

Mitigação de vibrações em pavimentos originadas pelo funcionamento de máquinas industriais utilizando isolamento resiliente

Bernardo Pedro Marques Teixeira Baila Antunes

Dissertação de Mestrado

Orientador na FEUP: Prof. Carlos Manuel Ramos Moutinho



Mestrado Integrado em Engenharia Civil

06/2021

Resumo

Tendo por objetivo a mitigação de vibrações em pavimentos de edifícios originadas pelo funcionamento de máquinas industriais, na presente dissertação é apresentada a respetiva teoria de enquadramento.

Em vários contextos associados a aspetos estruturais, a operação de equipamentos, à segurança do trabalhador, ao conforto de pessoas próximas ou ao meio ambiente, é fundamental proceder à mitigação das referidas vibrações. As exigências são crescentes.

Na presente dissertação são caracterizadas genericamente as vibrações e os diferentes isoladores de vibração, podendo estes ser um dispositivo mecânico - pneumático ou combinação molas/amortecedores - ou um material que absorve o choque da vibração.

Para compreender melhor o enquadramento e funcionamento dos isoladores de vibrações, a dissertação apresenta a teoria do isolamento de vibrações, incluindo as principais fórmulas associadas a cálculos.

Através dos cálculos analíticos, são realizados quatro casos de estudo considerando diferentes cenários realistas do uso de isoladores de vibração. São determinados os valores de rigidez e fatores de amortecimento adequados.

No Caso de Estudo 1 - problema do Tipo I - as vibrações de uma máquina industrial induzem vibração no pavimento e respetivas fundações. No Caso de Estudo 2 - problema do Tipo II - é a fundação a aplicar uma vibração no próprio equipamento.

Apresentam-se ainda dois casos de estudo relativos ao isolamento ao choque. Sendo um devido à excitação provocada por um impacto de curta duração e o outro ao impacto de longa duração.

Para o problema do Tipo I, no Caso de Estudo 5 foi realizado um cálculo numérico posterior, através de MATLAB. Verificou-se no estudo que os resultados do cálculo numérico são similares aos dos cálculos analíticos.

Nos cálculos numéricos foi depois acrescentado o Efeito da Laje. Com este Efeito os resultados já divergem substancialmente relativamente ao Caso Estudo 5.

Assim, no presente estudo conclui-se que nos cálculos associados à mitigação de vibrações em pavimentos de edifícios originadas pelo funcionamento de máquinas industriais, para a escolha dos isoladores tem de ser considerado o Efeito da Laje, sendo necessário aferir convenientemente os valores característicos das lajes.

Abstract

Having as objective the mitigation of vibrations on building floors originated by the operation of industrial machinery, this dissertation presents the respective framework theory.

In various contexts associated with structural aspects, equipment operation, worker safety, the comfort of people nearby or the environment, it is essential to proceed to the mitigation of these vibrations. The need to do so is growing.

In this dissertation, vibrations and the different vibration isolators are generically characterised. These may be a mechanical device - pneumatic or spring/damper combination - or a material that absorbs the vibration shock.

To better understand the framework and operation of vibration isolators, the dissertation presents the theory of vibration isolation, including the main formulas associated with calculations.

Through analytical calculations, four case studies considering different realistic scenarios of the use of vibration isolators are performed. Appropriate stiffness values and damping factors are determined.

In Case Study 1 - Type I problem - the vibrations of an industrial machine induce vibration in the pavement and its foundations. In Case Study 2 - Type II problem - it is the foundation that applies a vibration to the equipment itself.

Two case studies concerning shock isolation are also presented. One is due to excitation caused by an impact of short duration and the other to an impact of long duration.

For the Type I problem in Case Study 5 a subsequent numerical calculation was carried out using MATLAB. It was found in the study that the results of the numerical calculation are like those of the analytical calculations.

In the numerical calculations the Slab Effect was then added. With this Effect the results already differ substantially from Case Study 5.

Thus, in this study it is concluded that in the calculations associated with the mitigation of vibrations on building floors caused by the operation of industrial machinery, for the choice of insulators must be considered the effect of the slab, and it is necessary to properly assess the characteristic values of the slabs.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, personalizada em todos os professores do Curso. Todo o saber técnico e científico, das ciências básicas às ciências da especialidade, que me transmitiram foram basilares para o conhecimento e as competências pessoais e técnicas que adquiri.

Nesse sentido uma palavra ainda mais especial para o Professor Carlos Manuel Ramos Moutinho que, no culminar do Curso, me orientou inexcelsivelmente na presente Dissertação do Curso de Mestrado em Engenharia Civil. Sempre presente, a sua ciência, a sua pedagogia e os seus traços pessoais foram determinantes para realização de todo o trabalho de investigação.

Um agradecimento maiúsculo aos colegas de Curso! A camaradagem e apoio articulado entre todos, foi uma constante ao longo do Curso.

Ao longo da minha estadia estudantil no Porto (uma cidade que me ficará no coração), antes, e, certamente eternamente, um Obrigado(!) aos meus Amigos de sempre!

Os Amigos e a Minha Família - da minha mãe, ao meu pai, irmão, avós, avôs (falecidos, mas vivos em mim), tios e primos - são mais do que um porto de abrigo, são o mar de afeto, companheirismo e segurança que me permite navegar, mais empoderado pela razão e o coração.

Acknowledgments

I would like to thank the Faculty of Engineering of the University of Porto, personalized in all the course's professors. All the technical and scientific knowledge, from basic sciences to specialty sciences, that they transmitted to me were fundamental for the knowledge and personal and technical skills I acquired.

In this sense, an even more special word for Professor Carlos Manuel Ramos Moutinho who, at the end of the Course, guided me inexorably in the present Dissertation of the master's degree in civil engineering. Always present, his science, his pedagogy and his personal traits were decisive for carrying out all the research work.

A big thank you to the course colleagues! The camaraderie and articulated support among everyone were a constant throughout the Course.

During my student stay in Porto (a city that will stay in my heart), before, and certainly forever, a Thank You(!) to my Friends forever!

Friends and My Family - from my mother to my father, brother, grandmothers, grandparents (deceased but alive in me), uncles and cousins - are more than a haven, they are the sea of affection, companionship and security that allows me to navigate, more empowered by reason and heart.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Enquadramento da Dissertação e Motivação	2
1.2	Estrutura da Dissertação	2
2	Isolamento de Vibrações	3
2.1	Aspetos Gerais	4
2.2	Tipos de Isoladores.....	5
3	Teoria do Isolamento de Vibrações	7
3.1	Conceitos Básicos Sobre o Controlo de Vibrações	8
3.2	Metodologia de Cálculo - Proteção de Vibrações	11
3.3	Metodologia de Cálculo - Isolamento ao Choque	11
3.4	Metodologia de Cálculo - Isolamento de Impactos de Maior Duração	14
4	Casos de Estudo Através de Cálculos Analíticos	17
4.1	Definição do Problema	18
4.2	Caso de Estudo 1 - Problema do Tipo I.....	19
4.3	Caso de Estudo 2 - Problema do Tipo II	22
4.4	Caso de Estudo 3 - Isolamento ao Choque	25
4.5	Caso de Estudo 4 - Isolamento de Impactos de Maior Duração	26
5	Casos de Estudo através de Cálculos Numéricos	29
5.1	Caso de Estudo 5 - Problema do Tipo I.....	31
5.2	Caso de Estudo 6 - Problema do Tipo I com Efeito da Laje	32
6	Conclusões finais	35
6.1	Síntese e Conclusões.....	36
6.2	Desenvolvimento Futuros	36
	Referências.....	37
	ANEXO A:	Erro! Marcador não definido.
	ANEXO B:	Erro! Marcador não definido.

Índice de figuras

Figura 1: Fotografias de exemplos de isoladores pneumáticos.	5
Figura 2: Fotografias com exemplos de molas mecânicas com amortecimento.	5
Figura 3: Fotografias com exemplos de almofadas de choque anti vibração.	6
Figura 4 - Fotografias com exemplos de elastômeros de várias formas.	6
Figura 5: Esquema simplificado do funcionamento de um sistema com isolamento de vibrações.	8
Figura 6: Gráfico de R vs. r para vários valores de ζ	10
Figura 7: Gráfico do isolamento ao choque para impulsos de curta duração vs. fator de amortecimento.	13
Figura 8: Gráfico da eficiência do isolador vs. fator de amortecimento.	13
Figura 9: Gráfico do impacto de longa duração do tipo triangular, força de excitação vs. duração da excitação.	14
Figura 10: Espectro de força para impulsos do tipo triangular, para um fator de amortecimento de 0.05.	15
Figura 11: Espectro de aceleração para impulsos do tipo triangular, para um fator de amortecimento de 0.05.	15
Figura 12: Exemplo de um sistema de bombas para limpeza de água de massa de 1 tonelada.	19
Figura 13: Exemplo de uma instalação de mineração de Bitcoin, massa de 1 tonelada.	23
Figura 14: Exemplo de um martelo pneumático.	25
Figura 15: Esquema simplificado do funcionamento de um sistema com isolamento de vibrações, incluindo o Efeito da Laje.	30
Figura 16: Imagem representativa do programa MATLAB representando a programação para o primeiro caso de estudo.	31
Figura 17: Imagem representativa cálculos realizados em MATLAB para o primeiro caso de estudo.	32
Figura 18 - Imagem representativa do programa MATLAB representando a programação para o primeiro caso de estudo.	34

Índice de tabelas

Tabela 1: Síntese casos de estudo da componente prática da presente Dissertação.	18
Tabela 2: Apresentação da rigidez, face a diferentes fatores de amortecimentos para o Caso de Estudo 1.	22
Tabela 3: Apresentação da rigidez, face a diferentes fatores de amortecimentos para o Caso de Estudo 2.	24
Tabela 4: Deslocamentos máximos - x_{max} - para diferentes ωn	27
Tabela 5: Resultados das simulações para um espectro de diferentes frequências onde se verificou ressonância, destacando a frequência de 15.0 Hz.	33

Lista de siglas, abreviaturas e simbologia

a_{max}	Aceleração máxima
c, c_2	Coeficiente de amortecimento do equipamento vibratório
c_1	Coeficiente de amortecimento da laje
Cap.	Capítulo
d_{max}	Amplitude máxima
Eq.	Equação
F_0	Força de excitação
F_T	Força transmitida
$F_{T_{max}}$	Força transmitida máxima
g	Aceleração da gravidade
h	Altura de queda
$k,$	Rigidez do equipamento vibratório
k_1	Rigidez da laje
m, m_2	Massa do equipamento vibratório
m_0e	Desequilíbrio rotacional
m_1	Massa da laje
Q	Isolamento ao choque
R	Amplitude da força de excitação
r	Razão de frequências
S	Eficiência do isolador
T	Rácio de transmissibilidade
t_0	Duração da excitação
t_m	Instante para o qual ocorre o deslocamento máximo
t_{m_F}	Instante para o qual ocorre a força máxima
t_n	Tempo da excitação
X	Deslocamento máximo do equipamento
x_{max}	Deslocamento máximo
$x(t)$	Excitação do equipamento vibratório no tempo
Y	Deslocamento máximo da fundação
$y(t)$	Efeito do equipamento vibratório no tempo
z	Deslocamento relativo entre massa e fundações
ζ	Fator de amortecimento
v	Velocidade
v_{max}	Velocidade máxima
ω	Frequência angular da excitação
ω_n	Frequência angular natural do sistema

1 Introdução

1.1 Enquadramento da Dissertação e Motivação

As condições estruturais dos edifícios, a operação dos equipamentos, a higiene e segurança dos trabalhadores, o conforto de outras pessoas próximas de equipamentos que produzem vibrações e o próprio ambiente, exige que as vibrações, sobretudo produzidas por maquinaria pesada, com uma operação muito intensa, devam ser mitigadas o mais possível. Na realidade, normas e legislação nos enquadramentos referidos, são cada vez mais exigentes.

Por outro lado, atualmente e cada vez mais no futuro, com o desenvolvimento das necessidades de mais equipamentos eletrónicos pesados de mega centros de dados digitalizados muito concentrados, devem verificar-se novos desenvolvimentos científicos e aplicações nesta área.

Neste contexto, é muito relevante verificar e desenvolver os modos e os dispositivos de isolar ou anular as vibrações em pavimentos e fundações de edifícios originadas pelo funcionamento de máquinas industriais ou outros equipamentos que produzam vibrações.

Para este efeito, a montante, há a necessidade de realizar cálculos matemáticos e modelos ou simulações numéricas o mais exatos possível e próximas do enquadramento real em consideração.

Num domínio técnico-científico que não é comum no dia-a-dia da engenharia civil, mas onde são de prever novos desenvolvimentos futuros, a presente Dissertação, de um modo autónomo, próximo de atos profissionais da engenharia civil, a que se soma uma dimensão de prática científica, permite aplicar conhecimentos e competências técnicas adquiridos ao longo do Curso, sobretudo na Área de Estruturas.

As vibrações originadas pelo funcionamento de máquinas e seu isolamento ou mitigação é, para os efeitos referidos, muito adequada. Permitindo aplicar fórmulas de cálculo numa ótica mais tradicional e, numa vertente mais avançada, a sua aferição aplicando software interativo de cálculo numérico.

1.2 Estrutura da Dissertação

O presente relatório da Dissertação está organizado em cinco capítulos.

No presente Capítulo 1 é efetuado um enquadramento geral da investigação subjacente à dissertação, incluindo a relevância e a atualidade do assunto, o que conduziu à motivação para a sua realização.

O relatório apresenta de seguida uma parte mais teórica - capítulos 2 e 3 - e uma parte/ componente prática ou aplicada nos capítulos 4 e 5.

Assim, nos capítulos 2 e 3 é apresentada uma síntese da principal pesquisa bibliográfica efetuada, enquadrando os exemplos de aplicação e casos de estudo realizado. No Capítulo 2 são apresentados os isoladores de vibrações, incluindo aspetos gerais e tipos de isoladores. No Capítulo 3 está patente a teoria do isolamento das vibrações.

Nos dois capítulos seguintes são apresentados os casos de estudo. No Capítulo 4 é apresentado o estudo de investigação realizado relativamente a quatro casos de estudo. No cálculo analítico utilizado são aplicadas as fórmulas teóricas caracterizadas nos capítulos anteriores.

No Capítulo 5 estão incluídos os resultados e a discussão de simulações matemáticas realizadas por cálculos numéricos no MATLAB, incluindo a inserção de uma nova componente muito pertinente do problema, o que veio consolidar a investigação, corroborando ou não a metodologia e os resultados apresentados no Caso de Estudo 1.

No Capítulo 6 é efetuada uma síntese dos resultados e as principais conclusões do presente estudo de investigação. Neste capítulo são igualmente apresentadas algumas sugestões para o prosseguimento da investigação no domínio científico da Dissertação realizada.

2 Isolamento de Vibrações

2.1 Aspetos Gerais

A temática do controlo de vibrações com origem humana, poderá remeter a verificações da estabilidade estrutural e do conforto humano (Faria, 2020). O isolamento de vibrações em pavimentos pode ser relevante em muitos contextos, como ao nível das condições estruturais do edifícios, da boa operação dos equipamentos, da higiene e segurança dos trabalhadores, do conforto de outras pessoas próximas de equipamentos e do próprio meio ambiente.

As vibrações tanto podem ser originadas por um equipamento como podem ser exteriores ao equipamento, podendo ser vital a proteção deste para não interferir negativamente na sua operação.

Usualmente, os equipamentos pertinentes neste domínio, são máquinas industriais pesadas, muito consumidoras de energia, apresentando uma operação mecânica intensa, como por exemplo, sistemas de bombas de água e águas residuais ou martelos de forja.

Atualmente, equipamento eletrónico de grandes servidores de dados informáticos - *data centres* - também merecem muita acuidade.

O isolamento de vibrações e a sua teoria, centraliza-se muito nos isoladores, já que são estes os elementos que realizam a mitigação das vibrações em pavimentos. Por eles passa literalmente a minimização ou anulação das vibrações.

Os isoladores podem ser um dispositivo mecânico - pneumático ou combinação molas/amortecedores - ou um material que absorve o choque da vibração.

Os isoladores são concebidos face ao tipo de vibrações a que estão dirigidos.

Há assim dois tipos distintos de isolamento de vibrações (Oliveira, 2008):

- O isolamento de vibrações passivo, minimiza a transmissão de vibrações provocadas por um equipamento vibratório para o ambiente exterior.
- O isolamento de vibrações ativo, minimiza a transmissão de vibrações causadas pelo ambiente para o equipamento.

No processo de seleção de um isolador de vibração e suas funcionalidades, há a necessidade de conhecer uma série de características ou propriedade relevantes.

Um características são mais críticas do que outras, no entanto, todas devem ser consideradas para uma escolha ajustada (Braun *et al.* 2001).

Algumas destas características são:

- o peso e o centro de gravidade do equipamento a isolar;
- o tipo de excitação;
- os desequilíbrios rotacionais e as cargas estáticas;
- as características intrínsecas do próprio equipamento (i.e. a resistência às solicitações provocadas);
- as condições do ambiente em causa (p.e. temperatura e variações de temperatura, exposição a fluidos);
- o tempo de vida do serviço.

2.2 Tipos de Isoladores

A solução mais convencional para as vibrações, consiste no reforço da estrutura por forma a aumentar a sua rigidez. Outra possibilidade é a introdução de aparelhos de apoio dotados de um sistema amortecedor que dissipe rapidamente a energia associada ao fenómeno vibratório (Moutinho, 1998).

Há isoladores de vários tipos. Uns são os referidos de operação mecânica, constituindo-se como dispositivos mecânicos com molas/amortecedores, outros baseiam-se a absorção da vibração tendo por base a constituição do material do isolador (Porumamilla, 2007).

a) Isoladores pneumáticos

Os isoladores pneumáticos são cilindros de borracha, sob ar comprimido (*vide* figura seguinte).



FONTES: Willbrandt (2021); Krabex (2021).

Figura 1: Fotografias de exemplos de isoladores pneumáticos.

São uma boa solução para o isolamento de vibrações passivo, sendo aplicados quando se requerem grandes deslocamentos.

Os isoladores pneumáticos operam em baixas frequências.

b) Molas Mecânicas

As molas mecânicas são molas de aço com amortecedor integrado. Este pode estar inserido na própria mola ou estar em paralelo (*vide* figura seguinte).



FONTE: Hangar 111 (2021).

Figura 2: Fotografias com exemplos de molas mecânicas com amortecimento.

As molas mecânicas são muito aplicados na indústria, já que são adequados para sistemas de edifícios e equipamentos industriais pesados. Podem ser utilizados em conjunto.

c) Almofadas de Choque Anti-vibração

Contrariamente aos exemplos anteriores de isoladores de vibrações, que são dispositivos mecânicos, este tipo de isolador baseia-se num material elástico, flexíveis e deformáveis, mas com grande resiliência, p.e. materiais laminados de borracha, cortiça ou espuma (vide figura seguinte).



FONTES: uu-99 (2021); Amazon (2021).

Figura 3: Fotografias com exemplos de almofadas de choque anti vibração.

Não tendo uma estrutura mecanizada, são mais simples, adaptando-se também facilmente à forma do equipamento, não requerendo grande manutenção e problemas de operação.

São tendencialmente de baixo custo e apresentam um tempo de serviço relativamente prolongado.

As almofadas de choque anti-vibração são muito utilizados em maquinaria pesada, mas também têm muito uso em veículos e mesmo em itens caseiros.

d) Elastómeros

Tal como as Almofadas de Choque anti-vibração, os elastómeros baseiam-se no material de que são constituídos, sendo este que mitiga a vibração.

Os elastómeros são elementos relativamente simples de borracha de diferentes formas, servindo inúmeras aplicações (vide figura seguinte).



FONTE: H.B. Fuller (2021).

Figura 4 - Fotografias com exemplos de elastómeros de várias formas.

Os elastómeros estão inseridos em pontos chave do equipamento. São eficientes na absorção de impactos fortes, por exemplo, no sistema de montagem de maquinaria pesada.

3 Teoria do Isolamento de Vibrações

3.1 Conceitos Básicos Sobre o Controlo de Vibrações

O controlo de vibrações consiste na redução de vibrações indesejáveis causadas por equipamentos vibratórios (mecânicos ou estruturais) ou pelo ambiente externo.

Para este fim, conforme se apresentou no capítulo anterior, são utilizados elementos elásticos entre o respetivo equipamento e a fundação ou o pavimento, minimizando a magnitude da força transmitida máxima ($F_{T_{max}}$), em relação à força de excitação (F_0).

Estes elementos podem também ser dimensionados de forma a diminuir o deslocamento máximo (X).

A formulação matemática para cálculos analíticos associados ao controlo de vibrações está extensivamente descrito em Kelly (2000) e, naquilo que é relevante para a presente Dissertação, é descrito no presente capítulo.

Na figura seguinte apresenta-se um esquema simplificado do funcionamento de um sistema com isolamento de vibrações.

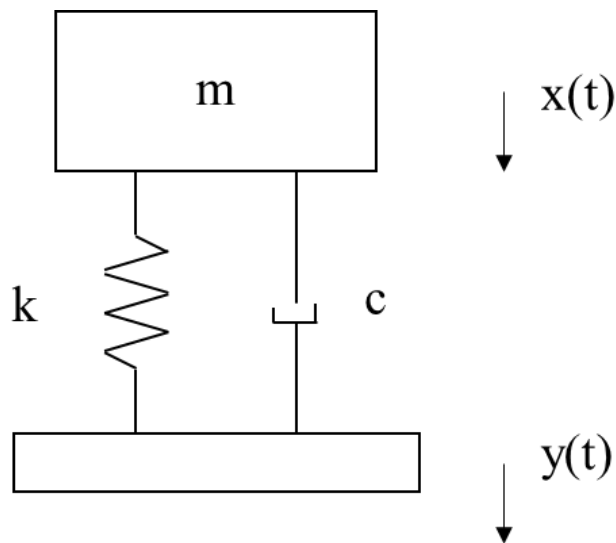


Figura 5: Esquema simplificado do funcionamento de um sistema com isolamento de vibrações.

Na figura anterior:

$x(t)$	Excitação do equipamento vibratório no tempo
$y(t)$	Efeito do equipamento vibratório no tempo
m	Massa do equipamento vibratório
k	Rigidez do equipamento vibratório
c	Coeficiente de amortecimento do equipamento vibratório

Podemos caracterizar a força transmitida máxima e o deslocamento máximo utilizando funções dependentes de alguns parâmetros característicos, conforme expressam as equações (Eq.) seguintes:

$$F_{T_{max}} = f_1(m, \zeta, \omega_n, F_0, t_n) \quad \text{Eq. 3.1}$$

$$X = f_1(m, \zeta, \omega_n, F_0, t_n) \quad \text{Eq. 3.2}$$

Em que:

$F_{T_{max}}$	Força transmitida máxima
m	Massa do equipamento
ζ	Fator de amortecimento
ω_n	Frequência angular natural do sistema
F_0	Força de excitação
t_n	Tempo da excitação
X	Deslocamento máximo do equipamento

Para considerar a relação entre a máxima aceleração do equipamento, para uma determinada massa, e a aceleração da base, utiliza-se um parâmetro T (também designado por TR), denominado de rácio de transmissibilidade:

$$\frac{\omega^2 X}{\omega^2 Y} = T(r, \zeta) \quad \text{Eq. 3.3}$$

$$T(r, \zeta) = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \text{Eq. 3.4}$$

Em que:

ω	Frequência angular da excitação
Y	Deslocamento máximo da fundação
T	Rácio de transmissibilidade

Sendo r a razão de frequências:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{Eq. 3.5}$$

Há dois tipos de isolamento de vibrações:

1. Fundações protegidas de forças provenientes de um equipamento vibratório;
2. Equipamento protegido das vibrações e movimento das fundações.

No primeiro caso o deslocamento do equipamento (X) é um fator determinante, como tal, utiliza-se uma equação diferencial do deslocamento da massa:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{F(t)}{m} \quad \text{Eq. 3.6}$$

No segundo caso utiliza-se uma equação diferencial representativa do deslocamento relativo entre massa (equipamento) e as fundações para o dimensionamento do isolador:

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2z = -\ddot{y} \quad \text{Eq. 3.7}$$

Em que:

z	Deslocamento relativo entre massa e fundações ($z=x-y$)
-----	---

Saliente-se que:

- se $F(t)$ for harmónico, as amplitudes são constantes;
- se $F(t)$ for impulsiva, só o comportamento a curto prazo é relevante.

Para o cálculo do deslocamento relativo entre massa e fundações (Z) utiliza-se a seguinte equação:

$$Z = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \text{Eq. 3.8}$$

Existe um caso especial que tem de ser estudado em particular. Se a excitação for harmónica (provocada por um desequilíbrio rotacional), a amplitude da força de excitação - R - é proporcional ao quadrado da frequência da excitação.

Assim sendo, a força máxima transmitida para a fundação é independente da frequência da excitação. Consequentemente, a percentagem de isolamento varia em função da frequência do equipamento.

Nesta situação, temos:

$$\frac{F_T}{m_0 e \omega_n^2} = r^2 T(r, \zeta) = R(r, \zeta) \quad \text{Eq. 3.9}$$

em que,

$m_0 e$ Desequilíbrio rotacional
 R Amplitude da força de excitação

onde,

$$R(r, \zeta) = r^2 \frac{1 + (2\zeta r)^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \text{Eq. 3.10}$$

Na figura seguinte é apresentado o gráfico de $R(r, \zeta)$.

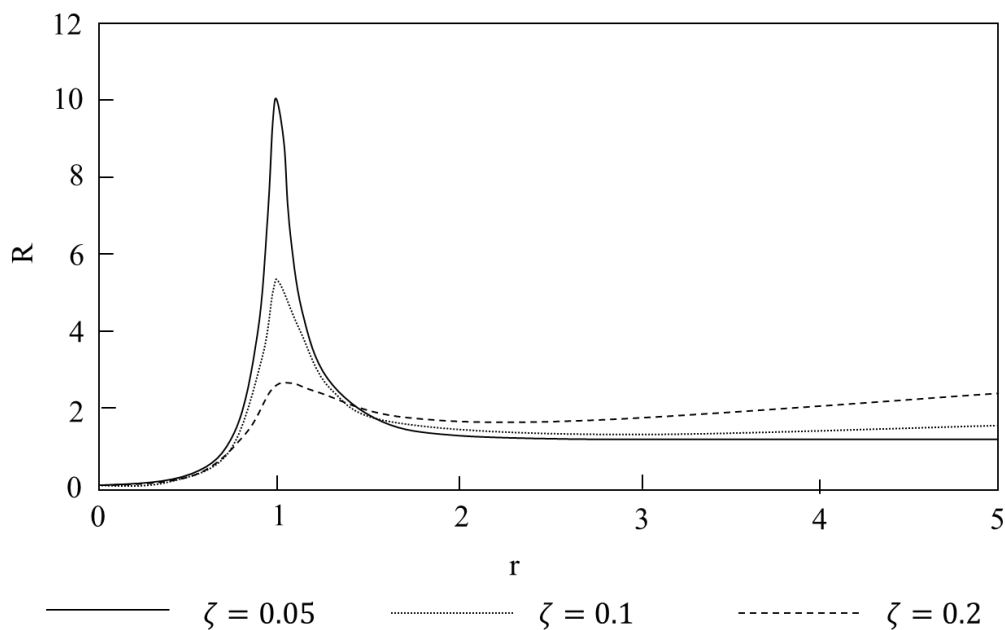


Figura 6: Gráfico de R vs. r para vários valores de ζ .

Sobre o gráfico da Figura 6 há uma série de considerações importantes a ter em consideração:

1. $R(r, \zeta)$ é assintótico para a linha $f(r) = 2\zeta r$, ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(r, \zeta) = 2\zeta r \quad \text{Eq. 3.11}$$

2. Para $\zeta > 0.354$, $R(r, \zeta)$ aumenta à medida que o r também aumenta até um máximo relativo. A partir daí, R diminui até um mínimo relativo. Os valores de r para os quais ocorrem os máximos e mínimos relativos são obtidos através da seguinte equação:

$$1 + (8\zeta^2 - 1)r^2 + 8\zeta^2(2\zeta^2 - 1)r^4 + 2\zeta^2r^6 = 0 \quad \text{Eq. 3.12}$$

3. $R = 2$, para $r = \sqrt{2}$, para todos os valores de ζ .
4. Para $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (0.354), a Eq.12 não tem raízes positivas. R não tem um máximo, mas cresce indefinidamente desde $R = 0$

3.2 Metodologia de Cálculo - Proteção de Vibrações

Na metodologia utilizada na presente Dissertação, no que concerne ao dimensionamento de um isolador de vibrações, é necessário conhecer alguns dados relativos ao problema.

Num problema de Tipo I visa-se proteger as fundações de excitações provocadas por um equipamento vibratório. Para o efeito deve ser conhecido o valor da massa do mecanismo (m), o intervalo de velocidades rotacionais do equipamento e, se for o caso, o desequilíbrio rotacional (m_0e).

Num problema de Tipo II pretende-se proteger um equipamento das vibrações e movimentos das fundações. Deve ser conhecido o valor de m e alguns valores relativos à excitação provocada pelas fundações (amplitude máxima e frequência).

Os cálculos são feitos para três valores de amortecimento diferentes, para, posteriormente, se optar pelo mais favorável.

Num problema de Tipo I com um desequilíbrio rotacional, utiliza-se a seguinte equação simplificada no cálculo de F_{Tmax} :

$$F_T = m_0e \omega_n^2 \times R(r, \zeta) \quad \text{Eq. 3.13}$$

Posteriormente, na resolução do problema é necessário interpolar usando a equação de F_{Tmax} mencionada em cima e a Eq. 3.10.

Iniciando o processo de interpolação com um valor de ω_n , obtido para um ω equivalente à velocidade rotacional média do equipamento e um r obtido através da Eq. 3.12.

Após a obtenção do ω_n pretendido, determina-se a rigidez final:

$$k = m\omega_n^2 \quad \text{Eq. 3.14}$$

3.3 Metodologia de Cálculo - Isolamento ao Choque

O isolamento ao choque originado por um impacto é essencial no controlo de vibrações.

Imaginemos um sistema montado a uma fundação, que origina uma força impulsiva de grande magnitude. Este impacto pode provocar danos estruturais tanto na fundação, como no próprio sistema ou elementos de suporte e montagem.

O sistema de isolamento ao choque tem como objetivo reduzir a magnitude da força a que a fundação é sujeita.

Se a duração da excitação (t_0) em causa for pequena ($t_0 < T/3$), consideramos:

$$I = \int_0^{t_0} F(t) dt \quad \text{Eq. 3.15}$$

e,

$$v = \frac{I}{m} \quad \text{Eq. 3.16}$$

Em que:

v Velocidade

Sendo que o tempo é medido imediatamente a seguir à excitação ser removida.

O deslocamento máximo e a força máxima ocorrem para,

$$t_m = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad \text{Eq. 3.17}$$

Em que:

t_m Instante em que ocorre o deslocamento máximo

$$t_{m_F} = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}(1-4\zeta^2)}{\zeta(3-4\zeta^2)} \right] \quad \text{Eq. 3.18}$$

Em que:

t_{m_F} Instante em que ocorre a força máxima

respetivamente, o que origina:

$$x_{max} = \frac{v}{\omega_n} \exp \left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \quad \text{Eq. 3.19}$$

Em que:

x_{max} Deslocamento máximo

e,

$$F_{Tmax} = mv\omega_n \exp \left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}(1-4\zeta^2)}{\zeta(3-4\zeta^2)} \right] \right) \quad \text{Eq. 3.20}$$

A força transmitida no instante 0 é igual a:

$$F_T(0) = 2\zeta m\omega_n \quad \text{Eq. 3.21}$$

As equações 3.20 e 3.21 originam um gráfico de isolamento ao choque - $Q(\zeta)$:

$$Q(\zeta) = \frac{F_T}{mv\omega_n} = \left\{ \exp \left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}(1-4\zeta^2)}{\zeta(3-4\zeta^2)} \right] \right) \right\} \quad \text{Eq. 3.22}$$

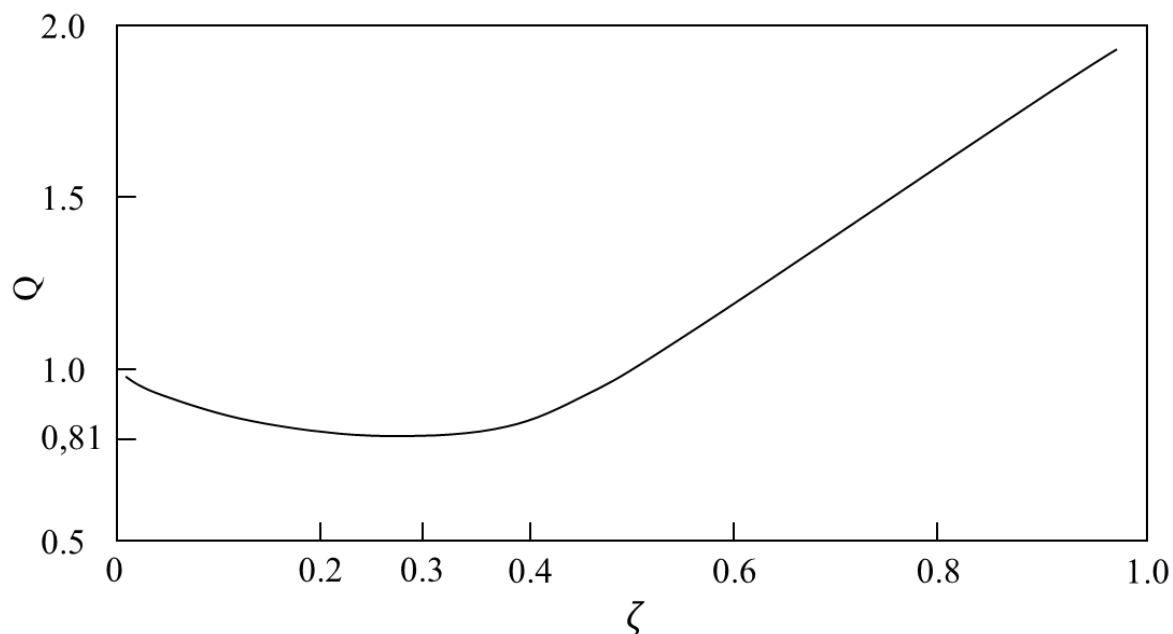


Figura 7: Gráfico do isolamento ao choque para impulsos de curta duração vs. fator de amortecimento.

Tal como as equações 3.22 e 3.19 dão origem a equação e gráfico da eficiência do isolador - $S(\zeta)$:

$$S(\zeta) = \begin{cases} 2 \exp \left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}(4-8\zeta^2)}{8\zeta^2-8\zeta^4-1} \right] \right) \\ 4\zeta \exp \left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \end{cases} \quad \text{Eq. 3.23}$$

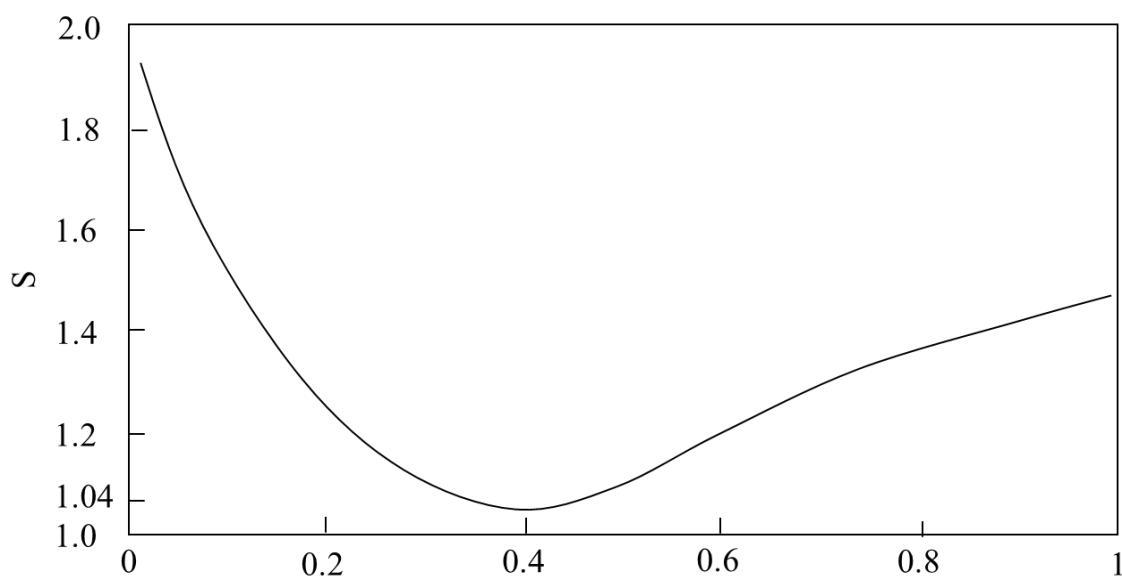


Figura 8: Gráfico da eficiência do isolador vs. fator de amortecimento.

Há algumas considerações essenciais relativamente aos gráficos anteriores.

Para minimizar a força transmitida o isolador deve ter um fator de amortecimento próximo de 0.25.

A máxima eficiência do isolador ocorre para um fator de amortecimento de 0.4 e um S de 1.04.

Para impulsos de maior duração é possível que o deslocamento máximo e a força transmitida máxima ocorram durante a excitação. Nesses casos é necessário utilizar gráficos de espectros de deslocamentos e de forças para vários tipos de impulsos comuns (para frequências naturais e massas de valor unitário).

Estes espectros vão ser utilizados nos cálculos de forma a definir um limite inferior de interpolação, utilizando como limite superior a seguinte expressão:

$$x_{max} = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left(\frac{m\omega_n^2 x_{max}}{F_0} \right) \quad \text{Eq. 3.24}$$

3.4 Metodologia de Cálculo - Isolamento de Impactos de Maior Duração

Para impactos de maior duração, é possível que o deslocamento máximo, ou a força máxima transmitida, ocorram enquanto a excitação está a ser aplicada. Para impactos de duração superior a $(T/3)$, o isolamento ao choque é feito utilizando espectros de choque (função de t_0/T).

Um dos impactos de longa duração mais comum é representado pelo espectro de choque triangular, patente na figura seguinte.

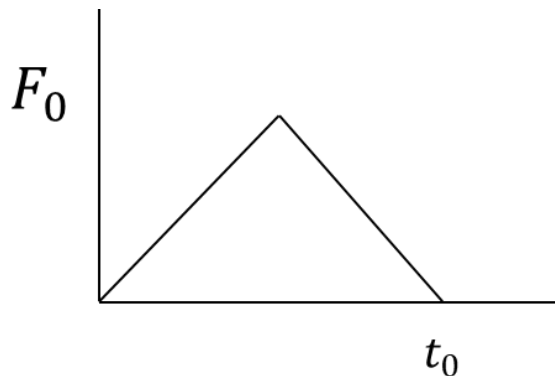


Figura 9: Gráfico do impacto de longa duração do tipo triangular, força de excitação vs. duração da excitação.

Na Figura 10 e Figura 11 são apresentados dois gráficos - espectro de força e de acelerações, representativos da força e da aceleração deste tipo de impacto em função do tempo.

É importante salientar que existe uma variedade de tipos de impactos de longa duração e que, para cada tipo, existem diferentes gráficos de força e aceleração.

Conforme já referido, os gráficos e as equações referidas neste capítulo, detalhados ao pormenor, estão patentes em Kelly (2000).

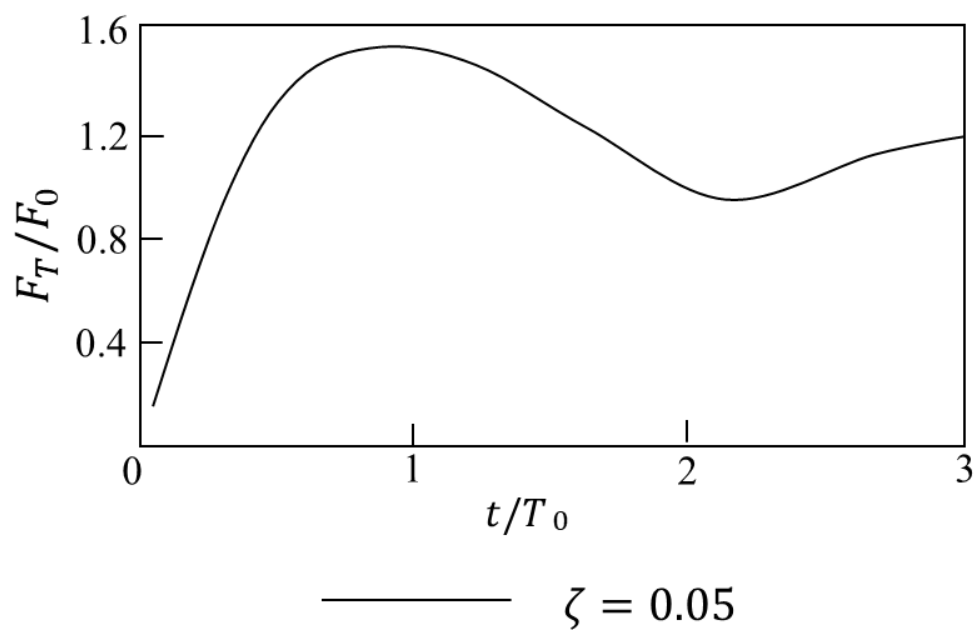


Figura 10: Espectro de força para impulsos do tipo triangular, para um fator de amortecimento de 0.05.

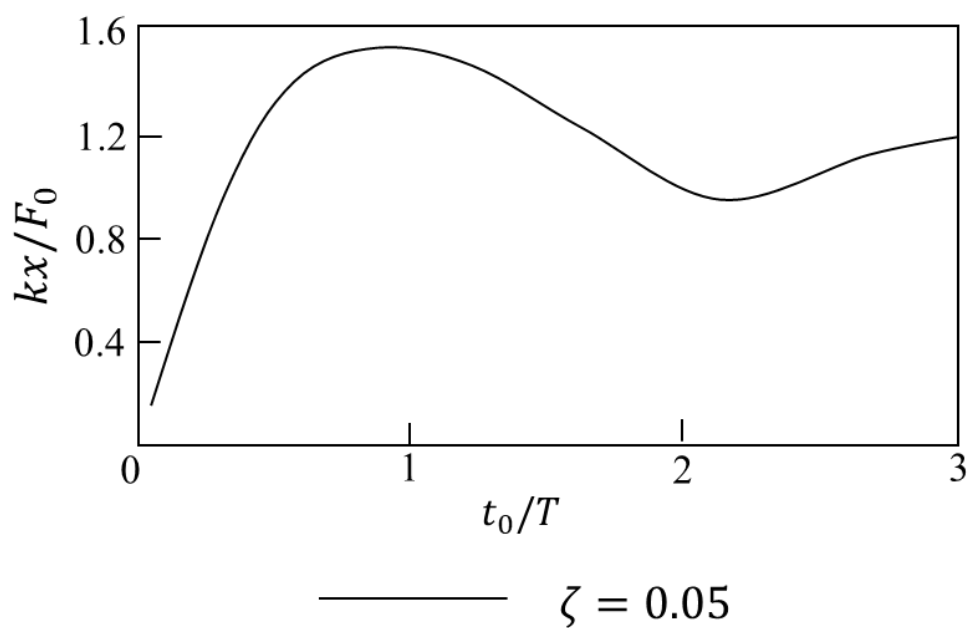


Figura 11: Espectro de aceleração para impulsos do tipo triangular, para um fator de amortecimento de 0.05.

4 Casos de Estudo Através de Cálculos Analíticos

4.1 Definição do Problema

Para exemplificação da teoria referida anteriormente, seguem-se quatro casos de estudo considerando cenários realistas do uso de isoladores de vibração.

O Caso de Estudo 1 considera um problema de Tipo I, onde uma máquina industrial induz uma vibração no pavimento e respetivas fundações.

De seguida, no Caso de Estudo 2, apresenta-se o caso inverso, um problema de Tipo II. Neste é a fundação a aplicar uma vibração no próprio equipamento.

Para ambas as situações foram determinados valores de rigidez e fatores de amortecimento adequados.

Nos casos de estudo seguintes apresentam-se dois problemas de isolamento ao choque.

No Caso de Estudo 3 o isolamento ao choque decorre devido à excitação provocada por um martelo pneumático industrial, sendo um impacto de curta duração. Já no Caso de Estudo 4 o isolamento ao choque é devido a um impacto de longa duração.

Continuando o estudo prático da Dissertação, no Cap.5 para as condições do Caso de Estudo 1 realizam-se cálculos numéricos, incluindo a inserção do Efeito da Laje (*vide* Cap.5.2).

Na tabela seguinte sintetizam-se os seis casos de estudo da componente prática da presente Dissertação.

Tabela 1: Síntese casos de estudo da componente prática da presente Dissertação.

Caso de Estudo	Cap.	Tipo de problema	Esquema do funcionamento	Equipamento	Metodologia de Cálculo
1	4.2	Problema do Tipo I	Equipamento a aplicar uma vibração sobre o pavimento-fundação. Vide Figura 5.	Sistema de bombas para limpeza de água, com massa de 1 tonelada	Cálculo Analítico aplicando as fórmulas descritas no Cap.0
2	4.3	Problema do Tipo II	Fundação a aplicar uma vibração sobre o equipamento.	Equipamento eletrónico de mineração da criptomoeda Bitcoin, com massa de 1 tonelada	
3	4.4	Isolamento ao Choque	Equipamento a aplicar uma excitação por um impacto de curta duração à fundação	Martelo de forja com massa de 200 kg	
4	4.5	Isolamento de Impactos de Maior Duração	Equipamento a aplicar uma excitação por um impacto de longa duração à fundação	Máquina com massa de 1 tonelada	
5	5.1	Problema do Tipo I	Equipamento a aplicar uma vibração sobre o pavimento-fundação. Vide Figura 5	Sistema de bombas para limpeza de água, com massa de 1 tonelada	Cálculo numérico usando o software MATLAB
6	5.2	Problema do Tipo I	Equipamento a aplicar uma vibração sobre o pavimento-fundação, tendo o Efeito da Laje intermediariamente. Vide Figura 15		

4.2 Caso de Estudo 1 - Problema do Tipo I

Num edifício industrial está a operar um sistema de bombas para limpeza de água de 1 tonelada (*vide* um exemplo na figura seguinte).



FONTE: Berg Chilling Systems (2021).

Figura 12: Exemplo de um sistema de bombas para limpeza de água de massa de 1 tonelada.

O equipamento trabalha a velocidades entre 1000 rpm e 2400 rpm, com um desequilíbrio rotacional de $m_0e = 100 \text{ kg} \times 10 \text{ cm}$.

Devido às características estruturais do edifício em questão, foi determinado que a força máxima aplicada na base do sistema deve ser reduzida para 20% do valor inicial (calculado de seguida). Para esse fim, é necessário determinar um valor adequado para a rigidez (k) e para o fator de amortecimento (ζ), relativo ao isolador de vibrações em questão.

O valor da força máxima originada por este equipamento (sem isolador) obtém-se desta forma:

$$F_{max} = m_0e \omega_n^2 \quad \text{Eq. 4.1}$$

sendo " m_0e " o desequilíbrio rotacional.

Para a velocidade mínima:

$$100 \times 0.1 \times \left(\frac{1000 \times 2\pi}{60} \right)^2 = 109.62 \text{ KN}$$

Para a velocidade máxima:

$$100 \times 0.1 \times \left(\frac{2400 \times 2\pi}{60} \right)^2 = 631.65 \text{ KN}$$

É sabido que se um isolador tem capacidade de isolamento suficiente para uma determinada velocidade, essa capacidade de isolamento será ainda maior para velocidades superiores (percentualmente).

Isto é, se o isolamento for superior a 80% (da força da excitação) para a velocidade mínima, está-se também a garantir que o isolamento será superior a 80% relativamente à força da excitação provocada pelo funcionamento do equipamento na velocidade máxima. Devido a este facto, pode considerar-se a velocidade mínima de 1000 rpm como fator condicionante.

Pretende-se então alcançar uma força transmitida máxima de:

$$F_{Tmax} = 0.2 \times 109.62 = 21.924 \text{ KN}$$

Considerando três fatores de amortecimento diferentes:

$$\zeta = 5\%$$

$$\zeta = 10\%$$

$$\zeta = 20\%$$

efetuam-se os cálculos para cada um dos casos, aplicado a Eq. 3.10.

$$R(r, \zeta) = r^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = 0.395$$

Para o cálculo do valor de r que minimiza R , utiliza-se a Eq. 3.12.

Caso 1 ($\zeta=5\%$):

$$1 + (8 \times 0.05^2 - 1)r^2 + 8 \times 0.05^2(2 \times 0.05^2 - 1)r^4 + 2 \times 0.05^2 r^6 = 0$$

$$r = 3.96$$

Se $r = 3.96$ ocorre no centro do espectro de operação, então:

$$r = 3.96 = \frac{\frac{1700 \times 2\pi}{60}}{\omega_n}$$

$$\omega_n = 45 \text{ rad/s}$$

Para a velocidade mínima, r é igual a:

$$r = 2.32 = \frac{104.7}{45}$$

$$21.9 = 10 \times \omega_n^2 \times R\left(\frac{104.7}{\omega_n}; 0.05\right)$$

$$\omega_n = 42.21 \text{ rad/s}$$

$$k = 1781 \text{ KN/m}$$

Força transmitida quando o equipamento trabalha na velocidade mínima (1000 rpm):

$$r = \frac{104.7}{42.2} = 2.48$$

$$F_T = 10 \times 42.21^2 \times R(2.48; 0.05) = 21.894.29 \text{ KN} < 21.924 \text{ KN}$$

Força transmitida quando o equipamento trabalha na velocidade máxima (2400 rpm):

$$r = \frac{251.3}{42.2} = 5.95$$

$$F_T = 10 \times 42.21^2 \times R(5.95; 0.05) = 18.888 \text{ KN} < 21.924 \text{ KN}$$

Caso 2 ($\zeta=10\%$):

$$1 + (8 \times 0.1^2 - 1)r^2 + 8 \times 0.1^2(2 \times 0.1^2 - 1)r^4 + 2 \times 0.1^2 r^6 = 0$$

$$r = 2.93$$

Se $r=2.93$ ocorre no centro do espectro de operação, então:

$$r = 2.93 = \frac{\frac{1700 \times 2\pi}{60}}{\omega_n}$$

$$\omega_n = 60.55 \text{ rad/s}$$

$$k = m\omega_n^2 = 17135 \text{ KN/m}$$

Para a velocidade mínima, r é igual a:

$$r = 1.73 = \frac{104.7}{60.55}$$

$$21.9 = 10 \times \omega_n^2 \times R\left(\frac{104.7}{\omega_n}; 0.1\right)$$

$$\omega_n = 40.74 \text{ rad/s}$$

$$k = 1660 \text{ KN/m}$$

Para a frequência mínima:

$$r = \frac{104.7}{40.7} = 2.57$$

$$F_T = 10 \times 40.7^2 \times R(2.57; 0.1) = 21.849 \text{ KN} < 21.924 \text{ KN}$$

Para a frequência máxima:

$$r = \frac{251.3}{40.7} = 6.17$$

$$F_T = 10 \times 40.7^2 \times R(6.17; 0.1) = 17.524 \text{ KN} < 21.924 \text{ KN}$$

Caso 3 ($\zeta=20\%$):

$$1 + (8 \times 0.2^2 - 1)r^2 + 8 \times 0.2^2(2 \times 0.2^2 - 1)r^4 + 2 \times 0.2^2 r^6 = 0$$

$$r = 2.21$$

Se $r=2.21$ ocorre no centro do espectro de operação, então:

$$r = 2.21 = \frac{\frac{1700 \times 2\pi}{60}}{\omega_n}$$

$$\omega_n = 80.55 \text{ rad/s}$$

Para a velocidade mínima, r é igual a:

$$r = 1.3 = \frac{104.7}{80.55}$$

$$21.9 = 10 \times \omega_n^2 \times R\left(\frac{104.7}{\omega_n}; 0.2\right)$$

$$\omega_n = 35.6 \text{ rad/s}$$

$$k = 2079 \text{ KN/m}$$

Para a frequência mínima:

$$r = \frac{104.7}{35.6} = 2.94$$

$$F_T = 10 \times 35.6^2 \times R(2.94; 0.2) = 14.753 \text{ KN} < 21.924 \text{ KN}$$

Para a frequência máxima:

$$r = \frac{251.3}{35.6} = 7.06$$

$$F_T = 10 \times 35.6^2 \times R(7.06; 0.2) = 13.323 \text{ KN} < 21.924 \text{ KN}$$

Na tabela seguinte sintetizam-se os resultados do presente Caso de Estudo 1 apresentando-se a rigidez, face a diferentes fatores de amortecimento.

Tabela 2: Apresentação da rigidez, face a diferentes fatores de amortecimentos para o Caso de Estudo 1.

Fator de Amortecimento	Rigidez (KN/m)
5%	1781.6
10%	1660
20%	2079

4.3 Caso de Estudo 2 - Problema do Tipo II

Trata-se de um conjunto de equipamento eletrónico altamente sensível que serve a mineração da criptomoeda Bitcoin, de massa igualmente de 1 tonelada, que está a operar num edifício industrial (vide um exemplo na figura seguinte).

Devido a vibrações originadas pelo ambiente exterior, o pavimento na qual este material está inserido provoca uma excitação de 40 Hz e amplitude máxima de 0.04 mm.

De forma a minimizar a força transmitida para o equipamento, é necessário limitar a sua amplitude de aceleração para um valor aceitável de 1 m/s^2 .

Para o efeito, aplica-se um isolador de vibrações adequado, começando por determinar o valor da respetiva rigidez (k) e o fator de amortecimento (ζ) do mesmo.



FONTE: News Bitcoin (2021).

Figura 13: Exemplo de uma instalação de mineração de Bitcoin, massa de 1 tonelada.

Em função da frequência em causa e da aceleração pretendida, é possível calcular o rácio de transmissibilidade:

$$f = 40 \text{ Hz} = 2400 \text{ rpm}$$

$$d_{max} = 0.04 \text{ mm}$$

$$v_{max} = 10 \text{ mm/s}$$

$$a_{max} = 2.5 \text{ m/s}^2$$

Em que:

d_{max}	Amplitude máxima
v_{max}	Velocidade máxima
a_{max}	Aceleração máxima

$$T_{max} = \frac{\omega^2 X}{\omega^2 Y} = \frac{1}{\left(\frac{2400 \times 2\pi}{60}\right)^2 \times 0.04 \times 10^{-3}} = 0.395$$

Considerando três fatores de amortecimento diferentes:

$$\zeta = 5\%$$

$$\zeta = 10\%$$

$$\zeta = 20\%$$

efetuem-se os cálculos para cada um dos casos.

$$T(r, \zeta) = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = 0.395$$

Caso 1 ($\zeta=5\%$):

$$r = 1.89$$

$$\omega_n = 132.98 \text{ rad/s}$$

$$k = m\omega_n^2 = 17689 \text{ KN/m}$$

Caso 2 ($\zeta=10\%$):

$$r = 1.92$$

$$\omega_n = 130.9 \text{ rad/s}$$

$$k = 17135 \text{ KN/m}$$

Caso 3 ($\zeta=20\%$):

$$r = 2.04$$

$$\omega_n = 123.2 \text{ rad/s}$$

$$k = 15178 \text{ KN/m}$$

Na tabela seguinte sintetizam-se os resultados do Caso de Estudo 2 apresentando-se a rigidez, face a diferentes fatores de amortecimento.

Tabela 3: Apresentação da rigidez, face a diferentes fatores de amortecimentos para o Caso de Estudo 2.

Fator de Amortecimento	Rigidez (KN/m)
5%	17689
10%	17135
20%	15178

Procede-se o cálculo da deformação do isolador, elemento importante na escolha do mesmo:

$$Z = \Delta Y = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \text{Eq. 4.2}$$

Caso 1 ($\zeta=5\%$):

$$Z = 0.055 \text{ mm}$$

Caso 2 ($\zeta=10\%$):

$$Z = 0.054 \text{ mm}$$

Caso 3 ($\zeta=20\%$):

$$Z = 0.051 \text{ mm}$$

4.4 Caso de Estudo 3 - Isolamento ao Choque

Um martelo de forja de 200 kg opera num edifício industrial (vide figura seguinte).



FONTE: Alibaba (2021)

Figura 14: Exemplo de um martelo pneumático.

O Martelo é largado de uma altura de 1m numa bigorna de uma tonelada. É necessário dimensionar um isolador que minimize o máximo deslocamento quando a força máxima de 20 kN for aplicada na fundação.

A excitação é o resultado do impacto do martelo com a bigorna. Neste caso, a excitação trata-se de um impulso de curta duração.

A velocidade da bigorna é calculada da seguinte forma:

$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{Eq. 4.3}$$

Sendo:

g	Aceleração da gravidade
h	Altura de queda

Assim:

$$\sqrt{2 \times 9.81 \times 1} = 4.43 \text{ m/s}$$

Sendo a velocidade da máquina calculada utilizando o princípio do impulso e do momento: “o impulso de uma força constante é igual ao produto da força pelo intervalo de tempo durante o qual ela atua”, Eq.16.

$$\frac{200 \times 4.43}{1000} = 0.886 \text{ m/s}$$

De forma a minimizar o produto da força transmitida máxima pelo máximo deslocamento, seleciona-se o fator de amortecimento $\zeta = 0.4$, depois aplicado na função $S(\zeta)$ expressa no gráfico da Figura 8. Limitando a força transmitida a 20 kN, o deslocamento máximo é obtido pela seguinte fórmula:

$$x_{max} = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{F_{Tmax}} S(0.4) \quad \text{Eq. 4.4}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1000 \times 0.886^2}{20,000} 1.04 = 0.02 \text{ m}$$

sendo a frequência natural do isolador (*vide* a função $Q(\zeta)$ gráfico da Figura 7), aferida pela seguinte fórmula:

$$\omega_n = \frac{F_{Tmax}}{mvQ(0.4)} \quad \text{Eq. 4.5}$$

$$\frac{20,000}{1000 \times 0.886 \times 0.88} = 25.65 \text{ rad/s}$$

e a respetiva rigidez (*vide* Eq. 3.14):

$$1000 \times 25.65^2 = 658 \times 10^5 \text{ KN/m}$$

4.5 Caso de Estudo 4 - Isolamento de Impactos de Maior Duração

Considerando uma máquina hipotética de uma tonelada que está sujeita a um impacto de longa duração do tipo triangular, com duração de 0.05 s e um máximo de 20 kN.

É necessário determinar a rigidez de um isolador sem amortecimento para que atinja uma força máxima transmitida inferior a 8 kN e um deslocamento inferior a 3 cm.

Num impacto de longa duração do tipo triangular, a partir do respetivo espectro de força, através do gráfico da Figura 10, para $\frac{F_t}{F_0} < 0.4$, $\frac{t}{T_0} < 0.16$, $\frac{\omega_n \times t}{2\pi} = 0.16$.

$$\omega_n = \frac{2\pi \times 0.16}{0.05} = 20.1 \text{ rad/s}$$

O limite inferior da frequência natural do sistema é obtido por tentativa-erro usando o espectro de deslocamentos relativos a este tipo de excitação.

Partindo de $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ (valor assumido):

$$\frac{\omega_n \times t_0}{2\pi} = 0.08$$

$$\frac{kx}{F_0} = 0.25 \quad (k = m\omega_n^2)$$

$$x_{max} = 5 \text{ cm}$$

$$5 \text{ cm} > 3 \text{ cm}$$

Repete-se o processo para $\omega_n = 20 \text{ rad/s}$

Por tentativa-erro determina-se um valor de ω_n que origine um deslocamento máximo inferior a 3 cm (próximo desse valor). Daí a seguinte tabela.

Tabela 4: Deslocamentos máximos - x_{max} - para diferentes ω_n .

$\omega_n \left(\frac{rad}{s} \right)$	$\frac{\omega_n \times t_0}{2\pi}$	$\frac{kx}{F_0}$	$x_{max}(cm)$
10	0.08	0.25	5
20	0.16	0.4	2
15	0.12	0.38	3.4
18	0.14	0.42	2.6
17	0.135	0.4	2.8

O limite inferior é alcançado para $\omega_n = 17$ rad/s. Ou seja, o intervalo de valores de rigidez aceitável são:

Limite superior ($\omega_n = 21$ rad/s):

$$k = m\omega_n^2 = 404 \text{ KN/m}$$

Limite inferior ($\omega_n = 17$ rad/s):

$$k = m\omega_n^2 = 289 \text{ KN/m}$$

$$289 \text{ KN/m} < k < 404 \text{ KN/m}$$

Para um isolamento adequado deve ser aplicado um isolador de vibrações com rigidez entre 289 KN/m e 404 KN/m.

5 Casos de Estudo através de Cálculos Numéricos

Para a realização das simulações numéricas foi utilizado o software MATLAB.

MATLAB (MathWorks, Inc., 2020) é a sigla para MATrix LABoratory. O MATLAB é um software interativo, incluindo linguagem de programação, dirigido ao cálculo numérico.

O MATLAB é muito usado em cálculos engenharia civil, como noutras áreas da engenharia, já que tem muitos recursos visuais de entrada e saída e permite usar funções de um modo expedito, rápido, que, de outro modo, levariam muito tempo para serem desenvolvidas noutras linguagens de programação, como C e Fortran. Atualmente, há várias bibliotecas (toolboxes) que podem ser usadas para diferentes áreas, como equações diferenciais e estatística.

No presente capítulo, nos casos de estudo 5 e 6 desenvolve-se o Caso de Estudo 1 em que se pretende proteger fundações de excitações provocadas por um equipamento vibratório (vide Cap.4.1).

Para o Caso de Estudo 1 foi realizada uma simulação numérica com as características e enquadramento do equipamento apresentado no Cap.4.2.

Deste modo, será possível efetuar uma comparação entre os resultados obtidos através de cálculos analíticos - realizados no capítulo anterior - com os cálculos numéricos.

A metodologia analítica é assim verificada através de uma metodologia baseada em cálculos numéricos.

Posteriormente no Caso de Estudo 6, foram acrescentadas algumas atenuantes ao problema para que se pudesse alcançar valores ainda mais precisos. Isto é, foi considerado o Efeito da Laje.

Compare-se a figura seguinte . onde é acrescentada a massa de laje (m_1) - com a Figura 5.

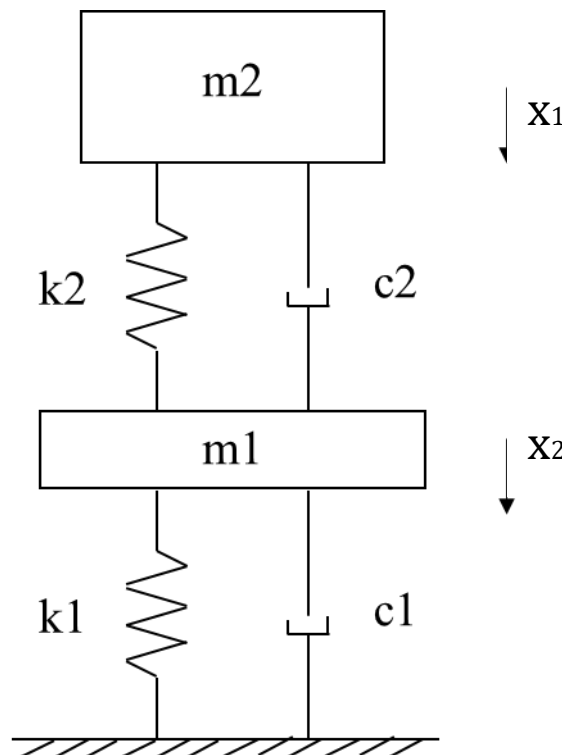


Figura 15: Esquema simplificado do funcionamento de um sistema com isolamento de vibrações, incluindo o Efeito da Laje.

m1	Massa da laje
m2	Massa do equipamento vibratório
k1	Rigidez da laje
k2	Rigidez do equipamento vibratório
c1	Coefficiente de amortecimento da laje
c2	Coefficiente de amortecimento do equipamento vibratório

5.1 Caso de Estudo 5 - Problema do Tipo I

Foi efetuada a simulação numérica relativamente ao Caso de Estudo 1 (vide Cap. 4.2), com exatamente os mesmos dados e considerações. Supõe-se que a laje possui uma rigidez infinita:

$$k_1 \gg k_2 = 9999999999$$

$$c_1 \gg c_2 = 9999999999$$

O fator de amortecimento (ζ) considerado foi de 0.05.

No software MATLAB (vide figura seguinte) foi aplicado um método baseado numa Formulação de Estado descrita em Moutinho (2007).

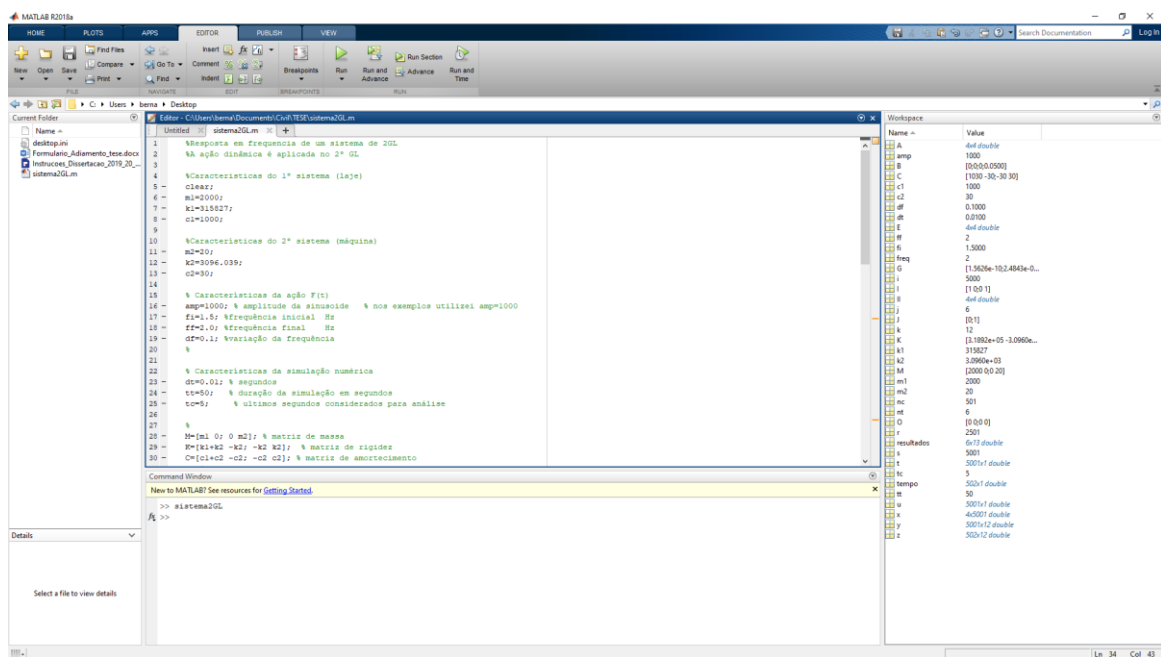


Figura 16: Imagem representativa do programa MATLAB representando a programação para o primeiro caso de estudo.

$$c = 2\zeta m \omega \quad \text{Eq. 5.1}$$

$$2 \times 0.05 \times 1000 \times 42.2 = 4220 \text{ Ns/m}$$

Para a frequência mínima de 1000 rpm (16.67 Hz) e para um valor de k e c de 1781 KN/m e 4220, respetivamente (amortecimento de 5%), obtém-se uma Força Transmitida de 20.463 KN (vide figura seguinte).

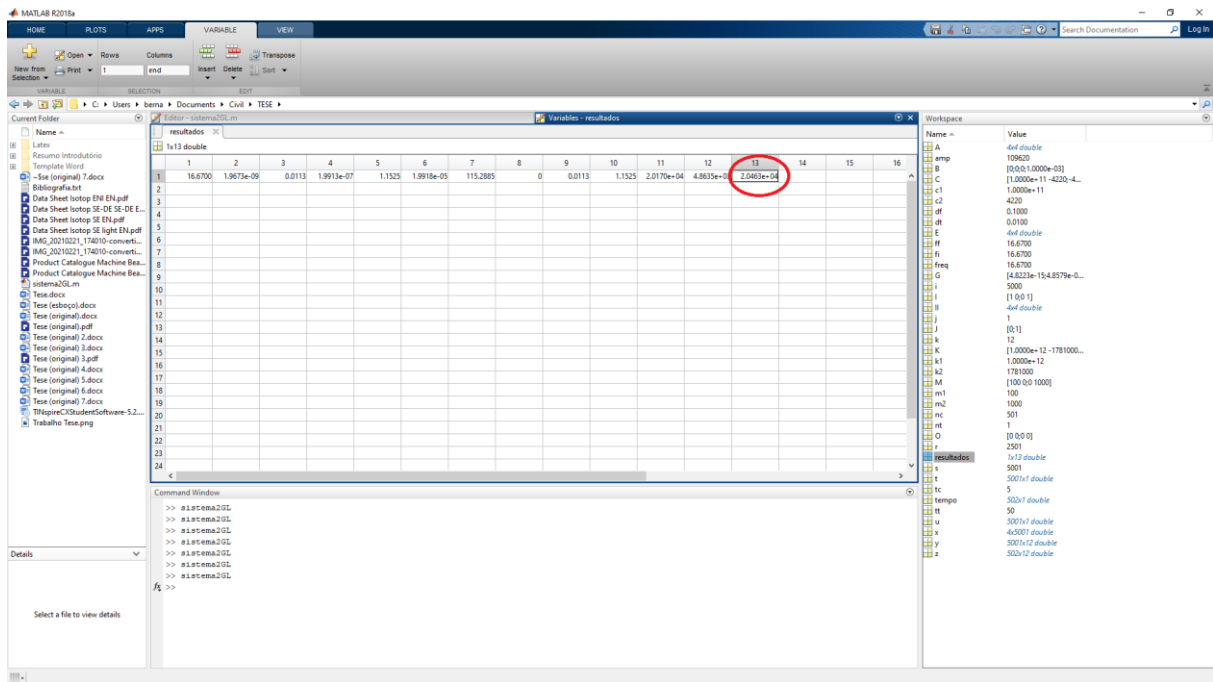


Figura 17: Imagem representativa cálculos realizados em MATLAB para o primeiro caso de estudo.

Pode considerar-se que o valor obtido por este método numérico (20.463 KN) está próximo do valor calculado analiticamente (21.904 KN).

Este cálculo numérico vem confirmar o resultado pela metodologia analítica aplicada no Cap.4.2.

Efetuuou-se também a análise relativa à excitação de frequência superior (2400 rpm), chegando-se a uma força transmitida de 17.860 KN, também muito próxima da força calculada Cap.4.2, 18.888. Uma diferença de cálculo próxima dos 5%.

Os resultados obtidos por cálculo numérico foram sempre inferiores aos resultados por cálculo analítico nas mesmas condições.

5.2 Caso de Estudo 6 - Problema do Tipo I com Efeito da Laje

Neste segundo caso de estudo ao nível da simulação numérica foi considerado o Efeito da Laje

Para este caso foi atribuído um valor realista a $k1$ e $c1$, relativamente às propriedades isoladoras inerentes à própria laje de suporte do equipamento.

Mantendo os valores os valores de $k2$ e $c2$, relativos ao isolador de vibrações dimensionado anteriormente, e adicionando também ao sistema o isolamento relativo à própria laje, foi determinado o valor da força transmitida.

Foi admitido que a laje tem uma massa de 10 toneladas (10 vezes superior à massa do equipamento vibratório) e um fator de amortecimento de 5%. Foram realizadas várias simulações para um espectro de lajes de diferentes frequências, até se encontrar o ponto onde existe ressonância. Analisando os resultado da tabela seguinte, verifica-se que tal acontece no intervalo entre 14.5 Hz e 15.5 Hz.

Tabela 5: Resultados das simulações para um espectro de diferentes frequências onde se verificou ressonância, destacando a frequência de 15.0 Hz.

f (Hz)	ω(rad/s)	k(N/m)	c(Ns/m)	Ft(N/m)
14.5	91.10619	83003373.01	91106.19	21569
14.6	91.73451	84152194.97	91734.51	21587
14.7	92.36282	85308912.6	92362.82	21603
14.8	92.99114	86473525.92	92991.14	21616
14.9	93.61946	87646034.92	93619.46	21629
15.0	94.24778	88826439.61	94247.78	21631
15.1	94.8761	90014739.98	94876.1	21629
15.2	95.50442	91210936.03	95504.42	21619
15.3	96.13274	92415027.77	96132.74	21596
15.4	96.76105	93627015.19	96761.05	21557
15.5	97.38937	94846898.29	97389.37	21497

Ou seja, uma laje com os seguintes valores característicos:

$$m = 10 \text{ t}$$

$$f = 15 \text{ Hz}$$

$$\zeta = 0.05$$

origina uma força transmitida de 21.631 KN, superior ao valor anterior de 20.463 KN. *Vide a programação no MATLAB na figura seguinte.*

A consideração do Efeito da Laje pode originar resultados substancialmente diferentes daqueles obtidos de forma simplificada. Assim, conclui-se que o Efeito da Laje deve ser considerado.

Saliente-se que o Efeito da Laje varia em grande escala, consoante eventuais alterações nos valores característicos da própria laje, sendo então necessário um estudo adequado para a obtenção dos mesmos.

Mitigação de vibrações em pavimentos de edifícios originadas pelo funcionamento de máquinas industriais

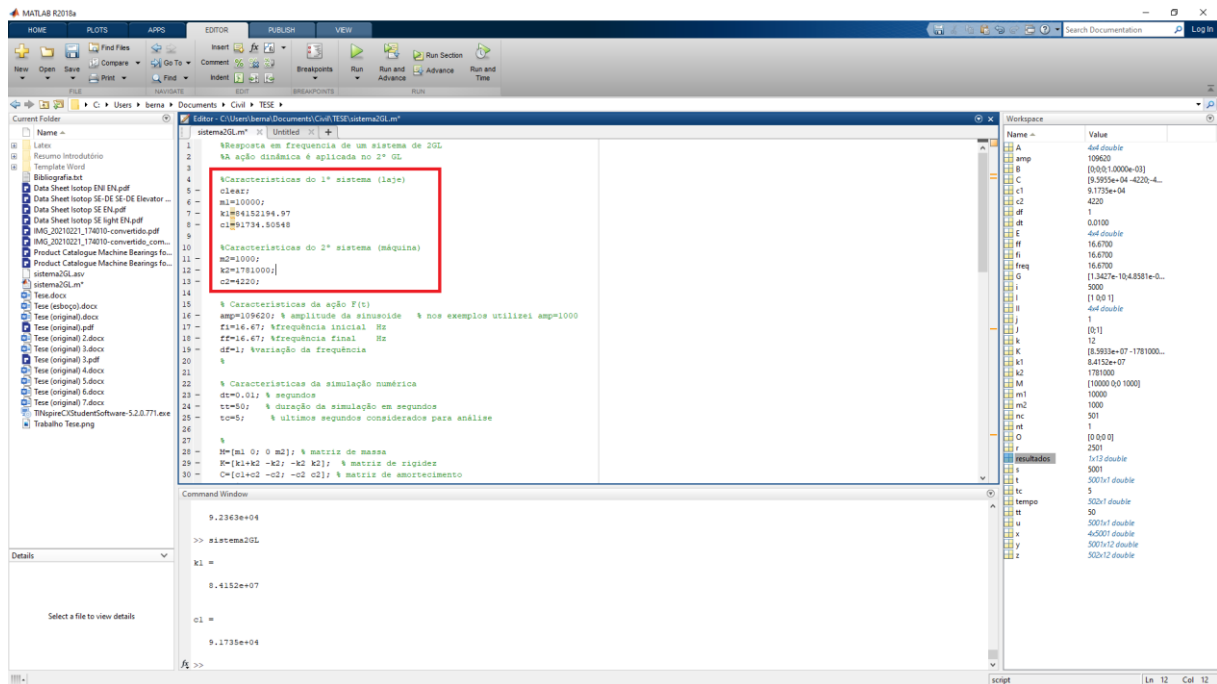


Figura 18 - Imagem representativa do programa MATLAB representando a programação para o primeiro caso de estudo.

6 Conclusões finais

6.1 Síntese e Conclusões

Em vários contextos é importante proceder à mitigação das vibrações em pavimentos de edifícios originadas pelo funcionamento de máquinas industriais. As exigências são crescentes. Na presente Dissertação foram caracterizadas genericamente as vibrações, os diferentes tipos de isoladores de vibração e a teoria do isolamento de vibrações, incluindo as principais fórmulas associadas a cálculos.

Foram realizados quatro casos de estudo considerando diferentes cenários, determinando através de cálculos analíticos os valores de rigidez e fatores de amortecimento adequados.

No Caso de Estudo 1 - problema do Tipo I - as vibrações de uma máquina industrial induzem vibração no pavimento e respetivas fundações. No Caso de Estudo 2 - problema do Tipo II - é a fundação a aplicar uma vibração no próprio equipamento.

Realizaram-se ainda dois casos de estudo relativos ao isolamento ao choque. Sendo um devido à excitação provocada por um choque com um impacto de curta duração e o outro devido a impacto de maior duração.

De seguida, no Caso de Estudo 5, foi realizado um cálculo numérico - através do software MATLAB - para as mesmas condições do Caso de Estudo 1, relativo ao problema do Tipo I, que se pode considerar o mais comum.

Os resultados foram relativamente similares entre os cálculos analíticos e os cálculos numéricos do problema do Tipo I o que, para os critérios e condições do estudo realizado, confirma a validade dos cálculos analíticos.

No Caso de Estudo 6, aos cálculos numéricos foi adicionado o Efeito da Laje, o que aproxima ainda mais a simulação à realidade. Aí, os resultados já divergem substancialmente relativamente ao Caso Estudo 5.

Pelo estudo realizado, conclui-se assim que, para a melhor escolha dos isoladores de mitigação de vibrações em pavimentos de edifícios originadas pelo funcionamento de máquinas industriais, o Efeito da Laje deve ser sempre considerado nos cálculos associados.

Por outro lado, o Efeito da Laje varia significativamente para diferentes características dinâmicas da própria laje. Assim, demonstra-se que, para cálculos efetivamente fiáveis, é necessário um estudo adequado do suporte do equipamento.

6.2 Desenvolvimento Futuros

O presente estudo de investigação, muito geral, sobre a mitigação em pavimentos de edifícios originadas pelo funcionamento de máquinas industriais, poderia ter desenvolvimentos futuros.

Claramente, face ao estudo, ressalta um estudo complementar que poderia ser realizado. Com os resultados obtidos no Cap.4 poder-se-ia realizar a seleção do tipo de isolador, em função dos parâmetros determinados e das especificidades relativas ao equipamento de cada um dos Casos de Estudo.

Ao nível de trabalho à escala piloto ou mesmo à escala real, seria interessante realizar medições e testes de monitorização para comparar os resultados teóricos obtidos e os realmente ocorridos. Eventualmente, num processo de calibração-validação, as formulações e os respetivos cálculos poderiam ser melhorados.

Referências

- Alibaba (2021). “Heavy Duty Blacksmith Air Forging Hydraulic Forge Hammer”. Acedido em: 14, abril, 2021, em: https://www.alibaba.com/product-detail/Heavy-Duty-Blacksmith-Air-Forging-Hydraulic_1600226846461.html?spm=a2700.7724857.normal_offer.d_title.659e7890ux54p8.
- Amazon (2021). “UPE Group All Purpose Blue Composite Foam Vibration Isolation Pads”. Acedido em: 8, maio, 2021, em: <https://www.amazon.in/UPE-Group-Composite-Vibration-Isolation/dp/B009416U9Q>.
- Braun, S.; Ewins, D.; Rao, S. (2001). “Encyclopedia of Vibration”, 1ª Ed., Academic Press.
- Berg Chilling Systems (2021). “Industrial Clean Water Pumping System”. Acedido em: 12, abril, 2021, em: <https://berg-group.com/wp-content/uploads/2019/12/industrial-clean-water-pumping-system-1.jpg>
- Faria, C. A. (2020). “Estudo Comparativo de Normas na Área de Danos Estruturais Causados por Vibrações Impulsivas”. (Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.
- H.B. Fuller (2021). “Elastômeros”. Acedido em: 10, maio, 2021, em: <https://www.hbfuller.com/pt/latin-america/products-and-technologies/markets-and-applications/elastomers>.
- Hangar 111 (2021). “Bilstein Springs & Dampers - front”. Acedido em: 10, maio, 2021, em: <https://www.hangar111.com/shop/lotus-elise-s2-suspension-a-steering/102-elise-s2-bilstein-replacement-spring-damper-assy-front.html>.
- Kelly, S. G. (2000). “Fundamentals of Mechanical Vibrations”. 2ª ed. McGraw-Hill.
- Krabex (2021). “Vibration Control”. Acedido em: 8, maio, 2021, em: <https://www.kabex.com.my/vibration-control?lightbox=datatem-jahniynw>.
- MathWorks, Inc. (2020) – “MATLAB”, Versão 2020b.
- Moutinho, C. M. (1998). “Controlo Passivo e Activo de Vibrações em Pontes de Peões”. (Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.
- Moutinho, C. M. (2007). “Controlo de Vibrações em Estruturas de Engenharia Civil”. (Dissertação de Doutoramento em Engenharia Civil). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.
- News Bitcoin (2021). “Marathon Purchases 10,000 Bitcoin Miners, Machines Will Max Out 100 Megawatt Montana Facility” . Acedido em: 13, abril, 2021, em: <https://news.bitcoin.com/marathon-purchases-10000-bitcoin-miners-machines-will-max-out-100-megawatt-montana-facility>.
- Oliveira, B. C. (2008). “ Desenvolvimento de um Isolador de Vibração Pseudoelástico”. (Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas). Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília.
- Porumamilla, H. (2007). “Modeling, analysis and non-linear control of a novel pneumatic semi-active vibration isolator: a concept validation study”. (PhD Dissertation in Mechanical Engineering). Iowa State University, EUA.
- uu-99 (2021). “Anti vibration mat”. Acedido em: 8, maio, 2021, em: <https://www.uu-99.xyz/products.aspx?cname=anti+vibration+mat&cid=1>.
- Willbrandt (2021). “Air Isolators”. Acedido em: 10, maio, 2021, em: https://www.willbrandt.com/willbrandt/en/vibration_technology/products_air_isolators.php.