

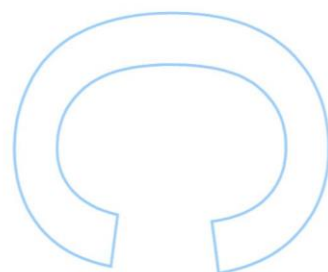
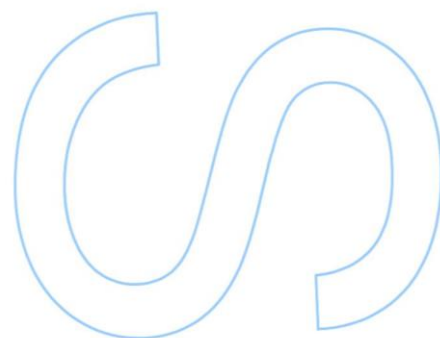
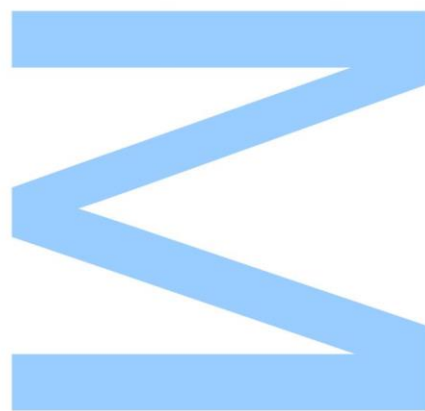
Recurso ao lúdico no ensino- aprendizagem das equações no 7º ano de escolaridade

Sara Isabel Araújo

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino
Básico e no Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
2021

Orientadora

Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira, Professora Auxiliar,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

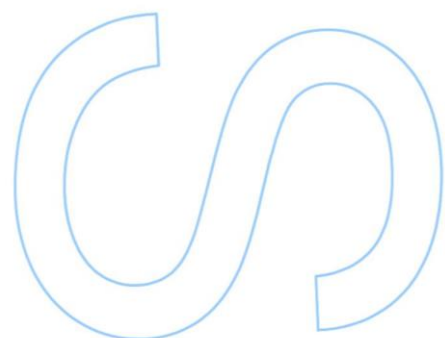
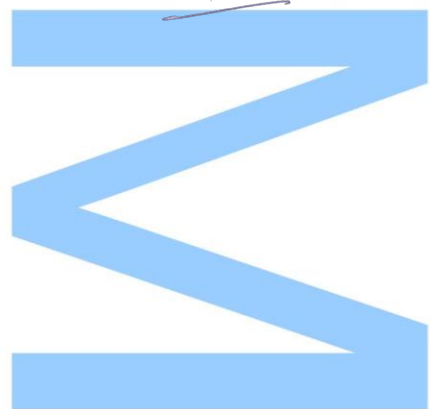




Todas as correções determinadas
pelo júri, e só essas, foram efetuadas.
O Presidente do Júri,

Porto, 27 / 07 / 2021

P. Pereira



AGRADECIMENTOS

“Aqueles que passam por nós não vão sós e não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós.”

Antoine de Saint-Exupéry

À professora Rosa Antónia, pela orientação e apoio em todos os momentos. Agradeço todo o percurso de aprendizagem que me proporcionou. Agradeço por todos os desafios lançados, pela ajuda e pelos ensinamentos transmitidos. Agradeço muito toda a disponibilidade, paciência, conselhos e, sobretudo, orientação ao longo deste estudo. Obrigada.

À professora Cristina, por toda a disponibilidade, pela partilha da sua experiência e por todos os momentos em que tive a oportunidade de aprender com ela. Acompanhou-me desde o início e contribuiu para o meu desenvolvimento e crescimento como futura professora. Por ser uma excelente professora e tão profissional naquilo que faz, permitiu-me olhar para ela como um bom exemplo a ser seguido. Obrigada.

Às minhas colegas de estágio, Daniela e Rita agradeço por todo o apoio, por todo o companheirismo e por toda a amizade. Foram os meus grandes pilares diários e sem dúvida que a experiência partilhada com elas foi muito mais enriquecedora. Agradeço por serem as minhas maiores críticas e as minhas maiores fãs. Sem vocês esta caminhada tinha sido menos feliz um bocadinho. Obrigada.

Aos alunos, que são um bocadinho meus. Por participarem neste trabalho, mas mais do que isso, por permitirem o meu crescimento, por me ouvirem nas aulas, por participarem e por me acompanharem neste ano tão importante do meu percurso. Obrigada.

Aos meus pais, Fernando e Fátima, por permitirem que tudo isto fosse possível. Por toda a educação que me transmitiram e por serem sempre os primeiros na fila para me aplaudir, genuinamente orgulhosos. Um muito obrigado por todo o amor, paciência e apoio incansável. Por acreditarem em mim e torcerem por mim, todos os dias. Obrigada.

À minha irmã, Bruna, por ser a minha melhor amiga e a minha companheira para toda a vida. Por me ajudar em tudo, por me apoiar em tudo. Por ter sido a minha primeira aluna, e a mais exigente. Obrigada.

Ao Vítor, por me apoiar incondicionalmente, e por estar sempre lá para mim. Nos dias em que estava cansada e ele me dava boas energias. Nos dias em que estava feliz e com ele partilhava a minha felicidade. Por ser o meu companheiro para a vida toda e ouvir todas as peripécias dos meus alunos. Obrigada.

RESUMO

A passagem da Aritmética para a Álgebra apresenta sempre desafios para os alunos. De repente, ideias e símbolos familiares têm um novo significado. Assim, é particularmente desafiante o desenvolvimento curricular com vista à compreensão relacional dos vários tópicos da Álgebra, nomeadamente as equações. O desafio aumenta quando as condições de ensino remoto de emergência são impostas devido às restrições da pandemia COVID-19. A escolha de tarefas apropriadas, com contextos atraentes e recursos adequados, torna-se ainda mais premente para um envolvimento ativo dos alunos na sua aprendizagem. Neste sentido, tarefas matemáticas com elementos lúdicos podem contribuir para motivar intrinsecamente a aprendizagem da matemática.

No âmbito da minha Prática de Ensino Supervisionada, desenvolvi um estudo de investigação de natureza qualitativa, baseado numa intervenção pedagógica assente na utilização de contextos lúdicos (jogos, humor, banda desenhada, etc.) no processo de ensino-aprendizagem das equações, no 7º ano de escolaridade. O estudo foi desenvolvido em duas turmas e foi guiado pelas seguintes questões de investigação: Ao longo da intervenção pedagógica, a) Como é que os alunos resolvem as diferentes tarefas? b) Quais as maiores dificuldades que os alunos manifestam na resolução das tarefas e como as ultrapassam? c) Como reagem os alunos aos elementos lúdicos das tarefas realizadas? Foi também objetivo compreender de que forma a intervenção pedagógica pode contribuir para uma aprendizagem significativa das equações.

Os dados foram recolhidos através de várias técnicas e instrumentos, alguns aproveitando as valências do Teams: gravações de momentos de discussão nas aulas online e de duas entrevistas com tarefas a um conjunto selecionado de alunos; produções escritas dos alunos publicadas nos seus blocos de notas; notas de campo das aulas e as respostas dos alunos a uma questão-aula já em ensino presencial.

Os resultados sugerem que a abordagem adotada na intervenção de ensino (desde as tarefas, à organização privilegiada dos alunos em pequenos grupos, às discussões coletivas) foi bastante motivadora para os alunos e, de facto, promoveu uma aprendizagem dos principais conceitos da unidade didática das equações com significado. Os alunos desenvolveram habilidades na resolução de equações (recorrendo a estratégias formais e informais) e, progressivamente, desenvolveram uma compreensão relacional da noção de equação e da noção de solução de uma equação. Os contextos lúdicos favoreceram o envolvimento dos alunos nas tarefas, embora de formas distintas, tendo-se destacado os jogos e as applets usadas na intervenção pedagógica como os recursos mais promissores em termos da promoção de

aprendizagens de conceitos pelo maior envolvimento que incentivaram. A análise dos dados sugere também a necessidade de algum refinamento das tarefas propostas; não obstante, os alunos reagiram de forma muito positiva a toda a experiência e à generalidade dos contextos lúdicos das tarefas.

Palavras-chave: contextos lúdicos, equações, intervenção pedagógica, compreensão relacional, ensino à distância

ABSTRACT

Moving from Arithmetic to Algebra always presents several challenges for students. Suddenly, familiar ideas and symbols take on new meanings. Thus, developing the curriculum aiming at promoting the relational understanding of the various topics in Algebra, namely equations, is particularly challenging to teachers. The challenge increases when emergency remote learning conditions are imposed, due to the restrictions of the COVID-19 pandemic. Choosing appropriate tasks, with attractive contexts and adequate resources, becomes even more relevant for students' active involvement in their own learning. In this sense, mathematical tasks involving playful elements may intrinsically motivate students' learning of mathematics.

As part of my Supervised Teaching Practice, I developed a qualitative research study, grounded on a pedagogical intervention based on the use of playful contexts (games, humor, comics, etc.) in the teaching and learning process of equations, at 7th grade. The study was conducted in two classes and was guided by the following research questions: Throughout the pedagogical intervention, a) How do students solve the different tasks? b) What are students' biggest difficulties in solving the tasks and how do they overcome them? and c) How do students react to the playful elements of the tasks? An additional goal of this study was to understand how the pedagogical intervention may contribute to meaningful learning of the equations.

Data were collected through several techniques and instruments, some of which taking advantage of the Teams platform affordances: audio-recordings of moments of discussion in online classes and of two task-based interviews to selected students; students' written productions published in their Teams notebooks; field notes from the online lessons, and students' answers to a quiz when already in face-to-face teaching mode.

Results suggest that the approach adopted in the teaching intervention (from the tasks, to the privileged organization of students in small groups, to collective discussions) was quite motivating for students and, in fact, it promoted meaningful learning of the main concepts of the equations unit. Students developed skills in solving equations (using formal and informal strategies) and progressively developed a relational understanding of the notions of equation and solution to an equation. The playful contexts favored students' involvement in the tasks, although in different ways, with the games and applets used in the pedagogical intervention standing out as the most promising resources in terms of promoting concepts' learning, due to the significant involvement they encouraged. The analysis suggests the need for some refinement of

the tasks; nonetheless, the students reacted very positively to the whole experience and to the generality of the playful contexts of the tasks.

Passwords: playful contexts, linear equations, teaching experiment, algebraic understanding, distance learning

Índice de conteúdos

1. Introdução.....	1
2. Enquadramento Teórico	4
2.1. A Álgebra e o Pensamento Algébrico	4
2.1.1. O ensino das equações	6
2.2. Tarefas no ensino da Matemática	10
2.2.1. Compreensão relacional vs Compreensão instrumental	13
2.2.2. O contexto lúdico nas tarefas de aprendizagem	13
3. Intervenção Pedagógica	18
3.1. Contexto Escolar	18
3.1.1. Caracterização da Escola	18
3.1.2. Caracterização das turmas	18
3.2. Planificação	20
3.3. Descrição das Aulas.....	22
4. Métodos e procedimentos de recolha de dados	35
4.1. Opções metodológicas	35
4.2. Participantes.....	37
4.3. Métodos de Recolha de Dados.....	39
4.3.1. Observação participante e notas de campo	39
4.3.2. Gravação áudio das discussões em grupo.....	40
4.3.3. Recolha das produções escritas dos alunos	40
4.3.4. Entrevistas com tarefas.....	41
4.4. Questões de natureza ética	42
4.5. Processo de análise de dados.....	43
5. Análise dos dados.....	44
5.1. <i>Tarefa dos Doces</i>	44
5.2. <i>Comboio das Equações</i>	49
5.3. <i>Balança de Equações no GeoGebra</i>	55

5.3.1. O depois da applet do GeoGebra: como resolviam os alunos as equações?	59
5.4. Os <i>Problemas da Mafalda</i>	63
6. Conclusões e Implicações	71
6.1. Síntese do estudo	71
6.2. Principais conclusões do estudo	72
6.3. Reflexão final	80
7. Referências	85
8. Anexos	89

Índice de Figuras

Figura 1 - Classificação dos alunos no 1º Período.	20
Figura 2 - Registo no Bloco de Notas da discussão acerca da adição de termos semelhantes	32
Figura 3 - Enunciado da Parte II da Tarefa dos Doces	45
Figura 4 - Resposta da Rebeca à parte II da Tarefa dos Doces	45
Figura 5 – Respostas do Diogo parte II da Tarefa dos Doces	45
Figura 6 - Resolução da alínea 2.1. da Tarefa dos Doces (Mário).....	46
Figura 7 - Captura de ecrã de nível do jogo Algebraic Reasoning partilhado durante a 1ª entrevista.....	46
Figura 8 - Resolução da Rafaela na Tarefa Comboio das Equações	49
Figura 9 – Resolução da Rafaela na ficha formativa	50
Figura 10 - Resolução do Gil na Tarefa Comboio das Equações	51
Figura 11 – Resolução do Gil na ficha formativa	51
Figura 12 - Registo no caderno de um aluno da turma1	53
Figura 13 - Exemplo de um nível da applet do GeoGebra	56
Figura 14 - Justificação da Rafaela na tarefa Balança de equações no GeoGebra	56
Figura 15 - Exercício 2 da Tarefa Balança de Equações no GeoGebra	57
Figura 16 - Resolução de um nível da applet do GeoGebra do grupo da Rafaela	57
Figura 17 – Comentário à resolução de um nível da applet do GeoGebra do grupo da Rafaela	58
Figura 18 - Resolução de uma equação da ficha formativa pelo Gil	59
Figura 19 - Resolução de uma equação através da técnica das balanças (Rui).....	60
Figura 20 - Resolução de equações generalizando a técnica da balança (Mário)	61
Figura 21 - Problema 1 da Tarefa Problemas da Mafalda	63
Figura 22 - Resolução da Rafaela ao problema "Comer a sopa?"	63
Figura 23 - Resolução do Rui: equacionou o problema (esquerda) e resolveu a equação (direita)	64
Figura 24 - Resolução do Gil do problema "Comer a sopa?"	64
Figura 25 - Problema “A nota da Mafalda a Matemática”	65
Figura 26 - Resposta da Rafaela ao problema “A nota da Mafalda a Matemática”	65
Figura 27 - Resolução do Gil no problema "A nota da Mafalda a Matemática"	66
Figura 28 - Problema "Eleições do delegado de turma"	66
Figura 29 - Resolução do Rui: método da tentativa erro (cima) e método das balanças (baixo).....	67
Figura 30 - Resolução do Gil do problema "Eleições do delegado de turma"	68

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico.....	5
---	---

Índice de Quadros

Quadro 1 – Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do primeiro grau.....	9
Quadro 2 – Vantagens e desvantagens na utilização de jogos didáticos no ensino da matemática.....	17
Quadro 3 – Sequência de tarefas para a unidade de ensino das Equações.....	21
Quadro 4 – Características dos alunos selecionados.....	38
Quadro 5 – Calendarização e objetivos das entrevistas.....	42

Índice de Anexos

Anexo I – <i>Tarefa dos Doces</i>	91
Anexo II – <i>Tarefa Equilíbrio nas Balanças</i>	92
Anexo III – <i>Tarefa Balança Interativa</i>	93
Anexo IV – <i>Tarefa Os Romanos e o X</i>	96
Anexo V – <i>Tarefa Sopa de Letras... ou incógnitas?</i>	97
Anexo VI – <i>Tarefa Comboio das Equações</i>	99
Anexo VII – <i>Tarefa O valor da amizade</i>	101
Anexo VIII – <i>Tarefa Balança de Equações no Geogebra</i>	102
Anexo IX – <i>Tarefa Problemas da Mafalda</i>	103
Anexo X – <i>A astúcia do Grande Mágico no País das Equações</i>	105
Anexo XI – <i>Ficha Formativa sobre Equações</i>	106
Anexo XII – <i>Tarefa Sequências Reutilizáveis</i>	108
Anexo XIII – <i>Tarefa W</i>	109
Anexo XIV – <i>Guião da 1ª Entrevista</i>	110
Anexo XV – <i>Guião da 2ª Entrevista</i>	111
Anexo XVI – <i>Documento partilhado no Bloco de Notas dos alunos na 1ª Entrevista</i>	112
Anexo XVII – <i>Pedido de autorização aos encarregados de educação</i>	114

1. Introdução

Na nossa vida deparamo-nos com perguntas difíceis. Porque é que gostas de matemática? Porque é que queres ser professora? Há coisas que só nós entendemos o porquê de as estarmos a sentir. Porque é que queres trabalhar álgebra com os alunos? Pode ser uma pergunta a juntar-se às primeiras que enumerei. E, sem querer, acabei de revelar o tema sobre o qual me quero debruçar: a álgebra, mais concretamente, as equações no 7º ano de escolaridade. O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007) reforça que “A competência algébrica revela-se importante na vida adulta, quer no trabalho, quer como preparação para o ensino superior. Todos os alunos deveriam aprender álgebra” (p. 39).

O que vou relatar a seguir parece até um pouco poético, mas a verdade é que aconteceu. Numa das minhas viagens da escola (onde estava a realizar a minha Prática de Ensino Supervisionada) para casa, estava a pensar em possíveis temas para abordar no meu Relatório de Estágio, e as equações vieram bater à porta das minhas ideias. Bateram de uma forma suave, mas de tal maneira que não consegui deixá-las sair desta caixa das ideias. Depois pensei de uma forma mais realista, porque precisava de entender se fazia sentido trabalhar este tema no meu percurso.

Muitas das piadas matemáticas com que nos cruzamos vão ao encontro do uso das letras em matemática, em contraste com os números. Quem nunca ouviu expressões como «eu gostava de matemática, até as letras se começarem a misturar com os números»? Logo neste tipo de comentários temos uma ideia pré-definida de que a álgebra é algo complicado. Kieran (2007) reforça a ideia de que a álgebra é mais do que um conjunto de procedimentos envolvendo símbolos em forma de letra. No entanto, devido à sua linguagem tão própria, é um tema em que os alunos, muitas vezes, revelam dificuldades e, conseqüentemente, tendem a não demonstrar também muito entusiasmo acerca do mesmo.

Mas, por outro lado, o que é que entusiasma muitas crianças? Na experiência de sala de aula que tivemos oportunidade de viver logo no início deste ano, ouvimos muitas vezes os alunos falarem entre si sobre jogos. Por exemplo, numa das aulas em que estava a conversar com eles acerca do que poderia significar a palavra “domínio” (de funções), um dos alunos respondeu-me “isso aparece no *fortnite*¹”. Como diz Martin Gardner, citado por Mota (2009), “sempre acreditei que o melhor caminho para tornar a Matemática aliciante para os alunos e as pessoas em geral, é mostrá-la como se fosse um jogo...” (p. 47). Tal como referido nas *Aprendizagens Essenciais* do 7º ano de

¹ Jogo eletrónico de multijogadores.

escolaridade (ME, 2018), os estudantes devem ter a oportunidade de realizar tarefas de natureza diversificada, como projetos, explorações, investigações, jogos. Para além disso, Ponte (2005) refere como o jogo pode ter importantes potencialidades para a aprendizagem, sobretudo se for utilizado de forma a aproveitar os aspetos matemáticos que este pode envolver.

Então, juntamente com a ideia das equações havia uma enorme vontade dentro de mim de inserir jogos e outro tipo de atividades lúdicas na sala de aula. Ponte, Branco e Matos (2009) referem:

Existem também programas específicos, para trabalhar este ou aquele tópico ou conceito, de que os exemplos mais conhecidos são os applets, muitos dos quais disponíveis na Internet. Estes programas, que por vezes assumem a forma de jogos, são muitas vezes muito úteis para promover a aprendizagem de aspetos específicos da Álgebra.” (p. 16-17)

Matemática não é apenas decorar e aplicar algoritmos, como muitos poderão pensar. Aliás, afasta-se destes processos. Matemática é raciocínio, é discussão, e pode ser ação. Juntando o jogo, o humor, tarefas com outro tipo de elementos lúdicos, as equações, os alunos, a ajuda de uma orientadora e um relatório de estágio para fazer, surgiu a ideia de investigar algo com um título bonito, como “O recurso ao lúdico no ensino-aprendizagem das equações no 7º ano de escolaridade”. A intenção era que as equações deixassem de ser chatas, para quem as poderia considerar chatas, e passarem a ser ainda mais divertidas, para aqueles que já as achavam divertidas. Apesar de já existirem várias investigações em torno do tema da álgebra e da sua aprendizagem, a sua relação com elementos lúdicos e tarefas de aprendizagem ainda está pouco explorada, sendo, por isso, relevante tanto a intervenção pedagógica que foi desenhada, como a investigação que sobre ela foi realizada.

Assim, o objetivo do meu trabalho foi compreender de que forma a exploração de tarefas de natureza diversificada e integrando contextos lúdicos pode apoiar uma aprendizagem significativa das equações no 7º ano de escolaridade.

Para cumprir este objetivo, foi desenhada uma intervenção pedagógica pautada por uma sequência de tarefas escolhidas por integrarem elementos lúdicos variados, para apoiar o processo de ensino-aprendizagem das equações no 7º ano de escolaridade e foram formuladas as seguintes questões de investigação:

1. Ao longo da intervenção pedagógica,
 - a) Como é que os alunos resolvem as diferentes tarefas?
 - b) Quais as maiores dificuldades que os alunos manifestam e como as ultrapassam?
 - c) Como reagem os alunos aos elementos lúdicos das tarefas realizadas?
2. De que forma o trabalho dos alunos em torno das tarefas da intervenção pedagógica contribui para uma aprendizagem significativa das equações?

Este relatório está organizado em oito capítulos. A seguir a este capítulo introdutório, apresento o *Enquadramento Teórico* que apoia a intervenção pedagógica e orienta a análise dos resultados, em particular com recurso a literatura de referência. Este capítulo de enquadramento teórico encontra-se dividido em dois grandes tópicos: 1) A álgebra e o pensamento algébrico; e 2) As tarefas no ensino da matemática.

No terceiro capítulo é apresentada a *Intervenção Pedagógica*. Começa-se por contextualizar a escola e as turmas em se realizou a intervenção pedagógica. Depois descreve-se a planificação das aulas e ainda se faz uma breve reflexão sobre as aulas lecionadas.

No quarto capítulo, *Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados*, são descritas as opções metodológicas tomadas para a realização deste estudo. São também descritos os participantes e os métodos de recolha de dados utilizados neste estudo, assim como os procedimentos seguidos para a análise dos mesmos. Para além disso, são ainda abordadas algumas questões de natureza ética que foi necessário ter em consideração para levar a cabo esta investigação.

No quinto capítulo, *Análise dos Dados*, apresento uma análise dos dados recolhidos, procurando interpretá-los à luz das considerações teóricas feitas no segundo capítulo e tendo sempre em mente as questões de investigação propostas. Por fim, no capítulo seis, *Conclusões e Implicações*, são detalhadas as principais conclusões do trabalho de investigação realizado, procurando dar resposta às questões de investigação que nortearam este estudo e elencando algumas implicações deste trabalho para a prática letiva do professor (em particular decorrente de uma análise que também é feita à própria intervenção pedagógica) e para futura investigação. Neste último capítulo cabe ainda uma reflexão final acerca de todo o trabalho realizado.

2. Enquadramento Teórico

2.1. A Álgebra e o Pensamento Algébrico

Ponte (2006) refere-se a uma visão frequentemente redutora da álgebra, mencionando que “a visão mais habitual da Álgebra é que se trata simplesmente de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, frações algébricas, expressões com radicais...) e processos de resolução de equações” (p. 6). Também Kaput (1999) afirma que, no ensino da Álgebra, prevalece, desde há muito, uma abordagem baseada na simplificação de expressões algébricas, na resolução de equações e na aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos. Neste tema, os alunos, na sala de aula, resolvem basicamente exercícios e problemas recorrendo à aplicação de regras e procedimentos. A valorização e quase exclusividade da representação algébrica no estudo da álgebra, associada à execução de procedimentos sem significado, sem conexões (Stein & Smith, 2009), contribuiu para os problemas de aprendizagem de muitos alunos nas últimas décadas (Ponte, 2006).

Ponte, Branco e Matos (2009) reforçam que esta visão redutora da álgebra desvaloriza muitos aspetos importantes desta área da Matemática, “quer relativos à Antiguidade (resolução de problemas), quer actuais (relações, estruturas algébricas), quer mesmo do período “clássico” da Álgebra (estudo de funções)” (p. 8). Estes autores destacam a importância dos símbolos e citam Keith Devlin, matemático americano, que defende que “sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria” (Devlin, 2002, p. 11, citado em Ponte, Branco & Matos, 2009). No entanto, admitem que “esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno.”(p. 8).

Muitas discussões em torno deste tema procuraram delimitar o que deve ser ensinado relativamente à álgebra no ensino básico e no ensino secundário (Ponte, Branco & Matos, 2009). Dessas discussões, surgiu o interesse pela caracterização do pensamento algébrico. O NCTM (2007) define pensamento algébrico como dizendo respeito a compreender padrões, relações e funções, à simbolização e à modelação. Na mesma linha, Ponte, Branco e Matos (2009) perspetivam que pensamento algébrico inclui “a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções.” Acrescentam ainda que igualmente inclui “a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios” (p. 10).

Ponte (2006) acrescenta ainda que “a melhor forma de indicar os grandes objetivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é dizer então que se visa desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos, mas vai muito além disso” (p. 7). Ponte, Branco e Matos (2009) dividem o pensamento algébrico em três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas e modelar situações. Estas vertentes estão explicadas na Tabela 1 apresentada pelos autores.

Tabela 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico (Ponte, Branco e Matos, 2009, p.11)

Representar	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

A investigação tem vindo a associar o pensamento algébrico àquilo que é geral numa dada situação matemática e à expressão dessa generalização (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007, citados em Canavarro & Infante, 2016). Essa generalidade não tem de ser obrigatoriamente expressa através de linguagem simbólica, podendo ser expressa por linguagem natural (Canavarro, 2009; Carraher & Schliemann, 2007, citados em Canavarro & Infante, 2016; Kieran, 2007).

Existem diversas dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem da álgebra e Drijvers (2003) aponta várias:

Primeiro, os alunos muitas vezes não conseguem relacionar o carácter algorítmico, formal dos procedimentos algébricos com abordagens informais e naturais que são significativas para eles. Uma segunda dificuldade é o nível abstrato em que os problemas são resolvidos, em comparação com as situações concretas de onde surgem, e a falta de significado que os alunos atribuem aos objetos matemáticos a um nível abstrato. Um terceiro fator é a necessidade de acompanhar o processo geral de resolução de problemas enquanto executa os procedimentos algébricos elementares que dele fazem parte. Uma quarta dificuldade é a linguagem algébrica compacta com as

suas convenções e símbolos específicos. Um quinto obstáculo pode ser o carácter de objeto das fórmulas e expressões algébricas, que os alunos muitas vezes percebem como processos ou ações, e o obstáculo de ‘falta de fechamento’ que o acompanha. (pp. 41–42)

Cabe, assim, ao professor, através das suas práticas, encontrar estratégias que permitam ao aluno desenvolver o pensamento algébrico. Para Ponte (2005a) “a solução terá de passar por uma estratégia de ir introduzindo os símbolos e o seu uso, em contextos significativos, no quadro de actividades que mostrem de forma natural aos alunos o poder matemático da simbolização e da formalização” (p. 40).

2.1.1. O ensino das equações

Uma equação é, habitualmente, definida como “uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos” (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p. 93). Segundo Ponte (2004), com a aprendizagem das equações, os alunos iniciam uma nova etapa no seu estudo da Matemática. O aparecimento de novas expressões, que envolvem novos símbolos e novas regras de manipulação, envolvem outro nível de abstração. Para o aluno, isto representa uma rutura com a Matemática *concreta* da Aritmética e “o início desta etapa revela-se particularmente problemático para muitos alunos” (Ponte, 2004, p. 149)

Ao longo do tempo, notou-se uma evolução no modo como era abordado o ensino das equações. Ponte (2004) fez uma análise de quatro manuais portugueses de diferentes épocas, sintetizada no excerto seguinte:

Estes quatro livros testemunham uma evolução muito significativa no ensino das equações ao longo de mais de 100 anos. Desde logo, o nível etário dos alunos que estudam este conceito foi baixando dos 15 aos 12 anos. Ao mesmo tempo, **a abordagem mais formal e abstracta foi dando origem a abordagens muito mais simples**. Enquanto que no século XIX se estudavam as expressões algébricas (incluindo fracções algébricas) e depois as equações numéricas e literais e logo a seguir os sistemas de equações, mais tarde passou-se a diferenciar **várias etapas neste estudo**, a realizar em anos diferentes: equações numéricas do 1º grau, equações literais do 1º grau e sistemas de equações. As expressões algébricas deixaram de ser estudadas anteriormente, como pré-requisito para as equações, para passarem a ser introduzidas a partir do próprio estudo das equações. A intenção é, certamente, a de **motivar o estudo das expressões algébricas**, um tema **reconhecidamente árido e pouco interessante**, através do estudo das equações. (p. 168, realce adicionado)

De acordo com o Programa de matemática do ensino básico de 2007 (ME, 2007), os alunos devem ser capazes de resolver equações recorrendo a processos válidos, como os princípios da equivalência. No entanto, num primeiro momento podem desenvolver estratégias informais que os podem ajudar a compreender melhor as

consequentes regras formais (ME, 2007). Aquele programa frisava também que era importante que os alunos usassem essas regras com compreensão e não apenas como um procedimento, defendendo uma transição progressiva da linguagem natural para a algébrica (ME, 2007).

O trabalho com equações permite o desenvolvimento do pensamento algébrico. Isto torna-se possível devido ao trabalho com diferentes tipos de representações e linguagens, como a passagem de linguagem natural para a linguagem algébrica. Esta transição permite ainda o desenvolvimento da simbolização. Ao longo da resolução das diferentes tarefas é muito importante a maneira como os alunos interpretam as representações dos enunciados e como criam e interpretam as suas próprias representações (Ponte, 2014). Uma representação é “uma configuração que representa algo, de alguma forma” (Goldin, 2008, p. 180). Bruner (1999) distingue três representações: a representação ativa, a icónica e a simbólica. A *representação ativa* é considerada quando é usado material de concretização para a resolução do problema. Por sua vez, a *representação icónica* tem lugar quando o aluno representa a situação através de um esquema ou de um desenho. Por fim, a *representação simbólica* expressa o processo de resolução do problema através da linguagem simbólica matemática.

O NCTM (2007) amplia as vantagens das representações escritas defendendo que estas ajudam os estudantes a organizar o pensamento, tornando as ideias matemáticas mais concretas. Para além disso, realça a importância da representação das ideias matemáticas, com especial destaque para as aprendizagens algébricas. As representações devem ser ferramentas para construir, compreender, comunicar informação e demonstrar o raciocínio (Greeno & Hall, 1997). Neste sentido espera-se que a capacidade de representar objetos matemáticos e de os traduzir em diferentes representações permita ao aluno uma maior capacidade de abstração que lhe permita manipular mentalmente esses objetos sem ter que os referenciar com procedimentos ou processos que estiveram na sua origem (Domingos, 2014).

Ao longo dos anos, vários estudos debruçaram-se na análise dos diferentes modos como os alunos resolvem equações. Cada aluno é único e irrepetível, mas é possível reconhecer e agrupar diferentes métodos usados pelos diferentes alunos. Kieran (1992, citada em Oliveira, 2014) menciona alguns dos métodos/estratégias usados para resolver equações:

- (i) Utilização de factos numéricos;
- (ii) Utilização de técnicas de contagem;
- (iii) Cover-up;
- (iv) Desfazer (utilizando as operações inversas);

- (v) Substituição (tentativa e erro);
- (vi) Transposição (mudar de membro – mudar de sinal);
- (vii) Realizar a mesma operação em ambos os membros.

A autora dá alguns exemplos da utilização destes métodos, sendo que, por exemplo, $5 + n = 8$, em que 5 mais 3 é oito (**utilização de factos numéricos**) e resolver $5 + n = 8$, contando 5,6,7,8, e percebendo que foram nomeados três números desde o 5 até chegar ao oito (**utilização de técnicas de contagem**). Já quanto ao método **cover-up**, é dado como exemplo a resolução da equação $2x + 9 = 5x$: 9 é igual a $3x$, já que $2x + 3x = 5x$, então $x = 3$. O **método de desfazer** é semelhante ao método utilizado na resolução de problemas aritméticos utilizando operações inversas. Como exemplo, é apresentada a equação $2x + 8 = 18$, em que se prossegue da direita para a esquerda “desfazendo” cada operação através da realização da operação inversa, ou seja, $18-8=10$ e $10:2=5$. O **método da substituição** consiste em substituir a incógnita por diferentes valores até se obter uma igualdade verdadeira. O **método da transposição** consiste em aplicar as regras práticas para a resolução de equações. Por último, o **método de realizar a mesma operação em ambos os membros**, é fazer aquilo que o próprio nome indica, reconhecendo os princípios de equivalência. O princípio de equivalência da adição, quando numa equação se adiciona ou subtrai um mesmo número a ambos os membros, obtendo uma equação equivalente à dada. O princípio de equivalência da multiplicação, quando numa equação se multiplicam ou dividem ambos os membros por um mesmo número diferente de zero, obtendo-se uma equação equivalente à dada. Por exemplo: $2x + 4 = 10 \Leftrightarrow 2x + 4 - 4 = 10 - 4 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$.

Segundo Kieran (1988), as operações inversas que são realizadas no método relativo à realização das mesmas operações em ambos os lados da equação são bastante diferentes das usadas quando se realiza a transposição. Apesar de, muitas vezes, o método da transposição ser considerado uma simplificação do método de realizar a mesma operação em ambos os membros da equação, para os alunos que iniciam o estudo da Álgebra estes não têm o mesmo significado. No excerto seguinte a autora descreve a diferença entre estes dois métodos.

O método de realizar em ambos os lados da equação uma operação que seja inversa a uma das operações dadas torna explícito o equilíbrio entre o lado esquerdo e direito da equação. Por outro lado, a justificação para realizar a mesma operação dos dois lados é precisamente para manter a equação equilibrada e para manter a sua solução inalterada ao longo do processo de resolução da equação. Além disso, este procedimento também envolve a simplificação dos lados esquerdo e direito da equação, em vez de

só um lado, o que ocorre quando um dos termos é transposto para o outro lado. (Kieran, 1988, p. 95)

Kieran (2006) refere três abordagens à resolução de equações, no início do estudo da Álgebra: (i) abordagem intuitiva (inclui a estratégia relativa às propriedades dos números, a estratégia de contagem e a estratégia cover up); (ii) abordagem de substituição por tentativa-erro, e (iii) abordagem formal. Se, por um lado, a autora nos apresenta os vários métodos usados pelos alunos na resolução de equações (Kieran, 1992, citada em Oliveira, 2014), por outro lado, Ponte, Branco e Matos (2009) resumem num quadro os principais erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do primeiro grau (Quadro 1).

Quadro 1 – Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do primeiro grau (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 96)

Erro/Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais “+” e “=” como indicadores de uma acção	$3 + 4n = 7n$ $2a + 5b = 7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau	Interpretação de $4y$ como: – quatro “y”’s; – um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; – $4 + y$ por analogia com $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$	Booth, 1984
Uso de parêntesis	$3(x + 2) = 7x$ $\Leftrightarrow 3x + 2 = 7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorrecta de termos semelhantes	$-2x + 5x = 8 \Leftrightarrow -7x = 8$	Kieran, 2006
Adição incorrecta de termos não semelhantes	$2x + 5 = x + 8 \Leftrightarrow 7x = 9$	Kieran, 1985
Transposição incorrecta de termos	$16x - 215 = 265 \Leftrightarrow 16x = 265 - 215$ $30 = x + 7 \Leftrightarrow 30 + 7 = x$ $3x + 5 = 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + 5$ $7x = x + 8 \Leftrightarrow 7 - 8 = x + x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (Redistribution)	$-2x + 5 = 8$ $\Leftrightarrow -2x + 5 - 5 = 8 + 5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x - 3 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2x - 4$	Kieran, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	$6x = 24 \Leftrightarrow 6 + x = 24$ $11x = 9x = \frac{11}{9}$ $2x = 4 \Leftrightarrow$ $i) x = 4 - 2; ii) x = \frac{4}{-2}; iii) x = \frac{2}{4}$	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

	$-x = -17 \Leftrightarrow ??$ $-x = 4 \Leftrightarrow ??$	
--	--	--

Apesar de, no Quadro 1, estarem destacados os principais erros dos alunos na resolução de equações, o mais importante é proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que lhes permitam aprender com os seus erros. Tal como defende Wiggins (2012, p. 15), “o problema não é cometer erros. O problema é não se aprender nada a partir dos erros cometidos”.

Durante muito tempo, o erro era visto como algo mau, algo a evitar, porque o erro era considerado como uma incapacidade para dar a resposta certa e, por essa razão, era geralmente penalizador para quem os cometia. Não é de estranhar que esta forma de lidar com o erro continue a prevalecer na cabeça de muitos professores, e consequentemente nos alunos, o que é prejudicial porque continua a limitar o próprio processo de aprendizagem e ensino na escola (Santos, 2008; Tulis, 2013). O erro aparece como sendo uma pista para o professor refletir sobre a sua prática e reorganizá-la. Assim, além dos aspetos específicos da álgebra e das dificuldades dos alunos na aprendizagem deste tema, há que ter em consideração o tipo de tarefas que são propostas.

2.2. Tarefas no ensino da Matemática

Uma das mais importantes decisões que um professor toma na sua prática de ensino é a escolha de tarefas. O NCTM defende que estas devem ser escolhidas em função do conteúdo matemático que se pretende abordar, dos alunos a que se dirige e do potencial de aprendizagem que contêm (NCTM, 1991; 1994). Por exemplo, sem conhecer o grupo de alunos a que se destina será muito difícil ao professor, à partida, identificar o grau de desafio que uma tarefa irá apresentar para os alunos (Ponte, 2005).

As tarefas matemáticas são um recurso fundamental no processo de ensino e aprendizagem da matemática, atendendo a dois objetivos básicos: construir o conhecimento matemático e aplicar o conhecimento previamente aprendido (Canavarro & Santos, 2012; NCTM, 2007). De acordo com Carpenter, Franke e Levi (2003), tarefas apropriadamente escolhidas podem proporcionar um foco para os alunos articularem as suas ideias, desafiar os alunos e abrir uma janela para o pensamento das crianças. Mas escolher as tarefas adequadas não é uma tarefa fácil. O professor deve levar em consideração os interesses e experiências anteriores dos alunos, e as oportunidades que as tarefas trazem para fazer conexões entre tópicos matemáticos de diferentes temas (Canavarro & Infante, 2016; NCTM, 2007).

Na escolha de uma tarefa é importante ter em consideração as dimensões que a definem. Ponte (2005) considera que duas dimensões fundamentais das tarefas são o seu grau de desafio matemático e o seu grau de estrutura. O grau de desafio matemático depende da dificuldade da questão, sob o ponto de vista do aluno, podendo variar entre o *reduzido* e *elevado*. Já o grau de estrutura varia entre os polos *aberto* e *fechado*. Numa tarefa *fechada* é claramente dito o que é dado e o que é pedido, mas uma tarefa *aberta* contém alguma indeterminação pelo menos em algum destes aspetos. De acordo com estas duas dimensões, obtêm-se quatro tipos de tarefas: o exercício, o problema, a investigação e a exploração. O exercício é uma tarefa *fechada* e de grau de desafio considerado *reduzido*. Já para os problemas, apesar de serem tarefas também *fechadas*, o seu grau do desafio já é *elevado*. Por outro lado, uma investigação, é uma tarefa *aberta* com desafio *elevado*, enquanto uma exploração corresponde a uma tarefa também *aberta*, mas acessível à maioria dos alunos. Há também que ter em consideração o carácter relativo das tarefas. Uma dada tarefa pode ser um problema ou um exercício para alunos diferentes ou até a mesma tarefa pode começar por ser um problema para uma pessoa e depois tornar-se num exercício, dependendo dos conhecimentos prévios dos alunos (Ponte, 2014).

Ponte (2005) refere que a diversificação de tipos de tarefa é necessária porque cada tipo de tarefa desempenha um papel importante relativamente à aprendizagem.

- As tarefas de natureza mais *fechada* (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.
- As tarefas de natureza mais *acessível* (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua auto-confiança.
- As tarefas de natureza mais *desafiante* (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática.
- As tarefas de cunho mais *aberto* são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. (p. 17)

Os manuais escolares continuam a ser as principais fontes de tarefas para o ensino de tópicos algébricos (Arbaugh & Brown, 2004; Kieran, 2007; Viseu & Morgado, 2018). O problema é que a maioria dos manuais escolares não tem a diversidade de tarefas necessária para apoiar a aprendizagem de tópicos algébricos com foco na compreensão e no raciocínio. Na verdade, a maioria das tarefas encontradas em manuais escolares concentra-se na manipulação, não em processos como generalização, abstração e modelagem (Lew, 2004; Ponte, 2005). Para além disso, se as tarefas são demasiado fáceis ou demasiado difíceis têm um limitado valor cognitivo,

não são motivantes e é muito menos provável que envolvam os alunos (Anthony & Walshaw, 2007).

O professor tem de organizar para os seus alunos sequências de tarefas organizadas, de modo que estes atinjam os objetivos de aprendizagem pretendidos. No seguimento desta ideia, Ponte (2005) refere que, para além da diversificação das tarefas, é importante que estas proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, “que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática” (p. 18). Acrescenta que, para isso, é preciso fazer escolhas e estabelecer percursos de ensino com tarefas cuidadosamente selecionadas, que permitam trabalhar de modo natural os diferentes conteúdos.

Os contextos associados às tarefas têm influência na qualidade das experiências de aprendizagem que são oferecidas aos alunos (Johanning et al., 2009; Ainley, Bills, & Wilson, 2005). Segundo Ponte e Quaresma (2012), o contexto é “o universo conceptual associado a cada tarefa, que pode remeter para um campo da vida quotidiana, do qual o aluno pode ter maior ou menor experiência pessoal, ou remeter apenas para o universo matemático” (p. 199).

O contexto da tarefa deve ir além de ser um elemento motivador. O contexto deve funcionar principalmente como suporte para a aprendizagem da matemática. No entanto, a motivação é, de facto, bastante relevante, pois é o interesse dos alunos que os leva a aprender. Palm (2009) sugere que um bom contexto deve congrega “diversas circunstâncias favoráveis à aprendizagem, estimulando a interação construtiva entre os alunos, decorrente do trabalho do professor mais como orientador das aprendizagens do que como fonte exclusiva do saber” (Ponte & Quaresma, 2012, p. 215).

Existe uma forte relação entre tarefas e aprendizagem (Arbaugh & Brown, 2004; Doyle, 1983; Smith & Stein 2018; Stein & Smith, 2009;). Aspetos como os níveis de exigência cognitiva das tarefas, contextos, relação com o conhecimento prévio, bem como o sequenciamento das tarefas são de extrema importância para a aprendizagem (Ponte, 2005; Smith & Stein, 2018; Serrazina & Oliveira, 2010).

Em suma, a escolha das tarefas e as formas como o professor conduz, orchestra, o trabalho dos alunos nessas tarefas determina a qualidade da aprendizagem dos alunos. O professor desempenha um papel fundamental neste processo de seleção de tarefas, que permitam a aprendizagem do aluno, e no desenvolvimento do seu *pensamento relacional*.

2.2.1. Compreensão relacional vs Compreensão instrumental

Podemos distinguir dois tipos de compreensão na aprendizagem matemática: compreensão relacional e compreensão instrumental. Segundo Skemp (1978), na *compreensão instrumental* há um uso de regras sem fundamentação. Por outro lado, a *compreensão relacional* acontece quando na aprendizagem se sabe o que se faz e o porquê de estar a fazer.

Skemp (1978) reforça a ideia de que a compreensão instrumental está bastante presente quando usamos, por exemplo, “pedir emprestado” na subtração, “inverter e multiplicar” para a divisão de uma fração, “mudar de membro e mudar o sinal” nas equações. No entanto, quando o professor faz uma pergunta que não se encaixa na regra, os alunos irão oferecer uma resposta errada. Já na compreensão relacional está envolvido, por exemplo, o uso de propriedades fundamentais das operações, como a propriedade associativa ou a distributiva e a noção de igualdade (recorrendo a factos conhecidos), para a resolução de um problema numa determinada situação (Empson, Levi, & Carpenter, 2011). No que diz respeito ao tema das equações, por exemplo, a compreensão relacional inclui a capacidade de analisar expressões e equações como um todo e não como um processo realizado por etapas (Franke, Carpenter, & Battey, 2008).

Segundo Skemp, (1976, citado em Nobre, 2012), para os alunos, muitas vezes é mais fácil obterem uma compreensão instrumental do que uma compreensão relacional. Muitas vezes, a compreensão instrumental é suficiente para obter uma resposta rápida a uma tarefa rotineira. No entanto, sem a compreensão relacional a aprendizagem não pode ser adaptada a novas tarefas e os alunos não conseguem justificar as suas respostas. Por isso, é muito importante ter em atenção como os novos conceitos são introduzidos para tentar evitar que os alunos aprendam simplesmente pela memorização de regras.

2.2.2. O contexto lúdico nas tarefas de aprendizagem

Ponte (2005) identifica dois pólos para a dimensão do contexto da tarefa: tarefas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas em termos puramente matemáticos. Skovsmose (2001) distingue um terceiro contexto, que designa por *semi-realidade*. Neste contexto enquadram-se questões que não existem na vida diária, mas são construídas, nomeadamente para fins educativos.

Ponte (2005) realça também uma tarefa igualmente importante e com larga tradição no ensino da Matemática, os jogos. Um jogo, de alguma forma, constitui um problema, tal como menciona o autor.

As regras estão bem definidas e o objetivo é vencer o jogo, seja este individual ou coletivo. Conseguir uma estratégia ganhadora pode constituir um problema de difícil resolução. Um jogo pode implicar igualmente um importante trabalho de recolha e organização de dados e, desse modo, assumir uma natureza exploratória. Seja qual for a sua natureza, um jogo pode ter importantes potencialidades para a aprendizagem, especialmente se o professor souber valorizar os respectivos aspectos matemáticos. (p. 21)

Os jogos estão inseridos no *contexto lúdico* das tarefas. Mas afinal o que é o contexto lúdico? Segundo Pessanha (2001), o conceito “atividade lúdica” é complexo de definir, mas de fácil identificação. A palavra “lúdico” vem do latim *ludus* e o seu significado está ligado no dicionário a algo relativo ao jogo ou ao divertimento, que serve para divertir ou dar prazer. Alsina (1994, citado em Corbalán, 1994) menciona:

Ensinar e aprender matemática pode e deve ser uma experiência com bom êxito do sentido de algo que traz felicidade aos alunos. Curiosamente quase nunca se cita a felicidade dentro dos objetivos a serem alcançados no processo ensino-aprendizagem, é evidente que só poderemos falar de um trabalho docente bem feito quando todos alcançarmos um grau de felicidade satisfatório. (p. 14)

O lúdico é a brincadeira, o humor, o jogo, a diversão, e tudo isto pode ser enquadrado no ensino da matemática e até levado para “para além da sala de aula” (Kenderov et al, 2009). Wassermann (1990) defende que os professores ao integrarem nas suas práticas educacionais a atividade lúdica contribuem decisivamente para o desenvolvimento social, cognitivo e psicológico da criança. As tarefas podem ser elas mesmas contextos lúdicos ou podem ter os elementos lúdicos inseridos nas tarefas. Por exemplo, as tarefas que recorrem ao humor, às bandas de desenhadas, são tarefas que incluem contextos lúdicos. Um jogo, por exemplo, por si só, é uma tarefa lúdica.

Relativamente ao *humor*, muitos autores têm procurado investigar o uso de situações humorísticas na educação, procurando formas de o fazer e de influenciar a qualidade de aprendizagem dos alunos (Guitart, 2012; Shmakov & Hannula, 2010; Menezes & Ferreira, 2018). O humor geralmente envolve sentimentos positivos, ao contrário da aversão generalizada dos alunos à escola e à matemática. Mas, além dessa dimensão afetiva, o humor também oferece um elemento cognitivo, pois pode ser o foco da própria aprendizagem, associado ao conteúdo a ser aprendido (Guitart, 2012).

Martin (2007) refere que este pode ser utilizado pelos professores para ilustrar conteúdos, para tornar o ambiente de aprendizagem mais agradável e interessante para os alunos e até para facilitar a memorização de informação. Este autor refere ainda que estudos mostram que o professor deve ajustar o humor aos alunos a que é dirigido, usando-o de forma moderada, construtiva e focada nos conceitos.

Segundo Menezes e Ferreira (2018) a utilização do humor pelos professores está associada sobretudo ao discurso oral dos professores nas aulas, tendo como intuito motivar os alunos para as aprendizagens ou facilitar a memorização de terminologia matemática. No entanto, os autores acreditam que é possível utilizar o humor no ensino da matemática com seriedade, tendo por base tarefas matemáticas construídas a partir de humor gráfico. Reforçam ainda que o humor gráfico pode tornar-se por ele próprio, objeto de pensamento matemático dos alunos, sendo mais do que uma mera motivação.

Por outro lado, o recurso ao *jogo* “é particularmente interessante quando nos perguntamos quais são os métodos mais adequados para transmitir aos nossos alunos o profundo interesse e o entusiasmo que a matemática pode gerar e para proporcionar uma primeira familiarização com os processos usuais da atividade matemática” (Guzmán, 1993, p. 24). O jogo é normalmente associado a uma atividade motivacional para os alunos. Segundo Lemos (2005), “a motivação produz não só melhor aprendizagem e desempenho, mas também mais confiança em si próprio e maior satisfação no trabalho. Por isso deverá ser valorizada nos contextos escolares não apenas como meio, mas também como fim em si mesma” (p. 193).

De acordo com Groenwald e Timm (2014), “os jogos podem ser utilizados para introduzir, amadurecer conteúdos e preparar o aluno para aprofundar os itens já trabalhados. Devem ser escolhidos e preparados com cuidado para levar o estudante a adquirir conceitos matemáticos de importância” (p. 1).

No trabalho realizado por Grandó (1995, citada em Mota, 2009) sobre os jogos e o ensino da matemática, a autora classificou os jogos nas seguintes categorias:

Jogo de azar – São aqueles que dependem apenas da ‘sorte’ para se vencer o jogo. O jogador não tem como interferir ou alterar a solução. Ele depende das probabilidades para vencer. Exemplos deste tipo de jogos são: lançamento de dados, par ou ímpar, casinos, lotarias, ...

Jogos quebra-cabeças - são aqueles em que o jogador, na maioria das vezes, joga sozinho e a sua solução ainda é desconhecida para ele. Exemplos deste tipo de jogo são: quebra-cabeças, enigmas, charadas, paradoxos, falácias, pequenos problemas e Torre de Hanói.

Jogos de estratégia (e/ou jogos de construção de conceitos) – são aqueles que dependem única e exclusivamente do jogador para vencer. O factor ‘sorte’ ou ‘aleatoriedade’ não está presente. O jogador deve elaborar uma estratégia, que não dependa de sorte, para tentar vencer o jogo. Exemplos desse tipo de jogo, são: xadrez, damas.

Jogos de fixação de conceitos – são aqueles cujo objectivo está expresso em seu próprio nome: ‘fixar conceitos’. São os mais comuns, muito utilizados nas escolas que propõem o uso de jogos no ensino ou ‘aplicar conceitos’. Apresentam o seu valor pedagógico na medida em que substituem, muitas vezes, as listas e mais listas de exercícios aplicados pelos professores para que os alunos assimilem os conceitos trabalhados. É um jogo utilizado após o conceito.

Jogos pedagógicos – são aqueles que possuem o seu valor pedagógico, ou seja, que podem ser utilizados durante o processo ensino-aprendizagem. Na verdade, eles englobam todos os outros tipos: os de azar, quebra-cabeças, estratégia, fixação de conceitos e os computacionais; pois todos estes apresentam um papel fundamental no ensino.

Jogos computacionais – são os que são projectados e executados no ambiente computacional. (pp. 30-31)

Para a intervenção pedagógica desenhada para sustentar este trabalho de investigação foram selecionados jogos de fixação de conceitos, jogos pedagógicos e jogos computacionais, tal como se pode verificar no capítulo seguinte, em que descrevo essa mesma intervenção. Os jogos de fixação de conceitos foram aplicados com o intuito de substituir as listas de exercícios características do tema das equações. Os jogos pedagógicos enquadram-se na intervenção pedagógica porque todos os elementos lúdicos selecionados foram utilizados no processo de ensino-aprendizagem. Uma vez que todas as aulas foram em ensino à distância, todos os jogos foram realizados em ambiente computacional.

Segundo o VII princípio da Declaração dos direitos da criança, aprovada pela Assembleia Geral das Nações Unidas a 20 de novembro de 1969, “A criança terá ampla oportunidade para brincar e divertir-se, visando os propósitos da sua educação; a sociedade e as autoridades públicas empenhar-se-ão em promover o gozo deste direito”. Na opinião de João Rino (2004), a existência de regras e de interação durante os jogos permitem desenvolver capacidades cognitivas e sociais que se pretendem que sejam adquiridas pelas crianças. Acrescenta ainda que a aprendizagem através do jogo pode ser feita em meio escolar ou extra escolar, já que as regras e interações que se pretendem desenvolver contribuem para o desenvolvimento de um cidadão responsável e autónomo, para o qual a escola é apenas um contributo.

Gairín (1990, citado em Lopes, 2016), distingue três níveis de aplicação dos jogos: pré-instrucional, co-instrucional e o pós-instrucional. No nível *pré-instrucional*, é através do jogo que o aluno descobre o conceito, sendo o jogo o único veículo de aprendizagem. No nível *co-instrucional*, o jogo está entre as diferentes tarefas que o professor utiliza para o ensino. Nesse caso, o jogo acompanha outros recursos de aprendizagem. Por fim, no nível *pós-instrucional*, o jogo é apenas um meio para reforçar as aprendizagens já assimiladas, ou seja, o jogo serve como consolidação de aprendizagens. Todos estes níveis de aplicação devem ser ponderados pelo professor e adaptados às necessidades de cada aula.

Para Grando (2004), a utilização de jogos didáticos no processo de ensino da matemática tem algumas vantagens e desvantagens, tal como se apresenta no quadro seguinte (Quadro 2).

Quadro 2 – Vantagens e desvantagens na utilização de jogos didáticos no ensino da matemática (Grando, 2004, p.31)

Vantagens	Desvantagens
- (re)significado de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno; - introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; - desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos); - aprender a tomar decisões e saber avaliá-las; - significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; - propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade); - o jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento; - o jogo favorece a integração social entre os alunos e a consciencialização do trabalho em grupo; - a utilização de jogos é um fator de interesse para os alunos; - dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico, da participação, da competição “sadia”, da observação, das várias formas do uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender; - as atividades com jogos podem ser utilizadas para desenvolver habilidades de que os alunos necessitam. É útil no trabalho com alunos de diferentes níveis; - as atividades com jogos permitem ao professor identificar e diagnosticar algumas dificuldades dos alunos.	- quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um carácter puramente aleatório, tornando-se um “apêndice” em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam; - o tempo gasto com as atividades de jogo na sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo; - as falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através do jogo. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros casinos, também sem sentido algum para o aluno; - a perda da “ludicidade” do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo; - a coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo; - a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

As dificuldades apontadas por Grando (2004) podem ser ultrapassadas, ou pelo menos mais controladas com uma preparação do professor, já alertado para estes possíveis problemas. O professor deve refletir e ponderar se o jogo realmente faz sentido na sua aula e se é promotor de aprendizagens, e não apenas um passatempo em que os alunos não compreendam a sua utilidade. Além disso, nem tudo podem ser jogos. Deve ser proporcionado aos alunos tarefas diversificadas, adaptadas às suas necessidades.

Em suma, pode-se salientar que um professor ao recorrer a jogos interativos, de forma bem planeada e bem utilizada, nas suas aulas, permite que se proporcione um maior entusiasmo e interesse dos alunos em relação à aprendizagem de conteúdos. Esta pode ser uma ferramenta muito poderosa no processo de aprendizagem dos alunos.

3. Intervenção Pedagógica

3.1. Contexto Escolar

3.1.1. Caracterização da Escola

A Escola onde foi realizada a intervenção pedagógica é uma escola localizada na Área Metropolitana do Porto, que alberga o 3º ciclo do ensino básico e o ensino secundário. A Escola tem a sua origem no século XIX, com a criação do curso preparatório para ingresso no Instituto Industrial e Comercial. Devido à sua localização favorável, uma vez que a freguesia é uma área com bastante acessibilidade, além dos alunos oriundos desta freguesia, há ainda os que vêm de outras freguesias da cidade e arredores. Para além disso, a enorme densidade populacional e a grande diversidade socioeconómica traduzem-se em alunos provenientes quer de bairros camarários, quer de áreas de residências de classe média-alta.

A população escolar tem ultrapassado ao longo dos últimos anos os 1200 alunos. Desde 1990 está constituída a Associação de Estudantes com estatutos publicados no Diário da República, e tem havido sempre uma grande participação dos alunos nas respetivas eleições, com várias listas a participarem. Por outro lado, a Associação de Pais e Encarregados de Educação dos alunos da Escola foi constituída legalmente em 1993 e participa ativamente na vida da escola.

3.1.2. Caracterização das turmas

A intervenção pedagógica foi realizada em duas turmas do 7º ano. Iremos designar as turmas por turma1 e turma2.

A turma1 é constituída por 28 alunos, sendo nove do género feminino e 19 do género masculino. Por outro lado, a turma2 é constituída por 27 alunos, em que 15 são do sexo feminino e 12 são do sexo masculino. Nas reuniões intercalares do 1º período de cada turma, reforçaram-se os seguintes aspetos:

- Turma1: No geral, os alunos apresentavam um historial de boas classificações, não havendo nenhum aluno com retenções, e apenas dois alunos tiveram negativas no 3º período do sexto ano. Os alunos não revelavam grandes dificuldades na aquisição, compreensão e aplicação dos conhecimentos, mas revelavam alguma falta de maturidade e autonomia. O comportamento global da turma foi considerado pouco satisfatório, o que levava a um clima perturbador para a aprendizagem. Revelavam algumas dificuldades de expressão escrita, de interpretação e de cálculo e raciocínio matemático.

- Turma2: o conselho de turma caracterizou globalmente a turma como tendo muitos alunos agitados e desorganizados. Para além disso, os docentes referiram que era necessário aprender-se a saber estar para depois se passar ao trabalho do desenvolvimento das aprendizagens. Foram evidenciadas dificuldades de interpretação, produção escrita e organização do trabalho autónomo e do trabalho em sala de aula. Tanto o delegado e subdelegado, presentes na reunião, concordaram com este diagnóstico e comprometeram-se, reforçando o espírito de equipa, a tentar melhorar.

Através da observação de aulas, percebi que as turmas eram muito diferentes, mas tinham o comportamento não satisfatório em comum. Uma das diferenças notórias era no que diz respeito aos conteúdos de sala de aula, sendo que a turma1 revelava mais facilidade na compreensão e aquisição dos diferentes temas abordados. Em ambas as turmas, muitos alunos estavam a conhecer-se, tendo vindo de escolas diferentes do 2º ciclo. Pequenos seres humanos singulares, com características próprias, que obviamente resultam em conjuntos diferentes de alunos. Os alunos, no geral, apresentavam várias dificuldades de compreensão de enunciados, eram bastante inquietos e conversadores. No entanto, este comportamento foi melhorando. Nas aulas, a maioria dos alunos queria participar nas várias discussões que foram sendo feitas, sendo este um ponto forte a favor da minha investigação, onde a participação em discussões em pequenos grupos e em discussões coletivas foi fundamental.

No que diz respeito à classificação dos alunos no 1º período na disciplina de matemática, na turma1, 10,7% dos alunos obtiveram classificação negativa de nível 2, 28,6% obteve nível 3, 57,1% obteve nível 4 e apenas um aluno obteve nível 5 (3,6%). Na turma 2, 18,5% dos alunos obtiveram nível negativo 2, 66,7% dos alunos obtiveram nível 3 e finalmente os restantes 14,8% obtiveram nível 4, não havendo alunos com nível 5. Em ambas as turmas não existiam alunos com nível 1. A figura 1 resume a informação das duas turmas em termos de classificações no final do 1º período.

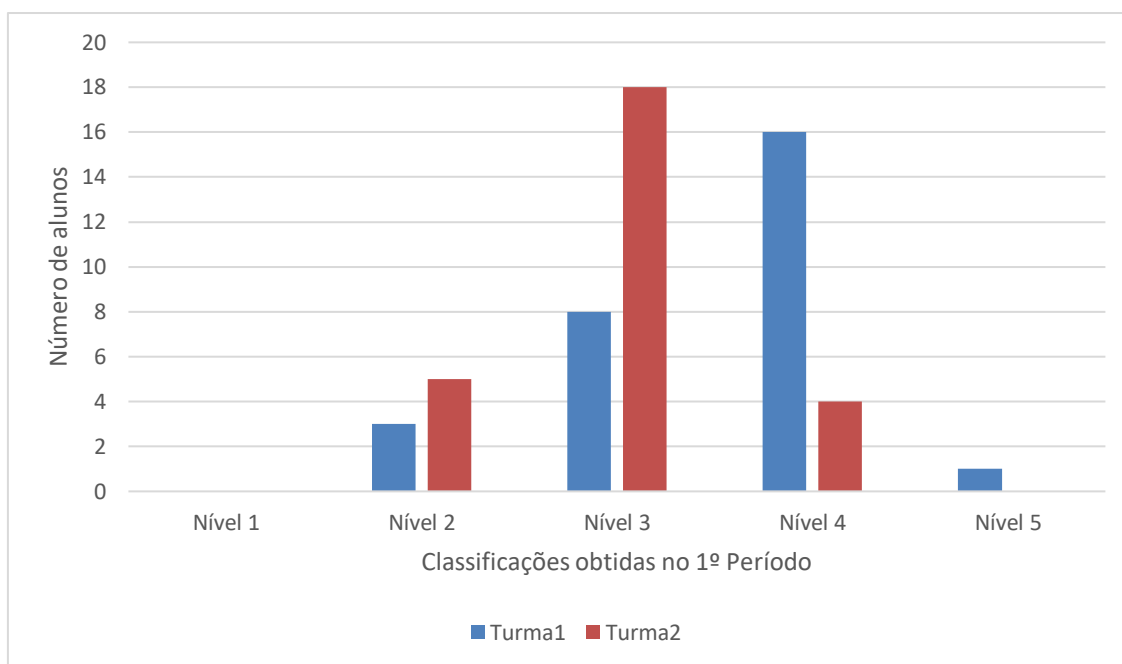


Figura 1 - Classificação dos alunos no 1º Período.

3.2. Planificação

Este relatório incide sobre as aulas da unidade de ensino das Equações, do programa de matemática do 7º ano de escolaridade, tendo como base as *Aprendizagens Essenciais* do 7º ano, numa perspetiva de aprender matemática com significado e de desenvolver a compreensão relacional dos alunos. Antes de se iniciar a unidade de ensino das Equações, já as escolas estavam todas no regime de ensino à distância (E@D), fruto do confinamento geral devido à evolução pandémica em Portugal. Por esse motivo, todas as tarefas foram pensadas e planeadas para este tempo atípico, podendo, no entanto, ser adaptadas para a sala de aula presencial.

A unidade de ensino foi sendo planeada à medida que as aulas decorriam. Inicialmente foi traçado um plano geral, mas os pormenores das aulas foram pensados sempre depois da aula anterior a serem aplicados. A sequência de tópicos planeada para as aulas foi a seguinte:

- Resolução de *equações visuais*;
- Introdução da Balança de dois pratos e a sua relação com o equilíbrio;
- O que é uma equação?
- Equacionar problemas em contextos matemáticos e não matemáticos;
- Solução de uma equação;
- Princípios de equivalência;
- Resolução de problemas.

As tarefas foram preparadas unindo esta ideia de sequência dos conteúdos com a sua ligação a contextos lúdicos. Foram pesquisados diferentes contextos lúdicos, como jogos, bandas desenhadas, problemas com humor e applets, e adaptados consoante o conhecimento da turma e as suas respostas a estes diferentes contextos. O Quadro 3 apresenta a sequência das tarefas que foram trabalhadas com os alunos de cada turma, evidenciando as pequenas diferenças que existiram entre a turma1 e a turma2 em termos de organização temporal, e o modo de trabalho dos alunos em cada tarefa. A cada tarefa foi atribuído um título, que também ajudou os alunos a irem identificando o trabalho que iam realizando ao longo da intervenção. A descrição de cada tarefa é feita na secção seguinte deste relatório.

Quadro 3: Sequência de tarefas para a unidade de ensino das Equações.

Tarefas/Problemas	Aulas Turma1	Aulas Turma2	Modo de Trabalho
<i>Tarefa dos Doces *</i>	Aula 1	Aula 1	Em grupo
<i>Equilíbrio nas Balanças</i>	Aula 2 e 3	Aula 2 e 3	Em grupo
<i>Balança Interativa</i>	Aula 3	Aula 4	Em grupo
<i>Os Romanos e o X</i>	Aula Assíncrona	Aula assíncrona	Individualmente
<i>Sopa de Letras... ou incógnitas?</i>	Aula 4	Aula 5	Em grupo
<i>Comboio das Equações *</i>	Aula 5 e 6	Aula 6 e aula assíncrona seguinte	Em grupo / individualmente
<i>O valor da amizade</i>	Aula 6		Em grupo
<i>Balança de Equações no Geogebra *</i>	Aula 7 e 8	Aula 7 e 8	Em grupo
<i>Problemas da Mafalda *</i>	Aula 9	Aula 9	Em grupo

Para além do conjunto das nove tarefas pensadas para trabalhar as equações (Anexos I a IX), foram também sugeridos exercícios e problemas do manual adotado pela escola e um problema para discutir com toda a turma *A astúcia do Grande Mágico no País das Equações* (Anexo X). Na primeira semana do 3º período, que coincidiu com o regresso dos alunos do 3º ciclo do ensino básico ao ensino presencial, foi feita uma continuidade do estudo das equações e o reforço das aprendizagens, sendo sugeridos aos alunos exercícios e problemas do manual para resolverem, agora de modo

individual, já que o trabalho de grupo não era possível com as condições existentes na sala de aula presencial. O objetivo desta semana de trabalho (presencial) inicial em volta das equações e do trabalho individual foi perceber eventuais dúvidas e falhas decorrentes do período de ensino à distância e tentar ajudar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades ou a aprofundar aprendizagens. De facto, apesar do ensino à distância até trazer algumas vantagens (em particular, a possibilidade de se realizar trabalho de grupo), também apresenta obstáculos e limitações para, pelo menos, alguns alunos que, por motivos familiares, pessoais, económicos ou de difícil adaptação aos contextos virtuais, possam sair prejudicados. Consta ainda, no Anexo XI, a proposta de um momento de avaliação formativa dos conhecimentos adquiridos, feita no 3º período, já em ensino presencial. O objetivo deste pequeno momento de avaliação foi aferir os conhecimentos dos alunos e fornecer feedback regulador para os apoiar nas suas aprendizagens.

De referir ainda que esta intervenção foi integrada de modo natural na minha experiência de Prática de Ensino Supervisionada. A diferença foi que utilizei esta unidade de ensino como o campo de investigação para o meu trabalho conducente a este relatório.

3.3. Descrição das Aulas

Cada uma das aulas foi pensada tendo como base uma tarefa envolvendo algum contexto lúdico, ou sendo constituindo ela própria uma situação lúdica. Depois, o número de aulas à volta de cada tarefa foi sendo adaptado consoante a dinâmica de cada turma e as dificuldades e curiosidades dos alunos em relação às tarefas. Assim sendo, nesta secção, irei descrever as aulas e clarificar os objetivos de cada tarefa, elemento-chave das aulas em que foram trabalhadas com os alunos.

Todas estas aulas tiveram um início em comum: clicar no botão “Participar” no Microsoft Teams. Era um início diferente das aulas presenciais, porque faltava aquele burburinho de fundo das conversas paralelas que não são possíveis com os microfones desligados. Mas aquilo que a distância tentava separar, os professores tentavam juntar. Uma vez que estávamos distantes, todas as aulas síncronas tiveram oportunidade de ter algo que o ensino presencial, naquele momento, não permitia devido aos cuidados sanitários exigidos pela pandemia: trabalho de grupo. Então, de um modo geral, a descrição das aulas à volta das equações pode ser resumida em três ideias gerais: apresentação da tarefa, trabalho de grupo (incluindo, muitas vezes, uma pequena discussão coletiva) e registo no Bloco de Notas de cada aluno.

A seguir, apenas será feita a descrição pormenorizada das aulas numa das turmas (turma1), uma vez que as aulas foram preparadas com os mesmos objetivos e decorreram de modos semelhantes. Houve, no entanto, algumas diferenças, tal como expresso no Quadro 3.

Uma diferença a destacar entre as duas turmas é o facto de que a turma2 iniciou o tema das equações depois da turma1, uma vez que concordámos que a turma2 precisava ainda de trabalhar um pouco mais sobre o tema das sequências. O facto de a turma2 ter duas aulas (aula 2 e aula 3 da turma2) dedicadas exclusivamente à tarefa *Equilíbrio nas Balanças*, tendo esta sido dividida em duas partes, deve-se a que a aula 2 desta turma, de 50 minutos, ocorre numa manhã atribulada de aulas, sendo a aula seguinte começada 5 minutos depois da nossa aula terminar. Assim, para que os alunos tivessem tempo de pensar e registar tudo calmamente nos seus Blocos de Notas, preferiu-se sugerir apenas dois exercícios numa primeira aula, depois de verem o vídeo de introdução à Balança de dois pratos e a restante parte da ficha de trabalho na aula seguinte.

Vejamos agora uma descrição mais pormenorizada do antes e do durante de cada aula, juntamente com uma descrição dos objetivos das tarefas que foram desenhadas e trabalhadas com os alunos durante a minha intervenção pedagógica.

Aula 1:

- **Antes:** Para a primeira aula, queria fazer um início descontraído, um início em que os alunos fossem capazes de se libertar de “matérias” e em que o raciocínio fosse a palavra-chave, sem haver o bom aluno a matemática ou o mau aluno a matemática. Foi feita uma pesquisa sobre possíveis jogos pré-algébicos e, dessa pesquisa, destacou-se o jogo *Algebraic Reasoning*². Foi feita uma tarefa à volta deste jogo, para ser possível aos alunos registarem as suas ideias e justificarem alguns raciocínios.

- **Objetivos da Tarefa dos Doces (Anexo I):** A introdução desta tarefa teve como grande objetivo a resolução visual de equações. A tarefa foi baseada no jogo *Algebraic Reasoning*. O jogo consistia numa bancada, com diferentes tipos de doces. Havia sempre um grupo de doces todos iguais, para que os alunos conseguissem logo determinar o valor daquele tipo de doces. Depois, existiam grupos de doces misturados. Os alunos selecionavam o doce e colocavam o valor que pensavam ser o correto. O jogo imediatamente validava a resposta se

² Disponível em https://www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.html

estivesse correta ou informava que estava errada. A tarefa desafiava-os com quatro níveis diferentes no jogo. Depois, na parte II da tarefa existia uma captura de ecrã do jogo, comum a todos os alunos. Para além disso, esta tarefa serviu para uma primeira interação com o jogo na aula de matemática e para perceber se o jogo era uma possível atividade lúdica que motivaria os alunos. De acordo com as *Aprendizagens Essenciais*, os objetivos da tarefa foram:

- Explorar, analisar e interpretar situações de contextos variados que favoreçam e apoiem uma aprendizagem matemática com sentido;
- Utilizar tecnologia digital, nomeadamente aplicações interativas.

• **Durante:** Foi sugerido aos alunos que se distribuíssem pelos grupos de trabalho previamente pensados e que lessem e discutissem a tarefa em grupo. As professoras entravam nos diferentes canais para ouvir as discussões e intervir, no caso de existirem dúvidas. Depois de todos os alunos terem oportunidade de discutir, voltámos à reunião geral, onde foi pedido que algum aluno partilhasse um nível do jogo e todos discutissem acerca do preço de cada um dos tipos de doce. Um dos objetivos comum a todas as aulas era ouvir todos os alunos e as suas diferentes opiniões. Apesar de um dos alunos ter logo dado a resposta correta, outro aluno partilhou a sua maneira de pensar, diferente. Havia dois tipos de doces diferentes a custar x e o aluno dividiu o número total de doces pelo preço, mesmo estes sendo diferentes. Rapidamente outro aluno interrompeu e perguntou se podia esclarecer, justificando que ele não podia fazer daquele modo uma vez que os doces eram diferentes. Primeiro tinha que descobrir o preço de um dos tipos. Todos concordaram, tendo depois determinado o preço dos dois tipos de doce. Assim terminou a aula tendo sido sugerido aos alunos que aproveitassem a aula assíncrona imediatamente a seguir para colocar as suas resoluções no Bloco de Notas de cada um.

Aula 2:

• **Antes:** Depois de a aula anterior ter sido, no geral, bem sucedida, foi pensado que, na aula seguinte, seria possível dar o salto para a introdução da palavra “Equação”. Uma vez que queria que os alunos tivessem o primeiro contacto com a noção de equilíbrio na balança de dois pratos, e alertada pelo facto de muitos alunos nunca terem visto nem trabalhado com uma, pensei numa abordagem inicial de conhecimento desta ferramenta, para depois serem capazes de relacioná-la com as equações. Para isso, fiz uma pequena pesquisa de vídeos que permitissem ver a balança e a sua dinâmica, e não apenas reconhecer o

objeto estático. Depois de selecionado o vídeo, nele já havia a relação entre a balança e as equações, com um exemplo visual que poderia servir para os alunos relacionarem posteriormente. À volta deste vídeo, foi então construída uma tarefa, inspirada numa tarefa inserida numa proposta de cadeia de tarefas para o 7º ano, relativamente ao *Programa de Matemática do Ensino Básico* de 2007.

- **Objetivos da tarefa Equilíbrio nas Balanças** (Anexo II) – Esta tarefa teve como objetivo traduzir em linguagem algébrica várias situações de balanças em equilíbrio. Em algumas das situações, o peso desconhecido podia ser determinado de um modo intuitivo ou com a realização de operações elementares que os alunos já conheciam.

- **Durante:** A aula começou com algumas perguntas para os alunos responderem sem qualquer introdução prévia: Alguma vez tinham visto uma balança de dois pratos? Sabem o que é uma equação?

Em relação à primeira pergunta, vários alunos responderam que sim, mas, na segunda pergunta, houve um silêncio geral. O objetivo era a palavra ficar a pairar nas suas ideias. Para ficarem mais esclarecidos, foi apresentado um vídeo que introduzia a balança de dois pratos, para que os alunos que não conheciam ficassem com uma ideia do seu funcionamento. Para além disso, no vídeo aparecia o exemplo de uma situação equacionada a partir da balança de dois pratos, sendo também o prato do lado esquerdo do ecrã associado ao primeiro membro de uma equação e o prato do lado direito do ecrã associado ao segundo membro de uma equação. O vídeo foi exibido duas vezes e depois os alunos foram convidados a distribuir-se pelos grupos de trabalho para refletirem acerca daquelas ideias enquanto realizavam a tarefa, em que eram desafiados a equacionar situações visualizando o equilíbrio na balança de dois pratos em diferentes situações.

Aula 3:

- **Antes:** Refletindo acerca da aula passada e consultando os Blocos de Notas dos alunos, foi constatado que alguns grupos não tinham terminado de equacionar todas as situações propostas. Assim sendo, esta aula foi pensada e dividida em duas partes: a primeira parte em que os grupos que não tinham terminado tinham oportunidade para terminar o trabalho proposto na aula anterior, e uma segunda parte em que iriam explorar um novo jogo relacionado com a balança de dois pratos e a sua relação com o equilíbrio. Para os alunos que tinham terminado a

tarefa, o seu trabalho começaria pela segunda parte – o *jogo das Balanças*³. Este jogo foi encontrado aquando de uma pesquisa acerca de como familiarizar os alunos que não conheciam a balança de dois pratos com o seu funcionamento. Uma das suas vantagens é o facto de esta ser interativa, ao contrário do que acontecia na ficha de trabalho proposta na aula anterior, *Equilíbrio nas Balanças*. Aqui, para que fosse possível passar de nível, era necessário compreender o que era equilíbrio e o que era desequilíbrio, algo para o qual o grupo de trabalho poderia ser bastante útil.

• **Objetivo da Tarefa Balança Interativa** (Anexo III) - Os primeiros níveis do jogo têm situações bastante simples de balanças de dois pratos, em equilíbrio ou em desequilíbrio, para que os alunos pudessem continuar a conhecer e explorar este tipo de balança. No jogo os alunos tinham que determinar o peso de um objeto na balança ou então identificar qual o objeto mais leve ou mais pesado. Em algumas situações, na tarefa, foi acrescentada uma alínea extra, em que os alunos deviam procurar representar a situação por uma equação. De acordo com as *Aprendizagens Essenciais*, os objetivos da tarefa eram:

- Explorar, analisar e interpretar situações de contextos variados que favoreçam e apoiem uma aprendizagem matemática com sentido;
- Utilizar tecnologia digital, nomeadamente aplicações interativas, programas computacionais específicos e calculadora.

• **Durante:** A aula foi introduzida com a explicação dos dois momentos de trabalho: o primeiro momento para terminar a ficha de trabalho da aula anterior e o segundo momento em que teriam que explorar um jogo juntamente com a resolução da tarefa *Balança Interativa*. Nesta tarefa era pedido o registo de alguns níveis do jogo. A tarefa continha ainda umas perguntas extra que faziam um elo de ligação com a ficha de trabalho anterior, tendo os alunos que refletir novamente acerca de como equacionar determinadas situações. As professoras entravam nas diferentes reuniões dos grupos de trabalho ouvindo as discussões e esclarecendo eventuais dúvidas.

Aula assíncrona anterior à aula 4: Entre a aula 3 e a aula 4 existia uma aula assíncrona de 50 minutos. Nessa aula foi sugerido que realizassem a Tarefa Os Romanos e o X (Anexo IV). Esta é uma tarefa que recorre ao humor e cujo objetivo

³ Disponível em https://web.moderna.com.br/html/html5/m18_BUmat3_u07jq_balanca/

era que os alunos pensassem um pouco acerca do que era uma equação e uma incógnita, podendo fazer pesquisas e apelando para o trabalho individual. Esta foi a única tarefa da intervenção pedagógica sugerida neste modo de trabalho, para além da realização de exercícios do manual adotado pela escola. Outro objetivo era que os alunos não soubessem apenas uma definição, mas que a conseguissem escrever e relacionar com diversas situações, neste caso, uma situação humorística.

Aula 4:

• **Antes:** Apesar de os alunos já andarem a trabalhar com equações, eles saberiam o que era uma equação? E quando estavam a trabalhar com equações, saberiam que conceitos deviam usar? Foi sentida a necessidade de esclarecer alguns conceitos ligados a este tema nesta fase, depois de já terem visto e trabalhado com alguns exemplos. No entanto, a introdução dos conceitos não devia ser simplesmente ler uma página do manual, pois eu queria introduzir alguma dinâmica nesta exploração de conceitos. Assim foi pensada uma sopa de letras, criada para responder a este desafio.

• **Objetivo da Tarefa Sopa de Letras... ou incógnitas?** (Anexo V) - A linguagem própria das equações é algo fundamental para que os alunos se possam exprimir oralmente e por escrito de forma correta. Assim, o objetivo desta tarefa era que os alunos comesçassem a contactar com estes termos, mas de forma lúdica. Assim, apesar de vários deles já terem sido utilizados na sala de aula virtual no discurso das professoras (como membro, termo, equivalentes, entre outras), o objetivo era que os alunos reconhecessem e relacionassem conceitos relativos à linguagem das equações, com a mistura do fator desafio que era encontrá-los numa sopa de letras. De acordo com as *Aprendizagens Essenciais*, os objetivos da tarefa eram:

- Expressar, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, com precisão e rigor, para explicar e justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia).

• **Durante:** No início da aula, os alunos foram questionados sobre se saberiam o que era uma equação e uma incógnita. Rapidamente surgiram opiniões de que uma equação seria uma *conta com letras*. Desenvolveu-se uma discussão acerca das diferentes opiniões e foram vistos e registados alguns exemplos de equações. Em relação ao significado de incógnita, rapidamente os alunos responderam que

uma incógnita era uma letra. Deixou-se registado no Bloco de Notas a definição de incógnita, exemplos de igualdades que eram equações e também exemplos de igualdades que não eram equações, dadas pelos alunos. Depois de reunidas e discutidas todas as ideias à volta destes conceitos, os alunos foram para os grupos de trabalho procurar palavras relacionadas com equações, que já tinham ouvido nas aulas, na sopa de letras. O desafio era ainda maior quando na tarefa era pedido para relacionar as palavras com o seu significado.

Aula 5:

• **Antes:** Os alunos já tinham equacionado problemas, já tinham contactado com balanças em equilíbrio, já determinavam a solução de um problema com algo desconhecido e já tinham contactado com alguns conceitos centrais neste tema. O próximo desafio seria perceber se os alunos sabiam o que realmente era solução e o que não era uma solução de uma dada equação. Para isso, foi planeada a discussão de um problema em grupo turma – *A astúcia do Grande Mágico no País das Equações* (Anexo X). Depois do conceito de solução ser mais uma vez explorado, achei importante propor-lhes algo lúdico para que os alunos continuassem a explorar este conceito. Feita uma pesquisa, foi encontrado um jogo, *Comboio das Equações*⁴, que parecia encaixar-se perfeitamente no objetivo da aula. Para além disso, tinha uma característica diferente dos jogos apresentados nas aulas deste tema até então – tinha um fator mais desafiante, o tempo. Os alunos tinham que pensar o mais rapidamente possível para ganharem mais pontos e conseguirem alcançar o nível mais alto possível. Esperava-se que o fator de competição saudável fosse um despertar de boas sensações para os alunos acerca deste tema.

• **Objetivo da Tarefa *Comboio das Equações* (Anexo VI)** - O objetivo deste jogo era que os alunos soubessem reconhecer o que é e o que não é solução de uma determinada equação. O jogo era composto por vinte níveis. No primeiro nível aparecia um comboio que na sua carruagem carregava uma equação de 1º grau. Por cima do comboio sobrevoavam balões de ar quente que transportavam diferentes valores numéricos em que um deles correspondia à solução da equação. Havia uma barra de tempo na parte superior da tela do jogo e existiam balões que transportavam extras para o jogo, como tempo extra, pontuação extra, que muitas vezes eram importantes para o aluno. À medida que os níveis iam

⁴ Disponível em <https://wordwall.net/pt/resource/4902167/trem-das-equa%C3%A7%C3%B5es-do-1%C2%BA-grau>.

aumentando, as carruagens do comboio também aumentavam, e por consequência as equações que tinham que encontrar a sua respetiva solução também aumentavam. Os alunos tinham que ser mais rápidos, mais eficazes e os elementos extra ficavam cada vez mais importantes para ser possível passar para o nível seguinte. Através desta atividade lúdica e com o fator competição, os alunos praticavam e adotavam as suas estratégias para descobrirem a solução das equações propostas. De acordo com as *Aprendizagens Essenciais*, os objetivos da tarefa foram:

- Realizar tarefas de natureza diversificada (projetos, explorações, investigações, resolução de problemas, exercícios, jogos).

• **Durante:** A aula começou com uma pergunta simples – *Gostam de magia?* Rapidamente os alunos ficaram agitados e alguns respondiam entusiasmados. Então foi partilhado com a turma o problema *A astúcia do Grande Mágico no País das Equações* (Anexo X). Foi sugerido que pensassem e, assim que quisessem partilhar com a turma os seus poderes de magia, para levantarem a mão virtual. Algumas mãos no ar depois, começámos a ouvir os alunos e as suas justificações. No meio de um pedido de justificação a um aluno, este respondeu que “um mágico nunca revela os seus segredos”. Os alunos estavam envolvidos na peça de teatro criada naquele bocadinho de aula. Reforçada a ideia do que era a solução do problema que equacionaram e esclarecido o que não era solução, através de exemplos, os alunos foram para os grupos de trabalho desafiados mais uma vez por um jogo. Desta vez, o jogo *Comboio das Equações* acompanhado de uma ficha de trabalho onde tinham que registar dois níveis do jogo e, no fim, publicar no Bloco de Notas a pontuação obtida. No entanto, a discussão acerca do problema *A astúcia do Grande Mágico no País das Equações* prolongou-se mais do que o planeado e, até a aula terminar, os alunos tinham apenas 10 minutos para alcançarem o nível máximo.

Aula 6:

• **Antes:** No final da última aula ficou claro que o tempo que tinha restado após a discussão com a turma não era suficiente para a exploração completa do jogo. Assim, ficou determinado o início da aula seguinte: continuar a explorar o jogo *Comboio das Equações*. Para além disso, foi sugerido aos alunos que pensassem e resolvessem o problema *O valor da amizade* nos grupos de trabalho, uma vez que se considerou que deviam continuar a trabalhar em equacionar problemas e encontrar a sua solução.

• **Objetivo do problema** *O valor da amizade* (Anexo VII) - Uma vez que considero que as equações devem ser vistas como uma ferramenta para resolver determinadas situações problemáticas, antes de avançar para os Princípios de Equivalência, o objetivo desta tarefa era que os alunos resolvessem uma situação problemática humorística recorrendo às equações.

• **Durante:** A aula começou diretamente nos grupos de trabalho para dar seguimento à aula anterior, em que os alunos tinham começado a explorar o jogo *Comboio das Equações*. Foi sugerido que, mesmo quem tinha terminado o jogo, poderia desafiar-se a si próprio a conseguir obter uma pontuação mais alta. Nos quinze minutos finais da aula, juntou-se toda a turma na reunião geral para jogarmos um nível em conjunto e relacionarmos os conceitos com o jogo, nomeadamente o conceito de solução e não solução com os respetivos balões que correspondiam ou não à solução da equação que aparecia em cada comboio. Os alunos mostraram-se entusiasmados e alguns um pouco aborrecidos com o facto de terem perdido pontos devido ao funcionamento do próprio jogo, por exemplo o não surgimento a tempo de um novo balão com a solução da equação em causa. Na tarefa correspondente a este jogo foi pedido o registo da pontuação no Bloco de Notas. Os alunos resolveram a tarefa *O valor da amizade* sem apresentarem grandes dificuldades na mesma.

Aula 7:

• **Antes:** Depois da última aula, percebi que os alunos encontravam facilmente a solução de equações do tipo $ax + b = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, através da substituição ou recorrendo às operações inversas. Assim, era necessário “dar o salto” e fazê-los explorar equações um pouco mais complexas, nomeadamente equações do tipo $ax + b = cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ficou então decidido que, pelo menos o início da aula seguinte seria reservado para ouvir as ideias dos alunos para encontrar a solução de uma equação do tipo $ax + b = cx + d$. Depois de feita uma pesquisa acerca de materiais lúdicos para explorar este tipo de equações, foi encontrada uma applet do GeoGebra⁵ que poderia ser uma ajuda para a perceção dos alunos daquilo a que chamamos princípio de equivalência da adição. Foi então pensada uma tarefa à volta desta applet, *Balança de Equações no GeoGebra*, onde era

⁵ Disponível em <https://www.geogebra.org/m/XWzQi3hz>.

sugerido aos alunos que registassem a equação que a applet lhes propunha e encontrassem a sua solução.

• **Objetivo da Tarefa *Balança de Equações no GeoGebra*** (Anexo VIII) - Até este momento, foi mais usual os alunos resolverem as situações problemáticas apresentadas por processos mais intuitivos e não apresentarem a resolução de equações com toda a sua linguagem algébrica bem estruturada. Assim, o objetivo do trabalho dos alunos com a applet era que comesçassem a ter contacto com esta linguagem, através da simplificação das equações e escrita de equações equivalentes mais simplificadas. A applet era constituída por uma balança de dois pratos, acompanhada por uma legenda dos símbolos que apareciam no ecrã. As bolinhas vermelhas simbolizavam uma unidade e as cruzes simbolizavam a variável x . A applet permitia que os alunos representassem diferentes equações através destes símbolos na balança de dois pratos. Mas a tarefa baseada nesta applet – *Balança de Equações no GeoGebra* – pedia mais do que isso. Os alunos tinham que começar por representar a equação proposta, e depois simplificá-la, obtendo equações equivalentes e encontrar a solução, com a ajuda de que quando era retirado a mesma quantidade do mesmo objeto nos dois pratos da balança, esta sendo interativa, continuava em equilíbrio. Se fossem quantidades diferentes, desequilibrava. Este era outro grande objetivo da tarefa, dar significado ao princípio de equivalência da adição, para que os alunos, através da prática e da balança de equações conseguissem compreender que era possível adicionar ou subtrair um mesmo número a ambos os membros de uma equação e manter a balança equilibrada, ou seja, obter uma equação equivalente. De acordo com as *Aprendizagens Essenciais*, os objetivos da tarefa eram:

- Reconhecer, interpretar e resolver equações do 1.º grau a uma incógnita (sem denominadores) e usá-las para representar situações em contextos matemáticos e não matemáticos.
- Utilizar tecnologia digital, nomeadamente aplicações interativas, programas computacionais específicos e calculadora.
- Explorar, analisar e interpretar situações de contextos variados que favoreçam e apoiem uma aprendizagem matemática com sentido (dos conceitos, propriedades, regras e procedimentos matemáticos).

• **Durante:** A aula começou com uma pergunta que criou algum alvoroço na turma. A pergunta foi: *Gostam de desafios?* Rapidamente se notou entusiasmo do outro lado do ecrã e várias vozes diferentes respondiam que sim. Então foi apresentado

o desafio do início daquela aula em que pedia para determinarem a solução da equação $5x + 1 = 4x + 4$. Alguns alunos colocaram as suas mãos virtuais no ar e compartilharam as suas ideias. Com a discussão que se proporcionou, o plano de aula saiu do controlo, sendo mantida a discussão entre os alunos durante quase toda a aula. Apenas nos cinco minutos finais, foi partilhada a applet e se mostrou o seu funcionamento. Neste momento final, aquando da escrita de uma equação equivalente à inicial $5x = 4x + 3$, um aluno afirmou que $4x + 3$ era igual a 7. Quando a turma foi questionada sobre se concordava ou não com esta afirmação, vários alunos disseram que sim. Aproveitando o modelo da applet que representava x por uma cruz e a unidade por uma bola vermelha, pedi para representarem $4x + 3$ (Figura 2). Perguntei: *É verdade que é igual a 7?* Rapidamente responderam que não, que não podiam *juntar*. Ficou assim a ideia de que só se podia adicionar termos semelhantes.

$$5x = 4x + 3$$

~~7~~

$$xxxx \dots = 4x + 3$$

$$4x + 3 \quad \boxed{xxxxxxx} = 7x$$

Figura 2 - Registo no Bloco de Notas da discussão acerca da adição de termos semelhantes

Aula 8:

• **Antes:** O plano da aula 7 não tinha sido cumprido, por isso a aula seguinte seria para os alunos explorarem as diferentes equações da applet do GeoGebra e trabalharem na tarefa *Balança de Equações no GeoGebra*.

• **Durante:** A aula começou com a conclusão da discussão da última aula, encontrando a solução da equação $5x + 1 = 4x + 4$ com o auxílio da applet do GeoGebra, deixando a ideia no grupo turma do princípio de equivalência da adição. Esta ideia era apoiada através da balança interativa, em que se retirava a mesma quantidade de cada um dos lados da balança e se escrevia a equação equivalente mais simplificada, com a correspondência de cada lado da balança ao membro da equação. Depois, os alunos foram para os grupos de trabalho explorar a applet e encontrar a solução das equações apresentadas, acompanhados pela tarefa *Balança de Equações no GeoGebra*.

Aula 9:

• **Antes:** Já tendo sido partilhadas com os alunos várias ferramentas para a resolução de equações, a ideia agora seria vê-los a aplicar essas ideias, mas em contextos e situações às quais atribuísem sentido. Assim sendo, era importante que os alunos se envolvessem na resolução de problemas, para explorarem os diversos modos de resolução e os diversos raciocínios possíveis para a resolução de problemas. Juntando esta necessidade com a vontade de continuar a introduzir elementos lúdicos na sala de aula, o plano era a criação de uma ficha de trabalho que envolvesse o humor. Para além disso, esta seria uma mais-valia, uma vez que um dos aspetos que queríamos trabalhar com ambas as turmas seria a interpretação dos enunciados. Surgiu então a ideia, inspirada numa das fichas da aplicação *MILAGE APRENDER +*, a escrita de uma ficha de trabalho com recurso à banda desenhada humorística *Mafalda*.

• **Objetivo dos Problemas da Mafalda** (Anexo IX) - Esta tarefa apresenta um conjunto de problemas que requerem uma interpretação adequada de três tiras de banda desenhada e a adoção de uma estratégia que permita responder ao problema. Essa estratégia pode ou não passar pela resolução de uma equação que represente as situações apresentadas. Nas três tiras de banda desenhada adaptadas, recorre-se ao humor como elemento lúdico de aprendizagem. De acordo com as *Aprendizagens Essenciais*, os objetivos da tarefa eram:

- Reconhecer, interpretar e resolver equações do 1.º grau a uma incógnita (sem denominadores) e usá-las para representar situações em contextos matemáticos e não matemáticos.
- Realizar tarefas de natureza diversificada (projetos, explorações, investigações, resolução de problemas, exercícios, jogos).
- Usar equações para modelar situações de contextos variados, resolvendo-as e discutindo as soluções obtidas.
- Explorar, analisar e interpretar situações de contextos variados que favoreçam e apoiem uma aprendizagem matemática com sentido (dos conceitos, propriedades, regras e procedimentos matemáticos).

• **Durante:** A aula começou com a pergunta: *Gostam de banda desenhada?* Rapidamente as respostas se dividiram, ouvindo do outro lado do ecrã alunos a dizer que sim, alunos a dizer que mais ou menos e alunos a dizer que nem por isso. Então foram questionados se conheciam a *turma da Mafalda*, tendo alguns

alunos respondido que sim e outros que desconheciam. Assim, foi apresentada uma tira de banda desenhada para apresentar a personagem da Mafalda e todos ficarem mais ou menos familiarizados com os problemas que iam aparecer a seguir. Depois de apresentada a *Mafalda* foi sugerido que os alunos se distribuíssem pelos grupos de trabalho para conhecerem mais da vida e dos problemas da *Mafalda*. As professoras andavam a circular pelos grupos de trabalho e, apesar de o plano ser regressar à reunião geral passados alguns minutos para refletirem sobre os problemas, isto acabou por não acontecer. Os grupos ainda estavam a discutir, estavam a trabalhar muito bem e com uma ótima dinâmica de entreajuda, ainda que, em níveis diferentes dos problemas. Mesmo havendo um ou outro grupo que já tinha terminado, os alunos tinham sido desafiados para pensarem em diferentes resoluções para o último problema da tarefa. Assim o plano foi alterado e a discussão ficou apenas pelos grupos de trabalho.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo, apresentam-se os métodos e procedimentos de recolha de dados. Começa-se por esclarecer quais as opções metodológicas selecionadas e por explicar a razão da sua seleção, com apoio em literatura de referência. Depois, é feita uma descrição detalhada dos participantes no estudo. Por fim, são indicados os métodos de recolha e análise dos dados, justificando a sua escolha.

4.1. Opções metodológicas

Este estudo seguiu uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo. Recorde-se que o objetivo do trabalho foi compreender de que forma a exploração de tarefas de natureza diversificada integrando elementos lúdicos pode apoiar uma aprendizagem significativa das equações no 7º ano de escolaridade. De modo a poder dar uma resposta a este objetivo foi preciso descrever como os alunos responderam e reagiram às diferentes tarefas propostas na sequência desenhada, categorizá-los e analisar as suas ideias e aprendizagens.

Por ser um estudo qualitativo é recomendada a utilização de métodos de recolha diversificados (Bogdan & Biklen, 1994). De acordo com estes autores, a investigação qualitativa tem cinco características essenciais. A primeira característica diz respeito à fonte dos dados ser um ambiente natural, sendo considerado o investigador o instrumento principal de recolha dos mesmos. Este aspeto coincide com o que aconteceu neste estudo pois os dados foram recolhidos no ambiente natural de ensino (a sala de aula, mesmo que virtual) e eu, como professora, fui o principal instrumento da recolha desses dados.

O segundo aspeto referido por Bogdan e Biklen (1994) centra-se no facto da investigação qualitativa ser descritiva. Tal como citado pelos autores:

Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos. (p. 48)

Neste estudo, como será descrito à frente, foram utilizados dados provenientes de transcrições de entrevistas e de aulas, de notas de campo e de documentos vários, procurando-se descrever as formas de pensar dos alunos.

O terceiro aspeto referido por Bogdan e Biklen (1994) é que os investigadores qualitativos se interessam mais pelo processo do que pelos resultados. Durante o estudo, procurei compreender de que modo os alunos desenvolviam as suas estratégias para resolver problemas envolvendo os conceitos-chave do tópico das equações e como superavam as suas dificuldades; portanto, foram os processos de pensamento que me interessaram e não só os resultados finais de aprendizagem.

A quarta característica mencionada por Bogdan e Biklen (1994) centra-se na forma como os investigadores analisam os dados: “não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses contruídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando” (p. 50). Apesar de a intervenção pedagógica ter sido desenhada, com base na literatura revista, a pensar numa trajetória de aprendizagem que ajudasse os alunos a melhor compreender os conceitos essenciais do tópico das equações, não foram formuladas hipóteses para serem depois confirmadas ou desmentidas. Procurou-se analisar também que aspetos dessa intervenção pedagógica foram determinantes no apoio às aprendizagens dos alunos e que aspetos mostraram precisar de serem refinados ou alterados.

Por fim, numa investigação qualitativa reconhece-se a importância da perspetiva dos participantes, pois “os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50). Por esse motivo, foram recolhidas as perspetivas de vários alunos sobre a intervenção pedagógica e as aprendizagens conseguidas, no seu ponto de vista.

Este estudo tem uma natureza exploratória e envolveu a participação mais ativa de seis alunos. Este estudo exploratório aproxima-se de um estudo de caso, mas pela extensão demasiado curta, não deve ser considerado como tal. Num estudo de caso, o horizonte temporal de recolha de dados é relativamente extenso, dando origem a um conjunto de dados muito rico e diversificado. Segundo Yin (1989):

O estudo de caso é uma metodologia adequada quando as questões do ‘como’ e ‘porquê’ são fundamentais, quando o investigador tem muito pouco controlo sobre os acontecimentos e quando o objecto do estudo é um fenómeno que se desenrola em contexto real e para o qual são necessárias fontes múltiplas de evidência para o caracterizar. (p. 139)

Vale (2004) identifica quatro características dos estudos de caso, baseada em vários autores: são particularistas, descritivos, heurísticos e indutivos. São

particularistas porque se focam em casos particulares e procura-se “algo de universal no mais particular” (p. 190). O presente estudo exploratório foca-se em seis casos particulares. São descritivos pois o objetivo é interpretar os fenómenos do estudo, sendo a descrição rica e completa um fator importante. Ao longo deste relatório procura-se descrever e interpretar as diferentes dimensões do envolvimento dos alunos ao longo da intervenção pedagógica. Os estudos de caso são heurísticos porque ajudam na compreensão, quer do investigador, quer do leitor acerca desse fenómeno. Por fim, são indutivos pois têm como suporte o “pensamento indutivo”, onde os conceitos e as relações entre esses conceitos resultam da análise dos dados e esses dados, por sua vez, estão enraizados no contexto. É um pouco isto que procuro fazer ao longo deste relatório, mas numa extensão reduzida, daí não me parecer bem considerar a investigação realizada como um estudo de caso propriamente dito.

4.2. Participantes

Todos os alunos são singulares e, portanto, todos têm algo diferente e de alguma maneira interessante para ser explorado. No entanto, devido à extensão que esse processo tomaria se todos os alunos fossem participantes no estudo, houve a necessidade de fazer uma seleção de alunos de forma criteriosa.

Numa primeira fase todos os alunos foram, de modo contínuo, englobados neste trabalho, diariamente, nas aulas, uma vez que acompanhei as aulas desde o primeiro dia do ano letivo. E isto foi muito importante, não só para conhecer a turma onde iria trabalhar no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, mas também para poder, mais tarde, seleccionar alguns alunos para o meu trabalho de investigação.

Numa segunda fase, e mais perto da implementação da intervenção pedagógica, foram analisadas as produções escritas de todos os alunos numa sequência de duas tarefas propostas (Anexo XII e XIII), já em ensino à distância, relativas ao pensamento algébrico, focando aprendizagens essenciais relativas à unidade de ensino das sequências. Os alunos estavam à distância, mas uma ferramenta de trabalho no Microsoft Teams, o Bloco de Notas, facilitou a recolha e análise das produções escritas dos alunos.

Numa terceira fase foram seleccionados doze alunos, seis de cada turma, para as primeiras entrevistas. Estes doze alunos foram seleccionados tendo em conta os seguintes aspetos: aproveitamento na disciplina de matemática (com base nas classificações do 1º período e nas observações realizadas desde o início do ano), nível de participação nas aulas, diversidade de abordagens na resolução de problemas. Depois da primeira entrevista, e devido à necessidade de reduzir os alunos que

funcionariam como informantes privilegiados (por limitações de tempo) ficaram selecionados e prosseguiram para a segunda entrevista seis alunos. Procurei selecionar alunos que fossem melhores informantes, ou seja, que tivessem mais facilidade em partilhar o seu raciocínio, em partilhar detalhes da sua forma de pensar. Procurei também alunos que não fossem demasiado influenciados pelo acompanhamento que tinham em centros de explicações ou instituições do género (pois percebi que alguns apresentavam diversidade de estratégias de pensamento por terem esse acompanhamento e não propriamente por terem pensado nessa diversidade de estratégias).

Neste sentido, os alunos seguintes, Diogo, Gil, Mário, Rafaela, Rebeca e Rui, foram selecionados para este estudo. De modo a assegurar o anonimato dos alunos, estes nomes são fictícios. O Quadro 4 seguinte resume características próprias destes intervenientes importantes na sua seleção.

Quadro 4: Características dos alunos selecionados.

Alunos	Aproveitamento no 1º Período a Matemática	Participação nas aulas	Breve descrição
Rebeca	Nível 3	Muito reduzida	Aluna que demonstra dificuldades e dificilmente expõe as suas dúvidas.
Mário	Nível 4	Muito reduzida	Aluno com excelente pensamento matemático, muito organizado nos seus raciocínios. No entanto nunca participa nas aulas, a menos que seja questionado.
Diogo	Nível 3	Muito participativo	Aluno bastante participativo, mas com algumas dificuldades a nível de interpretação.
Rui	Nível 3	Média	O aluno participa sem a necessidade de ser questionado. No entanto distrai-se com bastante facilidade, e tem pouca motivação para trabalhar.
Gil	Nível 4	Muito participativo	Muito participativo e com questões muito pertinentes. Excelente raciocínio.
Rafaela	Nível 2	Participativa, mas intervenções não construtivas	A aluna é esforçada, mas apresenta défice de atenção, associado a perturbação da oposição e do desafio. Revela potencial cognitivo, mas revela dificuldades a nível de leitura e interpretação que prejudicam o seu desempenho e a levam a recusar tarefas com receio do insucesso.

4.3. Métodos de Recolha de Dados

Os instrumentos de recolha de dados utilizados foram a gravação em áudio de grande parte das discussões matemáticas nos grupos dos alunos participantes, a observação participante de algumas destas discussões, notas de campo (essencialmente em aulas não gravadas e já no ensino presencial), a recolha das produções escritas dos alunos e ainda a realização de entrevistas com tarefas aos alunos selecionados como informantes principais.

4.3.1. Observação participante e notas de campo

Numa fase preliminar deste estudo, e decorrente do meu duplo papel de professora e investigadora, a observação dos alunos mostrou-se muito relevante. Através da observação de todas as aulas desde o início da Prática de Ensino Supervisionada e também das experiências letivas que fui tendo, pude ir conhecendo cada vez melhor os alunos, desenvolvendo uma percepção mais concreta do seu pensamento algébrico.

De acordo com Serrano (2004) interessa conhecer as realidades concretas nas suas dimensões reais e temporais, o aqui e o agora no seu contexto social. Também Vale (2004) afirma que as observações são a melhor técnica de recolha de dados do indivíduo em atividade, em primeira mão, pois permitem comparar aquilo que diz, ou que não diz, com aquilo que faz. Esta observação foi feita diariamente e, sempre que existiam intervenções que considerava que poderiam ser importantes para a análise dos raciocínios e formas de pensar dos alunos, era feito um registo dessas intervenções, num caderno que me acompanhava diariamente nas aulas. Esse registo era algo informal, com palavras-chave e com o nome do interveniente que me permitisse mais tarde recordar do momento e conseguir relacioná-lo com outras situações. Assim, ficaram registadas várias intervenções ao longo do ano numa espécie de diário de bordo, composto por diferentes notas de campo.

As notas de campo foram uma mais-valia para otimizar o máximo de detalhes possíveis, já que a “descrição funciona bem como método de recolha de dados, quando se pretende que nenhum detalhe escape ao escrutínio” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49). A partir do momento que em que obtivemos as autorizações para gravar as aulas (ver secção mais à frente sobre questões éticas), optei por gravar as discussões dos alunos dos grupos de trabalho em que todos os encarregados de educação tinham dado a sua permissão, uma vez que era mais difícil acompanhar todas as discussões, já que havia cerca de cinco grupos de trabalho em cada turma. A partir desse momento, as notas de campo foram substituídas por transcrições parciais das discussões dos alunos. No

entanto, quando voltámos à sala de aula presencial, em abril, as aulas já não eram gravadas, e, portanto, houve outra vez a necessidade de recorrer a notas de campo, registadas do mesmo modo das anteriores ao ensino à distância.

4.3.2. Gravação áudio das discussões em grupo

A gravação áudio das discussões dos alunos não estava inicialmente planeada, uma vez que, em ensino presencial, o trabalho de grupo não seria possível. Assim, estando no ensino à distância e estando os alunos distribuídos pelos diferentes grupos de trabalho, a gravação áudio tornou-se uma necessidade e uma possibilidade, uma vez que não conseguia ouvir todos os grupos no momento da aula. A gravação áudio foi então a maneira mais vantajosa encontrada para que, depois das aulas, fosse possível ouvir as conversas e analisar as ideias e discussões de todos os grupos. Estando os seis alunos selecionados distribuídos por diferentes grupos de trabalho, acabavam por ser ouvidos e analisados todos os grupos de trabalho com autorização para as gravações, dando uma ideia mais geral do comportamento da turma em relação a esta unidade de ensino.

Para que não se perdessem detalhes considerados importantes e para otimizar o processo de ouvir e analisar as gravações, registei num caderno (aquele que me acompanhou no ensino presencial) as ideias que considerei importantes durante a monitorização do trabalho dos alunos que fui fazendo nas aulas virtuais para depois analisar os dados. Este registo consistia na transcrição parcial das discussões, uma vez que transcrever na totalidade seria demasiado exaustivo e ineficaz, no que diz respeito ao tempo disponível.

4.3.3. Recolha das produções escritas dos alunos

De acordo com Cohen, Manion e Morrison (2007) a recolha documental assume um papel fundamental num estudo, já que a observação apresenta limitações ao nível do registo de dados e da sua interpretação. Assim sendo, este acompanhamento através das produções escritas terá um papel fundamental para a análise dos dados, uma vez que estas pertencem aos alunos e são independentes da memória.

O ensino à distância permitiu que a recolha das produções escritas dos alunos fosse mais simples, com o recurso ao Bloco de Notas da plataforma Microsoft Teams. Os alunos colocavam as suas resoluções no Bloco de Notas, no formato que fosse mais simples para eles (documentos word, fotografias do caderno). De um modo geral, na semana após a introdução das suas resoluções no Bloco de Notas, as professoras comentavam as suas resoluções, validando o seu trabalho ou dando sugestões para

melhorarem ou ainda deixando questões para refletirem. Os alunos tinham depois a oportunidade de responder a esses comentários e melhorarem as suas respostas. Através da captura de ecrã do Bloco de Notas guardava as resoluções dos alunos numa pasta do meu computador, para posterior análise detalhada. Foi ainda recolhida a resolução da uma ficha formativa realizada já em ensino presencial (Anexo XI), fotografando as resoluções dos alunos selecionados.

4.3.4. Entrevistas com tarefas

Ludke e André (1986) consideram que a técnica de entrevista desempenha um papel importante na atividade científica e especificamente na pesquisa em educação. Este tipo de entrevistas é definido por Quivy e Campenhoudt (2008) do seguinte modo:

Geralmente o investigador dispõe de uma série de perguntas – guias, relativamente abertas, a propósito das quais é imperativo receber uma informação da parte do entrevistado. Mas não colocará necessariamente todas as perguntas na ordem em que as anotou e sob a formulação prevista. Tanto quanto possível, ‘deixará andar’ o entrevistado para que este possa falar abertamente, com as palavras que desejar e na ordem que lhe convier. (pp. 192-193)

Segundo Vale (2004), a finalidade das entrevistas é a de obter informações que não se podem observar diretamente, como sentimentos, pensamentos, intenções e factos passados. É uma situação *cara-a-cara*, na qual o investigador obtém a informação ou opinião do participante, sendo um dos modos mais eficazes de recolher informação. Para além disso, quando utilizadas em conjunto com questionários ou tarefas contribuem para a sua melhor interpretação e dão a oportunidade ao investigador de clarificar aspetos relacionadas com os participantes, tendo a vantagem de clarificar novas questões que possam surgir durante a conversa.

Foram realizadas duas entrevistas com tarefas, semiestruturadas. Cada entrevista tinha um guião (Anexo XIV e XV) previamente preparado para orientar e garantir que todos os entrevistados respondiam ao mesmo conjunto de questões. Depois, consoante as suas respostas e interpretações, surgiam perguntas adaptadas a cada um. As entrevistas com tarefas incluem a proposta de realização de algumas tarefas matemáticas. A tarefa que acompanhou a 1ª entrevista encontra-se no Anexo XVI e na 2ª entrevista não houve a necessidade de criar um documento para partilhar, tendo escrito as questões sobre as quais queria que refletissem diretamente no Bloco de Notas de cada aluno entrevistado. A ideia é estimular os alunos a *pensar em voz alta*, de modo a melhor aceder aos seus processos de raciocínio (Goldin, 2000).

A primeira entrevista foi realizada na turma1 depois de trabalhada a tarefa *Balança Interativa* e na turma2 depois da tarefa *Comboio das Equações*. Esta diferença em

termos temporais deveu-se ao facto de as turmas terem diferentes dias disponíveis para a realização das entrevistas, sendo que a entrevista na turma2 já incluía mais uma tarefa, facto que depois foi acertado incluindo essa mesma tarefa na segunda entrevista da turma1.

A primeira entrevista demorou entre 20 e 30 minutos. Por sua vez, a segunda entrevista teve duração entre 15 e 20 minutos. Estas entrevistas foram agendadas previamente com os alunos, realizadas através da plataforma Microsoft Teams e gravado o áudio recorrendo a uma ferramenta desta mesma plataforma. Relembro o leitor que na primeira entrevista participaram 12 alunos e na segunda entrevista participaram seis, tal como já explicado anteriormente. O Quadro 5 apresenta a calendarização das entrevistas e os objetivos gerais das mesmas.

Quadro 5: Calendarização e objetivos das entrevistas.

		Data	Objetivos
1ª Entrevista	Turma1	1 de março	Perceber de que modo os alunos estavam a relacionar as diferentes atividades propostas – neste momento essencialmente os jogos online – com a sua aprendizagem e se este tipo de intervenção os envolvia positivamente.
	Turma2	16 de março	
2ª Entrevista	Turma1	26 de março	Perceber se as diferentes estratégias aplicadas tinham dado bases suficientes para que fossem capazes de resolver equações. Compreender de que modo as bandas desenhadas e o humor contribuíam para a sua melhor aprendizagem.
	Turma2	30 de março	

4.4. Questões de natureza ética

Em meados do 2º período, antes de iniciar a intervenção pedagógica, foi enviado um email aos encarregados de educação (Anexo XVII) com o pedido de autorização para gravação em áudio das aulas, recolha das produções escritas dos alunos e a realização de entrevistas envolvendo também a gravação áudio. Foi-lhes também explicado que a participação dos seus educandos no estudo era voluntária, com garantia de anonimidade e confidencialidade: no entanto, estando a implementação da investigação contextualizada nas aulas da disciplina de matemática, a participação de todos os alunos nas atividades propostas era esperada e não carecia de autorização dos encarregados de educação, pois fazia parte da planificação pensada para as aulas de matemática.

Durante o estudo foi assegurada a confidencialidade e privacidade dos dados dos alunos participantes, daí os nomes apresentados neste relatório serem todos fictícios e o nome da escola permanecer também no anonimato. Foram também assegurados, durante o estudo, o rigor e a transparência de atuação enquanto investigadora, comprometendo-me a respeitar, não falsificar e não distorcer dados e resultados, utilizando-os sem modificações. Comprometi-me ainda a destruir os dados após a conclusão do estudo e da sua divulgação.

4.5. Processo de análise de dados

Para a realização da análise dos dados selecionei quatro das nove tarefas propostas, tendo acesso às produções escritas de todos os alunos e à gravação áudio das discussões em grupo dos alunos que tinham permissão para a gravação. Esta seleção baseou-se no facto de estas tarefas trabalharem conceitos centrais da unidade de ensino. Deve-se também ao facto de o tempo não permitir analisar todas as tarefas.

As duas entrevistas realizadas aos alunos foram transcritas na sua totalidade. Já que eram entrevistas com tarefas, era necessário analisar como um todo, para se perceber atitudes, sentimentos relativamente às respostas, não querendo ocultar o contexto em que se inserem as respostas. Por sua vez, as gravações das discussões dos alunos nas aulas foram apenas transcritas parcialmente, por questões de tempo. Para além disso, necessitava apenas de identificar excertos que servissem de evidência para a interpretação dos dados que permitissem responder às questões de investigação.

Ao longo desta análise fui tentando identificar quais os processos adotados pelos alunos para a resolução das tarefas bem como as suas maiores dificuldades e as suas opiniões acerca dos contextos lúdicos. Tal como afirmam Ludke e André (1986), a análise dos dados envolveu duas fases: a organização de todo o material, dividindo-o em categorias; e a procura de conexões entre essas categorias. Numa primeira fase, foi realizada uma análise mais geral, tendo como objetivo a organização de toda a informação, de modo a ficar com uma visão geral dos aspetos em que me deveria focar. Depois, mais detalhadamente, fui analisando tarefa a tarefa. Começava por analisar as produções escritas e procurava perceber qual o método seguido pela maioria dos alunos. Depois, analisava casos mais particulares. Como tinha feito a transcrição das entrevistas totalmente, tinha as ideias das mesmas ainda bastante presentes e conseguia ligar aspetos importantes dos diferentes meios de recolha de dados. Assim já sabia o que procurar e em que local devia procurar – entrevistas, notas de campo ou excertos das aulas.

5. Análise dos dados

Ao longo deste capítulo, apresentam-se e analisam-se os dados recolhidos no decorrer da intervenção pedagógica. Este capítulo está organizado segundo as tarefas estruturantes do planeamento da unidade de ensino, onde procuro apresentar os episódios onde surgem novos conceitos ou situações fundamentais para o desenvolvimento desta unidade de ensino. A análise destas tarefas focou-se nas estratégias de resolução de alguns alunos, bem como nas suas dificuldades e opiniões. São também incluídas informações relativas a uma ficha formativa realizada já no ensino presencial. As notas de campo que fui retirando durante as aulas, a transcrição de excertos de aulas, as produções escritas dos alunos e as transcrições de entrevistas com tarefas realizadas são as fontes de evidência em que se sustenta a interpretação dos dados. Por fim, para uma melhor compreensão do leitor, é realizada uma síntese no final da análise de cada tarefa. Nessa síntese são evidenciadas as estratégias utilizadas pelos alunos, as suas maiores dificuldades e ainda a análise da sua evolução no decorrer da unidade de ensino.

5.1. *Tarefa dos Doces*

O enunciado apresentado na Figura 3 corresponde à segunda parte da *Tarefa dos Doces*. A primeira parte é composta por uma atividade mais exploratória, onde foi pedido para os alunos resolverem os quatro primeiros níveis do jogo e registarem os seus raciocínios. Recorde-se que, neste jogo, os alunos envolviam-se na resolução de *equações visuais*, contextualizadas em situações problemáticas não demasiado complexas.

O objetivo da primeira parte da tarefa era conhecerem o jogo e começarem a pensar nas técnicas para resolverem os desafios dos diferentes níveis. No entanto, apesar da tarefa pedir para registarem os procedimentos, a maioria dos alunos não fez o registo aquando do jogo online, tendo sempre avançado de nível, pretendendo registar apenas no final. No entanto, quando terminaram os níveis propostos, assim que voltaram a iniciar o jogo, os níveis não eram fixos, ou seja, aquele que tinha sido o nível um da primeira vez que jogaram era agora um nível diferente. Os alunos partilharam este problema e foi retirada a exigência de registo na primeira parte da tarefa, para quem não o tivesse feito aquando da exploração do jogo.

Na segunda parte, sendo partilhado um nível fixo (Figura 3), através de uma captura de ecrã de um dos níveis do jogo, era exigida a justificação de todos os raciocínios, não havendo a dificuldade já descrita na parte I.

Parte II – Vamos explicar!

2. Observa a figura correspondente a um possível nível do jogo "*Algebraic Reasoning*" e responde às questões seguintes.



- 2.1. Qual é o tipo doce que devemos analisar em primeiro lugar? Porquê?
2.2. Determina o preço do doce escolhido na alínea anterior.
2.3. Qual é o doce cujo valor falta determinar? Como o vais determinar?
2.4. Determina o valor dos dois doces apresentados na figura.

Figura 3 - Enunciado da Parte II da *Tarefa dos Doces*

No geral, todos os alunos determinaram o valor dos doces corretamente, tendo justificado os seus raciocínios através de cálculos. Na alínea 2.1. os alunos identificaram corretamente qual o tipo de doce que deviam analisar em primeiro lugar. No entanto, tiveram dificuldades em expressar o porquê de ser aquele o escolhido, dando respostas circulares ou até mesmo justificações incorretas.

2.1 Os vermelhos porque irá ser mais fácil para depois resolver o 2º problema
2.2 O preço dos vermelhos é 7
2.3 O doce cujo o valor falta determinar é o azul:
Que dá 4 porque $65 - 7 \times 7$ (vermelhos) dá 16 a dividir por 4 que dá 4
2.4 vermelhos - 7
Azuis - 4

Figura 4 - Resposta da Rebeca à parte II da *Tarefa dos Doces*

2.1 - Eu acho que são os doces coloridos porque estão em primeiro e são mais
2.2 $35 : 5 = 7$
2.3 O doce que falta determinar e o doce azul e vou determinalo da seguinte forma
 $65 - 7 \times 7 : 4 = 4$
2.4 - $65 - 7 \times 7 : 4 = 4$

Figura 5 – Respostas do Diogo parte II da *Tarefa dos Doces*

A Rebeca deu uma resposta circular (Figura 4), dizendo que é mais fácil para resolver o segundo problema, mas continuando sem justificar o porquê. O Diogo, apesar de saber que devia começar por determinar o valor dos doces coloridos, deu uma

justificação incorreta (Figura 5). Não é pelo facto de estarem em primeiro lugar nem pelo facto de serem mais que devem seleccionar o tipo de doce, mas sim por se apresentarem num grupo onde há apenas um tipo de doce, para ser possível dividir o valor dos doces pela sua quantidade. Esta pergunta revelou uma dificuldade dos alunos em estruturar e explicar os seus raciocínios. Apesar de ser em número reduzido, houve alunos que justificaram a alínea 2.1. corretamente, como apresentado na Figura 6.

2.1

O colorido porque é um doce que está num conjunto só o que o torna mais simples.

Figura 6 - Resolução da alínea 2.1. da *Tarefa dos Doces* (Mário)

Apesar da dificuldade geral na justificação da alínea 2.1., as restantes alíneas foram resolvidas com bastante facilidade pela generalidade dos alunos, não sendo reconhecidas dificuldades nas resoluções e nas justificações.

Na primeira entrevista com tarefas, foi proposto aos alunos que resolvessem uma tarefa no âmbito do jogo da *Tarefa dos Doces*. Todos os alunos entrevistados responderam imediatamente ao desafio proposto (Figura 7), determinando com muita facilidade o valor dos doces.



Figura 7 - Captura de ecrã de nível do jogo *Algebraic Reasoning* partilhado durante a 1ª entrevista

Realizaram os seus raciocínios mentalmente e descreveram exatamente os cálculos que estavam a elaborar para obter as respostas. Vários alunos, ao tentarem responder imediatamente, diziam expressões incorretas, mas todo o raciocínio era bem estruturado, notando-se ser a pressa de se expressarem que dava essa impressão de incorreção. A seguir, é apresentado um excerto que retrata este aspeto, na entrevista ao Diogo.

Sara: E se eu te pedisse agora para falares um bocadinho comigo... para descobrires o valor dos doces, como é que tu fazias? Tens tempo para pensar...

Diogo: (imediatamente) Posso já fazer, professora?

Sara: Claro.

Diogo: Eu primeiro como via que o último, o terceiro, está a ver? O que tem o docinho que parece casinhas... Eu **calculava esse primeiro porque são todos iguais**... 1,2,... são 7, certo?

Sara: Conta melhor...

Diogo: São 6, são 6... Então **dividia 6 por 12** e ia-me dar 2, e eu acho que 2 é o preço de cada um.

Sara: 6 a dividir por 12 dá 2?

Diogo: Acho que sim, não sei... Não, é 12 a dividir por 6.

Sara: Ah, muito bem.

Diogo: Eu **enganei-me, eu confundi-me**.

Sara: Disseste muito bem: 12 a dividir por 6 dá 2... Portanto este 2 é o preço de quê?

Diogo: De cada casinha.

Sara: Muito bem. E o que é que ias determinar a seguir?

Diogo: Ia determinar os docinhos ao lado professora... vermelhos e brancos...

Sara: Perfeito. E como determinamos?

Diogo: Então, se cada docinho vale 2... e ali temos 4... então multiplicava 2 por 4 que ia dar 8. Depois, tirava... subtraía... fazia a conta $40-8$, que é o preço de todos menos o preço do das casinhas e ia dar 32, certo?

Sara: Muito bem.

Diogo: E depois dividia 32 por 4 e depois tinha o resultado do preço dos docinhos brancos e vermelhos.

Sara: Muito bem. E quais é que faltam determinar?

Diogo: Faltam os castanhos. Então como já sabia o preço dos vermelhos e brancos e dos verdes, eu fazia... somava tudo exceto os castanhos... subtraía menos 57 e dividia por 3. (Entrevista, 02.03.2021)

Apesar de existirem alguns lapsos enquanto fazia os cálculos, todo o raciocínio do Diogo estava correto e bem estruturado, notando-se que percebia o que estava a fazer. Para além disso, no seu discurso oral, já justificou corretamente o porquê de calcular o valor de um determinado doce em primeiro lugar, dizendo “porque são todos iguais”.

No que diz respeito às opiniões acerca desta tarefa, foram todas muito positivas, tendo todos os alunos entrevistados considerado o jogo como um elemento interessante e motivador para a aprendizagem. O Gil admitiu que via este jogo como um modo de entretenimento em contexto fora de aula:

Sara: O que é que tu achaste desse jogo [*Tarefa dos doces*]? Quero a tua opinião...

Gil: Por acaso eu achei fixe. Quando eu o joguei em grupo eu vi o jogo meio como **um jogo que eu pudesse jogar quando não tiver nada para fazer** porque a coisa que eu mais gosto em matemática é os cálculos em si... fazer os cálculos de cabeça... como esse jogo é um bom jogo para fazer cálculos de cabeça... (Entrevista, 01.03.2021)

O Diogo concordou que era um jogo interessante e que o motivou para além da aula, uma vez que admitiu ter tentado continuar a resolver mais níveis durante algum tempo:

Sara: Então, o que é que tu achaste desse jogo?

Diogo: Oh professora, eu gostei muito desse jogo. Esse jogo é bastante divertido, muito interessante, e eu também **estive muito tempo à volta dele** que é para tentar resolver os problemas dos níveis, mas eu gostei bastante do jogo. (Entrevista, 02.03.2021)

Vários alunos admitiram ser a primeira vez que tinham contactado com jogos na aprendizagem de algo no contexto escolar, sugerido por professores. Alguns afirmam que gostariam de continuar a fazer este tipo de atividades nas aulas, como no excerto da entrevista apresentado a seguir.

Sara: E costumavas jogar nos outros anos de escolaridade?

Diogo: Não... não... nunca joguei... só ... não, não, nunca joguei um jogo assim...

Sara: E gostavas de jogar mais vezes nas aulas?

Diogo: Eu, eu **adorava jogar mais estes joguinhos nas aulas**... eu gosto bastante... (Entrevista, 02.03.2021)

Síntese:

Ao longo da resolução da *Tarefa dos Doces*, observou-se que os alunos não apresentaram dificuldades no que diz respeito à resolução das *equações visuais*. O facto de a tarefa ser inserida num jogo fez com que a maioria dos alunos quisesse jogar ao máximo e só no final fazer o registo escrito na tarefa partilhada nos Blocos de Notas. Esta atitude demonstra interesse pelo jogo, mas também evidencia que não estão habituados a esta prática, tal como todos os entrevistados afirmaram.

No entanto, com esta atitude dos alunos, acabou por se perder algumas justificações dos seus raciocínios. Esta dificuldade foi ultrapassada através da parte II da tarefa, na qual, existindo um nível fixo, todos tinham a possibilidade de justificar. Esta foi uma das maiores dificuldades evidenciadas: dificuldade de argumentação. Quando foi pedido aos alunos, ao longo da tarefa, que explicassem o porquê de selecionarem (e bem) um dado doce para começar, todos os alunos fizeram a seleção corretamente, mas muito poucos alunos explicaram corretamente porquê. Um dos alunos, o Diogo, apesar de justificar incorretamente por escrito, oralmente explica corretamente. Isto demonstrou dificuldades ao nível da escrita e produção de justificações, aspeto que se tentou trabalhar ao longo das diferentes tarefas.

Considera-se que os alunos atingiram o objetivo desta tarefa. Os alunos desenvolveram técnicas informais para a resolução de equações, realizando as operações inversas para determinarem um valor desconhecido.

No que diz respeito à influência do contexto lúdico, com esta tarefa inicial foi possível ter um feedback muito positivo dos alunos, quer nas entrevistas, quer no decorrer da aula. Os alunos mostravam-se entusiasmados, mostravam que estavam a trabalhar e a querer resolver mais níveis para além daqueles que eram exigidos na tarefa. Alguns alunos acabaram mesmo por admitir que este poderia ser um jogo para se entreterem fora da sala de aula.

5.2. Comboio das Equações

O enunciado apresentado na figura 8 diz respeito à primeira questão proposta na tarefa que acompanhou o jogo online *Comboio das Equações*. Corresponde à captura de ecrã de um dos níveis do jogo, para que fosse possível os alunos deixarem registada a justificação dos seus raciocínios. Na figura 8 aparece também a resposta da Rafaela, que apesar de colocar a resposta corretamente, não a justifica. É de realçar que a aluna faltou à aula em que o jogo foi apresentado aos alunos e por eles explorado, tendo realizado a atividade na aula assíncrona seguinte.



Figura 8 - Resolução da Rafaela na Tarefa *Comboio das Equações*

Quando questionada na entrevista sobre esta mesma tarefa, Rafaela continuava a identificar o que era ou não era solução de uma equação, mas insistia que não sabia como explicar, apesar de ter achado o jogo interessante.

Rafaela: Fiquei no nível 5...

Sara: Nível 5 é muito bom... e qual é que era a tua estratégia de jogo? Como é que sabias qual o balão que devias rebentar?

Rafaela: Eu vou ser sincera, eu esse **tive muita dificuldade** stora... **não fiz à sorte... mas não sei como é que eu fiz aquilo** stora...

Sara: Então não percebeste bem o jogo, foi isso?

Rafaela: Sim, stora... não foi não perceber... mas **tive dificuldade em fazer e não sei explicar o que é que eu fiz...**

Sara: Então não gostaste muito deste jogo?

Rafaela: Não, eu gostei... achei interessante... mas **não sei mesmo explicar o que é que eu fiz...**

Sara: Então vamos pensar as duas... será que podíamos rebentar este balão? O -3?

Rafaela: Não.

Sara: Porque não?

Rafaela: Lá está, **não sei explicar...** (Entrevista, 16.03.2021)

Este tipo de resposta pode ser explicado pelas características da aluna, caracterizada pelo medo de falhar, apesar de saber resolver, mas também pode ter origem no facto, já referido, de ela ter faltado à aula em que se apresentou e trabalhou esta tarefa. Na ficha formativa realizada já em ensino presencial (Figura 9), a aluna justificou bem a sua resposta, apesar de considerar que a substituição não era uma justificação. Nota-se, no entanto, uma evolução face à sua primeira resposta a este tipo de problema. Contudo, o conceito de solução não estava ainda presente na Rafaela.

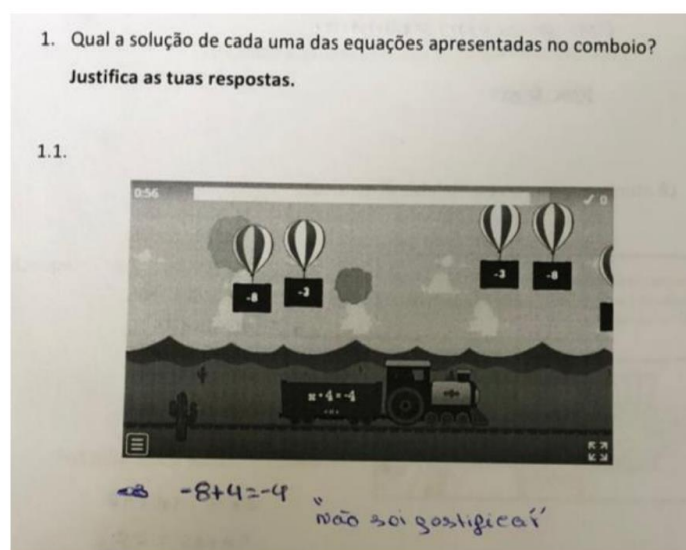


Figura 9 – Resolução da Rafaela na ficha formativa

Por outro lado, o Gil justificou a solução encontrada, substituindo x pelo valor numérico do balão que ele selecionou e obtendo uma afirmação verdadeira (Figura 10).



$$x - 7 = -9$$

$$x = -2 \text{ porque } -9 + 7 = -2$$



Figura 10 - Resolução do Gil na Tarefa Comboio das Equações

Após a intervenção pedagógica, Gil mostrou preferência por resolver equações lineares simples como as da Figura 11 usando operações inversas.

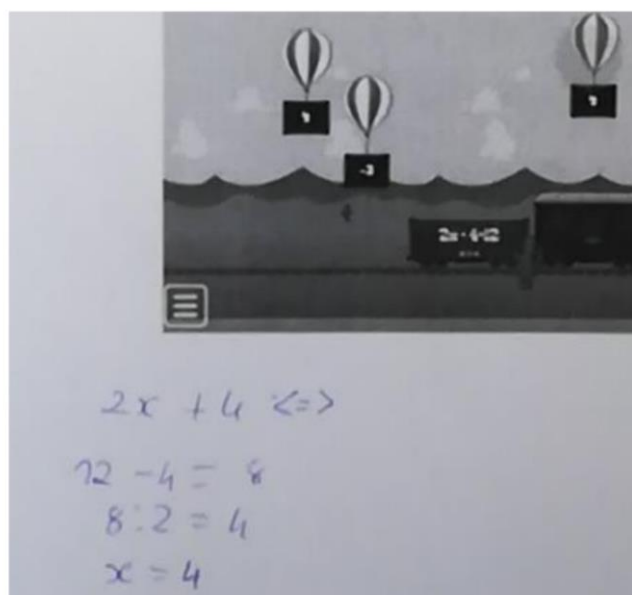


Figura 11 – Resolução do Gil na ficha formativa

Esta opção parece indicar que o aluno estaria a compreender o que estava a fazer. Gil enfatizou ainda o aspeto inovador de uma aula baseada em jogos durante a sua entrevista.

Sara: O que é que achaste desse jogo [*Comboio das Equações*]?

Gil: Eu gostei.

Sara: Porque é que gostaste?

Gil: Pelo facto de ser diferente... e... porque... não sei como explicar isto... **acho que se aprende melhor com jogos... não é com jogos... é com coisas diferentes, e o jogo foi uma coisa diferente.** (Entrevista, 26.03.2021)

Em geral, os alunos não tiveram dificuldade em resolver as equações lineares que surgiram no jogo, embora alguns se tenham esquecido de justificar as suas respostas. Durante o trabalho em grupo, o Rui não publicou nada no seu Bloco de Notas, embora estivesse envolvido com a tarefa dentro do seu grupo. Na gravação áudio da aula é notória a sua envolvimento e entusiasmo, juntamente com outros elementos do grupo. Chamando Bárbara ao outro elemento do seu grupo, com o qual ele discutia, o excerto seguinte decorre após perderem o jogo pela primeira vez.

Bárbara: A Rebeca teve mais do que nós...

Rui: Podemos começar a jogar outra vez professora, por favor?

Sara: Claro que sim...

[Estava a Bárbara a partilhar o seu ecrã com o jogo, e Rui ia dando palpites acerca das respostas]

Rui: Vou fazer um jogo só eu...

[Bárbara perde e partilha a sua pontuação]

Rui: Já vou passar à tua frente...

Bárbara: Vou jogar outra vez...

Rebeca: Temos que ir, temos aula.

Rui: Ainda temos intervalo... [E apesar de a aula de matemática ter terminado, continuam a jogar...] (Excerto de aula, 12.03.2021)

Este excerto ilustra a envolvimento do Rui no jogo proposto. Mesmo depois da aula terminar fez questão de aproveitar o intervalo para continuar a jogar, o que neste caso significa continuar a encontrar soluções de equações. O jogo gerou entusiasmo e não funcionou como um elemento de distração. Pelo contrário, funcionou como um elemento motivador e desafiador, como é evidente no excerto da transcrição da gravação áudio da aula acima. O facto de os alunos terem acesso aos primeiros dez lugares, os dez melhor classificados no final do jogo, despertou o fator competitivo e os alunos queriam superar-se a si mesmos e aos outros.

Enquanto se divertiam a resolver equações explodindo balões, os alunos tinham que pensar cada vez mais rápido para conseguirem subir de nível. Esse reconhecimento também ficou evidente nas entrevistas. Por exemplo, a Rafaela enfatizou a dimensão motivacional do jogo: “Apesar de ser uma pequena brincadeira acaba sempre por deixar as aulas mais divertidas, mais interessantes” (Entrevista, 16.03.2021). A tarefa preferida do Rui ao longo da intervenção foi a tarefa do *Comboio das Equações*, como ele explicou durante a entrevista:

Rui: Achei divertido, porque nós tínhamos várias opções e às vezes o balão passava e nunca mais voltava.

Sara: E gostaste disso?

Rui: Não, professora. Eu gostei porque às vezes irritava-me. Aquilo passava, depois demorava um ano, entre aspas, a passar outra vez o balão

e às vezes nem acertávamos na caixa (...) e depois a parte de rebentar os balões foi fixe porque rebentava e não precisávamos de andar a escrever e ainda por cima, tínhamos tempo e o **tempo foi o que nos limitou mais, a pensar mais rápido e a fazer mais raciocínios.**

Sara: Boa! Disseste muitas coisas boas... então o que que gostaste menos?

Rui: Porque às vezes a caixa não ia direitinha para a carruagem e às vezes ia para fora.

Sara: E o que que tu achas que aprendeste com este jogo?

Rui: **Aprendi a raciocinar mais rápido, neste caso, raciocinar rápido vai-nos ajudar na vida porque se for preciso alguma coisa urgente um raciocínio rápido... vamos raciocinar muito mais rápido e vamos fazer aquela coisa mais rápido.** (Entrevista, 16.03.2021)

Gil também concordou com o Rui, destacando o fator desafiador de tempo: “o facto de termos tempo [limitado] [para estourar os balões e marcar pontos] e o facto de podermos colocar mais do que uma caixa em cada um, para termos mais pontos” (Entrevista, 26.03.2021). Como o Rui, Gil ficava irritado quando não conseguia “clicar em cima dos balões e explodi-los”, ou quando “comboio estava em andamento então eu carregava para a primeira caixa, mas aquilo estava no finalzinho e caia na segunda” (Entrevista, 16.03.2021).

Os alunos mostraram muito entusiasmo perante esta atividade. Um deles fez questão de deixar registado no seu caderno virtual (Figura 12) que, após a aula e sem qualquer obrigatoriedade relacionada, tentou superar-se e voltar a jogar para conseguir chegar ao último nível: “Stora, depois da aula fui fazer o jogo e fiquei com 1755 [pontos] no último nível”.



Stora, depois da aula fui fazer o jogo e fiquei com 1755 no último nível.

Muito bem!

Figura 12 - Registo no caderno de um aluno da turma1

Alguns alunos fizeram observações interessantes sobre o uso de jogos, no geral, como recurso de aprendizagem. A Rebeca, na entrevista, quando questionada se considerava que os jogos a ajudavam a aprender respondeu “Sim, acho que sim... Como não estamos na escola e é mais complicado aprender, acho que os jogos têm

ajudado, pelo menos a mim...” (Entrevista, 16.03.2021). Também o Rui fez um comentário semelhante quando questionado sobre a sua opinião acerca do *Comboio das Equações* “é uma parte lúdica que muitos professores não fazem isto. Ah... uma parte lúdica para interagir com os alunos porque neste tempo com o Covid e como estamos em casa é mais difícil a professora mandar escrever nos cadernos e isso tudo...” (Entrevista, 16.03.2021). Parece que os alunos elogiam os métodos utilizados neste ensino à distância, não esperando que os professores tenham abordagens semelhantes na típica sala de aula presencial. Isto pode ser justificado pela inexistência deste tipo de atividades ao longo do percurso escolar dos alunos, tal como vários alunos admitiram ao longo das suas entrevistas. A Rebeca quando questionada se alguma vez tinha aprendido com recurso a jogos noutras disciplinas afirmou “Não, é só na matemática...” (Entrevista, 16.03.2021). O Mário à mesma questão respondeu “Não, porque matemática é a única disciplina que fazemos jogos...” (Entrevista, 01.03.2021). É de realçar que o Mário e a Rebeca são de turmas diferentes, não tendo o mesmo percurso até aqui. Duas realidades diferentes, com professores diferentes, com aulas diferentes, mas ambas com a ausência do lúdico nas suas atividades.

Síntese:

Este foi um dos jogos preferidos de grande parte dos alunos. Alunos que dificilmente participavam na aula de matemática eram muitas vezes os elementos mais ativos no decorrer do jogo. Para além disso, os alunos queriam encontrar a solução de mais e mais equações, para obterem uma boa pontuação final. Nesta atividade destacou-se a influência do fator competição. Como no final do jogo era partilhada uma lista com os dez melhores classificados, criou-se uma competição saudável entre os vários elementos da turma, fazendo com que os alunos quisessem jogar mais. Os alunos pediam para jogar mais. E neste caso, jogar mais, significava praticar mais, encontrar a solução de mais equações, entusiasmados, e ir vencendo a barreira do tempo, ou seja, sendo cada vez mais rápidos na procura da solução.

Em relação às estratégias utilizadas pelos alunos, volta-se a destacar o uso de operações inversas e o método da substituição. Contudo, identificaram-se dificuldades, mais uma vez, no que diz respeito às justificações. Também se notou que muitos alunos não consideravam a substituição como justificação suficiente para os seus raciocínios. Novamente, na oralidade, os alunos justificavam corretamente os seus raciocínios, tendo dificuldade em escrever o que pensavam. Outras dificuldades identificadas pelos alunos tiveram a ver com a própria dinâmica do jogo, alertando para algumas falhas do mesmo, que não lhes permitia avançar nos níveis.

Os alunos começam a achar natural aparecerem jogos na aula de matemática. No entanto, o seu entusiasmo não diminui, até pelo contrário. Sendo este um jogo mais dinâmico, mais desafiante no que diz respeito, por exemplo, ao tempo, fez com que os alunos se envolvessem mais. Este fator desafiante é realçado por todos os alunos nas entrevistas e este é apontado como o jogo preferido de muitos alunos. Mais do que isso, os alunos aprenderam. Na questão aula formativa partilhada já em ensino presencial, nota-se uma melhoria até de alguns alunos face à primeira aula em que jogaram pela primeira vez.

5.3. *Balança de Equações no GeoGebra*

Até à aula anterior a ser apresentada a applet do GeoGebra, que serviu de suporte para a tarefa *Balança de Equações no GeoGebra*, os alunos apenas resolviam equações recorrendo ao método da substituição ou através das operações inversas, como visto anteriormente. Relembre-se que esta applet permitia aos alunos dar significado ao princípio de equivalência da adição, para que, praticando na applet com a balança de equações, conseguissem compreender que é possível adicionar ou subtrair um mesmo número a ambos os membros da equação e manter a balança equilibrada, ou seja, obter uma equação equivalente. O trabalho em torno da applet permitia também que os alunos contactassem com a linguagem das equações, através da escrita de equações equivalentes, assim que aplicassem o princípio de equivalência da adição.

Na aula em que estava planeado introduzir a tarefa *Balança de Equações no GeoGebra*, para os alunos explorarem a applet, lançou-se o desafio de determinarem a solução da equação $5x + 1 = 4x + 4$. Alguns alunos colocaram as suas mãos virtuais no ar e partilharam as suas ideias. A primeira ideia partilhada foi de um aluno que, provavelmente com ajuda externa à escola, aplicou uma regra prática, escrevendo: $5x - 4x = 4 - 1 \Leftrightarrow x = 3$ (Notas de Campo, 15.03.2021). Quando pedido para justificar, o aluno não sabia o porquê de utilizar aquele raciocínio, mas afirmava com certeza que funcionava. Foram pedidas mais ideias e uma voz diferente disse que a solução era $x = 3$. Quando questionado acerca do processo que tinha usado para lá chegar, o aluno disse ter usado substituição: “o 1 era óbvio que não dava. O 2 tentei e não dava. O 3 funcionou... mas se a resposta fosse 100 ficava aqui até à noite” (Notas de Campo, 15.03.2021). Gerou-se, então, uma discussão entre os alunos. Uns expunham as suas dúvidas que eram respondidas por outros, ficando perceptível que já existiam diferentes alunos com diferentes técnicas para resolverem as equações. Ora, com a applet do GeoGebra seria dada mais uma ferramenta para a resolução de equações. A figura 13

apresenta a captura de ecrã de um dos possíveis níveis desta applet. Cada caixa azul corresponde a um prato da balança, e por sua vez, cada prato da balança corresponde a um membro da equação. Na aula foi explicado, através de um exemplo, que os alunos deviam primeiro representar a equação nos pratos da balança, e depois, obter equações equivalentes mais simplificadas, mantendo sempre a balança em equilíbrio.

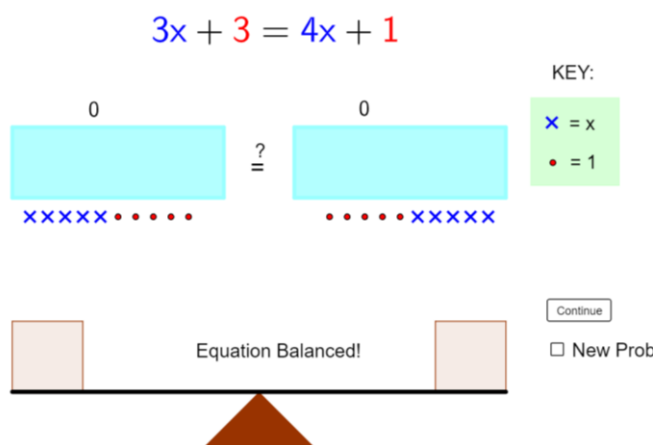


Figura 13 - Exemplo de um nível da applet do GeoGebra

A maioria dos alunos efetuava o procedimento de maneira correta e justificava explicando aquilo que realizavam na applet (Figura 14).

- **Nível 1:** Retiramos um X da direita tirando um X do prato direito tiramos um X do prato esquerdo fomos tirando ate que descobrimos que vais dar 1 .
- **Nível 2:** Colocamos as bolinhas e os X equivalentes a equação depois fomos retirando um a um ate que descobrimos que é 3 .

Figura 14 - Justificação da Rafaela na tarefa *Balança de equações no GeoGebra*

A Rafaela justificou, através de linguagem natural, o raciocínio que utilizou para conseguir encontrar a solução das equações. Aqui já se começou a perceber uma evolução nas suas justificações, face às tarefas anteriores. Notou-se também que a Rafaela compreendeu que, para equilibrar a balança e encontrar a solução de uma equação, é necessário retirar a mesma quantidade de objetos dos dois pratos da balança "... tirando um X do prato direito tiramos um X do prato esquerdo...".

No entanto, também foi vista em alguns grupos de trabalho uma procura de solução *mais rápida*. Os alunos retiravam uma cruz de um dos pratos da balança e esta desequilibrava. No entanto, como sabiam que a balança deveria estar em equilíbrio, do outro lado iam retirando bolinha a bolinha até à balança equilibrar. Por exemplo, se a balança equilibrasse depois de retirarem três bolinhas, a solução seria 3. Deste modo, esses alunos não estavam a fazer o pretendido. No entanto, esta necessidade de *retirar*

a mesma quantidade do mesmo objeto nos dois membros da equação apareceu na segunda questão da ficha de trabalho (Figura 15), em que se pedia a resolução de uma equação sem recorrer à interatividade da balança. Aí os alunos já tinham que aplicar o princípio de equivalência da adição, uma vez que a balança era estática e já não a conseguiam equilibrar do modo como estavam a fazer.

2. Resolve a seguinte equação:
 $x + 5 = 2x + 1$
 Explica o teu raciocínio.

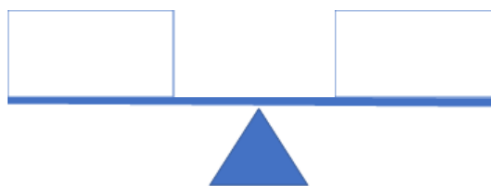


Figura 15 - Exercício 2 da Tarefa *Balança de Equações no GeoGebra*

Outra dificuldade que foi observada em alguns alunos era o facto de retirarem a mesma quantidade de objetos diferentes de cada prato da balança. Como é possível ver na Figura 13, na applet, a incógnita x estava representada por uma cruz e a unidade estava representada por uma bola vermelha. Alguns alunos retiravam uma cruz de um dos pratos da balança e depois retiravam uma bola vermelha do outro prato da balança (Figura 16). Nos casos em que a solução da equação em questão era 1 a balança equilibrava, daí os alunos continuarem a não perceberem o seu erro.

Viz 13: $4x + 1 = 5$

$$\Leftrightarrow 4x + 1 - x = 5 - \bullet$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 - x = 4 - \bullet$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 - \bullet = 3 - \bullet$$

$$\Leftrightarrow 2x - x = 2 - \bullet$$

$$\Leftrightarrow 1x - x = 1$$

Figura 16 - Resolução de um nível da applet do GeoGebra do grupo da Rafaela

Todos estes procedimentos foram comentados tendo sido deixada uma chamada de atenção em forma de feedback nos comentários do Bloco de Notas (Figura 17).

12: $4x+1=5$

$$\Leftrightarrow 4x+1(-x) = 5(-x)$$

$$\Leftrightarrow 3x+1(-x) = 5(-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1(-x) = 5(-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-x = 5(-x)$$

$$\Leftrightarrow 1x-x = 5(-x)$$

Achas que faz sentido subtrair "coisas" diferentes em ambos os membros?

Aqui, sim! Subtraíste "bolinhas" em ambos os membros!

Figura 17 – Comentário à resolução de um nível da applet do GeoGebra do grupo da Rafaela

Este feedback foi escrito com uma linguagem próxima à do aluno, para que fosse de mais simples compreensão. O comentário, de alguma forma, ajudou o aluno (e os seus colegas), porque o grupo já não cometeu o mesmo erro na aula seguinte (que decorreu no dia seguinte). Penso que, neste caso, o que pode ter levado o grupo a cometer este erro, foi o facto de a balança interativa equilibrar quando retiravam uma bolinha e um x , pelo facto de ambos valerem 1. Isto, de alguma forma, pode ter originado o erro, uma vez que a preocupação dos alunos era a balança equilibrar. Rapidamente fizeram a ligação que se a balança estivesse em equilíbrio, estavam no caminho correto. Já na aula seguinte, quando estavam a resolver a equação na balança estática (desenhada no enunciado da tarefa), o grupo rapidamente percebeu que não podiam retirar objetos diferentes. Na análise do excerto de aula, um elemento do grupo da Rafaela começou por afirmar “Ontem no GeoGebra tinha estrelinhas e pontinhos... então hoje pensámos assim... azuis é estrelinhas, vermelho é pontinhos” (Aula, 19.03.2021). Representaram então a equação proposta imediatamente na balança desenhada, com este raciocínio, sem dificuldades. Iam eliminando os objetos com a mesma cor, e comentavam “ok...continua equilibrada...” (Aula, 19.03.2021), reconhecendo que, quando retiravam a mesma quantidade do mesmo objeto, se mantinha o equilíbrio. No final, quando só restava um objeto vermelho no prato esquerdo da balança, começaram por pensar em retirá-lo, mas imediatamente um elemento do grupo exclamou: “são diferentes... stora, ficou um x ... por isso agora contamos quantas bolinhas tem aqui e sabemos o resultado...” (Aula, 19.03.2021), concluindo que a solução era 14.

5.3.1. O depois da applet do GeoGebra: como resolviam os alunos as equações?

Na segunda entrevista, quando questionados acerca da técnica que utilizavam para resolver equações, as opiniões ficaram divididas. Alguns alunos diziam que a técnica utilizada era a primeira aprendida, ou seja, a *técnica das balanças*. Por outro lado, outros alunos já tinham generalizado a técnica das balanças e feito o *upgrade* para a transposição entre os dois membros, admitindo ser um processo mais rápido. Outros, com ajudas externas à escola, aplicavam as regras sem tentar perceber o porquê de estas serem e poderem ser aplicadas, gerando confusão depois na sua aplicação. Vamos explicitar melhor a seguir estes três casos descritos, pela ordem apresentada.

No primeiro caso, a *técnica da balança* fazia sentido para os alunos e era bem aplicada, no geral. Eis um excerto de uma entrevista que ilustra este aspeto, na resolução da equação $2x + 3 = 3x + 1$.

Gil: Primeiro **fazia aquilo que fizemos no applet do GeoGebra...** que era... pegava no x e nas bolinhas que era o que tinha nas balanças.... Então tirava $2x$ de um lado e $2x$ do outro... e ficaria $0x$ e um 3 e $1x$ e 1 ... (Entrevista, 26.03.2021)

Esta utilização dos princípios de equivalência com recurso à imagem visual da balança da applet do GeoGebra era também notória nas produções escritas dos alunos. Vários descreviam, com muita frequência, aquilo que adicionavam ou retiravam nos dois pratos na balança, agora em cada um dos membros da equação. Recorriam a este procedimento como uma espécie de justificação do raciocínio que estavam a utilizar (Figura 18).

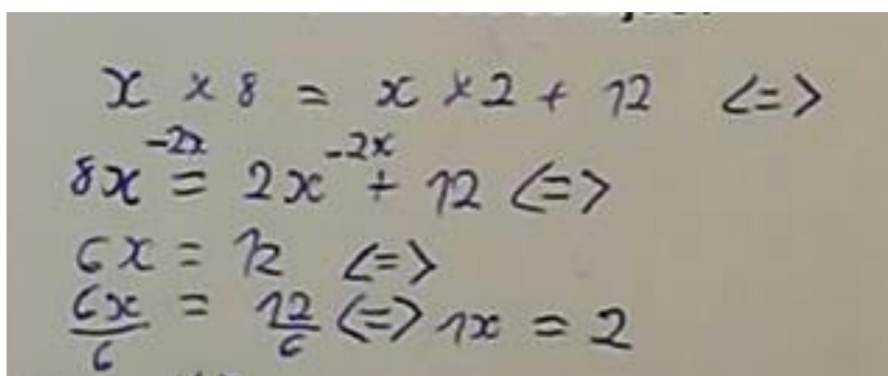

$$\begin{aligned} 8x &= 2x + 12 \quad \Leftrightarrow \\ 8x - 2x &= 2x - 2x + 12 \quad \Leftrightarrow \\ 6x &= 12 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{6x}{6} &= \frac{12}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 1x = 2 \end{aligned}$$

Figura 18 - Resolução de uma equação da ficha formativa pelo Gil

Apesar de na applet do GeoGebra os alunos não aplicarem o princípio de equivalência da multiplicação, só conseguindo adicionar ou retirar objetos, este princípio foi incluído nas suas resoluções de maneira muito natural. Nas primeiras tarefas

propostas ao longo desta intervenção pedagógica os alunos já resolviam as equações através das operações inversas, tendo sido um mecanismo informal que a maioria dos alunos facilmente aplicou. Então os alunos espontaneamente perceberam o que fazer para simplificar uma equação do tipo $ax = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Um dos problemas desta abordagem foi a dificuldade que os alunos tiveram em escrever e em utilizar a simbologia das equações, como o uso do símbolo de equivalência, ou mesmo a escrita de equações equivalentes mais simplificadas, ficando-se apenas pela representação nas balanças, agarrados à abordagem visual. Na figura 19, aparece a resolução da segunda questão da tarefa *Balança de Equações no GeoGebra*, em que, na sua resposta, o Rui apenas apresentou a solução da equação do enunciado, e uma representação na balança de dois pratos já simplificada, sem explicar como procedeu até a obter.

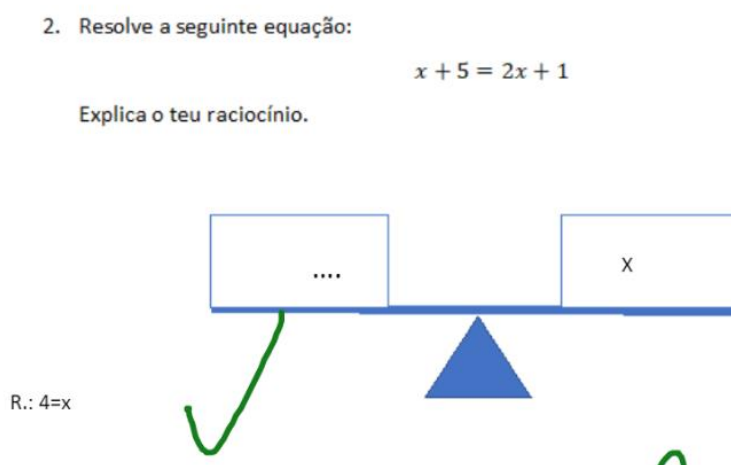


Figura 19 - Resolução de uma equação através da técnica das balanças (Rui)

Através da gravação da aula foi possível acompanhar o seu raciocínio:

Rui: xis ... 5 pontinhos...1,2,3,4,5 é igual ... [passa para o outro prato da balança] xis, xis mais ponto... vou tirar este ponto e tiro este ponto [um de cada prato da balança]... vai ficar igual... [voltou a entrar na applet do GeoGebra procurando a equação proposta através da opção 'New Problem' para confirmar se a balança ficava em equilíbrio. Não encontrou, voltou para o seu esquema] agora vou tirar este xis, e este... [conta os pontos do primeiro prato da balança] 1,2,3,4... 4 é igual a xis. [Escreve apenas esta última frase no seu Bloco de Notas] (Excerto de aula, 18.03.2021)

Com esta gravação, foi possível perceber que o Rui representou o primeiro membro da equação no primeiro prato da balança e o segundo membro da equação no segundo prato da balança. Depois, com a tecla *delete* do seu teclado, foi apagando nos pratos da balança o que tinham em comum ambos os membros. Com este processo, concluiu que a solução da equação era 4. Um aspeto interessante durante a resolução da equação foi o facto de ter procurado encontrar a equação na applet do GeoGebra,

para verificar se a balança ficava em equilíbrio quando retirou uma unidade de cada membro. Apesar de demonstrar que ainda não estava confiante na sua resolução, percebeu que a balança equilibrada validava a sua resolução.

No segundo caso, os alunos já tinham compreendido que, aplicando o raciocínio explorado na applet do GeoGebra acontecia sempre, ou quase sempre, ficarem com $0x$ num dos membros da equação. Os alunos chamavam a professora para partilhar essas ideias, como registado na seguinte nota de campo:

Recebo uma chamada para ir a um grupo de trabalho. Entro e o aluno diz-me que fazia magia, porque conseguia sempre fazer desaparecer o x de um membro da equação. Pedi para me explicar. 'Primeiro simplifico', dizia ele. 'E o que é simplificar?' Questionei-o. Ele rapidamente me respondeu que era juntar x com x e bolinhas com bolinhas, tendo percebido que só se adicionavam termos semelhantes. Já por aí o dia tinha valido a pena. Entusiasmado, continuou... 'Depois de simplificado', disse ele, 'vejo qual o termo que tem maior número atrás. E depois retiro o menor ao maior'. A linguagem tinha que melhorar, mas o raciocínio deixou-me muito feliz. Um dos colegas de grupo disse não perceber, e ele lá tentava explicar outra vez. Aproveitei para relembrar que apesar de ser um raciocínio válido, não tínhamos todos que seguir os mesmos caminhos, podendo desenvolver as nossas próprias técnicas. (Nota de Campo, 17.03.2021)

Eis a resolução desse mesmo aluno, Mário, a alguns níveis da applet do GeoGebra (Figura 20), demonstrando que a applet foi um recurso que permitiu aos alunos compreenderem e darem significado às regras úteis para a resolução de equações.

Nível 1

$$X+5=2X+1 \Leftrightarrow 5=X+1 \Leftrightarrow 4=X$$

Nível 2

$$5X+1=4X+4 \Leftrightarrow X+1=4 \Leftrightarrow X=3$$

Nível 3

$$X+2=2X \Leftrightarrow 2=X$$

Figura 20 - Resolução de equações generalizando a técnica da balança (Mário)

No terceiro caso, percebe-se a influência de fontes externas e a adoção de técnicas para além das explicadas nas aulas. Infelizmente estas técnicas vêm desprovidas de sentido, mas são mais fáceis de aplicar para alguns alunos. Numa das entrevistas foi notória esta falta de sentido, mas facilidade de aplicação:

Sara: Boa, e quando resolves equações tu pensas como se estivesses a mexer numa balança ou tens outra técnica?

Diogo: Eu não penso na balança porque, eu não quero dizer muita coisa, mas **acho que isso é um bocadinho patético**. Eu já estou habituado, nessas coisas de contas, eu não sei como, mas eu sempre fui bom em expressões numéricas, então eu **levo as coisas mais automáticas**, por assim dizer, eu **decore as regras**. Por exemplo, no livro de matemática hoje há regras para resolver equações, os parenteses primeiro, está a entender o que eu estou a dizer? **Eu entendi as regras básicas e faço automaticamente as equações.** (Entrevista, 26.03.2021)

Decorar as regras é compreendê-las? Já em ensino presencial, notou-se várias dificuldades no uso das regras sem sentido, uma vez que os alunos acabavam por se confundir. Eis uma nota de campo que ilustra esta situação:

‘Professora, isto está a dar errado. E como sabes que está errado?’ – Perguntei eu. ‘Vi nas soluções’. Pedi para que me explicasse como tinha resolvido. Rapidamente oiço estas palavras: ‘passo para o outro lado...’. Percebi que era um uso de regras sem sentido, e que havia ali trocas de sinais. Tentei que desse algum sentido ao que estava a fazer, perguntado porque é que podia fazer aquilo... A resposta dela não me deixou muito feliz, já que envolvia algo como ‘ensinaram-me no ATL’... (Nota de Campo, 07.04.2021)

Síntese:

A tarefa da applet do GeoGebra permitiu que os alunos desenvolvessem e conhecessem o princípio de equivalência da adição através do contexto de equilíbrio na balança de dois pratos. Isto era importante para que fosse possível dar sentido a este princípio.

A maior dificuldade detetada ao longo da interação com a applet foi o facto de, quando a solução da equação era 1, os alunos podiam retirar a mesma quantidade de objetos diferentes dos dois pratos da balança e esta continuava em equilíbrio. Isto tornou-se um problema, porque os alunos não detetavam o erro, podendo levar a conclusões erradas.

Depois de conhecerem o funcionamento da applet e de compreenderem a necessidade de fazer a balança equilibrar retirando ou adicionando a mesma quantidade dos dois objetos nos dois pratos da balança começou-se a identificar nas resoluções dos alunos o desenvolvimento das suas próprias técnicas para resolverem equações. Uns alunos continuavam a desenhar a balança de dois pratos e reproduzir a applet para diferentes equações, outros tinham feito o *upgrade* e compreendido a transposição entre os dois membros e outros, provavelmente com ajudas externas à escola, aplicavam a transposição sem lhe atribuir qualquer sentido. No entanto, notou-se que a applet teve influência na aprendizagem dos alunos já que, ao longo do tema, muitos alunos faziam referência à *técnica das balanças* como técnica utilizada para resolver as equações. Os

esquemas semelhantes aos utilizados na applet eram muito frequentes nos cadernos dos alunos, numa fase inicial e até numa fase mais avançada do seu estudo.

5.4. Os Problemas da Mafalda

Os *Problemas da Mafalda* foi a última tarefa proposta nas aulas online, na sequência de tarefas planeadas para esta intervenção pedagógica. O humor é o elemento lúdico associado a esta tarefa, em que os alunos tinham que interpretar, traduzir situações de linguagem natural para linguagem matemática e responder a situações problemáticas em que o recurso a equações era bastante eficaz, embora outras estratégias também funcionassem. Na Figura 21 é apresentada a primeira tira de banda desenhada proposta nesta tarefa. Em relação a esta tira, os alunos tinham que traduzir por uma equação o que a mãe da Mafalda devia responder para que a filha comesse a sopa, e depois resolver essa equação. A tarefa pode ser consultada na sua totalidade no Anexo IX.

1.1.

Comer a sopa?



Figura 21 - Problema 1 da Tarefa *Problemas da Mafalda*

A Rafaela usou a maiúscula X para representar a variável e a minúscula x para representar o símbolo da multiplicação. A maneira como a Rafaela usou o sinal de igual não estava correta. No entanto, ela indicou 2 como a solução correta da equação. A Figura 22 mostra como a Rafaela usou a notação matemática.

$$8xX = Xx2 + 12 = 2 \text{ porque } 2x2 = 4 + 12 = 16 \quad 8x2 = 16 \text{ por isso é } 2$$

Figura 22 - Resolução da Rafaela ao problema "Comer a sopa?"

Apesar das suas dificuldades no uso adequado dos símbolos, a Rafaela conseguiu justificar porque é que 2 era a solução da equação através da substituição desse valor em ambos os membros da equação, obtendo uma proposição verdadeira.

O Rui também teve dificuldades no uso correto da linguagem matemática (Figura 23), embora mostrasse evidências de ter compreendido a situação.

$$Cx8=Cx2+12=? \quad 2x8=2x2+12=16$$

Figura 23 - Resolução do Rui: equacionou o problema (esquerda) e resolveu a equação (direita)

No entanto, não afirmou que a solução era 2, apesar de fazer a substituição por esse valor. Apesar disso, parece que compreendeu que substituir a variável pela solução encontrada e chegar a uma proposição verdadeira justificava essa mesma solução.

A tradução do problema pelo Gil foi muito semelhante à da Rafaela, na Figura 22. Mas a resolução da equação foi bem diferente. Ele descreveu a situação como se estivesse a usar a applet do GeoGebra (Figura 24).



$$\begin{aligned}
 6x &= 12 = \\
 &= x = 2 \\
 2 \times 8 &= 16 \\
 2 \times 2 + 12 &= 16 \\
 2 \times 8 &= 2 \times 2 + 12
 \end{aligned}$$

Figura 24 - Resolução do Gil do problema "Comer a sopa?"

No prato da esquerda, o Gil colocou seis variáveis representadas por x e, no prato da direita, representou doze unidades, representadas por pontos, à semelhança do que acontecia na applet trabalhada nas aulas anteriores. As seis variáveis e as doze unidades resultaram das simplificações que ele já tinha feito anteriormente, mas que não registou no seu caderno digital. No entanto, analisando a gravação da discussão do grupo de trabalho onde estava inserido o Gil, consegue acompanhar-se o raciocínio que permitiu obter a simplificação, em conversa com outro elemento do grupo, o Joel:

Gil: Vou desenhar.... Então x vezes oito... por isso 1,2,3,4,5,6,7,8 [já desenhando 8 cruces no prato esquerdo da balança]. Então isto é igual a 1,2... [já desenhado duas cruces no prato direito e 12 bolinhas vermelhas]. O que podemos fazer é tirar dois [apaga duas cruces de ambos os pratos da balança].

Joel: E agora temos que fazer contas...

Gil: Ficamos a saber que $6x$ é igual a 12... e se sabemos isto... é igual a sabermos que 1 bolinha é igual a 2.

Joel: Mas não dá para tirar mais nada da balança...

Gil: Vamos justificar aqui... $2 \times 8 = 16$ e $2 \times 2 + 12 = 16$ Compreenderam? [Todos respondem que sim]. (Excerto de Aula, 24.03.2021)

Com este excerto da discussão, percebe-se que o Gil compreendeu como utilizar a ideia de equilíbrio numa balança para simplificar uma equação. Compreendeu também que substituir a solução na equação e obter uma proposição verdadeira justifica que esse valor é solução, usando esta ideia para justificar aos colegas que o valor que tinha obtido era a solução. Só com a substituição e a obtenção de uma proposição verdadeira é que os quatro elementos do grupo concordaram e avançaram.

A segunda situação apresentada nesta tarefa está representada na Figura 25.



Figura 25 - Problema “A nota da Mafalda a Matemática”

Foi perguntado aos alunos: “Se a Mafalda tiver 100 pontos, qual terá sido a nota do Filipe?” Mais uma vez a Rafaela teve dificuldades em indicar corretamente o seu raciocínio, apesar de obter corretamente a solução (Figura 26).

$$\text{É 46 porque } 43+43= 86+14 = 100$$

Figura 26 - Resposta da Rafaela ao problema “A nota da Mafalda a Matemática”

Por outro lado, o Gil continuou a abordar este tipo de problemas recorrendo a operações inversas, falhando, porém, a resposta ao problema (Figura 27).

$$100-14=86$$

$$86:2=43$$

Figura 27 - Resolução do Gil no problema "A nota da Mafalda a Matemática"

A última situação na tarefa *Problemas da Mafalda* é apresentada na Figura 28.



A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

- Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- Apenas 3 alunos receberam votos: a Mafalda, o Filipe e a Susaninha.
- A Susaninha recebeu menos 2 votos que a Mafalda;
- O Filipe recebeu o dobro dos votos da Susaninha;

Quem ganhou as eleições? Estará a Mafalda a enganar a Susaninha?

Na tua resposta deves apresentar os votos dos 3 alunos.

Figura 28 - Problema "Eleições do delegado de turma"

O Rui resolveu o problema recorrendo a duas estratégias diferentes (Figura 29), pois foi desafiado a fazê-lo no decorrer da aula. Ele começou com uma estratégia de tentativa-erro, mas depois recorreu a um método já utilizado nas aulas, usando um procedimento próximo do que faria se usasse a applet do GeoGebra.

$$9-2=7$$

$$7 \times 2 = 14$$

Mafalda-9

Filipe-14

Susaninha-7

R.: A Mafalda mentiu á Susaninha e o Filipe ganhou as eleições.

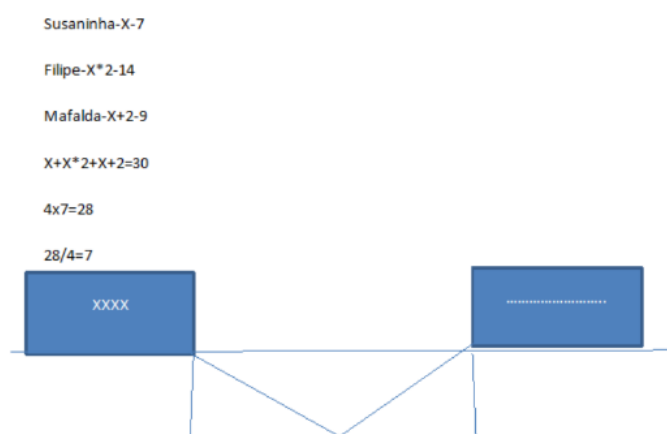


Figura 29 - Resolução do Rui: método da tentativa erro (cima) e método das balanças (baixo)

Rui escolheu designar os votos da Susaninha com a variável x e expressar os votos dos outros dois candidatos à custa desta variável, sendo os da Mafalda determinados por $x + 2$ e os do Filipe por $x \times 2$. Depois, adicionou as três expressões igualando a 30. Utilizou a balança de dois pratos para representar a equação através de cruzeiros que simbolizam a variável x e as bolinhas que simbolizam as unidades, à semelhança do que acontecia na applet do GeoGebra. Na sua resolução, apenas apareceu a equação já simplificada na balança. No entanto, analisando a gravação da discussão do seu grupo de trabalho nesta tarefa, percebe-se que, em primeiro lugar, representou a equação e depois foi apagando o que tinham em comum ambos os pratos da balança, ficando com a equação simplificada como mostra a Figura 29. Este era também o método a que recorria o Gil para simplificar as equações. A partir do momento em que tinha a equação simplificada representada visualmente, concluiu rapidamente que a solução da equação tinha que ser 7 porque “4 vezes 7 dá 28” (Aula, 24.03.2021). Assim, concluiu que a Susaninha teve 7 votos e calculou os restantes à custa deste valor encontrado. Apesar de não ter indicado a resposta, indicou o número de votos que cada candidato obteve, podendo, no entanto, a sua simbologia ser considerada confusa,

já que usou o sinal de “-” tanto para representar a diferença como para apresentar o resultado.

O Gil começou por dividir igualmente os 30 votos pelos três candidatos. Mas depois começou a utilizar equações, escolhendo a Susaninha para a variável x . Na gravação áudio da discussão deste problema percebe-se porque é que esta ordem de ideias foi seguida. Joel, um dos elementos do grupo do Gil, começou por sugerir dividir os 30 votos pelos três candidatos para terem uma ideia do valor intermédio e recorrerem à tentativa-erro. Gil não agarrou esta ideia, disse que o 10 não funcionava e de imediato começou a equacionar o problema. Joel não insistiu e acompanhou as equações escritas por Gil. Na gravação áudio, Gil também justificou porque é que escolheu a Susaninha para a variável x : “porque a Susaninha tem os votos da Mafalda e do Filipe... é tipo o meio...” (Aula, 24.03.2021). Apesar de o Gil parecer saber o que estava a fazer, nem sempre era correto no uso de símbolos para escrever expressões numéricas ou algébricas. Ainda assim, ele encontrou o número correto de votos de cada candidato e garantiu que a soma desses valores dava o total de 30 votos (Figura 30).

Filipe. Sim, enganou a Susaninha

$30 : 3 = 10$

$X = \text{Susaninha}$

$X \times 2 = \text{Filipe}$

$X + 2 = \text{Mafalda}$

$X + X \times 2 + x + 2 = 30$

$4x + 2 = 30$

$(30 - 2) = 28$

$28 : 4x = 7$

Susaninha = 7

Filipe = $7 \times 2 = 14$

Mafalda = $7 + 2 = 9$

$7 + 14 + 9 = 30$

$30 - 2 = 28$

$28 : 2 = 14$

$14 : 2 = 7$

M 2 + 7 = 9

F 14

S 7

Figura 30 - Resolução do Gil do problema "Eleições do delegado de turma"

Os alunos não reagiram tão bem a esta tarefa como aos jogos online. A Rafaela admitiu que teve mais dificuldades nos *Problemas da Mafalda*:

Sara: O que que tu achaste destes problemas? Achaste engraçado?

Rafaela: Hm, eu achei um bocado difícil, foram os que eu tive mais dúvidas. Opa, eu vou explicar, stora... Não era bem difícil, mas **tínhamos que pensar muito mais do que os outros**, eu acho. (Entrevista, 30.03.2021)

O Rui foi bastante claro sobre não ter gostado tanto dos *Problemas da Mafalda* quando comparado com as outras tarefas desta intervenção pedagógica.

Sara: E a aula que gostaste menos?

Rui: É um bocado difícil...

Sara: Porquê?

Rui: Porque eu gostei de quase todas... não há nenhuma em específico que não gostei... só uma coisa que me confundiu um bocado foi na quinta-feira, foi ontem, nos problemas da Mafalda porque **não percebi o que é que uma banda desenhada tinha a ver com cálculos...**

Sara: E não gostaste de ter a banda desenhada?

Rui: Não desgostei... mas não percebi muito porque é que uma banda desenhada tem a ver com cálculos... (Entrevista, 26.03.2021)

Admitiu ter sentido mais dificuldades nesta tarefa e realçou que, para enfrentar essas dificuldades, o trabalho de grupo foi essencial:

Sara: Qual foi a aula que sentiste mais dificuldades?

Rui: Acho que foi nos problemas da Mafalda.

Sara: Porquê?

Rui: Porque estive a discutir sobre alguns problemas e **acabei por errar tudo...** errar os cálculos e na resolução... e **acabei por ficar mais confuso...**

Sara: Mas tu tens a ficha toda certa...

Rui: Sim, porque **fizemos em conjunto...** (Entrevista, 26.03.2021)

Talvez o facto de a banda desenhada da *Mafalda* não ser tão popular entre as crianças de hoje em dia possa justificar o aparente baixo nível de motivação quanto ao contexto desta última tarefa. O Diogo salientou esse aspeto na sua segunda entrevista "Oh professora, eu para ser sincero nunca li a Mafaldinha porque não é a minha época" (Entrevista, 26.03.2021).

O Gil tem uma opinião diferente sobre os *Problemas da Mafalda*, pois esta foi uma das suas tarefas preferidas. O aspeto de novidade no contexto da tarefa, ancorado em situações humorísticas baseadas em banda desenhada, pareceu desempenhar um papel central a esse respeito: O Gil gostou da tarefa dos *Problemas da Mafalda* "porque eles tinham uma história por trás... Pronto, é isso que quero dizer quando falo em ser diferente ... " (Entrevista, 26.03.2021).

Síntese:

Esta tarefa, última da sequência de tarefas planeadas para a intervenção pedagógica, causou sentimentos contraditórios nos alunos. Alguns alunos consideraram a tarefa mais difícil e menos entusiasmante, referindo não entender qual a relação da banda desenhada com a matemática e afirmando que a personagem principal desta tarefa não era do tempo deles. A grande dificuldade identificada foi a nível da

interpretação das situações problemáticas apresentadas na tarefa. No entanto, o trabalho de grupo foi importante para ultrapassar esta dificuldade.

Na resolução dos problemas propostos nas tarefas notou-se a diversidade de técnicas que os diferentes alunos utilizavam. Alguns alunos reproduziam a balança de dois pratos tal como tinham aplicado na applet do GeoGebra, outros utilizavam a substituição da variável por valores numéricos. Notou-se uma evolução na justificação das respostas dos alunos, mas ainda se identificaram algumas dificuldades na utilização correta da linguagem das equações.

6. Conclusões e Implicações

Neste capítulo, começa-se com uma pequena síntese do estudo realizado. Em seguida, são apresentadas as principais conclusões do estudo, orientadas pelas questões de investigação e discutidas em relação com a literatura revista. Por fim, é feita uma reflexão final sobre a experiência da lecionação da unidade de ensino e sobre a realização deste trabalho de investigação, contemplando as implicações deste trabalho para o meu desenvolvimento profissional.

6.1. Síntese do estudo

O presente estudo teve como base uma intervenção pedagógica realizada no ano letivo de 2020/2021, com duas turmas do 7º ano de escolaridade. O objetivo era compreender de que forma a exploração de tarefas diversificadas em contextos lúdicos pode apoiar uma aprendizagem significativa das equações neste ano de escolaridade. Para atingir este propósito, procurei responder às seguintes questões:

1. Ao longo da intervenção pedagógica,
 - a) Como é que os alunos resolvem as diferentes tarefas?
 - b) Quais as maiores dificuldades que os alunos manifestam e como as ultrapassam?
 - c) Como reagem os alunos aos elementos lúdicos das tarefas realizadas?
2. De que forma o trabalho dos alunos em torno das tarefas da intervenção pedagógica contribui para uma aprendizagem significativa das equações?

No decorrer da intervenção pedagógica, foram propostas aos alunos diferentes tarefas com diferentes elementos lúdicos. As aulas foram todas planeadas para o ensino à distância, aproveitando aquela que considero ser a sua maior vantagem – a possibilidade de os alunos trabalharem em grupo (dadas as limitações impostas pelas regras de proteção sanitária para essa forma de trabalho na sala de aula presencial). Foram pensadas numa perspetiva de aprender matemática com significado e de desenvolver a compreensão relacional dos alunos.

O estudo seguiu uma metodologia qualitativa e interpretativa. Com uma natureza exploratória, envolveu a participação mais ativa de seis alunos. A recolha de dados foi realizada recorrendo à gravação em áudio de grande parte das discussões matemáticas nos grupos dos alunos participantes, à observação participante de algumas destas discussões, a notas de campo, à recolha das produções escritas dos alunos (através do Bloco de Notas utilizado no ensino à distância) e à realização de entrevistas com tarefas. Todos estes meios geraram um corpo de dados bastante extenso, que foi analisado posteriormente. No entanto, a observação participante (e respetivas notas de

campo) foi instrumental na reflexão que realizei após cada aula, reflexão essa que se traduziu, sempre que necessário, em alterações à planificação elaborada.

6.2. Principais conclusões do estudo

6.2.1. Desempenho dos alunos ao longo das diferentes tarefas

O envolvimento dos alunos na resolução das diferentes tarefas, caracterizadas por elementos contextuais lúdicos, foi um processo em que os alunos mostraram evolução ao longo da intervenção pedagógica. As próprias tarefas propostas eram diferentes nos elementos lúdicos. Algumas tarefas incluíam elementos lúdicos, outras eram lúdicas por si só. Por exemplo, no *Comboio das Equações* a tarefa era o próprio jogo enquanto na *Tarefa dos Doces* a tarefa apelava à experimentação dentro do jogo e depois os alunos tinham que responder a um conjunto de questões sobre as suas estratégias no jogo. O trabalho de grupo teve grande destaque durante a resolução das tarefas. Os alunos apoiavam-se no grupo, para discutir e para esclarecer eventuais dúvidas. Além disso, o facto de estarem em grupo também permitiu que o fator desafio fosse maior, quando os alunos resolviam tarefas que envolviam o jogo. Estando em conversa constante com os restantes elementos, queriam superar-se uns aos outros (Grando, 2004). O envolvimento de todos os elementos do grupo era uma constante na maioria das aulas. No entanto, há exceções. Com o ensino à distância há sempre dificuldades a nível de tecnologias (e não só) que se notaram mais em alguns alunos. No entanto, estes alunos tentavam sempre acompanhar depois. Muitas vezes, os alunos resolviam as tarefas que não tiveram possibilidade de acompanhar na aula síncrona, depois na aula assíncrona (caso da Rafaela, no *Comboio das Equações*).

A primeira abordagem dos alunos na resolução de equações era a tentativa erro, através do método da substituição ou o recurso às operações inversas. Estes foram os principais métodos informais desenvolvidos pelos alunos ao longo das primeiras tarefas propostas. Quando foi proposta na aula a Tarefa *Balança de Equações no GeoGebra* muitos alunos começaram a aplicar esta técnica em todas as suas resoluções. No entanto, analisando as resoluções dos alunos ao longo da intervenção pedagógica, sentia-se que estes inicialmente não consideravam a substituição como um método válido para as suas justificações. Apesar disso, nos *Problemas da Mafalda* a maioria dos grupos de trabalho começou por abordar os problemas através da substituição.

Considera-se que depois de os alunos trabalharem com a applet do GeoGebra a reprodução da balança de dois pratos ou a técnica que perceberam da sua representação era a ferramenta mais utilizada para a resolução de equações. Quando tinham que resolver equações e não podiam recorrer à applet do GeoGebra os alunos

reproduziam as suas próprias balanças e esta era a estratégia utilizada por grande parte dos alunos para a resolução das equações depois de estarem em contacto com a applet na tarefa. Infelizmente, nesta tentativa de que os alunos criassem as suas próprias técnicas de resolução e compreendessem o princípio de equivalência da adição com sentido, as ajudas externas inviabilizaram a aprendizagem que se pretendia. Notou-se que alguns alunos recorriam ao uso de regras sem sentido, e admitiam ser um recurso mais simples para a resolução de equações (caso do Diogo, na entrevista a 26.03.2021). Este uso de regras sem significado é um dos problemas apontado por Ponte (2006) para a aprendizagem dos alunos na álgebra.

6.2.2. Dificuldades dos alunos e como as procuram ultrapassar

A maior dificuldade na resolução das tarefas foi detetada logo na primeira tarefa proposta, a *Tarefa dos Doces*. Os alunos não estavam habituados a jogar numa aula, muito menos numa aula de matemática. Tal como muitos referiram nas entrevistas, acabaram por se desligar das perguntas da tarefa, deixando as justificações para escreverem depois de completarem todos os níveis do jogo. Ora, isto não era o pretendido, e acabou por não ser possível. Quando os alunos voltavam a iniciar o jogo para escreverem as suas justificações, o primeiro nível já era diferente da primeira vez que tinham jogado. Por isso, não se lembravam de qual tinha sido o primeiro nível da primeira vez e já não conseguiam justificar como tinham resolvido. Assim, perdeu-se uma parte importante da tarefa que era os alunos justificarem os seus raciocínios. O objetivo de grande parte das tarefas era servir como suporte para registar as justificações dos raciocínios dos alunos, ao longo dos jogos. No entanto, depois de lidarem com esta primeira experiência, os alunos já tiveram esse cuidado nas tarefas seguintes, lendo sempre em primeiro lugar o que era pedido para respeitarem a ordem da tarefa.

Esta dificuldade foi contornada através da segunda parte da tarefa. Na planificação da aula, como eu já tinha estudado o jogo e sabia que os níveis não eram fixos, para que todos os alunos tivessem pelo menos um nível em comum para depois ser possível discutir com toda a turma, decidi utilizar como imagem de apoio ao enunciado da segunda parte da tarefa uma captura de ecrã de um dos níveis do jogo. Assim, todos os alunos tiveram a possibilidade de raciocinar sobre as situações apresentadas, relativas a, pelo menos, um nível do jogo. Esta situação em que os alunos começam a jogar e acabam por usar o seu tempo todo para esse efeito, esquecendo-se da tarefa matemática que neste caso servia de suporte para o jogo foi destacado por Grando (2004) como uma desvantagem do jogo na sala de aula. O autor refere que se o professor não estiver preparado pode existir um sacrifício de outros conteúdos por

falta de tempo. No entanto, como esta era uma atividade inicial de exploração, o tempo não era a maior preocupação. Para além disso, como as professoras estavam sempre a circular pelos grupos de trabalho, assim que sentíssemos que era necessário, alertávamos para os alunos não abandonarem a segunda parte da tarefa. No final, alguns alunos voltaram para o jogo. Nas entrevistas até admitiram que este poderia ser um jogo para continuarem a jogar fora da sala de aula.

Nesta parte da tarefa, surgiu outra grande dificuldade detetada nos alunos – as justificações dos seus raciocínios. Na *Tarefa dos doces* foi logo detetada esta dificuldade comum à maioria dos alunos das duas turmas, quando não justificavam corretamente um procedimento que realizavam de forma quase automática. Relembre-se que na *Tarefa dos Doces*, apareciam grupos com diferentes tipos de doces e os seus valores. Os alunos tinham que determinar o valor de cada doce. Para isso, tinham que começar por olhar para o grupo onde os doces fossem todos iguais, para dividirem o valor destes pela sua quantidade. Ora, os alunos sabiam que tinham que escolher um determinado doce em primeiro lugar, mas não sabiam justificar porquê. No entanto, notou-se que, nas entrevistas, no discurso oral, não havia esta dificuldade de justificação. No entanto, as justificações eram uma constante em todas as tarefas propostas. Ao longo do tempo os alunos foram melhorando nas justificações que davam, sentindo-se mais confiantes. Temos o caso da Rafaela, que dizia não conseguir justificar as suas respostas no *Comboio das Equações* e na tarefa da *Balança de Equações no GeoGebra* já escrevia justificações muito completas.

Outra dificuldade evidenciada pelos alunos foi a passagem do método aplicado na *Balança de Equações no GeoGebra* para a linguagem das equações (Drijvers, 2003), ou seja, a passagem de uma representação ativa para uma representação simbólica (Bruner, 1999). Os alunos aplicavam na applet os procedimentos devidos e apresentavam somente a solução, não sendo possível compreender como a tinham obtido apenas analisando as respostas postadas. Só através da gravação de aulas foi possível compreender que os alunos reproduziam o procedimento de retirar bolinhas de ambos os pratos da balança, ou retirar cruzeiros de ambos os pratos da balança, e, desse processo, obtinham a solução. Mas sem justificar, porque na resposta não explicavam que era esse o procedimento utilizado. Ou seja, os alunos utilizavam representações ativas e depois não as traduziam simbolicamente (Bruner, 1999).

Os alunos parecem ter adquirido uma certa capacidade de abstração através da representação de objetos matemáticos que manipulam mentalmente e, portanto, sem os traduzir seja para linguagem natural ou linguagem algébrica (Domingos, 2014). Esta poderia ser uma mais-valia, mas neste nível de introdução à resolução das equações lineares não o é, porque esta abordagem só é possível com equações cujos termos

independentes são números naturais, assim como os coeficientes dos termos dependentes. O objetivo desta applet era que, depois de contactarem com esta abordagem, os alunos fossem capazes de alargar os seus conhecimentos para os números inteiros negativos e até racionais.

Esta dificuldade foi ultrapassada através da minha insistência nas justificações. Apresentar somente a solução, mesmo que correta, não é uma justificação. Com esta obrigação da justificação, os alunos já sentiam a necessidade de recorrer à linguagem natural, mas a maioria recorria até à linguagem algébrica, escrevendo equações equivalentes à medida que efetuavam o procedimento aprendido na applet do GeoGebra. Aqui fica evidente a evolução que os alunos tiveram na transição de representações ativas (com manipulação) para as representações simbólicas (escrita de equações equivalentes).

Foram também identificados ao longo da intervenção pedagógica algumas dificuldades na resolução de equações descritas por Ponte, Branco e Matos (2009). A adição de termos não semelhantes foi logo exposta por um aluno durante a aula em que se apresentou a applet do GeoGebra, tendo sido aproveitadas as bolinhas que representavam a unidade e as cruces que representavam a incógnita x . Rapidamente os alunos compreenderam que, por exemplo, $3x + 4$ não resultava nem em sete cruces, nem em sete bolinhas. Assim, a partir dessa aula, este foi um erro não muito usual nas resoluções dos alunos.

A transposição incorreta de termos (Ponte, Branco & Matos, 2009) foi também um erro identificado nas respostas de alguns alunos. Tais alunos reconheciam ter usado esta técnica em locais externos à escola, mas não compreendiam o que faziam e insistiam em aplicar porque os procedimentos acabavam por funcionar e fazer os alunos apresentarem respostas corretas. No entanto, muitas vezes, estas transposições incorretas surgiam, porque não havia significado na sua técnica. Infelizmente, não saber como começar a resolver uma equação (Ponte, Branco & Matos, 2009) também foi visto em alguns alunos. No entanto, o trabalho de grupo ia ajudando e, pelo menos, os alunos iam tentando, desenhando as balanças e tentando reproduzir o procedimento aprendido com o recurso à applet do GeoGebra. Aqui os alunos faziam a passagem das representações ativas para as icónicas (desenhar o que faziam com a applet) e, alguns, passavam depois para a representação simbólica (Bruner, 1999).

A Tarefa dos *Problemas da Mafalda* foi apontada como sendo a tarefa mais difícil para grande parte dos alunos. Uma justificação para tal categorização é o facto de ser uma tarefa que envolve uma maior compreensão dos enunciados, a mobilização de conhecimentos e ativação da capacidade de resolver problemas e de se adaptar a situações novas. Alguns alunos não compreendiam a ligação da banda desenhada com

os problemas de matemática. Foi algo que estranharam, uma vez que não é habitual os professores utilizarem humor nas tarefas propostas (Menezes & Ferreira, 2018). Para ultrapassar esta dificuldade de compreensão dos enunciados o trabalho de grupo foi fundamental, uma vez que os alunos podiam conversar e adaptar a linguagem dos enunciados, para que ficasse de mais fácil compreensão. Na verdade, muitos alunos reconheceram o trabalho de grupo como sendo muito importante para responder a dúvidas individuais e conseguir avançar nas aprendizagens mais facilmente.

6.2.3. Reações dos alunos aos elementos lúdicos das tarefas realizadas

No geral, os alunos tiveram uma reação muito positiva aos elementos lúdicos das tarefas propostas na intervenção pedagógica. Entenda-se por reação positiva o entusiasmo que os alunos demonstraram na resolução das tarefas e no seu envolvimento nas discussões que se seguiam aos momentos de trabalho autónomo, em grupo, durante as aulas. Os alunos entravam na reunião do Microsoft Teams, no início da aula, e já perguntavam que atividade tinham para fazer naquele dia. Queriam trabalhar e sentia-se, por parte deles, grande motivação para o fazer.

A tarefa em si sentiu mais entusiasmo por parte dos alunos, o que foi confirmado nas entrevistas, foi o *Comboio das Equações*. Esse entusiasmo resultou numa motivação maior para resolverem a tarefa e superarem-se a si próprios e até aos colegas, numa competição saudável (Lemos, 2005; Gúzman, 1993; Kenderov et al., 2009). Este jogo, segundo Grandó (1995) pode ser considerado um jogo de fixação de conceitos, mas também um jogo pedagógico e sem dúvida, computacional. É considerado um jogo de fixação de conceitos uma vez que, à medida que os alunos avançam de nível, o número de equações para as quais têm que encontrar a solução vai aumentando. Desta forma, praticar o jogo substitui as listas de exercícios que muitas vezes são propostas para trabalhar este tema. Os alunos praticam a resolução de vários exercícios, mas num contexto mais desafiante e estimulante. Por outro lado, é considerado um jogo pedagógico pois foi utilizado no processo de ensino-aprendizagem como apoio para o desenvolvimento desses mesmo processo. Através do trabalho de grupo e do fator desafio, todos os alunos se envolveram na procura das soluções das equações, e mesmo aqueles alunos que ainda tinham dúvidas quanto ao conceito de solução de uma equação conseguiram ultrapassá-las através do seu trabalho nesta tarefa. Por fim, é considerado um jogo computacional uma vez que é executado num ambiente computacional, que o ensino à distância tornou mais simples de ser implementado.

Contudo, os alunos pareceram associar o uso de contextos lúdicos, como os desta intervenção de ensino (particularmente esta tarefa do *Comboio das Equações*) com a

resposta de ensino remoto de emergência para a situação em pandemia, não parecendo sequer considerar a possibilidade de utilizar os contextos lúdicos numa sala de aula presencial de matemática. Isto levanta uma questão muito importante e curiosa. Serão as vivências dos alunos nas aulas pautadas por uma certa falta de diversidade de tarefas? Quando questionados sobre a utilização de jogos noutras disciplinas ao longo da sua vida escolar a maioria dos alunos afirmou ser praticamente inexistente, referindo ter contactado com os elementos lúdicos apenas na disciplina de matemática, ao longo desta intervenção pedagógica. Os alunos fazem ainda a ligação da utilização dos elementos lúdicos à necessidade de os professores se adaptarem ao ensino à distância. Apesar de esta opinião denotar que reconhecem o empenho dos professores e isso ser muito importante, demonstra que os alunos não estão à espera que seja possível contactarem com os elementos lúdicos na sala de aula presencial.

A tarefa dos *Problemas da Mafalda* trouxe sentimentos contraditórios. Alguns alunos gostaram, mas outros acharam a relação do humor com a matemática um pouco estranha. Alguns acharam esta tarefa mais difícil do que as anteriores, e talvez o fator da interpretação tenha desempenhado um papel em relação à sua demanda cognitiva. Portanto, no geral, a maioria dos alunos não se sentiu tão motivada com a tarefa no contexto humorístico. Alguns alunos admitiram não conhecer a personagem central da banda desenhada, porque não era da época deles. Este desconhecimento pode ter influenciado a falta de ligação com a banda desenhada, o que resultou na menor motivação para a resolução da tarefa, quando comparado com os jogos, por exemplo.

Ora, comparando as diferentes reações dos alunos às diferentes tarefas percebe-se que os jogos provocaram mais entusiasmo quando comparados com a applet do GeoGebra ou com as tarefas que envolviam o humor, como os *Problemas da Mafalda*. Todos estes elementos lúdicos foram considerados pelos alunos como novidade na sala de aula. Por isso o fator estranheza não parece ter condicionado o entusiasmo dos alunos. Por outro lado, o que pode explicar a pouca motivação de grande parte dos alunos nos *Problemas da Mafalda* é, tal como já mencionado anteriormente, o desconhecimento da personagem principal. Talvez ter adaptado a tarefa para uma banda desenhada mais popular para os alunos tivesse provocado mais entusiasmo na resolução dos problemas. Por outro lado, a applet do GeoGebra, apesar de os alunos usarem muito para a resolução das equações, não foi apontada por nenhum aluno como a sua tarefa preferida. Isto não demonstra que não tenha sido bem recebida pelos alunos, até porque permitiu uma aprendizagem significativa. Demonstra, no entanto, que o jogo é preferido quando comparado com esta applet em particular. Pelas entrevistas dos alunos percebe-se que o fator desafio está muito associado a esta preferência. Na applet não havia o limite do tempo, não havia as pontuações que tanto

entusiasmou os alunos nos jogos e estas demonstraram ser características potenciais de um entusiasmo associado à aprendizagem.

No entanto, nem todas as tarefas podem ser jogos. O que considero importante aqui é o equilíbrio entre as diferentes tarefas adaptadas ao contexto da sala de aula e dos alunos que incorporam essa sala de aula, sendo os agentes ativos do seu processo de aprendizagem (Palm, 2009; Ponte, 2005; Johanning et al., 2009). Assim é possível uma aprendizagem com sentido baseada num conhecimento relacional.

6.2.4. Contributos da intervenção pedagógica para uma aprendizagem significativa das equações

A primeira tarefa apresentada na sequência de tarefas preparadas para a intervenção pedagógica desenhada pode ser enquadrada num contexto de semi-realidade (Skovsmose, 2001). Apesar da compra de diferentes tipos de doces provavelmente ser uma realidade na vida dos alunos, este problema foi preparado com fins educativos e não se pretendia propriamente modelar uma situação efetivamente real. O objetivo do primeiro encontro com este jogo era dar a oportunidade aos alunos de desenvolverem estratégias informais para os ajudar a compreender melhor posteriormente as regras formais (ME, 2007). Com esta atividade, os alunos, informalmente, resolveram equações (Ponte, Branco, & Matos, 2009). Estas técnicas informais desenvolvidas pelos alunos tornaram-se importantes porque, mais tarde, os alunos aplicaram naturalmente o princípio de equivalência da multiplicação. Os alunos não apresentaram dificuldades em obter os valores desconhecidos e o facto de o terem feito num contexto lúdico, o jogo, deixou-os muito motivados. Esta motivação foi confirmada pelos alunos nas suas entrevistas, reforçando a ideia de que gostavam que este tipo de atividades fosse mais frequente nas aulas. Este jogo foi aplicado num nível co-instrucional (Gairín, 1990), uma vez que acompanhou outros recursos para a aprendizagem das equações e o elemento lúdico serviu propósitos essencialmente motivacionais.

O trabalho com as balanças teve também uma influência positiva na aprendizagem dos alunos. Foram várias as tarefas propostas utilizando a balança de dois pratos, uma vez que se considera que esta não faz parte do dia a dia dos alunos, tal como poderia fazer há uns anos atrás. A balança de dois pratos apareceu na tarefa *Equilíbrio nas Balanças*, *Balança Interativa* e na *Balança de Equações no GeoGebra*. Este trabalho gradual contribuiu para os alunos terem a perceção do equilíbrio na balança e relacionarem o equilíbrio com as equações. Esta perceção resultou depois muito bem na applet do GeoGebra, em que os alunos utilizavam o equilíbrio para

confirmarem que estavam a utilizá-la corretamente. Foi possível identificar este raciocínio dos alunos na gravação de aulas e nas suas justificações.

Ao longo das diferentes tarefas os alunos deixaram claro que entendiam que a necessidade de equilíbrio era um elemento-chave para a resolução das equações. Os alunos trabalharam com as balanças de dois pratos, em representações ativas e icónicas (pois desenhavam esquemas de balanças para representarem as situações que tinham de resolver), e conseguiram fazer uma conexão entre o equilíbrio das balanças e o equilíbrio subjacente aos dois membros de uma equação. Passaram de representações ativas ou icónicas para representações simbólicas e isso representa uma evolução no seu pensamento algébrico e uma compreensão relacional da noção de equação. Os alunos não efetuavam apenas procedimentos, mas usavam as regras com compreensão (ME, 2007). Por exemplo, foram vários os alunos que na tarefa dos *Problemas da Mafalda* recorreram à balança de dois pratos para resolverem os problemas.

Nas tarefas à volta da balança de dois pratos o lúdico teve um papel para além do motivacional. Foi um elemento que ajudou a dar sentido a uma noção difícil e que foi evoluindo progressivamente, sendo que os alunos foram capazes de passar das representações ativas, para icónicas e para simbólicas. Contudo, isso não significa que abandonavam as icónicas quando usassem as simbólicas, por exemplo. Esta passagem pelas diferentes representações ajuda os alunos a organizar o seu pensamento e a estabelecer ligações entre as diferentes representações, demonstrando a capacidade de construir, compreender e representar objetos matemáticos e de os traduzir em diferentes representações demonstrando o seu raciocínio (NCTM, 2000; Greeno e Hall, 1997).

O jogo do *Comboio das Equações*, além de motivador, mostrou-se favorável à aprendizagem deste tema, uma vez que a maioria dos alunos foi capaz de encontrar as soluções para as várias equações que lhes eram propostas. Subir de nível levou os alunos a desenvolverem destrezas na resolução de equações e na substituição de variáveis pelos valores numéricos que eles pensavam ser soluções. Assim, o jogo ajudou os alunos não apenas no desenvolvimento da sua compreensão instrumental dos procedimentos para resolver equações, mas também da sua compreensão relacional (Skemp, 1978) acerca da noção de solução para uma equação linear. Isto não foi fácil ou rápido de se conseguir, pois, no início, muitos alunos não entendiam que substituir a variável por um número e obter uma afirmação verdadeira provava que o número era uma solução da equação. Com o passar do tempo (e com a experiência dos alunos a trabalhar noutras tarefas), essa ideia tornou-se mais clara nas suas mentes. O

jogo teve um impacto visual nos alunos e eles relacionaram o jogo com a noção de solução sempre que isso foi necessário nas aulas seguintes.

Claro que, na primeira tentativa de jogar este jogo, os alunos não tiveram logo muito sucesso, precisando de perceber as regras e estabelecer uma tática para o jogo. Rapidamente perguntaram se podiam jogar novamente. Isso levantou uma questão sobre as perspectivas dos alunos sobre o fracasso: quando eles falham, porque é que eles parecem acreditar que não podem tentar novamente? Parece que os alunos ainda não veem os erros ou as suas tentativas falhadas como trampolins para a aprendizagem, como se jogar fosse uma forma de ser testado de alguma forma e não um veículo pensado para ajudá-los a aprender (Tulis, 2013).

O trabalho sobre os *Problemas da Mafalda* em pequenos grupos permitiu que os alunos lidassem com diferentes perspectivas sobre as situações-problema e discutissem qual a estratégia que poderia ser melhor para resolver esses problemas. Curiosamente, embora vários alunos tivessem manifestado dificuldades em reconhecer a substituição como um processo de justificação ao resolver uma equação, nesta tarefa final, a primeira abordagem foi quase sempre por tentativa-erro: os alunos iam fazendo substituições a ver se encontravam proposições verdadeiras. Nesta tarefa, notou-se a influência do trabalho realizado em várias tarefas anteriores, em particular na resolução dos problemas, demonstrando que os alunos, através das tarefas diversificadas foram capazes de adquirir habilidades para a resolução de equações e adaptá-las a novas tarefas. Os alunos desenvolveram e compreenderam várias estratégias de resolução de equações, que conseguiam mobilizar para situações novas. Isto é uma evidência de conhecimento relacional (Skemp, 1976). Isto revela também a importância de uma sequenciação de tarefas que lhes permita ir construindo com significado ferramentas de trabalho (Ponte, 2005). Os alunos utilizavam a substituição para a resolução das equações, lembrando o *Comboio das Equações*, e desenhavam balanças de dois pratos, reproduzindo a applet do GeoGebra.

6.3. Reflexão final

Costumo dizer que se não estivesse a estudar para ser professora de matemática, estaria a estudar para ser professora de outra disciplina qualquer. É certo que a matemática me fascina, mas é pela educação que me sinto apaixonada. No entanto, sinto também que só neste ano de estágio compreendi o que era ser professor. E compreendi que ainda tenho imensas coisas para compreender, que ser professor é um processo em construção permanente e que a minha identidade como professora vai ser alterada ao longo desse processo.

Antes de mais, entrar no campo, mais concretamente, na escola, fez com que tivesse a oportunidade de ter experiências que necessito para encarar a profissão. O planeamento de aulas foi uma das dificuldades que enfrentei. Não por ter dificuldade a planear aulas ou por estar sem ideias para as aulas. Pelo contrário, porque os alunos eram tão singulares e as possibilidades para uma aula eram tantas, que me envolvia num processo de “E se daquela forma funcionasse melhor? Estarei a fazer a escolha acertada?” Sentir esta responsabilidade fez-me crescer e, sobretudo, evoluir. Fez-me também perceber que, nesse mundo de possibilidades que se abre na preparação de aulas nunca, há uma escolha certa. Mas a vontade de tentar ser o mais certo possível é algo fundamental.

Para além disso, o trabalho dentro do meu grupo de estágio também me ajudou muito. Na preparação das aulas contava sempre com a experiente e interessante opinião da minha orientadora e das minhas colegas de estágio, sempre prontas para me dar a sua opinião e me fazer evoluir. Lembro-me, por exemplo, de ter construído uma tarefa apenas para os alunos adicionarem termos semelhantes. A professora Cristina deu-me a sua opinião e contou-me a sua experiência nesse tema. Concordei que seria algo que naquele momento não faria tanto sentido como o que eu estava a imaginar na minha cabeça e agora olhando para trás realmente não fez. Os alunos aprenderam a adicionar termos semelhantes de maneira menos forçada, de maneira mais intuitiva e com o contexto da tarefa onde estávamos a trabalhar, o princípio de equivalência da adição. As minhas colegas de estágio estavam sempre disponíveis para me ajudar também. E foi uma ajuda muito importante. Quando estávamos distribuídas pelos grupos de trabalho a ouvir os alunos, tomavam as suas próprias notas e depois partilhavam comigo. Detalhes que eu não assistia porque não estava presente (mesmo que depois fosse ouvir a gravação da aula) mas que elas tinham o cuidado de partilhar. Serei sempre agradecida a este núcleo de estágio que partilhou comigo as primeiras (e tão importantes) experiências dentro da sala de aula.

No meu papel enquanto investigadora foram várias as vezes em que me senti insegura e um pouco perdida. No entanto, sempre encaminhada pela professora Rosa Antónia fui ultrapassando essas inseguranças. Ler e conhecer o trabalho de vários investigadores, principalmente portugueses, deu-me uma motivação extra, fez-me crescer muito e ver as coisas de uma perspetiva diferente. Conheci investigações incríveis, li estudos que me ajudaram a tornar uma melhor professora. E, a pouco e pouco, ia melhorando o meu estudo também.

Comecei a pensar neste relatório bastante antes de implementar a minha intervenção pedagógica, com a escrita de um projeto na disciplina de Investigação e Prática Profissional. Sentia que o projeto estava bem elaborado e que tinha dado o meu

máximo. Enfim, estava orgulhosa. Quando, numa fase posterior, depois da minha intervenção pedagógica, voltei a ler o meu projeto, tentando aproveitar algum trabalho, como, por exemplo, o enquadramento teórico para este relatório, tive uma perspetiva completamente diferente. Já não sentia que as coisas estavam assim tão bem, sentia que podia ter feito melhor. Aqui senti uma evolução no meu pequeno contacto com a investigação. Deixando todas estas dificuldades e inseguranças de lado, senti que este estudo me tornou uma melhor professora. Ter a oportunidade de conseguir analisar os alunos mais aprofundadamente fez-me perceber processos e ideias dos alunos, conhecendo-os melhor e tentando adaptar-me também melhor às suas necessidades. A única coisa que me deixa insatisfeita é não ter tido a oportunidade de analisar os 55 alunos, por questões de tempo. Ainda assim, como professora, tento sempre analisar em todas as aulas, todos os alunos. Este estudo deu-me uma sensibilidade maior para esta análise. Compreendi que as justificações são realmente muito importantes, e que devem ser exigidas aos alunos sempre que possível. Mais importante do que obter uma resposta, é o processo para a obter, o raciocínio, as ideias. Por exemplo, no caso da applet do GeoGebra, quando os alunos obtinham uma resposta correta através da batota, não aprendiam nada, não sabiam justificar, e tinham a resposta correta. Mas isso em nada contribui para a sua aprendizagem.

O balanço que faço sobre o trabalho desenvolvido é bastante positivo. No entanto, todo este estudo foi um processo de aprendizagem para mim e, portanto, agora existem muitas coisas que tentaria melhorar. O que identifico logo como uma possível melhoria são as questões colocadas aos alunos aquando das entrevistas com tarefas. Quando analisava os dados, percebia que podia ter feito melhor. Podia ter colocado uma ou outra questão de outra forma, podia ter feito outras perguntas que me iriam ajudar a perceber um bocadinho melhor as ideias dos alunos. Agora, com mais um pouco de experiência depois deste trabalho, estou mais sensível a detalhes que, no momento em que realizei as entrevistas, não detetei. Para além disso, uma surpresa para mim foram os sentimentos contraditórios que os alunos demonstraram na tarefa dos *Problemas da Mafalda*. Esperava que o humor fosse melhor recebido pelos alunos e que estes ficassem mais entusiasmados do que aquilo que se verificou. Esta foi apontada como a tarefa que os alunos menos gostaram e também como a tarefa em que os alunos tiveram mais dificuldades. No entanto, acho que a escolha desta personagem pode ter condicionado o entusiasmo e consequente envolvimento dos alunos. Encontrar outra personagem ou bandas desenhadas eventualmente mais populares entre os jovens de hoje em dia poderá ser algo a melhorar em futuras práticas.

Outro aspeto que considero que foi um enorme desafio consistiu em gerir o tempo de aula. Como toda a intervenção pedagógica foi realizada em ensino à distância, as

aulas síncronas por norma não ultrapassavam os cinquenta minutos. Ora, era nas aulas síncronas que os alunos se reuniam em grupo e discutiam as diferentes ideias. O tempo parecia sempre pouco. Ficava sempre com a vontade de ter mais e muitas vezes os alunos também, daí assistirmos a alunos a continuar o seu trabalho nos intervalos, sem qualquer obrigatoriedade, tal como verificamos na análise de dados. Sentia falta daquelas aulas mais extensas, de cem minutos, que tínhamos no ensino presencial, mas que bem aproveitadas passam a correr. Para mim esta é uma grande limitação do ensino à distância. Este sentimento e vontade de ter mais tempo de aula antecipa que uma abordagem semelhante em ensino presencial seria melhor nesse aspeto. Os alunos poderiam explorar durante mais tempo os jogos, as applets, ter mais discussões com os colegas. Aquilo que muitas vezes dividia em duas aulas, como por exemplo, a tarefa do *Comboio das Equações*, podia ser apenas numa aula, mais extensa, mas sem quebra no ritmo que podia ser muito melhor aproveitada. No entanto, estou ciente que o ensino à distância trouxe outras facilidades no que diz respeito à implementação dos elementos lúdicos. Estas tarefas que necessitavam de recorrer aos jogos online ou às applets online ficavam mais acessíveis porque cada aluno tinha o seu aparelho eletrónico para aceder à aula. Nas escolas muitas vezes há dificuldades em reservar uma sala de computadores para os alunos ou ter equipamentos disponíveis na sala de aula para todos. Mas não era impossível. Em alternativa, os alunos podiam recorrer aos seus telemóveis pessoais ou a tablets que muito alunos têm e que são de mais fácil logística do que computadores.

De um modo geral, os elementos lúdicos presentes nas tarefas usadas na unidade de ensino mostraram-se benéficos para a aprendizagem das equações. Para além do aspeto motivacional, o envolvimento cognitivo dos alunos nas tarefas foi potenciado por esses elementos lúdicos. Isto foi particularmente notório na tarefa do *Comboio das Equações* e no trabalho em torno da applet do GeoGebra. Este estudo constitui uma pequena contribuição para uma melhor compreensão da influência dos elementos lúdicos na aprendizagem, com compreensão, das equações.

Considero ser importante a realização de novas investigações acerca da influência dos elementos lúdicos na aprendizagem de outros tópicos da álgebra e até de tópicos de outros temas matemáticos. Existem diversos elementos lúdicos que não foram contemplados neste estudo e que poderão enriquecer novas investigações. A intervenção pedagógica em que se baseou este trabalho de investigação foi desenhada privilegiando os elementos lúdicos em todas as tarefas da sequência de tarefas utilizada. Pelas circunstâncias em que decorreu o estudo (no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada partilhada com mais duas colegas), a integração dos elementos lúdicos aconteceu apenas na unidade de ensino das equações. Seria importante que o lúdico

não surgisse restrito a uma certa unidade de ensino, mas que fosse uma presença regular nas tarefas de aprendizagem propostas ao longo do ano letivo. Claro que nem tudo pode ser lúdico, nem tudo podem ser jogos. É preciso compreender qual a diversidade de tarefas que faz mais sentido para os diferentes temas. Tal como os alunos são todos diferentes, os conteúdos matemáticos também o são.

Em síntese, este trabalho reforça as minhas convicções de que os elementos lúdicos podem influenciar positivamente a aprendizagem das equações, tornando-a significativa e, portanto, promovendo uma compreensão relacional.

7. Referências

- Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005). Designing spreadsheet-based tasks for purposeful algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(3), 191-215.
- Anthony, G., & Walshaw, M. (2007). *Effective pedagogy in mathematics/Pngarau: Best evidence synthesis iteration J*. Wellington, New Zeland: Ministry of Education.
- Arbaugh, F., & Brown, C. A. (2004). What makes a mathematical task worthwhile? Designing a learning tool for high school mathematics teachers. In R. N. Rubenstein & G. W. Bright (Eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics* (pp. 27-41). . Reston, VA: NCTM.
- Bodgan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água
- Canavarro, A. P., & Infante, M. L. (2016). Recursos para o desenvolvimento do pensamento algébrico: A importância das tarefas criadas pelo professor. In A. P. Canavarro et al. (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática - Recursos na educação matemática* (pp.49-65). Évora: SPIEM.
- Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). *Explorar tarefas matemáticas*. In A. P. Canavarro et al. (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2012, Encontro em Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da matemática* (pp. 99-104). Castelo de Vide: SPIEM.
- Carpenter T. P., Franke M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.
- Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.
- Domingos, A. (2014). *A aprendizagem da matemática através de tarefas baseadas em recursos tecnológicos*. In J. Brocardo et al. (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2012: Encontro de Investigação em Educação Matemática - Tarefas matemáticas* (pp. 209-220). Setúbal: SPIEM.
- Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research*, 53, 159-199.
- Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Tese de Doutorado, Utrecht University, Holanda.
- Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions developing relational thinking in elementary school. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 409-428). Berlin: Springer-Verlag.
- Franke, M., Carpenter, T., & Battey, D. (2008). Content matters: the case of algebraic reasoning in teacher professional development. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L.

Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 333-359). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, tasked-based interviews in mathematics education research. In: Lesh R, Kelly AE (eds) *Research design in mathematics and science education* (pp. 517-539). Erlbaum, Hillsdale

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

Grando, R. C. (2004). *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. São Paulo: Paulus.

Greeno, J., & Hall, R. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, 78(5), 361-367.

Groenwald, C. L. O. & Timm, U. T. (2014). *Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula*. Disponível em <http://www.somatematica.com.br>. Acesso em 02/05/2021.

Guitart, M. (2012). *Permitido reir...Estamos en clase. El humor como recurso didáctico en aula de Estadística*. Tese de Doutorado, Universidade Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.

Guzmán, M. (1993). Tendências inovadoras en educación matemática. *Boletim da SPM*, 25, 9-34

Johanning, D., Weber Jr., W. B., Heidt, C., Pearce, P., & Horner, K. (2009). The polar express to early algebraic thinking. *Teaching Children Mathematics*, 16(5), 300-307.

Kaput, J. (1999). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kenderov, P.; Rejali, A.; Bussi, M. G.; Pandelieva, V.; Richter, K.; Maschietto, M.; Kadijevich, D.; & Taylor, P. (2009). *Challenges beyond the classroom – Sources and organizational issues*. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). Springer.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 91-96). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam/Taipei: Sense

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, 16(1), 5-26.

Lemos, M. S. (2005). Motivação e aprendizagem. In G. L. Miranda & S. Bahia (Eds.), *Psicologia da educação: Temas de desenvolvimento, aprendizagem e ensino* (pp.193-231). Lisboa: Relógio d'Água Editores.

- Lew, H. C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator*, 8(1), 88–106.
- Lopes, S., & Rocha, H. (2016). O jogo como promotor da comunicação e aprendizagem matemática. In M. H. Martinho et al. (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 149-162). Porto: APM.
- Ludke, M.; & André, M. E .D. A. (1986). *Pesquisa em educação, abordagens qualitativas*. São Paulo, EPU.
- Martin, R. (2007). *The psychology of humor – An integrative approach*. London: Elsevier Academic Press.
- Menezes, L., & Ferreira, F. (2018). Humor no ensino da Matemática: Oportunidades para a aprendizagem. *Educação e Matemática*, 149/150, 53-59.
- Ministério da Educação – ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- Ministério da Educação – ME (2018). *Aprendizagens essenciais – Articulação com o perfil dos alunos*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.
- Mota, P. C. (2009). *Jogos no ensino da matemática*. Dissertação de mestrado, Universidade Portucalense, Porto.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2012). A integração da folha de cálculo no estudo do tópico equações do 2.º grau no 9.ºano de escolaridade. In A. P. Canavarró et al. (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2012: Encontro de Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da matemática* (pp. 387-401). Lisboa: SPIEM.
- Oliveira, E. (2014). *A utilização de aplicações interativas no ensino e aprendizagem das equações do 1º grau*. Dissertação de Mestrado. Universidade Nova de Lisboa.
- Pessanha, A. (2001). *Actividade lúdica associada à literacia*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 4(8), 149-170.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM
- Ponte, J. P. (2005a). *Álgebra no currículo escolar*. *Educação e Matemática* 85, 36-41.
- Ponte, J.P. (2006). *Números e álgebra no currículo escolar*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarró (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE
- Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 13-27). Lisboa: IEUL.

- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, 22, 196-216.
- Quivy, R., & Campenhoudt, L.V. (2013). *Manual de investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.
- Rino J. (2004). *O jogo, interações e matemática*. Lisboa: APM.
- Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes et al. (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2008: Encontro de Investigação em Educação Matemática - Avaliação em matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: SEM/SPCE.
- Serrano, G. (2004). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes – I. Métodos*. Madrid: Ed. La Muralla.
- Serrazina L., & Oliveira I. (2010). Trajetória de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI (Ed.), *O professor e o programa de matemática do ensino básico* (pp. 43-59). Lisboa: APM.
- Shmakov, P., & Hannula, M. S. (2010). Humor as means to make mathematics enjoyable. In Proceedings of CERME 6 (pp. 144-153). Lyon, France: ERME.
- Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9–15.
- Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM*, 33(4), 123-132.
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM.
- Stein, M. K., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, 105(5), 22-28.
- Tulis, M. (2013). Error management behavior in classrooms: teachers' responses to student mistakes. *Teaching and Teacher Education*, 33, 56-68.
- Vale, I. (2004). Algumas notas sobre a investigação qualitativa em educação matemática: o Estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171-202.
- Viseu, F., & Morgado, J. C. (2018). Os manuais escolares na gestão do currículo de Matemática: Que papel para o professor? *Bolema*, 32(62), 1152-1176.
- Wassermann, S. (1990). *Brincadeira sérias na escola primária*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Wiggins, G. (2012). Seven keys to effective feedback. Feedback for learning. *Educational Leadership*, 7(1), 10-16.
- Yin, R. (1989). *Case Sstudy research: Design and methods*. London: Sage.

8. Anexos

Anexo I – Tarefa dos Doces

Parte I – Vamos jogar!

1. Acede ao link www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.html.

Curiosidade: \$ simboliza dólar, e é a moeda oficial dos EUA. ¢ simboliza centêmo e representa um centésimo do dólar.

- 1.1. Observa cada um dos problemas apresentado em cada nível do jogo proposto. Resolve cada nível, registando sempre os procedimentos que efetuares. Faz um esboço dos primeiros quatro níveis apresentados.

- Resolução do nível 1:
- Resolução do nível 2:
- Resolução do nível 3:
- Resolução do nível 4:

Parte II – Vamos explicar!

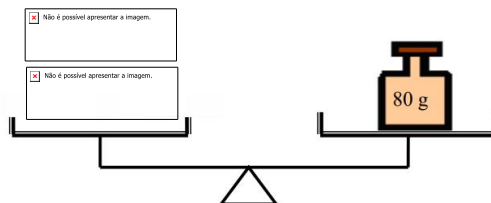
2. Observa a figura correspondente a um possível nível do jogo “*Algebraic Reasoning*” e responde às questões seguintes.



- 2.1. Qual é o tipo doce que devemos analisar em primeiro lugar? Porquê?
- 2.2. Determina o preço do doce escolhido na alínea anterior.
- 2.3. Qual é o doce cujo valor falta determinar? Como o vais determinar?
- 2.4. Determina o valor dos dois doces apresentados na figura.

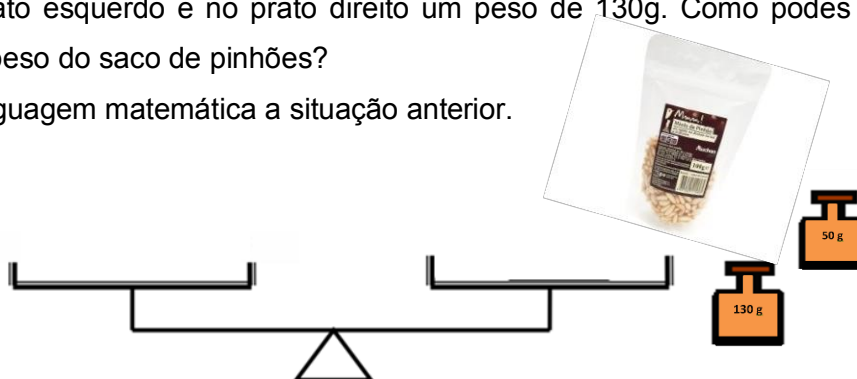
Anexo II – Tarefa *Equilíbrio nas Balanças*

1. Coloca oito doces coloridos no prato esquerdo e 80g no prato direito da balança, de modo que esta fique em equilíbrio.



- 1.1. Escolhe uma incógnita que represente o peso de cada doce colorido.
 - 1.2. Escreve uma equação que represente a situação apresentada.
 - 1.3. Quanto pesa cada doce colorido? Justifica a tua resposta.
2. Representa uma balança em equilíbrio que tem um saco de pinhões e um peso de 50g no prato esquerdo e no prato direito um peso de 130g. Como podes determinar o peso do saco de pinhões?

Traduz em linguagem matemática a situação anterior.



3. Coloca 6 esferográficas e um peso de 12g no prato esquerdo da balança e um peso de 72g no prato direito.
 - 3.1. Quanto pesa cada esferográfica?
 - 3.2. Escreve uma expressão matemática que represente a situação.
4. Coloca 4 caixas de pastilhas num dos pratos da balança. No outro coloca 2 caixas de pastilhas e um peso de 80 g.
 - 4.1. Escolhe uma incógnita que represente o peso de cada caixa de pastilhas.
 - 4.2. Traduz por uma equação a situação descrita.

Anexo III – Tarefa *Balança Interativa*

1. Acede ao jogo “Balança de dois pratos”, disponível em https://web.moderna.com.br/html/html5/m18_BUmat3_u07jg_balanca/.

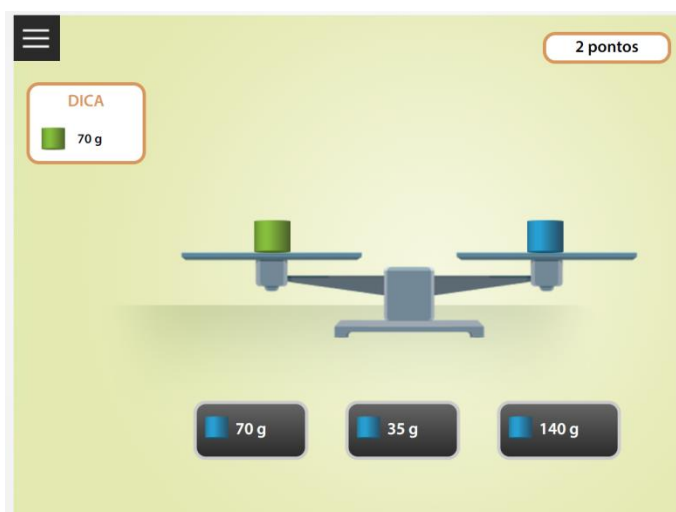
- 1.1. Regista e justifica a resposta a cada nível do jogo.

1.1.1.



Justificação:

1.1.2.



Justificação:

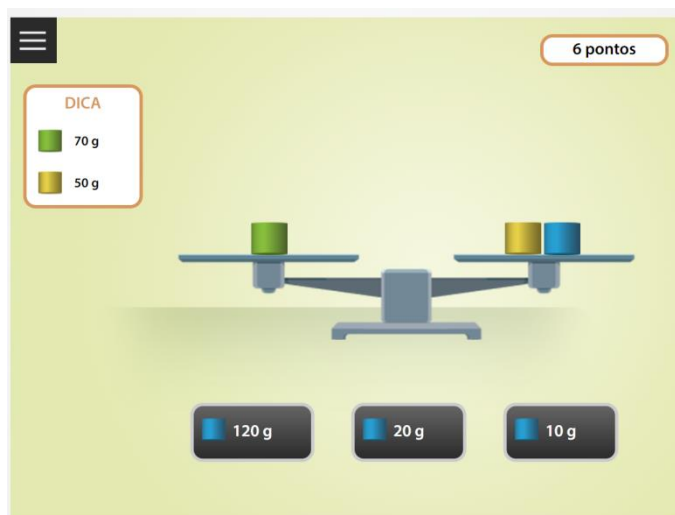
1.1.3.



Justificação:

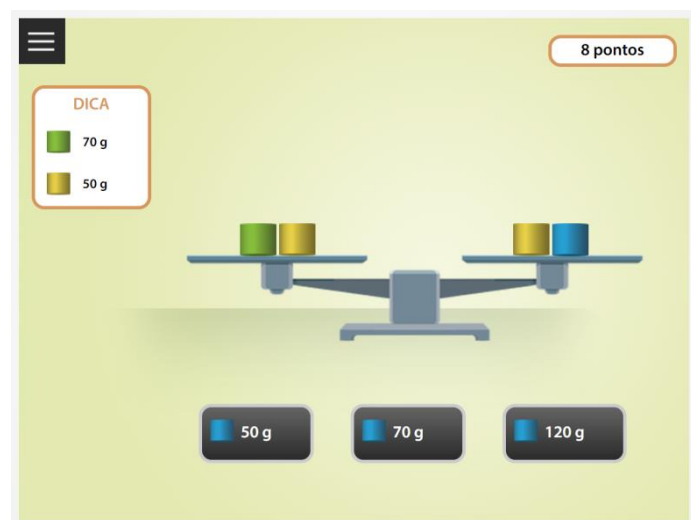
EXTRA: Seja x o peso do objeto azul. Equaciona o problema apresentado.

1.1.4.



Justificação:

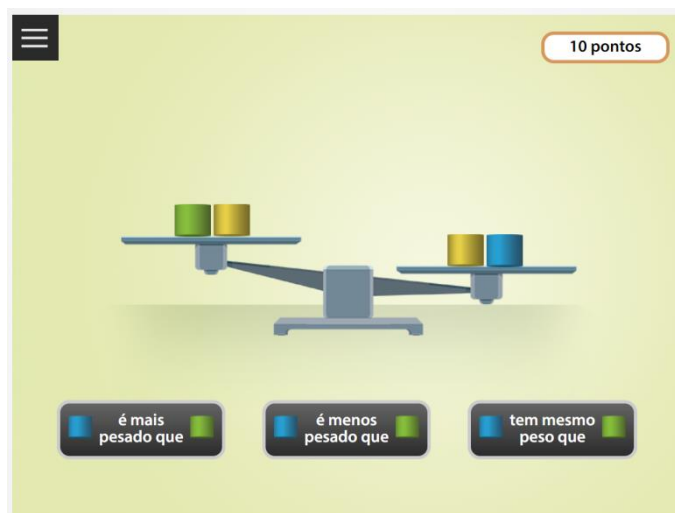
1.1.5.



Justificação:

EXTRA: Seja x o peso do objeto azul. Equaciona o problema apresentado.

1.1.6.



Justificação:

2. Podes continuar a avançar nos níveis do jogo, discutindo as resoluções em grupo.

No final, regista os pontos obtidos:

PONTOS = _____

Anexo IV – Tarefa Os Romanos e o X



1. Descreve a situação apresentada. Por que razão a situação apresentada pode ser engraçada?
2. Dá exemplos de equações. Explica, por palavras tuas, o que é uma equação.
3. Qual o significado de “X” para os romanos?
4. Explica, por palavras tuas, o que significa o “X” numa equação. Qual o nome dado ao “X” numa equação?

Anexo V – Tarefa *Sopa de Letras... ou incógnitas?*

1. Na sopa de letras apresentada a seguir, para além da palavra já assinalada a vermelho, estão 8 palavras relacionadas com o tema “Equações”. Descobre-as.

A	F	G	H	J	Y	T	R	E	T	G	D	H	X	B
B	G	F	D	I	E	F	S	W	A	Q	D	X	J	Z
D	C	H	J	N	U	M	E	R	I	C	A	K	O	P
O	A	Q	S	C	E	R	T	G	P	G	H	A	E	O
N	V	F	E	O	D	O	T	E	R	M	O	S	R	K
A	S	V	Q	G	F	R	E	S	I	A	S	S	E	H
S	E	G	U	N	D	O	M	E	M	B	R	O	S	L
R	A	R	A	I	O	R	E	S	E	M	N	O	R	G
W	E	F	Ç	T	U	T	A	R	I	D	G	K	L	F
A	R	E	Ã	A	A	S	D	Z	R	O	T	U	R	A
J	Z	A	O	T	O	I	Z	S	O	L	U	Ç	A	O
H	C	I	O	A	Z	X	C	V	M	B	K	L	P	X
U	A	E	Q	U	I	V	A	L	E	N	T	E	S	C
O	R	F	R	A	Z	U	T	P	M	Y	T	S	O	B
R	A	Z	D	I	A	L	G	E	B	R	I	C	A	N
A	T	A	D	G	H	J	L	A	R	E	O	U	L	M
S	D	C	Ç	O	L	U	A	R	O	G	B	N	F	O

2. Completa a seguinte correspondência. Para completar a primeira coluna utiliza as palavras encontradas na sopa de letras anterior.

Expressão _ _ _ _ _	
Expressão _ _ _ _ _	
_ _ _ _ _	São as letras que aparecem na equação.
_ _ _ _ _	Igualdade entre duas expressões em que existe pelo menos uma incógnita.
_ _ _ _ _ _ _ _ _	A expressão que fica à esquerda do sinal “=”
Segundo Membro	A expressão que fica à direita do sinal “=”
_ _ _ _ _	São as parcelas que constituem cada um dos membros da equação.

_____	Qualquer valor que se atribua à incógnita e transforme a equação numa afirmação verdadeira.
Conjunto-Solução	Conjunto de soluções de uma equação.
Equações _____ --	Duas ou mais equações dizem-se _____ se têm o mesmo conjunto-solução. Para indicar que duas soluções são _____ utiliza-se o símbolo " $\Leftrightarrow$ " entre elas.

3. Completa o quadro seguinte com os termos que aprendeste sobre equações.

$5b + 5 = 3b + 1$	
1º membro	2º membro
Termos do 1º membro	Termos do 2º membro

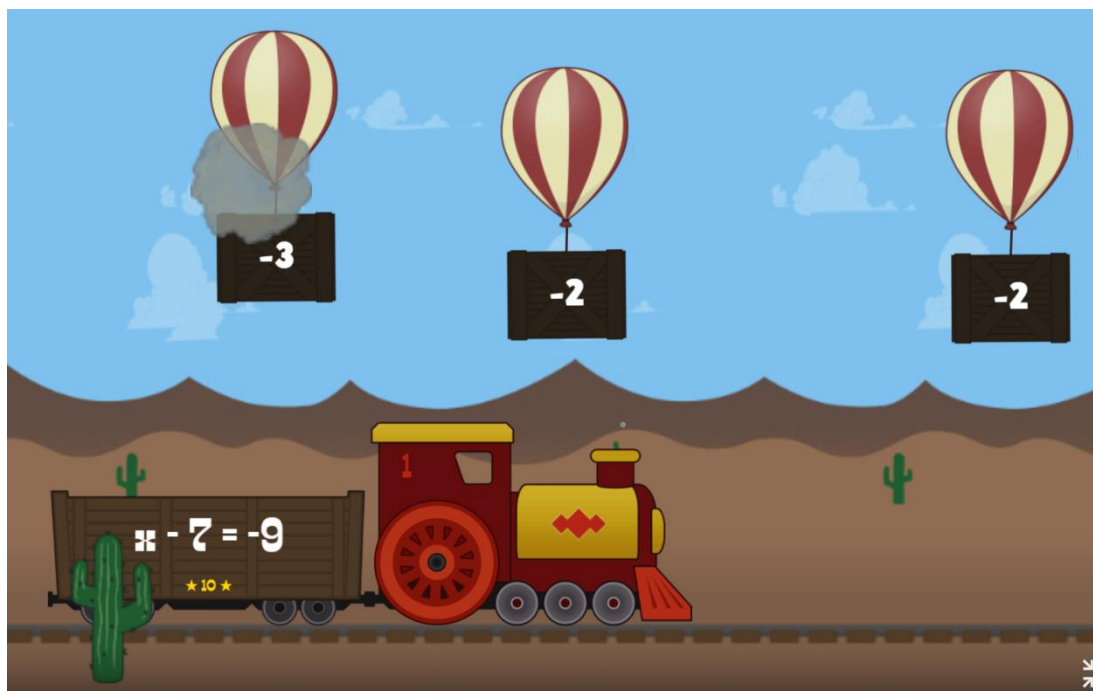
Anexo VI – Tarefa Comboio das Equações

1. Observa as figuras seguintes.

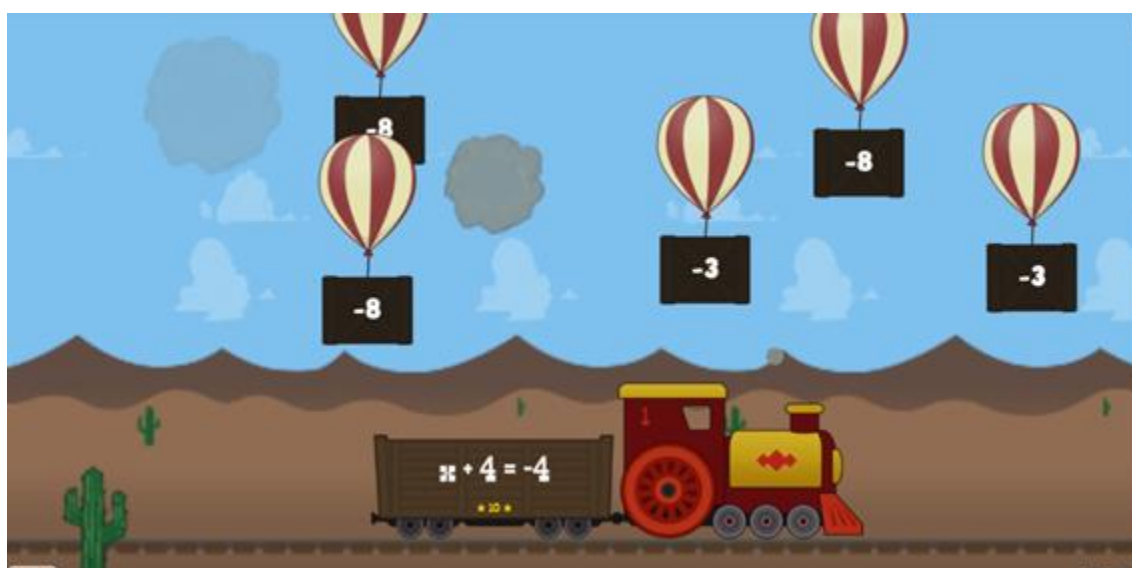
Seleciona o balão correspondente à solução de cada uma das equações apresentadas nos comboios.

Justifica a tua resposta.

1.1.



1.2.



2. Acede ao jogo disponível em: <https://wordwall.net/pt/resource/4902167/trem-das-equa%C3%A7%C3%B5es-do-1%C2%BA-grau>. Completa o máximo de níveis que conseguires. No final, regista o nível em que ficaste e a tua pontuação.

Nível: _____

Pontuação: _____

Anexo VII – Tarefa *O valor da amizade*

1. Lê com atenção a tira de banda desenhada apresentada a seguir.



- 1.1. Traduz por uma equação a situação descrita.
- 1.2. Quantos amigos tem o Tuca? Justifica a tua resposta.

Anexo VIII – Tarefa *Balança de Equações no Geogebra*

1. Acede à apIlet do Geogebra disponível em <https://www.geogebra.org/m/XWzQi3hz> e determina a solução de cada uma das equações.

Regista a equação e a solução obtida nos três primeiros níveis.

- Nível 1:

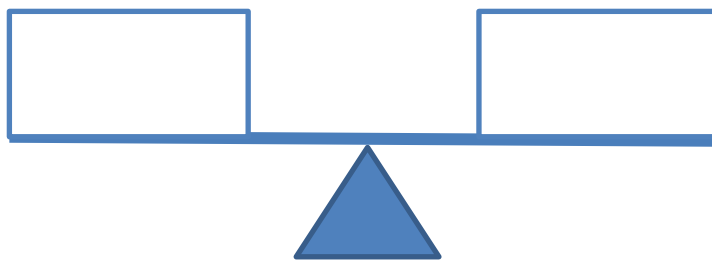
- Nível 2:

- Nível 3:

2. Resolve a seguinte equação:

$$x + 5 = 2x + 1$$

Explica o teu raciocínio.

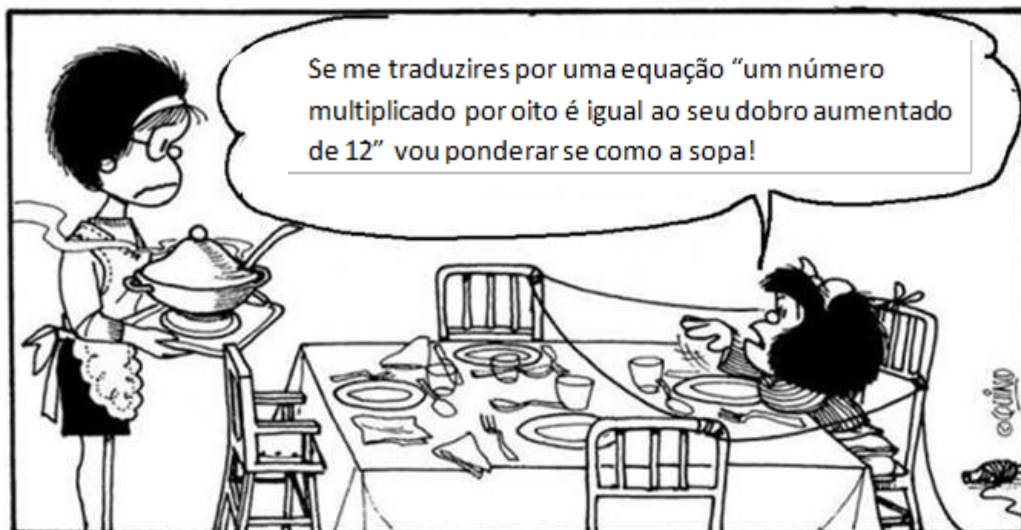


Anexo IX – Tarefa *Problemas da Mafalda*

1. Lê as tiras da Mafalda apresentadas a seguir e responde às questões propostas.

1.1.

Comer a sopa?



1.1.1. Traduz a equação que a mãe da Mafalda deve responder para que a sua filha coma a sopa.

1.1.2. Qual a solução da equação que escreveste na alínea anterior?

Justifica o teu raciocínio.

1.2.

A nota da Mafalda a Matemática



1.2.1. Se a Mafalda tiver 100 pontos, qual terá sido a nota do Filipe?
Justifica o teu raciocínio.

1.3. Eleições do delegado de turma



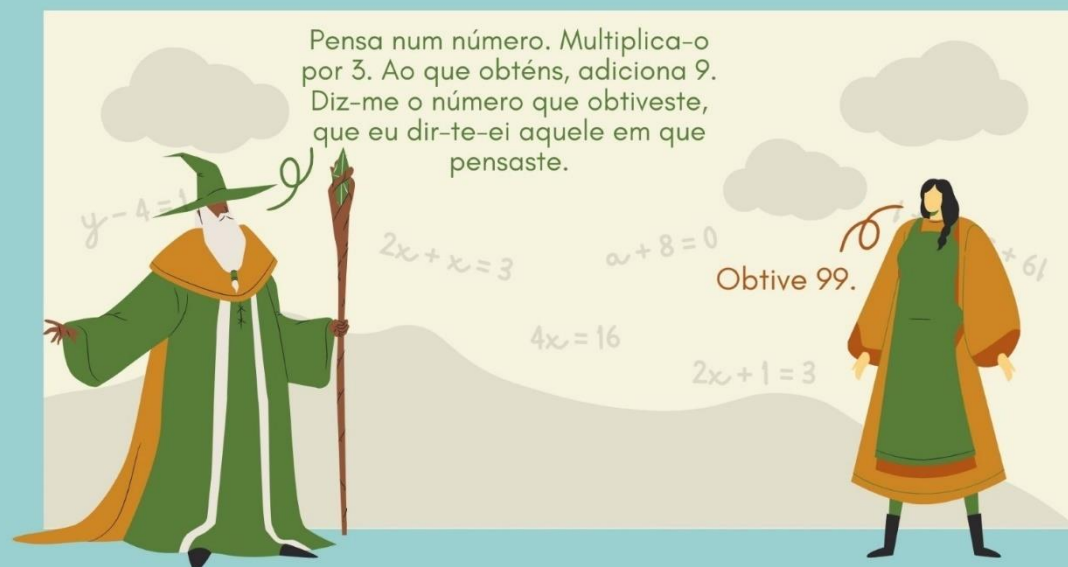
A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

- Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- Apenas 3 alunos receberam votos: a Mafalda, o Filipe e a Susaninha.
- A Susaninha recebeu menos 2 votos que a Mafalda;
- O Filipe recebeu o dobro dos votos da Susaninha;

Quem ganhou as eleições? Estará a Mafalda a enganar a Susaninha?

Na tua resposta deves apresentar os votos dos 3 alunos.

A ASTÚCIA DO GRANDE MÁGICO NO PAÍS DAS EQUAÇÕES



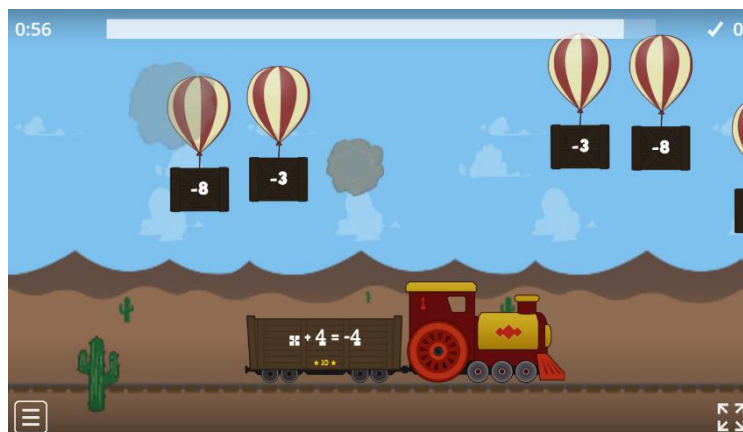
E o mágico acertou no número em que eu pensei...

Anexo XI – Ficha Formativa sobre Equações

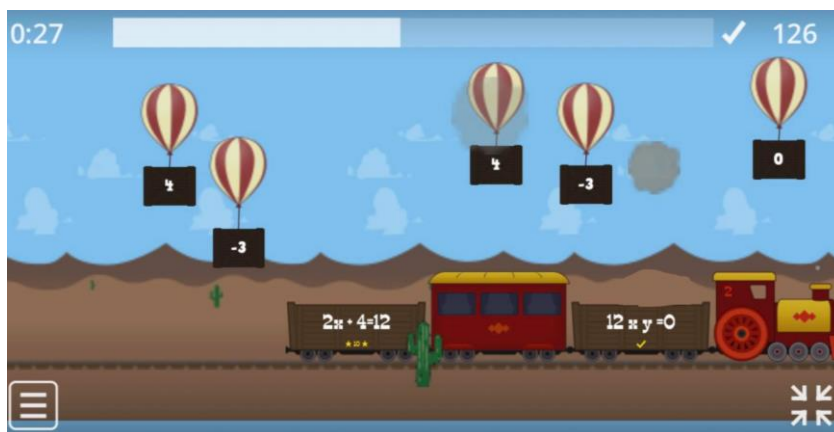
1. Qual a solução de cada uma das equações apresentadas no comboio?

Justifica as tuas respostas.

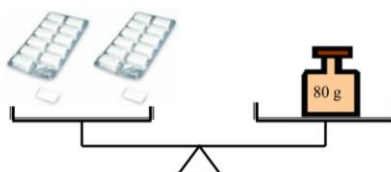
1.1.



1.2.



2. Coloca duas caixas de pastilhas no prato esquerdo e 80g no prato direito da balança de modo que esta fique em equilíbrio.



2.1. Quanto pesa cada caixa de pastilhas?

2.2. Escreve uma equação que represente a situação.

3. Lê atentamente o que a Mafalda disse à mãe



3.1. Escreve a equação mencionada pela Mafalda.

3.2. Qual a sua solução?

4. Resolve a seguinte equação:

$$2x - 10 = 12 - 4x$$

Anexo XII – Tarefa Sequências Reutilizáveis

1. Para esta atividade precisas de:

- Um conjunto de materiais reutilizáveis, como tampas de garrafas, cápsulas de café, entre outros.

Com o material ao teu dispor, pensa e constrói uma sequência.

- 1.1. Desenha os primeiros quatro termos da tua sequência. No final, tira uma fotografia destes termos para partilhar no teams.

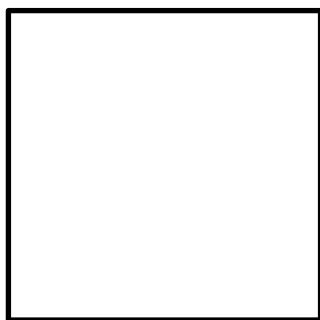


Figura 31

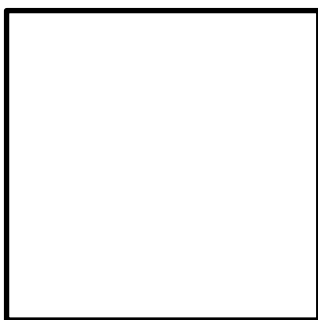


Figura 32

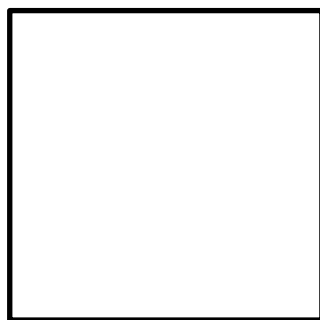


Figura 33

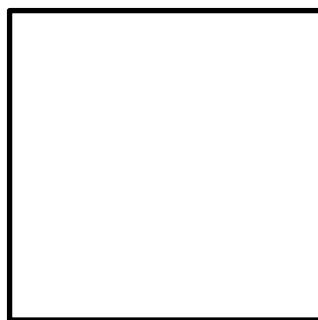


Figura 34

- 1.2. Quantos objetos tem a figura seguinte dessa sequência?
- 1.3. Existe, nessa sequência, alguma figura com 46 objetos? Justifica a tua resposta.
- 1.4. Escreve uma regra que permita determinar o número de objetos de qualquer figura da sequência.
- 1.5. Qual a expressão algébrica que representa a sequência?

Não te esqueças de partilhar no teu Bloco de Notas, na secção “Tarefas”, a resolução da tarefa.

Anexo XIII – Tarefa W

1. A figura seguinte representa o 4º termo de uma sequência.



- 1.1. Indica os três termos que podem anteceder este termo da sequência. Explica o teu raciocínio.
- 1.2. Apresenta um termo geral da sequência do número de pintas.

Anexo XIV – Guião da 1ª Entrevista

- **Lembraste do jogo dos doces – “Algebraic Reasoning”?**
 - O que achaste?
 - Gostaste? O que mais gostaste no jogo? E menos?
 - O que achas que aprendeste? Ajudou-te a aprender?
 - Tiveste dificuldades? Quais?

- **E qual é que foi o outro jogo que foi proposto nas equações, lembraste? (Balança de dois pratos)**
 - O que achaste?
 - Gostaste? O que mais gostaste? E menos?
 - O que achas que aprendeste? Ajudou-te a aprender?
 - Tiveste dificuldades? Quais?

- **Achas que os jogos te ajudam a aprender? Alguma vez aprendeste com os jogos (em matemática ou noutras disciplinas)?**

Anexo XV – Guião da 2ª Entrevista

- **Grupo 1: Lembraste do jogo do *Comboio das Equações*?**

- O que achaste?
- Gostaste? O que mais gostaste no jogo? E menos?
- O que achas que aprendeste? Ajudou-te a aprender?
- Tiveste dificuldades? Quais?

-
- Qual a tua opinião sobre os problemas que te foram propostos nas aulas? Achaste engraçado? (Banda Desenhada/Humor) Lembras-te de algum que tenhas gostado muito? Porquê? E houve algum que não tenhas gostado tanto ou que não tenhas gostado de todo? Qual? Porquê?
 - Sentiste que os problemas te ajudaram a compreender melhor o que aprendemos em matemática?
 - Quando resolves uma equação pensas como se estivesses a mexer numa balança?
 - Em que é que achas que a abordagem da balança te ajudou na resolução de equações?
 - O que foi mais difícil para ti no tema das equações?
 - Qual a aula que gostaste mais? E menos? Porquê?
 - Qual a aula em que sentiste mais dificuldades? Porquê?
 - Sabes resolver equações?
 - Explica o teu raciocínio: $2x+3=3x+1$
Como verificas se $x=3$ é solução da equação? E então qual é a solução?
 - Explica o teu raciocínio: $3x+2=2x+13$
 - Explica o teu raciocínio: $5x-4=2x+8$

Para pensar...

1. Como resolverias?



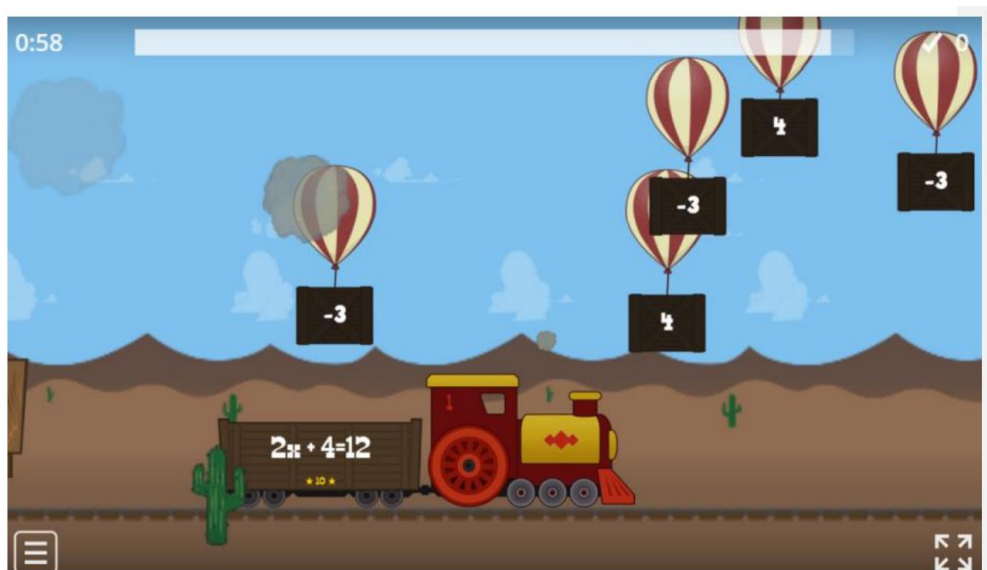
2. Como equacionas este problema? E como resolves?



3. Como equacionas este problema? E como resolves?



4. Qual o balão que vais rebentar? Porquê?



Anexo XVII – Pedido de autorização aos encarregados de educação

Caro(a) Encarregado(a) de Educação do _____

Como penso ser do vosso conhecimento, na disciplina de Matemática do vosso educando há quatro professoras. Três delas inscritas no Mestrado em Ensino da Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Nas aulas de Matemática do presente ano letivo, o(a) seu(sua) educando(a) conta sempre com esta colaboração acrescida. Como parte dos requisitos duma das disciplinas do Mestrado, cada uma das professoras estagiárias tem de implementar um projeto de investigação em Didática da Matemática, orientado pela professora Rosa Tomás Ferreira, docente da FCUP.

A concretização deste trabalho de investigação envolve uma intervenção pedagógica integrada na normal planificação das aulas de Matemática. A concretização do trabalho de investigação envolve também a recolha de dados acerca das aprendizagens dos alunos, recolha essa que tornará viável a implementação do projeto de investigação em causa. Esta recolha de dados inclui a gravação em áudio de algumas aulas/momentos de trabalho dos alunos, a recolha de trabalhos escritos realizados pelos alunos e a realização de entrevistas com alguns alunos desta turma.

- A gravação em áudio é essencial para que toda a informação contida nas interações existentes numa aula ou em parte dela seja efetivamente recolhida e não se percam aspetos relevantes para os objetivos dos trabalhos de investigação. Recorrendo aos meios de comunicação à distância utilizados nas aulas em regime de ensino remoto de emergência, será pedido aos alunos que desliguem as câmaras dos seus computadores, tablets ou telemóveis para que não se proceda à recolha de imagem, mas apenas de som. Estas gravações serão posteriormente transcritas (total ou parcialmente) e serão destruídas assim que o trabalho esteja terminado.

- A recolha das produções escritas dos alunos (respostas a tarefas propostas em aulas síncronas e assíncronas) em nada difere do que seria feito numa situação de ensino presencial, uma vez que é prática comum efetuar essa recolha para efeitos de análise das principais dificuldades dos alunos de modo a poder encontrar estratégias que os ajudem a ultrapassá-las. Assim que o trabalho estiver terminado, as produções escritas recolhidas serão destruídas.

- A realização de entrevistas envolve a gravação em áudio das mesmas, nos mesmos moldes que a gravação de aulas/momentos de aula, e é realizada com um número limitado de alunos, em horário extra-aula a combinar com eles, recorrendo aos meios de comunicação à distância habituais.

Em caso algum os alunos que participarem neste trabalho de investigação ou a escola serão identificados, garantindo-se o anonimato no relatório final de estágio. A participação neste trabalho em nada interfere com a avaliação de desempenho do(a) seu(sua) educando(a) na disciplina de Matemática, pois apenas dirá respeito à viabilização do trabalho de investigação e terá implicações na avaliação da mesma para conclusão do seu curso de Mestrado em Ensino da Matemática. Além disso, a participação do(a) seu(sua) educando(a) neste projeto é inteiramente voluntária, podendo ele(ela) desistir em qualquer momento, sem qualquer justificação necessária. No caso de desistência, nenhum dado eventualmente já recolhido que lhe diga respeito será utilizado na elaboração do relatório final de estágio.

Esta missiva tem como objetivo solicitar a sua autorização para a participação do(a) seu(sua) educando(a) no projeto de investigação. Estamos à disposição para qualquer informação adicional.

Aguardamos a resposta a esta comunicação de forma a elucidar-nos da **existência** ou **não da sua autorização**. Por favor, responda a este email dizendo **SIM** ou **NÃO**.

Os meus cumprimentos