

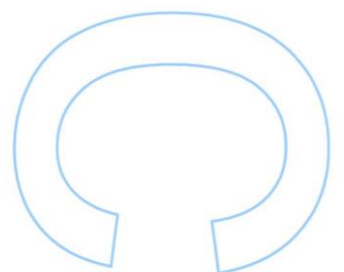
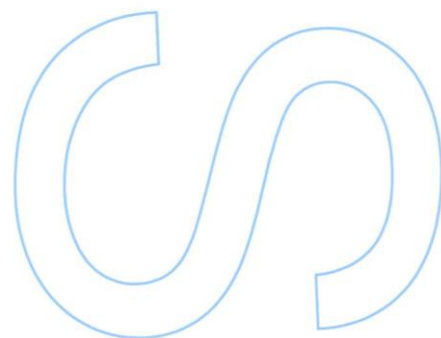
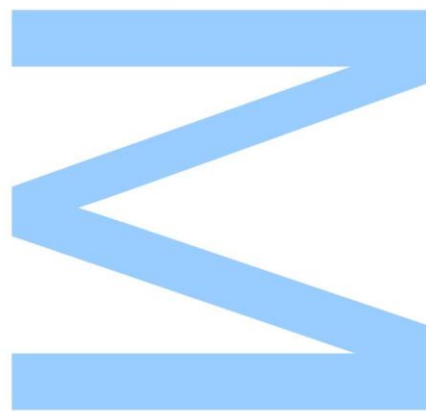
Aplicação de teoria de jogo evolucionário para modelação e análise de dois mecanismos de punição para controlo de poluição

Jia Pan

Mestrado em Engenharia Matemática
Departamento de Matemática
2021

Orientador

Prof. Doutor Alberto Adrego Pinto, Professor Catedrático, Faculdade de Ciências

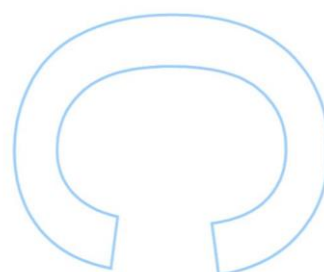
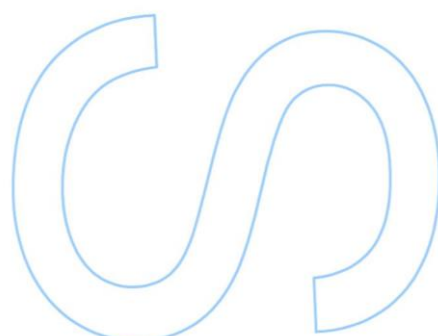
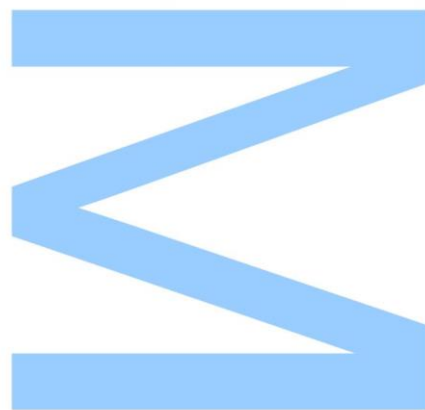




Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ____/____/____



UNIVERSIDADE DO PORTO

DISSERTAÇÃO

**Aplicação de teoria de jogo evolucionário
para modelação e análise de dois mecanismos
de punição para controlo da poluição**

Autor:

Jia PAN

Orientador:

Alberto PINTO

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Departamento de Matemática

November 12, 2021

Agradecimentos

Agradeço ao Doutor Alberto Adrego Pinto pela sua orientação, pela sua disponibilidade, pelas suas críticas e sugestões que me acompanhou durante todo ano lectivo. Estes suportes foram essenciais para realização deste trabalho.

Agradeço os meus colegas e amigos pela vossa assistência na minha vida académica.

Agradeço a minha família pelo apoio e a motivação em todo percurso da minha vida.

UNIVERSIDADE DO PORTO

Abstract

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Departamento de Matemática

MSc. Mathematical Engineering

**Application of evolutionary game theory on modelling and analysis of two
punishment mechanisms on pollution control**

by Jia PAN

Industrial pollution is always a threat to the humanity. In game theory, human behaviour and decision making is studied. In this work, we will use game theory to model a game with two players, government and enterprise, and a game with three players, government and two enterprises. We will use three mechanisms of punishment, static, dynamic and mixed, and we will compare the results obtained for the different mechanisms. For each game, we will compute the pure and mixed Nash equilibria, we will analyse the dynamics along the edges and we will simulate the evolutionary dynamics. This work is divided in three chapters. In the first chapter, we will introduce the basic concepts of game theory that we will use in the second chapter. In the second chapter, we will begin by studying the static and the dynamic punishment mechanisms, described in Wang Chuansheng and Shi Fulei (2019) [1], and then we will study the mixed punishment mechanism. In the third chapter, we will do a brief conclusion and we will discuss some possible future work.

UNIVERSIDADE DO PORTO

Resumo

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Departamento de Matemática

Mestrado em Engenharia Matemática

**Aplicação de teoria de jogo evolucionário para modelação e análise de dois
mecanismos de punição para controlo da poluição**

por [Jia PAN](#)

Poluição industrial sempre foi uma ameaça para a saúde humana. Teoria de jogos é um ramo matemático onde o comportamento e a decisão dos seres humanos são estudados. Neste trabalho vamos utilizar teoria de jogos para modelar o jogo de dois jogadores, governo e empresa, e o jogo de três jogadores, governo e duas empresas. Vamos usar três mecanismos de punição, estático, dinâmico e misto, e vamos comparar os resultados obtidos para os diferentes mecanismos. Para cada jogo, vamos encontrar os equilíbrios de Nash pura e mista, vamos analisar as dinâmicas nas arestas e vamos simular as dinâmicas evolucionárias. O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, vamos introduzir os conceitos básicos de teoria de jogo que vamos usar no segundo capítulo. No segundo capítulo, vamos começar por estudar o mecanismo de punição estática e o mecanismo de punição dinâmica, descritos em Wang Chuansheng e Shi Fulei (2019) [1], e depois vamos estudar o mecanismo de punição mista. No terceiro capítulo vamos fazer uma breve conclusão e discutir alguns possíveis trabalhos futuros.

Conteúdo

Agradecimentos	iii
Abstract	v
Resumo	vii
Conteúdo	ix
Lista de figuras	xi
1 Teoria de Jogos	1
1.1 Representação normal de um jogo	1
1.2 Representação extensiva de um jogo	2
1.3 Conjunto de informação	2
1.4 Equilíbrio de Nash	3
1.5 Teoria de jogo evolucionário	3
1.6 Estratégia evolucionariamente estável	4
1.7 Jogo Hawk-Dove	4
2 Aplicação da Teoria de Jogos Evolucionário para Modelação e Avaliação de Diferentes Tipos de Punição no Controlo da Poluição Industrial	7
2.1 Revisão de literatura	7
2.2 Caracterização do Jogo	8
2.3 Modelo para uma punição estática	9
2.4 Modelo para uma punição dinâmica	13
2.5 Modelo para uma punição mista	28
2.6 Adaptação do jogo para três jogadores	36
3 Conclusão e trabalhos futuros	47
Bibliografia	49

Lista de figuras

1.1	Representação extensiva do jogo	2
1.2	Representação extensiva do dilema dos prisioneiros	3
2.1	Representação extensiva do jogo	9
2.2	Simulação do caso 1	11
2.3	Simulação do caso 2	11
2.4	Simulação do caso 3	12
2.5	Simulação do caso 4	12
2.6	Representação extensiva do jogo com $f(p)$	13
2.7	Gráficos das curvas de fase	16
2.8	Gráficos das curvas de fase	16
2.9	Gráficos das curvas de fase	17
2.10	Gráficos das curvas de fase	17
2.11	Simulação do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$	19
2.12	Curvas de fase do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$	19
2.13	Simulação do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$	20
2.14	Simulação do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$	20
2.15	Curvas de fase do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$	21
2.16	Simulação do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$	21
2.17	Simulação do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$	22
2.18	Curvas de fase do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$	22
2.19	Simulação do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$	23
2.20	Simulação do caso $0 < p^* < 1$ e $q^* \geq 1$	23
2.21	Curvas de fase do caso $0 < p^* < 1$ e $q^* \geq 1$	24
2.22	Simulação do caso $p^* = 0$ e $q^* \geq 1$	25
2.23	Curvas de fase do caso $p^* = 0$ e $q^* \geq 1$	25
2.24	Simulação do caso $p^* < 0$ e $q^* \geq 1$	26
2.25	Curvas de fase do caso $p^* < 0$ e $q^* \geq 1$	27
2.26	Curvas de fase para os seis casos simulados	28
2.27	Gráficos das curvas de fase	29
2.28	Gráficos das curvas de fase	30
2.29	Gráficos das curvas de fase	30
2.30	Gráficos das curvas de fase	31
2.31	Simulação do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$	32
2.32	Curvas de fase do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$	32
2.33	Simulação do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$	33
2.34	Curvas de fase do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$	34

2.35	Simulação do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$	35
2.36	Curvas de fase do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$	35
2.37	Curvas de fase para os três casos simulados	36
2.38	Representação extensiva do jogo, sem payoffs	37
2.39	Dinâmica nas arestas do cubo quando $\Delta\psi < f$, vermelho para empresa 1, azul para empresa 2 e verde para governo	40
2.40	Simulações para $\Delta\zeta < f$, $\Delta\zeta < e$, $\Delta\mu < f$, $\Delta\mu < e$ nas arestas do cubo	41
2.41	Simulação para estratégias mistas quando $\Delta\zeta < f$, $\Delta\zeta < e$, $\Delta\mu < f$, $\Delta\mu < e$.	42
2.42	Simulações para $\Delta\zeta < f$, $\Delta\zeta > e$, $\Delta\mu < f$, $\Delta\mu > e$ nas arestas do cubo	42
2.43	Simulação para estratégias mistas quando $\Delta\zeta < f$, $\Delta\zeta > e$, $\Delta\mu < f$, $\Delta\mu > e$.	43
2.44	Simulações para $\Delta\zeta > f + e$, $\Delta\mu > f + e$ nas arestas do cubo	43
2.45	Simulação para estratégias mistas quando $\Delta\zeta > f + e$, $\Delta\mu > f + e$	44
2.46	Simulações para $\Delta\zeta > f$, $\Delta\zeta < e$, $\Delta\mu > f$, $\Delta\mu < e$ nas arestas do cubo	44
2.47	Simulação para estratégias mistas quando $\Delta\zeta > f$, $\Delta\zeta < e$, $\Delta\mu > f$, $\Delta\mu < e$.	45

Capítulo 1

Teoria de Jogos

Teoria de jogos é um ramo de matemática, com aplicações às ciências sociais e biológicas, que estuda o comportamento de um conjunto de agentes que interagem entre eles. A estratégia escolhida por um agente tem em conta o ganho desse agente ou jogador, tendo em conta as estratégias escolhidas pelos outros jogadores. Os jogadores são racionais e portanto tentam maximizar o seu ganho.

1.1 Representação normal de um jogo

Gibbons[2] afirma que na representação normal de um jogo, os jogadores escolhem simultaneamente uma estratégia e a combinação das estratégias escolhidas pelos jogadores determinam o seu payoff. Um exemplo simples para mostrar essa representação é o jogo de dilema dos prisioneiros, onde dois suspeitos foram presos por cometerem crime, a polícia separa os suspeitos em celas diferentes e conta aos suspeitos que as consequências irão depender das suas próximas ações. Se ninguém confessasse então ambos serão sentenciados a um mês da prisão, se ambos confessassem então ambos serão sentenciados a seis meses da prisão e se um confessasse e outro não então o suspeito que confessa será livre e o outro será sentenciados a nove meses da prisão. Este jogo pode ser representado por a tabela 1.1 onde é especificado os jogadores, as suas possíveis estratégias e o payoff para cada combinação de estratégias.

		Suspeito Y	
		Confessar	Não confessar
Suspeito X	Confessar	$(-6, -6)$	$(0, -9)$
	Não confessar	$(-9, 0)$	$(-1, -1)$

TABELA 1.1: Dilema dos prisioneiros

1.2 Representação extensiva de um jogo

Gibbons[2] define a representação de um jogo é extensiva quando especifica: (1) Os jogadores do jogo, (2a) quando um jogador se joga, (2b) o que cada jogador pode fazer na sua jogada, (2c) o que cada jogador sabe na sua jogada, (3) os payoffs dos jogadores para todas as possíveis combinações de jogadas. Um exemplo dado é um jogo de dois jogadores de informação completa e perfeita. Onde jogador 1 escolhe uma ação a_1 no conjunto de ações $A_1 = \{L, R\}$, jogador 2 observa a jogada feita por jogador 1 e escolhe uma ação a_2 no conjunto de ações $A_2 = \{L', R'\}$, assim cada jogador terá um payoff de acordo com a sua ação como representado na 1.1.

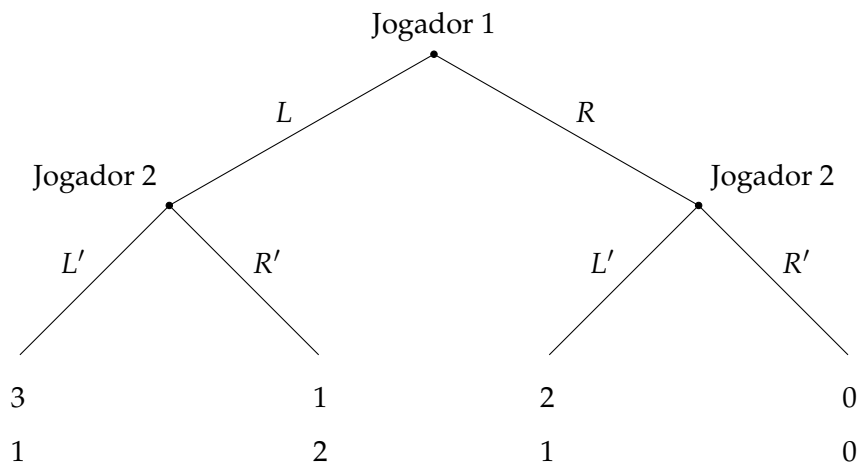


FIGURA 1.1: Representação extensiva do jogo

1.3 Conjunto de informação

Gibbons[2] define um conjunto de informação quando um jogador tem jogada em todos os nós do conjunto de informação e quando o jogo é chegado a um conjunto de informação, o jogador não sabe em que nó foi chegado. Na representação extensiva, o conjunto de informação é apresentado com linhas tracejadas, como o exemplo 1.2 onde o dilema dos prisioneiros é apresentado na forma extensiva. Neste exemplo suspeito X

escolhe uma ação a_1 no conjunto de ações $A_1 = \{\text{Confessar}, \text{Não confessar}\}$, suspeito Y não observa essa jogada feita por suspeito X e escolhe uma ação a_2 no conjunto de ações $A_2 = \{\text{Confessar}, \text{Não confessar}\}$ a linha tracejada mostra o desconhecimento de suspeito Y em relação à posição de nó que se encontra.

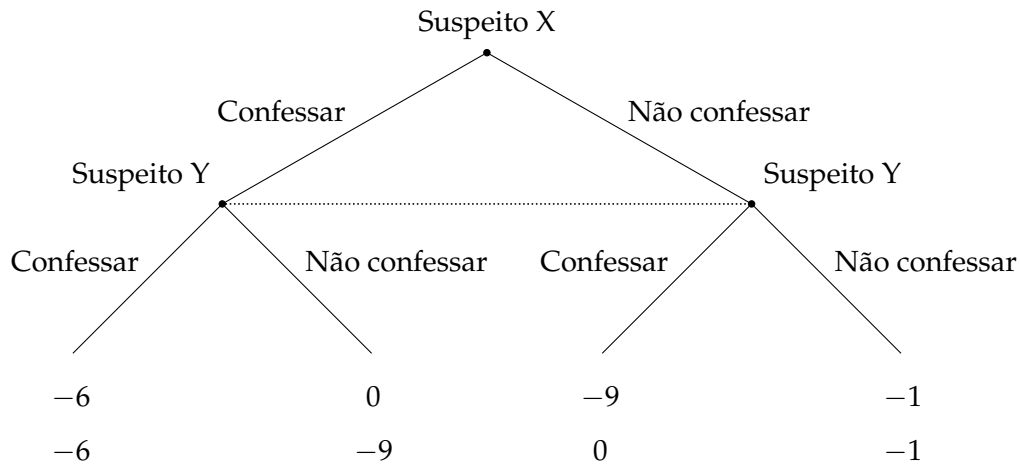


FIGURA 1.2: Representação extensiva do dilema dos prisioneiros

1.4 Equilíbrio de Nash

Suponha que teoria de jogo faz uma única previsão da estratégia que cada jogador irá escolher, para que essa previsão seja correta, a estratégia prevista para um jogador tem que ser a melhor resposta para todas as previsões dos outros jogadores. Assim nenhum jogador pretende desviar da estratégia prevista. Gibbons[2] assume que esse tipo de previsão é um equilíbrio de Nash.

1.5 Teoria de jogo evolucionário

Peter Hammerstein e Reinhard Selten(1994)[3] descreve a teoria de jogo como uma teoria que estuda o comportamento da estratégia humana baseado nas decisões racionais. A teoria de jogo evolucionário não se aplica esta assumpção da racionalidade, mas sim pela ideia Darwinista ou a seleção natural que eventualmente com reprodução, as estratégias vão se conduzindo para a ótima. Foram também mencionadas outros trabalhos feitos nessa área, como o artigo do J. Smith e G. Price (1973)[4] que fez uma representação do jogo Hawk-Dove*. Fisher(1930)[5] usou argumentos de teoria de jogo na sua teoria

*Este jogo também é representado na secção 1.7

da razão sexual. Hamilton(1967)[6] propôs a ideia de uma estratégia imbatível. Trivers (1971)[7] fala dos jogos repetidos quando apresenta a sua noção de altruísmo recíproco. O livro do J. Smith[8] onde fala um bocado de tudo da área de teoria de jogo evolucionário. Alguns outros trabalhos mais recentes vão ser revistos na secção 2.1.

1.6 Estratégia evolucionariamente estável

Imagina uma população onde todos os seus membros jogam a mesma estratégia, depois surgiu uma pequena parte dessa população que jogam uma estratégia diferente, chamando essa parte da população mutante. Então temos maioria da população a jogar uma estratégia e outra parte, as mutantes, que jogam outra. Assumimos que a estratégia jogada por grande parte da população é estável, assim por seleção natural, a população mutante e a sua estratégia irá extinguir. Voltando ao estado inicial onde todos os membros dessa população jogam a estratégia estável. Peter Hammerstein e Reinhard Selten(1994)[3] afirma que essa estratégia estável é chamado estratégia evolucionariamente estável, no sentido que esta estratégia estável irá permanecer e extinguindo as outras estratégias mutantes.

1.7 Jogo Hawk-Dove

A primeira representação do jogo Hawk-Dove foi feito por J. Smith e G. Price (1973)[4], Jörgen W(1992)[9] fez uma descrição detalhada do jogo.

Neste jogo, cada jogador possuem duas estratégias, o espaço de estratégia é {Hawk, Dove}. A estratégia Hawk tem um payoff $V > 0$ quando é jogado contra Dove enquanto o payoff de Dove é 0, se ambos jogadores jogassem Hawk correriam em risco de perder, a probabilidade de perder é igual à probabilidade de ganhar, caso perde terá um custo $C > 0$, então nesse caso a probabilidade do jogador receber V ou receber $-C$ é $\frac{1}{2}$, logo o payoff esperado é $\frac{V-C}{2}$, caso ambos jogassem Dove o payoff será $\frac{V}{2}$ para cada um.

	Hawk	Dove
Hawk	$\left(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}\right)$	$(V, 0)$
Dove	$(0, V)$	$\left(\frac{V}{2}, \frac{V}{2}\right)$

TABELA 1.2: Tabela de payoff do jogo Hawk-Dove

O equilíbrio de Nash do jogo depende do valor de V e C , caso $V > C$ então equilíbrio de Nash é o par $\{\text{Hawk}, \text{Hawk}\}$, caso $C > V$ então equilíbrio de Nash são os pares $\{\text{Hawk}, \text{Dove}\}$ e $\{\text{Dove}, \text{Hawk}\}$. Se a estratégia for mista com probabilidade p jogar Hawk e $1 - p$ jogar Dove o equilíbrio de Nash ocorre quando $p = \frac{V}{C}$ e se o par de estratégias mista for $\{q, q\}$ onde q designa uma probabilidade p para estratégia Hawk e $1 - p$ para estratégia Dove, este equilíbrio de Nash é também uma estratégia evolucionariamente estável.

Capítulo 2

Aplicação da Teoria de Jogos Evolucionário para Modelação e Avaliação de Diferentes Tipos de Punição no Controlo da Poluição Industrial

2.1 Revisão de literatura

Com os avanços tecnológicos e a revolução industrial, a poluição torna-se num problema crítica para o ser humano. Luo et al.(2016) [10] examinaram as estratégias para atribuição de preço e redução de emissão de carbono para duas fabricas rivais em mercado cooperativo e não cooperativo, calculado e comparado depois o lucro e preço ótima para as fabricas. Fan et al. (2017)[11] construiu modelos de jogo evolucionário com supervisão e sem supervisão de governo baseado entre jogadores governo e empresa, discutiu a eficácia e a estabilidade dessa supervisão, também analisou a estratégia ótima para supervisão e as correspondentes probabilidades. Wanting Chen e Zhi-Hua Hu (2018)[12] construiu modelos de jogo evolucionário de interação entre governo e fabrica baseado em taxas e subsídios estáticos, foi analisado o comportamento de ambos jogadores sob diferentes formas de taxa e subsídio, determinando o ótimo mecanismo para taxa e subsídio. Wang

Chuansheng e Shi Fulei (2019) [1] descreveu um modelo de jogo evolucionário para controlo de poluição industrial entre o governo local e a empresa sob dois mecanismos de punição, a punição estática onde a multa é fixa e a punição dinâmica com variação na multa, como objetivo a verificar qual dos mecanismos seria melhor, acabando por afirmar que uma punição dinâmica é melhor pois conseguiram encontrar a estratégia evolucionariamente estável no caso em que a punição estática não foi conseguido.

2.2 Caracterização do Jogo

Com base na simplificação e assunção por Wang Chuansheng e Shi Fulei (2019)[1] os dois principais jogadores neste jogo de controlo de poluição são: o governo local e a empresa, ambos jogadores adapta as suas jogadas ao longo do jogo. Para poder controlar a poluição industrial o governo decide a qualidade na supervisão à empresa, assim o conjunto de estratégias do governo é supervisionar ativamente ou supervisionar não ativamente, é chamado supervisão ativa se governo estiver uma grande vontade em supervisão e supervisão não ativa caso contrário. De mesma forma, o conjunto de estratégias da empresa é mostrar uma maior vontade na redução de emissão ou mostrar uma baixa vontade a mesma. É definido q para a probabilidade de governo querer uma supervisão ativa, $1 - q$ caso contrário. E p para a probabilidade de empresa mostrar um maior interesse na redução de emissão, $1 - p$ caso contrário. Onde p e $q \in [0, 1]$.

É definido um custo para cada estratégia, ψ_1 quando a supervisão for ativa e ψ_2 se a supervisão for não ativa, ξ_1 quando a vontade de empresa em redução de emissão dos poluentes for alta e ξ_2 se essa vontade for baixa. Além disso, é definido uma multa f caso a vontade da empresa na redução de emissão for baixa e ao mesmo tempo o governo dispor uma supervisão ativa. Por fim há um bónus e para empresa quando a vontade na redução de emissão for baixa.

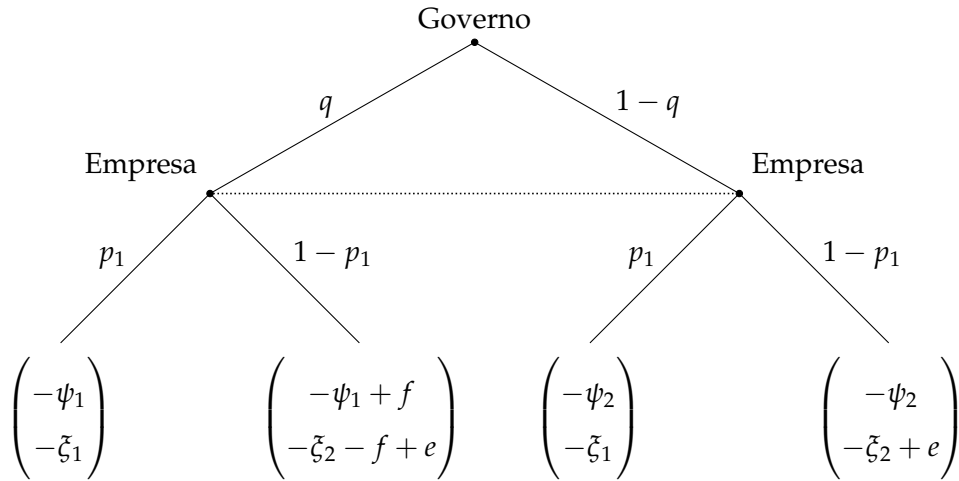


FIGURA 2.1: Representação extensiva do jogo

		Governo	
		q	$1 - q$
Empresa	p	$(-\xi_1, -\psi_1)$	$(-\xi_1, -\psi_2)$
	$1 - p$	$(-\xi_2 - f + e, -\psi_1 + f)$	$(-\xi_2 + e, -\psi_2)$

TABELA 2.1: Tabela do payoff

2.3 Modelo para uma punição estática

Com base na Wang Chuansheng e Shi Fulei (2019)[1], foi obtido a sistema de equação replicador para este jogo 2.9. De seguida foram analisados os possíveis pontos de equilíbrio e a sua estabilidade usando a condição de matriz jacobiana de sistema ter *determinante* > 0 e *traço* < 0 , e discutiu quatro possíveis casos. Caso 1 $\psi_2 - \psi_1 + f > 0$, $\xi_2 - \xi_1 + f - e > 0$, caso 2 $\psi_2 - \psi_1 + f > 0$, $\xi_2 - \xi_1 + f - e < 0$, caso 3 $\psi_2 - \psi_1 + f < 0$, $\xi_2 - \xi_1 + f - e > 0$ e caso 4 $\psi_2 - \psi_1 + f < 0$, $\xi_2 - \xi_1 + f - e < 0$. Por fim, foram feitas simulações onde as condições nesses quatro casos são satisfeitas, os resultados estão reproduzidos em abaixo.

Quando empresa quer reduzir a emissão o seu retorno esperado é

$$E_p = q(-\xi_1) + (1 - q)(-\xi_1) \quad (2.1)$$

Quando empresa não mostra vontade na redução de emissão o seu retorno esperado é

$$E_{1-p} = q(-\xi_2 - f + e) + (1 - q)(-\xi_2 + e) \quad (2.2)$$

A média do retorno esperado de empresa é

$$\bar{E}_{EP} = pE_p + (1 - p)E_{1-p} \quad (2.3)$$

Portanto a dinâmica replicadora de empresa é

$$EP(p) = p(1 - p)[\xi_2 - \xi_1 + qf - e] \quad (2.4)$$

Quando governo quer supervisionar ativamente o seu retorno espera do é

$$G_q = p(-\psi_1) + (1 - p)(-\psi_1 + f) \quad (2.5)$$

Quando supervisão é não ativa o seu retorno esperado é

$$G_{1-q} = p(-\psi_2) + (1 - p)(-\psi_2) \quad (2.6)$$

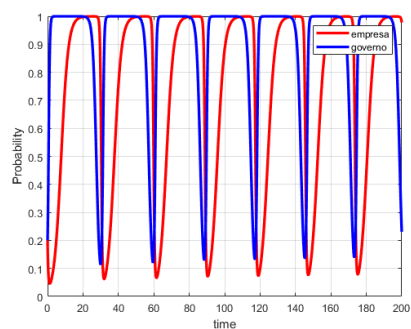
A média do retorno esperado de governo é

$$\bar{E}_{NG} = qG_q + (1 - q)G_{1-q} \quad (2.7)$$

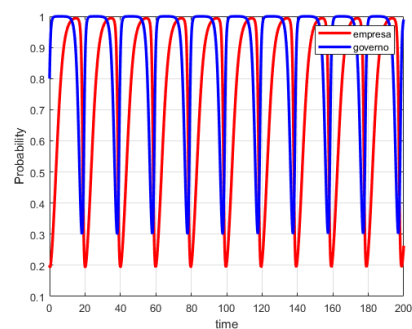
Portanto a dinâmica replicadora de governo é

$$GN(q) = q(1 - q)[- \psi_1 + f - pf + \psi_2] \quad (2.8)$$

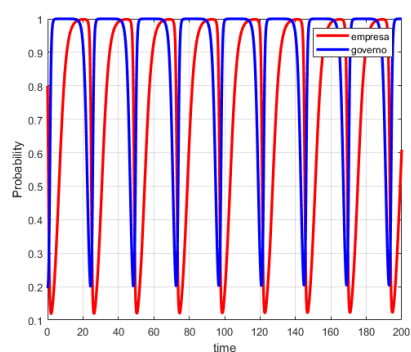
$$\begin{cases} EP(p) = \frac{dp}{dt} = p(E_p - \bar{E}_{EP}) = p(1 - p)[-\xi_1 + qf + \xi_2 - e] \\ GN(q) = \frac{dq}{dt} = q(E_q - \bar{E}_{NG}) = q(1 - q)[- \psi_1 + f - pf + \psi_2] \end{cases} \quad (2.9)$$



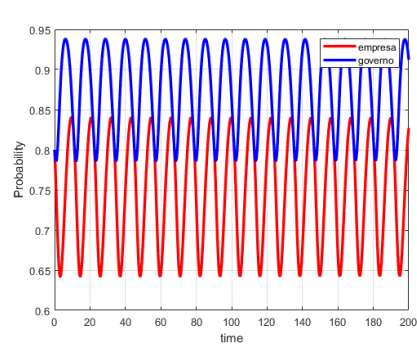
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

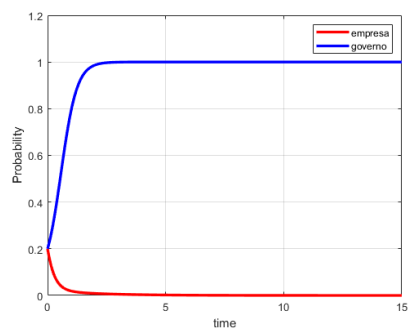


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

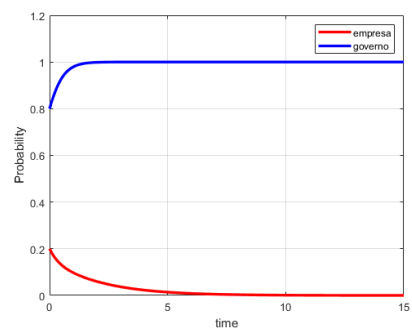


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

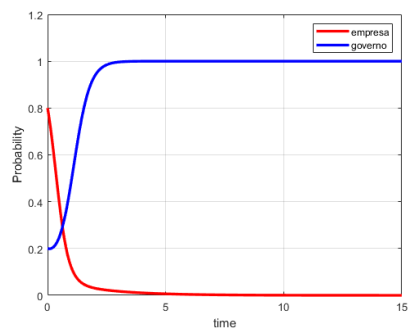
FIGURA 2.2: Simulação do caso 1



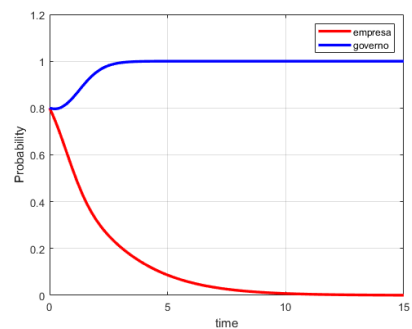
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

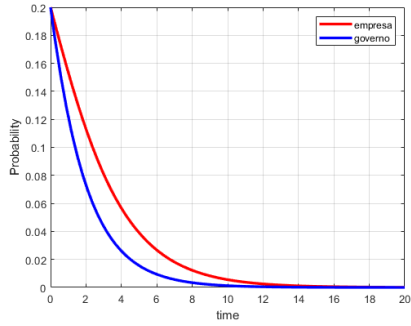


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

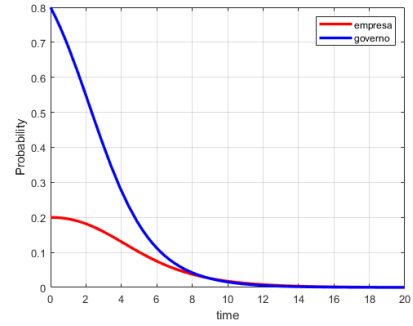


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

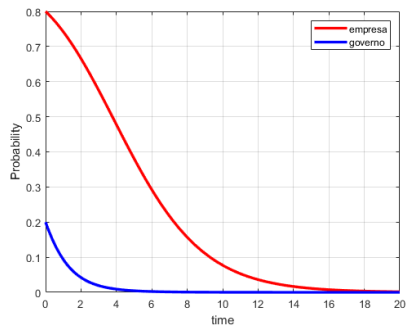
FIGURA 2.3: Simulação do caso 2



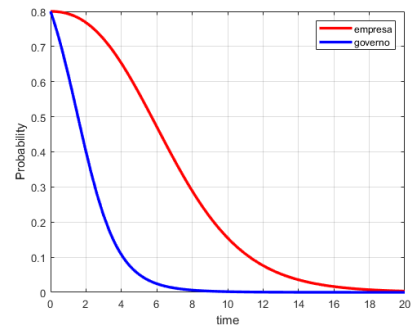
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

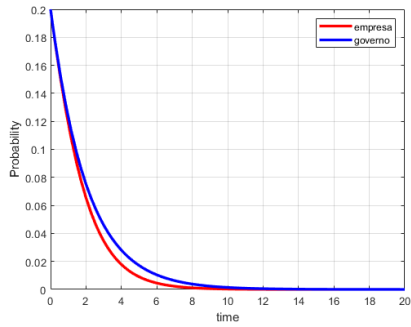


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

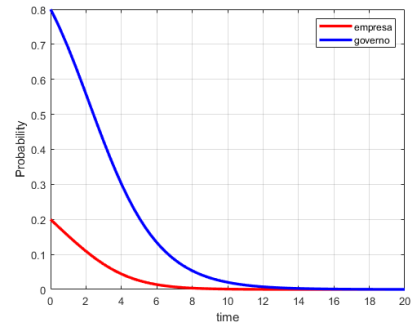


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

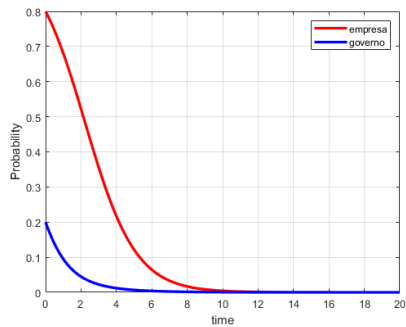
FIGURA 2.4: Simulação do caso 3



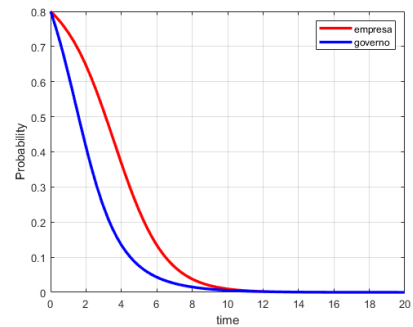
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$



(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$



(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.5: Simulação do caso 4

Com estes resultados é observado um comportamento oscilatório para ambos os jogadores no caso 1, desta forma a estratégia evolucionariamente estável não é atingido. Ao contrario do caso 1, nos casos 2, 3 e 4 a estratégia evolucionariamente estável é sempre alcançado com estas jogadas iniciais, acabando por convergir ao ponto de equilíbrio estável. Caso 2 converge para (0,1) onde a empresa deixa de ter grande vontade na redução de emissão dos poluente e o gorverno supervisiona sempre ativamente. Caso 3 e 4 convergem para (0,0) onde ambos jogadores perdem interesse na redução de emissão e na supervisão.

2.4 Modelo para uma punição dinâmica

A diferença de uma punição estática para dinâmica é que a multa f deixa de ser constante, tornando em uma função. No análise do Wang Chuansheng e Shi Fulei (2019)[1] foi assumido que f é proporcional à probabilidade da empresa mostrar uma baixa vontade na redução de emissão, escrevendo f em função de p , $f(p) = (1 - p)f_m$ onde f_m é multa máxima. Contextualmente podemos descrever este $f(p)$ como uma estimativa de número de vezes que a empresa irá comportar-se mal, ou seja, não reduzir a emissão. Além disso, vamos excluir o bónus e do jogo pois o mesmo se pode estar incluído na diferença de ξ_1 para ξ_2 . Desta forma o jogo pode ser representado na seguinte forma.

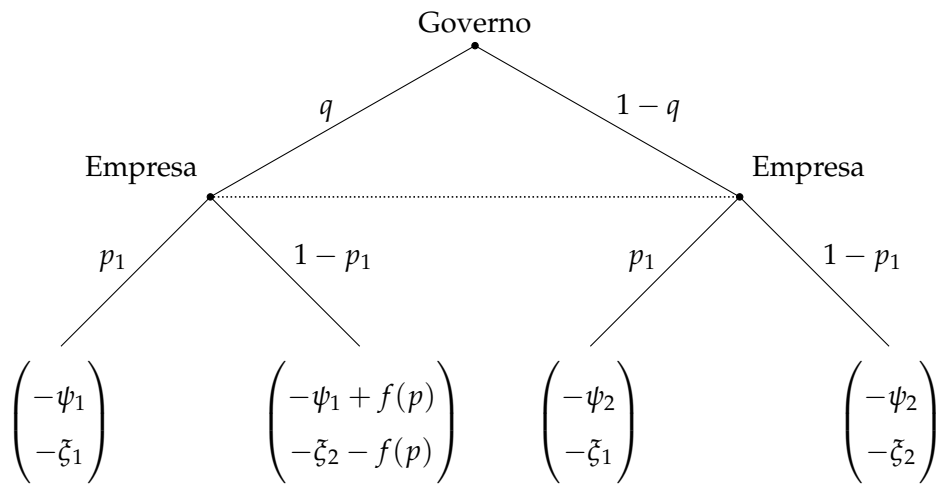


FIGURA 2.6: Representação extensiva do jogo com $f(p)$

		Governo	
		q	$1 - q$
Empresa	p	$(-\xi_1, -\psi_1)$	$(-\xi_1, -\psi_2)$
	$1 - p$	$(-\xi_2 - f(p), -\psi_1 + f(p))$	$(-\xi_2, -\psi_2)$

TABELA 2.2: Tabela do payoff

Assim, quando empresa quer reduzir a emissão o seu retorno esperado é

$$E_p = q(-\xi_1) + (1 - q)(-\xi_1) \quad (2.10)$$

Quando empresa não mostra vontade na redução de emissão o seu retorno esperado é

$$E_{1-p} = q(-\xi_2 - f(p)) + (1 - q)(-\xi_2) \quad (2.11)$$

A média do retorno esperado de empresa é

$$\bar{E} = pE_p + (1 - p)E_{1-p} \quad (2.12)$$

Portanto a dinâmica replicadora de empresa é

$$EP(p) = p(1 - p)[\xi_2 - \xi_1 + qf(p)] \quad (2.13)$$

De mesma forma vamos determinar a dinâmica replicadora do governo para este jogo.

Quando governo quer supervisionar ativamente o seu retorno espera do é

$$G_q = p(-\psi_1) + (1 - p)(-\psi_1 + f(p)) \quad (2.14)$$

Quando supervisão é não ativa o seu retorno esperado é

$$G_{1-q} = p(-\psi_2) + (1 - p)(-\psi_2) \quad (2.15)$$

A média do retorno esperado de governo é

$$\bar{G} = qG_q + (1 - q)G_{1-q} \quad (2.16)$$

Portanto a dinâmica replicadora de governo é

$$GN(q) = q(1 - q)[- \psi_1 + f(p) - pf(p) + \psi_2] \quad (2.17)$$

Vamos chamar $\Delta\xi$ para $\xi_1 - \xi_2$, $\Delta\psi$ para $\psi_1 - \psi_2$ e substituir $f(p)$ por $(1 - p)f_m$ temos

então, a sistema de equações replicador para modelar a punição dinâmica na seguinte forma.

$$\begin{cases} EP(p) = \frac{dp}{dt} = p(E_p - \bar{E}) = p(1-p)[- \Delta \xi + q(1-p)f_m] \\ GN(q) = \frac{dq}{dt} = q(G_q - \bar{G}) = q(1-q)[- \Delta \psi + (1-p)^2 f_m] \end{cases} \quad (2.18)$$

Igualando $EP(p) = 0, GN(q) = 0$, o resultado dos pontos de fixos são $E_1(0,0), E_2(1,0), E_3(0,1), E_4(1,1)$ e $E_5(p^*, q^*)$ onde

$$p^* = 1 - \sqrt{\frac{\Delta \psi}{f_m}} \quad q^*(p) = \frac{\Delta \xi}{(1-p)f_m} \quad (2.19)$$

Uma vez que os resultados das estratégias jogadas por ambos jogadores não devem sair do quadrado $[0,1] \times [0,1]$ a análise da estabilidade por vizinhança nos pontos fixos E_1, E_2, E_3, E_4 não seria útil. Portanto vamos ver a estabilidade dos cantos por sentido das curvas de fase.

Quando $p = 1, GN(q) = -\Delta \psi$ assim o sentido da curva de fase é o 2.7a, ao adicionarmos $q = 0$ com que faz $EP(p) = -\Delta \xi$ passamos ter 2.7b.

Se assumirmos $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$ o comportamento das curvas de fase são apresentado em 2.7c, onde E_1, E_2 e E_3 são pontos de sela, E_4 é um ponto repulsor, o ponto onde $q^*(p)$ intersecta com $q = 1$ é um ponto sela e o ponto onde as curvas p^* e $q^*(p)$ se intersectam é o equilíbrio misto.

Então, para este caso não temos equilíbrio de Nash puro mas temos estratégia mista $(p^*, q^*(p^*))$. Além disso, se governo iniciar a sua jogada com $q = 1$ o equilíbrio neste caso será $(1 - \frac{\Delta \xi}{f_m}, 1)$, após chegada a esse equilíbrio, se governo desviar a sua jogada para $q < 1$, num período de tempo governo aumentaria o seu retorno por diminuir o valor de q , mas após esse período o equilíbrio será desviado para ponto $(p^*, q^*(p^*))$, portanto para o governo poder concluir a sua melhor jogada, ele tem que ver qual desses pontos, $(p^*, q^*(p^*))$ e $(1 - \frac{\Delta \xi}{f_m}, 1)$, daria melhor retorno.

Caso $p^* < 0$, ou seja, $f_m < \Delta \psi$ quer dizer que a multa não é suficiente para os gastos na supervisão. O comportamento da curva de fase é 2.8a, os pontos E_2 e $(1 - \frac{\Delta \xi}{f_m}, 1)$ são os pontos de sela, E_1 é um ponto atractor, E_3 e E_4 são repulsores, neste caso temos um equilíbrio de Nash E_1 , onde o governo não vai fazer supervisão levando a empresa não fazer redução de emissão. Se $p^* = 0$, contextualmente pode ser visto como a multa recebida por governo é equilibrado com os gastos feitos na supervisão, o comportamento da curva de fase é 2.8b agora todos os pontos na linha azul, $p = 0$ podem ser pontos

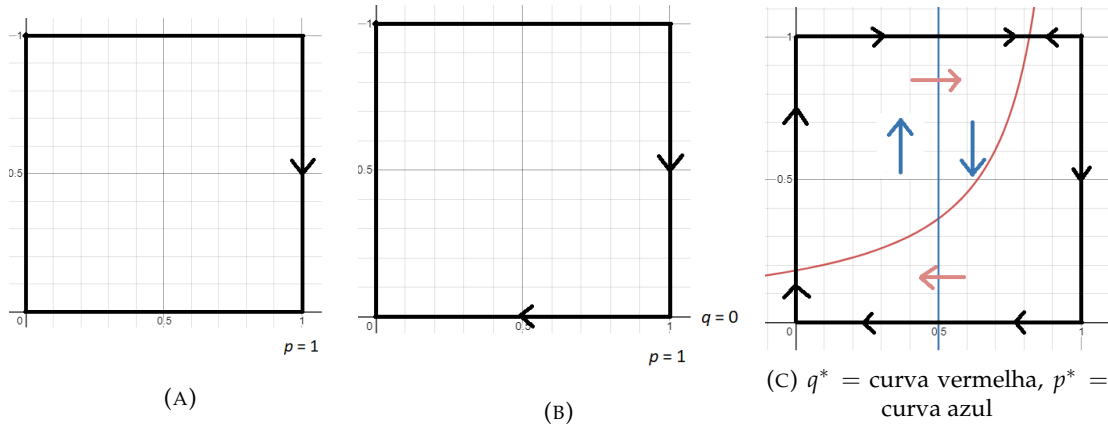


FIGURA 2.7: Gráficos das curvas de fase

de equilíbrio, E_2 e $(1 - \frac{\Delta\tilde{\xi}}{f_m}, 1)$ são os pontos de sela, E_4 é um ponto repulsor, Neste caso podemos ter uma infinidade de equilíbrios.

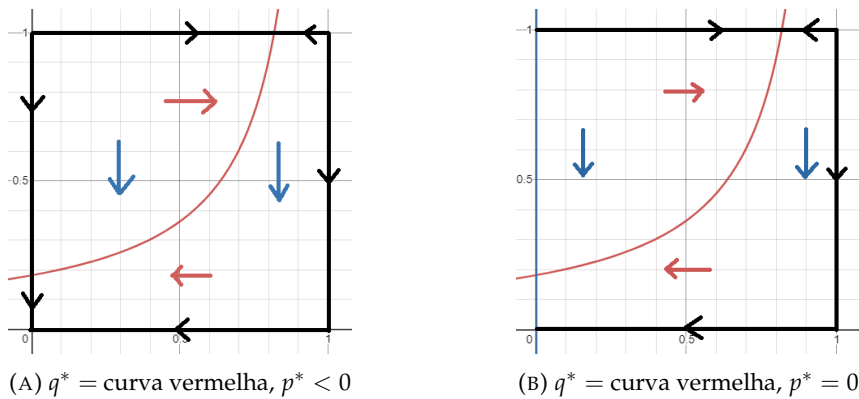


FIGURA 2.8: Gráficos das curvas de fase

Quando $q^*(0) \geq 1$, ou seja, $f_m \leq \Delta\tilde{\xi}$ podemos ver como a multa dado por governo é insuficiente para que a empresa faça a redução de emissão então vamos ver três casos. Caso 1, $0 < p^* < 1$ o comportamento das curvas de fase estão apresentados na 2.9a, E_1 e E_2 são pontos de sela, E_3 é atrator e E_4 é repulsor, então temos um equilíbrio de Nash E_3 onde a empresa não vai atuar a redução de emissão e governo supervisiona sempre ativamente. Caso 2, $p^* = 0$ o comportamento das curvas de fase estão apresentados na 2.9b, como na 2.8b vamos ter uma infinidade de pontos de equilíbrio na linha $p = 0$, E_2 é um ponto de sela e E_4 é um repulsor. Caso 3, $p^* < 0$ o comportamento das curvas de fase estão apresentados na 2.9c, temos E_1 atrator, E_4 repulsor, E_2 e E_3 pontos de sela, neste caso o equilíbrio de Nash é E_1 onde ambos jogadores perdem vontade quer na redução de emissão quer na supervisão, pois a multa é baixa e não compensa ao custo do governo fazer uma supervisão ativa.

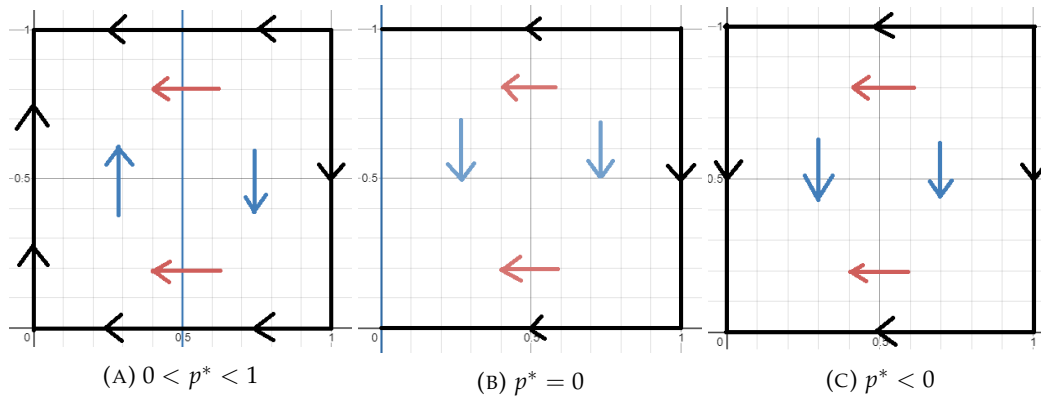


FIGURA 2.9: Gráficos das curvas de fase

Para visualizar melhor as figuras 2.8b e 2.9b vamos aumentar o número de curva de fase e ver o seu comportamento. Assim, 2.10a e 2.10b foram obtidos. Na 2.10a é esperado que os pontos acima da curva vermelha $q^*(p)$ e interior da fronteira começam com aumento do p e descida do q mas ao atravessar a $q^*(p)$ o p voltará para 0. Na 2.10b é esperado que qualquer ponto dentro da fronteira apresenta diminuição no q e p com p a ir para 0.

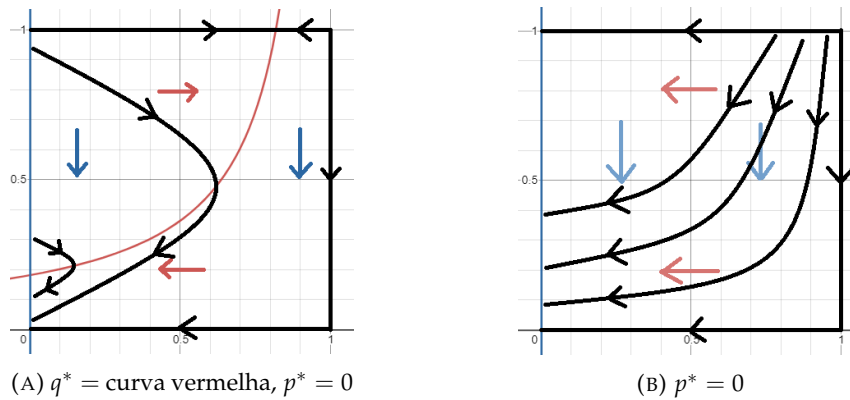


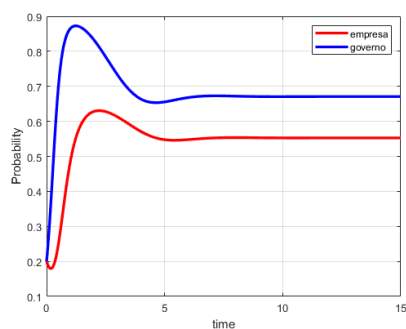
FIGURA 2.10: Gráficos das curvas de fase

Para tirar uma melhor ideia sobre os resultados obtidos acima, vamos fazer simulação de jogo usando os valores da tabela 2.3 para cada parâmetro.

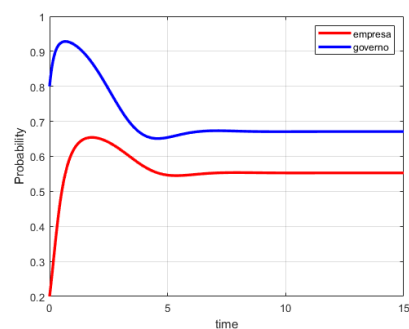
Parâmetros	$0 < p^* < 1$	$p^* = 0$	$p^* < 0$	$0 < p^* < 1$	$p^* = 0$	$p^* < 0$
	$0 < q^* < 1$	$0 < q^* < 1$	$0 < q^* < 1$	$q^*(0) \geq 1$	$q^*(0) \geq 1$	$q^*(0) \geq 1$
ξ_1	4	4	4	16	16	16
ξ_2	1	1	1	1	1	1
ψ_1	3	11	16	3	11	16
ψ_2	1	1	1	1	1	1
$\Delta\xi$	3	3	3	15	15	15
$\Delta\psi$	2	10	15	2	10	15
f_m	10	10	10	10	10	10

TABELA 2.3: Valores utilizados para cada parâmetro na simulação

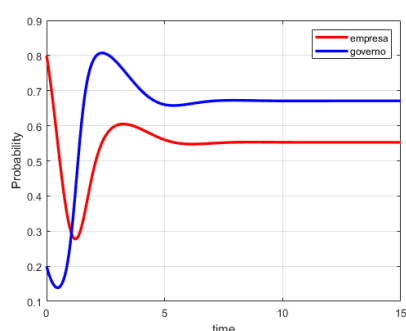
Se $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$, para estes valores usados na tabela podemos calcular as coordenadas dos pontos de equilíbrio. Sabemos que neste caso $p^* = 1 - \sqrt{\frac{2}{10}} \approx 0.553$ e $q^*(p^*) \approx 0.671$ e o retorno médio do governo é aproximadamente -1.0013 . Além disso se $q = 1$ então $p = 0.7$ e o retorno médio do governo é -2.1000 portanto a melhor jogada para governo não seria nenhuma dessas estratégias mas jogar $q = 0$ obtendo um retorno -1 .



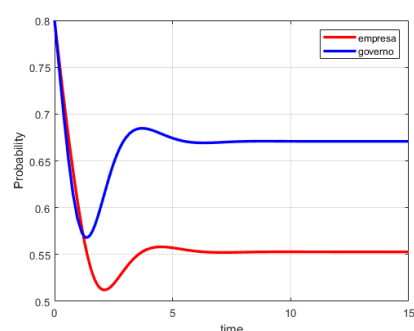
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

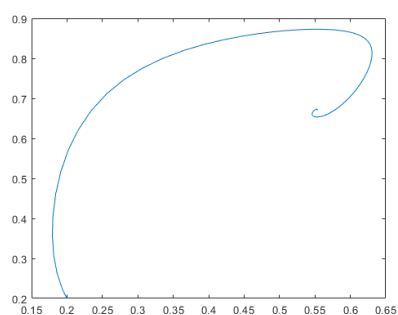


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

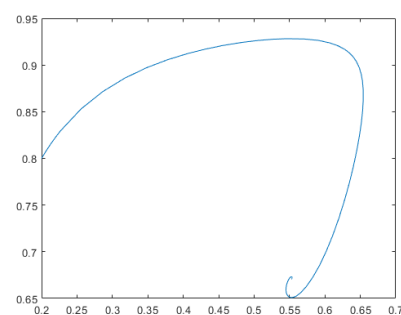


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

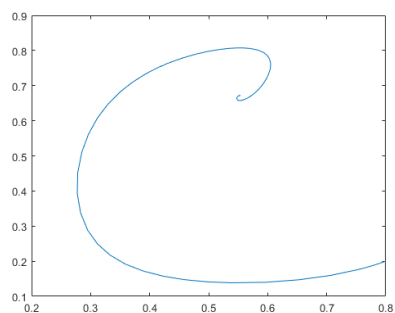
FIGURA 2.11: Simulação do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$



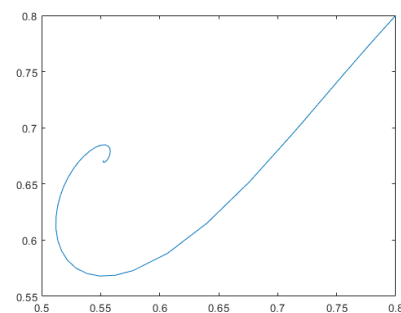
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

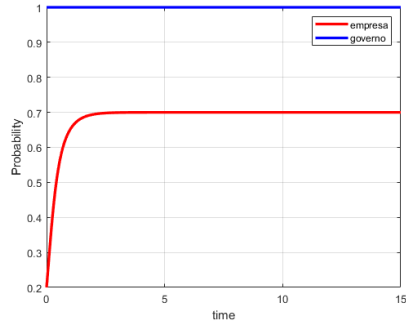


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

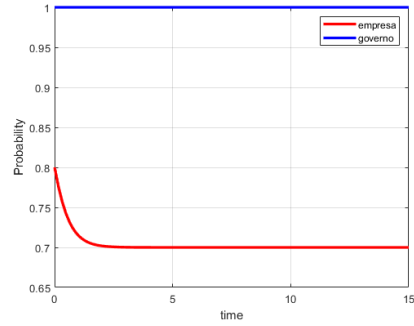


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.12: Curvas de fase do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$



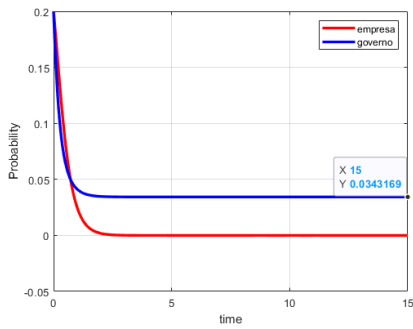
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 1$



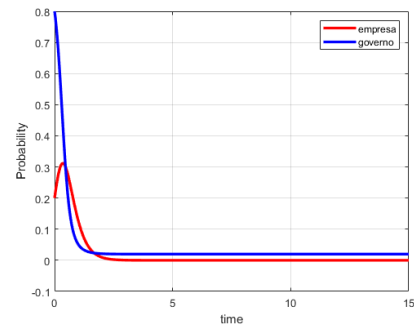
(B) $p_0 = 0.8, q_0 = 1$

FIGURA 2.13: Simulação do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$

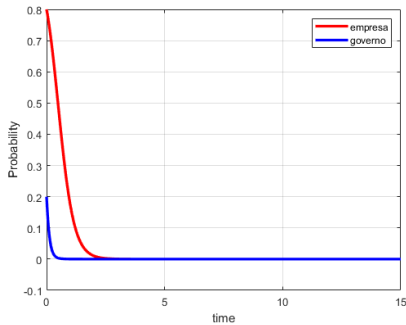
Quando $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$, como tínhamos estudado, podemos ter uma infinidade de equilíbrios todos com $p = 0$ como pode ser visto na simulação, a jogada de empresa desvia sempre para 0 quando ambos jogadores se partem num ponto dentro da fronteira, a jogada do governo varia dependendo onde o jogo começa. Se governo decidir começar com $q = 1$ iremos obter mesmos resultados do 2.13.



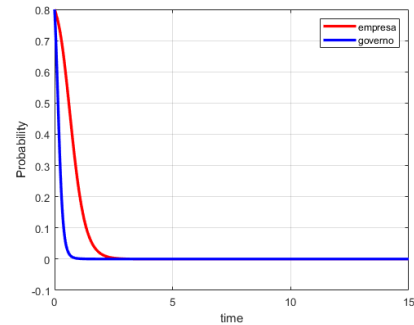
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

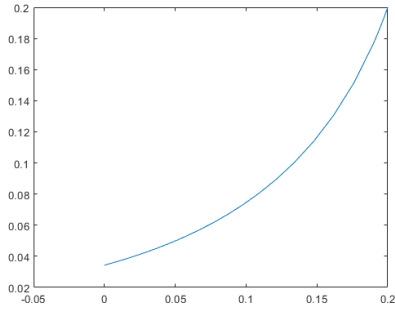


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

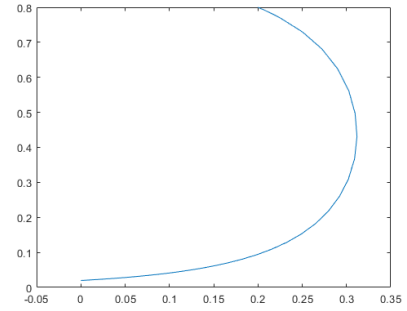


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

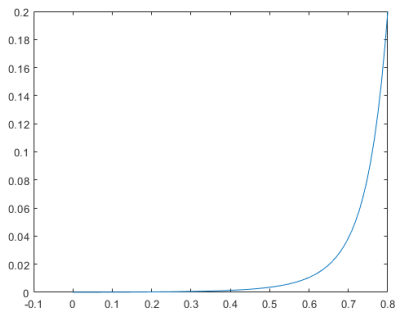
FIGURA 2.14: Simulação do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$



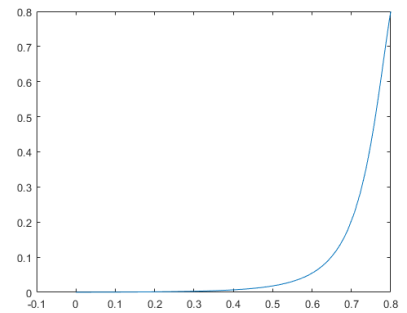
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

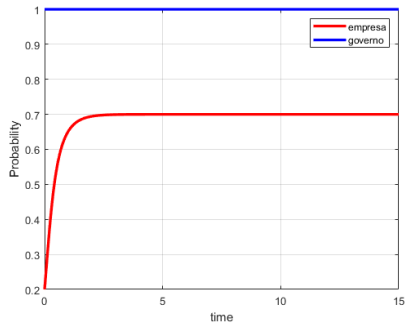


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

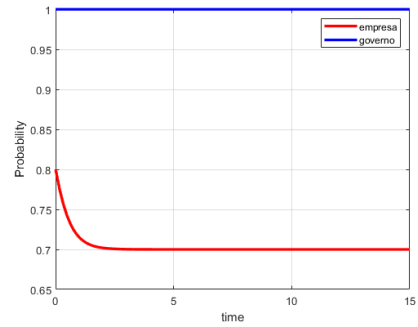


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.15: Curvas de fase do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$



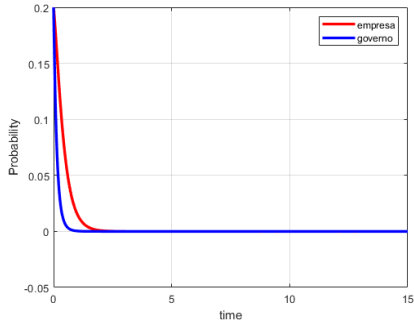
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 1$



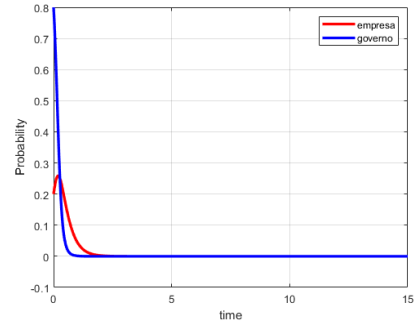
(B) $p_0 = 0.8, q_0 = 1$

FIGURA 2.16: Simulação do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$

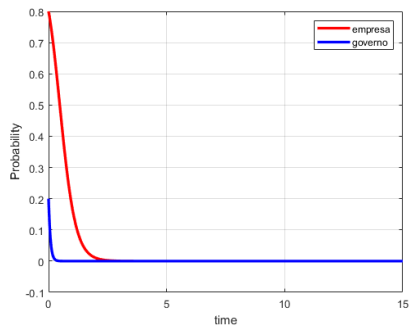
Quando $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$, o esperado é que todos os pontos interiores da fronteira irão convergir para $(0, 0)$. Além disso quando governo começa o jogo com $q = 1$ vamos obter o mesmo resultado de 2.13 e de 2.16 mas essa assumption do governo começar com $q = 1$ não é intuitivo pois neste caso de $p^* < 0$ o gasto na supervisão por governo é superior que a multa.



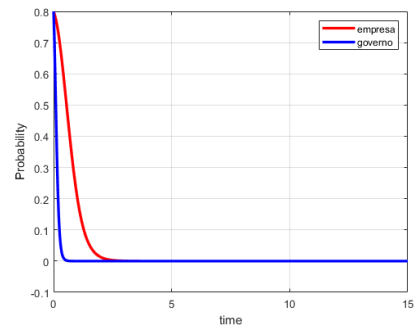
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

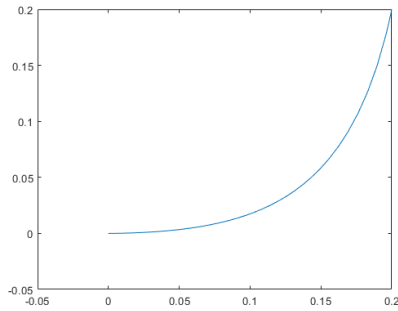


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

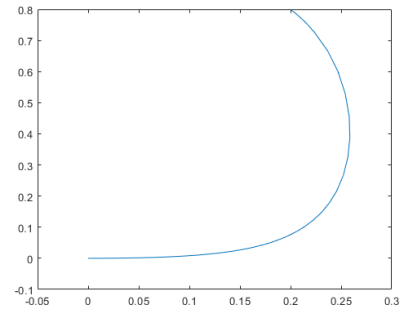


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

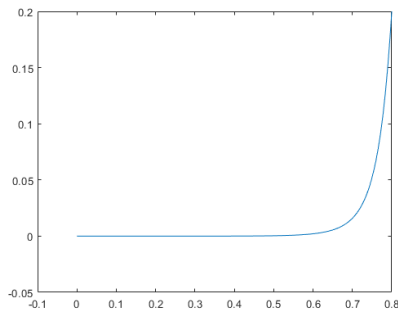
FIGURA 2.17: Simulação do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$



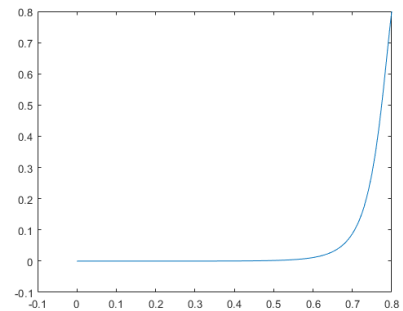
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

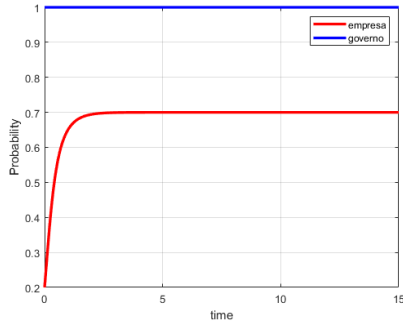


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

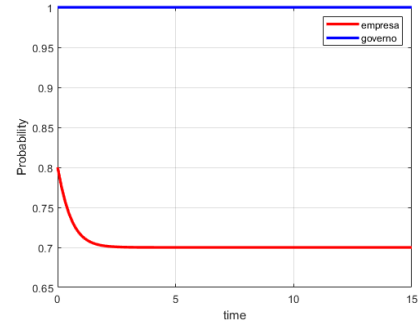


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.18: Curvas de fase do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$



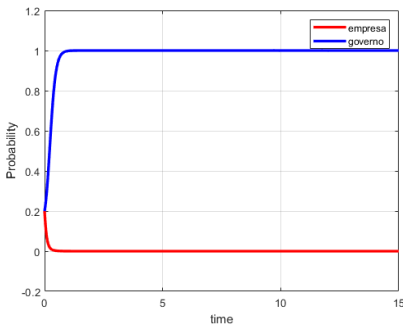
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 1$



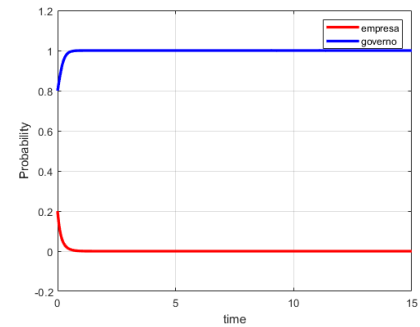
(B) $p_0 = 0.8, q_0 = 1$

FIGURA 2.19: Simulação do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$

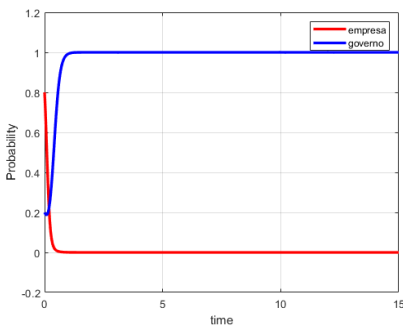
Quando $0 < p^* < 1$ e $q^*(0) \geq 1$ a multa dado por governo é insuficiente para que a empresa faça a redução de emissão então é esperado que no interior da fronteira, os pontos convergem para $(0, 1)$.



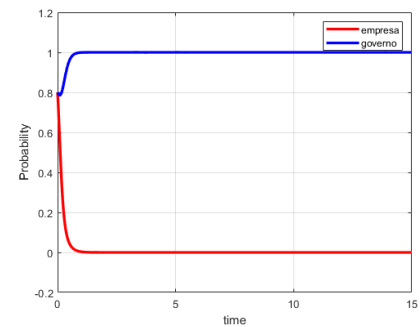
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

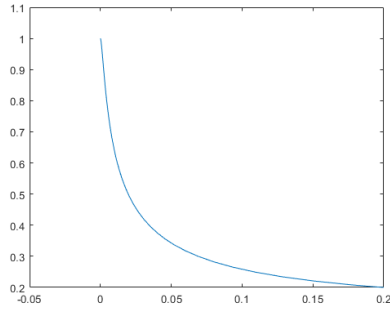


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

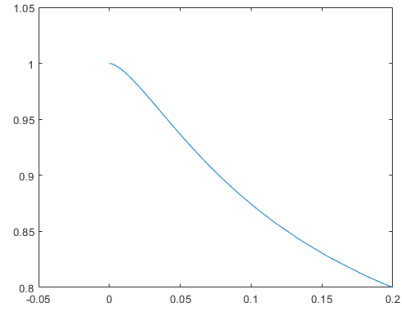


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

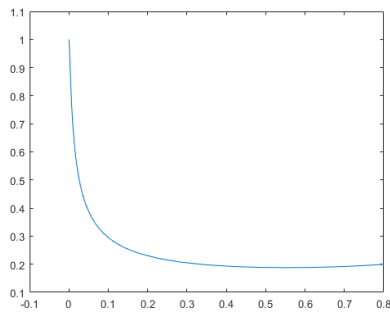
FIGURA 2.20: Simulação do caso $0 < p^* < 1$ e $q^* \geq 1$



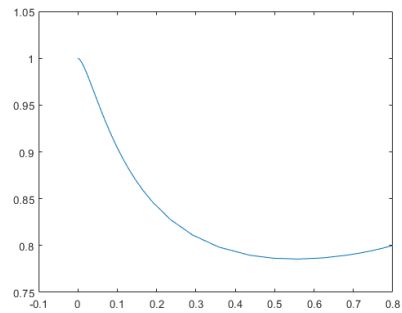
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$



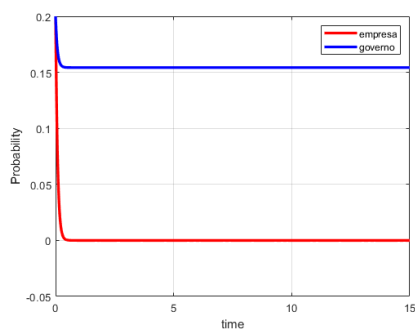
(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$



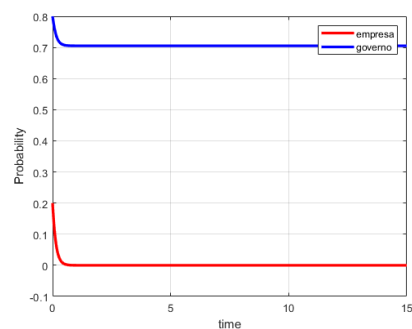
(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.21: Curvas de fase do caso $0 < p^* < 1$ e $q^* \geq 1$

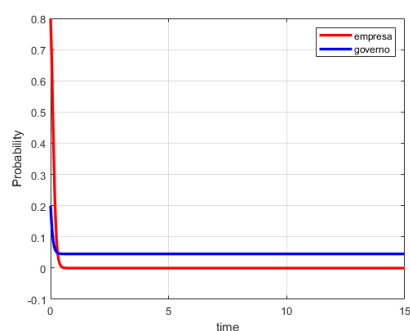
Quando $p^* = 0$ e $q^*(0) \geq 1$ a multa dado por governo é insuficiente para que a empresa faça a redução de emissão mas também é igual aos gastos na supervisão então é esperado que no interior da fronteira, os pontos convergem para $p = 0$ e o q são variados.



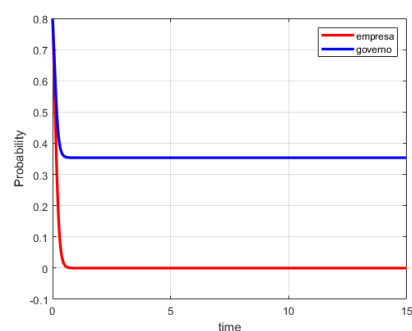
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

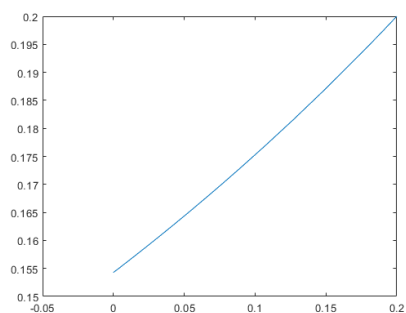


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

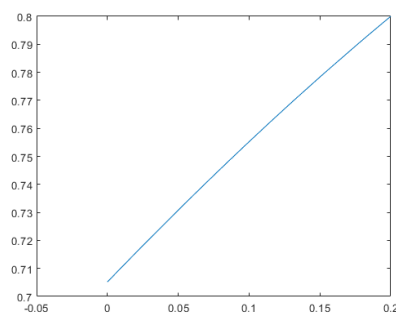


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

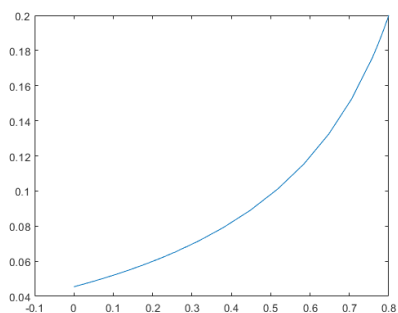
FIGURA 2.22: Simulação do caso $p^* = 0$ e $q^* \geq 1$



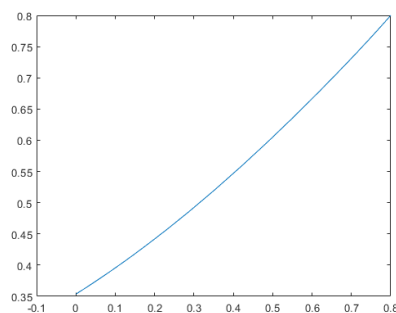
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$



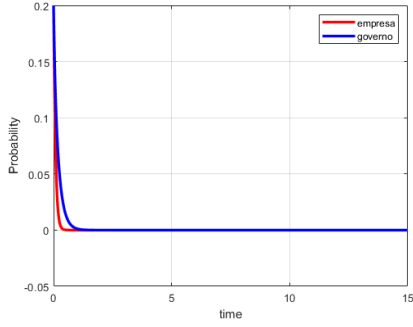
(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$



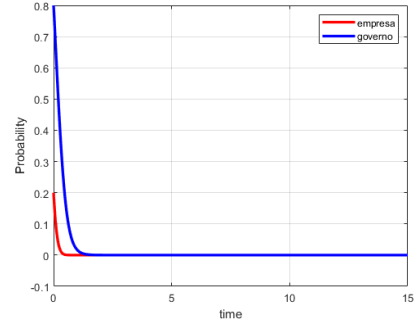
(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.23: Curvas de fase do caso $p^* = 0$ e $q^* \geq 1$

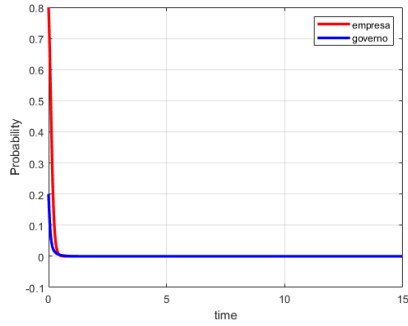
Quando $p^* < 0$ e $q^*(0) \geq 1$ a multa dado por governo além de ser insuficiente para que a empresa faça a redução de emissão também não cobre os gastos na supervisão então é esperado que no interior da fronteira, os pontos convergem para $(0,0)$.



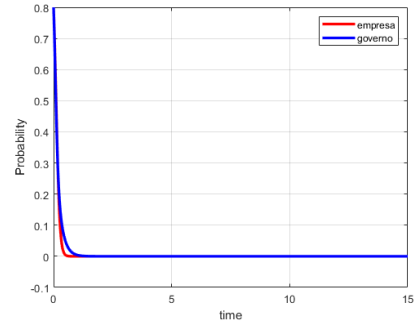
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

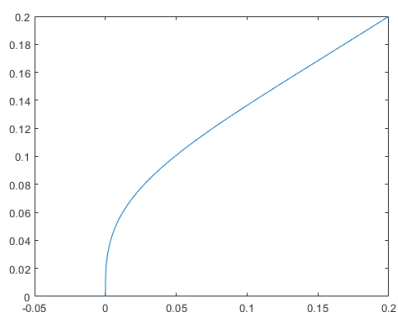


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

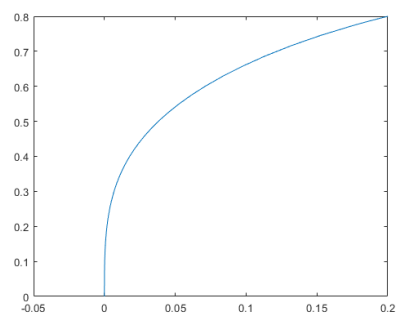


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

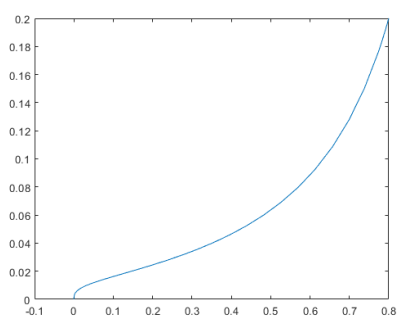
FIGURA 2.24: Simulação do caso $p^* < 0$ e $q^* \geq 1$



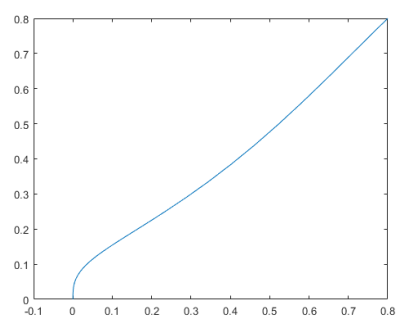
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$



(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$



(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.25: Curvas de fase do caso $p^* < 0$ e $q^* \geq 1$

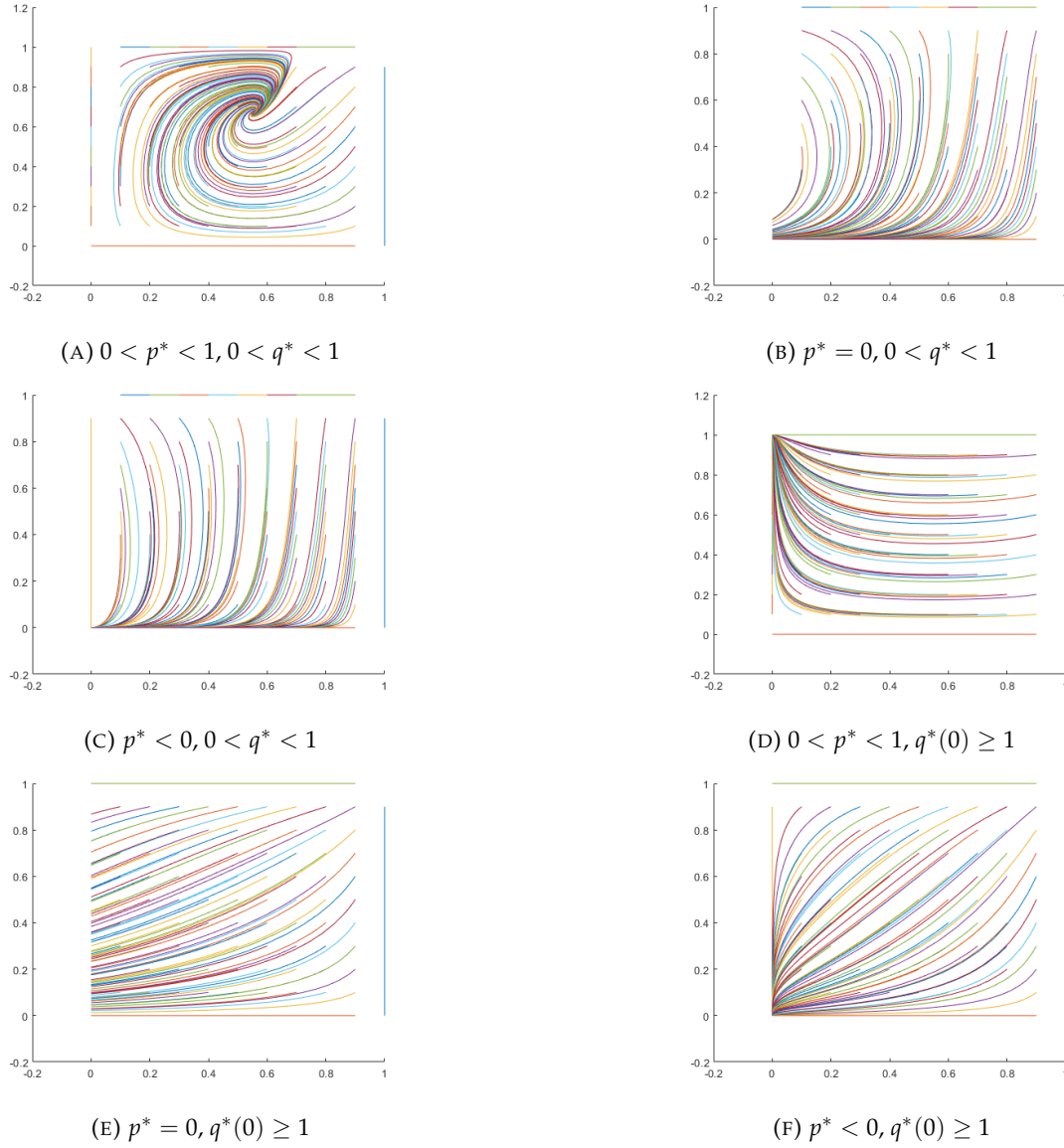


FIGURA 2.26: Curvas de fase para os seis casos simulados

2.5 Modelo para uma punição mista

Vamos agora considerar para além da multa dinâmica também aplicado uma multa estática, então o nosso $f(p) = (1 - p)f_m + \bar{f}$. Isto quer dizer que se governo apanhar empresa comportar-se mal então empresa recebe uma multa por ser apanhado e recebe também uma multa sobre a estimativa da quantidade de vezes que se comportou mal. A sistema de equações replicador será [2.20](#).

$$\begin{cases} EP(p) = \frac{dp}{dt} = p(E_p - \bar{E}) = p(1-p)[- \Delta\zeta + q((1-p)f_m + \bar{f})] \\ GN(q) = \frac{dq}{dt} = q(G_q - \bar{G}) = q(1-q)[- \Delta\psi + (1-p)^2 f_m + (1-p)\bar{f}] \end{cases} \quad (2.20)$$

Igualando $EP(p) = 0, GN(q) = 0$, o resultado dos pontos de fixos são $E_1(0,0), E_2(1,0), E_3(0,1), E_4(1,1)$ e $E_5(p^*, q^*)$, com $p^* \in p_1^*, p_2^*$ onde $p_2^* > 1$. Assim apenas p_1^* é utilizado para análise.

$$p_1^* = \frac{(2f_m + \bar{f}) - \sqrt{(2f_m + \bar{f})^2 - 4f_m(f_m + \bar{f} - \Delta\psi)}}{2f_m} \vee p_2^* = \frac{(2f_m + \bar{f}) + \sqrt{(2f_m + \bar{f})^2 - 4f_m(f_m + \bar{f} - \Delta\psi)}}{2f_m} \quad q^*(p) = \frac{\Delta\zeta}{(1-p)f_m + \bar{f}} \quad (2.21)$$

Quando $p = 1, GN(q) = -\Delta\psi$ assim o sentido da curva de fase é o 2.7a, ao adicionarmos $q = 0$ com que faz $EP(p) = -\Delta\zeta$ passamos ter 2.7b.

Se assumirmos $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$, então temos três casos. Se $\bar{f} < \Delta\zeta$ então o comportamento das curvas de fase são idênticas a 2.7c. Se $\bar{f} = \Delta\zeta$ o comportamento das curvas de fase estão apresentado em 2.27b, os pontos E_1, E_2, E_3 e E_4 são todos pontos de sela e temos a intersecção das curvas p^* e q^* como equilíbrio misto. Se $\bar{f} > \Delta\zeta$ o comportamento das curvas de fase estão apresentado em 2.27a, os pontos de equilíbrio têm mesmo comportamento de $\bar{f} = \Delta\zeta$. Nenhum desses casos vamos ter equilíbrio de Nash puro.

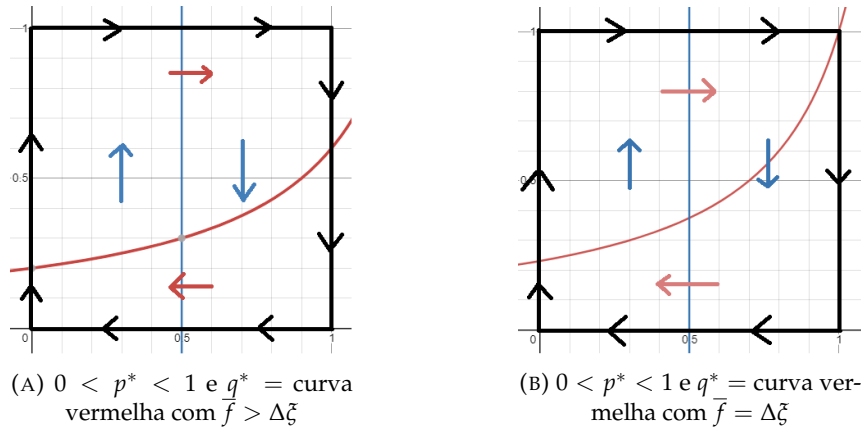


FIGURA 2.27: Gráficos das curvas de fase

Se $q^*(0) \geq 1$, ou seja, $f_m + \bar{f} \leq \Delta\zeta$ o comportamento das curvas de fase são idênticas da 2.9.

Se $\bar{f} > \Delta\zeta$ e $p^* \leq 0$ então o comportamento das curvas de fase estão apresentados em 2.28. Na 2.28a $p^* = 0$ então podemos ter uma infinidade de pontos de equilíbrio na linha

$p = 0$, E_2 e E_4 são pontos de sela. Na 2.28b $p^* < 0$ temos E_1 atrator, E_2 e E_4 pontos de sela, E_3 repulsor.

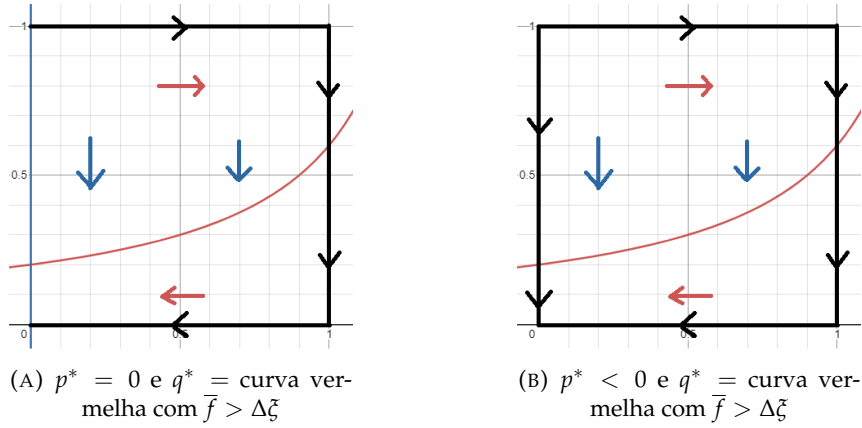


FIGURA 2.28: Gráficos das curvas de fase

Se $\bar{f} = \Delta \xi$ e $p^* \leq 0$ então o comportamento das curvas de fase estão apresentados em 2.29. Na 2.29a $p^* = 0$ então podemos ter uma infinidade de pontos de equilíbrio na linha $p = 0$, E_2 e E_4 são pontos de sela. Na 2.29b $p^* < 0$ temos E_1 atrator, E_2 e E_4 pontos de sela, E_3 repulsor.

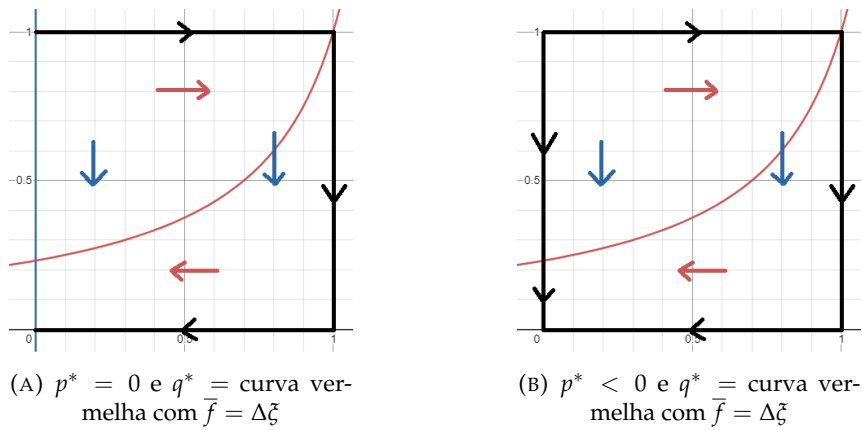


FIGURA 2.29: Gráficos das curvas de fase

Para visualizar melhor as figuras 2.28a e 2.29a vamos aumentar o número de curva de fase e ver o seu comportamento. Assim, 2.30a e 2.30b foram obtidos. Em ambas figuras é esperado que os pontos acima da curva vermelha $q^*(p)$ e interior da fronteira começam com aumento do p e descida do q mas ao atravessar a $q^*(p)$ o p voltará para 0.

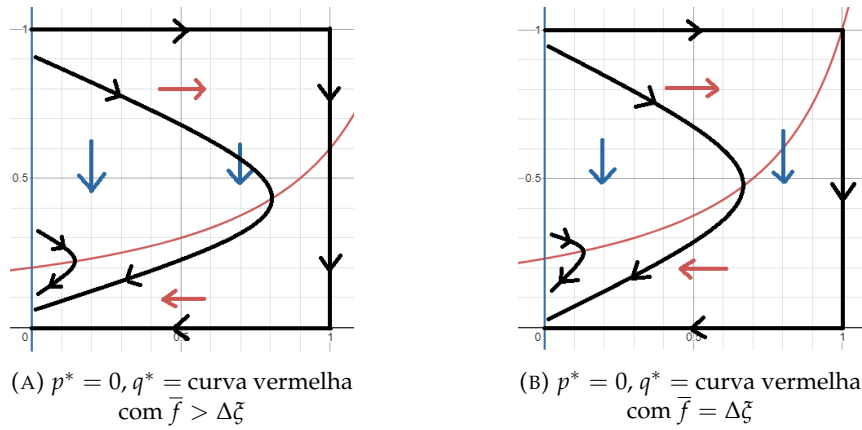


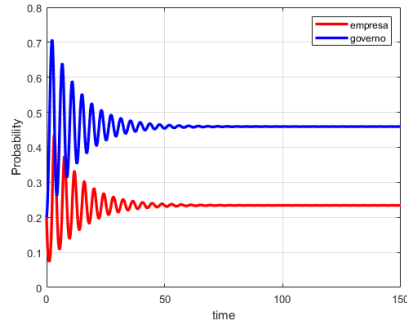
FIGURA 2.30: Gráficos das curvas de fase

Pelas as figuras das curvas de fase apresentados em acima é observado que os comportamentos das curvas de fase para $\bar{f} > \Delta\zeta$ e $\bar{f} = \Delta\zeta$ são muito semelhantes. Portanto para a simulação vamos apenas ver o caso $\bar{f} > \Delta\zeta$.

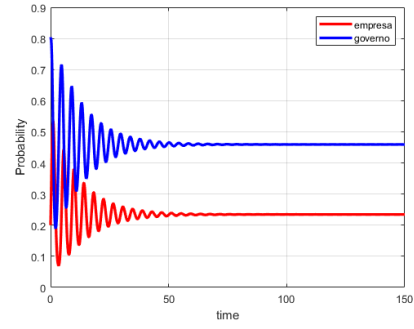
Parâmetros	$0 < p^* < 1$	$p^* = 0$	$p^* < 0$
	$0 < q^* < 1$	$0 < q^* < 1$	$0 < q^* < 1$
$\Delta\zeta$	3	3	3
$\Delta\psi$	5	7	10
f_m	2	2	2
$\bar{f}$	5	5	5

TABELA 2.4: Valores utilizados para cada parâmetro na simulação

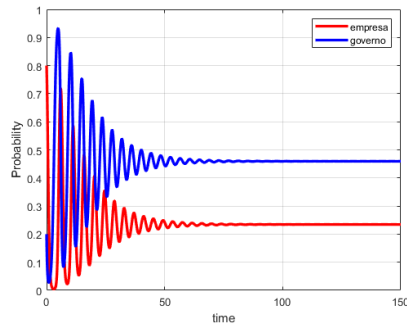
No caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$ temos $f_m + \bar{f} > \Delta\psi$, ou seja, as multas recebidas compensa aos gastos na supervisão. Usando os valores da tabela 2.4 podemos calcular o equilíbrio misto, $p^* \approx 0.234$ e $q^* \approx 0.459$.



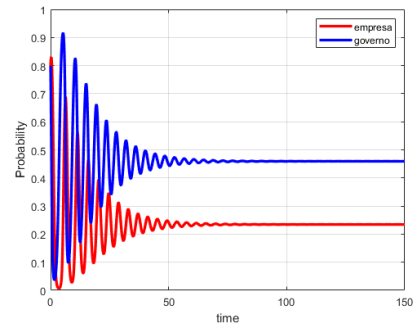
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

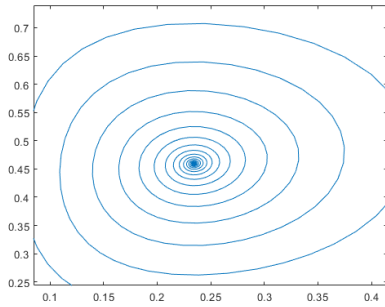


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

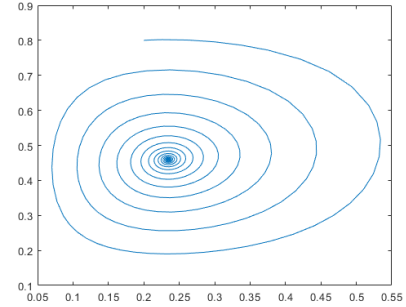


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

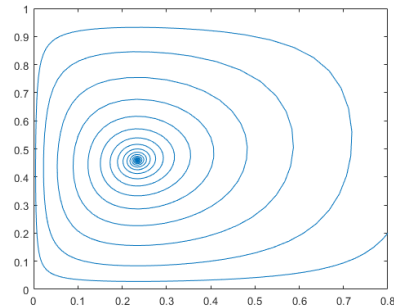
FIGURA 2.31: Simulação do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$



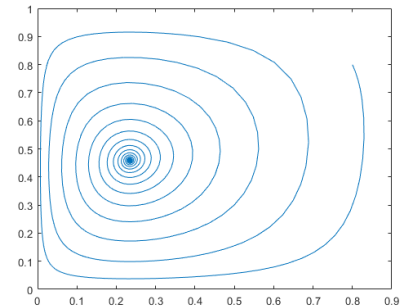
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$



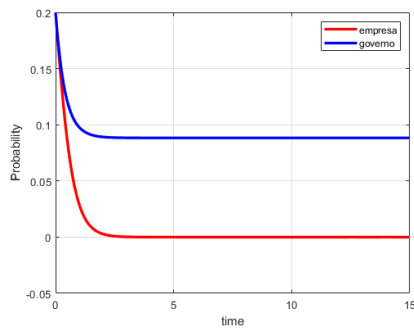
(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$



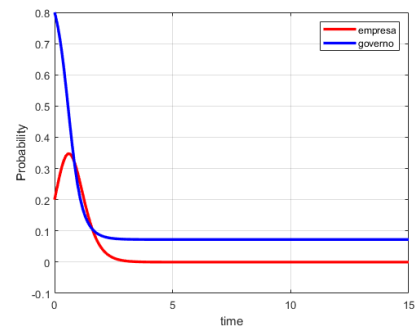
(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.32: Curvas de fase do caso $0 < p^* < 1$ e $0 < q^* < 1$

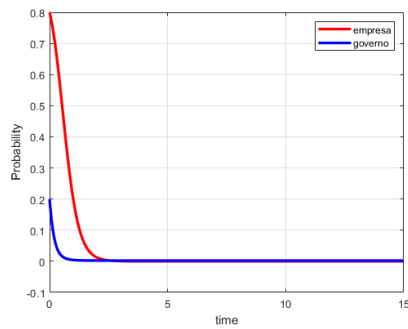
Quando $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$, podemos ter uma infinidade de equilíbrios todos com $p = 0$ como pode ser visto na simulação, a jogada de empresa desvia sempre para 0 quando ambos jogadores se partem num ponto dentro da fronteira, a jogada do governo varia dependendo onde o jogo começa.



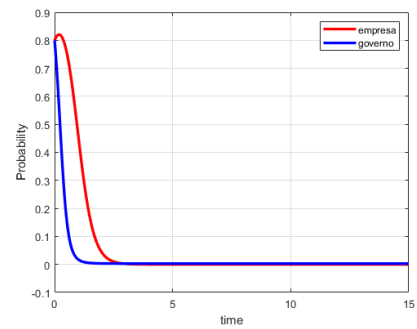
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

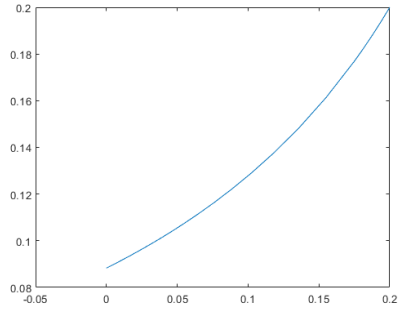


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

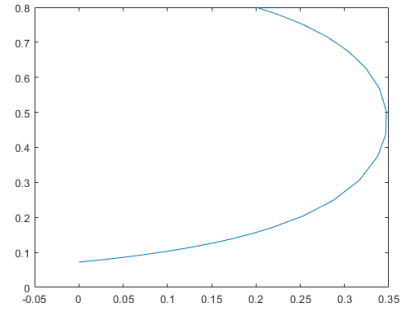


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

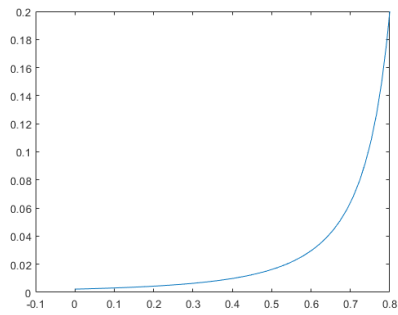
FIGURA 2.33: Simulação do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$



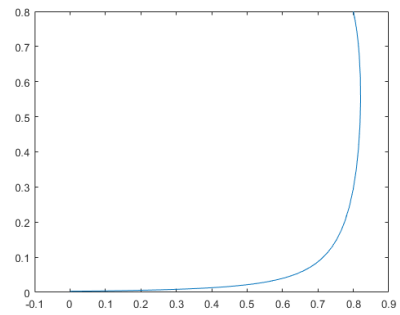
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$



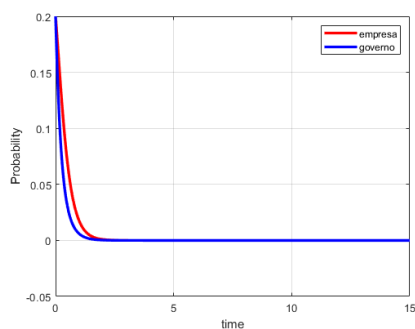
(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$



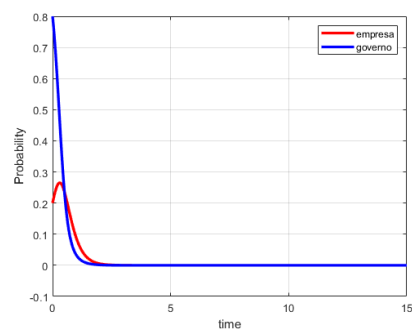
(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.34: Curvas de fase do caso $p^* = 0$ e $0 < q^* < 1$

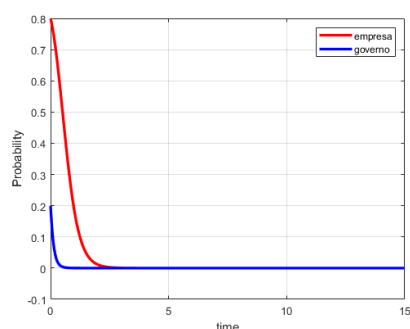
Quando $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$, o esperado é que todos os pontos interiores da fronteira irão convergir para $(0, 0)$.



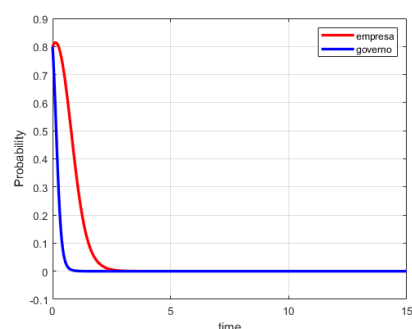
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$

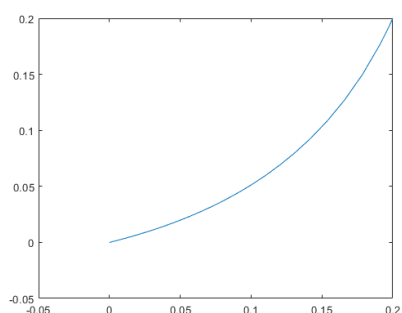


(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$

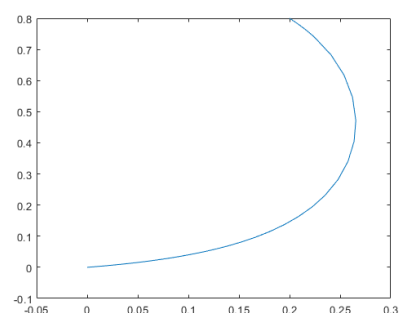


(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

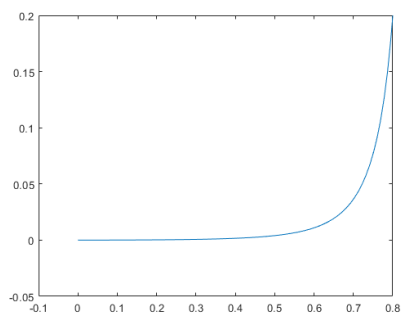
FIGURA 2.35: Simulação do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$



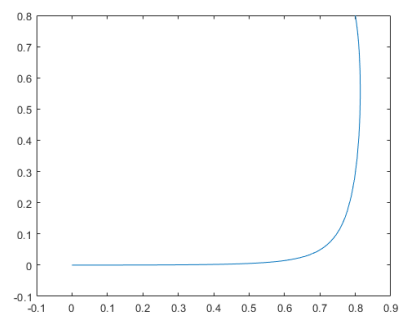
(A) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.2$



(B) $p_0 = 0.2, q_0 = 0.8$



(C) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.2$



(D) $p_0 = 0.8, q_0 = 0.8$

FIGURA 2.36: Curvas de fase do caso $p^* < 0$ e $0 < q^* < 1$

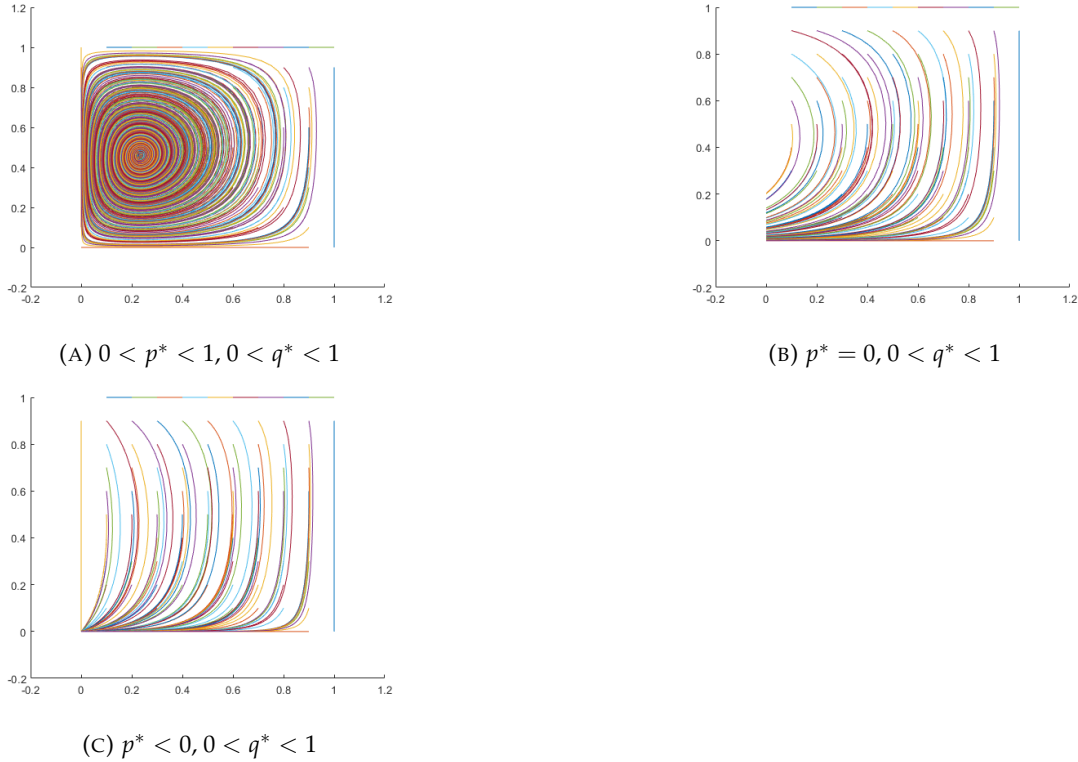


FIGURA 2.37: Curvas de fase para os três casos simulados

A presença da multa $\bar{f}$ permite-nos evitar as simulações 2.13 e 2.16, por outras palavras, caso a estratégia do governo seja supervisionar sempre ativamente a empresa é forçado para fazer a jogada de reduzir a emissão dos poluentes. Portanto podemos dizer que punição mista permite um melhor resultado para protecção do ambiente e da saúde humana.

2.6 Adaptação do jogo para três jogadores

Como continuação do trabalho vamos adaptar o modelo para um jogo entre governo e duas empresa, vamos assumir que as estratégias para essa segunda empresa são idênticas à primeira empresa, p_2 a probabilidade de empresa dois querer reduzir a emissão dos poluentes, $1 - p_2$ quando essa vontade é baixa. O custo para essas estratégias são diferentes, μ_1 quando a vontade na redução é maior e μ_2 caso contrario, quando a sua vontade na redução for baixa e se o governo apresentar uma supervisão ativa, a empresa dois recebe uma multa f . Se ambas as empresas apresentarem a baixa vontade na redução de emissão, o governo recebe duas multas, além disso as empresas são recompensadas por outra quando ambas se comportem bem (p_1, p_2) . Esta recompensa pode ser explicado

por um exemplo, imagina num lago, quando uma empresa quer saber da limpeza do lago ela é beneficiado por outra empresa, a quantidade do benefício depende da vontade que a outra empresa quer manter o lago limpo, quando uma empresa não quer saber da limpeza, ambas deixam de receber esse benefício. Assim o jogo pode ser representado na forma extensiva com duas tabelas do payoff, onde cada tabela descreve os resultados para uma determinada jogada do governo.

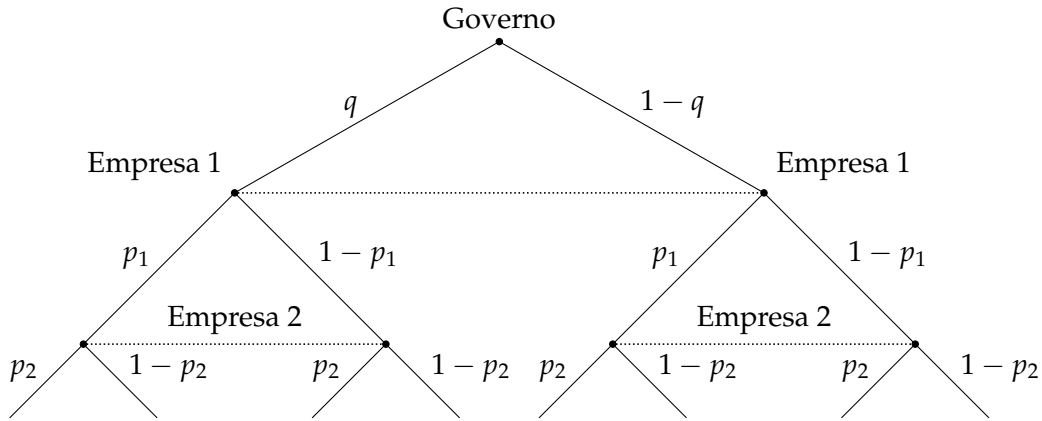


FIGURA 2.38: Representação extensiva do jogo, sem payoffs

		Empresa 2	
		p_2	$1 - p_2$
Empresa 1	p_1	$(-\psi_1, -\xi_1 + e, -\mu_1 + e)$	$(-\psi_1 + f, -\xi_1, -\mu_2 - f)$
	$1 - p_1$	$(-\psi_1 + f, -\xi_2 - f, -\mu_1)$	$(-\psi_1 + 2f, -\xi_2 - f, -\mu_2 - f)$

TABELA 2.5: Tabela do payoff quando a estratégia do governo é q

		Empresa 2	
		p_2	$1 - p_2$
Empresa 1	p_1	$(-\psi_2, -\xi_1 + e, -\mu_1 + e)$	$(-\psi_2, -\xi_1, -\mu_2)$
	$1 - p_1$	$(-\psi_2, -\xi_2, -\mu_1)$	$(-\psi_2, -\xi_2, -\mu_2)$

TABELA 2.6: Tabela do payoff quando a estratégia do governo é $1 - q$

Quando as empresas mostram uma grande vontade na redução de emissão, o payoff esperado é dado por

$$E_{p_1} = q(p_2(-\xi_1 + e) + (1 - p_2)(-\xi_1)) + (1 - q)(p_2(-\xi_1 + e) + (1 - p_2)(-\xi_1)) \quad (2.22)$$

$$E_{p_2} = q(p_1(-\mu_1 + e) + (1 - p_1)(-\mu_1)) + (1 - q)(p_1(-\mu_1 + e) + (1 - p_1)(-\mu_1)) \quad (2.23)$$

Quando essa vontade é baixa, o payoff esperado é

$$E_{1-p_1} = q(p_2(-\xi_2 - f) + (1 - p_2)(-\xi_2 - f)) + (1 - q)(p_2(-\xi_2) + (1 - p_2)(-\xi_2)) \quad (2.24)$$

$$E_{1-p_2} = q(p_1(-\mu_2 - f) + (1 - p_1)(-\mu_2 - f)) + (1 - q)(p_1(-\mu_2) + (1 - p_1)(-\mu_2)) \quad (2.25)$$

Desta forma, as equações replicadoras para as empresas são

$$EF_{p_1} = p_1(1 - p_1)(\xi_2 - \xi_1 + ep_2 + fq) \quad (2.26)$$

$$EF_{p_2} = p_2(1 - p_2)(\mu_2 - \mu_1 + ep_1 + fq) \quad (2.27)$$

Quando o governo mostra uma grande vontade na supervisão, o payoff esperado é dado por

$$G_q = p_1(p_2(-\psi_1) + (1 - p_2)(-\psi_1 + f)) + (1 - p_1)(p_2(-\psi_1 + f) + (1 - p_2)(-\psi_1 + 2f)) \quad (2.28)$$

Quando essa vontade é baixa, o payoff esperado é

$$G_{1-q} = p_1(p_2(-\psi_2) + (1 - p_2)(-\psi_2)) + (1 - p_1)(p_2(-\psi_2) + (1 - p_2)(-\psi_2)) \quad (2.29)$$

E a sua equação replicadora é

$$GF_q = q(1 - q)(\psi_2 - \psi_1 + 2f - fp_1 - fp_2) \quad (2.30)$$

Substituindo $\xi_1 - \xi_2$ por $\Delta\xi$, $\mu_1 - \mu_2$ por $\Delta\mu$ e $\psi_1 - \psi_2$ por $\Delta\psi$ a sistema das equações replicadoras deste jogo é apresentada de seguinte forma

$$\begin{cases} E_{p_1} = p_1(1 - p_1)(-\Delta\xi + ep_2 + fq) \\ E_{p_2} = p_2(1 - p_2)(-\Delta\mu + ep_1 + fq) \\ G_q = q(1 - q)(-\Delta\psi + 2f - fp_1 - fp_2) \end{cases} \quad (2.31)$$

O espaço relevante para esta dinâmica é o cubo $C = [0, 1]^3$, nos vértices é onde os jogadores tomam estratégias puras. No interior do cubo, temos estratégias mistas, calculando $-\Delta\xi + ep_2 + fq = 0$, $-\Delta\mu + ep_1 + fq = 0$ e $-\Delta\psi + 2f - fp_1 - fp_2 = 0$ vamos obter o equilíbrio misto

$$p_1^* = \frac{2ef + f\Delta\mu - f\Delta\xi - e\Delta\psi}{2ef} \quad (2.32)$$

$$p_2^* = \frac{2ef + f\Delta\xi - f\Delta\mu - e\Delta\psi}{2ef} \quad (2.33)$$

$$q^* = \frac{f\Delta\mu + f\Delta\xi - 2ef + e\Delta\psi}{2f^2} \quad (2.34)$$

Chamamos $P_1^* = p_1^*(1 - p_1^*)$, $P_2^* = p_2^*(1 - p_2^*)$ e $Q^* = q^*(1 - q^*)$ a matriz jacobiana no equilíbrio misto é

$$\begin{bmatrix} 0 & P_1^*e & P_1^*f \\ P_2^*e & 0 & P_2^*f \\ -Q^*f & -Q^*f & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Onde os valores próprios são as raízes do polinómio característico:

$$-\lambda^3 + \lambda(-Q^*P_2^*f^2 - Q^*P_1^*f^2 + P_1^*P_2^*e^2) - 2P_1^*P_2^*Q^*f^2e \quad (2.36)$$

A formula de Vieta implica que a soma dos valores próprios seja zero. Se f ou e forem iguais a zero, caso pouco provável, temos uma raiz nula, por [13] as outras duas raízes podem ser conjugado de números imaginários puros ou números reais e simétricos, então o ponto não é hiperbólico e o teorema de Hartman-Grobman não se aplica, portanto este equilíbrio misto não é definido. Além disso, por 2.32 2.33 e 2.34 o equilíbrio misto estará fora do cubo C .

Se f e e diferentes de zero, por [13] o zero não será a raiz do polinómio característico, então temos uma solução real e por isso temos ter outra solução com parte real não nulo de sinal oposto, o teorema de Hartman-Grobman implica que o ponto equilíbrio misto seja ponto de sela.

Assumindo que $\Delta\psi < f$, se $\Delta\xi < f$, $\Delta\xi < e$, $\Delta\mu < f$ e $\Delta\mu < e$, ou seja, a multa compensa os gastos do governo na supervisão ativa também é superior do que os gastos pelas empresas na redução de emissão, o benefício extra é também superior que os gastos pelas empresas na redução de emissão. A estabilidade dos vértices por comportamento da

dinâmica nas arestas do cubo está apresentado na figura 2.39a, as retas vermelhas são as dinâmicas de empresa um, as retas azuis são as dinâmicas de empresa dois e as retas verdes são as dinâmicas de governo. Se $\Delta\zeta < f$, $\Delta\zeta > e$, $\Delta\mu < f$ e $\Delta\mu > e$ os gastos na redução de emissão é inferior à multa mas superior ao benefício extra, o comportamento da dinâmica nas arestas do cubo está apresentado na figura 2.39b. Se $\Delta\zeta > f + e$ e $\Delta\mu > f + e$, os gastos na redução de emissão é superior ao benefício extra e à multa, também à soma de benefício extra com a multa, o comportamento da dinâmica nas arestas do cubo está apresentado na figura 2.39c. Se $\Delta\zeta > f$, $\Delta\zeta < e$, $\Delta\mu > f$ e $\Delta\mu < e$ os gastos na redução de emissão é inferior que o benefício extra mas superior que a multa, o comportamento da dinâmica nas arestas do cubo está apresentado na figura 2.39d.

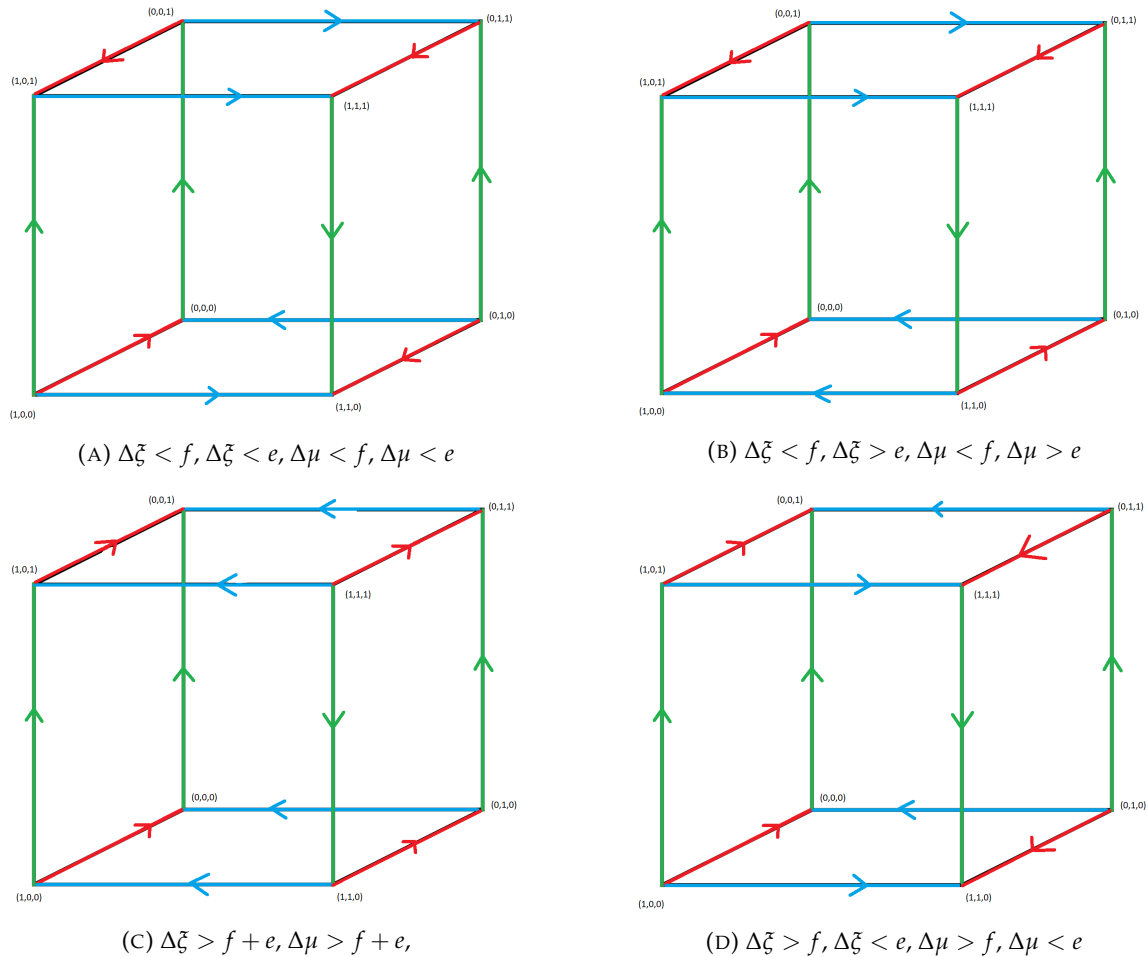


FIGURA 2.39: Dinâmica nas arestas do cubo quando $\Delta\psi < f$, vermelho para empresa 1, azul para empresa 2 e verde para governo

Agora vamos fazer algumas simulações dos casos descritos na 2.39, usando os valores da tabela 2.7 para tirarmos uma ideia de equilíbrio misto e o comportamento nas arestas.

Parâmetros	$\Delta\zeta < f$	$\Delta\zeta < f$	$\Delta\zeta > f$	
	$\Delta\zeta < e$	$\Delta\zeta > e$	$\Delta\zeta > f + e$	$\Delta\zeta < e$
	$\Delta\mu < f$	$\Delta\mu < f$	$\Delta\mu > f + e$	$\Delta\mu > f$
	$\Delta\mu < e$	$\Delta\mu > e$	$\Delta\mu < e$	
$\Delta\zeta$	4	4	12	7
$\Delta\mu$	3	3	11	6
$\Delta\psi$	2	2	2	2
f	5	5	5	5
e	5	2	5	8

TABELA 2.7: Valores utilizados para cada parâmetro na simulação

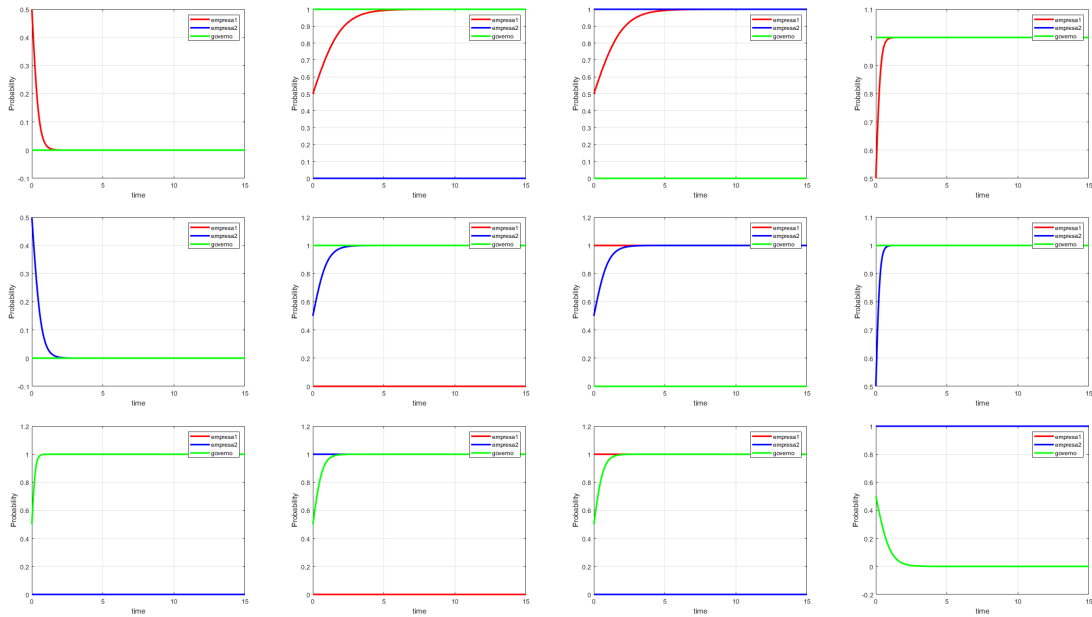
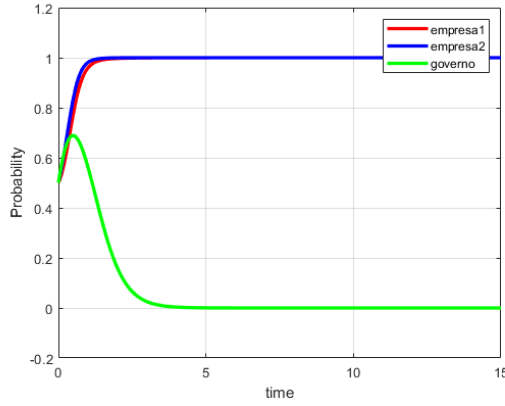


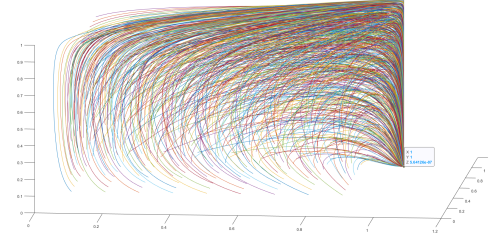
FIGURA 2.40: Simulações para $\Delta\zeta < f$, $\Delta\zeta < e$, $\Delta\mu < f$, $\Delta\mu < e$ nas arestas do cubo

O comportamento dos jogadores nas arestas do cubo na simulação é igual ao estudo feito para a dinâmica nas arestas. Na 2.39a temos três arestas com sentidos apontados para $(1, 1, 0)$, vamos ver o que acontece na simulação para estratégias mistas.

Para uma estratégia mista inicial de $p_1 = p_2 = q = 0.5$ (2.41a) temos empresas a desviarem para o bom comportamento de reduzir a emissão e governo deixar a supervisão ativa. Podemos ver o mesmo comportamento na simulação das curvas de fase (2.41b) onde todas as curvas simuladas convergem para $(1, 1, 0)$.



(A) $p_1 = p_2 = q = 0.5$



(B) Simulação das curvas de fase

FIGURA 2.41: Simulação para estratégias mistas quando $\Delta\xi < f, \Delta\xi < e, \Delta\mu < f, \Delta\mu < e$

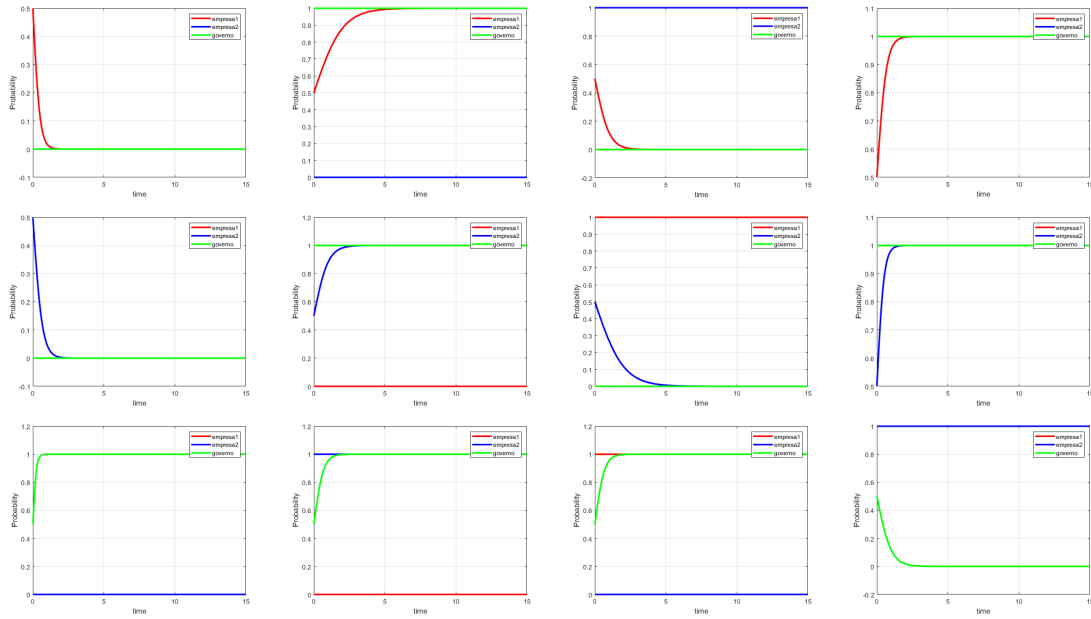
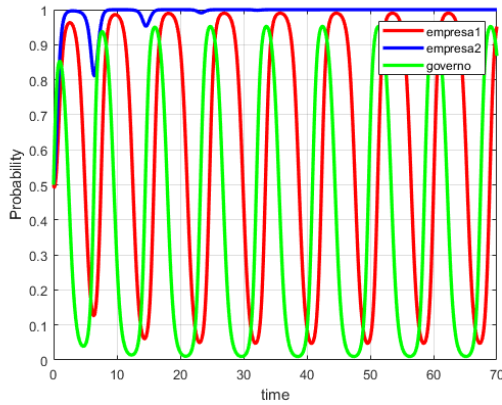


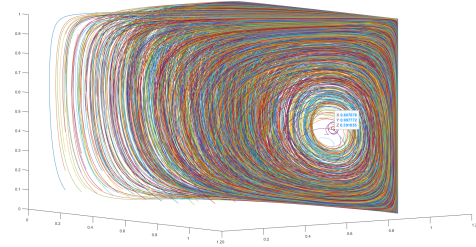
FIGURA 2.42: Simulações para $\Delta\xi < f, \Delta\xi > e, \Delta\mu < f, \Delta\mu > e$ nas arestas do cubo

Na 2.39b não temos três arestas com sentidos apontados para o mesmo vértice, vamos ver o que acontece na simulação para estratégias mistas.

Para uma estratégia mista inicial de $p_1 = p_2 = q = 0.5$ (2.43a) temos empresa dois a desviar para o bom comportamento, as estratégias de empresa um e de governo têm comportamento oscilatório. Podemos ver o mesmo comportamento na simulação das curvas de fase (2.43b) onde temos ciclos na face $p_2 = 1$.



(A) $p_1 = p_2 = q = 0.5$



(B) Simulação das curvas de fase

FIGURA 2.43: Simulação para estratégias mistas quando $\Delta\zeta < f$, $\Delta\zeta > e$, $\Delta\mu < f$, $\Delta\mu > e$

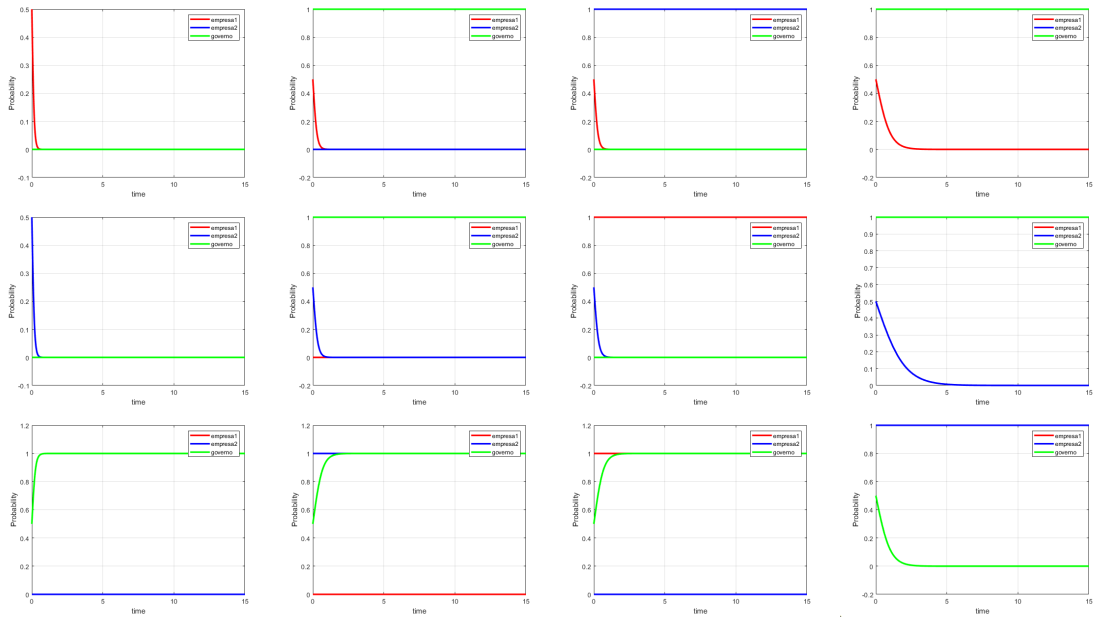
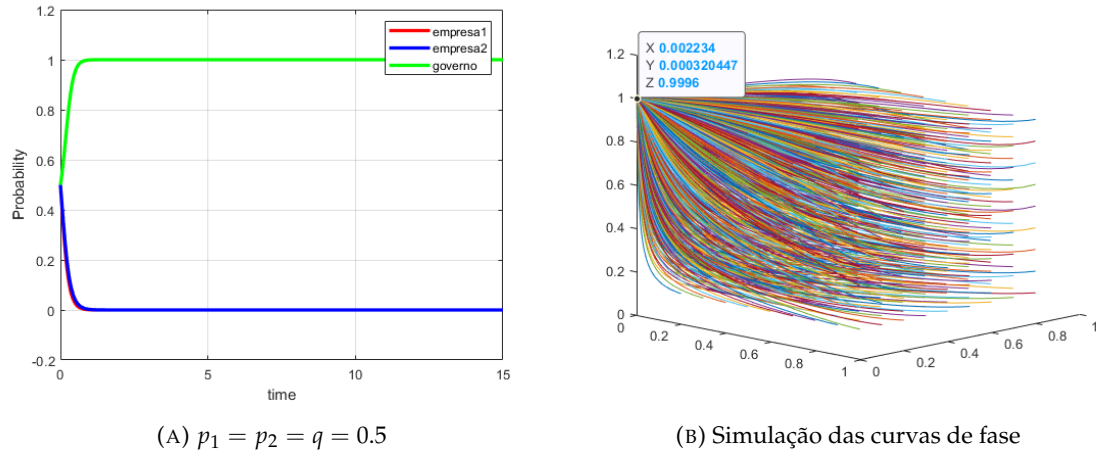
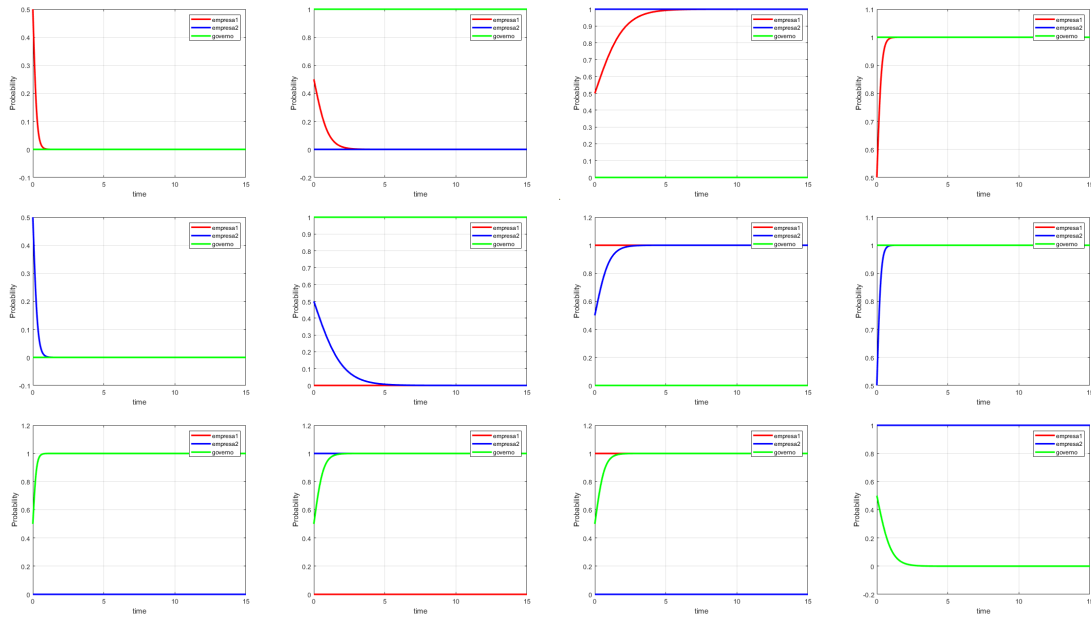


FIGURA 2.44: Simulações para $\Delta\zeta > f + e$, $\Delta\mu > f + e$ nas arestas do cubo

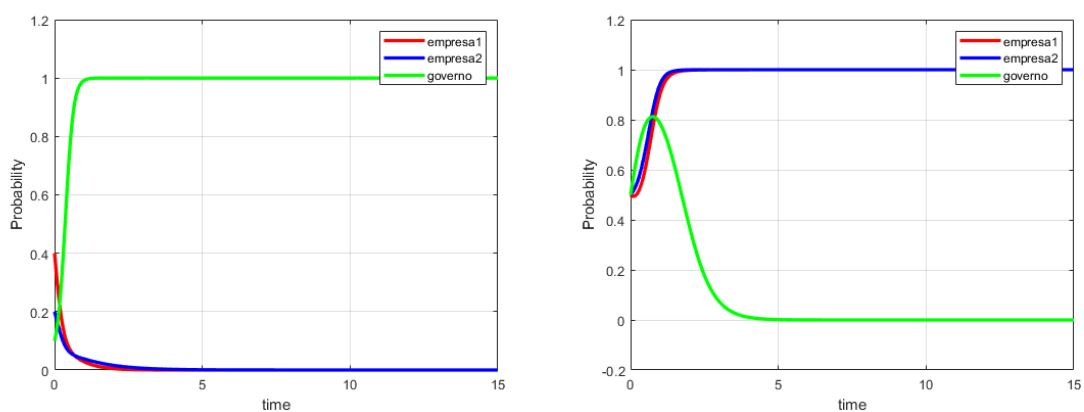
Na 2.39c temos três arestas com sentidos apontados para $(0,0,1)$, vamos ver o que acontece na simulação para estratégias mistas.

Para uma estratégia mista inicial de $p_1 = p_2 = q = 0.5$ (2.45a) temos empresas a desviarem para o mal comportamento e governo permanece a supervisão ativa. Podemos ver o mesmo comportamento na simulação das curvas de fase (2.45b) onde todas as curvas simuladas convergem para $(0,0,1)$.


 FIGURA 2.45: Simulação para estratégias mistas quando $\Delta\zeta > f + e$, $\Delta\mu > f + e$

 FIGURA 2.46: Simulações para $\Delta\zeta > f$, $\Delta\zeta < e$, $\Delta\mu > f$, $\Delta\mu < e$ nas arestas do cubo

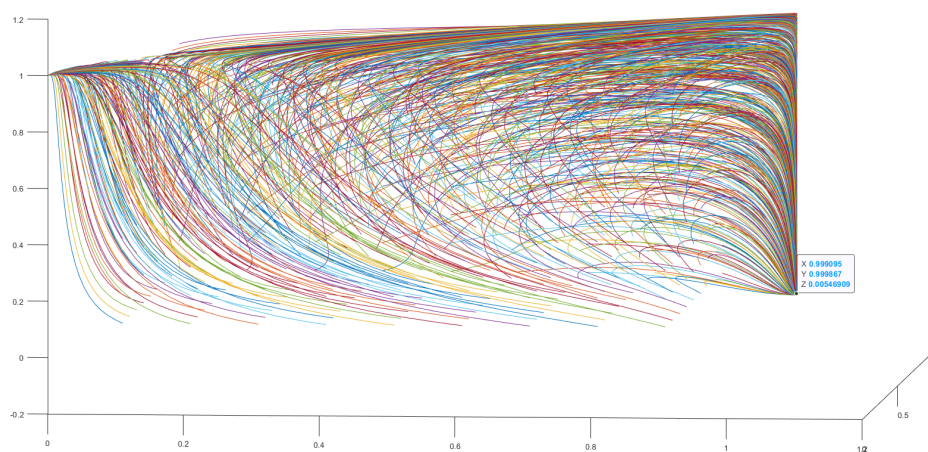
Na 2.39d temos três arestas com sentidos apontados para $(0,0,1)$ e $(1,1,0)$, vamos ver o que acontece na simulação para estratégias mistas.

Para uma estratégia mista inicial de $p_1 = p_2 = q = 0.5$ (2.47b) temos empresas a desviarem para o bom comportamento e governo deixa a supervisão ativa. Quando $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.2$, $q = 0.1$ temos empresas a desviarem para o mal comportamento e governo permanece a supervisão ativa. Podemos ver o mesmo comportamento na simulação das curvas de fase (2.47c) onde temos uma grande parte das curvas simuladas a convergirem para $(1,1,0)$ e a outra parte para $(0,0,1)$.



(A) $p_1 = 0.4, p_2 = 0.2, q = 0.1$

(B) $p_1 = p_2 = q = 0.5$



(C) Simulação das curvas de fase

FIGURA 2.47: Simulação para estratégias mistas quando $\Delta\zeta > f, \Delta\zeta < e, \Delta\mu > f, \Delta\mu < e$

Capítulo 3

Conclusão e trabalhos futuros

Com o objectivo de encontrar a forma mais adequada de punição, estudamos três modelos. Punição estática, dinâmica e mista para o jogo entre empresa e governo. A partir desses três modelos foi possível concluir que em alguns cenários caso a intenção seja o bom comportamento de empresa, ou seja, diminuir a quantidade de emissão dos poluentes, a forma mais adequada para punir é a punição mista. A adição da multa fixa $\bar{f}$ à punição dinâmica permitiu o aumento da probabilidade do bom comportamento de empresa. Com o objetivo de estudar como as empresas se podem influenciar neste jogo, adaptamos o modelo para um jogo entre duas empresas e governo, adicionado um benefício extra para as empresas caso ambas se comportem bem. Além disso, a quantidade desse benefício depende do bom comportamento de outra empresa criando assim uma interação entre empresas. Nos casos simulados para este jogo de três agentes, descrevemos os comportamentos dos jogadores nas arestas do cubo. Uma vez que não fizemos a simulação para todos casos possíveis, um dos trabalhos futuros seria fazer as simulações para mais casos, e adaptar a punição dinâmica e a punição mista para este jogo de três agentes. Além disso podemos mudar o terceiro agente ou acrescentar um outro agente ao jogo, que seria o cidadão que vive na zona.

Bibliografia

- [1] C. Wang and F. Shi, “An evolutionary game model for industrial pollution management under two punishment mechanisms,” *International Journal of Environmental Research and Public Health*, vol. 16, no. 15, 2019. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1660-4601/16/15/2775> [Cited on pages v, vii, 8, 9, and 13.]
- [2] R. Gibbons, *A primer in game theory*. Harvester Wheatsheaf, 1992. [Cited on pages 1, 2, and 3.]
- [3] P. Hammerstein and R. Selten, “Game theory and evolutionary biology,” in *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, 1st ed., R. Aumann and S. Hart, Eds. Elsevier, 1994, vol. 2, ch. 28, pp. 929–993. [Online]. Available: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:gamchp:2-28> [Cited on pages 3 and 4.]
- [4] J. Smith and G. Price, “The logic of animal conflict,” *Nature*, vol. 246, pp. 15–18, 1973. [Cited on pages 3 and 4.]
- [5] R. A. Fisher, *The genetical theory of natural selection*. OxfordClarendon Press, 1930, <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/27468>. [Online]. Available: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/69976> [Cited on page 3.]
- [6] W. D. Hamilton, “Extraordinary Sex Ratios,” *Science*, vol. 156, no. 3774, pp. 477–488, Apr. 1967. [Cited on page 4.]
- [7] R. Trivers, “The evolution of reciprocal altruism,” *Quarterly Review of Biology*, vol. 46, pp. 35–57., 03 1971. [Cited on page 4.]
- [8] J. M. Smith, *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 1982. [Cited on page 4.]
- [9] J. W. Weibull, “An introduction to evolutionary game theory,” IUI Working Paper, Tech. Rep., 1992. [Cited on page 4.]

- [10] Z. Luo, X. Chen, and X. Wang, "The role of co-opetition in low carbon manufacturing," *European Journal of Operational Research*, vol. 253, no. 2, pp. 392–403, 2016. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221716300674> [Cited on page 7.]
- [11] R. Fan, L. Dong, W. Yang, and J. Sun, "Study on the optimal supervision strategy of government low-carbon subsidy and the corresponding efficiency and stability in the small-world network context," *Journal of Cleaner Production*, vol. 168, pp. 536–550, 2017. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959652617320280> [Cited on page 7.]
- [12] W. Chen and Z.-H. Hu, "Using evolutionary game theory to study governments and manufacturers' behavioral strategies under various carbon taxes and subsidies," *Journal of Cleaner Production*, vol. 201, pp. 123–141, 2018. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959652618323382> [Cited on page 7.]
- [13] E. Accinelli, F. Martins, A. A. Pinto, A. Afsar, and B. M. P. M. Oliveira, "The power of voting and corruption cycles," *The Journal of Mathematical Sociology*, vol. 0, no. 0, pp. 1–24, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/0022250X.2020.1818077> [Cited on page 39.]