

MSC

2.º
CICLO

FCUP
2021

U.PORTO

Preferências visuais dos alunos e o recurso a
imagens visuais na resolução de tarefas
diversificadas envolvendo funções

levgeniia Shtyka

FC

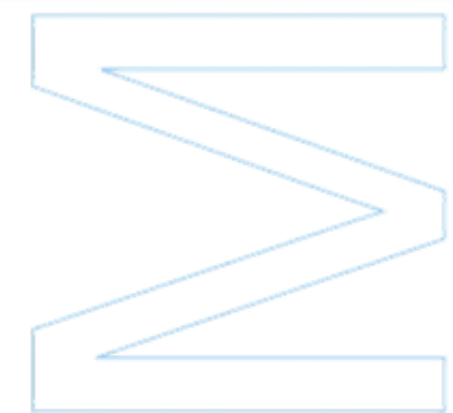
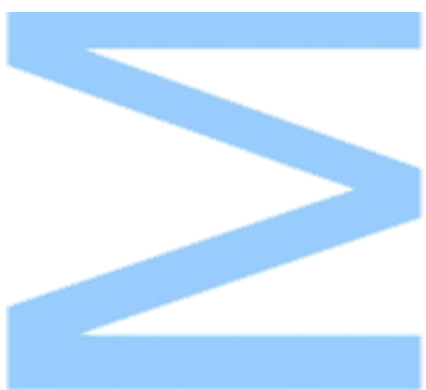


Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções

levgeniia Shtyka

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada apresentado à
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em
Ensino de Matemática

2021



Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções

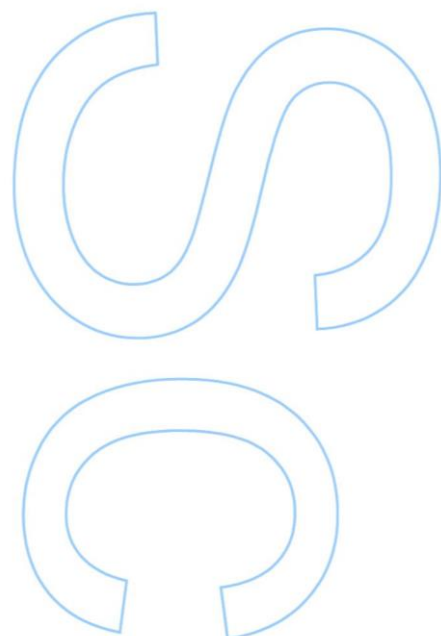
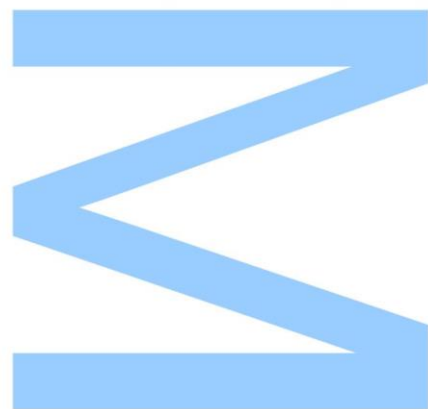
levgeniia Shtyka

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico
e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2021

Orientador

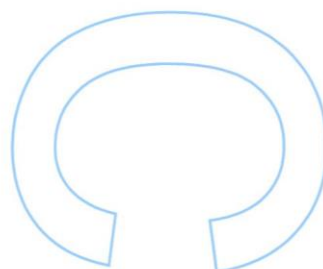
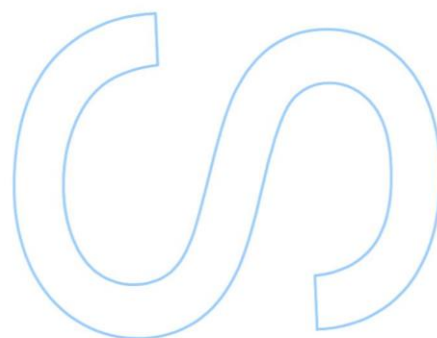
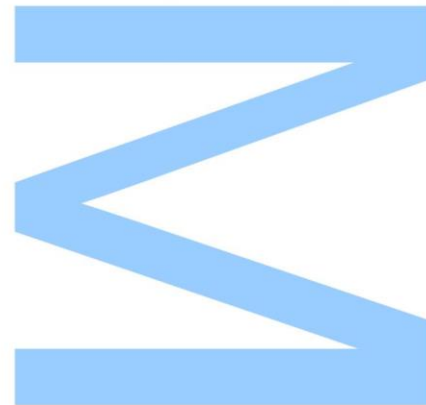
Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira, Professora Auxiliar,
FCUP



Todas as correções determinadas
pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri, *P. Ramalho*

Porto, 10 / 12 / 2021



Resumo

Este trabalho realizou-se no âmbito da Unidade Curricular de Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada, integrada no Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário que decorreu no ano letivo de 2020/2021, numa turma de 10.º ano de escolaridade na disciplina de Matemática A, no tema das funções.

O tema selecionado para o estudo foi a visualização e as funções, e o seu objetivo foi conhecer as preferências visuais dos alunos de uma turma de 10.º ano de escolaridade e compreender como recorrem a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções. Para atingir este objetivo, foram formuladas duas questões de investigação: (1) Quais são as preferências visuais dos alunos? e (2) Como recorrem a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções?

Para responder às questões de investigação, este trabalho foi realizado em duas fases: na primeira fase, que decorreu antes da minha intervenção pedagógica no tema das funções, apliquei um instrumento a todos os alunos para inferir as suas preferências visuais na resolução de tarefas diversificadas; na segunda fase, procurei perceber melhor como os alunos utilizavam imagens visuais na resolução de tarefas de natureza diversificada sobre o tema das funções. Este estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa e pode considerar-se um ensaio para um estudo de caso. Os dados foram recolhidos através de uma adaptação do Instrumento de Processamento Matemático – IPM (Presmeg, 1986), de produções escritas dos alunos e áudio-gravações de entrevistas semiestruturadas e apoiadas em tarefas.

Devido à COVID-19, tanto as aulas a que diz respeito este estudo, como o processo de recolha de dados decorreram à distância com recurso a diferentes ferramentas tecnológicas, como calculadoras gráficas e softwares de representação gráfica, que permitem fazer a passagem da representação visual e para a algébrica e vice-versa.

A minha intervenção pedagógica começou com o ensino do uso das calculadoras gráficas, que se apoiou numa ficha de trabalho constituída por um guião, o que permitiu que os alunos, posteriormente, explorassem a calculadora autonomamente. As aulas seguintes foram sobre as transformações gráficas das funções e apoiaram-se numa outra ficha de trabalho, dividida em quatro partes, em que cada parte correspondia a uma transformação gráfica diferente.

Após a análise de dados, o IPM mostrou que aproximadamente metade dos alunos da turma eram visuais e metade não visuais. No entanto, os resultados do IPM não se revelaram totalmente concordantes com as preferências visuais dos alunos na resolução de tarefas do tema das funções. Por isso, considero que isto pode estar relacionado com uma distinta preferência dos alunos em diferentes temas, tipos de tarefas, situações problemáticas ou estratégias utilizadas pelos professores. Com este estudo, pude perceber melhor algumas estratégias utilizadas pelos alunos e o processo de pensamento que os levou a pensar de certa forma.

Palavras-chave: visualização, funções, representações, tecnologia, ensino à distância.

Abstract

This study was carried out within the scope of the Curricular Unit of Initiation to Professional Practice, including the Supervised Teaching Practice experience, as a requirement of the master's degree in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic and Secondary Education. The study took place in the 2020/2021 school year, and involved a 10th grade class in Mathematics A, focusing on the topic of functions.

The theme selected for the study was visualization and functions, and its goal was to know the visual preferences of students in a 10th grade class, and to understand how they use visual images in solving tasks of diverse nature involving functions. To achieve this goal, two research questions were formulated: (1) What are the students' visual preferences? and (2) How do students resort to visual images in solving tasks of diverse nature about functions?

In order to answer these questions, the study was carried out in two phases: in the first phase, which took place before my pedagogical intervention on the topic of functions, I applied an adaptation of the Mathematics Processing Instrument – MPI (Presmeg, 1986) to all students to infer their visual preferences while solving diversified tasks; in the second phase, I looked for a better perception on how students used visual images to solve tasks of diverse nature on the theme of functions. This study adopted a qualitative and interpretive methodology and can be considered as an essay for a case study. Data were collected through students' written productions and audio recordings of semi-structured and task-based interviews.

Due to the COVID-19 pandemic restrictions, the classes related to the study and the whole data collection process were conducted at distance, using different technological resources, such as graphing calculators and graphical representation software, which allow the transition from visual to algebraic representations and vice versa.

My pedagogical intervention started by addressing the use of graphic calculators, supported by a worksheet and a script, which allowed students to explore the calculator independently. The following classes were about graphic transformations and were based on another worksheet, divided into four parts, corresponding each part to a different graphic transformation.

After analysing the data, MPI revealed that approximately half of the students were visual thinkers and half were non-visual thinkers. However, the results of the MPI did not prove to be totally decisive in students' visual preferences in the theme of functions. This may be related to students' distinct preferences in different topics, types of tasks, problematic situations or teachers' strategies. With this study, I could better understand some strategies used by students and the thought processes that led them to think in a certain way.

Keywords: visualization, functions, representations, technology, distance learning.

Índice

Resumo	i
Abstract	iii
1. Introdução.....	1
2. Enquadramento teórico.....	5
2.1. Visualização	5
2.2. Tipos de representação	6
2.3. Representações de funções	8
2.3.1. Tratamentos e conversões.....	12
2.4. Recursos tecnológicos	13
2.5. Compreensão relacional e instrumental	15
3. Intervenção pedagógica.....	17
3.1. Contexto escolar	17
3.2. Ancoragem curricular da intervenção pedagógica	18
3.3. Ensino das funções	19
3.4. Estratégias e recursos utilizados nas minhas aulas sobre funções.....	23
3.4.1. Tarefas e recursos utilizados	23
3.4.2. As minhas aulas sobre funções	25
3.4.2.1. 17 de fevereiro	25
3.4.2.2. 22 de fevereiro	27
3.4.2.3. 23 de fevereiro	29
3.4.2.4. 1 de março	30
3.4.3. Aprendizagem dos alunos.....	31
3.4.4. Reflexão pessoal	37
4. Métodos e procedimentos de recolha de dados	39
4.1. 1.ª fase do estudo: Aplicação do Instrumento de Processamento Matemático .	40
4.1.1. O Instrumento de Processamento Matemático	40
4.1.2. Implementação do IPM	41
4.2. 2.ª fase do estudo: Recolha de dados sobre a aprendizagem do tema das funções	44
5. Análise do Instrumento de Processamento Matemático.....	49
5.1. Mariana	49
5.2. André	52
5.3. Diogo.....	56
5.4. Isabel	59

5.5. Síntese	64
6. Análise das entrevistas	67
6.1. Mariana	67
6.1.1. Resolução de tarefas sobre funções	67
6.1.2. Preferências visuais e uso de recursos tecnológicos	76
6.2. André	80
6.2.1. Resolução de tarefas sobre funções	80
6.2.2. Preferências visuais e uso de recursos tecnológicos	92
6.3. Diogo.....	95
6.3.1. Resolução de tarefas sobre funções	95
6.3.2. Preferências visuais e uso de recursos tecnológicos	104
6.4. Isabel	105
6.4.1. Resolução de tarefas sobre funções	105
6.4.2. Preferências visuais e uso de recursos tecnológicos	114
6.5. Síntese	116
7. Conclusões	118
7.1. Síntese do estudo	118
7.2. Principais conclusões deste estudo.....	119
7.2.1. Quais são as preferências visuais dos alunos?.....	119
7.2.2. Como recorrem a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções?.....	121
7.3. Reflexão final	124
Referências	127
Anexos	130

Índice de figuras

Figura 1 – Exemplo da abordagem ponto a ponto	9
Figura 2 – Exemplo da abordagem de extensão do traçado efetuado	10
Figura 3 – Exemplo da abordagem de interpretação global de propriedades figurais ..	11
Figura 4 – Representação gráfica de $y = x^2 - 2$	12
Figura 5 – Planificação do capítulo das funções proposta pelo grupo de matemática.	18
Figura 6 – Resolução gráfica da questão 3 da ficha 17, na calculadora NumWorks ...	32
Figura 7 – Resolução gráfica da questão 2.2 da ficha 17, na calculadora Casio.....	32
Figura 8 – Resolução gráfica da questão 1.1 e 1.2 da ficha 17, na calculadora TI-Nspire	33
Figura 9 – Questões sobre as transformações gráficas no PowerPoint	34
Figura 10 – Tarefa 1 da entrevista com tarefas.....	34
Figura 11 – Tarefa 4 da entrevista com tarefas.....	35
Figura 12 – Enunciado (em cima) e resolução de um aluno (em baixo) a uma questão sobre transformações gráficas na Verificação de Aprendizagens	36
Figura 13 – Resolução da questão 3 da tarefa Slalom.....	37
Figura 14 – Enunciado da tarefa 1 da entrevista com tarefas	45
Figura 15 – Enunciado da tarefa 2 da entrevista com tarefas	46
Figura 16 – Enunciado da tarefa 3 da entrevista com tarefas	46
Figura 17 – Enunciado da tarefa 4 da entrevista com tarefas	47
Figura 18 – Respostas da Mariana à questão B-9 do IPM	49
Figura 19 – Respostas da Mariana à questão B-11 do IPM	51
Figura 20 – Respostas da Mariana à questão B-3 do IPM	52
Figura 21 – Respostas do André à questão B-3 do IPM	53
Figura 22 – Respostas do André à questão B-5 do IPM	54
Figura 23 – Respostas do André à questão B-11 do IPM	54
Figura 24 – Respostas do André à questão A-3 do IPM	55
Figura 25 – Respostas do André à questão B-10 do IPM	56
Figura 26 – Respostas do Diogo à questão B-2 do IPM.....	57
Figura 27 – Respostas do Diogo à questão A-4 do IPM.....	58
Figura 28 – Respostas da Isabel à questão B-5 do IPM	59
Figura 29 – Respostas da Isabel à questão A-6 do IPM	61
Figura 30 – Respostas da Isabel à questão A-2 do IPM	62
Figura 31 – Respostas da Isabel à questão B-4 do IPM	63
Figura 32 – Enunciado (à esquerda) e resolução da Mariana (à direita) da tarefa 1 ...	67

Figura 33 – Enunciado (em cima) e resposta da Mariana (em baixo) da tarefa 2.....	69
Figura 34 – Enunciado (em cima) e resposta da Mariana (em baixo) da tarefa 3.....	72
Figura 35 – Enunciado (em cima) e resolução da Mariana (em baixo) da tarefa 4.....	74
Figura 36 – Enunciado (em cima) e resolução do André (em baixo) da tarefa 1	80
Figura 37 – Enunciado (em cima) e resolução do André (em baixo) da tarefa 2	83
Figura 38 – Enunciado (em cima) e resolução do André (em baixo) da tarefa 3	86
Figura 39 – Enunciado (em cima) e resolução do André (em baixo) da tarefa 4	88
Figura 40 – Resolução da questão 6 da tarefa 4 pelo André.....	91
Figura 41 – Enunciado (à esquerda) e resolução do Diogo (à direita) da tarefa 1.....	95
Figura 42 – Enunciado (em cima) e resolução do Diogo (em baixo) da tarefa 2	96
Figura 43 – Representação gráfica das funções na calculadora do Diogo (questão 1 da tarefa 2)	98
Figura 44 – Enunciado (em cima) e resolução do Diogo (em baixo) da tarefa 3	100
Figura 45 – Enunciado (em cima) e resolução do Diogo (em baixo) da tarefa 4	101
Figura 46 – Enunciado (em cima) e resolução da Isabel (em baixo) da tarefa 1	106
Figura 47 – Enunciado (em cima) e resolução da Isabel (em baixo) da tarefa 2	107
Figura 48 – Enunciado (em cima) e resolução da Isabel (em baixo) da tarefa 3	111
Figura 49 – Enunciado da tarefa 4.....	112
Figura 50 – Problema B-1 do IPM.....	120

Índice de quadros

Quadro 1 - Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano	11
Quadro 2 – Padrões e modos de uso da calculadora gráfica.....	14
Quadro 3 – Planificação geral das aulas sobre funções.....	19
Quadro 4 – Representações utilizadas pela Mariana e pelo André	65
Quadro 5 – Representações utilizadas pelo Diogo e pela Isabel	66
Quadro 6 – Resultado do IPM e método utilizado pelos quatro alunos na resolução das tarefas da entrevista	117
Quadro 7 – Preferências dos alunos no IPM e na representação das funções	124

Índice de anexos

Anexo 1 – Guião calculadora gráfica TI-Nspire	130
Anexo 2 – Guião calculadoras gráficas Casio fx-CG 10/20 e TI-84.....	136
Anexo 3 – Guião calculadora gráfica NumWorks	141
Anexo 4 – Ficha 18.1	146
Anexo 5 – Ficha 18.2	147
Anexo 6 – Ficha 18.3	148
Anexo 7 – Ficha 18.4	150
Anexo 8 – Plano de aula 1 (17-02-2021).....	151
Anexo 9 – Plano de aula 2 (22-02-2021).....	154
Anexo 10 – Plano de aula 3 (23-02-2021).....	157
Anexo 11 – Plano de aula 4 (01-03-2021).....	160
Anexo 12 – Tarefa Slalom	163
Anexo 13 – Questionário de Processamento Matemático – Parte I Secção A	164
Anexo 14 – Questionário de Processamento Matemático – Parte I Secção B	165
Anexo 15 – Questionário de Processamento Matemático – Parte II Secção A	167
Anexo 16 – Questionário de Processamento Matemático – Parte II Secção B	173
Anexo 17 – Grelha resultados IPM	183
Anexo 18 – Classificação das resoluções ao questionário de processamento matemático, por Presmeg.....	184
Anexo 19 – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação do 10.º	185

Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções

1. Introdução

Este relatório foi elaborado no âmbito da Unidade Curricular de Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada integrada no Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário. O relatório incide sobre um trabalho de investigação educacional que realizei em estreita ligação com a Prática de Ensino Supervisionada.

Para este estudo escolhi o tema da visualização, pois tenho a sensação de que o ensino da matemática se apoia muito em representações algébricas, deixando as representações gráficas, que fazem parte das representações visuais, para segundo plano. O facto é que há alunos que preferem representações visuais (nas quais estão incluídos: construções, desenhos, diagramas, tabelas, quadros e gráfico) e compreendem melhor os conceitos quando estes são abordados nessa perspetiva. No entanto, também há alunos que compreendem melhor os conceitos quando abordados numa perspetiva mais algébrica. Ou seja, é importante que todos os alunos consigam compreender as duas abordagens, mas não considero correto impor uma abordagem, por exemplo, algébrica, a um aluno que pensa, preferencialmente, de forma visual. O pensamento visual é legítimo, embora seja, muitas vezes, desprezado. Assim, parece-me ser importante conhecer quais as preferências visuais dos alunos de modo a melhor poder selecionar tarefas para os ajudar na sua aprendizagem matemática.

Decidi abordar a visualização no tema das funções, pois considero-o bastante abrangente, já que é abordado tanto no 3.º ciclo do ensino básico como no ensino secundário. Com este trabalho, realizado com alunos do 10.º ano de escolaridade, pretendo focar-me mais no estudo da passagem da representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa, pois muitos alunos têm dificuldades nesta passagem, uma vez que tendem a focar-se apenas numa destas representações. Este foco faz com que muitos alunos apresentem dificuldades numa ou noutra representação (ou em ambas). A passagem duma representação para outra é muito importante, visto que cada representação tem o seu papel; por exemplo, a representação algébrica permite obter informações importantes que muitas vezes são inacessíveis noutras representações, e a representação gráfica permite visualizar o que acontece quando manipulamos uma expressão algébrica.

A representação gráfica pode ser obtida usando o software de geometria dinâmica GeoGebra (que foi utilizado nas aulas do 1.º período), a calculadora gráfica (que cada aluno tem) ou lápis e papel. O uso da calculadora gráfica aparece no programa de Matemática A do 10.º ano de escolaridade, na secção dos recursos utilizados; no entanto, tanto o programa em vigor (Bivar *et al.*, 2014) como o programa anterior (Silva *et al.*, 2001) preveem diferentes utilizações para as calculadoras gráficas. No programa de 2001, refere-se que o uso de calculadoras gráficas é obrigatório e que estas “devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa” (Silva *et al.*, 2001, p. 5). Todavia, no programa atual (Bivar *et al.*, 2014), que é o programa em vigor à data de realização deste trabalho, o uso de calculadora gráfica é indicado apenas

para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjecturas que essas experiências possam induzir. (Bivar *et al.*, 2014, p. 29)

Ou seja, este programa restringe o uso da calculadora gráfica a situações específicas. Nas *Aprendizagens Essenciais* (ME, 2018), outro documento curricular em vigor à data da realização deste trabalho, é apoiado o recurso à tecnologia gráfica: “a tecnologia gráfica deve estar presente, quer em contexto de sala de aula, quer em contexto de avaliação externa” (p. 3) e, na abordagem de diferentes funções, é sempre referida a representação gráfica:

- Reconhecer, representar e interpretar **graficamente** funções reais de variável real e funções definidas por expressões analíticas e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação;
- Reconhecer e interpretar as **propriedades geométricas** dos gráficos de funções e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação;
- Reconhecer e interpretar a paridade; as **simetrias dos gráficos** das funções pares e das funções ímpares; os intervalos de monotonia de uma função real de variável real; os extremos relativos e absolutos e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação;
- Reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a **representação gráfica** de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação;
- Reconhecer, interpretar e **representar graficamente** funções definidas por ramos e a função módulo e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação;
- Reconhecer e interpretar **graficamente** a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $a \cdot f(x)$, $f(b \cdot x)$, $f(x + c)$ e $f(x) + d$, a , b , c

e d números reais, a e b não nulos e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação. (ME, 2018, pp. 8–9, destaque acrescentado)

Deste modo, os objetivos deste estudo são conhecer as preferências visuais dos alunos de uma turma de 10.º ano de escolaridade e compreender como recorrem a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções. Para concretizar o objetivo apresentado, pretendo responder às seguintes questões:

1. Quais são as preferências visuais dos alunos?
2. Como recorrem a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções?

O presente relatório está organizado em sete capítulos:

1 – Introdução;

2 – Enquadramento teórico:

Neste capítulo apresento aspetos de natureza teórica relacionados com a visualização, nomeadamente, a noção de visualização, a representação de funções, os tratamentos e conversões de representações matemáticas, os recursos tecnológicos e a compreensão relacional e instrumental. Este capítulo pretende contribuir para o aprofundamento da compreensão sobre os temas mencionados, proporcionando uma fundamentação adequada para a análise dos dados recolhidos;

3 – Intervenção pedagógica:

Neste capítulo, começo com a caracterização da escola e da turma em que o trabalho foi desenvolvido. Faço também uma descrição da ancoragem curricular da intervenção pedagógica que foi feita e da sua organização ao longo do tempo. Descrevo a intervenção pedagógica que foi feita no tema “Transformações gráficas de funções”, e todas as tarefas utilizadas;

4 – Métodos e procedimentos de recolha de dados:

Este capítulo está dividido em dois subcapítulos correspondentes aos processos metodológicos relacionados com cada uma das duas perguntas de investigação. Em cada subcapítulo descrevo a metodologia de investigação, os participantes do estudo, bem como os critérios utilizados para a sua seleção, e os processos de recolha e análise de dados;

5 – Análise dos dados do IPM:

Neste capítulo, faço a apresentação e análise dos dados recolhidos na primeira fase de recolha de dados, que pretende responder à primeira questão de investigação, organizados por aluno caso;

6 – Análise dos dados das entrevistas:

Neste capítulo, apresento os dados recolhidos que pretendem dar resposta à segunda questão de investigação, organizados por aluno caso;

7 – Conclusões:

Este capítulo inicia-se com uma pequena síntese do estudo realizado. De seguida, apresento as principais conclusões do estudo. Por fim, faço uma reflexão final sobre as implicações deste trabalho para o meu desenvolvimento profissional, e apresento algumas propostas de temas para investigações futuras que decorrem do trabalho realizado e da intervenção pedagógica realizada.

Por fim, apresento uma lista de referências e todos os anexos mencionados no trabalho.

2. Enquadramento teórico

2.1. Visualização

O termo visualização foi utilizado de várias maneiras na literatura, por isso, é importante esclarecer o seu significado, neste trabalho. Presmeg (1997b, citada em Presmeg, 2006) define que “a visualização inclui processos de construção e transformação de imagens mentais visuais e todas as inscrições de natureza espacial que podem estar implicadas em fazer matemática” (pp. 2–3, tradução própria).

Segundo Moses (1977, citado em Presmeg, 1986a), um método de resolução visual inclui soluções que envolvem construções, desenhos, diagramas, tabelas, quadros ou gráficos, escritos ou na mente da pessoa. Deste modo, Presmeg (1986a) define os métodos de resolução visuais e não visuais:

Um método visual de solução é aquele que envolve imagens visuais, com ou sem um diagrama, como uma parte essencial do método de solução, mesmo que métodos de raciocínio ou métodos algébricos também sejam utilizados.

Um método de solução não visual é aquele que não envolve imagens visuais como uma parte essencial do método de solução. (p. 298, tradução própria)

Presmeg (1986b) define ainda indivíduos visuais e não visuais:

Os indivíduos visuais são os que preferem usar métodos visuais ao tentar resolver problemas matemáticos que podem ser resolvidos por métodos visuais e não visuais.

Os indivíduos não visuais são os que preferem não usar métodos visuais ao tentar resolver esses problemas. (p. 298, tradução própria)

Na 23rd *Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-23), os investigadores envolvidos num grupo de discussão descreveram a visualização como um veículo para a resolução de problemas significativos em álgebra (Yerushalmy, Shternberg, & Gilead, 1999, citados em Presmeg, 2006). De acordo com estes autores e com Parzysz (1999, citado em Presmeg, 2006) a “visualização pode ser poderosa não só em assuntos matemáticos visuais (geometria e trigonometria), mas também em álgebra” (Presmeg, 2006, p.19, tradução própria).

Cunningham (1991, citado em Costa, 2005) refere que um dos benefícios da visualização é “a capacidade de se focar em capacidades específicas e em pormenores de problemas muito complexos para mostrar a dinâmica de sistemas e processos, e

para aumentar a intuição e a compreensão de problemas e processos matemáticos” (Costa, 2005, p. 9, tradução própria). O mesmo autor defende que a visualização no ensino da matemática permite que os alunos tenham acesso a novas formas de abordar diversos tópicos matemáticos. Permite, também, um estudo mais amplo de temas matemáticos (Costa, 2005).

Apesar destas vantagens do uso da visualização, também existem limitações. Presmeg (1986a) refere as principais limitações que encontrou no seu estudo:

- (1) o caso concreto de uma imagem ou diagrama pode prender o pensamento a detalhes irrelevantes, ou até pode introduzir dados falsos;
- (2) o recurso a uma figura-tipo na representação de um conceito pode originar um raciocínio inflexível nos alunos, dificultando o reconhecimento desse conceito numa figura não estandardizada;
- (3) pode persistir uma imagem incontrollável, impedindo outros modos de pensamento que poderão ser mais adequados, uma dificuldade que, por um lado, é persistente se a imagem é vívida;
- (4) por outro lado, uma imagem indefinida, para ser vantajosa, necessita de ser apoiada por processos de pensamento algébrico rigorosos. (Presmeg, 1986a, p. 307, tradução própria)

O pensamento visual, apesar de não ser capaz de, independentemente, fazer matemática, é uma ferramenta poderosa. É até uma ferramenta vantajosa que complementa o pensamento algébrico (Goldenberg, 1996, citado em Vale & Pimentel, 2012).

Deste modo é importante trabalhar com ambas as representações (algébrica e gráfica). Kaput (1992) e Ford (2008) (citados em Rocha, 2015) realçam a importância de trabalhar com múltiplas representações e, segundo o primeiro autor, isto é fundamental para a compreensão dos conceitos e faz com que se desenvolva uma visão global dos mesmos.

2.2. Tipos de representação

Existem vários tipos de representações, e vários autores organizaram-nas segundo diferentes características e o seu papel. Bruner (1999) classifica as representações em: ativas, icónicas e simbólicas:

O que queremos dizer com representação? O que significa traduzir a experiência num modelo do mundo? A minha sugestão é que os seres humanos têm provavelmente três maneiras diferentes de realizarem esta

proeza. A primeira é através da ação. Conhecemos muitas coisas para as quais não há imagética nem palavras e é muito difícil ensiná-la através de palavras, diagramas ou imagens (...) Há um segundo sistema de representação que depende da organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens de resumo (...) A primeira forma de representação veio a ser designada como ativa e a segunda como icónica (...). Por fim, há a representação por palavras ou linguagem. O seu traço distintivo é ser simbólica por natureza (...) (pp. 27-29, tradução própria)

Deste modo, conclui-se que, para Bruner (1999), as representações ativas correspondem ao recurso a objetos e a movimentos para representar uma certa situação. As representações icónicas correspondem à representação de símbolos não matemáticos e esquemas/diagramas. As representações simbólicas correspondem ao recurso a palavras ou linguagem.

As representações utilizadas pelos alunos, escritas ou imaginadas, podem ser visuais ou não visuais. Tal como referi anteriormente, as representações visuais, segundo Moses (1977, citado em Presmeg, 1986a) caracterizam-se pela existência de: construções, desenhos, diagramas, tabelas, quadros ou gráficos. Enquanto que as não visuais são constituídas, segundo Vale e Barbosa (2021), por métodos lógico-verbais que envolvem: linguagem verbal, linguagem aritmética ou linguagem algébrica.

Dentro das representações visuais é importante distinguir diagramas de desenhos, pois, segundo Diezmann e English (2001), estes termos são, muitas vezes, utilizados como sinónimos, no entanto representam estruturas diferentes. Os diagramas são representações estruturais em que os detalhes não são importantes, enquanto que os desenhos geralmente mostram pormenores.

A representação em diagrama, segundo Diezmann e English (2001) muitas vezes serve para "desempacotar" a estrutura de um problema, ou seja, representá-lo de uma forma que permita percebê-lo melhor, e estabelecer a base para sua resolução. O recurso a diagramas, segundo o mesmo autor, pode ser útil para alguns alunos, pois eles são capazes de usá-los como uma ferramenta para o pensamento e a aprendizagem matemática. Contudo, outros alunos são incapazes de o fazer, ou talvez não queiram usar diagramas na resolução de problemas, considerando que estes recursos são ineficazes e inúteis.

Outra representação visual muito importante, é a representação com recurso a gráficos. Este tipo de representação é muito utilizado no tema das funções e irá ser descrito mais

detalhadamente no capítulo seguinte. Passarei a explicar as representações não visuais.

A representação com recurso a linguagem verbal, segundo Vale e Barbosa (2021), corresponde ao recurso a palavras, registos escritos referentes ao cumprimento de uma determinada tarefa ou à elaboração de justificações ou pequenos textos, sobre determinados assuntos matemáticos. A linguagem aritmética ou numérica, segundo Friedlander e Tabach (2001) é utilizada pelos alunos antes destes aprenderem álgebra. Segundo os mesmos autores, o recurso a números é importante para obter uma primeira compreensão de um problema e para investigar casos específicos. No entanto, esta representação não é generalizável, sendo utilizada para casos particulares. A representação com recurso a linguagem algébrica é muitas vezes utilizada no tema das funções e, por isso, será descrita no capítulo seguinte. As resoluções com uma grande componente visual e não visual são por mim consideradas como sendo mistas.

2.3. Representações de funções

O conceito de função é estudado em Matemática, tanto no 3.º ciclo do ensino básico, como no ensino secundário, ou seja, é um tema transversal a muitos anos de escolaridade. As funções podem ser representadas de várias formas diferentes e cada uma dessas representações tem as suas vantagens. Neste trabalho, irei abordar duas representações, a gráfica e a algébrica, começando por definir cada uma delas.

A representação gráfica das funções é uma representação visual. Esta representação apresenta uma restrição finita do domínio. Uma das suas principais vantagens é permitir uma utilização que ultrapassa os conhecimentos algébricos dos alunos, uma vez que a abordagem gráfica é mais universal do que a algébrica, tornando, deste modo, possível encontrar soluções quando não se conhece uma abordagem algébrica ou mesmo quando esta não existe (Friedlander & Tabach, 2001). No entanto, os gráficos são uma representação menos exata do que a representação algébrica e, por isso, as soluções obtidas por esta via podem ser pouco exatas e sofrer a influência de fatores externos, como, por exemplo, os efeitos da escala utilizada sobre a interpretação que é feita. Outro aspeto menos positivo é que a representação gráfica apresenta apenas uma parte do domínio; por esse motivo, a utilidade desta representação depende do contexto (Rocha, 2015).

Friedlander e Tabach (2001) caracterizam a representação algébrica como concisa, geral e eficaz na apresentação de regularidades e modelos matemáticos; por isso, é muitas vezes utilizada para formular generalizações e resultados. No entanto, o seu recurso exclusivo pode gerar dificuldades nos alunos como, por exemplo, dificuldades na compreensão de noções matemáticas e dificuldades na interpretação (Rocha, 2015).

O conceito de função é complexo e os alunos manifestam dificuldades neste assunto. Coulombe e Berenson (2001, citados em Rocha, 2015) referem que a fluência com múltiplas representações de relações matemáticas pode melhorar o pensamento algébrico. O recurso a diferentes representações permite compreender aquilo que os alunos não conseguiram compreender com a representação inicial; por isso, como diz Kaput (1992, citado em Rocha, 2015), esta é fundamental para a compreensão dos conceitos.

Duval (2011) apresenta três tipos de abordagens para as representações gráficas, que diferem entre si nos dados visuais do gráfico: ponto a ponto, extensão do traçado efetuado, e interpretação global de propriedades figurais.

A abordagem ponto a ponto limita-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial. Esta abordagem permite representar o gráfico de uma função do primeiro e segundo grau e permite ler as coordenadas de alguns pontos como pontos de interseção com os eixos ou extremos. Por exemplo, na figura 1 encontramos um exemplo em que se considera apenas os pontos de interseção da função com os eixos coordenados:

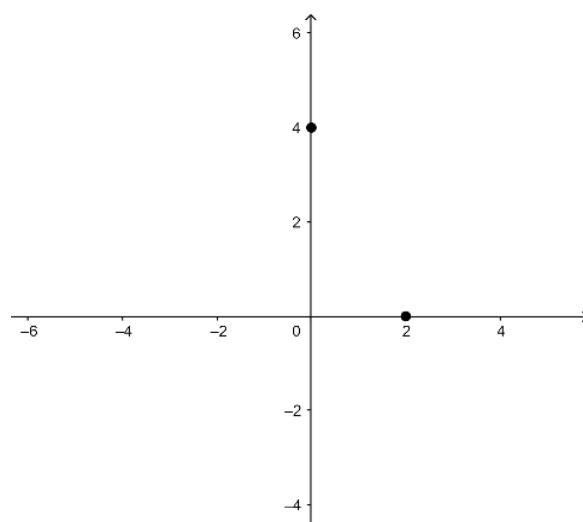


Figura 1 – Exemplo da abordagem ponto a ponto

A abordagem de extensão do traçado efetuado é mental e, ao contrário da abordagem ponto a ponto, apoia-se num conjunto infinito de pontos potenciais, por exemplo, nos potenciais valores que a função pode tomar nos intervalos entre os pontos marcados. Tal como a abordagem ponto a ponto, esta tem em conta os dados do traçado e não as variáveis visuais pertinentes da representação gráfica. O objetivo continua a ser os valores particulares sem os relacionar com a expressão algébrica. Por exemplo, na figura 2, para além dos pontos da abordagem ponto a ponto (cf., figura 1), consideram-se os possíveis valores que a função pode tomar entre esses pontos:

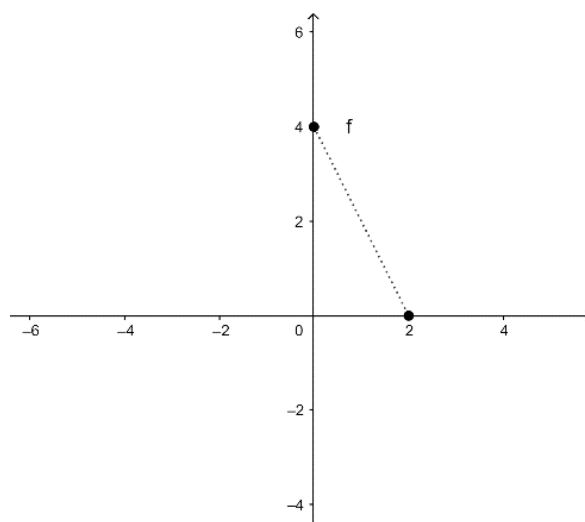


Figura 2 – Exemplo da abordagem de extensão do traçado efetuado

A abordagem de interpretação global de propriedades figurais corresponde ao conjunto constituído pelo gráfico da função e pelos eixos que formam uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Todas as alterações desta imagem, que levam a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determinam uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. É importante, identificar todas as modificações conjuntas da representação gráfica e da representação algébrica (Duval, 2011). Por exemplo, na figura 3, o gráfico da função é visto como um todo, tendo em conta o sentido da inclinação, o ângulo com os eixos e a posição sobre os eixos:

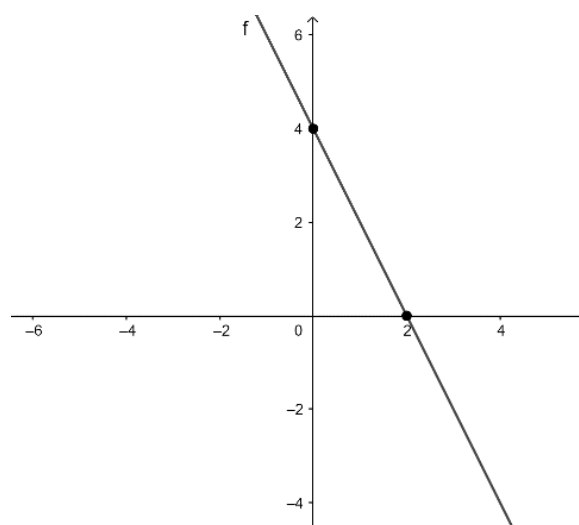


Figura 3 – Exemplo da abordagem de interpretação global de propriedades figurais

Duval (2011) sintetiza os valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano, conforme indicado no quadro 1.

Quadro 1 - Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano (Duval, 2011, p. 101, tradução própria)

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente	coeficiente > 0	ausência de sinal
	descendente	coeficiente < 0	presença do sinal $-$
Ângulo com os eixos	partição simétrica	coefic. variável $= 1$	não há coefic. escrito
	ângulo menor	coefic. variável < 1	há coefic. escrito
	ângulo maior	coefic. variável > 1	há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima	acrescenta-se. Constante	sinal $+$
	corta abaixo	subtrai-se constante	sinal $-$
	corta na origem	sem correção aditiva	ausência de sinal

Duval (2011) refere que muitas investigações no ensino da matemática centram-se na passagem da representação algébrica para a representação gráfica, utilizando a abordagem ponto a ponto e não referindo as dificuldades que a passagem inversa pode ter. Para efetuar a passagem inversa, não é possível utilizar a abordagem ponto a ponto, pois “é preciso identificar cada um dos valores das variáveis visuais e integrá-las”

(Duval, 2011, p. 102), ou seja, “a passagem da representação gráfica para a expressão algébrica exige uma interpretação global” (idem).

A prática sistemática da abordagem ponto a ponto não permite chegar à abordagem de interpretação global, pois existe um “fosso que separa a abordagem ponto a ponto da abordagem de interpretação global” (Duval, 2011, p. 106). Consequentemente, a maioria dos alunos tem dificuldades na utilização das representações gráficas. Quando o professor ignora a importância da abordagem de interpretação global, a maioria dos alunos do ensino secundário (15 a 16 anos) não consegue utilizar corretamente os gráficos cartesianos (Duval, 2011).

2.3.1. Tratamentos e conversões

Na perspectiva de Duval (2006), existem dois tipos diferentes de transformação de representações nas quais os alunos devem ser fluentes: tratamentos e conversões.

Os tratamentos são transformações dentro do mesmo sistema de representação, por exemplo, manipulação algébrica, e dependem das possibilidades de transformação específicas da representação utilizada. Por exemplo: $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$.

As conversões são transformações de representação que consistem em alterar a representação, conservando os objetos denotados, por exemplo, passar da representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica. Por exemplo: $y = x^2 - 2$ pode ser transformado no respetivo gráfico (figura 4):

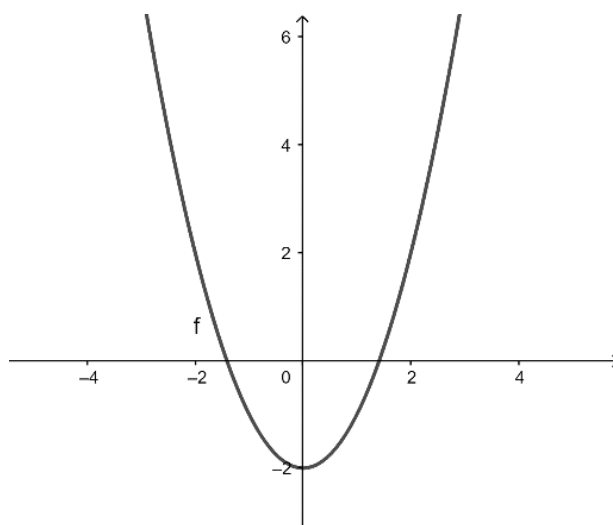


Figura 4 – Representação gráfica de $y = x^2 - 2$

Duval (2006) refere que as conversões são mais complexas do que os tratamentos porque qualquer mudança de representação requer, “primeiramente, o reconhecimento do mesmo objeto matemático em duas representações cujos conteúdos, muitas vezes, não têm, nada em comum” (p. 112, tradução própria). Além disso, quando se muda de uma representação para outra, alteram “não apenas os métodos de tratamento, mas também as propriedades que podem ser explicitadas” (p. 114, tradução própria). Deste modo, é fundamental que os alunos reconheçam o mesmo objeto em diferentes sistemas de representação e consigam distinguir o que é matematicamente relevante, em cada representação.

2.4. Recursos tecnológicos

O programa de Matemática A atualmente em vigor refere que, em certas ocasiões, deve-se utilizar a tecnologia. Especificamente no que concerne à calculadora gráfica, o programa refere que:

(...) considera-se que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (...) mas que se deve evitar a sua utilização em outras provas de avaliação em que os conteúdos e capacidades envolvidas claramente o não justifiquem ou mesmo o desaconselhem. (Bivar et al, 2014, p. 29)

Nesta secção, vou abordar o uso da calculadora gráfica no ensino-aprendizagem da matemática.

Helena Rocha (2015) refere a importância do uso da calculadora gráfica, baseando-se em vários autores:

Uma das características da calculadora gráfica é permitir aceder a múltiplas representações (Heid, 1995; Kaput, 1992), o que torna possível estabelecer ou reforçar ligações de uma forma que não seria possível sem o apoio da tecnologia (Cavanagh & Mitchelmore, 2003), articulando as representações numérica ou tabular, simbólica ou algébrica e gráfica (Goos & Benninson, 2008) e potenciando o desenvolvimento de uma melhor compreensão das funções, da noção de variável e da capacidade de resolver problemas (Bardini, Pierce & Stacey, 2004; Burril, 2008). (p. 328)

Kaput (1989, citado em Rocha, 2015) refere que a conexão entre diferentes representações (gráfica e algébrica) gera uma visão global do conceito tratado, o que é muito melhor do que ter um conhecimento relativo de cada uma das representações, ou

seja, quando os alunos relacionam as informações obtidas entre as diferentes representações, conseguem entender melhor o conceito do que a partir de cada uma das representações, separadamente. A calculadora gráfica permite fazer uma abordagem integrada das diferentes representações e, conseqüentemente, o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda. O recurso a múltiplas representações permite “tornar a aprendizagem significativa e efetiva” (Ford, 2008, citado em Rocha, 2015, p. 328). Deste modo, e por aquilo que Duval (2006) defende, pode-se concluir que as calculadoras gráficas permitem fazer, de forma eficaz, tratamentos e conversões, que são transformações de representações que são muito importantes para a compreensão da matemática.

Doerr e Zangor (2000) identificaram cinco padrões e modos de uso da calculadora gráfica pelos alunos. Os alunos tendem a utilizar a calculadora gráfica como: ferramenta computacional, ferramenta de transformação, ferramenta de recolha e análise de dados, ferramenta de visualização e ferramenta de verificação. Os alunos podem utilizar, contudo, a calculadora gráfica com mais do que um destes cinco propósitos. No quadro 2, é apresentada a descrição do que os alunos fazem quando recorrem à calculadora gráfica como ferramenta para cada um dos usos mencionados:

Quadro 2 – Padrões e modos de uso da calculadora gráfica (Doerr & Zangor, 2000, p. 151, tradução própria)

Papel da calculadora gráfica	Descrição das ações dos alunos
Ferramenta computacional	Calcular expressões numéricas, estimar e arredondar
Ferramenta de transformação	Mudar a natureza da tarefa
Ferramenta de recolha e análise de dados	Recolher dados, controlar fenómenos, encontrar padrões
Ferramenta de visualização	Encontrar funções simbólicas, mostrar dados, interpretar dados, resolver equações
Ferramenta de verificação	Confirmar conjecturas, compreender múltiplas formas simbólicas

Segundo Doerr e Zangor (2000), o uso das calculadoras gráficas tem duas limitações: 1) os alunos utilizam-nas sem prestar atenção a interpretações da situação do problema, ou seja, sem pensarem numa estratégia; e 2) os alunos usam as calculadoras como aparelhos pessoais, sem fazer a partilha de descobertas com os colegas, não promovendo a discussão e a comunicação matemática entre os alunos.

Com a utilização da calculadora gráfica no ensino da Matemática, surgiu um conjunto específico de dificuldades, nomeadamente: 1) uma incompleta compreensão de alguns

conceitos matemáticos fundamentais, que, segundo Cavanagh e Mitchelmore (2000, citados em Rocha, 2013), pode surgir devido ao uso do lápis e papel para fazer representações gráficas simples e com valores semelhantes, comparando com as representações que são feitas recorrendo à calculadora; 2) um conhecimento insuficiente da calculadora e do seu funcionamento por parte do professor e do aluno; e 3) algumas limitações atribuídas à calculadora gráfica em si, como, por exemplo, a janela de visualização (Rocha, 2013).

Relativamente a este último ponto, os alunos, muitas vezes, têm dificuldades em identificar os casos em que o ecrã não exibe uma vista global do gráfico da função (Cavanagh, 2006; Rocha, 2000, citados em Rocha, 2013). Ward (2000, citado em Rocha 2013) refere que a forma como os gráficos são traçados nas calculadoras gráficas, da esquerda para a direita, faz com que os alunos pensem que o gráfico começa do lado esquerdo e a parte do gráfico que não foi representada, devido à janela de visualização, encontra-se para o lado direito do visor. Segundo Rocha (2000, citada em Rocha 2013), a realização sucessiva de zooms na calculadora gráfica, faz com que os alunos percam a noção da ordem de grandeza dos valores representados, pois a escala de representação desaparece do visor da calculadora.

2.5. Compreensão relacional e instrumental

Skemp (2015a) refere que, durante a aprendizagem, existem dois tipos de compreensão: compreensão relacional e compreensão instrumental. A compreensão relacional é o saber o que fazer e porquê, enquanto que a compreensão instrumental corresponde ao recurso a regras sem fundamentação.

De acordo com Skemp (2015a), durante o processo de ensino-aprendizagem, podem acontecer dois tipos de desencontros matemáticos: 1) “Alunos, cujo objetivo é compreenderem instrumentalmente, ensinados por um professor que deseja que eles aprendam relacionalmente” (p.46); ou 2) O caso contrário. Como veremos à frente, não se manifestaram situações deste género na turma junto da qual levei a efeito o meu estudo, sendo que a maioria dos alunos pretende compreender relacionalmente e a professora deseja que eles aprendam relacionalmente. No entanto, também, existem alguns alunos que no 3.º ciclo do ensino básico compreendiam matemática

instrumentalmente, mas que se adaptaram bem à promoção da compreensão relacional.

Ambos os tipos de compreensão têm vantagens para a aprendizagem dos alunos. Segundo Skemp (2015b), a compreensão instrumental é usualmente mais fácil de atingir, tendo o resultado mais imediato se a tarefa não for muito desafiante, isto porque basta saber as regras e não é necessário saber o porquê de ser de uma certa forma. Pelo contrário, a compreensão relacional, segundo o mesmo autor, é mais adaptável a novas tarefas e é mais fácil de recordar, pois não é preciso decorar muita informação. Mas é mais difícil de atingir.

Apesar destas vantagens da compreensão relacional que permitem um conhecimento mais sólido e interligado, muitas vezes, é escolhida a compreensão instrumental:

1. Porque a compreensão relacional demoraria muito tempo a ser alcançada e porque os alunos só irão precisar de usar uma técnica específica.
2. Porque a compreensão relacional de um determinado tópico é muito difícil, mas os alunos continuam a precisar dela por causa dos exames.
3. Porque uma habilidade pode ser necessária para outra disciplina (por exemplo, Ciências) antes de ser totalmente compreendida relacionalmente com os esquemas de que o aluno dispõe naquele momento.
4. Porque se trata de um professor pouco experiente que trabalhe numa escola onde a Matemática ensinada é instrumental. (Skemp, 2015b, p. 26)

3. Intervenção pedagógica

3.1. Contexto escolar

A escola onde se realizou o estudo está localizada numa vila da Área Metropolitana do Porto e serve uma vasta área que abrange a própria vila e várias freguesias envolventes. A população na zona da escola tem, maioritariamente, a qualificação de nível básico (60%), seguindo-se a qualificação de nível secundário (13%) e a de nível superior (9%), havendo, também, uma parte da população sem qualquer qualificação.

A Escola em questão foi criada na década de 70, mas as suas instalações tiveram uma intervenção da Parque Escolar há poucos anos, tendo, por isso, boas condições para a aprendizagem dos alunos.

A oferta formativa da escola abrange o terceiro ciclo do ensino básico, quatro cursos científico-humanísticos do ensino secundário: Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas, Línguas e Humanidades e Artes Visuais, e cursos profissionais.

O estudo realizou-se numa turma do 10.º ano do curso Ciências e Tecnologias com Geometria Descritiva, na disciplina de Matemática A. A turma em questão era constituída por 26 alunos, sendo 18 rapazes e oito raparigas, com 14 e 15 anos, no início do ano escolar. Os alunos desta turma vieram de diferentes escolas e de diferentes turmas do ensino básico. Eram muito empenhados e trabalhadores; no entanto, a turma era heterogénea em termos de estilos e ritmos de aprendizagem, pois existiam muitos alunos que eram muito rápidos a responder, enquanto outros preferiam ver tudo com calma em casa. Um aluno apresentava dislexia, com dificuldades manifestas na comunicação verbal. Havia também alguns alunos mais fracos, que pelas suas dificuldades se assemelham ao aluno com dislexia. Por tudo isto, estes alunos não foram incluídos neste estudo por pertencerem a uma população vulnerável.

O ano letivo iniciou-se com a recuperação das aprendizagens, pois os alunos não tiveram aulas presenciais a partir do dia 13 de março de 2020, devido à pandemia de COVID-19. De seguida, os alunos abordaram a geometria analítica no plano e no espaço e, após isso, trabalharam com vetores no plano e no espaço. Foi após a leção deste tema que se iniciou a intervenção pedagógica em que se baseia este trabalho.

3.2. Ancoragem curricular da intervenção pedagógica

Segundo a planificação do grupo de matemática, as transformações gráficas deveriam ser dadas no final do capítulo “Generalidades acerca de funções reais de variável real”, como apresentado na figura 5.

FRVR	. Generalidades acerca de funções . Reconhecer o significado de: . restrições de uma função; . imagem de um conjunto por uma função; . funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; . composição de funções; . função inversa de uma função bijetiva e a relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa. Generalidades acerca de funções reais de variável real . Reconhecer: . funções reais de variável real; . funções definidas por expressões analíticas; . gráfico de uma função real de variável real. . Reconhecer e interpretar: . os zeros e o sinal de uma função; . a paridade e as simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares; . graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $a.f(x)$, $f(b.x)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, a, b, c e d números reais, a e b não nulos e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação; . os intervalos de monotonia de uma função real de variável real; . os extremos relativos e absolutos e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação. . Funções quadráticas . Reconhecer e interpretar os extremos, sentido das concavidades, raízes e a representação gráfica de funções quadráticas e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação. .
------	---

Figura 5 – Planificação do capítulo das funções proposta pelo grupo de matemática

Nesta turma, a ordem dos conteúdos foi alterada dentro do tema das funções, relativamente à planificação proposta pelo grupo de matemática, para que a recolha dos dados sobre as transformações gráficas de funções pudesse ser feita no início de maio. Assim, o tema das “transformações gráficas” passou para antes de “a paridade e as simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares”. Considero que se tivéssemos seguido a planificação inicial, os alunos teriam mais prática no tema das funções e facilidade para compreender as transformações gráficas das funções. Apesar disso, acho que, com esta organização, os alunos entenderam as transformações gráficas à medida que fomos avançando no tema das funções.

3.3. Ensino das funções

Devido à COVID-19, tal como no ano anterior, as aulas presenciais foram suspensas e retomadas no dia 8 de fevereiro em regime de ensino à distância. Por esse motivo, a intervenção pedagógica foi realizada em regime de ensino à distância. As aulas foram lecionadas através da plataforma de videoconferência Google Meet, pois foi a plataforma adotada pela escola. Tal como as aulas presenciais, as aulas, neste regime, estavam divididas em três blocos semanais de 90 minutos.

Assim, o tema das funções iniciou-se no dia 11 de fevereiro, sendo lecionado por mim e pela minha orientadora, segundo as orientações por ela emanadas. Nas aulas foi dada importância ao estudo gráfico e algébrico. Antes de se introduzir as transformações gráficas, foi introduzida a calculadora gráfica, para que os alunos pudessem ter um apoio gráfico das diferentes transformações.

No quadro seguinte (Quadro 3) é apresentada a planificação geral dos conteúdos abordados e os objetivos de cada aula sobre funções.

Quadro 3 – Planificação geral das aulas sobre funções

Aulas	Tópicos	Objetivos	Recursos	Professor
Aula 1 08/02	Resolução de Problemas	• Conhecer as preferências visuais dos alunos na resolução de tarefas diversificadas	• Problemas IPM – Parte A	Orientadora Ievgeniia Shtyka
Aula 2 09/02	Resolução de Problemas	• Conhecer as preferências visuais dos alunos na	• Problemas IPM – Parte B	Orientadora Ievgeniia Shtyka

		resolução de tarefas diversificadas; • Rever conceitos do tema anterior – Geometria Analítica	• Ficha de Trabalho 13 – Mais revisões (PORTO EDITORA)	
Aula 3 11/02	Generalidades sobre funções	• Definir função; • Domínio e Contradomínio; • Conjunto de chegada; • Objeto e imagem; • Diversas formas de representar funções; • Gráfico de uma função	• PowerPoint – Generalidades sobre funções (I) com recurso ao Pear Deck • Pear Deck • Manual • Ficha de Trabalho 15 – Generalidades – atividade inicial	Orientadora
Aula 4 15/02	Generalidades sobre funções	• Resolver problemas envolvendo noções básicas sobre funções	• Manual • Ficha de Trabalho 16 – Generalidades (II)	Orientadora
Aula 5 16/02	Generalidades sobre funções	• Resolver problemas envolvendo noções básicas sobre funções	• Manual • Ficha de Trabalho 16 – Generalidades (II)	Orientadora
Aula 6 17/02	Funções Reais de Variável Real	• Trabalhar com a calculadora gráfica para descobrir os zeros e a interseção de funções	• Ficha 17 – Funções_Casio_TI84 • Ficha 17 – Funções_NumWorks • Ficha 17 - Funções_TI-Nspire	Ievgeniia Shtyka
Aula 7 22/02	Funções Reais de Variável Real	• Resolver problemas recorrendo a diferentes representações (gráfica e tabular); • A relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $f(x) + d$ e $f(x - c)$	• Ficha 17 – Funções_Casio_TI84 • Ficha 17 – Funções_NumWorks • Ficha 17 - Funções_TI-Nspire • Ficha 18.1 – transformações gráficas • Ficha 18.2 – transformações gráficas	Ievgeniia Shtyka
Aula 8 23/02	Funções Reais de Variável Real	• A relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $f(x) + d$ e $f(x - c)$	• Ficha 18.1 – transformações gráficas • Ficha 18.2 – transformações gráficas • Animação da Escola Virtual ¹	Ievgeniia Shtyka

¹ Durante a pandemia as animações estavam disponíveis através do seguinte link:
<https://app.escolavirtual.pt/lms/playerquest/player/13970720/lesson>

Aula 9 25/02	Funções Reais de Variável Real	• Resolver problemas envolvendo noções básicas sobre funções e transformações gráficas	• PowerPoint com recurso ao Pear Deck	Orientadora
Aula 10 01/03	Funções Reais de Variável Real	• A relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $af(x)$ e $f(bx)$	• Ficha 18.3 – transformações gráficas • Ficha 18.4 – transformações gráficas • Animação da Escola Virtual²	Ievgeniia Shtyka
Aula 11 02/03	Funções Reais de Variável Real	• Funções Injetivas e Funções Sobrejetivas	• PowerPoint – Funções Pares e Funções Ímpares com recurso ao Pear Deck • Manual • Ficha de Trabalho 20 – Generalidades – Funções Injetivas e Sobrejetivas	Orientadora
Aula 12 04/03	Funções Reais de Variável Real	• Funções Pares e Funções Ímpares	• PowerPoint - Funções Pares e Funções Ímpares com recurso ao Pear Deck • Manual • Ficha de Trabalho 21 – Generalidades – funções pares e funções ímpares • Injetividade e Sobrejetividade	Orientadora
Aula 13 08/03	Funções Reais de Variável Real	• Funções Pares e Funções Ímpares	• PowerPoint – Monotonia e Sinal com recurso ao Pear Deck • Manual • Ficha de Trabalho 21 – Generalidades – funções pares e funções ímpares • Injetividade e Sobrejetividade	Orientadora
Aula 14 09/03	Funções Reais de Variável Real	• Monotonia e Sinal	• PowerPoint – Monotonia e Sinal • Manual • Ficha de Trabalho 21 – Generalidades –	Orientadora

² Durante a pandemia as animações estavam disponíveis através do seguinte link:
<https://app.escolavirtual.pt/lms/playerguest/player/13970726/lesson>

			funções pares e funções ímpares Injetividade e Sobrejetividade	
Aula 15 11/03	Funções Reais de Variável Real	• Monotonia e Sinal	• PowerPoint – Monotonia e Sinal com recurso ao Pear Deck • Manual	Orientadora
Aula 16 15/03	Funções Reais de Variável Real	• Extremos e Monotonia	• PowerPoint – Extremos • Manual • Ficha de Trabalho 22 – Generalidades – Extremos e Monotonias	Orientadora
Aula 17 16/03	Funções Reais de Variável Real	• Resolver problemas	• Ficha de Trabalho 23 – Generalidades sobre funções – Resolução de Problemas • Breakout Rooms	Orientadora

Relativamente aos recursos apresentados no quadro 3, é importante referir alguns aspetos. Nas aulas 1 e 2, os alunos estiveram a preencher um instrumento de recolha de dados que irá ser descrito no capítulo 4. Os PowerPoints utilizados nas aulas continham exercícios e problemas que eram discutidos em grande grupo, após os alunos responderem no Pear Deck. O Pear Deck é um suplemento do Google Slides que permite registar pequenas produções escritas dos alunos (em formato de texto, numérico, correspondência ou desenho), instantaneamente; contudo, não permite utilizar escrita matemática. O Breakout Rooms permite criar salas simultâneas em reuniões do Google Meet. É útil para dividir uma turma em grupos menores de modo a poderem fazer trabalhos de grupo, sem serem incomodados pelos outros grupos. A gestão das salas simultâneas e do Google Meet era feita através do computador da orientadora e a internet não suportava muito movimento entre salas. Por esse motivo, para não correr o risco de a reunião se desligar, as visitas às salas simultâneas foram limitadas, mas em algumas sessões, quando havia poucos grupos, tivemos a oportunidade de visitar essas salas e acompanhar o trabalho dos alunos. O Google Classroom também foi escolhido pela escola para comunicar com os alunos. Nesse sistema eram publicados conteúdos para os alunos, como, planos de aula, fichas de trabalho, tarefas isoladas, etc. Os alunos submetiam as suas produções escritas, no entanto, apenas a orientadora tinha acesso a esse sistema, tendo de nos enviar tudo

posteriormente. As animações da Escola Virtual foram utilizadas para mostrar de forma interativa as transformações gráficas. Nelas era possível visualizar os parâmetros e o que acontecia ao gráfico das funções, quando esses parâmetros eram alterados.

As aulas dadas pela minha orientadora já foram em regime de ensino a distância. A maioria das aulas foi lecionada no seguinte formato: era apresentado um PowerPoint com questões para os alunos. Estes respondiam através do Pear Deck e as respostas eram enviadas instantaneamente para a orientadora. As questões eram formuladas para que os alunos de forma intuitiva chegassem aos conceitos pretendidos, seja por análise de gráficos ou através de manipulações algébricas. Com o recurso ao Pear Deck, os alunos tinham um desafio acrescido que era utilizar símbolos matemáticos sem os ter no teclado, por exemplo, o símbolo do infinito foi representado por oo. Após os alunos responderem, a professora selecionava alguns alunos e eles explicavam o seu raciocínio. Às vezes, os colegas não concordavam com a resposta e gerava-se uma discussão matemática em volta do assunto. Para além do Pear Deck, a professora fazia questões adicionais sobre a função em causa criando mais discussões matemáticas. Normalmente, os alunos aderiam bem às discussões não ficando apenas pela questão colocada.

A maioria das fichas de trabalho era resolvida em casa pelos alunos e eram discutidas e corrigidas algumas perguntas nas quais os alunos manifestavam dúvidas. A ficha 23, relativa à resolução de problemas sobre funções foi resolvida com recurso ao Breakout Rooms em que a cada grupo tinha sido atribuído um problema da respetiva ficha.

3.4. Estratégias e recursos utilizados nas minhas aulas sobre funções

3.4.1. Tarefas e recursos utilizados

Para a minha intervenção pedagógica preparei duas fichas, que foram divididas em várias partes, ficha 17 (Anexo 1, Anexo 2 e Anexo 3) e ficha 18 (Anexo 4, Anexo 5, Anexo 6 e Anexo 7).

A ficha 17 (Anexo 1, Anexo 2 e Anexo 3) foi elaborada com o intuito de introduzir a calculadora gráfica e ensinar algumas funcionalidades básicas da mesma, para que os

alunos pudessem descobrir mais funcionalidades autonomamente, e para que a pudessem utilizar para representar funções e realizar as várias explorações propostas ao longo deste tema.

Os alunos desta turma tinham quatro modelos de calculadoras gráficas: TI-Nspire, TI-84, Casio e NumWorks; por isso, a ficha 17, foi dividida em três partes, ficando uma delas com dois modelos de calculadora (TI-84 e Casio).

Esta ficha é constituída por um guião, que varia consoante o modelo da calculadora. Este guião está dividido em 3 secções: a representação gráfica de uma função, determinação dos valores aproximados dos zeros de uma função e da interseção dos gráficos de duas funções. No final de cada secção do guião, aparecem alguns exercícios, com os quais os alunos podem experimentar o uso autónomo da máquina. No final da ficha, há um problema que pode ser resolvido graficamente.

Para os alunos poderem trabalhar só com o modelo da sua calculadora gráfica e não se confundirem com os comandos dos outros modelos, achámos importante dividi-los em salas simultâneas, uma por cada professor, de modo a abordarmos alguns aspetos importantes do modelo da calculadora gráfica respetivo. Como éramos três professores (eu, o meu colega de estágio e a nossa orientadora), a turma foi dividida em três grupos, de acordo com os diferentes modelos de calculadora, e separada em três salas distintas (recorrendo ao Breakout Rooms do Google Meet). Havia uma sala para a calculadora NumWorks, outra para a TI-Nspire e outra para a TI-84 e Casio.

A ficha 18 teve como objetivo o estudo intuitivo das transformações gráficas das funções. Está dividida em quatro partes e cada parte corresponde a um certo tipo de transformação gráfica (translação vertical, translação horizontal, dilatação/contração vertical e dilatação/contração horizontal) e com perguntas semelhantes. Cada parte começa com a indicação do tipo de transformação e com uma função inicial. No que diz respeito às translações, as transformações são aplicadas à função $f(x) = x$ e, no que diz respeito às contrações e dilatações, as transformações são aplicadas à função $f(x) = x^2$.

Inicialmente aparece uma tabela que deve ser preenchida com os domínios e contradomínios das várias funções, seguidamente é pedida uma conclusão do que acontece ao domínio e contradomínio das várias funções em função da transformação em causa. Seguidamente, os alunos têm de responder a uma questão que relaciona os objetos com uma imagem para um caso particular, e de seguida generalizar para

qualquer ponto da função original e transformada. No final, é pedido para apresentarem as conclusões acerca de cada transformação gráfica.

Cada secção da ficha foi realizada pelos alunos em casa e, posteriormente, foi discutida em sala de aula virtual.

3.4.2. As minhas aulas sobre funções

3.4.3.1. 17 de fevereiro

Os documentos suporte para esta aula foram o plano de aula (Anexo 8) e as três partes da ficha 17 (Anexo 1, Anexo 2 e Anexo 3). Nessa aula foi introduzida a calculadora gráfica, tendo sido proposta a atividade da ficha 17. Separámo-nos em salas e eu fiquei com a calculadora TI-Nspire com 14 alunos. Embora houvesse 16 alunos com esta calculadora, dois deles foram para a sala da NumWorks (por escolha deles) porque não tinham posto a calculadora deles a carregar. Na minha sala comecei por perguntar se já tinham a ficha à frente e se tinham tudo pronto para começarmos a trabalhar. Partilhei o meu ecrã em que numa metade tinha a calculadora e na outra tinha a ficha 17 da TI-Nspire. Um dos alunos teve problemas com a máquina e, por isso, instalou rapidamente o software da TI-Nspire no seu computador. Os alunos apenas tinham trabalhado com as máquinas para realizar cálculos em Física, por isso, não sabiam trabalhar com a componente gráfica da mesma.

Referi que nesta aula íamos seguir o guião e que os exercícios da ficha ficariam para serem realizados em casa. Comecei por dizer que deveriam abrir o “Gráfico”, não no rascunho, pois este não tem todas as funcionalidades, e inserir a função. Neste momento, aproveitei para referir a diferença entre os dois sinais de menos existentes na calculadora, pois muitas vezes os alunos utilizam o sinal errado gerando resultados diferentes do esperado na calculadora.

Passámos para a janela de visualização. Mostrei como alterar a janela, pois algumas calculadoras apresentavam janelas de visualização diferentes. Para todos vermos o gráfico da função da mesma forma, e porque os alunos não estavam habituados a ver gráficos de funções em calculadoras gráficas, decidimos colocar a mesma janela de visualização em todas as máquinas. Referi que o gráfico era sempre o mesmo; o que

alterava era o zoom com que estávamos a ver e a secção do gráfico. Definimos a janela $[-10, 10]$ no x e $[-10, 10]$ no y .

Passámos para a determinação dos zeros. Mostrei que deveríamos ir a menu > Analisar gráfico > zeros > definir um intervalo no qual queremos determinar o zero. Em algumas calculadoras, os zeros apareceram em notação científica e um dos alunos explicou aos colegas como colocar os números no formato “normal”. Enquanto ele explicava, eu seguia as instruções dele no software, para que todos os alunos pudessem ver onde clicar. Descobrimos os restantes zeros recorrendo ao mesmo método.

Após isso, passámos para as interseções. Os alunos disseram que, para descobrir o ponto onde a abcissa e a ordenada tinham o mesmo valor, deveríamos intersetar a nossa função com a bissetriz dos quadrantes ímpares, por isso, ensinei a inserir uma nova função. Inserimos $y = x$ e fomos para o menu que tinha os zeros e as interseções. Aproveitei para dizer que, nesta secção do menu, os alunos tinham mais algumas funcionalidades como a determinação do máximo e do mínimo de uma parte do gráfico e tal como acontecia com os zeros, os alunos deveriam dizer em que intervalo do domínio está o mínimo/máximo que eles procuram. Descobrimos as interseções e alguns alunos obtiveram o valor da interseção com muitas casas decimais (diferente do meu e da maioria dos colegas). Para corrigir isso, fomos novamente às definições apresentando tudo na minha máquina. Após isso, uma aluna disse quais eram as coordenadas dos pontos pedidos arredondando às centésimas. Nesse momento, aproveitei para perguntar como poderíamos descobrir um ponto do gráfico onde a ordenada era 3 e logo de seguida vários alunos disseram que devíamos intersetar a nossa função com a função $y = 3$. Por fim, mostrei como desativar, modificar e apagar funções.

Às 12h45 regressámos à sala principal. Esperei que todos regressassem e expliquei o que tinham de fazer em casa: resolver os exercícios 1, 2 e 3 da ficha 17, utilizando a calculadora, tirar fotografias/capturas de ecrã à sua resolução na calculadora, colar as fotografias num Word ou equivalente e escrever uma resposta para os exercícios.

De seguida, passámos para o exercício 4 que os alunos começaram por analisar individualmente. Pedi para que, quando resolvessem o 4.1, me avisassem, para que pudessemos discutir os resultados obtidos e porque os alunos não estavam habituados a trabalhar com a calculadora. Após algum tempo, alguns alunos apresentaram dificuldades dizendo que a função não estava a aparecer na máquina. Um dos alunos

disse que tinham de alterar a janela, pois quando $x = 0$ a ordenada é 250 e que, por isso, deveriam aumentar muito mais a janela de visualização. Interpretámos o significado de cada um dos valores que tínhamos (tempo em meses e número de trutas em centenas). Após algum tempo, o mesmo aluno disse a janela que tinha utilizado e os colegas puseram-na nas suas calculadoras. Apresentei o gráfico da função no software da TI-Nspire para que os alunos pudessem comparar o gráfico deles com o meu, para terem a certeza de que tinham inserido tudo corretamente. Após isso, ao continuarmos a resolução do exercício 4.1, apercebi-me que não tínhamos ensinado a descobrir a imagem cujo objeto é 7 (em nenhum dos grupos). Um dos alunos descobriu como fazer isso na TI-Nspire e, com as indicações do aluno, mostrei isso no software. De seguida, o meu colega de estágio e a orientadora explicaram nas suas máquinas. A aula terminou e alguns alunos ficaram na sala virtual para uma nova explicação de como descobrir a imagem cujo objeto é 7.

3.4.2.2. 22 de fevereiro

Os documentos suporte para esta aula foram o plano de aula (Anexo 9), as três partes da ficha 17 (Anexo 1, Anexo 2 e Anexo 3) e a primeira secção da ficha 18 (Anexo 4).

O objetivo desta aula era discutir com os alunos o exercício 4 iniciado na aula anterior e realizar a atividade sobre a translação vertical das funções, discutindo-a também (após a submissão dos alunos no Classroom).

Começámos com o exercício 4 da ficha 17. Analisámos os dados do enunciado e, com a ajuda dos alunos, inseri a função no GeoGebra. Escolhi este software para os alunos terem mais uma ferramenta, para não dar preferência a nenhum modelo de calculadora e para os alunos não terem a tendência de me dizerem as teclas que devem usar na sua máquina, pois quem tem uma máquina diferente pode ficar confuso. Os alunos referiram que não estavam a ver a função porque não aparecia na janela de visualização que estava selecionada. Um dos alunos propôs uma janela em que o y ia até mais de 250 justificando que, quando o x era zero, o y era 250. Por sugestão de outro aluno, escolhemos a janela $[-10, 50] \times [-10, 300]$, que já daria para colocar a segunda função que tínhamos no exercício e dava para mais de quatro anos de análise do crescimento das trutas.

No primeiro exercício, os alunos chegaram à conclusão de que pretendiam saber o y quando o x era 7, por isso, coloquei um ponto no GeoGebra, que correspondia ao que os alunos tinham dito. A partir das coordenadas do ponto, os alunos indicaram o número de trutas (alguns alunos tiveram dificuldade em passar de centenas para unidades ao longo de toda a aula, enquanto outros faziam isso com facilidade).

No segundo exercício, os alunos disseram que, para descobrir o momento em que o número de trutas é 20 450, deviam interseccionar a função $f(x)$ com $y = 204,5$ e determinar a abcissa do ponto que descobriam. Fiz isso no GeoGebra e os alunos interpretaram o resultado no contexto do problema.

No terceiro exercício, disseram que deveríamos descobrir o ponto onde a ordenada atinge o valor mínimo e explicaram onde ficava o valor. Apliquei o comando e os alunos interpretaram o resultado no contexto do problema.

Para responder à pergunta 4, com a indicação dos alunos, inseri a função $b(x)$ e $y = 160$. Para responder ao problema, os alunos sugeriram interseccionar a função $f(x)$ com $y = 160$ e a função $b(x)$ com $y = 160$. Os alunos interpretaram os valores obtidos e responderam ao problema.

Durante esta aula, foram os alunos que me estiveram a dizer o que fazer para responder às diferentes questões. Fiz perguntas encaminhadoras e considero que geri bem as intervenções dos alunos, dando feedback e encaminhando algumas questões para os colegas. O ritmo não foi muito rápido, mas como foi em regime online, considero que este foi adequado para que todos os alunos pudessem acompanhar.

Após terminarmos a ficha 17, já no final da aula, dei as indicações para a realização da secção 1 da ficha 18. Esta deveria ser realizada no Word, podendo recorrer a qualquer recurso, por exemplo, calculadora/GeoGebra. Caso os alunos recorressem a algum desses recursos, deveriam indicar isso, apresentando, por exemplo, fotografias. Podiam também resolver no caderno e colar as fotos no Word. No final, deviam submeter no Classroom. Os alunos começaram a fazer a secção 1 na aula, mas como isso já foi no final da aula, tiveram de terminar em casa. Para a aula seguinte, para além da secção 1, os alunos deveriam submeter também a secção 2 da ficha 18.

3.4.2.3. 23 de fevereiro

Os documentos suporte para esta aula foram o plano de aula (Anexo 10) e as partes 1 e 2 da ficha 18 (Anexo 4 e Anexo 5).

Comecei por apresentar a ficha 18.1 (Anexo 4). Fiz uma pequena introdução dizendo que trabalharam com a função $f(x) = x$ e com a função $g(x) = x + d$ com diferentes valores de d . Fui preenchendo a tabela, com a colaboração dos alunos, e respondendo às questões no próprio Word. Perguntei a vários alunos, um a um, como preencheram as diferentes células da tabela e fui perguntando se todos concordavam. Um dos alunos colocou uma dúvida, pois não estava a perceber como foi obtido o resultado que os colegas disseram. Apresentei no GeoGebra o gráfico da função $g(x)$, obtido da $f(x)$ (com domínio $[-5, 5]$, restrito com o comando “se...” para uma melhor visualização da transformação do contradomínio da função $g(x)$) para um dos valores de d . Não houve necessidade de uma explicação algébrica.

Para a questão seguinte, perguntei a outros dois alunos o que concluíam sobre o domínio e contradomínio das funções e ambos responderam que os domínios eram iguais e os contradomínios dependiam de d . Na questão sobre o objeto cuja imagem é 4, registei as respostas que vários alunos foram dando e apresentei-as no GeoGebra. Na questão sobre um ponto genérico, um aluno respondeu recorrendo à soma de um ponto com um vetor. A questão final foi apenas corrigida e não discutida, pois era o resumo de tudo o que tínhamos concluído e discutido nas questões anteriores. Por fim, apresentei uma animação da escola virtual sobre a translação vertical.

Avancei para a ficha 18.2 (Anexo 5), ou seja, para a translação horizontal. Utilizei uma abordagem semelhante. Nesta transformação, muitos alunos tiveram dificuldade, pois pensavam que a função se deslocava em sentido contrário e isso verificou-se durante o preenchimento da tabela. Tentei explicar de forma a dizer que as imagens dos limites do domínio iam manter-se, e que, para os diferentes valores de c , a função ia se deslocar horizontalmente, esboçando a situação. A minha explicação pareceu confusa à orientadora e ela resolver explicar de uma forma mais algébrica. Aparentemente, todos tinham entendido a segunda explicação, no entanto, quando avancei para generalização das ideias do domínio e contradomínio, houve um aluno a colocar a mesma questão. Expliquei de uma forma semelhante à da orientadora (algébrica) e apresentei uma representação no GeoGebra. Uma das minhas dificuldades na explicação foi o facto de querer trabalhar com a variável c , mas depois acabei por escolher um valor para c ,

$c = 1$. As restantes questões foram respondidas de forma semelhante às da ficha anterior. Inicialmente optei por trabalhar com a variável c por causa da minha tendência para um excessivo formalismo, de vez em quando, talvez devido à abordagem formal com que se aprende matemática na faculdade.

A aula terminou por aqui e para casa propus as partes 3 e 4 da ficha 18. Nesta aula, sempre que era possível, acompanhei as explicações com representações gráficas no GeoGebra, com explicações analíticas e apresentei animações da Escola Virtual. O recurso à abordagem gráfica e à algébrica foi importante, pois, como se verá mais à frente, a turma tem alunos visuais e não visuais, e, por isso, é importante recorrer às duas abordagens para que todos os alunos compreendam melhor os conceitos. Também é importante que todos os alunos consigam trabalhar quer com a abordagem gráfica, quer com a algébrica, pois segundo a teoria, isso é importante para a compreensão relacional dos conceitos e faz com que haja uma visão global dos mesmos.

3.4.2.4. 1 de março

Os documentos suporte para esta aula foram o plano de aula (Anexo 11) e as partes 3 e 4 da ficha 18 (Anexo 6 e Anexo 7).

Na aula do dia 1 de março, discutimos as secções 3 e 4 da ficha 18. Para agilizar o processo de escrita, tentei arranjar uma estratégia mais eficiente para que a ficha não se tornasse tão monótona. Optei por escrever com a caneta digital no ficheiro Word e questionar os alunos de outra forma. Em vez de perguntar uma célula por aluno, pedi logo que me dissessem a coluna toda, permitindo tirar conclusões para as duas primeiras questões após a tabela.

Comecei pela ficha 18.3 (Anexo 6). Preenchemos a tabela, e os alunos foram dizendo se concordavam com as respostas dos colegas, pois já tinham feito a ficha em casa e analisado os gráficos. Após preenchermos a tabela, selecionei um dos valores de a , e apresentei no GeoGebra a representação de $f(x) = x^2$ e $i(x) = 2x^2$ restrita no domínio. A questão 4 foi respondida pelos alunos de uma forma algébrica. E na questão 5 surgiu a dúvida, se era contração ou dilatação vertical. Fomos para o GeoGebra e apresentei um caso particular para $a > 1$ e para $0 < a < 1$. Para uma melhor compreensão fiz gestos com as mãos esticando e contraindo as funções na vertical.

Passámos para a segunda parte da ficha 18.3. Na tabela, preenchamos apenas as colunas referentes aos contradomínios, pois os alunos concluíram que as restantes se preenchiam de forma semelhante à tabela anterior. Todas as conclusões do resto desta ficha foram tiradas oralmente e com recurso ao GeoGebra, pois eram semelhantes às da secção anterior. Apresentei a animação da Escola Virtual, questionando o que acontecia à função quando se variava o parâmetro.

Passámos para a ficha 18.4 (Anexo 7). Na tabela, procedi da mesma forma que na ficha 18.3. Mas quando foi para definir as funções, os alunos tiveram alguma dificuldade, pois não conseguiam simplificar as potências (propriedade $(2 \times x)^2 = 2^2 \times x^2$)).

Nas transformações horizontais, os alunos costumam ter mais dificuldades, por isso, foi mais difícil preencher a tabela. Concluímos que o contradomínio se mantinha igual, mas o domínio alterava-se. O problema foi se o domínio aumentava ou diminuía. Apresentei o GeoGebra, com os domínios restritos, mas alguns alunos não percebiam como isso acontecia, por isso, utilizei uma estratégia algébrica, pegando num ponto da função $f(x)$ e da função $j(x)$: $f(-5) = 25$ enquanto que $j(-5) = f(0.5 \times (-5)) = f(-2.5)$ e $j(-10) = f(0.5 \times (-10)) = f(-5)$, mostrando que para a mesma imagem pela função $j(x)$ se tem uma abcissa maior do que pela função $f(x)$. Chegámos então à conclusão de que o parâmetro b influencia o domínio e que, para passarmos de um domínio para o outro, devemos dividir os extremos do domínio da função original pelo valor do parâmetro.

Na questão 5, tal como na ficha anterior, fui fazendo gestos com as mãos, contraindo e dilatando na horizontal. Apresentei novamente a animação da Escola Virtual respetiva, questionando o que acontece à função quando se varia o parâmetro.

Principalmente na ficha 18.4, a minha escrita ficou muito confusa. A dada altura tinha o Word todo riscado, pois quando queria explicar aos alunos, escrevia no próprio Word nos espaços livres. Nesta aula, acho que as minhas explicações foram melhores, pois recorri imediatamente a casos específicos em vez de trabalhar com o parâmetro b .

3.4.3. Aprendizagem dos alunos

Durante as aulas, os alunos utilizaram a calculadora gráfica facilmente, apresentando apenas pequenas dificuldades que eram resolvidas rapidamente. Quando surgiam

novas funcionalidades e comandos que deviam dominar sobre as funções, os alunos aplicavam-nas facilmente. Nas figuras 6, 7 e 8, apresento algumas capturas de ecrã que foram enviadas pelos alunos, após a aula de introdução às calculadoras, mostrando a forma como eles trabalham com a calculadora na resolução de algumas questões da ficha 17.

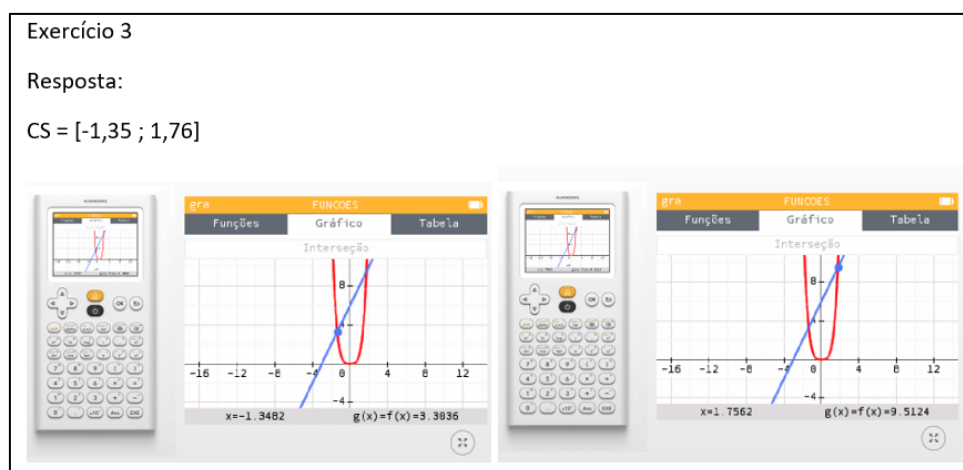


Figura 6 – Resolução gráfica da questão 3 da ficha 17, na calculadora NumWorks

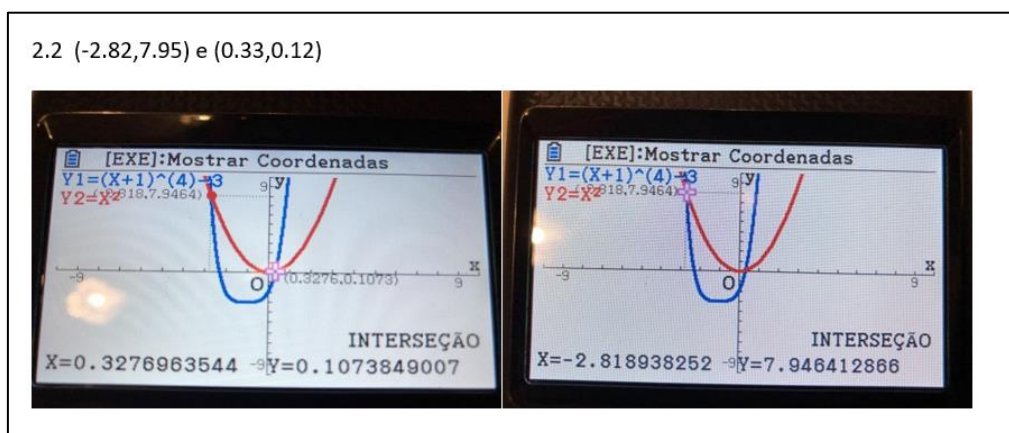
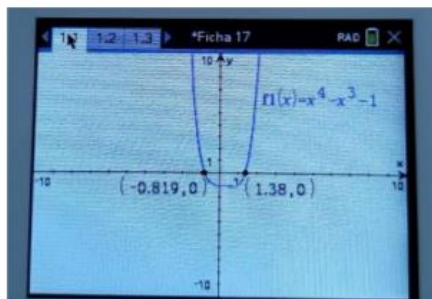


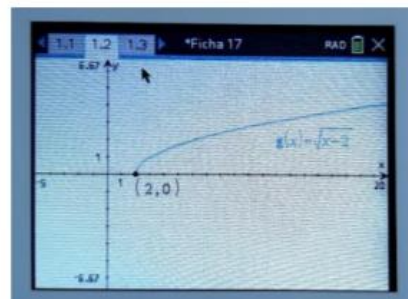
Figura 7 – Resolução gráfica da questão 2.2 da ficha 17, na calculadora Casio

Exercício 1

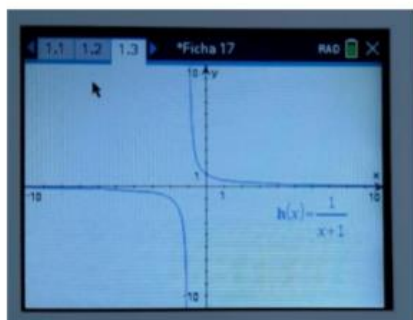
1.1 e 1.2



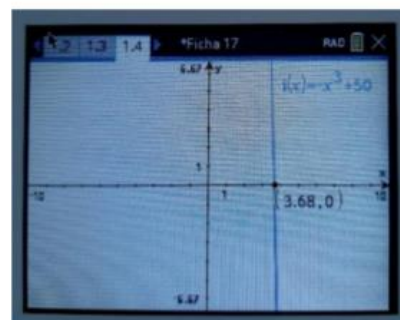
a) Zeros da função f :
 $(-0,82, 0)$ e $(1,38, 0)$



b) Zeros da função g :
 $(2, 0)$



c) Zeros da função h :
 Não existem porque a função não intersecta
 o eixo do x



d) Zeros da função i :
 $(3,68, 0)$

Figura 8 – Resolução gráfica da questão 1.1 e 1.2 da ficha 17, na calculadora TI-Nspire

Relativamente às transformações gráficas, notou-se a compreensão dos alunos em aulas posteriores, com a realização de tarefas, por exemplo, num PowerPoint criado pela orientadora (figura 9). As questões foram respondidas da forma visual e não visual.

1. Considera a função $f(x) = x^2$
 - 1.1. Qual ou quais são os objetos cuja imagem é 4?
 - 1.2. Qual ou quais são os objetos cuja imagem é 7?
 - 1.3. Qual ou quais são os objetos cuja imagem é -1?
2. Considera a função $g(x) = f(x) - 3$
 - 2.1. Qual ou quais são os objetos cuja imagem é -3?
 - 2.2. Qual ou quais são os objetos cuja imagem é 7?
 - 2.3. Qual ou quais são os objetos cuja imagem é -1?
3. Considera a função $h(x) = f(x + 1)$
 - 3.1. Quantos zeros tem a função? Quais são?
 - 3.2. Qual ou quais são os objetos cuja imagem é 7?
 - 3.3. Qual ou quais são os objetos cuja imagem é -1?

Figura 9 – Questões sobre as transformações gráficas no PowerPoint

Para a recolha de dados de investigação, foi realizada uma entrevista com tarefas a quatro alunos seleccionados, como se verá mais à frente. Na figura 10, apresento a tarefa que envolvia transformações gráficas. Os alunos caso durante a entrevista identificaram bem todas as transformações gráfica, tendo algumas incertezas durante a realização da tarefa. No entanto, uma aluna, apesar de ter conseguido identificar bem as transformações, aplicou-as numa ordem diferente, obtendo um gráfico final diferente do pretendido. Nessa entrevista, na tarefa 4, a questão 6, figura 11, estava também relacionada com transformações gráficas, mas que apareciam indiretamente no enunciado. Nessa tarefa os alunos não identificaram a transformação gráfica, tendo havido vários indícios de a terem identificado indiretamente. Mas todos os alunos resolveram essa questão recorrendo ao raciocínio lógico ou cálculos com interpretação gráfica.

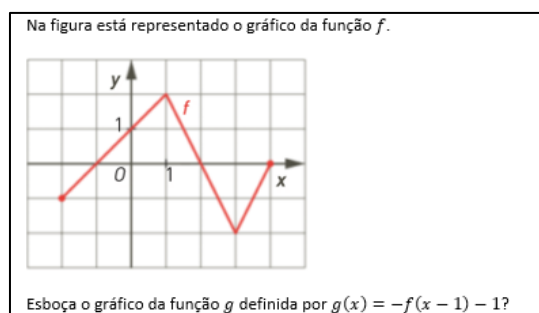
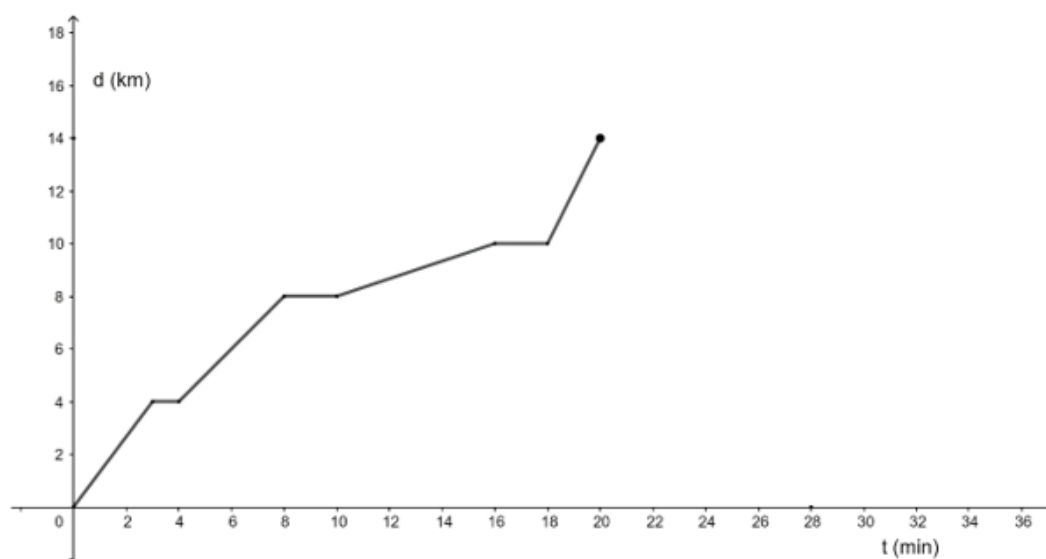


Figura 10 – Tarefa 1 da entrevista com tarefas

O gráfico representado a seguir relaciona a distância percorrida (em km) com o tempo (em minutos) gasto por um comboio entre duas localidades.



1. A que distância se encontram as localidades?
2. Quanto tempo demorou o comboio desde a estação de partida até à estação do destino?
3. Quantos quilómetros tinha percorrido o comboio ao fim de 10 minutos?
4. O comboio deslocou-se sempre à mesma velocidade?
Em que intervalo de tempo, se deslocou mais rapidamente?
5. Sabemos que o comboio parou em todas as estações e apeadeiros. Quantas estações e quantos apeadeiros te parecem existir entre a estação de partida e a do destino? Justifica a tua resposta.
6. Considera que existe um comboio B que partiu 13 minutos após o A e que fez exatamente o mesmo percurso com os mesmos tempos. Quantos km tinha percorrido o comboio B quando o A chegou ao destino?

Figura 11 – Tarefa 4 da entrevista com tarefas

Durante o ensino online, foi aplicada uma Verificação de Aprendizagens, criada pela orientadora, que tinha uma questão sobre as transformações gráficas. A maioria dos alunos conseguiu aplicar corretamente a transformação, obtendo a função transformada correta. Na figura 12, apresento a questão sobre as transformações gráficas e a sua resolução feita por um dos alunos.

3. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n. xOy , o gráfico de uma função g , real de variável real.

3.1. Indica o domínio e o contradomínio de g

3.2. Constrói o quadro de sinal de g

3.3. Considere a função definida por

$f(x) = g(x + 2)$ e esboça na tua folha de resposta o gráfico de f

3.4. Determine os valores de k para os quais a equação $g(x) = k$ tem exatamente três soluções

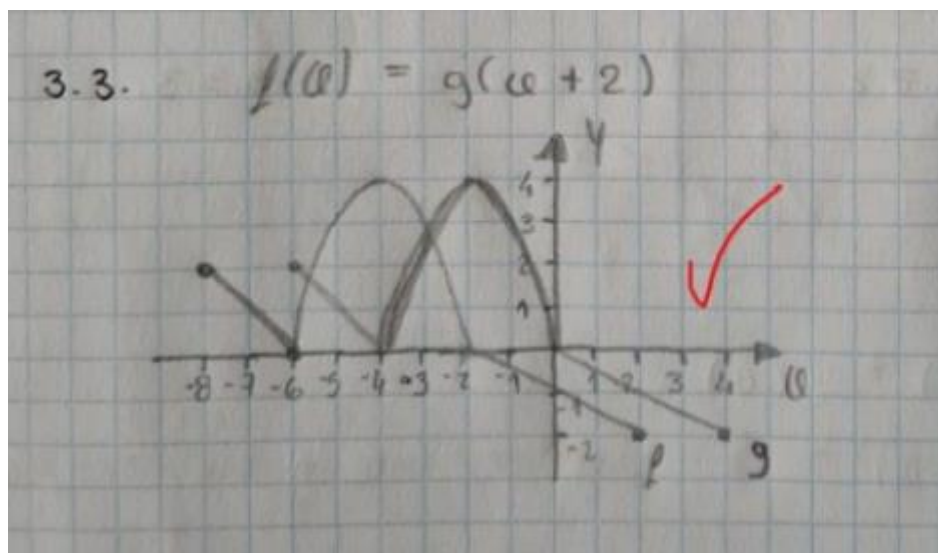
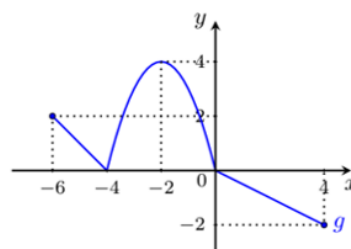
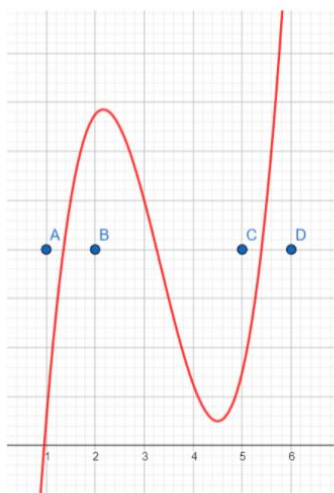


Figura 12 – Enunciado (em cima) e resolução de um aluno (em baixo) a uma questão sobre transformações gráficas na Verificação de Aprendizagens

Já em regime presencial, foi aplicada a tarefa Slalom (Anexo 12), que tinha como objetivo a criação de funções polinomiais com certas características e, para isso, muitos alunos recorreram a transformações gráficas, figura 13. Esta tarefa permitiu medir o grau de compreensão e de retenção dos conceitos das transformações gráficas.

3



$$h(x) = \left(x - \frac{11}{2}\right)(x-3)\left(x - \frac{3}{2}\right) + 5$$

Como no exercício 2 decidimos que o valor de a seria 1 introduzir uma translação vertical de vetor $(0;5)$, neste também o decidimos fazer.

A partir daí, sabíamos que tinha de passar entre as bandeiras e utilizamos o método da tentativa e erro para descobrir a expressão da função pedida.

Figura 13 – Resolução da questão 3 da tarefa Slalom

3.4.4. Reflexão pessoal

Considero que a aula sobre as calculadoras gráficas foi muito útil para a introdução deste instrumento tecnológico e a tarefa foi muito útil para o trabalho desenvolvido, servindo como um apoio. Como as aulas decorriam em regime online, tivemos muito receio de não conseguirmos organizar esta aula de forma a ensinarmos os comandos básicos aos alunos, mas a divisão em salas com o Breakout Rooms permitiu-nos trabalhar com cada modelo de calculadora separadamente, podendo explicar as particularidades de cada calculadora a cada grupo de alunos. Como foi referido, no guião faltou falar de como descobrir a imagem cujo objeto é conhecido, usando a calculadora. No entanto, isso deixou de ser um problema quando os alunos foram procurar como fazê-lo e descobriram-no autonomamente, por isso, posso referir que a ausência dessa informação foi um ponto positivo desta ficha.

As aulas sobre as transformações gráficas foram baseadas na ficha 18 e, com ela, os alunos aprenderam as propriedades das funções associadas a cada uma das transformações gráficas, recorrendo a métodos analíticos e gráficos (com e sem calculadora). Durante as aulas tentei equilibrar as representações visuais e não visuais, apresentando as situações de forma mais visual e menos visual. Os alunos apresentaram algumas dificuldades na compreensão das transformações gráficas,

enquanto estas estavam a ser lecionadas, mas muitas delas foram sendo ultrapassadas à medida que fomos avançando no tema.

A ficha 18 tornou-se um pouco repetitiva e monótona, pois foram feitas perguntas semelhantes para cada transformação gráfica. Para uma futura leção sugiro que se façam grupos. Cada grupo pode analisar uma transformação gráfica, a partir da tarefa, e, no final, apresentar as suas conclusões à turma, mostrando o que acontece à função após a aplicação de cada transformação. Deste modo, os alunos irão apresentar e explicar as suas descobertas, promovendo comunicação e discussão matemática.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Este trabalho foi realizado em duas fases. Na primeira fase, apliquei um instrumento a todos os alunos para inferir as suas preferências visuais na resolução de tarefas diversificadas. Este instrumento foi aplicado antes da minha intervenção pedagógica, numa turma do 10.º ano de escolaridade, sobre o tema das funções do programa de Matemática A. Na segunda fase, procurei perceber melhor como os alunos utilizavam imagens visuais na resolução de tarefas de natureza diversa sobre o tema das funções. Ambas as fases do estudo enquadram-se numa abordagem qualitativa e interpretativa de investigação, e pode considerar-se que este estudo consistiu num ensaio para um estudo de caso.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a abordagem qualitativa possui cinco características: (1) “Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (p. 47); (2) “A investigação qualitativa é descritiva” (p. 48); (3) “Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (p. 49); (4) “Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva” (p. 50); (5) “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (p. 50).

Como refere a primeira característica, eu fui o principal instrumento de recolha de dados e estes foram recolhidos na sala de aula virtual, através das plataformas Zoom e Google Meet. Devido à pandemia, este ambiente tornou-se natural para os alunos. Tal como é referido na segunda característica, os dados deste estudo são de natureza descritiva, pois incluem as produções escritas dos alunos, e as áudio-gravações das entrevistas que realizei. A terceira característica também está presente neste estudo, pois analisei os pensamentos dos alunos não tendo como objetivo a resposta final dos alunos e sim o processo de resolução desenvolvido durante a resolução das diferentes tarefas.

Relativamente à quarta característica, Bogdan e Biklen (1994) referem:

Para um investigador qualitativo que planeie elaborar uma teoria sobre o seu objeto de estudo, a direção desta só se começa a estabelecer após a recolha dos dados e o passar de tempo com os sujeitos. Não se trata de montar um quebra-cabeças cuja forma final conhecemos de antemão. (p. 50)

Apesar de ter algumas categorias definidas no enquadramento teórico (visuais e não visuais), apenas após a interação com os alunos durante as aulas e a recolha e análise dos dados, consegui ter uma melhor ideia do tipo de alunos que tinha à minha frente, não sabendo os resultados do estudo antecipadamente. Relativamente à última característica mencionada por Bogdan e Biklen (1994), os autores referem que “Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências e pontos de vista do informador” (p. 51). Por esse motivo, durante as interações com os alunos sempre procurei perceber bem as estratégias que estes utilizavam, a forma como pensavam, e como surgiram essas mesmas estratégias e pensamentos. No final do estudo, os alunos referiram as suas preferências nas tarefas apresentadas e nos temas matemáticos, partilhando igualmente o seu ponto de vista sobre a matemática.

Segundo Yin (1989, citado em Vale, 2004)

o estudo de caso é uma metodologia adequada quando as questões do ‘como’ e ‘porquê’ são fundamentais, quando o investigador tem muito pouco controlo sobre os acontecimentos e quando o objeto do estudo é um fenómeno que se desenrola em contexto real e para o qual são necessárias fontes múltiplas de evidência para o caracterizar. (p. 139)

Deste modo, pode-se referir que este estudo é um ensaio para um estudo de caso, pois tem todas as características de um estudo de caso, mas como é de curta duração e extensão, não pode ser considerado um estudo de caso.

4.1. 1.^a fase do estudo: Aplicação do Instrumento de Processamento Matemático

4.1.1. O Instrumento de Processamento Matemático

Previamente à abordagem das funções, foi implementado o Instrumento de Processamento Matemático (IPM) a todos os alunos da turma de 10.º ano. O IPM, construído por Norma Presmeg, foi baseado num instrumento já desenvolvido por Suwarsono (1982, citado em Presmeg, 1986b). O objetivo do IPM é inferir quais são as preferências visuais dos alunos na resolução de tarefas diversificadas. O IPM utilizado neste estudo é uma tradução do instrumento, escrito originalmente em inglês, consultado em Galindo-Morales (1994).

O IPM é constituído por duas partes. A primeira é um teste, com problemas que se podem resolver utilizando métodos visuais ou não visuais, e a segunda parte é um questionário, no qual se apresenta aos alunos várias resoluções dos problemas do teste e estes terão de selecionar a resposta que mais se assemelhe à sua resolução; caso não se assemelhe a nenhuma, deverão descrever o seu método de resolução. Cada parte está dividida em 3 secções, A, B e C, em que as duas primeiras são recomendadas para indivíduos com 16 e 17 anos de idade, enquanto as secções B e C se destinam a professores de Matemática.

Optei por aplicar as secções A e B a alunos com 15 e 16 anos, uma vez que não vi inconvenientes numa pequena alteração das idades a que eram destinadas. Além disso, como não há pré-requisitos a nível de conhecimentos adquiridos, estes testes e questionários podem ser respondidos antes de se lecionarem as funções. Neste instrumento não se pretende ver se a resolução está correta ou não, mas sim se a resolução apresentada é visual ou não.

De acordo com as respostas ao questionário, é atribuída uma pontuação a cada aluno. Esta pontuação é calculada associando 2 pontos a uma resolução visual e 0 pontos a uma resolução não visual. Se não responderem a alguma questão do teste ou se a resolução for ambígua, esta será pontuada com 1 ponto. No total, o teste é constituído por 18 perguntas e, por isso, a pontuação máxima é 36 pontos. Para concluir se os alunos têm um pensamento visual ou não, recorri aos critérios de Presmeg (1986b), que, numa determinada amostra, considerou que os indivíduos visuais são aqueles cuja pontuação no IPM excede a mediana das pontuações obtidas pela amostra, enquanto que os restantes são considerados não visuais. Presmeg (1986b) também refere que os indivíduos visuais são os que preferem usar métodos visuais quando resolvem problemas de Matemática que podem ser resolvidos por métodos visuais ou não visuais, enquanto os não visuais são os que preferem usar métodos não visuais quando resolvem este tipo de problemas.

4.1.2. Implementação do IPM

Inicialmente, estava previsto implementar o IPM em regime presencial. No entanto, no final de janeiro, fruto da evolução pandémica em Portugal, o ensino presencial foi suspenso e, após uma semana de interregno, retomou-se o ensino remoto de

emergência. Assim, tive que fazer alterações ao que tinha planeado, nomeadamente à ordem como foram disponibilizadas as partes do instrumento e à data quando este foi aplicado. Inicialmente, estava previsto que os alunos respondessem primeiro ao teste e questionário da secção A e depois ao teste e questionário da secção B, para que após cada teste os alunos tivessem as estratégias utilizadas bem presentes para o preenchimento do questionário. O IPM foi implementado durante as duas primeiras semanas do ensino à distância, que se iniciou dia 8 de fevereiro de 2021.

Os enunciados foram disponibilizados pela orientadora no Classroom, e os alunos submeteram as resoluções na mesma plataforma. Posteriormente, todas as resoluções foram enviadas pela orientadora para mim através do e-mail.

Primeiramente, durante a primeira aula de ensino à distância, a 8 de fevereiro, os alunos realizaram a secção A do teste, sendo que alguns terminaram em casa e submeteram antes da aula seguinte. Na aula seguinte, a 9 de fevereiro, realizaram a secção B do teste, que terminaram posteriormente em casa, submetendo até dia 11 de fevereiro. Na aula seguinte, foi proposto responderem aos questionários das duas secções em casa, que foram sendo submetidos até dia 16 de fevereiro. Esta forma de organização da disponibilização dos enunciados permitiu gerir melhor o tempo de aplicação do instrumento e, apesar do intervalo entre a realização dos testes e dos questionários, os alunos ainda se recordavam das estratégias utilizadas no teste.

O IPM foi implementado numa amostra de 26 alunos, mas, devido à não adesão de alguns alunos, a análise do IPM foi feita apenas numa amostra de 23 alunos. Houve uma grande variedade de resoluções para os mesmos problemas. Nas suas resoluções, os alunos recorreram a diagramas, tabelas, linguagens algébrica, aritmética e verbal, e raciocínio lógico. Não foram feitas entrevistas adicionais aos alunos sobre o IPM.

As respostas ao questionário foram comparadas com a tabela das classificações das resoluções ao questionário do IPM, que indica se a resolução é visual ou não visual (Anexo 18). A tabela das classificações das resoluções ao questionário do IPM de Presmeg foi adaptada, pois a resolução com recurso a tabelas, no documento original, é considerada não visual; no entanto, nos seus textos, a autora refere que o recurso a tabelas é um método de resolução visual. Por essa razão, na aplicação da tabela de classificações, considerei as resoluções com recurso a tabelas como resoluções visuais.

Posteriormente, analisei as resoluções dos alunos, comparando-as com as respostas ao questionário e analisando as estratégias utilizadas em cada resolução. Criei uma

grelha em Excel (Anexo 17), na qual foram registadas as pontuações atribuídas a cada aluno em cada questão. Após a análise dos resultados na grelha em Excel, verifiquei que, numa amostra de 23 alunos, a pontuação mínima foi de 10 pontos e a máxima foi de 26, sendo a mediana da amostra 16,5.

Não sendo exequível a análise detalhada do desempenho de todos os alunos no IPM, para a apresentação dos resultados, foram selecionados quatro alunos. Aos dados relativos a estes quatro alunos foi feita uma análise mais pormenorizada das estratégias utilizadas. Os dados foram analisados de forma descritiva e interpretativa.

Os quatro alunos foram selecionados tendo em conta os critérios seguintes: diferentes preferências visuais (de acordo com os resultados do IPM), diferentes desempenhos prévios ao estudo das funções (com base nas classificações do 1.º período e nas observações que foram sendo feitas por mim e pelo meu colega de estágio) e diferentes níveis de compreensão das funções (evidenciados nas primeiras aulas sobre esse tema, com base nas respostas que os alunos foram dando às questões que lhes coloquei e nas observações realizadas). Apresento, de seguida, os quatro alunos selecionados: Mariana, André, Diogo e Isabel (nomes fictícios).

A Mariana é uma boa aluna a funções, trabalhadora, inteligente e atenta. No entanto, insegura e, por isso, só participa quando tem a certeza de que a sua resposta está certa. Não apresenta dificuldades significativas de aprendizagem, mas, normalmente, comete erros de distração devido à rapidez de leitura dos enunciados. Após a análise das resoluções do teste e das respostas ao questionário, a Mariana obteve um total de 12 pontos e, por isso, é considerada não visual.

O André é um bom aluno a funções, inteligente e atento. Semelhante à Mariana, também é inseguro. No entanto, só participa quando questionado diretamente. Não apresenta dificuldades relevantes de aprendizagem e costuma cometer erros de distração durante a resolução de tarefas. O André, após a análise das resoluções do teste e das respostas ao questionário, obteve um total de 26 pontos e, por isso, é considerado visual.

O Diogo é muito bom aluno a funções, trabalhador, inteligente e participativo. Apesar de não apresentar dificuldades significativas de aprendizagem, é desorganizado a nível da escrita e da fala devido à rapidez de pensamento, cometendo erros de distração. O Diogo, após a análise das resoluções do teste e das respostas ao questionário, obteve um total de 10 pontos e, por isso, é considerado não visual.

A Isabel é muito boa aluna a funções, trabalhadora, inteligente, atenta e participativa. Quando participa, explica muito bem o seu pensamento, apesar de, muitas vezes, não ter estratégias muito diretas. Não apresenta dificuldades relevantes de aprendizagem, cometendo apenas erros de distração devido à rapidez de leitura dos enunciados. A Isabel, após a análise das resoluções do teste e das respostas ao questionário, obteve um total de 25 pontos e, por isso, é considerada visual.

4.2. 2.^a fase do estudo: Recolha de dados sobre a aprendizagem do tema das funções

Após a aplicação do IPM, foi feito um ensaio para um estudo de caso com os quatro alunos selecionados, referidos anteriormente. Não foi realizado um estudo de caso (múltiplo) porque o tempo de recolha de dados não foi suficientemente longo para que se pudesse considerar o “percurso” de cada aluno como um caso.

A informação acerca das aprendizagens dos alunos do tema das funções foi recolhida de duas formas: através das suas produções escritas e das suas respostas a uma entrevista com tarefas realizada a cada aluno selecionado. As produções escritas dos alunos são as resoluções de tarefas, sobre funções, de natureza diversificada: ficha 17 e ficha 18 (Anexo 1, Anexo 2, Anexo 3, Anexo 4, Anexo 5, Anexo 6 e Anexo 7). As entrevistas que são semiestruturadas baseadas num conjunto de tarefas que são propostas aos alunos. O propósito maior é estimular os alunos a pensar em voz alta enquanto resolvem as tarefas, havendo também a oportunidade de os ir questionando sobre as suas opções e sobre outros aspetos que se mostrem emergentes – no caso deste estudo, estava particularmente interessada em compreender como os alunos usavam imagens visuais na resolução de tarefas sobre funções.

As entrevistas com tarefas foram realizadas aos quatro alunos selecionados, dos quais também foram recolhidas as respetivas produções escritas. Estas entrevistas foram realizadas online, através da plataforma de videoconferência Zoom, o que permitiu que fossem áudio-gravadas. As entrevistas com tarefas incidiram em tarefas de natureza diversificada, após a lecionação do tema das funções. Ao longo da resolução das tarefas, os alunos foram vocalizando o seu pensamento, o que é importante para se perceber o fio condutor do seu raciocínio. Houve alguns momentos de silêncio e de discurso confuso, e, em resposta a esses momentos, eu perguntava sobre o que o aluno

estava a pensar e pedia para repetir o que disse, respetivamente. Após a resolução das tarefas propostas, tive a possibilidade de aprofundar mais as preferências visuais dos alunos, procurando também perceber melhor como eles recorriam a imagens visuais na resolução das tarefas.

As entrevistas com tarefas foram realizadas em dois dias, 19 e 23 de março, de forma a acomodar as conveniências dos alunos selecionados. De modo a cumprir as considerações éticas exigidas, foi pedida autorização aos encarregados de educação dos alunos entrevistados (Anexo 19).

Uma das tarefas para as entrevistas foi escolhida com base no que os alunos aprenderam sobre transformações gráficas; as restantes tarefas tinham como base a interpretação de situações problemáticas recorrendo a funções. Outro critério importante para a escolha das tarefas foi a informação veiculada no enunciado das tarefas, visual ou não visual, e as estratégias de resolução mais prováveis, visual ou não visual.

O enunciado da tarefa 1 é visual e a estratégia de resolução esperada é igualmente visual. Esta tarefa é sobre transformações gráficas, sendo a função original apresentada graficamente num referencial ortonormado. Pede-se para ser representada a função transformada (figura 14). Um aspeto que considero que não funcionou muito bem nesta tarefa foi que havia muitos “-1” na expressão da função $g(x)$, algo que causava um pouco de confusão quando os alunos se queriam referir a uma transformação.

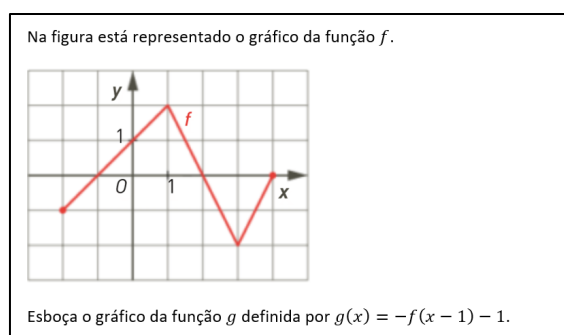


Figura 14 – Enunciado da tarefa 1 da entrevista com tarefas

A tarefa 2 é uma tarefa de enunciado não visual cuja resolução terá a mesma probabilidade de ser visual ou não visual. Esta tarefa foi adaptada do manual “Novo Espaço” (Costa & Rodrigues, 2017) do 10.º ano de Matemática A, que não é o manual adotado pela escola, e é semelhante a um problema que alguns alunos tentaram

resolver na ficha 23, proposta previamente pela orientadora. Nesta tarefa os alunos têm de interpretar a situação problemática e responder às questões, podendo utilizar funções, gráfica ou algebricamente, ou, por exemplo, tentativa-erro (figura 15).

Duas localidades A e B estão ligadas entre si por uma linha de caminho de ferro, numa extensão de 459 km.

No mesmo instante, um comboio parte de A com destino a B e outro parte de B com destino a A. Admite que as velocidades são constantes, sendo de 170 km/h a do comboio que parte de A e de 180 km/h a do comboio que parte de B.

Quanto tempo depois de partirem demoram os comboios a se cruzarem?

Qual dos comboios chega primeiro ao seu destino? Quanto tempo antes do outro?

Figura 15 – Enunciado da tarefa 2 da entrevista com tarefas

A tarefa 3 é uma tarefa de enunciado não visual cuja resolução considero ter uma maior probabilidade de ser não visual. Esta tarefa é semelhante a alguns exercícios do manual adotado pela escola, “Novo Ípsilon 10” (Andrade, Pereira & Pimenta, 2020), tendo como objetivo analisar o pensamento dos alunos ao ser pedida uma função de um certo tipo (figura 16).

Seja $f(x) = (5 - p^2)x - 6$, sendo $p \in \mathbb{R}$.

Para que valor(es) de p a função f é constante?

Explica o teu raciocínio.

Figura 16 – Enunciado da tarefa 3 da entrevista com tarefas

A tarefa 4 é uma tarefa de enunciado visual cuja resolução considero ter uma maior probabilidade de ser visual. Nesta tarefa há uma pequena possibilidade de estratégias não visuais, se os alunos optarem por encontrar a expressão algébrica de alguma secção do gráfico e comparar os declives dos diferentes segmentos. Esta tarefa é adaptada da brochura *Funções 10.º ano* (Teixeira et al., 1997). O seu objetivo é analisar gráficos. A última questão desta tarefa está relacionada com transformações gráficas em situações problemáticas (figura 17).

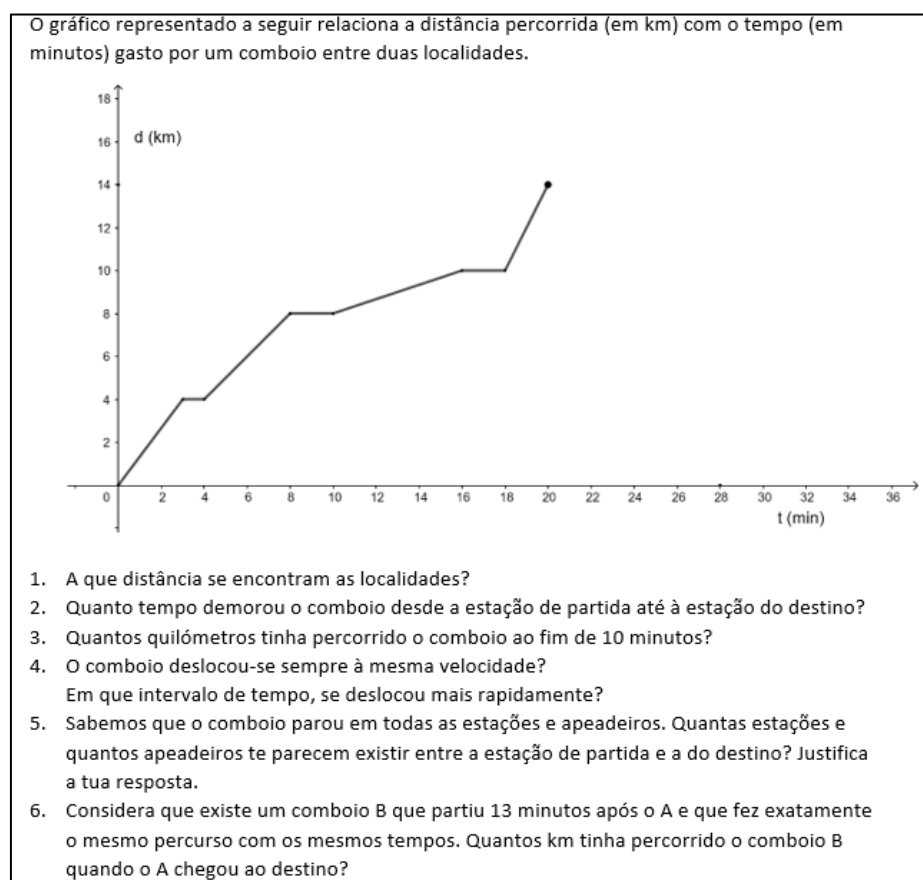


Figura 17 – Enunciado da tarefa 4 da entrevista com tarefas

Após a resolução destas quatro tarefas, coloquei ainda algumas questões a cada aluno com o objetivo de analisar as suas preferências visuais mais a fundo, isto é, indo além da informação recolhida através do IPM. As questões que constam do guião da entrevista são as seguintes:

1) Das questões propostas, qual é que achaste mais interessante? E menos? Porquê? Com esta questão pretendia saber qual das questões os alunos preferiam, mais visuais ou mais algébricas.

2) Nas funções gostas mais de trabalhar com as representações gráficas ou com expressões matemáticas?

Com esta questão pretendia saber se o tipo de representação das funções que preferiam era concordante com os resultados do IPM.

3) Quando resolves tarefas com funções, por exemplo as que realizaste agora, costumavas fazer esquemas/gráficos/tabelas? A que tipo de representações costumavas

recorrer? Fazes na tua cabeça, no papel ou preferes recorrer à tecnologia (calculadora/GeoGebra)?

Com esta questão, pretendia saber o tipo de representação que os alunos costumavam utilizar e os recursos que utilizavam.

4) Quando trabalhas com transformações gráficas, imaginas as translações ou contrações do gráfico da função, pensas o que acontece às coordenadas de cada ponto ou pensas mais nas expressões matemáticas?

Com esta questão, pretendia saber qual é o tipo de pensamento que os alunos têm quando trabalham com transformações gráficas de funções.

5) Gostas de funções? Que temas de matemática gostas mais? Porquê?

Com esta questão, pretendia saber as preferências dos alunos acerca dos temas da matemática escolar.

5. Análise do Instrumento de Processamento Matemático

5.1. Mariana

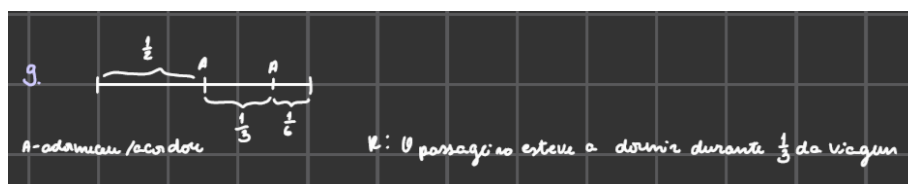
A Mariana, após a análise das respostas ao questionário e das resoluções do teste, obteve um total de 12 pontos e, por isso, é considerada não visual. Na resolução dos problemas do IPM, a Mariana recorreu 4 vezes a estratégias de resolução visuais (Questões B-2, B-4, B-7, B-9), 4 vezes a estratégias de resolução mistas (Questões A-4, A-5, B-1, B-11) e 10 vezes a estratégias de resolução não visuais.

Método visual

Os quatro problemas que foram resolvidas apenas por um método visual apresentam situações com descrição de movimento de objetos ou pessoas.

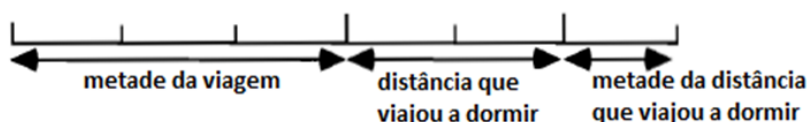
B-9. Um passageiro adormeceu quando se encontrava a meio da sua viagem. Quando acordou, ainda lhe faltava percorrer metade da distância percorrida enquanto esteve a dormir. Determine a fração da totalidade da viagem em que o passageiro esteve a dormir.

Resolução:



Questionário:

Resolução 1: Desenhei um diagrama a representar o trajeto da viagem.



Pelo diagrama vejo que se toda a distância percorrida corresponde a 6 partes, ele dormiu 2 partes, isto é, $\frac{1}{3}$ da totalidade da viagem.

Figura 18 – Respostas da Mariana à questão B-9 do IPM

Na figura 18, apresento a resolução da Mariana à questão B-9 do IPM, na qual recorre a um diagrama que representa o trajeto da viagem dividido em secções, feitas a partir do enunciado do problema. O diagrama não só permitiu interpretar o problema, mas também resolvê-lo. No questionário, a Mariana selecionou uma opção que se aproxima bem à forma como pensou e isto aconteceu em todas as questões em que recorreu a um diagrama.

Método misto

Nas resoluções mistas, a Mariana recorreu uma vez à imaginação da situação, o que poderia ser considerado visual, no entanto a resolução apresentada tem uma forte componente não visual na sua resolução, sendo assim considerada mista; e três vezes à representação visual para visualizar melhor os problemas e de seguida resolvê-los com uma estratégia de resolução não visual. Nestes três problemas, a componente visual serviu como um apoio para a interpretação da situação problemática para a posterior resolução não visual, recorrendo à linguagem verbal (A-4), linguagem aritmética (A-5) e linguagem algébrica (B-11).

Na figura 19, apresento as respostas da Mariana à questão B-11 do IPM, na qual recorreu a um diagrama para representar a situação problemática, representando os recipientes. A partir do diagrama equacionou o problema e, recorrendo à linguagem algébrica resolveu-o. No final, apresentou uma verificação dos resultados em formato de diagrama. Na sua resolução variou duas vezes de método de resolução utilizado: visual, depois não visual e novamente visual, por isso, considero que é uma resolução mista. No questionário, apesar de poder selecionar mais de uma opção o que representaria de modo mais fiel aquilo que escreveu na sua resolução, selecionou apenas uma das estratégias utilizadas, que poderá ter sido a estratégia que a aluna considerou ser mais útil na resolução, mesmo que o tenha feito de forma inconsciente, neste caso a que apresentava uma resolução visual, o que corresponde a uma parte do seu raciocínio. Isto também aconteceu nas questões A-4 e A-5, mas, nestes casos, selecionou apenas a estratégia não visual.

B-11. Um recipiente contém o dobro do leite que outro recipiente. Verteu-se 20 litros de leite de cada um dos recipientes e, assim, o primeiro recipiente ficou com três vezes mais leite do que o segundo recipiente. Quantos litros de leite existiam, inicialmente, em cada um dos recipientes?

Resolução:

11. $y = 2x$ x

$\downarrow -20$ $\downarrow -20$

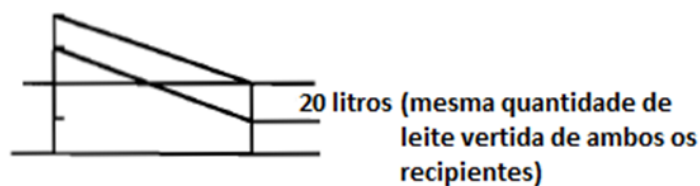
$y - 20$ $x - 20$

$\begin{cases} y = 2x \\ y - 20 = 3(x - 20) \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \\ 2x - 20 = 3x - 60 \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ 2x - 3x = -60 + 20 \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ x = 40 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 80 \rightarrow \text{recipiente grande} \\ x = 40 \rightarrow \text{recipiente pequeno} \end{cases}$

verificação: $\begin{matrix} \text{dobro} \\ 80 & 40 \\ \swarrow \searrow \\ -20 & -20 \\ \downarrow \downarrow \\ 60 & 20 \end{matrix}$ $3 \times$

Questionário:

Resolução 2: Desenhei um diagrama que representa as quantidades de leite.



A partir do diagrama vejo que, para que o primeiro recipiente tenha três vezes mais leite do que o segundo depois de se verter 20 litros de leite de cada recipiente, então o segundo recipiente deve ficar com 20 litros de leite. Assim, as quantidades iniciais de leite nos recipientes são 40 litros e 80 litros.

Figura 19 – Respostas da Mariana à questão B-11 do IPM

Método não visual

Os restantes problemas foram resolvidos recorrendo, maioritariamente, à linguagem algébrica (A-2, A-3, A-6, B-3, B-5, B-10, B-12), tendo havido, também, resoluções com linguagem verbal (A-1), raciocínio lógico (B-6) e linguagem aritmética (B-8).

Na figura 20, apresento as respostas à questão B-3 do IPM, na qual a Mariana começou por equacionar o problema e de seguida resolveu-o recorrendo à linguagem algébrica. No questionário, selecionou a resolução que refere o recurso a símbolos e equações, o que representa de forma fiel a sua resolução. Nas perguntas em que recorreu à

linguagem algébrica, no questionário selecionou quase sempre resoluções semelhantes às suas, que descreviam bem as estratégias utilizadas. Na questão B-8, apesar de ter utilizado linguagem aritmética para resolver o problema, no questionário, selecionou uma resolução com linguagem algébrica, que não é uma opção que represente fielmente a sua estratégia. Nas restantes selecionou resoluções que explicam por palavras o raciocínio utilizado.

B-3. Atualmente, a idade da mãe é sete vezes a idade da filha. A diferença entre as suas idades é de 24 anos. Qual é a idade atual de cada uma delas?

Resolução:

3. $x = 7y$
 idade da mãe idade da filha

$x - y = 24$ anos

$\left\{ \begin{array}{l} x = 7y \\ x - y = 24 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 7y - y = 24 \\ 6y = 24 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y = 4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 7 \times 4 \\ x = 28 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y = 4 \end{array} \right.$

R: a mãe tem 28 anos e a filha tem 4 anos

Questionário:

Resolução 2: Resolvi este problema usando símbolos e equações. Por exemplo, Seja x a idade da filha. Então a idade da mãe é $7x$ anos. Assim, a diferença entre as suas idades é de $6x$ anos. Logo, $6x = 24$ e então $x = 4$.
 A filha tem 4 anos e a mãe tem 28 anos.

Figura 20 – Respostas da Mariana à questão B-3 do IPM

5.2. André

O André, após a análise das respostas ao questionário e das resoluções do teste, obteve um total de 26 pontos e, por isso, é considerado visual. Na resolução dos problemas do IPM, o André recorreu cinco vezes a estratégias de resolução não visuais (Questões A-6, B-2, B-3, B-5, B-11) e 13 vezes a estratégias de resolução visuais.

Método não visual

Quase todos os cinco problemas que foram resolvidos por um método não visual apresentam contextos que envolvem situações de proporcionalidade.

Na figura 21, apresento as respostas ao André à questão B-3 do IPM, na qual é possível ver o recurso a técnicas algébricas, que é uma estratégia não visual. Começou por definir as variáveis e, de seguida resolveu algebricamente um sistema. No questionário deste problema, o aluno selecionou uma resolução semelhante à sua, que também recorre a técnicas algébricas.

B-3. Atualmente, a idade da mãe é sete vezes a idade da filha. A diferença entre as suas idades é de 24 anos. Qual é a idade atual de cada uma delas?

Resolução:

B-3. $x \rightarrow$ corresponde à idade da mãe
 $y \rightarrow$ corresponde à idade da filha

$$\begin{cases} x = 7y \\ x - y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 7y - y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 6y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7y \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \times 4 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 4 \end{cases}$$

Portanto a mãe tem 28 anos e a filha 4 anos.

Questionário:

Resolução 2: Resolvi este problema usando símbolos e equações. Por exemplo, Seja x a idade da filha. Então a idade da mãe é $7x$ anos. Assim, a diferença entre as suas idades é de $6x$ anos. Logo, $6x = 24$ e então $x = 4$.
 A filha tem 4 anos e a mãe tem 28 anos.

Figura 21 – Respostas do André à questão B-3 do IPM

Nas restantes escolhas do questionário, o André não selecionou opções que refletiam de forma muito próxima aquilo que escreveu nas resoluções do teste, tendo deixado duas seleções por fazer. Nas questões A-6 e B-2, selecionou resoluções que incluíam representações de diagramas, no entanto nas suas resoluções não há evidências dessa estratégia, sendo, por isso, consideradas não visuais. Nas questões B-5 e B-11, figuras 22 e 23, não selecionou nenhuma das respostas, mas através da análise das resoluções é evidente que recorreu a métodos não visuais, com recurso à linguagem algébrica e tentativa-erro com linguagem aritmética, respetivamente.

B-5. No início, o preço de um quilo de açúcar era o triplo do preço de um quilo de sal. Mais tarde, o preço de um quilo de sal aumentou o correspondente a metade do seu preço inicial, enquanto o preço de um quilo de açúcar não sofreu alterações. Se o preço atual de um quilo de sal é de 30 cêntimos, qual é o preço atual de um quilo de açúcar?

Resolução:

B-5.

$x \rightarrow$ quilo do açúcar

$y \rightarrow$ quilo do sal

$x = 3y$ $y = \frac{30}{2} \Rightarrow y = 15 \text{ cêntimos}$

$x = 0,45 \text{ cêntimos}$

R: Um quilo de açúcar custa 0,45 cêntimos

Figura 22 – Respostas do André à questão B-5 do IPM

B-11. Um recipiente contém o dobro do leite que outro recipiente. Verteu-se 20 litros de leite de cada um dos recipientes e, assim, o primeiro recipiente ficou com três vezes mais leite do que o segundo recipiente. Quantos litros de leite existiam, inicialmente, em cada um dos recipientes?

Resolução:

B-11.

Inicialmente os recipientes tinham respetivamente 40 e 80 litros de leite

$[40] - 20 = [20]$ $[80] - 20 = [60]$

R: Existem 40 e 80 litros inicialmente nos recipientes

Figura 23 – Respostas do André à questão B-11 do IPM

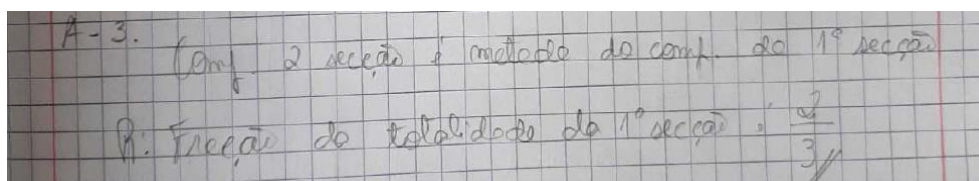
Método visual

Nas restantes 13 questões, o André recorreu, maioritariamente a diagramas (Questões A-1, A-2, A-4, A-5, B-4, B-7, B-9, B-10, B-12) e, algumas vezes imaginou as situações (Questões A-3, B-1, B-6, B-8).

Apresento, na figura 24, as respostas do André à questão A-3 do IPM. À primeira vista, a resolução parece não visual devido ao facto de apenas apresentar linguagem verbal, mas através do questionário percebe-se que o aluno imaginou o percurso e a partir disso chegou à resposta, pois seleccionou a resolução 2.

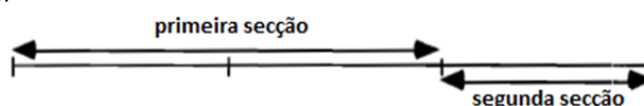
A-3. Um caminho em linha reta está dividido em duas secções de comprimentos diferentes. O comprimento da segunda secção é metade do comprimento da primeira secção. Que fração da totalidade do caminho representa a primeira secção?

Resolução:



Questionário:

Resolução 1: Resolvi este problema desenhando um diagrama que representa o caminho:



A partir do diagrama pode ser visto que a primeira secção é dois terços de todo o caminho.

Resolução 2: Usei o mesmo método que o ilustrado na resolução 1 mas apenas desenhiei o diagrama “na minha cabeça” (e não no papel!).

Figura 24 – Respostas do André à questão A-3 do IPM

No questionário das restantes questões que foram resolvidas por métodos visuais, o aluno seleccionou as resoluções que apresentavam diagramas, que se assemelham às suas resoluções. Mas não seleccionou nenhuma opção na questão B-10, apresentada na figura 25, que considerei visual devido à resolução esquemática do problema.

B-10. Uma balança de pratos fica em equilíbrio se colocar num prato um queijo e no outro prato três quartos de um outro queijo igual ao anterior e um peso de $\frac{3}{4}\text{kg}$. Quanto pesa o queijo?

Resolução:

Handwritten solution for problem B-10:

$$1 \text{ queijo} = \frac{3}{4} \text{ do queijo} + \frac{3}{4} \text{ kg}$$

$$\frac{3}{4} \text{ kg} = 0,75 \text{ kg}$$

$$1,5 \text{ kg}$$

R: o queijo pesa 1,5 kg

Figura 25 – Respostas do André à questão B-10 do IPM

5.3. Diogo

O Diogo, após a análise das respostas ao questionário e das resoluções do teste, obteve um total de 10 pontos e, por isso, é considerado não visual. Na resolução dos problemas do IPM, o Diogo recorreu cinco vezes a estratégias de resolução visuais (Questões A-3, B-1, B-2, B-4, B-9) e 13 vezes a estratégias de resolução não visuais. Todas as resoluções foram acompanhadas por um comentário do aluno no qual explica como pensou.

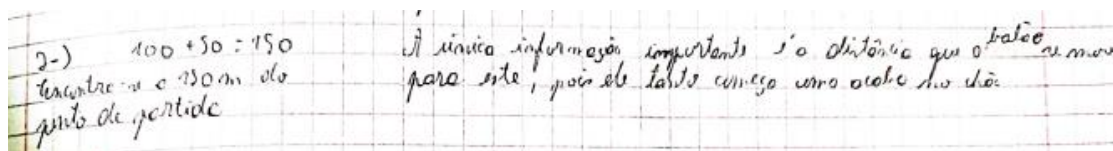
Método visual

Dos cinco problemas que foram resolvidos apenas por um método visual, um foi resolvido recorrendo a um diagrama (Questão B-4) e 4 recorrendo à imaginação.

Na figura 26, apresento a resolução do Diogo à questão B-2 do IPM, que, à primeira vista, parece uma resolução algébrica, pois o aluno resolveu o problema apresentando alguns cálculos para os quais utilizou apenas a informação relevante do enunciado, como o próprio refere. Mas a partir da sua resposta ao questionário, sabe-se que imaginou o percurso do balão, o que lhe permitiu responder ao problema e, por isso, a estratégia utilizada é visual.

B-2. Um balão começou por subir 200m, verticalmente, a partir do chão, depois moveu-se 100m para este e caiu 100m na vertical. De seguida, o balão deslocou-se 50m para este e finalmente caiu verticalmente no chão. A que distância se encontra o balão do ponto de partida?

Resolução:



Questionário:

Resolução 1: Imaginei o percurso do balão e calculei a distância entre os pontos de partida e chegada. Determinei que a distância entre os pontos de partida e chegada do balão é igual a $100 + 50 = 150\text{m}$.

Figura 26 – Respostas do Diogo à questão B-2 do IPM

Com as respostas do Diogo ao questionário, consegui perceber que algumas resoluções que, à primeira vista pareciam não visuais, afinal eram visuais, pois recorreu à imaginação para construir na mente uma figura. Apenas na resolução escrita da questão B-3 o Diogo escreveu que tinha imaginado a situação na sua mente e que tinha resolvido o problema apoiando-se nessa imagem mental. Nas restantes questões, nada apontava para um método de resolução visual. Portanto essa parte do questionário foi essencial para perceber que o Diogo tinha recorrido a um método de resolução visual. Todos estes problemas apresentam situações com descrição de movimento de objetos ou pessoas.

Método não visual

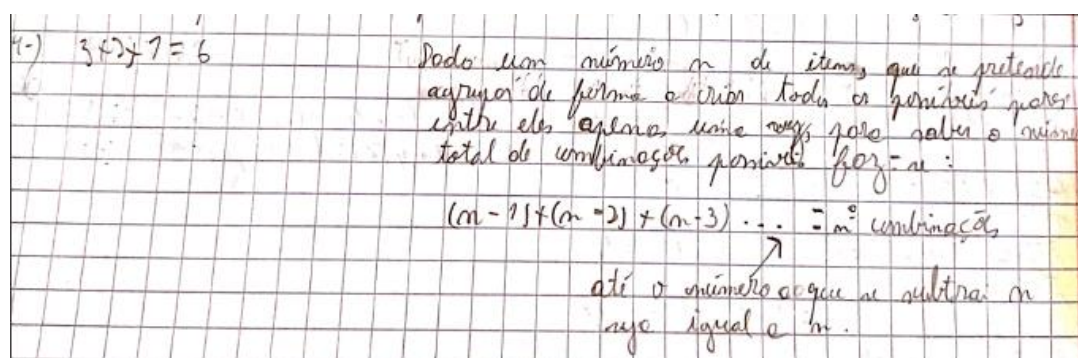
Os restantes problemas foram resolvidos recorrendo à linguagem algébrica e aritmética.

Na figura 27, apresento as respostas à questão A-4 do IPM, na qual o Diogo recorreu à linguagem algébrica e aritmética, e, portanto, a métodos não visuais. Do lado direito explicou que deduziu uma fórmula geral (linguagem algébrica) que aplicou do lado esquerdo a um caso específico (linguagem aritmética). No questionário, não selecionou nenhuma das resoluções apresentadas, mas referiu “No problema 4, deduzi uma fórmula em que com ela, obtenho o número total de combinações possíveis de pares

dado um conjunto com n itens. A fórmula que usei foi: $(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) \dots$ soma-se este binómio $(n - x)$ até $n - x = 1$.", o que permite entender melhor o pensamento do aluno.

A-4 Apenas quatro equipas participaram numa competição de futebol. Cada equipa jogou uma vez contra cada uma das outras equipas. Quantas partidas de futebol existiram na competição?

Resolução:



Questionário:

No problema 4, deduzi uma fórmula em que com ela, obtenho o número total de combinações possíveis de pares dado um conjunto com n itens. A fórmula que usei foi : $(n-1)+(n-2)+(n-3)\dots$ soma-se este binómio $(n-x)$ até $n-x = 1$.

Figura 27 – Respostas do Diogo à questão A-4 do IPM

Nos problemas em que recorreu à linguagem algébrica, no questionário selecionou sempre uma resolução semelhante à sua, que descrevia bem a estratégia utilizada, exceto nas questões A-1 e A-4, nas quais não selecionou nenhuma das opções, mas explicou bem o raciocínio utilizado, sendo, por isso, consideradas resoluções não visuais. Nas questões A-6 e B-8 utilizou linguagem aritmética para resolver os problemas, mas no questionário selecionou resoluções com linguagem algébrica, apesar de ambas serem não visuais, o Diogo não selecionou as opções que mais se aproximam às suas estratégias de resolução.

5.4. Isabel

A Isabel, após a análise das respostas ao questionário e das resoluções do teste, obteve um total de 25 pontos e, por isso, é considerada visual. Na resolução dos problemas do IPM, a Isabel recorreu duas vezes a estratégias de resolução não visuais (Questões B-3, B-5), sete vezes a estratégias de resolução mistas (Questões A-2, A-3, A-6, B-6, B-9, B-10, B-11) e nove vezes a estratégias de resolução visuais.

Método não visual

Os dois problemas que foram resolvidos por um método não visual apresentam contextos que envolvem situações de proporcionalidade.

B-5. No início, o preço de um quilo de açúcar era o triplo do preço de um quilo de sal. Mais tarde, o preço de um quilo de sal aumentou o correspondente a metade do seu preço inicial, enquanto o preço de um quilo de açúcar não sofreu alterações. Se o preço atual de um quilo de sal é de 30 centimos, qual é o preço atual de um quilo de açúcar?

Resolução:

Handwritten solution for problem B-5:

Início
 $Aç - 1kg € \rightarrow 3x$
 $Sal - 1kg € \rightarrow x$

Tarde
 $Aç - 1kg € \rightarrow 3x$
 $Sal - 1kg € \rightarrow x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$

$3x \rightarrow 30 \text{ centimos}$
 $3x \rightarrow 2 = \frac{3 \times 30}{2} = 45 \text{ centimos}$
 $3x \times 2 = 60 \text{ centimos}$

Questionário:

Resolução 4: Resolvi o problema usando símbolos e equações. Por exemplo:

Seja x o preço inicial de 1kg de sal.

Então o preço de 1kg de açúcar é $3x$.

Depois do aumento, o preço de 1kg de sal é $1,5x$.

Assim, o preço de 1kg de açúcar é o dobro do preço atual de 1kg de sal, ou seja, o preço de 1kg de açúcar é 60 centimos.

Figura 28 – Respostas da Isabel à questão B-5 do IPM

Na figura 28, apresento as respostas da Isabel à questão B-5 do IPM, na qual é possível ver o recurso à linguagem algébrica, que é uma estratégia não visual. Começou por apresentar os dados do enunciado, indicando “Início” e “Tarde”. De seguida aplicou a regra de três simples e com manipulações algébricas chegou à resposta. No questionário deste problema, a aluna selecionou uma resolução semelhante à sua, que também recorre à linguagem algébrica e o mesmo aconteceu para a questão B-3.

Método misto

Nas resoluções mistas, a Isabel recorreu à representação visual para visualizar melhor os problemas e, de seguida, resolvê-los com uma estratégia de resolução não visual, ou seja, a componente visual serviu como um apoio para a interpretação da situação problemática para uma posterior continuação com recurso à linguagem algébrica ou aritmética (a linguagem aritmética surgiu apenas na questão A-2).

Na figura 29, apresento as respostas da Isabel à questão A-6 do IPM, na qual recorreu a um diagrama para representar a situação problemática, mantendo as proporções referidas no enunciado. A partir do diagrama percebeu que proporções estavam envolvidas e resolveu o problema recorrendo à regra de três simples com linguagem algébrica. Devido ao recurso a um método de resolução visual e a um não visual, sendo ambos importantes para a resolução dos problemas, esta resolução é considerada mista.

A-6. Num certo dia, retirou-se um terço das batatas que existiam num armazém. Sabendo que restaram no armazém 80 quilos de batatas, quantos quilos de batatas existiam inicialmente?

Resolução:

Handwritten student solution on graph paper:

Diagram: A box labeled "batatas do armazém" with a portion removed, and "80kg" written below it.

Equation: $\frac{2}{3}x = 80$

Solution: $x = 80 \times \frac{3}{2} = 80 \times \frac{3}{2} = 40 \times 3 = 120$

Final answer: 120 kg //

Questionário:

Resolução 2: Resolvi este problema usando símbolos e equações. Por exemplo:

Seja x a quantidade inicial de batatas no armazém.

Então a quantidade retirada é $\frac{1}{3}x$.

A quantidade de batatas restante no armazém é $\frac{2}{3}x$.

Assim, $\frac{2}{3}x = 80$ e $x = 120$.

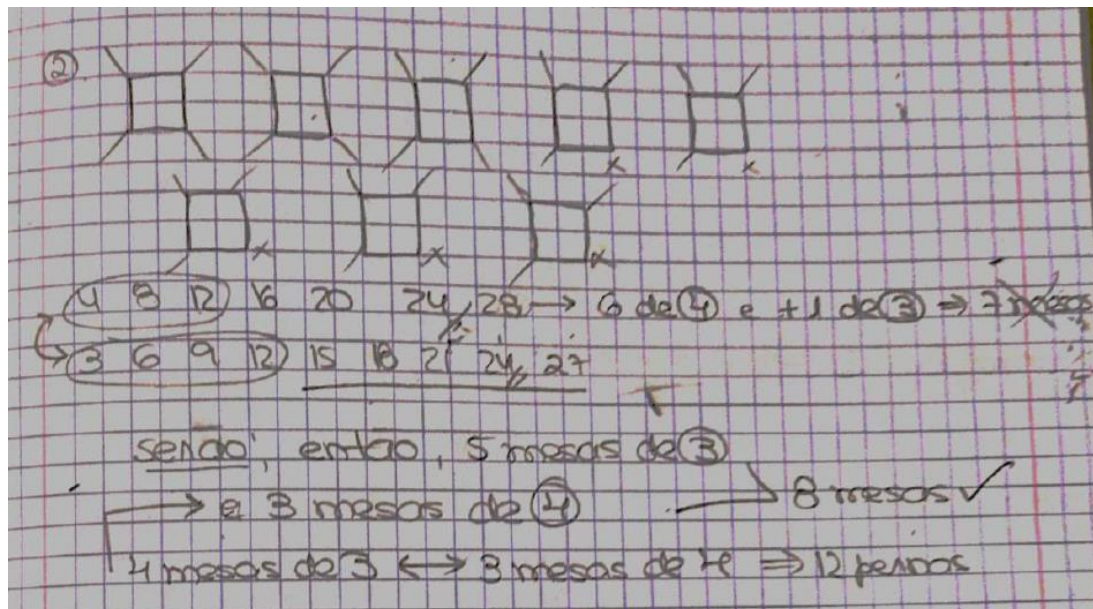
Então, a quantidade inicial de batatas é de 120kg.

Figura 29 – Respostas da Isabel à questão A-6 do IPM

No questionário, apesar de poder selecionar mais de uma opção, o que representaria de modo mais fiel aquilo que escreveu na sua resolução, selecionou apenas uma das estratégias utilizadas, que poderá ter sido a estratégia que a aluna considerou ser a mais importante para a resolução, mesmo que tenha feito isso de forma inconsciente, neste caso selecionou a que apresentava uma resolução não visual, o que corresponde a uma parte do seu raciocínio. Isto também aconteceu nas restantes questões em que utilizou um método de resolução misto, sendo que nas questões A-3 e B-10, selecionou apenas a estratégia visual e nas questões B-6, B-9, B-11 selecionou apenas as não visuais.

A-2 Existem oito mesas numa casa. Algumas das mesas têm quatro pernas enquanto as outras têm três pernas. No total, as mesas têm 27 pernas. Quantas das mesas têm quatro pernas?

Resolução:



Questionário:

Resolução 4: Resolvi este problema desenhando as mesas: primeiro desenhei-as como se todas as mesas tivessem apenas 3 pernas, depois fui acrescentando uma perna a cada mesa até que o número total de pernas fosse igual a 27.



Verifiquei que existem 3 mesas com 4 pernas (e 5 mesas com 3 pernas).

Figura 30 – Respostas da Isabel à questão A-2 do IPM

Na questão A-2 (figura 30), a Isabel apresentou duas estratégias, uma visual e uma não visual. Para a estratégia visual, representou as oito mesas colocando todas com três pernas, e depois por tentativa-erro foi acrescentando a quarta perna. Na estratégia não visual, escreveu os múltiplos de 4, até 28, que passa do número total de pernas (para indicar o número de pernas totais quando cada mesa tem quatro pernas), e de 3 até 27, que corresponde ao número total de pernas (para indicar o número de pernas totais quando cada mesa tem três pernas). Como tinha de haver mesas dos dois tipos, a aluna assinalou os múltiplos um valor abaixo do 28 e 27, em cada lista de múltiplos, mostrando

que considerou esse dado. Também por tentativa-erro foi verificando quantas mesas obterá ao agrupar diferentes números de mesas. Nas duas resoluções obteve o mesmo resultado, e pensa-se que uma das resoluções serviu para confirmar os resultados da outra, sendo assim considerada mista. No questionário apenas selecionou uma resolução visual, apesar de poder assinalar mais de uma opção o que representaria de modo mais fiel a resolução apresentada, isto poderá ter acontecido por ter considerado essa estratégia como sendo a mais útil para a resolução, mesmo que tenha feito isso de forma inconsciente.

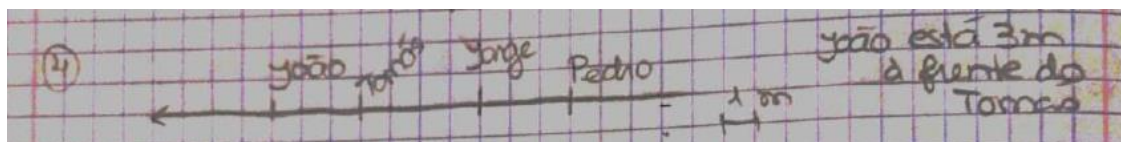
Método visual

Os restantes problemas foram resolvidos recorrendo maioritariamente a diagramas e uma vez a uma tabela.

Na figura 31, apresento as respostas à questão B-4 do IPM, na qual a Isabel apresentou de forma esquemática a posição de cada atleta na pista, utilizando uma quadricula para representar um metro, o que permitiu visualizar diretamente a resposta. No questionário de todos os problemas resolvidos com esta estratégias, a Isabel escolheu sempre a estratégia que mais se assemelhava à sua. Estes problemas apresentam situações com descrição de movimento de objetos ou pessoas.

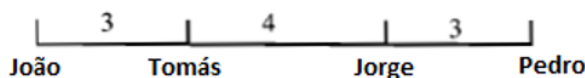
B-4. Numa corrida de atletismo o João está 10m à frente do Pedro, o Tomás está 4m à frente do Jorge e o Jorge está 3m à frente do Pedro. Quantos metros está o João à frente do Tomás?

Resolução:



Questionário:

Resolução 2: Desenhei um diagrama a representar as quatro pessoas e depois determinei a distância entre o João e o Tomás.



O João está 3m à frente do Tomás.

Figura 31 – Respostas da Isabel à questão B-4 do IPM

5.5. Síntese

Os quatro alunos analisados recorreram quer a métodos visuais, quer a métodos não visuais, sendo que, no método visual, o mais frequente foi o recurso a diagramas e, no não visual, foi o recurso à linguagem algébrica, nomeadamente equações e sistemas. Os alunos que recorreram a métodos mistos, na maioria das vezes utilizaram as representações visuais como um apoio para uma posterior resolução não visual.

Nos quadros 4 e 5, apresento, para cada um dos problemas do IPM de cada um dos quatro alunos, as representações utilizadas, a pontuação atribuída e a semelhança da opção selecionada no questionário com a resolução apresentada no teste.

Nas colunas “Quest.”:

- “Sim” significa que a resolução do aluno é semelhante à do questionário;
- “Não” significa que a resolução do aluno é muito diferente da selecionada no questionário;
- “Insuf.” significa que a resolução do aluno é semelhante à selecionada no questionário, mas apresenta algumas diferenças significativas, por exemplo, quando o aluno recorre a várias estratégias e no questionário indica apenas uma;
- “Ns” significa que o aluno não selecionou nenhuma opção do questionário, nem fez nenhum comentário a explicar o raciocínio;
- “Ns coment” significa que o aluno não selecionou nenhuma opção do questionário, mas fez um comentário a explicar o raciocínio.

Quadro 4 – Representações utilizadas pela Mariana e pelo André

Questão	Mariana			André		
	Representação utilizada	Pts	Quest.	Representação utilizada	Pts	Quest.
A-1	Linguagem verbal	0	Sim	Diagrama	2	Sim
A-2	Linguagem algébrica	0	Sim	Diagrama	2	Não
A-3	Linguagem algébrica	0	Sim	Imaginação	2	Sim
A-4	Diagrama Linguagem verbal	1	Insuf.	Diagrama	2	Sim
A-5	Diagrama Linguagem algébrica	1	Insuf.	Diagrama	2	Sim
A-6	Linguagem algébrica	0	Sim	Linguagem aritmética	0	Não
B-1	Imaginação Linguagem algébrica	1	Insuf.	Imaginação	2	Sim
B-2	Diagrama	2	Sim	Linguagem verbal	0	Não
B-3	Linguagem algébrica	0	Sim	Linguagem algébrica	0	Sim
B-4	Diagrama	2	Sim	Diagrama	2	Sim
B-5	Linguagem algébrica	0	Sim	Linguagem algébrica	0	Ns
B-6	Linguagem verbal	0	Sim	Imaginação	2	Sim
B-7	Diagrama	2	Sim	Diagrama	2	Sim
B-8	Linguagem aritmética	0	Não	Imaginação	2	Sim
B-9	Diagrama	2	Sim	Diagrama	2	Sim
B-10	Linguagem algébrica	0	Sim	Diagrama	2	Ns
B-11	Diagrama Linguagem algébrica	1	Insuf.	Linguagem aritmética	0	Ns
B-12	Linguagem algébrica	0	Sim	Diagrama	2	Sim

Quadro 5 – Representações utilizadas pelo Diogo e pela Isabel

Questão	Diogo			Isabel		
	Representação utilizada	Pts	Quest.	Representação utilizada	Pts	Quest.
A-1	Linguagem aritmética	0	Ns coment	Diagrama	2	Sim
A-2	Linguagem algébrica	0	Sim	Diagrama Linguagem aritmética	1	Insuf.
A-3	Imaginação	2	Sim	Diagrama Linguagem algébrica	1	Insuf.
A-4	Linguagem algébrica Linguagem aritmética	0	Ns coment	Tabela	2	Sim
A-5	Linguagem aritmética	0	Sim	Diagrama	2	Sim
A-6	Linguagem aritmética	0	Não	Diagrama Linguagem algébrica	1	Insuf.
B-1	Imaginação	2	Sim	Diagrama	2	Sim
B-2	Imaginação	2	Sim	Diagrama	2	Sim
B-3	Linguagem algébrica	0	Sim	Linguagem algébrica	0	Sim
B-4	Diagrama	2	Sim	Diagrama	2	Sim
B-5	Linguagem aritmética	0	Sim	Linguagem algébrica	0	Sim
B-6	Linguagem aritmética	0	Sim	Diagrama Linguagem algébrica	1	Insuf.
B-7	Linguagem aritmética	0	Sim	Diagrama	2	Sim
B-8	Linguagem aritmética	0	Não	Diagrama	2	Sim
B-9	Imaginação	2	Sim	Diagrama Linguagem algébrica	1	Insuf.
B-10	Linguagem algébrica	0	Sim	Diagrama Linguagem algébrica	1	Insuf.
B-11	Linguagem algébrica	0	Sim	Diagrama Linguagem algébrica	1	Insuf.
B-12	Linguagem algébrica	0	Sim	Diagrama	2	Sim

6. Análise das entrevistas

Neste capítulo, analiso os dados recolhidos através das entrevistas realizadas aos quatro alunos selecionados. Começo por analisar as suas respostas às tarefas propostas, em que lhes pedi para *pensarem em voz alta*, e depois aprofundo um pouco a análise das suas preferências visuais na resolução de tarefas com funções e do modo como usam as imagens visuais na resolução dessas tarefas.

6.1. Mariana

6.1.1. Resolução de tarefas sobre funções

A primeira tarefa da entrevista envolvia transformações gráficas de uma função definida por ramos, apresentada graficamente (figura 32, lado esquerdo). Na figura 32, do lado direito, apresento o gráfico elaborado pela Mariana, após ter feito todas as transformações gráficas que entendeu necessárias.

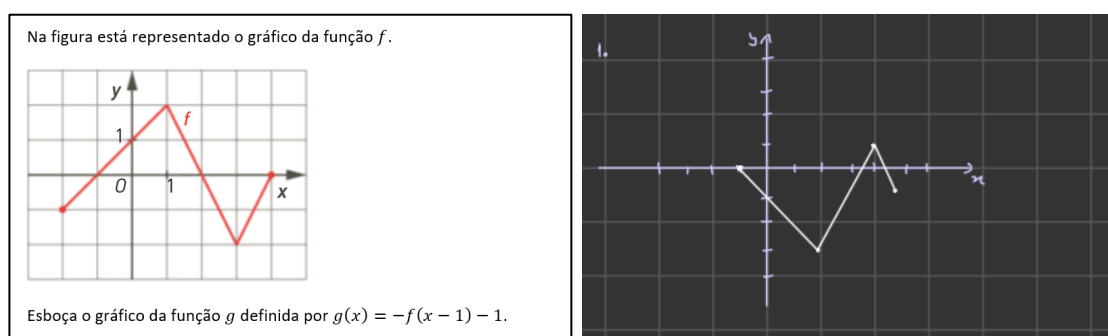


Figura 32 – Enunciado (à esquerda) e resolução da Mariana (à direita) da tarefa 1

A Mariana começou por ler o enunciado e retirar todas as informações importantes da expressão algébrica apresentada $g(x) = -f(x - 1) - 1$, tal como explicou durante a entrevista:

Se calhar será simétrico, porque tem um menos à frente do f e depois como tem entre parênteses o $x - 1$, e sei que o x é mentiroso, portanto vai andar em vez de ser para a esquerda, vai-se andar 1 para a direita. Depois -1 no eixo y .

A partir deste excerto da entrevista, vemos que a Mariana identificou as três transformações gráficas a partir da expressão algébrica, associando a informação da expressão algébrica ao que sabe sobre as transformações gráficas, nomeadamente a

simetria (relativamente ao eixo Ox), a translação horizontal para a direita e a translação vertical para baixo.

De seguida, Mariana começou a desenhar o gráfico pelo máximo absoluto da função original e aplicou-lhe logo várias transformações. Como a própria referiu, “estou a começar pelo ponto mais acima, pelo máximo absoluto, e estou a fazê-lo ficar 3 pontos abaixo do eixo y , portanto estou a fazer o ponto que está $(1, -3)$ ”. A aluna aplicou as duas transformações verticais que deduziu da expressão algébrica, primeiro a simetria segundo o eixo Ox e, de seguida, a translação vertical, transformando o ponto $(1, 2)$ em $(1, -3)$. Utilizou muitas vezes a expressão “eixo y ” para se referir ao eixo Ox , mas, mais à frente na entrevista, a própria aluna deu conta de que tinha confundido a designação dos eixos “Eu acho que há bocado, numa pergunta anterior, queria me referir ao eixo Ox e disse Oy ”.

Mariana fez depois as mesmas transformações gráficas com o mínimo absoluto da função original e eu perguntei o que ela estava a desenhar:

Mariana: E agora ia representar o outro, o mínimo absoluto que ali está em -2 , portanto se queria $(2, 1)$. Se queria 1 e aquilo está no 3, portanto $(3, 1)$. E agora queria ver este 2. Agora aquele vai um para o lado e 2 para baixo.

Eu: Um para o lado e dois para baixo, isso aí o que é?

Mariana: Foi o fim do domínio, digamos.

Eu: Ok.

Mariana: Estava a representar o fim do domínio. E agora o início do domínio, digamos que está.... Então... Eu estou-me a esquecer do -1 entre o parêntesis do x , mas eu também já ajusto isso (...) Agora só me falta fazer... chegar um para a direita, salvo erro, por causa dos $x - 1$.

A Mariana foi narrando o seu raciocínio enquanto estava a representar a transformação do mínimo absoluto da função f no seu tablet, e, posteriormente, fez as transformações gráficas dos limites superior e inferior do domínio. No final, aplicou a translação horizontal para a direita, pois tinha-se esquecido dessa transformação quando começou a representar o gráfico da função transformada. Ao longo da resolução, a Mariana foi comparando o seu gráfico com o original.

No final desta tarefa, a Mariana mostrou-se insegura na resolução deste tipo de situações, e referiu que costuma recorrer à calculadora gráfica para se apoiar na resolução deste tipo de tarefas: “Eu ainda estou um bocadinho insegura em relação a algumas coisas aqui dos gráficos. Às vezes uso a calculadora para me apoiar”. No entanto, para resolver esta tarefa, a Mariana não recorreu à calculadora.

A figura 33 apresenta o enunciado da tarefa 2 da entrevista (em cima) e a respetiva resolução da Mariana (em baixo). Primeiramente são apresentados os dados do problema e é feita uma representação esquemática da situação problemática (em cima, à esquerda). Do lado direito, é apresentada uma regra de três simples com a qual a Mariana determina a percentagem do caminho total que o comboio que parte de B percorreu quando o comboio que parte de A chegou ao seu destino. Por fim, aparece a resolução da questão 2 desta tarefa.

Duas localidades A e B estão ligadas entre si por uma linha de caminho de ferro, numa extensão de 459 km.

No mesmo instante, um comboio parte de A com destino a B e outro parte de B com destino a A. Admite que as velocidades são constantes, sendo de 170 km/h a do comboio que parte de A e de 180 km/h a do comboio que parte de B.

Quanto tempo depois de partirem demoram os comboios a se cruzarem?

Qual dos comboios chega primeiro ao seu destino? Quanto tempo antes do outro?

The student's work on grid paper includes the following:

- Diagram:** A simple sketch showing two points, A and B, connected by a line. Two curved arrows represent trains moving towards each other from A and B.
- Given Data:**
 - $A \rightarrow 170 \text{ km/h}$
 - $B \rightarrow 180 \text{ km/h}$
 - $459 \text{ km} = d$
- Calculation 1:**

$$459 : 180 = 2,55 \text{ h} \rightarrow \text{tempo que o comboio B demora a fazer o percurso}$$
- Calculation 2:**

$$459 : 170 = 2,7 \text{ h} \rightarrow \text{tempo que o comboio A demora a fazer o percurso}$$
- Percentage Calculation:**

100% — 2,7 h

54,4% — x
- Conclusion:**

O comboio B chegou antes ao destino (cerca de 15 minutos).

Figura 33 – Enunciado (em cima) e resposta da Mariana (em baixo) da tarefa 2

A Mariana, após ler o enunciado e começado a representar a situação, como vou referir mais abaixo, concluiu que já tinha tentado resolver um problema semelhante na ficha 23, mas não conseguiu.

Mariana decidiu registar os dados do enunciado, representando dois pontos, A e B: “Eu, neste momento, só fiz dois pontos no meu caderno, A e B. Vou tentar representar um bocado”, e indicou as velocidades a que os comboios se deslocam: “Agora, vou só registar as velocidades..., portanto A corresponde a 170 km/h e B corresponde a 180 km/h”. Como já tinha pensado num problema semelhante anteriormente, decidiu seguir a mesma estratégia: “Ora bem, o que eu fiz na altura foi representar quadriculas que correspondiam a tempo, digamos”. Mas como não conseguiu avançar mudou de

estratégia, passando a pensar numa regra de três simples. Começou por resumir o que pretendia fazer:

O que eu estou a pensar é que posso ver, do género, considerar 180 como 100% e considerar o 170... ou melhor descobrir a percentagem a que 170 corresponde e depois eu acho que isso é capaz de corresponder à percentagem do caminho que o comboio A já teria percorrido enquanto (...) Enquanto o comboio B já teria percorrido o percurso todo... Assim sabemos o quanto o comboio A já tinha percorrido em percentagem.

Após este raciocínio, seguiu o seu plano. Começou por aplicar a regra de três simples com as velocidades, obtendo uma percentagem que considerou que “Isto sou eu a presumir, quando se comboio o comboio B já tivesse feito o percurso todo, eu penso que o comboio A só estaria a 94,4% do percurso”, fazendo uma relação entre a velocidade e a distância percorrida. Na transcrição abaixo, Mariana relaciona a percentagem obtida com o tempo:

Mariana: Então agora estou a pensar, se calhar, dividir o 459 por 80 [180] para ver quanto tempo... quantas horas é que passariam (...) Eu não sei se vai chegar a algum lado, mas (...) $\frac{459}{180}$, isto aparece sempre em denominador, dá 2,55 horas.

Eu: O que são essas 2,55 horas?

Mariana: É o tempo que o comboio B demora a fazer o percurso todo. (...) Portanto, depois, eu agora pensaria em ver quanto tempo é que o comboio A demoraria a fazer, sabendo que já temos a percentagem de 94,4. Faria então que 100 está para 2,55 hora e 94,4 está para x . E assim via quanto tempo é que o comboio ia demorar a fazer o percurso. Só que também foi aqui que eu depois também parei no outro exercício, porque eu fiquei sem saber como avançar.

Como não conseguiu concluir o seu raciocínio, voltou para a sua abordagem inicial, com quadriculas, mas com os dados que, entretanto, obteve:

Mariana: Eu continuo... Eu continuo a pensar em representar então, se calhar, numa linha, digamos cronológica, mais ou menos, em que temos o ponto A e ponto B. E considerar, por exemplo, uma quadrícula como se fosse 180 km/h, portanto o comboio B. E sabendo que ele ia demorar tipo, mais ou menos, 2,55 horas, que cerca de 3 quadrículas iam corresponder ao percurso.

Eu: 2,55 puseste 3 quadrículas, mais ou menos, certo? Isso aí é para o comboio?

Mariana: B, aquele que anda mais rápido. E agora sei que o comboio A vai ser um pouco menos. Eu já mostro se calhar o que eu estou a fazer (...) Porque eu chego a um ponto em que eu depois acabo por não conseguir desenvolver mais... eu só estou a fazer cálculos... o que eu estava a fazer agora era ter 3 quadrículas, aqui o ponto A e depois, do outro lado, o B. Este em baixo corresponde a mais ou menos (...) cerca de 3 horas.

Eu: Isso é o tempo que quem é que demorava?

Mariana: O comboio B. O comboio B está em baixo e comboio A estaria em cima. Só que eu, a partir daqui, não consigo ver como é que eu determinaria onde é que eles se iriam cruzar. Portanto, eu acabo por ficar aqui um bocado... Eu se calhar vou só passar para a pergunta de baixo e depois se, entretanto, me lembrar de alguma coisa eu volto para esta...

Neste diálogo podemos ver várias estratégias utilizadas pela Mariana, cálculos e diagramas, mas devido a alguns arredondamentos e à falta de rigor, não concluiu a sua resolução, passando para a questão seguinte da tarefa. No final da entrevista, voltei a perguntar à Mariana se queria voltar a esta questão, mas ela não mostrou vontade e, por isso, a resolução ficou por aqui. O facto de, anteriormente, não ter conseguido resolver um problema semelhante pode ser o motivo de não ter querido continuar a resolver este.

Na questão seguinte da mesma tarefa, com a informação que já tinha obtido, e recorrendo à regra de três simples, calculou o tempo que o comboio B chegou antes do A, como se pode ver no diálogo abaixo:

Mariana: Então o comboio B vai chegar antes ao seu destino porque anda mais rápido, vou só escrever. E agora quanto tempo antes do outro? Então, eu agora acho que posso usar o cálculo que fiz acima, e então relaciono o 100% está para as 2,55 horas e depois faço 94,4 está para x tempo e depois faço a diferença entre esses dois valores e sei quanto tempo é que o comboio B chega antes do comboio A.

Eu: Então podes fazer essas continhas aí.

Mariana: Portanto, 100% está para 2,55 (...) $x = \frac{94,4 \times 2,55}{100}$ que é igual a 2,4 horas. Vou pôr uma seta a indicar que isto é o tempo que o comboio A demora a fazer o percurso. Portanto agora faço a diferença, portanto $2,55 - 2,40$, e sei que vai dar 15 minutos.

Eu: Então a resposta é?

Mariana: Eu acho que será que o comboio B vai chegar ao destino 15 minutos antes do comboio A.

No cálculo final, Mariana trabalhou com o tempo em horas, mas, ao subtrair, enganou-se e pensou que a parte decimal que obteve correspondia ao tempo em minutos.

Para responder à tarefa 3 (figura 34), a Mariana começou por pensar no que sabe acerca das funções constantes: “Então, para ser constante, eu sei que qualquer que seja o valor de x , a imagem, o resultado vai ter que ser sempre igual”, mas admitiu que ainda não sabia qual seria a função constante, nem o valor de p .

Seja $f(x) = (5 - p^2)x - 6$, sendo $p \in \mathbb{R}$.

Para que valor(es) de p a função f é constante?

Explica o teu raciocínio.

3. $f(x) = (5 - p^2)x - 6$

$(5 - p^2)x - 6 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (5 - p^2)x = 9$

$f(1) = f(-1) \quad \Leftrightarrow \quad (5 - p^2)1 - 6 = (5 - p^2)(-1) - 6 \quad \Leftrightarrow \quad (5 - p^2) - 5 = (5 - p^2) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -25 + 5p^2 = -35 + 2p^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5p^2 - 2p^2 = -35 + 25 \quad \Leftrightarrow \quad 3p^2 = -10 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad p = \sqrt{5}$

$p = \sqrt{5} \vee p = -\sqrt{5}$

Figura 34 – Enunciado (em cima) e resposta da Mariana (em baixo) da tarefa 3

Mariana começou a tentar dar valores a p , como se pode ver no excerto abaixo:

Mariana: Eu penso que se fosse, por exemplo... quero dizer, não... Eu estava a pensar em 1, porque eu sei que 1 é sempre uma coisa muito óbvia, mas não poderia ser, porque seria uma função linear ou afim.

Eu: Estás a dizer 1, onde?

Mariana: No p . Eu estou a dizer agora, que não poderia ser porque senão seria afim ou linear, e não seria constante. (...) Assim, eu sei que se for 0... Quer dizer, sim, teoricamente, 0^2 ... não, porque tem o 5 à frente.

Eu: O zero em vez do p , na mesma? Estás a pensar nos valores de p , certo?

Mariana: Isto é mais eu a pensar em voz alta... (...) Porque se fosse 0 a multiplicar por alguma coisa, ficaria... anularia, mas assim tem o 5. E se fosse $5 - 0$ depois ficava 5 e depois vezes x , portanto não dá. Ora bem, para ser constante... Eu não sei se igualar a um número qualquer ajudaria.... Do género, fazer, por exemplo, $(5 - p^2)x - 6 =$ e pôr do género [igual] a 3 ou assim. Ajudaria a encontrar. Eu acho que vou experimentar.

Como não estava a conseguir obter nenhum resultado com a estratégia de tentativa-erro feita anteriormente, a Mariana optou por igualar a função a 3, e isso ajudou-a a encontrar outra estratégia, conforme evidenciado no excerto abaixo:

Mariana: A minha ideia inicial seria, provavelmente, fazer, por exemplo, $f(1) = f(-1)$, se calhar, para ser assim mais fácil... Portanto, ok, então estou agora a escrever, então $f(1) = f(-1)$, então estou a escrever as imagens, portanto, $(5 - p^2) - 6 = (5 - p^2) - 1 - 6$. Então, sabemos que $5 - p^2$ e depois teríamos -5 igual $(5 - p^2) - 7$ e isto seria a mesma coisa que $5 \times 5 = 25$, e depois menos 25 mais $5p^2$ seria igual a, então, $7 \times 5 = 35$, $-35 + 7p^2$. E isto seria a mesma coisa que então $5p^2 - 7p^2 = -35 + 25$. E a mesma coisa, então $-2p^2 = -10$. E depois passamos então o -2 a dividir para o outro lado, portanto, p^2 seria igual a 5, que é a mesma coisa, então p seria igual a $\sqrt{5}$. Ok ya, eu acho que, eu acho que [es]tá certo porque se ali o p ficaria ao quadrado, raiz cortava e depois $5 - 5$ ficava igual a zero. Portanto depois... ok.

Eu: Pronto, então resumindo, o valor ou os valores de p quais é que são?

Mariana: Seria então menos, quer dizer, $\sqrt{5}$, ou $-\sqrt{5}$... p é mais ou menos $\sqrt{5}$ porque como está ao quadrado, não faria muita diferença porque cortava se fosse menos.

Eu: Então tens dois valores de p , certo?

Mariana: Sim, exato: $p = \sqrt{5}$ ou $p = -\sqrt{5}$.

Para chegar à resposta, a Mariana igualou as imagens de dois objetos diferentes, pois sabia que isso era uma característica das funções constantes.

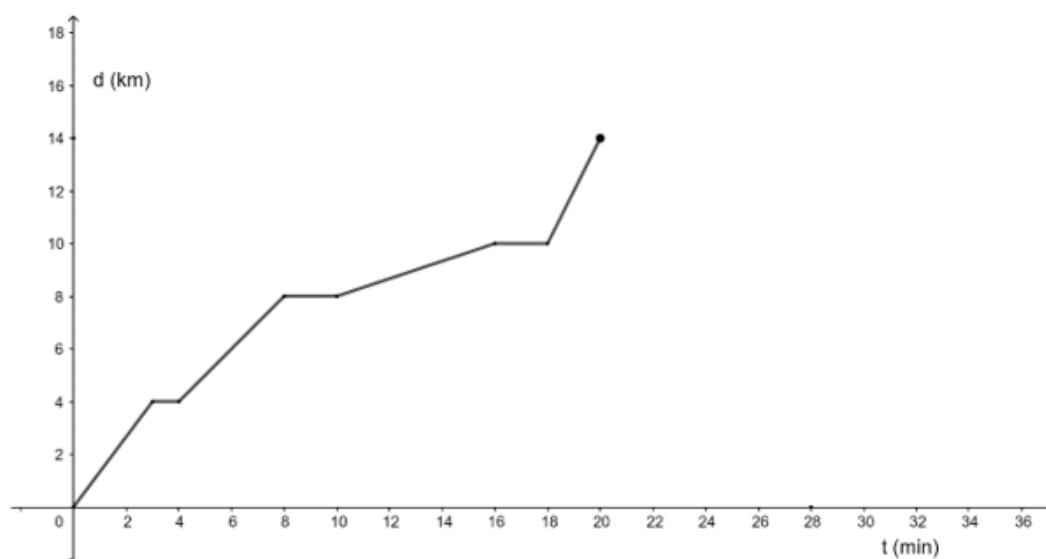
A Mariana resolveu todas as questões da tarefa 4 da entrevista (figura 35), apresentando, na sua folha de respostas, apenas a resposta final. As justificações foram todas feitas oralmente. A aluna respondeu rapidamente às primeiras 5 questões desta tarefa, não revelando dificuldades na interpretação do gráfico.

Na questão 1, a Mariana disse imediatamente que a resposta era 14 km, referindo-se ao máximo absoluto da função: “Isto, eu acho que aquele pontinho, o máximo absoluto, está mais ou menos no 14 km. Portanto, eu vou dizer logo que as localidades encontram-se a 14 km”. Na questão 2, usando o mesmo raciocínio, só que vendo a abcissa do ponto, a Mariana respondeu à questão colocada: “Portanto, é só analisarmos o eixo dos y . Eu acho que isto [máximo absoluto] está mais ou menos no 20 minutos. Parece-me estar, portanto demorou cerca de 20 minutos da estação de partida até à estação de destino”. O erro na justificação da aluna surgiu devido à confusão que a Mariana foi revelando ao longo da entrevista, confundindo as designações dos eixos coordenados.

A Mariana respondeu rapidamente à questão 3, dando um valor estimado dos quilómetros percorridos ao fim de 10 minutos: “Então 10 está mais ou menos na distância de 8 km. Portanto, o comboio já tinha percorrido 8 km”. Quando a questioneei sobre como chegou a esse valor, a Mariana explicou como obteve a imagem do objeto 10 a partir da representação gráfica:

Então o 10 minutos, eu estou a olhar para o Oy , que tem ali a dizer que tem o tempo e os minutos, portanto a eu estou a seguir para cima, digamos, pronto, a partir de 10 e estou a ver que ele está mais ou menos com ordenada em 8, portanto, eu estou a presumir que ele fez 8 km em 10 minutos.

O gráfico representado a seguir relaciona a distância percorrida (em km) com o tempo (em minutos) gasto por um comboio entre duas localidades.



1. A que distância se encontram as localidades?
2. Quanto tempo demorou o comboio desde a estação de partida até à estação do destino?
3. Quantos quilómetros tinha percorrido o comboio ao fim de 10 minutos?
4. O comboio deslocou-se sempre à mesma velocidade?
Em que intervalo de tempo, se deslocou mais rapidamente?
5. Sabemos que o comboio parou em todas as estações e apeadeiros. Quantas estações e quantos apeadeiros te parecem existir entre a estação de partida e a do destino? Justifica a tua resposta.
6. Considera que existe um comboio B que partiu 13 minutos após o A e que fez exatamente o mesmo percurso com os mesmos tempos. Quantos km tinha percorrido o comboio B quando o A chegou ao destino?

4. 1. as localidades encontram-se a 14 km
 2. da estação de partida até ao destino demora 20 min
 3. ao fim de 10 min fez 8 km
 4. não se deslocou sempre à mesma velocidade
 + rápido entre $t \in [18, 20]$
 5. 3 paragens
 6. cerca de 7 km

Figura 35 – Enunciado (em cima) e resolução da Mariana (em baixo) da tarefa 4

Na questão 4, a Mariana concluiu imediatamente que os comboios não se deslocavam à mesma velocidade. Para justificar esse facto, analisou o gráfico, falando da existência de alguns intervalos onde a função é contínua e do declive dos segmentos de reta, nunca referindo o seu valor, em alguns intervalos:

Mariana: Eu vou dizer que não, porque, para além de haver zonas em que o gráfico é constante, o que eu presumo que sejam onde o comboio parou. Também há zonas em que, digamos que a distância cresce mais devagar em relação ao tempo. Ou que se calhar o declive não é o mesmo. Por exemplo, entre o intervalo de 10 a 16, em que o declive é menor do que, por exemplo, de 4 a 8.

Eu: Sim, o 10 a 16, estás a dizer-me em que eixo?

Mariana: No eixo dos y . Não do x , peço desculpa.

(...)

Mariana: Por exemplo, 10 ao 16, em que o declive é menor. O declive é menor do que, por exemplo, no 4 ao 8.

(...)

Mariana: Em que intervalo de tempo, se deslocou mais rapidamente? (...) Então eu penso que o comboio se deslocou mais rapidamente no intervalo entre o 18 e o 20 minutos, porque o declive da função aumentou bastante e, portanto, eu consigo, eu sei que consigo saber que naqueles 2 minutos o comboio andou cerca de, acho que foi cerca de 4 km, portanto, eu acho nesse intervalo andou mais rapidamente.

A questão 5 também foi respondida rapidamente: “Então eu acho que parou em 3, que fez 3 paragens”, e para justificar a sua resposta, a Mariana referiu que a função era constante em algumas zonas, explicando o significado de ser constante no contexto do problema: “Porque há 3 zonas onde o gráfico é constante, o que significa que ele não se deslocou só esteve parado num sítio e, por isso, a distância não aumentou, mas, no entanto, o tempo continua a correr”.

Para responder à questão final, a Mariana voltou a analisar o gráfico e, inicialmente, respondeu que o comboio B tinha percorrido 8 km, como se vê no excerto seguinte:

Portanto, presumindo que eles estão a ir à mesma velocidade, e usando aquilo que dizia no enunciado, que estavam a ir pelo mesmo percurso. Eu agora estou a ir ao eixo dos x . Estou a ver nos 20 minutos, que é quando supostamente o comboio A já chegou ao destino e vou tirar então os 13 minutos, porque sabemos que comboio B partiu 13 minutos após. Portanto, sei que terá que ter sido por volta dos 8 e 10 minutos, onde o comboio B se encontrava enquanto o A já estava na chegada. Portanto, eu acho que comboio B já tinha percorrido cerca de 8 km.

Mas quando pedi que explicasse novamente o raciocínio, omitindo a razão de achar que os valores referidos pareciam não ir ao encontro do seu raciocínio, a Mariana explicou

tudo com mais pormenor e alterou a sua resposta final. Apresento a seguir um excerto da entrevista em que a Mariana explica o seu raciocínio:

Eu sabia que comboio A já tinha chegado ao final do percurso, ao destino. Sabia que ele já tinha percorrido, então já tinham passado 20 minutos. E como sabíamos que o comboio B tinha partido 13 minutos após. Sabíamos também que ele se ia atrasar 13 minutos, digamos, portanto eu pensei que aos 20 minutos e vou tirar os 13 e para saber quanto tempo do percurso é que o comboio B já fez. Portanto, depois como 20 menos os 13 seriam 7 e não temos aqui nenhum 7 e só temos mais ou menos 8. Portanto, eu vou presumir que ele se encontrava perto do 8 e que ele tinha percorrido cerca de...E agora olhando para o eixo Oy , vou presumir que ele já tinha percorrido cerca de 8 km. (...) Cerca de 8. Eu só acho que seria um bocadinho de menos de 8 porque isto diz 13 minutos e ali seria entre o 6 e o 8, e eu há bocado, disse 8 e 10, mas seria entre 6 e 8 e não há nenhum...

Neste excerto, podemos ver que a ausência de alguns números nos eixos confundiu-a: “Eu sei que seria um bocadinho menos de 8 km, se calhar provavelmente seria cerca de 7, mas como não temos ali indicado no eixo Oy , nenhum (...) não temos nenhuma marca a indicar 7 km, por exemplo”, tendo sido essa uma das razões de se ter enganado inicialmente.

Para saber que valor seria, a Mariana, a partir de dois pontos, viu uma proporção entre a abcissa e a ordenada e definiu a expressão de uma parte da função, chegando à resposta de 7 km:

Porque, aqui no eixo Ox sei que o 7 estaria a meio do 6 e do 8. E agora indo para cima e vendo a... até encontrar-se com a linha do gráfico. Eu sinto que seria mais ou menos proporcional, porque se olharmos para o objeto 4 e olharmos para a sua imagem também é 4 e se depois olharmos para 8 como objeto, a sua imagem também vai ser 8. Portanto, sabemos aqui que $f(x) = x$, pelo menos neste pedaço. E, portanto, eu estou a presumir que se o comboio já tinha feito 7 minutos e visto que está sobre o gráfico daquela função. Presumo que como objeto seria 7 que a imagem também seria 7.

Nesta tarefa houve dificuldades na apresentação das questões e do gráfico ao mesmo tempo, por isso, foi necessário ver uma parte da tarefa de cada vez.

6.1.2. Preferências visuais e uso de recursos tecnológicos

Após a resolução das quatro tarefas, fiz algumas questões relacionadas com as preferências visuais da Mariana no tema das funções, e o uso que fazia da tecnologia

que tinha disponível, de modo a aprofundar mais estes temas. No IPM, a Mariana tinha obtido uma pontuação de 12, o que sugeria ter uma preferência não visual.

Das tarefas realizadas, a Mariana referiu que a que gostou mais foi a tarefa 4, pois gostava muito da matéria de gráficos e funções: “Eu gosto muito da matéria de gráficos e funções, portanto, eu gostei muito desse, do último exercício, do 4, porque temos de estar a analisar o gráfico enquanto respondemos às questões”. Referiu, também, que gostou do grau de desafio da tarefa 2 e que iria praticar mais este tipo de tarefas:

Nesse sentido de ser interessante, porque me faz pensar mais, se calhar... Eu penso que seria a [tarefa] 2, porque eu nem sequer consegui chegar à resposta. Portanto, eu sinto que para mim, essa foi a mais interessante que, eh pá, já é o segundo exercício deste género que eu não consigo chegar [ao fim]. Portanto, eu acho que vou ver exercícios deste género e tentar chegar lá. Mas acho que é isso. Eu acho que a [tarefa] 4 em termos de gosto pessoal, foi a mais interessante, mas a que me fez pensar mais foi a 2.

Portanto, a Mariana gostou de uma tarefa de carácter visual e uma tarefa que tentou resolver com vários tipos de estratégias, quer visuais, quer não visuais.

A Mariana referiu que a tarefa menos interessante para ela tinha sido a 1, não por causa de ser uma tarefa visual, mas por causa do menor grau de desafio dessa tarefa, e que ela associava a um pensamento baseado na memorização:

Se calhar a [tarefa] 1, só porque eu acho que ela era um bocadinho mais simples. Eu sei que sou capaz de ter tido errada, mas estou a dizer em termos de não ter muito raciocínio por trás ou ter que se pensar e observar coisas para se perceber. Eu sinto que, se na [tarefa] 1 souberes as regras, do género, o que está entre parêntesis faz alterar o eixo das abcissas. Eu acho que se tiveres isso decorado, sabes logo a resposta. Portanto, se calhar essa não era tão interessante.

Como referiu ter gostado muito de trabalhar com gráficos perguntei o porquê disso. A Mariana mencionou que gosta de trabalhar com gráficos, quer construí-los, quer analisá-los, e que os dados apresentados nesta representação estão muito organizados:

É só mesmo eu gosto bastante de gráficos... olhar para os dados... Não sei... representá-los num gráfico e ter que estar a observar o gráfico, e depois... Como é que hei de explicar? Está tudo muito organizado, se calhar, eu sei que, digamos, que posso confiar naquele gráfico, para dar uma resposta, provavelmente, e eu acho que os gráficos são fiáveis.

Relativamente à forma de representar as funções que mais utiliza, referiu que preferia imaginar as funções na sua cabeça, do que as representar no papel; no entanto, quando

as funções se representam por retas, costuma recorrer ao quadriculado para se guiar, preferindo então representações visuais concretas:

Eu: Quando tu realizas tarefas com funções, tu costumavas fazer algum tipo de esquemas, de gráficos ou preferes trabalhar mais com expressões, tabelas?

Mariana: Normalmente quando me dão algum, por exemplo, se for $f(x) = x^2$, eu vou pensar logo na função, na minha cabeça, eu acho que às vezes desenhar o gráfico daria demasiado trabalho, portanto, eu não faço muito isso, mas imagino logo que é então, tipo assim [fez um gesto a mostrar uma parábola]. E eu acho que faço mais mentalmente do que desenhar, então, eu sinto que uso mais, se calhar, o mental. Em termos de gráficos, uso mais o mental, porque sinto que dá muito trabalho pôr no papel, mas quando são esquemas que são, por exemplo, em linha, eu acho que desenho mais no papel e uso especialmente as quadrículas para me ajudar a guiar.

Eu: Ok, quando são assim mais coisas retas, direitinhas que consigas fazer com régua, tu costumavas recorrer ao papel.

Mariana: Sim, exato.

Nas transformações gráficas, explicou que costuma imaginar as transformações a acontecer na figura inicial:

Então se me for apresentado, por exemplo, como aqui [tarefa 1] que eu consigo ver a figura, eu acho que, ao invés de desenhar, projeto mesmo as minhas ideias na figura, digamos, portanto, eu imagino ela a deslocar-se consoante os dados que nos são dados, digamos.

Mas para representar a transformação, costuma recorrer a alguns pontos chave: “Eu penso de uma forma geral, depois, quando estou a usar, a desenhar mesmo é que foco-me mais nos pontinhos para ter a certeza que estou a desenhá-los direitos”. Quando representa a função no papel procede do modo seguinte:

E eu, normalmente, como fiz na [tarefa] 1, comecei por ver os extremos, se calhar, do género, o ponto máximo e o ponto mínimo. Porque depois, como tenho várias retas, eu depois só preciso de ligar os pontos para ficar direitinho.

Com funções mais complicadas, que não são representadas por retas ou segmentos de reta, a Mariana procura pontos chave, como a interseção com o eixo Oy e os extremos, tal como se pode ver no excerto seguinte:

Eu acho que, obviamente, iria olhar para a ordenada e, portanto, no eixo Oy , e veria então em que ponto é que cruzaria, aí já usaria esse ponto para me guiar um bocado. Eu penso que depois provavelmente também olharia para os extremos. Se tivesse extremo, poderia ir até ao infinito, penso que depois também tentaria olhar para um, para o máximo absoluto, para um mínimo

absoluto, porque, mesmo que fosse de curva, eu sinto que haveria, teria de haver...

Relativamente ao recurso à tecnologia, referiu que costuma recorrer à calculadora gráfica como um instrumento de confirmação, pois primeiro imagina na sua cabeça a representação gráfica das funções com que está a trabalhar e, antes de escrever, confirma na calculadora gráfica, especialmente em tarefas com transformações gráficas:

E em termos de calculadora, eu ainda uso bastante a calculadora, especialmente nos exercícios que eu acho mais parecidos com o 1. É para confirmar os cálculos, digamos. (...) É para confirmar, porque às vezes fico na dúvida, do género, se eu fizer $-f(x)$, será que vai ficar mesmo simétrica? Ou será que vai fazer outra coisa? Portanto, eu às vezes penso no exercício na minha cabeça e antes de escrever, confirmo na calculadora que vai ficar mesmo assim. Portanto eu sinto que a calculadora ajuda bastante.

A Mariana assume não ter tendência para resolver tarefas na calculadora, para além da sua função de confirmação.

Quando lhe perguntei que tema matemático preferia, a Mariana respondeu que este ano preferia as funções e as suas representações mais visuais, mas no ano passado gostava muito de resolver equações, destacando os seus elementos não visuais:

Eu: Então entre essas duas coisas, que é que gostas mais? Entre essa parte das expressões matemáticas que acabaste de dizer e os gráficos...

Mariana: Eu acho que estou assim, num patamar muito igual. Eu, de momento, vou ter que dizer que são os gráficos e as funções. Mas, por exemplo, no ano passado que nós não estávamos a dar gráficos e funções, eu lembro-me que adorava equações compridas e... gostava muito disso.

Mariana destacou que é preciso ter muita atenção na resolução de equações pois todos os passos são importantes e um erro pode inviabilizar a resolução, mas referiu que gostava desse tema pois, por exemplo, em problemas, tem de interpretar as situações e equacioná-las, fazendo-a pensar e perceber a situação:

Sim, eu também eu gosto muito disso também, porque todos os passos que fazes é bastante importante, porque se fizeres um erro pequenino mesmo que, por exemplo, logo no início, já o resto da equação toda vai ficar errado até certo ponto. Mas eu também gosto bastante porque depois tem que se perceber por que se está a usar aquela equação, e tem-se de saber aplicar consoante a situação e temos que conseguir. Há vezes em que pode não ser muito óbvio o que temos de usar, mas se nós soubermos direitinho ou conhecemos bem, se calhar acabamos por conseguir fazer as coisas com mais facilidade.

6.2. André

6.2.1. Resolução de tarefas sobre funções

Na figura 36, apresento a resolução do André (em baixo) à tarefa 1 (em cima). No centro da resolução do André, está representada a função g e, no canto inferior esquerdo, estão representadas a função $-f(x)$ e a função $g(x)$ numa escala menor.

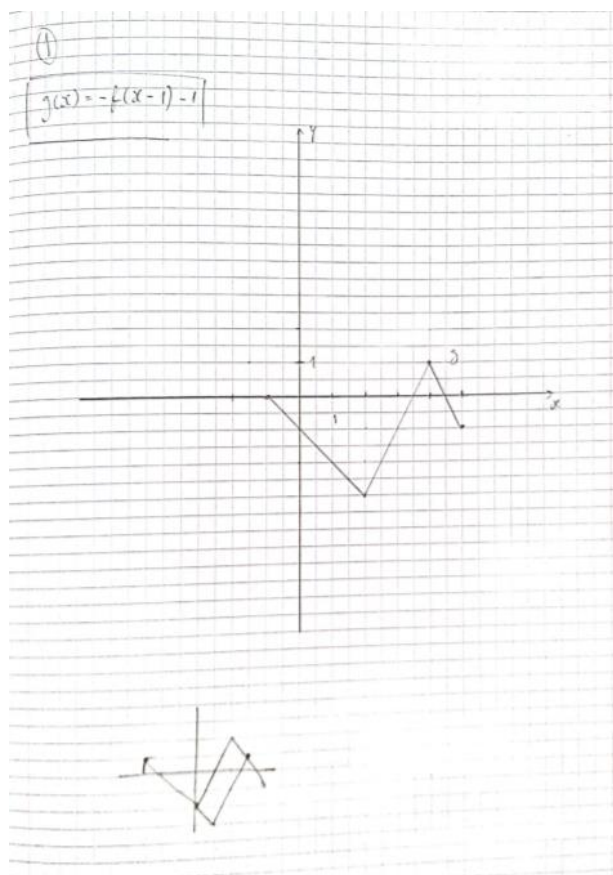
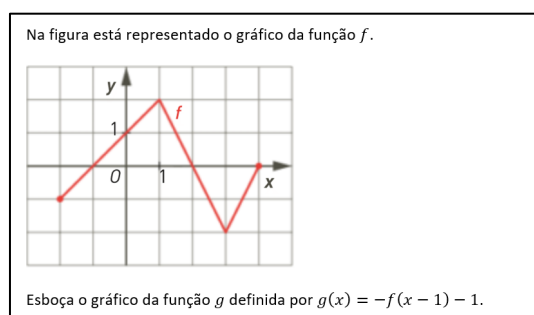


Figura 36 – Enunciado (em cima) e resolução do André (em baixo) da tarefa 1

O André começou por identificar que a tarefa estava relacionada com translações ou contrações das funções, chegando à conclusão que estava perante várias transformações gráficas: “(...) não sei se estou certo ou errado, mas eu acho que isto tem a ver alguma coisa com translações e/ou contrações de funções (...) é que este exercício não é só uma transformação, são várias ao mesmo tempo, que já percebi”.

Antes de representar as transformações, o André tentou ser muito rigoroso, começando pelo referencial e pela unidade:

Então é suposto eu fazer um esboço, vou tentar fazer o mais rigoroso possível (...) vou desenhar um gráfico cartesiano (...) estou só a pôr aqui a unidade para ser um pouco mais simples para eu perceber, e para ser mais rigoroso também.

De seguida referiu quais foram as transformações que identificou e como se apercebeu delas. Apesar de evidenciar alguma hesitação na identificação da simetria relativamente ao eixo Ox , identificou corretamente a translação vertical e a translação horizontal:

André: Então, na parte é só $f(x - 1)$ (...) eu acho que a função vai-se deslocar uma unidade para a direita.

Eu: E por que achas que é uma unidade para a direita?

André: É porque eu lembro-me que nós, quando fizemos aqueles exercícios das transformações gráficas, eu acho que a expressão era $f(x - c)$, assim alguma coisa. E o c neste caso é 1. Por isso, vai-se deslocar uma unidade para a direita, é o que eu acho. Depois a parte $f(x - 1) - 1$, eu acho que a função vai descer uma unidade. Eu só estou na dúvida é no menos atrás da expressão toda. Que não me lembro muito bem o que é que pode acontecer à função, quando a função toda é multiplicada por um número (...) Quando muito será ao contrário (...) a função fica invertida (...) Uma unidade para baixo uma para a direita e tento invertê-la.

Inicialmente, o André começou a representar a função numa folha branca, mas optou por utilizar uma folha quadriculada: “Eu estou a fazer numa folha branca, mas acho que vou pegar no meu caderno”, provavelmente porque queria ser rigoroso e o quadriculado o ajudaria nesse objetivo. Quando o André começou a representar a função, decidiu, primeiramente, fazer a simetria da função f , revelando alguma dificuldade nesse processo: “Está a ser difícil invertê-la. Eu estou a tentar fazer como eu sei, e a parte do invertida pode estar errada, mas é a parte mais difícil”.

Após a simetria, e recorrendo a pontos chave, começou a representar a função g aplicando as duas translações ao mesmo tempo:

Estou a tentar arranjar os pontos onde ficaria um para a direita e um para baixo. Eu posso mostrar, mas [es]tá só o gráfico e pontos. (...) Já consegui

representá-la invertida, agora vou tentar movê-la. (...) Agora vou deslocá-la uma unidade para a direita e uma para baixo, e vou tentar encontrar uns pontos de referência.

É importante referir que os pontos escolhidos foram: o limite inferior do domínio, o máximo absoluto e o mínimo absoluto da função obtida após a simetria. Enquanto estava a representar no papel quadriculado, o André explicou que estava a pegar num ponto da função após a simetria e a aplicar a translação vertical e a translação horizontal:

André: E então vou começar por... eu sei que, por exemplo, no ponto do gráfico da imagem $(-2, -1)$. E esse ponto invertido ficou com coordenadas $(-2, 1)$. Então o que eu acho que vai acontecer é que esse ponto vai ter as coordenadas $(0, -1)$. Acho que sim, sim... Depois o ponto...

Eu: Agora vais utilizar outro ponto, é isso? Já escolheste algum?

André: Outro ponto é o ponto $(2, -3)$. Ok, eu vou tentar. (...) O segundo ponto que eu movi foi o ponto $(1, -2)$, movi para as coordenadas $(2, -3)$. E depois o ponto que estava na coordenada $(3, 2)$ movi para a coordenada $(4, 1)$. Basicamente eu desci uma unidade e [andei] uma para a direita, foi isso.

Eu: Ok isso aí tu já estás a pegar naquela função que tu representaste invertida?

André: Sim, exatamente.

No final, representou a função g num referencial com uma escala maior, no centro da folha quadriculada, “Para ficar melhor, eu fiz o gráfico final que tem a g , eu fiz numa escala maior, então estou a passar para essa escala”.

Na figura 37 apresento a resolução do André (em baixo) da tarefa 2 (em cima). Inicialmente, é possível observar um esquema com os dados fornecidos no enunciado da tarefa. Seguidamente, o André recorreu duas vezes à regra de três simples e apresenta a resolução da segunda questão desta tarefa, com recurso a cálculos. Por fim, continua a resolução da questão 1 de forma esquemática.

Duas localidades A e B estão ligadas entre si por uma linha de caminho de ferro, numa extensão de 459 km.

No mesmo instante, um comboio parte de A com destino a B e outro parte de B com destino a A. Admite que as velocidades são constantes, sendo de 170 km/h a do comboio que parte de A e de 180 km/h a do comboio que parte de B.

Quanto tempo depois de partirem demoram os comboios a se cruzarem?

Qual dos comboios chega primeiro ao seu destino? Quanto tempo antes do outro?

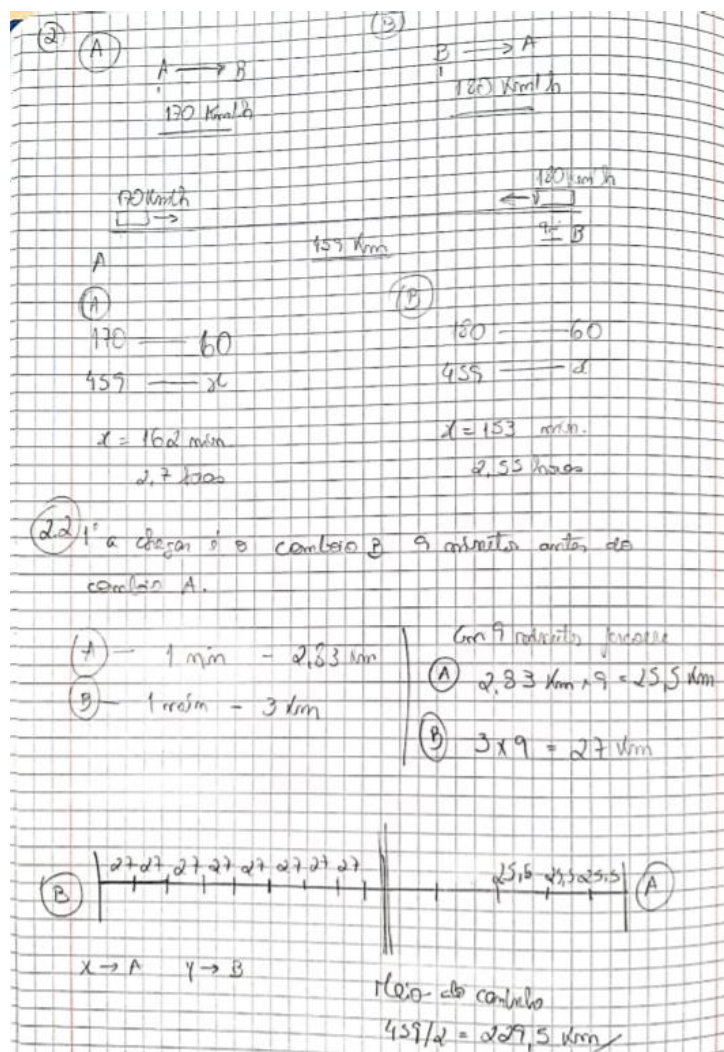


Figura 37 – Enunciado (em cima) e resolução do André (em baixo) da tarefa 2

Após a leitura do enunciado, André representou, de forma esquemática, os dados que considerou importantes: “Escrevi (...) o comboio A, de A a B 170 km e o comboio B vai de B a A 180...”. Ao analisar o problema, referiu que não conseguia relacionar este problema com o tópico das funções: “É que eu não estou, consigo ver ou [não estou a] conseguir identificar aqui nada para usar funções aqui. Se calhar é... não sei”.

Deparando-se com esta dificuldade, começou por abordar a segunda questão desta tarefa procurando qual dos dois comboios chegaria primeiro ao seu destino: “Eu acho que o comboio que chega primeiro é o B, porque, se o caminho é o mesmo, mas ele vai mais rápido, (...) mas agora quanto tempo antes do outro, é mais difícil”. Nesta parte da tarefa, o André revelou estar muito perdido. No entanto, apesar de não saber que estratégia de resolução poderia utilizar, começou a calcular quanto tempo demorava cada comboio a fazer a viagem. Para tal, recorreu à regra de três simples:

Então eu fiz uma regra de três simples que foi: Se o comboio A em 60 minutos, percorre 170 km, quanto tempo demorará a percorrer 459 km? (...) Aplicando a regra dos três simples deu-me 162 minutos, o que equivale [a] 2,7 horas (...) Se eu fizer para o B, eu vou fazer o quê com isso? Não estou a ver. Quer dizer eu posso fazer para o B. (...) Vou fazer a mesma coisa. Se 180 está para 60 minutos, então 459 km está para quantos minutos? Deu-me 153 minutos. Portanto, acho que já consegui responder a uma pergunta, a duas até. Que é quem vai chegar mais rápido e quanto tempo antes.

Com estes cálculos efetuados, concluiu que podia responder à segunda questão desta tarefa. Na sua resposta, começou por dizer qual dos comboios iria chegar primeiro e calculou a diferença entre as horas que cada um demoraria:

Então, o que chega primeiro é o B. E mesmo sem ter feito esta conta consegui perceber isso, claro. Mas o comboio B demora 153 minutos, 2 horas e meia, mais ou menos, e o comboio A demora 162 minutos, mais ou menos 2,7 horas. E, portanto, quanto tempo antes do outro? O comboio B chega 9 minutos antes. Eu subtraí os 162 a 153 era para ver o tempo que o comboio A chega.

Após a resolução da segunda questão, o André regressou à primeira. Na resolução da primeira questão desta tarefa, houve um momento em que o André se mostrou algo perdido, pois considerou que os comboios não partiriam ao mesmo tempo, mantendo sempre a mesma diferença de tempo entre eles: “Então, enquanto o comboio B percorre... a diferença deles é 9 minutos. Então o comboio B vai estar sempre 9 minutos à frente. Quando o comboio A percorre... O comboio B percorre x km em 9 minutos”. Também houve momentos em que tentou utilizar equações para tentar alcançar uma solução – “Então é, vou tentar fazer uma equação, um sistema. (...) Então posso fazer uma equação, não sei se faço uma equação”, mas não chegou a desenvolver a sua resolução através desta estratégia. Apesar disso, o André tentou aplicar várias estratégias, sendo uma delas verificar a distância que cada comboio percorria num minuto:

André: Como 170 corresponde a 60 minutos. Então 1 minuto corresponde a quantos? Este número. Não estou a conseguir...

Eu: A parte do minuto, ajudou alguma coisa?

André: Não, quer dizer, se calhar até me ajudou. Deu-me 2,8, por parte do comboio A significa que, num minuto, ele percorre 2,8... 3 km, mas depois pelo comboio B seria 3 km.

Temporariamente, deixou a resolução desta tarefa por aqui, mas, após abordar as restantes tarefas, voltou a pensar novamente nesta.

Reiniciou a sua abordagem pensando que poderia encontrar uma equação ou um sistema, mas não sabia como o fazer: “Aqui eu sinto que tenho que fazer uma equação aqui ou um sistema de equações. Mas não estou a perceber qual é que é”. Então, começou por fazer alguns cálculos, mas ele próprio não sabia o que representavam, como se vê no diálogo seguinte:

André: A diferença em que eles percorrem o mesmo caminho, só que um é mais rápido que outro. Portanto, o comboio B tem um avanço de 9 minutos comparado com o A. Portanto, eu agora eu fiz aqui, em que eu dividi.... Esta coisa não faz muito sentido.... Eu dividi 459, que é a extensão total do caminho por 9, mas não faz muito sentido, não faz mesmo.

Eu: O 9 que era...

André: 9 minutos que era o tempo, ou melhor, o avanço que o B tinha sobre o A.

Eu: Ok, foi aquela resposta da segunda pergunta, é isso?

André: Foi a resposta da 2.2.2. Nós conseguimos perceber qual é que era o avanço de B. Só fiz é assim a conta, foi por fazer 459 a dividir por 9, que me deu 51. Mas eu não entendo o que isso significa. Nem faz sentido isso, se eu dividi a distância total percorrida por ambos pelo avanço do B, mas isto não faz sentido.

Este excerto evidencia a importância que o André parecia dar ao significado dos valores que ia encontrando, aplicando as estratégias que ia escolhendo. Não encontrar significado para os valores, nem mesmo para as operações que os originavam, estava a trazer-lhe alguma frustração e a impedi-lo de prosseguir. Durante uma outra tentativa de resolução do problema recorrendo a cálculos, o André lembrou-se que, no IPM, tinha recorrido a esquemas e desenhos, e que, neste momento, podia ajudá-lo:

Em 9 minutos, o comboio A percorre 2,83 km. Não está, está sim e, portanto, $2,83 \times 9$ dá 25,47, vou pôr 25.5. Enquanto que o comboio A em 9 minutos percorre 27 km. Acho que estou mais perto. Eu lembro[-me] que nos problemas [do] IPM... Eu, alguns exercícios parecidos com este, eu resolvi com desenhos, com esquemas. Tais como aqueles que depois me foram dados na correção, em que [es]tive a escolher. E a maioria foi através de desenhos ou esboços. Como seria imagens, por exemplo, um caminho de ferro e eu represento por uma linha, em que nos extremos tenho os destinos A e B e vou pensando assim. Há outros [colegas] que podem pensar em

equações e eu penso assim. Eu estou a fazer um desenho. Para mim faz sentido, mas se calhar, para algumas pessoas pode não fazer muito sentido.

No seu diagrama, o André representou o percurso e as estações A e B. Representou, também, o meio da linha e dividiu cada metade em partes de 27 e 25.5 km, correspondentes ao que cada um dos comboios percorre em 9 minutos (diferença de tempo entre a chegada dos comboios). À medida que desenhava, o André foi explicando o que estava a fazer:

Um caminho de ferro e eu represento por uma linha, em que nos extremos tenho os destinos A e B e vou pensando assim. (...) Eu fui buscar os quilómetros percorridos em 9 minutos por ambos os comboios, não sei se isso me ia levar a algum lado, mas tentei ir por aí. E no desenhinho dividi o caminho a meio, fazendo os tais $459/2$ que me deu 229,5. Se eles fossem à mesma velocidade, eles encontrar-se-iam no meio do caminho, mas como um vai mais rápido do que o outro... (...) Uma linha e depois, de um lado, eu pus várias coisinhas a representar os vários 27 que era a distância percorrida por 9 minutos pelo B e, do outro lado, os 25,5, que eram percorridos pelo A.

Desta forma é possível observar o pensamento do André e a forma como interpretou a situação problemática.

A figura 38 apresenta o enunciado da tarefa 3 (em cima) e a resolução do André (em baixo).

Seja $f(x) = (5 - p^2)x - 6$, sendo $p \in \mathbb{R}$.

Para que valor(es) de p a função f é constante?

Explica o teu raciocínio.

$$f(x) = (5 - p^2)x - 6$$

$$5 - p^2 = 0$$

$$-p^2 = -5$$

$$p = \sqrt{5} \quad \vee \quad p = -\sqrt{5}$$

$$p = \sqrt{5} \quad f(x) = (5 - (\sqrt{5})^2)x - 6 = (5 - 5)x - 6 = -6$$

$$f(x) = -6$$

$$p = -\sqrt{5} \quad f(x) = (5 - (-\sqrt{5})^2)x - 6 = (5 - 5)x - 6 = -6$$

$$f(x) = -6$$

Figura 38 – Enunciado (em cima) e resolução do André (em baixo) da tarefa 3

Primeiramente, leu o enunciado e, de seguida, tentou lembrar-se das condições para que uma função fosse constante:

André: Eu acho para a função ser constante eu tenho que... A minha expressão só pode ter a ordenada na origem, acho eu. Então eu tenho que encontrar valores de p para que o meu declive é sempre zero.

Eu: E o teu declive é representado por o quê?

André: O $(5 - p^2)x$, ou seja, $(5 - p^2)x = 0$.

Neste excerto vemos que o André relacionou, indiretamente, o facto de ser constante com o valor que a função toma quando $x = 0$, e concluiu que o declive da função tinha de ser zero, mas referiu-se ao declive como sendo $(5 - p^2)x$ e não apenas ao coeficiente de x .

De seguida, o André resolveu a equação $5 - p^2 = 0$, como se pode ver na figura 38, obtendo " $p = \sqrt{5}$ ou $p = -\sqrt{5}$ ". No final, verificou os resultados a que chegou, definindo a função constante de que fala o enunciado:

André: Se nós substituirmos na expressão, por exemplo, eu substituo o p por... o meu p é $\sqrt{5}$. Estou a tentar ver se dá.

Eu: Estás a ver se funciona.

André: Estou a verificar. Então fica $(5 - (\sqrt{5})^2)x - 6$. Então isto fica $(5 - 5)x - 6$ que me dá -6 .

Eu: Ok, então como é que é a expressão da função f neste caso?

André: Nesse caso, a expressão da função f ficaria $f(x) = -6$.

Eu: Tu disseste-me que havia dois valores. Já experimentaste para um.

André: Dois valores, sim. Vou agora experimentar para $p = -\sqrt{5}$, $f(x) = (5 - (-\sqrt{5})^2)x - 6$. Então vai ficar 5 menos 5 também (...) Então fica -6 na mesma. E a minha expressão final fica $f(x) = -6$. Portanto ambos os meus resultados dão.

Na figura 39 apresento as respostas do André (em baixo) às cinco primeiras questões tarefa 4 (em cima). As justificações para as suas respostas foram dadas oralmente.

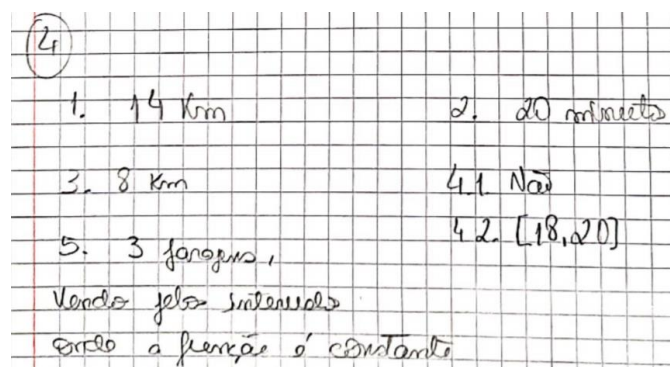
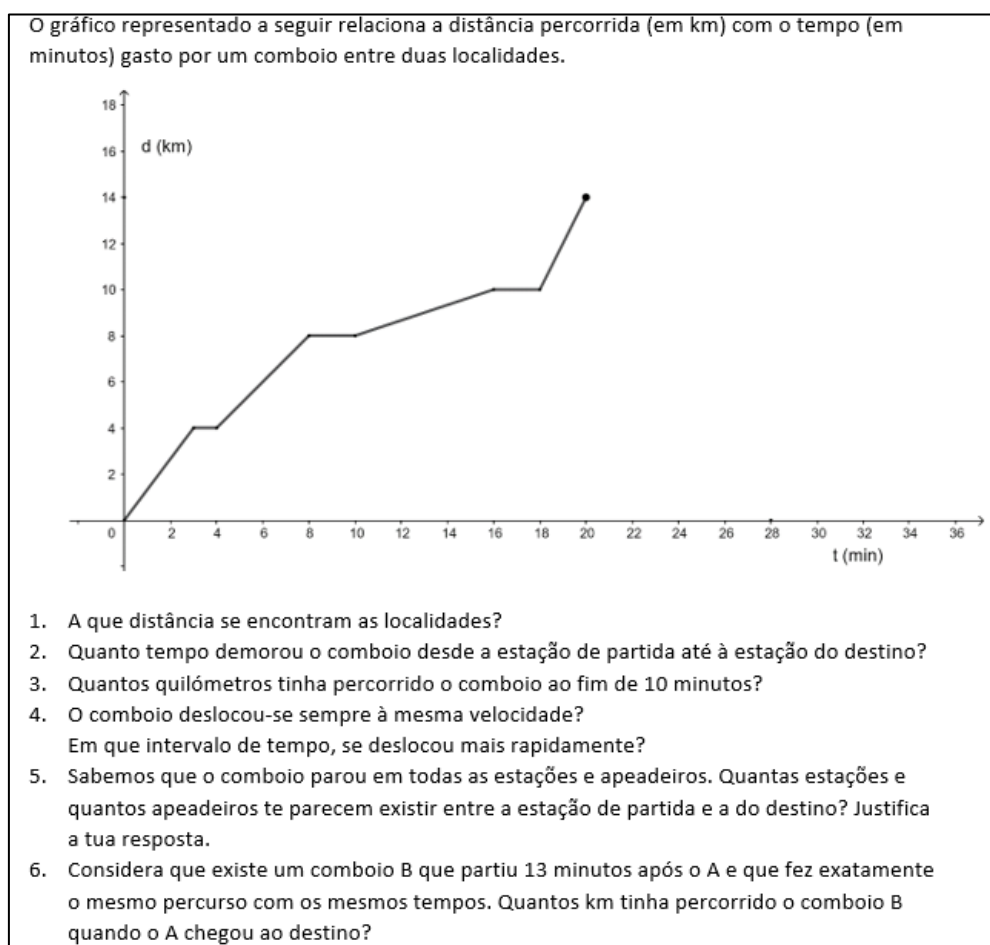


Figura 39 – Enunciado (em cima) e resolução do André (em baixo) da tarefa 4

O André começou pela questão 4.1, tendo algumas dificuldades em ver os valores das coordenadas dos pontos. Aliás, ao longo de toda a tarefa, foram visíveis estas dificuldades. Apesar disto, chegou à conclusão de que a resposta era 14 km: “Eu acho que se encontram a 14 km de distância”. Como justificação, o André explicou o que viu no gráfico e, utilizando o ponto onde a função termina e a sua relação com o domínio da função, chegou à resposta:

Então, este gráfico desta função relaciona o tempo com a distância percorrida. (...) E então para nós sabemos a distância entre estas duas localidades, basta vermos até onde vai o gráfico da distância entre essas localidades. E como o intervalo, ou melhor, como o fim da função está fechado quer dizer que este valor também está dentro do domínio, portanto é 14. A distância entre as localidades é 14 km.

Na questão 2, o André pensou de forma semelhante, mas desta vez analisou o eixo Ox , que representava o tempo:

Então eu vi pelo eixo que representa o tempo em minutos. E vi que o final desse gráfico corresponderia até onde o comboio tinha ido, portanto o destino. E então vi no eixo do tempo, a que abcissa correspondia essa ordenada. Portanto para o comboio ter chegado àquele destino, que fica a 14 km da partida, demorou 20 minutos a lá chegar.

Na questão 3 desta tarefa, também analisou o gráfico, referindo que “Há umas zonas do gráfico em que a função está constante”. Para responder à questão, recorreu à determinação de coordenadas de pontos, pois, sabendo a abcissa, conseguia descobrir a ordenada:

André: Portanto, até aos 10 minutos, ele percorreu 8 km.

Eu: Isso aí, tu viste como?

André: Eu aqui vi até à abcissa 10, por exemplo, no eixo do tempo até ao ponto ou até à abcissa 10. E, depois vi a que ordenada correspondia essa abcissa ou a que imagem correspondia esse objeto e é 8. 8 km.

A questão 4 incluía, no fundo, duas questões. O André começou por responder à primeira, negando, pois há intervalos em que o comboio para:

André: (...) então o que eu acho que significam essas zonas onde a função é constante, por exemplo, no intervalo de 8 a 10. Eu acho que nestas zonas do gráfico, isso significa que o comboio esteve parado. Então o comboio deslocou-se sempre à mesma velocidade? Não. Não, porque nós temos aqui retas, por exemplo, temos aqui retas do 0 até um pouco antes do 4, até o intervalo de 0 a 3 (...)

Eu: O 0 a 3 é em que eixo?

André: No do tempo. Dos 0 aos 3 minutos, ele percorreu aquela distância numa velocidade. Depois aos 4 km, esteve parado durante 2 minutos. Depois voltou a andar dos 4 até aos 8. Mas depois parou novamente, durante mais tempo.

No entanto, ficou a pensar nos intervalos em que o comboio andava, questionando-se sobre se estes se deslocavam sempre à mesma velocidade:

...depois voltou a andar, voltou a parar e depois voltou a andar. Ou seja, o que eu entendo disto é, ele andou e parou, mas será que ele se deslocou

sempre à mesma velocidade? Eu diria que não. Porque as inclinações das retas são sempre diferentes.

Para explicar o seu raciocínio, o André tentou exemplificá-lo, comparando visualmente, as inclinações das retas e a distância percorrida num determinado espaço de tempo:

Por exemplo, no intervalo de 0 a 3, vendo no tempo, no eixo do tempo de 0 a 3, de 4 a 8 são inclinações. Aí diria que são quase iguais, mas, por exemplo, de 4 a 8 e de 10 até 16 têm umas inclinações diferentes, ou seja, o comboio percorreu uma distância menor comparada com outras em mais tempo porque ele teve que ir mais lento (...) Comparado com o de 0 a 3, vê-se perfeitamente que nesse intervalo 10 até 16, ele foi mais lento aí.

De seguida, respondeu à segunda pergunta da questão 4. Ele começou por referir o intervalo em que considerava que o comboio se tinha deslocado mais depressa e justificou a sua escolha de intervalo. Comparando as inclinações das retas em diferentes intervalos com a distância percorrida nesse mesmo intervalo de tempo, explicou a sua resposta:

Eu, olhando para esse gráfico, vejo que, em diferentes intervalos, a reta tem diferentes inclinações, portanto, isso quer dizer que não tendo mais... O intervalo de 18 a 21, isso quer dizer que demorou menos tempo a percorrer uma distância maior, enquanto que se formos, por exemplo, no primeiro intervalo, que é do 0 até 3, vendo sempre no eixo do tempo. Aí ele no intervalo de 0 até 3 só percorreu 4 km, enquanto que do 18 ao 21 percorreu (...) também percorreu 4 km.

Por ter visto mal os limites do intervalo, o André ficou confuso, mas, após algum tempo, corrigiu-se, referindo, corretamente, o intervalo de tempo. De seguida, pôde comparar a distância percorrida num determinado intervalo de tempo com outros casos:

André: Dos 18 aos 20, vão 3 minutos. E ele aí percorreu dos 10 aos 14, 4 km. Mas então podemos usar outro exemplo, por exemplo, no intervalo do tempo de 10 até 16, ele só percorreu 2 km.

Eu: Ok, aí percorreu 2 km, e tu vês os 2 km onde?

André: Eu, eu vejo no intervalo de tempo de 10 até 16. Eu vejo que, no instante 10, ele está no quilómetro 8. (...) E no instante de tempo 16 minutos... no minuto número 16 está no quilómetro 10. Ou seja, dos 10 aos 16, durante 6 minutos ele só percorreu 2 km. Enquanto que do minuto 18 ao 20 fechado, percorreu 4. (...) Ele não tem a velocidade sempre constante, tendo o intervalo de tempo mais rápido ou com maior velocidade do 18 ao 20.

Na questão 5, o André começou por referir que já tinha observado, nas questões anteriores, ao analisar o gráfico, que o comboio esteve parado: “Eu já disse isto mais ou menos. Já fui dizendo quando analisei o gráfico”, por exemplo, durante a análise da

questão 4 desta tarefa: "...o que eu acho que significam essas zonas onde a função é constante, por exemplo, no intervalo de 8 a 10. Eu acho que nestas zonas do gráfico, isso significa que o comboio esteve parado". Deste modo, o André referiu que é nas estações em que o comboio esteve parado que, no gráfico, a função é constante:

Onde o comboio parou, no gráfico é representado por uma função constante. Ou melhor, a função nesse sítio é constante. (...) Portanto, quer dizer que está parado, ou seja, o tempo passa e a distância não. E ele não percorre nenhuma distância. O tempo nunca para, a distância é que vai variando ao longo do tempo.

De seguida, referiu, através da observação dos intervalos de tempo, como as estações e os apeadeiros estavam representados no gráfico, para além de os contar: "Portanto, olhando para o gráfico, os intervalos em que ele está constante, é do 3 ao 4, do 8 ao 10 e do 16 ao 18, vendo no eixo do tempo. Diria que, há 3 paragens entre estações e apeadeiros".

A figura 40 apresenta a resposta do André à última questão da tarefa 4. Aqui, o aluno já justificou por escrito o seu raciocínio.

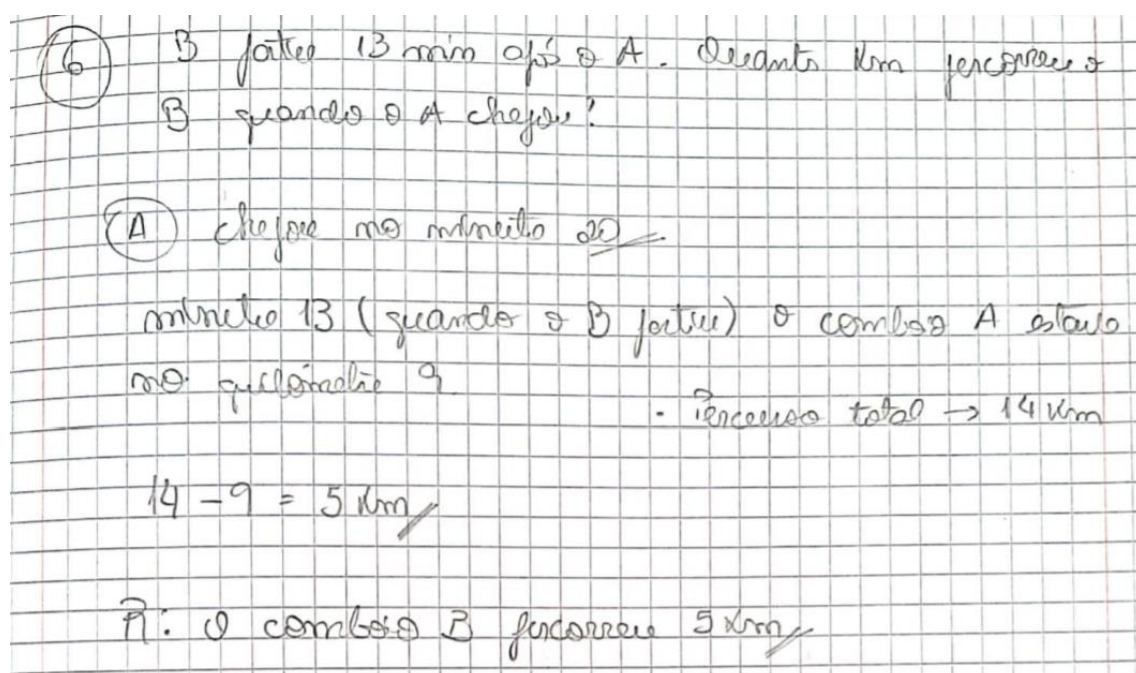


Figura 40 – Resolução da questão 6 da tarefa 4 pelo André

O André demorou bastante tempo até perceber a situação apresentada, tal como aconteceu na tarefa 2. Lendo várias vezes o enunciado, concluiu o seguinte:

O B partiu 13 minutos após o A, ou seja, o A quando... Se eu me lembro o B fez o mesmo percurso que o A, ou seja, a função é a mesma para os dois comboios. Sim, ok. fazendo as mesmas paragens... é igual. Então o B partiu 13 minutos após o A, então o B partiu quando comboio A já tinha perdido 13 minutos, então quando o comboio B partiu, o comboio A estava no quilómetro 9, mais ou menos, vendo pelo gráfico.

A estratégia que o André adotou foi por ele referida após a resolução do problema na folha de papel:

Eu fui ver a que imagem respondia o objeto 13. E vimos que correspondia a 9. Correspondia à imagem 9. Ou seja, quando o comboio B partiu, o comboio A já tinha percorrido 9 km. (...) Depois, a distância entre o ponto do minuto 13 até ao minuto 20, percorridos pelo comboio A. Nesse intervalo de 13 a 20 foi o intervalo em que o comboio A concluiu a sua viagem e também foi o tempo que o comboio B percorreu enquanto o comboio A chegou ao destino. Portanto eu fui ver quantos quilómetros tinha percorrido o comboio A no total. Subtraí o número de quilómetros já percorridos pelo comboio A até ao minuto 13, que foi o intervalo que nós consideramos. Esses quilómetros, além de significarem os quilómetros percorridos do comboio A, entre o intervalo de 13 a 20, significa também os quilómetros percorridos pelo comboio B, enquanto o comboio A chegava ao destino.

Na sua estratégia, depois de analisar o gráfico, obteve a distância percorrida pelo comboio A após a partida do comboio B. Tal como se viu na citação inicial acerca desta questão na entrevista, o André, mesmo que indiretamente, mencionou a transformação gráfica subjacente a esta questão. Por esta razão, suponho que este erro terá surgido devido a problemas de interpretação do que era pedido, ou por causa de alguma confusão na análise do gráfico.

6.2.2. *Preferências visuais e uso de recursos tecnológicos*

Após a resolução destas quatro tarefas, procurei aprofundar um pouco mais algumas questões relacionadas com as preferências visuais do André no tema das funções, assim como o uso que ele fazia da tecnologia que tinha disponível. No IPM, o André tinha obtido uma pontuação de 26, o que sugeria ter uma preferência visual.

O André gostou de todas as tarefas que realizou durante a entrevista, dando preferência à tarefa 4, que resolveu maioritariamente por métodos visuais, como foi descrito atrás. A tarefa que gostou menos foi a 2, pois não a conseguiu resolver, mas que tentou fazê-lo recorrendo a métodos visuais e não visuais.

O aluno referiu que no tema das funções prefere trabalhar com representações gráficas, mas revelou que não tem problemas em utilizar expressões algébricas:

Gosto mais de trabalhar com gráficos. E, também é claro que nós temos que trabalhar com expressões das funções. (...) É muito importante vermos na nossa cabeça como é que ficará a função, e as transformações gráficas, como foi no caso da [tarefa] 1. Gosto mais de ver gráficos e recolher dados dos gráficos. Com expressões, é um pouco mais chato para mim, mas também faço.

Nas transformações gráficas, explicou que, quando está perante uma, normalmente consegue imaginar o que acontece à função, mas quando são várias recorre a alguns pontos chave, por exemplo, extremos e interseções com eixos, aplicando as transformações a esses mesmos pontos, e ligando-os no final do processo. Quando as funções não são lineares, costuma recorrer à calculadora gráfica:

Eu: E quando trabalhas com transformações gráficas (...) Como é que costumavas pensar nisso? Costumas pegar num ponto ou pensas na função como um todo? Como é que é?

André: Na de hoje, no exemplo de hoje, não foi só uma transformação, foram duas ou três, acho que sim. Depende, se for só uma transformação ou uma de translação horizontal ou vertical, é mais simples, consigo perceber logo vendo. Claro que eu vou ver os pontos mais importantes e vejo quantas unidades em que elas se deslocam para cima para baixo.

Eu: Nesses pontos importantes?

André: Nesses pontos importantes, sim. (...) Depois eu vejo a transformação desses pontos e depois eu acho que basta ligar e esses pontos que tem a função. Como foi no caso de hoje. No caso de hoje eu fui... eu tentei ver onde é que os pontos... Quando eu falo de pontos importantes é, por exemplo, quando a função muda a sua monotonia, quando está crescente e depois fica decrescente, onde interseção o eixo do x . Nos zeros da função e quando muda a sua monotonia, para mim esses pontos são os mais importantes. Depois eu transformo esses pontos consoante a expressão que me dão e ligo-os depois, se for uma reta é claro. Se for uma parábola não sei (...) Para isso tenho a calculadora.

Quanto ao recurso à tecnologia no estudo do tema das funções, André referiu que costuma recorrer à calculadora quando as expressões das funções são “complicadas”. Costuma ainda recorrer à calculadora quando não tem a certeza se o que imagina na sua cabeça estará correto, como se pode ver no diálogo seguinte:

Eu: Costumas recorrer à calculadora para ver os gráficos?

André: Naquelas em que a expressão é mais complicada. (...) Uma expressão que represente uma função afim assim mais chata, uso a calculadora, sim. Para ser mais simples.

Eu: (...) E com as parábolas? Também costumavas recorrer mais às calculadoras?

André: Com as parábolas, sim. As parábolas consigo perceber, mais ou menos, mas claro, eu sempre, quando não tenho a certeza, uso a calculadora.

Eu: Quando tens uma expressão de uma parábola assim escrita, já consegues relacionar mais ou menos com o que é [graficamente]? Qual é o gráfico dela?

André: Sim.

Apesar de, nas funções, gostar mais da componente gráfica, na geometria, gostava mais da componente algébrica:

Sim, mas também consigo trabalhar bem com expressões e assim... Eu gosto mais da parte analítica [na geometria]. Parece um pouco contraditório, mas gosto mais da parte em analítica. Como nós fizemos vários exercícios, e do uso [da geometria] nas funções, agora. (...). Parece contraditório, mas é assim que eu penso.

Pode parecer contraditório, mas argumento o contrário, pois, apesar do tema da geometria analítica não ter sido lecionado sob uma perspetiva exclusivamente analítica, privilegiou-se esta abordagem, em detrimento de abordagens visuais, podendo isso justificar o que o aluno diz. No tema das funções, a ligação entre o visual e o algébrico foi intencional e aí o aluno prefere a abordagem mais visual.

O André revelou que agora gosta muito de funções, mas que o mesmo não acontecia no início do 3.º ciclo do ensino básico. Foi quando começou a perceber como trabalhar com aquilo que ele chama de funções mais simples (funções afins e, eventualmente, as lineares) que o seu gosto pelo tema se desenvolveu:

Porque eu nunca percebia muito bem como trabalhar com funções, mas a partir do momento em que eu consegui as mais simples, as afins, as lineares. Quando percebi como fazer, como calcular, a equação da reta, como ir buscar a ordenada ou a abcissa de um ponto dando-me a ordenada ou a abcissa desse ponto. E também fiquei a gostar mais de funções quando percebi.

Para além das funções, o André gostou muito da geometria analítica abordada este ano. Lembrou-se que conseguiu interligar a geometria analítica no plano com o tema das funções, algo que o deixou muito feliz, pois foi quando percebeu que podia interligar matérias:

Gostei este ano, gostei da geometria analítica quando demos e também nos exercícios mais para trás, lembro-me que recorri a conhecimentos da geometria analítica para resolver problemas de funções, por exemplo, ir encontrar a equação da reta. Neste caso, eu usei a equação vetorial da reta e fui buscar o vetor diretor da reta, usando as equações paramétricas e

encontrando a função afim. Como é obvio, eu fico contente por conseguir perceber e relacionar matérias.

6.3. Diogo

6.3.1. Resolução de tarefas sobre funções

Na figura 41, do lado direito, apresento a função que o Diogo obteve depois de ter feito todas as transformações gráficas *sugeridas* pela expressão da função g .

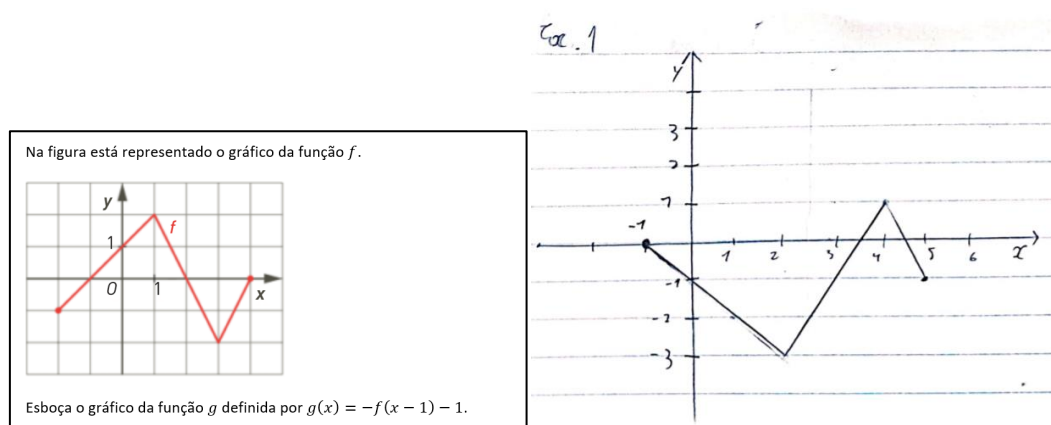


Figura 41 – Enunciado (à esquerda) e resolução do Diogo (à direita) da tarefa 1

Primeiramente, Diogo identificou todas as transformações gráficas, que transformam a função f na função g , tal como se pode ver no excerto abaixo:

Então, primeiro eu reparo logo que f está negativa, portanto as imagens vão ser contrárias às imagens de g , vão ser simétricas. As imagens de g vão ser simétricas às imagens de f , para começar. Depois, os objetos de g vão estar todos um para a direita e as imagens de g vão estar todas um para baixo.

Isto tudo foi visto a partir da expressão algébrica da função g .

De seguida, representou os limites do domínio da função transformada, aplicando todas as transformações gráficas identificadas e explicando que essa função iria manter um comportamento semelhante ao da função original, como se vê no excerto abaixo:

Para desenhar vou pensar nos pontos chave, no início e no final, para depois seguir o desenho, porque a estrutura vai ser a mesma, só que ao contrário. O ponto inicial vai ser um bocadinho diferente e, portanto, os outros também.

Então, se o primeiro ponto da função f é $(-2, -1)$, a função g vai ser o simétrico, para baixo, para a direita, portanto, vai ser o ponto $(-1, 0)$.

Para representar o resto da função, o Diogo segue a forma da função inicial, mas aplicando-lhe uma simetria relativamente ao eixo Ox , tal como refere “seguí exatamente a mesma forma que a função f segue, só que o simétrico disso (...) porque a função $g = -f$ qualquer coisa”. Assim, o Diogo conseguiu identificar o comportamento de cada um dos segmentos do gráfico função. Como o gráfico do enunciado estava representado em quadriculado, ele serviu-se desse facto para encontrar os transformados dos pontos “chave” e, para representar a função até chegar ao limite superior do domínio, seguiu uma trajetória que, à partida, já conhecia. Esta utilização do limite superior do domínio, já marcado anteriormente, serviu de confirmação.

E agora, se na função f vai andar 3 para cima, 3 para a direita, para chegar ao ponto (...) há um ponto onde está a subir e depois volta a descer, eu vou desenhar esse ponto. Se tem aqui o ponto inicial, depois vai... 1, 2, 3... chega ao ponto $(2, -3)$. Agora, se na função f vai descer 4 e para a direita 2, aqui vai ser subir 4, para a direita 2. Estou no ponto $(2, -3)$, vou para o ponto $(4, 1)$. E agora na função g , pelo mesmo raciocínio, vai descer 2 e vai 1 para a direita, então vai acabar no ponto $(5, -1)$, que bate certo com o ponto final da função f , ou seja, mais uma abcissa e menos uma ordenada.

A figura 42 inclui a resolução algébrica das duas questões da tarefa 2.

Duas localidades A e B estão ligadas entre si por uma linha de caminho de ferro, numa extensão de 459 km.

No mesmo instante, um comboio parte de A com destino a B e outro parte de B com destino a A. Admite que as velocidades são constantes, sendo de 170 km/h a do comboio que parte de A e de 180 km/h a do comboio que parte de B.

Quanto tempo depois de partirem demoram os comboios a se cruzarem?

Qual dos comboios chega primeiro ao seu destino? Quanto tempo antes do outro?

Ex. 2

0) $1,37 \text{ h}$ $\frac{223}{170} = 1,312$ $\frac{236}{180} = 1,311$

$\frac{459}{180} = 2,55 \text{ h}$ $\frac{459}{170} = 2,7 \text{ h}$ $2,7 \text{ h} - 2,55 \text{ h} = 0,15 \text{ h}$

1) O comboio que parte de B chega primeiro ao seu destino, 9 minutos antes do outro.

Figura 42 – Enunciado (em cima) e resolução do Diogo (em baixo) da tarefa 2

Após ler os enunciados, o Diogo referiu que já sabia como responder à questão 2, mas que para a 1 ainda tinha de pensar. A primeira estratégia que o Diogo utilizou para a primeira questão desta tarefa foi recorrer a cálculos. Ele começou por explicar a estratégia que iria utilizar, mas ainda não tinha muita certeza de como iria fazer isso:

Primeiro tenho de saber onde é que eles se vão cruzar, para depois saber quanto tempo que eles demoraram. Só que para saber isso... (...) Vejo a razão entre um e outro e depois, a partir daí, vejo a que distância eles tocaram e depois dessa distância ao início. Depois vejo a distância que cada um deles percorreu e vejo o tempo que demoraram. E assim vejo o tempo em que os dois comboios se cruzaram. Agora como fazer para chegar aí, vou pensar, ainda falta um bocadinho. Então razão entre 17 sobre 18... (...) É a fração simplificada de $\frac{170}{180}$.

Para dinamizar a sua estratégia, o Diogo começou por imaginar uma reta com o objetivo de tentar perceber onde é que os comboios se iriam cruzar:

Eu vi uma reta, que são os 459 km, e sei que, sempre que um comboio anda 170, o outro vai andar 180. Se eles andassem à mesma velocidade, eles iam se cruzar no meio. Mas como um anda sempre 10 km a mais, anda um bocadinho mais rápido do que o outro, eles vão se cruzar um bocadinho para lá do meio.

Após essa conclusão, o Diogo recorreu a alguns cálculos, mas não sabia explicar por que estava a fazê-los. Ele multiplicou o comprimento de metade do percurso por $\frac{17}{18}$, que corresponde à razão entre as duas velocidades, apresentada em fração simplificada. No final desta estratégia, decidiu verificar se o seu resultado estava certo e percebeu que não estava:

Eu não sei muito bem porque estou a fazer isto, isto é instintivo, mas... eu acho que, se eu vir o meio do 459, depois multiplicar por $\frac{17}{18}$, se calhar dá-me o ponto onde eles se cruzam, não tenho a certeza, vou ver. Ponto médio 459... o ponto médio é 229,5. (...) É o ponto médio. Se eu multiplicar isso por $\frac{17}{18}$, dá-me 216,75. Eu ainda não tenho certeza se é isto, estou a ir por aqui, mas não tenho a certeza. (...) Para confirmar se isto estava certo, eu ia agora multiplicar $229 \times \frac{18}{17}$ para ver se a soma dos dois daria a distância total percorrida, a distância entre A e B, mas claro eu isso ia dar porque seria o mesmo que multiplicar $\frac{17}{18} \times \frac{18}{17}$, portanto, claro que dá... O comboio mais lento percorre 216,75 km até encontrar o B. E o B percorre $459 - 216,75$ [459-216,75] (...) Então agora eu vou dividir 216,75 sobre 170 dá 1,275 horas. (...) Para confirmar, para ver isto está certo eu vou fazer agora com o último 18 e com outro tempo. Agora então é $459 - 216,75$. Será que fiz mal?... ok... estou a pensar de forma errada...

O Diogo não terminou o seu raciocínio e considerou que a sua resolução estava errada.

Dado que as tarefas tinham sido apresentadas como sendo sobre funções, o Diogo decidiu abordar este problema tendo em conta esse tema: “Então se esta entrevista é sobre funções, então isto também deve ser sobre funções. Ok, então vamos pensar em funções”. Contudo, antes de continuar a resolver esta questão, decidiu fazer rapidamente a outra questão desta tarefa 2. Quando voltou à questão que tinha deixando pendente, decidiu recorrer à calculadora gráfica (ver output na figura 43).

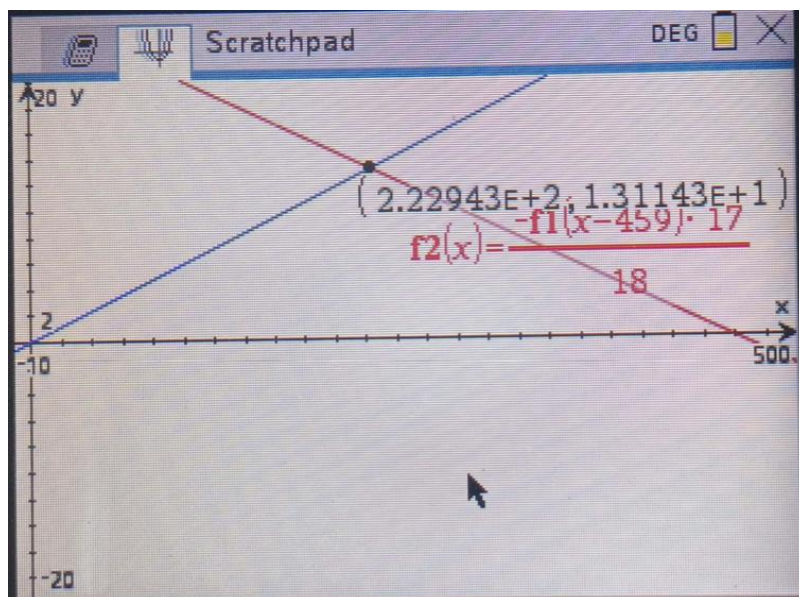


Figura 43 – Representação gráfica das funções na calculadora do Diogo (questão 1 da tarefa 2)

Na calculadora, o Diogo decidiu representar, inicialmente, duas retas, uma com declive 18, e outra com declive -17 . Essas retas deveriam passar, respetivamente, nos pontos $(0,0)$ e $(459,0)$. No entanto, após pensar um pouco, o Diogo decidiu considerar uma reta de declive $\frac{1}{17}$, para que “menos a reta teria de percorrer até chegar à abscissa 459”. Tendo isto em conta, considero que o aluno se referia ao facto de, visualmente, a reta ficar mais na horizontal. Apresento, abaixo, o modo como o Diogo apresentou o seu raciocínio:

Fazer duas retas, uma que tem de declive 18 e uma que tem declive -17 , e eu faria com que uma passasse no eixo x no ponto $(0,0)$ e outra que passasse no eixo do x no ponto $(459,0)$ e depois, ao saber em que ponto eles se vão cruzar no meio... Não, não pode ser assim. Se for o inverso de 17 porque agora estou a pensar quanto maior for a velocidade, mais a reta tinha de andar para chegar ao 459, aqueles 459 de abscissa. Mas se fizer o inverso disso, ou seja, $\frac{1}{17}$, menos a reta teria de percorrer até chegar à abscissa 459. Agora vou ver se consigo fazer isso.

O Diogo definiu a função $f(x) = \frac{1}{17}x$ e, embora não soubesse como fazer transformações gráficas diretamente numa calculadora gráfica, decidiu optar por essa estratégia. Ele queria que a sua função transformada passasse no ponto $(459, 0)$: “Eu só queria fazer uma função passar no ponto $(459, 0)$ ”. Com alguma ajuda nos comandos, o Diogo definiu a função $g(x) = -f(x - 459) \times \frac{1}{17}$ na sua calculadora: “Se eu queria transformar esta na outra, a outra seria $g(x) = -f(x - 459) \times \frac{17}{18}$ ”. Fez a interseção da função f com a g , obtendo a distância que percorreu o comboio que parte de A até se cruzar com o outro comboio. No final, verificou os resultados que obteve. Em particular, verificou, com cálculos, o tempo que o comboio que partia de B demorava a chegar ao cruzamento:

Diogo: Agora vejo a interseção entre as duas. A interseção que me dá tem de abcissa 223, eu preciso disto não arredondado.

(...)

Eu: Esse número é exato?

Diogo: Não, 222,943. (...) E outra vez não tenho a certeza se é isto, porque eu não sei confirmar... Ah, sei sim. Agora eu vou pegar neste valor, eu vou arredondar para 223 km [que] seria a distância que o que parte de A percorreria. Portanto se eu dividir 223 por 170 km/h daria-me... (...) 1,312 arredondado. (...) Agora vou ver o que é que o que parte de B percorre... 459 a dividir por... demora praticamente o mesmo tempo... 236/180 dava 1,311, portanto arredondado será 223 km. Cruzam-se no ponto 223 km a partir de A, ou seja, de B 236 (...) o tempo que demoraria até eles se cruzarem seria 1,31 horas.

Como referi, o Diogo já sabia como resolver a questão 2 desta tarefa antes de iniciar a sua abordagem à questão 1: “Resposta à pergunta 2, basta dividir a distância pelos km/h e vejo o tempo que demora. E depois faço isso para os dois, subtraio o tempo menor ao tempo maior. Não, o módulo disso vai ser a diferença dos dois”. Seguindo este raciocínio, calculou o tempo que cada comboio demorava a fazer a viagem e verificou a diferença entre os dois:

Na segunda, o comboio que parte de B chega primeiro, obviamente, porque é mais rápido e percorre a mesma distância. E agora, para ver quanto tempo chega antes do outro, vou ver o tempo que cada um demora e subtraio ao tempo que demorou mais o que demorou menos, e vou ter a diferença de tempo de chegada dos dois, Ok. Então 459... demorou 2 horas e 55 minutos (...) e diferença é de 0,15 horas. É 9 minutos ok (...). Então o comboio que chega primeiro ao seu destino é o que parte de B e chega 9 minutos antes do outro.

A figura 44 apresenta a resolução (em baixo) da tarefa 3 (em cima) realizada pelo Diogo.

Seja $f(x) = (5 - p^2)x - 6$, sendo $p \in \mathbb{R}$.

Para que valor(es) de p a função f é constante?

Explica o teu raciocínio.

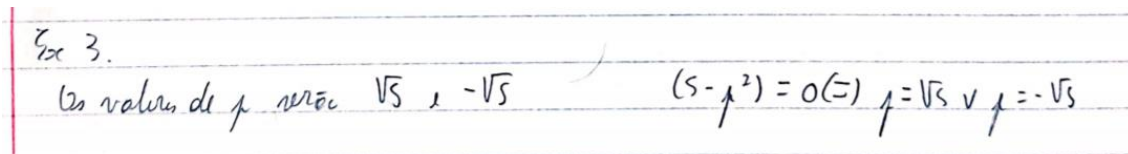


Figura 44 – Enunciado (em cima) e resolução do Diogo (em baixo) da tarefa 3

O Diogo começou logo por dizer o que sabia sobre a função constante, isto é, que sabia que não tem a componente do x e, por isso, decidiu igualar $5 - p^2$ a 0:

Diogo: Para a função f ser constante x tem de ser igual a zero, portanto $5 - p^2$ tem de ser igual a zero. Para $5 - p^2$ ser igual a zero, p tem de ser $\sqrt{5}$, para raiz de 5 ao quadrado ser 5, e depois $5 - 5$ ser zero. Pronto já respondi.

Eu: Então qual ou quais são os valores de p ?

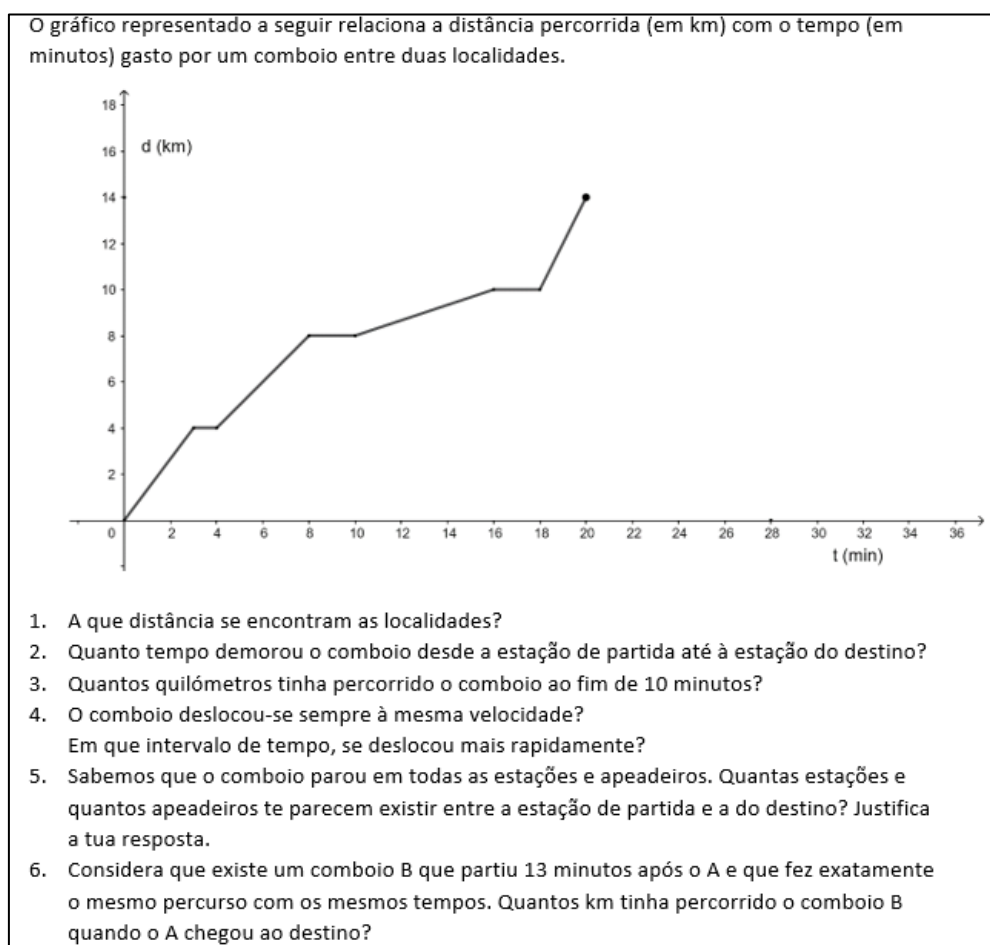
Diogo: $\sqrt{5}$ ou $-\sqrt{5}$.

Após a resolução, justificou que, ao igualar o $5 - p^2$ a 0, a componente do x desaparece e a função torna-se constante. Também referiu que essa função seria $f(x) = -6$, tal como se vê no diálogo abaixo:

Eu: Então tu pensaste... tu decidiste igualar $5 - p^2$ a zero, porquê?

Diogo: Porque assim a função torna-se constante. Assim elimina-se o x da função... e o número multiplicado por 0 não interessa, é zero. Portanto, o x não conta. A função ficaria $f(x) = -6$ que é uma função constante.

Na figura 45, apresento as respostas do Diogo à tarefa 4, cujas justificações foram dadas oralmente.



Ex. 4

4.1.) Encontro-se a 14 km.

4.2.) Demorou 20 min.

4.3.) Percorreu 8 km

4.4.) Não, o declive do retó muda

4.4.1) No intervalo [18,20]

4.5.) Existem 3 estações e apeadeiros, pois existem 3 intervalos em que a função é constante, ou seja, o comboio ficou parado em certos intervalos de tempo.

4.6.) Percorreu 7 km.

Figura 45 – Enunciado (em cima) e resolução do Diogo (em baixo) da tarefa 4

A partir do enunciado da tarefa, o Diogo concluiu de imediato o seguinte: “O gráfico representa a distância percorrida com o tempo, ok, então é a velocidade”. Ou seja, interligou logo a situação apresentada com aquilo que conhecia. Na questão 1, o Diogo concluiu rapidamente a distância a que se encontravam as duas localidades: “Eu imagino que aquele ponto acaba em 14, certo?” e justificou a sua resposta:

Então, aqui ignorei completamente as abcissas, olhei para as ordenadas, porque eu sei que o comboio vai de A a B, certo? E entre A e B é a distância. Então se ele começa no zero, começa numa e vai para a outra localidade que é a distância. Ele percorre uma certa distância e chega à outra localidade.

Após isso, para justificar o facto de ser 14 km, o Diogo referiu que estava a ter em conta o ponto de coordenadas (20, 14): “É o ponto (20, 14) (...) é o ponto de maior abcissa e ordenada”. Como já tinha descoberto as coordenadas do ponto na questão 1, o Diogo utilizou-as para justificar a sua resposta à questão 2: “Ok, demorou 20 minutos (...) Vi da mesma forma, vi a abcissa do ponto (20, 14)”.

Para responder à questão 3, o Diogo viu a ordenada do ponto cuja abcissa é 10. De seguida, explicou o seu pensamento do modo seguinte:

Ok, agora eu vou ver ao ponto que tem 10 de abcissa, que é 10 minutos, quantos quilómetros é que ele percorreu. Estou a fazer isto com a caneta, só visualmente, não sei se está muito, muito preciso. Eu diria que aqui percorreu 8 km.

Neste excerto, é possível ver a forma como o Diogo via as coordenadas dos pontos, isto é, devido à ausência de um quadriculado, ele recorreu a uma caneta, posicionando-a na vertical à frente do ecrã.

Na questão número 4, o Diogo concluiu que o comboio tinha diferentes velocidades e justificou essa afirmação baseando-se no declive dos vários segmentos de reta. Para tal, relacionou o declive da reta com a velocidade do comboio, ou seja, interpretou o gráfico da função no contexto do problema:

Não se deslocou sempre à mesma velocidade. O declive da reta muda. (...) a fórmula da velocidade é metros por segundo, ou seja, a distância a dividir por tempo, portanto o declive da reta é literalmente a distância a dividir pelo tempo. Porque é $\frac{y}{x}$, y distância, x tempo, portanto, se o declive muda a velocidade também muda.

Para referir quando o comboio se deslocou mais depressa, o Diogo também comparou os declives, não referindo os seus valores:

Entre o intervalo 18 20 fechado, porque é onde a reta tem maior declive (...) era mais rápido, tem mais declive. É onde a função, acho que posso dizer isso, é onde a função tem maior declive. Os intervalos de 18 a 20.

Na questão 5, o Diogo, inicialmente, concluiu que seriam cinco paragens, pois tinha considerado a estação de partida e a de destino:

Então, a meio da viagem parou três vezes e também parou no início e no final. Imagino que em cada localidade também exista uma estação, por isso, existem cinco estações ou apeadeiros durante a sua viagem. Ou passa por 5.

Novamente, a justificação da sua resposta parte da interpretação do gráfico da função, vendo os intervalos onde a função era constante, acrescentando, no final, a estação de partida e a de destino. Apresento abaixo o raciocínio do Diogo:

Então, primeiro olho para a função e vejo logo que há intervalos onde a função é constante... intervalo 3 4, intervalo 8 10, intervalo 16 18. Ou seja, o tempo continua a passar, obviamente o tempo não para, mas o comboio não andou não se deslocou, por isso, está parado. Então significa que está numa estação ou num apeadeiro. E depois, para além dessas 3 também está parado no início, o comboio tem de vir de algum lugar, portanto o ponto (0,0) também é uma estação, e na localidade final ele também para.... Portanto, o ponto (20,14) também é uma estação, é assim que eu penso.

No entanto, após uma nova leitura do enunciado, concluiu que eram apenas três paragens: “Ah, entre a estação de partida e a de destino... ok, então existem só 3, não tinha lido.... Quando se diz ‘entre’ está subentendido que os extremos não contam, então existem 3”.

Para responder à questão final desta tarefa, o Diogo considerou que o comboio B iria percorrer 7 minutos antes do comboio A chegar ao destino. Para isso, considerou o tempo da viagem total e o atraso do comboio B:

Diogo: Ok então eu sei que se eles vão fazer o mesmo percurso, eu vou ver no intervalo entre 13 e 20 porque eu sei que o comboio B parte 13. (...) a diferença de tempo é $20 - 13$ e então vou ver a partir da origem do gráfico da função. No início da função.

Eu: Esta [função] que está aqui representada [no enunciado]?

Diogo: Sim, esta função. Vou ver no ponto de abcissa 7, quantos quilómetros é que percorreu.

Para passar do tempo para a distância, o Diogo interpretou o gráfico relativo ao comboio A. Primeiramente, ele foi ver a abcissa do ponto que tinha ordenada 7. De seguida, para descobrir esse valor, referiu que, no intervalo que estava a considerar, a reta tinha declive 1. No entanto, esse valor foi obtido por palpite, afirmando que já tinha visto muitas outras retas com a mesma inclinação:

Diogo: Eu fui ao ponto de abcissa 7, ver quantos quilómetros é que percorreu o comboio que andou durante 7 minutos.

Eu: E esse ponto é direto? As coordenadas dele?

Diogo: Se tivesse em papel, se calhar dava para fazer um bocadinho melhor, mas aquele segmento entre a primeira paragem e a segunda

parece-me ter declive 1, por isso, eu acredito que sim, imagino que deve ser, deve ser 7. Dá para ver mais ou menos.

Eu: O declive 1, onde é que o foste buscar?

Diogo: Não sei, eu já vi bastantes, já vi algumas funções para conseguir ver mais ou menos o ângulo.

Neste excerto, é possível verificar que o Diogo não foi muito rigoroso ao referir o declive, vendo o seu valor apenas de forma aproximada.

6.3.2. *Preferências visuais e uso de recursos tecnológicos*

Após a resolução destas quatro tarefas, procurei aprofundar um pouco mais algumas questões relacionadas com as preferências visuais do Diogo no tema das funções e, também, o recurso à tecnologia que tinha disponível. No IPM, o Diogo tinha obtido uma pontuação de 10, o que correspondia a uma preferência não visual.

Das tarefas realizadas, o Diogo referiu que a mais interessante foi a tarefa 2, tendo a noção de que o seu método de resolução não tinha sido o mais eficiente, mas que, mesmo assim, estava satisfeito por a ter conseguido resolver: “A [tarefa] 2, gostei bastante. Tenho a certeza, quase absoluta, que a forma que eu resolvi foi muito ineficiente e muito complicada, mas se [es]tiver certa, ficaria satisfeito”. Para o Diogo a tarefa menos interessante tinha sido a 4, “(...) por ser demasiado direita e eu não ter de pensar (...) mais porque ter muitas perguntinhas que eu tenho que responder, cada uma individualmente, e todas muito fáceis”.

Relativamente ao tipo de representação preferido no tema das funções, o Diogo referiu que: “Dependeria muito. Se forem funções mais complexas do que retas se calhar diria com gráficos, mas senão provavelmente com o número e com papel com expressões”. Para além disso, o Diogo assumiu que tinha uma grande facilidade em imaginar funções, e que, em muitas tarefas, nem precisava de fazer esquemas ou outras representações mais visuais:

(...) eu penso sempre na função, para mim não é muito difícil imaginar funções, pelo menos as que demos até agora são todas bastante simples e previsíveis, por isso, se precisar de.... A maior parte das vezes as perguntas eu nem preciso de imaginar a função, mas às vezes é preciso, e dá para imaginar, mas não há necessidade de fazer esquemas nem muito menos representar.

No que diz respeito às transformações gráficas, o Diogo costuma recorrer mais vezes a abordagens algébricas do que visuais: “Eu raramente preciso de [imaginar as transformações] para o exercício; normalmente faço só mesmo com cálculos”. No entanto, quando imagina a transformação, por exemplo, quando não tem a expressão, costuma visualizar apenas a parte da função que lhe interessa, pois tem noção que não consegue imaginar uma função que vai até ao infinito:

Penso numa linha, no gráfico da função. Eu não imagino o gráfico cartesiano, o infinito todo. (...) uma partezinha, vejo a zona a volta do... a zona que me dá jeito, normalmente à volta da origem do gráfico. E depois vejo primeiro a função e depois ao ler, ao saber o que é que vou ter de transformar, tento imaginar, desenhá-la de outra forma o que for preciso.

Diogo não costuma usar a calculadora gráfica no tema das funções, em particular no que toca às transformações de funções: “Eu até agora não sabia como é que se fazia na calculadora”. Nos outros temas matemáticos, explicou que gosta daquilo que ainda desconhece: “Honestamente falando, eu gosto de tudo o que não percebo agora, e depois quando perceberes não vai gostar muito, é assim que eu funciono”.

Para o tema das funções, deixou uma sugestão para melhorar a sua abordagem, sugerindo que este tema fosse dado com exemplos reais:

Eu gostaria de aprender mais funções com exemplos práticos, com formas de utilizá-las no dia-a-dia. Porque nunca utilizei uma função no dia-a-dia, mas alguns exemplos que na sociedade ou em certas ocasiões posso usar funções para prever certas coisas assim do género. Aplicar a matemática mesmo na vida real.

6.4. Isabel

6.4.1. Resolução de tarefas sobre funções

Na resolução da tarefa 1, ao contrário dos colegas, a Isabel decidiu representar a função aplicando uma transformação gráfica de cada vez, até obter a função g (figura 46). Começou por identificar a translação vertical e a estratégia que iria utilizar para fazer essa transformação, que consistia na escolha de alguns pontos “chave” (os extremos do domínio, o máximo e o mínimo da função original), e, no final, ligar tudo:

Então se eu fosse desenhar, eu passava tudo uma casa para baixo, digamos assim. Eu primeiro pegava no ponto, nos quatro os picos, digamos assim,

os extremos, o máximo e o mínimo, para ter como referência para depois ligar e fazer as retas. E baixava esses pontos todos uma casa para baixo.

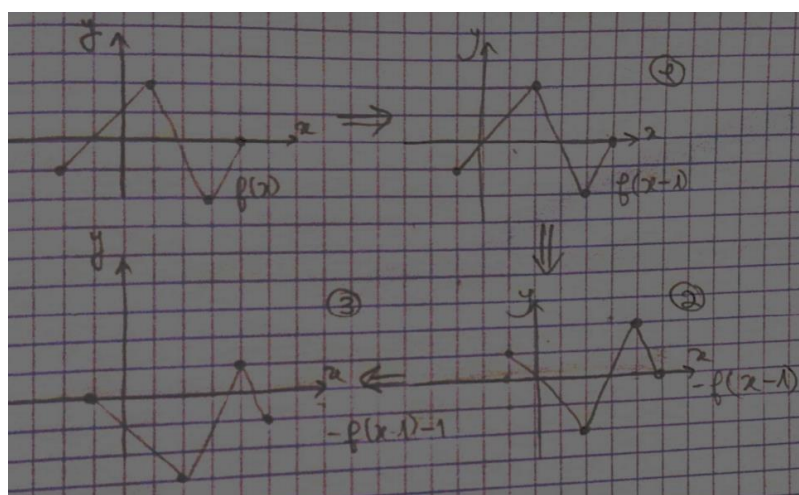
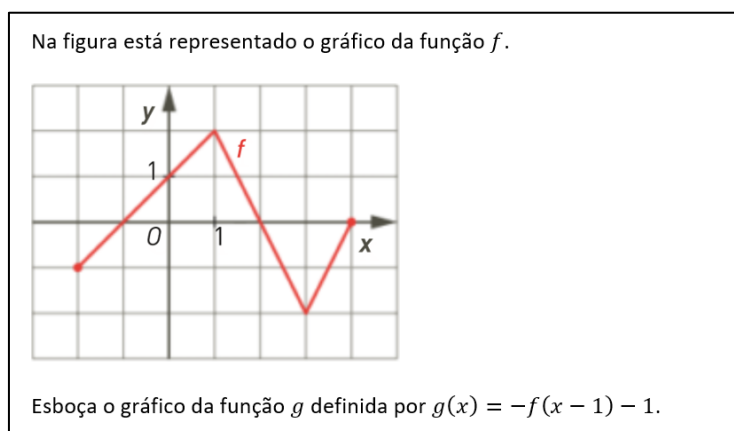


Figura 46 – Enunciado (em cima) e resolução da Isabel (em baixo) da tarefa 1

Isabel referiu que prefere utilizar o quadriculado, pois “é mais fácil por causa da quadrícula”. A representação começou com a translação vertical, movendo cada um dos postos chave, tal como tinha referido inicialmente: “Vou passar o ponto que era $(-2, -1)$ para $(-2, -2)$. Depois o ponto $(1, 2)$ para $(1, 1)$. O $(3, -2)$ para $(3, -3)$. E depois o $(4, 0)$ para $(4, -1)$ ”. Seguidamente, a Isabel passou para a simetria relativamente a Ox : “Agora eu, provavelmente, iria inverter, por causa do menos que está antes de f ... iria fazer uma reflexão sobre o eixo do x , já da função que nos deu anterior”. Continuou a pensar em pontos chave: “Então o ponto $(-2, -2)$ passaria para $(-2, 2)$. Depois o ponto $(1, 1)$ ficava $(1, -1)$. O $(3, -3)$ ficava $(3, 3)$. E o $(4, -1)$ ficava $(4, 1)$ ”. Por fim, aplicou a translação horizontal: “Depois disso, iria chegar o gráfico todo uma casa para a direita,

por causa do -1 que está entre parêntesis”. Nesta transformação também pensou em pontos específicos:

Então o ponto $(-2, 2)$ passava para $(-1, 2)$. Vou só apagar estes [pontos] porque vão-me confundir. Depois o ponto $(3, 3)$ ficava $(4, 3)$. O $(1, -1)$ ficava $(2, -1)$. E o último, o outro que falta, que é o $(4, 1)$ fica $(5, 1)$.

Durante a entrevista, ficou claro que a Isabel fez uma transformação de cada vez, começando pela translação vertical, depois a reflexão e, por fim, a translação horizontal. A aluna foi mostrando, pela câmara, o que estava a fazer, sendo que aquilo que ela mostrava correspondia àquilo que estava a dizer. Contudo, a ordem das transformações que a Isabel foi fazendo não é a mesma que está visível na figura 46. A aluna enviou a resolução à tarefa 1 após a entrevista.

Na figura 47, apresento uma parte da resolução da Isabel da tarefa 2, pois a maior parte do seu raciocínio foi feito oralmente, recorrendo à calculadora para realizar os cálculos.

Duas localidades A e B estão ligadas entre si por uma linha de caminho de ferro, numa extensão de 459 km.

No mesmo instante, um comboio parte de A com destino a B e outro parte de B com destino a A. Admite que as velocidades são constantes, sendo de 170 km/h a do comboio que parte de A e de 180 km/h a do comboio que parte de B.

Quanto tempo depois de partirem demoram os comboios a se cruzarem?

Qual dos comboios chega primeiro ao seu destino? Quanto tempo antes do outro?

Handwritten calculations on graph paper:

A → B: $170 - 60$
 $459 - 162 \text{ min}$

B → A: $180 - 60$
 $459 - 153 \text{ min} \rightarrow 1^\circ$

162 - 153 = 9 min

Figura 47 – Enunciado (em cima) e resolução da Isabel (em baixo) da tarefa 2

A Isabel começou por ler o enunciado, interpretá-lo e dizer a primeira estratégia que iria utilizar:

Então nós temos dois comboios que vão partir de pontos diferentes, mas que o início de um corresponde ao final do outro, digamos assim. E depois temos a velocidade de cada um. E temos de ver quando é que eles se vão cruzar. E sabemos que o caminho de ferro tem 459 km. Se isto fosse um número mais pequeno provavelmente eu iria desenhar o que era mais fácil. Eu normalmente para estas perguntas, eu costumo desenhar como se fosse

uma linha grande e depois ia mexendo. Por exemplo, ia ver, para o mesmo tempo, os dois quantos quilómetros é que ambos andavam, para o mesmo intervalo de tempo, e depois ia vendo até que altura é que eles iam cruzar. Só que 459 é um bocado grande, portanto estou a tentar outra maneira.

Como os números em questão eram muito grandes, a Isabel optou por outra estratégia que envolvia cálculos:

Eu agora vou ver em 30 ou numa hora.... Pronto, eu já sei que numa hora o carrinho [comboio] que vai de A para B, anda 170 km. E sei que numa hora, aquele que vai de B para A, anda 180. Depois como $180 + 170$ é um número mais baixo do que o percurso total, posso descontar já esses quilómetros no percurso total. (...) Uma hora depois a distância entre eles já é de 109 km.

Começou então por essa estratégia, calculando exaustivamente quanto cada comboio percorria, e que distância ficava entre um e outro, diminuindo o intervalo de tempo após cada tentativa. Primeiro, fez os cálculos para 1 hora e diminuiu a distância entre os comboios. Depois disso, fez para 30 minutos, mas percebeu que deveria ser menos tempo e, por isso, diminuiu o intervalo de tempo para 15 minutos. Como esse valor funcionava, aproximou ainda mais os comboios:

O que vai de A para B, em 30 minutos desloca-se 45 km, só que isso já vai ser muito, porque o outro como anda a uma velocidade maior vai andar mais quilómetros do que esse em 30. E depois a soma desses já iria dar provavelmente maior do que 109 portanto eles já tinham cruzado. Então se calhar digo 15 minutos. (...) Portanto eles agora já estão só a 21,5 km entre um e o outro, ao fim de 1h15.

Considerando a nova distância entre os comboios, a Isabel fez uma nova tentativa, calculando a distância entre os comboios após 5 minutos, mas, como já passava do ponto em que eles se cruzavam, percebeu que o intervalo deveria ser ainda menor, e, por isso, fez para 1 minuto e, seguidamente, para 3. Fez, ainda, para 30 segundos:

Então agora fiz para 30 segundos, para ver quanto é que eles andavam. Um anda 1.4 o outro anda 1.5 km, portanto eles já estão só a 1 km e 200 m um do outro. (...) Estava a descontar mais tempo, só que assim nunca mais vou lá. São valores não muito certos, digamos, 459.

Para quase todos os casos, utilizou uma destas duas estratégias: numa primeira estratégia, considerava uma proporção entre o intervalo de tempo definido entre uma hora e o tempo que queria, e a distância que faltava percorrer: “15 minutos é um quarto de uma hora, então é $170/4$ ”; numa segunda estratégia, recorria à regra de três simples, por exemplo: “Fiz por regra de três simples 170 km corresponde a 60 minutos, x corresponde a 1”.

Ao longo desta parte da entrevista, a Isabel estava constantemente a lembrar-se de que seria mais fácil resolver recorrendo a uma equação, mas que já tinha começado a fazer com estas estratégias e não queria desistir:

Eu acho que eu provavelmente eu conseguia fazer isto com uma equação, mas acho que foi assim a maneira que me veio primeiro à cabeça. (...) Eu estava a pensar como é que eu podia fazer uma equação. Só que também já estou quase lá no tempo, só que agora os tempos teriam de ser muito pequenos e nunca mais ia sair daqui até acertar isto.

A resolução da Isabel ficou temporariamente por aqui, mas, no final, após ter resolvido todas as questões da entrevista, voltou a esta tarefa. Começou por pensar numa estratégia com equações, mas não conseguiu avançar com ela, como se vê no excerto seguinte:

Isabel: O que agora eu estou a tentar ver é se existe alguma relação entre as velocidades dos dois, por exemplo, dizer que (...) 170 vezes qualquer número dá 180. Porque depois iria somar ou... ainda não pensei muito bem, mas pronto. Iria conseguir fazer a equação de modo a igualar a 459 e conseguir descobrir. Porque se eu tentar agora, assim tenho duas incógnitas. Ia agora tentar ver qual é a relação entre as duas para poder cortar.

Eu: As duas incógnitas que estás a falar são...

Isabel: Pois, eu não sei muito bem, eu sei que são duas, porque eu sei que tenho valores diferentes.

Consequentemente, mudou de estratégia e tentou procurar o ponto onde os dois comboios se cruzavam, mas pensando a partir do meio do percurso. Apresento abaixo a explicação da estratégia utilizada pela Isabel, durante a qual ela fez gestos para que eu pudesse ver o que ela estava a imaginar:

Eu encontrei o ponto, a distância que está meio do caminho de ferro, que é 229,5 km. (...) É, e agora eu tirei a esse valor 27 km, que é aqueles 9, pronto. E ao tirar... imaginemos que isto é A e isto é B o ponto era aqui no meu nariz, aqui a meio e eu ao tirar os 27 estou a afastar o ponto pra mais por esse lado, mais para perto de A. (...) Pronto, e então eu fui... o valor que me der que é 202,5, neste caso, vai ser a distância do ponto A a esse ponto que eu já defini e depois vou ter que fazer a distância total menos esse pedaço, para dar o outro, que é desse ponto até ao B. Deu-me 256.5. (...) Depois eu fui ver. Fui ver se o tempo que cada comboio demorava, com a sua velocidade, a percorrer esse esses quilómetros correspondentes, se é igual e não é. Portanto, se fosse igual, já sabia que eles, se iam encontrar nesse... iam-se cruzar nesse ponto, mas não é, portanto. (...) O que eu verifiquei com os resultados que me deram foi que, neste caso, para estas distâncias, o comboio B andava mais tempo do que o A. O que vai de B para A anda mais tempo do que de A para B. (...) Portanto, tem de ser ligeiramente mais perto do meio. O ponto em que eles se cruzam.

No entanto, como a própria aluna verificou, esta estratégia não funcionou: “Deu que ia andar 256,5, agora que tinha de ver se tempo era o mesmo... Ok, então já vi que não é igual, mas é perto, portanto, já tenho um ponto de partida como se fosse novo outra vez, pronto”.

Após esta estratégia, a Isabel voltou à tentativa-erro, semelhante à estratégia inicial, mas, desta vez, organizou-a melhor e chegou a um resultado final. Ela começou por verificar o que acontecia quando os comboios andavam 80 minutos:

Eu, agora estou a fazer mais ou menos por tentativa e erro, porque eu já percebi que vai ter de ser. Eu fiz com cada um a andar 80 minutos. (...) Vai ter de ser menos do que esse tempo porque o valor que me dava somado. A distância total seria maior, seria 472 km, porque eu vi em 80 minutos. Quanto é que o primeiro, o primeiro comboio andava e quanto é que o segundo andava e depois somei essas distâncias e deu maior do que 459. (...) E agora vou tentar com 70 e acho que vai dar a menos. Portanto eu sei, já estou a encurtar. Já sei que vai ter de ser entre 70 e 80, mas agora ainda tenho que confirmar.

Após isso, verificou para 75 minutos, 79 minutos, 78 minutos, 78 minutos e 45 segundos, 78 minutos e 40 segundos e 78 e 41 segundos, obtendo a melhor aproximação com o último tempo que corresponde a 78.68 minutos. A estratégia utilizada consistia em ver quanto percorria cada comboio durante o tempo escolhido e, após isso, somar as distâncias percorridas e verificar se essas distâncias eram superiores ou inferiores ao percurso total que os comboios deviam percorrer. No final da resolução, a Isabel explicou de forma resumida o seu pensamento:

Isabel: Então vi a distância total do caminho de ferro, que são os 459 km. Depois eu, como vi que não tinham velocidades iguais, eles não se iam cruzar a meio do caminho. E como sei que o que vai de B para A anda mais rápido do que vai de A para B, eles vão-se cruzar ligeiramente num ponto mais próximo de A do que de B, quando eles cruzam. Mas também como a diferença de velocidades não é muita, o ponto, vai ser bastante próximo do centro. Depois eu, pronto, depois eu fui tentando, foi mais ou menos por tentativa e erro.

Eu: Sim e na tentativa-erro... o que é que foste ver na tentativa e erro?

Isabel: Eu acho que fui ver o tempo, se eles, ambos andassem a 170 km. O tempo que eles iriam demorar a chegar ao meio. Então, eu sei que vai ser menos do que isso, porque um dos comboios anda mais rápido que os 170. Já não lembro que valor é.

Eu: Pronto, andava um pouco mais rápido, certo?

Isabel: Sim, portanto o tempo que eles iam demorar a chegar ia ser ligeiramente mais pequeno do que o tempo que o comboio de A para B demora a chegar ao meio e pronto. Depois foi por tentativa-erro, foi reduzindo aí depois.

Eu: Foste comparar com a distância total, certo? Entre os dois pontos. Andaste a comparar com os 459, certo? Para ver um valor mais próximo, o que é que andaste a comparar com esse valor?

Isabel: Então eu com o tempo, eu peguei e, pronto, fui mandando, digamos assim, tempos à sorte. E fui ver durante esse tempo, quantos quilómetros é que cada um dos comboios andava. E depois fui somando essas duas distâncias para ver se me davam a distância total.

No final da primeira tentativa de resolução da questão 2.1, Isabel resolveu a questão 2.2. Para isso, recorreu à regra de três simples com o objetivo de determinar o tempo que cada comboio demorava a fazer o percurso e, no final, calculou a diferença entre os valores obtidos, determinando o tempo que um dos comboios chegou antes do outro:

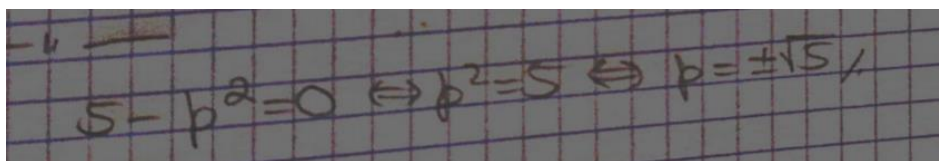
Isabel: Vou fazer uma regra de três simples que é 160 km correspondem a 1 hora. Depois a distância total, que é 459, quanto tempo corresponde? Em vez de pôr uma hora, vou por 60 minutos, que é mais claro. Deu-me 162 minutos. (...) Para o comboio que anda a 170 km, que é o que vai de A para B. Então agora o de B para A anda 180 km em 60 minutos. Quantos é que são 459? Dá 153. Portanto, o que chega primeiro é o que vai de B para A. E chega 9 minutos antes. (...) Eu subtraí os valores que me deram 162 e 153 e deu-me o tempo.

Eu: Ok e esses valores que tu me disseste que foste subtrair são...

Isabel: São o tempo cada o comboio demora a chegar ao destino.

Na figura 48, apresento a resolução da tarefa 3 realizada pela Isabel.

Seja $f(x) = (5 - p^2)x - 6$, sendo $p \in \mathbb{R}$.
Para que valor(es) de p a função f é constante?
Explica o teu raciocínio.



$$5 - p^2 = 0 \Leftrightarrow p^2 = 5 \Leftrightarrow p = \pm\sqrt{5}$$

Figura 48 – Enunciado (em cima) e resolução da Isabel (em baixo) da tarefa 3

Isabel começou por explicar o que é uma função constante e, de seguida, decidiu igualar $(5 - p^2)$ a zero:

Então, eu sei que uma função constante é quando $f(x)$ corresponde a um número sem qualquer incógnita, ou seja, ou $f(x)$ igual a 1, 2, 3, 4, -1, pronto. Então, eu sei que para isso acontecer o valor que vem antes de x tem de ser igual a zero, que é para o x anular, digamos assim, desaparecer. Então eu sei que $5 - p^2$ tem de ser igual a zero.

Fazendo os cálculos, Isabel chegou a conclusão de que “ p é mais ou menos $\sqrt{5}$ ”, e disse qual seria a função constante: “É $f(x)$ igual a menos seis”.

A justificação das respostas da Isabel à tarefa 4 (figura 49) foi dada oralmente. Mas, ao contrário dos seus colegas, Isabel não entregou nenhum registo escrito da sua resolução a esta tarefa.

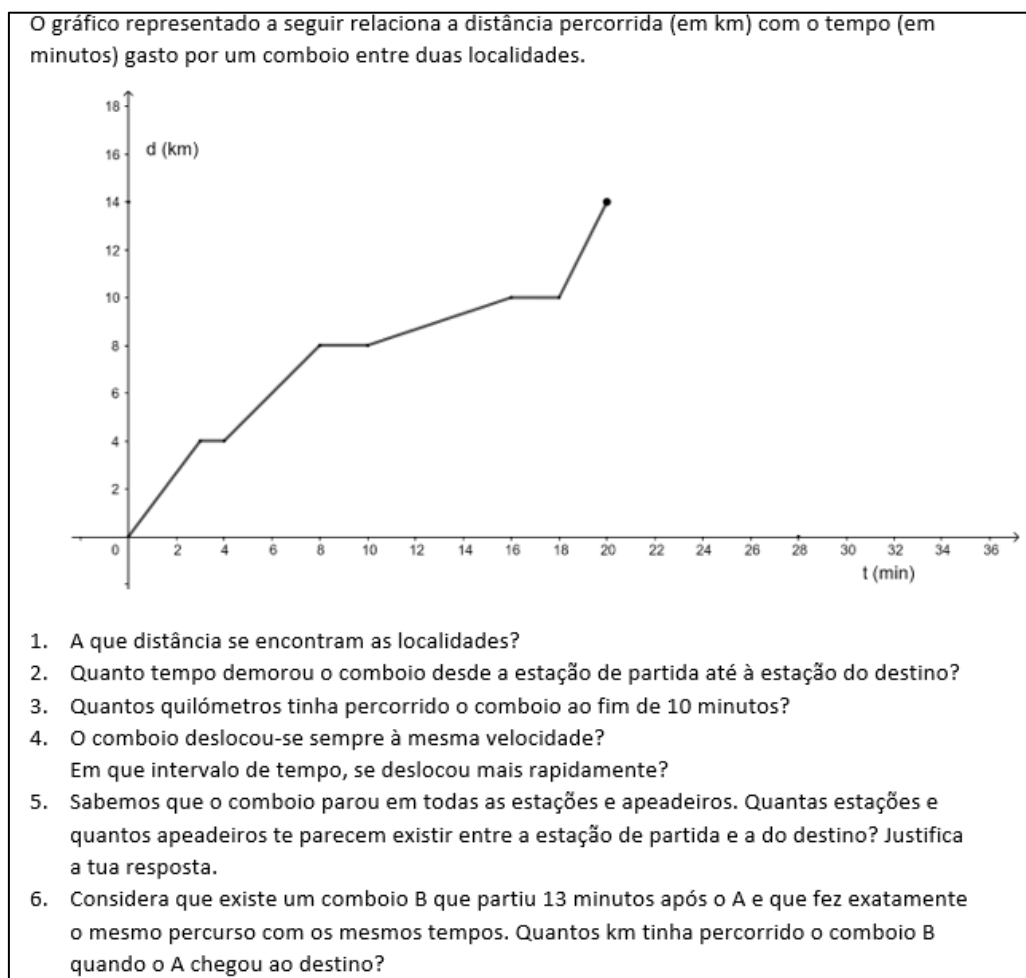


Figura 49 – Enunciado da tarefa 4

Para responder à questão 1, Isabel foi ver a ordenada do último ponto da função: “Então eu acho que é... Não consigo perceber muito bem qual é o valor, mas acho que é ordenada do pontinho, do último, daquele, do extremo da função. (...) 14 km acho eu não dá... sim, acho que sim”. Para a questão 2, utilizou o mesmo raciocínio, mas, desta vez, viu a abcissa do mesmo ponto: “Então, aí era com mesmo ponto, mas é a abcissa desse ponto, que eu acho que é 20, ou por aí 20... 20 minutos”.

Na questão 3, a Isabel procurou a ordenada do ponto de abcissa 10. Para determinar esse valor, imaginou uma reta vertical, $x = 10$, e viu onde esta interseitava o gráfico inicial:

Ok, então. Eu vi, desenhei como se fosse uma reta. Uma reta de equação $x = 10$ e depois vi onde é que essa reta interseitava o gráfico que dava. E depois com esse ponto, fui ver qual era o valor [que] correspondia do y (...)
E acho que é 8.

Apesar de referir que desenhou a reta, esta não chegou a ser representada, ou seja, foi apenas imaginada. Na questão 4, respondeu logo que a velocidade do comboio não era sempre a mesma e, para justificar isso, recorreu ao facto de saber que a velocidade do comboio era o declive dos segmentos de reta em cada intervalo de tempo, tal como se vê na transcrição abaixo:

Então, eu basta olhar para o gráfico e vê-se logo que não se desloca à mesma velocidade, porque há intervalos.... As retas pequenas, as semirretas que nós conseguimos encontrar têm inclinações diferentes, ou seja, a velocidade, isso corresponde à velocidade, que vai variando, porque a velocidade é a distância sobre o intervalo de tempo. Então, pronto, como o declive, neste caso das pequenas retas semirretas, era y sobre x , que é a distância sobre o tempo, pronto, eu tenho a certeza que isso iria dar a grandeza da velocidade. Portanto, eu sei que não se desloca à mesma velocidade.

Seguidamente, indicou o intervalo em que o comboio se deslocou mais depressa, justificando com a inclinação do segmento de reta, vista intuitivamente a partir da representação gráfica: “Então, o intervalo de tempo em que se deslocou mais rápido é o que tem maior inclinação. Portanto, eu acho que é dos 18 aos 20”.

Para responder à questão 5, a Isabel explicou o que acontecia à função quando o comboio estava parado: “Então, eu sei que sempre que o comboio para, o tempo continua, mas a distância não, porque ele está parado. E, portanto, são todos os intervalos em que a função é constante”. Assim, concluiu imediatamente que seriam três paragens e, após ser questionada por mim, referiu quando é que aconteciam as paragens: “A parte gráfica corresponde, ao intervalo entre os 3 e os 4 minutos, depois dos 8 aos 10 e dos 16 aos 18”.

Por fim, na última questão, a Isabel, após a leitura do enunciado, afirmou que os gráficos das funções que representam os comboios A e B são iguais, concluindo imediatamente que tinha de descobrir a ordenada do ponto do gráfico que tinha abcissa 7, como se pode ver no excerto seguinte:

Então, eu sei que o comboio, o primeiro, o que está aí representado, o que partiu antes, o A pronto. O A demorou 20 minutos a chegar ao destino. E também sei que o B partiu só aos 13 minutos depois. Portanto, é como se o comboio B só tivesse andado 7 minutos, que é que é o tempo, a diferença entre o 20, o que o A demorou, e os 13 que ele teve de esperar para sair. Então agora, como eu sei que eles andam à mesma velocidade, porque dizia lá que, pronto, é como se gráfico fosse o mesmo para os dois. Então, agora vou ver qual é a ordenada para abcissa 7, que é o tempo que ele na teoria andou, digamos assim.

Após eu questionar o significado da abcissa ser 7, que correspondia a 7 minutos, a Isabel explicou o seu raciocínio através do raciocínio lógico, mas apoiando-se no gráfico para referir que o percurso de ambos os comboios ao longo do tempo correspondia à sua representação no gráfico original:

Eu sei que o comboio A demorou 20 minutos a chegar ao destino. E também sei que o B só começou a andar 13 minutos depois do A ter saído. (...) Foi como se o B tivesse começado... exato só começou 13 minutos mais tarde. Portanto, (...) vamos imaginar que o A tinha começado já nos 13, ele até chegar, então ao final, demorava só 7 minutos. Portanto, como o B saiu 13 mais tarde, quando o A chegou à estação, o B só tinha andado 7. Porque eles cumprem as mesmas velocidades. Ponto este gráfico, digamos assim.

Pode-se ver que a Isabel considerou que o gráfico que corresponde ao comboio B tem o mesmo comportamento que o de A. Como o comboio partiu 13 minutos mais tarde, o gráfico começa em (13, 0).

Para dar a resposta ao problema, a Isabel verificou no gráfico a ordenada do ponto cuja abcissa era 7, chegando à conclusão de que esta era 6, e verificando o seu resultado com a estratégia da reta vertical que tinha referido anteriormente.

Isabel: Eu fiz igual ao anterior. Imaginei que estava a desenhar uma reta com equação $x = 7$. E depois vi onde é que essa reta intersetava o nosso gráfico, digamos assim, o que estava desenhado e acho que é nesse ponto (7, 6).

Eu: Achas que é (7, 6) ali. Então os quilómetros são?

Isabel: São 6, ele tinha andado 6 km.

6.4.2. Preferências visuais e uso de recursos tecnológicos

Após resolver as quatro tarefas, a Isabel respondeu a algumas questões relacionadas com as suas preferências visuais no tema das funções e com o uso que fazia da

tecnologia nesse tema. No IPM, a Isabel tinha obtido uma pontuação de 25, o que sugeria ter uma preferência visual.

Das tarefas apresentadas, Isabel manifestou que a mais interessante tinha sido a segunda, que resolveu pelo método de tentativa-erro, utilizando tanto estratégias visuais, como não visuais. A preferência de Isabel baseava-se no desafio cognitivo que sentiu: “porque mete o cérebro a funcionar”. A menos interessante tinha sido a terceira, “porque é muito simples (...) é basicamente direta, não preciso de raciocinar muito para chegar ao resultado”, tendo sido resolvida por um método não visual.

Quanto às preferências na representação de funções, revelou que prefere representações algébricas, pois revela um grande gosto pela resolução de equações:

Eu: Ok, então quanto trabalho as com funções, tu costumavas a representar trabalhar mais com representações gráficas ou com expressões matemáticas. Do que é que gostas mais nesse sentido?

Isabel: Eu gosto imenso de trabalhar com equações, portanto. (...) Eu costumo preferir quando é funções, eu prefiro ir para as expressões da função e mexer com os números do que ver propriamente o gráfico.

Eu: Ok preferes mais fazer manipulações ali com os números, é isso? Mexer, pronto, mais resolver a parte das equações.

Isabel: Sim, é isso.

Quando trabalha em transformações gráficas sem a calculadora, Isabel costuma pensar em pontos chave, por exemplo, nos extremos:

Normalmente, eu vou por pontos, acho que é mais fácil para.... Foi como eu fiz no primeiro exercício, determino alguns pontos que, por exemplo, que são os extremos, uma semirreta que eu consiga dividir a função toda, e depois vou mexendo com eles, que é mais, acho que é mais fácil.

Quando foi questionada sobre as preferências no trabalho com transformações gráficas, referiu o trabalho com a calculadora gráfica relativamente à exploração das diferentes transformações:

Eu: Nas transformações gráficas, como é que costumavas trabalhar? Gostas de fazer, gostas de imaginar, desenhar num papel, trabalhar com a máquina, com GeoGebra? Como é que preferes?

Isabel: Normalmente, eu insiro na calculadora e depois vou mexendo com o original. Vou acrescentando, por exemplo, vou adicionando 1 ou multiplicando por 2 e vou vendo como é que ela mexe.

Eu: Ok nas transformações, gostas mais de trabalhar com a calculadora, é isso?

Isabel: Na calculadora, sim.

Eu: Ok, ver as diferentes transformações.

Isabel: Sim.

Por fim, apesar de gostar muito de funções, o tema matemático preferido da Isabel é equações, tal como ela revelou no diálogo seguinte:

Eu: Gostas de funções?

Isabel: Eu sempre gostei muito. Mas muita gente não gosta, não sei porquê, mas eu sempre gostei. Mas acho que a parte eu gosto mais da matemática de toda é mesmo a parte das equações de resolver e assim.

Eu: Gostas mais da parte de resolução das equações?

Isabel: Sim, pelos diferentes métodos. Pelo menos acho que é a parte em que eu tenho mais facilidade, portanto, gosto mais, não é?

6.5. Síntese

Cada um dos quatro alunos analisados recorreu quer a métodos visuais, quer a métodos não visuais, na resolução das tarefas propostas, não havendo nenhum aluno a utilizar exclusivamente um tipo de método. Na representação das funções, recorreram a duas abordagens, sendo a mais utilizada a abordagem ponto a ponto, que foi usada por três de quatro alunos. Os alunos resolveram as tarefas recorrendo a conhecimentos prévios, que conseguiram aplicar nestas situações, e ao método tentativa-erro, mostrando a sua compreensão da situação apresentada. Na primeira questão da tarefa 2, houve uma maior variabilidade de métodos utilizados.

No quadro 6, apresento o resultado do IPM e o método de resolução (visual, não visual ou misto) utilizado por cada um dos quatro alunos na resolução das tarefas da entrevista. É possível observar que a tarefa 1, que era mais provável ser resolvida recorrendo a métodos visuais, foi resolvida dessa forma por todos os alunos. A primeira questão da tarefa 2, que podia ser resolvida recorrendo a qualquer método, foi resolvida com vários métodos, pois os alunos não sabiam como iriam resolver e tentaram de várias formas, no entanto apenas dois dos alunos concluíram a resolução. A segunda questão da tarefa 2 foi resolvida recorrendo ao método não visual por todos os alunos. A tarefa 3, que era mais provável ser resolvida com métodos não visuais, foi resolvida recorrendo a métodos não visuais por todos os alunos. Por fim, a tarefa 4 foi resolvida maioritariamente com métodos visuais havendo, no entanto, alguns métodos mistos. Na tarefa 4, os métodos mistos foram utilizados quer pelos alunos visuais, quer pelos não visuais, mas em questões diferentes.

Os tipos de métodos utilizados em cada questão são semelhantes entre si, não havendo uma diferença significativa entre os alunos visuais e não visuais “classificados” com o IPM.

Quadro 6 – Resultado do IPM e método utilizado pelos quatro alunos na resolução das tarefas da entrevista

Nome		Mariana	André	Diogo	Isabel
IPM		Não visual	Visual	Não visual	Visual
Tarefa	Questão	Métodos utilizados nas tarefas da entrevista			
1	1	Visual	Visual	Visual	Visual
2	1	1.º Visual 2.º Não visual 3.º Visual 4.º Não visual	1.º Visual 2.º Não visual 3.º Não visual 4.º Visual	1.º Misto 2.º Visual 3.º Não visual	1.º Não visual 2.º Visual 3.º Misto
	2	Não visual	Não visual	Não visual	Não visual
3	1	Não visual	Não visual	Não visual	Não visual
4	1	Visual	Visual	Visual	Visual
	2	Visual	Visual	Visual	Visual
	3	Visual	Visual	Visual	Visual
	4	Visual	Visual	Misto	Misto
	5	Visual	Visual	Visual	Visual
	6	Misto	Misto	Visual	Visual

7. Conclusões

7.1. Síntese do estudo

Este estudo realizou-se no âmbito da Unidade Curricular de Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada integrada no Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário que decorreu no ano letivo de 2020/2021, numa turma de 10.º ano de escolaridade na disciplina de Matemática A. A turma era constituída por 26 alunos com alunos de nível bom e muito bom, no entanto, havia três alunos de nível inferior, que não foram considerados para este estudo por serem de população vulnerável ou por se assemelharem a ela.

O estudo teve como objetivo conhecer as preferências visuais dos alunos de uma turma de 10.º ano de escolaridade e compreender como recorrem a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções. Para atingir este objetivo, foram elaboradas duas questões de investigação: (1) Quais são as preferências visuais dos alunos? e (2) Como recorrem a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções?

Este estudo teve duas partes, e cada uma permitiu responder a uma questão de investigação. Deste modo, primeiramente, foram analisadas as preferências visuais dos alunos, recorrendo ao IPM. Este instrumento é constituído por dois testes com problemas, e dois questionários, em que os alunos deveriam seleccionar a estratégia que utilizaram para resolver os problemas. Os alunos responderam aos testes durante as duas primeiras aulas do ensino à distância e terminaram de o fazer em casa, e os questionários foram respondidos em casa.

Para responder à segunda questão de investigação, foram realizadas entrevistas a quatro alunos seleccionados em que os alunos tiveram de resolver tarefas, que podiam ser resolvidas recorrendo a funções. As tarefas tinham diferentes tipos de enunciados, visuais e não visuais, e diferentes graus de dificuldade. Tinham também diferentes probabilidades de serem resolvidas com métodos visuais ou não visuais. Havia, também, tarefas que podiam ser respondidas recorrendo a qualquer um dos métodos, não havendo uma tendência para uma certa abordagem.

Ambas as fases do estudo enquadram-se numa abordagem qualitativa e interpretativa de investigação. Este estudo pode considerar-se um ensaio para um estudo de caso.

A minha intervenção pedagógica foi no tema das funções. A minha primeira aula nesse tema foi sobre o uso das calculadoras gráficas. As aulas seguintes incidiram sobre as transformações gráficas, que é um tema que pode ser abordado quer de forma visual, quer de forma não visual, no 10.º ano. Também escolhi este tema com o intuito dos alunos poderem utilizar a calculadora gráfica, que é uma ferramenta tecnológica que ajuda na visualização das funções. Esta ferramenta tecnológica permite o estabelecimento de conexões entre representações gráficas e algébricas e vice-versa.

As aulas apoiaram-se em duas fichas, a primeira era um guião para a calculadora gráfica que permitia que os alunos, posteriormente, explorassem a calculadora autonomamente. As seguintes apoiaram-se numa ficha, dividida em quatro partes, sobre as transformações gráficas.

7.2. Principais conclusões deste estudo

7.2.1. *Quais são as preferências visuais dos alunos?*

Após a análise do IPM, foi criada a grelha em Excel (Anexo 17), na qual foram registadas as pontuações atribuídas aos 23 alunos da amostra, tendo em conta os critérios utilizados por Presmeg (Anexo 18) e as alterações acrescentadas por mim, no que se refere à pontuação atribuída às tabelas, que classifiquei com 2 pontos.

Nessa grelha é possível verificar que na amostra de 23 alunos, a pontuação mínima foi de 10 pontos e a máxima foi de 26, sendo a mediana da amostra 16.5. Dos alunos da amostra, 11 estão acima da mediana, sendo visuais, e 12 estão abaixo dela, sendo considerados não visuais.

Houve uma grande diversidade de estratégias na resolução dos problemas que aconteceu com todos os alunos da turma. Houve sempre pelo menos uma questão em que os alunos recorreram a um método visual e pelo menos uma em que recorreram a um método não visual. Houve uma tendência para o uso de métodos visuais na resolução de problemas com situações de movimento, imagens cinestésicas. Para os contextos que envolviam situações de proporção, não se verificou nenhuma tendência para resolver com um certo método (visual ou não visual).

Os diagramas foram a representação visual mais utilizada pelos alunos no IPM. Esta estrutura, tal como referido por Diezmann e English (2001), serviu maioritariamente para representar os problemas de uma forma que permita percebê-los melhor e estabelecer a base para sua solução. Por esse motivo, muitos alunos representavam primeiro o problema em forma de diagrama e, posteriormente, resolviam-no recorrendo a um método visual ou não visual. Os problemas que começaram por ser resolvidos com um método visual e que tinham uma grande componente visual foram considerados visuais. Os problemas que tinham uma grande componente visual e não visual foram considerados mistos.

A imaginação foi uma representação visual também muito utilizada na resolução dos problemas. As pontuações da grelha Excel (Anexo 17) que estão assinaladas a azul correspondem a situações em que os alunos recorreram à imaginação. Podemos observar que o problema B-1 (figura 50) foi resolvido pela maioria dos alunos recorrendo à imaginação, e o mesmo aconteceu com três dos quatro alunos caso. Considero que a situação apresentada no problema seja fácil de imaginar. No entanto, houve alunos que não recorreram à imaginação em nenhum dos problemas do IPM, ou não houve indícios disso nas respostas ao questionário.

B-1. Uma pista de atletismo está dividida em três secções de comprimentos diferentes. O comprimento total da pista é de 450m. A primeira e a segunda secções juntas têm de comprimento 350m. A segunda e a terceira secções juntas têm de comprimento 250m. Qual é o comprimento de cada secção?

Figura 50 – Problema B-1 do IPM

A representação não visual mais utilizada foi com recurso à linguagem algébrica, presente principalmente nas regras de três simples ou quando os alunos equacionavam o problema, resolvendo posteriormente uma equação ou sistema de equações.

Outra representação não visual utilizada foi a linguagem aritmética, usada principalmente para investigar casos específicos, o que vai ao encontro do que disseram Friedlander e Tabach (2001).

Com os resultados do IPM foi possível concluir que os alunos desta turma recorrem a estratégias muito diferentes na resolução de problemas, sendo que 11 alunos estão acima da mediana (visuais) e 12 estão abaixo (não visual).

7.2.2. Como recorrem a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções?

A partir dos resultados do IPM, foram selecionados quatro alunos caso: dois visuais e dois não visuais; com diferentes desempenhos nas aulas: dois alunos de nível bom e dois alunos de nível muito bom.

Nas entrevistas realizadas a esses quatro alunos, foram propostas tarefas que podiam ser resolvidas com funções, mas nem todos os alunos resolveram dessa forma. Apesar disso, pode-se ver a estratégia visual, mista ou não visual utilizada por cada um em cada tarefa, no quadro 6.

Como foi referido, na tarefa 1, cuja estratégia mais provável era visual, os quatro alunos resolveram de forma visual. Na tarefa 3, cuja estratégia mais provável era a não visual, os quatro alunos resolveram também com um método não visual. Desta forma os alunos mostraram que podem trabalhar com ambas as abordagens quando as tarefas têm uma certa restrição de método a utilizar.

Na tarefa 1, a probabilidade de abordar a questão de forma visual era elevada, mas o principal objetivo era ver a abordagem utilizada pelos alunos na representação e a forma como eles explicavam as estratégias utilizadas. Nesta tarefa, três de quatro alunos representaram a função recorrendo à abordagem ponto a ponto: escolhendo pontos chave da função inicial, como os limites do domínio e os extremos da função, posteriormente, aplicaram as transformações identificadas nesses pontos e ligaram os pontos obtendo a representação da função g . No entanto, no final da entrevista, uma aluna, que utilizou a abordagem referida, disse que antes de representar a função g recorrendo a pontos chave, imaginou a função final na sua cabeça, mostrando que já sabia como esta iria ficar. A aluna referiu também que os pontos que representou foram necessários para fazer a representação no tablet. Ao dizer que tinha imaginado a transformação da função, a aluna dá a entender que utilizou uma abordagem diferente da dos colegas que considero que seja a abordagem de extensão do traçado efetuado, pois a aluna tem a noção do comportamento da função e da transformação que acontece à função, mas essa noção é mental.

Considero que o aluno que não recorreu à abordagem ponto a ponto para representar a função utilizou a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, tendo

demonstrado um bom conhecimento do comportamento da função transformada, conseguindo compará-lo com o da função inicial.

A tarefa 2 podia ser resolvida tanto com um método visual como não visual, e com o recurso a funções ou não. Nem todos os alunos recorreram a funções nesta tarefa. Nesta tarefa, apenas dois alunos conseguiram responder à primeira questão. Para o fazer, recorreram a várias estratégias sendo que as que se destacaram foram as seguintes: um recorreu a transformações gráficas de funções (abordagem visual) e o outro à tentativa-erro (abordagem mista).

A aluna que recorreu à tentativa-erro é visual, pelo IPM, e, apesar de ter feito a tentativa-erro com cálculos, durante a tentativa-erro, a aluna demonstrou que estava a imaginar os comboios a aproximarem-se um do outro. Isto corresponde a uma representação ativa referida por Bruner (1999). Ela inicialmente quis representar a situação, mas devido a números elevados, que apareciam na situação problemática, não o fez.

O aluno que recorreu às transformações gráficas é não visual, pelo IPM. Inicialmente tinha tentado uma estratégia não visual com cálculos, mas com essa não conseguiu concluir nada. Com as transformações gráficas, o aluno demonstrou facilidade ao fazer tratamentos e conversões, que, segundo Duval (2006), são transformações em que os alunos devem ser fluentes.

Os dois alunos que não resolveram o problema, um era visual e o outro não visual pelo IPM, recorreram a métodos visuais e não visuais, pois ambos representaram a situação com um diagrama e fizeram alguns cálculos. Com esta tarefa, pode-se ver que não foi relevante se o aluno era visual ou não, pois todos utilizaram quer métodos visuais quer métodos não visuais.

A tarefa 3 foi resolvida por todos os alunos de forma não visual, o que era o mais provável. Todos os alunos equacionaram o problema de forma semelhante, mas a justificação utilizada para equacionar dessa forma era um pouco diferente, mas todas não visuais. Quer os alunos visuais quer os não visuais não apresentaram dificuldades relevantes ao trabalhar com métodos não visuais.

Na tarefa 4, os alunos deveriam interpretar a representação gráfica e todos os alunos mostraram-se capazes de o fazer, apesar de haver alguns erros na leitura das coordenadas dos pontos. Esses erros deveram-se essencialmente ao facto de a entrevista

ter sido através da plataforma de videoconferência Zoom e os alunos estarem a ver o enunciado nos monitores dos computadores, por exemplo, o enunciado da tarefa 4 não cabia no monitor e, por isso, este teve de ser sempre movido para se ver a representação gráfica e as questões. Todos os alunos interpretaram bem as primeiras 5 questões que consistiam em interpretar a informação dos gráficos. A última questão podia ser resolvida com recurso a transformações gráficas, mas apenas dois alunos detetaram a transformação gráfica indiretamente, mas não a utilizaram para resolver o problema. Um dos alunos teve dificuldades em interpretar a situação problemática que pode ser o motivo pelo qual não viu a transformação gráfica. Outro aluno baseou-se na sua memória visual para referir que o segmento de reta que estava a ver tinha declive 1, tendo um pensamento aproximado e não sendo rigoroso. Nesta tarefa alguns alunos interligaram a situação problemática com o que sabiam da disciplina de física. A maioria dos alunos recorreu a métodos visuais para a sua resolução e a raciocínio lógico.

Relativamente ao recurso à tecnologia durante a resolução das tarefas, apenas um dos alunos utilizou a calculadora gráfica para representar funções na questão 2, que, segundo Doerr e Zangor (2000), corresponde ao uso da calculadora como ferramenta de visualização, pois o aluno ao resolver o problema, procurou funções simbólicas na calculadora e resolveu equações na calculadora para responder ao problema.

Todos os alunos, durante a entrevista utilizaram a calculadora para fazer cálculos, ou seja, como ferramenta computacional. No final da entrevista, um aluno visual e um não visual, pelo IPM, referiram que costumam utilizar a calculadora gráfica para confirmar os resultados e conjeturas, por exemplo, quando fazem transformações gráficas, utilizando-a como ferramenta de verificação. Um aluno visual, pelo IPM, referiu que costuma utilizar a calculadora gráfica para explorar transformações gráficas, ou seja, como ferramenta de recolha e análise de dados, pois utiliza a calculadora para encontrar padrões e como uma ferramenta de visualização, pois recorre à calculadora para interpretar dados.

Nesta turma, a maioria dos alunos tem uma compreensão relacional, por exemplo a Mariana, durante a entrevista foi referindo que gosta de saber o porquê das coisas. Mas também existem alunos que têm uma compreensão instrumental, que vem já do ensino básico. À primeira vista, o André pareceu ter uma compreensão instrumental, mas o facto de ter conseguido interligar matérias, facto do qual o próprio se orgulha, refere que durante este ano letivo, ele foi evoluindo no seu tipo de compreensão para uma compreensão relacional, fruto talvez de um ensino mais focado no relacional e pelas

características da turma, mas mesmo assim, durante a entrevista, demonstrou algum conhecimento baseado em memorização, tentando aplicá-lo a novas situações fazendo analogias.

Quadro 7 – Preferências dos alunos no IPM e na representação das funções

Nome	Mariana	André	Diogo	Isabel
IPM	Não visual	Visual	Não visual	Visual
Repr. de funções	Representação gráfica	Representação gráfica	Representação algébrica	Representação algébrica

No quadro 7 é possível observar o resultado do IPM e a representação no tema das funções que os alunos preferem. Os resultados do IPM do André e do Diogo vão ao encontro do que eles referem que preferem no tema das funções, apesar de terem preferências diferentes entre si. No entanto, os resultados do IPM da Mariana e da Isabel não vão ao encontro do que elas preferem neste tema, sendo as suas preferências diferentes entre si. Este facto pode estar relacionado com uma preferência diferente das alunas em diferentes temas, tipos de tarefas e situações. Por isso, posso concluir que a preferência dos alunos na resolução dos problemas do IPM não se revelou totalmente determinante na preferência no tema das funções.

7.3. Reflexão final

Este ano foi muito desafiante quer na intervenção pedagógica, quer no estudo que realizei, pois foi a minha primeira experiência. Devido à pandemia toda a intervenção e recolha de dados foi à distância através das plataformas de videoconferência Google Meet e Zoom, e por isso, isto foi, também, a minha primeira experiência de ensino à distância como professora. O facto de ser em regime à distância dificultou um pouco a comunicação com os alunos. Por exemplo, os dados recolhidos pelo IPM foram a partir de produções realizadas pelos alunos em casa, que foram entregues à minha orientadora e só após isso, tive acesso às mesmas. Dificultou também nas entrevistas, pois como referi, houve erros que considero que possam estar relacionados com o facto de ter sido online, por exemplo, as dificuldades na leitura das coordenadas de pontos do gráfico da tarefa 4. Outra desvantagem foi que não tive acesso direto às produções dos alunos das entrevistas, o que fez com que um dos alunos enviasse uma produção

escrita diferente da que fez durante a entrevista, que não ia ao encontro ao que foi dito na áudio-gravação.

Este trabalho foi muito desafiante, pois tive de analisar as resoluções dos problemas de muitos alunos baseando-me na literatura. Todos os dados do IPM vêm da minha interpretação das resoluções dos alunos o que pode não ser a forma como os alunos pensaram, pois, muitas vezes, não é possível reconstruir por completo o pensamento do aluno. Após a análise do IPM, vi que os alunos da amostra resolveram a tarefa recorrendo a estratégias muito diferentes. Considero que isto pode estar relacionado com o tipo de pensamento que cada aluno tem, e com o facto de virem para o secundário de turmas e escolas diferentes, pois os professores dos anos anteriores podiam ter influenciado o pensamento na resolução de certos problemas.

Apreendi que nem tudo o que o aluno escreve na resolução revela a forma como pensou, por exemplo, no IPM houve muitos alunos que imaginavam as situações, mas não as representavam no papel, e isso foi detetado através dos questionários. Outro exemplo aconteceu na entrevista, na tarefa 4, onde os alunos caso apenas apresentaram a resposta final, não sendo perceptível nela a forma como pensaram, ou na tarefa 1, onde na maioria das resoluções não é possível perceber que abordagem os alunos utilizaram para representar a transformação gráfica. Por isso, a verbalização do pensamento dos alunos foi importante para se perceber as estratégias e métodos utilizados na resolução das tarefas.

Considero que, para uma investigação futura, o IPM possa ser realizado presencialmente, em pequenas amostras, e que os alunos verbalizem o seu pensamento durante a resolução dos problemas. Para esse caso aconselho que primeiro seja realizada a parte A (teste e questionário) e depois a parte B (teste e questionário). Desta forma, será possível entender melhor o pensamento dos alunos.

Em futuras investigações, um aspeto que pode ser analisado é a influência da dificuldade da tarefa na escolha do método utilizado pelos alunos para a sua resolução. Pois, na tarefa 2, que considero mais exigente cognitivamente, os alunos utilizaram diferentes métodos para resolvê-la.

Neste ano de estágio, comecei a entender melhor o que é ser professor. O facto de poder experienciar a profissão fez com que percebesse como é ser professor e que ainda tenho muito para aprender, pois aprender a ser professor leva o seu tempo. Este

estágio, fez com que sentisse parcialmente o que é ser professor e acredito que essa percepção vai se alterando ao longo do tempo.

Considero que ao longo deste trabalho, fui evoluindo e, após ter experienciado a lecionação das aulas, a realização das entrevistas e a sua análise, considero que podia ter feito melhor. Após ter planeado a intervenção pedagógica e já quando estava a lecionar, apercebi-me que a ficha criada tornou-se repetitiva, e por isso, tentei alterar a forma de lecionar as aulas. Outra dificuldade que tive nessa intervenção pedagógica foi gerir o tempo, que também fez com que a ficha se tornasse repetitiva. Mas considero que poderia ter feito melhor, mesmo em regime de ensino à distância. Tal como sugeri anteriormente, podiam ter sido criados grupos para diferentes transformações gráficas. A partir da ficha 18, os alunos analisavam o que acontecia às funções com as transformações gráficas e, no final, apresentavam as suas conclusões à turma. Com isso, os alunos irão apresentar e explicar as suas descobertas, promovendo a comunicação e a discussão matemática.

Durante a análise das entrevistas, apercebi-me que podia ter feito as questões das entrevistas de uma forma diferente ou até ter acrescentado algumas para perceber melhor o pensamento dos alunos. Mas não o fiz, dada a minha inexperiência com este tipo de atividade.

Deste modo, posso concluir que, através deste estudo, pude perceber melhor algumas estratégias utilizadas pelos alunos e o processo de pensamento que os levou a pensar de certa forma. Percebi também que o pensamento dos alunos e o método que eles utilizam na resolução das tarefas pode ser influenciado por diversos fatores, por exemplo as estratégias utilizadas pelo professor nos anos anteriores e atuais.

Referências

- Andrade, C., Pereira, P., & Pimenta, P. (2020). *Novo Ípsilon 10* (1.^a ed.). Raiz Editora.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C. & Loura, L. (2014). *Programa e Metas curriculares de Matemática A, Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Retirado, a 08/12/2020, de https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.
- Costa, B., & Rodrigues, E. (2017). *Novo Espaço 10* (1.^a ed.). Porto: Porto Editora.
- Costa, C. (2005). *Modelo do pensamento visual-espacial: Transformações geométricas no início da escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.
- Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 77-89). Reston, VA: NCTM.
- Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 143–163.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2011). Gráficos e equações: A articulação de dois registos (M. T. Moretti, tradutor). *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 6(2), 96-112.
- Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

- Galindo-Morales, E. (1994). *Visualization in the calculus class: Relationship between cognitive style, gender, and use of technology*. Tese de Doutoramento, The Ohio State University.
- ME (2018). *Aprendizagens essenciais. 10.º ano, Matemática*. Retirado, a 08/12/2020, de https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf
- Presmeg, N. C. (1986a). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.
- Presmeg, N. C. (1986b). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46. Retirado, a 27/12/2020, de <https://flm-journal.org/Articles/1917B083BE4534511A32616EED75A8.pdf>
- Presmeg, N. C. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 205-235). Brill.
- Rocha, H. (2013). A janela de visualização da calculadora gráfica nas propostas de trabalho de uma professora de Matemática. In A. J. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco, & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 373–384). Braga: APM & CIEEd, Universidade do Minho.
- Rocha, H. (2015). Múltiplas abordagens, múltiplas representações: um contributo para incrementar a relevância da representação algébrica. In L. Santos, M. Vara Pires, R. A. Tomás Ferreira, A. Domingos, C. Martins, M. H. Martinho, I. Vale, N. Amado, S. Carreira, & T. Pimentel (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática: Representações matemáticas* (pp. 327–339). Bragança, Instituto Politécnico de Bragança: SPIEM.
- Silva, J., Fonseca, M. E., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001). *Matemática A, 10.º ano*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério de Educação. Retirado, a 08/12/2020, de https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Cursos_Cientifico_Humanisticos/matematica_a_10.pdf

- Skemp, R. R. (2015a). Compreensão relacional e compreensão. *Educação e Matemática*, 136, 44–48.
- Skemp, R. R. (2015b). Compreensão relacional e compreensão. *Educação e Matemática*, 137, 24–28.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções 10.º ano de escolaridade*. In *Matemática*.
- Vale, I. (2004). Algumas notas sobre a investigação qualitativa em educação matemática: O Estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171-202.
- Vale, I., & Barbosa, A. (2021). Posters: A tool to foster visual and communication Skills through mathematical challenging tasks using a gallery walk. *Proceedings of EDULEARN21 Conference, July*, (pp. 8416–8425). IATED.
- Vale, I., & Pimentel, T. (2012). A utilização da visualização para ensinar a aprender matemática. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, & C. Nunes (Eds.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 245–257). Coimbra: APM.

Anexos

Anexo 1 – Guião calculadora gráfica TI-Nspire

Guião Rápido para a Utilização da Calculadora Gráfica **TI-Nspire** na representação de Funções

1. Representar graficamente uma função

Considera a função f definida por:

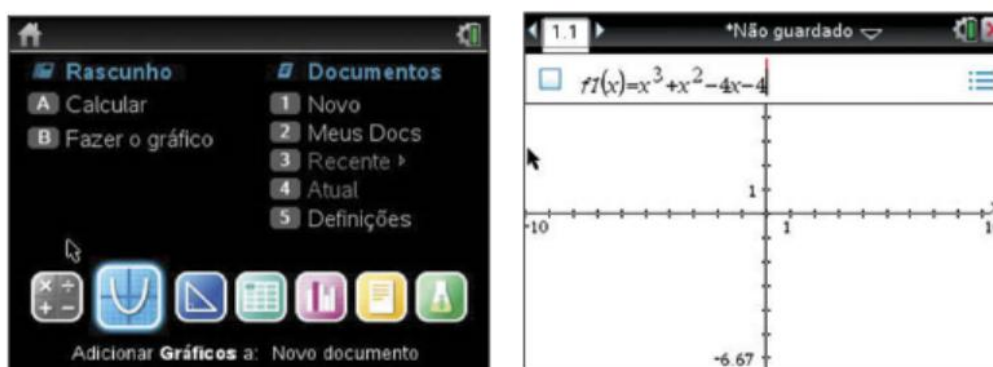
$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Representa-a graficamente, com recurso à calculadora.

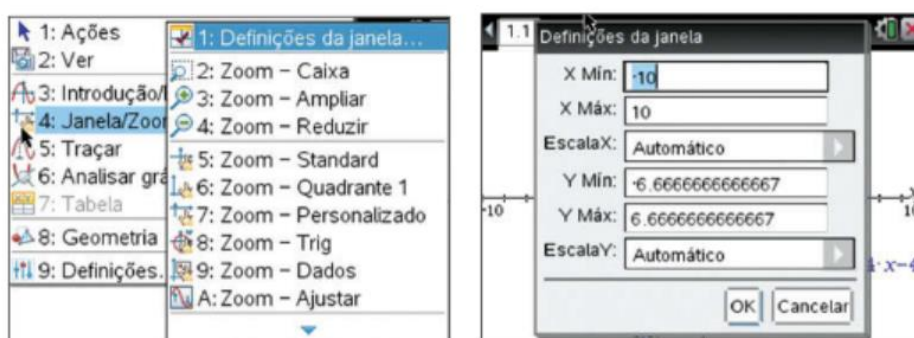
Texas TI-nspire

Pressiona a tecla **ON** e escolhe a opção adicionar **Gráficos**.

De seguida, digita a expressão analítica de f na janela **f1(x) =:**



Pressiona a tecla **MENU** e escolhe as opções **Janela/Zoom** e **1:Definições de janela**, onde poderás escolher os valores mínimo e máximo de cada uma das variáveis:



Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções

Pressiona **OK** e voltarás à janela onde tens a expressão analítica da função.

Pressiona **ENTER** e obterás a representação gráfica da função:



2. Determinar valores aproximados dos zeros de uma função

Considera a função f definida por:

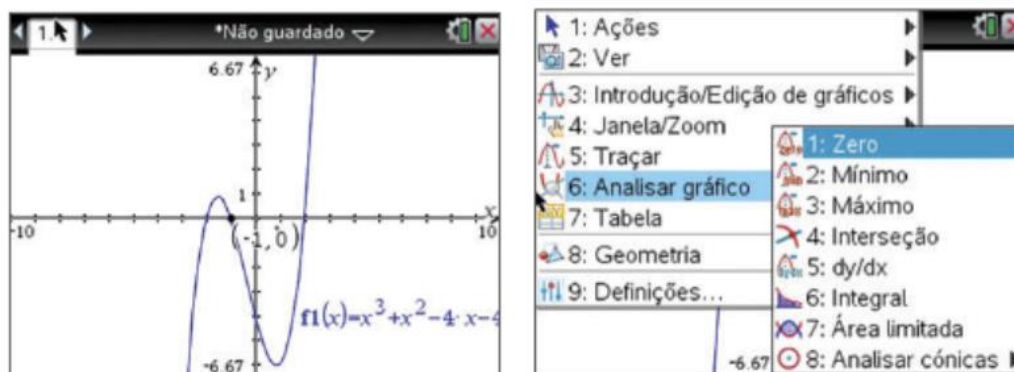
$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Determina os seus zeros, com recurso à calculadora.

Texas TI-nspire

De acordo com as instruções anteriores, representa graficamente f .

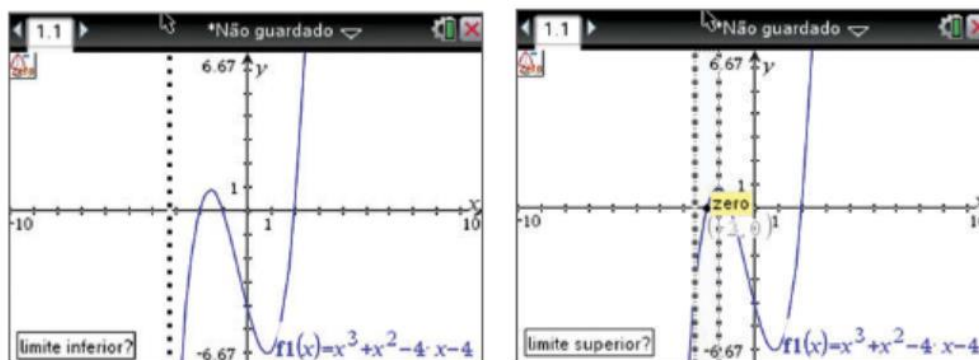
Pressiona a tecla **MENU** e escolhe as opções **6:Analisar gráfico** e **1:Zero**:



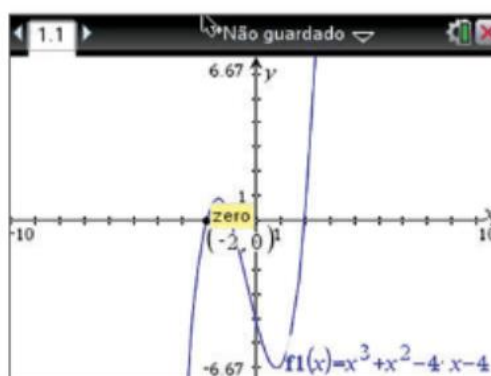
Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções

Coloca o cursor à esquerda do zero que pretendes determinar e clica.

Coloca o cursor à direita do zero que pretendes determinar e clica.



Repete o processo para determinar cada um dos outros zeros.



Os zeros de f são: -2 , -1 e 2

Exercício 1

1.1. Representa, com recurso à calculadora, os gráficos das funções definidas por:

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 1$ b) $g(x) = \sqrt{x-2}$ c) $h(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $i(x) = -x^3 + 50$

1.2. Determina, se existirem, os zeros das funções representadas com aproximação às centésimas

3. Determinar valores aproximados da interseção dos gráficos de duas funções

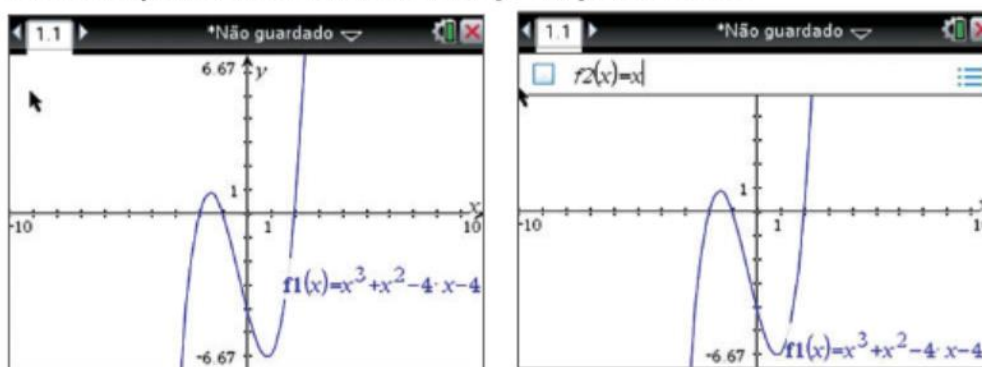
Considera a função f definida por:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

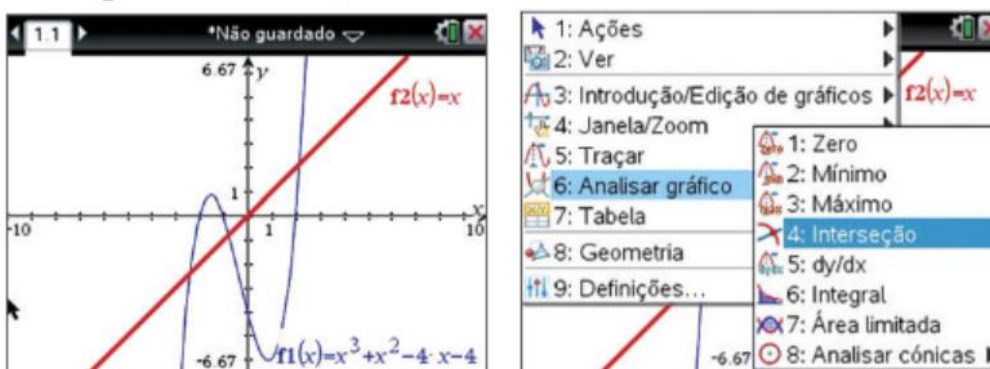
Determina, com aproximação às centésimas, as coordenadas dos pontos do gráfico de f cuja ordenada é igual à abscissa, com recurso à calculadora.

Texas TI-nspire

De acordo com as instruções anteriores, representa graficamente f . Pressiona a tecla **TAB** e escreve a expressão analítica da nova função na janela $f2(x) =$:



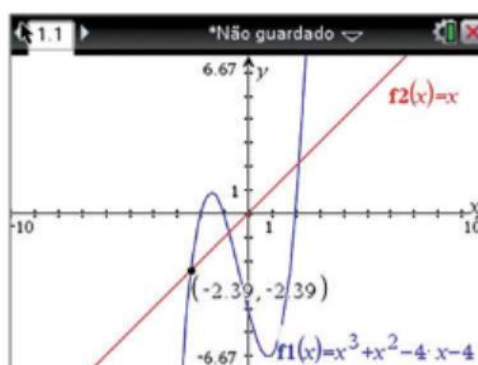
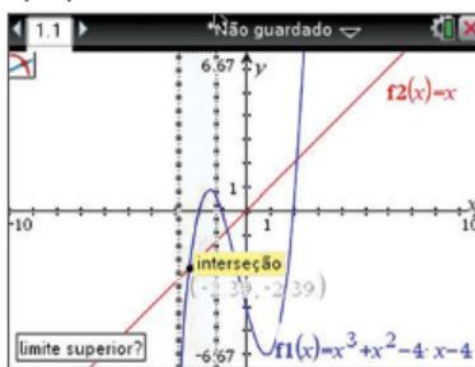
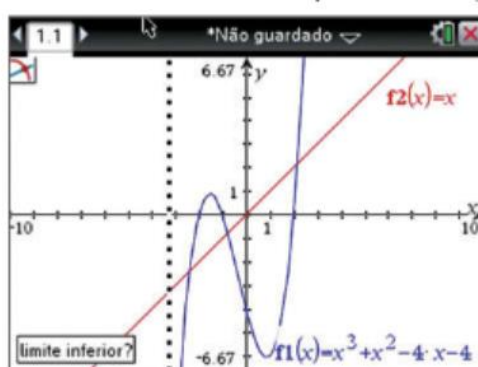
Pressiona a tecla **ENTER** e, de seguida, pressiona a tecla **MENU** e escolhe as opções **6:Analisar gráfico** e **4: Interseção** e clica na tecla **ENTER**:



Coloca o cursor à esquerda do ponto interseção que pretendes determinar e clica.

Coloca o cursor à direita do ponto interseção que pretendes determinar e clica.

Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções



Repete o processo para determinar cada um dos outros pontos de interseção.

As coordenadas dos pontos do gráfico de f cuja abscissa é igual à ordenada, com aproximação às centésimas, são: $(-2,39; -2,39)$, $(-0,77; -0,77)$ e $(2,16; 2,16)$

Exercício 2

Considera a função f definida por $f(x) = (x + 1)^4 - 3$

2.1. Determina com recurso à calculadora as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico de f cuja ordenada é 5

2.2. Determina com recurso à calculadora as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico de f cuja ordenada é igual ao quadrado da abscissa

(Em ambas as alíneas, apresenta as coordenadas do(s) ponto(s) com aproximação às centésimas)

Exercício 3

Considera as funções f e g definidas por $f(x) = x^4$ e $g(x) = 2x + 6$

O conjunto solução da condição $f(x) \leq g(x)$ é um intervalo fechado $[a, b]$. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica determina os valores de a e de b , com aproximação às centésimas

Exercício 4

Num viveiro de peixes de água doce, prevê-se que, t meses após o início do ano de 2010, o número de trutas do tipo A (em centenas) seja dado pela função $A(t) = 0,22t^2 - 10,2t + 250$

4.1. Quantas trutas do tipo A existirão nesse viveiro no início de julho de 2010?

4.2.No início de um certo mês do ano de 2010, existiam, nesse viveiro, 20 450 trutas do tipo A. Em que mês é que isso aconteceu?

4.3.Segundo este modelo, qual será o número mínimo de trutas do tipo A? Apresente o resultado em centenas de trutas, arredondado às décimas.

4.4.Sabe-se que, nesse viveiro, o número de trutas do tipo B (também em centenas) é dado pela família de funções do tipo: $B(t) = 0,31t^2 - 14t + 300$

Segundo estes modelos matemáticos, qual dos dois tipos de trutas atingirá um número inferior a 16 mil trutas? E quantos meses (arredondado às décimas) antes do outro?

Apresente os gráficos visualizados e as coordenadas de pontos relevantes. (arredondados às décimas)

Anexo 2 – Guião calculadoras gráficas Casio fx-CG 10/20 e TI-84

Guião Rápido para a Utilização da Calculadora Gráfica Casio fx-CG 10/20 e TI-84 na representação de Funções

1. Representar graficamente uma função

Considera a função f definida por:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

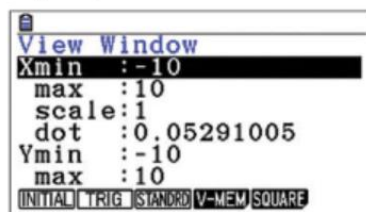
Representa-a graficamente, com recurso à calculadora.

Casio fx-CG 10/20

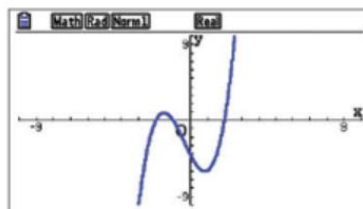
No menu principal escolhe a opção **Graph** e escreve a expressão analítica da função, pressionando a tecla **EXE** no final:



Pressiona a tecla **SHIFT** e simultaneamente **V-WINDOW (F3)** para poderes escolher uma janela de visualização adequada (valores mínimo e máximo de cada uma das variáveis):

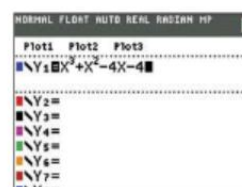


Pressiona a tecla **EXE** que te fará regressar ao ecrã onde digitaste a expressão analítica da função (ecrã 2) e carrega em **Draw (F6)** para obteres a representação gráfica pretendida na janela escolhida:

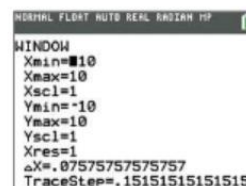


Texas TI-84 Plus

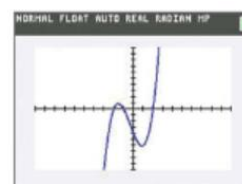
No editor de funções $y=$ escreve a expressão analítica de f :



Pressiona a tecla **WINDOW** para escolheres os valores mínimo e máximo de cada uma das variáveis:



Pressiona a tecla **GRAPH**:



Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções

2. Determinar valores aproximados dos zeros de uma função

Considera a função f definida por:

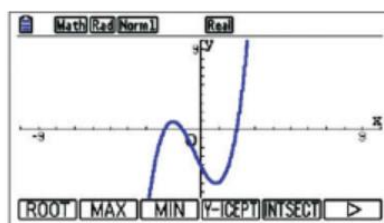
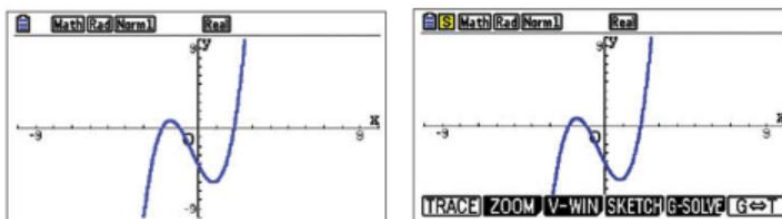
$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Determina os seus zeros, com recurso à calculadora.

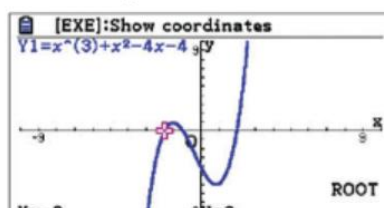
Casio fx-CG 10/20

De acordo com as instruções anteriores, representa graficamente f .

Pressiona a tecla **SHIFT** e simultaneamente **G-SOLV (F5)**:

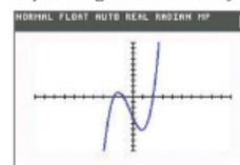


Das opções apresentadas, escolhe a primeira: **ROOT (F1)**



Texas TI-84 Plus

Representa graficamente a função:

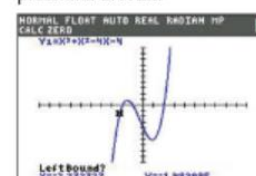


Pressiona as teclas **2ND TRACE** e escolhe a opção **2:zero**:

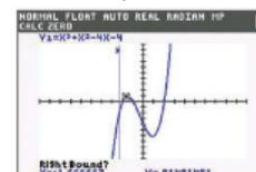


Com as setas posiciona o cursor à esquerda do zero que

pretendes determinar e pressiona **ENTER**:



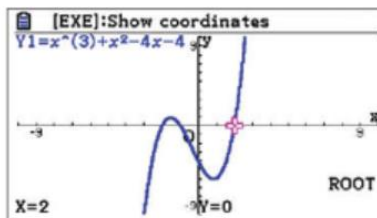
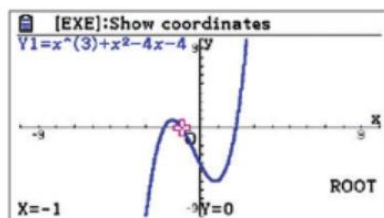
Com as setas posiciona o cursor à direita do zero que pretendes determinar e pressiona **ENTER**:



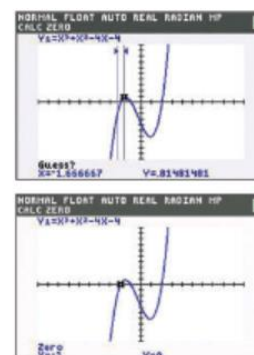
Pressiona **ENTER** novamente:

Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções

Carrega para a direita no cursor, uma vez e depois outra, de forma a encontrar os outros zeros:



Os zeros de f são: -2 , -1 e 2



Repete o processo para determinar cada um dos outros zeros.

Exercício 1

1.1. Representa, com recurso à calculadora, os gráficos das funções definidas por:

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 1$ b) $g(x) = \sqrt{x-2}$ c) $h(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $i(x) = -x^3 + 50$

1.2. Determina, se existirem, os zeros das funções representadas com aproximação às centésimas

3. Determinar valores aproximados da interseção dos gráficos de duas funções

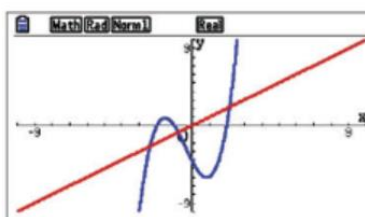
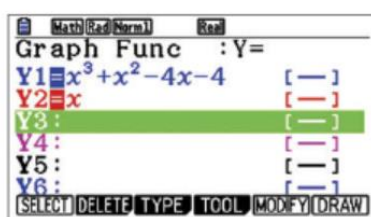
Considera a função f definida por:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Determina, com aproximação às centésimas, as coordenadas dos pontos do gráfico de f cuja ordenada é igual à abcissa, com recurso à calculadora.

Casio fx-CG 10/20

De acordo com as instruções anteriores, representa graficamente f e também a função com a qual pretendes interseçar o gráfico de f , neste caso, $y = x$:

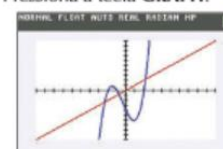


Texas TI-84 Plus

No editor de funções $y =$ escreve as expressões analíticas das duas funções:



Pressiona a tecla **GRAPH**:



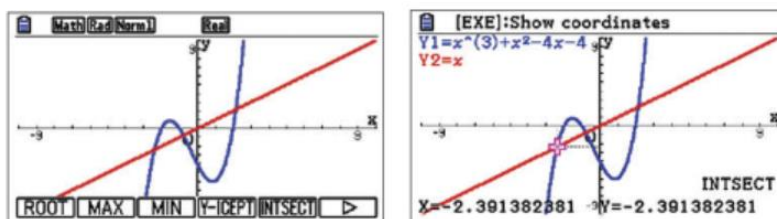
Pressiona as teclas **2ND** e **TRACE** e escolhe a opção **5:intersect**:



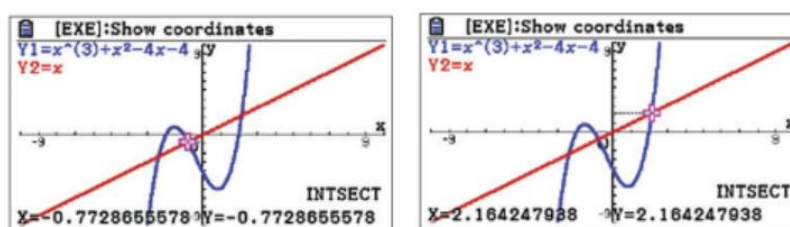
Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções

Pressiona a tecla **SHIFT** e simultaneamente **G-SOLV (F5)**.

Das opções apresentadas escolhe: **INTSECT (F5)**

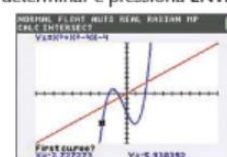


Carrega para a direita no cursor, uma vez e depois outra, de forma a encontrar os restantes pontos de interseção:

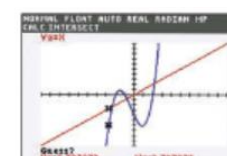
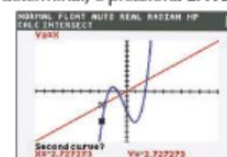


As coordenadas dos pontos do gráfico de f cuja abcissa é igual à ordenada, com aproximação às centésimas, são: $(-2,39; -2,39)$, $(-0,77; -0,77)$ e $(2,16; 2,16)$

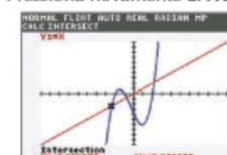
Com as setas posiciona o cursor sob um dos gráficos perto do ponto que pretendes determinar e pressiona **ENTER**:



Com as setas posiciona o cursor sob o outro gráfico, também perto do ponto que pretendes determinar, e pressiona **ENTER**:



Pressiona novamente **ENTER**:



Repete o processo para determinar cada um dos outros pontos de interseção.

Exercício 2

Considera a função f definida por $f(x) = (x + 1)^4 - 3$

2.1. Determina com recurso à calculadora as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico de f cuja ordenada é 5

2.2. Determina com recurso à calculadora as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico de f cuja ordenada é igual ao quadrado da abcissa

(Em ambas as alíneas, apresenta as coordenadas do(s) ponto(s) com aproximação às centésimas)

Exercício 3

Considera as funções f e g definidas por $f(x) = x^4$ e $g(x) = 2x + 6$

O conjunto solução da condição $f(x) \leq g(x)$ é um intervalo fechado $[a, b]$. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica determina os valores de a e de b , com aproximação às centésimas

Exercício 4

Num viveiro de peixes de água doce, prevê-se que, t meses após o início do ano de 2010, o número de trutas do tipo A (em centenas) seja dado pela função $A(t) = 0,22t^2 - 10,2t + 250$

4.1. Quantas trutas do tipo A existirão nesse viveiro no início de julho de 2010?

4.2. No início de um certo mês do ano de 2010, existiam, nesse viveiro, 20 450 trutas do tipo A. Em que mês é que isso aconteceu?

4.3. Segundo este modelo, qual será o número mínimo de trutas do tipo A? Apresente o resultado em centenas de trutas, arredondado às décimas.

4.4. Sabe-se que, nesse viveiro, o número de trutas do tipo B (também em centenas) é dado pela família de funções do tipo: $B(t) = 0,31t^2 - 14t + 300$

Segundo estes modelos matemáticos, qual dos dois tipos de trutas atingirá um número inferior a 16 mil trutas? E quantos meses (arredondado às décimas) antes do outro?

Apresente os gráficos visualizados e as coordenadas de pontos relevantes. (arredondados às décimas)

Anexo 3 – Guião calculadora gráfica NumWorks

Guião Rápido para a Utilização da Calculadora Gráfica NumWorks na representação de Funções

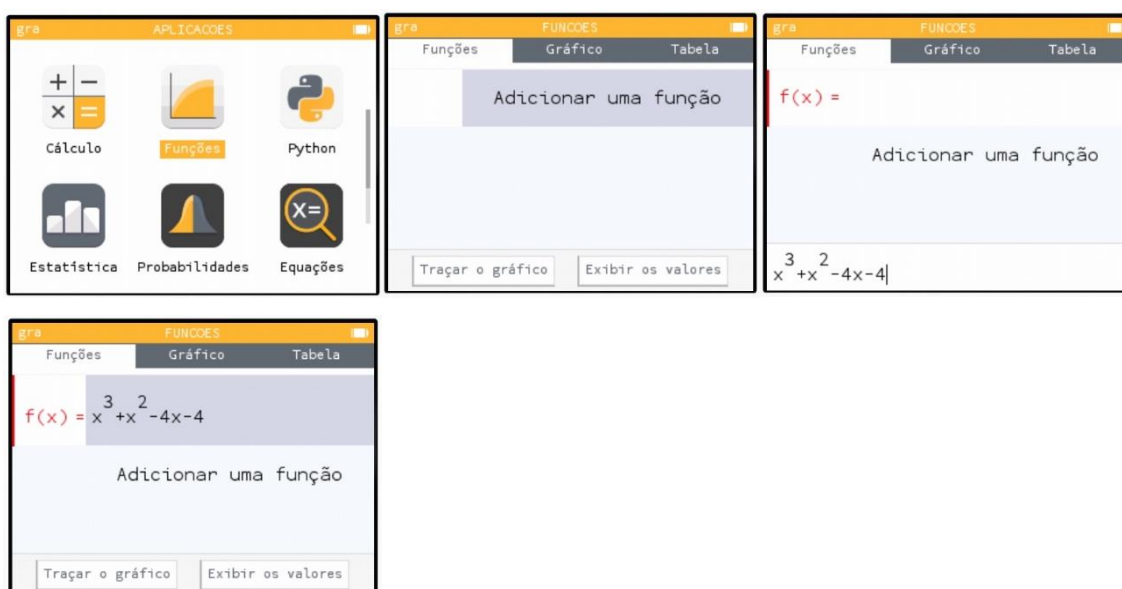
1. Representar graficamente uma função

Considera a função f definida por:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Representa-a graficamente, com recurso à calculadora.

No menu principal escolhe a opção **Funções** e, seguidamente, **Adicionar uma função**, escreve a expressão analítica da função e, por fim, pressiona a tecla **EXE**:



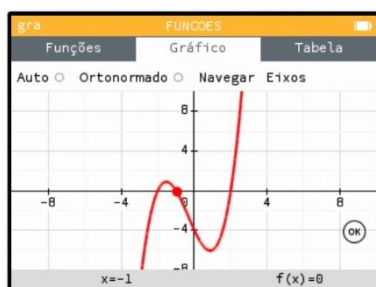
Para poderes escolher a janela de visualização (valores mínimos e máximos de cada uma das variáveis), que pelas configurações da máquina/por defeito aparece **Auto** (automática), no menu superior, selecciona **Gráfico** e, no menu abaixo, **Eixos**:



Depois de introduzires os valores, pressiona em **Confirmar**, para regressares ao gráfico da função:



Aparece uma visualização da mesma função, mas com um zoom diferente:



2. Determinar valores aproximados dos zeros de uma função

Considera a função f definida por:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

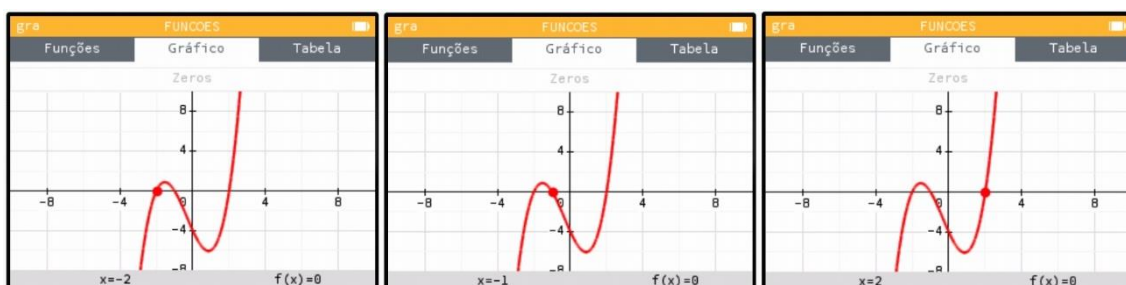
Determina os seus zeros, com recurso à calculadora.

De acordo com as instruções anteriores, representa graficamente f .

Pressiona a tecla **OK**, selecciona **Calcular** e **Zeros**.



Será selecionado um dos zeros, para obteres os outros, carrega para a direita no cursor.



Os zeros de f são: $x = -2$, $x = -1$ e $x = 2$

Exercício 1

1.1. Representa, com recurso à calculadora, os gráficos das funções definidas por:

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 1$ b) $g(x) = \sqrt{x - 2}$ c) $h(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $i(x) = -x^3 + 50$

1.2. Determina, se existirem, os zeros das funções representadas com aproximação às centésimas

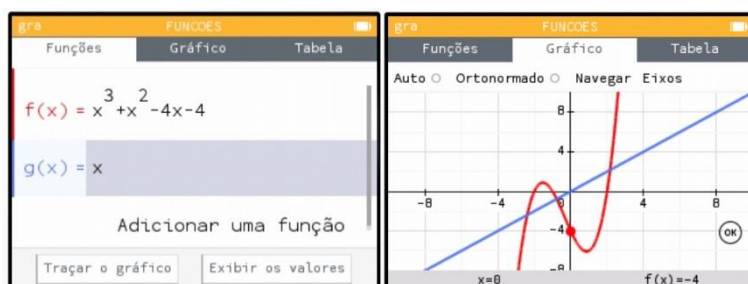
3. Determinar valores aproximados da interseção dos gráficos de duas funções

Considera a função f definida por:

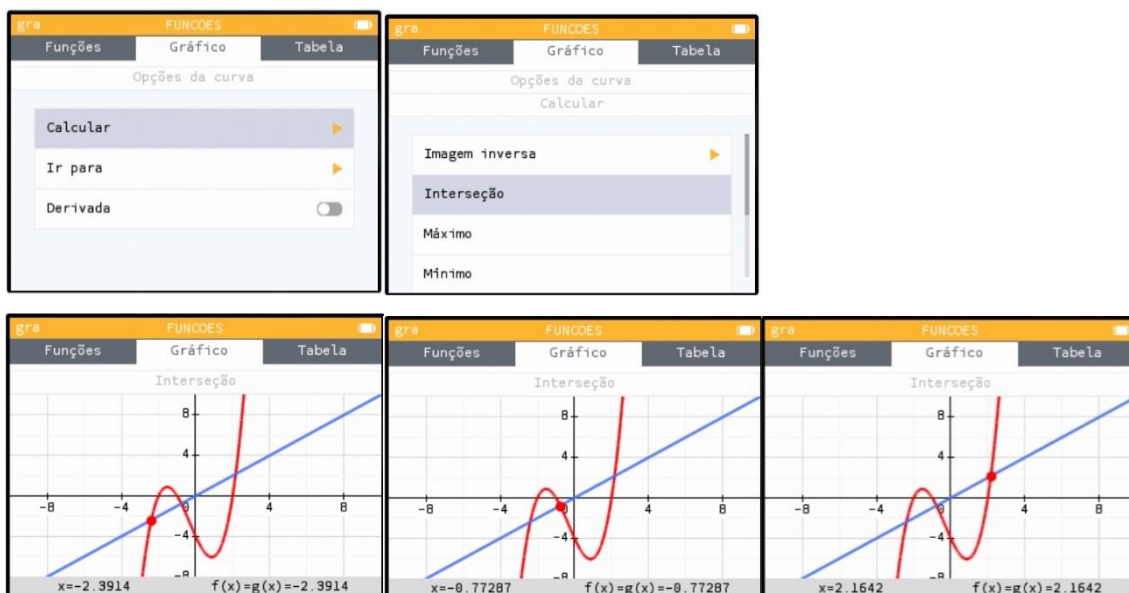
$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Determina, com aproximação às centésimas, as coordenadas dos pontos do gráfico de f cuja ordenada é igual à abscissa, com recurso à calculadora.

De acordo com as instruções anteriores, representa graficamente f e também a função com a qual pretendes interseitar o gráfico de f , neste caso, $y = x$:



Pressiona a tecla **OK**, seleciona **Calcular** e **Interseção**. Será selecionada uma das interseções, para obteres as outras, carrega para a direita no cursor.



As coordenadas dos pontos do gráfico de f cuja abcissa é igual à ordenada, com aproximação às centésimas, são: $(-2,39; -2,39)$, $(-0,77; -0,77)$ e $(2,16; 2,16)$

Exercício 2

Considera a função f definida por $f(x) = (x + 1)^4 - 3$

2.1. Determina com recurso à calculadora as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico de f cuja ordenada é 5

2.2. Determina com recurso à calculadora as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico de f cuja ordenada é igual ao quadrado da abcissa

(Em ambas as alíneas, apresenta as coordenadas do(s) ponto(s) com aproximação às centésimas)

Exercício 3

Considera as funções f e g definidas por $f(x) = x^4$ e $g(x) = 2x + 6$

O conjunto solução da condição $f(x) \leq g(x)$ é um intervalo fechado $[a, b]$. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica determina os valores de a e de b , com aproximação às centésimas

Exercício 4

Num viveiro de peixes de água doce, prevê-se que, t meses após o início do ano de 2010, o número de trutas do tipo A (em centenas) seja dado pela função $A(t) = 0,22t^2 - 10,2t + 250$

4.1. Quantas trutas do tipo A existirão nesse viveiro no início de julho de 2010?

4.2. No início de um certo mês do ano de 2010, existiam, nesse viveiro, 20 450 trutas do tipo A. Em que mês é que isso aconteceu?

4.3. Segundo este modelo, qual será o número mínimo de trutas do tipo A? Apresente o resultado em centenas de trutas, arredondado às décimas.

4.4. Sabe-se que, nesse viveiro, o número de trutas do tipo B (também em centenas) é dado pela família de funções do tipo: $B(t) = 0,31t^2 - 14t + 300$

Segundo estes modelos matemáticos, qual dos dois tipos de trutas atingirá um número inferior a 16 mil trutas? E quantos meses (arredondado às décimas) antes do outro?

Apresente os gráficos visualizados e as coordenadas de pontos relevantes. (arredondados às décimas)

Anexo 4 – Ficha 18.1

1. $g(x) = f(x) + d, d \in \mathbb{R}$

Considera as funções f definida em $[-5,5]$ por $f(x) = x$ e g definida por

$$g(x) = f(x) + d, d \in \mathbb{R}.$$

Representa cada uma das funções, utilizando a calculadora gráfica. Para o valor de d utiliza: 1, -1, 3 e 0.5.

Preenche a tabela:

d	$g(x) = f(x) + d$	D_f	D_g	D'_f	D'_g
1					
-1					
3					
0.5					

- O que podes dizer acerca dos domínios das funções?
- E acerca dos contradomínios?
- Considerando a função f e g , para cada valor de d , qual é o objeto cuja imagem é 4? Explica o teu raciocínio.
- Como poderemos obter o ponto $(x, g(x))$ a partir da função f ?
- Completa:

A representação gráfica de uma função g definida em $D_g = \underline{\hspace{2cm}}$ por $g(x) = f(x) + d$, é a imagem da representação gráfica da função f pela $\underline{\hspace{2cm}}$ de vetor $\vec{u}(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$.

Assim, dado um ponto de coordenadas (x, y) do gráfico da função f , a sua imagem por meio da referida transformação terá coordenadas $(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$ e será um ponto do gráfico de g .

Anexo 5 – Ficha 18.2

2. $h(x) = f(x - c), c \in \mathbb{R}$

Considera as funções f definida em $[-5,5]$ por $f(x) = x$ e h definida por

$$h(x) = f(x - c), c \in \mathbb{R}.$$

Representa cada uma das funções, utilizando a calculadora gráfica. Para o valor de c utiliza: 1, -1, 3 e 0.5.

Preenche a tabela:

c	$h(x) = f(x - c)$	D_f	D_h	D'_f	D'_h
1					
-1					
3					
0.5					

- O que podes dizer acerca dos domínios das funções?
- E acerca dos contradomínios?
- Considerando a função f e h , para cada valor de h , qual é o objeto cuja imagem é 4? Explica o teu raciocínio.
- Como poderemos obter o ponto $(x, h(x))$ a partir da função f ?

5. Completa:

A representação gráfica de uma função h definida em $D_h = \underline{\hspace{2cm}}$ por $h(x) = f(x - c)$, é a imagem da representação gráfica da função f pela $\underline{\hspace{2cm}}$ de vetor $\vec{u}(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$.

Assim, dado um ponto de coordenadas (x, y) do gráfico da função f , a sua imagem por meio da referida transformação terá coordenadas $(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$ e será um ponto do gráfico de h .

Anexo 6 – Ficha 18.3

3a. $i(x) = af(x)$, $a \in \mathbb{R}$

Considera as funções f definida em $[-5,5]$ por $f(x) = x^2$ e i definida por $i(x) = af(x)$, $a \in \mathbb{R}$.

Representa cada uma das funções, utilizando a calculadora gráfica. Para o valor de a utiliza: 0.5, 0.8, 2 e 3

Preenche a tabela:

a	$i(x) = af(x)$	D_f	D_i	D'_f	D'_i
0.5					
0.8					
2					
3					

- 1 O que podes dizer acerca dos domínios das funções?
- 2 E acerca dos contradomínios?
- 3 Considerando a função f e i , para cada valor de a , qual é a imagem de 4?
Explica o teu raciocínio.

- 4 Como poderemos obter o ponto $(x, i(x))$ a partir da função f ?

5.

Para um número real a , tal que $0 < a < 1$ como descreves o que acontece ao gráfico de i quando fazemos variar o valor de a

Para um número real a , tal que $a > 1$ como descreves o que acontece ao gráfico de i quando fazemos variar o valor de a

3b. $i(x) = af(x), a \in \mathbb{R}$

Considera as funções f definida em $[-5,5]$ por $f(x) = x^2$ e i definida por $i(x) = af(x), a \in \mathbb{R}$.

Representa cada uma das funções, utilizando a calculadora gráfica. Para o valor de a utiliza: -0.5 e -2

Preenche a tabela:

a	$i(x) = af(x)$	D_f	D_i	D'_f	D'_i
-0.5					
-2					

- 1 O que podes dizer acerca dos domínios das funções?
- 2 E acerca dos contradomínios?
- 3 Considerando a função f e i , para cada valor de i , qual é o objeto cuja imagem é 4? Explica o teu raciocínio.
- 4 Como poderemos obter o ponto $(x, i(x))$ a partir da função f ?
- 5

Para um número real a , tal que $a > 0$ como descreves o que acontece ao gráfico de i quando fazemos variar o valor de a

Para um número real a , tal que $a < 0$ como descreves o que acontece ao gráfico de i quando fazemos variar o valor de a

Anexo 7 – Ficha 18.4

4. $j(x) = f(bx), b \in \mathbb{R}$

Considera as funções f definida em $[-5,5]$ por $f(x) = x^2$ e j definida por $j(x) = f(bx), b \in \mathbb{R}$.

Representa cada uma das funções, utilizando a calculadora gráfica. Para o valor de b utiliza: 0.5, 0.8, 2 e 3

Preenche a tabela:

b	$i(x) = f(bx)$	D_f	D_j	D'_f	D'_j
0.5					
0.8					
2					
3					

- O que podes dizer acerca dos domínios das funções?
- E acerca dos contradomínios?
- Considerando a função f e j , para cada valor de a , qual(ais) é(são) o(s) objeto(s) cuja imagem é 4? Explica o teu raciocínio.
- Como poderemos obter o ponto $(x, j(x))$ a partir da função f ?
- Completa:

Para um número real b , tal que $0 < b < 1$ como descreves o que acontece ao gráfico de i quando fazemos variar o valor de b

Para um número real b , tal que $b > 1$ como descreves o que acontece ao gráfico de i quando fazemos variar o valor de b

Anexo 8 – Plano de aula 1 (17-02-2021)

Disciplina /Área Curricular	Ano	Turma	Hora	Sala	Data
Matemática A	10.º		11:45 - 13:15	Google Meet	17.02.2021

PLANO DE AULA N.º 1	Aula Observada – NÃO ☐ SIM ☒
---------------------	---

Unidade didática	Objetivo(s) de aula
Funções: Generalidades	Saber: Trabalhar com a calculadora gráfica para descobrir os zeros e a interseção de funções Nota: esta é a 1.ª aula com calculadoras.

Competência(s) focalizada(s)	Conteúdos programáticos
- Comunicação oral e escrita; - Ser capaz de reconhecer os zeros de uma função, quer na representação algébrica quer na gráfica; - Ser capaz de interseção/igualar funções, quer na representação algébrica quer na gráfica; - Ser capaz de representar, na sua calculadora, os dois pontos anteriores; - Ser capaz de resolver problemas que envolvam zeros de uma função e a interseção de duas funções.	Funções generalidades: - Reconhecer o gráfico de uma função real de variável real; - Reconhecer os zeros de uma função.

Recursos e materiais	Avaliação das aprendizagens
- Computador com acesso à internet; - Google Meet; - Breakout Rooms; - Jamboard; - Caderno; - Material de escrita; - Fichas 17 (guião para os 4 modelos de calculadoras gráficas); - Telemóvel (para tirar fotografias), caso seja necessário; - Calculadora gráfica.	- Grau de autonomia na exploração das tarefas em trabalho individual, em cada sala. - Participação na discussão em grande grupo, por exemplo, propondo soluções para as questões levantadas pela professora ou por alguns alunos, pela capacidade de argumentar e expor as suas ideias como contraponto às dos colegas que estejam a apresentar as suas próprias propostas; - Realização e Submissão do Trabalho Proposto.

Desenvolvimento da aula (referir estratégias utilizadas nos diferentes momentos da aula)	
Histórico que antecede a aula	
Esta será a terceira aula sobre funções, mas a primeira com recurso à calculadora gráfica. Nas aulas anteriores foram abordados: o conceito de função, objetos e imagens, domínio e contradomínio, formas de representação de funções e zeros de uma função.	
Segmentos de aula	Tempo previsto
1.º - Esclarecimento de dúvidas Metodologia: Os alunos irão ser questionados sobre possíveis dúvidas no trabalho proposto para casa. As mesmas serão esclarecidas, num quadro branco digital, com a participação do aluno que a colocou e do grupo turma, fazendo algumas questões encaminhadoras.	20 minutos
2.º - Explicação do funcionamento da aula - Metodologia: Irei dizer que nesta aula vamos aprender a utilizar as calculadoras gráficas e que, como existem modelos diferentes, vamos dividir a turma em grupos de acordo com o modelo e a divisão vai ser feita recorrendo ao <i>Breakout Rooms</i> do Google Meet. Cada grupo irá ter um guião para a respetiva calculadora e um professor que poderá ajudar, caso surja algum problema. Os alunos irão ser divididos em três grupos da seguinte forma: - Grupo TI-Nspire – 16 alunos – Professora Ievgeniia - Grupo Casio e TI-84 – 5 alunos – Professora Manuela - Grupo NumWorks – 5 alunos (uma aluna que tem está máquina e 4 que ainda não têm nenhuma*) – Professor Mário Antes de se separar em grupos, vou perguntar se todos os alunos acederam ao guião da sua calculadora, publicado no Classroom. Vou explicar o que os alunos devem fazer nesta aula: vou referir que nesta aula vamos recorrer à calculadora para determinar os zeros duma função e o ponto de interseção de duas funções, para isso os alunos devem seguir o guião e que os exercícios ficarão para trabalho de casa. Vou referir que os alunos sem calculadora podem aceder à calculadora NumWorks através de um link do Classroom. *Os alunos que não têm calculadora irão utilizar a calculadora NumWorks.	10 minutos
3.º - Realização da atividade das calculadoras Metodologia:	35 + 10 minutos

Cada professor com o respetivo grupo irá entrar na respetiva sala e os alunos começarão a seguir o guião da ficha 17. Durante esta parte da aula, os alunos devem seguir o guião com a calculadora gráfica. Caso surjam dúvidas sobre a calculadora, os professores poderão esclarecê-las (as calculadoras poderão ser mostradas partilhado o ecrã com a respetiva calculadora). Durante esta fase os professores irão referir que, por exemplo, para descobrir as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico de uma função cuja ordenada é 3, os alunos podem interseitar o gráfico da função com a função $y = 3$. Também irão referir que para além dos zeros e das interseções, no mesmo menu, os alunos poderão encontrar opções que permitem determinar o mínimo/máximo de funções e mais algumas funcionalidades que ainda não conhecem. No final do tempo previsto, os alunos e os professores devem regressar à sala principal.	
4.º - Explicação da tarefa marcada para casa e discussão dos exercícios - Metodologia: Vou referir que os alunos devem, em casa, realizar os exercícios 1, 2 e 3 e submeter as fotografias do ecrã da calculadora em formato PDF (para isso podem colar as fotografias no Word identificando o exercício e “Guardar Como” em formato PDF e submeter no Classroom). - Caso haja tempo será discutido o exercício 4 da ficha 17. - Caso não haja tempo, os alunos poderão começar a pensar no exercício 4, durante o resto da aula e em casa e este será discutido na aula seguinte.	15 minutos

TPC (facultativo)	Propósitos principais
Exercícios das fichas 15 e 16	Esclarecimento de dúvidas
Exercícios da ficha 17	Utilização da calculadora gráfica

Observações

Assinatura do(a) docente

Anexo 9 – Plano de aula 2 (22-02-2021)

Disciplina /Área Curricular	Ano	Turma	Hora	Sala	Data
Matemática A	10.º		11:45 - 13:15	Google Meet	22.02.2021
PLANO DE AULA N.º 2		Aula Observada – NÃO ☐ SIM ☒			
Unidade didática		Objetivo(s) de aula			
Funções: Generalidades		Saber: - Resolver problemas recorrendo a diferentes representações (gráfica e tabular) - A relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $f(x) + d$ e $f(x - c)$. Nota: esta aula é a 1.ª aula sobre transformações gráficas			
Competência(s) focalizada(s)		Conteúdos programáticos			
- Comunicação oral e escrita; - Ser capaz de reconhecer os zeros de uma função, quer na representação algébrica quer na gráfica; - Ser capaz de reconhecer a interseção/igualdade de duas funções, quer na representação algébrica quer na gráfica; - Ser capaz de representar, na sua calculadora, os dois pontos anteriores; - Ser capaz de resolver problemas que envolvam mo zeros de uma função e a interseção de duas funções; - Ser capaz de interpretar graficamente as funções; - Ser capaz de escolher uma boa janela de visualização; - Ser capaz de reconhecer as transformações gráficas algébrica e graficamente.		Funções generalidades: - Reconhecer o gráfico de uma função real de variável real; - Reconhecer os zeros de uma função; - Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x - c)$ e $f(x) + d$, a, b, c e d números reais, a e b não nulos.			
Recursos e materiais		Avaliação das aprendizagens			
- Computador; - Caderno; - Material de escrita; - Ficha 17 (exercício 4 da ficha 17);		- Grau de autonomia na exploração das tarefas em trabalho individual, em cada grupo; - Participação na discussão em grande grupo, por exemplo, propondo soluções para as questões levantadas pela			

- Fichas 18; - Telemóvel (para tirar fotografias); - Software de geometria dinâmica GeoGebra; - Animação da escola virtual: https://app.escolavirtual.pt/lms/playerquest/player/13970720/lesson	professora ou por alguns alunos, pela capacidade de argumentar e expor as suas ideias como contraponto às dos colegas que estejam a apresentar as suas próprias propostas; Realização e submissão do trabalho proposto.
--	--

Desenvolvimento da aula (referir estratégias utilizadas nos diferentes momentos da aula)

Histórico que antecede a aula	
Está será a quarta aula sobre funções. Nas aulas anteriores foram abordados: o conceito de função, objetos e imagens, domínio e contradomínio, formas de representação de funções, zeros de uma função e o foi utilizada a calculadora gráfica para determinar zeros e interseções de funções.	
Segmentos de aula	Tempo previsto
Resolução do exercício 4 da ficha 17 Metodologia: Irei começar por referir que vamos começar por resolver o exercício que tínhamos começado na aula anterior (exercício 4 da ficha 17). Vou mencionar que no Classroom foi publicado um ficheiro com a resolução deste exercício e com as instruções para cada uma das máquinas, que poderão seguir em casa. Juntamente com os alunos, irei resolver o exercício 4 da ficha 17. Vou questionar os alunos e juntamente com eles resolver todas as alíneas do exercício. Apresentando as representações gráficas no GeoGebra, para não dar preferência a nenhuma das máquinas.	15-20 minutos
Transformações gráficas Metodologia: Irei começar por referir que iremos abordar as transformações dos gráficos de funções e que para isso vamos realizar uma atividade. Os alunos irão abrir a secção 1 da ficha 18. Começarei por fazer uma pequena introdução à atividade, explicando o que os alunos devem fazer: irei referir que têm uma função f definida em $[-5,5]$ e uma função g que é obtida a partir de f adicionando um valor d. Vou referir que os alunos devem utilizar os diferentes valores de d e responder às perguntas, começando pelo preenchimento da tabela. Para esta atividade terão aproximadamente 30 minutos. Após esse tempo terão de submeter um ficheiro, em formato PDF, com as respostas às perguntas, poderão acrescentar fotografias do caderno ou da máquina (podem responder no próprio ficheiro).	10 + 30 minutos

Caso surja dúvidas de interpretação, poderei esclarecê-las, mas a ideia é que os alunos explorem a transformação sozinha.	
Transformações gráficas Metodologia: Depois de todos os alunos terem submetido o ficheiro no Classroom. Vou começar a questioná-los e vamos analisar/discutir os resultados recorrendo às representações gráficas do GeoGebra. Juntamente com os alunos vou preenchendo o Word da ficha 18, que posteriormente será publicado no Classroom como um resumo da aula. Caso sobre pouco tempo, pretendo mostrar a primeira animação da escola virtual sobre as funções $f(x) + d$. Caso haja tempo podemos começar a analisar as transformações do tipo $f(x - c)$ que também terão de submeter no Classroom (na aula ou em casa, depende do tempo)	30 minutos

TPC (facultativo)	Propósitos principais
Ficha 18 secção 2 ex. 73 da página 59	- Resolução de problemas com recurso à calculadora gráfica (ou softwares de representação gráfica) - Transformações gráficas do tipo $f(x) + d$ e $f(x - c)$

Observações

Assinatura do(a) docente

Anexo 10 – Plano de aula 3 (23-02-2021)

Disciplina /Área Curricular	Ano	Turma	Hora	Sala	Data
Matemática A	10.º		11:45 - 13:15	Google Meet	23.02.2021
PLANO DE AULA N.º 3		Aula Observada – NÃO ☐ SIM ☒			
Unidade didática		Objetivo(s) de aula			
Funções: Generalidades		Saber: A relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $f(x) + d$, $f(x - c)$, $af(x)$ e $f(bx)$ Nota: esta aula é a 2.ª aula sobre transformações gráficas			
Competência(s) focalizada(s)		Conteúdos programáticos			
- Comunicação oral e escrita; - Ser capaz de interpretar graficamente as funções; - Ser capaz de escolher uma boa janela de visualização; - Ser capaz de reconhecer as transformações gráficas algébrica e graficamente.		Funções generalidades: - Reconhecer o gráfico de uma função real de variável real; - Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x - c)$ e $f(x) + d$, a, b, c e d números reais, a e b não nulos.			
Recursos e materiais		Avaliação das aprendizagens			
- Computador; - Caderno; - Material de escrita; - Fichas 18; - Telemóvel (para tirar fotografias); - Software de geometria dinâmica GeoGebra; - Animação da escola virtual: https://app.escolavirtual.pt/lms/playerquest/player/13970720/lesson https://app.escolavirtual.pt/lms/playerquest/player/13970726/lesson		- Grau de autonomia na exploração das tarefas em trabalho individual; - Participação na discussão em grande grupo, por exemplo, propondo soluções para as questões levantadas pela professora ou por alguns alunos, pela capacidade de argumentar e expor as suas ideias como contraponto às dos colegas que estejam a apresentar as suas próprias propostas; - Realização e submissão do trabalho proposto.			

Desenvolvimento da aula (referir estratégias utilizadas nos diferentes momentos da aula)	
Histórico que antecede a aula	
Nas aulas anteriores sobre funções foram abordados: o conceito de função, objetos e imagens, domínio e contradomínio, formas de representação de funções, zeros de uma função, foi utilizada a calculadora gráfica para determinar zeros e interseções de funções e foram realizadas as secções 1 e 2 da ficha 18 (mas não foram discutidas em grupo turma).	
Segmentos de aula	Tempo previsto
Transformações gráficas (translações na vertical e na horizontal) Metodologia: Vou começar por dizer que agora vamos discutir as duas primeiras secções da ficha 18, recorrendo às representações gráficas do GeoGebra. Juntamente com os alunos vou preenchendo o Word da ficha 18 secção 1, que posteriormente será publicado no Classroom como um resumo da aula. De seguida, pretendo mostrar a animação 1 da escola virtual sobre as funções $f(x) + d$ (https://app.escolavirtual.pt/lms/playerquest/player/13970720/lesson). Vou proceder do mesmo modo para $f(x - c)$, mas mostrando a animação 3 da escola virtual sobre as funções $f(x - c)$ (o mesmo link).	20 + 20 minutos
Explicação da atividade e a sua realização Metodologia: Irei referir que iremos abordar outro tipo de transformações gráficas e que para isso vamos continuar com a atividade iniciada na aula anterior. Os alunos irão abrir a secção 3 da ficha 18, disponível no Classroom. Começarei por fazer uma pequena introdução à atividade, explicando o que os alunos devem fazer: irei referir que desta vez têm uma função diferente $f(x) = x^2$ definida em $[-5,5]$ e uma função g que é obtida a partir de f multiplicando-a por a. Vou referir que os alunos devem utilizar os diferentes valores de a e responder às perguntas, começando pelo preenchimento da tabela. Para esta atividade terão aproximadamente 40 minutos. Após esse tempo terão de submeter um ficheiro, em formato PDF, com as respostas às perguntas, poderão acrescentar fotografias do caderno ou da máquina (podem responder no próprio ficheiro). Caso surjam dúvidas de interpretação, poderei esclarecê-las, mas a ideia é que os alunos explorem a transformação sozinhos.	5 + 40 minutos
Transformações gráficas (contrações e dilatações na vertical) Metodologia:	5 minutos

Depois de todos os alunos terem submetido o ficheiro no Classroom. Vou começar a questioná-los e vamos analisar/discutir os resultados recorrendo às representações gráficas do GeoGebra. Juntamente com os alunos vou preenchendo o Word da ficha 18 secção 3, que posteriormente será publicado no Classroom como um resumo da aula. Caso sobre pouco tempo, pretendo mostrar uma animação da escola virtual sobre as funções $af(x)$ (https://app.escolavirtual.pt/lms/playerquest/player/13970726/lesson) Caso haja tempo podemos começar a analisar as transformações do tipo $f(bx)$ que também terão de submeter no Classroom (que ficará para TPC)	
---	--

TPC (facultativo)	Propósitos principais
Ficha 18 secção 4	Transformações gráficas do tipo $f(x) + d$, $f(x - c)$, $af(x)$ e $f(bx)$
Observações	

Assinatura do(a) docente

Anexo 11 – Plano de aula 4 (01-03-2021)

Disciplina /Área Curricular	Ano	Turma	Hora	Sala	Data
Matemática A	10.º		11:50 - 13:20	Google Meet	01.03.2021
PLANO DE AULA N.º 4		Aula Observada – NÃO ☐ SIM ☒			
Unidade didática		Objetivo(s) de aula			
Funções: Generalidades		Saber: A relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $f(x) + d$, $f(x - c)$, $af(x)$ e $f(bx)$ Nota: esta aula é a 3.ª aula sobre transformações gráficas			
Competência(s) focalizada(s)		Conteúdos programáticos			
- Comunicação oral e escrita; - Ser capaz de interpretar graficamente as funções; - Ser capaz de escolher uma boa janela de visualização; - Ser capaz de reconhecer as transformações gráficas algébrica e graficamente.		Funções generalidades: - Reconhecer o gráfico de uma função real de variável real; - Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x - c)$ e $f(x) + d$, a, b, c e d números reais, a e b não nulos.			
Recursos e materiais		Avaliação das aprendizagens			
- Computador; - Caderno; - Material de escrita; - OneNote; - Ficha 18 (secções 3 e 4); - Telemóvel (para tirar fotografias); - Software de geometria dinâmica GeoGebra; - Google Meet; - Calculadora Gráfica; - Animação da escola virtual: https://app.escolavirtual.pt/lms/playerquest/player/13970726/lesson		- Grau de autonomia na exploração das tarefas em trabalho individual; - Participação na discussão em grande grupo, por exemplo, propondo soluções para as questões levantadas pela professora ou por alguns alunos, pela capacidade de argumentar e expor as suas ideias como contraponto às dos colegas que estejam a apresentar as suas próprias propostas; - Realização e submissão do trabalho proposto.			

Desenvolvimento da aula (referir estratégias utilizadas nos diferentes momentos da aula)	
Histórico que antecede a aula	
Nas aulas anteriores sobre funções foram abordados: o conceito de função, objetos e imagens, domínio e contradomínio, formas de representação de funções, zeros de uma função, foi utilizada a calculadora gráfica para determinar zeros e interseções de funções e foram realizadas as secções 1 e 2 da ficha 18, pelos alunos, e discutidas em grupo turma (translações verticais e horizontais do gráfico de uma função).	
Segmentos de aula	Tempo previsto
Transformações gráficas (contrações e dilatações na vertical e na horizontal) Metodologia: Vou começar por dizer que agora vamos discutir a terceira e a quarta secções da ficha 18, recorrendo às representações gráficas do GeoGebra. Juntamente com os alunos vou preenchendo o Word da ficha 18 secção 3, que posteriormente será publicado no Classroom como um resumo da aula. De seguida, pretendo mostrar a animação 1 da escola virtual sobre as funções $af(x)$, disponível em: https://app.escolavirtual.pt/lms/playerquest/player/13970726/lesson. Vou proceder do mesmo modo para a secção 4 da ficha 18, correspondente a $f(bx)$, mas mostrando a animação 3 da escola virtual sobre as funções $f(bx)$ (disponível no mesmo link).	20 + 20 minutos
Transformações gráficas (exemplo de translação na diagonal) Metodologia: Utilizando o OneNote e o GeoGebra, pretendo apresentar o exemplo da função f definida em $[-5,5]$ por $f(x) = x^2$ e g definida por $g(x) = f(x - c) + d$, $c, d \in \mathbb{R}$. Vou questionar qual será a expressão analítica de g se c for -6 e d for 4. Pretendo questionar qual é o domínio e o contradomínio de g e quais são os seus zeros. Por fim vou perguntar o que acontece aos pontos da função f para que se transforme na função g.	15 minutos
Transformações gráficas (exemplo de contrações e dilatações na vertical e translação na diagonal) Metodologia:	15 minutos

Utilizando o OneNote e o GeoGebra, pretendo apresentar o exemplo da função f definida em $[-5,5]$ por $f(x) = x^2$ e k definida por $k(x) = af(x - c) + d$, $a, c, d \in \mathbb{R}$. Vou questionar qual será a expressão analítica de k se a for -0.5 e 3, c for -6 e d for 4. Pretendo questionar qual é o domínio e o contradomínio de k e quais são os seus zeros. Por fim vou perguntar o que acontece aos pontos da função f para que se transforme na função k .	
Resolução de exercícios sobre transformações gráficas (depende do tempo disponível) Exercício 76 (página 59), Exercícios 79 e 81 (página 63) Exercícios 82 e 84 (página 67) • Metodologia: Irei propor os exercícios aos alunos e darei tempo suficiente para resolverem o primeiro. De seguida, pedirei alunos voluntários, que já tenham feito o exercício, para explicarem o seu raciocínio para que este possa ser registado no OneNote.	20 minutos

TPC (facultativo)	Propósitos principais
Após esta aula os alunos já poderão fazer os seguintes exercícios: • Exercícios que não forem resolvidos na aula: - Exercício 76 (página 59); - Exercícios 79 e 81 (página 63); - Exercícios 82 e 84 (página 67); • Mais os exercícios: - ficha 19; - Exercício 73, 74 (página 59); - Exercício 105, 106 (página 76); - Exercícios 107, 108, 109 (página 77).	- Transformações gráficas do tipo $f(x) + d$, $f(x - c)$, $af(x)$ e $f(bx)$ - Resolução de exercícios

Observações

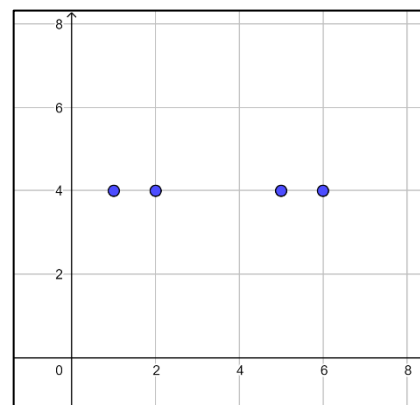
Assinatura do(a) docente

Anexo 12 – Tarefa Slalom

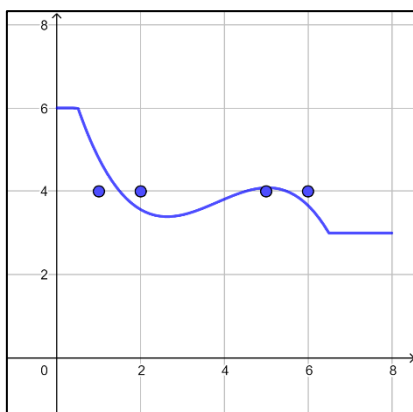
Tarefa – Slalom

Nas provas de Slalom, o esquiador tem de fazer um percurso contornando bandeiras ou passando entre duas bandeiras que formam uma porta.

- Define uma janela com $-1 \leq x \leq 8$ e $-1 \leq y \leq 8$;
- Representa os pontos $(1,4)$, $(2,4)$, $(5,4)$ e $(6,4)$ que serão as bandeiras do Slalom.



1. Descobre uma trajetória do esquiador que seja definida por uma **função quadrática** e que passe nas duas portas sem tocar nas bandeiras.
2. O público que assiste à prova ocupa a zona do plano definida por $y \geq 6$, encontra uma nova **trajetória quadrática** do esquiador que não passe pelo público.
3. Define por uma **função cúbica** a trajetória do esquiador, que passa nas portas e no intervalo entre elas.
4. Na figura seguinte está representada a trajetória realizada por um dos esquiadores.



- 4.1. Sabendo que o esquiador passou no ponto médio das portas e a 0.5m da terceira bandeira. Encontra a expressão de uma **função por ramos** com esta representação.
- 4.2. Será que o esquiador tocou em alguma bandeira? Justifica.

Anexo 13 – Questionário de Processamento Matemático – Parte I Secção A

Questionário de Processamento Matemático – Parte I

Nome: _____ Data de nascimento: __/__/__

Orientações:

- Na resposta a cada problema mostre o seu raciocínio da forma mais pormenorizada possível.
- Responda a todos os problemas, sem o apoio de ninguém. Não utilize nem consulte qualquer material não fornecido, como calculadora gráfica, internet, livros ou cadernos.

Secção A:

A-1. Um certo dia o João e o Pedro visitaram juntos a biblioteca. Depois desse dia, o João visita a biblioteca regularmente de dois em dois dias, ao meio-dia. O Pedro visita a biblioteca de três em três dias, também ao meio-dia. Se a biblioteca abre todos os dias, incluindo feriados e fins-de-semana, quantos dias decorrerão depois da primeira visita até que os dois amigos estejam outra vez juntos na biblioteca?

A-2. Existem oito mesas numa casa. Algumas das mesas têm quatro pernas enquanto as outras têm três pernas. No total, as mesas têm 27 pernas. Quantas das mesas têm quatro pernas?

A-3. Um caminho em linha reta está dividido em duas secções de comprimentos diferentes. O comprimento da segunda secção é metade do comprimento da primeira secção. Que fração da totalidade do caminho representa a primeira secção?

A-4. Apenas quatro equipas participaram numa competição de futebol. Cada equipa jogou uma vez contra cada uma das outras equipas. Quantas partidas de futebol existiram na competição?

A-5. Um homem plantou uma árvore nos dois extremos de um caminho em linha reta. Mais tarde, plantou outras árvores de cinco em cinco metros, ao longo do caminho (de apenas um dos lados). O comprimento total do caminho é de 25m. No total, quantas árvores foram plantadas?

A-6. Num certo dia, retirou-se um terço das batatas que existiam num armazém. Sabendo que restaram no armazém 80 quilos de batatas, quantos quilos de batatas existiam inicialmente?

Anexo 14 – Questionário de Processamento Matemático – Parte I Secção B

Questionário de Processamento Matemático – Parte I

Nome: _____ Data de nascimento: __/__/____

Orientações:

- Na resposta a cada problema mostre o seu raciocínio da forma mais pormenorizada possível.
- Responda a todos os problemas, sem o apoio de ninguém. Não utilize nem consulte qualquer material não fornecido, como calculadora gráfica, internet, livros ou cadernos.

Secção B:

B-1. Uma pista de atletismo está dividida em três secções de comprimentos diferentes. O comprimento total da pista é de 450m. A primeira e a segunda secções juntas têm de comprimento 350m. A segunda e a terceira secções juntas têm de comprimento 250m. Qual é o comprimento de cada secção?

B-2. Um balão começou por subir 200m, verticalmente, a partir do chão, depois moveu-se 100m para este e caiu 100m na vertical. De seguida, o balão deslocou-se 50m para este e finalmente caiu verticalmente no chão. A que distância se encontra o balão do ponto de partida?

B-3. Atualmente, a idade da mãe é sete vezes a idade da filha. A diferença entre as suas idades é de 24 anos. Qual é a idade atual de cada uma delas?

B-4. Numa corrida de atletismo o João está 10m à frente do Pedro, o Tomás está 4m à frente do Jorge e o Jorge está 3m à frente do Pedro. Quantos metros está o João à frente do Tomás?

B-5. No início, o preço de um quilo de açúcar era o triplo do preço de um quilo de sal. Mais tarde, o preço de um quilo de sal aumentou o correspondente a metade do seu preço inicial, enquanto o preço de um quilo de açúcar não sofreu alterações. Se o preço atual de um quilo de sal é de 30 cêntimos, qual é o preço atual de um quilo de açúcar?

B-6. Alguns pardais estão pousados em duas árvores, tendo cada árvore o mesmo número de pardais. Dois pardais voam da primeira árvore para a segunda. Depois de os pardais mudarem de árvore, com quantos pardais a mais fica a segunda árvore em relação à primeira árvore?

B-7. Numa serralharia, uma máquina de corte serra troncos compridos, cada um com 16m, em troncos mais pequenos, cada um com 2m de comprimento. Se a máquina demora 2 minutos a fazer cada corte, quanto tempo será necessário para que a máquina produza oito troncos pequenos a partir de um tronco comprido?

B-8. Um jarro com querosene pesa 8 kg. Verteu-se para fora do jarro metade do querosene. Depois disso, o jarro e o querosene restante pesam 4,5 kg. Determine o peso do jarro (sem querosene).

B-9. Um passageiro adormeceu quando se encontrava a meio da sua viagem. Quando acordou, ainda lhe faltava percorrer metade da distância percorrida enquanto esteve a dormir. Determine a fração da totalidade da viagem em que o passageiro esteve a dormir.

B-10. Uma balança de pratos fica em equilíbrio se colocar num prato um queijo e no outro prato três quartos de um outro queijo igual ao anterior e um peso de $\frac{3}{4}$ kg. Quanto pesa o queijo?

B-11. Um recipiente contém o dobro do leite que outro recipiente. Verteu-se 20 litros de leite de cada um dos recipientes e, assim, o primeiro recipiente ficou com três vezes mais leite do que o segundo recipiente. Quantos litros de leite existiam, inicialmente, em cada um dos recipientes?

B-12. Dez ameixas pesam tanto quanto três damascos e uma manga. Seis ameixas e um damasco têm o mesmo peso que uma manga. Para equilibrar uma balança de pratos, quantas ameixas são necessárias colocar num dos pratos sabendo que está uma manga no outro prato?

Anexo 15 – Questionário de Processamento Matemático – Parte II Secção A

Questionário de Processamento Matemático – Parte II

Folha de respostas

Nome: _____ Data de nascimento: __/__/____

Orientações:

Neste questionário deve considerar o modo como resolveu os problemas de processamento matemático que lhe foram propostos na Parte I. Cada problema tem três ou mais resoluções possíveis.

1. Para cada problema deve indicar, colocando uma cruz na opção correspondente, qual a resolução, de entre as apresentadas, que é igual ao modo como resolveu o problema, ou que é muito semelhante à sua resolução, quando foi confrontado com o problema pela primeira vez; não é relevante se completou ou não a sua resolução ou se a sua resposta está certa ou errada.
2. Se considerar que para algum dos problemas nenhuma resolução é igual ou muito semelhante à sua, então selecione a opção “Nenhuma destas” e explique o raciocínio depois da tabela, indicando o número do problema.

SOLUÇÃO

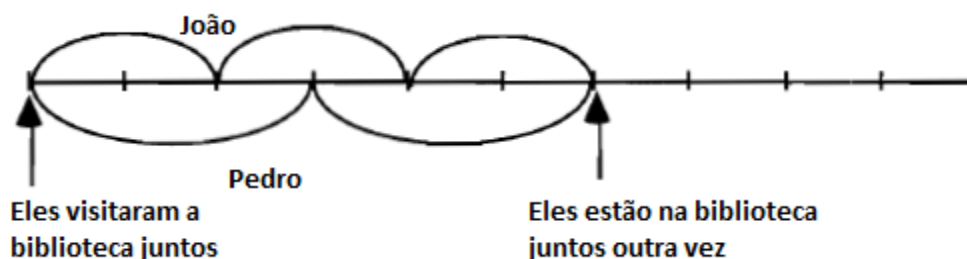
	1	2	3	4	5	6	Nenhuma destas
A-1							
A-2							
A-3							
A-4							
A-5							
A-6							

RESOLUÇÕES

Secção A:

A-1.

Resolução 1: Para resolver este problema desenhei um diagrama representando os dias depois da primeira visita dos dois amigos à biblioteca.



Do diagrama pode ser visto que os dois amigos encontrar-se-ão na biblioteca outra vez passados 6 dias da sua primeira visita.

Resolução 2: Usei o mesmo método que o da resolução 1, mas desenhei o diagrama “na minha cabeça” (e não no papel).

Resolução 3: Resolvi este problema através de exemplos. Suponhamos que eles visitam a biblioteca juntos numa segunda-feira. Então, depois dessa visita, o João visitará a biblioteca na quarta-feira, na sexta-feira, no domingo, na terça-feira, etc., e o Pedro visitará a biblioteca na quinta-feira, no domingo, na quarta-feira, etc. Isto significa que no domingo eles estarão juntos na biblioteca, que é 6 dias depois da sua primeira visita.

Resolução 4: Eu resolvi este problema dizendo que depois do primeiro dia, o João visitará a biblioteca no terceiro dia, no quinto dia, no sétimo dia, etc., e o Pedro visitará novamente a biblioteca no quarto dia, o sétimo dia, etc. Assim, no sétimo dia eles estarão na biblioteca ao mesmo tempo, isto é, 6 dias após a primeira visita.

A-2.

Resolução 1: Resolvi o problema por tentativa e erro:

Se o número de mesas com quatro pernas for...	Então o número de mesas com três pernas será...	E o número total de pernas será...
1	7	25 (Não)
2	6	26 (Não)
3	5	27 (Sim)

Então há 3 mesas com 4 pernas (e 5 mesas com 3 pernas).

Resolução 2: Usei símbolos e equações. Por exemplo:

Seja x o número de mesas com 4 pernas.

Então o número de mesas com 3 pernas é $8 - x$.

O número total de pernas é $4x + 3(8 - x)$.

Assim, $4x + 3(8 - x) = 27$, e resolvendo em ordem a x vem $x = 3$.

Então existem 3 mesas com 4 pernas (e existem 5 mesas com 3 pernas).

Resolução 3: Para resolver este problema desenhei um diagrama que representa as pernas das mesas, e depois agrupei-as em grupos de 4 e em grupos de 3:



A partir do diagrama pode ser visto que há 3 grupos de 4 pernas e 5 grupos de 3 pernas. Então há 3 mesas com 4 pernas (e 5 mesas com 3 pernas).

Resolução 4: Resolvi este problema desenhando as mesas: primeiro desenhei-as como se todas as mesas tivessem apenas 3 pernas, depois fui acrescentando uma perna a cada mesa até que o número total de pernas fosse igual a 27.



Verifiquei que existem 3 mesas com 4 pernas (e 5 mesas com 3 pernas).

Resolução 5: Resolvi este problema raciocinando da seguinte forma: se todas as mesas tivessem 3 pernas, então 8 mesas teriam 24 pernas. Há 8 mesas, pelo que as pernas de uma mesa foram distribuídas por 3 mesas diferentes. Então há 3 mesas com 4 pernas (e 5 mesas com 3 pernas).

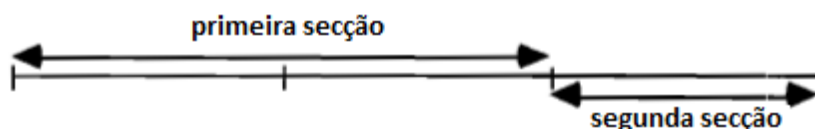
Resolução 6:

1	2	3	4	5	6	7	8		
4	4	4	4	4	4	4	4	=	32
4	4	4	3	3	3	3	3	=	27

Escrevi os números de 1 a 8 e, primeiro, escrevi 4 por baixo de cada número e adicionei os quattros. A soma, 32, ultrapassou 27. Então substituí alguns 4 por 3 até que a soma fosse igual a 27. Assim há 3 mesas com 4 pernas (e 5 mesas com 3 pernas).

A-3.

Resolução 1: Resolvi este problema desenhando um diagrama que representa o caminho:



A partir do diagrama pode ser visto que a primeira secção é dois terços de todo o caminho.

Resolução 2: Usei o mesmo método que o ilustrado na resolução 1, mas apenas desenhei o diagrama “na minha cabeça” (e não no papel).

Resolução 3: Como o comprimento da segunda secção é metade do comprimento da primeira secção, o caminho pode ser dividido em 3 partes iguais. A primeira secção contém 2 partes e a segunda secção contém uma parte. Assim, a primeira secção é dois terços de todo o caminho. (Eu não desenhei nem imaginei qualquer diagrama).

Resolução 4: Resolvi este problema usando exemplos. Suponhamos que o comprimento da primeira secção é 50m, então o comprimento da segunda secção é 25m, uma vez que o comprimento da segunda secção é metade do comprimento da primeira secção. O comprimento de todo o caminho será então 75m. Isto significa que a primeira secção (50m) é dois terços de todo o caminho.

A-4.

Resolução 1: Resolvi este problema raciocinando da seguinte forma: Cada equipa jogou uma vez contra cada uma das 3 restantes equipas. Existiam 4 equipas, pelo que realizaram-se 4x3 partidas, isto é, 12 partidas de futebol. Mas, desta forma, cada partida foi contada 2 vezes. Assim, a resposta correta é $12 \div 2$, ou seja, 6 partidas de futebol.

Resolução 2: Para resolver este problema fiz uma lista de todos os possíveis pares a defrontar-se numa partida de futebol e contei-os. Se as equipas são A, B, C, D, então os pares que se defrontaram foram AB, AC, AD, BC, BD e CD. Existiram então 6 partidas de futebol.

Resolução 3: Resolvi este problema desenhando um diagrama que representa todas as partidas de futebol e depois contei as partidas, como é ilustrado no diagrama seguinte.



No total existiram 6 partidas de futebol.

Resolução 4: Usei o mesmo método que o ilustrado na resolução 3, mas desenhei o diagrama “na minha cabeça” (e não no papel).

Resolução 5: Resolvi este problema raciocinando da seguinte forma: Como existiam 4 equipas, em cada jornada podiam existir apenas 2 partidas de futebol. Uma vez que cada equipa tinha que jogar uma vez com cada uma das outras equipas, no total existiram 3 jornadas. Assim, no total, existiram 3×2 , isto é, 6 partidas de futebol.

Resolução 6: Desenhei uma matriz ou uma tabela onde representei as partidas de futebol.

	1	2	3	4
1		✓	✓	✓
2			✓	✓
3				✓
4				

Existiram 6 partidas.

A-5.

Resolução 1: Resolvi este problema raciocinando da seguinte forma: Em todos os 5m ao longo do caminho foi plantada uma árvore. Isto significa que o caminho foi dividido em 5 partes iguais ($25 \div 5$). Cada uma dessas partes corresponde a uma árvore, mas uma das partes finais do caminho corresponde a 2 árvores. Assim, o número de árvores foi $(4 \times 1) + (1 \times 2) = 6$.

Resolução 2: Resolvi este problema imaginando o caminho e as árvores, e contei as árvores na minha cabeça. Contei 6 árvores no caminho.

Resolução 3: Para resolver o problema desenhei um diagrama representando o caminho e as árvores, e depois contei as árvores:



Contei 6 árvores.

A-6.

Resolução 1: Resolvi este problema raciocinando da seguinte forma: Retirou-se um terço das batatas do armazém, pelo que restaram dois terços de batatas. Isto significa que a quantidade de batatas que restou é duas vezes a quantidade de batatas retirada. Sabe-se que foram deixados no armazém 80 kg de batatas, pelo que foram retirados 40 kg de batatas. Assim, existiam inicialmente no armazém $80\text{kg} + 40\text{kg} = 120\text{kg}$ de batatas.

Resolução 2: Resolvi este problema usando símbolos e equações. Por exemplo:

Seja x a quantidade inicial de batatas no armazém.

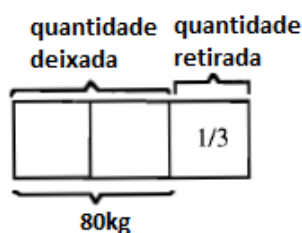
Então a quantidade retirada é $\frac{1}{3}x$.

A quantidade de batatas restante no armazém é $\frac{2}{3}x$.

Assim, $\frac{2}{3}x = 80$ e $x = 120$.

Então, a quantidade inicial de batatas é de 120 kg.

Resolução 3: Para resolver este problema desenhei um diagrama representando as batatas:



A partir do diagrama pode ser visto que a quantidade inicial de batatas é de $80\text{kg} + 40\text{kg} = 120\text{kg}$.

Resolução 4: Usei o mesmo método que o ilustrado na resolução 3, mas desenhei o diagrama “na minha cabeça” (e não no papel).

Anexo 16 – Questionário de Processamento Matemático – Parte II Secção B

Questionário de Processamento Matemático – Parte II

Folha de respostas

Nome: _____ Data de nascimento: __/__/____

Orientações:

Neste questionário deve considerar o modo como resolveu os problemas de processamento matemático que lhe foram propostos na Parte I. Cada problema tem três ou mais resoluções possíveis.

1. Para cada problema deve indicar, colocando uma cruz na opção correspondente, qual a resolução, de entre as apresentadas, que é igual ao modo como resolveu o problema, ou que é muito semelhante à sua resolução, quando foi confrontado com o problema pela primeira vez; não é relevante se completou ou não a sua resolução ou se a sua resposta está certa ou errada.
2. Se considerar que para algum dos problemas nenhuma resolução é igual ou muito semelhante à sua, então selecione a opção “Nenhuma destas” e explique o raciocínio depois da tabela, indicando o número do problema.

SOLUÇÃO

	1	2	3	4	5	6	Nenhuma destas
B-1	☐	☐	☐				☐
B-2	☐	☐	☐				☐
B-3	☐	☐	☐	☐			☐
B-4	☐	☐	☐	☐			☐
B-5	☐	☐	☐	☐			☐
B-6	☐	☐	☐	☐	☐		☐
B-7	☐	☐	☐				☐
B-8	☐	☐	☐	☐			☐
B-9	☐	☐	☐				☐
B-10	☐	☐	☐	☐			☐
B-11	☐	☐	☐				☐
B-12	☐	☐	☐	☐			☐

RESOLUÇÕES**Secção B:****B-1.**

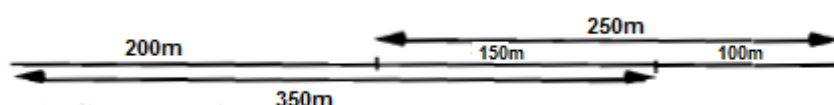
Resolução 1: Resolvi este problema imaginando a pista de atletismo e depois calculei o comprimento de cada secção.

Comprimento da terceira secção = $450 - 350 = 100\text{m}$.

Comprimento da primeira secção = $450 - 250 = 200\text{m}$.

Então o comprimento da segunda secção = 150m .

Resolução 2: Desenhei um diagrama que representa a pista de atletismo e depois calculei o comprimento de cada secção.



O comprimento da primeira secção é de 200m , da segunda secção é de 150m e da terceira secção é de 100m .

Resolução 3: Para resolver este problema tirei conclusões a partir da informação dada. Posso não ter usado linguagem simbólica, mas não imaginei nem desenhei qualquer diagrama. Um exemplo de resolução pode ser:

O comprimento da totalidade do caminho é 450m : $x + y + z = 450$.

A primeira e a segunda secções juntas têm de comprimento 350m : $x + y = 350$.

Concluo que o comprimento da terceira secção é igual a $450 - 350 = 100\text{m}$: $z = 100$.

A segunda e a terceira secções juntas têm de comprimento 250m : $y + z = 250$.

Concluo que o comprimento da primeira secção é igual a $450 - 250 = 200\text{m}$: $x = 200$.

Assim, o comprimento da segunda secção é igual a $450 - 200 - 100 = 150\text{m}$: $y = 150$.

B-2.

Resolução 1: Imaginei o percurso do balão e calculei a distância entre os pontos de partida e chegada. Determinei que a distância entre os pontos de partida e chegada do balão é igual a $100 + 50 = 150\text{m}$.

Resolução 2: Desenhei um diagrama que representa o percurso do balão e depois calculei a distância entre os pontos de partida e chegada.



Distância percorrida pelo balão = $100 + 50 = 150\text{m}$.

Resolução 3: Para resolver este problema assinalei a informação que era importante para encontrar a solução (sem imaginar o percurso do balão). Então a distância entre os pontos de partida e chegada do balão é de $100\text{m} + 50\text{m} = 150\text{m}$.

B-3.

Resolução 1: Resolvi este problema por tentativa e erro:

Idade da filha	Idade da mãe	
2 anos	26 anos	Não
3 anos	27 anos	Não
4 anos	28 anos	Sim

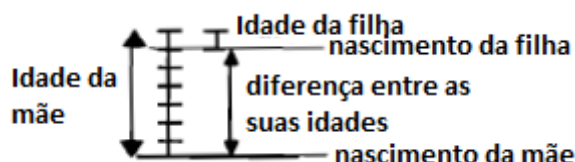
Assim, a filha tem 4 anos e a mãe tem 28 anos.

Resolução 2: Resolvi este problema usando símbolos e equações. Por exemplo,

Seja x a idade da filha. Então a idade da mãe é $7x$ anos. Assim, a diferença entre as suas idades é de $6x$ anos. Logo, $6x = 24$ e então $x = 4$.

A filha tem 4 anos e a mãe tem 28 anos.

Resolução 3: Resolvi o problema desenhando um diagrama que representa as suas idades:



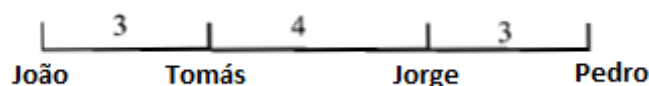
No diagrama, a diferença entre as idades da mãe e da filha está dividida em 6 partes iguais; esta diferença é de 24 anos. Assim, cada parte representa 4 anos, pelo que a idade da filha é 4 anos e a idade da mãe é 28 anos.

Resolução 4: Imaginei um diagrama como na resolução 3 e depois pensei que 6 partes representam 24 anos, pelo que uma parte representa 4 anos (posso ter usado símbolos ou não). Assim, a idade da filha é 4 anos e a idade da mãe é 28 anos.

B-4.

Resolução 1: Imaginei as quatro pessoas e depois determinei a distância entre o João e o Tomás. O João está 3m à frente do Tomás.

Resolução 2: Desenhei um diagrama a representar as quatro pessoas e depois determinei a distância entre o João e o Tomás.



O João está 3m à frente do Tomás.

Resolução 3: Resolvi este problema simplesmente tirando conclusões das afirmações feitas.

O Tomás está 4m à frente do Jorge e o Jorge está 3m à frente do Pedro.

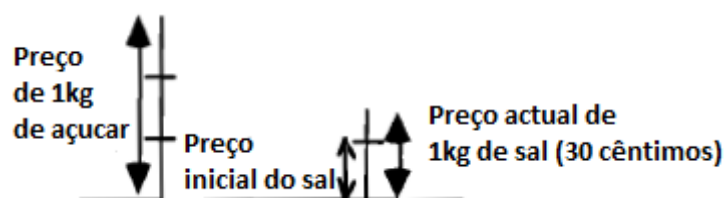
Conclusão: o Tomás está 7m à frente do Pedro.

O João está 10m à frente do Pedro.

Conclusão: o João está 3m à frente do Tomás.

B-5.

Resolução 1: Para resolver este problema desenhei um diagrama que representa o preço do açúcar e do sal



No diagrama pode ser visto que depois de o preço do sal aumentar, o preço de 1 kg de açúcar passa a ser o dobro do preço de 1 kg de sal (atualmente 30 centavos). Então, o preço de 1 kg de açúcar é 60 centavos.

Resolução 2: Usei o mesmo método que o ilustrado na resolução 1, mas desenhei o diagrama “na minha cabeça” (e não no papel).

Resolução 3: Resolvi o problema raciocinando da seguinte forma: O preço de 1 kg de sal é agora de 30 centimos, que é 1,5 vezes o seu preço anterior. Assim, o preço inicial de 1 kg de sal era de 20 centimos. Então, o preço de 1 kg de açúcar é 3×20 , isto é, 60 centimos.

Resolução 4: Resolvi o problema usando símbolos e equações. Por exemplo:

Seja x o preço inicial de 1 kg de sal.

Então o preço de 1 kg de açúcar é $3x$.

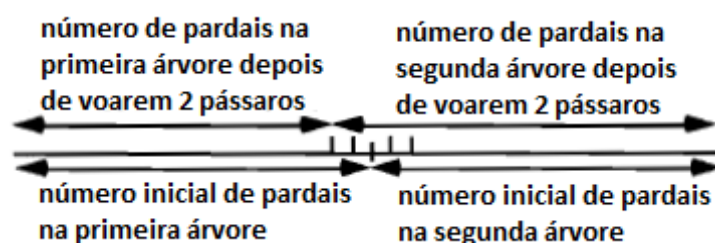
Depois do aumento, o preço de 1 kg de sal é $1,5x$.

Assim, o preço de 1 kg de açúcar é o dobro do preço atual de 1 kg de sal, ou seja, o preço de 1 kg de açúcar é 60 centimos.

B-6.

Resolução 1: Resolvi o problema raciocinando da seguinte forma: Depois de 2 pardais voarem da primeira árvore para a segunda, a primeira árvore fica com menos dois pardais do que antes, enquanto a segunda árvore fica com mais dois pardais do que antes. Assim, a segunda árvore fica com mais 4 pardais do que a primeira árvore.

Resolução 2: Desenhei um diagrama



A segunda árvore tem agora mais 4 pardais do que a primeira árvore.

Resolução 3: Usei o mesmo método que o ilustrado na resolução 2, mas desenhei o diagrama “na minha cabeça” (e não no papel).

Resolução 4: Resolvi este problema usando um exemplo. Por exemplo:

Suponhamos que existiam inicialmente 8 pardais em cada árvore. Depois de 2 pardais voarem da primeira árvore para a segunda, a primeira árvore fica com 6 pardais e a segunda fica com 10 pardais. Assim, a segunda árvore fica com mais 4 pardais do que a primeira árvore.

Resolução 5: Resolvi este problema usando símbolos:

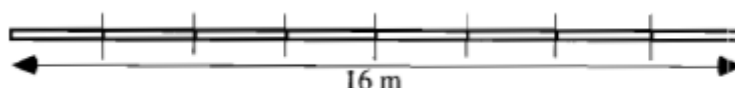
Seja x o número inicial de pardais em cada árvore.

Depois de voarem 2 pardais da primeira árvore para a segunda, a primeira árvore fica com $x-2$ pardais e a segunda árvore fica com $x+2$ pardais.

A diferença entre o número de pardais nas duas árvores é igual a $(x+2) - (x-2) = 4$.

B-7.

Resolução 1: Para resolver este problema desenhei um diagrama que representa o tronco comprido a ser cortado em troncos pequenos.



A partir do diagrama, vemos que são necessários 7 cortes para produzir 8 troncos pequenos. Assim, o tempo necessário é $7 \times 2 = 14$ minutos.

Resolução 2: Pensei como na resolução 1, mas “vi” o diagrama na minha cabeça.

Resolução 3: Resolvi o problema raciocinando da seguinte forma:

Se o tronco comprido tivesse mais de 16m de comprimento, precisaríamos de 8 cortes para produzir 8 troncos pequenos. Mas, neste caso, o último corte não é necessário, pelo que são necessários 7 cortes. O tempo necessário é $7 \times 2 = 14$ minutos.

B-8.

Resolução 1: Resolvi este problema usando símbolos e equações. Por exemplo:

Seja x kg o peso do jarro.

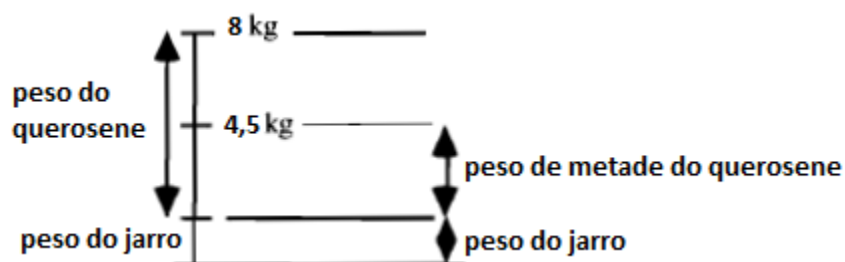
Então o peso do querosene é $(8 - x)$ kg.

O peso de metade do querosene é $\frac{1}{2}(8 - x)$ kg.

Assim $x + \frac{1}{2}(8 - x) = 4,5$ pelo que $x = 1$.

Logo o peso do jarro é 1 kg.

Resolução 2: Desenhei um diagrama representando os respetivos pesos.



A partir do diagrama vejo que o peso de metade do querosene é igual a $8 - 4,5 = 3,5$ kg.

Então, o peso da totalidade de querosene é 7 kg e o peso do jarro é 1 kg.

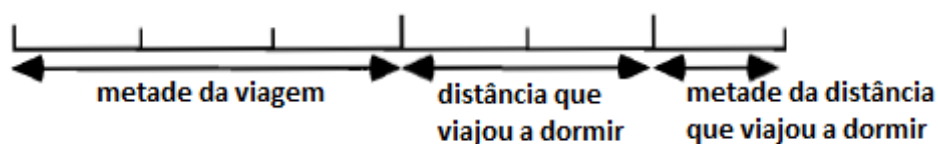
(Ou diretamente, o peso do jarro é $4,5 - 3,5 = 1$ kg.)

Resolução 3: Pensei como na resolução 2, mas “vi” o diagrama na minha cabeça.

Resolução 4: Pensei como na resolução 2, mas não usei qualquer imagem ou diagrama.

B-9.

Resolução 1: Desenhei um diagrama a representar o trajeto da viagem.



Pelo diagrama vejo que se toda a distância percorrida corresponde a 6 partes, ele dormiu 2 partes, isto é, $\frac{1}{3}$ da totalidade da viagem.

Resolução 2: Pensei como na resolução 1, mas “vi” o diagrama na minha cabeça.

Resolução 3: Resolvi este problema usando símbolos e equações. Por exemplo:

Seja x unidades a distância que ele viajou a dormir. Quando acordou, faltava-lhe percorrer $\frac{1}{2}x$ unidades. Então, metade da viagem é representada por $\left(x + \frac{1}{2}x\right)$ unidades e a totalidade da viagem é representada por $2\left(x + \frac{1}{2}x\right) = 3x$ unidades. Logo, ele dormiu durante $\frac{1}{3}$ da viagem.

B-10.

Resolução 1: Para resolver este problema desenhei um diagrama a representar os objetos.



Se remover três quartos de queijo dos dois pratos da balança, vejo que um quarto de queijo pesa o mesmo que $\frac{3}{4}$ kg. Então, um queijo inteiro pesa $4 \times \frac{3}{4}$ kg, ou seja, 3 kg.

Resolução 2: Pensei como na resolução 1, mas “vi” o diagrama na minha cabeça.

Resolução 3: Resolvi o problema usando símbolos e equações. Por exemplo:

Seja x kg o peso de um queijo.

Então $x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$, pelo que $x = 3$.

O peso de um queijo é 3 kg.

Resolução 4: $\frac{1}{4}$ de queijo pesa $\frac{3}{4}$ kg. Então, um queijo inteiro pesa 3 kg. (Não usei qualquer diagrama ou imagem.)

B-11.

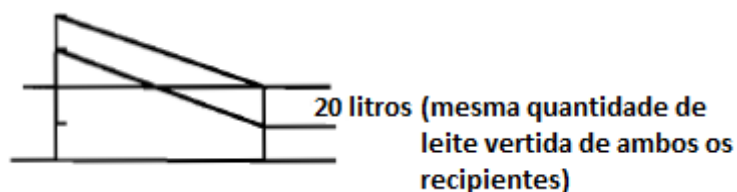
Resolução 1: Para resolver este problema usei símbolos e equações. Por exemplo:

Sejam x e $2x$ a quantidade inicial de litros de leite em cada um dos recipientes.

Então $3(x - 20) = 2x - 20$ e assim $x = 40$.

Existiam, inicialmente, 40 litros e 80 litros de leite nos recipientes.

Resolução 2: Desenhei um diagrama que representa as quantidades de leite.



A partir do diagrama vejo que, para que o primeiro recipiente tenha três vezes mais leite do que o segundo depois de se verter 20 litros de leite de cada recipiente, então o segundo recipiente deve ficar com 20 litros de leite. Assim, as quantidades iniciais de leite nos recipientes são 40 litros e 80 litros.

Resolução 3: Pensei como na resolução 2, mas “vi” o diagrama na minha cabeça.

B-12.

Resolução 1: Usei símbolos e equações. Por exemplo:

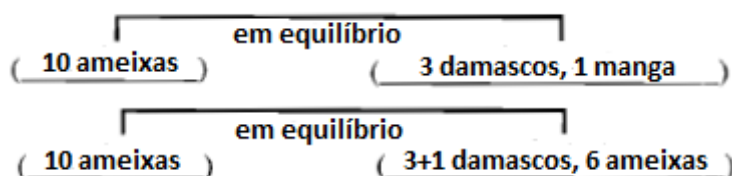
Seja x unidades o peso de cada ameixa e seja y unidades o peso de cada damasco.

Então o peso de uma manga é $(6x + y)$ unidades.

Assim $10x = 3y + (6x + y)$, pelo que $x = y$.

Então o peso de uma manga é $6x + x = 7x$ unidades, ou seja, uma manga pesa o mesmo que 7 ameixas.

Resolução 2: Para resolver este problema desenhei diagramas a representar as pesagens.



Agora retire-se 6 ameixas de cada prato da balança. Vemos então que 4 ameixas pesam o mesmo que 4 damascos. Assim, 1 ameixa pesa o mesmo que 1 damasco. Sabemos que uma manga pesa o mesmo que 6 ameixas e 1 damasco, o que é equivalente a dizer que uma manga pesa o mesmo que 7 ameixas.

Resolução 3: Pensei como na resolução 2, mas “vi” os diagramas na minha cabeça.

Resolução 4: Para resolver este problema não imaginei qualquer diagrama. Raciocinei da seguinte forma: Uma manga pesa o mesmo que 6 ameixas e 1 damasco. Então 10 ameixas pesam o mesmo que 3 damascos, 6 ameixas e 1 damasco. Assim, 4 ameixas pesam o mesmo que 4 damascos. Então, pelo que se disse primeiro, uma manga pesa o mesmo que 7 ameixas.

Anexo 17 – Grelha resultados IPM

IPM																						
Questão Alunos		Secção A						Secção B												TOTAL		
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
Mariana	0	0	0	1	1	0	1	2	0	2	0	0	2	0	2	0	1	0	12			
André	2	2	2	2	2	0	2	0	0	2	0	2	2	2	2	2	0	2	26			
Diogo	0	0	2	0	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	10			
Isabel	2	1	1	2	2	1	2	2	2	0	2	0	1	2	2	1	1	2	25			
Aluno 5	2	0	1	2	1	0	2	2	2	0	2	0	0	2	0	1	0	0	15			
Aluno 6	2	2	0	0	2	2	2	2	2	0	2	0	2	0	2	2	2	2	26			
Aluno 7	0	0	2	2	2	0	2	2	2	0	2	0	1	0	0	2	1	0	17			
Aluno 8	0	0	2	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	0	2	2	2	0	16			
Aluno 9	2	2	0	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	12			
Aluno 10	0	0	2	2	2	0	2	2	2	0	2	0	2	0	0	0	1	0	15			
Aluno 11	2	0	2	2	0	0	2	2	2	0	2	0	2	2	0	2	2	1	23			
Aluno 12	0	0	1	0	2	0	1	2	2	0	2	0	2	2	0	2	1	1	19			
Aluno 13	0	0	2	2	2	0	2	2	2	0	2	0	2	2	0	2	0	1	19			
Aluno 14	2	2	0	0	2	0	2	2	2	0	2	0	2	2	0	2	0	0	18			
Aluno 15	0	0	0	2	2	0	0	2	2	0	1	0	0	2	0	2	2	0	15			
Aluno 16	0	0	0	2	2	0	2	2	2	0	2	0	0	0	0	0	2	0	12			
Aluno 17	2	0	1	0	1	0	2	2	2	0	2	0	0	2	0	2	2	0	16			
Aluno 18	2	0	1	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	12			
Aluno 19	0	0	2	0	2	0	2	2	2	0	1	0	0	0	0	2	2	2	15			
Aluno 20	2	0	2	0	0	0	0	2	2	0	2	2	0	0	0	0	0	0	10			
Aluno 21	2	1	0	2	2	0	2	2	2	0	2	0	1	2	0	0	1	0	17			
Aluno 22	2	0	2	0	2	2	2	2	2	0	2	0	2	2	0	2	2	2	26			
Aluno 23	2	0	2	2	2	0	2	2	2	0	2	0	2	0	0	2	2	0	18			
																			Mediana da amostra:	16,5		
																			Nº alunos visuais	11		
																			Nº alunos não visuais	12		

Anexo 18 – Classificação das resoluções ao questionário de processamento matemático, por Presmeg

Chave

V: método de resolução visual

N: método de resolução não visual

Secção A

	1	2	3	4	5	6
A-1	V	V	N	N		
A-2	N	N	V	V	N	N
A-3	V	V	N	N		
A-4	N	N	V	V	N	N
A-5	N	V	V			
A-6	N	N	V	V		

Secção B

	1	2	3	4	5
B-1	V	V	N		
B-2	V	V	N		
B-3	N	N	V	V	
B-4	V	V	N		
B-5	V	V	N	N	
B-6	N	V	V	N	N
B-7	V	V	N		
B-8	N	V	V	N	
B-9	V	V	N		
B-10	V	V	N	N	
B-11	N	V	V		
B-12	N	V	V	N	

Anexo 19 – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação do 10.º

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação do 10º

Exmo(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário – Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada, da Universidade do Porto, encontro-me a elaborar o Relatório de Estágio, intitulado: “Preferências visuais dos alunos e o recurso a imagens visuais na resolução de tarefas diversificadas envolvendo funções”.

O tema das funções é abordado ao longo de vários ciclos de ensino e pode ser abordado de várias perspetivas. Neste contexto, pretendo investigar as preferências visuais dos alunos no tema das Funções, de modo a poder melhor selecionar tarefas para os ajudar na sua aprendizagem matemática.

O desenvolvimento do Relatório de Estágio implica a recolha de dados, que serão obtidos através de observação, de entrevista e de análise documental.

Para a obtenção de todos os dados, necessitarei de áudio-gravar as entrevistas do seu educando, pelo qual venho solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio, onde estará presente o seu educando.

Pela minha parte, enquanto pessoa com acesso aos dados recolhidos, comprometo-me a garantir o anonimato em relação ao seu educando. Por outro lado, os dados da gravação serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares do aluno.

Desde já, agradeço a sua colaboração.

Ievgeniia Shtyka

Trofa, 16 de março de 2021