
Maximização de frequências naturais de vibração de placas reforçadas com fibras curvilíneas

Tatiana Moreira Simões

Dissertação submetida a:
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para o grau de:

Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Pedro Leal Ribeiro

Coorientador:
Prof. Carlos Conceição António

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto, 2021

O trabalho apresentado nesta dissertação foi realizado no
Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto
Porto, Portugal.

Tatiana Moreira Simões
E-mail: up201604305@fe.up.pt

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Dr. Roberto Frias s/n
4200-465 Porto
Portugal

Abstract

Recent studies showed that variable stiffness composite laminates (VSCL) with curvilinear fibers can have better mechanical behavior than constant stiffness composite laminates. Some work has been carried out with this type of composites to optimize certain properties, such as buckling load or fundamental natural frequency, where, generally, the fiber orientation is the design variable.

In this work, membrane and bending modes of laminated composite plates reinforced with curvilinear fibers are analyzed with the goal of maximizing the fundamental natural frequency. Three different type of fiber paths are considered.

A model based on p -version Finite Element Method and Classical Plate Theory is formulated and implemented to find the modes of vibration and the fundamental natural frequency is maximized using a genetic algorithm.

Single-layer and multi-layer plates with different boundary conditions are studied. A comparison between the presented paths and rectilinear fibers is made to analyze if curvilinear fibers are the best alternative. Natural mode shapes of vibration and stress distribution when the oscillation occurs in a natural vibration mode are also studied.

Keywords: Laminated composites, Plates, Classical Plates Theory, p -FEM, Curvilinear fibers, Optimization, Genetic Algorithm

Resumo

Estudos recentes mostram que os compósitos laminados com rigidez variável (VSCL) reforçados com fibras curvilíneas podem apresentar melhor comportamento mecânico do que compósitos laminados com rigidez constante. Algum trabalho de investigação tem sido realizado com este tipo de compósitos, de forma a otimizar determinadas propriedades, como a carga de encurvadura ou a frequência natural fundamental, onde, geralmente, a orientação das fibras é a variável de projeto.

Neste trabalho, modos de flexão e de membrana de placas compósitas reforçadas com fibras curvilíneas são analisados com o objetivo de maximizar a frequência natural fundamental. Três diferentes trajetórias de fibras curvilíneas são utilizados.

Um modelo baseado no Método dos Elementos Finitos do tipo p e na Teoria Clássica de Placas é formulado e implementado com o objetivo de encontrar os modos de vibração e a frequência natural fundamental é maximizada utilizando um algoritmo genético.

Placas com uma camada e multicamada com diferentes condições de fronteira são estudadas. É feita uma comparação entre os trajetos apresentados e fibras retilíneas para analisar se as fibras curvilíneas são a melhor alternativa. As formas naturais de vibração e a distribuição de tensões quando a oscilação ocorre num modo natural de vibração são também estudados.

Keywords: Compósitos Laminados, Placas, Teoria Clássica de Placas, Método dos Elementos Finitos do tipo p , Fibras Curvilíneas, Otimização, Algoritmo Genético

Agradecimentos

Esta dissertação foi integrada no projeto Nº 030348, POCI-01-0145-FEDER-030348, "Aperfeiçoamento das características dinâmicas e da resistência a instabilidades aeroelásticas de painéis em materiais compósitos através de nanotubos de carbono e de fibras de carbono curvilíneas", financiada pela FEDER, através do Programa Operacional Competitividade e Internacionalização - COMPETE 2020, e por fundos nacionais (PIDDAC), através da FCT/MCTES.

A realização deste trabalho foi possível devido ao apoio de diversas pessoas, às quais agradeço.

Ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Leal Ribeiro, pela constante disponibilidade para o esclarecimento de dúvidas e pela sugestão de diferentes abordagens ao tema que podiam valorizar o trabalho.

Ao meu co-orientador, Professor Doutor Carlos Conceição António, por facilitar a compreensão do algoritmo de otimização a utilizar e por estar disponível para esclarecer as dúvidas que surgiam.

Aos meus amigos, por partilharem este caminho comigo e pela entre-ajuda que existiu ao longo destes anos.

Aos meus pais e à minha irmã, por toda a paciência quando nem tudo corria bem e por serem um apoio essencial durante esta etapa da minha vida.

Conteúdo

Abstract	i
Resumo	iii
Agradecimentos	v
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	1
1.2 Organização do Relatório	2
2 Teoria Clássica de Placas aplicada a compósitos laminados com rigidez variável	3
2.1 Compósitos Laminados	3
2.1.1 Processos de fabrico de compósitos laminados com fibras curvilíneas	5
2.2 Teoria Clássica de Placas	6
2.2.1 Campo de Deslocamentos	6
2.2.2 Campo de Deformações	7
2.2.3 Campo de Tensões	7
2.2.4 Esforços Generalizados	9
2.2.5 Equações de Movimento e de Equilíbrio	10
2.3 Método dos Elementos Finitos do tipo p	14
2.4 Trajetos de Fibras Curvilíneas	16
2.4.1 Trajeto Antissimétrico	16
2.4.2 Trajeto Assimétrico	17
2.4.3 Trajeto Sinusoidal	18
3 Métodos de Otimização	21
3.1 Otimização em Compósitos	22
3.2 Algoritmos Genéticos	24
3.3 Implementação do Algoritmo	28
3.3.1 Formulação do Problema	28
3.3.2 Dados e População Inicial	30
3.3.3 Controlo de Similaridade	30
3.3.4 Avaliação e Ordenação	31
3.3.5 Criação de Nova Geração - Operadores Genéticos	31

4	Validação e Estudo de Convergência	35
4.1	Problema de Flexão	35
4.2	Problema de Membrana	38
4.3	Algoritmo de Otimização	39
5	Resultados	47
5.1	Comparação entre fibras retilíneas e curvilíneas	47
5.1.1	Otimização	48
5.1.2	Frequências e Formas Naturais	52
5.1.3	Análise de Tensões	56
5.2	Casos Particulares	62
5.2.1	Otimização	63
5.2.2	Frequências e Formas Naturais	66
5.2.3	Análise de Tensões	70
6	Conclusão	77
6.1	Conclusões	77
6.2	Trabalho Futuro	78
	Bibliografia	79

Lista de Figuras

2.1	Lâmina	4
2.2	Placa Deformada	7
2.3	Campo de tensões, considerando ausência de deslocamentos no plano médio	9
2.4	Representação do trajeto antissimétrico de uma fibra curvilínea	16
2.5	Ângulo θ^k para um trajeto antissimétrico	17
2.6	Representação do trajeto assimétrico de uma fibra curvilínea	17
2.7	Ângulo θ^k para um trajeto assimétrico	18
2.8	Representação do trajeto sinusoidal de uma fibra curvilínea	18
2.9	Ângulo θ^k para um trajeto sinusoidal	19
3.1	Diagrama de fluxo para um algoritmo genético	25
3.2	Codificação das variáveis de projeto	30
3.3	Criação da nova geração	33
4.1	Evolução do mérito na elite	41
4.2	Evolução da média do fenótipo	42
4.3	Evolução do desvio padrão do fenótipo	42
4.4	Evolução da média do fenótipo - Novo Domínio	43
4.5	Evolução do desvio padrão do fenótipo - Novo Domínio	43
4.6	Distribuição dos sucessos de cruzamento ao longo das gerações	44
4.7	Distribuição dos sucessos de mutação ao longo das gerações	44
5.1	Formas Naturais – Fibras retilíneas (placa simplesmente apoiada)	53
5.2	Formas Naturais – Trajeto Antissimétrico (placa simplesmente apoiada)	54
5.3	Formas Naturais – Trajeto Assimétrico (placa simplesmente apoiada)	54
5.4	Formas Naturais – Trajeto Sinusoidal (placa simplesmente apoiada)	55
5.5	Variação de tensões ao longo da espessura - Fibras retilíneas (1º Modo) - placa simplesmente apoiada	56
5.6	Tensões no plano superior - Fibras Retilíneas (1º Modo) - placa simplesmente apoiada	58
5.7	Tensões no plano superior - Trajeto Antissimétrico (1º Modo) - placa simplesmente apoiada	59
5.8	Tensões no plano superior - Trajeto Assimétrico (1º Modo) - placa simplesmente apoiada	60

5.9	Tensões no plano superior - Trajeto Sinunsoidal (1º Modo) - placa simplesmente apoiada	61
5.10	Formas Naturais – Caso A (Condição de Fronteira SSSS)	68
5.11	Formas Naturais – Caso B (Condição de Fronteira SSSS)	68
5.12	Formas Naturais – Caso C (Condição de Fronteira CFCF)	69
5.13	Formas Naturais – Caso D (Condição de Fronteira CFCF)	69
5.14	Variação de tensões ao longo da espessura - Caso A (1º Modo) - Condição de Fronteira SSSS	70
5.15	Variação de tensões ao longo da espessura - Caso B (1º Modo) - Condição de Fronteira SSSS	71
5.16	Tensões no plano inferior - Caso A (1º Modo) - Condição de Fronteira SSSS	72
5.17	Tensões no plano inferior - Caso B (1º Modo) - Condição de Fronteira SSSS	73
5.18	Variação de tensões ao longo da espessura - Caso C (2º Modo) - Condição de Fronteira CFCF	74
5.19	Variação de tensões ao longo da espessura - Caso D (2º Modo) - Condição de Fronteira CFCF	74
5.20	Tensões no plano inferior - Caso C (2º Modo) - Condição de Fronteira CFCF	75
5.21	Tensões no plano inferior - Caso D (2º Modo) - Condição de Fronteira CFCF	76

Lista de Tabelas

4.1	Propriedades da placa em estudo (Antunes et al., 2020)	36
4.2	Estudo de convergência - problema de flexão	36
4.3	Propriedades da placa em estudo (comparação) (Akhavan and Ribeiro, 2011)	37
4.4	Validação do programa (comparação)	37
4.5	Estudo de convergência - problema de membrana	38
4.6	Propriedades da placa em estudo (comparação - membrana) - adaptado de (Antunes et al., 2020)	39
4.7	Validação do programa (comparação - membrana)	39
4.8	Dados inseridos no algoritmo de otimização	40
4.9	Soluções ótimas encontradas	41
5.1	Propriedades da placa em estudo (Antunes et al., 2020)	48
5.2	Dados do algoritmo de otimização	48
5.3	Resultados de otimização – Condições de Fronteira SSSS e CCCC, Problema de Flexão	49
5.4	Resultados de otimização – Condições de Fronteira CFCF e CFFF, Pro- blema de Flexão	49
5.5	Resultados de otimização – Condições de Fronteira FCFC e FCFF, Pro- blema de Flexão	50
5.6	Resultados de otimização – Condições de Fronteira SSSS e CCCC, Problema de Membrana	50
5.7	Resultados de otimização – Condições de Fronteira CFCF e CFFF, Pro- blema de Membrana	50
5.8	Resultados de otimização – Condições de Fronteira FCFC e FCFF, Pro- blema de Membrana	51
5.9	Frequências naturais dos casos em estudo	52
5.10	Tensão σ_{xx} máxima [MPa] ($x = 0$ e $y = 0$)	56
5.11	Tensão σ_{yy} máxima [MPa] ($x = 0$ e $y = 0$)	57
5.12	Tensão τ_{xy} máxima [MPa] ($x = -a/2$ e $y = -b/2$)	57
5.13	Dados do algoritmo de otimização - Casos Particulares	63
5.14	Resultados de Otimização - Placa 1, Problema de Flexão, Condições de Fronteira SSSS, CCCC e CFCF	63
5.15	Resultados de Otimização - Placa 1, Problema de Flexão, Condições de Fronteira CFFF, FCFC e FCFF	64

5.16 Resultados de Otimização - Placa 2, Problema de Flexão, Condições de Fronteira SSSS, CCCC e CFCF	64
5.17 Resultados de Otimização - Placa 2, Problema de Flexão, Condições de Fronteira CFFF, FCFC e FCFF	64
5.18 Resultados de Otimização - Placa 1, Problema de Membrana, Condições de Fronteira SSSS, CCCC e CFCF	65
5.19 Resultados de Otimização - Placa 1, Problema de Membrana, Condições de Fronteira CFFF, FCFC e FCFF	65
5.20 Resultados de Otimização - Placa 2, Problema de Membrana, Condições de Fronteira SSSS, CCCC e CFCF	65
5.21 Resultados de Otimização - Placa 2, Problema de Membrana, Condições de Fronteira CFFF, FCFC e FCFF	66
5.22 Dados dos casos em estudo	66
5.23 Frequências naturais dos casos em estudo	67

Lista de Símbolos

Letras Gregas

γ	deformação de corte
Γ	função penalidade
ε	deformação normal
$\boldsymbol{\epsilon}$	vetor deformação
θ^k	orientação da fibra
ν	coeficiente de Poisson
ξ, η	coordenadas naturais
ρ	massa volúmica
σ	tensão normal
$\boldsymbol{\sigma}$	vetor tensão
ϕ_k	desfasamento no trajeto sinusoidal
λ_k	comprimento de onda no trajeto sinusoidal
ω	frequência natural de vibração
Ω	área no plano

Letras Latinas

a, b, h	dimensões da placa (comprimento, largura, espessura)
A_k	amplitude no trajeto sinusoidal
E	módulo de Young
f, g	funções de forma
$g(\mathbf{s})$	restrição
G	módulo de rigidez
k	índice da camada

K	curvatura da fibra
$\mathbf{K}_a^{ij}$	matriz rigidez
$\mathbf{M}$	momento resultante
$Mer(\mathbf{s})$	função de mérito
$\mathbf{N}$	força resultante
$\mathbf{M}_a^{ij}$	matriz massa
n	número de camadas do compósito laminado
$\mathbf{P}$	vetor de forças exteriores
p_o, p_m	número de funções de forma usadas na interpolação do deslocamento transversal
$\mathbf{q}(t)$	vetor de deslocamentos generalizados
$\mathbf{s}$	variáveis de projeto
t	variável tempo
T_0^k, T_1^k	ângulos das fibras
u, v, w	componentes do deslocamento
V	volume
W	trabalho
x, y, z	coordenadas globais

Operadores Matemáticos

$\bullet!$	fatorial
$\bullet!!$	duplo fatorial
$\bullet^T$	transposta
$\dot{\bullet}$	primeira derivada em ordem ao tempo
$\ddot{\bullet}$	segunda derivada em ordem ao tempo
$\frac{\partial \bullet}{\partial \bullet}$	derivada parcial
$[\bullet]$	matriz
$\{\bullet\}$	vetor coluna
$[\bullet]$	vetor linha
$ \bullet $	determinante

Introdução

A evolução dos materiais ao longo de vários séculos permitiu a descoberta dos compósitos, que foram utilizados para conseguir grandes avanços tecnológicos e que permanecem, atualmente, em estudo. Diversas pesquisas têm sido realizadas de forma a perceber como melhorar o comportamento destes materiais, sendo uma das soluções a introdução de fibras curvilíneas.

Para encontrar a melhor alternativa dentro desta solução encontrada, são frequentemente utilizados métodos de otimização, ajustados aos objetivos e às limitações do problema.

Nesta dissertação, é feito um estudo de otimização de placas reforçadas com fibras curvilíneas, de forma a perceber em que situações estas são mais favoráveis e quais as orientações que as fibras devem assumir. Para isso, são criados um modelo numérico, com base na Teoria Clássica de Placas e no Método dos Elementos Finitos do tipo p , e um algoritmo de otimização.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é maximizar a frequência natural fundamental de placas reforçadas com fibras curvilíneas. Para isso, é necessário:

- Formular e implementar um modelo numérico que caracterize placas compósitas reforçadas com fibras curvilíneas, utilizando a Teoria Clássica de Placas e o Método de Elementos Finitos do tipo p ;
- Apresentar diferentes trajetórias de fibras curvilíneas, que possam representar uma melhoria no comportamento das placas relativamente às fibras retilíneas;
- Conhecer os métodos de otimização e selecionar o mais adequado ao objetivo do trabalho;
- Implementar o método de otimização escolhido, ajustando a função de avaliação ao problema em estudo;
- Validar os modelos criados, com base em dados publicados;

- Analisar os resultados da otimização, de forma a perceber se o objetivo principal do trabalho foi alcançado, e analisar as frequências e formas naturais e tensões das soluções ótimas encontradas.

1.2 Organização do Relatório

Este trabalho encontra-se dividido em seis capítulos, sendo que os capítulos 2 e 3 incluem a descrição do estado da arte:

- Capítulo 1, "Introdução": neste capítulo, é feita uma breve introdução ao tema estudado e os objetivos do trabalho são enumerados;
- Capítulo 2, "Teoria Clássica de Placas aplicada a compósitos laminados com rigidez variável": descrevem-se brevemente os compósitos laminados, apresentando os processos mais comuns para o fabrico de compósitos laminados reforçados com fibras curvilíneas; de seguida, apresenta-se a Teoria Clássica de Placas, teoria utilizada para formular o problema, desde o campo de deslocamentos até às equações de equilíbrio; posteriormente, é caracterizado o Método dos Elementos Finitos do tipo p , utilizado neste trabalho; por fim, são apresentados três trajetos que as fibras curvilíneas podem seguir, que serão posteriormente estudados;
- Capítulo 3, "Métodos de Otimização": é feita uma contextualização acerca dos métodos de otimização existentes, com especial atenção nos algoritmos genéticos, utilizados para maximizar a frequência natural fundamental das placas neste trabalho; posteriormente, é descrita a implementação do algoritmo, explicando em pormenor todas as etapas do mesmo;
- Capítulo 4, "Validação e Estudo de Convergência": são validados os programas criados; para os problemas de flexão e de membrana, são feitos estudos de convergência e comparações com dados publicados em artigos ou dados de *softwares*, de forma a validar o código desenvolvido; o algoritmo de otimização é validado através de gráficos que descrevem a sua evolução até determinar a solução ótima;
- Capítulo 5, "Resultados": os programas criados são utilizados para obter resultados e estes são devidamente analisados; este capítulo divide-se em duas secções: inicialmente, é feita uma comparação entre placas com uma camada reforçadas com fibras retilíneas e curvilíneas; várias condições de fronteira são estudadas e, para alguns casos, são apresentados os cinco primeiros modos naturais e as tensões quando as frequências naturais são atingidas; um estudo semelhante é feito para placas multicamada apresentadas em artigos consultados;
- Capítulo 6, "Conclusão": as conclusões que foram apresentadas ao longo do trabalho são compiladas neste capítulo e são apresentadas propostas para trabalhos futuros.

Teoria Clássica de Placas aplicada a compósitos laminados com rigidez variável

2.1 Compósitos Laminados

Um material compósito é originado a partir da combinação de dois ou mais materiais à escala macroscópica e é capaz de atingir certas propriedades desejadas, como rigidez ou resistência, que não são possíveis de obter para cada um dos materiais constituintes. A uma escala microscópica, os compósitos são materiais heterogêneos, mas, de forma a simplificar o seu estudo, as suas propriedades, a nível macroscópico, são obtidas através de uma média ponderada das propriedades dos constituintes, passando a considerar-se estes materiais como materiais homogêneos (Reddy, 2004).

Os compósitos são constituídos por, pelo menos, dois materiais: o material de reforço e o material base. De acordo com o material de reforço, alguns dos tipos de compósitos mais comuns são (Jones, 1999; Reddy, 2004):

- Compósitos fibrosos: constituídos por fibras de um material numa matriz de um segundo material; a orientação das fibras pode ser escolhida de modo a obter as propriedades desejadas;
- Compósitos de partículas: compostos por partículas de um ou mais materiais numa matriz de outro material;
- Compósitos laminados: formados por camadas de diferentes materiais – lâminas; o número de camadas do compósito é definido de acordo com as propriedades que se pretendem obter.

A maioria dos compósitos é uma combinação dos tipos apresentados acima.

Nos compósitos fibrosos, o material de reforço é designado por fibra. As fibras suportam a carga aplicada no compósito, têm uma elevada razão comprimento-diâmetro (Reddy, 2004) e um pequeno diâmetro (Jones, 1999) e são classificadas como fibras curtas (ou *whiskers*), cuja razão comprimento-diâmetro é da ordem de 10 a 100, e fibras longas. As propriedades do material em forma de fibra são superiores às propriedades apresentadas pelo material em bruto. As funções da matriz (material base) são manter as fibras juntas,

transferir a carga entre fibras, através da tensão de corte, e proteger as fibras da exposição às condições ambientais (Reddy, 2004).

O material utilizado para a matriz conserva as suas propriedades originais, enquanto que as propriedades das fibras passam a estar dependentes da sua orientação. As melhores propriedades são verificadas na direção das fibras, ao passo que, na direção normal às fibras, as propriedades são muito mais baixas (Reddy, 2004).

É possível melhorar o comportamento dos materiais compósitos através da variação de rigidez no espaço (varia com as coordenadas do plano) – Compósitos Laminados com Rigidez Variável (VSCL). Esta variação pode ser conseguida de várias formas, sendo uma delas a utilização de fibras curvilíneas (Hyer and Lee, 1991). Esta solução não introduz variações de geometria significativas, como acontece, por exemplo, com *stiffeners* (reforços de rigidez), e permite diminuir a concentração de tensões em zonas críticas, como junto a furos (Ribeiro et al., 2014). Os valores das frequências naturais e as formas naturais de vibração são consideravelmente afetados pela utilização de fibras curvilíneas – as placas finas são mais afetadas em relação a placas mais espessas (Akhavan and Ribeiro, 2018).

Em compósitos laminados reforçados por fibras curvilíneas, as fibras podem seguir um trajeto descrito por um ângulo θ^k , sendo k o índice relativo à camada em estudo. Na secção 2.4, são apresentados vários trajetos de fibras.

Uma fraca ligação entre as fibras e a matriz pode resultar em fracas propriedades transversais ou na existência de falhas. A diferença de propriedades entre camadas num compósito laminado provoca uma tensão de corte entre camadas, particularmente nos limites (bordos) do compósito, que pode originar delaminação ou separação entre as fibras e a matriz (Reddy, 2004).

Geralmente, assume-se que a lâmina é contínua, isto é, não existem espaços vazios ou fendas, e que se comporta como um material linear elástico. Uma lâmina com fibras unidirecionais pode ser considerada um material ortotrópico, cujos planos de simetria são o paralelo e o normal à direção das fibras (x e y na Figura 2.1) (Reddy, 2004).

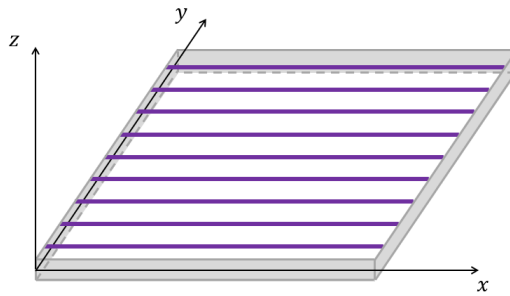


Figura 2.1: Lâmina

As propriedades do compósito são dadas na direção da fibra e na direção normal a esta. O módulo de Young E_1 diz respeito à direção das fibras e corresponde ao valor máximo desta propriedade, enquanto que E_2 é o valor mínimo do módulo de Young e refere-se à direção normal à das fibras. Para além do módulo de Young, é necessário conhecer o coeficiente de Poisson do compósito, ν_{12} , e o módulo de rigidez ao corte do compósito,

G_{12} . Todas essas propriedades são, geralmente, fornecidas pelo fabricante.

2.1.1 Processos de fabrico de compósitos laminados com fibras curvilíneas

O fabrico de compósitos laminados de rigidez variável é um tópico que, apesar do crescente interesse, é pouco considerado nos trabalhos de investigação e, por isso, pouco realizado na indústria face ao seu potencial. As técnicas mais utilizadas são: *Filament Winding* (FW), *Automated Tape Laying* (ATL) e *Automated Fibre Placement* (AFP), e consistem na deposição com elevada precisão de fitas de fibras contínuas para a criação de compósitos multicamada com elevada resistência (Foster, 2021; Lozano et al., 2015). Nestas técnicas, o projeto e o fabrico são interdependentes, na medida em que o projeto influencia muito as características de fabrico (eficiência, qualidade e tempo de processamento) e o fabrico impõe restrições ao projeto (mais restritas que no caso de fibras retilíneas) (Lozano et al., 2015).

A técnica denominada *Filament Winding* deposita uma fita única de pequena largura (3 a 13 mm) e é utilizada para o fabrico de tubos e reservatórios, entre outros (Foster, 2021).

No que diz respeito ao ATL, é feita a deposição de uma fita única de grande largura, pelo que é bastante utilizado para peças grandes (partes de asas de avião) (Foster, 2021). É caracterizado por elevada velocidade de deposição (aproximadamente 13 m/min) e pela redução de erros de deposição, de desperdício de material (ainda que este seja maior do que AFP) e da duração do procedimento face ao fabrico manual. Os sistemas utilizados para a realização desta técnica têm custos muito elevados – na ordem dos milhões de dólares para sistemas básicos – e, por isso, exigem uma elevada produtividade para compensar o investimento num curto período. A deposição das fibras é feita com tolerâncias pequenas de forma a minimizar o impacto dos *gaps* no desempenho mecânico. Não deve ser utilizado em peças com grande complexidade geométrica (Lukaszewicz et al., 2012).

A técnica AFP é a mais utilizada no fabrico de geometrias mais complexas e consiste na deposição de fitas múltiplas de pequena largura (3 a 13 mm), apesar de ter a capacidade de depositar fibras individuais sobre a superfície do laminado, bastante útil para fibras curvilíneas (Foster, 2021; Lukaszewicz et al., 2012). A precisão de deposição é algo muito importante para evitar *gaps* (afeta desempenho mecânico), já que a sua quantidade é, geralmente, superior quando comparada com o mesmo parâmetro no ATL. Numa comparação com a deposição manual, verifica-se a redução do desperdício de material e o aumento da produtividade; contudo, isto vem acompanhado de um aumento da duração do procedimento. O custo destes sistemas é superior ao associado à técnica referida anteriormente (ATL). A largura e o número de tiras utilizadas dependem da complexidade e da geometria da peça e afetam a produtividade (Lukaszewicz et al., 2012).

Ambos os processos se encontram em evolução, devido à procura de processos mais rápidos e com melhores tolerâncias (Foster, 2021) e acredita-se que a técnica AFP apresenta maior potencial para futuros desenvolvimentos (Lukaszewicz et al., 2012).

2.2 Teoria Clássica de Placas

Existem algumas teorias de flexão de placas, sendo a mais simples a Teoria Clássica de Placas (Wang et al., 2000). Esta baseia-se nas hipóteses de Kirchhoff e assume que a espessura da placa é pequena quando comparada com outras dimensões, como a largura, o comprimento ou o diâmetro, sendo a sua relação inferior a 1/20 (Ugural, 1981; Ventsel and Krauthammer, 2001). Opta-se por esta teoria uma vez que apenas se vão analisar placas finas.

As hipóteses de Kirchhoff, válidas para materiais elásticos, homogêneos e isotrópicos (embora também possam ser utilizadas a placas em materiais não isotrópicos), são (Ventsel and Krauthammer, 2001):

1. Não existem deformações no plano médio da placa – superfície neutra ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0$ no plano médio);
2. Segmentos de reta normais ao plano médio da placa não deformado permanecem retos e normais à superfície média da placa após deformação – isto permite desprezar as deformações de corte ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$) e não sofrem qualquer extensão ($\varepsilon_{zz} = 0$);
3. A tensão normal na direção transversal à placa é pequena comparativamente às outras tensões normais, pelo que pode ser desprezada ($\sigma_{zz} = 0$);
4. Os deslocamentos do plano médio são pequenos quando comparados com a espessura da placa.

Se a deflexão do plano médio for grande, existem deformações nesse plano, pelo que a primeira e a quarta hipóteses não podem ser consideradas. Na teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT), válida para placas espessas, as tensões de corte são importantes, pelo que deixa de ser possível assumir a hipótese 2 (Reddy, 2004).

2.2.1 Campo de Deslocamentos

O campo de deslocamentos é apresentado em função do ponto em análise e do tempo, uma vez que o problema é dinâmico, e estes deslocamentos são dados pelas Equações 2.1 a 2.3. Uma vez que se pretende apresentar um modelo que permita estudar modos de flexão e de membrana, a primeira hipótese não será imposta e, por isso, existem deslocamentos no plano médio, u_0 , v_0 e w_0 (Reddy, 2004). A Figura 2.2 mostra a placa deformada, sendo dado relevo à flexão.

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \cdot \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \cdot \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.3)$$

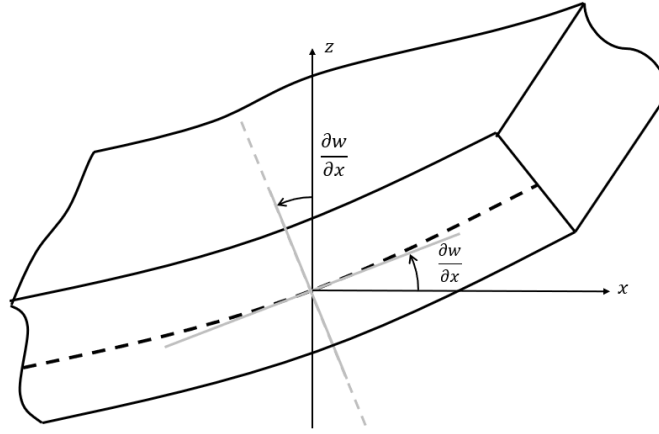


Figura 2.2: Placa Deformada

2.2.2 Campo de Deformações

As deformações podem ser escritas em função dos deslocamentos. Pelas hipóteses consideradas acima, sabe-se que $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$. O campo de deformações associado a esta teoria é apresentado na Equação 2.4.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

O campo de deformações escrito em função dos deslocamentos é dado na Equação 2.5 (Reddy, 2004). As segundas derivadas do deslocamento transversal aqui apresentadas correspondem às curvaturas da placa. Os vetores $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ são descritos nas Equações 2.6 e 2.7, respetivamente.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

2.2.3 Campo de Tensões

As tensões da camada k ($k = 1, \dots, N$) relacionam-se com as deformações segundo a Equação 2.8 (Jones, 1999). Nesta fase, acrescenta-se um expoente (k) já que as tensões

serão calculadas camada a camada, apesar de as deformações serem calculadas para uma única camada equivalente (Teoria de Camada Única Equivalente).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(x, y) & \bar{Q}_{12}(x, y) & \bar{Q}_{16}(x, y) \\ \bar{Q}_{12}(x, y) & \bar{Q}_{22}(x, y) & \bar{Q}_{26}(x, y) \\ \bar{Q}_{16}(x, y) & \bar{Q}_{26}(x, y) & \bar{Q}_{66}(x, y) \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (2.8)$$

As funções $\bar{Q}_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2, 6$ dependem do ângulo θ^k e dos invariantes $U_i, i = 1, \dots, 5$ – Equação 2.9.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^k(x, y) &= U_1 + U_2 \cdot \cos(2\theta^k) + U_3 \cdot \cos(4\theta^k) \\ \bar{Q}_{12}^k(x, y) &= U_4 - U_3 \cdot \cos(4\theta^k) \\ \bar{Q}_{22}^k(x, y) &= U_1 - U_2 \cdot \cos(2\theta^k) + U_3 \cdot \cos(4\theta^k) \\ \bar{Q}_{16}^k(x, y) &= \frac{1}{2}U_2 \cdot \sin(2\theta^k) + U_3 \cdot \sin(4\theta^k) \\ \bar{Q}_{26}^k(x, y) &= \frac{1}{2}U_2 \cdot \sin(2\theta^k) - U_3 \cdot \sin(4\theta^k) \\ \bar{Q}_{66}^k(x, y) &= U_5 - U_3 \cdot \cos(4\theta^k) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Os invariantes não dependem da orientação das fibras e são escritos em função de coeficientes de rigidez do material Q_{ij} , tal como apresentado na Equação 2.10.

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\ U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}) \\ U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Os coeficientes de rigidez do material são apresentados na Equação 2.11 e dependem das propriedades do material: E_{11} (módulo de *Young* longitudinal), E_{22} (módulo de *Young* transversal), ν_{12} e ν_{21} (coeficientes de *Poisson*) e G_{12} (módulo de rigidez ao corte).

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21} \cdot E_{11}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = \frac{\nu_{12} \cdot E_{22}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.11)$$

A variação das tensões ao longo da espessura é representada na Figura 2.3, considerando que não existem deslocamentos no plano médio, ou seja, $u_0 = v_0 = 0$.

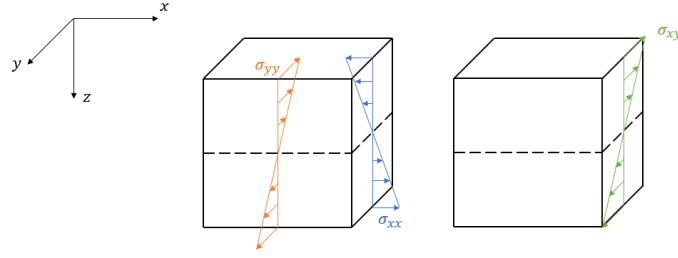


Figura 2.3: Campo de tensões, considerando ausência de deslocamentos no plano médio

2.2.4 Esforços Generalizados

As tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} ao longo da espessura da placa, h , provocam momentos fletores por unidade de comprimento, M_x e M_y , respetivamente. Também a tensão de corte τ_{xy} provoca um momento torsor por unidade de comprimento, M_{xy} (Reddy, 2004). Os momentos resultantes são dados pelo somatório dos momentos resultantes em cada camada k - Equação 2.12.

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x(x, y, t) \\ M_y(x, y, t) \\ M_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^k(x, y, t) \\ \sigma_{yy}^k(x, y, t) \\ \sigma_{xy}^k(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \quad (2.12)$$

As mesmas tensões provocam, também, forças por unidade de comprimento, N_x , N_y e N_{xy} , dadas pela Equação 2.13. As forças resultantes são dadas pelo somatório das forças resultantes em cada camada k .

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x(x, y, t) \\ N_y(x, y, t) \\ N_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^k(x, y, t) \\ \sigma_{yy}^k(x, y, t) \\ \sigma_{xy}^k(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \quad (2.13)$$

As forças e os momentos resultantes podem ser reescritos a partir da Equação 2.14, sendo que as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ são dadas na Equações 2.15 a 2.17.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{m}} \\ \varepsilon_{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij}^k[\theta(x)] dz \quad (2.15)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \cdot \bar{Q}_{ij}^k[\theta(x)] dz \quad (2.16)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \cdot \bar{Q}_{ij}^k[\theta(x)] dz \quad (2.17)$$

Para materiais com simetria em relação à superfície média, a matriz $\mathbf{B}$ é nula e, por isso, é possível desacoplar o problema de membrana do problema de flexão.

2.2.5 Equações de Movimento e de Equilíbrio

Para obter as equações de movimento deste problema, utiliza-se o Teorema dos Trabalhos Virtuais (TTV) que indica que a soma dos trabalhos que as forças internas (δW_{in}), externas (δW_{ext}) e de inércia (δW_j) realizam é nula – Equação 2.18. Assume-se um campo de deslocamentos infinitesimais que respeita as condições de fronteira geométricas.

$$\delta W_{in} + \delta W_j + \delta W_{ext} = 0 \quad (2.18)$$

Na aplicação do Teorema dos Trabalhos Virtuais, considera-se que os deslocamentos são discretizados usando elementos finitos do tipo p , descrito na secção seguinte, e são dados por uma série formada por produtos de funções espaciais e do tempo. A Equação 2.19 apresenta a discretização dos deslocamentos e a Equação 2.20 dá a variação dos mesmos.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^u(x, y)^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{g}^v(x, y)^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^w(x, y)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u(t) \\ \mathbf{q}_v(t) \\ \mathbf{q}_w(t) \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \delta u &= \mathbf{g}^u(x, y)^T \cdot \delta \mathbf{q}_u(t) = \delta \mathbf{q}_u(t)^T \cdot \mathbf{g}^u(x, y) \\ \delta v &= \mathbf{g}^v(x, y)^T \cdot \delta \mathbf{q}_v(t) = \delta \mathbf{q}_v(t)^T \cdot \mathbf{g}^v(x, y) \\ \delta w &= \mathbf{f}^w(x, y)^T \cdot \delta \mathbf{q}_w(t) = \delta \mathbf{q}_w(t)^T \cdot \mathbf{f}^w(x, y) \end{aligned} \quad (2.20)$$

As componentes dos vetores $\mathbf{g}^u(x, y)$ e $\mathbf{f}^w(x, y)$ são produtos de funções de forma g e f - $g_i(x) \cdot g_j(y)$, $i, j=1, \dots, p_m$, e $f_i(x) \cdot f_j(y)$, $i, j=1, \dots, p_o$, respetivamente. As componentes do vetor $\mathbf{q}(t)$ são conhecidas como coordenadas generalizadas.

Considerando apenas placas simétricas em relação à superfície média, pode-se desacoplar os problemas de flexão e de membrana. De seguida, ambos são descritos.

Problema de Flexão

O trabalho virtual efetuado pelas forças internas é dado pela Equação 2.21 e depende da variação das deformações e das tensões. A Equação 2.22 mostra o trabalho virtual realizado pelas forças externas, em função do deslocamento e das forças exteriores - P_{dist} e P_{conc} representam forças distribuídas e concentradas, respetivamente. Na Equação 2.23, é apresentado o trabalho virtual das forças de inércia, escrito em função da massa volúmica e do deslocamento transversal; como é habitual em teorias de placas finas, desprezou-se a inércia devida a rotações de secções da placa.

$$\delta W_{in} = - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}_k^T \mathbf{M} d\Omega \quad (2.21)$$

$$\delta W_{ext} = \int_S P_{dist} \cdot \delta w dS + P_{conc} \cdot \delta w_P \quad (2.22)$$

$$\delta W_j = - \sum_{k=1}^n \int_V \rho_k \cdot \delta w \cdot \ddot{w} dV \quad (2.23)$$

Manipulando algebricamente as equações apresentadas acima, é possível obter as Equações 2.24 a 2.26, pela mesma ordem. De seguida, aplica-se o Teorema dos Trabalhos Virtuais e escreve-se a Equação 2.27.

$$\delta W_{in} = - \sum_{k=1}^n \left(\delta \mathbf{q}_w(t)^T \int_{\Omega} [\mathbf{f}'_{xx} \quad \mathbf{f}'_{yy} \quad 2\mathbf{f}'_{xy}] \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_{xx} & \mathbf{f}'_{yy} & 2\mathbf{f}'_{xy} \end{bmatrix}^T d\Omega \cdot \mathbf{q}_w(t) \right) \quad (2.24)$$

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}_w(t)^T \left[P_p(t) \cdot \mathbf{f}^w(x_p, y_p) + \int_S P_{dist} \cdot \mathbf{f}^w(x, y) dS \right] \quad (2.25)$$

$$\delta W_j = - \sum_{k=1}^n \left(\rho_k \cdot h_k \cdot \delta \mathbf{q}_w(t)^T \int_{\Omega} \mathbf{f}^w(x, y) \mathbf{f}^w(x, y)^T d\Omega \cdot \ddot{\mathbf{q}}_w(t) \right) \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^n \left(\delta \mathbf{q}_w(t)^T \int_{\Omega} [\mathbf{f}'_{xx} \quad \mathbf{f}'_{yy} \quad 2\mathbf{f}'_{xy}] \mathbf{D} [\mathbf{f}'_{xx} \quad \mathbf{f}'_{yy} \quad 2\mathbf{f}'_{xy}]^T d\Omega \right. \\ & \left. \cdot \mathbf{q}_w(t) \right) - \sum_{k=1}^n \left(\rho_k \cdot h_k \cdot \delta \mathbf{q}_w(t)^T \int_{\Omega} \mathbf{f}^w(x, y) \mathbf{f}^w(x, y)^T d\Omega \cdot \ddot{\mathbf{q}}_w(t) \right) \\ & + \delta \mathbf{q}_w(t)^T \left[P_p(t) \cdot \mathbf{f}^w(x_p, y_p) + \int_S P_{dist} \cdot \mathbf{f}^w(x, y) dS \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Com base na Equação 2.27, obtém-se a Equação 2.28, onde as matrizes de rigidez e de massa e o vetor de forças são escritas nas Equações 2.29 a 2.31, respetivamente (Han and Petyt, 1996). A expressão da matriz rigidez foi adaptada para placas com fibras curvilíneas, já que em (Han and Petyt, 1996) são consideradas fibras retilíneas.

$$\mathbf{M}_w^{33} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_w(t) + \mathbf{K}_w^{33} \cdot \mathbf{q}_w(t) = \mathbf{P} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{K}_w^{33} = \int_{\Omega} [\mathbf{f}'_{xx} \quad \mathbf{f}'_{yy} \quad 2\mathbf{f}'_{xy}] \sum_{k=1}^n \mathbf{D}^{(k)} [\mathbf{f}'_{xx} \quad \mathbf{f}'_{yy} \quad 2\mathbf{f}'_{xy}]^T d\Omega \quad (2.29)$$

$$\mathbf{M}_w^{33} = \sum_{k=1}^n (\rho_k \cdot h_k) \int_{\Omega} \mathbf{f}^w(x, y) \mathbf{f}^w(x, y)^T d\Omega \quad (2.30)$$

$$\mathbf{P} = P_p(t) \cdot \mathbf{f}^w(x_p, y_p) + \int_S P_{dist} \cdot \mathbf{f}^w(x, y) dS \quad (2.31)$$

Para uma análise estática, considera-se que a aceleração é nula e, portanto, a Equação 2.28 é reescrita tal como apresentado na Equação 2.32.

$$\mathbf{K}_w^{33} \cdot \mathbf{q}_w = \mathbf{P} \quad (2.32)$$

O cálculo das frequências naturais de vibração é feito considerando uma análise dinâmica em regime livre ou natural - Equação 2.33.

$$\mathbf{M}_w^{33} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_w(t) + \mathbf{K}_w^{33} \cdot \mathbf{q}_w(t) = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

Considerando a resposta $\mathbf{q}_w(t)$ como um movimento harmónico síncrono de frequência ω - Equação 2.34 -, pode-se escrever a Equação 2.35. Uma das soluções desta equação é a solução trivial - posição de equilíbrio estático do sistema e ausência de vibração.

$$\mathbf{q}_w(t) = \mathbf{Q}_w \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad (2.34)$$

$$[-\omega^2 \mathbf{M}_w^{33} + \mathbf{K}_w^{33}] \cdot \mathbf{Q}_w = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

Para obter as soluções não triviais deste sistema, pode recorrer-se ao problema característico - o determinante da matriz dos coeficientes do sistema homogéneo, $[\mathbf{K}_w^{33} - \omega^2 \mathbf{M}_w^{33}]$, deve ser nulo - Equação 2.36.

$$|\mathbf{K}_w^{33} - \omega^2 \mathbf{M}_w^{33}| = 0 \quad (2.36)$$

O determinante característico, dado na Equação 2.36, permite calcular um número de frequências naturais igual ao quadrado do número de funções de forma f usadas. Conhecendo as frequências naturais, pode-se substituir ω por cada um dos valores calculados na Equação 2.35 para obter as formas naturais de vibração (Rodrigues, 2020).

Problema de Membrana

Uma formulação semelhante é apresentada para o problema de membrana. Os trabalhos virtuais realizados pelas forças internas, pelas forças externas e pelas forças de inércia são dados nas Equações 2.37 a 2.39.

$$\delta W_{in} = - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{\mathbf{m}}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (2.37)$$

$$\delta W_{ext} = \int_S (P_{dist,x} \cdot \delta u + P_{dist,y} \cdot \delta v) dS + P_{p,x} \cdot \delta u_P + P_{p,y} \cdot \delta v_P \quad (2.38)$$

$$\delta W_j = - \sum_{k=1}^n \rho_k \int_V (\delta u \cdot \ddot{u} + \delta v \cdot \ddot{v}) dV \quad (2.39)$$

Após manipulação algébrica, obtêm-se as Equações 2.40 a 2.42, aplicando-se, posteriormente, o Teorema dos Trabalhos Virtuais - Equação 2.43.

$$\delta W_{in} = - \sum_{k=1}^n \left(\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{q}_u(t) \\ \delta \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix}^T \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T \end{bmatrix} d\Omega \cdot \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{q}_u(t) \\ \delta \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix} \right) \quad (2.40)$$

$$\delta W_{ext} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{q}_u(t) \\ \delta \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix}^T \left[\int_S \begin{Bmatrix} P_{dist,x} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x, y) \\ P_{dist,y} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x, y) \end{Bmatrix} dS + \begin{Bmatrix} P_{p,x} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x_p, y_p) \\ P_{p,y} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x_p, y_p) \end{Bmatrix} \right] \quad (2.41)$$

$$\delta W_j = - \sum_{k=1}^n \left(\rho_k \cdot h_k \cdot \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{q}_u(t) \\ \delta \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix}^T \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x, y) \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x, y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x, y) \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x, y) \end{Bmatrix}^T d\Omega \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_v(t) \end{Bmatrix} \right) \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^n \left(\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{q}_u(t) \\ \delta \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix}^T \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T \end{bmatrix} d\Omega \right. \\ & \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u(t) \\ \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix} \Big) - \sum_{k=1}^n \left(\rho_k \cdot h_k \cdot \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{q}_u(t) \\ \delta \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix}^T \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x, y) \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x, y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x, y) \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x, y) \end{Bmatrix}^T d\Omega \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_v(t) \end{Bmatrix} \right) \\ & \quad \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{q}_u(t) \\ \delta \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix}^T \left[\int_S \begin{Bmatrix} P_{dist,x} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x, y) \\ P_{dist,y} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x, y) \end{Bmatrix} dS + \begin{Bmatrix} P_{p,x} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x_p, y_p) \\ P_{p,y} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x_p, y_p) \end{Bmatrix} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

A Equação 2.44 é obtida com base na Equação 2.43. As matrizes de rigidez e de massa e o vetor de forças são escritas nas Equações 2.45 a 2.47, respetivamente (Ribeiro, 2015). Estas matrizes foram também apresentadas em (Han et al., 1994) para fibras retilíneas.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_v(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^{11} & \mathbf{K}_{uv}^{12} \\ \mathbf{K}_{uv}^{21} & \mathbf{K}_v^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u(t) \\ \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_u \\ \mathbf{P}_v \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^{11} & \mathbf{K}_{uv}^{12} \\ \mathbf{K}_{uv}^{21} & \mathbf{K}_v^{22} \end{bmatrix} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T \end{bmatrix}^T \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T \\ \mathbf{g}\mathbf{g}'_y(x, y)^T & \mathbf{g}\mathbf{g}'_x(x, y)^T \end{bmatrix} d\Omega \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v^{22} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left(\rho_k \cdot h_k \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x, y) \mathbf{g}\mathbf{g}'^u(x, y)^T d\Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \int_{\Omega} \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x, y) \mathbf{g}\mathbf{g}'^v(x, y)^T d\Omega \end{bmatrix} \right) \quad (2.46)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_u \\ \mathbf{P}_v \end{Bmatrix} = \int_S \begin{Bmatrix} P_{dist,x} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}^u(x,y) \\ P_{dist,y} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}^v(x,y) \end{Bmatrix} dS + \begin{Bmatrix} P_{p,x} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}^u(x_p, y_p) \\ P_{p,y} \cdot \mathbf{g}\mathbf{g}^v(x_p, y_p) \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

As Equações 2.48 e 2.49 apresentam as expressões relativas às análises estática e dinâmica, respetivamente.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^{11} & \mathbf{K}_{uv}^{12} \\ \mathbf{K}_{uv}^{21} & \mathbf{K}_v^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_u \\ \mathbf{P}_v \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_v(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^{11} & \mathbf{K}_{uv}^{12} \\ \mathbf{K}_{uv}^{21} & \mathbf{K}_v^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u(t) \\ \mathbf{q}_v(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

As frequências e as formas naturais são a solução das Equações 2.50 e 2.51 - determinante característico e problema característico (Rodrigues, 2020).

$$\left| \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^{11} & \mathbf{K}_{uv}^{12} \\ \mathbf{K}_{uv}^{21} & \mathbf{K}_v^{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v^{22} \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (2.50)$$

$$\left[\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^{11} & \mathbf{K}_{uv}^{12} \\ \mathbf{K}_{uv}^{21} & \mathbf{K}_v^{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v^{22} \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_u \\ \mathbf{Q}_v \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.51)$$

2.3 Método dos Elementos Finitos do tipo p

A precisão do Método dos Elementos Finitos pode ser aumentada de duas formas distintas. A forma mais comum é a refinação da malha ou aumento de número de elementos, mantendo o grau dos elementos inalterado - tipo h . Em alternativa, pode-se fixar o tamanho da malha e aumentar o grau p das funções polinomiais de aproximação: tipo p (ou Método dos Elementos Finitos Hierárquico) (Bardell, 1989, 1991; Szabó and Babuška, 1991).

Este método apresenta bons resultados quando utilizado em problemas lineares, estáticos ou dinâmicos (Han et al., 1994), e possui uma grande versatilidade e elevada taxa de convergência. Uma das vantagens mais relevantes em estruturas com geometria simples é o facto de poder usar apenas um elemento, não sendo necessário garantir a continuidade entre elementos. Através deste método, as frequências são calculadas por excesso, aproximando-se assintoticamente do seu valor exato à medida que se aumenta o número de funções de interpolação (Bardell, 1991; Meirovitch and Baruh, 1983).

Tal como apresentado na Equação 2.19, o deslocamento é discretizado usando um elemento finito do tipo p .

Os polinómios utilizados derivam da formulação de Rodrigues dos polinómios ortogonais de Legendre e podem ser utilizados em problemas de membrana ou de flexão. As Equações 2.52 e 2.53 apresentam as fórmulas para o cálculo das funções de forma g e f . O operador $(\bullet)!!$ representa o duplo fatorial e é calculado da seguinte forma: $r!! = r \cdot (r-2) \dots (2 \text{ ou } 1)$. O duplo fatorial de 0 e de -1 é igual à unidade. Nas equações abaixo, $\frac{r}{2}$ corresponde apenas à parte inteira do valor calculado (Bardell, 1989).

$$g_r(\xi) = \sum_{n=0}^{r/2} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 5)!!}{2^n n! (r - 2n - 1)!} \xi^{r-2n-1} \quad (r > 2) \quad (2.52)$$

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{r/2} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 7)!!}{2^n n! (r - 2n - 1)!} \xi^{r-2n-1} \quad (r > 4) \quad (2.53)$$

Quando r é par e n é igual a metade de r , $(r - 2n - 1)! = (-1)!$, que é indefinido. Para isso, introduz-se uma ligeira alteração nas expressões apresentadas - substitui-se o termo $(r - 2n - 1)!$ pela função $\Gamma(r - 2n)$, que é definida pela Equação 2.54. Para qualquer inteiro positivo, $\Gamma(x + 1) = x!$, pelo que $\Gamma(r - 2n) = (r - 2n - 1)!$. Quando z tende para 0, a função $\Gamma(z)$ tende para infinito ($z \rightarrow 0, \Gamma(z) \rightarrow \infty$) (Davis, 1959).

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \cdot e^{-x} dx \quad (2.54)$$

Reescrevem-se, assim, as funções de forma g e f nas Equações 2.55 e 2.56, respetivamente.

$$g_r(\xi) = \sum_{n=0}^{r/2} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 5)!!}{2^n n! \cdot \Gamma(r - 2n)} \xi^{r-2n-1} \quad (r > 2) \quad (2.55)$$

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{r/2} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 7)!!}{2^n n! \cdot \Gamma(r - 2n)} \xi^{r-2n-1} \quad (r > 4) \quad (2.56)$$

As primeiras duas funções de interpolação g e as quatro primeiras funções de interpolação f coincidem com os polinómios de Lagrange (Onâte, 2009) e de Hermite (Onâte, 2013), respetivamente - Equações 2.57 e 2.58, pela mesma ordem.

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi \\ g_2(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ f_2(\xi) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \\ f_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ f_4(\xi) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Todas as funções de interpolação são escritas utilizando coordenadas naturais, ξ e η , que consideram um elemento quadrado com a origem no centro e lado igual a 2. Assim, estas coordenadas variam entre -1 e 1 e a relação entre elas e as coordenadas globais é apresentada na Equação 2.59. Nesta dissertação, será apenas utilizado um elemento para representar toda a placa.

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2x}{a} \\ \eta &= \frac{2y}{b}\end{aligned}\tag{2.59}$$

2.4 Trajetos de Fibras Curvilíneas

Tal como referido anteriormente, as fibras curvilíneas podem seguir um trajeto descrito por um ângulo θ^k – ângulo entre a fibra e o eixo Ox . Este ângulo depende apenas da coordenada do ponto no eixo Ox e afeta as propriedades no referencial global da placa.

De seguida, apresentam-se três trajetos de fibras diferentes: o primeiro foi apresentado por Gürdal e Olmedo (1993) e considera que o ângulo varia linearmente entre as extremidades da placa e o eixo Oy ; em segundo lugar, um trajeto assimétrico, proposto por Akhavan e Ribeiro (2018); e, por último, um trajeto sinusoidal, proposto por Gürdal e Olmedo (1993), posteriormente utilizado por Camacho et al (2021).

2.4.1 Trajeto Antissimétrico

Neste trajeto, o ângulo θ^k , cuja expressão é apresentada na Equação 2.60, depende da dimensão da placa em Ox , da coordenada do ponto no mesmo eixo e de dois ângulos, T_0^k e T_1^k , que representam o ângulo entre a fibra e o eixo horizontal na origem do referencial e na extremidade da placa (em $x = \pm a/2$), respetivamente. O trajeto da fibra na camada k – Figura 2.4 – é dado por $\langle T_0^k | T_1^k \rangle$ (Gürdal and Olmedo, 1993).

$$\theta^k(x) = \frac{2 \cdot (T_1^k - T_0^k)}{a} |x| + T_0^k\tag{2.60}$$

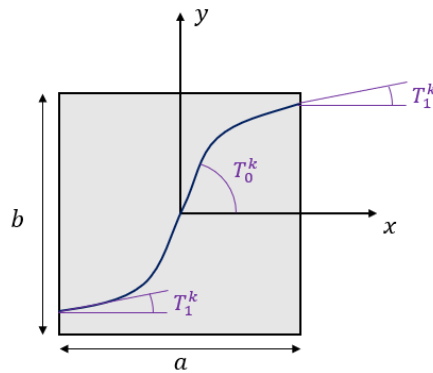
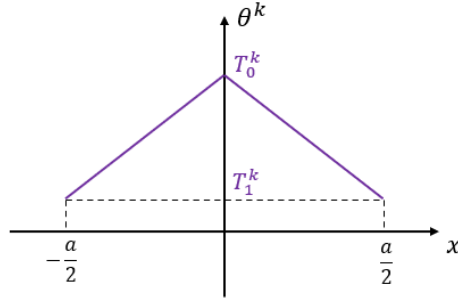


Figura 2.4: Representação do trajeto antissimétrico de uma fibra curvilínea

Analisando a expressão da Equação 2.60, é possível concluir que a função que define o ângulo θ^k é linear entre $x = -a/2$ e $x = 0$ e entre $x = 0$ e $x = a/2$, apresentando declives simétricos, tal como se pode observar na Figura 2.5. O trajeto é antissimétrico em relação ao eixo vertical e, por essa razão, este é designado por trajeto antissimétrico.


 Figura 2.5: Ângulo θ^k para um trajeto antissimétrico

2.4.2 Trajeto Assimétrico

O segundo trajeto estudado é designado por trajeto assimétrico e é definido por um ângulo θ^k , tal como apresentado na Equação 2.61. Este depende da dimensão da placa em Ox , da coordenada do ponto no mesmo eixo e de dois ângulos, T_0^k e T_1^k , tal como acontecia no primeiro caso. Contudo, neste contexto, o ângulo T_0^k representa o ângulo entre a fibra e o eixo horizontal na extremidade esquerda da placa, $x = -a/2$, e o ângulo T_1^k representa o mesmo ângulo na extremidade direita da placa, $x = a/2$. A Figura 2.6 mostra o trajeto assimétrico.

$$\theta^k(x) = \frac{(T_1^k - T_0^k)}{a}(x + a/2) + T_0^k \quad (2.61)$$

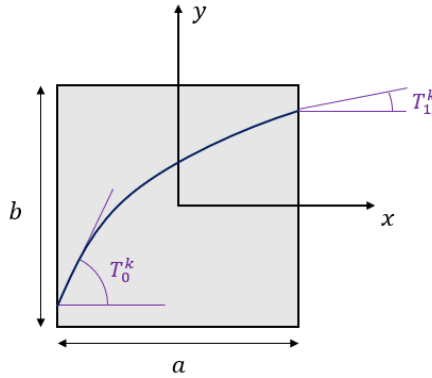
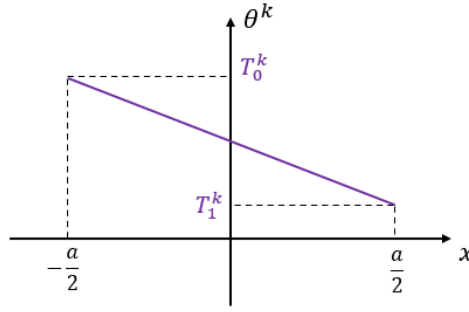


Figura 2.6: Representação do trajeto assimétrico de uma fibra curvilínea

A função que define o ângulo θ^k é linear em todo o domínio ($x \in [-a/2; a/2]$), deixando de ser simétrica em relação ao eixo Oy , como acontecia no caso anterior. A Figura 2.7 ilustra esta função e permite perceber porque se designa trajeto assimétrico.


 Figura 2.7: Ângulo θ^k para um trajeto assimétrico

2.4.3 Trajeto Sinusoidal

Por fim, apresenta-se o trajeto sinusoidal, cujas fibras, tal como o nome indica, percorrem um caminho com a forma de uma função seno. Assim, são caracterizados por uma amplitude, A_k , um comprimento de onda, λ_k , e um desfasamento, ϕ_k . A Figura 2.8 mostra o trajeto sinusoidal, dado pela Equação 2.62. A Equação 2.63 apresenta a expressão do ângulo θ^k .

$$f(x) = A_k \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_k} x + \phi_k \right] \quad (2.62)$$

$$\theta^k(x) = \tan^{-1} \left\{ \frac{A_k}{\lambda_k} \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda_k} x + \phi_k \right] \right\} \quad (2.63)$$

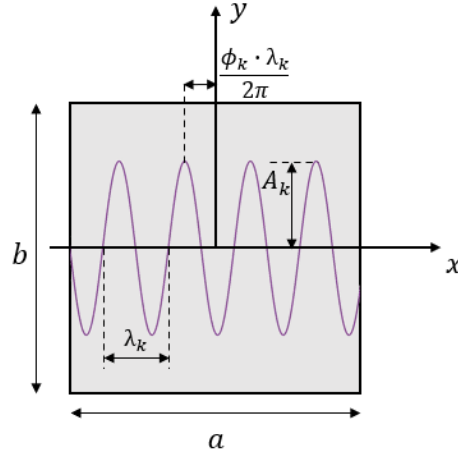


Figura 2.8: Representação do trajeto sinusoidal de uma fibra curvilínea

A função que caracteriza o ângulo θ^k oscila entre valores positivos e negativos simétricos, sendo positiva quando o trajeto das fibras se encontra acima do plano médio do seno e negativa para os restantes pontos – Figura 2.9.

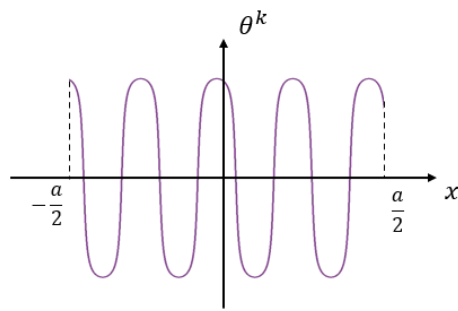


Figura 2.9: Ângulo θ^k para um trajeto sinusoidal

Métodos de Otimização

A otimização, que tem vindo a ser alvo de investigação e desenvolvimento, é um ramo da área da matemática e dos métodos numéricos e consiste em escolher uma solução que se apresenta como a melhor num conjunto prescrito de restrições geométricas e/ou tecnológicas. É aplicada em diversas áreas, entre elas a Engenharia (António, 2020; Rao, 2020).

O processo de otimização passa por selecionar um conjunto de variáveis, utilizadas para descrever as alternativas de projeto, e, posteriormente, determinar um ou mais objetivos (a maximizar ou minimizar) e um conjunto de restrições (que devem ser satisfeitas), expressos em termos das variáveis de projeto. Definidos estes componentes, passa-se para a determinação de um conjunto de valores a atribuir às variáveis de projeto, que cumpram o(s) objetivo(s) e respeitem as restrições (António, 2020).

De uma forma geral, os algoritmos de otimização são incluídos em três classes distintas. São elas a programação matemática, os métodos baseados em critérios de otimalidade e os algoritmos bioinspirados.

A programação matemática pode ser linear ou não linear, de acordo com a natureza das funções, isto é, se são lineares ou não lineares. Neste método de otimização, a(s) função(ões) objetivo é(são) minimizada(s) diretamente recorrendo a algoritmos numéricos justificados por uma formulação matemática adequada e podem ser consideradas diferentes restrições.

Os métodos baseados em critérios de otimalidade definem inicialmente um critério de projeto com base numa condição de otimalidade e, assim que esta condição for satisfeita, o ótimo é determinado. São mais eficientes do que os anteriores a nível computacional, mas a convergência para o ótimo não é garantida na totalidade dos casos (António, 2020).

Os métodos de otimização inspirados na natureza (ou bioinspirados) baseiam-se em populações de soluções e incluem os métodos de pesquisa evolucionária, os métodos baseados em inteligência de enxame, entre outros. Os primeiros são algoritmos estocásticos de otimização global inspirados no paradigma neodarwiano (evolução natural dos sistemas biológicos) e subdividem-se em algoritmos meméticos e algoritmos genéticos (António, 2020). Os algoritmos meméticos são a combinação de um algoritmo evolucionário (busca global) com um procedimento de busca local (meme) (Janus et al., 2019), enquanto os algoritmos genéticos simulam os mecanismos da seleção natural e da genética (seleção,

cruzamento, mutação) (Roetzel et al., 2019).

Os problemas de otimização podem ser classificados com base em diversos fatores, apresentados de seguida (António, 2020; Rao, 2020).

- Classificação baseada na existência de restrições (problema restringido ou não restringido);
- Classificação baseada na natureza das variáveis de projeto (problemas paramétricos - ou de otimização estática - ou problemas de trajetória - ou de otimização dinâmica);
- Classificação baseada na estrutura física do problema (problemas de controlo ótimo ou não ótimo);
- Classificação baseada na natureza das equações envolvidas (problemas de programação linear, não linear, geométrica ou quadrática);
- Classificação baseada nos valores do domínio das variáveis de projeto (problemas de programação inteira ou problemas de programação com valores reais);
- Classificação baseada na natureza da informação contida nas variáveis (determinísticos, estocásticos ou imprecisos);
- Classificação baseada na separabilidade das funções (separáveis ou não separáveis);
- Classificação baseada no número de funções objetivo (problemas de programação de objetivo único ou de programação multiobjetivo);
- Classificação baseada na natureza do projeto ótimo (otimização da topologia, otimização da forma, otimização interna dos parâmetros do material);

Os métodos de otimização podem ainda ser divididos em métodos baseados em gradiente, que requerem derivadas da função objetivo e das restrições para o cálculo da solução ótima e que incluem a programação matemática e alguns métodos baseados em critérios de otimalidade, e os métodos que não usam gradientes, isto é, baseiam-se nos valores das funções objetivo e das funções das restrições (informação de ordem zero), como é o caso dos métodos de pesquisa evolucionária (António, 2020).

3.1 Otimização em Compósitos

Ao longo do tempo, vários métodos de otimização foram aplicados aos compósitos reforçados com fibras, com diferentes objetivos em vista. Como referido anteriormente, estes materiais permitem a obtenção de melhores propriedades mecânicas sem alterar o tamanho ou a forma da estrutura e as fibras podem ser retilíneas ou curvilíneas. As segundas tornaram-se mais relevantes com a introdução de técnicas de fabrico como a AFP e permitem obter, geralmente, melhores respostas do que as fibras retilíneas (Albazzan et al., 2019).

Contudo, a utilização de fibras curvilíneas introduz mais variáveis de projeto no problema de otimização, uma vez que a orientação das fibras varia ao longo da placa. A representação da orientação das fibras pode ser feita de duas formas distintas. Por um lado, o ângulo das fibras pode ser representado de forma discreta, que permite uma maior liberdade no domínio de projeto, mas implica um maior esforço computacional e apresenta problemas de convergência. Para além disso, requer pós-processamento do caminho da fibra aquando da conclusão da otimização para verificar o cumprimento das restrições. A segunda forma de representar a orientação das fibras é definir uma função, contínua no domínio, que corresponda ao trajeto da fibra. Este método permite diminuir o número de variáveis de projeto, face ao caso anterior, garante a continuidade da fibra e as restrições de curvatura são facilmente aplicadas, mas limita a liberdade de trajetos e requer a definição de funções para o trajeto das fibras (Albazzan et al., 2019).

Um dos primeiros estudos dos compósitos laminados de rigidez variável foi realizado por Hyer e Charrete (1991). Estes alinharam as fibras com as direções principais de tensão, aumentando a resistência, sem ter em conta a encurvadura. O objetivo do estudo era melhorar a capacidade de suportar cargas de tração de uma placa reforçada com fibras curvilíneas com um furo circular no centro, com auxílio de um critério de máxima deformação. Obtiveram-se melhores resultados do que com fibras retilíneas.

No seguimento deste estudo, Hyer e Lee (1991) analisaram uma placa quadrada com furo circular central, simplesmente apoiada e sujeita a forças uniaxiais de compressão, com o intuito de maximizar a carga necessária para ocorrer encurvadura. Para isso, utilizou-se um método baseado em gradientes para determinar a orientação das fibras em vários pontos do domínio que permitissem otimizar o problema.

Mais tarde, Walker (1999) apresentou um trabalho de otimização de compósitos laminados com furo central, onde o objetivo era maximizar a carga de encurvadura, utilizando um método que não recorre a gradientes (Método da Secção Dourada). Estudou a resposta de placas com várias condições de fronteira, fazendo variar os valores dos ângulos de orientação das fibras (variáveis de projeto).

Já no presente século, Narita (2003) utilizou um método baseado no facto de as camadas exteriores serem mais influentes na rigidez e, consequentemente, na determinação da frequência natural relativamente às camadas interiores (*Layerwise Optimization Approach*) para maximizar a frequência natural fundamental. As variáveis de projeto escolhidas foram a orientação das fibras nas várias camadas e analisaram-se diferentes condições de fronteira.

Vários problemas de otimização foram realizados por Setoodeh et al. Utilizando uma estratégia baseada em autómatos celulares, otimizou-se a resposta estrutural (diminuição de deslocamentos) em flexão (Setoodeh et al., 2004) e no plano (Setoodeh et al., 2006) de compósitos laminados reforçados com fibras curvilíneas, onde as variáveis de projeto foram a orientação das fibras. Nestes estudos, foi aplicada uma técnica adicional (*Heuristic Pattern-matching Technique*) que permite garantir a continuidade do trajeto das fibras. Mais tarde, foi realizada a maximização da carga de encurvadura em placas de rigidez variável, utilizando a Teoria Clássica de Placas e o Método dos Elementos Finitos, onde as variáveis de projeto eram a orientação das fibras em cada elemento (Setoodeh et al.,

2009).

Huang e Haftka (2005) estudaram a maximização da capacidade de carga em compósitos laminados constituídos por duas camadas centrais com fibras curvilíneas junto ao furo e fibras a 0° longe do mesmo e as restantes camadas com fibras retilíneas. Foi utilizado um método híbrido que junta um método baseado em gradiente (Método do Gradiente Conjugado) com um algoritmo genético. As variáveis de projeto são a orientação das fibras.

Posteriormente, outros estudos foram realizados: Topal e Uzman (2008) utilizaram o método MFD (*Modified Feasible Direction*) para maximizar a carga de encurvadura, van Tooren et al. (2016) estudaram placas compósitas sujeitas a cargas de compressão ou tração e corte, tendo em conta as restrições de fabrico e encurvadura e Barazanchy et al. (2017) aplicaram novas restrições ao problema.

Os métodos de otimização baseados em gradientes implicam um elevado esforço computacional, pelo que os algoritmos estocásticos, dos quais se destacam os algoritmos genéticos, ganharam destaque nesta área. Estes algoritmos não requerem cálculo de gradientes e permitem encontrar a solução ótima global com recurso a um determinado número de indivíduos e de gerações (Ghiasi et al., 2009).

O trabalho de Nagendra et al. (1996) consistiu em minimizar o peso em placas com *stiffeners*, utilizando um algoritmo genético, sendo as variáveis de projeto a altura do *stiffener*, o número de camadas da placa e do *stiffener*. Almeida e Awruch (2009) realizaram três estudos de otimização com algoritmos genéticos – maximização da rigidez, minimização do peso e da deflexão e minimização do peso e do custo – fazendo variar o número de camadas, o material de cada camada e a orientação das fibras.

A segunda forma de representar a orientação das fibras apresentada acima – função contínua no domínio – foi introduzida por Gürdal e Olmedo (1993), tendo sido utilizada posteriormente em trabalhos de otimização de compósitos com fibras curvilíneas: Tatting e Gürdal (2002) otimizaram a capacidade de carga de placas com furos reforçadas com fibras curvilíneas, com recurso ao Método dos Elementos Finitos e a um algoritmo genético, Gürdal et al. (2008) otimizaram a resposta no plano e à encurvadura e Blom et al. (2008) apresentaram a maximização da frequência natural fundamental de cascas cónicas, tendo em conta as restrições de fabrico e utilizando um método de otimização baseado em gradiente (Programação Sequencial Quadrática). Em todos os casos, as variáveis de projeto foram a orientação das fibras.

Para a maximização das frequências naturais de vibração nas placas em estudo será utilizado um algoritmo genético com elitismo, escolhido por garantir a obtenção de uma solução ótima global de uma forma simples e sem recurso a gradientes. Os algoritmos genéticos são descritos na secção seguinte.

3.2 Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos, propostos por John Holland na segunda metade do século XX, são inspirados no processo de evolução biológico e baseiam-se na teoria de Charles Darwin relativamente à sobrevivência dos mais aptos na natureza. Estes algoritmos são considera-

dos robustos e permitem resolver uma grande variedade de problemas reais, sendo capazes de encontrar a sua solução ótima global (António, 2020; Beasley et al., 1993a; Katoch et al., 2021).

Este método apresenta uma população de indivíduos, onde cada um corresponde a uma solução para o problema em estudo. Uma solução candidata é representada por um cromossoma (vetor com bits), onde cada bit representa um gene e toma os valores 0 e 1. O cromossoma possui informação sobre as variáveis de projeto e é considerado o genótipo do indivíduo. O fenótipo é dado pelas características visíveis, isto é, as características do indivíduo na realidade em que está inserido (representação real do genótipo). Todas as soluções são avaliadas e a cada uma delas é atribuído um valor de mérito de acordo com a aptidão desta no problema. Para além da função de mérito, estes algoritmos caracterizam-se pela utilização de operadores associados à seleção natural como o cruzamento, a mutação e a seleção (António, 2020).

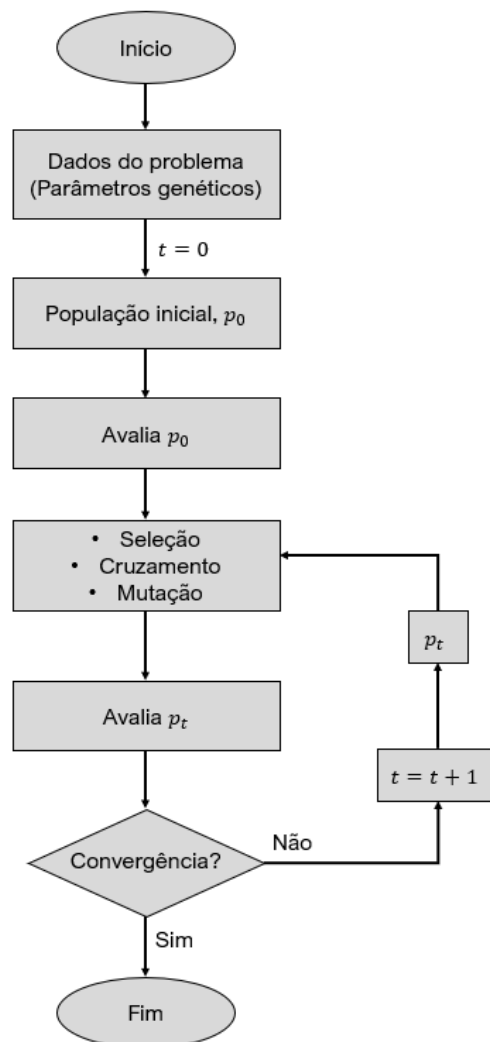


Figura 3.1: Diagrama de fluxo para um algoritmo genético

O esquema da Figura 3.1 mostra o procedimento relativo aos algoritmos genéticos. Em

primeiro lugar é necessário definir os parâmetros do algoritmo, como a dimensão da população, a probabilidade de mutação e de cruzamento, entre outros. Estes parâmetros podem ser fixos (ajuste de parâmetros) ou variáveis (controle de parâmetros) ao longo da execução e afetam a qualidade da solução – no que diz respeito ao tamanho da população, uma população muito pequena possui pouca diversidade e pode convergir para um ótimo local, enquanto que uma população demasiado grande implica um elevado esforço computacional desnecessário. Depois de definidos os parâmetros genéticos, é gerada uma população aleatória de n cromossomas, onde n representa o número de soluções, e avalia-se o seu mérito. À população existente são aplicados os operadores de seleção, cruzamento e mutação, criando uma nova geração e avalia-se a mesma. Este processo é repetido até haver convergência. Verifica-se, então, que há uma substituição iterativa da população (António, 2020; Katoch et al., 2021).

A avaliação da população é feita através da função de mérito ou de aptidão. Esta deve ser uma função suave e regular e não deve ter muitos extremos locais, de forma a não convergir para um ótimo local, e deve também traduzir o mérito do cromossoma corretamente, pelo que esta função é escolhida de acordo com o problema a resolver. Geralmente, é uma função positiva, sendo maximizada (António, 2020; Beasley et al., 1993a).

Na criação da nova geração, o primeiro operador utilizado é a seleção. Nesta etapa, são escolhidos os indivíduos que participarão no cruzamento, com base no mérito ou na posição da população ordenada. Se o critério for o valor do mérito, a seleção pode ser feita pelo método da roleta ou por amostragem estocástica universal. No primeiro, os indivíduos apresentam uma probabilidade de serem escolhidos proporcional ao seu mérito, o que pode levar a uma convergência inadequada (elimina diversidade). O segundo método é semelhante ao primeiro, onde a seleção dos p indivíduos é feita simultaneamente através de uma roleta com p ponteiros. Os métodos de seleção com base na posição da população ordenada são a seleção por torneio (filho é igual ao melhor dos dois indivíduos escolhidos), seleção por truncagem (elimina uma determinada percentagem da população com menor mérito), seleção pelo método de ordenamento linear ou exponencial (indivíduos pontuados de 1 a N , sendo N o número de indivíduos da população, de acordo com o mérito) e seleção elitista. Neste último método de seleção, os indivíduos com maior mérito (elite) são transferidos automaticamente para a geração seguinte sem serem alterados pelos restantes operadores. Este método foi proposto por K. D. Jong e pode levar a convergência prematura se não for feito o controlo de similaridade (António, 2020; Katoch et al., 2021).

O operador de cruzamento é o mais importante e permite gerar filhos pela combinação de dois indivíduos (pais) previamente selecionados. Cada par de pais pode gerar um ou mais filhos, sendo que existem diversas formas de concretizar o cruzamento. Para uma codificação binária (mais comum), este operador recorre ao conceito de ponto de corte: até esse ponto, os genes do filho são iguais a um dos pais e, depois desse ponto, o filho recebe os genes do outro pai. O cruzamento pode ser de um ponto (apenas um ponto de corte), multiponto (vários pontos de corte), uniforme (todas as posições podem ser pontos de corte) ou segmentado (variação de multiponto onde o número de pontos de corte é sorteado aquando da execução do operador). (António, 2020; Katoch et al., 2021)

O cruzamento uniforme permite um melhor potencial de recombinação, tendo, em média, um número de pontos de corte igual a metade do comprimento do cromossoma (Beasley et al., 1993b). Se a codificação for real, a recombinação pode ser centrada nos pais ou centrada na média, sendo os filhos gerados com maior proximidade dos pais ou do seu centroide, respetivamente (António, 2020).

Por fim, aplica-se o operador de mutação, um dos fatores que permite manter diversidade na população, isto é, a mutação é responsável por reintroduzir genes “perdidos”, evitando a deriva genética. A sua probabilidade de utilização é baixa e é feita geralmente através da troca de genes – um gene mutado passa de 0 a 1 ou vice-versa (António, 2020; Beasley et al., 1993b).

Em problemas que envolvam restrições, distingue-se o espaço de pesquisa, que é geralmente um retângulo n -dimensional, onde n é o número de variáveis de projeto, e a região admissível, que contém as soluções admissíveis. A região admissível está contida no espaço de pesquisa. As restrições podem afetar o desempenho dos algoritmos de otimização. Existem diversos métodos para inclusão de restrições no algoritmo das quais se destacam (António, 2020; Michalewicz et al., 1996):

- Métodos baseados na preservação da admissibilidade das soluções: é criado um conjunto de operadores específicos que são capazes de transformar soluções inadmissíveis em soluções admissíveis; nestes métodos, a população inicial está contida na região admissível e algumas variáveis são substituídas por combinações lineares das restantes;
- Métodos baseados em funções de penalidade: métodos mais comuns; a função de mérito das soluções inadmissíveis sofre uma penalização, que pode ser determinada com base apenas no facto de ser inadmissível, na “distância” à região admissível ou no esforço para “corrigir” a solução; um coeficiente de penalidade variável apresenta melhores resultados do que um coeficiente fixo;
- Métodos baseados na pesquisa de soluções admissíveis: inicialmente, é feita uma pesquisa que permite identificar as soluções admissíveis; quando se atinge um determinado número de soluções admissíveis, o algoritmo procura as melhores soluções entre essas, mantendo a diversidade da região admissível;
- Métodos baseados em decodificadores: cromossomas “explicam” como construir uma solução admissível; cada decodificador impõe uma relação entre uma solução admissível e uma solução codificada: para cada solução admissível, há uma solução decodificada e cada solução decodificada corresponde a uma solução admissível; estes métodos não implicam a utilização de parâmetros adicionais, não avaliam ou penalizam as soluções inadmissíveis e não necessitam de operadores especiais;
- Métodos híbridos: combinação de métodos de pesquisa evolucionária com métodos clássicos;

Como já referido anteriormente, o controlo da diversidade é um fator importante nos algoritmos genéticos, para que não haja convergência inadequada. Este controlo pode

ser feito através do genótipo ou do fenótipo e consiste em encontrar clones ou quase clones, mantendo apenas um dos cromossomas semelhantes e substituindo os restantes por cromossomas gerados aleatoriamente. No final desta etapa, é importante ordenar novamente a população com base no mérito (António, 2020).

A convergência do algoritmo é a progressão deste em direção a um aumento da uniformidade. Um gene converge quando uma determinada percentagem da população (95%) tem o mesmo valor para esse gene e a população converge quando todos os genes convergirem (Beasley et al., 1993a). Existem diversos critérios de paragem que são classificados em diretos, indiretos e baseados na análise de agrupamento. Os primeiros podem ter em conta um número máximo de gerações ou um valor limite da função de mérito, os critérios indiretos analisam, por exemplo, a diferença entre o melhor valor de mérito e a média do melhor valor de mérito nas gerações anteriores, o desvio padrão dos valores de mérito ou a diferença entre o melhor e o pior indivíduos. Os critérios baseados na análise de agrupamento analisam a alteração da média dos melhores indivíduos da geração (António, 2020).

Para conseguir uma pesquisa eficiente, o algoritmo deve conseguir o equilíbrio entre a diversificação e a intensificação. A diversificação, ou exploração livre abrangente da pesquisa evolucionária, garante a manutenção da diversidade genética da população. A intensificação, ou exploração regulada da pesquisa evolucionária, permite gerar soluções melhores do que as já existentes. Inicialmente, a diversidade é grande e a diversificação é mais importante. À medida que o processo avança, o grau de intensificação deve aumentar e o grau de diversificação deve diminuir (António, 2020; Katoch et al., 2021).

3.3 Implementação do Algoritmo

Tal como referido anteriormente, foi escolhido um algoritmo genético com elitismo para a maximização das frequências naturais de vibração de placas reforçadas com fibras curvilíneas.

Neste capítulo, é apresentado o algoritmo construído, baseado no trabalho de António (António, 2002), começando pela formulação do problema e passando, depois, para a elaboração dos diversos módulos do algoritmo.

3.3.1 Formulação do Problema

O objetivo desta otimização é maximizar as frequências naturais de placas com propriedades materiais e geometria previamente estabelecidas, onde as variáveis de projeto são os parâmetros utilizados para a construção do trajeto das fibras, isto é, para os trajetos antissimétrico e assimétrico, os ângulos T_0^k e T_1^k são as variáveis de projeto, enquanto que, no trajeto sinusoidal, tem-se como variáveis a amplitude, A_k , o período, ϕ_k , e o desfasamento, φ_k .

A Equação 3.1 apresenta a formulação do problema de otimização - s representa as variáveis de projeto.

$$\text{maximizar } \omega(s) \tag{3.1}$$

sujeito a

$$s_i^{inf} \leq s_i \leq s_i^{sup}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$g(\mathbf{s}) = \frac{K}{e} - 1 < 0 \quad (3.3)$$

A este problema estão associadas restrições: restrições geométricas e restrições relativas à curvatura máxima - Equações 3.2 e 3.3, respetivamente. A variável n representa o número de variáveis de projeto utilizadas, K diz respeito à curvatura das fibras e e é o valor máximo que a curvatura pode assumir (3.28 m^{-1}) (Waldhart, 1996).

A curvatura, K , apresentada na restrição 3.3 é dada pela Equação 3.4, onde a função $f(x)$ é a função que representa o caminho da fibra - Equação 3.5 (Waldhart, 1996).

$$K = \frac{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (3.4)$$

$$f(x) = \int \tan(\theta^k(x)) \quad (3.5)$$

Obtêm-se, assim, as expressões apresentadas nas Equações 3.6 a 3.8 para os trajetos antissimétrico, assimétrico e sinusoidal, respetivamente.

$$K_1 = \frac{2(T_1^k - T_0^k)}{a} \cdot \left| \cos\left(\frac{2(T_0^k - T_1^k)}{a}|x| - T_0^k\right) \right| \cdot \text{sign}(x) \quad (3.6)$$

$$K_2 = \frac{T_1^k - T_0^k}{a} \cdot \left| \cos\left(\frac{T_0^k - T_1^k}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right) - T_0^k\right) \right| \quad (3.7)$$

$$K_3 = \frac{-(2\pi)^2 \cdot A_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_k} + \phi_k\right)}{\lambda_k^2 \left\{1 + \left[-\frac{2\pi A_k}{\lambda_k} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda_k} + \phi_k\right)\right]^2\right\}^{3/2}} \quad (3.8)$$

Para proceder à otimização do problema através do algoritmo escolhido, é necessário definir os dados do problema, que se mantêm inalterados ao longo da execução, definir a codificação utilizada e criar uma população inicial. Novas gerações serão criadas ao longo da execução do programa, recorrendo aos operadores genéticos (seleção, cruzamento e mutação). Para cada geração, é necessário fazer um controlo de similaridade, avaliar o mérito de cada uma das soluções e ordená-las de acordo com o seu mérito.

3.3.2 Dados e População Inicial

Em primeiro lugar, devem-se definir os dados do problema, como o tamanho da população e a sua divisão em população de elite, de filhos e de mutação, o número de variáveis de projeto a utilizar, o número de genes associado a cada variável e os valores mínimo e máximo que esta pode adquirir.

Com base nestes dados, é possível criar uma população inicial, gerada aleatoriamente com base numa distribuição uniforme. A cada solução ou indivíduo é associado um cromossoma com um determinado número de genes, onde os genes tomam os valores 0 ou 1, de forma a que cada variável é representada por um código binário.

As variáveis de projeto s são codificadas tal como apresentado na Figura 3.2.

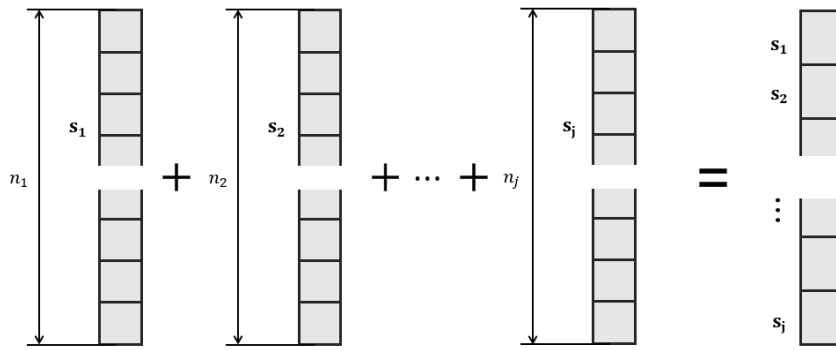


Figura 3.2: Codificação das variáveis de projeto

Uma vez que as variáveis de projeto são contínuas no seu domínio, a codificação binária representa a posição entre o valor mínimo e máximo, isto é, cada variável de projeto tem um código binário associado que é convertido para base decimal, dando a posição no domínio. Posteriormente, com base na posição e no número de genes atribuídos a essa variável, é possível determinar o seu valor real, tal como apresentado na Equação 3.9 (pos_i representa a posição que resultou da conversão binário-decimal e n diz respeito ao número de genes da variável).

$$s_i = s_i^{inf} + \frac{s_i^{sup} - s_i^{inf}}{2^n - 1} \cdot pos_i \quad (3.9)$$

Note-se que, em binário, com n bits, obtêm-se valores entre 0 e $2^n - 1$, pelo que, com a equação apresentada é possível obter tanto o valor mínimo com o valor máximo.

3.3.3 Controlo de Similaridade

De forma a não perder diversidade, o que pode resultar numa convergência inadequada, é realizado um controlo de similaridade. Nesta etapa, todas as soluções são comparadas entre si e as soluções que são clones de outras já existentes são substituídas por uma nova solução gerada aleatoriamente (com distribuição uniforme). Deste modo, espera-se que, no final da etapa, não existam soluções repetidas.

3.3.4 Avaliação e Ordenação

O passo seguinte deste processo é avaliar o mérito de cada solução, relacionado com a função objetivo - maximizar a frequência fundamental de vibração - e com as restrições.

No capítulo anterior, foram apresentados vários métodos para inclusão de restrições. Neste trabalho, utiliza-se um método híbrido baseado na penalização variável com base na violação da restrição.

A Equação 3.10 permite calcular o mérito de cada solução, onde $\omega(\mathbf{s})$ representa a frequência fundamental de vibração associada às variáveis de projeto desse indivíduo e $\Gamma(\mathbf{s})$ representa a função penalidade.

$$Mer(\mathbf{s}) = \omega(\mathbf{s}) - \Gamma(\mathbf{s}) \quad (3.10)$$

A função penalidade é dada pela Equação 3.11: se a restrição não for violada, o valor da função é nulo; caso contrário, é calculada uma penalização assente em dois níveis de violação da restrição. A uma baixa violação de restrição, g_0 , que pode ser tolerada, atribui-se uma penalidade p_0 . Uma violação elevada, g_1 , é penalizada em p_1 . A partir destes valores, é possível calcular as constantes q e $\bar{K}$ - Equações 3.12 e 3.13.

$$\Gamma(\mathbf{s}) = \begin{cases} 0, & se \quad g(\mathbf{s}) < 0 \\ \bar{K} \cdot |g(\mathbf{s})|^q, & se \quad g(\mathbf{s}) \geq 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{g_0}{g_1}\right)^q = \frac{p_0}{p_1} \quad (3.12)$$

$$\bar{K} = \frac{p_0}{(g_0)^q} \quad (3.13)$$

Para este problema, considerou-se que uma violação baixa, $g_0 = 10^{-3}$, leva a uma penalização de $p_0 = 10$, enquanto que uma penalização de $p_1 = 100$ é atribuída a uma violação elevada, $g_1 = 10^{-1}$. No problema de membrana, foi necessário aumentar as penalizações para $p_0 = 100$ e $p_1 = 1000$, uma vez que as frequências são da ordem dos milhares de Hertz (Hz).

Depois de todas as soluções avaliadas, é necessário ordenar as mesmas pelo seu valor de mérito (neste caso, uma vez que é um problema de maximização, a ordenação é feita de forma decrescente do valor do mérito). Desta forma, é mais simples identificar a população de elite.

A penalização permite que as soluções inadmissíveis apresentem um menor valor de mérito e, por isso, raramente pertencem à população de elite. Contudo, estas soluções não devem ser eliminadas porque podem permitir atingir a solução ótima.

3.3.5 Criação de Nova Geração - Operadores Genéticos

Para criar uma nova geração, são utilizados os operadores de seleção, de cruzamento e de mutação.

Em primeiro lugar, divide-se a população ordenada já existente em dois grupos: a elite (cujo número de indivíduos foi definida inicialmente) e os restantes indivíduos. A

população de elite vai ser automaticamente transferida para a geração seguinte, sem sofrer qualquer alteração. Isto permite guardar as soluções que apresentam maior valor de mérito.

A seleção permite escolher dois indivíduos para o cruzamento, onde é originado um filho. O cruzamento é repetido tantas vezes quantas o número de indivíduos da população de filhos (definido no início do algoritmo).

A seleção dos pais é feita com base no mérito dos indivíduos, ou seja, a probabilidade de selecionar um indivíduo é proporcional ao seu mérito. Assim, seria mais provável selecionar indivíduos da elite e perder-se-ia diversidade, pelo que se adota uma estratégia diferente. Um dos pais é escolhido entre a população de elite e o segundo pertence necessariamente à restante população. A probabilidade de se selecionar o indivíduo s_j é dada pela Equação 3.14, onde N é igual ao número de indivíduos da população de elite ou da restante população consoante a população a que o indivíduo pertence.

$$P(s_j) = \frac{Mer(s_j)}{\sum_{i=1}^N Mer(s_i)} \quad (3.14)$$

Utiliza-se o cruzamento uniforme: por cada gene do cromossoma, é gerado um número aleatório segundo a distribuição uniforme entre 0 e 1. Caso esse número seja inferior a um determinado valor (assume-se 0.5), o gene do filho será igual ao pai proveniente da população de elite. Se o número gerado for superior a esse valor, é o outro pai que fornece esse gene.

Depois de gerados todos os filhos, estes são incluídos na nova geração, onde já se encontram os indivíduos da elite.

Os restantes indivíduos da nova geração são criados por mutação. Dentro do número de indivíduos gerados por mutação, distinguem-se dois grupos.

Uma percentagem destes indivíduos será gerado por mutação dos indivíduos da população de elite, isto é, são selecionadas uma ou várias soluções da população de elite e aplica-se o operador de mutação. Novamente, a probabilidade de serem selecionadas é proporcional ao seu valor de mérito. O indivíduo criado por mutação de um elemento da elite apresenta uma probabilidade de mutação que deve ser estabelecida e é fixa durante toda a execução do algoritmo. Neste problema, utilizou-se uma probabilidade de 20 %.

Para completar a população de mutação, são gerados indivíduos de forma aleatória, tal como ocorreu aquando da criação da população inicial.

A Figura 3.3 representa os operadores genéticos acima descritos.

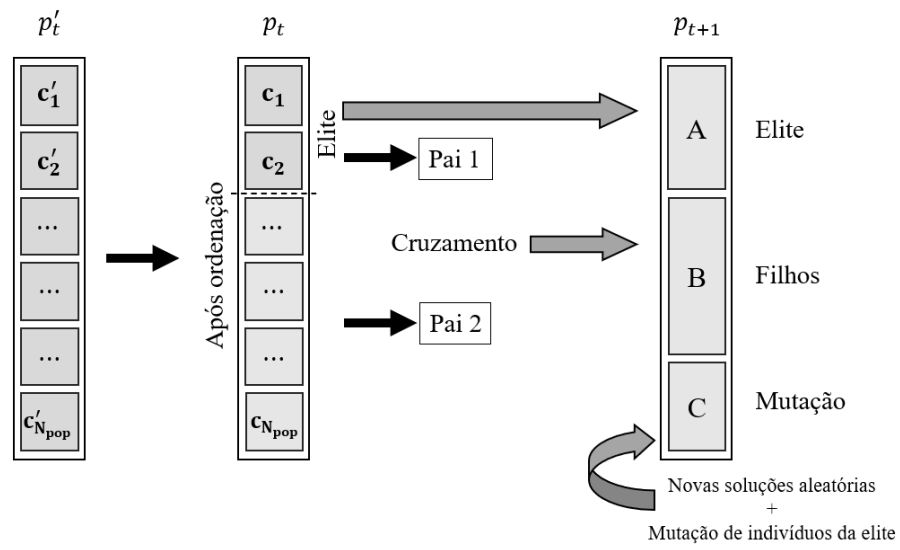


Figura 3.3: Criação da nova geração

Validação e Estudo de Convergência

Para o estudo das frequências naturais de placas compósitas reforçadas com fibras curvilíneas e sua otimização, foi necessário construir programas no *software* MATLAB.

Neste capítulo, são apresentadas as validações relativas ao programa de cálculo das frequências naturais de vibração nos problemas de flexão e de membrana e ao algoritmo de otimização. Para além disso, para os problemas de flexão e de membrana é feito um estudo de convergência, onde se analisa o número de funções de aproximação a usar para obter um valor próximo do exato.

4.1 Problema de Flexão

Para o programa construído, são analisadas as cinco primeiras frequências naturais de vibração para diferentes números de funções de aproximação na direção transversal ($p_o = 7, \dots, 11, 17$).

As propriedades utilizadas são relativas a placas reforçadas com fibras segundo o trajeto antissimétrico feitas com material Hexply AS4/8552 (Antunes et al., 2020), muito utilizado para estruturas aeroespaciais - Tabela 4.1.

4. Validação e Estudo de Convergência

Tabela 4.1: Propriedades da placa em estudo (Antunes et al., 2020)

Variável		Valor
Número de camadas	k	10
Dimensões da placa	a, b [m]	0.4, 0.3
Espessura da placa	h [m]	0.0018
Módulo de <i>Young</i> longitudinal	E_{11} [GPa]	126.3
Módulo de <i>Young</i> transversal	E_{22} [GPa]	8.765
Módulos de corte	G_{12}, G_{13} [GPa]	4.92
Módulo de corte	G_{23} [GPa]	3.35
Coefficiente de <i>Poisson</i>	ν_{12}	0.334
Massa volúmica	ρ [kg/m ³]	1556.7
Condições de Fronteira	Simplemente Apoiada	SSSS
Ângulo das Fibras	$\langle T_0^k, T_1^k \rangle$ [°]	$(\langle 30, 10 \rangle, \langle -30, -10 \rangle, \langle 30, 10 \rangle, \langle -30, -10 \rangle, \langle 90, 90 \rangle)_{sim}$

A Tabela 4.2 apresenta os valores obtidos para cada um dos casos estudados e a diferença relativa em relação à frequência calculada com o maior número de funções de aproximação, uma vez que esta é a mais próxima da solução exata, para os restantes casos.

Tabela 4.2: Estudo de convergência - problema de flexão

p_o	ω_1 [Hz]	ω_2 [Hz]	ω_3 [Hz]	ω_4 [Hz]	ω_5 [Hz]
7	69.3955 (1.15x10 ⁻³ %)	152.5324 (7.80x10 ⁻³ %)	196.7989 (15.1x10 ⁻³ %)	276.5448 (20.2x10 ⁻³ %)	296.4042 (24.7x10 ⁻³ %)
8	69.3951 (0.58x10 ⁻³ %)	152.5301 (6.29x10 ⁻³ %)	196.7743 (2.59x10 ⁻³ %)	276.519 (10.9x10 ⁻³ %)	296.3916 (20.4x10 ⁻³ %)
9	69.3951 (0.58x10 ⁻³ %)	152.5243 (2.49x10 ⁻³ %)	196.7735 (2.19x10 ⁻³ %)	276.4972 (3.00x10 ⁻³ %)	296.3418 (3.61x10 ⁻³ %)
10	69.3950 (0.43x10 ⁻³ %)	152.5241 (2.36x10 ⁻³ %)	196.7708 (0.81x10 ⁻³ %)	276.4941 (1.88x10 ⁻³ %)	296.3392 (2.73x10 ⁻³ %)
11	69.3949 (0.29x10 ⁻³ %)	152.5222 (1.11x10 ⁻³ %)	196.7706 (0.71x10 ⁻³ %)	276.4916 (0.98x10 ⁻³ %)	296.3355 (1.48x10 ⁻³ %)
17	69.3947	152.5205	196.7692	276.4889	296.3311

Conclui-se que existe convergência dos valores das frequências à medida que se aumenta o número de funções de aproximação transversais, pelo que, nas análises numéricas realizadas, serão consideradas 9 funções de aproximação transversais, podendo cometer um erro de aproximação no quarto algarismo significativo.

Passando à validação, a comparação foi feita relativamente aos resultados publicados por Akhavan e Ribeiro (2011). Para esta comparação, foi utilizada uma placa com as características apresentadas na Tabela 4.3, de forma a coincidir com as propriedades das

placas utilizadas no estudo feito pelos autores referidos.

Tabela 4.3: Propriedades da placa em estudo (comparação) (Akhavan and Ribeiro, 2011)

Variável		Valor
Número de camadas	k	3
Dimensões da placa	a, b [m]	1
Espessura da placa	h [m]	0.01
Módulo de <i>Young</i> longitudinal	E_{11} [GPa]	173
Módulo de <i>Young</i> transversal	E_{22} [GPa]	7.2
Módulos de corte	G_{12}, G_{13}, G_{23} [GPa]	3.76
Coefficiente de <i>Poisson</i>	ν_{12}	0.29
Massa volúmica	ρ [kg/m ³]	1540
Condições de Fronteira	Encastrada	CCCC
Ângulo das Fibras	$< T_0^k, T_1^k > [^\circ]$	$<0,45>, <-45,-60>, <0,45>$

A Tabela 4.4 compara os valores obtidos através do programa com as frequências apresentadas no artigo utilizado para fazer a validação.

Tabela 4.4: Validação do programa (comparação)

Frequência	Solução publicada [rad/s] (Akhavan and Ribeiro, 2011)	Solução obtida [rad/s]	Diferença relativa [%]
ω_1	579.40	584.25	0.84
ω_2	821.53	827.87	0.77
ω_3	1225.8	1235.6	0.80
ω_4	1493.8	1520.9	1.81
ω_5	1727.0	1758.1	1.80

Analisando os valores das frequências apresentados na Tabela 4.4 e as respetivas diferenças face aos valores apresentados por Akhavan e Ribeiro, pode-se concluir que o programa realiza o cálculo das frequências naturais de forma correta, sendo que as diferenças relativas (em valor absoluto) não ultrapassam 2%. Um dos fatores causadores desta diferença é o facto de se comparar valores obtidos por duas teorias distintas: o programa utiliza a Teoria Clássica de Placas, enquanto que, no artigo consultado, é usada uma teoria de terceira ordem (TSDT). Ainda assim, considera-se que os valores são suficientemente próximos para validar o programa.

4.2 Problema de Membrana

Para o programa construído, são analisadas as cinco primeiras frequências naturais de vibração para diferentes números de funções de aproximação no plano ($p_m = 3, \dots, 8, 15$).

As propriedades utilizadas são idênticas às apresentadas para o problema de flexão - Tabela 4.1.

Na Tabela 4.5 podem ser consultados os valores obtidos para cada um dos casos estudados e a diferença relativa em relação à frequência calculada com o maior número de funções de aproximação, que será a mais próxima da solução exata.

Tabela 4.5: Estudo de convergência - problema de membrana

p_m	ω_1 [Hz]	ω_2 [Hz]	ω_3 [Hz]	ω_4 [Hz]	ω_5 [Hz]
3	8525.8482	10103.5602	10664.7379	13127.6459	14981.0041
	(0.175 %)	(0.352 %)	(0.249 %)	(3.189 %)	(2.884 %)
4	8513.8615	10091.1523	10652.7288	12839.1367	14614.6979
	(0.034 %)	(0.229 %)	(0.137 %)	(0.922 %)	(0.369 %)
5	8513.1304	10077.2225	10642.5694	12787.2024	14587.1645
	(0.026 %)	(0.091 %)	(0.041 %)	(0.513 %)	(0.180 %)
6	8511.7464	10069.9994	10640.5050	12743.1934	14563.9725
	(0.009 %)	(0.019 %)	(0.022 %)	(0.167 %)	(0.020 %)
7	8511.6619	10068.9852	10638.9283	12728.0949	14562.3144
	(0.008 %)	(0.009 %)	(0.007 %)	(0.079 %)	(0.009 %)
8	8511.2446	10068.6354	10638.7930	12723.9318	14561.8914
	(0.004 %)	(0.005 %)	(0.006 %)	(0.016 %)	(0.006 %)
15	8510.9450	10068.1090	10638.1974	12721.8979	14561.0000

Verifica-se a convergência dos valores de frequência com o aumento do número de funções de aproximação no plano. Em análises posteriores, serão utilizadas 6 funções de aproximação no plano, podendo cometer erros de aproximação, provavelmente, a partir do quarto algarismo significativo.

A validação é feita comparando os valores das frequências obtidas com as frequências apresentadas para uma placa com as mesmas características no *software* ABAQUS. As propriedades da placa são fornecidas na Tabela 4.6. No *software*, é usado um tamanho de malha de 0.05, resultando em 400 elementos e em 441 nós, e elementos S4R (elementos de casca com 4 nós e integração reduzida).

Tabela 4.6: Propriedades da placa em estudo (comparação - membrana) - adaptado de (Antunes et al., 2020)

Variável		Valor
Número de camadas	k	4
Dimensões da placa	a, b [m]	1
Espessura da placa	h [m]	0.01
Módulo de <i>Young</i> longitudinal	E_{11} [GPa]	126.3
Módulo de <i>Young</i> transversal	E_{22} [GPa]	8.765
Módulos de corte	G_{12}, G_{13}, G_{23} [GPa]	4.92
Coefficiente de <i>Poisson</i>	ν_{12}	0.334
Massa volúmica	ρ [kg/m ³]	1556.7
Condições de Fronteira	Encastrada	CCCC
Ângulo das Fibras	$\langle T_0^k, T_1^k \rangle$ [°]	$(\langle 0,0 \rangle, \langle 90,90 \rangle)_{sim}$

A Tabela 4.7 compara as frequências obtidas através do programa com as frequências apresentadas no *software* utilizado para fazer a validação.

Tabela 4.7: Validação do programa (comparação - membrana)

Frequência	<i>Software</i> [Hz]	Solução obtida [Hz]	Diferença relativa[%]
ω_1	3426.3	3419.1	0.21
ω_2	3426.3	3419.1	0.21
ω_3	3636.0	3623.0	0.36
ω_4	3879.3	3864.8	0.37
ω_5	4267.4	4229.0	0.90

Pela análise da Tabela 4.6, observa-se que a diferença relativa (em valor absoluto) entre as duas análises é sempre inferior a 1 %, pelo que se verifica que o programa realiza o cálculo das frequências naturais de forma correta. Desta forma, considera-se o programa validado.

4.3 Algoritmo de Otimização

A validação de um algoritmo de otimização pode ser feita através da análise de diversos fatores como a média ou o desvio padrão do valor de mérito ou do valor do fenótipo.

Espera-se que, se o algoritmo estiver corretamente programado, a elite possua indivíduos cada vez com maior mérito e que o valor do fenótipo se aproxime de um valor (exceto se existirem dois ou mais ótimos distantes entre si).

Para a validação do algoritmo construído, em primeiro lugar, serão analisados os valores de mérito do melhor e do pior indivíduos da elite e a média dos indivíduos incluídos neste grupo em cada geração. A média e o desvio padrão do fenótipo também são registados em todas as gerações. Por fim, estuda-se a taxa de sucesso dos operadores de cruzamento e de mutação, de forma a perceber se estes originam indivíduos com melhor mérito do que os pertencentes à elite. Todas estas informações surgem compiladas em gráficos, que são apresentados no final da execução do algoritmo.

A Tabela 4.8 apresenta os dados utilizados para a validação do algoritmo. Foi analisado um problema de flexão, com uma placa com as propriedades mecânicas, dimensões e condições de fronteira da Tabela 4.1. Note-se que, para estes dados, os gráficos registados não serão sempre iguais dado que a população inicial é criada de forma aleatória e os operadores de cruzamento e de mutação funcionam com base em números gerados aleatoriamente. Embora o número de sucessos ou a média do mérito da elite possam não ser idênticos, a solução ótima apresentada deve ser sempre igual.

Tabela 4.8: Dados inseridos no algoritmo de otimização

Variável	Valor
Tamanho da população	21
Indivíduos da elite	7
Indivíduos gerados por cruzamento	10
Indivíduos gerados por mutação	4
Número de camadas da placa	1
Número de variáveis	2
Número de genes por variável	5
$[s_i^{inf}; s_i^{sup}]$ [rad]	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
Número de gerações	30

São encontradas duas soluções ótimas, ou seja, na geração final, existem dois indivíduos cujo fenótipo (valores dos ângulos) é diferente, mas que apresentam igual valor de mérito - Tabela 4.9. Verifica-se que as soluções encontradas correspondem a placas equivalentes, isto é, é possível obter as duas soluções na mesma placa, orientando-a de duas formas diferentes.

Tabela 4.9: Soluções ótimas encontradas

Solução	Fenótipo $< T_0, T_1 >$	Mérito (frequência fundamental [rad/s])
1	$< \frac{\pi}{2}, \frac{23}{62}\pi >$	87.67
2	$< -\frac{\pi}{2}, -\frac{23}{62}\pi >$	87.67

A Figura 4.1 mostra a evolução do mérito na elite (melhor e pior indivíduos e média de todos os indivíduos deste grupo). Verifica-se que as três curvas registadas não apresentam intervalos descendentes, constatando-se que as soluções com maior mérito não são eliminadas, apenas podendo ser ultrapassadas por indivíduos com maior mérito. Caso existissem intervalos descendentes, o algoritmo deveria ser analisado pois determinadas soluções estavam a ser substituídas por indivíduos com pior mérito, contrariando o intuito da otimização.

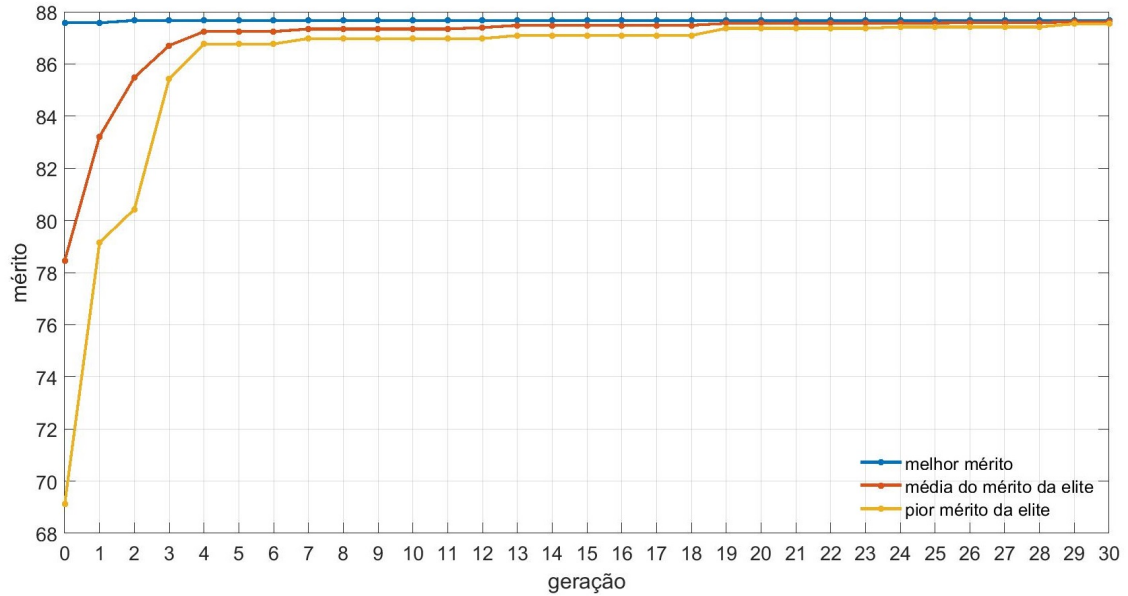


Figura 4.1: Evolução do mérito na elite

O passo seguinte é a análise da evolução da média e do desvio padrão do fenótipo da elite e da população total. As Figuras 4.2 e 4.3 ilustram as evoluções da média e do desvio padrão, respetivamente. Nas legendas, T_0 e T_1 representam os dois ângulos presentes na expressão do trajeto antissimétrico.

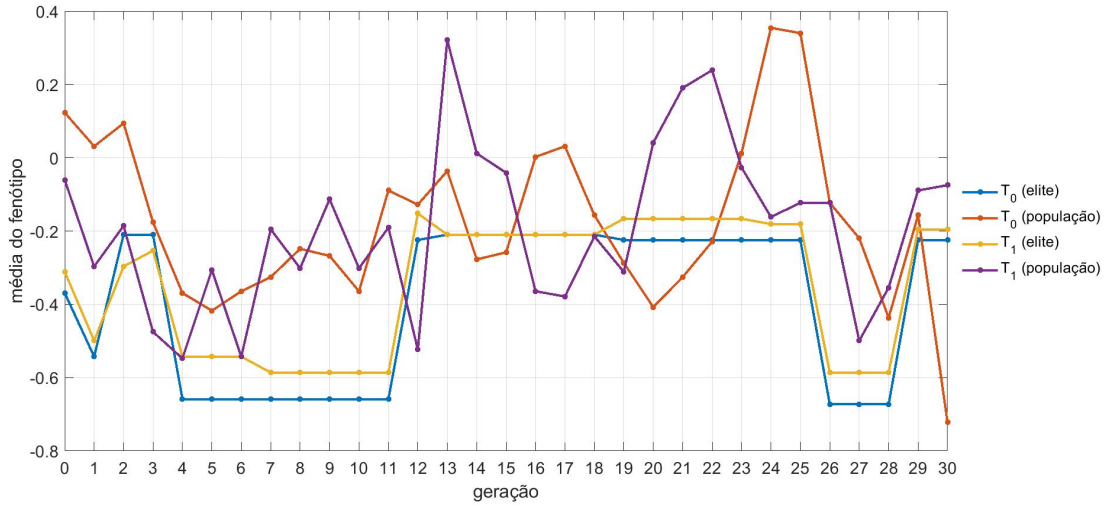


Figura 4.2: Evolução da média do fenótipo

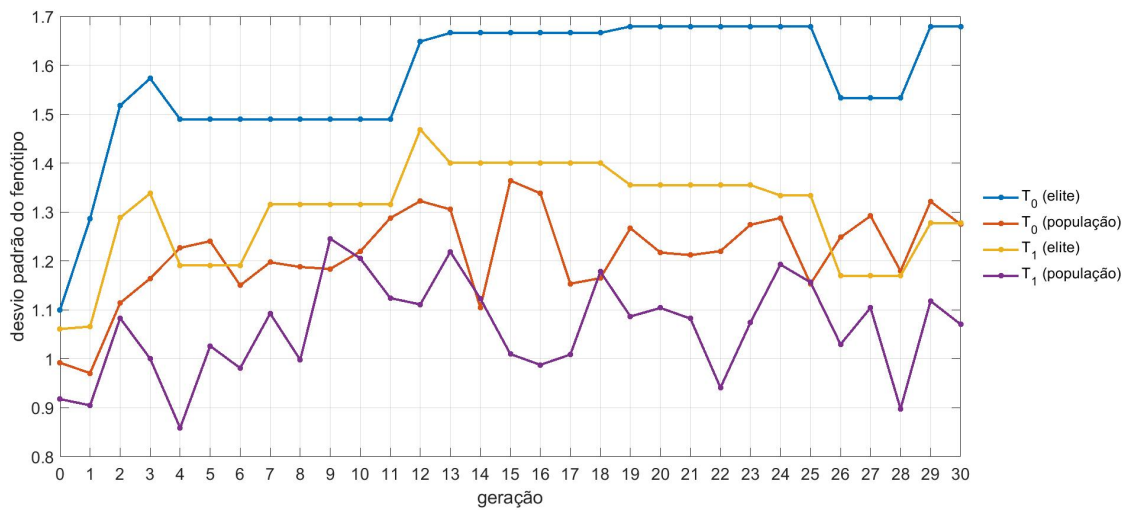


Figura 4.3: Evolução do desvio padrão do fenótipo

Uma vez que foram encontradas duas soluções ótimas em pólos opostos do domínio, não existe uma convergência para um valor da média e o desvio padrão apresenta valores bastante elevados. Assim, optou-se por analisar um domínio em que apenas existe uma solução ótima - o valor inferior que as variáveis de projeto podem tomar passa a ser 0. Assim, sabe-se que, no novo domínio, apenas existe uma solução ótima e é possível verificar a validade do algoritmo.

As Figuras 4.4 e 4.5 representam a evolução da média e do desvio padrão para o novo caso em estudo (todos os restantes dados permanecem iguais aos apresentados na Tabela 4.8).

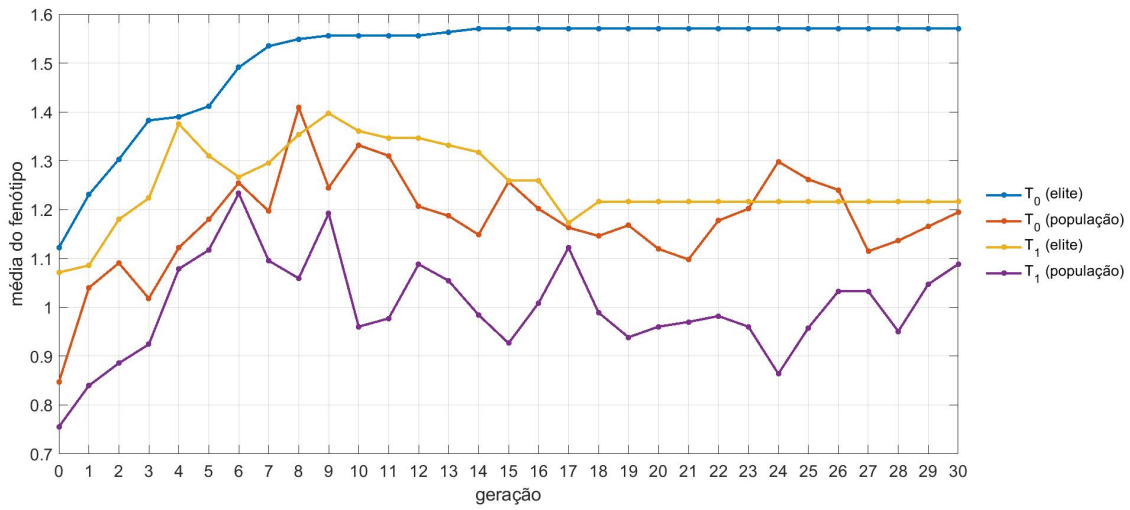


Figura 4.4: Evolução da média do fenótipo - Novo Domínio

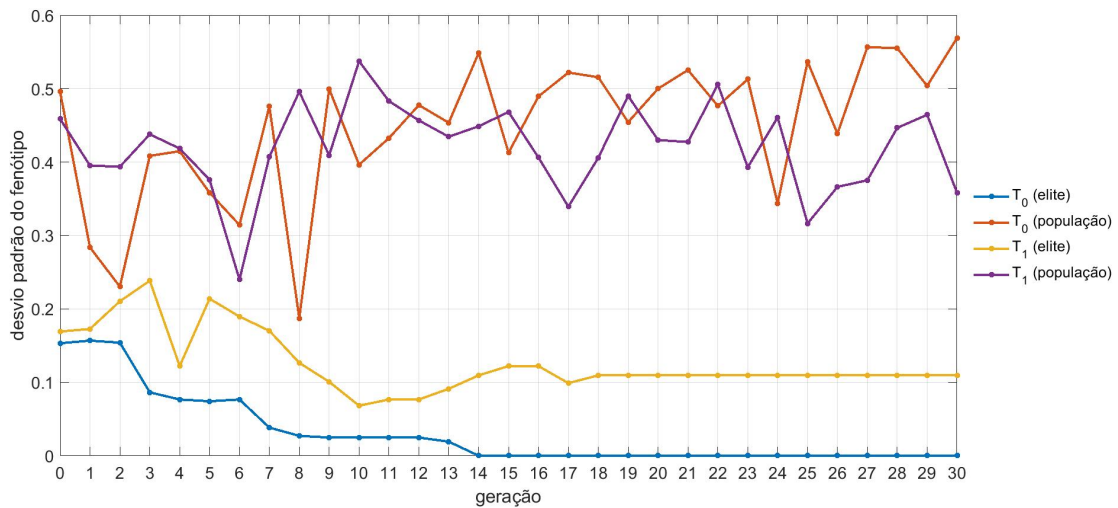


Figura 4.5: Evolução do desvio padrão do fenótipo - Novo Domínio

Nas duas últimas figuras, é possível observar uma tendência para a estabilização da média do fenótipo da elite e o desvio padrão é, neste caso, muito inferior ao caso anterior, estando muito próximo de zero.

Ainda no caso cujos dados são apresentados na Tabela 4.8, foram analisadas as taxas de sucesso do cruzamento e da mutação, isto é, o número de indivíduos criados por estes operadores cujo mérito é superior ao mérito do pior indivíduo da elite e que, por isso, podem passar a pertencer a este grupo.

Nesta análise, contabilizou-se o número de indivíduos considerados sucessos em cada geração, o número total de sucessos na execução do programa e o número de gerações que apresentaram sucessos.

A operação de cruzamento gerou, no total, 300 indivíduos (10 indivíduos por geração).

Destes, dezassete apresentavam maior mérito do que o pior indivíduo da elite da respetiva geração, representando 5,7% do número total de indivíduos criados por cruzamento. Os dezassete casos verificados distribuíram-se por nove das 30 gerações.

No que diz respeito à mutação, apenas cinco dos 120 indivíduos gerados por mutação (4 indivíduos por geração) foram sucessos - 4,2 %. Estes cinco casos foram registados em quatro das 30 gerações.

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram a distribuição dos sucessos de cruzamento e de mutação ao longo das gerações.

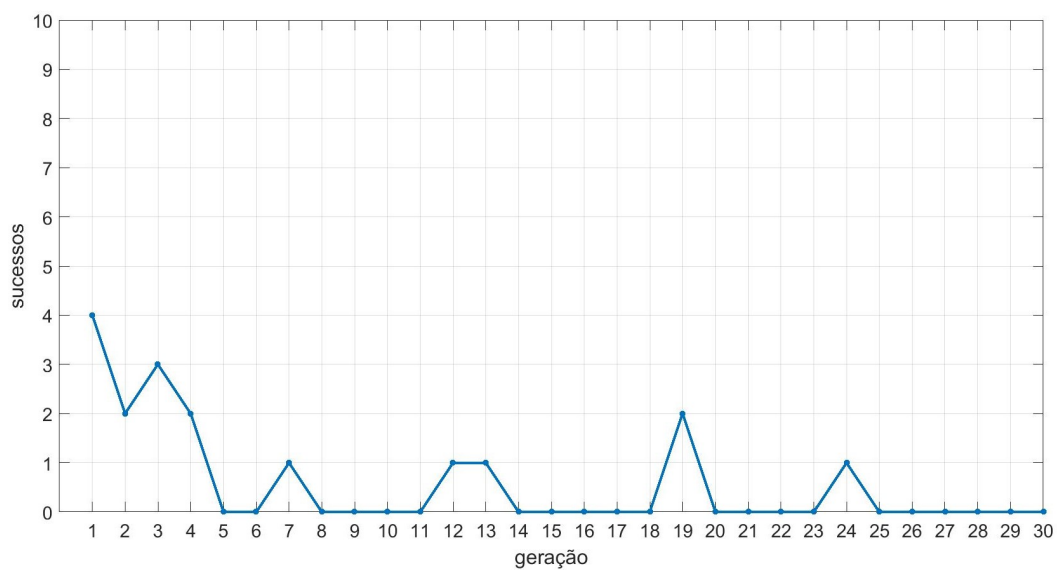


Figura 4.6: Distribuição dos sucessos de cruzamento ao longo das gerações

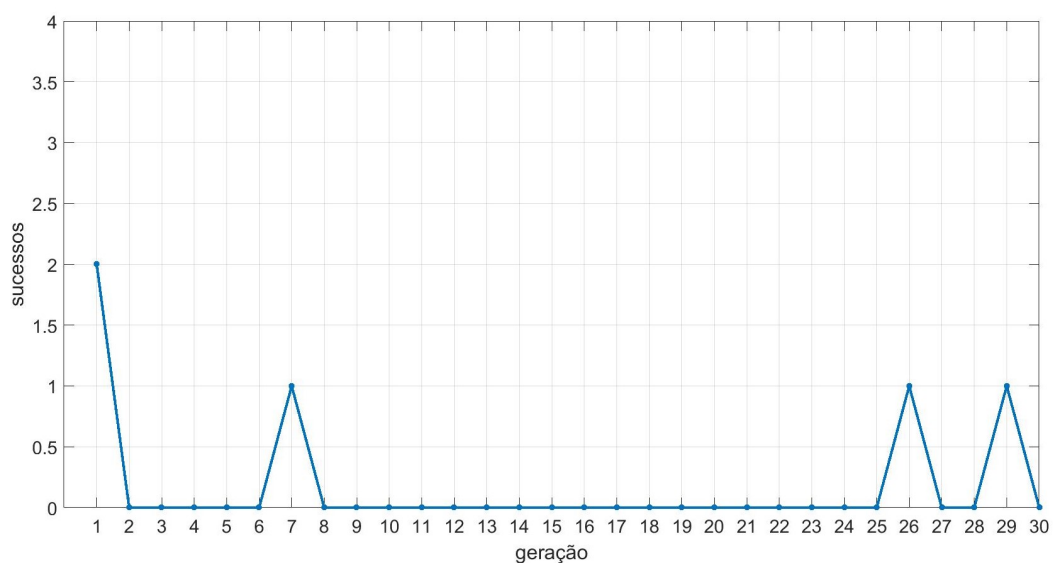


Figura 4.7: Distribuição dos sucessos de mutação ao longo das gerações

Depois de observados estes parâmetros, é possível concluir que o algoritmo está construído de forma correta e pode ser utilizado para a otimização da frequência natural fundamental de placas reforçadas com fibras curvilíneas.

Determinam-se, também, que, em estudos futuros, os dados do algoritmo são os apresentados na Tabela 4.8, isto é, são utilizadas populações de vinte e um indivíduos, onde sete pertencem à elite, dez são gerados por cruzamento e quatro são gerados por mutação, e são criadas trinta gerações.

Resultados

Neste capítulo, os códigos construídos e previamente validados são utilizados para a obtenção de resultados, devidamente analisados.

Inicialmente, são apresentados os resultados de diversos estudos de otimização da primeira frequência natural para determinadas propriedades mecânicas, sendo que as variáveis de projeto variam num intervalo de valores definido à partida. Para alguns dos casos analisados, serão calculadas as cinco primeiras frequências de vibração e apresentadas as respectivas formas naturais de vibração. Por último, para os mesmos casos, será realizada uma análise da distribuição de tensões quando a oscilação ocorre num modo natural de vibração. Apesar de apenas se maximizar a primeira frequência natural, este estudo é realizado para os cinco primeiros modos visto que existe interesse em analisar as consequências da otimização em vários modos.

Foram realizados estudos de otimização da frequência natural fundamental para problemas de flexão e de membrana. Uma vez que os problemas de flexão e de membrana são analisados separadamente, as placas analisadas devem ser simétricas em relação ao plano médio da espessura.

O primeiro estudo realizado compara as frequências naturais fundamentais máximas dos três trajetos de fibras curvilíneas entre si e com a frequência natural fundamental máxima em placas com fibras retilíneas, para diversas condições de fronteira.

Posteriormente, são analisados dois casos particulares de placas multicamada reforçadas com fibras curvilíneas segundo os trajetos antissimétrico e assimétrico, propostos em artigos consultados.

5.1 Comparação entre fibras retilíneas e curvilíneas

Para proceder à comparação entre fibras retilíneas e fibras curvilíneas, utilizou-se uma placa com uma camada, pelo que o número de variáveis de projeto é dois para os trajetos antissimétrico e assimétrico e três para o trajeto sinusoidal.

As propriedades da placa são apresentadas na Tabela 5.1. A Tabela 5.2 mostra os dados do algoritmo de otimização: para os trajetos antissimétrico e assimétrico são utilizadas duas variáveis de projeto, que variam entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, e cinco bits por variável, enquanto que, no caso do trajeto sinusoidal, existem três variáveis de projeto (a amplitude é, no

máximo, 2 mm - amplitude pico a pico é 4 mm -, o comprimento de onda assume valores entre $a/16$ e a - onde a é o comprimento da placa - e o desfasamento apresenta o mesmo intervalo de valores que os ângulos dos restantes trajetos), sendo que a cada variável estão associados 4 bits.

Tabela 5.1: Propriedades da placa em estudo (Antunes et al., 2020)

Variável		Valor
Número de camadas	k	1
Dimensões da placa	a, b [m]	0.4, 0.3
Espessura da placa	h [m]	0.0018
Módulo de <i>Young</i> longitudinal	E_{11} [GPa]	126.3
Módulo de <i>Young</i> transversal	E_{22} [GPa]	8.765
Módulos de corte	G_{12}, G_{13} [GPa]	4.92
Módulo de corte	G_{23} [GPa]	3.35
Coefficiente de <i>Poisson</i>	ν_{12}	0.334
Massa volúmica	ρ [kg/m ³]	1556.7

Tabela 5.2: Dados do algoritmo de otimização

Variável	Valor	
Tamanho da população	21	
Indivíduos da elite	7	
Indivíduos gerados por cruzamento	10	
Indivíduos gerados por mutação	4	
Número de variáveis	2	3
Número de genes por variável	5	4
$[s_i^{inf}; s_i^{sup}]$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ [rad]	$[-0.002; 0.002]$ [m]
		$[a/16; a/1]$ [m]
		$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ [rad]
Número de gerações	30	

5.1.1 Otimização

Para os problemas de flexão e de membrana, foram estudadas seis condições de fronteira: placa simplesmente apoiada (SSSS), placa encastrada (CCCC), placa encastrada em $y =$

$-b/2$ e $y = b/2$ e livre nas restantes fronteiras (CFCF), placa encastrada em $y = -b/2$ e livre nas restantes fronteiras (CFFF), placa encastrada em $x = -a/2$ e $x = a/2$ e livre nas restantes fronteiras (FCFC), placa encastrada em $x = -a/2$ e livre nas restantes fronteiras (FCFF). Nas designações dadas por quatro letras, a primeira letra diz respeito à fronteira $y = -b/2$, seguindo-se as restantes segundo o sentido horário.

O número de funções de aproximação utilizadas é ligeiramente inferior ao definido após o estudo de convergência, uma vez que diminui o esforço computacional da otimização, sem influenciar a procura da solução ótima. Nas etapas posteriores, o número de funções de aproximação é aumentado. Assim, são utilizadas sete funções de aproximação para problemas de flexão e quatro funções de aproximação para problemas de membrana.

A otimização foi realizada num computador com processador Intel(R) Core(TM) i7 CPU 860 @ 2.80GHz e memória RAM de 6 GB. A duração da otimização variou entre 7 e 9 horas, para problemas de flexão, e entre 3 e 5 horas, para problemas de membrana, dependendo do trajeto de fibras escolhido. Uma vez que são realizadas 441 avaliações durante o processo de otimização, a duração de cada avaliação variou entre 1 minuto e 1 minuto e 15 segundos, para problemas de flexão, e entre 25 e 40 segundos, para problemas de membrana.

As Tabelas 5.3 a 5.8 apresentam os resultados da otimização para os casos estudados.

Tabela 5.3: Resultados de otimização – Condições de Fronteira SSSS e CCCC, Problema de Flexão

Condição de Fronteira	SSSS				CCCC			
	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal
ω_1 [Hz]	87.3661	87.6713	87.2800	58.1109	190.9490	190.8567	190.5382	120.4671
T_0 [rad]	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	-	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	-
T_1 [rad]	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{23\pi}{62}$	$\frac{29\pi}{62}$	-	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{29\pi}{62}$	$\frac{29\pi}{62}$	-
A [m]	-	-	-	$\frac{11}{30} \cdot 0.004$	-	-	-	$\frac{11}{30} \cdot 0.004$
λ [m]	-	-	-	$\frac{a}{3}$	-	-	-	$\frac{a}{3}$
ϕ [rad]	-	-	-	$\frac{\pi}{30}$	-	-	-	$\frac{\pi}{30}$

Tabela 5.4: Resultados de otimização – Condições de Fronteira CFCF e CFFF, Problema de Flexão

Condição de Fronteira	CFCF				CFFF			
	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal
ω_1 [Hz]	185.6518	185.0466	184.2618	48.9514	29.1974	28.8932	28.8948	7.6911
T_0 [rad]	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{29\pi}{62}$	$\frac{29\pi}{62}$	-	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{29\pi}{62}$	$\frac{\pi}{2}$	-
T_1 [rad]	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	-	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{29\pi}{62}$	-
A [m]	-	-	-	$\frac{11}{30} \cdot 0.004$	-	-	-	$\frac{11}{30} \cdot 0.004$
λ [m]	-	-	-	$\frac{a}{3}$	-	-	-	$\frac{a}{3}$
ϕ [rad]	-	-	-	$\frac{11\pi}{30}$	-	-	-	$\frac{\pi}{30}$

5. Resultados

Tabela 5.5: Resultados de otimização – Condições de Fronteira FCFC e FCFF, Problema de Flexão

Condição de Fronteira	FCFC				FCFF			
Trajeto	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal
ω_1 [Hz]	95.6082	95.7221	95.6865	95.7455	18.5594	20.4373	20.7138	18.7677
T_0 [rad]	0	$-\frac{\pi}{62}$	$-\frac{\pi}{62}$	-	0	$\frac{9\pi}{62}$	$-\frac{\pi}{62}$	-
T_1 [rad]	0	$\frac{\pi}{62}$	$\frac{\pi}{62}$	-	0	$-\frac{\pi}{62}$	$\frac{17\pi}{62}$	-
A [m]	-	-	-	$\frac{15}{30} \cdot 0.004$	-	-	-	$\frac{15}{30} \cdot 0.004$
λ [m]	-	-	-	a	-	-	-	a
ϕ [rad]	-	-	-	$\frac{9\pi}{30}$	-	-	-	$-\frac{5\pi}{30}$

Tabela 5.6: Resultados de otimização – Condições de Fronteira SSSS e CCCC, Problema de Membrana

Condição de Fronteira	SSSS				CCCC			
Trajeto	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal
ω_1 [Hz]	4534.34	5038.55	5666.42	4560.75	4534.34	5038.55	5666.42	4560.75
T_0 [rad]	0	$\frac{23\pi}{62}$	$\frac{13\pi}{62}$	-	0	$\frac{23\pi}{62}$	$\frac{13\pi}{62}$	-
T_1 [rad]	0	$\frac{9\pi}{62}$	$-\frac{13\pi}{62}$	-	0	$\frac{9\pi}{62}$	$-\frac{13\pi}{62}$	-
A [m]	-	-	-	$\frac{11}{30} \cdot 0.004$	-	-	-	$\frac{11}{30} \cdot 0.004$
λ [m]	-	-	-	$\frac{a}{3}$	-	-	-	$\frac{a}{3}$
ϕ [rad]	-	-	-	$\frac{\pi}{2}$	-	-	-	$\frac{\pi}{2}$

Tabela 5.7: Resultados de otimização – Condições de Fronteira CFCF e CFFF, Problema de Membrana

Condição de Fronteira	CFCF				CFFF			
Trajeto	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal
ω_1 [Hz]	3658.33	3679.97	4271.99	2862.28	1433.46	1621.11	2163.14	1034.56
T_0 [rad]	$\frac{7\pi}{62}$	$\frac{9\pi}{62}$	$\frac{\pi}{2}$	-	$\frac{19\pi}{62}$	$\frac{15\pi}{62}$	$\frac{29\pi}{62}$	-
T_1 [rad]	$\frac{7\pi}{62}$	$\frac{23\pi}{62}$	$-\frac{\pi}{2}$	-	$\frac{19\pi}{62}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{29\pi}{62}$	-
A [m]	-	-	-	$\frac{11}{30} \cdot 0.004$	-	-	-	$\frac{11}{30} \cdot 0.004$
λ [m]	-	-	-	$\frac{a}{3}$	-	-	-	$\frac{a}{3}$
ϕ [rad]	-	-	-	$\frac{\pi}{2}$	-	-	-	$\frac{\pi}{10}$

Tabela 5.8: Resultados de otimização – Condições de Fronteira FCFC e FCFF, Problema de Membrana

Condição de Fronteira	FCFC				FCFF			
	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal
ω_1 [Hz]	2671.87	2771.59	4299.41	2249.47	992.07	1027.75	1038.88	1013.48
T_0 [rad]	$\frac{23\pi}{62}$	$\frac{9\pi}{62}$	$\frac{17\pi}{62}$	-	0	$-\frac{9\pi}{62}$	$\frac{9\pi}{62}$	-
T_1 [rad]	$\frac{23\pi}{62}$	$\frac{23\pi}{62}$	$-\frac{17\pi}{62}$	-	0	$\frac{3\pi}{62}$	$-\frac{\pi}{2}$	-
A [m]	-	-	-	$-\frac{11}{30} \cdot 0.004$	-	-	-	$\frac{11}{30} \cdot 0.004$
λ [m]	-	-	-	$\frac{a}{3}$	-	-	-	$\frac{a}{3}$
ϕ [rad]	-	-	-	$\frac{\pi}{2}$	-	-	-	$\frac{13\pi}{30}$

Analisando os valores das frequências apresentados nas tabelas acima, é possível perceber a influência do trajeto das fibras no comportamento em vibração da placa.

Em flexão, para uma placa simplesmente apoiada, a frequência natural fundamental é máxima para o trajeto antissimétrico, verificando-se que as fibras retilíneas e o trajeto assimétrico permitem alcançar valores bastante próximos deste. Já o trajeto sinusoidal apresenta um máximo significativamente mais baixo - existe uma redução de cerca de 34%.

Ainda em flexão, em algumas das restantes condições de fronteira analisadas (CCCC, CFCC, CFFF), a melhor solução é obtida através das fibras retilíneas, o que indica que nem sempre as fibras curvilíneas são mais vantajosas no que diz respeito à primeira frequência natural de vibração. Contudo, os valores obtidos para os trajetos antissimétrico e assimétrico são apenas ligeiramente inferiores. Para as quatro condições de fronteira referidas e considerando os valores que as variáveis de projeto podem assumir, o trajeto sinusoidal apresenta frequências consideravelmente mais baixas (a redução relativamente à frequência mais elevada registada varia entre 34% e 74% nas quatro condições de fronteira estudadas).

Quando a placa é encastrada em $x = -a/2$ e em $x = a/2$ e livre nas restantes fronteiras (FCFC), o trajeto sinusoidal é o que apresenta a frequência máxima, enquanto que a solução ótima encontrada para as fibras retilíneas é inferior aos três trajetos de fibras curvilíneas. Para uma placa encastrada em $x = -a/2$ e livre nas restantes fronteiras (FCFF), o trajeto assimétrico apresenta-se como a melhor alternativa.

Relativamente a problemas no plano, o trajeto assimétrico é, para todos os casos estudados, a melhor alternativa, apresentando valores para a frequência natural fundamental bastante superiores aos registados pelos outros trajetos.

Em placas simplesmente apoiadas e placas encastradas, as fibras retilíneas representam a pior solução, seguindo-se o trajeto sinusoidal. Nas restantes condições de fronteira estudadas (CFCC, CFFF, FCFC e FCFF), o trajeto sinusoidal apresenta a frequência natural fundamental ótima mais baixa, quando comparando com os outros trajetos, e o trajeto antissimétrico apresenta uma primeira frequência de vibração mais elevada relativamente às fibras retilíneas.

5.1.2 Freqüências e Formas Naturais

Uma vez que foi analisado um número elevado de casos, são estudados apenas alguns casos nesta e na próxima secção: são analisados os quatro trajetos para uma placa simplesmente apoiada (problema de flexão).

No cálculo das freqüências e formas naturais e na análise de tensões, são utilizadas nove funções de aproximação para o problema de flexão e seis funções de aproximação para o problema de membrana.

Os valores das cinco primeiras freqüências de vibração das placas em análise são apresentados na Tabela 5.9. Verifica-se que as freqüências naturais fundamentais são ligeiramente inferiores às apresentadas na secção anterior, uma vez que foi utilizado um maior número de funções de forma e as freqüências são calculadas por excesso. No entanto, as freqüências apresentadas nesta tabela são uma melhor estimativa do valor real da freqüência.

Tabela 5.9: Freqüências naturais dos casos em estudo

Trajeto	Retilíneas	Antissimétrico	Assimétrico	Sinusoidal
Variáveis de Projeto	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$T_0 = \frac{\pi}{2}$ $T_1 = \frac{23\pi}{62}$	$T_0 = \frac{\pi}{2}$ $T_1 = \frac{29\pi}{62}$	$A = \frac{11}{30} \cdot 0.004$ $\lambda = \frac{a}{3}$ $\phi = \frac{\pi}{30}$
ω_1 [Hz]	87.3661	87.5997	87.2790	58.0901
ω_2 [Hz]	110.1296	115.8304	110.3978	112.9469
ω_3 [Hz]	159.7750	172.2259	160.4328	193.8188
ω_4 [Hz]	238.3244	254.3853	239.2217	217.0494
ω_5 [Hz]	332.8478	330.5903	332.0457	232.7702

Pela análise da Tabela 5.9, confirma-se que o trajeto antissimétrico é a melhor alternativa no que diz respeito à primeira freqüência natural, seguindo-se as fibras retilíneas, o trajeto assimétrico e, por fim, o trajeto sinusoidal.

Relativamente às restantes freqüências naturais apresentadas, verifica-se que o trajeto antissimétrico apenas apresenta a solução máxima para as segunda e quarta freqüências naturais, sendo a segunda maior opção na terceira freqüência e a terceira maior opção para a quinta freqüência.

Observando os valores obtidos para a terceira freqüência natural, constata-se que a melhor opção é o trajeto sinusoidal e as fibras retilíneas apresentam a pior alternativa, embora muito próxima do trajeto assimétrico. O contrário acontece para a quinta freqüência natural: a melhor solução é dada pelas fibras retilíneas, seguida pelo trajeto assimétrico, com um valor muito próximo, e o trajeto sinusoidal apresenta o valor mais baixo.

Para o trajeto sinusoidal, a diferença entre as duas primeiras freqüências naturais é bastante elevada, podendo representar uma redução do risco de instabilidade aeroelástica (Dowell, 2015).

Assim, conclui-se que, ao maximizar apenas a primeira frequência natural, não é garantido que a solução ótima também seja ótima nos restantes modos, embora, neste caso, o trajeto antissimétrico represente a melhor solução para a maioria dos modos estudados. Verifica-se, também, que as frequências relativas às fibras retilíneas e ao trajeto assimétrico são sempre bastante próximas, dado que a solução ótima para este trajeto apresenta uma curvatura bastante reduzida.

As Figuras 5.1 a 5.4 mostram as formas naturais das placas apresentadas na Tabela 5.7. As dimensões da placa não estão à escala.

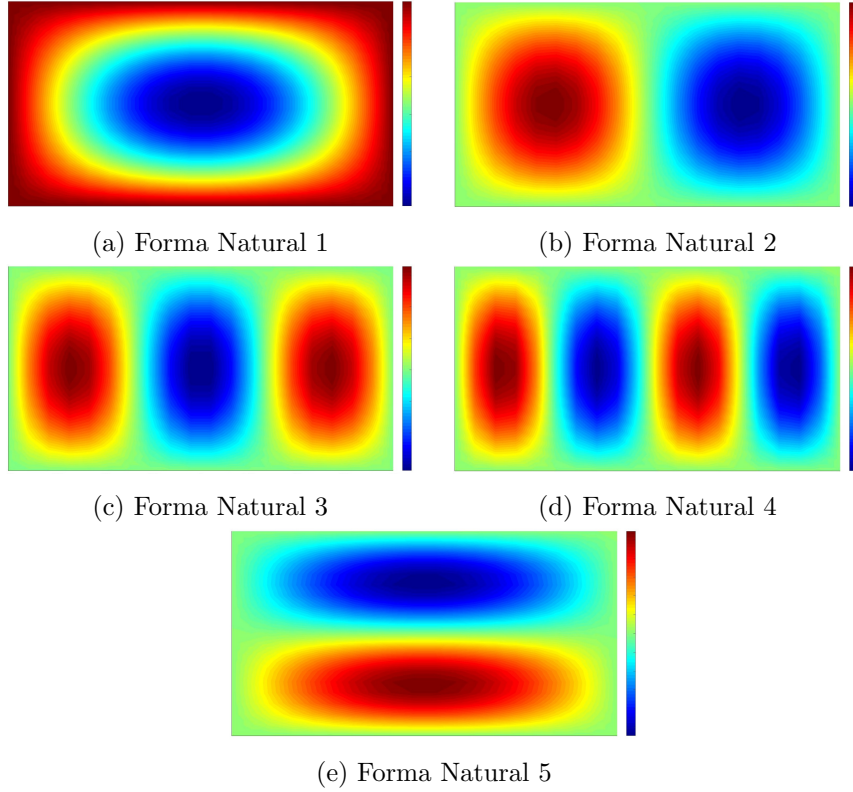


Figura 5.1: Formas Naturais – Fibras retilíneas (placa simplesmente apoiada)

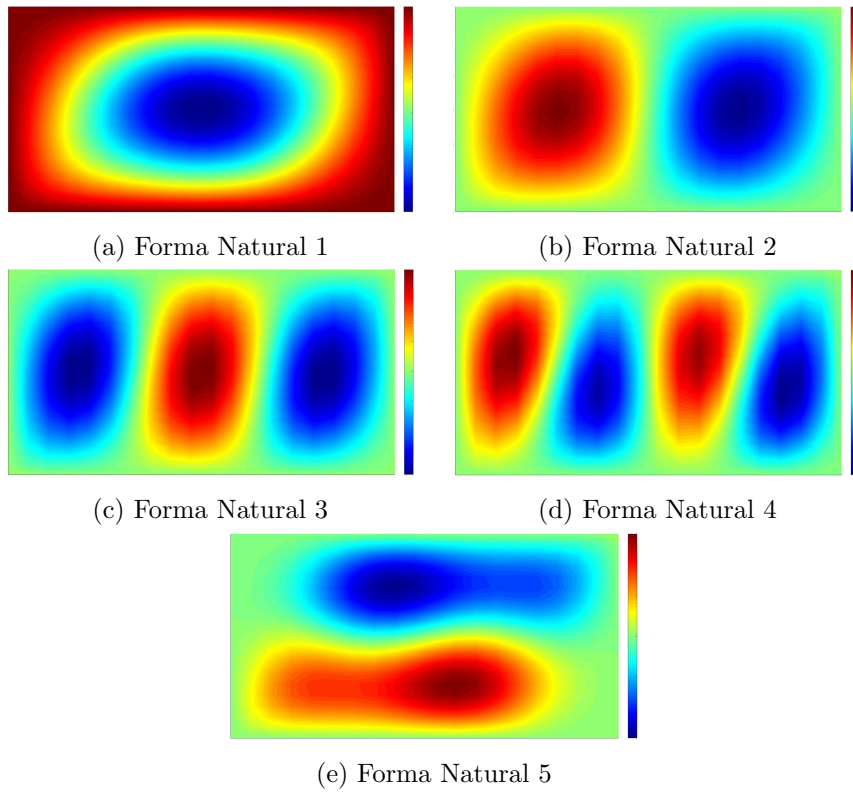


Figura 5.2: Formas Naturais – Trajeto Antissimétrico (placa simplesmente apoiada)

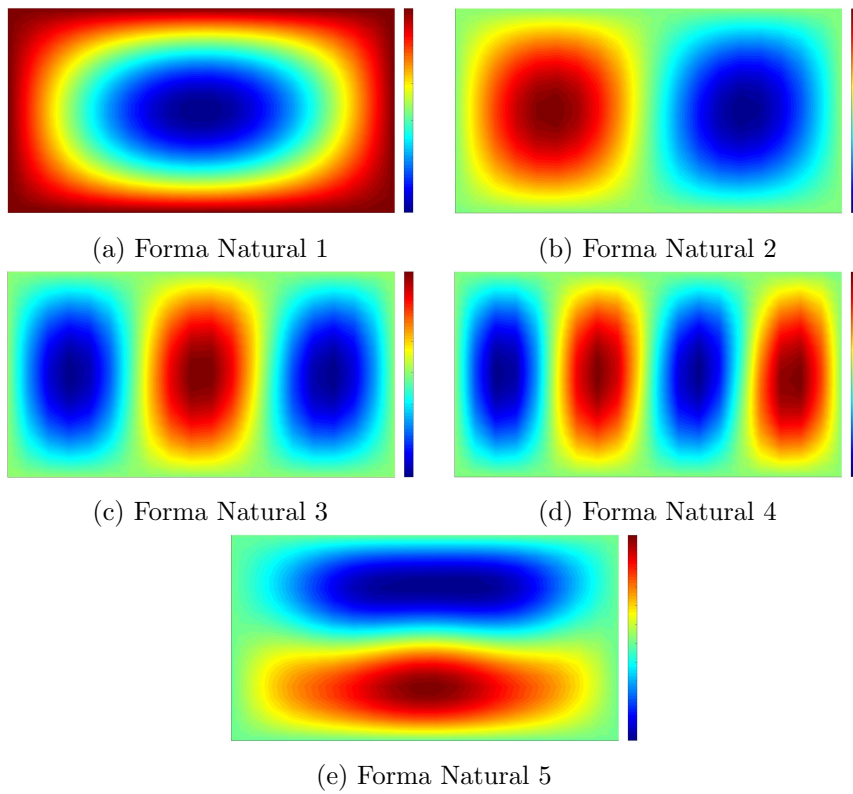


Figura 5.3: Formas Naturais – Trajeto Assimétrico (placa simplesmente apoiada)

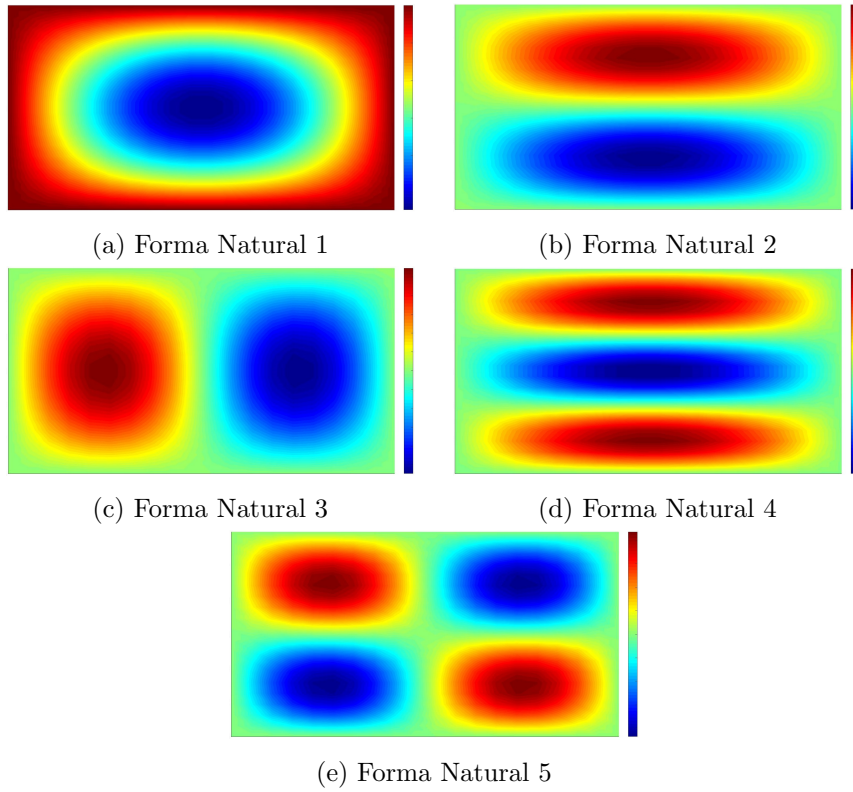


Figura 5.4: Formas Naturais – Trajeto Sinusoidal (placa simplesmente apoiada)

Pela observação das Figuras 5.1 a 5.4, é possível confirmar uma das conclusões apresentadas anteriormente: as formas naturais das placas com fibras retilíneas e com trajeto assimétrico são muito semelhantes, devido ao facto de a solução ótima para o trajeto assimétrico apresentar uma baixa curvatura e, por isso, ser próxima da fibra retilínea.

As formas naturais da placa com fibras segundo o trajeto antissimétrico assemelham-se às apresentadas para as fibras retilíneas e para o trajeto assimétrico, embora apresentem alguma distorção relativamente a estas. Esta distorção é provocada pela curvatura das fibras.

Já as formas naturais obtidas através do trajeto sinusoidal são bastante diferentes das apresentadas para os restantes casos: à exceção da primeira forma natural, não é possível encontrar semelhanças quando comparadas com a respetiva forma dos outros trajetos. Contudo, quando a comparação é alargada a todas as formas apresentadas, verifica-se que as terceira e segunda formas do trajeto sinusoidal são semelhantes às segunda e quinta formas dos restantes casos, respetivamente. Conclui-se, assim, que, para além de apresentar frequências com valores bastante diferentes dos restantes casos, também apresenta formas naturais muito distintas.

Comparando a segunda forma natural dos quatro casos em estudo, verifica-se que a vibração em forma de onda completa ocorre na direção perpendicular à direção da fibra, isto é, para os três primeiros casos, a solução ótima é dada por fibras quase ou totalmente verticais (direção Oy) e a vibração em forma de onda completa na segunda forma natural ocorre segundo a direção Ox . Quando a placa é reforçada por fibras segundo o trajeto

sinusoidal, a solução ótima aproxima-se a fibras retilíneas paralelas ao eixo Ox , pelo que a vibração em forma de onda completa na segunda forma natural ocorre na direção Oy .

5.1.3 Análise de Tensões

Para a análise da distribuição das tensões, utilizou-se o mesmo número de funções de aproximação referido na secção anterior. Para ser possível comparar diferentes casos, considerou-se um valor igual de deslocamento máximo; o valor selecionado foi 2% da espessura da placa para evitar que a placa entre em regime não linear. Desta forma, analisam-se as tensões para igual deslocamento máximo da placa.

Tal como mostra a Figura 2.3, para uma placa com uma camada, as tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} variam entre um dado valor máximo e o seu simétrico ao longo da espessura, sendo nulas no plano médio. Como tal, apenas é apresentada a variação da tensão ao longo da espessura para o primeiro modo da placa reforçada com fibras retilíneas - Figura 5.5. Todas as restantes são bastante semelhantes e, por isso, não são aqui apresentadas.

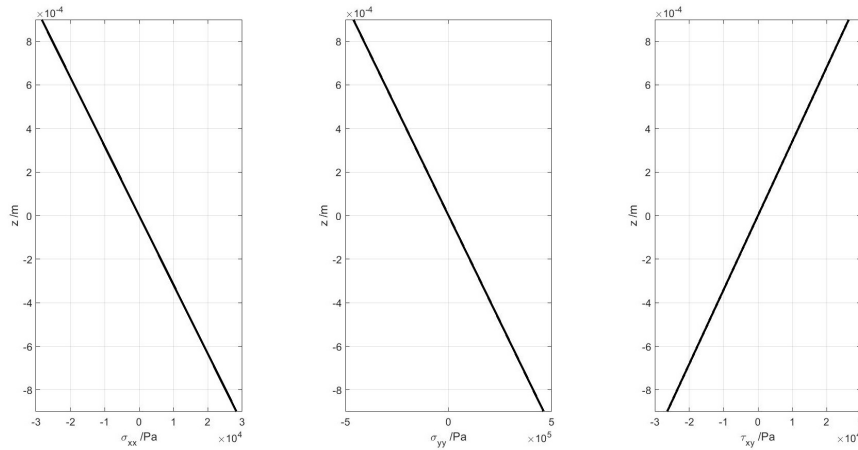


Figura 5.5: Variação de tensões ao longo da espessura - Fibras retilíneas (1º Modo) - placa simplesmente apoiada

Na análise de tensões ao longo da espessura, as tensões σ_{xx} e σ_{yy} foram registadas no centro da placa ($x = 0$ e $y = 0$) e a tensão de corte τ_{xy} foi registada no canto da placa ($x = -a/2$ e $y = -b/2$). Os valores das tensões máximas para cada modo dos quatro casos em análise nos pontos acima referidos são apresentados nas Tabelas 5.10 a 5.12.

Tabela 5.10: Tensão σ_{xx} máxima [MPa] ($x = 0$ e $y = 0$)

Modo	1	2	3	4	5
Fibras Retilíneas	0.028	0.000	0.170	0.000	0.000
Trajeto Antissimétrico	0.032	0.000	0.193	0.000	0.000
Trajeto Assimétrico	0.030	0.000	0.172	0.004	0.026
Trajeto Sinusoidal	0.267	0.014	0.000	0.350	0.015

Tabela 5.11: Tensão σ_{yy} máxima [MPa] ($x = 0$ e $y = 0$)

Modo	1	2	3	4	5
Fibras Retilíneas	0.461	0.000	0.509	0.000	0.000
Trajeto Antissimétrico	0.463	0.000	0.532	0.000	0.000
Trajeto Assimétrico	0.459	0.006	0.506	0.009	0.029
Trajeto Sinusoidal	0.038	0.001	0.000	0.290	0.001

Tabela 5.12: Tensão τ_{xy} máxima [MPa] ($x = -a/2$ e $y = -b/2$)

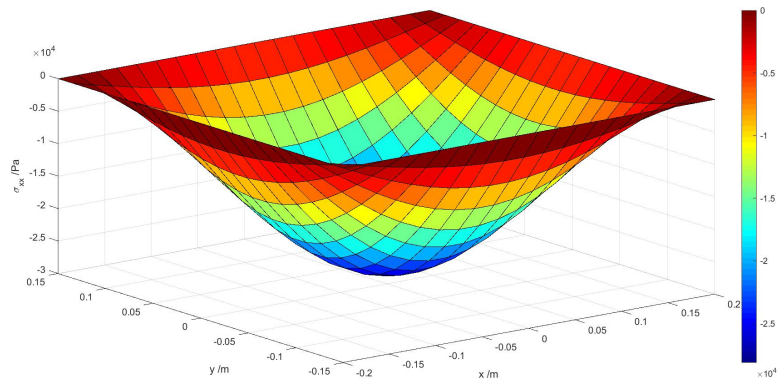
Modo	1	2	3	4	5
Fibras Retilíneas	0.026	0.053	0.079	0.107	0.053
Trajeto Antissimétrico	0.355	0.694	0.937	0.869	0.849
Trajeto Assimétrico	0.027	0.055	0.080	0.108	0.058
Trajeto Sinusoidal	0.023	0.047	0.046	0.072	0.092

Em primeiro lugar, é possível observar que as tensões σ_{xx} e σ_{yy} se anulam ou tomam valores muito reduzidos quando a curvatura é nula ou muito pequena, dado que as tensões dependem dessa curvatura.

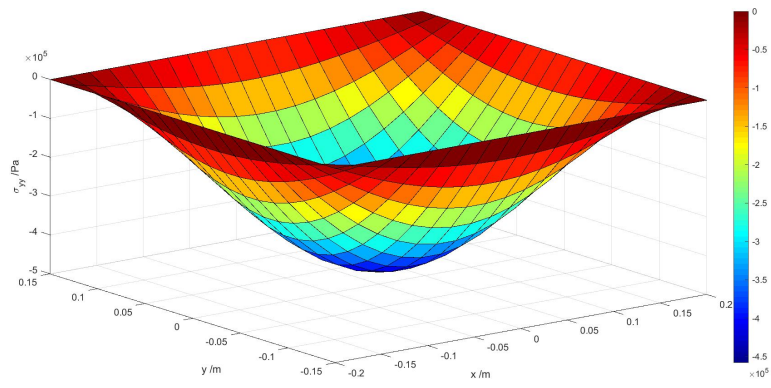
As maiores tensões são registadas, maioritariamente, para o trajeto antissimétrico. Uma vez que se considerou um deslocamento bastante reduzido (apenas 2% da espessura), as tensões são relativamente baixas - sempre inferiores a 1 MPa.

O trajeto sinusoidal apresenta maiores valores para a tensão σ_{xx} e menores valores para a tensão σ_{yy} . Isto deve-se ao facto de a orientação ótima da fibra segundo o trajeto sinusoidal se desenvolver segundo uma direção quase perpendicular às fibras dos restantes casos e a rigidez ser superior na direção das fibras.

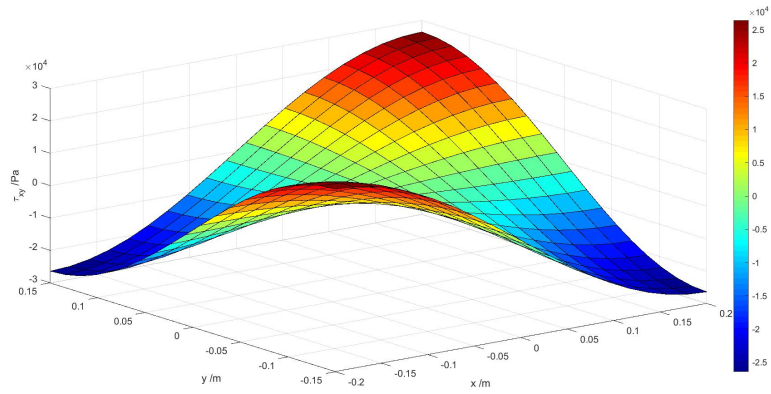
As Figuras 5.6 a 5.9 apresentam as tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} relativas ao primeiro modo no plano superior da placa para as quatro placas em estudo.



(a) σ_{xx}

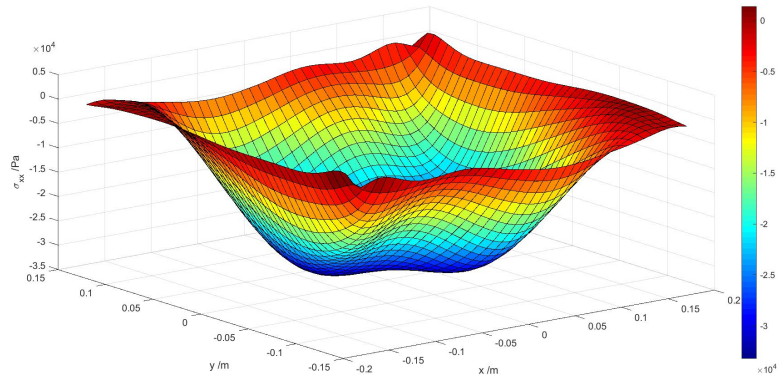


(b) σ_{yy}

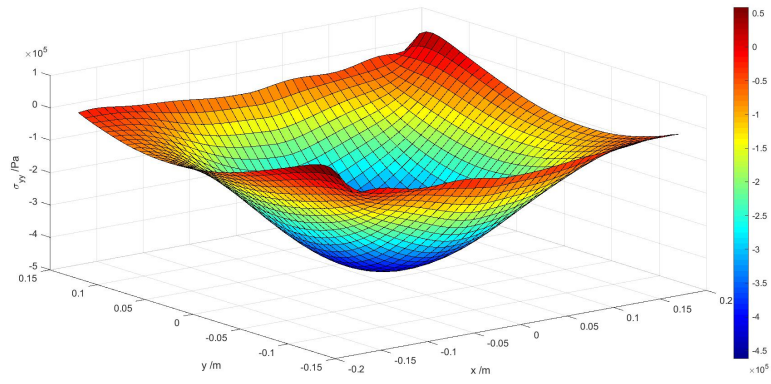


(c) τ_{xy}

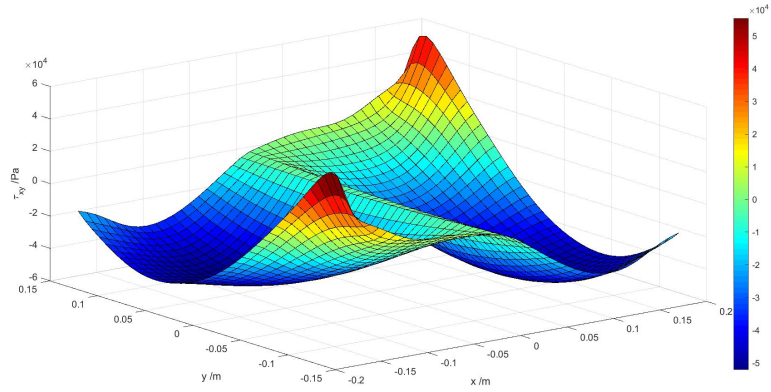
Figura 5.6: Tensões no plano superior - Fibras Retilíneas (1º Modo) - placa simplesmente apoiada



(a) σ_{xx}

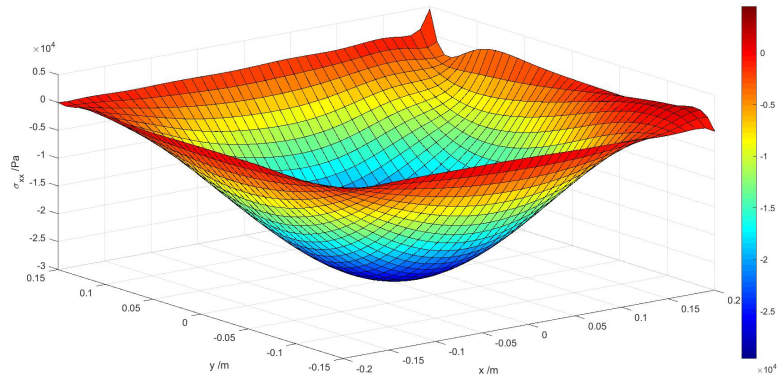


(b) σ_{yy}

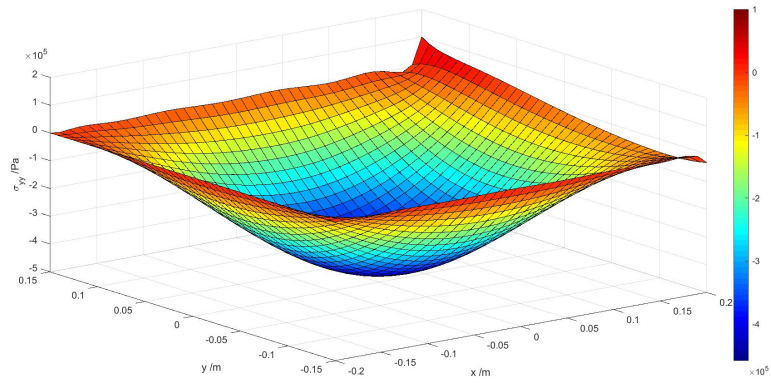


(c) τ_{xy}

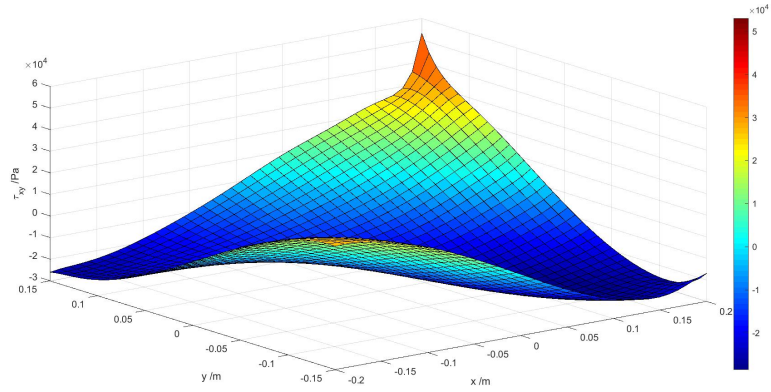
Figura 5.7: Tensões no plano superior - Trajeto Antissimétrico (1º Modo) - placa simplesmente apoiada



(a) σ_{xx}

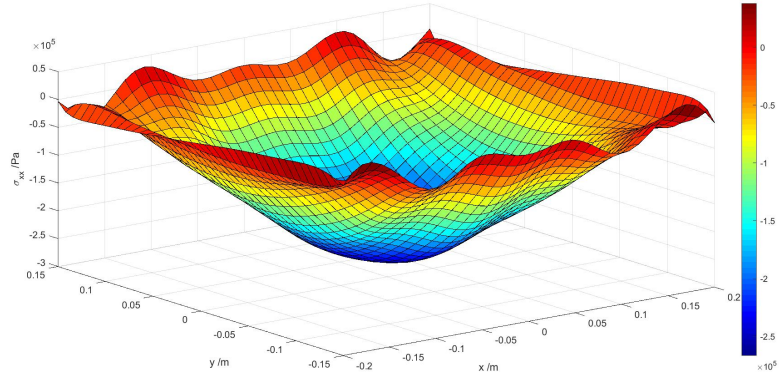


(b) σ_{yy}

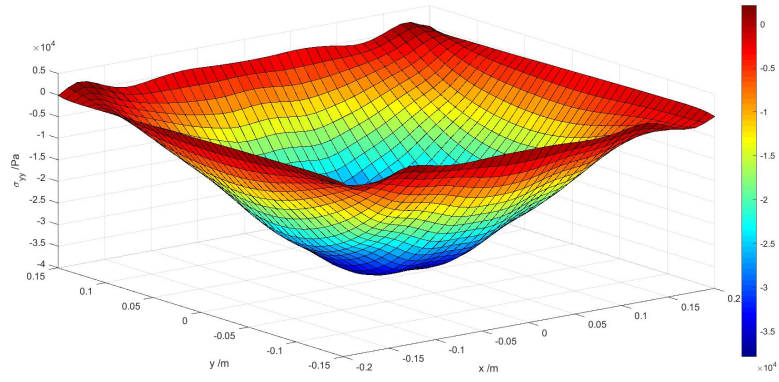


(c) τ_{xy}

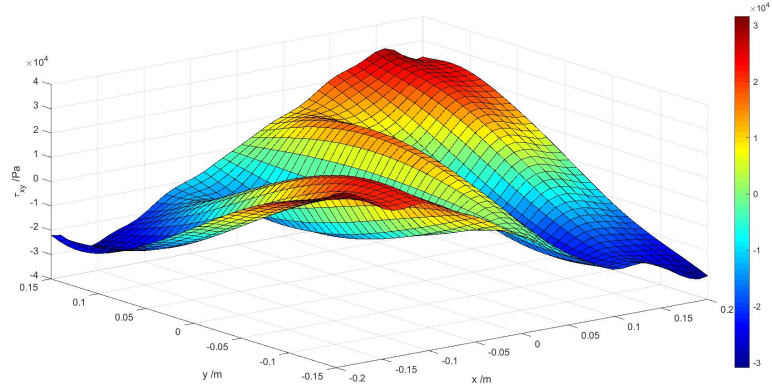
Figura 5.8: Tensões no plano superior - Trajeto Assimétrico (1º Modo) - placa simplesmente apoiada



(a) σ_{xx}



(b) σ_{yy}



(c) τ_{xy}

Figura 5.9: Tensões no plano superior - Trajeto Sinusoidal (1º Modo) - placa simplesmente apoiada

Pela análise das Figuras 5.6 a 5.9, verifica-se, novamente, a semelhança entre as soluções ótimas da placa com fibras retilíneas e do trajeto assimétrico: os valores das tensões são muito próximos e a distribuição de tensões no plano superior é muito parecida.

Relativamente ao trajeto antissimétrico, apesar de as tensões σ_{xx} e σ_{yy} apresentarem

valores semelhantes aos dos casos já abordados, como se pode consultar nas Tabelas 5.10 e 5.11, respetivamente, a tensão τ_{xy} é diferente quando comparada com as fibras retilíneas e o trajeto assimétrico e a ordem de grandeza dos valores da tensão é superior. Quando analisadas as distribuições de tensões no plano superior, verifica-se a existência de um pico de tensão em dois dos cantos da placa, sendo um deles o ponto onde é calculada a distribuição da tensão τ_{xy} ao longo da espessura, o que explica a grande diferença relativamente aos restantes casos. Uma vez que os picos de tensões podem existir devido a erros numéricos, a distribuição de tensões no plano superior para o trajeto antissimétrico é dada para um domínio menor, de forma a eliminar esses picos. Para esse novo domínio, a distribuição de tensões no plano superior apresenta algumas semelhanças quando comparada com o trajeto assimétrico e as fibras retilíneas.

O trajeto sinusoidal apresenta valores das tensões σ_{xx} e σ_{yy} bastante diferentes dos restantes (ordem de grandeza diferente). Contudo, a distribuição destas tensões na placa é parecida com a obtida para a placa com fibras retilíneas, apresentando algumas distorções relativamente a esta. A distribuição da tensão τ_{xy} na placa com fibras segundo o trajeto sinusoidal apresenta maiores distorções comparativamente ao caso das fibras retilíneas, embora ainda seja possível estabelecer algumas semelhanças entre ambas.

5.2 Casos Particulares

Para os trajetos antissimétrico e assimétrico, foram analisados dois casos particulares, apresentados em artigos consultados. Em ambos os casos, são utilizadas apenas duas variáveis de projeto para placas multicamada:

- Placa 1 – placa com dez camadas (Antunes et al., 2020), $(\langle T_0, T_1 \rangle, \langle -T_0, -T_1 \rangle, \langle T_0, T_1 \rangle, \langle -T_0, -T_1 \rangle, \langle \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle)_{sim}$;
- Placa 2 – placa com doze camadas (Akhavan and Ribeiro, 2018), $(\langle \frac{\pi}{4} + \alpha_0, \frac{\pi}{4} + \alpha_1 \rangle, \langle -\frac{\pi}{4} - \alpha_0, -\frac{\pi}{4} - \alpha_1 \rangle, \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle, \langle -\alpha_0, -\alpha_1 \rangle, \langle \frac{\pi}{2} + \alpha_0, \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \rangle, \langle -\frac{\pi}{2} - \alpha_0, -\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \rangle)_{sim}$.

Uma vez que existem apenas duas variáveis de projeto, serão utilizados 5 bits por variável, resultando num total de 10 bits (genes) por cromossoma (solução).

As propriedades da placa podem ser consultadas na Tabela 5.1, sendo que a placa passa a ser multicamada (10 ou 12 camadas). A Tabela 5.13 apresenta os dados do algoritmo de otimização utilizado.

Tabela 5.13: Dados do algoritmo de otimização - Casos Particulares

Variável	Valor
Tamanho da população	21
Indivíduos da elite	7
Indivíduos gerados por cruzamento	10
Indivíduos gerados por mutação	4
Número de variáveis	2
Número de genes por variável	5
$[s_i^{inf}; s_i^{sup}]$ [rad]	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
Número de gerações	30

5.2.1 Otimização

Para cada placa e para os problemas de flexão e de membrana, foram estudadas as seis condições de fronteira referidas no primeiro estudo: placa simplesmente apoiada (SSSS), placa encastrada (CCCC), placa encastrada em $y = -b/2$ e $y = b/2$ e livre nas restantes fronteiras (CFCF), placa encastrada em $y = -b/2$ e livre nas restantes fronteiras (CFFF), placa encastrada em $x = -a/2$ e $x = a/2$ e livre nas restantes fronteiras (FCFC), placa encastrada em $x = -a/2$ e livre nas restantes fronteiras (FCFF).

O número de funções de aproximação utilizadas é ligeiramente inferior ao valor escolhido para as seguintes subsecções, tal como acontecia no primeiro estudo: são utilizadas sete funções de aproximação para problemas de flexão e quatro funções de aproximação para problemas de membrana.

As Tabelas 5.14 a 5.21 apresentam os resultados da otimização para os casos estudados. Note-se que os casos assinalados com * apresentam uma frequência natural fundamental inferior relativamente a uma placa com as mesmas propriedades mecânicas e reforçada com fibras retilíneas.

Tabela 5.14: Resultados de Otimização - Placa 1, Problema de Flexão, Condições de Fronteira SSSS, CCCC e CFCF

Condições de Fronteira	SSSS		CCCC		CFCF	
	1	2*	1	2*	1*	2*
Trajeto						
ω_1 [Hz]	96.5114	92.9980	193.0245	190.7250	185.0985	184.9120
T_0 [rad]	$-\frac{29\pi}{62}$	$\frac{19\pi}{62}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{29\pi}{62}$	$-\frac{\pi}{2}$
T_1 [rad]	$-\frac{13\pi}{62}$	$\frac{21\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$-\frac{29\pi}{62}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{29\pi}{62}$

Nota: Trajeto 1 – Trajeto Antissimétrico; Trajeto 2 – Trajeto Assimétrico

Tabela 5.15: Resultados de Otimização - Placa 1, Problema de Flexão, Condições de Fronteira CFFF, FCFC e FCFF

Condições de Fronteira	CFFF		FCFC		FCFF	
Trajeto	1*	2*	1	2	1	2
ω_1 [Hz]	29.0890	29.0829	95.2226	95.2342	22.6935	24.3909
T_0 [rad]	$-\frac{29\pi}{62}$	$\frac{29\pi}{62}$	$-\frac{\pi}{62}$	$-\frac{\pi}{62}$	$\frac{17\pi}{62}$	$\frac{3\pi}{62}$
T_1 [rad]	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{62}$	$\frac{\pi}{62}$	$\frac{7\pi}{62}$	$\frac{21\pi}{62}$

Nota: Trajeto 1 – Trajeto Antissimétrico; Trajeto 2 – Trajeto Assimétrico

Tabela 5.16: Resultados de Otimização - Placa 2, Problema de Flexão, Condições de Fronteira SSSS, CCCC e CFCF

Condições de Fronteira	SSSS		CCCC		CFCF	
Trajeto	1	2	1	2	1*	2*
ω_1 [Hz]	93.7633	92.0984	182.6596	182.2217	165.9001	166.1614
T_0 [rad]	$\frac{19\pi}{62}$	$\frac{3\pi}{62}$	$\frac{17\pi}{62}$	$\frac{7\pi}{62}$	$\frac{15\pi}{62}$	$\frac{17\pi}{62}$
T_1 [rad]	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{29\pi}{62}$	$\frac{29\pi}{62}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{62}$	$\frac{19\pi}{62}$

Nota: Trajeto 1 – Trajeto Antissimétrico; Trajeto 2 – Trajeto Assimétrico

Tabela 5.17: Resultados de Otimização - Placa 2, Problema de Flexão, Condições de Fronteira CFFF, FCFC e FCFF

Condições de Fronteira	CFFF		FCFC		FCFF	
Trajeto	1*	2*	1	2	1	2
ω_1 [Hz]	26.1031	26.0995	87.5004	87.5270	21.8311	22.5266
T_0 [rad]	$\frac{19\pi}{62}$	$\frac{17\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$\frac{\pi}{62}$	$-\frac{13\pi}{62}$
T_1 [rad]	$\frac{17\pi}{62}$	$\frac{19\pi}{62}$	$-\frac{13\pi}{62}$	$-\frac{13\pi}{62}$	$-\frac{9\pi}{62}$	$\frac{7\pi}{62}$

Nota: Trajeto 1 – Trajeto Antissimétrico; Trajeto 2 – Trajeto Assimétrico

Tabela 5.18: Resultados de Otimização - Placa 1, Problema de Membrana, Condições de Fronteira SSSS, CCCC e CFCF

Condições de Fronteira	SSSS		CCCC		CFCF	
Trajeto	1*	2*	1*	2*	1	2
ω_1 [Hz]	8571.04	9393.34	8571.04	9393.34	6617.85	6598.38
T_0 [rad]	$-\frac{11\pi}{62}$	$\frac{11\pi}{62}$	$-\frac{11\pi}{62}$	$\frac{11\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$
T_1 [rad]	$-\frac{17\pi}{62}$	$\frac{13\pi}{62}$	$-\frac{17\pi}{62}$	$\frac{13\pi}{62}$	$-\frac{17\pi}{62}$	$-\frac{17\pi}{62}$

Nota: Trajeto 1 – Trajeto Antissimétrico; Trajeto 2 – Trajeto Assimétrico

Tabela 5.19: Resultados de Otimização - Placa 1, Problema de Membrana, Condições de Fronteira CFFF, FCFC e FCFF

Condições de Fronteira	CFFF		FCFC		FCFF	
Trajeto	1	2*	1	2	1	2
ω_1 [Hz]	2613.77	2478.27	4553.87	4502.58	1396.02	1400.80
T_0 [rad]	$\frac{13\pi}{62}$	$\frac{19\pi}{62}$	$-\frac{9\pi}{62}$	$\frac{15\pi}{62}$	$\frac{11\pi}{62}$	$\frac{7\pi}{62}$
T_1 [rad]	$\frac{25\pi}{62}$	$\frac{21\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$\frac{13\pi}{62}$	$\frac{7\pi}{62}$	$\frac{13\pi}{62}$

Nota: Trajeto 1 – Trajeto Antissimétrico; Trajeto 2 – Trajeto Assimétrico

Tabela 5.20: Resultados de Otimização - Placa 2, Problema de Membrana, Condições de Fronteira SSSS, CCCC e CFCF

Condições de Fronteira	SSSS		CCCC		CFCF	
Trajeto	1	2*	1	2*	1*	2*
ω_1 [Hz]	9732.63	9618.23	9732.63	9618.23	6204.89	6204.14
T_0 [rad]	$-\frac{3\pi}{62}$	$-\frac{7\pi}{62}$	$-\frac{3\pi}{62}$	$-\frac{7\pi}{62}$	$\frac{15\pi}{62}$	$\frac{15\pi}{62}$
T_1 [rad]	$-\frac{15\pi}{62}$	$-\frac{5\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$-\frac{5\pi}{62}$	$\frac{17\pi}{62}$	$\frac{17\pi}{62}$

Nota: Trajeto 1 – Trajeto Antissimétrico; Trajeto 2 – Trajeto Assimétrico

Tabela 5.21: Resultados de Otimização - Placa 2, Problema de Membrana, Condições de Fronteira CFFF, FCFC e FCFF

Condições de Fronteira	CFFF		FCFC		FCFF	
Trajeto	1	2	1	2	1	2*
ω_1 [Hz]	2438.30	2437.11	4435.38	4429.31	1396.01	1395.08
T_0 [rad]	$\frac{17\pi}{62}$	$\frac{13\pi}{62}$	$-\frac{17\pi}{62}$	$-\frac{17\pi}{62}$	$-\frac{11\pi}{62}$	$-\frac{19\pi}{62}$
T_1 [rad]	$\frac{11\pi}{62}$	$\frac{17\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$-\frac{17\pi}{62}$

Nota: Trajeto 1 – Trajeto Antissimétrico; Trajeto 2 – Trajeto Assimétrico

Observando os dados das Tabelas 5.14 a 5.21, é possível concluir que, em diversos casos, a melhor solução passa por utilizar placas reforçadas com fibras retilíneas (casos assinalados com *), embora a diferença entre os valores apresentados para os trajetos em estudo e a frequência obtida com placas reforçadas com fibras curvilíneas seja relativamente baixa, nunca atingindo 1%.

Comparando apenas os dois trajetos de fibras curvilíneas, verifica-se que o trajeto antissimétrico tem mais sucesso do que o trajeto assimétrico, isto é, na maioria dos casos estudados, o trajeto antissimétrico apresenta uma frequência superior à frequência obtida com fibras segundo o trajeto assimétrico.

5.2.2 Frequências e Formas Naturais

Uma vez que foi analisado um número elevado de casos e parte deles não cumpre o objetivo, isto é, apresentam frequência natural fundamental inferior a uma placa com as mesmas propriedades e reforçada com fibras retilíneas, são estudados apenas alguns casos nesta e na próxima secção: são analisados um caso de flexão e um caso de membrana para cada trajeto, que apresentaram uma frequência natural fundamental ótima superior a uma placa reforçada com fibras retilíneas.

No cálculo das frequências e formas naturais e na análise de tensões, são utilizadas nove funções de aproximação para o problema de flexão e seis funções de aproximação para o problema de membrana.

Os casos em estudo são apresentados na Tabela 5.22.

Tabela 5.22: Dados dos casos em estudo

Caso	Problema	Trajeto	Placa	Condição de Fronteira
A	Flexão	Antissimétrico	2	SSSS
B	Flexão	Assimétrico	2	SSSS
C	Membrana	Antissimétrico	1	CFCF
D	Membrana	Assimétrico	1	CFCF

Os valores das cinco primeiras frequências de vibração das placas em análise são apresentados na Tabela 5.23. Tal como acontecia no primeiro estudo, as frequências naturais fundamentais são ligeiramente inferiores às apresentadas na secção anterior devido à utilização de um maior número de funções de forma.

Tabela 5.23: Frequências naturais dos casos em estudo

	A	B	C	D
T_0 [rad]	$\frac{19\pi}{62}$	$\frac{3\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$	$-\frac{15\pi}{62}$
T_1 [rad]	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{29\pi}{62}$	$-\frac{17\pi}{62}$	$-\frac{17\pi}{62}$
ω_1 [Hz]	93.7593	92.0971	6379.9431	6351.3116
ω_2 [Hz]	151.6051	149.6562	7678.7050	7576.2900
ω_3 [Hz]	246.7855	247.3319	9502.6054	9472.7717
ω_4 [Hz]	306.4793	305.4140	9782.4510	9791.5080
ω_5 [Hz]	364.1974	357.5356	11092.4432	10956.3006

Comparando os casos A e B (trajetos antissimétrico e assimétrico, respetivamente), verifica-se que, para uma placa simplesmente apoiada com 12 camadas apresentada por Akhavan e Ribeiro (2018), as frequências de flexão são bastante próximas para ambos os trajetos - a diferença nunca ultrapassa os 2% - e os valores dos ângulos que caracterizam os trajetos não são idênticos. À exceção da terceira frequência de vibração, o trajeto antissimétrico apresenta frequências mais elevadas, embora, como já referido, a diferença não seja significativa.

Relativamente aos casos C e D, as soluções ótimas encontradas apresentam as mesmas variáveis de projeto, isto é, os mesmos valores dos ângulos que caracterizam os trajetos. Em geral, o trajeto antissimétrico apresenta maiores frequências (a quarta frequência é superior para o trajeto assimétrico), mas, à semelhança do que ocorria nos casos A e B, a diferença entre as frequências é sempre inferior a 2%.

As formas naturais relativas às frequências apresentadas na Tabela 5.23 são ilustradas nas Figuras 5.10 a 5.13 (Casos A a D, respetivamente).

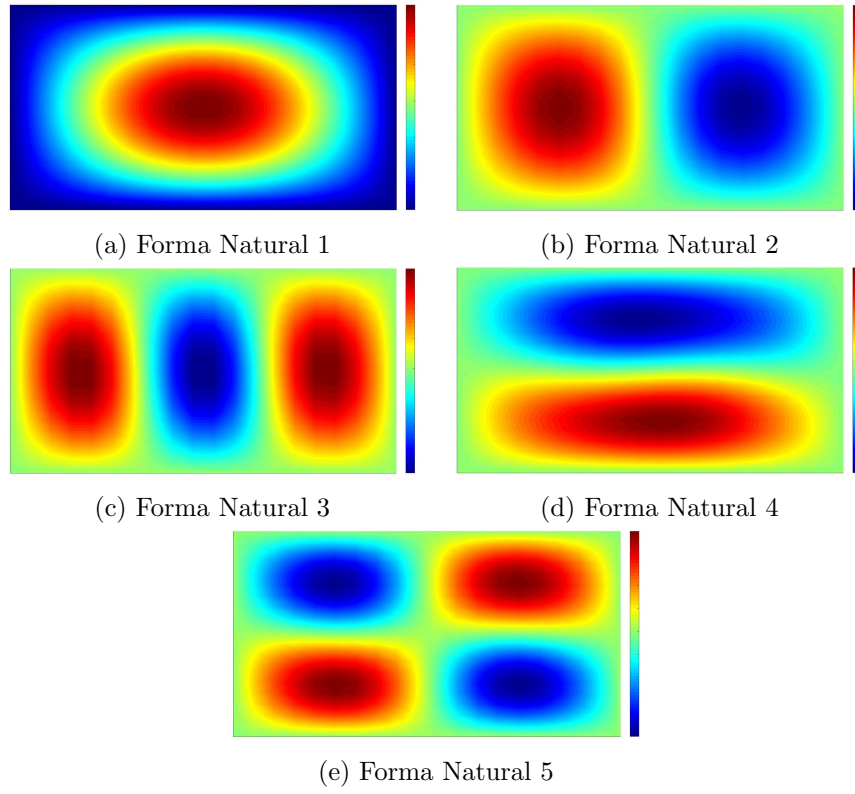


Figura 5.10: Formas Naturais – Caso A (Condição de Fronteira SSSS)

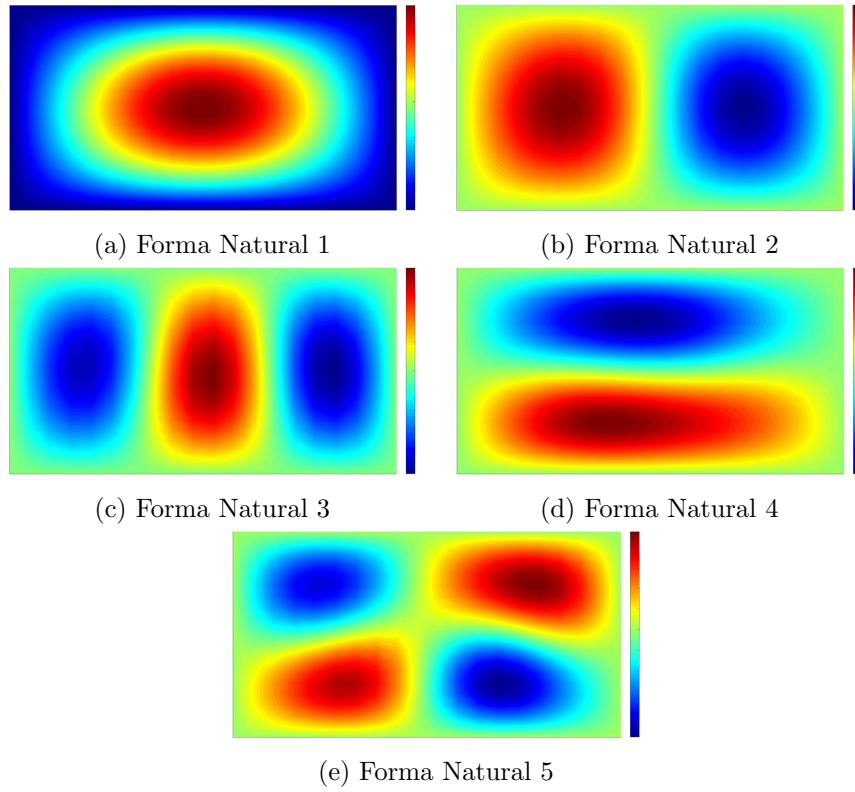


Figura 5.11: Formas Naturais – Caso B (Condição de Fronteira SSSS)

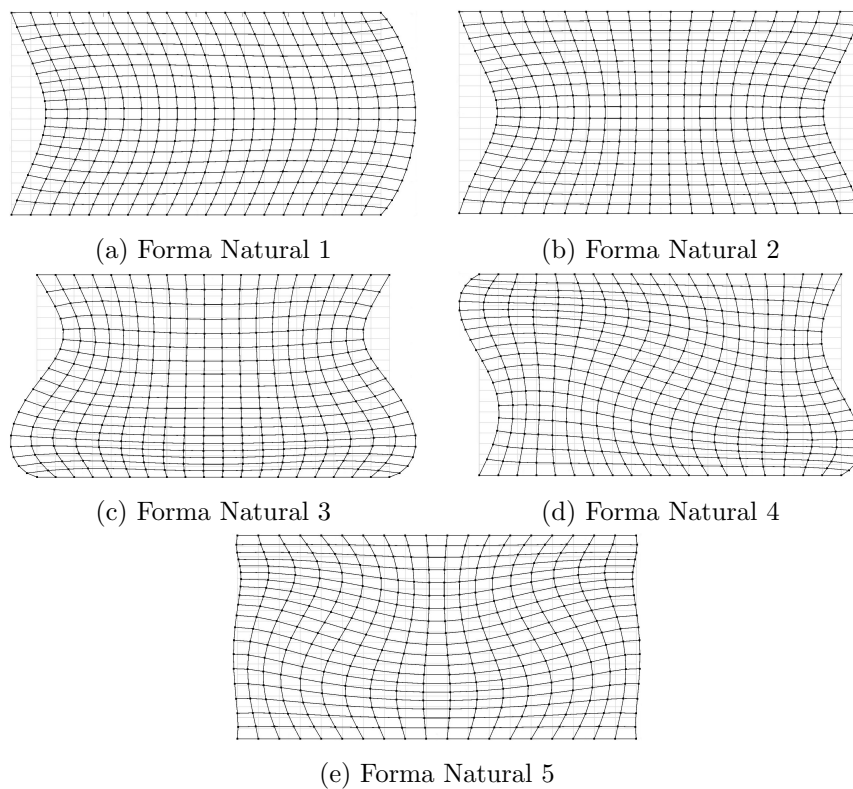


Figura 5.12: Formas Naturais – Caso C (Condição de Fronteira CFCF)

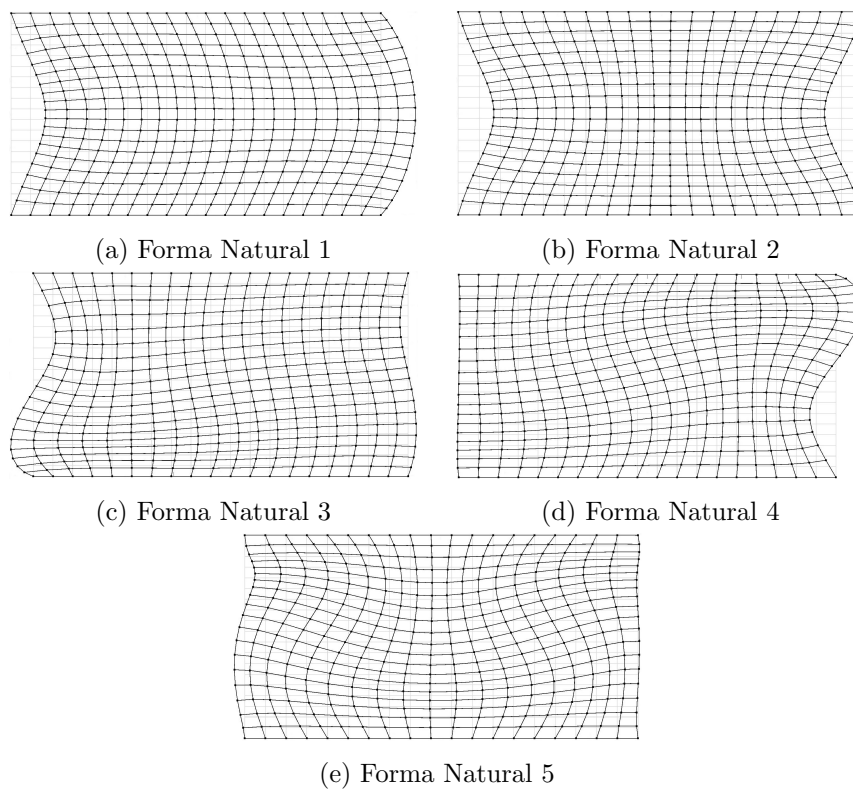


Figura 5.13: Formas Naturais – Caso D (Condição de Fronteira CFCF)

Observando as Figuras 5.10 e 5.11, verifica-se que as formas naturais das placas A e B são bastante semelhantes, sendo que, para a quinta forma natural, a placa B apresenta uma ligeira distorção relativamente à placa A. Este facto pode dever-se à diferença entre os trajetos utilizados e entre os valores das variáveis que os definem (ângulos T_0 e T_1).

Comparando as formas naturais das placas C e D - Figuras 5.12 e 5.13, respetivamente -, que apenas diferem no trajeto utilizado, verifica-se que as primeira e a segunda formas são idênticas para os dois casos, embora o mesmo não ocorra para as restantes formas naturais: apenas uma das extremidades livres da placa D apresenta um movimento semelhante ao da placa C, enquanto que a outra praticamente não tem movimento. Esta diferença é explicada pela utilização de diferentes trajetos de fibras curvilíneas, que influenciam o comportamento vibratório das placas.

5.2.3 Análise de Tensões

Para a análise da distribuição das tensões, utilizou-se o mesmo número de funções de aproximação referido na secção anterior. Para ser possível comparar diferentes casos, considerou-se um deslocamento máximo igual a 2% da espessura da placa - análise das tensões é realizada para igual deslocamento máximo da placa.

No problema de flexão, opta-se por um valor de 2% da espessura para evitar que a placa entre em regime não linear. No caso do problema de membrana, este valor é definido de forma a evitar que as tensões de cedência e de encurvadura sejam atingidas.

Numa placa multicamada, espera-se que a distribuição de tensões ao longo da espessura em cada camada num problema de flexão seja semelhante à observada para uma placa com uma camada. Entre camadas, existem descontinuidades provocadas pela mudança de propriedades (neste caso, a orientação das fibras é alterada).

As Figuras 5.14 e 5.15 mostram a distribuição de tensões ao longo da espessura para as placas A e B quando a oscilação ocorre no primeiro modo natural de vibração.

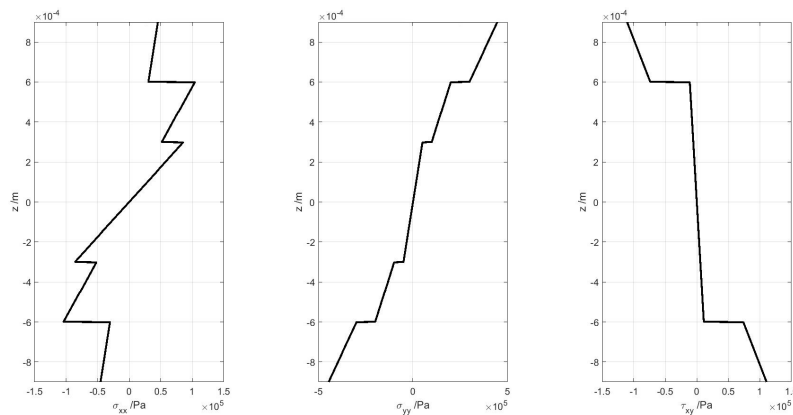


Figura 5.14: Variação de tensões ao longo da espessura - Caso A (1º Modo) - Condição de Fronteira SSSS

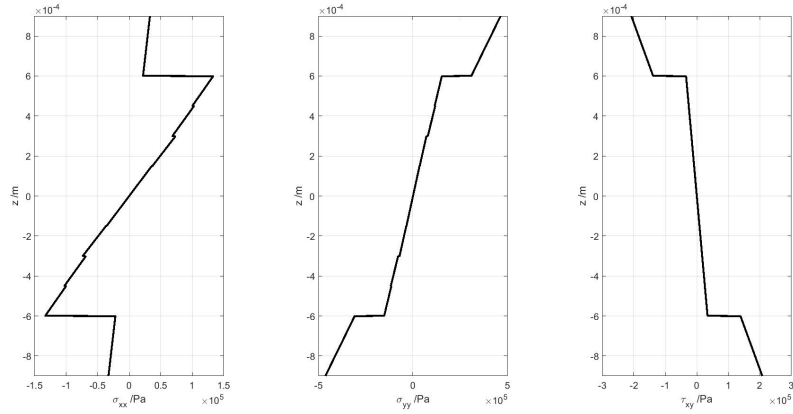
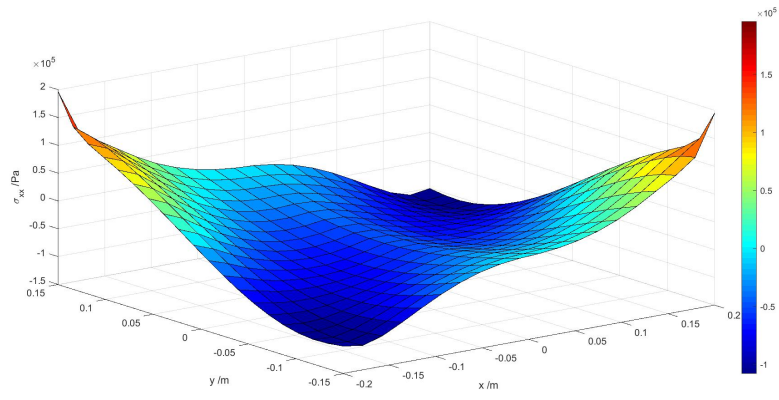


Figura 5.15: Variação de tensões ao longo da espessura - Caso B (1º Modo) - Condição de Fronteira SSSS

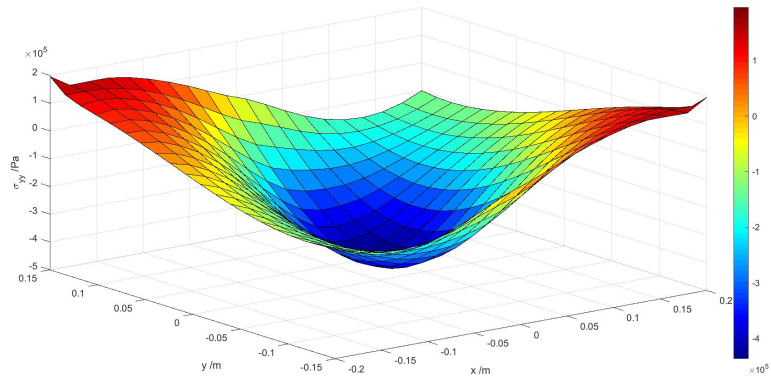
Verifica-se que a distribuição de tensões ao longo da espessura na placa A é muito próxima à mesma distribuição na placa B. A ordem de grandeza das tensões nas duas placas é a mesma e a maior descontinuidade entre camadas ocorre entre a segunda e a terceira camada e, da mesma forma, entre a décima e a décima primeira - a distribuição de tensões é antissimétrica em relação ao plano médio da placa devido à simetria da placa em relação à espessura.

Para uma análise das tensões em todo o domínio da placa, as tensões apresentadas nas figuras acima são ilustradas no plano inferior da placa - Figuras 5.16 e 5.17.

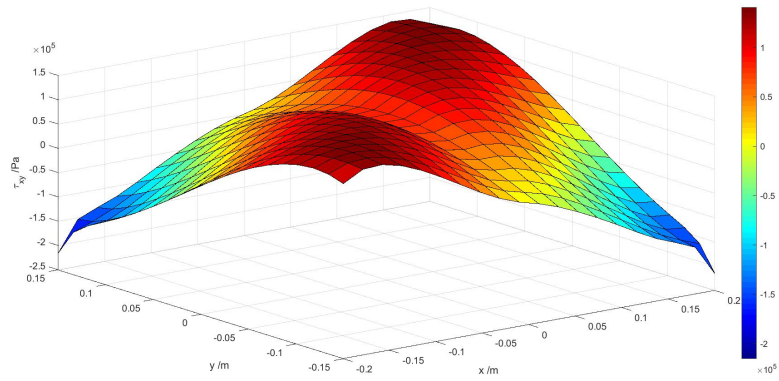
Uma vez que a distribuição das tensões σ_{xx} e σ_{yy} ao longo da espessura foi analisada no centro da placa e a tensão τ_{xy} foi registada para $x = -a/2$ e $y = -b/2$, o valor que as tensões tomam nestes locais da placa nas Figuras 5.16 e 5.17 - plano inferior - deve corresponder ao valor lido no plano inferior nas Figuras 5.14 e 5.15.



(a) σ_{xx}



(b) σ_{yy}



(c) τ_{xy}

Figura 5.16: Tensões no plano inferior - Caso A (1º Modo) - Condição de Fronteira SSSS

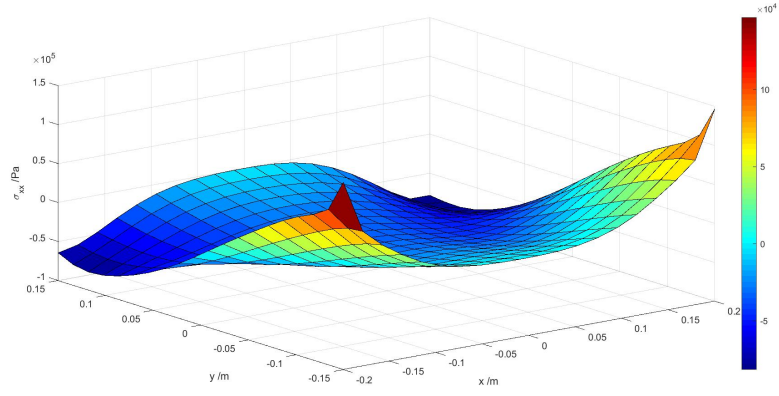
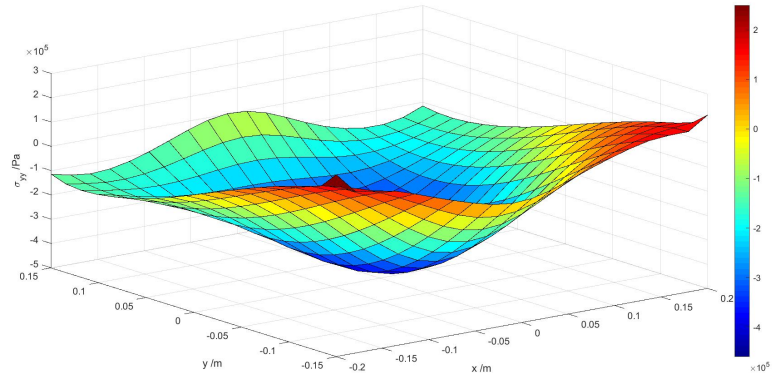
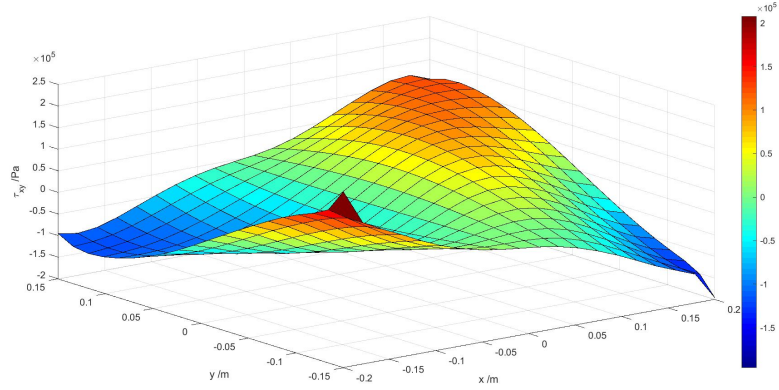
(a) σ_{xx} (b) σ_{yy} (c) τ_{xy}

Figura 5.17: Tensões no plano inferior - Caso B (1º Modo) - Condição de Fronteira SSSS

Pela observação das Figuras 5.16 e 5.17, verifica-se que a distribuição de tensões ao longo do plano inferior da placa A apresenta algumas semelhanças com a mesma distribuição de tensões na placa B, principalmente na tensão σ_{yy} .

Constata-se, também, que os valores das tensões σ_{xx} e σ_{yy} no centro da placa e o valor da tensão τ_{xy} no ponto $x = -a/2$ e $y = -b/2$ são idênticos aos valores registados no plano

inferior da distribuição de tensões ao longo da espessura (Figuras 5.14 e 5.15).

Uma análise semelhante é realizada para o segundo modo das placas C e D.

No problema de membrana, a tensão não varia com z , pelo que se espera que seja constante ao longo de cada camada, podendo apresentar descontinuidades entre camadas.

A distribuição de tensões ao longo da espessura nas placas C e D quando a oscilação ocorre no segundo modo natural de vibração é ilustrada nas Figuras 5.18 e 5.19.

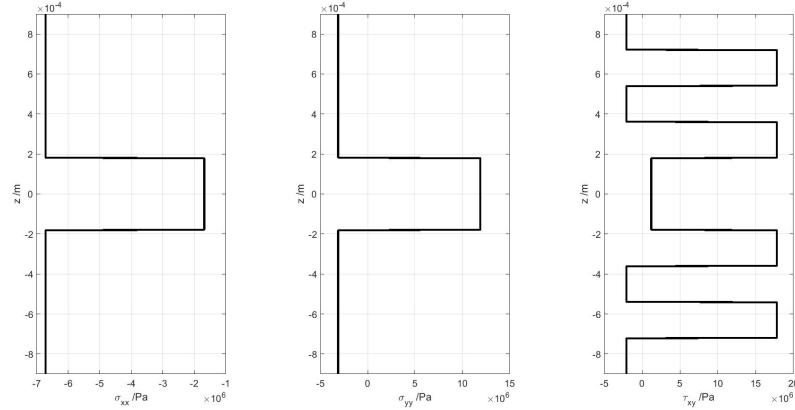


Figura 5.18: Variação de tensões ao longo da espessura - Caso C (2º Modo) - Condição de Fronteira CFCF

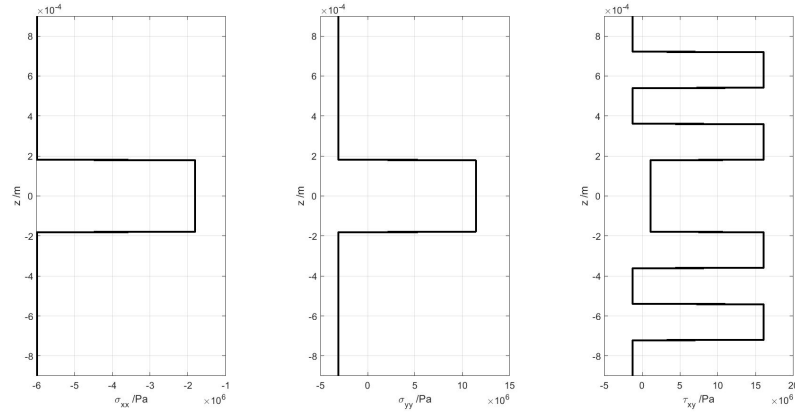


Figura 5.19: Variação de tensões ao longo da espessura - Caso D (2º Modo) - Condição de Fronteira CFCF

Verifica-se que a tensão se mantém constante ao longo da camada, podendo variar entre camadas. As tensões σ_{xx} e σ_{yy} apenas mudam de valor nas camadas centrais, cujas fibras são retilíneas com orientação $\theta = \frac{\pi}{2}$. A tensão de corte, τ_{xy} , modifica-se sempre que há mudança de camada, isto é, sempre que a orientação das fibras se altera.

As tensões registadas nas duas placas em estudo são semelhantes, apresentando valores da mesma ordem de grandeza.

As Figuras 5.20 e 5.21 apresentam as tensões no plano inferior das placas C e D, respectivamente.

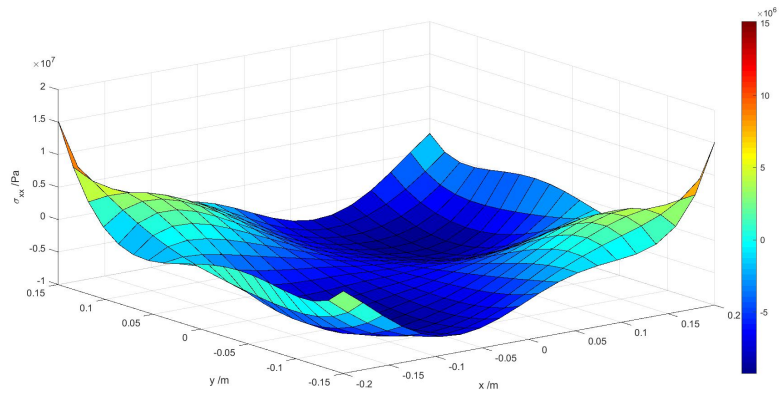
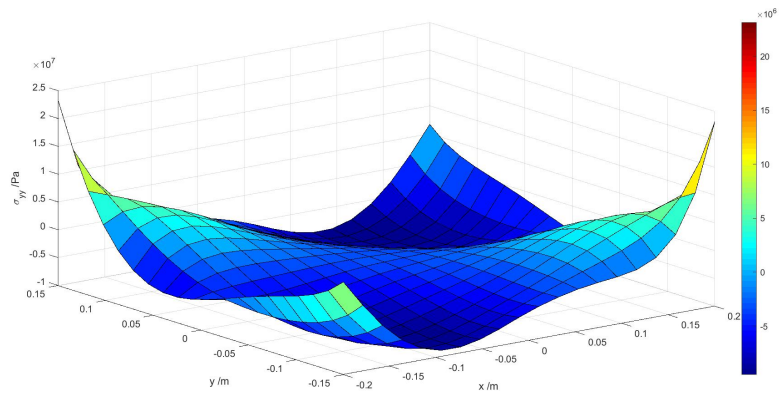
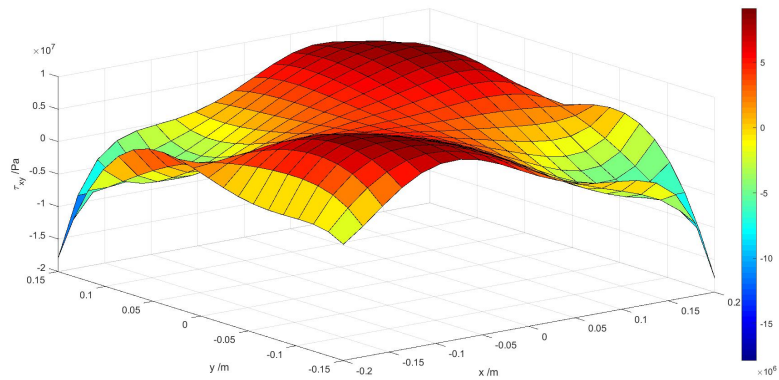
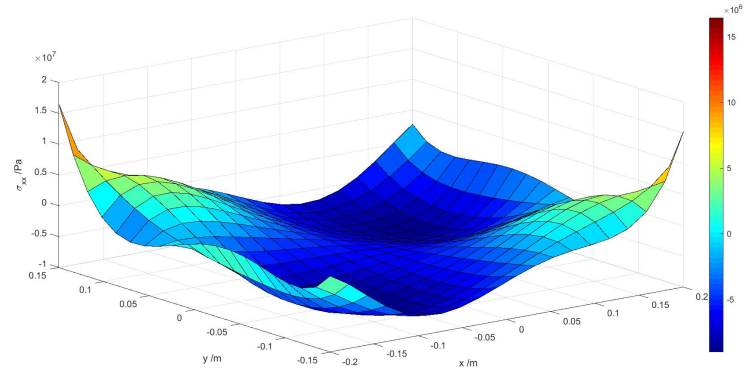
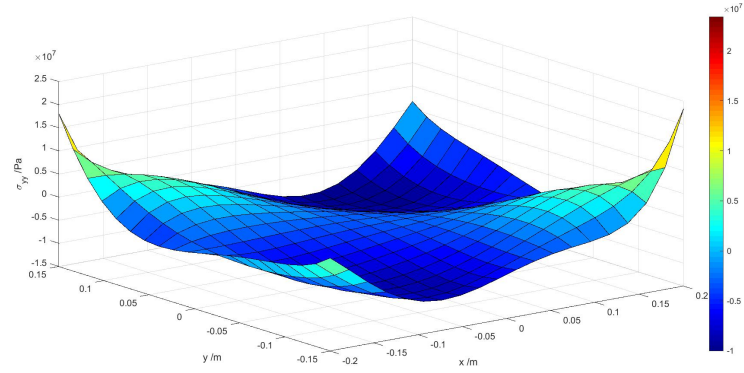
(a) σ_{xx} (b) σ_{yy} (c) τ_{xy}

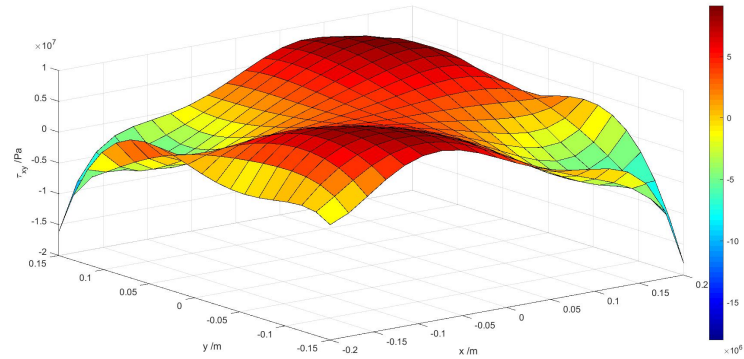
Figura 5.20: Tensões no plano inferior - Caso C (2º Modo) - Condição de Fronteira CFCF



(a) σ_{xx}



(b) σ_{yy}



(c) τ_{xy}

Figura 5.21: Tensões no plano inferior - Caso D (2º Modo) - Condição de Fronteira CFCF

Pela análise das Figuras 5.20 e 5.21, verifica-se que a distribuição das tensões ao longo da placa no plano inferior é muito semelhante nos dois casos em estudo, tal como ocorreu em todas as comparações realizadas anteriormente entre estes casos.

Os valores das tensões σ_{xx} e σ_{yy} no centro da placa e o valor da tensão τ_{xy} no ponto $x = -a/2$ e $y = -b/2$ no plano inferior - Figuras 5.20 e 5.21 - são iguais aos valores lidos nas Figuras 5.18 e 5.19 respeitantes ao plano inferior da placa ($z = -0.9$ mm).

Conclusão

6.1 Conclusões

Neste trabalho, foi desenvolvido um modelo numérico, baseado na Teoria Clássica de Placas, usada para definir o campo de deslocamentos, e no Método dos Elementos Finitos do tipo p , para definir os elementos a utilizar. Foram, também, apresentados processos de fabrico de compósitos reforçados com fibras curvilíneas e três trajetos de fibras curvilíneas, definidos por funções contínuas.

Os métodos de otimização existentes foram analisados, de forma a perceber qual o que melhor se adequava à presente dissertação. Um algoritmo genético foi escolhido e devidamente descrito, desde a função de mérito aos operadores genéticos utilizados, passando, depois, para a sua implementação em *software* MATLAB.

Para os modelos numéricos (problema de flexão e de membrana), foi realizado um estudo de convergência, de forma a verificar que um aumento do número de funções de aproximação conduzia a uma convergência dos valores registados, e uma validação, comparando os valores obtidos com soluções publicadas (problema de flexão) ou dados obtidos no *software* ABAQUS (problema de membrana). O algoritmo genético foi sujeito a uma validação, suportada por gráficos, gerados ao longo da execução do algoritmo, que mostram a evolução de determinados parâmetros do mesmo.

Depois de os modelos numéricos e do algoritmo genético estarem validados, passou-se para a análise de placas, com o objetivo de maximizar a sua frequência natural fundamental. Foram analisadas placas com apenas uma camada e placas multicamada.

No estudo de placas com uma camada, compararam-se os três trajetos de fibras curvilíneas apresentados entre si e com fibras retilíneas. Várias condições de fronteira foram analisadas para os problemas de flexão e de membrana. Em flexão, uma placa simplesmente apoiada apresenta uma maior frequência natural fundamental quando reforçada com fibras curvilíneas segundo o trajeto antissimétrico. Para as restantes condições de fronteira estudadas, as fibras retilíneas representam a melhor alternativa. No que diz respeito ao problema de membrana, o trajeto assimétrico apresentou os valores mais elevados para todas as condições de fronteira em estudo.

Para uma placa simplesmente apoiada sujeita a flexão, foram comparadas as formas naturais e as tensões quando a oscilação ocorre nos modos naturais de vibração. Foi

possível verificar que, apesar de os valores das frequências serem semelhantes, a distribuição de tensões ao longo da placa pode ser significativamente diferente.

As placas multicamada analisadas foram apresentadas em artigos publicados e representam casos particulares. São caracterizados por dois ângulos, pelo que foram estudados apenas para os trajetos antissimétrico e assimétrico. Em diversas situações estudadas, a melhor solução era a utilização de fibras retilíneas. Para quatro casos em que as fibras curvilíneas apresentavam uma maior frequência quando comparadas com fibras retilíneas, foram analisadas as formas naturais e a distribuição de tensões quando a oscilação ocorre nos modos naturais de vibração.

Depois de analisados os resultados obtidos, é possível concluir que as fibras curvilíneas representam um avanço na investigação de compósitos, embora nem sempre apresentem a melhor solução quando se pretende aumentar a primeira frequência natural de vibração.

6.2 Trabalho Futuro

O tema deste relatório é bastante extenso e apenas foi estudada uma parte deste, havendo muito trabalho que pode ser feito. De seguida, algumas sugestões são apresentadas:

- Otimização da frequência natural fundamental de placas não simétricas em relação ao plano médio da espessura: neste caso, a flexão e a membrana estariam acopladas e seria necessário acrescentar matrizes à formulação apresentada;
- Otimização da frequência natural fundamental de cascas: seria necessário ter em conta a curvatura inicial da casca;
- Melhoria do algoritmo de otimização, introduzindo, por exemplo, novas condições de paragem;
- Introdução de maior flexibilidade na definição dos trajetos das fibras, com recurso a *splines*;
- Utilização de placas com geometrias mais complexas, incluindo placas com furos.

Bibliografia

- H. Akhavan and P. Ribeiro. Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibres. *Composite Structures*, 93:3040 – 3047, 2011. doi: 10.1016/j.compstruct.2011.04.027.
- H. Akhavan and P. Ribeiro. Aeroelasticity of composite plates with curvilinear fibres in supersonic flow. *Composite Structures*, 194:335 – 344, 2018. doi: 10.1016/j.compstruct.2018.03.101.
- M. A. Albazzan, R. Harik, B. F. Tatting, and Zafer Gürdal. Efficient design optimization of nonconventional laminated composites using lamination parameters: A state of the art. *Composite Structures*, 209:362 – 374, 2019. doi: 10.1016/j.compstruct.2018.10.095.
- F. S. Almeida and A. M. Awruch. Design optimization of composite laminated structures using genetic algorithms and finite element analysis. *Composite Structures*, 88:443 – 454, 2009. doi: 10.1016/j.compstruct.2008.05.004.
- A. M. Antunes, P. Ribeiro, J. D. Rodrigues, and H. Akhavan. Modal analysis of a variable stiffness composite laminated plate with diverse boundary conditions: Experiments and modelling. *Composite Structures*, 239, 2020. doi: 10.1016/j.compstruct.2020.111974.
- C. C. António. A multilevel genetic algorithm for optimization of geometrically nonlinear stiffened composite structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24:372 – 386, 2002. doi: 10.1007/s00158-002-0249-4.
- C. C. António. *Otimização de Sistemas em Engenharia*. ENGEBOOK, 2020. ISBN 978-9-899-01734-4.
- D. Barazanchy, M. J. van Tooren, and A. Elham. A new framework for optimization of variable stiffness plates. *58th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 2017. doi: 10.2514/6.2017-0894.
- N. S. Bardell. The application of symbolic computing to the hierarchical finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1181 – 1204, 1989. doi: 10.1002/nme.1620280513.
- N. S. Bardell. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 151:263 – 289, 1991. doi: 10.1016/0022-460X(91)90855-E.

- D. Beasley, D. R. Bull, and R. R. Martin. An overview of genetic algorithms: Part 1, fundamentals. *University Computing*, 15:58 – 69, 1993a.
- D. Beasley, D. R. Bull, and R. R. Martin. An overview of genetic algorithms: Part 2, research topics. *University Computing*, 15:170 – 181, 1993b.
- A. W. Blom, S. Setoodeh, J. Hol, and Z. Gürdal. Design of variable-stiffness conical shells for maximum fundamental eigenfrequency. *Computers & Structures*, 86:870 – 878, 2008. doi: 10.1016/j.compstruc.2007.04.020.
- P. Camacho, H. Akhavan, and P. Ribeiro. Linear aeroelastic analysis of cantilever hybrid composite laminated plates with curvilinear fibres and carbon nanotubes. *Composite Structures*, 266, 2021. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.113765.
- P. J. Davis. Leonhard euler’s integral: An historical profile of the gamma function. *The American Mathematical Monthly*, 66:849 – 869, 1959. doi: 10.1080/00029890.1959.11989422.
- E. H. Dowell. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Springer, 2015. ISBN 978-3-319-33068-6.
- G. Foster. What is Automated Fibre Placement (AFP)?, 2021. URL <https://coventivecomposites.com/explainers/what-is-automated-fibre-placement/>. (Acedido em: 19.02.2021).
- H. Ghiasi, D. Pasini, and L. Lessard. Optimum stacking sequence design of composite materials part i: Constant stiffness design. *Composite Structures*, 90:1 – 11, 2009. doi: 10.1016/j.compstruct.2009.01.006.
- Z. Gürdal and R. Olmedo. In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations: Variable stiffness concept. *AIAA Journal*, 31:751 – 758, 1993. doi: 10.2514/3.11613.
- Z. Gürdal, B. F. Tatting, and C. K. Wu. Variable stiffness composite panels: Effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 39:911 – 922, 2008. doi: 10.1016/j.compositesa.2007.11.015.
- W. Han and M. Petyt. Linear vibration analysis of laminated rectangular plates using the hierarchical finite element method—i. free vibration analysis. *Computers & Structures*, 61:705 – 712, 1996. doi: 10.1016/0045-7949(95)00379-7.
- W. Han, M. Petyt, and K. Hsiao. An investigation into geometrically nonlinear analysis of rectangular laminated plates using the hierarchical finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 18:273 – 288, 1994. doi: 10.1016/0168-874X(94)90107-4.
- J. Huang and R. T. Haftka. Optimization of fiber orientations near a hole for increased load-carrying capacity of composite laminates. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30:335 – 341, 2005. doi: 10.1007/s00158-005-0519-z.

- M. Hyer and R. Charette. Use of curvilinear fiber format in composite structure design. *AIAA Journal*, 29:1011 – 1015, 1991. doi: 10.2514/3.10697.
- M. W. Hyer and H. H. Lee. The use of curvilinear fiber format to improve buckling resistance of composite plates with central circular holes. *Composite Structures*, 18:239 – 261, 1991. doi: 10.1016/0263-8223(91)90035-W.
- T. Janus, M. Cegla, S. Barkmann, and S. Engell. Optimization of a hydroformulation process in a thermomorphic solvent system using a commercial steadystate process simulator and a memetic algorithm. *Computer Aided Chemical Engineering*, 46:469 – 474, 2019. doi: 10.1016/B978-0-12-818634-3.50079-5.
- R. M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. CRC Press, 1999. ISBN 9781628709407.
- S. Katoch, S. S. Chauhan, and V. Kumar. A review on genetic algorithm: past, present, and future. *Multimedia Tools and Applications*, 80:8091 – 8126, 2021. doi: 10.1007/s11042-020-10139-6.
- G. G. Lozano, A. Tiwari, C. Turner, and S. Astwood. A review on design for manufacture of variable stiffness composite laminates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 230:981 – 992, 2015. doi: 10.1177/0954405415600012.
- D. H.-J. A. Lukaszewicz, C. Ward, and K. D. Potter. The engineering aspects of automated prepreg layup: History, present and future. *Composites Part B: Engineering*, 43:997 – 1009, 2012. doi: 10.1016/j.compositesb.2011.12.003.
- L. Meirovitch and H. Baruh. On the inclusion principle for the hierarchical finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:281 – 291, 1983. doi: 10.1002/nme.1620190209.
- Z. Michalewicz, D. Dasgupta, R. G. Le Riche, and M. Schoenauer. Evolutionary algorithms for constrained engineering problems. *Computers & Industrial Engineering*, 30:851 – 870, 1996. doi: 10.1016/0360-8352(96)00037-X.
- S. Nagendra, D. Jestin, Z. Gürdal, R. T. Haftka, and L. T. Watson. Improved genetic algorithm for the design of stiffened composite panels. *Computers & Structures*, 58:543 – 555, 1996. doi: 10.1016/0045-7949(95)00160-I.
- Y. Narita. Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, 263:1005 – 1016, 2003. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00270-0.
- E. Onâte. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 1. Basis and Solids*. Springer, 2009. ISBN 978-1-4020-8732-5.
- E. Onâte. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 2. Beams, Plates and Shells*. Springer, 2013. ISBN 978-1-4020-8742-4.

- S. S. Rao. *Engineering Optimization: Theory and Practice*. John Wiley & Sons, 5^a edição edition, 2020. ISBN 978-1-119-45479-3.
- J. N. Reddy. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC Press, 2004. ISBN 9780849315923.
- P. Ribeiro. Linear modes of vibration of cylindrical shells in composite laminates reinforced by curvilinear fibres. *Journal of Vibration and Control*, 22:4141 – 4158, 2015. doi: 10.1177/1077546315571661.
- P. Ribeiro, H. Akhavan, A. Teter, and J. Warminski. A review on the mechanical behaviour of curvilinear fibre composite laminated panels. *Journal of Composite Materials*, 48:2761 – 2777, 2014. doi: 10.1177/0021998313502066.
- J. D. Rodrigues. *Apontamentos de Vibrações de Sistemas Mecânicos*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2020.
- W. Roetzel, X. Luo, and D. Chen. *Design and Operation of Heat Exchangers and their Networks*. Academic Press, 2019. ISBN 978-0-128-17894-2.
- S. Setoodeh, Z. Gürdal, M. Abdalla, and L. Watson. Design of variable stiffness composite laminates for maximum bending stiffness. *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, 2004. doi: 10.2514/6.2004-4528.
- S. Setoodeh, Z. Gürdal, and L. Watson. Design of variable-stiffness composite layers using cellular automata. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:836 – 851, 2006. doi: 10.1016/j.cma.2005.03.005.
- S. Setoodeh, M. Abdalla, S. IJsselmuiden, and Z. Gürdal. Design of variable-stiffness composite panels for maximum buckling load. *Composite Structures*, 87:109 – 117, 2009. doi: 10.1016/j.compstruct.2008.01.008.
- B. Szabó and I. Babuška. *Finite Element Analysis*. Wiley, 1991. ISBN 978-0-471-50273-9.
- B. F. Tatting and Z. Gürdal. Design and manufacture of elastically tailored tow placed plates. *Nasa Arch*, 2002.
- U. Topal and Ü. Uzman. Maximization of buckling load of laminated composite plates with central circular holes using mfd method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 35:131 – 139, 2008. doi: 10.1007/s00158-007-0119-1.
- A. Ugural. *Stresses in Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1981. ISBN 978-0070657304.
- M. J. van Tooren, I. Jahangir, and A. Elham. Optimization of variable stiffness composite plates with cut-outs subjected to compression, tension and shear using an adjoint formulation. *57th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pages 1 – 17, 2016. doi: 10.2514/6.2016-1970.
- E. Ventsel and T. Krauthammer. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*. CRC Press, 2001. ISBN 9780824705756.

- C. Waldhart. Analysis of tow-placed, variable-stiffness laminates. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1996.
- M. Walker. Optimal design of symmetric laminates with cut-outs for maximum buckling load. *Computers & Structures*, 70:337 – 343, 1999. doi: 10.1016/S0045-7949(98)00167-9.
- C. M. Wang, J. N. Reddy, and K. H. Lee. *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*. Elsevier Science, 2000. ISBN 978-0080437842.