



Compreensão e mobilização das operações combinatórias na resolução e formulação de problemas

Mário André Pais Monteiro

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada apresentado à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em Ensino de Matemática 2021

MSC

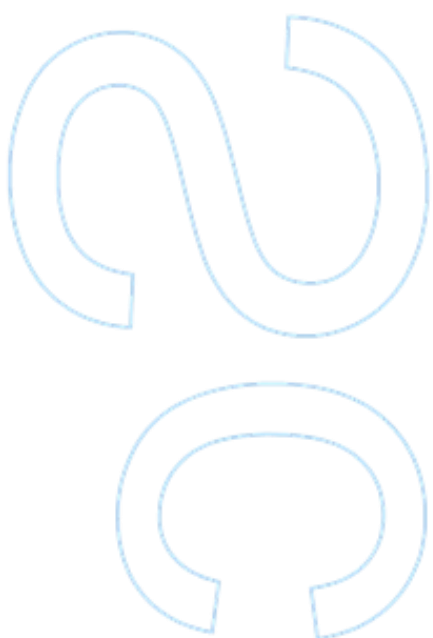
2º
CICLO

FCUP
2021

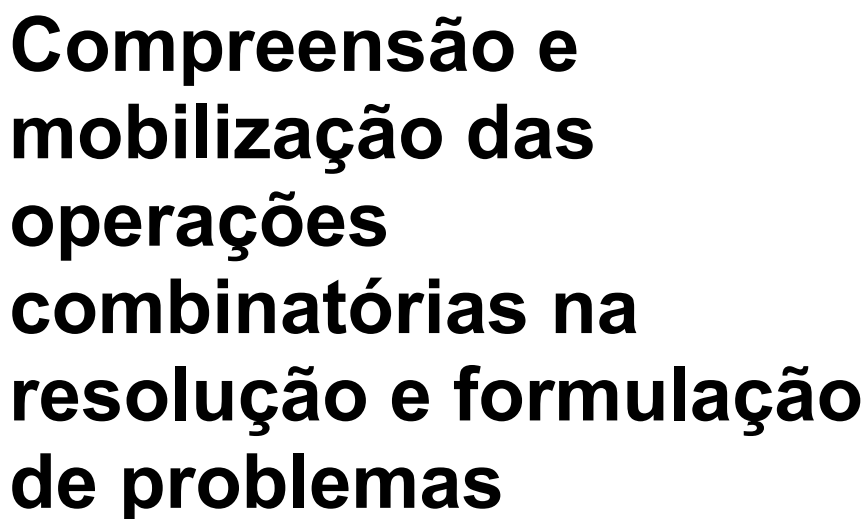


Compreensão e mobilização das operações combinatórias na resolução e formulação de problemas

Mário André Pais Monteiro

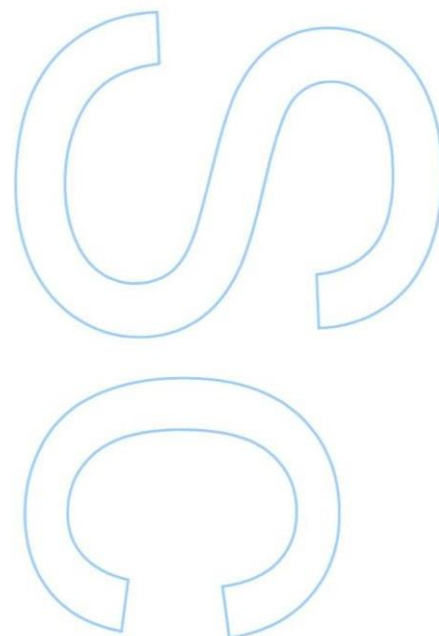


Fernando Yorge S. Moran



Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico
e no Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
2021

Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira, Professora Auxiliar,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto



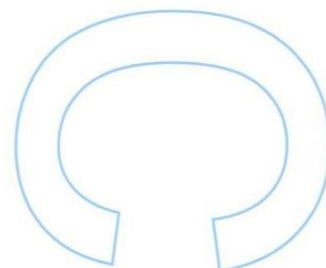
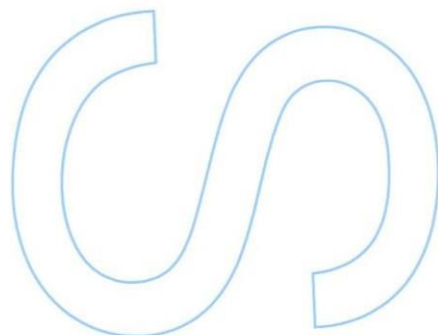
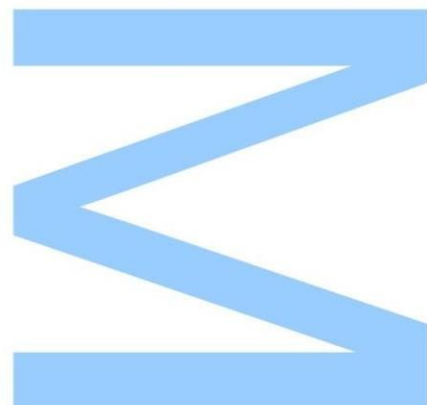
“A matemática, quando a compreendemos bem,
possui não somente a verdade, mas também a
suprema beleza”

Bertrand Russel

Todas as correções determinadas
pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ____ / ____ / ____



Agradecimentos

À Professora Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira (FCUP) e à minha orientadora de estágio da Escola Secundária, pela disponibilidade e ajuda, pelo esclarecimento de dúvidas no trabalho a realizar, pelas sugestões e críticas apresentadas ao longo do ano, as quais me farão crescer como docente.

À minha colega de estágio pela amizade e apoio, nomeadamente na paciência que demonstrou, nos momentos mais esgotantes de trabalho, quando senti necessidade de “desabafar”.

Aos alunos, turma do 10º e do 12º ano, que me fizeram sentir bem nesta primeira experiência de lecionação.

A todos os que têm partilhado a minha vida, ao longo dos muitos anos de aprendizagem, com a sua amizade, os seus conselhos e alguns “puxões de orelhas”.

Aos meus pais, irmã e padrinhos pelo apoio incondicional.

Resumo

O presente relatório, elaborado no âmbito da unidade curricular de Iniciação à Prática Profissional, tem por base um estudo desenvolvido numa turma de 12º ano de escolaridade, de Matemática A, na unidade de ensino de Introdução ao Cálculo Combinatório. Este estudo teve como objetivo compreender como entendem os alunos as operações combinatórias e as mobilizam na resolução e formulação de problemas, alicerçando-se em três questões de investigação: 1) Como é que os alunos resolvem intuitivamente problemas simples de contagem? 2) Como entendem e aplicam as operações combinatórias na resolução de problemas? e 3) Como entendem e aplicam as operações combinatórias na formulação de problemas?

A intervenção pedagógica em que se baseou o estudo, que decorreu totalmente à distância devido à crise pandémica que se viveu à data de realização do estudo, começou por desafiar os alunos a resolver problemas de contagem de forma intuitiva, antes de serem apresentados os Princípios Fundamentais de Contagem, conceitos chave na unidade didática de Cálculo Combinatório. A intervenção assentou em atividades de resolução e formulação de problemas e também numa abordagem de ensino de natureza exploratória, privilegiando o trabalho colaborativo e as discussões coletivas.

O estudo adotou uma metodologia qualitativa com uma abordagem interpretativa, recorrendo a notas de campo, à recolha de produções escritas elaboradas pelos alunos em todas as tarefas propostas ao longo da intervenção pedagógica (nomeadamente, as relativas a operações combinatórias, resolução e formulação de problemas) e à gravação em áudio de uma aula.

Os resultados da análise sugerem que as atividades de resolução de problemas, que caracterizaram toda a intervenção pedagógica, ajudaram os alunos a atribuir significado aos conceitos centrais da unidade de ensino de Cálculo Combinatório. Por exemplo, os alunos foram capazes de formular problemas para expressões combinatórias dadas, evidenciando compreensão das situações em que cada uma se aplica. A abordagem de ensino escolhida, de natureza exploratória, favoreceu a partilha de ideias entre alunos e a construção de significados.

Palavras-Chave: Cálculo Combinatório, Resolução de Problemas, Operações Combinatórias, Formulação de Problemas.

Abstract

This report, elaborated in the scope of the Introduction to Professional Practice curricular unit, is based on a study developed in a 12th grade class, Mathematics A, in the teaching unit of Introduction to Combinatory Calculus. The goal of the study is to understand how students perceive combinatorial operations and use them in problem solving and problem posing activities. The study is based on three research questions: 1) How do students intuitively solve simple counting problems? 2) How do they understand and apply combinatorial operations in problem-solving? and 3) How do they understand and apply combinatorial operations in problem posing?

The educational intervention on which the study was based, which took place entirely at a distance due to the pandemic crisis that took place at the time the study was carried out, began by challenging students to solve simple counting problems in an intuitive way, before the Counting Fundamental Principles (which are key concepts in the didactic unit of Combinatorial Calculus) were presented. This intervention was based on problem-solving and problem-posing activities as well as on an exploratory educational approach, favoring collaborative work and collective discussions.

The present study adopted a qualitative methodology with an interpretive approach, using field notes, students' written productions on all tasks proposed throughout the educational intervention (namely those related to combinatorial operations, problem-solving, and problem-posing), and audio recording of a class.

Data analysis suggests that the problem-solving activities, which characterized the entire educational intervention, helped students to assign meaning to the core concepts of the Combinatorial Calculus teaching unit. For example, students were able to formulate problems for given combinatorial expressions, showing an understanding of the situations for which each one applies. The chosen education approach, of an exploratory nature, favored the sharing of ideas among students and the construction of shared meanings.

Keywords: Combinatorics, Problem Solving, Combinatorial Operations, Problem Posing.

Índice

CAPÍTULO 1: Introdução.....	1
CAPÍTULO 2: Enquadramento teórico.....	4
2.1. Compreensão em Matemática – algumas abordagens.....	4
2.2. Resolução e formulação de problemas.....	8
CAPÍTULO 3: Intervenção pedagógica.....	14
3.1. Contexto escolar.....	14
3.2. Ancoragem curricular da intervenção pedagógica	16
3.3. Descrição sumária da intervenção pedagógica.....	17
CAPÍTULO 4: Métodos e procedimentos de recolha de dados.....	33
CAPÍTULO 5: Análise de dados.....	37
5.1. Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução intuitiva de problemas simples de contagem.....	37
5.1.1. Problema 1.....	37
5.1.2. Problema 2.....	44
5.1.3. Problema 3.....	50
5.2. Compreensão e mobilização das operações combinatórias na resolução de problemas.....	57
5.2.1. Custo das apostas (Arranjos sem repetição).....	57
5.2.2. Formar grupos (Combinações).....	60
5.2.3. Mensagens Codificadas (Permutações).....	62
5.2.4. Códigos de um cartão de multibanco (Arranjos com repetição).....	69
5.3. Compreensão e mobilização das operações combinatórias na formulação de problemas.....	72
CAPÍTULO 6: Conclusões.....	82
6.1. Síntese do estudo.....	82
6.2. Principais Conclusões.....	83
6.2.1. Como é que os alunos resolvem intuitivamente problemas simples de contagem?.....	85
6.2.2. Como entendem e aplicam as operações combinatórias na resolução de problemas?.....	86
6.2.3. Como entendem e aplicam as operações combinatórias na formulação de problemas?.....	88
6.3. Reflexão Final.....	90
Referências Bibliográficas.....	93
Anexos.....	97

Índice de Figuras

Figura 1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura. (Ponte, 2005, p. 18).....	8
Figura 2 – Dificuldades na resolução de problemas de Cálculo Combinatório (retirado de Carvalho, 2009, p. 27).....	11
Figura 3 – Diapositivo 3 da apresentação – Google Slides.....	21
Figura 4 – Respostas dadas pelos alunos, no Pear Deck, a cada um dos problemas de contagem.....	22
Figura 5 – Problema de Arranjos com repetição.....	25
Figura 6 – Problema sobre Partes de um conjunto.....	26
Figura 7 – Problema de Permutações.....	26
Figura 8 – Problema de Arranjos sem repetição.....	27
Figura 9 – Problema sobre Combinações.....	28
Figura 10 - Enunciado do problema 1.....	37
Figura 11 – Resolução do problema 1, com a utilização do diagrama de árvore completo.....	38
Figura 12 – Resoluções do problema 1, com diagrama de árvore incompleto e modelação da situação por um produto de três fatores iguais a 4.....	39
Figura 13 – Resoluções do problema 1, com início num diagrama de árvore e reconhecimento de um padrão.....	40
Figura 14 – Resoluções do problema 1, com enumeração dos casos possíveis, escrevendo os números por ordem crescente.....	40
Figura 15 – Resoluções do problema 1, com enumeração de alguns casos possíveis.....	41
Figura 16 – Resolução do problema 1, com enumeração e reconhecimento de um padrão.....	42
Figura 17 – Resolução do problema 1, com enumeração não sistemática.....	42
Figura 18 – Resoluções do problema 1, com início numa enumeração e reconhecimento de um padrão.....	43
Figura 19 – Resolução do problema 1, utilizando uma tabela de dupla entrada.....	43
Figura 20 – Resolução do problema 1, utilizando uma tabela de “tripla” entrada.....	44
Figura 21 – Resolução do problema 1, eventualmente utilizando o Princípio Geral da Multiplicação.....	44
Figura 22 – Enunciado do problema 2.....	44

Figura 23 – Resolução do problema 2, com enumeração de todos os casos possíveis.....	45
Figura 24 – Resoluções do problema 2, com início numa enumeração e reconhecimento de um padrão.....	46
Figura 25 – Resoluções do problema 2, utilizando uma tabela de dupla entrada.....	47
Figura 26 – Resolução do problema 2, com início num diagrama de árvore e reconhecimento de um padrão.....	48
Figura 27 – Resoluções do problema 2, explicando o seu raciocínio por palavras/cálculos numéricos.....	49
Figura 28 – Resoluções do problema 2, cometendo o erro de repetição (A) e multiplicação apenas do número de livros de cada autor (B).....	50
Figura 29 – Enunciado do problema 3.....	50
Figura 30 – Resolução do problema 3, enumerando todas as comissões possíveis...51	
Figura 31 – Resoluções do problema 3, com início numa enumeração e modelando a situação por um produto de três fatores distintos (A) ou reconhecendo um padrão (B).....	52
Figura 32 – Resolução do problema 3, com recurso à enumeração de algumas comissões e reconhecimento de um padrão.....	53
Figura 33 – Resoluções do problema 3, com enumeração incompleta.....	54
Figura 34 – Resoluções do problema 3, com início num diagrama de árvore e reconhecendo um padrão (A) ou modelando a situação por um produto de três fatores distintos (B).....	54
Figura 35 – Resoluções do problema 3, utilizando uma tabela de dupla entrada com interpretação errada do problema.....	55
Figura 36 – Resoluções do problema 3, utilizando Cálculos numéricos, acompanhados por uma explicação (A) ou sem explicação (B).....	56
Figura 37 – Resolução do problema 3, utilizando o Princípio Geral da Multiplicação...56	
Figura 38 – Enunciado do problema de arranjos com repetição.....	57
Figura 39 – Resoluções do problema de arranjos sem repetição.....	58
Figura 40 – Resolução do problema de arranjos sem repetição, cometendo o erro de ordem.....	59
Figura 41 – Resolução do problema de arranjos sem repetição, com estimativa do resultado final.....	60
Figura 42 – Enunciado do problema de combinações.....	60
Figura 43 – Resoluções do problema de combinações.....	61
Figura 44 – Enunciado do problema de permutações.....	62
Figura 45 – Resoluções da alínea a) do problema de permutações escrevendo apenas	

4! ou $4 \times 3 \times 2 \times 1$	63
Figura 46 – Resolução da alínea a) do problema de permutações, utilizando a enumeração de algumas possibilidades.....	63
Figura 47 – Resoluções da alínea a) do problema de permutações, representando as seis possibilidades de colocação dos dígitos e das letras.....	64
Figura 48 – Resolução da alínea a) do problema de permutações, representando duas das seis possibilidades de colocação dos dígitos e das letras.....	65
Figura 49 – Resolução da alínea a) do problema de permutações, com raciocínio incompreensível.....	65
Figura 50 – Resoluções da alínea b) do problema de permutações, com erro de interpretação (A), leitura incorreta (B) e resposta incompreensível (C).....	66
Figura 51 – Resolução da alínea b) do problema de permutações, utilizando uma operação combinatória alternativa.....	67
Figura 52 – Resoluções da alínea b) do problema de permutações, com raciocínio incompreensível.....	67
Figura 53 – Resoluções da alínea b) do problema de permutações, representando possibilidades de colocação dos dígitos e das letras.....	68
Figura 54 – Resolução da alínea b) do problema de permutações, representando todas as possibilidades de colocação das letras.....	68
Figura 55 – Resolução da alínea b) do problema de permutações, com erro de repetição.....	69
Figura 56 – Resolução da alínea b) do problema de permutações, apresentando apenas uma estimativa subjetiva.....	69
Figura 57 – Enunciado do problema de arranjos com repetição.....	69
Figura 58 – Resolução da alínea a) do problema de arranjos com repetição.....	70
Figura 59 – Resolução da alínea a) do problema de arranjos com repetição, retirando a todos os casos possíveis os que têm algarismos consecutivos iguais.....	71
Figura 60 – Resoluções da alínea b) do problema de arranjos com repetição.....	72
Figura 61 – Resolução da alínea b) do problema de arranjos com repetição, retirando a todos os casos possíveis os que têm o primeiro e o último algarismos iguais.....	72
Figura 62 – Expressões combinatórias fornecidas a cada um dos grupos.....	73
Figura 63 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 2.....	74
Figura 64 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 1.....	75
Figura 65 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 3.....	77
Figura 66 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 4.....	79
Figura 67 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 5.....	80
Figura 68 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 6.....	81

Índice de Quadros

Quadro 1 – Algumas particularidades do grupo turma.....	15
Quadro 2 – Planificação do tema Introdução ao Cálculo Combinatório.....	17
Quadro 3 – Relação entre questões de investigação, instrumentos de recolha de dados e procedimentos de recolha dos mesmos.....	35
Quadro 4 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema 1 e número dos que atingiram ou não o resultado final correto.....	38
Quadro 5 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema 2 e número dos que atingiram ou não o resultado final correto.....	45
Quadro 6 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema 3 e número dos que atingiram ou não o resultado final correto.....	51
Quadro 7 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema de arranjos sem repetição e número de alunos que identificaram ou não essa operação combinatória.....	58
Quadro 8 – Estratégia utilizada pelos alunos na resolução do problema de combinações e número de alunos que identificaram ou não essa operação combinatória.....	60
Quadro 9 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da alínea a) do problema de permutações e número de alunos que chegaram ou não à resposta correta.....	62
Quadro 10 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da alínea b) do problema de permutações e número de alunos que chegaram ou não à resposta correta.....	66
Quadro 11 – Estratégia utilizada pelos alunos na resolução da alínea a) do problema de arranjos com repetição e número de alunos que chegaram ou não à resposta correta.....	70
Quadro 12 – Estratégia utilizada pelos alunos na resolução da alínea b) do problema de arranjos com repetição e número de alunos que chegaram ou não à resposta correta.....	71

Índice de Anexos

Anexo A – Exercícios do Manual sobre os Princípios Fundamentais de Contagem....	97
Anexo B – Ficha de trabalho nº 20 sobre os Princípios Fundamentais de Contagem.....	99
Anexo C – Trabalho de grupo, 2ª aula de Cálculo Combinatório: Resolução de problemas de contagem.....	101
Anexo D – Verificação de Aprendizagens 1.....	103
Anexo E – Ficha de trabalho nº 21 – Cálculo Combinatório: Arranjos com repetição e Permutações.....	104
Anexo F – Exercícios 35, 36, 37 e 38 do Manual sobre manipulação de fatoriais.....	106
Anexo G – Exercícios sobre Arranjos sem repetição.....	107
Anexo H – Verificação de Aprendizagens 2.....	108
Anexo I – Ficha de trabalho nº 22 – Cálculo Combinatório: Combinações.....	109
Anexo J – Exercícios sobre Combinações.....	113
Anexo K – Problemas 51 e 53 do Manual sobre Combinações.....	114
Anexo L – Verificação de Aprendizagens 3.....	115
Anexo M – Ficha de trabalho nº 23 – Problemas com diferentes operações combinatórias.....	116
Anexo N – Exemplos de enunciados de problemas para determinadas expressões combinatórias.....	117
Anexo O – Plano de Aula nº 1.....	118
Anexo P – Plano de Aula nº 2.....	121
Anexo Q – Plano de Aula nº 3.....	124
Anexo R – Pedido de autorização aos Encarregados de educação.....	128

Lista de Abreviaturas

CC – Cálculo Combinatório
E@D – Ensino à distância

CAPÍTULO 1 – Introdução

O presente relatório foi elaborado no âmbito da unidade curricular de Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada, integrada no plano de estudos do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do ensino básico e no ensino secundário. Por uma questão de facilidade de linguagem, usarei o termo “estágio” para me referir a esta experiência de formação profissional. O estágio decorreu ao longo do ano letivo de 2020/2021, numa Escola Secundária do Norte de Portugal, na região metropolitana do Porto. O núcleo de estágio, para além de mim, integrou apenas mais uma colega, com a orientação científica a cargo da Professora Rosa Antónia Tomás Ferreira.

No âmbito do estágio, o trabalho realizado compreendeu a componente de lecionação, realizada em duas turmas de Matemática A, uma do 10º ano e outra do 12º, ambas do curso de Ciências e Tecnologias, e a componente investigativa, que decorreu ao longo de nove aulas na turma de 12º ano, em regime online, na unidade didática Introdução ao Cálculo Combinatório. Este relatório diz respeito à componente investigativa do meu estágio.

A escolha do tema para a realização da investigação relatada neste texto prendeu-se com condicionalismos a nível da calendarização da implementação do projeto de investigação, que ficou concluído em janeiro de 2021. Por este motivo, os procedimentos de recolha de dados só poderiam ser realizados no início de fevereiro, altura em que os temas lecionados foram: no 10º ano – Generalidade de Funções e no 12º ano – Introdução ao Cálculo Combinatório. Optei por realizar o trabalho de investigação sobre o tema do Cálculo Combinatório (CC) por três motivos, explanados a seguir:

- Pela sua importância para o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos (Correia & Fernandes, 2007), por se aplicar “nas mais variadas áreas científicas, e porque as estratégias gerais, não sendo apenas aplicáveis à Combinatória, relevam o papel que a Combinatória pode desempenhar na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas” (p. 1256). A importância do ensino-aprendizagem do Cálculo Combinatório está bem documentada na literatura em Educação Matemática (e.g., Batanero et al., 1997; English, 2005; NCTM, 2007; Lockwood, 2013).
- Permite trabalhar algumas áreas de competências do *Perfil dos alunos à saída*

da escolaridade obrigatória (Martins et al., 2017), nomeadamente: (a) Linguagens e textos; (b) Informação e comunicação; (c) Raciocínio e resolução de problemas; (d) Pensamento crítico e pensamento criativo e (e) Saber científico, técnico e tecnológico;

– O ensino deste tema é um desafio didático face às dificuldades que muitos alunos apresentam quando resolvem problemas sobre o mesmo e até alguns professores as manifestam na sua leção (e.g., Batanero et al., 1997; English, 2005; Lockwood, 2013; Lima & Freitas, 2014).

De acordo com o *Programa e metas curriculares – Matemática A* (Ministério da Educação, 2015), o Cálculo Combinatório dedica-se à “realização eficiente de contagens. Começa-se por estabelecer algumas propriedades das operações sobre conjuntos e, em seguida, estudam-se progressivamente arranjos, com ou sem repetição, permutações e combinações, o que permite, em situações muito distintas, efetuar contagens de forma expedita” (p. 21). Porque é que muitos alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas de CC? Porque é que alguns professores têm dificuldade em ensinar o tema de CC? Estas questões levaram muito autores a defenderem a necessidade de estudar os processos de ensino e aprendizagem de CC. Investigações sobre o porquê da manifestação dessas dificuldades são muito importantes para que se possa melhorar este quadro de dificuldades.

Um dos tópicos programáticos da disciplina de Matemática A do 12º ano diz respeito à compreensão das operações combinatórias (arranjos com e sem repetição, permutações e combinações) e à sua mobilização para a resolução de problemas. Assim, achei importante desenvolver um estudo com o objetivo de compreender como entendem os alunos as operações combinatórias e as mobilizam na resolução e formulação de problemas. Compreender como os alunos pensam em termos combinatórios é essencial para poder ir ao encontro das suas dificuldades e ajudá-los na sua superação.

Mas a formulação de problemas é também um processo importante na formação matemática dos alunos (e.g., Singer et al., 2015). Em estreita ligação com a resolução de problemas, a formulação de problemas “contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução” (Boavida et al., 2008, p. 27). Deste modo, entendi fazer sentido contemplar a formulação de problemas no estudo que desenvolvi.

Para orientar o meu estudo, foram geradas três questões de investigação: 1) Como é que os alunos resolvem intuitivamente problemas simples de contagem? 2) Como

entendem e aplicam as operações combinatórias na resolução de problemas? 3) Como entendem e aplicam as operações combinatórias na formulação de problemas?

Com base nestas questões, foi construída uma intervenção pedagógica assente na criação de tarefas de aprendizagem nas quais os alunos foram envolvidos, individualmente ou em trabalho colaborativo, apelando ao uso da linguagem matemática para justificar e explicar as estratégias e os raciocínios utilizados. A metodologia de ensino contemplou a resolução de problemas e formulação de problemas, começando por desafiar os alunos a resolver problemas de contagem de forma intuitiva, antes de serem apresentados os Princípios Fundamentais de Contagem, um conceito central na unidade didática de Introdução ao Cálculo Combinatório. Tal como descrito mais à frente neste trabalho, a intervenção pedagógica privilegiou o trabalho colaborativo e as discussões coletivas.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. Neste primeiro capítulo faz-se uma introdução à temática que norteou a investigação realizada. No segundo capítulo apresentam-se os aspetos de natureza teórica relacionados com os vários temas associados à problemática de investigação e às orientações curriculares referentes ao tópico de ensino. No capítulo três apresenta-se uma breve caracterização do contexto escolar, a ancoragem curricular da intervenção pedagógica, os recursos e estratégias de ensino utilizadas e descrevem-se as tarefas propostas. No capítulo quatro descrevem-se as opções metodológicas tomadas para a realização deste trabalho de investigação, os métodos e procedimentos de recolha de dados e o processo de análise dos mesmos. O capítulo cinco consiste na análise dos dados recolhidos. No capítulo seis encontra-se uma síntese do estudo realizado, as suas conclusões e uma reflexão final relativamente à intervenção pedagógica realizada e à globalidade do estudo.

CAPÍTULO 2 – Enquadramento teórico

Com base em literatura de referência sobre o ensino e a aprendizagem do cálculo combinatório, assim como nas orientações curriculares que vigoravam no Sistema Educativo Português à data de realização deste trabalho, este capítulo presta-se a fornecer um enquadramento teórico que fundamenta a investigação realizada.

Investigar pode ter muitos significados, dependendo do contexto, mas implica trabalhar a partir de questões, que são colocadas perante um determinado objetivo de estudo, que gostaríamos de ver esclarecidas ou ainda “uma forma de validar ou refutar conhecimento existente” (Morais, 2013, p. 2). João Pedro da Ponte (2003) no seu artigo *Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal*, refere que “realizamos uma investigação quando formulamos as nossas próprias questões e procuramos responder-lhes, de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso” (p. 94).

Na área do ensino da Matemática já foram concretizados vários projetos de investigação, nomeadamente no tema Introdução ao Cálculo Combinatório (e.g., Silva, Fernandes & Soares, 2004; Mota & Ferreira, 2018; Correia, Fernandes & Guzmán, 2010; Carvalho, 2009). Contudo, investigações sobre os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo Combinatório são necessários (e.g., Mota & Ferreira, 2018), dado ser um tema que muitos autores defendem ser difícil, e alguns referem mesmo que uma das causas para essa dificuldade possa ser a sua não lecionação, em Portugal, antes do 12º ano de escolaridade (Silva et al., 2004). Segundo Correia e Fernandes (2007), deveria ser dada mais ênfase a este tema no currículo escolar devido à “importância que lhe é atribuída para o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos” (p. 1256).

2.1. Compreensão em Matemática – algumas abordagens

Os desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar, ao longo de todo o seu percurso escolar na disciplina de Matemática A, devem concorrer, entre outros, para a aquisição de: 1) Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos; 2) Construção e desenvolvimento do raciocínio matemático; 3) Resolução de problemas e 4) Comunicação Matemática (Ministério da Educação, 2015). O conhecimento de factos, conceitos e procedimentos permite mais facilmente resolver tarefas que não exijam funções cognitivas superiores.

No TIMSS-Advanced¹, relativamente ao domínio cognitivo «Knowing», considera-se que os factos e propriedades elementares constituem, em conjunto, a linguagem básica da Matemática e a própria fundação do pensamento matemático, devendo o aluno ser capaz de os recordar de forma automática e sistemática. (Ministério da Educação, 2015, p. 6)

Mas, saber matemática envolve mais do que o conhecimento de factos e propriedades elementares. Saber matemática envolve desenvolver uma compreensão relacional desta área de conhecimento, no sentido de Skemp (1978). Vários autores se têm debruçado sobre o significado do termo compreensão procurando explicar como é que o conhecimento em Matemática é ou pode ser construído. Segundo Richard Skemp (1978), podem ser considerados dois significados para compreensão: *compreensão relacional* e a *compreensão instrumental*.

A compreensão instrumental diz respeito à aquisição de regras ou métodos e à capacidade de as usar na resolução de problemas. É privilegiado o saber como sem saber porquê. O objectivo é procurar uma regra que permita dar uma resposta satisfatória para o problema. A compreensão relacional baseia-se em princípios que têm uma aplicação mais geral. Assenta no princípio de saber, ao mesmo tempo, o como e porquê, permitindo não só perceber o método que funciona e porquê, como ajuda a relacioná-lo com o problema e possibilita a sua adaptação para a resolução de novos problemas. (Domingos, 2003, p. 14)

Skemp (2015) refere que:

O tipo de aprendizagem que leva à Matemática instrumental consiste na aprendizagem de um crescente número de planos, pelos quais os alunos podem encontrar o seu caminho de pontos de partida particulares (os dados) até aos pontos de chegada requisitados (as respostas às questões). O plano diz-lhes o que fazer em cada etapa [...] Não há consciência da relação geral entre as etapas sucessivas e o objetivo final. E em ambos os casos quem aprende está dependente de orientação externa para aprender cada nova «maneira de chegar lá». Em contraste, a aprendizagem da Matemática relacional consiste em construir uma estrutura conceptual (esquema) com a qual quem a possui pode (em

¹ O TIMSS-Advanced (Trends in International Mathematics and Science Study) é um programa de avaliação internacional cujo objetivo é estudar os resultados obtidos pelos alunos que se encontram no final do Ensino Secundário nas disciplinas de Física e Matemática, em modalidades destinadas ao prosseguimento de estudos em áreas de ciências e tecnologias. Na definição e estruturação dos domínios cognitivos e de conteúdos a avaliar, o TIMSS-Advanced envolve todos os países participantes num processo colaborativo que passa por uma muito completa descrição dos tópicos e conteúdos dos currículos de Matemática e de Física desses países. No que se refere à Matemática, os domínios dos conteúdos são a Álgebra, o Cálculo e a Geometria, e das capacidades cognitivas são o Conhecimento, a Aplicação e o Raciocínio. (Ministério da Educação, 2015)

princípio) produzir um número ilimitado de planos para chegar de qualquer ponto de partida, dentro do seu esquema, até qualquer ponto de chegada. (Eu digo «em princípio» porque está claro que alguns destes caminhos vão ser muito mais difíceis de construir que outros). (pp. 28-27)

António Domingos (2003, pp. 14-15) refere que “Herscovics e Bergeron (1984) apresentam um modelo composto por quatro modos de compreensão: *intuitiva*, *de procedimentos*, *abstração matemática* e *formalização*” (p. 14) e afirma que a abordagem destes dois autores “engloba algumas das principais características que estão presentes na conceção dos objetos matemáticos², desde os mais elementares até aos mais avançados e propõe uma visão mais aprofundada que a de Skemp” (Domingos, p. 15). Assim,

A compreensão intuitiva refere-se a um conhecimento matemático informal caracterizado por se basear em pré-conceitos (por exemplo, superfície é um pré-conceito de área), na perceção visual ou em ações não quantificadas (por exemplo, acrescentar a –adding to– e juntar –joining– são ações que mais tarde serão associadas com a adição aritmética). A compreensão de procedimentos refere-se à aquisição de procedimentos matemáticos que os sujeitos podem relacionar com o seu conhecimento intuitivo e usar de forma apropriada. A abstração matemática pode ter dois sentidos, a abstração no sentido usual, como afastamento de uma representação ou de um procedimento concreto (por exemplo o número 7 existe na mente da criança mesmo sem requerer a presença de objetos ou a necessidade de os contar) e a abstração no sentido matemático, como a construção de invariantes (por exemplo a conservação do número), a reversibilidade e composição de transformações e operações matemáticas (por exemplo a subtração vista como a operação inversa da adição) ou a generalização. A formalização refere-se às interpretações usuais da axiomática e à demonstração matemática formal. Esta formalização pode ter ainda dois significados adicionais: conter a noção matemática como uma definição formal ou usar o simbolismo matemático para noções em que a abstração anterior ou a compreensão de procedimentos ocorreu até certo ponto. (Domingos, pp. 14-15)

Uma autora que fez um trabalho muito exaustivo sobre a problemática da compreensão em Matemática foi Anna Sierpiska (1994), para quem

a compreensão é relacionada com a existência de actos de compreensão, que

² Um objeto matemático é um conceito abstrato estudado em matemática. Alguns exemplos típicos de objetos matemáticos são números, conjuntos, funções e figuras geométricas. “ [...] os objetos matemáticos são as nossas ferramentas para colocar sentido e ordem no conhecimento matemático” (Sfard, 1992, cit. por Domingos, 2003, p. 46).

correspondem a actos mentais que acontecem num curto espaço de tempo e representam os elementos mais simples no processo de compreensão. [...] A compreensão incide essencialmente sobre objectos matemáticos e compreender um dado objecto corresponde a fazer uma ligação mental entre esse objecto (objecto de compreensão) e um outro objecto qualquer (base da compreensão) (Domingos, 2003, p. 16).

Segundo Domingos (2003), podemos entender como objeto de compreensão, por exemplo, um problema definido por palavras e base da compreensão é o identificar o problema como obedecendo a um determinado padrão bem conhecido. Na visão de Sierpinska (1994), “compreender não significa apenas formar agregados de coisas, mas sim interpretar e entender o agregado como um todo, com o objectivo de lhe dar o estatuto de um objecto matemático” (Domingos, 2003, p. 17).

Outros dois autores, Carpenter e Lehrer (1999), centrando a sua abordagem na sala de aula, consideram cinco formas de atividade mental que podem dar origem à compreensão matemática: “construção de relações, prolongar e aplicar o conhecimento matemático, reflexão sobre experiências, comunicar o que sabemos e desenvolver um conhecimento matemático próprio” (Domingos, 2003, p. 20). Estas formas de atividade mental têm relações muito profundas entre elas.

António Domingos (2003) esclarece que o ensino se deve preocupar com o conhecimento informal dos alunos e relacioná-lo com o conhecimento matemático que se pretende ensinar, salientando, no entanto, que não podemos “pensar no desenvolvimento da compreensão como um simples acrescentar de novos conceitos e processos ao conhecimento existente” (p. 20) e que “desenvolver a compreensão envolve a criação de estruturas de conhecimento ricas e integradas, estruturas estas que dão origem a uma aprendizagem com compreensão” (p. 20), sendo que o conhecimento bem estruturado é mais difícil de ser esquecido.

A autorreflexão dos alunos sobre o que sabem e como o sabem pode levar à aprendizagem através da reorganização do que já sabem. A capacidade de comunicar as ideias requer reflexão e é um objetivo importante da educação. Para desenvolverem um conhecimento matemático próprio, os alunos devem envolver-se ativamente nas atividades que lhes são propostas (Domingos, 2003).

De todas as perspetivas sobre compreensão que foram apresentadas anteriormente, a adotada neste estudo foi a de Richard Skemp que, apesar de ser uma abordagem simples, permite atingir o objetivo da investigação em causa, ou seja, compreender como entendem os alunos as operações combinatórias e as mobilização na resolução

e formulação de problemas.

2.2. Resolução e formulação de problemas

Devem ser propostas aos alunos tarefas diversificadas, com o objetivo de desenvolver o seu conhecimento matemático (NCTM, 2007, 2014). As tarefas que estimulam a resolução e a formulação de problemas concorrem para esse desenvolvimento.

Ponte (2005) analisa as tarefas segundo duas dimensões principais: o *nível de estruturação* e o *desafio matemático* que suscitam. “A estruturação da tarefa está associada ao grau de explicitação das questões colocadas, o que conduz a tarefas fechadas e a tarefas abertas” (Boavida et al., 2008, p. 15). Assim, “uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas” (Ponte, 2005, p. 18). O desafio varia entre reduzido e elevado e “relaciona-se de forma estreita com a percepção da dificuldade de uma questão” (Ponte, 2005, p. 18) por parte de quem a resolve. Cruzando estas duas dimensões, obtêm-se quatro quadrantes, e, tendo em conta as respetivas propriedades, podemos situar neles quatro tipos essenciais de tarefas: *exercício*, *problema*, *exploração* e *investigação* (Figura 1).



Figura 1 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 18)

De acordo com a análise anterior, Ponte considera um problema como uma tarefa fechada de desafio elevado; no entanto, alerta para a importância do grau de dificuldade de uma tarefa, uma vez que a mesma “pode ser um problema difícil para uma pessoa, que nem sequer compreende o que é pedido, e um exercício trivial para outra, que já a

resolveu diversas vezes” (Ponte, 2003, pp. 101-102). A mesma linha de pensamento é expressa por Schoenfeld (1985), que afirma que “as mesmas tarefas que exigem esforços significativos para alguns alunos, podem ser exercícios de rotina para outros, e respondê-las pode ser apenas uma questão de recordação de um dado matemático” (p. 74).

Vale, Pimentel e Barbosa (2015) definem problema “como uma situação que envolve o aluno em atividade, mas para a qual não conhece à partida, ou não é óbvio, um caminho para chegar à solução” (p. 41). Estas definições acabam todas por ser bastante convergentes, destacando-se a inexistência de um procedimento imediato para resolver a situação em causa e a clareza no que é dado e no que é pedido.

Segundo Serrazina e Ribeiro (2012), “A resolução de problemas como uma das experiências de aprendizagem fundamental no ensino da Matemática é uma ideia que tem vindo a ser fortalecida nas últimas décadas. A justificá-la, estão os resultados da crescente investigação em Educação Matemática” (p. 1369). Para estas autoras, a resolução de problemas é considerada “uma situação de aprendizagem, em que o aluno se confronta com questões às quais não consegue responder de forma imediata, mas que o levam a refletir no como e no porquê, sempre na procura da solução” (p.1369).

Na resolução de problemas, “o raciocínio matemático é por excelência o hipotético-dedutivo” (Ministério da Educação, 2015, p. 6), mas os alunos devem ser capazes de utilizar a intuição e o raciocínio indutivo baseado em padrões e em regularidades com vista à resolução de problemas (Ministério da Educação, 2015). Ponte et al. (1997) referem que

a atividade matemática, para lá de uma componente formal (que envolve axiomas, definições, teoremas e demonstrações) e de uma componente algorítmica (composta por procedimentos que apenas podem ser adquiridas através de um treino sistemático), inclui também combinar observações, seguir analogias, recorrer a imagens, formular conjecturas e adivinhar a ideia da prova antes de a fazer, ou seja, inclui também uma componente intuitiva. (p. 36)

Os mesmos autores afirmam também que a “intuição matemática é uma componente fundamental e insubstituível da actividade matemática” e que devem ser dadas tarefas matemáticas que “estimulem os aspectos intuitivos do pensamento” (Ponte et al., 1997, p. 37). “Para Fischbein (1975), as intuições são componentes da inteligência sobre as quais se pode e deve construir e relacionar o conhecimento intervindo nas ações de forma imediata” (Carvalho, 2009, p. 23).

É importante saber que muitos dos temas matemáticos exigem um elevado número de

pré-requisitos, não acontecendo o mesmo na aprendizagem do Cálculo Combinatório. Neste tema acontece algo curioso: alunos que apresentam dificuldades em muitos dos temas matemáticos, costumam *dar-se bem* com este tema e alunos que não apresentam dificuldades nos restantes temas matemáticos, manifestam dificuldades na resolução de problemas de CC:

A aprendizagem da Análise Combinatória³ não exige um elevado número de pré-requisitos e, apesar das documentadas dificuldades existentes nesse processo, é comum surgirem alunos que, manifestando dificuldades em outras áreas da Matemática, aprendem este tema sem experienciarem como obstáculos a falta de conhecimentos anteriores. Por outro lado, existem alunos com um excelente aproveitamento na disciplina de Matemática que não se sentem tão à vontade no tema da Análise Combinatória, manifestando inseguranças que tipicamente não experienciam na aprendizagem de outros temas. (Mota & Ferreira, 2018, p.39)

Embora o CC disponha de um conjunto de ferramentas (operações combinatórias) para a resolução de problemas, é necessária uma certa capacidade para interpretar o que é pedido no enunciado das tarefas e escolher a operação combinatória adequada para a resolução das mesmas. “Uma das principais dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem da Análise Combinatória prende-se precisamente com a seleção da operação combinatória adequada para resolver uma tarefa” (Mota & Ferreira, 2016).

Os alunos sentem dificuldades em distinguir quais são as tarefas cuja resolução envolve a utilização de arranjos das que envolvem a utilização de combinações (Lockwood, 2011). Esta dificuldade pode indiciar que os alunos não compreendem a diferença entre estas duas operações combinatórias (Mota & Ferreira, 2016).

Silva, Fernandes e Soares (2004), no seu estudo exploratório acerca das intuições de alunos de 12º ano em Combinatória, identificam e caracterizam as dificuldades e os erros desses alunos na resolução de problemas combinatórios simples e referenciam vários outros estudos importantes realizados também com o mesmo intuito, como por exemplo os de Fischbein e Grazit (1988); Roa, Batanero, Godino e Cañizares (1996) e Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997).

Para Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), as dificuldades dos alunos, na resolução de problemas combinatórios, são as que se apresentam na Figura 2:

³ Análise Combinatória e Cálculo Combinatório (CC) são expressões usadas de modo equivalente, por diferentes autores, para referirem o tema do currículo de Matemática A do 12º ano de escolaridade: Introdução ao Cálculo Combinatório.

Enumeração não sistemática	Esta dificuldade consiste em tentar resolver o problema por enumeração, usando a tentativa e o erro, sem nenhum procedimento recursivo, conducente à formação de todas as possibilidades.
Uso incorrecto do diagrama de árvore	Diagramas de árvore são um dos recursos mais úteis para visualizar tanto as situações de combinatória como as de probabilidades. Segundo Fischbein (1975), eles apresentam características intuitivas importantes, oferecem uma representação global da estrutura de situação, o que contribui para a imediatez da compreensão e para se encontrar uma solução do problema. Apesar desta importância, os alunos acham difícil construir diagramas de árvore adequadas para representar situações de problemas e, assim, este tipo de representação é causa de muitos erros.
Erro de ordem	Este erro consiste em confundir os critérios para as combinações com os dos arranjos, isto é, distinguir a ordem dos elementos quando é irrelevante ou, pelo contrário, não considerar a ordem quando ela é essencial.
Erro de repetição	O aluno não considera a possibilidade de repetir os elementos quando isso é possível, ou repete-os quando não há possibilidade de o fazer.
Confundir o tipo de objecto	Este erro ocorre quando os alunos consideram que objectos idênticos são distinguíveis ou que objectos diferentes são indistinguíveis.
Interpretar erradamente o tipo de partição requerida	Esta dificuldade pode ocorrer das duas maneiras seguintes: a união de todos os subconjuntos numa partição não contém todos os elementos do conjunto total, ou algumas partições possíveis são esquecidas.

Figura 2 – Dificuldades na resolução de problemas de Cálculo Combinatório (retirado de Carvalho, 2009, p. 27)

Segundo Silva, Fernandes e Soares (2004), há duas etapas fundamentais a percorrer para tornar mais fácil a aprendizagem da Combinatória: compreender a natureza dos erros dos alunos quando resolvem problemas combinatórios e identificar variáveis que podem influenciar as dificuldades. Neste sentido, “devem ser dadas oportunidades aos alunos para explorar situações que envolvam problemas combinatórios sem instrução direta, pois os problemas combinatórios permitem uma variedade de representações e abordagens, tornando possível a sua exploração mesmo com um mínimo de conhecimento do tema” (English, 2005, citada por Carvalho, 2009, p. 20).

De entre as estratégias que podem ser utilizadas na resolução de problemas de Cálculo Combinatório podemos salientar a *enumeração*, o *diagrama de árvore*, *Cálculos/Fórmulas* e estratégias que são apenas *estimativas subjetivas* (Silva et al., 2004). A enumeração pode ser dividida em duas subcategorias: sistemática e não sistemática. A primeira contempla “um procedimento algorítmico com potencial para gerar a totalidade das configurações possíveis” (Correia & Fernandes, 2007, p. 57) e na segunda não é utilizado nenhum procedimento recursivo, o que leva mais frequentemente, por exemplo, à não apresentação de todas as configurações possíveis ou apresentar mais do que as pedidas no enunciado. Nas estimativas subjetivas os alunos limitam-se “a indicar um valor para o número de possibilidades da operação

combinatória em questão, não revelando, deste modo, qualquer racionalidade na determinação desse valor” (Silva et al., 2004, p. 72).

Correia e Fernandes (2007), no seu estudo sobre *Estratégias Intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade na Resolução de Problemas de Combinatória*, referem que, para além das estratégias mencionadas anteriormente, houve a utilização da *tabela de dupla entrada* e algumas vezes usaram simultaneamente a *enumeração e operação* e o *diagrama de árvore e operação*.

A utilização de cada uma destas estratégias dependerá da familiarização ou não dos alunos com o Cálculo Combinatório. Um indivíduo que esteja pouco familiarizado recorre por exemplo a um diagrama de árvore enquanto outro mais experiente já recorre a uma dada operação combinatória como instrumento que lhe permite resolver e compreender problemas mais complexos (Mota & Ferreira, 2016).

A par da resolução de problemas, que envolve “processos complexos de pensamento” (Serrazina et al., 2002, p. 42), a formulação de problemas é também uma atividade importante pois “contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução” (Boavida et al., 2008, p. 27). Vale et al. (2015) assumem mesmo que

o desenvolvimento da capacidade de formular problemas é pelo menos tão importante como o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, podendo mesmo assumir-se que a formulação é uma componente indissociável da resolução. English (1997) refere que existe uma relação próxima entre os processos de resolução e formulação de problemas e que o segundo depende fortemente do primeiro, uma vez que para criar problemas matematicamente significativos é necessário ser competente na resolução de problemas. Por outro lado, a formulação de problemas pode ser um meio poderoso para que os alunos desenvolvam competências de resolução de problemas e se tornem bons resolvidores. (pp. 45-46)

Boavida et al. (2008) indicam duas possíveis estratégias para a formulação de problemas: *E se em vez de?* e *Aceitando os dados*. A primeira está relacionada com a informação que um determinado problema possui e que os alunos vão modificar, um ou mais aspetos, formulando perguntas que “por sua vez, poderão gerar mais modificações e mais perguntas” (p. 28). A segunda estratégia consiste em pedir aos alunos que formulem os seus próprios problemas partindo de “uma situação estática, ou seja, de uma expressão, figura, tabela, definição, condição, ou simplesmente de um conjunto de dados ou informações, sobre os quais se formulam questões” (p. 29). Para esta segunda

estratégia, por exemplo, pode ser dada uma expressão combinatória e pedir que, a partir da mesma, se formule um ou mais problemas.

Ao formularem problemas, “os alunos apercebem-se da sua estrutura, desenvolvendo, assim, pensamento crítico e capacidades de raciocínio ao mesmo tempo que aprendem a exprimir as suas ideias de modo mais preciso” (Boavida et al., 2008, p. 27). Por outro lado, a formulação de problemas “propicia o desenvolvimento do ensino-aprendizagem para a construção do conhecimento significativo” (Oliveira, 2015, p. 36). Atividades de formulação de problemas são importantes para que os alunos comuniquem ideias e aprendizagens, mas também para alargar essas aprendizagens (Mota & Ferreira, 2018). Quando os alunos trabalham no tema do CC, a formulação de problemas “dá-lhes acesso aos conceitos e procedimentos combinatórios, e potencia a sua compreensão das estruturas do problema combinatório” (Carvalho, 2009, p. 25).

Segundo Vale et al. (2015) ,as atividades de resolver e formular problemas permitem que os alunos “se envolvam diretamente nos processos, aumentem os níveis de motivação, sendo encorajados a investigar, tomar decisões, procurar padrões, estabelecer conexões, generalizar, comunicar, discutir ideias e identificar alternativas” (p. 47). Boavida et al. (2008) referem ainda que “os problemas – a sua formulação e resolução – são a essência da Matemática” (p. 13), afirmando, no entanto, que não se deve “valorizar um tipo de tarefas em detrimento de outras, pois todas têm o seu lugar na experiência matemática dos alunos” (p. 16).

CAPÍTULO 3 – Intervenção pedagógica

Neste capítulo descrevo a intervenção pedagógica que esteve na base do trabalho de investigação educacional desenvolvido e que é relatado neste documento. Começo por descrever o contexto da escola em que se desenrolou o meu estágio. Seguidamente, explico como se ancorou a intervenção pedagógica no currículo de Matemática A do 12º ano de escolaridade e faço uma descrição breve da intervenção pedagógica que foi implementada.

3.1. Contexto escolar

O estágio decorreu numa Escola Secundária do Norte de Portugal, durante o ano letivo 2020/2021. Esta escola integra-se numa vasta área suburbana, com rede de distribuição de água e controlo regular da sua qualidade, serviços de tratamento de águas residuais e de recolha regular e seletiva de lixo, equipamentos de saúde – centros de saúde, farmácias e outros; transportes coletivos – camionagem, caminho-de-ferro e táxis; abastecimento alimentar em fruta, legumes, carne e peixe. A indústria, os serviços e o comércio são áreas económicas que têm vindo a crescer, enquanto a agricultura vai perdendo a sua importância.

A população apresenta ter, a nível de qualificações, maioritariamente, o nível básico, seguindo-se a qualificação de nível secundário e só depois a de nível superior, havendo ainda a considerar uma faixa de população sem qualquer qualificação.

A escola, em funcionamento desde o ano letivo de 1978/1979, sofreu obras de ampliação e de requalificação, que lhe conferiram ótimas condições para a prática letiva, nomeadamente com todas as salas equipadas com computador e projetor e algumas também com quadro interativo, bem iluminadas e com uma boa acústica, novos espaços de laboratórios, criação de uma zona desportiva, de modo a integrar as novas exigências programáticas. No exterior da escola, além de espaços verdes, foi criada uma grande esplanada. Todas as condições são propícias para que os alunos se sintam confortáveis na escola, o que já é meio caminho para a motivação para o estudo e consequentemente para o seu sucesso escolar.

A escola tem, como oferta educativa, o ensino regular no 3º ciclo do Ensino Básico, com oferta em LE2 (Espanhol, Francês) e Oficina das Artes Plásticas, na área artística, bem como o Ensino Secundário, com os Cursos Científico-Humanístico, em todas as áreas, e Cursos Profissionais (Técnico de Análises de Laboratório, Técnico de Turismo e

Técnico de Multimédia). Várias instituições culturais e desportivas implantadas na zona dinamizam e interagem com a escola nas áreas da música, do teatro, do desporto, das tradições, da saúde e do património cultural. Os pais e encarregados de educação, assim como a respetiva associação, têm vindo a colaborar nas dinâmicas escolares.

A turma do 12º ano, onde se realizou a componente investigativa do estágio (e que deu origem a este relatório), era do curso de Ciências e Tecnologias. Na Formação Específica, a generalidade dos alunos inscritos em Matemática A, optou por escolher Aplicações Informáticas B e Física e três deles optaram por Aplicações Informáticas B e Química. Esta turma era constituída por 29 alunos, mas apenas 27 estavam inscritos na disciplina de Matemática A. Destes, 18 eram do sexo masculino e 9 do sexo feminino. As suas idades estavam compreendidas entre os 16 e os 17 anos, tendo a maioria 17 anos, à data do início do ano letivo.

Os alunos foram, de uma forma geral, assíduos e pontuais e tiveram bom aproveitamento, havendo a salientar, no terceiro período, 15 alunos com uma classificação superior a 16 valores e dois alunos apenas com nível negativo. A turma era heterogénea em alguns aspetos, nomeadamente, na maior ou menor dificuldade no acompanhamento dos conteúdos lecionados, no empenho, na responsabilidade e no comportamento, podendo ser distinguidos três grupos, conforme o Quadro 1:

Quadro 1 – Algumas particularidades do grupo turma

Grupo I	Muitos alunos empenhados, responsáveis, trabalhadores (quer na aula quer em casa) e bem-comportados, não apresentando dificuldades no acompanhamento das várias unidades temáticas.
Grupo II	Alguns alunos, apesar de serem trabalhadores, bem-comportados e empenhados, foram evidenciando dificuldades já desde o 10º ano. Neste grupo inseri uma aluna que apresentava dislexia (daí, provavelmente, algumas das suas dificuldades).
Grupo III	Um aluno que não desenvolveu nenhum trabalho relativo à aprendizagem da Matemática. Não realizou nenhuma das tarefas propostas, quer na aula quer em casa.

3.2. Ancoragem curricular da intervenção pedagógica

A realização de um estudo, na unidade temática de Introdução ao Cálculo Combinatório, numa turma com as características referidas, nomeadamente o existirem alunos com diferentes graus de desempenho na aprendizagem das várias unidades temáticas, fez todo o sentido uma vez que para a aprendizagem deste tema não são exigidos conhecimentos de conceitos lecionados em unidades didáticas anteriores (Mota & Ferreira, 2018). Logo, todos os alunos estavam no mesmo nível aquando do início da intervenção pedagógica.

No programa de Matemática A do 12º ano, à data da elaboração deste relatório, o tema Cálculo Combinatório incluía vários conteúdos: Propriedades das operações sobre conjuntos, Introdução ao Cálculo Combinatório, Triângulo de Pascal e Binómio de Newton. No entanto, o estudo centrou-se apenas no conteúdo da Introdução ao Cálculo Combinatório (Princípios Fundamentais da Contagem; Arranjos com repetição; Permutações; Arranjos sem repetição; Combinações) e decorreu ao longo de nove aulas, três delas lecionadas por mim (1ª, 8ª e 9ª) e as restantes pela orientadora de estágio. Foi prática usual, ao longo da minha experiência de estágio, lecionar sempre três blocos de aulas, consecutivas ou não, sendo as restantes aulas de uma sequência didática asseguradas pela orientadora de estágio.

A intervenção pedagógica realizada foi iniciada por mim logo após o estudo das funções exponenciais e logarítmicas. O primeiro período, do ano letivo de 2020/2021 foi marcado pela recuperação das aprendizagens devido às circunstâncias do ano letivo anterior (pandemia do COVID-19). Assim, a recuperação de aprendizagens consistiu no estudo das funções sob o ponto de vista do 11º ano (continuidade de funções, assíntotas de uma função, a função derivada e suas propriedades, e a resolução de problemas de otimização). O grupo de Matemática desta escola optou por continuar o estudo de funções, mas agora sob o ponto de vista do 12º ano, para não haver um *corte no raciocínio*. Ainda se abordaram as funções exponenciais e logarítmicas, as suas derivadas e os limites notáveis antes de se entrar no domínio de conteúdos de Cálculo Combinatório.

Há a salientar o facto de que todas as aulas da intervenção pedagógica decorreram no regime de ensino à distância (E@D) devido ao confinamento imposto, por causa da pandemia de COVID-19, praticamente logo após o início do 2º Período. Os alunos entraram em todas as sessões síncronas no Google Meet⁴, a partir do calendário do

⁴ Google Meet é um programa de videoconferências da Google que permite fazer reuniões com um número máximo de 100 pessoas, com limite de tempo de 24 horas, além de oferecer recursos como compartilhamento de tela.

Google Classroom⁵, disponibilizado pela orientadora de estágio.

O horário semanal da disciplina de Matemática A compreendeu uma aula de 135 minutos e duas aulas de 90 minutos, mas, por causa do E@D, as aulas de 135 minutos foram desdobradas em 60 minutos de aula + 15 minutos de intervalo + 60 minutos aula, ou seja, 120 minutos de tempo útil de aula. Não houve alteração nas aulas de 90 minutos com a passagem para o E@D.

3.3. Descrição sumária da intervenção pedagógica

O quadro seguinte (Quadro 2) resume a planificação do tema de Introdução ao Cálculo Combinatório. Em todas as aulas, fossem elas lecionadas por mim ou pela orientadora de estágio, mantive sempre em mente o meu objetivo de compreender como entendem os alunos as operações combinatórias e as mobilizam na resolução e formulação de problemas.

Quadro 2 – Planificação do tema Introdução ao Cálculo Combinatório

Aulas	Conteúdos	Estratégias	Recursos
1ª Aula 8 de fevereiro (60' + 15' (intervalo) + 60')	• Explicação do conceito de Cálculo Combinatório. • Princípios Fundamentais de Contagem: princípio geral da adição e princípio geral da multiplicação.	Utilização de três casos específicos: número de matrículas existentes num determinado país, número de códigos associados a um cartão bancário, e número de chaves possíveis do Euromilhões; Resolução intuitiva de três problemas de Contagem, de forma autónoma, e respetiva discussão em grupo turma.	♦ Google Meet ♦ Google Classroom ♦ Computador ♦ Telemóvel ou dispositivo equivalente ♦ Apresentação do Google Slides e Pear Deck ♦ Jamboard ♦ Caderno diário ♦ Material de escrita ♦ Calculadora ♦ Manual (Raposo & Gomes, 2020)

⁵ O Google Classroom é uma ferramenta online gratuita que auxilia professores, alunos e escolas com um espaço para a realização de aulas virtuais. Os professores podem publicar tarefas numa página específica e ainda verificar quem concluiu as atividades, além de tirar dúvidas em tempo real e dar feedback sobre as atividades realizadas pelos alunos. Todos os intervenientes da turma podem comunicar entre si e receberem notificações quando novos conteúdos são inseridos na sala de aula virtual. A ferramenta foi lançada pelo Google em 2014, mas ganhou muito destaque em 2020 em consequência da paralisação das atividades escolares presenciais como medida de prevenção ao novo coronavírus, responsável pela pandemia de Covid-19.

2ª Aula 10 de fevereiro (90 minutos)	• Princípios fundamentais de contagem: princípio geral da adição e princípio geral da multiplicação	Trabalho de grupo (em sete Breakout Rooms) para resolução de problemas. Discussão coletiva sobre problemas de contagem.	♦ Google Meet ♦ Breakout Rooms ♦ Edmodo ♦ Computador ♦ Ficha de trabalho: Problemas de Contagem ♦ Jamboard ♦ Google Classroom ♦ Caderno diário ♦ Material de escrita ♦ Calculadora ♦ Manual
3ª Aula 11 de fevereiro (90 minutos)	• Princípios fundamentais de contagem: princípio geral da adição e princípio geral da multiplicação	Continuação da discussão coletiva sobre problemas de contagem.	♦ Google Meet ♦ Edmodo ♦ Computador ♦ Ficha de trabalho: Problemas de Contagem ♦ Jamboard ♦ Caderno diário ♦ Material de escrita ♦ Manual
4ª Aula 15 de fevereiro (60' + 15' (intervalo) + 60')	• Arranjos com repetição • Permutações	Resolução autónoma de três problemas. Discussão coletiva e formalização dos conceitos de Arranjos com repetição e Permutações. Verificação de Aprendizagens 1.	♦ Google Meet ♦ Edmodo ♦ Computador ♦ Google Classroom ♦ Apresentação do Google Slides e Pear Deck ♦ Manual
5ª Aula 17 de fevereiro (90 minutos)	• Arranjos sem repetição	Esclarecimento de dúvidas. Resolução autónoma de um problema. Discussão coletiva e formalização do conceito de Arranjos	♦ Google Meet ♦ Edmodo ♦ Computador ♦ Google Classroom ♦ Apresentação do Google Slides e Pear Deck

		sem repetição.	Deck ♦ Manual
6ª Aula 18 de fevereiro (90 minutos)	• Arranjos sem repetição • Combinações	Resolução de exercícios de aplicação sobre Arranjos sem repetição e discussão coletiva dos mesmos. Resolução autónoma de um problema sobre Combinações e sua discussão coletiva. Verificação de Aprendizagens 2.	♦ Google Meet ♦ Edmodo ♦ Computador ♦ Google Classroom ♦ Apresentação do Google Slides e Pear Deck ♦ Manual
7ª Aula 22 de fevereiro (60' + 15'(intervalo) + 60')	• Combinações	Resolução autónoma de dois exercícios de aplicação, sua discussão coletiva e formalização do conceito de Combinações. Verificação de Aprendizagens 3.	♦ Google Meet ♦ Edmodo ♦ Computador ♦ Google Classroom ♦ Apresentação do Google Slides e Pear Deck ♦ Manual
8ª Aula 24 de fevereiro (90 minutos)	• Resolução de problemas envolvendo as quatro operações combinatórias.	Resolução de uma ficha de trabalho com cinco problemas, sobre as operações combinatórias, e discussão coletiva dos mesmos.	♦ Google Meet ♦ Computador ♦ Ficha de trabalho nº 23 ♦ Telemóvel ou dispositivo equivalente ♦ Aplicação do telemóvel CamScanner ♦ Jamboard ♦ Caderno diário ♦ Material de escrita ♦ Calculadora ♦ Manual
	• Formulação de problemas com base em expressões combinatórias	Trabalho de grupo (em Breakout Rooms) para formulação de problemas com base	♦ Computador ♦ Google Meet ♦ Microsoft Word ou

9ª Aula 25 de fevereiro (90 minutos)	fornecidas.	em expressões combinatórias fornecidas. Discussão coletiva de alguns dos problemas formulados.	equivalente ♦ Google Slides (versão PowerPoint da Google Chrome) ♦ Breakout Rooms ♦ Jamboard ♦ Caderno diário ♦ Material de escrita ♦ Calculadora ♦ Manual
---	-------------	---	--

A seguir faço uma breve descrição de todas estas nove aulas, focando-me mais nas aulas que foram por mim lecionadas.

3.3.1. Aula 1 – 8 de fevereiro de 2021

Esta aula correspondeu a um tempo efetivo de 120 minutos, com o objetivo de os alunos conhecerem e aplicarem factos e princípios elementares de contagem, tendo sido consideradas três partes fundamentais:

1ª parte – Sendo esta aula a primeira do ensino à distância, deste ano letivo, houve necessidade de, numa abordagem inicial, tecer algumas considerações sobre a necessidade do cumprimento das regras a manter nas aulas online e a elucidação sobre as ferramentas passíveis de serem utilizadas nas aulas para a necessária comunicação entre os professores e os alunos e os alunos entre si.

2ª parte – Com recurso a uma apresentação utilizando o Google Slides⁶, foi introduzido o conteúdo do Cálculo Combinatório. Foi apresentada a sua definição e foram apresentados três exemplos que promoviam a necessidade/curiosidade de calcular os elementos de um determinado conjunto - número de matrículas existentes num determinado país, número de códigos associados a um cartão bancário, e número de chaves possíveis do Euromilhões. A Figura 3 mostra o terceiro diapositivo da apresentação que fiz, cujos exemplos, nesta aula, serviram apenas para ilustrar a importância desta área da Matemática no quotidiano.

⁶ O Google Slides é uma plataforma online que tem o mesmo objetivo que uma apresentação do PowerPoint: servir como suporte visual numa apresentação oral.



Figura 3 – Diapositivo 3 da apresentação – Google Slides

Antes de serem apresentados os Princípios Fundamentais de Contagem, que são conceitos chave neste tema curricular, desafiei os alunos a resolverem três novos problemas, com o propósito de mobilizarem os seus conhecimentos intuitivos acerca de contagens. Foi-lhes dado um tempo de resolução de 45 minutos. Os problemas foram disponibilizados através do diapositivo 5 da apresentação no Google Slides, a saber:

- 1º) Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, quantos números de três algarismos, não necessariamente diferentes, se podem escrever com os algarismos do conjunto?
- 2º) A Sofia tem, na estante do seu quarto, doze livros: cinco de José Saramago, três de Virgílio Ferreira e quatro de Lídia Jorge. Pretende escolher dois desses livros, de autores diferentes, para ler nas férias. Quantas escolhas diferentes pode fazer?
- 3º) Para a formação de uma comissão, são escolhidas três pessoas de entre o Afonso, o Carlos, a Isaura e a Maria para que ocupem os cargos de Presidente, Tesoureiro e Secretário. Sabendo que uma pessoa não pode ocupar mais de um cargo diferente, quantas comissões distintas podem ser formadas?

Durante a resolução autónoma dos alunos estive sempre disponível caso surgissem dúvidas, mas eles não as colocaram. Tendo os alunos o microfone desligado, e vendo que eles mexiam os lábios como se estivessem a conversar, suspeitei que alguns estivessem a trocar ideias com os colegas, por exemplo, através de uma rede social. A troca de ideias é benéfica em muitas circunstâncias de ensino-aprendizagem, mas nesta aula era suposto os alunos resolverem os problemas de forma autónoma para poder verificar as reais dificuldades que cada um dos alunos pudesse manifestar.

Terminada a resolução dos três problemas, foi dado algum tempo aos alunos para que fotografassem ou digitalizassem as suas resoluções e as submetessem na sua turma do Google Classroom, da disciplina de Matemática A. Uma das desvantagens das aulas

não presenciais é que só tive acesso às resoluções escritas dos alunos algum tempo após a aula ter terminado, pois, como professor estagiário, nunca tive acesso direto à turma do Google Classroom. Era a professora orientadora que, depois da aula, partilhava comigo os elementos necessários para futura análise.

3ª parte – Como foi utilizado o suplemento Pear Deck⁷, da apresentação do Google Slides, os alunos foram convidados a escrever o resultado numérico final a que chegaram, à medida que ia aparecendo o diapositivo com cada um dos problemas. Entretanto, os alunos foram para o intervalo, de 15 minutos, o que me deu tempo para analisar a folha das respostas do Pear Deck (Figura 4), verificando quais os alunos que tinham errado ou acertado na solução para cada problema.

Data	Aluno	Problema 1	Problema 2	Problema 3
08/02/2021		64	94	24
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64 números	47 escolhas	12 comissoes
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	72
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		60	94	24
08/02/2021		64	47	16
08/02/2021		64	35	
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021				
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	8
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		52	47	24
08/02/2021		20	47	18
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	
08/02/2021		64	94	12
08/02/2021		64	47	24
08/02/2021		64	47	24

Figura 4 – Respostas dadas pelos alunos, no Pear Deck, a cada um dos problemas de contagem

Um dos alunos não conseguiu colocar as suas respostas numéricas no Pear Deck, mas fotografou as suas resoluções e submeteu-as no Google Classroom.

⁷ Pear Deck é um suplemento do Google Slides, que possibilita ao professor a realização de questões abertas ou fechadas permitindo a interação dos alunos na apresentação, respondendo a essas questões, em tempo real.

Tendo em minha posse apenas as soluções a que os alunos chegaram, foi-me possível executar a estratégia que tinha delineado para a discussão oral, realizando essa discussão problema a problema, com o intuito de ver as intuições que tiveram, as estratégias que usaram e as dificuldades que apresentaram. Comecei por convidar a explicarem a sua resolução os alunos que tinham apresentado, no Pear Deck, um determinado resultado que pressupunha, por exemplo, o uso de uma estratégia incorreta ou simplesmente falhas em cálculos. Considerei importante começar a discussão pelas supostas intuições erróneas a fim de gerar mais discussão entre os alunos, para um melhor esclarecimento do porquê de terem chegado a esse resultado numérico incorreto.

Para que a exposição da resolução e consequente discussão fosse mais eficaz, os alunos, utilizando o link disponibilizado no Google Classroom, utilizaram a aplicação do Jamboard⁸, do Google Chrome, permitindo que os mesmos explicassem como tinham efetuado as contagens e como se asseguraram que tinham contado todos os casos ou não tinham repetido contagens. Cada explicação/resolução foi rebatida ou validada pelo conjunto dos alunos da turma e, sempre que a explicação de um aluno foi rebatida por outro(s), este(s) explicou(caram) o seu raciocínio até se chegar à resolução tida como correta.

A apresentação do Princípio Geral da Multiplicação e da Adição foi efetuada com base na discussão do primeiro e segundo problemas, sendo apresentadas representações que sistematizam as contagens, nomeadamente o diagrama de árvore.

Em todos os momentos de discussão em grande grupo, a participação dos alunos foi espontânea e voluntária. Porém, procurei sempre que o maior número de alunos possível o fizesse.

No final da aula, já com o conhecimento dos Princípios Fundamentais de Contagem e com o objetivo de verificar se os alunos os tinham compreendido e aplicavam corretamente, foram propostos, como trabalho a realizar em casa, vinte e um exercícios, sendo seis do manual (Anexo A) e quinze da ficha de trabalho nº 20, (Anexo B), publicada por mim na plataforma EDMODO⁹.

Os alunos podiam colocar as dúvidas que tivessem na resolução destes exercícios no EDMODO, mas apenas um aluno o fez e o esclarecimento das mesmas foi feito, através daquela plataforma, por alguns colegas e pela orientadora. No final da aula publiquei no EDMODO o PDF da apresentação do Google Slides que utilizei.

⁸ O Jamboard é uma ferramenta online gratuita, desenvolvido pela Google, que funciona como um quadro interativo, onde professores e alunos podem ir registando o que desejam partilhar com os outros, em tempo real da aula.

⁹ O Edmodo é uma plataforma social de e-learning que muitas vezes é descrita como um Facebook para escolas. Permite a organização letiva entre professores, alunos e família. Um professor, escola ou agrupamento facilmente podem gerir um sistema que oferece os melhores recursos.

Como já referido anteriormente, as aulas da 2ª à 7ª, foram lecionadas pela orientadora de estágio. Faço a seguir uma breve descrição destas aulas, sendo que, na maioria delas, não refiro as dificuldades que os alunos foram manifestando na resolução dos problemas e exercícios, porque, não tendo tirado muitas notas de campo ao longo do decorrer das várias aulas, não me recordo das mesmas. Enquanto investigador, considero ter sido uma grande falha que não deveria ter acontecido, e que considero, desde já, ter sido uma limitação no meu estudo, pois é através dessas dificuldades que os alunos foram manifestando, ao longo de todas as aulas, que podemos perceber como é que os mesmos iam compreendendo os conceitos fundamentais de CC.

3.3.2. Aula 2 – 10 de fevereiro de 2021

Nesta aula, os alunos foram organizados em sete grupos de trabalho para a resolução de seis problemas de contagem (Anexo C), com diferentes graus de dificuldade. Todos os grupos eram formados por quatro elementos, com exceção do grupo três que era constituído por três elementos. Os grupos 1 a 6 resolveram, cada um, um problema diferente, para posteriormente o apresentarem à turma, enquanto o grupo 7 resolveu todos os problemas propostos, com a missão de posteriormente intervir na discussão sempre que os grupos necessitassem de ajuda para a sua explicação. Este grupo tinha, na sua constituição, a melhor aluna da turma, muito perspicaz e rápida a resolver problemas.

Cada grupo de trabalho entrou na sessão do Google Meet, na sala respetiva, e os seus elementos discutiram a resolução do problema que lhe foi proposto, durante trinta minutos, para posterior apresentação e discussão na sala principal. Já nesta sala, cada grupo escolheu um elemento para apresentar a estratégia que utilizou para resolver o problema que lhe foi proposto, utilizando, para o efeito, o Jamboard (cujo link foi colocado, previamente, no Google Classroom).

Só houve tempo para a apresentação e discussão da proposta de resolução do Problema 1, por parte do grupo 1, sendo que, no final da apresentação, os restantes alunos da turma tiveram um tempo para colocar questões a que os colegas do grupo 1 responderam. A aula terminou com o esclarecimento, por parte da professora (a orientadora), de que os alunos deviam dar conhecimento, ao longo da semana, das suas dúvidas na plataforma EDMODO.

As dúvidas referentes à ficha de trabalho nº 20, que não tinham sido colocadas por eles no EDMODO, foram esclarecidas numa aula de apoio de 90 minutos que decorreu antes da terceira aula.

3.3.3. Aula 3 – 11 de fevereiro de 2021

Como na aula anterior apenas um grupo fez a apresentação da resolução do seu problema, nesta aula, os outros cinco grupos apresentaram as suas propostas de resolução ao grupo-turma. O grupo 7 interveio dizendo se concordava ou não com as propostas de resolução que iam sendo apresentadas, sendo que, no caso em que discordavam, explanaram a sua resolução.

Apenas as propostas de resolução apresentadas pelos grupos 2 e 4 suscitaram discussão, por não estarem corretas. No caso do grupo 2, os alunos cometeram um erro de contagem e no caso do grupo 4, na primeira alínea, houve um erro de interpretação do enunciado e, na segunda alínea, confundiram uma situação multiplicativa com uma situação aditiva.

Houve ainda tempo para uma sessão de esclarecimento de dúvidas sobre os problemas do manual da página 14 à página 18 (propostos como trabalho a realizar em casa, nas duas aulas anteriores).

3.3.4. Aula 4 – 15 de fevereiro de 2021

Com recurso a uma apresentação do Google Slides e Pear Deck, foi introduzido o conceito de Arranjos com repetição. A aula começou com a resolução de um problema (Figura 5), autonomamente, pelos alunos.



Consideremos a seguinte experiência:

- Lançamos três vezes um dodecaedro com as faces numeradas de 1 a 12;
- Após cada lançamento regista-se o número da face voltada para cima, obtendo uma sequência de três números.

Qual é o número total de sequências que podemos obter?

Figura 5 – Problema de Arranjos com repetição

Após a sua resolução, os alunos colocaram as suas respostas no Pear Deck. Na posse destes dados, a professora iniciou a discussão, não havendo grandes dúvidas uma vez que só dois alunos é que não responderam e todos os outros acertaram. Feita a análise, com a participação dos alunos, da estrutura matemática que estava subjacente ao problema, foi introduzido o conceito de Arranjos com repetição.

Foi utilizada a mesma metodologia para os conceitos de Partes de um conjunto e Permutações, utilizando, respetivamente, os seguintes problemas (Figura 6 e Figura 7):

Quantos subconjuntos tem o conjunto $V=\{a, e, i, o, u\}$?

Figura 6 – Problema sobre Partes de um conjunto



De um baralho, vai-se extrair sucessivamente todas as cartas, uma a uma, e colocá-las alinhadas.

De quantas formas diferentes pode ser o alinhamento final?

Figura 7 – Problema de Permutações

O problema da Figura 6 gerou bastante discussão, porque apenas nove alunos conseguiram chegar ao resultado correto e houve a necessidade de a professora ir esclarecendo as dúvidas dos restantes alunos com a ajuda dos que responderam corretamente.

Com o problema da Figura 7, os alunos queixaram-se de dificuldades a introduzir o resultado no Pear Deck, pois o número que pretendiam introduzir compreendia demasiados algarismos. Assim, a professora decidiu simplificar o problema substituindo “todas as cartas” por “três cartas”. No entanto, apesar desta simplificação, ela aproveitou o problema para formalizar o conceito de Permutação.

Nos últimos vinte minutos da aula, foi proposto aos alunos que resolvessem a ficha de Verificação de Aprendizagens 1 (Anexo D), disponibilizada no Google Classroom pela orientadora, aquando da proposta da atividade. O objetivo da sua realização era tentar perceber se os alunos tinham compreendido os conceitos lecionados na primeira semana do Ensino à Distância. A sua resolução foi colocada por mim na plataforma EDMODO, após todos os alunos terem submetido as suas resoluções no Google Classroom, com o objetivo de que os alunos verificassem se tinham pensado bem e que, se tivessem dúvidas, as pudessem colocar na aula seguinte. Foram também disponibilizados no EDMODO, pela orientadora, a ficha de trabalho nº 21 (Anexo E), como proposta de trabalho a realizar em casa, e a apresentação do Google Slides utilizada nesta aula, que incluía também uma proposta de trabalho de casa com

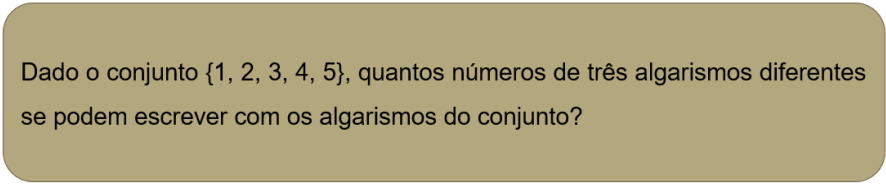
exercícios do manual.

3.3.5. Aula 5 – 17 de fevereiro de 2021

A primeira parte da aula foi preenchida com o esclarecimento de dúvidas sobre a ficha de trabalho proposta para trabalho de casa na aula anterior, bem como sobre a resolução/correção de exercícios do manual sobre Arranjos com repetição, Partes de um conjunto e Permutações que também tinham sido propostos para trabalho autónomo dos alunos.

Na segunda parte da aula, concluiu-se a leção do conteúdo das Permutações, realizando-se os quatro exercícios do manual da página 26 (Anexo F), que consistiam apenas em manipulação de fatoriais, sem recurso à calculadora. Os alunos não tiveram dúvidas na realização dos mesmos, o que já era expectável, porque na mesma página do manual existiam exercícios muito semelhantes já resolvidos.

Na terceira parte da aula, com recurso a uma apresentação do Google Slides e Pear Deck, foi proposto aos alunos resolver autonomamente o problema seguinte (Figura 8):



Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, quantos números de três algarismos diferentes se podem escrever com os algarismos do conjunto?

Figura 8 – Problema de Arranjos sem repetição

Os alunos colocaram as suas respostas no Pear Deck. Na posse destes dados a professora, com a colaboração dos alunos, realizou a análise da estrutura matemática que estava subjacente ao problema, introduzindo o conceito de Arranjos sem repetição.

3.3.6. Aula 6 – 18 de fevereiro de 2021

Recorrendo a quatro exercícios de aplicação (Anexo G), concluiu-se a leção do conceito de Arranjos sem repetição. Tal como na aula anterior, os alunos resolveram os exercícios autonomamente e submeteram as suas respostas na aplicação do Pear Deck do Google Slides. Sempre que era resolvido um exercício, era feita a sua discussão em grande grupo. A seguir foi proposto o problema da Figura 9:

De um saco com quatro objetos distintos, de quantas formas diferentes poderemos extrair simultaneamente 3 desses objetos?



Figura 9 – Problema sobre Combinações

Para introduzir o conceito de Combinações, foi feita a mesma abordagem utilizada anteriormente, ou seja, a análise da estrutura matemática que estava subjacente ao problema, sempre com a participação dos alunos. Nos últimos vinte minutos da aula, foi proposto aos alunos que resolvessem a ficha de Verificação de Aprendizagens 2 (Anexo H), disponibilizada pela orientadora no Google Classroom, aquando da proposta da atividade. O objetivo da sua realização foi o mesmo que para a primeira, só que agora para os conteúdos lecionados na segunda semana do E@D. A sua resolução foi colocada na plataforma EDMODO, após todos os alunos terem submetido as suas resoluções no Google Classroom, com o objetivo de que os alunos verificassem se tinham pensado bem e que, se tivessem dúvidas, as pudessem colocar na aula seguinte. Foi também partilhada no EDMODO a apresentação do Google Slides sobre Arranjos sem repetição bem como a Ficha de Trabalho nº 22 (Anexo I).

3.3.7. Aula 7 – 22 de fevereiro de 2021

A leção do conceito de Combinações foi apenas formalizado nesta aula, recorrendo à apresentação do Google Slides já disponibilizada aos alunos no EDMODO, no final da aula anterior. Foram também resolvidos os dois exercícios de aplicação (Anexo J), que se encontravam na referida apresentação, como forma de consolidar o conceito lecionado. Os alunos resolveram-nos autonomamente e submeteram as suas respostas na aplicação do Pear Deck do Google Slides, após a resolução de cada exercício. Sempre que era resolvido um exercício, era feita a sua discussão em grande grupo e esclarecidas as dúvidas que foram surgindo.

Depois do intervalo, a aula continuou com uma sessão de esclarecimento de dúvidas sobre os problemas 51 e 53 do manual (Anexo K) e sobre os problemas e os exercícios da Ficha de Trabalho nº 22, sobre Combinações. Houve ainda tempo para a resolução da ficha de Verificação de Aprendizagens 3 (Anexo L), disponibilizada pela orientadora no Google Classroom, com o objetivo de tentar perceber se os alunos estavam a acompanhar o que foi lecionado sobre a temática das Combinações. A sua resolução foi colocada na plataforma EDMODO, após todos os alunos terem submetido as suas

resoluções no Google Classroom, com o mesmo objetivo das anteriores verificações de aprendizagem.

3.3.8. Aula 8 – 24 de fevereiro de 2021

Nesta aula, com a duração 90 minutos, os alunos foram envolvidos na resolução de problemas sobre as operações combinatórias já lecionadas (Arranjos com e sem repetição, Permutações e Combinações). A aula teve duas partes de 45 minutos cada.

1ª parte – A aula iniciou-se com a explicação aos alunos de que iriam resolver, autonomamente e sem direito a esclarecimento de dúvidas, a ficha de trabalho nº 23 (Anexo M) com cinco problemas que abrangiam toda a unidade de Introdução ao Cálculo Combinatório e à qual se seguiria a apresentação e discussão das resoluções feitas pelos alunos. Esta ficha de trabalho tinha já sido colocada na turma do Google Classroom para que os alunos a pudessem aceder mais facilmente e resolver no seu caderno diário. O objetivo da realização desta ficha de trabalho foi tentar compreender se os alunos conseguiam resolver os problemas, reconhecendo qual a operação combinatória que estava subjacente a cada um. Assim, a ordenação dos problemas na ficha foi feita de modo que a sua sequência não fosse igual à ordem de leção das operações combinatórias.

Os primeiros quatro problemas correspondiam, cada um deles, a uma operação combinatória diferente, respetivamente, arranjos sem repetição, combinações, permutações e arranjos com repetição. No quinto problema, para além do seu enunciado, eram fornecidas duas expressões combinatórias, tendo sido pedido aos alunos que, numa pequena composição, explicassem que as mesmas seriam duas possíveis respostas ao problema. Após a resolução desta ficha, foi dado algum tempo aos alunos para que fotografassem ou digitalizassem as suas resoluções e as submetessem na sua turma do Google Classroom, para futura análise.

2ª parte – Como a aula não foi presencial, nem teve intervalo entre as duas partes, não pude ir verificando a forma como os alunos iam resolvendo os problemas, o que dificultou um pouco a seleção dos que deveriam ser convidados a iniciar a discussão dos resultados. Não sabendo quem tinha respondido de forma correta ou incorreta aos problemas, nem conhecendo que estratégias/operações combinatórias eles tinham escolhido para resolver cada problema, optei por chamar aqueles que eram, geralmente, menos participativos.

Tal como em aulas anteriores, os alunos utilizaram a aplicação do Jamboard, do Google Chrome, utilizando o link disponibilizado no Google Classroom, para a apresentação da

sua resolução. Só houve tempo para discutir os três primeiros problemas, sendo que a resolução dos mesmos não ofereceu quaisquer dúvidas aos alunos, tendo sido validada sem dificuldades pelo conjunto dos alunos da turma. Apenas a forma como um dos alunos explicou a sua resolução é que não foi suficientemente clara nem para mim nem para a maioria dos colegas. Houve um outro aluno que quis explicar a resolução exposta pelo aluno em causa, mas a orientadora interveio de forma a levá-lo a explicar melhor o seu raciocínio. Deste modo, e sempre que havia apresentação e discussão de resoluções dos alunos, para além dos objetivos relativos à compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, já referidos, era importante também compreender como os alunos comunicavam matematicamente.

No final desta aula foi dito aos alunos que iria ser colocada, na plataforma EDMODO, a resolução integral da ficha de trabalho e que as dúvidas que tivessem, na resolução dos problemas que não tinham sido discutidos nas aulas, seriam esclarecidas por mim na mesma plataforma, no entanto, não houve nenhum pedido de esclarecimento de dúvidas.

3.3.9. Aula 9 – 25 de fevereiro de 2021

Correspondendo a uma aula de 90 minutos, foi estruturada em três partes fundamentais:

1ª parte – Com recurso ao Google Slides, foi explicado aos alunos que, em seis grupos de trabalho, iriam formular um problema com base numa expressão combinatória que lhes seria fornecida. Foi visualizada a composição dos elementos dos vários grupos de trabalho, previamente constituídos de forma aleatória, e criadas as respetivas Breakout Rooms no Google Meet. Três dos grupos tinham cinco elementos e os restantes quatro elementos. A expressão combinatória para a formulação do problema só foi fornecida quando cada grupo já estava colocado na sua sala. Assim, evitou-se que os alunos soubessem que existiam grupos que tinham atribuída a mesma expressão combinatória. A estratégia para a distribuição das respetivas expressões combinatórias seria a de eu, a minha colega de estágio e a orientadora entrarmos cada um(a) em duas salas, para evitar atrasos no trabalho dos vários grupos. Enquanto estava a explicar a formação dos grupos, recebi uma mensagem da orientadora a dizer que o seu computador iria ficar demasiado lento, a partir da criação das salas, o que dificultaria a nossa entrada nas mesmas. Como forma de contornar esta dificuldade, a orientadora sugeriu que enviasse um mail a um dos elementos de cada grupo, com a respetiva expressão combinatória, a saber:

$$5 \times 6! \times {}^{24}A_8 - \text{Grupos 1 e 2}$$

$${}^{10}C_7 \times {}^7C_3 \times 4! - \text{Grupos 3 e 4}$$

$${}^9A_5 + 8 \times {}^8A_4 - \text{Grupos 5 e 6}$$

2ª parte – Durante 25 minutos, os alunos trocaram ideias e escreveram num documento Word a sua resposta, isto é, o enunciado de um problema que pudesse ser resolvido com recurso à expressão combinatória que lhes tinha sido atribuída, submetendo este documento na turma do Google Classroom. Devido a não ter podido entrar em nenhuma das salas, a orientadora foi-me dando *feedback*, por mensagem, da evolução do trabalho dos alunos.

3ª parte – Com todos os alunos de regresso à sala principal, as apresentações foram realizadas utilizando sempre a mesma estratégia: cada grupo partilhou com os colegas o seu problema e a respetiva expressão combinatória, através do Jamboard, e o porta-voz de cada grupo explicou porque é que o problema, por eles formulado, teria como resposta a expressão combinatória que lhes tinha sido fornecida.

A sequência das apresentações deveria ter começado com o grupo 1, mas tal não aconteceu uma vez que os alunos deste grupo demoraram mais um pouco a submeter o documento Word no Google Classroom. As apresentações foram então iniciadas com o grupo 2. Perante os dados fornecidos por este grupo, houve alguma discussão no grupo turma, tendo um aluno sugerido a alteração de um pormenor no enunciado, para que, segundo este aluno, o problema pudesse fazer mais sentido em relação com a expressão dada. No entanto, através do diálogo ocorrido, chegou-se à conclusão de que, com a alteração sugerida, a expressão combinatória seria a mesma.

A apresentação do grupo 1 gerou a maior discussão, em relação às outras apresentações, uma vez que o problema formulado por estes alunos não correspondia em nada à expressão combinatória que lhes tinha sido fornecida. Sendo assim, perguntei quem queria resolver o problema proposto, ao que vários alunos se prontificaram a fazê-lo. Convidei um deles para partilhar no Jamboard a sua resolução, a qual foi prontamente validada por outros alunos.

O grupo 3 propôs um problema que, respondendo corretamente à sua expressão combinatória, foi explicado de forma clara e compreendido por todos. Só houve tempo para a apresentação do grupo 4, onde surgiu a necessidade de acrescentar um pormenor no enunciado, o que fez com que a expressão combinatória fosse a resposta correta ao problema.

Antes de terminar a aula, um aluno do grupo 5 perguntou se os grupos que não tinham apresentado iriam apresentar na aula seguinte. A orientadora respondeu que não e informou que eles apenas publicariam os seus problemas e respetivas expressões

combinatórias na plataforma EDMODO para, entre eles, poderem tecer os comentários que achassem necessários para a validação do problema ou sugestão de correção. Depois da aula publiquei, também no EDMODO, o PDF da apresentação do Google Slides que utilizei contendo, nos diapositivos 6, 7 e 8 (Anexo N), uma proposta de problema para cada uma das expressões combinatórias abordadas.

CAPÍTULO 4 – Métodos e procedimentos de recolha de dados

Numa investigação, a escolha da metodologia a adotar deve estar relacionada com os seus objetivos e as questões a que se pretende responder. Sendo o meu objetivo compreender como entendem os alunos as quatro operações combinatórias e as mobilizam na resolução e formulação de problemas, a metodologia de investigação baseou-se numa abordagem qualitativa e interpretativa.

Uma investigação qualitativa e interpretativa deve contemplar as cinco características mencionadas por Bogdan e Biklen (1994):

- 1) “Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 47). Os dados recolhidos são provenientes do ambiente natural em que decorreu o processo de ensino-aprendizagem do tema matemático que escolhi para o meu trabalho: as aulas relativas ao tema Introdução ao Cálculo Combinatório. Por conseguinte, os participantes foram os alunos da turma do 12º ano em que lectionei. Tudo isto decorreu em sessões síncronas através do Google Meet (devido à situação da pandemia do Covid-19). Teria sido muito importante a observação direta em sala de aula física, enquanto os alunos realizavam as várias tarefas propostas, mas tal não foi possível. A recolha dos dados que suportam a investigação foi feita através da submissão dos registos escritos dos alunos no Google Classroom, após a primeira, oitava e nona aulas lecionadas por mim. Uma dessas aulas foi gravada em áudio. Não foi possível gravar as outras duas.
- 2) “A investigação qualitativa é descritiva” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48). Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens (a resolução escrita dos problemas, o documento Word com os enunciados dos problemas formulados pelos alunos e transcrições da gravação áudio da aula de formulação de problemas com base em expressões combinatórias fornecidas), não em números como na investigação quantitativa.
- 3) “Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49). Para o meu estudo, foi mais importante compreender as estratégias que os alunos utilizaram na resolução das tarefas propostas, bem como a justificação dada aquando das discussões coletivas, do que o resultado final obtido nas suas resoluções. Era fundamental compreender a forma como os alunos desenvolviam

a sua aprendizagem no tema, com especial atenção aos processos de raciocínio mobilizados na resolução e formulação de problemas.

4) “Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50). Este estudo não foi elaborado de forma a confirmar ou rejeitar hipóteses construídas previamente, mas sim para levar a uma compreensão maior das aprendizagens em Cálculo Combinatório a partir da análise dos dados recolhidos. “Não se trata de montar um quebra-cabeças cuja forma final conhecemos de antemão” (p. 50).

5) “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50). As resoluções dos alunos, as suas perspetivas e as interações estabelecidas entre alunos ou entre alunos-professor permitiram compreender melhor como eles davam significado aos conceitos que iam aprendendo, procurando que desenvolvessem uma compreensão relacional, no processo de aprendizagem do Cálculo Combinatório.

Tendo em conta o objetivo e o contexto onde o estudo foi realizado, os instrumentos de recolha de dados foram as produções escritas dos alunos e o registo áudio de uma aula. As produções escritas foram fundamentais para avaliar as estratégias utilizadas pelos alunos, uma vez que a sua análise seria difícil apenas com a observação direta (e mais ainda em aulas de E@D, com todas as limitações que existiram no acesso, por exemplo, às Breakout Rooms). Também só gravei a aula da formulação de problemas, porque tive a indicação, através da orientadora, de que o diretor da escola alertou os professores de que não deviam fazer gravações das aulas por causa da lei de proteção de dados. Assim, e por ser um caso específico de estudo, foi-me permitido gravar uma aula, tendo considerado mais importante gravar a nona aula uma vez que, da primeira e oitava aulas, teria as produções escritas dos alunos para análise.

O registo áudio permitiu-me lembrar as apresentações que os alunos realizaram sobre a formulação dos problemas (com base em expressões combinatórias fornecidas) e fazer transcrições de alguns excertos desse registo. O registo foi realizado através do computador da minha colega de estágio, utilizando o gravador de tela da Apowersoft¹⁰, por ser um programa que permitiu ao mesmo tempo a gravação áudio e vídeo do que os alunos estavam a escrever no Jamboard, sem nunca ter aparecido na tela imagens dos mesmos. No Quadro 3 estabelece-se a relação entre as questões de investigação, os instrumentos de recolha de dados e o procedimento da recolha dos mesmos:

¹⁰ O Gravador de Tela da Apowersoft é um programa de captura de tela que apresenta diversas funções. Pode-se gravar qualquer atividade da tela, por exemplo no Jamboard, incluindo gravação áudio. Os vídeos gravados podem ser guardados em vários formatos, incluindo WMV, MP4, VOB, AVI, FLV, GIF e outros. Além disso, este programa de gravação também permite agendar tarefas, fazer upload de vídeos para YouTube, tirar prints da tela, converter, editar vídeos e muito mais.

Quadro 3 – Relação entre questões de investigação, instrumentos de recolha de dados e procedimentos de recolha dos mesmos

Aulas	Questões de investigação	Instrumentos de recolha de dados	Procedimento de recolha dos dados
1 ^a aula	1) Como é que os alunos resolvem intuitivamente problemas simples de contagem?	Produções escritas realizadas por cada aluno, no caderno diário.	Os alunos fotografaram ou digitalizaram as suas resoluções e submeteram-nas no Google Classroom.
8 ^a aula	2) Como entendem e aplicam as operações combinatórias na resolução de problemas?	Produções escritas realizadas por cada aluno, no caderno diário.	Os alunos fotografaram ou digitalizaram as suas resoluções e submeteram-nas no Google Classroom.
9 ^a aula	3) Como entendem e aplicam as operações combinatórias na formulação de problemas?	Produções escritas realizadas por cada grupo de trabalho num documento Word. Gravação áudio das apresentações.	Cada grupo submeteu no Google Classroom o seu documento Word. Gravação áudio da apresentação dos problemas, com recurso ao gravador de tela da Apowersoft.

As discussões, em grupo turma, da resolução dos problemas, só foram realizadas após a submissão das resoluções dos alunos no Google Classroom, para salvaguardar que as mesmas seriam o mais fidedignas possível e não fossem alteradas depois da discussão.

Depois de efetuada a recolha de dados, foi com a análise dos mesmos que se foi organizar a informação com o objetivo de obter respostas às questões de investigação inicialmente formuladas. Segundo Luísa Aires (2015) “a análise da informação constitui um aspeto-chave e também problemático do processo de investigação” (p. 43). De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a análise dos dados “envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (p. 205). Assim, comecei por analisar como é que os alunos resolveram intuitivamente problemas simples de contagem e categorizei as estratégias de resolução subjacentes às suas respostas. Seguidamente, analisei como entendiam e mobilizavam as operações combinatórias na resolução de problemas, com o intuito de verificar se os alunos resolviam problemas de Cálculo Combinatório de modo mecanizado ou se, de facto, compreendiam o significado de cada operação combinatória. Por último, utilizei transcrições da gravação áudio, que permitiram uma análise mais clara do que ocorreu nessa aula, de modo a entender melhor o porquê de estarem incorretos ou incompletos alguns dos enunciados que

foram apresentados.

Após a organização de todos os dados, e para dar a resposta possível às questões de investigação, estruturei a escrita da análise de dados em três secções: (1) Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução intuitiva de problemas simples de contagem; (2) Compreensão e mobilização das operações combinatórias na resolução de problemas; (3) Compreensão e mobilização das operações combinatórias na formulação de problemas. Em todas as secções, também analisei as dificuldades manifestadas pelos alunos.

Para poder fazer a recolha dos dados para o estudo, foi feito um pedido de autorização aos encarregados de educação de todos os alunos da turma (Anexo R). Em particular, foi pedida autorização para efetuar o registo áudio da aula em que os alunos formularam problemas. Foi garantido o anonimato de todos os alunos da turma e a confidencialidade de todos os dados recolhidos, realçando que estes seriam apenas usados para efeitos do estudo e sua divulgação. Todos os encarregados de educação deram o seu consentimento (e nenhum aluno se mostrou reticente a participar no estudo), não sendo referidos os nomes dos alunos ao longo do relatório de forma a salvaguardar o seu anonimato. De igual modo, a escola em que foram recolhidos os dados não é identificada.

CAPÍTULO 5 – Análise de dados

Neste capítulo são apresentados e analisados os dados recolhidos nas três aulas da minha intervenção pedagógica. Esta análise está organizada nas três secções referidas anteriormente, sendo cada uma delas correspondente a uma questão de investigação. Na primeira (5.1), identificam-se as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução intuitiva de três problemas simples de contagem bem como as dificuldades manifestadas. Na segunda (5.2), identificam-se os conhecimentos, sobre as quatro operações combinatórias, mobilizados pelos alunos na resolução de problemas, analisando o tipo de compreensão evidenciado pelos alunos acerca dessas mesmas operações. Na terceira (5.3), analisa-se a compreensão/aplicação dos conhecimentos adquiridos pelos alunos sobre as quatro operações combinatórias na formulação de problemas, identificando também algumas das dificuldades evidenciadas pelos alunos.

5.1. Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução intuitiva de problemas simples de contagem

Antes do início da lecionação da unidade didática de Introdução ao Cálculo Combinatório, e para responder à primeira questão de investigação, “Como é que os alunos resolvem intuitivamente problemas simples de contagem?”, foram propostos aos alunos três problemas que resolveram individualmente. A seguir apresento, problema a problema, o seu enunciado, as estratégias adotadas pelos alunos na sua resolução e as dificuldades detetadas.

5.1.1. Problema 1

Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, quantos números de três algarismos, não necessariamente diferentes, se podem escrever com os algarismos do conjunto?

Figura 10 - Enunciado do problema 1

Considerando, à priori, que os alunos não teriam noções de Cálculo Combinatório e sendo o primeiro problema a ser resolvido pelos alunos, como motivação para não sentirem tantas dificuldades, achei importante introduzir no enunciado do problema a informação de que os algarismos a usar não teriam de ser “necessariamente diferentes”. Com esta ajuda, consegui eliminar o facto de os alunos considerarem apenas a

possibilidade do número a construir ser só constituído por algarismos diferentes.

A seguir, apresento num quadro resumo (Quadro 4) as quatro estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema, bem como o número dos que não tiveram dificuldades em chegar à solução correta e os que apresentaram alguma(s) incorreção(ões).

Quadro 4 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema 1 e número dos que atingiram ou não o resultado final correto

		Nº de alunos que não atingiu o resultado final correto	Nº de alunos que atingiu o resultado final correto
Estratégias	1) Diagrama de árvore	–	7
	2) Enumeração	3	13
	3) Tabela de dupla / “tripla” entrada	1	1
	4) Princípio Geral da Multiplicação	–	1
Um aluno não submeteu a sua resolução do <i>Google Classroom</i> .			

Ao analisar o quadro anterior, verificamos que a estratégia adotada pela maioria dos alunos foi a da enumeração. Existiram quatro abordagens, mas, na primeira e segunda estratégias, nem todos precisaram de concluir o diagrama de árvore ou a enumeração porque conseguiram identificar um padrão que lhes permitiu chegar a um resultado correto. De seguida, analiso alguns exemplos relativos a cada estratégia.

1) Diagrama de árvore

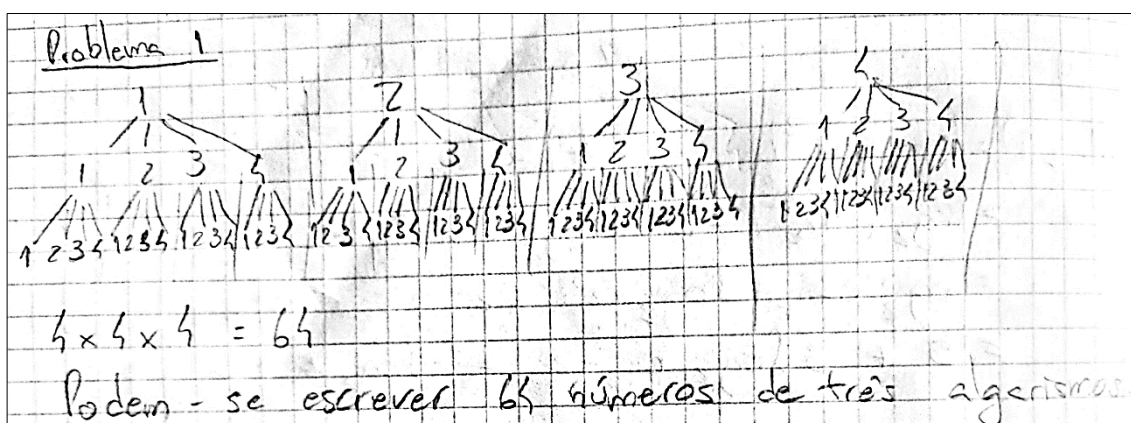


Figura 11 – Resolução do problema 1, com a utilização do diagrama de árvore completo

Na figura 11, verificamos que, com o diagrama de árvore completo, o aluno conseguiu chegar às 64 possibilidades de números de três algarismos nas condições pedidas no problema; no entanto, ao colocar $4 \times 4 \times 4 = 64$, parece dar a entender que já

conheceria o Princípio Geral da Multiplicação, ou então soube modelar a situação por um produto de três fatores, todos iguais a 4, tendo o mesmo acontecido com outros dois alunos (Figuras 12A e 12B), mas não necessitando estes de completar o(s) respetivo(s) diagrama(s) de árvore.

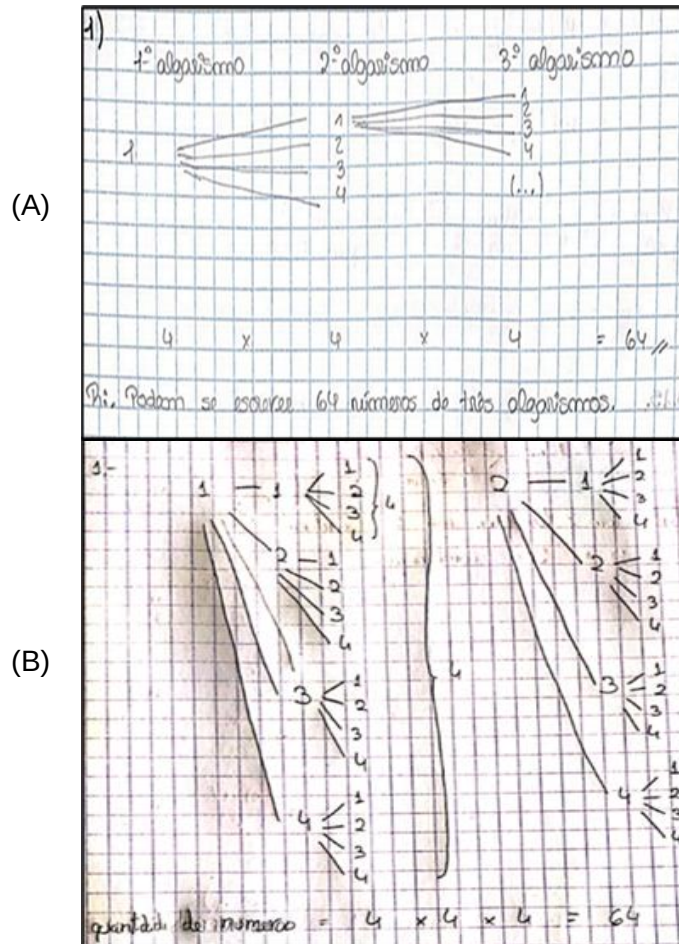


Figura 12 – Resoluções do problema 1, com diagrama de árvore incompleto e modelação da situação por um produto de três fatores iguais a 4

Nas figuras 13A e 13B, apresento a resolução de dois outros alunos. Na figura 13A, a aluna foi bastante elucidativa no seu raciocínio, visto que a mesma percebeu que o que se passava com os números começados pelo algarismo 1 também ocorria com os números começados pelos algarismos 2, 3 e 4, fazendo uma generalização. O mesmo aconteceu com outros três alunos, cuja resolução está correta e cujo processo de raciocínio também é correto, mas a forma de comunicar esse raciocínio podia ser melhor, mais explicativa, não deixando coisas para serem lidas um pouco *nas entrelinhas* (na figura 13B, ilustro o trabalho de um desses três alunos).

Outros três alunos utilizaram um procedimento semelhante, tal como se pode verificar nas figuras 15A e 15B. Na primeira, o aluno utilizou o seguinte critério: escrever os números com os algarismos todos iguais; escrever os números com os dois primeiros algarismos iguais variando o terceiro, depois os números com os dois últimos algarismos iguais variando o primeiro, escrever os restantes números que começam com o algarismo 1 ou 2, tendo verificado depois que o mesmo acontece para os que começam pelos algarismos 3 ou 4. A aluna cuja resolução consta na figura 15B, não completando o seu raciocínio, não conseguiu chegar ao resultado correto, uma vez que se *perdeu pelo caminho*.

(A)

1) $\{1, 2, 3, 4\}$

Quantos números de 3 algarismos se podem fazer?

111 / 222 / 333 / 444 $\rightarrow 4$

112 / 113 / 114 / 221 / 223 / 224 / 331 / 332 / 334 / 441 / 442 / 443 $\rightarrow 12$

122 / 133 / 144 / 211 / 233 / 244 / 311 / 322 / 344 / 411 / 422 / 433 $\rightarrow 12$

121 / 123 / 124 / 131 / 132 / 134 / 141 / 142 / 143 $\rightarrow 9$

212 / 213 / 214 / 231 / 232 / 234 / 241 / 242 / 243 $\rightarrow 9$

Números começados em 1 $\rightarrow 9$

Números começados em 2 $\rightarrow 9$

Combinação total $= 4 + 12 + 12 + 9 + 9 + 9 = 64$

(B)

C: $\{1, 2, 3, 4\}$

- 123 ; - 234 ; - 341 ; - 412 ;

- 111 ; - 222 ; - 333 ; - 444 ;

- 112 ; - 113 ; - 114 ;

- 221 ; - 223 ; - 224 ;

- 331 ; - 332 ; - 334 ;

- 441 ; - 442 ; - 443 ;

20 conjuntos

Figura 15 – Resoluções do problema 1, com enumeração de alguns casos possíveis

Um outro caso (Figura 16) é o de um aluno que, utilizando um procedimento diferente dos anteriores, só não conseguiu chegar ao resultado correto porque se esqueceu de referir uma quinta hipótese, que é a de considerar quantos números existem com o primeiro e o último algarismos iguais. O aluno reconheceu que, quando os números começam por 2, 3 ou 4, o critério adotado para o algarismo 1 também se verificava, daí a multiplicação por 4 no cálculo numérico final.

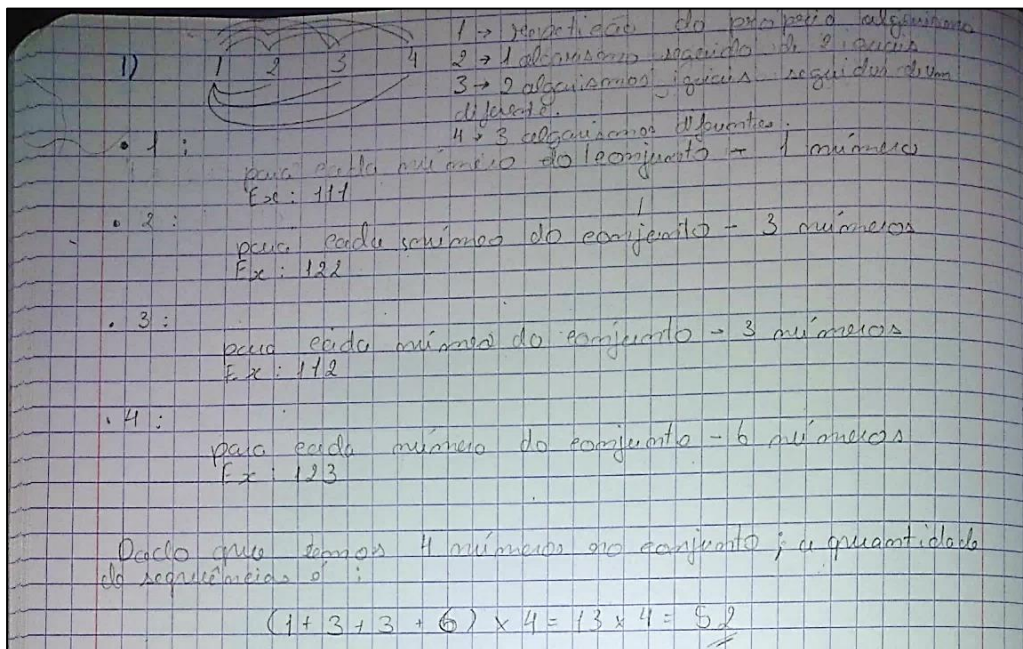


Figura 16 – Resolução do problema 1, com enumeração e reconhecimento de um padrão

Na figura 17, podemos verificar que a aluna começou por determinar quatro subconjuntos de três elementos a partir do conjunto inicial. A partir do primeiro subconjunto, $\{1, 2, 3\}$, enumerou os possíveis casos, sem utilização de qualquer critério (enumeração não sistemática) o que a levou a não conseguir chegar ao número total de casos, só para este subconjunto, que seriam 27. Mesmo que a aluna continuasse a resolver corretamente com o critério com que iniciou, nunca chegaria ao resultado pretendido, uma vez que iria sempre repetir casos, pois sugere um padrão incorreto quando multiplica os 15 por 4.

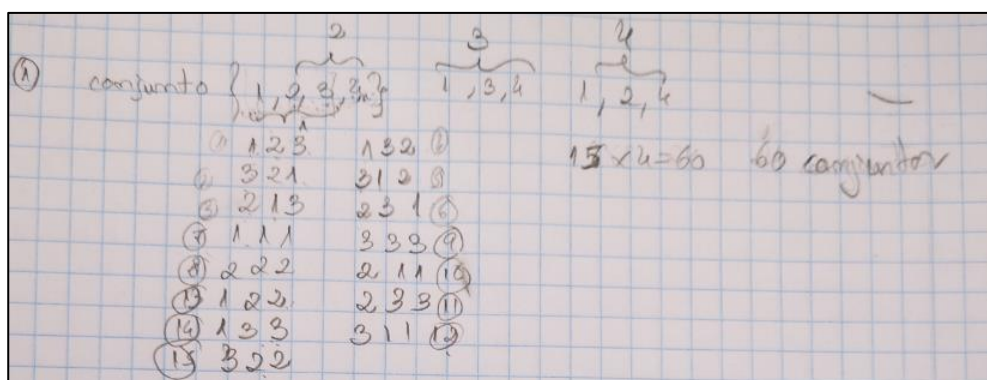


Figura 17 – Resolução do problema 1, com enumeração não sistemática

A maior parte dos alunos resolveu o problema tal como ilustrado na figura 18. Apesar do raciocínio ser o mesmo, umas resoluções são mais completas do que outras, mas todas elas começaram por enumerar alguns casos até identificarem a existência de um padrão (Figuras 18A e 18B).

ex 1 Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, quantos números de três algarismos, não necessariamente diferentes, se podem escrever com os algarismos do conjunto?

(A)

Ita 16 combinações para o primeiro algarismo 1

As combinações são iguais para diferentes primeiros algarismos

$n_{total} = 4 \times 16 \Rightarrow n_{total} = 64$

R: Podem-se escrever 64 números.

(B)

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

③ $\rightarrow 111, 112, 113, 114, 121, 122, 123, 124, 131, 132, 133, 134, 141, 142, 143, 144$

$4 \times 16 = 64$

R: 16

Figura 18 – Resoluções do problema 1, com início numa enumeração e reconhecimento de um padrão

3) Tabela de dupla / “tripla” entrada

Um aluno, ao utilizar uma tabela de dupla entrada, nunca poderia chegar à resposta correta para o problema, ou seja, obter números constituídos por três algarismos. Como não tive uma conversa posterior com o aluno não cheguei a perceber se, em vez de três, leu dois algarismos no enunciado do problema ou se o interpretou mal.

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

$4 \times 4 = 16$

R: 16

Figura 19 – Resolução do problema 1, utilizando uma tabela de dupla entrada

Uma aluna optou por uma estratégia bastante interessante, semelhante à da tabela de dupla entrada, e atendeu ao facto de que se, para determinarmos o número de casos possíveis naquela tabela, multiplicamos n por n (em que n é o número de elementos de cada uma das entradas da tabela), então, numa tabela de “tripla” entrada, o número total de casos será $n \times n \times n$. Assim, apesar de ter representado 16 dos 64 números possíveis, foi capaz de *imaginar* a tabela a três dimensões, conseguindo chegar ao resultado correto (Figura 20).

Handwritten table on graph paper showing all possible 3-digit numbers formed by digits 1, 2, 3, 4. The table lists 64 combinations in a 4x4 grid format, with the final calculation $n = 4 \times 4 \times 4 = 64$ números.

Figura 20 – Resolução do problema 1, utilizando uma tabela de “tripla” entrada

4) Princípio Geral da Multiplicação

Uma aluna não esquematizou nenhum raciocínio para que o leitor conseguisse perceber como é que ela chegou às 64 possibilidades, tendo eu colocado a hipótese de que a aluna já tinha conhecimentos, extra-aula ou por consultar o manual adotado, sobre o Princípio Geral da Multiplicação. Só fazendo uma entrevista à aluna é que poderia confirmar o que acabei de conjecturar.

Handwritten diagram on graph paper illustrating the General Multiplication Principle. It shows a set $\{1, 2, 3, 4\}$ and the calculation $4 \text{ números} \times 4 \text{ números} \times 4 \text{ números} = 64$.

Figura 21 – Resolução do problema 1, eventualmente utilizando o Princípio Geral da Multiplicação

5.1.2. Problema 2

A Sofia tem, na estante do seu quarto, doze livros: cinco de José Saramago, três de Virgílio Ferreira e quatro de Lídia Jorge. Pretende escolher dois desses livros, de autores diferentes, para ler nas férias. Quantas escolhas diferentes pode fazer?

Figura 22 – Enunciado do problema 2

A seguir, apresento num quadro resumo (Quadro 5) as quatro estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema, bem como o número dos que não tiveram dificuldades em chegar à solução correta e os que apresentaram alguma(s) incorreção(ões).

Quadro 5 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema 2 e número dos que atingiram ou não o resultado final correto

		Nº de alunos que não atingiu o resultado final correto	Nº de alunos que atingiu o resultado final correto
Estratégias	1) Enumeração	1	3
	2) Tabela de dupla entrada.	1	1
	3) Diagrama de árvore	–	6
	4) Cálculos numéricos	3	11
Um aluno não submeteu a sua resolução do <i>Google Classroom</i> .			

Ao analisar o quadro anterior, verificamos que a estratégia adotada pela maioria dos alunos foi a da utilização de cálculos numéricos, onde uns apresentam apenas cálculos sem qualquer explicação e outros acompanham os cálculos com algum tipo de descrição/explicação. De seguida, analiso alguns exemplos relativos a cada estratégia.

1) Enumeração

De entre os alunos que enumeraram os casos possíveis (Figuras 23 e 24), apenas uma aluna escreveu as 47 possibilidades (Figura 23).

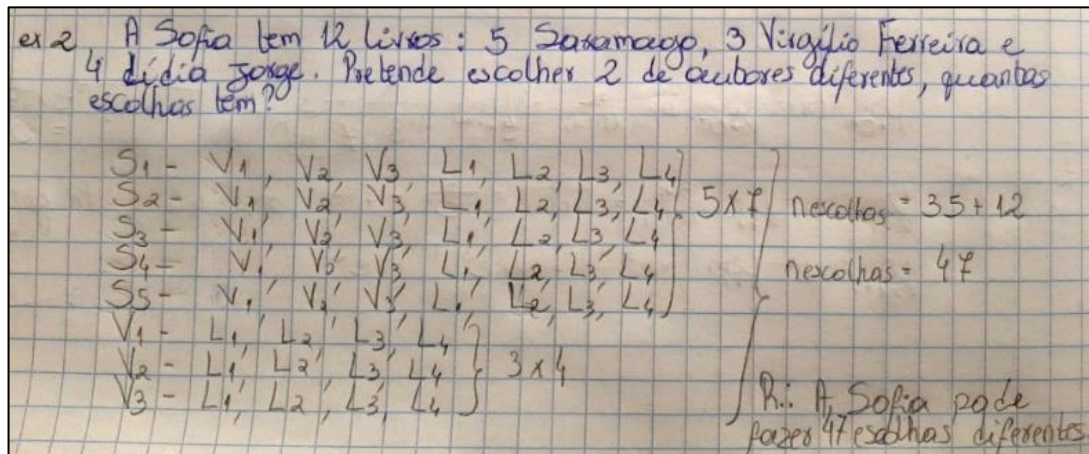


Figura 23 – Resolução do problema 2, com enumeração de todos os casos possíveis

Dois alunos começaram por enumerar as combinações possíveis entre um dos livros do José Saramago e os outros dois autores, verificando que o mesmo se passava para cada um dos outros quatro livros. O mesmo raciocínio foi feito para as combinações entre os livros de Virgílio Ferreira e de Lídia Jorge (Figura 24A). Portanto, houve um recurso inicial à enumeração, seguido do reconhecimento de um padrão. Uma outra

aluna esqueceu-se de fazer este último caso, ou seja, as combinações entre os livros de Virgílio Ferreira e de Lídia Jorge (Figura 24B).

(A)

2)

12 livros $\begin{cases} 5 \text{ de José Saramago (a)} \\ 3 \text{ de Virgílio Ferreira (b)} \\ 4 \text{ de Lídia Jorge (c)} \end{cases}$

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4\}$

$\begin{cases} a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3 \\ a_1c_1, a_1c_2, a_1c_3, a_1c_4 \end{cases} \quad 7 \times 5 = 35$

$\begin{cases} b_1c_1, b_1c_2, b_1c_3, b_1c_4 \end{cases} \quad 4 \times 3 = 12$

$35 + 12 = 47$

R.: Pode fazer 47 escolhas diferentes.

(B)

2)

S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
V ₁	V ₂	V ₃		
L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	

$\begin{cases} V_1, V_2, V_3 \\ L_1, L_2, L_3, L_4 \end{cases} \quad 7 \text{ combinações}$

Como existem 5 livros de Saramago, existem no total $7 \times 5 = 35$ combinações.

Figura 24 – Resoluções do problema 2, com início numa enumeração e reconhecimento de um padrão

2) Tabela de dupla entrada

Apenas dois alunos escolheram a tabela de dupla de entrada para a resolução do problema. Um aluno não acertou porque cometeu um erro de repetição de casos (Figura 25A). Se, no enunciado do problema, estivesse referido, de alguma forma, que interessava a ordem pela qual a Sofia tirava os livros da estante, ele já teria a resposta correta. Uma aluna resolveu corretamente o problema, utilizando três tabelas de dupla entrada (Figura 25B).

2) 12 : 5 JS ; 3 VF ; 4 LJ

(A)

	JS1	JS2	JS3	JS4	JS5	VF1	VF2	VF3	LJ1	LJ2	LJ3	LJ4
JS1	~~✓~~	~~✓~~	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
JS2	✓	~~✓~~	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
JS3	✓	✓	~~✓~~	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
JS4	✓	✓	✓	~~✓~~	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
JS5	✓	✓	✓	✓	~~✓~~	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
VF1	✓	✓	✓	✓	✓	~~✓~~	✓	✓	✓	✓	✓	✓
VF2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	~~✓~~	✓	✓	✓	✓	✓
VF3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	~~✓~~	✓	✓	✓	✓
LJ1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	~~✓~~	✓	✓	✓
LJ2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	~~✓~~	✓	✓
LJ3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	~~✓~~	✓
LJ4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	~~✓~~

R: 94 escolhas diferentes

2.

Sargento Saraceno: 5

Sargento Ferreira: 5

Sargento Jorge: 4

(B)

	1	2	3	4	5
1	✓	✓	✓	✓	✓
2	✓	✓	✓	✓	✓
3	✓	✓	✓	✓	✓

15 escolhas

	1	2	3	4	5
1	✓	✓	✓	✓	✓
2	✓	✓	✓	✓	✓
3	✓	✓	✓	✓	✓
4	✓	✓	✓	✓	✓

20 escolhas

	1	2	3
1	✓	✓	✓
2	✓	✓	✓
3	✓	✓	✓
4	✓	✓	✓

12 escolhas

Total = 15 + 20 + 12 = 47 escolhas

Figura 25 – Resoluções do problema 2, utilizando uma tabela de dupla entrada

3) Diagrama de árvore

Seis dos alunos resolveram o problema utilizando um diagrama de árvore incompleto, tal como o representado na figura 26. O reconhecimento de um padrão deve ter estado na origem da não completação do diagrama, isto é, ao reconhecerem um padrão, os alunos não viram necessidade de fazer um diagrama completo.

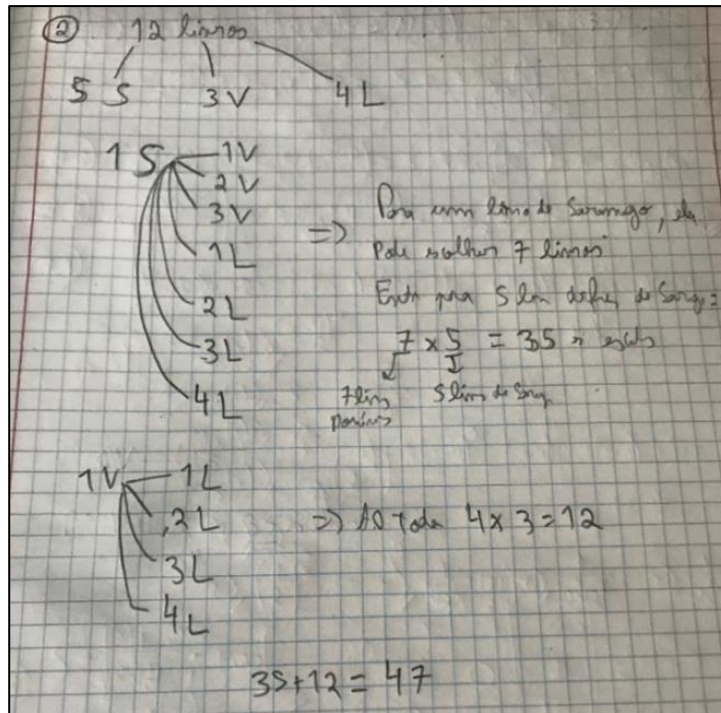


Figura 26 – Resolução do problema 2, com início num diagrama de árvore e reconhecimento de um padrão

4) Cálculos numéricos

Foram vários os alunos que, através de cálculos com ou sem explicação por palavras, chegaram à resposta correta. Apenas uma aluna traduziu por palavras todo o raciocínio (Figura 27A). O mesmo aconteceu com outros alunos, cuja resolução está correta, mas a forma de comunicar o seu raciocínio podia ser muito mais explicativa, não deixando para o leitor a interpretação dos seus cálculos (Figuras 27B e 27C).

2) A Sofia tem, na estante do seu quarto, doze livros: cinco de José Saramago, três de Virgílio Ferreira e quatro de Lídia Jorge. Pretende escolher dois desses livros, de autores diferentes, para ler nas férias. Quantas escolhas diferentes pode fazer?

12 livros

- 5 Saramago
- 4 Lídia
- 3 Virgílio

Saramago

livro 1

tem combinações possíveis com 4 da Lídia e 3 do Virgílio.

$\therefore 7$ combinações totais

o mesmo aconteceu com os outros livros de Saramago, terão as mesmas combinações e, ao mesmo tempo, já se contam $(5 \times 7 = 35)$ 35 combinações.

Virgílio

livro 1

combinações ainda não feitas são com os 4 da Lídia.

$\therefore 4$ combinações

3 livros de Virgílio

$\therefore 3 \times 4 = 12$ combinações.

R: Combinações totais = $35 + 12 = 47$

(B)

2) 12 livros

- $\rightarrow 5 \text{ J. S}$
- $\rightarrow 3 \text{ V. F}$
- $\rightarrow 4 \text{ L. J}$

total combinações: $5 \text{ J. S} \times 3 \text{ V. F} + 5 \text{ J. S} \times 4 \text{ L. J} + 3 \text{ V. F} \times 4 \text{ L. J}$

$$= (5 \times 3) + (5 \times 4) + (3 \times 4)$$

$$= 47 \text{ escolhas}$$

(C)

2)

12 livros

- 5 de Saramago
- 3 de Virgílio
- 4 de Lídia Jorge

$$3 \times 5 = 15$$

$$5 \times 4 = 20$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$\text{Totais} = 15 + 20 + 12 = 47$$

Figura 27 – Resoluções do problema 2, explicando o seu raciocínio por palavras/cálculos numéricos

Dos três alunos que erraram, duas alunas repetiram os casos: José Saramago e Virgílio Ferreira, José Saramago e Lídia Jorge, e Lídia Jorge e Virgílio Ferreira, tal como se pode constatar num exemplo apresentado na figura 28A; um aluno limitou-se a multiplicar o número de livros de cada um dos autores (Figura 28B).

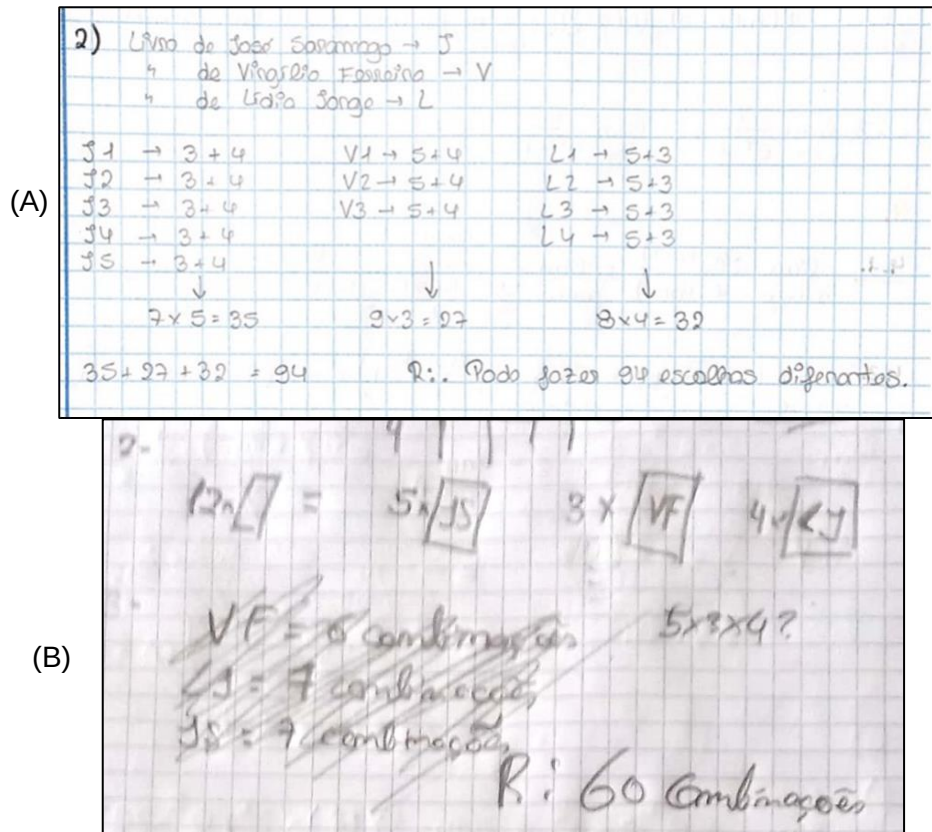


Figura 28 – Resolução do problema 2, cometendo o erro de repetição (A) e multiplicação apenas do número de livros de cada autor (B)

5.1.3. Problema 3

Para a formação de uma comissão, são escolhidas três pessoas de entre o Afonso, o Carlos, a Isaura e a Maria para que ocupem os cargos de Presidente, Tesoureiro e Secretário. Sabendo que uma pessoa não pode ocupar mais de um cargo diferente, quantas comissões distintas podem ser formadas?

Figura 29 – Enunciado do problema 3

Em comparação com os dois problemas anteriores, foi neste que alguns alunos sentiram mais dificuldades, pois seis alunos não atingiram o resultado final correto e dois nem responderam. Isto veio confirmar as minhas expectativas, uma vez que o problema exige a formação de subconjuntos de três elementos em que a ordem importa e, no enunciado do problema, não é dada aos alunos nenhuma indicação nesse sentido, ao contrário do que tinha sido feita no problema 1.

A seguir, apresento num quadro resumo (Quadro 6) as cinco estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema, bem como o número dos que não tiveram dificuldades

31A, o aluno começou por enumerar as comissões em que o Afonso é presidente, mas não necessitou de enumerar as comissões em que o Carlos, a Isaura ou a Maria são presidentes. Ao colocar $4 \times 3 \times 2 = 24$ parece dar a entender que já conheceria o Princípio Geral da Multiplicação, ou então soube modelar a situação por um produto de três fatores. Na figura 31B, a aluna começou por determinar quatro subconjuntos de três elementos a partir do conjunto {Afonso, Carlos, Isaura, Maria}. A partir do subconjunto {Afonso, Carlos, Isaura} enumerou todas as comissões que se podem formar com estas três pessoas. Ao colocar $6 \times 4 = 24$, a aluna tinha verificado que o mesmo raciocínio podia ser utilizado para os restantes subconjuntos formados, isto é, reconheceu um padrão.

Problema 3

(A)

Presidente	Tesoureiro	Secretário
Afonso	Carlos	Isaura
Afonso	Carlos	Maria
Afonso	Isaura	Carlos
Afonso	Isaura	Maria
Afonso	Maria	Carlos
Afonso	Maria	Isaura

Para cada presidente há 3 tesoureiros e para cada tesoureiro há 2 secretários.

$4 \times 3 \times 2 = 24$

Podem ser formadas 24 comissões.

(B)

3 pessoas entre: Afonso, Carlos, Isaura e a Maria

Afonso, Isaura, Maria

Afonso, Carlos, Maria

4

Presidente, Tesoureiro, Secretário

A	C	I	A	I	C
C	A	I	C	I	A
I	C	A	I	A	C

$6 \times 4 = 24$

24 comissões

Figura 31 – Resoluções do problema 3, com início numa enumeração e modelando a situação por um produto de três fatores distintos (A) ou reconhecendo um padrão (B)

O aluno, cuja resolução está apresentada na figura 32, começou por pensar na presença ou não do Afonso nas comissões. Estando numa comissão, o Afonso pode ocupar um dos três cargos e, a partir do exemplo em que o Afonso ocupa o cargo de presidente, ele conseguiu enumerar seis comissões distintas. Pensando o mesmo para os outros dois cargos, ele chegou à conclusão de que também se conseguem formar seis comissões, ficando então 18 no total. Com o Afonso a não pertencer a uma comissão, conseguiu enumerar seis comissões distintas.

3) Se João e Afonso o Presidente a comissão
pode ter um dos formadores diferente de João e Afonso
também tem um dos formadores de João e Afonso também

P → Afonso	T → Carlos	S → Ivo
	T → Carlos	S → Maria
	T → Maria	S → Carlos
	T → Maria	S → Ivo
	T → Ivo	S → Carlos
	T → Ivo	S → Maria

Se o Afonso não for escolhido, também se vai:

P → Maria	T → Ivo	S → Carlos
P → Maria	T → Carlos	S → Ivo
P → Ivo	T → Carlos	S → Maria
P → Ivo	T → Maria	S → Carlos
P → Carlos	T → Maria	S → Ivo
P → Carlos	T → Ivo	S → Maria

$6 \times 4 = 24$

Podem ser formados 24 comissões diferentes

Figura 32 – Resolução do problema 3, com recurso à enumeração de algumas comissões e reconhecimento de um padrão

Os restantes alunos que iniciaram a resolução do problema com a enumeração não chegaram à resposta correta porque se esqueceram de enumerar algumas comissões, tal como os exemplos das figuras 33A e 33B. O aluno cuja resposta consta na figura 32A, para ter a sua resposta completa, teria de ter colocado mais duas comissões: ap, ct, bs | bp, ct, as (utilizando a nomenclatura do aluno). Uma aluna, ao tentar enumerar todas as comissões, esqueceu-se daquelas em que o Afonso não entrava (Figura 33B).

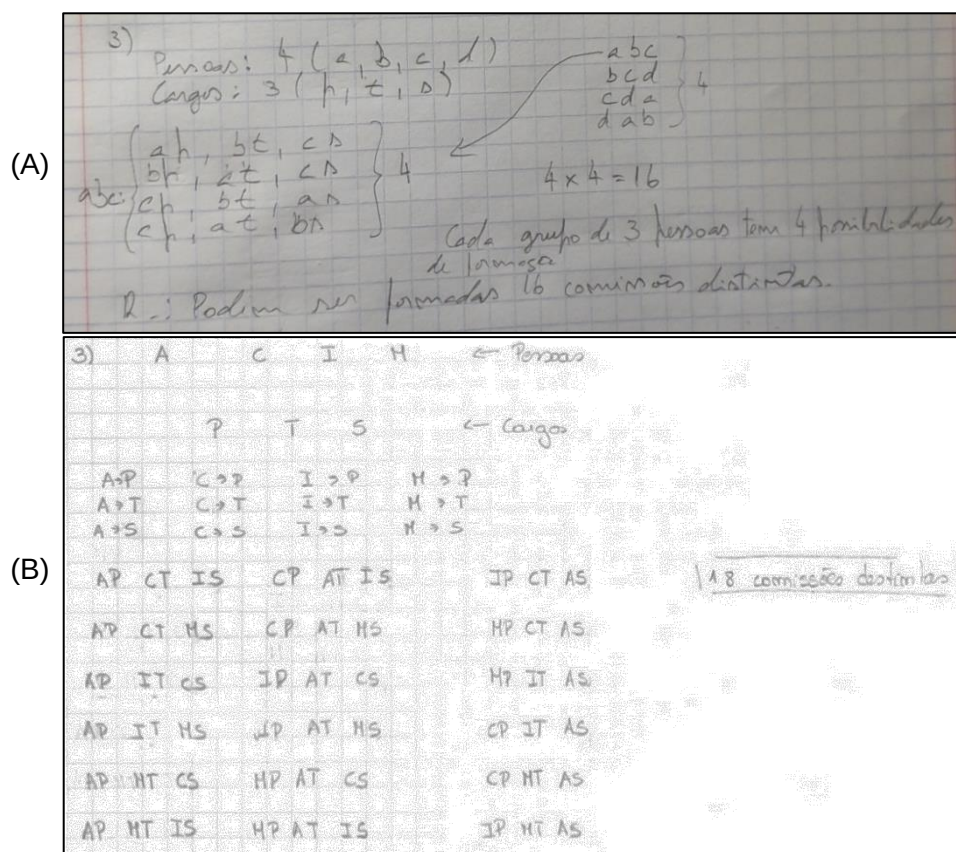


Figura 33 – Resoluções do problema 3, com enumeração incompleta

2) Diagrama de árvore

Tendo sido a segunda estratégia mais utilizada, não houve grande variação na esquematização da resposta dos sete alunos que escolheram o diagrama de árvore; três resolveram o problema de modo semelhante ao ilustrado na figura 34A e quatro de modo semelhante ao apresentado na figura 34B.

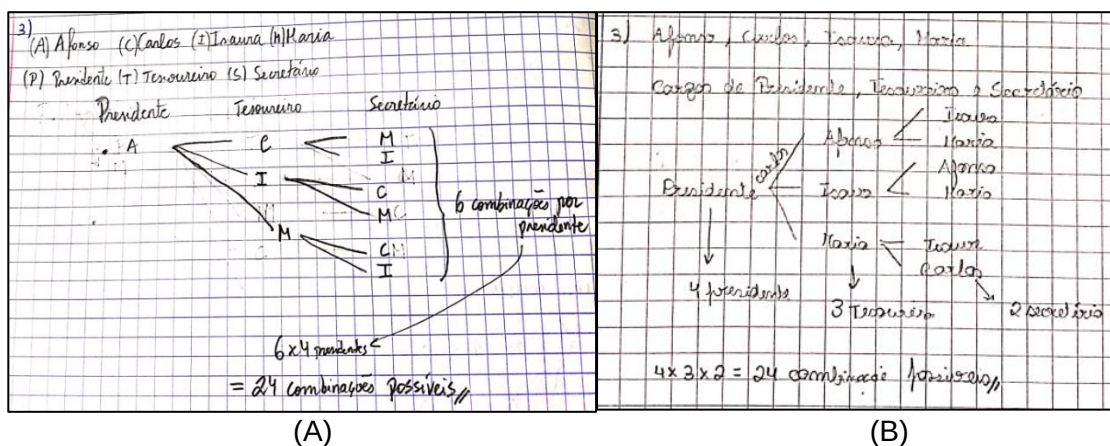


Figura 34 – Resoluções do problema 3, com início num diagrama de árvore e reconhecendo um padrão (A) ou modelando a situação por um produto de três fatores distintos (B)

Os alunos começaram por utilizar o diagrama de árvore, sendo que os que apresentaram uma resposta semelhante à que consta na figura 34A esquematizaram as comissões em que o Afonso é presidente, verificando que o mesmo acontece para as restantes pessoas, daí o $6 \times 4 = 24$. Outros (Figura 34B) parecerem ter dado significado aos valores encontrados a partir do significado da própria operação de multiplicação, daí o $4 \times 3 \times 2 = 24$.

3) Tabela de dupla entrada

Dois alunos utilizaram, erradamente, a tabela de dupla entrada. A estrutura matemática inerente a este problema é a de formar conjuntos de três elementos ordenados a partir de um conjunto de quatro elementos, logo, para este problema, esta estratégia nunca conduziria à resposta correta.

3) Afonso; Carlos; Isaura; Maria
Presidente; Tesoureiro; Secretário

	Presidente	Tesoureiro	Secretário
Afonso P	✓	x	x
Afonso T	x	✓	x
Afonso S	x	x	✓
Carlos P	✓	x	x
Carlos T	x	✓	x
Carlos S	x	x	✓
Isaura P	✓	x	x
Isaura T	x	✓	x
Isaura S	x	x	✓
Maria P	✓	x	x
Maria T	x	✓	x
Maria S	x	x	✓

R: 12

(A)

3º
3 cargos
3 pessoas
 $3 \times 3 = 9$

	Afonso	Carlos	Isaura
Presidente			
Tesoureiro			
Secretário			

R: 9 comissões distintas

(B)

Figura 35 – Resoluções do problema 3, utilizando uma tabela de dupla entrada com interpretação errada do problema

4) Cálculos numéricos

As resoluções do problema ilustradas nas figuras 36A e 36B não são suficientemente explicativas, mas poderemos pensar que o aluno da figura 36A considerou todos os pares possíveis (Presidente/Tesoureiro), sendo 12 no total e que, para cada par, existem duas possibilidades para o cargo de secretário (as duas pessoas restantes). Já a aluna da figura 36B raciocinou de forma semelhante à do colega a que respeita a figura 35A, dizendo que cada pessoa pode assumir três cargos e, ao fazer a soma, dá a entender que os quatro elementos podem ser, ao mesmo tempo, presidentes, tesoureiros ou secretários, o que fez com que ela tivesse errado.

5.2. Compreensão e mobilização das operações combinatórias na resolução de problemas

Após a leção das quatro operações combinatórias (conduzida pela minha orientadora), e para responder à questão “Como entendem e aplicam as operações combinatórias na resolução de problemas?”, foi apresentada aos alunos a ficha de trabalho nº 23 (Anexo M). Tal como referido anteriormente, o objetivo da realização desta ficha de trabalho foi tentar compreender se os alunos conseguiam resolver problemas, reconhecendo qual a operação combinatória que estava inerente a cada um. Os problemas foram colocados na ficha de forma aleatória para que não houvesse uma identificação do primeiro problema com a primeira operação combinatória trabalhada, e sucessivamente. Nesta secção são apenas analisados os primeiros quatro problemas que correspondem, respetivamente, a arranjos sem repetição, combinações, permutações e arranjos com repetição. O quinto problema não foi analisado, uma vez que a maior parte dos alunos não o resolveu, não por eventuais dificuldades que pudessem apresentar, mas sim por falta de tempo.

Relativamente às estratégias usadas pelos alunos, verificou-se que a grande maioria estão baseadas em cálculos/fórmulas. Alguns alunos recorreram à enumeração e apenas um fez uma mera estimativa (errada), sem qualquer justificação para o valor apresentado. Qualquer das estratégias conduziu a respostas corretas e erradas. Em algumas situações, as respostas erradas corresponderam à utilização de fórmulas não adequadas à situação, ou seja, não reconheceram a operação combinatória inerente àquele problema. No entanto, a generalidade dos alunos acertou em todos os problemas. A seguir passo a apresentar, problema a problema, o seu enunciado, as estratégias adotadas na resolução e dificuldades detetadas.

5.2.1. Custo das apostas (Arranjos sem repetição)

Numa corrida participam 12 concorrentes. Há apostas para ver quem acerta na classificação dos três primeiros lugares. Cada aposta custa 2€. Qual é o valor mínimo que deve ser gasto para garantir que se acerta?

Figura 38 – Enunciado do problema de arranjos com repetição

O quadro 7 mostra quantos alunos identificaram ou não a expressão combinatória subjacente a este problema, bem como as estratégias de resolução utilizadas pelos

mesmos, no caso das respostas corretas e das respostas erradas.

Quadro 7 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema de arranjos sem repetição e número de alunos que identificaram ou não essa operação combinatória

		Identificação incorreta da operação combinatória	Identificação correta da operação combinatória
Estratégias	1) Cálculos/Fórmulas	4	21
	2) Estimativa subjetiva	1	–
Não resposta – uma aluna.			

Através da análise do quadro 7 verificamos que a maioria dos alunos, para além de usarem a mesma estratégia (recurso a cálculos ou fórmulas), identificaram corretamente a operação combinatória em causa.

1) Cálculos/Fórmulas

Pela análise de todos os dados, os alunos que conseguiram identificar bem a operação combinatória chegaram também ao resultado correto. A apresentação visual das respostas é variada, umas mais simples, como, por exemplo, a da figura 39B e outras mais completas, tal como se pode verificar na figura 39A.

(A)

1. 12 concorrentes

$$\frac{12 \times 11 \times 10}{1} = A_3 = \frac{12!}{9!} = 1320 \text{ hipóteses}$$

1 aposta — 2 €

1320 apostas — x

$$x = 1320 \times 2 = 2640 \text{ €}$$

R.: O valor mínimo que deve ser gasto para garantir que se acerta é 2640 €.

(B)

1. $(12 \times 11 \times 10) \times 2 \text{ €} = 2640 \text{ €}$

Figura 39 – Resoluções do problema de arranjos sem repetição

Quatro alunos erraram, porque não identificaram a operação combinatória correta. Em vez de arranjos, consideraram combinações, cometendo o erro de ordem, ou seja, não consideraram a ordem quando ela é essencial neste problema. Assim, eles só formaram

conjuntos de três pessoas, a partir de um conjunto de 12, sem entrar em linha de conta com a posição delas no pódio.

Dois alunos, tal como o exemplo da figura 40A, começaram por escrever $12 \times 11 \times 10$; no entanto, ao associarem esta multiplicação a ${}^{12}C_3$ e colocando esta expressão na máquina de calcular, o resultado a que chegaram foi errado. Se eles tivessem identificado corretamente a operação combinatória em causa (${}^{12}A_3$), ao colocá-la na máquina, eles teriam chegado ao resultado correto. Faltou aos alunos espírito crítico de confirmação do resultado da operação que tinham colocado inicialmente ($12 \times 11 \times 10$) com o que lhes deu quando introduziram na máquina de calcular: ${}^{12}C_3$. Uma vez que os resultados são diferentes, a igualdade que apresentaram ($12 \times 11 \times 10 = {}^{12}C_3$) não faz sentido.

Um aluno também não identificou corretamente a operação combinatória em causa; no entanto, mostrou conhecer a fórmula para a expressão matemática ${}^{12}C_3$ (Figura 40B). O outro aluno que errou, para além de não ter identificado a operação combinatória correta, introduziu um novo valor nos cálculos (efetuou uma multiplicação por 6) para o qual não consigo obter explicação (Figura 40C).

(A) $1. 12 \times 11 \times 10 = {}^{12}C_3 = 220$
 1 aposta — 2 erros
 $220 \text{ apostas} \quad \text{11 erros} \quad \text{11} = 220 \times 2 = 440 \text{ erros}$
 11 440 erros,

(B) 1) 12 jogadores
 3 eliminados
 1 aposta com 2 €
 ${}^{12}C_3 \times 2 = \frac{{}^{12}A_3}{3!} \times 2 = \frac{12!}{9! \times 3!} \times 2 = 440 \text{ erros}$

(C) Ticket 23
 1) ${}^{12}C_3 \times 2 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} \times 6 = 440 \text{ erros}$

Figura 40 – Resoluções do problema de arranjos sem repetição, cometendo o erro de ordem

2) Estimativa subjetiva

Apenas um aluno recorreu a esta estratégia, limitando-se a indicar um valor para o custo mínimo de apostas necessárias a fazer para garantir que se ganha, sem revelar qualquer racionalidade na determinação desse valor (Figura 41).

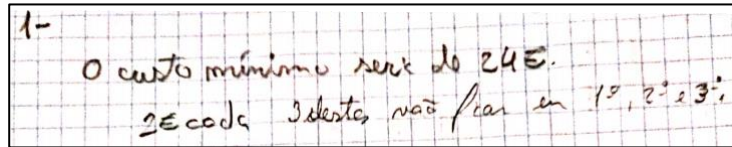


Figura 41 – Resolução do problema de arranjos sem repetição, com estimativa do resultado final

5.2.2. Formar grupos (Combinações)

Numa reunião foi necessário formar um grupo de dois elementos escolhidos entre os participantes. Sabe-se que há 28 possibilidades para formar esse grupo. Determina o número de possibilidades se o grupo passar a ser constituído por 4 elementos.

Figura 42 – Enunciado do problema de combinações

O quadro 8 apresenta a única estratégia utilizada na resolução deste problema bem como o número de alunos que acertaram ou não responderam.

Quadro 8 – Estratégia utilizada pelos alunos na resolução do problema de combinações e número de alunos que identificaram ou não essa operação combinatória

Estratégia		Identificação incorreta da operação combinatória	Identificação correta da operação combinatória
	1) Cálculos/Fórmulas	–	25
Não resposta – dois alunos.			

À exceção de dois alunos que não resolveram o problema, todos os outros conseguiram identificar a operação combinatória em causa e equacionar o problema de modo a chegar à resposta correta. Não existiu variedade nas resoluções, embora existam alguns casos em que os alunos são mais pormenorizados na resolução do problema (Figura 43A) e outros menos pormenorizados (Figura 43B).

Três alunos têm a resolução correta, mas apresentam dois pormenores que dão a entender que há uma certa confusão entre os conceitos de arranjos e combinações (Figura 43C). Estes alunos apresentam pormenores que não deveriam constar na resolução deste problema; fizeram-no quando relacionaram $\frac{x}{x-1}$ com ${}^x C_2$ e $\frac{8}{7} \frac{6}{5}$ com ${}^8 C_4$. Tanto a esquematização $\frac{x}{x-1}$ como a esquematização $\frac{8}{7} \frac{6}{5}$ são utilizadas

apenas na resolução de problemas que envolvem arranjos sem repetição.

(A) 28 possibilidades com 2 elementos $2! = 2 \times 1 = 2$
 ? possibilidades com 4 elementos
 ${}^m C_2 = 28 \Leftrightarrow \frac{{}^m A_2}{2!} = 28 \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-2)!} = 28 \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-2)!} = 56 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{m \times (m-1) \times (m-2)!}{(m-2)!} = 56 \Leftrightarrow m^2 \cdot m - 56 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+224}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{m = -9}{m \in \mathbb{N}} \vee m = 8$
 ${}^8 C_4 = \frac{{}^8 A_4}{4!} = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$
 Existem 70 possibilidades com 4 elementos.

(B) 2
 $\frac{m!}{(m-2)! \cdot 2!} = 28 \Leftrightarrow m^2 - m = 56 \Leftrightarrow m = 8$
 $\frac{8!}{4! \times 4!} = 70$

(C) 2
 Grupo de 2 alunos:
 $\frac{x(x-1)}{2!} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2 - x}{2}$
 $\frac{x^2 - x}{2} = 28$
 $\frac{x^2 - x}{2} = 28$
 $x^2 - x = 56$
 $x^2 - x - 56 = 0$
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \times 56}}{2}$
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2}$
 $x = \frac{1 \pm 15}{2} \Rightarrow x = 8 \text{ (x > 0)}$
 Há 8 pessoas no Residência
 Grupo de 4 alunos:
 $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4!} = 70$
 R: Há 70 possibilidades de grupos de 4 elementos.

Figura 43 – Resoluções do problema de combinações

5.2.3. Mensagens codificadas (Permutações)

Um grupo de amigos resolveu arranjar um código para comunicarem entre eles. Concordaram que cada mensagem ficaria associada a uma sequência de dois dígitos (0 e 1) e duas letras (X e Y), sem possibilidade de repetição de letras ou dígitos. O código pode começar por uma letra ou por um dígito, e as letras (ou os dígitos) podem ser seguidas ou intercaladas por dígitos (ou letras).

a) Quantas mensagens é que eles podem codificar de acordo com este esquema?

b) Como os amigos acharam que o número de mensagens era pequeno, resolveram permitir a repetição de letras ou/e dígitos, mas acordaram que o código tinha de ser constituído por duas letras e por dois dígitos, mantendo as regras anteriores. Quantas mensagens é que eles conseguem agora codificar?

Figura 44 – Enunciado do problema de permutações

A resolução da alínea a) deste problema, para a maior parte dos alunos, não suscitou grandes dúvidas, tendo-a resolvido corretamente utilizando permutações. Houve uma aluna que chegou ao resultado correto não utilizando aquela operação combinatória e outro que tentou enumerar todas as possibilidades, mas sem sucesso. Na alínea b), foi onde existiram menos alunos a acertar e onde a maioria usou uma estratégia possível, não envolvendo permutações.

No quadro 9 apresento as estratégias utilizadas na resolução da alínea a) deste problema, bem como o número de alunos que acertaram ou erraram.

Quadro 9 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da alínea a) do problema de permutações e número de alunos que chegaram ou não à resposta correta

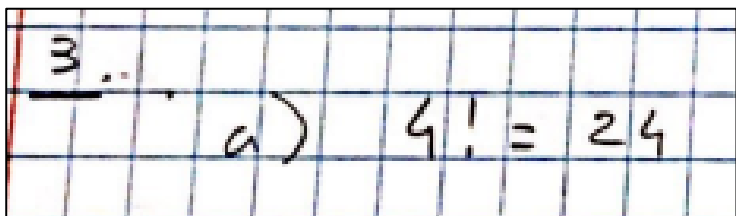
Alínea a)		Respostas	
		Corretas	Erradas
Estratégias	1) Cálculos/Fórmulas	22	–
	2) Enumeração	3	2

1) Cálculos/Fórmulas

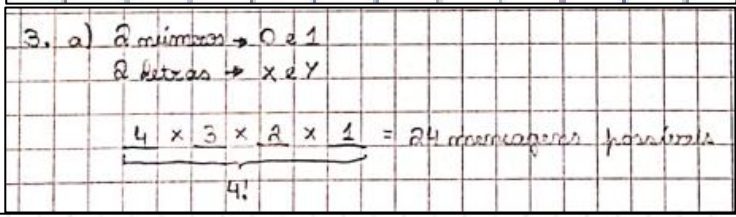
Todos os alunos que resolveram a alínea a) por um método expectável e mais simples acertaram, ou seja, respondendo $4!$ (Figuras 45A e 45C) ou $4 \times 3 \times 2 \times 1$ (Figura 45B).

Uma aluna (Figura 45C), quando escreveu os dados do problema, referiu que não interessava a ordem pela qual as letras e os dígitos eram colocados, o que me sugere um erro de escrita porque o raciocínio que utilizou aponta claramente para a não repetição e aponta para se ter em conta a ordem, daí a colocação do 4!.

(A)



(B)



(C)

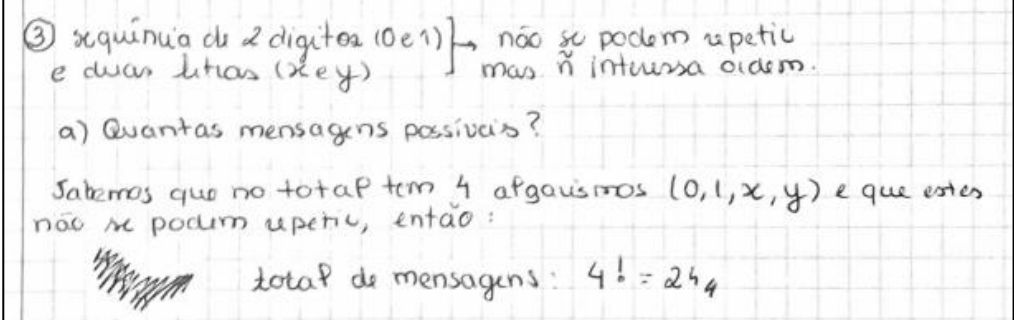


Figura 45 – Resoluções da alínea a) do problema de permutações escrevendo apenas 4! ou $4 \times 3 \times 2 \times 1$

2) Enumeração

O aluno cuja resolução surge na figura 46 não deve ter lido a parte do enunciado que diz que as letras (ou os dígitos) podem ser seguidas ou intercaladas por dígitos (ou letras). Ele apenas terá considerado a última parte. Só fazendo uma entrevista ao aluno é que poderia confirmar o que acabei de conjecturar.

3-
a) 8 diferentes

0x1y	x0y1
0y1x	x1y0
1x0y	y1x0
1y0x	y0x1

Figura 46 – Resolução da alínea a) do problema de permutações, utilizando a enumeração de algumas possibilidades

Nos exemplos a seguir apresentados (Figuras 47, 48 e 49), não houve uma enumeração semelhante à da figura 46, uma vez que os alunos não utilizaram o 0 e 1, e o X e Y (dados do problema), para efetuarem essa enumeração.

Duas alunas, não explicitando a operação combinatória de permutações, chegaram a um resultado correto. Uma (Figura 47A) começou por representar as seis possibilidades de colocação dos dígitos (D) e das letras (L), tendo em conta as condicionantes do problema. A outra aluna (Figura 47B) representou quatro possibilidades de colocação dos dígitos e das letras, sendo que uma dessas (“se começar com uma letra e um número”) é equivalente a agrupar os passos 3 e 6 (Figura 47A) e a outra (“se começar com um número e uma letra”) é equivalente a agrupar os passos 4 e 5 (Figura 47A).

(A)

③ D → 0,1 L → X,Y

a) — — — —

1) DDLL
 $\frac{2}{2} \frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{1}{1} = 4$

2) LLDD
 $\frac{2}{2} \frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{1}{1} = 4$

3) LDLD
 $\frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{1}{1} \frac{1}{1} = 4$

4) DLDL
 $\frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{1}{1} \frac{1}{1} = 4$

5) DCLD
 $\frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{1}{1} \frac{1}{1} = 4$

6) LDDL
 $\frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{1}{1} \frac{1}{1} = 4$

4 x 6 = 24
R: 24 códigos

(B)

8.

a) 4 caracteres: 2 dígitos, 2 letras

possibilidades para as 2 letras: 2

possibilidades para os 2 dígitos: 2

C = {X, Y, 0, 1}

• se começar com 1 letra e 1 número:
 $2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$

• se começar com 2 letras:
 $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$

• se começar com 1 número e 1 letra:
 $2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$

• se começar com 2 números:
 $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$

total: 8 + 4 + 8 + 4 = 24

Figura 47 – Resoluções da alínea a) do problema de permutações, representando as seis possibilidades de colocação dos dígitos e das letras

Outro aluno (figura 48) não leu a parte do enunciado que diz que as letras (ou os dígitos) podem ser seguidas(os). Tive esta confirmação quando, na discussão desta alínea durante a aula, o aluno perguntou se as letras e os dígitos não tinham que ser intercalados.

3 a) $\begin{cases} 2 \text{ dígitos } (0,1) \\ 2 \text{ letras } (x,y) \end{cases}$
Sem repetição

$2 \left(\frac{2}{D} \times \frac{2}{L} \times \frac{1}{D} \times \frac{1}{L} \right) = 8$

Figura 48 – Resolução da alínea a) do problema de permutações, representando duas das seis possibilidades de colocação dos dígitos e das letras

Uma aluna (Figura 49) chegou ao resultado correto para o problema, mas o raciocínio que usou não é completamente perceptível. Identificou todas as possibilidades para a colocação das letras; no entanto não consigo atribuir significado à expressão ${}^4A_2 + {}^4A_2$, no contexto do esquema que ela realizou. Faltou novamente aqui uma entrevista para esclarecer esta dúvida.

3 código: $\begin{cases} 2 \text{ dígitos } (0 \text{ e } 1) \\ 2 \text{ letras } (x \text{ e } y) \end{cases}$

a) $\begin{matrix} l & - & l & - & ou & l & l & - & - & ou & l & - & - & l \\ - & - & l & l & & ou & l & - & l & ou & - & l & l & - \end{matrix}$

${}^4A_2 + {}^4A_2 = 12 + 12 = 24$

Figura 49 – Resolução da alínea a) do problema de permutações, com raciocínio incompreensível

Feita a análise das respostas da alínea b), elaborei um quadro resumo onde são apresentadas as estratégias utilizadas e o número de alunos que acertaram ou erraram (Quadro 10).

Quadro 10 – Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da alínea b) do problema de permutações e número de alunos que chegaram ou não à resposta correta

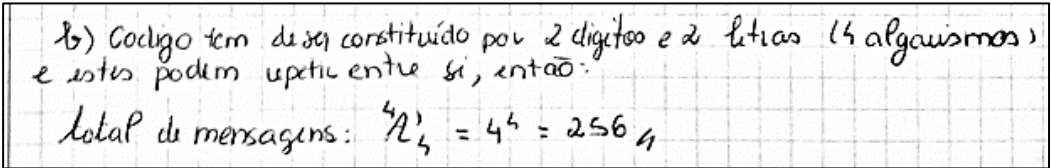
Alínea b)		Respostas	
		Corretas	Erradas
Estratégias	1) Cálculos/Fórmulas	6	4
	2) Enumeração	13	2
	3) Estimativa subjetiva	–	1
Não resposta – Uma aluna.			

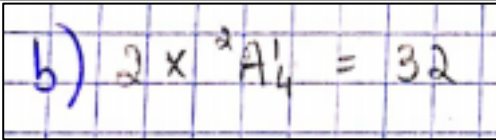
A análise do quadro permite-nos concluir que a estratégia mais utilizada foi a da enumeração foi também com esta estratégia que se obtiveram mais respostas corretas.

1) Cálculos/Fórmulas

Começando por analisar os alunos que erraram, verificou-se que utilizaram raciocínios diferentes. Duas alunas (Figura 50A) interpretaram mal o problema pois colocam 4^4 , ou seja, consideram a existência de códigos só com quatro letras ou só com quatro números, sendo isso impossível tendo em conta as condicionantes do problema.

Dos outros dois alunos que erraram, um deles (Figura 50B) só considerou os casos em que as letras e os dígitos estavam intercalados e a outra aluna (Figura 50C) apresentou uma resposta incompreensível, uma vez que só respondeu ${}^4A_2 \times {}^4A_2$.

(A) 

(B) 

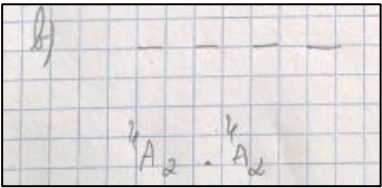
(C) 

Figura 50 – Resoluções da alínea b) do problema de permutações, com erro de interpretação (A), leitura incorreta (B) e resposta incompreensível (C)

Quatro dos alunos que acertaram não explicitaram o seu raciocínio, limitando-se apenas a colocar $6 \times 2^4 = 96$ (Figura 51).

A handwritten equation on a grid background. It reads: b) $2^4 \times 6 = 96$.

Figura 51 – Resolução da alínea b) do problema de permutações, utilizando uma operação combinatória alternativa

Os outros dois alunos que também chegaram a um resultado correto, utilizaram um raciocínio que, por mais hipóteses que levante, não o consigo perceber. Faltaram novamente aqui entrevistas para entender esse raciocínio.

Two handwritten equations on grid paper. The top one is labeled 'b)' and shows $6 \times 2^4 = 96$, with a circled '2' and a note below it: 'pode ser letra ou número'. The bottom one is also labeled 'b)' and shows $(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 24 = 96$.

Figura 52 – Resoluções da alínea b) do problema de permutações, com raciocínio incompreensível

2) Enumeração

Tal como na alínea anterior, nos exemplos a seguir apresentados (Figuras 53, 54 e 55), não houve uma enumeração utilizando os dados do problema (0 e 1 e o X e Y), mas sim as possibilidades de colocação dos dígitos e das letras.

Com exceção de duas alunas, todos os outros que utilizaram esta estratégia não tiveram dificuldade em chegar ao resultado correto e a explanação do raciocínio foi muito semelhante em todos eles, embora uns tenham sido mais pormenorizados na explicação do que outros. A maioria dos alunos (Figura 53A) decidiu representar as seis possibilidades de ordenar os dígitos e as letras e determinar o número de códigos para cada uma dessas seis possibilidades. Por último, multiplicaram por 6, uma vez que o número de códigos para cada uma dessas seis possibilidades é o mesmo, ou seja, 16. Alguns alunos (Figura 53B) só representaram uma das seis possibilidades de ordenar os dígitos e as letras e determinaram o número de códigos para esse caso, multiplicando de seguida pelas seis possibilidades existentes.

(A)

b)	L	L	N	N	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$		L	N	N	L	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
	N	N	L	L	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$		N	L	L	N	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
	L	N	L	N	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$						
	N	L	N	L	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$						$16 \times 6 = 96 \text{ dígitos}$

(B)

b)	$(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 6 = 96$				
	↓	↓	↓	↓	↓
	N	N	L	L	Permutações

Figura 53 – Resoluções da alínea b) do problema de permutações, representando possibilidades de colocação dos dígitos e das letras

Um aluno (Figura 54) apresentou a sua resolução com uma abordagem esquematicamente diferente, começando por determinar o número de códigos em que as letras são seguidas e depois o número de códigos em que as letras estão separadas. Tanto no primeiro caso como no segundo, ele verifica que o que se passa para o primeiro código (${}^2A'_4$) é igual para os outros dois, daí a multiplicação por 3. Somando as respostas de ambos os casos, ele chega ao resultado correto.

b) • 2 letras seguidas:

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2	2	2	2	—	•	•	—	—	•
${}^2A'_4 \times 3 = 2^4 \times 3 = 48$									

• 2 letras separadas:

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2	2	2	2	•	—	•	—	•	•
${}^2A'_4 \times 3 = 48$									
$48 + 48 = 96$									

Figura 54 – Resolução da alínea b) do problema de permutações, representando todas as possibilidades de colocação das letras

Com esta estratégia, apenas duas alunas erraram (Figura 55), apresentando o erro de repetição de casos, pois elas começam por considerar o caso de duas letras seguidas de dois números, mas depois, ao multiplicar por 4! (permutação dos quatro caracteres), repetem-se os casos em que as letras e os números são iguais.

b) $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
 letras números
 total: $16 \times 4! = 384$

Figura 55 – Resolução da alínea b) do problema de permutações, com erro de repetição

3) Estimativa subjetiva

Apenas um aluno se limitou a indicar um valor para o número de mensagens, sem revelar qualquer racionalidade na determinação desse valor.

b) 16 disponíveis

Figura 56 – Resolução da alínea b) do problema de permutações, apresentando apenas uma estimativa subjetiva

5.2.4. Códigos de um cartão de multibanco (Arranjos com repetição)

Considere todos os códigos de cartão de multibanco que podem existir. Um exemplo desses códigos pode ser 0012.

- Quantos desses códigos não têm algarismos consecutivos iguais?
- Quantos desses códigos não têm o primeiro e o último algarismo iguais?

Figura 57 – Enunciado do problema de arranjos com repetição

Para a maior parte dos alunos, a resolução da alínea a) deste problema não suscitou quaisquer dúvidas, tendo sido reconhecida a operação combinatória correta, ou seja, arranjos com repetição. Dos vinte e cinco alunos que responderam, apenas uma não

chegou ao resultado correto, pois, na abordagem que adotou, apesar de ser interessante, ela cometeu vários erros, tal como se mostrará mais adiante. O quadro 11 apresenta a estratégia utilizada na resolução da alínea a) deste problema, bem como o número de alunos que acertaram ou erraram.

Quadro 11 – Estratégia utilizada pelos alunos na resolução da alínea a) do problema de arranjos com repetição e número de alunos que chegaram ou não à resposta correta

Alínea a)		Respostas	
		Corretas	Erradas
Estratégia	1) Cálculos/Fórmulas	24	1
Não respostas – dois alunos			

Como se pode constatar através da análise do quadro, a generalidade dos alunos respondeu corretamente ao problema utilizando a mesma abordagem para o resolver, tal como o exemplo apresentado na figura 58.

$$\textcircled{4} \text{ a) } \underset{1^{\text{a}}}{10} \times \underset{2^{\text{a}}}{9} \times \underset{3^{\text{a}}}{9} \times \underset{4^{\text{a}}}{9} = 10 \times 9A_3 = 10 \times 9^3 = 7290 //$$

$$M: \underline{\underline{7290 \text{ Códigos.}}}$$

Figura 58 – Resolução da alínea a) do problema de arranjos com repetição

Apenas uma aluna (Figura 59) não adotou o tipo de resolução anterior, começando por contabilizar todos os códigos de multibanco possíveis e a estes retirar aqueles que têm algarismos consecutivos iguais. O erro na resolução do problema começou logo quando determinou o número de códigos com o primeiro e o segundo algarismos iguais, pois em vez de $\underline{10} \times \underline{1} \times \underline{10} \times \underline{10}$, deveria ter colocado $\underline{10} \times \underline{1} \times \underline{9} \times \underline{9}$. O raciocínio teria de ser semelhante nos restantes casos que ela considerou. Para além disso, mesmo que não tivesse cometido esses erros, também lhe faltava retirar os casos em que: os três primeiros algarismos são iguais, os três últimos são iguais, todos os algarismos iguais e os dois primeiros e os dois últimos iguais.

4. a) $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000$
 Todos os códigos possíveis

→ Se o 1º e 2º algarismos forem iguais:
 $10 \quad 1 \quad 10 \quad 10 = 10^3 = 1000$

→ Se o 2º e 3º algarismos forem iguais:
 $10 \quad 10 \quad 1 \quad 10 = 10^3 = 1000$

→ Se o 3º e 4º algarismos forem iguais:
 $10 \quad 10 \quad 10 \quad 1 = 10^3 = 1000$

R: $10000 - 3 \times (1000) = 10000 - 3000 = 7000$

Figura 59 – Resolução da alínea a) do problema de arranjos com repetição, retirando a todos os casos possíveis os que têm algarismos consecutivos iguais

Para a generalidade dos alunos, a resolução da alínea b) deste problema não suscitou quaisquer dúvidas, tendo sido reconhecida a operação combinatória correta, ou seja, arranjos com repetição. Dos vinte e cinco alunos que responderam, apenas dois não resolveram o problema utilizando a expressão numérica $10 \times 10 \times 10 \times 9$ ou $10^3 \times 9$ ou $^{10}A'_3 \times 9$ e a abordagem que adotaram foi a de retirar, a todos os casos possíveis, os que têm o primeiro e o último algarismo iguais. O quadro 12 apresenta as estratégias utilizadas na resolução da alínea b) deste problema, bem como o número de alunos que acertaram ou erraram.

Quadro 12 – Estratégia utilizada pelos alunos na resolução da alínea b) do problema de arranjos com repetição e número de alunos que chegaram ou não à resposta correta

Alínea b)		Respostas	
		Corretas	Erradas
Estratégia	1) Cálculos/Fórmulas	25	-
Não respostas – dois alunos			

A maioria dos alunos que utilizaram esta estratégia calculou diretamente o número de códigos de multibanco que não têm o primeiro e o último algarismo iguais, mas uns foram mais sucintos na explicação do que outros, tal como podemos constatar nos três exemplos da figura 60. Dois alunos utilizaram uma abordagem diferente, pois decidiram retirar, a todos os códigos de multibanco possíveis, aqueles que têm o primeiro e o último algarismo iguais, tal como apresentado na figura 61.

b) $10^3 \times 9 = 9000$

b) $10 \times 10 \times 10 \times 9 = 9000$ possibilidades,
 ↓
 diferente de primeiro

b) o primeiro e último algarismo diferentes.

- 1º tem 10 opções (0 a 9)
- 2º " " " "
- 3º " " " "
- 4º " 9 opções (0 a 9) exceto 1º

total: $10^3 \times 9 = 9000$

Figura 60 – Resoluções da alínea b) do problema de arranjos com repetição

b) $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ Códigos com 1º e último alq. iguais

$10^4 - 1000 = 9000$ Códigos

sem retirar

Figura 61 – Resolução da alínea b) do problema de arranjos com repetição, retirando a todos os casos possíveis os que têm o primeiro e o último algarismos iguais

5.3. Compreensão e mobilização das operações combinatórias na formulação de problemas

Após a leção das quatro operações combinatórias e a resolução de problemas envolvendo estas operações, para responder à questão de investigação “Como entendem e aplicam as operações combinatórias na formulação de problemas?”, os alunos foram desafiados a formular um problema cuja solução pudesse ser representada por uma expressão combinatória que era fornecida. Para isso, foram constituídos três grupos com cinco elementos e outros três com quatro elementos, distribuídos de forma aleatória e colocados em *Breakout Rooms* no Google Meet. Cada grupo não sabia que expressão combinatória os outros grupos tinham e apenas tomaram conhecimento da expressão que lhes tinha sido atribuída quando a receberam por mail, enviado para um dos elementos de cada grupo.

Após os grupos terem terminado a formulação do seu problema, um elemento de cada grupo foi convidado a apresentá-lo/explicá-lo, utilizando para isso o Jamboard. Foram chamados, pela seguinte ordem, os grupos 2, 1, 3 e 4. O grupo 2 foi chamado em primeiro lugar porque o grupo 1 ainda não tinha submetido o seu problema no *Google Classroom*. Não houve tempo, nessa aula, para a apresentação dos problemas dos grupos 5 e 6 e não me foi dada a hipótese de os discutir na aula seguinte, face à necessidade de continuar a leção do programa. A ordem sequencial pela qual os alunos seriam convidados a apresentar os seus problemas tinha em conta o facto de, antes da sua apresentação, eu não ter tido tempo para analisar todos os problemas; no entanto, se tivesse tido esse tempo começaria por convidar primeiro os grupos cujos problemas suscitassem dúvidas, por estarem mal formulados, tendo em conta a expressão combinatória que lhes tinha sido fornecida, ou por necessidade de clarificação das ideias apresentadas.

Neste relatório, são analisados todos os problemas formulados, mas só existem transcrições de diálogos ocorridos aquando da discussão relativa às propostas dos quatro primeiros grupos. Nos excertos desses diálogos, os alunos vão ser representados pelas letras do alfabeto.

Todos os grupos se empenharam nesta tarefa, havendo uma troca de ideias calorosa em cada grupo. A maioria dos grupos não teve dúvidas na formulação do problema e até foram bastante criativos.

As expressões combinatórias dadas aos diferentes grupos foram as seguintes (Figura 62):

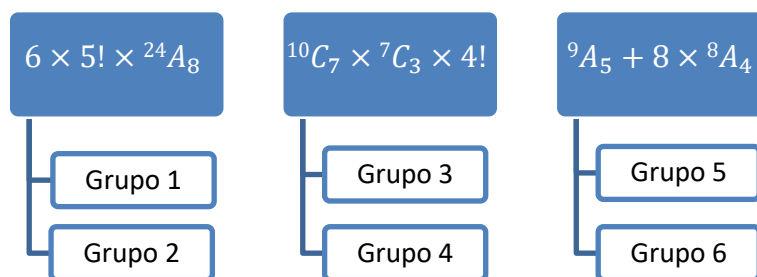


Figura 62 – Expressões combinatórias fornecidas a cada um dos grupos

O enunciado do problema formulado por cada grupo no documento Word e colado no Jamboard esteve sempre visível, através do recurso partilha de ecrã do Google Meet, para que todos os alunos acompanhassem a sua leitura e a explicação do(a) porta-voz de cada grupo. Após a explicação, os elementos dos outros grupos intervieram dando sugestões de melhoria, colocando questões, ou validando o problema, tal como se poderá verificar nos diálogos disponibilizados abaixo.

Análise do problema formulado pelo Grupo 2:

Em 6 escolas de uma cidade, existem comissões de 13 cargos distintos, as quais devem ser ocupadas por 5 raparigas e 8 rapazes.

Sendo que cada escola tem um total de 24 rapazes e 5 raparigas disponíveis para cada um destes cargos, quantas possibilidades existem para formar diferentes comissões em cada um destes estabelecimentos, sem haver repetição de membros para mais de um cargo?

Figura 63 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 2

O porta-voz do grupo 2 (aluno A) começou por apresentar o enunciado do problema bem como a expressão combinatória que lhes tinha sido fornecida ($6 \times 5! \times {}^{24}A_8$). Sugeriu ao aluno que começasse por ler o problema e, logo a seguir, o explicasse, tendo-se gerado o diálogo seguinte, a partir da explicação:

Aluno A: Então existem 13 cargos em cada comissão em cada uma destas seis escolas e sabendo que há um total de 24 rapazes em cada escola disponíveis e que apenas oito podem fazer parte da comissão, nós chegámos à conclusão de que, para cada cargo dessa comissão, podem ir 24 rapazes e depois 23 depois 22, ou seja, vai ser o arranjo de 24 elementos para oito espaços, portanto tem que ser ${}^{24}A_8$. Depois, como existem mais cinco raparigas disponíveis para cinco cargos, também dentro da comissão, neste caso é mais simples, acaba por ser o arranjo de cinco raparigas para cinco cargos que é igual $5!$, portanto é através de $5!$ que conseguimos calcular o número de possibilidades para as raparigas. Depois de calcular este número de possibilidades para cada comissão em cada escola, decidimos multiplicar por seis o resultado para descobrir o número de possibilidades nas seis escolas, em total.

Após a explicação, um aluno do mesmo grupo (aluno B) achou que devia ser posto no problema que as cinco raparigas, obrigatoriamente, tinham que fazer parte da comissão, ao que o porta-voz retorquiu que isso estava explícito no problema quando diz que existem cinco raparigas na escola para cinco cargos. O diálogo continuou, perguntando eu aos alunos se faltava acrescentar alguma informação ou não. Perante uma dúvida do aluno C, houve um diálogo entre ele e outros quatro alunos para se chegar à conclusão de que o que o aluno C queria alterar no enunciado era que, em vez de “para cada um destes cargos”, deveria estar “para cada comissão”:

Aluno C: Na segunda linha, 24 rapazes e 5 raparigas disponíveis para cada uma

destas comissões, em vez de ser para cada um destes cargos.

Professora: E o grupo que o elaborou aceita a correção? Parece que fica mais claro?

Aluno E: Sim.

Aluno B: Sim.

Professor: E o resto da turma? Aqueles que ainda não falaram, têm alguma coisa a acrescentar?

Apenas mais um aluno colocou uma dúvida, que foi respondida por dois colegas:

Aluno F: Talvez como são comissões formadas por 13 pessoas, não é?

Professor – Sim.

Aluno F: Estas comissões têm ordem ou não? Porque se for uma comissão de 13 pessoas não conta ordem.

Aluno C: Mas tem que contar a ordem porque são cargos distintos.

Aluno A: Exato, são 13 cargos diferentes dentro de uma comissão. Cada cargo é diferente. A ordem tem que interessar. E cada pessoa só pode ir para um cargo.

Após este diálogo, o aluno F concordou com o aluno A. Com a discussão deste problema podemos constatar que o enunciado estava claro para a maioria dos alunos e correspondia à expressão combinatória dada, mas que, para o aluno C, seria necessário uma redação que tornasse mais clara a sua leitura. Tal como aconteceu com ele, poderia acontecer com outros alunos que lessem o problema.

Análise do problema formulado pelo Grupo 1:

Num canil há 2 treinadores de cães para 6 raças diferentes, um trabalha 8 horas por dia e o outro 5. O primeiro pretende treinar 8 dos 24 huskies, um por cada hora. O segundo pretende treinar as 5 raças restantes, também uma por hora. Ambos trabalham 6 dias por semana. Quantas sequências de treino diferentes há em 6 dias?

Figura 64 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 1

A porta-voz do grupo 1 (aluna H) começou por apresentar o enunciado do problema, bem como a expressão combinatória que lhes foi fornecida ($6 \times 5! \times {}^{24}A_8$). A aluna

começou por ler e, logo de seguida, explicou o problema, tendo-se gerado o diálogo seguinte, a partir dessa explicação:

Aluna H: Nós pensámos que primeiro, para a parte dos huskies, como temos 24 cães e queremos treinar 8, vamos ter que começar por escolher oito dos 24 cães, e seria uma combinação, mas como nós queremos fazer uma sequência que tem uma ordem que importa, fazemos um arranjo de 24 oito a oito. Depois, para o segundo caso, temos cinco raças e queremos uma por cada hora, portanto, para a primeira hora, vamos ter cinco raças, na segunda já só temos quatro, por aí fora e dá 5!. Depois, como queremos que o processo se repita seis dias por semana, multiplicamos por seis.

Professor: Agora os outros, se têm dúvidas, se não perceberam, pode-se voltar a repetir. A Raquel pode voltar a explicar. De certeza que não se importa. (silêncio porque ninguém responde) Então?

Aluno D: Ó professor, eu tenho só uma dúvida.

Professor: Se não te importares, coloca-a ao grupo que está a apresentar.

Aluno D: Eu não tenho bem a certeza, mas eles dividiram por dois treinadores, não foi? E eu acho que (pausa para pensar) então, as sequências de treino diferentes, acho que de um treinador não vai depender do outro. Por isso, não sei se deveria ser, em vez de multiplicação, uma soma. A dos $^{24}A_8$ com a outra dos seis.

Professor: Não sei, discutam.

Aluno F: Eu concordo com o D.

Aluno I: Eu também concordo com o D.

Aluna H: Pois, eu também.

Professor: Também já concordas com o que eles dizem, H?

Aluna H: Sim, professor. Nós fizemos isto assim um bocado...

Professor: Eu sei que formular problemas não é fácil...

Nesta altura, pedi ao aluno D que explicasse todo o seu raciocínio de modo que não restasse nenhuma dúvida. A aluna H dava indícios de começar a duvidar da proposta do seu grupo, que tinha então apresentado um problema cuja resposta não iria corresponder à expressão combinatória que lhes havia sido atribuída. A explicação do aluno D poderia ajudar neste sentido.

Aluno D: Então, o que eu pensei foi, como eles dividiram por dois treinadores, um vai escolher oito cães dos 24, por isso vai ser $^{24}A_8$, e isso vão ser as sequências para um dos treinadores, e para outro treinador não dependerá nada, não vai depender nada do que o 1º treinador escolheu, por isso iremos somar as cinco raças que acho que é os cinco fatorial pelos seis dias da semana. Então, basicamente, como nenhum destes depende um do outro, não vamos multiplicar, vamos somar um com o outro. Não sei se me expliquei muito bem.

Pedi também ao aluno D que, utilizando o Jamboard, escrevesse a expressão combinatória que responderia, portanto, ao problema proposto pelos colegas. Quando o aluno D estava a escrever essa expressão, inicialmente colocou apenas $^{24}A_8 + 6 \times 5!$, tendo sido imediatamente alertado pelo aluno F de que faltava multiplicar por seis o termo $^{24}A_8$, ao que o aluno D respondeu, já escrevendo a expressão correta ($6 \times ^{24}A_8 + 6 \times 5!$), que era isso que ele ia fazer. Nessa altura, perguntei aos elementos do grupo 1 se concordavam com esta alteração, obtendo uma resposta afirmativa por parte de todos. Para que os alunos não ficassem desmotivados, tanto eu como a minha orientadora reforçámos que formular problemas não é fácil e, ainda por cima, quando se está condicionado por uma resposta.

Análise do problema formulado pelo Grupo 3:

O João foi jantar com 6 amigos, cada um no seu carro. O estacionamento do restaurante era composto por 10 lugares que estavam livres. Sabe-se que 3 dos carros eram pretos e completamente iguais e os restantes 4 todos diferentes (um branco, um azul, um vermelho e um cinzento). Quantas maneiras visualmente diferentes se podem obter, quando se estacionam os 7 carros pelos 10 lugares?

Figura 65 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 3

A porta-voz do grupo 3 (aluna J) começou por apresentar o enunciado do problema, bem como a expressão combinatória que lhes foi fornecida ($^{10}C_7 \times ^7C_3 \times 4!$). Depois de lido o problema, a aluna explicou-o, tendo-se gerado o diálogo seguinte:

Aluna J: Nós fizemos $^{10}C_7$ para escolher os sete lugares que vão ser ocupados pelos dez lugares livres. Depois multiplicámos por $^7C_3$ para escolher os lugares dos três carros pretos e depois quatro fatorial para os restantes carros e a respetiva ordem, porque são diferentes.

Professor: O que é que me dizem os alunos que não são do grupo 3?

Aluno E: Eu acho que está bem.

Professor: Já agora, diz-me, tu que foste o corajoso que começaste a falar. Faz sentido aqui falar em combinações? Não podiam ser arranjos?

Aluno E: Faz sentido quando só se está a falar dos carros pretos, porque são todos iguais, mas não faz sentido quando se está a falar dos carros diferentes. Foi o que eles fizeram.

Como mais nenhum aluno se pronunciou, fiz-lhes mais algumas perguntas, com o intuito de ver se algum aluno apresentava dúvidas:

Professor: Ok. Já agora uma pergunta para o grupo 3. Aqui vocês só falaram da cor. Vamos supor que são todos iguais, inclusive na marca, certo?

Aluna J: Sim, sim.

Aluno F: São completamente iguais, é o que diz o problema.

Professor: Pronto, era só para esclarecer uma dúvida que podia surgir. É assim, podíamos ter 3 carros pretos, mas um ser Volkswagen, outro Fiat e outro Citroën. Então assim já faria sentido utilizar combinações?

Aluno F: Não, por isso é que a gente pôs que eram todos pretos e todos iguais.

Professor: Ok, certo.

Posto isto, considerei importante rever o que o grupo começou por fazer, ou seja, escolher os sete lugares onde os sete carros poderiam estar estacionados (${}^{10}C_7$) e depois como é que os três carros iguais podiam ser colocados no estacionamento (${}^7C_3$), clarificando aqui que as palavras “visualmente diferentes” fazem todo sentido no contexto do problema, uma vez que podemos permutar os três carros pretos iguais, mas visualmente fica sempre igual. Como os outros carros diferem todos na cor, aí já interessa a ordem pela qual eles estão estacionados (4!). Não houve mais discussão porque os alunos não tiveram dúvidas, podendo este problema ser considerado um bom exemplo para aquela expressão combinatória.

Análise do problema formulado pelo Grupo 4:

A Susana tem 21 pares de sapatos, 10 da Nike, 7 da Adidas e outros 4 de diferentes marcas. A mãe comprou-lhe uma estante com 14 compartimentos divididos em 3 níveis de altura para ela os organizar. O primeiro nível tem 7 compartimentos onde ela quer organizar os pares de sapatos da Nike, o segundo nível tem 4 compartimentos onde ela quer guardar os quatro pares de diferentes marcas e o último nível tem 3 compartimentos onde ela quer organizar os pares da Adidas. De quantas maneiras distintas se podem organizar os sapatos pelos respetivos níveis, considerando que a ordem só interessa no segundo nível?

Figura 66 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 4

A porta-voz do grupo 4 (aluna L) começou por apresentar o enunciado do problema bem como a expressão combinatória que lhes foi fornecida ($^{10}C_7 \times ^7C_3 \times 4!$). Depois de lido o problema, a aluna explicou-o, tendo-se gerado o diálogo seguinte:

Aluna L: Então, vou começar pelos conjuntos de 10 sete a sete. Nós pensámos que o primeiro nível tem 7 compartimentos e ela no primeiro nível quer organizar os sapatos da Nike. Portanto, tem 10 sapatos para 7 lugares, depois o segundo nível tem 4 compartimentos e ela quer guardar os 4 pares diferentes, por isso temos 4!, porque a ordem interessa. No último nível nós tínhamos 3 compartimentos para guardar 7 pares da Adidas.

Professor: Ok. Os outros perceberam a justificação? Têm alguma coisa a acrescentar, a sugerir?

Aluno E: Ó professor, não percebi aqui uma coisa.

Professor: Então, diz lá.

Aluno E: Eles têm 10 sapatos da Nike e querem-nos organizar em 7 compartimentos. Isso quer dizer com vão sobrar sapatos, não é?

Aluna L: Sim, sim. Nem todos os sapatos vão ficar na estante.

Aluno E: Ok, ok. É só isso.

Neste momento perguntei aos alunos se não tinham mais questões a colocar, ao que um aluno disse:

Aluno D: Ó professor, não tenho a certeza, mas então, se vão ficar três sapatos de fora por exemplo, não vai interessar a ordem com que estão? Não sei se

importa para a resposta.

Professor: O grupo 4 que responda.

Aluno I: Professor não tenho certeza, mas agora que estou a pensar acho que importa. Não sei, porque, como são todos da mesma marca ,por isso é que nós pensámos que não importasse. Se fossem todos diferentes, se fosse como nomes de pessoas, por exemplo, Paulo, Daniel e não sei quê, aí já seria diferente, mas acho que não. Realmente não importa e não nos dá informação suficiente o problema para sequer sabermos se os sapatos são todos iguais ou não.

Aluna L: Professor, nós, ao dizermos que eram 10 da Nike era que, tipo, fazer todos os sapatos são iguais.

Professor: Ou seja, todas as sapatilhas branquinhas, com o logótipo preto?

Aluna L: Sim. Pensámos nas marcas, em vez de pensarmos nas cores, por exemplo.

Professora: Mas, convenhamos que tem que lá estar dito, não é? Porque eu tenho vários sapatos da Adidas e não são iguais.

Aluno M: Deve ser por isso que não está bem no final. Nós pusemos só considerando que a ordem só interessa nesse nível. Também quando lemos, ficámos a pensar: será que não interessaria também no primeiro e no terceiro?

Já no término da aula, considerei importante realçar que deveria estar explícito no enunciado que, quer os sapatos da Adidas, quer os da Nike são completamente iguais, para que a expressão combinatória seja a resposta ao problema formulado.

Análise do problema formulado pelo Grupo 5:

Um ladrão tem planos para assaltar um banco e obtém algumas informações à cerca dos cofres do banco. O ladrão então descobre que existem 2 cofres, um deles seguro por um cadeado cuja sequência para desbloquear contém cinco espaços para algarismos e além disso espaço da sequência apenas comporta 9 algarismos (de 1 a 9) sem repetição. Já o segundo cofre está seguro por 8 cadeados de direções cujo código consiste numa sequência de 4 direções sem repetição, sabendo que existem 8 direções diferentes em cada cadeado. Quantos códigos tem o ladrão que tentar para garantir que consegue abrir ambos os cofres?

Figura 67 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 5

O problema responde à expressão combinatória fornecida ao grupo (${}^9A_5 + 8 \times {}^8A_4$), pois ${}^9A_5$ representa a sequência constituída por cinco algarismos (de 1 a 9), todos diferentes, para desbloquear o cadeado do primeiro cofre. Para desbloquear o segundo cofre, ${}^8A_4$ representa a “sequência de 4 direções sem repetição, sabendo que existem 8 direções diferentes”, como referido no enunciado. Como existem oito cadeados de direções no segundo cofre, daí a multiplicação ${}^8A_4$ por 8.

Deveria ter tido oportunidade de fazer a sua discussão deste problema na aula seguinte, porque talvez a parte do seu enunciado que diz “ [...] sequência para desbloquear contém cinco espaços para algarismos e além disso espaço da sequência apenas comporta 9 algarismos (de 1 a 9) sem repetição” não seja clara para todos os alunos. Considero que o que poderia estar era: a sequência para desbloquear é constituída por 5 algarismos (de 1 a 9), todos diferentes, pois traria maior clareza para a situação.

Análise do problema do Grupo 6:

O Joaquim quer criar um jogo de apostas com 9 apostas diferentes. Em 8 desses jogos temos que escolher 4 de entre 8 animais e na última aposta temos que escolher 5 de 9 marcas de carros. Calcula o número de apostas que se tem de fazer para garantir que se ganha um prémio em cada aposta?

Figura 68 – Enunciado do problema formulado pelo grupo 6

Este problema formulado pelo grupo 6, mais que os outros, deveria ter sido discutido na aula, uma vez que o seu enunciado está tão confuso que eu próprio não consigo encontrar uma expressão combinatória que seja a solução para este enunciado.

Não me foi permitido realizar a discussão na aula seguinte, com a justificação de que estávamos atrasados na matéria a lecionar, de acordo com a planificação do grupo disciplinar.

CAPÍTULO 6 – Conclusões

Neste capítulo começo com uma pequena síntese do estudo realizado, seguindo-se as principais conclusões, ancoradas na análise dos dados recolhidos. Terminarei com uma reflexão pessoal sobre a importância do estudo, as aprendizagens que realizei, as dificuldades encontradas e o seu contributo para o meu desempenho enquanto futuro professor de Matemática, apresentando também algumas sugestões para investigação futura relacionada com a temática a que me dediquei.

6.1. Síntese do estudo

Este estudo foi conduzido no contexto da minha Prática de Ensino Supervisionada, no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. O estudo teve por base a intervenção pedagógica realizada na disciplina de Matemática A, durante o ano letivo de 2020/2021, numa turma do 12º ano de escolaridade (com 27 alunos), numa escola secundária da área metropolitana do Porto.

Este estudo teve como objetivo compreender como entendem os alunos as operações combinatórias e as mobilizam na resolução e formulação de problemas, alicerçando-se em três questões de investigação: 1) Como é que os alunos resolvem intuitivamente problemas simples de contagem? 2) Como entendem e aplicam as operações combinatórias na resolução de problemas? 3) Como entendem e aplicam as operações combinatórias na formulação de problemas?

Assim, a unidade didática Introdução ao Cálculo Combinatório, incluída no domínio Probabilidades e Cálculo Combinatório, foi lecionada ao longo de nove aulas, em regime de ensino à distância, em virtude da pandemia da Covid-19. Seis dessas aulas foram lecionadas pela professora orientadora e três por mim (primeira, oitava e nona aulas). Esta divisão foi feita pela professora orientadora, seguindo uma prática de dar aos professores estagiários blocos de três aulas, numa certa temática, para prepararem e lecionarem.

A intervenção pedagógica na primeira aula, começou por desafiar os alunos a resolver, de forma autónoma, três problemas e a discutir posteriormente essas resoluções em grupo turma, antes de serem apresentados os Princípios Fundamentais de Contagem,

conceitos-chave da unidade didática de Introdução ao Cálculo Combinatório, de forma a estimular os aspetos intuitivos do pensamento (Ponte et al., 1997). Entre a primeira e a oitava aulas, a professora orientadora trabalhou as operações combinatórias com os alunos, numa abordagem muito baseada na resolução de problemas e subsequente discussão no grupo turma, enfatizando a compreensão das fórmulas para as operações combinatórias (nomeadamente, dando sentido às fórmulas no contexto dos problemas que foram sendo propostos e resolvidos). Nessas aulas, houve casos em que a resolução foi individual, mas, na segunda aula, os alunos foram estimulados a trabalhar em pequenos grupos nas Breakout Rooms. Na oitava aula, os alunos foram envolvidos na resolução individual de problemas sobre as operações combinatórias, procurando dar-lhes oportunidades para pensarem que operações se adequariam a cada situação problemática, e, na nona aula, a intervenção assentou na formulação de problemas, por parte dos alunos, com base em expressões combinatórias fornecidas, privilegiando o trabalho colaborativo e as discussões coletivas.

O estudo adotou uma metodologia qualitativa, recorrendo à recolha de produções escritas elaboradas pelos alunos em todas as tarefas propostas ao longo da intervenção pedagógica à gravação em áudio das apresentações orais da aula sobre formulação de problemas, num ambiente de discussão coletiva.

Para dar respostas às questões de investigação, analisei os dados com o maior detalhe que me foi possível, à luz da literatura revista, para que esta investigação possa contribuir, de certa forma, para se compreender: como é que os alunos resolvem intuitivamente problemas simples de contagem, como entendem os alunos as operações combinatórias e as mobilizam na resolução e na formulação de problemas, o tipo de estratégias que utilizam, bem como as dificuldades manifestadas. O ensino-aprendizagem da Combinatória traz sempre desafios a professores e a alunos e um maior conhecimento sobre como este processo decorre ajudará certamente a que as aprendizagens sejam mais bem conseguidas.

6.2. Principais Conclusões

A apresentação das principais conclusões, suportadas na análise dos dados recolhidos, procura dar resposta às três questões que guiaram a investigação. Neste sentido, dou atenção primeiro aos aspetos envolvidos na resolução intuitiva de problemas de combinatória, depois abordo a mobilização dos conhecimentos dos alunos sobre operações combinatórias na resolução de problemas e, finalmente, a mobilização

desses conhecimentos na formulação de problemas.

Baseando-me na análise das várias estratégias de resolução de problemas combinatórios, referidas por vários autores (e.g., Silva et al., 2004; Correia & Fernandes, 2007), constatei que, neste estudo, foram mais utilizadas pelos alunos as estratégias de *enumeração* (nas duas subcategorias: sistemática e não sistemática), *diagrama de árvore* e *cálculos/fórmulas*. Na resolução dos três problemas iniciais, a maioria dos alunos utilizou a enumeração e o diagrama de árvore, mas a utilização destas estratégias diminuiu consideravelmente após a lecionação das quatro operações combinatórias.

Na generalidade, os alunos não tiveram grandes dificuldades a chegar ao resultado correto na resolução dos problemas, quer antes, quer depois da lecionação da unidade Introdução ao Cálculo Combinatório. Podem ser várias as razões para a não manifestação dessas dificuldades, nomeadamente, a turma, no geral, ter um bom desempenho à disciplina de Matemática A, o não ser necessário um elevado número de pré-requisitos para a aprendizagem do Cálculo Combinatório (e.g., Duro, 2012; Mota & Ferreira, 2018), muitos alunos terem entendido bem as quatro operações combinatórias (como evidenciado nos dados provenientes das atividades de resolução e de formulação de problemas), pois souberam tanto o que fazer como o porquê. De facto, em geral, os alunos mostraram terem desenvolvido uma compreensão relacional das operações combinatórias (Skemp, 1978), apesar de alguns ainda manifestarem algumas dificuldades.

Não se verificou, neste estudo, o que Mota e Ferreira (2018) referem na sua investigação sobre alunos com excelente desempenho poderem ter dificuldades nesta unidade didática, mas o contrário já se verificou, ou seja, alguns alunos que, manifestando dificuldades noutras áreas em Matemática, não as manifestaram tanto neste tema (baseando-me apenas nos dados analisados).

Não posso deixar de referir aqui que, dada a obtenção dos dados ter sido realizada nas aulas de ensino remoto de emergência, pode ter havido uma possível troca de informação entre alguns alunos (através de uma rede social ou por outras formas de comunicação). A troca de ideias é benéfica em muitas circunstâncias de ensino-aprendizagem, mas, para eu poder responder às duas primeiras questões de investigação, era suposto os alunos resolverem os problemas de forma autónoma, para poder verificar as reais dificuldades que cada um dos alunos pudesse manifestar. Se tudo tivesse ocorrido de modo presencial, acredito que o processo de recolha de dados teria sido mais adequado.

O que constatei também, ao longo da análise dos dados, é que muitos alunos preferiram traduzir o seu raciocínio matemático por esquemas em vez de palavras, talvez por terem dificuldades em comunicar os seus raciocínios de modo escrito, recorrendo a palavras, ou por considerarem que os esquemas são suficientes para o leitor conseguir interpretar o seu raciocínio. Contudo, esta preferência por esquemas pode também ter sido influenciada pela abordagem seguida na lecionação deste tema, uma vez que se apelou bastas vezes à representação das situações problemáticas de modo esquemático como forma de as compreender e, eventualmente, de as resolver também. Por outro lado, esta preferência por esquemas não se restringiu ao tema da Introdução ao Cálculo Combinatório, mas foi visível na turma ao longo de todo o ano.

6.2.1. Como é que os alunos resolvem intuitivamente problemas simples de contagem?

Relativamente a esta questão de investigação, verifiquei que as estratégias mais utilizadas pelos alunos na resolução do primeiro e terceiro problemas foram a enumeração em primeiro lugar, seguindo-se o diagrama de árvore. Já no segundo problema, cálculos numéricos foi a estratégia mais utilizada e a seguir o diagrama de árvore. Estas estratégias revelaram-se eficazes, nos três problemas de contagem, no sentido de conduzirem a maioria dos alunos a respostas corretas.

Muitos alunos iniciaram a sua resolução com essas estratégias, mas aperceberam-se de que havia um padrão que se podia repetir e não seria necessário completarem a estratégia inicial, tendo concluído o raciocínio através da resolução de uma expressão numérica. Ser capaz de observar padrões e generalizar soluções através de um esquema é fundamental para a resolução de muitos problemas (e.g., Vale et al., 2015; Oliveira, 2015). Nos três problemas, apenas um aluno apresentou um diagrama de árvore completo e quatro alunos a enumeração completa.

Todos os alunos que utilizaram o diagrama de árvore conseguiram atingir o resultado correto; no entanto, o mesmo não aconteceu quando utilizaram a enumeração, em seis casos porque se esqueceram de colocar alguma(s) hipótese(s) no procedimento algorítmico com que iniciaram a resolução, fazendo uma enumeração sistemática incompleta (Correia & Fernandes, 2007) ou num caso porque o aluno cometeu o erro da enumeração não sistemática (Batanero et al., 1997).

O caso mais *suspeito* foi o de uma aluna que, não esquematizando nenhum raciocínio,

chegou ao resultado correto, dando a entender que teria conhecimento prévio do Princípio Geral da Multiplicação.

Quando os alunos utilizaram cálculos numéricos, nem sempre houve uma tradução por palavras do seu raciocínio, deixando para o professor a interpretação dos seus cálculos. Com esta estratégia, houve duas alunas que erraram o segundo problema, porque repetiram os casos, cometendo, portanto, o erro de repetição (Batanero et al., 1997). No terceiro problema, também erraram dois alunos: um deles utilizou um esquema incompreensível, acompanhado por cálculos em que não consegui compreender de onde vinham os valores apresentados e outra aluna porque ignorou uma das condicionantes do problema, ou seja, cada pessoa não poder assumir mais de um cargo diferente.

No primeiro contacto com resolução de problemas de combinatória, a estratégia escolhida pelos alunos para a resolução dos problemas nem sempre foi a adequada. Por exemplo, o recurso a uma tabela de dupla entrada, quer na resolução do primeiro problema, quer na do terceiro problema, dadas as condicionantes dos mesmos, não foi apropriada – o que estava em causa era formar sequências de três elementos (que se podiam repetir ou não) a partir de um conjunto de quatro. Sendo assim, posso colocar a hipótese de que os dois alunos que adotaram esta estratégia tenham interpretado mal o problema.

Um caso interessante na resolução do primeiro problema foi o de uma aluna que utilizou uma tabela de “tripla” entrada, em que chegou apenas a 16 casos possíveis, mas foi capaz de imaginar a tabela a três dimensões. Chegou ao resultado correto, fazendo a seguinte analogia: se, para determinarmos o número de casos possíveis na tabela de dupla entrada, multiplicamos n por n (em que n é o número de elementos de cada uma das entradas da tabela), então, numa tabela de “tripla” entrada, o número total de casos será $n \times n \times n$.

6.2.2. Como entendem e aplicam as operações combinatórias na resolução de problemas?

No que concerne a esta questão de investigação, verifiquei que, após a lecionação das quatro operações combinatórias, a maioria dos alunos identificou corretamente a operação em causa, na resolução dos problemas propostos e, portanto, poucos alunos erraram ou não responderam. Em termos de respostas corretas, os alunos foram mais

bem-sucedidos nas combinações, seguindo-se os arranjos com repetição, os arranjos sem repetição e as permutações. No caso do problema cuja estrutura matemática correspondia a uma situação de combinações, todos os alunos identificaram corretamente a operação combinatória e apenas dois alunos não responderam. Estes resultados divergem dos do estudo de Correia e Fernandes (2007), com alunos do 9º ano de escolaridade, no qual os problemas de combinações trouxeram mais dificuldades aos alunos. No entanto, esta divergência pode dever-se ao facto de que o ano de escolaridade nos dois estudos é diferente (9º e 12º) e também porque os alunos do meu estudo tinham feito um problema muito semelhante, do manual adotado, aquando da leção das combinações.

Os alunos recorreram, preferencialmente, a cálculos/fórmulas em vez das principais estratégias utilizadas nos três problemas iniciais. Por exemplo, nenhum aluno utilizou o diagrama de árvore na resolução dos quatro problemas. Já era espectável que isto acontecesse porque: 1) os alunos estando já familiarizados com essas operações combinatórias, não sentiram necessidade de enumerar ou construir o diagrama de árvore (Mota & Ferreira, 2016); e 2) não é tão eficiente enumerar ou construir o diagrama de árvore, por exemplo, quando o número de elementos envolvidos na operação combinatória é grande, diminuindo também a sua eficácia no número de respostas corretas (Correia & Fernandes, 2007).

No problema 1, cuja operação combinatória subjacente era a de arranjos sem repetição, quatro alunos não identificaram a operação combinatória correta e em vez de arranjos, consideraram combinações, cometendo o erro de ordem, ou seja, não consideraram a ordem quando ela é essencial neste problema (Batanero et al., 1997). A enumeração foi usada por cinco alunos na alínea a) do problema 3, cuja operação combinatória subjacente era a de permutações. Dois dos alunos erraram, pois não consideraram o facto de as letras (ou os dígitos) poderem ser seguidas(os), embora essa informação seja referida no enunciado no problema, o que sugere uma leitura incorreta do enunciado ou uma má interpretação do mesmo.

Nas duas alíneas do problema 3 (permutações), muitos alunos utilizaram a estratégia de enumeração, no entanto, a generalidade deles fizeram uma enumeração, mas sem utilizarem os dígitos 0 e 1 e as letras X e Y como é referido no enunciado. O que fizeram foi utilizar uma letra (D ou N) para o 0 e 1, e outra letra (L) para o X e Y. Duas alunas erraram a alínea b), apresentando um erro de repetição de casos (Batanero et al., 1997), pois elas começam por considerar o caso de duas letras seguidas de dois dígitos, mas depois, ao multiplicar por 4! (permutação dos 4 caracteres), repetem-se os casos em que as letras e os dígitos são iguais.

Quanto ao problema 4, cuja operação combinatória subjacente era a de arranjos com repetição, a generalidade dos alunos respondeu corretamente, ou seja, reconheceram a operação combinatória em causa, utilizando apenas a estratégia de Cálculos/Fórmulas. Apenas uma aluna errou na resolução da alínea a) do referido problema porque cometeu o erro de repetição.

No meu entender, o sucesso generalizado dos alunos na resolução dos quatro problemas que analisei (um relativo a cada uma das quatro operações combinatórias), que permitem responder à segunda questão de investigação, pode significar, para além do que já foi referido, que todas as tarefas de resolução de problemas, que caracterizaram a intervenção pedagógica, ajudaram a generalidade dos alunos a atribuir significado aos conceitos centrais do Cálculo Combinatório, nomeadamente às operações combinatórias.

6.2.3. Como entendem e aplicam as operações combinatórias na formulação de problemas?

Atendendo ao facto de que “formular novos problemas a partir de determinadas informações, propicia o desenvolvimento do ensino-aprendizagem para a construção do conhecimento significativo” (Oliveira, 2015, p. 36) e de que “a formulação de problemas pode ser um meio poderoso para que os alunos desenvolvam competências de resolução de problemas e se tornem bons resolvidores” (Vale et al., 2015, p. 46), foi importante desafiar os alunos a formular problemas com base em expressões combinatórias fornecidas; isto também me permitia perceber melhor se estariam a desenvolver uma compreensão relacional das operações combinatórias (Skemp, 1978) ou se a sua compreensão estaria apenas a ficar-se pelo nível instrumental. Para que este desafio fosse mais estimulante, foi importante realizar uma abordagem diferente das anteriores, com a formação de seis grupos de trabalho, para privilegiar a partilha de ideias entre os alunos, uma vez que formular problemas sem terem nenhuma restrição já não é tarefa fácil, mas, com restrições ainda se torna mais difícil. A comunicação das ideias matemáticas, entre os intervenientes, desenrolou-se, principalmente, através da linguagem oral, quer durante a atividade de formulação do problema, quer na discussão do mesmo no grupo turma.

Dos seis grupos, três (grupos 2, 3 e 5) conseguiram criar problemas cuja resposta era a expressão combinatória que lhes tinha sido fornecida e, no grupo 4, foi apenas

necessário acrescentar um pormenor para que fosse clara a total compreensão do problema. Os grupos 1 e 2 tiveram a mesma expressão combinatória, mas os alunos do grupo 1 não conseguiram formular um problema para essa expressão. A discussão que se gerou na turma permitiu compreender o problema que tinha sido formulado e compreender também que a sua solução não era a expressão combinatória fornecida. O problema formulado pelo grupo 2 tinha uma redação clara e apenas suscitou uma sugestão de alteração que, contudo, não iria modificar a resposta ao problema, ou seja, continuava a ter uma correspondência com a expressão combinatória fornecida.

Os grupos 3 e 4 tiveram a mesma expressão combinatória, mas apenas o problema construído pelo grupo 3 não suscitou qualquer dúvida aquando da discussão. No problema formulado pelo grupo 4 houve um aluno que colocou uma dúvida que gerou uma pequena discussão entre ele e três elementos daquele grupo. No final chegou-se à conclusão de que havia necessidade de acrescentar um pormenor no enunciado que fazia toda a diferença, para que a expressão combinatória fosse a resposta ao problema criado.

Não houve discussão em sala de aula para os grupos 5 e 6, que tinham a mesma expressão combinatória, mas o problema elaborado pelo grupo 5 responde à expressão que lhe tinha sido atribuída. Se tivesse havido a possibilidade de discussão, quero acreditar que algum aluno sugerisse uma alteração no enunciado para tornar mais clara a sua interpretação, pois o enunciado era algo confuso. Se para o problema proposto pelo grupo 5 fez falta a discussão em sala de aula, então para o problema elaborado pelo grupo 6 tornava-se imprescindível essa discussão, uma vez que o seu enunciado está tão confuso que nem eu mesmo o consigo entender. Apesar destas limitações, as discussões que foram possíveis mostraram-se bastante úteis para uma melhor compreensão da estrutura matemática subjacente em cada problema formulado, e para uma maior sensibilização relativamente à informação que os problemas deveriam conter e à forma como essa informação era fornecida.

Os alunos foram bastante criativos na formulação dos problemas, mostrando, no geral, que compreenderam as quatro operações combinatórias e souberam mobilizar esses conhecimentos adquiridos, mas também tiveram espírito crítico durante a discussão dos quatro problemas em sala de aula (virtual), levantando algumas dúvidas que foram prontamente esclarecidas pelos colegas.

6.3. Reflexão Final

O papel do professor tem evoluído muito ao longo do tempo e uma consequência dessa evolução está implícita no perfil geral de desempenho profissional do educador de infância e dos professores dos ensinos básico e secundário. Por exemplo, o Decreto-Lei nº 240/2001 de 30 de agosto de 2001, do Ministério da Educação, refere que o professor deve participar em “projetos de investigação relacionados com o ensino, a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos” (s/p).

Assim, evidencia-se a relevância de unidades curriculares que motivem a investigação, como Investigação e Prática Profissional, do Mestrado em Ensino da Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, onde são trabalhados temas e ferramentas importantes para a elaboração de um estudo de investigação (qualitativa) em Educação Matemática.

Foi também importante ter unidades curriculares que me ensinaram sobre pedagogia, geral e específica, uma vez que a expectativa que tinha enquanto aluno, não só no meu percurso no ensino secundário, como em muitas das unidades curriculares que frequentei na faculdade, mudou radicalmente e se mostrou bastante mais exigente do que unicamente “expor matéria” e “corrigir testes”. Mas só com a prática é que me apercebi da real complexidade do processo de ensino-aprendizagem e que este se torna mais significativo para os alunos quando lhes são dadas tarefas diversificadas em que eles são agentes ativos na sua própria aprendizagem, quando lhes é dada a oportunidade de discutir ideias, argumentar e contra-argumentar, realizar sistematizações de aprendizagens.

A minha intervenção pedagógica, sobre a qual realizei este estudo, foi toda concretizada em E@D e isso trouxe alguns inconvenientes ao processo de ensino-aprendizagem. Saliento apenas os que me chamaram mais a atenção: por um lado, sendo as aulas online mais cansativas, foi mais difícil manter a atenção dos alunos, principalmente os que, já por si, são mais distraídos ou menos empenhados na realização das atividades; tornou-se mais difícil ver quem queria participar nas discussões (presencialmente conseguimos ver rapidamente quem está com o dedo no ar e quer participar); alunos considerados bons participaram menos nas aulas e, quando questionados acerca do porquê de tal atitude, referiram apenas que não lhes apetecia, o que poderia indicar um decréscimo na sua motivação para aprender.

Mas nem tudo foram pontos negativos no E@D, uma vez que, quer os alunos, quer os professores aumentaram substancialmente as suas competências tecnológicas tão importantes na sua atividade presente e futura. Se fizer um balanço dos prós e contras

entre o ensino presencial e o ensino à distância, claramente prefiro o presencial pois motivar, encorajar e supervisionar o trabalho dos alunos foi mais difícil de realizar *online* e as diferentes tecnologias também podem ser usadas na sala de aula, sempre que necessárias ou para os motivar para o trabalho e, conseqüentemente, para alcançarem um bom desempenho.

Quando este estudo foi pensado, na unidade curricular de Investigação e Prática Profissional, não tinha consciência da limitação em termos de quantidade de aulas disponíveis para o fazer nem da totalidade das tarefas a executar, daí que a primeira grande dificuldade foi logo sentida ao realizar, juntamente com a professora orientadora, a planificação da unidade didática Introdução ao Cálculo Combinatório. Depois de alguma ponderação, ficou acordado que eu lecionaria apenas três aulas, que me permitiriam introduzir os Princípios Fundamentais de Contagem e obter os dados fundamentais para compreender como entendem os alunos as operações combinatórias e as mobilizam na resolução e formulação de problemas.

Com as tarefas já delineadas, foi desafiante encontrar e/ou adaptar problemas e expressões combinatórias de modo a concretizar o objetivo em estudo e, ao mesmo tempo, ser viável a envolver os alunos em atividades de resolução e de formulação de problemas. No entanto, aquando da análise das suas produções, questionei-me sobre se alguns dos problemas não foram demasiado fáceis, uma vez que estava à espera da manifestação de mais dificuldades por parte dos alunos. Apesar da turma ser considerada boa, este tema, tal como referido por vários autores, é considerado difícil de aprender pelos alunos.

Foram várias as dificuldades com que me deparei. Ao nível da intervenção pedagógica propriamente dita, além do desafio da seleção das tarefas, orientar uma discussão coletiva mostrou-se muito desafiante para mim. Sendo estes momentos de discussão de grande relevância na aprendizagem dos alunos, que devem ser estrategicamente conduzidos pelo professor, tive alguma dificuldade em saber antecipar perguntas que os alunos pudessem fazer, ou que eu mesmo teria que fazer, para que a discussão fosse eficaz. Ao nível do processo de investigação, a análise dos dados foi a etapa do estudo que mais dificuldades me trouxe, na organização de uma grande quantidade de dados, nos processos de categorização e na escolha do que incluir neste relatório.

O não ter tido a possibilidade de entrar nas *Breakout Rooms*, aquando da atividade de formulação de problemas, e acompanhar o trabalho dos alunos, fruto das circunstâncias em que tinham de trabalhar, foi uma limitação ao meu trabalho como professor e como investigador, pois a observação direta do trabalho dos alunos ficou completamente

impossibilitada. São fundamentais novas investigações sobre formulação de problemas, mas em que a observação direta do trabalho dos alunos seja possível, pois, sem essa observação, muito fica por aceder em termos da forma como eles pensavam, como geriam as interações, conflitos, ideias diferentes e como decidiram a forma final do enunciado do problema.

Para além das dificuldades com que me deparei, foram também muitas as aprendizagens que obtive e para as quais muito contribuíram as críticas feitas pelas orientadoras científica e pedagógica, que, da perspetiva de um observador, conseguem avaliar melhor os pontos fortes e fracos do que ia acontecendo no decorrer de cada aula lecionada por mim. Se estas críticas não tivessem sido feitas, eu iria aprender da pior maneira com o insucesso dos alunos. Uma das várias aprendizagens que obtive, e que me será útil no futuro, foi o tomar consciência da importância de ter de pensar antecipadamente nas várias abordagens que os alunos possam utilizar para a resolução de um determinado problema, para não ser surpreendido e conseguir ajudar os alunos se surgirem dificuldades.

Se começasse novamente a investigação, algumas coisas teriam de ser diferentes, nomeadamente, tirar mais notas de campo (para evitar esquecer-me das dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas e exercícios, durante as aulas lecionadas pela orientadora, e também a forma como ela ia minimizando essas dificuldades, respondendo às suas dúvidas, o que foi determinante nas aprendizagens dos alunos); ter realizado entrevistas aos alunos, aquando da análise das suas resoluções, para poder ficar com uma ideia mais próxima da real compreensão dos mesmos e ter feito uma “negociação” com a orientadora de modo a lecionar pelo menos mais uma aula para ter a oportunidade de realizar a discussão dos problemas formulados pelos grupos 5 e 6.

Sei que não aprendi tudo e que, para ser um professor melhor, tenho de estar atento às investigações feitas na área da Educação Matemática. Sei que a formação contínua é algo que não posso descurar, pois as atividades formativas são fundamentais para garantir que o conhecimento profissional (nas diferentes áreas: científica, pedagógica e tecnológica) seja constantemente atualizado e aperfeiçoado a fim de melhorar o desempenho de um professor. Mas este trabalho representou já um primeiro passo nesse sentido!

Referências Bibliográficas

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32(2), 181-199.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDS

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos*. Porto: Porto Editora.

Carvalho, B. (2009). *O trabalho colaborativo como meio de desenvolvimento do conhecimento didático de professores de Matemática no tema de Análise Combinatória*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Correia, P., & Fernandes, J. (2007) Estratégias intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. In A. Barca, M. Peralbo, A. Porto, B. Duarte da Silva, & L. Almeida (Eds.), *Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagogía: Libro de Actas* (pp. 1256-1267). A Coruña: Universidade da Coruña.

Domingos, A. (2003) *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A Matemática no Ensino Superior*. Tese de doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 121-141). Springer.

Fernandes, J., Correia, P., & Guzmán, R. (2010). Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 215-242.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics*, 78(3), 307-322.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 251-265.

Lima, R., & Freitas, J., (2014, março). *Um estudo inicial de estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos, diante de problemas de combinatória*. Comunicação apresentada no VIII Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, Mato Grosso do Sul.

Duro, M. L. (2012). *Análise combinatória e construção de possibilidades: O raciocínio formal no ensino médio*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, Brasil.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: ME-DGE.

Ministério da Educação (2015). *Programa e metas curriculares, Matemática A, Ensino Secundário, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*. Lisboa: ME-DGE.

Mota, B., & Ferreira, R. (2016). A reinvenção guiada na aprendizagem das operações combinatórias. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática – Recursos na educação matemática* (pp. 273-287). Évora: SPIEM.

Mota, B., & Ferreira, R. (2018). Comunicando aprendizagens em análise combinatória. *Educação e Matemática*, 149-150, 39-44.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).

NCTM. (2014). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática*. Lisboa: APM.

Oliveira, C. (2015). *Análise combinatória: Raciocínio recursivo e processos de enumeração*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Rio de Janeiro, Brasil.

Ponte, J. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: ME-DES.

Raposo, D. & Gomes, L. (2020). *Expoente 12 – Matemática A*. (1ª ed., vol. 1). Lisboa: ASA

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.

Serrazina, M., & Ribeiro, D. (2012). As interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no ensino básico. *Bolema*, 26(44), 1367-1393.

Serrazina, M., Vale, I., Fonseca, H., & Pimentel, T. (2002). O papel das investigações matemáticas e profissionais na formação inicial de professores. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Orgs.), *Atas do XIII Seminário de Investigação em Educação em Matemática* (pp. 41-58). Viseu: APM.

Silva, D., Fernandes, J., & Soares, A. (2004). Intuições de alunos do 12.º ano em combinatória: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa, & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (Eds.) (2015). *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. New York: Springer.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9–15

Skemp, R. (2015). Compreensão relacional e instrumental. *Educação em Matemática*, 137, 24-28 (Tradução portuguesa do original de 1978)

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, 24(2), 39-60.

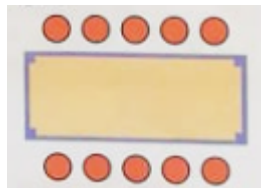
Anexos

Anexo A – Exercícios do Manual sobre os Princípios Fundamentais de Contagem

1. A Ana está a almoçar na Taberna do Manuel e o empregado de mesa informa-a de que o menu do dia tem as seguintes opções: duas escolhas para sopa (canja ou sopa de legumes), três escolhas para o prato principal (pescada, frango ou tofu) e duas escolhas para sobremesa (ananás ou mousse). A Ana tem de escolher uma sopa, um prato principal e uma sobremesa.

- a) Quantos são os menus possíveis?
- b) Quantos são os menus possíveis cujo prato principal seja frango?

2. Cinco casais sentam-se ao acaso à mesa, como a da figura.



De quantas maneiras distintas o podem fazer de modo que cada rapaz fique à frente da sua namorada e todas as raparigas fiquem do mesmo lado?

3. De quantos modos distintos se pode sentar três pessoas:

- a) num banco de três lugares?
- b) num banco de cinco lugares?

4. A Ana, a Berta, os respetivos namorados (Carlos e Duarte) e o amigo Eduardo vão passear de automóvel. Apenas as raparigas têm carta de condução. De quantas maneiras diferentes podem ocupar os cinco lugares, dois à frente e três atrás, de modo que ao lado da condutora viagem o respetivo namorado?

5. Um código é composto por seis carateres, dos quais três são vogais e três são algarismos. As vogais e os algarismos encontram-se alternados. Quantos códigos existem nestas condições?

6. Os códigos dos cofres fabricados por uma determinada empresa consistem numa sequência de quatro algarismos, como, por exemplo, 0141. Um cliente vai comprar um cofre a essa empresa e pede que o respetivo código satisfaça as seguintes condições:

- tenha exatamente três algarismos 8;
- a soma dos seus quatro algarismos seja inferior a vinte e sete.

Quantos códigos diferentes existem satisfazendo estas condições?

Anexo B – Ficha de trabalho nº 20 sobre os Princípios Fundamentais de Contagem

1. Para fazer uma viagem Porto-Lisboa-Porto, podemos usar como meio de transporte o comboio, o automóvel ou o avião.
De quantos modos distintos podemos escolher esses transportes, se não pretendermos usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?
2. Quantos números naturais distintos de três algarismos distintos existem?
3. Com os algarismos 1 e 2, quantos números de quatro algarismos se podem escrever?
4. Numa zona da cidade do Porto, todos os números de telefone começam por 5 e são compostos por 6 algarismos.
Quantos números de telefone são possíveis escrever nestas condições?
5. Num boletim de Totobola, aparecem três hipóteses (1, x, 2) para cada um dos treze jogos.
Indica o número de possibilidades existentes no preenchimento de uma coluna do boletim.
6. O Rui tem várias possibilidades de se deslocar até ao emprego: a pé, de metro, de autocarro ou de carro. De quantas maneiras diferentes é que ele pode ir para o emprego durante os cinco dias úteis da semana?
7. Nas mais recentes matrículas dos automóveis em Portugal, aparecem quatro algarismos (de 0 a 9) com duas letras no meio.
 - 7.1. Quantos números diferentes se podem escrever?
 - 7.2. Considerando o alfabeto com 23 letras, quantas matrículas são possíveis escrever?
8. O Clube de Desporto de uma escola decidiu fazer uma bandeira com quatro tiras coloridas verticais. Estão disponíveis cinco cores diferentes. Duas tiras vizinhas não podem ser da mesma cor.
 - 8.1. Quantas bandeiras diferentes se podem formar nestas condições?
 - 8.2. Quantas bandeiras diferentes se podem formar se a primeira e a última tira tiverem a mesma cor?
9. Usando as 26 letras do alfabeto, quantas sequências de três letras todas distintas se podem formar, começando por vogal e acabando numa consoante?
10. Quantos são os números naturais pares que se podem escrever com quatro algarismos distintos?
11. Considera o conjunto $C = \{1,2,3,4,5\}$.
 - 11.1. Quantos números diferentes de três algarismos distintos podem ser escritos com os algarismos de C?
 - 11.2. Quantos desses números são ímpares?
 - 11.3. Quantos números menores que 400 se podem escrever, sem repetir algarismos?

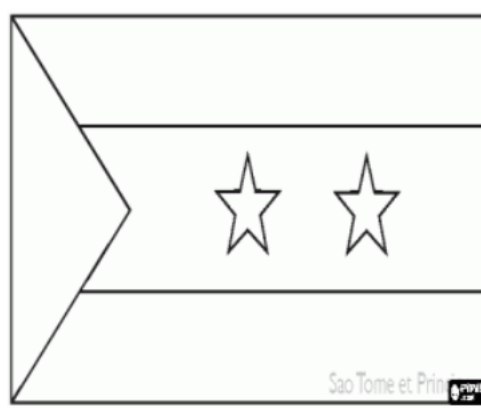
- 11.4.** Quantos números menores que 400 de algarismos todos distintos se podem escrever com os algarismos 0,1,2,3?
- 12.** Com os algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números distintos de algarismos distintos se podem formar
- 12.1.** tendo quatro algarismos;
- 12.2.** menores que mil e múltiplos de cinco.
- 13.** Quantos números naturais de quatro algarismos menores que 5000 e divisíveis por 5 podem ser formados, usando apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?
- 14.** Considera todos os números naturais entre 2000 e 3999, inclusive. Quantos deles são capicuas?
- 15.** Com quatro algarismos diferentes, quantos números naturais podemos formar compreendidos entre 2000 e 5700?

E se só as raparigas puderem conduzir?

6. Em África, um número considerável de países têm na sua bandeira algumas das seguintes cores: amarelo, vermelho, preto e verde. De quantas formas se pode colorir a seguinte bandeira?

E se:

- Duas partes adjacentes não puderem ter a mesma cor?
- As estrelas tiverem a mesma cor?
- A risca superior e a inferior tiverem a mesma cor?



Anexo D – Verificação de Aprendizagens 1



Verificação de Aprendizagens 1 |

15.02.2021

2020 / 2021

12.º Ano de Escolaridade | Matemática A

1 – Considerar 12 pontos, 8 sobre uma reta e 4 sobre outra reta estritamente paralela à primeira. De quantas maneiras podemos traçar segmentos de reta com uma extremidade numa reta e a outra extremidade na outra reta?

2 – Supõe que cada um dos seis mil milhões de habitantes da Terra recebe um cartão de identificação com uma sequência de letras. (Considera o alfabeto com 26 letras)

- Será suficiente utilizar sequências de quatro letras para que todos os habitantes tenham um cartão de identificação único? Apresenta o teu raciocínio.
- Qual terá de ser o número mínimo de letras a usar em cada cartão, para garantir que a cada habitante esteja associado uma sequência diferente?

3 – Seis jovens, a Ana, a Beatriz, o Carlos, o Dinis, a Eva e a Filipa, vão ao cinema e pretendem sentar-se na mesma fila em lugares consecutivos.

De quantas maneiras diferentes podem ocupar os lugares:

- Se a Ana e o Carlos ficarem cada um numa ponta?
- Se a Beatriz ficar entre o Carlos e o Dinis?
- Se as raparigas ficarem juntas?

Anexo E – Ficha de trabalho nº 21 – Cálculo Combinatório: Arranjos com repetição e Permutações

1. Numa prateleira com 4 divisórias, de quantas formas diferentes se podem colocar 4 livros de temas diferentes, ficando apenas um em cada divisória?
2. De quantas maneiras diferentes se podem sentar seis amigos num banco de seis lugares?
3. Duas raparigas e três rapazes vão sentar-se num banco de cinco lugares. Quantas são as maneiras diferentes de o poderem fazer se:
 - 3.1. não houver quaisquer restrições?
 - 3.2. as raparigas ficarem juntas e os rapazes também?
 - 3.3. as raparigas não se separarem e os rapazes ficarem de qualquer modo?
 - 3.4. chegar mais uma rapariga e um dos rapazes ficar de pé?
4. Considera a palavra «ESCOLA»:
 - 4.1. Quantos anagramas existem desta palavra?
 - 4.2. Quantos têm as vogais e as consoantes juntas?
 - 4.3. Quantos têm a sílaba «ES»?
5. Quatro rapazes e três raparigas vão colocar-se lado a lado para uma fotografia. De quantas maneiras diferentes se podem dispor os sete jovens?
 - 5.1. se não houver restrições.
 - 5.2. se cada rapariga ficar entre dois rapazes.
 - 5.3. se os jovens do mesmo sexo ficarem juntos.
 - 5.4. se os rapazes ficarem juntos.
 - 5.5. se o jovem mais alto ficar no meio.
 - 5.6. se estiver um rapaz em cada uma das extremidades.
6. Um comerciante dispõe de 20 embalagens de um certo produto das quais 4 são premiadas, mas não sabe quais são.
Dispondo as 20 embalagens em fila, por uma ordem qualquer, escreve uma expressão que traduza o número de maneiras diferentes de dispor as 4 embalagens premiadas no início ou no fim da fila. Não calcules o valor da expressão.
7. Seis amigos vão ao cinema e há dois que são namorados. De quantas maneiras se podem sentar nos seis lugares disponíveis da Fila J, de modo que os dois namorados fiquem juntos?
8. Pretende-se visitar uma exposição com 5 Pavilhões todos diferentes. De quantas formas se pode organizar a visita de modo que esta comece pelo Pavilhão da Matemática e termine no da Física?
9. Pretende-se colocar numa estante 12 DVD distintos: seis são da série Números, quatro da série Perdidos e dois são de Crime sob investigação. Dispondo todos os DVD

numa fila, ao acaso, de quantas maneiras diferentes é possível dispor os DVD's de modo que os da mesma série fiquem todos juntos?

10. Quatro raparigas e quatro rapazes foram jantar fora, tendo reservado uma mesa circular com os lugares numerado de 1 a 8. Supondo que os lugares em que se vão sentar são atribuídos por sorteio, de quantas maneiras diferentes se podem sentar de modo que as raparigas e os rapazes fiquem em lugares alternados?

11. Numa conferência de alto nível, encontram-se doze políticos de quatro países, sendo três de cada país (o Presidente da República, o Primeiro-Ministro e o Ministro dos Negócios Estrangeiros).

De quantas formas diferentes se podem dispor as doze pessoas, em fila, para uma fotografia, de tal modo que os representantes de cada país fiquem juntos?

12. Considera o conjunto $A = \{ \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit \}$

12.1. Na figura está representada uma *slot machine*.



Em cada jogada há uma sequência de três elementos do conjunto A , podendo ser ou não repetidos.

Quantas sequências diferentes podem ocorrer nesta *slot machine*?

12.2. Admite que uma outra *slot machine* apresenta, em cada jogada, uma sequência de cinco elementos do conjunto A .

Quantas são as sequências possíveis?

13. O Luís e a Joana utilizaram um programa no computador para fazer listagens de números.

O Luís imprimiu uma listagem com todos os números de quatro dígitos e a Joana imprimiu uma listagem com os números de três dígitos.

Quantos números tem a mais a listagem do Luís em relação à da Joana?

14. Para fazer o registo online num determinado serviço, o Luís tem de escolher uma *password* constituída por duas letras seguidas de quatro algarismos.

Cada letra pode ser escolhida de um conjunto de 26 e cada algarismo pode ser escolhido de um conjunto de 10 dígitos.

Quantas *passwords* distintas permite este sistema?

15. O Rui desloca-se para o trabalho de automóvel e passa por 8 semáforos. Determina:

15.1. O número de sequências de sinais (cores) que pode encontrar.

15.2. O número de sequências de sinais que pode encontrar sem que nenhum seja vermelho.

16. Com uma moeda (da zona euro) de cada valor, quantos valores exatos (sem troco) podem ser pagos utilizando pelo menos uma moeda?

Anexo F – Exercícios 35, 36, 37 e 38 do Manual sobre manipulação de fatoriais

35. Determina, sem recurso ao fatorial da calculadora.

- a) $\frac{10!}{7!}$
- b) $\frac{2017!}{2016!}$
- c) $\frac{20!+18!}{17!}$

36. Considerando n um número natural, simplifica:

- a) $\frac{n!}{(n-1)!}$
- b) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$
- c) $\frac{(n+1)!+(n-1)!}{n!}$

37. Determina n , número inteiro não negativo, tal que:

$$12n! + 5(n+1)! = (n+2)!$$

38. Escreve os seguintes produtos na forma $\frac{a!}{b!}$, com a e b números naturais.

- a) $12 \times 11 \times 10 \times 9$
- b) $2015 \times 2016 \times 2017$
- c) $(n+2) \times (n+1) \times n, \quad n \geq 1$
- d) $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4), \quad n \geq 5$
- e) $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-p+1), \quad n \geq p$

Anexo G – Exercícios sobre Arranjos sem repetição

1. Suponham que nesta sessão não há duas pessoas que façam anos no mesmo dia em 2021. Quantos são os casos em que isso pode acontecer?
2. Uma caixa contém cinco bolas numeradas de 1 a 5, indistinguíveis ao tato. De quantas maneiras distintas podemos extrair sucessivamente e sem reposição três dessas bolas?
3. Considera todos os números de quatro algarismos diferentes. Quantos desses números são pares?
4. O balcão de uma gelataria tem recipientes com capacidade para 12 sabores de gelado, distribuídos por duas filas de 6.
 - a) De quantos modos diferentes se podem arrumar numa taça, oito qualidades de gelados diferentes?
 - b) Na arrumação de oito qualidades de gelado diferentes, o gerente pretende colocar os sabores “morango”, “chocolate” e “caramelo” na fila de trás. De quantos modos diferentes se podem arrumar os oito sabores de gelado?

Anexo H – Verificação de Aprendizagens 2



Verificação de Aprendizagens 2 |

17.02.2021

2020 / 2021

12.º Ano de Escolaridade | Matemática A

1 - Um grupo de 11 amigos, quatro rapazes e sete raparigas, vai colocar-se em duas filas para uma fotografia. Na fila da frente ficam cinco pessoas sentadas e as restantes ficam de pé na fila de trás. De quantas maneiras distintas se podem posicionar os 11 amigos, se na fila da frente ficarem pelo menos quatro raparigas?

2 -

Uma turma de uma escola secundária tem 28 alunos: 16 raparigas e 12 rapazes. Nessa turma, vai ser escolhida uma comissão para organizar uma viagem. A comissão será formada por três pessoas: um **presidente**, um **tesoureiro** e um **responsável pelas relações públicas**.



Quantas comissões mistas distintas podem ser formadas?

$3 \times 12 \times {}^{16}A_2 + 3 \times 16 \times {}^{12}A_2$ e ${}^{28}A_3 - ({}^{16}A_3 + {}^{12}A_3)$ são duas respostas corretas.

Numa pequena composição explique o raciocínio que conduziu a cada uma destas respostas.

Anexo I – Ficha de trabalho nº 22 – Cálculo Combinatório: Combinações

1. Numa turma há 24 alunos, 10 rapazes e 14 raparigas. A Sofia e o Rui fazem parte da turma. É formado um grupo de trabalho com cinco elementos selecionados ao acaso.



O número de maneiras de formar o grupo com três raparigas e dois rapazes de modo que a Sofia faça parte e o Rui não, é:

- (A) ${}^{10}C_2 \times {}^{14}C_3 - 1$ (B) ${}^9C_2 \times {}^{14}C_3$ (C) ${}^{10}C_2 \times {}^{13}C_3$ (D) ${}^9C_2 \times {}^{13}C_2$

2. O diretor de uma empresa convocou seis colaboradores para uma reunião. O diretor ocupa o topo da mesa e os colaboradores distribuem-se, ao acaso, pelos restantes oito lugares, sendo quatro de cada lado da mesa conforme é sugerido na figura.



A Joana e o Pedro são colaboradores e vão participar na reunião. O número de maneiras diferentes de distribuir os seis colaboradores para que a Joana fique ao lado do Pedro do mesmo lado da mesa é dado por:

- (A) ${}^8C_2 \times {}^6A_4$ (B) ${}^8C_2 \times 2! \times {}^6C_4$ (C) $3 \times 2 \times 2! \times {}^6A_4$ (D) $8^2 \times {}^6C_4$

3. Considera o problema seguinte:

“A Joana tem nove chávenas de café: três vermelhas, três verdes e três azuis.

Vai dispor oito dessas nove chávenas em linha sobre um balcão, como se exemplifica a seguir.



Quantas sequências diferentes, atendendo à cor, é possível formar?”

Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas:

I: ${}^3C_2 \times \frac{8!}{3! \times 3! \times 2!}$ II: ${}^3C_2 \times {}^8C_3 \times {}^5C_3$

Numa composição, apresenta o raciocínio que conduz a cada uma dessas respostas.

4. Considere nove fichas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. Na figura seguinte, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais (A, B, C e D) e em quatro filas verticais (1, 2, 3 e 4). Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha. De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Exame – 2016, 2ª Fase

5. O Luís lança, várias vezes, um dado cúbico com as faces pontuadas de 1 a 6. No fim de cada um dos lançamentos, regista o número de pontos obtido e constrói uma sequência numérica.

5.1 Determina quantas sequências diferentes pode registar se fizer:

- a) 4 lançamentos; b) 7 lançamentos.

5.2 O dado é lançado três vezes.

Determina o número de sequências diferentes em que:

- a) o primeiro termo é um número par;
b) o primeiro termo é número ímpar e o terceiro é número múltiplo de 3

6. Considere um saco com oito bolas numeradas de 1 a 8 e um suporte para colocar cinco dessas bolas. Das oito bolas, três são verdes e as restantes azuis.

6.1. Quantas sequências diferentes de cinco bolas, atendendo às cores e aos números das bolas, é possível obter ao dispô-las no suporte de modo que:

- a) as cinco bolas tenham a mesma cor;
b) as três primeiras bolas sejam verdes;
c) as bolas colocadas nos extremos tenham a mesma cor?

6.2. Considera o conjunto das 8 bolas e determina:

- a) o número de subconjuntos com quatro bolas, sendo exatamente duas delas verdes;
b) o número de subconjuntos com quatro bolas em que o número de bolas verdes é maior que o número de bolas azuis.

6.3. Determina o número de subconjuntos de três bolas em que o produto dos números dessas bolas é um número ímpar.

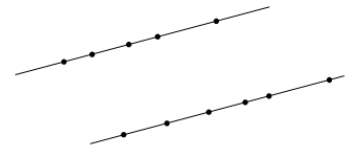
7. O Pedro comprou um telemóvel e a *password* é uma sequência de sete algarismos.

Por exemplo: **0 0 7 1 9 9 9**

Determina o número de *passwords* diferentes com exatamente três 5.

8. Considere 11 pontos distintos, cinco sobre uma reta e seis sobre outra reta estritamente paralela à primeira.

- 8.1. Escolhendo três pontos ao acaso, quantos desses conjuntos definem retas?



- 8.2. Considere o problema:

«Quantos triângulos distintos se podem formar com os 11 pontos?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas.

Resposta I: ${}^{11}C_3 - {}^6C_3$

Resposta II: $5 \cdot {}^6C_2 + 6 \cdot {}^5C_2$

Apenas uma das respostas está correta.

Elabora uma composição na qual:

- identifiques a resposta correta;
- expliques um raciocínio que conduza à resposta correta;
- proponhas uma alteração na expressão correspondente à resposta incorreta, de modo a torná-la correta;
- expliques, no contexto do problema, a razão da alteração proposta.

9. A Ana tem uma coleção de sete bonecas: quatro vermelhas, duas azuis e uma amarela.

- 9.1. Admite que as bonecas estão num saco e que, ao acaso, a Ana retira três bonecas. Determina quantos casos diferentes existem de a Ana retirar uma boneca de cada cor.

- 9.2. Admite que as sete bonecas são colocadas, ao acaso, em duas prateleiras: Três na prateleira de cima e quatro na prateleira de baixo.

Determina quantos maneiras distintas de dispor as bonecas existem de forma a que

9.2.1. A boneca amarela fique na prateleira de baixo;

9.2.2. as quatro bonecas vermelhas fiquem na prateleira de baixo;

9.2.3. as bonecas azuis fiquem nos extremos da mesma prateleira.

Anexo J – Exercícios sobre Combinações

1. No concurso “Euromilhões” aposta-se em cinco números e duas estrelas. Quantas apostas diferentes se podem fazer?



2. Numa turma de 25 alunos, 10 rapazes e 15 raparigas, vão escolher-se 6 alunos.

- De quantos modos diferentes pode ser feita a escolha?
- De quantas formas pode efetuar-se a seleção dos alunos, garantindo que o grupo tem pelo menos 2 raparigas?



Anexo K – Problemas 51 e 53 do Manual sobre Combinações

51. Quantas diagonais possui um polígono de:

- a) quatro lados?
- b) cinco lado?
- c) n lados?

53. Quantos números diferentes se podem formar, multiplicando alguns (ou todos os) números 1, 2, 3, 4, 5 e 9?

Anexo L – Verificação de Aprendizagens 3



Verificação de Aprendizagens 3 |

22.02.2021

2020 / 2021

12.º Ano de Escolaridade | Matemática A

1 – Realizou-se um encontro de professores de Matemática e de professores de Física. Sabe-se que neste encontro todos se cumprimentaram com um aperto de mão e que foram dados 11175 apertos de mão.



- Prove que neste encontro estiveram presentes 150 professores. Equaciona o problema e, em seguida, resolve-o.
- Admita que 20% dos professores eram do sexo feminino. Pretende-se formar uma comissão de seis professores para realizarem uma videoconferência. Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar a comissão com, no máximo, duas mulheres.

Anexo M – Ficha de trabalho nº 23 – Problemas com diferentes operações combinatórias

1. Numa corrida participam 12 concorrentes. Há apostas para ver quem acerta na classificação dos três primeiros lugares. Cada aposta custa 2€. Qual é o valor mínimo que deve ser gasto para garantir que se acerta?

2. Numa reunião foi necessário formar um grupo de dois elementos escolhidos entre os participantes. Sabe-se que há 28 possibilidades para formar esse grupo. Determina o número de possibilidades se o grupo passar a ser constituído por 4 elementos.

3. Um grupo de amigos resolveu arranjar um código para comunicarem entre eles. Concordaram que cada mensagem ficaria associada a uma sequência de dois dígitos (0 e 1) e duas letras (X e Y), sem possibilidade de repetição de letras ou dígitos. O código pode começar por uma letra ou por um dígito, e as letras (ou os dígitos) podem ser seguidas ou intercaladas por dígitos (ou letras).

a) Quantas mensagens é que eles podem codificar de acordo com este esquema?

b) Como os amigos acharam que o número de mensagens era pequeno, resolveram permitir a repetição de letras ou/e dígitos, mas acordaram que o código tinha de ser constituído por duas letras e por dois dígitos, mantendo as regras anteriores. Quantas mensagens é que eles conseguem agora codificar?

4. Considere todos os códigos de cartão de multibanco que podem existir. Um exemplo desses códigos pode ser 0012.

a) Quantos desses códigos não têm algarismos consecutivos iguais?

b) Quantos desses códigos não têm o primeiro e o último algarismo iguais?

5. Um grupo de 10 amigos, 4 rapazes e 6 raparigas vão ao cinema e vão distribuir-se por duas filas com 6 lugares livres cada uma. De quantas maneiras distintas os jovens se podem distribuir pelos 12 lugares de modo que em cada fila fiquem 5 pessoas, duas das quais são rapazes?

A resposta a esta questão pode ser obtida através de expressões que resultam de dois raciocínios distintos:

$$A) {}^6C_5 \times {}^6C_5 \times {}^4C_2 \times {}^5A_2 \times {}^5A_2 \times 6!$$

$$B) {}^6C_5 \times {}^6C_5 \times {}^4C_2 \times {}^6C_3 \times 5! \times 5!$$

Explica cada um desses raciocínios.

Anexo N – Exemplos de enunciados de problemas para determinadas expressões combinatórias**Exemplo 1**

Uma sala de aula tem 30 mesas individuais, dispostas em cinco filas, paralelas ao quadro, de seis mesas cada. Seis raparigas e oito rapazes vão ter uma aula nessa sala. De quantas maneiras diferentes podem os 14 alunos ficar sentados, de tal modo que as raparigas ocupem uma única dessas cinco filas?

$$5 \times 6! \times {}^{24}A_8$$

Exemplo 2

Uma caixa tem 10 compartimentos para colocar iogurtes. De quantas maneiras diferentes se podem colocar sete iogurtes nessa caixa, sabendo que três iogurtes são naturais (não se distinguem) e os restantes quatro são de fruta (um de ananás, um de morango, um de maçã e um de pêsego)?

$${}^{10}C_7 \times {}^7C_3 \times 4!$$

Exemplo 3

Considera todos os números naturais de seis algarismos. Quantos deles são múltiplos de 5 e têm os algarismos todos diferentes?

$${}^9A_5 + 8 \times {}^8A_4$$

Anexo O – Plano de Aula nº 1

Escola Secundária [...]

2020-2021

Disciplina /Área Curricular	Ano	Turma	Hora	Sala	Data
Matemática A	12º		15h25	Google Meet	08.02.2021

PLANO DE AULA Nº 1	Aula Observada – NÃO ☐ SIM ☒
--------------------	---

Unidade didática	Objetivo(s) de aula
------------------	---------------------

Introdução ao Cálculo Combinatório	Conhecer e aplicar factos e princípios elementares de contagem da combinatória.
------------------------------------	---

Competência(s) focalizada(s)	Conteúdos programáticos
------------------------------	-------------------------

- Ser capaz de resolver problemas de contagem utilizando estratégias eficazes (Princípios Fundamentais de Contagem) - Comunicação oral e escrita.	<u>Princípios Fundamentais de Contagem:</u> princípio geral da adição e princípio geral da multiplicação.
--	---

Recursos e materiais	Avaliação das aprendizagens
----------------------	-----------------------------

- Manual Expoente 12 (Volume 1) - Computador - Telemóvel ou dispositivo equivalente (para que os alunos fotografem as suas resoluções dos problemas propostos) - Google Meet - Google Slides e Pear Deck (versão PowerPoint da Google Chrome) – que permite a colocação de respostas por parte dos alunos - Jamboard - Caderno diário - Material de escrita - Calculadora	- Interesse demonstrado durante a aula; - Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão das tarefas; - Produções dos alunos entregues via Classroom.
---	--

Desenvolvimento da aula (referir estratégias utilizadas nos diferentes momentos da aula)

<u>Histórico que antecede a aula</u>

Esta é a primeira aula de ensino à distância (E@D) deste ano letivo. Os alunos serão previamente elucidados das ferramentas online que irão utilizar e das regras a seguir.

<u>Segmentos de aula</u>	<u>Tempo previsto (minutos)</u>
1ª Parte – <u>Considerações iniciais</u> <u>Metodologia:</u> Início da aula com considerações sobre o modo de funcionamento da mesma.	5
2ª Parte – <u>Princípios fundamentais de Contagem</u> <u>Metodologia:</u> Com recurso ao PowerPoint realizado no Google Slides e Pear Deck, será referido o conteúdo a ser lecionado (Cálculo Combinatório), sua definição e introdução do tema com três exemplos onde existe a necessidade/curiosidade de calcular os elementos de um determinado conjunto - número de matrículas existentes num determinado país, número de códigos associados a um cartão bancário e número de chaves possíveis do Euromilhões. Apresentação dos Problemas Iniciais e resolução autónoma por parte dos alunos. Os problemas iniciais a serem resolvidos, intuitivamente, pelos alunos serão os seguintes: → Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, quantos números de três algarismos, não necessariamente diferentes, se podem escrever com os algarismos do conjunto? → A Sofia tem, na estante do seu quarto, doze livros: cinco de José Saramago, três de Virgílio Ferreira e quatro de Lídia Jorge. Pretende escolher dois desses livros, de autores diferentes, para ler nas férias. Quantas escolhas diferentes pode fazer? → Para a formação de uma comissão, são escolhidas três pessoas de entre o Afonso, o Carlos, a Isaura e a Maria para que ocupem os cargos de Presidente, Tesoureiro e Secretário. Sabendo que uma pessoa não pode ocupar mais de um cargo diferente, quantas comissões distintas podem ser formadas? No final, os alunos vão digitalizar as suas resoluções e submetê-las no Classroom.	5 45 5
INTERVALO	15
3ª Parte – <u>Discussão dos três problemas em grande grupo</u> <u>Metodologia:</u> • Para a discussão do primeiro problema e aquando da visualização do diapositivo 6: 1º - os alunos serão convidados a colocarem o resultado numérico final a que chegaram (no Pear Deck); 2º - na posse desses dados, os alunos serão convidados a participar na discussão oral/escrita, consoante as respostas incorretas/corretas a que	60

chegaram. Na discussão escrita será utilizada a aplicação Jamboard, da Google Chrome, permitindo aos alunos que expliquem o sistema/estrutura de contagem que utilizaram e se asseguraram que contaram todos os casos ou não repetiram contagens. Cada explicação poderá ser rebatida ou validada pelo conjunto dos alunos da turma. Quando a explicação de um aluno for “rebatida” por outro, este terá de explanar a sua resolução. 3º - no final das propostas, todos os alunos que não acertaram, deverão compreender a resolução tida como correta. • Aquando da visualização dos diapositivos 8 e 10 serão utilizados os três passos anteriores (1º, 2º, 3º). A apresentação do Princípio Geral da Multiplicação e da Adição será efetuada com base na discussão do primeiro e segundo problema, sendo apresentadas estruturas que sistematizam as contagens, nomeadamente o diagrama de árvore. Em todos os momentos de discussão em grande grupo tentarei a participação espontânea e voluntária dos alunos, procurando sempre que o maior número de alunos possível o faça.	
---	--

TPC (facultativo)	Sumário
♦ Exercícios do Manual: ➤ Página 14 - Ex. 8 a Ex. 10 ➤ Página 15 - Ex. 11, Ex. 12 ➤ Página 16 - Ex. 13, Ex. 14 ♦ Ficha de Trabalho nº 20	♦ Princípios Fundamentais de Contagem; ♦ Resolução e discussão de três problemas sobre este tema.

Observações

Assinatura do(a) docente

Anexo P – Plano de Aula nº 2**Escola Secundária [...]****2020-2021**

Disciplina /Área Curricular	Ano	Turma	Hora	Sala	Data
Matemática A	12º		15h25	Google Meet	24.02.2021

PLANO DE AULA Nº 2	Aula Observada – NÃO ☐ SIM ☒
--------------------	---

Unidade didática	Objetivo(s) de aula
Introdução ao Cálculo Combinatório	♦ Resolver problemas envolvendo as quatro operações combinatórias. Nota: esta aula é a 8ª aula desta unidade

Competência(s) focalizada(s)	Conteúdos programáticos
♦ Ser capaz de resolver problemas de contagem utilizando as quatro operações combinatórias (Arranjos com e sem repetição, Permutações e Combinações) ♦ Comunicação oral e escrita.	♦ Resolução de problemas de contagens envolvendo arranjos com e sem repetição, permutações e combinações.

Recursos e materiais	Avaliação das aprendizagens
♦ Manual Expoente 12 (Volume 1) ♦ Computador ♦ Ficha de Trabalho nº 23 ♦ Telemóvel ou dispositivo equivalente (para que os alunos digitalizem as resoluções dos problemas propostos) ♦ Aplicação do telemóvel CamScanner ♦ Google Meet ♦ Jamboard ♦ Caderno diário ♦ Material de escrita ♦ Calculadora	♦ Interesse demonstrado durante a aula; ♦ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão das tarefas; ♦ Grau de autonomia na aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente. ♦ Produções dos alunos entregues via Classroom.

Desenvolvimento da aula (referir estratégias utilizadas nos diferentes momentos da aula)

♦ **Histórico que antecede a aula:**

Na primeira aula, recorrendo a três problemas, foram introduzidos os Princípios Fundamentais de Contagem (Princípio Geral da Adição e Princípio Geral da Multiplicação). Numa primeira fase, os alunos resolveram-nos autonomamente, sem direito a qualquer esclarecimento de dúvidas. Os alunos submeteram as suas resoluções na disciplina de Matemática A no Classroom. Seguidamente passou-se à discussão em grande grupo dos três problemas.

Na segunda aula, os alunos foram organizados em sete grupos de trabalho para a resolução de 6 problemas de contagem, com graus diferentes de dificuldade. Seis dos grupos resolveram um problema e o outro grupo, grupo de controlo, resolveu todos os problemas. No final desta aula, houve tempo para a apresentação da proposta de resolução do Problema 1, por parte do Grupo 1.

Na terceira aula, os outros cinco grupos apresentaram as suas propostas de resolução. O grupo de controlo interveio, tanto na aula anterior como nesta, dizendo se concordava ou não com as propostas de resolução que iam sendo apresentadas, sendo que no caso em que discordaram, explanaram a sua resolução.

Houve ainda tempo para uma sessão de esclarecimento de dúvidas sobre os problemas do manual da página 14 à página 18.

Na quarta aula foram lecionados os conceitos de Arranjos com repetição e Partes de um conjunto. Numa primeira fase, recorrendo a três problemas, os alunos resolveram-nos autonomamente, sem direito a qualquer esclarecimento de dúvidas e submeteram as suas respostas na aplicação do Pear Deck do Google Slides. Seguidamente passou-se à discussão em grande grupo dos três problemas. Houve ainda tempo para iniciar o conceito das Permutações.

Nos últimos 20 minutos foi proposto aos alunos que resolvessem a Verificação de Aprendizagens 1. O objetivo da sua realização é tentar perceber se os alunos têm vindo a acompanhar o que foi lecionado na primeira semana do Ensino à Distância (E@D).

Na quinta aula, foi feito o esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos propostos para casa, no final da aula anterior (Ficha de Trabalho nº 21 e exercícios do manual adotado). Concluiu-se o leccionamento do conteúdo das Permutações, realizando-se vários problemas do manual. Houve ainda tempo para iniciar o conceito dos Arranjos sem repetição.

Na sexta aula, recorrendo a dois problemas, conclui-se o leccionamento do conceito de Arranjos sem repetição. Tal como em aulas anteriores, inicialmente, os alunos resolveram os problemas autonomamente, sem direito a qualquer esclarecimento de dúvidas e submeteram as suas respostas na aplicação do Pear Deck do Google Slides. Depois de submetidas as respostas, passou-se à discussão em grande grupo dos dois problemas.

Iniciou-se também o conceito de Combinações recorrendo a um problema que foi resolvido autonomamente pelos alunos e discutida em grande grupo a sua resolução.

Nos últimos 20 minutos foi proposto aos alunos que resolvessem a Verificação de Aprendizagens 2. O objetivo da sua realização é tentar perceber se os alunos têm vindo a acompanhar o que foi lecionado na segunda semana do Ensino à Distância (E@D).

Na sétima aula, formalizou-se o conceito de Combinações e resolveram-se dois exercícios de aplicação como forma de consolidar o conceito lecionado, com recurso ao Pear Deck. Depois do intervalo, foi proposto aos alunos que resolvessem a Verificação de Aprendizagens 3 com o objetivo de tentar perceber se os alunos têm vindo a acompanhar o que foi lecionado sobre a temática das Combinações do Ensino à Distância (E@D).

Houve ainda tempo para uma sessão de esclarecimento de dúvidas sobre os exercícios 51 e 53 do manual e alguns exercícios da Ficha de Trabalho nº 22.

<u>Segmentos de aula</u>	<u>Tempo previsto (minutos)</u>
<u>1ª Parte – Resolução de uma Ficha de Trabalho com diferentes tipos de problemas de Cálculo Combinatório</u> ♦ <u>Metodologia:</u> A aula iniciar-se-á com a explicação do trabalho que os alunos irão desenvolver durante os 90 minutos, começando com a realização de uma Ficha de Trabalho onde serão propostos cinco problemas que os alunos resolverão autonomamente sem esclarecimento de dúvidas e à	45

qual se seguirá a discussão dos seus resultados. Os primeiros quatro corresponderão, cada um deles, a uma operação combinatória diferente. Os problemas serão colocados na ficha não obedecendo à ordem de lecionação dos conteúdos. No quinto problema, será pedido aos alunos que, numa pequena composição, expliquem que as duas expressões combinatórias fornecidas para o mesmo estão corretas. Concluída a resolução, os alunos irão digitalizar as suas resoluções e submetê-las na disciplina de Matemática A no Classroom. O objetivo da realização desta Ficha de Trabalho é tentar compreender se os alunos conseguem resolver os problemas, reconhecendo qual a operação combinatória que está inerente a cada um, uma vez que esta ficha compreende problemas que abrange toda a unidade de Introdução ao Cálculo Combinatório. Para além desse objetivo é importante também compreender como comunicam matematicamente.	
2º Parte – <u>Correção/Discussão da Ficha de Trabalho em grande grupo</u> ♦ <u>Metodologia:</u> Nesta parte da aula, os alunos serão convidados a participar na discussão escrita da Ficha de Trabalho. Será utilizada a aplicação Jamboard, da Google Chrome, permitindo aos alunos que expliquem o raciocínio que utilizaram. Cada explicação poderá ser rebatida ou validada pelo conjunto dos alunos da turma. Quando a explicação de um aluno for “rebatida” por outro, este terá de explanar a sua resolução. Em todos os momentos de discussão em grande grupo tentarei a participação espontânea e voluntária dos alunos, procurando sempre que o maior número de alunos possível o faça.	45

TPC (facultativo)	Sumário
	♦ Resolução de problemas de contagens envolvendo arranjos com e sem repetição, permutações e combinações.
Observações	

Assinatura do(a) docente

Anexo Q – Plano de Aula nº 3**Escola Secundária [...]****2020-2021**

Disciplina /Área Curricular	Ano	Turma	Hora	Sala	Data
Matemática A	12º		15h25	Google Meet	25.02.2021

PLANO DE AULA Nº 3	Aula Observada – NÃO ☐ SIM ☒
--------------------	---

Unidade didática	Objetivo(s) de aula
------------------	---------------------

Introdução ao Cálculo Combinatório	♦ Formulação de problemas com base em expressões combinatórias fornecidas. Nota: esta aula é a 9ª aula desta unidade
------------------------------------	---

Competência(s) focalizada(s)	Conteúdos programáticos
------------------------------	-------------------------

♦ Ser capaz de elaborar problemas de contagem, utilizando uma ou mais das quatro operações combinatórias (Princípios Fundamentais de Contagem, Arranjos com e sem repetição, Permutações e Combinações), a partir de uma solução fornecida. ♦ Desenvolvimento do pensamento crítico e pensamento criativo. ♦ Desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática tanto oral como escrita.	♦ Factos elementares do Cálculo Combinatório: ♦ Resolução/Formulação de problemas de contagens envolvendo várias operações combinatórias.
---	--

Recursos e materiais	Avaliação das aprendizagens
----------------------	-----------------------------

♦ Manual Expoente 12 (Volume 1) ♦ Computador ♦ Google Meet ♦ Microsoft Word ou equivalente ♦ Google Slides (versão PowerPoint da Google Chrome) ♦ Breakout Rooms ♦ Jamboard ♦ Caderno diário ♦ Material de escrita ♦ Calculadora	♦ Interesse demonstrado durante a aula; ♦ Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/discussão das tarefas; ♦ Grau de autonomia na aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente. ♦ Produções dos alunos entregues via Classroom.
---	---

Desenvolvimento da aula
(referir estratégias utilizadas nos diferentes momentos da aula)

♦ **Histórico que antecede a aula:**

Na primeira aula, recorrendo a três problemas, foram introduzidos os Princípios Fundamentais de Contagem (Princípio Geral da Adição e Princípio Geral da Multiplicação). Numa primeira fase, os alunos resolveram-nos autonomamente, sem direito a qualquer esclarecimento de dúvidas. Os alunos submeteram as suas resoluções na disciplina de Matemática A no Classroom. Seguidamente passou-se à discussão em grande grupo dos três problemas.

Na segunda aula, os alunos foram organizados em sete grupos de trabalho para a resolução de 6 problemas de contagem, com graus diferentes de dificuldade. Seis dos grupos resolveram um problema e o outro grupo, grupo de controlo, resolveu todos os problemas. No final desta aula, houve tempo para a apresentação da proposta de resolução do Problema 1, por parte do Grupo 1.

Na terceira aula, os outros cinco grupos apresentaram as suas propostas de resolução. O grupo de controlo interveio, tanto na aula anterior como nesta, dizendo se concordava ou não com as propostas de resolução que iam sendo apresentadas, sendo que no caso em que discordaram, explanaram a sua resolução.

Houve ainda tempo para uma sessão de esclarecimento de dúvidas sobre os problemas do manual da página 14 à página 18.

Na quarta aula foram lecionados os conceitos de Arranjos com repetição e Partes de um conjunto. Numa primeira fase, recorrendo a três problemas, os alunos resolveram-nos autonomamente, sem direito a qualquer esclarecimento de dúvidas e submeteram as suas respostas na aplicação do Pear Deck do Google Slides. Seguidamente passou-se à discussão em grande grupo dos três problemas. Houve ainda tempo para iniciar o conceito das Permutações.

Nos últimos 20 minutos foi proposto aos alunos que resolvessem a Verificação de Aprendizagens 1. O objetivo da sua realização é tentar perceber se os alunos têm vindo a acompanhar o que foi lecionado na primeira semana do Ensino à Distância (E@D).

Na quinta aula, foi feito o esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos propostos para casa, no final da aula anterior (Ficha de Trabalho nº 21 e exercícios do manual adotado). Concluiu-se o leccionamento do conteúdo das Permutações, realizando-se vários problemas do manual. Houve ainda tempo para iniciar o conceito dos Arranjos sem repetição.

Na sexta aula, recorrendo a dois problemas, conclui-se o leccionamento do conceito de Arranjos sem repetição. Tal como em aulas anteriores, inicialmente, os alunos resolveram os problemas autonomamente, sem direito a qualquer esclarecimento de dúvidas e submeteram as suas respostas na aplicação do Pear Deck do Google Slides. Depois de submetidas as respostas, passou-se à discussão em grande grupo dos dois problemas.

Iniciou-se também o conceito de Combinações recorrendo a um problema que foi resolvido autonomamente pelos alunos e discutida em grande grupo a sua resolução.

Nos últimos 20 minutos foi proposto aos alunos que resolvessem a Verificação de Aprendizagens 2. O objetivo da sua realização é tentar perceber se os alunos têm vindo a acompanhar o que foi lecionado na segunda semana do Ensino à Distância (E@D).

Na sétima aula, formalizou-se o conceito de Combinações e resolveram-se dois exercícios de aplicação como forma de consolidar o conceito lecionado com recurso ao Pear Deck. Depois do intervalo, foi proposto aos alunos que resolvessem a Verificação de Aprendizagens 3 com o objetivo de tentar perceber se os alunos têm vindo a acompanhar o que foi lecionado sobre a temática das Combinações do Ensino à Distância (E@D).

Houve ainda tempo para uma sessão de esclarecimento de dúvidas sobre os exercícios 51 e 53 do manual e alguns exercícios da Ficha de Trabalho nº 22.

Na oitava aula, realizou-se uma Ficha de Trabalho onde foram propostos cinco problemas que os alunos resolveram autonomamente, sem esclarecimento de dúvidas. Os primeiros quatro corresponderam, cada um deles, a uma operação combinatória diferente. Os problemas foram

colocados na ficha não obedecendo à ordem de lecionação dos conteúdos. No quinto problema, foi pedido aos alunos que, numa pequena composição, explicassem que as duas soluções fornecidas para o mesmo estavam corretas. Concluída a resolução, os alunos digitalizaram as suas resoluções e submeteram-nas na disciplina de Matemática A no Classroom.	
<u>Segmentos de aula</u>	<u>Tempo previsto (minutos)</u>
1ª Parte – <u>Explicação do trabalho a ser realizado durante a aula e formação dos grupos de trabalho</u> ♦ <u>Metodologia:</u> Com recurso ao Google Slides, será explicado aos alunos que em grupos de trabalho, previamente formados pelo professor, irão formular um problema com base numa expressão combinatória dada. Serão formados seis grupos de trabalho (três grupos com cinco elementos e os restantes com quatro elementos). Cada grupo de trabalho será distribuído pela respetiva sala, e só aqui é que lhe será fornecida a solução para a formulação do problema (evitando que cada grupo conheça qual a solução dos outros grupos). Para isso, contarei com a ajuda da orientadora de estágio, uma vez que ela será a anfitriã da reunião e poderá entrar em todas as salas. Serão três as soluções a propor: $5 \times 6! \times {}^{24}A_8$ – Grupos 1 e 2; ${}^{10}C_7 \times {}^7C_3 \times 4!$ – Grupos 3 e 4 ${}^9A_5 + 8 \times {}^8A_4$ – Grupos 5 e 6	10
2ª Parte – <u>Realização do Trabalho de Grupo</u> ♦ <u>Metodologia:</u> Nesta parte da aula, os alunos realizarão o trabalho que lhes foi proposto numa folha Word e no final submeterão o seu problema na disciplina de Matemática A no Classroom.	25
3ª Parte – <u>Apresentação e discussão dos problemas elaborados pelos alunos</u> ♦ <u>Metodologia:</u> Com todos os alunos de regresso à sala principal, será escolhido um primeiro grupo para apresentar o seu problema à turma. Este grupo pedirá aos colegas que o resolvam. Após a resolução, haverá uma discussão em turma a fim de confirmar se a solução que foi previamente dada ao grupo pode ser uma solução para o problema por eles formulado. Na discussão será utilizada a aplicação Jamboard, da Google Chrome, permitindo aos alunos que expliquem o raciocínio que utilizaram. Cada explicação poderá ser rebatida ou validada pelo conjunto dos alunos da turma. Em todos os momentos de discussão em grande grupo intervirei caso haja alguma necessidade, para fazer o ponto de situação ou esclarecimento de dúvidas.	55

TPC (facultativo)	Sumário
	♦ Formulação de problemas com base em expressões combinatórias fornecidas.
Observações	

Assinatura do(a) docente

Anexo R – Pedido de autorização aos Encarregados de educação

Escola Secundária [...]

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação do 12º ano

Exmo(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário – Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada, da Universidade do Porto, encontro-me na fase inicial de elaboração do Relatório de Estágio, intitulado: “Compreensão e mobilização das operações combinatórias na resolução e formulação de problemas.”

O Cálculo Combinatório é um tópico lecionado pela primeira vez no 12.º ano de escolaridade, integrado no tema — Probabilidades e Combinatória, sendo considerado um conteúdo difícil para os alunos. Neste contexto, pretendo levar a efeito uma investigação sobre quais são as dificuldades que os alunos têm na resolução de problemas, no âmbito do ensino do tema de Introdução ao Cálculo Combinatório, como compreendem os seus conceitos centrais e como os mobilizam.

O desenvolvimento do Relatório de Estágio implica a recolha de dados, que serão obtidos através de observação, de entrevista e de análise documental.

Para a obtenção de todos os dados, necessitarei de áudio-gravar a aula do dia 25 de fevereiro de 2021, pelo qual venho solicitar a vossa autorização para proceder ao registo em suporte áudio dessa aula, onde estará presente o seu educando.

Pela minha parte, enquanto pessoa com acesso aos dados recolhidos, comprometo-me a garantir o anonimato em relação a todos os alunos da turma. Por outro lado, os dados da gravação serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos.

Desde já, agradeço a vossa colaboração.

Mário André Pais Monteiro

Mirandela, 8 de fevereiro de 2021