



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

**DESENVOLVIMENTO E UTILIZAÇÃO
DE UM MODELO DE ANÁLISE ESTRUTURAL**

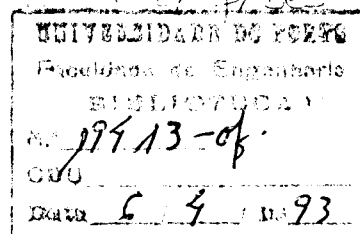
Paulo Barreto Cachim
Janeiro 1993

(043)
p/DES



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

DESENVOLVIMENTO E UTILIZAÇÃO DE UM MODELO DE ANÁLISE ESTRUTURAL



*Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
da Universidade do Porto para obtenção do grau de
Mestre em Estruturas de Engenharia Civil*

Paulo Barreto Cachim
Janeiro 1993

*"É necessário ter a coragem de dizer
coisas imperfeitas, de não fazer tudo
o que podia ter sido feito ..."*

Lavoisier

AGRADECIMENTOS

No fim deste trabalho desejo agradecer a todos aqueles que de alguma forma me ajudaram na sua elaboração e de um modo muito especial:

- ao Professor Joaquim Figueiras pela orientação e estímulo prestados ao longo de todo o trabalho;
- aos Engenheiros Joaquim Barros, Álvaro Azevedo e Manuel Trigo por toda a colaboração e disponibilidade manifestada;
- aos meus pais, à Teresa e aos meus amigos pela paciência e carinho que sempre demonstraram.

RESUMO

No presente trabalho é desenvolvido um programa de elementos finitos que permite a análise linear elástica de estruturas. As alterações efectuadas visam dotar o programa de maior capacidade e versatilidade no domínio da modelação estrutural, permitindo uma melhor aproximação entre o modelo de elementos finitos e a estrutura real.

Descrevem-se os procedimentos necessários à implementação de transformações de graus de liberdade, estabelecendo-se as equações de transformação para rotações e restrições lineares de deslocamentos.

São apresentados e discutidos dois modelos que permitem a utilização simultânea de diferentes tipos de elementos. O modelo adoptado baseia-se na imposição de um campo de deslocamentos ao longo da interface dos elementos a unir. A compatibilização dos deslocamentos é efectuada recorrendo às transformações de graus de liberdade.

Implementaram-se dois novos tipos de elementos: os elementos de casca de superfície média plana e os elementos de junta. Descreve-se a formulação destes dois elementos e apresentam-se exemplos nos quais é avaliado o seu comportamento.

Procurou-se que todas as alterações efectuadas no programa fossem de fácil manipulação e facilitassem a utilização do programa no estudo e dimensionamento de estruturas. Este aspecto é ilustrado com a análise de uma estrutura de fundação do tipo ensoleiramento geral.

ABSTRACT

This work deals with the development of a finite element program that allows a linear elastic analysis of structures. The accomplished changes tend to give the program more capacity and versatility in the scope of structural modelling, providing a better approach between the finite element model and the real structure.

The necessary proceedings to the implementation of the transformations of degrees of freedom are described, establishing the equations of transformation for rotations and the linear constraints of displacements.

Two models which admit the simultaneous usage of different types of elements are presented and discussed. The adopted model is based on a prescribed displacement field along the interface of the elements to connect. The consistency of the displacements is performed using transformations of degrees of freedom.

Two new types of elements are designed: the flat shell elements and the interface elements. The formulation of these two elements is described as well as examples in which the applications of those elements is presented.

It was intended that all the accomplished alterations in the program were to be of simple manipulation and to ease the usage of the program in the study and design of structures. This aspect is pointed out with the analysis of a mat foundation structure.

Índice geral

	Pág.
Agradecimentos	V
Resumo	VII
Abstract	IX
Índice geral	XI
Índice de figuras	XV
Índice de quadros	XXIII
Capítulo 1	
INTRODUÇÃO	1.1
Capítulo 2	
O PROGRAMA FEMIX - COMENTÁRIOS E EXPLICAÇÕES	
2.1 - INTRODUÇÃO	2.1
2.2 - MÓDULO DE PRÉ-PROCESSAMENTO (PREFEMIX)	2.2
2.3 - MÓDULO DE PROCESSAMENTO (FEMIX)	2.9
2.4 - MÓDULO DE PÓS-PROCESSAMENTO (POSFEMIX)	2.12
Capítulo 3	
TRANSFORMAÇÕES DE GRAUS DE LIBERDADE	
3.1 - INTRODUÇÃO	3.1
3.2 - TRANSFORMAÇÃO DE FORÇAS E MATRIZES DE RIGIDEZ	3.2

	Pág.
3.3 - TRANSFORMAÇÕES IMPLEMENTADAS NO PROGRAMA FEMIX	3.2
3.3.1 - Rotações de graus de liberdade	3.4
3.3.2 - Constrições lineares de graus de liberdade	3.6
3.3.3 - Ligação excêntrica de nós	3.8
3.4 - IMPLEMENTAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE GRAUS DE LIBERDADE NUM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS	3.10
3.5 - ANÁLISE DE UMA VIGA EM T	3.11

Capítulo 4

UNIÃO DE ELEMENTOS DE DIFERENTES TIPOS

4.1 - INTRODUÇÃO	4.1
4.2 - DIFERENTES FORMAS DE UNIÃO DE ELEMENTOS	4.1
4.2.1 - Elementos de transição	4.2
4.2.2 - Campos de deslocamentos impostos	4.3
4.2.3 - Solução adoptada	4.10
4.3 - ALTERAÇÕES NECESSÁRIAS NUM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA POSSIBILITAR A UTILIZAÇÃO SIMULTÂNEA DE ELEMENTOS DE DIFERENTES TIPOS	4.11
4.4 - UTILIZAÇÃO SIMULTÂNEA DE ELEMENTOS DE DIFERENTES TIPOS	4.13
4.4.1 - Estruturas 2D	4.14
4.4.2 - Estruturas 3D	4.15
4.4.3 - Elementos 2D em estruturas 3D	4.16
4.5 - EXEMPLO - ESTUDO DE UM EDIFÍCIO DE 2 PISOS	4.21

Capítulo 5

INTRODUÇÃO NOVOS TIPOS DE ELEMENTOS

5.1 - INTRODUÇÃO	5.1
5.2 - ELEMENTOS DE CASCA PLANA	5.1
5.3 - ELEMENTOS DE JUNTA	5.7
5.4 - ELEMENTOS DE CASCA PLANA E DE JUNTA: APLICAÇÕES	5.10
5.4.1 - Estudo de uma viga fendilhada	5.10
5.4.2 - Estudo de uma cúpula esférica	5.13

Capítulo 6

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO PROJECTO E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS

6.1 - INTRODUÇÃO	6.1
6.2 - CÁLCULO DE ARMADURAS EM CASCAS DE BETÃO ARMADO	6.1
6.3 - APOIOS ELÁSTICOS	6.8
6.4 - ANÁLISE DE UMA LAJE DE FUNDAÇÃO	6.11

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

7.1 - CONCLUSÕES	7.1
7.2 - ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS	7.3

	Pág.
Anexo 1	
Resolução do sistema de equações de equilíbrio sujeito a um conjunto de restrições	A1.1
Anexo 2	
Diagramas de momentos flectores e de densidades de armadura da laje de fundação	A.2.1
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	R.1

Índice de figuras

Pág.

Capítulo 2

O PROGRAMA FEMIX - COMENTÁRIOS E EXPLICAÇÕES

Fig. 2.1 - Fluxograma simplificado do programa PREFEMIX	2.3
Fig. 2.2 - Referenciais e graus de liberdade para estruturas articuladas tridimensionais	2.4
Fig. 2.3 - Referenciais e graus de liberdade para estruturas reticuladas tridimensionais	2.5
Fig. 2.4 - Referenciais e graus de liberdade para elementos tipo tensão plana; deformação plana e axissimétrica	2.5
Fig. 2.5 - Referenciais e graus de liberdade para elementos de laje	2.6
Fig. 2.6 - Referenciais e graus de liberdade para elementos de volume	2.6
Fig. 2.7 - Distinção entre nós coplanares e não coplanares em elementos de casca	2.7
Fig. 2.8 - Referenciais e graus de liberdade em nós coplanares de elementos de casca	2.7
Fig. 2.9 - Referenciais e graus de liberdade em nós não coplanares de elementos de casca	2.8
Fig. 2.10 - Fluxograma simplificado do programa FEMIX	2.10
Fig. 2.11 - Fluxograma simplificado do programa POSFEMIX	2.12

Capítulo 3**TRANSFORMAÇÕES DE GRAUS DE LIBERDADE**

Fig. 3.1 - Rotação de GDL	3.4
Fig. 3.2 - Apoio inclinado	3.5
Fig. 3.3 - Constrições de GDL	3.7
Fig. 3.4 - Viga ligada excentricamente a uma casca	3.9
Fig. 3.5 - Descontinuidades dos esforços normais e de corte na interface viga/casca	3.10
Fig. 3.6 - Viga em T (geometria)	3.11
Fig. 3.7 - Viga em T (malha de elementos finitos utilizando elementos planos e elementos de volume - largura do banzo igual a 0.3m)	3.12
Fig. 3.8 - Viga em T (malhas de elementos finitos utilizando elementos de casca - largura do banzo igual a 0.3m)	3.12
Fig. 3.9 - Viga em T (esforços principais de membrana)	3.13
Fig. 3.10 - Viga em T (esforços de membrana)	3.14
Fig. 3.11 - Viga em T (deslocamentos horizontais do apoio - comparação entre as diferentes modelações para as diversas larguras do banzo consideradas)	3.16
Fig. 3.12 - Viga em T (deslocamentos verticais do meio vão - comparação entre as diferentes modelações para as diversas larguras do banzo consideradas)	3.16
Fig. 3.13 - Viga em T (tensões σ_x e σ_y na face de aplicação do pré-esforço exterior)	3.18

Capítulo 4**UNIÃO DE ELEMENTOS DE DIFERENTES TIPOS**

Fig. 4.1 - Elementos de transição casca/sólido	4.3
Fig. 4.2 - Elementos de junta como elementos de transição casca/sólido	4.3
Fig. 4.3 - Troço de viga (transição entre discretização com elementos de viga e elementos planos)	4.4
Fig. 4.4 - Elemento plano de 4 nós	4.6
Fig. 4.5 - Modelação de barragens abóbada	4.8
Fig. 4.6 - Modelação de cascas nervuradas	4.9
Fig. 4.7 - Ponte em caixão-malha de elementos finitos ($E = 29\text{ GPa}$, $\nu = 0.15$)	4.19
Fig. 4.8 - Deformada comparada ao longo da ligação alma/banzo inferior	4.19
Fig. 4.9 - Ponte em caixão - tensões principais	4.20
Fig. 4.10 - Características geométricas do edifício em estudo	4.22
Fig. 4.11 - Malha de elementos finitos utilizada	4.23
Fig. 4.12 - Deformadas (vista superior)	4.24
Fig. 4.13 - Edifício de 2 pisos (esforço axial vertical - $e = 0.1\text{ m}$)	4.25
Fig. 4.14 - Edifício de 2 pisos (esforço axial vertical - $e = 0.3\text{ m}$)	4.25
Fig. 4.15 - Edifício de 2 pisos (esforço de corte - $e = 0.1\text{ m}$)	4.26
Fig. 4.16 - Edifício de 2 pisos (esforço de corte - $e = 0.3\text{ m}$)	4.26
Fig. 4.17 - Edifício de 2 pisos (momento torsor)	4.27
Fig. 4.18 - Edifício de 2 pisos (esforço transversal)	4.27

Capítulo 5**INTRODUÇÃO NOVOS TIPOS DE ELEMENTOS**

Fig. 5.1 - Elemento de casca plana (eixos locais e globais)	5.2
Fig. 5.2 - Esforços locais no elemento de casca plana (convenções de sentidos positivos)	5.6
Fig. 5.3 - Elementos de junta	5.7
Fig. 5.4 - Viga fendilhada (geometria e malha de elementos finitos)	5.11
Fig. 5.5 - Viga fendilhada (perfis de tracções nos elementos de junta)	5.11
Fig. 5.6 - Viga fendilhada (tensões principais)	5.12
Fig. 5.7 - Cúpula esférica (geometria)	5.13
Fig. 5.8 - Cúpula esférica (condições de apoio)	5.14
Fig. 5.9 - Cúpula esférica (malhas de elementos finitos)	5.15
Fig. 5.10 - Cúpula esférica (comparação das discretizações com elementos curvos e com elementos planos - esforços axiais)	5.15
Fig. 5.11 - Cúpula esférica (comparação das discretizações com elementos curvos e com elementos planos - momentos flectores meridionais)	5.16
Fig. 5.12 - Cúpula esférica (comparação das discretizações com elementos planos e com elementos curvos - momentos circunferenciais)	5.16
Fig. 5.13 - Cúpula esférica (comparação das discretizações com elementos planos e com elementos curvos - malha refinada)	5.17
Fig. 5.14 - Cúpula esférica (comparação da deformada quando existem aberturas com a situação em que se considerou toda a cúpula maciça - apoio fixo)	5.18
Fig. 5.15 - Cúpula esférica (comparação da deformada quando existem aberturas com a situação em que se considerou toda a cúpula maciça - apoios de roletes)	5.18

	Pág.
Fig. 5.16 - Cúpula esférica (comparação da existência de aberturas na cúpula com a hipótese da cúpula ser toda maciça - apoio fixo - esforços de membrana)	5.19
Fig. 5.17 - Cúpula esférica (comparação da existência de aberturas na cúpula com a hipótese da cúpula ser toda maciça - apoio de roletes - esforços de membrana)	5.19
Fig. 5.18 - Cúpula esférica (comparação da existência de aberturas na cúpula com a hipótese da cúpula ser toda maciça - apoio fixo - momentos flectores)	5.20
Fig. 5.19 - Cúpula esférica (comparação da existência de aberturas na cúpula com a hipótese da cúpula ser toda maciça - apoio de roletes - momentos flectores)	5.20

Capítulo 6

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO PROJECTO E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS

Fig. 6.1 - Cálculo da armadura (modelo utilizado)	6.2
Fig. 6.2 - Fluxograma simplificado da subrotina de cálculo de armadura em cascas de betão armado	6.3
Fig. 6.3 - Laje simplesmente apoiada com pilar no centro	6.4
Fig. 6.4 - Laje simplesmente apoiada com pilar central (momentos principais)	6.5
Figura 6.5 - Diagramas de momentos ao longo de linhas paralelas ao eixo dos X	6.5
Figura 6.6 - Laje simplesmente apoiada com pilar central (armadura superior)	6.6
Figura 6.7 - Laje simplesmente apoiada com pilar central (armadura inferior)	6.7

	Pág.
Fig. 6.8 - Deformações em fundações elásticas	6.8
Fig. 6.9 - Sapata assente em solo elástico (geometria)	6.10
Fig. 6.10 - Sapata assente em solo elástico (malha de elementos finitos e deformada)	6.10
Fig. 6.11 - Sapata assente em solo elástico (tensões no terreno)	6.11
Fig. 6.12 - Sapata assente em solo elástico (diagramas de momentos flectores e esforço transversal ao longo do eixo da sapata)	6.11
Fig. 6.13 - Laje de fundação (geometria)	6.12
Fig. 6.14 - Laje de fundação (reconhecimento geotécnico - ensaio SPT)	6.13
Fig. 6.15 - Laje de fundação (reconhecimento geotécnico - perfil geológico)	6.14
Fig. 6.16 - Laje de fundação (malha de elementos finitos utilizada)	6.15
Fig. 6.17 - Laje de fundação (densidades de momentos - solo elástico sem a existência de pressão hidrostática)	6.17
Fig. 6.18 - Laje de fundação (densidades de momentos - solo elástico com a existência de pressão hidrostática)	6.17
Fig. 6.19 - Laje de fundação (densidades de momentos - apoios fixos sem a existência de pressão hidrostática)	6.18
Fig. 6.20 - Laje de fundação (densidades de momentos - apoios fixos com a existência de pressão hidrostática)	6.18
Fig. 6.21 - Diagramas de momentos para a hipótese em que foram considerados apoios fixos com e sem a actuação da pressão hidrostática	6.19
Fig. 6.22 - Laje de fundação (diagramas de momentos para a hipótese em que foi considerado o efeito da deformabilidade do solo com e sem a actuação da pressão hidrostática)	6.20
Fig. 6.23 - Laje de fundação (comparação dos diagramas de momentos para valores do coeficiente de deformabilidade do solo de 60, 90 e 120 MN/m³)	6.22

	Pág.
Fig. 6.24 - Laje de fundação (comparação dos diagramas de momentos para as situações em que se impediu e em que se deixou livre o deslocamento vertical da parede exterior)	6.23
Fig. 6.25 - Laje de fundação (tensões no terreno sem a actuação da pressão hidrostática)	6.24
Fig. 6.26 - Laje de fundação (solução base - diagrama de momentos X ao longo de Y = 5.06m)	6.24
Fig. 6.27 - Laje de fundação (solução base - diagrama de momentos Y ao longo de X = 24.96m)	6.25
Fig. 6.28 - Laje de fundação (solução base - momentos flectores)	6.25
Fig. 6.29 - Laje de fundação (pixelagens das densidades de armadura segundo a direcção X)	6.26
Fig. 6.30 - Laje de fundação (diagrama de densidade de armadura segundo X ao longo de X = 24.96m)	6.26
Fig. 6.31 - Laje de fundação (pixelagens das densidades de armadura segundo a direcção Y)	6.27
Fig. 6.32 - Laje de fundação (diagrama de densidade de armadura segundo Y ao longo de Y = 5.06m)	6.27
Fig. 6.33 - Laje de fundação (armadura superior - desenho de execução)	6.28
Fig. 6.34 - Laje de fundação (armadura inferior - desenho de execução)	6.29
Fig. 6.35 - Laje de fundação (desenhos de execução - cortes - armadura superior e inferior)	6.30
Fig. 6.36 - Laje de fundação (punçoamento)	6.31

Anexo 2**Diagramas de momentos flectores e de densidades de armadura da laje de fundação**

Fig. A2.1 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo X ao longo de Y = 2.15m e Y = 7.88m)	A2.1
Fig. A2.2 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo X ao longo de Y = 10.08m e Y = 12.46m)	A2.1
Fig. A2.3 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo Y ao longo de X = 2.29m e X = 7.05m)	A2.2
Fig. A2.4 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo Y ao longo de X = 4.26m e X = 10.06m)	A2.2
Fig. A2.5 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo Y ao longo de X = 14.08m e X = 22.31m)	A2.3
Fig. A2.6 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo Y ao longo de X = 18.73m e X = 29.24m)	A2.3
Fig. A2.7 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo X ao longo de X = 2.29m e X = 7.05m)	A2.4
Fig. A2.8 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo X ao longo de X = 4.26m e X = 10.06m)	A2.4
Fig. A2.9 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo X ao longo de X = 14.08m e X = 22.31m)	A2.5
Fig. A2.10 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo X ao longo de X = 18.73m e X = 29.24m)	A2.5
Fig. A2.11 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo Y ao longo de Y = 2.15m e Y = 7.88m)	A2.6
Fig. A2.12 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo Y ao longo de Y = 10.08m e Y = 12.46m)	A2.6

Índice de quadros

Pág.

Capítulo 3

TRANSFORMAÇÕES DE GRAUS DE LIBERDADE

Quadro 3.I - Viga em T (estudo em separado das acções verticais e horizontais para elementos de volume e elementos de casca com ligação excêntrica do banzo à alma)	3.17
---	------

Capítulo 4

UNIÃO DE ELEMENTOS DE DIFERENTES TIPOS

Quadro 4.I - Graus de liberdade existentes nos diversos elementos	4.11
Quadro 4.II - Elementos possíveis de utilizar simultaneamente	4.14
Quadro 4.III - Elementos finitos utilizados para simular os diferentes elementos estruturais	4.22
Quadro 4.IV - Deslocamentos do ponto oposto ao de aplicação das forças (2º piso)	4.24
Quadro 4.V - Tempos de resolução do sistema de equações lineares para uma espessura da parede igual a 0.3mm	4.28

Capítulo 6

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO PROJECTO E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS

Quadro 6.I - Acções verticais transmitidas pelos pilares e caixa de escadas e elevador à fundação	6.15
---	------

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos é uma ferramenta de cálculo muito poderosa e versátil, capaz de resolver inúmeros problemas estruturais. O método consiste na discretização do contínuo em elementos de dimensões reduzidas (elementos finitos) para os quais são estabelecidas as equações de equilíbrio que são depois agrupadas de modo a formar as equações de equilíbrio global da estrutura.

O grande desenvolvimento dos meios computacionais tem proporcionado significativos avanços das técnicas dos elementos finitos, permitindo por um lado a utilização de modelos de cálculo mais sofisticados e resolução de estruturas mais complexas, e por outro lado a divulgação do método como um instrumento privilegiado na análise e dimensionamento estrutural.

Existem na Faculdade de Engenharia do Porto muitos programas de elementos finitos resultantes de trabalhos de investigação. Contudo, estes programas têm permanecido muitas vezes "esquecidos" já que os seus autores não os colocam à disposição dos potenciais utilizadores ou então não se encontram completamente terminados, não existindo manuais que permitam uma utilização correcta e segura do programa. São assim programas que não estando suficientemente testados não são adequados para uso profissional.

Com a criação do programa FEMIX (programa que serviu de base a este trabalho) pretendeu-se construir um programa de elementos finitos de carácter geral, cada vez mais testado, seguro e devidamente documentado, que pudesse ser utilizado no ensino e investigação servindo de embrião para um "package" de uso profissional.

O programa encontra-se numa fase inicial de desenvolvimento permitindo analisar em regime estático e linear estruturas constituídas por materiais homogéneos e isotrópicos. Atendendo a que o cálculo linear elástico é a base de qualquer análise estrutural e que apesar de todas as objecções que lhe possam ser formuladas, continua a ser um meio prático e seguro (de acordo com a regulamentação existente) de analisar estruturas, optou-se por, de entre as diversas possibilidades de evolução, dotar o programa de maiores capacidades e versatilidade na discretização de estruturas, permitindo assim uma melhor aproximação da geometria do modelo à estrutura real.

O programa encontrava-se preparado para proceder à análise de diversos tipos de estruturas não sendo, no entanto possível utilizar simultaneamente os diferentes tipos de elementos existentes no programa. Uma outra deficiência dizia respeito à necessidade dos referenciais associados aos diversos nós deverem ser paralelos ao referencial geral da estrutura. Assim, procurou-se que o programa pudesse utilizar simultaneamente os diversos tipos de elementos que possuía, acrescentando-lhe também novos tipos de elementos, aumentando a gama de estruturas analisáveis. Permitiu-se ainda que fosse possível formular equações adicionais entre os graus de liberdade como forma de poder modelar adequadamente diversas situações tais como rótulas em estruturas contínuas e elementos indeformáveis.

Os objectivos fundamentais do presente trabalho são assim:

- 1) dotar o programa da capacidade de efectuar transformações sobre graus de liberdade (rotações e restrições lineares de graus de liberdade);
- 2) permitir a utilização simultânea dos diferentes tipos de elementos, proporcionando assim uma análise adequada de estruturas mais complexas;
- 3) introduzir novos tipos de elementos aumentando a gama de estruturas analisáveis;
- 4) testar o programa com exemplos simples contribuindo para o reforço da sua fiabilidade;
- 5) utilizar o programa na análise e dimensionamento de estruturas procurando adaptá-lo às necessidades decorrentes da sua utilização profissional.

O trabalho encontra-se estruturado de forma a que a cada objectivo corresponde sensivelmente um capítulo. Deste modo, no Capítulo 2 é feita uma breve descrição do programa que serviu de base ao presente trabalho, referindo-se os aspectos que merecem algumas considerações em relação a um programa *standard*. É feita uma descrição dos diferentes tipos de elementos disponíveis no programa (assim como dos graus de liberdade associados a cada tipo de elemento) e são apresentados os dois métodos de resolução do sistema de equações de equilíbrio.

O Capítulo 3 trata das transformações sobre graus de liberdade, apresentando processos para rodar os referenciais associados a nós de uma estrutura e para permitir a escrita de equações de restrição entre vários graus de liberdade. Estas transformações são de grande utilidade para, por exemplo, permitir uma correcta imposição das condições fronteira (pois permite impedir movimentos segundo direcções não paralelas ao sistema de referência global

da estrutura) e para permitir utilizar simultaneamente elementos que não possuam os mesmos graus de liberdade por nó (torna possível a escrita de equações de compatibilidade entre diversos graus de liberdade ao largo da interface).

Após a introdução das transformações sobre graus de liberdade é possível passar ao problema da utilização simultânea de elementos de diferentes tipos. O Capítulo 4 discute este assunto apresentando duas técnicas distintas para permitir a utilização simultânea de elementos de diferentes tipos: o uso de elementos de transição e a imposição de equações de compatibilidade de deslocamentos ao longo da interface dos elementos a unir. Neste capítulo são ainda apresentados os problemas associados à introdução destas facilidades num programa de elementos finitos e também a generalização da formulação de elementos tipicamente bidimensionais (elementos de tensão plana e elementos de laje) de forma a poderem ser utilizados em estruturas tridimensionais.

Para que um programa de cálculo estrutural seja mais versátil é necessário não só permitir a utilização simultânea de diversos tipos de elementos como também a introdução de novos elementos, mais adequados para modelar certas estruturas. No Capítulo 5 é apresentada a formulação de dois elementos não existentes no programa inicial: o elemento de casca plana e o elemento de junta. A introdução do elemento de casca plana permite que as estruturas do tipo casca constituídas por associação de elementos planos sejam estudadas por elementos com uma geometria adequada, pois não faz sentido utilizar para estas estruturas elementos com a formulação de superfície média curva. Os elementos de junta são elementos que permitem a modelação dum elevado número de descontinuidades estruturais tais como a interacção betão-armadura ou fendas discretas.

O presente trabalho não ficaria completo sem a aplicação do programa desenvolvido a um exemplo prático. Assim, no Capítulo 6 é calculada uma estrutura de fundação do tipo ensoleiramento geral. É efectuada a discussão de diferentes simulações das condições fronteira e da modelação do solo. São também apresentados um modelo simplificado de simulação da deformabilidade do terreno (fundação de Winkler) e um modelo de cálculo de armaduras em estruturas laminares de betão armado a partir de esforços obtidos em regime elástico.

Por fim, são apresentadas no Capítulo 7 algumas considerações sobre o trabalho desenvolvido e sugestões de desenvolvimento futuro.

No que se refere a notações e convenções, refere-se que os símbolos entre [] ou as letras maiúsculas carregadas (A) representam matrizes e que os símbolos entre { } ou letras minúsculas carregadas (a) representam vectores. Todos os restantes tipos de símbolos representam escalares. Os símbolos são definidos à medida que vão aparecendo no trabalho.

A compreensão do trabalho pressupõe a existência de conhecimentos sobre o método dos elementos finitos tais como a forma de organização dum programa, o processo de obtenção das matrizes de rigidez dos elementos e vectores solicitação e esquemas de integração numérica.

CAPÍTULO 2

O PROGRAMA FEMIX - COMENTÁRIOS E EXPLICAÇÕES

2.1 - INTRODUÇÃO

Os programas de cálculo estrutural utilizando o método dos elementos finitos são cada vez mais populares e dispõem (devido ao desenvolvimento dos meios computacionais) de capacidade para resolver grandes problemas.

Devido às enormes quantidades de informação manipuladas, estes programas dispõem de módulos auxiliares que permitem a geração e tratamento de dados de maneira mais ou menos automática, assim como tratamento de resultados que permitem uma rápida, fácil e segura avaliação do comportamento da estrutura.

O programa FEMIX (Azevedo e Barros [1991]) é um programa que permite uma análise linear elástica de estruturas, baseado no método dos elementos finitos, com formulação em termos de deslocamentos. Encontra-se numa fase inicial de desenvolvimento, permitindo, contudo, a análise de diversas estruturas.

Este programa permite analisar estruturas submetidas a estado plano de tensão, estado plano de deformação, estruturas axissimétricas axissimetricamente solicitadas, lajes espessas, cascas espessas, estruturas tridimensionais discretizadas com elementos de volume, estruturas articuladas e reticuladas tridimensionais. Na versão de base para o presente trabalho, apenas é permitido que as estruturas sejam discretizadas num único tipo de elemento, não sendo permitida a utilização simultânea de diversos elementos. Por exemplo, não é permitido discretizar uma estrutura utilizando simultaneamente elementos de casca e elementos de volume.

As estruturas deverão ser constituídas por materiais que possam ser considerados homogéneos e isotrópicos.

São permitidos os seguintes tipos de cargas: cargas concentradas em nós, cargas distribuídas em bordos dos elementos, cargas distribuídas nas faces dos elementos, variações uniformes de temperatura, assentamentos de apoio, acção gravítica, cargas distribuídas ao longo dos elementos e cargas pontuais em elementos. Estes dois últimos tipos de cargas apenas são permitidas em elementos de barra e elementos de viga. É permitido um número "ilimitado" de casos de carga. As combinações de acções são efectuadas opcionalmente no módulo de pós-processamento.

O programa é constituído pelos módulos de pré-processamento (PREFEMIX), processamento (FEMIX) e pós-processamento (POSFEMIX). O módulo de pré-processamento procede à leitura e verificação do ficheiro de dados, o módulo de processamento calcula os deslocamentos e reacções e o módulo de pós-processamento calcula as tensões/esforços e gera os vários ficheiros de resultados.

Existe software gráfico de apoio, constituído pelos programas DRAWMESH e GRAPH2D (Azevedo [1992a]), para o qual são efectuadas as saídas de resultados.

A geração e tratamento da malha de elementos finitos pode ser efectuada através de um programa auxiliar (S3DCAD - Azevedo [1992b]) que permite ainda a escrita dos dados relativos à geometria num ficheiro de dados utilizável pelo módulo de pré-processamento.

Não existe software de apoio para o tratamento dos dados relativos às cargas a aplicar às estruturas, o que implica um elevado volume de trabalho para a introdução deste bloco de dados.

Neste capítulo será feita uma descrição sumária dos três módulos constituintes do programa com relevo nas particularidades existentes, não se referindo detalhes sobre as subrotinas *standard* dum programa de elementos finitos. São também clarificados alguns aspectos que são tratados e desenvolvidos ao longo deste trabalho. Mais informações sobre a utilização do programa podem ser encontradas no Manual de Utilização do Programa FEMIX (Azevedo e Barros [1991]).

2.2 - MÓDULO DE PRÉ-PROCESSAMENTO (PREFEMIX)

O módulo de pré-processamento permite ler o único ficheiro de dados necessário ao problema, fazer a verificação de dados e escrever um ficheiro não formatado contendo todos os dados do problema, bem como alguns parâmetros adicionais como, por exemplo, o número total de variáveis do problema, o número total de pontos de Gauss da estrutura ou as normais à superfície média em cada nó dos elementos (no caso da estrutura ser constituída por elementos do tipo casca).

O fluxograma (Fig. 2.1) do módulo PREFEMIX é bastante claro no que respeita às tarefas executadas, fazendo-se, no entanto, alguns comentários adicionais no que respeita à verificação dos dados.

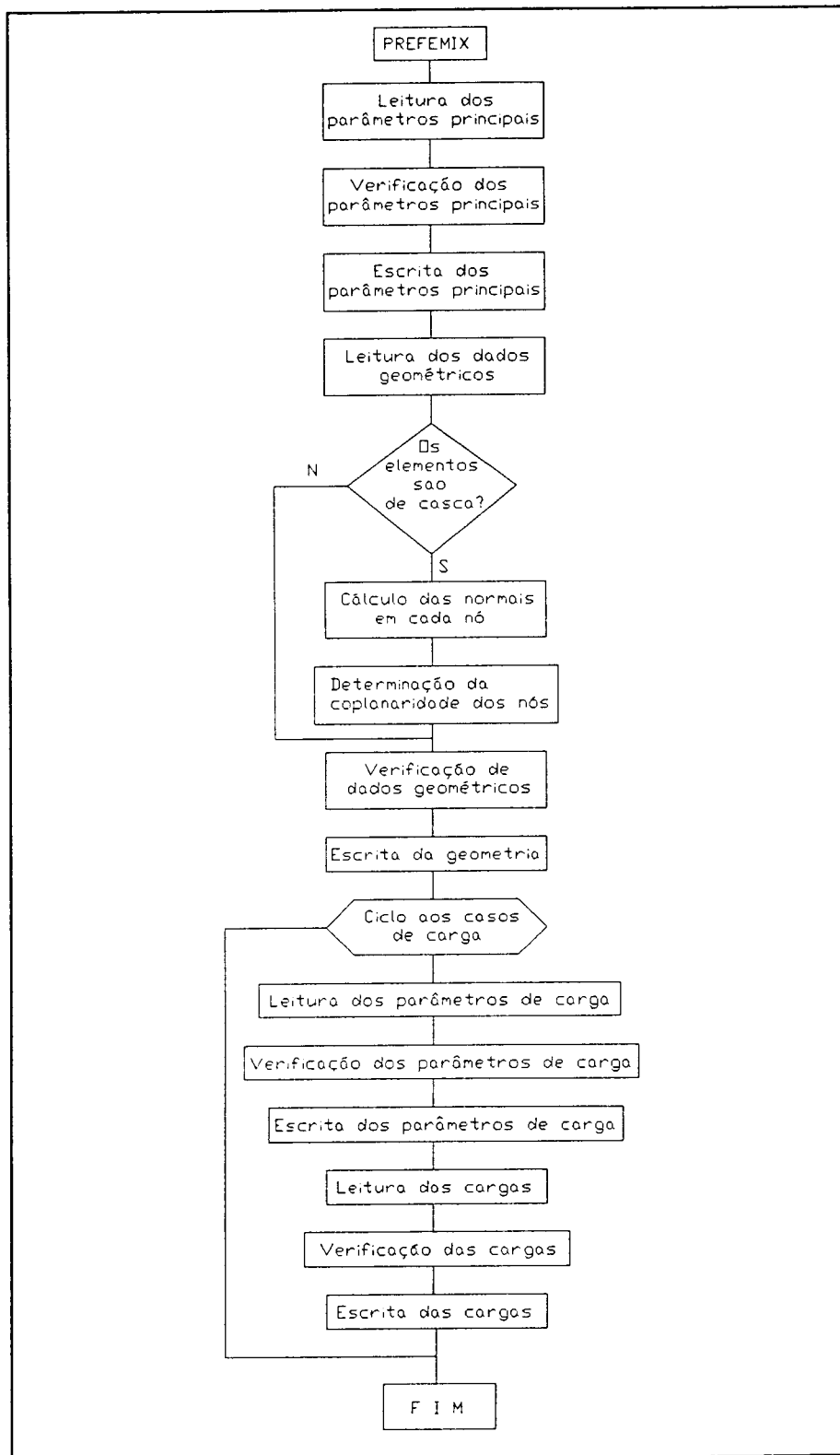


Fig. 2.1 - Fluxograma simplificado do programa PREFEMIX.

A introdução de dados num programa de elementos finitos é uma tarefa fastidiosa, em que se lida com uma grande quantidade de informação que é necessário escrever num ficheiro de dados. Por este motivo, é provável que a informação escrita no ficheiro de dados contenha algumas incorrecções que deverão, tanto quanto possível, ser eliminadas antes de se calcular a estrutura.

Um olhar sobre o fluxograma da Fig. 2.1 evidencia a existência de vários pontos onde são feitas as verificações dos dados. Estas verificações incidem somente sobre os dados que é possível controlar de forma automática, cabendo ainda ao utilizador do programa um espírito crítico sobre os resultados do problema a fim de detectar possíveis anomalias nos dados do problema. As verificações realizadas destinam-se a controlar situações como, por exemplo, se o número total de apoios é maior do que o número de nós da estrutura, se existem nós repetidos nos elementos, se o número de pontos de integração é aceitável para o elemento em causa, se os nós que definem um bordo de um elemento realmente existem nesse elemento, se um nó carregado existe realmente, etc.

Termina-se esta apresentação do módulo PREFEMIX com uma descrição das condições em que foi formulado cada tipo de elemento, bem como dos respectivos referenciais associados.

- 1) *Estruturas articuladas tridimensionais*: estruturas espaciais constituídas por barras prismáticas de secção constante com continuidade de deslocamentos; é considerada apenas a deformação axial. Integração exacta da matriz de rigidez.

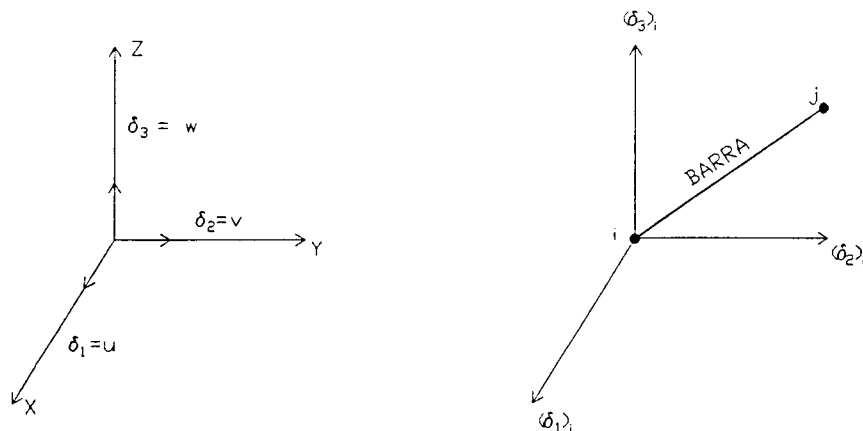


Fig. 2.2 - Referenciais e graus de liberdade para estruturas articuladas tridimensionais.

- 2) *Estruturas reticuladas tridimensionais*: estruturas espaciais constituídas por barras prismáticas de secção constante; centro de corte coincidente com o centro de gravidade em cada secção transversal; são consideradas as deformações axiais e de flexão; não é considerada a deformação por corte. Integração exacta da matrix de rigidez.

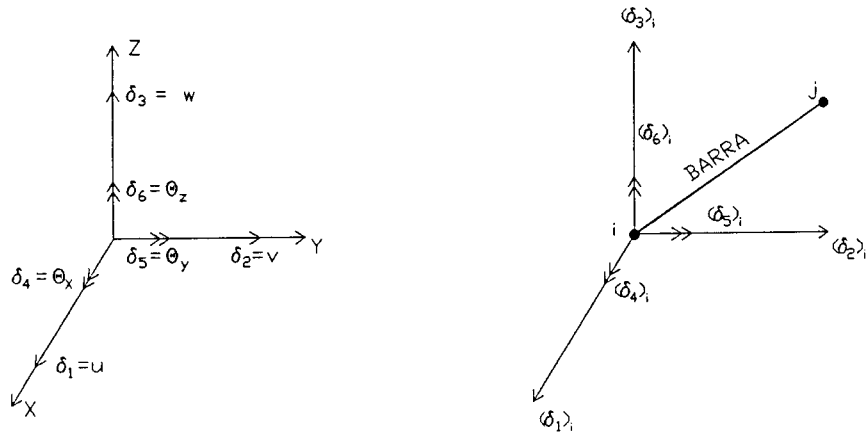
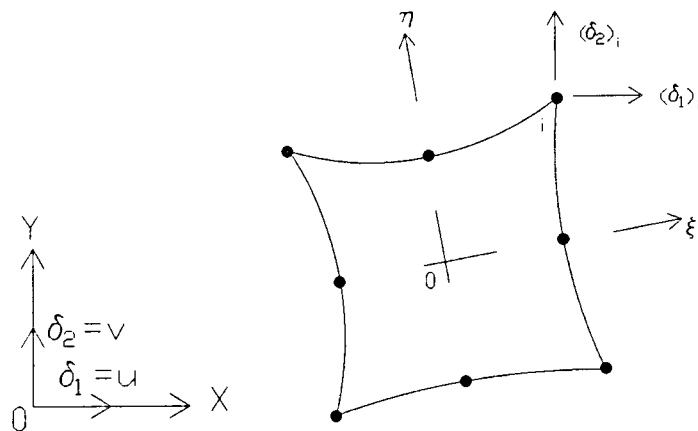


Fig. 2.3 - Referenciais e graus de liberdade para estruturas reticuladas tridimensionais.

- 3) *Elementos de estado plano de tensão*: estrutura com superfície média plana (XY) e espessura (segundo Z) pequena em relação às restantes dimensões e eventualmente variável; tensão desprezável na direcção Z; forças e deslocamentos paralelos ao plano médio da estrutura.



OXY = referencial geral

Oxi eta = referencial local do elemento

$(\delta_1)_i, (\delta_2)_i$ = graus de liberdade num nó genérico i (referencial geral)

Fig. 2.4 - Referenciais e graus de liberdade para elementos tipo tensão plana; deformação plana e axissimétrica.

- 4) *Elementos de estado plano de deformação*: estrutura em que a deformação é desprezável na direcção perpendicular ao plano médio (XY); forças e deslocamentos independentes da coordenada Z e são paralelos ao plano médio; dados e resultados obtidos relativos a um desenvolvimento (segundo Z) unitário.

- 5) *Estruturas axissimétricas*: estruturas e acções axissimétricas em relação a um eixo (obrigatoriamente o eixo Y); as coordenadas X são distâncias ao eixo de simetria e têm de ser todas positivas.
- 6) *Elementos de laje*: elementos com uma superfície média plana (XY) e espessura (segundo Z) compreendida entre 1/10 e 1/100 das restantes dimensões e eventualmente variável; tensão desprezável na direcção Z; não são consideradas forças e deslocamentos contidos no plano da estrutura; as forças e deslocamentos são perpendiculares ao plano médio; os momentos e rotações estão contidos em planos perpendiculares ao plano médio; são consideradas as deformações por flexão e corte.

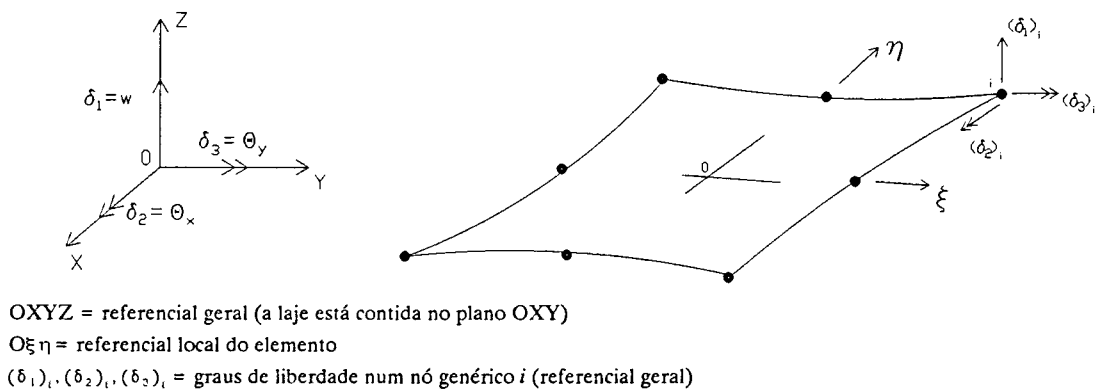


Fig. 2.5 - Referenciais e graus de liberdade para elementos de laje.

- 7) *Elementos de volume*: estruturas e acções tridimensionais sem qualquer restrição.

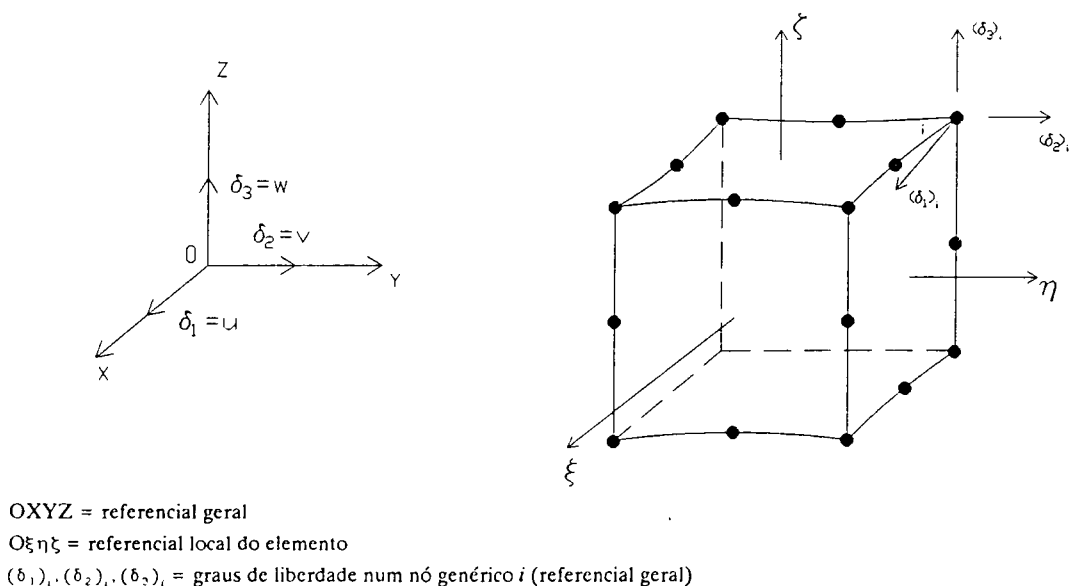


Fig. 2.6 - Referenciais e graus de liberdade para elementos de volume.

- 8) *Elementos de casca*: estrutura laminar (casca) com uma superfície média qualquer e eventualmente com arestas (*kinks*) onde podem convergir mais do que duas superfícies; espessura eventualmente variável; não é considerada a rotação contida no plano tangente à superfície média; são também desprezadas as componentes normais à superfície média da tensão e deformação; são consideradas as deformações de membrana, flexão e corte; os nós podem-se encontrar em duas situações distintas: se as normais de todos os elementos que contêm esse nó forem coincidentes (Fig. 2.7b)

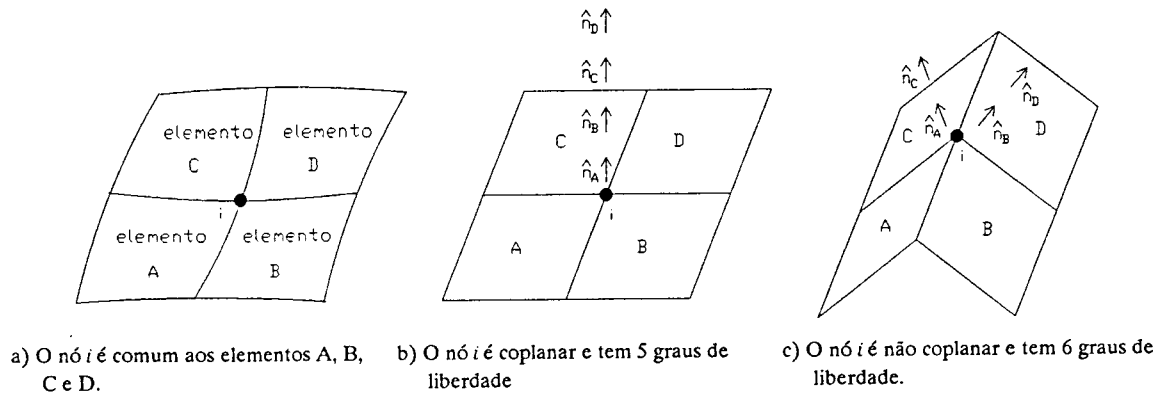


Fig. 2.7 - Distinção entre nós coplanares e não coplanares em elementos de casca.

o nó diz-se coplanar e possui os 5 graus de liberdade representados na Fig. 2.8, se por outro lado as normais de todos os elementos que contêm o nó não forem coincidentes (Fig. 2.7c) o nó diz-se não coplanar e possui 6 graus de liberdade por nó (Fig. 2.9); nos nós coplanares as rotações vêm referidas num referencial nodal

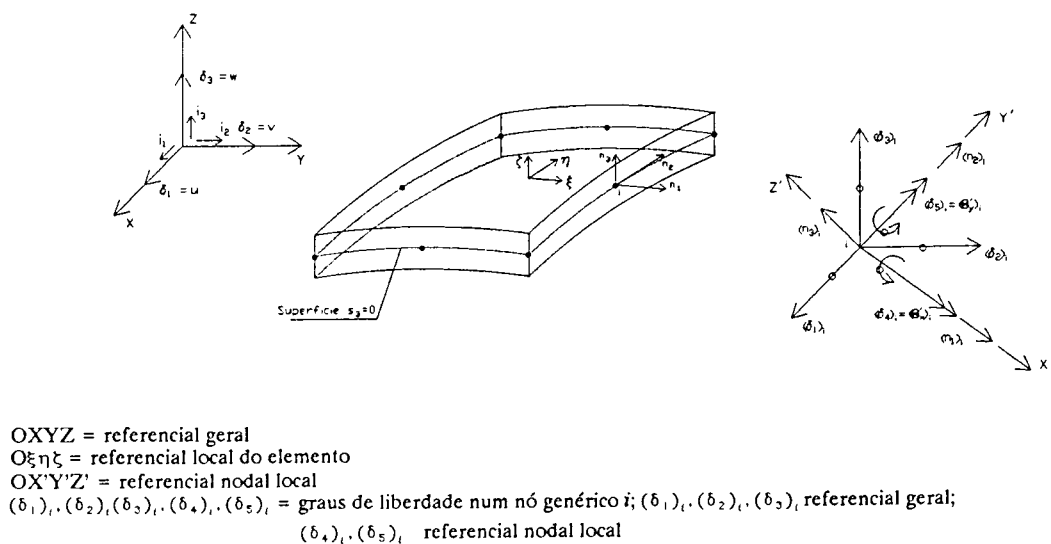
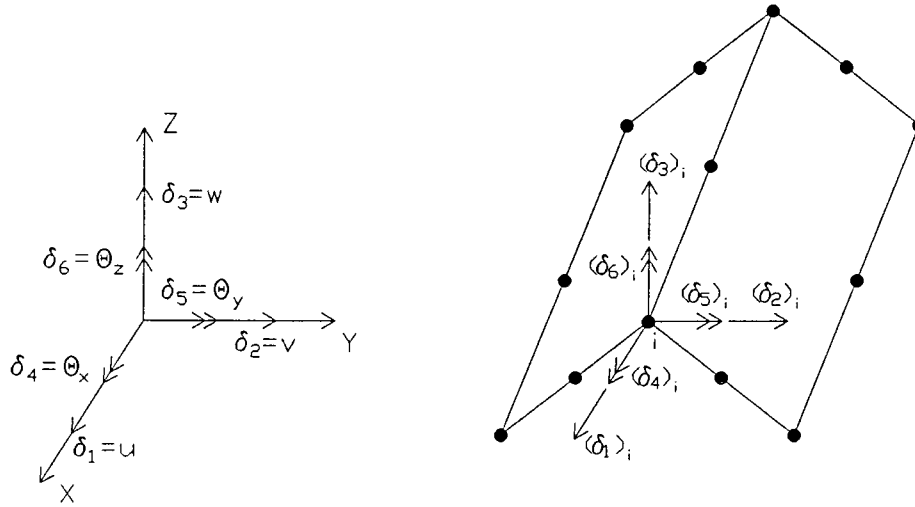


Fig. 2.8 - Referenciais e graus de liberdade em nós coplanares de elementos de casca.



OXYZ = referencial geral

$(\delta_1)_i, (\delta_2)_i, (\delta_3)_i, (\delta_4)_i, (\delta_5)_i, (\delta_6)_i$ = graus de liberdade num nó genérico i (referencial geral)

Fig. 2.9 - referenciais e graus de liberdade em nós não coplanares de elementos de casca.

local definido de forma a ficar automaticamente determinado em função da posição da normal à superfície média do elemento:

$$\mathbf{r}_1 = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} \right]^T, \quad (2.1.a)$$

$$\mathbf{r}_2 = \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]^T, \quad (2.1.b)$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2, \quad (2.1.c)$$

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{r}_3 / \|\mathbf{r}_3\|, \quad (2.2)$$

se $\mathbf{n}_3$ paralelo ao eixo Y global então torna-se

$$\mathbf{n}_1 = (\mathbf{n}_3 \times \mathbf{i}_1) / \|\mathbf{n}_3 \times \mathbf{i}_1\|, \quad (2.3.a)$$

nos restantes casos:

$$\mathbf{n}_1 = (\mathbf{i}_2 \times \mathbf{n}_3) / \|\mathbf{i}_2 \times \mathbf{n}_3\|, \quad (2.3.b)$$

vindo para $\mathbf{n}_2$:

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1; \quad (2.4)$$

nos nós coplanares tanto os deslocamentos como as rotações vêm referidos ao sistema de referência geral; os dois tipos de nós podem coexistir nestas estruturas; o número de graus de liberdade por nó é tomado igual a 6 nos nós pertencentes a elementos de casca quer eles sejam coplanares ou não coplanares; o sexto grau de liberdade dos nós

coplanares é automaticamente declarado como apoio, possibilitando assim a resolução do sistema de equações considerando sempre que as cascas têm 6 graus de liberdade por nó.

2.3 - MÓDULO DE PROCESSAMENTO (FEMIX)

O módulo de processamento destina-se ao cálculo de deslocamentos e reacções. Em linhas gerais a organização do módulo é a de qualquer programa de elementos finitos (leitura de dados, cálculo e agrupamento das matrizes de rigidez elementares, cálculo dos vários vectores solicitação e resolução do sistema de equações), existindo no entanto algumas particularidades que merecem alguns comentários. O processo utilizado para resolução do sistema de equações (equação 1.5) consiste na partição do sistema em dois de tal forma que a matriz dos coeficientes fique organizada de forma a separar os graus de liberdade com

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_A \\ \mathbf{f}_B \end{Bmatrix} \quad , \quad (2.5)$$

movimentos livres - A - dos graus de liberdade com movimentos prescritos - B - (por exemplo apoios). Verifica-se que as verdadeiras incógnitas do problema são os vectores $\mathbf{u}_A$ e $\mathbf{f}_B$, podendo o sistema resolver-se em duas etapas consecutivas:

1) resolução do sistema

$$K_{AA} \mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A - K_{AB} \mathbf{u}_B \quad , \quad (2.6)$$

2) cálculo das reacções

$$\mathbf{f}_B = K_{BA} \mathbf{u}_A + K_{BB} \mathbf{u}_B \quad , \quad (2.7)$$

donde se conclui que a verdadeira grandeza do sistema de equações a resolver é A (número de graus de liberdade livres). Este processo de considerar o sistema de equações global condicionou alguns aspectos do programa.

O cálculo das matrizes de rigidez elementares é efectuado utilizando integração numérica para os elementos contínuos e integração directa para os elementos discretos (estruturas articuladas e reticuladas). Para os elementos contínuos pode ser utilizada integração completa ou reduzida, não podendo ser utilizada integração selectiva.

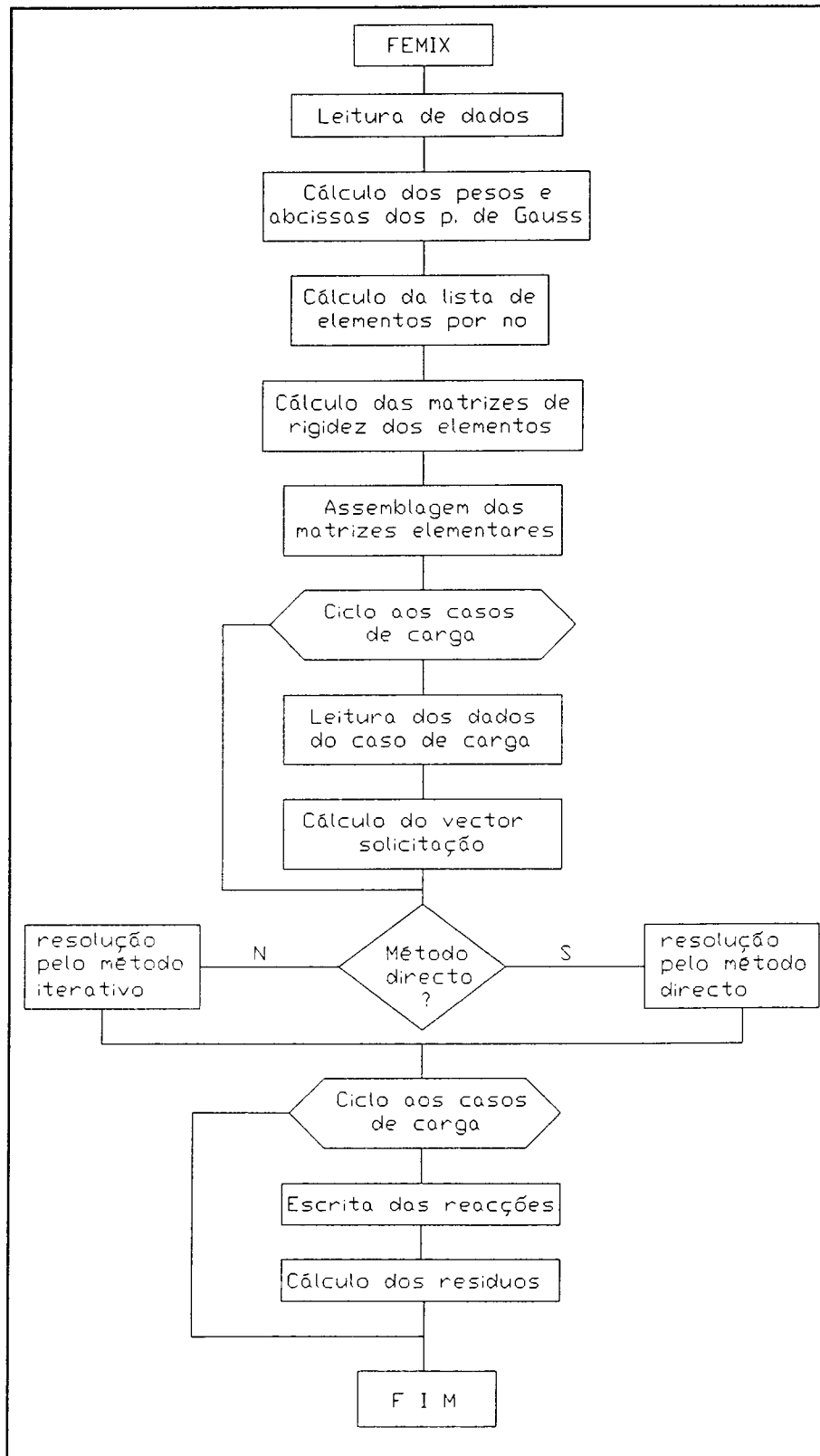


Fig. 2.10 - Fluxograma simplificado do programa FEMIX.

Os triângulos superiores das matrizes de rigidez elementares são armazenados em memória. O espalhamento destas matrizes na matriz de rigidez global é feito por bandas horizontais (constroi-se uma linha de cada vez), sendo estas bandas (termos não nulos) armazenados em ficheiros temporários correspondentes às partições da matriz de rigidez global descritas na equação (2.5). Este processo obriga a saber, para cada nó (em rigor para cada grau de liberdade), quantos e quais os elementos que possuem este nó. Concluída esta operação é libertada a memória ocupada pelas matrizes de rigidez elementares.

A operação seguinte consiste no cálculo dos vectores solicitação para todos os casos de carga e na sua escrita em ficheiros temporários, também de acordo com a partição considerada (equação 2.5).

A resolução do sistema de equações pode ser executada recorrendo quer a um método directo (eliminação de Gauss com armazenamento em semibanda de largura constante e com toda a matriz em memória central), quer a um método iterativo (gradientes conjugados com pré-condicionamento diagonal e com armazenamento dos termos não nulos em memória central).

A opção por um outro método depende de vários factores, referindo-se a título informativo o número de bytes ocupado e os tempos aproximados de resolução para cada um dos métodos (uma descrição mais aprofundada pode ser encontrada em Azevedo e Barros [1990]):

a) método directo

$$\begin{aligned}\text{bytes ocupados} &= \text{ntotc} * \text{nhbac} * \text{sizeof}(\text{double}) \\ \text{tempo de execução} &\propto \text{ntotc} * \text{nhbac}^2\end{aligned}$$

b) método iterativo

$$\begin{aligned}\text{bytes ocupados} &= 5 * \text{ntotc} * \text{sizeof}(\text{double}) + \\ &+ [\text{sizeof}(\text{double}) + \text{sizeof}(\text{int})] * \text{nnzte} + \\ &+ 2 * \text{ntotc} * \text{sizeof}(\text{int})\end{aligned}$$

$$\text{tempo de execução} \propto \text{ncase} * \text{nnzte} * \text{niter}$$

em que:

$\text{ntotc} = \text{n}^\circ \text{ de linhas do sistema de equações (compactado)}$

$\text{nhbac} = \text{n}^\circ \text{ de colunas da semibanda (compactada)}$

$\text{ncase} = \text{n}^\circ \text{ de casos de carga}$

$\text{nnzte} = \text{n}^\circ \text{ de termos não nulos em } \dot{K}_{AA}$

$\text{niter} = \text{n}^\circ \text{ de iterações } (\cong \text{ntotc}/2)$

$\text{sizeof}(\text{VAR}) = \text{n}^\circ \text{ de bytes ocupado por uma variável do tipo VAR}$

2.4 - MÓDULO DE PÓS-PROCESSAMENTO (POSFEMIX)

O pós-processamento de resultados é de grande importância para uma análise segura e eficaz dos problemas. Ao módulo de pós-processamento do programa FEMIX cabe a tarefa de calcular as tensões, proceder ao cálculo das combinações das diversas acções e escrever os vários ficheiros de resultados.

O cálculo das tensões é sempre efectuado com integração reduzida, sendo utilizadas as funções de forma dos elementos lineares para proceder à extrapolação das tensões dos pontos de Gauss para os nós dos elementos. As pixelagens são efectuadas utilizando os valores das tensões nodais, o que é efectuado considerando a média das tensões nos nós obtidas através de todos os elementos que possuem os nós. O programa permite, sem o cálculo dos deslocamentos, desenhar a geometria da estrutura. Com os deslocamentos calculados é possível efectuar um desenho da deformada da estrutura e fazer pixelagens de deslocamentos. Calculando as tensões é possível obter pixelagens de tensões/esforços, escrever um ficheiro com os valores das tensões calculadas nos pontos de Gauss e obter um desenho das tensões principais nos pontos de Gauss dos elementos.

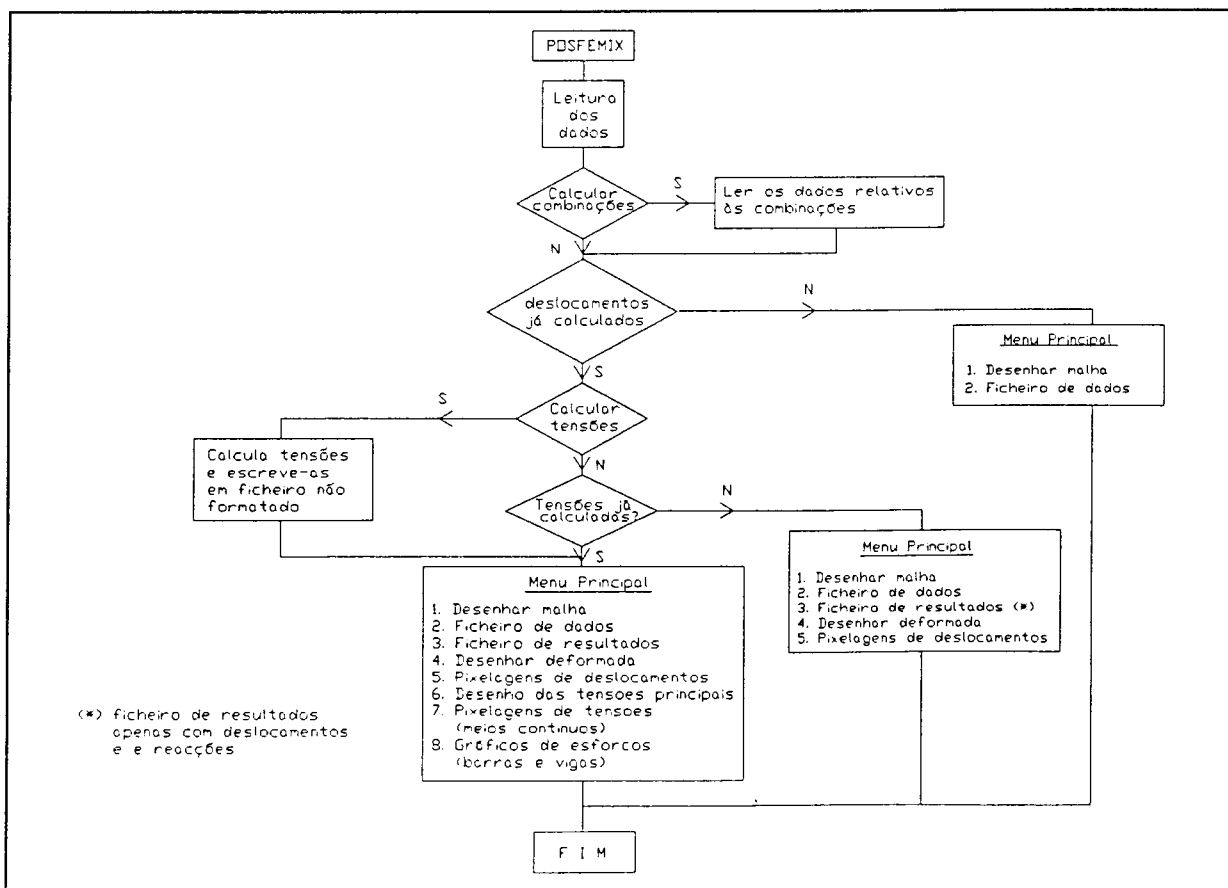


Fig. 2.11 - Fluxograma simplificado do programa POSFEMIX.

Nos diversos exemplos estudados no presente trabalho utilizaram-se os diferentes tipos de saídas gráficas de resultados o que permite avaliar melhor as possibilidades do módulo de pós-processamento.

Existem algumas limitações no módulo de pós-processamento como sejam a representação das tensões principais em elementos de volume ou a visualização dos valores das tensões principais máximas e mínimas em todos os tipos de elementos. Não é possível também obter os valores dos esforços ao longo de linhas, permitindo assim a obtenção de gráficos que em algumas circunstâncias são de maior utilidade prática do que as pixelagens.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES DE GRAUS DE LIBERDADE

3.1 - INTRODUÇÃO

As transformações de graus de liberdade (GDL) são equações adicionais ao sistema de equações de equilíbrio inicial da estrutura e que sob forma matricial podem ser representadas por:

$$u = T u' \quad (3.1)$$

em que u' é o vector de GDL que se pretende adicionar, u vector dos GDL a eliminar ou transformar e T é uma matrix de transformação.

Estes conceitos genéricos serão particularizados para os diferentes casos apresentados ao longo do capítulo.

As transformações de GDL têm múltiplas aplicações na modelação estrutural para utilização do método dos elementos finitos. Como exemplos podem-se referir a restrição de movimentos nodais segundo direcções não coincidentes com as direcções globais da estrutura, a simulação de rótulas em estruturas contínuas, a transformação de rotações em translações, a imposição de movimentos de corpo rígido a um ou vários elementos, etc.. A utilidade da introdução destas facilidades num programa de cálculo automático de estruturas é por demais evidente.

As equações de restrição e rotação de GDL devem, no entanto, ser formuladas com extrema precaução pois podem facilmente introduzir erros e falsear a solução do problema. Por outro lado, é importante que os coeficientes tenham toda a precisão possível de forma a garantir a estabilidade da matriz de rigidez não falseando as equações de equilíbrio.

Os pontos que se seguem começam por descrever as equações genéricas de transformação de forças e matrizes de rigidez a partir da equação (3.1), fazendo-se seguidamente uma descrição das transformações de GDL introduzidas no programa FEMIX. O capítulo termina com a análise de uma viga em T em que se pretende estudar a influência da ligação alma/banzo utilizando para o efeito diferentes modelações estruturais.

3.2 - TRANSFORMAÇÃO DE FORÇAS E MATRIZES DE RIGIDEZ

Considerem-se u e u' dois vectores de GDL, satisfazendo a relação (3.1) em que T pode não ser quadrada nem ortogonal. Sejam f e f' dois vectores de forças correspondentes aos GDL u e u' respectivamente.

Uma vez que f' e f representam a mesma força resultante o trabalho realizado por estas forças num deslocamento virtual d , satisfazendo $d = T d'$, deve ser igual e independente do sistema de GDL em causa.

Então, $d'^T f' = d^T f \Leftrightarrow d'^T f' = d'^T T^T f$, e uma vez que esta igualdade tem que ser válida para qualquer deslocamento d' , tem-se que:

$$f' = T^T f \quad (3.2)$$

Partindo destas expressões é fácil obter as transformações necessárias para obter a nova matriz de rigidez:

$$K' u' = f' = T^T K u = T^T K T u' \quad (3.3)$$

donde se retira que:

$$K' = T^T K T \quad (3.4)$$

Note-se que a equação (3.4) não altera a orientação do elemento no sistema de GDL global nem altera as suas propriedades: limita-se a modificar a expressão de K de forma a compatibilizá-la com os novos GDL u' .

As equações (3.1), (3.2) e (3.4) serão a base de todas as transformações descritas neste capítulo.

Repare-se que estas transformações sobre matrizes de rigidez e forças tanto podem ser aplicadas aos vectores solicitação e matriz de rigidez global como aplicadas às matrizes e vectores dos elementos e posteriormente agrupadas na matriz e vectores globais. O tratamento a nível do elemento tem a grande vantagem de permitir lidar com matrizes mais pequenas que permitem uma grande economia de memória.

3.3 - TRANSFORMAÇÕES IMPLEMENTADAS NO PROGRAMA FEMIX

Pretendeu-se dotar o programa FEMIX de um conjunto de transformações sobre GDL capazes de solucionar as situações que mais correntemente surgem na análise estrutural. Para

solucionar o problema das equações adicionais introduzidas pelas transformações de GDL existem vários procedimentos possíveis (Abel & Shephard [1979]; Cook [1989]; Oñate [1992]). Como exemplos de métodos possíveis refere-se o método dos multiplicadores de Lagrange ou das funções de penalidade. Uma descrição sumária destes dois métodos é apresentada no Anexo A.

A metodologia implementada, contudo, baseia-se na aplicação da equação (3.4) efectuando as transformações ao nível do elemento. A opção por este método baseou-se nos processos de resolução do sistema de equações disponíveis no programa e na maior facilidade em manusear as matrizes ao nível do elemento do que a matriz global do sistema. Assim, as transformações são feitas ao nível do elemento e as novas matrizes dos elementos são espalhadas na matriz de rigidez global.

Foram implementadas três transformações distintas: rotações de GDL, restrições lineares de GDL e ligações excêntricas de nós. Este último caso, depois de formulado e calculada a matriz de transformação, pode ser resolvido como uma restrição linear de GDL. Contudo, como se trata de uma ligação entre dois nós e não, explicitamente, entre graus de liberdade, julgou-se preferível separar as duas últimas situações.

As rotações de GDL representam a transformação dum sistema de eixos num outro sistema de eixos que permita representar os deslocamentos da estrutura numa forma mais conveniente.

As restrições de GDL representam relações de interdependência entre diversos GDL da estrutura. No presente trabalho, as restrições de GDL são representadas numa forma explícita, isto é, existe um GDL (designado por dependente) que é obtido como uma combinação linear de outros GDL (designados por mestres). Os restantes GDL serão designados por livres. As equações de restrição deverão ser lineares.

As ligações excêntricas de nós permitem que o campo de deslocamentos de um nó (dependente) seja expresso em função dos deslocamentos de outro nó (mestre). Esta relação depende apenas da distância relativa entre os dois nós. Esta ligação é equivalente a supor os dois nós ligados por um elemento infinitamente rígido de massa nula.

Note-se que enquanto nas rotações de GDL não há qualquer alteração do número de GDL e do tipo de GDL (translações ou rotações) existentes nos nós ou nos elementos, nas equações de restrição de GDL (bem como nas ligações excêntricas de nós) existem GDL (os GDL dependentes) que são eliminados do sistema de equações de equilíbrio da estrutura, provocando uma alteração do número de GDL e eventualmente no tipo de GDL existentes nos nós e nos elementos.

3.3.1 - Rotações de graus de liberdade

As rotações de GDL podem ser de grande utilidade na modelação de vários problemas estruturais. A prescrição de movimentos nodais ou a expressão da igualdade de dois deslocamentos em direcções diferentes da do referencial geral (Fig. 2.1) são duas aplicações possíveis.

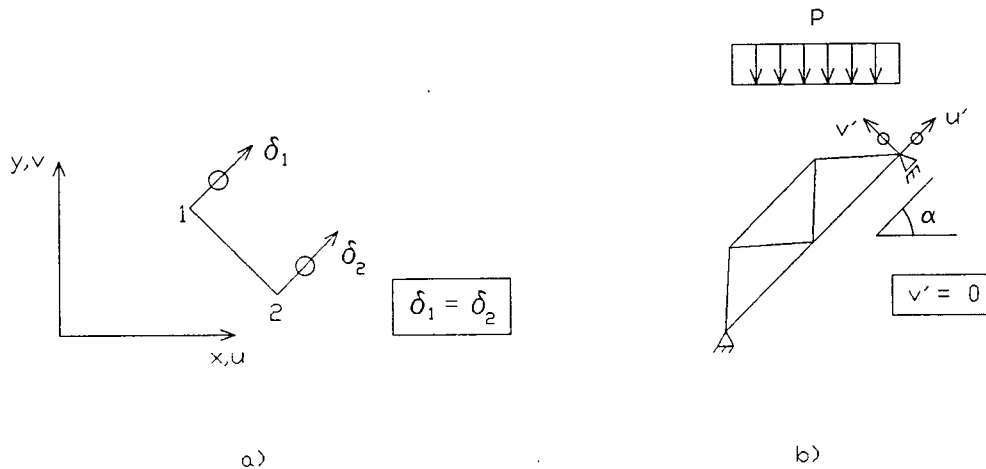


Fig. 3.1 - Rotação de GDL.

Considere-se um nó de uma estrutura, cujos deslocamentos se encontram referenciados no sistema de eixos global, em que se deseja que estes deslocamentos sejam expressos num outro referencial, designado de sistema de eixos local.

Neste caso a equação (3.1) transforma-se, para o nó em causa, em $u_g = T_{lg} u_l$, em que os subscritos g e l designam, respectivamente, os referenciais global e local.

Sejam t_1 , t_2 e t_3 os versores do sistema de eixos local referidos ao sistema de eixos global. Tem-se nesta situação que a matriz de transformação do referencial local para o geral tem a expressão:

$$T_{lg} = [t_1, t_2, t_3] \quad (3.5)$$

A expressão (3.5) é válida qualquer que seja o sistema t_1 , t_2 e t_3 desde que estes vectores sejam linearmente independentes, não sendo necessário que formem uma base ortonormada do espaço em questão.

A matriz de rigidez do elemento deverá ser obtida através da expressão (3.4).

Refere-se seguidamente um exemplo com elementos de estado plano de tensão:

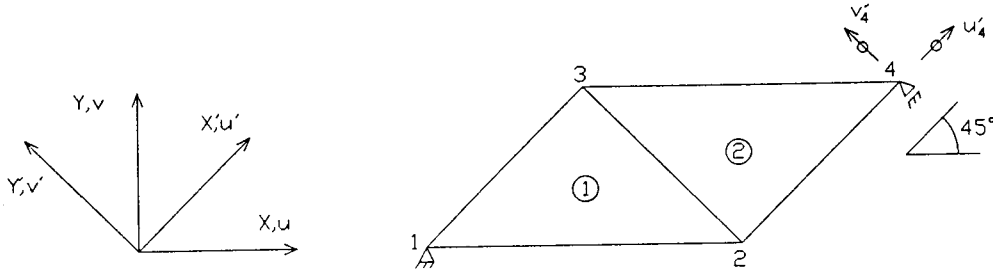


Fig. 3.2 - Apoio inclinado.

No nó 4:

$$\mathbf{t}_1 = \begin{Bmatrix} \cos 45 \\ \sin 45 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{Bmatrix} -\sin 45 \\ \cos 45 \end{Bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{T}_{lg}]_4 = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{T}_{lg} \mathbf{u}'_4$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{32} & K_{34} \\ K_{23} & K_{22} & K_{24} \\ K_{43} & K_{42} & K_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_{lg} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K}'_2 = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{T} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{32} & K_{34} \mathbf{T}_{lg} \\ K_{23} & K_{22} & K_{24} \mathbf{T}_{lg} \\ \mathbf{T}_{lg}^T K_{43} & \mathbf{T}_{lg}^T K_{42} & \mathbf{T}_{lg}^T K_{44} \mathbf{T}_{lg} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

em que K_i representa a matriz de rigidez do elemento i e K_{jk} submatrizes referentes aos nós j e k . A nova matriz de rigidez $\mathbf{K}'_2$ já se encontra referida aos GDL $\mathbf{u}'_4$ e $\mathbf{v}'_4$, sendo ainda necessário transformar o vector solicitação através de:

$$\mathbf{f}'_4 = \mathbf{T}_{lg}^T \mathbf{f}_4 \quad (3.9)$$

A aplicação das rotações de GDL a nós pertencentes a elementos de casca obriga a algumas considerações adicionais devido à existência de dois tipos de nós na estrutura. Assim, quando o nó em causa pertence a um elemento de casca e é coplanar, as suas rotações encontram-se referidas a um referencial nodal, em princípio diferente do referencial local ou geral. Nesta situação, o nó deverá ser considerado como não coplanar para que se possa utilizar a matriz de transformação definida em (3.5). Pode ocorrer que com a técnica descrita, uma direcção do novo referencial local seja coincidente com a direcção normal ao elemento em causa, não existindo rigidez rotacional segundo esta direcção, o que exige que a rotação segundo esta direcção deva ser impedida, afim de evitar a singularidade da matriz de rigidez. Neste caso, visto o nó ser declarado como não coplanar, nenhum GDL será declarado fixo o que origina (atente-se que uma das direcções do novo referencial é coincidente com a normal ao elemento não existindo por isso rigidez de rotação segundo esta direcção) a que a matriz de rigidez do

elemento transformada para o referencial geral tenha uma linha e coluna de zeros. Para evitar problemas na resolução do sistema deve-se impedir a rotação em torno da normal ao elemento.

3.3.2 - Restrições lineares de graus de liberdade

As equações de restrição de GDL possuem um vasto campo de aplicação na modelação de problemas estruturais. Como exemplo podem-se referir a transformação de rotações em translações (Fig. 3.3), a consideração de pisos rígidos em edifícios, a simulação de rótulas em estruturas contínuas, etc..

Definindo um algoritmo para resolução das restrições de GDL e implementando-o num programa de cálculo de estruturas é possível a introdução posterior de casos particulares em que seja mais fácil fornecer outros dados, que não os coeficientes dos GDL mestre, e obter de forma automática as equações de restrição.

A equação (3.1) para as restrições de GDL toma a forma $\mathbf{u}_d = \mathbf{T}_{md} \mathbf{u}_m$, em que os subscritos d e m referem-se aos GDL dependentes e aos GDL mestres, respectivamente. A matriz $\mathbf{T}_{md}$ pode ser qualquer, não necessitando ser quadrada.

A existência de GDL dependentes provoca uma redução do número de equações a resolver (a correspondente linha e coluna da matriz de rigidez são nulas), tendo como contrapartida o facto das equações de restrição poderem aumentar significativamente a semibanda do sistema de equações, facto este capaz de provocar um aumento significativo do tempo de resolução do sistema de equações bem como da dimensão da matriz de rigidez global. A utilização de processos alternativos na resolução do sistema de equações (por exemplo o método dos gradientes conjugados) pode atenuar estes efeitos adversos (ver Capítulo 2).

A largura original da semibanda é dada pela diferença entre o maior e o menor GDL de cada elemento. No cálculo da nova semibanda é necessário ter em consideração que se um GDL for dependente, a diferença será não entre este GDL e os restantes do elemento mas entre os GDL mestres do GDL dependente e os restantes GDL do elemento.

Para implementação deste processo utilizou-se um vector com o estado de cada GDL (livre, mestre, dependente) e uma lista para cada GDL dependente dos respectivos GDL mestres.

Os GDL dependentes são automaticamente declarados como fixos deixando de contribuir para a dimensão do sistema de equações. Note-se que tratando-se de GDL correspondendo às rotações de nós pertencentes a elementos de casca (no caso do nó ser coplanar) as rotações vêm expressas no referencial nodal, sendo por isso necessário um cuidado adicional na formulação das equações de restrição.

Para se obter a nova matriz de rigidez do elemento recorre-se à equação (3.4).

Salienta-se que o facto de T_{md} poder ser uma matriz não quadrada faz com que seja necessário dimensionar a matriz de rigidez para os novos GDL que vão "pertencer" ao elemento. Cada GDL dependente pertencente ao elemento origina um aumento de $(n - 1)$ linhas e colunas na matriz de rigidez do elemento, em que n é o número de GDL mestres correspondente ao GDL dependente que não pertençam ao elemento, nem tenham sido contabilizados noutro GDL dependente do elemento.

Considere-se a matriz de rigidez dum elemento referida aos GDL u_1, u_2, u_3 e u_4 , tendo a dimensão 4x4, em que os GDL u_2 e u_4 podem ser expressos como:

$$u_2 = a u_5 + b u_6 + c u_7 \quad (3.10.a)$$

$$u_4 = d u_5 + b u_8 \quad (3.10.b)$$

O GDL u_2 faz aumentar a dimensão da matriz de rigidez para 6x6 ($4 - 1 + 3 = 6$) e o GDL u_4 não altera esta dimensão ($6 - 1 + 1 = 6$), visto apenas introduzir u_8 como novo GDL do elemento.

Atente-se na Fig. 3.3 que representa uma peça discretizada com elementos de estado plano de tensão e elementos de viga:

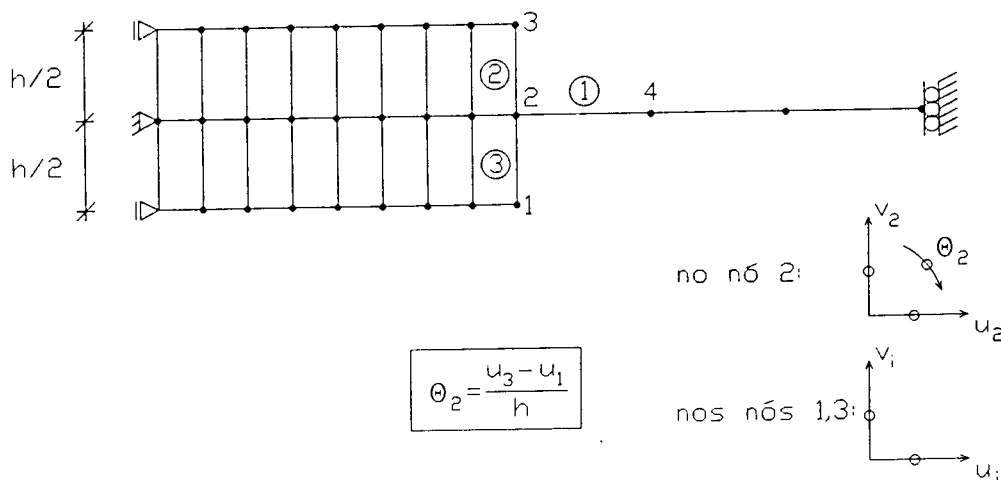


Fig. 3.3 - Restrições de GDL.

As equações (3.1) para o elemento 1 (elemento de viga) serão expressas por:

$$\mathbf{u}_d = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/h & 1/h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{md} \mathbf{u}_m \quad (3.11)$$

nas quais a rotação θ_2 foi transformada nas translações u_1 e u_3 .

Repare-se que a matriz de rigidez do elemento 1 tem a dimensão (7x7) enquanto a matriz de rigidez original tinha (6x6). Repare-se ainda que para a numeração de nós apresentada a semibanda era 7 ($\theta_4 = \delta_9, u_2 = \delta_3$) e a semibanda da nova matriz de rigidez é 9 ($\theta_4 = \delta_9, u_1 = \delta_1$).

3.3.3 - Ligação excêntrica de nós

Por ligação excêntrica de nós, designa-se neste trabalho a ligação entre dois nós tal que as rotações, no sistema de eixos global, sejam as mesmas e que as translações do nó dependente sejam iguais às do nó mestre acrescida de uma parcela devida à rotação deste e à distância relativa entre os dois nós.

A equação geral de transformação de GDL (equação 3.1) pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{u}_d = \begin{Bmatrix} u_d \\ v_d \\ w_d \\ \theta_{xd} \\ \theta_{yd} \\ \theta_{zd} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\Delta_z & \Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & \Delta_z & 0 & -\Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta_y & \Delta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \\ \theta_{xm} \\ \theta_{ym} \\ \theta_{zm} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{ec} \mathbf{u}_m \quad (3.12)$$

em que Δ_x , Δ_y e Δ_z representam as excentricidades segundo os eixos globais X , Y e Z respectivamente.

Como os GDL $\mathbf{u}_d$ são distintos dos GDL $\mathbf{u}_m$ e são eliminados da estrutura, esta situação pode ser tratada como um caso particular da restrição de GDL, na qual é possível escrever as equações de restrição ao nível dos GDL de uma forma automática conhecendo Δ_x , Δ_y e Δ_z para cada par de nós ligados excêntricamente.

Também nesta transformação de GDL a utilização de dois tipos de nós nos elementos de casca (nós coplanares e não coplanares) obriga a tomar algumas precauções no tratamento das excentricidades quando aplicadas a nós coplanares de elementos de casca. Para evitar erros na aplicação das excentricidades nos nós coplanares recorreu-se à técnica de declarar automaticamente como nós não coplanares todos os nós que possuam ligações excêntricas. Isto implica que a equação (3.12) seja válida também para estes nós sem ser preciso aplicar transformações adicionais para rodar a equação (3.12) do referencial geral para os referenciais locais associados aos nós em questão.

Faz-se notar que as ligações excêntricas podem ser fonte de incorrecção do comportamento do modelo de elementos finitos. Gupta [1977], refere que no modelo de viga ligada excentricamente a uma casca (Fig. 3.4) para o modo de deformação correspondente a todos os deslocamentos serem nulos excepto o vertical, a aplicação da matriz T_{ec} definida em (3.12) implica que todos os deslocamentos da viga são nulos excepto o deslocamento vertical. Verifica-se que, neste caso, a rigidez da associação viga/casca corresponde à soma das rigidezes dos dois elementos e não uma rigidez combinada que represente o funcionamento em torno de um eixo neutro comum.

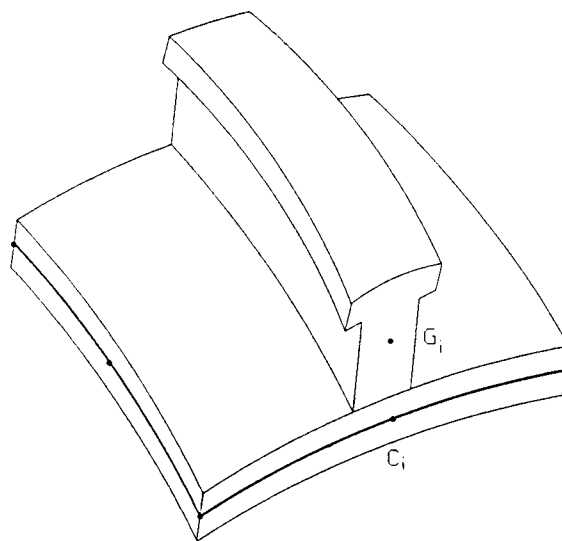


Fig. 3.4 - Viga ligada excentricamente a uma casca (O nó G_i encontra-se excentricamente ligado ao nó C_i).

Uma outra incorrecção prende-se com o facto da ligação entre elementos de viga e elementos de casca através de ligações excêntricas assegurar apenas continuidade de deslocamentos (Bouberguig [1983]) não existindo continuidade de esforços normais nem de esforço de corte. A existência do esforço de corte nulo na interface viga/casca (Fig. 3.5) pode nomeadamente provocar uma sobreavaliação dos deslocamentos.

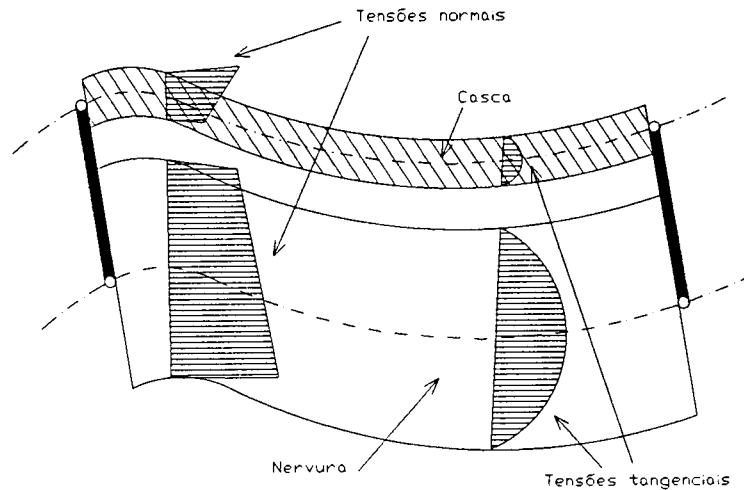


Fig. 3.5 - Descontinuidades dos esforços normais e de corte na interface viga/casca.

Refere-se por fim, que as incorrecções mencionadas não são necessariamente fonte de erros significativos (Gupta [1977], Cook [1989]). Pensou-se porém que o conhecimento da sua existência é importante para uma correcta compreensão do modelo utilizado.

3.4 - IMPLEMENTAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE GRAUS DE LIBERDADE NUM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

As transformações de GDL podem, para efeitos de implementação num programa de elementos finitos, ser divididas em dois grupos: as rotações e as restrições lineares de GDL. Esta distinção prende-se com o facto dos GDL envolvidos nas rotações representarem o mesmo deslocamento, isto é, tanto os GDL u como os GDL u' referem-se às componentes que traduzem o campo de deslocamentos de um dado ponto da estrutura, enquanto nas restrições lineares de GDL os vectores envolvidos nos dois membros da equação (3.1) representarem campos de deslocamentos de pontos distintos da estrutura.

Repare-se que para implementação das rotações de GDL bastará apenas, uma vez calculadas as matrizes de rigidez elementares e o vector solitação, proceder às transformações (3.2) e (3.4) para obter as novas matrizes de rigidez e o novo vector solitação. Já a introdução das restrições lineares de GDL obriga a algumas operações adicionais e que se podem sintetizar da seguinte forma:

- 1) declarar os GDL dependentes como apoios fixos;
- 2) cálculo da nova semibanda;
- 3) determinação da lista de GDL que cada elemento contém atendendo a que um dado GDL pode ser dependente;

- 4) cálculo da maior dimensão das matrizes de rigidez elementares;
- 5) determinação da lista de elementos que possui cada GDL;
- 6) transformação das matrizes de rigidez elementares;
- 7) agrupamento das matrizes de rigidez elementares;
- 8) transformação dos vectores solicitação.

Com a introdução das restrições lineares de GDL o tratamento dado aos GDL da estrutura passa a ter que ser feito de forma individual, deixando cada GDL de estar univocamente relacionado com um dado nó da estrutura. Isto origina que o espalhamento das matrizes de rigidez elementares na matriz de rigidez global seja efectuada tendo em conta a lista efectiva de GDL que cada elemento possui, dado que se um elemento tiver um GDL dependente, os GDL associados a este elemento são os GDL que o elemento já possui mais os GDL mestre que o elemento ainda possua. É por esta razão que a semibanda do sistema pode ser significativamente aumentada.

3.5 - ANÁLISE DE UMA VIGA EM T

O exemplo estudado refere-se a uma viga em "T" com a geometria base indicada na Fig. 3.6. Pretendeu-se estudar o desempenho comparado de diferentes modelações utilizando diferentes tipos de elementos finitos. Foram utilizados quatro modelos de elementos finitos: elementos de estado plano de tensão, elementos de volume, elementos de casca e elementos de casca mas efectuando uma ligação excêntrica entre os nós do banzo e da alma (Fig. 3.7 e 3.8).

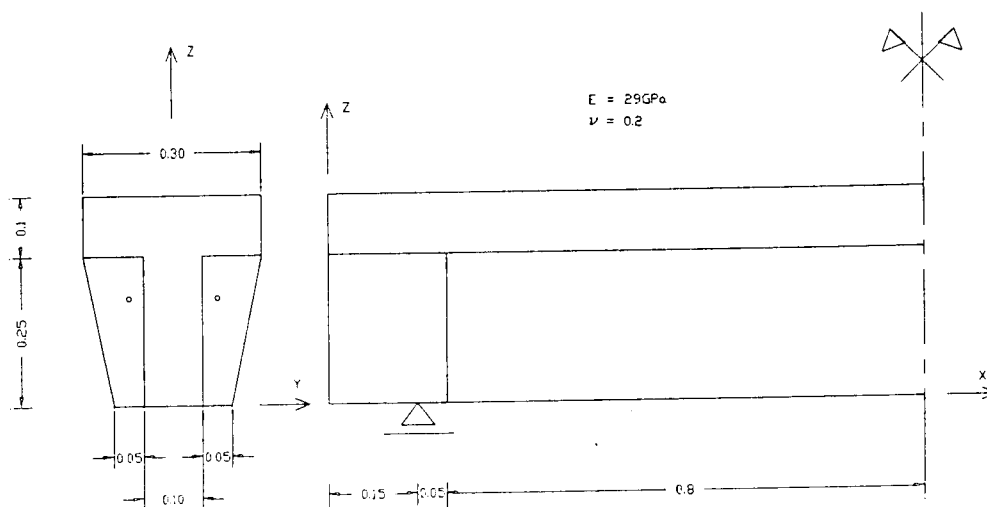
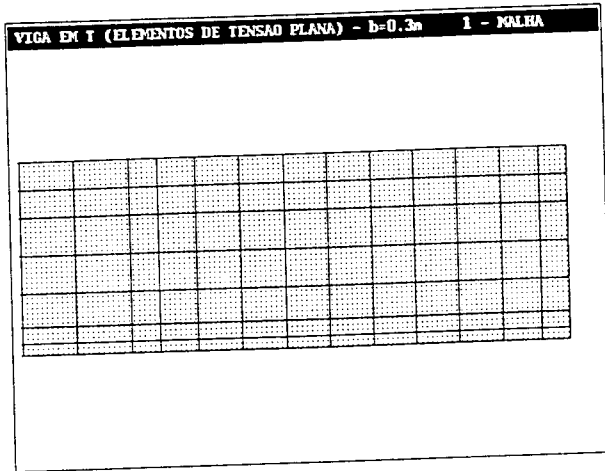
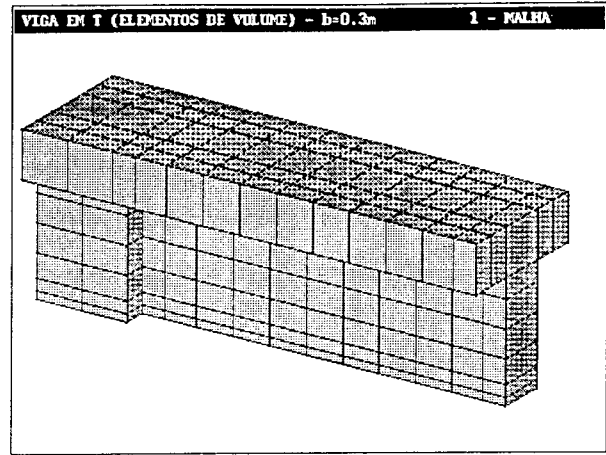


Fig. 3.6 - Viga em T (geometria).

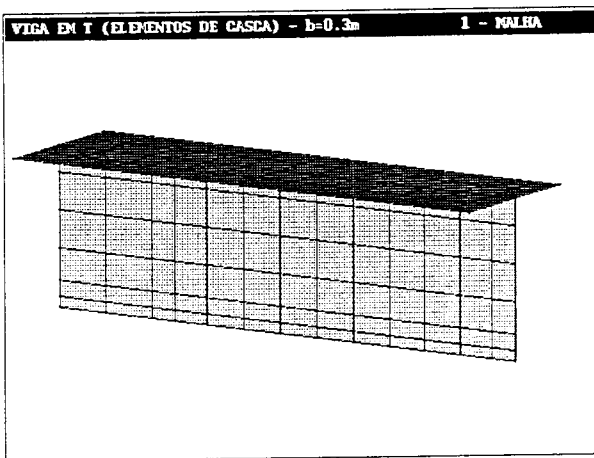


a) elementos planos

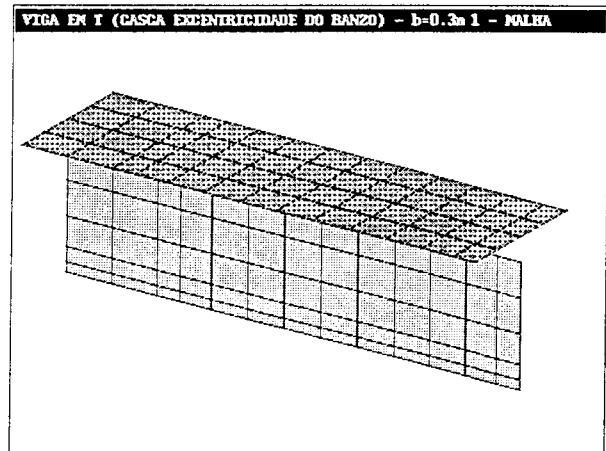


b) elementos de volume

Fig. 3.7 - Viga em T (malha de elementos finitos utilizando elementos planos e elementos de volume - largura do banzo igual a 0.3m).



a) elementos casca

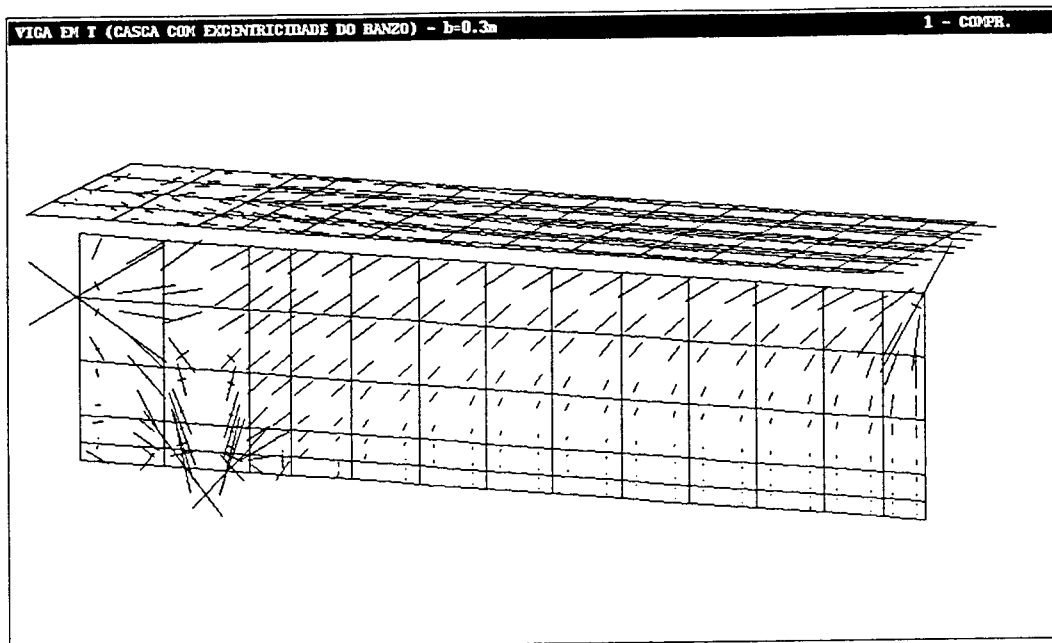


b) elementos de casca com excentricidade

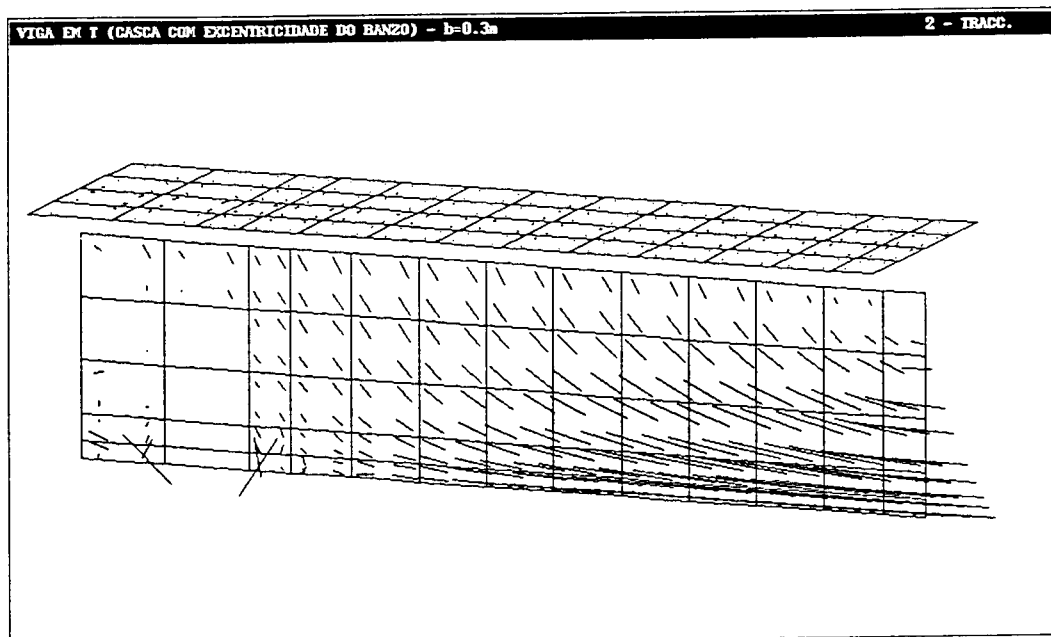
Fig. 3.8 - Viga em T (malhas de elementos finitos utilizando elementos de casca - largura do banzo igual a 0.3m).

Foram estudadas variações à geometria inicial da estrutura que consistiram na variação da largura do banzo dos 0.1m aos 1.0m. Pretendia-se avaliar a influência da forma de ligação alma/banzo nos deslocamentos finais da estrutura.

A solicitação aplicada consistiu numa força concentrada a meio vão de 270kN e numa força horizontal aplicada a 18cm do bordo inferior da viga (simulação de pré-esforço exterior) de 200kN, para além do peso próprio.

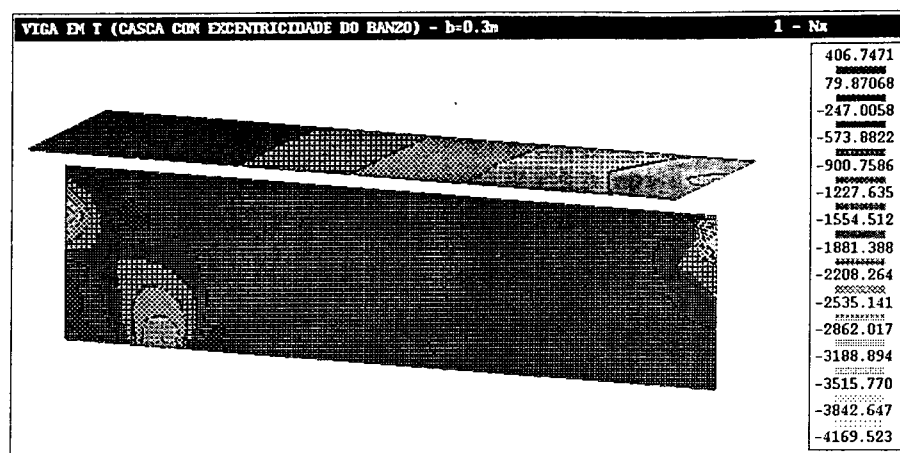


a) esforço de compressão

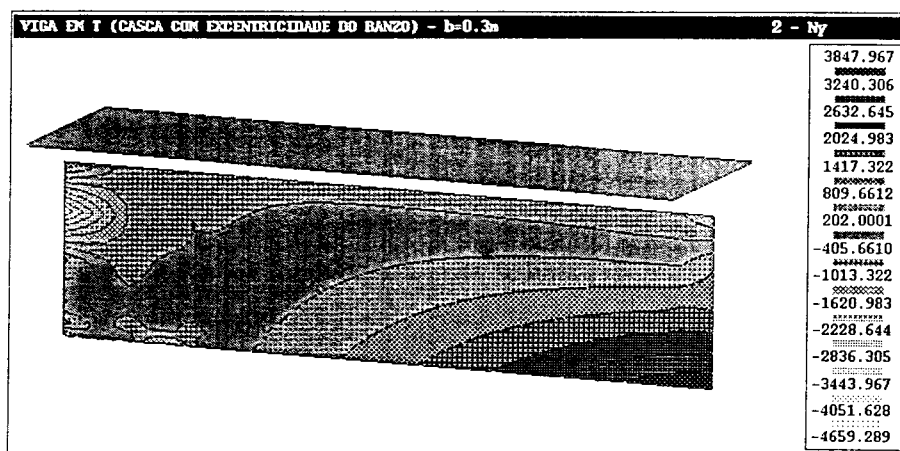


b) esforço de tracção

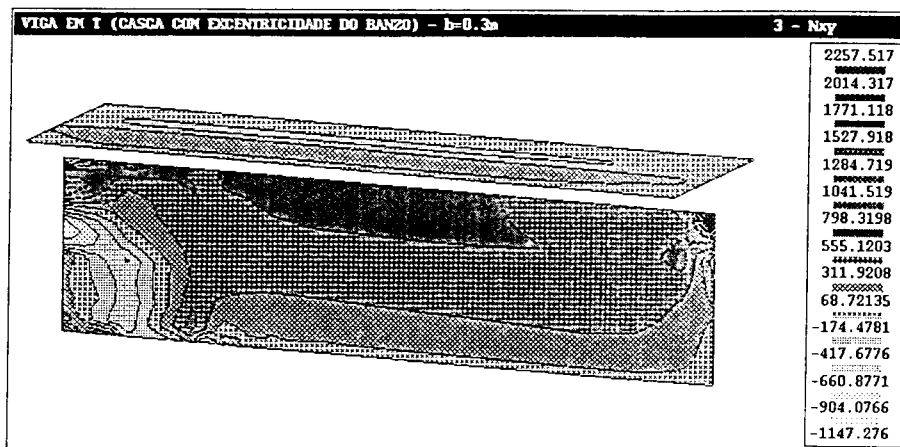
Fig. 3.9 - Viga em T (esforços principais de membrana).



a) esforço N_x



b) esforço N_y



c) esforço N_{xy}

Fig. 3.10 - Viga em T (esforços de membrana).

A análise dos diagramas de esforços principais e das pixelagens de esforços (Fig. 3.9 e Fig. 3.10) ilustram claramente a formação de uma biela de compressão entre o ponto de aplicação do pré-esforço e o apoio vertical. A grande concentração de tensões verificada nesta zona justifica o alargamento da secção. Na zona referida existem também elevados esforços de corte.

A comparação dos deslocamentos para as diferentes modelações (Fig. 3.11 e 3.12) permite observar que as duas situações em que foram utilizados elementos casca convergem à medida que o banzo vai aumentando (13 % de diferença para $b = 0.1 m$ e 1% para $b = 1.0 m$). Este facto deve-se a que para pequenos valores da largura do banzo, a utilização de elementos casca em que o banzo se encontra directamente ligado à alma implica uma grande sobreposição de matéria na zona de ligação com o consequente aumento de rigidez e redução dos deslocamentos.

Verifica-se assim que a ligação directa alma/banzo utilizando elementos de casca, quando comparada com a ligação excêntrica dá resultados semelhantes excepto se a largura do banzo for muito pequena. Contudo, para larguras do banzo da ordem de grandeza da espessura da alma não parece muito correcto a discretização da viga com elementos de casca sendo preferível enveredar pelo estudo com elementos de tensão plana ou elementos de volume.

O estudo comparativo das modelações com elementos casca com as modelações utilizando elementos planos e elementos de volume permite observar uns resultados mais interessantes.

Observa-se assim que quando se considera o deslocamento vertical do eixo, a modelação com elementos planos afasta-se progressivamente das restantes modelações à medida que vai aumentando a largura do banzo. Por outro lado, observa-se que quando se estuda o deslocamento horizontal do apoio a modelação com elementos de volume também se afasta da modelação com elementos de casca (2.2% de diferença para $b = 0.2 m$ e 4.3% para $b = 1.0 m$), tendo uma trajectória mais aproximada à modelação com elementos planos.

Se o afastamento da curva dos elementos planos das restantes no que respeita ao deslocamento vertical do meio vão é um efeito esperado (dado que os elementos que modelam os banzos possuem uma grande espessura e são por esse facto excessivamente rígidos) já a aproximação da curva dos elementos de volume à curva dos elementos planos quando se observa o deslocamento horizontal causa alguma estranheza. Numa tentativa de interpretar esta situação procedeu-se ao estudo em separado das acções horizontais (simulação de pré-esforço exterior) e das acções verticais (peso próprio mais carga concentrada a meio vão). Os resultados obtidos para $b = 0.2 m$ e $b = 1.0 m$ encontram-se no Quadro 3.I. Constata-se assim que para as acções verticais a diferença entre estas duas modelações é de apenas 0.5%

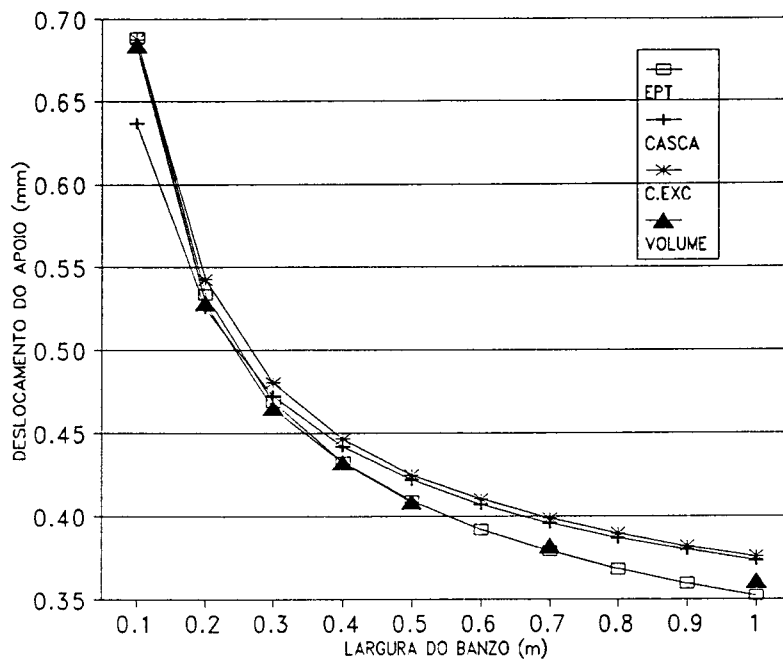


Fig. 3.11 - Viga em T (deslocamentos horizontais do apoio - comparação entre as diferentes modelações para as diversas larguras do banzo consideradas).

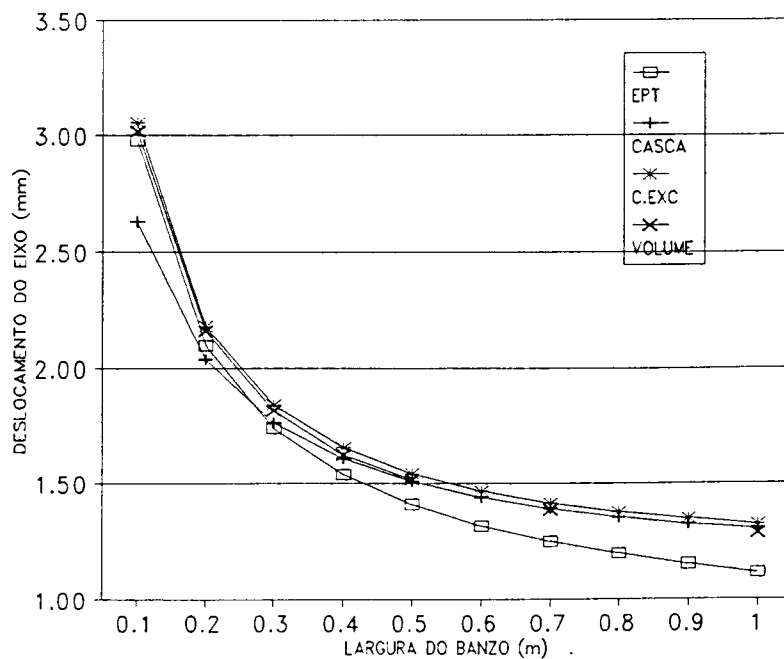


Fig. 3.12 - Viga em T (deslocamentos verticais do meio vão - comparação entre as diferentes modelações para as diversas larguras do banzo consideradas).

para $b = 1.0\text{ m}$ (contra 4.3% no caso de se considerarem simultaneamente as duas solicitações) e de 0.7% para $b = 0.2\text{ m}$ (contra 2.2%) o que permite concluir que a diferença encontrada se fica a dever ao efeito provocado pelas acções horizontais. Verifica-se também que a influência das acções horizontais no deslocamento horizontal do apoio aumenta à medida que a largura do banzo aumenta (24% do deslocamento provocado pelas acções verticais para $b = 0.2\text{ m}$ e 35% para $b = 1.0\text{ m}$) e que o deslocamento vertical do eixo é muito menos influenciado por estas mesmas acções (5% do deslocamento provocado pelas acções verticais para $b = 0.2\text{ m}$ e 15% para $b = 1.0\text{ m}$).

Quadro 3.I - Viga em T (estudo em separado das acções verticais e horizontais para elementos de volume e elementos de casca com ligação excêntrica do banzo à alma).

Acções	Elemento	Deslocamento (mm)			
		Do apoio		Do eixo	
		$b = 0.2$	$b = 1.0$	$b = 0.2$	$b = 1.0$
Verticais (p.p. + carga a meio vão)	Casca	-0.70613	-0.55581	-2.29053	-1.52491
	Volume	-0.71074	-0.55304	-2.28187	-1.52495
Horizontais (pré-esforço exterior)	Casca	0.16864	0.19269	0.11236	0.2017
	Volume	0.17595	0.18001	0.11842	0.23257

Em face do exposto parece ser possível concluir que as diferentes modelações provocam variações na posição do centro de gravidade da secção e, consequentemente, a aplicação da força horizontal origina um momento (que vai crescendo à medida que a largura do banzo aumenta). Este momento provoca deslocamentos que são mais notados no deslocamento horizontal do apoio. Contudo é também possível observar um afastamento das curvas do deslocamento vertical do eixo (referentes aos elementos de volume e aos elementos casca), ainda que não tão pronunciado como no caso do deslocamento horizontal do apoio.

Esta diferença entre as posições do centro de gravidade das duas secções fica a dever-se, no caso dos elementos casca, às forças de membrana serem uniformemente distribuídas na espessura do banzo enquanto nos elementos de volume existe uma variação das tensões na espessura do banzo, provocando assim uma variação do ponto de aplicação das forças resistentes.

A utilização de elementos de volume permite ainda a possibilidade de se efectuarem estudos mais detalhados de zonas, como o maciço junto ao apoio, com características marcadamente distintas das de peça linear. Para a zona de aplicação do pré-esforço foram obtidas as pixelagens de tensões normais segundo o eixo da viga - σ_x - e segundo a normal à alma - σ_y - que permitem avaliar a variação das tensões na face de aplicação das cargas (Fig. 3.13).

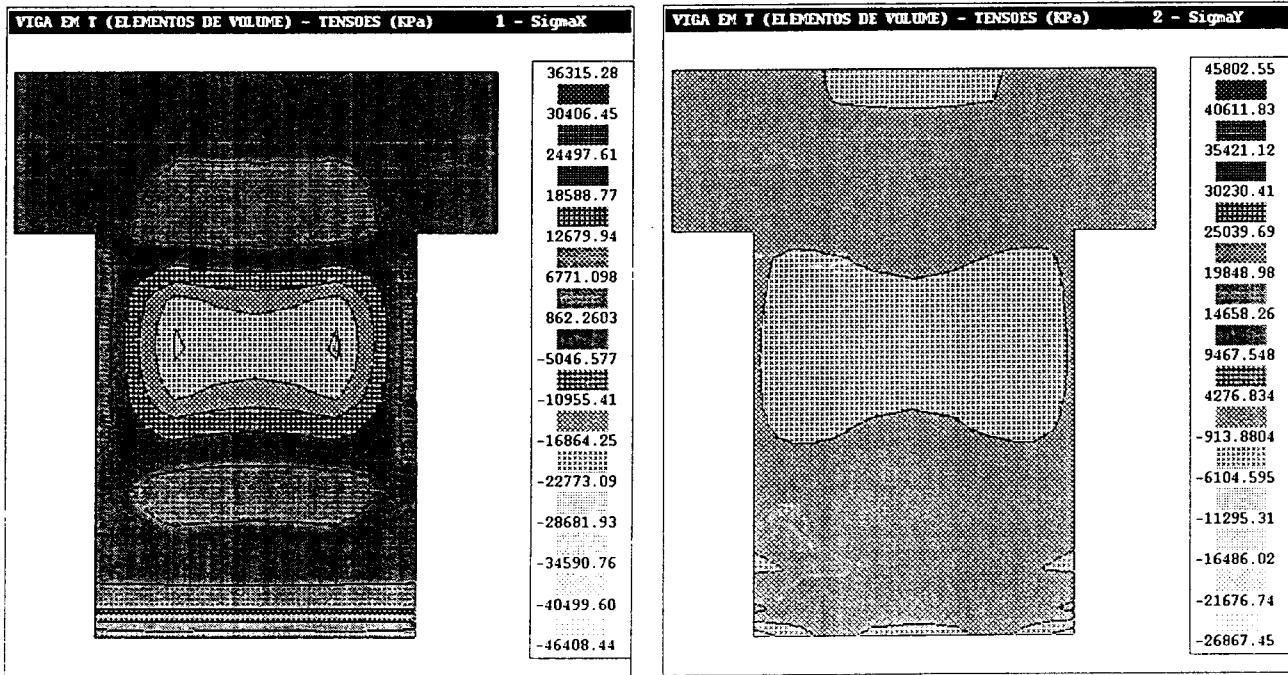


Fig. 3.13 - Viga em T (tensões σ_x e σ_y na face de aplicação do pré-esforço exterior).

CAPÍTULO 4

UNIÃO DE ELEMENTOS DE DIFERENTES TIPOS

4.1 - INTRODUÇÃO

O cálculo de estruturas complexas é usualmente executado decompondo a estrutura em subestruturas simples e fáceis de calcular, recorrendo-se a aproximações para determinar a interação entre os diversos elementos estruturais. Existem no entanto situações para as quais é importante a consideração do funcionamento global da estrutura não só em termos de segurança como também em termos económicos.

A utilização de programas utilizando o método dos elementos finitos para calcular estruturas complexas exige muitas vezes a necessidade de utilizar simultaneamente elementos de diversos tipos. Cada tipo de elemento apresenta características (deslocamentos e tensões/esforços) que o tornam indicado para modelar diferentes elementos estruturais, sendo por isso importante um adequado conhecimento do comportamento e das hipóteses em que se baseia a formulação dos elementos para que as interações entre eles possam ser bem estabelecidas. A utilização simultânea de vários tipos de elementos, obriga também a que os referenciais associados aos GDL dos elementos sejam definidos numa forma coerente.

Ao longo deste capítulo são discutidos diversos processos que permitem a utilização simultânea de diferentes tipos de elementos. São apresentadas as principais alterações que é necessário efectuar num programa de elementos finitos para que possa ser implementado o método de união de elementos adoptado (o programa possui já a possibilidade de utilizar as transformações de GDL descritas no Capítulo 3). Por fim, apresenta-se uma generalização da formulação de alguns elementos 2D (lajes e elementos de tensão plana) para que possam ser utilizados em estruturas 3D. O comportamento destes elementos é avaliado através do estudo de um edifício de dois pisos no qual foram utilizados vários tipos de elementos.

4.2 - DIFERENTES FORMAS DE UNIÃO DE ELEMENTOS

A utilização simultânea de elementos de diferentes tipos em programas de elementos finitos utilizando uma formulação de deslocamentos pressupõe apenas que os elementos a unir tenham os mesmos GDL por nó. Assim, da mesma forma que é possível utilizar simultaneamente elementos do mesmo tipo mas com formas diferentes (por exemplo

elementos triangulares e quadrangulares), também a utilização de elementos de diversos tipos mas possuindo os mesmos GDL por nó (como é o caso de elementos de barra tridimensional e elementos de volume) não apresenta qualquer dificuldade.

Para que um programa permita utilizar simultaneamente elementos de diferentes tipos mas possuindo os mesmos GDL por nó basta apenas que as características de cada elemento sejam formuladas no ficheiro de dados sendo o cálculo das matrizes de rigidez e vectores solicitação dirigido para subrotinas apropriadas a cada tipo de elemento. O agrupamento das matrizes de rigidez elementares na matriz de rigidez global não apresenta qualquer dificuldade sendo mínimas as alterações a efectuar às subrotinas existentes.

Se os elementos a utilizar não possuírem os mesmos GDL por nó, será necessário compatibilizar os campos de deslocamento dos diversos elementos ao longo da interface. A compatibilização entre os diversos elementos poderá ser efectuada por dois processos distintos: a introdução de elementos na interface (elementos de transição) que possuam nós com GDL distintos que poderão partilhar com os restantes elementos sem qualquer problema ou o estabelecimento de equações de compatibilidade (impondo um determinado campo de deslocamentos na interface) em que intervenham os diversos GDL envolvidos.

Qualquer um dos processos referidos levanta questões que serão discutidas ao longo do presente capítulo.

4.2.1 - Elementos de transição

Os elementos de transição são elementos que se colocam entre os elementos a unir e que possuem nós com GDL distintos consoante os elementos que se destinam a unir. Desta forma todos os nós pertencentes a elementos de diferentes tipos possuem os mesmos GDL.

Existe um elevado número de possibilidades de ligação entre elementos de diferentes tipos o que implica que um programa que utilize este processo como forma geral de simular a interface entre elementos deverá obrigatoriamente possuir muitos tipos diferentes de elementos de transição.

O programa de elementos finitos DIANA (Delft [1990]) apresenta elementos de transição para modelar a ligação casca/sólido (Fig. 4.1). Os elementos utilizados possuem nós com 5 GDL (nós c) e com 3 GDL (nós s) consoante os nós se destinem a ligar a elementos de casca ou a elementos de volume, respectivamente. É necessário que seja especificada a espessura nos nós c . Estes elementos permitem não só assegurar a continuidade de deslocamentos como também permitem uma análise das tensões na zona de transição dos elementos.

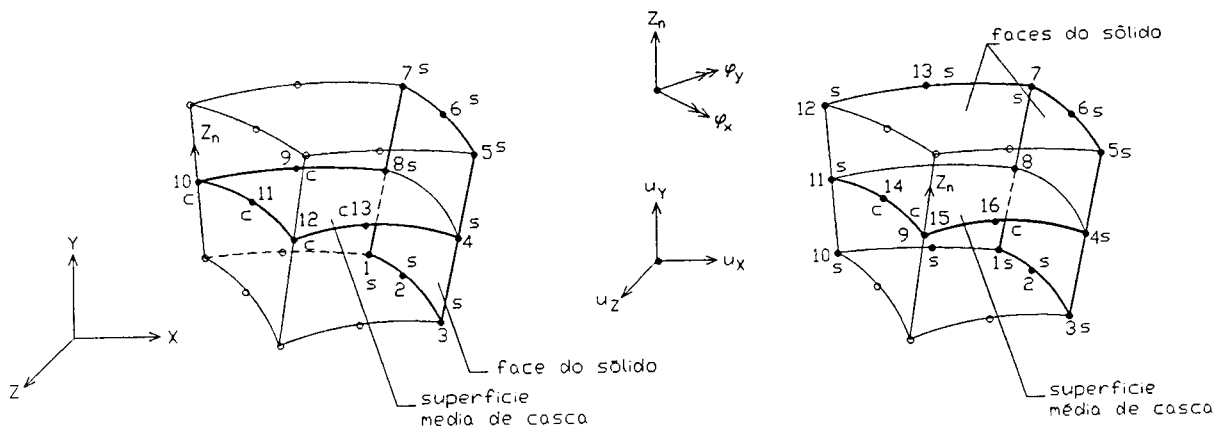


Fig. 4.1 - Elementos de transição casca/sólido.

Uma outra forma de ligação casca/sólido (Fig. 4.2.a) pode ser efectuada através da utilização de elementos de junta. Estes elementos (Beer [1985]) permitem simular superfícies de escorregamento entre os elementos a ligar. Impondo elevados valores de rigidez tangente à superfície de união obtém-se uma ligação entre elementos em que praticamente não existe escorregamento entre os elementos. Como pode ser observado, é necessário um elevado esforço ao nível da formulação de elementos para cobrir um número razoável de possibilidades de união de elementos, o que de algum modo inviabiliza este modo de ligação entre elementos com GDL distintos.

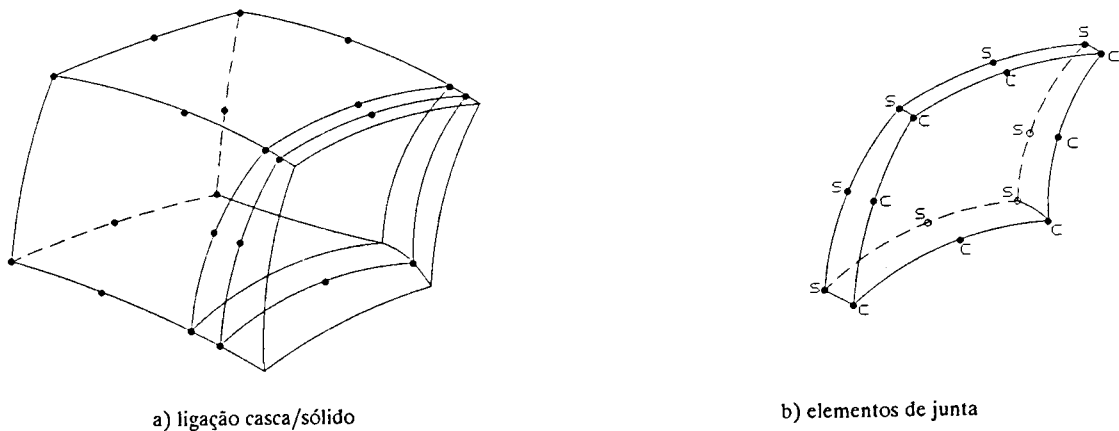


Fig. 4.2 - Elementos de junta como elementos de transição casca/sólido.

4.2.2 - Campos de deslocamentos impostos

O processo consiste em considerar os nós separados ao longo da interface e impôr equações de compatibilidade entre os diversos GDL envolvidos. Se as equações de

compatibilidade forem lineares em ordem aos GDL podem ser resolvidas como transformações lineares de GDL.

O grande problema associado a este processo reside em saber qual o campo de deslocamentos a impôr à ligação de forma a representar correctamente a realidade do problema. Com efeito, o campo de deslocamentos escolhido será sempre uma aproximação do campo de deslocamento real, o que torna difícil uma caracterização *à priori* das equações de compatibilidade. Analize-se a Fig. 4.3 que representa um troço de uma viga discretizada com elementos de estado plano de tensão e elementos de viga (Henriques [1991]). O elemento

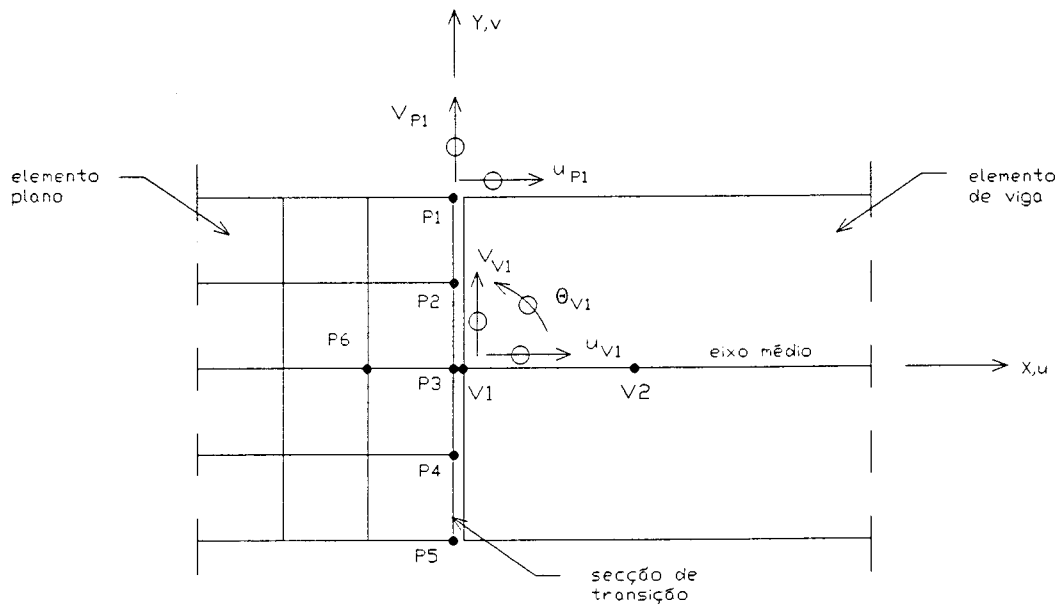


Fig. 4.3 - Troço de viga (transição entre discretização com elementos de viga e elementos planos).

de viga é formulado de acordo com a teoria de Timoshenko, ou seja, as secções da viga deformada mantêm-se planas após a deformação mas não necessariamente perpendiculares ao eixo da viga, como forma de admitir deformações por corte. O processo apresentado para compatibilizar os deslocamentos dos pontos P_i com os deslocamentos do ponto V_1 consistiu em fazer com que estes pontos se mantivessem sobre uma recta, tal como na teoria da viga de Timoshenko. Isto implica que os deslocamentos dos pontos P_i possam ser expressos como:

$$\begin{Bmatrix} u_{P_i} \\ v_{P_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{P_i} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{v1} \\ v_{v1} \\ \theta_{v1} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

No entanto, existem situações para as quais poderia ser preferível considerar que em termos médios os deslocamentos dos pontos P_i apresentassem as características da viga de Timoshenko:

$$\begin{pmatrix} u_{v1} \\ v_{v1} \\ \theta_{v1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{P3} \\ v_{P3} \\ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 (u_{P_i} / \gamma_{P_i}) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

o que permite dizer que em termos médios a secção se mantém plana.

Este exemplo muito simples ilustra as dificuldades existentes no domínio da sistematização da formulação das equações de compatibilidade de deslocamentos.

Um processo de tentar encontrar de forma automática as equações que permitam compatibilizar as translações e as rotações baseia-se no facto das rotações poderem ser expressas em função das translações através de:

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) , \quad (4.3.a)$$

$$\theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) , \quad (4.3.b)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) , \quad (4.3.c)$$

sendo por isso possível em qualquer ponto de um elemento calcular as rotações em função dos deslocamentos nodais do elemento. Os deslocamentos num ponto podem ser obtidos a partir dos deslocamentos nodais através de:

$$u = \sum_i N_i u_i , \quad (4.4.a)$$

$$v = \sum_i N_i v_i , \quad (4.4.b)$$

$$w = \sum_i N_i w_i . \quad (4.4.c)$$

As derivadas em relação às coordenadas globais:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial s} r_i , \quad r = u, v, w , \quad s = x, y, z \quad (4.5)$$

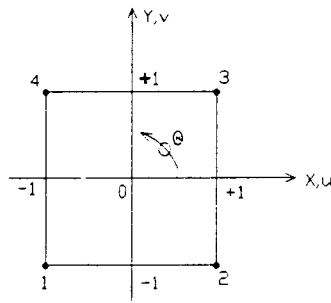
podem ser obtidas atendendo a que:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}, \quad (4.6)$$

em que $\mathbf{J}$ é o Jacobiano da transformação e pode ser obtido de acordo com a expressão (4.7).

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Considere-se o elemento plano de 4 nós representado na Fig. 4.4, no qual se deseja calcular a rotação do nó 1.



$$N_1 = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+x)(1-y)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+x)(1+y)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-x)(1+y)$$

Fig. 4.4 - Elemento plano de 4 nós.

As derivadas não nulas, no ponto 1, das funções N_i são:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{4}(1-y) = -\frac{1}{2} \quad (4.8.a)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = -\frac{1}{4}(1-x) = -\frac{1}{2} \quad (4.8.b)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{4}(1-y) = \frac{1}{2} \quad (4.8.c)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{1}{4}(1-x) = \frac{1}{2} \quad (4.8.d)$$

As derivadas dos deslocamentos valem:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial y} u_4 = \frac{-u_1 + u_4}{2} \quad (4.9.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 = \frac{-v_1 + v_2}{2} \quad (4.9.b)$$

Obtendo-se finalmente para θ_1 a expressão:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{2} - \frac{u_4 - u_1}{2} \right) \quad (4.10)$$

O processo merece, contudo, alguns comentários pois não assegura a compatibilidade de rotações entre elementos (a rotação num dado nó calculada através de dois elementos é diferente) nem garante que os deslocamentos mobilizados para representar a rotação do nó envolvam de facto toda a zona a ligar.

A solução do primeiro problema apresentado poderá passar pela consideração, nos nós que pertencem a mais do que um elemento, da média das rotações calculadas através dos diversos elementos, contudo, existe a possibilidade de haver situações em que tal não seja desejável.

O segundo problema é de resolução mais difícil e pode ser explicado olhando mais uma vez para a viga da Fig. 4.3 . Com a malha representada, apenas os elementos planos que contém o nó P_3 são utilizados para expressar a rotação θ_{v_1} , quando seria desejável que todos os nós P_i intervissem na equação de compatibilidade. A questão é mais grave à medida que se vai refinando a malha de elementos planos pois cada vez são menores as dimensões da área envolvida na caracterização da rotação θ_{v_1} . A rotação θ_{v_1} pode ser escrita de acordo com (4.10) através de:

$$\theta_{v_1} = \frac{-v_{P3} + v_{P6}}{x_{P6}} + \frac{u_{P3} - u_{P2}}{2y_{P2}} + \frac{u_{P3} - u_{P4}}{2y_{P4}}, \quad (4.11)$$

mostrando claramente que para que θ_{v_1} se mantenha constante à medida que se vai refinando a malha, os deslocamentos envolvidos têm que ser cada vez maiores o que provoca um efeito semelhante a um momento concentrado, com a consequente distorção do campo de tensões na zona envolvente da ligação.

Um outro processo para determinação automática de equações de compatibilização de deslocamentos consiste em definir de forma clara quais são os tipos de ligação entre elementos

permitidos e, para estas situações, as equações de restrição ficam automaticamente determinadas. O método é particularmente indicado em programas que se destinam a resolver estruturas com determinadas características. Apresentam-se algumas estruturas para as quais é possível este processo de sistematização (mais pormenores sobre os modelos apresentados podem ser encontrados na bibliografia referida).

Delgado [1984] e Faria [1989] apresentam um modelo para o estudo de barragens abóbada utilizando elementos de casca e de volume em que os elementos de casca são utilizados para modelar a barragem e os elementos de volume são utilizados para discretizar a albufeira e o solo de fundação. Os dois tipos de ligações permitidos entre estes dois tipos de elementos são os apresentados na Fig. 4.5.

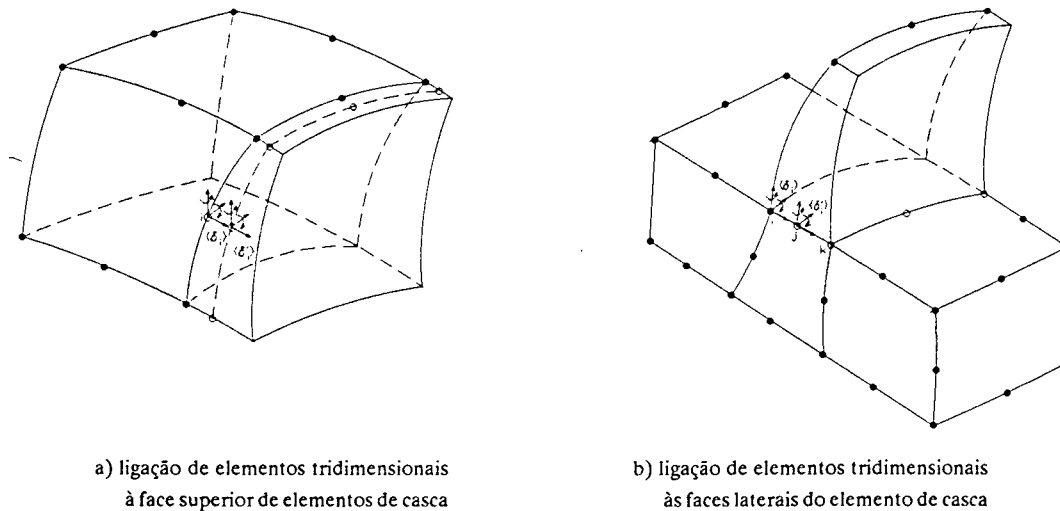


Fig. 4.5 - Modelação de barragens abóbada.

O processo utilizado é o de transformar a matriz de rigidez dos elementos de casca de forma a que as rotações e translações do folheto médio sejam convertidas (utilizando as expressões de caracterização do campo de deslocamento de casca) para os nós periféricos em contacto com os elementos de volume.

Para o estudo de pontes suspensas, Kanok-Nukulchai [1992] refere um modelo para representação do tabuleiro em que em cada secção do tabuleiro os nós de todos elementos existentes nessa secção se encontram sujeitos às seguintes condições:

- a) as duas translações e a rotação de torção da secção encontram-se referidas a um único nó;

- b) os deslocamentos perpendiculares ao plano seccional encontram-se caracterizados por uma lei bi-linear descrita em termos dos deslocamentos de 4 nós seccionais.

Bouberguig [1983], apresenta um modelo para a representação de cascas nervuradas em que considera o campo de deslocamentos da mesma como uma extensão do campo de deslocamentos da casca (Fig. 4.6) ficando completamente definidas as transformações de GDL entre a nervura e a casca (este processo de ligação casca/nervura permite eliminar os defeitos apresentados para a ligação excêntrica casca/viga apresentada no Capítulo 3)

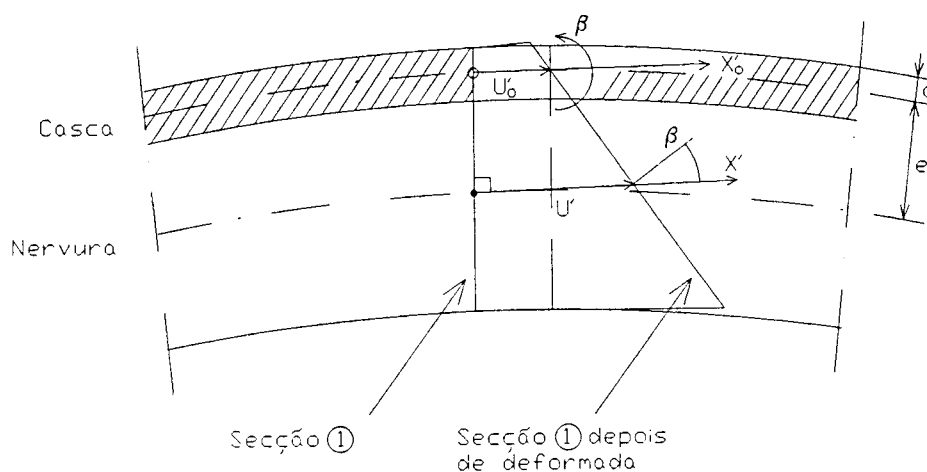


Fig. 4.6 - Modelação de cascas nervuradas.

Os três modelos apresentados (pontes suspensas, barragens abóbada e cascas nervuradas) permitem concluir que é possível sistematizar a formulação das equações de compatibilidade para programas que se destinam a ser utilizados para calcular estruturas dum dado género (depois de adoptada uma regra que permite estabelecer um campo de deslocamentos para a interface dos elementos com GDL distintos).

A resolução das equações de compatibilidade de deslocamentos simultaneamente com a resolução do sistema de equações de equilíbrio pode ser efectuada (repare-se que as equações de compatibilidade são equações de transformação de GDL) pelo método descrito no Capítulo 3. Este facto faz com que a implementação deste processo num programa de elementos finitos seja muito mais fácil que a utilização de elementos de transição. As desvantagens associadas ao método dos campos de deslocamentos impostos prendem-se com a dificuldade em definir qual é o campo de deslocamentos que se deseja utilizar e em caracterizar este campo de deslocamentos de forma sistemática e possível de automatizar.

4.2.3 - Solução adoptada

Da comparação dos dois métodos de compatibilização de deslocamentos entre elementos que possuem GDL distintos (elementos de transição e campos de deslocamentos impostos) resultam as seguintes conclusões:

- 1) a utilização de elementos de transição obriga ao desenvolvimento de vários tipos de elementos para cobrir as situações mais correntes na prática;
- 2) os elementos de transição permitem um melhor estudo das tensões na interface dos elementos nas situações para que foram formulados;
- 3) os elementos de transição não permitem uma modelação adequada de situações como a referida na Fig. 4.3;
- 4) o uso de campos de deslocamentos impostos é mais versátil mas obriga à definição das equações de compatibilidade de deslocamentos;
- 5) a implementação da metodologia dos campos de deslocamentos impostos é mais fácil que a dos elementos de transição;
- 6) é difícil encontrar um processo sistemático geral de formulação das equações de compatibilidade;

Em virtude do que foi dito, a escolha da solução adoptada recaiu sobre a utilização de campos de deslocamentos impostos pois é o processo que mais se adapta a uma "filosofia geral" de utilização simultânea de elementos de diferentes tipos. As equações de compatibilidade deverão ser escritas pelo utilizador, no entanto, podem ser definidos casos para as quais seja possível a determinação de forma automática das equações de compatibilidade. Nestes casos será apenas necessário corrigir de forma adequada os vectores e matrizes que definem a lista de GDL dependentes e os respectivos GDL mestres (bem como os respectivos coeficientes). Torna-se assim muito fácil a introdução de casos particulares de ligação entre elementos de diferentes tipos.

Uma vez que os dois métodos estudados não são mutuamente exclusivos existe a possibilidade de introdução dos elementos de transição que se deseje.

A observação das diversas equações de compatibilidade apresentadas mostram que quando existem dois nós coincidentes pertencentes a elementos com GDL distintos, os GDL comuns não submetidos a uma equação de restrição do tipo $u_{i,j} = u_{k,j}$ em que i e k são números de nós da estrutura e j representa o(s) GDL comum(s). Existe por isso a possibilidade de considerar que os nós i e k são um só (o nó passa a pertencer aos vários elementos), o que faz com que apenas seja necessário escrever as equações de compatibilidade para os

GDL não comuns. É portanto possível que elementos com GDL distintos partilhem nós da estrutura sendo no entanto necessário escrever equações de compatibilidade para os GDL que não são comuns a todos os elementos a unir.

4.3 - ALTERAÇÕES NECESSÁRIAS NUM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA POSSIBILITAR A UTILIZAÇÃO SIMULTÂNEA DE ELEMENTOS DE DIFERENTES TIPOS

Existem diversas alterações que é necessário efectuar num programa de elementos finitos para que este possibilite o uso simultâneo de diversos tipos de elementos. Estas alterações exigem principalmente uma mudança no modo de tratar determinados parâmetros existentes no programa. É pois necessário que variáveis como o número de pontos de Gauss utilizado, número de nós por elemento, número de propriedades nodais, ou o número de pontos de integração para o cálculo de tensões passem a ser atributos de cada elemento e não atributos do problema.

Por outro lado, surge a necessidade de controlar em cada nó quais são os GDL que efectivamente este possui. O Quadro 4.I resume os GDL que os diferentes elementos existentes no programa possuem (incluindo já os novos elementos introduzidos - Capítulo 5), bem como o número de dimensões associado a cada elemento.

Quadro 4.I - Graus de liberdade existentes nos diversos elementos.

Tipo de elemento	Grau de liberdade						Dimensão
	u	v	w	θ_x	θ_y	θ_z	
barra	X	X	X				3D
viga	X	X	X	X	X	X	3D
estado plano de tensão	X	X	O				2D
estado plano de deformação	X	X					2D
axissimétrico	X	X					2D
laje	0	0	X	X	X		2D
cascas (planas [*] e curvas)	X	X	X	X	X	#	3D
volume	X	X	X				3D
junta de linha [*]	X	X					2D
junta de superfície [*]	X	X	X				3D
[*] elementos introduzidos no programa (Capítulo 5) 0 extensão de elementos 2D a estruturas 3D (secção 4.4.3) # apenas no caso dos nós serem não coplanares							

Repare-se que os GDL existentes num nó são o resultado da sobreposição dos GDL que os diversos elementos que contêm o nó possuem: um nó pertencente a um elemento de barra (3 GDL por nó) e a um elemento de viga (6 GDL por nó) possuirá de facto 6 GDL.

É importante referir que o ficheiro de dados necessita de alterações que traduzam esta nova realidade. Por exemplo, ao ler o bloco de dados referente aos apoios é necessário saber quantos GDL estão efectivamente associados aos diversos nós para evitar que a lista de GDL livres ou prescritos associados ao nó contenha GDL em falta ou em excesso. O mesmo se passa em relação à leitura das diversas solicitações, onde é necessário, uma vez que existem cargas associadas aos elementos, verificar se a carga é apropriada ao elemento, se os GDL aos quais está aplicada a carga está correcto, etc.

A nível de processamento, e uma vez que o programa já dispõe de transformações sobre GDL, as maiores alterações residem no tratamento diferencial que é necessário dar aos GDL existentes num nó consoante se esteja a lidar com o nó como pertencente a um elemento ou nó como pertencente à estrutura: ao lidar com um nó que pertença simultaneamente a um elemento de barra e a um elemento de viga, é necessário considerar que ao calcular a matriz de rigidez e vector solicitação do elemento de barra existem 3 GDL por nó mas que ao reunir a matriz de rigidez e o vector solicitação existem os 6 GDL no nó.

O facto de poderem existir, nós na estrutura com GDL distintos faz com que o processo de determinação do número da equação (*itotv*) deixe de poder ser obtido por:

$$itotv = (ipoin - 1) * ndofn + idofn \quad (4.12)$$

em que *ndofn* representava o número de GDL por nó, constante na estrutura. Assim criou-se um vector que contém para cada nó da estrutura, qual é o número da equação que corresponde ao primeiro GDL do nó e que permite facilmente obter *itotv* através de:

$$itotv = itotv_b[ipoin] + idofn \quad (4.13)$$

O maior volume de alterações a efectuar refere-se ao pós-processamento de resultados:

- a) *ficheiro de resultados* - é necessário que os deslocamentos saiam com o número de GDL correcto, devidamente identificados e que os esforços associados a cada elemento surjam também devidamente identificados;
- b) *tensões principais* - é necessário separar os elementos por grupos (no presente trabalho a distinção foi efectuada com base nos tipos de elementos) para que as tensões/esforços principais façam sentido;
- c) *pixelagens de deslocamentos* - é preciso agrupar em estruturas separadas os elementos consoante os GDL que possuem;

- d) *pixelagens de tensões/esforços* - também aqui os elementos têm que ser separados por grupos (adoptou-se o mesmo critério da alínea b)) para que não sejam representadas simultaneamente as tensões num elemento de volume com os esforços numa casca.

As subestruturas que foram referidas nas alíneas anteriores para cada tipo de elemento obrigam a que se calcule, para cada uma delas, o número de elementos e de nós, bem como o número de elementos que contém um dado nó (para que as pixelagens de tensões/esforços surjam como a média das tensões calculadas a partir dos vários elementos que contém o nó).

Refere-se por fim um conjunto de novas opções para o módulo de pós-processamento que foram introduzidas de forma a permitir um melhor tratamento de resultados e verificação de dados:

- 1) possibilidade de visualizar os nós com ligações excêntricas;
- 2) possibilidade de visualizar os nós com rotações de GDL;
- 3) possibilidade de visualizar os nós com restrições lineares de GDL;
- 4) possibilidade de obter gráficos de esforços/tensões ao longo de linhas (definidas por um conjunto de pontos (3D) ou por uma distância a um eixo coordenado (2D));

Estas opções não são exclusivas da utilização simultânea de diversos elementos, mas foram introduzidas nesta fase do trabalho.

4.4 - UTILIZAÇÃO SIMULTÂNEA DE ELEMENTOS DE DIFERENTES TIPOS

A utilização, no programa FEMIX, de elementos de diferentes tipos na discretização de uma estrutura fica sujeita a algumas regras. Estas regras prendem-se com o número de dimensões utilizadas na formulação dos diferentes elementos (Quadro 4.I). Existem, contudo, elementos 3D aos quais podem ser restringidos GDL para poderem ser utilizados em estruturas 2D ou, alternativamente, generalizar a formulação de elementos 2D para que possam ser utilizados em estruturas 3D.

O Quadro 4.II apresenta um resumo das possibilidades de união de elementos para os diferentes tipos de problemas estruturais.

Quadro 4.II - Elementos possíveis de utilizar simultaneamente.

Dimensão	Estrutura	Tipo de elemento									
		Barra (3D)	Viga (3D)	EPT (2D)	EPD (2D)	Axissim. (2D)	Laje (2D)	Cascas (3D)	Volume (3D)	J. de linha (2D)	J. superf. (3D)
2D	Caso geral	#	#	X						X	
	Estado plano de def.	#	#		X					X	
	Axissimetria					X				0	
	Lajes						X				
3D	Caso geral	X	X	+			+	X	X		X
X - utilização sem restrição # - é necessário impedir deslocamentos O - é possível utilização mas não foi implementado + - formulação generalizada (utilização sem restrição)											

As restrições e generalizações apresentadas no Quadro 4.II são apresentadas de seguida.

4.4.1 - Estruturas 2D

Estas estruturas são caracterizadas por todos os nós que a definem se encontrarem sobre o plano XY. Deste modo apenas são necessárias as coordenadas X e Y para a definição de geometria das estruturas:

a) Caso geral

As estruturas pertencentes a esta categoria caracterizam-se pelo facto da tensão normal ao plano da estrutura (plano XY) ser nula e por terem uma dimensão (segundo Z) muito menor que as restantes. São exemplos destas estruturas vigas-parede e pórticos planos. Nestas estruturas é possível utilizar elementos de barra, elementos de viga, elementos de junta de linha (ver secção 5.3) e elementos de tensão plana.

Uma vez que os elementos de barra e de viga são tridimensionais, é necessário que todos os nós pertencentes a estes elementos sejam declarados como apoios e os deslocamentos para fora do plano da estrutura (segundo Z) assim como as rotações que provoquem movimento para fora do plano (θ_x e θ_y) devem ser impedidos.

b) Estruturas submetidas a estado plano de deformação

Estas estruturas caracterizam-se por uma das suas dimensões (segundo Z) ser muito maior que as outras e por nelas apenas actuarem acções distribuídas ao longo de todo

o seu desenvolvimento e contidas em planos normais ao eixo que une o centro de gravidade da sua secção transversal. São exemplo destas estruturas as barragens gravidade e tubos submetidos a pressão interior.

É possível utilizar elementos de junta e elementos de estado plano de deformação para discretizar estas estruturas. Aos elementos de junta é necessário atribuir uma espessura unitária.

É também possível a utilização de elementos de barra e de viga (nas condições da alínea anterior) com a restrição adicional das áreas e inércias se referirem a secções de largura unitária.

c) Estruturas axissimétricas axissimetricamente solicitadas

Nestas estruturas tanto a geometria como as acções têm simetria de revolução. Como exemplo destas estruturas referem-se depósitos para água e silos para cereais.

Na discretização destas estruturas apenas podem ser utilizados os elementos axissimétricos. É fácil a generalização dos elementos de junta de linha para aplicação a sólidos de revolução, no entanto tal generalização não foi considerada neste trabalho (basta atribuir a cada nó dos elementos de junta uma espessura igual ao perímetro da estrutura nesse nó).

d) Lajes

Na utilização de elementos de laje como elementos bidimensionais obrigou-se a que todos os elementos utilizados fossem do tipo laje. Contudo, os elementos de laje podem ser utilizados em estruturas tridimensionais (ver secção 4.4.3) conjuntamente com outros elementos.

4.4.2 - Estruturas 3D

São o caso mais geral de uma estrutura e nelas podem ser utilizados elementos de casca plana (ver secção 5.2), elementos de casca curva, elementos de volume, elementos de junta de superfície (ver secção 5.3), elementos de laje (ver secção 4.4.3), elementos de estado plano de tensão (ver secção 4.4.3), elementos de barra e elementos de viga.

Em estruturas onde existem elementos de casca (curva ou plana) e elementos de viga os nós pertencentes simultaneamente aos dois tipos de elementos são declarados como não coplanares, pois o elemento de viga fornece a rigidez segundo a direcção normal à casca que não existe nos nós coplanares dos elementos de casca.

Os elementos de junta de superfície apenas podem ser utilizados para simular juntas entre elementos de volume.

4.4.3 - Elementos 2D em estruturas 3D

Existem alguns tipos de elementos aos quais é possível generalizar a formulação de forma a poderem ser utilizados em estruturas tridimensionais. As generalizações apresentadas não modificam as matrizes de rigidez dos elementos apenas transformam alguns GDL de forma a permitirem que os elementos em causa possuam a capacidade de acompanhar devidamente os deslocamentos da estrutura.

a) Elementos de laje em estruturas 3D

A rigidez das lajes no seu próprio plano é, na maioria das estruturas de betão, muito elevada, podendo por isso ser assimiladas a um diafragma rígido, de tal forma que os deslocamentos de qualquer ponto pertencente a esse diafragma têm um deslocamento relativo nulo.

Na formulação usual de elementos de laje não existem GDL associados aos deslocamentos da laje no seu próprio plano, constituindo esta um plano indeformável.

Conclui-se portanto que atribuindo aos nós dos elementos de laje deslocamentos no seu próprio plano de tal forma que os seus deslocamentos relativos sejam nulos é possível utilizar estes elementos na modelação de diafragmas rígidos em estruturas 3D. O diafragma deve contudo, ser capaz de efectuar movimentos de corpo rígido no seu próprio plano.

Para descrever os movimentos efectuados por cada nível de laje basta caracterizar os deslocamentos num nó, que será designado por mestre. Os restantes nós existentes têm os seus deslocamentos no plano sujeitos a equações de transformação do tipo:

$$\begin{Bmatrix} u_d \\ v_d \\ \theta_{zd} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta y \\ 0 & 1 & \Delta x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ \theta_{zm} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

em que:

$$\Delta y = y_d - y_m, \quad (4.15.a)$$

$$\Delta x = x_d - x_m, \quad (4.15.b)$$

representando x_m, x_d as coordenadas X dos nós mestres e dependente e y_m, y_d as coordenadas Y .

Foi imposta a condição adicional de todos os pisos simulados com elementos de laje serem paralelos ao plano XY .

A implementação de "elementos laje 3D" requer as seguintes alterações ao programa principal:

- 1) detecção do número de níveis de lajes, número de nós e elementos existentes por nível;
- 2) selecção, para cada nível, dos nós que estão conectados a elementos que têm GDL no plano de laje; estes nós são os que ficarão sujeitos às equações de transformação (os nós que apenas pertencem a elementos de laje não necessitam de possuir os GDL no plano de laje - os seus deslocamentos serão calculados *à posteriori*);
- 3) selecção dos GDL mestre (duas translações e uma rotação por cada nível), tendo em atenção os deslocamentos impedidos no plano da laje;
- 4) formulação das equações de compatibilidade de deslocamentos;
- 5) com a resolução do sistema de equações obtêm-se os deslocamentos nos GDL seleccionados em 2), calculando-se os deslocamentos nos restantes pontos a partir da equação (4.14);

A utilização de elementos laje na modelação de pisos de edifícios comparada com a utilização de elementos casca apresenta uma redução significativa no número de equações a resolver, aumentando contudo a largura da semibanda do problema. Este contratempo pode ser resolvido adoptando o método iterativo na resolução do sistema de equações visto a largura da semibanda não ser condicionante neste método.

A inclusão de elementos de laje em estruturas 3D apresenta um contratempo adicional e que resulta do primeiro GDL dos elementos laje, corresponder ao deslocamento segundo o eixo Z , enquanto nos restantes elementos o primeiro GDL correspondente ao deslocamento segundo X .

A determinação do número da variável global ($itotv$) a que corresponde o GDL $ido fn$ do elemento laje (no caso deste elemento se encontrar unido a elementos que não sejam do tipo laje), pode ser obtida (comparar com equação 4.13) por:

$$itotv = itotv_b[ipoin] + ido fn + 2 \quad (4.16)$$

b) *Elementos de estado plano de tensão em estruturas 3D*

Existem numerosas estruturas (caixas de elevador, pontes em caixão, etc.) constituídas por elementos laminares em que, embora existam esforços de flexão, o funcionamento como membrana é nitidamente predominante.

A utilização de elementos de tensão plana para modelar estas estruturas possui as vantagens de trabalhar com um número muito menor de variáveis e de possuir apenas as componentes de tensão associadas a esforços de membrana.

A generalização da utilização de elementos de tensão plana para problemas 3D, baseou-se nas seguintes hipóteses:

- i) os elementos são planos e resistem apenas a esforços no seu plano;
- ii) todos os deslocamentos que os nós dos elementos sofram para fora do plano não provocam esforços no elemento;
- iii) os elementos, planos na situação indeformada, deixam de ser planos;
- iv) todas as forças aplicadas aos elementos devem estar no plano do elemento;
- v) os nós comuns a dois ou mais elementos planos, com normais ao folheto médio dos elementos não coincidentes, possuem 3 GDL, os restantes nós possuem 2 GDL;
- vi) nos nós com 3 GDL os deslocamentos encontram-se referidos ao referencial geral, nos restantes nós os referenciais nodais são definidos conforme descrito no Capítulo 2 para as cascas curvas;
- vii) as forças nodais aplicadas terão componentes de acordo com os GDL dos nós em causa.

Com base nestas hipóteses as transformações a efectuar ao programa podem sintetizar-se nos seguintes pontos:

- 1) cálculo das normais aos elementos planos;
- 2) detecção dos nós com 2 ou 3 GDL;
- 3) após o cálculo dos esforços das matrizes de rigidez de elementos, transformar as matrizes dos elementos planos para os novos referenciais nodais;
- 4) para o cálculo dos esforços nos elementos é necessário transformar os deslocamentos dos nós com 3 GDL (referencial geral) para os referenciais nodais locais do elemento.

A utilização destes elementos para o cálculo de estruturas tridimensionais exige algumas precauções, pois é muito fácil que as estruturas constituídas por estes elementos formem mecanismos, devendo-se ao construir a malha do elementos finitos estar alerta para esta possibilidade.

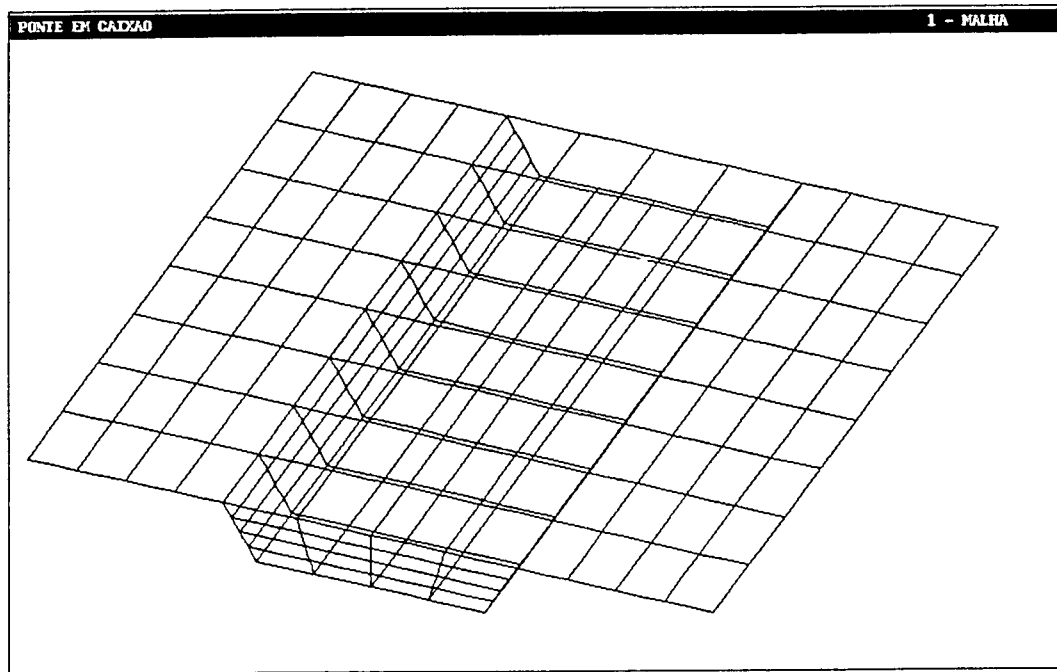


Fig. 4.7 - Ponte em caixão-malha de elementos finitos ($E = 29 GPa$, $\nu = 0.15$).

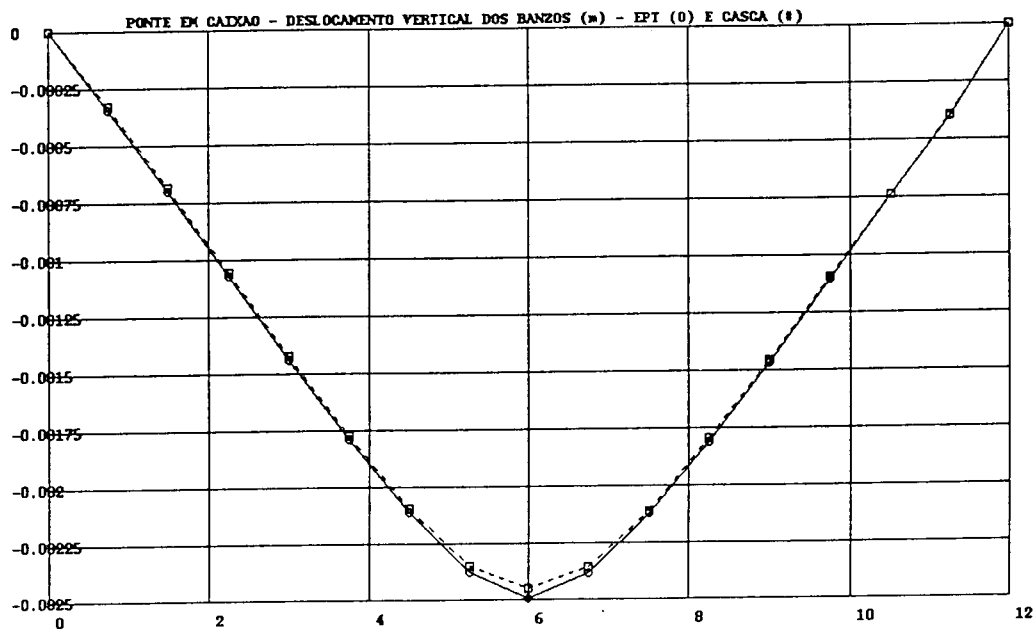
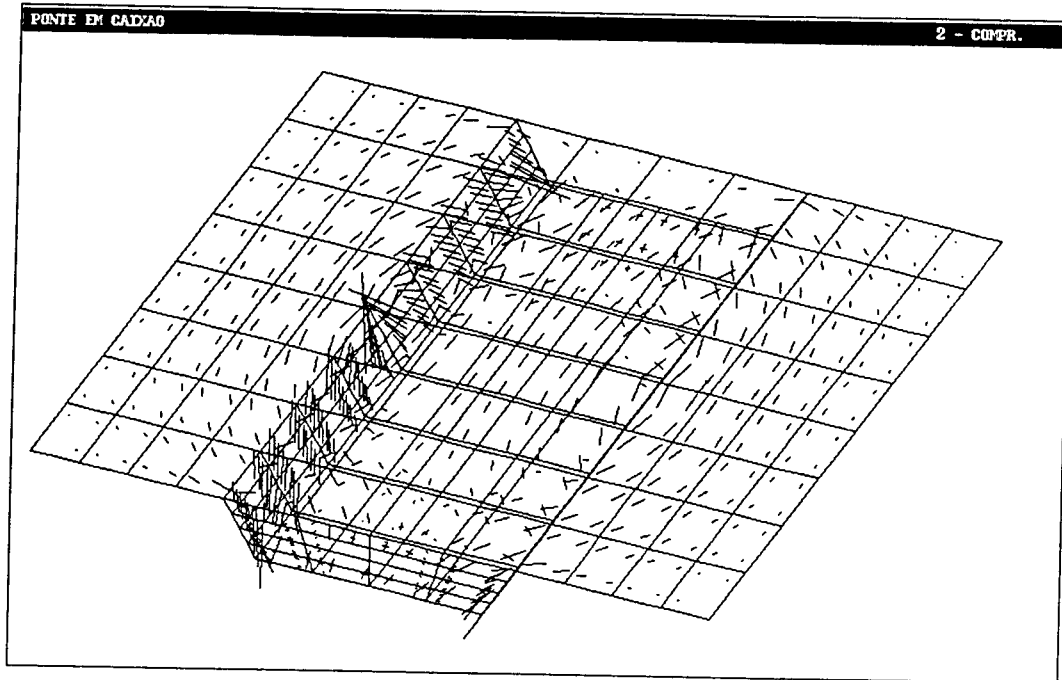
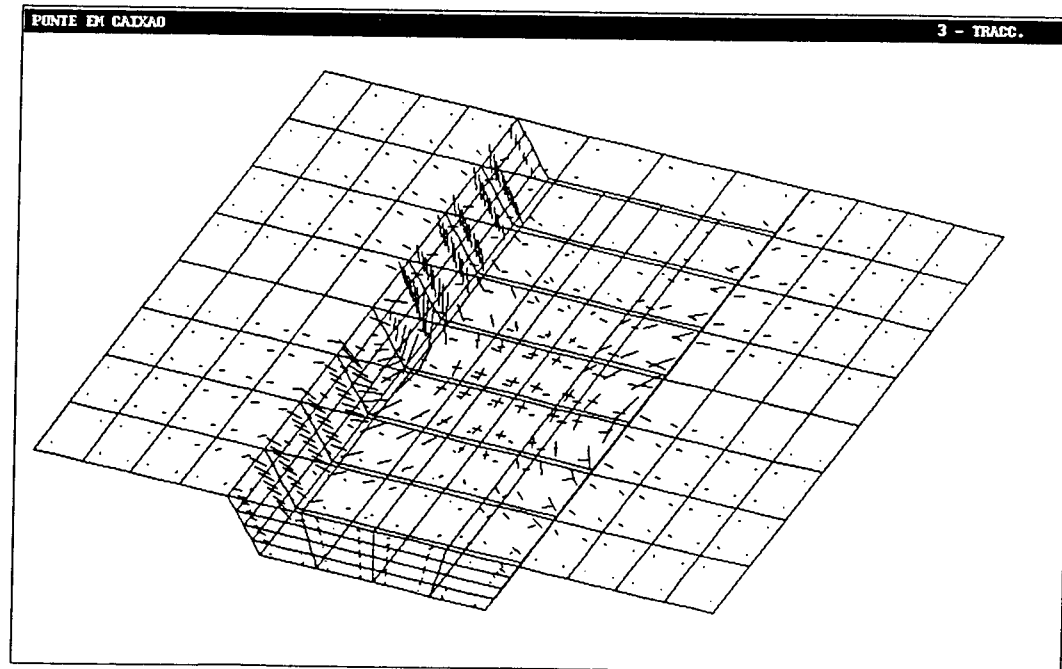


Fig. 4.8 - Deformada comparada ao longo da ligação alma/banzo inferior.



a) compressões



b) trações

Fig. 4.9 - Ponte em caixão - tensões principais.

O uso da acção gravítica não é permitida nestes elementos, pois esta necessitaria de ser aplicada sobre o plano dos elementos o que num caso geral não se verifica.

Uma aplicação simples dos elementos de tensão plana em estruturas 3D é apresentada de seguida e refere-se a uma ponte em caixão simplesmente apoiada com 12 metros de vão. Os banzos inferior e superior medem, respectivamente, 4 e 12 metros, fazendo as almas angulos de 30° com a vertical. As almas e os banzos da ponte têm uma espessura de 10cm. As dimensões são absolutamente arbitrárias não obedecendo a nenhum pré-dimensionamento específico.

Todos os elementos constituintes desta estrutura (almas, banzos) se encontram predominantemente submetidos a estados de compressão/tracção no seu plano sendo a flexão existente muito pequena, podendo o seu estudo ser feito utilizando elementos planos. A estrutura foi analisada comparando a utilização de elementos de casca com a utilização de elementos planos.

A acção aplicada consistiu em duas forças de 100 kN aplicadas a meio vão na ligação do banzo superior à alma.

A comparação da deformada ao longo da ligação do banzo inferior à alma (Fig. 4.8) revela diferenças máximas da ordem dos 2%, o que constitui uma óptima aproximação.

A comparação das dimensões do sistema de equações revela uma diminuição de 3327 para 1363 equações e uma redução da semibanda de 837 para 355 colunas o que se traduziu numa Workstation HP 700 UX por uma redução do tempo gasto na resolução do sistema de equações de 109s para 7s.

Os elementos de tensão plana apresentam uma deficiência adicional que se refere à representação da malha deformada. Este problema reside no facto dos nós com 2 GDL não acompanharem os movimentos de corpo rígido para fora do plano do elemento: por exemplo o nó de canto do banzo superior do exemplo só possui os 2 GDL no seu plano, não apresentando por isso qualquer deslocamento que acompanhe a deformada da alma. Esta deficiência pode ser solucionada formando grupos de elementos e extrapolando os deslocamentos dos nós com 3 GDL pertencentes a cada grupo para os nós que apenas possuam 2 GDL.

4.5 - EXEMPLO - ESTUDO DE UM EDIFÍCIO DE 2 PISOS

Para ilustrar as possibilidades que a união de elementos permite estudou-se um exemplo muito simples que representa um edifício de dois pisos submetido a uma acção horizontal conforme se encontra esquematizado na Fig. 4.10.

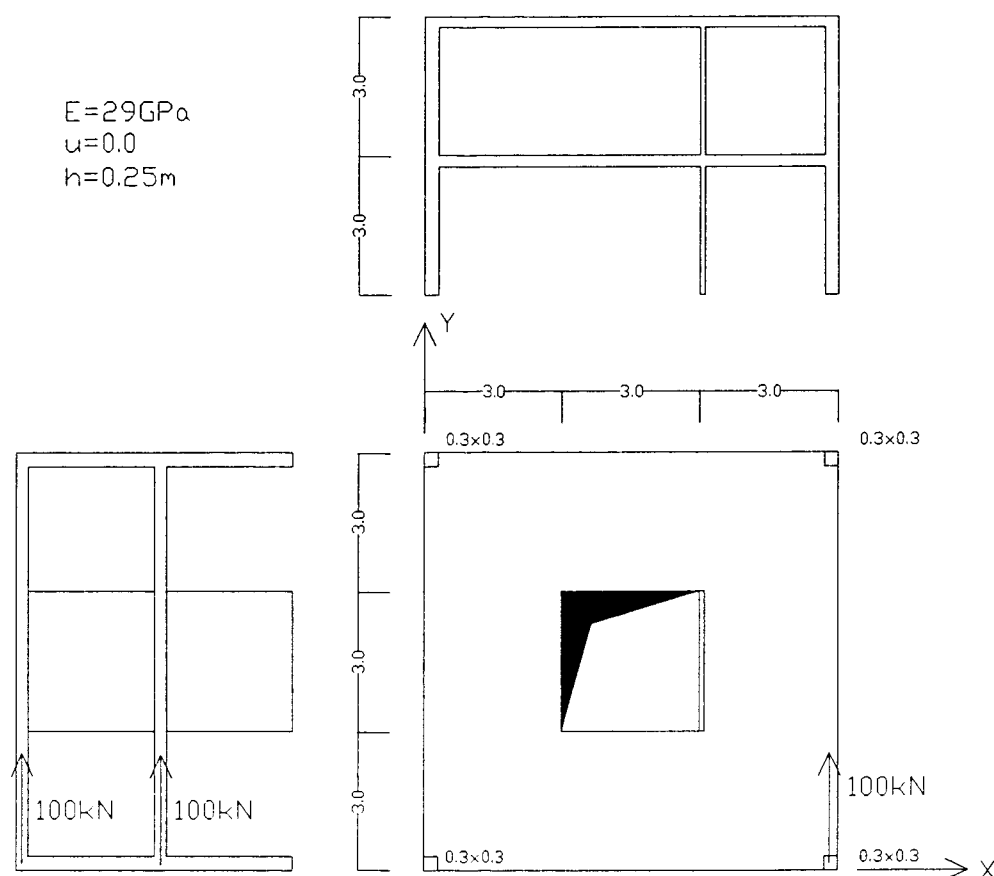


Fig. 4.10 - Características geométricas do edifício em estudo.

Foram realizados vários estudos em que foram utilizadas diversas formas para representação das lajes e da parede (Quadro 4.III). A espessura da parede foi considerada igual a 10 e a 30cm.

Quadro 4.III - Elementos finitos utilizados para simular os diferentes elementos estruturais.

Estudo	Elemento utilizado			Espessura da parede (m)
	Pilar	Parede	Laje	
A1	Viga	Casca	Casca	0.10
A2	Viga	Casca	Laje	0.10
A3	Viga	EPT	Casca	0.10
A4	Viga	EPT	Laje	0.10
B1	Viga	Casca	Casca	0.30
B2	Viga	Casca	Laje	0.30
B3	Viga	EPT	Casca	0.30
B4	Viga	EPT	Laje	0.30

O material utilizado possui um módulo de elasticidade de 29GPa e um coeficiente de Poisson nulo. A malha de elementos finitos utilizada encontra-se representada na Fig. 4.11.

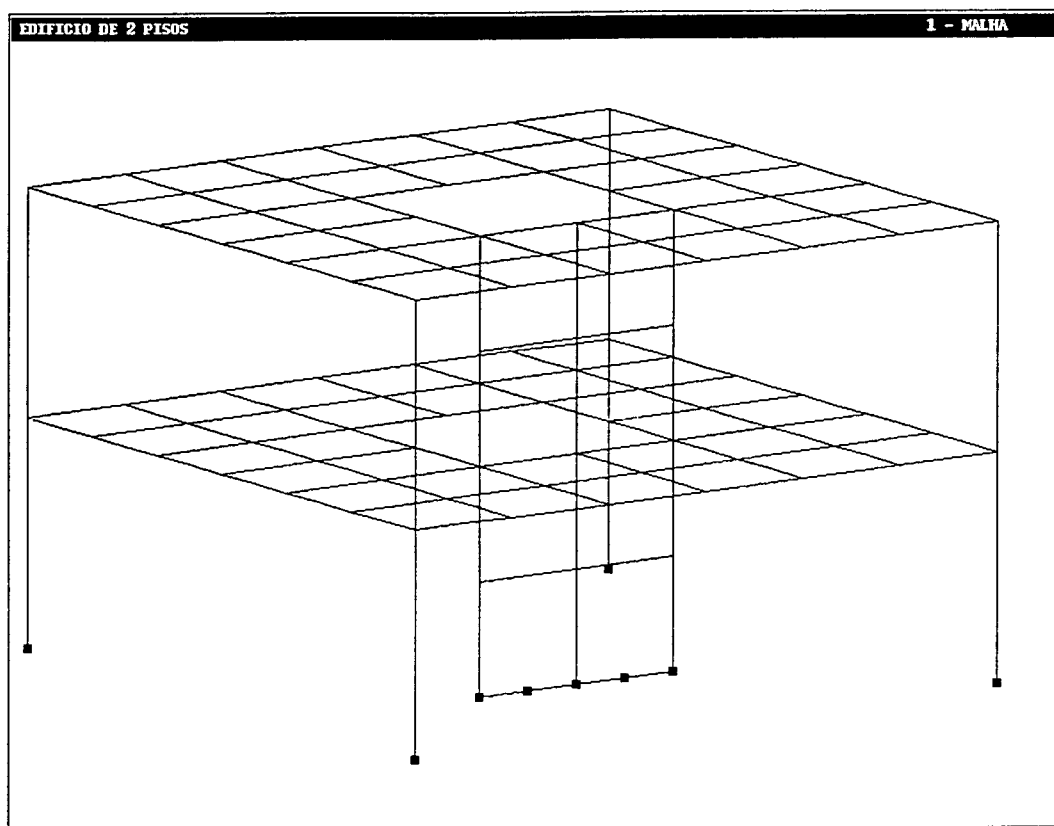


Fig. 4.11 - Malha de elementos finitos utilizada.

A observação da deformada do edifício (Fig. 4.12) permite verificar que o centro de torção do edifício se situa praticamente coincidente com o ponto médio da parede, o que não surpreende visto esta ser muito mais rígida que os pilares, absorvendo praticamente a totalidade das acções horizontais aplicadas ($\approx 95\%$).

O Quadro 4.IV representa o deslocamento Y do ponto oposto ao de aplicação da força (2º piso) para os vários estudos efectuados, bem como a diferença (em percentagem) em relação à situação padrão (estudos A1 e B1). Observa-se claramente que as diferenças encontradas entre a simulação dos pisos com elementos de casca ou com elementos de laje são praticamente nulas (cerca de 0.2%). Por outro lado, na comparação entre a utilização de elementos de casca e elementos planos para representar as paredes é importante a distinção entre o estudo A (parede de 0.1m de espessura) e o estudo B (parede de 0.3m de espessura), pois as diferenças encontradas nos dois estudos são de 2,0% e 13,5%, respectivamente. Estas diferenças ficam a dever-se ao facto da rigidez aos esforços de flexão ser muito maior na situação B do que na situação A (cerca de 9 vezes maior), o que faz com que no estudo B, os elementos planos representem uma simplificação mais grosseira de parede.

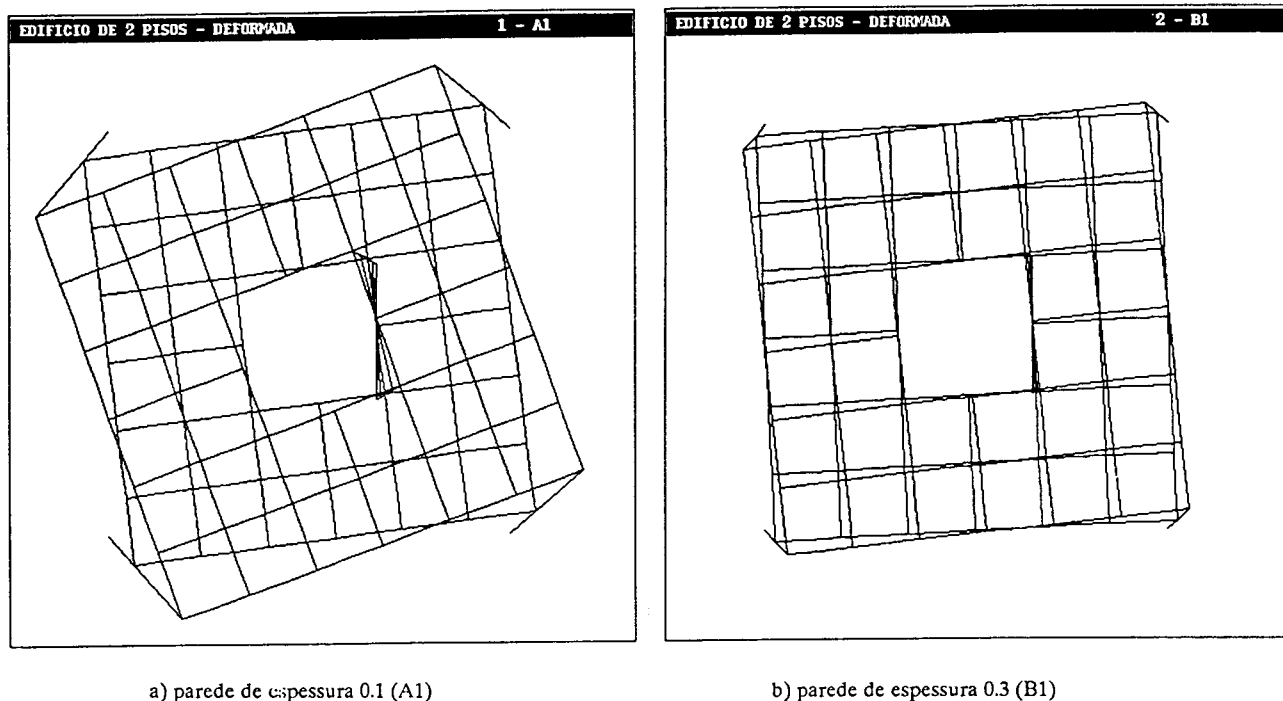
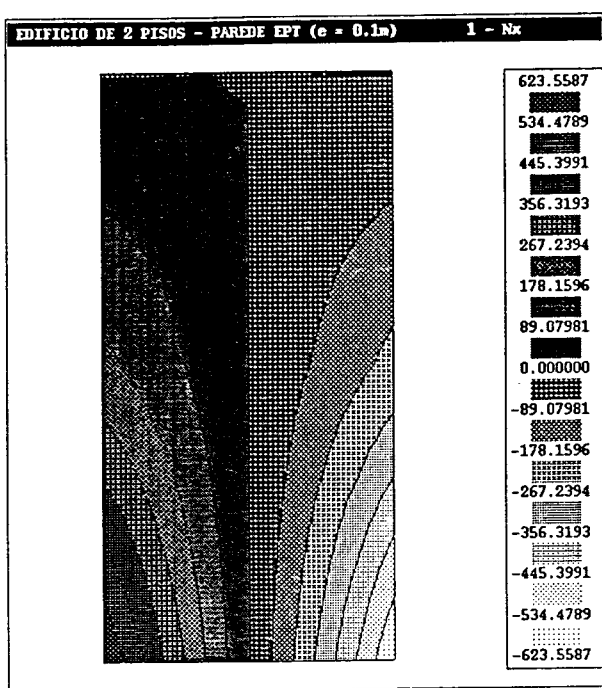


Fig. 4.12 - Deformadas (vista superior).

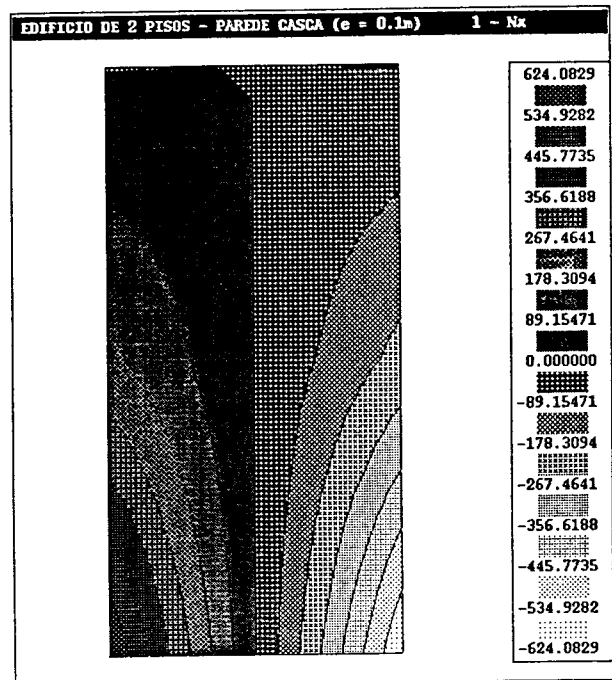
A análise dos esforços na estrutura (Fig. 4.13-4.16) mostra, no entanto, que as diferenças encontradas para as duas espessuras de parede são muito mais pequenas (cerca de 0.1%) tanto para a espessura de 0.1m como para a espessura de 0.3m. É possível observar que os esforços de flexão são muito pequenos, o que justifica o bom comportamento dos elementos planos na modelação da parede (Fig. 4.17-4.18).

Quadro 4.IV - Deslocamentos do ponto oposto ao de aplicação das forças (2º piso).

Estudo	Deslocamento (mm)	Erro (%)
A1	9,63364	0,0
A2	9,61780	-0,16
A3	9,82408	1,98
A4	9,80509	1,78
B1	2,84410	0,0
B2	2,84130	-0,10
B3	3,23164	13,63
B4	3,22630	13,44

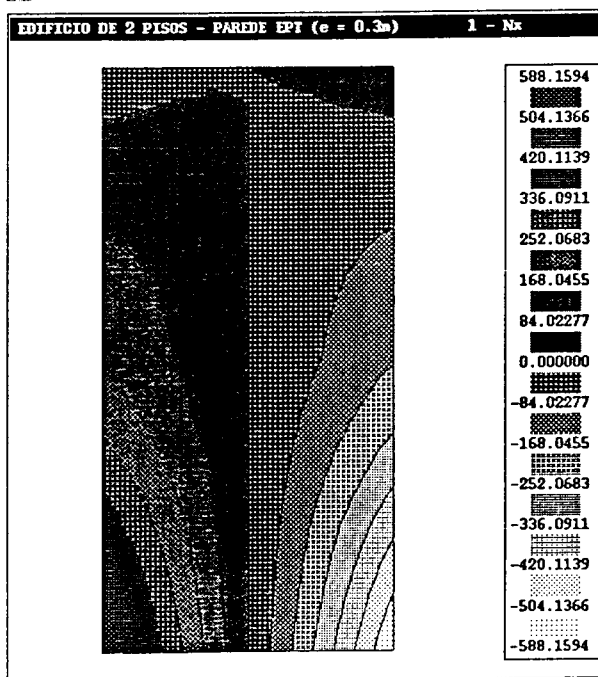


a) parede com elemento EPT

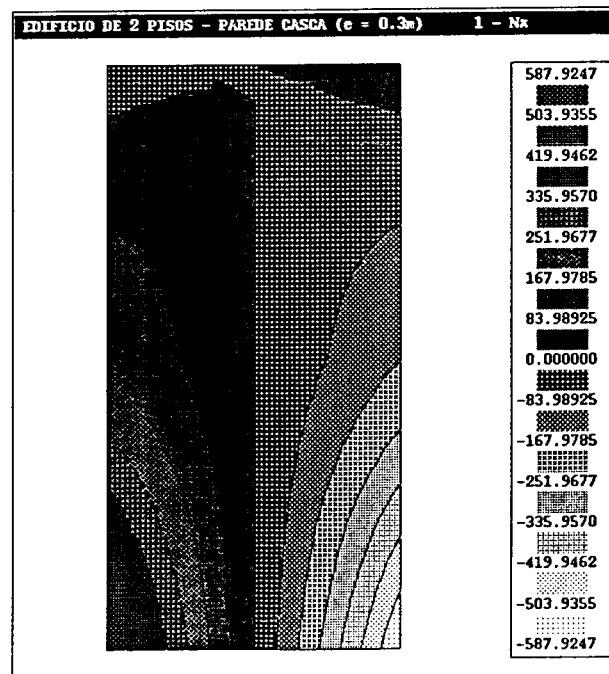


b) parede com elemento casca

Fig. 4.13 - Edifício de 2 pisos (esforço axial vertical - $e = 0.1m$).

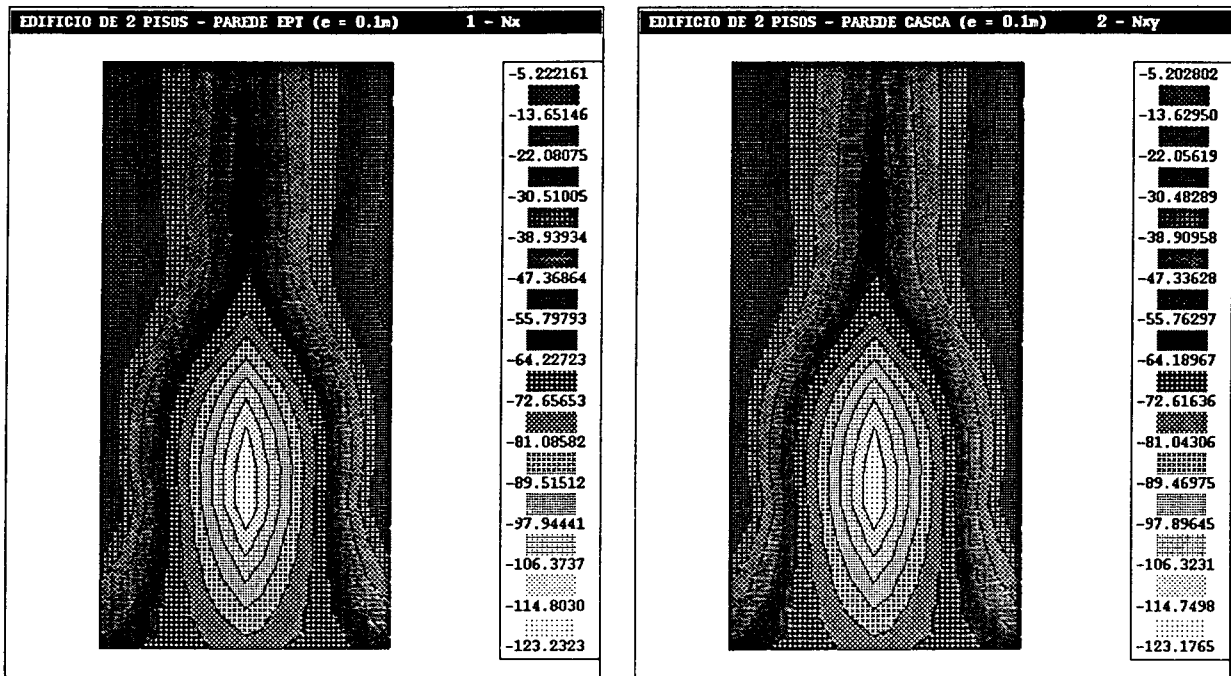


a) parede com elemento EPT



b) parede com elemento casca

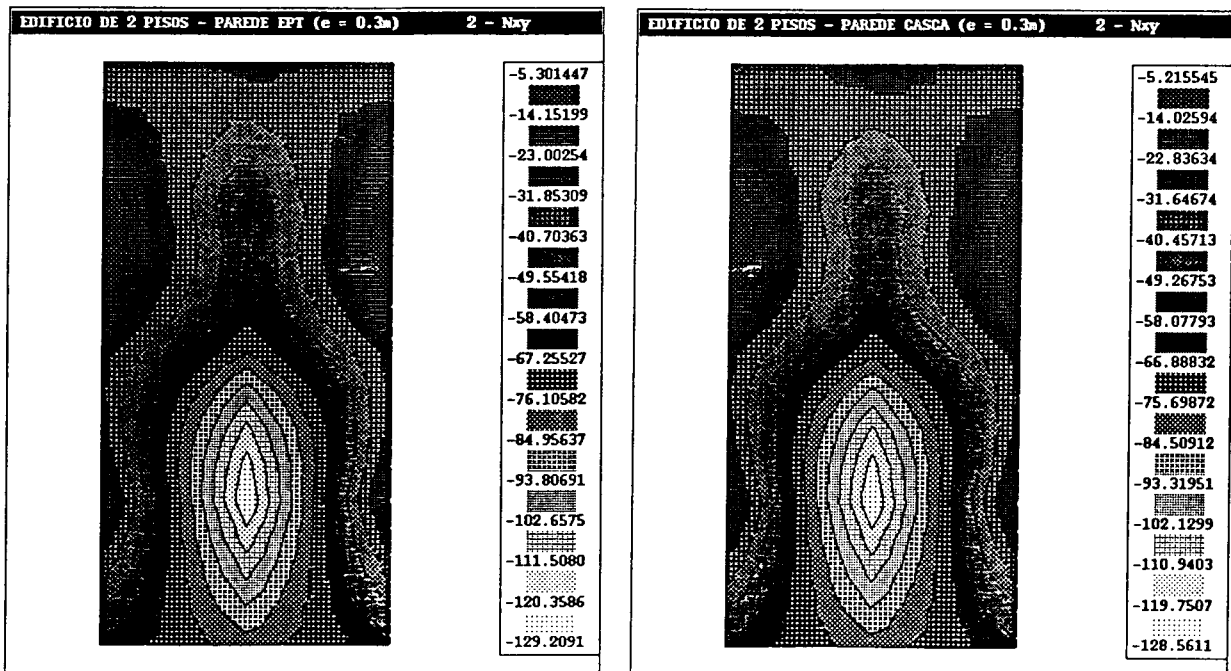
Fig. 4.14 - Edifício de 2 pisos (esforço axial vertical - $e = 0.3m$).



a) parede com elemento EPT

b) parede com elemento casca

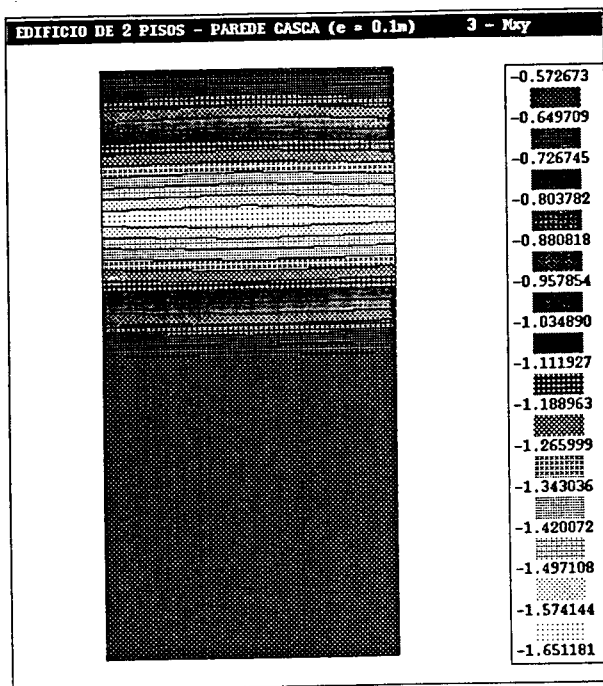
Fig. 4.15 - Edifício de 2 pisos (esforço de corte - $e = 0.1\text{ m}$).



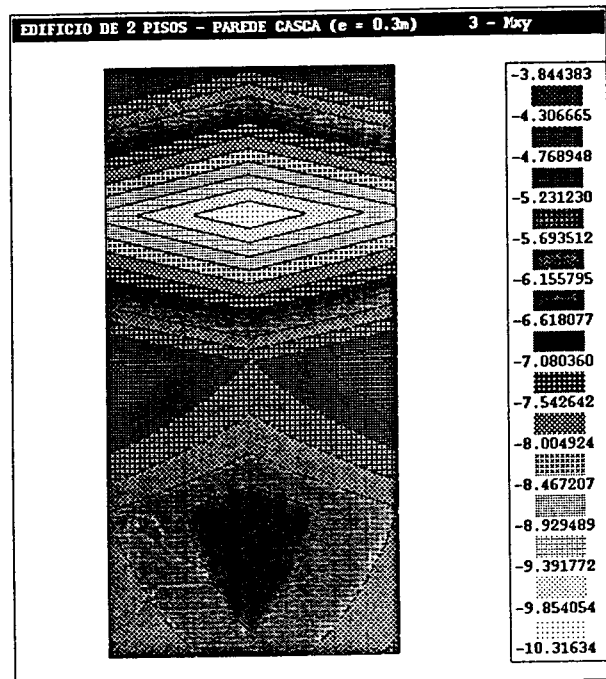
a) parede com elemento EPT

b) parede com elemento casca

Fig. 4.16 - Edifício de 2 pisos (esforço de corte - $e = 0.3\text{ m}$).

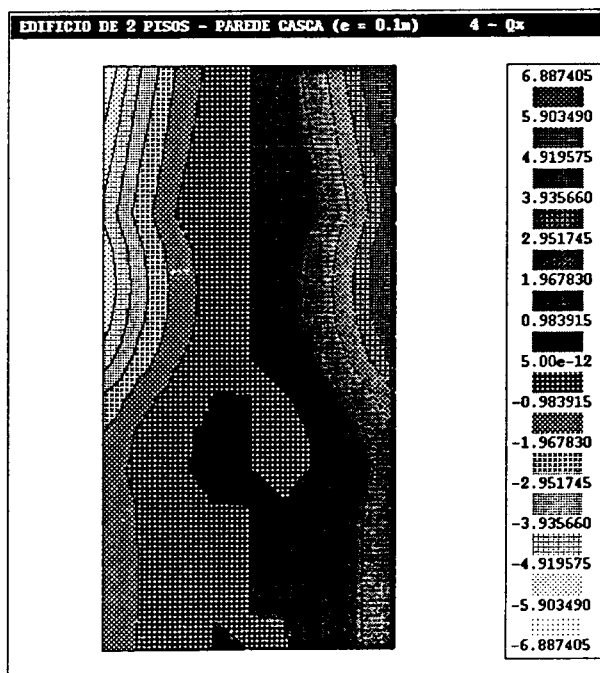


a) parede de espessura = 0.1m

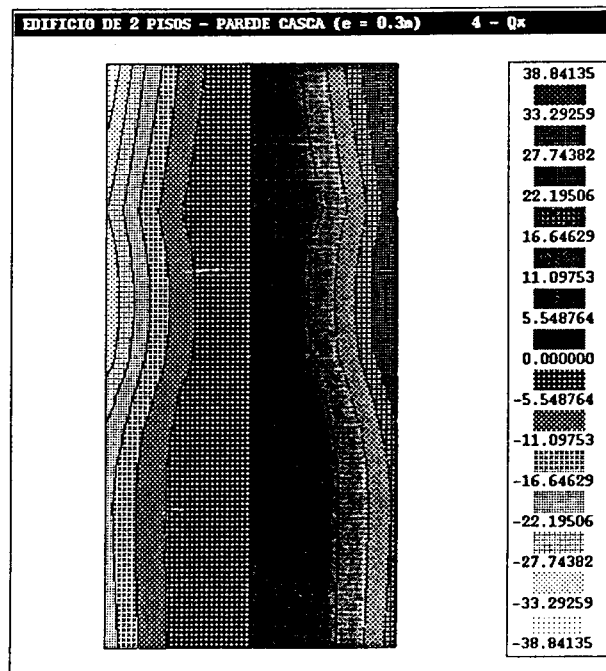


b) parede de espessura = 0.3m

Fig. 4.17 - Edifício de 2 pisos (momento torsor).



a) parede de espessura = 0.1m



b) parede de espessura = 0.3m

Fig. 4.18 - Edifício de 2 pisos (esforço transverso).

O Quadro 4.V compara as dimensões do sistema de equações e os tempos de resolução do sistema para o estudo B. Verifica-se que a utilização de elementos de laje só é justificável

Quadro 4.V - Tempos de resolução do sistema de equações lineares para uma espessura da parede igual a 0.3mm.

Estudo	nntotc	nhbac	Tempo dir.	nnzte	niter	Tempo iterativo
B1	1418	355	12.61s	21868	1448	24.18s
B2	894	894	13.95s	15125	1068	6.31s
B3	1332	269	7.83s	20423	1675	29.76s
B4	818	818	9.28s	14035	696	5.71s

em termos do tempo de resolução do sistema de equações caso se utilize o método iterativo, pois como foi referido nestes problemas a semibanda aumenta muito o que não compensa a redução do número de incógnitas do problema. A utilização de elementos planos permite uma redução dos tempos necessários à resolução do sistema de equações de cerca de 20%.

CAPÍTULO 5

INTRODUÇÃO DE NOVOS TIPOS DE ELEMENTOS

5.1 - INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de capacidade de modelação de estruturas num programa de elementos finitos passa naturalmente pelo aumento do número de tipos de elementos disponível. Nesta óptica foram introduzidos dois novos tipos de elementos: o elemento de casca (espessa) plana e o elemento de junta.

Os elementos de casca plana são de grande interesse, pois não só permitem estudar de forma aproximada cascas de superfície média curva, como também são elementos indicados para estudar numerosas estruturas constituídas por elementos laminares planos, como é o caso de muitas pontes em caixão, coberturas, etc. A utilização de elementos de casca plana em alternativa aos elementos de casca curvas já existentes (ver Capítulo 2) prende-se também com as simplificações possíveis de efectuar que permitem um tempo de execução dos programas bastante inferior, sobretudo se utilizadas em computadores de mais fracas capacidades. Um outro aspecto (relacionado com os anteriores) que levam à introdução dos elementos de casca plana prende-se com o facto de numerosas estruturas serem constituídas por lâminas planas não fazendo muito sentido o seu estudo utilizando elementos de superfície média curva.

A introdução de elementos de junta deve-se a que estes elementos são uma ferramenta muito poderosa para o cálculo de descontinuidades num grande número de estruturas. Como exemplo do seu campo de aplicação pode-se referir a modelação de fendas em betão, a interacção solo-armadura e betão-armadura, planos de fractura em rochas, etc.

No presente capítulo é apresentada a formulação dos novos elementos introduzidos no programa (elemento de casca plana, elemento de junta de linha e elemento de junta de superfície). São também apresentados dois exemplos que permitem fazer uma avaliação das possibilidades dos dois elementos: o estudo de uma viga fendilhada e de uma cúpula esférica para a qual foram utilizadas diversas modelações.

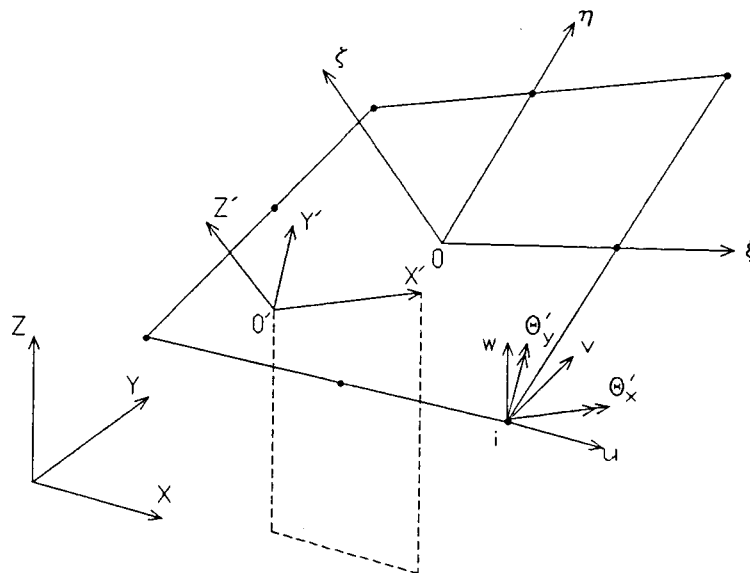
5.2 - ELEMENTOS DE CASCA PLANA

Existe um grande número de estruturas de engenharia civil que são constituídas por associação de elementos de secção média plana. Não faz sentido estar a utilizar para calcular estas estruturas elementos que no caso geral possuem uma superfície média curva e cujas

equações são complicadas de obter, precisamente devido à curvatura da sua superfície média. Por este motivo introduziu-se no programa FEMIX o elemento de casca de superfície média plana. Os elementos de casca plana servem ainda para estudar cascas de superfície média curva supondo-as compostas por elementos planos de pequena dimensão no sentido da curvatura da casca (esta aproximação origina o aparecimento de esforços parasitas como se verá adiante).

No presente trabalho é apresentada a formulação de elementos de casca plana considerando o efeito de deformação por esforço transversal (Barros [1989]), permitindo por isso o estudo de cascas espessas e delgadas (admite-se que as secções se mantêm planas embora não perpendiculares à superfície média da laje), podendo a sua espessura ser considerada variável. O folheto médio de cada elemento deverá ser obrigatoriamente plano.

O estudo das cascas planas caracteriza-se pela capacidade de poder combinar um estado resistente típico de flexão com outro em que aparecem esforços axiais contidos na superfície média e que se denominarão de esforços de membrana. Estes dois efeitos, como se verá adiante encontram-se desacoplados ao nível do elemento, desaparecendo este descoplamento ao considerar as contribuições dos elementos que se encontram em planos distintos (Oñate [1992]), ou seja, a introdução de deslocamentos típicos de membrana num elemento pode provocar o aparecimento de esforços de flexão noutros elementos.



$u, v, w, \theta'_x, \theta'_y$ = graus de liberdade no nó i (u, v, w no referencial geral; θ'_x, θ'_y no referencial local)

XYZ = referencial geral

$X'Y'Z'$ = referencial nodal

$\xi\eta\zeta$ = referencial local

Fig. 5.1 - Elemento de casca plana (eixos locais e globais).

A formulação dos elementos de casca processa-se em duas etapas:

- 1) descrição do campo de deslocamentos, campo de deformações, campo de tensões/esforços, equações constitutivas e obtenção da matriz de rigidez a nível local do elemento;
- 2) transformação da matriz de rigidez do referencial local para o referencial geral.

Antes de entrar em detalhes sobre a formulação de elementos de casca plana refere-se que nestes elementos existem os dois tipos de nós (coplanares e não coplanares) descritos no Capítulo 2 para os elementos de casca curvos. Os referenciais nodais locais dos elementos de casca plana (que por os elementos serem planos são iguais para todos os nós do elemento) são os mesmos utilizados nos elementos de casca curva (ver secção 2.2).

Considere-se um elemento de casca plana de n nós, definido no espaço de eixos globais XYZ . O plano médio de elemento define um sistema local de coordenadas $X'Y'Z'$, onde Z' é normal ao plano médio (Fig. 5.1).

Os deslocamentos de um ponto no referencial local de elemento (u') podem ser representados em função dos deslocamentos nodais por:

$$u' = N a' \quad , \quad N = [N_1, N_2, N_3, \dots, N_n], \quad a' = \begin{Bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ . \\ a'_n \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

em que:

$$a'_i = \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \\ \theta'_{x_i} \\ \theta'_{y_i} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad N_i = N_i I \quad (5.2)$$

sendo I a matriz identidade. Os deslocamentos nodais encontram-se referidos ao plano médio do elemento.

O vector de deformações generalizadas (ϵ') é um vector de dimensão (8×1) com a representação:

$$\epsilon' = \begin{pmatrix} \partial u' / \partial x' \\ \partial v' / \partial y' \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \partial \theta'_y / \partial x' \\ -\partial \theta'_x / \partial y' \\ \frac{\partial \theta'_y}{\partial y'} - \frac{\partial \theta'_x}{\partial x'} \\ -\theta'_x + \partial w' / \partial y' \\ \theta'_y + \partial w' / \partial x' \end{pmatrix} = B a', \quad B' = [B'_1, B'_2, \dots, B'_n] \quad (5.3)$$

em que:

$$B'_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x'} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} & \frac{\partial N_i}{\partial y'} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & +N_i \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

A relação entre deformações generalizadas e tensões generalizadas (σ') é obtida de:

$$\sigma' = \begin{pmatrix} N'_x \\ N'_y \\ N'_{xy} \\ M'_{xz} \\ M'_{yz} \\ M'_{xy} \\ Q'_{yz} \\ Q'_{xz} \end{pmatrix} = D \epsilon', \quad (5.5.a)$$

sendo a matriz D calculada a partir de:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu Eh}{(1-\nu^2)} & & & & & & & \\ \frac{\nu Eh}{(1-\nu^2)} & \frac{Eh}{(1-\nu^2)} & & & & & & & \\ & & \frac{Eh}{2(1+\nu)} & & & & & & \\ & & & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} & & & & \\ & & & \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & & & & \\ & & & & & \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} & & & \\ & & & & & & \frac{Eh}{2.4(1+\nu)} & & \\ & & & & & & & \frac{Eh}{2.4(1+\nu)} & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.b)$$

em que h representa a espessura do elemento em questão (as convenções de sentidos positivos para os esforços são as referidas na Fig. 5.2). A matriz de rigidez local é obtida de maneira usual por:

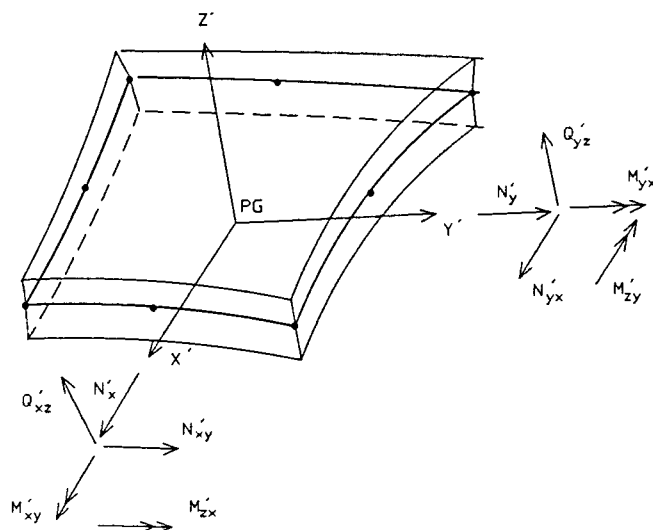
$$K' = \int \int_A B'^T D B' dA \quad (5.6)$$

Uma observação mais cuidada das expressões descritas até ao momento mostra que a nível local (como já havia sido anteriormente referido), a matriz de rigidez do elemento é obtida como a "sobreposição" das matrizes de rigidez de elementos de estado plano de tensão com elementos de laje, existindo por isso um total desacoplamento entre os esforços de membrana e de flexão.

A obtenção da matriz de rigidez referida ao sistema de referência geral é obtida facilmente conhecida a relação:

$$a'_i = T_i a_i \quad (5.7)$$

que transforma os deslocamentos de referencial geral para o referencial local do elemento. Como os elementos são planos a matriz T_i é igual para todos os nós, sendo a matriz T do elemento uma "matriz diagonal" em que os termos da diagonal são as matrizes T_i . A expressão formal de T_i é, consoante os nós são coplanares ou não coplanares, dada pelas equações (5.8.a) e (5.8.b), respectivamente ($l_{x'x}$ = cosseno do eixo x' com o eixo dos x).



X', Y', Z' = referencial nodal do elemento

PG = ponto de Gauss

N'_x = esforço de membrana (extensional) segundo a direcção X'

N'_y = esforço de membrana (extensional) segundo a direcção Y'

$N'_{xy} = N'_{yx}$ = esforço de membrana (de corte) no plano $X'Y'$

M'_{xx} = momento flector, flectindo o plano $Z'X'$

M'_{yy} = momento flector, flectindo o plano $Z'Y'$

$M'_{xy} = M'_{yx}$ = momento torsor

Q'_{xz} = esforço transversal no plano $X'Z'$

Q'_{yz} = esforço transversal no plano $Y'Z'$

Fig. 5.2 - Esforços locais no elemento de casca plana (convenções de sentidos positivos).

$$T_i = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} & 0 & 0 & 0 \\ l_{y'x} & l_{y'y} & l_{y'z} & 0 & 0 & 0 \\ l_{z'x} & l_{z'y} & l_{z'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8.a)$$

$$T_i = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} & 0 & 0 & 0 \\ l_{y'x} & l_{y'y} & l_{y'z} & 0 & 0 & 0 \\ l_{z'x} & l_{z'y} & l_{z'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} \\ 0 & 0 & 0 & l_{y'x} & l_{y'y} & l_{y'z} \\ 0 & 0 & 0 & l_{z'x} & l_{z'y} & l_{z'z} \end{bmatrix} \quad (5.8.b)$$

A matriz de rigidez referida ao referencial geral é então obtida como:

$$K = \int \int_A B^T D B dA \quad , \quad B = B' T \quad , \quad (5.9)$$

em que T é uma matriz diagonal por blocos contendo as várias matrizes T_i .

As acções possíveis para os elementos de casca plana são as já permitidas para os elementos de casca curva e que são as seguintes:

- 1) cargas concentradas em nós;
- 2) cargas distribuídas na face do elemento;
- 3) cargas distribuídas nos bordos do elemento;
- 4) acção gravítica;
- 5) variação de temperatura (uniforme na espessura do elemento);
- 6) assentamentos de apoio.

A obtenção do vector solicitação segue os passos usuais num programa de elementos finitos sendo apenas necessário tomar atenção à existência de dois tipos de nós (coplanares e não coplanares) o que obriga à consideração de referenciais distintos para as translações e para as rotações no caso dos nós serem coplanares.

5.3 - ELEMENTOS DE JUNTA

Os elementos de junta podem ser utilizados na modelação de um elevado número de descontinuidades em problemas estruturais. É apresentada neste trabalho uma formulação de elementos de junta que permite a sua utilização em problemas de tensão plana, deformação plana e axissimetria (elemento de junta de linha) ou em problemas tridimensionais em

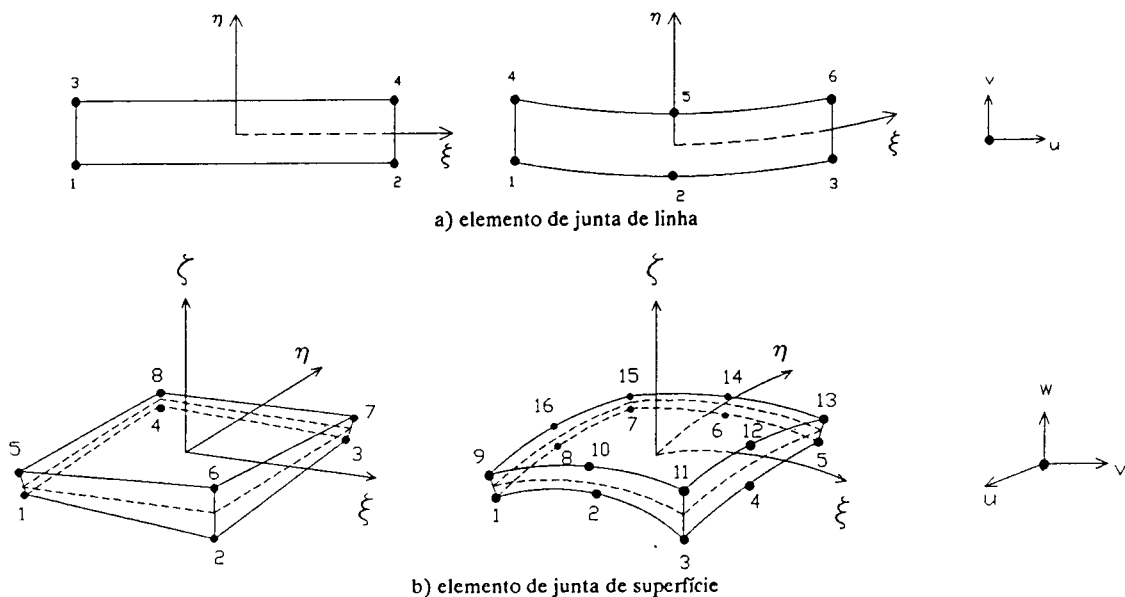


Fig. 5.3 - Elementos de junta.

conjugação com elementos de volume (elemento de junta de superfície). É possível a generalização da formulação apresentada para permitir a modelação de descontinuidades entre outros elementos, como sejam ligações casca/casca, casca/sólido, elemento plano/viga ou viga/viga (Beer [1985]).

A relação constitutiva tratada neste capítulo refere-se apenas ao comportamento elástico linear dos elementos de junta. Uma característica das juntas é que, durante a fase elástica do processo de carga não ocorrem normalmente deformações significativas o que implica o uso de elevados parâmetros de rigidez para os elementos de junta. Estes elevados valores de rigidez podem resultar num comportamento indesejado dos elementos (Rots, [1990]). Referências a relações constitutivas não lineares e à consideração de não linearidades geométricas dos elementos podem ser obtidas em Schellekens [1990] e Beer [1985]. Considere-se um elemento de junta de $2n$ nós numerados de acordo com a Fig. 5.3. Os deslocamentos (num referencial local) dum ponto pertencente à face inferior (b) ou superior (t) de um elemento de junta podem ser caracterizados como:

$$\mathbf{u}'_f = \mathbf{N}_f \mathbf{a}'_f, \quad f = b, t \quad (5.10)$$

em que:

$$\mathbf{a}'_f = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_{f1} \\ \mathbf{a}'_{f2} \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{fn} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{fi} = \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

e

$$\mathbf{N}_f = [N_{f1}, N_{f2}, N_{f3}, \dots, N_{fn}] \quad , \quad \mathbf{N}_{fi} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Os referenciais locais $X'Y'Z'$ são definidos como segue:

$$\mathbf{s}_1 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right\}^T \quad (5.13.a)$$

$$\mathbf{s}_2 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta} \right\}^T \quad (5.13.b)$$

$$\mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \quad (5.13.c)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{s}_1 / |\mathbf{s}_1| \quad (5.14.a)$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{s}_3 / |\mathbf{s}_3| \quad (5.14.b)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{z}' \times \mathbf{x}' \quad (5.14.c)$$

Os deslocamentos relativos entre pontos das duas faces dos elementos ($\Delta \mathbf{u}'$) podem ser escritos em função dum operador $\mathbf{L}'$ de acordo com:

$$\Delta \mathbf{u}' = \mathbf{L}' \mathbf{u}' \quad , \quad \mathbf{L}' = [\mathbf{I}_3, -\mathbf{I}_3] \quad (5.15.a)$$

$$\mathbf{u}' = \{\mathbf{u}'_t, \mathbf{u}'_b\}^T \quad (5.15.b)$$

obtendo-se então:

$$\Delta \mathbf{u}' = \mathbf{L}' \mathbf{u}' = \mathbf{L}' \mathbf{N} \mathbf{a}' = \mathbf{B}' \mathbf{a}' \quad , \quad (5.16.a)$$

com:

$$\mathbf{a}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_t \\ \mathbf{a}'_b \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_b \end{bmatrix} \quad (5.16.b)$$

em que $\mathbf{B}'$ pode ser explicitamente escrita como:

$$\mathbf{B}' = [\mathbf{N}_{t1}, \mathbf{N}_{t2}, \dots, \mathbf{N}_{tn}, -\mathbf{N}_{b1}, -\mathbf{N}_{b2}, \dots, -\mathbf{N}_{bn}] \quad (5.17)$$

As relações entre esforços no elemento e deslocamentos relativos (relações constitutivas) podem, no referencial local do ponto ser expressas por:

$$\mathbf{t} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}' \quad , \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} K_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & K_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & K_{z'} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}' = \begin{Bmatrix} t_{x'} \\ t_{y'} \\ t_{z'} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

A matriz de rigidez local do elemento virá dada por:

$$\mathbf{K}' = \int \int_A \mathbf{B}'^T \mathbf{D} \mathbf{B}' dA \quad (5.19)$$

Para transformar $\mathbf{K}'$ do referencial local para o referencial geral bastará atender a que

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T} \mathbf{a}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_f & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_t \\ \mathbf{a}_b \end{Bmatrix} \quad (5.20.a)$$

$$\mathbf{T}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ & \mathbf{T}_2 \\ 0 & & \mathbf{T}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T \\ \mathbf{y}'^T \\ \mathbf{z}'^T \end{bmatrix} \quad (5.20.b)$$

vindo a matriz de rigidez no referencial geral dada por:

$$\mathbf{K} = \int \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' \mathbf{T} \quad (5.21)$$

Este integral pode ser transformado utilizando coordenadas isoparamétricas em:

$$K = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} B^T D B \det J d\xi d\eta \quad (5.22)$$

em que $\det J$ é o determinante do Jacobiano. Para os elementos de junta de linha e de superfície o determinante da matriz Jacobiana vale, respectivamente,

$$\det J = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.23.a)$$

$$\det J = |s_1 \times s_2| = |s_3| \quad (5.23.b)$$

5.4 - ELEMENTOS DE CASCA PLANA E DE JUNTA: APLICAÇÕES

São muitas as possíveis aplicações do elemento de junta e dos elementos de casca plana. Os elementos de casca plana foram já por diversas vezes utilizados no presente trabalho (viga em "T", ponte em caixão e edifício de 2 pisos). Apresentam-se de seguida duas aplicações possíveis (uma para cada tipo de elemento) para os elementos apresentados.

É estudada uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga concentrada na qual existe uma fenda a meio vão. São utilizados elementos de junta para representar o possível desenvolvimento da fenda. São também discutidos os resultados do estudo de uma cúpula esférica na qual existem aberturas a meia altura e no topo. Foram utilizadas diferentes discretizações e condições de apoio.

5.4.1 - Estudo de uma viga fendilhada

O comportamento das juntas é caracterizado por, na sua fase elástica, as deformações serem muito pequenas o que obriga à utilização de elevados valores de rigidez para os elementos de junta. No exemplo estudado (Rots [1990]) procura-se avaliar o desempenho dos elementos de junta na sua fase elástica.

O estudo refere-se a uma viga simplesmente apoiada na qual existe uma fenda vertical a meio vão de 20cm de altura (Fig. 5.4). Foi considerado um módulo de elasticidade para a viga de 20GPa e coeficiente de Poisson de 0.2. O valor da rigidez normal nos elementos de junta (K'_z) foi considerado igual a 10^9 e 10^{11} kN/m³. A rigidez tangencial não tem influência nos resultados.

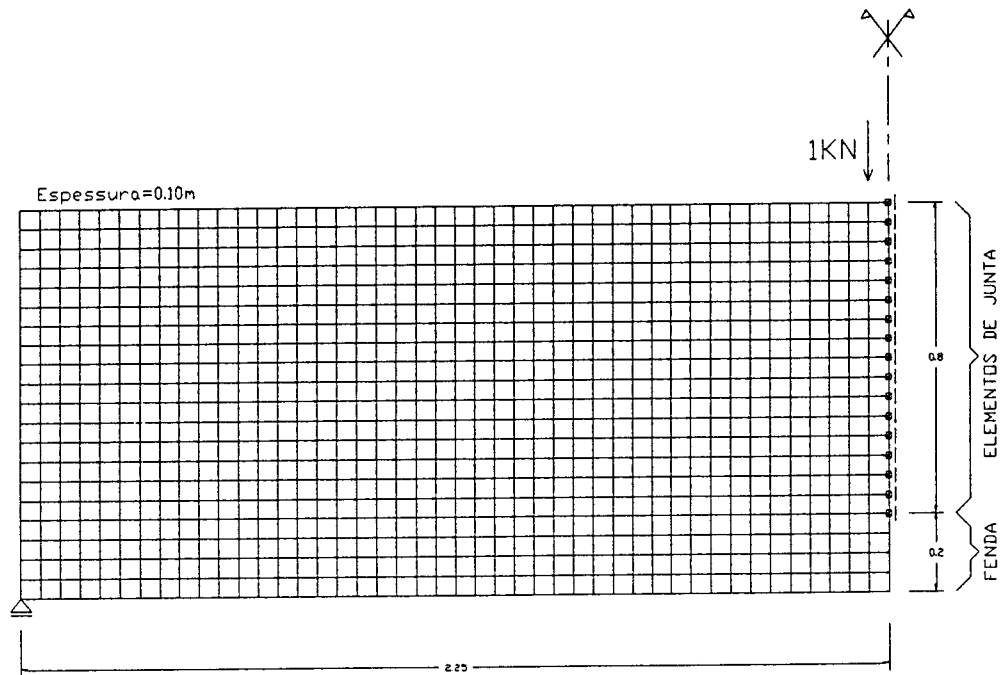


Fig. 5.4 - Viga fendilhada (geometria e malha de elementos finitos).

Os elementos utilizados são elementos de 8 nós com integração reduzida e elementos de junta de linha de 6 nós com integração completa (3 pontos de Gauss).

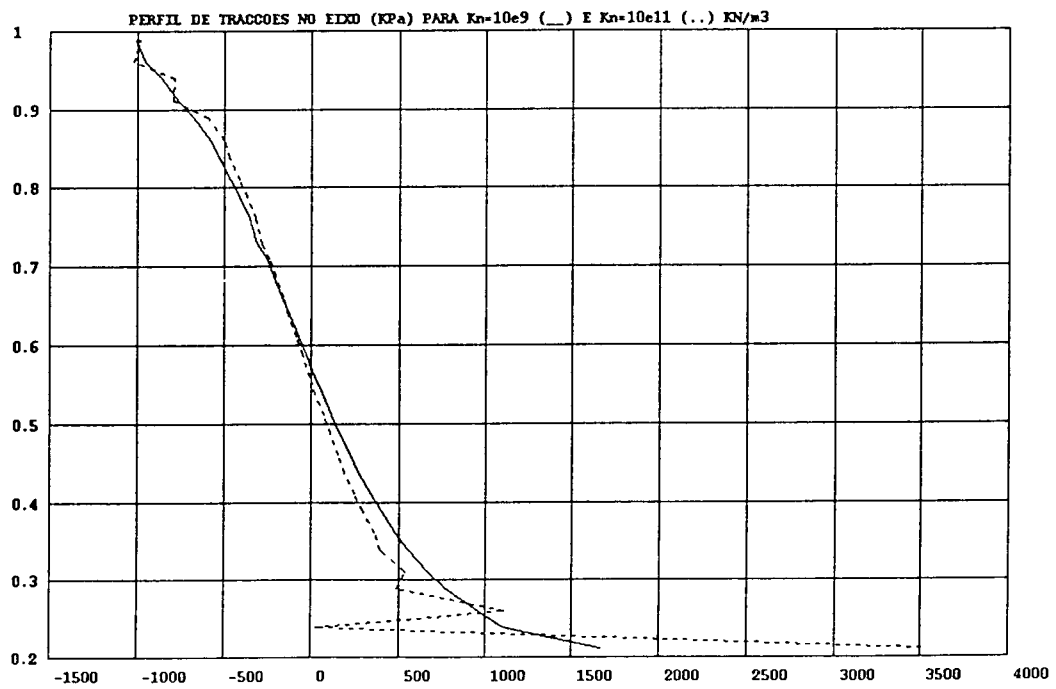
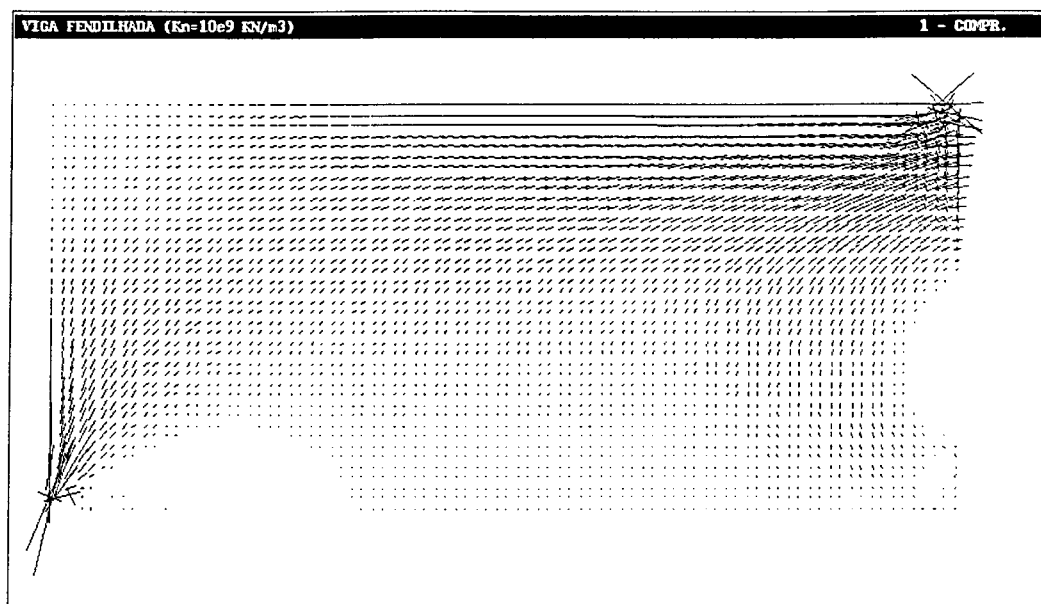
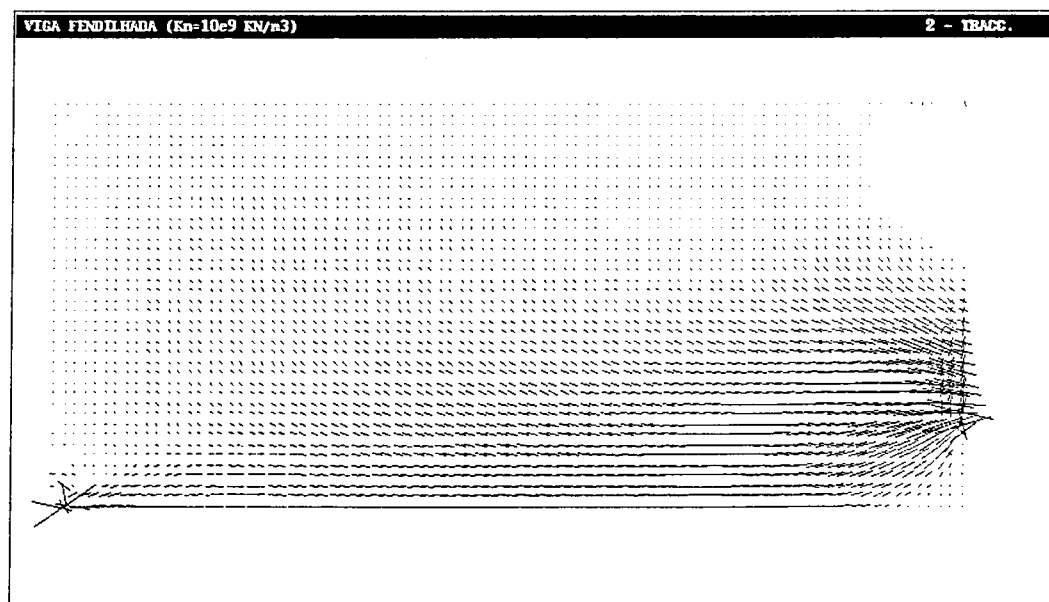


Fig. 5.5 - Viga fendilhada (perfis de tracções nos elementos de junta).



a) tensões principais de compressão



b) tensões principais de tração

Fig. 5.6 - Viga fendilhada (tensões principais).

A observação dos perfis de tracções (Fig. 5.5) mostra a existência de oscilações das tracções no elemento de junta para $K_n = 10^{11} \text{ kN/m}^3$. Estas oscilações revelam um mau comportamento dos elementos de junta para elevados valores de K_n e devem-se aos elevados gradientes de tracção existentes, bem como ao facto de existir acoplamento entre os diversos

nós dos elementos nos modos de deformação de energia nula (Schellekens [1990]), revelados numa análise de valores próprios da matriz de rigidez dos elementos. Um refinamento da malha tenderá a eliminar estas oscilações.

As tensões principais nos elementos planos para a situação $K_n = 10^9 \text{ kN/m}^3$ encontram-se representadas na Fig. 5.6 a-b, ilustrando claramente uma elevada concentração de tensões na zona que se segue à fenda.

5.4.2 - Estudo de uma cúpula esférica

Este exemplo refere-se a uma cúpula esférica de betão armado com a geometria indicada na Fig. 5.7. Foi estudada uma "fatia" da cúpula à qual foram impostas condições de simetria.

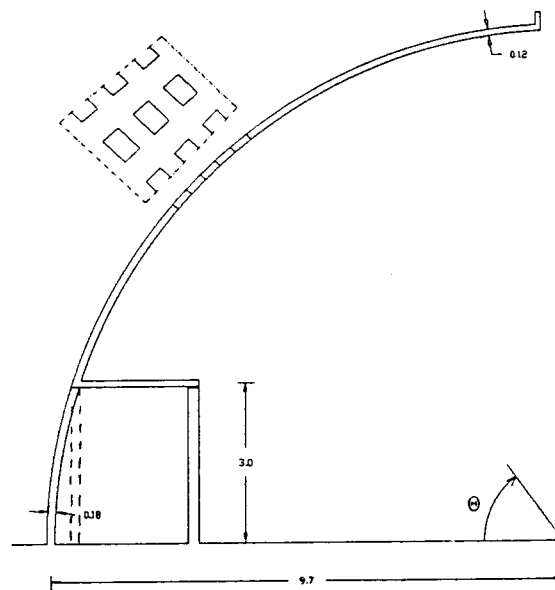


Fig. 5.7 - Cúpula esférica (geometria).

O material utilizado foi o B25 ($E = 29 \text{ GPa}$, $\nu = 0.2$) e a solicitação considerada foi o peso próprio. A cúpula possui uma espessura variável de 18cm (na base) a 12cm (no topo). Os elementos foram considerados de espessura constante, apresentando por esse facto descontinuidades de espessura entre elementos.

Pretendia-se com este estudo avaliar a importância de diversos factores no comportamento da cúpula:

- 1) *discretização da cúpula* - comparou-se o efeito entre a discretização com elementos planos e com elementos curvos;
- 2) *condições fronteira* - foram estudadas duas possibilidades de ligação da estrutura ao exterior; o primeiro processo consistiu em utilizar um apoio duplo impedindo o deslocamento horizontal da cúpula e não considerando a existência do patamar; no segundo processo considerou-se a existência de patamar mas deixou-se a cúpula ter movimentos radiais (Fig. 5.8); devido à existência de uma nervura na abertura do cume da cúpula não foram permitidas rotações no topo da cúpula, considerando-se portanto um encastramento deslizante;
- 3) *existência das aberturas na cúpula* - analisou-se o efeito provocado pelas aberturas; as aberturas foram simuladas utilizando na zona destas um módulo de elasticidade igual a metade do utilizado na restante estrutura ($E = 14.5 GPa$), pois a área das aberturas é aproximadamente igual a 50% da área das zonas maciças.



Fig. 5.8 - Cúpula esférica (condições de apoio).

Foram utilizados elementos de casca de 8 nós com integração reduzida. As malhas de elementos finitos utilizadas (discretização com elementos planos) encontram-se representadas na Fig. 5.9.

A análise das diferentes soluções atendendo aos dois processos de discretização (elementos curvos e elementos planos) revela uma elevada concordância de resultados ao nível dos esforços de membrana para todas as situações analisadas (Fig. 5.10.a-b). No entanto a comparação dos diagramas de momentos revela que a discretização com elementos de casca planos revelou a existência de oscilações nestes diagramas (Fig. 5.11.a-b e Fig. 5.12.a-b).

NOTA: em todos os diagramas utilizados neste capítulo a direcção X representa a direcção segundo os meridianos e a direcção Y a direcção circunferencial. Os momentos flectores apresentados como negativos são aqueles que provocam tracções na superfície interior da cúpula.

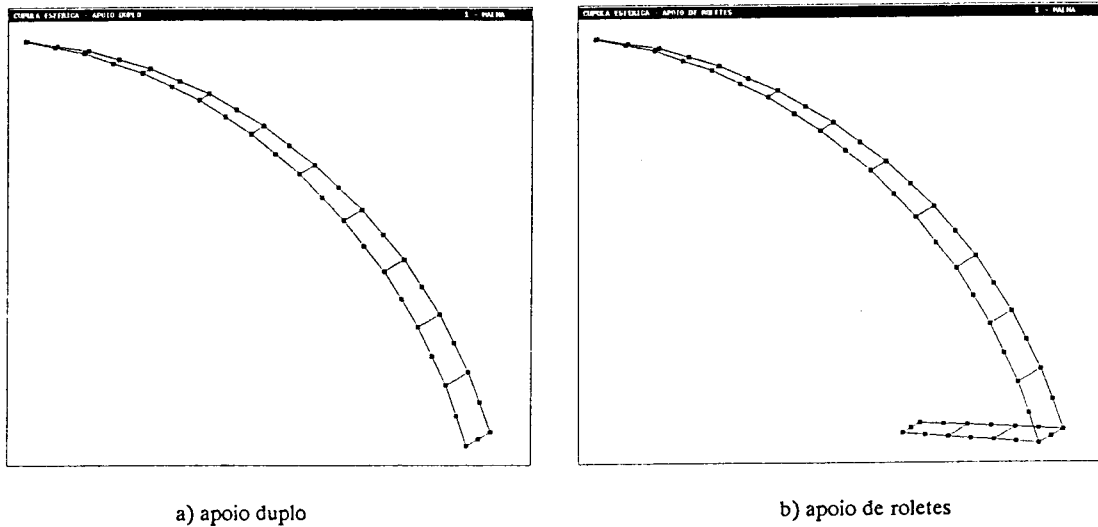


Fig. 5.9 - Cúpula esférica (malhas de elementos finitos).

É sabido (Bouberguig [1983] e Gallagher [1975]) que a discretização de cascas de superfície média curva com elementos planos origina o aparecimento de momentos flectores parasitas, especialmente nas zonas onde os esforços de membrana são predominantes, não sendo por isso de estranhar o aparecimento destas oscilações. Este tipo de perturbação deverá obviamente desaparecer quando se procede a um refinamento da malha.

Nesta óptica, procedeu-se à análise da cúpula utilizando uma malha de elementos finitos na qual foram utilizados o dobro dos elementos do estudo anterior. Nesta nova malha mantiveram-se as espessuras dos elementos utilizados anteriormente.

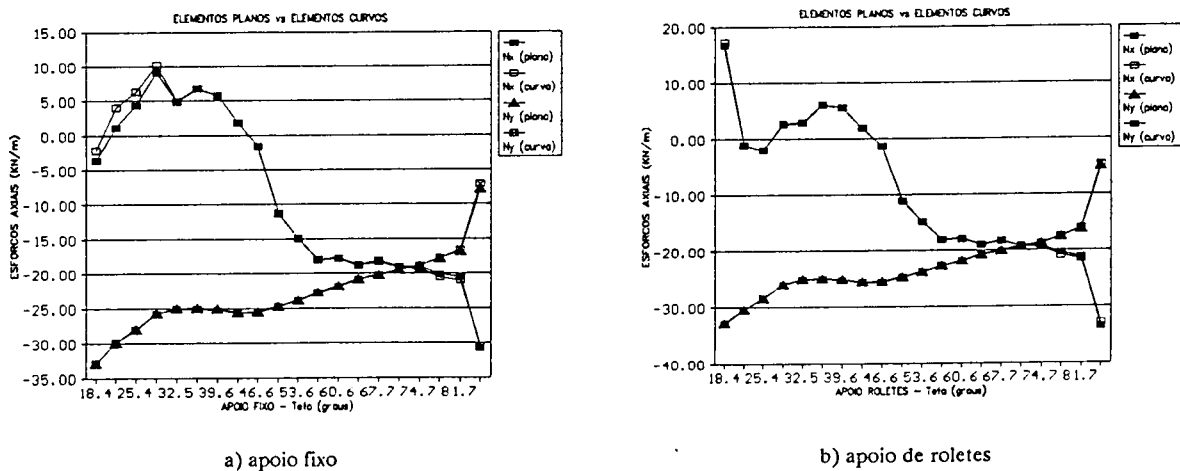
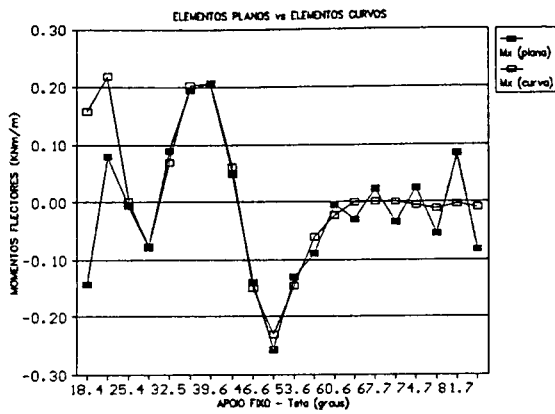
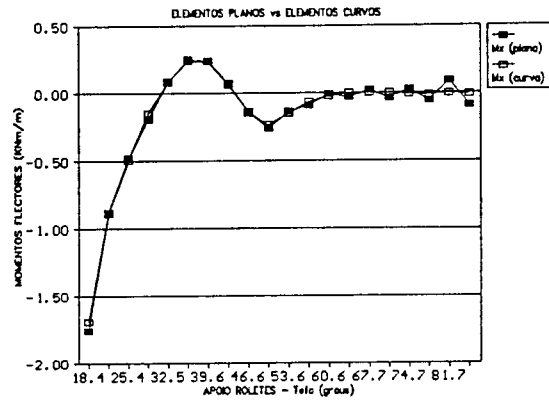


Fig. 5.10 - Cúpula esférica (comparação das discretizações com elementos curvos e com elementos planos - esforços axiais).

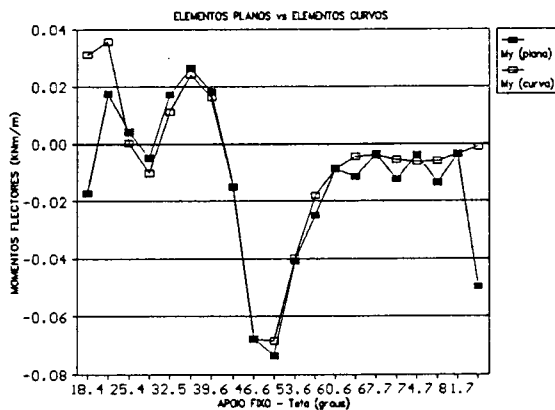


a) apoio fixo

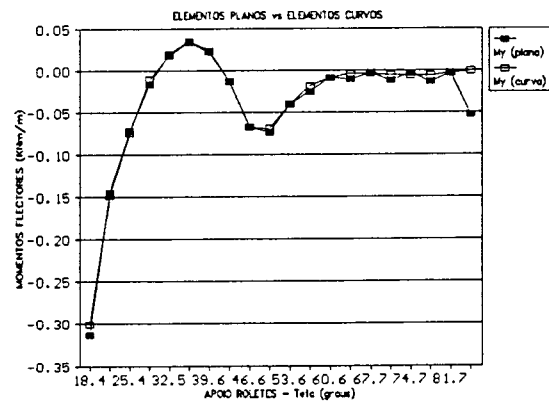


b) apoio de roletes

Fig. 5.11 - Cúpula esférica (comparação das discretizações com elementos curvos e com elementos planos - momentos flectores meridionais).



a) apoio fixo



b) apoio de roletas

Fig. 5.12 - Cúpula esférica (comparação das discretizações com elementos planos e com elementos curvos - momentos circunferenciais).

A observação dos diagramas de momentos da malha refinada (Fig. 5.13) revela efectivamente a redução das oscilações nos diagramas de momentos. Contudo, a observação do diagrama de momentos circunferenciais revela que nas zonas junto às extremidades superior e inferior da cúpula as diferenças, ainda que pequenas, são mais acentuadas que no resto da cúpula (esta perturbação era de facto bastante notória nos diagramas das Figs. 5.11 e 5.12). Uma explicação para este facto pode ser dada atendendo à forma como foram definidos os referenciais de simetria para a discretização com elementos de casca planos. Os referenciais utilizados neste caso foram os mesmos que foram usados na discretização com

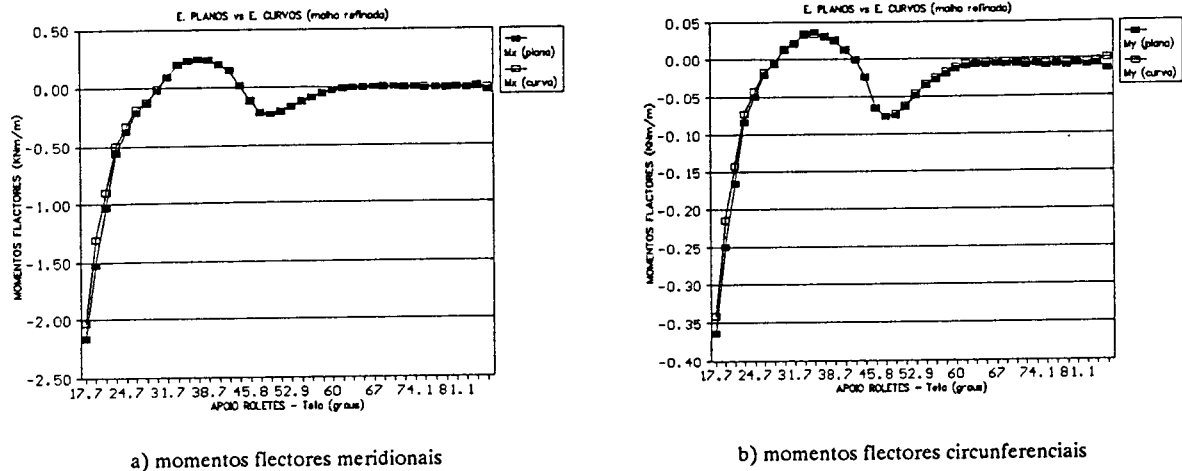


Fig. 5.13 - Cúpula esférica (comparação das discretizações com elementos planos e com elementos curvos - malha refinada).

elementos de casca curvos o que faz com que os referenciais não simulem exactamente as condições fronteira do problema quando se utilizam os elementos de casca planos. Nestas condições, surgem forças de fixação que não se encontram no plano do elemento e que consequentemente possuem componentes segundo a normal a este plano e que poderão provocar as perturbações referidas. Repare-se que à medida que se vai refinando a malha este género de problemas tenderá naturalmente a diminuir o que pode de facto ser comprovado no exemplo estudado.

A utilização das duas condições fronteira para o problema revelou que somente na zona inferior da cúpula ($\theta \leq 35^\circ$) existem diferenças significativas entre as duas soluções, verificando-se o aparecimento de tracções circunferenciais para $\theta < 19^\circ$ no caso em que se deixou livre o deslocamento radial da cúpula na zona inferior. Para esta situação verificou-se também o aparecimento de momentos de continuidade entre a cúpula e o patamar. Para $\theta > 35^\circ$ existe uma grande convergência de resultados entre as duas condições fronteira utilizadas.

Um último factor que se pretendia estudar referia-se à comparação do comportamento da cúpula quando existiam as aberturas com o comportamento desta supondo-a toda maciça. Como foi referido anteriormente, a existência das aberturas foi simulada utilizando para módulo de elasticidade do betão na zona de existência das aberturas um valor igual a metade do utilizado nas restantes zonas da cúpula.

A comparação entre as deformadas para estas duas situações de apoio ilustra o efeito provocado pela perda de rigidez (Fig. 5.14-5.15). Os diagramas de esforços (Fig. 5.16-5.19)

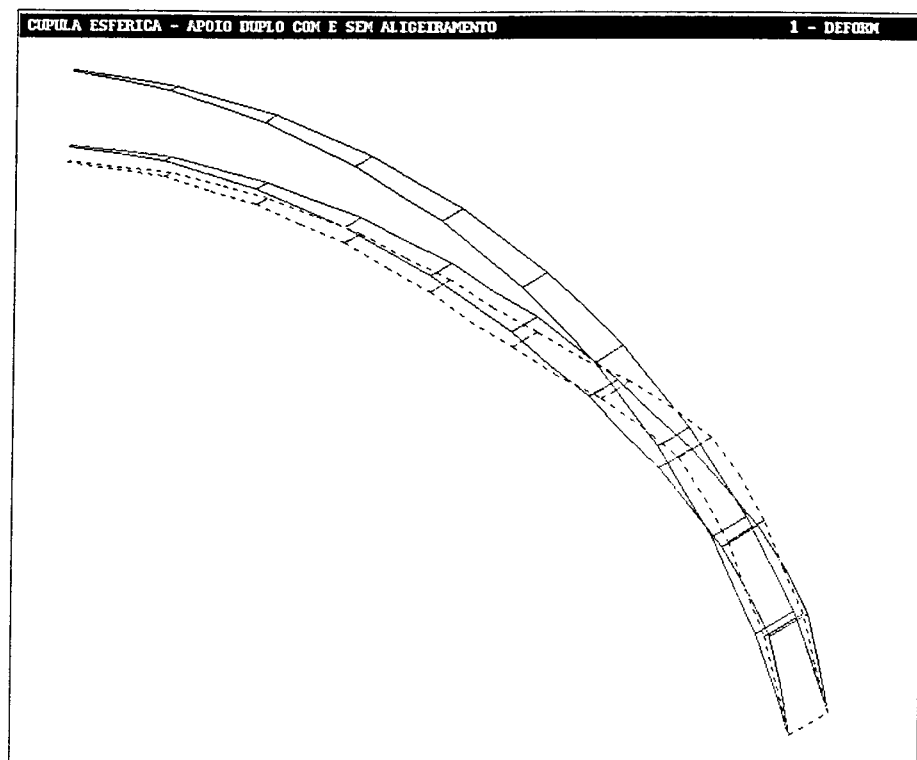


Fig. 5.14 - Cúpula esférica (comparação da deformada quando existem aberturas com a situação em que se considerou toda a cúpula maciça - apoio fixo).

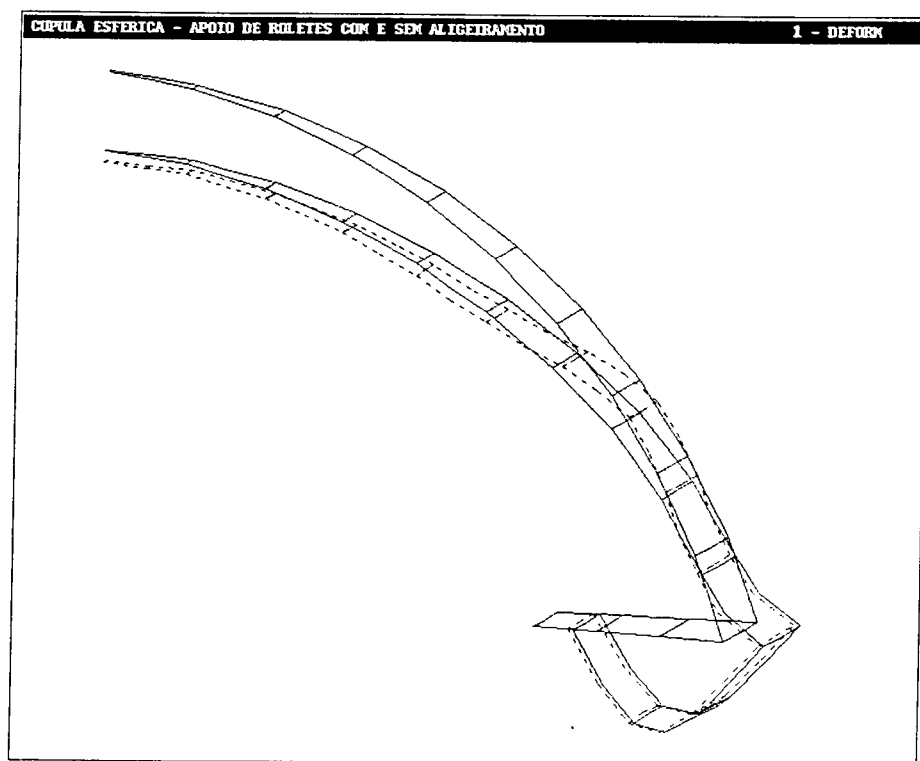
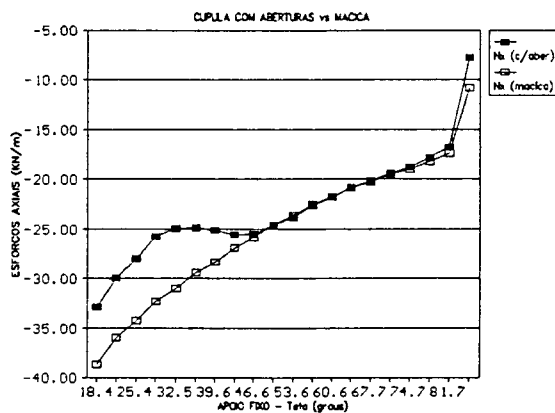


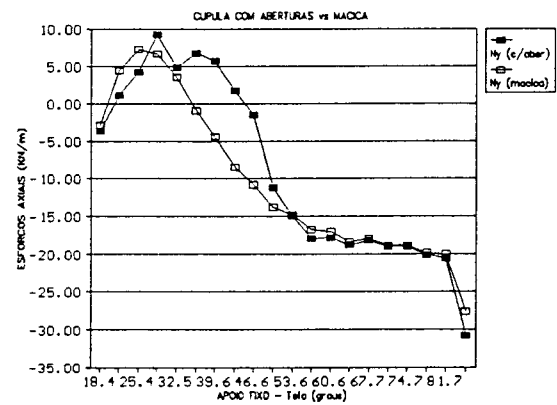
Fig. 5.15 - Cúpula esférica (comparação da deformada quando existem aberturas com a situação em que se considerou toda a cúpula maciça - apoio de roletes).

revelam que o efeito provocado pelas aberturas é perfeitamente identificável e se traduz a nível de esforços axiais por (fazendo uma análise do topo para a base da cúpula):

- 1) *esforço axial meridional* - na zona das aberturas existe uma diminuição das compressões, retomando o diagrama o andamento igual ao que vinha seguindo depois das aberturas (Fig. 5.16.a e 5.17.a);
- 2) *esforço axial meridional* - existe redução do esforço de compressão na zona das aberturas e o aparecimento de tracções numa maior área da cúpula (aparecem tracções para $\theta \leq 45^\circ$ enquanto se a cúpula fosse maciça as tracções restringiam-se a $\theta \leq 35^\circ$ - Fig. 5.16.b e 5.17.b).

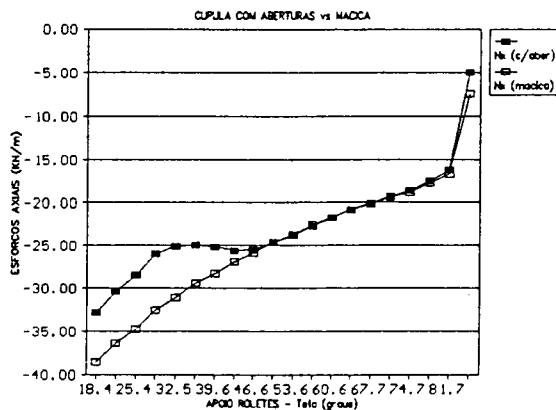


a) esforços axiais meridionais

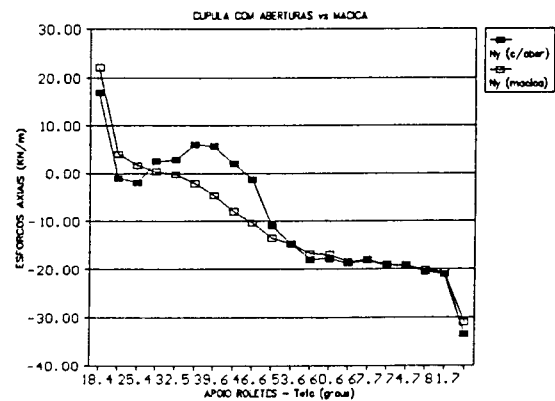


b) esforços axiais circunferenciais

Fig. 5.16 - Cúpula esférica (comparação da existência de aberturas na cúpula com a hipótese da cúpula ser toda maciça - apoio fixo - esforços de membrana).



a) esforços axiais meridionais



b) esforços axiais circunferenciais

Fig. 5.17 - Cúpula esférica (comparação da existência de aberturas na cúpula com a hipótese da cúpula ser toda maciça - apoio de roletes - esforços de membrana).

No respeitante aos momentos flectores verifica-se que a existência das aberturas origina o aparecimento de momentos positivos na zona do aligeiramento provocados pela deformada em S . Esta deformada provoca depois uma inversão dos momentos fazendo com que a zona em que existem momentos com algum significado se estenda até $\theta \cong 60^\circ$ (no caso em que a cúpula se considerou maciça estes momentos estendiam-se apenas até $\theta \cong 35^\circ$ - Fig. 5.18 e 5.19).

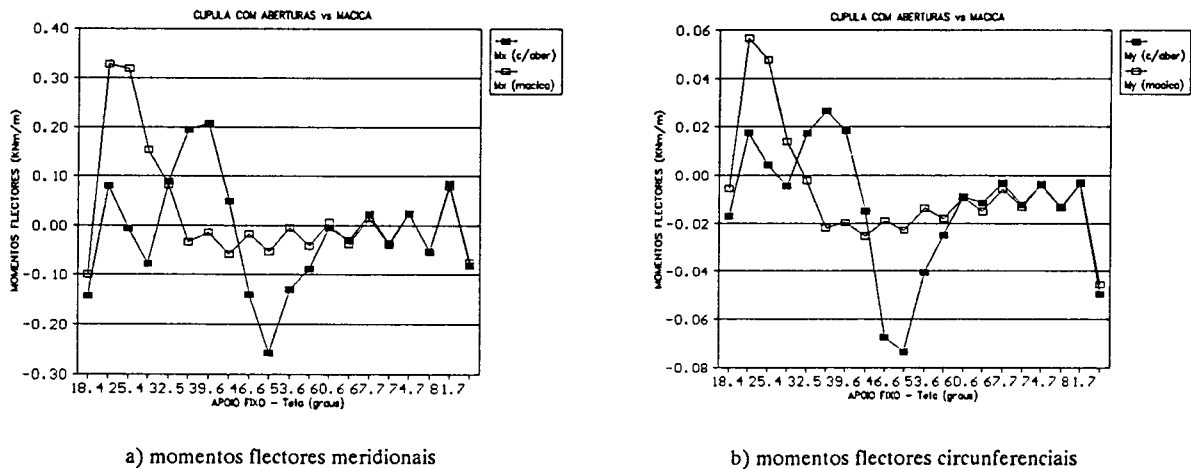


Fig. 5.18 - Cúpula esférica (comparação da existência de aberturas na cúpula com a hipótese da cúpula ser toda maciça - apoio fixo - momentos flectores).

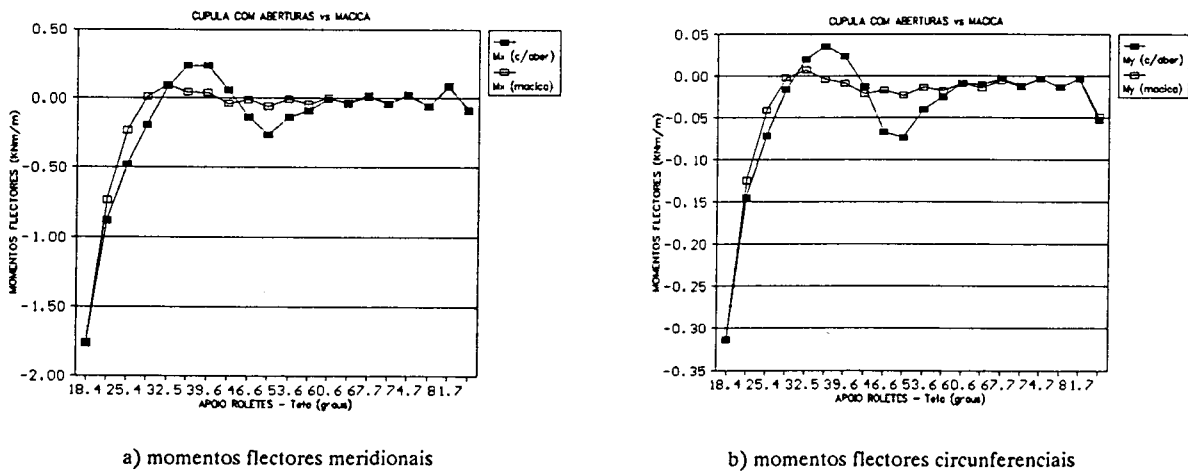


Fig. 5.19 - Cúpula esférica (comparação da existência de aberturas na cúpula com a hipótese da cúpula ser toda maciça - apoio de roletes - momentos flectores).

CAPÍTULO 6

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO PROJECTO E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS

6.1 - INTRODUÇÃO

Os programas de cálculo automático de estruturas utilizando o método dos elementos finitos têm cada vez maior aplicação prática. Assim, é necessário que os programas sejam capazes de dar ao projectista facilidades que vão para além do simples tratamento gráfico de deslocamentos e tensões/esforços. Como exemplos destas facilidades refere-se o uso de módulos de pré-processamento que permitam uma fácil introdução e controlo de dados como forma de minimizar os erros cometidos nesta fase do cálculo, a introdução de novos tipos de elementos e outras facilidades como restrições de deslocamentos que permitam uma melhor aproximação do modelo à estrutura real. Por fim, refere-se a possibilidade, dado o uso generalizado do betão armado, de calcular e desenhar as armaduras necessárias de acordo com a regulamentação existente.

O presente capítulo apresenta e discute os resultados da análise de um exemplo prático, que consiste numa laje de fundação. Este estudo levantou algumas questões de ordem prática como por exemplo, saber até que ponto a influência da deformabilidade do solo poderia influenciar os resultados ou como obter de uma forma pouco trabalhosa e segura, indicações sobre as quantidades e distribuição de armadura necessárias.

Atendendo à frequência com que estas questões podem surgir introduziu-se no programa um módulo que permite proceder ao dimensionamento de armadura em cascas de betão armado submetidas a esforços de membrana e/ou flexão e considerou-se a possibilidade de se considerar de forma aproximada os efeitos da deformabilidade do solo de fundação. Estes dois aspectos serão também referidos ao longo deste capítulo.

6.2 - CÁLCULO DE ARMADURAS EM CASCAS DE BETÃO ARMADO

O estudo e dimensionamento de estruturas de betão armado obriga ao cálculo das armaduras a partir de valores dos esforços obtidos. É por isso de grande utilidade a introdução nos programas de cálculo automático de módulos que a partir dos esforços obtidos no cálculo dêem valores das quantidades de aço necessárias a colocar na estrutura para que esta verifique as normas de segurança.

No presente trabalho, foi introduzido no programa FEMIX, um módulo de cálculo de armadura em elementos laminares de betão armado sujeito a esforços de membrana e/ou flexão, baseado num método desenvolvido por Lourenço [1992] e no qual o cálculo da armadura é efectuado a partir dos esforços calculados em regime linear elástico. Este modelo enquadra-se nas propostas regulamentares do Eurocódigo 2 (CEN, 1991) e do Modelo Código 90 (CEB-FIP, 1990), permitindo portanto um dimensionamento de acordo com a regulamentação existente.

Como hipóteses de base supõe-se que o betão não resiste à tracção e é desprezada a engrenagem entre as faces de uma fenda ("aggregate interlock"). A resistência à compressão do betão foi considerada de acordo com o MC90 e vale:

a) zonas não fendilhadas

$$f_{cd1} = 0.85(1 - f_{ck}/250)f_{cd} \quad (6.1)$$

b) zonas fendilhadas onde a resistência à compressão do betão pode ser reduzida pelo efeito da tensão transversal produzida pela armadura e pela necessidade de transmitir força através das fendas

$$f_{cd2} = 0.60(1 - f_{ck}/250)f_{cd} \quad (6.2)$$

c) zonas não fendilhadas em que o betão se encontrar em compressão biaxial; a tensão máxima de rotura vem aumentada para $K f_{cd1}$ devido ao confinamento do betão

$$K = \frac{1 + 3.65\alpha}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (6.3)$$

em que σ_1 e σ_2 são respectivamente as tensões principais mínima e máxima e f_{ck} é a tensão de rotura característica do betão em cilindros, expressa em MPa.

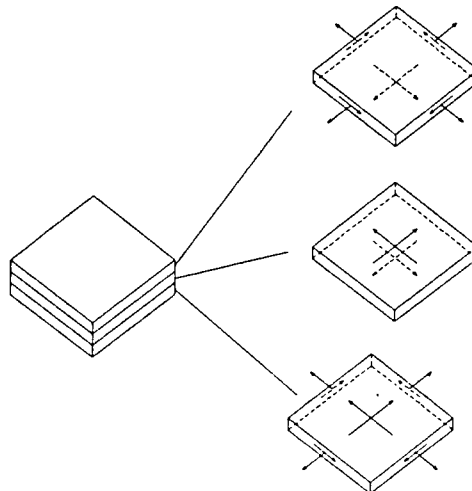


Fig. 6.1 - Cálculo da armadura (modelo utilizado).

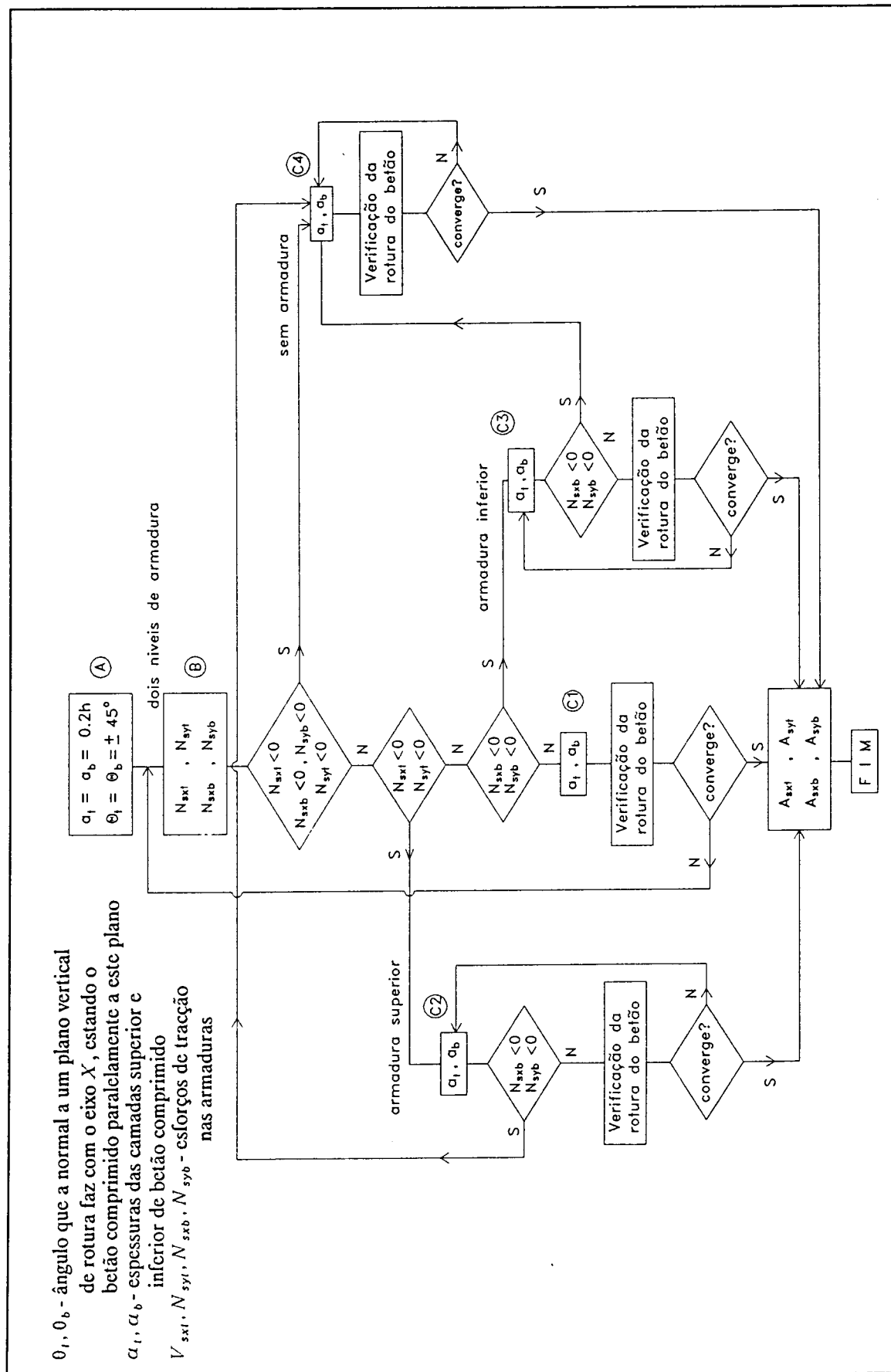


Fig. 6.2 - Fluxograma simplificado da subrotina de cálculo de armadura em cascas de betão armado.

Admite-se que o aço só resiste a esforços de tracção e a sua tensão de rotura é igual à tensão de cedência (ou a tensão de proporcionalidade a 0.2% para os aços duros), desprezando-se os problemas de adesão e ancoragem dos varões. Supõe-se ainda que os varões se encontram suficientemente próximos e paralelos entre si e considera-se a armadura distribuída segundo dois feixes ortogonais.

O método utilizado supõe que o elemento se encontra dividido em três camadas nas quais as duas exteriores fornecem resistência aos esforços axiais e momentos flectores e a camada interior assegura a transmissão do corte entre as duas camadas (Fig. 6.1).

Existem 8 equações em causa (6 de equilíbrio e 2 de compatibilidade que são resolvidas por um método iterativo cuja subrotina se encontra esquematizada na Fig. 6.2. Detalhes sobre as equações e descrição da subrotina utilizada (em FORTRAN) podem ser encontradas em Lourenço [1992] e Lourenço e Figueiras [1992].

Refere-se ainda, que serão necessários fornecer como dados do problema as camadas de recobrimento da armadura segundo as duas direcções da armadura bem como o ângulo que esta armadura faz com os eixos coordenados. O valor fornecido do recobrimento será a soma do recobrimento inferior com o superior.

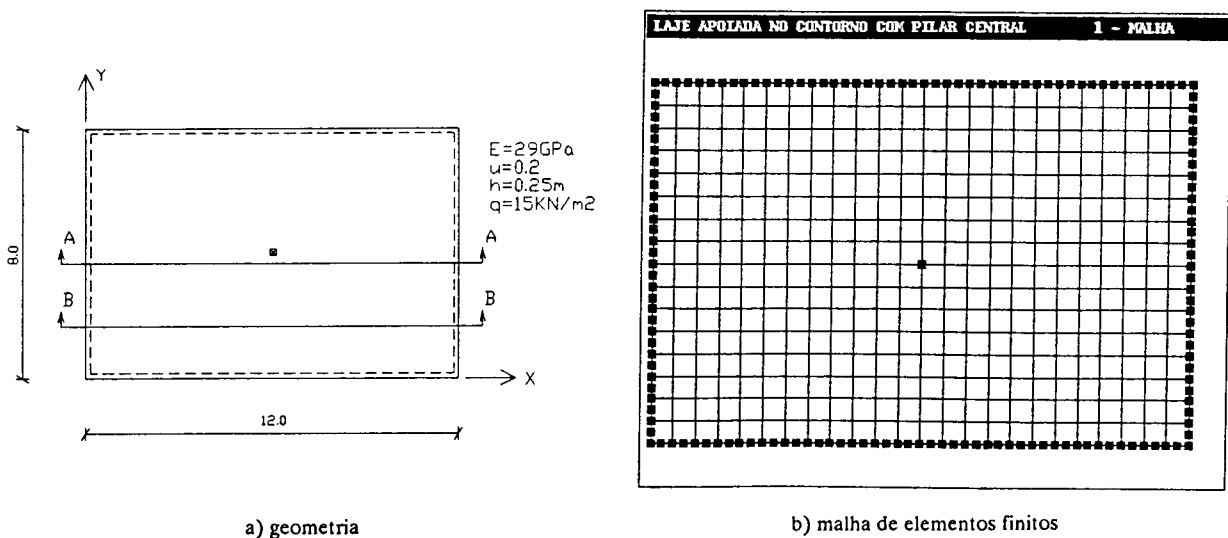


Fig. 6.3 - Laje simplesmente apoiada com pilar no centro.

Os valores da armadura são calculados nos pontos de Gauss dos elementos para os valores dos esforços nestas secções. São permitidos dois modos distintos de saída de resultados: pixelagens de armaduras (inferior e superior nas duas direcções) indicando as densidades de armadura, e diagramas de armadura ao longo de linhas paralelas aos eixos coordenados. Os

valores das armaduras apresentadas nos cortes são os valores obtidos nos pontos de Gauss sem sofrerem qualquer extrapolação enquanto nas pixelagens os valores das armaduras nos nós são uma média dos valores das armaduras obtidas através da extrapolação dos valores calculados nos pontos de Gauss dos diferentes elementos que contém o nó.

Um exemplo simples mas elucidativo é apresentado de seguida. Considerou-se uma laje simplesmente apoiada no contorno com um pilar no centro (Fig. 6.3). A distância do centro de gravidade das armaduras às faces da laje foi considerada igual a 2.5cm nas duas direcções.

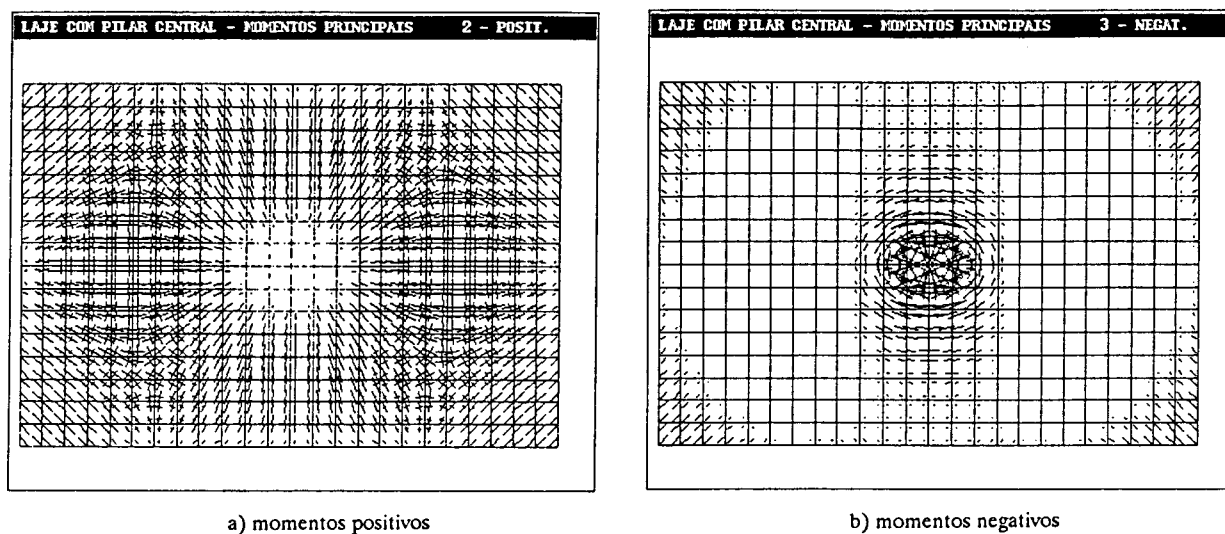


Fig. 6.4 - Laje simplesmente apoiada com pilar central (momentos principais).

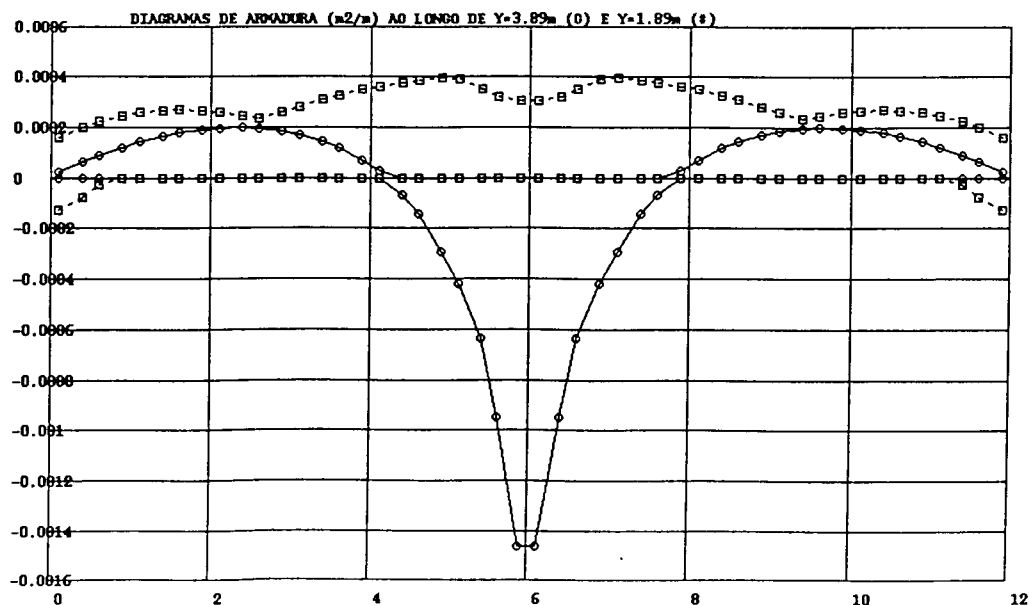
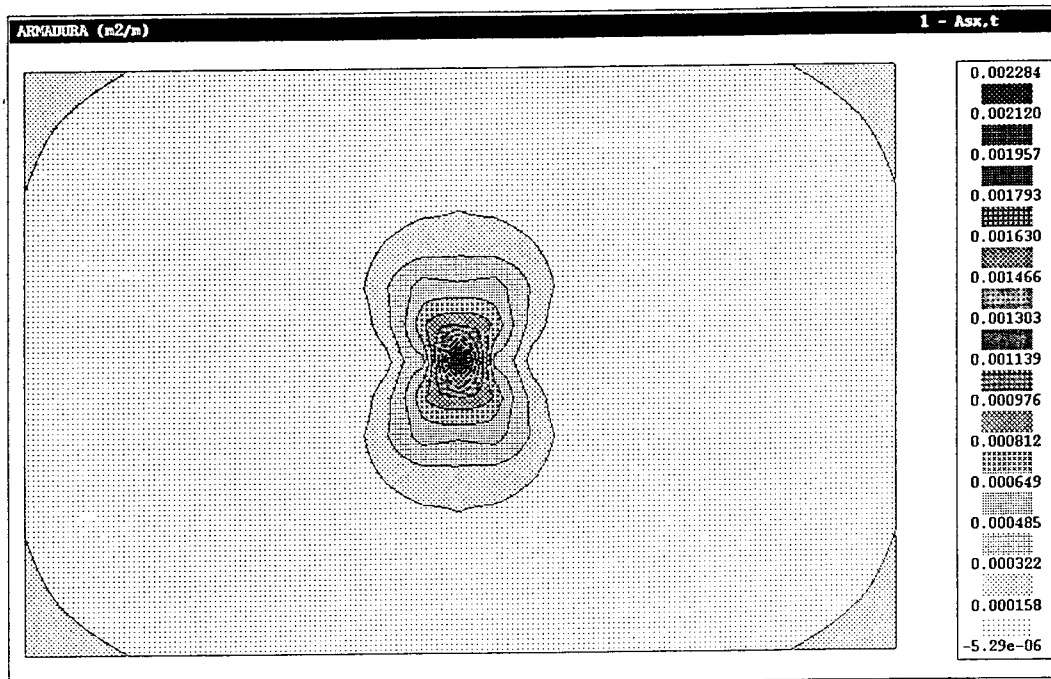
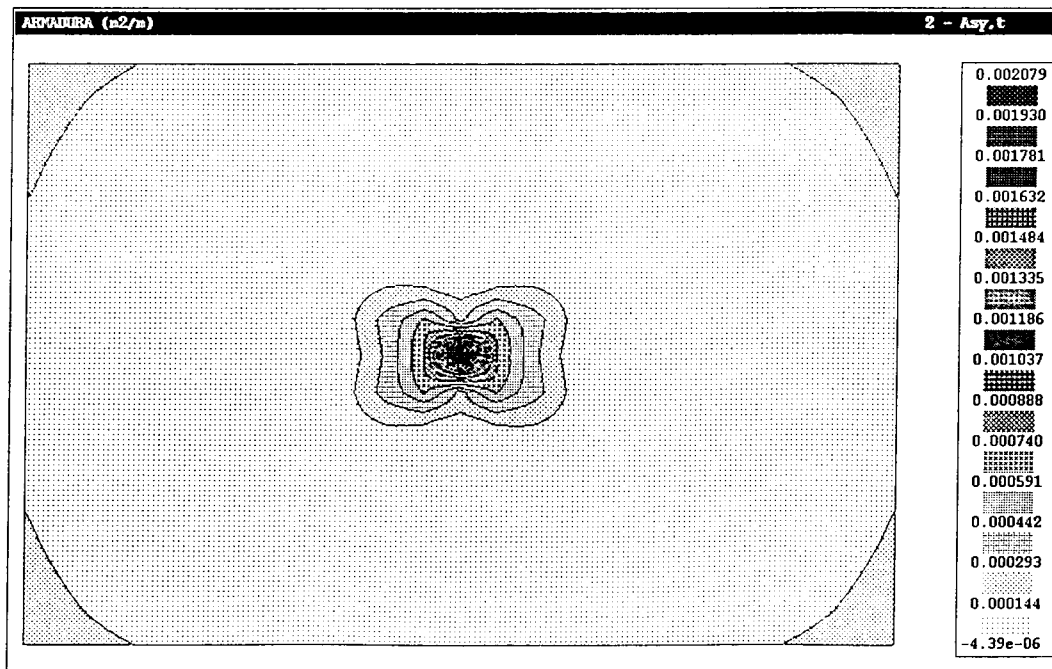


Fig. 6.5 - Diagramas de momentos ao longo de linhas paralelas ao eixo dos X.

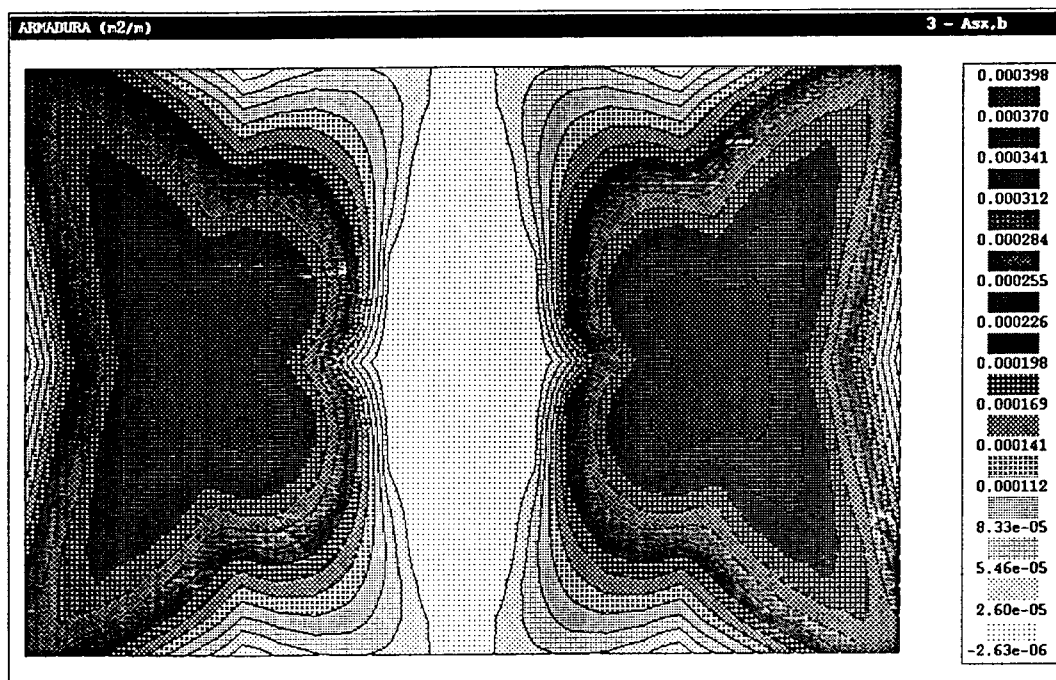


a) armadura superior X

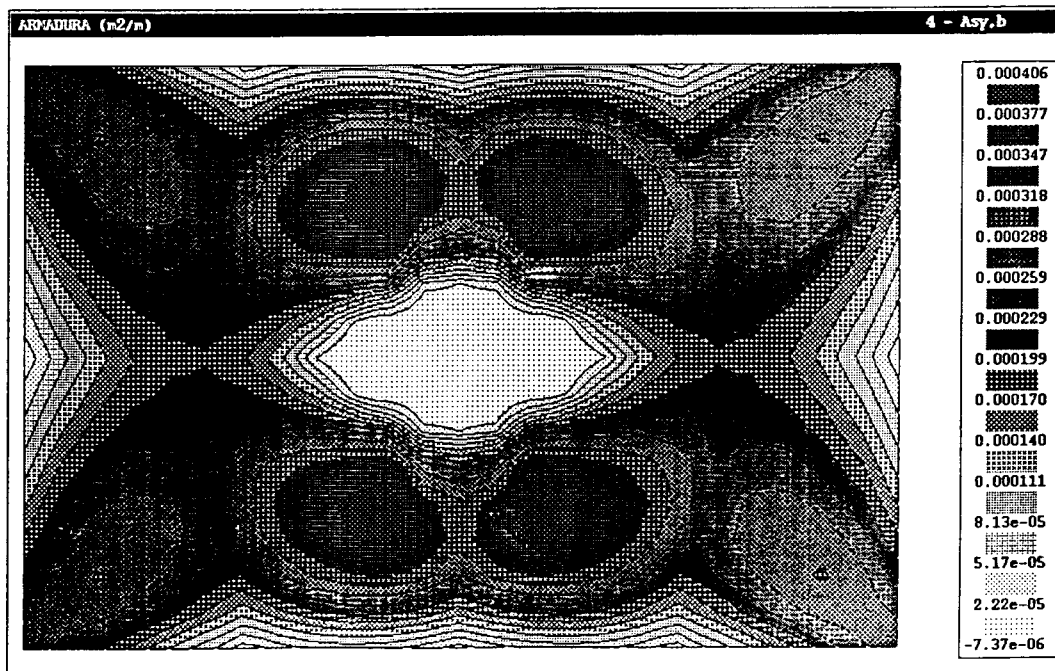


b) armadura superior Y

Fig. 6.6 - Laje simplesmente apoiada com pilar central (armadura superior).



a) armadura inferior X



b) armadura inferior Y

Fig. 6.7 - Laje simplesmente apoiada com pilar central (armadura inferior).

As Figs. 6.4.a-b representam os momentos principais (positivos e negativos) e que permitem fazer um controlo dos diagramas e pixelagens de armadura (Figs. 6.5, 6.6 e 6.7).

Na convenção de sinais utilizada nos diagramas de armaduras considerou-se que as armaduras negativas correspondem à armadura a colocar na face superior e as armaduras positivas às armaduras a colocar na face inferior. As linhas ao longo das quais se encontram definidos estes diagramas referem-se aos cortes A($Y = 3.89\text{m}$) e B($Y = 1.89\text{m}$) da Fig. 6.3.a.

Nas pixelagens de armaduras na face superior detecta-se claramente a necessidade de colocação de armadura de canto nas duas direcções de armadura consideradas. Os valores negativos das armaduras encontradas nas pixelagens devem-se ao processo de extrapolação utilizado pelo programa DRAWMESH e que origina o aparecimento de pequenos resíduos.

6.3 - APOIOS ELÁSTICOS

O efeito da deformabilidade do solo pode ter grande influência no comportamento de algumas estruturas, sendo por isso conveniente entrar com este efeito na análise da estrutura, por forma a garantir uma adequada segurança estrutural.

A análise deste efeito pode ser efectuada utilizando elementos finitos com as características de deformabilidade dos solos. Por exemplo, o estudo de uma laje assente em solo elástico pode ser modelado utilizando elementos de volume para representar o solo. A utilização de elementos finitos para modelar o solo pode exigir a presença de poderosos meios computacionais para resolver o problema visto que o número de elementos e variáveis nodais pode ser muito aumentado pela introdução destes elementos.

Uma solução aproximada para resolver este problema consiste em representar a deformabilidade do solo através de um coeficiente que estabeleça uma relação entre a reacção e a deformação do terreno. Este modelo é em geral conhecido pela designação de fundação de Winkler.

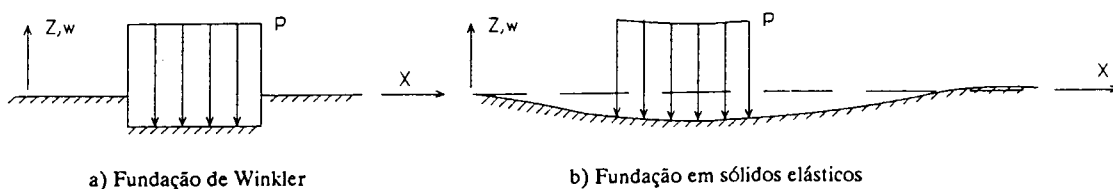


Fig. 6.8 - Deformações em fundações elásticas.

Uma fundação de Winkler consiste num processo simplificado para obter o efeito do solo que já se considera que a fundação se deforma apenas onde existem elementos que transmitam forças ao terreno, não se considerando a deformabilidade do solo adjacente (Fig. 6.8).

Define-se um elemento de fundação como a área da superfície da fundação que exerce contacto com um elemento (ou com a face de um elemento) da estrutura suportada. No caso da laje assente em solo elástico o elemento de fundação tem a área e a forma do elemento de laje.

Tem-se que numa fundação de Winkler a relação entre a tensão instalada e o deslocamento de um ponto do terreno é obtida por:

$$t = K_s w \quad , \quad (6.4)$$

em que K_s é o coeficiente de Winkler do terreno. Expressando w como função dos deslocamentos nodais tem-se que

$$(w = N \mathbf{w}) \quad , \quad (6.5.a)$$

em que

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = [w_1 \quad , w_2 \quad \dots \quad w_n]^T \quad . \quad (6.5.b)$$

obtém-se então a matriz de rigidez de acordo com:

$$K_f = \int \int_A N^T K_s N dA \quad (6.6)$$

O efeito do terreno traduz-se assim por um aumento da rigidez do elemento. Refere-se ainda que a matriz de rigidez K_f é não diagonal o que permite concluir que existe um acoplamento entre os deslocamentos dos nós dos elementos, pois se um nó se deslocar provoca uma reacção do terreno noutro (ou noutros) nó do terreno, o que pela relação (6.4) obriga este a sofrer também um deslocamento.

O processo descrito implica que quando há nós em contacto com o terreno que têm movimentos ascendentes o terreno exerce sobre eles uma reacção descendente, o que não traduz correctamente a realidade do fenómeno.

Numa tentativa de melhorar este método implementou-se um algoritmo iterativo que atribui aos nós que têm movimentos ascendentes um valor $K_s = 0$. O algoritmo é o seguinte:

- 1) calcula a estrutura;
- 2) verifica se há nós ligados a elementos de fundação com movimento ascendente;

- 3) se se verificar o ponto 2) atribui o valor zero ao coeficiente de Winkler dos nós com movimento ascendente e volta ao ponto 1);
- 4) se não se verifica 2) o programa termina.

Verificou-se que em todos os exemplos estudados foi necessário um máximo de 5 iterações para obter a convergência.

Apresenta-se um estudo de uma sapata apoiada num terreno com um coeficiente de deformabilidade (K_s) igual a 100 MN/m^3 (Fig. 6.9). Os pilares descarregam uma carga de 1200 kN cada um. A Fig. 6.10 ilustra a malha de elementos finitos utilizada bem como a respectiva deformada.

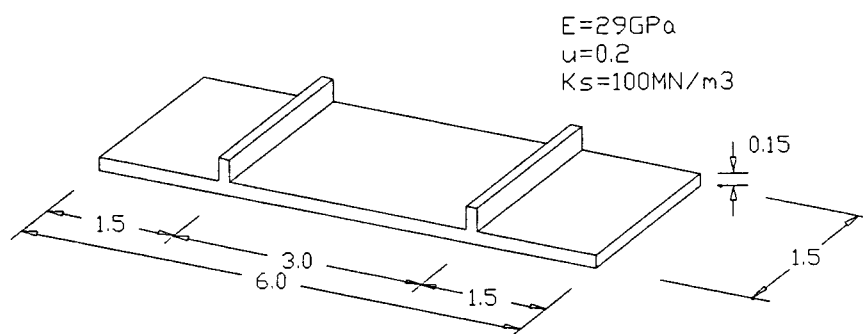


Fig. 6.9 - Sapata assente em solo elástico (geometria).

Como pode ser observado existem nós onde existiu levantamento da sapata não existindo nestes nós interacção solo-estrutura (Fig. 6.11). Os valores negativos da tensão no terreno apresentados, devem-se ao processo utilizado pelo programa de desenho para efectuar as interpolações dentro dos elementos. O processo iterativo convergiu ao fim de 4 iterações.

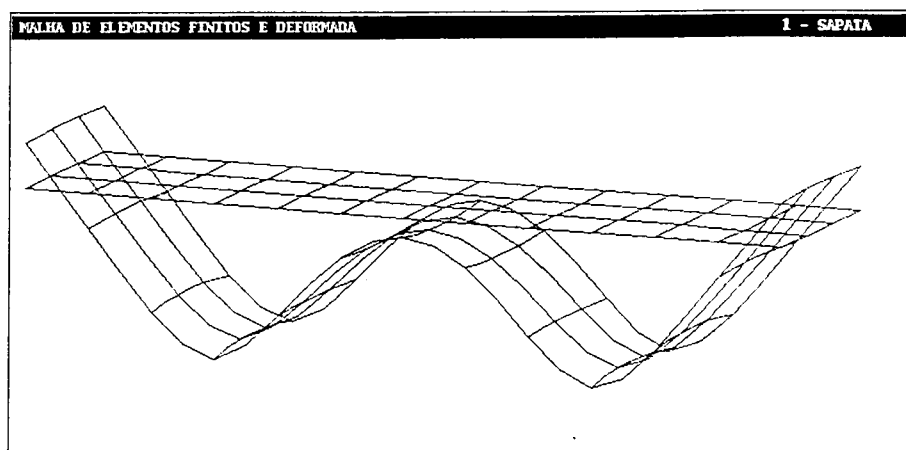


Fig. 6.10 - Sapata assente em solo elástico (malha de elementos finitos e deformada).

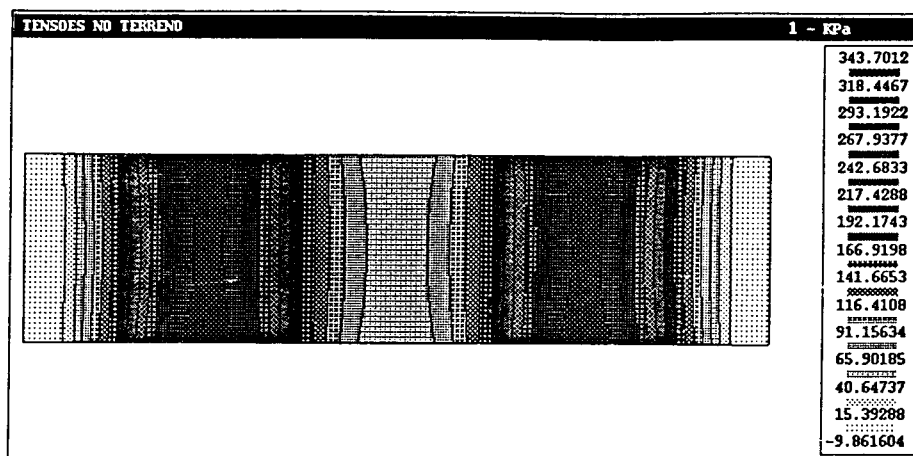


Fig. 6.11 - Sapata assente em solo elástico (tensões no terreno).

São também apresentados os diagramas de momentos flectores e de esforço transverso ao longo do eixo da sapata (Fig. 6.12). Repare-se que efectivamente existe uma zona inactiva no extremo da sapata correspondente à zona onde houve levantamento.

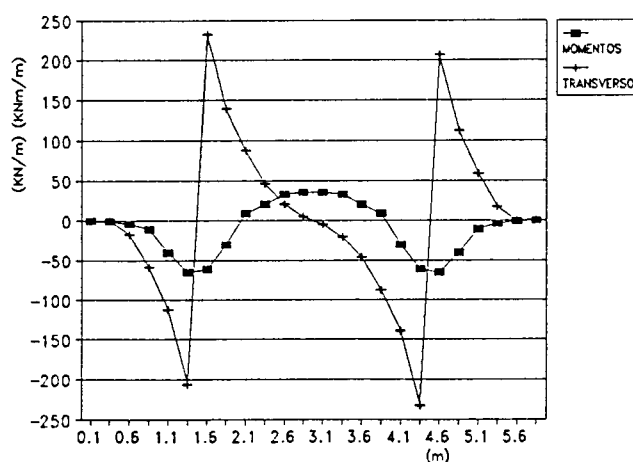
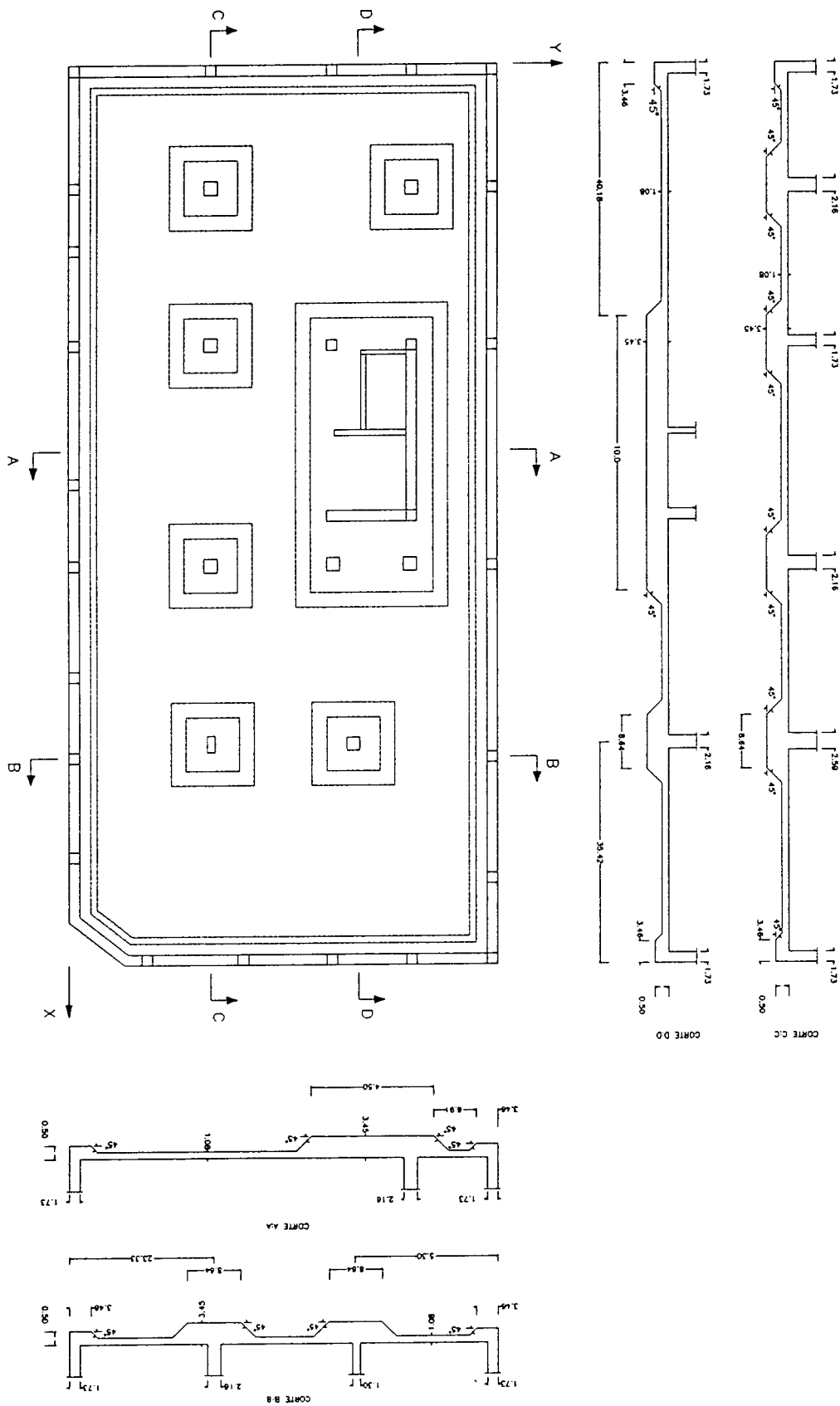


Fig. 6.12 - Sapata assente em solo elástico (diagramas de momentos flectores e esforço transverso ao longo do eixo da sapata).

6.4 - ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE UMA LAJE DE FUNDAÇÃO

O estudo efectuado refere-se a uma laje de fundação de um edifício de 8 pisos, dois dos quais se encontram enterrados. A laje de fundação encontra-se cerca de 6 metros abaixo da superfície do terreno. A geometria encontra-se representada na Fig. 6.13. Foi efectuado um reconhecimento geotécnico do local do qual se retiraram as seguintes conclusões:

Fig. 6.13 - Laje de fundação (geometria).



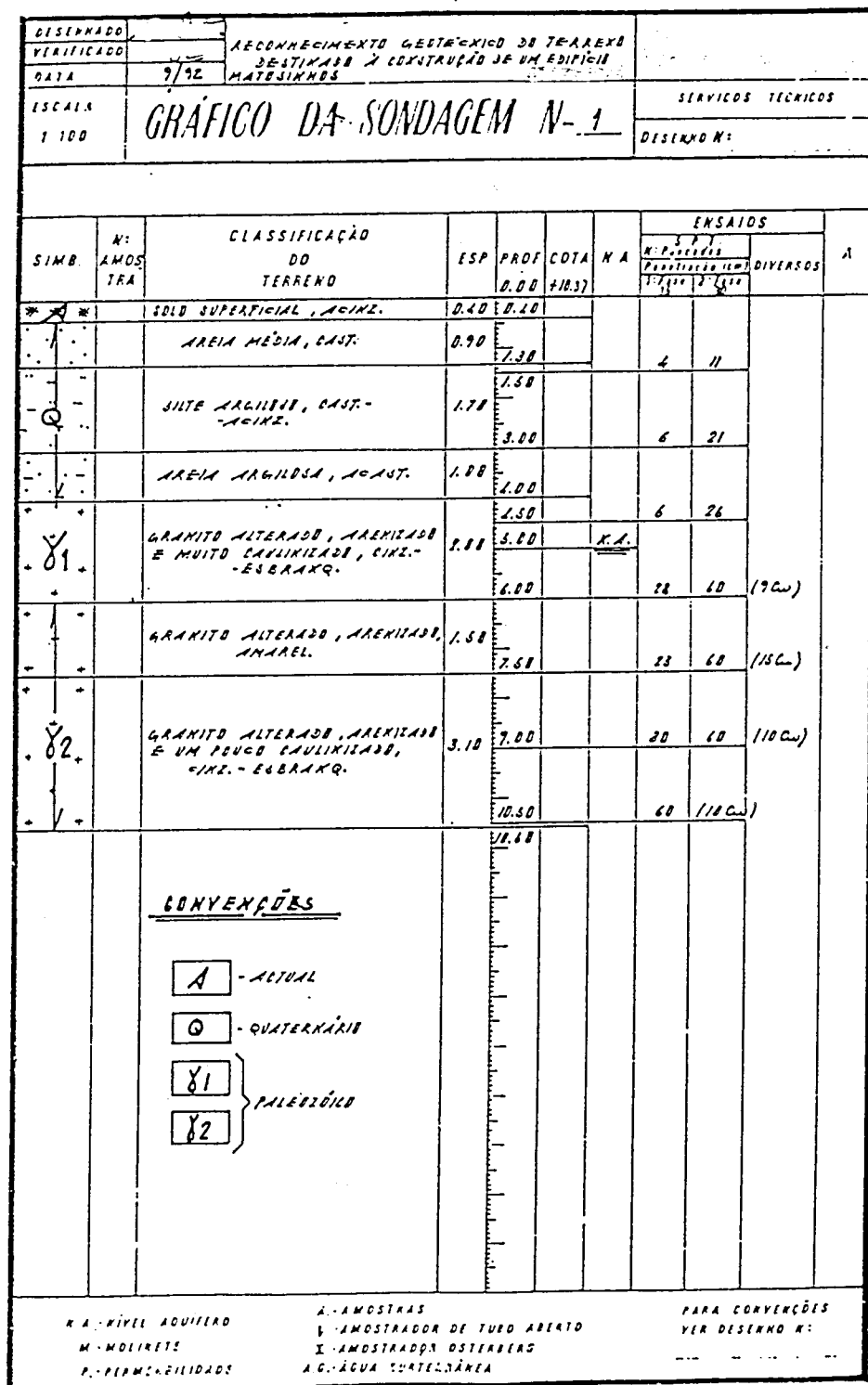


Fig. 6.14 - Laje de fundação (reconhecimento geotécnico - ensaio SPT).

- a) o nível freático encontra-se a cerca de 3 metros abaixo da superfície (e consequentemente 3 metros acima do nível da laje), sendo por isso a pressão característica provocada na laje de aproximadamente 30 kPa;
- b) o solo no qual vai assentar a laje é de elevada resistência, verificando-se que nos ensaios de penetração dinâmica (SPT), ao fim de 60 pancadas e à profundidade do nível da fundação, não houve 30cm de penetração (Fig. 6.14);
- c) com base em correlações usualmente utilizadas para o efeito (Bowles [1982] e Folque [1990]) obtiveram-se os seguintes parâmetros de resistência para o solo:
 - i) tensão de segurança (σ_s) = 500 kPa;
 - ii) módulo de elasticidade (E) = 150 MPa;
 - iii) coeficiente de deformabilidade do solo (K_s) = 90 MN/m³.

A Fig. 6.15 ilustra um perfil geológico do local obtido a partir das sondagens efectuadas.

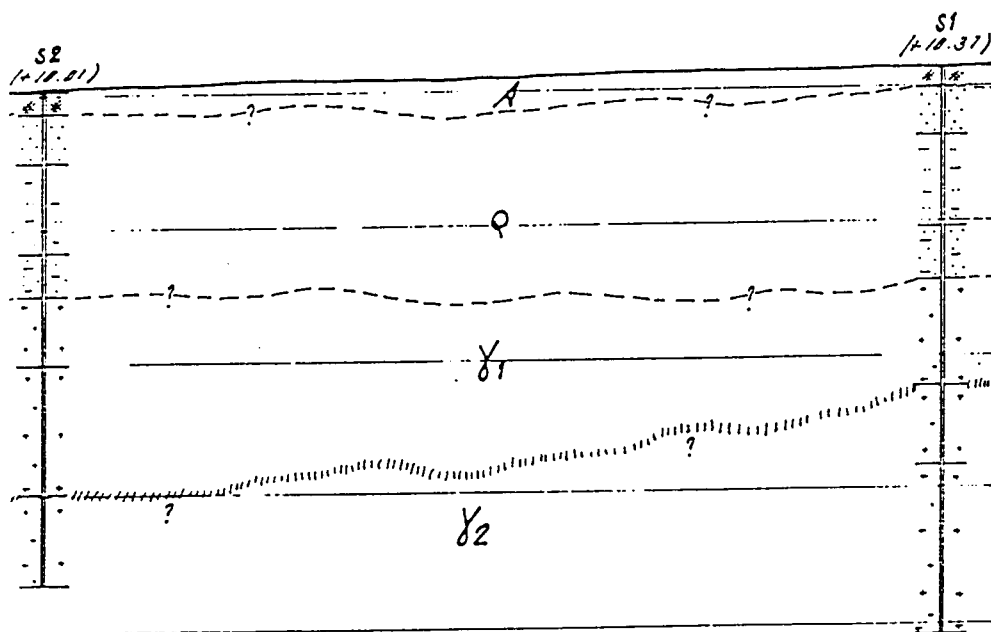


Fig. 6.15 - Laje de fundação (reconhecimento geotécnico - perfil geológico).

As acções transmitidas pelos pilares e paredes encontram-se no Quadro 6.I. Os materiais utilizados nos cálculos são o betão B25 e o aço A400 (REBAP).

Quadro 6.I - Acções verticais transmitidas pelos pilares e caixa de escadas e elevador à fundação.

PILARES	CARGAS AXIAIS (kN)
$P1 = P3 = P9 = P14$	500
$P2 = P10$	1300
$P4$	1000
$P8 = P18 = P25$	2000
$P6 = P15 = P21 = P26 = P27 = P28 = P29 = P30 = P31 = P32$	800
$P7 = P11 = P17 = P19 = P23 = P24$	2500
$P12 = P13 = P16 = P20 = P22$	1700
$P5$	100
Caixa de escadas e elevador	2000

A solução avançada para a estrutura de fundação foi um ensoleiramento geral, tendo a respectiva laje zonas mais espessas junto aos pilares para permitir a transmissão dos esforços locais, em especial o punçoamento, e obter maior rigidez para o conjunto.

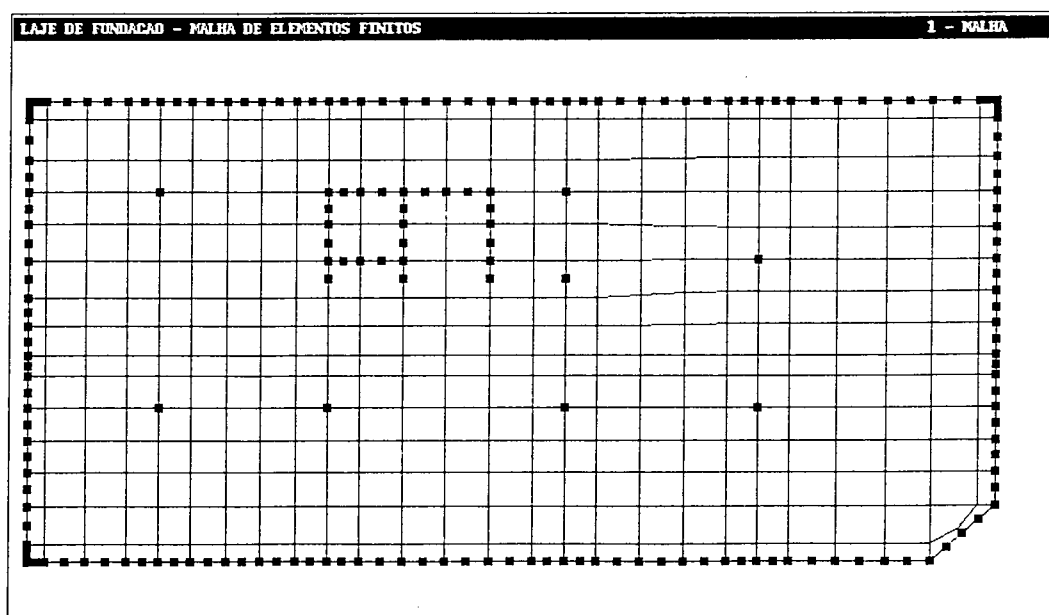


Fig. 6.16 - Laje de fundação (malha de elementos finitos utilizada).

Atendendo às boas características de resistência do solo, os maciços que constituem as bases dos pilares foram pré-dimensionados em planta para - considerando que não havia laje

- transmitirem ao terreno todo o esforço axial do pilar, sem exceder a tensão de rotura do terreno. A laje foi considerada com 25cm de espessura. Foram estudadas diversas situações de apoio da laje:

- i) laje assente em meio elástico e isotrópico (com coeficiente de deformabilidade $K_s = 90 \text{ MN} / \text{m}^3$), com rotações impedidas ao largo de toda a parede exterior;
- ii) laje apoiada nos pilares e paredes. A carga aplicada considerou-se uniformemente distribuída nos maciços de fundação (pilares e paredes). A pressão hidrostática foi considerada uniformemente distribuída na laje, retirando-se na zona dos pilares carga até que os valores das reacções dos pilares fossem aproximadamente iguais às cargas por estes transmitidas à fundação.

A laje foi discretizada utilizando elementos de laje espessa de 8 nós com integração reduzida. A malha utilizada é representada na Fig. 6.16.

São apresentadas (Figs. 6.17-6.20) as pixelagens de momentos para as diferentes hipóteses e que permitem uma observação clara do modo de funcionamento da laje. Com base nestas pixelagens é possível definir quais as ordenadas e abcissas para as quais se vão retirar os diagramas de momentos. Nas pixelagens de momentos os valores dos momentos negativos referem-se ao valor destes a aproximadamente 20cm do bordo das sapatas de fundação dos pilares, permitindo obter um mapa de distribuição mais elucidativo nas zonas de momentos positivos.

As Figs. 6.21 e 6.22 ilustram, os diagramas de momentos para as duas situações de apoio da laje, tendo-se considerado, para cada situação, as hipóteses de haver e de não haver pressão hidrostática. Os diagramas de momentos referem-se às linhas de ordenada $y = 5,06 \text{ m}$ e de abcissa $x = 24,96 \text{ m}$, que se consideram serem representativas da laje para efeitos de um estudo comparativo das diversas soluções.

Verificou-se que os resultados mais desfavoráveis correspondem àqueles em que se considerou o solo com um meio elástico. Se se comparar as duas situações para os casos em que não actua a pressão hidrostática constata-se que a diferença entre as duas situações pode atingir cerca de 28%, reduzindo-se esta diferença no caso em que se consideram, nas duas situações, a existência de pressão hidrostática para metade (14%). Estas diferenças podem ser explicadas pelo facto da área onde efectivamente se faz a transmissão da carga dos pilares para o terreno ser muito maior no caso da laje assente em meio elástico, distribuindo a reacção do terreno para fora da zona maciça do pilar. Quando se considera a existência de pressão hidrostática a reacção do terreno debaixo do pilar é menor e este efeito é atenuado.

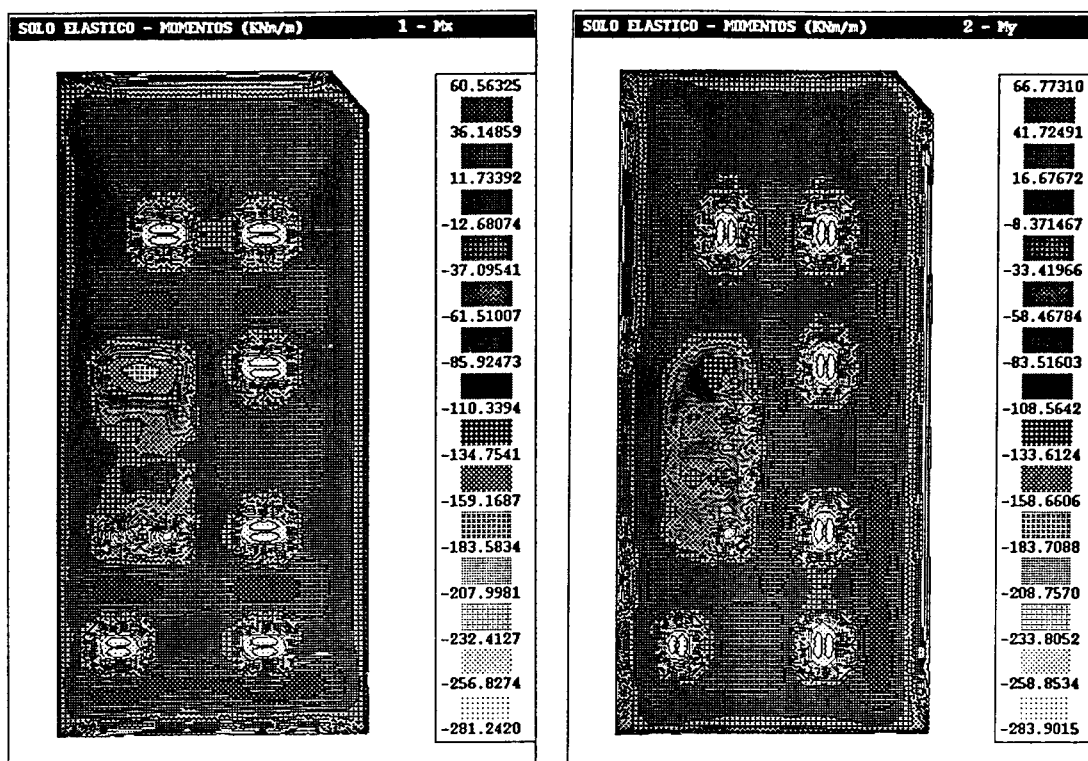


Fig. 6.17 - Laje de fundação (densidades de momentos - solo elástico sem a existência de pressão hidrostática).

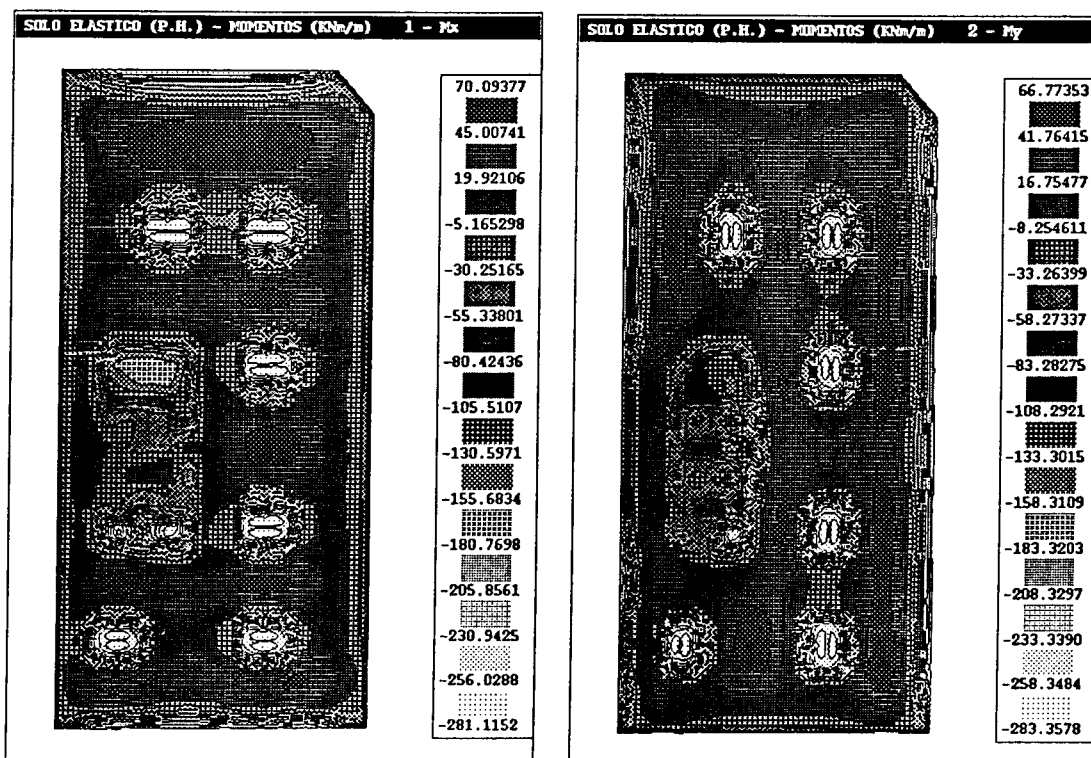


Fig. 6.18 - Laje de fundação (densidades de momentos - solo elástico com a existência de pressão hidrostática).

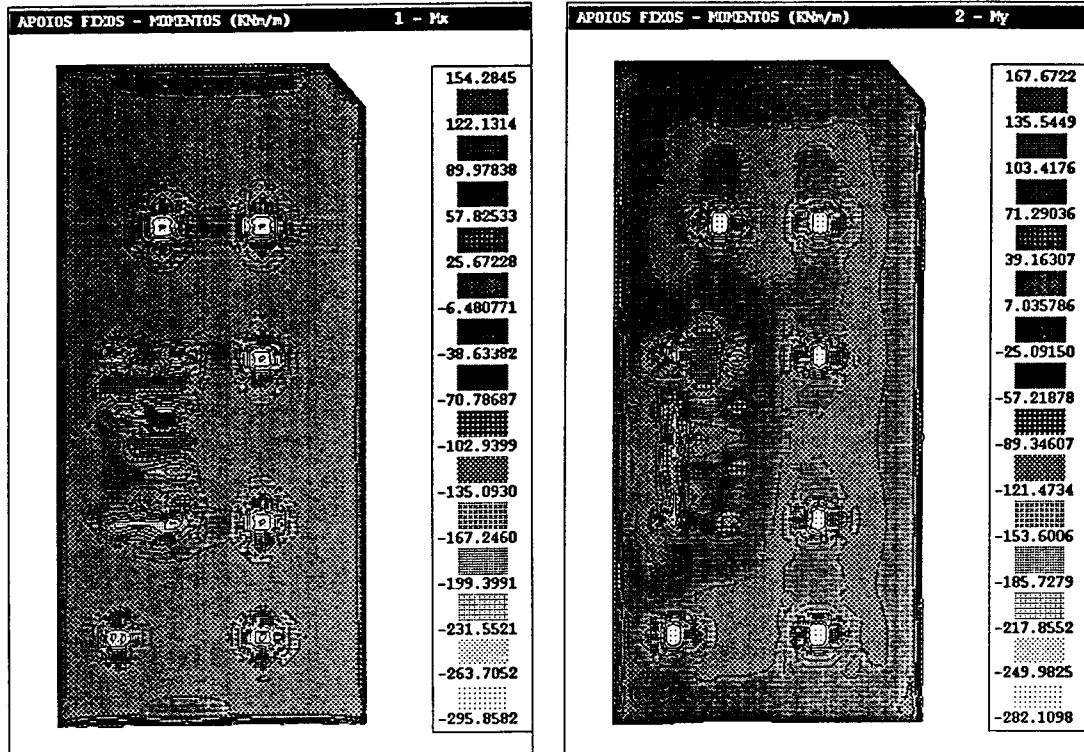


Fig. 6.19 - Laje de fundação (densidades de momentos - apoios fixos sem a existência de pressão hidrostática).

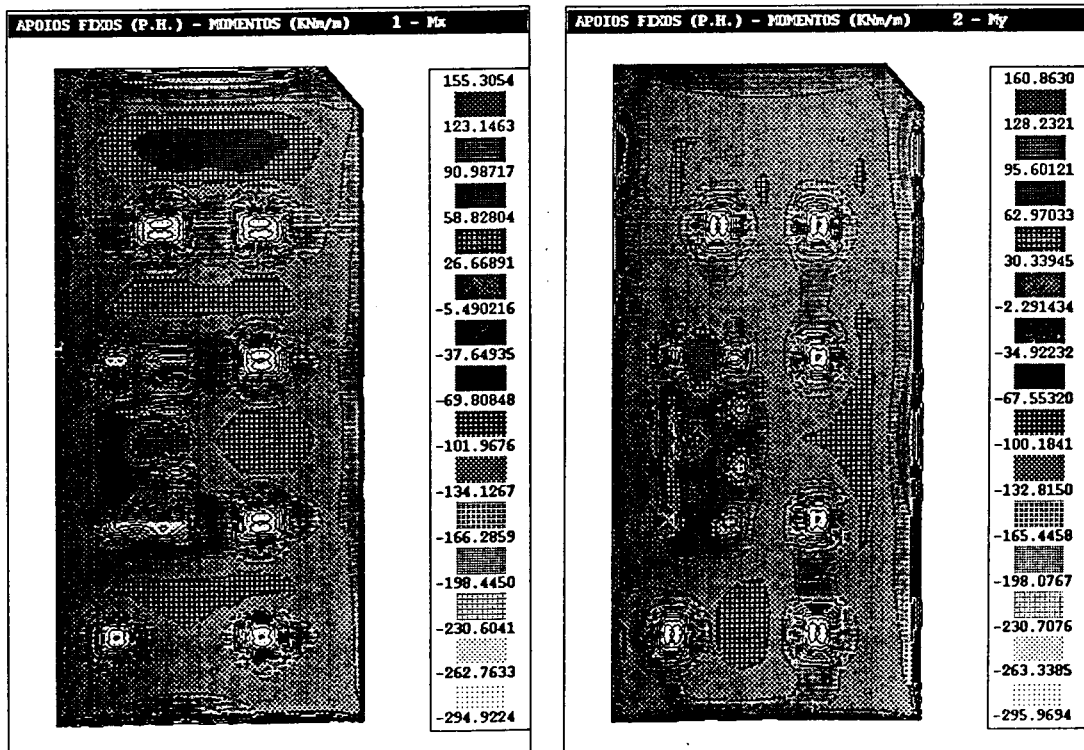
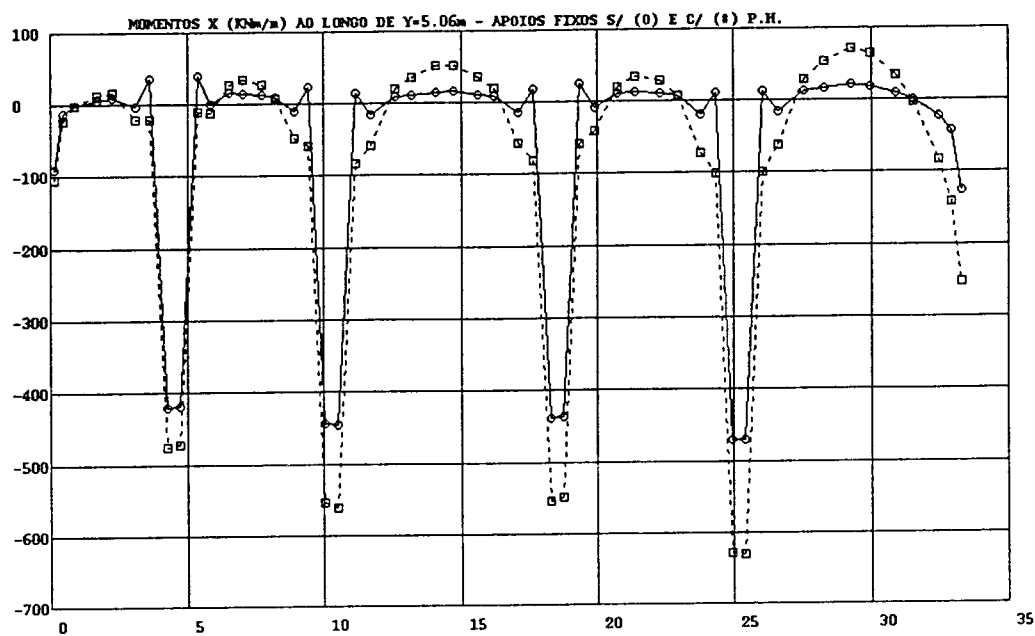
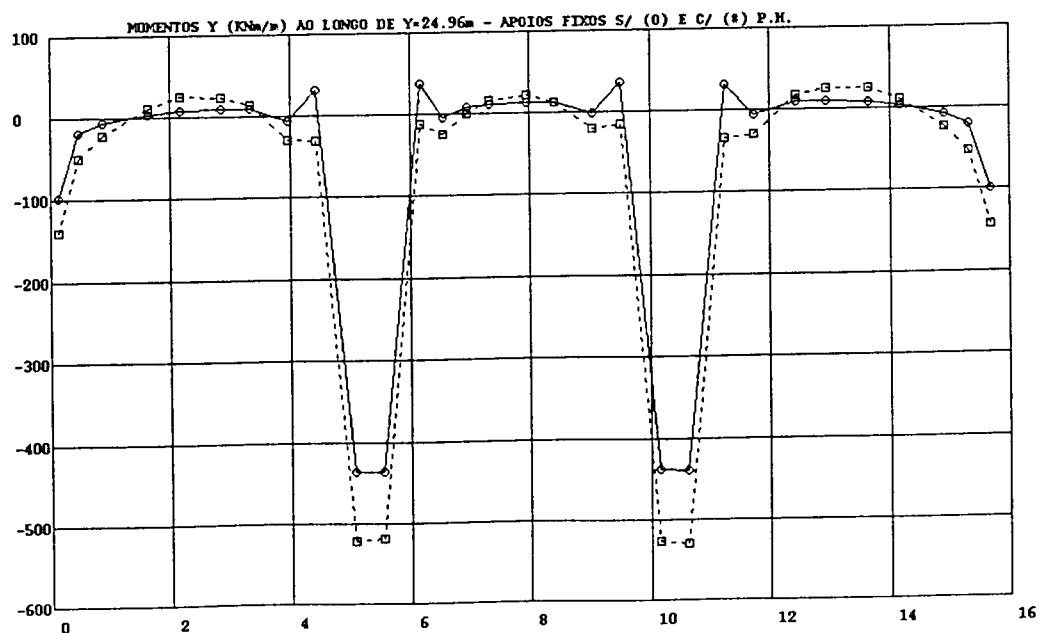


Fig. 6.20 - Laje de fundação (densidades de momentos - apoios fixos com a existência de pressão hidrostática).

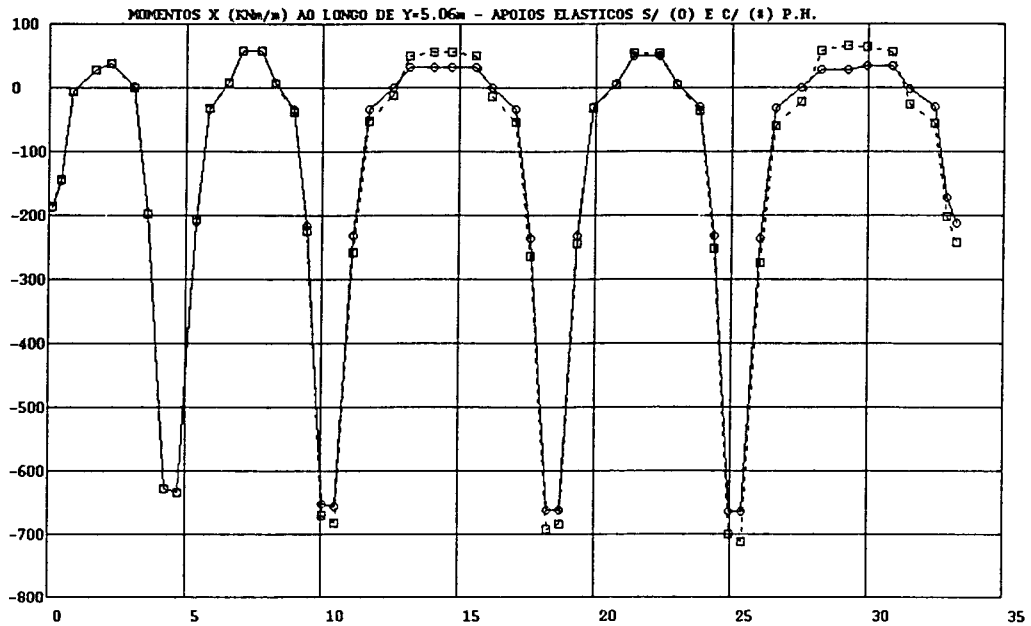


a) momentos X ao longo de Y = 5.06m

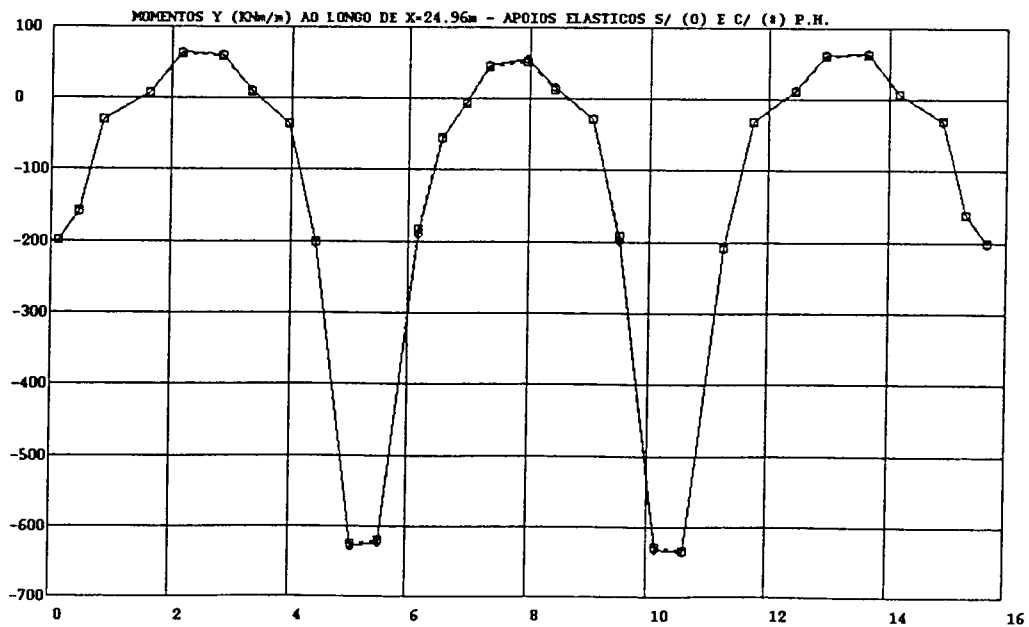


b) momentos Y ao longo de X = 24.96m

Fig. 6.21 - Diagramas de momentos para a hipótese em que foram considerados apoios fixos com e sem a actuação da pressão hidrostática.



a) momentos X ao longo de Y = 5.06m



b) momentos Y ao longo de X = 24.96m

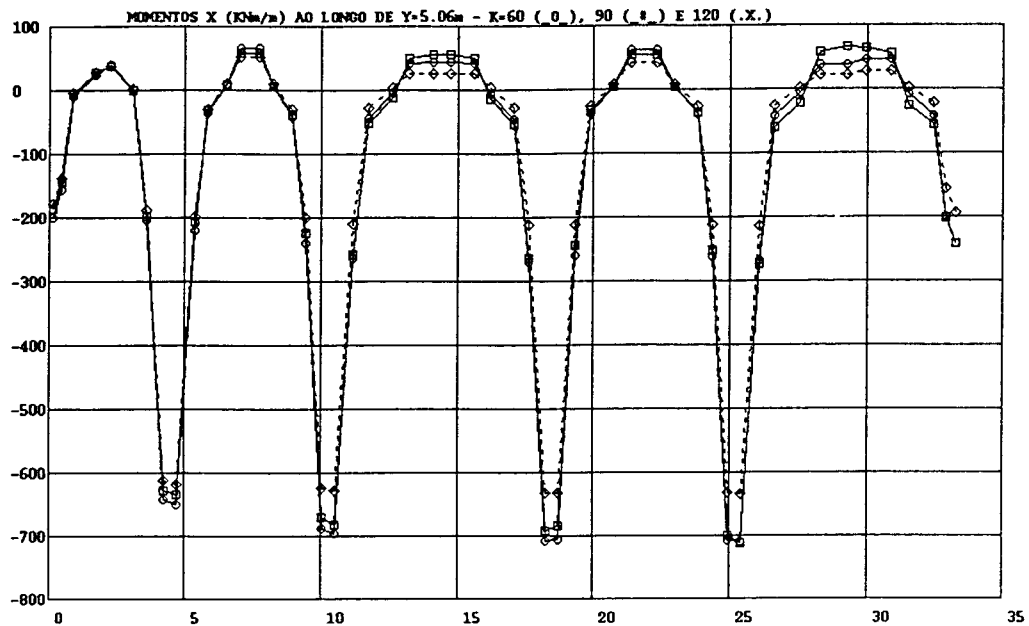
Fig. 6.22 - Laje de fundação (diagramas de momentos para a hipótese em que foi considerado o efeito da deformabilidade do solo com e sem a actuação da pressão hidrostática).

Atendendo à incerteza que caracteriza a quantificação dos parâmetros geotécnicos e ao facto da consideração da deformabilidade do terreno poder influenciar de algum modo a solução do problema, comparou-se a resposta da estrutura sujeita a pressão hidrostática e cargas verticais para diversos valores do coeficiente de deformabilidade do terreno. A Fig. 6.23 mostra os diagramas de momentos para as situações de $K_s = 60$, 90 e 120 MN/m^3 ao longo das duas linhas referidas anteriormente. Observa-se que os resultados obtidos são bastante aproximados (máximo de 10% de diferença) não sendo por isso condicionantes da solução final. Adoptou-se por isso para K_s o valor de 90 MN/m^3 nos estudos subsequentes.

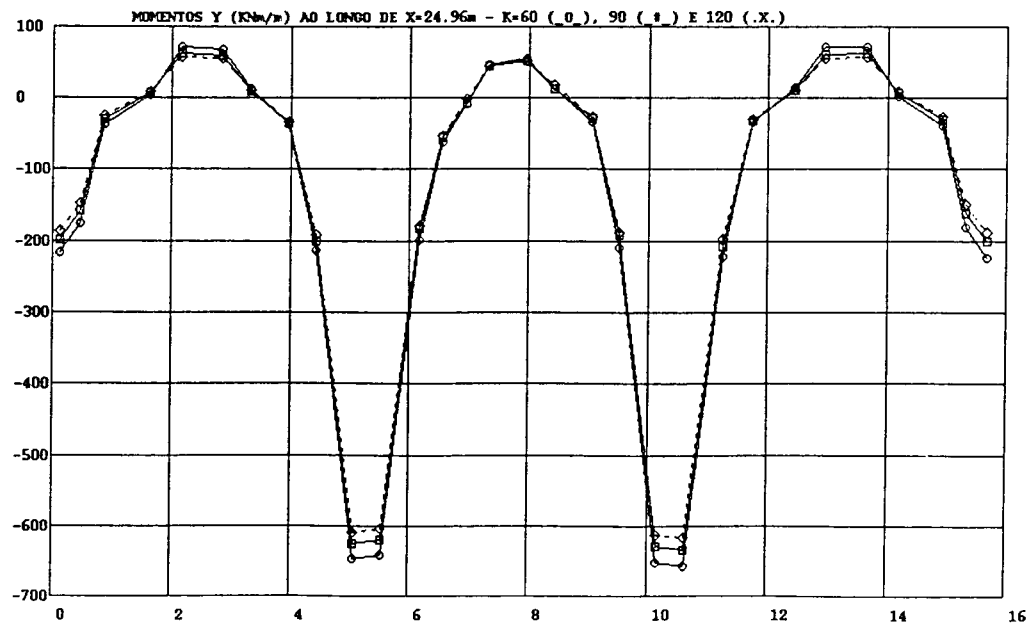
Efectuou-se ainda uma análise comparativa da influência do deslocamento vertical da parede exterior, comparando-se as hipóteses de a parede não ter deslocamentos verticais e de poder deslocar-se livremente na vertical (situação que tem vindo a ser utilizada). Verifica-se que as únicas alterações significativas em termos de esforços se referem à zona da laje exterior aos pilares (Fig. 6.24) o que obrigará a um maior cuidado quando do dimensionamento da armadura nestas zonas devido à inversão do sinal dos momentos provocada pelo impedimento do deslocamento vertical da parede. O exame das tensões provocadas no terreno pelas duas situações de apoio da parede, mostra que estas são muito inferiores às tensões de segurança do terreno, estando portanto verificada a segurança no que se refere a este aspecto (Fig. 6.25). São perfeitamente identificáveis os pontos de aplicação das cargas verticais, verificando-se que a parede exterior provoca as tensões mais elevadas quando se permite que esta se desloque verticalmente. É também possível observar através das pixelagens de tensões no terreno quais as zonas da laje que "descolam" do terreno. Mais uma vez se faz notar que os valores das tensões negativas são devidas ao processo de extrapolação utilizado pelo programa de desenho e não correspondem a tracções no terreno.

A solução de $K_s = 90 \text{ MN/m}^3$ em que se considera a laje encastrada na parede mas livre de se deslocar verticalmente representa como que uma solução aproximadamente envolvente e representativa das diversas situações, sendo por isso a situação a ser analisada com maior detalhe. Apresentam-se para esta situação os diagramas de momentos (Figs. 6.26 e 6.27) que se consideraram necessários para um adequado dimensionamento da laje bem como as pixelagens de momentos que permitem uma visualização global do funcionamento da estrutura (Fig. 6.28).

NOTA: apenas se encontram representados os diagramas de momentos para $Y = 5.06\text{m}$ e $X = 24.96\text{m}$; os restantes diagramas encontram-se no Anexo 2.

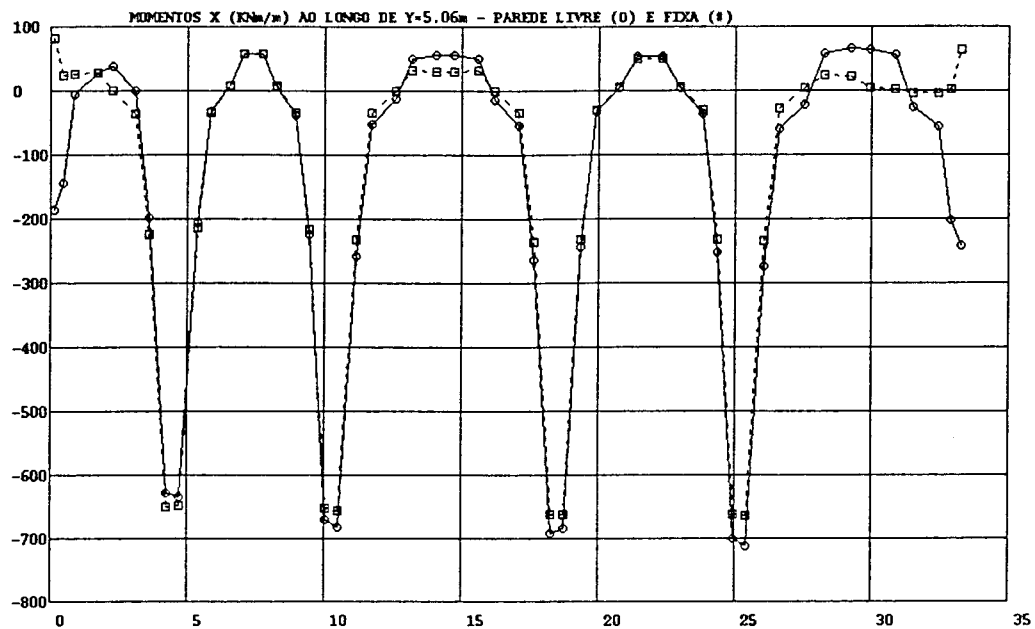


a) momentos X ao longo de Y = 5.06m

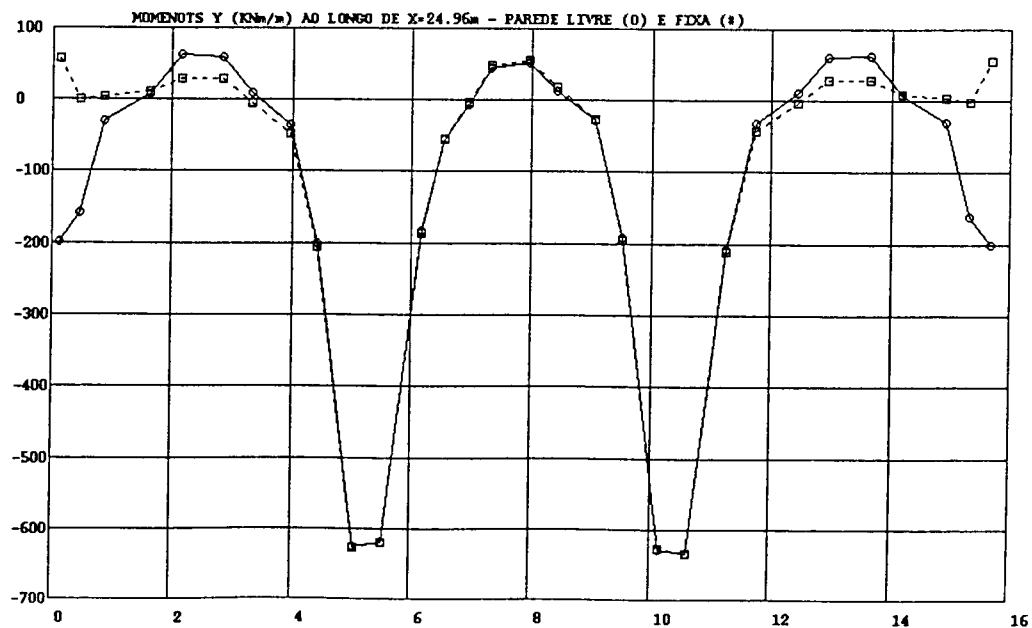


b) momentos Y ao longo de Y = 24.96m

Fig. 6.23 - Laje de fundação (comparação dos diagramas de momentos para valores do coeficiente de deformabilidade do solo de 60, 90 e 120 MN/m³).

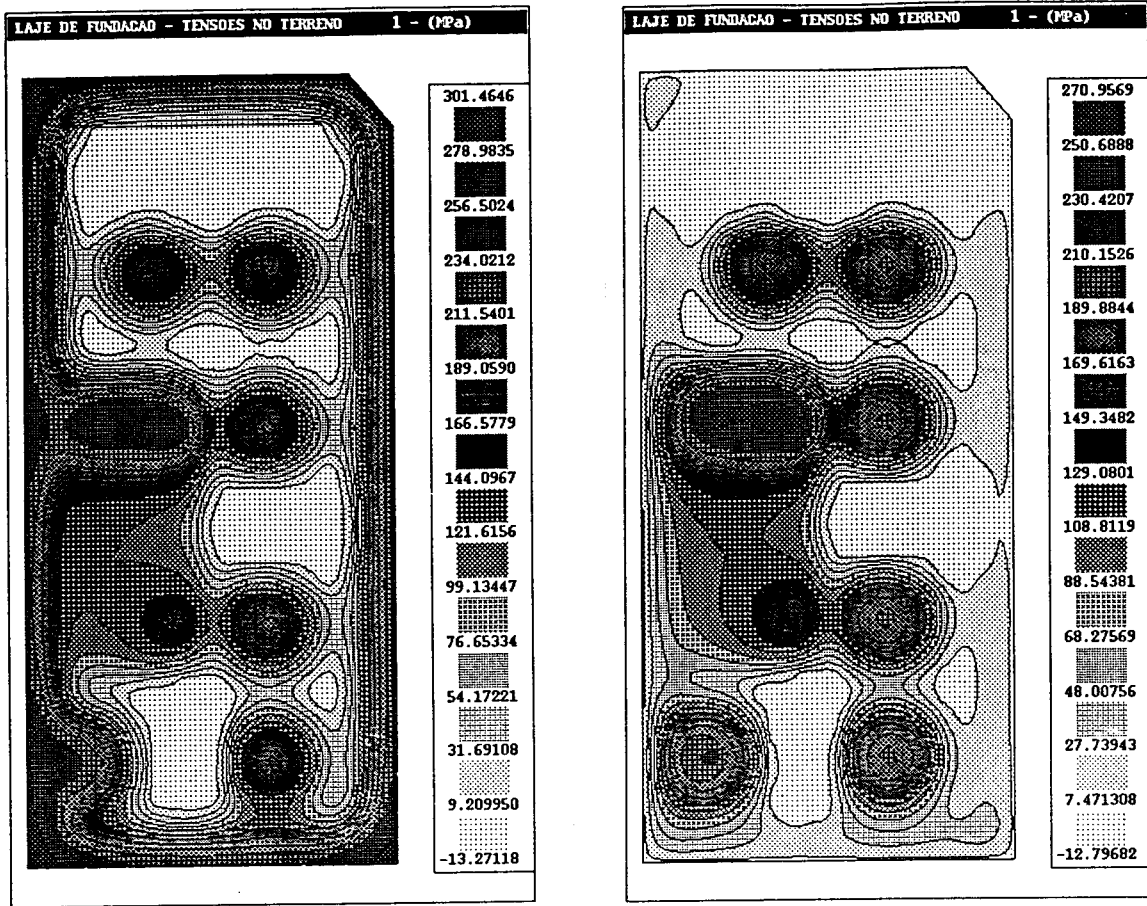


a) momentos X ao longo de Y = 5.06m



b) momentos Y ao longo de Y = 24.96m

Fig. 6.24 - Laje de fundação (comparação dos diagramas de momentos para as situações em que se impediu e em que se deixou livre o deslocamento vertical da parede exterior).



a) parede livre de se deslocar verticalmente

b) parede impedida de se deslocar verticalmente

Fig. 6.25 - Laje de fundação (tensões no terreno sem a actuação da pressão hidrostática).

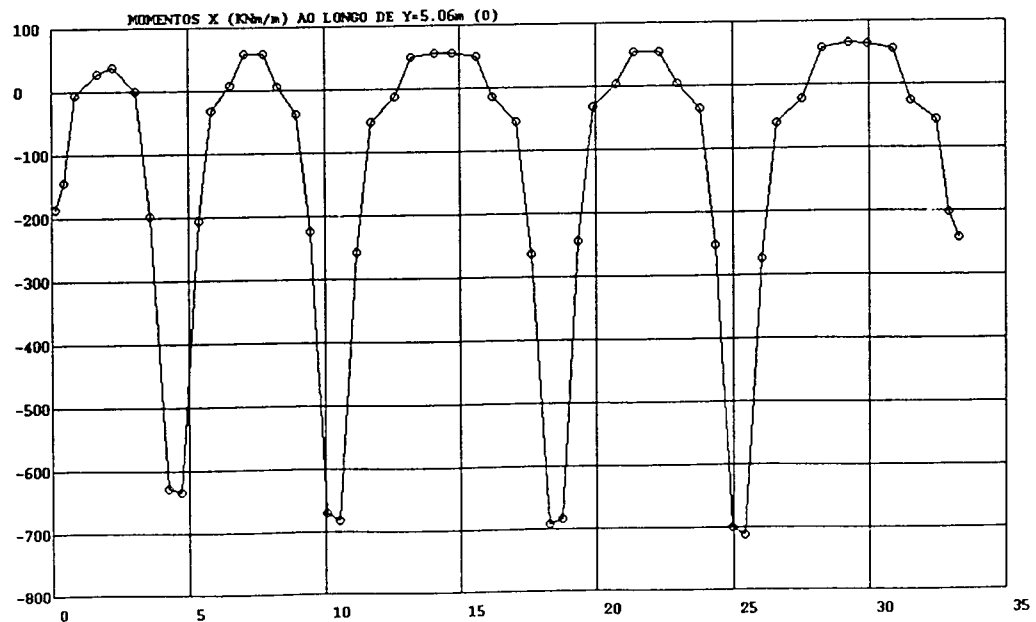


Fig. 6.26 - Laje de fundação (solução base - diagrama de momentos X ao longo de Y = 5.06m).

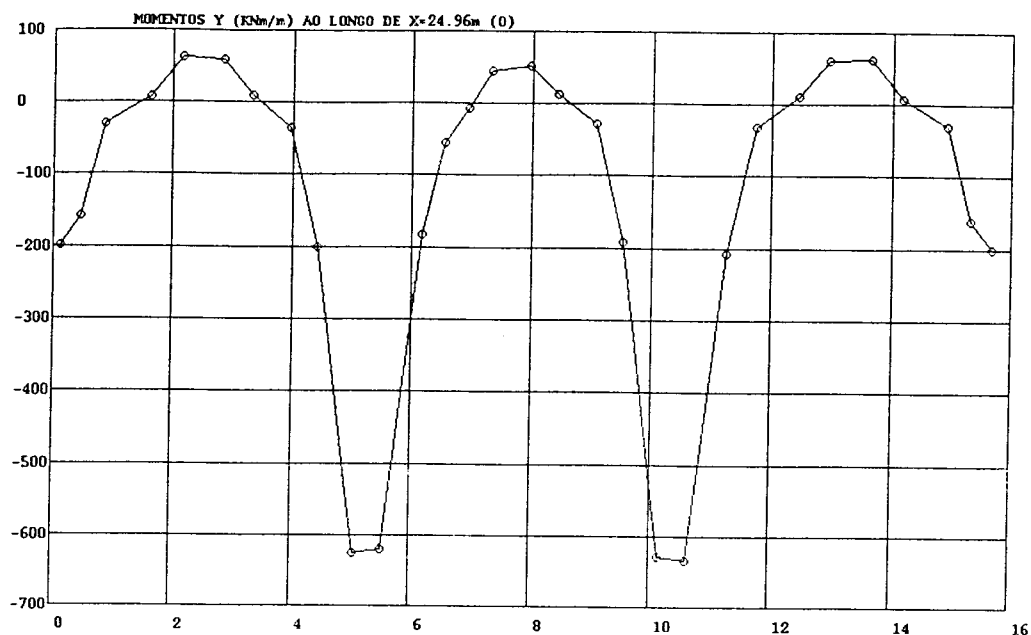
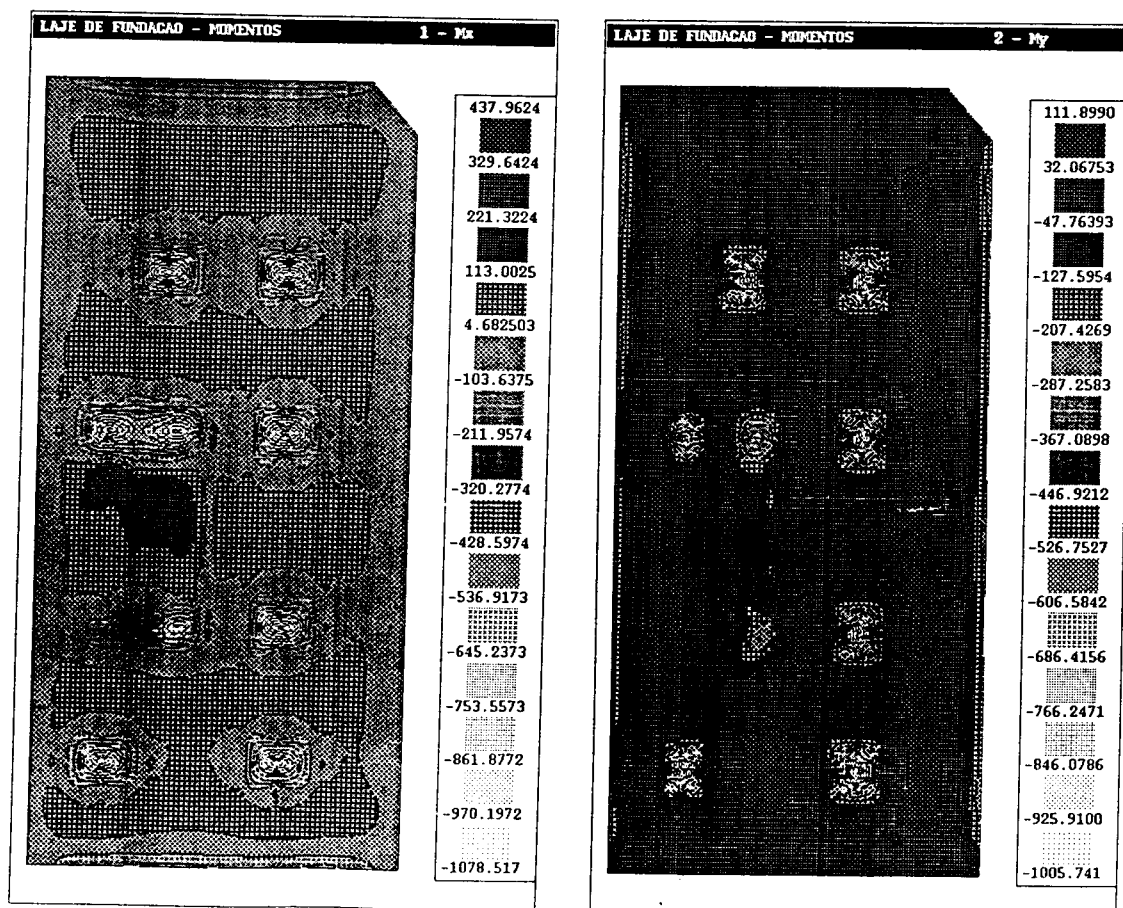


Fig. 6.27 - Laje de fundação (solução base - diagrama de momentos Y ao longo de X = 24.96m).



a) momentos X

b) momentos Y

Fig. 6.28 - Laje de fundação (solução base - momentos flectores).

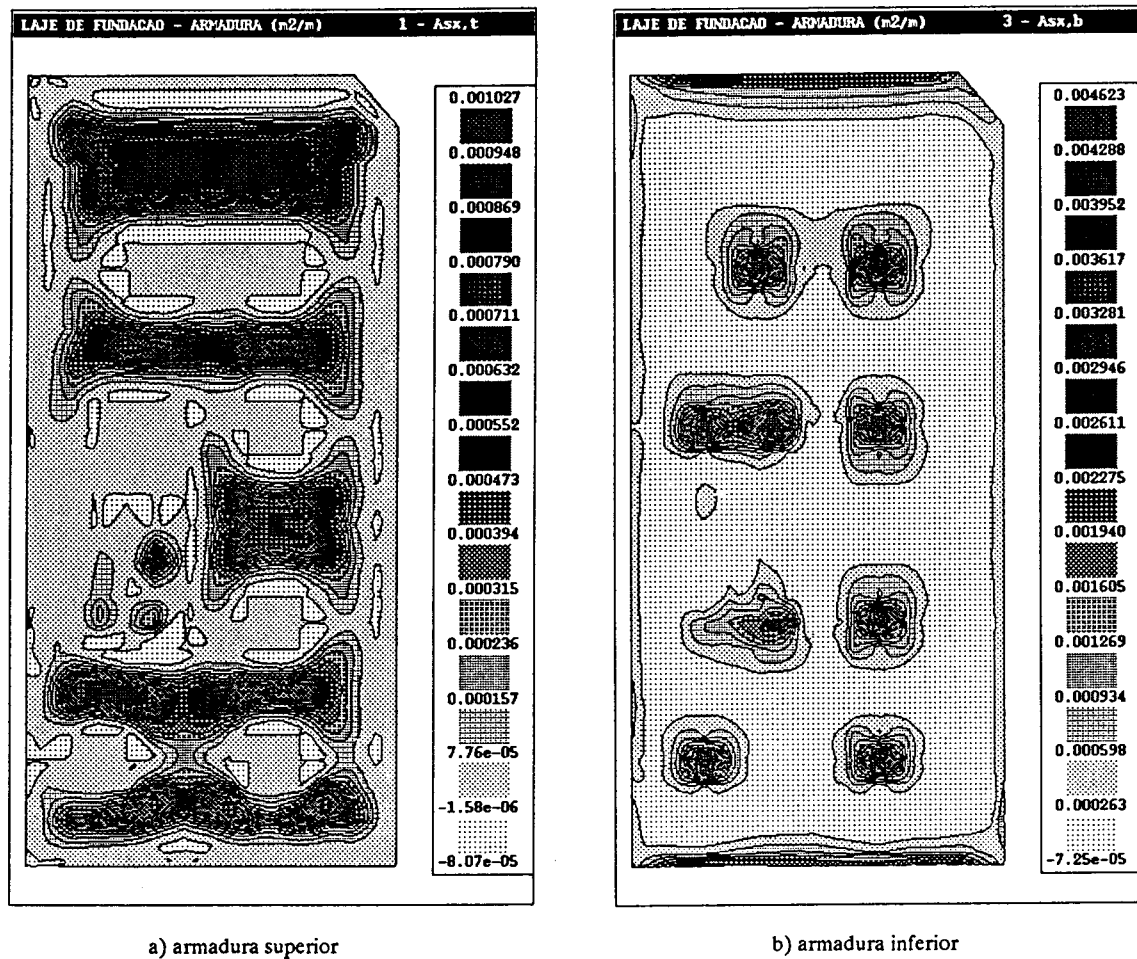


Fig. 6.29 - Laje de fundação (pixelagens das densidades de armadura segundo a direcção X).

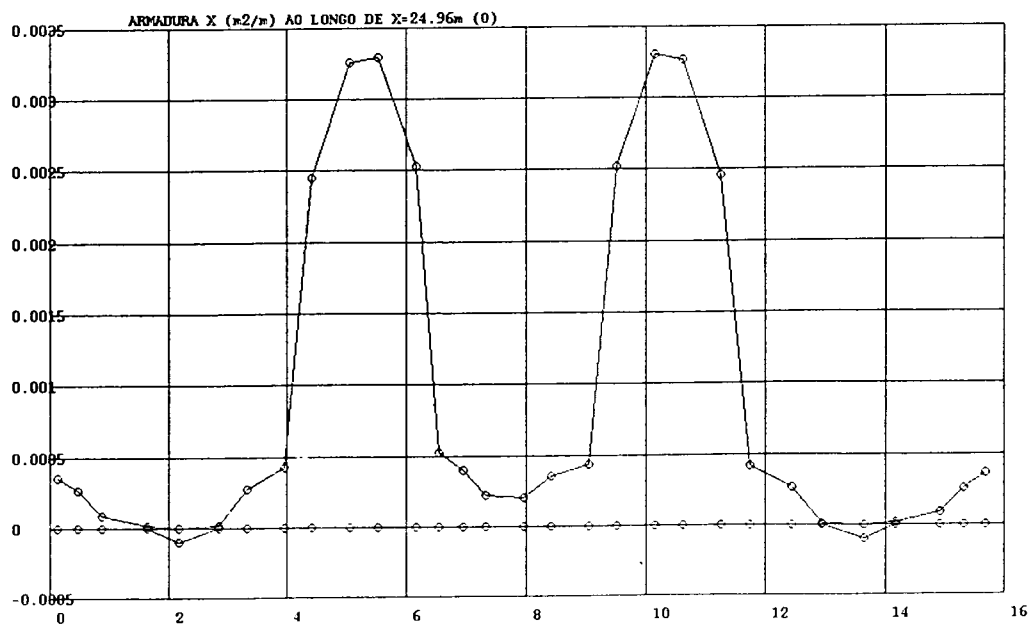


Fig. 6.30 - Laje de fundação (diagrama de densidade de armadura segundo X ao longo de X = 24.96m).

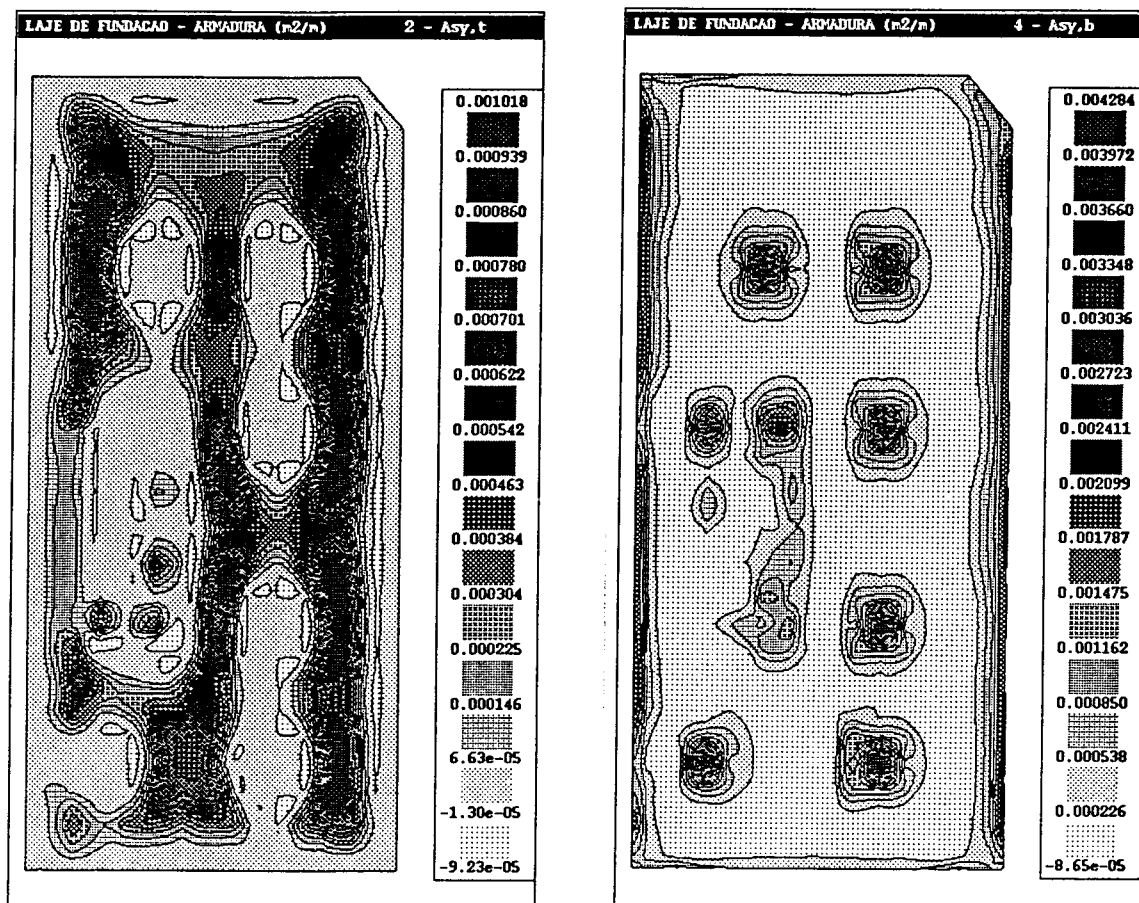


Fig. 6.31 - Laje de fundação (pixelagens das densidades de armadura segundo a direcção Y).

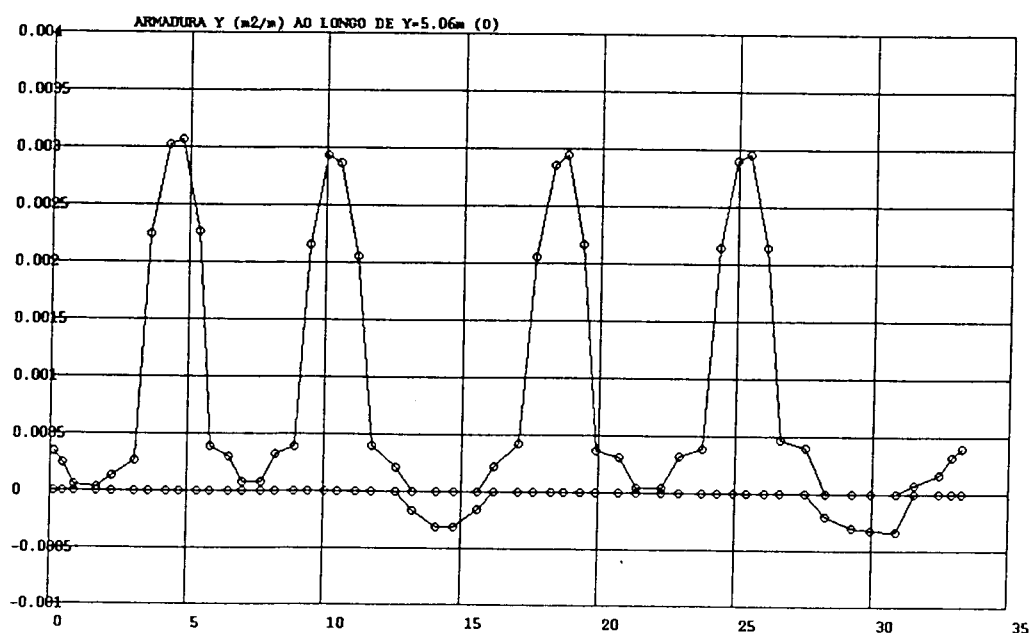


Fig. 6.32 - Laje de fundação (diagrama de densidade de armadura segundo Y ao longo de Y = 5.06m).

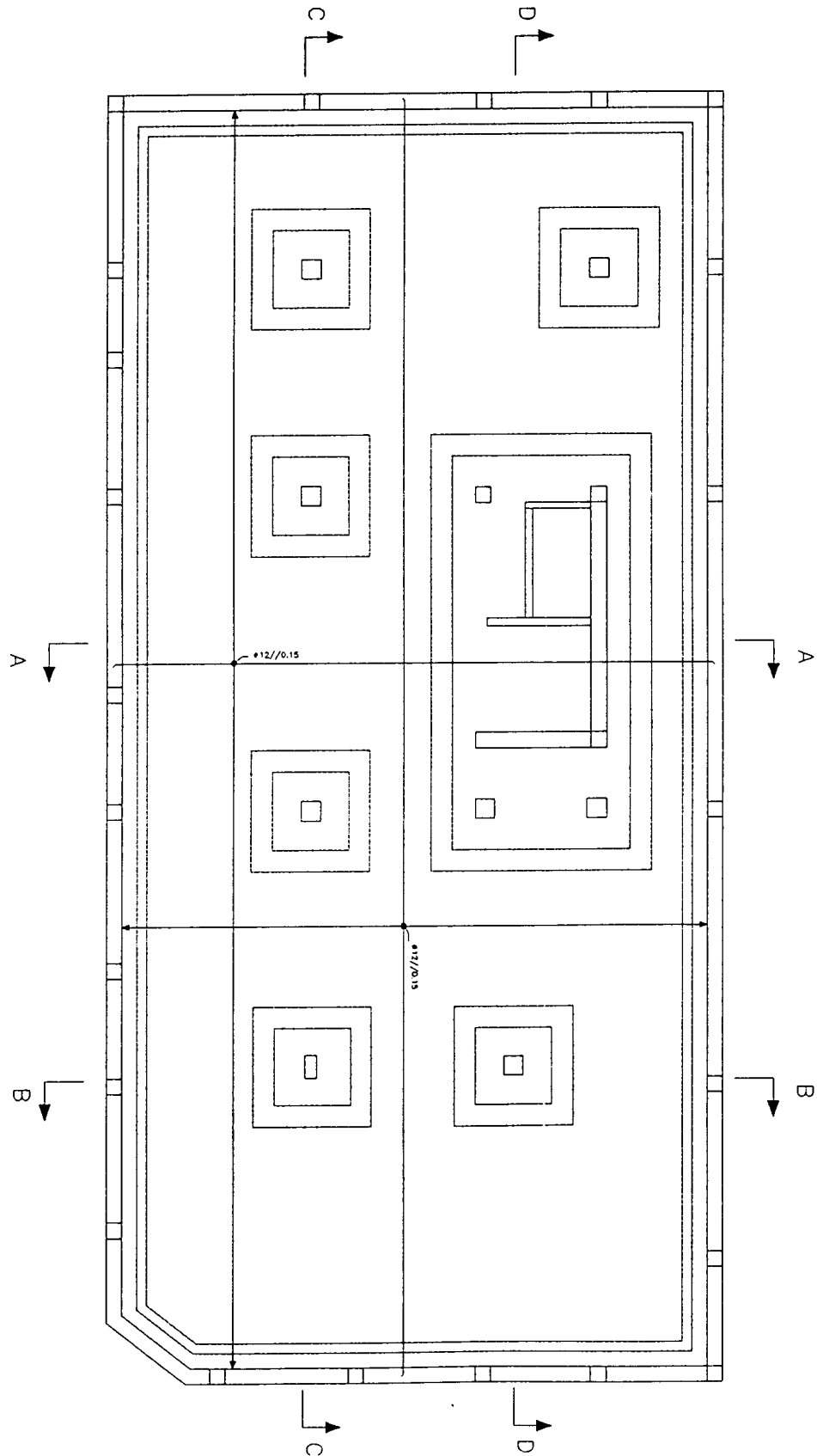


Fig. 6.33 - Laje de fundação (armadura superior - desenho de execução).

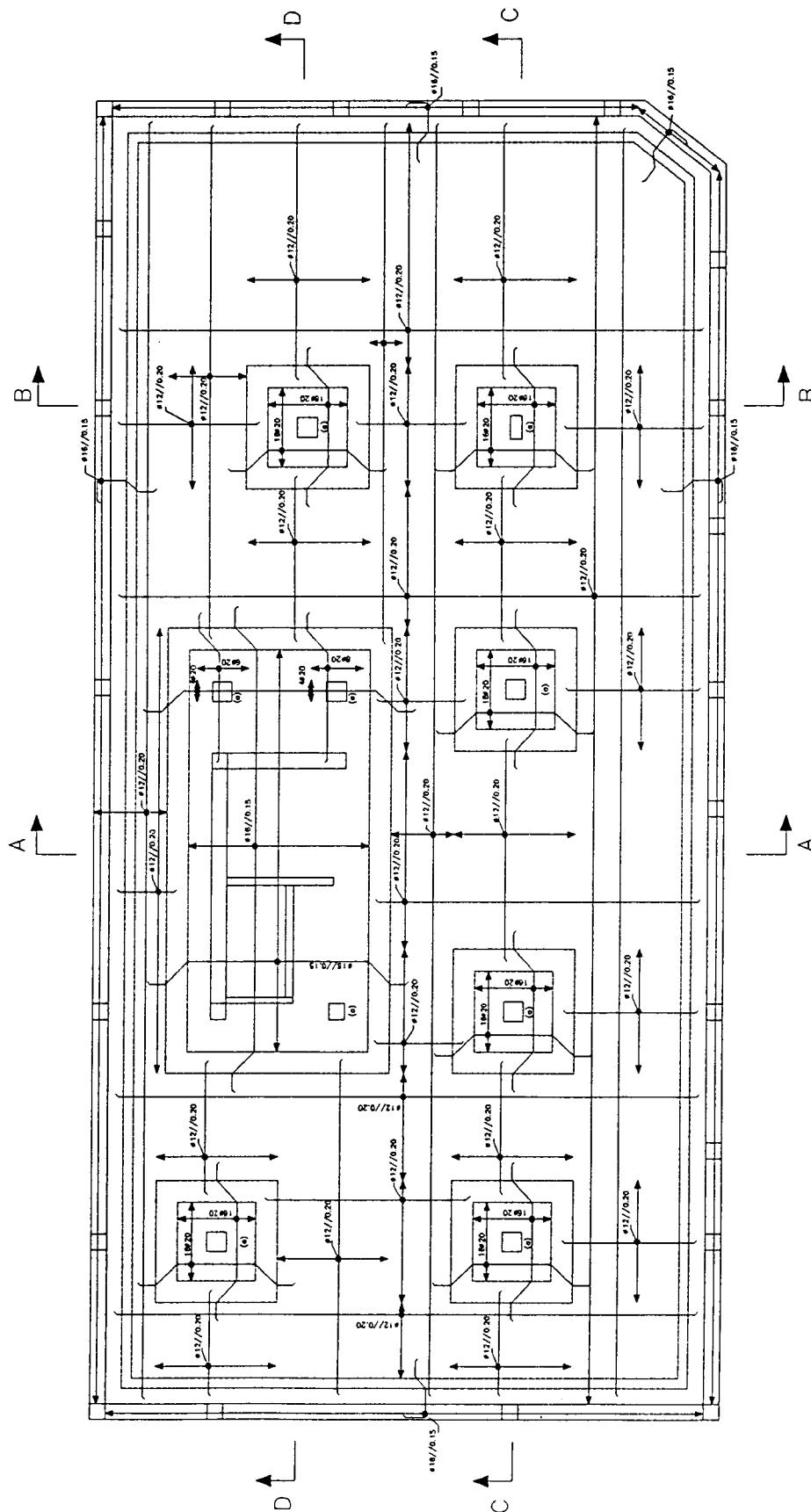


Fig. 6.34 - Laje de fundação (armadura inferior - desenho de execução).

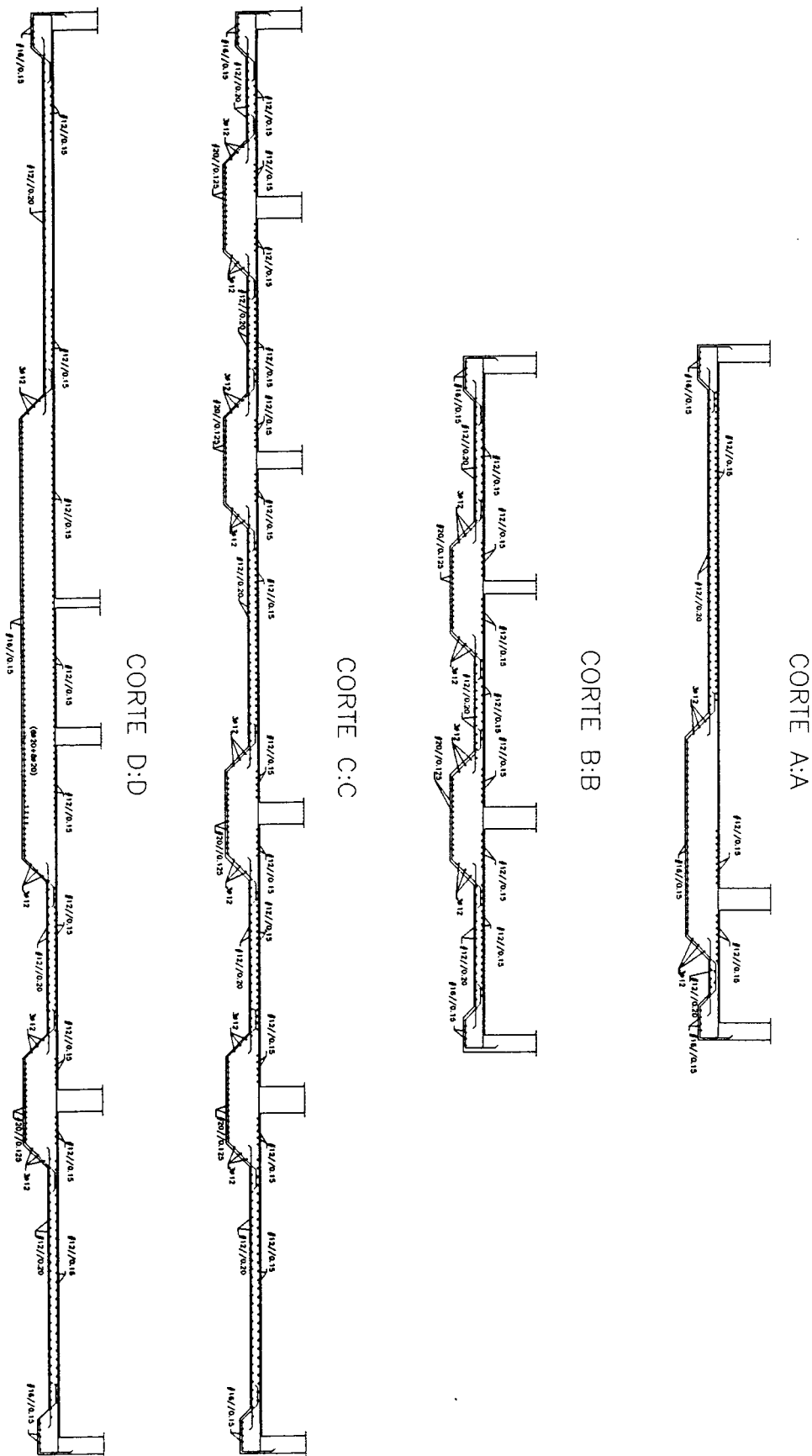


Fig. 6.35 - Laje de fundação (desenhos de execução - cortes - armadura superior e inferior).

A colocação de armadura foi efectuada tendo por base as pixelagens de densidade de armadura (Fig. 6.29 e Fig. 6.31) e os vários cortes efectuados (Fig. 6.30 e 6.32). A observação destes gráficos revela uma grande regularidade nas armaduras detectando-se claramente a existência de zonas bem caracterizadas para a colocação da armadura.

NOTA: apenas são reproduzidos os diagramas de armaduras ao longo de $Y = 5.06$ e $X = 24.96m$; os restantes diagramas encontram-se no Anexo 2.

Foram colocadas três zonas distintas de armadura inferior (maciços dos pilares, laje e maciço de fundação da caixa de escada e elevadores, e paredes), optando-se por colocar a armadura superior uniformemente ao longo de toda a laje. Refere-se que as armaduras se encontram calculadas para o aço A400 e que as armaduras que se encontram nos desenhos de execução (Fig. 6.33, 6.34 e 6.35) correspondem ao aço A500, que se considerou mais vantajoso em termos económicos para a execução da laje em análise.

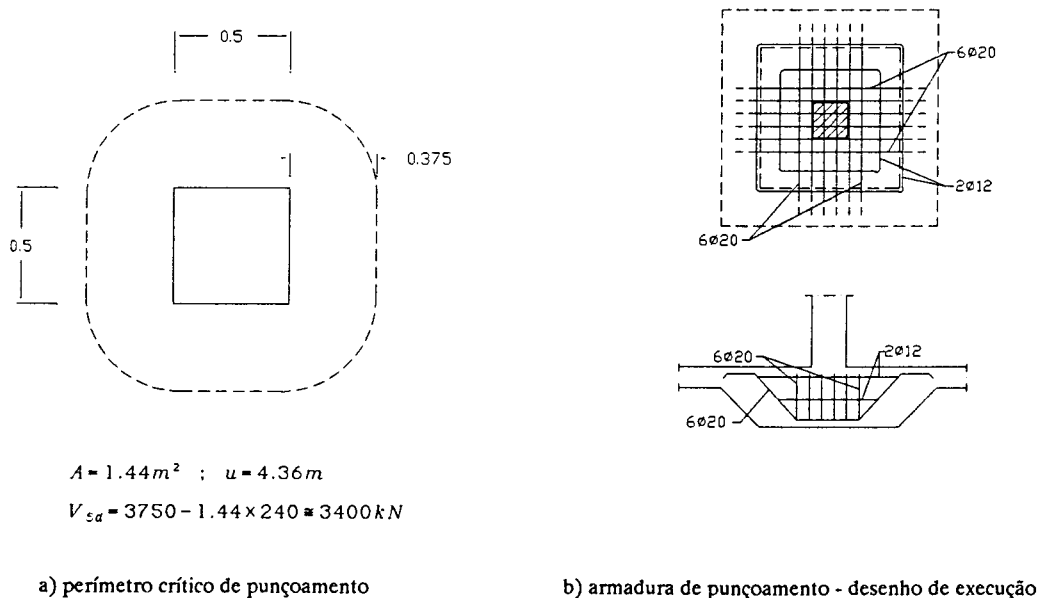


Fig. 6.36 - Laje de fundação (punçoamento).

O esforço de punçoamento provocado pelos pilares é bastante elevado o que obrigou à consideração de uma altura de 80cm para os maciços dos pilares. A força de punçoamento actuante foi calculada subtraindo ao esforço axial do pilar o valor da reacção do terreno na área crítica (com base na Fig. 6.26). A armadura de punçoamento encontra-se esquematizada na Fig. 6.36.b. Refere-se por fim que a espessura mínima da laje foi condicionada também ela devido ao punçoamento existente.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

7.1 - CONCLUSÕES

Tendo por objectivo testar, aplicar e desenvolver um programa de análise linear elástica de estruturas baseado nas técnicas dos elementos finitos (programa FEMIX), preparando-o para um âmbito mais alargado de aplicações práticas foi o presente trabalho levado a cabo, considerando-se que foram atingidos os objectivos propostos.

Foram introduzidos no programa modificações que possibilitam a transformação de GDL, permitindo rodar os referenciais associados aos nós da estrutura e impôr relações entre GDL. Um caso particular de relações entre GDL - as ligações excêntricas de nós - foi também introduzido.

Tornou-se também possível a utilização simultânea de diferentes tipos de elementos, tendo sido generalizada a formulação dos elementos de tensão plana e de laje para poderem ser utilizados em estruturas tridimensionais. Aumentou-se o número de elementos disponíveis através da introdução do elemento de casca de superfície média plana e de elementos de junta (elementos de junta de linha e elementos de junta de superfície).

Além de diversos testes efectuados foi utilizado o programa para proceder à análise e ao dimensionamento de uma estrutura de fundação do tipo ensoleiramento geral considerando o efeito da deformabilidade do solo. Foi também introduzido no programa um módulo de cálculo de armadura em estruturas laminares de betão armado sujeitas a esforços de membrana e/ou flexão.

Embora já tenham sido apresentadas as conclusões mais relevantes ao longo dos capítulos precedentes, destacam-se sumariamente as mais importantes:

a) transformações de graus de liberdade

- é possível descrever os deslocamentos de cada nó da estrutura segundo direcções não paralelas ao sistema de eixos global;
- estas direcções não necessitam de ser ortogonais entre si, bastando que os vectores que definem o novo sistema de eixos sejam linearmente independentes;
- a utilização de constrições de GDL provoca uma diminuição do número de equações, podendo provocar um aumento da semibanda;
- as ligações excêntricas de nós podem ser fonte de correcção no modelo de elementos finitos utilizado;

- as transformações de GDL permitem uma melhor modelação dum elevado número de problemas estruturais;

b) utilização simultânea de elementos de diferentes tipos

- apesar dos elementos de transição permitirem a resolução do problema da utilização simultânea de elementos de diferentes tipos numa forma eficiente e fácil de utilizar, não permitem cobrir todo o leque de possíveis formas de união entre elementos;
- a imposição de campos de deslocamentos ao longo da interface dos elementos a unir é um processo mais versátil mas de difícil sistematização;
- a metodologia ideal consistirá numa conjugação dos dois métodos descritos;
- a generalização dos elementos de laje para modelação de diafragmas rígidos em estruturas 3D conduz a uma redução do número de equações do sistema e a um aumento da semibanda;
- os resultados obtidos com a utilização desta generalização dos elementos de laje são idênticos aos obtidos com a utilização dos elementos de casca nas situações testadas;
- a utilização de elementos de tensão plana em estruturas 3D apresenta bons resultados em termos de tensões instaladas quando comparada com a utilização dos elementos de casca (para elementos de pequena rigidez à flexão);
- estes elementos não permitem uma adequada representação da deformada da peça;
- os elementos de tensão plana quando utilizados em estruturas 3D podem facilmente dar origem ao aparecimento de mecanismos, sendo por isso necessário ter um cuidado especial na formulação da malha de elementos finitos;
- estes elementos (EPT) permitem uma grande redução do tempo de resolução do sistema de equações pois reduzem muito o número de equações;
- a possibilidade de se poderem utilizar simultaneamente os diversos tipos de elementos permite a análise de estruturas complexas de forma mais realista.

c) introdução de novos tipos de elementos

- os elementos de junta apresentados sofrem oscilações quando submetidos a elevados gradientes de tensão;
- os elementos de junta permitem a modelação de um elevado número de problemas estruturais;

- os elementos de casca plana são adequados para a modelação de estruturas constituídas por associação de elementos planos, podendo também ser utilizados para a modelação de cascas de superfície média curva (uma vez que existem no programa elementos especialmente preparados para este efeito não se recomenda a utilização dos elementos de casca plana para este fim);

d) utilização do programa na análise e dimensionamento de estruturas

- a introdução do módulo de cálculo de armadura revelou-se de grande utilidade permitindo uma visualização da distribuição de armadura;
- a introdução do modelo de fundação de Winkler permite considerar de forma fácil o efeito da deformabilidade do solo de fundação na estrutura sobre ele assente;
- com as novas opções introduzidas, o programa dispõe já de um conjunto razoável de opções de pós-processamento de grande utilidade na análise e dimensionamento de estruturas.

7.2 - ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

Como em todos os programa de elementos finitos, há sempre muito mais trabalho a fazer no sentido de generalizar e adequar o programa a utilizações práticas. Apresentam-se nesta secção algumas sugestões para futuros desenvolvimentos.

a) transformações de graus de liberdade

- tornar possível a utilização de uma direcção distinta para cada GDL;
- introduzir processos de definição mais faceis para a formulação das equações de restrição como por exemplo ao pretender representar uma rótula referir apenas a palavra ROTULA e os números dos nós envolvidos;

b) utilização simultânea de diferentes tipos de elementos

- introduzir alguns elementos de transição;
- introduzir alguns processos de definir as equações de compatibilidade de deslocamentos de forma automática, cobrindo alguns tipos de elementos mais usuais nas situações correntes;

c) novos tipos de elementos

- introdução do elemento de junta casca/sólido;

- introdução do elemento de junta casca/casca;
- introdução do elemento de casca axissimétrica;
- introdução do elemento de viga curvo;

d) utilização prática do programa

- executar um programa que permita o tratamento das cargas a aplicar, facilitando a sua introdução;
- alterar o ficheiro de dados para uma forma tal que as sucessivas actualizações do programa não inviabilizem os ficheiros das versões anteriores;
- permitir o pós-processamento por grupos de elementos (não necessariamente todos os elementos do mesmo tipo);
- fazer pixelagens de tensões sem considerar a média das tensões nos nós (as pixelagens são efectuadas para cada elemento).

ANEXO 1

RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO SUJEITO A UM CONJUNTO DE RESTRIÇÕES

São apresentados neste anexo dois processos para resolução do problema das restrições a que fica sujeito o sistema de equações de equilíbrio quando são aplicadas as transformações de GDL. Apenas são referidos aspectos gerais podendo ser encontrada informação mais detalhada na bibliografia já referida (Capítulo 3).

A resolução do sistema de equações de equilíbrio

$$K u = f \quad , \quad (A1.1)$$

sujeito a:

$$C u = 0 \quad , \quad (A1.2)$$

pode ser feita recorrendo a vários métodos. São apresentados o método dos multiplicadores de Lagrange e o método das funções de penalidade.

A1.1 - MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

O método dos multiplicadores de Lagrange é usado para determinar extremos de funções (máximos ou mínimos) cujas variáveis não são independentes mas apresentam relações de constrição. Em mecânica estrutural a função a minimizar é a energia potencial Π_p e as variáveis são os GDL u . As novas incógnitas do sistema passam a ser os GDL u mais os multiplicadores de Lagrange λ .

A expressão da energia potencial dum sistema pode ser representada como:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} u^T K u - u^T f \quad (A1.3)$$

Adicionando a esta expressão $\lambda^T C u$ não se está a alterar o valor da energia potencial:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} u^T K u - u^T f + \lambda^T C u \quad (A1.4)$$

Derivando Π_p em ordem a u e em ordem a λ obtém-se

ANEXO 2

DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES E DE DENSIDADES DE ARMADURA DA LAJE DE FUNDAÇÃO

São apresentados neste anexo os diagramas de momentos flectores (Fig. A2.1-A2.6) e os diagramas de armaduras (Fig. A2.7-A2.12) utilizados no dimensionamento da armadura da laje de fundação.

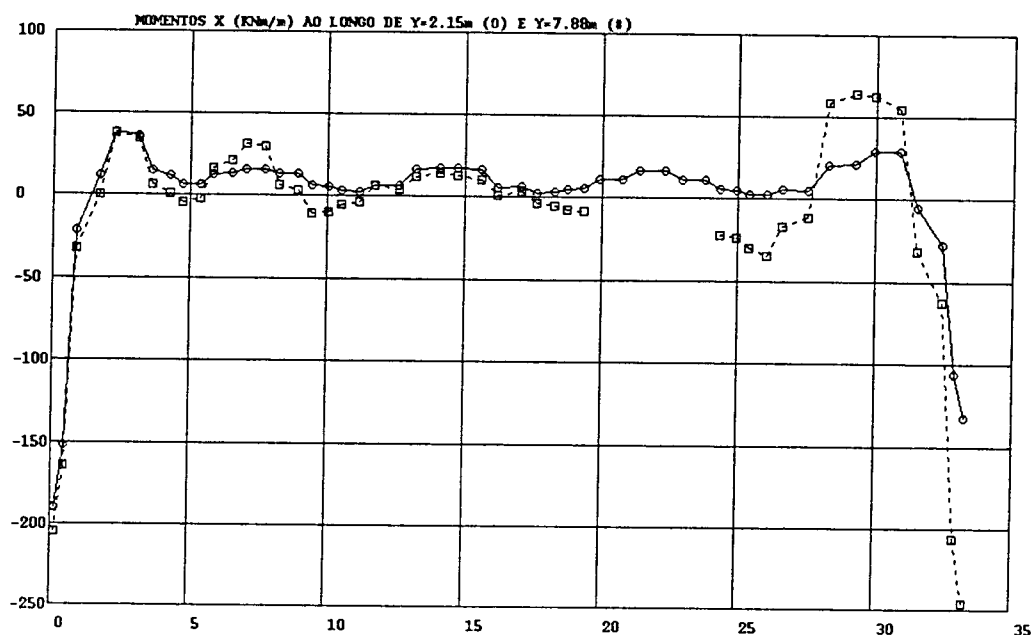


Fig. A2.1 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo X ao longo de Y = 2.15m e Y = 7.88m).

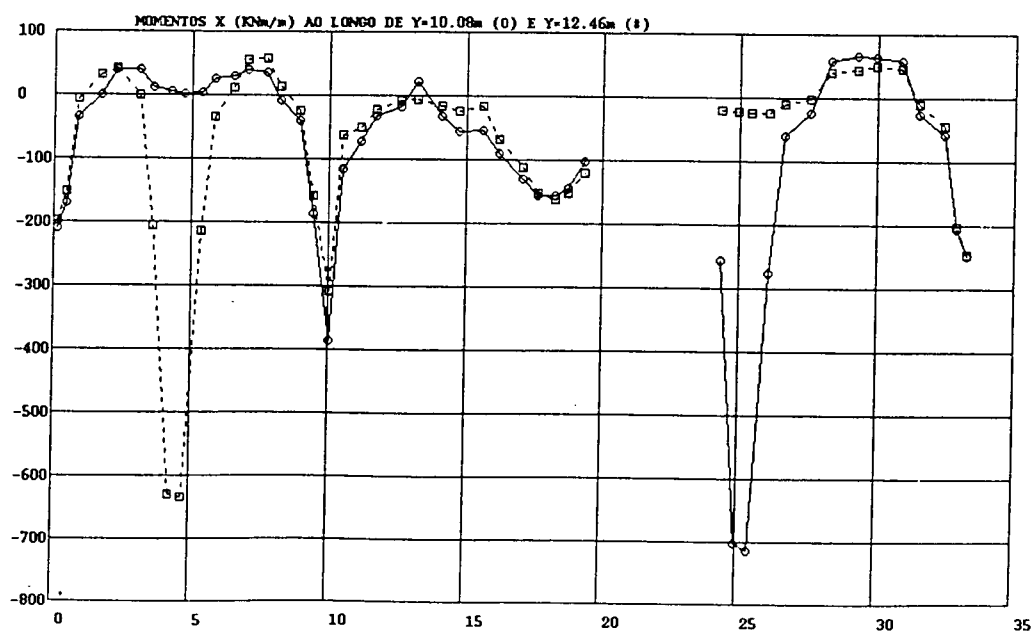


Fig. A2.2 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo X ao longo de Y = 10.08m e Y = 12.46m).

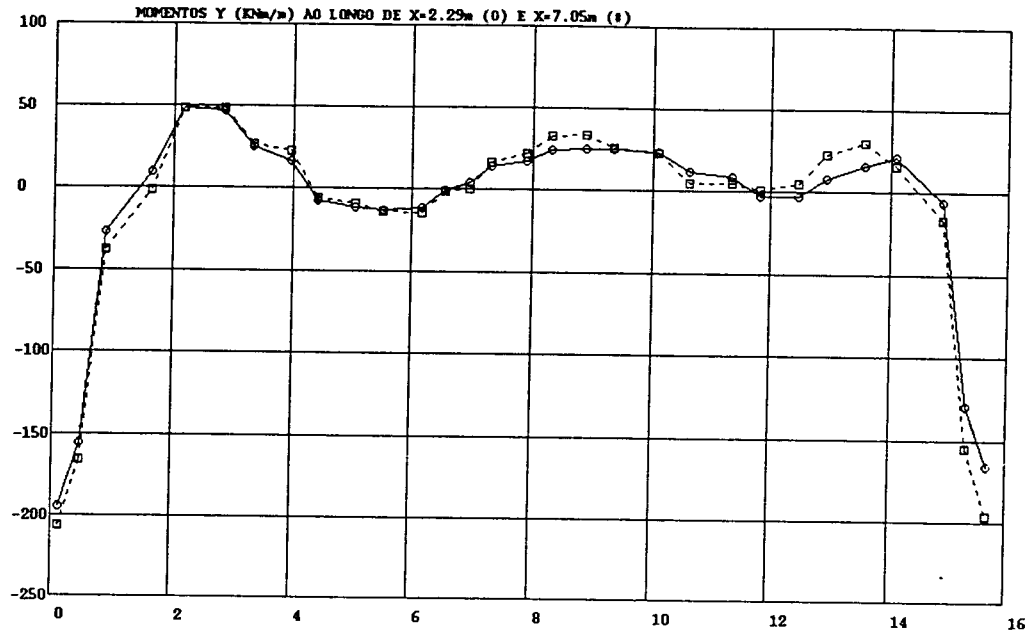


Fig. A2.3 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo Y ao longo de X = 2.29m e X = 7.05m).

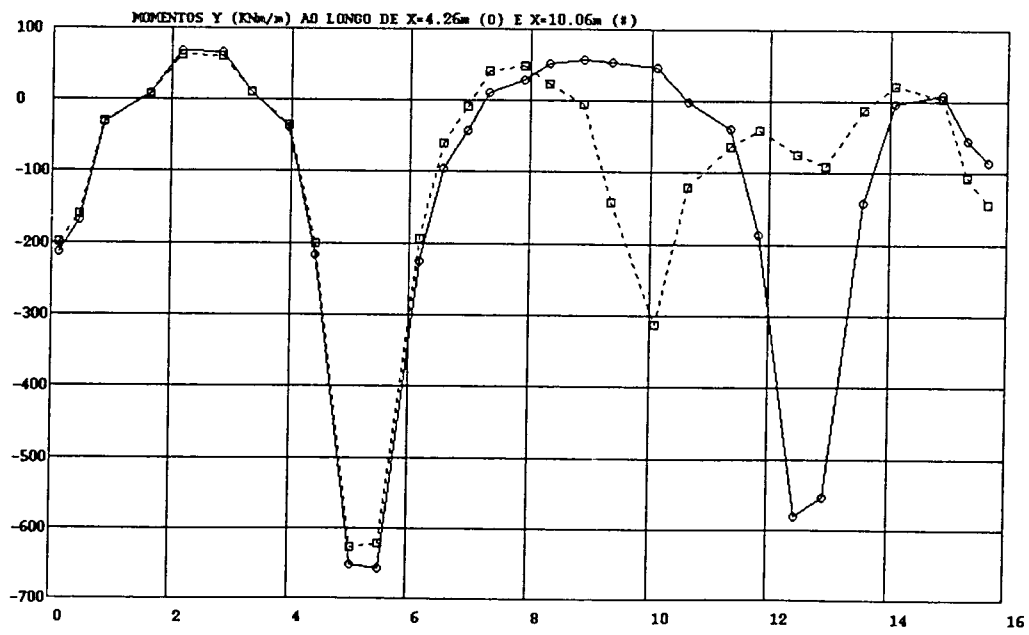


Fig. A2.4 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo Y ao longo de X = 4.26m e X = 10.06m).

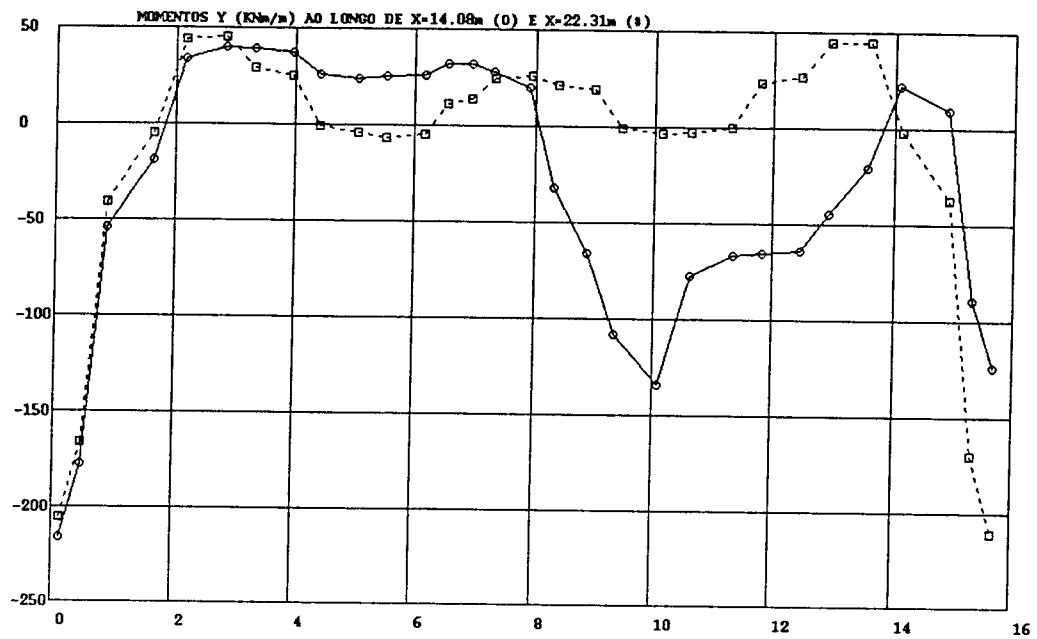


Fig. A2.5 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo Y ao longo de X = 14.08m e X = 22.31m).

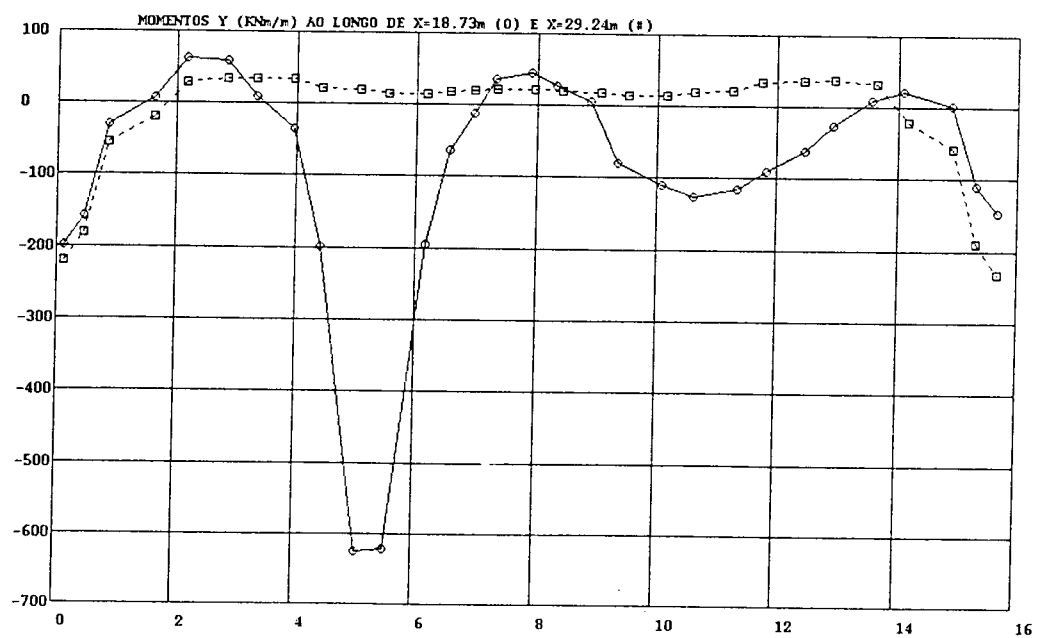


Fig. A2.6 - Laje de fundação (diagrama de momentos segundo Y ao longo de X = 18.73m e X = 29.24m).

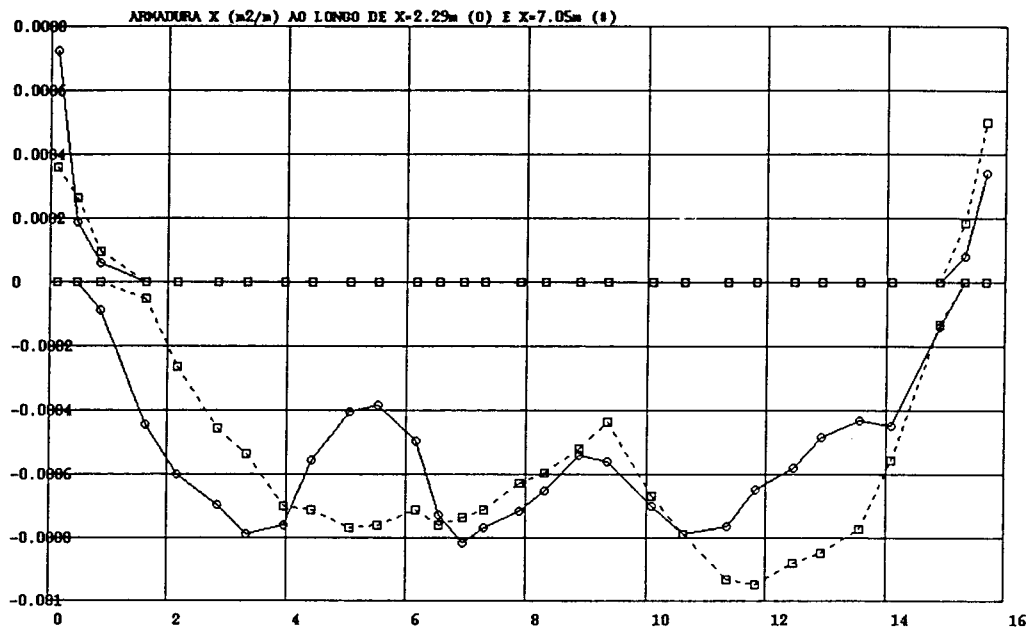


Fig. A2.7 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo X ao longo de X = 2.29m e X = 7.05m).

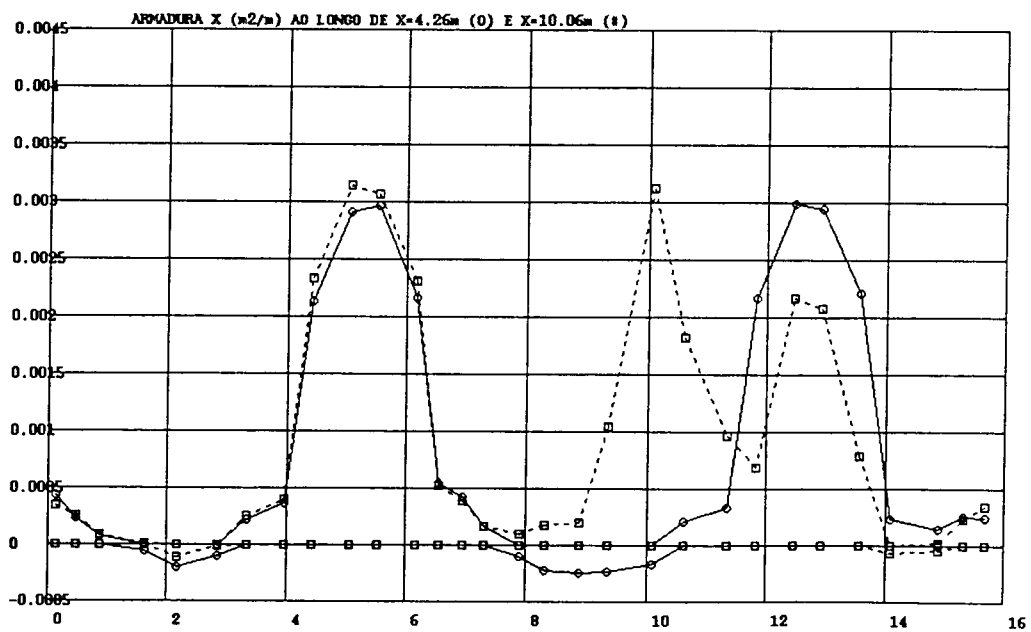


Fig. A2.8 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo X ao longo de X = 4.26m e X = 10.06m).

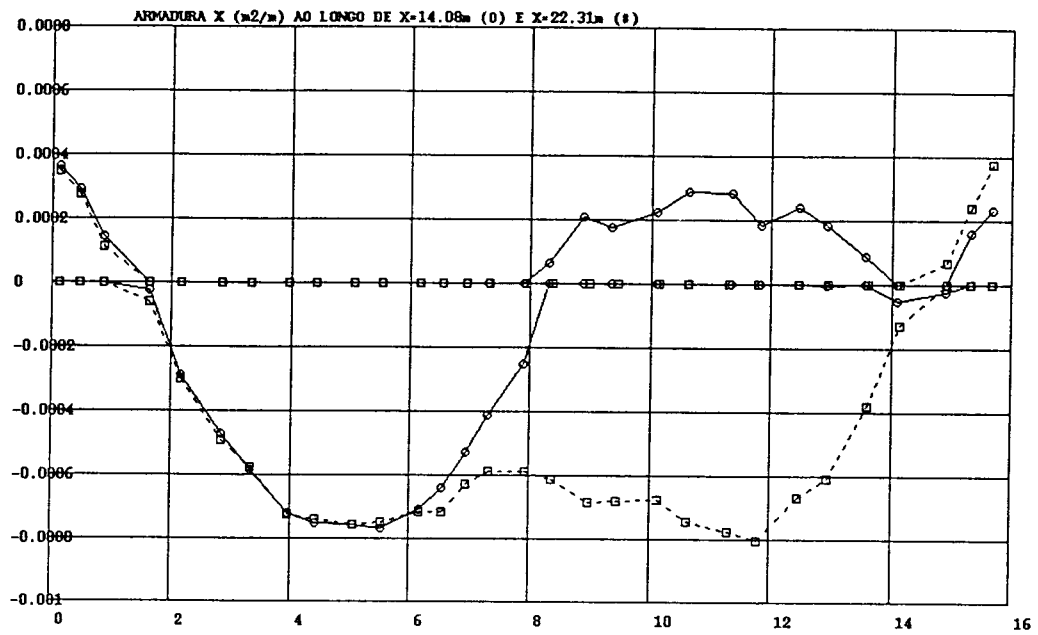


Fig. A2.9 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo X ao longo de X = 14.08m e X = 22.31m).

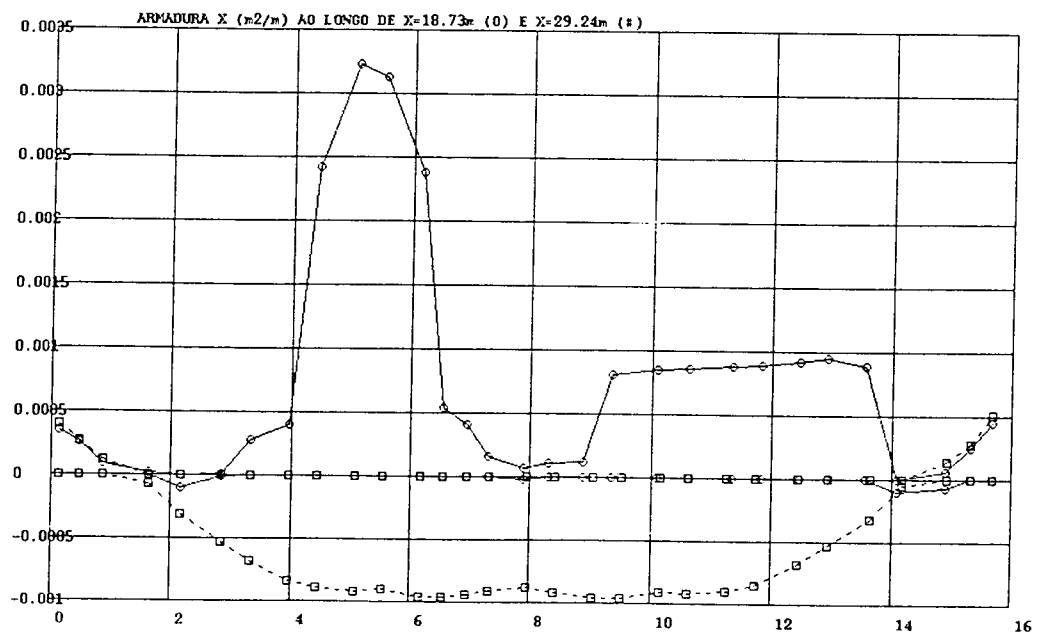


Fig. A2.10 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo X ao longo de X = 18.73m e X = 29.24m).

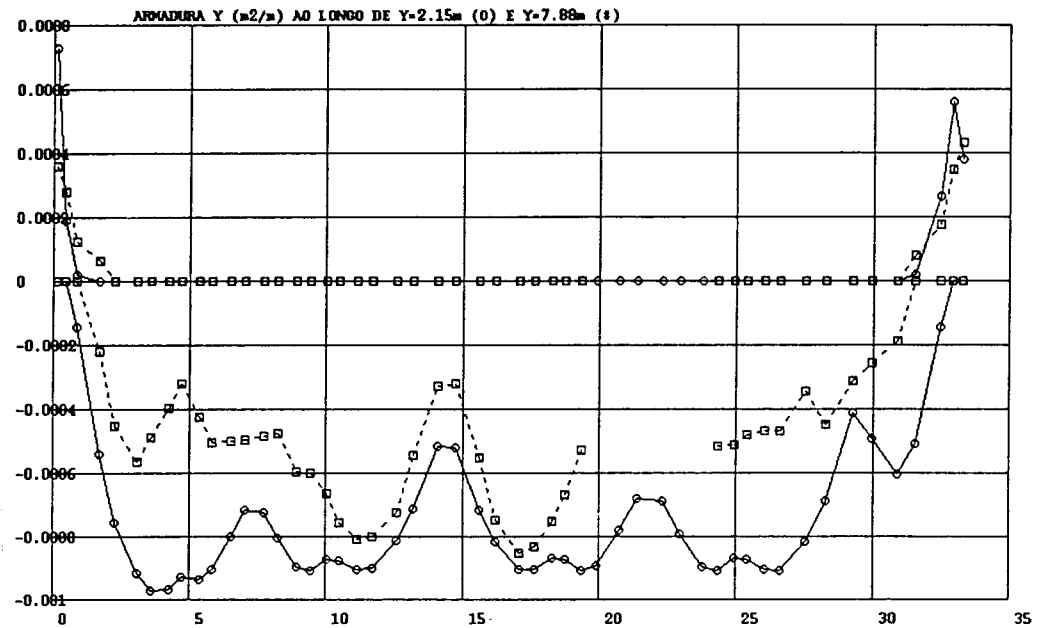


Fig. A2.11 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo Y ao longo de Y = 2.15m e Y = 7.88m).

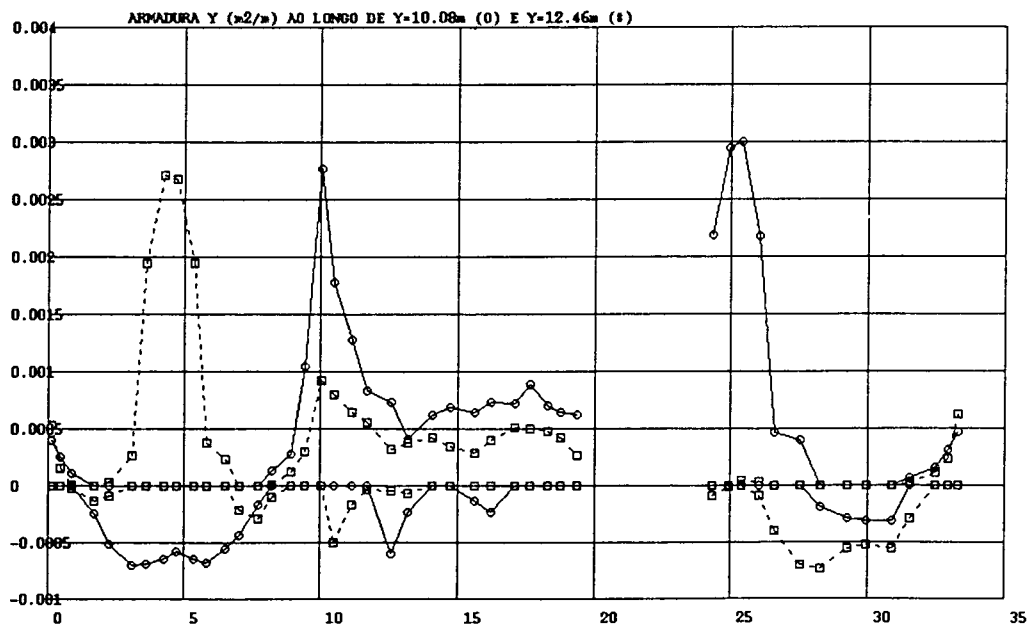


Fig. A2.12 - Laje de fundação (diagramas de armadura segundo Y ao longo de Y = 10.08m e Y = 12.46m).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- J.F. Abel e M.S. Shephard [1979] - "An Algorithm for Multipoint Constraints in Finite Element Analysis", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol 19, Nº 3, pp. 464-467.
- A.F.M. Azevedo [1992a] - "Manual de Utilização dos Programas GRAPH2D 2.1 e DRAWMESH 2.5".
- A.F.M. Azevedo [1992b] - "Manual de Utilização do Programa S3DCAD 2.0".
- A.F.M. Azevedo e J.A.O. Barros [1990] - "Análise Comparativa dos Métodos Directos e Iterativos na Resolução de Grandes Sistemas de Equações Lineares" - 2as Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, pp. A91-A102.
- A.F.M. Azevedo e J.A.O. Barros [1991] - "Manual de Utilização do Programa FEMIX (versão 2.1)".
- J.A.O. Barros [1989] - "Modelos de Análise de Estruturas Laminares e de Compósitos Laminados" - Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil.
- G. Beer [1985] - "An Isoparametric Joint/Interface Element for Finite Element Analysis", Int. J. Meth. Engng., Vol. 21, pp. 585-600.
- A. Bouberguig [1983] - "Calcul Statique des Coques Nervurées et Précontraintes", Thèse nº 473 pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences Techniques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- J.E. Bowles [1982] - "Foundation Analysis and Design", 3rd Edition, McGraw-Hill (International Student Edition).
- R. Cook, D.S. Malkus e M.E. Plesha [1989] - "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York.
- Delft [1990] - "DIANA Users Manual (release 3.2)" - Institute TNO for Building Materials and Structures.
- R.M. Delgado [1984] - "O Método dos Elementos Finitos na Análise Dinâmica de Barragens, Incluindo a Interação Sólido-Líquido" - Dissertação para Doutoramento apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

- R.M. Faria [1988] - "Análise Numérica de Barragens Abóbada Sujeitas à Acção Sísmica", Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil.
- J. Folque [1990] - "Características Mecânicas de Solos Deduzidas de Ensaio de penetração", *Geotecnia*, Nº 17, pp. 73-83.
- R.H. Gallagher [1975] - "Problems and Progress in Thin Shell Finite Element Analysis", in *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, D.G. Ashwell and P.H. Gallagher (eds.), pp. 1-14.
- A.V. Gupta e P.S. Ma [1977] - "Errors in Eccentric Beam Formulation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 11, Nº 9, pp. 1473-1477.
- A.A.R. Henriques [1991] - "Análise Não Linear de Estruturas Planas de Betão Pré-esforçado", Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil.
- Kanok-Nukulchai [1992] - "Mathematical Modelling of Cable-Stayed Bridges" - *Structural Engineering International*, 2/92, pp. 108-113.
- P.B. Lourenço [1992] - "Novas Metodologias para o Dimensionamento de Estruturas de Betão Armado", trabalho realizado no âmbito da preparação de provas de aptidão pedagógica e capacidade científica - Universidade do Minho (Dept. de Engenharia Civil).
- P.B. Lourenço e J.A. Figueiras [1992] - "Dimensionamento Automático de Armaduras em Estruturas Laminadas", III Encontro de Mecânica Computacional, 28-30 de Setembro, Coimbra, 1º Vol., pp. E7.1-E7.13.
- E. Oñate [1992] - "Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos (Análisis estático lineal)" - 1ª Edición, Centro Internacional de métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona.
- J.G. Rots e J.C.J. Schellekens [1990] - "Interface Elements in Concrete Mechanics", *Proc. of the 2nd Int. Conf. Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, SCI-C 1990, Vol. 2.
- J.C.J. Schellekens [1990] - "Interface Elements in Finite Element Analysis", Report, Delft Univ. of Techn., Faculty of Civil Engng..

7777



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000005950