

UNIVERSIDADE DO PORTO  
FACULDADE DE ENGENHARIA

# ESTRUTURAS ESPACIAIS RETICULADAS METÁLICAS

CARLOS ANTÓNIO DO VALE GARCIA

PORTO, DEZEMBRO DE 1992

UNIVERSIDADE DO PORTO  
FACULDADE DE ENGENHARIA

# ESTRUTURAS ESPACIAIS RETICULADAS METÁLICAS

CARLOS ANTÓNIO DO VALE GARCIA

Dissertação apresentada na Faculdade de Engenharia  
da Universidade do Porto para a obtenção do grau de  
Mestre em Estruturas de Engenharia Civil

PORTO, DEZEMBRO DE 1992

UNIVERSIDADE DO PORTO  
FACULDADE DE ENGENHARIA

# ESTRUTURAS ESPACIAIS RETICULADAS METÁLICAS

CARLOS ANTÓNIO DO VALE GARCIA

Dissertação apresentada na Faculdade de Engenharia  
da Universidade do Porto para a obtenção do grau de  
Mestre em Estruturas de Engenharia Civil

PORTO, DEZEMBRO DE 1992

624(043) GARCIEST

|                         |            |
|-------------------------|------------|
| UNIVERSIDADE DO PORTO   |            |
| Faculdade de Engenharia |            |
| BIBLIOTECA              |            |
| N.º                     | 72498      |
| CDU                     | 624(043)   |
| Data                    | 14. 09. 05 |

|                         |  |
|-------------------------|--|
| UNIVERSIDADE DO PORTO   |  |
| Faculdade de Engenharia |  |
| BIBLIOTECA              |  |
| N.º                     |  |
| CDU                     |  |
| Data                    |  |

## RESUMO

Apresenta-se neste trabalho o estudo de estruturas espaciais reticuladas metálicas. Nele são reunidos conceitos de qualidade e de elevado carácter, conducentes à idealização, metodologia, dimensionamento e construção dessas estruturas. Apresentam-se vários tipos de estruturas metálicas, salientando as suas formas, composição, metodologia e considerações de ordem económica.

Descrevem-se, para o dimensionamento dos tipos de estruturas em estudo, dois métodos de cálculo: método directo e método contínuo.

O método directo que se expõe, é um método que transcreve para uma forma matricial todas as equações dos problemas em estudo. Este método permite obter com bastante rigor os valores das incógnitas referentes à estrutura em estudo. Apresentam-se várias simplificações inerentes ao método directo, resultantes de estruturas obtidas com uma unidade estrutural elementar, da repetição nos cálculos, ou de condições de simetria e anti-simetria. São também apresentados dois métodos: o método das forças e o método dos deslocamentos, gerados do método directo, que permitem simplificar a resolução das equações. Utilizando o método dos deslocamentos realizou-se um programa de cálculo de estruturas espaciais reticuladas metálicas que é apresentado neste trabalho.

O método contínuo é um método de aproximação, cuja base está na transformação das estruturas reticuladas em estudo, num sistema contínuo, para o qual se determinam as incógnitas que, por sua vez, são transferidas do meio contínuo para a estrutura reticulada. O método contínuo é apresentado para o estudo de estruturas bi e tridimensionais, salientando todas as dificuldades inerentes à passagem da estrutura reticulada a um meio contínuo e vice versa.

Apresentam-se nos dois métodos expostos, exemplos da sua aplicação no estudo de estruturas, recorrendo-se ao método das diferenças finitas para a determinação do erro que se comete na utilização do método contínuo.

## ABSTRACT

The study of metallic network space structures is presented. Quality ideas, conduents to the idealization, methodology, stability analysis and construction of this structures, are reunited. Metallic Structures of several kinds, types, arrangement, methodology and economical consideration, are presented.

Two methods of stability analysis for several types of structures are described: the direct method and the continuous method.

The continuous method transcribe to a matrix form all the problem equations. This method permit obtain all the incognitas values with exactness. Several simplifications inherents to the continuous method, resulting from structures made with one elementary structure unit, from calculus repetition, from symmetry and anti-symmetry conditions, are presented. The forces method and the displacement method, generated by the direct method, are also presented. This two methods permit simplify the equations resolution. A metallic network space structures analysis program, realized with the displacement method, is presented.

The continuous method is a approximation method, which have base on the transformation of the network structures to a continuous system and vice versa. The continuous method is presented for two and three dimensions study, and all inherents difficulty of the network structures to the continuous system transference, and vice versa, are enhanced.

Examples of structures stability analysis are presented for the two founding methods. The error on the continuous method is determined with the finites differences method.

# ÍNDICE

## CAPÍTULO I

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 - INTRODUÇÃO .....                                                                            | 1  |
| 1.1 - ANÁLISE DA ESTRUTURA METÁLICA NA CONSTRUÇÃO E CONSIDERAÇÕES<br>. DE ORDEM ECONÓMICA ..... | 1  |
| 1.2 - ESTRUTURA E COMPOSIÇÃO .....                                                              | 4  |
| 1.3 - METODOLOGIA .....                                                                         | 37 |
| 1.4 - OBJECTIVO DO TRABALHO .....                                                               | 67 |
| 1.5 - DESCRIÇÃO DA TESE .....                                                                   | 68 |

## CAPÍTULO II

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2 - CÁLCULO DE ESTRUTURAS ESPACIAIS RETICULADAS PELO MÉTODO<br>DIRECTO .....            | 71 |
| 2.1 - EQUAÇÕES DO PROBLEMA .....                                                        | 75 |
| 2.2 - PROGRAMA DE CÁLCULO DE ESTRUTURAS ESPACIAIS RETICULADAS<br>METÁLICAS - EERM ..... | 83 |
| 2.2.1 - ESTRUTURA DO PROGRAMA EERM .....                                                | 86 |
| 2.2.1 - FICHEIRO DE DADOS DO PROGRAMA EERM .....                                        | 92 |
| 2.3 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....                                                       | 96 |

## CAPÍTULO III

|                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3 - CÁLCULO DE ESTRUTURAS ESPACIAIS RETICULADAS PELO<br>MÉTODO CONTÍNUO .....                                                                        | 131 |
| 3.1 - PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DOS RETÍCULOS DE PONTOS .....                                                                                        | 139 |
| 3.2 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MEIOS RETICULADOS .....                                                                                             | 142 |
| 3.3 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS .....                                                                                                                   | 152 |
| 3.4 - COMPARAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO ELÁSTICO DOS MEIOS<br>CONTÍNUOS E DE EQUILÍBRIO DAS ESTRUTURAS RETICULADAS, E<br>DEFINIÇÃO DO ERRO ..... | 179 |
| 3.5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....                                                                                                                    | 186 |

## CAPÍTULO IV

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| 4 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS ..... | 235 |
|---------------------------------------------|-----|

## ÍNDICE DE FIGURAS

|                                                                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Fig. 1.2-1 Ponte sobre o Severn em Inglaterra (1779) .....                                                                               | 5  |
| Fig. 1.2-2 Ponte Maria Pia sobre o Rio Douro em Portugal (1877) .....                                                                    | 7  |
| Fig. 1.2-3 Ponte Luís I sobre o Rio Douro em Portugal (1877) .....                                                                       | 8  |
| Fig. 1.2-4 Ponte Tjörn sobre o fiorde Askwö na Suécia (1960) .....                                                                       | 10 |
| Fig. 1.2-5 Piscina Dianabad em Viena (1842) .....                                                                                        | 12 |
| Fig. 1.2-6 Palácio de Cristal em Londres (1851) .....                                                                                    | 13 |
| Fig. 1.2-7 Palácio de Cristal em Londres (1851) .....                                                                                    | 14 |
| Fig. 1.2-8 Palácio de Cristal em Londres (1851) .....                                                                                    | 14 |
| Fig. 1.2-9 Palácio de Cristal em Londres (1851) .....                                                                                    | 15 |
| Fig. 1.2-10 Palácio de Cristal do Porto (1865) .....                                                                                     | 16 |
| Fig. 1.2-11 Interior de uma das naves laterais do Palácio de Cristal do Porto .....                                                      | 17 |
| Fig. 1.2-12 Interior da nave central do Palácio de Cristal do Porto .....                                                                | 17 |
| Fig. 1.2-13 Palácio das Máquinas em Paris (1889) .....                                                                                   | 18 |
| Fig. 1.2-14 Dortmund Westfalenhalle (1951) .....                                                                                         | 21 |
| Fig. 1.2-15 Cobertura do vestíbulo do Pavilhão de Salzgitte .....                                                                        | 22 |
| Fig. 1.2-16 Desenho de parte da planta e da secção vertical da cobertura do Pavilhão de<br>Salzgitte, bem como pormenores da mesma ..... | 23 |
| Fig. 1.2-17 "Convention Hall" - Chicago (1953) .....                                                                                     | 24 |
| Fig. 1.2-18 Sistema "Unibat" (desenho com o esquema do sistema e montagem de uma estru-<br>tura pequena, tipo "Unibat") .....            | 24 |
| Fig. 1.2-19 Montagem de uma estrutura grande, tipo "Unibat" .....                                                                        | 25 |
| Fig. 1.2-20 Pavilhão Mannesmann na Feira de Hanover .....                                                                                | 26 |
| Fig. 1.2-21 Pavilhão Mannesmann na Feira de Hanover .....                                                                                | 27 |
| Fig. 1.2-22 Pavilhão Mannesmann na Feira de Hanover .....                                                                                | 27 |

|                                                                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Fig. 1.2-23 Aula Magna da E. T. S. de Stuttgart .....                                                                                                                                     | 28 |
| Fig. 1.2-24 Aula Magna da E. T. S. ....                                                                                                                                                   | 28 |
| Fig. 1.2-25 Construção de aço visível do interior do sector "Industria y Manufacturas", na Feira<br>Suíça Expo 1964 .....                                                                 | 29 |
| Fig. 1.2-26 Desenho de uma parte da planta do piso inferior, de dois cortes transversais, de corte<br>longitudinal, e da planta da cobertura, da fábrica de maquinaria Friedrich Deckel . | 30 |
| Fig. 1.2-27 Cobertura da fábrica de maquinaria Friedrich Deckel .....                                                                                                                     | 31 |
| Fig. 1.2-28 Interior da nave de 60 m de vão, da fábrica de maquinaria de Friedrich Deckel ...                                                                                             | 31 |
| Fig. 1.2-29 Desenho de um corte transversal e das plantas da Catedral de Cristal .....                                                                                                    | 32 |
| Fig. 1.2-30 Exterior da Catedral de Cristal, de Garden Grove, na Califórnia .....                                                                                                         | 33 |
| Fig. 1.2-31 Interior da Catedral de Cristal, de Garden Grove, na Califórnia .....                                                                                                         | 34 |
| Fig. 1.2-32 Palácio de Cristal em Nova Iorque .....                                                                                                                                       | 34 |
| Fig. 1.2-33 Interior do Palácio de Cristal em Nova Iorque .....                                                                                                                           | 35 |
| Fig. 1.2-34 Desenho do pormenor de ligação dos painéis de vidro à estrutura .....                                                                                                         | 36 |
| Fig. 1.2-35 Palácio de Cristal em Nova Iorque .....                                                                                                                                       | 36 |
| Fig. 1.2-36 Palácio de Cristal em Nova Iorque .....                                                                                                                                       | 37 |
| Fig. 1.3-1 Sistema rectangular bidireccional plano .....                                                                                                                                  | 38 |
| Fig. 1.3-2 Sistema diagonal bidireccional plano .....                                                                                                                                     | 38 |
| Fig. 1.3-3 Sistema tridireccional plano .....                                                                                                                                             | 39 |
| Fig. 1.3-4 Unidades poliedrais .....                                                                                                                                                      | 39 |
| Fig. 1.3-5 "Direct Grids" .....                                                                                                                                                           | 40 |
| Fig. 1.3-6 "Space Grids" .....                                                                                                                                                            | 41 |
| Fig. 1.3-7 Cobertura tipo hexagonal .....                                                                                                                                                 | 43 |
| Fig. 1.3-8 Cobertura tipo hexagonal .....                                                                                                                                                 | 44 |
| Fig. 1.3-9 Malhas espaciais estabilizadas com a junção de barras .....                                                                                                                    | 45 |
| Fig. 1.3-10 Forças de membrana e forças nas secções das superfícies planas .....                                                                                                          | 45 |
| Fig. 1.3-11 Elementos característicos das coberturas planas .....                                                                                                                         | 46 |

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Fig. 1.3-12 Cobertura cilíndrica agrupada .....                                                              | 46 |
| Fig. 1.3-13 Abóbada .....                                                                                    | 47 |
| Fig. 1.3-14 Triangulação em planta de coberturas cilíndricas com uma só superfície .....                     | 47 |
| Fig. 1.3-15 Esquema das coberturas cilíndricas .....                                                         | 48 |
| Fig. 1.3-16 Esquema das coberturas cilíndricas .....                                                         | 48 |
| Fig. 1.3-17 Abóbadas com dupla superfície de curvatura .....                                                 | 49 |
| Fig. 1.3-18 Disposição longitudinal das peças pré-fabricadas de três membros .....                           | 49 |
| Fig. 1.3-19 Disposição transversal das peças pré-fabricadas de três membros .....                            | 50 |
| Fig. 1.3-20 Disposição longitudinal das peças pré-fabricadas de quatro membros .....                         | 50 |
| Fig. 1.3-21 Disposição transversal das peças pré-fabricadas de quatro membros .....                          | 50 |
| Fig. 1.3-22 Representação de coberturas de duas águas trianguladas .....                                     | 51 |
| Fig. 1.3-23 Plantas com as triangulações mais utilizadas em coberturas de duas águas triangu-<br>ladas ..... | 51 |
| Fig. 1.3-24 Esquema da superfície de revolução .....                                                         | 52 |
| Fig. 1.3-25 Superfícies de revolução de cúpulas de base circular .....                                       | 52 |
| Fig. 1.3-26 Representação da vista e da planta de uma cúpula raiada .....                                    | 53 |
| Fig. 1.3-27 Representação de alguns tipos de cúpulas .....                                                   | 55 |
| Fig. 1.3-28 Cúpula de paredes dobradas .....                                                                 | 57 |
| Fig. 1.3-29 Cúpulas .....                                                                                    | 57 |
| Fig. 1.3-30 Representação de uma cobertura tênsil .....                                                      | 58 |
| Fig. 1.3-31 Desenho da planta e alçado do "Minor Gymnasium of the Tokyo Olympic<br>Indoor Stadium" .....     | 59 |
| Fig. 1.3-32 Representação de estruturas tênséis .....                                                        | 60 |
| Fig. 1.3-33 Processos de ligação utilizados nos nós .....                                                    | 63 |
| Fig. 1.3-34 Processos de ligação utilizados nos nós .....                                                    | 66 |
| Fig. 2.0-1 Trípode .....                                                                                     | 73 |
| Fig. 2.1-1 Representação de uma estrutura bidimensional .....                                                | 81 |

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Fig. 2.1-2 Representação do corte longitudinal e transversal de uma barra .....              | 82  |
| Fig. 2.3-1 Representação de uma estrutura tridimensional .....                               | 97  |
| Fig. 2.3-2 Representação dos dados geométricos dos elementos de uma estrutura .....          | 98  |
| Fig. 2.3-3 Representação de uma estrutura tridimensional para utilização do programa EERM .. | 101 |
| Fig. 2.3-4 Representação das distorções numa estrutura, devido à variação de temperatura ... | 104 |
| Fig. 2.3-5 Representação de uma estrutura tridimensional .....                               | 107 |
| Fig. 2.3-6 Representação da redução de uma estrutura simétrica .....                         | 107 |
| Fig. 2.3-7 Representação de uma estrutura tridimensional .....                               | 101 |
| Fig. 2.3-8 Representação da redução de uma estrutura simétrica .....                         | 110 |
| Fig. 2.3-9 Representação de uma estrutura tridimensional .....                               | 111 |
| Fig. 2.3-10 Representação de uma estrutura tridimensional .....                              | 115 |
| Fig. 2.3-11 Representação de uma estrutura tridimensional plana e rectangular .....          | 118 |
| Fig. 2.3-12 Representação da redução de uma estrutura tridimensional simétrica .....         | 118 |
| Fig. 2.3-13 Representação de uma estrutura tridimensional plana e rectangular .....          | 124 |
| Fig. 3.0-1 Nós para os retículos do sistema cúbico .....                                     | 138 |
| Fig. 3.1-1 Retículo de pontos .....                                                          | 140 |
| Fig. 3.3-1 Retículo bidimensional de pontos .....                                            | 152 |
| Fig. 3.3-2 Retículo espacial .....                                                           | 153 |
| Fig. 3.3-3 Representação das projecções sobre os planos coordenados das tensões .....        | 154 |
| Fig. 3.3-4 Representação de um retículo triangular .....                                     | 155 |
| Fig. 3.3-5 Representação de um retículo com malha quadrada .....                             | 158 |
| Fig. 3.3-6 Representação de um retículo de malha quadrada com diagonal e contradiagonal ...  | 160 |
| Fig. 3.3-7 Representação de uma estrutura com retículo de apoio em malhas cúbicas .....      | 163 |
| Fig. 3.3-8 Configuração de hastes .....                                                      | 168 |
| Fig. 3.3-9 Configuração de hastes .....                                                      | 171 |
| Fig. 3.3-10 Representação de um meio reticulado .....                                        | 174 |

|               |                                                                                            |     |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Fig. 3.3-11   | Retículo de apoio                                                                          | 174 |
| Fig. 3.3-12   | Composição de células estruturais elementares                                              | 175 |
| Fig. 3.4-1    | Representação das componentes dos deslocamentos numa haste                                 | 179 |
| Fig. 3.5-1    | Representação das forças internas e externas de um problema plano                          | 188 |
| Fig. 3.5-2    | Representação das forças internas e externas de um problema plano                          | 189 |
| Fig. 3.5-3    | Representação das forças internas e externas de um problema plano                          | 191 |
| Fig. 3.5-4    | Representação das componentes dos deslocamentos de um sistema plano                        | 192 |
| Fig. 3.5-5    | Representação das forças internas e externas de um problema plano                          | 196 |
| Fig. 3.5-6    | Representação das forças internas e externas de um problema plano                          | 196 |
| Fig. 3.5-7    | Representação de uma célula estrutural                                                     | 198 |
| Fig. 3.5-8    | Representação das forças nas hastes e das forças externas de um problema<br>tridimensional | 199 |
| Fig. 3.5-9    | Representação das forças nas hastes e das forças externas de um problema<br>tridimensional | 200 |
| Fig. 3.5-10.1 | Representação dos momentos flectores e torçores de uma lâmina                              | 201 |
| Fig. 3.5-10.2 | Representação de uma célula estrutural                                                     | 203 |
| Fig. 3.5-11   | Representação da situação deformativa de um problema tridimensional                        | 205 |
| Fig. 3.5-12   | Representação das forças internas e externas de um problema tridimensional                 | 205 |
| Fig. 3.5-13   | Representação das forças externas de um problema tridimensional                            | 205 |
| Fig. 3.5-14   | Representação plana dos deslocamentos de um problema tridimensional                        | 206 |
| Fig. 3.5-15   | Representação das componentes dos deslocamentos de um problema tridimensional              | 207 |
| Fig. 3.5-16   | Representação da situação deformativa de um problema tridimensional                        | 211 |
| Fig. 3.5-17   | Representação das forças internas e externas de um problema tridimensional                 | 211 |
| Fig. 3.5-18   | Representação de uma estrutura tridimensional                                              | 212 |
| Fig. 3.5-19   | Representação de elementos planos sujeitos a pares de forças normais                       | 213 |
| Fig. 3.5-20   | Secção transversal de uma estrutura tridimensional                                         | 215 |
| Fig. 3.5-21   | Representação de uma estrutura contínua equivalente                                        | 217 |

|             |                                                                                      |     |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Fig. 3.5-22 | Representação dos deslocamentos nos nós de um problema tridimensional . . . . .      | 218 |
| Fig. 3.5-23 | Representação das forças internas e externas de um problema tridimensional . . . . . | 219 |
| Fig. 3.5-24 | Representação das forças internas e externas de um problema tridimensional . . . . . | 220 |
| Fig. 3.5-25 | Representação das forças internas e externas de um problema tridimensional . . . . . | 221 |
| Fig. 3.5-26 | Representação das forças internas e externas de um problema tridimensional . . . . . | 222 |
| Fig. 3.5-27 | Representação de uma estrutura tridimensional . . . . .                              | 224 |

## SIMBOLOGIA

Os símbolos apresentados, são utilizados no texto, onde vão sendo definidos à medida que surgem, sendo recordadas as suas definições quando se julgue conveniente. Alguns símbolos têm mais do que um significado, quando isso não se presta a equívocos. São primeiramente indicados os símbolos definidos por letras latinas, e ulteriormente, os símbolos definidos por letras gregas.

**A** - matriz dos coeficientes da equação de equilíbrio

$\bar{A}$  - matriz dos coeficientes da equação de compatibilidade

*A* - secção da barra

*a* - número de barras de coligação entre os nós

$a_n$  - área de influência da barra *n*

**C** - matriz característica das propriedades elásticas

*c* - coeficiente de dilatação térmica

$c_{ij}$  - coeficientes da matriz característica das propriedades elásticas

**B** - matriz dos coeficientes da equação geral do método directo

*E* - módulo de elasticidade

$E_{xx}$ ,  $E_{yy}$ ,  $E_{zz}$  - módulos de Young referentes respectivamente às direcções *x*, *y*, e *z*

**F** - vector das forças activas (forças externas)

*F* - força normal

$F_i$  - componentes do vector das forças activas (forças externas)

$F_{yi}$  - forças do sistema espacial referidas a um sistema cartesiano ordinário  $O y_1 y_2 y_3$

*G* - módulo de elasticidade transversal

$G_{yz}$ ,  $G_{zx}$ ,  $G_{xy}$  - módulos tangenciais para os planos paralelos aos planos coordenados

**I** - matriz identidade

$I_X$  - momento de inércia

$\mathbf{K}$  - submatriz diagonal da matriz  $\mathbf{B}$

$K_{ij}$  - componentes da matriz  $\mathbf{K}$

$l_{lm}$  - comprimento da barra que une os nós  $l$  e  $m$

$l_n$  - comprimento da barra  $n$

$M_{y_i}$  - momentos do sistema espacial referidos a um sistema cartesiano ordinário  $O y_1 y_2 y_3$

$M$  - momento aplicado à estrutura

$m$  - coeficiente de Poisson

$\mathbf{N}$  - vector  $(\mathbf{F}; \Delta^0)$

$p$  - número de membro da estrutura espacial

$s_n$  - passo geométrico de um retículo monodimensional

$T$  - força tangencial

$u_i$  - componentes do deslocamento

$V$  - volume definido pelo paralelepípedo especificado pelo terno dos vectores base, de um retículo de pontos

$\mathbf{v}_i$  - vectores de base de um retículo de pontos

$\mathbf{X}$  - vector das forças incógnitas (forças internas)

$X_i$  - componentes do vector das forças incógnitas (forças internas)

$\mathbf{x}$  - vector deslocamento

$x_i$  - componentes do vector deslocamento

$\mathbf{Z}$  - vector das incógnitas  $(\mathbf{x}; \mathbf{X})$

$\alpha_q$  - co-seno director da barra  $q$

$\beta_q$  - co-seno director da barra  $q$

$\gamma_q$  - co-seno director da barra  $q$

$\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$  - componentes da deformação

$\Delta$  - vector das distorções

$\Delta^e$  - vector das dilatações nas barras devido às forças internas

$\Delta^0$  - vector das dilatações nas barras devido a outras causas externas.

$\Delta^t$  - vector das dilatações nas barras devido a variações de temperatura

$\Delta_i$  - componentes do vector das distorções

$\Delta l_i$  - componentes do vector das dilatações nas barras devido a variações de temperatura

$\Delta l_n$  - dilatação na direcção  $n$

$\varepsilon_n$  - deformação na direcção  $n$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  - componentes da deformação

$\eta_{yz,x}, \dots, \eta_{xy,z}$  - coeficientes de influência de primeira ordem

$\eta_{x,yz}, \dots, \eta_{z,xy}$  - coeficientes de influência de segunda ordem

$\mu_{zx,yz}, \dots, \mu_{yz,xy}$  - coeficientes de Chertsov

$\nu_{yz}, \nu_{zx}, \nu_{xy}$  - coeficientes de Poisson

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - componentes da tensão

$\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  - componentes da tensão

$\phi$  - potencial das forças elásticas



# CAPÍTULO I

## 1 - INTRODUÇÃO

A estrutura metálica espacial pode ser definida como um conjunto de elementos que se caracterizam pela sua colaboração conjunta à resistência de esforços, que podem ser aplicados em qualquer ponto, actuando em qualquer direcção, e inclinados em relação à superfície da estrutura, de qualquer ângulo. São deste modo, distintas das estruturas metálicas tradicionais, que se caracterizam por todos os elementos resistirem independentemente (terças, travamentos, etc.) aos esforços neles aplicados.

### 1.1 - ANÁLISE DA ESTRUTURA METÁLICA NA CONSTRUÇÃO E CONSIDERAÇÕES DE ORDEM ECONÓMICA

A produção do ferro e a sua introdução como elemento resistente na construção, foi a inovação mais transcendente pelas suas consequências imediatas, tornando-se o indício mais importante de uma nova era arquitectónica.

O ferro tem desempenhado um papel importante na história da humanidade desde que há aproximadamente 5000 anos, as espadas, arados e martelos de ferro vieram substituir os utensílios de pedra e madeira. A Revolução Industrial, que como se sabe teve origem em Inglaterra, trouxe um novo incremento na indústria metalúrgica, quintuplicando a produção de ferro nesse país, de 1720 a 1790, e veio, para além da fundição de canhões, em proveito da indústria de fabricação de maquinaria.

Além da indústria de maquinaria, também a engenharia de vias de comunicação e obras públicas veio beneficiar destes progressos, constituindo um ramo independente que procurava novas



aplicações para o ferro (tubos para abastecimento de água e evacuação de águas negras, pontes, canais, linhas ferroviárias). As linhas ferroviárias são um produto característico da Era Industrial que começou. Com elas desenvolveram-se a indústria minéfica e siderúrgica, bem como a indústria em geral, tráfico e comércio. Servem também de nexos entre a engenharia e a arquitectura. De observações feitas naquele tempo, apreendeu-se que para melhor trabalhar à flexão uma peça de ferro, esta devia ter um perfil muito diferente do perfil de uma viga de madeira.

Naquela época, o ferro como material não se acomodava às imagens básicas da arquitectura implantadas nos quatro mil anos de história das construções em pedra e madeira. Não se estranha portanto, que o ferro só se integrasse na arquitectura 20 ou 30 anos depois de ter conquistado a engenharia industrial e de obras públicas (na construção de edifícios foi sempre um material de união, um material auxiliar). Os pilares de ferro e as vigas de aço, com secções mais esbeltas e vencendo maiores vãos, transformam substancialmente a relação entre corpo e espaço, chegando a diluir a corporalidade da obra arquitectónica.

A disposição viga - pilar, assim como a da abóbada - contraforte, ou seja, a separação visível entre carga e apoio, que correspondia à síntese formal da arquitectura histórica, e segundo a qual se procurou moldar as primeiras construções metálicas, foi perdendo sentido nos finais do século passado, com a evolução das construções de aço.

A. Föppl foi o primeiro a apontar as vantagens da abóbada cilíndrica e contribuiu muito para o desenvolvimento desta forma na construção. O seu livro, publicado em 1892, há precisamente 100 anos, descreve com detalhes um tipo de abóbada cilíndrica, que tendo somente hoje um interesse histórico, influenciou numa grande dimensão, todos os subsequentes desenvolvimentos em sistemas de três dimensões.

O betão pré-esforçado veio no entanto, em 1930, a ter uma enorme popularidade, que virou os engenheiros para o seu estudo, fazendo com que as estruturas metálicas ficassem um pouco esquecidas. No entanto, em vários países, o entusiasmo pelas estruturas de betão pré-esforçado desapareceu gradualmente quando, se começou a verificar que esse era um meio dispendioso, principalmente devido ao elevado custo de elaboração dos moldes de trabalho, e ao elevado período de tempo necessário para finalizar a construção. Nesses países voltou-se novamente a optar pela construção metálica, estudando e desenvolvendo métodos de cálculo e execução destas estruturas.

Note-se que tal não se verificou em todos os países, onde devido ao elevado preço que o aço aí atinge, as estruturas de betão armado e pré-esforçado continuam a ser as mais utilizadas.

Motivos de diversa natureza deram nestes últimos anos um grande impulso às estruturas metálicas espaciais aplicadas na construção civil, sendo uma parte desta temática devida à arquitectura. Com o evoluir dos tempos, os arquitectos debruçaram-se sobre a necessidade de os edifícios serem adaptáveis e capazes de ser modificados, para corresponder às necessidades dos seus utilizadores, em função das suas necessidades. As suas investigações orientaram-se para os sistemas já comprovados e ensaiados.

Com efeito, vários anos de experiências no mundo das construções industriais deram, aos arquitectos, uma visão dos métodos e objectivos dos industriais. Os seus edifícios são flexíveis, não "monumentais", nem "preciosos". A análise dos gastos para adaptar os edifícios às necessidades evolutivas, técnicas, e de melhor condição de trabalho, enfim, as exigências próprias de cada operação imobiliária, criou critérios a que os arquitectos têm que responder, tais como: espaço horizontal livre, de modo a existir uma flexibilidade de divisão, com sistemas de paredes adaptáveis às necessidades; alturas elevadas de pé-direito para fábricas, depósitos, recintos de espectáculos, recintos desportivos, etc.; utilização de materiais duráveis, ensaiados e testados.

As estruturas metálicas espaciais, vieram consentir uma extrema liberdade criativa, adaptando-se às soluções arquitectónicas mais diversas. O ênfase que foi dado às construções industriais, demonstrou que muitos dos tipos de construções espaciais, podem ser construídos com unidades simples, pré-fabricadas, em muitos dos casos com dimensões e comprimentos "standardizados", formando estruturas geometricamente correctas, com um peso por metro quadrado inferior, se devidamente desenhadas, em comparação com as estruturas apelidadas de tradicionais ou ordinárias, de duas dimensões. Tudo isto equivale a dizer que requerem menor quantidade de material, e consequentemente um menor custo. Adicionalmente, a maior facilidade de transporte, e sobretudo a rapidez de montagem (é possível proceder à montagem em terra de toda a estrutura, ou parte dela), podem tornar estas estruturas metálicas espaciais, altamente económicas, em termos de custos.

As tendências estéticas, preconizadas pelos arquitectos de um lado, e a optimização de preços, relativamente a pesos e tempo de execução das estruturas metálicas espaciais, por parte dos engenheiros, exigiram o desenvolvimento e procura de novas formas de estruturas espaciais. O pro-

gresso e a riqueza obtida, dos conceitos teóricos e técnicos, demonstram o interesse que têm estas estruturas no âmbito das duas disciplinas, a arquitectura e a engenharia.

## 1.2 - ESTRUTURA E COMPOSIÇÃO

As estruturas espaciais apresentam uma repartição de esforços mais favorável para a estabilidade e rigidez do conjunto. A diminuição de esforços normais e momentos flectores nas barras da estrutura, assim como a supressão de elementos secundários - terças, travamentos, etc. - permitem uma redução apreciável do peso, em comparação com as estruturas tradicionais. Em caso de colapso de um dos elementos da estrutura, o esforço vem automaticamente repartir-se entre os elementos contíguos.

No volume geral de construções de aço, embora as pontes de ferro e aço já não ocupem hoje em dia o primeiro lugar, foi precisamente na evolução verificada na construção de pontes, onde ficou mais clara a superioridade do ferro e do aço, perante os materiais tradicionais. O vencimento de grandes vãos exigido na construção de pontes, contribuiu para o desenvolvimento e afirmação dos diferentes sistemas construtivos e procedimentos de cálculo.

Na construção de pontes dos últimos 150 anos, reflecte-se com especial claridade a distinção entre arquitectura e engenharia, separação iniciada no século XVIII, e que aumentou no decorrer do século XIX, bem como a tendência contrária que se manifesta ultimamente, em uma nova colaboração entre arquitecto e engenheiro.

A primeira ponte de ferro fundido foi construída em 1779, de modo a unir as margens do Severn (fig. 1.2-1), e foi fabricada em Coalbrookdale, onde há 60 anos antes, tinha entrado em funcionamento o primeiro alto-forno, utilizando como combustível o coque (carvão poroso que se obtém como resíduo da destilação da hulha na produção do gás-da-hulha). J. Wilkinson, notável construtor de ferro na época, foi quem teve a ideia de construir a ponte, tendo sido o arquitecto Th. Farnolls-Pritchard o responsável pelo projecto. A forma que foi dada à ponte, respondia mais a considerações estéticas do que a outras de índole estrutural. A ponte era constituída por cinco arcos concêntricos com uma corda de 31 m e uma flecha de 15 m. As características primordiais das genuínas constru-

ções de ferro, como sejam a pré-fabricação em estaleiro e posterior montagem "in situ", estão bem patentes nesta ponte na medida em que, na sua construção os arcos foram previamente fundidos em duas metades no estaleiro e posteriormente montados, tendo sido realizada a sua união por intermédio de ligações aparafusadas. O facto da ponte sobre o Severn ainda se encontrar hoje em dia em serviço, vem demonstrar que nos arcos nervados não aparecem esforços de flexão importantes.

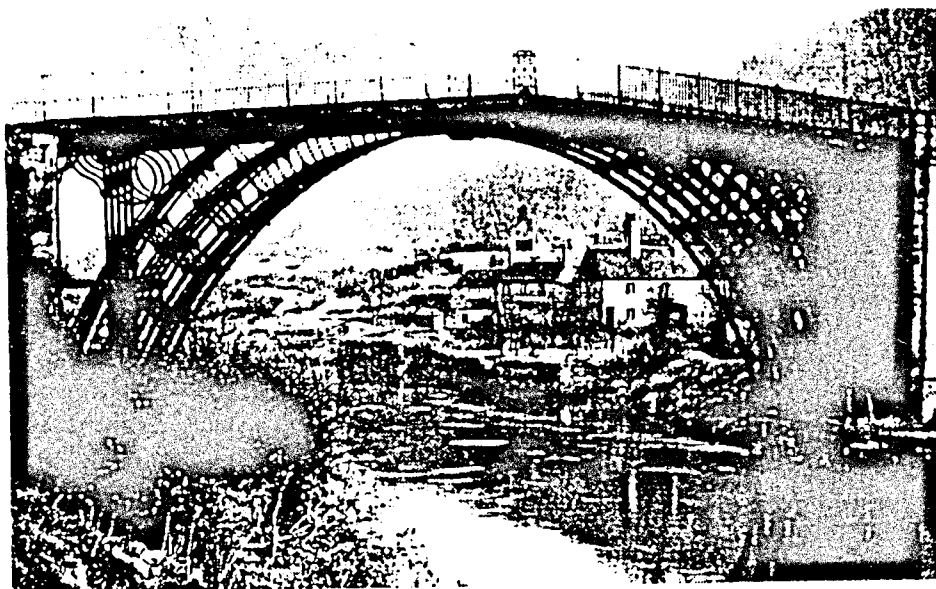


Fig. 1.2-1 Ponte sobre o Severn em Inglaterra (1779)

O apogeu das pontes de ferro fundido termina na metade do século passado. A maioria destas pontes conservam-se em Inglaterra, onde se encontram as mais belas pontes deste género, consideradas verdadeiras obras arquitectónicas de relevo, tais como a ponte Craigellachie e a ponte Waterloo sobre o Conway, ambas de Thomas Telford, ou ainda a ponte sobre o Támesis com 183 m de corda e 22 m de flecha, projecto também de Telford.

Um novo tipo de pontes, as pontes de vigas contínuas, surgiram em 1846-1850, através de R. Stephenson, com a ponte Britannia sobre o estreito de Menai. Com a ponte Britannia, o ferro fundido passou definitivamente a segundo plano nas construções de pontes, já que esta primeira

grande construção com elementos de ferro, esgotava as características resistentes próprias do ferro em elementos - resistência à tração, compressão, flexão e rotura -, explorando as possibilidades que o processo de laminação oferece na utilização racional do ferro forjado. A teoria daquela época não podia conduzir a um cálculo exacto do estado de tensões na estrutura, o que determinou serem efectuados inúmeros testes em laboratório. Dado o insólito da solução final que se baseou inicialmente na ideia da ponte pênsil, construíram-se na ponte Britannia pilares mais altos, como elementos de segurança, prevendo a necessidade de reforçar a estrutura com a aplicação de cabos.

Assim, na segunda metade do século XIX predominou a ponte com um sistema plano de vigas, em que se manifesta a conexão entre a evolução das teorias e concepções estáticas, com os avanços tecnológicos na indústria siderúrgica, na medida em que esta produzia perfis em dimensões e quantidades suficientes. A procura crescente deste tipo de obra exigia métodos de cálculo e fabrico cada vez mais rápidos e económicos, surgindo assim a estática gráfica, correspondendo à necessidade de uma maior segurança e exactidão de cálculo.

Uma das concepções mais arrojadas em construções de pontes nos finais do século XIX, foi a ponte Maria Pia, uma das maiores obras, projectada e construída pela casa Eiffel. Na necessidade de estabelecer uma ligação ferroviária, para o movimento de passageiros e mercadorias entre os dois principais pólos do nosso País (Porto - Lisboa), foi aberto um concurso entre as principais casas construtoras de França. O Engenheiro Gustave Eiffel apresentou então o projecto de uma gigantesta obra de ferro, cuja construção iria ser iniciada em 5 de Janeiro de 1876, e concluída em 30 de Outubro do ano seguinte, entrando ao serviço em 4 de Novembro de 1877. É assombrosa a rapidez e precisão com que foram executados tão importantes como difíceis e delicados trabalhos naquela época.

A ponte Maria Pia é constituída por um grande tabuleiro metálico de 354,375 m (deixaram-se duas folgas entre os tramos que constituem o tabuleiro, de modo a atender à dilatação do ferro), formado por elegantes e sólidas cruzetas de St. André em ferro forjado, assente sobre um sistema de pilares em tudo idênticos ao sistema do tabuleiro, e num enorme arco com 160 m de corda e 62 m de altura desde a superfície do rio, na ocasião de maré baixa, até ao seu extradorso. O arco com 15,0 m de largura, tendo como apoio fortíssimos encontros de alvenaria, foi construído sem recorrer aos andaimes, que se julgavam, se não impossíveis, pelo menos quase que impraticáveis e perigosos.

Os trabalhos foram principiados simultâneamente do lado do Porto e de Vila Nova de Gaia, tendo compreendido a primeira fase a construção dos apoios de alvenaria, dos pilares que nasciam nos apoios de alvenaria, e dos tramos do tabuleiro compreendidos entre estes pilares. Terminada esta primeira fase procedeu-se à construção do arco. Tendo sido fácil a construção dos primeiros lanços do arco, as dificuldades começaram a surgir quando se excedeu uma certa extensão deste, fazendo com que o centro de gravidade caísse muito fora da base. Recorrendo ao uso de escoras e cabos de aço prenderam a parte construída do arco à parte superior do pilar e tabuleiro já executados, que foram convenientemente preparados para resistirem aos esforços que resultavam desta manobra. A construção do arco foi avançando até se fechar a parte inferior do mesmo e em seguida a parte superior. Concluído o arco, a construção continuou com a montagem dos pilares sobre o arco e dos restantes tramos do tabuleiro.

Classificada de Monumento Nacional, Património histórico, artístico e sociológico, a Ponte Maria Pia é hoje em dia um ex-libris da cidade do Porto e do Caminho de Ferro em Portugal (fig. 1.2-2).

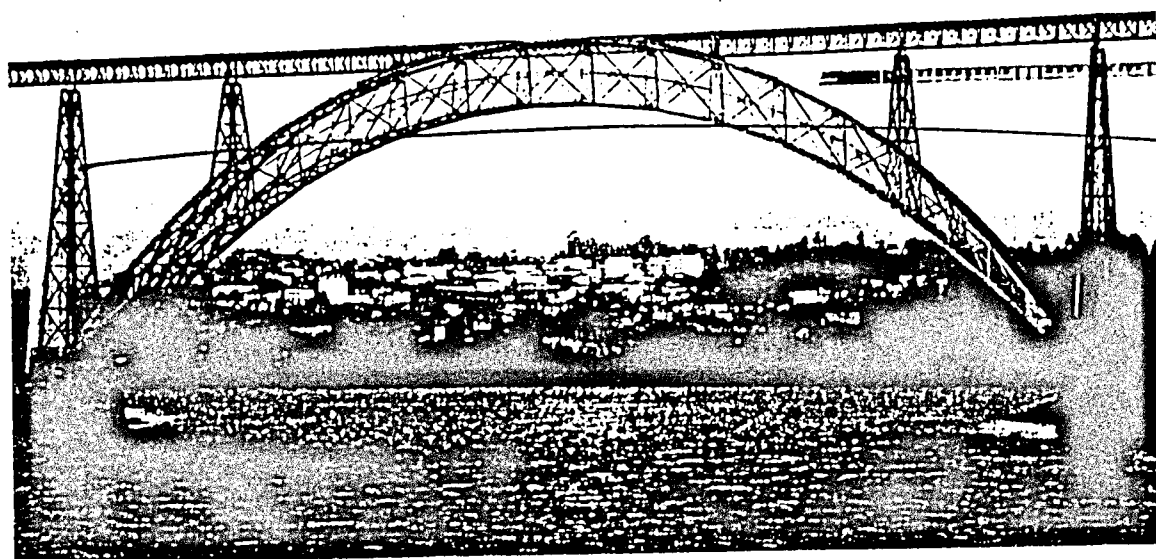


Fig. 1.2-2 Ponte Maria Pia sobre o Rio Douro em Portugal (1877)

A ponte Luís I (fig.1.2-3) é outro dos ex-libris da Invicta Cidade do Porto. Sendo constituída por um dos maiores arcos do mundo em ferro forjado - 173 m de vão -, esta ponte apresenta ainda a particularidade de ser constituída por dois tabuleiros, um superior e outro inferior, que permitem a ligação rodoviária entre as duas margens do rio Douro. Construída em ferro forjado segundo um projecto do Engenheiro Teófilo Seyrig, a execução da obra ficou a cargo da sociedade belga Willembroeck, com sede em Bruxelas, que iniciou a empreitada em 1882. Concluída quatro anos depois, a ponte Luís I constitui uma obra de grande beleza plástica e arrojo de execução.

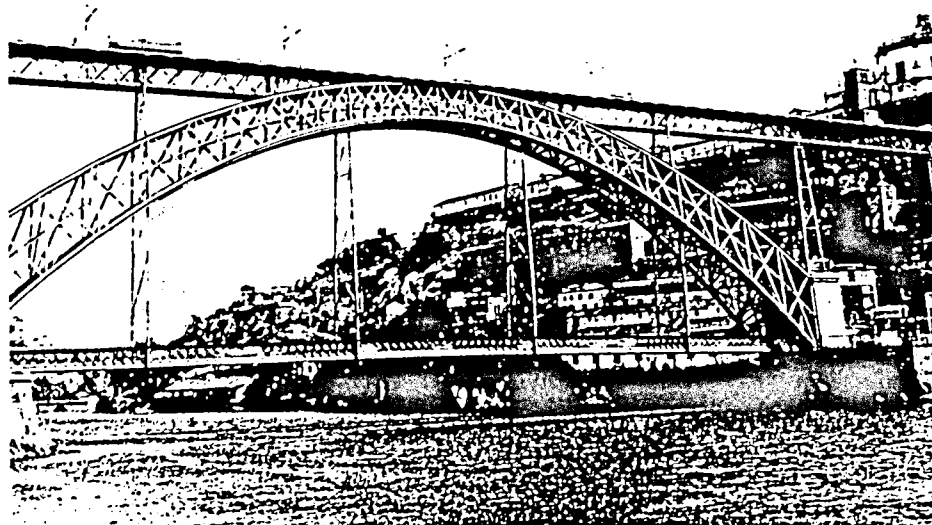


Fig. 1.2-3 Ponte Luís I sobre o Rio Douro em Portugal (1877)

Baseada na resistência à tracção do aço, um novo tipo de pontes surgiu no século XIX; a ponte pênsil. As pontes pênséis de correntes e de cordas foram construídas já na velha China e em alguns povos primitivos, desde há muitos anos, tendo sido empregues na Europa no século XVII como pontes de guerra improvisadas. As primeiras pontes modernas construídas com estudos e bases de cálculo, seguiam a teoria da catenária (curva formada pelo próprio peso de um fio flexível suspenso pelas suas extremidades), e foram realizadas na América do Norte a partir de 1796 (a catenária invertida desempenhou um papel importante na teoria de abóbadas do século XVIII). A ponte sobre o

Merrimac no Massachusetts, com 73m de comprimento, encontra-se ainda em serviço após se terem substituído as correntes por cabos de aço.

Os progressos alcançados até hoje neste tipo de estruturas (pontes em aço) são devidos principalmente às maiores resistências alcançadas para os aços, à maior exactidão nos métodos de cálculo, e ao desenvolvimento de novos tipos de união, cada vez mais perfeitos. Aparecem deste modo as pontes suspensas por tirantes oblíquos, ou seja pontes estaiadas, que são por assim dizer uma combinação das pontes pênséis e das pontes de vigas compostas. Estas pontes permitem utilizar vigas quadranguladas, extraordinariamente esbeltas, de aresta uniforme ao longo dos tramos laterais e do tramo principal, sendo estes suspensos em grande parte pelos cabos.

A obtenção de métodos de união mais eficazes veio implementar as estruturas tubulares de aço na construção de pontes nos últimos anos, tirando partido das vantagens iminentes à secção tubular - boa absorção dos esforços normais de compressão e dos esforços de torção; diminuição da pressão do vento; menor peso e conservação mais fácil. A ponte rodoviária sobre o fiorde Askwö, na Suécia, aberta ao tráfego em 1960 (fig. 1.2-4), é constituída precisamente por um gigantesco arco com 300 m de corda, formado por dois tubos de uns quatro metros de diâmetro, que sustentam o tabuleiro formado por tubos esbeltos.

Se é fácil estabelecer um paralelismo entre a evolução dos processos metalúrgicos e tecnológicos, e a evolução das estruturas nas pontes de ferro e aço, na construção de edifícios esse paralelismo já não é tão claro. As primeiras coberturas de ferro foram muitas vezes constituídas por construções mistas, não se podendo portanto estabelecer uma classificação das mesmas em construções de ferro fundido ou ferro forjado, procedendo-se portanto a uma descrição de ordem funcional. O ferro foi primeiramente utilizado em construções industriais, sendo somente mais tarde, nos finais do século XIX, utilizado na estrutura esquelética de edifícios de vários pisos.

A primeira cobertura de ferro foi construída em 1786 no Teatro Francês em Paris, sendo composta por barras de ferro forjado. Não obedecendo às leis que regem este tipo de armadura, nem tendo sido calculada estáticamente, do seu dimensionamento resultou uma estrutura que só transmitia forças verticais aos apoios, e que servia de elemento de rigidez transversal, permitindo-lhe assim apoiar-se sobre paredes de fecho extraordinariamente estreitas. A armadura ficava oculta por uma placa de azulejos suspensa na mesma. Este tipo de estrutura nasceu da necessidade de prevenir os

incêndios, frequentes nos teatros, que arruinavam as coberturas. Assim sendo, este tipo de cobertura foi adoptado durante alguns anos na construção de vários teatros.



Fig. 1.2-4 Ponte Tjörn sobre o fiorde Askwrö na Suécia (1960)

Na construção de coberturas começou-se mais tarde que na construção de pontes, a aplicar o ferro fundido, podendo-se assinalar como referencia o ano de 1801 para a primeira construção, que foi realizada em Inglaterra, mais concretamente na "Hilanderia" de Manchester. As primeiras coberturas de ferro fundido foram realizadas da mesma forma que as pontes do mesmo material, variando segundo o comprimento do vão a que eram destinadas a cobrir, e sendo constituídas por uma peça ou por vários painéis, segundo o sistema das abóbadas de pedra.

A cúpula, usada desde há muitos anos, pode ser considerada na arquitectura como a forma mais antiga da estrutura espacial. Encerrando a maior quantidade de espaço com a menor superfície exterior, a cúpula proporciona uma das mais eficientes formas que permitem cobrir a maior área, da forma mais económica. Tendo sido inicialmente, na antiguidade, construídas em pedra, na idade média a madeira passou a ser o principal material para a construção das mesmas, existindo ainda actualmente algumas cúpulas em madeira construídas nessa época.

Em 1811 o ferro foi utilizado pela primeira vez na construção de uma cúpula pelos projectistas Bellangé e Brunet (arquitecto e engenheiro respectivamente), na "Halle aux Blés" em Paris. A estrutura da cúpula baseava-se nos sistemas de construção da cúpula de madeira construída em 1773 e que havia sido destruída por um incêndio em 1802. Esta obra foi admirada por todos os contemporâneos, pois deve ter resultado numa obra grandiosa, a composição formada pela severa arquitectura classicista da base, e a malha da cúpula de 40 m de diâmetro, distinta de toda a arquitectura da época. A superfície da cúpula é fraccionada em pequenas áreas de cristal, em sectores abertos e fechados, sendo a cúpula formada por arcos meridianos e anéis paralelos de ferro fundido.

Representando uma nova concepção de massa e espaço, as cúpulas de ferro e vidro foram possivelmente a inovação mais destacada e principal, na arquitectura da nascente Era Industrial. Foram construídos muitos tipos de cúpulas, sendo muitos desses tipos realmente vigorantes. No entanto, as primeiras cúpulas de ferro são aquelas que ainda hoje em dia são mais populares, e definem-se como cúpulas formadas por um número de curvas radiais pré-fabricadas, engradadas e ligadas a um anel de compressão no centro, e a um anel de tracção no perímetro, assentes sobre uma parede resistente redonda. Em cúpulas pequenas omite-se o anel central.

As primeiras cúpulas eram de configuração hemisférica, tendo mais tarde diminuído a razão entre a altura e a abertura do arco, o que veio a introduzir forças horizontais nas cúpulas, que por vezes excediam a capacidade dos anéis de ligação. São conhecidos vários casos de cúpulas dessa configuração, em que o colapso da estrutura se deu mesmo ainda durante a sua construção. Tal facto induziu vários engenheiros a realizar análises mais detalhadas das ligações das cúpulas.

Verificando as vantagens das estruturas espaciais, como a das cúpulas, engenheiros franceses e alemães debruçaram os seus estudos sobre esta forma de construção, obtendo-se nessa época um rápido desenvolvimento de várias formas de cúpulas em ferro. As galerias e passagens

cobertas por estas estruturas proliferaram na Europa no século XIX, tendo assim sido criados espaços sugestivos para os urbanistas, que vieram a materializar um atractivo momento da vida cosmopolita das grandes cidades. Exemplos mais expressivos são a Galeria Pommeraye em Nantes, a Galeria Saint Hubert em Bruxelas e a Galeria Vittorio Emanuele em Milão, sendo esta última, a maior delas, tendo sido construída nos anos 60 do século XIX.

Outras formas surgiram, tal como a da cobertura de ferro fundido, com 16 m de vão, da piscina de Dianabad em Viena. Construída em 1842 por K. v. Etzel, a cobertura era formada por asnas com um banzo inferior semicircular, constituído por um perfil em I, e com um banzo superior adaptado à forma da cobertura, constituído por um perfil em T. Os dois banzos eram unidos por elementos circulares ( fig. 1.2-5 ).

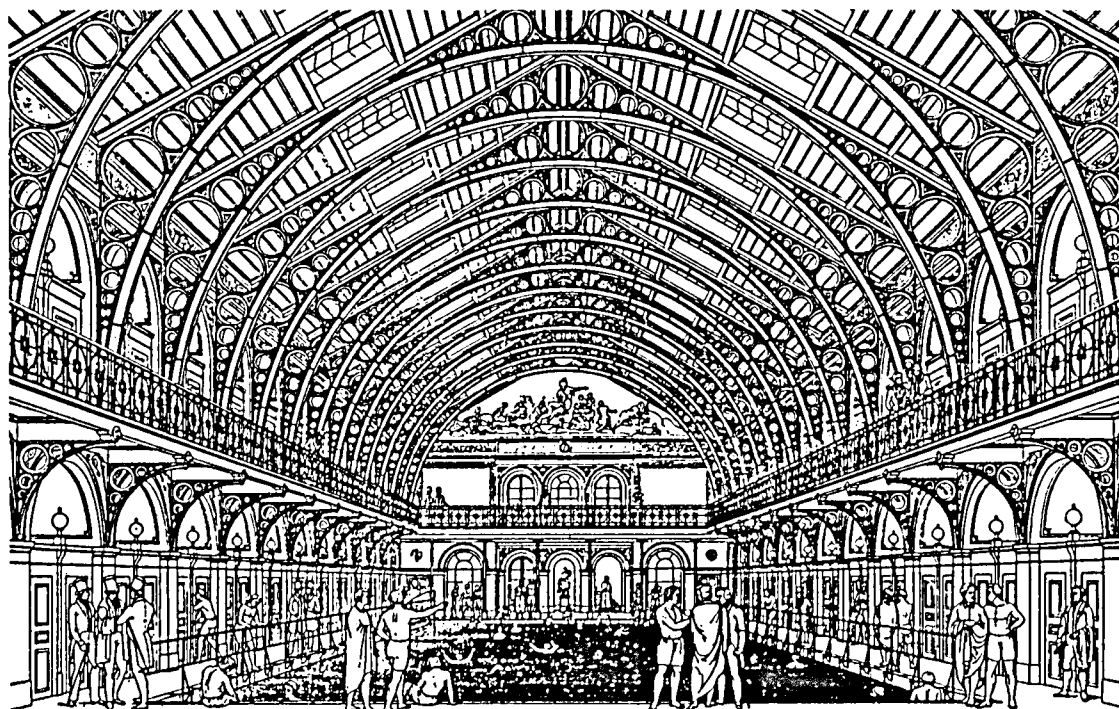


Fig. 1.2-5 Piscina Dianabad em Viena ( 1842 )

Existe no entanto outra linha evolutiva que parte da Galeria d'Orleans, passa pelos hibernáculos e Palácios de Cristal, e que conduz às salas de exposições parisienses, atravessando todo o século XIX.

O primeiro hibernáculo de ferro e vidro foi construído no Jardim Botânico de Paris. Constituído por um edifício com um volume de  $9000\text{ cm}^3$ , foi a primeira construção realizada totalmente em ferro e aço. Em 1851 foi construída uma monumental obra para a Exposição Internacional da Indústria em Londres. Projectada por Sir Joseph Paxton, a obra ocupava cerca de  $74.000\text{ m}^2$  de superfície em planta (quatro vezes a Igreja de San Pedro em Roma), e foi construída num prazo recorde de seis meses. Tal só foi possível devido a se ter utilizado elementos construtivos "standard" e em série, numa construção em ferro e vidro, e a se ter realizado um planeamento racional dos processos de fabricação, transporte e montagem. Apelidado de Palácio de Cristal, este é o primeiro exemplo histórico de uma pré-fabricação em grande escala (fig. 1.2-6 e fig. 1.2-7).

Era o princípio do vasto espaço unitário, que seria considerado como a marca distinta da maioria dos engenheiros do século XIX. Estas grandes estruturas testemunhavam os triunfos da nova Idade Industrial, e do génio dos seus criadores. Enquanto os engenheiros se esforçavam por encontrar uma certa imagem de perfeição, os arquitectos estavam absorvidos pelas questões de estilo, e criticavam a obra dos engenheiros pela sua falta de integridade. Raskin negava-se a ver no Palácio

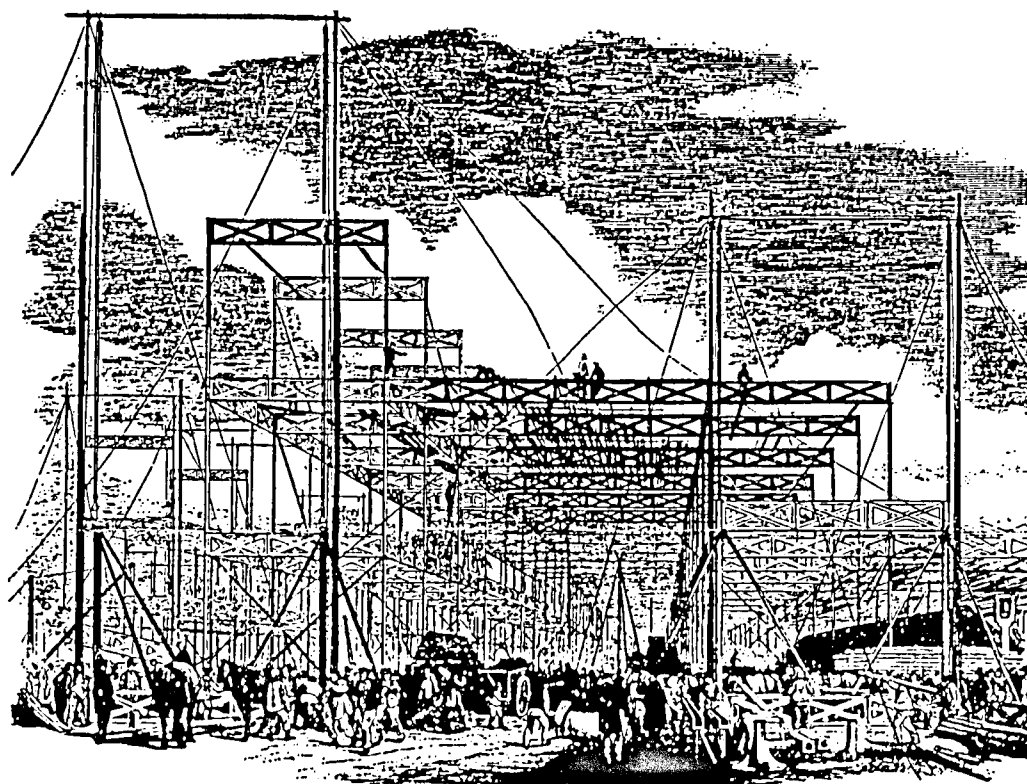


Fig. 1.2 - 6 Palácio de Cristal em Londres (1851) - montagem da estrutura de ferro



Fig. 1.2 - 7 Palácio de Cristal em Londres (1851) - panorama do interior

de Cristal de Paxton um objecto possuidor de valor moral. No entanto para Le Corbusier e a sua geração, o Palácio de Cristal era um exemplo maravilhoso de expressão moderna, de simbolismo tecnológico, de rigor conceptual, de plano funcional e de sobriedade ornamental. Quando o edifício se incendiou em 1936, Le Corbusier escreveu na "Architectural Review" o seguinte: "Com o Palácio de Cristal desaparece, não só uma curiosidade, como um dos maiores monumentos da arquitectura do século vinte, um monumento que permitiu a arquitectura do mundo moderno... O Palácio de Cristal era o último testemunho de uma época de fé e audácia" (fig.1.2-8 e fig.1.2-9).

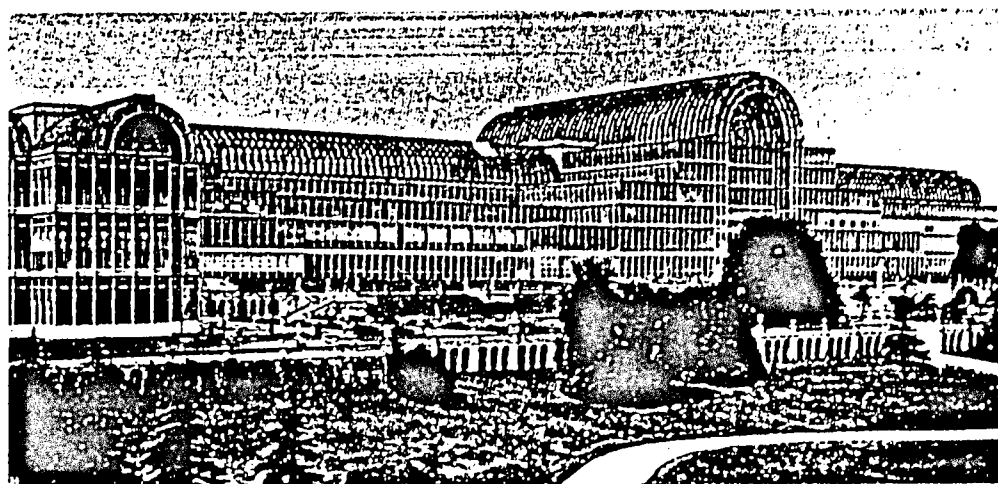


Fig. 1.2-8 Palácio de Cristal em Londres (1851), visto do exterior

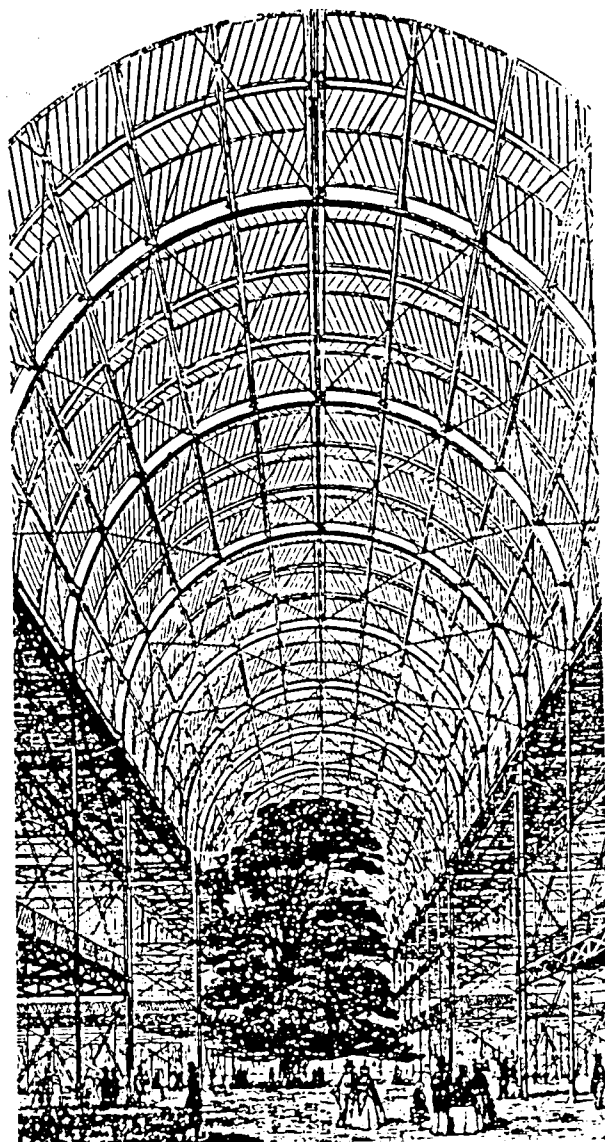


Fig. 1.2-9 Palácio de Cristal em Londres (1851) - panorama do interior

A cidade do Porto, no nosso país, também teve o seu Palácio de Cristal. Local frequentado no início por uma elite selectiva, o Palácio de Cristal agrupava salões, um museu, uma galeria de exposições, três restaurantes, cozinhas, um ginásio, etc., bem como um teatro que recebia o que havia de melhor no mundo, em termos de espectáculos naquela época, nomeadamente as melhores companhias de ópera italianas. Não sendo um edifício com a enorme grandeza do Palácio de Cristal de Paxton, nem sendo um edifício totalmente realizado em ferro e vidro, o Palácio de Cristal do Porto era no

entanto um imponente edifício construído em pedra, ferro e vidro, constituindo um dos mais belos edifícios da cidade do Porto daquela época (fig.1.2-10).

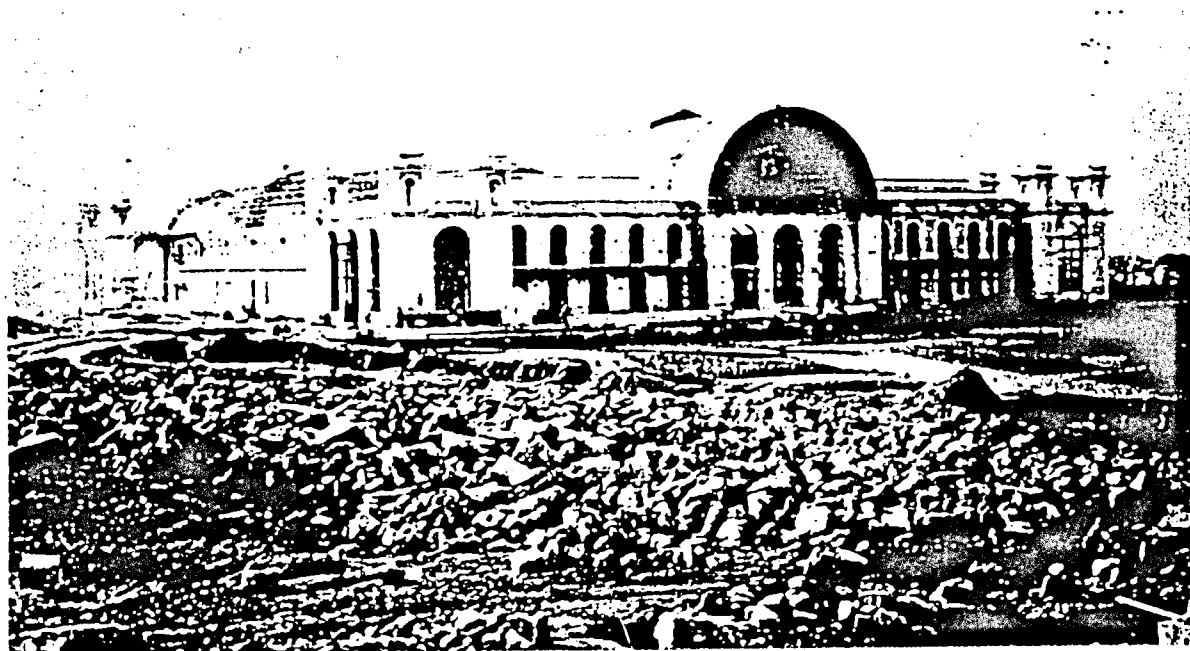


Fig. 1.2-10 Palácio de Cristal do Porto (1865)

Originalmente desenhado por Dillen Jones, o edifício de pedra, ferro e vidro, viria a sofrer profundas alterações ao longo dos seus 86 anos de vida. Iniciada a sua construção em 1862, e terminada em 1865, o Palácio de Cristal tinha uma forma rectangular, da qual se sobressaíam os volumes curvos e tubulares das coberturas das três naves. Estas coberturas eram constituídas por uma estrutura metálica (fig. 1.2-11 e fig. 1.2-12), lembrando uma imensa abóbada de berço das antigas catedrais românicas, coberta a chapa ondulada e zincada, tendo ao centro e a todo o comprimento um lanternim corrido, coberto de cristais. Constituindo, como já foi dito, um belo e imponente edifício, o Palácio de Cristal viria no entanto a ser demolido em 1951, depois de ocorrer o abandono, a ruína e os efeitos de um ciclone.

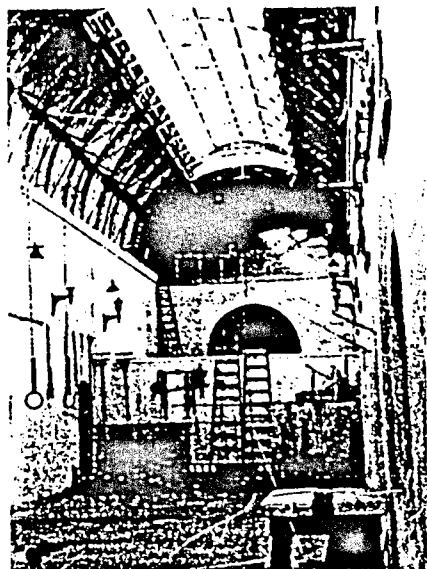


Fig. 1.2-11 Interior de uma das naves laterais do Palácio de Cristal do Porto

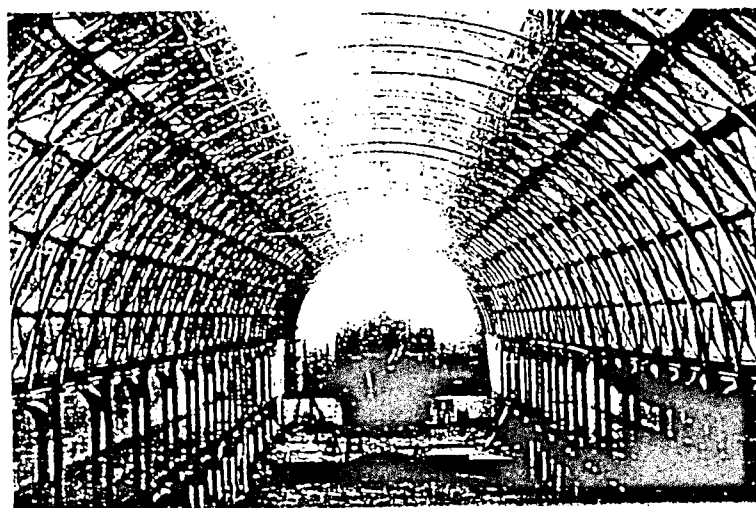


Fig. 1.2-12 Interior da nave central do Palácio de Cristal do Porto

A evolução dos grandes pavilhões de exposição alcançou a apoteose com o Palácio das Máquinas da Exposição Internacional de Paris, no ano de 1889. Situado junto à Torre Eiffel, o Palácio das Máquinas era um gigantesco pavilhão com 115 m de largura, 45 m de altura e 420 m de comprimento longitudinal. Projectada pelo Engenheiro Contamin, cada armadura da cobertura estava formada por dois segmentos que confluíam num ponto, tendo a parte baixa deste uma grande curvatura que se convertia numa curva ligeira, quase uma recta, na sua parte média. O facto dos arcos não se apoiarem em colunas ou pilares, mas chegarem directamente ao solo, e a base dos mesmos ser constituída por um apoio pontual (fig. 1.2-13), formava a maior novidade na construção de estruturas metálicas daquela época. O vértice onde convergiam os segmentos que formavam o arco, estava também concebido como uma articulação. Se o arco de três articulações, isostático, não constituía uma novidade na medida em que já tinha sido utilizado, em 1865 por J. W. Schwedler, na construção de uma nave industrial em Bochum, o mérito que foi atribuído a Contamin deveu-se do facto deste ter explorado ao máximo todas as possibilidades técnicas e de concepção estrutural. Na história das construções metálicas, o Palácio das Máquinas marcou também a transição do ferro forjado para o aço fundido, ao utilizar o aço fundido nos elementos que compõe os arcos.

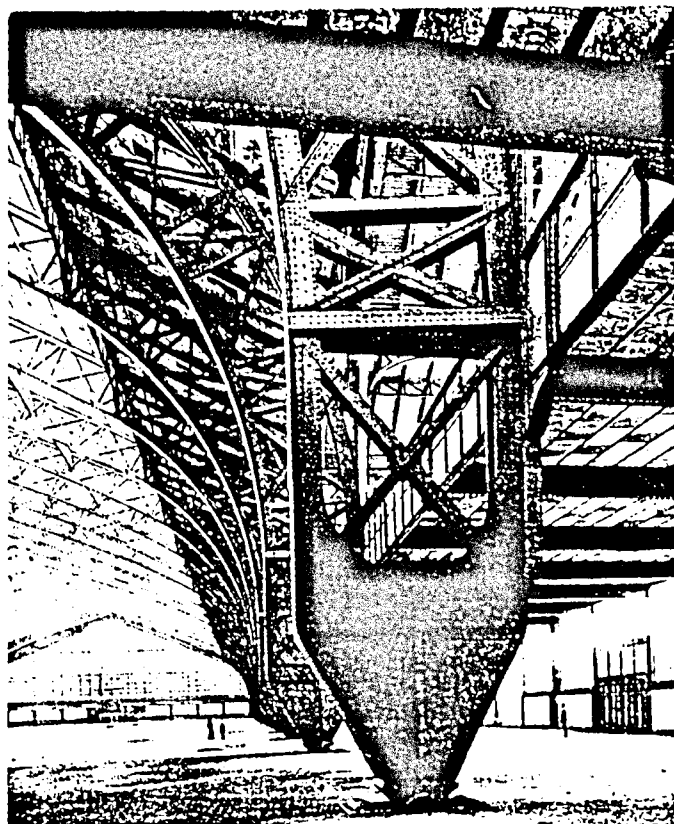


Fig. 1.2-13 Palácio das Máquinas em Paris (1889)

No mesmo ano, e também para a Exposição Internacional de Paris, foi construída a Torre Eiffel, projectada pelo Engenheiro Alexandre Gustave Eiffel. Com um propósito ornamental a Torre Eiffel foi contestada por muitos intelectuais da época que a consideravam algo de monstruoso. O facto é que a Torre Eiffel com 300 m de altura, um peso de 7300 ton. e ocupando uma base quadrada de 32 m<sup>2</sup>, não deixa no entanto ninguém indiferente, sendo até considerada por alguns arquitectos como uma obra que pôs em prática um novo princípio no pensamento arquitectónico: a funcionalidade. A Torre Eiffel rapidamente se tornou numa das maiores atracções turísticas de Paris. Tendo sido já uma das primeiras estações de transmissão radiofónica, a Torre Eiffel tem vindo ao longo dos últimos anos a sofrer várias transformações consideradas como valorativas, de modo a melhor se integrar na filosofia Parisiense. Sendo a Torre Eiffel algo único e curioso, são no entanto as grandes pontes sobre a garganta do Garabit e sobre o rio Douro, as estruturas de Gustave Eiffel consideradas com maior força expressiva.

A evolução que nos finais do século se observava na construção de grandes naves, trazia um câmbio em toda a concepção arquitectónica e uma transição aos novos elementos construtivos. Das obras realizadas no século passado com estruturas de ferro, os mercados e estações ferroviárias foram obras em que a aplicação deste tipo de estrutura se tornava evidente, tendo assim sido deixado o desenho destas obras para os engenheiros. Estes tipos de edifícios, de que ainda hoje se conservam alguns, demonstram o importante papel desempenhado pelas estruturas de ferro, como marco funcional da vida cosmopolita das grandes cidades. Nas coberturas de mercados, geralmente de pequenos vãos, utilizavam-se arcos triangulares, derivadas das estruturas de madeira, que se tornaram as preferidas mesmo para cobrir estações e pavilhões industriais.

O crescente tráfego ferroviário trouxe no entanto novas exigências. Era necessário construir pavilhões com vãos e alturas maiores. A abóbada desenvolvida segundo um eixo longitudinal, rapidamente foi adoptada para responder às exigências das estações ferroviárias, na medida em que, naquela época, não se conseguia ultrapassar os 20 m de vão com estruturas trianguladas de ferro forjado. Há quem considere que em pleno século XIX, as naves das estações ferroviárias eram dos poucos temas em que se justificava a utilização deste tipo de abóbada. As maiores dificuldades técnicas verificaram-se, aliás como em todas as estruturas abobadadas, na absorção das cargas horizontais, cuja magnitude exacta se desconhecia, assim como se ignorava a distribuição de esforços nas armaduras. Nas grandes naves de exposições o problema foi facilmente solucionado com a construção de naves laterais, que desempenhavam o mesmo papel das naves laterais das basílicas. Nas estações ferroviárias, a maneira então encontrada para resolver este problema das forças horizontais foi a de utilizar cabos esticados no sistema, tendo sido estes aplicados das mais diversas formas.

O maior vão foi alcançado na estação de S. Pancrácio em Londres no ano de 1866. Com 73 m de vão, as forças horizontais dos arcos desta cobertura foram contrariadas mediante a utilização de tirantes colocados por debaixo das vias. O traçado dos arcos chega até ao chão, sendo parecido aos utilizados no Palácio das Máquinas, mas com uma curvatura muito menor. Os elevados custos das naves arqueadas de grandes vãos, bem como a sua difícil e dispendiosa manutenção, vieram a reduzir os vãos para os 40 m, e mais frequentemente para os 20 m. Das naves de tipo médio, somente duas (Metz e Leipzig) eram constituídas por elementos triangulados, sendo todas as outras constituídas por elementos de alma cheia. Passava-se assim gradualmente do arco para o pórtico; a

parte superior passa de curva a recta, a curvatura da esquina do pórtico é eliminada, primeiramente na sua parte exterior e posteriormente na sua parte interior. As linhas rectas das estruturas porticadas foram favorecidas pelas soldaduras.

As construções industriais (armazéns e unidades fabris) são o campo mais importante das estruturas de aço, onde se cobra com especial destaque as vantagens específicas das estruturas de aço - cobrir grandes áreas com um mínimo de peso, mínima perda de superfície livre, e adaptação favorável aos processos produtivos. Podem citar-se como exemplo as fábricas siderúrgicas, fábricas de laminação, fundições, centrais de energia eléctrica, fábricas de maquinaria e automóveis, etc. .

Através de uma selecção e combinação dos elementos construtivos (vigas trianguladas ou de alma cheia, etc.) e dos sistemas estáticos (vigas de um ou mais tramos apoiadas em pilares estirados ou articulados, ou pórticos) é possível: transmitir em várias direcções as cargas da cobertura, o peso próprio da estrutura e as forças verticais e horizontais das vias de guias-ponte e outros sistemas análogos; colocar pilares, no interior da nave ou no perímetro da mesma, mais ou menos distanciados entre si; criar, por assim dizer, todas as comunicações necessárias. A evolução decorrente nestes últimos anos nas construções metálicas, fez com que estas impressionem não tanto pelo progressivo aumento do vão coberto e maiores esbeltezas conseguidas, mas também pelas soluções cada vez mais originais. Torna-se difícil estabelecer uma classificação sistemática e exaustiva de todas as possibilidades e combinações dos diferentes tipos estruturais e construtivos, de modo que somente alguns dos modelos existentes são aqui referenciados, não querendo no entanto desprestigiar aqueles que são omitidos.

Da grande variedade de possíveis tipos estruturais, existem no entanto alguns que são mais populares que outros, e que são usados com maior frequência pelos projectistas. As estruturas de duas dimensões, como as asnas, bem como as grelhas tridimensionais pertencem a essa categoria. As grelhas tridimensionais têm sido usadas recentemente em vários países devido à sua resistência e eficácia extraordinária às cargas não simétricas.

O argumento mais decisivo em favor da utilização do aço, na construção de naves industriais, é a quase ilimitada possibilidade de adaptação da construção metálica às modificações necessárias para a inovação do sistema produtivo ou do equipamento técnico. Poderá-se dizer que com outros sistemas construtivos também se pode alargar uma nave à posterior. No entanto amplificar uma

construção em largura ou em altura utilizando o material pré-existente, cobrir com uma cobertura nova uma estrutura já existente, introduzir ulteriormente gruas ou outros sistemas de transporte, etc., tudo isso só é possível realizar com estruturas metálicas.

Menos numerosas mas com mais interesse para a opinião pública, e com mais possibilidades de composição, são as naves destinadas à cobertura de pavilhões desportivos, de espectáculos ou salas de congressos. A Dortmunder Westfalenhalle, construída no período de 1950 a 1952, tem uma planta elíptica de 118x98 m e está coberta com uma abóbada de pequena curvatura, quase elíptica. Os arcos de meridianos de alma cheia aumentam consideravelmente de ângulo ao se aproximar dos apoios, e arrancam da tribuna de 2 pisos. A tribuna com o seu perfil curvo, harmoniza muito bem com a extraordinária abóbada. Os elementos de alma cheia tem um prolongamento em consola perto das articulações, que permite ancorar estes com barras de tracção. As forças nesta estrutura são transmitidas fundamentalmente através de uma série de arcos radiais (fig. 1.2-14).

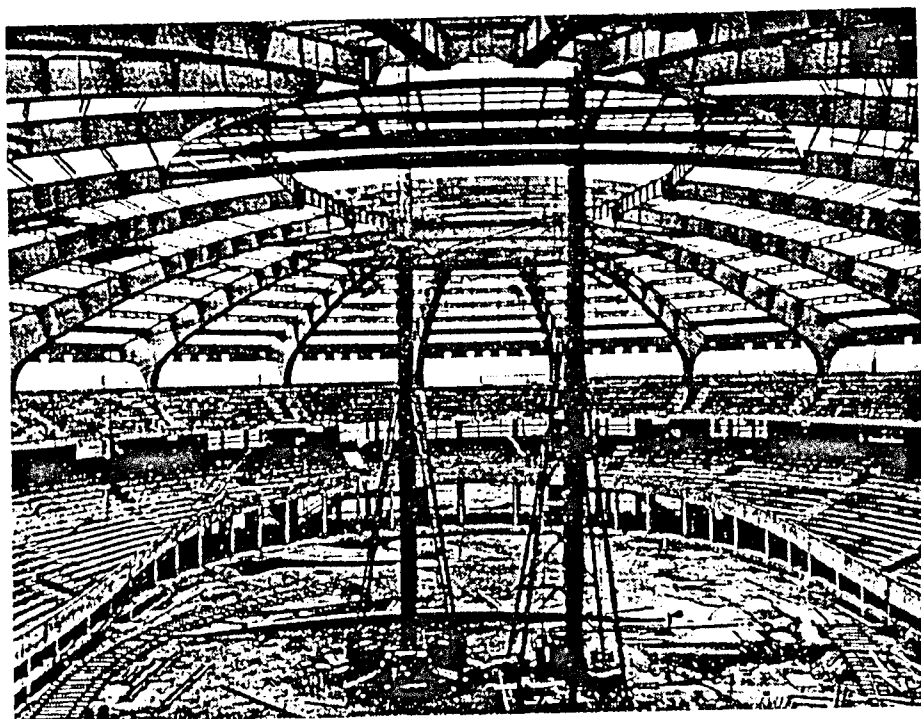


Fig. 1.2-14 Dortmund Westfalenhalle (1951)

A Sala de Exposições construída em 1950, pelo Engenheiro F. Lederer, na cidade de Brünn, é composta por uma cúpula laminar tridimensional, constituindo um segmento esférico com um diâmetro inferior de 93,5 m e uma flecha de 18 m, a cobrir uma base maciça de três pisos. A cúpula é constituída por uma trama triangular de tubos de aço. As dificuldades surgidas na adaptação geométrica, e nas uniões, foram solucionadas com os tubos paralelos e diagonais colocados em planos distintos, sendo estes últimos constituídos por dois perfis, sendo um mais largo que o outro, como os telescópios, que foram provisoriamente aparafusados nos nós e posteriormente soldados após o ajuste exacto das peças.

O sistema Mero, muito conhecido na Alemanha, é um bom exemplo de tentar juntar a pré-fabricação de elementos normalizados com a eficiência das malhas espaciais. O sistema Mero consiste na utilização de tubos com três comprimentos diferentes que são enroscados entre si com a ajuda de nós especiais, a que se podem acoplar barras até ao número máximo de dezoito, de modo a formar uma trama com forma de placa, que se apoia em pontos do perímetro ou em pontos interiores, e que devido ao pequeno peso próprio que têm, permitem a cobertura de grandes áreas. O vestibulo do Pavilhão de Salzgitter na feira de Hanover é um exemplo da aplicação deste sistema, onde uma superfície de uns 7 x 7 m está coberta por uma armação tridimensional de barras Mero, com nós cromados (fig. 1.2-15). Sobre cada quadrado da retícula (aproximadamente de 1 x 1 m) está colocada uma pirâmide de cristal armado (fig. 1.2-16).

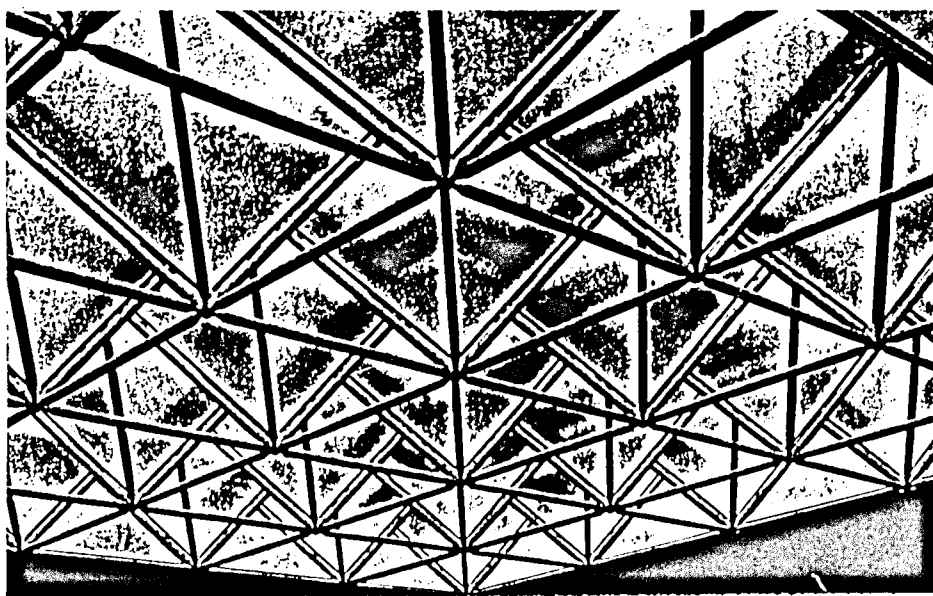


Fig. 1.2-15 Cobertura do vestibulo do Pavilhão de Salzgitter

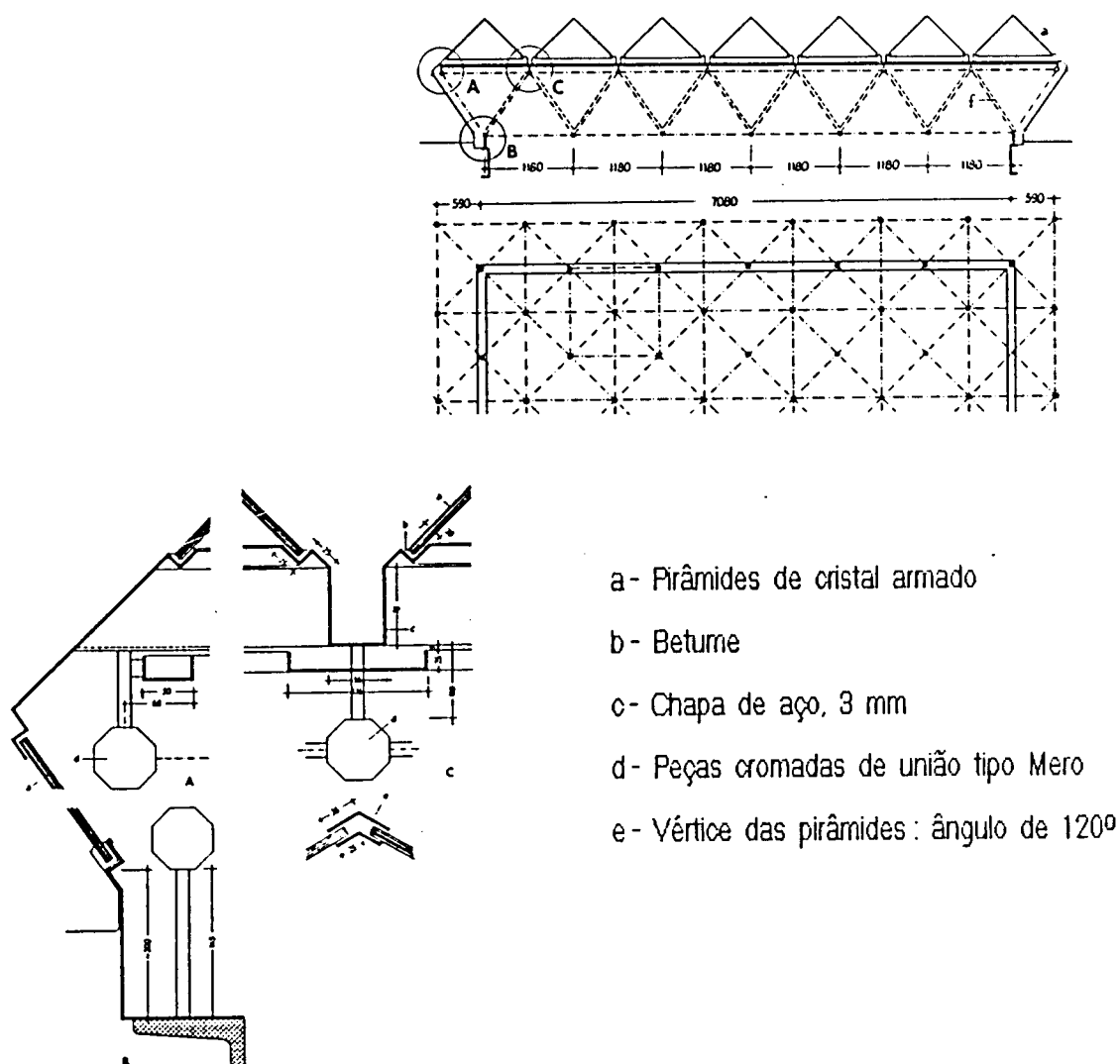


Fig. 1.2-16 Desenho de parte da planta e da secção vertical da cobertura do Pavilhão de Salzgitte, bem como pormenores da mesma

Com os elementos construtivos Mero podem-se construir também armaduras e pórticos espaciais, sendo a sala de exposições na República Federal Alemã em Kartem (Sudão) um exemplo disso. Além do mais, os elementos construtivos Mero permitem facilmente a sua utilização noutro local.

Nos Estados Unidos, desenvolveu-se um sistema muito similar ao de Mero, com barras de perfil em U ("Unistrut"). O grandioso projecto para o "Convention Hall" em Chicago (1953), de Mies van der Rohe, baseava-se numa estrutura espacial parecida. O projecto de Mies consistia numa sala quadrada com 200 m de lado destinada a várias utilizações - exposições, manifestações desportivas,

congressos, etc. - , oferecendo 50.000 lugares sentados, e em que a cobertura se apoiaria em seis pilares de cada lado do quadrado ( fig. 1.2-17 ).

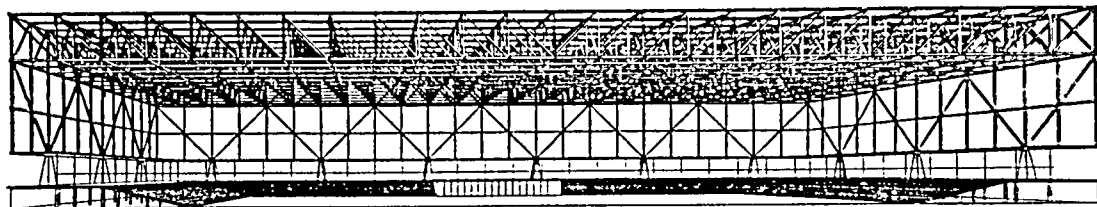
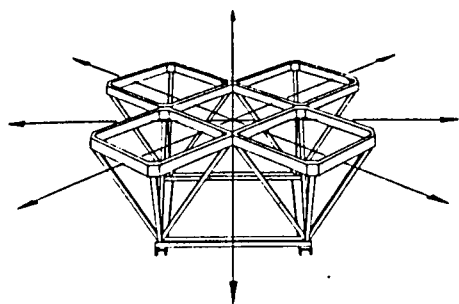
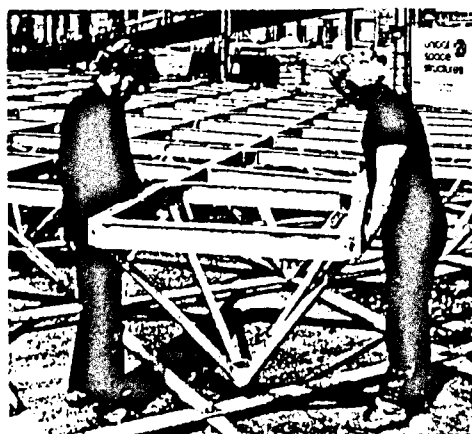


Fig. 1.2-17 "Convention Hall" - Chicago ( 1953 ) - , projectada por Mies van der Rohe

Outro sistema similar de construção modular em aço é o sistema "Unibat". Este sistema explora as propriedades geométricas de uma união particular de pirâmides, de base quadrada ou poligonal. As pirâmides "Unibat" apontam em seu favor o facto de serem leves, empilháveis, tornando o seu transporte económico, e facilitando o seu stock e trabalho em obra. Este sistema permite a construção de estruturas de grande porte. As suas ligações fazem-se no estaleiro por aperto de parafusos, permitindo a leveza e a rigidez da estrutura que a montagem desta se faça no solo e só posteriormente seja levantada e colocada no seu lugar final ( fig. 1.2-18 e fig. 1.2-19 ).



a)



b)

Fig. 1.2-18 Sistema "Unibat": a) Desenho com o esquema do sistema

b) Montagem de uma estrutura pequena, tipo "Unibat"

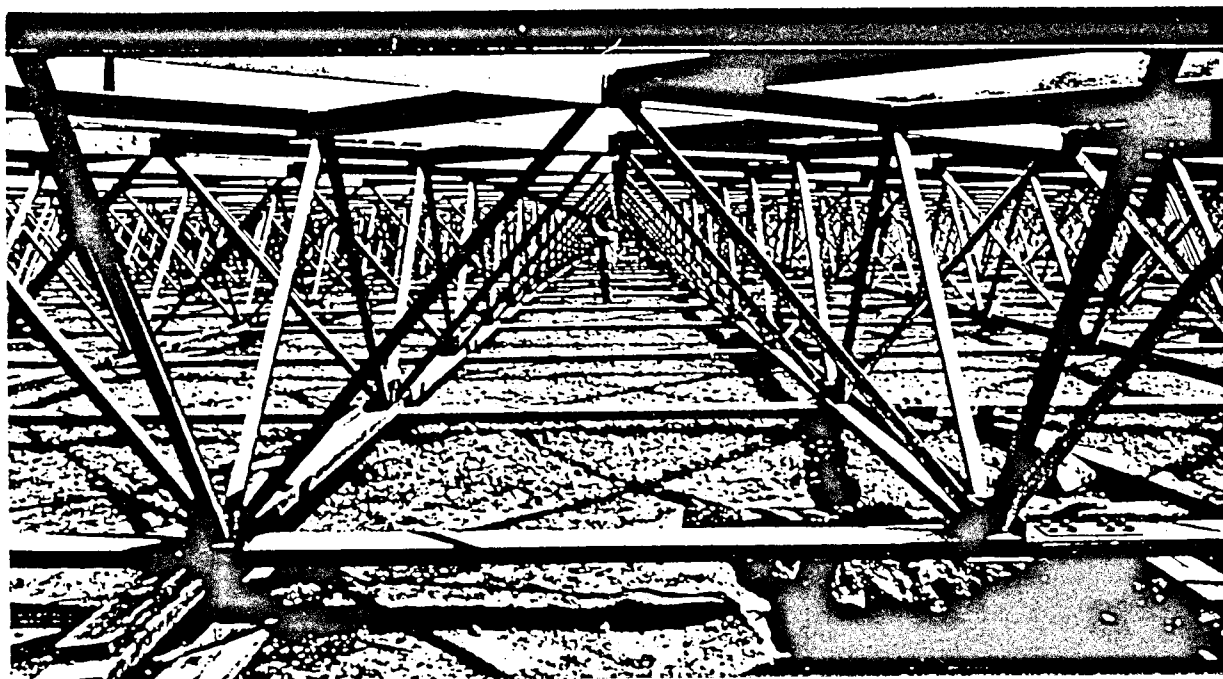


Fig. 1.2-19 Montagem de uma estrutura grande, tipo "Unibat"

Ainda no campo das estruturas espaciais com módulos formados por uma pirâmide de base quadrada, a estrutura tipo "GeoSpace" permite ir de pequenos módulos até grandes vãos, com intercolúnio de até 60 m. Os elementos que constituem este sistema de estrutura são tubos de alumínio na liga ASTM 6351-T6, e elementos monofíticos nos nós, produzidos a partir de perfis de alumínio na liga ASTM 6351-T6 ou aço SAE 1040, galvanizados a fogo e pintados com resina EPOXI em cores. As ligações são efectuadas com parafusos, porcas e arruelas de pressão galvanizadas a fogo em aço 1020/1040.

O perfil em tubo, devido ao seu melhor comportamento aos esforços de compressão, à sua melhor rigidez à torção e facilidade de protecção contra a corrosão, em comparação aos restantes perfis - L, I, U -, adapta-se muito às construções espaciais, permitindo também uma certa redução do peso próprio da estrutura.

Na Feira de Hanover, para satisfazer todas as necessidades dos locais de exposições e ter as instalações auxiliares correspondentes, foi construído o Pavilhão Mannesmann que deveria, para além disso, ser uma demonstração das aplicações das estruturas de tubo de aço (fig. 1.2- 20).

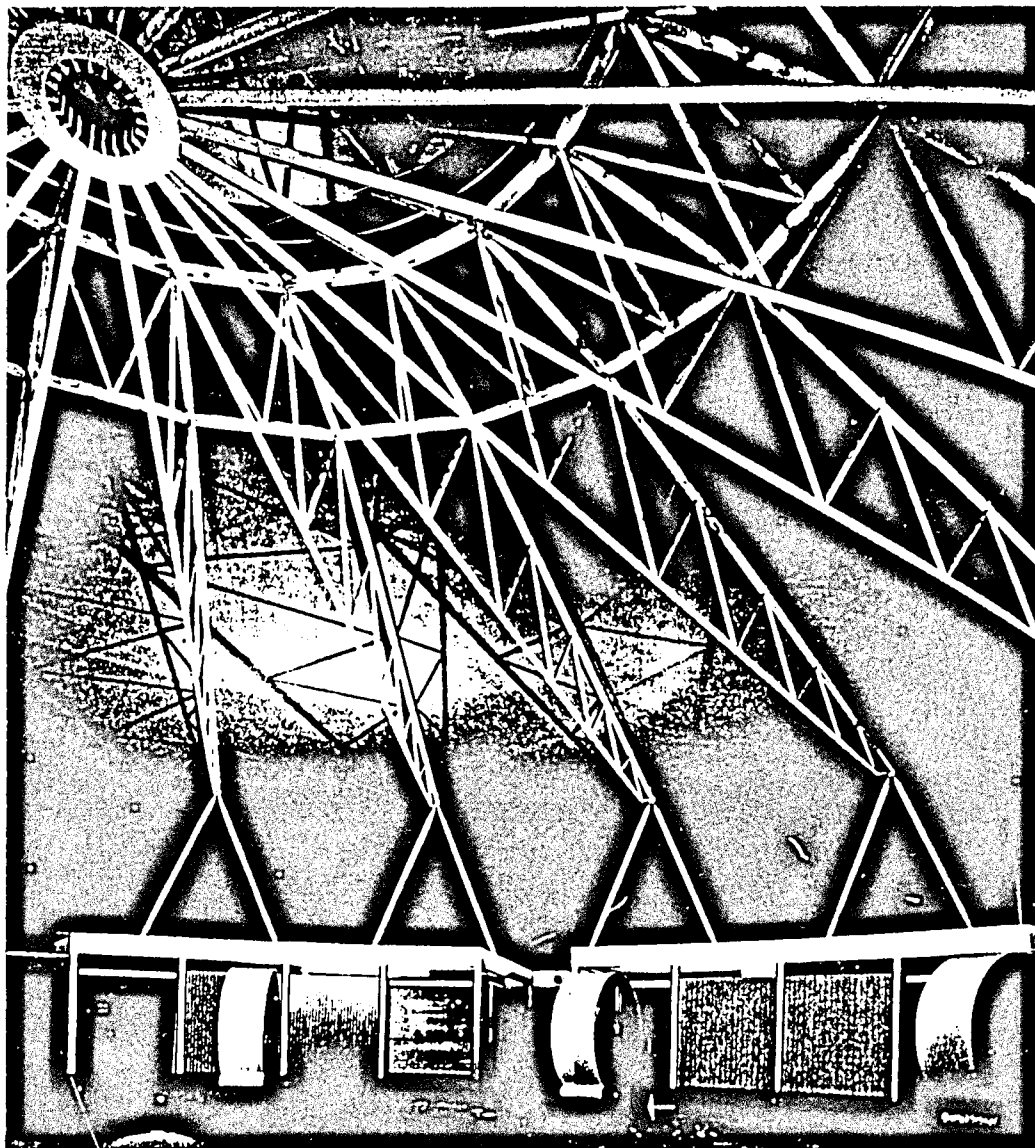


Fig. 1.2-20 Pavilhão Mannesmann na Feira de Hanover

Este Pavilhão cobre uma superfície de  $1960 \text{ m}^2$ , e a sua estrutura é composta por semi-asnas radiais, formadas à base de tubos soldados, assentes em apoios oblíquos no perímetro que delimita a cobertura (fig. 1.2-21). Os extremos dos apoios oblíquos diminuem, e apoiam-se em articulações de bola. Apesar da carga que actua sobre eles, estes apoios podem girar sobre si mesmos (fig. 1.2-22).

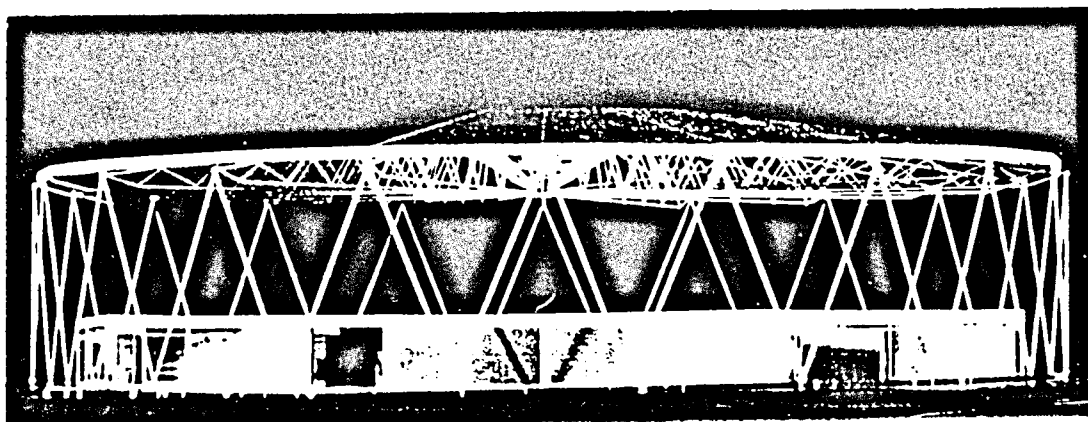
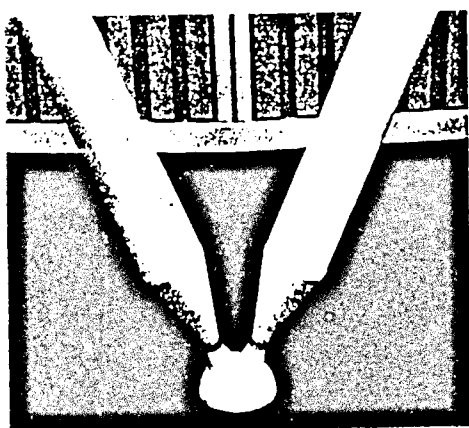
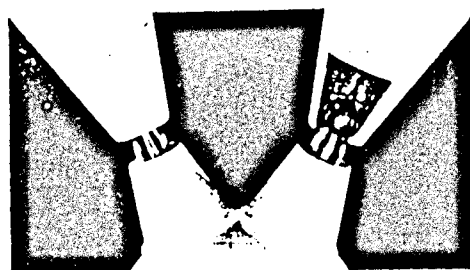


Fig. 1.2-21 Pavilhão Mannesmann na Feira de Hanover

Os banzos inferiores das asnas chegam ao centro do local, enquanto os banzos superiores são unidos a uma viga anelar de 10 m de diâmetro. A altura máxima é de 12,80 m e a altura no beiral é de 9,50 m. No banzo superior foram empregues tubos de 159 mm de diâmetro, e no banzo inferior tubos de 108 mm de diâmetro. Os dois banzos estão ligados por diagonais de 89 mm. O diâmetro dos apoios é de 171 mm.



a)



b)

Fig. 1.2-22 Pavilhão Mannesmann: a) Apoios oblíquos no perímetro da cobertura

b) Pormenor das articulações de bola

A Aula Magna da E. T. S. de Stuttgart, é um bom exemplo da utilização das estruturas em aço pré-fabricadas. Devido à necessidade de construir um complexo pré-fabricado que se possa desmontar para tornar a montar noutro local, e assim voltar-lhe a dar nova utilização, criou-se para esta instituição, um edifício construído com uma estrutura metálica tubular (fig. 1.2-23).

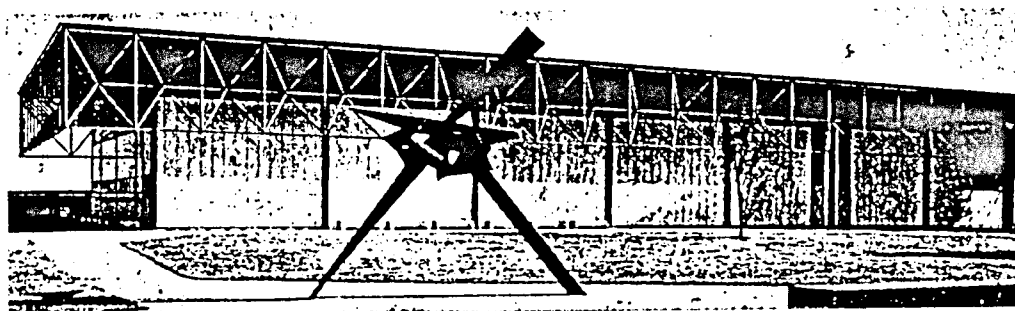
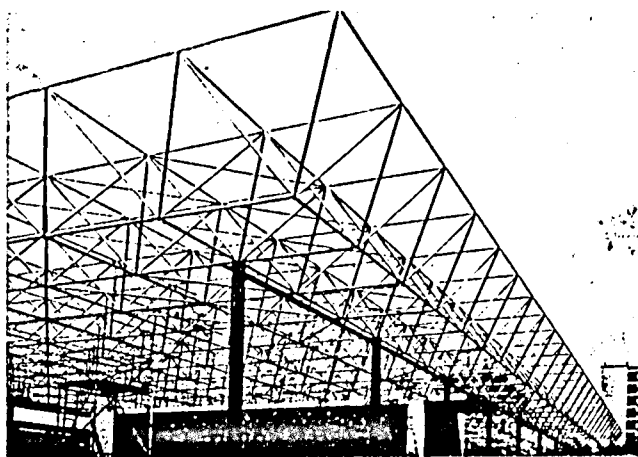
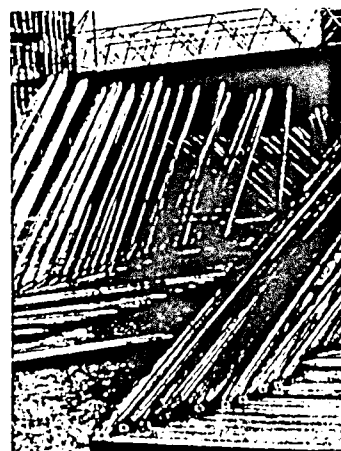


Fig. 1.2-23 Aula Magna da E. T. S. de Stuttgart

Composta de tetraedros e semiocetaedros sobre um retículo de 2,5 m de módulo, esta estrutura da Aula Magna da E.T. S. cobre uma superfície livre de 22,5x35 m e 22,5x20 m, respectivamente. As placas utilizadas na cobertura assentam em terças em U, aparafusadas nos nós da estrutura tubular (fig. 1.2-24).

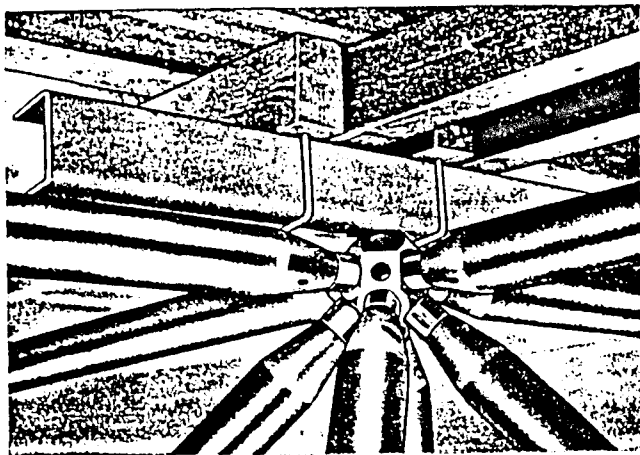


a)



b)

Fig. 1.2-24 Aula Magna da E. T. S.: a) Fase de montagem; b) Preparação das barras para a montagem; (continua na página seguinte)



c)

Fig. 1.2-24 Aula Magna da E. T. S. (continuação): c) Pormenor de ligação das placas de cobertura

Construído dentro da mesma filosofia de ser uma solução apropriada para se utilizar de novo numa outra exposição, o complexo que reunia o sector "Industria y Manufacturas" da Feira Suíça Expo 1964, era constituído por estruturas triangulares, formadas por elementos tubulares, atingindo as armaduras comprimentos de 20 a 60 m (fig. 1.2-25).

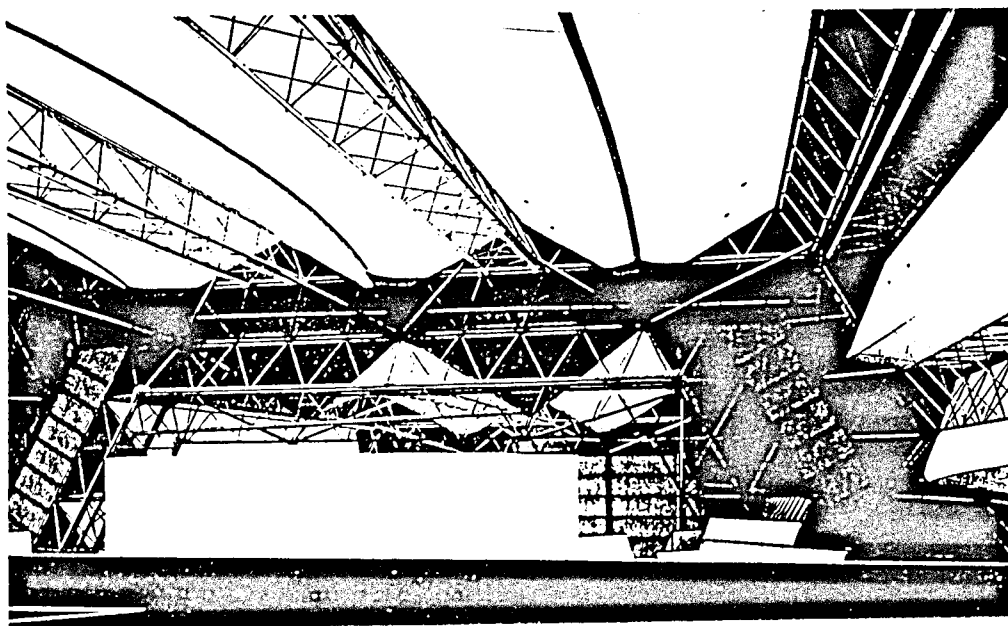


Fig. 1.2-25 Construção de aço visível do interior do sector "Industria y Manufacturas", na Feira Suíça Expo 1964

A fábrica de maquinaria de Friedrich Deckel, em Munique, é um edifício que se enquadra no tipo de ampliações de fábricas sobre elementos pré-existent. Devido à necessidade de criar um espaço útil coberto de grande flexibilidade funcional, construiu-se uma grande nave de 60 m, livre de pilares, com uma cobertura constituída por uma armadura espacial de tubos de aço. A nave foi construída sobre um edifício de betão armado, que agrupa os armazéns de material (fig. 1.2-26).

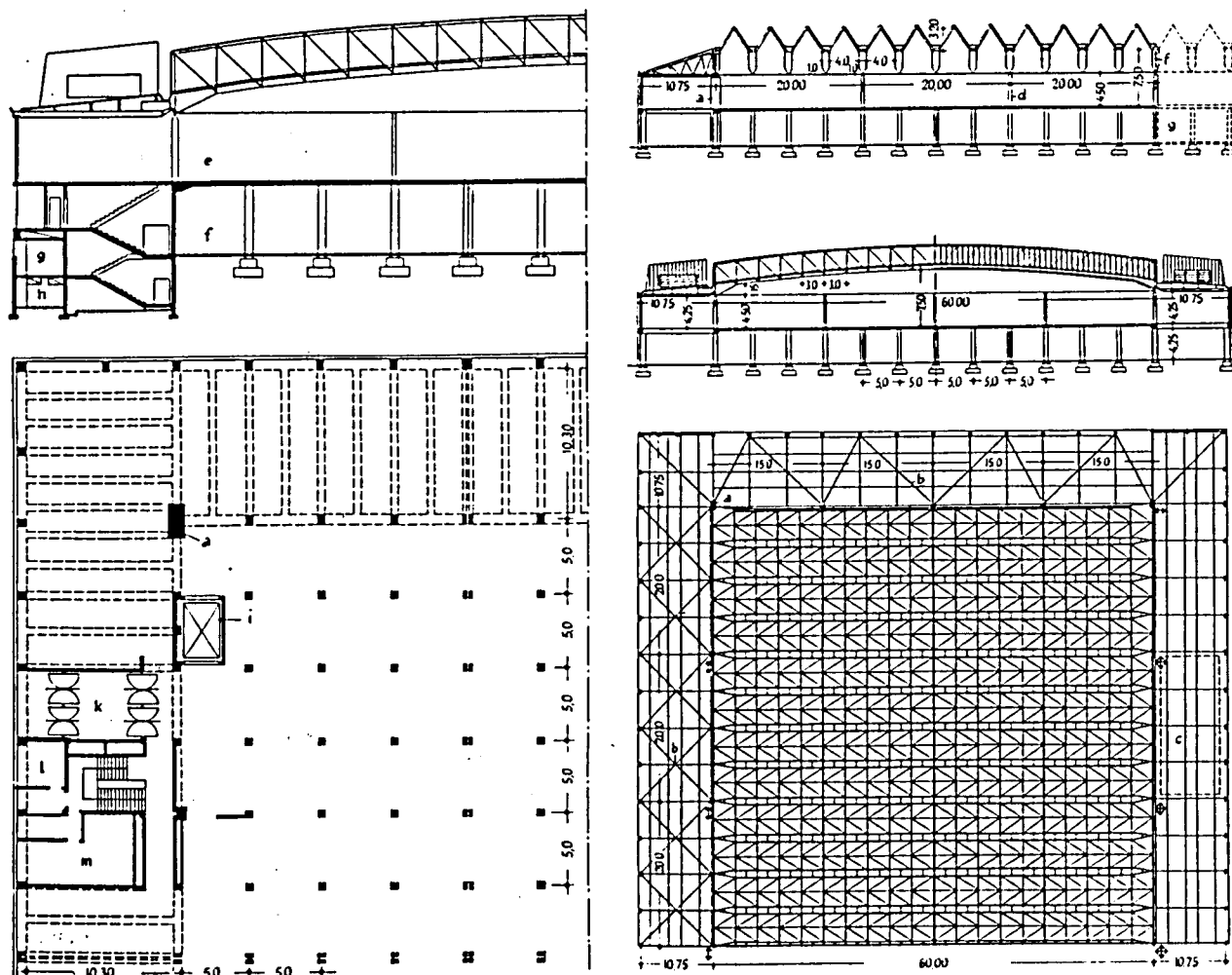


Fig. 1.2-26 Desenho de uma parte da planta do piso inferior e de um corte transversal à escala 1/500, bem como um corte longitudinal, um corte transversal e a planta da cobertura à escala 1/1000, da fábrica de maquinaria Friedrich Deckel

A cobertura da nave é formada por grandes vigas espaciais, com 5 m de distância entre os seus eixos, que transmitem as cargas da cobertura a umas vigas longitudinais trianguladas, ou de

alma cheia, permitindo diminuir o número de pilares, havendo assim um apoio em cada 20 m. O banzo superior das vigas trianguladas longitudinais sobressai por cima da cobertura (fig. 1.2-27).

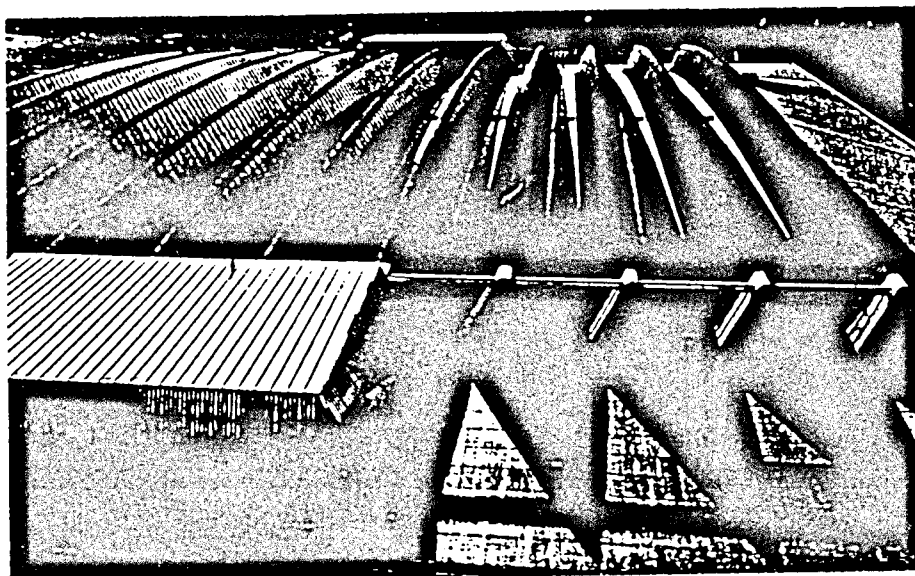


Fig. 1.2-27 Cobertura da fábrica de maquinaria Friedrich Deckel

À armação de aço da cobertura foi atribuída uma flecha de arco de 3 m, para que o espaço que ela configura não desse a sensação de abatimento sob o peso ou carga, bem como para garantir um bom escoamento das águas pluviais e satisfazer motivos arquitectónicos (fig. 1.2-28).



Fig. 1.2-28 Interior da nave de 60 m de vão, da fábrica de maquinaria de Friedrich Deckel

Para terminar esta apresentação de estruturas metálicas e sua composição faz-se referência a duas grandes obras modernas, realizadas na sua maior parte por uma estrutura espacial de aço revestida em vidro.

A primeira dessas grandes obras é a catedral de Garden Grove, na Califórnia, que é apelidada de Catedral de Cristal. É uma enorme nave (maior que a de Notre-Dame de Paris) inteiramente construída em aço e vidro, sobre um plano em losango (fig. 1.2-29).

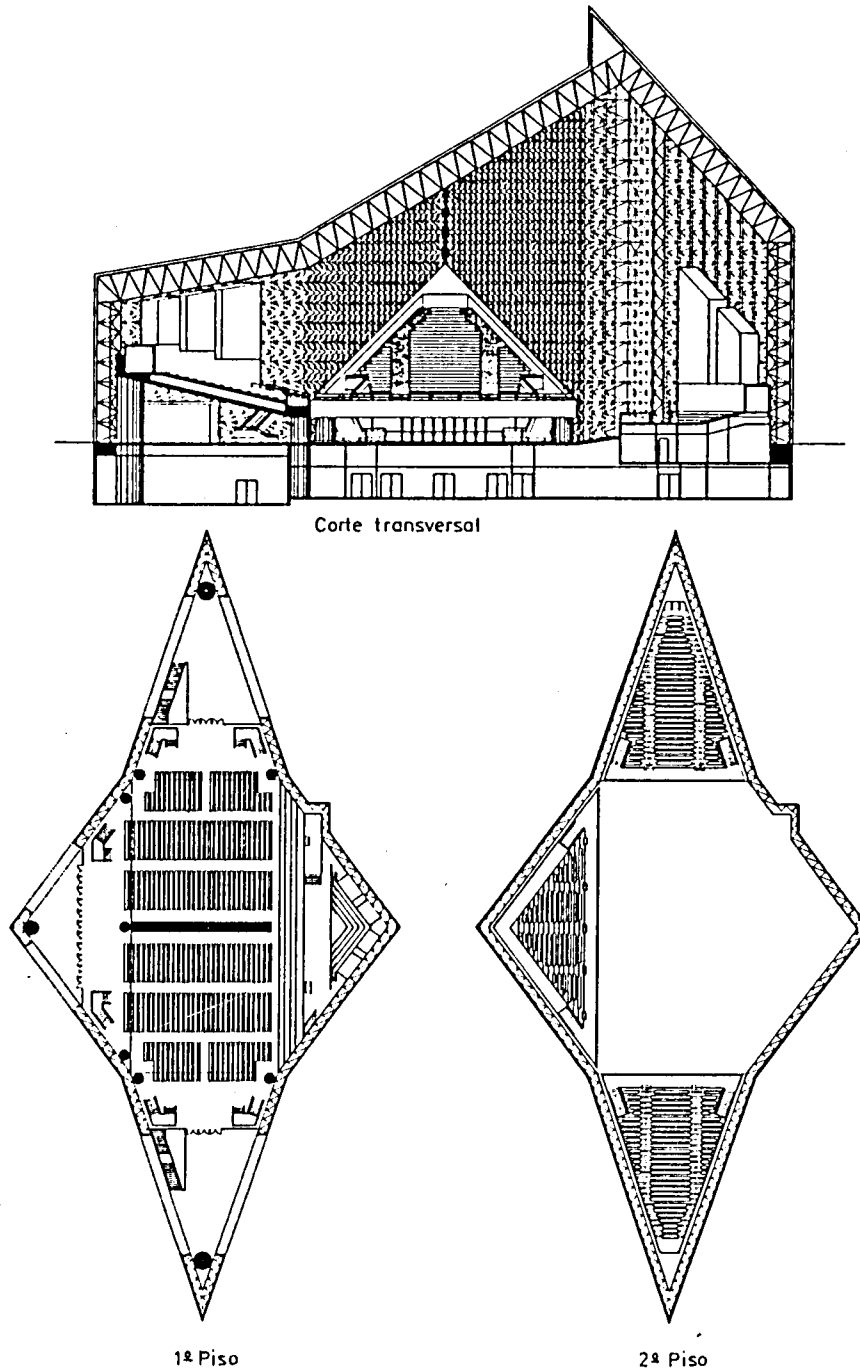


Fig. 1.2-29 Desenho de um corte transversal e das plantas da Catedral de Cristal

A escolha dos materiais e a forma do plano responde à vontade de uma comunidade religiosa, bem como ao contexto de sítio (subúrbios de Los Angeles), a que os arquitectos Philip Johnson e John Burgee quiseram ter em conta. A luminosidade que penetra dificilmente através do vidro colorido e as estruturas espaciais triangulares, dão ao conjunto uma imponência enorme, criando um ambiente sublime, propício ao recolhimento e reflexão espiritual (fig. 1.2-30 e fig. 1.2-31). Esta obra ilustra bem as inúmeras construções, para as mais diversas actividades, que com as estruturas de aço é possível realizar, conseguindo tirar destas o melhor enquadramento e funcionalidade para os objectivos a que estas são destinadas.

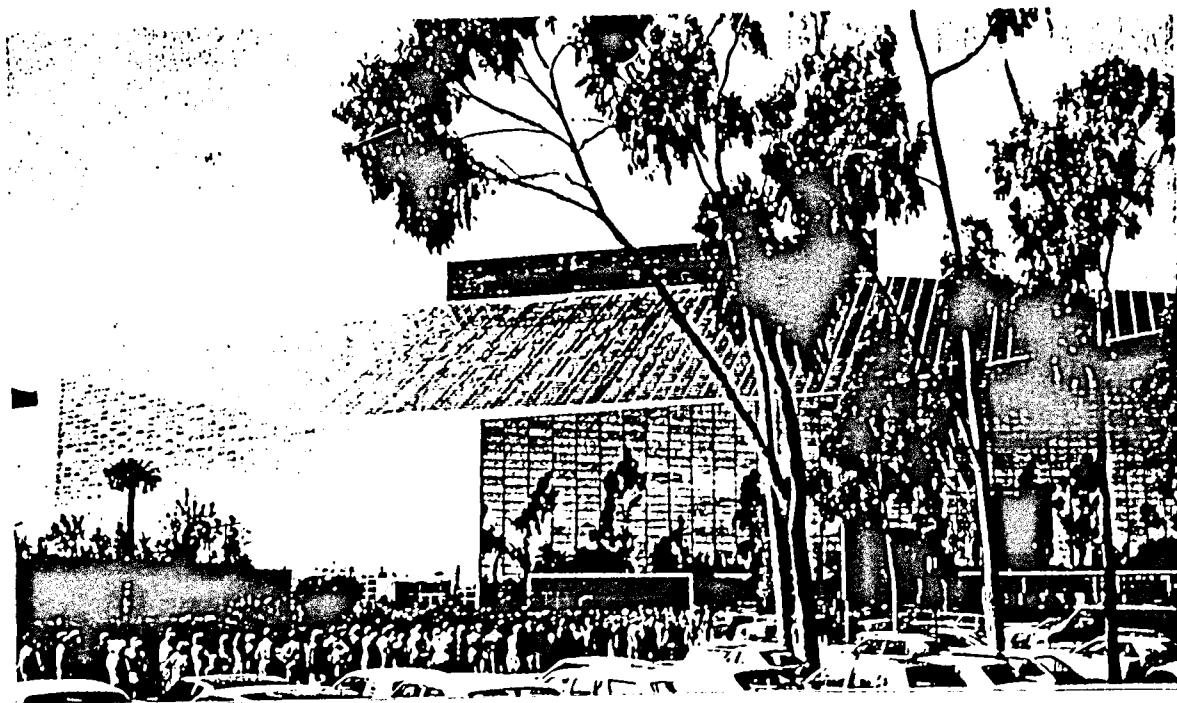


Fig. 1.2-30 Exterior da Catedral de Cristal, de Garden Grove, na Califórnia

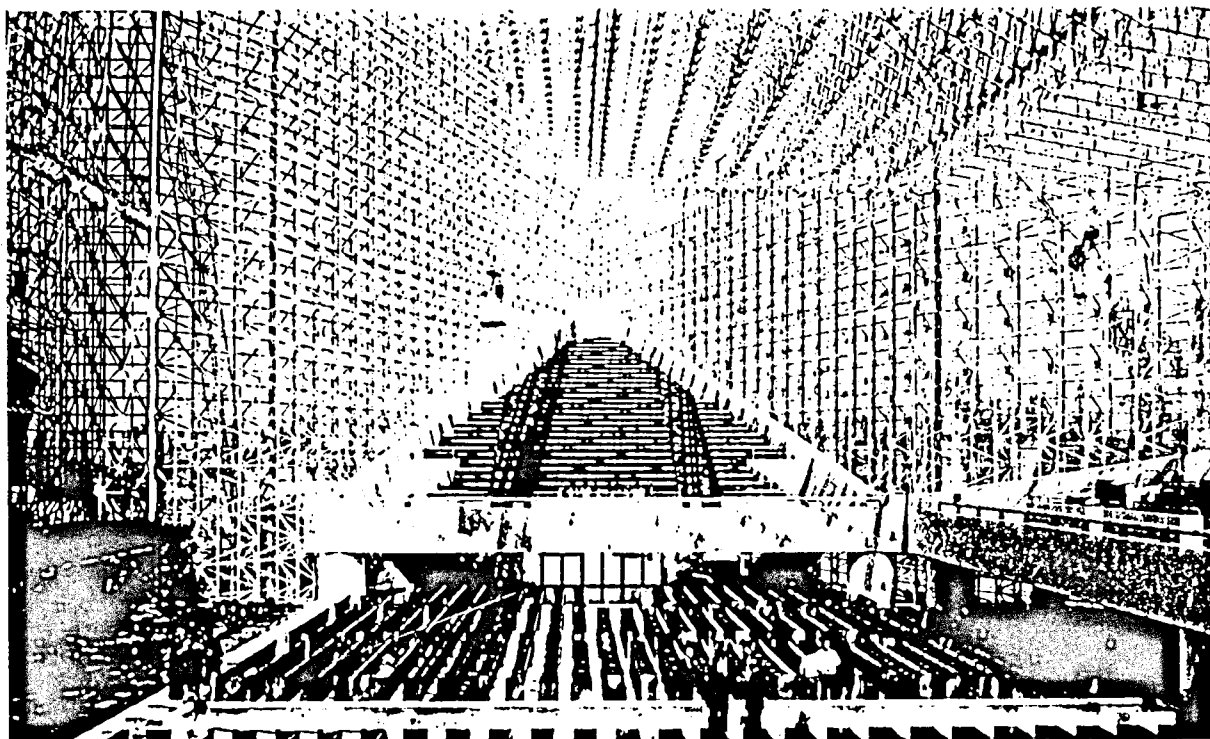


Fig. 1.2-31 Interior da Catedral de Cristal, de Garden Grove, na Califórnia

A segunda obra, que falta referir, é o Palácio de Cristal em Nova Iorque. Projectado por James Ingo Freed, este edifício ocupa uma superfície de 45.000 m<sup>2</sup>, que engloba galerias de exposição, salas de conferência e de reuniões, escritórios da direcção e da administração, cafés, etc., podendo acolher cerca de 85.000 pessoas (fig. 1.2-32).

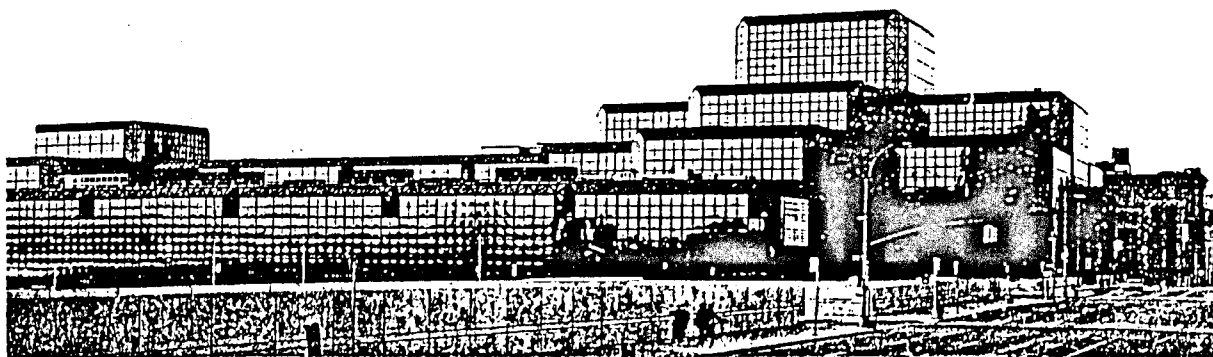


Fig. 1.2-32 Palácio de Cristal em Nova Iorque

Tendo-se inspirado nas construções de ferro e vidro do século XIX, realizadas na Europa, principalmente na do célebre Palácio de Cristal de Paxton já referenciado, James Ingo Freed projectou para Manhattan este gigantesco palácio, onde a transparência e a sofisticação do sistema de circulação são as suas características dominantes.

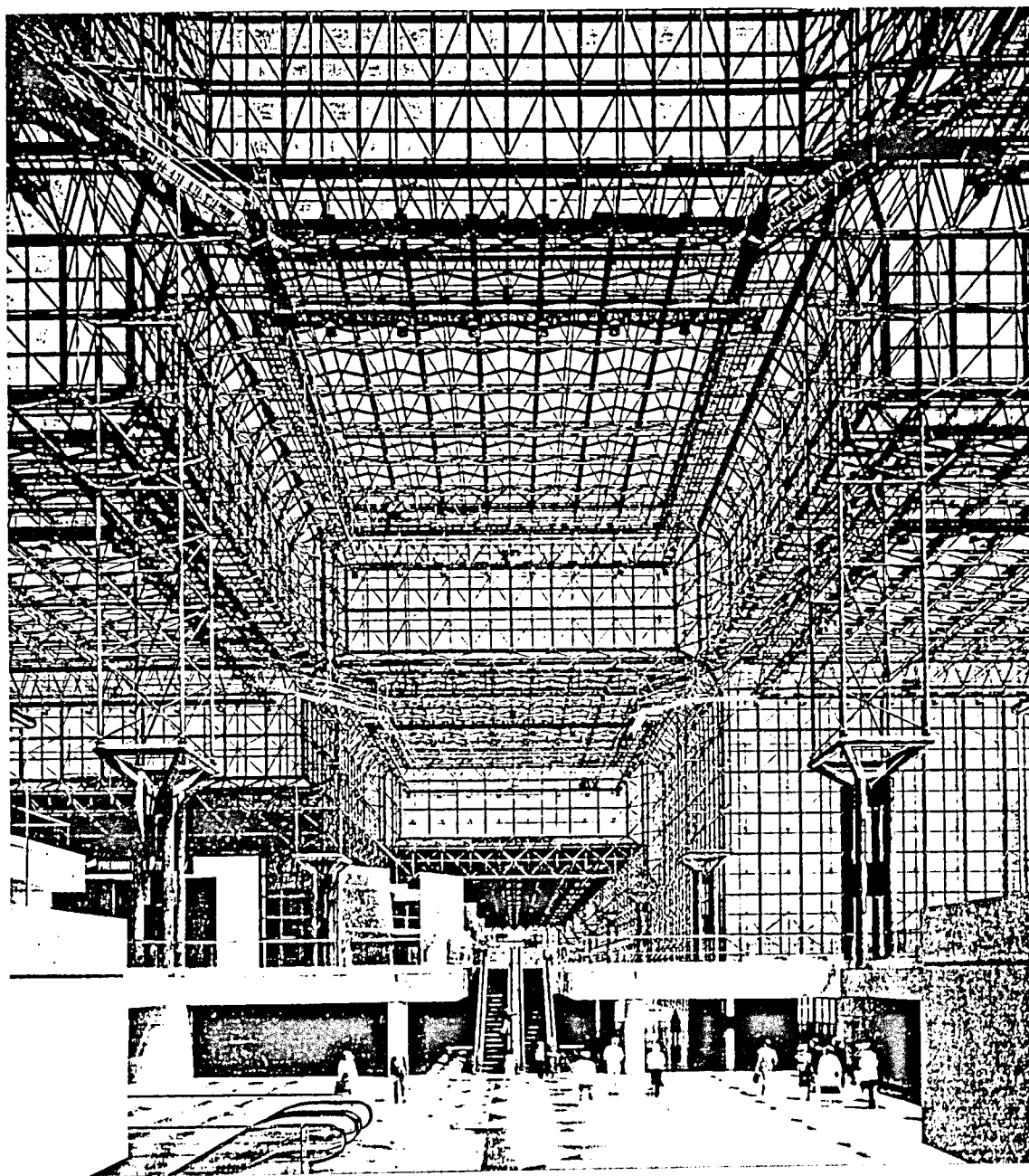


Fig. 1.2-33 Interior do Palácio de Cristal em Nova Iorque

Na construção do Palácio de Cristal foi utilizado o sistema "P. G. Structures Inc.". Comportando a estrutura módulos de 3 m, esta por sua vez, é suportada por colunas tubulares de aço com uma forma que faz lembrar taças de champanhe (fig. 1.2-33).

Um enorme hall central, com 30 m de altura, constitui a entrada para uma série de corredores de circulação, organizados de tal maneira que origina um microcosmo de ruas da cidade. As faces vidradas, quadriculadas pela estrutura metálica, e unidas a esta (fig. 1.2-34), refletem os edifícios ao redor e o céu, de Manhattan, dando uma enorme beleza e qualidade à forma monumental da construção (fig. 1.2-35 e fig. 1.2-36).

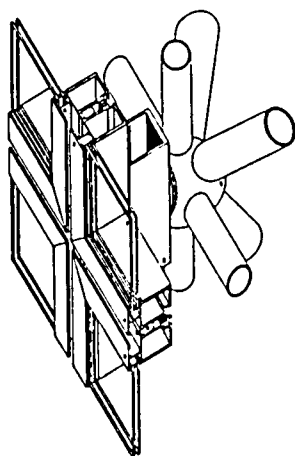


Fig. 1.2-34 Desenho do pormenor de ligação dos painéis de vidro à estrutura

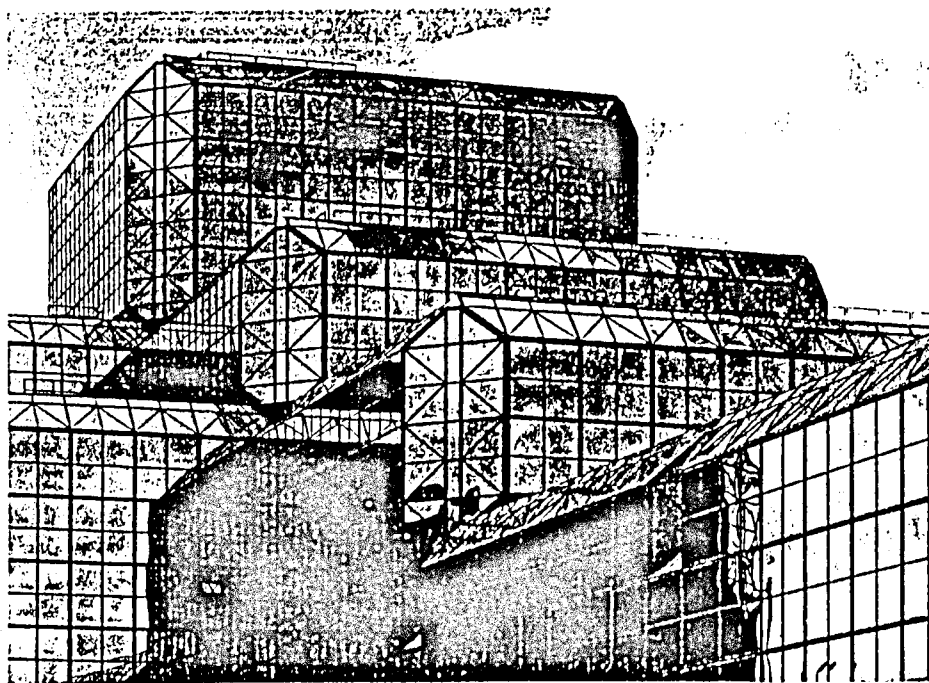


Fig. 1.2-35 Palácio de Cristal em Nova Iorque

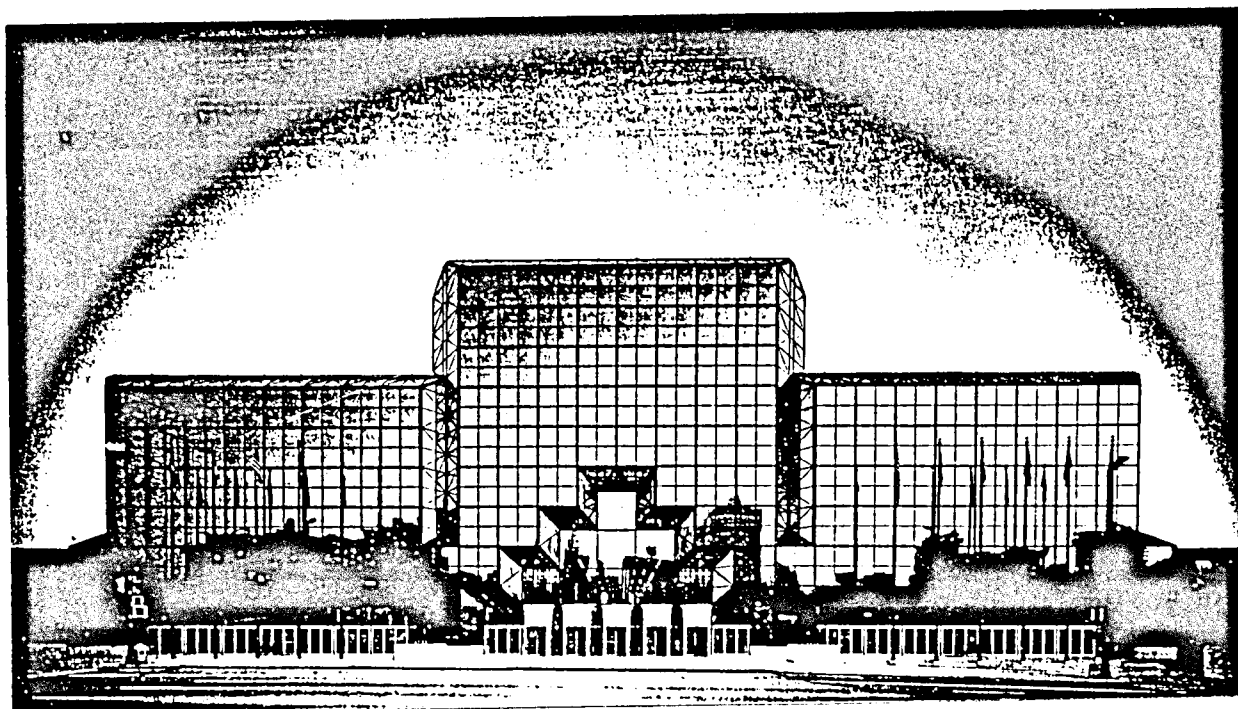


Fig. 1.2-36 Palácio de Cristal em Nova Iorque

### 1.3 - METODOLOGIA

O desenvolvimento da concepção de estruturas metálicas ao longo dos anos, fez com que as configurações das estruturas metálicas espaciais sejam cada vez mais uma matéria actual. A facilidade demonstrada em cobrir grandes áreas, objecto de que se concentrará este estudo, com leveza, com possibilidade de pré-fabricação, standardização, e simplicidade de trabalho em oficina e estaleiro, permitindo a criação de "stocks", rapidez no transporte e montagem, conjuntamente com a economia de mão de obra e a elevada resistência à rotura, fazem com que as estruturas metálicas espaciais permitam resolver com elegância, rapidez e economia, um grande número de problemas arquitectónicos.

A correcta definição de uma estrutura espacial está dependente de uma visão bem clara da sua forma, dos esforços em jogo, do equilíbrio que nela se gera, e do grau de ligação desta aos

apoios. Nesta perspectiva o problema das estruturas espaciais começa na sua definição geométrica. Não é possível individualizar uma só geometria para este ou aquele caso. As estruturas espaciais são de um modo geral superfícies de revolução cilíndrica, parabólica, hiperbólica, e suas derivações, enlaçadas por uma triangulação espacial de barras dispostas adequadamente. Tendo em conta a sua forma e maneira de resistir às forças externas, as estruturas espaciais usadas em coberturas podem-se classificar em coberturas planas, coberturas cilíndricas, cúpulas, coberturas tênséis.

As coberturas planas definem-se como sistemas planos de vigas, em que as cargas que as solicitam são perpendiculares ao plano médio, caracterizando-se pela repartição dos esforços em duas ou mais direcções, podendo estes sistemas ser bidireccionais, tridireccionais, etc., conforme o número de direcções em que se orientam as vigas em planta. Refere-se como exemplo de sistemas bidireccionais, os sistemas rectangulares (fig. 1.3-1) onde as barras são paralelas e cruzam a  $90^\circ$ , e os sistemas diagonais, ou seja, quando as barras são dispostas obliquamente em relação à linha dos apoios (fig. 1.3-2).

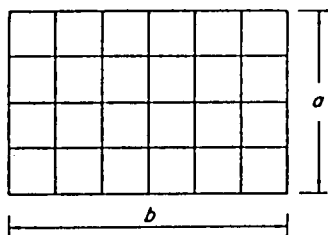


Fig. 1.3-1

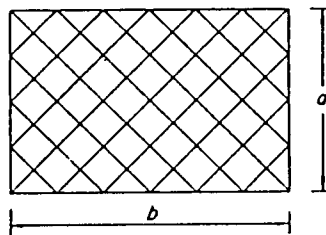


Fig. 1.3-2

De estudos efectuados a estes dois sistemas concluiu-se que o sistema diagonal é mais rígido e favorável devido à orientação das barras coincidirem com as trajectórias das tensões principais, de uma placa isotrópica rectangular solicitada uniformemente.

Na cobertura de grandes áreas normalmente empregam-se sistemas tridireccionais formados por barras que se cruzam a  $60^\circ$ , em três direcções (fig. 1.3-3).

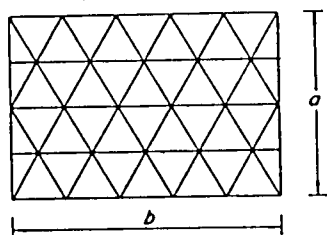


Fig. 1.3-3

Os sistemas planos tridireccionais em comparação com os sistemas planos bidireccionais são mais rígidos, sendo também mais pequenos os valores máximos dos momentos flectores.

Estes sistemas planos permitem realizar coberturas para uma planta com qualquer forma (quadrada, rectangular, circular, etc.). Na sua construção podem ser empregues vigas de alma cheia (raramente aplicadas em grandes coberturas), ou vigas trianguladas. Na construção das estruturas planas é ainda empregue um sistema de reunião espacial de unidades poliedrais, onde as formas mais utilizadas são as derivadas do sistema cúbico, tais como, tetraedros, octaedros piramidais, torsos de meio octaedro, prismas cúbicos, prismas triangulares, etc., fazendo-se a representação de alguns destes poliedros na figura 1.3-4.

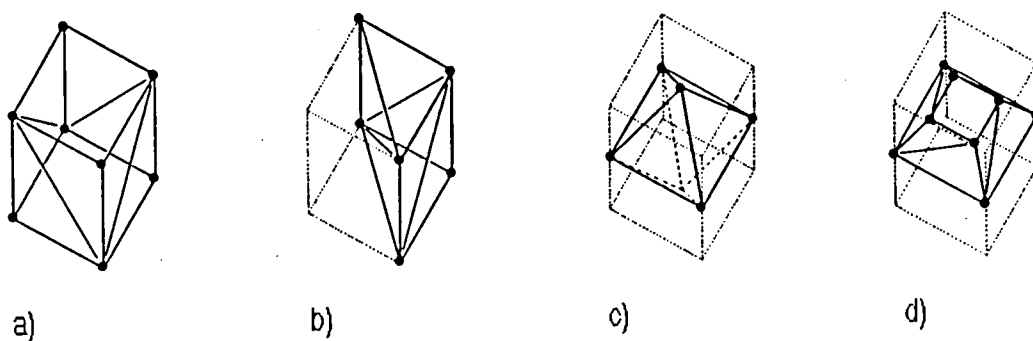


Fig 1.3-4 a) prisma cúbico ; b) prisma triangular ; c) octaedro ; d) torso de meio octaedro ; (continua na página seguinte)

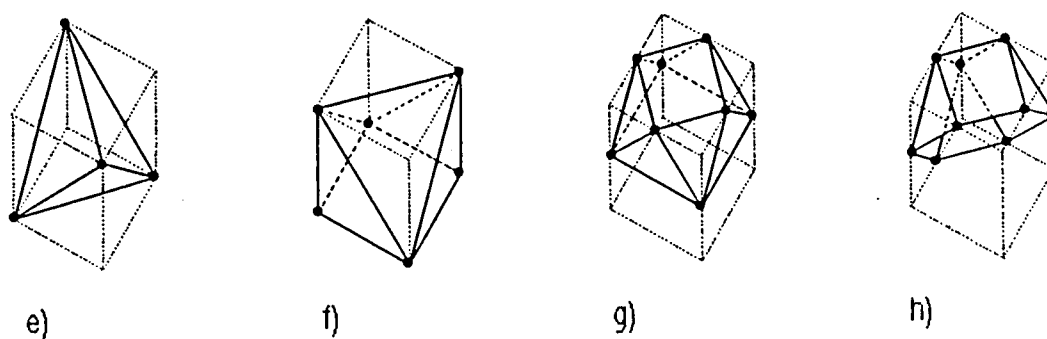


Fig 1.3-4 (continuação); e) tetraedro ; f) "anti-sphenoid" ; g) meio octaedro cúbico ;  
h) meio octaedro cúbico

O prisma cúbico e o prisma triangular representados na figura 1.3-4 apresentam barras diagonais, em quatro das suas faces no caso do prisma cúbico, e em três das suas faces no caso do prisma triangular. Este acréscimo de barras é necessário ser realizado, pois como é evidente, só assim é que estas formas se tornam estáveis. Formas tais como o octaedro piramidal e o tetraedro são constituídas elas mesmo de unidades estáveis, não se verificando assim a necessidade de introdução de barras estabilizadoras.

Nestes sistemas as unidades são ligadas na face superior e na face inferior nos seus nós, formando um conjunto de poliedros, ou melhor dizendo, uma malha tridimensional. As barras utilizadas na ligação dos nós são geralmente diagonais, podendo no entanto, nos casos em que os nós de duas unidades estão exactamente um em cima do outro, os nós serem ligados por esteios verticais.

Existem infinitas variações de formas de coberturas planas, bem como muitas maneiras de união das barras e dos nós da face superior e da face inferior, quando forma um conjunto tridimensional. As malhas tridimensionais, atendendo à disposição de ligação dos nós na face superior e na face inferior, podem-se dividir em dois grupos. O primeiro grupo abrange aqueles sistemas em que as grelhas formadas na face superior e na face inferior são idênticas, e estão uma em cima da outra directamente. Este grupo é apelidado de "Direct Grids", do qual estão representados alguns exemplos na figura 1.3-5.

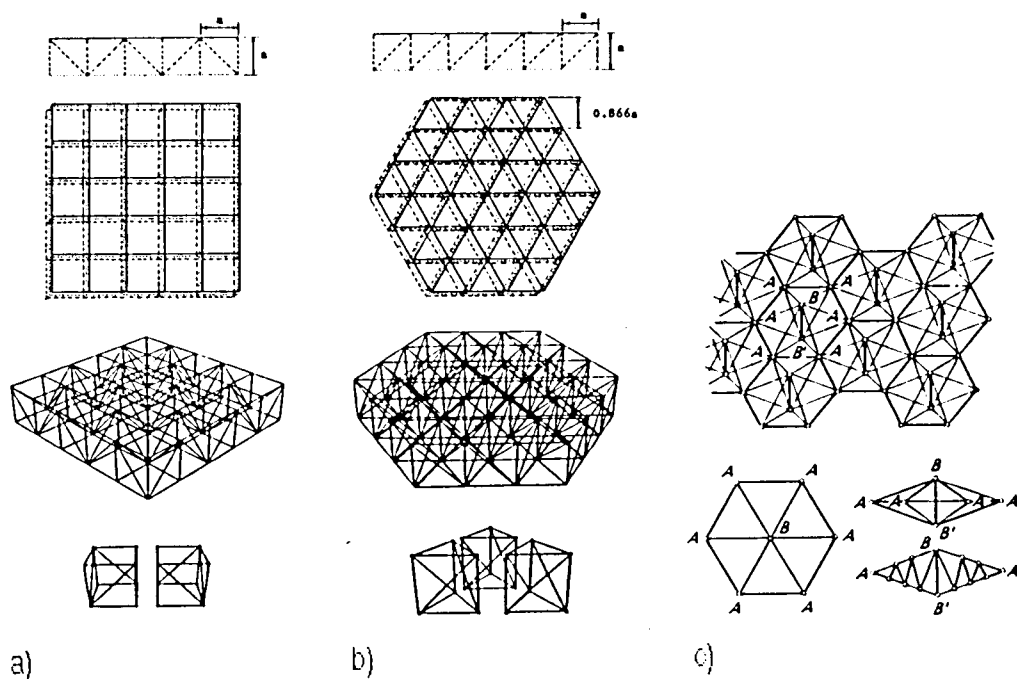
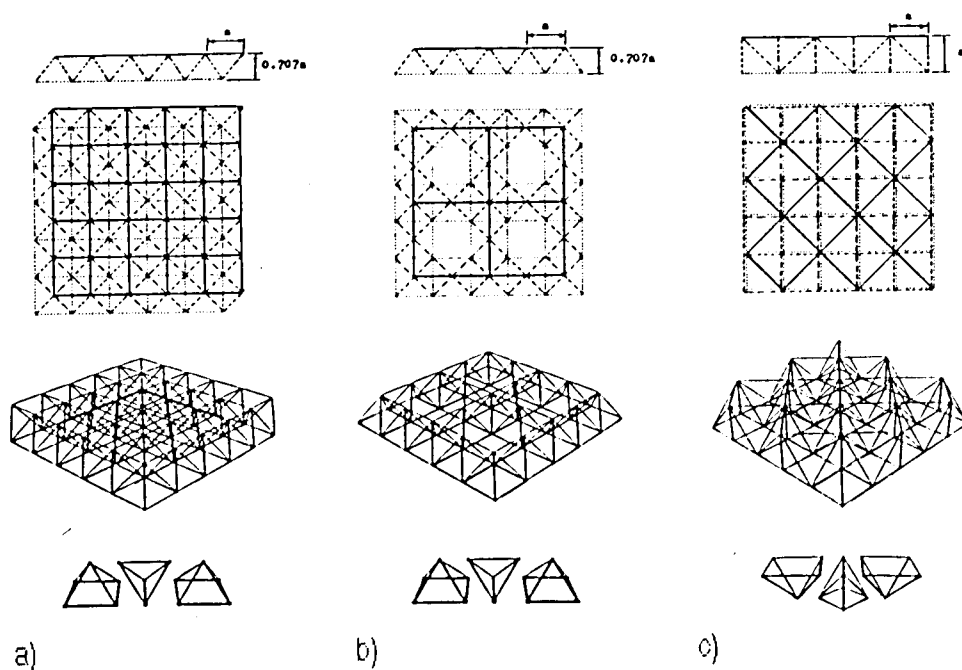


Fig. 1.3-5 a) grelha bidireccional quadrada, formada por prismas cúbicos ;

b) grelha tridireccional triangular, formada por prismas triangulares ;

c) grelha tridimensional hexagonal tipo "Lindsay"

O segundo grupo abrange os restantes casos e é apelidado de "Space Grids", estando representados alguns exemplos na figura 1.3-6.



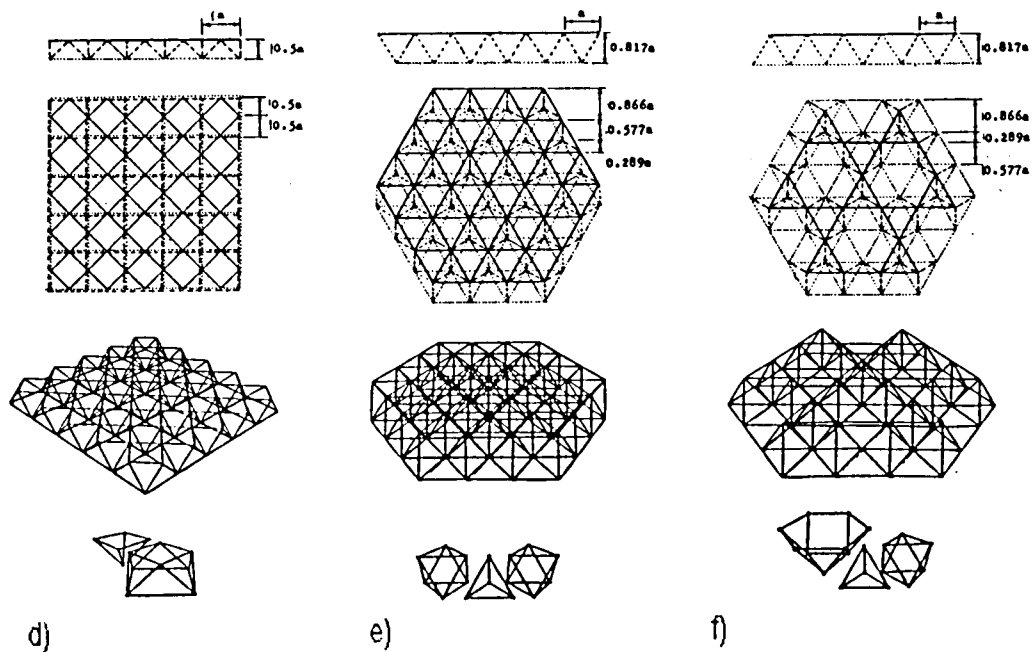


Fig. 1.3-6 a) grelha bidireccional quadrada, com a face superior idêntica à face inferior, mas equiparando no que diz respeito a um quadrado em cima do outro, produziu-se uma translação oblíqua, sendo a estrutura formada por tetraedros e meios octaedros piramidais;

b) grelha bidireccional quadrada, com a face superior idêntica à face inferior, mas onde modificações tais como, aberturas na face superior e na face inferior formadas pelo processo de eliminação, resultam em grelhas quadradas em cima de grelhas quadradas maiores; a estrutura é formada por meios octaedros piramidais, tetraedros e torsos de meio octaedro;

c) grelha bidireccional quadrada, com a face superior diferente da face inferior, sendo a face superior constituída por uma grelha quadrada diagonal, e a face inferior constituída por uma grelha quadrada menor; a estrutura é formada por meios octaedros e "anti-sphenoid";

d) grelha bidireccional, com as faces superior e inferior diferentes, constituídas por uma grelha quadrada diagonal em cima de uma grelha quadrada maior; a estrutura é formada por meios octaedros cúbicos e meios octaedros piramidais;

e) grelha tridireccional triangular, onde ambas as faces são constituídas por grelhas triangulares equivalentes, tendo sido a face inferior gerada por uma translação oblíqua; a estrutura é formada por octaedros piramidais e tetraedros;

f) grelha tridireccional, com modificações, tais como aberturas nas grelhas da face superior e inferior, resultando a combinação de uma grelha triangular e hexagonal, em cima de uma grelha triangular; a estrutura é formada por meios octaedros cúbicos, tetraedros, e octaedros triangulares

Como já foi referido, existe um grande número de variações das formas para coberturas planas, bem como de unidades poliedrais. Tendo sido apresentadas já algumas unidades poliedrais e formas de coberturas, há no entanto ainda que referir um tipo bastante usado, que é o tipo hexagonal, do qual se apresenta a representação de dois exemplos na figura 1.3-7.

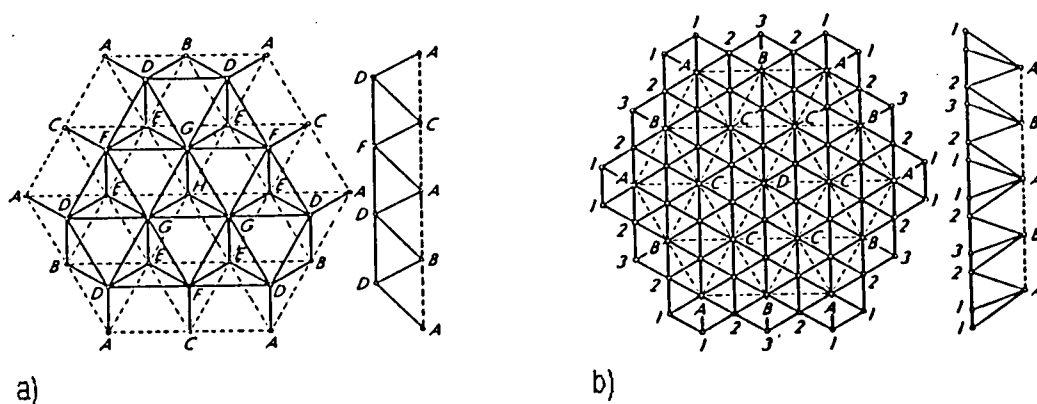


Fig. 1.3-7 a) sistema tridimensional hexagonal, onde a face superior é triangular, e a face inferior é diagonal;

b) sistema tridimensional hexagonal, com a face inferior em diagonal

Destes tipos hexagonais, o tipo mais rígido é aquele que é formado por pirâmides de base hexagonal, e cujas cúspides são unidas com barras dispostas triangularmente (fig. 1.3-8).

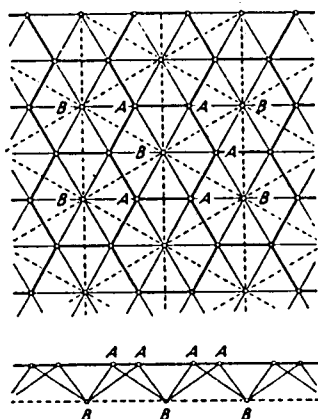


Fig. 1.3-8

Estudando isoladamente as unidades poliedrais representadas na figura 1.3-4, verifica-se que somente o prisma triangular, o octaedro piramidal, e o tetraedro, são estáveis, enquanto as outras unidades são instáveis (no capítulo seguinte serão apresentadas as condições a ter em conta, bem como os cálculos a realizar, para a verificação da estabilidade destas unidades). É evidente que se o sistema plano tridimensional é composto por unidades poliedrais estáveis, então o sistema total deve ser também internamente estável (a figura 1.3-5 b) e a figura 1.3-6 e) são exemplos disso). Se o sistema plano tridimensional é composto por unidades estáveis e instáveis, então o sistema total pode ainda ser internamente estável, se uma unidade estável está unida a uma outra de forma a que se tenha criado uma nova configuração que é estável. Contudo, esse não é o caso da grelha bidireccional quadrada da figura 1.3-6 a), onde os quatro tetraedros ligados não formam uma nova unidade estável.

Nos casos em que os sistemas planos tridimensionais são compostos por unidades poliedrais instáveis, como no caso da grelha bidireccional quadrada da figura 1.3-5 a) e da grelha quadrada diagonal em cima da grelha quadrada das figuras 1.3-6 c) e 1.3-6 d), o sistema total deve ser também internamente instável. Nestes casos, a aplicação de suportes externos correctos torna possível transformar um sistema instável, num sistema total estável. Num grande número de estruturas, a

malha espacial é internamente estabilizada com a junção de barras, usualmente no plano de compressão (fig. 1.3-9).

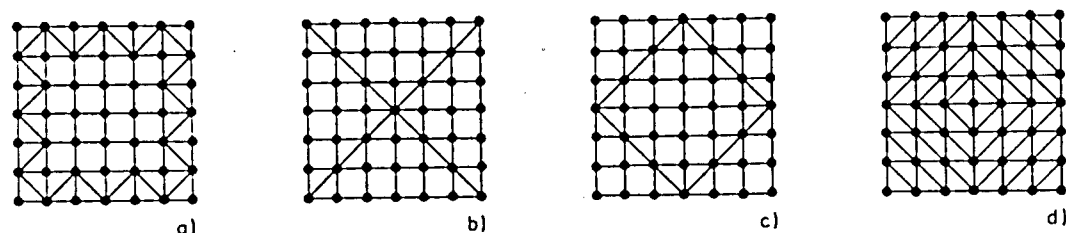


Fig. 1.3-9

Uma grelha quadrada pode ser estabilizada com faixas diagonais suplementares, causando estabilidade à torção, que podem ser colocadas de modo a cercar a estrutura ao longo da sua periferia (fig. 1.3-9 a)), ou colocadas de modo a subdividir o plano da estrutura em grandes unidades triangulares (fig. 1.3-9 b) e fig. 1.3-9 c)), ou ainda colocadas de modo a ligar cada quadrado da malha (fig. 1.3-9 d)). Se o revestimento da cobertura é devidamente ligado à estrutura, este também pode contribuir para a necessária rigidez à torção, para uma das solicitações na cobertura.

As coberturas cilíndricas definem-se como sistemas de estruturas em que a superfície média (superfície que passa pelo centro de gravidade das secções) é de simples ou de dupla curvatura.

Quando não existem cargas pontuais e se cumprem certas condições iniciais nos seus lados laterais, nestas estruturas predominam as forças de membrana. Predominando as forças de membrana, então nesses casos, em cada secção dessas superfícies, as tensões repartem-se uniformemente na espessura da secção, actuando na superfície média. Verifica-se assim nesses casos o contrário das superfícies planas, onde são os momentos flectores, torçores, e esforços transversos que predominam, ou seja, esforços para os quais as tensões já não se repartem uniformemente na espessura da secção (fig. 1.3-10).

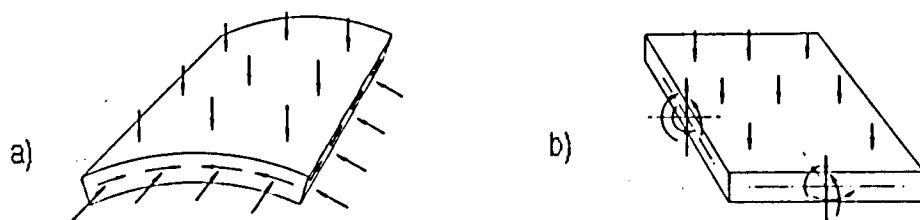


Fig. 1.3-10 a) forças de membrana; b) forças nas secções das superfícies planas

Os elementos característicos das coberturas cilíndricas ( fig. 1.3-11 ) são :

- a) a superfície definida pela directriz e pela geratriz ;
- b) as vigas laterais que constituem elementos de rigidez, de modo a assegurar que não se produzem deformações ;
- c) as armaduras de topo que constituem elementos de rigidez transversal, de modo a assegurar que não se verifiquem deformações transversais.

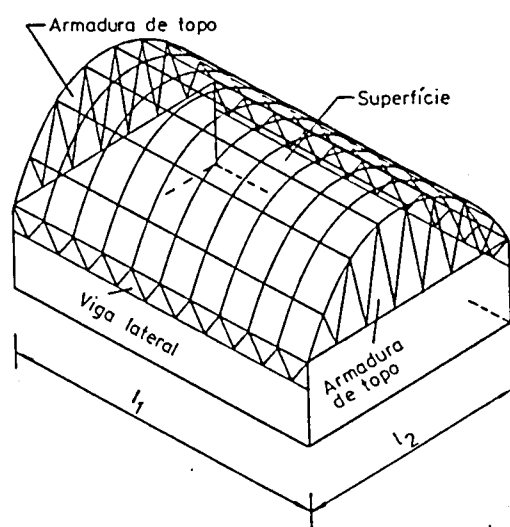


Fig. 1.3-11

Usando um certo número de superfícies cilíndricas é possível cobrir grandes áreas, denominando-se a essa disposição, cobertura cilíndrica agrupada ( fig. 1.3-12 ).

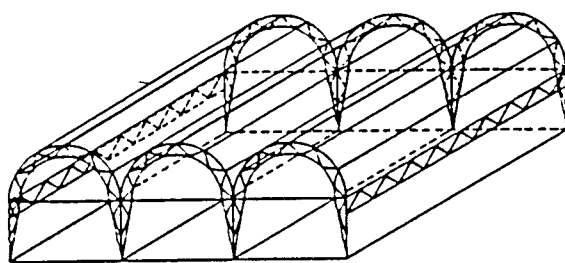


Fig. 1.3-12

As coberturas cilíndricas de curvatura simples que se apoiam de forma contínua nos seus lados laterais, denominam-se abóbadas (fig. 1.3-13).

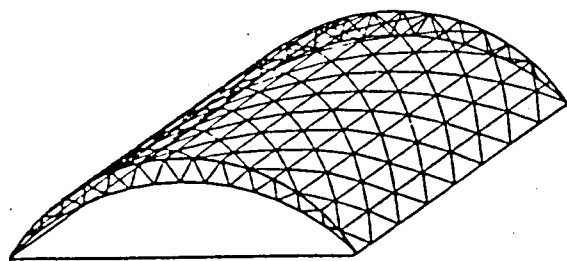
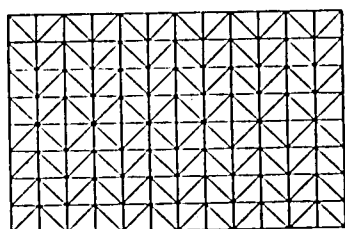


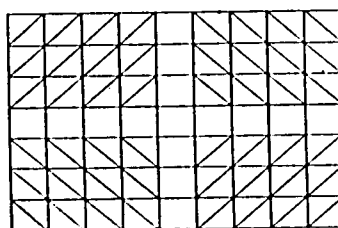
Fig. 1.3-13

As abóbadas podem ser constituídas por uma só superfície, formada por uma triangulação no espaço, ou por duas superfícies, uma inferior e outra superior, unidas por um sistema de barras, formando uma triangulação espacial. A opção por um dos dois sistemas (uma ou duas superfícies) depende da estabilidade necessária para suportar as solicitações a que está sujeita a abóbada, sendo mais utilizado o sistema de uma só superfície em coberturas de pequenos vãos (onde se verifica ser mais económico), e o sistema de duas superfícies em cobertura de grandes vãos.

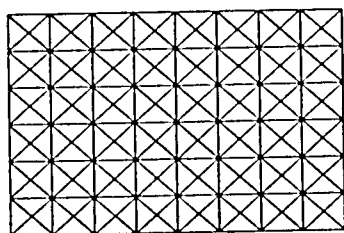
A disposição das barras que formam a cobertura pode ser bidireccional, tridireccional, tetradireccional, hexadireccional, etc., sendo representados na figura 1.3-14 alguns dos tipos característicos de triangulação em planta, mais utilizados para coberturas cilíndricas com uma só superfície.



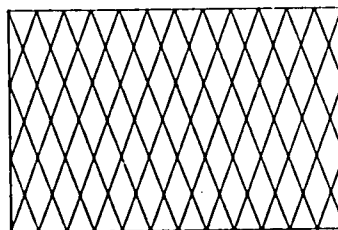
a)



b)



c)



d)

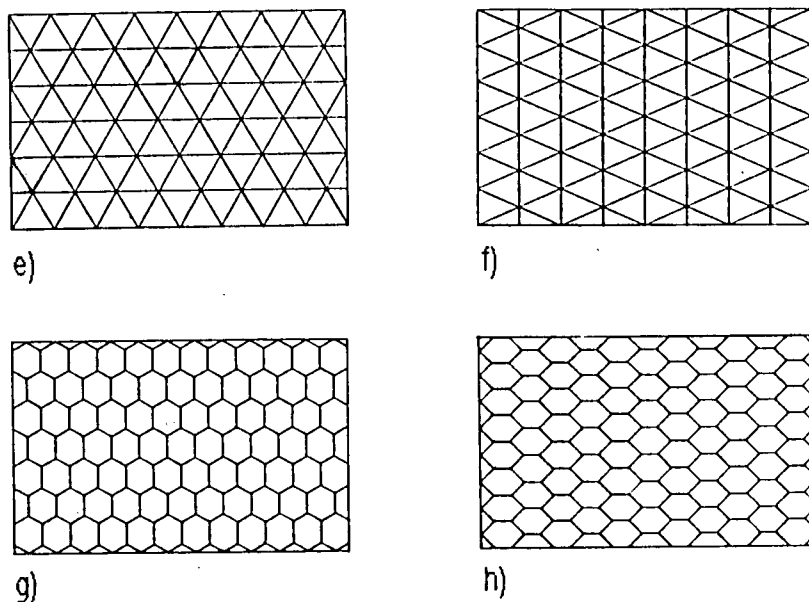


Fig. 1.3-14 a) disposição segundo Foppl; b) grelha ligeira; c) grelha de duplo reforço; d) grelha tipo Lamella; e) e f) grelhas tridireccionais; g) e h) grelhas hexagonais

Na construção destas estruturas são utilizadas vigas rectas ou curvas, pré-fabricadas, que se dispõem longitudinalmente (fig. 1.3-15) em coberturas largas, ou seja, quando o comprimento da geratriz é menor que a largura do vão, ou que se dispõem transversalmente (fig. 1.3-16) em coberturas curtas, ou seja, quando o comprimento da geratriz é menor que a largura do vão. A união destas peças pré-fabricadas forma a cobertura, com uma disposição bi ou multidireccional, conforme a triangulação adoptada para as peças pré-fabricadas.

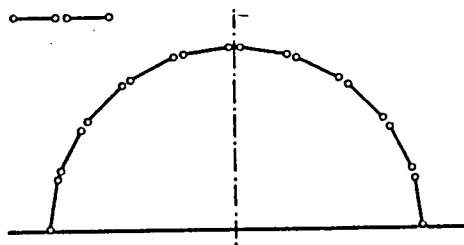


Fig. 1.3-15

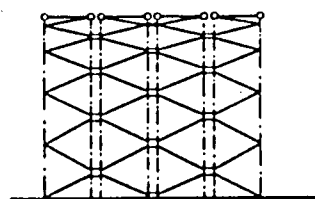


Fig 1.3-16.

De forma a melhorar a estabilidade das abóbadas formadas por uma só superfície, pode-se optar pela utilização da abóbada com dupla superfície de curvatura (fig. 1.3-17).

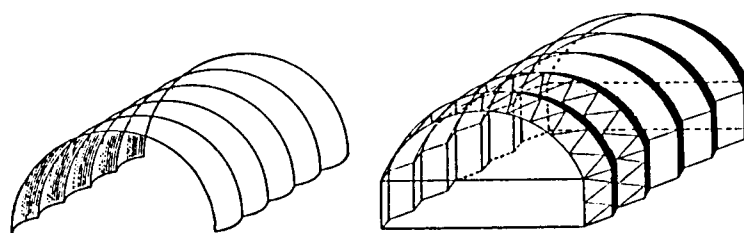


Fig. 1.3-17

Na construção de coberturas cilíndricas com grandes cordas, é aconselhável utilizar coberturas cilíndricas constituídas por 2 superfícies (uma superior e outra inferior), de modo a se poder assegurar melhor a estabilidade. As coberturas cilíndricas constituídas por duas superfícies podem ser construídas com vigas de três ou quatro membros longitudinais. A figura 1.3-18 representa a seção transversal de uma cobertura de grande extensão, constituída por vigas de seção triangular, colocadas juntas umas às outras no sentido longitudinal, sendo o banzo superior unido transversalmente por barras trianguladas formando a superfície superior, e o banzo inferior ou fica solto se só se verificarem forças transversais débeis, ou se unem transversalmente com barras trianguladas.

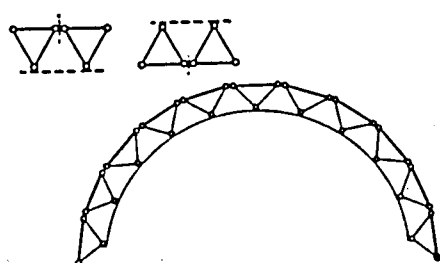


Fig. 1.3-18 Disposição longitudinal das peças pré-fabricadas de três membros

Se em vez da seção transversal, na construção das peças pré-fabricadas, for considerada a seção longitudinal triangular disposta triangularmente, obtemos a configuração representada na figura 1.3-19.

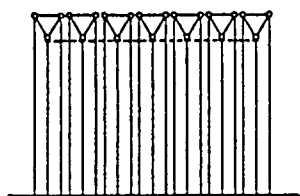


Fig. 1.3-19 Disposição transversal das peças pré-fabricadas de três membros

Para coberturas com uma corda e desenvolvimento longitudinal elevados é normalmente recomendado utilizar peças constituídas por quatro membros, dispostas longitudinalmente (fig. 1.3-20), ou dispostas transversalmente (fig. 1.3-21).

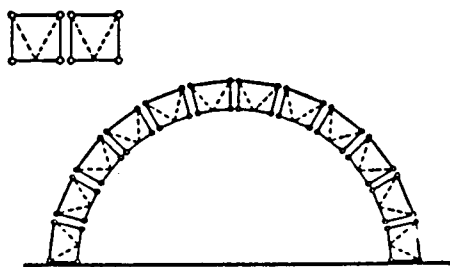


Fig. 1.3-20 Disposição longitudinal das peças pré-fabricadas de quatro membros

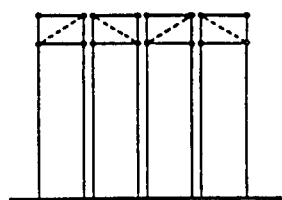


Fig. 1.3-21 Disposição transversal das peças pré-fabricadas de quatro membros

Neste grupo são também incluídas as coberturas simples ou múltiplas de duas águas trianguladas, como se representa na figura 1.3-22.

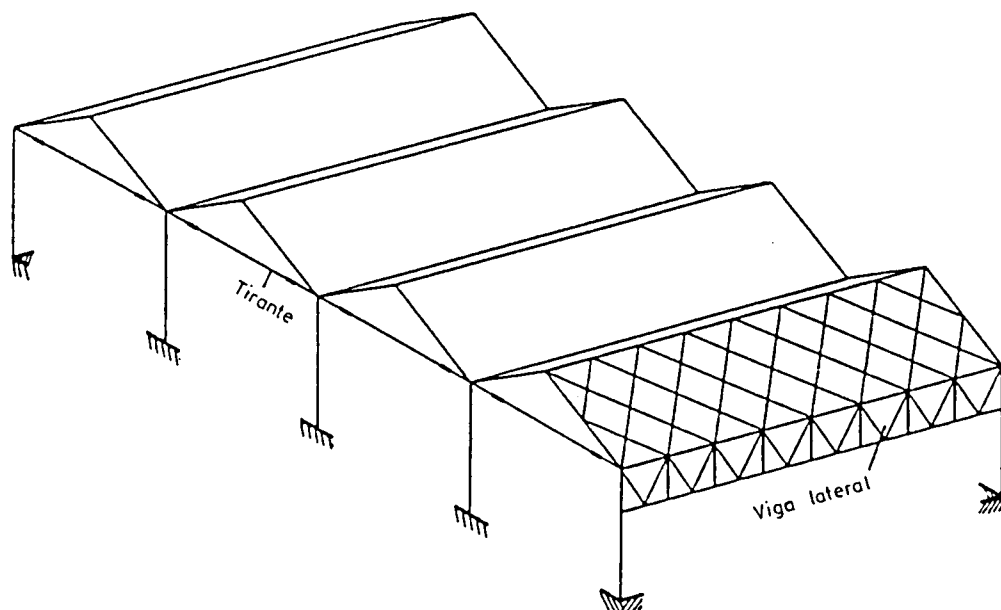


Fig. 1.3-22 Representação de coberturas de duas águas trianguladas

Na figura 1.3-23 estão representados alguns dos tipos de triangulação em plantas que são mais usados nas coberturas de duas águas trianguladas.

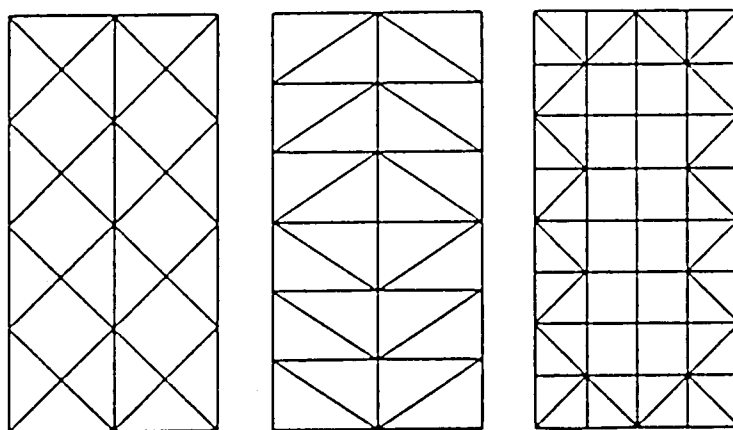


Fig. 1.2-23 Plantas com as triangulações mais utilizadas

As cúpulas definem-se como estruturas espaciais de dupla curvatura em que a superfície média de revolução é obtida por rotação de uma curva plana (meridiano) sobre uma recta (eixo), situada no mesmo plano que a curva (fig. 1.3-24).

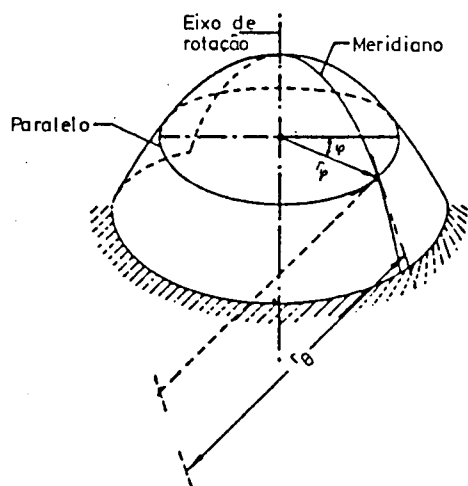


Fig. 1.3-24 Esquema da superfície de revolução

A superfície de revolução das cúpulas pode tomar formas diferentes, dependendo da forma do meridiano considerado, podendo assim ser esférica, parabólica, elíptica, etc. (fig. 1.3-25).

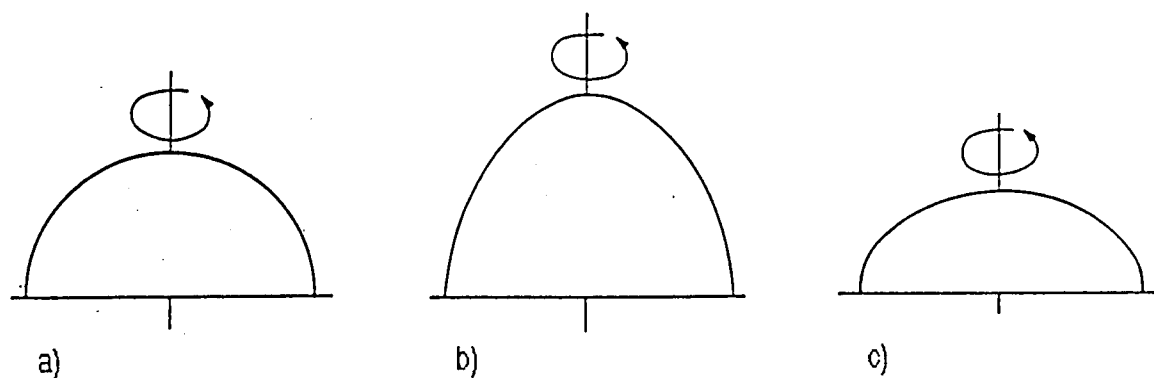


Fig. 1.3-25 Superfícies de revolução de cúpulas de base circular, obtidas por rotação de uma curva com a forma:

- a) de um semicírculo (hemisférico)
- b) de uma parábola (parábola circular)
- c) de um semielipse (meio elipsóide)

As cúpulas esféricas têm a vantagem de facilitarem na construção de elementos pré-fabricados da estrutura, devido ao seu raio de curvatura ser constante, permitindo assim dividir a superfície média num número determinado de elementos iguais.

Atendendo ao seu ponto de vista de construção, as cúpulas podem-se agrupar em vários grupos, sendo os mais comuns, aqueles que a seguir são descritos.

As cúpulas raiadas formam um grupo de cúpulas que são compostas por arcos dispostos radialmente, ligados no topo da cúpula a um anel de compressão, ligados na parte inferior a um anel de tracção e ligados na parte intermédia por anéis de reforço como se tratassem de braçadeiras (fig. 1.3-26). Em cúpulas pequenas, o anel de compressão do topo é muita das vezes dispensado.

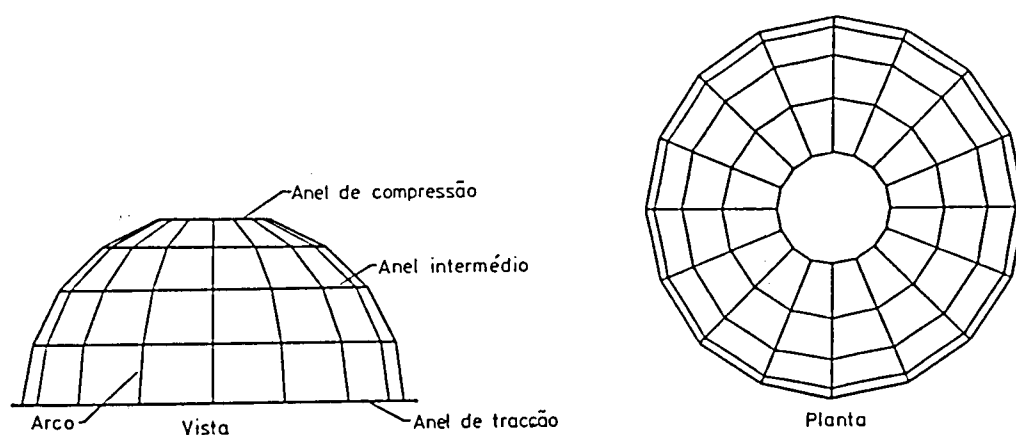


Fig. 1.3-26 Representação da vista e da planta de uma cúpula raiada

A cúpula representada na figura 1.3-26, é uma cúpula raiada composta por elementos rectos de barras. Pode-se no entanto, considerar estes elementos como curvos, obtendo assim uma curva numa só direcção, desde a base até ao topo da curva, para cada unidade da cúpula entre dois arcos, criando-se um efeito diferente para a cúpula. O uso de elementos rectos na intersecção de painéis planos, formando a curvatura, dá à cúpula um efeito bastante curioso, parecendo que tem facetas diferentes. Embora o exemplo dado tenha uma base circular, é no entanto possível construir cúpulas raiadas com outra base, como por exemplo numa base com a forma de um octógono. As cúpulas raiadas também podem ter superfícies obtidas de curvas rotativas com a forma de parábola ou de semi-elipse.

As cúpulas de pequena lâmina (lamela) constituem um outro grupo, com uma enorme variedade de desenho espacial. Estas cúpulas são constituídas por uma malha espacial metálica que define pequenos elementos planos ou curvos, podendo tal como nas coberturas planas, serem construídas com uma só superfície ou com duas superfícies formadas com um conjunto de barras, como se fosse uma placa de espessura constante, que é definida geralmente em função da estabilidade das paredes quando submetidas aos efeitos das cargas exteriores.

Grande número das cúpulas de pequena lâmina são construídas com um anel ou braçadeira, como se queira referir, no seu perímetro inferior (base da cúpula), de modo a assegurar que o contorno da estrutura não se deforme, e a absorver os esforços de compressão, tração e torção que aí se desenvolvem. Sendo empregue o aço ou o alumínio na construção da cúpula, e sendo este bem caldeado (ligar duas peças incandescentes) nas intersecções, obtém-se uma união rígida da estrutura, não sendo necessário a provisão de um elemento na base da cúpula para assegurar que o contorno não se deforme, e para absorver os esforços que aí se verificam.

Neste grupo de cúpulas vários tipos são distinguidos, tais como as cúpulas tipo "Schwedler", que são cúpulas com nervos dispostos segundo meridianos; as cúpulas cíclicas que derivam do tipo "Schwedler" por rotação de cada anel poligonal de um ângulo  $\pi/n$  respeitante ao anel (de  $n$  lados) inferior, transformando-se assim cada trapézio em dois triângulos; as cúpulas geodésicas, que são um caso particular das cúpulas com malha triangular, em que todas as barras estão curvadas e dispostas segundo circunferências máximas da esfera; as cúpulas tipo "Zimmermann" em que cada anel tem o dobro de número de vértices do anel imediatamente superior; etc., sendo algumas delas representadas na figura 1.3-27.

Este grupo abrange os exemplos mais representativos de estruturas espaciais pois, a repartição favorável de esforços, a pouca importância de momentos flectores, e a grande estabilidade das paredes como consequência da sua dupla curvatura, proporciona construções muito leves, susceptíveis de cobrir grandes vãos, e de assegurar em qualquer caso um efeito arquitectónico agradável.

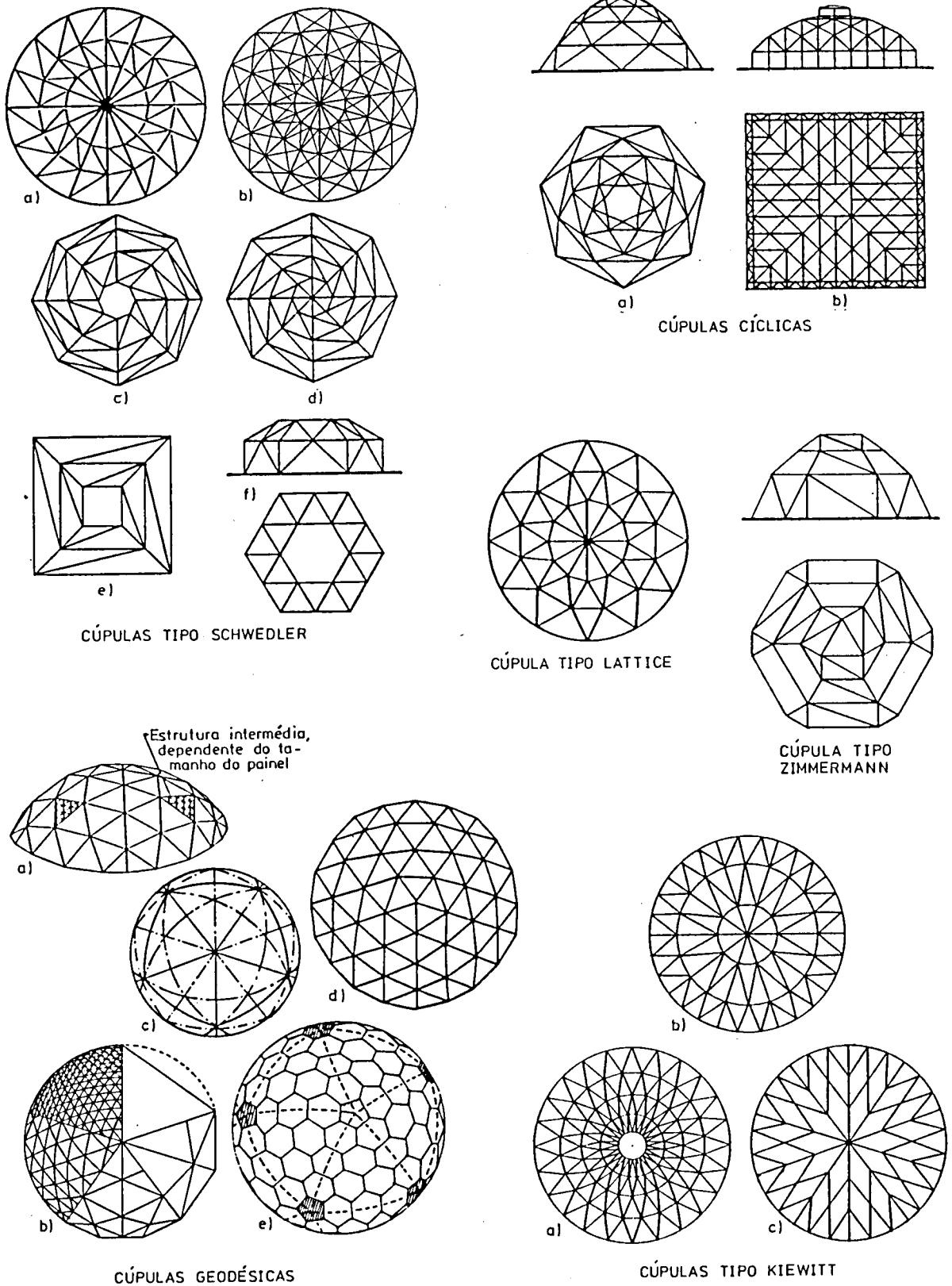


Fig. 1.3-27 Representação de alguns tipos de cúpulas (continua na página seguinte)

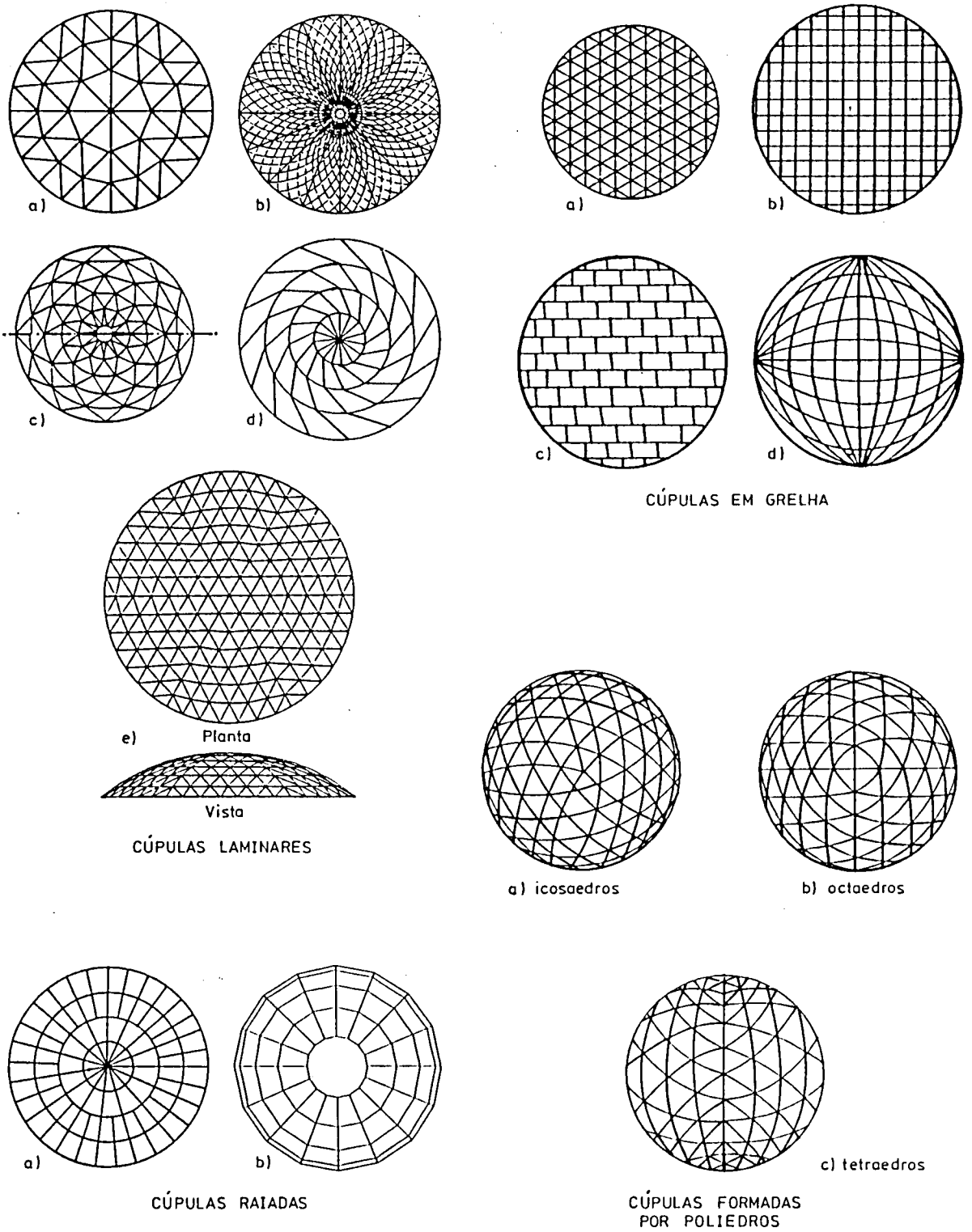


Fig. 1.3-27 Representação de alguns tipos de cúpulas (continuação)

As cúpulas de paredes dobradas formam um outro grupo (último grupo de que faz referência) em que as cúpulas são formadas por um certo número de paredes planas, ou curvas, resultando numa construção bastante económica já que são pouco propícias a fenómenos de instabilidade, e as paredes planas favorecem a pré-fabricação (fig. 1.3-28).

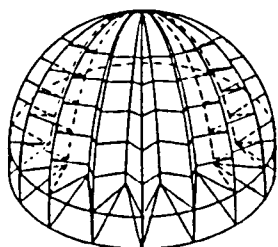


Fig. 1.3-28

As estruturas do tipo das cúpulas não necessitam que a planta do edifício seja obrigatoriamente circular, pois adaptam-se a outras formas como nos exemplos representados na figura 1.3-29.

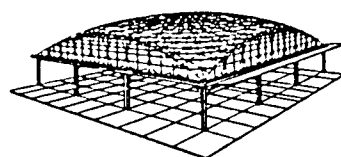
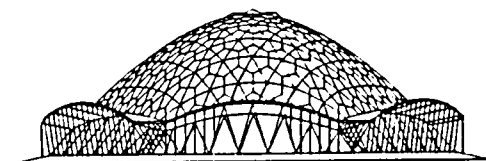
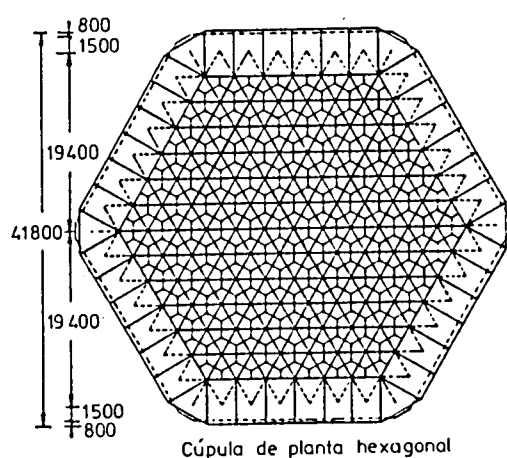


Fig. 1.3-29

As coberturas tênséis definem-se como membranas de tensão, realizadas com panos ou malhas de aço. Estas coberturas podem ser classificadas de acordo com a sua superfície exterior, ou

de acordo com as condições de apoio, e consistem, numa descrição simplificada, em dois sistemas de cabos, com curvatura em direcções opostas, ligados nos seus pontos de intersecção e pré-tensionados, formando uma malha de cabos. As formas básicas da superfície exterior da membrana de tensão que forma a cobertura são : a da configuração de uma sela e esticada entre as suas fronteiras ( arcos, vigas, ou nalguns casos cabos fronteiricos ), e a de configuração cónica e suportada ao centro em pontos altos ou baixos. A combinação destas formas básicas da superfície exterior produz um número infinito de novas formas.

Na figura 1.3-30 representa uma cobertura com a configuração de uma sela, com os cabos ancorados na fronteira da estrutura. Os cabos que formam esta estrutura têm o nome de cabos de suspensão e cabos fortificantes, constituindo os primeiros os membros primários da estrutura, e produzindo os segundos a pré-força e consolidação da estrutura.

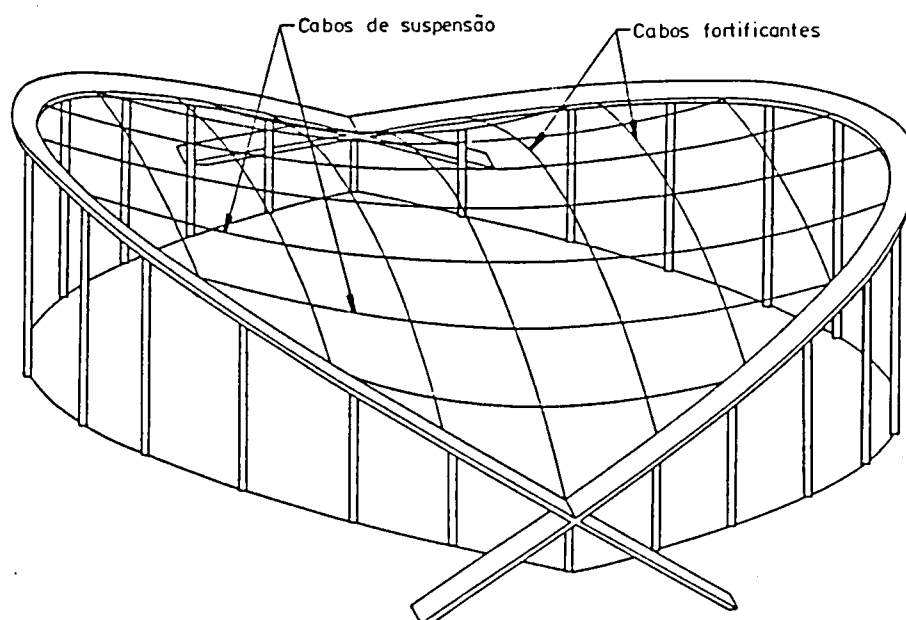


Fig. 1.3-30

A estrutura representada na figura 1.3-31 é referente à cobertura do "Minor Gymnasium of the Tokyo Olympic Indoor Stadium", construído em 1964, e que consiste numa forma cónica de 65 m

de diâmetro, composta por pesados cabos de aço que estão estendidos entre dois mastros de betão torreados e ligados na parte inferior a blocos de ancoragem.

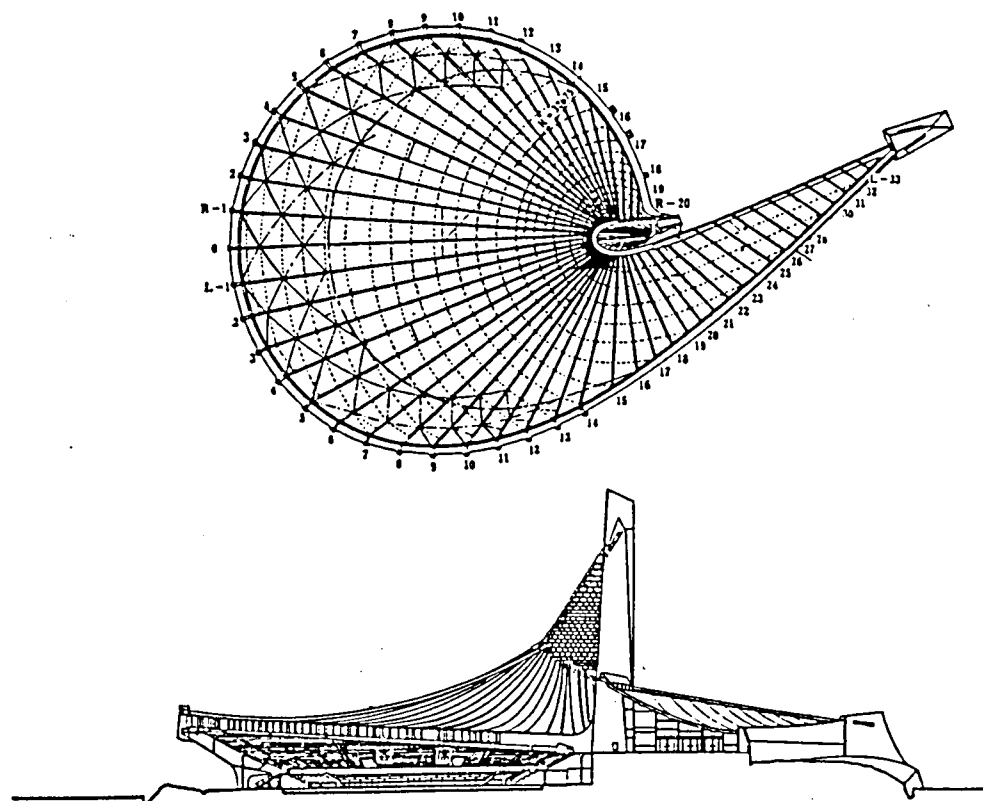


Fig. 1.3-31 Desenho da planta e alçado do "Minor Gymnasium of the Tokyo Olympic Indoor Stadium"

Como já se referiu, para as estruturas tênséis podem-se produzir infinitas formas, algumas das quais já conhecidas, e que se representam na figura 1.3-32.

As coberturas tênséis são realizadas com cabos de aço, que fazem parte de um grupo de estruturas metálicas com utilização de cabos, cujo estudo não faz parte do âmbito desta tese.

O progresso que se processa neste campo está sempre a apresentar novas propostas de tipologia estrutural, ou novos métodos construtivos, dando sempre uma nova luz a toda a complexa problemática das estruturas espaciais. A imaginação pura do projectista conjuntamente com o progresso técnico, é fundamental na evolução do projecto, tanto como desenho representativo, como desenho estrutural.

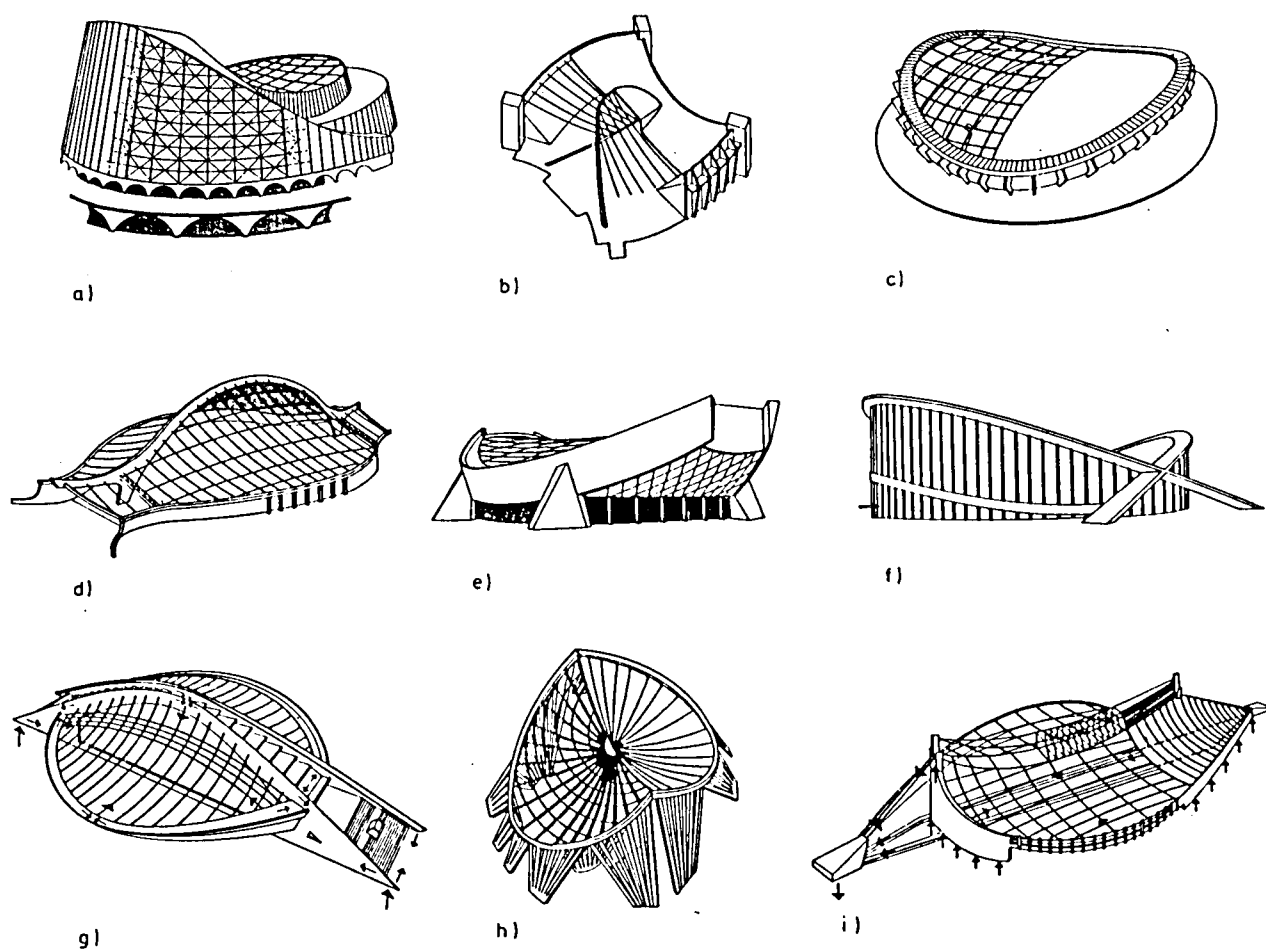


Fig. 1.3-32

Após ter sido escolhido qual o tipo de estrutura a adoptar, novos problemas se colocam ao projectista. É necessário escrever e resolver as equações necessárias a remover a indeterminação da distribuição das forças internas da estrutura. Existem várias teorias que foram ganhando forma com estudos de investigação levados a efeito ao longo dos anos, teorias essas baseadas em diferentes hipóteses, e para casos de estruturas tipo. Todos os métodos de análise estrutural atendem ao cumprimento de condições geométricas e de equilíbrio, e utilizam as variáveis que definem as propriedades do material que compõe cada elemento da estrutura. Dois métodos serão apresentados com maior desenvolvimento nos capítulos seguintes: o método directo e o método contínuo.

O método directo transcreve para uma forma matricial todas as equações do problema, equações de equilíbrio e de congruência, empenhando obviamente todas as incógnitas, que são as forças nas barras e os deslocamentos dos nós. Um primeiro grupo de equações exprime o equilíbrio

dos nós sob a acção das forças transmitidas pelas barras e das eventuais forças externas aí aplicadas, e um segundo grupo de equações exprime a compatibilidade entre os deslocamentos dos nós e os alongamentos das barras provocados pelas forças internas, eventuais variações de temperatura, defeitos de montagem, ou outros.

A complexibilidade de resolução das equações do método directo, é facilmente superada com a utilização de um computador. No entanto, na falta de computadores, houve necessidade de limitar o problema, isto é, de reduzir o número de equações simultâneas. Assim surgem o método dos deslocamentos e o método das forças, que assumem como incógnitas iniciais do problema, respectivamente os deslocamentos ou as forças. Os dois métodos incluem métodos iterativos envolvendo sucessivas correcções ou aproximações. No caso do método das forças a solução é obtida quando se assumirem satisfeitas as condições de equilíbrio, e no caso do método dos deslocamentos, a solução é obtida quando esta for assumida como geometricamente possível.

O método contínuo consiste na transformação do problema efectivo num outro, em que a estrutura em estudo é assimilada a um sistema contínuo, obtendo uma solução de carácter aproximado. De modo a obter-se um resultado bastante aproximado das incógnitas (já que o método contínuo não permite a determinação rigorosa das incógnitas do problema) é necessário que a estrutura em estudo reúna certas condições de isotropia, para ser possível a sua assimilação a uma estrutura contínua, homogénia, e isotrópica, pois a sua substituição por uma estrutura contínua anisotrópica resulta num problema extremamente complexo na maioria dos casos.

Se por um lado o método directo permite a obtenção rigorosa das incógnitas, o elevado número de incógnitas das equações lineares, da grande maioria das estruturas espaciais, como que condiciona a sua resolução à utilização de computadores, ficando assim apenas o seu uso limitado à capacidade do computador, e ao tempo necessário para a sua resolução. O método contínuo surge da necessidade de resolver os problemas das estruturas espaciais que conduzem a sistemas de equações lineares com elevado número de incógnitas, sem ter limitações de tamanho nem de tempo, ou seja, sem estar necessariamente condicionado a computadores, tendo no entanto os inconvenientes já indicados, como seja a exactidão e a tipologia.

O estudo das estruturas espaciais metálicas não fica somente por aqui, é necessário pensar na sua realização, no processo industrial da qual ela deve nascer, e na geometria dos nós. Na

realização do projecto incluem-se a adaptação do projecto aos meios escolhidos, o estudo da fabricação, montagem, transporte e colocação em obra. É o projectista que tem de desenvolver uma actividade de reflexão para encontrar soluções económicas e métodos de fácil execução.

O processo de construção é um dos grandes estudos que também deve ser realizado. Dependendo da escala e da sequência da construção, é assim necessário pensar, se devem ser utilizados suportes interiores temporários (e em caso disso, qual o tipo a adoptar), ou se devem ser efectuadas as uniões da estrutura de cobertura na sua totalidade, ou em parte dela, no solo e só depois erguida para a sua posição final (e aí à que pensar no método a utilizar para a erguer), ou se as uniões da cobertura devem ser realizada no "ar", ou seja, no seu lugar final, etc..

Actualmente, na sua maioria, as coberturas metálicas realizadas são exemplos de construções pré-fabricadas industrialmente, onde se procura que os elementos que as constituem sejam de idêntico comprimento, manejáveis e permutáveis. Existem, hoje em dia, inúmeros tipos de estruturas espaciais metálicas que se distinguem pelo método de fabrico, ou pelos sistemas de ligação dos nós.

O nó é um elemento fundamental destas estruturas, na medida em que deve ser indeformável, deve ter a resistência suficiente, deve permitir a transmissão dos esforços, e ao mesmo tempo, deve ser simples de utilizar de modo a tornar rápida e fácil a montagem da estrutura, ou desmontagem caso seja pretendida mais tarde, e atender aos critérios de estética.

A selecção do tipo de união depende da escala da estrutura e da capacidade resistente necessária na união, sendo função da forma e tamanho das barras, bem como da reticulação espacial das barras, ou seja, do ângulo de intersecção das mesmas. A economia da estrutura espacial metálica está muito interligada com o método de união adoptado, não só pelo sistema em si, mas também pelo número de uniões por metro quadrado necessárias, que deve ser o menor possível. Grandes módulos, com poucos membros e nós, são geralmente mais económicos. O elemento utilizado nas uniões torna-se bastante problemático quando se utiliza a generalização da estrutura com o método contínuo, e é no plano prático o componente mais difícil de se realizar, já que tem que ligar várias barras em diferentes ângulos no espaço.

Vários sistemas de união são hoje em dia utilizados, podendo estes compreender elementos ligados por soldadura, rebites, parafusos, etc.. Muitos dos elementos de ligação foram criados principalmente para estruturas espaciais de aço, ou de alumínio, pré-fabricadas. A produção em massa pode

reduzir o custo destes elementos, sendo o seu sucesso comercial dependente da sua eficiência e simplicidade. Dos diferentes tipos de ligação que até agora foram propostos, apenas alguns foram postos em prática, e desses, só uma pequena quantidade passou o teste de duração no tempo. Na tentativa de produzir um sistema de ligação universal apropriado para todos os tipos de estruturas, os projectistas têm desenhado sistemas bastante sofisticados, desnecessariamente complexos, e constituídos por inúmeras partes, obtendo até hoje resultados negativos comercialmente.

Alguns dos sistemas de ligação apresentam para além das características resistentes, características inegavelmente estéticas, que obrigam à utilização de elementos dispendiosos, tal como peças de aço moldado, ou peças esféricas. Sendo o nó um dos elementos mais importantes a resolver numa estrutura metálica, numerosas patentes protegem diferentes sistemas idealizados por especialistas, que se caracterizam fundamentalmente pelo processo de ligação utilizado nos nós. Na figura 1.3-33 estão representados alguns desses processos de ligação utilizados nos nós.

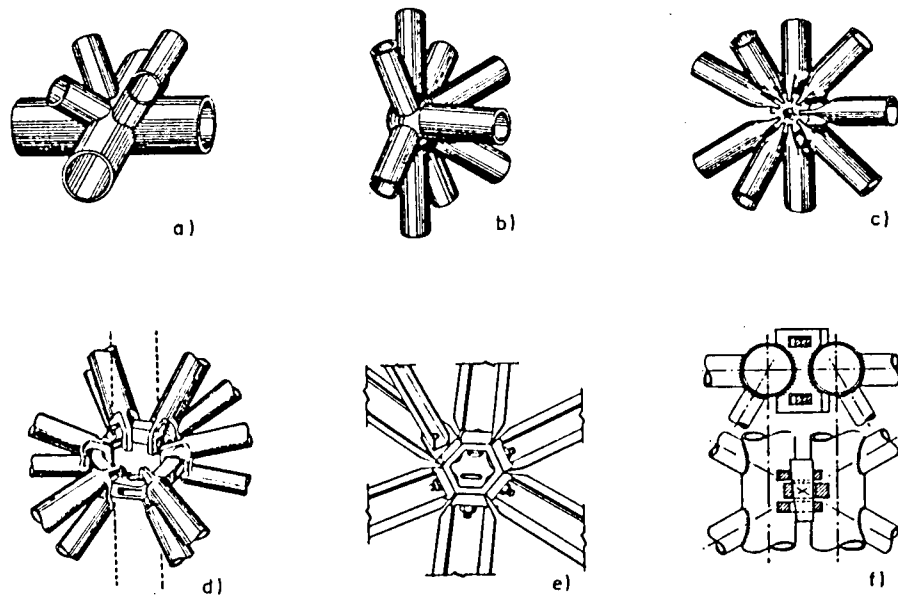


Fig. 1.3-33 a) União espacial com tubos ; b) Processo Oktaplatte ; c) Processo Triodetic ;  
d) Processo Wachsmann ; e) Processo Wuppermann ; f) Processo Taylor -  
Thompson e Whittung ; (continua na página seguinte)

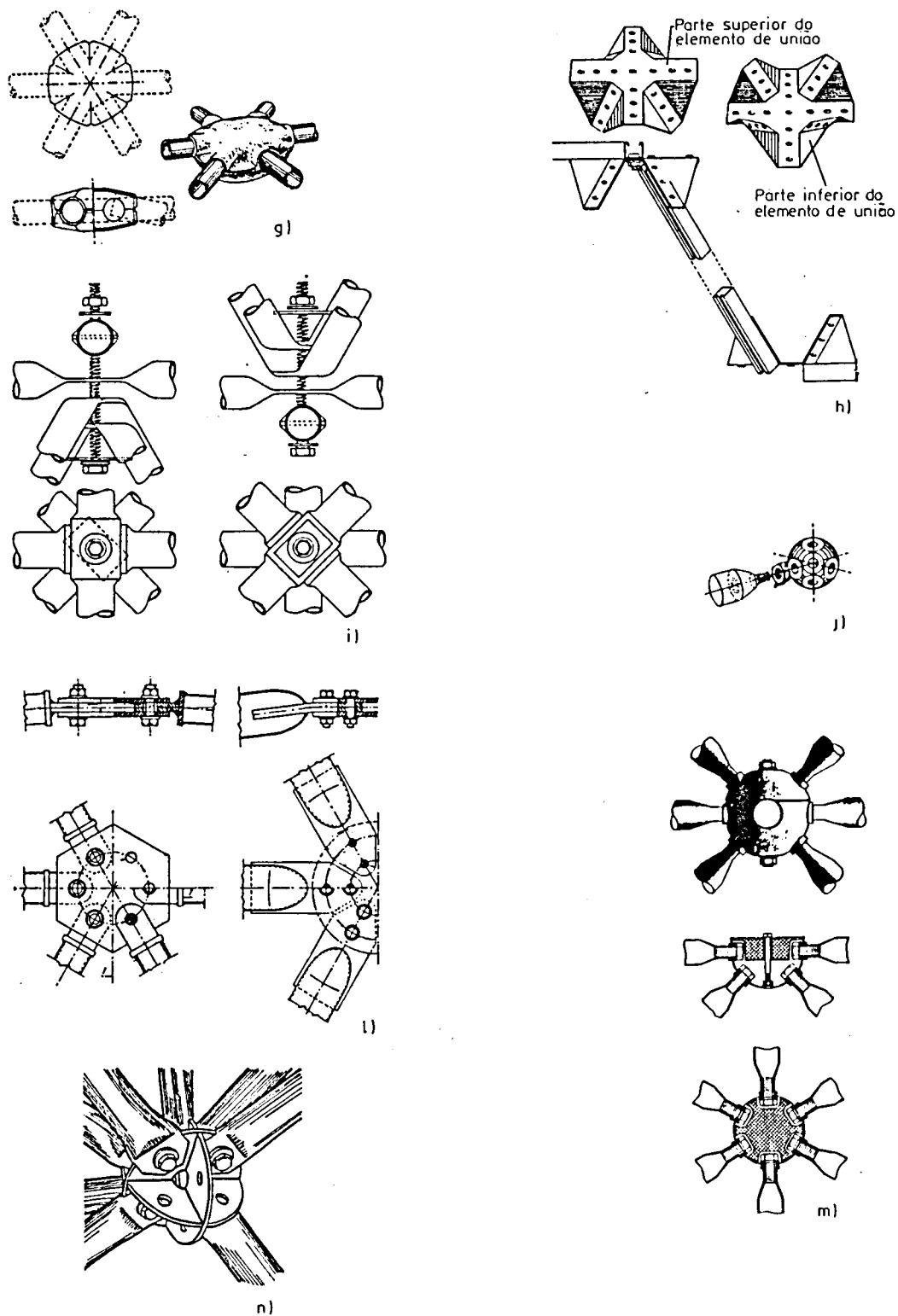


Fig. 1.3-33 (continuação) g) Processo S. D. C. ; h) Processo Unistrut ; i) Processo Sarton ;  
 j) Processo Mero ; l) Processo R. Dziewdski ; m) Processo Arvedi Space Fra-  
 me ; n) Processo GeoSpace

O processo Oktaplatte ( fig. 1.3-33 b)) consiste em esferas de aço perfuradas onde são encaixados e soldados os tubos que vão formar os octaedros que constituem a estrutura. Com este processo resultam estruturas muito bonitas que geralmente ficam à vista.

O processo Triodetic ( fig. 1.3-33 c)) consiste em nós de várias formas, segundo a distribuição de barras que aí são ligadas, que contêm ranhuras dentadas onde são introduzidos à pressão os extremos das barras de secção tubular, extremos esses que são achatados e seccionados segundo o ângulo adequado para a estruturação espacial da estrutura. É um processo bastante original na medida em que não são utilizados parafusos, rebites, nem soldaduras.

O processo Waschsmann ( fig. 1.3-33 d)) foi idealizado em 1946 e é utilizado em coberturas planas formadas por duas superfícies, uma superior e outra inferior.

O processo Wuppermann consiste num nó onde concorrem seis barras, que são unidas a este por meio de pernos. É geralmente empregue nas abóbadas em que todas as barras têm iguais comprimentos, apresentando este sistema uma grande facilidade na montagem e desmontagem da estrutura.

O processo S.C.D. consiste num nó com seis orifícios, onde são encaixadas seis barras tubulares, que são aí soldadas. Este processo é especialmente indicado para coberturas cilíndricas constituídas por uma só superfície, e especialmente na construção de cúpulas.

O processo Unistrut consiste num nó formado por uma chapa dobrada, onde são unidas as barras de secções e comprimentos iguais. Os elementos deste processo são fabricados com moldes especiais, realizando-se as uniões sem dificuldades permitindo a realização das mesmas por pessoal pouco especializado.

O processo Sarton consiste em tornar planos os tubos da estrutura, nas zonas correspondentes aos nós, de modo a estes poderem cruzar-se com facilidade, permitindo assim finalizar a união dos mesmos através da aplicação de um parafuso com porca.

O processo Taylor - Thompson e Whittung é um nó projectado especialmente para malhas planas.

O processo Mero é constituído por dois elementos básicos, que são uma barra e uma esfera de ligação. Na esfera são inscritos dezoito octógonos com furos de rosca. Este processo foi reali-

zado por Mengeringhausen, e permite que a montagem da estrutura seja processada por pessoal pouco especializado.

O processo R. Dziewolski consiste num sistema de união para coberturas cilíndricas de uma só superfície, que permite regular as separações e orientações das barras, empregando uma certa folga nos furos, e realizando as uniões com parafusos de alta resistência que asseguram a transmissão das forças.

O processo "Arvedi Space Frame" consiste num nó formado por uma calota em aço de alta resistência, onde as barras tubulares, com as extremidades preparadas com rosca interior, são aparafusadas. No fim da fixação das barras, a calota é completada com um "tampo" de cimento especial armado, que garante a indeformabilidade da calota. O nó "standard" permite a fixação de 12 barras, e uma geometria muito variada, enquanto que o nó formado por dois hemisféricos permite a fixação de dezoito barras.

O processo GeoSpace consiste na utilização de elementos monolíticos produzidos a partir de perfis de alumínio ou aço galvanizado a fogo, onde são fixadas as barras tubulares de alumínio com parafusos, porcas e arruelas de pressão.

Verifica-se na grande maioria das estruturas a necessidade de desenhar primeiramente a estrutura espacial para as condições a que deve obedecer, antes de optar por um sistema comercial que se pode vir a verificar não ser suficientemente resistente, ou economicamente competitivo. O projectista geralmente também não aceita pagar direitos de patente, de maneira que acaba por modificar o sistema elegido como modelo, conseguindo muitas das vezes melhorias no sistema.

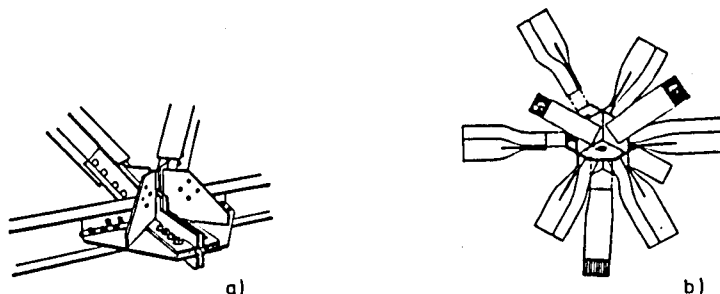


Fig. 1.3-34

A utilização de unidades fabricadas no próprio estaleiro, com chapas dispostas em vários planos, onde elementos "standard" (perfis tubulares, rectangulares, etc.) são ligados por soldadura, ou por rebites, ou por parafusos, etc., são as soluções mais usuais. Na figura 1.3-34 são representados dois exemplos destas unidades.

#### 1.4 - OBJECTIVO DO TRABALHO

O objectivo do trabalho de investigação conducente a esta dissertação, foi o de estudar estruturas espaciais reticuladas metálicas, principalmente as que dizem respeito a coberturas de grandes áreas permitindo grandes superfícies livres, reunindo vários conceitos de qualidade, e de elevado carácter, para melhor se proceder à idealização, metodologia, dimensionamento e construção das mesmas.

As coberturas espaciais reticuladas metálicas podem ser de vários tipos, conforme o somatório das características a que devem obedecer, tais como características de ordem estrutural, arquitectónicas, económicas, etc., e o seu cálculo deve ser o mais rigoroso possível para a estabilidade e a segurança das mesmas.

Atendendo às várias dificuldades que se encontram no cálculo de cada um dos vários tipos de estruturas espaciais reticuladas metálicas, estudaram-se diferentes métodos de cálculo, expostos nesta dissertação, que permitem resolver com maior ou menor exactidão as diversas dificuldades, para as várias situações apresentadas por vários tipos de coberturas.

O método directo é um dos métodos de cálculo estudado e exposto nesta dissertação, e é um método que transcreve para uma forma matricial todas as equações do problema, de equilíbrio e de congruência, considerando obviamente todas as incógnitas. Este é um método que permite obter com bastante rigor os valores das incógnitas, implicando no entanto, no caso de grandes estruturas, a utilização de computadores, para mais facilmente se determinar as incógnitas, devido ao tamanho que as suas matrizes atingem. Na exposição deste método, são desenvolvidas e escritas as matrizes que entram em jogo, salientados os casos particulares do método, e apresentado um programa de cálculo de estruturas espaciais reticuladas metálicas (EERM), que utiliza as matrizes do método dos desloca-

mentos para o cálculo das incógnitas, escrito na linguagem de programação estruturada Fortran, para sistemas operativos MS-DOS.

Devido a nem sempre ser possível recorrer ao uso do computador para o cálculo de estruturas espaciais metálicas, ou por dificuldade de obtenção de programas capazes, ou por falta de capacidade do computador para resolver as equações em estudo, ou ainda devido ao tempo excessivo que este necessita para efectuar todas as operações, estudaram-se métodos de aproximação que se ajustam a vários tipos de estruturas, e cujas equações são de maior facilidade de resolução.

O método contínuo é um dos métodos que se enquadra no que foi referido no parágrafo anterior, e que consiste na transformação da estrutura em estudo num sistema contínuo similar para a resolução do problema, obtendo-se assim resultados aproximados das incógnitas, que embora não sejam exactos, são no entanto bastante próximos, o que permite efectuar-se um dimensionamento da estrutura com segurança. Este método é também exposto na dissertação, com um desenvolvimento do seu processo de cálculo para vários tipos de estruturas.

Neste trabalho salientam-se também as várias dificuldades e problemas que estes tipos de estruturas apresentam nas suas mais diversas formas. Dificuldades e problemas que se realçaram na investigação realizada, e que são expostos de modo a que estes por vezes não passem despercebidos, e venham a constituir um entrave em todo o processo de estudo e realização das mesmas.

## 1.5 - DESCRIÇÃO DA TESE

No Capítulo I salienta-se a utilização e evolução das estruturas metálicas ao longo dos anos, fazendo-se referência a vários tipos de estruturas metálicas que foram realizadas, e a considerações de ordem económica, que têm tido uma grande influência na utilização das mesmas. Descreve-se a forma e composição de vários tipos de estruturas metálicas, que têm sido empregues em diferentes casos, e a metodologia empregue nelas. Finalizando o Capítulo faz-se uma descrição dos objectivos do trabalho conducente a esta dissertação.

No Capítulo II descreve-se o método directo, que é um método de cálculo para estruturas espaciais reticuladas metálicas. Este método fornece resultados rigorosos das incógnitas referentes à

estrutura em estudo. Considera-se ainda neste Capítulo simplificações inerentes ao método directo, resultantes da repetição nos cálculos, ou de estruturas resultantes da reunião de uma unidade estrutural elementar, bem como de condições de simetria e anti-simetria. Descreve-se também neste Capítulo dois métodos gerados do método directo, de modo a simplificar a resolução das equações, que são o método dos deslocamentos, e o método das forças.

Utilizando o método dos deslocamentos, foi desenvolvido um programa de cálculo de estruturas espaciais reticuladas metálicas, que é apresentado igualmente no Capítulo II. O programa que tem como nome EERM, foi realizado na linguagem de programação estruturada Fortran, para sistemas operativos MS-DOS.

No Capítulo III descreve-se o método contínuo que permite uma maior facilidade, na maior parte das vezes, de obtenção dos valores das incógnitas inerentes à estrutura em estudo, transformando esta num sistema contínuo similar. Os valores das incógnitas obtidos por este método são aproximados, sendo muito próximos dos reais.

Finalmente no Capítulo IV são apresentadas as conclusões e considerações finais.

## CAPÍTULO II

### 2 - CÁLCULO DE ESTRUTURAS ESPACIAIS RETICULADAS PELO MÉTODO DIRECTO

O método directo, como já foi mencionado na introdução, transcreve para uma forma matricial todas as equações do problema, considerando todas as incógnitas, ou seja, as forças nas barras e os deslocamentos nos nós. Este método comporta um primeiro grupo de equações que exprimem o equilíbrio dos nós, mesmo sob a acção das forças transmitidas pelas barras, e das eventuais forças externas aplicadas nos nós, e um segundo grupo de equações que exprime a compatibilidade entre os deslocamentos dos nós e os alongamentos das barras, provocados pelas forças internas da barra, por eventuais variações de temperatura, por defeitos de montagem, ou outros. O equilíbrio e a congruência são assim os dois conceitos elementares de que faz uso o método directo.

As regras a que este método tem de obedecer para se escreverem as suas equações, leva à escritura de um sistema complexo de equações, que se caracteriza pelo facto da matriz principal ser simétrica. Esta propriedade da matriz principal revela-se de grande importância na resolução do sistema, na medida em que reduz o número de cálculos a efectuar na construção das matrizes, e veio permitir o desenvolvimento de dois outros métodos (método das forças e método dos deslocamentos), que simplificam a resolução das equações.

A matriz principal deste método, para além do que foi dito, oferece ainda na sua definição a possibilidade de redução do número de cálculos nos casos em que a estrutura em estudo advém da reunião de unidades estruturais elementares iguais, e nos casos em que a estrutura contenha um ou mais eixos de simetria, ou de anti-simetria.

O método das forças e o método dos deslocamentos, que como já foi referido, são originários do método directo, são os métodos mais conhecidos e utilizados na resolução de problemas, na medida em que permitem superar com facilidade a dificuldade de inversão da matriz geral do método

directo. Se hoje em dia com a utilização de computadores de grande capacidade, a dificuldade da inversão da matriz geral é facilmente superada, são no entanto os métodos dos deslocamentos e o método das forças os mais utilizados na realização de programas de cálculo, devido a permitirem uma maior economia de gestão da capacidade de memória dos computadores. Entre os dois métodos, é o método dos deslocamentos o mais utilizado em programas, já que vai permitir a utilização dos programas realizados com este método em computadores de pequena capacidade, devido a requerer um menor número de instruções para o computador, e devido ao método das forças requerer um dimensionamento tal de matrizes iniciais, que faz com que a sua escolha só se justifique no caso do computador em serviço ser de grande capacidade. São aliás estas as razões que levaram a optar pelo método dos deslocamentos na elaboração do programa de cálculo de estruturas espaciais reticuladas metálicas apresentado nesta tese.

Todas estas propriedades e afirmações serão expostas com um maior desenvolvimento nos pontos seguintes, tendo em vista facilitar a compreensão dos procedimentos inerentes ao método directo, vem como ao método dos deslocamentos e método das forças, no cálculo de estruturas espaciais reticuladas metálicas, que permitiram a elaboração do programa de cálculo apresentado nesta tese.

Antes de iniciar a descrição das equações inerentes ao método, procede-se de seguida à descrição das várias componentes intervenientes no mesmo, atribuindo-lhe a simbologia com que passarão a ser referenciadas, começando por examinar as estruturas que são objecto deste estudo. Considere-se deste modo como referência uma estrutura genérica reticulada, livre no espaço, constituída por  $n$  nós, dispostos de qualquer modo no espaço, e por  $a$  barras de coligação entre estes.

O sistema de referência que será utilizado para caracterizar tanto as incógnitas dos deslocamentos, como para caracterizar as forças externas será o sistema cartesiano ordinário  $O_i y_{i1} y_{i2} y_{i3}$  separado em cada um dos nós  $i$  da estrutura.

Num sistema de forças concorrentes são necessárias no mínimo três equações ou três forças, isto é, um mínimo de três membros  $p$ , não situados no mesmo plano, para impedir um ponto  $i$  de se mover em qualquer direcção, quando submetido a uma acção. A estrutura tridimensional básica que é estável nestas condições, está representada na figura 2.0-1, e é um tripode.

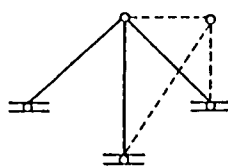


Fig. 2.0-1 Trípode

As estruturas espaciais podem portanto ser obtidas pela junção de trípodes uns aos outros, concluindo-se assim que para cada nó  $i$  deve haver no mínimo três membros  $p$ , não situados no mesmo plano, para que um simples suporte seja internamente estável. Mais que três membros resulta em redundância, enquanto que menos que três membros produz instabilidade, podendo assim concluir-se que para  $p = 3 i$  é determinável, para  $p < 3 i$  é instável, e para  $p > 3 i$  é indeterminável, para sistemas de forças concorrentes.

Contudo, o equilíbrio à translação e rotação ao longo e à volta de cada eixo da estrutura para um sistema espacial de forças não concorrentes num ponto, nem todas paralelas, é verificado respectivamente, como é sabido, para a solução das seguintes seis equações independentes :  $\Sigma F_{y1} = 0$  ;  $\Sigma F_{y2} = 0$  ;  $\Sigma F_{y3} = 0$  ;  $\Sigma M_{y1} = 0$  ;  $\Sigma M_{y2} = 0$  ;  $\Sigma M_{y3} = 0$  ; onde  $F_{yi}$  representa as forças do sistema espacial, e  $M_{yi}$  os momentos, todos eles referidos a um sistema cartesiano ordinário  $O y_1 y_2 y_3$ .

Deste modo, para uma estrutura espacial ser externamente estável e determinável, o número de condições das reacções devem ser seis. Considerando as componentes das reacções como equivalentes a membros, então o número total de membros, para o suporte externo e interno espacial contendo  $n$  pontos, é igual a  $p + 6 = 3 n$ . O factor  $3 n$  na equação, representa a estabilidade interna, enquanto o termo 6 é igual ao número de condições das reacções, necessárias para a estabilidade externa.

Temos assim que para  $p + 6 = 3 n$  a estrutura é determinada, para  $p + 6 < 3 n$  é instável, e para  $p + 6 > 3 n$  é indeterminada, concluindo-se portanto que o número total de componentes dos membros e das reacções é igual a três vezes o número de nós, para que a estrutura seja externamente e internamente estável, e as forças possam ser encontradas pela estática. Esta condição,

embora necessária, não é no entanto suficiente, pois também é necessário que os membros estejam devidamente arranjados, como já foi referido na introdução, em relação aos poliedros instáveis, usados na constituição de coberturas planas (pág. 44 e 45).

Retrocedendo à estrutura considerada para referência, em correspondência com os seus  $n$  nós têm-se  $3n$  componentes, incógnitas do deslocamento  $x_i$ , a menos de um movimento rígido (definido, como é sabido, por seis parâmetros linearmente independentes).

Em correspondência com os mesmos nós supõem-se actuando  $n$  forças  $F_i$  activas, ou provenientes dos vínculos, como forem dispostos, salvo as condições (seis) exigidas pelo equilíbrio geral do corpo.

Na caracterização do método directo convém eliminar as seis componentes do modo rígido, munindo a estrutura de outros tantos vínculos, aos quais competirão seis parâmetros de razão determinável com as equações cardinais da estática. Restam assim  $p = 3n - 6$  parâmetros independentes, seja para as forças externas, ou para os deslocamentos.

Neste estudo as forças serão indicadas com a letra  $F$  seguida do índice  $1, 2, \dots, p$ , e as incógnitas dos deslocamentos com a letra  $x$  seguida do índice  $1, 2, \dots, p$ , constituindo respectivamente o vector  $\mathbf{F}$  e o vector  $\mathbf{x}$ . Sendo assim, se o vector  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{F}$  tiverem o mesmo número de componentes independentes, pertencem ao mesmo espaço.

Em correspondência com as barras, supõe-se actuando em cada uma, uma força incógnita  $X_1, X_2, \dots, X_a$ , capaz de reproduzir distorções e esforços de origem térmica, e certamente, distorções elásticas da própria presença da força  $X$ . Estas forças constituem as componentes do vector  $\mathbf{X}$ .

As distorções, independentemente da sua origem, são indicadas com  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_a$ , que são as componentes do vector  $\mathbf{\Delta}$ . Os vectores  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{\Delta}$  têm a mesma dimensão, pertencem ao mesmo espaço, e as suas componentes, respectivamente  $X_i$  e  $\Delta_i$ , medidas na relação estabelecida pelas barras da estrutura.

Assim, o vector  $(\mathbf{F}; \mathbf{\Delta})$  representa os dados externos, e o vector  $(\mathbf{x}; \mathbf{X})$  representa as incógnitas do problema, que pertencem a um mesmo espaço de dimensão  $p + a$ , existindo portanto uma correspondência bi-unívoca entre eles, que é estabelecida justamente pelo grupo de equações que ligam as componentes de um às componentes do outro, equações que são definidas no ponto seguinte.

## 2.1 - EQUAÇÕES DO PROBLEMA

A equação geral do problema é obtida começando por escrever a equação de equilíbrio, e a equação de compatibilidade.

Sendo  $X_1, X_2, \dots$  as incógnitas das forças nas barras, componentes do vector  $\mathbf{X}$ , num espaço com a dimensão  $a$ , referidas segundo o sistema de referência individual das direcções das barras, e  $F_1, F_2, \dots$  as forças externas, componentes do vector  $\mathbf{F}$ , no espaço com a dimensão  $p = 3n - 6$ , referidas segundo a direcção  $y_1, y_2, y_3$ , escolhida para o equilíbrio, em cada um dos nós, para escrever a equação de equilíbrio do nó genérico  $i$ , é necessária a projecção das forças internas  $X$  nas direcções  $y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}$ . Recorre-se para isso aos co-senos que fazem cada uma das direcções das forças  $X$  com as direcções  $y_i$ . Assim, para a força genérica  $X_q$ , correspondente à direcção da barra genérica  $q$ , em que  $y_{11}, y_{12}$ , e  $y_{13}$  são as coordenadas do nó  $q$ , e  $y_{m1}, y_{m2}$ , e  $y_{m3}$  são as coordenadas do nó  $m$ , nós estes, extremos da barra  $q$ , e em que  $l_{qm}$  representa o comprimento da barra  $q$ , os co-senos referenciados são:

$$\alpha_q = (y_{11} - y_{m1}) / l_{qm}$$

$$\beta_q = (y_{12} - y_{m2}) / l_{qm}$$

$$\gamma_q = (y_{13} - y_{m3}) / l_{qm}$$

Resulta deste modo que o equilíbrio dos  $n$  nós vem expresso num sistema de  $3n - 6$  equações, nas  $a$  incógnitas  $X_q$ . Numa interpretação puramente geométrica, a matriz dos coeficientes deste sistema é a matriz do operador que transforma o espaço de  $X$  no espaço de  $F$ , ou seja a matriz dos coeficientes da equação de equilíbrio que se designará por  $\mathbf{A}$ , escrevendo-se então a equação de equilíbrio na seguinte forma sintética:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{F} = 0$$

A equação de equilíbrio exprime portanto a relação de correspondência entre o espaço das incógnitas e aquele de limite que é conhecido, projectando assim vector  $\mathbf{X}$ , formado pelas componentes  $X_1, X_2, \dots, X_a$ , através do operador  $\mathbf{A}$ , nas direcções segundo as quais são referidas as componentes de  $\mathbf{F}$ .

A equação de compatibilidade é obtida executando o mesmo raciocínio da equação de equilíbrio, ou seja, transformando através da matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  o vector  $\mathbf{x}$  das incógnitas, em que para uma

barra genérica  $q$ , de nós extremos  $l$  e  $m$ , as suas componentes são respectivamente representadas pelos deslocamentos  $x_{l1}, x_{l2}, x_{l3}$  e  $x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}$ , no vector  $\Delta$ , obtendo-se assim a seguinte expressão :

$$\bar{A} x = \Delta$$

ou

$$\bar{A} x = \Delta^e - \Delta^0$$

em que  $\Delta^e$  é um vector cujas componentes representam as dilatações nas barras devido às forças internas, e  $\Delta^0$  é um vector cujas componentes representam as dilatações nas barras devido a outras causas externas.

A matriz dos dois grupos de equações, de equilíbrio e de compatibilidade, apresentam a propriedade de uma ser a transposta da outra, ou seja, uma é obtida da outra mediante simples trocas das linhas com as colunas. Esta propriedade só se verifica se na formação da equação de compatibilidade, a ordem de escrita seguida for a mesma da utilizada na ordenação das incógnitas estáticas, ou seja, quando na equação de equilíbrio a incógnita  $X_j$  ocupa a coluna  $j$ , e na equação de compatibilidade aquela relativa à barra deve ocupar a linha  $j$ . Esta é uma propriedade da álgebra linear, na interpretação geométrica de sistemas de equações lineares.

A dependência entre as equações da estática e as equações da cinemática ( ou de congruência ) é fixada através do termo  $\Delta^e$  da equação de compatibilidade, exprimindo a compatibilidade da deformação elástica da barra -  $XI/EA$  - com a expressão correspondente às componentes dos deslocamentos .

Escrevendo ordenadamente os coeficientes da equação de equilíbrio na matriz  $A$  com um número de linhas igual a  $p = 3n - 6$  e com um número de colunas igual a  $a$ , bem como os coeficientes da equação de compatibilidade na matriz  $\bar{A}$ , com  $a$  linhas e  $p$  colunas, conservando a propriedade de troca de linha e coluna nas duas matrizes ( propriedade mencionada atrás ), então a equação geral do problema assume a seguinte forma simétrica :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \cdots & A \\ \hline \bar{A} & K \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x \\ X \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} F \\ -\Delta^0 \end{array} \right]$$

A escrita da submatriz **K** é imediata, pois é uma matriz diagonal (os seus elementos estão dispostos na diagonal principal) – logo que cada equação de compatibilidade equipare a extensividade  $K = I / EA$  da barra a que a equação se refere, não alterando portanto a simetria, necessitando-se apenas que estejam fixadas as características elásticas de cada barra.

Correntemente, depois de escritas as equações de equilíbrio, deduzem-se a partir delas as equações de compatibilidade, através da troca linha - coluna, já referenciada.

Atribuindo à matriz geral a letra **B**, ao vector das incógnitas (**x**; **X**) a letra **Z**, e ao vector (**F**;  $\Delta^0$ ) a letra **N**, tem-se que  $\mathbf{B} \mathbf{Z} + \mathbf{N} = 0$ , resultando assim que a resolução do problema é obtida com a inversão de **B**:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

É de fácil percepção que, no caso de grandes estruturas, a inversão da matriz **B**, torna-se difícil e morosa, tornando-se útil e eficaz recorrer ao auxílio de computadores de grande capacidade. Na falta desses computadores, foram adoptados dois métodos - o método dos deslocamentos e o método das forças - como já foi dito, que permitem impor directamente um sistema parcial de equações numa determinada forma, de modo a fornecer soluções que se substituem sucessivamente noutras equações, reduzindo assim o número de equações simultâneas.

O método dos deslocamentos adopta a eliminação do vector **X** de incógnitas das forças, considerando na escrita das equações apenas as incógnitas dos deslocamentos do vector **x**. Obtidos os valores do vector **x**, então por substituição destes na equação de compatibilidade é que se determinam os valores das incógnitas do vector **X**.

As componentes do vector **x** estão ligadas, como já se viu, às componentes do vector **X** e à distorção  $\Delta^0$  nas equações de compatibilidade, estando por sua vez as incógnitas das forças do vector **X** ligadas às forças externas do vector **F**, através das equações de equilíbrio, donde se conclui que o vector **x** está ligado ao vector **F** das forças externas, e às distorções  $\Delta^0$ . É na relação **x** - (**F**,  $\Delta^0$ ), que exprime a compatibilidade dos deslocamentos **x** e o equilíbrio das forças **X**, que consiste o método dos deslocamentos.

De modo, a tornar mais explícito o procedimento e origem do método dos deslocamentos, considerem-se as equações de equilíbrio e de compatibilidade :

$$\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{equilíbrio})$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{X} - \Delta^0 = \mathbf{0} \quad (\text{compatibilidade})$$

Da equação de compatibilidade obtém-se o seguinte valor da incógnita  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X} = -\mathbf{K}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x} - \Delta^0)$$

Substituindo o valor de  $\mathbf{X}$ , assim obtido, na equação de equilíbrio, obtém-se :

$$-\mathbf{A} \mathbf{K}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x} - \Delta^0) + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Se se indicar com  $\mathbf{R}$  a matriz  $\mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$ , tem-se que :

$$-\mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \Delta^0 + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Invertendo a matriz  $\mathbf{R}$ , que representa um sistema de  $c$  equações em  $c$  incógnitas, obtém-se para o vector  $\mathbf{x}$  a seguinte expressão :

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \Delta^0)$$

que traduz o método dos deslocamentos.

Substituindo esta expressão para o valor de  $\mathbf{x}$ , na equação de compatibilidade, obtém-se o valor da força  $\mathbf{X}$  na forma :

$$\mathbf{X} = -\mathbf{K}^{-1}[\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \Delta^0) - \Delta^0]$$

Se a matriz  $\mathbf{A}$  e  $\bar{\mathbf{A}}$  são invertíveis separadamente, a expressão de  $\mathbf{x}$  é obtida directamente, tirando primeiramente o vector  $\mathbf{X}$  da equação de equilíbrio, e substituindo sucessivamente na equação de compatibilidade :

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$$

$$\mathbf{x} = -\bar{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{X} - \Delta^0) = -\bar{\mathbf{A}}^{-1}(-\mathbf{K}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F} - \Delta^0) = \bar{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F} + \bar{\mathbf{A}}^{-1}\Delta^0$$

Esta equação do método dos deslocamentos é a adoptada na realização do programa de estruturas espaciais reticuladas metálicas que é apresentado no ponto seguinte.

O método das forças, ao contrário do método dos deslocamentos, adopta como incógnita inicial do problema o vector  $\mathbf{X}_j$ , cujas componentes representam a força nas  $j = s - c$  barras da estrutura em estudo, representando  $s$  as incógnitas estáticas, e  $c$  as incógnitas cinemáticas. As  $c$  equações de equilíbrio e as restantes  $c$  incógnitas que constituem o vector  $\mathbf{X}_i$ , são expressas em função da força externa  $\mathbf{F}$ , e do vector das incógnitas  $\mathbf{X}_j$ .

De modo a tornar mais explícito o mecanismo do método das forças, considere-se  $\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{A}_j$  como duas submatrizes associadas aos dois vectores  $\mathbf{X}_i$  e  $\mathbf{X}_j$ , escrevendo-se a equação geral do problema da seguinte forma :

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{A}_i & \mathbf{A}_j \\ \bar{\mathbf{A}}_i & \mathbf{K}_i & \\ \bar{\mathbf{A}}_j & & \mathbf{K}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ -\Delta_i^0 \\ -\Delta_j^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Sendo a matriz  $\mathbf{A}_i$  invertível, é possível exprimir o vector  $\mathbf{X}_i$  por meio das equações de equilíbrio, da seguinte forma :

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{A}_j \mathbf{X}_j + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}_i = -\mathbf{A}_i^{-1} (\mathbf{A}_j \mathbf{X}_j + \mathbf{F})$$

Substituindo esta expressão de  $\mathbf{X}_i$  no bloco de equações de compatibilidade relativamente à componente  $\mathbf{X}_i$ , obtém-se para  $\mathbf{x}$  :

$$\bar{A}_i \mathbf{x} + K_i X_i - \Delta_i^0 = 0$$

$$\mathbf{x} = -\bar{A}_i^{-1} (K_i X_i - \Delta_i^0) = -\bar{A}_i^{-1} (-K_i A_i^{-1} (A_j X_j + F) - \Delta_i^0)$$

Obtém-se deste modo o vector  $\mathbf{x}$  expresso em função da força externa  $\mathbf{F}$  e da distorção  $\Delta_i^0$ , bem como das incógnitas  $X_j$ .

Do último grupo de equações de compatibilidade, relativamente à incógnita  $X_j$ , substituindo  $\mathbf{x}$  pelo resultado anterior, obtém-se :

$$\bar{A}_j \mathbf{x} + K_j X_j - \Delta_j^0 = 0$$

$$-\bar{A}_j \bar{A}_i^{-1} (-K_i A_i^{-1} (A_j X_j + F) - \Delta_i^0) + K_j X_j - \Delta_j^0 = 0$$

É assim obtido um sistema de  $j$  equações para  $j$  incógnitas componentes do vector  $X_j$ , constituindo as equações resolventes, às quais a aplicação sistemática do teorema dos trabalhos virtuais conduz.

Ordenando a última equação obtém-se :

$$X_j (\bar{A}_j \bar{A}_i^{-1} K_i A_i^{-1} A_j + K_j) + \bar{A}_j \bar{A}_i^{-1} K_i A_i^{-1} F + \bar{A}_j \bar{A}_i^{-1} \Delta_i^0 - \Delta_j^0 = 0$$

Indicando com  $\mathcal{J}$  a matriz  $(\bar{A}_j \bar{A}_i^{-1} K_i A_i^{-1} A_j + K_j)$ , obtém-se a solução de  $X_j$  com a seguinte forma :

$$X_j = \mathcal{J}^{-1} (-\bar{A}_j \bar{A}_i^{-1} K_i A_i^{-1} F - \bar{A}_j \bar{A}_i^{-1} \Delta_i^0 + \Delta_j^0)$$

que traduz o método das forças.

Substituindo os valores de  $X_j$  nas equações estáticas, e no primeiro bloco de equações cinemáticas, obtém-se os valores das restantes incógnitas do vector  $X_i$  e os deslocamentos constituintes do vector  $\mathbf{x}$ .

É de fácil percepção que o método das forças requer um dimensionamento tal de matrizes iniciais, que faz com que a sua escolha só se justifique no caso do computador em serviço ser de grande capacidade, e que reforça a opção da utilização do método dos deslocamentos na elaboração do programa de cálculo de estruturas espaciais reticuladas metálicas apresentado neste trabalho.

Nos casos em que a estrutura em estudo advém da reunião de unidades estruturais elementares iguais, a equação do problema apresenta a particularidade de um bloco de coeficientes na matriz geral se repetir segundo uma lei de distribuição estritamente ligada à repetência da configuração das barras em relação ao nó genérico, que permite uma redução do número de cálculos a efectuar, como já foi referido anteriormente.

Como exemplo elucidativo considere-se uma estrutura bidimensional, da qual não se definem os seus vínculos, nem a acção externa, com a forma representada na figura 2.1 - 1.

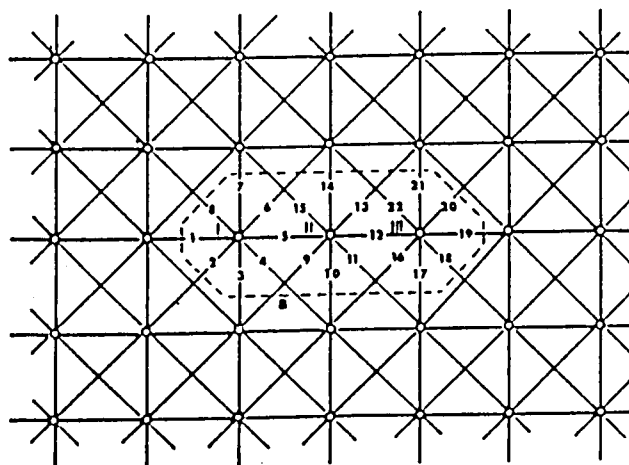


Fig. 2.1 - 1

Supondo as barras numeradas como na figura 2.1 - 1, as equações estáticas relativamente aos nó I, II e III, são escritas na matriz geral do grupo de coeficientes da seguinte forma:

|      | $x_1$ | $x_2$                | $x_3$ | $x_4$                 | $x_5$ | $x_6$                 | $x_7$ | $x_8$                 | $x_9$                | $x_{10}$ | $x_{11}$              | $x_{12}$ | $x_{13}$              | $x_{14}$ | $x_{15}$              | $x_{16}$             | $x_{17}$              | $x_{18}$             | $x_{19}$              | $x_{20}$ | $x_{21}$              | $x_{22}$ |
|------|-------|----------------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|
| Nó 1 | 1     | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1    | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |       | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  |                      |          |                       |          |                       |          |                       |                      |                       |                      |                       |          |                       |          |
| Nó 2 |       | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1     | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  |       | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | -1    | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |                      |          |                       |          |                       |          |                       |                      |                       |                      |                       |          |                       |          |
| Nó 3 |       |                      |       |                       | 1     |                       |       |                       | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |          | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |          | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  |                      |                       |                      |                       |          |                       |          |
|      |       |                      |       |                       |       |                       |       |                       | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  |          | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | -1       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |                      |                       |                      |                       |          |                       |          |
|      |       |                      |       |                       |       |                       |       |                       |                      |          |                       | 1        |                       |          |                       | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1                   | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |          | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  |          |
|      |       |                      |       |                       |       |                       |       |                       |                      |          |                       |          |                       |          |                       | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                     | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |          |

Facilmente se depreende neste exemplo, a repetência referida no início desta exposição, que é verificada na matriz geral do grupo de coeficientes, quando é expresso o equilíbrio dos nós.

O estudo de estruturas que contenham um ou mais eixos de simetria, ou anti-simetria, geométrica e mecânica, pode ser também simplificado, no sentido de serem reduzidas as incógnitas. Nestes casos, para conservar a característica essencial de simetria da matriz geral, é necessário ter em conta alguns princípios a eles inerentes.

Assim, um plano de simetria passando por um nó da estrutura, impede o deslocamento do mesmo na direcção normal a esse plano, e consequentemente o parâmetro do deslocamento do nó é referenciado segundo o plano de simetria, plano esse em que serão escritas as equações de equilíbrio. Além disso, é necessário referir, que um plano de simetria que corte longitudinalmente uma barra da estrutura, duplica o seu comprimento, bem como um plano de simetria, que corte transversalmente uma barra da estrutura, divide o seu comprimento (fig. 2.1 - 2).

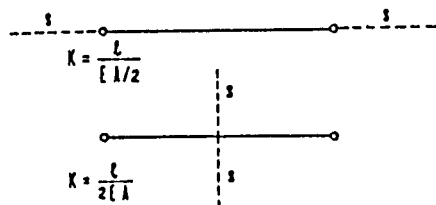


Fig. 2.1 - 2

É igualmente necessário ter em conta para estes casos, que uma força externa que actue segundo um plano de simetria, é considerada com metade da sua intensidade, aplicada na parte em estudo.

Do mesmo modo, um plano de anti-simetria que passe por um nó da estrutura em estudo, impede o seu deslocamento nesse mesmo plano, e consequentemente, é na direcção ortogonal desse plano que serão escritas as equações de equilíbrio. As barras cortadas longitudinalmente, ou transversalmente por um plano de anti-simetria, não são sujeitas a forças internas, não sendo por isso necessário entrarem no número das incógnitas.

## 2.2 - PROGRAMA DE CÁLCULO DE ESTRUTURAS ESPACIAIS RETICULADAS METÁLICAS - EERM

O programa EERM que é apresentado nesta tese, é um programa para cálculo de estruturas espaciais reticuladas metálicas, escrito na linguagem de programação estruturada Fortran, para sistemas operativos MS-DOS. O programa foi realizado de modo a não ser necessário recorrer a computadores de grande capacidade, tendo-se para isso adoptado o método dos deslocamentos para o cálculo das incógnitas inerentes aos problemas em estudo.

Pensando na comodidade do utilizador do programa EERM foram criadas várias directrizes para a entrada de dados, bem como a possibilidade de visualizar de uma forma esquemática a estrutura definida para estudo, e a deformação que esta sofre devido às solicitações a que fica inerente.

No arranque do programa três possibilidades de escolha no "MENU DE ENTRADA" são postas à disposição do utilizador: a primeira é a realização de um ficheiro de dados novo; a segunda é a possibilidade de efectuação dos cálculos através da utilização de um ficheiro de dados já previamente realizado; e a terceira é a possibilidade de modificação da solicitação no cálculo de uma estrutura já previamente definida, para a qual já existe portanto um ficheiro de dados.

Escolhendo a primeira directiva o programa procede à abertura de um ficheiro de dados, com a extensão .DAD, onde são gravados todos os dados relativos ao estudo em causa, dados esses que vão sendo solicitados através do écran ao utilizador.

Na entrada de dados surge a possibilidade de redução do número dos mesmos, o que vai facilitar o trabalho do utilizador, para os casos em que a estrutura em estudo corresponda a uma das estruturas tipo que o programa oferece como opção na entrada de dados. Desta forma a definição da estrutura por parte do utilizador fica reduzida a um número substancialmente menor de dados, realizando o programa a definição das coordenadas de todos os pontos, bem como a definição das barras relativamente aos nós. As estruturas tipo foram escolhidas de forma a abranger as estruturas planas, cilíndricas e cúpulas, e a oferecer as estruturas utilizadas em coberturas, que se julgaram bastante comuns dentro dos três tipos já mencionados. A estruturação do programa permite que se altere este com bastante facilidade, de modo a serem definidas outras estruturas tipo, encontrando-se portanto o programa bastante virado para a facilidade de utilização.

No pedido de definição das solicitações por parte do programa, este ainda dá a possibilidade de escolha ao utilizador, da forma como essa se irá processar. Assim o programa questiona sobre se é pretendida uma entrada normal das cargas, onde a entrada das cargas é efectuada para cada um dos nós individualmente, se é pretendida a entrada simplificada das cargas, onde são definidos conjuntos de cargas  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ , para os quais se indicam os nós em que estes conjuntos de carga estão aplicados, ou se não existem cargas nos nós, passando o programa directamente à definição da variação de temperatura.

A segunda opção de entrada de cargas revela-se de grande utilidade nos casos em que exista um grande número de nós com um conjunto igual de cargas  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  aplicadas, pois evita a necessidade de escrever o mesmo  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  para todos os nós, passando-se a escrever só uma vez, e depois somente o número dos nós em que está aplicado tal conjunto de cargas. Geralmente grande parte das estruturas espaciais reticuladas metálicas apresenta um ou mais casos de solicitações em que acontece a repetição referida das cargas aplicadas nos nós.

Na definição da variação de temperatura para os casos em que todas as barras estão sujeitas a uma mesma variação, de modo a facilitar a mesma, o programa define automaticamente essa variação de temperatura para todas as barras, sendo somente necessário definir uma vez o valor da mesma. Nos outros casos, a variação de temperatura é definida para cada barra em que ocorre essa variação, após se ter definido o número total de barras em que ocorre variação de temperatura.

Escolhendo a segunda directiva do "MENU DE ENTRADA", o programa pede o nome de um ficheiro de dados existente, sem a extensão .DAD, de modo a abrir esse ficheiro, e a ler dele todos os dados necessários para efectuar os cálculos relativos á estrutura e solicitações que aí se encontram definidas. O ficheiro de dados existente pode ser um ficheiro que já tenha sido realizado pelo programa em trabalhos anteriores, quando se tenha optado pela primeira directiva do "MENU DE ENTRADA", ou um ficheiro de dados efectuado com a utilização de um editor de texto. O objectivo de fornecer esta opção foi: primeiro o de permitir guardar um trabalho efectuado de forma a dispendir o mínimo de memória do computador (já que um ficheiro de dados ocupa menos memória que um ficheiro de resultados), e assim quando se pretenderem novamente os resultados, bastar correr o programa para esse ficheiro, sem necessidade de fazer nova entrada de dados; segundo o de permitir a efectuação de um ficheiro de dados através de um editor de texto, ou com este, realizar pequenas alterações em ficheiros de dados já existentes (como alteração de duas ou três coordenadas, de uma ou duas solicitações, supressão de uma barra, etc.), poupando deste modo tempo ao utilizador do programa.

A terceira directiva foi criada a pensar nos casos em que as alterações a efectuar sejam nas solicitações de estruturas que já tenham sido estudadas, e sobre as quais já existe portanto um ficheiro de dados, alterações essas de uma grandeza tal, que ajude mais a efectuar essas alterações através da entrada de dados do programa. Nestes casos não é necessário realizar novamente a entrada de dados que definem a estrutura, sendo somente necessário fornecer ao computador o nome do ficheiro de dados já existente, sem a extensão .DAD, e este começa a solicitar pelo écran os dados referentes às novas solicitações, oferecendo as opções de entrada de solicitações já mencionada.

Após ter realizado todos os cálculos para a determinação das incógnitas, o programa EERM antes de sair para o sistema operativo, realiza para cada uma das solicitações o desenho da estrutura, bem como da sua deformada, nos planos x-y, x-z, e y-z. No desenho da estrutura são realizadas as barras com cores que fazem a distinção das barras que resultaram traccionadas, das que resultaram comprimidas. De entre os dois grupos de barras (barras traccionadas e barras comprimidas) ainda é realizada uma distinção, com três cores em cada grupo, entre as barras com maiores valores e menores valores de compressão ou de tracção. As barras que não estejam sujeitas a nenhum des-

tes esforços são igualmente destacadas com outra cor. O desenho da deformada é realizado com uma escala tal que permita a sua observação. Assim sendo, estas não são realizadas com a mesma escala do desenho da estrutura. Tal facto justifica-se devido aos deslocamentos serem muito inferiores à grandeza das barras, o que faz com que um desenho no écran do computador da estrutura seja igual ao da sua deformada, desenhada com a mesma escala.

Os resultados dos cálculos efectuados pelo programa são escritos num ficheiro de dados com a extensão .RES, e com o mesmo nome do ficheiro de dados. A sua leitura pode ser realizada com qualquer editor de texto, e permite que se façam alterações na apresentação dos resultados, antes de se proceder à sua impressão, de modo a dar satisfação a qualquer desejo por parte do utilizador nesse sentido.

No ficheiro de resultados são escritos todos os dados relativos à definição da estrutura, à definição das várias solicitações para as quais são efectuados os cálculos, bem como todos os resultados inerentes aos cálculos efectuados, que são para cada solicitação, os esforços nas barras, as reacções nos apoios, e os deslocamentos nos nós.

## 2.2.1 - ESTRUTURA DO PROGRAMA EERM

O programa EERM apresentado na sua versão executável pela designação de EERM.EXE, é constituído pelo programa base, que segue uma estrutura modular, chamando dez sub-rotinas que suportam os comandos de cálculo, e que apresenta a seguinte forma, na linguagem de programação estruturada Fortran, em que foi escrito:

```

C*****
C
C      EERM - Programa de calculo de estruturas espaciais reticuladas
C          metálicas
C
C*****
C      programa principal
C
C*****
C
C      INCLUDE 'FGRAPH.FI'
C      RECORD /xycoord/ xy
C
C      dimension lnods(400,2),ifpre(30,3),presc(30,3),stres(3,400),

```

```

#      cnods(80,3),tqlod(3,80,3),matno(400),
#      nofix(30),aslod(3,240),ncarg(3),delt(400,3),ndelt(3),
#      cl(400),astif(240,240),react(3,240),xdisp(3,240),
#      tdisp(3,80,3),treac(3,80,3),fowem(3,6),props(10,3)
C
$large
C
      character*1 indic
      character*10 titl1
      character*10 titl2
      character*50 title
      character*50 titls(3)
      integer*2 dummy2, i, icoor1, icoor2 ,icoor3,icoor4
      integer*4 dummy4
      integer*4 bkcolor(1) / $BLACK /
C
C*****
C
C      entrada de dados iniciais
C
C*****
C
      nelem=400
      npoin=80
      nvfix=30
      nsol=3
      nmats=10
C
      call input1(nelem,npoin,ndime,nnode,ndofn,nsol,nvfix,
#              nevab,nsvab,npoin,ityas,nsol,nmats,nmats,
#              indic,nelem,nvfix,title,titl1,titl2)
C
C*****
C
C      entrada das caracteristicas dos materiais, das coordenadas dos
C      nos, e definicao das barras
C
C*****
C
      call input2(ndime,nnode,npoin,nelem,cnods,lnods,ityas,
#              indic,matno,props,nmats)
C
C*****
C
C      entrada de dados definindo as condicoes fronteiras
C
C*****
C
      call daecon(ndofn,nvfix,nofix,ifpre,presc,indic)
C
C*****
C
C      entrada das solicitacoes
C
C*****
C
      call load(npoin,ndofn,tqlod,nsol,indic,lnods,nelem,nnode,
#              cnods,props,nmats,cl,matno,nvfix,nofix,ifpre,
#              presc,title,titl1,titl2,ncarg,titls,ndime,
#              ndelt,delt)
C
C*****
C
C      reuniao das matrizes de rigidez dos elementos na matriz
C      de rigidez global da estrutura
C
C*****
C
      call assemb(nsol,nsvab,npoin,ndofn,nelem,nnode,
#              aslod,astif,tqlod,lnods,

```

```

#          matno,cnods,cl,nmats,props)
C
C*****
C
C   reducao de gauss
C
C*****
C
C   call greduc(nsvab,nvfix,ndofn,nsol,nofix,ifpre,aslod,
#           astif,presc)
C
C*****
C
C   retro-substituicao
C
C*****
C
C   call retsub(nsvab,nsol,nvfix,npoin,ndofn,react,astif,
#           aslod,tdisp,nofix,ifpre,presc,tdisp,treac)
C
C*****
C
C   calculo dos esforcos nas barras
C
C*****
C
C   call forcec(npoin,ndofn,nelem,nnode,nsol,nevab,nmats,
#           props,matno,lnods,cnods,cl,tdisp,stres,fomea,
#           ndelt,delt)
C
C*****
C
C   saida dos resultados finais
C
C*****
C
C   call saida(npoin,ndofn,nsol,nelem,
#           nvfix,tdisp,treac,stres,nofix,titls)
C
C*****
C
C   desenho da estrutura e das deformadas
C
C*****
C
C   call desest(npoin,ndofn,nsol,lnods,nelem,nnode,
#           cnods,tdisp,stres,ifpre,nvfix)
C
C   stop
C   end

```

O programa define no início a dimensão das matrizes, encontrando-se escrito para efectuação de cálculos de estruturas com um máximo de 80 nós, 400 barras, 30 ligações ao exterior, 10 materiais diferentes para as barras, e 3 solicitações diferentes. A dimensão das matrizes fica unicamente dependente da capacidade do computador que se utilize, podendo-se rapidamente alterar as suas dimensões, alteração essa que é realizada unicamente no programa base.

Descrevem-se de seguida as várias sub-rotinas que são utilizadas pelo programa base:

- INPUT1.FOR, sub-rotina onde se processa a entrada de dados iniciais, que vão definir as matrizes no decorrer do programa. É por intermédio desta sub-rotina que é realizado o "MENU DE ENTRADA", que permite a escolha entre a realização de um ficheiro de dados novo seguido da efectuação dos cálculos para o mesmo, efectuação dos cálculos com um ficheiro de dados existente, ou a escolha da modificação total das solicitações de um ficheiro de dados já existente com posterior realização dos cálculos para o mesmo. Efectuada a primeira opção, o programa solicita o nome do ficheiro de dados sem a respectiva extensão .DAD, podendo este ser constituído por um máximo de seis caracteres, como é explicitado no écran quando solicitado. Conforme a opção do "MENU DE ENTRADA" escolhida, o programa lê os primeiros dados referentes à estrutura no ficheiro de dados, caso se tenha optado pela segunda ou terceira opção, ou solicita-os pelo écran. Os primeiros dados da estrutura solicitados pelo programa nesta sub-rotina são: o número total de nós, o número total de barras, número total de nós ligados ao exterior, número total de materiais diferentes, e número de solicitações diferentes. Com estes dados é feita a verificação da dimensão das matrizes, e caso estas não correspondam ao solicitado, é escrito no écran a informação das matrizes que são necessárias redimensionar no programa base. Após a escolha da primeira opção no "MENU DE ENTRADA", é realizado nesta sub-rotina um "MENU DE ESCOLHA DA FORMA DA ESTRUTURA RETICULADA ESPACIAL". Nesse "menu" quatro opções são postas ao dispor do utilizador. As três primeiras dizem respeito à escolha de uma estrutura plana tipo, de uma estrutura plana cilíndrica tipo, ou a uma cúpula tipo, e a última a uma estrutura diferente das anteriores. As estruturas tipo permitem a redução de entrada de dados, caso sejam essas as estruturas pretendidas para estudo. No caso de se optar por esta última opção, é chamada a sub-rotina CARACT1.FOR.

- CARACT1.FOR, sub-rotina em que é definida qual a estrutura tipo que é escolhida, e para a qual se define de seguida o número total de nós e de barras, por que é constituída.

- INPUT2.FOR, sub-rotina em que é dada a entrada das características dos materiais, das coordenadas dos nós, e a definição das barras pelos número dos nós dos seus extremos e pelo número do material de que são constituídas. Esta entrada é realizada pelo écran caso se proceda à realização de um ficheiro de dados novo, ou pela leitura dos mesmos num ficheiro de dados existente. As características dos materiais solicitadas são a área, o módulo de elasticidade e o coeficiente de dila-

tação térmica do material. Caso se tenha optado por uma estrutura tipo, na realização de um ficheiro de dados novo, esta sub-rotina chama a sub-rotina CARACT2.FOR.

- CARACT2.FOR, sub-rotina que determina as coordenadas dos nós das estruturas tipo, e define as barras das mesmas com o número dos nós dos seus extremos.

- DAECON.FOR, sub-rotina onde é efectuada a entrada de dados que definem as ligações ao exterior. Estes dados são constituídos pelos números dos nós ligados ao exterior, pelos códigos 1 ou 0, para cada um dos nós, que define respectivamente se é ou não imposto um valor para os deslocamentos dos nós nas direcções X, Y e Z, e pelo valor desses deslocamentos impostos aos nós ligados ao exterior. Esta entrada é realizada pelo écran caso se proceda à realização de um ficheiro de dados novo, ou pela leitura dos mesmos num ficheiro de dados existente.

- LOAD.FOR, sub-rotina onde é efectuada a entrada da caracterização das solicitações a que a estrutura vai ser submetida, e para as quais se vai proceder ao cálculo das incógnitas (esforços nas barras, reacções nos apoios e deslocamentos dos nós). Caso se esteja a trabalhar com um ficheiro de dados já existente, em que não se queira efectuar nenhuma alteração das solicitações, esta sub-rotina lê os dados referidos nesse ficheiro. No caso de se trabalhar com um ficheiro de dados novo, ou um ficheiro de dados já existente em que se pretenda modificar as solicitações, os dados referidos são solicitados ao utilizador do programa pelo écran.

Na entrada de dados pelo écran, o programa realiza nesta sub-rotina um quadro no écran, que oferece três hipóteses para a entrada de cargas nos nós. A primeira hipótese designada por entrada normal das cargas, procede inicialmente ao pedido do número total de nós com cargas aplicadas, pedido de seguida para cada um desses nós, o seu número na estrutura, o valor da carga  $F_x$  aí aplicada, o valor da carga  $F_y$  aí aplicada e o valor da carga  $F_z$  aí aplicada, ou seja, os valores das cargas segundo os eixos x, y e z referentes à entrada de cargas.

A segunda hipótese, designada por entrada simplificada, procede inicialmente ao pedido do número total de conjuntos de cargas compostos por  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ , que são iguais. Seguidamente pede a definição de cada conjunto, ou seja os valores de  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ . No final de cada definição de um conjunto de cargas  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ , é pedido pelo écran o número do nó em que está aplicado esse conjunto de cargas, definindo-se um nó número zero como instrução para passar à leitura dos dados do conjunto de cargas seguinte.

A terceira e última hipótese, é para os casos em que não existam cargas aplicadas nos nós, passando assim a ser seguidamente, solicitado pelo programa a definição da acção variação de temperatura.

A definição da acção variação de temperatura é também realizada nesta sub-rotina, onde é pedido inicialmente ao utilizador do programa, o número total de barras onde ocorre variação de temperatura. Caso não ocorra variação de temperatura em nenhuma das barras, o programa passa ao ponto seguinte, de outro modo, este pede para o número total de barras definido anteriormente, o número da barra em que ocorre uma variação de temperatura, seguido do pedido do valor dessa variação de temperatura.

Nos casos em que o número total de barras onde ocorre variação de temperatura coincidir com o número total de barras, esta sub-rotina elabora um quadro que questiona sobre se as barras sofrem todas a mesma variação de temperatura, ou existem variações de temperatura diferentes. Caso o programa seja informado que em todas as barras ocorre a mesma variação de temperatura, este pede o valor dessa variação, e atribui automaticamente a todas as barras.

Nesta sub-rotina é ainda levado a efeito a realização, com posterior gravação, de um novo ficheiro de dados, para os casos em que se esteja a elaborar um ficheiro de dados novo, ou a modificar as solicitações de um ficheiro de dados já existente. Conjuntamente é dado início à abertura do ficheiro de resultados, com gravação nesse dos dados referentes à caracterização da estrutura, e à definição das solicitações.

- ASSEMD.FOR, sub-rotina onde é efectuada a reunião das várias matrizes de rigidez das barras, efectuadas pela sub-rotina STIFB.FOR, na matriz de rigidez global da estrutura. A sub-rotina ASSEMB.FOR chama para cada barra a sub-rotina STIFB.FOR.
- STIFB.FOR, sub-rotina que procede à determinação da matriz de rigidez, ou melhor dizendo, da matriz  $\mathbf{AK}^{-1}\bar{\mathbf{A}}$ , para cada barra da estrutura.
- GREduc.FOR, sub-rotina onde é efectuada a redução de Gauss na efectuação dos cálculos.
- RETSUB.FOR, sub-rotina onde é efectuada a retrossubstituição das matrizes de cálculo.
- FORCEC.FOR, sub-rotina que efectua com os valores dos deslocamentos obtidos nos cálculos anteriores, a determinação dos esforços nas barras. Esta sub-rotina, tal como a sub-rotina ASSEMB.FOR, chama a subrotina STIFB.FOR.

- SAIDA.FOR, sub-rotina que procede à continuação da elaboração do ficheiro de resultados, escrevendo neste os valores resultantes dos cálculos efectuados.
- DESEST.FOR, sub-rotina que procede à elaboração do desenho da estrutura, e suas deformadas, para as várias solicitações. Esta sub-rotina efectua o tratamento dos dados referentes à definição estrutura, e dos resultados referentes aos esforços nas barras e deslocamentos dos nós, obtidos para cada solicitação, permitindo realizar para cada solicitação, o desenho da estrutura, bem como da sua deformada, nos planos x-y, x-z e y-z.

O desenho da estrutura é realizado com sete cores para as barras sendo: três cores referentes às barras traccionadas, distinguindo as que têm valores mais elevados de tracção das que têm valores menores; três cores referentes às barras comprimidas, distinguindo as que têm valores mais elevados de compressão das que têm valores menores; e uma cor para as barras que não estão sujeitas nem a esforços de compressão, nem a esforços de tracção.

O desenho da deformada da estrutura é realizado com escalas diferentes para as coordenadas dos nós da estruturas, e o valor dos deslocamentos que ocorrem nos nós, de modo a permitir visualizar no écran com maior facilidade, o movimento da estrutura devido ao deslocamento verificado nos nós.

## 2.2.2 - FICHEIRO DE DADOS DO PROGRAMA EERM

O programa EERM permite realizar o ficheiro de dados através do mesmo, ou com a utilização de um editor de texto, como já foi referenciado. Apresenta-se neste ponto a sequência necessária a ter em conta, para a realização de um ficheiro de dados, através de um editor de texto.

O ficheiro de dados é efectuado, realizando os seguintes pontos:

- 1 - Escrever o título do trabalho (máx. 50 caracteres)
- 2 - Escrever a seguinte linha:

NPOIN    NELEM    NVFIX    NMATS    NSOL

em que :

NPOIN = número total de nós

NELEM = número total de barras

NVFIX = número total de nós ligados ao exterior

NMATS = número total de materiais distintos

NSOL = número total de solicitações

3 -- Escrever para o número total de materiais distintos, a seguinte linha :

JMATS      PROPS (JMATS , 1)      PROPS (JMATS , 2)      PROPS (JMATS , 3)

em que :

JMATS = número do material

PROPS (JMATS , 1) = área do material em  $\text{cm}^2$

PROPS (JMATS , 2) = módulo de elasticidade - E - em MPa

PROPS (JMATS , 3) = coeficiente de dilatação térmica do material

4 - Escrever para o número total de nós, a seguinte linha :

JPOIN      CNODS (JPOIN , 1)      CNODS (JPOIN , 2)      CNODS (JPOIN , 3)

em que :

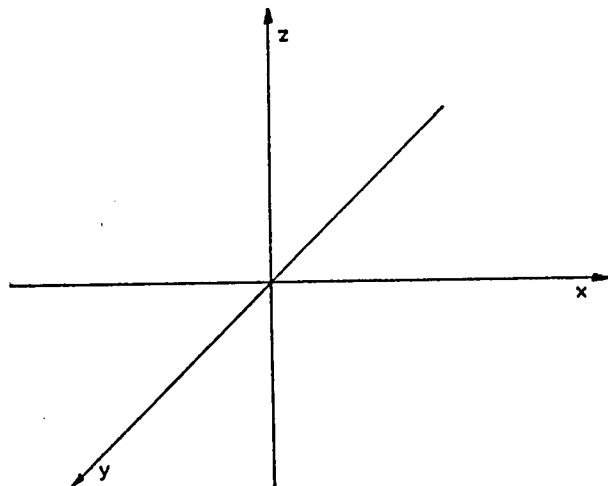
JPOIN = número do nó

CNODS (JPOIN , 1) = coordenada x do nó

CNODS (JPOIN , 2) = coordenada y do nó

CNODS(JPOIN,3) = coordenada z do nó

sendo a orientação dos eixos das coordenadas a seguinte :



5 - Escrever para o número total de barras, a seguinte linha :

JELEM    LNODS(JELEM,1)    LNODS(JELEM,2)    MATNO(JELEM)

em que :

JELEM = número da barra

LNODS(JELEM,1) = número do nó situado na extremidade esquerda da barra

LNODS(JELEM,2) = número do nó situado na extremidade direita da barra

MATNO(JELEM) = número do material de que é constituída a barra

6 - Escrever para o número total de nós ligados ao exterior, a seguinte linha :

NOFIX(IVFIX)    IFPRE(IVFIX,1)    IFPRE(IVFIX,2)    IFPRE(IVFIX,3)    PRESC(IVFIX,1)    PRESC(IVFIX,2)    PRESC(IVFIX,3)

em que :

NOFIX(IVFIX) = número do nó ligado ao exterior

IFPRE (IVFIX, 1) = toma o valor 1 se se pretender impor o valor do deslocamento x, ou 0 em caso contrário, do nó ligado ao exterior

IFPRE (IVFIX, 2) = toma o valor 1 se se pretender impor o valor do deslocamento y, ou 0 em caso contrário, do nó ligado ao exterior

IFPRE (IVFIX, 3) = toma o valor 1 se se pretender impor o valor do deslocamento z, ou 0 em caso contrário, do nó ligado ao exterior

PRESC (IVFIX, 1) = valor do deslocamento x do nó ligado ao exterior

PRESC (IVFIX, 2) = valor do deslocamento y do nó ligado ao exterior

PRESC (IVFIX, 3) = valor do deslocamento z do nó ligado ao exterior

7- Realizar os pontos seguintes para o número NSOL de solicitações pretendidas, variando portanto ISOL de 1 a NSOL :

i) Escrever o título da solicitação

ii) Escrever o número total de nós com cargas aplicadas

iii) Escrever para o número total de nós com cargas aplicadas, a seguinte linha :

IPOIN TQLOAD (ISOL, IPOIN, 1) TQLOAD (ISOL, IPOIN, 2) TQLOAD (ISOL, IPOIN, 3)

em que :

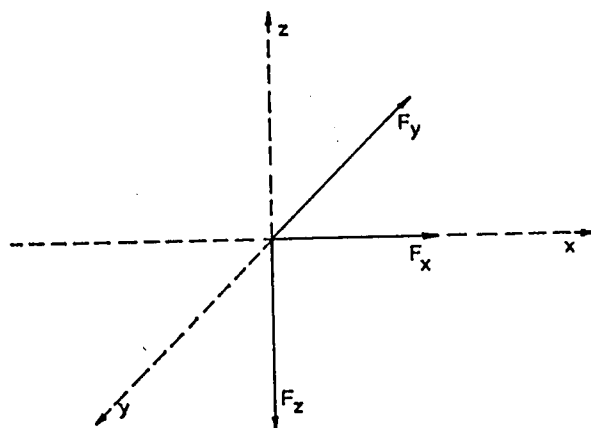
IPOIN = número do nó em que está aplicada a carga

TQLOAD (ISOL, IPOIN, 1) = carga Fx em KN, aplicada no nó

TQLOAD (ISOL, IPOIN, 2) = carga Fy em KN, aplicada no nó

TQLOAD (ISOL, IPOIN, 3) = carga Fz em KN, aplicada no nó

sendo a orientação dos eixos das forças a seguinte :



iv) Escrever o número total de barras em que ocorre variação de temperatura

v) Escrever para o número total de barras em que ocorre variação de temperatura, a seguinte linha:

```
IELEM      DELT(IELEM, ISOL)
```

em que:

IELEM = número da barra em que ocorre variação de temperatura

DELT(IELEM, ISOL) = valor da variação de temperatura que ocorre na barra

## 2.3 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Processa-se nesta parte à aplicação do método directo, método dos deslocamentos e método das forças para melhor se frisarem os procedimentos necessários a levar a efeito na aplicação destes métodos, bem como para estabelecer a comparação dos resultados obtidos com os mesmos, e os resultados obtidos com a aplicação do programa EERM. Nos exemplos em que se

aplica o método dos deslocamentos e o método das forças ainda se procede à comparação dos resultados com aqueles que se obtêm aplicando o método directo.

As estruturas escolhidas para a aplicação dos métodos são de pequena dimensão de modo a melhor se exporem os procedimentos realizados em cada etapa dos métodos, e a permitir que para a resolução dos problemas, através do método directo, não seja necessário recorrer à utilização de um computador. Não se pretende nestes exemplos proceder ao dimensionamento das secções das barras das estruturas, mas somente obter os esforços a que ficariam sujeitas as estruturas escolhidas para o exemplo, quando submetidas às hipotéticas solicitações.

Como primeiro exemplo, considere-se a estrutura tridimensional representada na fig. 2.3-1, constituída por doze barras e nove nós, com seis nós ligados ao solo, e para a qual se vai realizar o estudo através do método directo.

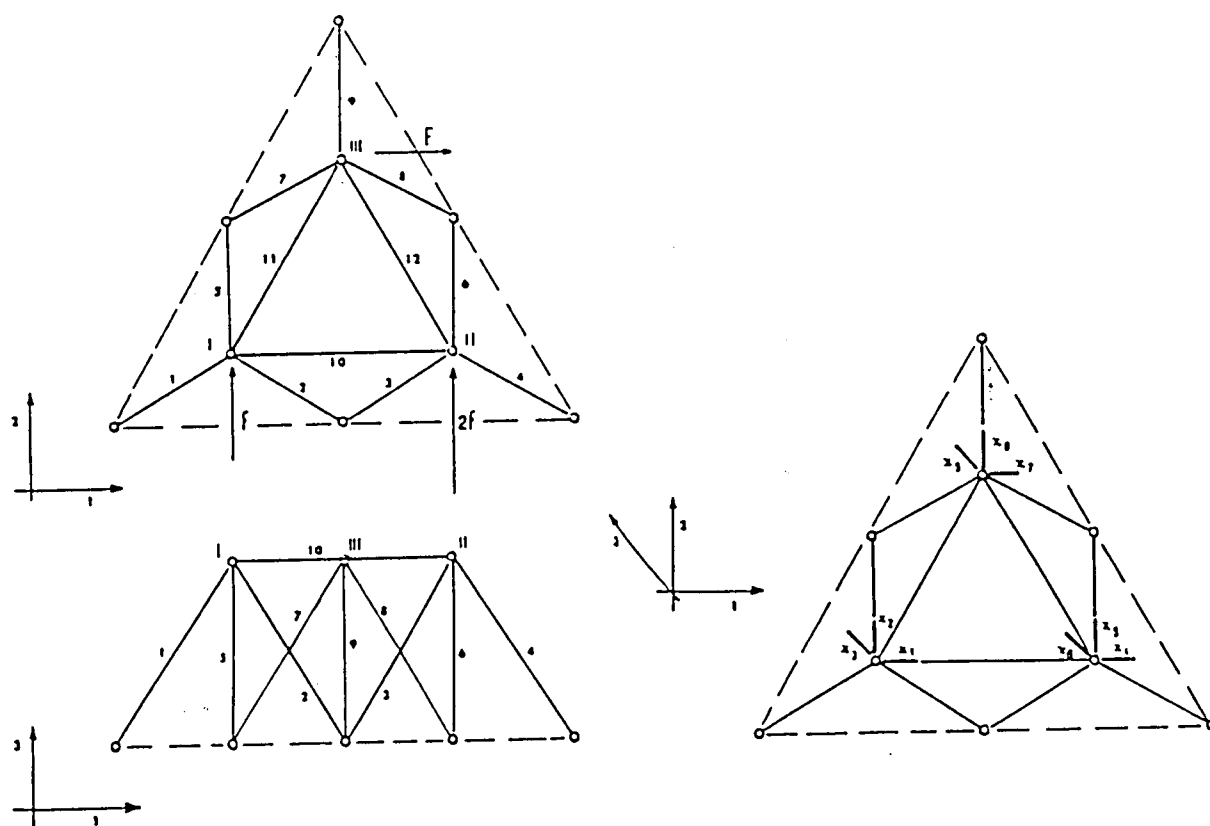


Fig. 2.3-1

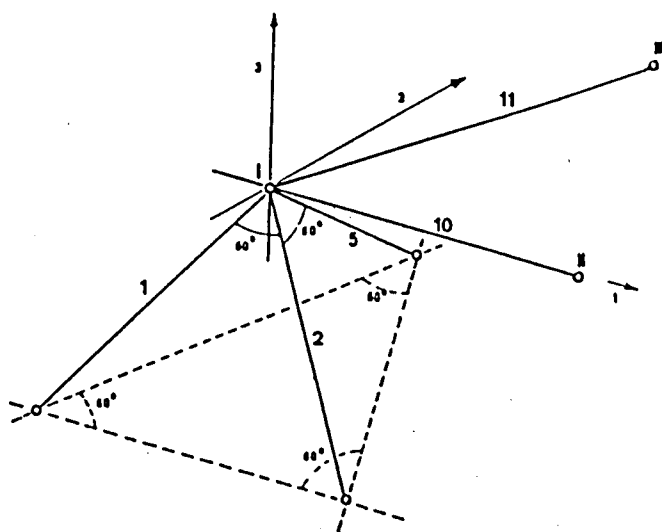


Fig. 2.3-2

Considerando todas as barras com comprimento igual, representa-se na figura 2.3-2 os dados geométricos dos elementos da estrutura, que conjuntamente com o facto da estrutura apresentar simetria geométrica, permitem elaborar a seguinte tabela dos co-senos directores:

| Barra  | $\alpha$      | $\beta$              | $\gamma$                    |
|--------|---------------|----------------------|-----------------------------|
| 1.7.3. | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ |
| 2.4.8. | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ |
| 5.6.9. | 0             | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ |
| 10     | 1             | 0                    | 0                           |
| 11     | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0                           |
| 12     | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0                           |

As forças exteriores que solicitam a estrutura actuam no plano horizontal, formado pelos três nós da estrutura, e são indicadas por  $F_2$ ,  $F_5$ , e  $F_7$ , atendendo ao número de ordem das equações de equilíbrio em que intervêm, bem como à componente que o vector de deslocamento  $\mathbf{x}$  tem naquela direcção, sendo  $F_2 = F$ ,  $F_5 = 2F$ , e  $F_7 = F$ . A acção variação de temperatura não é considerada neste exemplo, ou seja, é nula para todas as barras.

Na resolução deste problema através do método directo têm de se escrever vinte e uma equações, nove das quais são equações da estática (nas doze incógnitas  $X_1 X_2 \dots X_{12}$ ), e as restantes doze são equações da cinemática (nas nove incógnitas  $x_1 x_2 \dots x_9$ ).

De forma a facilitar a exposição dos cálculos a levar a efeito, utilizando o método directo neste exemplo, considera-se que as barras da estrutura são constituídas pelo mesmo material, e têm a mesma secção, o que conjuntamente com o facto de terem todas o mesmo comprimento, permite escrever a submatriz  $\mathbf{K}$  na forma particular de  $\mathbf{K} = K\mathbf{I}$  em que  $K$  é o factor constante  $I/EA$ , e  $\mathbf{I}$  representa a matriz identidade.

As nove equações de equilíbrio para os nós I, II, e III, segundo as direcções 1, 2, e 3, são :

Nó I

$$\begin{aligned}\alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2 - \alpha_{10} X_{10} - \alpha_{11} X_{11} &= 0 \\ \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 - \beta_5 X_5 - \beta_{11} X_{11} + F_2 &= 0 \\ \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_5 X_5 &= 0\end{aligned}$$

Nó II

$$\begin{aligned}\alpha_3 X_3 - \alpha_4 X_4 + \alpha_{10} X_{10} + \alpha_{12} X_{12} &= 0 \\ \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 - \beta_6 X_6 - \beta_{12} X_{12} + F_5 &= 0 \\ \gamma_3 X_3 + \gamma_4 X_4 + \gamma_6 X_6 &= 0\end{aligned}$$

Nó III

$$\begin{aligned}\alpha_7 X_7 - \alpha_8 X_8 + \alpha_{11} X_{11} - \alpha_{12} X_{12} + F_7 &= 0 \\ \beta_7 X_7 + \beta_8 X_8 - \beta_9 X_9 + \beta_{11} X_{11} + \beta_{12} X_{12} &= 0 \\ \gamma_7 X_7 + \gamma_8 X_8 + \gamma_9 X_9 &= 0\end{aligned}$$

As equações de compatibilidade segundo a ordem das barras, 1, 2, ..., 12, são :



Da resolução deste sistema obtém-se a solução do problema que é:

$$(\mathbf{x}; \mathbf{X}) = [(0,3737; 2,0044; 0,0000; 0,5593; 2,3884; 0,0000; 1,0670; 1,6071; 0,0000) K; (-0,7655; -0,3918; -0,9691; -0,4098; 1,1573; 1,3790; -0,9974; 0,0696; 0,9279; -0,1856; -0,0026; 0,9304)] F$$

Considerando que  $F = 20,0 \text{ kN}$ ,  $E = 2,06 \times 10^8 \text{ kPa}$ ,  $A = 0,0002 \text{ m}^2$  e  $l = 5,0 \text{ m}$ , o resultado final passa a escrever-se da seguinte forma:

$$(\mathbf{x}; \mathbf{X}) = [(0,91 \times 10^{-3}; 4,87 \times 10^{-3}; 0,0000; 1,36 \times 10^{-3}; 5,80 \times 10^{-3}; 0,0000; 2,59 \times 10^{-3}; 3,90 \times 10^{-3}; 0,0000) ; (-15,310; -7,836; -19,382; -8,196; 23,146; 27,58; -19,948; 1,392; 18,558; -3,712; -0,052; 18,608)]$$

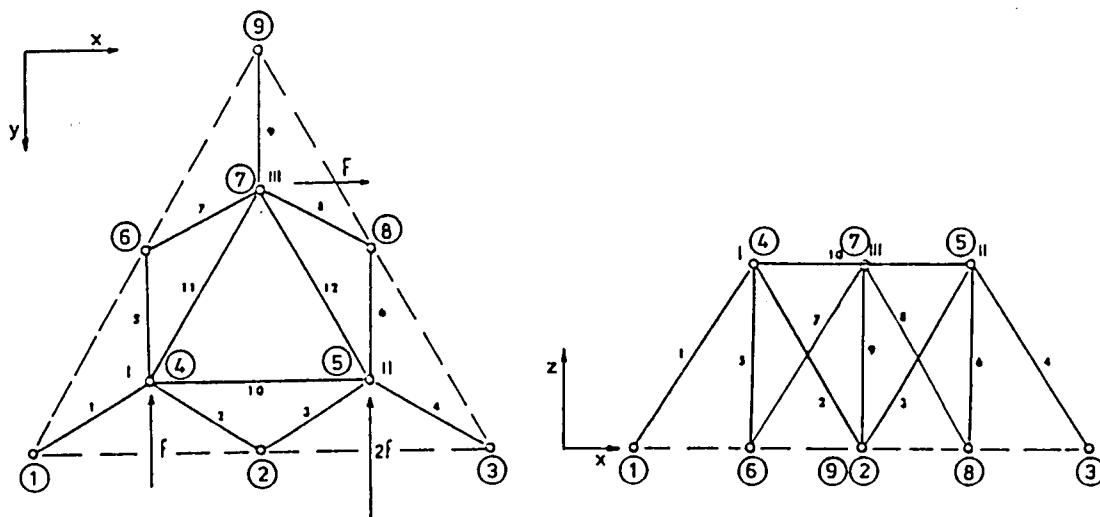


Fig. 2.3-3

Utilizando o programa EERM, e efectuando a numeração das barras e dos nós, representada na figura 2.3-3, o ficheiro de dados para este problema assume a seguinte forma:

Primeiro exemplo do ponto 2.3

|   |    |        |   |       |            |         |
|---|----|--------|---|-------|------------|---------|
| 9 | 12 | 6      | 1 | 1     | 206000.000 | .000016 |
| 1 |    | 2.00   |   |       |            |         |
| 1 |    | .000   |   | 8.660 | .000       |         |
| 2 |    | 5.000  |   | 8.660 | .000       |         |
| 3 |    | 10.000 |   | 8.660 | .000       |         |
| 4 |    | 2.500  |   | 7.217 | 4.082      |         |



|                               |        |        |       |       |       |
|-------------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|
| 5                             | 7.500  | 7.217  | 4.082 |       |       |
| 6                             | 2.500  | 4.330  | .000  |       |       |
| 7                             | 5.000  | 2.887  | 4.082 |       |       |
| 8                             | 7.500  | 4.330  | .000  |       |       |
| 9                             | 5.000  | .000   | .000  |       |       |
| 1                             | 1      | 4      | 1     |       |       |
| 2                             | 2      | 4      | 1     |       |       |
| 3                             | 2      | 5      | 1     |       |       |
| 4                             | 3      | 5      | 1     |       |       |
| 5                             | 4      | 6      | 1     |       |       |
| 6                             | 5      | 8      | 1     |       |       |
| 7                             | 6      | 7      | 1     |       |       |
| 8                             | 8      | 7      | 1     |       |       |
| 9                             | 7      | 9      | 1     |       |       |
| 10                            | 4      | 5      | 1     |       |       |
| 11                            | 4      | 7      | 1     |       |       |
| 12                            | 5      | 7      | 1     |       |       |
| 1                             | 1      | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 2                             | 1      | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 3                             | 1      | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 6                             | 1      | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 8                             | 1      | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 9                             | 1      | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| Forças exteriores F2, F5 e F7 |        |        |       |       |       |
| 3                             |        |        |       |       |       |
| 4                             | .000   | 20.000 | .000  |       |       |
| 5                             | .000   | 40.000 | .000  |       |       |
| 7                             | 20.000 | .000   | .000  |       |       |
| 8                             |        |        |       |       |       |

Da execução do programa obtém-se o seguinte ficheiro de resultados:

ESTUDO DE UMA ESTRUTURA ESPACIAL RETICULADA METALICA  
Programa EERM - Carlos Garcia (Eng. Civil -UP)

Assunto: Primeiro exemplo do ponto 2.3

Ficheiro de dados: exempl.DAD  
Ficheiro de resultados: exempl.RES

#### DADOS DA ESTRUTURA

Nº total de nos = 9  
Nº total de barras = 12  
Nº de apoios = 6

#### Características dos materiais

| Mat.Nº | Area (cm2) | E (MPa)    | Coef.Termico |
|--------|------------|------------|--------------|
| 1      | 2.00       | 206000.000 | .00001600    |

#### Coordenadas dos nos

| no | coordx | coordy | coordz | no | coordx | coordy | coordz |
|----|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| 1  | .000   | 8.660  | .000   | 6  | 2.500  | 4.330  | .000   |
| 2  | 5.000  | 8.660  | .000   | 7  | 5.000  | 2.887  | 4.082  |
| 3  | 10.000 | 8.660  | .000   | 8  | 7.500  | 4.330  | .000   |
| 4  | 2.500  | 7.217  | 4.082  | 9  | 5.000  | .000   | .000   |
| 5  | 7.500  | 7.217  | 4.082  |    |        |        |        |

#### Características das barras

| Barra | ext.1 | ext.2 | comp. | cos a | cos b | cos g | Mat.Nº |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1     | 1     | 4     | 5.00  | .500  | -.289 | .816  | 1      |
| 2     | 2     | 4     | 5.00  | -.500 | -.289 | .816  | 1      |
| 3     | 2     | 5     | 5.00  | .500  | -.289 | .816  | 1      |
| 4     | 3     | 5     | 5.00  | -.500 | -.289 | .816  | 1      |
| 5     | 4     | 6     | 5.00  | .000  | -.577 | -.816 | 1      |
| 6     | 5     | 8     | 5.00  | .000  | -.577 | -.816 | 1      |
| 7     | 6     | 7     | 5.00  | .500  | -.289 | .816  | 1      |
| 8     | 8     | 7     | 5.00  | -.500 | -.289 | .816  | 1      |
| 9     | 7     | 9     | 5.00  | .000  | -.577 | -.816 | 1      |
| 10    | 4     | 5     | 5.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |
| 11    | 4     | 7     | 5.00  | .500  | -.866 | .000  | 1      |
| 12    | 5     | 7     | 5.00  | -.500 | -.866 | .000  | 1      |

## Ligacoes ao exterior

| no lig. | codigo |   |   | valores impostos |       |       |
|---------|--------|---|---|------------------|-------|-------|
|         | x      | y | z | x                | y     | z     |
| 1       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 2       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 3       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 6       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 8       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 9       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |

## ACCOES A QUE ESTA SUJEITA A ESTRUTURA

Solicitacao Nº 1  
 Titulo : Forcas exteriores F2, F5 e F7

Carga nos Nos - accao exterior

| No | Fx(KN) | Fy(KN) | Fz(KN) | No | Fx(KN) | Fy(KN) | Fz(KN) |
|----|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| 4  | .00    | 20.00  | .00    | 5  | .00    | 40.00  | .00    |
| 7  | 20.00  | .00    | .00    |    |        |        |        |

nº total de nos com cargas aplicadas = 3

## RESULTADOS DOS CALCULOS EFECTUADOS PELO PROGRAMA EERM

Solicitacao Nº 1  
 Titulo : Forcas exteriores F2, F5 e F7

## Esforços nas Barras

| Barra | N (KN)  | Barra | N (KN)  |
|-------|---------|-------|---------|
| 1     | -15.300 | 7     | -19.947 |
| 2     | -7.835  | 8     | 1.391   |
| 3     | -19.381 | 9     | 18.557  |
| 4     | -8.197  | 10    | -3.711  |
| 5     | 23.144  | 11    | -.051   |
| 6     | 27.579  | 12    | 18.608  |

## Reaccoes nos apoios

| No | Rx(KN) | Ry(KN) | Rz(KN)  |
|----|--------|--------|---------|
| 1  | 7.655  | 4.418  | -12.499 |
| 2  | 5.774  | 7.856  | -22.222 |
| 3  | -4.099 | 2.366  | -6.692  |
| 6  | 9.975  | 19.122 | 2.610   |
| 8  | .696   | 15.524 | 23.653  |
| 9  | .000   | 10.715 | 15.151  |

## Deslocamentos

| No | dx(m) | dy(m) | dz(m) | No | dx(m) | dy(m) | dz(m) |
|----|-------|-------|-------|----|-------|-------|-------|
| 1  | .000  | .000  | .000  | 6  | .000  | .000  | .000  |
| 2  | .000  | .000  | .000  | 7  | .003  | -.004 | .000  |
| 3  | .000  | .000  | .000  | 8  | .000  | .000  | .000  |
| 4  | .001  | -.005 | .000  | 9  | .000  | .000  | .000  |
| 5  | .001  | -.006 | .000  |    |       |       |       |

Na comparação dos dois resultados obtidos, verifica-se que são iguais, diferindo apenas no sinal dos deslocamentos, devido aos eixos de referência não serem os mesmos.

Como segundo exemplo considere-se a estrutura do exemplo anterior sujeita agora a uma acção externa como a variação de temperatura, para demonstração do método directo na presença de distorção devido a uma acção externa como a variação de temperatura. A variação de temperatura



resultando da sua resolução a seguinte solução para as incógnitas do problema:

$$(\mathbf{x}; \mathbf{X}) = [(-0,4286; -0,2474; 0,0000; 0,4286; -0,2474; 0,0000; 0,0000; 0,4949; 0,0000) \text{ c/ } \Delta t; \\ (0,2857; -0,1429; -0,1429; 0,2857; -0,1429; -0,1429; -0,1429; -0,1429; 0,2857; 0,1429; \\ 0,1429; 0,1429) \text{ c/ } \Delta t \cdot K^{-1}]$$

Considerando que  $c = 0,000016$ ,  $E = 2,06 \times 10^8$  KPa,  $A = 0,0002 \text{ m}^2$  e  $l = 5,0 \text{ m}$ , o resultado final passa a escrever-se da seguinte forma:

$$(\mathbf{x}; \mathbf{X}) = [(-0,69 \times 10^{-3}; -0,40 \times 10^{-3}; 0,0000; 0,69 \times 10^{-3}; -0,40 \times 10^{-3}; 0,0000; 0,0000; 0,79 \times 10^{-3}; \\ 0,0000); (3,767; -1,884; -1,884; 3,767; -1,884; -1,884; -1,884; -1,884; 3,767; \\ 1,884; 1,884; 1,884)]$$

Utilizando o programa EERM, e efectuando a numeração das barras e dos nós, representada na figura 2.3-6, o ficheiro de dados para este problema assume a seguinte forma:

Primeiro exemplo do ponto 2.3

|                         |       |       |       |       |            |           |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|------------|-----------|
| 9                       | 12    | 6     | 1     | 1     | 206000.000 | .00001600 |
| 1                       |       | 2.00  |       |       |            |           |
| 1                       |       | .000  |       | 8.660 | .000       |           |
| 2                       |       | 5.000 |       | 8.660 | .000       |           |
| 3                       | 10    | .000  |       | 8.660 | .000       |           |
| 4                       |       | 2.500 |       | 7.217 | 4.082      |           |
| 5                       |       | 2.500 |       | 7.217 | 4.082      |           |
| 6                       |       | 2.500 |       | 4.330 | .000       |           |
| 7                       |       | 5.000 |       | 2.887 | 4.082      |           |
| 8                       |       | 7.500 |       | 4.330 | .000       |           |
| 9                       |       | 5.000 |       | .000  | .000       |           |
| 1                       | 1     | 4     | 1     |       |            |           |
| 2                       | 2     | 4     | 1     |       |            |           |
| 3                       | 2     | 5     | 1     |       |            |           |
| 4                       | 3     | 5     | 1     |       |            |           |
| 5                       | 4     | 6     | 1     |       |            |           |
| 6                       | 5     | 8     | 1     |       |            |           |
| 7                       | 6     | 7     | 1     |       |            |           |
| 8                       | 8     | 7     | 1     |       |            |           |
| 9                       | 7     | 9     | 1     |       |            |           |
| 10                      | 4     | 5     | 1     |       |            |           |
| 11                      | 4     | 7     | 1     |       |            |           |
| 12                      | 5     | 7     | 1     |       |            |           |
| 1                       | 1     | 1     | .0000 | .0000 | .0000      |           |
| 2                       | 1     | 1     | .0000 | .0000 | .0000      |           |
| 3                       | 1     | 1     | .0000 | .0000 | .0000      |           |
| 6                       | 1     | 1     | .0000 | .0000 | .0000      |           |
| 8                       | 1     | 1     | .0000 | .0000 | .0000      |           |
| 9                       | 1     | 1     | .0000 | .0000 | .0000      |           |
| Variação de temperatura |       |       |       |       |            |           |
| 0                       |       |       |       |       |            |           |
| 3                       |       |       |       |       |            |           |
| 10                      | 20.00 |       |       |       |            |           |
| 11                      | 20.00 |       |       |       |            |           |
| 12                      | 20.00 |       |       |       |            |           |

Da execução do programa obtém-se o seguinte ficheiro de resultados:

**ESTUDO DE UMA ESTRUTURA ESPACIAL RETICULADA METALICA**  
Programa EERM - Carlos Garcia (Eng. Civil -UP)

Assunto: Primeiro exemplo do ponto 2.3

Ficheiro de dados: exemp2.DAD  
Ficheiro de resultados: exemp2.RES

**DADOS DA ESTRUTURA**

Nº total de nos = 9  
Nº total de barras = 12  
Nº de apoios = 6

**Características dos materiais**

| Mat.Nº | Area (cm2) | E (MPa)    | Coef.Termico |
|--------|------------|------------|--------------|
| 1      | 2.00       | 206000.000 | .00001600    |

**Coordenadas dos nos**

| no | coordx | coordy | coordz | no | coordx | coordy | coordz |
|----|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| 1  | .000   | 8.660  | .000   | 6  | 2.500  | 4.330  | .000   |
| 2  | 5.000  | 8.660  | .000   | 7  | 5.000  | 2.887  | 4.082  |
| 3  | 10.000 | 8.660  | .000   | 8  | 7.500  | 4.330  | .000   |
| 4  | 2.500  | 7.217  | 4.082  | 9  | 5.000  | .000   | .000   |
| 5  | 7.500  | 7.217  | 4.082  |    |        |        |        |

**Características das barras**

| Barra | ext.1 | ext.2 | comp. | cos a | cos b | cos g | Mat.Nº |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1     | 1     | 4     | 5.00  | .500  | -.289 | .816  | 1      |
| 2     | 2     | 4     | 5.00  | -.500 | -.289 | .816  | 1      |
| 3     | 2     | 5     | 5.00  | .500  | -.289 | .816  | 1      |
| 4     | 3     | 5     | 5.00  | -.500 | -.289 | .816  | 1      |
| 5     | 4     | 6     | 5.00  | .000  | -.577 | -.816 | 1      |
| 6     | 5     | 8     | 5.00  | .000  | -.577 | -.816 | 1      |
| 7     | 6     | 7     | 5.00  | .500  | -.289 | .816  | 1      |
| 8     | 8     | 7     | 5.00  | -.500 | -.289 | .816  | 1      |
| 9     | 7     | 9     | 5.00  | .000  | -.577 | -.816 | 1      |
| 10    | 4     | 5     | 5.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |
| 11    | 4     | 7     | 5.00  | .500  | -.866 | .000  | 1      |
| 12    | 5     | 7     | 5.00  | -.500 | -.866 | .000  | 1      |

**Ligacoes ao exterior**

| no lig. | codigo |   |   | valores impostos |       |       |
|---------|--------|---|---|------------------|-------|-------|
|         | x      | y | z | x                | y     | z     |
| 1       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 2       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 3       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 6       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 8       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 9       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |

**ACCÕES A QUE ESTA SUJEITA A ESTRUTURA**

Solicitacao Nº 1  
Titulo : Variacao de temperatura  
Variacao de temperatura - accao exterior

| Barra | Var. temp. | Barra | Var. temp. |
|-------|------------|-------|------------|
| 10    | 20.00      | 11    | 20.00      |
| 12    | 20.00      |       |            |

$n^{\circ}$  total de barras onde ocorre variacao de temperatura = 3

### RESULTADOS DOS CALCULOS EFECTUADOS PELO PROGRAMA EERM

Solicitacao N<sup>o</sup> 1  
Título : Variacao de temperatura

#### Esforços nas Barras

| Barra | N (KN) | Barra | N (KN) |
|-------|--------|-------|--------|
| 1     | 3.767  | 7     | -1.883 |
| 2     | -1.884 | 8     | -1.883 |
| 3     | -1.884 | 9     | 3.767  |
| 4     | 3.767  | 10    | 1.884  |
| 5     | -1.884 | 11    | 1.884  |
| 6     | -1.884 | 12    | 1.884  |

#### Reaccoes nos apoios

| No | Rx(KN) | Ry(KN) | Rz(KN) |
|----|--------|--------|--------|
| 1  | -1.884 | -1.887 | 3.076  |
| 2  | .000   | 1.887  | -3.076 |
| 3  | 1.884  | -1.887 | 3.076  |
| 6  | .942   | -.544  | -3.076 |
| 8  | -.942  | -.544  | -3.076 |
| 9  | .000   | 2.175  | 3.076  |

#### Deslocamentos

| No | dx(m) | dy(m) | dz(m) | No | dx(m) | dy(m) | dz(m) |
|----|-------|-------|-------|----|-------|-------|-------|
| 1  | .000  | .000  | .000  | 6  | .000  | .000  | .000  |
| 2  | .000  | .000  | .000  | 7  | .000  | -.001 | .000  |
| 3  | .000  | .000  | .000  | 8  | .000  | .000  | .000  |
| 4  | -.001 | .000  | .000  | 9  | .000  | .000  | .000  |
| 5  | .001  | .000  | .000  |    |       |       |       |

Na comparação dos dois resultados obtidos, verifica-se que são iguais.

O terceiro exemplo serve para demonstrar a simplificação que se pode efectuar no estudo de uma estrutura, quando esta contenha eixos de simetria geométrica e mecânica. Considere-se a estrutura representada na figura 2.3-5, com vinte e um nós, ligados por quarenta e duas barras, contendo três vínculos externos. Esta estrutura contém três eixos de simetria geométrica e mecânica.

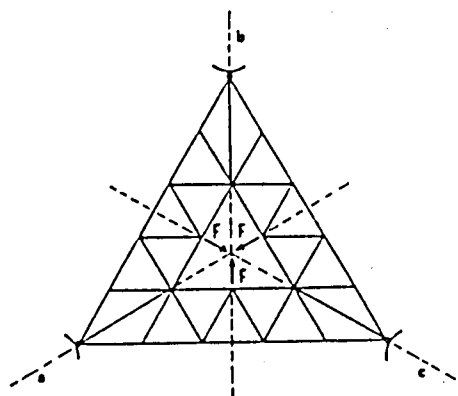


Fig. 2.3-5

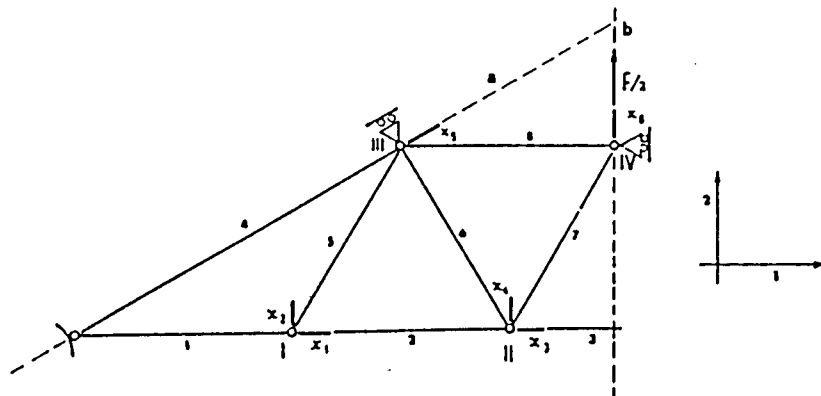


Fig. 2.3-6

A presença de três eixos de simetria geométrica e mecânica, reduz o problema inicial à estrutura representada na figura 2.3-6.

O vector  $\mathbf{X}$  é deste modo reduzido a oito componentes, correspondendo a oito equações de compatibilidade nas seis incógnitas  $x_i$ , e o vector  $\mathbf{x}$  é reduzido a seis componentes, correspondendo a seis equações de equilíbrio nas oito incógnitas  $X_i$ , resultando assim a matriz  $\mathbf{K}$  de vínculo entre as equações de equilíbrio e as equações de compatibilidade, numa matriz quadrada de oito por oito.

As equações de equilíbrio para os nós I e II, são escritas em relação ao sistema de referência (1, 2). É escrita para o nó III somente uma equação de equilíbrio para a direcção do eixo de simetria  $a$ , e é também somente escrita para o nó IV uma equação de equilíbrio, na direcção de simetria  $b$ . As equações de equilíbrio assumem assim a seguinte forma:

Nó I

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 - (1/2) X_5 &= 0 \\ -(3^{1/2}/2) X_5 &= 0 \end{aligned}$$

Nó II

$$\begin{aligned} X_2 - X_3 + (1/2) X_6 - (1/2) X_7 &= 0 \\ -(3^{1/2}/2) X_6 - (3^{1/2}/2) X_7 &= 0 \end{aligned}$$

Nó III

$$X_4 + (3^{1/2}/2) X_5 - (3^{1/2}/2) X_8 = 0$$

Nó IV

$$(3^{1/2}/2) X_7 + F/2 = 0$$

As primeiras quatro componentes do vector  $\mathbf{x}$  correspondentes às equações de equilíbrio dos nós I e II, são referenciadas no sistema de referência (1, 2), sendo a quinta e sexta componente do vector  $\mathbf{x}$ , referenciadas respectivamente nos eixos de simetria  $a$  e  $b$ . As equações de compatibilidade escrevem-se como tal da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x_1 + K_1 X_1 &= 0 \\
-x_1 + x_3 + K_2 X_2 &= 0 \\
-x_3 + K_3/2 X_3 &= 0 \\
x_5 + 2 K_4 X_4 &= 0 \\
-(1/2) x_1 - (3^{1/2}/2) x_2 + (3^{1/2}/2) x_5 + K_5 X_5 &= 0 \\
(1/2) x_3 - (3^{1/2}/2) x_4 + K_6 X_6 &= 0 \\
-(1/2) x_3 - (3^{1/2}/2) x_4 + (3^{1/2}/2) x_6 + K_7 X_7 &= 0 \\
-(3^{1/2}/2) x_5 + K_8 X_8 &= 0
\end{aligned}$$

O vínculo entre as equações de equilíbrio e de compatibilidade é estabelecido pela matriz  $K$ , cujos elementos dispostos segundo a diagonal principal são ordenadamente,  $K_1, K_2, K_3/2, 2K_4, K_5, K_6, K_7, K_8$ . Considerando que  $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K_6 = K_7 = K_8 = 1$ , então a equação do problema assume a seguinte forma:

|                |                       |                |                       |                       |                      |  |  |   |               |    |   |                       |                       |                       |                       |     |       |               |
|----------------|-----------------------|----------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|--|--|---|---------------|----|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----|-------|---------------|
|                |                       |                |                       |                       |                      |  |  | 1 | -1            |    |   | $-\frac{1}{2}$        |                       |                       |                       | + F | $x_1$ | 0             |
|                |                       |                |                       |                       |                      |  |  |   |               |    |   | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |                       |                       |                       |     | $x_2$ | 0             |
|                |                       |                |                       |                       |                      |  |  |   | 1             | -1 |   |                       | $\frac{1}{2}$         | $-\frac{1}{2}$        |                       |     | $x_3$ | 0             |
|                |                       |                |                       |                       |                      |  |  |   |               |    |   |                       | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |                       |     | $x_4$ | 0             |
|                |                       |                |                       |                       |                      |  |  |   |               |    | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  |                       |                       | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |     | $x_5$ | 0             |
|                |                       |                |                       |                       |                      |  |  |   |               |    |   |                       |                       | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  |                       |     | $x_6$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1              |                       |                |                       |                       |                      |  |  | 1 |               |    |   |                       |                       |                       | $x_1$                 | 0   |       |               |
| -1             |                       | 1              |                       |                       |                      |  |  |   | 1             |    |   |                       |                       |                       | $x_2$                 | 0   |       |               |
|                |                       | -1             |                       |                       |                      |  |  |   | $\frac{1}{2}$ |    |   |                       |                       |                       | $x_3$                 | 0   |       |               |
|                |                       |                |                       | 1                     |                      |  |  |   |               | 2  |   |                       |                       |                       | $x_4$                 | 0   |       |               |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |                |                       | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  |                      |  |  |   |               |    | 1 |                       |                       |                       | $x_5$                 | 0   |       |               |
|                |                       | $\frac{1}{2}$  | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |                       |                      |  |  |   |               |    |   | 1                     |                       |                       | $x_6$                 | 0   |       |               |
|                |                       | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |                       | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |  |  |   |               |    |   |                       | 1                     |                       | $x_7$                 | 0   |       |               |
|                |                       |                |                       | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |                      |  |  |   |               |    |   |                       |                       | 1                     | $x_8$                 | 0   |       |               |

Da resolução deste sistema obtém-se o seguinte resultado:

$$(x; X) = [(0,1155; -0,0667; 0,2309; 0,8000; 0,0000; 1,6000) K; (-0,1155; -0,1155; 0,4619; 0,0000; 0,0000; 0,5774; -0,5774; 0,0000)] F$$

Como quarto exemplo considere-se a estrutura do exemplo anterior sujeita agora a uma distribuição das forças externas tal, que se verifica uma condição de anti-simetria, como é representada na figura 2.3-7. A estrutura neste caso pode ser reduzida à estrutura representada na figura 2.3-8. As incógnitas estáticas são representadas pelas forças nas barras 1, 2, ..., 8; as incógnitas cinemáticas pelos deslocamentos  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , e  $x_4$ , dos nós I e II, e pelos deslocamentos  $x_5$ , e  $x_6$ , ortogonais, respectivamente, aos eixos de simetria a e b.

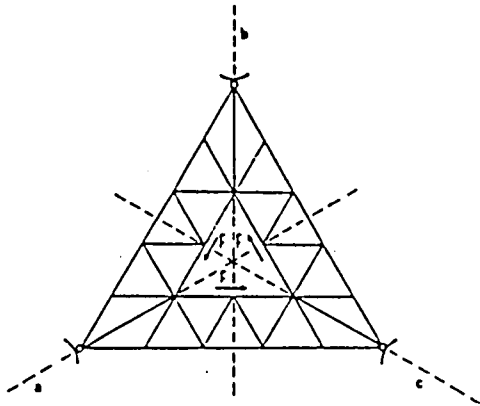


Fig. 2.3-7

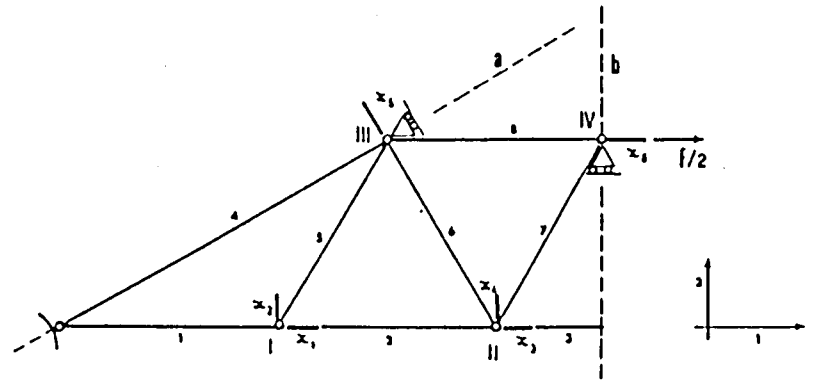


Fig. 2.3-8

Como  $x_4$  é igual a zero (facilmente verificável pela equação de compatibilidade em relação à barra 4), este parâmetro do vector  $\mathbf{X}$ , pode ser eliminado deste, assumindo as equações do problema a seguinte forma:

|                |                       |               |                       |                       |   |               |    |    |                       |                       |                       |               |
|----------------|-----------------------|---------------|-----------------------|-----------------------|---|---------------|----|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------|
|                |                       |               |                       |                       |   | 1             | -1 |    | $-\frac{1}{2}$        |                       |                       |               |
|                |                       |               |                       |                       |   |               |    |    | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |                       |                       |               |
|                |                       |               |                       |                       |   |               | 1  | -1 |                       | $\frac{1}{2}$         | $-\frac{1}{2}$        |               |
|                |                       |               |                       |                       |   |               |    |    |                       | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |               |
|                |                       |               |                       |                       |   |               |    |    | $\frac{1}{2}$         | 1                     |                       | $\frac{1}{2}$ |
|                |                       |               |                       |                       |   |               |    |    |                       | $\frac{1}{2}$         | 1                     |               |
|                |                       |               |                       |                       |   |               |    |    |                       |                       | $\frac{1}{2}$         | 1             |
| 1              |                       |               |                       |                       |   | 1             |    |    |                       |                       |                       |               |
| -1             |                       |               |                       |                       |   |               | 1  |    |                       |                       |                       |               |
|                |                       |               |                       |                       |   |               |    | 1  |                       |                       |                       |               |
|                |                       |               |                       |                       |   |               |    |    | $\frac{1}{2}$         |                       |                       |               |
|                |                       |               |                       |                       |   |               |    |    |                       | 1                     |                       |               |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |               |                       |                       |   | $\frac{1}{2}$ |    |    |                       |                       |                       |               |
|                |                       | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1                     |   |               |    |    |                       |                       |                       |               |
|                |                       |               | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |   |               |    |    |                       | $\frac{1}{2}$         |                       |               |
|                |                       |               |                       | $\frac{1}{2}$         | 1 |               |    |    |                       |                       |                       |               |

|       |
|-------|
| $x_1$ |
| $x_2$ |
| $x_3$ |
| $x_4$ |
| $x_5$ |
| $x_6$ |
| $x_1$ |
| $x_2$ |
| $x_3$ |
| $x_4$ |
| $x_5$ |
| $x_6$ |

|               |
|---------------|
| 0             |
| 0             |
| 0             |
| 0             |
| 0             |
| $\frac{1}{2}$ |
| 0             |
| 0             |
| 0             |
| 0             |
| 0             |
| 0             |

+ f = 0



Tendo a estrutura um total de nove barras, consequentemente tem-se nove forças incógnitas, que constituem o vector  $\mathbf{X}$ , e como tal nove equações de compatibilidade.

Aplicando o método directo, obtém-se um sistema constituído por treze equações e treze incógnitas :

$$\begin{bmatrix}
 & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & & & & -1 \\
 & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & & & \\
 & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & & \\
 & & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & \\
 & & & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & \\
 & & & & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & \\
 & & & & & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \\
 & & & & & & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \\
 & & & & & & & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & \\
 & & & & & & & & & & & & & -1 \\
 \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & & & & & 1 \\
 & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & & & & & 3 \\
 & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & & & & 2 \\
 & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & & & 2 \\
 & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & & 2 \\
 & & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & & 3 \\
 & & & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & 2 \\
 -1 & & & & & & & & & & & & & & 2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 = 0$$

Da resolução do sistema obtém-se o seguinte resultado :

$$(\mathbf{x}; \mathbf{X}) = [(-0,1818; 0,1818; 0,9091; 0,7059) K; (-0,5143; -0,2571; -0,3857; -0,2571; -0,4991; -0,2496; -0,1664; -0,4991; -0,0909)] F$$

Aplicando o método dos deslocamentos, o vector  $\mathbf{X}$  obtido da equação de compatibilidade vem igual a :

$$\mathbf{X} = -\mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}$$

$$X \cdot \frac{1}{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \frac{1}{L} & & & & & & \\ & & \frac{1}{L} & & & & & \\ & & & \frac{1}{L} & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \frac{1}{L} & & \\ & & & & & & \frac{1}{L} & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\eta}{L} & & \frac{\eta}{L} & & & & & \\ & \frac{\eta}{L} & \frac{\eta}{L} & & & & & \\ -\frac{\eta}{L} & & \frac{\eta}{L} & & & & & \\ & -\frac{\eta}{L} & \frac{\eta}{L} & & & & & \\ & & & & \frac{\eta}{L} & & & \\ & & & & & \frac{\eta}{L} & & \\ & & & & & & \frac{\eta}{L} & \\ & & & & & & & \frac{\eta}{L} \\ -1 & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} =$$

$$X \cdot \frac{1}{L} = \begin{bmatrix} \frac{\eta}{L} & 0 & \frac{\eta}{L} & & \\ 0 & \frac{\eta}{L} & \frac{\eta}{L} & & \\ -\frac{\eta}{L} & & \frac{\eta}{L} & & \\ & -\frac{\eta}{L} & \frac{\eta}{L} & & \\ & & & \frac{\eta}{L} & \\ & & & & \frac{\eta}{L} \\ & & & & \frac{\eta}{L} \\ & & & & \frac{\eta}{L} \\ & & & & \frac{\eta}{L} \\ -\frac{1}{L} & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Substituindo este valor de  $X$  na equação de equilíbrio obtém-se:

$$AX + F = 0$$

$$-\frac{1}{K} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{L} & & -\frac{\sqrt{2}}{L} & & & & & & -1 \\ & \frac{\sqrt{2}}{L} & & -\frac{\sqrt{2}}{L} & & & & & \\ \frac{\sqrt{2}}{L} & \frac{\sqrt{2}}{L} & \frac{\sqrt{2}}{L} & \frac{\sqrt{2}}{L} & & & & & \\ & & & & \frac{\sqrt{2}}{L} & \frac{\sqrt{2}}{L} & \frac{\sqrt{2}}{L} & \frac{\sqrt{2}}{L} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\eta}{L} & 0 & \frac{\eta}{L} & & \\ 0 & \frac{\eta}{L} & \frac{\eta}{L} & & \\ -\frac{\eta}{L} & & \frac{\eta}{L} & & \\ & -\frac{\eta}{L} & \frac{\eta}{L} & & \\ & & & \frac{\eta}{L} & \\ & & & & \frac{\eta}{L} \\ & & & & \frac{\eta}{L} \\ & & & & \frac{\eta}{L} \\ -\frac{1}{L} & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ F \end{bmatrix} = 0$$

$$-\frac{1}{K} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & & \frac{1}{4} & \\ & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{6} & \\ & & & \frac{17}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ F \end{bmatrix} = 0$$

Obtém-se assim para o vector  $\mathbf{x}$  o seguinte resultado :

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0,8363 & -0,0365 & -0,1818 & \\ -0,0363 & 2,4367 & 0,1818 & \\ -0,1818 & 0,1818 & 0,9090 & \\ & & & 0,7059 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1818 \\ 0,1818 \\ 0,9090 \\ 0,7059 \end{bmatrix} F \mathbf{K}$$

Substituindo o valor de  $\mathbf{x}$  na expressão de  $\mathbf{X}$  inicial, obtém-se para  $\mathbf{X}$  o seguinte resultado:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2^{1/2}/2 & & -2^{1/2}/2 & \\ & -2^{1/2}/6 & -2^{1/2}/6 & \\ 2^{1/2}/4 & & -2^{1/2}/4 & \\ & 2^{1/2}/4 & -2^{1/2}/4 & \\ & & & -2^{1/2}/2 \\ & & & -2^{1/2}/4 \\ & & & -2^{1/2}/6 \\ & & & -2^{1/2}/2 \\ 1/2 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,1818 \\ 0,1818 \\ 0,9090 \\ 0,7059 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} -0,5143 \\ -0,2571 \\ -0,3857 \\ -0,2571 \\ -0,4991 \\ -0,2496 \\ -0,1664 \\ -0,4991 \\ -0,0909 \end{bmatrix} F$$

$$(\mathbf{x}; \mathbf{X}) = [(-0,1818; 0,1818; 0,9091; 0,7059) \mathbf{K}; (-0,5143; -0,2571; -0,3857; -0,2571; -0,4991; -0,2496; -0,1664; -0,4991; -0,0909) \mathbf{F}]$$

Os resultados obtidos pelo método dos deslocamentos são iguais aos resultados obtidos anteriormente, aplicando o método directo.

Considerando que  $E = 2,06 \times 10^8$  KPa,  $A_1 = A_5 = A_8 = 0,0003 \text{ m}^2$ ,  $A_2 = A_7 = 0,0001 \text{ m}^2$ ,  $A_3 = A_4 = A_6 = 0,00015 \text{ m}^2$ ,  $A_9 = 0,000212 \text{ m}^2$ ,  $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = I_7 = I_8 = 2,051 \text{ m}$ ,  $I_9 = 2,90 \text{ m}$ , e  $F = 20,0 \text{ KN}$ , o resultado final passa a escrever-se da seguinte forma:

$$(\mathbf{x}; \mathbf{X}) = [(-0,0001; 0,0001; 0,0006; 0,0005) \mathbf{K}; (-10,286; -5,142; -7,714; -5,142; -9,982;$$

-4.992 ; -3.328 ; -9.982 ; -1.818)]  $F$

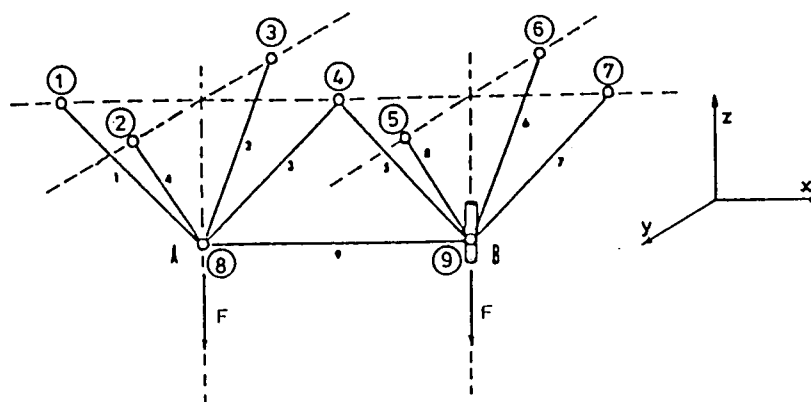


Fig. 2.3-10

Utilizando o programa EERM, e efectuando a numeração das barras e dos nós, representada na figura 2.3-10, o ficheiro de dados para este problema assume a seguinte forma:

Quinto exemplo do ponto 2.3

|         |   |       |            |       |           |  |
|---------|---|-------|------------|-------|-----------|--|
| 9       | 9 | 8     | 4          | 1     |           |  |
| 1       |   | 3.00  | 206000.000 |       | .00001600 |  |
| 2       |   | 1.00  | 206000.000 |       | .00001600 |  |
| 3       |   | 1.50  | 206000.000 |       | .00001600 |  |
| 4       |   | 2.12  | 206000.000 |       | .00001600 |  |
| 1       |   | .000  | 1.450      | 1.450 |           |  |
| 2       |   | 1.450 | 2.900      | 1.450 |           |  |
| 3       |   | 1.450 | .000       | 1.450 |           |  |
| 4       |   | 2.900 | 1.450      | 1.450 |           |  |
| 5       |   | 4.350 | 2.900      | 1.450 |           |  |
| 6       |   | 4.350 | .000       | 1.450 |           |  |
| 7       |   | 5.800 | 1.450      | 1.450 |           |  |
| 8       |   | 1.450 | 1.450      | .000  |           |  |
| 9       |   | 4.350 | 1.450      | .000  |           |  |
| 1       | 1 | 8     | 1          |       |           |  |
| 2       | 3 | 8     | 2          |       |           |  |
| 3       | 4 | 8     | 3          |       |           |  |
| 4       | 2 | 8     | 3          |       |           |  |
| 5       | 4 | 9     | 1          |       |           |  |
| 6       | 6 | 9     | 3          |       |           |  |
| 7       | 7 | 9     | 2          |       |           |  |
| 8       | 5 | 9     | 1          |       |           |  |
| 9       | 8 | 9     | 4          |       |           |  |
| 1       | 1 | 1     | .0000      | .0000 | .0000     |  |
| 2       | 1 | 1     | .0000      | .0000 | .0000     |  |
| 3       | 1 | 1     | .0000      | .0000 | .0000     |  |
| 4       | 1 | 1     | .0000      | .0000 | .0000     |  |
| 5       | 1 | 1     | .0000      | .0000 | .0000     |  |
| 6       | 1 | 1     | .0000      | .0000 | .0000     |  |
| 7       | 1 | 1     | .0000      | .0000 | .0000     |  |
| 9       | 1 | 0     | .0000      | .0000 | .0000     |  |
| Força F |   |       |            |       |           |  |
| 2       |   |       | .000       | .000  | 20.000    |  |
| 8       |   | .000  | .000       | .000  | 20.000    |  |
| 9       |   |       |            |       |           |  |
| 0       |   |       |            |       |           |  |

Da execução do programa obtém-se o seguinte ficheiro de resultados:

# ESTUDO DE UMA ESTRUTURA ESPACIAL RETICULADA METALICA Programa EERM - Carlos Garcia (Eng. Civil -UP)

Assunto: Quinto exemplo do ponto 2.3

Ficheiro de dados: exemp5.DAD  
Ficheiro de resultados: exemp5.RES

## DADOS DA ESTRUTURA

Nº total de nos = 9  
Nº total de barras = 9  
Nº de apoios = 8

## Caracteristicas dos materiais

| Mat.Nº | Area (cm2) | E (MPa)    | Coef.Termico |
|--------|------------|------------|--------------|
| 1      | 3.00       | 206000.000 | .00001600    |
| 2      | 1.00       | 206000.000 | .00001600    |
| 3      | 1.50       | 206000.000 | .00001600    |
| 4      | 2.12       | 206000.000 | .00001600    |

## Coordenadas dos nos

| no | coordx | coordy | coordz | no | coordx | coordy | coordz |
|----|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| 1  | .000   | 1.450  | 1.450  | 6  | 4.350  | .000   | 1.450  |
| 2  | 1.450  | 2.900  | 1.450  | 7  | 5.800  | 1.450  | 1.450  |
| 3  | 1.450  | .000   | 1.450  | 8  | 1.450  | 1.450  | .000   |
| 4  | 2.900  | 1.450  | 1.450  | 9  | 4.350  | 1.450  | .000   |
| 5  | 4.350  | 2.900  | 1.450  |    |        |        |        |

## Caracteristicas das barras

| Barra | ext.1 | ext.2 | comp. | cos a | cos b | cos g | Mat.Nº |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1     | 1     | 8     | 2.05  | .707  | .000  | -.707 | 1      |
| 2     | 3     | 8     | 2.05  | .000  | .707  | -.707 | 2      |
| 3     | 4     | 8     | 2.05  | -.707 | .000  | -.707 | 3      |
| 4     | 2     | 8     | 2.05  | .000  | -.707 | -.707 | 3      |
| 5     | 4     | 9     | 2.05  | .707  | .000  | -.707 | 1      |
| 6     | 6     | 9     | 2.05  | .000  | .707  | -.707 | 3      |
| 7     | 7     | 9     | 2.05  | -.707 | .000  | -.707 | 2      |
| 8     | 5     | 9     | 2.05  | .000  | -.707 | -.707 | 1      |
| 9     | 8     | 9     | 2.90  | 1.000 | .000  | .000  | 4      |

## Ligacoes ao exterior

| no lig. | codigo |   |   | valores impostos |       |       |
|---------|--------|---|---|------------------|-------|-------|
|         | x      | y | z | x                | y     | z     |
| 1       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 2       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 3       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 4       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 5       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 6       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 7       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 9       | 1      | 1 | 0 | .0000            | .0000 | .0000 |

## ACCOES A QUE ESTA SUJEITA A ESTRUTURA

Solicitacao Nº 1  
Titulo : Forca F

Carga nos Nos - accao exterior

| No | Fx(KN) | Fy(KN) | Fz(KN) | No | Fx(KN) | Fy(KN) | Fz(KN) |
|----|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| 8  | .00    | .00    | 20.00  | 9  | .00    | .00    | 20.00  |

nº total de nos com cargas aplicadas = 2

RESULTADOS DOS CALCULOS EFECTUADOS PELO PROGRAMA EERM

**Solicitacao Nº 1**  
**Título : Força F**

**Esforços nas Barras**

| Barra | N (KN)  | Barra | N (KN) |
|-------|---------|-------|--------|
| 1     | -10.285 | 6     | -4.991 |
| 2     | -5.143  | 7     | -3.328 |
| 3     | -7.714  | 8     | -9.983 |
| 4     | -5.143  | 9     | -1.018 |
| 5     | -9.983  |       |        |

**Reaccoes nos apoios**

| No | Rx(KN) | Ry(KN) | Rz(KN) |
|----|--------|--------|--------|
| 1  | 7.273  | .000   | 7.273  |
| 2  | .000   | 3.636  | 3.636  |
| 3  | .000   | -3.636 | 3.636  |
| 4  | 1.604  | .000   | 12.513 |
| 5  | .000   | 7.059  | 7.059  |
| 6  | .000   | -3.529 | 3.529  |
| 7  | -2.353 | .000   | 2.353  |
| 9  | -6.524 | -3.529 | .000   |

**Deslocamentos**

| No | dx(m) | dy(m) | dz(m) | No | dx(m) | dy(m) | dz(m) |
|----|-------|-------|-------|----|-------|-------|-------|
| 1  | .000  | .000  | .000  | 6  | .000  | .000  | .000  |
| 2  | .000  | .000  | .000  | 7  | .000  | .000  | .000  |
| 3  | .000  | .000  | .000  | 8  | .000  | .000  | -.001 |
| 4  | .000  | .000  | .000  | 9  | .000  | .000  | .000  |
| 5  | .000  | .000  | .000  |    |       |       |       |

Na comparação dos resultados obtidos para este exemplo, verifica-se que estes são iguais, diferindo apenas no sinal dos deslocamentos, devido aos eixos de referência não serem os mesmos.

O sexto exemplo tem como objectivo a aplicação do método dos deslocamentos. Considere-se uma estrutura tridimensional plana e rectangular, composta por unidades piramidais, cujos vértices são ligados, superiormente e inferiormente, por uma dupla travação de barras dispostas segundo as suas direcções ortogonais. Os nós do perímetro da estrutura apoiam-se numa viga que se supõe indeformável.

A estrutura deste exemplo encontra-se representada na figura 2.3-11.

Considerou-se que estrutura é solicitada por forças exteriores constantes, que actuam na face superior da estrutura. Não é considerada nenhuma distorção devido a variações de temperatura.

Este problema é simplificado pela presença de quatro eixos de simetria a, b, c, e d, permitindo assim a redução da estrutura em estudo, na estrutura representada na figura 2.3-12, de acordo com o que já foi referenciado, para estes casos, num dos pontos anteriores.

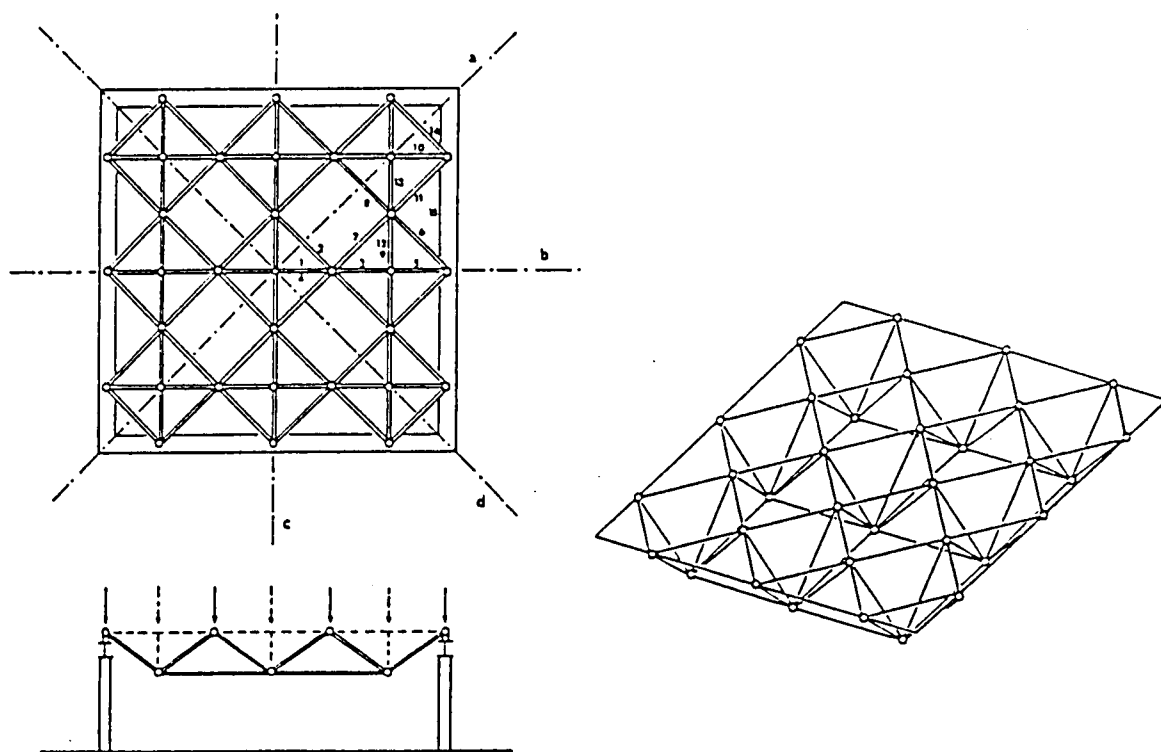


Fig. 2.3-11

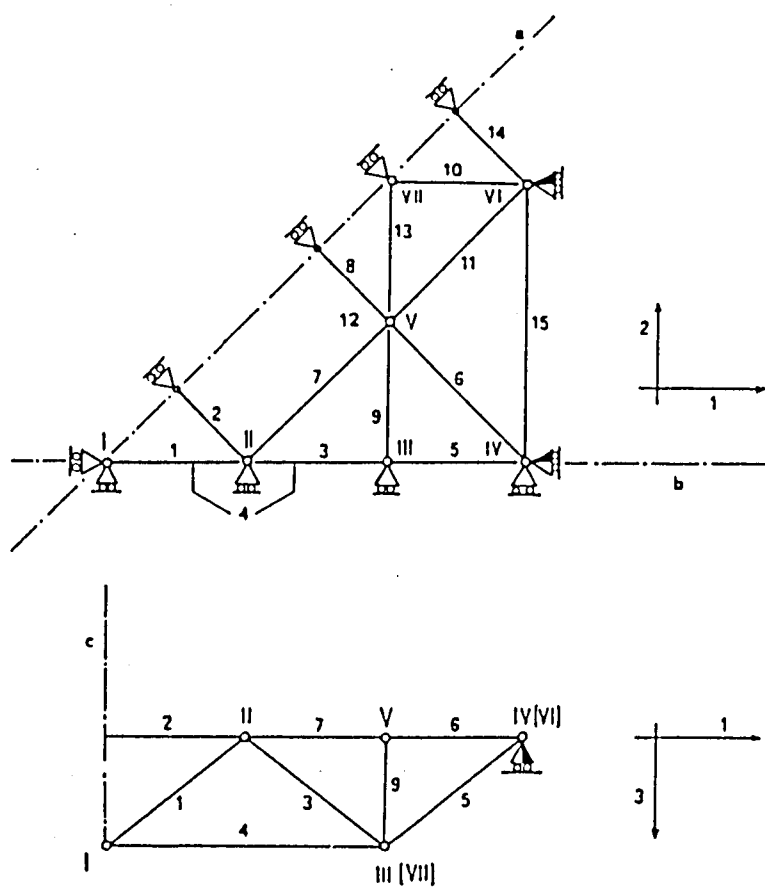


Fig. 2.3-12

Atendendo à geometria da estrutura e ao sistema de referência adoptado (fig. 2.3-12), obtêm-se os co-senos directores, bem como os comprimentos das barras, expressos no seguinte quadro :

| BARRA  | $l$    | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|--------|--------|----------|---------|----------|
| 1-3-5  | 1.2000 | 0.8346   | —       | 0.5508   |
| 9-13   | 0.6000 | —        | 0.8346  | 0.5508   |
| 2-8-14 | 0.3535 | 0.7071   | 0.7071  | —        |
| 4      | 2.0000 | 1.0000   | —       | —        |
| 12-15  | 1.0000 | —        | 1.0000  | —        |
| 6-7-11 | 0.7071 | 0.7071   | 0.7071  | —        |
| 10     | 0.6000 | 0.8346   | —       | 0.5508   |

Sendo constante a área das barras, bem como o seu módulo de elasticidade, o comprimento passa assim a ser o parâmetro característico das barras.

Os graus de liberdade que passam a ser considerados para o estudo, correspondentes à figura 2.3-12 são : um deslocamento vertical  $x_1$  para o nó I ; um deslocamento horizontal  $x_2$  na direcção 1, e um deslocamento vertical  $x_3$ , para o nó II ; um deslocamento horizontal  $x_4$  na direcção 1, e um deslocamento vertical  $x_5$ , para o nó III ; um deslocamento horizontal  $x_6$  na direcção 1, para o nó IV ; três deslocamentos  $x_7$ ,  $x_8$ , e  $x_9$ , nas direcções 1, 2, e 3, respectivamente, para o nó V ; dois deslocamentos horizontais  $x_{10}$  e  $x_{11}$ , nas direcções 1 e 2, respectivamente, para o nó VI ; e finalmente, um deslocamento  $x_{12}$  na direcção da diagonal de simetria, e um deslocamento vertical  $x_{13}$ , para o nó VII .

Devido à parte da estrutura que se examina ser constituída por 15 barras, o problema em estudo é duas vezes hiperestático. Neste exemplo está bem patente a facilidade de estudo da estrutura por redução das equações, obtida através da utilização das condições de simetria, visto que a







A última substituição é feita com o resultado obtido para o vector  $\mathbf{x}$ , na equação de compatibilidade que falta referir, obtendo-se um sistema de duas equações, do qual se obtém a solução para as componentes  $X_{14}$  e  $X_{15}$ :

$$\bar{A}_j \mathbf{x} + K_j X_j = 0$$

$$0,7071 x_{10} - 0,7071 x_{11} + 0,3535 K X_{14} = 0$$

$$x_{11} + K X_{15} = 0$$

$$X_{14} = 1,1994 F$$

$$X_{15} = 0,6569 F$$

Realizando o processo agora em ordem inversa, substituindo nas equações os valores de  $X_{14}$  e  $X_{15}$  já obtidos, determina-se primeiramente os valores dos deslocamentos, ou seja do vector  $\mathbf{x}$ , e na última fase os valores das restantes incógnitas  $X_j$ . Obtém-se deste modo para esta estrutura, a seguinte solução:

$$(\mathbf{x}; \mathbf{X}) = [(23,5601; -0,8701; 22,2475; 3,9823; 12,9172; -2,4174; -1,1059; -0,4328; 12,8833; -0,3111; -1,4977; 3,5219; 6,3491) K; (0,0000; 1,7402; 0,9077; -1,9911; -1,4781; 1,7445; 0,6687; 1,3461; 0,5703; -1,2451; 0,2704; -2,4903; 1,2451; 1,1994; 0,6569)] F$$

Considerando que  $E = 2,06 \times 10^8$  KPa,  $A = 0,0002$  m<sup>2</sup>, e  $F = 2,0$  KN, o resultado final passa a escrever-se da seguinte forma:

$$(\mathbf{x}; \mathbf{X}) = [(0,0011; 0,0000; 0,0011; 0,0002; 0,0006; -0,0001; -0,0001; 0,0000; 0,0006; 0,0000; -0,0001; 0,0002; 0,0003) K; (0,0000; 3,480; 3,631; -7,964; -5,912; 3,489; 1,337; 2,642; 1,140; -2,490; 0,540; -4,980; 2,490; 2,398; 1,313)] F$$

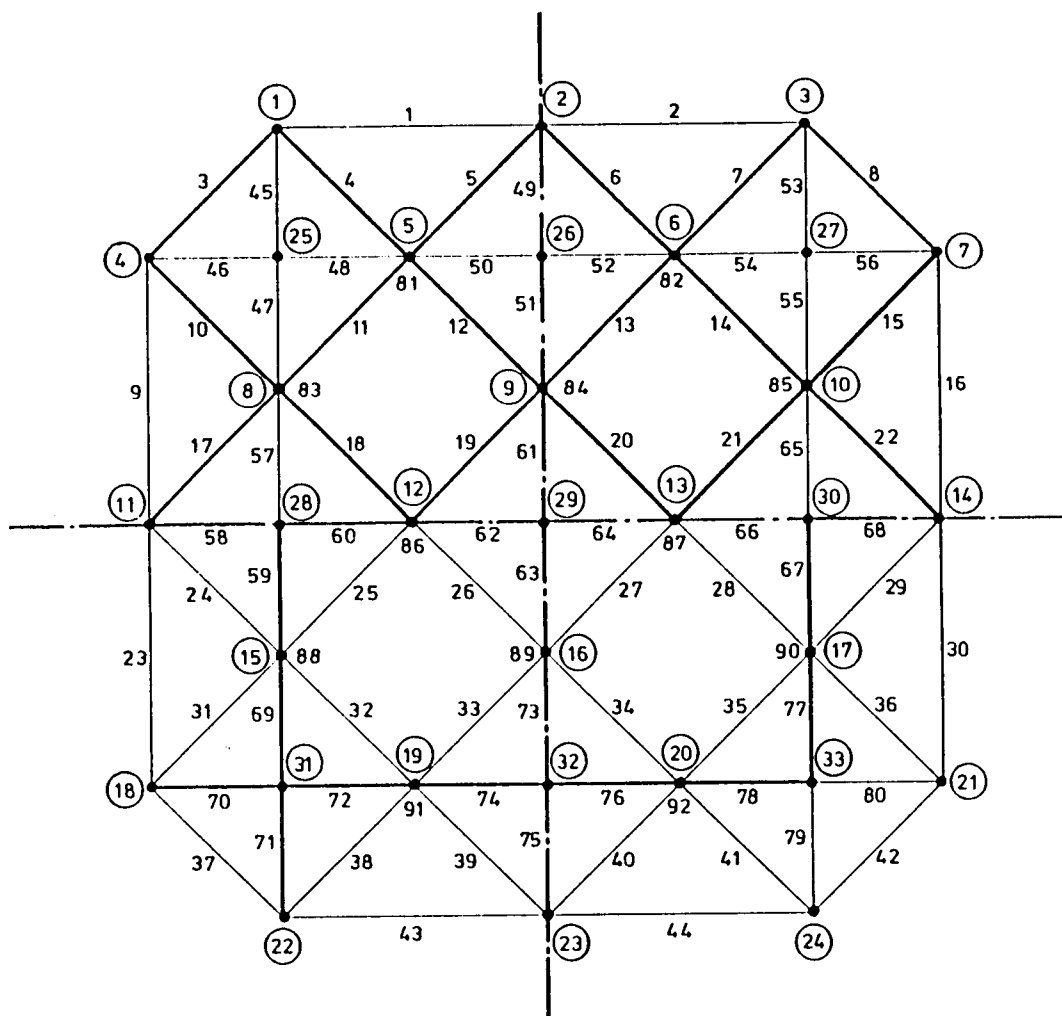


Fig. 2.3-13

Utilizando o programa EERM, e efectuando a numeração das barras e dos nós, representada na figura 2.3-13, o ficheiro de dados para este problema assume a seguinte forma:

Sexto exemplo do ponto 2.3

| 33 | 92    | 12         | 1          | 1 | 1 |
|----|-------|------------|------------|---|---|
| 1  | 2.00  | 206000.000 | .000001500 |   |   |
| 1  | .500  | .000       | .33166     |   |   |
| 2  | 1.500 | .000       | .33166     |   |   |
| 3  | 2.500 | .000       | .33166     |   |   |
| 4  | .000  | .500       | .33166     |   |   |
| 5  | 1.000 | .500       | .33166     |   |   |
| 6  | 2.000 | .500       | .33166     |   |   |
| 7  | 3.000 | .500       | .33166     |   |   |
| 8  | .500  | 1.000      | .33166     |   |   |
| 9  | 1.500 | 1.000      | .33166     |   |   |
| 10 | 2.500 | 1.000      | .33166     |   |   |
| 11 | .000  | 1.500      | .33166     |   |   |
| 12 | 1.000 | 1.500      | .33166     |   |   |
| 13 | 2.000 | 1.500      | .33166     |   |   |
| 14 | 3.000 | 1.500      | .33166     |   |   |
| 15 | .500  | 2.000      | .33166     |   |   |
| 16 | 1.500 | 2.000      | .33166     |   |   |
| 17 | 2.500 | 2.000      | .33166     |   |   |
| 18 | .000  | 2.500      | .33166     |   |   |
| 19 | 1.000 | 2.500      | .33166     |   |   |
| 20 | 2.000 | 2.500      | .33166     |   |   |
| 21 | 3.000 | 2.500      | .33166     |   |   |
| 22 | .500  | 3.000      | .33166     |   |   |
| 23 | 1.500 | 3.000      | .33166     |   |   |
| 24 | 2.500 | 3.000      | .33166     |   |   |
| 25 | .500  | .500       | .00        |   |   |

|    |       |       |     |
|----|-------|-------|-----|
| 26 | 1.500 | .500  | .00 |
| 27 | 2.500 | .500  | .00 |
| 28 | .500  | 1.500 | .00 |
| 29 | 1.500 | 1.500 | .00 |
| 30 | 2.500 | 1.500 | .00 |
| 31 | .500  | 2.500 | .00 |
| 32 | 1.500 | 2.500 | .00 |
| 33 | 2.500 | 2.500 | .00 |
| 1  | 1     | 2     | 1   |
| 2  | 2     | 3     | 1   |
| 3  | 1     | 4     | 1   |
| 4  | 1     | 5     | 1   |
| 5  | 2     | 5     | 1   |
| 6  | 2     | 6     | 1   |
| 7  | 3     | 6     | 1   |
| 8  | 3     | 7     | 1   |
| 9  | 4     | 11    | 1   |
| 10 | 4     | 8     | 1   |
| 11 | 5     | 8     | 1   |
| 12 | 5     | 9     | 1   |
| 13 | 6     | 9     | 1   |
| 14 | 6     | 10    | 1   |
| 15 | 7     | 10    | 1   |
| 16 | 7     | 14    | 1   |
| 17 | 8     | 11    | 1   |
| 18 | 8     | 12    | 1   |
| 19 | 9     | 12    | 1   |
| 20 | 9     | 13    | 1   |
| 21 | 10    | 13    | 1   |
| 22 | 10    | 14    | 1   |
| 23 | 11    | 18    | 1   |
| 24 | 11    | 15    | 1   |
| 25 | 12    | 15    | 1   |
| 26 | 12    | 16    | 1   |
| 27 | 13    | 16    | 1   |
| 28 | 13    | 17    | 1   |
| 29 | 14    | 17    | 1   |
| 30 | 14    | 21    | 1   |
| 31 | 15    | 18    | 1   |
| 32 | 15    | 19    | 1   |
| 33 | 16    | 19    | 1   |
| 34 | 16    | 20    | 1   |
| 35 | 17    | 20    | 1   |
| 36 | 17    | 21    | 1   |
| 37 | 18    | 22    | 1   |
| 38 | 19    | 22    | 1   |
| 39 | 19    | 23    | 1   |
| 40 | 20    | 23    | 1   |
| 41 | 20    | 24    | 1   |
| 42 | 21    | 24    | 1   |
| 43 | 22    | 23    | 1   |
| 44 | 23    | 24    | 1   |
| 45 | 1     | 25    | 1   |
| 46 | 4     | 25    | 1   |
| 47 | 8     | 25    | 1   |
| 48 | 5     | 25    | 1   |
| 49 | 2     | 26    | 1   |
| 50 | 5     | 26    | 1   |
| 51 | 9     | 26    | 1   |
| 52 | 6     | 26    | 1   |
| 53 | 3     | 27    | 1   |
| 54 | 6     | 27    | 1   |
| 55 | 10    | 27    | 1   |
| 56 | 7     | 27    | 1   |
| 57 | 8     | 28    | 1   |
| 58 | 11    | 28    | 1   |
| 59 | 15    | 28    | 1   |
| 60 | 12    | 28    | 1   |
| 61 | 9     | 29    | 1   |
| 62 | 12    | 29    | 1   |
| 63 | 16    | 29    | 1   |
| 64 | 13    | 29    | 1   |
| 65 | 10    | 30    | 1   |
| 66 | 13    | 30    | 1   |
| 67 | 17    | 30    | 1   |
| 68 | 14    | 30    | 1   |
| 69 | 15    | 31    | 1   |
| 70 | 18    | 31    | 1   |
| 71 | 22    | 31    | 1   |
| 72 | 19    | 31    | 1   |
| 73 | 16    | 32    | 1   |
| 74 | 19    | 32    | 1   |
| 75 | 23    | 32    | 1   |
| 76 | 20    | 32    | 1   |
| 77 | 17    | 33    | 1   |
| 78 | 20    | 33    | 1   |
| 79 | 24    | 33    | 1   |
| 80 | 21    | 33    | 1   |

|         |      |      |       |       |       |       |
|---------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| 81      | 25   | 26   | 1     |       |       |       |
| 82      | 26   | 27   | 1     |       |       |       |
| 83      | 25   | 28   | 1     |       |       |       |
| 84      | 26   | 29   | 1     |       |       |       |
| 85      | 27   | 30   | 1     |       |       |       |
| 86      | 28   | 29   | 1     |       |       |       |
| 87      | 29   | 30   | 1     |       |       |       |
| 88      | 26   | 31   | 1     |       |       |       |
| 89      | 29   | 32   | 1     |       |       |       |
| 90      | 30   | 33   | 1     |       |       |       |
| 91      | 31   | 32   | 1     |       |       |       |
| 92      | 32   | 33   | 1     |       |       |       |
| 1       | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 2       | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 3       | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 7       | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 14      | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 21      | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 24      | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 23      | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 22      | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 18      | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 11      | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| 4       | 0    | 0    | 1     | .0000 | .0000 | .0000 |
| Força F |      |      |       |       |       |       |
| 12      |      |      |       |       |       |       |
| 5       | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 6       | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 8       | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 9       | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 10      | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 12      | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 13      | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 15      | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 16      | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 17      | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 19      | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 20      | .000 | .000 | 2.000 |       |       |       |
| 0       |      |      |       |       |       |       |

Da execução do programa obtém-se o seguinte ficheiro de resultados:

ESTUDO DE UMA ESTRUTURA ESPACIAL RETICULADA METALICA  
Programa EERM - Carlos Garcia (Eng. Civil -UP)

Assunto: Sexto exemplo do ponto 2.3

Ficheiro de dados: exemp6.DAD  
Ficheiro de resultados: exemp6.RES

#### DADOS DA ESTRUTURA

Nº total de nos = 33  
Nº total de barras = 92  
Nº de apoios = 12

#### Características dos materiais

| Mat.Nº | Area (cm2) | E (MPa)    | Coef.Termico |
|--------|------------|------------|--------------|
| 1      | 2.00       | 206000.000 | .00001500    |

#### Coordenadas dos nos

| no | coordx | coordy | coordz | no | coordx | coordy | coordz |
|----|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| 1  | .500   | .000   | .332   | 18 | .000   | 2.500  | .332   |
| 2  | 1.500  | .000   | .332   | 19 | 1.000  | 2.500  | .332   |
| 3  | 2.500  | .000   | .332   | 20 | 2.000  | 2.500  | .332   |
| 4  | .000   | .500   | .332   | 21 | 3.000  | 2.500  | .332   |
| 5  | 1.000  | .500   | .332   | 22 | 1.500  | 3.000  | .332   |
| 6  | 2.000  | .500   | .332   | 23 | 1.500  | 3.000  | .332   |
| 7  | 3.000  | .500   | .332   | 24 | 2.500  | 3.000  | .332   |
| 8  | .500   | 1.000  | .332   | 25 | 1.500  | .500   | .000   |
| 9  | 1.500  | 1.000  | .332   | 26 | 1.500  | .500   | .000   |
| 10 | 2.500  | 1.000  | .332   | 27 | 2.500  | .500   | .000   |

|    |       |       |      |    |       |       |      |
|----|-------|-------|------|----|-------|-------|------|
| 11 | .000  | 1.500 | .332 | 28 | .500  | 1.500 | .000 |
| 12 | 1.000 | 1.500 | .332 | 29 | 1.500 | 1.500 | .000 |
| 13 | 2.000 | 1.500 | .332 | 30 | 2.500 | 1.500 | .000 |
| 14 | 3.000 | 1.500 | .332 | 31 | .500  | 2.500 | .000 |
| 15 | .500  | 2.000 | .332 | 32 | 1.500 | 2.500 | .000 |
| 16 | 1.500 | 2.000 | .332 | 33 | 2.500 | 2.500 | .000 |
| 17 | 2.500 | 2.000 | .332 |    |       |       |      |

## Características das barras

| Barra | ext.1 | ext.2 | comp. | cos a | cos b | cos g | Mat.Nº |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1     | 1     | 2     | 1.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |
| 2     | 2     | 3     | 1.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |
| 3     | 1     | 4     | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 4     | 1     | 5     | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 5     | 2     | 5     | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 6     | 2     | 6     | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 7     | 3     | 6     | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 8     | 3     | 7     | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 9     | 4     | 11    | 1.00  | .000  | 1.000 | .000  | 1      |
| 10    | 4     | 8     | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 11    | 5     | 8     | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 12    | 5     | 9     | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 13    | 6     | 9     | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 14    | 6     | 10    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 15    | 7     | 10    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 16    | 7     | 14    | 1.00  | .000  | 1.000 | .000  | 1      |
| 17    | 8     | 11    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 18    | 8     | 12    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 19    | 9     | 12    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 20    | 9     | 13    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 21    | 10    | 13    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 22    | 10    | 14    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 23    | 11    | 18    | 1.00  | .000  | 1.000 | .000  | 1      |
| 24    | 11    | 15    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 25    | 12    | 15    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 26    | 12    | 16    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 27    | 13    | 16    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 28    | 13    | 17    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 29    | 14    | 17    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 30    | 14    | 21    | 1.00  | .000  | 1.000 | .000  | 1      |
| 31    | 15    | 18    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 32    | 15    | 19    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 33    | 16    | 19    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 34    | 16    | 20    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 35    | 17    | 20    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 36    | 17    | 21    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 37    | 18    | 22    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 38    | 19    | 22    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 39    | 19    | 23    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 40    | 20    | 23    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 41    | 20    | 24    | .71   | -.707 | .707  | .000  | 1      |
| 42    | 21    | 24    | .71   | .707  | .707  | .000  | 1      |
| 43    | 22    | 23    | 1.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |
| 44    | 23    | 24    | 1.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |
| 45    | 1     | 25    | .60   | .000  | .833  | -.553 | 1      |
| 46    | 4     | 25    | .60   | .833  | .000  | -.553 | 1      |
| 47    | 8     | 25    | .60   | .000  | -.833 | -.553 | 1      |
| 48    | 5     | 25    | .60   | -.833 | .000  | -.553 | 1      |
| 49    | 2     | 26    | .60   | .000  | .833  | -.553 | 1      |
| 50    | 5     | 26    | .60   | .833  | .000  | -.553 | 1      |
| 51    | 9     | 26    | .60   | .000  | -.833 | -.553 | 1      |
| 52    | 6     | 26    | .60   | -.833 | .000  | -.553 | 1      |
| 53    | 3     | 27    | .60   | .000  | .833  | -.553 | 1      |
| 54    | 6     | 27    | .60   | .833  | .000  | -.553 | 1      |
| 55    | 10    | 27    | .60   | .000  | -.833 | -.553 | 1      |
| 56    | 7     | 27    | .60   | -.833 | .000  | -.553 | 1      |
| 57    | 8     | 28    | .60   | .000  | .833  | -.553 | 1      |
| 58    | 11    | 28    | .60   | .833  | .000  | -.553 | 1      |
| 59    | 15    | 28    | .60   | .000  | -.833 | -.553 | 1      |
| 60    | 12    | 28    | .60   | -.833 | .000  | -.553 | 1      |
| 61    | 9     | 29    | .60   | .000  | .833  | -.553 | 1      |
| 62    | 12    | 29    | .60   | .833  | .000  | -.553 | 1      |
| 63    | 16    | 29    | .60   | .000  | -.833 | -.553 | 1      |
| 64    | 13    | 29    | .60   | -.833 | .000  | -.553 | 1      |
| 65    | 10    | 30    | .60   | .000  | .833  | -.553 | 1      |
| 66    | 13    | 30    | .60   | .833  | .000  | -.553 | 1      |
| 67    | 17    | 30    | .60   | .000  | -.833 | -.553 | 1      |
| 68    | 14    | 30    | .60   | -.833 | .000  | -.553 | 1      |
| 69    | 15    | 31    | .60   | .000  | .833  | -.553 | 1      |
| 70    | 18    | 31    | .60   | .833  | .000  | -.553 | 1      |
| 71    | 22    | 31    | .60   | .000  | -.833 | -.553 | 1      |
| 72    | 19    | 31    | .60   | -.833 | .000  | -.553 | 1      |
| 73    | 16    | 32    | .60   | .000  | .833  | -.553 | 1      |
| 74    | 19    | 32    | .60   | .833  | .000  | -.553 | 1      |
| 75    | 23    | 32    | .60   | .000  | -.833 | -.553 | 1      |

|    |    |    |      |       |       |       |   |
|----|----|----|------|-------|-------|-------|---|
| 76 | 28 | 32 | .60  | -.833 | .000  | -.553 | 1 |
| 77 | 17 | 33 | .60  | .000  | .833  | -.553 | 1 |
| 78 | 20 | 33 | .60  | .833  | .000  | -.553 | 1 |
| 79 | 24 | 33 | .60  | .000  | -.833 | -.553 | 1 |
| 80 | 21 | 33 | .60  | -.833 | .000  | -.553 | 1 |
| 81 | 25 | 26 | 1.00 | 1.000 | .000  | .000  | 1 |
| 82 | 26 | 27 | 1.00 | 1.000 | .000  | .000  | 1 |
| 83 | 25 | 28 | 1.00 | .000  | 1.000 | .000  | 1 |
| 84 | 26 | 29 | 1.00 | .000  | 1.000 | .000  | 1 |
| 85 | 27 | 30 | 1.00 | .000  | 1.000 | .000  | 1 |
| 86 | 28 | 29 | 1.00 | 1.000 | .000  | .000  | 1 |
| 87 | 29 | 30 | 1.00 | 1.000 | .000  | .000  | 1 |
| 88 | 28 | 31 | 1.00 | .000  | 1.000 | .000  | 1 |
| 89 | 29 | 32 | 1.00 | .000  | 1.000 | .000  | 1 |
| 90 | 30 | 33 | 1.00 | .000  | 1.000 | .300  | 1 |
| 91 | 31 | 32 | 1.00 | 1.000 | .000  | .000  | 1 |
| 92 | 32 | 33 | 1.00 | 1.000 | .000  | .000  | 1 |

## Ligacoes ao exterior

| no lig. | codigo |   |   | valores impostos |       |       |
|---------|--------|---|---|------------------|-------|-------|
|         | x      | y | z | x                | y     | z     |
| 1       | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 2       | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 3       | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 7       | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 14      | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 21      | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 24      | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 23      | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 22      | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 18      | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 11      | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |
| 4       | 0      | 0 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |

## ACCOES A QUE ESTA SUJEITA A ESTRUTURA

Solicitacao Nº 1

Titulo : Forca F

Carga nos Nos - accao exterior

| No | Fx(KN) | Fy(KN) | Fz(KN) | No | Fx(KN) | Fy(KN) | Fz(KN) |
|----|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| 5  | .00    | .00    | 2.00   | 6  | .00    | .00    | 2.00   |
| 8  | .00    | .00    | 2.00   | 9  | .00    | .00    | 2.00   |
| 10 | .00    | .00    | 2.00   | 12 | .00    | .00    | 2.00   |
| 13 | .00    | .00    | 2.00   | 15 | .00    | .00    | 2.00   |
| 16 | .00    | .00    | 2.00   | 17 | .00    | .00    | 2.00   |
| 19 | .00    | .00    | 2.00   | 20 | .00    | .00    | 2.00   |

nº total de nos com cargas aplicadas = 12

## RESULTADOS DOS CALCULOS EFECTUADOS PELO PROGRAMA EERM

Solicitacao Nº 1

Titulo : Forca F

Esforços nas Barras

| Barra | N (KN) | Barra | N (KN) |
|-------|--------|-------|--------|
| 1     | 1.338  | 47    | 2.596  |
| 2     | 1.338  | 48    | 2.596  |
| 3     | 2.476  | 49    | -5.663 |
| 4     | .583   | 50    | 1.023  |
| 5     | 3.337  | 51    | 3.618  |
| 6     | 3.337  | 52    | 1.023  |
| 7     | .503   | 53    | -2.596 |
| 8     | 2.476  | 54    | 2.596  |
| 9     | 1.338  | 55    | 2.596  |
| 10    | .583   | 56    | -2.596 |
| 11    | 2.410  | 57    | 1.023  |
| 12    | 1.510  | 58    | -5.663 |
| 13    | 1.510  | 59    | 1.023  |
| 14    | 2.410  | 60    | 3.618  |
| 15    | .583   | 61    | .000   |
| 16    | 1.338  | 62    | .000   |
| 17    | 3.337  | 63    | .000   |

|    |        |    |        |
|----|--------|----|--------|
| 18 | 1.510  | 64 | .000   |
| 19 | 3.642  | 65 | 1.023  |
| 20 | 3.642  | 66 | 3.618  |
| 21 | 1.510  | 67 | 1.023  |
| 22 | 3.337  | 68 | -5.663 |
| 23 | 1.338  | 69 | -2.596 |
| 24 | 3.337  | 70 | -2.596 |
| 25 | 1.510  | 71 | -2.596 |
| 26 | 3.642  | 72 | 2.596  |
| 27 | 3.642  | 73 | 3.618  |
| 28 | 1.510  | 74 | 1.023  |
| 29 | 3.337  | 75 | -5.663 |
| 30 | 1.338  | 76 | 1.023  |
| 31 | .583   | 77 | 2.596  |
| 32 | 2.410  | 78 | 2.596  |
| 33 | 1.510  | 79 | -2.596 |
| 34 | 1.510  | 80 | -2.596 |
| 35 | 2.410  | 81 | -4.326 |
| 36 | .583   | 82 | -4.326 |
| 37 | 2.476  | 83 | -4.326 |
| 38 | .583   | 84 | -7.735 |
| 39 | 3.337  | 85 | -4.326 |
| 40 | 3.337  | 86 | -7.735 |
| 41 | .583   | 87 | -7.735 |
| 42 | 2.476  | 88 | -4.326 |
| 43 | 1.338  | 89 | -7.735 |
| 44 | 1.338  | 90 | -4.326 |
| 45 | -2.596 | 91 | -4.326 |
| 46 | -2.596 | 92 | -4.326 |

## Reaccoes nos apoios

| No | Rx(KN) | Ry(KN) | Rz(KN) |
|----|--------|--------|--------|
| 1  | .000   | .000   | 1.435  |
| 2  | .000   | .000   | 3.131  |
| 3  | .000   | .000   | 1.435  |
| 7  | .000   | .000   | 1.435  |
| 14 | .000   | .000   | 3.131  |
| 21 | .000   | .000   | 1.435  |
| 24 | .000   | .000   | 1.435  |
| 23 | .000   | .000   | 3.131  |
| 22 | .000   | .000   | 1.435  |
| 18 | .000   | .000   | 1.435  |
| 11 | .000   | .000   | 3.131  |
| 4  | .000   | .000   | 1.435  |

## Deslocamentos

| No | dx(m) | dy(m) | dz(m) | No | dx(m) | dy(m) | dz(m) |
|----|-------|-------|-------|----|-------|-------|-------|
| 1  | .000  | .000  | .000  | 18 | .000  | .000  | .000  |
| 2  | .000  | .000  | .000  | 19 | .000  | .000  | -.001 |
| 3  | .000  | .000  | .000  | 20 | .000  | .000  | -.001 |
| 4  | .000  | .000  | .000  | 21 | .000  | .000  | .000  |
| 5  | .000  | .000  | -.001 | 22 | .000  | .000  | .000  |
| 6  | .000  | .000  | -.001 | 23 | .000  | .000  | .000  |
| 7  | .000  | .000  | .000  | 24 | .000  | .000  | .000  |
| 8  | .000  | .000  | -.001 | 25 | .000  | .000  | .000  |
| 9  | .000  | .000  | -.001 | 26 | .000  | .000  | -.001 |
| 10 | .000  | .000  | -.001 | 27 | .000  | .000  | .000  |
| 11 | .000  | .000  | .000  | 28 | .000  | .000  | -.001 |
| 12 | .000  | .000  | -.001 | 29 | .000  | .000  | -.001 |
| 13 | .000  | .000  | -.001 | 30 | .000  | .000  | -.001 |
| 14 | .000  | .000  | .000  | 31 | .000  | .000  | .000  |
| 15 | .000  | .000  | -.001 | 32 | .000  | .000  | -.001 |
| 16 | .000  | .000  | -.001 | 33 | .000  | .000  | .000  |
| 17 | .000  | .000  | -.001 |    |       |       |       |

Na comparação dos resultados obtidos para este estudo, tendo em atenção que a numeração das barras e nós é diferente, verifica-se que são aproximadamente iguais, diferindo no sinal dos deslocamentos, devido aos eixos de referência não serem os mesmos, e em pequenas diferenças dos valores dos resultados, resultantes dos erros de arredondamento que se cometem nas várias multiplicações de matrizes.

## CAPÍTULO III

### 3 - CÁLCULO DE ESTRUTURAS ESPACIAIS RETICULADAS PELO MÉTODO CONTÍNUO

O método contínuo, como já foi mencionado na introdução, surgiu de toda uma série de estudos efectuados para a obtenção da solução aproximada dos problemas das estruturas espaciais reticuladas, que pelo método directo conduzem a sistemas de equações lineares com um elevado número de incógnitas, dificultando, e por vezes, impossibilitando, a sua resolução.

Este método consiste, em termos gerais, em realizar a substituição da estrutura espacial em estudo com uma estrutura constituída por um material contínuo, para a qual se obtêm as soluções pelos métodos já conhecidos do estudo de estruturas contínuas. O problema efectivo é assim transformado num equivalente, erecto pelas equações diferenciais, com o qual se procede a iterações sucessivas, que no limite, dão a convergência à solução efectiva. As dificuldades que surgem no início do estudo de este método, e que levam a que não se "simpatize" de imediato com ele, são ultrapassadas quando se reconhe-se que, uma tal substituição, permite utilizar, no campo das estruturas reticuladas, toda uma vastíssima literatura técnica existente para problemas de estruturas contínuas, principalmente no que se refere aos métodos que são aplicados na obtenção de soluções para os problemas das lajes e lâminas, planas ou curvas.

O primeiro passo necessário para se compreender a fundo a essência do método contínuo é o de compreender o significado de "substituição da estrutura reticulada por uma estrutura constituída por um material contínuo", ou "contínuo equivalente à estrutura reticulada". Para tal, há que lembrar primeiramente algumas definições, tal como a da análise do contínuo, de forma a facilitar a exposição.

A análise do contínuo, como é geralmente realizada, consiste essencialmente na verificação das condições de equilíbrio e de congruência, dum elemento infinitésimo de volume genérico, escreven-

do as equações constitutivas - relação  $\sigma - \varepsilon$  -, considerando simplesmente a existência de um potencial elástico, do qual se deduzem as ditas relações como equações lineares com matriz simétrica, formada por vinte e um coeficientes distintos nos casos mais gerais de anisotropia. Em tal análise não são estabelecidas quaisquer hipóteses acerca da estrutura interna do elemento em estudo. Tal facto pode levar a que se defina como modelo da estrutura reticulada uma estrutura interna do contínuo da maneira que se queira. No entanto, a realização da individualização do contínuo equivalente a uma determinada estrutura no método contínuo, sobre a hipótese fundamental das barras articularem como charneiras nos nós, conduz à consideração do contínuo como "organização molecular com força central", ou seja, a considerar os nós como moléculas que se atraem mutuamente por forças directas segundo os seus centros, resultantes da acção intermolecular, e que são materializadas pelas hastes. Imaginando as hastes do corpo com um comprimento de tal forma pequeno, que se possa comparar à distância intermolecular, os dois termos, "contínuo equivalente" e "corpo reticulado", vêm a coincidir, conservando-se assim a equivalência: contínuo molecular = corpo reticulado.

O termo "estrutura reticulada" passa a ser substituído por "corpo reticulado", de modo a evitar a associação de um caso concreto, pois este refere-se qualquer corpo, constituído por uma distribuição qualquer de nós, e de barras de ligação.

O problema central do método contínuo consiste portanto na passagem do contínuo molecular ao corpo reticulado, ou seja, em estabelecer o comportamento do corpo reticulado quando a distância entre os nós passa da distância intermolecular à escala efectiva da distância entre nós. Na passagem do contínuo molecular ao corpo reticulado são estabelecidas correspondências entre as tensões ( $\sigma$ ) e deformações ( $\varepsilon$ ), grandezas convencionais da teoria da elasticidade, e os dois conceitos do corpo reticulado, ou seja, as forças nas barras, e as dilatações das mesmas. Associam-se neste método as noções de forças nas barras com tensões, e de dilatações com deformações.

O método contínuo atribui portanto ao corpo reticulado as propriedades elásticas, relações entre as forças nas hastes e respectivos alongamentos, como relações entre tensões e deformações do corpo contínuo, estabelecendo a equivalência dos dois no que lhes diz respeito ao comportamento, como estado de deformações, frente a sistemas de forças e tensões estaticamente equivalentes, actuando num e noutro.

No que diz respeito à aplicação do método contínuo, pode-se afirmar em complemento que a passagem do contínuo para a estrutura reticulada, ou vice-versa, implica necessariamente a efectuação de erros, cuja natureza reside essencialmente na passagem finito-infinitésimo, ou vice-versa, conexas à transformação. Esses erros podem ser obtidos confrontando as equações de equilíbrio do retículo, e as equações de equilíbrio do contínuo equivalente. Embora ambas as equações sejam lineares, no entanto as primeiras têm características algébricas, e as segundas têm características diferenciais. Sendo assim as operações diferenciais serão transformadas oportunamente em operações de diferenças finitas, coincidindo as equações a menos dos termos que foram negligenciados na transformação, termos esses que fornecem a medida do erro.

Enumerando em quatro, as fases do processo de cálculo do método contínuo, procede-se de seguida à descrição das mesmas.

Na primeira fase procuram-se as propriedades elásticas do contínuo equivalente, para a estrutura reticulada definida para estudo.

Na segunda fase resolve-se o problema do contínuo equivalente, representado por uma estrutura geometrica, e mecanicamente similar à definida para estudo, mas constituída por um material contínuo.

Na terceira fase, aos nós da estrutura reticulada são atribuídos os deslocamentos dos pontos correspondentes no contínuo, e às forças nas barras são atribuídos, nó por nó, os valores que se deduzem através da aplicação sistemática das equações ocorrentes na definição do contínuo equivalente, obtendo-se para cada barra dois valores que deverão ser mediados.

Se a solução do contínuo é dada somente em termos dos deslocamentos, a determinação das forças nas hastes é realizada por via directa, exprimindo as respectivas dilatações através das equações de congruência em função dos deslocamentos dos nós de que se faz caso, e sucessivamente, passando das dilatações às forças internas que as produziram. As soluções obtidas em termos dos deslocamentos são congruentes mas não equilibradas com as forças externas, e as soluções obtidas em termos das tensões são equilibradas nó por nó, antes de se efectuarem as médias dos valores, mas não são congruentes.

Na quarta e última fase, processa-se a uma maior aproximação para os resultados. Para tal, é necessário realçar primeiramente que, o erro ligado à aplicação do método é-nos evidenciado

em cada nó, sob a forma de uma força desequilibrada, resultante da diferença entre a força efectivamente aplicada e a força resultante da composição das forças obtidas nos cálculos para as barras. O procedimento a adoptar pode ser iterativo, aplicando as forças não equilibradas (ou as dilatações não congruentes, transformadas em forças) no contínuo equivalente, obtendo-se assim um problema de segunda aproximação, cuja solução é transferida para a estrutura reticulada, tal como da primeira vez, e assim sucessivamente para um terceiro, ou mais, ciclos. A solução final é obviamente representada pela soma das soluções da primeira, segunda, etc., aproximações.

O processo do método contínuo considera portanto as estruturas reticuladas como meios dotados de propriedades físicas específicas, que permitem estender a estas, a análise que é realizada para os meios contínuos. De um ponto de vista mecânico, é necessário transferir para o corpo reticulado as qualidades próprias do contínuo, como sejam: a homogeneidade, a isotropia, etc..

A definição de homogeneidade é transferida do contínuo para o meio reticulado, sob a condição de que a lei estrutural definida num nó seja a mesma para todos os nós. Logo, um meio reticulado passará a ser considerado homogénio se, a configuração das barras ligadas a um nó, for a mesma para todos os nós, em relação a um referencial fixo. Se esta condição não for verificada, então o meio é definido como heterogénio.

Existem no entanto casos em que, devido à lei estrutural variar de ponto para ponto, se pode repartir toda a estrutura em partes, que contenham o mesmo número de nós, e que sejam caracterizadas pela mesma lei estrutural, podendo-se falar ainda de homogeneidade, caso o número de nós contido em cada parte for suficientemente limitado. Nesses casos fala-se de homogeneidade, mas a um nível mais elevado, muito próximo da heterogeneidade.

O conceito de regularidade associado ao descontínuo (e às estruturas reticulares em particular) encontra imediata confrontação na Geometria, no conceito de "sistema regular de pontos", onde se Define como sistema regular de pontos, um sistema que em primeiro lugar contenha um número infinito de pontos, em segundo lugar, que qualquer região finita do mesmo contenha um número finito de pontos, e em terceiro lugar, que qualquer ponto do mesmo tenha a mesma posição relativa em relação aos outros. As duas primeiras propriedades caracterizam o sistema como descontínuo, e a última contém o conceito de regularidade. A estrutura do sistema regular de pontos é, deste modo, o resultado de um processo de repetição, no espaço euclidiano, a duas ou três dimensões, de uma fi-

figura elementar constituída por um número finito de pontos, sendo as leis que descrevem a estrutura do sistema regular, ou a estrutura da figura elementar generalizada, as mesmas que regulam o processo de repetição desta última, no espaço.

Outra das definições a ter em conta é que num sistema de pontos, no grupo das transformações ou congruências, as translações são as operações que regulam a repetição no espaço da figura elementar geradora do sistema, enquanto as outras congruências são as que caracterizam a figura elementar, pois operam nos pontos dela.

Se a figura elementar se reduzir a um só ponto, o grupo das congruências do sistema é já caracterizado somente pela translação, e o sistema reduz-se a um "retículo de pontos", onde o conjunto de pontos são definidos por todas as combinações lineares com coeficientes inteiros das três translações linearmente independentes, do ponto  $O$  do sistema, que está no centro do retículo. Na definição de retículo de pontos é evidente inclusa a presença de rotações, para as quais permanecem invariadas as configurações obtidas somente das translações.

Resulta da definição de homogeneidade transferida para o meio reticulado, e de tudo o que foi dito, que um meio reticulado é homogénio se é obtido com a mesma lei de composição própria de um retículo de pontos. Isto implica que os nós do meio reticulado coincidam com os pontos de um retículo, e que as conexões sejam a materialização de uma das muitas translações existentes no grupo de congruência do retículo.

Entre todos os meios reticulados, aqueles que têm as características enunciadas são os meios reticulados mais simples. Todos os outros meios reticulados podem ser considerados como combinações mais ou menos complexas destes, podendo sempre, de qualquer das maneiras, mesmo para os meios amorfos, achar-se uma certa lei estrutural, ainda que muito complexa para ser descrita, a menos que não se encontre, para alguns desses, o modelo das projecções a três dimensões de sistemas a quatro ou mais dimensões.

Concluindo, a geometria dos meios reticulados homogénios é a mesma da dos retículos de pontos, para os quais é necessário ter em conta as suas propriedades, que serão expostas no ponto seguinte.

A escolha do tipo de retículo para se realizar um meio reticulado homogénio (prescindindo de momento as características mecânicas do meio) está intimamente ligada à escolha da generatriz do espaço descontínuo, isto é, dos vínculos correspondentes aos vectores base do retículo.

A necessidade de se realizarem meios para os quais as relações tensões - deformações sejam bi-unívocas (correspondentes à estrutura reticulada não instável), exige a indeformabilidade da célula elementar, sendo esta instável se os vectores base são materializados com pêndulos formando sempre um paralelepípedo. Deste modo é necessário introduzir além das conexões nas direcções dos vectores base, conexões noutras direcções prescritas no retículo. Estas conexões deverão depois repetir-se nas direcções em que foram transformadas aquelas escolhidas inicialmente, para que o meio reticulado conserve as mesmas simetrias do retículo de apoio.

A última restrição, não sendo obviamente necessária, é no entanto útil para trasladar as relações de natureza exclusivamente geométricas, que caracterizam um retículo de pontos, nas relações de natureza geométrica e mecânica, que caracterizam um meio reticulado.

Supõe-se sempre assim, que o meio reticulado conserva a mesma simetria do retículo de apoio, a fim de não se separarem as propriedades exclusivamente geométricas dos retículos, das propriedades mecânicas do meio reticulado. Considerando uma distribuição de pontos nos vértices de uma rede quadrada plana, o retículo de pontos é neste caso um retículo quadrado, no qual os dois vectores base (lados do quadrado) são iguais em módulo. Fazendo coincidir os mesmos pontos, com os nós de um meio reticulado plano, no qual todavia as conexões nas duas direcções dos lados do quadrado têm propriedades mecânicas diferentes, é-se levado a realizar um meio reticulado cujas propriedades geométricas e mecânicas são definitivamente aquelas de um retículo rectangular, sendo as duas conexões nas direcções dos vectores base geométrica e mecanicamente diferentes entre elas. O meio reticulado descrito tem genericamente um retículo de apoio com malha rectangular.

A igualdade dos comprimentos dos lados da malha é uma característica não necessária, e como tal, não é determinante na caracterização do meio reticulado.

As possibilidades de conexas um nó do retículo com um outro, são teoricamente infinitas, sendo apenas razões de carácter prático que condicionam a escolha.

O número de conexões de qualquer nó com os nós à sua volta, é limitado pela tendência em se realizarem meios reticulados com o menor número possível de hastes com dimensões diferentes, bem como por razões de carácter prático, como as que limitam as direcções das conexões.

O nó de uma estrutura reticulada é um poliedro limitado por um número de faces pares, igual ao número de barras que aí concorrem, e constitui como que o "alojamento" das barras.

A forma de um nó pode ser definida, de um modo genérico, por uma peça com planos normais às direcções das conexões, e que, pelo menos nos retículos mais regulares, são todos tangentes a uma esfera que tem o seu centro no ponto do retículo, e cujo raio é função da extensão mínima que possa ter cada face do poliedro.

O retículo romboédrico é um dos retículos mais utilizado na realização de meios reticulados homogénios, pois escolhendo nessa distribuição de pontos como conexões entre os pontos as direcções dos lados das três malhas quadradas, mutuamente ortogonais, isto é, as diagonais sobre as faces do cubo associado às direcções que delimitam no romboédrico, base do retículo, os dois poliedros regulares de que é composto, obtém-se uma célula cinematicamente indeformável, cujas hastes têm todas o mesmo comprimento.

O retículo romboédrico é também o único que torna possível a construção de um meio reticulado homogénio com a utilização de uma só haste, e naturalmente de um só nó.

Sendo as direcções das conexões as das hastes da célula elementar, então o sólido assim obtido para o nó é um poliedro similar à célula elementar. A adição posterior de conexões modifica este poliedro, através da substituição de alguns vértices ou ângulos por novas superfícies planas, ficando o poliedro inicial facetado de maneira a que todas as barras encontrem aí o seu assento.

As direcções que partem de um ponto do retículo são caracterizadas por um grupo de operações de simetria, próprias do retículo, para as quais também o nó deve permanecer constante, sendo esta a razão dos nós apresentarem a mesma geometria do retículo. Esse grupo de operações é portanto comum ao nó e ao retículo.

Na figura 3.0-1 representam-se alguns exemplos de nós de retículos do sistema cúbico. Esses retículos (cubo, cubo com corpo centrado, e cubo com faces centradas) são os elementos com os quais todos os outros elementos geométricos (respectivamente a haste, a diagonal interna, e a diagonal sobre a face do cubo) podem ser fixados pela escolha de um só parâmetro - unidade vectorial.

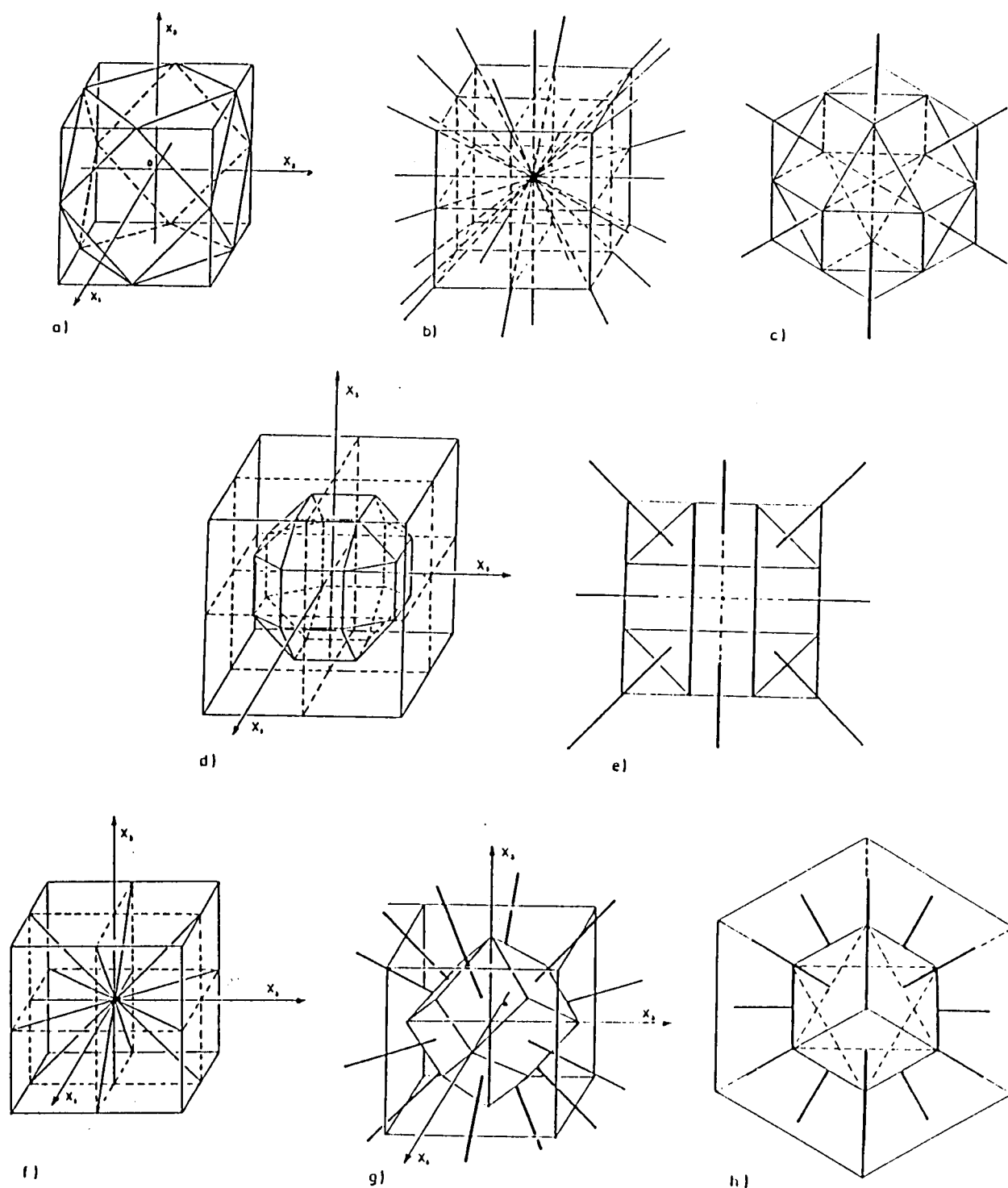


Fig. 3.0-1 Nós para os retículos do sistema cúbico

O "cubottaedro" é um sólido de arquimedes, obtido truncando os vértices do cubo (fig. 3.0-1 a)). As normais às faces são as direcções (positivas e negativas) dos eixos e das diagonais inter-

nas do cubo. O nó tem catorze saídas, podendo assim estabelecer catorze conexões, e é inserível no retículo cúbico, mais concretamente no cubo e cubo com corpo centrado (fig. 3.0-1 b)). Na figura 3.0-1 c) estão representados os elementos de simetria deste cubo.

Escolhendo as conexões nas direcções dos eixos das diagonais sobre faces e das diagonais internas do cubo no retículo primário, obtém-se como nó o "rombicubottaedro", sólido de arquimedes, obtido do cubo truncando os ângulos e os vértices (fig. 3.0-1 d)). O sólido constitui um nó com vinte e seis saídas, podendo assim estabelecer vinte e seis conexões. As dezoito faces quadradas competem às direcções das hastes do cubo (as seis direcções  $+v_1, -v_1, +v_2, -v_2, +v_3, -v_3$ ) e do romboedro visto como união dos tetraedros e dos octaedros (as doze direcções  $v_1 + v_2 + v_3 ; \dots$ ). As oito faces triangulares competem às direcções das diagonais internas do cubo. Este nó pode ser inserido tanto no retículo cúbico primário como nos retículos obtidos a partir dele, usando para cada um as saídas necessárias. Na figura 3.0-1 e) estão representados os elementos de simetria deste sólido.

Se no retículo romboédrico as direcções das conexões são as das hastes dos poliedros que constituem o romboedro regular (fig. 3.0-1 f)), realiza-se um meio reticulado com barras todas iguais. O nó desse retículo é o "rombododecaedro" (fig. 3.0-1 g)), sólido limitado por doze faces rômbricas equiláteras (união de dois triângulos equiláteros). Os co-senos directores das barras são fornecidos por todos os ternos obtidos operando sobre o terno  $(1, 1, 0)$  as transformações fundamentais do sistema cúbico. Na figura 3.0-1 h) estão representados os elementos de simetria deste sólido.

Concluindo, o tipo de sólido especificado em relação ao nó fica portanto completamente definido pela escolha das conexões.

### 3.1 - PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DOS RETÍCULOS DE PONTOS

Considere-se um ponto  $O$  do espaço, e um vector  $\mathbf{v}$  definido como combinação linear, com os coeficientes inteiros  $a_i$ , dos três vectores de base  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$ , não coplanares:

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3$$

Os extremos  $P$  dos vectores  $\mathbf{v}$  separados do ponto  $O$ , definem no espaço um retículo de pontos (fig. 3.1 - 1).

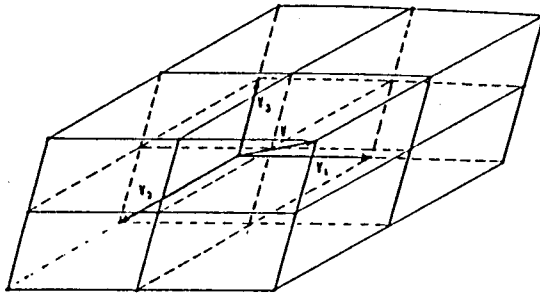


Fig. 3.1 - 1

Qualquer outro sistema de vectores  $\mathbf{v}'_1$ ,  $\mathbf{v}'_2$ , e  $\mathbf{v}'_3$ , constitui ainda uma base do retículo se for verificada a seguinte condição :

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}'_1 \wedge \mathbf{v}'_2 \times \mathbf{v}'_3 = V = \text{const.}$$

$V$  nesta equação denota o volume - invariável - definido pelo paralelepípedo especificado pelo terno dos vectores base.

Constituindo esta condição a primeira propriedade dos retículos de pontos, ela pode ser demonstrada considerando primeiramente os vectores  $\mathbf{v}'_i$ , pertencentes ao retículo de pontos com os vectores base  $\mathbf{v}_i$ , e em seguida o inverso, ou seja, considerando os vectores  $\mathbf{v}_i$  pertencentes ao mesmo retículo de pontos, mas agora com  $\mathbf{v}'_i$  como vectores base. Deste modo no primeiro caso, se  $\mathbf{v}_i$  são os vectores base, podem-se escrever os vectores  $\mathbf{v}'_i$  como combinação linear dos vectores  $\mathbf{v}_i$ , com coeficientes inteiros  $a_{ij}$ , não todos nulos, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \mathbf{v}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$$

Inversamente, para o segundo caso, assumindo agora  $\mathbf{v}'_i$  como vectores base do mesmo retículo, então os vectores  $\mathbf{v}_i$  podem-se escrever como combinação linear dos vectores  $\mathbf{v}'_i$ , com coeficientes inteiros, e não todos nulos, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \mathbf{v}'_3 \end{bmatrix}$$

Tem-se assim, que tanto os coeficientes  $a_{ij}$  como os coeficientes  $a'_{ij}$  são inteiros. Esta condição só é verificada se, e só se, o determinante associado às matrizes das transformações for igual a +1 ou -1. Como o determinante dá o valor do produto misto dos três vectores, tem-se assim, o volume do prisma construído sobre os vectores base, e a verificação da propriedade.

A segunda propriedade pode ser enunciada da seguinte maneira: "A projecção ortogonal de um retículo tridimensional sobre um plano normal a um vector do retículo, é um retículo bidimensional de pontos".

Considerando  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$ , uma base, e  $\pi$  um plano normal a  $\mathbf{v}_3$ , os vectores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  vêm projectados sobre o plano  $\pi$  em dois vectores  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$ , cujos módulos são:

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{v}_1 \cos \alpha$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{v}_2 \cos \beta$$

enquanto um vector genérico  $\mathbf{v}$  vem projectado num vector  $\mathbf{t}$  cujo módulo é:

$$\mathbf{t} = \mathbf{v} \cos \theta$$

Exprimindo-se o vector  $\mathbf{v}$  através da base vectorial, indicando com  $x_1$ ,  $x_2$ , e  $x_3$ , as suas componentes, tem-se:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3$$

Analogamente, projectando as componentes de  $\mathbf{v}$  sobre o plano  $\pi$ , tem-se para o vector  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} = x_1 \mathbf{v}_1 \cos \alpha + x_2 \mathbf{v}_2 \cos \beta = x_1 \mathbf{t}_1 + x_2 \mathbf{t}_2$$

O resultado obtido implica que  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  sejam a base de um retículo bidimensional, sobre o plano  $\pi$ , da projecção do retículo de pontos, verificando-se assim a segunda propriedade.

O retículo bidimensional obtido desta forma, é caracterizado pela área do paralelogramo, construído sobre o plano dos vectores base, que é constante.

Entre a constante do volume do retículo tridimensional, e a constante da área do retículo bidimensional referente ao primeiro, existe uma relação de igualdade do volume obtido com os vectores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$ , e os vectores  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$ . Considerando que  $l_3$  é o módulo do vector  $\mathbf{v}_3$  disposto segundo a direcção da projecção, e  $a$  é a área do paralelogramo obtido da projecção, então a igualdade referida pode-se escrever da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2 \times \mathbf{v}_3 = V = a \cdot l_3$$

Estas propriedades fundamentais serão utilizadas na definição das características mecânicas do meio, bem como na análise detalhada dos retículos de pontos, de modo a individualizar os sólidos elementares contidos neles.

### 3.2 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MEIOS RETICULADOS

A propriedade elástica dos meios reticulados é definida como a relação entre o campo das tensões e o campo das deformações, relação descrita por um tensor cujas componentes são invariáveis, para todas as transformações das relações para as quais é invariável a "estrutura" do meio reticulado, isto é, a estrutura geométrica-mecânica das conexões.

Nos meios reticulados é utilizada a noção de tensão dada na teoria de elasticidade molecular. De forma a facilitar a exposição das propriedades das relações tensões - deformações, considere-se um sistema de partículas (moléculas) sujeitas a acções recíprocas, variáveis, e que não obedecem a nenhuma lei, dispostas segundo as uniões e os seus centros, e negligenciadas para distâncias superiores a um certo limite, igual ao raio da esfera de atracção molecular. Nesse sistema considere-se agora, um ponto  $O$ , um plano  $\pi$  que passe por ele, e duas moléculas  $P$  e  $P'$ , de massa  $dm$ , simetricamente situadas em relação a  $O$ , de tal forma que a união  $n$  destas forme, com a normal positiva do plano  $\pi$ , um ângulo inferior a  $90^\circ$ .

Suponha-se agora que o sistema é deformável. Uma dilatação  $\epsilon_n$  na direcção  $n$  produzirá uma variação da força de atracção molecular. Proporcionalmente, ter-se-á uma tensão unitária sobre o elemento de área em redor de  $O$ , sobre  $\pi$ , proporcional à massa  $dm$ , à dilatação  $\epsilon_n$  e a uma função  $f$  da distância e da direcção  $n$ . Esta tensão é representada por  $f \epsilon_n dm$ .

Considerando  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ , e  $\gamma_n$ , os co-senos directores de  $n$  relativamente a três eixos ortogonais  $Oxyz$ , as componentes normais e tangenciais relativamente aos planos coordenados que passam por  $O$ , da tensão  $f \epsilon_n dm$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$f \epsilon_n dm \alpha_n^2 : f \epsilon_n dm \beta_n^2 : f \epsilon_n dm \gamma_n^2$$

Somando os termos análogos, correspondentes a todas as parcelas de massa  $dm$ , compreendidas na esfera das atracções moleculares, e situando as mesmas em relação ao plano sobre o qual se determinam as tensões, obtêm-se as componentes totais da tensão  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$ , que se escrevem da seguinte forma:

$$\sigma_x = \sum_n f_n dm \epsilon_n \alpha_n^2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\tau_{xy} = \sum_n f_n dm \epsilon_n \alpha_n \beta_n$$

Substituindo  $\epsilon_n$  pela sua expressão em função das dilatações e incursões específicas  $\epsilon_x, \dots, \gamma_{xy}$ .

obtêm-se as relações tensões - deformações, representadas a seguir somente com os elementos da diagonal principal, e os da parte superior a esta, tal como serão representadas as matrizes simétricas :

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \sum_n f_n dm \alpha_n^4 & \sum_n f_n dm \alpha_n^2 \beta_n^2 & \sum_n f_n dm \alpha_n^2 \gamma_n^2 & \sum_n f_n dm \alpha_n^2 \beta_n \gamma_n & \sum_n f_n dm \alpha_n^3 \gamma_n & \sum_n f_n dm \alpha_n^3 \beta_n & & \\ & \sum_n f_n dm \beta_n^4 & \sum_n f_n dm \beta_n^2 \gamma_n^2 & \sum_n f_n dm \beta_n^3 \gamma_n & \sum_n f_n dm \alpha_n \beta_n^2 \gamma_n & \sum_n f_n dm \alpha_n \beta_n^3 & & \\ & & \sum_n f_n dm \gamma_n^4 & \sum_n f_n dm \beta_n \gamma_n^3 & \sum_n f_n dm \alpha_n \gamma_n^3 & \sum_n f_n dm \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 & & \\ & & & \sum_n f_n dm \beta_n^2 \gamma_n^2 & \sum_n f_n dm \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 & \sum_n f_n dm \alpha_n \beta_n^2 \gamma_n & & \\ & & & & \sum_n f_n dm \alpha_n^2 \gamma_n^2 & \sum_n f_n dm \alpha_n^2 \beta_n \gamma_n & & \\ & & & & & \sum_n f_n dm \alpha_n^2 \beta_n^2 & & \end{array} \right]$$

Entre os coeficientes das equações verificam-se as relações de Cauchy - Poisson :

$$a_{12} = a_{66} ; a_{23} = a_{44} ; a_{13} = a_{55} ; a_{56} = a_{14} ; a_{64} = a_{25} ; a_{45} = a_{36}$$

A definição do tensor elástico no contínuo como constituição molecular com forças centrais - contínuo de Cauchy - Poisson - define portanto cada componente do tensor como soma dos contributos fornecidos por cada molécula compreendida na esfera de atrações moleculares, e situada no semi-espaço individualizado pelo plano sobre o qual é definida a componente do tensor elástico que se examina. O grande número de termos que intervêm nos somatórios podem ser restritos a um número limitado de termos, pois nos meios em estudo é assegurada a indeformabilidade cinemática do meio.

A matriz dos coeficientes de elasticidade será obtida através do estudo do elemento tipo, constituído pelo nó e pelas hastes que aí concorrem. Considere-se deste modo, um ponto  $O$ , origem do retículo definido pelos vectores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$ , e coincidente com a posição de um nó da estrutura reticulada. Mais ainda, considere-se um ponto  $P$  situado sobre a direcção  $\mathbf{n}$ , de co-senos directores

$\alpha_n$ ,  $\beta_n$ , e  $\gamma_n$ , relativamente aos eixos cartesianos de referência, e que é o extremo de uma haste genérica  $n$ , saída de  $O$ , de comprimento  $l_n$ , módulo de elasticidade  $E_n$ , e área  $A_n$ .

Supondo que a estrutura reticulada pertence a um campo de deformações uniforme, caracterizado pelo tensor de componentes  $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$ , e que se verifica uma dilatação  $\epsilon_n$  na direcção  $n$ , proporcionalmente se verificará um aumento de comprimento  $\Delta l_n = \epsilon_n l_n$ , o qual pode ser obtido por uma força  $S_n = E_n A_n \epsilon_n$ .

Em consequência da hipótese de homogeneidade, as hastes da estrutura reticulada, paralelas à direcção  $n$ , encruzam um plano normal a elas nos pontos de um retículo bidimensional, cuja constante é definida, indicando com  $V$  a constante do volume do retículo, pela relação:

$$a_n = V / l_n$$

A cada barra  $n$ , está assim associada uma bem determinada área de influência. A correlação  $S_n / a_n$  representa uma tensão unitária. Assim tem-se:

$$\sigma_n = E_n (A_n / a_n) \epsilon_n$$

Se o nó  $O$  é ligado a  $2n$  nós mediante  $2n$  barras nas  $n$  direcções, de acordo com a definição de tensão num sistema de partículas, as componentes do tensor de tensão podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma_x = \sum_n E_n (A_n / a_n) \epsilon_n \alpha_n^2$$

$$\sigma_y = \sum_n E_n (A_n / a_n) \epsilon_n \beta_n^2$$

.....

.....

.....

$$\tau_{xy} = \sum_n E_n (A_n / a_n) \epsilon_n \alpha_n \beta_n$$

Expressando a dilatação  $\varepsilon_n$  através das componentes do tensor de deformação, tem-se a matriz dos componentes do tensor elástico, como relação entre os dois grupos de componentes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_n \varepsilon_n \alpha_n^4 & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n^2 \beta_n^2 & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n^2 \gamma_n^2 & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n^2 \beta_n \gamma_n & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n^3 \gamma_n & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n^3 \beta_n \\ & \sum_n \varepsilon_n \beta_n^4 & \sum_n \varepsilon_n \beta_n^2 \gamma_n^2 & \sum_n \varepsilon_n \beta_n^3 \gamma_n & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n \beta_n^2 \gamma_n & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n \beta_n^3 \\ & & \sum_n \varepsilon_n \gamma_n^4 & \sum_n \varepsilon_n \beta_n \gamma_n^3 & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n \gamma_n^3 & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \\ & & & \sum_n \varepsilon_n \beta_n^2 \gamma_n^2 & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n \beta_n^2 \gamma_n \\ & & & & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n^2 \gamma_n^2 & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n^2 \beta_n \gamma_n \\ & & & & & \sum_n \varepsilon_n \alpha_n^2 \beta_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix}$$

em que:  $\varepsilon_n = (E_n A_n)/a_n$

O contínuo, modelo da estrutura reticulada, é assim caracterizado por este tensor. A hipótese das charneiras nos nós é manifestada nas relações de Cauchy - Poisson, que reduz a quinze o número máximo de coeficientes distintos não nulos.

A existência de quinze constantes independentes é uma característica dos meios elásticos anisotrópicos e, proporcionalmente, verifica-se nos meios reticulados para os quais a estrutura das conexões entre os nós apresenta unicamente a inversão como operação de simetria.

Simetrias geométricas e mecânicas traduzem-se numa redução do número máximo dos coeficientes  $c_{ij}$  independentes, podendo essa redução ser feita operando no esquema dos coeficientes as mesmas transformações que se verificam em relação ao retículo de pontos. Os componentes do tensor elástico devem resultar invariáveis, relativamente às transformações próprias da simetria estrutural do meio que se estuda. Portanto, igualando os coeficientes do esquema inicial, com os do esquema transformado, obtêm-se relações que, em alguns casos, são somente verificadas para valores nulos dos coeficientes.

Apresenta-se a seguir sete classes de simetria, a que pertencem os catorze retículos tridimensionais, onde os meios elásticos vêm classificados e reagrupados em função das seguintes matrizes características das propriedades elásticas:

GRUPO  $\tilde{C}_i$  - Paralelepípedo genérico como retículo ( $\tilde{C}_i$ ):

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{23} & c_{36} & c_{25} \\ & & & & c_{13} & c_{14} \\ & & & & & c_{12} \end{bmatrix}$$

GRUPO  $\tilde{C}_{2h}$  - Prismas rectos com paralelogramos de base, como retículo ( $\tilde{C}_{2h}$ ):

- Prismas rômnicos oblíquos como retículo ( $\tilde{C}_{2h}$ ):

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{23} & c_{36} & 0 \\ & & & & c_{13} & 0 \\ & & & & & c_{12} \end{bmatrix}$$

GRUPO  $D_{2h}$  - Prismas quadrangulares rectos como retículo ( $D_{2h}$ ):

- Prismas quadrangulares oblíquos como retículo ( $D_{2h}$ ):

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{13} & 0 & 0 \\ & & & & c_{13} & 0 \\ & & & & & c_{12} \end{bmatrix}$$

GRUPO  $D_{2h}$  - Prismas rectangulares rectos como retículo ( $D_{2h}$ ) :

- Prismas rômnicos rectos como retículo ( $D_{2h}$ )' ;
- Prismas rômnicos obliquos como retículo ( $D_{2h}$ )'' ;
- Prismas rectangulares obliquos como retículo ( $D_{2h}$ )''' :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{13} & 0 & 0 \\ & & & & c_{13} & 0 \\ & & & & & c_{12} \end{bmatrix}$$

GRUPO  $D_{3d}$  - Romboedros irregulares como retículo ( $D_{3d}$ ) :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{11}/3 & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{13} & 0 & 0 \\ & & & & c_{13} & c_{14} \\ & & & & & c_{11}/3 \end{bmatrix}$$

GRUPO  $D_{6d}$  - Prismas equiláteros rectos como retículo ( $D_{6d}$ ) :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{11}/3 & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{13} & 0 & 0 \\ & & & & c_{13} & 0 \\ & & & & & c_{13}/3 \end{bmatrix}$$

GRUPO  $O_h$  - Cubos como retículo ;

- Prismas quadrangulares oblíquos como retículo ;
- Romboedros regulares como retículo ;

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{12} & 0 & 0 \\ & & & & c_{12} & 0 \\ & & & & & c_{12} \end{bmatrix}$$

Estas classificações pressupõem a simetria geométrica da configuração das hastes ligadas ao nó, bem como a simetria mecânica.

O grau máximo de simetria possível, correspondente ao retículo cúbica ou monométrico, fornece duas constantes independentes  $c_{11}$  e  $c_{12}$ . Querendo-se obter um modelo isotrópico é necessário introduzir a seguinte relação :

$$c_{12} = 1/3 \ c_{11}$$

correspondente, no âmbito da teoria molecular, à relação :

$$c_{44} = 1/2 (c_{11} - c_{12})$$

Considerando a relação tensões deformações do tipo :

$$\sigma = C \ \varepsilon$$

os elementos  $c_{ij}$  da matriz  $C$  são considerados como constantes elásticas. Invertendo a matriz  $C$ , obtem-se para a relação tensões deformações a seguinte equação :

$$\varepsilon = C^{-1} \sigma = K \sigma$$

em que os elementos  $k_{ij}$  da matriz  $K$  são os coeficientes de deformação.

Uns e outros vêm subdivididos em quatro grupos distintos, em relação ao lugar que ocupam nas respectivas matrizes.

Os quatro grupos são mais facilmente caracterizados lembrando a expressão do potencial das forças elásticas :

$$\phi = 1/2 k_{11} \sigma_x^2 + k_{12} \sigma_x \sigma_y + \dots 1/2 k_{66} \tau_{xy}^2$$

e definindo para a mesma as constantes em função dos parâmetros com que intervêm na equação. Assim, segundo uma distinção efectuada por Rankine, são definidas como :

- constantes de elasticidade directa aquelas que acompanham os produtos  $\sigma_x \sigma_x \dots$
- constantes de elasticidade tangencial aquelas que acompanham os produtos  $\tau_{yz} \tau_{yz} \dots$
- constantes de elasticidade transversal aquelas que acompanham os produtos  $\sigma_x \sigma_y \dots$
- constantes de elasticidade assimétrica aquelas que acompanham os produtos  $\sigma_x \tau_{yz}$  e  $\tau_{yz} \tau_{xy} \dots$

Na prática técnica faz-se somente referência a um outro grupo de constantes, que se chamam constantes técnicas, obtidas transformando a equação  $\varepsilon = C^{-1} \sigma = K \sigma$  nas seguintes relações :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{yz}}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{zx}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{yz,x}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{zx,x}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{xy,x}}{E_{xx}} \\ & \frac{1}{E_{yy}} & -\frac{\nu_{zy}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{yz,y}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{zx,y}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_{yy}} \\ & & \frac{1}{E_{zz}} & \frac{\eta_{yz,z}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{zx,z}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_{zz}} \\ & & & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\mu_{zx,yz}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xy,yz}}{G_{yz}} \\ & & & & \frac{1}{G_{zx}} & \frac{\mu_{xy,zx}}{G_{zx}} \\ & & & & & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$E_{xx}$ ,  $E_{yy}$ ,  $E_{zz}$ , são os módulos de Young referentes respectivamente às direcções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ ;  $G_{yz}$ ,  $G_{zx}$ , e  $G_{xy}$ , são os módulos tangenciais para os planos paralelos aos planos coordenados;  $\nu_{yx}$ , ...,  $\nu_{zx}$ , são os coeficientes de Poisson, que caracterizam as contracções laterais em presença das tensões normais;  $\mu_{zx,yz}$ , ...,  $\mu_{yz,xy}$  são os coeficientes de Chentsov, e caracterizam as ocorrências em planos paralelos aos planos coordenados em presença das tensões tangenciais;  $\eta_{yz,x}$ , ...,  $\eta_{xy,z}$ , e  $\eta_{x,yz}$ , ...,  $\eta_{z,xy}$ , são coeficientes de influência, respectivamente de primeira e segunda ordem, caracterizando os de primeira ordem as dilatações transversais produzidas pelas tensões tangenciais, e os de segunda ordem as ocorrências produzidas pelas tensões normais.

As relações entre as constantes técnicas e os coeficientes de deformação, são:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= 1/E_{xx}, \quad k_{22} = 1/E_{yy}, \quad k_{33} = 1/E_{zz}; \\
 k_{12} &= -\nu_{yx}/E_{xx} = -\nu_{xy}/E_{yy}, \quad k_{23} = -\nu_{zy}/E_{yy} = -\nu_{yz}/E_{zz}, \quad k_{13} = -\nu_{xz}/E_{zz} = -\nu_{zx}/E_{xx}; \\
 k_{44} &= 1/G_{yz}, \quad k_{55} = 1/G_{zx}, \quad k_{66} = 1/G_{xy};
 \end{aligned}$$

$$k_{56} = \mu_{NF,ZN} / G_{ZN} = \mu_{ZN,NF} / G_{NF}, \quad k_{46} = \mu_{NF,YZ} / G_{YZ} = \mu_{YZ,NF} / G_{NF},$$

$$k_{45} = \mu_{ZN,YZ} / G_{YZ} = \mu_{YZ,ZN} / G_{ZN};$$

$$k_{14} = \eta_{FZ,N} / E_{NN} = \eta_{N,YZ} / G_{YZ}, \quad k_{25} = \eta_{ZN,Y} / E_{YY} = \eta_{F,ZN} / G_{ZN},$$

$$k_{36} = \eta_{NF,Z} / E_{ZZ} = \eta_{Z,NF} / G_{NF};$$

$$k_{24} = \eta_{FZ,Y} / E_{YY} = \eta_{F,YZ} / G_{YZ}, \quad k_{35} = \eta_{ZN,Z} / E_{ZZ} = \eta_{Z,ZN} / G_{ZN},$$

$$k_{16} = \eta_{NF,N} / E_{NN} = \eta_{N,NF} / G_{NF}, \quad k_{34} = \eta_{FZ,Z} / E_{ZZ} = \eta_{Z,FZ} / G_{YZ},$$

$$k_{15} = \eta_{ZN,N} / E_{NN} = \eta_{N,ZN} / G_{ZN}, \quad k_{26} = \eta_{NF,Y} / E_{YY} = \eta_{F,NF} / G_{NF}.$$

### 3.3 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Começando a exposição deste ponto com o estudo dos problemas planos, de modo a realizar-se para estes problemas as relações constitutivas, apresenta-se na figura 3.3-1 o retículo bidimensional de pontos para base da exposição, definido pelos vectores base  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ .

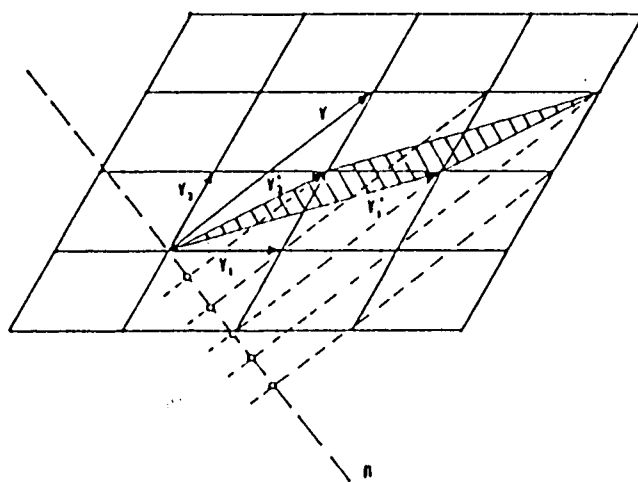


Fig. 3.3-1

Um vector genérico  $\mathbf{v}$  deste sistema escreve-se como combinação linear dos vectores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , com coeficientes  $a_1$  e  $a_2$ , inteiros, da seguinte forma:

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2$$

A constante do retículo é representada pela área  $a$ , da célula elementar construída sobre os vectores base. Sendo  $l_n$  o comprimento do vector base segundo a direcção  $n$ , a projecção ortogonal do retículo de pontos sobre a recta  $n$  normal ao vector  $r_n$  é um retículo monodimensional de passo geométrico igual a:

$$s_n = a / l_n$$

Suponha-se agora a geração, por translação rígida de passo  $c$ , de um retículo espacial como o representado na figura 3.3-2, em apoio ao retículo bidimensional definido primeiramente. Tem-se assim, uma estrutura reticulada caracterizada, em cada nó, pela mesma distribuição de hastes (menos para os nós da fronteira).

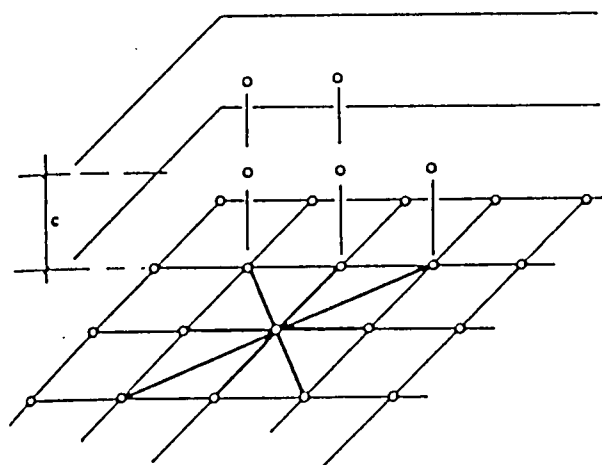


Fig. 3.3-2

As estruturas contidas nos planos singulares estão mutuamente ligadas por hastes paralelas e com uma só direcção, e as forças externas são distribuídas de igual modo nos planos que contêm as estruturas, garantindo assim, a igualdade dos estados de tensão e deformação em todos os planos estruturais.

Considerando o nó genérico  $O$  da estrutura, do qual sai uma haste, que sofre uma dilatação  $\Delta l_n$ , a força que provoca essa dilatação pode ser escrita da seguinte forma:

$$S_n = (EA/I)_n \Delta I_n = (EA)_n \varepsilon_n$$

À direcção  $n$  corresponde uma área de influência  $a_n$ , definida pelo produto da constante  $c$ , pela distância  $s_n$ , que é a distância entre as hastes que, na estrutura, têm a mesma direcção  $n$ . Referindo a força  $S_n$  à área  $a_n$ , obtém-se a expressão de uma tensão normal:

$$\sigma_n = S_n/a_n = (EA/a)_n \varepsilon_n$$

Exprimindo a deformação linear  $\varepsilon_n$  através das componentes especiais, proeminente que, para as hipóteses realizadas, fazendo coincidir o plano estrutural com o plano  $xy$  está  $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ , tem-se deste modo:

$$\sigma_n = (EA/a)_n \varepsilon_n = (EA/a)_n (\varepsilon_x \alpha_n^2 + \varepsilon_y \beta_n^2 + \gamma_{xy} \alpha_n \beta_n)$$

Para passar de  $\sigma_n$  às componentes especiais das tensões ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ) é necessário ter em conta que as projecções sobre os planos coordenados da secção recta  $a_n$  são respectivamente  $a_n/\alpha_n$  e  $a_n/\beta_n$ , e que a tensão resultante sobre esses planos pode ser decomposta em duas componentes, agindo segundo as direcções dos eixos coordenados (fig. 3.3-3).

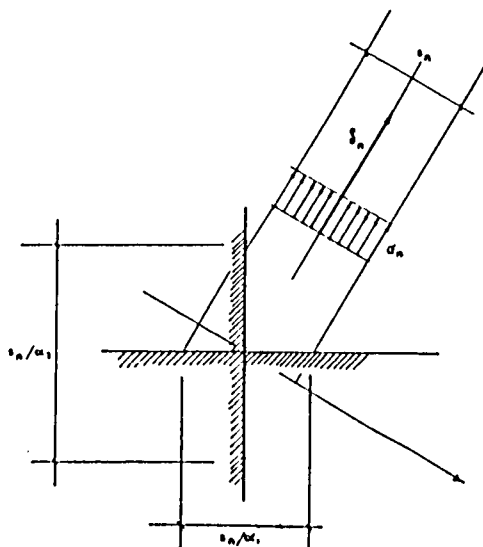


Fig. 3.3-3

Deste modo obtém-se, para o conjunto de nós situados no mesmo lugar em relação aos semi-eixos individuais dos planos coordenados, a seguinte relação :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_n e_n \alpha_n^4 & \sum_n e_n \alpha_n^2 \beta_n^2 & \sum_n e_n \alpha_n^3 \beta_n \\ \sum_n e_n \beta_n^4 & \sum_n e_n \alpha_n \beta_n^3 & \\ \sum_n e_n \alpha_n^2 \beta_n^2 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Aplica-se a seguir o procedimento a efectuar para a determinação das constantes elásticas, em três exemplos de sistemas planos :

1) Retículo triangular para malha equilátera com hastes de igual secção constante ( fig. 3.3-4 ).

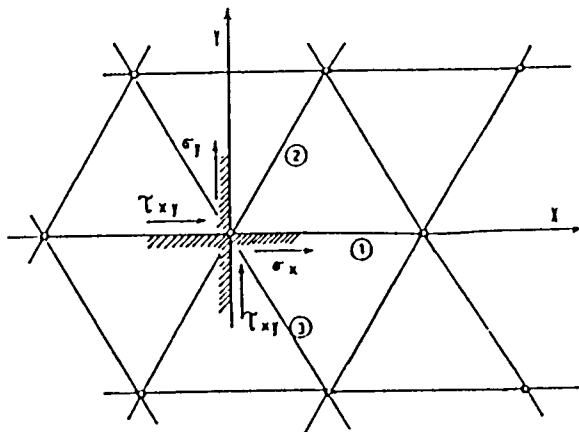
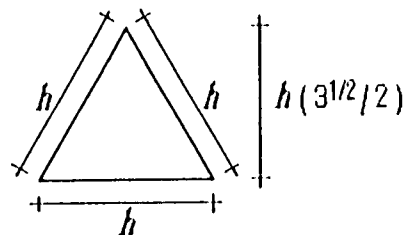


Fig. 3.3-4

Fixando o sistema de referência num nó  $O$  da estrutura, e sendo  $h$  o passo da malha, tem-se :

$$a = ch(3^{1/2}/2)$$



$$(EA/a)_1 = (EA/a)_2 = (EA/a)_3 = EA/(ch(3^{1/2}/2))$$

$$\varepsilon_{n,1} = (\varepsilon_X (1)^2 + \varepsilon_Y (0)^2 + \gamma_{XY} (1)(0)) = \varepsilon_X$$

$$\varepsilon_{n,2} = (\varepsilon_X (1/2)^2 + \varepsilon_Y (3^{1/2}/2)^2 + \gamma_{XY} (1/2)(3^{1/2}/2)) = 1/4 \varepsilon_X + 3/4 \varepsilon_Y + 3^{1/2}/4 \gamma_{XY}$$

$$\varepsilon_{n,3} = (\varepsilon_X (1/2)^2 + \varepsilon_Y (-3^{1/2}/2)^2 + \gamma_{XY} (1/2)(-3^{1/2}/2)) = 1/4 \varepsilon_X + 3/4 \varepsilon_Y - 3^{1/2}/4 \gamma_{XY}$$

vindo então :

$$\begin{aligned} \sigma_X &= \sigma_{n,1} \alpha_{n,1}^2 + \sigma_{n,2} \alpha_{n,2}^2 + \sigma_{n,3} \alpha_{n,3}^2 = \\ &= (EA/a)_1 \varepsilon_{n,1} (1)^2 + (EA/a)_2 \varepsilon_{n,2} (1/2)^2 + (EA/a)_3 \varepsilon_{n,3} (1/2)^2 = \\ &= EA/(ch(3^{1/2}/2)) [ \varepsilon_X + 1/4 (1/4 \varepsilon_X + 3/4 \varepsilon_Y + 3^{1/2}/4 \gamma_{XY}) + 1/4 (1/4 \varepsilon_X + \\ &\quad + 3/4 \varepsilon_Y - 3^{1/2}/4 \gamma_{XY}) ] = \\ &= EA/(ch(3^{1/2}/2)) [ (1 + 1/16 + 1/16) \varepsilon_X + (3/16 + 3/16) \varepsilon_Y + (3^{1/2}/16 - 3^{1/2}/16) \gamma_{XY} ] = \\ &= EA/(ch(3^{1/2}/2)) (9/8 \varepsilon_X + 3/8 \varepsilon_Y) \end{aligned}$$

analogamente vem :

$$\begin{aligned} \sigma_Y &= \sigma_{n,1} \beta_{n,1}^2 + \sigma_{n,2} \beta_{n,2}^2 + \sigma_{n,3} \beta_{n,3}^2 = \\ &= (EA/a)_1 \varepsilon_{n,1} (0)^2 + (EA/a)_2 \varepsilon_{n,2} (3^{1/2}/2)^2 + (EA/a)_3 \varepsilon_{n,3} (-3^{1/2}/2)^2 = \\ &= EA/(ch(3^{1/2}/2)) [ 3/4 (1/4 \varepsilon_X + 3/4 \varepsilon_Y + 3^{1/2}/4 \gamma_{XY}) + 3/4 (1/4 \varepsilon_X + 3/4 \varepsilon_Y + \\ &\quad - 3^{1/2}/4 \gamma_{XY}) ] = \\ &= EA/(ch(3^{1/2}/2)) (3/8 \varepsilon_X + 9/8 \varepsilon_Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{XY} &= \sigma_{n,1} \alpha_{n,1} \beta_{n,1} + \sigma_{n,2} \alpha_{n,2} \beta_{n,2} + \sigma_{n,3} \alpha_{n,3} \beta_{n,3} = \\ &= (EA/a)_1 \varepsilon_{n,1} (1)(0) + (EA/a)_2 \varepsilon_{n,2} (1/2)(3^{1/2}/2) + \\ &\quad + (EA/a)_3 \varepsilon_{n,3} (1/2)(-3^{1/2}/2) = \\ &= EA/(ch(3^{1/2}/2)) [ 3^{1/2}/4 (1/4 \varepsilon_X + 3/4 \varepsilon_Y + 3^{1/2}/4 \gamma_{XY}) - 3^{1/2}/4 (1/4 \varepsilon_X + \\ &\quad + 3/4 \varepsilon_Y - 3^{1/2}/4 \gamma_{XY}) ] = \\ &= EA/(ch(3^{1/2}/2)) (3/8 \gamma_{XY}) \end{aligned}$$

com :

$$E^* = EA / (ch(3^{1/2}/2))$$

a relação constitutiva pode-se escrever da seguinte forma :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E^* \begin{bmatrix} 9/8 & 3/8 & 0 \\ & 9/8 & 0 \\ & & 3/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

O valor nulo dos termos que fornecem a relação entre os componentes normais das tensões e a ocorrência  $\gamma_{xy}$  implica a ortotropia do meio elástico correspondente à estrutura reticulada. Realizando a relação inversa, obtém-se :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = ((3^{1/2}/2)hc)/(EA) \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Confrontando este resultado com a relação clássica :

$$\varepsilon_x = 1/E (\sigma_x - m \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = 1/E (\sigma_y - m \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = 1/G \tau_{xy}$$

conclui-se que se trata de um meio isótropo com coeficiente de Poisson  $m=3$ .

2) Reticulo com malha quadrada e passo  $h$  (fig. 3.3-5).

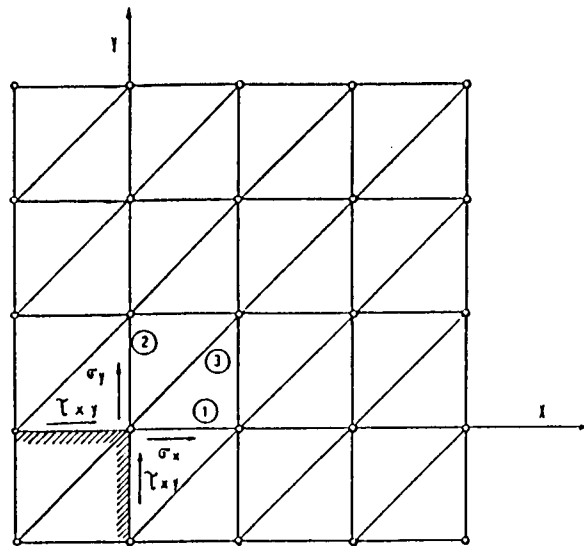


Fig. 3.3-5

A haste (1) é paralela à direcção  $x$ , com secção recta  $A_1$ ; a haste (2) é paralela à direcção  $y$ , com secção recta  $A_2$ ; e a haste diagonal (3) tem secção recta  $A_3$ . A área de influência para as três hastes são respectivamente:

direcção 1:  $hc$

direcção 2:  $hc$

direcção 3:  $(2^{1/2}/2)hc$

tem-se assim:

$$\varepsilon_{n,1} = (\varepsilon_x (1)^2 + \varepsilon_y (0)^2 + \gamma_{xy} (1)(0)) = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{n,2} = (\varepsilon_x (0)^2 + \varepsilon_y (1)^2 + \gamma_{xy} (0)(1)) = \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{n,3} = (\varepsilon_x (2^{1/2}/2)^2 + \varepsilon_y (2^{1/2}/2)^2 + \gamma_{xy} (2^{1/2}/2)(2^{1/2}/2)) = 1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy}$$

vindo então:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_{n,1} \alpha_{n,1}^2 + \sigma_{n,2} \alpha_{n,2}^2 + \sigma_{n,3} \alpha_{n,3}^2 = \\
 &= (EA_1/(hc)) \varepsilon_{n,1} (1)^2 + (EA_2/(hc)) \varepsilon_{n,2} (0)^2 + (EA_3/(2^{1/2}/2 hc)) \varepsilon_{n,3} (2^{1/2}/2)^2 = \\
 &= EA_1/(hc) \varepsilon_x + EA_3/(2^{1/2} hc) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy})
 \end{aligned}$$

Considerando para o exemplo  $A_1 = A_2 = A$  e  $A_3 = 2^{1/2} A$ , vem assim:

$$\sigma_x = EA/(hc) (3/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy})$$

analogamente vem:

$$\begin{aligned}
 \sigma_y &= (EA_1/(hc)) \varepsilon_{n,1} (0)^2 + (EA_2/(hc)) \varepsilon_{n,2} (1)^2 + (EA_3/(2^{1/2}/2 hc)) \varepsilon_{n,3} (2^{1/2}/2)^2 = \\
 &= EA_2/(hc) \varepsilon_y + EA_3/(2^{1/2} hc) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy}) = \\
 &= EA/(hc) (1/2 \varepsilon_x + 3/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} &= (EA_1/(hc)) \varepsilon_{n,1} (1)(0) + (EA_2/(hc)) \varepsilon_{n,2} (0)(1) + \\
 &\quad + (EA_3/(2^{1/2}/2 hc)) \varepsilon_{n,3} (2^{1/2}/2)(2^{1/2}/2) = \\
 &= EA/(hc) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy})
 \end{aligned}$$

com:

$$E^* = EA/(hc)$$

a relação constitutiva pode-se escrever da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E^* \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ & 3/2 & 1/2 \\ & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

e a inversa :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 1/E^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Deste resultado se conclui que o meio elástico correspondente a esta estrutura é anisótropo.

3) Retículo de malha quadrada com diagonal e contradiagonal ( fig. 3.3-6 )

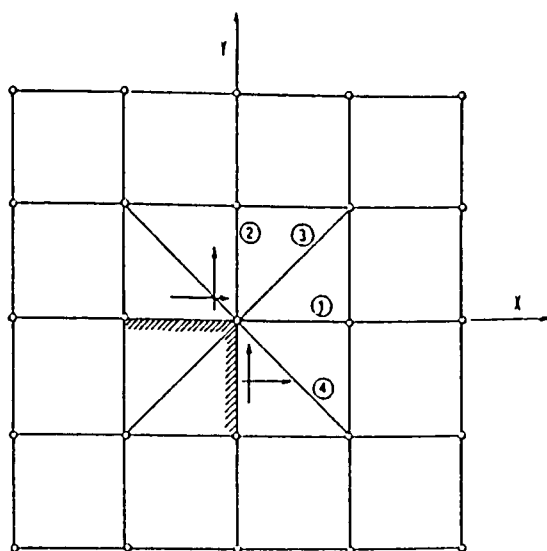


Fig. 3.3-6

As hastes dispostas segundo os eixos coordenados têm secção recta  $A_l$ , as hastes dispostas segundo as diagonais têm secção recta  $A_d$ , e a área de influência para os dois grupos de hastes são, respectivamente,  $hc$  e  $2^{1/2}/2 hc$ . Aplicando o mesmo procedimento dos exemplos anteriores, obtém-se :

$$\varepsilon_{n,1} = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{n,2} = \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{n,3} = 1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{n,4} = 1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y - 1/2 \gamma_{xy}$$

vindo então :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= EA_1/(hc) \varepsilon_x + EA_3/(2^{1/2}/2 hc) (1/4 \varepsilon_x + 1/4 \varepsilon_y + 1/4 \gamma_{xy}) + \\ &\quad + EA_4/(2^{1/2}/2 hc) (1/4 \varepsilon_x + 1/4 \varepsilon_y - 1/4 \gamma_{xy}) = \\ &= EA_l/(hc) \varepsilon_x + EA_d/(2^{1/2} hc) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= EA_2/(hc) \varepsilon_y + EA_3/(2^{1/2}/2 hc) (1/4 \varepsilon_x + 1/4 \varepsilon_y + 1/4 \gamma_{xy}) + \\ &\quad + EA_4/(2^{1/2}/2 hc) (1/4 \varepsilon_x + 1/4 \varepsilon_y - 1/4 \gamma_{xy}) = \\ &= EA_l/(hc) \varepsilon_y + EA_d/(2^{1/2} hc) (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= EA_3/(2^{1/2}/2 hc) (1/4 \varepsilon_x + 1/4 \varepsilon_y + 1/4 \gamma_{xy}) + \\ &\quad + EA_4/(2^{1/2}/2 hc) (-1/4 \varepsilon_x - 1/4 \varepsilon_y + 1/4 \gamma_{xy}) = \\ &= EA_d/(2^{1/2} hc) \gamma_{xy} \end{aligned}$$

com :

$$E^* = EA_l/(hc)$$

$$tE^* = EA_d/(2^{1/2} hc)$$

a relação constitutiva pode-se escrever da seguinte forma :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E^* \begin{bmatrix} (1+t) & t & 0 \\ & (1+t) & 0 \\ & & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

e a inversa :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 1/E^* [(1+t)/(1+2t)] \begin{bmatrix} 1 & -t/(1+t) & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & (1+2t)/(t(1+2t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Trata-se assim de um meio ortótropo, bastando impor, para passar a um meio isótropo, a condição :

$$G = m E / (2(m+1))$$

Com esta condição, e a comparação dos resultados com a relação clássica :

$$1/E = 1/E^* [(1+t)/(1+2t)] \Leftrightarrow E = E^* [(1+2t)/(1+t)]$$

$$1/G = 1/(tE^*) \Leftrightarrow G = tE^*$$

$$m = (1+t)/t$$

obtem-se para este caso  $t = 1/2$ . Substituindo o valor de  $t$  nas equações anteriores, obtém-se :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E^*/2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

e para a inversa :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{3}{4 E^*} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Chama-se a atenção para o facto de, para o valor de  $t = 1/2$  corresponderem as hastes diagonais com secção recta igual a:

$$A_d = (2^{1/2}/2) A_l$$

Considerando agora os problemas tridimensionais, representa-se na figura 3.3-7 um retículo de apoio em malhas cúbicas, que servirá de base para a exposição da determinação das relações constitutivas.

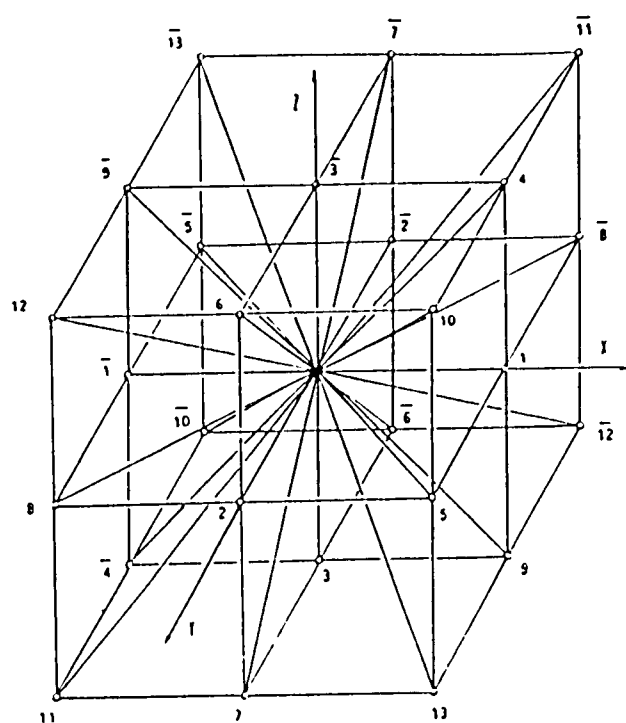


Fig. 3.3-7

Considere-se assim a estrutura reticulada que representa, de um modo genérico, a configuração das hastes representadas na figura 3.3-7, ficando cada nó ligado com os vértices de outros cubos circunstantes mediante vinte e seis hastes, iguais duas a duas, distribuídas pelas treze rectas que passam por  $O(0)$  e ligadas aos nós  $1-\bar{1}$ ,  $2-\bar{2}$  ...  $13-\bar{13}$ .

Sejam  $A_1 \dots A_{13}$  as secções das hastes, e  $h$  o passo da malha, as respectivas áreas de influência resultam das relações entre o volume  $h^3$  da célula elementar e o comprimento das barras:

hastes 0-1, 0-2, 0-3

$$a = h^3 / h = h^2$$

hastes 0-4, 0-5, 0-6, 0-7, 0-8, 0-9

$$a = h^3 / (2^{1/2} h) = h^2 / 2^{1/2}$$

hastes 0-10, 0-11, 0-12, 0-13

$$a = h^3 / (3^{1/2} h) = h^2 / 3^{1/2}$$

Os co-senos directores referentes a cada haste da figura 3.7-1, são descriminados no seguinte quadro:

| Haste | $\alpha$     | $\beta$     | $\gamma$     |
|-------|--------------|-------------|--------------|
| 0-1   | 1            | 0           | 0            |
| 0-2   | 0            | 1           | 0            |
| 0-3   | 0            | 0           | 1            |
| 0-4   | $2^{1/2}/2$  | 0           | $2^{1/2}/2$  |
| 0-5   | $2^{1/2}/2$  | $2^{1/2}/2$ | 0            |
| 0-6   | 0            | $2^{1/2}/2$ | $2^{1/2}/2$  |
| 0-7   | 0            | $2^{1/2}/2$ | $-2^{1/2}/2$ |
| 0-8   | $-2^{1/2}/2$ | $2^{1/2}/2$ | 0            |
| 0-9   | $2^{1/2}/2$  | 0           | $-2^{1/2}/2$ |
| 0-10  | $3^{1/2}/3$  | $3^{1/2}/3$ | $3^{1/2}/3$  |
| 0-11  | $-3^{1/2}/3$ | $3^{1/2}/3$ | $-3^{1/2}/3$ |
| 0-12  | $-3^{1/2}/3$ | $3^{1/2}/3$ | $3^{1/2}/3$  |
| 0-13  | $3^{1/2}/3$  | $3^{1/2}/3$ | $-3^{1/2}/3$ |

As componentes das tensões sobre o plano que passa por  $O$  e é perpendicular ao eixo  $x$ , são:

$$\begin{aligned}\sigma_x = & EA_1/h^2 \varepsilon_x + EA_4/(h^2/2^{1/2})(2^{1/2}/2)^2(1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z + 1/2 \gamma_{zx}) + \\ & + EA_5/(h^2/2^{1/2})(2^{1/2}/2)^2(1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy}) + \\ & + EA_8/(h^2/2^{1/2})(2^{1/2}/2)^2(1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y - 1/2 \gamma_{xy}) + \\ & + EA_9/(h^2/2^{1/2})(2^{1/2}/2)^2(1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z - 1/2 \gamma_{zx}) + \\ & + EA_{10}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z + 1/3 \gamma_{yz} + 1/3 \gamma_{zx} + 1/3 \gamma_{xy}) + \\ & + EA_{11}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z - 1/3 \gamma_{yz} + 1/3 \gamma_{zx} - 1/3 \gamma_{xy}) + \\ & + EA_{12}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z + 1/3 \gamma_{yz} - 1/3 \gamma_{zx} - 1/3 \gamma_{xy}) + \\ & + EA_{13}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z - 1/3 \gamma_{yz} - 1/3 \gamma_{zx} - 1/3 \gamma_{xy})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = & EA_5/(h^2/2^{1/2})(2^{1/2}/2)^2(1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy}) + \\ & - EA_8/(h^2/2^{1/2})(2^{1/2}/2)^2(1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y - 1/2 \gamma_{xy}) + \\ & + EA_{10}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z + 1/3 \gamma_{yz} + 1/3 \gamma_{zx} + 1/3 \gamma_{xy}) + \\ & - EA_{11}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z - 1/3 \gamma_{yz} + 1/3 \gamma_{zx} - 1/3 \gamma_{xy}) + \\ & - EA_{12}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z + 1/3 \gamma_{yz} - 1/3 \gamma_{zx} - 1/3 \gamma_{xy}) + \\ & + EA_{13}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z - 1/3 \gamma_{yz} - 1/3 \gamma_{zx} - 1/3 \gamma_{xy})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz} = & EA_4/(h^2/2^{1/2})(2^{1/2}/2)^2(1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z + 1/2 \gamma_{zx}) + \\ & - EA_9/(h^2/2^{1/2})(2^{1/2}/2)^2(1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z - 1/2 \gamma_{zx}) + \\ & + EA_{10}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z + 1/3 \gamma_{yz} + 1/3 \gamma_{zx} + 1/3 \gamma_{xy}) + \\ & + EA_{11}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z - 1/3 \gamma_{yz} + 1/3 \gamma_{zx} - 1/3 \gamma_{xy}) + \\ & - EA_{12}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z + 1/3 \gamma_{yz} - 1/3 \gamma_{zx} - 1/3 \gamma_{xy}) + \\ & - EA_{13}/(h^2/3^{1/2})(3^{1/2}/3)^2(1/3 \varepsilon_x + 1/3 \varepsilon_y + 1/3 \varepsilon_z - 1/3 \gamma_{yz} - 1/3 \gamma_{zx} - 1/3 \gamma_{xy})\end{aligned}$$

As tensões sobre os outros dois planos coordenados podem-se obter de um modo análogo. A matriz dos coeficientes elásticos assume deste modo a forma geral característica de um meio elástico anisótropo.

Introduzindo as relações de simetria entre as hastes, obtêm-se meios elásticos correspondentes, caracterizados por vários graus de ortotropia.

Como exemplo, considere-se o plano  $xy$  como plano de simetria. Para este caso são anulados os termos de junção  $yz$  e  $zx$  na matriz das constantes elásticas, assumindo esta a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{23} & c_{36} & 0 \\ & & & & c_{13} & 0 \\ & & & & & c_{12} \end{bmatrix}$$

Considerando os três planos, como planos de simetria elástica, a matriz das constantes assume agora a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{23} & 0 & 0 \\ & & & & c_{13} & 0 \\ & & & & & c_{12} \end{bmatrix}$$

correspondendo ao meio reticulado definido como, usando a terminologia clássica, ortogonalmente anisótropo, ou simplesmente, ortótropo.

Se os três planos de simetria são comutáveis entre eles, então a matriz das constantes elásticas assume a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{12} & 0 & 0 \\ & & & & c_{12} & 0 \\ & & & & & c_{12} \end{bmatrix}$$

em que, considerando :

$$EA_1/(h^2) = EA_2/(h^2) = EA_3/(h^2) = E_1^*$$

$$EA_4/(h^2/2^{1/2}) = EA_5/(h^2/2^{1/2}) = EA_6/(h^2/2^{1/2}) = EA_7/(h^2/2^{1/2}) =$$

$$= EA_8/(h^2/2^{1/2}) = E_2^* = t_1 E_1^*$$

$$EA_{10}/(h^2/3^{1/2}) = EA_{11}/(h^2/3^{1/2}) = EA_{12}/(h^2/3^{1/2}) = EA_{13}/(h^2/3^{1/2}) = E_3^* = t_2 E_1^*$$

as constantes  $c_{ij}$  tem os seguintes valores :

$$c_{11} = E_1^* + E_2^* + 4/9 E_3^*$$

$$c_{12} = 1/2 E_2^* + 4/9 E_3^*$$

Os parâmetros  $t_1$  e  $t_2$  podem assumir valores para os quais, o correspondente contínuo resulta isótropo, e se deve verificar a relação  $\varepsilon = \mathbf{K} \sigma$ , para a matriz  $\mathbf{K}$ , inversa de  $\mathbf{C}$  :

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{12} & 0 & 0 \\ & & & & k_{12} & 0 \\ & & & & & k_{12} \end{bmatrix}$$

Na prática técnica, dois casos interessantes são deduzidos do caso anterior, por eliminação das hastes diagonais dispostas sobre as faces da célula elementar, conservando as diagonais internas, ou vice-versa.

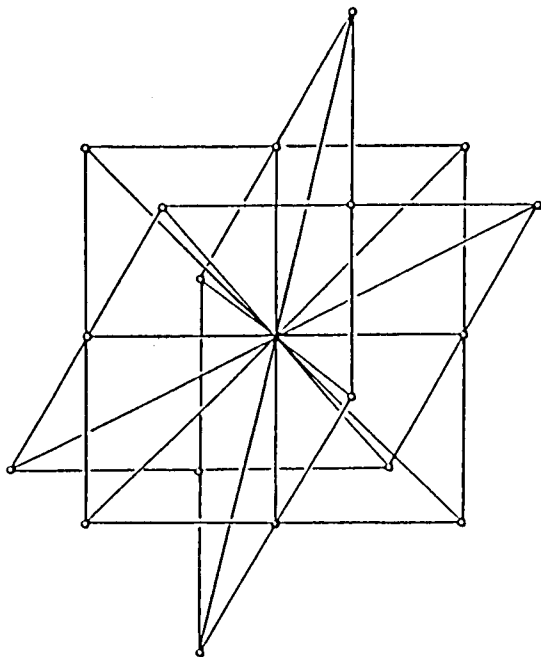


Fig. 3.3-8

Considerando em primeiro lugar o caso em que a configuração das hastes que saem do nó  $O$  genérico é a representada na figura 3.3-8, a matriz constitutiva, com  $E_1^* = t E_2^*$ , assume a seguinte forma:

$$E_2^* \begin{bmatrix} (t+1) & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & (t+1) & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & (t+1) & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2 & 0 & 0 \\ & & & & 1/2 & 0 \\ & & & & & 1/2 \end{bmatrix}$$

As relações  $\varepsilon - \sigma$  resultantes da inversão da matriz C são :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = 1/(|k| E_2^*) \begin{bmatrix} (t^2 + 2t + 3/4) & -(1/2 t + 1/4) & -(1/2 t + 1/4) \\ & (t^2 + 2t + 3/4) & -(1/2 t + 1/4) \\ & & (t^2 + 2t + 3/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{yz} = 2/E_2^* \tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = 2/E_2^* \tau_{zx}$$

$$\gamma_{xy} = 2/E_2^* \tau_{xy}$$

com :

$$|k| = t^3 + 3t^2 + 9/4 t + 1/2$$

Expressando as primeiras relações de modo a poderem comparar-se os coeficientes técnicos, obtém-se :

$$\varepsilon_x = \left[ (t^2 + 2t + 3/4)/( |k| E_2^*) \right] \left[ \sigma_x - (\sigma_y + \sigma_z) (1/2 t + 1/4)/(t^2 + 2t + 3/4) \right]$$

$$\varepsilon_y = \left[ (t^2 + 2t + 3/4)/( |k| E_2^*) \right] \left[ \sigma_y - (\sigma_z + \sigma_x) (1/2 t + 1/4)/(t^2 + 2t + 3/4) \right]$$

$$\varepsilon_z = \left[ (t^2 + 2t + 3/4)/( |k| E_2^*) \right] \left[ \sigma_z - (\sigma_x + \sigma_y) (1/2 t + 1/4)/(t^2 + 2t + 3/4) \right]$$

resultando assim :

$$1/E = (t^2 + 2t + 3/4)/( |k| E_2^*) \Leftrightarrow E = E_2^* (t^3 + 3t^2 + 9/4 t + 1/2)/(t^2 + 2t + 3/4)$$

$$m = (t^2 + 2t + 3/4) / (1/2 t + 1/4) = (4t^2 + 8t + 3) / (2t + 1)$$

e da última relação :

$$1/2 G = 2/3 E_2^* \Leftrightarrow G = 4/3 E_2^*$$

Impondo a relação entre  $\tilde{G}$ ,  $m$ , e  $E$  nos meios isotrópicos ( $\tilde{G} = mE / (2(m+1))$ ), obtém-se  $t = 1/2$ , resultando assim :

$$E = 5/4 E_2^* ; \tilde{G} = 1/2 E_2^* ; m = 4$$

Correspondentemente, as secções  $A_I$  e  $A_d$  das hastes dispostas, respectivamente, segundo os lados e diagonais da célula estrutural, estabelecem a seguinte relação :

$$A_I = (2^{1/2}/2) A_d$$

e as relações tensões - deformações, directas e inversas, assumem os seguintes valores :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E_2^* \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2 & 0 & 0 \\ & & & & 1/2 & 0 \\ & & & & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 1/E_2^* \begin{bmatrix} 4/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ & 4/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

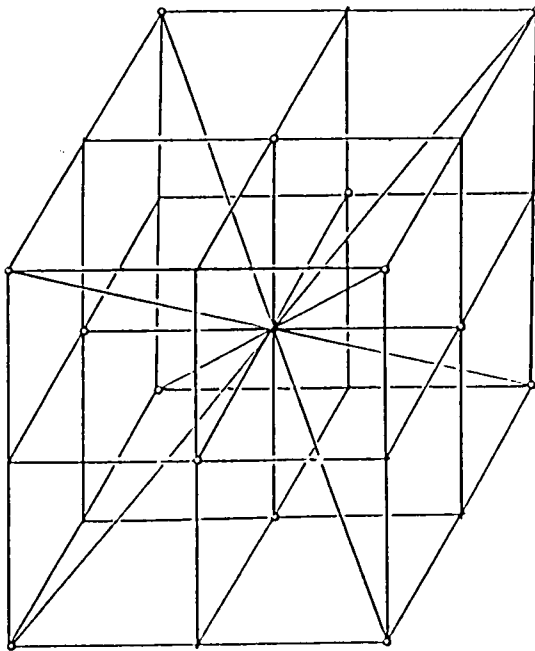


Fig. 3.3-9

No segundo caso em que a configuração das hastes que saem do nó  $O$  genérico é a representada na figura 3.3-9, a matriz constitutiva, com  $E_1^* = 4/9 \text{ t } E_3^*$  e procedendo de modo análogo ao primeiro caso, assume a seguinte forma:

$$4/9 E_3^* \begin{bmatrix} (t+1) & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & (t+1) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & (t+1) & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

As relações  $\varepsilon - \sigma$  resultantes da inversão da matriz C são :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \end{bmatrix} = 9/(4 |k| E_3^*) \begin{bmatrix} (t^2 + 2t) & -t & -t \\ & (t^2 + 2t) & -t \\ & & (t^2 + 2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{YZ} = 9/(4 E_3^*) \tau_{YZ}$$

$$\gamma_{ZX} = 9/(4 E_3^*) \tau_{ZX}$$

$$\gamma_{XY} = 9/(4 E_3^*) \tau_{XY}$$

$$|k| = t^3 + 3t^2$$

Expressando as primeiras relações de modo a poderem comparar-se os coeficientes técnicos, obtém-se :

$$\varepsilon_X = \left[ 9(t^2 + 2t)/(4 |k| E_3^*) \right] \left[ \sigma_X - (\sigma_Y + \sigma_Z) (t/(t^2 + 2t)) \right]$$

$$\varepsilon_Y = \left[ 9(t^2 + 2t)/(4 |k| E_3^*) \right] \left[ \sigma_Y - (\sigma_Z + \sigma_X) (t/(t^2 + 2t)) \right]$$

$$\varepsilon_Z = \left[ 9(t^2 + 2t)/(4 |k| E_3^*) \right] \left[ \sigma_Z - (\sigma_X + \sigma_Y) (t/(t^2 + 2t)) \right]$$

resultando assim :

$$1/E = 9(t^2 + 2t)/(4kE_3^*) \Leftrightarrow E = 4/9 E_3^* (t^2 + 3t)/(t+2)$$

$$m = (t^2 + 2t)/t = (t+2)$$

$$1/G = 9/(4E_3^*) \Leftrightarrow G = 4/9 E_3^*$$

e com a condição de isotropia ( $G = mE/(2(m+1))$ ), obtém-se :

$$t = 2 ; E = 10/9 E_3^* ; G = 4/9 E_3^* ; m = 4$$

Correspondentemente, as secções  $A_I$  e  $A_d$  das hastes, estabelecem a seguinte relação :

$$A_I / A_d = 8/9 (3^{1/2})$$

e as relações tensões - deformações, directas e inversas, assumem os seguintes valores :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E_3^* \begin{bmatrix} 4/3 & 4/9 & 4/9 & 0 & 0 & 0 \\ & 4/3 & 4/9 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 4/9 & 0 & 0 \\ & & & & 4/9 & 0 \\ & & & & & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E_3^*} \begin{bmatrix} 9/10 & -9/2 & -9/2 & 0 & 0 & 0 \\ & 9/10 & -9/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 9/10 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 9/4 & 0 & 0 \\ & & & & 9/4 & 0 \\ & & & & & 9/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Considere-se agora o meio reticulado representado na figura 3.3-10, que deu origem a notáveis aplicações estruturais.

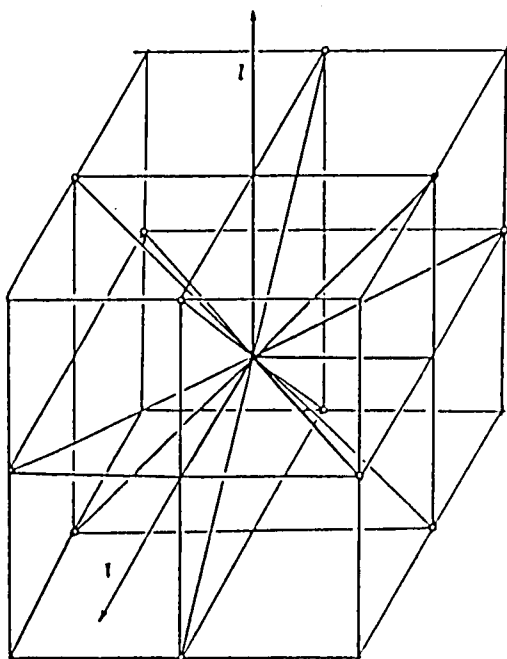


Fig. 3.3-10

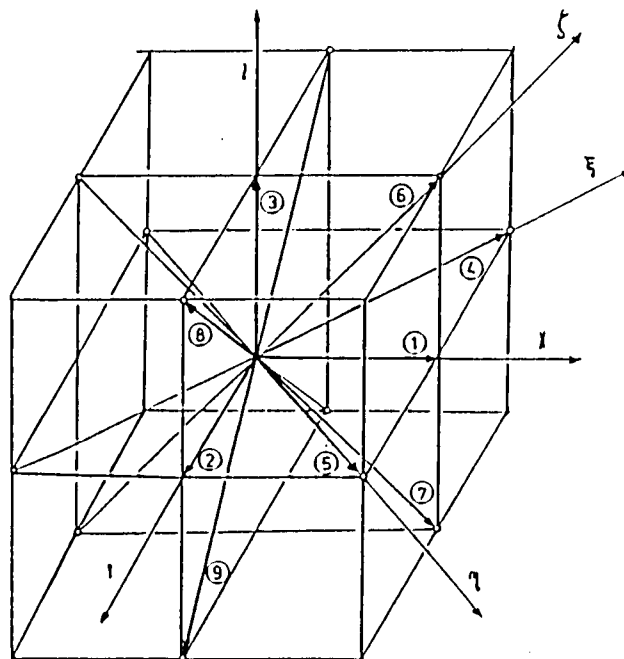


Fig. 3.3-11

A lei de formação deste meio vai ser exposta por etapas, para melhor compreensão da mesma. Como ponto de partida, considere-se a célula cúbica elementar e, em apoio a esta, a célula estrutural composta por hastes dispostas segundo os ângulos e as diagonais externas (uma por cada face da célula), de modo a realizar-se um cubo e um tetraedro (fig. 3.3-12 a)), com a qual se obtém a lei de composição das células estruturais elementares, representada na figura 3.3-12 b).

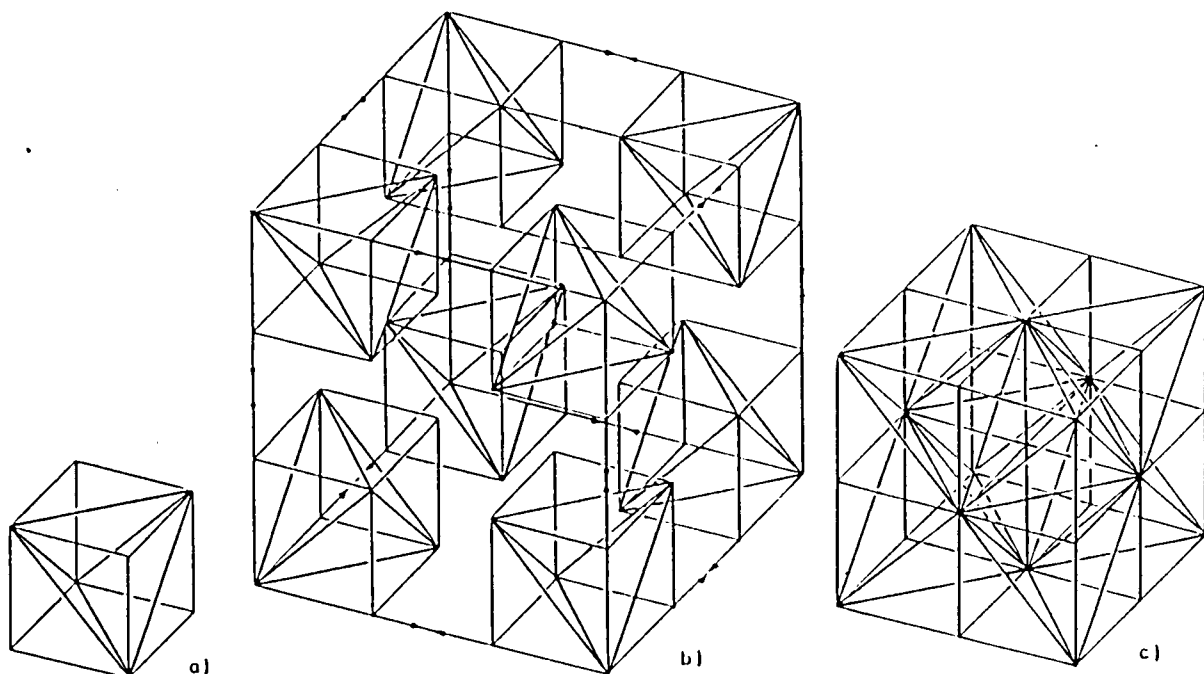


Fig. 3.3-12

Observando a forma em que resulta a composição das células (fig. 3.3-12 c)), apreende-se a existência de dois tipos de nós. Os nós  $O$  em que confluem seis hastes de ângulo e doze hastes diagonais, e os nós  $O'$  em que somente confluem seis hastes de ângulo. Como tal este meio é classificado como não homogêneo. No entanto, pode-se supor que os nós  $O'$  são as intersecções das hastes que unem os nós  $O$  nas direções paralelas aos eixos coordenados e, como tal, que não existem, o que equivale, de um ponto de vista geométrico, a considerar como retículo de apoio o retículo gerado por três vectores base ( $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , e  $\mathbf{v}_3$ ), de módulo  $2^{1/2}h$ , dispostos segundo as direcções dos eixos  $\xi$ ,  $\eta$ , e  $\zeta$  (fig. 3.3-11).

O valor da constante de volume é deste modo modificada, passando a ser:

$$V = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = (2^{1/2}h) (2^{1/2}h) (h) = 2h^3$$

Considerando que as hastes que têm direcções paralelas a  $x$ ,  $y$ , e  $z$  têm secção recta  $A_1$ , e que as restantes barras têm secção recta  $A_2$ , as componentes das tensões em relação a  $Oxyz$  são iguais a:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= EA_1/(h^2) \varepsilon_x + EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y - 1/2 \gamma_{xy}) 1/2 + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy}) 1/2 + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z + 1/2 \gamma_{xz}) 1/2 + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z - 1/2 \gamma_{xz}) 1/2 = \\ &= EA_1/(h^2) \varepsilon_x + EA_2/(2h^2) (\varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \varepsilon_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= EA_1/(h^2) \varepsilon_y + EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y - 1/2 \gamma_{xy}) 1/2 + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy}) 1/2 + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_y + 1/2 \varepsilon_z + 1/2 \gamma_{yz}) 1/2 + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_y + 1/2 \varepsilon_z - 1/2 \gamma_{yz}) 1/2 = \\ &= EA_1/(h^2) \varepsilon_y + EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + \varepsilon_y + 1/2 \varepsilon_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= EA_1/(h^2) \varepsilon_z + EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z + 1/2 \gamma_{xz}) 1/2 + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z - 1/2 \gamma_{xz}) 1/2 + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_y + 1/2 \varepsilon_z + 1/2 \gamma_{yz}) 1/2 + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_y + 1/2 \varepsilon_z - 1/2 \gamma_{yz}) 1/2 = \\ &= EA_1/(h^2) \varepsilon_z + EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + \varepsilon_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_y + 1/2 \varepsilon_z + 1/2 \gamma_{yz}) (2^{1/2}/2) (2^{1/2}/2) + \\ &+ EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_y + 1/2 \varepsilon_z - 1/2 \gamma_{yz}) (2^{1/2}/2) (-2^{1/2}/2) = \\ &= EA_2/(2h^2) 1/2 \gamma_{yz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z + 1/2 \gamma_{zx}) (2^{1/2}/2) (2^{1/2}/2) + \\ &\quad + EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_z - 1/2 \gamma_{zx}) (-2^{1/2}/2) (2^{1/2}/2) = \\ &= EA_2/(2h^2) 1/2 \gamma_{zx}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y - 1/2 \gamma_{xy}) (2^{1/2}/2) (-2^{1/2}/2) + \\ &\quad + EA_2/(2h^2) (1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y + 1/2 \gamma_{xy}) (2^{1/2}/2) (2^{1/2}/2) = \\ &= EA_2/(2h^2) 1/2 \gamma_{xy}\end{aligned}$$

considerando agora que :

$$E^* = EA_2/(2h^2)$$

$$tE^* = EA_1/(h^2)$$

a matriz constitutiva é escrita da seguinte forma :

$$E^* \begin{bmatrix} (t+1) & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & (t+1) & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & (t+1) & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2 & 0 & 0 \\ & & & & 1/2 & 0 \\ & & & & & 1/2 \end{bmatrix}$$

matriz esta, característica dos meios ortótropos.

Considere-se agora que as ligações mecânicas estendidas ao longo dos eixos coordenados não existem. Nesse caso o meio reticulado vem constituído pelas hastes que estão dispostas de fei-

ção a formar uma rede de tetraedros e octaedros. Este meio é o único que se pode realizar com um só tipo de hastes. As relações tensões - deformações, directas e inversas, relativas ao meio agora em estudo, assumem os seguintes valores :

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} = E^* \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2 & 0 & 0 \\ & & & & 1/2 & 0 \\ & & & & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_X \\ \epsilon_Y \\ \epsilon_Z \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_X \\ \epsilon_Y \\ \epsilon_Z \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix} = 2/E^* \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ & 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} \\ \tau_{XY} \end{bmatrix}$$

### 3.4 - COMPARAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO ELÁSTICO DOS MEIOS CONTÍNUOS E DE EQUILÍBRIO DAS ESTRUTURAS RETICULADAS, E DEFINIÇÃO DO ERRO

Nas estruturas obtidas por agregação de unidades estruturais iguais, ou seja, estruturas em que, em qualquer nó, com excepção dos nós situados sobre o contorno, a distribuição de barras é sempre a mesma, a escritura das equações do problema reduzidas em termos dos deslocamentos, pode ser directa, sem ser necessário elaborar as equações gerais, referenciadas no capítulo II. Para tal é somente necessário escrever para o nó genérico as equações de equilíbrio, fazendo sobressair as forças expressas em termos dos deslocamentos. A repetência das estruturas que se examina, traduz-se na repetência do bloco dos coeficientes que intervêm nas equações de equilíbrio dos nós.

Considere-se um nó  $O$  ligado a  $n$  hastes e a  $n$  nós circunstantes (fig. 3.4-1). A haste genérica  $i$ , que liga os nós  $O$  e  $I$ , tem características elásticas expressas pelo parâmetro  $K_i$ .

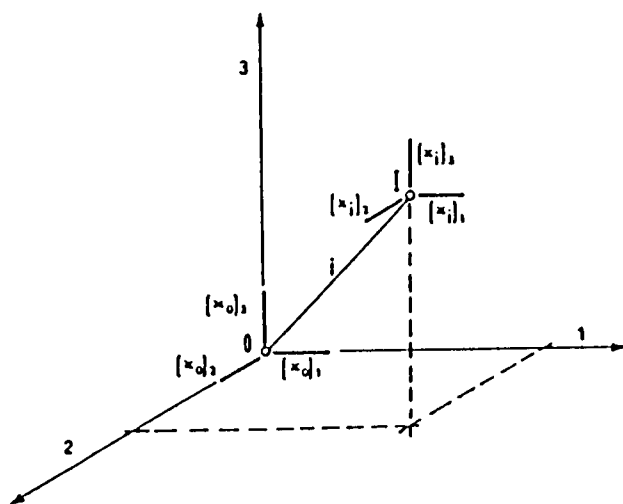


Fig. 3.4-1

As equações de equilíbrio de  $O$ , indicando com  $(X_o)_i$  a força na haste  $i$  e com  $F_o$  a força externa aí aplicada, podem ser resumidas numa única equação de forma vectorial, igual a:

$$(X_o)_i + F_o = 0 \quad (1)$$

Sendo  $(x_i)_1$ ,  $(x_i)_2$ ,  $(x_i)_3$ , e  $(x_o)_1$ ,  $(x_o)_2$ ,  $(x_o)_3$ , as componentes dos deslocamentos dos nós  $I$  e  $O$ , relativamente ao eixo de referência, como estão representadas na figura 3.8-1, e considerando  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , e  $\gamma_i$ , os co-senos dos ângulos associados à haste  $i$  (tendo em consideração os seus respectivos sinais), a haste  $i$  sofre uma dilatação, em consequência deste regime de deslocamentos, que se pode escrever como:

$$\Delta l_i = \alpha_i (x_i - x_o)_1 + \beta_i (x_i - x_o)_2 + \gamma_i (x_i - x_o)_3$$

dilatação esta, que pode ser obtida pela força:

$$X_i = (EA/l)_i \Delta l_i = (EA/l)_i [ \alpha_i (x_i - x_o)_1 + \beta_i (x_i - x_o)_2 + \gamma_i (x_i - x_o)_3 ]$$

A equação vectorial (1), projectada sobre os três eixos coordenados, resulta nas três seguintes equações escalares:

$$\sum_i (EA/l)_i [ \alpha_i^2 (x_i - x_o)_1 + \alpha_i \beta_i (x_i - x_o)_2 + \alpha_i \gamma_i (x_i - x_o)_3 ] + F_{o1} = 0$$

$$\sum_i (EA/l)_i [ \beta_i \alpha_i (x_i - x_o)_1 + \beta_i^2 (x_i - x_o)_2 + \beta_i \gamma_i (x_i - x_o)_3 ] + F_{o2} = 0 \quad (2)$$

$$\sum_i (EA/l)_i [ \gamma_i \alpha_i (x_i - x_o)_1 + \gamma_i \beta_i (x_i - x_o)_2 + \gamma_i^2 (x_i - x_o)_3 ] + F_{o3} = 0$$

que exprimem o equilíbrio do nó, nas três direcções de referência, da estrutura reticulada. Passa-se agora à exposição do equilíbrio elástico para os meios contínuos.

As equações indefinidas do equilíbrio elástico para os meios contínuos são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho X_2 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho X_3 &= 0\end{aligned}$$

Estas equações podem ser escritas em termos das componentes de deslocamento  $u_1, u_2, u_3$ , quando se tenha introduzida a relação constitutiva  $\sigma - \epsilon$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

e quando se tenham ligadas as componentes da deformação  $\epsilon_x \dots \gamma_{xy}$ , às derivadas das componentes do deslocamento:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x} &= \epsilon_x \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} &= \epsilon_y \\ \frac{\partial u_3}{\partial z} &= \epsilon_z \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} &= \gamma_{yz} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} &= \gamma_{zx} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \gamma_{xy}\end{aligned}$$

Obtém-se assim o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}L_{11}(u_1) + L_{12}(u_2) + L_{13}(u_3) + \rho X_1 &= 0 \\ L_{21}(u_1) + L_{22}(u_2) + L_{23}(u_3) + \rho X_2 &= 0 \\ L_{31}(u_1) + L_{32}(u_2) + L_{33}(u_3) + \rho X_3 &= 0\end{aligned}$$

onde os operadores  $L_{ij} = L_{ji}$ , são :

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= k_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{55} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2k_{36} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2k_{15} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2k_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{22} &= k_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2k_{24} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2k_{46} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2k_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{33} &= k_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2k_{34} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2k_{35} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2k_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{23} &= L_{32} = k_{36} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{34} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2k_{44} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2k_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2k_{46} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{13} &= L_{31} = k_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{46} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{35} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2k_{45} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2k_{55} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2k_{56} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{12} &= L_{21} = k_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{45} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2k_{46} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2k_{56} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2k_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

A comparação destas equações com as equações da estrutura reticulada, é realizada transformando as operações diferenciais, das equações anteriores, em operações de diferenças finitas. Considerando as expressões dos coeficientes de elasticidade do meio que se estuda, os operadores diferenciais podem ser escritos da seguinte forma :

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i a_i^2 \Omega_i^{(2)} & L_{32} &= \sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i \gamma_i \beta_i \Omega_i^{(2)} \\
 L_{22} &= \sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i \beta_i^2 \Omega_i^{(2)} & L_{31} &= \sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i \gamma_i a_i \Omega_i^{(2)} \\
 L_{33} &= \sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i \gamma_i^2 \Omega_i^{(2)} & L_{21} &= \sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i \beta_i a_i \Omega_i^{(2)}
 \end{aligned}$$

em que, os operadores diferenciais de ordem 1,  $\Omega_i^{(1)}$ , valem :

$$\Omega_i^{(1)} = \left( a_i \frac{\partial}{\partial x} + \beta_i \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial z} \right)^{(1)}$$

Deste modo, as equações indefinidas de equilíbrio podem ser escritas do seguinte modo :

$$\sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i [a_i^2 \Omega_i^{(2)}(u_1) + a_i \beta_i \Omega_i^{(2)}(u_2) + a_i \gamma_i \Omega_i^{(2)}(u_3)] + pX_i = 0$$

$$\sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i [\beta_i u_i \Omega_i^{(2)}(u_1) + \beta_i^2 \Omega_i^{(2)}(u_2) + \beta_i \gamma_i \Omega_i^{(2)}(u_3)] + eX_2 = 0$$

$$\sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i [\gamma_i u_i \Omega_i^{(2)}(u_1) + \gamma_i \beta_i \Omega_i^{(2)}(u_2) + \gamma_i^2 \Omega_i^{(2)}(u_3)] + eX_3 = 0$$

Usando o mesmo retículo de apoio da estrutura, bem como exprimindo cada um dos termos do somatório através das componentes dos deslocamentos dos nós, às quais o termo se refere, reduzem-se estas equações às diferenças finitas. Assim indicando com  $f_i$  e  $f_o$  os valores que a componente genérica do deslocamento assume nos nós  $i$  e  $o$ , e desenvolvendo em série de Taylor, obtém-se:

$$f_i - f_o = l_i \Omega_i(f) + \frac{l_i^2}{2!} \Omega_i^{(2)}(f) + \frac{l_i^3}{3!} \Omega_i^{(3)}(f) + \frac{l_i^4}{4!} \Omega_i^{(4)}(f) + \dots$$

Isolando o operador que sobressai nas equações de equilíbrio, obtém-se:

$$\frac{1}{2} \Omega_i^{(2)}(f) = \frac{f_i - f_o}{l_i^2} - \frac{1}{l_i^2} \left[ l_i \Omega_i(f) + \frac{l_i^3}{3!} \Omega_i^{(3)}(f) + \frac{l_i^4}{4!} \Omega_i^{(4)}(f) + \dots \right]$$

Da lei de formação da estrutura reticulada, tem-se um outro nó  $\bar{i}$ , na mesma recta  $i$ , mas no lado oposto, nó este que está unido ao nó  $o$  por uma ligação igual à existente entre o nó  $o$  e o nó  $i$ . Como tal, pode-se também escrever o operador anterior da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \Omega_i^{(2)}(f) = \frac{f_{\bar{i}} - f_o}{l_i^2} - \frac{1}{l_i^2} \left[ l_i \Omega_i(f) - \frac{l_i^3}{3!} \Omega_i^{(3)}(f) + \frac{l_i^4}{4!} \Omega_i^{(4)}(f) - \dots \right]$$

em virtude de os co-senos directores associados à direcção  $o - \bar{i}$  terem sinal contrário aos co-senos directores associados à direcção  $o - i$ . Somando os dois operadores anteriores, obtém-se:

$$\Omega_i^{(2)}(f) = \frac{f_i - 2f_o + f_{\bar{i}}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} \left( \frac{l_i^4}{4!} \Omega_i^{(4)}(f) + \frac{l_i^6}{6!} \Omega_i^{(6)}(f) + \dots \right) = \frac{f_i - 2f_o + f_{\bar{i}}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^4(f)$$

permitindo escrever a equação diferencial da seguinte forma:

$$\sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i \left\{ \alpha_i^2 \left[ \frac{u_{1i} - 2u_{10} + u_{11}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^{(4)}(u_1) \right] + \alpha_i \beta_i \left[ \frac{u_{2i} - 2u_{20} + u_{21}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^{(4)}(u_2) \right] + \right. \\ \left. + \alpha_i \gamma_i \left[ \frac{u_{3i} - 2u_{30} + u_{31}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^{(4)}(u_3) \right] \right\} + \rho X_1 = 0$$

$$\sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i \left\{ \beta_i \alpha_i \left[ \frac{u_{1i} - 2u_{10} + u_{11}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^{(4)}(u_1) \right] + \beta_i^2 \left[ \frac{u_{2i} - 2u_{20} + u_{21}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^{(4)}(u_2) \right] + \right. \\ \left. + \beta_i \gamma_i \left[ \frac{u_{3i} - 2u_{30} + u_{31}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^{(4)}(u_3) \right] \right\} + \rho X_2 = 0$$

$$\sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i \left\{ \gamma_i \alpha_i \left[ \frac{u_{1i} - 2u_{10} + u_{11}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^{(4)}(u_1) \right] + \gamma_i \beta_i \left[ \frac{u_{2i} - 2u_{20} + u_{21}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^{(4)}(u_2) \right] + \right. \\ \left. + \gamma_i^2 \left[ \frac{u_{3i} - 2u_{30} + u_{31}}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^2} R^{(4)}(u_3) \right] \right\} + \rho X_3 = 0$$

Recordando que o produto  $a_i l_i$ , fornece a constante do volume  $V$ , as equações anteriores passam-se a escrever da seguinte forma:

$$\sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i \left[ \alpha_i^2 (u_{1i} - 2u_{10} + u_{11} - 2R^{(4)}(u_1)) + \alpha_i \beta_i (u_{2i} - 2u_{20} + u_{21} - 2R^{(4)}(u_2)) + \right. \\ \left. + \alpha_i \gamma_i (u_{3i} - 2u_{30} + u_{31} - 2R^{(4)}(u_3)) \right] + \rho X_1 V = 0$$

$$\sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i \left[ \beta_i \alpha_i (u_{1i} - 2u_{10} + u_{11} - 2R^{(4)}(u_1)) + \beta_i^2 (u_{2i} - 2u_{20} + u_{21} - 2R^{(4)}(u_2)) + \right. \\ \left. + \beta_i \gamma_i (u_{3i} - 2u_{30} + u_{31} - 2R^{(4)}(u_3)) \right] + \rho X_2 V = 0$$

$$\sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i \left[ \gamma_i \alpha_i (u_{1i} - 2u_{10} + u_{11} - 2R^{(4)}(u_1)) + \gamma_i \beta_i (u_{2i} - 2u_{20} + u_{21} - 2R^{(4)}(u_2)) + \right. \\ \left. + \gamma_i^2 (u_{3i} - 2u_{30} + u_{31} - 2R^{(4)}(u_3)) \right] + \rho X_3 V = 0$$

Colocando em segundo membro os resíduos do desdobramento, obtém-se assim:

$$\sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i \left[ \alpha_i^2 (u_{1i} - 2u_{10} + u_{11}) + \alpha_i \beta_i (u_{2i} - 2u_{20} + u_{21}) + \alpha_i \gamma_i (u_{3i} - 2u_{30} + u_{31}) \right] + \rho X_1 V = \\ = 2 \sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i \left[ \alpha_i^2 R^{(4)}(u_1) + \alpha_i \beta_i R^{(4)}(u_2) + \alpha_i \gamma_i R^{(4)}(u_3) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i [a_i \beta_i (u_{1i} - 2u_{10} + u_{11}) + \beta_i^2 (u_{2i} - 2u_{20} + u_{21}) + \beta_i \gamma_i (u_{3i} - 2u_{30} + u_{31})] + \rho X_2 V &= \\
 = 2 \sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i [a_i \beta_i R^{(4)}(u_1) + \beta_i^2 R^{(4)}(u_2) + \beta_i \gamma_i R^{(4)}(u_3)] \\
 \sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i [a_i \gamma_i (u_{1i} - 2u_{10} + u_{11}) + \beta_i \gamma_i (u_{2i} - 2u_{20} + u_{21}) + \gamma_i^2 (u_{3i} - 2u_{30} + u_{31})] + \rho X_3 V &= \\
 = 2 \sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i [a_i \gamma_i R^{(4)}(u_1) + \beta_i \gamma_i R^{(4)}(u_2) + \gamma_i^2 R^{(4)}(u_3)]
 \end{aligned} \tag{3}$$

As equações diferenciais de equilíbrio dos meios elásticos para os problemas planos, referidos no ponto 3.6, podem ser deduzidas directamente dos problemas tridimensionais, eliminando os termos que contenham o índice 3. Obtém-se assim, para os problemas planos, as seguintes equações:

$$\sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i [a_i \beta_i \Omega_i^{(2)}(u_1) + \beta_i^2 \Omega_i^{(2)}(u_2)] + \rho X_2 = 0$$

$$\sum_i \left( \frac{EA}{a} \right)_i [a_i^2 \Omega_i^{(2)}(u_1) + a_i \beta_i \Omega_i^{(2)}(u_2)] + \rho X_1 = 0$$

A transformação para diferenças finitas é também deduzida do problema tridimensional:

$$\sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i [a_i^2 (u_{1i} - 2u_{10} + u_{11}) + a_i \beta_i (u_{2i} - 2u_{20} + u_{21})] + \rho X_1 V = 2 \sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i [a_i^2 R^{(4)}(u_1) + a_i \beta_i R^{(4)}(u_2)]$$

$$\sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i [a_i \beta_i (u_{1i} - 2u_{10} + u_{11}) + \beta_i^2 (u_{2i} - 2u_{20} + u_{21})] + \rho X_2 V = 2 \sum_i \left( \frac{EA}{l} \right)_i [a_i \beta_i R^{(4)}(u_1) + \beta_i^2 R^{(4)}(u_2)]$$

O confronto das equações (3) com aquelas que exprimem o equilíbrio de um nó genérico da estrutura reticulada (2) mostra que estas coincidem (desde que às componentes da força de massa  $\rho X_i V$  seja dado o significado das componentes  $F_{oi}$  da força externa  $F$  aplicada no nó da estrutura) a menos dos segundos membros, que representam o erro. Os segundos membros constituem assim o erro cometido na transformação das equações diferenciais, nas equações de diferenças finitas, ou o erro que se comete na substituição do meio contínuo com a estrutura reticulada. Este erro é em cada nó interno proporcional ao cubo das dimensões lineares  $l_i$  das hastes, e pode ser expresso sobre a forma da força não equilibrada, da relação das forças internas da haste, e das forças ex-

temas efectivamente aplicadas. Estas forças não equilibradas, aplicadas nos nós internos da estrutura, resultam tanto mais negligenciadas, quanto mais pequenas são as dimensões  $l_i$ , em relação às dimensões globais da estrutura.

A estimativa do erro que se comete ao passar do meio contínuo à estrutura reticulada, respeitante aos nós situados na superfície externa da estrutura, e correspondentemente, aos pontos das fronteiras do contínuo, requer uma pesquisa específica. É necessário lembrar que, a lei das formações dos coeficientes de elasticidade do meio contínuo equivalente à estrutura reticulada é tal, que não faz comparecer as hastes contidas no plano sobre o qual vêm definidas as componentes das tensões.

### 3.5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Processa-se neste ponto à aplicação do método contínuo para melhor compreensão da técnica e procedimento do mesmo.

Considere-se a estrutura obtida por agregações da célula elementar da figura 3.3-6, do ponto 3.3 (pág. 160), e para a qual se determinou o correspondente meio contínuo, caracterizado pelas relações tensões - deformações, directas e inversas, seguintes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E^* \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 3/(8 E^*) \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

com :

$$E^* = EA_I / (2hc) = EA_d / (2^{1/2} hc)$$

em que  $A_d$  e  $A_I$  são respectivamente as secções rectas das conexões existentes nas direcções a  $45^\circ$  e, nas direcções dos eixos de referência.

Suponha-se agora, a estrutura sujeita a uma distribuição de forças normais. As componentes do deslocamento do correspondente problema contínuo, lembrando as relações entre as constantes técnicas e os coeficientes de deformação (pág. 151), valem :

$$u_1 = P/(ch) (K_{12} x)$$

$$u_2 = P/(ch) (-K_{32} x + K_{22} y)$$

ou, tendo em conta o valor dos coeficientes  $K_{ij}$ :

$$u_1 = P/(ch E^*) (-1/8 x)$$

$$u_2 = P/(ch E^*) (3/8 y)$$

Atribuindo aos nós da estrutura os deslocamentos dos correspondentes pontos do contínuo, obtém-se, por projecção nas direcções das hastes (sendo  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  os co-senos directores das direcções das hastes), a dilatação das mesmas, e através dela, a força interna :

$$\Delta l_i = \alpha_i (u_i - u_o)_1 + \beta_i (u_i - u_o)_2$$

$$\Delta l_1 = 1 (P/(ch E^*) (-1/8 h)) = P/(c E^*) (-1/8)$$

$$\Delta l_2 = 1 (P/(ch E^*) (3/8 h)) = P/(c E^*) (3/8)$$

$$\begin{aligned} \Delta l_3 &= (2^{1/2}/2) (P/(ch E^*) (-1/8 h)) + (2^{1/2}/2) (P/(ch E^*) (3/8 h)) = \\ &= (2^{1/2}) (P/(ch E^*) (1/8 h)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta I_4 &= (2^{1/2}/2) (P/(ch E^*) (-1/8 h)) + (-2^{1/2}/2) (P/(ch E^*) (-3/8 h)) = \\ &= (2^{1/2}) (P/(ch E^*) (1/8 h))\end{aligned}$$

$$X_i = (EA/I)_i \Delta I_i$$

$$\begin{aligned}X_1 &= (EA_I/h) P/(c E^*) (-1/8) = \\ &= (EA_I/h) P/(c EA_I/(2hc)) (-1/8) = \\ &= -2/8 P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_2 &= (EA_I/h) P/(c E^*) (3/8) = \\ &= (EA_I/h) P/(c EA_I/(2hc)) (3/8) = \\ &= 6/8 P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_3 &= (EA_d/(2^{1/2}h)) (2^{1/2}) (P/(ch E^*) (1/8 h)) = \\ &= (EA_d/(2^{1/2}h)) (2^{1/2}) (P/(ch EA_d/(2^{1/2}hc)) (1/8 h)) = \\ &= 2^{1/2}/8 P\end{aligned}$$

$$X_4 = 2^{1/2}/8 P$$

Na figura 3.5-1 são indicadas as forças nas hastes e as forças externas.

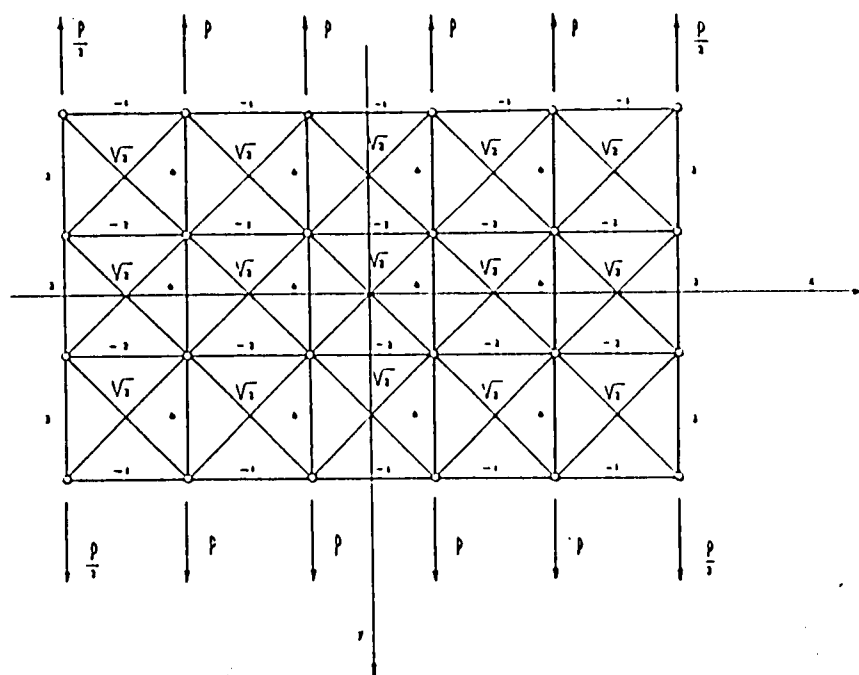


Fig. 3.5-1 - Multiplicador das forças internas:  $1/8 P$

A composição das forças nas barras para os nós singulares, fornece os valores das forças externas, que correspondem à deformação impressa à estrutura.

Considere-se agora a mesma estrutura sujeita a uma distribuição de forças ao longo do seu contorno, equivalente a uma distribuição de tensões tangenciais uniformes. Neste caso as componentes do deslocamento valem:

$$u_1 = T/(ch) (-K_{13} x)$$

$$u_2 = T/(ch) (K_{33} x - K_{32} y)$$

ou, tendo em conta o valor dos coeficientes  $K_{ij}$ :

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = T/(ch E^*) (x)$$

Na figura 3.5-2 são indicadas as forças nas hastes e as forças externas.

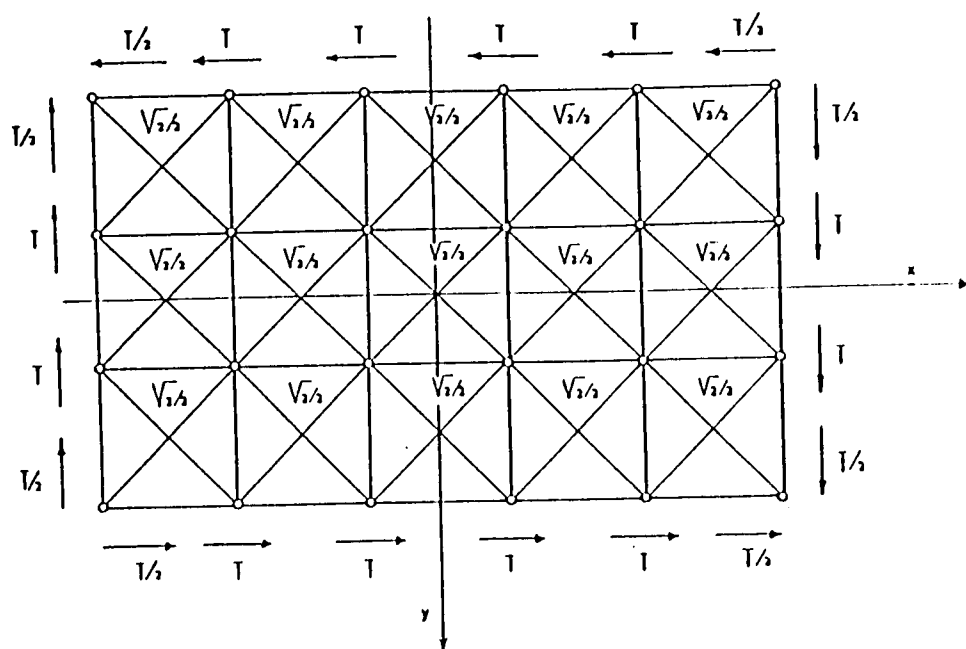


Fig. 3.5-2 - Multiplicador das forças internas:  $T$

Considere-se novamente a mesma estrutura, mas agora sujeita a acção de dois sistemas de forças aplicadas sobre bases  $x = I$ , auto-equilibradas e equivalentes, sobre qualquer base, e um par  $M$ . Trata-se enfim, de um problema de flexão pura, para o qual as componentes de deslocamento valem:

$$u_1 = 6M/(cH^3) (K_{13} y^2 - 2K_{11} xy)$$

$$u_2 = 6M/(cH^3) (-K_{11} x^2 + K_{12} y^2)$$

A determinação da força na haste pode ser realizada para um só elemento de comprimento  $h$ , da malha estrutural.

O momento  $M$  a aplicar sobre o contínuo equivalente, é obtido da condição de que, nos pontos que correspondam aos nós da estrutura reticulada, esse dê lugar a tensões unitárias, que multiplicadas pela amplitude  $h$  da malha, forneça exactamente a força aplicada nos mesmos nós, pois a analogia entre o contínuo e o retículo tem sido realizada com carácter "local", isto é, à igualdade entre forças e tensões, correspondentes a esses nós e pontos, e não entre as características das solicitações. Obtém-se daqui, para um nó genérico  $i$  distante  $y_i$  do eixo neutro  $x$ :

$$F_i = \sigma_i h c$$

mas, pela fórmula de Navier tem-se:

$$\sigma_i = (M y_i) / I_x$$

assim:

$$M = (F_i I_x) / (h c y_i)$$

relativamente aos dados do problema, vem:

$$M = (F H^3) / (12 h^2)$$

As componentes dos deslocamentos, tendo em conta a expressão de  $M$  e dos valores dos coeficientes  $K_{ij}$ , são :

$$u_1 = F / (2 c h^2 E^*) (6/8 xy)$$

$$u_2 = F / (2 c h^2 E^*) (-3/8 x^2 - 1/8 y^2)$$

Na figura 3.5-3 são indicadas as forças nas hastes, e as forças externas nos nós, correspondentes à deformação impressa.

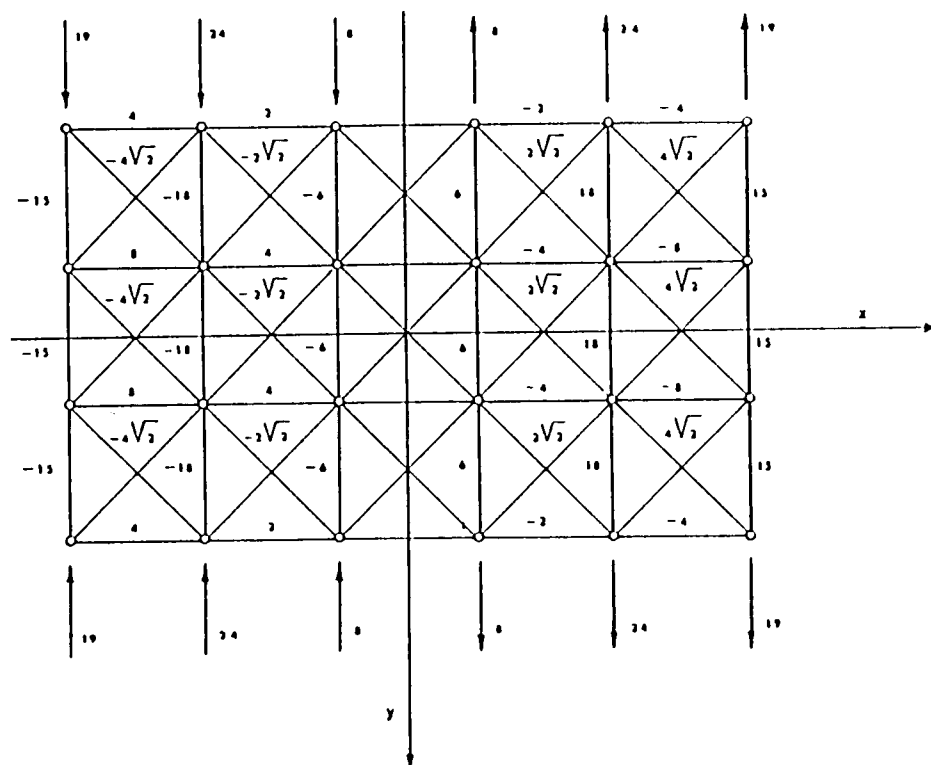


Fig. 3.5-3 - Multiplicador das forças internas e externas :  $3/4 (M/h)$

Para os nós internos da estrutura, conforme o que foi exposto, não se verificam erros, enquanto as componentes dos deslocamentos forem funções de polinómios de segundo grau em  $x$ ,  $y$ . Deste modo, para o equilíbrio à translação nas duas direcções  $x$ ,  $y$ , do nó 0 da figura 3.5-4, tem-se :

$$(EA/h)(u_{13} - u_{10}) + (2^{1/2}/2)(EA/h)((2^{1/2}/2)(u_{16} - u_{10}) + (2^{1/2}/2)(u_{26} - u_{20})) + F_x = 0 \Leftrightarrow K^{-1}(u_{13} - u_{10}) + K^{-1}/2(u_{16} - u_{10} + u_{26} - u_{20}) + F_x = 0$$

$$(EA/h)(u_{22} - u_{20}) + (2^{1/2}/2)(EA/h)((2^{1/2}/2)(u_{16} - u_{10}) + (2^{1/2}/2)(u_{26} - u_{20})) + F_y = 0 \Leftrightarrow K^{-1}(u_{22} - u_{20}) + K^{-1}/2(u_{16} - u_{10} + u_{26} - u_{20}) + F_y = 0$$

Considerando agora, sobre os planos paralelos aos planos coordenados no ponto 0 da figura 3.5-4, as equações de Cauchy:

$$\sigma_x = E^* (3\varepsilon_x + \varepsilon_y); \quad \sigma_y = E^* (\varepsilon_x + 3\varepsilon_y)$$

multiplicando ambos os membros por  $ch/2$  e pondo  $\sigma_x ch/2 = F_x$ , e  $\sigma_y ch/2 = F_y$ , obtém-se:

$$F_x = E^* (3\varepsilon_x + \varepsilon_y) ch/2 = E^* ch (\varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_x + 1/2 \varepsilon_y)$$

$$F_y = E^* (\varepsilon_x + 3\varepsilon_y) ch/2 = E^* ch (1/2 \varepsilon_x + \varepsilon_y + 1/2 \varepsilon_y)$$

Tendo em conta a transformação às diferenças finitas destas equações, os termos das equações podem-se agrupar da seguinte forma:

$$F_x = ch E^* \left( \varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right) = EA \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right]$$

$$F_y = ch E^* \left( \frac{1}{2} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right) = EA \left[ \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right]$$

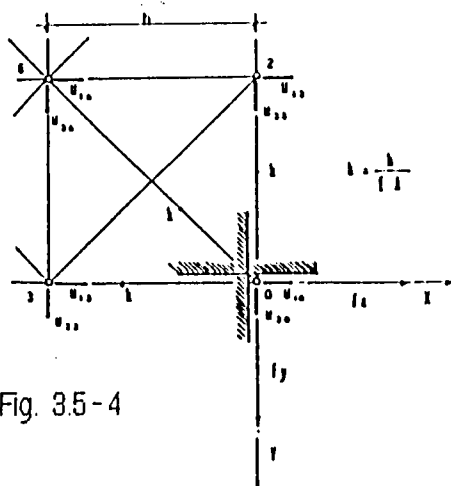


Fig. 3.5-4

Usando o nó 0 como referência, as componentes dos nós circunstantes podem-se escrever da seguinte forma:

$$u_{13} = u_{10} - h \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \dots$$

$$u_{16} = u_{10} - h \frac{\partial u_1}{\partial x} - h \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \times \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \dots$$

das quais se obtém:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \approx \frac{u_{10} - u_{13}}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \approx \frac{u_{10} - u_{16}}{h} - \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right)$$

e de modo análogo:

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} \approx \frac{u_{20} - u_{12}}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \approx \frac{u_{20} - u_{26}}{h} - \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right)$$

Substituindo na última equação obtida para  $F_x$ , obtém-se:

$$F_x = \frac{EA}{h} \left[ (u_{10} - u_{13}) + \frac{1}{2} (u_{10} - u_{16} + u_{20} - u_{26}) \right] + \frac{EA}{h} \left\{ \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{h}{2} \left[ - \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{h}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{h}{4} \times \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \right] \right\}$$

ou:

$$F_x + K^{-1} (u_{13} - u_{10}) + \frac{1}{2} K^{-1} (u_{16} - u_{10} + u_{26} - u_{20}) = \mathcal{E}_x$$

onde se indica com  $\mathcal{E}_x$  o erro, que é igual a:

$$\mathcal{E}_x = K^{-1} \left[ -\frac{h}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{4} \times \left( 3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \right]$$

No caso que se examina, o erro toma o seguinte valor :

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{16} F$$

que corresponde exactamente à diferença entre a força aplicada sobre o nó da estrutura reticulada e, a força que se obtia atribuindo a ela os deslocamentos do correspondente problema contínuo. Efectuando os cálculos anteriores, mas agora, para a força vertical, obtém-se :

$$F_y = \frac{EA}{h} [(u_{20} - u_{22}) + \frac{1}{2} (u_{10} - u_{16} + u_{20} - u_{26})] + \frac{EA}{h} \left\{ \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{h}{2} \left[ -\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{h}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{h}{2} \left[ -\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{h}{2} \times \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \right] \right\}$$

ou :

$$F_y + K^{-1} (u_{22} - u_{20}) + \frac{K^{-1}}{2} (u_{16} - u_{10} + u_{26} - u_{20}) = \mathcal{E}_y$$

onde se indica com  $\mathcal{E}_y$  o erro, que é igual a :

$$\mathcal{E}_y = K^{-1} \left[ -\frac{h}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{4} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \right]$$

No caso que se examina, o erro torna o seguinte valor :

$$\mathcal{E}_y = 0$$

Nos problemas até agora examinados, os deslocamentos atribuídos aos nós da estrutura reticulada, eram produtos de sistemas de forças exactamente equivalentes, no contínuo, às respectivas solicitações, sendo, portanto, as soluções obtidas, congruentes com os resultados, equilibradas com as

forças efectivamente aplicadas. A não existência de erros nos nós determinados para o problema da flexão, é atribuída exclusivamente ao tipo de estrutura examinada.

Considere-se a estrutura representada na figura 3.5-5, constituída através da agregação das células elementares da figura 3.3-6, tal como a primeira estrutura examinada neste ponto. Os nós do lado menor desta estrutura estão vinculados a apoios fixos, e a estrutura está sujeita a uma solicitação do lado oposto a este, constituída por um sistema de forças verticais, correspondentes a uma distribuição parabólica das tensões tangenciais  $\tau$ .

O correspondente problema contínuo, cujas propriedades elásticas são iguais às já obtidas no primeiro exemplo deste ponto, é constituído pelo problema da peça encastrada num dos seus extremos, e sujeita no outro extremo à dita distribuição das tensões tangenciais.

As componentes de deslocamentos respectivas, pondo :

$$\tau = -\tau_0 (1 - 4 y^2 / h^2) ; \quad p = 4 / (9 \cdot 10^5) \tau_0 l^3 / (E h^2)$$

são :

$$u_1 = p (-900 x^2 y + 700 y^3 + 80400 y)$$

$$u_2 = p (300 x y^2 + 300 x^2 - 90000 x + 600000)$$

Atribuindo aos nós da estrutura os deslocamentos dos correspondentes pontos do contínuo, obtém-se, por projecção nas direcções das hastes, a dilatação das mesmas, e através dela, o regime de forças, internas e externas, representado na figura 3.5-5.

Os resultados da distribuição de forças mostram que se trata de forças horizontais constantes em cada nó, variando unicamente nos nós situados nos cantos, onde o seu valor é igual a metade do valor da força nos restantes nós. Estas forças horizontais podem ser interpretadas como resultantes de uma distribuição de tensões tangenciais auto-equilibrantes, no correspondente problema contínuo, sendo como tal, necessário corrigir a primeira solução. Está-se neste caso, perante um exemplo que mostra como o método é susceptível de iterações.

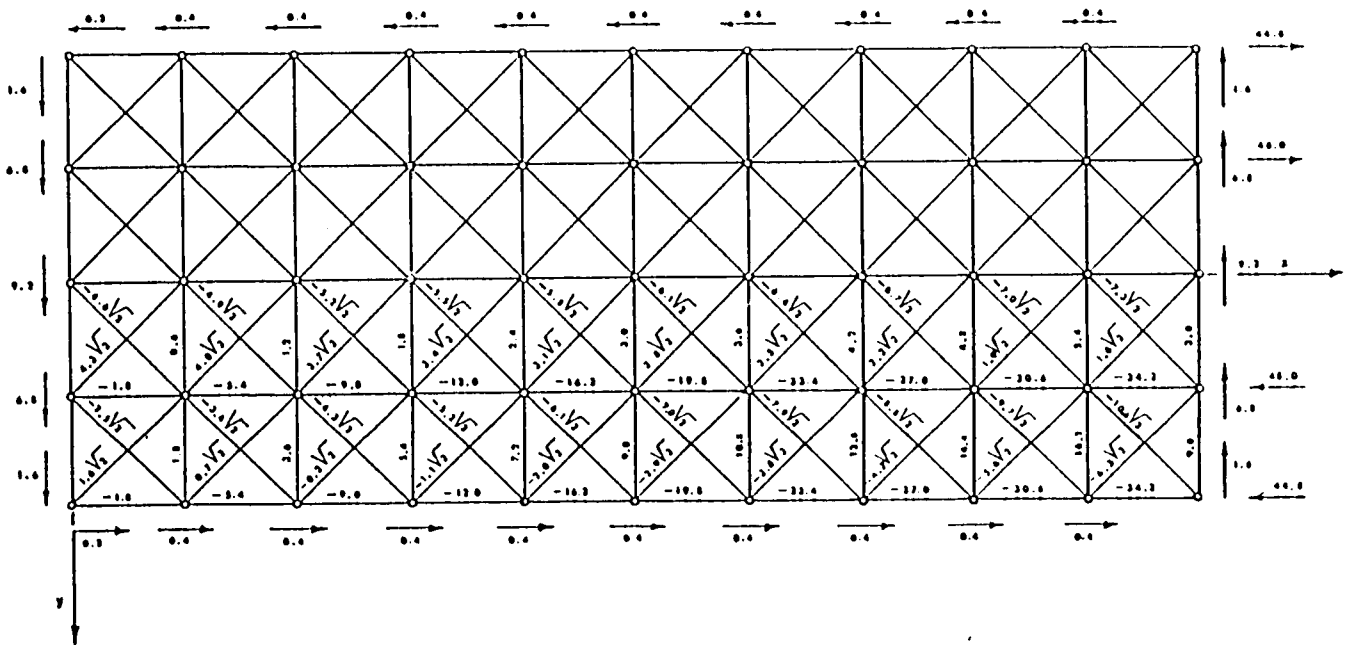


Fig. 3.5-5 - Multiplicador das forças internas e externas :  $(4/900) A (l^2/h^2) \tau_0$

A correção dos valores obtidos, será portanto realizada determinando o campo de deslocamentos para o correspondente problema contínuo, sujeito a um sistema de tensões opostas às tensões tangenciais auto-equilibradas, referidas anteriormente, obtidas na primeira solução.

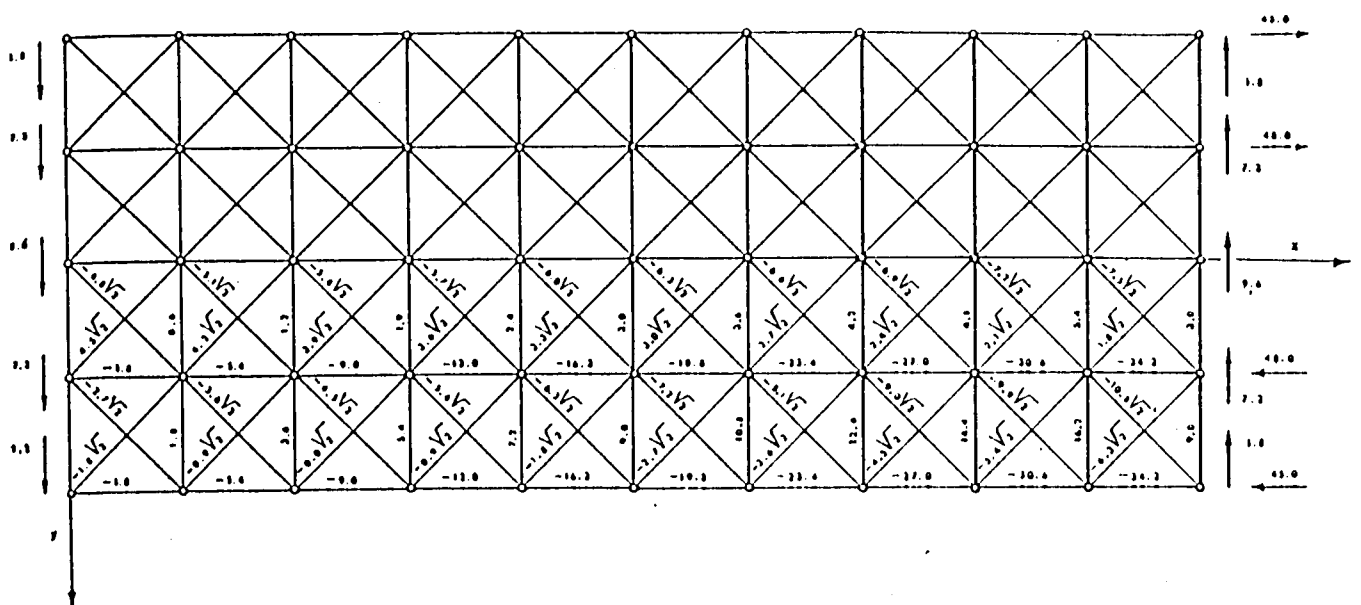


Fig. 3.5-6 - Multiplicador das forças internas e externas :  $(4/900) A (l^2/h^2) \tau_0$

Sendo essa distribuição uniforme no contorno da estrutura, as componentes do deslocamento correspondente são :

$$u'_1 = 0$$

$$u'_2 = \tau' x$$

Sobre a base  $x = l$ , tendo em conta as condições de vínculo, deve-se ter  $u'_2 = 0$ , o que torna logo necessário, somar às componentes anteriores as componentes do modo rígido, que reconstituem a congruência com os vínculos. Assim, se para  $x = l$  tem-se  $u'_1 = 0$  e  $u'_2 = \tau' l$ , bastará indicar para a estrutura uma translação vertical igual a  $\tau' l$ , resultando, desta forma, as componentes do deslocamento efectivo, em :

$$u'_1 = 0$$

$$u'_2 = \tau' (x - l)$$

A estas componentes do deslocamento corresponde um regime de forças internas, que somado ao regime de forças internas obtido na primeira solução dá a solução efectiva, representada na figura 3.5-6.

A solução obtida neste exemplo, não só é congruente, como também é perfeitamente equilibrada com as cargas externas.

Considere-se como primeiro caso de estudo de uma estrutura tridimensional, uma estrutura sujeita a esforços normais e, de corte puro. Tratando-se de casos de solicitações simples, para os quais cada um dos elementos estruturais (posto que é possível referir ao interno da estrutura um tal elemento) se vai encontrar na mesma situação estática e deformativa, o estudo será limitado a um só elemento. Sendo assim, para este exemplo considere-se a estrutura realizada por agregações da célula estrutural representada na figura 3.5-7.

As relações deformações - tensões para o correspondente meio contínuo já foram determinadas no ponto 3.3 e, são :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 1/E^* \begin{bmatrix} 4/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ & 4/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

com :

$$E^* = 2^{1/2} EA_d / (h^2)$$

$$A_d = 2 A_l / (2^{1/2})$$

onde,  $A_d$  e  $A_l$  são respectivamente as secções rectas das conexões existentes nas direcções a  $45^\circ$  com os eixos coordenados e, nas direcções dos eixos de referência do retículo de pontos. O procedimento a efectuar para a determinação das forças nas hastes e, sucessivamente, nos nós, é análogo ao procedimento efectuado nos problemas bidimensionais.

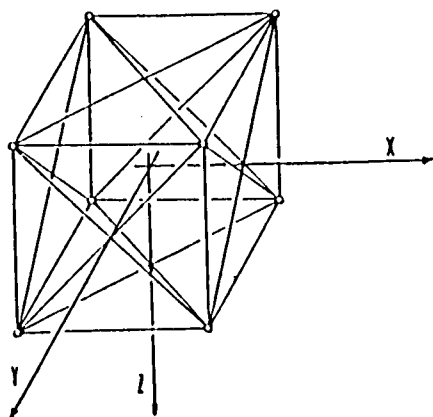


Fig. 3.5-7

No caso da solicitação normal na direcção  $z$ , as componentes do deslocamento no sistema  $Oxyz$  do correspondente problema contínuo, indicando com  $P/S$  a solicitação unitária, referida à área  $h^2$  da célula, são :

$$u_1 = (P/S)(K_{13} x) = -P/(5 h^2 E^*) x$$

$$u_2 = (P/S)(K_{23} x) = -P/(5 h^2 E^*) y$$

$$u_3 = (P/S)(K_{33} x) = 4P/(5 h^2 E^*) z$$

Atribuindo aos nós da estrutura os correspondentes pontos do contínuo, obtém-se por projecção nas direcções das hastes, a dilatação das mesmas e, através delas, as respectivas forças internas. Na figura 3.5-8 são indicadas as forças nas hastes, as forças externas, e as componentes do deslocamento nos nós, para a célula estrutural em estudo.

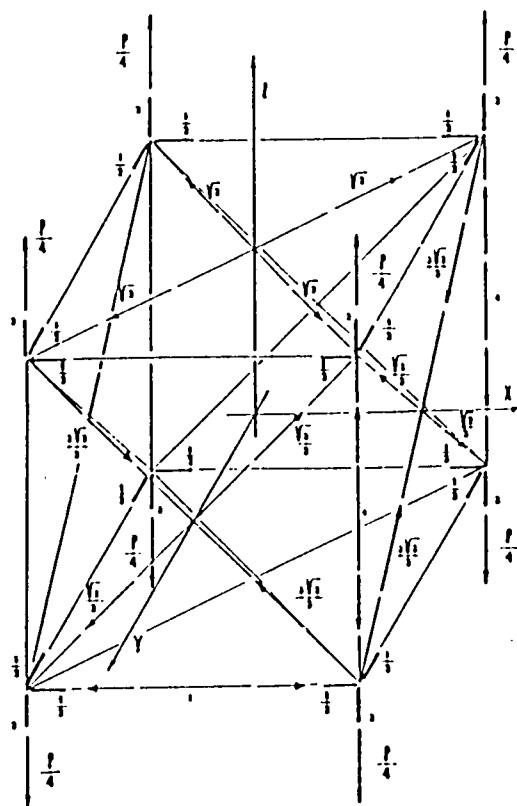


Fig. 3.5-8 - Multiplicador dos deslocamentos:  $1/5 (P/(E^* h))$

Multiplicador das forças internas : hastes diagonais  $P/20$

restantes barras  $P/40$

No caso de uma solicitação de corte puro  $\tau_{yz}$ , as componentes de deslocamento do correspondente problema contínuo são :

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

$$u_3 = T_{yz} / (SE^*) K_{44} y = 2 T_{yz} / (E^* h^2) y$$

Na figura 3.5-9 são representadas as correspondentes forças internas e externas, bem como as componentes dos deslocamentos.

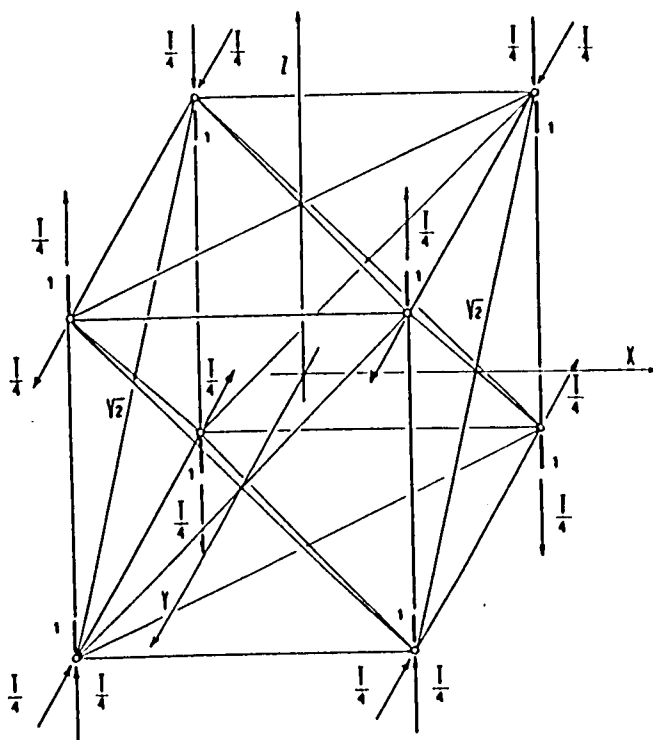


Fig. 3.5-9

Considere-se como segundo caso de estudo de uma estrutura tridimensional, um sistema tridimensional formado por duas grelhas (uma superior e outra inferior), em que as grelhas formadas na face superior e na face inferior são idênticas, e estão uma em cima da outra directamente, ligadas por hastes paralelas, verticais e diagonais.

Nesse sistema tridimensional, realiza-se o estudo do problema da flexão pura e da torsão das lâminas reticuladas, problemas esses bastante importantes, na medida em que constituem os problemas da maioria das estruturas reticuladas espaciais, nas aplicações técnicas.

Neste problema, tal como nos problemas examinados anteriormente, a representação é simplificada pelo facto que, cada um dos elementos estruturais da lâmina se encontram em idênticas condições de solicitação e deformação, na medida em que a estrutura é realizada por agregação de elementos estruturais.

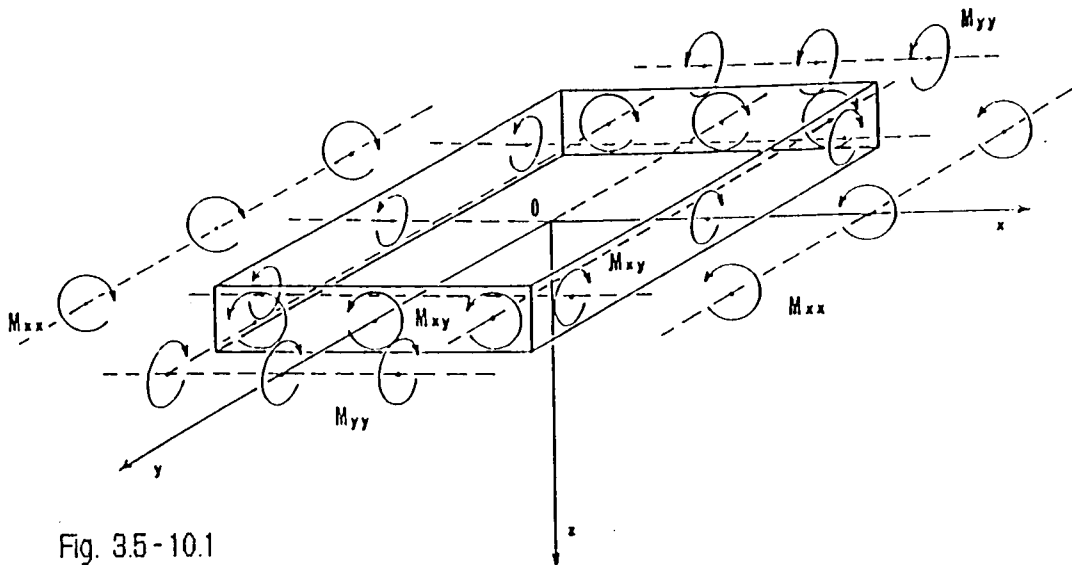


Fig. 3.5-10.1

As componentes de deslocamentos de uma lâmina como a representada na figura 3.5-10.1, sujeita a uma distribuição uniforme de momentos fletores e torçores  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  e  $M_{xy}$ , e com as condições de vínculo no ponto 0, expressas pelas relações :

$$u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$$

são :

$$\begin{aligned} u_1 &= 6/h^3 [M_{xx} (K_{15} z^2 + K_{16} yz + 2K_{11} zx) + M_{yy} (K_{25} z^2 + K_{26} yz + 2K_{12} zx) + \\ &\quad + M_{xy} (K_{56} z^2 + K_{66} yz + 2K_{16} zx)] \\ u_2 &= 6/h^3 [M_{xx} (K_{14} z^2 + 2K_{12} yz + K_{16} xy) + M_{yy} (K_{24} z^2 + 2K_{22} yz + K_{26} zx) + \\ &\quad + M_{xy} (K_{46} z^2 + K_{26} yz + K_{66} zx)] \end{aligned}$$

$$u_3 = 6/h^3 [M_{xx}(-K_{11} x^2 - K_{12} y^2 + K_{13} z^2 - K_{16} xy) + M_{yy}(-K_{12} x^2 - K_{22} y^2 + K_{23} z^2 - K_{26} xy) + M_{yz}(-K_{16} x^2 + K_{26} y^2 + K_{36} z^2 - K_{66} xy)]$$

Suponha-se a lâmina realizada por agregações da célula estrutural elementar representada na figura 3.5-10.2, cujo estudo foi realizado no ponto 3.3, com a seguinte relação das secções rectas:

$$A_l/A_d = 2^{1/2}/2$$

secções estas, das hastes dispostas respectivamente segundo os lados, e as diagonais da célula estrutural, cujas relações constitutivas, directa e inversa, do correspondente meio contínuo, que se verificou ser isótropo, são :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E^* \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2 & 0 & 0 \\ & & & & 1/2 & 0 \\ & & & & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

com :

$$E^* = (E A_d)/(h^2 2^{1/2})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E^*} \begin{bmatrix} 4/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ & 4/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

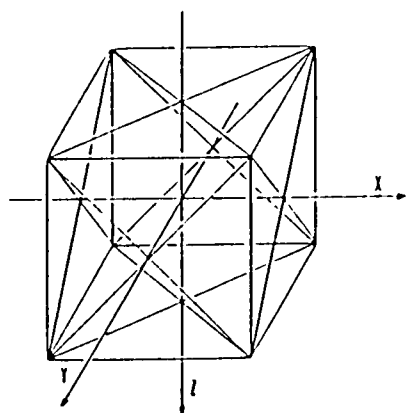


Fig. 3.5-10.2

Devido a esta estrutura ser invariante para um câmbio  $x - y$ , somente uma distribuição de momentos será examinada. Considerando para este caso  $M_{xy}$ , as respectivas componentes do deslocamento são :

$$u_1 = 6 / (E^* h^3) [M_{xy} (8/5 \, zx)]$$

$$u_2 = 6 / (E^* h^3) [M_{xx} (-2/5 yz)]$$

$$u_3 = 6 / (E^* h^3) [M_{xx} (-4/5 x^2 + 1/5 y^2 - 1/5 z^2)]$$

O módulo de tensão que se verifica na superfície superior e inferior da lâmina é :

$$\sigma_x = 6 M_{xx} / h^2$$

vindo assim :

$$F_{xx} = (6 M_{xx} / h^2) (h^2/2) = 3 M_{xx}$$

podendo-se passar a exprimir as componentes dos deslocamentos da seguinte forma :

$$u_1 = 16 F_{xx} / (5 E^* h^3) zx$$

$$u_2 = -4 F_{xx} / (5 E^* h^3) yz$$

$$u_3 = 2 F_{xx} / (5 E^* h^3) (-4 x^2 + y^2 - z^2)$$

Obtém-se assim para o elemento estrutural, a situação deformativa representada na figura 3.5-11, originada pelo regime de forças internas e externas representado na figura 3.5-12, do qual se apreende que somente as forças internas das hastes que formam as grelhas superior e inferior não são nulas.

À deformação impressa à estrutura correspondem, sobre os bordos da mesma, pares não equivalentes áqueles efectivamente aplicados, ou seja, pares respectivamente a  $Fh$  nos bordos paralelos a  $y$ , e nulos sobre os bordos paralelos a  $x$  (fig. 3.5-13). Deste modo há necessidade de corrigir a solução obtida.

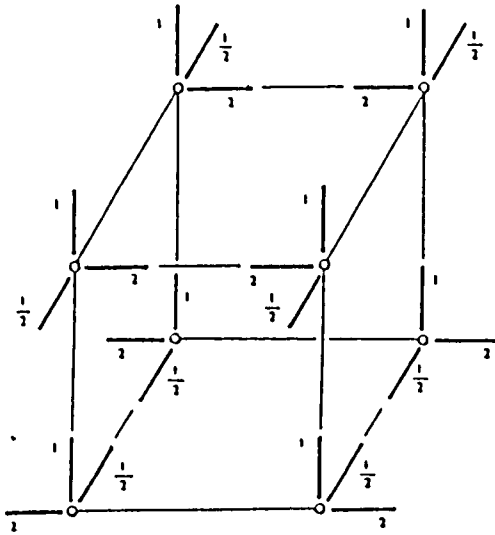


Fig. 3.5-11 - Multiplicador dos deslocamentos :

$$- 8/5 (F_{xx} / (E^* h))$$

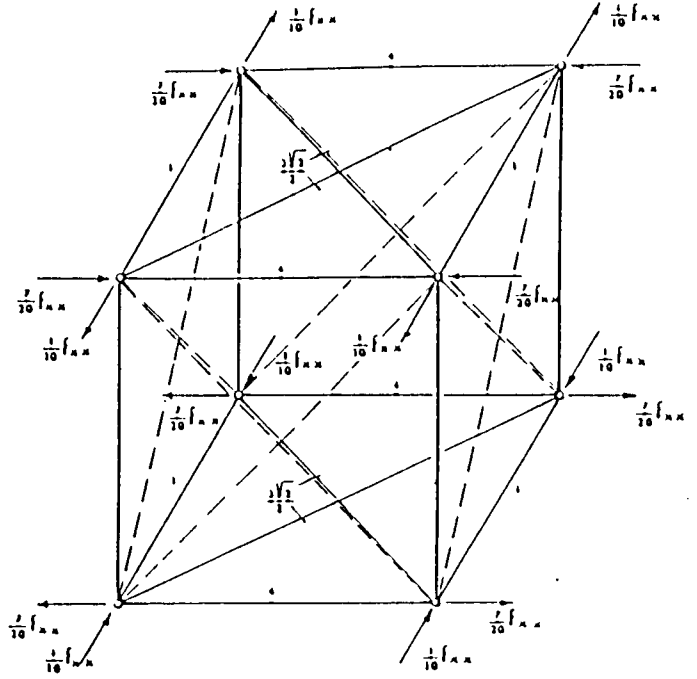


Fig. 3.5-12 - Multiplicador das forças internas :

- hastes diagonais  $F_{xx}/10$

- restantes barras  $F_{xx}/20$

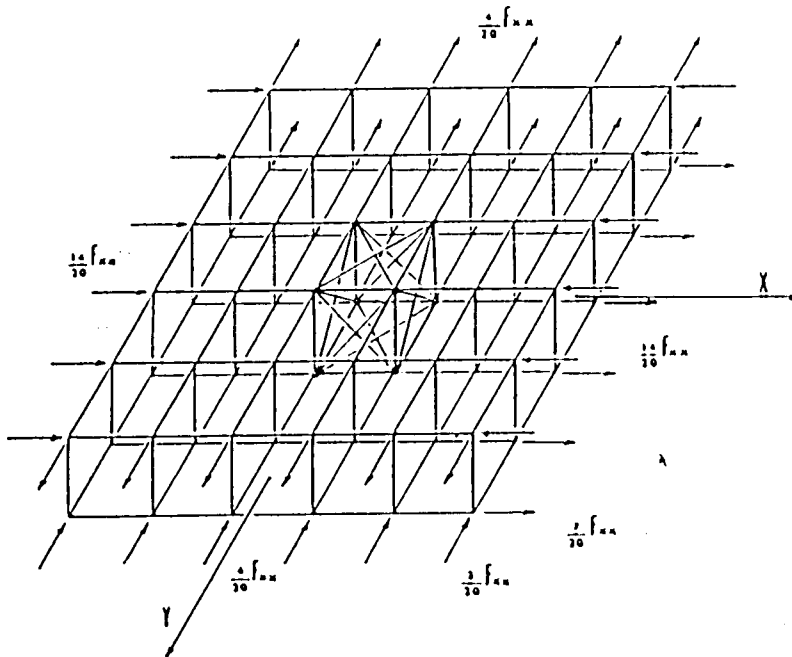


Fig. 3.5-13

No caso em estudo, a soma da solução obtida com a solução derivada da solicitação correspondente às forças não equilibradas, não fornece a solução efectiva, na medida em que, como já

foi verificado na primeira solução, à deformação atribuída ao retículo e deduzida do problema contínuo equivalente não correspondem as forças efectivamente aplicadas no retículo. Como tal, para resolver este problema é necessário aplicar sobre o contínuo equivalente duas distribuições de momentos flectores incógnitos,  $M_{xx}$  e  $M_{yy}$ , para determinar as condições que exprimem o equilíbrio entre as forças internas e externas de dois nós situados em dois bordos contíguos da lâmina. Assim sendo, para uma tal solicitação, a deformação impressa ao retículo pode ser escrita como :

$$u_1 = 1/(E^* h^3) [M_{xx} (8/5 \, x) - M_{yy} (2/5 \, x)]$$

$$u_2 = 1/(E^* h^3) [M_{xx} (-2/5 \, y) + M_{yy} (8/5 \, y)]$$

$$u_3 = 1/(E^* h^3) [M_{xx} (-4/5 \, x^2 + 1/5 \, y^2 - 1/5 \, z^2) + (1/5 \, x^2 - 4/5 \, y^2 - 1/5 \, z^2)]$$

Sendo os deslocamentos eficazes, os deslocamentos na direcção  $x$  e  $y$ , é suficiente realizar uma representação plana dos mesmos, como por exemplo a da figura 3.5-14, referente à grelha inferior.

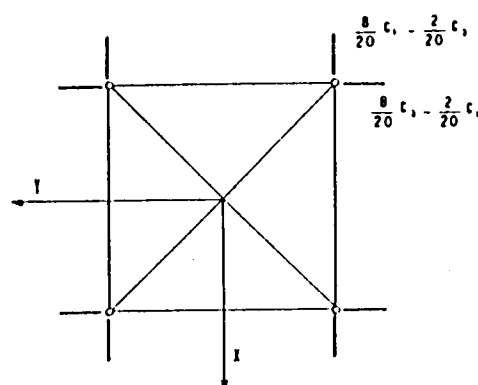


Fig. 3.5-14 - Multiplicador dos deslocamentos :  $c_1 = M_{xx}/(E^* h)$ ;  $c_2 = M_{yy}/(E^* h)$

As forças externas correspondentes são:

$$F_{xx}/2 = 7/40 \, M_{xx} + 2/40 \, M_{yy}$$

$$F_{yy}/2 = 2/40 \, M_{xx} + 7/40 \, M_{yy}$$

respectivamente na direcção  $x$  e  $y$ . Impondo as condições de equilíbrio para dois nós genéricos do contorno, obtém-se :

$$F_{xx} = 7/20 M_{xx} + 2/20 M_{yy}$$

$$0 = 2 M_{xx} + 7 M_{yy}$$

respectivamente, para um nó pertencente ao bordo afectado pela força  $F_{xx}$ , e para um nó pertencente ao bordo não afectado por forças. A solução destas duas equações é:

$$M_{xx} = 28/9 F_{xx}$$

$$M_{yy} = -8/9 F_{xx}$$

resultando assim, as componentes do deslocamento iguais a:

$$u_1 = 240/45 F_{xx} / (E^* h^3) xz$$

$$u_2 = -120/45 F_{xx} / (E^* h^3) yz$$

$$u_3 = F_{xx} / (45 E^* h^3) (-120 x^2 + 60 y^2 - 20 z^2)$$

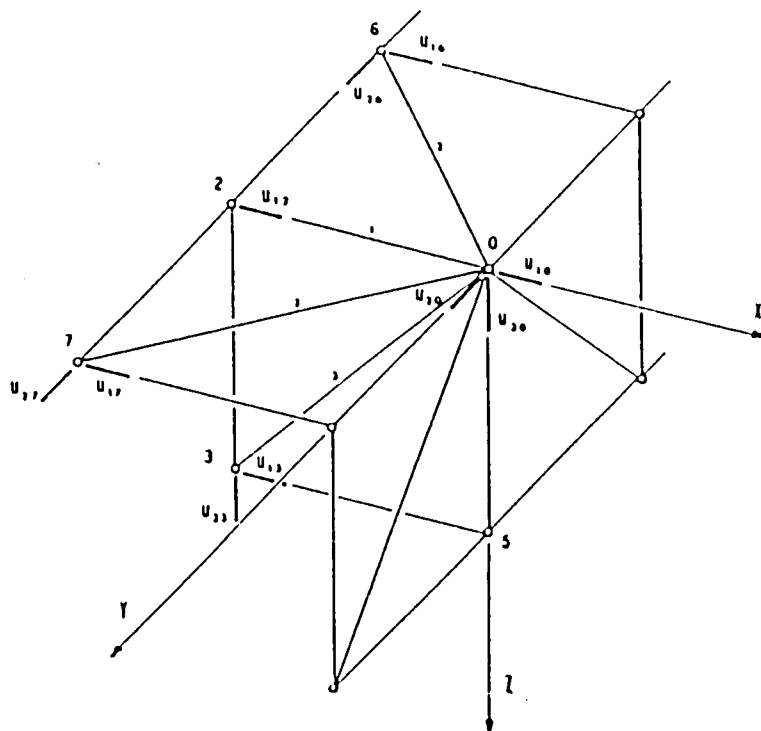


Fig. 3.5-15

As forças não equilibradas com as forças efectivamente aplicadas nos nós da estrutura, e que foram obtidas na primeira fase do cálculo, podem ser compreendidas através da comparação entre as equações de equilíbrio dos nós do contorno, e as equações de Cauchy do correspondente problema contínuo. Com o auxílio da figura 3.5-15, podem-se escrever as equações para o equilíbrio na direcção  $x$ , da seguinte forma:

$$\frac{1}{4} (2^{1/2} EA_d / h)_1 (u_{12} - u_{10}) + \frac{1}{4} (EA_d / (2^{1/2} h))_2 [(u_{16} + u_{26} - u_{20} - u_{10}) + (u_{17} - u_{27} - u_{10} + u_{20})] + \frac{1}{2} (EA_d / (2^{1/2} h))_3 (u_{13} - u_{33} + u_{30} - u_{10}) + F_x = 0 \quad (a)$$

Correspondentemente, para o contínuo equivalente, escreve-se da seguinte forma:

$$\sigma_x = \left( \sqrt{2} \frac{EA_d}{2h^2} \right)_1 \epsilon_x + 2 \left( \frac{EA_d}{h^2 \sqrt{2}} \right)_2 \times \left( \frac{1}{4} \epsilon_x + \frac{1}{4} \epsilon_y \right) + 2 \left( \frac{EA_d}{h^2 \sqrt{2}} \right)_3 \left( \frac{1}{4} \epsilon_x + \frac{1}{4} \epsilon_z \right)$$

ou:

$$\sigma_x \frac{h^2}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{2} EA_d) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{EA_d}{\sqrt{2}} \right) \times \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{EA_d}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \quad (b)$$

Usando o retículo geométrico de apoio da estrutura reticulada, como referência, e passando às diferenças finitas, tem-se:

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_{10} - h \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \dots \\ u_{16} &= u_{10} - h \frac{\partial u_1}{\partial x} - h \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - \dots \\ u_{17} &= u_{10} - h \frac{\partial u_1}{\partial x} + h \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - \dots \\ u_{26} &= u_{20} - h \frac{\partial u_2}{\partial x} - h \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) - \dots \\ u_{27} &= u_{20} - h \frac{\partial u_2}{\partial x} + h \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) - \dots \\ u_{13} &= u_{10} - h \frac{\partial u_1}{\partial x} + h \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) - \dots \\ u_{33} &= u_{30} - h \frac{\partial u_3}{\partial x} + h \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right) - \dots \end{aligned}$$

Destas equações obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x} &\cong \frac{1}{h} (u_{10} - u_{12}) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} &\cong \frac{1}{2h} (2u_{10} - u_{16} - u_{11}) + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} &\cong \frac{1}{h} (u_{10} - u_{13}) + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} &\cong \frac{1}{2h} (u_{27} - u_{26}) + \frac{h}{2} 4 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial z} &\cong \frac{1}{h} (u_{30} - u_{33}) + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

A expressão (b) pode ainda ser transformada em:

$$\begin{aligned}\sigma_x \frac{h^2}{2} &= \frac{1}{4} (\sqrt{2} E A_d) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{E A_d}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{E A_d}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \sqrt{2} \frac{E A_d}{h} \right) (u_{10} - u_{12}) + \frac{1}{2} \left( \frac{E A_d}{\sqrt{2} h} \right) \left[ \frac{1}{2} (2u_{10} - u_{16} - u_{11}) + \frac{1}{2} (u_{27} - u_{26}) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{E A_d}{\sqrt{2} h} \right) \left[ \frac{1}{h} (u_{10} - u_{13}) + \frac{1}{h} (u_{33} - u_{30}) + \frac{1}{4} \left( \sqrt{2} \frac{E A_d}{h} \right) \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right] + \\ &+ \frac{E A_d \sqrt{2}}{4} \left[ \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \frac{h}{2} 4 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \right] + \frac{E A_d \sqrt{2}}{4} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right) \right]\end{aligned}$$

Confrontando as equações (a) e (b), obtém-se a expressão que fornece o valor do erro:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{E^* h^2}{8} \left[ \left( 3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) + \right. \\ &\left. + 2h \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}$$

No caso em estudo, o valor do erro é igual a:

$$\epsilon = \frac{3}{10} F$$

Supondo a mesma estrutura sujeita agora à força  $F_{xy}$  sobre o contorno, equivalente a uma distribuição uniforme de momentos torçores, as componentes do deslocamento são:

$$u_1 = 12 M_{xy} / (E^* h^3) yz$$

$$u_2 = 12 M_{xy} / (E^* h^3) zx$$

$$u_3 = -12 M_{xy} / (E^* h^3) xy$$

De modo a obter as equações expressas em função de  $F_{xy}$ , há que ter em conta que :

$$\tau_{xy} = 6 M_{xy} / h^2$$

vindo assim :

$$F_{xy} = (6 M_{xy} / h^2) (h^2 / 2) = 3 M_{xy}$$

podendo-se passar a exprimir as componentes dos deslocamentos da seguinte forma :

$$u_1 = 4 F_{xy} / (E^* h^3) yz$$

$$u_2 = 4 F_{xy} / (E^* h^3) zx$$

$$u_3 = -4 F_{xy} / (E^* h^3) xy$$

Obtém-se assim para o elemento estrutural, a situação deformativa representada na figura 3.5-16, originada pelo regime de forças internas e externas representado na figura 3.5-17.

As forças externas obtidas nos nós da estrutura, decompostas nas direcções dos eixos coordenados, são equivalentes, sobre cada uma das faces do elemento estrutural, a um par torçor de valor  $F_{xy} \cdot h$ , sendo portanto a solução equilibrada e congruente.

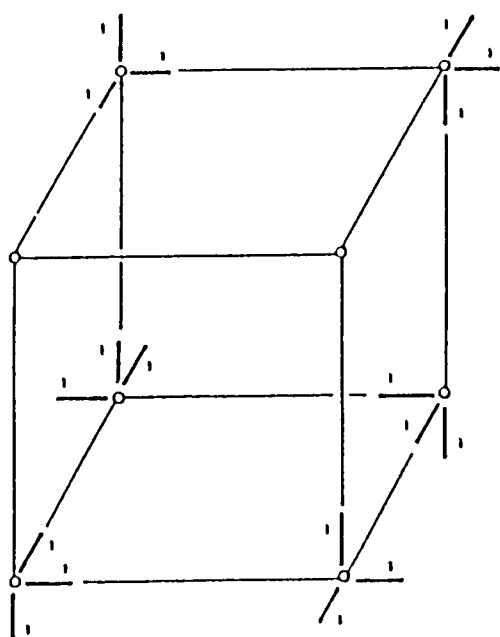


Fig. 3.5-16 - Multiplicador dos deslocamentos:  $F_{xy}/(E^*h)$

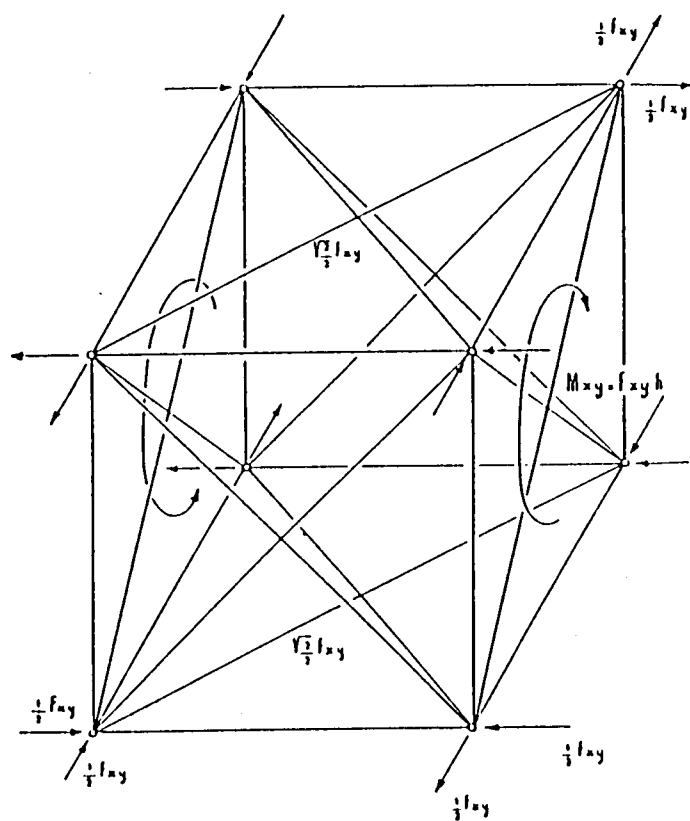


Fig. 3.5-17

Considere-se como terceiro caso de estudo de um sistema tridimensional, uma estrutura tridimensional triangular representada na figura 3.5-18, formada por duas grelhas (uma superior e outra inferior), em que as grelhas formadas na face superior e na face inferior são idênticas, sendo a superior menor, e as hastes das mesmas têm todas o mesmo comprimento. As duas grelhas são ligadas por hastes que têm todas o mesmo comprimento das hastes das grelhas. A estrutura é apoiada na face inferior no plano horizontal, pelos nós inferiores dos bordos, sendo os nós dos vértices fixos. A solicitação a que a estrutura está sujeita é composta por forças  $F$  aplicadas nos nós.

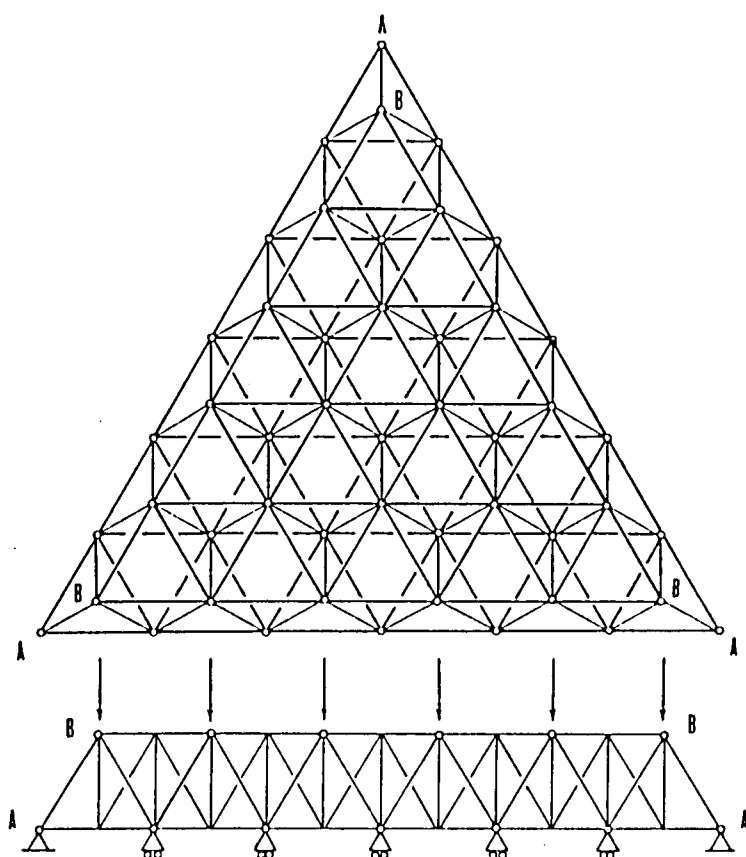


Fig. 3.5-18

Na passagem da estrutura reticulada à estrutura contínua equivalente, é necessário caracterizar a rigidez à flexão e ao corte da estrutura contínua.

Começando pela caracterização da rigidez à flexão da estrutura contínua equivalente, é necessário impor a igualdade das rotações das faces do elemento estrutural do retículo e do contínuo, quando sujeitas à acção dos momentos flectores. Considerando a estrutura sujeita a uma distribuição uniforme de momentos flectores  $M_n$  ao longo dos bordos, tem-se para cada elemento:

$$M_{xx} = M_{yy} = M_n$$

A relação fundamental que exprime a relação momentos - curvaturas é igual a:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = (M_{xx} + M_{yy}) / ((1 + \nu) D) = 2M_n / ((1 + \nu) D)$$

O elemento estrutural da estrutura reticulada é examinado como dois elementos planos distantes entre eles de  $H = 2^{1/2} (3^{1/2} h)$ , sujeitos aos pares das forças normais de intensidade  $M_n / H$ ,

aplicadas respectivamente em tracção no plano superior e como forças de compressão no plano inferior, como é representado na figura 3.5-19.

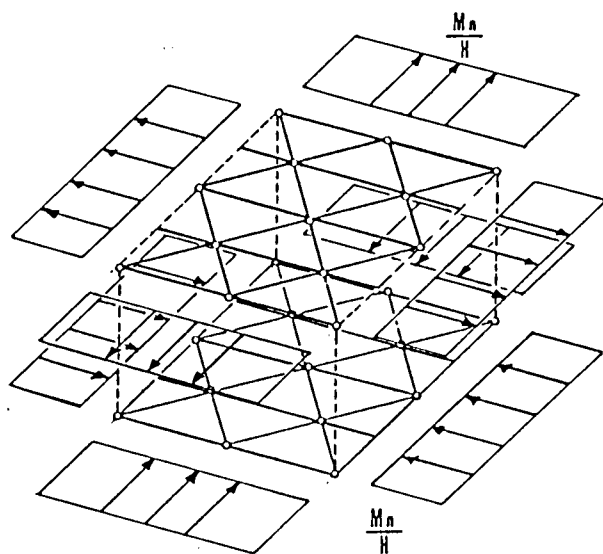


Fig. 3.5-19

Os elementos planos são constituídos pelo retículo de malha triangular, já examinado no ponto 3.3, e para o qual se obteve os seguintes valores, de modo a se tratar de um meio isótropo :

$$E_T = (2 E A) / (3^{1/2} c h)$$

$$m_T = 3$$

$$G_T = (3^{1/2} / 4) (E A / c h)$$

À acção exterior  $M_n / H$  corresponde a deformação no elemento superior igual a :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{h}{EA} \frac{M_n}{H}; \gamma_{xy} = 0$$

Substituindo esta expressão na relação fundamental anterior, tendo em conta que os deslocamentos podem ser escritos da seguinte forma :

$$u_1 = -z \frac{\partial u_3}{\partial x}$$

$$u_2 = -z \frac{\partial u_3}{\partial y}$$

e que em correspondência com os dois elementos planos, se tem :

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = \pm \frac{z}{H} \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \pm \frac{z}{H} \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x}; \epsilon_y = \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

$$v = 1 / m$$

a relação fundamental que exprime a relação momentos - curvaturas vem igual a :

$$(3/4) (M_n H / D) = \epsilon_x + \epsilon_y$$

obtendo-se assim :

$$D = (3^{1/2}/4)(EAh)$$

Caracterizando agora a rigidez ao corte da estrutura contínua equivalente, considere-se a seção transversal representada na figura 3.5-20 a que foi imposta uma deformação como a representada.

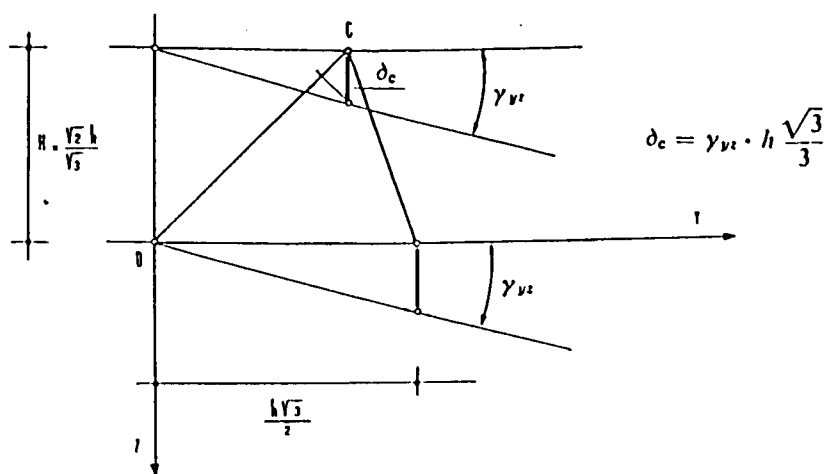


Fig. 3.5-20

Supondo constante  $\gamma_{yz}$ , as hastes paralelas a OC são sujeitas à força constante:

$$S_{OC} = \gamma_{yz} h (3^{1/2}/3)(2^{1/2}/3^{1/2})(EA/h) = (2^{1/2}/3) EA \gamma_{yz}$$

De modo a passar da força interna na haste OC à componente de tensão tangencial  $\tau_{yz}$ , considere-se a componente vertical  $cv$  da força:

$$cv S_{OC} = (2/(3 \cdot 3^{1/2})) EA \gamma_{yz}$$

e a área de influência da barra, constituída pelo produto da distância  $h$  entre as hastes paralelas a OC, e a espessura  $h (2^{1/2}/3^{1/2})$  da estrutura. Obtém-se deste modo:

$$\tau_{yz} = (2^{1/2}/3)(EA/h^2) \gamma_{yz}$$

do qual se obtém:

$$G = (2^{1/2}/3)(EA/h^2)$$

Efectuando as mesmas operações para  $\gamma_{xz}$ , obtia-se um valor análogo para  $G$ .

Passando ao estudo da estrutura contínua, começando pelo estudo da flexão, consideram-se para o mesmo as equações de S. Germaine - Lagrange, para as quais vêm associadas as condições do contorno, que exprimem o tipo de vínculo exterior:

$$\Delta \Delta u_3 = -p/D$$

No caso da estrutura triangular em estudo, apoiada ao longo dos bordos e sujeita a uma carga uniformemente distribuída, como se encontra representada na figura 3.5-21, a solução da equação anterior à qual vêm associadas as condições no contorno:

$$u_3 = 0$$

$$M_n = 0$$

é obtida pelas equações:

$$u_3 = p/(64 a D) [y^2 - 3x^2y - a(x^2 + y^2) + 4/27 a^3] (4/9 a^2 - x^2 - y^2)$$

$$u_1 = + H/2 \frac{\partial u_3}{\partial x} = + H/2 [p/(64 a D) (-6xy - 2ax) (4/9 a^2 - x^2 - y^2) + p/(64 a D) [y^2 - 3x^2y - a(x^2 + y^2) + 4/27 a^3] (-2x)]$$

$$u_2 = + H/2 \frac{\partial u_3}{\partial y} = + H/2 [p/(64 a D) (3y^2 - 3x^2 - 2ay) (4/9 a^2 - x^2 - y^2) + p/(64 a D) [y^2 - 3x^2y - a(x^2 + y^2) + 4/27 a^3] (-2y)]$$

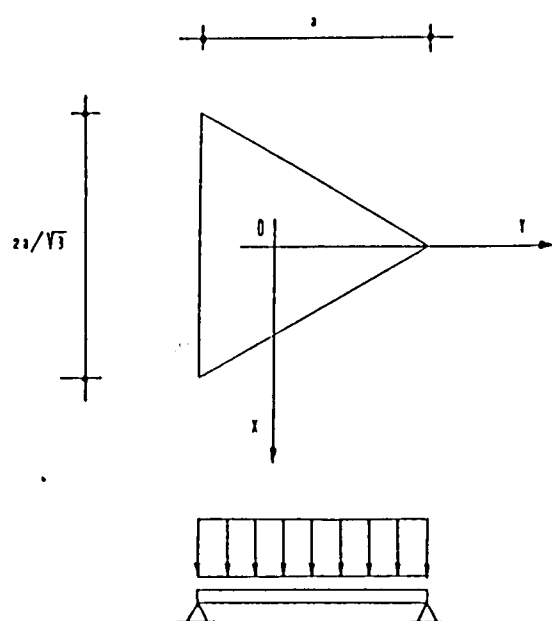


Fig. 3.5-21

A carga uniformemente distribuída é definida em função das forças concentradas  $F$  aplicadas nos nós pela seguinte relação :

$$F = p / 2 \cdot h \cdot (h^{3/2} / 2)$$

$$p = 4 F / (3^{1/2} h^2)$$

Considerando para este exemplo que  $F = 10,0 \text{ KN}$ ,  $E = 2,06 \times 10^8 \text{ KPa}$ ,  $A = 0,0001 \text{ m}^2$  e  $h = 2,0 \text{ m}$ , obtiveram-se os deslocamentos nos pontos da estrutura contínua referentes aos nós da estrutura reticulada. Os deslocamentos referidos estão representados nos respectivos pontos, numa zona limitada por dois eixos de simetria contíguos, com a indicação do seu valor, na figura 3.5-22.

Com o valor dos deslocamentos nos nós obtêm-se as dilatações das barras e posteriormente as forças internas, aplicando as fórmulas descritas no ponto 3.4 ( $\Delta l_i = \alpha_i (x_i - x_o)_1 +$

$$\beta_i (x_i - x_o)_2 + \gamma_i (x_i - x_o)_3; X_i = (EA/I)_i \Delta l_i = (EA/I)_i [\alpha_i (x_i - x_o)_1 + \beta_i (x_i - x_o)_2 + \gamma_i (x_i - x_o)_3].$$

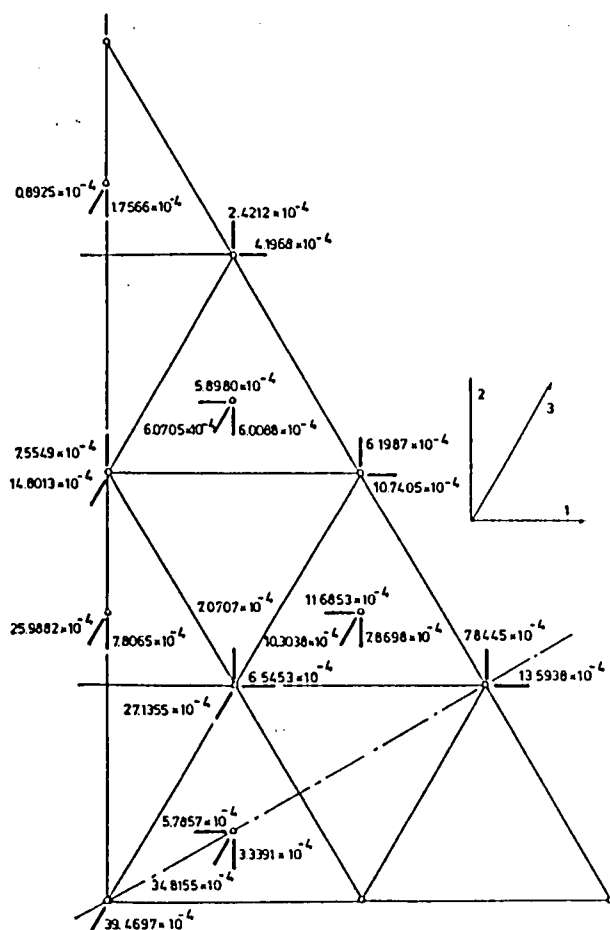


Fig. 3.5-22

As forças internas correspondentes à deformação, e as forças externas obtidas pelas equações de equilíbrio em cada nó, são representadas na figura 3.5-23, numa zona limitada por dois eixos de simetria contíguos, com a indicação do seu valor.

À deformação da estrutura correspondem forças verticais praticamente nulas conjuntamente com forças horizontais que não estão em equilíbrio com as forças externas aplicadas na estrutura. Essas forças correspondem na estrutura contínua à solicitação flectora e tórçora produzida pela condição de carga que se examina, e podem ser compensadas através de forças nas hastes de ligação dos

dois planos horizontais, passando-se deste modo ao exame dos efeitos produzidos pela deformação devido ao corte.

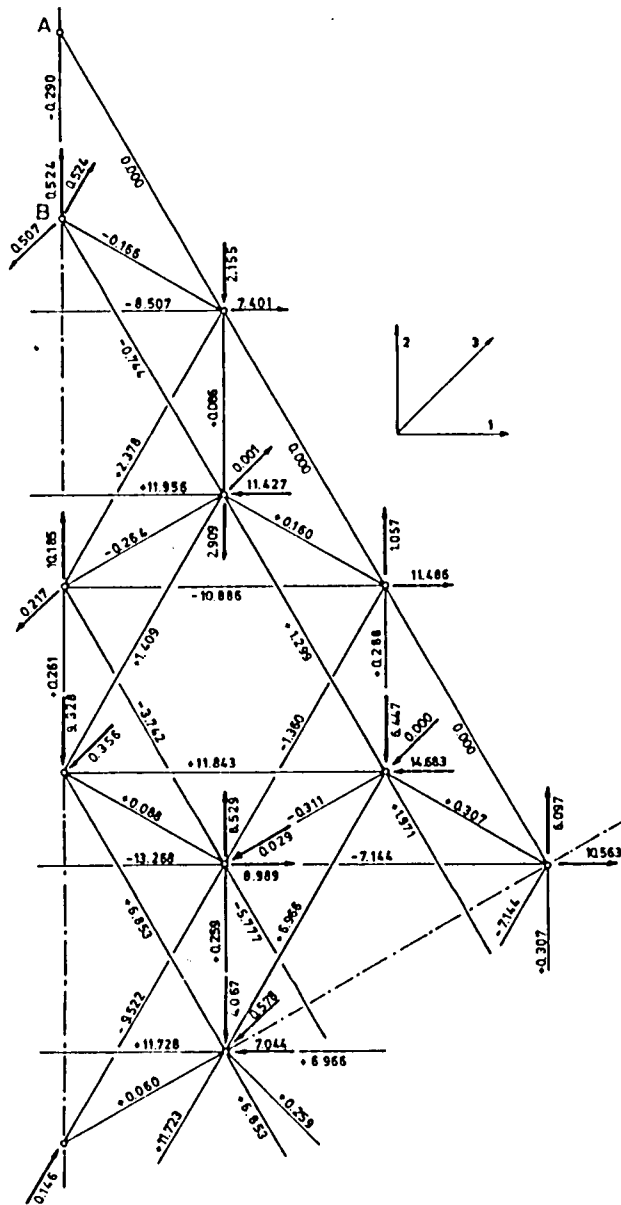


Fig. 3.5-23

No estudo da estrutura contínua ao corte supõe-se que as hastes do dois planos horizontais são infinitamente rígidas, de modo a separar a deformação produzida por corte, da deformação



onde  $c$  é o factor de forma, que neste caso é igual a 1;  $G$  é o módulo de elasticidade tangencial; e  $A$  é a área da secção da estrutura, de largura unitária e altura igual à espessura da estrutura.

As condições de ligação ao exterior levam a considerar na equação anterior que no contorno da estrutura  $u_t = 0$ , escrevendo-se a equação dos deslocamentos da seguinte forma:

$$u_t = Fh / [ 2 (3^{1/2}) EA ] [ y^3 / h^3 - 3x^2y / h^3 - 3(3^{1/2})(x^2 + y^2) / h^2 + 12(3^{1/2}) ]$$

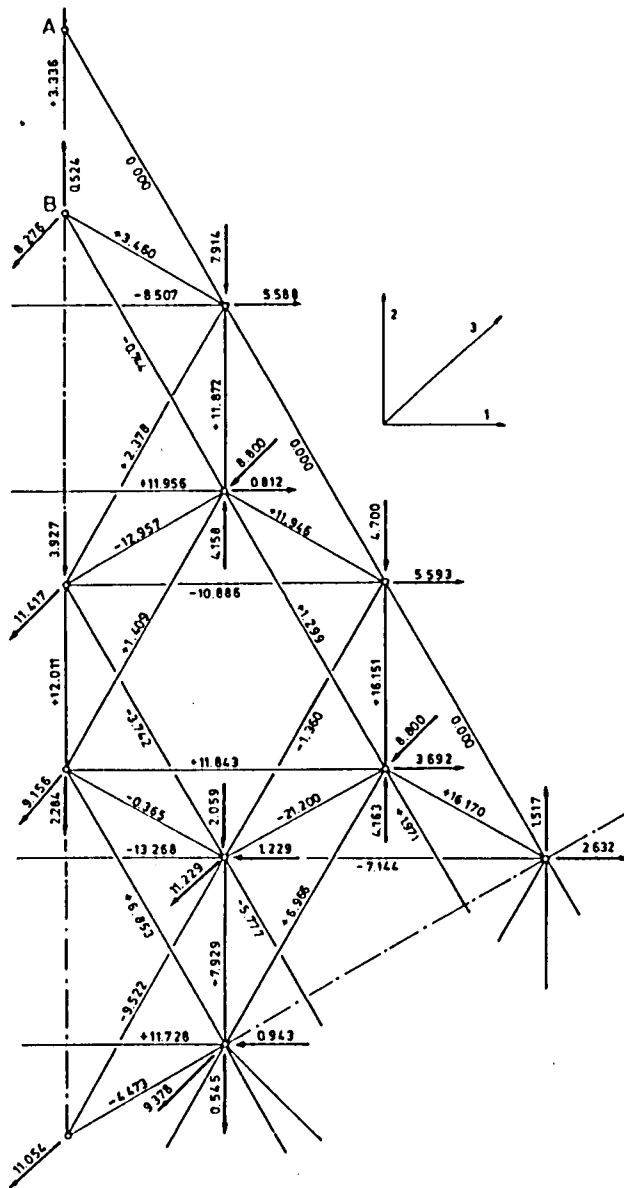


Fig. 3.5-25

Com o valor dos deslocamentos nos nós obtiveram-se as dilatações das barras e posteriormente as forças internas, e as forças externas pelas equações de equilíbrio em cada nó. As forças internas e as forças externas obtidas são representadas na figura 3.5-24, numa zona limitada por dois eixos de simetria contíguos, com a indicação do seu valor.

Efectuando a soma dos efeitos produzidos pelas duas deformações, flexão e corte, obtém-se a distribuição das forças internas e externas obtidas pelas equações de equilíbrio em cada nó, representada na figura 3.5-25.

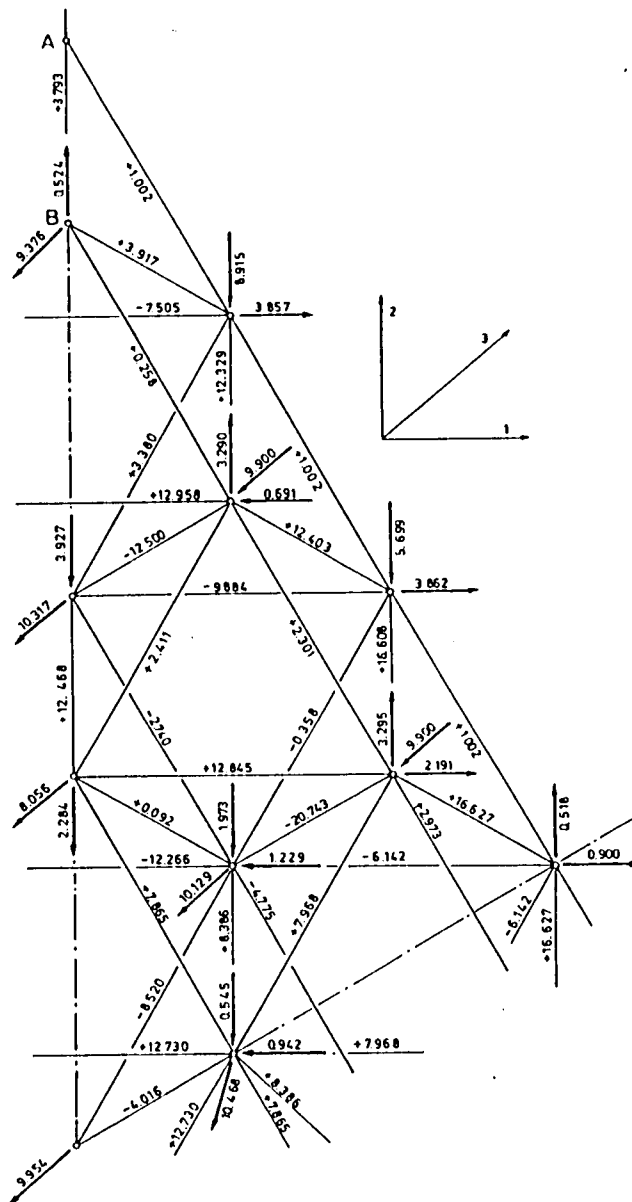


Fig. 3.5 - 26

Da análise dessa distribuição verifica-se a existência de forças horizontais que não estão em equilíbrio. Pela distribuição das mesmas, em correspondência com os bordos da estrutura, verifica-se tratar-se de uma distribuição uniforme de forças normais e tangenciais, acompanhadas da correspondente distribuição de momentos flectores e torsores. A eliminação dessas forças é efectuada compreendendo somente as hastes dos planos horizontais com regime uniforme de forças e de deslocamentos.

As forças horizontais não equilibradas têm neste caso um valor médio  $F_n$  igual a 1,766, a que corresponde a tensão normal  $\sigma_n = F_n / h$ . Tendo em conta as primeiras relações constitutivas, determinadas neste exemplo, para os planos horizontais, e que à distribuição uniforme de pressões sobre o bordo corresponde um estado de deformação caracterizado pela dilactação uniforme:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x = \varepsilon_y = (\sqrt{3})/3 \cdot h / (EA)$$

e a força:

$$S_n = \Delta I_n (EA / h) = (\sqrt{3}/3) F_n$$

o regime de forças internas e externas obtidas pelas equações de equilíbrio em cada nó, passa a ser o regime representado na figura 3.5-26. Da análise dessa distribuição verifica-se que se mantém a existência de forças horizontais não equilibradas, sendo no entanto de menor valor.

O grau de aproximação conseguido é verificado pela diferença entre as forças efectivamente aplicadas sobre a estrutura, e aquelas que resultam da que foi considerada última fase do estudo, já que se poderá continuar o estudo de modo a aumentar sempre o grau de aproximação.

Procede-se de seguida ao cálculo da estrutura utilizando o programa EERM. A numeração dos nós e das barras efectuada na estrutura para a realização do ficheiro de dados, está representada na figura 3.5-27.

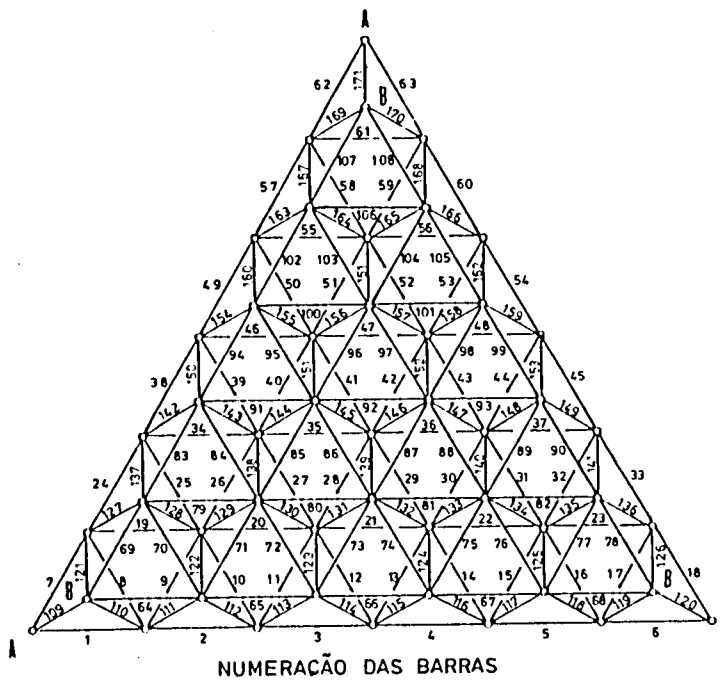
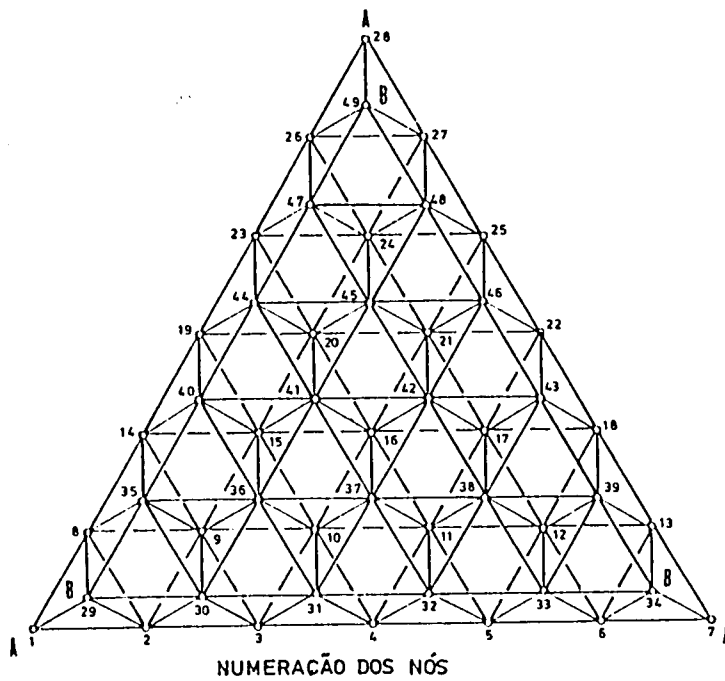


Fig. 3.5-27

O ficheiro de dados para este problema assume a seguinte forma:

## Terceiro exemplo de uma estrutura tridimensional

| 49 | 171 | 10     | 1 | 1      |            |           |
|----|-----|--------|---|--------|------------|-----------|
| 1  |     | 1.00   |   |        | 206000.000 | .00001500 |
| 1  |     | .0000  |   | 10.392 |            | .000      |
| 2  |     | 2.000  |   | 10.392 |            | .000      |
| 3  |     | 4.000  |   | 10.392 |            | .000      |
| 4  |     | 6.000  |   | 10.392 |            | .000      |
| 5  |     | 8.000  |   | 10.392 |            | .000      |
| 6  |     | 10.000 |   | 10.392 |            | .000      |
| 7  |     | 12.000 |   | 10.392 |            | .000      |
| 8  |     | 1.000  |   | 8.660  |            | .000      |
| 9  |     | 3.000  |   | 8.660  |            | .000      |
| 10 |     | 5.000  |   | 8.660  |            | .000      |
| 11 |     | 7.000  |   | 8.660  |            | .000      |
| 12 |     | 9.000  |   | 8.660  |            | .000      |
| 13 |     | 11.000 |   | 8.660  |            | .000      |
| 14 |     | 2.000  |   | 6.928  |            | .000      |
| 15 |     | 4.000  |   | 6.928  |            | .000      |
| 16 |     | 6.000  |   | 6.928  |            | .000      |
| 17 |     | 8.000  |   | 6.928  |            | .000      |
| 18 |     | 10.000 |   | 6.928  |            | .000      |
| 19 |     | 3.000  |   | 5.196  |            | .000      |
| 20 |     | 5.000  |   | 5.196  |            | .000      |
| 21 |     | 7.000  |   | 5.196  |            | .000      |
| 22 |     | 9.000  |   | 5.196  |            | .000      |
| 23 |     | 4.000  |   | 3.464  |            | .000      |
| 24 |     | 6.000  |   | 3.464  |            | .000      |
| 25 |     | 8.000  |   | 3.464  |            | .000      |
| 26 |     | 5.000  |   | 1.732  |            | .000      |
| 27 |     | 7.000  |   | 1.732  |            | .000      |
| 28 |     | 6.000  |   | .000   |            | .000      |
| 29 |     | 1.000  |   | 9.815  | 1.633      |           |
| 30 |     | 3.000  |   | 9.815  | 1.633      |           |
| 31 |     | 5.000  |   | 9.815  | 1.633      |           |
| 32 |     | 7.000  |   | 9.815  | 1.633      |           |
| 33 |     | 9.000  |   | 9.815  | 1.633      |           |
| 34 |     | 11.000 |   | 9.815  | 1.633      |           |
| 35 |     | 2.000  |   | 8.083  | 1.633      |           |
| 36 |     | 4.000  |   | 8.083  | 1.633      |           |
| 37 |     | 6.000  |   | 8.083  | 1.633      |           |
| 38 |     | 8.000  |   | 8.083  | 1.633      |           |
| 39 |     | 10.000 |   | 8.083  | 1.633      |           |
| 40 |     | 3.000  |   | 6.351  | 1.633      |           |
| 41 |     | 5.000  |   | 6.351  | 1.633      |           |
| 42 |     | 7.000  |   | 6.351  | 1.633      |           |
| 43 |     | 9.000  |   | 6.351  | 1.633      |           |
| 44 |     | 4.000  |   | 4.619  | 1.633      |           |
| 45 |     | 6.000  |   | 4.619  | 1.633      |           |
| 46 |     | 8.000  |   | 4.619  | 1.633      |           |
| 47 |     | 5.000  |   | 2.887  | 1.633      |           |
| 48 |     | 7.000  |   | 2.887  | 1.633      |           |
| 49 |     | 6.000  |   | 1.1547 | 1.633      |           |
| 1  | 1   | 2      | 1 |        |            |           |
| 2  | 2   | 3      | 1 |        |            |           |
| 3  | 3   | 4      | 1 |        |            |           |
| 4  | 4   | 5      | 1 |        |            |           |
| 5  | 5   | 6      | 1 |        |            |           |
| 6  | 6   | 7      | 1 |        |            |           |
| 7  | 1   | 8      | 1 |        |            |           |
| 8  | 2   | 8      | 1 |        |            |           |
| 9  | 2   | 9      | 1 |        |            |           |
| 10 | 3   | 9      | 1 |        |            |           |
| 11 | 3   | 10     | 1 |        |            |           |
| 12 | 4   | 10     | 1 |        |            |           |
| 13 | 4   | 11     | 1 |        |            |           |
| 14 | 5   | 11     | 1 |        |            |           |
| 15 | 5   | 12     | 1 |        |            |           |
| 16 | 6   | 12     | 1 |        |            |           |
| 17 | 6   | 13     | 1 |        |            |           |
| 18 | 7   | 13     | 1 |        |            |           |
| 19 | 8   | 9      | 1 |        |            |           |
| 20 | 9   | 10     | 1 |        |            |           |
| 21 | 10  | 11     | 1 |        |            |           |
| 22 | 11  | 12     | 1 |        |            |           |
| 23 | 12  | 13     | 1 |        |            |           |
| 24 | 8   | 14     | 1 |        |            |           |
| 25 | 9   | 14     | 1 |        |            |           |
| 26 | 9   | 15     | 1 |        |            |           |
| 27 | 10  | 15     | 1 |        |            |           |
| 28 | 10  | 16     | 1 |        |            |           |
| 29 | 11  | 16     | 1 |        |            |           |
| 30 | 11  | 17     | 1 |        |            |           |
| 31 | 12  | 17     | 1 |        |            |           |
| 32 | 12  | 18     | 1 |        |            |           |
| 33 | 13  | 18     | 1 |        |            |           |

|     |    |    |   |
|-----|----|----|---|
| 34  | 14 | 15 | 1 |
| 35  | 15 | 16 | 1 |
| 36  | 16 | 17 | 1 |
| 37  | 17 | 18 | 1 |
| 38  | 14 | 19 | 1 |
| 39  | 15 | 19 | 1 |
| 40  | 15 | 20 | 1 |
| 41  | 16 | 20 | 1 |
| 42  | 16 | 21 | 1 |
| 43  | 17 | 21 | 1 |
| 44  | 17 | 22 | 1 |
| 45  | 18 | 22 | 1 |
| 46  | 19 | 20 | 1 |
| 47  | 20 | 21 | 1 |
| 48  | 21 | 22 | 1 |
| 49  | 19 | 23 | 1 |
| 50  | 20 | 23 | 1 |
| 51  | 20 | 24 | 1 |
| 52  | 21 | 24 | 1 |
| 53  | 21 | 25 | 1 |
| 54  | 22 | 25 | 1 |
| 55  | 23 | 24 | 1 |
| 56  | 24 | 25 | 1 |
| 57  | 23 | 26 | 1 |
| 58  | 24 | 26 | 1 |
| 59  | 24 | 27 | 1 |
| 60  | 25 | 27 | 1 |
| 61  | 26 | 27 | 1 |
| 62  | 26 | 28 | 1 |
| 63  | 27 | 28 | 1 |
| 64  | 29 | 30 | 1 |
| 65  | 30 | 31 | 1 |
| 66  | 31 | 32 | 1 |
| 67  | 32 | 33 | 1 |
| 68  | 33 | 34 | 1 |
| 69  | 29 | 35 | 1 |
| 70  | 30 | 35 | 1 |
| 71  | 30 | 36 | 1 |
| 72  | 31 | 36 | 1 |
| 73  | 31 | 37 | 1 |
| 74  | 32 | 37 | 1 |
| 75  | 32 | 38 | 1 |
| 76  | 33 | 38 | 1 |
| 77  | 33 | 39 | 1 |
| 78  | 34 | 39 | 1 |
| 79  | 35 | 36 | 1 |
| 80  | 36 | 37 | 1 |
| 81  | 37 | 38 | 1 |
| 82  | 38 | 39 | 1 |
| 83  | 35 | 40 | 1 |
| 84  | 36 | 40 | 1 |
| 85  | 36 | 41 | 1 |
| 86  | 37 | 41 | 1 |
| 87  | 37 | 42 | 1 |
| 88  | 38 | 42 | 1 |
| 89  | 38 | 43 | 1 |
| 90  | 39 | 43 | 1 |
| 91  | 40 | 41 | 1 |
| 92  | 41 | 42 | 1 |
| 93  | 42 | 43 | 1 |
| 94  | 40 | 44 | 1 |
| 95  | 41 | 44 | 1 |
| 96  | 41 | 45 | 1 |
| 97  | 42 | 45 | 1 |
| 98  | 42 | 46 | 1 |
| 99  | 43 | 46 | 1 |
| 100 | 44 | 45 | 1 |
| 101 | 45 | 46 | 1 |
| 102 | 44 | 47 | 1 |
| 103 | 45 | 47 | 1 |
| 104 | 45 | 48 | 1 |
| 105 | 46 | 48 | 1 |
| 106 | 47 | 48 | 1 |
| 107 | 47 | 49 | 1 |
| 108 | 48 | 49 | 1 |
| 109 | 1  | 29 | 1 |
| 110 | 2  | 29 | 1 |
| 111 | 2  | 30 | 1 |
| 112 | 3  | 30 | 1 |
| 113 | 3  | 31 | 1 |
| 114 | 4  | 31 | 1 |
| 115 | 4  | 32 | 1 |
| 116 | 5  | 32 | 1 |
| 117 | 5  | 33 | 1 |
| 118 | 6  | 33 | 1 |
| 119 | 6  | 34 | 1 |
| 120 | 7  | 34 | 1 |
| 121 | 8  | 29 | 1 |

|          |      |      |        |       |       |       |
|----------|------|------|--------|-------|-------|-------|
| 122      | 9    | 30   | 1      |       |       |       |
| 123      | 10   | 31   | 1      |       |       |       |
| 124      | 11   | 32   | 1      |       |       |       |
| 125      | 12   | 33   | 1      |       |       |       |
| 126      | 13   | 34   | 1      |       |       |       |
| 127      | 8    | 35   | 1      |       |       |       |
| 128      | 9    | 35   | 1      |       |       |       |
| 129      | 9    | 36   | 1      |       |       |       |
| 130      | 10   | 36   | 1      |       |       |       |
| 131      | 10   | 37   | 1      |       |       |       |
| 132      | 11   | 37   | 1      |       |       |       |
| 133      | 11   | 38   | 1      |       |       |       |
| 134      | 12   | 38   | 1      |       |       |       |
| 135      | 12   | 39   | 1      |       |       |       |
| 136      | 13   | 39   | 1      |       |       |       |
| 137      | 14   | 35   | 1      |       |       |       |
| 138      | 15   | 36   | 1      |       |       |       |
| 139      | 16   | 37   | 1      |       |       |       |
| 140      | 17   | 38   | 1      |       |       |       |
| 141      | 18   | 39   | 1      |       |       |       |
| 142      | 14   | 40   | 1      |       |       |       |
| 143      | 15   | 40   | 1      |       |       |       |
| 144      | 15   | 41   | 1      |       |       |       |
| 145      | 16   | 41   | 1      |       |       |       |
| 146      | 16   | 42   | 1      |       |       |       |
| 147      | 17   | 42   | 1      |       |       |       |
| 148      | 17   | 43   | 1      |       |       |       |
| 149      | 18   | 43   | 1      |       |       |       |
| 150      | 19   | 40   | 1      |       |       |       |
| 151      | 20   | 41   | 1      |       |       |       |
| 152      | 21   | 42   | 1      |       |       |       |
| 153      | 22   | 43   | 1      |       |       |       |
| 154      | 19   | 44   | 1      |       |       |       |
| 155      | 20   | 44   | 1      |       |       |       |
| 156      | 20   | 45   | 1      |       |       |       |
| 157      | 21   | 45   | 1      |       |       |       |
| 158      | 21   | 46   | 1      |       |       |       |
| 159      | 22   | 46   | 1      |       |       |       |
| 160      | 23   | 44   | 1      |       |       |       |
| 161      | 24   | 45   | 1      |       |       |       |
| 162      | 25   | 46   | 1      |       |       |       |
| 163      | 23   | 47   | 1      |       |       |       |
| 164      | 24   | 47   | 1      |       |       |       |
| 165      | 24   | 48   | 1      |       |       |       |
| 166      | 25   | 48   | 1      |       |       |       |
| 167      | 26   | 47   | 1      |       |       |       |
| 168      | 27   | 48   | 1      |       |       |       |
| 169      | 26   | 49   | 1      |       |       |       |
| 170      | 27   | 49   | 1      |       |       |       |
| 171      | 28   | 49   | 1      |       |       |       |
| 1        | 1    | 1    |        | .0000 | .0000 | .0000 |
| 2        | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 3        | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 4        | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 5        | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 6        | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 7        | 1    | 1    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 13       | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 18       | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 22       | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 25       | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 27       | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 28       | 1    | 1    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 26       | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 23       | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 19       | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 14       | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| 8        | 0    | 0    | 1      | .0000 | .0000 | .0000 |
| Cargas F |      |      |        |       |       |       |
| 31       |      |      |        |       |       |       |
| 9        | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 10       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 11       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 12       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 15       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 16       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 17       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 20       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 21       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 24       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 29       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 30       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 31       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 32       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 33       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 34       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 35       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |
| 36       | .000 | .000 | 10.000 |       |       |       |

|    |      |      |        |
|----|------|------|--------|
| 37 | .000 | .000 | 10.000 |
| 38 | .000 | .000 | 10.000 |
| 39 | .000 | .000 | 10.000 |
| 40 | .000 | .000 | 10.000 |
| 41 | .000 | .000 | 10.000 |
| 42 | .000 | .000 | 10.000 |
| 43 | .000 | .000 | 10.000 |
| 44 | .000 | .000 | 10.000 |
| 45 | .000 | .000 | 10.000 |
| 46 | .000 | .000 | 10.000 |
| 47 | .000 | .000 | 10.000 |
| 48 | .000 | .000 | 10.000 |
| 49 | .000 | .000 | 10.000 |
| 0  |      |      |        |

Da execução do programa obtém-se o seguinte ficheiro de resultados:

ESTUDO DE UMA ESTRUTURA ESPACIAL RETICULADA METALICA  
Programa EEXM - Carlos Garcia (Eng. Civil -UP)

Assunto: Terceiro exemplo de uma estrutura tridimensional

Ficheiro de dados: ultok .DAD

Ficheiro de resultados: ultok .RES

DADOS DA ESTRUTURA

Nº total de nos = 49  
Nº total de barras = 171  
Nº de apoios = 18

Características dos materiais

| Mat.Nº | Area (cm2) | E (MPa)    | Coef.Termico |
|--------|------------|------------|--------------|
| 1      | 1.00       | 206000.000 | .00001500    |

Coordenadas dos nos

| no | coordx | coordy | coordz | no | coordx | coordy | coordz |
|----|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| 1  | .000   | 10.392 | .000   | 26 | 5.000  | 1.732  | .000   |
| 2  | 2.000  | 10.392 | .000   | 27 | 7.000  | 1.732  | .000   |
| 3  | 4.000  | 10.392 | .000   | 28 | 6.000  | .000   | .000   |
| 4  | 6.000  | 10.392 | .000   | 29 | 1.000  | 9.815  | 1.633  |
| 5  | 8.000  | 10.392 | .000   | 30 | 3.000  | 9.815  | 1.633  |
| 6  | 10.000 | 10.392 | .000   | 31 | 5.000  | 9.815  | 1.633  |
| 7  | 12.000 | 10.392 | .000   | 32 | 7.000  | 9.815  | 1.633  |
| 8  | 1.000  | 8.660  | .000   | 33 | 9.000  | 9.815  | 1.633  |
| 9  | 3.000  | 8.660  | .000   | 34 | 11.000 | 9.815  | 1.633  |
| 10 | 5.000  | 8.660  | .000   | 35 | 2.000  | 8.083  | 1.633  |
| 11 | 7.000  | 8.660  | .000   | 36 | 4.000  | 8.083  | 1.633  |
| 12 | 9.000  | 8.660  | .000   | 37 | 6.000  | 8.083  | 1.633  |
| 13 | 11.000 | 8.660  | .000   | 38 | 8.000  | 8.083  | 1.633  |
| 14 | 2.000  | 6.928  | .000   | 39 | 10.000 | 8.083  | 1.633  |
| 15 | 4.000  | 6.928  | .000   | 40 | 3.000  | 6.351  | 1.633  |
| 16 | 6.000  | 6.928  | .000   | 41 | 5.000  | 6.351  | 1.633  |
| 17 | 8.000  | 6.928  | .000   | 42 | 7.000  | 6.351  | 1.633  |
| 18 | 10.000 | 6.928  | .000   | 43 | 9.000  | 6.351  | 1.633  |
| 19 | 3.000  | 5.196  | .000   | 44 | 4.000  | 4.619  | 1.633  |
| 20 | 5.000  | 5.196  | .000   | 45 | 6.000  | 4.619  | 1.633  |
| 21 | 7.000  | 5.196  | .000   | 46 | 8.000  | 4.619  | 1.633  |
| 22 | 9.000  | 5.196  | .000   | 47 | 5.000  | 2.887  | 1.633  |
| 23 | 4.000  | 3.464  | .000   | 48 | 7.000  | 2.887  | 1.633  |
| 24 | 6.000  | 3.464  | .000   | 49 | 6.000  | 1.155  | 1.633  |
| 25 | 8.000  | 3.464  | .000   |    |        |        |        |

Características das barras

| Barra | ext.1 | ext.2 | comp. | cos a | cos b | cos g | Mat.Nº |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1     | 1     | 2     | 2.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |
| 2     | 2     | 3     | 2.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |
| 3     | 3     | 4     | 2.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |
| 4     | 4     | 5     | 2.00  | 1.000 | .000  | .000  | 1      |

|    |    |    |      |       |       |      |   |
|----|----|----|------|-------|-------|------|---|
| 5  | 5  | 6  | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 6  | 6  | 7  | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 7  | 1  | 8  | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 8  | 2  | 8  | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 9  | 2  | 9  | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 10 | 3  | 9  | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 11 | 3  | 10 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 12 | 4  | 10 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 13 | 4  | 11 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 14 | 5  | 11 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 15 | 5  | 12 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 16 | 6  | 12 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 17 | 6  | 13 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 18 | 7  | 13 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 19 | 8  | 9  | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 20 | 9  | 10 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 21 | 10 | 11 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 22 | 11 | 12 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 23 | 12 | 13 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 24 | 8  | 14 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 25 | 9  | 14 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 26 | 9  | 15 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 27 | 10 | 15 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 28 | 10 | 16 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 29 | 11 | 16 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 30 | 11 | 17 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 31 | 12 | 17 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 32 | 12 | 18 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 33 | 13 | 18 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 34 | 14 | 15 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 35 | 15 | 16 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 36 | 16 | 17 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 37 | 17 | 18 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 38 | 14 | 19 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 39 | 15 | 19 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 40 | 15 | 20 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 41 | 16 | 20 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 42 | 16 | 21 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 43 | 17 | 21 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 44 | 17 | 22 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 45 | 18 | 22 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 46 | 19 | 20 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 47 | 20 | 21 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 48 | 21 | 22 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 49 | 19 | 23 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 50 | 20 | 23 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 51 | 20 | 24 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 52 | 21 | 24 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 53 | 21 | 25 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 54 | 22 | 25 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 55 | 23 | 24 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 56 | 24 | 25 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 57 | 23 | 26 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 58 | 24 | 26 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 59 | 24 | 27 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 60 | 25 | 27 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 61 | 26 | 27 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 62 | 26 | 28 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 63 | 27 | 28 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 64 | 29 | 30 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 65 | 30 | 31 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 66 | 31 | 32 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 67 | 32 | 33 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 68 | 33 | 34 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 69 | 29 | 35 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 70 | 30 | 35 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 71 | 30 | 36 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 72 | 31 | 36 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 73 | 31 | 37 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 74 | 32 | 37 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 75 | 32 | 38 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 76 | 33 | 38 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 77 | 33 | 39 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 78 | 34 | 39 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 79 | 35 | 36 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 80 | 36 | 37 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 81 | 37 | 38 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 82 | 38 | 39 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 83 | 35 | 40 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 84 | 36 | 40 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 85 | 36 | 41 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 86 | 37 | 41 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 87 | 37 | 42 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 88 | 38 | 42 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 89 | 38 | 43 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 90 | 39 | 43 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 91 | 40 | 41 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 92 | 41 | 42 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |

|     |    |    |      |       |       |      |   |
|-----|----|----|------|-------|-------|------|---|
| 93  | 42 | 43 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 94  | 40 | 44 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 95  | 41 | 44 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 96  | 41 | 45 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 97  | 42 | 45 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 98  | 42 | 46 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 99  | 43 | 46 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 100 | 44 | 45 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 101 | 45 | 46 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 102 | 44 | 47 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 103 | 45 | 47 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 104 | 45 | 48 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 105 | 46 | 48 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 106 | 47 | 48 | 2.00 | 1.000 | .000  | .000 | 1 |
| 107 | 47 | 49 | 2.00 | .500  | -.866 | .000 | 1 |
| 108 | 48 | 49 | 2.00 | -.500 | -.866 | .000 | 1 |
| 109 | 1  | 29 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 110 | 2  | 29 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 111 | 2  | 30 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 112 | 3  | 30 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 113 | 3  | 31 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 114 | 4  | 31 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 115 | 4  | 32 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 116 | 5  | 32 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 117 | 5  | 33 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 118 | 6  | 33 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 119 | 6  | 34 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 120 | 7  | 34 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 121 | 8  | 29 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 122 | 9  | 30 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 123 | 10 | 31 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 124 | 11 | 32 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 125 | 12 | 33 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 126 | 13 | 34 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 127 | 8  | 35 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 128 | 9  | 35 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 129 | 9  | 36 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 130 | 10 | 36 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 131 | 10 | 37 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 132 | 11 | 37 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 133 | 11 | 38 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 134 | 12 | 38 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 135 | 12 | 39 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 136 | 13 | 39 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 137 | 14 | 35 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 138 | 15 | 36 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 139 | 16 | 37 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 140 | 17 | 38 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 141 | 18 | 39 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 142 | 14 | 40 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 143 | 15 | 40 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 144 | 15 | 41 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 145 | 16 | 41 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 146 | 16 | 42 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 147 | 17 | 42 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 148 | 17 | 43 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 149 | 18 | 43 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 150 | 19 | 40 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 151 | 20 | 41 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 152 | 21 | 42 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 153 | 22 | 43 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 154 | 19 | 44 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 155 | 20 | 44 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 156 | 20 | 45 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 157 | 21 | 45 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 158 | 21 | 46 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 159 | 22 | 46 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 160 | 23 | 44 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 161 | 24 | 45 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 162 | 25 | 46 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 163 | 23 | 47 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 164 | 24 | 47 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 165 | 24 | 48 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 166 | 25 | 48 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 167 | 26 | 47 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 168 | 27 | 48 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |
| 169 | 26 | 49 | 2.00 | .500  | -.289 | .817 | 1 |
| 170 | 27 | 49 | 2.00 | -.500 | -.289 | .817 | 1 |
| 171 | 28 | 49 | 2.00 | .000  | .577  | .816 | 1 |

Ligacoes ao exterior

| no lig. | codigo |   |   | valores impostos |       |       |
|---------|--------|---|---|------------------|-------|-------|
|         | x      | y | z | x                | y     | z     |
| 1       | 1      | 1 | 1 | .0000            | .0000 | .0000 |

|    |   |   |   |       |       |       |
|----|---|---|---|-------|-------|-------|
| 2  | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 3  | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 4  | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 5  | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 6  | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 7  | 1 | 1 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 13 | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 18 | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 22 | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 25 | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 27 | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 28 | 1 | 1 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 26 | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 23 | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 19 | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 14 | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 8  | 0 | 0 | 1 | .0000 | .0000 | .0000 |

# ACCOES A QUE ESTA SUJEITA A ESTRUTURA

Solicitacao N<sup>o</sup> 1

Titulo : Cargas F

Carga nos Nos - accao exterior

| No | Fx(KN) | Fy(KN) | Fz(KN) | No | Fx(KN) | Fy(KN) | Fz(KN) |
|----|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| 9  | .00    | .00    | 10.00  | 10 | .00    | .00    | 10.00  |
| 11 | .00    | .00    | 10.00  | 12 | .00    | .00    | 10.00  |
| 15 | .00    | .00    | 10.00  | 16 | .00    | .00    | 10.00  |
| 17 | .00    | .00    | 10.00  | 20 | .00    | .00    | 10.00  |
| 21 | .00    | .00    | 10.00  | 24 | .00    | .00    | 10.00  |
| 29 | .00    | .00    | 10.00  | 30 | .00    | .00    | 10.00  |
| 31 | .00    | .00    | 10.00  | 32 | .00    | .00    | 10.00  |
| 33 | .00    | .00    | 10.00  | 34 | .00    | .00    | 10.00  |
| 35 | .00    | .00    | 10.00  | 36 | .00    | .00    | 10.00  |
| 37 | .00    | .00    | 10.00  | 38 | .00    | .00    | 10.00  |
| 39 | .00    | .00    | 10.00  | 40 | .00    | .00    | 10.00  |
| 41 | .00    | .00    | 10.00  | 42 | .00    | .00    | 10.00  |
| 43 | .00    | .00    | 10.00  | 44 | .00    | .00    | 10.00  |
| 45 | .00    | .00    | 10.00  | 46 | .00    | .00    | 10.00  |
| 47 | .00    | .00    | 10.00  | 48 | .00    | .00    | 10.00  |
| 49 | .00    | .00    | 10.00  |    |        |        |        |

n<sup>o</sup> total de nos com cargas aplicadas = 31

# RESULTADOS DOS CALCULOS EFECTUADOS PELO PROGRAMA EERM

Solicitacao N<sup>o</sup> 1

Titulo : Cargas F

Esforços nas Barras

| Barra | N (KN)  | Barra | N (KN) |
|-------|---------|-------|--------|
| 1     | 5.327   | 87    | 13.680 |
| 2     | -1.029  | 88    | 6.679  |
| 3     | -4.298  | 89    | 15.076 |
| 4     | -4.298  | 90    | 1.409  |
| 5     | -1.029  | 91    | 9.599  |
| 6     | 5.327   | 92    | 13.681 |
| 7     | 5.325   | 93    | 9.599  |
| 8     | -6.608  | 94    | 2.721  |
| 9     | 1.919   | 95    | 9.596  |
| 10    | -8.392  | 96    | 6.679  |
| 11    | -1.661  | 97    | 6.679  |
| 12    | -5.946  | 98    | 9.596  |
| 13    | -5.946  | 99    | 2.721  |
| 14    | -1.661  | 100   | 15.079 |
| 15    | -8.392  | 101   | 15.079 |
| 16    | 1.919   | 102   | 1.410  |
| 17    | -6.608  | 103   | 2.776  |
| 18    | 5.325   | 104   | 2.776  |
| 19    | 1.915   | 105   | 1.410  |
| 20    | -6.070  | 106   | 13.374 |
| 21    | -8.956  | 107   | -0.861 |
| 22    | -6.070  | 108   | -0.861 |
| 23    | 1.915   | 109   | 2.361  |
| 24    | -1.029  | 110   | 4.945  |
| 25    | -8.396  | 111   | 9.130  |
| 26    | -6.066  | 112   | 15.186 |
| 27    | -13.098 | 113   | 14.992 |

|    |         |     |         |
|----|---------|-----|---------|
| 28 | -11.024 | 114 | 17.849  |
| 29 | -11.024 | 115 | 17.849  |
| 30 | -13.098 | 116 | 14.992  |
| 31 | -6.066  | 117 | 15.186  |
| 32 | -8.396  | 118 | 9.130   |
| 33 | -1.029  | 119 | 4.944   |
| 34 | -1.666  | 120 | 2.361   |
| 35 | -11.028 | 121 | 4.942   |
| 36 | -11.028 | 122 | -12.070 |
| 37 | -1.666  | 123 | -20.597 |
| 38 | -4.297  | 124 | -20.597 |
| 39 | -5.952  | 125 | -12.070 |
| 40 | -8.953  | 126 | 4.942   |
| 41 | -11.026 | 127 | 9.131   |
| 42 | -11.026 | 128 | -12.065 |
| 43 | -8.953  | 129 | 11.886  |
| 44 | -5.952  | 130 | .182    |
| 45 | -4.297  | 131 | 8.165   |
| 46 | -5.950  | 132 | 8.165   |
| 47 | -13.099 | 133 | .182    |
| 48 | -5.950  | 134 | 11.886  |
| 49 | -4.296  | 135 | -12.065 |
| 50 | -1.667  | 136 | 9.131   |
| 51 | -6.068  | 137 | 15.183  |
| 52 | -6.068  | 138 | .179    |
| 53 | -1.667  | 139 | -4.084  |
| 54 | -4.296  | 140 | .179    |
| 55 | -8.394  | 141 | 15.183  |
| 56 | -8.394  | 142 | 14.994  |
| 57 | -1.028  | 143 | -20.591 |
| 58 | 1.914   | 144 | 8.165   |
| 59 | 1.914   | 145 | -4.082  |
| 60 | -1.028  | 146 | -4.082  |
| 61 | -6.066  | 147 | 8.165   |
| 62 | 5.325   | 148 | -20.591 |
| 63 | 5.325   | 149 | 14.994  |
| 64 | -.861   | 150 | 17.046  |
| 65 | 1.408   | 151 | 8.164   |
| 66 | 2.719   | 152 | 8.164   |
| 67 | 1.408   | 153 | 17.046  |
| 68 | -.861   | 154 | 17.850  |
| 69 | -.861   | 155 | -20.591 |
| 70 | 13.372  | 156 | .181    |
| 71 | 2.777   | 157 | .181    |
| 72 | 15.077  | 158 | -20.591 |
| 73 | 9.598   | 159 | 17.850  |
| 74 | 9.598   | 160 | 14.989  |
| 75 | 15.077  | 161 | 11.887  |
| 76 | 2.777   | 162 | 14.989  |
| 77 | 13.372  | 163 | 15.186  |
| 78 | -.861   | 164 | -12.066 |
| 79 | 2.777   | 165 | -12.066 |
| 80 | 6.679   | 166 | 15.186  |
| 81 | 6.679   | 167 | 9.128   |
| 82 | 2.777   | 168 | 9.128   |
| 83 | 1.409   | 169 | 4.944   |
| 84 | 15.076  | 170 | 4.944   |
| 85 | 6.679   | 171 | 2.360   |
| 86 | 13.680  |     |         |

## Reaccoes nos apoios

| No | Rx(KN) | Ry(KN) | Rz(KN) |
|----|--------|--------|--------|
| 1  | -9.170 | -5.293 | 1.928  |
| 2  | .000   | .000   | 11.492 |
| 3  | .000   | .000   | 24.641 |
| 4  | .000   | .000   | 29.148 |
| 5  | .000   | .000   | 24.641 |
| 6  | .000   | .000   | 11.492 |
| 7  | 9.170  | -5.293 | 1.928  |
| 13 | .000   | .000   | 11.491 |
| 18 | .000   | .000   | 24.639 |
| 22 | .000   | .000   | 29.145 |
| 25 | .000   | .000   | 24.638 |
| 27 | .000   | .000   | 11.489 |
| 28 | .000   | 10.586 | 1.927  |
| 26 | .000   | .000   | 11.489 |
| 23 | .000   | .000   | 24.638 |
| 19 | .000   | .000   | 29.145 |
| 14 | .000   | .000   | 24.639 |
| 8  | .000   | .000   | 11.491 |

## Deslocamentos

| No | dx(m) | dy(m) | dz(m) | No | dx(m) | dy(m) | dz(m) |
|----|-------|-------|-------|----|-------|-------|-------|
| 1  | .000  | .000  | .000  | 26 | .000  | -.001 | .000  |

|    |       |       |       |    |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|----|-------|-------|-------|
| 2  | -.001 | .001  | .000  | 27 | .000  | -.001 | .000  |
| 3  | .000  | .001  | .000  | 28 | .000  | .000  | .000  |
| 4  | .000  | .001  | .000  | 29 | .000  | .000  | .000  |
| 5  | .000  | .001  | .000  | 30 | .000  | -.001 | -.002 |
| 6  | .001  | .001  | .000  | 31 | .000  | -.002 | -.003 |
| 7  | .000  | .000  | .000  | 32 | .000  | -.002 | -.003 |
| 8  | -.001 | .000  | .000  | 33 | .000  | -.001 | -.002 |
| 9  | -.001 | .001  | -.005 | 34 | .000  | .000  | .000  |
| 10 | .000  | .001  | -.008 | 35 | .001  | .000  | -.002 |
| 11 | .000  | .001  | -.008 | 36 | .001  | .000  | -.007 |
| 12 | .001  | .001  | -.005 | 37 | .000  | -.001 | -.009 |
| 13 | .001  | .000  | .000  | 38 | -.001 | .000  | -.007 |
| 14 | -.001 | .000  | .000  | 39 | -.001 | .000  | -.002 |
| 15 | -.001 | .000  | -.008 | 40 | .002  | .001  | -.003 |
| 16 | .000  | .000  | -.010 | 41 | .001  | .000  | -.009 |
| 17 | .001  | .000  | -.008 | 42 | -.001 | .000  | -.009 |
| 18 | .001  | .000  | .000  | 43 | -.002 | .001  | -.003 |
| 19 | -.001 | -.001 | .000  | 44 | .001  | .001  | -.003 |
| 20 | -.001 | -.001 | -.008 | 45 | .000  | .001  | -.007 |
| 21 | .001  | -.001 | -.008 | 46 | -.001 | .001  | -.003 |
| 22 | .001  | -.001 | .000  | 47 | -.001 | .001  | -.002 |
| 23 | -.001 | -.001 | .000  | 48 | -.001 | .001  | -.002 |
| 24 | .000  | -.001 | -.005 | 49 | .000  | .000  | .000  |
| 25 | .001  | -.001 | .000  |    |       |       |       |

A diferença dos valores das forças nas hastes, que foram obtidos pelos dois métodos é justificável pelo facto do grau de aproximação obtida não ser o maior, ou ainda pelo facto da dimensão da estrutura, especialmente no que se refere à altura da mesma, não ser a melhor para justificar a hipótese posta na base das soluções técnicas adoptadas.



## CAPÍTULO IV

### 4 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

No segundo capítulo foram expostos dois métodos - método dos deslocamentos e método das forças - que operam sobre o método geral do método directo, ou seja sobre o sistema geral de equações recto de uma matriz de ordem e grau  $S + C$ , reduzindo-o a um sistema parcial recto de uma matriz de ordem e grau, respectivamente  $C$  ou  $S - C$ , segundo se trate do método dos deslocamentos, ou do método das forças. A operação corresponde a dois processos analíticos que têm naturalmente uma confirmação mecânica na estrutura.

O método dos deslocamentos consiste em assegurar um sistema de deslocamentos dos nós da estrutura, na determinação da consequente variação de comprimento das barras, que através da relação força - dilatação, é expressa como efeito da força na barra e de eventuais constrangimentos. As equações de equilíbrio dos nós, de uma estrutura sujeita à acção das forças externas e internas (transmitidas pelas barras e expressas em função dos deslocamentos dos nós), são equações resolventes do método dos deslocamentos.

O método das forças consiste, de um modo idêntico, na substituição das  $S - C$  barras da estrutura com as forças relativas transmitidas aos nós, e em considerar estas como forças externas. Naturalmente, a substituição das barras com a força relativa deve ser realizada de modo a que, a restante estrutura seja cinematicamente indeformável, condição que corresponde analiticamente à possibilidade de inversão da matriz  $A_j$ . As forças  $X_j$  nas barras da restante estrutura isostática ficam expressas em função das forças externas, e das forças de substituição. Sucessivamente, através das equações de compatibilidade das barras da estrutura isostática, determinam-se os deslocamentos nos nós. A ulterior condição de compatibilidade, relativa às barras supra-número e ainda não considera-

das, exprime nada mais que a compatibilidade da dilatação destas barras, sujeitas às forças de substituição e a eventuais constrangimentos, com os deslocamentos dos nós da estrutura isostática. A inversão deste sistema fornece o valor de  $X_j$ , do qual se chega ao valor de  $X_i$  e do deslocamento  $x$ .

Como foi observado, o método das forças conduz a um sistema resolvente com um número de incógnitas - e consequentemente de equações - inferior ao sistema que se obtém operando com o método dos deslocamentos. Todavia é necessário observar que, a estrutura das equações de compatibilidade em relação às forças exige cálculos preparatórios mais complexos do que aqueles exigidos pela escrita das equações de equilíbrio em relação aos deslocamentos. A vantagem derivante do menor número de incógnitas iniciais contrapõe-se à desvantagem ligada à complexibilidade operativa na elaboração do sistema de equações resolventes.

O método dos deslocamentos conduzindo a um sistema de equações com um maior número de incógnitas, apresenta no entanto a inigualável vantagem de uma grande simplicidade na elaboração dos dados.

O método contínuo constitui um instrumento eficaz de trabalho quando não seja possível determinar a solução rigorosa do problema. Na base deste método está a compreensão e determinação do contínuo equivalente ao meio reticulado, encontrando assim este método a sua validade quando se conheça a solução rigorosa do problema contínuo correspondente àquele que se estuda. Se essa solução não é conhecida, não é possível indicar um procedimento geral de cálculo, e sobretudo não se consegue estabelecer a fórmula que fornece os erros conexos à aplicação do método.

Acerca da natureza e dos significados dos erros, verificados no método contínuo, pode-se observar que eles constituem, de certo modo, o correspondente ao erro que se comete quando se resolve um problema contínuo com o emprego das diferenças finitas. Além disso, nos casos estudados pode-se reconhecer que a estrutura reticulada representa fisicamente o contínuo tratado com as diferenças finitas, logo o erro é estritamente ligado, entre ambos os casos, à substituição que se faz de um material contínuo com um descontínuo, e vice-versa. A confirmação física a esta observação é imediata, na medida em que, a definição do modelo contínuo da estrutura reticulada foi sempre realizada partindo da hipótese que no contorno do nó o grau de esforço fosse definido pelas seis componentes de tensão  $\sigma_x \dots \tau_{xy}$ , portanto, a difusão da propriedade elástica de uma haste singular, nos respectivos canais, não tem alguma influência nesta situação. Assim o parâmetro característico  $A_n / a_n$

que sobressai nos coeficientes de elasticidade do meio contínuo, associados aos módulos de elasticidade  $E_n$  da haste singular estão em ordem para representar esta difusão.

É ainda interessante observar que a definição das constantes elásticas do contínuo equivalente ao retículo depende essencialmente das correlações  $A_n / a_n$ . Assim é possível associar mais estruturas reticuladas ( caracterizadas por uma dilatação uniforme do retículo geométrico de apoio e das secções rectas das hastes ) a um único modelo contínuo. Tais estruturas são todas equivalentes entre elas e ao correspondente contínuo, pois são caracterizadas pela mesma matriz dos coeficientes de elasticidade, o que equivale a dizer que se comportam do mesmo modo no respeitante aos campos uniformes das tensões ( vice-versa, aqueles comportam-se de modo diverso quando se têm variações no campo ).

O exame das equações que regem os problemas mostra que os erros que se cometem estão ligados ao grau das funções que representam as componentes dos deslocamentos. Se estes resultam lineares não se confrontam erros ( os campos de deslocamentos lineares são característicos dos seis estados puros das tensões  $\sigma_x \dots \tau_{xy}$  ).

No capítulo III, nos exemplo do ponto 3.3 obteve-se na dedução das constantes elásticas dos meios examinados, valores iguais a 3 e 4, respectivamente nos casos bi e tridimensionais, para o coeficiente  $m$  de Poisson. Tais resultados não constituem resultados particulares dos meios examinados, mas sim resultados gerais, característicos dos meios reticulados isotrópicos, ou seja, para qualquer configuração geométrica e mecânica do meio isotrópico que se estude, o valor de  $m$  será sempre 3 ou 4 conforme se trate de um caso bi ou tridimensional, respectivamente, constituindo esta uma das características essenciais dos meios reticulados isotrópicos.



## BIBLIOGRAFIA

Wolfgang Schueller, *Horizontal - Spain Building Structures*, Wiley - Interscience.

N. Esquillan and Y. Saillard, *Hanging Roofs*, North - Holland Publishing Company, 1963.

R. M. Davies, *Space Structures*, 1966.

Ramon Argüelles Alvarez, *La Estructura Metálica Hoy*, Libreria Tecnica Bellisco, 1975.

B. Kato, K. Takanashi, Y. Tsushima and Y. Hirata, *A Space Truss Squarer Pyramids Units*.

Jean Claude Larger, Serge Kétoff, Michel Maillé, e Louis Paul Untersteller, *Introduzione Al Calcolo Delle Strutture Reticolari Spaziali*, Centro Italiano Sviluppo Impieghi Acciaio - Milano, 1979.

S. Di Pasquale, *Metodi Di Calcolo Per Le Strutture Spaziali*, Centro Italiano Sviluppo Impieghi Acciaio - Milano, 1981.

Stephen P. Timoshenko, *The Theory Of Elasticity*, McGraw - Hill, 1970.

Stephen P. Timoshenko and S. Woinowsky - Krieger, *Theory Of Plates And Shells*, McGraw - Hill, 1970.

Acciaio, *Rivista Mensile Sugli Impieghi Dell' Acciaio Nel Mondo*, FEDERACCIAI - Centro Promozione e Sviluppo, Abril 1989.

Konrad Gatz e Franz Hart, *Edifícios Con Estrutura Metálica*, Editorial Gustavo Gili S.A., 1968.

Frederico Pimentel, *Aportamentos para a História dos Caminhos de Ferro Portugueses*, 1892.

Carlos Gomes, *A Jóia que o Porto Não Amou*, JND, Abril 1991.

P. Johnson et Nicholas Grimshaw, *Verre et Acier*, L'Architecture D'Aujourd' Hui, 1980.

*Fortran For MS. OS/2 And MS-DOS Operating Systems*, Microsoft Corporation.



FACULDADE DE ENGENHARIA

UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000072498