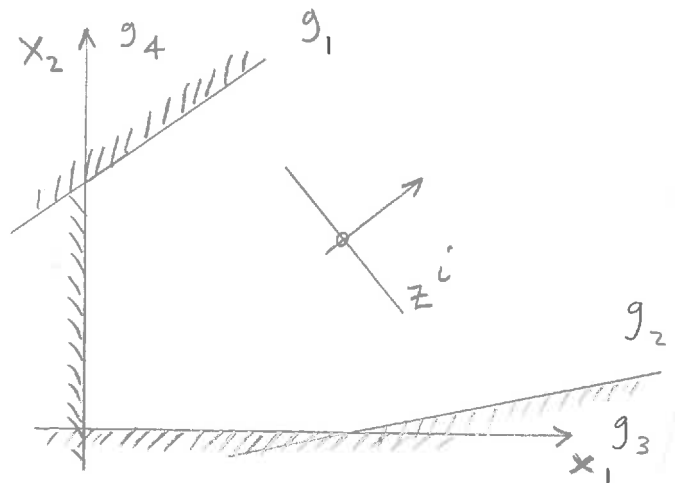


Figura 7.

Como se pode ver na figura 7 o conjunto das soluções admissíveis não é um conjunto fechado o que se pode verificar pela impossibilidade de aplicar as regras do Simplex a partir da segunda iteração. Não existe uma solução ótima limitada.

1ª Iteração

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	-4	1	1	0	4
x_4	2	-3	0	1	6
c_i	-1	-2	0	0	0

2ª Iteração

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	-4	1	1	0	4
x_4	-10	0	3	1	18
c_i	-9	0	2	0	8

Impossibilidade (soluções inexistentes)

No caso do conjunto das soluções admissíveis ser um conjunto vazio as regras do método Simplex não poderão ser utilizadas na totalidade como mostra a resolução do problema seguinte:

$$\text{Exemplo: } \text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a } x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 3x_2 \geq 2$$

$$\text{Min } W - 3 = -x_1 + 3x_2 \text{ x } x_4$$

$$\text{s.a } x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 = 3$$

1ª Iteração

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	1	1	0	0	2
x_5	1	-3	0	-1	1	3
d_i	-1	3	0	1	0	-3

2ª Iteração

x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	1	1	0	0	2
x_5	0	-4	-1	-1	1	1
d_i	0	4	1	1	0	-1

Não há continuação possível para terminar a primeira fase e x_5 sair de x_b .

2.6. Análise de Redes

Os tipos de aplicações mais divulgadas do método Simplex, em particular, e da Investigação Operacional, em geral, envolvem a análise de redes. Apresentam-se a seguir alguns problemas frequentes na Engenharia Civil.

Uma rede é definida por um conjunto de nós e por um conjunto de linhas, arcos, que ligam os nós. Um arco diz-se orientado se existe uma direcção que lhe esteja associada. Na figura 8 apresenta-se uma representação típica duma rede onde o arco que liga os nós A e B é orientado ou seja só há movimento de A para B.

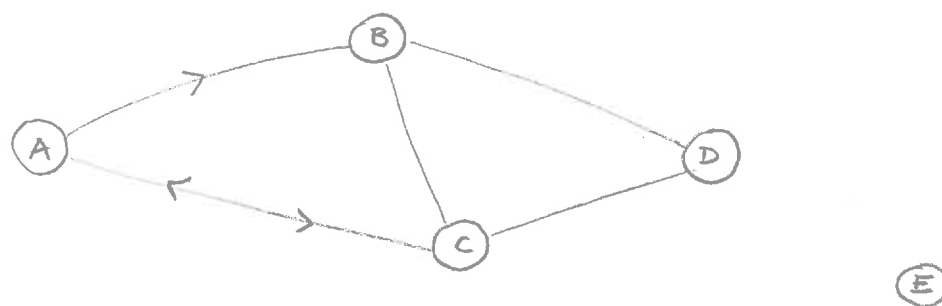


Figura 8.

Há algumas definições que auxiliam a resolução de problemas envolvendo a análise de redes.

- Cada nó tem pelo menos um arco que lhe é associado: E não é um nó.
- Dois arcos estão ligados se houver um nó comum: AB e BC.
- Um caminho é uma sequência de arcos ligados de tal maneira que nenhum nó seja repetido: ABCD.
- Uma rede considera-se ligada se para cada par de nós existe sempre um caminho que os ligue: ABCD.

Os três tipos de problemas mais comuns na análise de redes têm como função objectivo o mínimo custo, o caminho mais curto ou o máximo fluxo.

O problema do custo mínimo aplica-se a um conjunto de nós e arcos (não orientados) aonde se pretende achar uma rede que contenha todos os nós e tal

que a soma dos custos, associados a cada nó, seja mínima.

Na rede em que se pretende determinar o caminho mais curto que una o nó origem ao nó fim minimizando os custos (ou tempos) que estão associados aos arcos e aos nós do caminho. Este problema é conhecido também por algoritmo de transportes.

Nos problemas de máximo fluxo pretende-se maximizar a quantidade de material enviada da origem até ao fim sendo as capacidades dos arcos limitadas ou tendo os nós consumos mínimos.

Exemplo - Minimo Custo:

Um empreiteiro deve distribuir os trabalhadores por quatro obras diariamente. O tempo de viagem médio, em minutos, entre os locais de partida e as obras estão definidos no quadro. De maneira a minimizar os custos das horas improdutivas diárias de cada trabalhador o empreiteiro pretende minimizar o tempo total de viagem. O número de trabalhadores no local 1 é de 30 e no local 2 é de 50. O número de trabalhadores necessários em cada obra, A, B, C e D, é de 20, 20, 30 e 10, respectivamente. Formule o modelo matemático de modo a minimizar o tempo total de viagem.

A primeira fase consiste em identificar as variáveis e a rede ligando os locais de concentração e as obras, figura 9.

Tempo Viagem (min)

	1	2
A	40	20
B	20	50
C	20	10
D	10	60

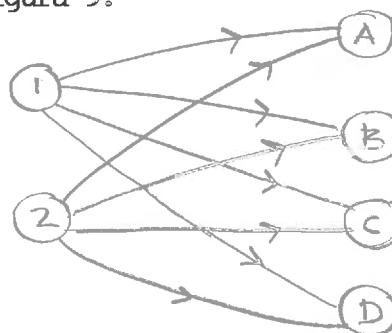


Figura 9.

Variáveis (número trabalhadores do local de partida para a obra):

x_1 - 1A; x_2 - 1B; x_3 - 1C; x_4 - 1D; x_5 - 2A; x_6 - 2B; x_7 - 2C; x_8 - 2D.

A função objectivo é minimizar T (tempo total viagem):

$$Z = 40x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 20x_5 + 50x_6 + 10x_7 + 60x_8$$

As restrições são expressas de modo a conservar o fluxo em cada nó como se deduz da figura 10:

$$\text{Nó 1: } 30 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\text{Nó 2: } 50 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{Nó A: } x_1 + x_5 = 20; \text{ Nó B: } x_2 + x_6 = 20; \text{ Nó C: } x_3 + x_7 = 30; \text{ Nó D: } x_4 + x_8 = 10$$

O modelo matemático de problema linear a ser resolvido usando o método Simplex vem dado por:

$$\text{Min } Z = 40x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 20x_5 + 50x_6 + 10x_7 + 60x_8$$

$$\begin{aligned} \text{s. a } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 \\ & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 50 \\ & x_1 + x_5 = 20 \\ & x_2 + x_6 = 20 \\ & x_3 + x_7 = 30 \\ & x_4 + x_8 = 10 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

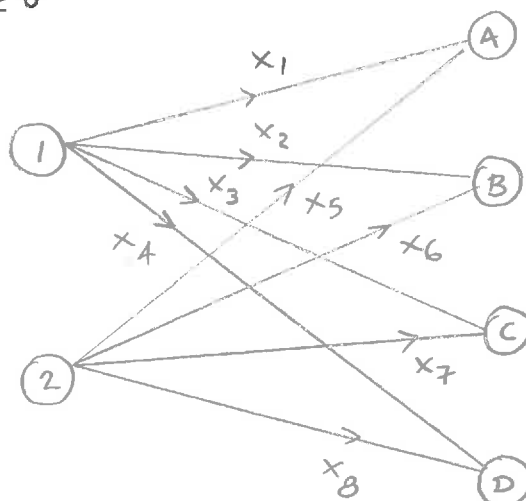


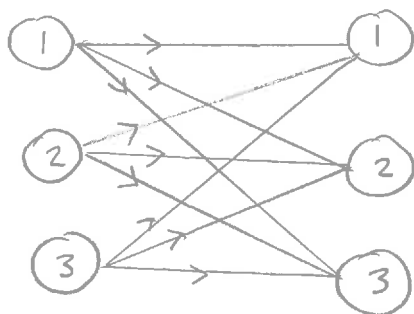
Figura 10.

Exemplo - Máximo Rendimento:

Um empreiteiro tem três tipos diferentes de equipamento de escavação que tem de distribuir por outras três obras. O material foi classificado em termos de rendimento para cada uma das obras numa escala crescente de 0 a 10. Pretende-se achar a melhor utilização do equipamento de acordo com o rendimento esperado.

Tipo Máquina	Local		
	1	2	3
1	8	3	7
2	0	10	3
3	6	5	4

A solução passa pela definição da rede adequada, das variáveis, da função objectivo e das restrições. Depois de estabelecida a rede, figura 11, as variáveis escolhidas são as que representam o envio duma das máquinas para uma das obras tomando o valor 1 ou 0 conforme a máquina é enviada para a obra respectivamente.



Variáveis

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{- há máquina no arco;} \\ 0 & \text{- não há máquina.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &- 11; & x_2 &- 12; & x_3 &- 13; \\ x_4 &- 21; & x_5 &- 22; & x_6 &- 23; \\ x_7 &- 31; & x_8 &- 32; & x_9 &- 33. \end{aligned}$$

Figura 11.

A função objectivo é o de maximizar o rendimento total:

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_5 + 3x_6 + 6x_7 + 5x_8 + 4x_9$$

As restrições impõem que o fluxo em cada nó seja constante:

$$\text{Nó 1} \implies 1 = x_1 + x_2 + x_3$$

O modelo matemático respectivo vem dado por:

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_5 + 3x_6 + 6x_7 + 5x_8 + 4x_9$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ & x_7 + x_8 + x_9 = 1 \\ & x_1 + x_4 + x_7 = 1 \\ & x_2 + x_5 + x_8 = 1 \\ & x_3 + x_6 + x_9 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo - Caminho mais longo (CPM):

Um projecto de construção foi separado num conjunto de tarefas distintas. A duração de cada tarefa está estabelecida bem como as respectivas precedências. O objectivo é o de determinar o espaço de tempo mais curto em que a obra pode ser concluída. A tarefa é equivalente a determinar o caminho crítico entre o início e o fim da obra determinando o caminho mais longo.

Tarefa	Descrição	Tempo (semanas)	Precede Tarefa
1	Escavação	1	2
2	Fundação	2	3,4
3	Paredes	2	4,7,8
4	Cobertura	1	-
5	Prefabricação paredes	1	3,6
6	Préfabricao cobertura	1.5	4,7,8
7	Arranjos exteriores	1	-
8	Ar condicionado	2	-

A solução consiste em determinar a rede correspondente, as variáveis, função objectivo e as restrições. A precedência entre as tarefas estabelece a rede da figura 12. As variáveis escolhidas são a da atribuição do valor um se a tarefa estiver no caminho critico e de zero no outro caso.

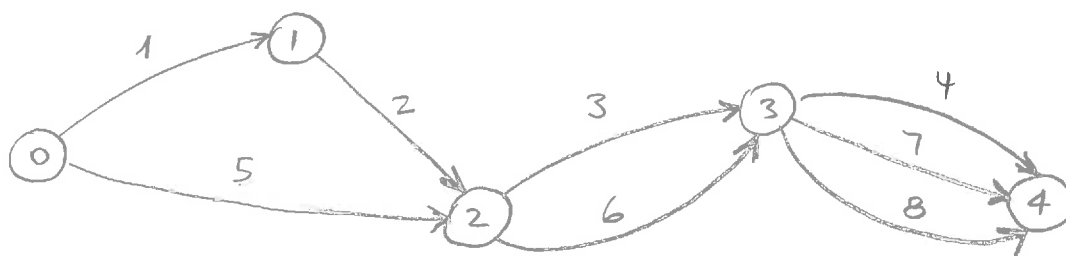


Figura 12.

A função objectivo é a que pretende encontrar o caminho mais longo enquanto as restrições representam a manutenção do fluxo em cada nó. Adoptando a designação de variáveis apresentada na figura 13 o modelo matemático é dado por:

$$\text{Max } T = 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 1.5x_6 + 1x_7 + 2x_8$$

$$\begin{aligned} \text{s. a } 1 &= x_1 + x_5 \\ x_1 &= x_2 \\ x_2 + x_5 &= x_3 + x_6 \\ x_3 + x_6 &= x_4 + x_7 + x_8 \\ x_4 + x_7 + x_8 &= 1 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

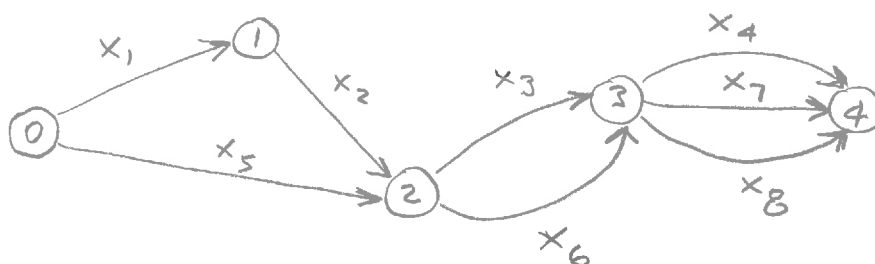


Figura 13.

Neste caso o caminho critico é dado pelo caminho x_1, x_2, x_3, x_8 com $T = 7$ semanas.

Exemplo - Fluxo Máximo:

Determine a capacidade máxima da rede de água em que a capacidade de cada ramo em milhares de m^3 está indicada na figura 14.

As variáveis representam o caudal em cada arco como se indica na figura 15. A função objectivo representa o caudal máximo possível na rede sendo as restrições impostas pelas capacidades limitadas de cada ramo e pela manutenção do fluxo.

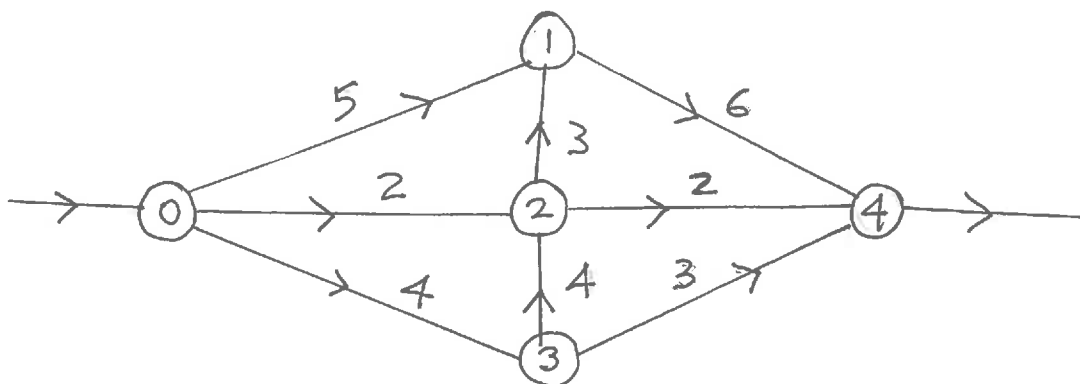


Figura 14.

As variáveis representam o caudal em cada arco como se indica na figura 15. A função objectivo representa o caudal máximo possível na rede sendo as restrições impostas pelas capacidades limitadas de cada ramo e pela manutenção do fluxo.

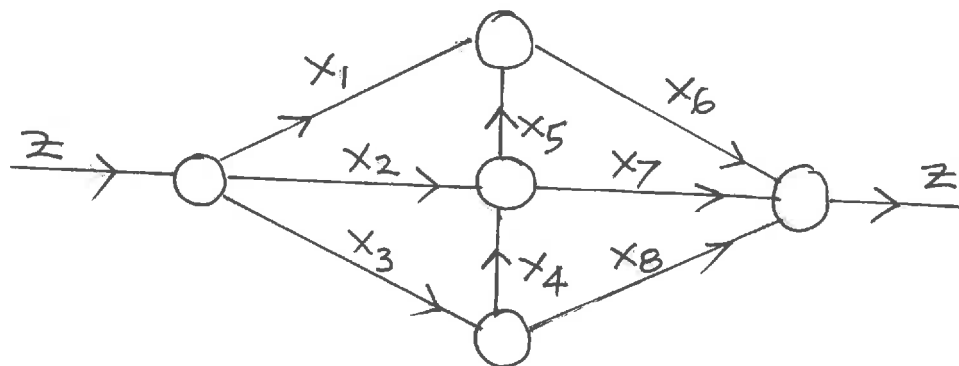


Figura 15.

O modelo matemático virá dado por:

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_3 \leq 4 \\ & x_4 \leq 4 \\ & x_5 \leq 3 \\ & x_6 \leq 6 \\ & x_7 \leq 2 \\ & x_8 \leq 3 \\ & x_1 + x_5 = x_6 \\ & x_2 + x_4 = x_5 + x_1 \\ & x_3 = x_4 + x_8 \end{aligned}$$

A solução vem dada por $x_1^* = 5$; $x_4^* = 1$; $x_2^* = 2$; $x_5^* = 1$; $x_7^* = 2$; $x_3^* = 4$; $x_6^* = 6$; $x_8^* = 3$ e $Z^* = 11$.

Uma extensão habitual do problema da determinação do caminho mais curto é o designado por CPM (Critical Path Method). Neste caso o objectivo é o de achar o(s) caminho(s) que fixam o caminho mais longo entre a origem e o fim da rede, que representa uma série de tarefas com durações definidas. Os objectivos são, principalmente, o de fixar a duração mínima do conjunto constituído pelas tarefas da rede e o de identificar as tarefas, designadas por críticas, que pertencendo ao caminho crítico podem ser alteradas de modo a diminuir a duração global da rede. Existe uma extensão probabilística da rede CPM que é designada por PERT (Program Evaluation and Review Technique) que consiste em encarar a duração de cada tarefa como uma variável aleatória, com uma duração mais provável, outra pessimista e outra optimista.

A construção duma rede CPM engloba os seguintes passos:

- (1) Criar a lista de dependência de actividades, do género "tarefa B depende da tarefa A".
- (2) Numerar ou indexar as diferentes actividades:
 - a) uma actividade não precedida tem ordem zero;
 - b) uma actividade precedida por k tem ordem k+1.
- (3) Definição das linhas de referência:
Sendo n o valor de ordem máxima então há n+2 linhas de referência.
- (4) Traçado das actividades e numeração nós.

Um exemplo é o da figura 16 aonde existe o seguinte quadro de precedências:

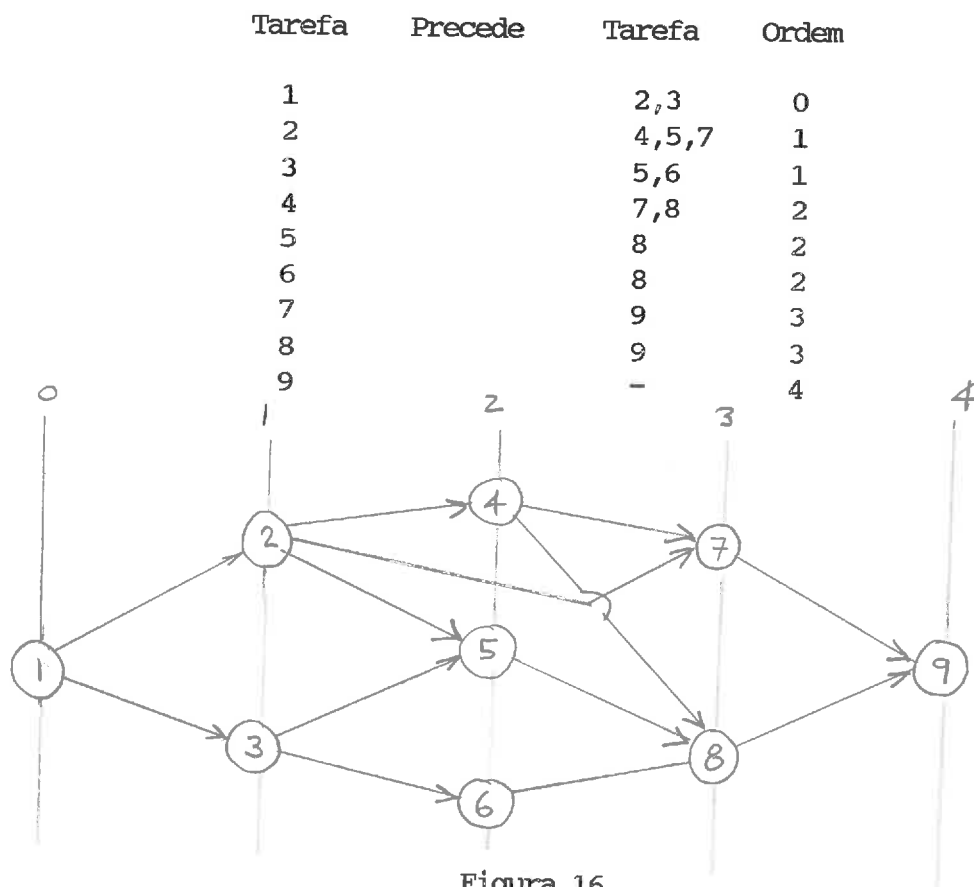


Figura 16.

2.7. Dualidade

Associado a cada problema linear existe um outro problema linear ligado a este chamado dual. O problema original é classificado de primal quando esta associação é invocada. Se o problema primal tem n variáveis e m restrições então o problema dual tem m variáveis e n restrições. Demonstra-se, utilizando os teoremas forte e fraco da dualidade, que a solução ótima, se existir, é comum aos dois problemas.

A forma canônica do problema dual relaciona-se com o primal do seguinte modo:

Primal	Dual
$\min F(\underline{x}) = \underline{c}'\underline{x}$	$\max W(\underline{y}) = \underline{b}'\underline{y}$
s.a $\underline{A}\underline{x} \geq \underline{b}$	s.a $\underline{A}'\underline{y} \leq \underline{c}$

Pode fazer-se as considerações seguintes sobre os problemas duais:

- uma das utilidades dos problemas duais é a de quando, no problema primal, o número de variáveis é inferior ao número de restrições. Esta situação inverte-se na formulação do problema dual.
- as restrições de igualdade são substituídas por duas restrições de desigualdade de sinal contrário.
- ambos tipos de variáveis são não negativas.
- se o primal é ilimitado o dual não tem região admissível e vice versa.

Exemplo:

$$\begin{array}{ll}\min F(\underline{x}) = x_1 + x_2 & \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \leq 5 & \\ \quad 2x_1 + x_2 = 4 & \\ \quad x_1 - x_2 \geq 1 & \text{Primal original}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min F(\underline{x}) = x_1 + x_2 & \\ \text{s.a} \quad -x_1 - 2x_2 \geq -5 & \\ \quad 2x_1 + x_2 \geq 4 & \\ \quad -2x_1 - x_2 \geq -4 & \\ \quad x_1 - x_2 \geq 1 & \text{Primal revisto}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max W(\underline{y}) = -5y_1 + 4y_2 - 4y_3 + y_4 & \\ \text{s.a} \quad -y_1 + 2y_2 - 2y_3 + y_4 \leq 1 & \\ \quad -2y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \leq 1 & \text{Dual}\end{array}$$

2.8. Programação Inteira

Alguns problemas têm como condição que as variáveis de projecto sejam números inteiros. Dos vários métodos existentes apresenta-se o método de eliminação de soluções ("branch and bound"). A essência do método é a de procurar a solução óptima examinando somente uma pequena parte do conjunto de soluções. O algoritmo começa por partir o domínio de soluções possíveis em subproblemas introduzindo o conceito de fronteiras admissíveis e inadmissíveis. Cada subproblema examinado com o valor da função objectivo pior que o da fronteira admissível corrente é eliminado. O algoritmo pára quando não for possível criar mais subproblemas. Os passos principais do algoritmo são:

1) Resolver o problema original. Se as restrições com valores inteiros forem respeitadas a solução óptima foi encontrada senão FO é a fronteira superior.

2) Determinar uma solução admissível que satisfaça as restrições inteiras para funcionar como fronteira inferior, geralmente por arredondamento por defeito de cada variável.

3) Escolher uma variável não inteira encontrada no passo 1 e obter dois subproblemas impondo restrições de modo que essa variável seja maior ou igual que o menor inteiro superior e menor ou igual que o maior inteiro inferior. Por exemplo se $x_1 = 2.5$ usar $x_1 \geq 3$ e $x_1 \leq 2$.

4) Resolver os dois subproblemas. Agir em função dos critérios seguintes:

solução inadmissível $\rightarrow$ terminar a ramificação dessa solução;
solução admissível e não inteira $\rightarrow$ passo 5;
solução admissível e inteira e valor da função objectivo igual ao limite superior $\rightarrow$ solução óptima;
solução admissível e inteira e valor da função objectivo excede o da fronteira inferior $\rightarrow$ passa a ser o limite inferior e passo 5;
solução admissível e inteira e valor da função objectivo inferior ao do limite inferior $\rightarrow$ terminar a ramificação dessa solução.

5) Examinar ambas as soluções e tomar como fronteira superior o maior dos valores da função objectivo. Se valor superior for igual ao inferior terminar o algoritmo senão voltar a 3.

Exemplo:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & x_i \geq 0 \text{ e inteiros}\end{array}$$

$$1) \quad x_1 = 3.75 \quad \text{e} \quad x_2 = 1.5 \\ \quad \quad \quad FO = 35.25$$

$$2) \quad x_1 = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{fronteira inferior: } FO = 7(3) + 6(1) = 27$$

3)

Subproblema A

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & x_1 \geq 4\end{array}$$

Subproblema B

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & x_1 \leq 3\end{array}$$

4)

$$\text{A: } x_1 = 4 \text{ e } x_2 = 1.2 \\ \text{FO} = 35.2$$

$$\text{B: } x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2 \\ \text{FO} = 33$$

O subproblema B tem uma solução inteira com uma valor superior ao limite inferior pelo que aquele passa a ser o novo limite inferior e não há mais subproblemas a partir deste. Continua a procurar-se através da ramificação do subproblema A, o valor deste passa a ser o novo limite superior e criam-se a partir deste os novos subproblemas C e D.

3)

Subproblema C

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \geq 2\end{array}$$

Subproblema D

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \leq 1\end{array}$$

4)

C: não tem solução admissível

$$\text{D: } x_1 = 4.166.. \text{ e } x_2 = 1 \\ \text{FO} = 35.16$$

A solução D passa a ser o novo limite superior e criam-se a partir deste os subproblemas E e F.

3)

Subproblema E

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \geq 2\end{array}$$

Subproblema F

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1 \geq 5 \\ & x_2 \leq 1\end{array}$$

4)

$$\text{E: } x_1 = 4 \text{ e } x_2 = 1 \\ \text{FO} = 34$$

$$\text{F: } x_1 = 5 \text{ e } x_2 = 0 \\ \text{FO} = 35$$

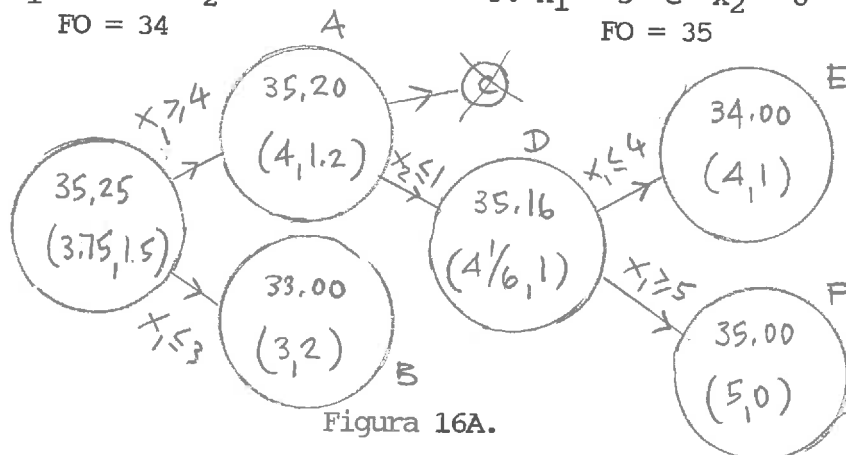


Figura 16A.

3. Problemas Não Lineares

3.1. Introdução

Estes problemas são do tipo:

$$\text{Minimizar } F(\underline{x})$$

$$\text{s.a } g(\underline{x}) \leq \underline{b}$$

em que $F(\underline{x})$ e/ou g_i são funções não lineares.

3.2. Univariável sem Restrições

Nos casos em que a obtenção das derivadas for fácil as condições necessárias e suficientes de determinação dos máximos e mínimos, locais ou globais, são a base da estratégia adequada. Nos outros casos haverá que recorrer a métodos numéricos para obter estes pontos extremos. Os métodos abordados são o da bissecção, secção dourada e aproximação polinomial.

A - Bissecção (Intervalos iguais) - em cada iteração elimina precisamente metade do intervalo anterior. Considere-se $F(x)$ no intervalo $[a,b]$. O algoritmo é o seguinte:

1. $x_m = (a + b)/2$; $L = b - a$; $F(x_m)$;
2. $x_1 = a + L/4$; $x_2 = b - L/4$; $F(x_1)$ e $F(x_2)$;
3. Se $F(x_1) < F(x_m)$ então $b = x_m$, $x_m = x_1$ e passo 5;
4. Se $F(x_2) < F(x_m)$ então $a = x_m$ e $x_m = x_2$;
5. $L = b - a$; Se $L < \text{delta}$ pare; senão passo 2.

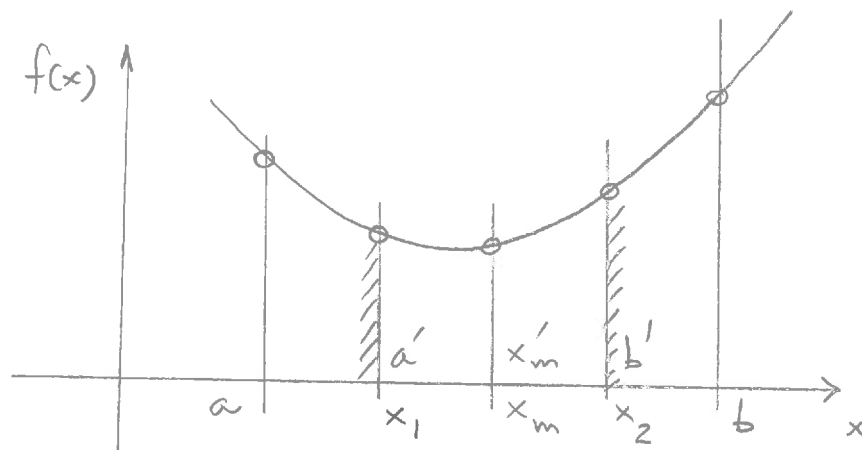


Figura 17.

B - Secção Dourada - idêntico ao anterior mas mantém a simetria do padrão de pesquisa baseado numa escolha adequada dos pontos interiores. Assume que a função é monótona e a escolha é baseada na relação dourada utilizada pelos egípcios no dimensionamento das pirâmides, por Da Vinci nas artes e por Corbusier na arquitectura. Sendo a e b os pontos extremos os pontos interiores x_1 e x_2 são escolhidos de modo a que:

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{x_2 - x_1}{b - x_1}$$

Deste modo se x_1 for o novo limite inferior então x_2 será o novo x_1 de modo que a relação entre $x_2 - x_1$ e $b - a$ seja sempre a mesma. Fazendo $a = 0$ e $b = 1$ encontra-se $x_1 = 0.382..$ e $x_2 = 0.618...$ A relação x_2/x_1 é designada por número da secção dourada. O algoritmo para este método é o seguinte:

1. $L = b - a$; $x_1 = a + 0.382*L$; $x_2 = a + 0.618*L$; $F(x_1)$ e $F(x_2)$;
2. Se $F(x_1) < F(x_2)$ então $a' = a$, $b' = x_2$, $x_2' = x_1$ e passo 5;
3. Se $F(x_1) > F(x_2)$ então $a' = x_1$, $b' = b$, $x_1' = x_2$ e passo 5;
4. Se $F(x_1) > F(x_2)$ então $a' = x_1$ e $b' = x_2$;
5. Se $b' - a' < \delta$ pare; volte para 1.

C - Interpolação Polinomial - a função é aproximada no interior do intervalo em estudo por uma função quadrática, cúbica ou de ordem superior sendo o mínimo determinado explicitamente. O algoritmo para função quadrática definida no intervalo $[x_e, x_d]$ baseia-se em aproximar a função $F(x)$ por uma função $G(x)$ do tipo $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Os passos principais são:

1. Determinar $x_m = (x_d - x_e)/2 + x_e$;
2. Como nos pontos x_e , x_m e x_d as funções F e G devem ter o mesmo valor pode-se escrever as equações

$$a_0 + a_1x_e + a_2x_e^2 = F(x_e)$$

$$a_0 + a_1x_m + a_2x_m^2 = F(x_m)$$

$$a_0 + a_1x_d + a_2x_d^2 = F(x_d)$$

3. Resolvendo este sistema de equação os coeficientes de G são:

$$a_0 = F(x_e) - a_1x_e - a_2x_e^2$$

$$a_1 = (F(x_m) - F(x_e))/(x_m - x_e) - a_2(x_e + x_m)$$

$$a_2 = 1/(x_d - x_m) [(F(x_d) - F(x_e))/(x_d - x_e)) - (F(x_m) - F(x_e))/(x_m - x_e)]$$

4. Obtendo a derivada $dG/dx = 0$ vem $x^* = -a_1/2a_2$ e com $d^2G/dx^2 > 0$ terá de ser $a_2 > 0$.

3.3. Univariável com Restrições

A formulação tipo do problema é dada por:

$$\min F(x)$$

$$\text{s.a } g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, m$$

A estratégia para obter a solução baseia-se em métodos directos ou indirectos.

Os métodos directos baseiam-se no tratamento individual de cada função indo tomando decisões ao longo do procedimento de optimização. A fase inicial consiste na determinação dos limites do intervalo admissível da função tendo em conta o conjunto de restrições. Depois de determinados os valores extremos a minimização pode ser obtida usando qualquer dos métodos proposto para a minimização duma função com uma variável sem restrições como se exemplifica na figura 18.

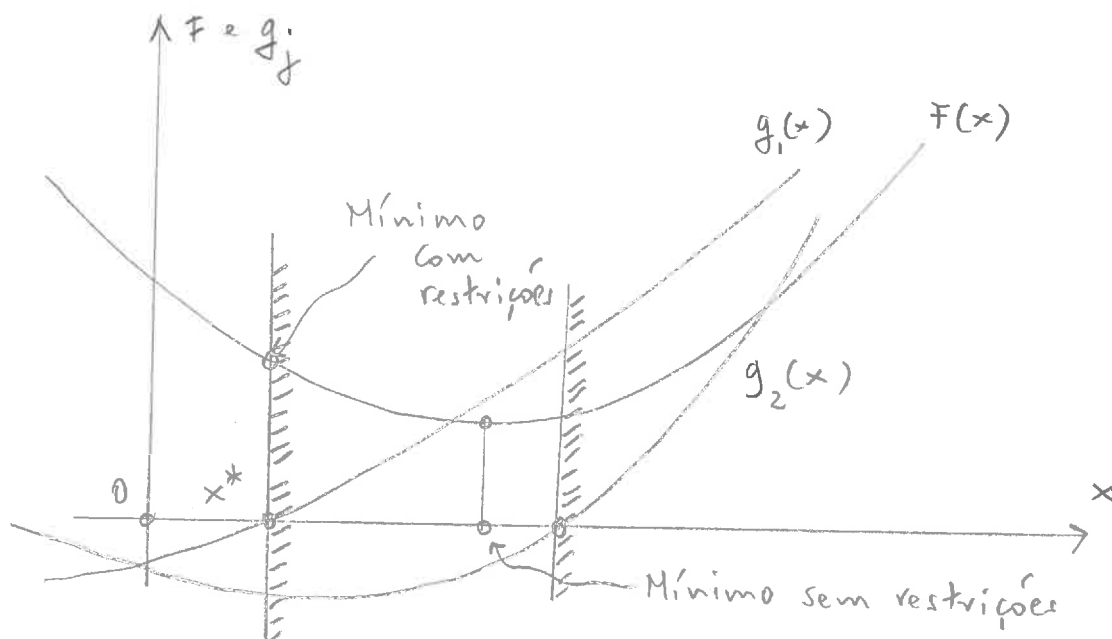


Figura 18.

Os métodos indirectos consistem na transformação do problema original num outro equivalente sem restrições. Cria-se então uma função, $F'(x)$, denominada de função pseudo objectivo ou função de penalidade. O modo mais simples é de criar esta nova função do modo seguinte:

$$F'(x) = F(x) + R [\text{Soma } a_j (g_j(x))^2]$$

em que R é um escalar, chamado factor de penalidade e a_j toma o valor um ou zero conforme a restrição correspondente, g_j , é violada ou não, respectivamente. A razão que leva à utilização desta função $F'(x)$ é a de penalizar fortemente o respectivo valor sempre que alguma das restrições não for respeitada. O escalar R toma os valores adequados à ordem de grandeza das expressões em causa sendo adaptado, por vezes, de acordo com a progressão da

minimização. Um exemplo gráfico do desenvolvimento relativo do problema original e do problema transformado é indicado na figura 19. Este tipo de funções de penalidade é classificado de exteriores uma vez que a função de penalidade se pode desenvolver fora da região admissível.

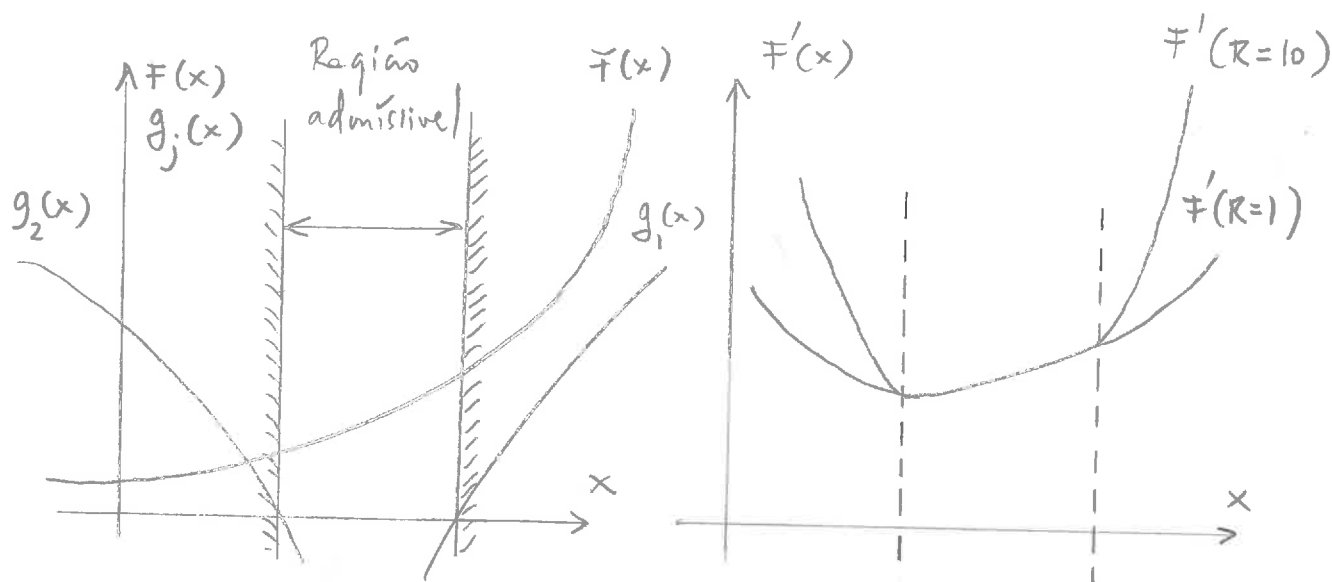


Figura 19.

Outro tipo de funções de penalidade é o das denominadas interiores. Neste caso, os valores da função pseudo objectivo são sempre interiores à região admissível, como se indica na figura 20. Pode tomar a seguinte forma:

$$F'(x) = F(x) + R [\text{Soma } (-g_i(x))^{-1}]$$

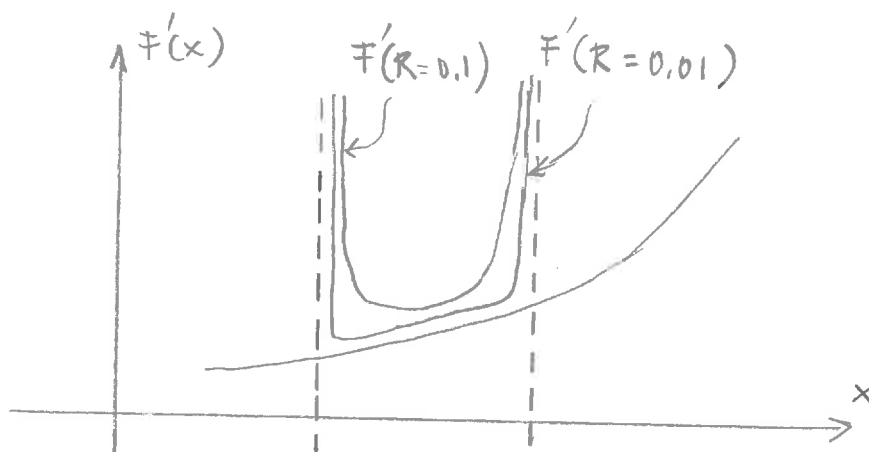


Figura 20.

Exemplo: $\text{Min } F(x) = (x+2)^2/20$

Sujeito a $g_1(x) = (1-x)/2 \leq 0$
 $g_2(x) = (x-2)/2 \leq 0$

Exterior - $F'(x) = (x+2)^2/20 + R [a_1((1-x)/2)^2 + a_2((x-2)/2)^2]$

Interior - $F'(x) = (x+2)^2/20 + R [-2/(1-x) - 2/(x-2)]$

3.4. Condições de Optimalidade

Estas condições foram definidas para problemas com restrições por Karush, Kuhn e Tucker sendo habitualmente designadas por KKT. Estas condições têm de ser verificadas nos pontos óptimos dos problemas não lineares. Foram obtidas utilizando multiplicadores de Lagrange u_j que estão associados a cada restrição g_j e exprimem-se do seguinte modo:

$$1) \text{grad } F(\underline{x}) - \text{Soma } [u_j \text{grad } g_j] = 0$$

$$2) g_j \leq 0$$

$$3) u_j g_j = 0$$

$$4) u_j \geq 0$$

A primeira condição significa que o gradiente da função objectivo é um vector oposto e de grandeza igual à combinação linear dos gradientes das restrições activas nesse ponto como se exemplifica na figura 21. Os coeficientes da combinação são precisamente os multiplicadores de Lagrange u_j respectivos. A combinação da segunda, terceira e quarta restrições indicam que quando a restrição g_j é inactiva então o multiplicador de Lagrange respectivo u_j é nulo e vice versa.

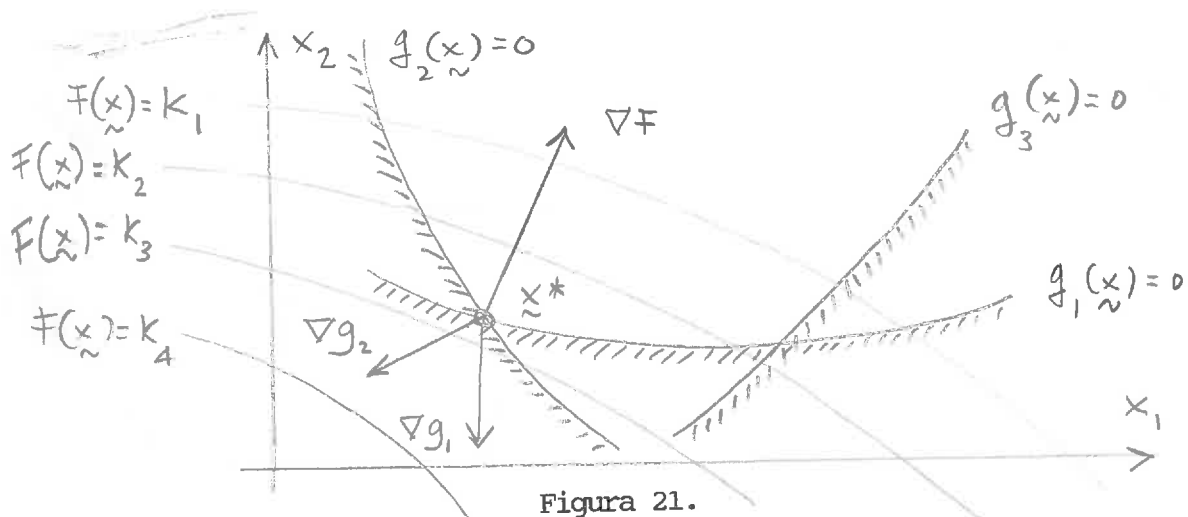


Figura 21.

3.5. Multivariável sem Restrições

A resolução deste tipo de problemas utiliza métodos analíticos ou numéricos de acordo com a natureza das funções. Os métodos numéricos são preferidos nos casos em que o manuseamento das derivadas de primeira e/ou de segunda ordem não conduzem a pontos que satisfaçam as condições suficientes de pontos extremos. Estes são classificados em métodos de ordem zero, ou directos, quando usam somente valores das funções, em métodos de ordem um, quando utilizam os gradientes das funções, e em métodos de segunda ordem, quando empregam derivadas de primeira e segunda ordem.

A - Hooke e Jeeves, ou pesquisa padrão (ordem zero)

Uma pesquisa unidirecional de minimização é feita ao longo de cada uma das direcções coordenadas seguida, ao fim de cada ciclo, por procura segundo a direcção definida pelo ponto inicial e pelo melhor ponto. Um exemplo gráfico é o da figura 22 sendo a procura, designada por padrão, a definida pelos pontos 0 e 2 tendo-se encontrado o ponto 3 como o mínimo ao longo dessa direcção.

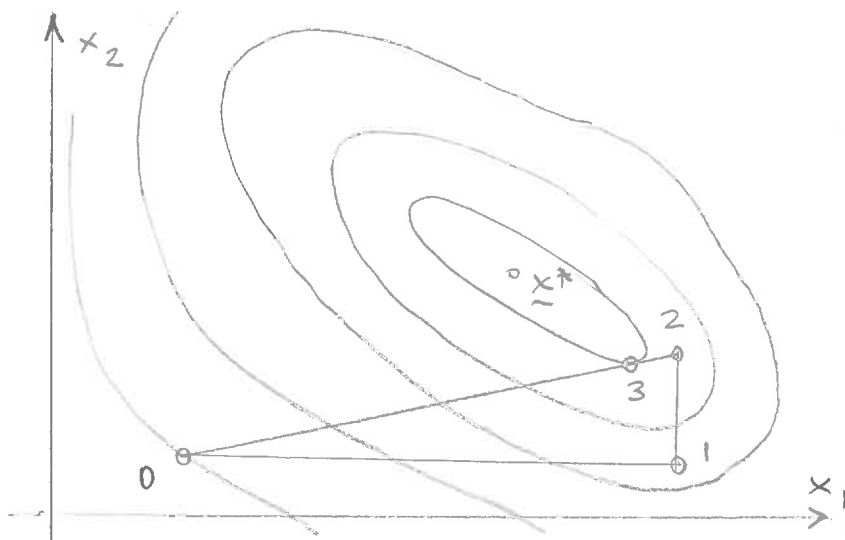


Figura 22.

O algoritmo pode ser definido pelos seguintes passos:

- 1 - Definir o ponto de inicio $\underline{x}^0$, o incremento d , o factor de redução $a > 1$ e um parametro de convergência $\epsilon > 0$;
- 2 - Pesquisar ao longo da direcção coordenada i , com i de 1 a n : $\underline{x}^1 = \underline{x}^0 + dx_i$;
- 3 - $F(\underline{x}^1) < F(\underline{x}^0)$?; sim - $d=1$ e passo 5;
- 4 - $|d| < \epsilon$?; sim - fim; não - $d = d/a$; passo 2;
- 5 - Movimento padrão: $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + d*(\underline{x}^k - \underline{x}^{k-1})$;
- 6 - $F(\underline{x}^{k+1}) < F(\underline{x}^k)$?; sim - passo 5; não - passo 4 com $d=d/a$;

B - Gradiente, ou máximo declive (ordem um)

Processo iterativo em que a direcção de pesquisa é dada pela derivada da função no ponto conhecido a que corresponde o valor mais baixo da função. A fórmula iterativa é do tipo:

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + a\mathbf{g}^k$$

A direcção $\mathbf{g}^k$ é definida pelo gradiente da função multiplicado por menos um e a é um escalar que se determina através duma minimização da função F .

O algoritmo pode ser definido por:

- 1 - Definir m , número máximo de iterações, e_1 , parâmetro de convergência global, e e_2 , parâmetro de convergência da pesquisa direccional; $k = 0$.
- 2 - $|\text{grad } F(\underline{x}^k)| < e_1$? ou $k > m$?; Sim - pare.
- 3 - $\underline{d}^k = - \text{grad } F(\underline{x}^k)$; encontrar a de modo a minimizar $F(a) = F(\underline{x}^k + a\underline{d}^k)$.
- 4 - $F(\underline{x}^{k+1}) < F(\underline{x}^k)$?; Não - pare.
- 5 - $|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k| / |\underline{x}^k| < e_2$?; Sim - pare.
- 6 - $k = k + 1$; passo 2.

C - Método de Newton (segunda ordem)

Usando a fórmula de Taylor para exprimir a função $F(\underline{x})$ no ponto $\underline{x}^k$ obtém-se a seguinte expressão:

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}^k) + \text{grad } F(\underline{x}^k)' (\underline{x} - \underline{x}^k) + 0.5(\underline{x} - \underline{x}^k)' \text{grad}^2 F(\underline{x}^k) (\underline{x} - \underline{x}^k)$$

Usando esta fórmula para forçar o próximo ponto $\underline{x}^{k+1}$ se encontre próximo do mínimo o gradiente da aproximação será zero:

$$\text{grad } F(\underline{x}) = \text{grad } F(\underline{x}^k) + \text{grad}^2 F(\underline{x}^k) (\underline{x} - \underline{x}^k) = 0$$

e pode-se concluir que

$$\underline{x} - \underline{x}^k = - \text{grad}^2 F(\underline{x}^k)^{-1} \text{grad } F(\underline{x}^k)$$

A fórmula de recorrência para obter o ponto $\underline{x}^{k+1}$ é dada por:

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \text{grad}^2 F(\underline{x}^k)^{-1} \text{grad } F(\underline{x}^k)$$

3.6. Multivariável com Restrições

Existem sobretudo dois tipos de métodos para a resolução deste tipo de problemas que são os sequenciais e os directos.

Dentro dos métodos sequenciais destacam-se as funções de penalidade e dos multiplicadores de Lagrange. Os métodos das funções de penalidade são extensões dos já descritos para as funções duma só variável. Os métodos baseados nos multiplicadores de Lagrange tentam incluir as condições de optimalidade nos algoritmos de modo a melhorar a eficiência.

O método dos multiplicadores de Lagrange cria uma função L , que combina a metodologia das funções de penalidade com as condições KKT. A função é definida do seguinte modo:

definida do seguinte modo:

$$L(\underline{x}, \underline{u}) = F(\underline{x}) + \text{Soma } [u_j g'_j + R g'^2_j]$$

sendo $g'_j = \max [g_j(\underline{x}), -u_j/(2R)]$ se for desigualdade ou $g'_j = g_j$ e R o parâmetro de penalidade. O método consiste na definição de $\underline{u}$ e R , na minimização da função L , na actualização dos valores de $\underline{u}$ e na repetição do processo até satisfazer qualquer dos parâmetros de convergência.

Exemplo:

$$\text{Min } F(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.a } g(\underline{x}) = x_1 + x_2 - 1 = 0$$

$$L(\underline{x}, \underline{u}) = x_1^2 + x_2^2 + u_1(x_1+x_2-1) + R (x_1+x_2-1)^2$$

Utilizando, por exemplo, a fórmula de actualização para o parâmetro de Lagrange u_1

$$u_1^{k+1} = u_1^k + 2R g'$$

obtem-se a seguinte série de iterações começando com $u_1 = 0$ e $R = 1$:

Iteração	u_1	$x_1 = x_2$	$g(\underline{x})$
1	0.00	0.33	-0.33
2	-0.67	0.44	-0.11
3	-0.89	0.48	-0.04
4	-0.96	0.49	-0.01
5	-0.99	0.50	0.00

$$x_1^* = x_2^* = 0.5$$

O problema está graficamente representado na figura 23.

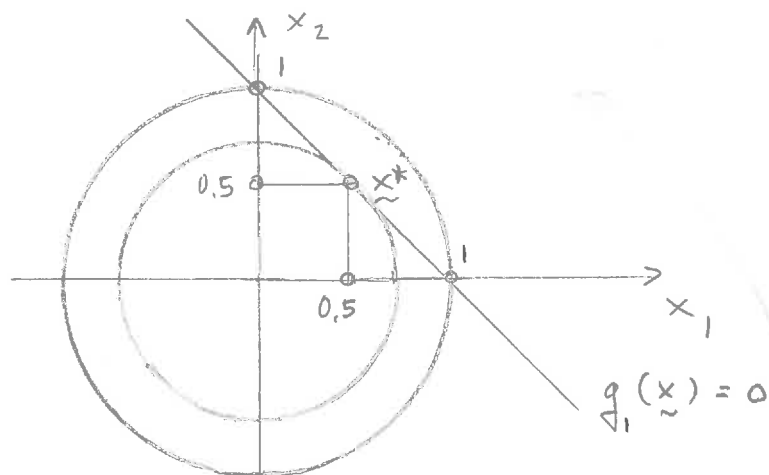


Figura 23.

consiste em linearizar a função objectivo e as restrições utilizando a expansão de Taylor, por exemplo. O passo seguinte é o de resolver este problema linear numa zona junto do ponto de pesquisa. Estes passos são repetidos até existir convergência. O segundo método é uma extensão do método de Newton onde se procede à minimização da função objectivo e à manutenção da admissibilidade da solução simultaneamente. O terceiro é parecido com o segundo mas não utiliza o método de Newton. Sendo este utilizado por programas comerciais disponíveis é aquele que é descrito com maior pormenor.

Este método baseia-se na procura de melhor solução ao longo duma direcção que seja admissível. Pretende-se que a procura seja feita numa região que respeite as restrições próximas do ponto corrente. Assim procura-se encontrar uma direcção de pesquisa que faça um ângulo superior a noventa graus com o gradiente das restrições activas. Utilizando o produto interno, ou escalar, dos vectores das direcções referidas este deverá ser não positivo. Sendo $\underline{d}$ o vector da nova direcção de pesquisa será:

$$\text{grad } g_j(\underline{x}) * \underline{d} \leq 0$$

Por outro lado pretende-se minimizar a função objectivo pelo que $\underline{d}$ deverá satisfazer a inequação:

$$\text{grad } F(\underline{x}) * \underline{d} \leq 0$$

Estas expressões podem ser materializadas no relacionamento gráfico expresso na figura 24. A região admissível para $\underline{d}$ fica assim definida pela intersecção das áreas satisfazendo os dois tipos de produtos internos. Depois de determinada uma direcção que satisfaça as expressões procede-se a uma pesquisa ao longo da mesma repetindo o processo até um parâmetro de convergência ser verificado.

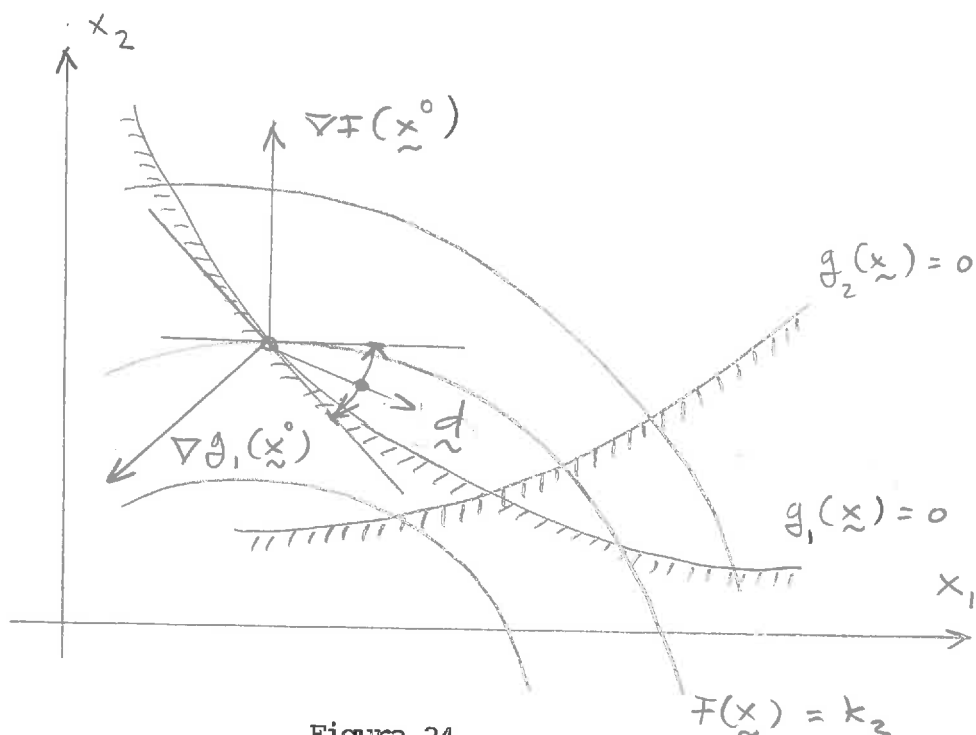


Figura 24.

O algoritmo pode ser composto pelos seguintes passos:

1 - Resolver o problema linear

Max alpha

$$\text{s.a } \text{grad } F(\underline{x}^k) * \underline{d}^k \leq \alpha$$

$$\text{grad } g_j(\underline{x}) * \underline{d} \leq \alpha$$

2 - $\alpha \geq 0$? Sim - pare.

3 - Determine b tal que $F(\underline{x}^k + b \underline{d}^k)$ seja minimo; $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + b \underline{d}^k$.

4 - $b \underline{d}^k / \underline{x}^k < \text{parâmetro convergência ?}$; Sim - pare; Não - passo 1.

4. Teoria da Decisão

4.1. Noções de Engenharia Económica

Este subcapítulo destina-se a apresentar algumas noções que permitam classificar as diferentes alternativas sob o ponto de vista económico. Os empreendimentos em Engenharia Civil são construídas para funcionarem durante muitos anos. Os custos associados são o da construção, operação e manutenção. Como é sabido o valor do dinheiro varia ao longo do tempo. Por isso o engenheiro deve ser capaz de comparar as despesas e lucros, relacionadas com as várias alternativas, numa base equitativa combinando custos actuais e futuros.

Definindo P como valor actual duma quantia, F_n como valor futuro de P ao fim de n períodos e i como a taxa de juro do seguinte modo:

$$i = (F_1 - P)/P$$

Pode-se assim definir VBA, valor bruto actual, como

$$\text{VBA} = F_0 - P \quad \text{e} \quad F_0 = F_1 (1+i)^{-1}$$

Qualquer opção com VBA negativo é economicamente desaconselhável, sendo indiferente quando for zero. Apresentam-se também algumas fórmulas úteis, derivadas destas definições, para comparar alternativas:

$$F_n = P(1+i)^n \quad \text{e} \quad P = F_n (1+i)^{-n}$$

Exemplo: Um determinado investimento com capital inicial de 50 mil contos, um valor futuro de 100 mil contos e uma taxa de 5% pode ser feito ao longo de 5, 10, 15, 20 ou 25 anos. Determine quais as alternativas viáveis usando o VBA.

n	$F_0 = F_n(1+i)^{-n}$	$VBA = F_0 - P$	Decisão
5	78	28	Sim
10	61	11	Sim
15	48	-2	Não
20	38	-12	Não
25	9	-41	Não

Supondo i variável e n 10 anos será:

i	$F_0 = F_n(1+i)^{-n}$	$VBA = F_0 - P$	Decisão
3	74	24	Sim
5	61	11	Sim
10	39	-11	Não
15	25	-25	Não

A escolha da alternativa fica assim dependente dos valores dos benefícios, do capital investido e dos custos de operação e manutenção. O procedimento aconselhado consiste na determinação dos VBA das diferentes alternativas, eliminar as que têm VBA negativo e seleccionar aquela com maior VBA.

A inflação pode contribuir para alterar o VBA. Supondo que a taxa anual de inflação é f teremos ao fim de n anos um valor de P modificado, P_m , dado por:

$$P_m = (1 + f)^n$$

Daqui resulta que o valor F_n será também alterado, F_{m_n} , havendo necessidade de substituir a taxa i por uma taxa de juro real r :

$$F_{m_n} = P (1 + i)^n = P_m (1 + r)^n = P (1 + f)^n (1 + i)^n$$

Então a taxa de juro real pode ser dada por $r = (i - f)/(1 + f)$.

Exemplo: Um bulldozer custa 1000 c e a taxa de juro é 7%. Como o bulldozer novo custa 1500 contos ao fim de 5 anos determine a taxa de inflação e a taxa de juro real.

$$P_m = 1500 = 1000 (1 + f)^5 \implies f = 8.45\%$$

$$r = (0.07 - 0.0845)/(1 + 0.0845) = -1.33\%$$

Efectivamente r é negativo porque $F_5 = 1000 (1 + 0.07)^5 = 1403 < 1500$, assegurando que o investimento não é rentável.

4.2. Incerteza e Decisão

Todos os acontecimentos estudados nos capítulos anteriores têm uma certa

probabilidade de ocorrência. Todas as decisões são tomadas com um risco associado que resulta da incerteza sobre os valores admitidos. Como exemplo pode-se referir o valor da inflação, a fórmula representando a função objectivo, os custos atribuídos, etc. Por isso torna-se conveniente ser capaz de associar conceitos fundamentais da teoria das probabilidades e da estatística para analisar e decidir sobre projectos de engenharia civil aonde o desempenho seja dependente de variáveis com natureza aleatória. Os lucros e custos devem ser considerados juntamente com as respectivas probabilidades de ocorrência.

Na figura 25 indica-se um tipo de gráficos, denominados árvores de decisão, que auxiliam a abordagem destas questões. Há a considerar o nó da decisão, as alternativas, a respectiva probabilidade, os acontecimentos e as consequências. O exemplo apresentado na referida figura refere-se à construção de um edifício com nenhuma, com alguma ou com resistência a sismos. A ocorrência de sismos é um fenómeno aleatório que influencia a decisão. Os significados são os seguintes:

Alternativas

- A - estrutura barata sem resistência a sismos;
- B - estrutura de preço moderado com alguma resistência sísmica;
- C - estrutura mais cara com resistência sísmica;

Acontecimentos

- S_1 - não ocorre sismo significativo;
- S_2 - ocorre sismo significativo;

Consequências (perdas)

- $V(A, S_1)$ - custos nulos;
- $V(A, S_2)$ - perda de vidas e propriedade;
- $V(B, S_1)$ - custo extra da estrutura moderada;
- $V(B, S_2)$ - custo extra da estrutura moderada e de reparações;
- $V(C, S_1)$ - custo extra da estrutura mais cara;
- $V(C, S_2)$ - custo extra da estrutura mais cara;

Verifica-se que a alternativa C não é afectada por qualquer dos acontecimentos naturais.

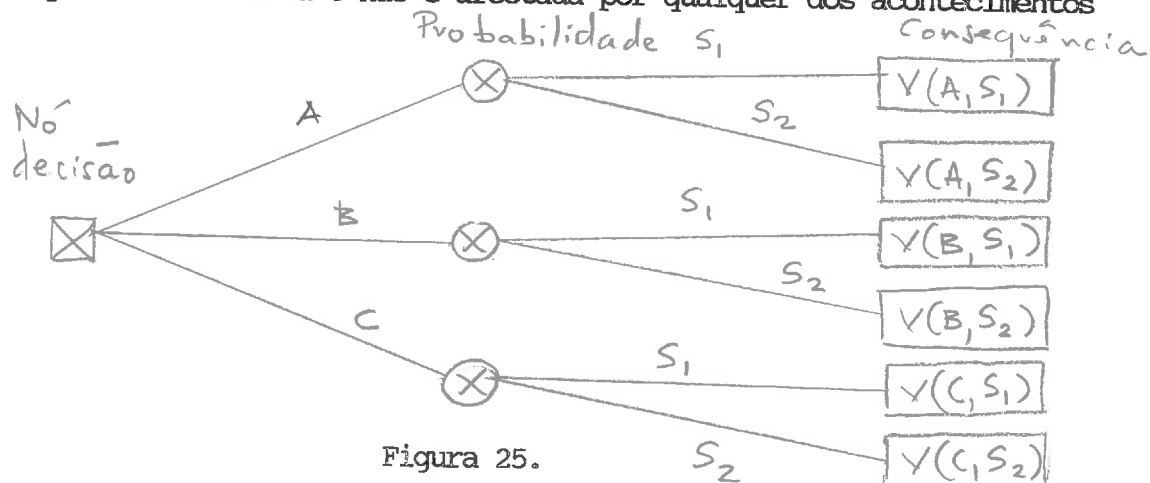


Figura 25.

Para apreciar convenientemente as alternativas há que considerar o conceito do valor monetário esperado, VME. Este é um valor que está associado a cada acontecimento.

Exemplo: O custo da operação dum sistema de ar condicionado, C , é função do respectivo débito diário, x : $C = 2x^{0.8}$. O fluxo diário é constituído por uma lei de distribuição com densidade normal.

$$f_X(x) = 1/5 \quad \text{e} \quad 5 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{dia} \leq x \leq 10 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{dia}$$

$$\text{VME} = E[C] = E[g(x)] = \int_{15}^{10} 2x^{0.8} (1/5) dx = 9.99 \cdot 10^6$$

Propõe-se assim que o procedimento de escolha de alternativas com probabilidades de ocorrência associadas tenha os seguintes passos:

- 1 - Determinar a(s) consequência(s) para cada alternativa, $A, B, \dots$, e para cada acontecimento, $S_1, S_2, \dots$;
- 2 - Determinar a probabilidade de cada acontecimento $S_1, S_2, \dots$;
- 3 - Calcular o valor monetário esperado, VME, de cada alternativa e escolher a decisão com maior utilidade.

Exemplo: Lançando uma moeda o prémio é de 1000 escudos quando acertar na previsão. Cada aposta custa 400 escudos e a escolha é caros. A questão é saber se se deve jogar.

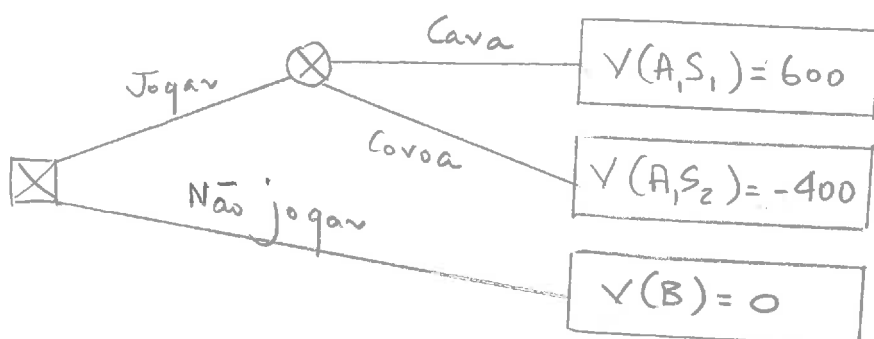


Figura 26.

Observando a árvore de decisão da figura 26 verificam-se os seguintes VMEs:

$$\text{VME}^A = P(S_1) * V(A, S_1) + P(S_2) * V(A, S_2)$$

$$\text{VME}^A = (1/2) (600) + (1/2) (-400) = 100$$

$$\text{VME}^B = 0$$

Como VME^A é superior ao de VME^B é vantajoso jogar. Pode-se associar a noção do valor monetário a de utilidade dum bem ou dum serviço. Outro exemplo da aplicação da teoria das probabilidades à teoria da decisão é a da interpretação de ensaios. Os testes experimentais podem dar um grau de

certeza superior sobre valores usados na tomada de decisões. Suponhamos que associada ao acontecimento S_i existe uma medida Z_j . Então, como S_i é um fenómeno aleatório, existe uma probabilidade, chamada de condicional, que esta medida Z_j corresponda ao estado S_i :

$$P [S_i | Z_j]$$

Exemplo: De modo a reduzir o custo da construção da estacaria dum edificio foram analisados as estacas já executadas na vizinhança da construção a executar. 60% das estacas mostram rocha a 12 metros como se indica na figura 27. Os dados medidos são os seguintes:

Acontecimentos	S_1 - profundidade, $d, \leq 12$ m; S_2 - profundidade, $d > 12$ m;
Medidas	Z_1 - d na zona inspeccionada seja ≤ 12 m; Z_2 - d na zona inspeccionada seja > 12 m;

Probabilidades condicionais verificadas, $P [S_i | Z_j]$

	S_1	S_2
Z_1	0.85	0.10
Z_2	0.15	0.90

Determinar a probabilidade que a rocha esteja a 12 metros ou a menos.

$$P[S_1|Z_1] = P[Z_1|S_1] P[S_1] / P[Z_1]$$

$$P[S_1|Z_1] = P[Z_1|S_1] P[S_1] / (P[Z_1|S_1] P[S_1] + P[Z_1|S_2] P[S_2])$$

$$\text{Como } P[S_2] = 1 - P[S_1] = 1 - 0.60 = 0.40$$

$$P[S_1|Z_1] = (0.85)(0.60)/[(0.85)(0.60)+(0.10)(0.40)] = 0.927$$

4.3. Programação Dinâmica

A programação dinâmica é útil na determinação da sequência de decisões óptima num problema que possa ser decomposto em fases a que estão associadas custos ou benefícios. Estes podem ser determinísticos ou aleatórios. A programação dinâmica é baseada no seguinte princípio de optimalidade, definido por Bellman:

"Uma estratégia óptima tem a propriedade de qualquer que sejam os estados e decisões iniciais, as restantes decisões devem constituir uma estratégia óptima no que respeita ao estado resultante da primeira decisão."

Em cada passo aprecia-se o estado corrente do sistema e, de acordo com a conclusão, opta-se pelo passo seguinte. Os termos e definições relacionados são:

Variáveis de estado, S_n e S'_n - transmitem informações de estado para estado, sendo S_n a variável de entrada do estado n e S'_n a variável de saída sendo $S_n = S'_{n+1}$.

Variável de decisão, d_n - variável que fornece informação ao sistema.

Estado do sistema, n - é o elemento do sistema aonde se dão as transformações de informação de acordo com as equações de projecto. Estas equações relacionam S_n com S'_n . Esta relação de S_n com S'_n é definida pela função de transição:

$$S'_n = T_n (S_n, d_n)$$

O custo associado ao estado n , m_n , mede a contribuição do custo no estado n para o custo total do sistema.

$$m_n = F_n (S_n, d_n)$$

O custo total é dado pela função aditiva

$$M = \text{Soma} (F_n (S_n, d_n))$$

Nos problemas de programação dinâmica pode acontecer que sejam dados o valor inicial dos problema ou o valor final dos problema. Um pode ser transformado no outro com a inversão da direcção das variáveis de estado ou seja o problema pode ser analisado do principio para o fim ou vice versa. Um diagrama tipo da fase n é o indicado na figura 27.

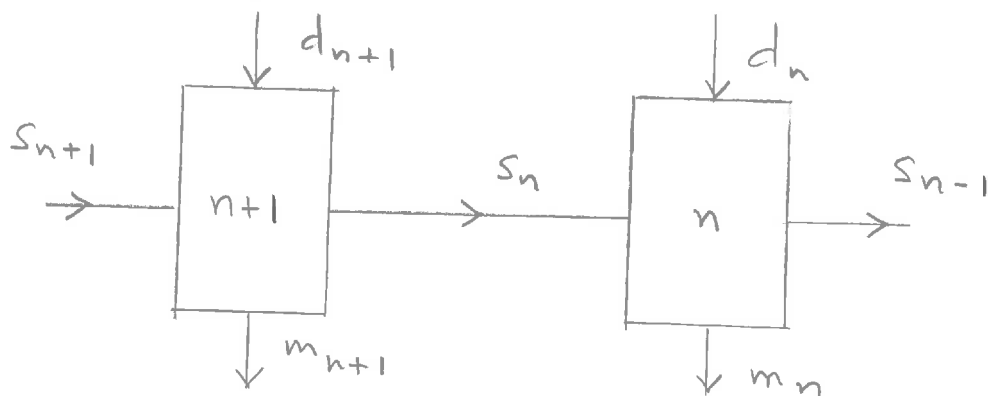


Figura 27.

Exemplo: Um empreiteiro tem 4 máquinas para usar em 3 obras. O lucro obtido em cada uma, em função da máquina utilizada, é dado pelo quadro:

	Número de máquinas empregues				
	0	1	2	3	4
Lucro da obra 1	0	2	5	6	7
Lucro da obra 2	0	1	3	6	7
Lucro da obra 3	0	1	4	5	8

O objectivo é o de determinar como distribuir as máquinas de modo a esperar o máximo lucro:

$$F(S_n) = \max F(S_n, d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Sendo o primeiro estado o de considerar o número de máquinas na obra 3 verifica-se que o lucro máximo é obtido colocando todas as quatro máquinas nesta obra como se mostra pelo lucro em função das decisões possíveis:

$$F^*(S_3) = \max F(S_3, d_1, d_2, d_3)$$

$$d_3(4) = 4 \quad \longleftrightarrow \quad m_3(4) = \max \{0, 1, 4, 5, 8\} = 8$$

$$d_3(3) = 3 \quad \longleftrightarrow \quad m_3(3) = \max \{0, 1, 4, 5\} = 5$$

$$d_3(2) = 2 \quad \longleftrightarrow \quad m_3(2) = \max \{0, 1, 4\} = 4$$

$$d_3(1) = 1 \quad \longleftrightarrow \quad m_3(1) = \max \{0, 1\} = 1$$

$$d_3(0) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad m_3(0) = \max \{0\} = 0$$

d_3 é a decisão tomada em relação à obra 3, (i) é o número de máquinas colocada exclusivamente à disposição da na obra 3, m_3 é o lucro máximo possível com o número de máquinas disponíveis.

Considere-se agora a obra 2 supondo que a obra 1 não teve nenhuma máquina. Sendo x o número de máquinas na obra 2 então para a obra 3 ficarão $4-x$ máquinas. Pode-se calcular o lucro total das obras 2 e 3 sendo a fórmula de recorrência dada por:

$$m_j(S_n) = \max \{F_j(S_n, d_n) + m_{j+1}(S_n, d_n)\}$$

$$d_2(4) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad m_2(4) = \max \{0+8, 1+5, 3+4, 6+1, 7+0\} = 8$$

$$d_2(3) = 3 \quad \longleftrightarrow \quad m_2(3) = \max \{0+5, 1+4, 3+1, 6+0\} = 6$$

$$d_2(2) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad m_2(2) = \max \{0+4, 1+1, 3+0\} = 4$$

$$d_2(1) = 1 \quad \longleftrightarrow \quad m_2(1) = \max \{0+1, 1+0\} = 1$$

$$d_2(0) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad m_2(0) = \max \{0+0\} = 0$$

Quando se considera as máquinas distribuídas pela obra 1 todas as máquinas existentes são empregues nas três obras. Consequentemente $S_n = 4$ e o mapa passa a ser:

$$d_1(4) = 2 \quad \longleftrightarrow \quad m_1(4) = \max \{0+8, 2+6, 5+4, 6+1, 7+0\} = 9$$

O quadro final ilustrativo dos lucros das diferentes opções é dado por:

		Máquinas				
		0	1	2	3	4
m_3		0	1	4	5	8
d_3		0	1	2	3	4
.....						
m_2		0	1	4	6	8
d_3		0	1	0	3	0
.....						
m_1						9
d_1						2

Verifica-se que o lucro máximo é dado por colocar 2 máquinas na obra 1, 0 máquinas na obra 2 e 2 máquinas na obra 3 com um lucro de 9.

4.4. Análise Multicritério

Nalguns problemas de optimização poderão existir mais do que uma função objectivo obrigando a técnicas complementares de análise.

Função ponderada

O modo mais corrente consiste em atribuir diferentes graus de importância a cada uma das funções e analisar uma função objectivo composta pela soma das outras funções depois de multiplicadas por um coeficiente exprimindo o respectivo valor relativo.

Exemplo: Min $F_1(x) = x_1 + x_2$
 Max $F_2(x) = 4x_1 - x_2$
 Min $F_3(x) = 3x_1 + 6x_2$

Pesos $w_1 = 2$ $w_2 = 5$ $w_3 = 3$
 20% 50% 30%

Função composta Min $F(x) = 0.2F_1 - 0.5F_2 + 0.3F_3$

Hierarquização

No caso de ser possível hierarquizar as funções objectivo por ordem de importância poder-se-á utilizar o seguinte método:

- 1 - Ordenar as funções de 1 a k, F_i ;
- 2 - Minimizar F_1 encontrando x_1^* ;
- 3 - Minimizar F_i , $i=2$ a k, com as seguintes restrições adicionais

$F_{j-1} \leq (1 + e_{j-1}) F_{j-1}(x_{j-1}^*)$ com $j = 2$ a i
 em que e_{j-1} representa a variação relativa admitida para a

restrição $j-1$. Estes valores de e_{j-1} deverão ser modificados ao longo da aplicação do algoritmo de modo a fazer face aos respectivos resultados.

Outra técnica utilizada é a min-max. Consiste na definição de funções, $z_i(\underline{x})$, que representam o desvio relativo de cada uma das funções em relação ao óptimo respectivo:

$$e \quad \begin{aligned} z_{a_i}(\underline{x}) &= |F_i(\underline{x}) - F_i^*(\underline{x})| / |F_i^*(\underline{x})| \\ z_{b_i}(\underline{x}) &= |F_i(\underline{x}) - F_i^*(\underline{x})| / |F_i^*(\underline{x})| \end{aligned}$$

O problema original fica assim transformado num outro em que as funções z serão minimizadas. O vector dos incrementos relativos fica definido como

$$z_i(\underline{x}) = \max (z_{a_i}(\underline{x}), z_{b_i}(\underline{x}), i=1,n$$

Um ponto $\underline{x}$ é min-max óptimo se a seguinte fórmula de recorrência for verificada

$$v_1(\underline{x}) = \min \max [z_i(\underline{x})], i=1,n$$

A estratégia do método consiste em, após saber os extremos de cada função separadamente, procurar a solução desejável que corresponde aos valores menores dos incrementos relativos de todas as funções objectivo. Este ponto é o melhor compromisso para todas as funções objectivo consideradas com igual peso.

Exemplo	Optimizar	Min	$F_1(\underline{x}) = x_1 + x_2^2$
		Min	$F_2(\underline{x}) = x_1^2 + x_2$
		s. a	$12 - x_1 - x_2 \geq 0$
			$x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 16x_2 - 80 \geq 0$
			x_1 e x_2 inteiros

Os óptimos de cada subproblema são

$$\begin{aligned} F_1^*(\underline{x}) &= 30 \quad \text{e} \quad \underline{x}^* = [5,5]^t \\ F_2^*(\underline{x}) &= 12 \quad \text{e} \quad \underline{x}^* = [2,8]^t \end{aligned}$$

Os resultados de z_i para todos os valores que satisfazem as restrições são:

$\underline{x}^t$	$\max [z_a, z_b] = z_i$
2,8	$[1.20, 0.00] = 1.20$
3,6	$[0.30, 0.25] = 0.30$
3,7	$[0.73, 0.33] = 0.73$
3,8	$[1.23, 0.42] = 0.42$
3,9	$[1.80, 0.50] = 1.80$
4,6	$[0.33, 0.83] = 0.83$
4,7	$[0.77, 0.92] = 0.92$

4,8	$[1.27, 1.00] = 1.27$
5,5	$[0.00, 1.50] = 1.50$
5,6	$[0.37, 1.58] = 1.58$
5,7	$[0.80, 1.67] = 1.67$
6,6	$[0.40, 2.50] = 2.50$

A solução de compromisso que minimiza os máximos desvios é (3,6) para a qual $F_1 = 39$ e $F_2 = 15$ com $z_a = 0.30$ e $z_b = 0.25$. A interpretação gráfica pode ser apreciada na figura 28.

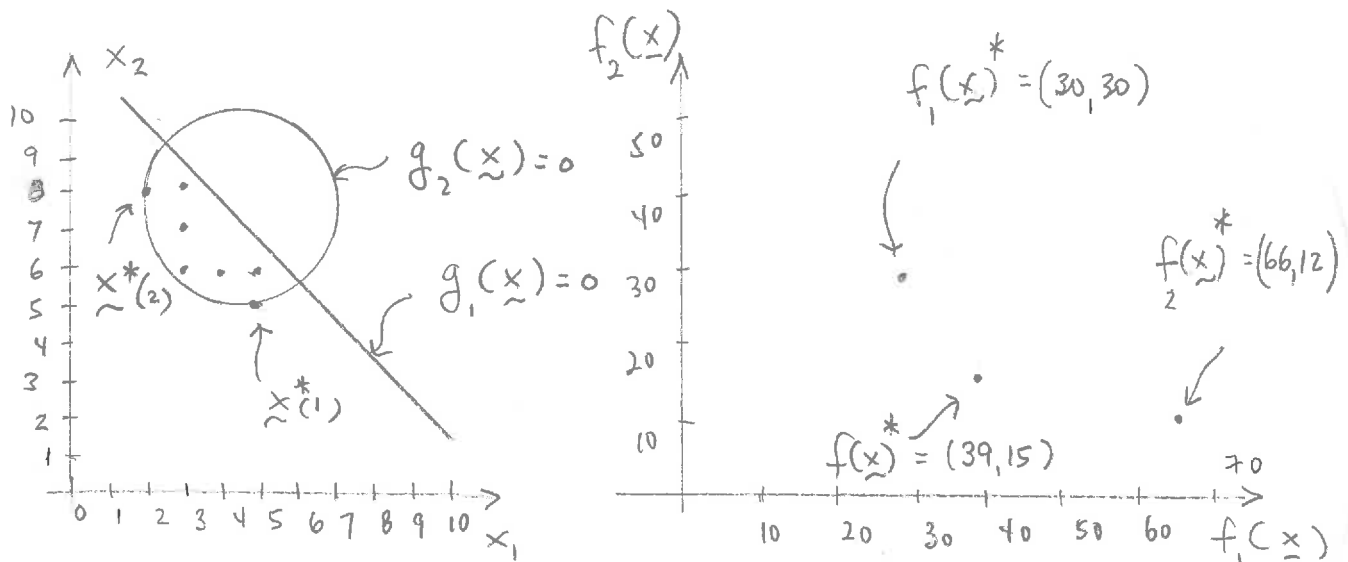


Figura 28.

Bibliografia

- 1 - Notas das aulas dos cursos de pós-graduação "Linear Programming", "Nonlinear Programming", "Computer Aided Design and Optimization", "Structural Optimization" e "Operations Research and Management" lecionadas respectivamente pelos Prof. H. Hammacher, D. Hearn, G. Sandor, P. Hajela e Z. Herbsman da U. Florida, EUA.
- 2 - "Optimização Linear e Não Linear", V. Tavares e N. Correia, Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.
- 3 - "Operations Research", R. Bronson, McGraw-Hill, 1982.
- 4 - "Optimum Design", J. Arora, McGraw-Hill, 1989.
- 5 - "Systems Engineering and Analysis", B. Blanchard e W. Fabrycky, Prentice-Hall, 1990.
- 6 - "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design", G. Vanderplaats, McGraw-Hill, 1984.
- 7 - "Engineering Optimization", G. Reklaitis, A. Ravindran e K. Ragsdell, John Wiley and Sons, 1983.
- 8 - "Optimization of Engineering Processes", T. Edgar e D. Himmelblau, McGraw-Hill, 1989.
- 9 - "Cost and Optimization", F. Jelen e J. Black, McGraw-Hill, 1983.
- 10 - "Nonlinear and Dynamic Programming", G. Hadley, Addison-Wesley, 1964.
- 11 - "Combinatorial Optimization", C. Papadimitriou e K. Steiglitz, Prentice-Hall, 1982.