

Bernardo de Vasconcelos Porto Furtado de Mendonça

Agradecimentos

Ao Professor Doutor José Fernando Dias Rodrigues que acompanhou e orientou este trabalho de investigação, agradeço o seu enorme apoio, estímulo, amizade e dedicação durante todo o período de trabalho. Agradeço

**MÉTODOS NUMÉRICOS DE ANÁLISE DAS VIBRAÇÕES
TRANSVERSAIS DE ROTORES**

Ao Professor Doutor Paulo Tavares de Castro agradeço todo o incentivo e apoio demonstrados durante todo este trabalho.

Ao Professor Doutor Francisco Queirós de Melo e ao Eng^o Mário Vaz agradeço toda a ajuda e disponibilidade que dispensaram para o esclarecimento de questões e dúvidas que foram surgindo ao longo do trabalho.

Aos meus colegas de gabinete Eng^{as} António Ferreira, Alexandre Sottomayor, Amândio Campos, Fernando Ferreira, Jorge Castro, José Simões,

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Estrutural

Agradeço de modo geral todo o grupo de mecânica aplicada pela simpática demonstração e pelo bom ambiente de trabalho proporcionado durante todo o período desta investigação.

624(1043) MENDONÇA

UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA M
N.º 19510-af
CDU
Data 18 5 1993

N.º 8470

043 M

M494 m

FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

1992

Agradecimentos

Ao Professor Doutor José Fernando Dias Rodrigues que acompanhou e orientou este trabalho de investigação agradeço o seu enorme apoio, estímulo, amizade e dedicação manifestados em todo o período de trabalho. Agradeço ainda todo o esforço na coordenação do Curso de Mestrado que o permitiu levar a bom termo.

Ao Professor Doutor Paulo Tavares de Castro agradeço todo o incentivo e apoio demonstrados durante todo este trabalho.

Ao Professor Doutor Francisco Queirós de Melo e ao Eng^o Mário Vaz agradeço toda a ajuda e disponibilidade que dispensaram para o esclarecimento de questões e dúvidas que foram surgindo ao longo do trabalho.

Aos meus colegas de gabinete Eng^{os} António Ferreira, Alexandre Sottomayor, Armando Campos, Fernando Ferreira, Jorge Castro, José Simões, Rui Miranda Guedes agradeço todo apoio e amizade demonstrados.

Agradeço de modo geral todo o grupo de mecânica aplicada pela simpatia demonstrada e pelo bom ambiente de trabalho proporcionado durante todo o período desta investigação.

Agradeço igualmente à JNICT (Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica) todo apoio financeiro que tornou possível a realização deste trabalho.

RESUMO

O desenvolvimento e implementação de técnicas numéricas para a caracterização dos regimes estacionário e transitório forçado de rotores de geometria complexa acompanhados da análise fenomenológica e do estabelecimento e análise de soluções analíticas e numéricas de modelos simples constituem o objectivo deste trabalho.

Para o regime estacionário devido às forças harmónicas resultantes de excentricidades de massas em relação ao eixo de rotação do rotor e de movimentos harmónicos dos apoios transmitidos pelas fundações apresenta-se um procedimento de cálculo das amplitudes e orientação espacial das trajectórias elípticas dos pontos do eixo de rotação.

O regime transitório contempla a força devida a uma excentricidade de massa quando o rotor se encontra sujeito a uma aceleração da sua rotação. Para a sua implementação desenvolve-se uma técnica de integração no tempo baseada no método no Newmark β e reformula-se o modelo de elementos finitos de modo a incluir os efeitos da aceleração da rotação nas equações do movimento. Um ênfase particular é colocado na análise da resposta quando o rotor passa pelas suas velocidades críticas.

É ainda analisado um caso prático da indústria dos motores eléctricos para ilustrar a aplicabilidade e interesse da utilização das técnicas desenvolvidas e implementadas.

ABSTRACT

This work concerns to the assesement of numerical techniques to study the dynamic behaviour of rotors.

Techniques to obtain a finite element model to study the behaviour of complex geometry rotors, in a real static, rotary and complex coordinate system are described. The development of simple analytical models are made in order to explain some of the typical responses and to validate the numerical algorithms developed.

Numerical techniques are developed and integrated in a computer program to analyse the rotor's unbalance response, the rotor's response for base excitation by forced displacements and the rotor's transient response.

A new model is developed to study the rotor's transient response when it suffers an acceleration. A new modified Newmark β time integrating scheme is used because the matrices change and the step integration has to change during the acceleration. The study of the rotor's transient response when, during the acceleration, it passes a critical speed was also carried out.

A real example of the study of an electric motor is presented.

Índice Geral

1 - Introdução.....	1.1
1.1 - Generalidades.....	1.1
1.2- Análise bibliográfica.....	1.2
1.3- Objectivos do trabalho	1.6
2- Modelos analíticos.....	2.1
2.1- Rotor de Jeffcott - Regime livre e harmónico.....	2.1
2.1.1- Sistema conservativo.....	2.2
2.1.2- Sistema dissipativo	2.4
2.1.2.1- Efeito do atrito interno.....	2.5
2.1.2.2- Efeito do atrito externo.....	2.7
2.1.2.3- Efeito conjunto do atrito interno e do atrito externo	2.8
2.1.2.4- Efeito do atrito histerético.....	2.9
2.2 - Influência do efeito giroscópico	2.10
2.2.1 - Determinação do vector momento dinâmico.....	2.11
2.2.2 - Determinação do vector quantidade de aceleração.....	2.15
2.3 -Rotor com um disco rígido.....	2.16
2.3.1 - Regime livre	2.19
2.3.2 - Regime harmónico	2.21
2.3.3 - Exemplo numérico.....	2.22
2.4 - Rotor com massa distribuída.	2.24
2.4.1 - Equações diferenciais de movimento.....	2.24
2.4.2 - Rotor de secção circular constante.	2.27
2.5 - Transição de uma velocidade critica por um rotor de Jeffcott.....	2.29
2.6 - Conclusões.....	2.32
3-Modelo numérico por elementos finitos.....	3.1
3.1 - Formulação variacional das equações do movimento.....	3.2

3.2 - Discretização pelo método dos elementos finitos.....	3.5
3.3 - Montagem das matrizes elementares.....	3.8
3.4 - Modelização de discos rígidos.....	3.9
3.5 - Modelização dos apoios	3.10
3.6 - Modelo espacial conservativo.....	3.13
3.7 - Elemento de viga de Timoshenko.....	3.13
3.7.1- Teoria de Timoshenko para vigas.....	3.14
3.7.1.1- Campo de deslocamentos.....	3.14
3.7.1.2- Relações deformação-deslocamento.....	3.16
3.7.1.3- Relações tensão-deformação	3.16
3.7.1.4- Trabalho virtual das forças elásticas internas...3.17	
3.7.2 -Aproximação elementar do campo de deslocamentos..3.19	
3.7.3 -Integração numérica das matrizes elementares.....	3.23
3.8 - Formulação com atrito interno.....	3.27
3.9 - Modelo espacial dissipativo	3.29
3.10 - Caracterização das matrizes espaciais	3.29

4 - Formulações alternativas para as equações do movimento.. 4.1

4.1 - Formulação complexa as equações do movimento	4.2
4.1.1 - Formulação das matrizes elementares	4.2
4.1.1.1 - Matriz de massa.....	4.3
4.1.1.2 - Matriz giroscópica.	4.3
4.1.1.3 - Matriz de rigidez.	4.4
4.1.1.4 - Matriz circulatória.	4.4
4.1.1.5 - Vector de forças.	4.4
4.1.2 - Equação complexa de equilibrio de um elemento.....	4.5
4.1.3 - Formulação complexa dos termos associados aos discos.	4.5
4.1.3.1 - Matriz de massa.....	4.6
4.1.3.2 - Matriz giroscópica.	4.6
4.1.3.3 - Vector de forças.	4.6
4.1.4 - Formulação dos termos associados às chumaceiras.....	4.6
4.1.5 - Modelo completo sob a forma complexa.	4.8
4.1.6 - Conclusões sobre o modelo complexo.....	4.9
4.2 - Formulação num referencial móvel.....	4.10

5 - Análise Modal..... 5.1

5.1 - Regime conservativo.....	5.1
--------------------------------	-----

5.2 - Regime dissipativo.....	5.3
5.3 - Análise modal do modelo espacial no referencial móvel.....	5.4
6 - Resposta permanente a uma solicitação harmónica	6.1
6.1 - Determinação da trajectória do centro do rotor	6.1
6.2 - Determinação dos eixos principais da elipse.	6.3
6.3 - Aplicações numéricas - Resposta a excentricidades	6.8
6.3.1 - Rotor de Jeffcott - Regime conservativo	6.8
6.3.2 - Rotor com um disco rígido - Regime conservativo	6.12
6.3.2.1 - Apoios simples.....	6.12
6.3.2.2 - Apoios isotrópicos	6.14
6.3.2.3 - Apoios ortotrópicos	6.17
6.3.3 - Rotor de Nelson e McVaugh [30]	6.18
6.3.3.1- Definição da geometria do rotor [30]	6.19
6.3.3.2- Apoios isotrópicos [30] [32].....	6.20
6.3.3.3- Apoios ortotrópicos [30] [32].....	6.22
6.3.3.4- Conclusões.....	6.26
6.4 - Rotor sujeito a uma solicitação harmónica dos apoios.....	6.27
6.4.1 - Caracterização das forças transmitidas aos rotores pela oscilação dos apoios.....	6.27
6.4.2 - Sistema conservativo.....	6.28
6.4.3 - Sistema dissipativo	6.29
6.5 - Aplicações numéricas - Oscilações harmónicas dos apoios.....	6.31
6.5.1 - Rotor de Jeffcott - Regime conservativo	6.31
6.5.1.1 - Solicitação síncrona em fase	6.33
6.5.1.2 - Solicitação síncrona em oposição de fase.....	6.34
6.5.1.3 - Solicitação de um único apoio	6.35
6.5.2 - Rotor de Jeffcott - Regime dissipativo	6.36
7 - Resposta Transitória a uma aceleração angular	7.1
7.1 - Formulação do modelo com aceleração angular.....	7.2
7.2 - Adaptação do método de Newmark β	7.5
7.3 - Exemplos numéricos.....	7.7
7.3.1 - Rotor de Jeffcott - Regime conservativo	7.8
7.3.2 - Rotor de Jeffcott - Regime dissipativo	7.11
7.3.2.1- Atrito interno	7.11

7.3.2.1- Atrito interno e externo	7.12
---	------

8 - Caso prático.....	8.1
------------------------------	------------

8.1 - Análise modal.....	8.4
--------------------------	-----

8.2 - Resposta permanente.....	8.5
--------------------------------	-----

8.3 - Resposta transitória.....	8.8
---------------------------------	-----

9 - Conclusões e sugestões para trabalho futuro.....	9.1
---	------------

9.1 - Conclusões.....	9.1
-----------------------	-----

9.2 - Sugestões para trabalho futuro	9.2
--	-----

CAPÍTULO I

"Passer de la poutre au rotor c'était évidemment pénétrer plus profondément dans la dynamique ... et l'on na pas encore fini de s'étonner des comportements qui résultent de cette rotation imposée ..."

R. Bigret 1980

1 - Introdução

1.1 - Generalidades

Os veios são componentes mecânicos de geometria axissimétrica compostos por vários segmentos de diâmetros diferentes e apoiados através de ligações que permitem a rotação do veio relativamente à estrutura de apoio.

O comportamento dinâmico dos rotores tem constituído ao longo dos tempos uma preocupação para o engenheiro mecânico. A procura de melhores desempenhos dos equipamentos com base no aumento das velocidades de rotação, associada a uma economia de material traduzida em estruturas mais leves pode conduzir, naturalmente, ao aparecimento de fenómenos vibratórios que provocam a fadiga do material, ruído, desconforto humano e até mesmo rotura.

No caso dos rotores, que são sujeitos a solicitações dinâmicas que dependem da velocidade de rotação, os problemas de vibrações tornam-se ainda mais relevantes, donde o engenheiro , para além da compreensão do fenómeno vibratório necessita ainda de ferramentas de cálculo que lhe permitam caracterizar e simular o comportamento dinâmico dos rotores de geometrias cada vez mais complexas.

O estudo do comportamento dinâmico dos rotores iniciou-se com base em modelos elementares constituídos por uma árvore deformável e de massa desprezável suportando um disco rígido. Estes modelos, embora pouco realistas, permitem analisar e pôr em evidência alguns fenómenos fundamentais da

dinâmica dos rotores. No entanto, os métodos analíticos utilizados na análise destes exemplos mais simples tornam-se impraticáveis quando queremos tratar de forma rigorosa estruturas de geometria complexa.

O desenvolvimento da informática e as consequentes capacidades de cálculo veio facilitar a elaboração de modelos complexos, bem como a utilização de métodos de análise mais sofisticados. Assim, dispõe-se hoje de instrumentos de cálculo capazes de simular de um modo mais profundo e realista o comportamento das estruturas. Neste contexto, o método dos elementos finitos surge como um método bem adaptado ao cálculo automático de estruturas e tem igualmente sido aplicado na área da análise dinâmica de rotores. A principal diferença entre o estudo da dinâmica de rotores e da dinâmica de estruturas comuns é o movimento de rotação a que o rotor se encontra sujeito e que origina por si só fenómenos de vibração.

1.2- Análise bibliográfica

O primeiro trabalho de aplicação do método dos elementos finitos na análise dinâmica de rotores é atribuído a Ruhl e Booker . Nesse trabalho, [39], os autores utilizaram um elemento finito de viga da classe C1 caracterizado por dois pontos nodais e quatro graus de liberdade por nó (duas translações e duas rotações). Na formulação deste elemento a energia de deformação elástica contemplada é , segundo a teoria de flexão de Euler-Bernoulli, a energia elástica de flexão e a energia cinética contemplada é somente a energia cinética de translação.

A não inclusão do efeito giroscópico, da inércia de rotação e da energia de deformação de corte pode trazer diferenças significativas nos resultados finais. Nelson e McVaugh [29] melhoraram este elemento incluindo o efeito giroscópico e a inércia de rotação.

A modelização de mecanismos de dissipação de energia apareceu, para este tipo de elemento, através de Gash [16] que no seu trabalho incluiu unicamente o efeito do atrito interno viscoso. O atrito histerético foi posteriormente introduzido neste mesmo elemento por Zorzi e Nelson [52].

A introdução da energia de deformação de corte na formulação foi apresentada por Nelson [31], baseando-se para isso na teoria de Timoshenko para vigas.

Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32] apresentaram então a formulação dum elemento da classe C1 tendo em conta todos os efeitos apresentados, ou seja, o efeito giroscópico, a inércia de rotação, o efeito da energia de deformação de corte e o atrito interno viscoso e histerético.

Após este trabalho, Rough e Kao [38] desenvolveram um novo tipo de elemento com dois nós e seis graus de liberdade por nó. O desenvolvimento deste elemento com vista à aplicação na dinâmica de rotores surgiu, segundo estes autores, na sequência do trabalho de Thomas, Wilson e Wilson. Os seis graus de liberdade por nó são dois deslocamentos, duas rotações totais e duas rotações de corte (fig 1.1).

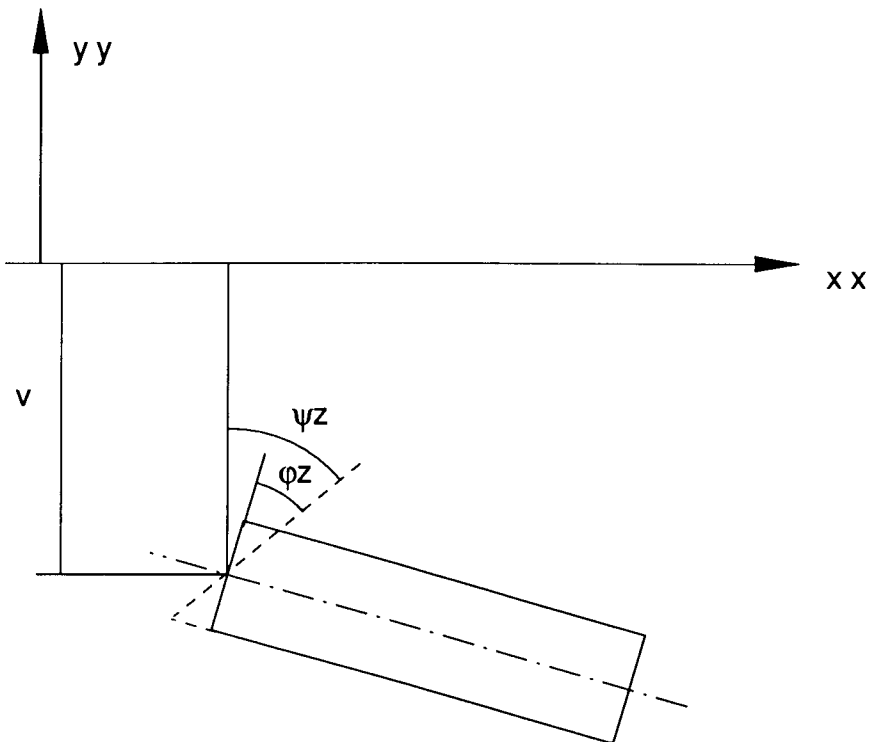


Fig 1.1 Variáveis do elemento de Rough e Kao [13] para os deslocamentos no plano xy
 v deslocamento, ψ_z rotação total e ϕ_z rotação de corte

Na formulação deste elemento o campo de deslocamentos transversais é interpolado por polinómios de terceiro grau e as rotações de flexão por polinómios

de segundo grau. As rotações de corte são aproximadas por funções lineares e as rotações totais, soma das rotações de flexão com as rotações de corte, resultam como sendo aproximadas por funções quadráticas.

Com base neste trabalho, Greenhill, Bickford e Nelson [20] introduziram neste elemento os mecanismos de atrito interno viscoso e histerético.

Existem assim, dois elementos [32] e [20] de boa precisão para a caracterização do comportamento dos rotores. Destes, o último elemento tem a vantagem de permitir uma excelente representação do comportamento dinâmico dos rotores, enquanto que o utilizado em [32] apresenta a vantagem de só possuir quatro graus de liberdade por nó. Rough e Kao [37], a partir do elemento de Greenhill, Bickford e Nelson [20], propuseram a realização da condensação dos graus de liberdade correspondentes às rotações de corte e obtiveram um elemento finito cujas matrizes são idênticas às matrizes obtidas por Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32]. O elemento assim formulado não possui, pois, vantagens relativamente à formulação proposta por Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32] que é mais simples sob o ponto de vista computacional para idêntico grau de precisão.

Os elementos referidos pertencem à classe C1. Rodrigues [35] propôs, baseado na teoria de Timoshenko, a formulação dum elemento finito de rotor da classe C0 com interpolação linear do campo de deslocamentos. Este elemento, de dois nós e de quatro graus de liberdade por nó, tem em conta os fenómenos de dissipação de energia sob as formas viscosa e histerética, bem como a inércia de translação, a inércia de rotação e o efeito giroscópico. Neste elemento é utilizado um processo de integração selectiva das matrizes de rigidez e circulatória em que os termos associados à energia de flexão são integrados de forma exacta e os termos associados à energia de corte são sub-integrados. Estas matrizes são ainda afectadas por um factor de modo a corrigir a energia potencial elástica. Este elemento conduz a matrizes de rigidez e circulatória idênticas às mesmas matrizes do elemento de Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32]. Este elemento possui a vantagem de apresentar uma formulação simples e uma fácil implementação num programa de cálculo associado a um bom nível de precisão dos resultados.

Jianmin e Xiaomei [26] apresentaram a formulação do problema da dinâmica de rotores em coordenadas complexas. Segundo estes autores, esta formulação foi primeiramente apresentada por Nelson e possui como vantagem

uma redução do espaço de memória a utilizar e como desvantagem um processo computacional mais laborioso.

Desde o trabalho de Ruhl [39], o estudo da dinâmica dos rotores através do método dos elementos finitos tem-se limitado fundamentalmente a analisar quer o regime livre, de modo a obter as frequências próprias e os modos próprios de vibração, quer a resposta permanente devida a forças de tipo harmónico induzidas por excentricidades de massas em relação ao eixo de rotação do rotor.

O estudo do regime livre de modo a determinar as frequências próprias e os modos de vibração tem sido alvo de forte estudo. O problema de valores próprios associado a esta análise é um problema de valores próprios quadrático. A resolução deste problema de dimensão n passa por uma transformação deste num problema linear equivalente resultando assim num problema de dimensão $2n$.

No caso dos sistemas conservativos a extracção dos valores próprios tem em conta a forma especial das matrizes envolvidas no modelo, resultando assim um problema de valores próprios constituído por duas matrizes reais de dimensão $2n$ em que uma é simétrica e a outra é anti-simétrica. Nelson [31] mostra ainda que, no caso conservativo e em que os apoios são isotrópicos, a extracção dos valores próprios pode ser reduzida a um problema de dimensão $n/2$. A transformação de equivalência do problema quadrático num problema linear destrói a configuração em forma de banda das matrizes tornando, por isso, difícil a obtenção das frequências e modos próprios para sistemas com grande número de graus de liberdade. Por outro lado, a extracção de todos os valores próprios não se revela interessante pois os modos próprios associados às frequências mais elevadas já não possuem significado físico. Deste modo, Rodrigues [35] e Rodrigues e Gmuer [36] propuseram técnicas adaptadas de extracção parcial das frequências de mais baixo valor, que são as que se revestem de maior interesse físico, e dos vectores próprios a elas associados para o problema conservativo e dissipativo da dinâmica de rotores.

No que diz respeito ao problema da resposta dos rotores a uma excentricidade da massa, Ruhl e Booker [39], Nelson e McVaugh [30] e Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32] apresentam diferentes maneiras de o abordar. O primeiro autor contempla unicamente a possibilidade de existência de precessões circulares. O segundo transforma o problema de dimensão n num problema de dimensão $2n$ a fim de poder prever precessões elípticas. No entanto, este método

é bastante oneroso sob o ponto de vista computacional, uma vez que as matrizes de dimensão $2n$ resultantes não possuem formas particulares que permitam um adequado armazenamento e manipulação no espaço de memória. O processo apresentado por Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32] tem a vantagem de, apesar de trabalhar com números complexos, manter a forma das matrizes explorando a sua disposição em banda e requerendo, por isso, menor espaço de memória que o processo anterior. Jiamin e Xiaomei [26], mais recentemente, apresentaram a resolução deste problema através da formulação em coordenadas complexas.

No que diz respeito à análise de fenómenos transitórios, Rough e Kao [37] propõem esquemas de integração no tempo segundo o método de Houbolt ou segundo o método de Newmark β . Estes autores utilizam a análise de fenómenos transitórios para avaliar a resposta de um sistema a uma solicitação aplicada bem como para avaliar a estabilidade do sistema. Apesar de Edney, Fox e Williams [11] e Brune e Lassoudiere [4] terem obtido bons resultados nos seus trabalhos com o método de Newmark β , Subbiah e Rieger [41] e Subbiah, Kumar e Sankar [42] defendem que o método de Houbolt possui melhor estabilidade numérica nos resultados podendo utilizar-se incrementos de tempo maiores.

1.3- Objectivos do trabalho

O objectivo deste trabalho consiste na análise fenomenológica da dinâmica dos rotores, no estabelecimento e análise de soluções analíticas e numéricas de modelos simples e no desenvolvimento e implementação de técnicas numéricas para a caracterização dos regimes estacionário e transitório forçado de rotores de geometria complexa.

A análise da dinâmica de rotores baseada em modelos simples para os quais é possível obter um conjunto de soluções analíticas permite-nos melhor compreender os problemas e fenómenos inerentes à dinâmica dos rotores. Este conjunto de soluções analíticas permite-nos ainda validar os modelos de elementos finitos e as técnicas numéricas desenvolvidas.

Para a análise de rotores de geometria complexa recorre-se ao método dos elementos finitos. Apresenta-se, por razão de consistência global do trabalho, a formulação do modelo dinâmico de rotores com base no elemento de classe C0 desenvolvido por Rodrigues [35]. A formulação do problema é apresentada num

referencial fixo e num referencial móvel. Discutem-se as vantagens e inconvenientes de cada um destes procedimentos e as situações particulares mais adequadas à utilização de cada um deles.

Para a análise do regime forçado desenvolvem-se algoritmos particularmente bem adaptados à resolução do regime estacionário e transitório.

O regime estacionário contempla as forças harmónicas devidas a excentricidades de massas em relação ao eixo de rotação do rotor e a movimentos harmónicos dos apoios transmitidos pelas fundações. Demonstra-se que a excitação harmónica das excentricidades de massa num rotor com apoios isotrópicos, com propriedades elásticas dos apoios idênticos em qualquer direcção radial, não excita os modos próprios associados às precessões inversas. A resposta estacionária é apresentada sob a forma de amplitudes e respectivas fases segundo as duas direcções ortogonais ou sob a forma dos semi-eixos da trajectória elíptica com respectiva orientação espacial e sentido da precessão.

Para a análise do regime transitório induzido pela força devida a uma excentricidade de massa quando o rotor se encontra sujeito a uma aceleração constante da sua rotação desenvolve-se uma técnica de integração no tempo baseada no método de Newmark β e reformula-se o modelo de elementos finitos de modo a incluir os efeitos da aceleração da rotação nas equações do movimento. Um ênfase particular é colocado na análise da resposta quando o rotor passa pelas suas velocidades críticas.

Por fim, é analisado um caso prático da indústria dos motores eléctricos para ilustrar a aplicabilidade e interesse da utilização das técnicas desenvolvidas e implementadas.

Refira-se ainda que os algoritmos desenvolvidos exploram a estrutura em banda das matrizes do modelo de elementos finitos no sentido de minimizar as necessidades de armazenamento e de tempo de cálculo em computador com o objectivo de os implementar num computador pessoal.

A análise modal é fundamental no estudo vibratório dos rotores. Neste trabalho foi nossa intenção revelar alguns procedimentos básicos da análise modal de rotores, bem como algumas simplificações possíveis para casos particulares. No entanto, não cabe no âmbito desta tese a abordagem da extracção de valores e vectores próprios com profundidade. Rodrigues [35] apresenta de

maneira minuciosa alguns métodos utilizáveis na análise do regime livre dos rotores.

CAPÍTULO II

2- Modelos analíticos

De modo a compreender alguns dos fenómenos ligados à problemática das vibrações dos rotores, vamos estudar o comportamento de um rotor de Jeffcott. Este rotor é constituído por um veio de massa desprezável simplesmente apoiado ao qual se encontra acoplado um disco a meio vão. Este problema elementar permite estudar alguns dos fenómenos característicos dos rotores. No entanto, o efeito giroscópico, fenómeno muito importante na dinâmica de rotores ligado à rotação própria, não se manifesta neste modelo como veremos mais adiante. De modo a evidenciar o comportamento de um rotor sujeito ao efeito giroscópico será apresentado um outro exemplo analítico.

2.1- Rotor de Jeffcott - Regime livre e harmónico.

Quando em repouso, se o disco montado no veio não tiver o centro de massa do disco coincidente com o eixo de rotação, dir-se-á que existe uma massa excêntrica. Na prática, em todos os rotores existem sempre excentricidades da massa. Estas excentricidades podem ser devidas a heterogeneidades do material, defeitos de maquinagem e montagens. No desenvolvimento das equações que regem o movimento de um rotor admitimos, por isso, que estamos perante um meio quase homogéneo [35]. Isto significa que o domínio não homogéneo é suficientemente importante de modo a que seja necessário distinguir a linha do centro de massa do eixo geométrico do rotor, mas é suficientemente desprezável (suficientemente homogéneo) para que as teorias de flexão de vigas sejam válidas.

2.1.1- Sistema conservativo

Analisemos as equações do movimento, desprezando o atrito, para o rotor representado na figura 2.1.

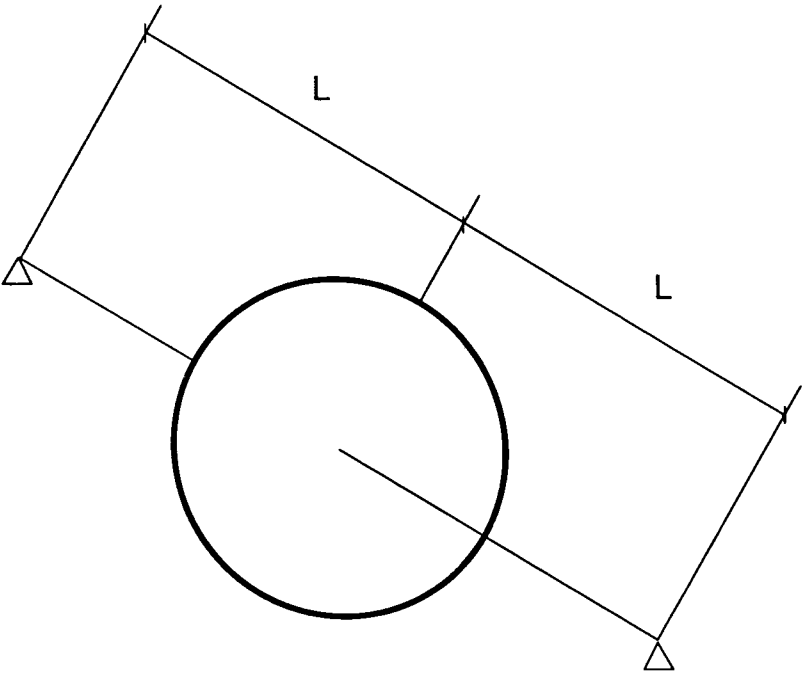


Fig 2.1 -Rotor de Jeffcott

Consideremos o ponto O pertencente ao eixo de rotação do rotor, C o centro geométrico do disco e ponto de ligação do disco ao veio, e C' o centro de massa do disco (fig 2.2). A distância OC é a flecha do veio na zona do disco e a distância $CC'=a$ é a excentricidade do centro de massa em relação ao centro geométrico do disco.

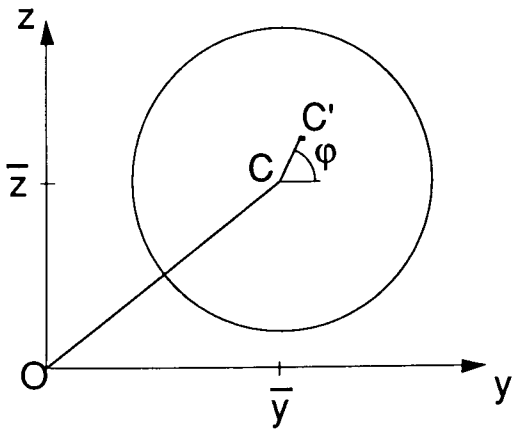


Fig 2.2

Assim, num sistema de coordenadas fixas temos que o deslocamento do centro de massa pode ser dado pelas expressões (2.1) :

$$\begin{cases} y = \bar{y} + a \cos \varphi \\ z = \bar{z} + a \sin \varphi \end{cases} \quad (2.1)$$

em que y e z representam as coordenadas do centro de massa e $\bar{y}$ e $\bar{z}$ representam as coordenadas do centro geométrico do disco.

As equações diferenciais que regem o movimento podem ser obtidas a partir da equação de Lagrange [5] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.2)$$

onde q_i é uma coordenada generalizada, Q_i é uma força generalizada, T é a energia cinética e V a energia potencial elástica. Estas energias são dadas respectivamente pelas seguintes expressões:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (2.3)$$

$$V = \frac{1}{2} k (y - a \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2} k (z - a \sin \varphi)^2 - M \varphi \quad (2.4)$$

em que r é o raio de giração do disco e k a rigidez do veio no ponto de fixação do disco. Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.2) obtemos:

$$m \ddot{y} + k y = k a \cos \varphi \quad (2.5)$$

$$m \ddot{z} + k z = k a \sin \varphi \quad (2.6)$$

$$m r^2 \ddot{\varphi} + k a (y \sin \varphi - z \cos \varphi) = M \quad (2.7)$$

Multiplicando agora a equação (2.6) por $i = \sqrt{-1}$, combinando-a com a equação (2.5) e tendo em conta que $\varphi = \Omega t$ sendo Ω a velocidade de rotação constante obtemos a equação diferencial complexa que rege o problema da vibração lateral deste rotor:

$$m \ddot{s} + k s = k a e^{i \Omega t} \quad (2.8)$$

A solução geral desta equação é do tipo:

$$s = S_1 e^{it\sqrt{\frac{k}{m}}} + S_2 e^{-it\sqrt{\frac{k}{m}}} + \frac{a}{1 - \frac{\Omega^2}{k/m}} e^{i\Omega t} \quad (2.9)$$

As constantes S_1 e S_2 dependem das condições iniciais de posição e velocidade. As duas primeiras parcelas, resultados da equação homogénea, exprimem o regime livre do sistema cuja frequência natural de vibração é a frequência angular $\omega = \sqrt{k/m}$.

A terceira parcela de (2.9) é a solução particular da equação (2.8), onde o segundo membro que conduz a esta solução particular representa a força harmónica de inércia devida à excentricidade da massa. O movimento devido a esta força é um movimento circular cujo raio é igual a $a / (1 - \frac{\Omega^2}{k/m})$. No caso da velocidade de rotação ser igual à frequência natural de vibração, ou seja, $\Omega = \omega$, este raio tende para infinito, isto é, estamos perante uma ressonância de amplitude. Esta velocidade coincidente com a frequência de ressonância é chamada de velocidade crítica.

Por outro lado, quando a velocidade de rotação tende para infinito o valor do raio tende para zero, ou seja, o centro de massa tende para o eixo de rotação. Este fenómeno de auto-centragem é referido na literatura por "self centering" [10].

2.1.2- Sistema dissipativo

A dissipação de energia associada ao fenómeno de atrito é normalmente feita através da libertação de calor. As forças de atrito são forças que se opõem sempre ao movimento e estão sempre presentes nos sistemas reais. No caso do atrito presente em rotores teremos que considerar o atrito interno e o atrito externo. No caso da resistência ao movimento aumentar com a deformação ou com a velocidade de deformação (fenómenos no interior do rotor) estamos perante um caso de atrito interno. No caso da energia dissipada ser função do deslocamento espacial do rotor significa que esta libertação de energia é devida a meios externos ao rotor, como por exemplo os suportes, e logo estamos perante um caso de atrito externo.

2.1.2.1- Efeito do atrito interno

Se considerarmos um veio estacionário (sem rotação) e que se encontra em vibração, aparece uma força que se opõe ao movimento. Se essa força tiver origem na deformação do veio e for proporcional à velocidade, podemos escrever as suas componentes:

$$F_{ay} = c \frac{dy}{dt} \quad F_{az} = c \frac{dz}{dt} \quad (2.10)$$

No entanto, quando o veio está em rotação, se assumirmos que y e z são fixos podemos ver que o veio se vai deformar ciclicamente (figura 2.3). Logo o atrito também está presente. Com estas considerações podemos concluir que o atrito interno depende não só de $\dot{y}$ e $\dot{z}$ como da velocidade de rotação Ω .

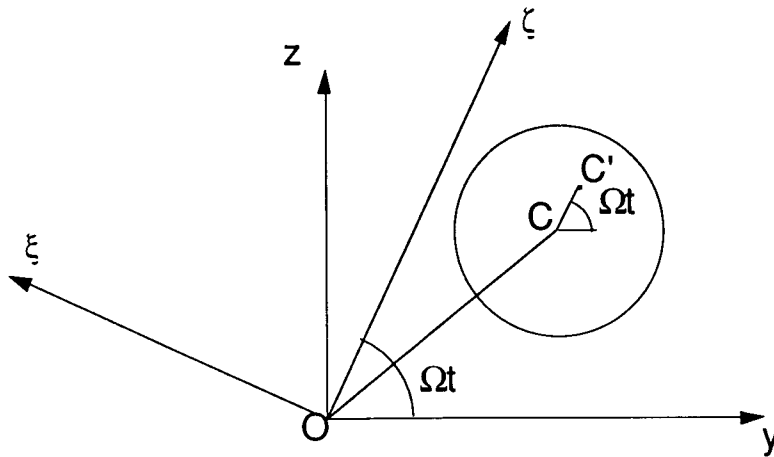


Fig 2.3

Para podermos avaliar a força de atrito interno teremos de reformular o problema num sistema de eixos que rode à mesma velocidade de rotação que o veio. Considerando que $\eta = \zeta + i \xi$, temos que a mudança de sistema eixos é dada por:

$$\begin{aligned} s &= \eta e^{i\Omega t} \\ \dot{s} &= (\dot{\eta} + i\Omega \eta) e^{i\Omega t} \\ \ddot{s} &= (\ddot{\eta} + 2i\Omega \dot{\eta} - \Omega^2 \eta) e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Em relação a este sistema de eixos o rotor encontra-se com velocidade de rotação nula e portanto poderemos aplicar as expressões (2.10) aos deslocamentos no referencial móvel.

Desta forma obtemos como equação diferencial complexa do movimento a seguinte equação :

$$\ddot{\eta} + \left(\frac{c_i}{m} + 2i\Omega\right)\dot{\eta} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)\eta = \frac{ka}{m} \quad (2.12)$$

Esta mesma equação no referencial fixo resulta da seguinte transformação de coordenadas :

$$\begin{aligned} \eta &= s e^{-i\Omega t} \\ \dot{\eta} &= (\dot{s} - i\Omega s) e^{-i\Omega t} \\ \ddot{\eta} &= (\ddot{s} - 2i\Omega\dot{s} - \Omega^2 s) e^{-i\Omega t} \end{aligned} \quad (2.13)$$

A equação no referencial fixo que rege o movimento considerando o atrito interno vem então:

$$\ddot{s} + \frac{c_i}{m}\dot{s} + \left(\frac{k}{m} - i\Omega\frac{c_i}{m}\right)s = \frac{ka}{m} e^{i\Omega t} \quad (2.14)$$

A solução geral desta equação diferencial é dada pela expressão :

$$s = S_1 e^{i\omega_1 t} + S_2 e^{i\omega_2 t} + \frac{a}{1 - \frac{\Omega^2}{k/m}} e^{i\Omega t} \quad (2.15)$$

Analisando o terceiro termo desta solução pode verificar-se que ele permanece idêntico ao obtido na análise desprezando o atrito. Assim podemos concluir que o atrito interno não tem qualquer influência na velocidade crítica. Este facto é válido, como veremos mais adiante, desde que os apoios sejam isotrópicos.

No que diz respeito aos dois primeiros termos eles estão relacionados com as condições iniciais. Os valores dos expoentes ω_1 e ω_2 destas expressões são dados pelas raízes da equação:

$$\omega^2 - i\frac{c_i}{m}\omega - \frac{k}{m} + i\Omega\frac{c_i}{m} = 0 \quad (2.16)$$

Estas raízes são:

$$\omega = i \frac{c_i}{2m} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\left(\frac{c_i}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}\right)^2 + \left(\Omega \frac{c_i}{m}\right)^2} + \left(\left(\frac{c_i}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}\right)}{2} \mp \frac{\sqrt{\sqrt{\left(\left(\frac{c_i}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}\right)^2 + \left(\Omega \frac{c_i}{m}\right)^2} - \left(\left(\frac{c_i}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}\right)}{2}} \quad (2.17)$$

Analisando a expressão (2.17) podemos verificar que se $\Omega > \sqrt{k/m}$ a parte imaginária destas raízes virá negativa o que é o mesmo que dizer que a parte real do expoente da expressão (2.15) que nos dá a resposta do regime livre é positiva. Em consequência a amplitude crescerá indefinidamente, ou seja, o sistema será instável.

2.1.2.2- Efeito do atrito externo

Em relação ao atrito externo sabemos que ele depende do deslocamento absoluto (no referencial fixo) do disco. Assumindo um mecanismo de atrito linear viscoso as equações diferenciais que regem o movimento do centro de massa são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \frac{c_e}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y &= \frac{ka}{m} \cos \Omega t \\ \ddot{z} + \frac{c_e}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z &= \frac{ka}{m} \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2.18)$$

Em notação complexa escreve-se:

$$\ddot{s} + \frac{c_e}{m} \dot{s} + \frac{k}{m} s = \frac{ka}{m} e^{i\Omega t} \quad (2.19)$$

e a solução geral é da forma:

$$s = S_1 e^{it \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c_e^2}{4m^2}} + i \frac{c_e}{2m} \right)} + S_2 e^{it \left(-\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c_e^2}{4m^2}} + i \frac{c_e}{2m} \right)} + \frac{ae^{i\Omega t}}{1 - \Omega^2/\omega^2 + i\Omega c_e/m\omega^2} \quad \text{em que } \omega = \sqrt{k/m} \quad (2.20)$$

Esta solução mostra-nos que a velocidade critica é, para este caso, dada por $\Omega = \omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c_e^2}{4m^2}}$, ou seja, é inferior à velocidade critica determinada em regime conservativo.

De notar que à medida que a velocidade de rotação tende para infinito o centro de massa tende para zero, ou seja, o fenómeno de auto-centragem continua a verificar-se com a presença do atrito externo. De notar também que na presença do atrito externo não se verificam instabilidades de funcionamento como sucede com a presença do atrito interno, uma vez que a parte real dos expoentes dos termos do regime livre são sempre negativos.

2.1.2.3- Efeito conjunto do atrito interno e do atrito externo

O atrito externo tem um efeito estabilizador enquanto que o atrito interno, a velocidades superiores à velocidade critica, tem um efeito desestabilizador. Daí que o estudo do efeito conjunto deste dois tipos de atrito seja interessante. A equação diferencial complexa que rege o movimento, considerando este dois tipos de atrito, escreve-se na forma:

$$\ddot{s} + \frac{c_e + c_i}{m} \dot{s} + \left(\frac{k}{m} - i\Omega \frac{c_i}{m} \right) s = \frac{k a}{m} e^{i\Omega t} \quad (2.21)$$

A solução homogénea é do tipo $s = Se^{i\omega_d t}$. Esta solução quando substituída na equação (2.21) conduz à equação característica

$$\omega_d^2 - i \frac{c_e + c_i}{m} \omega_d + \left(\frac{k}{m} - \Omega \frac{c_i}{m} \right) = 0 \quad (2.22)$$

Dimentbreg [10] mostra que para este caso a estabilidade é conseguida para valores de rotação tal que

$$\Omega < \left(1 + \frac{c_e}{c_i}\right) \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.23)$$

Quando em 2.1.2.1 analisamos o efeito do atrito interno chegamos à conclusão de que para valores superiores ao da velocidade crítica o movimento tornava-se instável. Mas no entanto, o efeito conjunto do atrito interno com o atrito externo levaram a um aumento da velocidade para a qual o movimento se torna instável. Isto permite concluir que o atrito externo é um factor que permite a utilização dos rotores com velocidades de rotação superiores à velocidade crítica. O atrito externo leva ainda a baixar a velocidade crítica enquanto que o atrito interno não altera a velocidade crítica.

2.1.2.4- Efeito do atrito hysterético

O atrito hysterético aparece sempre que deformamos elásticamente um corpo e é caracterizado por uma força que se opõe ao movimento e que é independente da velocidade de deformação. Num ciclo de carregamento quase estático, como por exemplo o ciclo realizado num ensaio de tracção, a curva de carregamento é diferente da curva de descarregamento (figura 2.4). A área compreendida entre estas duas curvas corresponde à energia dissipada durante o ciclo. Sendo H a percentagem dessa energia dissipada, Bigret [3] propõe a realização de um modelo que nos dê uma energia equivalente dissipada por ciclo e que ao mesmo tempo se oponha à velocidade. Este procedimento destina-se a obter um modelo simples capaz de caracterizar este tipo de atrito.

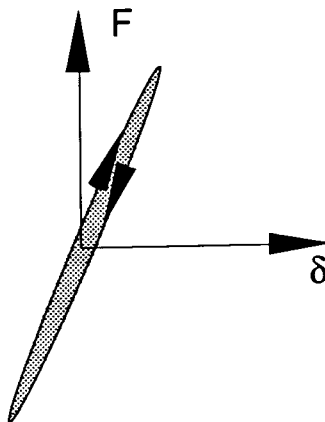


Fig 2.4 Esquema de um ciclo histerético

A energia dissipada durante um ciclo de deformação é-nos dada pela diferença entre a energia absorvida durante o carregamento e a energia restituída

durante o descarregamento. No caso dum regime conservativo estas energias são idênticas.

O coeficiente de atrito histerético médio equivalente a um coeficiente de atrito viscoso é, segundo Dimentberg [10] e Bigret [3], dado por.

$$c_{eq} = \frac{H}{|\omega_d - \Omega|} \quad (2.26)$$

Sabendo que o atrito histerético é um tipo de atrito interno, podemos agora substituir na expressão que nos dá a resposta do rotor em presença do atrito interno viscoso utilizando o coeficiente C_{eq} . A partir do estudo já realizado para o caso em que temos atrito interno e atrito externo obtemos como condição de estabilidade

$$\Omega < \left(1 + \frac{c_e}{\frac{H}{|\omega_d - \Omega|} + c_i} \right) \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.27)$$

2.2 - Influência do efeito giroscópico

Quando tentamos rodar um giroscópio em torno dum eixo perpendicular ao seu eixo de rotação surge um momento resistente a esse movimento tentando manter inalterado o eixo de rotação. De modo a caracterizar este efeito nos rotores, Bigret [3] apresenta o desenvolvimento das equações que caracterizam as forças de inércia de um disco em rotação quando este é sujeito a um movimento qualquer de pequenas amplitudes. Esta dedução foi feita a partir das equações de Newton.

O estudo de um disco é interessante, não só para o estudo dinâmico do próprio disco mas também, adaptando-o a sólidos de espessura infinitamente pequena e conjuntamente com as equações diferenciais que caracterizam o comportamento elástico dos veios, na obtenção das equações diferenciais que caracterizam a dinâmica dos rotores [3].

2.2.1 - Determinação do vector momento dinâmico

Consideremos a fig 2.5 . Nesta figura encontram-se representados 4 sistemas de eixos, tais que:

S0 - Referencial fixo

S1 - Referencial que rodou θ_{x0} em relação ao referencial S0

S2 - Referencial que rodou θ_{y1} em relação ao referencial S1

S3 - Referencial que rodou θ_{z2} em relação ao referencial S2

Considerando que o sólido se encontra solidário com o referencial S3, obtemos a seguinte expressão para rotação total do sólido no referencial S1:

$$\vec{\Omega}|_{S1} = \dot{\theta}_{x0}|_{S1} + \dot{\theta}_{y1}|_{S1} + \dot{\theta}_{z2}|_{S1} \quad (2.28)$$

onde:

$$\dot{\theta}_{x0}|_{S1} = [T_{01}] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{x0} & \sin\theta_{x0} \\ 0 & -\sin\theta_{x0} & \cos\theta_{x0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\theta}_{y1}|_{S1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_{y1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\theta}_{z2}|_{S1} = [T_{21}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{y1} & 0 & \sin\theta_{y1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{y1} & 0 & \cos\theta_{y1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{z2} \sin\theta_{y1} \\ 0 \\ \dot{\theta}_{z2} \cos\theta_{y1} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

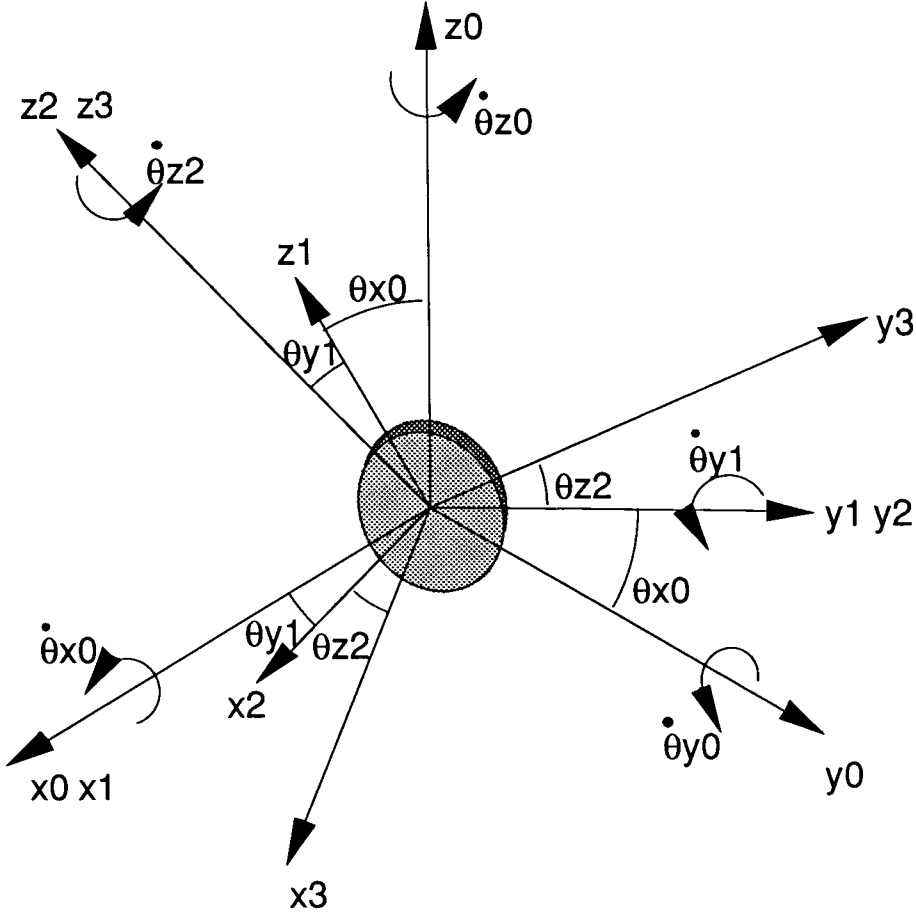


Fig 2.5 Definição das bases e vectores de rotação com vista ao estudo dinâmico dum disco

O vector rotação do disco no referencial S1 vem então dada por:

$$\vec{\Omega}|_{S1} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x0} + \dot{\theta}_{z2} \sin \theta_{y1} \\ \dot{\theta}_{y1} \\ \dot{\theta}_{z2} \cos \theta_{y1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x0} \\ \dot{\theta}_{y1} \\ \dot{\theta}_{z2} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

A simplificação realizada resulta de se considerar que θ_{y1} é um ângulo de rotação muito pequeno. Este mesmo vector no referencial S0 é dado por:

$$\vec{\Omega}|_{S0} = [T_{10}] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x0} \\ \dot{\theta}_{y1} \\ \dot{\theta}_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x0} \\ \dot{\theta}_{y1} \cos \theta_{x0} - \dot{\theta}_{z2} \sin \theta_{x0} \\ \dot{\theta}_{y1} \sin \theta_{x0} + \dot{\theta}_{z2} \cos \theta_{x0} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Por outro lado, os ângulos θ_{y1} e θ_{z2} estão relacionados com os ângulos θ_{y0} e θ_{z0} através das relações

$$\begin{cases} \theta_{y0} = -\theta_{z2} \cos \theta_{y1} \sin \theta_{x0} + \theta_{y1} \cos \theta_{x0} \\ \theta_{z0} = \theta_{z2} \cos \theta_{y1} \cos \theta_{x0} + \theta_{y1} \sin \theta_{x0} \end{cases} \quad (2.32)$$

Considerando que θ_{y1} é um ângulo de pequena amplitude, a relação (2.32) pode ser reescrita sob a forma:

$$\begin{cases} \theta_{y0} = -\theta_{z2} \sin \theta_{x0} + \theta_{y1} \cos \theta_{x0} \\ \theta_{z0} = \theta_{z2} \cos \theta_{x0} + \theta_{y1} \sin \theta_{x0} \end{cases} \quad (2.33)$$

Deste modo obtemos:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{\theta}_{y0} = -\dot{\theta}_{z2} \sin \theta_{x0} + \dot{\theta}_{y1} \cos \theta_{x0} - \theta_{z2} \dot{\theta}_{x0} \cos \theta_{x0} - \theta_{y1} \dot{\theta}_{x0} \sin \theta_{x0} \\ \dot{\theta}_{z0} = \dot{\theta}_{z2} \cos \theta_{x0} + \dot{\theta}_{y1} \sin \theta_{x0} - \theta_{z2} \dot{\theta}_{x0} \sin \theta_{x0} + \theta_{y1} \dot{\theta}_{x0} \cos \theta_{x0} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \dot{\theta}_{y0} + \dot{\theta}_{x0} \theta_{z0} = -\dot{\theta}_{z2} \sin \theta_{x0} + \dot{\theta}_{y1} \cos \theta_{x0} \\ \dot{\theta}_{z0} - \dot{\theta}_{x0} \theta_{y0} = \dot{\theta}_{z2} \cos \theta_{x0} + \dot{\theta}_{y1} \sin \theta_{x0} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.31) obtemos a expressão da rotação no referencial fixo:

$$\bar{\Omega}|_{S0} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x0} \\ \dot{\theta}_{y0} + \dot{\theta}_{x0} \theta_{z0} \\ \dot{\theta}_{z0} - \dot{\theta}_{x0} \theta_{y0} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Para calcularmos o vector momento cinético, necessitamos, utilizando a expressão (2.35), de calcular a matriz de inércia no referencial fixo. Para tal consideremos a matriz de inércia do disco (no referencial 3)

$$[I_3] = \begin{bmatrix} I_P & 0 & 0 \\ 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Sabendo que:

$$[I_0] = [T_{30}] [I_3] [T_{30}]^{-1} \quad (2.37)$$

necessitamos de calcular a matriz de transformação $[T_{30}]$. A obtenção desta matriz é feita da seguinte forma:

$$[T_{30}] = [T_{10}] [T_{21}] [T_{32}] \quad (2.38)$$

$$[T_{30}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{x0} & -\sin \theta_{x0} \\ 0 & \sin \theta_{x0} & \cos \theta_{x0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{y1} & 0 & \sin \theta_{y1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{y1} & 0 & \cos \theta_{y1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{z2} & -\sin \theta_{z2} & 0 \\ \sin \theta_{z2} & \cos \theta_{z2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Desprezando os infinitamente pequenos de segunda ordem e tendo em conta as relações (2.34), obtemos a matriz $[T_{30}]$

$$[T_{30}] = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{z2} & \theta_{y1} \\ \theta_{z0} & \cos \theta_{x0} & -\sin \theta_{x0} \\ -\theta_{y0} & \sin \theta_{x0} & \cos \theta_{x0} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Podemos agora calcular a matriz de inércia no referencial fixo segundo a equação (2.37). O resultado final é a seguinte matriz:

$$[I_0] = \begin{bmatrix} I_P & (I_P - I_D)\theta_{z0} & -(I_P - I_D)\theta_{y0} \\ (I_P - I_D)\theta_{z0} & I_D & 0 \\ -(I_P - I_D)\theta_{y0} & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

O vector momento cinético no referencial fixo vem então dado por

$$\tilde{H}|_{S0} = [I_0] \tilde{\Omega}|_{S0} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x0} I_P \\ \dot{\theta}_{y0} I_D + \dot{\theta}_{x0} \theta_{z0} I_P \\ \dot{\theta}_{z0} I_D - \dot{\theta}_{x0} \theta_{y0} I_P \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

O vector momento dinâmico, considerando a rotação do disco constante, tem como componentes:

$$\bar{\mathbf{K}}|_{S_0} = \dot{\bar{\mathbf{H}}}|_{S_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_{y0} \mathbf{I}_D + \dot{\theta}_{x0} \dot{\theta}_{z0} \mathbf{I}_P \\ \ddot{\theta}_{z0} \mathbf{I}_D - \dot{\theta}_{x0} \dot{\theta}_{y0} \mathbf{I}_P \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Na expressão anterior podemos ver que os termos $\dot{\theta}_{x0} \dot{\theta}_{z0} \mathbf{I}_P$ e $-\dot{\theta}_{x0} \dot{\theta}_{y0} \mathbf{I}_P$ exprimem o efeito giroscópico.

A dedução realizada pressupõe uma ordem segundo a qual as rotações foram efectuadas. De notar que, cinematicamente, não é indiferente considerar-se uma rotação segundo uma direcção seguida de uma outra segundo outra direcção, ou vice versa. No entanto, as simplificações realizadas por se ter considerado que as rotações segundo direcções perpendiculares ao eixo de rotação xx são de pequena amplitude levam a que o resultado encontrado seja o mesmo qualquer que seja a ordem segundo a qual as rotações têm lugar. Este facto confere a estas expressões a generalidade necessária à sua utilização na formulação dos problemas dinâmicos.

2.2.2 - Determinação do vector quantidade de aceleração

Na determinação da aceleração do centro de massa temos que entrar em conta com o facto de estarmos perante um sistema quase homogéneo, como já foi referido. Assim, no referencial fixo a posição do centro de massa é ,conforme podemos ver na figura 2.6, dada pelo vector:

$$\begin{cases} y_G = y + e_y \cos \theta_{x0} - e_z \sin \theta_{x0} \\ z_G = z + e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0} \end{cases} \quad (2.44)$$

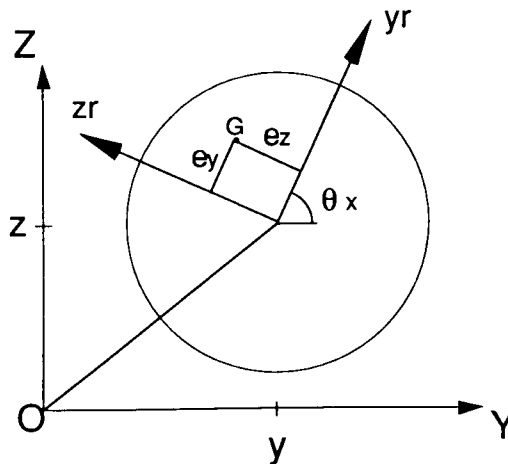


Fig 2.6 Posição do centro de massa

A aceleração do centro de massa ,considerando $\dot{\phi}_{x0}$ constante, é dada pela segunda derivada do vector posição e escreve-se:

$$\vec{a}_G = \begin{cases} \ddot{y}_G = \ddot{y} - \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \cos \theta_{x0} - e_z \sin \theta_{x0}) \\ \ddot{z}_G = \ddot{z} - \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) \end{cases} \quad (2.45)$$

O vector quantidade de aceleração é, por sua vez, dado por:

$$\vec{Q}_G = m \begin{bmatrix} \ddot{y}_G \\ \ddot{z}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \ddot{y} - m \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \cos \theta_{x0} - e_z \sin \theta_{x0}) \\ m \ddot{z} - m \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

2.3 -Rotor com um disco rígido

Consideremos a fig 2.7. Nesta figura temos um veio ao qual se encontra acoplado um disco. No rotor de Jeffcott com o disco posicionado a meio vão, é suposto que o movimento do disco seja um movimento de translação não havendo qualquer rotação por parte do disco em relação a qualquer eixo perpendicular ao eixo de rotação do rotor. No rotor apresentado na figura 2.6 o comportamento do veio já não nos permite dizer que o movimento do disco será somente de translação. Haverá também rotações por parte do disco segundo eixos perpendiculares ao eixo de rotação do rotor, surgindo então momentos giroscópicos. Por isso, no estudo deste rotor deverá ser introduzido o efeito giroscópico.

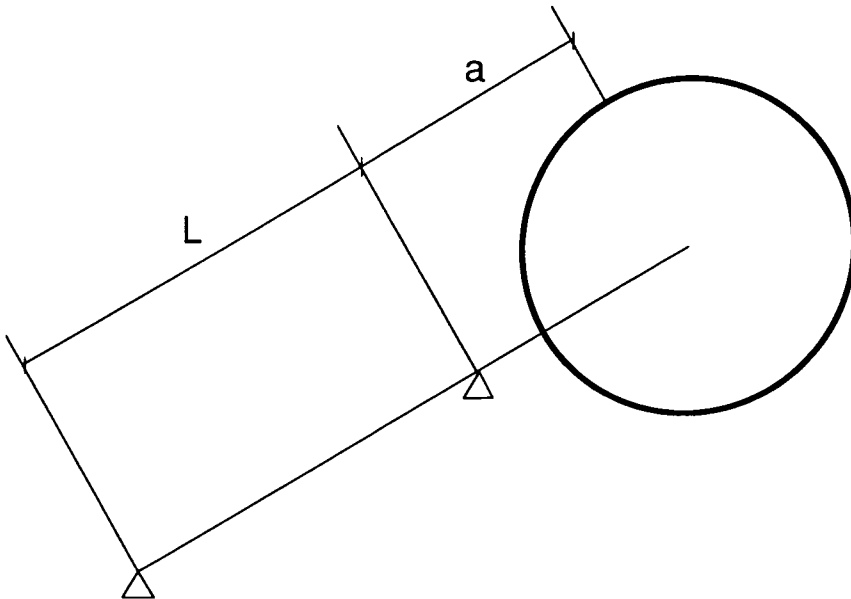


Fig 2.7 Rotor com disco assimétrico em relação aos apoios

Tendo em conta que as rotações efectuadas em torno dos eixos perpendiculares ao eixo de rotação do rotor são de pequena amplitude, estamos em condições de utilizar as relações (2.46) e (2.43) que caracterizam a inércia de um disco.

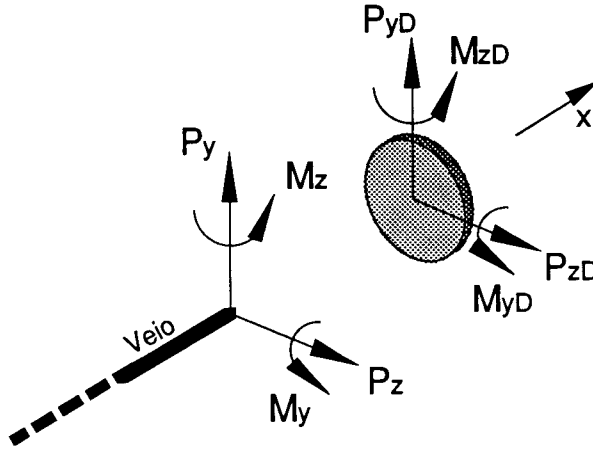


Fig 2.8

Consideremos então as seguintes equações de equilíbrio que caracterizam o movimento dinâmico do disco deste rotor quando ele roda a velocidade constante:

$$\begin{aligned}
 &\text{equilíbrio do disco} \left\{ \begin{aligned} P_{yD} &= m \ddot{y} - m \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \cos \theta_{x0} - e_z \sin \theta_{x0}) \\ P_{zD} &= m \ddot{z} - m \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) \\ M_{yD} &= \ddot{\theta}_{y0} I_D + \dot{\theta}_{x0} \dot{\theta}_{z0} I_P \\ M_{zD} &= \ddot{\theta}_{z0} I_D - \dot{\theta}_{x0} \dot{\theta}_{y0} I_P \end{aligned} \right. \\
 &\text{equilíbrio da ligação} \left\{ \begin{aligned} P_{yD} + P_y &= 0 \\ P_{zD} + P_z &= 0 \\ M_{yD} + M_y &= 0 \\ M_{zD} + M_z &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \\
 &\text{veio - disco}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{y} + P_y = m\Omega^2 (e_y \cos \Omega t - e_z \sin \Omega t) \\ m\ddot{z} + P_z = m\Omega^2 (e_z \cos \Omega t + e_y \sin \Omega t) \\ I_D \ddot{\theta}_y - I_P \Omega \dot{\theta}_z + M_y = 0 \\ I_D \ddot{\theta}_z + I_P \Omega \dot{\theta}_y + M_z = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Nas equações acima, P_y , P_z , M_y e M_z correspondem respectivamente às forças e momentos que o disco exerce no veio. As flechas e as rotações do veio no ponto em que se encontra montado o disco, resultantes da aplicação destas forças e momentos, são dadas pelas seguintes relações [49]:

$$\begin{cases} y = \left(\frac{a^3}{3EI} + \frac{a^2 L}{3EI} \right) P_y + \left(\frac{a^2}{2EI} + \frac{aL}{3EI} \right) M_z \\ z = \left(\frac{a^3}{3EI} + \frac{a^2 L}{3EI} \right) P_z - \left(\frac{a^2}{2EI} + \frac{aL}{3EI} \right) M_y \\ \theta_z = \left(\frac{a^2}{2EI} + \frac{aL}{3EI} \right) P_y + \left(\frac{a}{EI} + \frac{L}{3EI} \right) M_z \\ \theta_y = - \left(\frac{a^2}{2EI} + \frac{aL}{3EI} \right) P_z + \left(\frac{a}{EI} + \frac{L}{3EI} \right) M_y \end{cases} \quad (2.48)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.48) em ordem a P_y , P_z , M_y e M_z obtemos as expressões:

$$\begin{cases} P_y = \frac{12EI}{a^3} \left(\frac{3a+L}{3a+4L} \right) y - \frac{6EI}{a^2} \left(\frac{3a+2L}{3a+4L} \right) \phi_z \\ P_z = \frac{12EI}{a^3} \left(\frac{3a+L}{3a+4L} \right) z + \frac{6EI}{a^2} \left(\frac{3a+2L}{3a+4L} \right) \phi_y \\ M_z = - \frac{6EI}{a^2} \left(\frac{3a+2L}{3a+4L} \right) y + \frac{4EI}{a} \left(\frac{3a+3L}{3a+4L} \right) \phi_z \\ M_y = \frac{6EI}{a^2} \left(\frac{3a+2L}{3a+4L} \right) z + \frac{4EI}{a} \left(\frac{3a+3L}{3a+4L} \right) \phi_y \end{cases} = \begin{cases} P_y = C_{11}y - C_{12}\theta_z \\ P_z = C_{11}z + C_{12}\theta_y \\ M_z = -C_{12}y + C_{22}\theta_z \\ M_y = C_{12}z + C_{22}\theta_y \end{cases} \quad (2.49)$$

Substituindo (2.49) em (2.47) obtemos as equações diferenciais que regem os movimentos transversais quando se despreza o atrito.

$$\begin{cases} m\ddot{y} + C_{11}y - C_{12}\theta_z = m\Omega^2(e_y \cos \Omega t - e_z \sin \Omega t) \\ m\ddot{z} + C_{11}z + C_{12}\theta_y = m\Omega^2(e_z \cos \Omega t + e_y \sin \Omega t) \\ I_D\ddot{\theta}_y - I_P\Omega\dot{\theta}_z + C_{12}z + C_{22}\theta_y = 0 \\ I_D\ddot{\theta}_z + I_P\Omega\dot{\theta}_y - C_{12}y + C_{22}\theta_z = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Podemos ainda obter, combinando a primeira equação com a segunda e a terceira com a quarta, as equações sob a forma de equações diferenciais complexas.

$$\begin{cases} m\ddot{s} + C_{11}s + C_{12}\phi = m\Omega^2(e_y + ie_z)e^{i\Omega t} \\ I_D\ddot{\phi} - iI_P\Omega\dot{\phi} + C_{12}s + C_{22}\phi = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

2.3.1 - Regime livre

O estudo do regime livre permite-nos conhecer as frequências próprias do rotor. Utilizando a equação (2.51) e anulando-lhe o vector de forças, obtemos a equação do regime livre:

$$\begin{cases} m\ddot{s} + C_{11}s + C_{12}\phi = 0 \\ I_D\ddot{\phi} - iI_P\Omega\dot{\phi} + C_{12}s + C_{22}\phi = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Assumindo uma solução do tipo

$$\begin{bmatrix} s \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ \Phi \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2.53)$$

e substituindo-a em (2.52), obtemos o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & -I_D\omega^2 + I_P\Omega\omega + C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

De modo a possuir uma solução não nula, o determinante dos coeficientes deverá ser nulo. Esta condição é dada pela equação característica:

$$\omega^4 I_D m - I_P m \Omega \omega^3 - (I_D C_{11} + m C_{22}) \omega^2 + I_P C_{11} \Omega \omega + (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) = 0 \quad (2.55)$$

Numa primeira análise podemos ver que, contrariamente ao rotor de Jeffcott, a frequência de vibração neste caso varia com a velocidade de rotação. Esta é uma das consequências da incorporação do efeito giroscópico uma vez que agora a inércia depende da velocidade de rotação.

No rotor de Jeffcott a velocidade critica é facilmente determinada pois a frequência própria é independente da rotação e logo a qualquer rotação se pode conhecer a velocidade critica. No caso deste exemplo, uma vez que as frequências próprias variam com a velocidade de rotação, teremos de considerar $\Omega = \omega$ de modo a obter o conjunto de velocidades criticas associadas a precessões directas, ou seja, aquelas para as quais o rotor percorre a sua trajectória no mesmo sentido da velocidade de rotação. Se considerarmos que $\Omega = -\omega$ obtemos um conjunto de velocidades criticas associadas a precessões inversas, ou seja, aquelas para as quais o rotor percorre a sua trajectória no mesmo sentido inverso da velocidade de rotação. Obtemos assim a equação:

$$m(I_D - \varepsilon I_P) \Omega^4 - (C_{11}(I_D - \varepsilon I_P) + m C_{22}) \Omega^2 + C_{11} C_{22} - C_{12}^2 = 0$$

$\varepsilon = 1$ Precessões directas
 $\varepsilon = -1$ Precessões inversas

(2.56)

O resultado desta equação, considerando para um disco $I_P = 2I_D$ é no caso de precessões directas:

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{C_{11}}{m} - \frac{C_{22}}{I_D} \right]} + \sqrt{\left(\frac{C_{11}}{m} + \frac{C_{22}}{I_D} \right)^2 - \frac{4C_{12}^2}{I_D m}} \quad (2.57)$$

No caso de precessões inversas obtém-se

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{C_{11}}{m} + \frac{C_{22}}{3I_D} \right]} \pm \sqrt{\left(\frac{C_{11}}{m} - \frac{C_{22}}{3I_D} \right)^2 + \frac{4C_{12}^2}{3I_D m}} \quad (2.58)$$

2.3.2 - Regime harmónico

A principal solicitação harmónica a que um rotor está sujeito é a solicitação provocada pela excentricidade da massa do disco em relação ao seu centro geométrico (ponto em que se encontra ligado ao veio). Na equação (2.51) é esta força que se encontra representada no segundo membro. A solução homogénia desta equação foi já analisada no ponto 2.3.1. A solução particular é do tipo:

$$\begin{bmatrix} s \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_p \\ \Phi_p \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2.59)$$

Substituindo esta solução na equação (2.50) obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} -m\Omega^2 + C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & -I_D\Omega^2 + I_P\Omega^2 + C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_p \\ \Phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\Omega^2(e_y + ie_z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

cuja solução é:

$$\begin{bmatrix} S_p \\ \Phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m\Omega^2(e_y + ie_z)((I_P - I_D)\Omega^2 + C_{22})}{\Omega^4(I_D - I_P)m - (I_DC_{11} + mC_{22} - I_PC_{11})\Omega^2 + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)} \\ \frac{-m\Omega^2(e_y + ie_z)C_{12}}{\Omega^4(I_D - I_P)m - (I_DC_{11} + mC_{22} - I_PC_{11})\Omega^2 + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

A amplitude de vibração tenderá para infinito quando a rotação for tal que anule o denominador da solução. Comparando o denominador com a expressão (2.56), podemos concluir que ele se anula quando estamos perante uma velocidade crítica em precessão directa. Por outro lado, a solução (2.59) representa um vector sempre em precessão directa. Logo este tipo de solicitação está sempre associado a precessões directas. Na verdade, como provaremos mais adiante, este facto está associado ao tipo de apoio. Se os apoios forem isotrópicos, ou seja, com as mesmas características elásticas qualquer que seja a direcção considerada perpendicular ao eixo de rotação, a precessão será sempre directa e

os valores da amplitude só tenderão para infinito nas velocidades críticas associadas às precessões directas (considerando que a força devida à excentricidade da massa é a única solicitação harmónica).

2.3.3 - Exemplo numérico

Este exemplo numérico mostra-nos um andamento possível para as frequências próprias com a velocidade de rotação. Os dados numéricos são dados pela tabela 2.1

Características dimensionais do rotor	
Diâmetro do disco	2 m
Espessura do disco	4 mm
Massa específica	7800 Kg / m ³
E I	9.37 E+4 N.m ²
Veio	a=0.25 m L=0.5 m

Tabela 2.1 Características do rotor

Com estas características obtemos os seguintes valores para as constantes utilizadas acima:

	N / m		
C ₁₁	32709469	m	9,80E+1 Kg
C ₂₂	1226605	I _D	2,45E+1 Kg m ²
C ₁₂	5724157		

Tabela 2.2 Constantes obtidas a partir das características do rotor

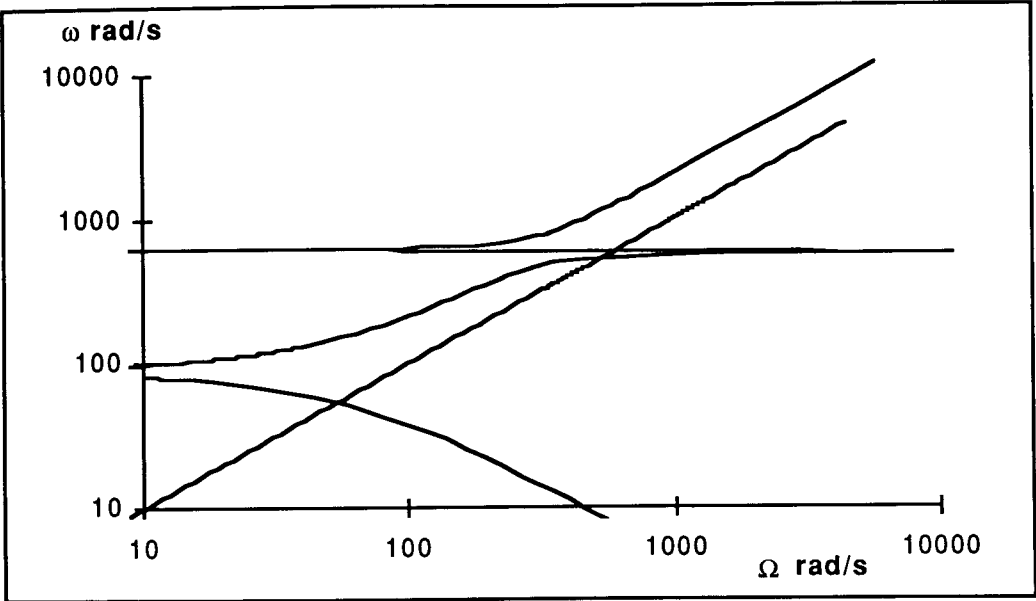


Fig 2.9 Frequências próprias função da rotação

Com base nos valores da tabela 2.2 obtemos o figura 2.9 onde se encontram representadas as frequências próprias em valor absoluto. As frequências representadas neste gráfico e cujos declives são negativos correspondem às raízes negativas, ou seja, correspondem a frequências próprias de precessão inversa. Estas curvas foram obtidas a partir da equação (2.55). Neste gráfico foi ainda desenhada a recta de equação $\omega=\Omega$. A intersecção desta recta com as curvas das frequências próprias dá-nos a conhecer as velocidades críticas. O valor das velocidades críticas, dadas pelas equações (2.57) e (2.58), são:

	Rotações críticas	
	rad / s	R P M
precessão directa	542,27	5178,39
precessão inversa	54,20	517,60
precessão inversa	589,45	5628,88

Tabela 2.2 Velocidades críticas

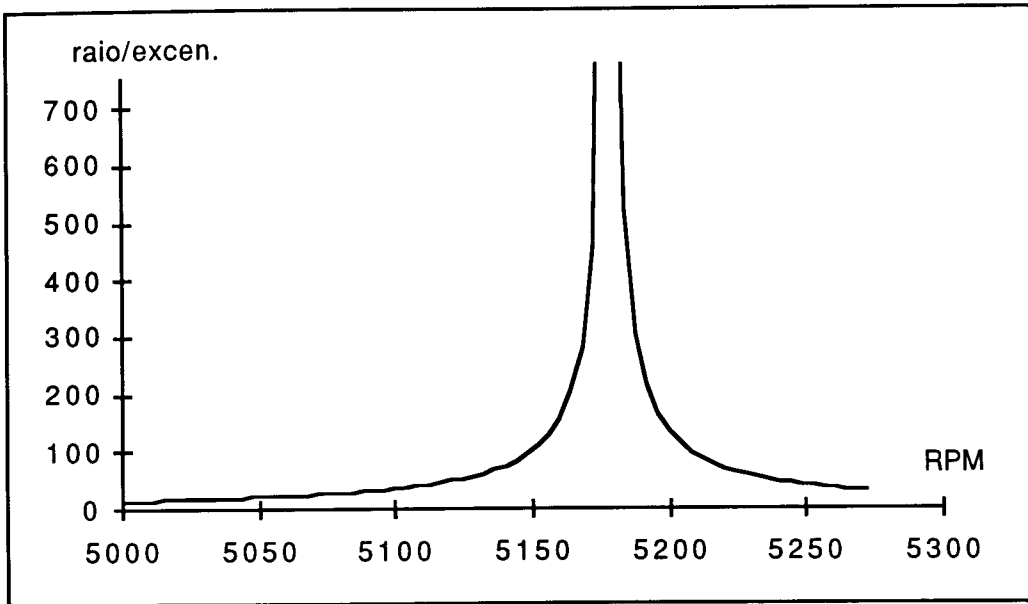


Fig 2.10 Raio / excentricidade função da rotação

No que diz respeito à resposta do disco à solicitação harmónica devida a uma excentricidade da massa, obtivemos o gráfico 2.2. A resposta a uma solicitação harmónica é, para o caso deste rotor, dada pela equação (2.61) que corresponde à equação duma trajectória circular do centro do disco. A curva representada no figura 2.10 corresponde à curva Raio / excentricidade (raio da trajectória circular sobre a excentricidade da massa do disco) função da rotação.

Tal como já tínhamos referido, a amplitude tenderá para infinito para os valores da velocidade de rotação iguais aos das velocidades críticas em precessão directa. No caso presente só detectamos uma velocidade crítica em precessão directa.

2.4 - Rotor com massa distribuída.

Nos casos analisados até agora desprezou-se sempre a massa dos veios. A massa dos veios contribui para o comportamento dinâmico dos rotores não devendo por isso ser desprezada. Vamos então considerar o estudo de um rotor constituído por uma viga direita de secção circular.

2.4.1 - Equações diferenciais de movimento

Consideremos um elemento de viga de comprimento dx (fig 2.11). Este elemento de viga não é mais do que do que um disco de comprimento dx .

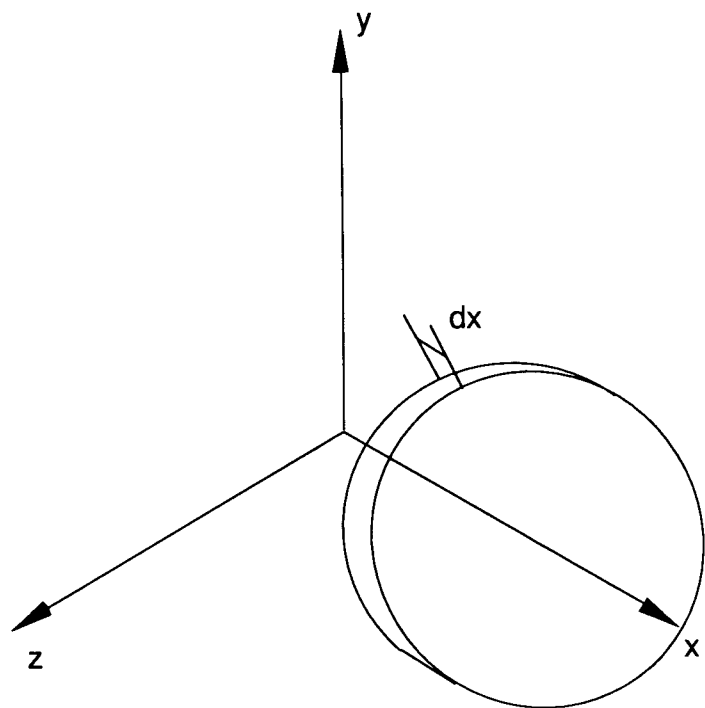


Fig 2.11 Elemento infinitesimal de viga

Recorrendo às equações (2.46) e (2.43) obtemos o conjunto das forças de inércia para um disco de comprimento dx .

$$\begin{cases} \left(-\mu \ddot{y} + \mu \Omega^2 (e_y \cos \Omega t - e_z \sin \Omega t) \right) dx = F_y^i \\ \left(-\mu \ddot{z} + \mu \Omega^2 (e_y \sin \Omega t + e_z \cos \Omega t) \right) dx = F_z^i \\ -(I_d \ddot{\theta}_y + \Omega I_p \dot{\theta}_z) dx = M_y^i \\ -(I_d \ddot{\theta}_z - \Omega I_p \dot{\theta}_y) dx = M_z^i \end{cases} \quad (2.62)$$

em que:

	Descrição	Secção circular
μ	Massa por unidade de comprimento.	$\rho \frac{\pi(D_e^2 - D_i^2)}{4}$
I_d	Momento de inércia da secção	$\rho \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{64}$
I_p	Momento polar de inércia da secção	$2 * I_d$

Tabela 2.3 (ρ -massa volúmica D_e D_i diâmetro exterior e interior da secção)

Consideremos então a figura 2.12 onde se representam todas forças actuantes num elemento de viga de comprimento dx .

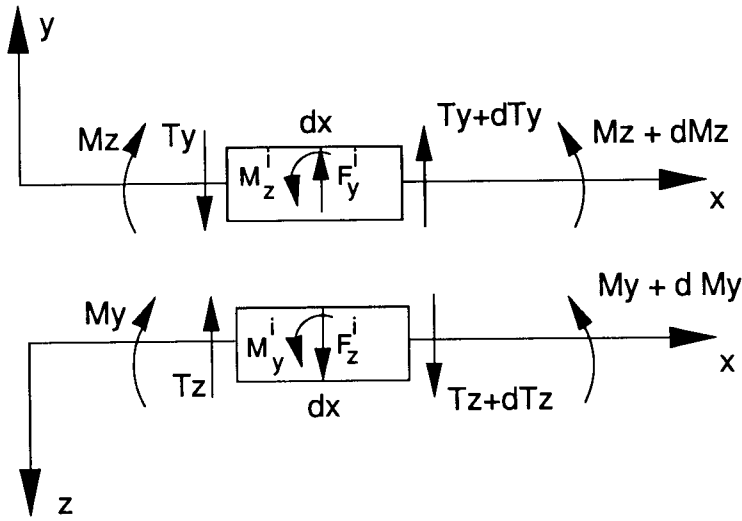


Fig 2.12 Esforços actuantes num elemento de viga

Com o auxilio da figura 2.12, estabelecemos o equilibrio dinâmico de um veio em rotação como sendo dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \ddot{y} - \frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \Omega^2 (e_y \cos \Omega t - e_z \sin \Omega t) \\ \mu \ddot{z} - \frac{\partial T_z}{\partial x} = \mu \Omega^2 (e_z \cos \Omega t + e_y \sin \Omega t) \end{array} \right. \quad \text{Equilibrio de forças}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_d \ddot{\theta}_y + \Omega I_p \dot{\theta}_z - \frac{\partial M_y}{\partial x} + T_z = 0 \\ I_d \ddot{\theta}_z - \Omega I_p \dot{\theta}_y - \frac{\partial M_z}{\partial x} - T_y = 0 \end{array} \right. \quad \text{Equilibrio de momentos}$$

(2.63)

Estão assim obtidas as equações de equilíbrio dinâmico de um veio.

2.4.2 - Rotor de secção circular constante.

As relações entre as rotações e os deslocamentos bem como os momentos e os deslocamentos são, baseadas na teoria de Euler-Bernoulli, dadas pelas seguintes relações [13] [44] :

$$\begin{cases} \theta_z = \frac{dy}{dx} \\ \theta_y = -\frac{dz}{dx} \\ M_z = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \\ M_y = -EI \frac{d^2 z}{dx^2} \end{cases} \quad (2.64)$$

Estas relações não têm em conta a influencia do esforço de corte.

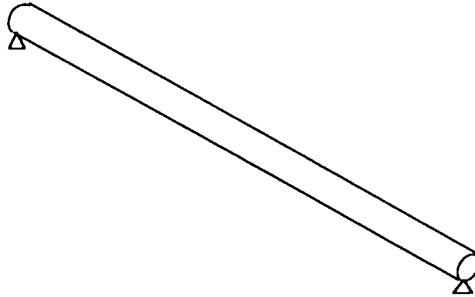


Fig 2.13 Rotor de secção circular constante

Baseado nas equações de equilíbrio dinâmico dos rotores (2.63) e nas relações (2.64) obtemos as equações diferenciais de equilíbrio (regime livre):

$$\begin{cases} \frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\ EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + T_y = I_d \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + 2I_d \Omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ EI \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + T_z = I_d \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) - 2I_d \Omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (2.65)$$

Derivando a segunda e quarta equações em ordem a x, podemos reescrever este sistema de equações, obtendo:

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - I_d \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \\ EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - I_d \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

Se considerarmos neste sistema $\Omega=0$ ele transforma-se nas equações diferenciais que regem o movimento transversal livre de uma viga tendo em conta a inércia de rotação das secções e desprezando o esforço de corte [5].

Multiplicando a segunda equação por $i = \sqrt{-1}$ e combinando-a com a primeira obtemos a equação diferencial complexa que rege o movimento lateral do rotor:

$$EI \frac{\partial^4 s}{\partial x^4} - I_d \left(\frac{\partial^4 s}{\partial x^2 \partial t^2} - 2i\Omega \frac{\partial^4 s}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (2.67)$$

Para o caso de um rotor simplesmente apoiado e de comprimento L a resposta será do tipo:

$$s = S \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\omega t} \quad (2.68)$$

com $n=1,2,3,\dots$. Substituindo (2.68) em (2.67) obtemos a equação característica que permite obter as frequências próprias ω_n .

$$\left(\mu + \frac{I_d \pi^2 n^2}{L^2} \right) \omega_n^2 - 2 \frac{I_d \pi^2 n^2}{L^2} \Omega \omega_n - EI \frac{\pi^4 n^4}{L^4} = 0 \quad (2.69)$$

A solução desta equação é dada por:

$$\omega_n = \frac{\pi^2 n^2 I_d}{\mu L^2 + \pi^2 n^2 I_d} \left(\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + (\mu L^2 + \pi^2 n^2 I_d)/L^2} \right) \quad (2.70)$$

As velocidades críticas em precessão directa são nos dadas pela equação (2.69) considerando $\omega=\Omega$, obtem-se:

$$\Omega_{cn} = \frac{I_d \pi^2 n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{(\mu - \frac{I_d \pi^2 n^2}{L^2})}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.71)$$

As velocidades críticas em precessão inversa são nos dadas pela equação (2.69) considerando $\omega = -\Omega$ e obtém-se:

$$\Omega_{cn} = \frac{I_d \pi^2 n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{(\mu + \frac{3I_d \pi^2 n^2}{L^2})}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.72)$$

2.5 - Transição de uma velocidade crítica por um rotor de Jeffcott

O estudo do comportamento de um rotor na transição de uma velocidade crítica é essencial para a avaliação dos esforços induzidos quando o rotor passa por uma dessas velocidades. É essencial nomeadamente quando o rotor opera a velocidades superiores a uma velocidade crítica uma vez que por ela vai ter de passar na fase de arranque e na fase de paragem [10]. As equações diferenciais que regem o movimento dinâmico deste tipo de rotores são as equações (2.5) e (2.6) anteriormente desenvolvidas.

Para caracterizarmos o movimento do rotor através de uma velocidade crítica teremos de variar a velocidade. Admitindo que essa variação é feita com uma aceleração constante, o ângulo rodado pelo disco seguirá a seguinte lei

$$\phi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 \quad (2.73)$$

e a velocidade angular vem dada por

$$\dot{\phi} = \omega_0 + 2\varepsilon t \quad (2.74)$$

onde Ω_0 é a velocidade angular no instante inicial e ε é metade da aceleração angular α .

As equações diferenciais resultam então na forma:

$$m \ddot{y} + k y = k a \cos \varphi = k a \cos(\omega_0 t + \varepsilon t^2) \quad (2.75)$$

$$m \ddot{z} + k z = k a \sin \varphi = k a \sin(\omega_0 t + \varepsilon t^2) \quad (2.76)$$

A frequência natural de vibração é, como já tínhamos visto, independente da velocidade de rotação e igual a $\omega = \sqrt{k/m}$, pelo que a velocidade crítica é também igual a $\sqrt{k/m}$ ($\Omega = \omega = \sqrt{k/m}$).

Como condições iniciais, consideremos que o rotor se encontra estabilizado a determinada rotação. Consideremos então como condições iniciais a posição e velocidade para $t=0$ do sistema quando este se encontra sujeito a uma força harmónica causada por uma excentricidade da massa (considerando os termos transitórios nulos). As condições iniciais podem, por isso, ser obtidas a partir da equação da resposta (2.9) obtendo assim para $t=0$:

$$y(0) = \frac{a}{1 - \frac{\Omega^2}{k/m}} \quad z(0) = 0 \quad (2.77)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad \dot{z}(0) = \frac{\Omega a}{1 - \frac{\Omega^2}{k/m}} \quad (2.78)$$

Uma das possíveis maneiras de resolver as equações (2.75) e (2.76) é a partir do integral de Duhamel [5]. No caso das equações (2.75) e (2.76) a aplicação do integral de Duhamel resulta nos integrais

$$y(t) = a \omega \int_0^t \sin(\omega(t - \tau)) \cos(\omega_0 t + \varepsilon t^2) d\tau + \frac{a}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \cos \omega t \quad (2.79)$$

$$z(t) = a \omega \int_0^t \sin(\omega(t - \tau)) \sin(\omega_0 t + \varepsilon t^2) d\tau + \frac{\Omega}{\omega} \frac{a}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \sin \omega t \quad (2.80)$$

Estes integrais não possuem resolução analítica. A sua resolução numérica pode ser realizada com um dos métodos de integração numérica

descritos em [5], [8], [9]... . Clough e Penzien [5] apresenta ,entre outros, o método de integração numérica através da regra dos trapézios que será utilizado para resolver os integrais acima.

Consideremos então um exemplo numérico de modo a podermos caracterizar uma resposta típica à transição de uma velocidade critica.Para os dados numéricos da tabela seguinte:

$\varepsilon \text{ rad / s}^2$	10
$\Omega_0 \text{ rad / s}$	94.5
$\omega \sqrt{k/m} \text{ rad / s}$	105

Tabela 2.4 Dados para o rotor de Jeffcott

obtemos a resposta representada no gráfico 2.3

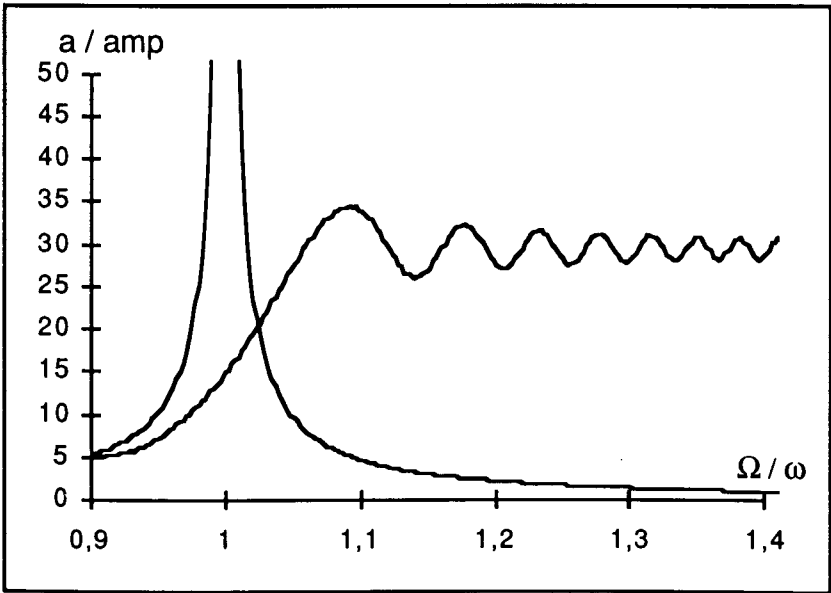


Fig 2.14 Resposta do rotor de Jeffcott a uma transição por uma velocidade critica.($\text{amp}=\sqrt{y^2 + z^2}$)

A forma desta resposta está relacionada com o facto de que estamos perante um sistema conservativo. A amplitude máxima estará não só ligada às características de amortecimento mas também com a aceleração, ou seja com o tempo que demora a passar pela velocidade critica. Estes aspectos serão

discutidos mais adiante quando se falar da simulação deste fenómeno para os modelos de elementos finitos.

2.6 - Conclusões

Este capítulo teve como objectivo determinar um conjunto de soluções analíticas com vista a:

a) Pôr em evidência e obter sensibilidade para os fenómenos característicos das vibrações dos rotores.

b) Tomar conhecimento e estabelecer algumas soluções teóricas que permitam a comparação dos resultados obtidos com os dos modelos de elementos finitos de modo a esses modelos e as técnicas a desenvolver bem como os programas implementados.

CAPÍTULO III

3-Modelo numérico por elementos finitos

O sistema de equações diferenciais (2.63), analisado no capítulo anterior, traduz o equilíbrio dinâmico de um rotor. A resolução destas equações só se torna possível para geometrias muito simples como no caso considerado em 2.4.2. Para rotores com descontinuidades geométricas torna-se necessário recorrer a soluções aproximadas através, por exemplo, do método dos resíduos pesados [51]. Estas soluções aproximadas são obtidas com base em funções de interpolação em todo o domínio. No caso de geometrias complexas podem revestir-se de grandes dificuldades e são somente válidas caso a caso.

Pelo contrário, no método dos elementos finitos o domínio é dividido em subdomínios (elementos) que se encontram ligados entre si. Assim, geometrias complexas podem ser entendidas como um conjunto de subdomínios de geometria simples. O método dos elementos finitos, ao caracterizar de um modo simples o comportamento destes subdomínios, permite obter soluções para geometrias de grande complexidade.

Por outro lado, como a aproximação à solução é estabelecida a nível dos elementos, o método dos elementos finitos constitui um processo sistemático e bem adaptado ao cálculo automático. Estas são as principais razões pela qual ele tem tido grande aplicação e é também utilizado na discretização espacial de rotores.

Com vista à aplicação do método dos elementos finitos à dinâmica dos rotores, será necessário reformular as equações do movimento. A formulação adequada à aplicação do método dos elementos finitos à dinâmica dos rotores

será a formulação variacional das equações do movimento. A formulação variacional pode ser obtida a partir das próprias equações diferenciais [35], da equação de Lagrange [20], [30], [40]... ou a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

3.1 - Formulação variacional das equações do movimento

Obtivemos em (2.62) as equações que caracterizam as forças generalizadas de inércia associadas ao movimento lateral duma secção de rotor. Essas forças são:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{inércia} = \begin{Bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ M_y^i \\ M_z^i \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} (-\mu \ddot{u}_y + \Omega^2 \mu (e_y \cos \Omega t - e_z \sin \Omega t)) dx \\ (-\mu \ddot{u}_z + \Omega^2 \mu (e_z \cos \Omega t + e_y \sin \Omega t)) dx \\ -(I_d \ddot{\theta}_y + I_p \dot{\theta}_z \Omega) dx \\ -(I_d \ddot{\theta}_z - I_p \dot{\theta}_y \Omega) dx \end{Bmatrix} = \\ &= -[J] \ddot{\vec{u}} dx - [J_G] \dot{\vec{u}} dx + \vec{F}^{ext} dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde

$$[J] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$[J_G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega I_p \\ 0 & 0 & -\Omega I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\vec{F}^{ext} = \begin{Bmatrix} \Omega^2 \mu (e_y \cos \Omega t - e_z \sin \Omega t) \\ \Omega^2 \mu (e_z \cos \Omega t + e_y \sin \Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\vec{u}(x,t) = [u_y(x,t), u_z(x,t), \theta_y(x,t), \theta_z(x,t)]^T \quad (3.5)$$

A parcela (3.4), apesar de ser uma força de inércia, pode ser considerada como uma força harmónica exterior aplicada ao rotor uma vez que é completamente independente do campo de deslocamentos. Deste modo as parcelas da força de inércia a considerar são somente as duas primeiras, sendo a parcela (3.4) incluída no conjunto de forças exteriores aplicadas ao rotor.

A partir destas equações podemos dizer que, cinematicamente, o movimento lateral da secção dum rotor é caracterizado por dois deslocamentos $u_y(x,t)$ e $u_z(x,t)$ e duas rotações $\theta_y(x,t)$ e $\theta_z(x,t)$ [35]. O campo de deslocamentos para uma secção dum rotor é então dado por (3.5)

Considerando este campo de deslocamentos, podemos obter as equações do movimento recorrendo ao Principio dos Trabalhos Virtuais. Segundo este principio, "se um sistema que está em equilíbrio e sob a acção de um conjunto de forças é sujeito a um deslocamento virtual, isto é, qualquer deslocamento compatível com as restrições do sistema, o trabalho total realizado pelas forças será nulo" [5]. Dividindo o trabalho virtual em trabalho virtual realizado pelas forças de inércia, pelas forças elásticas internas e pelas forças exteriores e desprezando as forças de superficie e de volume aplicadas obtemos a seguinte equação [2], [1], [34] :

$$\delta W_{int} = \delta W_i + \delta W_{ext} \quad (3.6)$$

em que:

δW_i é o trabalho virtual realizado pelas forças inércia

δW_{ext} é o trabalho virtual realizado pelas forças exteriores

δW_{int} é o trabalho virtual realizado elásticas internas

Caracterizando estes trabalhos virtuais, temos que:

i-O trabalho virtual realizado pelas forças de inércia é dado por:

$$\delta W_i = \int_L \delta \bar{u}^T \bar{F}^i dx$$
$$\bar{F}^i = -[J]\ddot{u} - [J_G]\dot{u} \quad (3.7)$$

ii-O trabalho virtual realizado pelas forças externas é dado por:

$$\delta W_{ext} = \int_L \delta \bar{u}^T \bar{F}^{ext} dx \quad (3.8)$$

iii-O trabalho virtual realizado pelas forças elásticas é dado por [1], [33],

[34]

$$\delta W_{int} = \int_V \delta \bar{\epsilon}^T \bar{\sigma} dv \quad (3.9)$$

As deformações consideradas nesta última expressão estão relacionadas com o campo de deslocamentos considerado. Genericamente, consideremos as relações entre o campo de deslocamentos e as deformações como sendo dadas por:

$$\bar{\epsilon} = [B]\bar{u} \quad (3.10)$$

onde [B] é normalmente chamada de matriz das deformações. Podemos ainda relacionar as deformações com as tensões através da matriz [D]

$$\bar{\sigma} = [D]\bar{\epsilon} \quad (3.11)$$

A matriz [D] é normalmente chamada de matriz de elasticidade. Assim, o trabalho virtual realizado pelas forças elásticas pode escrever-se:

$$\delta W_{int} = \int_L \delta \bar{u}^T [B]^T [D][B]\bar{u} dx \quad (3.12)$$

A forma das matrizes [B] e [D] depende da teoria subjacente à caracterização do fenómeno da flexão. No caso da flexão de vigas podemos distinguir duas teorias para a caracterização da flexão, a teoria de Euler-Bernouilli e a teoria de Timoshenko [33] que abordaremos mais adiante.

A equação do movimento, aplicando o Principio dos trabalhos virtuais, resulta então na equação final que traduz o equilíbrio global do sistema:

$$\int_L \delta \bar{u}^T [J] \ddot{u} \, dx + \int_L \delta \bar{u}^T [J_G] \dot{u} \, dx + \int_L \delta \bar{u}^T [B]^T [D] [B] \bar{u} \, dx - \int_L \delta \bar{u}^T \bar{F}^{\text{ext}} \, dx = 0 \quad (3.13)$$

3.2 - Discretização pelo método dos elementos finitos

De modo a construir a solução aproximada por elementos finitos, consideremos o domínio dividido num conjunto de subdomínios chamados de elementos. A equação (3.13) que traduz o equilíbrio global do sistema pode ser escrita na forma:

$$\sum_{e=1}^E \int_{L_e} \delta \bar{u}^T [J] \ddot{u} \, dx + \int_{L_e} \delta \bar{u}^T [J_G] \dot{u} \, dx + \int_{L_e} \delta \bar{u}^T [B]^T [D] [B] \bar{u} \, dx - \int_{L_e} \delta \bar{u}^T \bar{F}^{\text{ext}} \, dx = 0 \quad (3.14)$$

Tendo em conta que em cada subdomínio a solução aproximada que se procura deve ser diferenciável em todos os seus pontos (de notar que a matriz [B] contém operadores diferenciais), o conjunto de elementos a considerar deve ser tal que os pontos de descontinuidade geométrica sejam os pontos fronteira dos elementos. Podemos assim dizer que cada elemento é considerado como um subdomínio regular (fig 3.1).

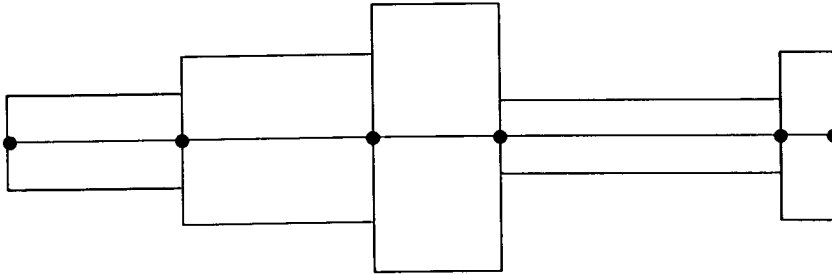


Fig 3.1 Descretização possível por elementos finitos

Consideremos um conjunto de elementos finitos com N pontos nodais. A cada nó i (ou ponto nodal) estão associadas um conjunto de variáveis que caracterizam o campo de deslocamentos nesse nó. No caso dos rotores podemos considerar geralmente quatro variáveis nodais (embora por vezes haja elementos com mais graus de liberdade [20])

$$\bar{q}(t) = [\dots, u_y^i(t), u_z^i(t), \theta_y^i(t), \theta_z^i(t), \dots]^T \quad (3.15)$$

No método dos elementos finitos, o campo de deslocamentos no interior de cada elemento é aproximado a partir de um conjunto de funções de interpolação e das variáveis nodais associadas a esse elemento. O campo de deslocamentos de um qualquer ponto no interior de um elemento fica assim função dos deslocamentos dos nós associados a esse elemento, ou seja, o campo de deslocamentos no interior de um elemento é aproximado com base nas funções de interpolação e nas variáveis nodais .(fig 3.2)

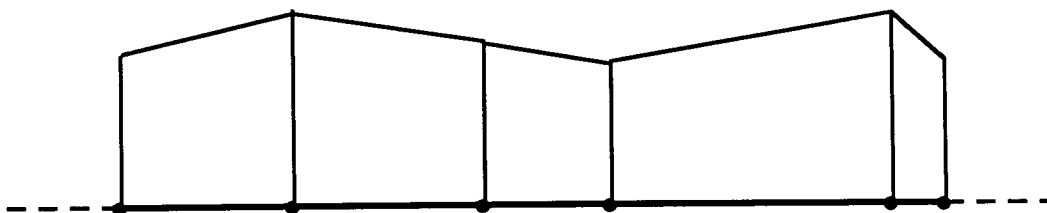


Fig 3.2 Aproximação local com interpolação linear

Consideremos, por exemplo, um elemento genérico com 2 nós e 4 variáveis por nó (este é um elemento comum usado em dinâmica de rotores). Para maior facilidade de estudo, isolemos um elemento e numeremos localmente os nós desse elemento.

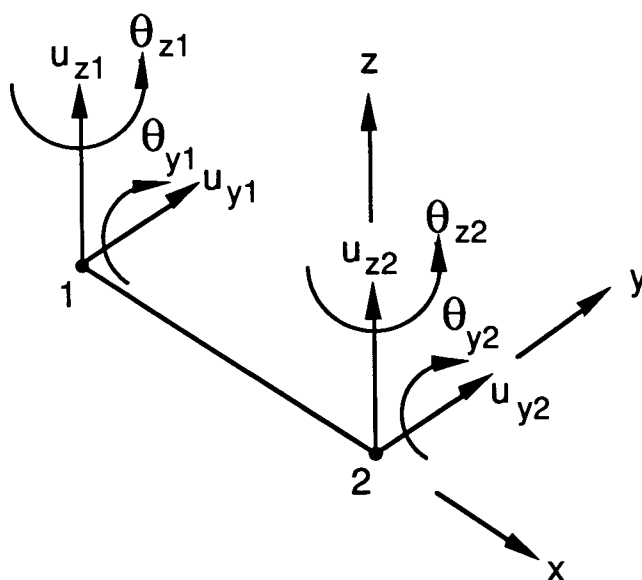


Fig 3.3 Elemento genérico de rotor de quatro nós

A correspondência entre cada um destes nós e a numeração dos nós no sistema global é feita através duma tabela de conectividades. Será necessário

também estabelecer as correspondências entre as variáveis nodais dos elementos e as variáveis nodais globais. Estas correspondências podem ser estabelecidas através da relação matricial:

$$\bar{q}^e(t) = [A^e] \bar{q}(t) \quad (3.16)$$

em que $[A^e]$ é chamada matriz de localização do elemento (cada elemento terá a sua matriz de localização) e $\bar{q}^e$ é o vector contendo as variáveis nodais do elemento genérico.

O campo de deslocamentos num qualquer ponto do interior dum elemento genérico é então feito através de funções de interpolação elementares que genericamente podemos escrever como sendo:

$$\bar{u}^e(x,t) = [N^e(x)] \bar{q}^e(t) \quad (3.17)$$

onde $[N^e(x)]$ é a matriz das funções de forma (das funções de interpolação) do elemento. Substituindo esta equação em (3.13), obtemos a formulação das equações do movimento sob a forma

$$\sum_{e=1}^E \delta \bar{q}^{eT} \left(\int_{Le} [N^e]^T [J] [N^e] dx \ddot{\bar{q}}^e + \int_{Le} [N^e]^T [J_G] [N^e] dx \dot{\bar{q}}^e + \right. \\ \left. + \int_{Le} ([B] [N^e])^T [D] ([B] [N^e]) dx \bar{q}^e - \int_{Le} [N^e]^T \bar{F}^{ext} dx \right) = 0 \quad (3.18)$$

Substituindo os integrais desta expressão por

$$[M^e] = \int_{Le} [N^e]^T [J] [N^e] dx \quad (3.19)$$

$$[G^e] = \int_{Le} [N^e]^T [J_G] [N^e] dx \quad (3.20)$$

$$[K^e] = \int_{Le} ([B] [N^e])^T [D] ([B] [N^e]) dx \quad (3.21)$$

$$\vec{F}^e = \int_{L^e} [\mathbf{N}^e]^T \vec{F}^{ext} dx \quad (3.22)$$

Estas expressões traduzem as matrizes elementares de massa, giroscópica e de rigidez e o vector de cargas, respectivamente. A relação (3.18) pode agora ser escrita sob a forma:

$$\sum_{e=1}^E \delta \vec{q}^e{}^T ([\mathbf{M}^e] \ddot{\vec{q}}^e + [\mathbf{G}^e] \dot{\vec{q}}^e + [\mathbf{K}^e] \vec{q}^e - \vec{F}^e) = 0 \quad (3.23)$$

3.3 - Montagem das matrizes elementares

A Montagem é a operação que consiste em construir as matrizes globais a partir das contribuições elementares [35]. No ponto 3.2, relacionamos um elemento da estrutura global com um elemento genérico através da relação (3.16). Para tal, foi necessário relacionar os nós e as variáveis nodais do sistema global com os nós e variáveis nodais do elemento genérico. Agora, calculadas as matrizes elementares, será necessário realizar a operação inversa, ou seja, relacionar as matrizes elementares com as matrizes do sistema global. Introduzindo a mesma relação (3.16) em (3.23), obtém-se para o equilíbrio global do sistema:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \delta \vec{q}^T ([\mathbf{A}^e]^T [\mathbf{M}^e] [\mathbf{A}^e] \ddot{\vec{q}} + [\mathbf{A}^e]^T [\mathbf{G}^e] [\mathbf{A}^e] \dot{\vec{q}} + \\ + [\mathbf{A}^e]^T [\mathbf{K}^e] [\mathbf{A}^e] \vec{q} - [\mathbf{A}^e]^T \vec{F}^e) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta \vec{q}^T ([\mathbf{M}^E] \ddot{\vec{q}} + [\mathbf{G}^E] \dot{\vec{q}} + [\mathbf{K}^E] \vec{q}) = \delta \vec{q}^T \vec{F}^E \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde $[\mathbf{M}^E]$, $[\mathbf{G}^E]$ e $[\mathbf{K}^E]$ representam as matrizes globais.

De notar que na prática as matrizes de localização dos elementos não são construídas, pois a operação de montagem não é mais do que uma sobreposição das matrizes elementares sobre as matrizes globais.

3.4 - Modelização de discos rígidos

Um disco indeformável é um dos dos órgãos que um veio pode ter acoplado a si [3]. Os discos montados em veios contribuem unicamente com termos de inércia. As forças de inércia para um disco foram obtidas no Capítulo 2 e são dadas pela equação.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_D^i = \begin{Bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ M_y^i \\ M_z^i \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -m\ddot{u}_y + \Omega^2 m(e_y \cos \Omega t - e_z \sin \Omega t) \\ -m\ddot{u}_z + \Omega^2 m(e_z \cos \Omega t + e_y \sin \Omega t) \\ -(I_D \ddot{\theta}_y + I_P \dot{\theta}_z \Omega) \\ -(I_D \ddot{\theta}_z - I_P \dot{\theta}_y \Omega) \end{Bmatrix}_{x=x_i} = \\ &= \left(-[M^d] \ddot{\mathbf{u}}^i - [G^d] \dot{\mathbf{u}}^i + \tilde{\mathbf{F}}_D \right)_{x=x_i} \end{aligned} \quad (3.25)$$

em que

$$[M^d] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$[G^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega I_P \\ 0 & 0 & -\Omega I_P & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^d = \Omega^2 m \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \Omega t + \Omega^2 m \begin{bmatrix} -e_z \\ e_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \Omega t \quad (3.28)$$

Tal como já foi considerado no caso do veio, as forças de inércia devidas a uma excentricidade são consideradas como forças exteriores aplicadas, neste caso, ao disco. O trabalho virtual realizado pelas forças de inércia vem então dado por:

$$\delta W_i^D = -\delta \tilde{u}_{x=x_i}^T \left([M^d] \ddot{u}_{x=x_i} + [G^d] \dot{\tilde{u}}_{x=x_i} \right) \quad (3.29)$$

$$\delta W_{ext}^D = \delta \tilde{u}_{x=x_i}^T \tilde{F}^d \quad (3.30)$$

O trabalho virtual de inércia realizado por um disco localizado num nó i resulta então na expressão

$$\delta W_i^D = -\delta \tilde{q}^i{}^T \left([M^d] \ddot{\tilde{q}}^i + [G^d] \dot{\tilde{q}}^i \right) \quad (3.31)$$

$$\delta W_{ext}^D = \delta \tilde{q}^i{}^T \tilde{F}^d \quad (3.32)$$

Tal como anteriormente fizemos com as matrizes elementares, podemos agora relacionar as variáveis associadas ao disco montado no nó i com as variáveis globais através da relação matricial:

$$\tilde{q}^i(t) = [A_D^i] \tilde{q}(t) \quad (3.33)$$

resultando como trabalho virtual de inércia dos discos a expressão

$$\begin{aligned} \delta W_i^D &= \sum_{i=1}^D -\delta \tilde{q}^T \left([A_D^i]^T [M^d] [A_D^i] \ddot{\tilde{q}} + [A_D^i]^T [G^d] [A_D^i] \dot{\tilde{q}} \right) = \\ &= -\delta \tilde{q}^T \left([M^D] \ddot{\tilde{q}} + [G^D] \dot{\tilde{q}} \right) \\ \delta W_{ext}^D &= \sum_{i=1}^D \delta \tilde{q}^T [A_D^i]^T \tilde{F}^d = \delta \tilde{q}^T \tilde{F}^D \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.5 - Modelização dos apoios

O comportamento dinâmico dum veio é fortemente influenciado pelo tipo de apoios que o suportam. No caso de chumaceiras hidrodinâmicas, as propriedades do filme de óleo são determinantes no comportamento dinâmico do rotor, havendo mesmo a possibilidade de se registarem fortes instabilidades [46].

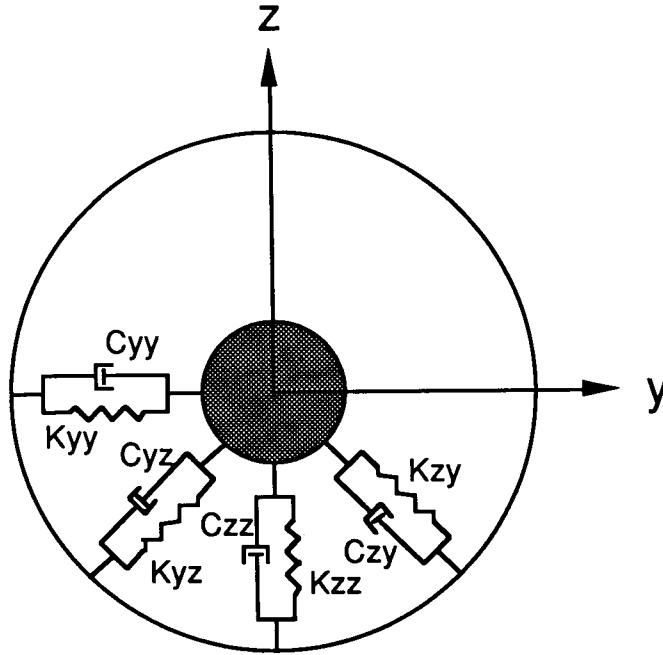


Fig 3.4 Chumaceira

O comportamento de uma chumaceira é dissipativo e não linear. No entanto quando tratamos de casos em que o deslocamento possa ser considerado de pequenas amplitudes e o veio esteja a uma velocidade de rotação constante, as relações entre a força e o deslocamento são aproximadamente lineares. Esta linearização permite caracterizar a chumaceira através de quatro parâmetros de rigidez e quatro parâmetros de dissipação (figura 3.4). Podemos assim representar as propriedades mecânicas de uma chumaceira através de uma matriz de rigidez e de uma matriz de dissipação. Tsunea [46] apresenta valores para os parâmetros de rigidez e de dissipação para a maior parte das chumaceiras existentes.

O trabalho virtual realizado pela chumaceira que se encontra num nó j vem dado por

$$\delta W_{int}^C = \delta \bar{q}^j{}^T \left([K^c] \bar{q}^j + [C^c] \dot{\bar{q}}^j \right) \quad (3.35)$$

onde:

$$[K^c] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & 0 & 0 \\ K_{yx} & K_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$[C^c] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 & 0 \\ C_{yx} & C_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Para que o regime seja considerado conservativo, a matriz de dissipação viscosa $[C]$ terá de ser nula e a matriz $[K]$ terá de ser simétrica .

Tal como no caso dos discos, podemos agora relacionar as variáveis associadas à chumaceira montada no nó i com as variáveis globais, de modo que:

$$\bar{q}^j(t) = [A_C^j] \bar{q}(t) \quad (3.38)$$

Assim, a expressão para o trabalho virtual das chumaceiras vem:

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^C &= \sum_{i=1}^D \delta \bar{q}^T \left([A_C^j]^T [K^c] [A_C^j] \bar{q} + [A_C^j]^T [C^c] [A_C^j] \dot{\bar{q}} \right) \\ &= \delta \bar{q}^T \left([K^C] \bar{q} + [C^C] \dot{\bar{q}} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

No caso de estarmos perante um modelo conservativo o trabalho virtual das chumaceiras é dado pela expressão simplificada:

$$\delta W_{int}^C = \delta \bar{q}^T [K^C] \bar{q} \quad (3.40)$$

onde $[K^C]$ é uma matriz simétrica.

3.6 - Modelo espacial conservativo

Na formulação do modelo conservativo, o mecanismo de dissipação viscosa considerado nas chumaceiras é naturalmente nulo. Deste modo, o modelo completo conservativo de elementos finitos que caracteriza o movimento de um rotor resulta na equação final

$$\begin{aligned} & [M^E]\ddot{\bar{q}} + [G^E]\dot{\bar{q}} + [K^E]\bar{q} + \\ & + [M^D]\ddot{\bar{q}} + [G^D]\dot{\bar{q}} + \quad \text{contribuição dos discos rígidos} \\ & + [K^C]\bar{q} = \quad \text{contribuição das chumaceiras} \\ & = (\bar{Q}_C^E + \bar{Q}_C^D)\cos\Omega t + (\bar{Q}_S^E + \bar{Q}_S^D)\sin\Omega t \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [M]\ddot{\bar{q}} + [G]\dot{\bar{q}} + [K]\bar{q} = \bar{F} \quad (3.41)$$

em que

$$[M] = [M^E] + [M^D] \quad (3.42)$$

$$[G] = [G^E] + [G^D] \quad (3.43)$$

$$[K] = [K^E] + [K^C] \quad (3.44)$$

$$\bar{F} = \bar{F}^E + \bar{F}^D = (\bar{Q}_C^E + \bar{Q}_C^D)\cos\Omega t + (\bar{Q}_S^E + \bar{Q}_S^D)\sin\Omega t \quad (3.45)$$

3.7 - Elemento de viga de Timoshenko

No ponto 3.1 referimos que as relações entre os deslocamentos e as deformações dependem da teoria subjacente à caracterização da flexão. A modelização do fenómeno da flexão pode ser realizada segundo uma das duas teorias seguintes [33]:

a) Teoria de Euler-Bernouilli

Esta teoria baseia-se no estudo da flexão de vigas sujeitas a uma flexão pura. Assim, o efeito do esforço de corte não é considerado e admite-se que secções planas perpendiculares ao eixo da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga durante a flexão.

Esta teoria de flexão foi a teoria utilizada no capítulo 2 para caracterizar as vibrações de um rotor cilíndrico de secção constante e simplesmente apoiado nas extremidades.

Na formulação por elementos finitos segundo esta teoria a incógnita fundamental é a flecha. No entanto, a existência de segundas derivadas na formulação e para que o deslocamento e a sua derivada sejam contínuas requer a utilização de funções de forma do tipo C1 obrigando a tomar como variável $\frac{df}{dx}$ que representa a rotação da secção recta.

b) Teoria de Timoshenko

Contrariamente à teoria de Euler-Bernouilli, a teoria de Timoshenko entra em conta com a deformação devida ao esforço de corte. Para tal, a teoria estabelece que "secções planas normais ao eixo da viga permanecem planas mas não necessariamente normais ao eixo depois da deformação".

Estas hipóteses representam uma melhor aproximação da deformação real.

Esta formulação, para além dos deslocamentos, contém unicamente derivadas de primeira ordem o que permite, na formulação por elementos finitos, a utilização de funções de forma do tipo C0.

3.7.1- Teoria de Timoshenko para vigas

3.7.1.1- Campo de deslocamentos

Consideremos as figura 3.5.

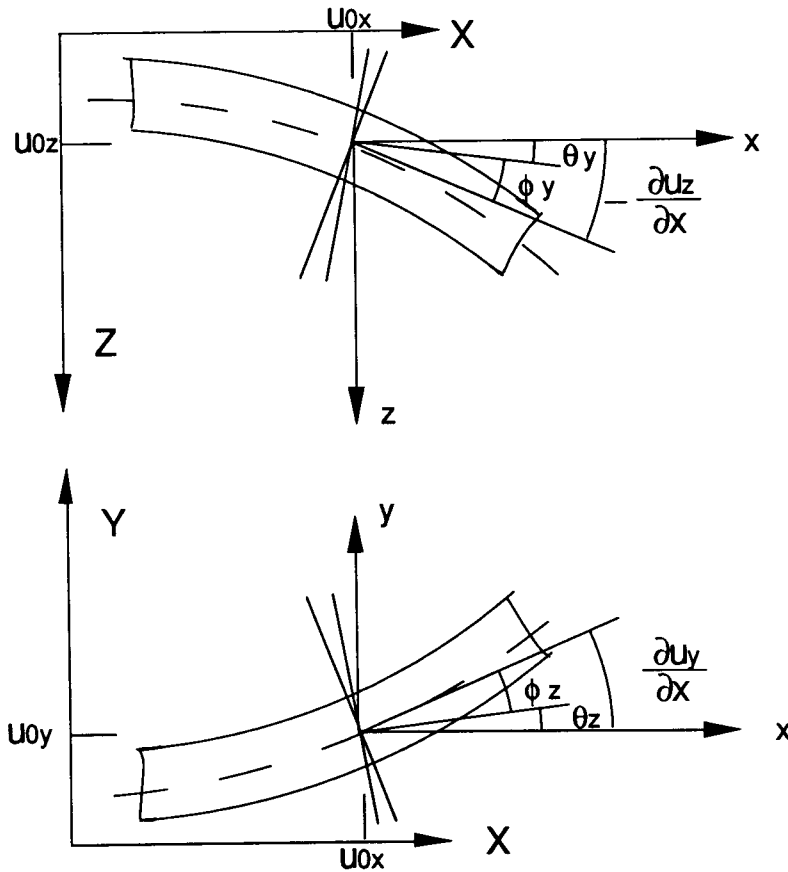


Fig 3.5 Rotações das secções segundo a teoria de Timoshenko no plano xy e no plano xz

As rotações θ_y e θ_z correspondem às rotações sofridas pelas secções normais. Estas rotações são dadas pelas expressões:

$$\theta_y = -\frac{\partial u_z}{\partial x} - \phi_y \quad (3.46)$$

$$\theta_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \phi_z \quad (3.47)$$

Analisando a figura 3.5 podemos estabelecer o campo de deslocamentos associado à deformação lateral duma viga e que é dado por:

$$\begin{cases} u_x = z\theta_y - y\theta_z \\ u_y = u_{y0} \\ u_z = u_{z0} \end{cases} \quad (3.48)$$

3.7.1.2- Relações deformação-deslocamento

As deformações a considerar no estudo da flexão de vigas são ϵ_{xx} , γ_{xy} e γ_{xz} uma vez que, segundo as hipoteses de base, todas as outras são nulas. De acordo com a teoria das pequenas deformações [45], estas são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \theta_z \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

3.7.1.3- Relações tensão-deformação

No caso de estarmos perante um material linear elástico e isotrópico, podemos aplicar a lei de Hooke [45] obtendo assim a relação entre as tensões e as deformações. Essas relações são, considerando as tensões σ_y , σ_z e τ_{yz} desprezáveis, dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E \epsilon_{xx} \\ G \gamma_{xy} \\ G \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

onde o módulo de elasticidade transversal G é dado por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.51)$$

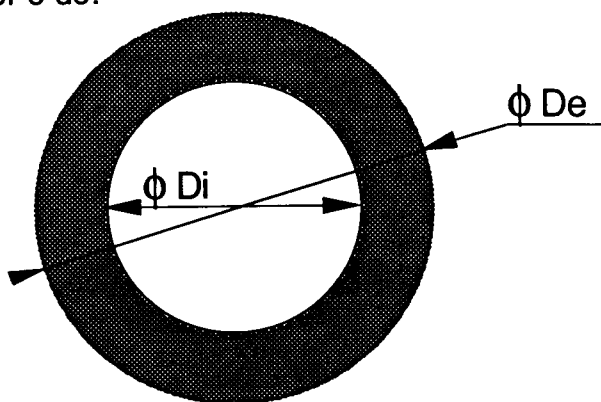
Intriduzindo (3.50) em (3.49) obtemos as relações entre as tensões e o campo de deslocamentos na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E(z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - y \frac{\partial \theta_z}{\partial x}) \\ G\phi_z \\ -G\phi_y \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Neste resultado podemos ver que a distribuição das tensões normais varia linearmente ao longo da secção sendo nula no eixo neutro ($y=0$ e $z=0$), o que vai de encontro com a teoria de flexão de vigas. Por outro lado, a distribuição das tensões de corte é constante em toda a secção. Este facto resulta de se ter considerado que uma secção plana permanecia plana após a deformação. Segundo a teoria geral das vigas [44][13] a distribuição das tensões de corte ao longo duma secção é dada por uma função polinomial. Para que os deslocamentos segundo esta teoria se aproximem o mais possível dos valores dados pela teoria geral das vigas, afecta-se as tensões de corte de um factor de correcção K . Este factor de correcção depende apenas da geometria da secção e o seu valor é tal que a energia de deformação obtida a partir da teoria geral das vigas seja idêntica à obtida a partir da teoria de Timoshenko. Considerando a tensão de corte corrigida, as tensões vêm dadas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E(z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - y \frac{\partial \theta_z}{\partial x}) \\ K G \phi_z \\ -K G \phi_y \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

Oñate [33] apresenta valores de K para várias secções. No caso duma secção circular este valor é de:



$$K = \frac{6}{7 + 20\alpha^2} \quad \alpha = \frac{D_i/D_e}{1 + D_i^2/D_e^2} \quad (3.54)$$

3.7.1.4- Trabalho virtual das forças elásticas internas

Em 3.1 vimos que a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais é possível estabelecer a formulação variacional da equação do movimento. O trabalho virtual

das forças elásticas internas é, como vimos, dado pela expressão (3.8). Substituindo as relações que nos dão as tensões (3.50) e as deformações (3.46) nas vigas, obtemos o trabalho realizado pelas forças elásticas internas dado por:

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \int_V \delta \vec{\epsilon}^T \vec{\sigma} dv = \\ &= \int_V \left(E \left(z \frac{d\theta_y}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) \delta \left(z \frac{d\theta_y}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) + \right. \\ &\quad \left. + KG \left(\frac{du_y}{dx} - \theta_z \right) \delta \left(\frac{du_y}{dx} - \theta_z \right) + KG \left(\frac{du_z}{dx} + \theta_y \right) \delta \left(\frac{du_z}{dx} + \theta_y \right) \right) dv\end{aligned}\quad (3.55)$$

Tendo em conta o valor dos integrais:

$$\begin{aligned}\int_A dA &= A \\ \int_A y^2 dA &= I_z \\ \int_A z^2 dA &= I_y \\ \int_A yz dA &= 0 \\ \int_A y dA &= 0 \\ \int_A z dA &= 0\end{aligned}\quad (3.56)$$

a expressão (3.55) pode escrever-se sob a forma:

$$\begin{aligned}\delta W_{int} &= \int_0^{L_e} \delta \left(\frac{d\theta_y}{dx} \right) EI_y \left(\frac{d\theta_y}{dx} \right) + \delta \left(\frac{d\theta_z}{dx} \right) EI_z \left(\frac{d\theta_z}{dx} \right) + \\ &\quad + \delta \left(\frac{du_y}{dx} - \theta_z \right) KAG \left(\frac{du_y}{dx} - \theta_z \right) + \delta \left(\frac{du_z}{dx} + \theta_y \right) KAG \left(\frac{du_z}{dx} + \theta_y \right) dx\end{aligned}\quad (3.57)$$

ou ainda sob a forma:

$$\delta W_{int} = \int_0^{L_e} \delta \bar{u}^T [B]^T [D] [B] \bar{u} dx \quad (3.58)$$

onde $\bar{u}$ é o campo de deslocamentos definido em (3.4) e os operadores $[B]$ e $[D]$ são definidos como se segue:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} KAG & 0 & 0 & 0 \\ 0 & KAG & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

O momento de inércia I é, no caso de uma secção circular [43], dado pela expressão

$$I_z = I_y = I = \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{64} \quad (5.61)$$

3.7.2 -Aproximação elementar do campo de deslocamentos

Analisando a equação (3.55), podemos verificar que os deslocamentos e as rotações são independentes. Por outro lado, só existem derivadas de primeira ordem para os deslocamentos e para as rotações o que permite a utilização de elementos finitos da classe $C0$.

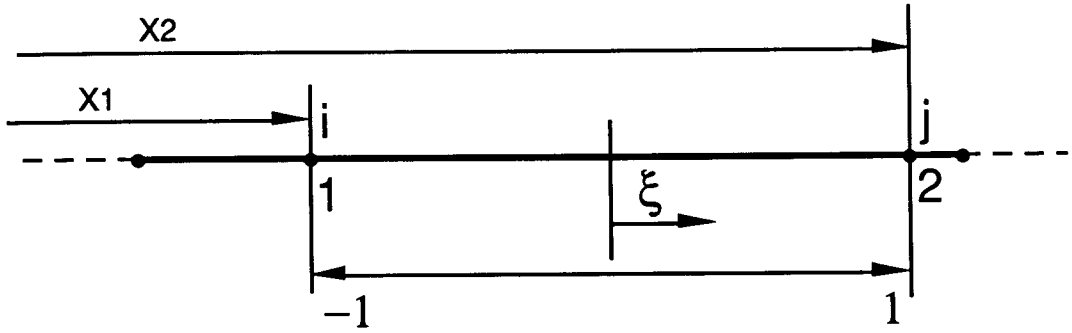


Fig 3.6 Coordenadas reais e coordenadas intrínsecas dum elemento genérico

Consideremos o campo de deslocamentos no interior dum elemento finito como sendo definido por:

$$\bar{u}^e(x, t) = [u_y(x, t), u_z(x, t), \theta_y(x, t), \theta_z(x, t)] \quad (3.62)$$

ou em coordenadas intrínsecas:

$$\bar{u}^e(\epsilon, t) = [u_y(\epsilon, t), u_z(\epsilon, t), \theta_y(\epsilon, t), \theta_z(\epsilon, t)] \quad (3.63)$$

As relações entre as coordenadas intrínsecas e as coordenadas reais do elemento são dadas pela equação [33] [35]

$$\epsilon = \frac{2}{L_e}(x - x_c) \quad x_c = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad (3.64)$$

onde x_1 é a coordenada do nó 1 e x_2 é a coordenada do nó 2.

Considerando um elemento de viga de dois nós e quatro variáveis por nó (fig 3.3), os deslocamentos no interior de um elemento são interpolados da seguinte forma:

$$\bar{u}^e(\epsilon, t) = \begin{bmatrix} N_1(\epsilon) u_y^1(t) + N_2(\epsilon) u_y^2(t) \\ N_1(\epsilon) u_z^1(t) + N_2(\epsilon) u_z^2(t) \\ N_1(\epsilon) \theta_y^1(t) + N_2(\epsilon) \theta_y^2(t) \\ N_1(\epsilon) \theta_z^1(t) + N_2(\epsilon) \theta_z^2(t) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Da mesma forma que relacionamos o campo de deslocamentos com as variáveis nodais, o campo de velocidades e o campo de acelerações podem ser relacionados com as velocidades e acelerações nodais respectivamente. Estas relações são dadas pelas expressões idênticas a (3.69):

$$\dot{\mathbf{u}}^e = [\mathbf{N}^e] \dot{\mathbf{q}}^e \quad (3.72)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^e = [\mathbf{N}^e] \ddot{\mathbf{q}}^e \quad (3.73)$$

O produto $[\mathbf{B}] \mathbf{\bar{u}}$ do integral definido em (3.58) é agora aproximado pela relação $[\mathbf{B}] [\mathbf{N}^e] \ddot{\mathbf{q}}^e$. O produto $[\mathbf{B}] [\mathbf{N}^e]$ é dado por:

$$[\mathbf{B}] [\mathbf{N}^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \epsilon} \frac{2}{l^e} & 0 & 0 & -N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial \epsilon} \frac{2}{l^e} & 0 & 0 & -N_2 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \epsilon} \frac{2}{l^e} & N_1 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \epsilon} \frac{2}{l^e} & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \epsilon} \frac{2}{l^e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \epsilon} \frac{2}{l^e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \epsilon} \frac{2}{l^e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \epsilon} \frac{2}{l^e} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Estamos agora em condições de obter as matrizes elementares definidas em (3.19) a (3.22). Estabelecendo estes integrais em coordenadas intrínsecas temos que:

$$[\mathbf{M}^e] = \int_{-1}^1 [\mathbf{N}^e]^T [\mathbf{J}] [\mathbf{N}^e] J^e d\epsilon \quad (3.75)$$

$$[\mathbf{G}^e] = \int_{-1}^1 [\mathbf{N}^e]^T [\mathbf{J}_G] [\mathbf{N}^e] J^e d\epsilon \quad (3.76)$$

$$[\mathbf{K}^e] = \int_{-1}^1 \left([\mathbf{B}] [\mathbf{N}^e] \right)^T [\mathbf{D}] \left([\mathbf{B}] [\mathbf{N}^e] \right) J^e d\epsilon \quad (3.77)$$

$$\vec{F}^e = \int_{-1}^1 \left[N^e \right]^T \vec{F}^{ext} J^e d\varepsilon \quad (3.78)$$

3.7.3 -Integração numérica das matrizes elementares

As integrações envolvidas no cálculo das matrizes elementares podem ser realizadas analiticamente ou numericamente. Estas são, por vezes, bastante complexas e a sua resolução pode resultar laboriosa. Por outro lado, a integração exacta nem sempre é desejável. O elemento de viga de Timoshenko da classe C0 é um caso típico em que a integração exacta pode conduzir a graves imprecisões [24] [35] nos resultados.

O processo de integração numérica mais utilizado no método dos elementos finitos é o método de integração numérica de Gauss. Segundo a regra de integração de Gauss é possível obter o valor do integral de tal forma que

$$\int_{-1}^1 F(r) dr = w_1 F(\alpha_1) + \dots + w_i F(\alpha_i) + \dots + w_n F(\alpha_n) + R_n \quad (3.79)$$

em que α_i é a coordenada do ponto onde é avaliada a função a integrar e W_i é o chamado peso associado ao ponto α_i . Esta regra de integração integra de modo exacto ($R_n=0$) polinómios de grau menor ou igual a $2n-1$ [50] em que n é o número de pontos utilizados na integração.

Em todas as matrizes elementares consideradas o mais elevado grau de polinómio a integrar é igual a 2. Para polinómios de grau 2 será então necessário considerar 2 pontos de integração. Os pontos a considerar serão os pontos $-1/\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{3}$ e o peso a considerar será 1.0 para ambos os pontos.

Com base nestas considerações e na definição de raio de giração $r = \sqrt{\frac{I^e}{A^e}}$, obtemos as seguintes matrizes elementares de massa e giroscópica:

$$[M^e] = \frac{\mu l^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 & 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2r^2 & 0 & 0 & 0 & r^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 2r^2 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$[G^e] = \frac{\Omega J_p l^e}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Para integrar a matriz de rigidez elementar são necessários dois pontos de Gauss. No entanto, Oñate [33] mostra que quanto mais esbelta for a viga mais o elemento de Timoshenko se afasta dos valores obtidos a partir da teoria clássica de vigas. O que se verifica é que na viga de Timoshenko, quanto mais esbelta for, mais rígida ela se torna chegando no caso limite a tornar-se infinitamente rígida [33] [24] . Na figura 3.7 podemos ver representada a relação entre o valor real e o valor obtido a partir do elemento de viga de Timoshenko para o caso de uma viga encastrada de secção rectangular.

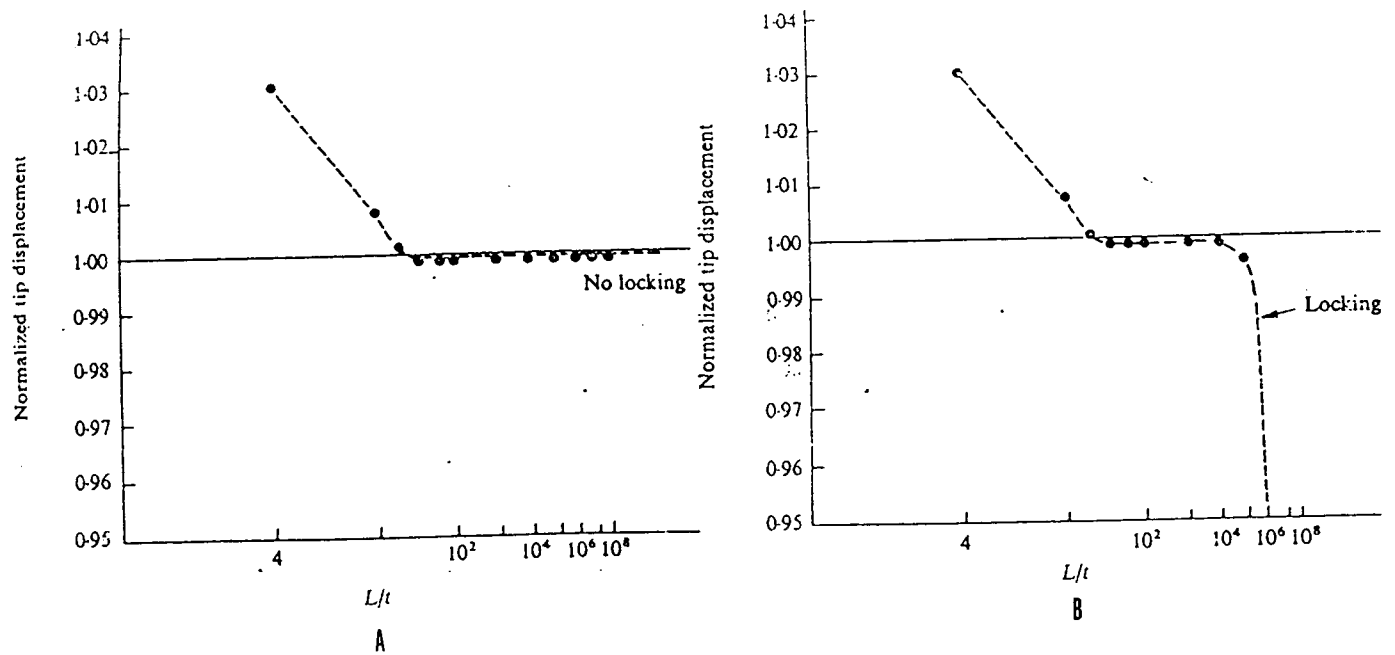


Fig 3.7 - Integração normal e integração selectiva: [B; A] [24]

Uma das maneiras de corrigir este excesso de rigidez consiste em fazer uma integração selectiva da matriz de rigidez. Este método consiste em integrar de modo exacto os termos de rigidez respeitantes à flexão ou seja com um só ponto de Gauss e de modo reduzido os termos respeitantes ao corte ou seja com um só ponto de Gauss em vez dos dois que teoricamente deveriam ser usados. Este elemento com integração selectiva, é ainda afectado de um factor de correcção de modo a compatibilizar os resultados obtidos pelas formulações baseadas na energia potencial complementar e cujo valor é dado por [35]

$$\phi = \frac{12EI}{KGA(L_e)^2} \quad (3.82)$$

A matriz de rigidez calculada desta forma resulta idêntica à matriz de rigidez obtida por Nelson [31] e à obtida por Rouch e Kao [37], que utilizam nas suas formulações elementos da classe C1. A matriz de rigidez deste elemento é então dada por:

$$\begin{aligned}
 [K^e] = & \frac{EI}{l^e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{\phi}{1+\phi} kGA \begin{bmatrix} \frac{1}{l^e} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{l^e} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{l^e} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{l^e} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{l^e}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{l^e}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{l^e}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{l^e}{4} \\ -\frac{1}{l^e} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{l^e} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{l^e} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{l^e} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{l^e}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{l^e}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{l^e}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{l^e}{4} \end{bmatrix} \quad (3.83)
 \end{aligned}$$

O vector de solicitações, considerando que as forças actuates são as forças de inércia devidas à excentricidade da massa, necessita de um só ponto de integração (pressupondo constante a excentricidade ao longo do elemento). O vector de solicitações resulta então no vector

$$\begin{aligned}
 \bar{F}^e = & \frac{\mu\Omega^2 L_e}{2} \left(\begin{bmatrix} e_y \\ e_z \\ 0 \\ 0 \\ e_y \\ e_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \Omega t + \begin{bmatrix} -e_z \\ e_y \\ 0 \\ 0 \\ -e_z \\ e_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \Omega t \right) \\
 & = \bar{Q}_C^e \cos \Omega t + \bar{Q}_S^e \sin \Omega t \quad (3.84)
 \end{aligned}$$

3.8 - Formulação com atrito interno

A existência de atrito externo deve-se, na maior parte dos sistemas, fundamentalmente ao atrito verificado nos apoios. Este tipo de atrito já foi analisado em 3.4 onde caracterizamos de uma maneira genérica o comportamento das chumaceiras.

A introdução dos mecanismos de atrito interno viscoso e histerético na formulação de um elemento de rotor é apresentada por [32] e [52]. Estes modelos consideram que o atrito viscoso é proporcional à velocidade de deformação e que o atrito histerético é proporcional às forças elásticas internas. A expressão do trabalho virtual resulta, segundo o modelo apresentado por estes autores, na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_L \delta \bar{u}^T [J] \ddot{u} \, dx + \int_L \delta \bar{u}^T [J_G] \dot{\ddot{u}} \, dx + \eta_v \int_L \delta \bar{u}^T [B]^T [D] [B] \dot{u} \, dx + \\ & \eta_a \int_L \delta \bar{u}^T [B]^T [D] [B] \bar{u} \, dx + \eta_b \int_L \delta \bar{u}^T [B]^T [N_h] [D] [B] \bar{u} \, dx - \\ & - \int_L \delta \bar{u}^T \bar{F}^{ext} \, dx = 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

em que

$$[N_h] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

e as constantes η_a e η_b são

$$\eta_a = \frac{1 + \eta_H}{\sqrt{1 + \eta_H^2}} \quad \eta_b = \Omega \eta_v + \frac{\eta_H}{\sqrt{1 + \eta_H^2}} \quad (3.87)$$

Os valores η_H e η_v são os parâmetros que caracterizam o amortecimento histerético e o amortecimento viscosodo material, respectivamente.

Todos os integrais deste modelo já foram analisados anteriormente para a formulação conservativa excepto o integral:

$$\int_L \delta \bar{u}^T [B]^T [N_h] [D] [B] \bar{u} \, dx \quad (3.88)$$

Tal como a matriz de rigidez foi obtida a partir do integral (3.12), também o integral (3.88) conduz a uma matriz chamada matriz circulatoria. Esta matriz

$[K_C^e]$ pode, no entanto, ser relacionada directamente com a matriz de rigidez $[K^e]$ através da relação matricial:

$$[K_C^e] = [K^e] [N_H^e] \quad (3.89)$$

A matriz circulatoria elementar não necessita por isso de ser calculada, basta apenas fazer a multiplicação por $[N_H^e]$ cuja forma é:

$$[N_H^e] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

A matriz circulatoria resultante é uma matriz anti-simétrica.

Na caracterização do comportamento das chumaceiras referiu-se a necessidade da matriz de rigidez da chumaceira ser simétrica para se considerar que o sistema era conservativo. Na verdade, se esta matriz não for simétrica, ela pode ser dividida numa simétrica e numa anti-simétrica. A parte simétrica sobrepõe-se à rigidez da viga e está ligada à parte conservativa. A anti-simétrica sobrepõe-se à matriz circulatoria e está ligada à parte dissipativa. Fisicamente, a decomposição numa simétrica e numa anti-simétrica traduz-se por uma separação da parte conservativa e da parte dissipativa [35].

3.9 - Modelo espacial dissipativo

O modelo completo dissipativo por elementos finitos que caracteriza o movimento de um rotor resulta na equação matricial final:

$$\begin{aligned}
 & [M^E] \ddot{\vec{q}} + \left([G^E] + \eta_v [K^E] \right) \dot{\vec{q}} + \left(\eta_a [K^E] + \eta_b [K_C^E] \right) \vec{q} + \\
 & + [M^D] \ddot{\vec{q}} + [G^D] \dot{\vec{q}} + \quad \text{contribuição dos discos rígidos} \\
 & + [K^C] \vec{q} + [C^C] \dot{\vec{q}} = \quad \text{contribuição das chumaceiras} \\
 & = (\vec{Q}_C^E + \vec{Q}_C^D) \cos \Omega t + (\vec{Q}_S^E + \vec{Q}_S^D) \sin \Omega t \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow [M] \ddot{\vec{q}} + [C_d] \dot{\vec{q}} + [K_d] \vec{q} = \vec{F} \quad (3.91)
 \end{aligned}$$

3.10 - Caracterização das matrizes espaciais

A equação que caracteriza o movimento geral dos rotores é a equação (3.91). Uma das características comuns a todas as matrizes é a sua configuração em forma de banda. Esta configuração é resultado duma numeração sequencial dos elementos e nós que compõem a modelização dos rotores.

No caso dos sistemas conservativos as matrizes definidas em (3.39) são:

$[M]$ - Matriz de massa simétrica e definida positiva. Contém a matriz de massa do veio e a matriz de massa dos discos;

$[G]$ - Matriz giroscópica anti-simétrica. Contém a matriz giroscópica do veio e a matriz giroscópica dos discos;

$[K]$ - Matriz de rigidez simétrica. Contém a matriz de rigidez do veio e a matriz de rigidez das chumaceiras.

No caso dos sistemas dissipativos as matrizes definidas em (3.91) são:

$[M]$ - Matriz de massa idêntica à do caso conservativo;

$[C_d]$ - Matriz de amortecimento generalizado. Esta matriz é composta de três outras matrizes:

Matriz giroscópica anti-simétrica;

Matriz de amortecimento interno simétrica. Esta matriz é semelhante à matriz de rigidez a menos de um factor multiplicativo;

Matriz de amortecimento externo. Esta matriz pode tomar qualquer forma e resulta normalmente do amortecimento introduzido pelos apoios.

$[K_d]$ - Matriz de rigidez generalizada. Esta matriz é também composta de três outras matrizes:

Matriz de rigidez do veio simétrica;

Matriz circulatória anti-simétrica;

Matriz de rigidez dos apoios. Esta matriz pode tomar qualquer forma.

As matrizes que caracterizam o movimento dos rotores são, no caso conservativo, matrizes cuja configuração tem propriedades que podem ser exploradas sob o ponto de vista numérico. Estas propriedades levam a que os métodos de cálculo dos sistemas conservativos sejam mais simples, ocupem menos espaço de memória e possuam um menor número de cálculos a efectuar.

CAPÍTULO IV

4 - Formulações alternativas para as equações do movimento

Neste capítulo apresentam-se as equações do movimento de um rotor em notação complexa. Segundo Jianmin e Xiaomei [26] quem primeiro apresentou esta formulação foi Nelson (Nelson, H. D., 'Rotor Dynamics in Complex Form', ASTM, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reability in Design, Vol. 107, Oct 1985, 460-461). Esta formulação inclui todos os mecanismos de dissipação já apresentados.

Jianmin e Xiaomei [26] apresentam como vantagens para o desenvolvimento duma formulação sob a forma complexa o menor tempo de cálculo e menor espaço de memória necessários. Segundo estes autores tanto o tempo de cálculo como espaço de memória pode ser reduzido. No entanto, a formulação sob a forma complexa torna-se mais complicada quando os apoios não são isotrópicos. Aliás, refira-se que também a formulação em notação real com apoios isotrópicos permite uma redução do espaço de memória e tempo de cálculo.

Embora a formulação sob a forma complexa não tenha sido implementada em computador, é com base nela que estabelecemos e demonstramos um conjunto de características particulares dos rotores. Por isso torna-se interessante esta formulação que passamos a descrever.

4.1 - Formulação complexa as equações do movimento

Consideremos a equação do movimento anteriormente exposta no capítulo

3.

$$\begin{aligned} & [M^E] \ddot{\bar{q}} + \left([G^E] + \eta_v [K^E] \right) \dot{\bar{q}} + \left(\eta_a [K^E] + \eta_b [K_C^E] \right) \bar{q} + \\ & + [M^D] \ddot{\bar{q}} + [G^D] \dot{\bar{q}} + \quad \text{contribuição dos discos rígidos} \\ & + [K^C] \bar{q} + [C^C] \dot{\bar{q}} = \quad \text{contribuição das chumaceiras} \\ & = (\bar{Q}_C^E + \bar{Q}_C^D) \cos \Omega t + (\bar{Q}_S^E + \bar{Q}_S^D) \sin \Omega t \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [M] \ddot{\bar{q}} + [C_d] \dot{\bar{q}} + [K_d] \bar{q} = \bar{F} \quad (4.1)$$

As matrizes desta formulação são matrizes reais. Consideremos agora o campo de deslocamentos sob a forma complexa, tal que

$$\bar{Z} = [Z, \Phi]^T = [u_y + iu_z, \theta_z - i\theta_y]^T \quad (4.2)$$

Estabelecemos assim as relações entre o campo de deslocamentos real e o campo de deslocamentos complexo. Deste modo podemos estabelecer as matrizes do modelo complexo, em que as variáveis nodais complexas são

$$\bar{Z}^e = \begin{Bmatrix} Z^1 \\ \Phi^1 \\ Z^2 \\ \Phi^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_y^1 + iu_z^1 \\ \theta_z^1 - i\theta_y^1 \\ u_y^2 + iu_z^2 \\ \theta_z^2 - i\theta_y^2 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

4.1.1 - Formulação das matrizes elementares

Consideremos o equilíbrio de um só elemento como sendo dado pela equação matricial:

$$\begin{aligned} & [M^e] \ddot{\bar{q}}^e + \left([G^e] + \eta_v [K^e] \right) \dot{\bar{q}}^e + \left(\eta_a [K^e] + (\eta_v \Omega + \eta_b) [K_C^e] \right) \bar{q}^e = \\ & = \bar{Q}_C^e \cos \Omega t + \bar{Q}_S^e \sin \Omega t \end{aligned} \quad (4.4)$$

Se neste sistema de equações multiplicarmos a segunda e a sexta equação por i e a terceira e a sétima por $-i$ e combinarmos as equações duas a

duas (a primeira com a segunda, a terceira com a quarta, etc) obtemos o equilíbrio para um elemento sob a forma complexa. Obtidas as matrizes elementares sob a forma complexa, podemos pois passar para a matriz global complexa. Obtemos assim as seguintes matrizes para o elemento de Timoshenko desenvolvido no capítulo 3, segundo uma formulação complexa. O desenvolvimento aqui feito para o elemento de viga de Timoshenko poderia ser feito para qualquer elemento de viga, obtendo-se no final o mesmo modelo sob a forma complexa.

4.1.1.1 - Matriz de massa.

$$\begin{aligned}
 [M^e] \ddot{\mathbf{q}}^e &= \frac{\mu l^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 & 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2r^2 & 0 & 0 & 0 & r^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 2r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y^1 \\ \ddot{u}_z^1 \\ \ddot{\theta}_y^1 \\ \ddot{\theta}_z^1 \\ \ddot{u}_y^2 \\ \ddot{u}_z^2 \\ \ddot{\theta}_y^2 \\ \ddot{\theta}_z^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (-i) \\ (i) \\ (-i) \end{matrix} \rightarrow \\
 \rightarrow \frac{\mu l^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2r^2 & 0 & r^2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 2r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}^1 \\ \ddot{\Phi}^1 \\ \ddot{z}^2 \\ \ddot{\Phi}^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow [M^e]^c = \frac{\mu l^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2r^2 & 0 & r^2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 2r^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

4.1.1.2 - Matriz giroscópica.

$$[G^e] \dot{\mathbf{q}}^e = \frac{\Omega J_p l^e}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_y^1 \\ \dot{u}_z^1 \\ \dot{\theta}_y^1 \\ \dot{\theta}_z^1 \\ \dot{u}_y^2 \\ \dot{u}_z^2 \\ \dot{\theta}_y^2 \\ \dot{\theta}_z^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (-i) \\ (i) \\ (-i) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow -i \frac{\Omega J_p l^e}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}^1 \\ \dot{\Phi}^1 \\ \dot{z}^2 \\ \dot{\Phi}^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow [G^e]^C = \frac{\Omega J_p l^e}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

4.1.1.3 - Matriz de rigidez.

De forma idêntica, para a matriz de rigidez obtém-se:

$[K^e] \tilde{q}^e \rightarrow [K^e]^C \tilde{Z}^e$ em que $[K^e]^C$ é dado por

$$[K^e]^C = \frac{EI}{l^e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\phi}{1+\phi} kGA \begin{bmatrix} \frac{1}{l^e} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{l^e} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{l^e}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{l^e}{4} \\ -\frac{1}{l^e} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{l^e} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{l^e}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{l^e}{4} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

4.1.1.4 - Matriz circulatoria.

O resultado para a matriz circulatoria vem:

$$[K_c^e]^C = -i [K^e]^C \quad (4.8)$$

4.1.1.5 - Vector de forças.

Por fim, o vector de forças vem dado pela expressão:

$$\tilde{F}^{eC} = \frac{\Omega^2 \mu l^e}{2} \begin{bmatrix} e_y + i e_z \\ 0 \\ e_y + i e_z \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\Omega t} = \tilde{Q}^{eC} e^{i\Omega t} \quad (4.9)$$

4.1.2 - Equação complexa de equilíbrio de um elemento.

Conhecidas as relações entre o modelo real e o modelo complexo, obtemos o equilíbrio para um elemento como sendo dado por

$$\begin{aligned} [M^e]^C \ddot{\bar{Z}}^e + \left(-i[G^e]^C + \eta_v[K^e]^C \right) \dot{\bar{Z}}^e + \left(\eta_a[K^e]^C - i\eta_b[K^e]^C \right) \bar{Z}^e = \\ = \bar{Q}^e e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Uma vez obtidas todas as matrizes elementares, podemos construir o modelo global, procedendo a uma montagem das matrizes elementares. Uma vez realizada esta operação obtemos a equação global:

$$\begin{aligned} [M^E]^C \ddot{\bar{Z}} + \left(-i[G^E]^C + \eta_v[K^E]^C \right) \dot{\bar{Z}} + \left(\eta_a[K^E]^C - i\eta_b[K^E]^C \right) \bar{Z} = \\ = \bar{Q}^E e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.1.3 - Formulação complexa dos termos associados aos discos.

As matrizes complexas que caracterizam a inércia dos discos montados nos rotores são obtidas segundo o mesmo procedimento das matrizes elementares. Assim, considerando um disco genérico, os termos que contribuem para a equação do movimento são:

$$[M^D] \ddot{\bar{q}} + [G^D] \dot{\bar{q}} = \bar{F}_D^{\text{ext}} \quad (4.12)$$

As matrizes e o vector de forças associados aos discos vêm agora, sob a forma complexa, dados por:

4.1.3.1 - Matriz de massa.

$$\begin{aligned}
 [M^d]^C \ddot{\mathbf{q}}^i &= \begin{bmatrix} m^D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_D^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_D^D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_z \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{Bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (-i) \end{matrix} \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{bmatrix} m^D & 0 \\ 0 & J_D^D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z^i \\ \Phi^i \end{Bmatrix} \Rightarrow [M^d]^C = \begin{bmatrix} m^D & 0 \\ 0 & J_D^D \end{bmatrix} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

4.1.3.2 - Matriz giroscópica.

$$\begin{aligned}
 [G^d]^C \dot{\mathbf{q}}^i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega J_P^D \\ 0 & 0 & -\Omega J_P^D & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_z \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{Bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (-i) \end{matrix} \rightarrow \\
 \rightarrow -i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega J_P^D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z^i \\ \Phi^i \end{Bmatrix} \Rightarrow [G^d]^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega J_P^D \end{bmatrix} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

4.1.3.3 - Vector de forças.

$$\bar{\mathbf{F}}^d{}^C = m^D \Omega^2 \begin{bmatrix} e_y^D + i e_z^D \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\Omega t} = \bar{\mathbf{Q}}^d{}^C e^{i\Omega t} \quad (4.15)$$

Estamos agora em condições de escrever sob a forma complexa os termos associados aos discos que contribuem para a equação do movimento. Estes termos são dados por

$$[M^D]^C \ddot{\bar{\mathbf{Z}}} - i [G^D]^C \dot{\bar{\mathbf{Z}}} = \bar{\mathbf{Q}}^D{}^C e^{i\Omega t} \quad (4.16)$$

4.1.4 - Formulação dos termos associados às chumaceiras.

Todas as matrizes anteriormente analisadas possuíam configurações dos seus elementos que permitiram uma fácil implementação sob a forma complexa. A disposição dos elementos nas matrizes que caracterizam o comportamento das chumaceiras geralmente não segue nenhuma disposição particular.

Consideremos então uma chumaceira genérica cujos termos do modelo de elementos finitos que lhe estão associados são:

$$[K^c]\ddot{q} + [C^c]\dot{q} \quad (4.17)$$

cujas matrizes são da forma:

$$[K^c] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & 0 & 0 \\ K_{yx} & K_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [C^c] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 & 0 \\ C_{yx} & C_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Decomponham-se os termos de rigidez em dois termos e os termos de amortecimento em outros dois, tal que:

$$[K^c]\ddot{q}^i = \begin{bmatrix} (K_{xx} + K_{yy})/2 & (K_{yx} + K_{xy})/2 & 0 & 0 \\ (K_{yx} + K_{xy})/2 & (K_{xx} + K_{yy})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y^i \\ u_z^i \\ \theta_y^i \\ \theta_z^i \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (K_{xx} - K_{yy})/2 & (K_{yx} - K_{xy})/2 & 0 & 0 \\ (K_{yx} - K_{xy})/2 & (K_{xx} - K_{yy})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y^i \\ -u_z^i \\ \theta_y^i \\ -\theta_z^i \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$$[C^c]\dot{q}^i = \begin{bmatrix} (C_{xx} + C_{yy})/2 & (C_{yx} + C_{xy})/2 & 0 & 0 \\ (C_{yx} + C_{xy})/2 & (C_{xx} + C_{yy})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y^i \\ u_z^i \\ \theta_y^i \\ \theta_z^i \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (C_{xx} - C_{yy})/2 & (C_{yx} - C_{xy})/2 & 0 & 0 \\ (C_{yx} - C_{xy})/2 & (C_{xx} - C_{yy})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y^i \\ -u_z^i \\ \theta_y^i \\ -\theta_z^i \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Podemos assim obter as matrizes elementares complexas que caracterizam as chumaceiras. Estas matrizes são tais que duas estão associadas

aos graus de liberdade complexos (as de índice A) e outras duas aos seus complexos conjugados (as de índice B), ou seja:

$$[K^c]_A^C \bar{Z}^i + [C^c]_A^C \dot{\bar{Z}}^i + [K^c]_B^C \bar{Z}^{i*} + [C^c]_B^C \dot{\bar{Z}}^{i*} \quad (4.21)$$

onde * representa o complexo conjugado. As matrizes aqui assinaladas são dadas pelas seguintes expressões:

$$[K^c]_A^C = \left(\begin{bmatrix} (K_{xx} + K_{yy})/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} (K_{yx} - K_{xy})/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$[K^c]_B^C = \left(\begin{bmatrix} (K_{xx} - K_{yy})/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} (K_{yx} + K_{xy})/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.22)$$

$$[C^c]_A^C = \left(\begin{bmatrix} (C_{xx} + C_{yy})/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} (C_{yx} - C_{xy})/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$[C^c]_B^C = \left(\begin{bmatrix} (C_{xx} - C_{yy})/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} (C_{yx} + C_{xy})/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.23)$$

Na equação geral, uma vez realizada a assemblagem, os termos associados às chumaceiras são dados por

$$[K^c]_A^C \bar{Z} + [C^c]_A^C \dot{\bar{Z}} + [K^c]_B^C \bar{Z}^* + [C^c]_B^C \dot{\bar{Z}}^* \quad (4.24)$$

4.1.5 - Modelo completo sob a forma complexa.

Conhecidas todas as matrizes e vectores sob a forma complexa, estamos em condições de obter o modelo completo que caracteriza o movimento. Esse modelo, sob a forma complexa, é dado por

$$\begin{aligned}
 & \left[M^E \right]^C \ddot{\bar{Z}} + \left(-i \left[G^E \right]^C + \eta_v \left[K^E \right]^C \right) \dot{\bar{Z}} + \left(\eta_a \left[K^E \right]^C - i \eta_b \left[K^E \right]^C \right) \bar{Z} + \\
 & + \left[M^D \right]^C \ddot{\bar{Z}} - i \left[G^D \right]^C \dot{\bar{Z}} + \text{contribuição dos discos rígidos} \\
 & + \left[K^C \right]_A^C \bar{Z} + \left[C^C \right]_A^C \dot{\bar{Z}} + \left[K^C \right]_B^C \bar{Z}^* + \left[C^C \right]_B^C \dot{\bar{Z}}^* = \text{contribuição das chumaceiras} \\
 & = \bar{Q}^{DC} e^{i\Omega t} + \bar{Q}^{EC} e^{i\Omega t}
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

De notar que uma das características deste modelo é que todas as matrizes são simétricas o que sem dúvida é uma grande vantagem sob o modelo dissipativo real.

4.1.6 - Conclusões sobre o modelo complexo.

A resposta a uma solicitação harmónica causada por uma excentricidade é, no caso geral, do tipo

$$\bar{R} = \bar{R}_1 e^{i\Omega t} + \bar{R}_2 e^{-i\Omega t}
 \tag{4.26}$$

A principal conclusão a tirar deste modelo é que se os apoios forem isotrópicos, as matrizes $\left[K^C \right]_B^C$ e $\left[C^C \right]_B^C$ vêm nulas. A resposta, neste caso, vem dada por

$$\bar{R} = \bar{R}_{iso} e^{i\Omega t}
 \tag{4.27}$$

Esta resposta representa um vector de amplitude constante e igual à norma de $\bar{R}_{iso}$ e que roda no sentido directo a uma velocidade constante Ωt . Isto significa que os modos próprios associados a precessões inversas nunca são excitados por este tipo de solicitação. Para este tipo de solicitação, as rotações para as quais haverá ressonância de amplitude, ou seja as rotações para as quais a amplitude tenderá para um pico (no caso conservativo tenderá para infinito), serão somente as rotações associadas a velocidades críticas em precessão directa. Por outro lado, sendo $\bar{R}_{iso}$ constante implica que a trajectória do rotor seja circular. Um exemplo deste fenómeno é a resposta a uma excentricidade analisada em 2.3.2. em que podemos ver claramente que o único pico detectado estava associado a uma velocidade critica em precessão directa.

A formulação sob a forma complexa apresenta vantagens sob o ponto de vista de memória e número de operações a realizar. No entanto, torna-se complicada na análise de sistemas em que os apoios não são isotrópicos. Por outro lado, o tratamento matemático na extracção de valores próprios torna-se complicado pois as matrizes resultantes são matrizes complexas. No que diz respeito à análise da resposta a uma excentricidade, também recorremos aos números complexos em que as matrizes complexas são de dimensão idêntica às matrizes reais, pelo que a formulação sob a forma complexa apresenta vantagens uma vez que trabalhamos com matrizes de dimensão bastante mais reduzida.

Todo o trabalho realizado foi com base na formulação sob a forma real, ficando em aberto a possível implementação sob a forma complexa.

4.2 - Formulação num referencial móvel

Consideremos o modelo geral definido no capítulo 3 relativamente a um referencial fixo:

$$[M] \ddot{\vec{q}} + [C_d] \dot{\vec{q}} + [K_d] \vec{q} = \vec{F} \quad (4.28)$$

Seja agora um referencial móvel cuja velocidade de rotação seja idêntica à velocidade da precessão (figura 4.1). Consideremos ainda um conjunto de variáveis $\vec{p}$ que constituem o vector de deslocamentos no referencial móvel.

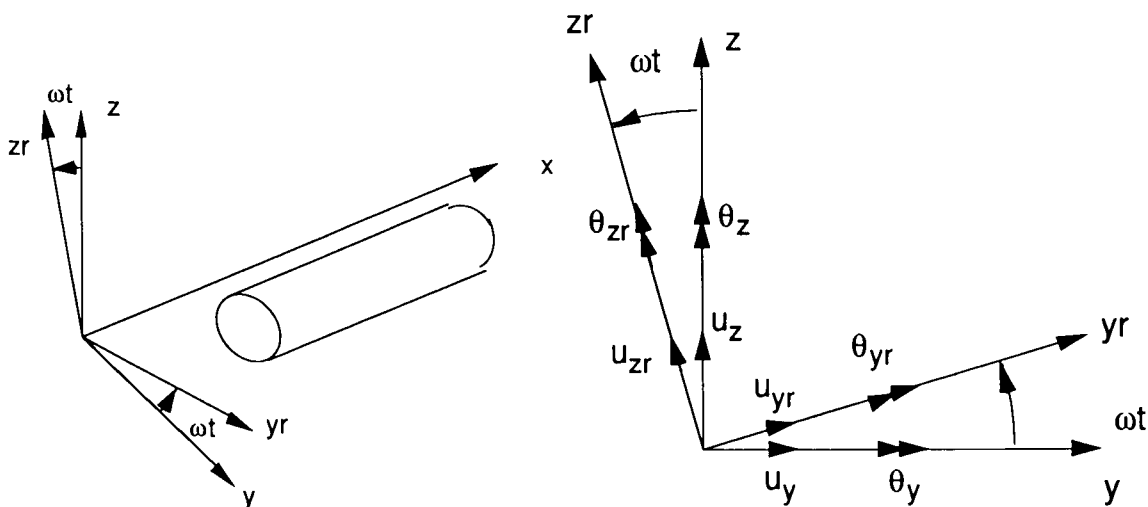


Fig 4.1 - Caracterização do referencial móvel

A relação entre os graus de liberdade no referencial fixo e os do referencial móvel, são dados pela matriz de transformação:

$$\bar{\mathbf{u}} = [\mathbf{T}] \bar{\mathbf{u}}_r \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_y \\ u_z \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega t & -\sin \omega t \\ 0 & 0 & \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yr} \\ u_{zr} \\ \theta_{yr} \\ \theta_{zr} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

A primeira e segunda derivada em ordem ao tempo são dadas pelas expressões:

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}} = [\dot{\mathbf{T}}] \bar{\mathbf{u}}_r + [\mathbf{T}] \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r \quad (4.30)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{u}}} = [\ddot{\mathbf{T}}] \bar{\mathbf{u}}_r + 2[\dot{\mathbf{T}}] \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r + [\mathbf{T}] \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r \quad (4.31)$$

As derivadas das matrizes de transformação vêm:

$$[\dot{\mathbf{T}}] = -\omega [\mathbf{R}] [\mathbf{T}] \quad (4.32)$$

$$[\ddot{\mathbf{T}}] = -\omega^2 [\mathbf{T}] \quad (4.33)$$

em que $[\mathbf{R}]$ é uma matriz anti-simétrica da forma

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Aplicando a todos os nós (n) esta transformação obtemos as matrizes de transformação globais. Estas matrizes são diagonais por blocos tal que

$$[\mathbf{T}_g] = \text{diag} \left[\dots, \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}_i, \dots \right] \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (4.35)$$

$$[\mathbf{R}_g] = \text{diag} \left[\dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_i, \dots \right] \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (4.36)$$

Obtemos assim as relações entre os graus de liberdade globais do referencial fixo e do referencial móvel:

$$\bar{\mathbf{q}} = [\mathbf{T}_g] \bar{\mathbf{p}} \quad (4.37)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = -\omega [\mathbf{R}_g] [\mathbf{T}_g] \bar{\mathbf{p}} + [\mathbf{T}_g] \dot{\bar{\mathbf{p}}} \quad (4.38)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{q}}} = -\omega^2 [\mathbf{T}_g] \bar{\mathbf{p}} - 2\omega [\mathbf{R}_g] [\mathbf{T}_g] \dot{\bar{\mathbf{p}}} + [\mathbf{T}_g] \ddot{\bar{\mathbf{p}}} \quad (4.39)$$

As equações diferenciais resultantes vêm agora dadas por:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}] [\mathbf{T}_g] \ddot{\bar{\mathbf{p}}} + \left([\mathbf{C}_d] - 2\omega [\mathbf{M}] [\mathbf{R}_g] [\mathbf{T}_g] \right) \dot{\bar{\mathbf{p}}} + \\ & \left(-\omega^2 [\mathbf{M}] [\mathbf{T}_g] - \omega [\mathbf{C}_d] [\mathbf{R}_g] [\mathbf{T}_g] + [\mathbf{K}_d] [\mathbf{T}_g] \right) \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Esta formulação, embora mais laboriosa, pode em alguns casos ser simplificada. No ponto 4.6 referimos, com base na formulação complexa, que se os apoios forem isotrópicos a trajectória do centro do rotor seria circular. Isto significa que nesta formulação $\dot{\bar{\mathbf{p}}}$ e $\ddot{\bar{\mathbf{p}}}$ são nulos. Para este problema particular a equação do movimento vem dada por

$$\left(-\omega^2 [\mathbf{M}] [\mathbf{T}_g] - \omega [\mathbf{C}_d] [\mathbf{R}_g] [\mathbf{T}_g] + [\mathbf{K}_d] [\mathbf{T}_g] \right) \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (4.41)$$

Considerando o problema conservativo e sabendo que a matriz $[\mathbf{G}]$ se pode escrever sob a forma $[\mathbf{G}] = \Omega [\bar{\mathbf{G}}]$ podemos reescrever a equação (4.41) sob a forma:

$$\left(-\omega^2 [\mathbf{M}] [\mathbf{T}_g] - \omega^2 \beta [\bar{\mathbf{G}}] [\mathbf{R}_g] [\mathbf{T}_g] + [\mathbf{K}_d] [\mathbf{T}_g] \right) \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{F}} \quad \beta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (4.42)$$

A formulação das equações do movimento no referencial móvel é, como veremos no capítulo seguinte, particularmente vantajosa na análise modal conservativa de rotores instalados em apoios isotrópicos.

CAPÍTULO V

5 - Análise Modal

5.1 - Regime conservativo.

O regime livre dum sistema conservativo é dado pelo sistema diferencial homogéneo:

$$[M]\ddot{\bar{q}} + [G]\dot{\bar{q}} + [K]\bar{q} = 0 \quad (5.1)$$

em que as matrizes $[K]$, $[M]$ e $[G]$ são as matrizes definidas em (3.41). Esta equação admite uma solução do tipo $\bar{q} = \bar{q}_i e^{\lambda t}$. Esta solução leva ao aparecimento de um problema de valores próprios quadrático do tipo:

$$\left(\lambda^2 [M] + \lambda [G] + [K] \right) \bar{q}_i = 0 \quad (5.2)$$

A equação 5.1 pode no entanto ser reescrita sob a forma:

$$[A]\bar{v} = [B]\dot{\bar{v}} \quad (5.3)$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & [K] \\ -[K] & -[G] \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [K] & 0 \\ 0 & [M] \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\bar{v}_i = \begin{Bmatrix} \bar{q}_i \\ \dot{\bar{q}}_i \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

A obtenção das matrizes [A] e [B] foram neste caso baseadas na igualdade trivial:

$$[K]\dot{\vec{q}} = [K]\dot{\vec{q}} \quad (5.7)$$

Deste modo, admitindo uma solução do tipo $\vec{q} = \vec{q}_i e^{\lambda t}$, obtemos o problema da valores próprios linear:

$$[A]\vec{v}_i = \lambda[B]\vec{v}_i \quad (5.8)$$

Outras igualdades triviais podem ser utilizadas . Por exemplo, Gash [16] utilizou a igualdade $[I]\dot{\vec{q}} = [I]\dot{\vec{q}}$ (em que [I] representa a matriz identidade) e Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32] utilizou a igualdade $[M]\dot{\vec{q}} = [M]\dot{\vec{q}}$. A recorrência a estas igualdades na procura dum sistema linear homogéneo equivalente, conduz a diferentes matrizes [A] e [B], mas cujos valores próprios são idênticos. A escolha da igualdade trivial deverá pois ser aquela que conduz a um melhor ajuste das matrizes [A] e [B] ao algoritmo utilizado.

Um dos métodos utilizado na extracção de valores próprios é a iteração de sub-espacos. Este método de extracção parcial permite a obtenção de um conjunto de valores e vectores próprios associados aos valores próprios de mais baixo módulo. Na realidade, são os valores próprios de mais baixo módulo aqueles que possuem maior interesse físico em determinar, pois normalmente só os modos mais baixos é que são excitados de modo significativo (mesmo em estruturas complexas) [5]. Para este método, Rodrigues [35] propõe a construção das matrizes [A] e [B] segundo a igualdade (5.7). Segundo este autor, quando utilizamos esta igualdade trivial e a iteração de sub-espacos, não necessitamos de construir as matrizes [A] e [B] explicitamente. As operações envolvidas recorrem somente ás matrizes [K], [M] e [G], o que constitui uma das grandes vantagens deste método pois podemos explorar a estrutura em forma de banda destas matrizes. Por outro lado, a aplicação deste método leva à necessidade de uma só factorização da matriz de rigidez em todo o processo iterativo.

Um algoritmo alternativo a este é o algoritmo de Lanczos [35][48]. Este algoritmo, apesar de ser um potente algoritmo de extracção de valores e vectores próprios, trabalha directamente com as matrizes [A] e [B] o que não permite tirar vantagens da estrutura em banda das sub-matrizes que as compõem.

5.2 - Regime dissipativo.

O regime livre no caso dissipativo é-nos dado pela equação diferencial homogénea

$$[M]\ddot{\bar{q}} + [C_d]\dot{\bar{q}} + [K_d]\bar{q} = 0 \quad (5.9)$$

Esta equação pode ser linearizada da mesma forma que linearizamos o modelo conservativo, obtendo assim

$$[A]\bar{v} = [B]\dot{\bar{v}} \quad (5.10)$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & [K_d] \\ -[K_d] & -[C_d] \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [K_d] & 0 \\ 0 & [M] \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\bar{v}_i = \begin{Bmatrix} \bar{q}_i \\ \dot{\bar{q}}_i \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

O problema de valores próprios resultante possui uma solução do tipo $\bar{q} = \bar{q}_i e^{\lambda t}$ o que conduz ao problema de valores próprios:

$$[A]\bar{v}_i = \lambda[B]\bar{v}_i \quad (5.14)$$

A diferença entre o sistema conservativo e sistema dissipativo reside no facto dos valores próprios no caso conservativo serem imaginários puros e no caso dissipativo serem imaginários [36]. Por outro lado as matrizes $[A]$ e $[B]$ no caso conservativo são respectivamente anti-simétrica e simétrica (isto para algumas igualdades triviais como por exemplo a igualdade (5.7)), enquanto que no caso dissipativo dada a não simetria de $[K]$ e $[C]$, o problema será sempre não simétrico qualquer que seja a igualdade trivial a considerar.

Rodrigues [35][36] apresenta algoritmos distintos para a resolução do problema conservativo e dissipativo.

O problema de valores próprios associados ao regime dissipativo permite ainda conhecer os limites de estabilidade do sistema. No capítulo 2 verificamos que o atrito interno constitui um mecanismo destabilizador de um rotor. Os valores próprios de um sistema dissipativo são complexos da forma $\lambda = \alpha + i\omega$. Se a parte real dum valor próprio for positiva, a solução da equação homogénea será uma exponencial positiva e logo estaremos em presença de um sistema instável. Sendo a definição de decremento logarítmico dada pela expressão:

$$\delta = -\frac{2\pi\alpha}{|\omega|} \quad (5.15)$$

teremos instabilidade para valores de δ negativos.

5.3 - Análise modal do modelo espacial no referencial móvel

Consideremos o modelo geral num referencial móvel definido no capítulo 4 para um rotor em regime conservativo e com apoios isotrópicos:

$$\left(-\omega^2 [M] [T_g] - \omega^2 \beta [\overline{G}] [R_g] [T_g] + [K_d] [T_g] \right) \tilde{p} = \tilde{F} \quad \beta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (5.16)$$

A solução homogénea não trivial desta equação implica que:

$$\det \left(-\omega^2 \left([M] + \beta [\overline{G}] [R_g] \right) + [K] \right) = 0 \quad \beta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (5.31)$$

O parâmetro β aqui introduzido permite determinar directamente o valor das velocidades críticas. Assim para os diversos valores de β obtemos:

$\beta=0$ -Frequências próprias para $\Omega=0$

$\beta=1$ -Velocidades críticas em precessão directa ($\omega=\Omega$)

$\beta=-1$ -Velocidades críticas em precessão inversa ($\omega=-\Omega$)

Este problema assim formulado, deixou de ser um problema quadrático para passar a ser um problema linear cuja resolução é consideravelmente mais simples. Por outro lado a multiplicação $[\overline{G}] [R_g]$ resulta numa matriz simétrica em que o movimento segundo o plano móvel de vibração xy_r se torna independente do movimento segundo o plano móvel xz_r . Isto permite-nos

calcular as vibrações apenas segundo um plano, pois sabemos que segundo o outro plano elas são idênticas. Assim, os graus de liberdade a considerar na resolução do problema de valores próprios serão somente os graus de liberdade que regem o movimento segundo um dos dois planos xy_r ou xz_r .

Este tipo de formulação possui as seguintes vantagens quando o regime é conservativo e os apoios são isotrópicos:

i-Resolver o problema de valores próprios recorrendo a matrizes de dimensão muito mais pequena. Para um problema formulado num referencial fixo, o problema de valores próprios é um problema quadrático, o que para n graus de liberdade resulta na resolução dum problema linear de dimensão $2n$. Neste caso o problema resolve-se recorrendo a um problema linear de dimensão $n/2$.

ii-Esta formulação permite ainda uma fácil obtenção das velocidades críticas através da manipulação do parâmetro β , sem ter de recorrer à obtenção de resultados para várias velocidades de rotação à procura das velocidades críticas.

CAPÍTULO VI

6 - Resposta permanente a uma solicitação harmónica

A determinação de valores e vectores próprios com vista à análise do regime livre é, como já foi referido, fundamental para o conhecimento do comportamento dinâmico do rotor. O conhecimento das frequências próprias e das velocidades críticas através desta análise permite-nos saber quais as solicitações harmónicas a evitar no funcionamento de um rotor. No entanto, se a velocidade estiver próxima de uma frequência própria torna-se necessário avaliar a sua gravidade da situação. Na verdade, uma solicitação num rotor vai induzir uma deformação cujo valor terá naturalmente um limite de segurança. É este valor da deformação que se pretende avaliar quando o rotor está sujeito a uma solicitação harmónica conseguindo-se assim avaliar se uma solicitação harmónica, mesmo que próxima duma frequência própria, é ou não perigosa para a integridade do rotor.

A principal solicitação harmónica a que um rotor está sujeito é a solicitação harmónica induzida pela excentricidade da massa em relação ao seu eixo (facto que, como já referimos, se verifica sempre).

6.1 - Determinação da trajectória do centro do rotor

Quando o rotor se encontra sujeito a uma solicitação harmónica induzida pela excentricidade da massa, o movimento permanente do seu centro será, no caso mais geral, uma elipse. Cada ponto do eixo do rotor descreverá uma elipse, lugar geométrico das fechas que o rotor vai tomar ao longo do tempo. A caracterização da forma desta elipse é feita através do seu eixo maior

e menor enquanto que a sua orientação no espaço é feita através do ângulo que o eixo maior da elipse faz com o eixo yy .

Consideremos então a equação diferencial (3.91) do movimento. O vector de forças, dado pelo segundo membro, corresponde às solicitações harmónicas devidas à excentricidade da massa. Este vector de forças é, como já vimos em (3.91), dado por

$$\vec{F} = \vec{Q}_C \cos \Omega t + \vec{Q}_S \sin \Omega t \quad (6.1)$$

Este segundo membro das equações de equilíbrio pode ser reescrito, segundo o procedimento tomado por Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32], sob a forma:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 e^{i\Omega t} + \vec{F}_2 e^{-i\Omega t} \quad (6.2)$$

em que

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{2}(\vec{Q}_C - i\vec{Q}_S) \quad (6.3)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{2}(\vec{Q}_C + i\vec{Q}_S) \quad (6.4)$$

A solução particular desta equação (que corresponde à resposta permanente a esta solicitação) é dada por

$$\vec{q} = \vec{q}_1 e^{i\Omega t} + \vec{q}_2 e^{-i\Omega t} \quad (6.5)$$

onde $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ são vectores complexos. Substituindo esta solução e as suas derivadas na equação (3.91) a determinação de $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ passa agora pela resolução de dois sistemas de equações complexas:

$$(-\Omega^2[M] + i\Omega[C_d] + [K_d])\vec{q}_1 = \vec{F}_1 \quad (6.6)$$

$$(-\Omega^2[M] - i\Omega[C_d] + [K_d])\vec{q}_2 = \vec{F}_2 \quad (6.7)$$

Considerando que os vectores $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ são vectores da forma

$$\vec{q}_1 = \vec{q}_{1r} + i\vec{q}_{1i} \quad (6.8)$$

$$\vec{q}_2 = \vec{q}_{2r} - i\vec{q}_{2i} \quad (6.9)$$

obtemos assim os seguintes sistemas de equações:

$$\left(-\Omega^2[M] + i\Omega[C_d] + [K_d]\right) (\tilde{q}_{1r} + i\tilde{q}_{1i}) = \tilde{F}_1 \quad (6.10)$$

$$\left(-\Omega^2[M] - i\Omega[C_d] + [K_d]\right) (\tilde{q}_{2r} - i\tilde{q}_{2i}) = \tilde{F}_2 \quad (6.11)$$

Separando a parte real da parte complexa obtemos:

$$\begin{cases} -\Omega^2[M]\tilde{q}_{1r} - \Omega[C_d]\tilde{q}_{1i} + [K_d]\tilde{q}_{1r} = \frac{1}{2}\tilde{Q}_C \\ -\Omega^2[M]\tilde{q}_{1i} + \Omega[C_d]\tilde{q}_{1r} + [K_d]\tilde{q}_{1i} = -\frac{1}{2}\tilde{Q}_S \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\begin{cases} -\Omega^2[M]\tilde{q}_{2r} - \Omega[C_d]\tilde{q}_{2i} + [K_d]\tilde{q}_{2r} = \frac{1}{2}\tilde{Q}_C \\ -\Omega^2[M]\tilde{q}_{2i} + \Omega[C_d]\tilde{q}_{2r} + [K_d]\tilde{q}_{2i} = -\frac{1}{2}\tilde{Q}_S \end{cases} \quad (6.13)$$

Analisando os sistemas de equações acima, verifica-se que os sistemas (6.12) e (6.13) são idênticos pelo que as suas soluções verificam a relação:

$$\tilde{q}_{2r} = \tilde{q}_{1r} \quad \tilde{q}_{2i} = \tilde{q}_{1i} \quad (6.14)$$

Concluimos assim que $\tilde{q}_2$ é o complexo conjugado de $\tilde{q}_1$. Em consequência, basta-nos resolver um sistema de equações complexo para obtermos a solução.

A solução geral será então do tipo

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= \tilde{q}_1 e^{i\Omega t} + \tilde{q}_1^* e^{-i\Omega t} = \\ &= 2\tilde{q}_{1r} \cos \Omega t - 2\tilde{q}_{1i} \sin \Omega t \end{aligned} \quad (6.15)$$

e representa a equação de uma elipse.

6.2 - Determinação dos eixos principais da elipse.

Serão apresentadas duas maneiras que foram implementadas para a determinação dos eixos principais da elipse:

i-Restringindo a solução (6.15) aos deslocamentos para o nó j num dado instante t obtem-se:

$$\vec{q}^j = 2 \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \cos \Omega t - 2 \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} \sin \Omega t \quad (6.16)$$

A norma deste vector posição é em cada instante dada pela expressão:

$$\|\vec{q}^j\| = 2\sqrt{(a \cos \Omega t - c \sin \Omega t)^2 + (b \cos \Omega t - d \sin \Omega t)^2} \quad (6.17)$$

Derivando esta expressão em ordem a Ωt e igualando-a a zero com vista à determinação dos máximos e mínimos desta norma (valores que correspondem ao eixo maior e ao eixo menor da elipse), obtemos:

$$\begin{aligned} \|\vec{q}^j\|' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tg}(2\Omega t) &= \frac{2(ac + bd)}{c^2 + d^2 - a^2 - b^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega t = \alpha_n &= \frac{1}{2} \operatorname{actg}\left(\frac{2(ac + bd)}{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}\right) \pm \frac{n\pi}{2} \quad (6.18) \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned}$$

Considerando $n=0$ e $n=1$ (duas soluções possíveis) e substituindo Ωt em (6.17) obtemos os semi-eixos maior e menor ($n=0$ pode corresponder tanto a um eixo maior como a um eixo menor, bem como $n=1$). Sabendo ainda que α_0 difere de α_1 de $\pi/2$ podemos dizer que os semi-eixos da trajectória elíptica são dados por

$$R_0 = 2\sqrt{(a \cos \alpha_0 - c \sin \alpha_0)^2 + (b \cos \alpha_0 - d \sin \alpha_0)^2} \quad (6.19)$$

$$R_1 = 2\sqrt{(a \sin \alpha_0 + c \cos \alpha_0)^2 + (b \sin \alpha_0 + d \cos \alpha_0)^2} \quad (6.20)$$

Este procedimento, embora simples, possui algumas dificuldades numéricas. Elas resultam do quociente na expressão (6.18) necessário ao cálculo de α_n .

ii - O segundo método é baseado no método proposto por Tsunea[46].

Consideremos o vector deslocamento ainda para o nó j , como sendo dado pela expressão:

$$\vec{q}^j = \vec{q}_1^j e^{i\Omega t} + \vec{q}_1^{j*} e^{-i\Omega t} \quad (6.21)$$

em que $\vec{q}_1^j$ é dado por

$$\vec{q}_1^j = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} + i \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

Obtemos assim as componentes do vector $\vec{q}_1^j$ o deslocamentos u_y^j e u_z^j no tempo dados por:

$$\begin{cases} u_y^j = (a + ic)e^{i\Omega t} + (a - ic)e^{-i\Omega t} \\ u_z^j = (b + id)e^{i\Omega t} + (b - id)e^{-i\Omega t} \end{cases} \quad (6.23)$$

Combinando estas duas equações sob a forma complexa tal que $z^j = u_y^j + i u_z^j$, temos que

$$z^j = [(a - d) + i(c + b)]e^{i\Omega t} + [(a + d) + i(b - c)]e^{-i\Omega t} \quad (6.24)$$

A primeira parcela desta função do tempo corresponde a uma trajectória circular de raio r_d em precessão directa, ou seja, um movimento no mesmo sentido que Ω , enquanto que a segunda parcela representa uma outra trajectória circular de raio r_i em precessão inversa, ou seja, um movimento no sentido inverso a Ω .

$$r_d = \sqrt{(a - d)^2 + (c + b)^2} \quad (6.25)$$

$$r_i = \sqrt{(a + d)^2 + (b - c)^2} \quad (6.26)$$

A precessão descrita pelo rotor pode, segundo este método, ser facilmente detectada. Na realidade, se o maior raio em módulo for o raio associado à precessão directa estaremos perante um rotor em precessão directa e se o maior raio em módulo for o raio associado à precessão inversa estaremos perante um rotor em precessão inversa. No caso extremo de ambos os raios serem iguais o rotor descreverá uma linha. Estas constatações podem ser facilmente observadas nas figuras 6.1 e 6.2.

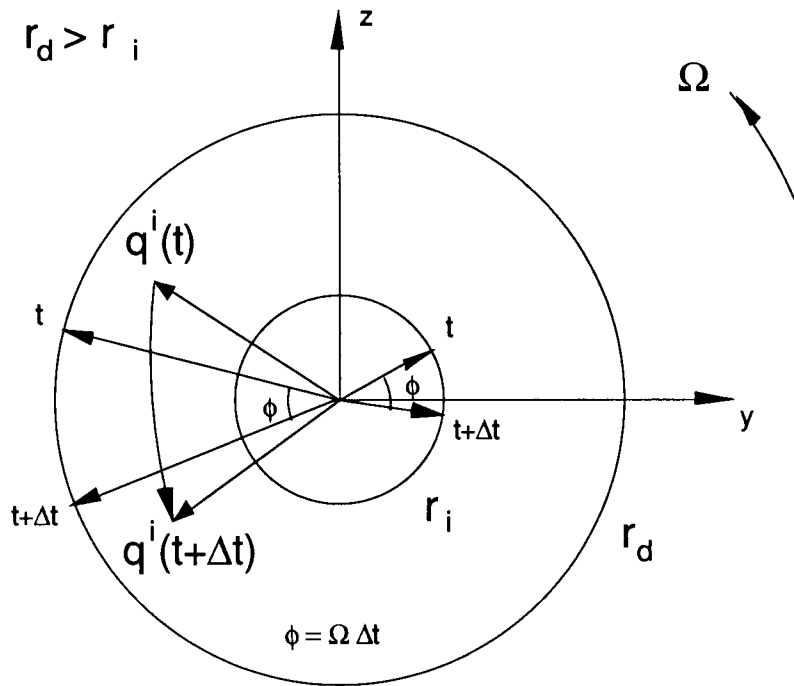


Fig 6.1 - $r_d > r_i$ Precessão directa (no mesmo sentido de Ω)

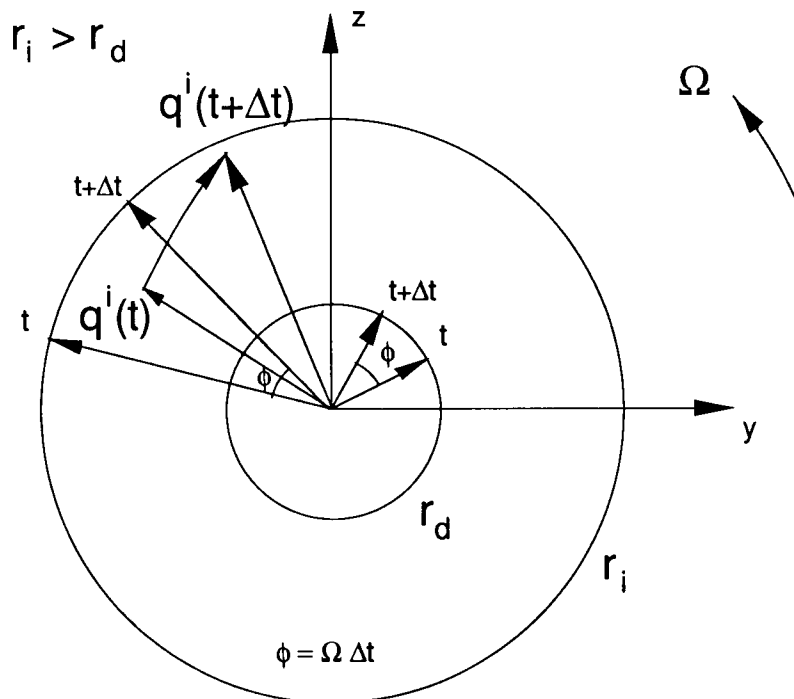


Fig 6.2 - $r_i > r_d$ Precessão é inversa (no sentido inverso de Ω)

Esta abordagem permite-nos ainda concluir que o valor do eixo maior da elipse é dado pela soma do raio em precessão directa com o raio em precessão inversa e que o valor do eixo menor da elipse é dado pelo módulo da diferença. Esta análise é ilustrada na fig 6.3

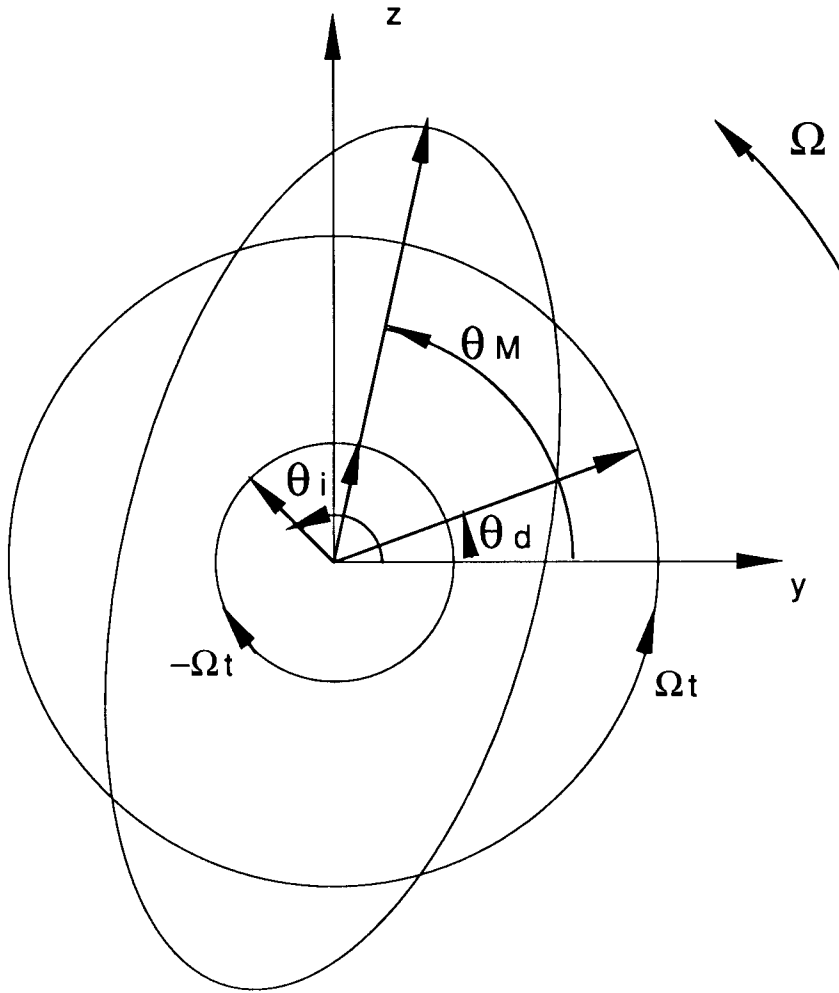


Fig 6.3

Em conclusão temos que:

$$R_{\max} = r_d + r_i \quad (6.27)$$

$$R_{\min} = |r_d - r_i| \quad (6.28)$$

A vantagem deste método é podermos calcular de uma maneira simples os eixos da trajetória elíptica sem recorremos ao cálculo do ângulo α_n , contornando assim os problemas numéricos obtidos anteriormente.

A determinação do ângulo para o qual ocorre o valor máximo da flecha (ângulo do eixo maior da elipse) pode ser obtido de maneira expedita analisando a fig 6.3. Consideremos um determinado instante t em que a posição de r_i e r_d é tal que formam um ângulo com o eixo dos yy de θ_i e θ_d respectivamente. A velocidade angular destes dois vectores é em módulo igual

a Ω . O encontro destes dois vectores (posição em que definem o eixo maior da elipse) dar-se-á na posição média, ou seja:

$$\theta_M = \frac{\theta_i + \theta_d}{2} \quad (6.29)$$

qualquer que seja o instante t . Considerando $t=0$, o valor de θ_i e θ_d vem dado por

$$\begin{aligned} \cos \theta_i &= \frac{a+d}{r_i} & \sin \theta_i &= \frac{b-c}{r_i} \\ \cos \theta_d &= \frac{a-d}{r_d} & \sin \theta_d &= \frac{b+c}{r_d} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Desta forma determinamos o ângulo que o eixo maior faz com o eixo dos yy . O eixo menor estará desfasado deste de $\pi/2$. No caso de r_i ser nulo estamos perante uma trajectória circular e logo não tem sentido falar em ângulo de orientação.

6.3 - Aplicações numéricas - Resposta a excentricidades

Consideremos agora alguns exemplos numéricos com vista a validar o código desenvolvido. De modo a que a solução por elementos finitos vá de encontro às soluções teóricas deduzidas, utilizamos o elemento finito de Euler. Este elemento finito, baseado na teoria de Euler -Bernouilli, não contabiliza a energia de deformação de corte, estando por isso mais próximo das soluções teóricas desenvolvidas.

6.3.1 - Rotor de Jeffcott - Regime conservativo

Consideremos o seguinte exemplo numérico para um rotor de Jeffcott, cujos apoios são elásticos (figura 6.4). Para o rotor de Jeffcott a equação que rege o movimento é dada por:

$$\begin{aligned}
 m_D (\ddot{u}_y - \Omega^2 e \cos \Omega t) + K(u_y - u_{y0}) &= 0 \\
 m_D (\ddot{u}_z - \Omega^2 e \sin \Omega t) + K(u_z - u_{z0}) &= 0 \\
 K(u_y - u_{y0}) &= 2K' u_{y0} \\
 K(u_z - u_{z0}) &= 2K'' u_{z0}
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

em que "e" é a excentricidade da massa do disco.

Note-se que neste modelo o efeito giroscópico não se manifesta para o primeiro modo de vibração.

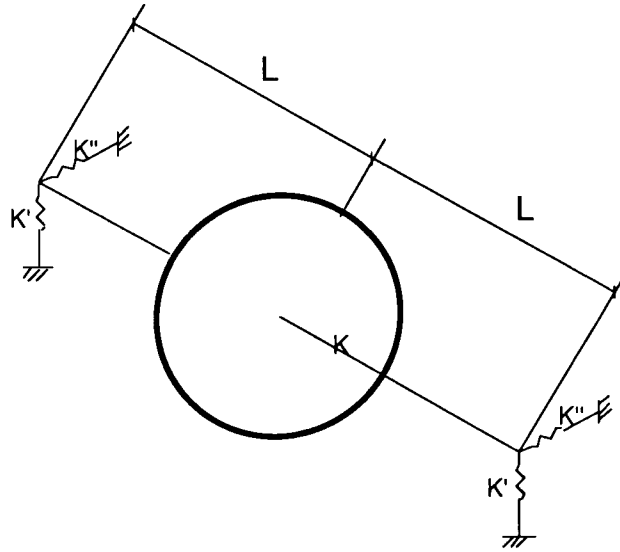


Fig. 6.4

Eliminando do sistema de equações (6.31) u_{y0} e u_{z0} obtemos:

$$\begin{aligned}
 m \ddot{u}_y + K_1 u_y &= \Omega^2 e \cos \Omega t \\
 m \ddot{u}_z + K_2 u_z &= \Omega^2 e \sin \Omega t
 \end{aligned} \quad \text{em que} \quad \begin{aligned} K_1 &= \frac{2K'K}{2K' + K} \\ K_2 &= \frac{2K''K}{2K'' + K} \end{aligned} \tag{6.32}$$

As frequências próprias serão constantes qualquer que seja a rotação considerada e são dadas por:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}} \tag{6.33}$$

A amplitude de deformação segundo yy e segundo zz é dada por:

$$a_y = \frac{\Omega^2 e/m}{\omega_1^2 - \Omega^2} \quad \text{e} \quad a_z = \frac{\Omega^2 e/m}{\omega_2^2 - \Omega^2} \quad (6.34)$$

Consideremos agora o exemplo numérico por elementos finitos tal que o modelo é constituído por:

-4 elementos de comprimento 2.5E-01 m com massa específica nula.

-rotor apoiado nos nós 1 e 5 com características de rigidez tal que:

$$K' = 2.0E+6 \text{ N / m}$$

$$K'' = 4.0E+6 \text{ N / m}$$

-disco colocado ao centro (nó 3) com as seguintes características

$$m = 45 \text{ Kg}$$

$$I_D = 1.0 \text{ Kg.m}^2$$

$$I_P = 2.0 \text{ Kg.m}^2$$

-diâmetro dos elementos constante e de valor 5.0E-2 m

-módulo de Young igual a 2.0860E+11 Pa

Com estes dados obtivemos resultados excelentes. Apresentamos unicamente os resultados por elementos finitos uma vez que em relação aos teóricos obtivemos exactamente os mesmos resultados até às cinco primeiras casas decimais.

Para além desta análise, ainda variamos o momento polar de inércia de forma significativa no sentido de analisarmos qual a variação do comportamento do rotor com esta variável. Como resultados obtivemos sempre os mesmos valores na resposta a uma excentricidade e os mesmos valores para as duas primeiras frequências próprias. Mostramos assim que para este modelo de rotor o efeito giroscópico não se manifesta na realidade para esta excitação.

Analisando o gráfico seguinte podemos concluir que para o rotor de Jeffcott as duas primeiras frequências próprias são independentes da velocidade de rotação, o que vem mais uma vez reforçar a inexistência de efeito giroscópico para estas condições.

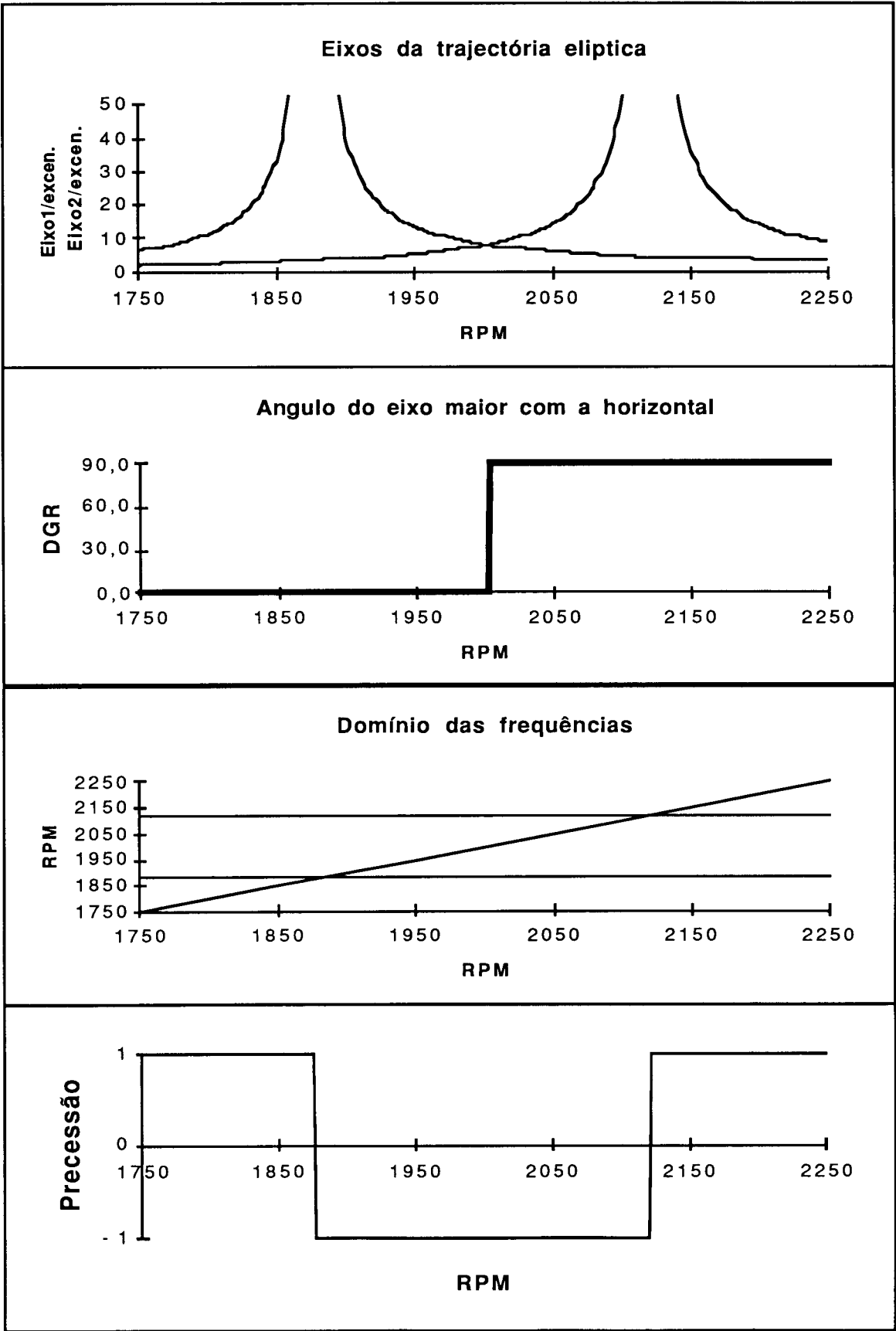


Fig 6.5 - Resposta a uma excentricidade
Orientação do eixo maior da elipse
Frequências próprias em função da velocidade de rotação
Tipo de precessão com a velocidade de rotação

6.3.2 -Rotor com um disco rígido - Regime conservativo

No capítulo 2.3 analisamos este rotor (fig 2.7) obtendo as equações que regem o movimento deste rotor. Vamos agora proceder a uma análise idêntica ao caso precedente utilizando a formulação por elementos finitos. Consideremos ainda o caso em que os apoios são elásticos e isotrópicos e ainda o caso em que os apoios são elásticos e não isotrópicos.

Em todas estas análises utilizamos o mesmo elemento de Euler utilizado na análise do rotor de Jeffcott.

6.3.2.1 - Apoios simples

Este foi o caso analisado em 2.3. Para esta análise consideramos os seguintes dados:

- 2 elementos de comprimento $5.0E-01$ m e $2.5E-01$ m com massa específica nula;

- rotor simplesmente apoiado nos nós 1 e 2 ;

- disco colocado ao centro (nó 3) com as seguintes características;

$$m=98.018 \text{ Kg}$$

$$I_p=49.009 \text{ Kg.m}^2$$

$$I_d=24.504 \text{ Kg.m}^2$$

- diâmetro dos elementos constante e de valor $5.5E-2$ m;

- módulo de Young de valor igual a $2.0860E+11$.

Tal como no rotor de Jeffcott, os resultados obtidos são idênticos aos teóricos desenvolvidos no ponto 2.3 (pelo menos até à quinta casa decimal). Esta boa aproximação num caso fortemente influenciado pelo efeito giroscópico dá-nos confiança nos resultados que possamos obter quando analisarmos um rotor de configuração mais elaborada.

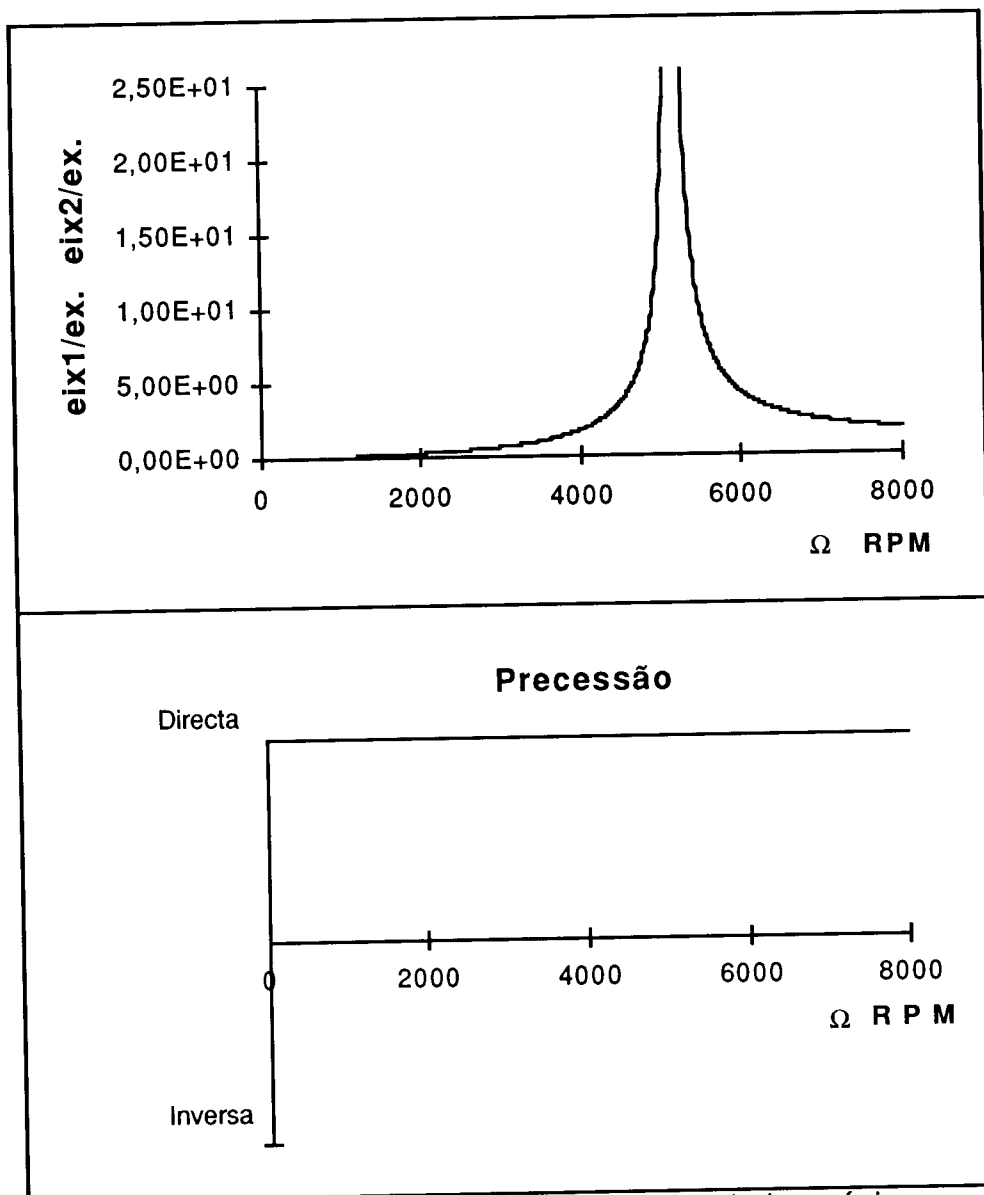


Fig 6.6 - Resposta do rotor a uma solicitação harmónica provocada por uma excentricidade da massa

Tal como já tínhamos referido no capítulo 2 (e provamos no capítulo 4 recorrendo à formulação complexa), quando os apoios são isotrópicos a solicitação harmónica causada pela excentricidade da massa não excita os modos associados às precessões inversas, pelo que a resposta é sempre em precessão directa e os picos verificam-se nas velocidades críticas em precessão directa.

Para este rotor obtivemos ainda a evolução das frequências próprias conforme se representa no gráfico que se segue.

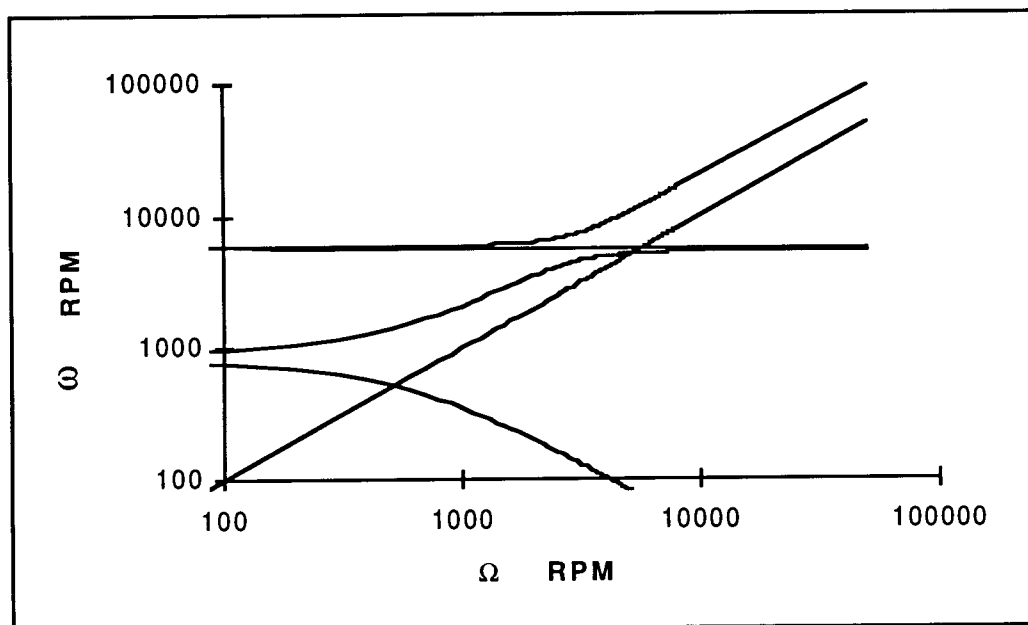


Fig 6.7 - Frequências próprias função da rotação

6.3.2.2 -Apoios isotrópicos

Consideremos agora o mesmo rotor mas com apoios elásticos isotrópicos com as seguintes características de rigidez:

$$K' = 1.0E+07 \text{ N / m}$$

$$K'' = 1.0E+07 \text{ N / m}$$

Para esta situação, a resposta é apresentada na figura 6.8.

Tal como no gráfico anterior, só temos precessão directa pois os apoios são isotrópicos. A grande diferença entre este caso e o anterior situa-se ao nível das frequências críticas. Podemos aqui ver que estas foram radicalmente alteradas com a introdução das características dos apoios. Este facto põem em evidência que os parâmetros que caracterizam os apoios são fundamentais no estudo das vibrações dos rotores.

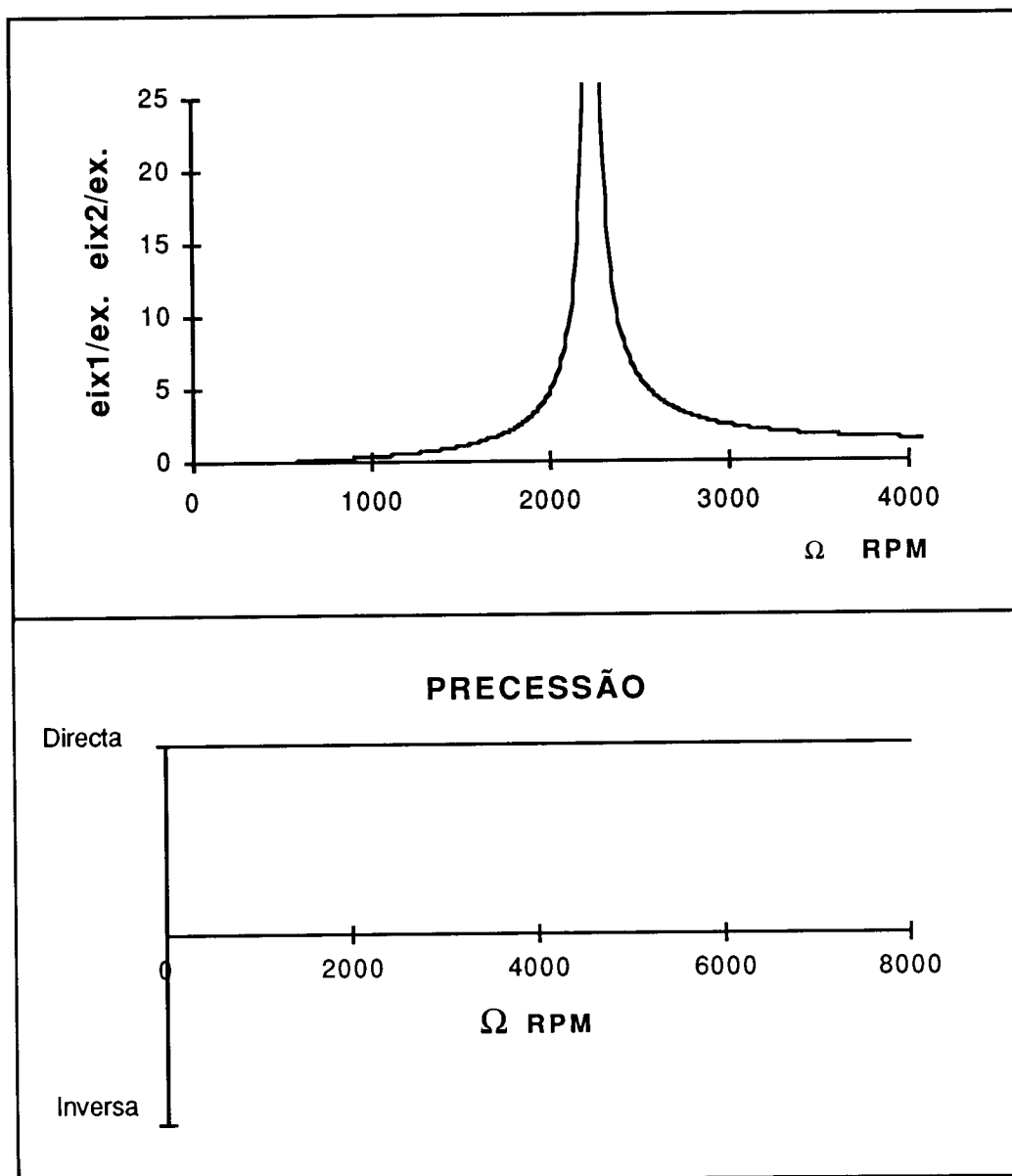


Fig 6.8 - Resposta do rotor em apoios elásticos isotrópicos a uma solicitação harmónica provocada por uma excentricidade da massa

A análise das frequências próprias deste rotor pode ser feita através do figura 6.9. Podemos ver neste gráfico que, com a introdução destes apoios, houve um decréscimo em algumas velocidades críticas.

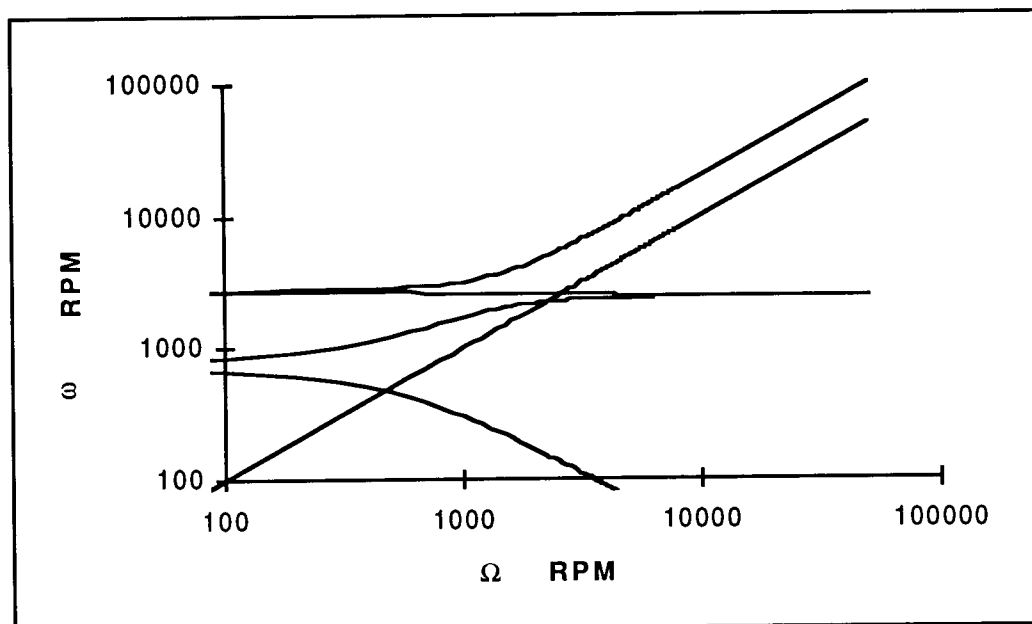


Fig 6.9 - Frequências próprias função da rotação

Os apoios são peças com influência determinante na resposta do rotor. Na figura 6.10 encontra-se representada uma curva que nos dá, para este rotor, a variação da velocidade crítica com a rigidez dos apoios.

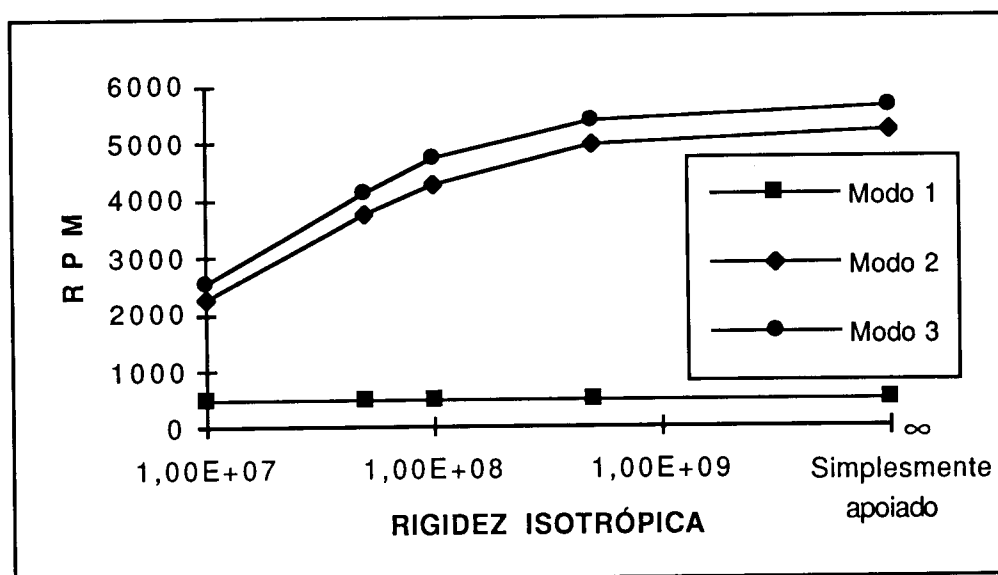


Fig 6.10 - Velocidades críticas função da rigidez dos apoios

Podemos observar neste gráfico que quanto maior a rigidez, mais a resposta do rotor se aproxima do caso simplesmente apoiado que corresponde a uma rigidez infinita dos apoios.

6.3.2.3 - Apoios ortotrópicos

Consideremos ainda o mesmo rotor , mas agora com apoios elásticos não isotrópicos de características:

$$K' = 1.0E+07 \text{ N / m}$$

$$K'' = 1.5E+07 \text{ N / m}$$

Para este rotor obtemos a seguinte resposta do gráfico 6.7.

A resposta deste rotor a uma solicitação harmónica provocada por uma excentricidade da massa é completamente diferente das respostas anteriormente analisadas. Neste rotor todas as velocidades críticas são excitadas uma vez que a amplitude tende para infinito em todas elas. As velocidades críticas podem ser analisadas através da figura 6.12. Na figura 6.11 podemos ainda observar que a inversão da precessão se dá no ponto em que a amplitude do eixo menor da trajectória elíptica se anula.

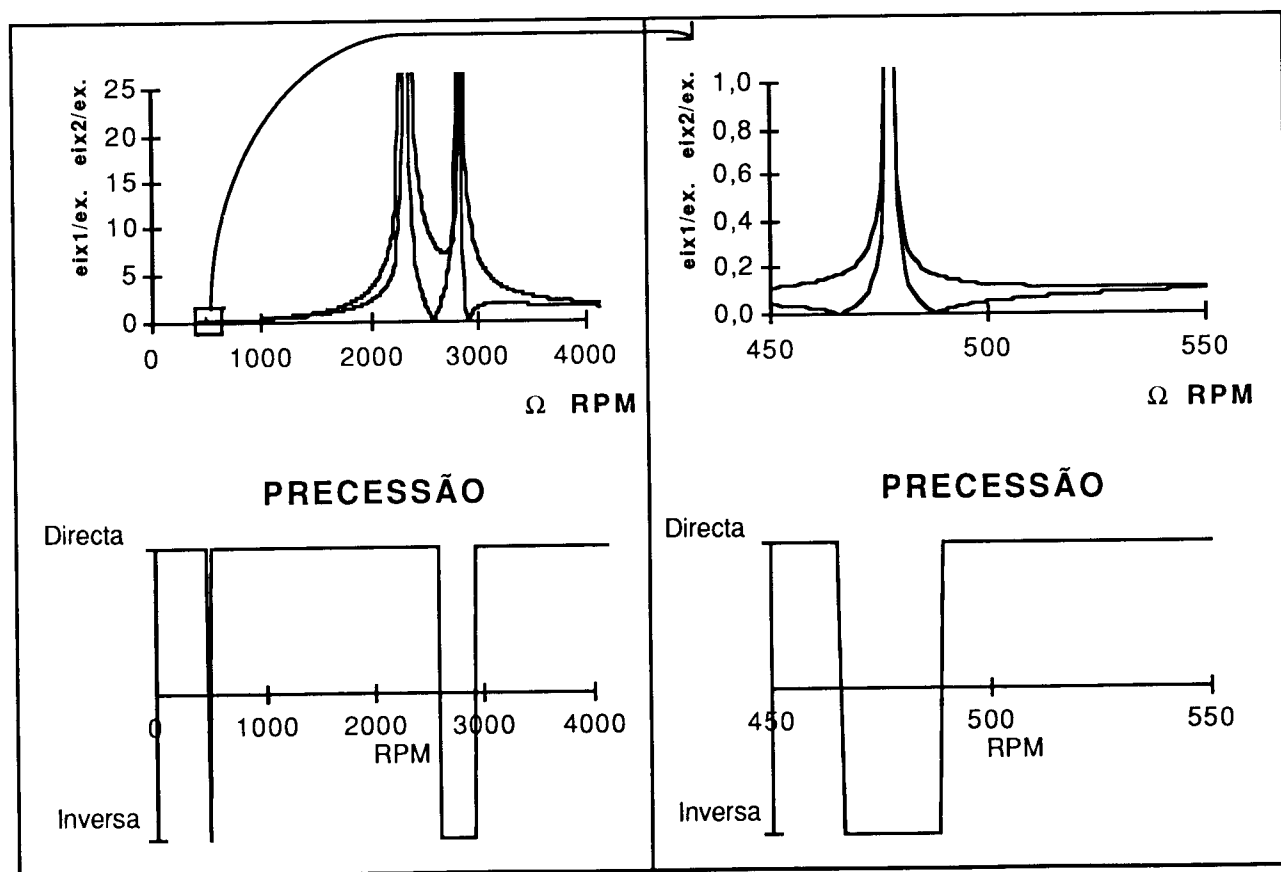


Fig 6.11 - Resposta do rotor a uma solicitação harmónica provocada por uma excentricidade da massa
Do lado direito encontra-se representado o que se passa na zona assinalada do lado esquerdo

Comparando os resultados deste rotor com os resultados obtidos para o rotor de Jeffcott, podemos concluir que a inversão da precessão se dá antes da velocidade crítica para os sistemas giroscópicos e para a velocidade de rotação em que o eixo menor da trajectória elíptica se anula e enquanto que para os sistemas não giroscópicos se dá nas velocidades críticas sem que o eixo menor da trajectória elíptica se anule. Naturalmente, nos sistemas em que os apoios são isotrópicos, uma vez que a precessão é sempre directa e a trajectória é circular, os eixos são idênticos e nunca se anulam.

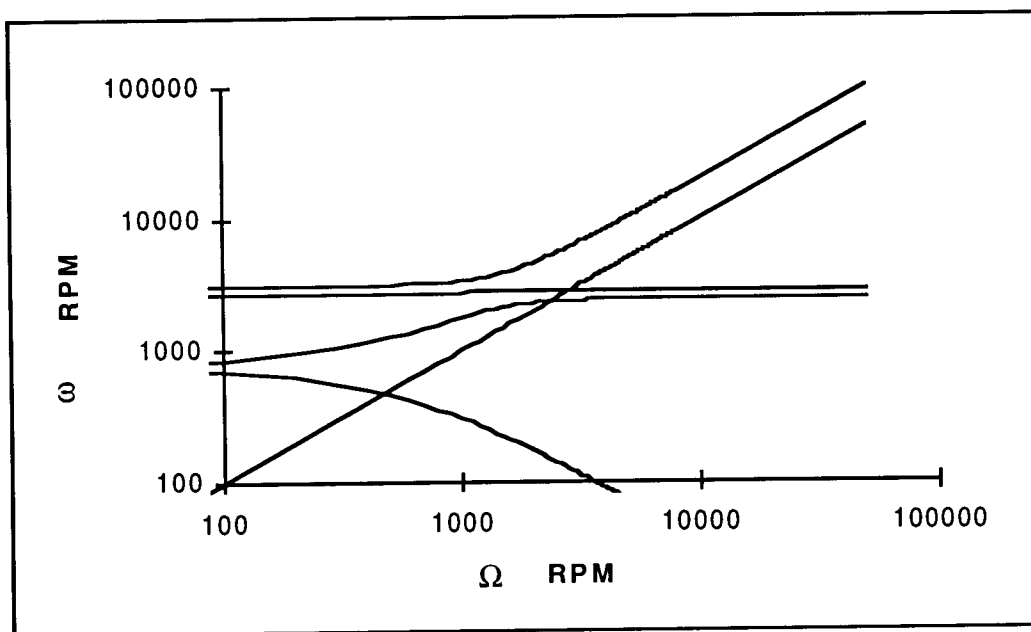


Fig 6.12 - Frequências próprias função da rotação

6.3.3 - Rotor de Nelson e McVaugh [30]

Este rotor foi apresentado por Nelson e McVaugh [30] com vista ao estudo dinâmico dos rotores. Posteriormente Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32] introduziram neste mesmo rotor o atrito interno viscoso e histerético bem como o atrito externo exercido pelos apoios. Este rotor, uma vez que já foi fruto de vários estudos, foi por nós utilizado com vista à validação do cálculo das amplitudes da resposta a uma solicitação harmónica ambos os modelos conservativo e dissipativo.

6.3.3.1- Definição da geometria do rotor [30]

A tabela seguinte apresenta a definição dos elementos deste rotor.

Element 0	Comprimento (m)	Diâmetro $\varnothing_{\text{ext}} / \varnothing_{\text{int}}$
1	1.27E-02	1.02E-02 / 0.0
2	3.81E-02	2.04E-02 / 0.0
3	2.54E-02	1.52E-02 / 0.0
4	1.27E-02	4.06E-02 / 0.0
5	1.27E-02	4.06E-02 / 0.0
6	5.10E-03	6.60E-02 / 0.0
7	7.60E-03	6.60E-02 / 3.04E-02
8	1.27E-02	5.08E-02 / 3.56E-02
9	7.60E-03	5.08E-02 / 0.0
10	3.05E-02	2.54E-02 / 0.0
11	2.54E-02	2.54E-02 / 0.0
12	3.81E-02	3.04E-02 / 0.0
13	3.81E-02	3.04E-02 / 0.0
14	2.03E-02	2.54E-02 / 0.0
15	1.78E-02	2.54E-02 / 0.0
16	1.02E-02	7.62E-02 / 0.0
17	3.04E-02	4.06E-02 / 0.0
18	9.60E-03	4.06E-02 / 3.04E-02

Tabela 6.1 - Características dos elementos

Este rotor possui ainda uma massa concentrada no nó 5. Os valores dos parâmetros que caracterizam esta massa são:

$$m=1.401 \text{ Kg}$$

$$I_p=2.0300\text{E-}03 \text{ Kg.m}^2$$

$$I_d=1.3600\text{E-}03 \text{ Kg.m}^2$$

No que diz respeito aos dois apoios do rotor, eles situam-se nos nós 11 e 15 . As suas características dependem do caso analisado.

As características do material utilizado são as seguintes:

$$E=2.0750\text{E+}11 \text{ Pa}$$

$$\nu=0.27$$

$$\rho=7806 \text{ Kg.m}^{-3}$$

6.3.3.2- Apoios isotrópicos [30] [32]

Consideremos o regime conservativo e os apoios isotrópicos com as seguintes características:

$$K_y = K_z = 4.3780E+07 \text{ N/m}$$

$$K_{yz} = K_{zy} = 0.0 \text{ N/m}$$

Com base nestes dados obtemos a seguinte resposta:

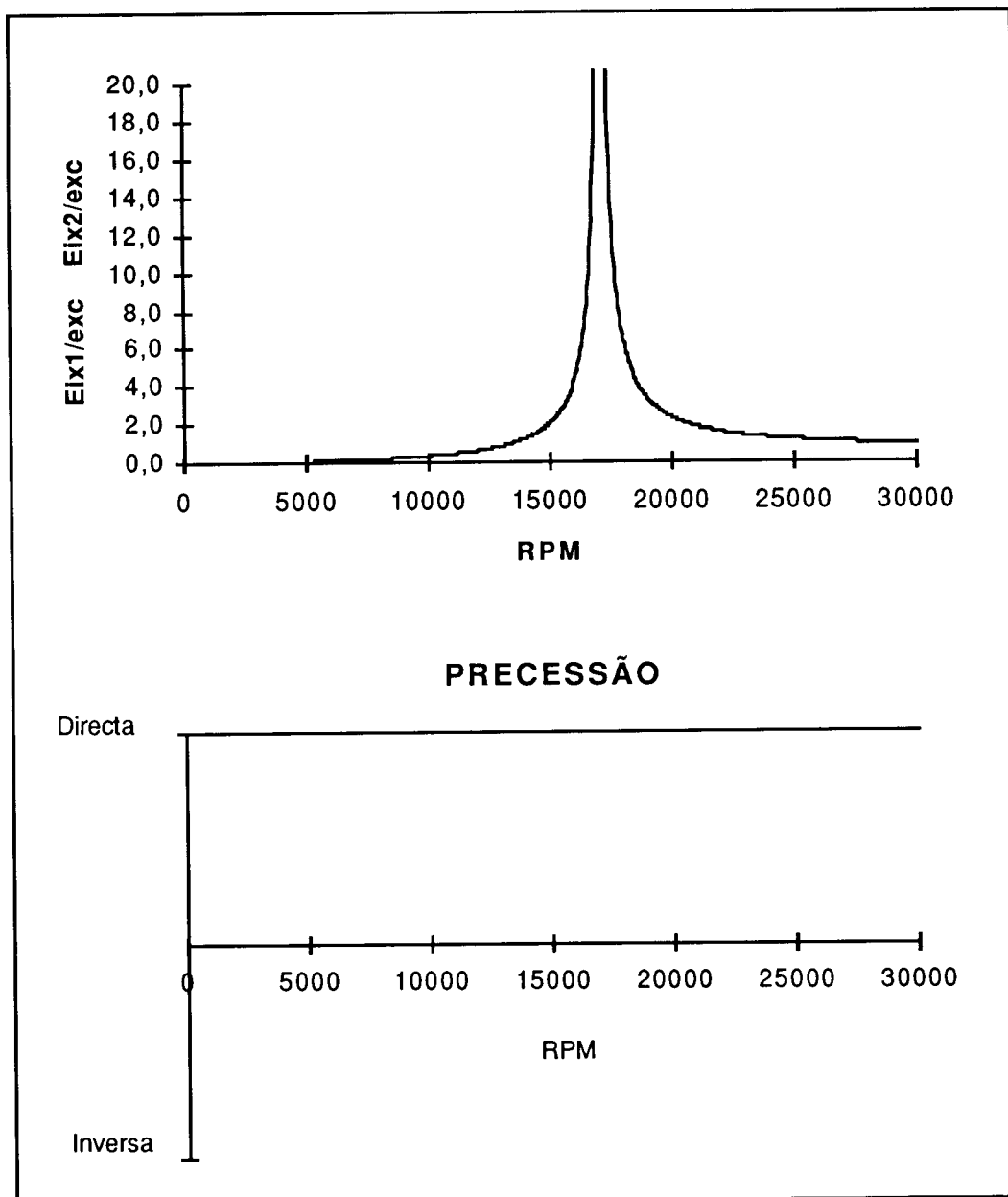


Fig 6.13 - Resposta permanente do Rotor de Nelson e McVaugh [30]

A análise deste gráfico mostra-nos mais uma vez que no caso dos apoios serem isotrópicos a resposta é sempre em precessão directa. Os resultados obtidos concordam com os resultados apresentados nas referencias [30] e [32].

Consideremos agora o mesmo rotor mas tendo em conta mecanismos de dissipação de energia [32]. Temos então os seguintes dados:

i - Apoios:

$$\begin{aligned}K_y &= K_z = 4.3780E+07 \text{ N/m} \\C_y &= C_z = 1.7520E+03 \text{ N.s/m} \\K_{yz} &= K_{zy} = C_{yz} = C_{zy} = 0.0\end{aligned}$$

ii - Material

$$\begin{aligned}\eta_v &= 1.0000E-03 \text{ s} \\ \eta_H &= 0.0\end{aligned}$$

Com base nestes dados obtemos a seguinte resposta.

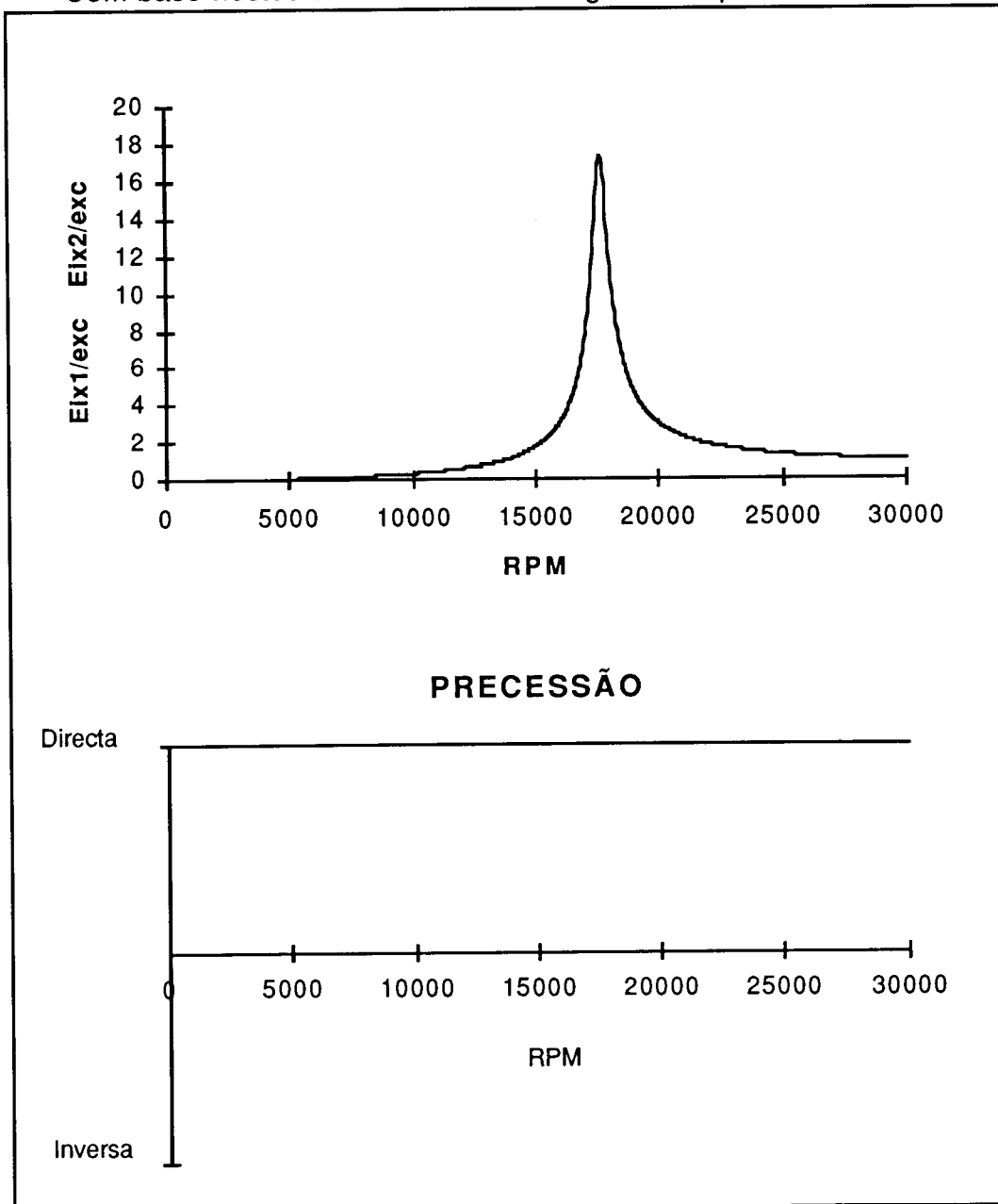


Fig 6.14 - Resposta permanente do Rotor de Nelson e McVaugh [30]

Analisando este gráfico e comparando-o com o regime conservativo, temos como principal diferença a amplitude máxima da deformada. No caso conservativo esta amplitude tende para infinito enquanto que considerando mecanismos de dissipação de energia esta amplitude máxima está limitada.

Podemos ainda observar que a rotação a que se verificou o pico não variou de maneira significativa. Na verdade, quando os apoios são isotrópicos e o atrito externo é baixo, como neste caso, a amplitude não varia significativamente apesar da presença de atrito interno, como justificaremos mais adiante.

6.3.3.3- Apoios ortotrópicos [30] [32]

Consideremos ainda o mesmo exemplo, mas agora com os apoios ortotrópicos. Consideremos primeiramente este caso sem mecanismos de dissipação de energia. Temos então os seguintes dados:

i - Apoios:

$$K_y = K_z = 3.5030E+07 \text{ N/m}$$

$$K_{yz} = K_{zy} = -8.7560E+06 \text{ N/m}$$

Com base nestes dados obtemos a resposta representada no gráfico 6.9.

Neste caso podemos ver que , uma vez que os apoios não são isotrópicos, a precessão não é sempre directa e aparecem picos associados aos modos próprios em precessão inversa.

Podemos ainda observar que a orientação da trajectória elíptica sofre uma variação no ponto em que o eixo maior e o eixo menor se igualam, ou seja, no ponto em que a trajectória é circular.

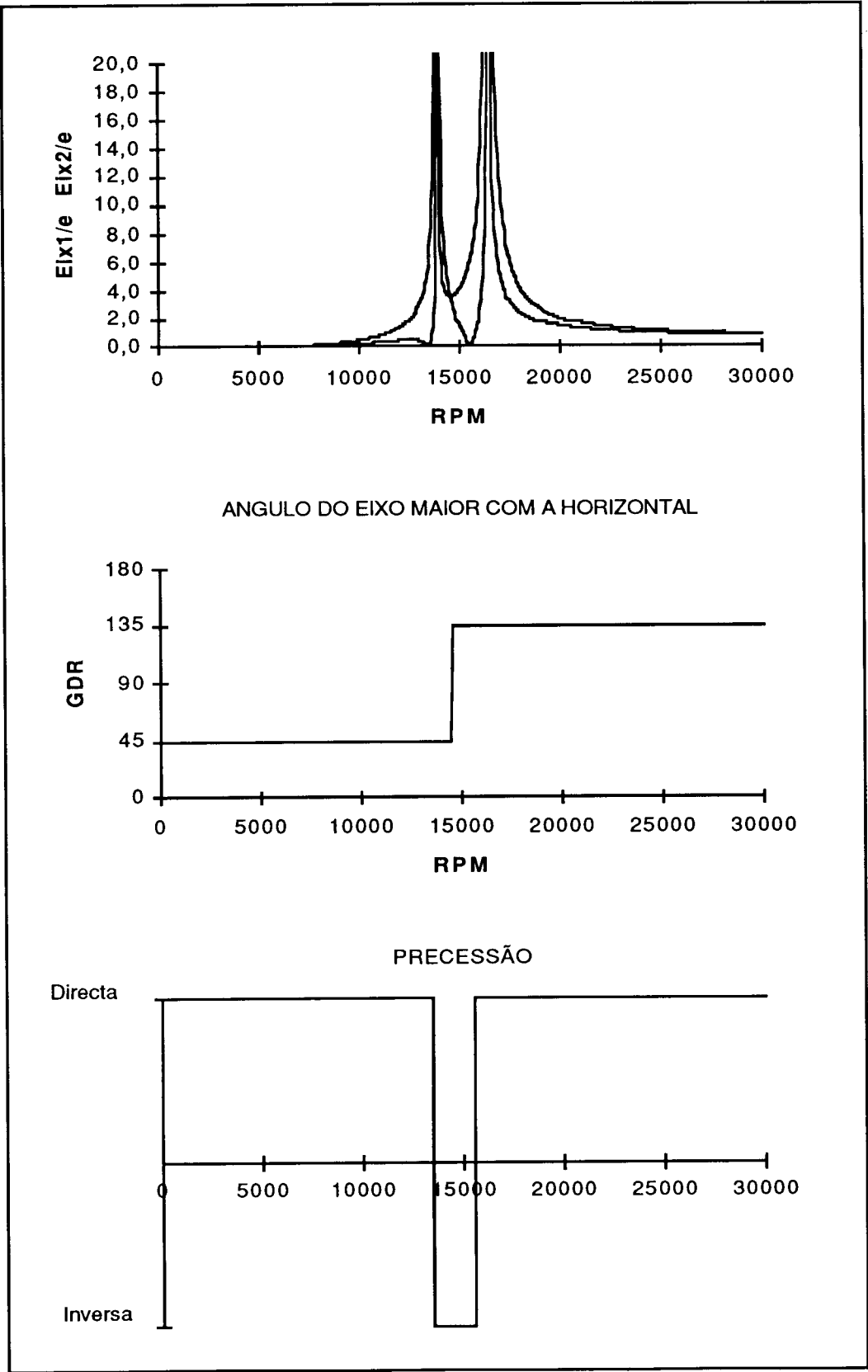


Fig 6.15

Consideremos agora o mesmo rotor com apoios ortotrópicos mas tendo em conta mecanismos de dissipação de energia. Temos então os seguintes dados:

i - Apoios:

$$K_y = K_z = 4.3780E+07 \text{ N/m}$$

$$C_y = C_z = 1.7520E+03 \text{ N.s/m}$$

$$K_{yz} = K_{zy} = -8.7560E+06 \text{ N/m}$$

$$C_{yz} = C_{zy} = 0.0$$

ii - Material

$$\eta_v = 1.0000E-03 \text{ s}$$

$$\eta_H = 0.0$$

Com base nestes dados obtemos as respostas apresentadas na figura 6.16.

Analisando este gráfico podemos observar que a resposta, contrariamente ao que se passa quando temos apoios isotrópicos, é completamente diferente da resposta conservativa. O pico máximo no caso dissipativo encontra-se a uma rotação entre os dois picos do caso conservativo. Por outro lado podemos observar que neste caso dissipativo não se verifica uma inversão da precessão. Temos ainda a salientar que, tal como nos apoios isotrópicos, no caso dissipativo temos um limite para o pico máximo enquanto que no caso conservativo os picos tendem para infinito.

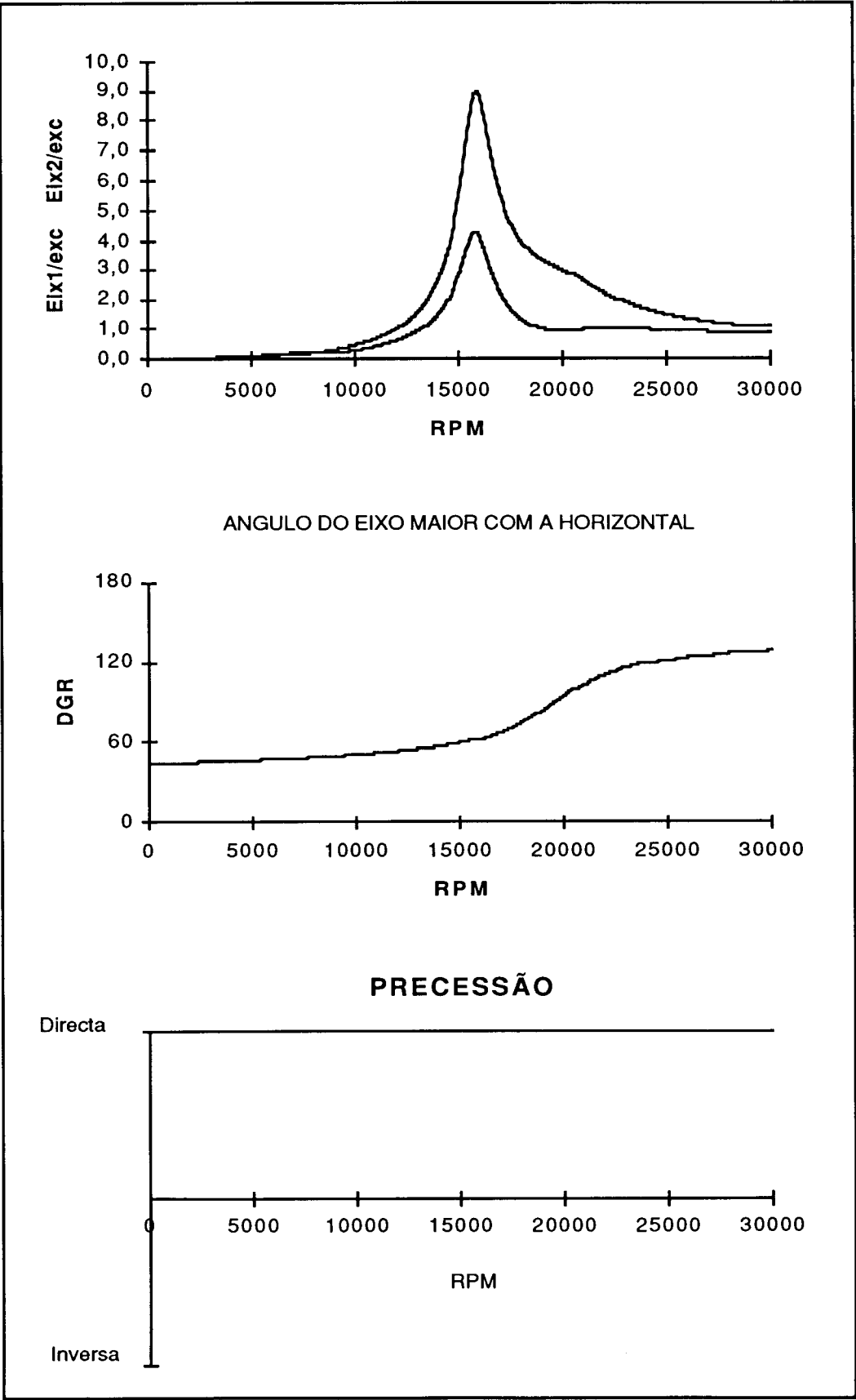


Fig 6.16

6.3.3.4- Conclusões

Os resultados obtidos pelo programa realizado de forma muito próxima com os resultados obtidos por Nelson e McVaugh [30] e por Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32] , apesar destes terem utilizado nos seus estudos um elemento finito de formulação diferente do que aquele que por nós foi utilizado.

Duas observações importantes devem fazer-se após este estudo:

i - Um resultado que seria de esperar diz respeito à amplitude de deformação. No modelo conservativo a amplitude de deformação na velocidade crítica tende para infinito. A introdução do atrito externo leva à limitação desta amplitude de deformação, aproximando-se assim mais da realidade.

ii - Uma outra observação importante resultante destes exemplos numéricos é o facto de o atrito interno não afectar a resposta dos rotores, se os apoios forem isotrópicos. A explicação física para este facto encontramos-na na análise do fenómeno conhecido por precessão sincronizada (em que a precessão tem a mesma velocidade que a velocidade de rotação). Como sabemos, se os apoios forem isotrópicos, o movimento do centro do rotor será circular. Isto significa que, em precessão sincronizada, a deformada do rotor não se altera durante o movimento. Logo, um veio em precessão sincronizada não possui vibração transversal que cause variação das tensões instaladas. Torna-se então natural que qualquer atrito do material não afecte nem a amplitude da resposta nem a velocidade crítica do rotor [32]. Por outro lado se os apoios forem ortotrópicos a precessão será elíptica e, mesmo em precessão sincronizada, existe sempre vibração transversal do rotor. Logo, para este caso, o atrito interno é um importante factor na determinação da resposta a uma excentricidade. Podemos deste modo explicar as grandes diferenças observadas no comportamento dos rotores quando os apoios são isotrópicos e ortotrópicos e quando estamos num regime conservativo e num regime dissipativo.

Segundo Nevzat Özgüven e Levent Özkan [32] , o aparecimento de um só pico quando se inclui o atrito em rotores com apoios ortotrópicos vai de encontro com as observações que na prática se verificam e contrariamente aos dois picos que se verificam no estudo conservativo.

6.4 - Rotor sujeito a uma solicitação harmónica dos apoios

Vamos neste sub-capítulo estudar o comportamento do rotor a um deslocamento harmónico da base. Por vezes os rotores estão montados em estruturas que também vibram, consequência de, por exemplo, outros mecanismos associados à estrutura que nela induzem vibrações.

O comportamento do rotor é, como já referimos, fortemente influenciado pelas características dos apoios, daí que a resposta do rotor a oscilações da base seja também fortemente influenciada por estas características.

6.4.1 - Caracterização das forças transmitidas aos rotores pela oscilação dos apoios

Consideremos então o trabalho virtual interno realizado por um apoio como sendo, no caso mais geral, caracterizado por (expressão 3.35):

$$\delta W_{\text{int}}^C = \delta \bar{q}^i{}^T \left([K]_C \bar{q}^i + [C]_C \dot{\bar{q}}^i \right) \quad (6.35)$$

em que $\bar{q}^i$ é o vector de deslocamentos associado ao nó i (nó em que se encontra o apoio). Se agora considerarmos que o apoio não é fixo mas que tem um movimento $\bar{q}_s^i$ o trabalho virtual interno realizado pela chumaceira vem dado por:

$$\delta W_{\text{int}}^C = \delta \bar{q}^i{}^T \left([K]_C (\bar{q}^i - \bar{q}_s^i) + [C]_C (\dot{\bar{q}}^i - \dot{\bar{q}}_s^i) \right) \quad (6.36)$$

Por identificação das expressões (3.35) e (3.36), podemos então dizer que o modelo com base móvel é idêntico ao modelo com base fixa sujeito a uma força exterior aplicada no nó i e cujo trabalho virtual é dado por:

$$\delta W_{\text{ext}}^C = \delta \bar{q}^i{}^T \left([K]_C \bar{q}_s^i + [C]_C \dot{\bar{q}}_s^i \right) \quad (6.37)$$

Fica assim caracterizado o trabalho virtual realizado pela força exterior aplicada ao rotor em resultado de uma oscilação da base.

6.4.2 - Sistema conservativo

No caso conservativo a expressão do trabalho virtual da força considerada vem simplificada. A expressão do trabalho virtual vem então dada por:

$$\delta W_{\text{ext}}^C = \delta \vec{q}^i{}^T \left([K]_C \vec{q}_s^i \right) \quad (6.38)$$

Consideremos agora o deslocamento do nó como sendo dado por uma função harmónica do tipo:

$$\vec{q}_s^i = \begin{bmatrix} u_{sy}^i \\ u_{sz}^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t \quad (6.39)$$

A partir deste deslocamento podemos chegar à força harmónica aplicada no nó i tal que:

$$\vec{F}^i = [K]_C \vec{q}_s^i = \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} & 0 & 0 \\ K_{zy} & K_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sy}^i \\ u_{sz}^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t = \begin{bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t \quad (6.40)$$

Podemos também reescrever esta força sob a forma:

$$\vec{F}^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\omega t} = \vec{F}_1^i e^{i\omega t} + \vec{F}_1^i e^{-i\omega t} \quad (6.41)$$

A equação final do movimento resulta assim idêntica à equação utilizada na caracterização da força harmónica devida à excentricidade, pelo que a resolução é análoga à já utilizada para aquela situação. A equação do sistema escreve-se então:

$$[M] \ddot{\vec{q}} + [G] \dot{\vec{q}} + [K] \vec{q} = \vec{F} \quad (6.42)$$

A solução particular desta equação vem dada por:

$$\vec{q} = \vec{q}_1 e^{i\omega t} + \vec{q}_2 e^{-i\omega t} \quad (6.43)$$

Introduzindo esta solução em (6.42), Resultam as equações complexas:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \right) \vec{q}_1 = \vec{F}_1 \quad (6.44)$$

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \right) \vec{q}_2 = \vec{F}_2 \quad (6.45)$$

Estas equações são em tudo idênticas às obtidas para a solicitação harmónica causada pela excentricidade da massa. Desta forma, tal como se mostrou que $\vec{q}_2$ é o complexo conjugado de $\vec{q}_1$ para solicitações harmónicas causadas pela excentricidade da massa, também é possível demonstrar que para esta solicitação esta propriedade se verifica.

A solução geral é então do tipo:

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \vec{q}_1 e^{i\omega t} + \vec{q}_1^* e^{-i\omega t} = \\ &= 2\vec{q}_{1r} \cos \omega t - 2\vec{q}_{1i} \sin \omega t \end{aligned} \quad (6.46)$$

Uma vez que a solução é idêntica á solução obtida quando temos uma solicitação harmónica causada pela excentricidade da massa, a determinação dos eixos principais da elipse que define a trajectória é feita rigorosamente da mesma forma (sub-capítulo 6.2).

6.4.3 - Sistema dissipativo

No caso dissipativo o trabalho virtual exterior realizado por esta força é dado por (6.37).

Consideremos agora o deslocamento e a velocidade do nó i como sendo dado por uma função harmónica do tipo:

$$\vec{q}_s^i = \begin{bmatrix} u_{sy}^i \\ u_{sz}^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t \quad \dot{\vec{q}}_s^i = -\omega \begin{bmatrix} u_{sy}^i \\ u_{sz}^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \omega t \quad (6.47)$$

A partir de (6.47) podemos chegar à força harmónica aplicada no nó i tal que:

$$\begin{aligned} \vec{F}^i = [K]_C \vec{q}_s^i + [C]_C \dot{\vec{q}}_s^i &= \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} & 0 & 0 \\ K_{zy} & K_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sy}^i \\ u_{sz}^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t - \\ &- \omega \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yz} & 0 & 0 \\ C_{zy} & C_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sy}^i \\ u_{sz}^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \omega t = \begin{bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t - \omega \begin{bmatrix} C_y^i \\ C_z^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \omega t \end{aligned} \quad (6.48)$$

Podemos também reescrever esta força sob a forma:

$$\vec{F}^i = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \omega \begin{bmatrix} C_y^i \\ C_z^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i \right) e^{i\omega t} + \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \omega \begin{bmatrix} C_y^i \\ C_z^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i \right) e^{-i\omega t} = \vec{F}_1^i e^{i\omega t} + \vec{F}_2^i e^{-i\omega t} \quad (6.49)$$

A solução geral continua a ser do tipo:

$$\vec{q} = \vec{q}_1 e^{i\omega t} + \vec{q}_2 e^{-i\omega t} \quad (6.50)$$

Mais uma vez podemos provar que $\vec{q}_2$ é o complexo conjugado de $\vec{q}_1$ e a solução geral é do tipo:

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \vec{q}_1 e^{i\omega t} + \vec{q}_1^* e^{-i\omega t} = \\ &= 2\vec{q}_{1r} \cos \omega t - 2\vec{q}_{1i} \sin \omega t \end{aligned} \quad (5.51)$$

Também nesta situação, apoio dissipativo, a solução é idêntica à solução obtida quando temos uma solicitação harmónica causada pela excentricidade da massa e a obtenção dos eixos principais da elipse que define a trajectória é feita rigorosamente da mesma forma (sub-capítulo 6.2).

6.5 - Aplicações numéricas - Oscilações harmónicas dos apoios

Tal como na análise da resposta a uma excentricidade, os exemplos numéricos foram realizados com base no elemento de Euler, pois este elemento é o que está mais próximo das soluções teóricas desenvolvidas.

6.5.1 - Rotor de Jeffcott - Regime conservativo

Consideremos o rotor definido em 6.3.1 com apoios isotrópicos de características:

$$K''=K'=4.0E+5 \text{ N / m}$$

A análise do regime livre deste rotor fornece uma evolução das frequências naturais em função das velocidades de rotação conforme se representa na figura 6.17.

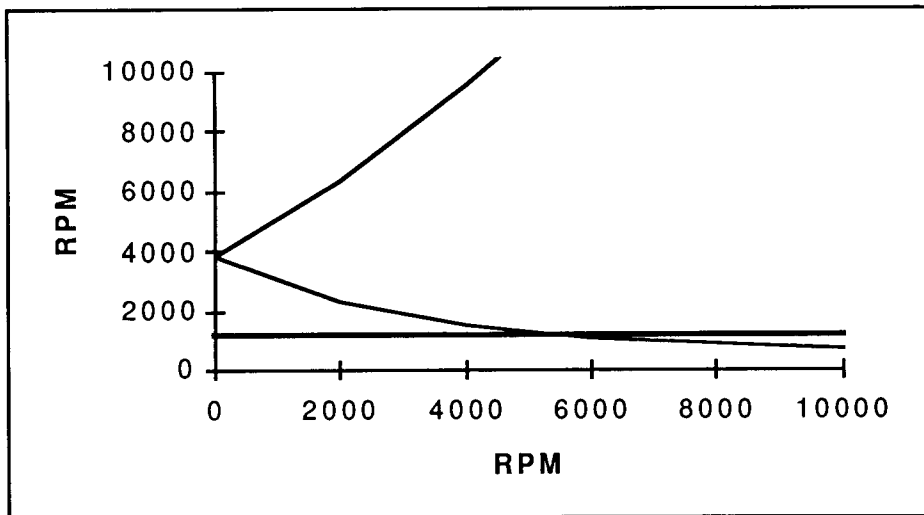


Fig 6.17 Frequências naturais em função da velocidade de rotação (a frequência própria constante é dupla).

Nas análises anteriormente realizadas com este rotor consideraram-se unicamente os modos próprios fundamentais (precessão directa e inversa) tendo-se obtido excelentes resultados devido ao facto de que a excentricidade da massa neste rotor apenas excita os modos próprios de translação do disco, sendo por isso nula a contribuição dos modos próprios associados às rotações do plano do disco. No caso vertente para analisar o efeito das solicitações harmónicas da base impõe-se a introdução no modelo os modos associados às rotações do disco uma vez que eles podem ser excitados.

Desta forma consideremos três casos distintos para a solicitação harmónica da base do rotor conforme esquematizado nas figuras 6.18 , 6.19 e 6.20.

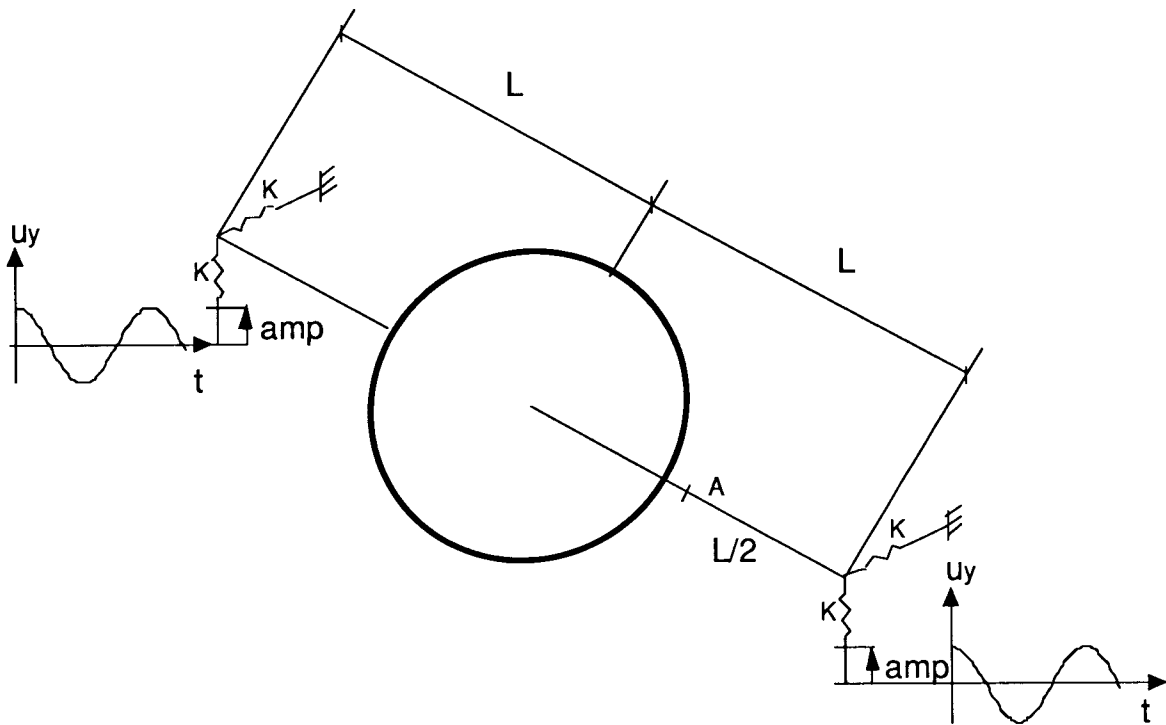


Fig 6.18 - Solicitação 1.
Esta solicitação impõe um movimento de translação ao disco.

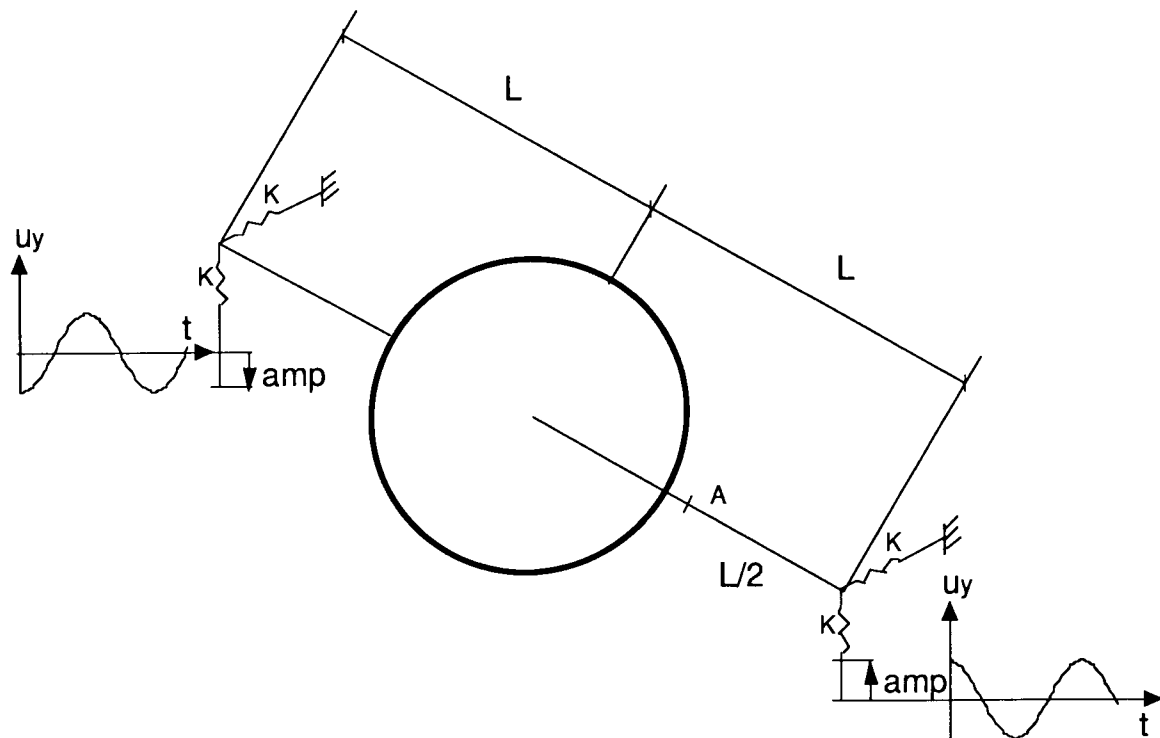


Fig 6.19 - Solicitação 2.
Esta solicitação impõe unicamente um movimento de rotação ao disco.

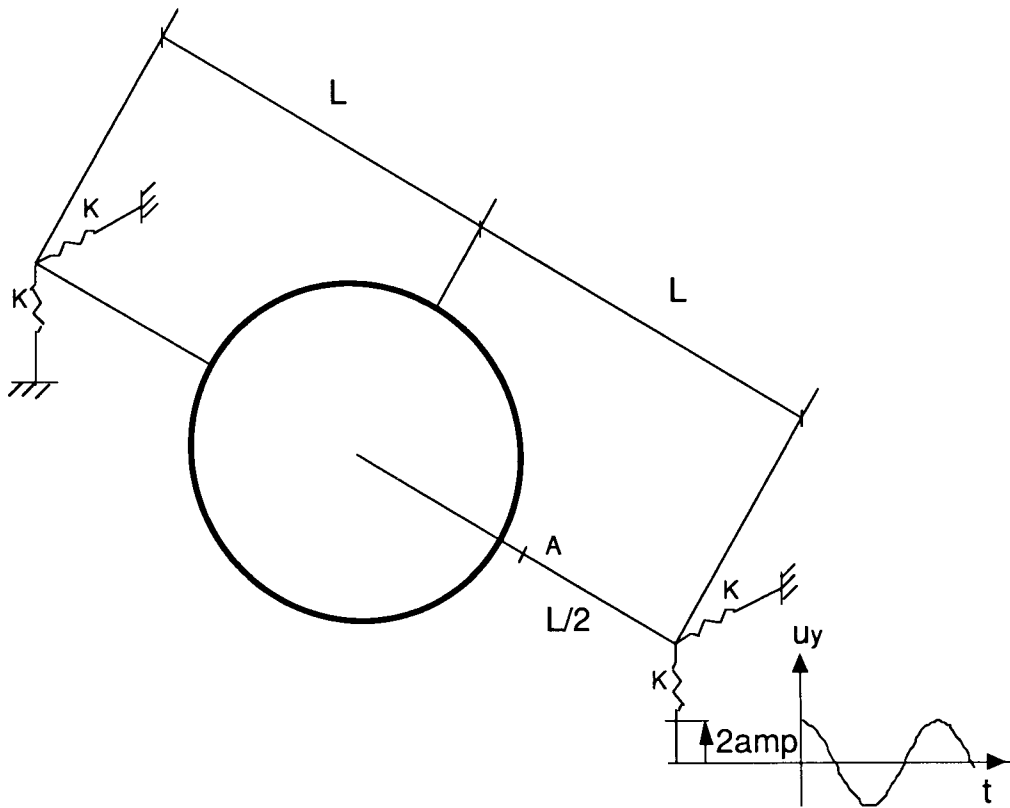


Fig 6.20 - Solicitação 3.

Esta solicitação impõe um movimento de rotação e translacção ao disco.

6.5.1.1 - Solicitação síncrona em fase

Para esta solicitação os modos próprios excitados são somente aqueles ligados à translacção do disco, pois esta solicitação induz somente uma translacção do disco.

De entre os quatro primeiros modos, os que estão associados à translacção do disco são os que permanecem constantes com a rotação. De facto para que haja variação da frequência própria com a velocidade de rotação é necessário que o efeito giroscópico se faça sentir, ou seja, que haja rotações segundo eixos perpendiculares ao eixo de rotação. Como neste caso estamos perante uma translacção do disco, torna-se evidente que os modos próprios que variam com a velocidade de rotação não sejam excitados.

Na figura 6.21 que representa a amplitude máxima no ponto A em função da frequência de solicitação da base e para diferentes velocidades de rotação, podemos ver que é nula a influência da velocidade de rotação na resposta do rotor, aliás como seria de esperar pelo exposto acima.

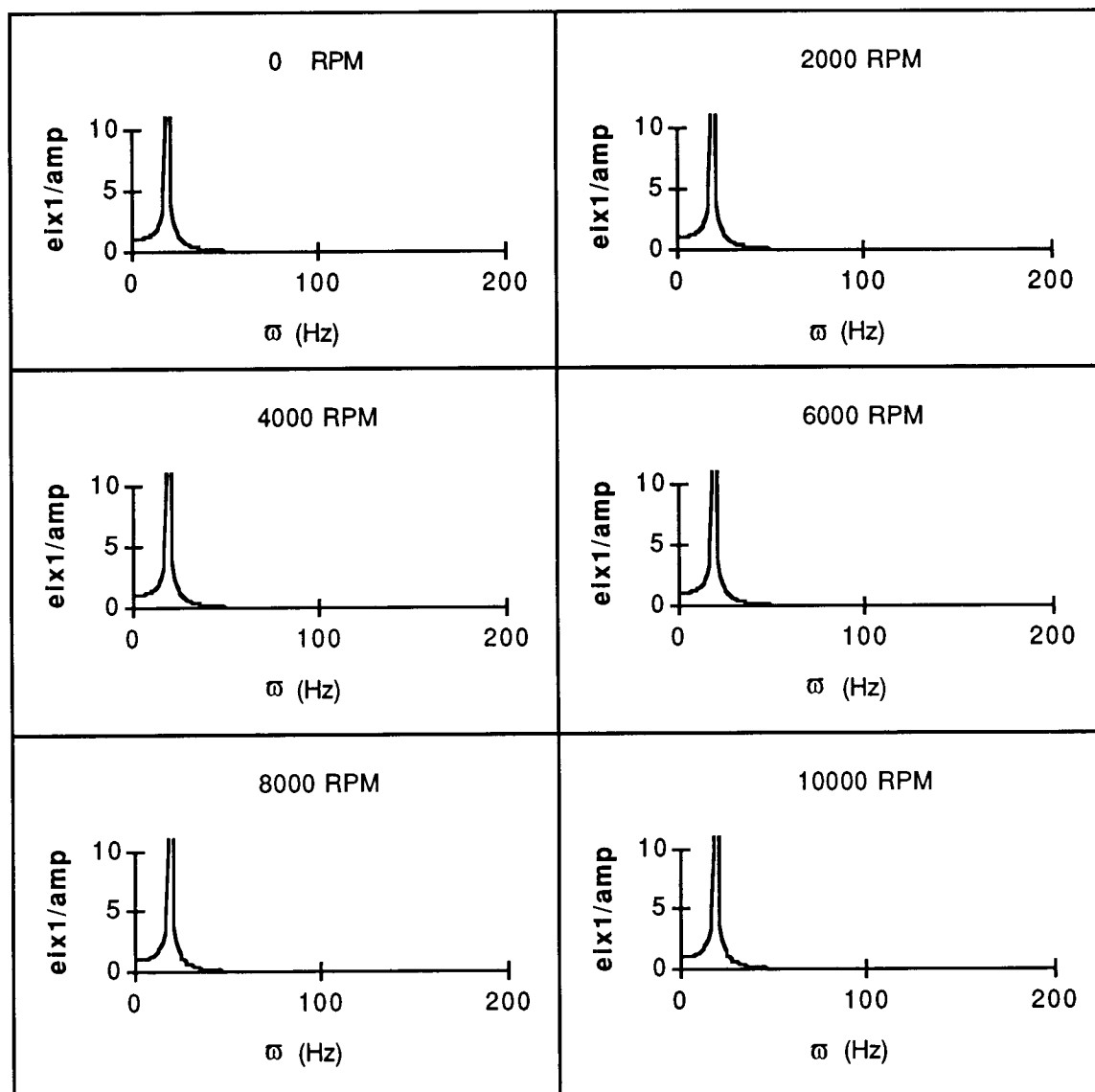


Fig 6.21 - Respostas para diferentes velocidades de rotações

6.5.1.2 - Solicitação síncrona em oposição de fase

Para esta solicitação os modos próprios excitados são somente aqueles ligados às rotação transversais do disco, pois esta solicitação induz somente uma rotação no disco e nenhuma translação.

Tal como fizemos no caso anterior, de entre os quatro primeiros modos, os que estão associados à rotação do disco são os que variam com a velocidade de rotação. De facto, neste caso só há rotação do disco e o efeito giroscópico faz-se sentir de maneira bastante acentuada. Uma vez que o disco só possui rotações, determinamos as amplitudes de vibração no ponto A e não para o centro no disco onde o deslocamento é nulo.

Na figura 6.22 , onde se representa a amplitude máxima no ponto A função da frequência de oscilação da base, podemos ver que à velocidade nula só temos um "pico" pois as duas frequências próprias excitadas por esta solicitação são coincidentes (ver figura 6.15). Logo em seguida, estes "picos" associados a estas duas frequências próprias separam-se como era de prever pela análise de frequências (ver figura 6.15).

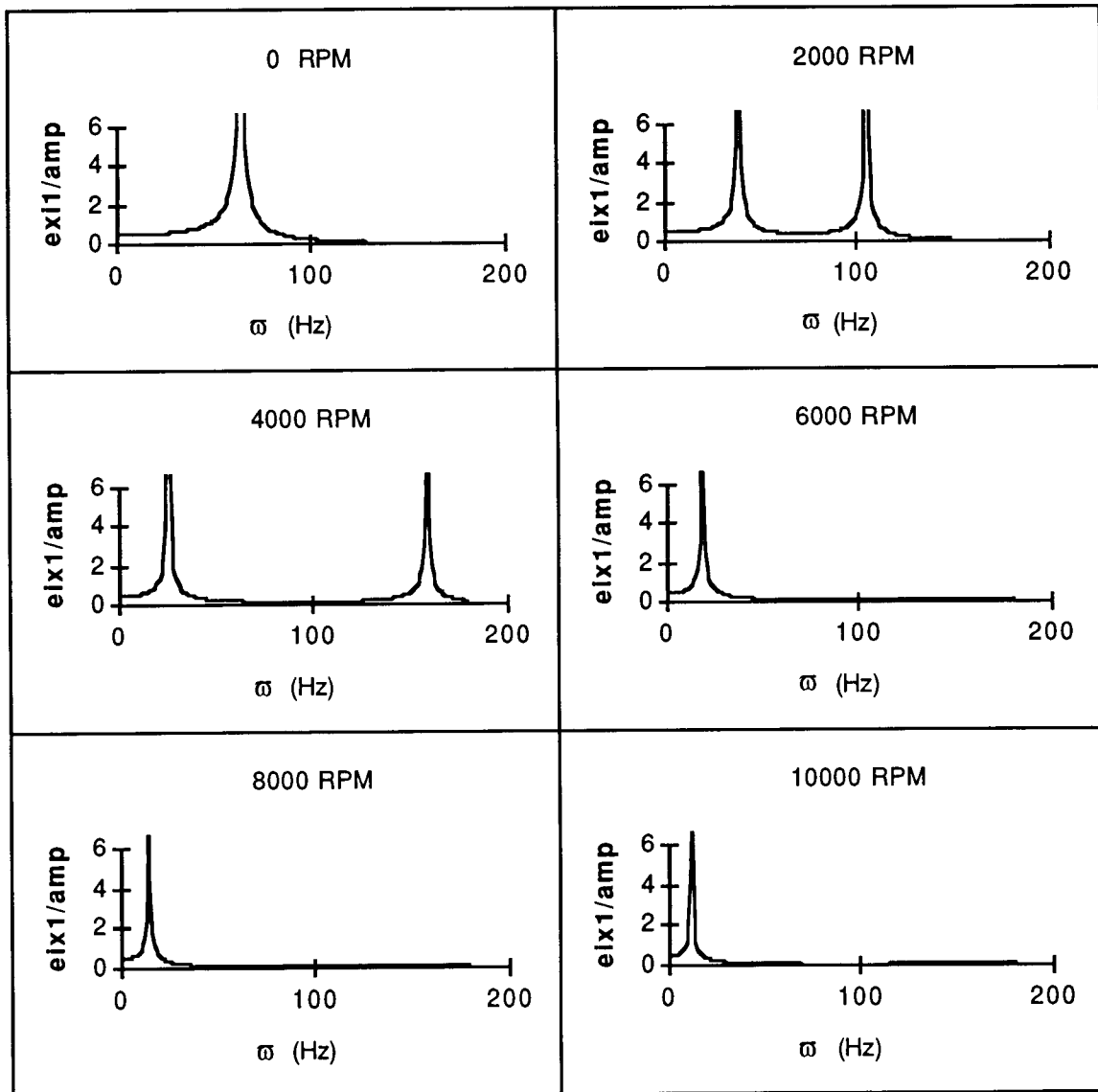


Fig 6.22 - Respostas para diferentes velocidades de rotações

6.5.1.3 - Solicitação de um único apoio

Para esta solicitação, uma vez que estamos a impôr rotações e translações não podemos distinguir os modos próprios excitados. Deste modo, tal como podemos ver na figura seguinte, vamos ter "picos" em todas as frequências próprias, sendo o resultado um misto das duas respostas anteriores.

Na verdade, sendo os sistemas lineares e sendo a solicitação 3 a soma das solicitações 1 e 2, os gráficos representativos da resposta à solicitação 3 não são mais do que a simples soma das respostas representadas nos gráficos das solicitações 1 e 2.

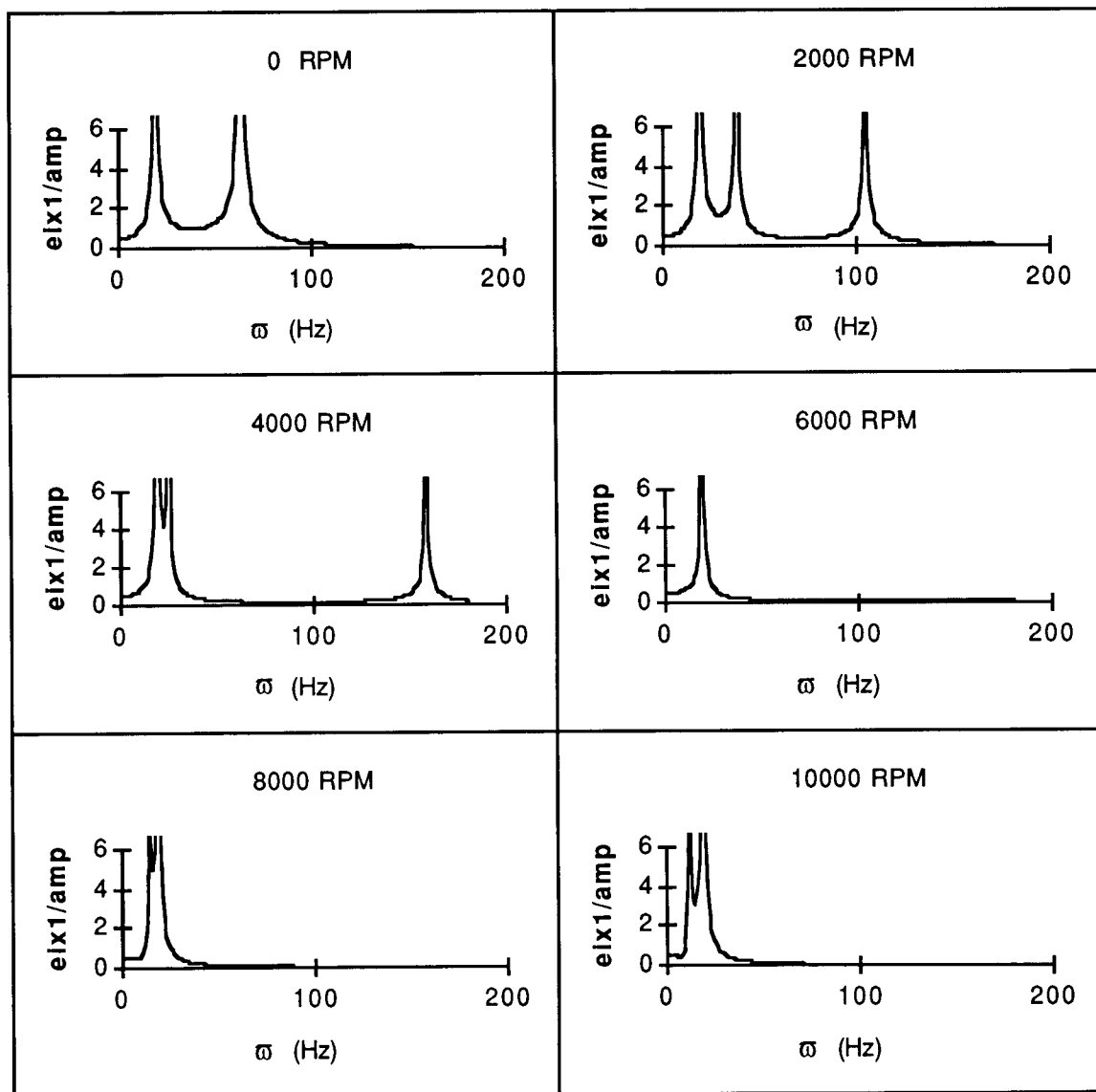


Fig 6.23 - Respostas para diferentes velocidades de rotações

6.5.2 - Rotor de Jeffcott - Regime dissipativo

Analisemos agora o que se passa com este rotor quando consideramos o atrito interno e externo caracterizado da seguinte forma:

i - Apoios:

$$C_y = C_z = 3.0E+02 \text{ N.s/m}$$
$$C_{yz} = C_{zy} = 0.0$$

ii - Material

$$\eta_v = 1.0000E-03 \text{ s}$$

$$\eta_H = 0.0$$

Para esta análise obtemos os gráficos da figura 6.24 que representam o eixo maior da resposta permanente harmónica à solicitação do tipo 3:

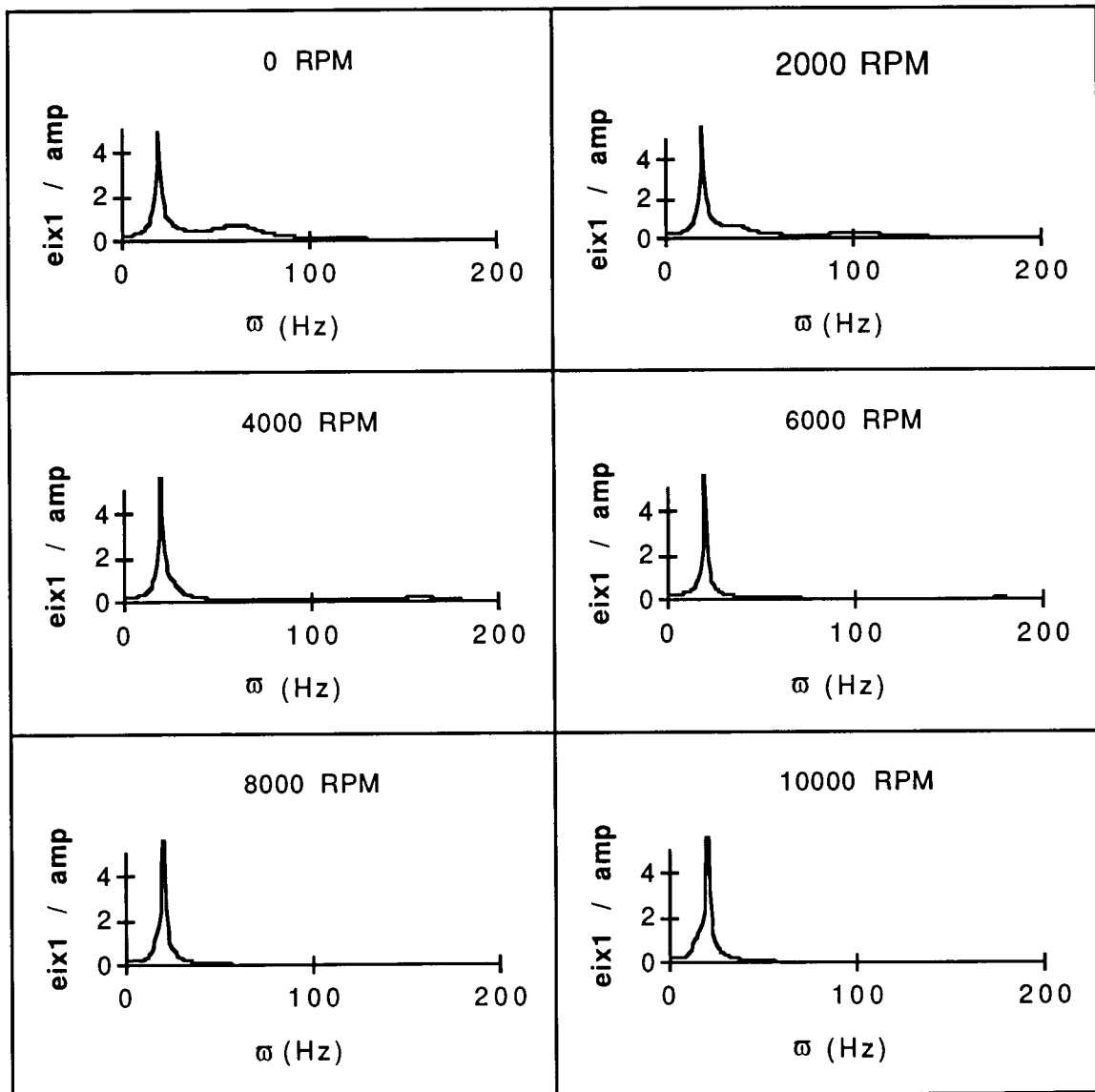


Fig 6.24 - Respostas para diferentes velocidades de rotações

Em comparação com o caso conservativo podemos ver que existe uma menor amplitude de vibração nos modos associados ao efeito giroscópico enquanto que a amplitude de vibração para frequências ω que excitem os modos próprios de translacção permanece invariante com o aumento da velocidade de rotação.

CAPÍTULO VII

7 - Resposta Transitória a uma aceleração angular

A maior parte das análises de rotores é obtida considerando-se o regime estacionário (a rotação constante). Esta abordagem é correcta quando os rotores rodam a velocidade constante. No entanto, situações há em que o conhecimento do comportamento do rotor num dado intervalo de tempo é necessário. Uma destas situações, em que o regime estacionário não contempla é a passagem do rotor por uma velocidade crítica ou zonas de funcionamento instável.

Subbiah e Rieger [41] desenvolveram técnicas capazes de determinar a resposta transitória dos rotores considerando que a velocidade de rotação é constante. Segundo estes autores, para este caso o método que mais se adapta a este estudo é o método de Houbolt, conseguindo-se com ele a melhor estabilidade numérica no resultado final.

Para o estudo de rotores em que a velocidade de rotação varia, Brune e Lassoudiere [4] conseguiram bons resultados com o método de Newmark β . Subbiah e Reiger[41] apresentam também uma variante do método de Houbolt para a resolução deste problema.

O método por nós utilizado baseia-se no método de Newmark β modificado para esta operação específica. A vantagem deste método em relação ao método de Houbolt é que o deslocamento, velocidade e aceleração no instante $t+\Delta t$ dependem unicamente destas variáveis no instante t . No método de Houbolt, a caracterização do movimento no instante $t+\Delta t$ depende dos instantes t e $t-\Delta t$. Com o rotor em aceleração, por um lado as matrizes $[C_d]$ e $[K_d]$ variam, por outro lado é necessário fazer variar Δt ao longo do tempo para manter um número

identico de instantes de integração em cada rotação completa. Por esta razão, o método Newmark β é aplicável enquanto que o método de Houbolt necessita de uma reformulação com dificuldades acrescidas.

7.1 - Formulação do modelo com aceleração angular

O modelo de elementos finitos até agora por nós utilizado foi deduzido com base numa velocidade de rotação constante. No entanto, ao considerarmos que a velocidade de rotação vai variar, as componentes que caracterizam as forças de inércia vêm alteradas.

Quando deduzimos as expressões que definem o momento dinâmico para um disco (2.43), consideramos que o disco rodava a uma velocidade constante. Considerando então o momento cinético deste disco dado pela expressão (2.42) e derivando em ordem ao tempo, obtemos a seguinte expressão para o momento dinâmico:

$$\vec{K}|_{S0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_{y0} I_D + \dot{\theta}_{x0} \dot{\theta}_{z0} I_P + \ddot{\theta}_{x0} \theta_{z0} I_P \\ \ddot{\theta}_{z0} I_D - \dot{\theta}_{x0} \dot{\theta}_{y0} I_P - \ddot{\theta}_{x0} \theta_{y0} I_P \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Esta expressão inclui, para além dos termos de (2.42), um conjunto de termos proporcionais à aceleração angular que são nulos quando a velocidade de rotação é constante.

Por outro lado, o vector quantidade de aceleração também sofre alterações. Considerando o vector posição como sendo dado por (2.44), a aceleração do centro de massa vem dada por:

$$\vec{a}_G = \begin{cases} \ddot{y}_G = \ddot{y} - \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \cos \theta_{x0} - e_z \sin \theta_{x0}) - \ddot{\theta}_{x0} (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) \\ \ddot{z}_G = \ddot{z} - \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) - \ddot{\theta}_{x0} (e_z \sin \theta_{x0} - e_y \cos \theta_{x0}) \end{cases} \quad (7.2)$$

cuja diferença relativamente a (2.45) se traduz nos termos contendo $\ddot{\theta}_{x0}$.

O vector quantidade de aceleração vem então dado por:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_G &= m \begin{bmatrix} \ddot{y}_G \\ \ddot{z}_G \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m \ddot{y} - m \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \cos \theta_{x0} - e_z \sin \theta_{x0}) - m \ddot{\theta}_{x0} (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) \\ m \ddot{z} - m \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) - m \ddot{\theta}_{x0} (e_z \sin \theta_{x0} - e_y \cos \theta_{x0}) \end{bmatrix} \\ &\quad (7.3)\end{aligned}$$

Obtidos estes vectores podemos agora escrever a expressão do trabalho virtual das forças de inércia. Para isso, consideremos primeiro as seguintes forças de inércia para um disco de espessura dx :

$$\begin{aligned}\bar{F}^{\text{inércia}} &= \begin{Bmatrix} F_y^i \\ F_z^i \\ M_y^i \\ M_z^i \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} (-\mu \ddot{y} + \mu \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \cos \theta_{x0} - e_z \sin \theta_{x0}) + \mu \ddot{\theta}_{x0} (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0})) dx \\ (-\mu \ddot{z} + \mu \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) + \mu \ddot{\theta}_{x0} (e_z \sin \theta_{x0} - e_y \cos \theta_{x0})) dx \\ -(I_d \ddot{\theta}_y + I_p \dot{\theta}_z \dot{\theta}_{x0} + I_p \theta_{z0} \ddot{\theta}_{x0}) dx \\ -(I_d \ddot{\theta}_z - I_p \dot{\theta}_y \dot{\theta}_{x0} - I_p \theta_{y0} \ddot{\theta}_{x0}) dx \end{Bmatrix} \\ &= -[J] \ddot{u} dx - \dot{\theta}_{x0} [\bar{J}_G] \dot{u} dx - \ddot{\theta}_{x0} [\bar{J}_G] u dx + \bar{F}^{\text{ext}} dx = \\ &= \bar{F}^i dx + \bar{F}^{\text{ext}} dx \\ &\quad (7.4)\end{aligned}$$

em que:

$$[J] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$[\overline{J}_G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} dx \quad (7.6)$$

$$\vec{F}^{ext} = \begin{Bmatrix} \mu \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \cos \theta_{x0} - e_z \sin \theta_{x0}) + \mu \ddot{\theta}_{x0} (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) \\ \mu \dot{\theta}_{x0}^2 (e_y \sin \theta_{x0} + e_z \cos \theta_{x0}) + \mu \ddot{\theta}_{x0} (e_z \sin \theta_{x0} - e_y \cos \theta_{x0}) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

Deste modo, o trabalho virtual das forças de inércia vem dado por:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_L \delta \vec{u}^T \vec{F}^i dx \\ \vec{F}^i &= -[J]\ddot{\vec{u}} - \dot{\theta}_{x0}[\overline{J}_G]\dot{\vec{u}} - \ddot{\theta}_{x0}[\overline{J}_G]\vec{u} \end{aligned} \quad (7.8)$$

e o trabalho virtual das forças exteriores vem dado por

$$\delta W_{ext} = \int_L \delta \vec{u}^T \vec{F}^{ext} dx \quad (7.9)$$

O modelo de elementos finitos obtido resulta então diferente contendo mais uma matriz e um vector diferente no segundo membro. Esta matriz, que se sobrepõe à matriz de rigidez, é uma matriz semelhante à matriz giroscópica. O vector de forças exteriores devidas à excentricidade da massa é também diferente como podemos ver pela expressão (7.7).

O modelo final considerando que a velocidade de rotação $\dot{\theta}_{x0}$ varia é dado por:

$$\begin{aligned} &[M^E]\ddot{\vec{q}} + \left(\dot{\theta}_{x0}[\overline{G}^E] + \eta_v[K^E] \right)\dot{\vec{q}} + \left(\ddot{\theta}_{x0}[\overline{G}^E] + \eta_a[K^E] + \eta_b[K_C^E] \right)\vec{q} + \\ &+ [M^D]\ddot{\vec{q}} + [G^D]\dot{\vec{q}} + \quad \text{contribuição dos discos rígidos} \\ &+ [K^C]\vec{q} + [C^C]\dot{\vec{q}} = \quad \text{contribuição das chumaceiras} \\ &= \vec{F} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [M]\ddot{\vec{q}} + [C_{d2}]\dot{\vec{q}} + [K_{d2}]\vec{q} = \vec{F} \quad (7.10)$$

No caso em que a velocidade de rotação é constante o vector $\vec{F}$ é dado por pela expressão (3.45) que pode ser escrita sob a forma:

$$\vec{F} = \dot{\theta}_{x0}^2 \vec{Q}_C \cos \Omega t + \dot{\theta}_{x0}^2 \vec{Q}_S \sin \Omega t \quad (7.11)$$

Para velocidade de rotação variável, o vector de forças $\vec{F}$, no caso da solicitação a considerar ser a excentricidade da massa, vem dado pela expressão:

$$\vec{F} = (\dot{\theta}_{x0}^2 \vec{Q}_C - \ddot{\theta}_{x0} \vec{Q}_S) \cos \Omega t + (\dot{\theta}_{x0}^2 \vec{Q}_C + \ddot{\theta}_{x0} \vec{Q}_S) \sin \Omega t \quad (7.12)$$

7.2 - Adaptação do método de Newmark β

O método de integração de Newmark é um dos métodos possíveis para a integração no tempo das equações diferenciais do movimento. Neste método, assumem-se as seguintes relações auxiliares [2]:

$${}^{t+\Delta t} \dot{\vec{q}} = {}^t \dot{\vec{q}} + [(1 - \delta) {}^t \ddot{\vec{q}} + \delta {}^{t+\Delta t} \ddot{\vec{q}}] \Delta t \quad (7.13)$$

$${}^{t+\Delta t} \vec{q} = {}^t \vec{q} + {}^t \dot{\vec{q}} \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t \ddot{\vec{q}} + \alpha {}^{t+\Delta t} \ddot{\vec{q}} \right] \Delta t^2 \quad (7.14)$$

Consideremos a equação de equilíbrio dinâmico (7.10) no instante $t+\Delta t$:

$$[M] {}^{t+\Delta t} \ddot{\vec{q}} + [C_{d2}] {}^{t+\Delta t} \dot{\vec{q}} + [K_{d2}] {}^{t+\Delta t} \vec{q} = {}^{t+\Delta t} \vec{F} \quad (7.15)$$

Conhecidos os valores de deslocamento, velocidade e aceleração no instante t , dispomos agora de três equações capazes de nos dar os valores do deslocamento, velocidade e aceleração no instante $t+\Delta t$. Bathe [2] mostra que este esquema de integração é incondicionalmente estável desde que:

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0.5 \\ \alpha &\geq 0.25(\delta + 0.5)^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

e as melhores "performances" são obtidas para $\delta=0.5$ e $\alpha=0.25$.

Bathe propõe ainda a utilização de um incremento de tempo de integração Δt de modo a obtermos bons resultados. Segundo Brune e Lassoudiere[4], se frequência angular mais alta da função carregamento for ω_h , obteremos bons resultados para um intervalo de tempo Δt de:

$$\Delta t = \frac{T_h}{20} \quad \text{em que} \quad T_h = \frac{2\pi}{\omega_h} \quad (7.17)$$

Utilizando este incremento de tempo Δt , Brune e Lassoudiere[4] obtiveram bons resultados.

No caso em que temos aceleração do rotor, a função carregamento varia com o tempo. Desta modo a determinação do intervalo de tempo Δt a considerar é, no instante t , dada por $1/20$ do tempo (T) que demorará o rotor a dar uma volta. Assim, estando o rotor sujeito a uma aceleração angular constante, a função que nos dá o intervalo de tempo a considerar é dada por:

$$\begin{cases} {}^{t+T}\theta = {}^t\theta + {}^t\Omega T + \frac{1}{2}\gamma T^2 \\ {}^t\Omega = {}^0\Omega + \gamma t \\ {}^{t+T}\theta - {}^t\theta = 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T = \frac{-{}^0\Omega - \gamma t + \sqrt{({}^0\Omega + \gamma t)^2 + 4\pi\gamma}}{\gamma} \quad (7.18)$$

o que implica que Δt a considerar é dado por:

$$\Delta t = \frac{T}{20} = \frac{-{}^0\Omega + \gamma t + \sqrt{({}^0\Omega + \gamma t)^2 + 4\pi\gamma}}{20\gamma} \quad (7.19)$$

A consideração dum intervalo de tempo variável para cada instante só tem sentido na medida em que para cada instante as matrizes também variam, o que implica uma constante reformulação de todas as matrizes.

Para este método, estabelece-se então o seguinte algoritmo:

Formulação das matrizes do modelo

Determinação das condições iniciais ${}^0\vec{q} \quad {}^0\dot{\vec{q}} \quad {}^0\ddot{\vec{q}}$

Para cada instante t

Determinação de Δt

Determinação dos valores

$$a_0 = \frac{1}{\gamma \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\delta}{\gamma \Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\gamma \Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2\gamma} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\gamma} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\gamma} - 2 \right) \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad a_7 = \Delta t \delta$$

Construção das matrizes ${}^{t+\Delta t}[K_{d2}]$ e ${}^{t+\Delta t}[C_{d2}]$

Vector de cargas no instante $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\vec{F}} = {}^{t+\Delta t}\vec{F} + {}^{t+\Delta t}[M](a_0 {}^t\vec{q} + a_2 {}^t\dot{\vec{q}} + a_3 {}^t\ddot{\vec{q}}) + {}^{t+\Delta t}[C_{d2}](a_1 {}^t\vec{q} + a_4 {}^t\dot{\vec{q}} + a_5 {}^t\ddot{\vec{q}})$$

Determinação dos deslocamentos no instante $t+\Delta t$
(resolução do sistema de equações)

$$\left({}^{t+\Delta t}[K_{d2}] + {}^{t+\Delta t}[M]a_0 + {}^{t+\Delta t}[C_{d2}]a_1 \right) {}^{t+\Delta t}\vec{q} = {}^{t+\Delta t}\hat{\vec{F}}$$

Determinação das acelerações e velocidades no instante $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\vec{q}} = \left({}^{t+\Delta t}\vec{q} - {}^t\vec{q} \right) a_0 - {}^t\dot{\vec{q}} a_2 - {}^t\ddot{\vec{q}} a_3$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\vec{q}} = {}^t\vec{q}_0 + {}^t\ddot{\vec{q}} a_6 - {}^{t+\Delta t}\ddot{\vec{q}} a_7$$

7.3 - Exemplos numéricos

Tal como nas análises do capítulo 6, os exemplos numéricos foram realizados com base no elemento de Euler, pois este elemento é o que está mais próximo das soluções teóricas desenvolvidas por não considerar o corte.

7.3.1 - Rotor de Jeffcott - Regime conservativo

Consideremos o seguinte exemplo numérico para um rotor de Jeffcott simplesmente apoiado. O estudo analítico deste rotor foi realizado em 2.5.

Consideremos agora o exemplo numérico por elementos finitos tal que o modelo é constituído por:

- 2 elementos de comprimento 5.0E-01 m com massa específica nula.
- Rotor simplesmente apoiado
- Disco colocado ao centro (nó 2) com as seguintes características
$$m=114.89 \text{ Kg}$$
$$I_D=0.0 \text{ Kg.m}^2$$
$$I_P=0.0 \text{ Kg.m}^2$$
- Diâmetro dos elementos constante e de valor 4.0E-2 m
- Módulo de Young igual a 2.10E+11 Pa
- Velocidade inicial 902.41 RPM
- Aceleração 20 rad/s²
- Condições iniciais : Regime permanente à velocidade inicial

Estes dados foram escolhidos de modo a conduzirem aos mesmos dados utilizados no exemplo de 2.5. A consideração de I_D e I_P nulos no modelo de elementos finitos destina-se a este modelo seja idêntico ao modelo analítico de forma a poder comparar resultados.

Os resultados obtidos podem ser visualizados na figura 7.1:

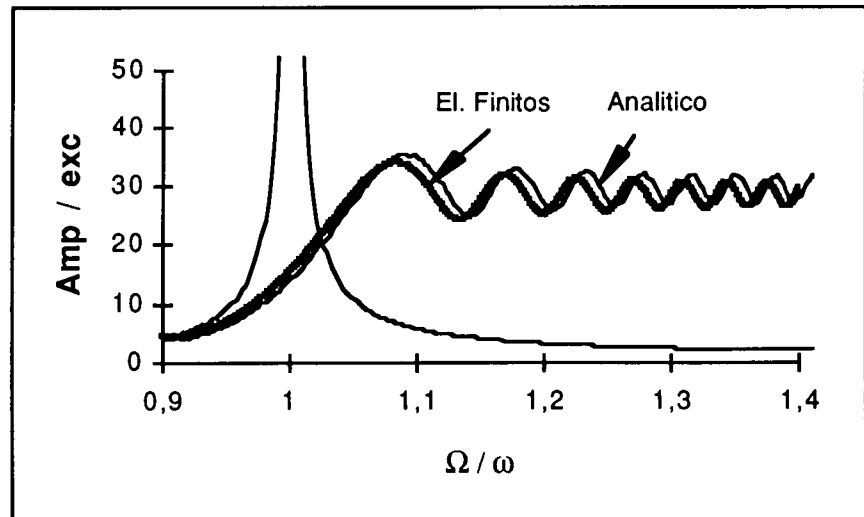


Fig 7.1 - Resposta da solicitação harmónica permanente
Resposta por elementos finitos a uma aceleração
Resposta analítica a uma aceleração

Relativamente à solução analítica dada pelas expressões (2.79) e (2.80) refira-se que os integrais nelas contidos ficam resolvidos numericamente utilizando a regra dos trapézios.

A análise deste gráfico permite-nos constatar que a solução obtida com o modelo de elementos finitos por integração no tempo com o algoritmo desenvolvido aproxima-se de maneira satisfatória da solução analítica. Temos assim um exemplo que nos permite ter uma boa confiança nos resultados obtidos por integração directa do modelo de elementos finitos.

Podemos verificar neste gráfico que a passagem por uma velocidade crítica leva a um aumento da amplitude de vibração. A amplitude média tenderá a manter-se constante uma vez que, estando em regime conservativo, o rotor não possui mecanismos de dissipação de energia que permitam baixar a amplitude média para valores próximos da amplitude do regime permanente.

Podemos ainda ver que o período de vibração diminui com a velocidade. Isto verifica-se uma vez que a frequência de solicitação também aumenta com a velocidade.

Na figura 7.2 representa-se a evolução da trajectória realizada pelo centro do rotor desde o início do regime transitório até três instantes distintos.

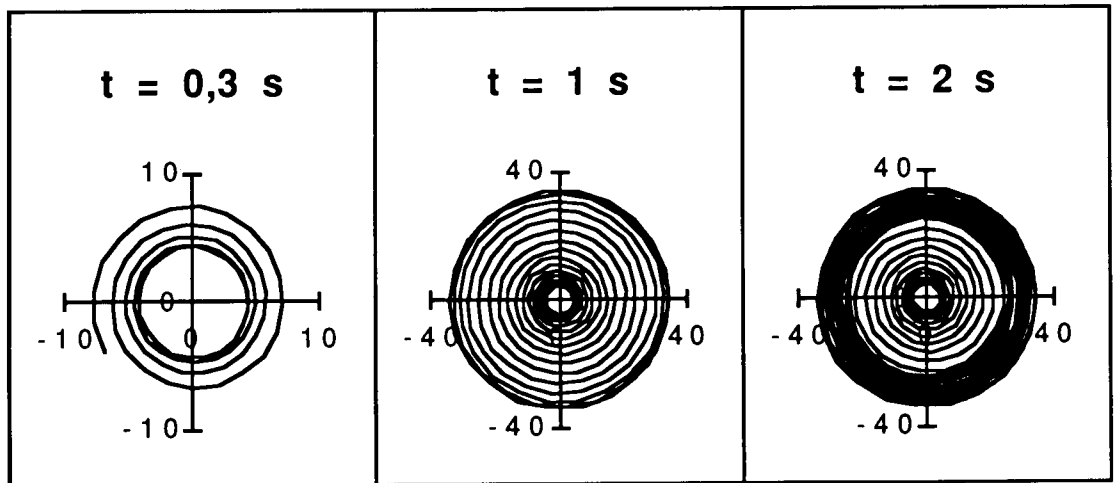


Fig 7.2 - Evolução da trajetória durante uma variação da velocidade de rotação.

Podemos ainda estudar com este programa o comportamento do rotor quando solicitado a diversas acelerações. Considerando três acelerações distintas (10 , 20 e 30 rad/s^2) obtemos os resultados representados na figura 7.3.

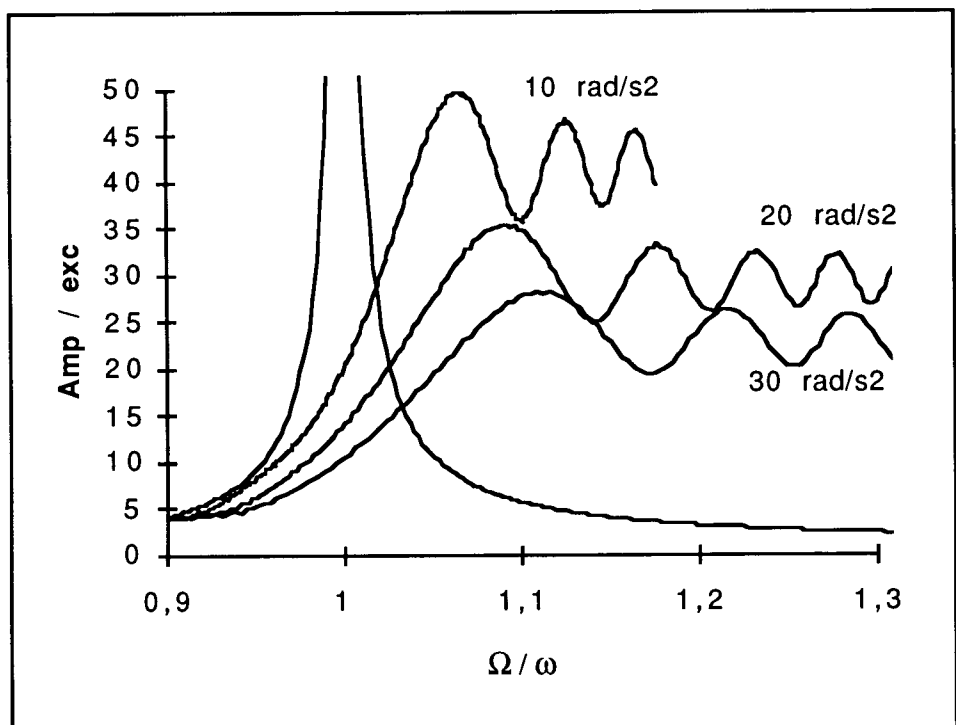


Fig 7.3 - Resposta do rotor a diversas acelerações

Neste gráfico podemos constatar que a maior amplitude é obtida para a aceleração mais baixa. Tal era de esperar pois quanto mais baixa for a aceleração, mais tempo o rotor se encontra sob a zona de influência da velocidade crítica. Por outro lado, podemos ainda observar que o "pico" de amplitude aparece para rotações tanto mais elevadas quanto maior for a aceleração.

7.3.2 - Rotor de Jeffcott - Regime dissipativo

7.3.2.1- Atrito interno

Analizemos agora o comportamento do rotor considerado na secção anterior com atrito viscoso interno caracterizado pelo coeficiente $\eta_v = 1.0 \text{ E-3 s}$ e sujeito a uma aceleração angular de 20 rad/s^2 . A resposta deste rotor encontra-se representada na figura 7.4.

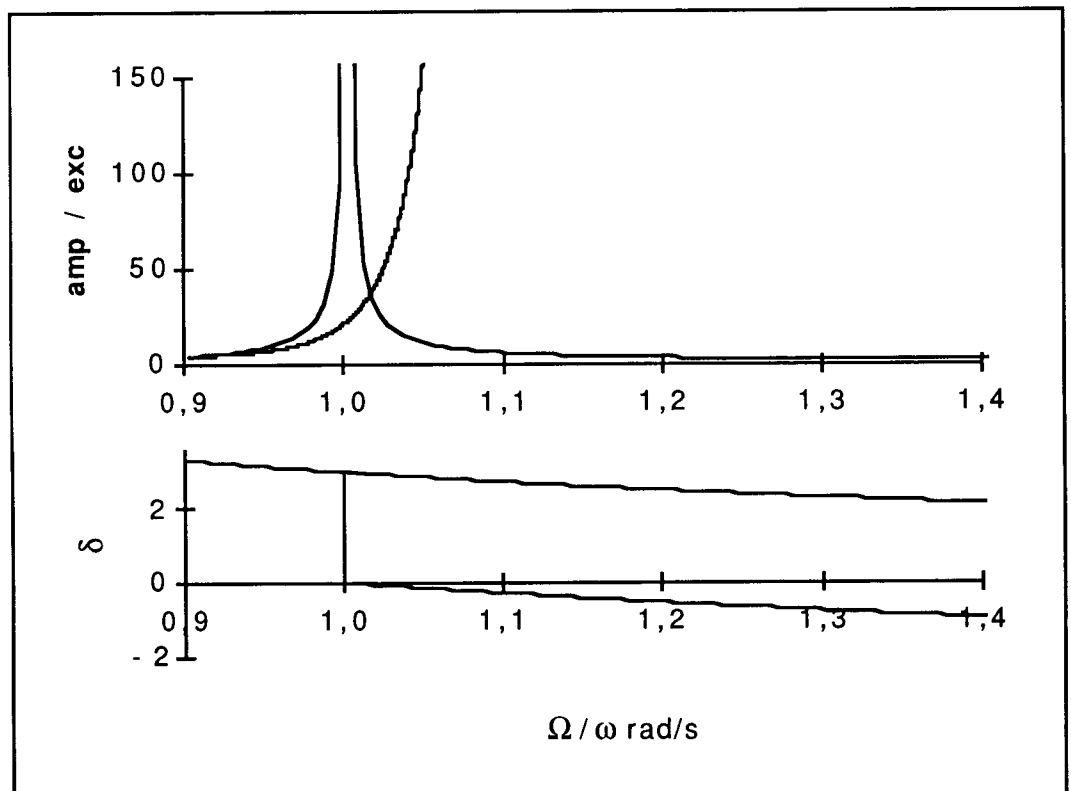


Fig 7.4 - Resposta do rotor com atrito viscoso
Decremento logarítmico

Tal como tínhamos referido no capítulo 2, este rotor, considerando somente o mecanismo de dissipação devido ao atrito interno, torna-se instável a partir da primeira velocidade crítica. A evolução do decremento logarítmico δ , obtida a partir

da análise modal deste rotor, mostra que se dá uma variação brusca deste parâmetro na velocidade crítica tornado-se negativo, ou seja, tornando o rotor instável. A figura 7.4 dá-nos bem conta deste fenómeno de instabilidade, uma vez que a amplitude de deformação do rotor cresce indefinidamente. Este exemplo evidencia como o algoritmo desenvolvido tem capacidade de detectar eventuais instabilidades de funcionamento.

7.3.2.1- Atrito interno e externo

Consideremos então um outro rotor de Jeffcott apoiado em chumaceiras de modo a podermos introduzir o efeito do atrito externo. Para isso, seja então um modelo de elementos finitos baseado no elemento finito de Euler tal que:

-4 elementos de comprimento 2.5E-01 m com massa específica nula.

-Rotor apoiado nos nós 1 e 5 com características de rigidez e amortecimento tal que:

$$K_y = K_z = 4.0E+5 \text{ N/m}$$

$$C_y = C_z = 3.0E+02 \text{ N.s/m}$$

$$K_{yz} = K_{zy} = 0.0 \text{ N/m}$$

$$C_{yz} = C_{zy} = 0.0 \text{ N.s/m}$$

-Disco colocado ao centro (nó 3) com as seguintes características

$$m = 45 \text{ Kg}$$

$$I_D = 1.0 \text{ Kg.m}^2$$

$$I_P = 2.0 \text{ Kg.m}^2$$

-Diâmetro dos elementos constante e de valor 5.0E-2 m

-Modulo de Young considerado nos elementos 2.086E+11 Pa

-Velocidade inicial 900 RPM

-Aceleração constante de 255 rad/s² (de 900 a 7000 RPM em 2.5 s)

-Condições iniciais : Regime permanente à velocidade inicial

Os resultados de uma análise modal, determinação das quatro primeiras frequências naturais, a resposta em regime permanente à solicitação

harmônica provocada pela excentricidade da massa e a resposta transitória devida a uma variação da velocidade de rotação de 900 a 7000 RPM encontram-se representados nos gráficos da figura 7.5.

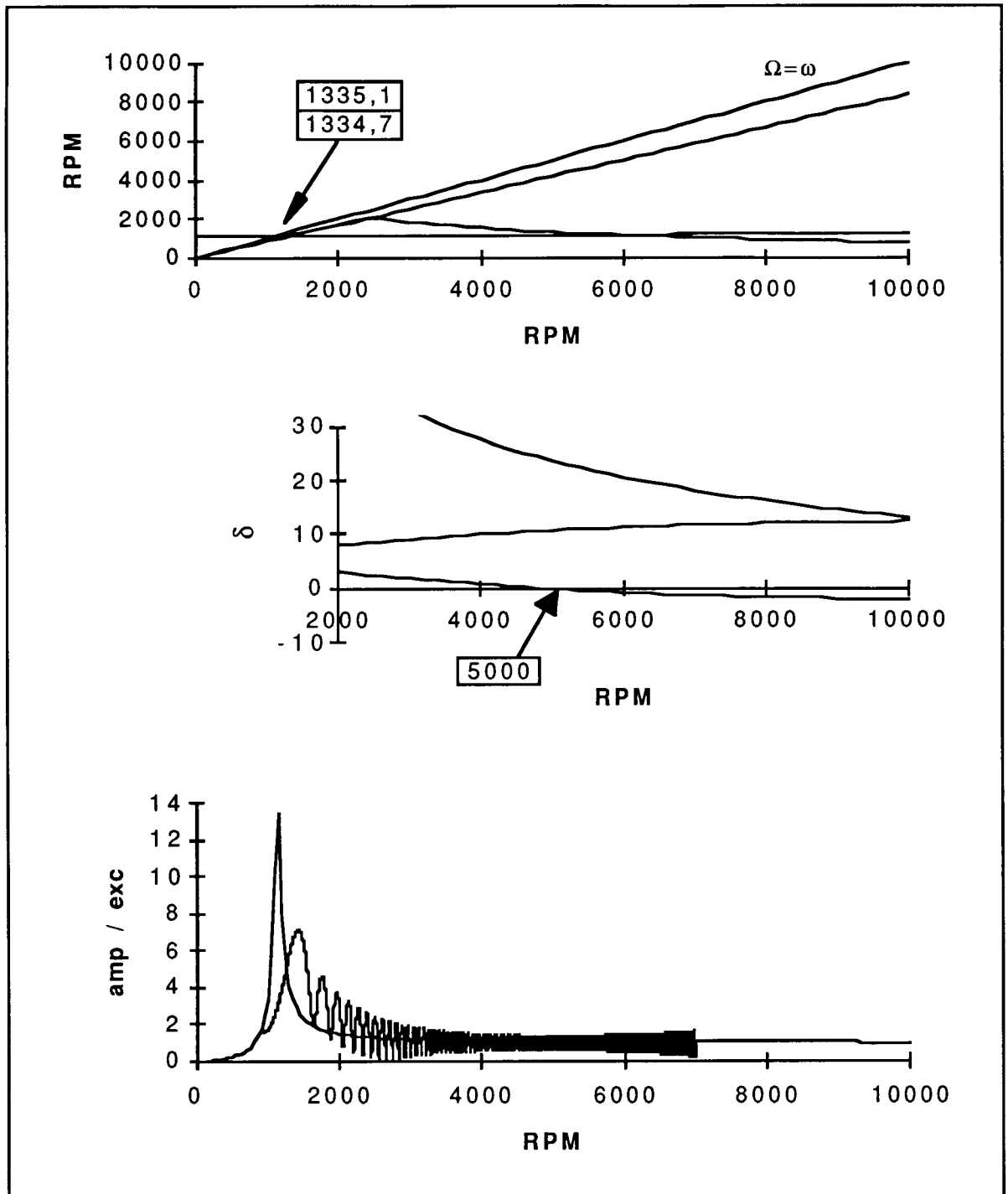


Fig 7.5 - Frequências naturais
Decremento logarítmico
Amplitude da resposta em regime estacionário
Resposta transitória à variação da rotação de 900 às 7000 RPM

Neste gráfico assinalam-se duas velocidades críticas. Na verdade, duas das frequências são quase coincidentes pelo que não são perceptíveis no gráfico.

A análise deste gráfico mostra-nos que o atrito externo leva a que a resposta tenda para a resposta permanente com a consequente dissipação de energia associada ao fenómeno transitório. O valor máximo desta resposta situa-se num valor ligeiramente superior ao da velocidade crítica.

Podemos ainda verificar que a partir das 5000 RPM o decremento logarítmico passa a ser negativo. Como consequência deste facto, a amplitude máxima começa a aumentar uma vez que estamos perante uma zona de instabilidade.

Em conclusão, o algoritmo desenvolvido revela capacidades que permitem analisar as passagens pelas velocidades críticas bem como analisar como o rotor se comporta em zonas de instabilidade. Dispõe-se assim de um meio robusto de cálculo que nos permite simular o comportamento do rotor para diferentes condições de funcionamento.

CAPÍTULO VIII

8 - Caso prático

Neste capítulo vamos apresentar a análise de um caso prático concreto de um rotor de um motor eléctrico.

A análise realizada compreende uma análise modal, uma análise do regime permanente resultante de uma solicitação harmónica induzida pela excentricidade da massa e uma análise do regime transitório simulando um arranque possível para este rotor.

A análise modal foi realizada com base no programa desenvolvido por Rodrigues [35] enquanto que as outras análises foram obtidas com os programas desenvolvidos no âmbito deste trabalho.

A figura 8.1 corresponde ao desenho do rotor deste motor. A velocidade normal de funcionamento do motor é de 3000 RPM.

As chumaceiras utilizadas neste rotor são chumaceiras hidrodinâmicas cujas características dinâmicas a 3000 RPM são dadas pela tabela 8.1:

	Rigidez (N / m)
K11	5.6430E+07
K12	-2.1461E+02
K21	7.5263E+07
K22	1.2758E+07
	Amortecimento (N s / m)
C11	1.2447E+05
C12	2.8223E+05
C21	-7.9100E+04
C22	7.8402E+05

Tabela 8.1 - Características dinâmicas a 3000 RPM (Fabricante)

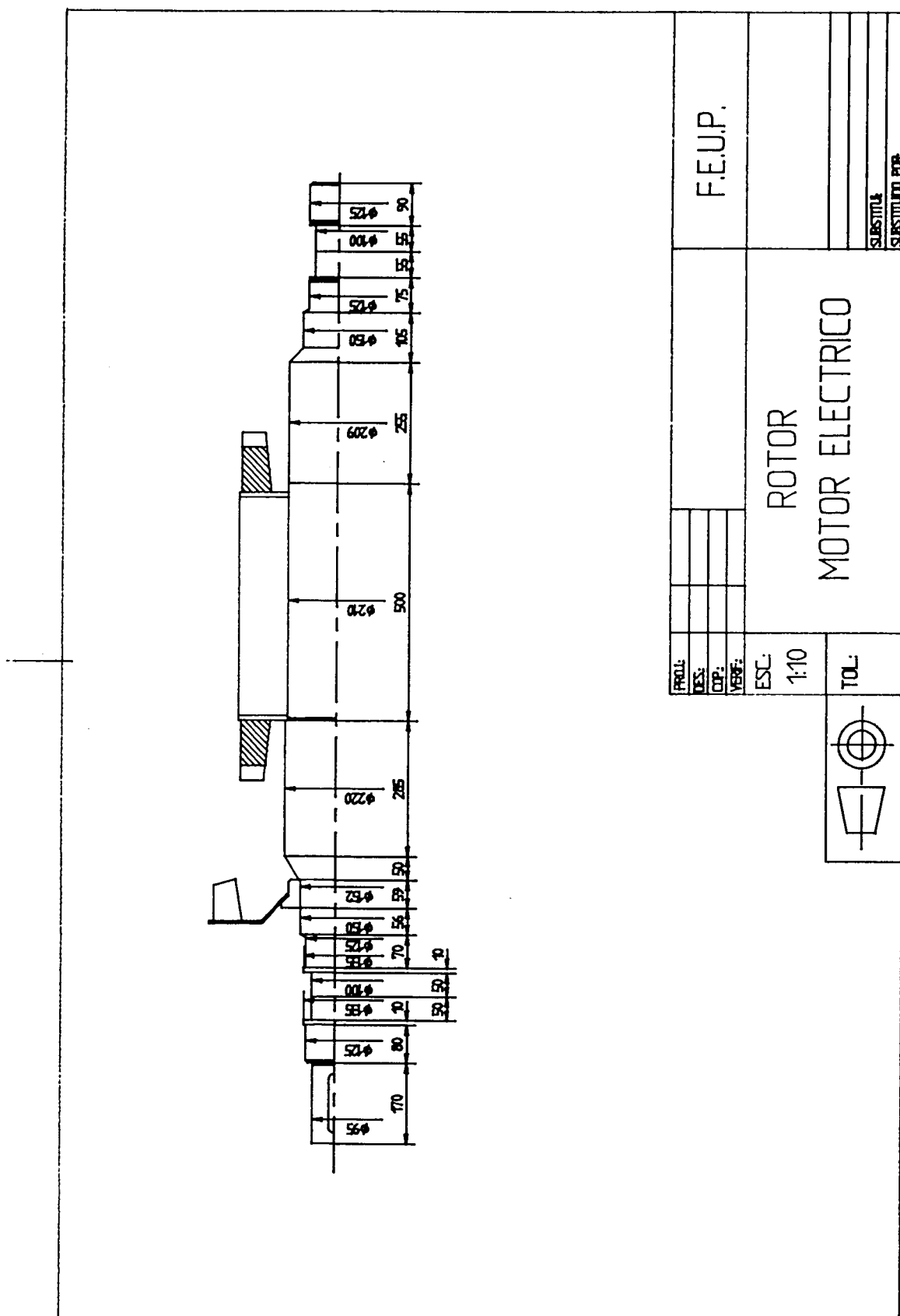


Fig 8.1

As características dinâmicas das chumaceiras podem variar significativamente com a velocidade de rotação. Pelo facto de realizarmos uma análise para uma banda larga de velocidades de rotação é natural que o modelo das chumaceiras seja impreciso fora da vizinhança das 300 RPM e os resultados obtidos estejam afectados de um erro que os torna menos realista.

Na tabela 8.2 encontra-se descrita a malha de elementos finitos utilizada nesta análise. O elemento utilizado nesta análise é o elemento descrito neste trabalho. O material do rotor é o aço possuindo um módulo de Young $E=2,0860E+11$ Pa , um coeficiente de Poisson de $\nu=0,27$ e uma massa específica de $\rho=7850$ Kg/m² .Tanto o atrito viscoso como o atrito histerético não foram considerados nesta análise.

ELEMENTOS	Comprimento (m)	Diâmetro (m)
1	1.70E-01	9.50E-02
2	9.00E-02	1.25E-01
3	5.00E-02	1.00E-01
4	5.00E-02	1.00E-01
5	8.00E-02	1.25E-01
6	5.60E-02	1.50E-01
7	3.00E-02	1.52E-01
8	2.90E-02	1.52E-01
9	5.00E-02	1.90E-01
10	2.85E-01	2.20E-01
11	2.40E-01	2.10E-01
12	2.60E-01	2.10E-01
13	2.55E-01	2.09E-01
14	1.05E-01	1.50E-01
15	1.00E-02	1.37E-01
16	6.50E-02	1.25E-01
17	5.50E-02	1.00E-01
18	5.50E-02	1.00E-01
19	9.00E-02	1.25E-01

Tabela 8.2 Descrição dos elementos utilizados

As chumaceiras encontram-se montadas nos nós 4 e 18 da malha de elementos finitos.

Este rotor possui ainda duas massas concentradas. A massa colocada no nó 12 corresponde à massa do enrolamento do motor possuindo as seguintes características:

$$\text{Massa}=316,8 \text{ Kg} \quad I_p=8,1 \text{ Kg.m}^2 \quad I_d=4,05 \text{ Kg.m}^2$$

Uma outra massa, correspondente ao ventilador, encontra-se montada no nó 8 e possui as seguintes características:

$$\text{Massa}=24 \text{ Kg} \quad I_p=0,7 \text{ Kg.m}^2 \quad I_d=0,35 \text{ Kg.m}^2$$

8.1 - Análise modal

Os resultados da análise modal deste rotor encontram-se ilustrados na gráfico 8.1. Nesta figura estão representados o decremento logarítmico e as frequências próprias em função da velocidade de rotação.

Como podemos observar na figura 8.2 os modos próprios extraídos não são instáveis uma vez que o decremento logarítmico é sempre positivo e de valor bastante elevado, o que permite concluir que este rotor é fortemente amortecido.

Uma outra observação que podemos realizar é o facto de que as frequências próprias variam pouco com a velocidade de rotação. Na verdade, este rotor possui uma massa considerável colocada sensivelmente a meio dos dois apoios o que o assemelha a um rotor de Jeffcott.

Desta análise obtivemos as seguintes velocidades críticas:

Velocidades críticas

1916 RPM

2159 RPM

5447 RPM

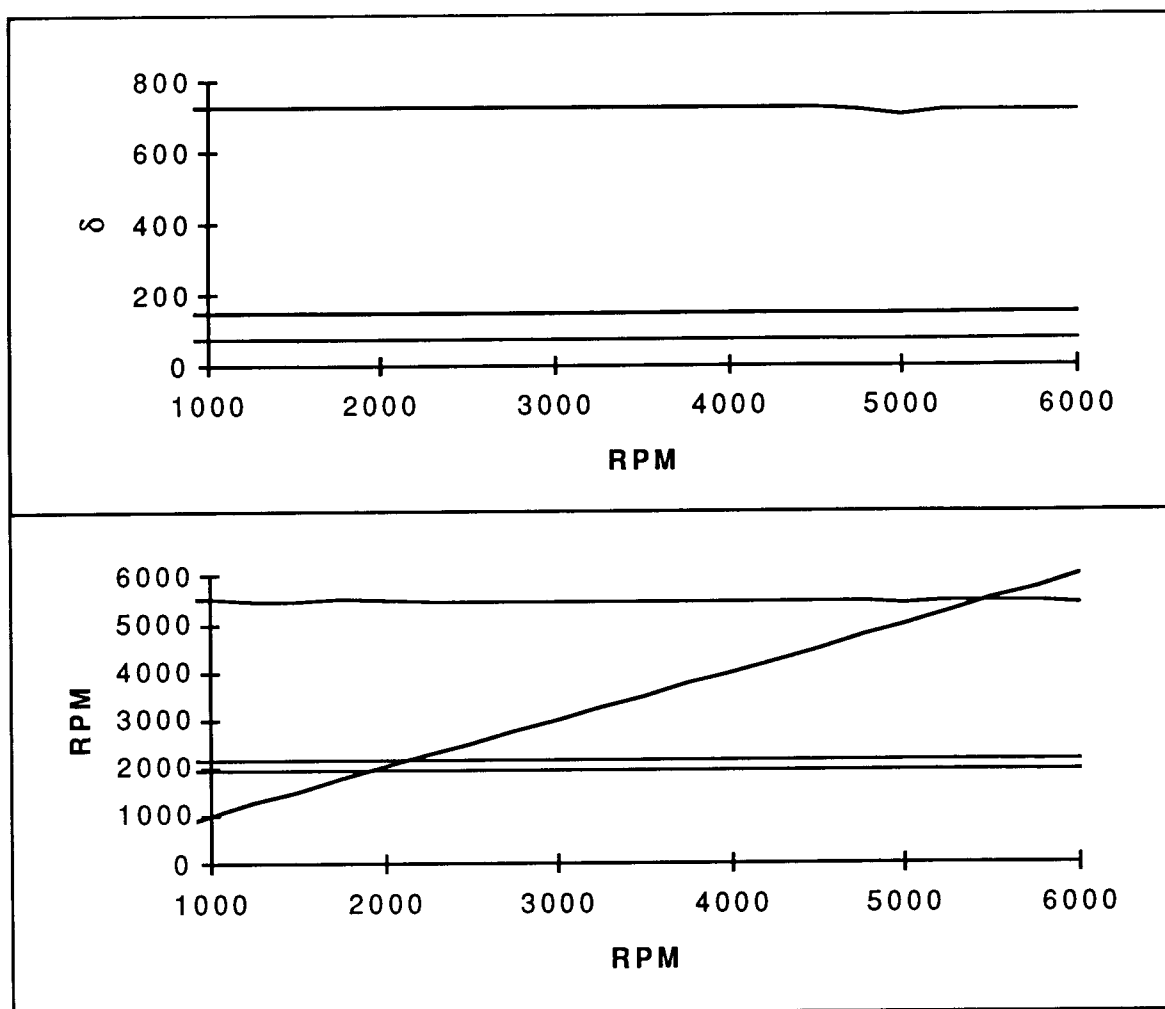


Fig 8.2 - Análise modal - Decremento logarítmico e frequências próprias de vibração em função da velocidade de rotação

8.2 - Resposta permanente

Neste caso, analisamos as amplitudes de deformação causadas pela excentricidade da massa do enrolamento concentrada colocada no nó 12. As amplitudes de vibração para os eixos das elipses do nó 12 e dos nós 4 e 18, que correspondem aos nós dos apoios, estão representadas na figura 8.3.

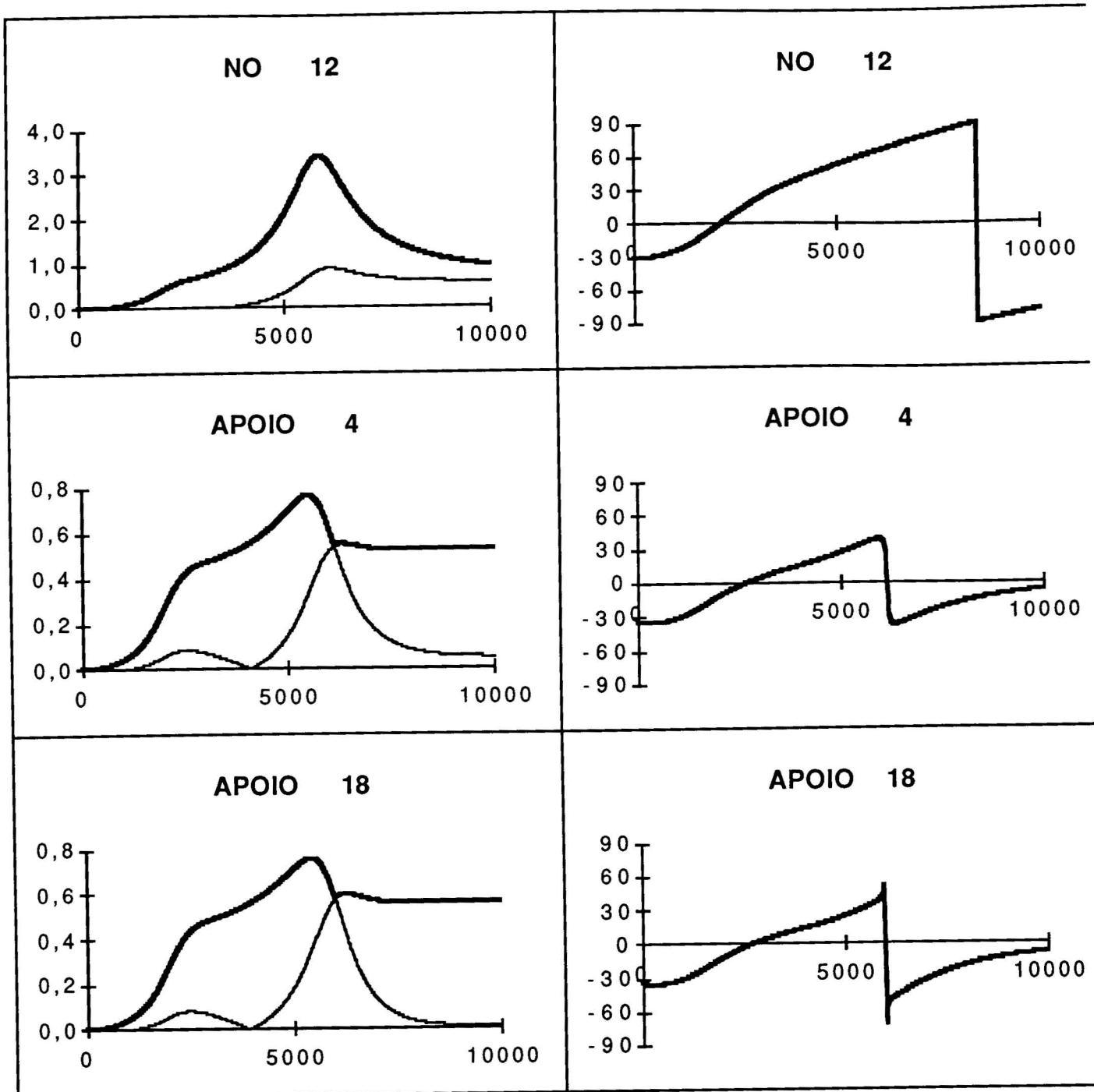


Fig 8.3 - Amplitude/excentricidade da massa em função da velocidade de rotação
(eixo maior e eixo menor da elipse da trajetória)
Ângulo do eixo maior em função da velocidade de rotação

Neste caso podemos ver que o apoio 4 e 18 têm comportamentos semelhantes. Podemos ainda observar que os valores máximos de amplitude são obtidos para a velocidade crítica de 5447 RPM. As velocidades críticas 1916 RPM e 2159 RPM quase não se fazem sentir no centro do rotor. Este facto pode estar ligado ao forte amortecimento destas chumaceiras que levam a que o efeito das

duas primeiras velocidades críticas não se faça sentir de modo significativo no centro do rotor.

Desta análise podemos ainda observar que a 3000 RPM a razão amplitude/excentricidade máxima é de 0,70746 no nó 12. Esta informação permite ao grupo projectista avaliar qual a precisão necessária na equilibragem do rotor de modo a que ele possua uma amplitude de vibração aceitável.

Podemos ainda observar que a 3000 RPM a razão amplitude/excentricidade é cerca de 0,48 para ambos os apoios. Esta informação é também importante na medida em que permite que o grupo projectista avalie do bom funcionamento das chumaceiras.

Na figura 8.4 encontram-se representadas as trajectórias elípticas do eixo do rotor para 3000 RPM e ao nível dos apoios e do ponto de concentração da massa, onde se podem observar as orientações relativas.

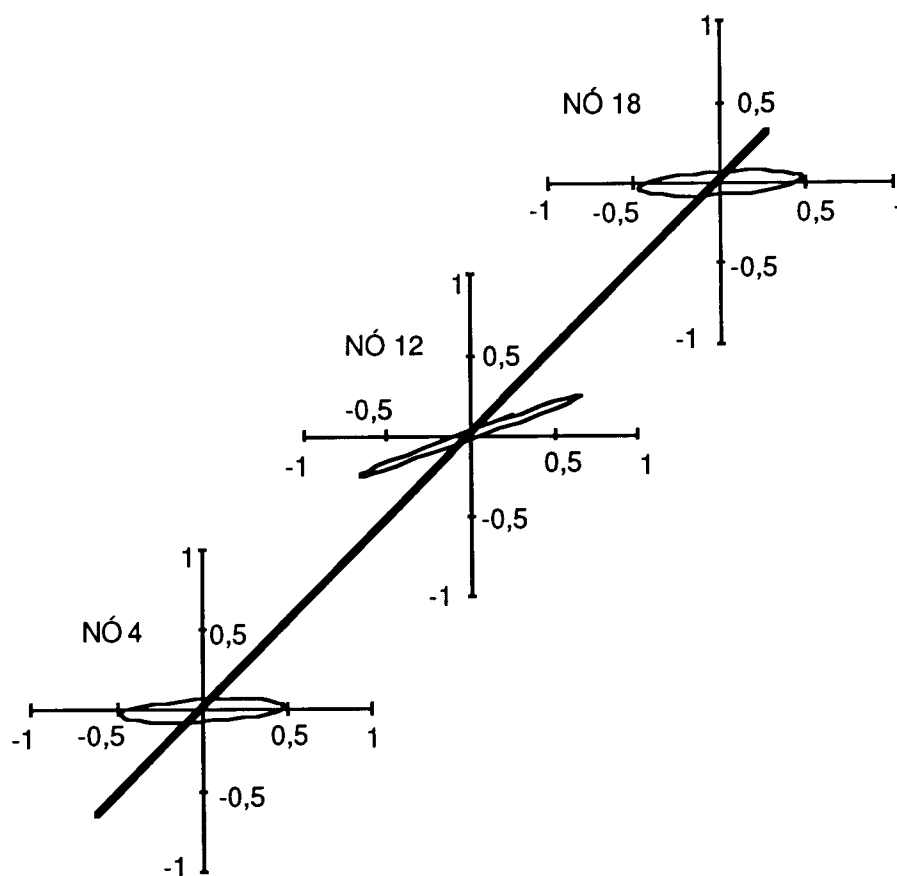


Fig 8.4 - Trajectórias do eixo do rotor a 3000 RPM

8.3 - Resposta transitória

Para a análise em regime transitório, vamos simular o arranque do motor, ou seja, a resposta do rotor a uma aceleração que o leve desde o repouso até à velocidade de funcionamento (3000 RPM) em três segundos. O resultado desta simulação ao longo do tempo está representado na figura 8.5.

No caso deste rotor, podemos anteriormente observar que, devido ao forte amortecimento das chumaceiras, as duas primeiras velocidades críticas não levam a amplitudes de vibração significativas.

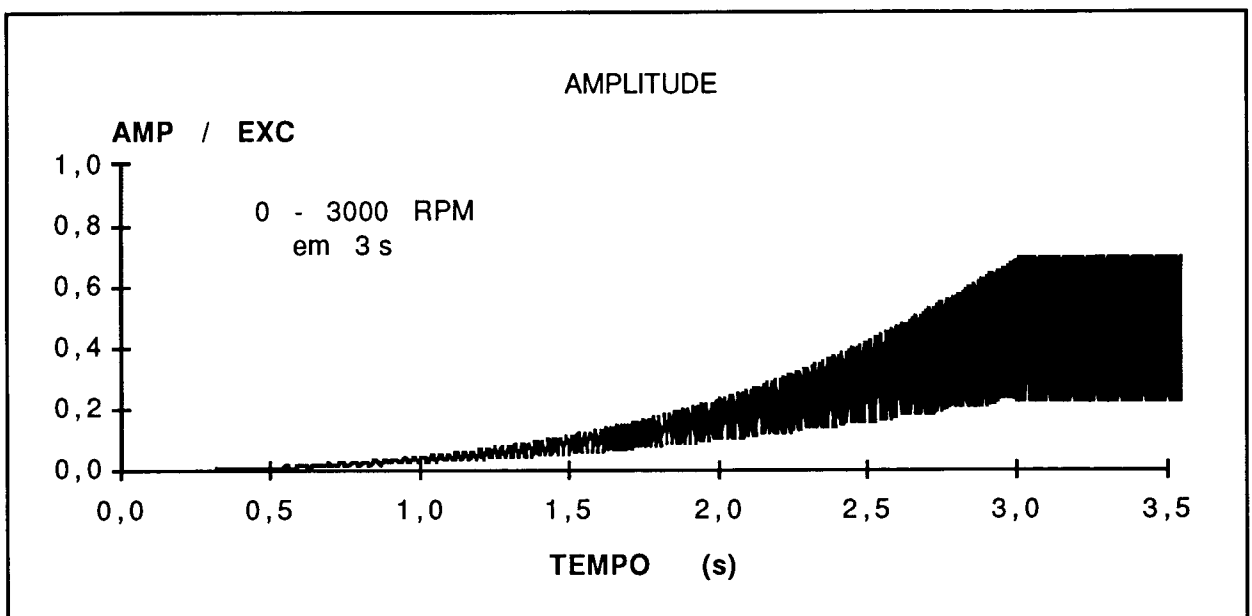


Fig 8.5 - Resposta a um arranque do rotor

Conforme observamos anteriormente, devido ao forte amortecimento das chumaceiras, as duas primeiras velocidades críticas não levam a amplitudes de vibração significativas. Por esta razão e pela análise da figura 8.5 podemos concluir que com esta aceleração a resposta do rotor é quase insensível às duas primeiras velocidades críticas inferiores a 3000 RPM. Por outro lado, podemos observar que a amplitude máxima estabiliza muito rapidamente após o rotor ter atingido o regime de funcionamento do motor. Também este fenómeno deve-se ao forte amortecimento presente na chumaceira.

A título de exemplo didáctico apresentamos a passagem pela velocidade crítica de 5447 RPM quando o rotor acelera desde as 4000 RPM até às 7500 RPM em 2,5 s. Neste caso, cujo resultado está apresentado na figura 8.6, podemos observar o aumento de amplitude de vibração na passagem pela velocidade crítica.

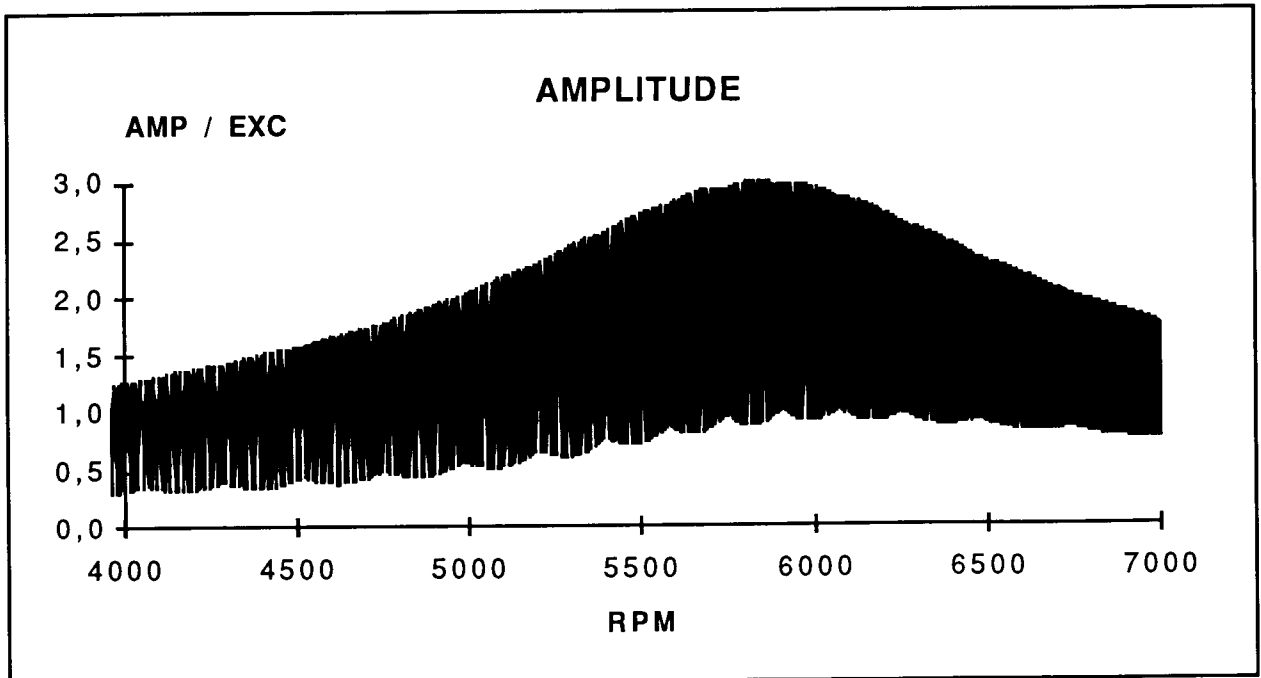


Fig 8.6 - Resposta a uma aceleração que leva o rotor das
4000 RPM às 7500 RPM em 2.5 s

O exemplo analisado neste capítulo mostra como o estudo empreendido e as técnicas desenvolvidas e implementadas no âmbito deste trabalho podem encontrar aplicação prática no sentido de analisar e melhor compreender o comportamento dinâmico do rotor que esteja na fase de projecto e desenvolvimento.

CAPÍTULO IX

9 - Conclusões e sugestões para trabalho futuro

9.1 - Conclusões

O principal objectivo deste trabalho consistiu no desenvolvimento e implementação de técnicas numéricas de análise do comportamento dinâmico dos rotores. Este trabalho assentou, por um lado, num estudo aprofundado da fenomenologia da dinâmica de rotores e, por outro lado, no trabalho desenvolvido por Rodrigues [35] sobre análise modal de sistemas giroscópicos conservativos e dissipativos através do método dos elementos finitos e que, de certa forma, aqui foi continuado. Uma atenção muito particular foi dada à formulação das equações do movimento de um rotor por recurso à álgebra complexa e à álgebra real, quer num referencial móvel quer num referencial fixo como é corrente encontrar na literatura. Neste trabalho apresenta-se uma discussão das vantagens e inconvenientes de cada uma destas formulações.

A análise da resposta a uma solicitação harmónica foi um dos tópicos desenvolvidos. As principais solicitações harmónicas a que um rotor pode estar sujeito são as solicitações resultantes de uma excentricidade da massa e as solicitações induzidas por movimentos harmónicos dos apoios. Ambas foram introduzidas no modelo espacial de elementos finitos. Para a determinação da resposta de um rotor a estes dois tipos de solicitação harmónica foram estabelecidos algoritmos específicos e adequados.

A análise de fenómenos transitórios induzidos pela aceleração angular de um rotor foi outro dos tópicos desenvolvidos. Para incluir o efeito dessa aceleração no modelo matemático foi necessário reformular as equações de

equilíbrio de um rotor visto que as equações apresentadas na literatura assentam na hipótese de velocidade angular constante. Para determinar a resposta de um rotor a este tipo de solicitação escolheu-se o método de Newmark β para integrar no tempo as equações diferenciais do movimento. Este método foi convenientemente adaptado a este tipo de problema, especialmente devido ao facto de as matrizes espaciais evoluírem no tempo e à necessidade de um passo de integração variável no sentido de acompanhar o aumento de velocidade angular. Esta análise é de particular interesse quando o rotor trabalha acima, de pelo menos, uma velocidade crítica pois a passagem por esta velocidade crítica pode provocar fortes vibrações.

Os algoritmos desenvolvidos apresentam especificidades próprias conforme se trate do regime conservativo ou do regime dissipativo. Em ambos os casos procurou-se explorar ao máximo a forma das matrizes espaciais e a natureza das soluções no sentido de minimizar o número de operações matemáticas a realizar e a capacidade de memória de computação necessária ao cálculo.

A validação das técnicas desenvolvidas realizou-se com base em modelos simples pela comparação dos resultados das soluções analíticas disponíveis com os resultados obtidos por via numérica. Em geral, verificou-se uma excelente concordância.

A aplicação destas técnicas à análise de um sistema real ilustra a utilidade prática destas ferramentas no estudo do comportamento dinâmico de um rotor nas fases de projecto e desenvolvimento.

9.2 - Sugestões para trabalho futuro

Neste trabalho foi suposto um comportamento linear dos apoios. Sendo as características mecânicas dos apoios um dos principais factores que influenciam o comportamento vibratório dos rotores, a sua caracterização correcta apresenta-se como fundamental para um estudo rigoroso. Daqui resulta a necessidade do desenvolvimento de uma caracterização não-linear mais realista para estes órgãos. Um trabalho recente nesta área foi já realizado por Edney S. L., Fox C. H. J., Williams [12].

O desenvolvimento de uma modelização por elementos finitos axissimétricos constitui igualmente um tema de trabalho futuro. Um tal tipo de elemento permitirá modelizar de forma mais rigorosa geometrias complexas e permitirá igualmente ter em conta a flexibilidade dos discos montados nos rotores. Um trabalho já apresentado neste domínio é devido a Brune C., Lassoudiere F. [4].

Bibliografia

- [1] Almacinha J. A. S., Análise dinâmica de estruturas de Veículos, Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, 1985.
- [2] Bathe K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1982.
- [3] Bigret R., Vibration des Machine Tournantes et des Structures, Tome I, II, III et IV, Technique et Documentation, Paris, 1980.
- [4] Brune C., Lassoudiere F., Rotordynamics of the Vulcain LH₂ Turbopump Comparison between Test Results and Dynamic Analysis Calculations, 3 Congrès international sur la dynamique des rotors, Editions du CNRS, Lyon, France, 1990.
- [5] Clough R. W., Penzien J., Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 1989.
- [6] Childs D.W., Graviss K., A Note on Critical-Speed solutions for Finite-Element-Based Rotor Models, Journal of Mechanical Design, 104, 412-416, 1982.
- [7] Choudhury P., Zsolcsak S. J., Barth E. W., Effect of Damping on the Lateral Vibration of Rotor-Bearing Systems, Journal of Engineering for Industry, 505-513, May, 1976.
- [8] Cohen A.M., Numerical Analysis, McGraw-Hill, 1973.
- [9] Cont S. D., Boor C., Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, 1981.
- [10] Dimentberg F.M., Flexural Vibrations of Rotating Shafts, Butterworths, London, 1961.
- [11] Edney S. L., Fox C. H. J., Williams E. J., Tapered Timoshenko Finite Elements for Rotor Dynamics Analysis, Journal of Vibration and Acoustics, 137, 463-481, 1990.

- [12] Edney S. L., Fox C. H. J., Williams E. J., Seismic and Shock Response of a Rotor on Hydrodynamic Bearings, 3 Congrès international sur la dynamique des rotors, Editions du CNRS, Lyon, France, 1990.
- [13] Feodosiev V.I., Resistencia de materiales, Editorial MIR, Moscu, 1980.
- [14] Firoozian R., Stanway R., Modelling and Control of Trubomachinery Vibrations, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reability in Design, 110, 521-527, 1988.
- [15] Gallagher R.H., Finite Element Analysis *Fundamentals*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1975.
- [16] Gasch R., Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid-Film Bearings on an Elastic Foundation, Journal of Vibration and Acoustics, 47, 53-73, 1976.
- [17] Genta G., Repaci A., Briacca I., Iterative Techenique for the Computations of the Unbalance Response of Multi-degree of Freedom Non-Linear Rotors, 3 Congrès international sur la dynamique des rotors, Editions du CNRS, Lyon, France, 1990.
- [18] Glasgow D. A., Nelson H. D., Stability Analysis of Rotor-Bearing Systems Using Component Mode Synthesis, Journal of Mechanical design, 102, 352-259, 1980.
- [19] Gm r T.C., Rodrigues J.D., Shaft Finite elements for Rotor Dynamics Analysis, Journal of Vibration and Acoustics, 113, 482-493, 1990.
- [20] Greenhill L. M., Bickford W. B., Nelson H. D., A conical Finite Element for Rotor Dynamics Analysis, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reability in Design, 107, 421-430, 1985.
- [21] Hashish E., Sankar T. S., Finite Element and Modal Analyses of Rotor-Bearing Systemn Under Stochastic Loading Conditions, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reability in Design, 106, 80-89, 1984.

- [22] Hinton E., An introduction to Finite Element Computations, Pineridge Press Limited, 1979.
- [23] Hinton E., Owen D.R.J., Finite Element Programming, Academic Press Inc, London, 1977.
- [24] Hughes T., A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, 1529-1543, 1977.
- [25] Institut des Métaux et des Machines, Analyse de la Dynamique des Arbres de Machines, Tome VII et VIII, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 1981.
- [26] Jianmin G., Xiaomei Z., The Method of Finite Element in the Rotor Dynamics, 3 Congrès international sur la dynamique des rotors, Editions du CNRS, Lyon, France, 1990.
- [27] Kreyzig E., Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, Inc. 1988.
- [28] Lundblad H. M., Forced Harmonic Vibrations of Rotating Beam Systems in Space Analysed by Use Of Exact Finite Elements, Journal For Numerical Methods in Engineering, 32, 571-594, 1989.
- [29] Neto E. M., Dynamic Response of a Rotor-Foundation-Soil System Considering the Effects of an Active or Passive Environment, 3 Congrès international sur la dynamique des rotors, Editions du CNRS, Lyon, France, 1990.
- [30] Nelson H.D., McVaugh J.M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, Journal of Engineering for Industry, 593-600, May, 1976.
- [31] Nelson H. D., A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, Journal of Mechanical Design, 102, 793-803, 1980.
- [32] Nevzat Özgüven, Levent Özkan, Whirl Speed and Unbalance Response of Multibearing Rotors Using Finite Elements, Journal of

Vibration, Acoustics, Stress and Reability in Design, 106, 72-79, 1984.

- [33] Oñate E., "Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análise Estático Lineal", (in Spanish), C. I. M. N. I., Polythechnic University of Catalunya, Spain, 1991.
- [34] Reddy J.N., Krishnamoorthy C.S., Seetharamu K.N., Finite Element Analysis for Engineering Design, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [35] Rodrigues J. F. D., Methodes Numeriques de l'Analyse des Arbes de Machines, Ecole Polytechnique Federal de Lausanne, Lausanne, 1989.
- [36] Rodrigues J. D., Gmür T. E. C., A Subspace Iteration Method for the Eigensolution of Large Undamped Gyroscopic Systems, International Journal For Numerical Methods in Engineering, 28, 511-522, 1989.
- [37] Rouch K.E., Kao J.S., Dynamic Reduction in Rotor Dynamics by the Finite Element Method, Journal of Vibration and Acoustics, 102, 360-368, 1980.
- [38] Rouch K.E., Kao J.S., A Tampered Beam Finite Element For Rotor Dynamics Analysis, Journal of Vibration and Acoustics, 66, 119-140, 1979.
- [39] Ruhl R.L., Booker J. F., A Finite Element Model for Distributed Parameter Turbo Systems, Journal of Engineering for Industry, 126-131, 1972.
- [40] Sauer G., Wolf M., Analysis of Gyroscopic Effects with the Finite Element Method, Transactions of the 8th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Techenology, Vol B, 253258, 1985.
- [41] Subbiah R., Rieger N.F., On the Transient Analysis of Rotor-Bearing Systems, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reability in Design, 110, 515-520, 1988.

- [42] Subbiah R., Kumar A.S., Sankar T.S., Transient Dynamic Analysis of Rotors Using The Combined Methodologies of Finite Elements and Transfer Matrix, Journal of Applied Mechanics, 55, 448-452, 1988.
- [43] Tabelas Técnicas, Técnica, Associação dos estudantes do I.S.T., Lisboa, 1962.
- [44] Timoshenko S. P., Resistência dos Materiais, Volume 1, Livros técnicos e científicos Editoras.a.,1983.
- [45] Timoshenko S. P., Goodier J. N. J , Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970.
- [46] Tsunea, Journal bearing data book, Springer Verlag Berlin, Heidelberg 1989.
- [47] Tuma J.J.,Cheng F.Y.,Dynamic Structural Analysis, McGraw-Hill, 1983.
- [48] Wilkinson J. H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press,1965.
- [49] Young W. C., Roark's Formulas for Stress and Strain, 6th Edition, McGraw-Hill,1989.
- [50] Zienkiewicz O. C.,The Finite Element Method, Mcgraw-Hill, London, 1977.
- [51] Zienkiewicz O. C., Morgan K.,Finite Elements and Aproximation, John Wiley & Sons, Inc.1983.
- [52] Zorzi E. S., Nelson H. D., Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems With Internal Damping, Journal of Engineering for Power, 71-76,1977.



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000008470