



# **Modelação e Controlo de um Conversor CC/CC Bidireccional em Corrente operando em Modo Desacoplado**

**Diogo Filipe Saraiva Pereira Rodrigues**

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Orientador: Prof. Dr. Rui Esteves Araújo

6 de Julho de 2020



# Resumo

Os conversores bidireccionais suscitam cada vez mais interesse pelo facto de permitirem o controlo do fluxo de potência entre duas ligações. Nos dias de hoje, a crescente aposta em sectores como o das energias renováveis ou dos carros eléctricos, juntamente com um forte desenvolvimento das tecnologias associadas, contribuem significativamente para uma maior relevância deste tipo de conversores, no panorama da electrotecnia.

Geralmente funcionando em paralelo com um sistema principal, a sua função basilar passa por gerir o sentido do fluxo de energia entre um sistema de armazenamento e uma carga. No caso da produção de energia a partir de fontes renováveis, devido à sua natural incerteza, a possibilidade de armazenamento de energia em excesso ou, pelo contrário, da utilização de energia guardada em baterias (por exemplo) para suprir situações de menor produção, são dois claros exemplos da grande utilidade destes conversores.

Tradicionalmente, a gestão de potência num conversor bidireccional é realizada pela imposição de uma diferença de ângulo de fase entre os sinais quadrados de controlo, fixando um *duty-cycle* de 50%. Na dissertação aqui apresentada, o objectivo inicial passava por analisar a influência do controlo individual (desacoplado) do desfasamento e *duty-cycle* desses mesmos sinais. Assim, pretendia-se averiguar a utilidade deste acréscimo de grau de liberdade no controlo, contrapondo com as dificuldades inerentes a um sistema mais complexo.

Posteriormente, seria de igual importância o estudo sobre a modelação deste tipo de conversores, permitindo a sua implementação simplificada em contexto de simulação e, a partir daí, o desenvolvimento de uma estrutura de controlo adequada.





# Abstract

Bidirectional converters are of increasing interest since they allow for controlling of power flow between two connections. Nowadays, the growing investment in sectors such as renewable energies or electric cars, as well as a strong development of the associated technologies, contributed significantly to a greater impact of this type of converters, in the panorama of electronics.

Generally working in parallel with a main system, its main function is to manage the direction of energy flow between a storage system and a load. In the case of energy production from renewable sources, due to its natural uncertainty, the possibility of excess energy storage or, on the other hand, the use of energy stored in batteries (for example) in order to aid in situations of lower production are two clear examples of the large utility of these converters.

Traditionally the power management in a bidirectional converter is performed by imposing a phase angle difference between square-wave control signals, maintaining a fixed duty-cycle of 50%. During the work presented here, the initial objective was to analyse the influence of individual control (decoupled) of the *phase-shift* and *duty-cycle* of these signals. Thus, it was intended to ascertain the usefulness of this increased degree of freedom in control, in contrast to the difficulties inherent in a more complex system.

Subsequently, the study on the modeling of this type of converters would be of equal importance, allowing for its simplified implementation in simulation and, from there, the development of an adequate control structure.



# Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao Professor Rui Esteves Araújo, por um lado, pela confiança que depositou em mim quando me propôs este tema e, por outro, pelo apoio e orientação no desenvolvimento deste trabalho, a disponibilidade total e todas as dicas e conselhos nas mais variadas áreas do projecto.

Aproveito também para agradecer à empresa PLEXIM, em particular ao Enrique Diaz, pela disponibilização de uma licença do seu software *PLECS*, indispensável à realização deste trabalho.

Aos meus pais, pela compreensão dadas as várias horas que se viram privados da minha companhia, pela paciência em alturas de maior stress, pela criação de condições de trabalho em casa, dadas as circunstâncias que vivemos, e por todos os valores de responsabilidade, compromisso e dedicação que procuraram sempre passar-me, um profundo agradecimento.

Um obrigado à minha tia Cristina por, mesmo à distância, mesmo dadas as adversidades que a vida lhe foi "colocando pela frente", ter demonstrado sempre grande preocupação e me brindar com os seus dotes de culinária.

Uma palavra de carinho à Inês, minha confidente, "o meu melhor público", pela companhia - pessoal e muitas vezes à distância - que foi sempre garantindo, por me ouvir, às vezes de forma repetida, pelas palavras de alento e apoio incondicional, pelos passeios e, sobretudo, pelos momentos de felicidade que me proporciona.

Por último, quero agradecer aos meus amigos, essencialmente por me proporcionarem momentos de descontração, num período difícil, que no meu caso juntou o stress de um final de curso à situação pandémica actual. Um destaque ao João pela ajuda na revisão do documento, ao Diogo, à Inês, ao Areias, ao Henrique e ao Luís pelos momentos de escape do trabalho.

A todos o meu mais sincero obrigado!

Diogo Filipe Rodrigues



*“Long you live and high you fly  
Smiles you’ll give and tears you’ll cry  
And all you touch and all you see  
Is all your life will ever be”*

Pink Floyd, Breathe



# Conteúdo

|          |                                                                         |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                       | <b>1</b>  |
| 1.1      | Enquadramento . . . . .                                                 | 1         |
| 1.2      | Objectivos . . . . .                                                    | 2         |
| 1.3      | Motivação . . . . .                                                     | 2         |
| 1.4      | Estrutura do documento . . . . .                                        | 3         |
| <b>2</b> | <b>Revisão Bibliográfica</b>                                            | <b>5</b>  |
| 2.1      | Conversor Bidireccional a estudar . . . . .                             | 5         |
| 2.1.1    | Operação tradicional . . . . .                                          | 6         |
| 2.1.2    | Sinais de controlo . . . . .                                            | 8         |
| 2.1.3    | Análise do princípio de funcionamento . . . . .                         | 10        |
| 2.1.4    | Medição de potência . . . . .                                           | 14        |
| 2.1.5    | Relação entre potência e ângulo de desfasamento . . . . .               | 15        |
| 2.1.6    | Análise em malha aberta . . . . .                                       | 15        |
| 2.2      | <i>Hard Switching</i> . . . . .                                         | 17        |
| 2.3      | <i>Soft switching</i> . . . . .                                         | 20        |
| <b>3</b> | <b>Operação em Modo Desacoplado</b>                                     | <b>23</b> |
| 3.1      | Princípios base . . . . .                                               | 23        |
| 3.1.1    | Relação entre Tensões nos condensadores e respectiva fonte . . . . .    | 23        |
| 3.1.2    | Valor médio da tensão na indutância de fugas do transformador . . . . . | 25        |
| 3.1.3    | Modos de funcionamento . . . . .                                        | 27        |
| 3.1.4    | Noção de transferência de potência . . . . .                            | 31        |
| 3.2      | Análise da operação do conversor . . . . .                              | 32        |
| 3.2.1    | Expressão de potência transferida para os vários modos de funcionamento | 32        |
| 3.2.2    | Representação Gráfica das expressões obtidas . . . . .                  | 46        |
| 3.2.3    | Valores máximos de transferência de Potência . . . . .                  | 48        |
| 3.2.4    | Valor eficaz da corrente no transformador . . . . .                     | 52        |
| 3.2.5    | Formas de onda de $iL_1$ e $iL_2$ . . . . .                             | 56        |
| <b>4</b> | <b>Modelação do conversor</b>                                           | <b>61</b> |
| 4.1      | Objecto de Modelação . . . . .                                          | 62        |
| 4.2      | Modelo espaço de estados . . . . .                                      | 63        |
| 4.3      | Modelo de Média . . . . .                                               | 65        |
| 4.3.1    | Matrizes representativas de cada configuração . . . . .                 | 65        |
| 4.3.2    | Sistemas com variáveis de duas escalas de tempo . . . . .               | 71        |
| 4.3.3    | Matrizes de média do Conversor como sistema <i>TTS</i> . . . . .        | 72        |
| 4.3.4    | Simulações do Modelo de Média . . . . .                                 | 76        |

|          |                                                                                    |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.5    | Simplificação do Modelo de Média . . . . .                                         | 78         |
| 4.4      | Linearização . . . . .                                                             | 83         |
| 4.4.1    | Explicação intuitiva . . . . .                                                     | 84         |
| 4.4.2    | Série de Taylor . . . . .                                                          | 86         |
| 4.4.3    | Funções não lineares de múltiplas variáveis . . . . .                              | 87         |
| 4.4.4    | Aplicação no conversor . . . . .                                                   | 87         |
| 4.4.5    | Comparação com Modelo de Média Simplificado . . . . .                              | 91         |
| <b>5</b> | <b>Projecto de Controladores</b>                                                   | <b>97</b>  |
| 5.1      | Desenvolvimento de um controlador para um sistema <i>SISO</i> . . . . .            | 97         |
| 5.1.1    | Obtenção da função de transferência . . . . .                                      | 98         |
| 5.1.2    | Análise do Lugar das Raízes . . . . .                                              | 99         |
| 5.1.3    | Controlador PID . . . . .                                                          | 102        |
| 5.2      | Desenvolvimento de um controlador para um sistema <i>MIMO</i> . . . . .            | 103        |
| 5.2.1    | Obtenção da função de transferência . . . . .                                      | 104        |
| 5.2.2    | <i>Pairing</i> de entradas/saídas - RGA . . . . .                                  | 106        |
| 5.2.3    | Compensação do sistema . . . . .                                                   | 107        |
| 5.2.4    | Controlo de estrutura compensada . . . . .                                         | 108        |
| <b>6</b> | <b>Resultados em Malha Fechada</b>                                                 | <b>111</b> |
| 6.1      | Implementação em Simulação de Modelo Detalhado . . . . .                           | 111        |
| 6.1.1    | Estrutura do Conversor . . . . .                                                   | 111        |
| 6.1.2    | Produção dos sinais de controlo . . . . .                                          | 112        |
| 6.2      | Resultados de simulação controlada do conversor como sistema <i>SISO</i> . . . . . | 117        |
| 6.2.1    | Comparação controlo de Modelo de Média e Modelo Linearizado . . . . .              | 117        |
| 6.2.2    | Controlo de Modelo detalhado . . . . .                                             | 119        |
| 6.3      | Resultados de simulação controlada do conversor como sistema <i>MIMO</i> . . . . . | 121        |
| 6.3.1    | Comparação controlo de Modelo de Média e Modelo Linearizado . . . . .              | 122        |
| 6.3.2    | Controlo de Modelo detalhado . . . . .                                             | 124        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões e Trabalho Futuro</b>                                                | <b>127</b> |
| 7.1      | Satisfação dos Objectivos . . . . .                                                | 127        |
| 7.2      | Trabalho Futuro . . . . .                                                          | 129        |
|          | <b>Referências</b>                                                                 | <b>131</b> |
| <b>A</b> | <b>Matrizes do Modelo de Média</b>                                                 | <b>133</b> |
| A.1      | Modos 2 a 6 . . . . .                                                              | 133        |
| A.1.1    | Modo 2 . . . . .                                                                   | 133        |
| A.1.2    | Modo 3 . . . . .                                                                   | 136        |
| A.1.3    | Modo 4 . . . . .                                                                   | 138        |
| A.1.4    | Modo 5 . . . . .                                                                   | 141        |
| A.1.5    | Modo 6 . . . . .                                                                   | 144        |
| <b>B</b> | <b>Script para obtenção de Modelo de Média e Simplificação, em MAPLE</b>           | <b>147</b> |
| B.1      | Exemplo para Modo 1 . . . . .                                                      | 147        |
| <b>C</b> | <b>Script para obtenção de Modelo Linear, em MAPLE</b>                             | <b>151</b> |
| C.1      | Exemplo para Modo 1 . . . . .                                                      | 151        |



# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                                                                       |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Exemplo de implementação de conversor bidireccional num sistema de produção Fotovoltaico . . . . .                                                                                                    | 6  |
| 2.2  | Conversor Bidireccional utilizado como base[1] . . . . .                                                                                                                                              | 6  |
| 2.3  | Conversor Bidireccional Simplificado . . . . .                                                                                                                                                        | 7  |
| 2.4  | Diagrama de blocos para geração de sinais de controlo . . . . .                                                                                                                                       | 9  |
| 2.5  | Sinais de controlo: exemplo para desfasamento de $60^\circ$ . . . . .                                                                                                                                 | 10 |
| 2.6  | Circuito equivalente do estado S1 & S4 ligados . . . . .                                                                                                                                              | 11 |
| 2.7  | Circuito equivalente do estado S1 & S3 ligados . . . . .                                                                                                                                              | 11 |
| 2.8  | Circuito equivalente do estado S2 & S3 ligados . . . . .                                                                                                                                              | 12 |
| 2.9  | Circuito equivalente do estado S2 & S4 ligados . . . . .                                                                                                                                              | 12 |
| 2.10 | Formas de onda de tensão e corrente em $L_{Leak}$ , para $\phi = 45^\circ$ . . . . .                                                                                                                  | 13 |
| 2.11 | Correntes da entrada e da saída do conversor em regime permanente . . . . .                                                                                                                           | 14 |
| 2.12 | Esquema de medição de potência - exemplo no secundário do conversor . . . . .                                                                                                                         | 15 |
| 2.13 | Relação entre potência transferida e <i>phase-shift</i> , para as condições paramétricas referidas em 2.13, com $D = 50\%$ . . . . .                                                                  | 16 |
| 2.14 | Potência média na saída do conversor, em malha aberta . . . . .                                                                                                                                       | 17 |
| 2.15 | Conversor Buck para exemplo de comutação de MOSFET [2] . . . . .                                                                                                                                      | 18 |
| 2.16 | Formas de onda de tensão e corrente durante a comutação e respectivas perdas num MOSFET [2] . . . . .                                                                                                 | 18 |
| 2.17 | Formas de onda de um período completo de comutação - genérico[3] . . . . .                                                                                                                            | 19 |
| 2.18 | Exemplo da relação da Eficiência de um conversor em função da frequência de comutação dos semicondutores (considerando valores de potência de perdas de condução e de carga arbitrárias)[2] . . . . . | 20 |
| 2.19 | Relação de V e I em <i>Hard Switching</i> vs <i>Soft Switching</i> [3] . . . . .                                                                                                                      | 21 |
| 3.1  | Esquema do lado primário do conversor . . . . .                                                                                                                                                       | 24 |
| 3.2  | Foco na indutância de fugas do transformador . . . . .                                                                                                                                                | 25 |
| 3.3  | Modos de funcionamento do conversor, em função dos valores de $D$ e $\phi_p$ . . . . .                                                                                                                | 26 |
| 3.4  | <b>Modo 1:</b> $0 \leq \phi_p \leq D \wedge D \leq 50\%$ . . . . .                                                                                                                                    | 27 |
| 3.5  | <b>Modo 2:</b> $D \leq \phi_p \leq (1 - D) \wedge D \leq 50\%$ . . . . .                                                                                                                              | 27 |
| 3.6  | <b>Modo 3:</b> $(1 - D) \leq \phi_p \leq 1 \wedge D \leq 50\%$ . . . . .                                                                                                                              | 28 |
| 3.7  | <b>Modo 4:</b> $0 \leq \phi_p \leq (1 - D) \wedge D \geq 50\%$ . . . . .                                                                                                                              | 28 |
| 3.8  | <b>Modo 5:</b> $(1 - D) \leq \phi_p \leq D \wedge D \geq 50\%$ . . . . .                                                                                                                              | 29 |
| 3.9  | <b>Modo 6:</b> $D \leq \phi_p \leq 1 \wedge D \geq 50\%$ . . . . .                                                                                                                                    | 29 |
| 3.10 | Configuração simplificada do conversor . . . . .                                                                                                                                                      | 31 |
| 3.11 | Formas de onda de $v_{r1}$ , $v_{r2}$ e $v_{L_{Leak}}$ , para o Modo 1 . . . . .                                                                                                                      | 33 |
| 3.12 | Forma de onda da corrente $i_{L\sigma}$ - Modo 1 . . . . .                                                                                                                                            | 34 |
| 3.13 | Formas de onda de $v_{r1}$ , $v_{r2}$ e $v_{L_{Leak}}$ , para o Modo 2. . . . .                                                                                                                       | 35 |

|      |                                                                                                          |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.14 | Forma de onda da corrente $i_{L\sigma}$ - Modo 2 . . . . .                                               | 36 |
| 3.15 | Formas de onda de $v_{r1}$ , $v_{r2}$ e $v_{L\_leak}$ , para o Modo 3. . . . .                           | 37 |
| 3.16 | Forma de onda da corrente $i_{L\sigma}$ - Modo 3 . . . . .                                               | 38 |
| 3.17 | Formas de onda de $v_{r1}$ , $v_{r2}$ e $v_{L\_leak}$ , para o Modo 4. . . . .                           | 39 |
| 3.18 | Forma de onda da corrente $i_{L\sigma}$ - Modo 4 . . . . .                                               | 40 |
| 3.19 | Formas de onda de $v_{r1}$ , $v_{r2}$ e $v_{L\_leak}$ , para o Modo 5. . . . .                           | 41 |
| 3.20 | Forma de onda da corrente $i_{L\sigma}$ - Modo 5 . . . . .                                               | 42 |
| 3.21 | Formas de onda de $v_{r1}$ , $v_{r2}$ e $v_{L\_leak}$ , para o Modo 6. . . . .                           | 43 |
| 3.22 | Forma de onda da corrente $i_{L\sigma}$ - Modo 6 . . . . .                                               | 44 |
| 3.23 | Representação gráfica 3D da relação entre a Potência Transferida com $D$ e $\phi$ . . .                  | 46 |
| 3.24 | Representação gráfica 2D da relação entre a Potência Transferida e $\phi_p$ , com $D = 25\%$             | 47 |
| 3.25 | Representação gráfica 2D da relação entre a Potência Transferida e $\phi_p$ , com $D = 75\%$             | 47 |
| 3.26 | Representação gráfica 2D da relação entre a Potência Transferida e $\phi_p$ , com $D = 50\%$             | 48 |
| 3.27 | Gráfico comparativo das expressões de potência máxima para os vários modos . .                           | 52 |
| 3.28 | Gráfico 3D da função da corrente eficaz no transformador, em função de $D$ e $\phi_p$ .                  | 54 |
| 3.29 | Gráfico da função da corrente eficaz no transformador, em função de $\phi_p$ , para $D = 25\%$ . . . . . | 55 |
| 3.30 | Gráfico da função da corrente eficaz no transformador, em função de $\phi_p$ , para $D = 50\%$ . . . . . | 55 |
| 3.31 | Gráfico da função da corrente eficaz no transformador, em função de $\phi_p$ , para $D = 75\%$ . . . . . | 56 |
| 3.32 | Representação genérica da forma de onda da corrente em $L_1$ . . . . .                                   | 57 |
| 3.33 | Representação genérica da forma de onda da corrente em $L_2$ . . . . .                                   | 59 |
| 4.1  | Diagrama de blocos simplificado do sistema em malha fechada . . . . .                                    | 62 |
| 4.2  | Modelo Simplificado do Conversor . . . . .                                                               | 63 |
| 4.3  | Equivalente do lado primário para S1 ligado . . . . .                                                    | 66 |
| 4.4  | Equivalente do lado primário para S2 ligado . . . . .                                                    | 66 |
| 4.5  | Equivalente do lado secundário para S3 ligado . . . . .                                                  | 67 |
| 4.6  | Equivalente do lado secundário para S4 ligado . . . . .                                                  | 67 |
| 4.7  | Modelo média em diagrama de blocos para o Modo 1 . . . . .                                               | 75 |
| 4.8  | Formas de onda de $i_{L1}$ de Modelo de Média . . . . .                                                  | 76 |
| 4.9  | Formas de onda de $i_{L2}$ de Modelo de Média . . . . .                                                  | 77 |
| 4.10 | Formas de onda de $V_{C1}$ e $V_{C2}$ de Modelo de Média . . . . .                                       | 77 |
| 4.11 | Formas de onda de $V_{C3}$ e $V_{C4}$ de Modelo de Média . . . . .                                       | 78 |
| 4.12 | Modelo média Simplificado em diagrama de blocos para o Modo 1 . . . . .                                  | 79 |
| 4.13 | Resultado simulação do Modelo Média Simplificado para Modo 1 - $i_{L1}$ . . . . .                        | 80 |
| 4.14 | Resultado simulação do Modelo Média Simplificado para Modo 1 - $i_{L2}$ . . . . .                        | 80 |
| 4.15 | Resultado simulação do Modelo Média Simplificado para Modo 1 - $V_{C12}$ . . . . .                       | 81 |
| 4.16 | Resultado simulação do Modelo Média Simplificado para Modo 1 - $V_{C34}$ . . . . .                       | 81 |
| 4.17 | Sistema exemplo definido por uma equação não linear [2] . . . . .                                        | 84 |
| 4.18 | Gráfico da função não linear e nova função linearizada [2] . . . . .                                     | 84 |
| 4.19 | Circuito resultante de linearização [2] . . . . .                                                        | 86 |
| 4.20 | Implementação do modelo em Espaço de Estados (linear) . . . . .                                          | 91 |
| 4.21 | Modelo Simplificado controlável externamente . . . . .                                                   | 92 |
| 4.22 | Comparação entre Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, pequenas perturbações - $i_{L1}$ . . . . .   | 92 |
| 4.23 | Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, pequenas perturbações - $i_{L2}$ . . . . .         | 93 |

|      |                                                                                                                                                              |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.24 | Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, pequenas perturbações<br>- $V_{C12}$ . . . . .                                                         | 93  |
| 4.25 | Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, pequenas perturbações<br>- $V_{C34}$ . . . . .                                                         | 94  |
| 4.26 | Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, grandes perturbações<br>- $i_{L1}$ . . . . .                                                           | 94  |
| 4.27 | Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, grandes perturbações<br>- $i_{L2}$ . . . . .                                                           | 95  |
| 4.28 | Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, grandes perturbações<br>- $V_{C12}$ . . . . .                                                          | 95  |
| 4.29 | Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, grandes perturbações<br>- $V_{C34}$ . . . . .                                                          | 96  |
| 5.1  | Modelo do Sistema realimentado com controlador proporcional . . . . .                                                                                        | 99  |
| 5.2  | Lugar de Raízes Sistema realimentado com controlador proporcional . . . . .                                                                                  | 100 |
| 5.3  | Resposta do sistema em malha aberta ( $K = 0$ ), a uma entrada em degrau . . . . .                                                                           | 100 |
| 5.4  | Resposta do sistema em malha fechada ( $K = 0.0022429$ ), a uma entrada em degrau . . . . .                                                                  | 101 |
| 5.5  | Resposta do sistema em malha fechada ( $K = 1$ ), a uma entrada em degrau . . . . .                                                                          | 101 |
| 5.6  | Estrutura do sistema em malha fechada, com um controlador PID . . . . .                                                                                      | 102 |
| 5.7  | Saída do sistema: resposta temporal a uma referência em degrau, com controlador<br>PID . . . . .                                                             | 103 |
| 5.8  | Diagrama Blocos genérico do conversor assumindo sistema MIMO . . . . .                                                                                       | 105 |
| 5.9  | Diagrama Blocos Compensado do conversor, assumindo sistema MIMO . . . . .                                                                                    | 108 |
| 5.10 | Diagrama Blocos Compensado do conversor, assumindo sistema MIMO - adição<br>de controladores PID . . . . .                                                   | 109 |
| 6.1  | Esquema do conversor no software de simulação PLECS . . . . .                                                                                                | 112 |
| 6.2  | Sub-bloco de criação dos sinais de controlo do conversor . . . . .                                                                                           | 113 |
| 6.3  | Esquema de criação de ondas complementares, dependentes do <i>duty-cycle</i> definido . . . . .                                                              | 113 |
| 6.4  | Exemplo de formas de onda para criação de S1, para um <i>duty-cycle</i> de 75% . . . . .                                                                     | 114 |
| 6.5  | Sinais de controlo complementares de S1 e S2, para um <i>duty-cycle</i> de 75% . . . . .                                                                     | 114 |
| 6.6  | Esquema de adição de <i>dead-time</i> aos sinais de controlo do braço esquerdo . . . . .                                                                     | 114 |
| 6.7  | Diagrama de blocos representativo do processo de adição de <i>dead-time</i> . . . . .                                                                        | 115 |
| 6.8  | Formas de onda de bloco de adição de <i>dead-time</i> para situação exemplo . . . . .                                                                        | 115 |
| 6.9  | Formas de onda de S1 e S2, com <i>dead-time</i> , para a situação exemplo. . . . .                                                                           | 115 |
| 6.10 | Bloco para adição de <i>Phase-Shift</i> . . . . .                                                                                                            | 116 |
| 6.11 | Formas de onda do bloco de adição de <i>Phase-Shift</i> para situação exemplo de 45° . . . . .                                                               | 116 |
| 6.12 | Estrutura realimentada para Modelo Linearizado, como SISO - adaptação com<br>valores finais de $i_{L1}$ . . . . .                                            | 117 |
| 6.13 | Estrutura realimentada para Modelo Média Simplificado, como SISO . . . . .                                                                                   | 117 |
| 6.14 | Resposta do Modelo Simplificado do Conversor, incorporando um controlador<br>PID sobre a corrente $i_{L1}$ , com uma variação na referência de 0.1 . . . . . | 118 |
| 6.15 | Saída do controlador PID para situações de simulação com uma variação na refe-<br>rência de 0.1 A . . . . .                                                  | 119 |
| 6.16 | Estrutura de controlo de modelo detalhado - situação SISO . . . . .                                                                                          | 119 |
| 6.17 | Forma de onda de $i_{L1}$ para simulação de estrutura controlada, no Modelo Deta-<br>lhado, seguindo uma referência de 100 e -100 A . . . . .                | 120 |
| 6.18 | Forma de onda de $i_{L1}$ para simulação de estrutura controlada, no Modelo de Média<br>Simplificado, seguindo uma referência de 100 e -100 A . . . . .      | 121 |

|      |                                                                                                                        |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.19 | Estrutura realimentada para Modelo Média Simplificado, como MIMO . . . . .                                             | 122 |
| 6.20 | Bloco Compensação Cruzada . . . . .                                                                                    | 122 |
| 6.21 | Comparação de respostas entre Modelo de Média Simplificado e Modelo Linear,<br>para $i_{L1}$ - sistema MIMO . . . . .  | 123 |
| 6.22 | Comparação de respostas entre Modelo de Média Simplificado e Modelo Linear,<br>para $V_{C34}$ - sistema MIMO . . . . . | 124 |
| 6.23 | Estrutura de controlo de modelo detalhado - situação MIMO . . . . .                                                    | 125 |

# Lista de Tabelas

|     |                                                                     |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | Ganhos Modelo Simplificado de Média para modos $D < 50\%$ . . . . . | 82 |
| 4.2 | Ganhos Modelo Simplificado de Média para modos $D > 50\%$ . . . . . | 83 |



# Abreviaturas e Símbolos

|        |                                                   |
|--------|---------------------------------------------------|
| AC     | Alternate Current                                 |
| BJT    | Bipolar Junction Transistor                       |
| DC     | Direct Current                                    |
| EMI    | Electromagnetic Interference                      |
| ESR    | Equivalent Series Resistor                        |
| IGBT   | Insulated Gate Bipolar Transistor                 |
| MIMO   | Multi Input Multi Output                          |
| MOSFET | Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor |
| PCB    | Printed Circuit Board                             |
| RGA    | Relative Gain Array                               |
| RMS    | Root Mean Square                                  |
| SISO   | Single Input Single Output                        |
| TTS    | Two Time Scale                                    |





# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Enquadramento

Nos últimos anos tem-se assistido a um crescimento considerável da preocupação com questões ambientais, um pouco por todo o mundo. Inevitavelmente, um dos principais problemas centra-se na utilização dos combustíveis fósseis: além de serem um recurso não-renovável, a sua extracção e combustão resultam num elevado impacto nos vários sub-sistemas do planeta. Com tais preocupações em mente, a produção de energia eléctrica a partir de fontes renováveis "limpas" tem-se assumido como uma alternativa viável e fortemente apoiada/incentivada a nível global. Uma vez que estas fontes são altamente dependentes das condições climáticas - vento, marés, luz solar, entre outros -, poderão ocorrer situações de fraca produção energética ou, pelo contrário, produção excedentária [4]. Em ambos os casos a utilização de sistemas de armazenamento é de extrema utilidade: no primeiro o recurso a baterias possibilita a manutenção do fornecimento de energia; no segundo é possível aproveitar a energia produzida que não é consumida [5].

No seguimento destas ideias surgiu também o interesse nos veículos eléctricos pela possibilidade de substituição - integral ou parcial - dos combustíveis fósseis por baterias, capazes de armazenar e fornecer energia para o funcionamento de motores e cargas da viatura. Dependendo da configuração do veículo, o motor de combustão poderá ser, parcial ou totalmente, substituído por um ou mais motores eléctricos [6]. Num cenário ideal, a energia usada para o carregamento destes veículos seria proveniente de sistemas de energia renovável.

Outro aspecto importante que este tipo de veículos permite explorar é a eficiência energética: motores eléctricos apresentam eficiências significativamente superiores aos de combustão. Revela-se particularmente interessante também a possibilidade de aproveitamento de energia que no caso tradicional (motor de combustão) seria desperdiçada, através da frenagem regenerativa [7] [8] [9]. Desta forma, energia cinética (mecânica) é convertida em eléctrica, utilizada para o carregamento das baterias, ao mesmo tempo que se reduz a necessidade de travagem (menor desgaste dos travões).

Quer no caso dos sistemas de fornecimento de energia a partir de fontes renováveis, quer no caso dos veículos eléctricos, os conversores bidireccionais em corrente apresentam-se como uma

ferramenta fundamental na optimização energética de sistemas compostos por fontes, elementos de armazenamento e cargas. Estes conversores possibilitam, mediante o seu controlo, uma gestão do fluxo de potência "inteligente", isto é, óptima tendo em conta as condições e necessidades em cada situação de operação. Por exemplo, no caso de utilização incorporada em sistemas de energia renovável, se a produção de energia for superior às exigências das cargas, o conversor bidireccional permitirá que a energia em excesso seja "reconduzida" para o sistema de armazenamento (baterias e/ou super-condensadores), carregando-o. Por outro lado, se a produção não for suficiente, através do controlo adequado deste conversor, é possível exigir energia no sentido contrário ao exemplo anterior, assegurando assim um fornecimento (em paralelo com a fonte) do sistema de armazenamento, às cargas.

## 1.2 Objectivos

O caso a ser estudado é o de um conversor DC/DC isolado, operado a alta frequência, em meia ponte. Habitualmente, o controlo deste tipo de conversores é assegurado por sinais de comando com um *duty-cycle* constante (50%), sendo o fluxo de potência ajustado pelo ângulo de defasamento desses mesmo sinais.

A presente dissertação teve como objectivo principal a exploração de outros modos de operação. Neste contexto, no trabalho de tese foi desenvolvido um método de controlo desacoplado, para o conversor referido, juntando ao tradicional ajuste de ângulo de fase entre sinais das duas meias pontes, a regulação do *duty-cycle* dos sinais de controlo.

Em seguida, seria fundamental o desenvolvimento de um modelo matemático representativo do conversor, que permitisse a análise das dinâmicas das variáveis do sistema. Tendo obtido este modelo, seria natural o *design* e implementação de uma estrutura controlada do conversor.

## 1.3 Motivação

No contexto actual, as exigências energéticas são cada vez mais elevadas, quer pelo desenvolvimento e utilização de tecnologias que requerem valores superiores de potência, quer pela necessidade de assegurar maior rapidez e fiabilidade no fornecimento da energia. Com base nisto, além do contínuo desenvolvimento individual dos componentes electrónicos, também o estudo de técnicas de comutação tem merecido especial atenção - *Soft Switching* [1] [8] [10] [11].

Por outro lado, a maior consciencialização ambiental tem servido de incentivo ao desenvolvimento e optimização dos sistemas de produção de energia a partir de fontes renováveis. Além da questão da eficiência, com uma maior preponderância deste tipo de energia resulta a necessidade do desenvolvimento dos sistemas de armazenamento, face aos problemas de incertezas na produção que estas fontes apresentam.

É precisamente sobre esta questão que os conversores bidireccionais ganham especial relevância, permitindo a gestão eficiente de energia com base nas necessidades das cargas e nos estados da fonte e sistema de armazenamento. Considera-se assim extremamente interessante o estudo deste

tipo de conversores, com foco numa ainda maior eficiência energética, quer a nível de perdas, quer a nível de gestão de fluxos de energia.

## 1.4 Estrutura do documento

No capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica, que incidiu essencialmente sobre a análise de operação tradicional do conversor Bidireccional, objecto de estudo central desta dissertação.

Após a "apresentação" do conversor a estudar, é desenvolvida uma simulação em malha aberta, com controlo apenas por desfasamento (*duty-cycle* fixo de 50%). Desta forma pretende-se comprovar o princípio de funcionamento básico do conversor.

Ainda no capítulo de revisão bibliográfica, o tópico de comutação sem perdas foi abordado genericamente, de forma a apresentar o conceito básico.

No capítulo seguinte, é realizado um estudo analítico do conversor, operando no modo desacoplado. São apresentadas algumas relações/condições necessárias e, em seguida, derivadas algumas expressões importantes. Destas destaca-se a relação de potência transferida, com base nos valores de controlo - *duty-cycle* e desfasamento.

De seguida, é demonstrado todo o processo de obtenção de um modelo matemático descritivo do conversor, passando pela obtenção de um modelo inicial (de média) não linear, um modelo simplificado e um último modelo linearizado, para um dos modos de operação (a título de exemplo).

Relativamente ao capítulo 5, é desenvolvida uma estrutura realimentada de operação do sistema em causa. Numa primeira instância o modelo é simplificado assumindo um sistema de uma entrada e uma saída apenas, como prova de conceito. De seguida é realizado processo semelhante assumindo o conversor como sistema multi-entrada/multi-saída, sendo necessário ter em conta efeitos cruzados de cada entrada para cada saída.

No capítulo seguinte são apresentados resultados de simulação para as situações de controlo desenvolvidas, comparando a actuação sob os diversos modelos desenvolvidos, com especial destaque para a aplicação num modelo detalhado de simulação.

Por último são retiradas algumas conclusões sobre o trabalho desenvolvido e resultados obtidos, dificuldade e qualidade (detalhe) dos processo de modelação e sobre o controlo implementado. É feita ainda referência aos tópicos que ficaram por abordar ou desenvolver de forma mais aprofundada.



## Capítulo 2

# Revisão Bibliográfica

Nesta secção inicial pretende-se apresentar o conversor a ser estudado, operando sob a forma de controlo mais usual. O objectivo deste estudo é o de contextualizar o leitor com a configuração do conversor em questão, demonstrando a sua operação "tradicional", ao mesmo tempo que se estabelece uma base de comparação para o trabalho desenvolvido e apresentado nas secções seguintes.

No final deste capítulo é ainda apresentado, de forma breve, o conceito de *Soft Switching*, dado o interesse deste tópico neste tipo de conversores, tendo em conta as vantagens que assegura.

### 2.1 Conversor Bidireccional a estudar

Tal como referido na secção introdutória desta dissertação, a principal vantagem deste tipo de conversores é a possibilidade de controlo do fluxo de potência entre dois pontos. Um exemplo concreto de aplicação dos conversores bidireccionais será no contexto de ligação de sistemas Fotovoltaicos à rede (exemplo na fig.2.1). Juntamente com um sistema de armazenamento, o conversor bidireccional funcionará como garantia de fornecimento constante de energia, ao mesmo tempo que permite aproveitar energia produzida em excesso. Numa solução ideal, a potência produzida pelo sistema fotovoltaico, o estado do armazenamento e as exigências de potência da rede deveriam ser constantemente medidos, de maneira a que o controlo do conversor fosse adequado às condições do sistema completo.

Ao longo desta secção será apresentada uma implementação, em simulação, de um conversor DC/DC, bidireccional em corrente, segundo a configuração apresentada na fig.2.2. Pretendendo-se explorar um controlo simultâneo do *duty-cycle* e *phase-shift* relativos aos sinais dos interruptores, foi com naturalidade que se procurou explorar primeiro o modo de funcionamento tradicional deste tipo de conversor - controlo apenas por desfasamento.

De seguida serão realizadas algumas simulações de modo a verificar o funcionamento base do conversor, demonstrando também a evolução de certas formas de onda importantes no processo de transferência de energia.

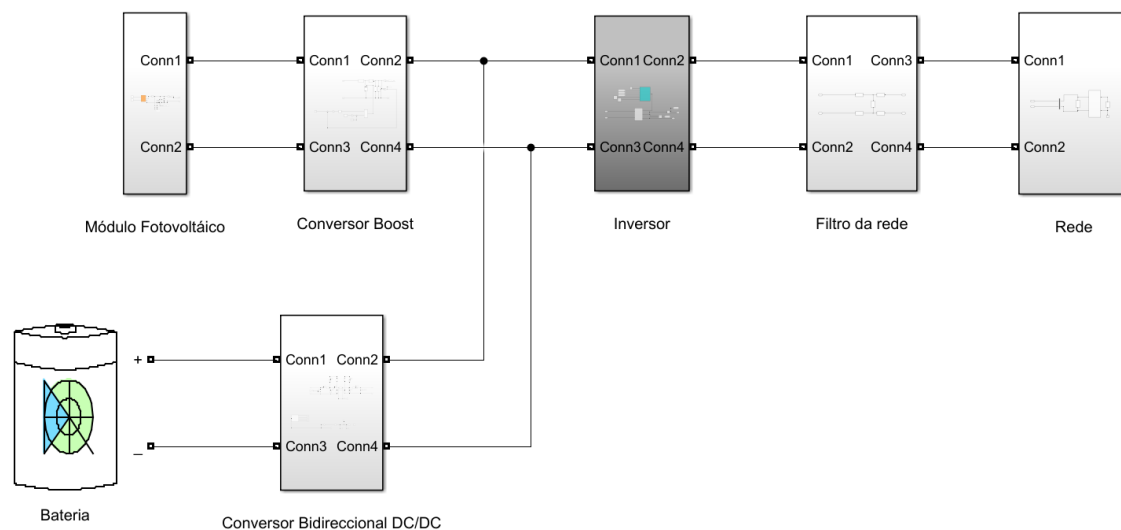


Figura 2.1: Exemplo de implementação de conversor bidireccional num sistema de produção Fotovoltaico

### 2.1.1 Operação tradicional

Tal como foi dito, inicialmente realizou-se um estudo teórico e de simulação sobre o conversor DC/DC Bidireccional, composto por duas meias pontes, com base no circuito abordado por Gang Ma, em [1]. Esta foi de resto a configuração escolhida para o desenvolvimento do restante trabalho desta dissertação, tendo sido assumidas algumas simplificações para determinadas análises.

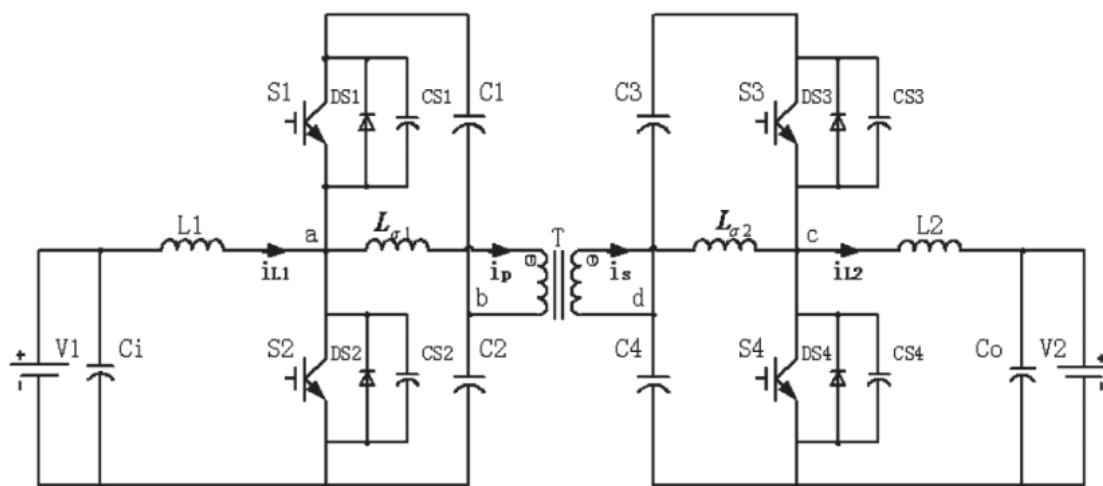


Figura 2.2: Conversor Bidireccional utilizado como base[1]

De forma a focar-se na análise do funcionamento e relação de transferência de potência, foram realizadas algumas modificações ao circuito original:

- Condensadores  $C_i$  e  $C_o$  foram retirados, uma vez que a sua função é de apenas suavizar as formas de onda da tensão na entrada e saída;

- Condensadores associados aos interruptores, CS1 a CS4, foram igualmente removidos, uma vez que o seu propósito é o de garantir o *Soft Switching*, o que não é o principal objectivo desta secção;
- Interruptores foram considerados ideais, conduzindo corrente bidireccionalmente;
- Transformador e respectivas indutâncias de fugas parciais  $L_{\sigma_1}$  e  $L_{\sigma_2}$  foram substituídos por uma única bobina, representando a indutância combinada de fugas do transformador. Todos os elementos passivos do conversor deverão assim ser referidos ao lado primário do transformador.

As especificações paramétricas do circuito foram definidas com base nos valores utilizados no artigo original [1]:

- $L_1 = 138 \mu H$ ;
- $L_2 = 98 \mu H$ ;
- $C_1, C_2, C_3, C_4 = 150 \mu F$ ;
- $L_{leak} = 150 \mu H$

O circuito resultante é apresentado na fig.2.3.

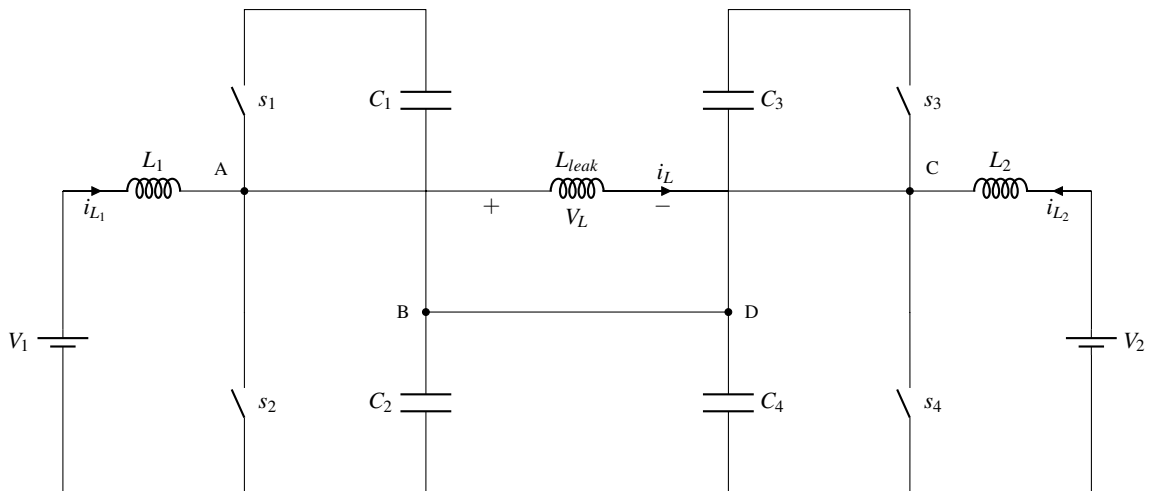


Figura 2.3: Conversor Bidireccional Simplificado

A frequência de comutação usada foi de 10 KHz. Tendo em conta:

$$\begin{cases} V_{L1AVG} = 0 V \\ V_{L2AVG} = 0 V \end{cases} \quad (2.1)$$

E assumindo que, em regime permanente, a tensão aos terminais dos condensadores  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  é, aproximadamente, constante:

$$\begin{cases} V_{A_{med}} = (V_{C1} + V_{C2}) \cdot D = V_1 \\ V_{B_{med}} = (V_{C3} + V_{C4}) \cdot D = V_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

sendo  $D = 50\%$  e tendo em conta que

$$\begin{cases} V_{C_p} = V_{C1} = V_{C2} \\ V_{C_s} = V_{C3} = V_{C4} \end{cases} \quad (2.3)$$

conclui-se

$$\begin{cases} V_{A_{med}} = (2 \cdot V_{C_p}) \cdot \frac{1}{2} = V_1 \\ V_{B_{med}} = (2 \cdot V_{C_s}) \cdot \frac{1}{2} = V_2 \end{cases} \implies \begin{cases} V_{C_p} = V_1 \\ V_{C_s} = V_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

De forma a melhor entender o funcionamento do conversor é necessário analisar os seus estados possíveis e respectivas configurações equivalentes. A partir dessas representações será possível também fazer uma previsão das formas de onda de algumas grandezas importantes e retirar conclusões sobre as relações entre si. Uma vez que as configurações possíveis dependem do estado dos seus elementos não estáticos - neste caso simplificado, o estado dos interruptores - e que estes, por sua vez, dependerão das formas de onda de controlo aplicadas, fará sentido analisar primeiro como poderiam ser gerados estes sinais.

### 2.1.2 Sinais de controlo

A operação de controlo nesta versão simplificada do conversor é baseada apenas num desfaseamento. Neste modo, os quatro interruptores apresentam um sinal de controlo com *duty-cycle* de 50%. A transferência de potência é assim regulada pela diferença de fase entre os sinais do primeiro e segundo "braços". O esquema de geração dos sinais de controlo implementado é apresentado na fig.2.4.



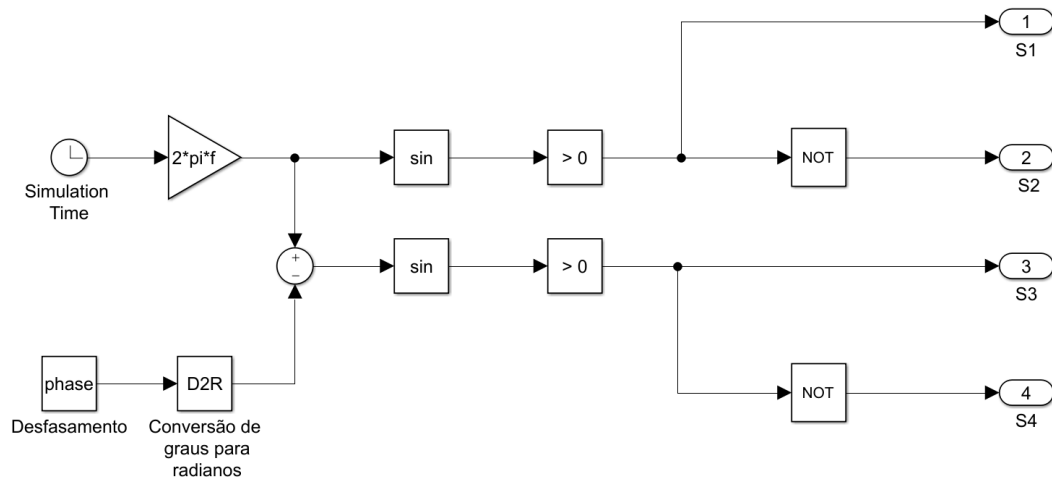


Figura 2.4: Diagrama de blocos para geração de sinais de controlo

Essencialmente são criados dois sinais, desfasados de um certo ângulo, que controlarão os interruptores cimeiros de cada lado. Simultaneamente, são obtidos os seus sinais negados para actuação nos interruptores de baixo. A justificação da aplicação de sinais complementares nos interruptores do mesmo braço prende-se com a necessidade de garantir que nunca estão ligados ao mesmo tempo, evitando assim um curto-circuito na meia-ponte. A criação das ondas quadradas de controlo teve por base ondas sinusoidais, definidas por:

$$\sin(2\pi ft - \phi) \quad (2.5)$$

A escolha de tal equação explica-se pela facilidade de manipulação da fase de uma onda sinusoidal - através da modificação de  $\phi$  no argumento do seno - e pelo facto de esta ser já uma onda que apresenta um sinal positivo metade do período e negativo no restante. Com base nisto, usando um comparador em relação a 0, sempre que tais ondas sejam maiores que a referência obter-se-á um sinal activo (1) na saída. Caso contrário, deverá resultar num 0. Desta forma é possível "transformar" ondas sinusoidais em ondas quadradas, com *duty-cycle* necessariamente igual a 50%, cuja fase pode ser facilmente controlada.

É importante dizer que, num caso real, deverá ser garantido um *dead time* entre os sinais do mesmo braço: intervalo de tempo em que ambos os interruptores estarão desligados, aquando da sua comutação de estado. Com isto pretende-se garantir definitivamente que não há qualquer possibilidade de condução simultânea dos dois interruptores. Todavia, uma vez que o trabalho aqui apresentado foi realizado apenas em ambiente de simulação e nesta secção não se pretendia explorar as noções de *Soft Switching*, a questão da adição de um *dead time* não será aqui desenvolvida. Sendo assim os sinais (dos interruptores superiores) de cada braço são demonstrados, para um desfasamento de  $60^\circ$ , na figura abaixo

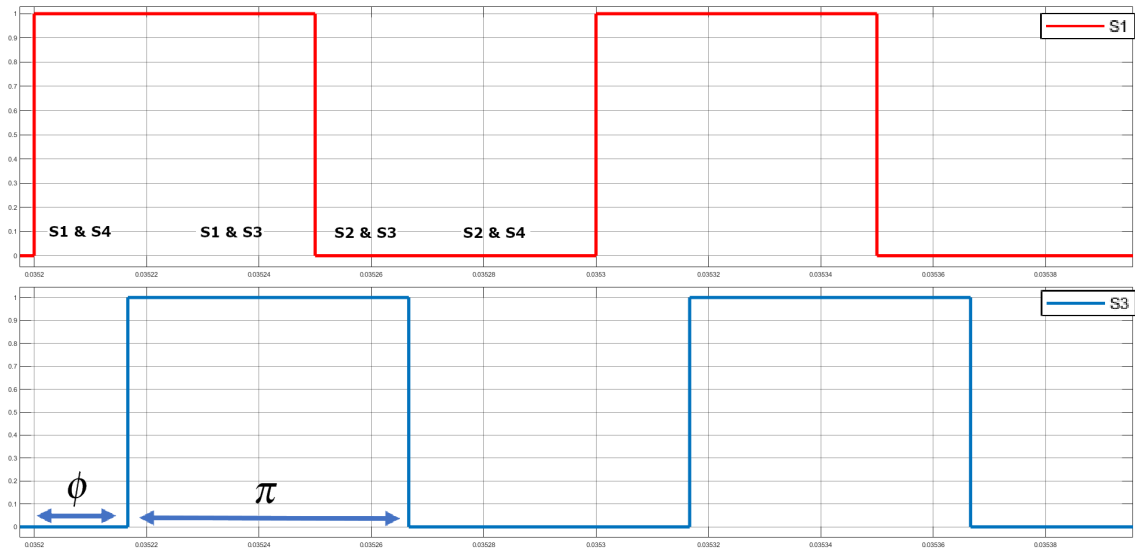


Figura 2.5: Sinais de controlo: exemplo para desfaseamento de  $60^\circ$

Seguindo a ideia de implementação, analisando apenas os sinais cimeiros de cada meia-ponte, é possível perceber que quando o sinal  $S1$  está activo, o interruptor associado estará ligado enquanto que  $S2$  não conduzirá. Caso  $S1$  esteja a 0 apenas o interruptor  $S2$  estará ligado, na meia ponte em questão. Situação semelhante é verificada para os interruptores  $S3$  e  $S4$ .

### 2.1.3 Análise do princípio de funcionamento

Uma vez definida a forma de criação dos sinais de controlo dos interruptores, possibilitando a alteração do desfaseamento entre os sinais dos dois braços, o passo seguinte seria analisar as configurações resultantes das combinações dos estados dos *switches*. Sendo o elemento central do conversor, uma vez que permite a transferência de potência de um lado para o outro, considerou-se pertinente focar a atenção na indutância de fugas do transformador e nas formas de onda das grandezas associadas. Tendo em conta:

$$V_L = V_{AB} - V_{CD} \quad (2.6)$$

$$i_L = \frac{V_L}{L}t + i_0 \quad (2.7)$$

e convertendo o desfaseamento de radianos para segundos

$$\begin{cases} 2\pi \Rightarrow T \\ \phi \Rightarrow x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\phi T}{2\pi} s \quad (2.8)$$

é possível identificar quatro estados diferentes do conversor, tal como se percebe pela fig.2.5:

## 2.1.3.1 S1 &amp; S4 ligados

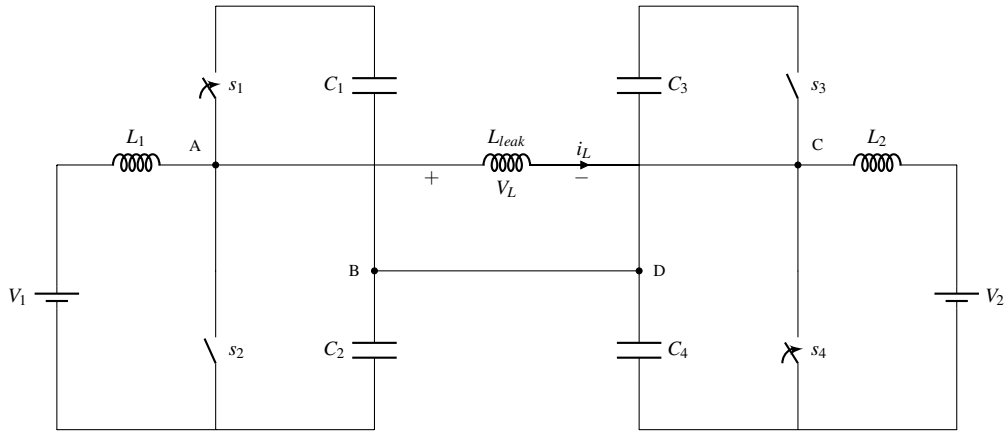


Figura 2.6: Circuito equivalente do estado S1 &amp; S4 ligados

$$\begin{cases} V_L = (2V_1 - V_1) - (0 - V_2) = V_1 + V_2 \\ i_{L_1} = \frac{V_1 + V_2}{L_{leak}}t + i_{L_1}(0) \end{cases} \quad (2.9)$$

## 2.1.3.2 S1 &amp; S3 ligados

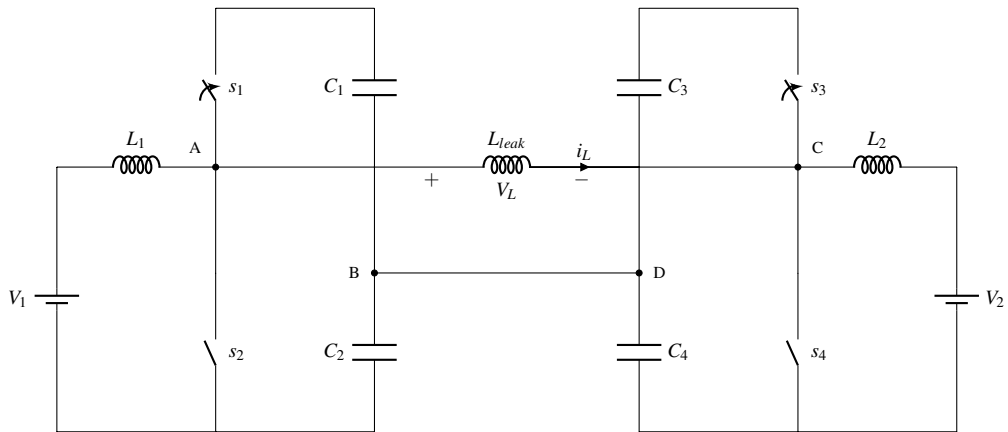


Figura 2.7: Circuito equivalente do estado S1 &amp; S3 ligados

$$\begin{cases} V_L = (2V_1 - V_1) - (2V_2 - V_2) = V_1 - V_2 \\ i_{L_2} = \frac{V_1 - V_2}{L_{leak}}t + i_{L_1}\left(\frac{\phi T}{2\pi}\right) \end{cases} \quad (2.10)$$

### 2.1.3.3 S2 & S3 ligados

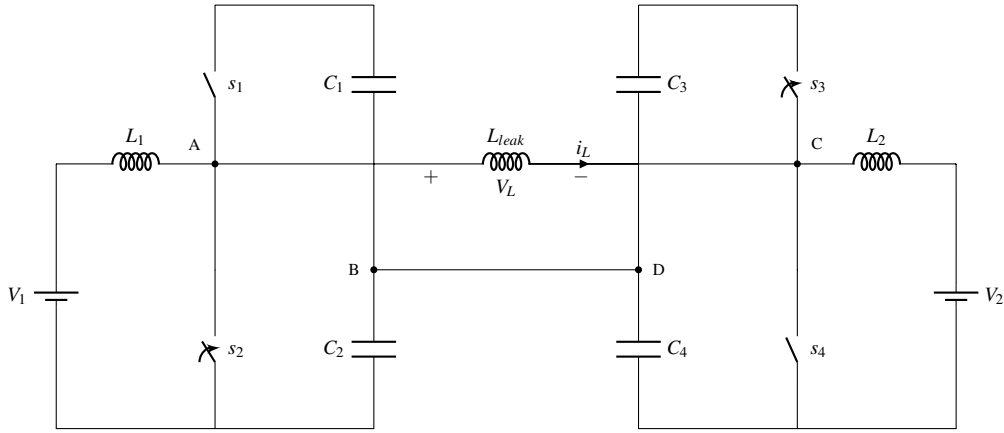


Figura 2.8: Circuito equivalente do estado S2 & S3 ligados

$$\begin{cases} V_L = (0 - V_1) - (2V_2 - V_2) = -V_1 - V_2 \\ i_{L_3} = -\frac{V_1 + V_2}{L_{leak}}t + i_{L_2} \left( \frac{T}{2} - \frac{\phi T}{2\pi} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.1.3.4 S2 & S4 ligados

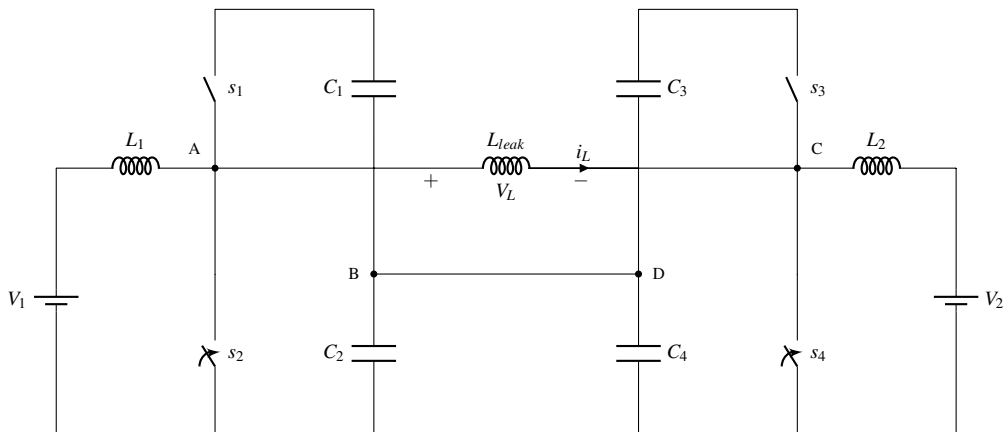


Figura 2.9: Circuito equivalente do estado S2 & S4 ligados

$$\begin{cases} V_L = (0 - V_1) - (0 - V_2) = -V_1 + V_2 \\ i_{L_4} = \frac{-V_1 + V_2}{L_{leak}}t + i_{L_3} \left( \frac{\phi T}{2\pi} \right) \end{cases} \quad (2.12)$$

Para o circuito apresentado na fig.2.3, aplicando os sinais de controlo tal como foi definido na secção anterior e definindo as seguintes condições de simulação:

$$\begin{cases} \phi = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \\ V_1 = 100 \text{ V} \\ V_2 = 230 \text{ V} \\ L_{leak} = 150 \mu\text{H} \\ C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 150 \mu\text{F} \end{cases} \quad (2.13)$$

De referir ainda que o modelo de simulação obrigava à adição de um valor de resistência *on* nos interruptores, o que implicará uma ligeira variação nos valores de amplitude das formas de onda apresentadas. Mediante estas condições, de seguida apresentam-se os sinais obtidos para a tensão e corrente na indutância de fugas:

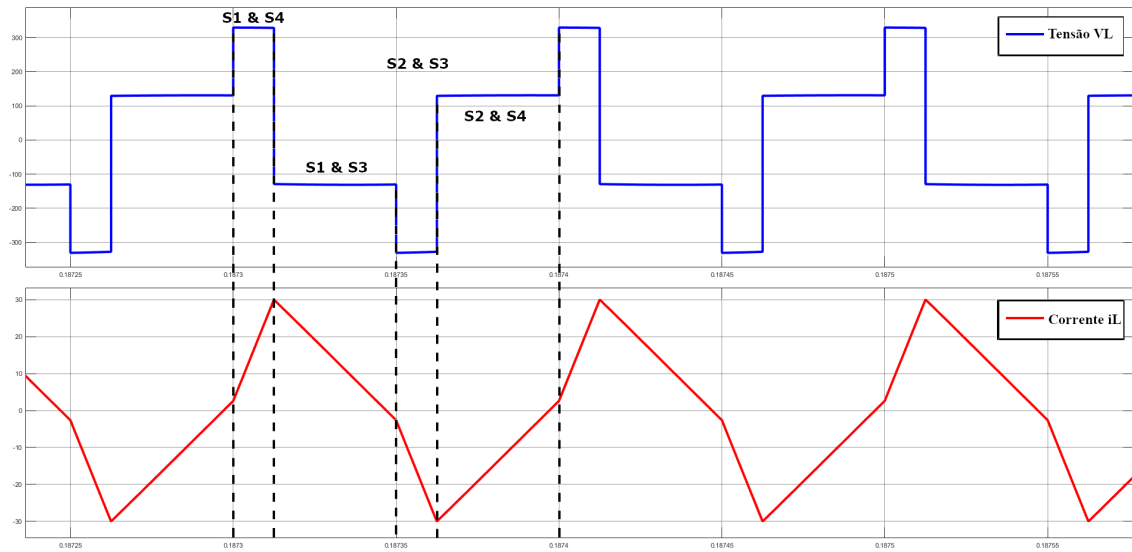


Figura 2.10: Formas de onda de tensão e corrente em  $L_{Leak}$ , para  $\phi = 45^\circ$

Estas formas de onda podem ser explicadas pela análise de cada estado possível, tal como foi efectuado em [1][12][13], e será apresentado no capítulo 3 desta dissertação.

De seguida, de forma a medir a potência que efectivamente é produzida/consumida no primário e no secundário do conversor, é importante analisar as formas de onda de corrente associada a cada fonte. Para as condições apresentadas anteriormente, as formas de onda das correntes de entrada e saída, em regime permanente, são as seguintes:

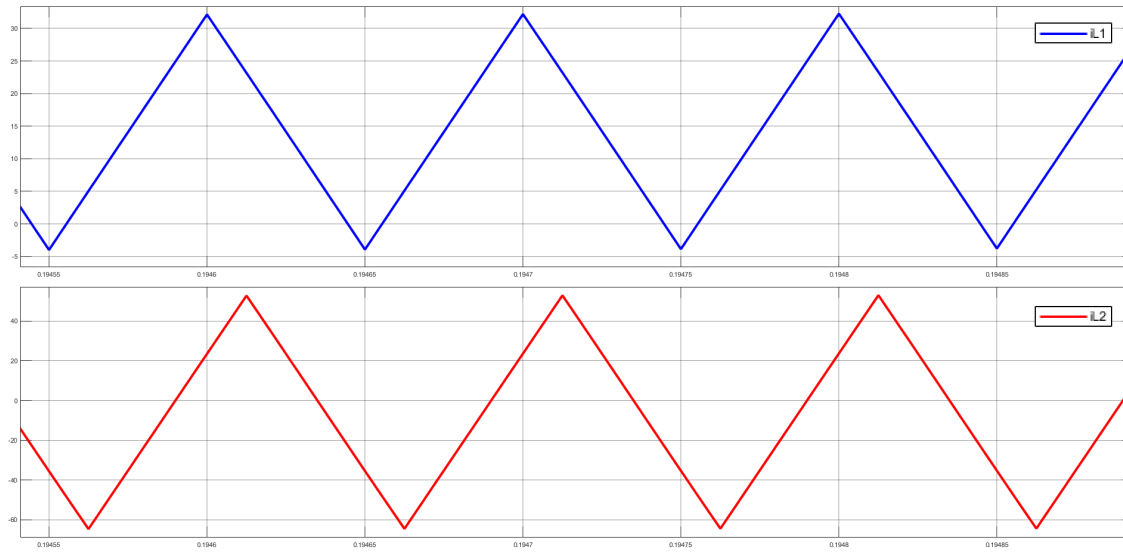


Figura 2.11: Correntes da entrada e da saída do conversor em regime permanente

Os seus valores médios são:

$$\begin{cases} i_{L1_{AVG}} = 14.37 \text{ A} \\ i_{L2_{AVG}} = -6.15 \text{ A} \end{cases} \quad (2.14)$$

Resultando numa potência de entrada e saída

$$\begin{cases} P_1 = V_1 \cdot i_{L1_{AVG}} = 100 \text{ V} \cdot 14.37 \text{ A} = 1437 \text{ W} \\ P_2 = V_2 \cdot i_{L2_{AVG}} = 230 \text{ V} \cdot (-6.15 \text{ A}) = -1414 \text{ W} \end{cases} \quad (2.15)$$

Em teoria, numa situação ideal, ambos os lados deveriam apresentar o mesmo valor de potência (em módulo). Em simulação, contudo, a resistência *on* associada a cada interruptor - ainda que de pequeno valor -, resulta essencialmente em perdas de potência. Desta forma, as perdas de potência associadas a estes valores de resistência podem ser calculados como sendo:

$$P_{perdas} = P_1 - |P_2| = 1437 - 1414 = 23 \text{ W} \quad (2.16)$$

### 2.1.4 Medição de potência

Com o intuito de confirmar a relação entre as potências dos dois lados seria necessário obter o seu valor, a partir da simulação. Genericamente, sendo a potência definida como o produto entre tensão e corrente, num ponto do circuito, e atendendo ao facto de que  $i_{L1}$  quer  $i_{L2}$  variarem no tempo, a potência instantânea em cada fonte será não constante, pelo que fará sentido determinar

a potência média em cada caso. Para o cálculo da média, optou-se pela utilização do bloco *MEAN* do *Simulink*, que realiza um filtro de média deslizante, para um determinado número de amostras (janela de operação). Para o caso em questão foi definida uma frequência de "amostragem" para média de  $\frac{10 K}{100}$ , o que significa que o cálculo será feito para cada 100 amostras do período de comutação. O esquema usado foi o seguinte:

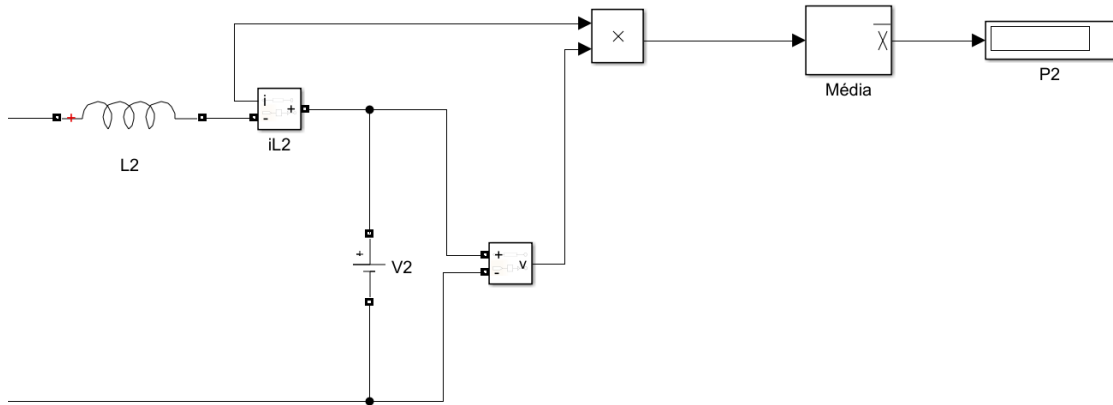


Figura 2.12: Esquema de medição de potência - exemplo no secundário do conversor

### 2.1.5 Relação entre potência e ângulo de desfasamento

O passo seguinte seria a determinação da relação entre a potência transferida - de uma fonte para a outra - e o ângulo de desfasamento entre sinais de controlo. Uma vez que a determinação de tal expressão não era trivial e seria um dos objectivos da análise detalhada de operação no modo desacoplado, decidiu-se pela não derivação desta relação, nesta fase do trabalho. Ao invés, após alguma investigação, a seguinte expressão foi assumida como válida, com base nos trabalhos desenvolvidos em [1][8] [13]:

$$P_{transf} = \frac{V_1 V_2 \left( \phi - \frac{\phi^2}{\pi} \right)}{2\pi f L_{leak}} \quad (2.17)$$

Nota: Tal como se verá no capítulo 3, esta expressão apenas é válida para valores de  $\phi \in ]0, \pi[$ .

Sendo que, idealmente:

$$P_{transf} = P_1 = -P_2 \quad (2.18)$$

### 2.1.6 Análise em malha aberta

De modo a comprovar a validade da expressão anterior, foi simulado o funcionamento em malha aberta: definindo uma potência desejada, calcular manualmente o ângulo necessário e verificar

os resultados obtidos. Para tal, rearranjando a eq.2.17, obtém-se a seguinte relação:

$$\phi^2 - \phi\pi + \frac{\pi(P_{oref}2\pi fL_{leak})}{V_1V_2} = 0 \quad (2.19)$$

Tratando-se de um equação de 2ª ordem, a sua resolução poderá resultar em duas soluções distintas. Assumindo os parâmetros de simulação indicados anteriormente, para um valor de  $P_{oref} = 1000 \text{ W}$ , tendo em conta as eq.2.18 e 2.19, dois ângulos são obtidos:  $\phi = 152.24^\circ \vee 27.76^\circ$ . Assim sendo, com excepção do ponto máximo, haverá sempre dois ângulos diferentes de desfasamento que garantirão uma igual potência transferida. Tal pode ser verificado pela representação gráfica da expressão 2.17, onde estão assinalados os ângulos de desfasamento que garantem uma potência transferida de  $1000 \text{ W}$ .

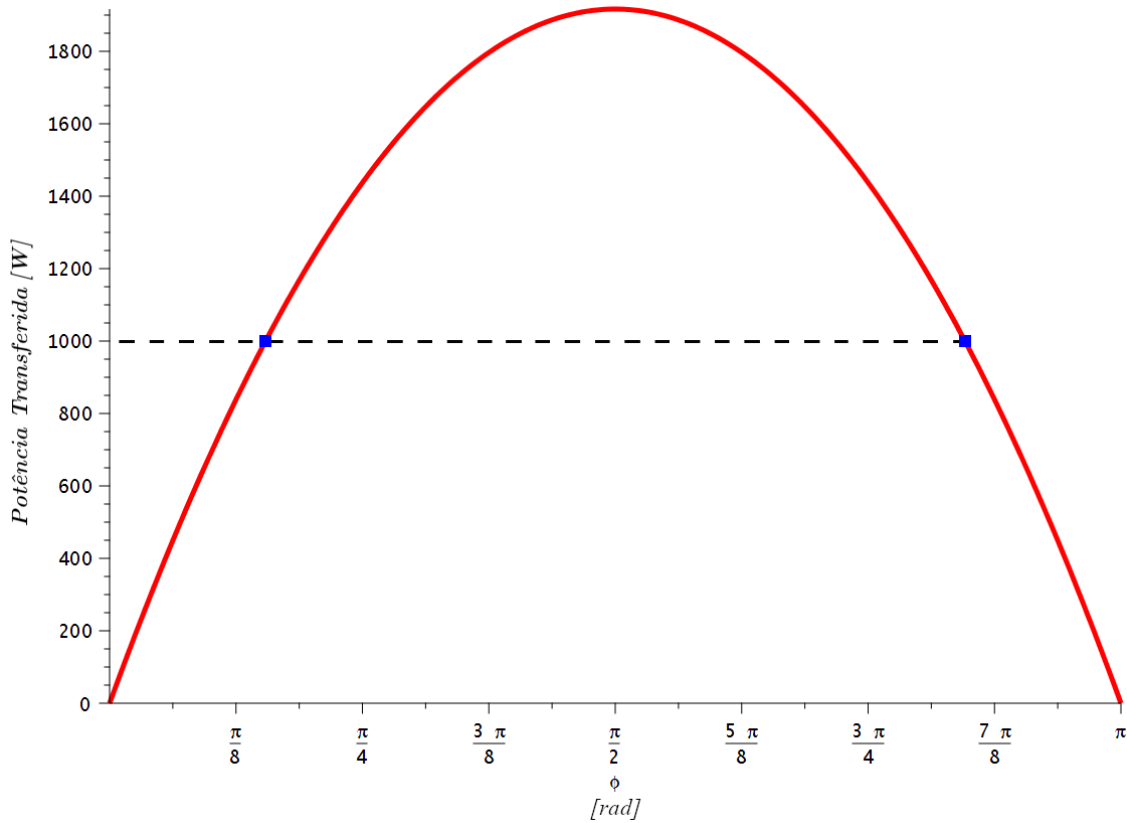


Figura 2.13: Relação entre potência transferida e *phase-shift*, para as condições paramétricas referidas em 2.13, com  $D = 50\%$

Impondo agora, por exemplo, um ângulo de desfasamento de  $27.76^\circ$ , a potência média obtida na saída bloco *Média*, do esquema da fig.2.12, apresenta-se abaixo.



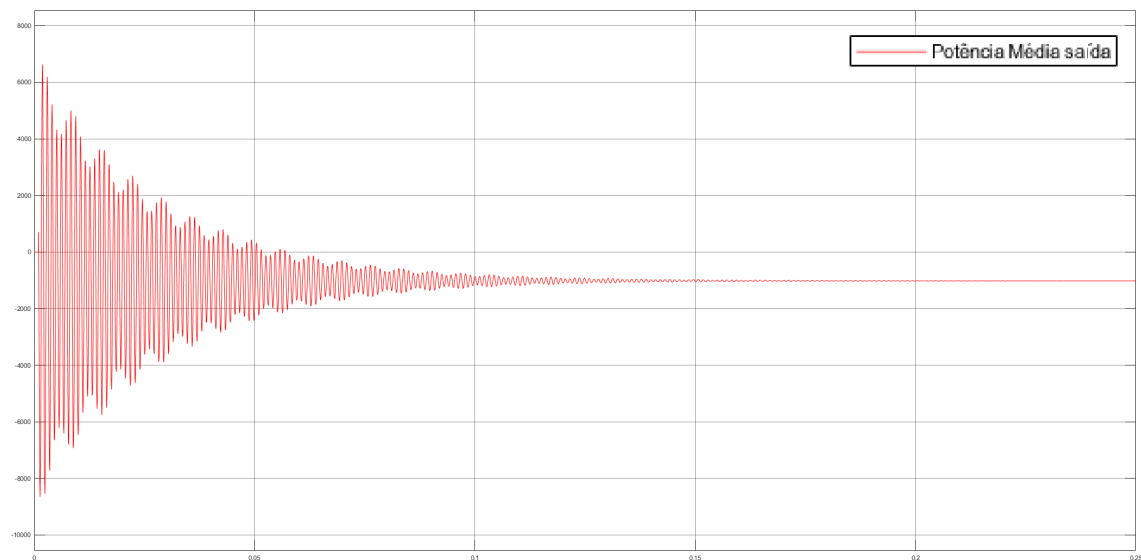


Figura 2.14: Potência média na saída do conversor, em malha aberta

Atendendo à eq.2.18, pretendendo uma potência transferida de  $1000\text{ W}$ , na saída deverá ser obtido um valor de sinal oposto. De facto, simulando durante  $0.25\text{ s}$ , a potência média estabiliza em  $-979\text{ W}$ . Este valor está bastante próximo do esperado, sendo que a diferença poderá, mais uma vez, ser explicada pelas não idealidades do conversor. Este erro em regime final, aliado a uma resposta extremamente oscilatória, evidenciam as lacunas deste tipo de funcionamento que poderiam ser corrigidas pela adição de alguma forma de controlo realimentado.

## 2.2 Hard Switching

Um dos maiores problemas associados aos conversores de potência são as perdas de comutação. Estas estão essencialmente associadas às transições de estado *on-off* dos semicondutores e a sua magnitude está directamente relacionada com as cargas eléctricas que é necessário fornecer/remover para que estes dispositivos entrem/saiam de condução [2]. Mais ainda, capacitâncias e indutâncias parasitas, respectivamente em paralelo e em série com os elementos semicondutores, efectuem também carregamentos e descarregamentos durante os períodos de comutação, resultando igualmente em perdas.

Atentamos ao circuito exemplo da fig.2.15.

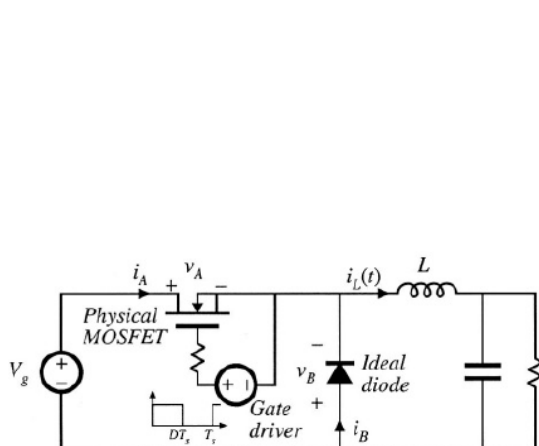


Figura 2.15: Conversor Buck para exemplo de comutação de MOSFET [2]

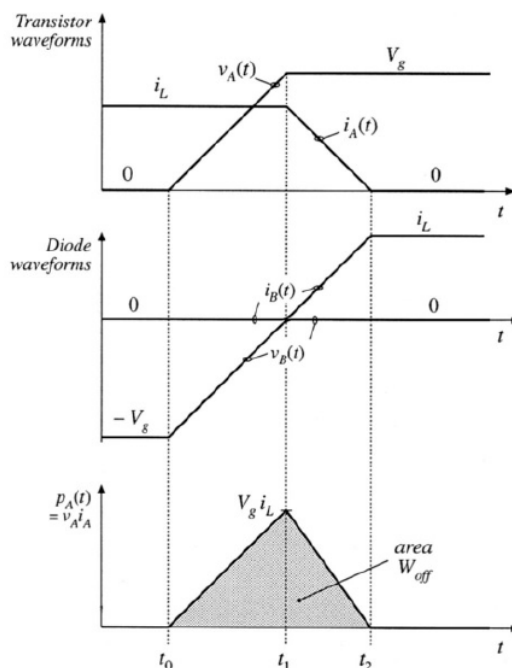


Figura 2.16: Formas de onda de tensão e corrente durante a comutação e respectivas perdas num MOSFET [2]

Até  $t_0$  o MOSFET está em condução - é-lhe imposta uma tensão  $V_{GS}$  que garante que este permanece ligado. Desta forma, é percorrido pela corrente da bobina ( $i_A = i_L$ ) e apresenta, idealmente, aos seus terminais, uma queda de tensão nula. Ao mesmo tempo o díodo está inversamente polarizado, bloqueando qualquer passagem de corrente por si e suportando uma tensão reversa  $V_g$ . A partir do momento em que a fonte ligada à *gate* do MOSFET é desligada ( $t_0$ ), devido às suas características construtivas - pode ser visto como uma configuração de condensadores - a tensão  $V_{GS}$  vai decrescendo (de forma não instantânea) até um dado valor de *threshold*, ao mesmo tempo que  $V_A$  vai aumentando. A partir desse momento ( $t_1$ ) o semiconductor começa a bloquear a corrente ( $i_A$  vai diminuindo), passando a apresentar uma tensão reversa igual a  $V_g$ . Ao atingir uma corrente nula ( $t_2$ ) dá-se por terminada a comutação.

Como facilmente se percebe pelo gráfico apresentado na fig.2.16, durante o período  $t_0$  a  $t_2$ , uma vez que o MOSFET apresenta simultaneamente tensão e corrente associados aos seus terminais, isto corresponderá a uma potência. Sendo que esta não é aproveitada para o normal funcionamento do conversor, representa apenas perdas.

Processo semelhante ocorre durante a transição oposta (entrada em condução do MOSFET). Assim, durante um ciclo completo de comutação, ocorrem dois períodos distintos de transição aos quais estão associadas perdas.

De uma forma simplificada, as formas de onda de tensão e corrente durante estes dois períodos de transição, num semiconductor, podem ser representados da seguinte maneira:

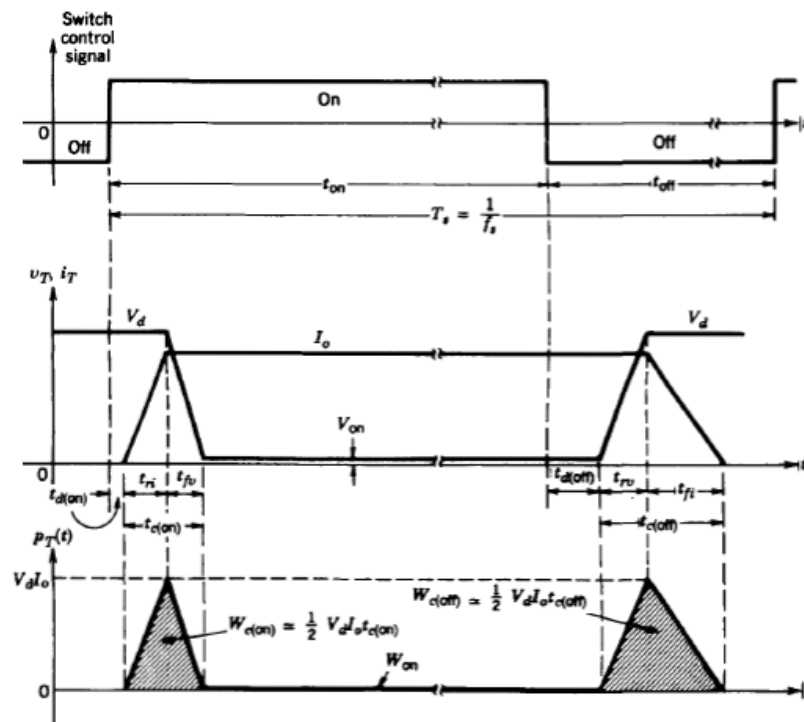


Figura 2.17: Formas de onda de um período completo de comutação - genérico[3]

Análises semelhantes poderão ser feitas para outros tipos de semicondutores presentes num conversor como díodos, IGBTs, BJTs, entre outros.

Geralmente, os valores individuais (por comutação) destas perdas são relativamente baixos já que os períodos de cada transição são extremamente curtos (dezenas de nanossegundos a microssegundos [2]), dependendo do semiconductor. Ainda assim, facilmente se percebe que o total de perdas de comutação é directamente proporcional à frequência de comutação, isto é, ao número de vezes (por segundo) que estas transições ocorrem. Se tivermos em consideração o total de dispositivos semicondutores que poderão estar presentes num conversor, o valor global de perdas de comutação terá um enorme impacto na eficiência energética do circuito. Podemos, desta forma, afirmar que a eficiência do conversor será um factor de limitação da frequência de comutação[2] a utilizar em tais dispositivos.

De seguida é apresentada uma relação exemplo entre a eficiência energética de um conversor e a frequência de comutação dos seus semicondutores. Isto permite observar, no fundo, a variação das perdas de comutação - considerando as restantes perdas independentes da frequência - e o seu impacto na eficiência global do conversor.

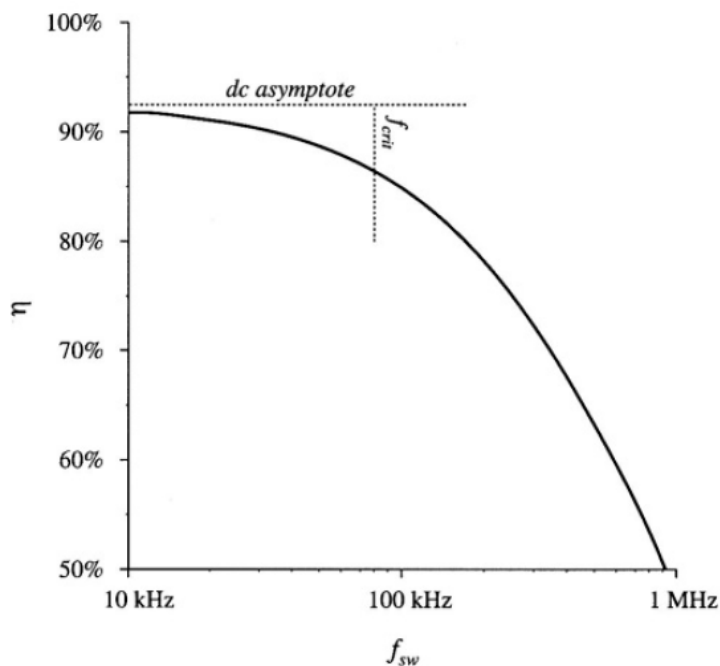


Figura 2.18: Exemplo da relação da Eficiência de um conversor em função da frequência de comutação dos semicondutores (considerando valores de potência de perdas de condução e de carga arbitrárias)[2]

De referir ainda que sendo esta energia de perdas, essencialmente dissipada sob a forma de calor, à diminuição de eficiência acresce uma **maior preocupação com limitações de temperatura dos dispositivos**. Isto, por sua vez, poderá resultar na necessidade de revisão do *design* de PCB ou integração de maiores/melhores elementos dissipativos, o que significará um maior volume, peso e custos associados ao conversor.

De uma forma resumida, os problemas associados ao *Hard Switching* são:

- perdas comutação elevadas[3][14] e consequente menor eficiência;
- necessidade de utilização de semicondutores capazes de suportar tensões e correntes mais elevadas (sobredimensionamento)[2][3];
- interferências electromagnéticas[14];
- por forma a limitar as perdas será necessário limitar a frequência de comutação[2][14];

### 2.3 *Soft switching*

Numa tentativa de mitigar os fenómenos da comutação tradicional, apresentados na secção anterior, os métodos de *Soft Switching* procuram transferir a energia que seria perdida durante a comutação para a origem/fonte ou para a carga[2]. Este tipo de implementações permite a

utilização de frequências de comutação mais elevadas, o que representa uma série de vantagens relativamente ao *design* do conversor:

- utilização de transformadores ou bobinas com núcleos ferromagnéticos de menor volume: maior densidade energética[3];
- poderão ser usados menores valores de indutância e capacitância uma vez que os períodos de carregamento/descarregamento serão menores (o que representa menores variações de corrente/tensão);
- Formas de onda suavizadas, menor EMI.

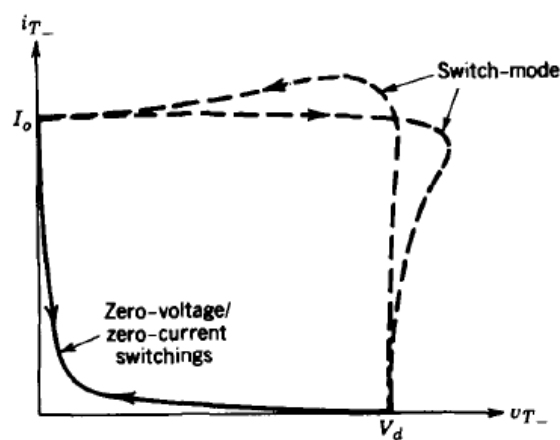


Figura 2.19: Relação de V e I em *Hard Switching* vs *Soft Switching*[3]

De entre os vários fenómenos responsáveis pelas perdas de comutação em *Hard Switching* destaca-se:

- recuperação reversa dos díodos (*turn-off*);
- capacitâncias de saída de semicondutores (*turn-on*);
- *tailing* de IGBTs (*turn-off*).



## Capítulo 3

# Operação em Modo Desacoplado

Havendo apresentado a operação tradicional do conversor em questão, expõe-se na seguinte secção o estudo analítico realizado sob o modo de operação desacoplado, um dos principais objectivos deste trabalho. Serão apresentados os vários "modos" de funcionamento para este tipo de operação, caracterizados pelas diferentes combinações dos valores de controlo: *duty-cycle* e *phase-shift*. Da análise efectuada, destaca-se a derivação da expressão de potência transferida, para os vários modos, assim como a determinação das situações para as quais assume valores máximos (e mínimos).

### 3.1 Princípios base

Antes de iniciar a análise teórica do conversor, faz sentido apresentar algumas definições e relações base, fundamentais para o correcto entendimento das conclusões apresentadas nesta secção.

#### 3.1.1 Relação entre Tensões nos condensadores e respectiva fonte

Primeiramente, tendo por base a estrutura do conversor, apresentada na fig.2.2, deve ser esclarecido que os condensadores  $Cs1$ ,  $Cs2$ ,  $Cs3$  e  $Cs4$  serão ignorados nesta secção, dado o seu baixo valor de capacitância e o facto de a sua presença não influenciar o funcionamento base do conversor. De forma semelhante, também quaisquer não-idealidades - como resistência *on* dos interruptores, resistências de fugas e parâmetros referentes à magnetização do núcleo do transformador - serão desprezados para esta análise.

Posto isto, a primeira relação importante a determinar será aquela entre as tensões nos condensadores  $C1$  e  $C2$ , e a respectiva fonte  $V_1$ . Análise semelhante poderá ser feita no lado secundário do conversor, dada a simetria da topologia e as semelhanças dos sinais de controlo. Foquemo-nos no lado primário do conversor, a partir da fig.6.1.

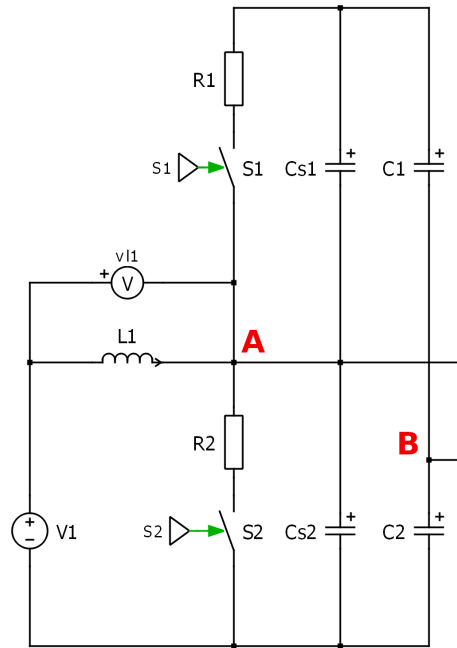


Figura 3.1: Esquema do lado primário do conversor

Tendo noção de que em qualquer bobina, em regime permanente:

$$V_{L_{med}} = 0 \quad (3.1)$$

Neste caso

$$V_{L1_{med}} = V_1 - V_{A_{med}} \quad (3.2)$$

Atentando à fig.3.1 e considerando que os condensadores C1 e C2 são grandes o suficiente para manter, em termos médios e em regime permanente, a tensão aos seus terminais constante:

$$V_{A_{med}} = D \cdot (V_{C1} + V_{C2}) \quad (3.3)$$

Podendo  $D$  ser visto como a percentagem do período de comutação correspondente ao tempo em que  $S_1$  se encontra ligado. A partir das eq.3.1, 3.2 e 3.3 é possível estabelecer a seguinte expressão:

$$V_1 = D \cdot (V_{C1} + V_{C2}) \quad (3.4)$$

Se considerarmos ainda que os condensadores apresentam exactamente o mesmo valor de capacitância, a tensão média aos seus terminais será igual, pelo que a expressão 3.4 poderá ser simplificada:

$$V_1 = D \cdot 2V_{Cp} \Leftrightarrow V_{Cp} = \frac{V_1}{2D} \quad (3.5)$$



De forma análoga poder-se-á obter uma expressão para o lado secundário que virá:

$$V_{Cs} = \frac{V_2}{2D} \quad (3.6)$$

Estão assim encontradas duas relações que serão importantes em deduções futuras.

### 3.1.2 Valor médio da tensão na indutância de fugas do transformador

A bobina representativa da indutância combinada de fugas do transformador assume-se como o elemento fundamental na transferência de potência entre extremos do conversor. Sendo um elemento central, permite estabelecer relações importantes entre grandezas de ambos os lados do circuito.

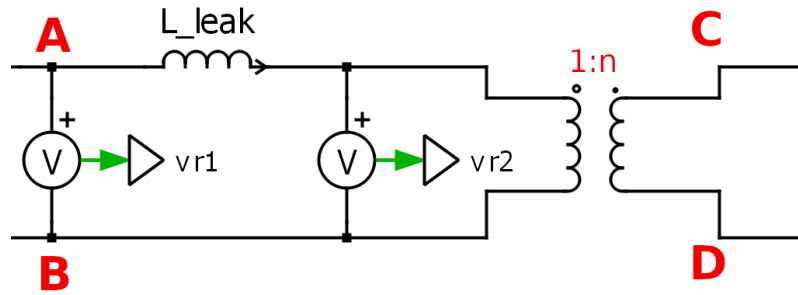


Figura 3.2: Foco na indutância de fugas do transformador

Partindo uma vez mais da eq.3.1 e definindo:

$$V_{L\_leak} = V_{r1} - V_{r2} \quad (3.7)$$

sabendo que

$$\begin{cases} V_{r1} = V_A - V_B \\ V_{r2} = \frac{(V_C - V_D)}{n} \end{cases} \quad (3.8)$$

Através da fig.3.1 conclui-se que:

$$\begin{cases} V_A = \begin{cases} 2V_{cp} & S1 \text{ ligado} \\ 0 & S2 \text{ ligado} \end{cases} \\ V_B = V_{cp} \end{cases} \quad (3.9)$$

Logo, no lado secundário virá:

$$\begin{cases} V_C = \begin{cases} 2V_{cs} & S3 \text{ ligado} \\ 0 & S4 \text{ ligado} \end{cases} \\ V_D = V_{cs} \end{cases} \quad (3.10)$$

Combinando as expressões acima apresentadas

$$\begin{cases} V_{r1} = \begin{cases} V_{cp} & S1 \text{ ligado} \\ -V_{cp} & S2 \text{ ligado} \end{cases} \\ V_{r2} = \begin{cases} V_{cs}/n & S3 \text{ ligado} \\ -V_{cs}/n & S4 \text{ ligado} \end{cases} \end{cases} \quad (3.11)$$

Uma vez que  $V_{r1}$  e  $V_{r2}$  apresentarão formas de onda quadradas, com *duty-cycle* e desfaseamento entre si controláveis, a forma de onda de  $V_{L\_leak}$  dependerá também das combinações dessas mesmas variáveis de controlo. A estas situações podemos chamar modos de funcionamento do conversor, resumidos na imagem que se segue:

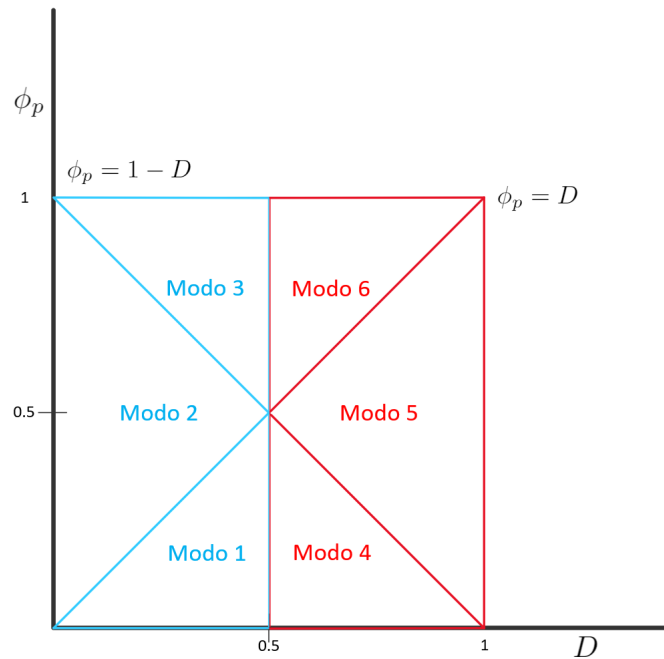


Figura 3.3: Modos de funcionamento do conversor, em função dos valores de  $D$  e  $\phi_p$

Daqui em diante  $D$  deverá ser entendido como o *duty-cycle* dos sinais de controlo e  $\phi_p$  como quociente entre  $\phi$  - o atraso dos sinais do braço direito, em relação aos do braço esquerdo - e  $2\pi$ . Sendo que  $\phi$  é considerado como estando dentro do intervalo  $[0, 2\pi]$ , tanto  $\phi_p$  como  $D$  tomarão valores na gama  $[0, 1]$ .

### 3.1.3 Modos de funcionamento

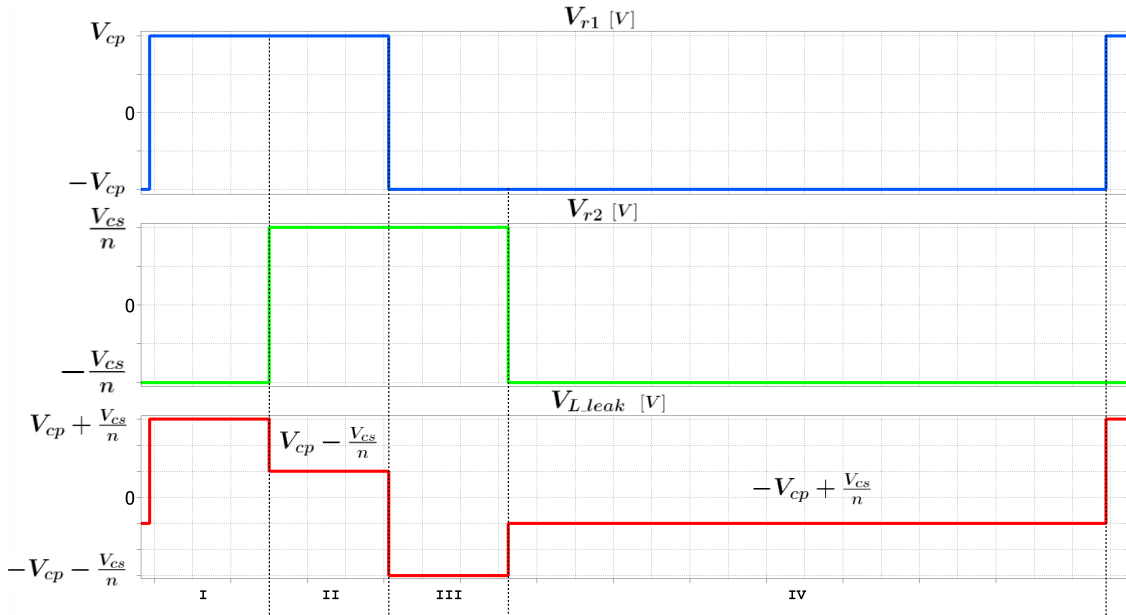


Figura 3.4: **Modo 1:**  $0 \leq \phi_p \leq D \wedge D \leq 50\%$

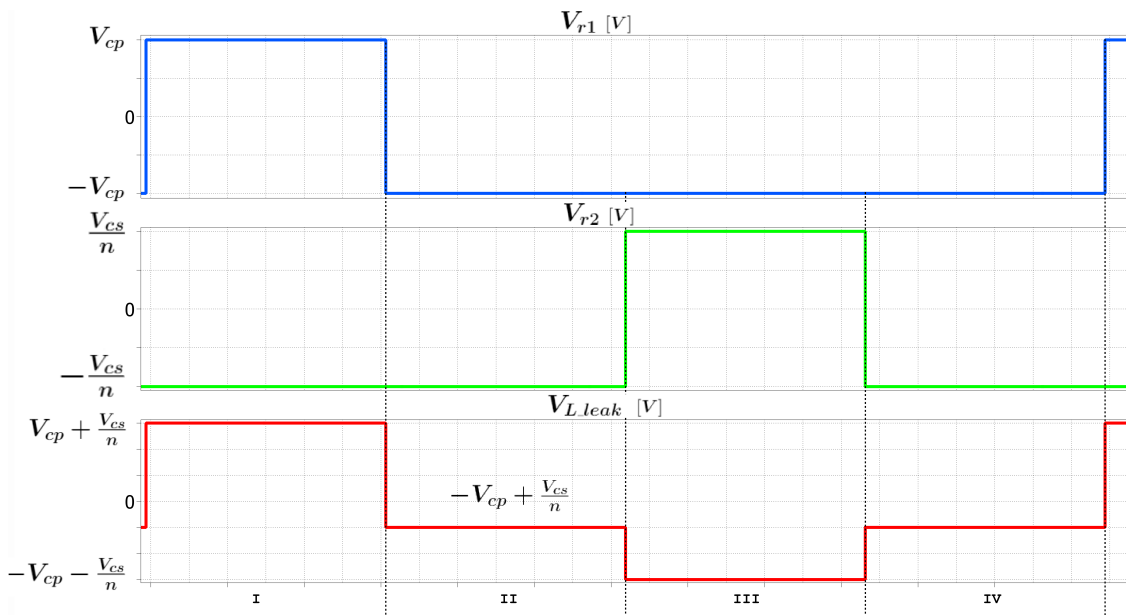


Figura 3.5: **Modo 2:**  $D \leq \phi_p \leq (1 - D) \wedge D \leq 50\%$

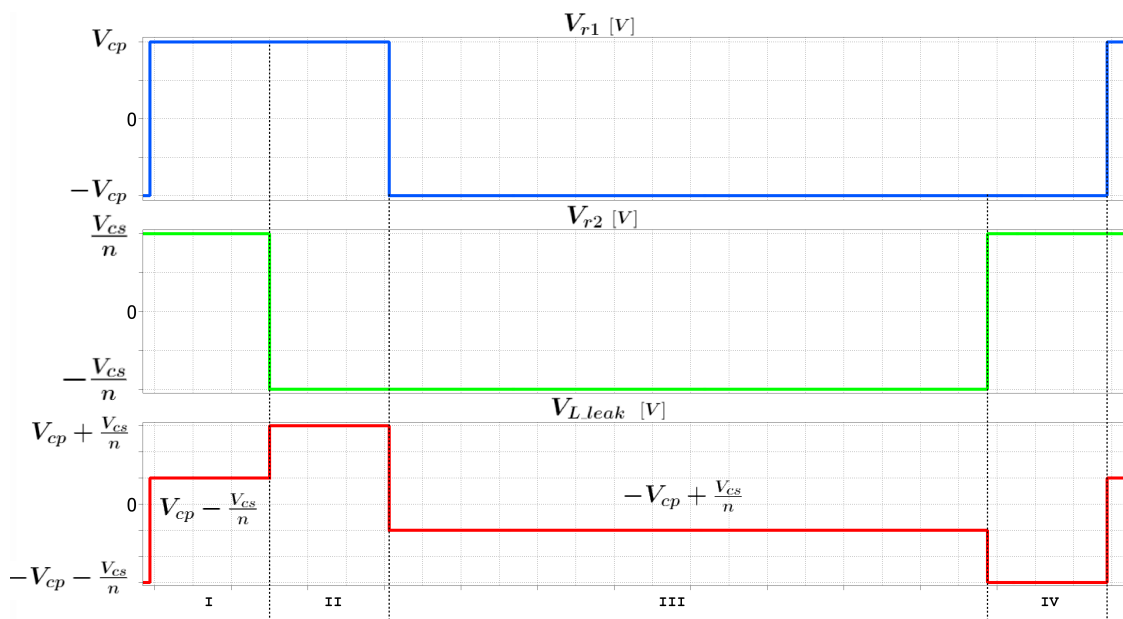


Figura 3.6: **Modo 3:**  $(1 - D) \leq \phi_p \leq 1 \wedge D \leq 50\%$

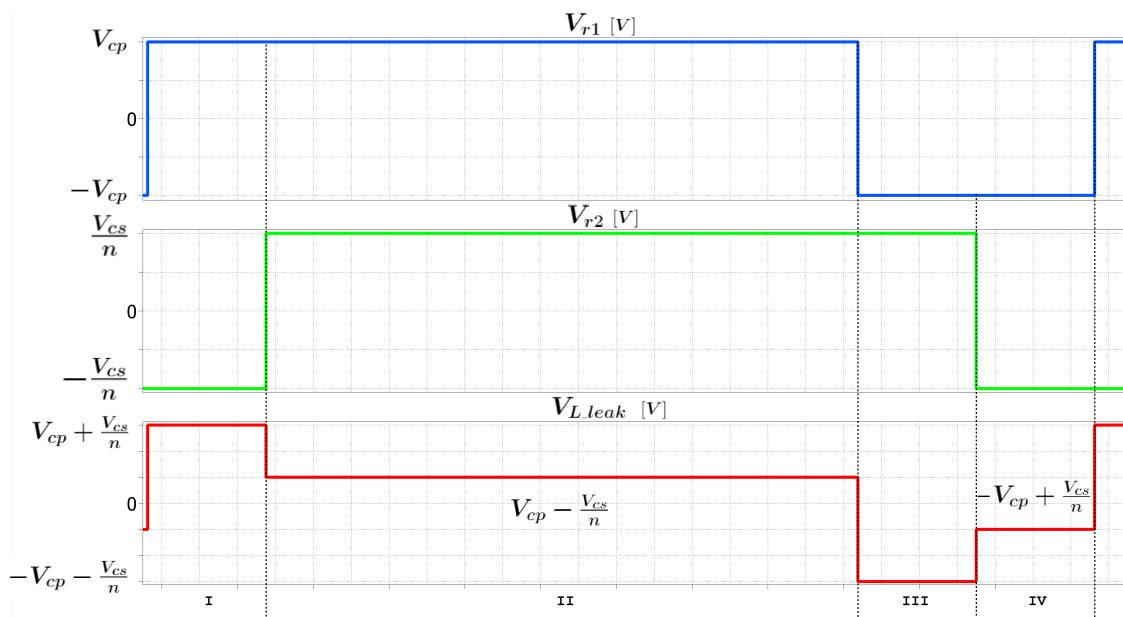


Figura 3.7: **Modo 4:**  $0 \leq \phi_p \leq (1 - D) \wedge D \geq 50\%$

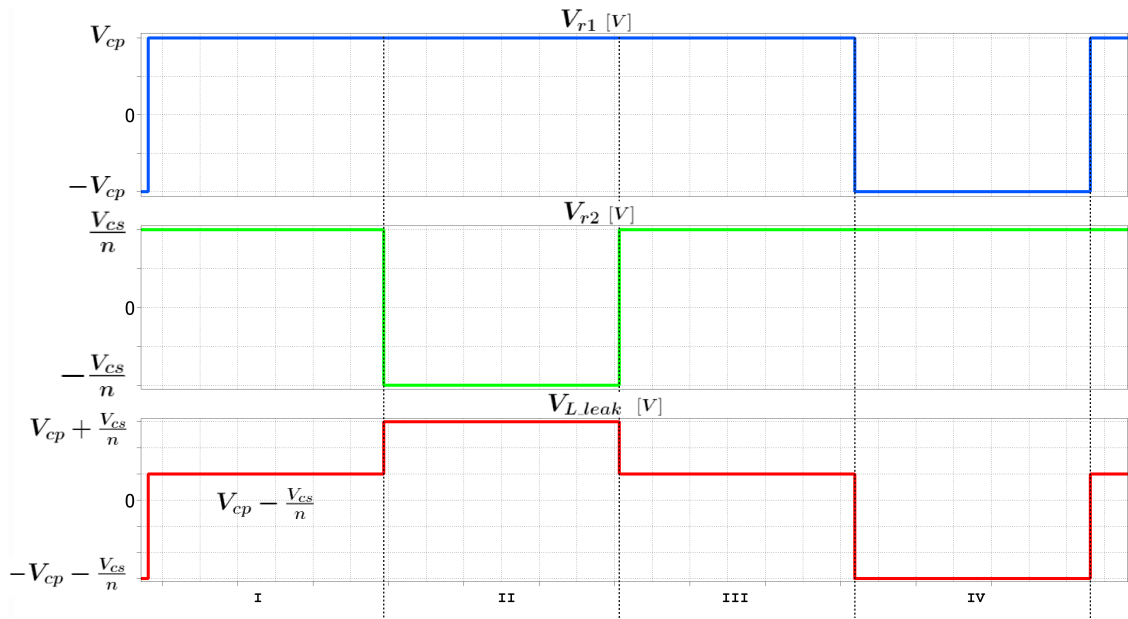


Figura 3.8: **Modo 5:**  $(1 - D) \leq \phi_p \leq D \wedge D \geq 50\%$

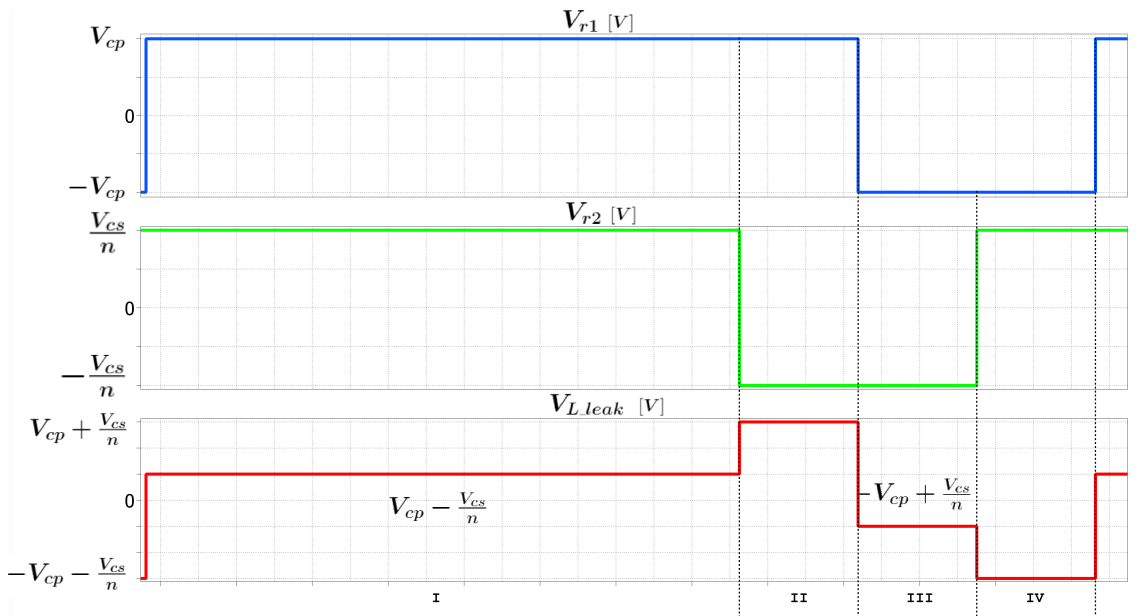


Figura 3.9: **Modo 6:**  $D \leq \phi_p \leq 1 \wedge D \geq 50\%$

Nota: os gráficos apresentados acima foram produzidos assumindo que  $v_{cp} > \frac{v_{cs}}{n}$ , de forma a generalizar as formas de onda e, por conseguinte, as relações derivadas em seguida.

Como se pode perceber pelas figuras apresentadas, a forma de onda da tensão aos terminais da bobina central varia consoante o modo de funcionamento. Focando a atenção no Modo 1, é possível observar quatro áreas distintas. Como é sabido, o valor médio da tensão na bobina deverá ser nulo, pelo que a soma destas áreas deverá cancelar-se.

Posto isto, é possível desde logo observar que as áreas referentes aos 1º e 3º intervalos se anulam, pois apresentam valor absoluto igual mas sinal contrário. Sendo assim, a expressão poderá ser simplificada à análise da soma das áreas dos 2º e 4º intervalos:

$$\begin{aligned} (v_{cp} - \frac{v_{cs}}{n}) \cdot (D - \phi_p) + (-v_{cp} + \frac{v_{cs}}{n}) \cdot (1 - D - \phi_p) &= 0 \Leftrightarrow \\ (v_{cp} - \frac{v_{cs}}{n}) \cdot (D - \phi_p) &= (v_{cp} - \frac{v_{cs}}{n}) \cdot (1 - D - \phi_p) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Assumindo por suposição que  $(v_{cp} - \frac{v_{cs}}{n}) \neq 0$

$$D - \phi_p = 1 - D - \phi_p \Leftrightarrow D = \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

Ora, uma vez que objectivo deste trabalho seria, precisamente, a exploração da utilização de valores de *duty-cycle* além de 50%, esta situação não seria interessante para o estudo em questão.

Retomando a eq.3.12, se considerarmos:

$$v_{cp} - \frac{v_{cs}}{n} = 0 \quad (3.14)$$

obter-se-á um valor médio de tensão na bobina nulo, tal como desejado, independentemente dos valores do *duty-cycle* e desfasamento dos sinais de controlo. Rearranjando a equação, chega-se a uma relação importante:

$$\frac{v_{cp}}{v_{cs}} = \frac{1}{n} \quad (3.15)$$

Tendo em conta a eq.3.5 e a eq.3.6, virá:

$$\frac{\frac{V_1}{2D}}{\frac{V_2}{2D}} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{n} \quad (3.16)$$

Análises semelhantes podem ser feitas para os restantes modos, sendo que a conclusão será sempre a mesma.

A condição obtida indicar-nos-á a razão de transformação que o transformador deverá apresentar, de forma a que o conversor possa operar correctamente - isto é, de maneira a garantir um valor médio de tensão nulo na indutância de fugas -, independentemente dos valores de  $D$  e  $\phi_p$  utilizados.

Isto significa que, embora em teoria quaisquer dois valores de tensão possam ser usados para as fontes  $V_1$  e  $V_2$ , será necessário utilizar um transformador que garanta um valor de pico, em módulo, de  $V_{r2}$  igual ao de  $V_{r1}$ .

### 3.1.4 Noção de transferência de potência

Tal como já foi mencionado, o elemento central do circuito, que garante a transferência de potência entre "primário" e "secundário" do conversor, é a indutância de fugas do transformador. Tendo isto em mente, é possível simplificar a representação do conversor DC/DC bidireccional como um conjunto de dois sub-conversores DC/AC, em meia ponte, conectados por uma bobina (cujo valor de indutância equivale à de fugas do transformador), assumindo, por simplificação, que  $V_1 = V_2$  e que o transformador pode ser retirado.

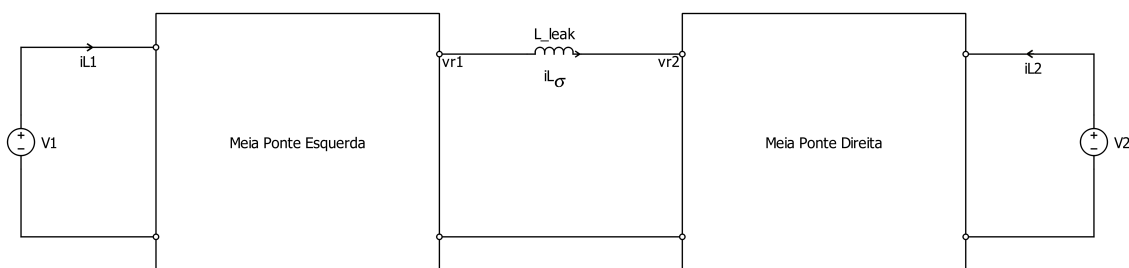


Figura 3.10: Configuração simplificada do conversor

Partindo-se da bobina central, decidiu-se definir a potência (média) transferida do conversor da seguinte forma:

$$P_{transf} = \frac{\int_0^T V_{r1} \cdot i_{L\sigma} dt}{T} \quad (3.17)$$

Assim sendo, a relação definida indicará a potência exigida a cada sub-conversor, dependendo dos valores paramétricos do conversor bidireccional, variáveis de controlo  $D$  e  $\phi_p$  e tensão das fontes. De uma forma genérica, e seguindo o sentido de corrente indicado na fig.3.10, é possível definir as seguintes relações:

$$\begin{cases} P_1 = V_1 \cdot i_{L1} \\ P_2 = V_1 \cdot i_{L2} \\ P_{transf} = P_1 - P_{perdas_1} \\ P_{transf} - P_{perdas_2} = -P_2 \end{cases} \quad (3.18)$$

As potências de perdas, como o nome indica, são representativas da potência activa gasta em elementos dissipativos - como resistências de fios, ESR de condensadores e bobinas - e na condução e comutação dos semicondutores.

Nota: na prática, a utilização de um transformador acarretará também perdas de *Joule*, magnéticas e mecânicas [15], não negligenciáveis.

No caso ideal de perdas nulas, as relações anteriores virão resumidas a:

$$P_1 = P_{transf} = -P_2 \quad (3.19)$$

Equação já apresentada no capítulo 2.

## 3.2 Análise da operação do conversor

Tendo estabelecido as relações anteriores, estavam reunidas condições para a derivação da relação entre a potência transferida e as variáveis a controlar.

Como foi apresentado anteriormente, pretendendo controlar  $D$  e  $\phi_p$ , o conversor poderá ser operado em 6 modos diferentes, querendo isto dizer que evidenciará 6 situações distintas de transferência de potência. Como tal, para determinar a relação completa entre potência e variáveis de controlo, será necessário analisar as formas de onda de  $v_{r1}$  e  $i_{L\sigma}$ , em cada um dos modos, aplicando depois a eq.3.17. No final, a expressão da potência transferida ficará definida como uma função "por troços".

No caso de  $v_{r1}$ , tal como se percebe pelas fig.3.4 a 3.9 e tendo em conta que  $|V_{r1}| = |V_{r2}|$ , esta análise é simples, já que o sinal tomará apenas dois valores:  $v_{cp}$  e  $-v_{cp}$ .

Já relativamente a  $i_{L\sigma}$ , partiu-se de:

$$i_{L\sigma}(t) = \int \frac{V_{L\_leak}(t)}{L\_leak} dt \quad (3.20)$$

Nota: apenas por preferência própria, decidiu-se trabalhar com uma escala temporal em radianos, pelo que a expressão anterior foi reescrita como

$$i_{L\sigma}(\theta) = \int \frac{V_{L\_leak}(\theta)}{2\pi f L\_leak} d\theta \quad (3.21)$$

Sendo  $f$  a frequência de comutação do conversor. De forma a simplificar as expressões, daqui em diante será usado  $\omega$  em vez de  $2\pi f$ .

### 3.2.1 Expressão de potência transferida para os vários modos de funcionamento

Através dos gráficos das fig.3.4 a 3.9 pretendia-se fazer uma representação das grandezas em questão para valores genéricos de  $n$  pelo que, impondo a condição da eq.3.16, as formas de onda de  $v_{r1}$  serão ligeiramente diferentes. De seguida, serão apresentados esses mesmos sinais, a partir dos quais se irá obter as expressões que definem  $i_{L\sigma}$ .



**Modo 1:**  $0 \leq \phi_p \leq D \wedge D \leq 50\%$

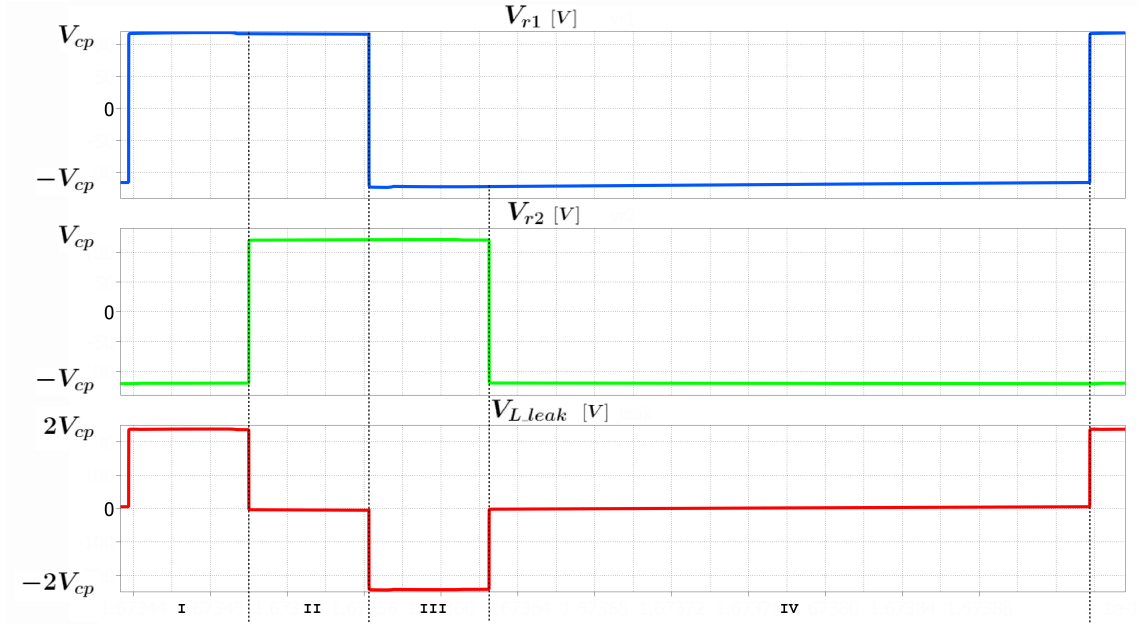


Figura 3.11: Formas de onda de  $v_{r1}$ ,  $v_{r2}$  e  $v_{L\_leak}$ , para o Modo 1

Como é possível verificar, a forma de onda de  $V_{L\_leak}$  poderá ser dividida em intervalos distintos. Posto isto, também  $i_{L\sigma}$  apresentará tal divisão, pelo que a expressão que a representa, ao longo de um período, será uma função definida por 4 troços.

$$i_{L\sigma}(\theta) = \begin{cases} i_{L\sigma_1}(\theta) = i_{L\sigma_0} + \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}} \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi\phi_p \\ i_{L\sigma_2}(\theta) = i_{L\sigma_1}(2\pi\phi_p) & 2\pi\phi_p \leq \theta \leq 2\pi D \\ i_{L\sigma_3}(\theta) = i_{L\sigma_1}(2\pi\phi_p) - \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}}(\theta - 2\pi D) & 2\pi D \leq \theta \leq 2\pi(\phi_p + D) \\ i_{L\sigma_4}(\theta) = i_{L\sigma_3}(2\pi(\phi_p + D)) & 2\pi(\phi_p + D) \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.22)$$

Por forma a encontrar o termo inicial da corrente, foi tido em conta o facto de o valor médio de uma corrente que atravessa um transformador ser nulo - neste caso significa que a corrente que atravessa a indutância de fugas não terá uma componente DC.

$$i_{L\sigma_{medio}} = \frac{\int_0^{2\pi} i_{L\sigma} d\theta}{2\pi} = 0 \Leftrightarrow \frac{\int_0^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_1} d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi D} i_{L\sigma_2} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi(\phi_p+D)} i_{L\sigma_3} d\theta + \int_{2\pi(\phi_p+D)}^{2\pi} i_{L\sigma_4} d\theta}{2\pi} = 0 \quad (3.23)$$

Resolvendo esta equação a ordem a  $i_{L\sigma_0}$  obtém-se

$$i_{L\sigma_0} = \frac{-4\pi V_{cp}\phi_p D}{\omega L_{leak}} \quad (3.24)$$

Estava assim encontrada a expressão completa que define a forma de onda da corrente, para o Modo 1.

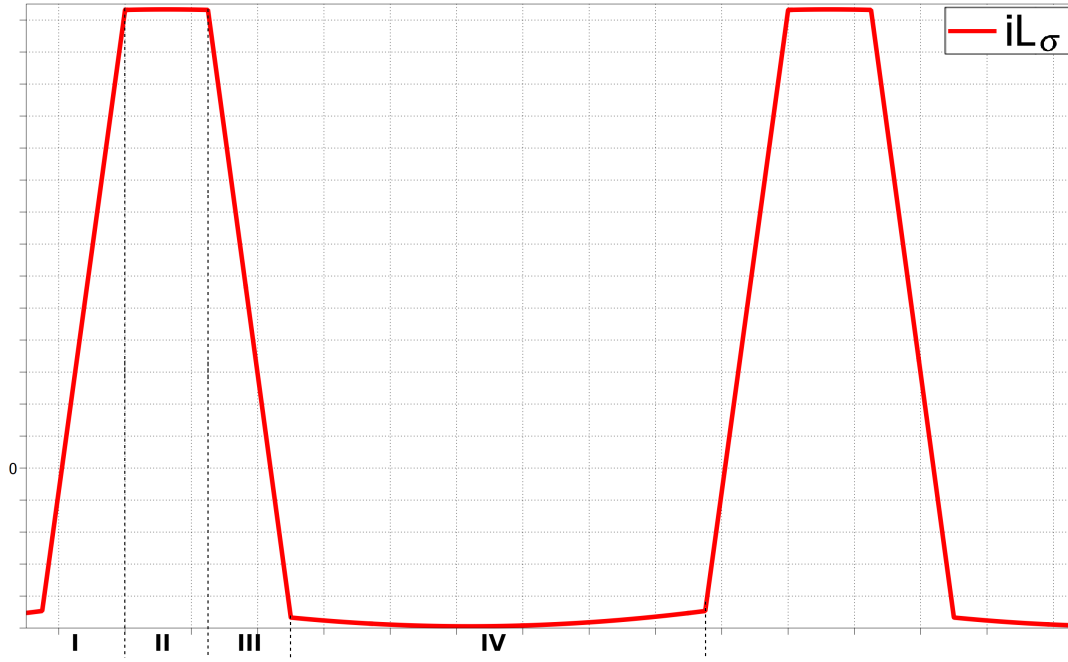


Figura 3.12: Forma de onda da corrente  $i_{L\sigma}$  - Modo 1

Deste modo, torna-se possível determinar a expressão da potência transferida. Atentando ao facto de, durante cada um dos 4 intervalos constituintes da corrente, a tensão  $v_{r1}$  se manter constante, a aplicação da eq.3.17 resume-se a

$$P_{transf_1} = \frac{\int_0^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_1} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi D} i_{L\sigma_2} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi(\phi_p+D)} i_{L\sigma_3} (-V_{cp}) d\theta + \int_{2\pi(\phi_p+D)}^{2\pi} i_{L\sigma_4} (-V_{cp}) d\theta}{2\pi} \Leftrightarrow$$

$$P_{transf_1} = \frac{4\pi V_{cp}^2 \phi_p [2D(1-D) - \phi_p]}{\omega L_{leak}} \quad (3.25)$$

Tendo em conta a eq.3.5 e o facto de  $\omega = 2\pi f$ :

$$P_{transf_1} = \frac{V_1^2 \phi_p [2D(1-D) - \phi_p]}{2D^2 f L_{leak}} \quad (3.26)$$

**Modo 2:**  $D \leq \phi_p \leq (1 - D) \wedge D \leq 50\%$

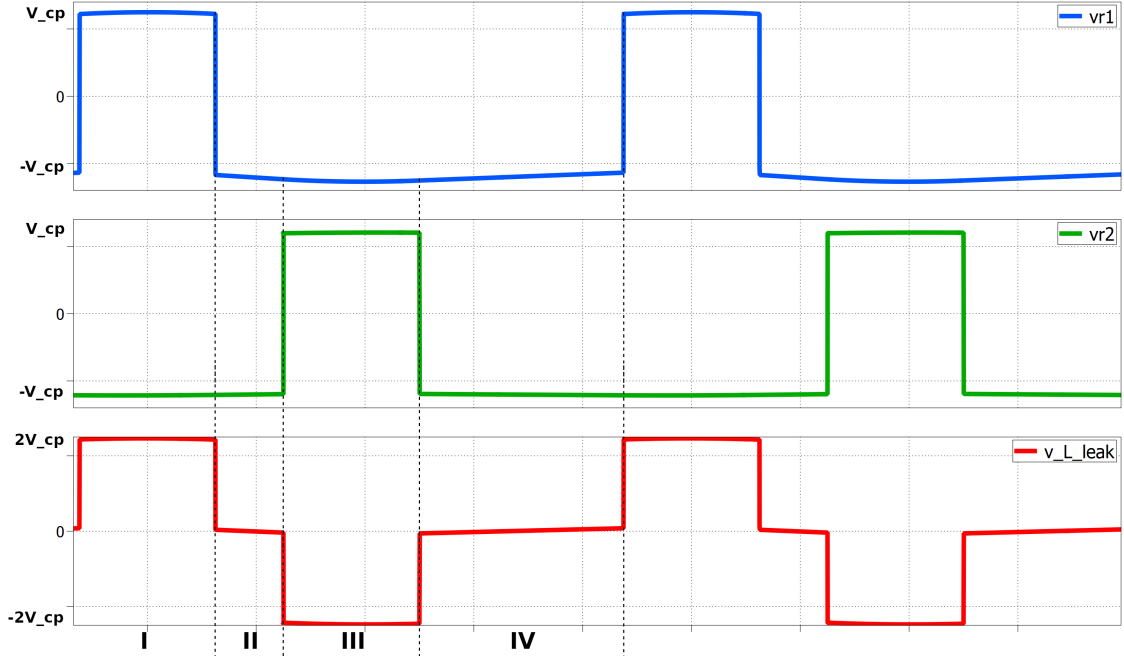


Figura 3.13: Formas de onda de  $v_{r1}$ ,  $v_{r2}$  e  $v_{L\_leak}$ , para o Modo 2.

A forma de onda da corrente é definida por:

$$i_{L\sigma}(\theta) = \begin{cases} i_{L\sigma_1}(\theta) = i_{L\sigma_0} + \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}} \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi D \\ i_{L\sigma_2}(\theta) = i_{L\sigma_1}(2\pi D) & 2\pi D \leq \theta \leq 2\pi \phi_p \\ i_{L\sigma_3}(\theta) = i_{L\sigma_1}(2\pi D) - \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}} (\theta - 2\pi \phi_p) & 2\pi \phi_p \leq \theta \leq 2\pi(\phi_p + D) \\ i_{L\sigma_4}(\theta) = i_{L\sigma_3}(2\pi(\phi_p + D)) & 2\pi(\phi_p + D) \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.27)$$

Procedendo como no caso anterior

$$\frac{\int_0^{2\pi D} i_{L\sigma_1} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi \phi_p} i_{L\sigma_2} d\theta + \int_{2\pi \phi_p}^{2\pi(\phi_p + D)} i_{L\sigma_3} d\theta + \int_{2\pi(\phi_p + D)}^{2\pi} i_{L\sigma_4} d\theta}{2\pi} = 0 \quad (3.28)$$

Obtendo

$$i_{L\sigma_0} = \frac{-4\pi V_{cp} \phi_p D}{\omega L_{leak}} \quad (3.29)$$

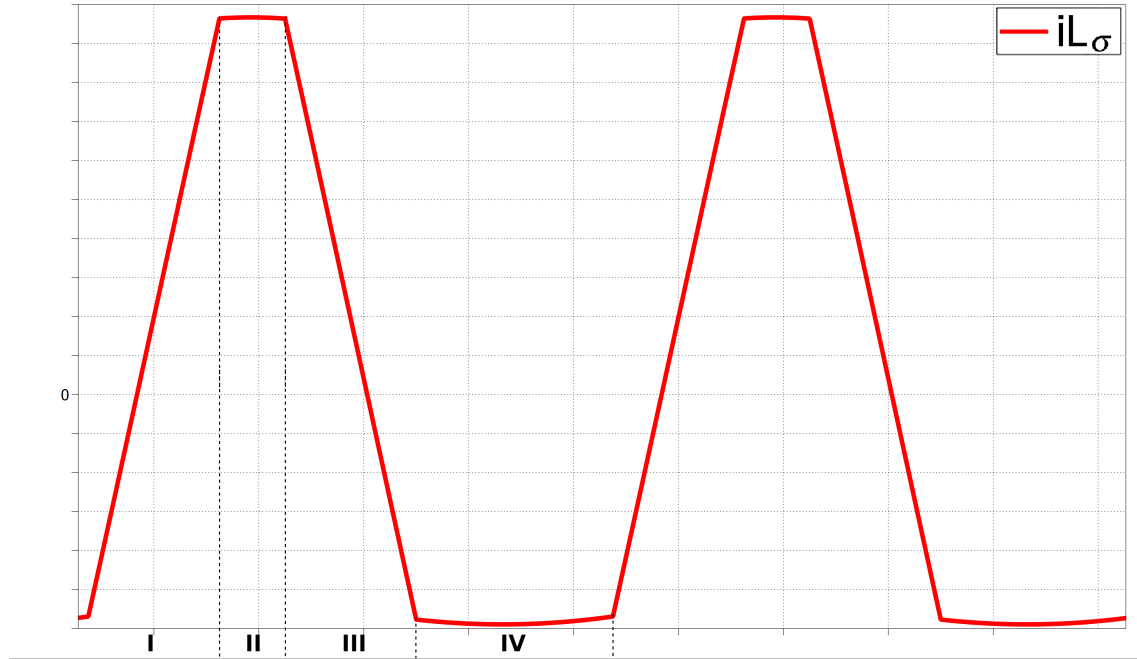


Figura 3.14: Forma de onda da corrente  $i_{L\sigma}$  - Modo 2

Calculando a expressão da potência como

$$P_{transf_2} = \frac{\int_0^{2\pi D} i_{L\sigma_1} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_2} (-V_{cp}) d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi(\phi_p+D)} i_{L\sigma_3} (-V_{cp}) d\theta + \int_{2\pi(\phi_p+D)}^{2\pi} i_{L\sigma_4} (-V_{cp}) d\theta}{2\pi} \Leftrightarrow$$

$$P_{transf_2} = \frac{4\pi V_{cp}^2 D^2 (1 - 2\phi_p)}{\omega L_{leak}} \quad (3.30)$$

Simplificando:

$$P_{transf_2} = \frac{V_1^2 (1 - 2\phi_p)}{2fL_{leak}} \quad (3.31)$$

**Modo 3:**  $(1 - D) \leq \phi_p \leq 1 \wedge D \leq 50\%$

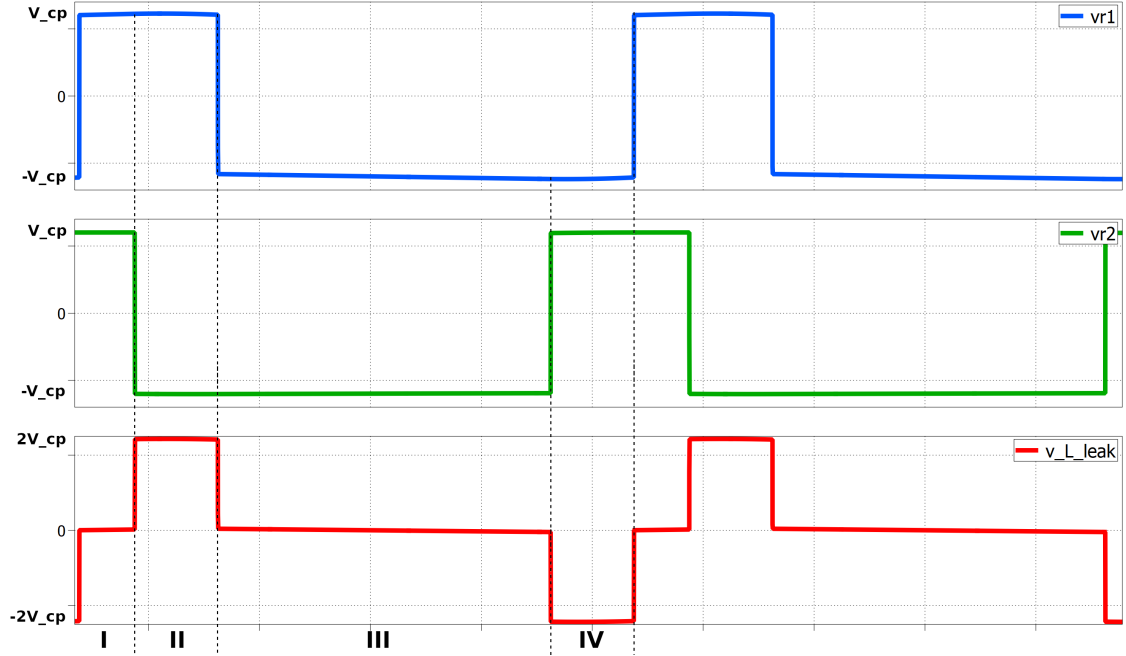


Figura 3.15: Formas de onda de  $v_{r1}$ ,  $v_{r2}$  e  $v_{L\_leak}$ , para o Modo 3.

A forma de onda da corrente é definida por:

$$i_{L\sigma}(\theta) = \begin{cases} i_{L\sigma_1}(\theta) = i_{L\sigma_0} & 0 \leq \theta \leq 2\pi(D - (1 - \phi_p)) \\ i_{L\sigma_2}(\theta) = i_{L\sigma_0} + \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}}(\theta - 2\pi(D - (1 - \phi_p))) & 2\pi(D - (1 - \phi_p)) \leq \theta \leq 2\pi D \\ i_{L\sigma_3}(\theta) = i_{L\sigma_2}(2\pi D) & 2\pi D \leq \theta \leq 2\pi\phi_p \\ i_{L\sigma_4}(\theta) = i_{L\sigma_3}(2\pi\phi_p) - \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}}(\theta - 2\pi\phi_p) & 2\pi\phi_p \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\frac{\int_0^{2\pi(D-(1-\phi_p))} i_{L\sigma_1} d\theta + \int_{2\pi(D-(1-\phi_p))}^{2\pi D} i_{L\sigma_2} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_3} d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi} i_{L\sigma_4} d\theta}{2\pi} = 0 \quad (3.33)$$

Obtendo

$$i_{L\sigma_0} = -\frac{4\pi V_{cp}(1 - \phi_p)(1 - D)}{\omega L_{leak}} \quad (3.34)$$

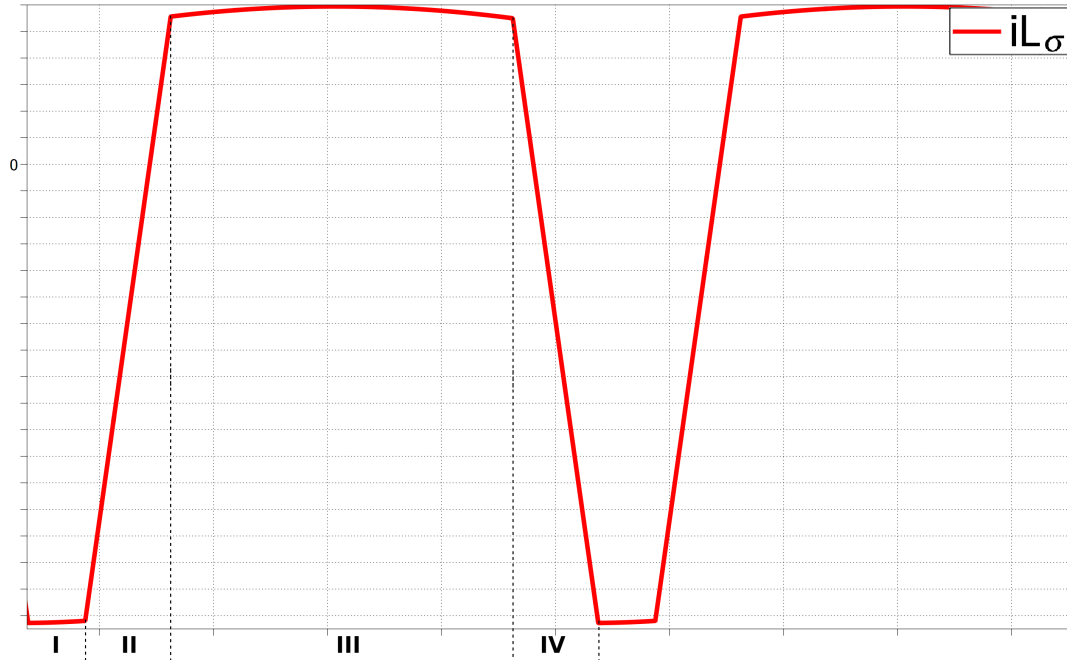


Figura 3.16: Forma de onda da corrente  $i_{L\sigma}$  - Modo 3

Calculando a expressão da potência como

$$P_{transf_3} = \frac{\int_0^{2\pi(D-(1-\phi_p))} i_{L\sigma_1} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi(D-(1-\phi_p))}^{2\pi D} i_{L\sigma_2} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_3} (-V_{cp}) d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi} i_{L\sigma_4} (-V_{cp}) d\theta}{2\pi} \Leftrightarrow$$

$$P_{transf_3} = -\frac{4\pi V_{cp}^2 (1-\phi_p)[2D(1-D) - (1-\phi_p)]}{\omega L_{leak}} \quad (3.35)$$

Simplificando:

$$P_{transf_3} = -\frac{V_1^2 (1-\phi_p)[2D(1-D) - (1-\phi_p)]}{2D^2 f L_{leak}} \quad (3.36)$$

A mesma análise foi realizada para modos correspondentes às situações em que  $D > 50\%$ .

**Modo 4:**  $0 \leq \phi_p \leq (1 - D) \wedge D \geq 50\%$

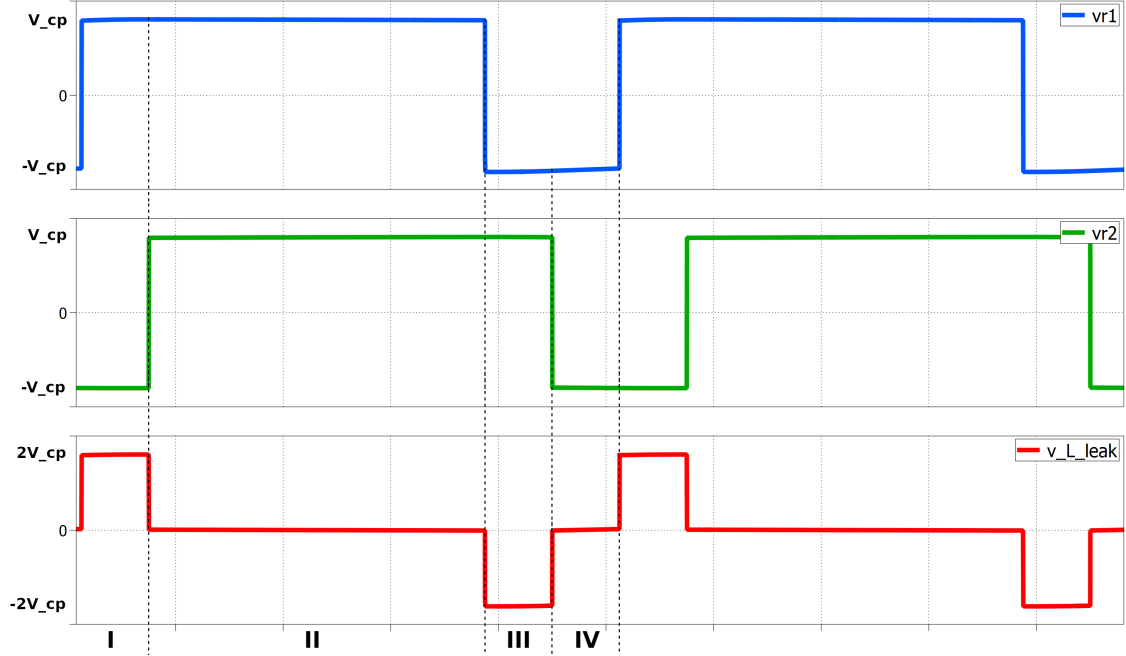


Figura 3.17: Formas de onda de  $v_{r1}$ ,  $v_{r2}$  e  $v_{L\_leak}$ , para o Modo 4.

A forma de onda da corrente é definida por:

$$i_{L\sigma}(\theta) = \begin{cases} i_{L\sigma_1}(\theta) = i_{L\sigma_0} + \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}} \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi\phi_p \\ i_{L\sigma_2}(\theta) = i_{L\sigma_1}(2\pi\phi_p) & 2\pi\phi_p \leq \theta \leq 2\pi D \\ i_{L\sigma_3}(\theta) = i_{L\sigma_1}(2\pi\phi_p) - \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}}(\theta - 2\pi D) & 2\pi D \leq \theta \leq 2\pi(\phi_p + D) \\ i_{L\sigma_4}(\theta) = i_{L\sigma_3}(2\pi(\phi_p + D)) & 2\pi(\phi_p + D) \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\frac{\int_0^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_1} d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi D} i_{L\sigma_2} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi(\phi_p + D)} i_{L\sigma_3} d\theta + \int_{2\pi(\phi_p + D)}^{2\pi} i_{L\sigma_4} d\theta}{2\pi} = 0 \quad (3.38)$$

Obtendo

$$i_{L\sigma_0} = \frac{-4\pi V_{cp} \phi_p D}{\omega L_{leak}} \quad (3.39)$$

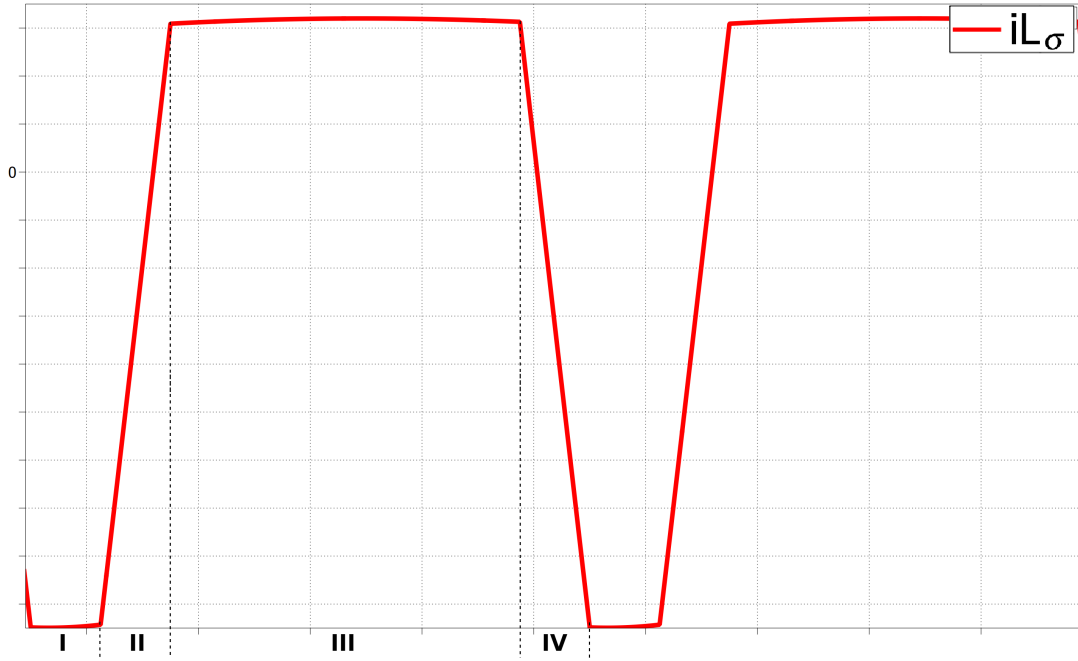


Figura 3.18: Forma de onda da corrente  $i_{L\sigma}$  - Modo 4

Calculando a expressão da potência como

$$P_{transf_4} = \frac{\int_0^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_1} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi D} i_{L\sigma_2} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi(\phi_p+D)} i_{L\sigma_3} (-V_{cp}) d\theta + \int_{2\pi(\phi_p+D)}^{2\pi} i_{L\sigma_4} (-V_{cp}) d\theta}{2\pi} \Leftrightarrow$$

$$P_{transf_4} = \frac{4\pi V_{cp}^2 \phi_p [2D(1-D) - \phi_p]}{\omega L_{leak}} \quad (3.40)$$

Simplificando:

$$P_{transf_4} = \frac{V_1^2 \phi_p [2D(1-D) - \phi_p]}{2D^2 f L_{leak}} \quad (3.41)$$



**Modo 5:**  $(1 - D) \leq \phi_p \leq D \wedge D \geq 50\%$

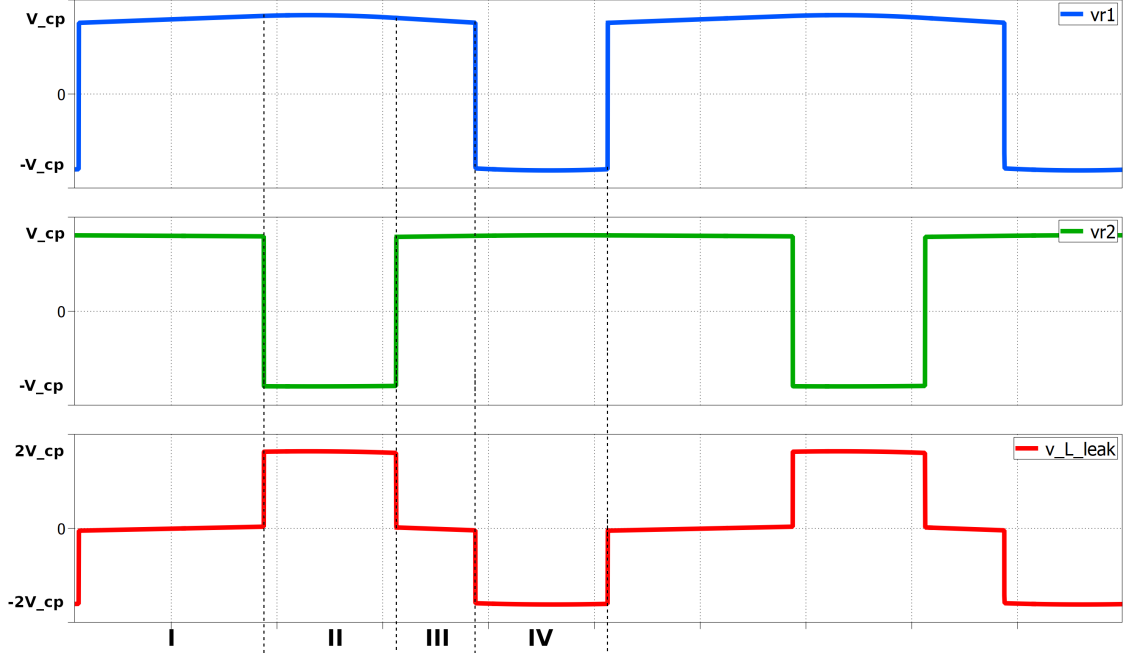


Figura 3.19: Formas de onda de  $v_{r1}$ ,  $v_{r2}$  e  $v_{L\_leak}$ , para o Modo 5.

A forma de onda da corrente é definida por:

$$i_{L\sigma}(\theta) = \begin{cases} i_{L\sigma_1}(\theta) = i_{L\sigma_0} & 0 \leq \theta \leq 2\pi(\phi_p - (1 - D)) \\ i_{L\sigma_2}(\theta) = i_{L\sigma_0} + \frac{2V_{cp}}{L_{leak}}(\theta - 2\pi(\phi_p - (1 - D))) & 2\pi(\phi_p - (1 - D)) \leq \theta \leq 2\pi\phi_p \\ i_{L\sigma_3}(\theta) = i_{L\sigma_2}(2\pi\phi_p) & 2\pi\phi_p \leq \theta \leq 2\pi D \\ i_{L\sigma_4}(\theta) = i_{L\sigma_2}(2\pi\phi_p) - \frac{2V_{cp}}{L_{leak}}(\theta - 2\pi D) & 2\pi D \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\frac{\int_0^{2\pi(\phi_p - (1 - D))} i_{L\sigma_1} d\theta + \int_{2\pi(\phi_p - (1 - D))}^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_2} d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi D} i_{L\sigma_3} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi} i_{L\sigma_4} d\theta}{2\pi} = 0 \quad (3.43)$$

Obtendo

$$i_{L\sigma_0} = -\frac{4\pi V_{cp}(1 - \phi_p)(1 - D)}{\omega L_{leak}} \quad (3.44)$$

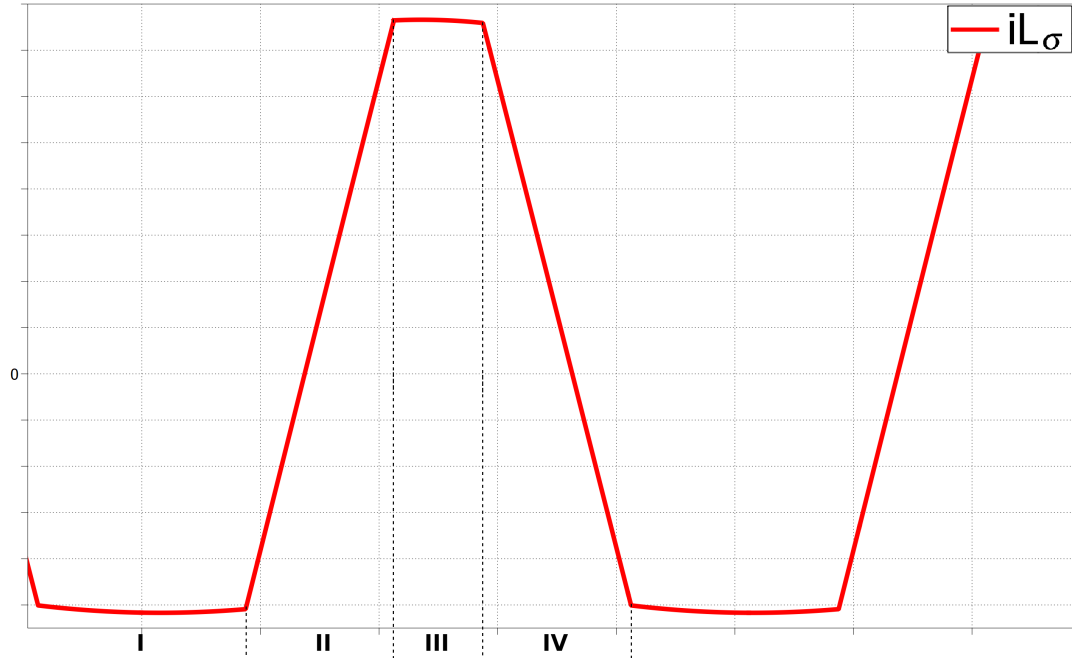


Figura 3.20: Forma de onda da corrente  $i_{L\sigma}$  - Modo 5

Calculando a expressão da potência como

$$P_{transf_5} = \frac{\int_0^{2\pi(\phi_p - (1-D))} i_{L\sigma_1} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi(\phi_p - (1-D))}^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_2} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi D} i_{L\sigma_3} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi} i_{L\sigma_4} (-V_{cp}) d\theta}{2\pi} \Leftrightarrow$$

$$P_{transf_5} = \frac{4\pi V_{cp}^2 (1-D)^2 (1-2\phi_p)}{\omega L_{leak}} \quad (3.45)$$

Simplificando:

$$P_{transf_5} = \frac{V_1^2 (1-D)^2 (1-2\phi_p)}{2D^2 f L_{leak}} \quad (3.46)$$

**Modo 6:**  $D \leq \phi_p \leq 1 \wedge D \geq 50\%$

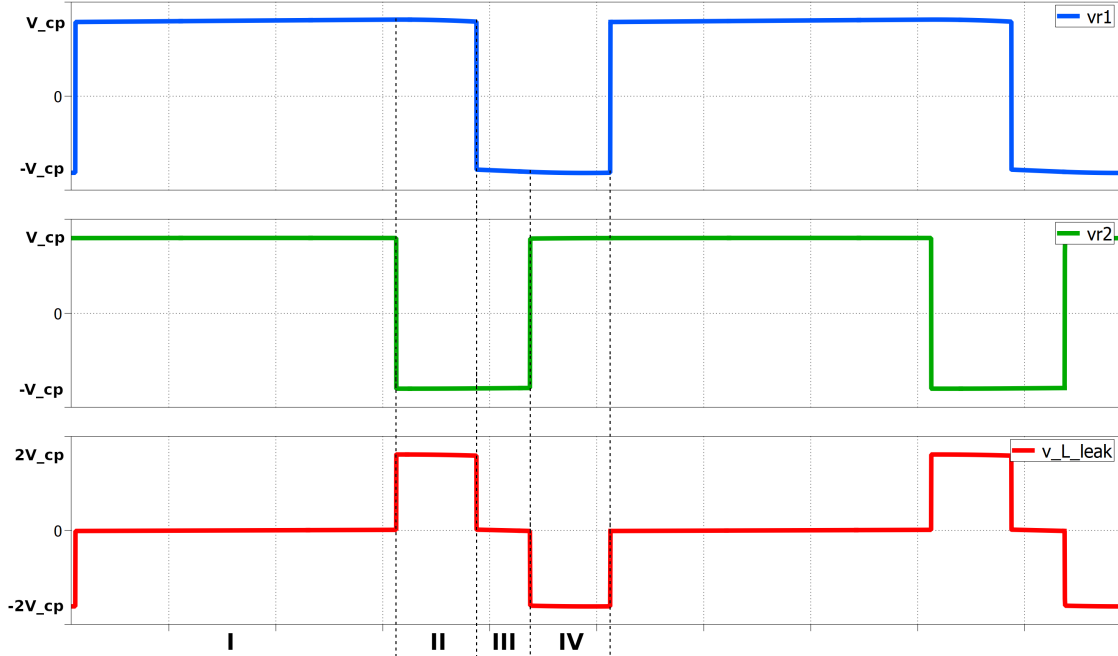


Figura 3.21: Formas de onda de  $v_{r1}$ ,  $v_{r2}$  e  $v_{L\_leak}$ , para o Modo 6.

A forma de onda da corrente é definida por:

$$i_{L\sigma}(\theta) = \begin{cases} i_{L\sigma_1}(\theta) = i_{L\sigma_0} & 0 \leq \theta \leq 2\pi(\phi_p - (1-D)) \\ i_{L\sigma_2}(\theta) = i_{L\sigma_0} + \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}}(\theta - 2\pi(\phi_p - (1-D))) & 2\pi(\phi_p - (1-D)) \leq \theta \leq 2\pi D \\ i_{L\sigma_3}(\theta) = i_{L\sigma_2}(2\pi D) & 2\pi D \leq \theta \leq 2\pi\phi_p \\ i_{L\sigma_4}(\theta) = i_{L\sigma_2}(2\pi D) - \frac{2V_{cp}}{\omega L_{leak}}(\theta - 2\pi\phi_p) & 2\pi\phi_p \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\frac{\int_0^{2\pi(\phi_p - (1-D))} i_{L\sigma_1} d\theta + \int_{2\pi(\phi_p - (1-D))}^{2\pi D} i_{L\sigma_2} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_3} d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi} i_{L\sigma_4} d\theta}{2\pi} = 0 \quad (3.48)$$

Obtendo

$$i_{L\sigma_0} = -\frac{4\pi V_{cp}(1 - \phi_p)(1 - D)}{\omega L_{leak}} \quad (3.49)$$

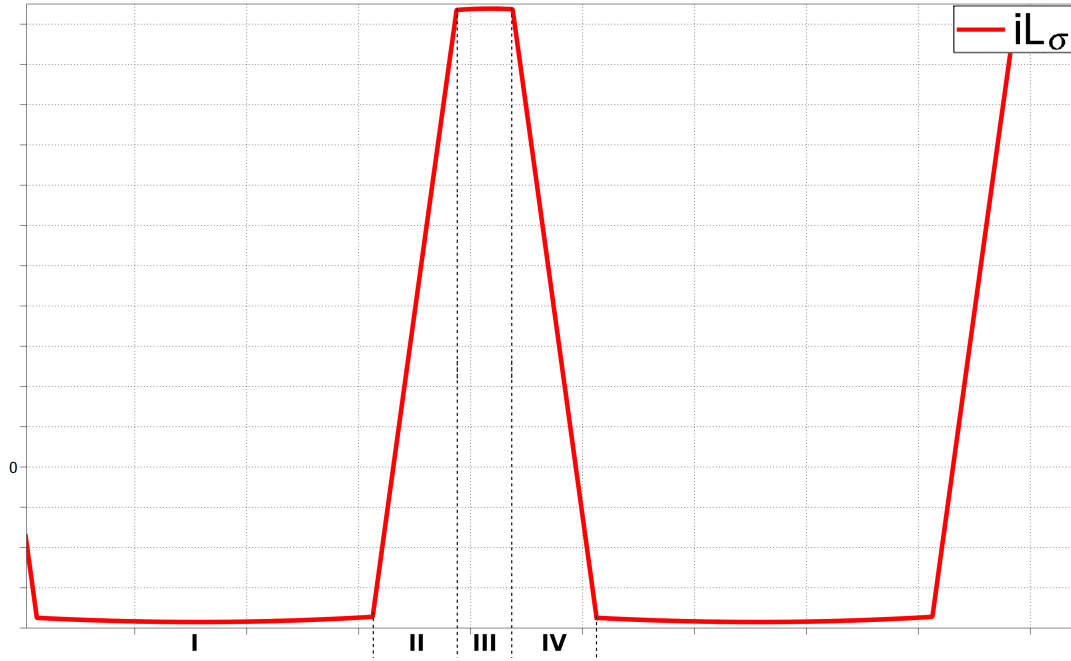


Figura 3.22: Forma de onda da corrente  $i_{L\sigma}$  - Modo 6

Calculando a expressão da potência como

$$P_{transf_6} = \frac{\int_0^{2\pi(\phi_p - (1-D))} i_{L\sigma_1} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi(\phi_p - (1-D))}^{2\pi D} i_{L\sigma_2} V_{cp} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi\phi_p} i_{L\sigma_3} (-V_{cp}) d\theta + \int_{2\pi\phi_p}^{2\pi} i_{L\sigma_4} (-V_{cp}) d\theta}{2\pi} \Leftrightarrow$$

$$P_{transf_6} = -\frac{4\pi V_{cp}^2 (1 - \phi_p) [2D(1 - D) - (1 - \phi_p)]}{\omega L_{leak}} \quad (3.50)$$

Simplificando:

$$P_{transf_6} = -\frac{V_1^2 (1 - \phi_p) [2D(1 - D) - (1 - \phi_p)]}{2D^2 f L_{leak}} \quad (3.51)$$

Estavam assim encontradas as expressões que definem a relação entre a potência transferida e as variáveis de controlo  $D$  e  $\phi_p$ , assim como a sua dependência com os valores paramétricos  $V_1$ ,  $f$  e  $L_{leak}$ , para os 6 modos de funcionamento do conversor.

$$P_{transf}(D, \phi_p) = \begin{cases} \frac{V_1^2 \phi_p [2D(1-D) - \phi_p]}{2D^2 fL_{leak}} & 0 \leq \phi_p \leq D \quad \wedge \quad D \leq 50\% \\ \frac{V_1^2 (1-2\phi_p)}{2fL_{leak}} & D < \phi_p < (1-D) \quad \wedge \quad D \leq 50\% \\ -\frac{V_1^2 (1-\phi_p) [2D(1-D) - (1-\phi_p)]}{2D^2 fL_{leak}} & (1-D) \leq \phi_p \leq 1 \quad \wedge \quad D \leq 50\% \\ \frac{V_1^2 \phi_p [2D(1-D) - \phi_p]}{2D^2 fL_{leak}} & 0 \leq \phi_p \leq (1-D) \quad \wedge \quad D \geq 50\% \\ \frac{V_1^2 (1-D)^2 (1-2\phi_p)}{2D^2 fL_{leak}} & (1-D) < \phi_p < D \quad \wedge \quad D \geq 50\% \\ -\frac{V_1^2 (1-\phi_p) [2D(1-D) - (1-\phi_p)]}{2D^2 fL_{leak}} & D \leq \phi_p \leq 1 \quad \wedge \quad D \geq 50\% \end{cases} \quad (3.52)$$

É possível desde já verificar que as expressões referentes aos modos para  $D < 50\%$  e  $D > 50\%$  são praticamente iguais. Além das diferenças entre os modos 2 e 5, deve-se destacar o facto de, para os restantes casos, embora as expressões sejam iguais, dado o intervalo de variação de  $D$  se alterar, também os valores absolutos de potência, para os mesmos valores de desfasamento, serão desiguais.

Uma vez que o modo de operação impondo  $D = 50\%$  é, sem dúvida, o mais abordado na literatura encontrada, a título de confirmação, apresenta-se de seguida as expressões equivalentes para este caso particular:

$$P_{transf}(\phi_p) = \begin{cases} \frac{V_1^2 \phi_p [1-2\phi_p]}{fL_{leak}} & 0 \leq \phi_p \leq 0.5 \\ \frac{V_1^2 (1-\phi_p) [1-2\phi_p]}{fL_{leak}} & 0.5 \leq \phi_p \leq 1 \end{cases} \quad (3.53)$$

Se se substituir  $\phi_p$  por  $\frac{\phi}{2\pi}$ :

$$P_{transf} \Big|_{D=50\%} (\phi) = \begin{cases} \frac{V_1^2 \phi [\pi - \phi]}{\omega L_{leak} \pi} & 0 \leq \phi \leq \pi \\ \frac{V_1^2 (2\pi - \phi) [\pi - \phi]}{\omega L_{leak} \pi} & \pi \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.54)$$

A potência transferida no conversor em análise fica assim definida, estando em conformidade com o que foi concluído em artigos sobre conversores com estrutura semelhante como [1], [8],

[9], ou [13] e, portanto, com a expressão utilizada na secção 2.1. De lembrar que, na dissertação aqui apresentada, o intervalo de variação de  $\phi$  é  $]0, 2\pi[$ , ao contrário do que foi assumido nas referências indicadas. A sua representação gráfica poderá ser verificada pela fig.3.26, na secção seguinte.

### 3.2.2 Representação Gráfica das expressões obtidas

Uma vez que a potência fica definida por 6 troços dependentes de duas variáveis, a sua representação gráfica tomará uma forma tridimensional. Por forma a generalizar os gráficos de potência apresentados, todos foram normalizados em relação ao máximo de potência (teórico) absoluto, indicado mais à frente.

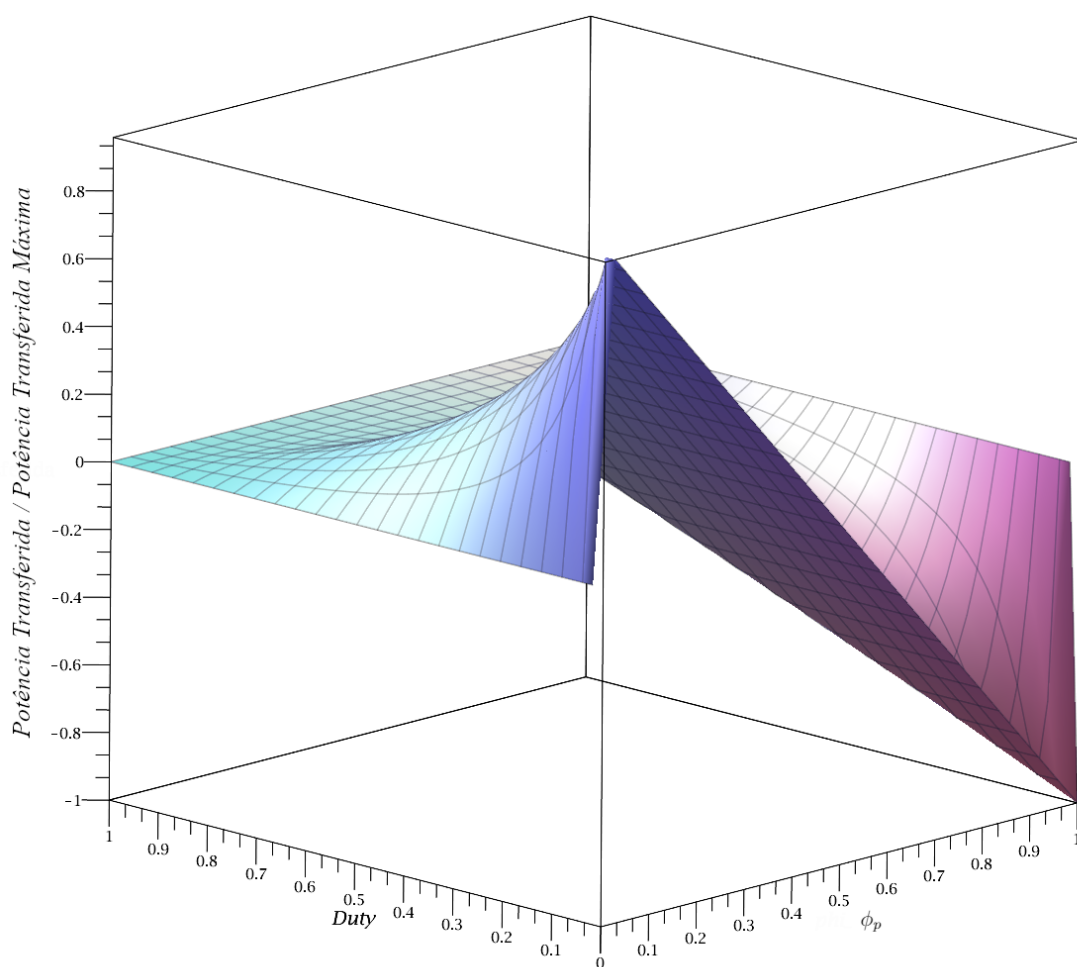


Figura 3.23: Representação gráfica 3D da relação entre a Potência Transferida com  $D$  e  $\phi$

Tendo em conta que três das expressões se aplicam para  $D < 50\%$  e as restantes para  $D > 50\%$ , faz sentido agrupá-las em duas funções por troços distintas. Desta forma, fixando um valor arbitrário de  $D$  inferior a 50% e outro superior (a título de exemplo), é possível obter duas representações convencionais (bidimensionais) para a Potência, em função de  $\phi_p$ .

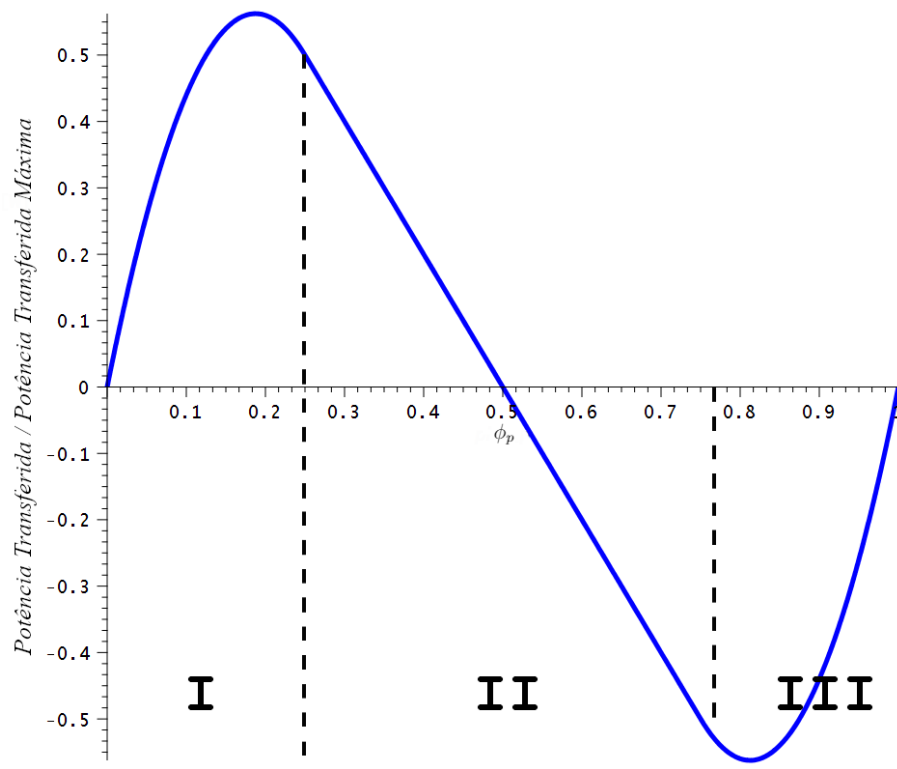


Figura 3.24: Representação gráfica 2D da relação entre a Potência Transferida e  $\phi_p$ , com  $D = 25\%$

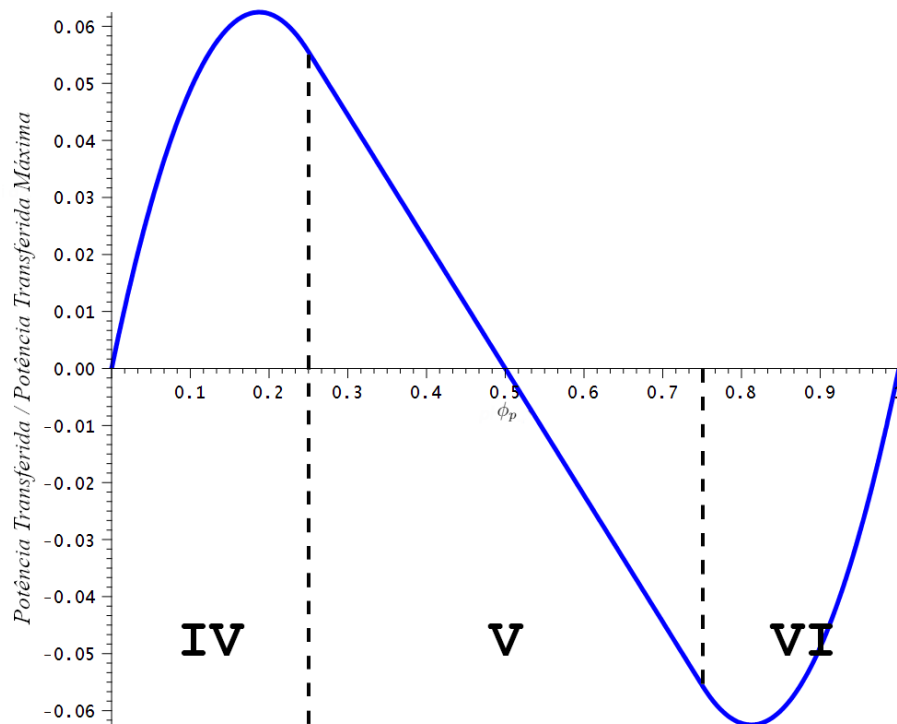


Figura 3.25: Representação gráfica 2D da relação entre a Potência Transferida e  $\phi_p$ , com  $D = 75\%$

Nota: Para a situação  $D = 50\%$ , as duas funções são definidas pela mesma forma de onda, apresentada igualmente abaixo.

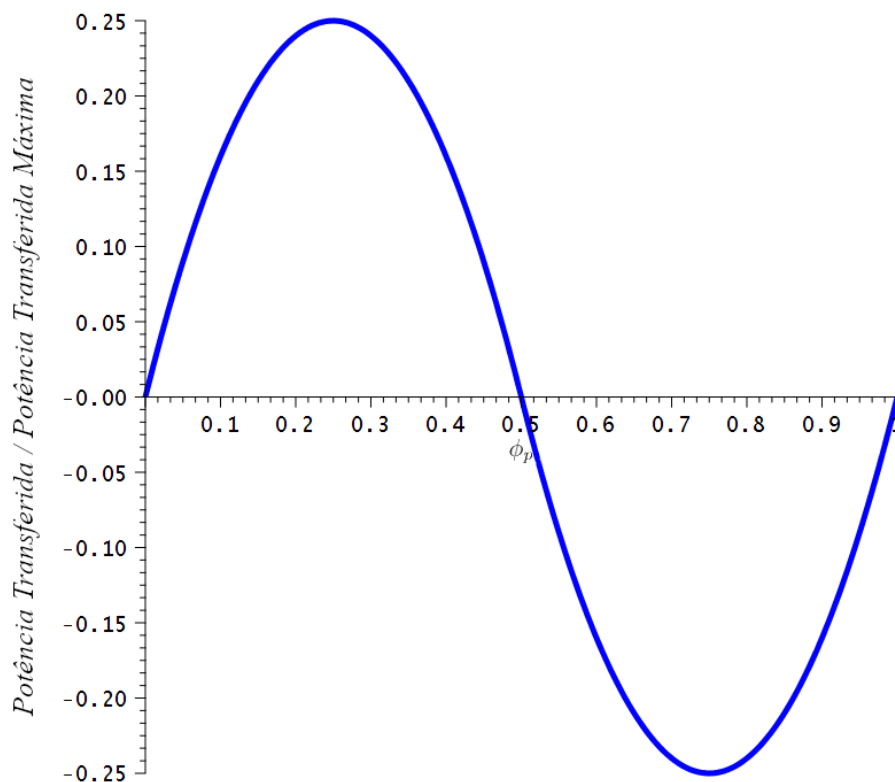


Figura 3.26: Representação gráfica 2D da relação entre a Potência Transferida e  $\phi_p$ , com **D = 50%**

Através da sua representação visual é possível confirmar a semelhança entre as expressões para  $D < 50\%$  e  $D > 50\%$ , garantida pela forma como também os limites em que se inclui cada modo, para ambas as situações, variam.

Verifica-se também, independentemente do valor de  $D$ , uma simetria da Potência em relação ao ponto  $[\pi, 0]$ , o que indica que, controlando o valor do desfasamento é possível fazer variar o sinal - o que se traduz no sentido - do trânsito de potência no conversor. Mais ainda, conclui-se que, fixando um valor de  $\phi_p$ , percorrendo  $D$  em toda a gama admitida, o sinal da potência nunca se alterará.

### 3.2.3 Valores máximos de transferência de Potência

Encontradas as expressões que definem o trânsito de potência do conversor com o controlo pretendido, é possível determinar analiticamente os valores de desfasamento e de *duty-cycle* que asseguram um trânsito de potência máximo, em função dos valores paramétricos do conversor.

Analisando a fig.3.23 é possível inferir que os máximos de potência ocorrem para valores baixos de  $D$ , com  $\phi_p = 0 \vee 1$ . Naturalmente, tal é corroborado pela comparação entre as fig.3.24 e 3.25. Mais ainda, pela representação tridimensional da função da potência transferida, pode-se



concluir que o máximo absoluto (analítico) é dado por um *duty-cycle* nulo. Contudo, como é sabido, tal situação significaria que os interruptores cimeiros de cada braço estariam constantemente "abertos", pelo que não só não haveria trânsito de potência pela indutância central (de fugas do transformador), como as bobinas  $L_1$  e  $L_2$  entrariam em saturação por estarem fixamente sujeitas a uma tensão igual à da respectiva fonte associada - não sendo o seu valor médio nulo. Por outro lado, valores diferentes de zero - mas ainda assim muito reduzidos - de  $D$  são difíceis de implementar na prática devido a limitações de precisão mas também pelo facto do intervalo de tempo correspondente a tal  $D$  poder não assegurar a transição completa de estado do interruptor a que está associado.

Posto isto, assumindo um valor de  $D$  fixo, é interessante analisar os valores de  $\phi_p$  que garantam transferência máxima (e mínima) de potência:

$$\frac{dP_{transf}}{d\phi_p} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{V_1^2[2D(1-D) - 2\phi_p]}{2D^2 f L_{leak}} = 0 & \text{Modo 1} \\ -\frac{V_1^2}{f L_{leak}} = 0 & \text{Modo 2} \\ \frac{V_1^2[2D(1-D) - 2(1-\phi_p)]}{2D^2 f L_{leak}} = 0 & \text{Modo 3} \\ \frac{V_1^2[2D(1-D) - 2\phi_p]}{2D^2 f L_{leak}} = 0 & \text{Modo 4} \\ -\frac{V_1^2(1-D)^2}{D^2 f L_{leak}} = 0 & \text{Modo 5} \\ \frac{V_1^2[2D(1-D) - 2(1-\phi_p)]}{2D^2 f L_{leak}} = 0 & \text{Modo 6} \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Ora, para os Modos 2 e 5, sendo definidos por rectas com declive negativo, os máximo e mínimo correspondem, respectivamente, ao primeiro e último valores do respectivo intervalo de operação, isto é:

**Modo 2:**

$$\phi_{p_{max}} = D \quad (3.56)$$

$$\phi_{p_{min}} = 1 - D \quad (3.57)$$

**Modo 5:**

$$\phi_{p_{max}} = 1 - D \quad (3.58)$$

$$\phi_{p_{min}} = D \quad (3.59)$$

Se substituirmos  $\phi_p$  por  $D$  e  $1 - D$  na função da potência do Modo 2 iremos obter as expressões que nos indicam a potência máxima e mínima, respectivamente, em função de  $D$ .

$$P_{transf_{2max}}(\phi_p = D) = \frac{V_1^2(1 - 2D)}{2fL_{leak}} \quad (3.60)$$

$$P_{transf_{2min}}(\phi_p = 1 - D) = -\frac{V_1^2(1 - 2D)}{2fL_{leak}} \quad (3.61)$$

A partir das eq.3.60 e 3.61 facilmente se conclui que as potências máxima e mínima absolutas, para este modo, seriam resultantes de  $D = 0 \vee D = 1$  (tal como fora concluído inicialmente), correspondendo a:

$$P_{transf_{2max}} = \frac{V_1^2}{2fL_{leak}} \quad (3.62)$$

$$P_{transf_{2min}} = -\frac{V_1^2}{2fL_{leak}} \quad (3.63)$$

Contudo, tal como também já referido, na prática nunca poderiam ser usados os valores  $D = 0 \vee D = 1$ . Conclui-se, todavia, que a utilização de valores de *duty-cycle* baixos origina valores de potência mais elevados. De notar também que os dois valores são iguais em módulo mas com sinal oposto, o que está de acordo com a noção de simetria da potência, em relação ao ponto de abscissa  $\pi$ , precisamente o zero da expressão do modo 2.

O mesmo procedimento poderá ser realizado para o modo 5, obtendo:

$$P_{transf_{5max}}(\phi_p = 1 - D) = -\frac{V_1^2(1 - D)^2(1 - 2D)}{2D^2fL_{leak}} \quad (3.64)$$

$$P_{transf_{5min}}(\phi_p = D) = \frac{V_1^2(1 - D)^2(1 - 2D)}{2D^2fL_{leak}} \quad (3.65)$$

Neste caso a conclusão não é tão directa mas, atentando à fig. 3.27, percebe-se que para ambos os casos, impondo valores de  $D$  cada vez mais próximos de 0, o valor da potência tende para valores máximos.

Para os modos 1, 3, 4 e 6, apresentando uma derivada dependente de  $\phi_p$ , é possível determinar o valor de desfasamento ao qual corresponderá uma potência máxima, em função de  $D$ , resolvendo as equações respectivas indicadas em 3.55.

#### Modos 1 e 4:

$$\phi_{pmax} = D(1 - D) \quad (3.66)$$

#### Modo 3 e 6:

$$\phi_{pmin} = 1 - D(1 - D) \quad (3.67)$$

Uma vez que as expressões de potência dos modos são apenas válidas dentro dos limites referidos em 3.52, é necessário garantir que os valores obtidos para  $\phi_p$  a que correspondem as potências máximas e mínimas, de cada modo, se encontram dentro de tais intervalos:

**Modo 1:**

$$0 < \phi_p < D \implies 0 < D(1-D) < D \implies \boxed{0 < D < 1} \quad (3.68)$$

**Modo 3:**

$$\begin{aligned} 1-D < \phi_p < 1 &\implies 1-D < 1-D(1-D) < 1 \iff \\ 0 < D(1-D) < D &\implies \boxed{0 < D < 1} \end{aligned} \quad (3.69)$$

**Modo 4:**

$$0 < \phi_p < 1-D \implies 0 < D(1-D) < 1-D \implies \boxed{0 < D < 1} \quad (3.70)$$

**Modo 6:**

$$\begin{aligned} D < \phi_p < 1 &\implies D < 1-D(1-D) < 1 \iff \\ 0 < D(1-D) < 1-D &\implies \boxed{0 < D < 1} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Confirma-se assim que todos os valores obtidos para  $\phi_p$  se encontram dentro dos intervalos correspondentes ao modo associado, para qualquer valor de  $D$  dentro do intervalo originalmente considerado de  $]0, 1[$ .

Nota: será necessário salvaguardar, obviamente, que o valor de  $D$  escolhido se aplica ao modo em questão, dependendo se está acima ou abaixo de 0.5.

Substituindo os valores de  $\phi_p$  obtidos nas expressões de potência indicadas em 3.52:

**Modos 1 e 4:**

$$P_{transf_{1/4}}(\phi_p = D(1-D)) = \frac{V_1^2(1-D)^2}{2fL_{leak}} \quad (3.72)$$

**Modos 3 e 6:**

$$P_{transf_{3/6}}(\phi_p = 1-D(1-D)) = -\frac{V_1^2(1-D)^2}{2fL_{leak}} \quad (3.73)$$

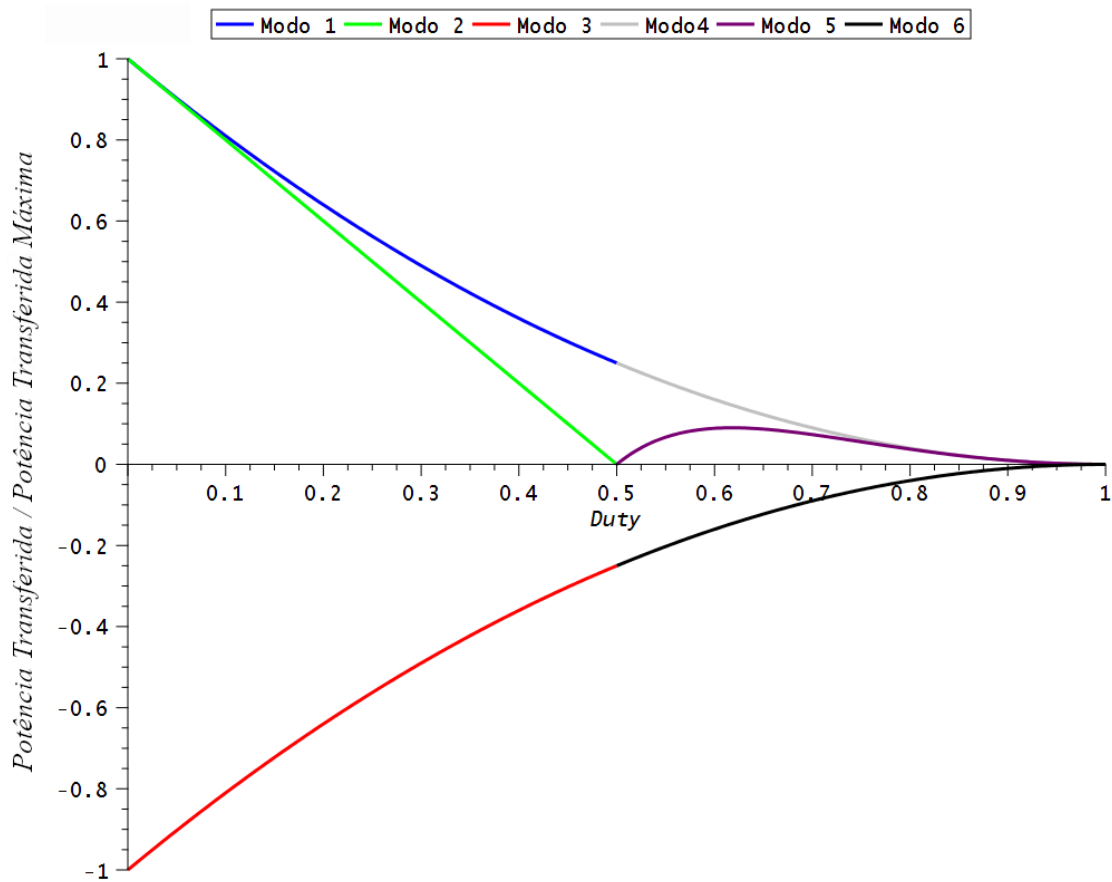


Figura 3.27: Gráfico comparativo das expressões de potência máxima para os vários modos

A partir do gráfico acima torna-se mais fácil concluir sobre os modos (logo, as condições) que garantem maiores valores de potência transferida: uma vez mais, é possível perceber que menores valores de *duty-cycle* asseguram potências mais elevadas já que os modos 1, 2 e 3 apresentam valores (em módulo) bem superiores aos restantes. Mais ainda, detecta-se uma convergência dos modos referidos em torno do máximo analítico absoluto (em módulo) de potência, em  $D = 0$ . Contudo, uma vez que esse ponto não fará sentido num contexto prático, analisando o gráfico para valores de  $D \in ]0, 0.5[$ , verifica-se que os modos 1 e 3 serão os que asseguram maiores valores de potência, de forma simétrica em relação ao eixo de  $D$  - Modo 1 para potência transferida no sentido positivo (definido como da fonte  $V_1$  para  $V_2$ ) e o Modo 2 para o sentido contrário.

Para efeitos de referência, o máximo absoluto, calculado para  $D = 0$  e  $\phi_p = 0$ , utilizado como factor de normalização dos gráficos apresentados acima, é dado por:

$$P_{transf\_max} = \frac{V_1^2}{2fL_{leak}} \quad (3.74)$$

### 3.2.4 Valor eficaz da corrente no transformador

Tendo sido determinadas as expressões que definem a operação do conversor, será interessante determinar outras relações do sistema, dependentes das variáveis de controlo. Uma relação impor-

tante será o do valor eficaz da corrente  $i_{L\sigma}$  já que possibilitará elaborar uma estimativa de perdas no conversor [11]. Esta informação será também interessante do ponto de vista da implementação do circuito do conversor, nomeadamente para o *design* ou escolha do transformador a utilizar e selecção dos interruptores.

De uma forma genérica, o valor eficaz de uma corrente é dado por:

$$i_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (3.75)$$

Na secção 3.2.1 concluiu-se que a corrente no transformador é definida por 6 troços, pelo que a expressão que define o seu valor eficaz resultará também numa função definida por 6 troços. Aplicando a expressão 3.75 a cada modo obteve-se as seguintes funções:

$$i_{L\sigma RMS} = \begin{cases} \frac{V_1 \phi_p}{3fL_{leak}D} \cdot \sqrt{3(3D - 3D^2 - \phi_p)} & \text{Modo 1} \\ \frac{V_1}{3fL_{leak}D} \cdot \sqrt{3(3\phi_p - 3\phi_p^2 - D)} & \text{Modo 2} \\ \frac{V_1(1 - \phi_p)}{3fL_{leak}D} \cdot \sqrt{3(3D - 3D^2 - (1 - \phi_p))} & \text{Modo 3} \\ \frac{V_1 \phi_p}{3fL_{leak}D} \cdot \sqrt{3(3D - 3D^2 - \phi_p)} & \text{Modo 4} \\ \frac{V_1(1 - D)}{3fL_{leak}D} \cdot \sqrt{3(3\phi_p - 3\phi_p^2 - (1 - D))} & \text{Modo 5} \\ \frac{V_1(1 - \phi_p)}{3fL_{leak}D} \cdot \sqrt{3(3D - 3D^2 - (1 - \phi_p))} & \text{Modo 6} \end{cases} \quad (3.76)$$

Representando graficamente as seis expressões:

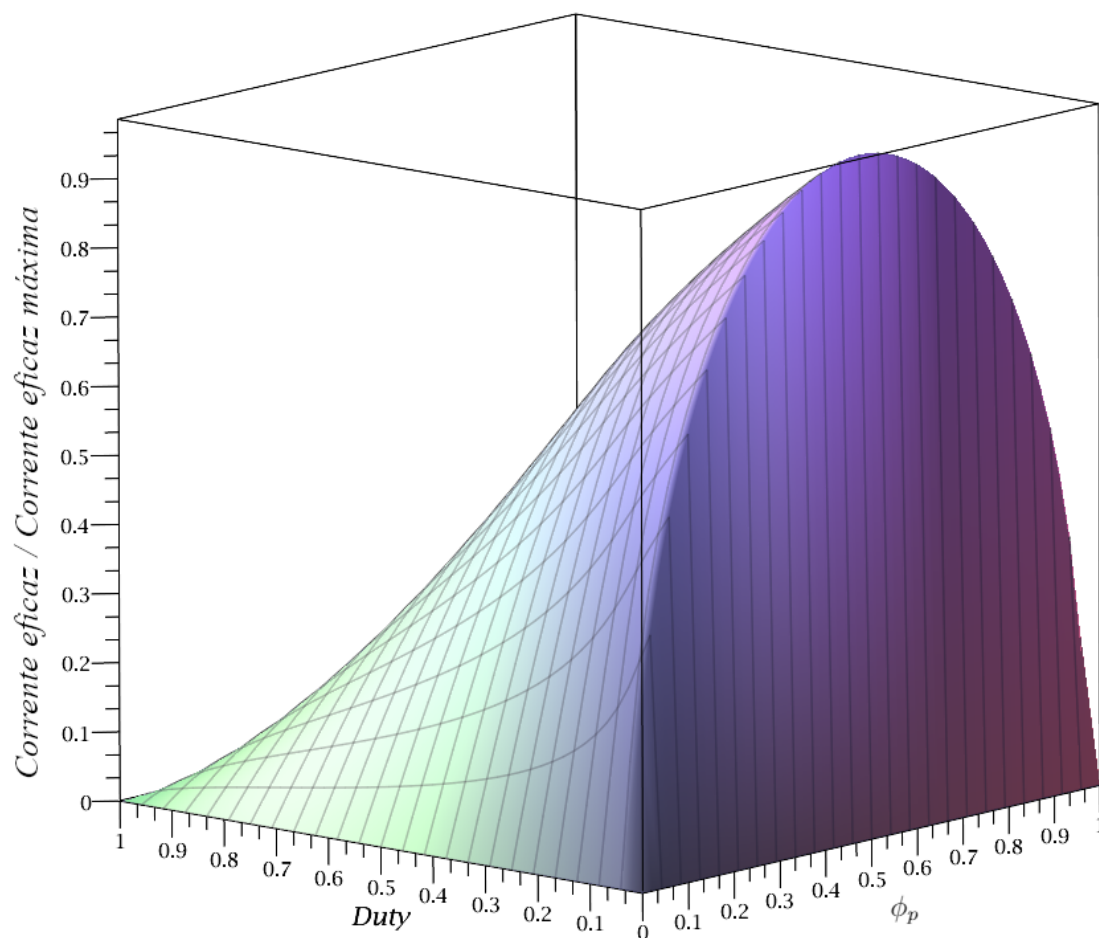


Figura 3.28: Gráfico 3D da função da corrente eficaz no transformador, em função de  $D$  e  $\phi_p$

Como é possível observar pelo gráfico, à medida que se varia  $D$ , a forma da dependência do valor de corrente eficaz em relação a  $\phi_p$  mantém-se constante (parábola), sendo que, de uma forma genérica, a magnitude da corrente vai diminuindo com o aumento do *duty-cycle*.

De forma análoga à análise da potência transferida, de seguida apresenta-se a representação gráfica das expressões obtidas, com um exemplo para uma situação de  $D < 50\%$ ,  $D = 50\%$  e  $D > 50\%$

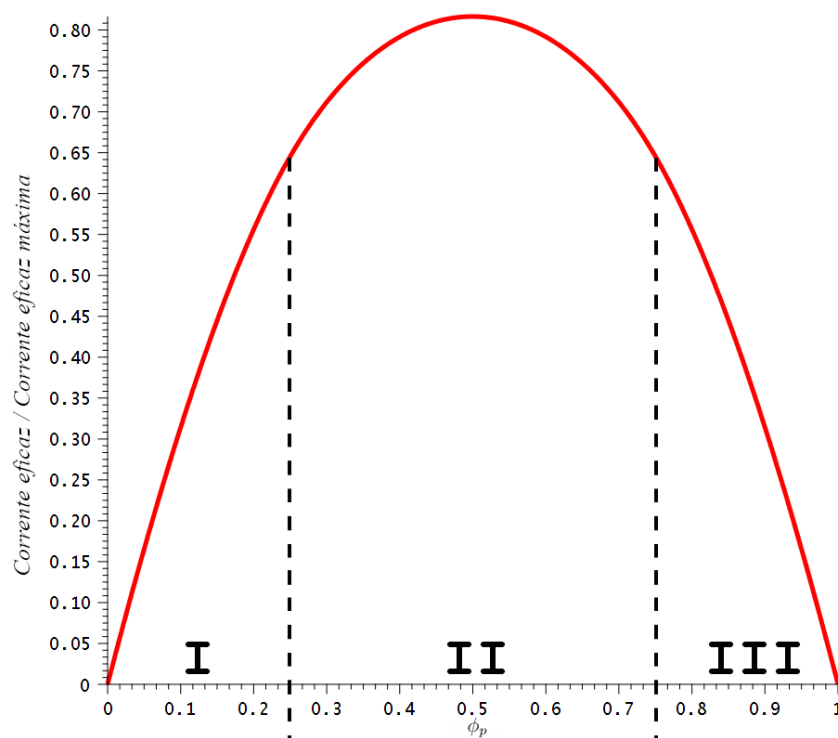


Figura 3.29: Gráfico da função da corrente eficaz no transformador, em função de  $\phi_p$ , para  $D = 25\%$

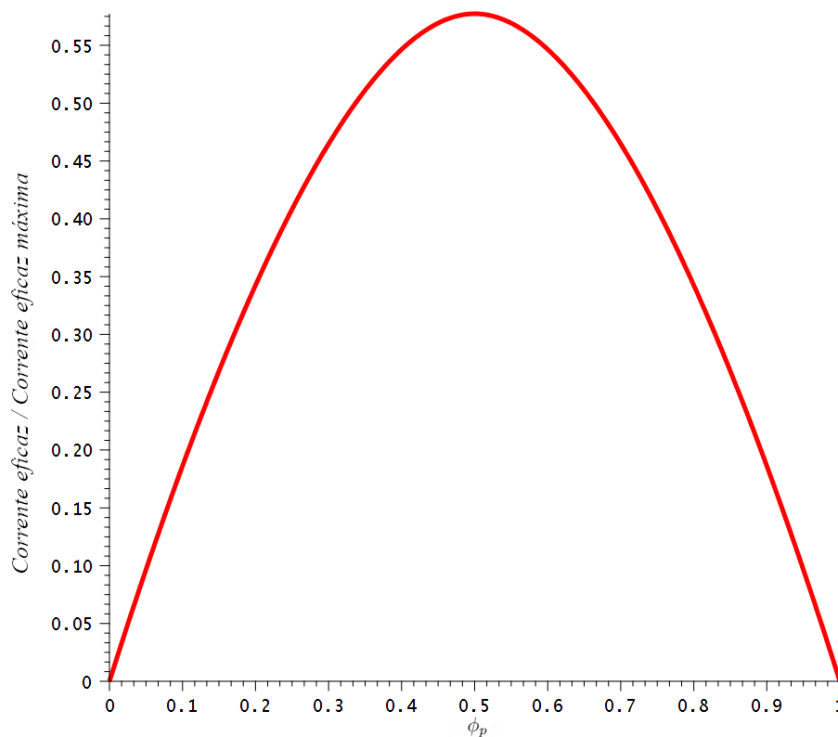


Figura 3.30: Gráfico da função da corrente eficaz no transformador, em função de  $\phi_p$ , para  $D = 50\%$

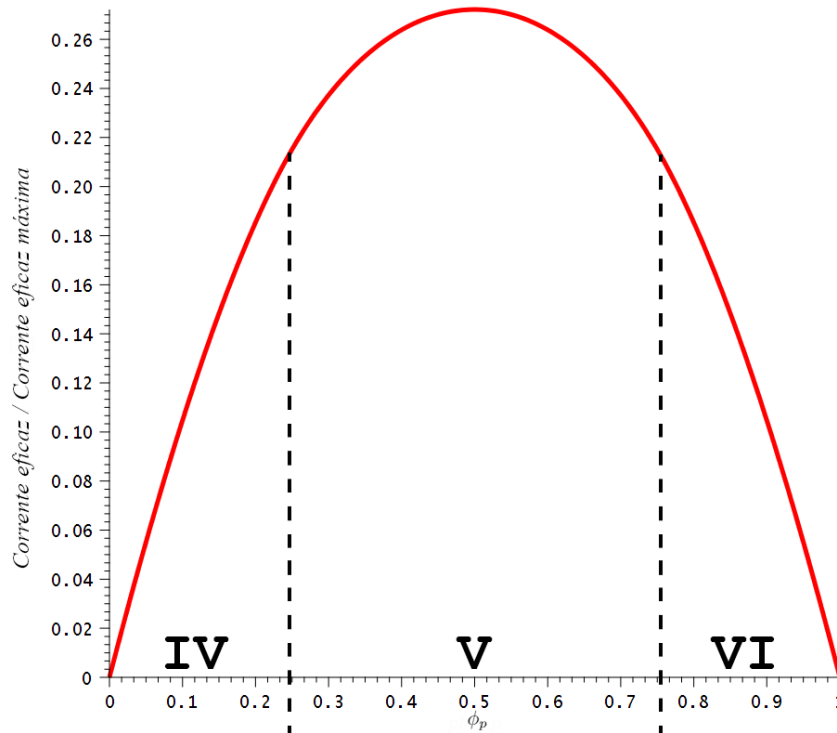


Figura 3.31: Gráfico da função da corrente eficaz no transformador, em função de  $\phi_p$ , para  $D = 75\%$

Tal como no caso da potência transferida, também o valor eficaz da corrente que atravessa o transformador apresenta valores superiores para valores de  $D$  reduzidos. Por outro lado, para um *duty-cycle* fixo, o máximo de  $i_{L\sigma_{RMS}}$  é sempre garantido por um  $\phi_p = 50\%$ , ou seja,  $180^\circ$  de desfasamento entre os sinais de controlo dos dois braços.

O valor de base de corrente utilizado para a normalização dos gráficos anteriores foi escolhido como sendo o máximo absoluto do valor eficaz, resultante da situação em que  $D = 0$  e  $\phi_p = 50\%$ , dado por:

$$i_{L\sigma_{RMSmax}} = \frac{V_1}{2fL_{leak}} \quad (3.77)$$

### 3.2.5 Formas de onda de $iL_1$ e $iL_2$

Ao obter-se a expressão que define a transferência de potência do conversor é possível agora determinar também as formas de onda nas bobinas associadas às fontes  $V_1$  e  $V_2$ . Partindo do modelo indicado na secção 3.1.4 e da eq.3.19, conclui-se que:

$$P_{1med} = V_{1med} iL_{1med} = P_{transf} \Leftrightarrow iL_{1med} = \frac{P_{transf}}{V_{1med}} \quad (3.78)$$



e, de maneira semelhante, no lado secundário virá:

$$P_{2_{med}} = V_{2_{med}} iL_{2_{med}} = -P_{transf} \Leftrightarrow iL_{2_{med}} = -\frac{P_{transf}}{V_{2_{med}}} \quad (3.79)$$

A partir daqui, seguindo passos semelhantes aos que foram efectuados para a determinação da expressão da corrente no transformador, tendo em conta a definição necessária da eq.3.1 e as relações 3.3 e 3.5:

$$VL_1 = \begin{cases} \frac{-V_1(1-D)}{D} & S1 \text{ ligado} \\ V_1 & S2 \text{ ligado} \end{cases} \quad (3.80)$$

Tendo em conta a expressão 3.21, é possível obter a função que define o comportamento da corrente  $iL_1$  como:

$$iL_1 = \begin{cases} \frac{-V_1(1-D)}{\omega DL_1} \cdot \theta + iL_1(0) & 0 < \theta < 2\pi D \\ \frac{V_1}{\omega L_1} \cdot (\theta - 2\pi D) + iL_1(2\pi D) & 2\pi D < \theta < 2\pi \end{cases} \quad (3.81)$$

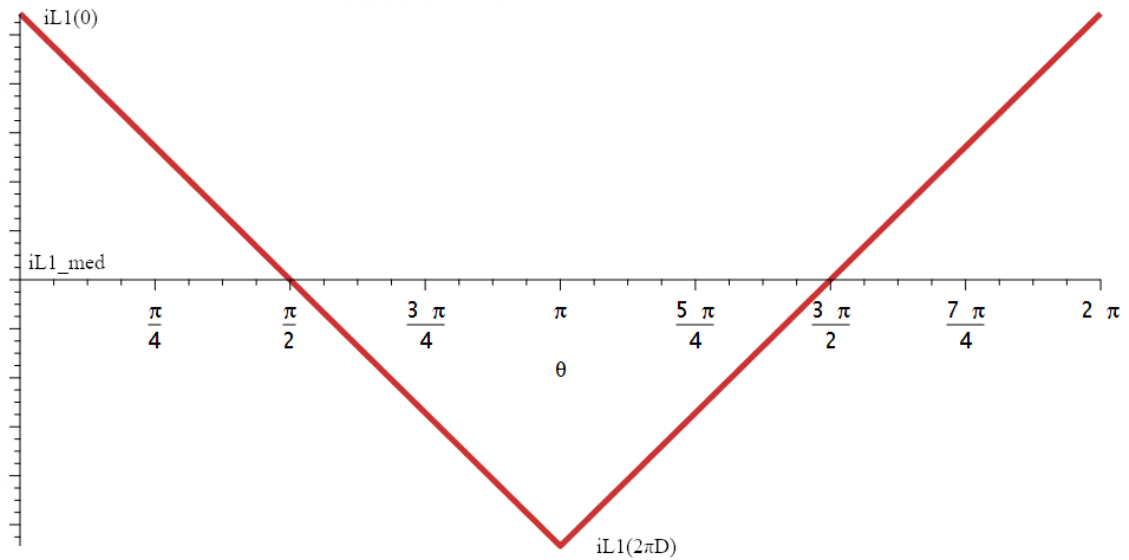


Figura 3.32: Representação genérica da forma de onda da corrente em  $L_1$

Neste caso, o "problema" do valor inicial é resolvido tendo em conta que o valor médio da corrente deverá respeitar a eq.3.78 e, atentando na fig.3.32, verificando que as seguintes relações podem ser inferidas:

$$\begin{aligned}
iL_1(2\pi D) &= \frac{-V_1(1-D)}{\omega DL_1} \cdot (2\pi D) + iL_1(0) \Leftrightarrow \\
iL_1(0) - iL_1(2\pi D) &= \frac{V_1(1-D)}{\omega L_1} \cdot (2\pi) = \Delta iL_1
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{cases} iL_1(0) - \frac{\Delta iL_1}{2} = iL_{1med} \Leftrightarrow iL_1(0) = iL_{1med} + \frac{\Delta iL_1}{2} \\ iL_1(2\pi D) + \frac{\Delta iL_1}{2} = iL_{1med} \Leftrightarrow iL_1(2\pi D) = iL_{1med} - \frac{\Delta iL_1}{2} \end{cases} \tag{3.83}$$

Sendo que  $iL_{1med}$  é determinado pela eq.3.78, definindo um valor para a potência transferida, a obtenção do seu valor é trivial. De igual modo,  $\Delta iL_1$  depende de valores conhecidos e portanto a determinação dos valores iniciais segundo as equações em 3.83 torna-se simples.

Lógica semelhante poderá ser seguida para a corrente na bobina do lado secundário, chegando a conclusões em quase tudo iguais, com exceção das diferenças introduzidas pelo atraso de fase em relação ao primário:

$$VL_2 = \begin{cases} \frac{-V_2(1-D)}{D} & S3 \text{ ligado} \\ V_2 & S4 \text{ ligado} \end{cases} \tag{3.84}$$

$$iL_2 = \begin{cases} \frac{-V_2(1-D)}{\omega DL_2} \cdot (\theta - \phi) + iL_2(\phi) & \phi < \theta < 2\pi D + \phi \\ \frac{V_1}{\omega L_1} \cdot (\theta - 2\pi D) + iL_1(2\pi D) & 2\pi D + \phi < \theta < 2\pi \end{cases} \tag{3.85}$$

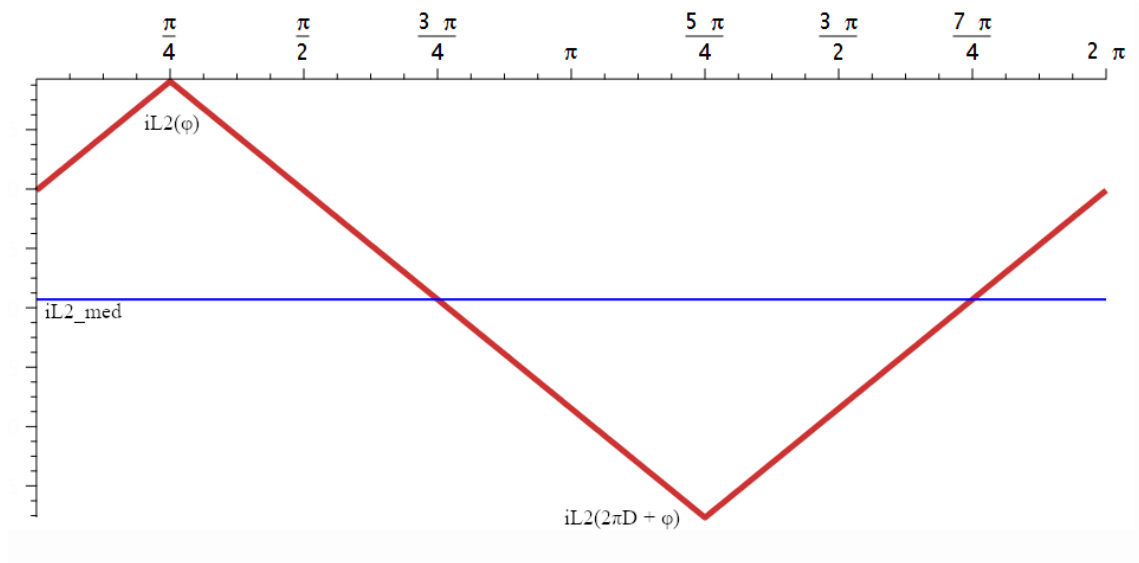


Figura 3.33: Representação genérica da forma de onda da corrente em  $L_2$

$$\begin{cases} iL_2(\phi) - \frac{\Delta iL_2}{2} = iL_{2\_med} \Leftrightarrow iL_2(\phi) = iL_{2\_med} + \frac{\Delta iL_2}{2} \\ iL_2(2\pi D + \phi) + \frac{\Delta iL_2}{2} = iL_{2\_med} \Leftrightarrow iL_2(2\pi D + \phi) = iL_{2\_med} - \frac{\Delta iL_2}{2} \end{cases} \quad (3.86)$$

Com

$$\Delta iL_2 = \frac{V_2(1-D)}{\omega L_2} \cdot (2\pi) \quad (3.87)$$

Por fim, para obter as formas de onda de  $iL_1$  e  $iL_2$  para todos os modos, seria necessário avaliar as expressões apresentadas acima, atendendo aos valores de  $D$  e  $\phi$  e ao valor de potência transferida resultante, já que este irá definir o valor médio das correntes analisadas nesta secção. Posto isto e uma vez que a forma de onda de cada corrente será sempre semelhante às que foram já apresentadas - triangular "deformada" -, optou-se por omitir a demonstração de exemplos.



## Capítulo 4

# Modelação do conversor

A análise funcional efectuada nas secções anteriores pode ser enquadrada essencialmente numa perspectiva de operação em "malha aberta" do conversor. Em circunstâncias ideais este tipo de operação seria suficiente: seria possível determinar analiticamente os valores de  $D$  e  $\phi_p$  a impor, para uma determinada potência desejada e com base nos parâmetros do circuito. Na prática, contudo, é sabido que a operação em contexto real deverá ser controlada, já que normalmente os modelos utilizados, por muito detalhados que sejam, nunca conseguem ser uma representação completamente exacta do comportamento real de um sistema. Outro problema que implicará a operação controlada é a possibilidade do sistema estar sujeito a perturbações (aleatórias) nos seus sinais [16]. Estes dois aspectos significarão erros entre a análise teórica/modelação e a operação real. Contextualizando no conversor aqui apresentado, pretendendo-se impor um ponto de funcionamento específico - i.e. se se pretender manter constante uma ou mais grandezas na "saída", por exemplo - tal é conseguido ajustando as variáveis de controlo -  $D$  e  $\phi_p$  -, com base no erro entre as referências e o seu valor real. Daqui surge o termo malha fechada ou realimentação. Mais ainda, o ajuste fino das variáveis de controlo poderá ser feito também para assegurar a estabilidade do sistema, assim como para garantir dadas características de evolução temporal, como *overshoot*, *settling time*, entre outros[2].

Desta forma, torna-se importantíssimo desenvolver uma estrutura realimentada de operação do conversor, tendo por base um controlador. Não obstante, para o desenvolvimento e teste deste bloco será necessário determinar um modelo dinâmico representativo do sistema original. De entre os vários tipos de modelos [17] existentes, torna-se evidente que, neste caso em particular, se deverá optar por uma representação matemática das relações entre entradas, variáveis de controlo e saídas.

Ora um aspecto a ter em conta aquando da modelação de um sistema é o nível de detalhe desejado que, naturalmente, se repercute na complexidade do modelo obtido. Geralmente, a modelação detalhada de fenómenos físicos significa expressões matemáticas complexas, muitas vezes não lineares. Contudo, é prática comum em engenharia focar-se nos comportamentos dominantes de um sistema, ignorando fenómenos mais insignificantes (normalmente a altas frequências). Isto permite obter uma representação aproximada do seu comportamento, muito útil, por exemplo,

para o desenvolvimento de um módulo de controlo. A complexidade do modelo a desenvolver deverá então estar de acordo com o objectivo da modelação.

Uma vez que, tal como já foi referido, no caso aqui abordado, a principal razão para a derivação de um modelo do conversor está relacionada com o desenvolvimento de um sistema controlado, optou-se por procurar implementar um modelo em espaço de estados do conversor.

De uma forma simplificada, o diagrama de blocos representativo do sistema final será semelhante ao apresentado de seguida.

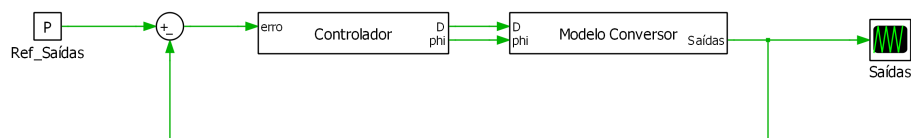


Figura 4.1: Diagrama de blocos simplificado do sistema em malha fechada

Com base na literatura encontrada [16] e [17], a derivação de um modelo de um sistema real pode ser efectuada de duas maneiras:

- Determinar um conjunto de expressões matemáticas a partir de leis ou princípios físicos existentes - **Modelação física**;
- Encontrar um modelo matemático aproximado do sistema, com base em informação retirada da observação de dados do sistema real - **Identificação do Sistema**.

No caso do trabalho aqui apresentado, optou-se pelo primeiro método dado estarem mais que estudadas e estabelecidas as relações matemáticas que descrevem os fenómenos físicos associados aos componentes do conversor. Por outro lado, dado que a segunda opção implicava o acesso a uma implementação real do conversor e tal fugiria um pouco ao objectivo deste trabalho, a escolha da Modelação Física tornou-se óbvia.

## 4.1 Objecto de Modelação

Além das simplificações a que se recorreu anteriormente - como consideração de interruptores ideais, sem resistência associada e tempos de comutação instantâneos, ou considerando o transformador ideal, à excepção da sua indutância de fugas -, assumindo que  $V_1 = V_2$ , todas as relações derivadas na secção 3.1.4 mantêm-se válidas. Neste caso em particular, a razão entre o número de espiras do transformador deverá ser unitária, tendo em conta a condição 3.16, pelo que o transformador poderá ser removido sem perda de validade das expressões anteriores, resultando assim no seguinte conversor simplificado:

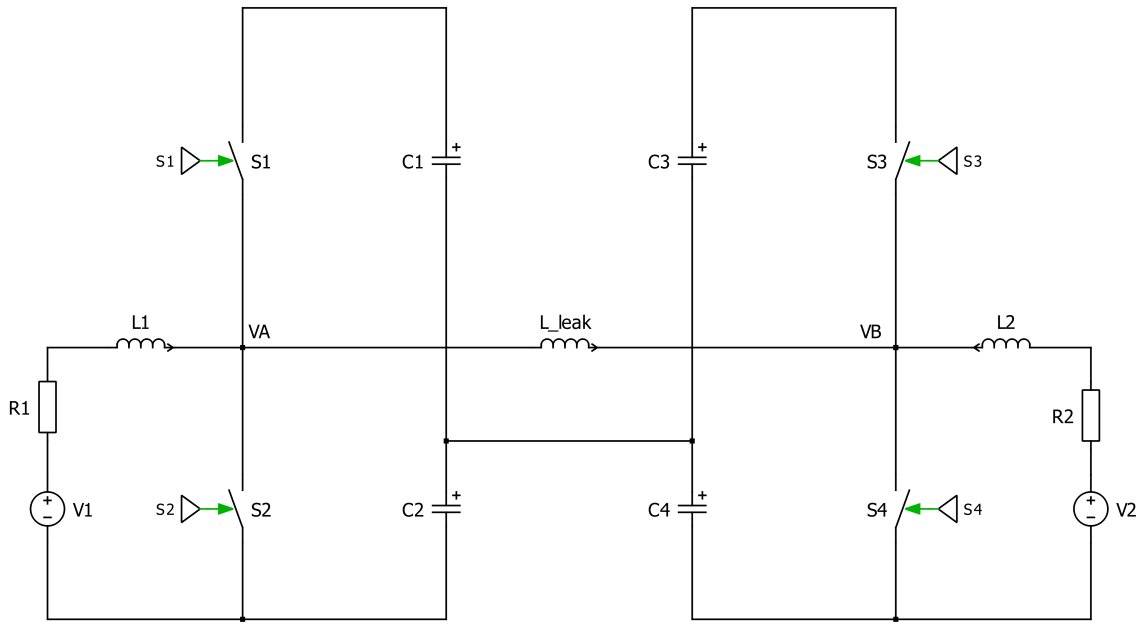


Figura 4.2: Modelo Simplificado do Conversor

## 4.2 Modelo espaço de estados

A justificação pela opção por este tipo de modelo prende-se com a simplicidade na organização de equações diferenciais na forma matricial e também pela facilidade de conversão para o domínio de Laplace (importante na análise e desenvolvimento do controlo). A modelação em espaço de estados apresentará a seguinte estrutura tradicional:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (4.1)$$

As equações diferenciais que definem o sistema foram obtidas através da análise de circuitos e tendo por base as seguintes relações entre tensão e corrente em bobinas e condensadores:

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \implies \frac{di_L}{d\theta} = \frac{V_L}{\omega L} \quad (4.2)$$

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} \implies \frac{dV_C}{d\theta} = \frac{i_C}{\omega C} \quad (4.3)$$

Nota: A derivadas foram consideradas em relação a radianos por concordância com o que foi seguido durante a secção de análise do conversor.

As variáveis de estado (pertencentes ao vector de estados) foram definidas inicialmente como:

$$X = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L\sigma} \\ V_{C1} \\ V_{C2} \\ V_{C3} \\ V_{C4} \end{bmatrix}$$

Como forma de simplificação adicional do processo de modelação, considerou-se apenas como entradas do sistema  $V_1$  e  $V_2$ , pelo que o *duty-cycle* e o *phase-shift* foram assumidos parâmetros constantes do sistema:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

A simplicidade na obtenção das equações 4.2 ou 4.3, dependendo da variável de estado, é evidente para um circuito estático. No caso deste conversor, porém, existirão sempre 4 configurações distintas do circuito, durante o período de comutação dos interruptores. Estas serão resultantes das combinações de estado dos 4 interruptores. Deste modo, o sistema pode ser definido como descontínuo ou de estrutura variável[18].

Isto significa que, na verdade, a abordagem tradicional da modelação em espaço de estados não poderá ser aplicada directamente já que o sistema será variante no tempo - logo as equações diferenciais que o definem também o serão. Na prática isto quererá dizer que as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  não serão apenas constituídas por valores constantes mas sim por expressões dependentes do tempo.

Face a estas dificuldades, inerentes a um conversor de operação relativamente complexa, foi necessário recorrer à técnica de *Averaging*, de forma a obter um único conjunto de expressões representativas da operação num período completo de comutação. Esta transformação do modelo num sistema contínuo possibilitará depois a aplicação de técnicas tradicionais de controlo.

Uma vez que cada modo de funcionamento - combinação de  $D$  e  $\phi_p$  - apresentará sequências distintas (com intervalos de duração distintos) das quatro configurações possíveis do circuito do conversor, o método apresentado deveria ser repetido para cada um dos 6 modos de funcionamento.



### 4.3 Modelo de Média

A técnica de *Averaging* passa por, tal como o nome indica, aplicar uma média (pesada) às equações diferenciais que definem o circuito, num período. Associando as equações à organização matricial da representação em espaço de estados, no final obter-se-á um único conjunto de matrizes (representando um único conjunto de expressões), que irá modelar o comportamento do sistema de uma forma simplificada e contínua, naturalmente com limitações de precisão: o modelo obtido permitirá visualizar a evolução "filtrada" do sistema, uma vez que apenas representará o valor médio instantâneo das variáveis do conversor. Este tipo de modelação é vulgarmente denominada de "pequeno sinal", pois foca-se apenas nas formas de onda de baixa frequência, ignorando as variações rápidas - a altas frequências. Segundo [18] é definida matematicamente como:

$$\dot{X}_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\theta)X_{med} + B(\theta)U_{med} d\theta \quad (4.4)$$

#### 4.3.1 Matrizes representativas de cada configuração

O primeiro passo para a modelação seria a análise individual de cada uma das 4 configurações possíveis do conversor, obtendo as equações diferenciais relacionadas com cada elemento indutivo e capacitivo do sistema - na forma apresentada em 4.2 e 4.3 -, posteriormente "traduzindo-as" em linguagem matricial.

Na verdade esta análise poderá ser feita de forma quase independente para cada lado do conversor, para as duas combinações possíveis de condução dos interruptores desse mesmo lado. A única exceção é a análise da expressão associada à indutância de fugas do transformador. Contudo, como será explicado numa secção seguinte, as equações diferenciais associadas a este elemento não serão relevantes para esta análise, pelo que não serão aqui consideradas.

De seguida serão apresentados os circuitos equivalentes, relativos a cada lado, para as 4 configurações possíveis dos interruptores e as respectivas equações resultantes, seguindo a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\dot{L}_1 = \frac{V_{L1}}{\omega L_1} \\ i\dot{L}_2 = \frac{V_{L2}}{\omega L_2} \\ \dot{V}_{C1} = \frac{i_{C1}}{\omega C_1} \\ \dot{V}_{C2} = \frac{i_{C2}}{\omega C_2} \\ \dot{V}_{C3} = \frac{i_{C3}}{\omega C_3} \\ \dot{V}_{C4} = \frac{i_{C4}}{\omega C_4} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

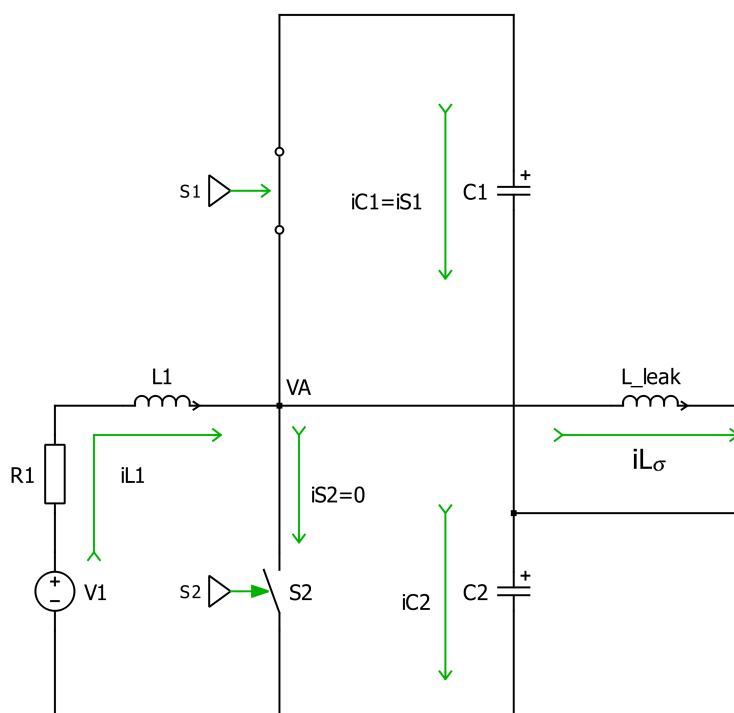
**S1 ligado**

Figura 4.3: Equivalente do lado primário para S1 ligado

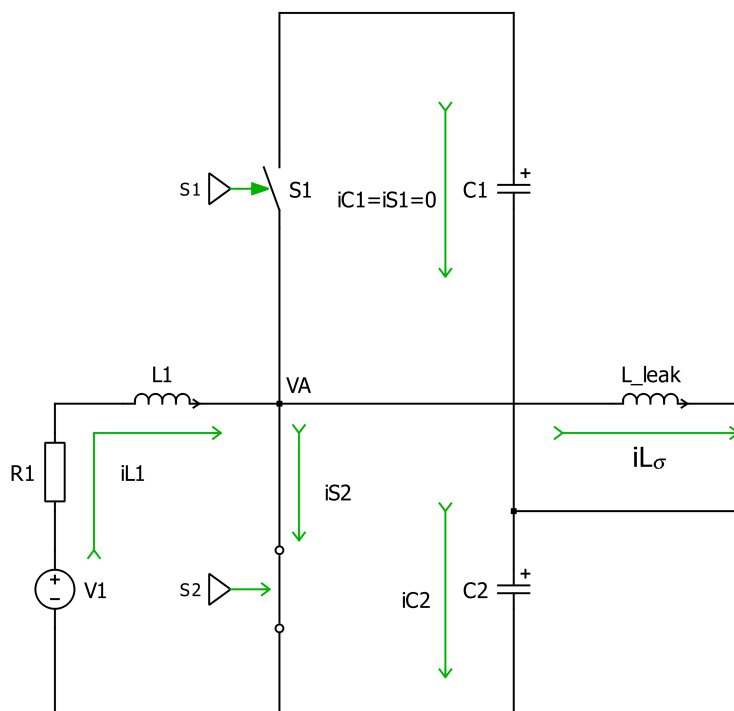
**S2 ligado**

Figura 4.4: Equivalente do lado primário para S2 ligado

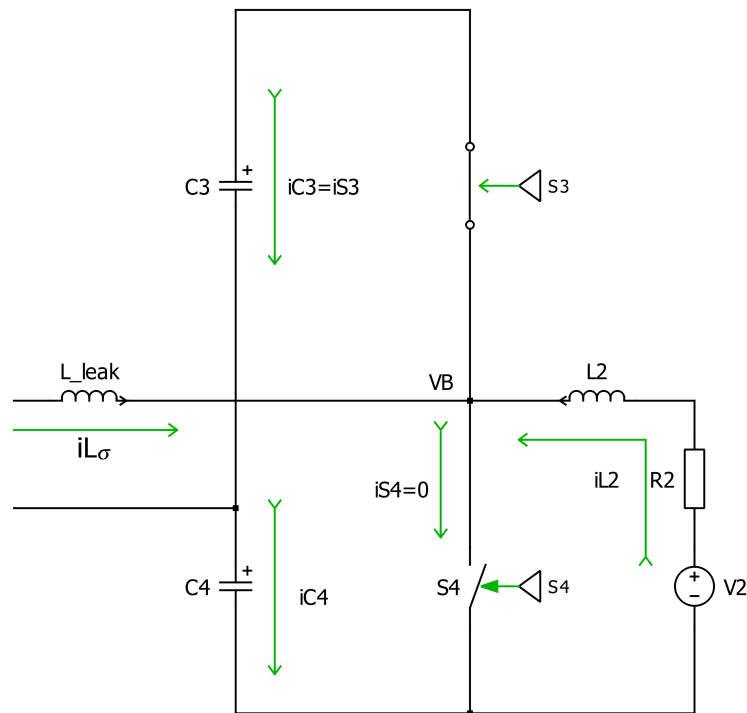
**S3 ligado**

Figura 4.5: Equivalente do lado secundário para S3 ligado

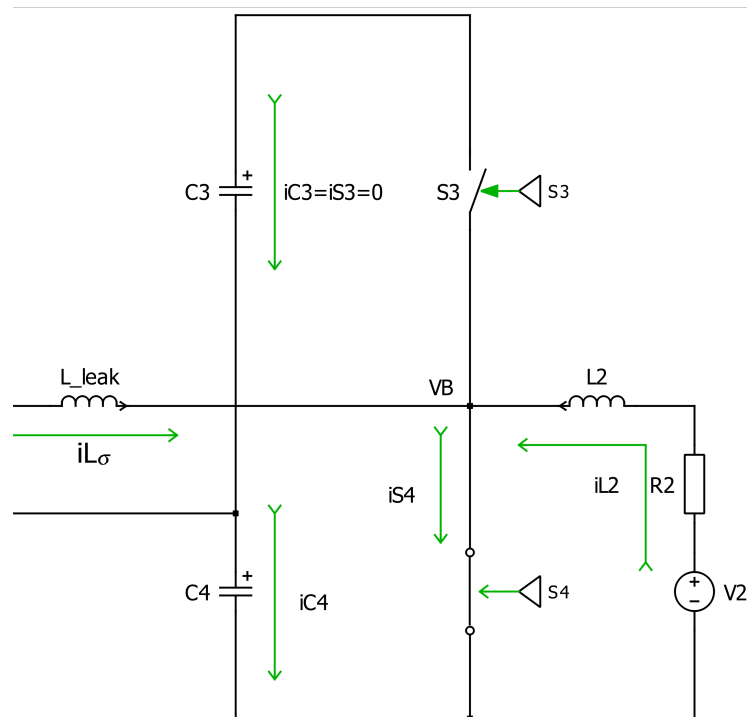
**S4 ligado**

Figura 4.6: Equivalente do lado secundário para S4 ligado

A representação das equações diferenciais obtidas para as quatro configurações possíveis pode ser resumida através de funções de comutação. Desta forma, uma única equação representará as dinâmicas resultantes de dois estados possíveis (para cada lado). Definindo  $S_p$  e  $S_s$  como as funções de comutação associadas ao lado primário e secundário, respectivamente, como:

$$S_p = \begin{cases} 1 & \text{para } S1 \text{ ligado} \\ 0 & \text{para } S2 \text{ ligado} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$S_s = \begin{cases} 1 & \text{para } S3 \text{ ligado} \\ 0 & \text{para } S4 \text{ ligado} \end{cases} \quad (4.7)$$

A representação toma a forma de:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{L1} = \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - (V_{C1} + V_{C2}) S_p}{\omega L_1} \\ i_{L2} = \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - (V_{C3} + V_{C4}) S_s}{\omega L_2} \\ \dot{V}_{C1} = \frac{(i_{L1} - i_{L\sigma}) S_p}{\omega C_1} \\ \dot{V}_{C2} = \frac{i_{L1} S_p + i_{L\sigma} (1 - S_p)}{\omega C_2} \\ \dot{V}_{C3} = \frac{(i_{L2} + i_{L\sigma}) S_s}{\omega C_3} \\ \dot{V}_{C4} = \frac{i_{L2} S_s - i_{L\sigma} (1 - S_s)}{\omega C_4} \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Seguindo a estrutura tradicional do espaço de estados, o conjunto de expressões anteriores poderá ser representado na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L1} \\ \dot{i}_{L2} \\ \dot{i}_{L\sigma} \\ \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \\ \dot{V}_{C3} \\ \dot{V}_{C4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{\omega L_1} & 0 & 0 & -\frac{S_p}{\omega L_1} & -\frac{S_p}{\omega L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{\omega L_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{S_s}{\omega L_2} & -\frac{S_s}{\omega L_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{S_p}{\omega C_1} & 0 & -\frac{S_p}{\omega C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{S_p}{\omega C_2} & 0 & \frac{1-S_p}{\omega C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_s}{\omega C_3} & \frac{S_s}{\omega C_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_s}{\omega C_4} & -\frac{1-S_s}{\omega C_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L\sigma} \\ V_{C1} \\ V_{C2} \\ V_{C3} \\ V_{C4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega L_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo  $S_p$  e  $S_s$  pelos valores respectivos, para cada configuração, obtém-se as matrizes correspondentes. Como se percebe, a matriz associada às entradas - aqui as fontes  $V_1$  e  $V_2$  - é constante, pelo que a sua média será a própria matriz. Posto isto, daqui em diante serão apenas apresentadas as matrizes "A" referentes a cada combinação de interruptores.

$S_1$  &  $S_3$  ligados  $\longrightarrow S_p = 1$  e  $S_s = 1$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{\omega L_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega L_1} & -\frac{1}{\omega L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{\omega L_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega L_2} & -\frac{1}{\omega L_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\omega C_1} & 0 & -\frac{1}{\omega C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\omega C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega C_3} & \frac{1}{\omega C_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega C_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S_1$  &  $S_4$  ligados  $\longrightarrow S_p = 1$  e  $S_s = 0$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{\omega L_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega L_1} & -\frac{1}{\omega L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{\omega L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\omega C_1} & 0 & -\frac{1}{\omega C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\omega C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\omega C_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S_2$  &  $S_4$  ligados  $\longrightarrow S_p = 0$  e  $S_s = 0$

$$A_{24} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{\omega L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{\omega L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\omega C_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S_2$  &  $S_3$  ligados  $\longrightarrow S_p = 0$  e  $S_s = 1$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{\omega L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{\omega L_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega L_2} & -\frac{1}{\omega L_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega C_3} & \frac{1}{\omega C_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega C_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estando definidas as matrizes para cada combinação e segundo a eq.4.4, por forma a obter-se o modelo de média para cada modo dever-se-á "pesar" cada combinação pela duração de tempo em que se verifica, num período de comutação.

Todavia, antes deste passo, torna-se agora pertinente a explicação da não consideração, até ao momento, das equações diferenciais relativas a  $i_{L\sigma}$ .

### 4.3.2 Sistemas com variáveis de duas escalas de tempo

Ainda que a eq.4.4 seja aplicável a sistemas variantes no tempo, esta definição apenas é válida para situações em que todas as variáveis de estado apresentem a mesma taxa de evolução temporal. Na prática, o problema prende-se com a definição da técnica de *Averaging* que aplica uma média pesada das várias matrizes, assumindo que durante o intervalo de "peso" estas se mantêm invariantes. Sendo cada uma dessas matrizes dependentes de uma ou mais variáveis de estado que não possam ser consideradas constantes nesse intervalo, a expressão referida na eq.4.4 não poderá ser aplicada directamente.

Na literatura analisada [18], esta situação é denominada de Sistema de Duas Escalas de tempo (*Two Time Scale*), sendo feita uma separação entre as variáveis ditas "lentas" e as "rápidas", daqui em diante resumidas pelos vectores  $S$  e  $F$  (*slow* e *fast*).

Seguindo esta definição, a nova expressão representativa do sistema é a seguinte:

$$\begin{cases} \dot{S} = A_{ss}^{(i)} S + A_{sf}^{(i)} F + B_s^{(i)} U \\ \dot{F} = A_{ff}^{(i)} F + A_{fs}^{(i)} S + B_f^{(i)} U \end{cases} \quad (4.9)$$

Sendo  $i$  referente a cada configuração possível dos interruptores, para um dado modo. Tal como foi possível verificar na análise anterior, as matrizes relativas às entradas são, em todos os casos, iguais. Deste modo  $B_s$  será uma matriz constante, pelo que se abandonará o sobrescrito.

A solução apresentada para este tipo problema passa por, em primeiro lugar, determinar as expressões que definem as variáveis rápidas, em regime permanente, dependentes apenas do tempo e das variáveis lentas, resolvendo a seguinte equação:

$$\dot{F} = A_{ff}^{(i)} F + A_{fs}^{(i)} S + B_f^{(i)} U \quad (4.10)$$

Dada a diferença na "rapidez" de evolução de umas em relação às outras, a equação acima é resolvida considerando as matrizes relacionadas com as variáveis lentas como constantes, dentro do intervalo de validade das equações diferenciais das rápidas.

Deverão ser obtidas tantas expressões quanto o número de intervalos de variação das variáveis rápidas - que serão resumidas por  $F_{ss}(\theta, S)$  - e que deverão ser substituídas na eq.4.9, referente às dinâmicas das variáveis lentas. Tendo realizado estes passos, é possível aplicar a seguinte expressão de *Averaging*[18]:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{med} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{\Theta_i}^{\Theta_{i+1}} A_{ss}^{(i)} S_{med} + A_{sf}^{(i)} F_{ss}(\theta, S) + B U_{med} d\theta \iff \\ \dot{S}_{med} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{\Theta_i}^{\Theta_{i+1}} A_{med}(\theta)^{(i)} S_{med} + B U_{med} d\theta \end{aligned} \quad (4.11)$$

Será importante referir que, tal como mencionado em [18], o modelo contínuo resultante apresentará alguns inconvenientes:

- Além de ser apenas uma representação média da evolução de variáveis do sistema, no caso de *TTS*, essa descrição é limitada às variáveis ditas "lentas";
- Geralmente resulta num conjunto de expressões não lineares.

No caso concreto do conversor apresentado, como se pode verificar comparando a fig.3.12 com as fig.3.32 e fig.3.33, no mesmo período de comutação, a forma de onda da corrente na indutância de fugas é definida por quatro troços distintos, equivalentes a quatro expressões distintas, enquanto que as correntes associadas a  $L_1$  e  $L_2$  apresentarão apenas duas, tal como  $VC_1$ ,  $VC_2$ ,  $VC_3$  e  $VC_4$  - concluído através da análise das configurações possíveis de cada lado, apresentadas na secção anterior. Deste modo, é possível afirmar que  $i_{L\sigma}(\theta)$  será a única variável rápida do sistema.

As expressões que definem a evolução de  $i_{L\sigma}(\theta)$  já haviam sido determinadas na secção 3.2.1, pelo que restava agora substituir as expressões correspondentes, nas matrizes apresentadas na secção anterior e aplicar a expressão de média.

### 4.3.3 Matrizes de média do Conversor como sistema *TTS*

Partindo das matrizes  $A_{ij}$ , obtidas na secção 4.3.1, removendo a linha relativa à corrente na indutância de fugas e considerando que cada coluna com os termos associados a  $i_{L\sigma}$  representa, na verdade, a matriz  $A_{sf}^{(i)}$  (devendo também ser removida da matriz  $A_{ij}$ ), o resultado final serão as matrizes  $A_{ss}^{(i)}$ .

Aplicando a expressão dentro do integral na eq.4.11 a cada configuração  $i$  do Modo 1, obtém-se os seguintes conjuntos de expressões:

#### Modo 1

$$\dot{X}_1^T = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

Nota: Uma vez que, a partir deste momento, apenas se determinará o comportamento das variáveis lentas, voltará a assumir-se a notação  $X$  para as variáveis de estado. Por simplificação,



foi assumido que  $C_1 = C_2 = C_p$  e  $C_3 = C_4 = C_s$ , tal como referido na secção de análise funcional. O índice 1 remete ao Modo em análise. O sobrescrito  $I$  indica a configuração válida para o intervalo com o mesmo número, em referência à fig.3.11. A mesma notação será usada para os restantes casos.

$$\dot{X}_1^{II} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - 2\phi_p V_{C3} + (1 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} - \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - 2\phi_p V_{C3} + (1 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_1^{III} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} + \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_1^{IV} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D\phi_p(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_p} \\ 0 \\ -\frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D\phi_p(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

A sequência de matrizes resultantes da combinação dos interruptores apresentada, assim como os intervalos de integração considerados em baixo, têm por base a análise de funcionamento demonstrada na fig.3.4.

Avaliando agora a eq.4.11 teremos:

$$\dot{X}_{1med} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\phi \dot{X}_1^I d\theta + \int_\phi^{2\pi D} \dot{X}_1^{II} d\theta + \int_{2\pi D}^{2\pi D+\phi} \dot{X}_1^{III} d\theta + \int_{2\pi D+\phi}^{2\pi} \dot{X}_1^{IV} d\theta \right] \quad (4.12)$$

Multiplicando todas as expressões obtidas por  $\omega = 2\pi f$  (convertendo de uma escala de radianos para tempo), chega-se finalmente ao seguinte conjunto de expressões, que definem o modelo de média do conversor, para o modo 1:

$$\dot{X}_{1med} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{D(V_{C1} + V_{C2})}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{D(V_{C3} + V_{C4})}{L_2} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 1) - 2D\phi_p + \phi_p^2)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 2) + D(1 - 2\phi_p) + \phi_p^2)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 1) - 2D\phi_p + \phi_p^2)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 2) + D(1 - 2\phi_p) + \phi_p^2)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + 2D\phi_p - \phi_p^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + D - \phi_p^2)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(1 - 2\phi_p))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(1 - \phi_p) + D(2\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + 2D\phi_p - \phi_p^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + D - \phi_p^2)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(1 - 2\phi_p))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(1 - \phi_p) + D(2\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

Sendo que

$$\dot{X}_{med} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{L1med} \\ \dot{i}_{L2med} \\ \dot{V}_{C1med} \\ \dot{V}_{C2med} \\ \dot{V}_{C3med} \\ \dot{V}_{C4med} \end{bmatrix}$$

Verificamos que existe uma igualdade na evolução de  $V_{C1}$  e  $V_{C2}$  assim como entre  $V_{C3}$  e  $V_{C4}$ , assumindo que em ambos os casos o valor de capacitância é igual. A derivação da matrizes correspondentes ao modelo de média para os restantes modos é apresentada em anexo.

Tendo obtido o conjunto de expressões do modelo de média, restava agora implementá-lo num diagrama de blocos que permitisse a sua simulação e verificação.

Mais uma vez usando o *software PLECS*, foi criado o seguinte modelo:

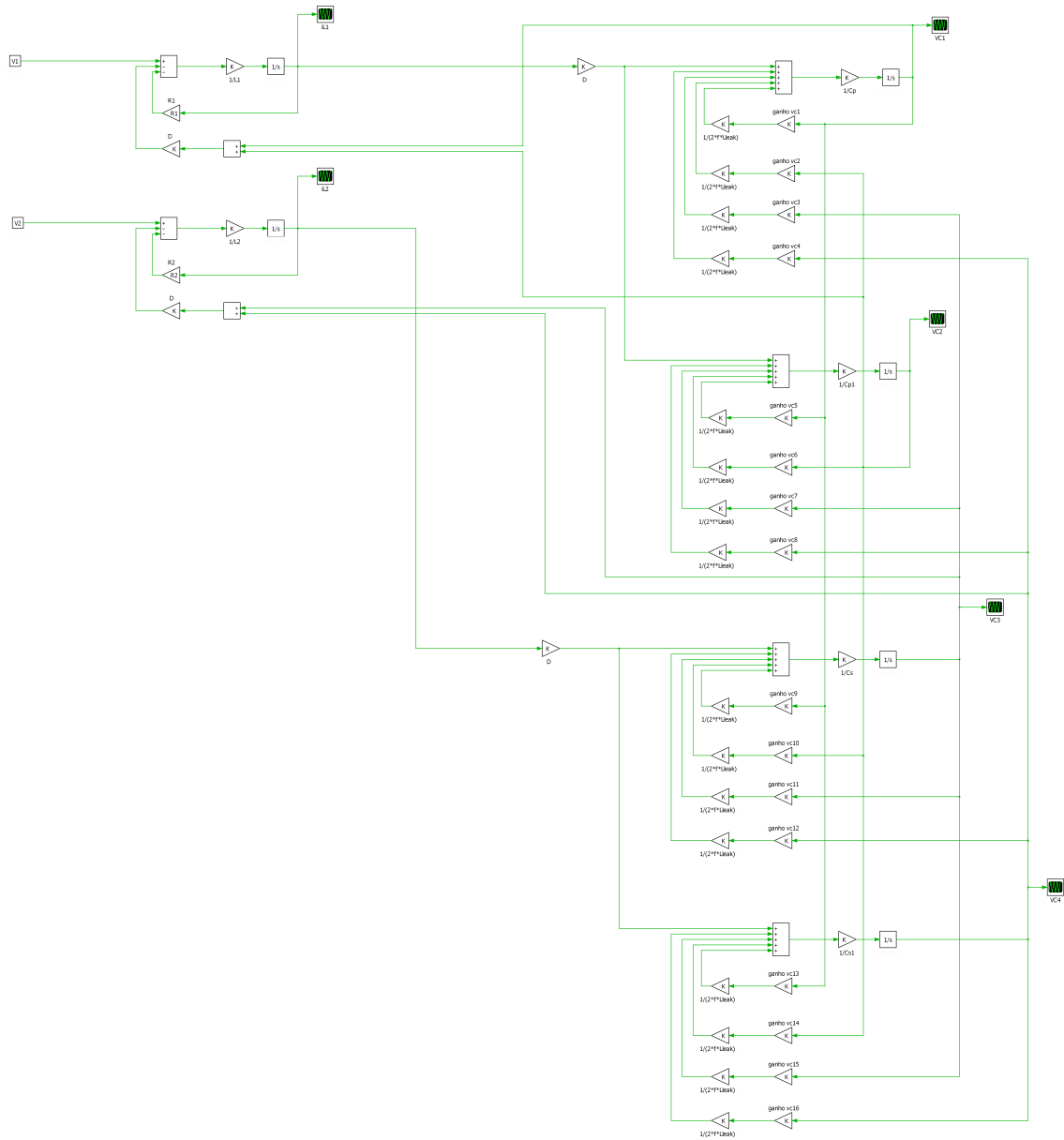


Figura 4.7: Modelo média em diagrama de blocos para o Modo 1

Para os casos das correntes  $i_{L1}$  e  $i_{L2}$  o diagrama é simples, seguindo as duas primeiras expressões do modelo. Já no caso das tensões nos condensadores, tendo a mesma estrutura, diferenciadas apenas pelo valor de capacitância (entre primário e secundário) e nos ganhos de realimentação, o diagrama, apesar de extenso, é também bastante simples dada a repetição da sua forma. Os blocos denominados "ganho vcx" referem-se às expressões dependentes de  $D$  e  $\phi_p$ , apresentadas em 4.3.3.

#### 4.3.4 Simulações do Modelo de Média

De forma a comprovar a validade do modelo obtido, de seguida são apresentados os resultados de simulação, lado-a-lado com as formas de onda equivalentes do modelo detalhado de simulação (usado em 6.1), utilizando os parâmetros indicados abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_2 = 60 \text{ V} \\ R_1 = R_2 = 30 \text{ m}\Omega \\ L_1 = L_2 = 138 \text{ }\mu\text{H} \\ L_{leak} = 4 \text{ }\mu\text{H} \\ C_p = C_s = 470 \text{ }\mu\text{F} \\ f = 20 \text{ kHz} \\ D = 25\% \\ \phi_p = 12.5\% \end{array} \right. \quad (4.13)$$

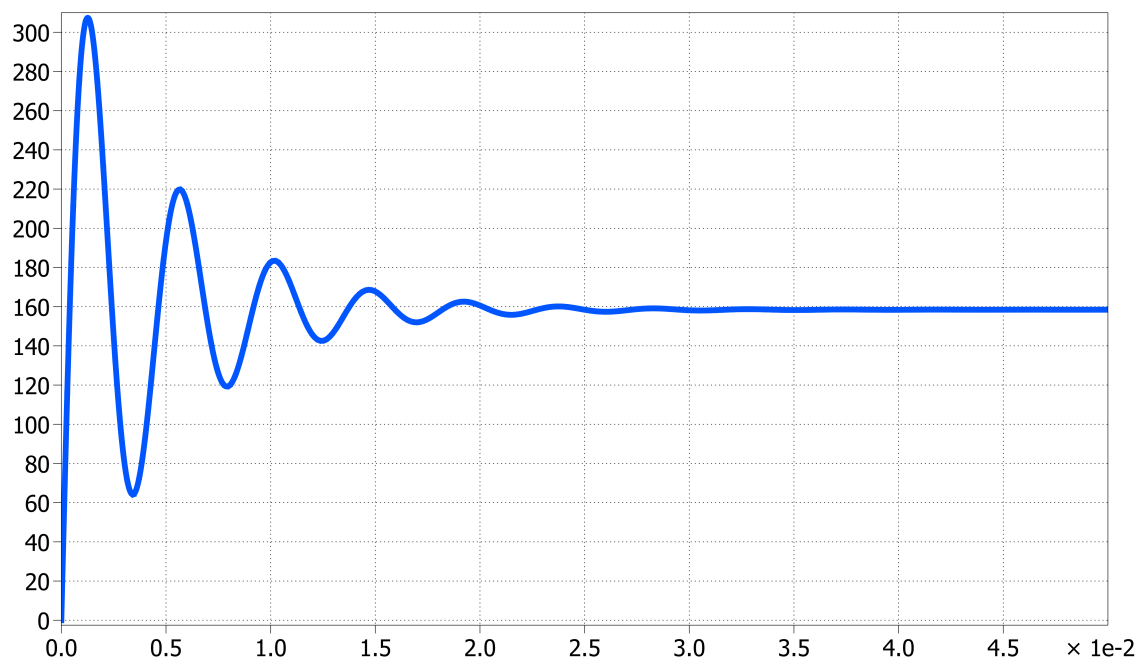
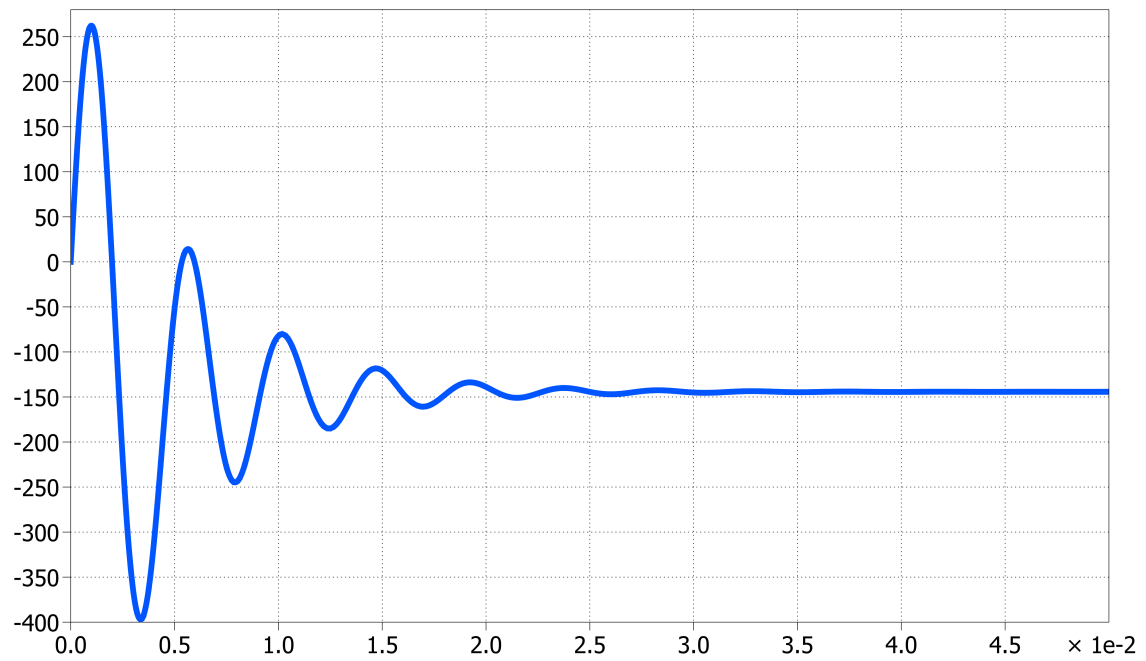
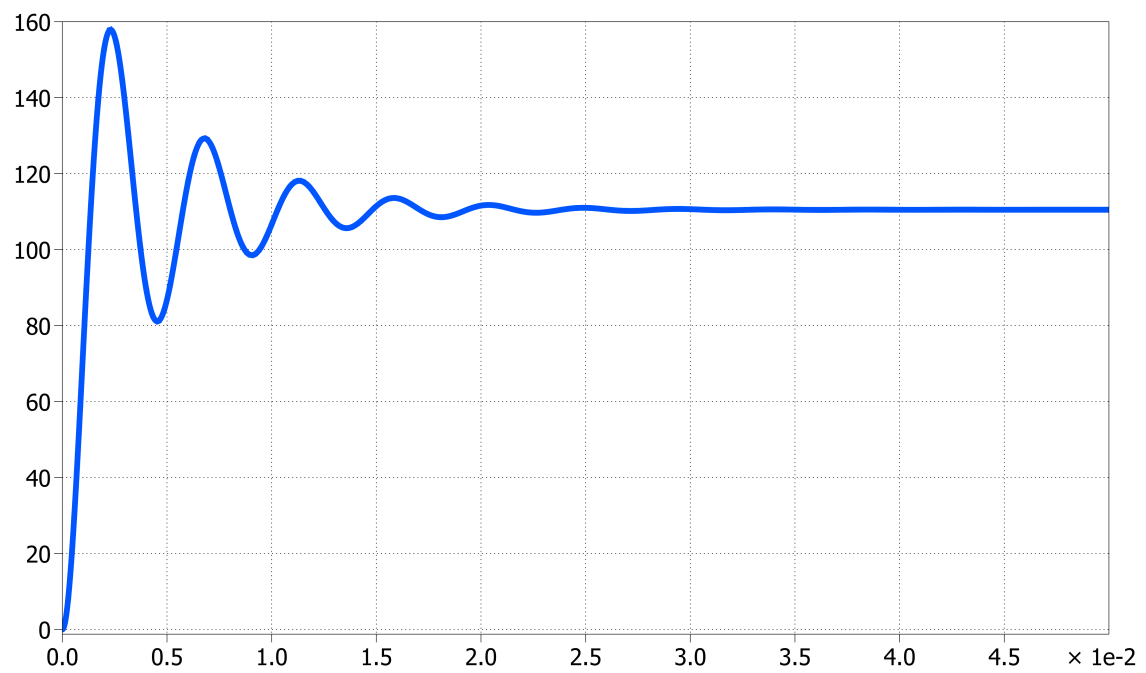


Figura 4.8: Formas de onda de  $i_{L1}$  de Modelo de Média

Figura 4.9: Formas de onda de  $i_{L2}$  de Modelo de MédiaFigura 4.10: Formas de onda de  $V_{C1}$  e  $V_{C2}$  de Modelo de Média

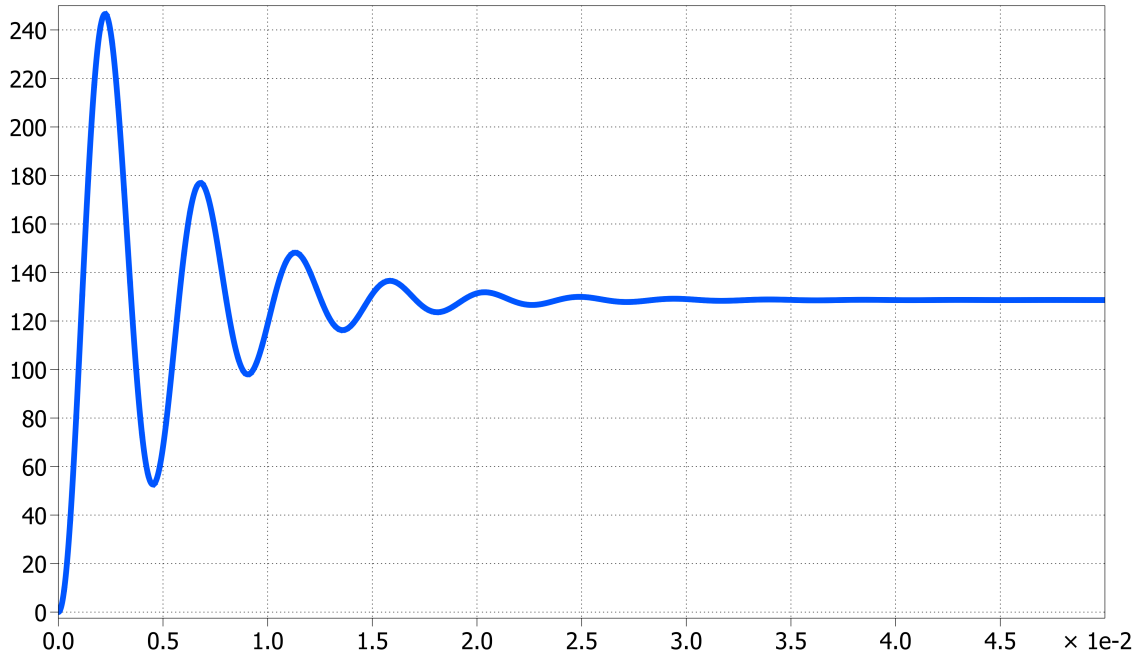


Figura 4.11: Formas de onda de  $V_{C3}$  e  $V_{C4}$  de Modelo de Média

#### 4.3.5 Simplificação do Modelo de Média

O sistema final obtido para cada modo é de ordem elevada (6), o que lhe confere alguma complexidade. Enquadrando o modelo no seu objectivo inicial de base ao desenvolvimento de um controlador, este deverá ser o mais simples possível, cumprindo com o seu propósito de representação aproximada do comportamento do conversor real.

Tendo isto em mente, procurou-se simplificar o modelo de média original, assegurando a manutenção da sua validade.

Tal como já havia sido referido,  $V_{C1} = V_{C2}$  e  $V_{C3} = V_{C4}$ . Ora isto significa que, em ambos os casos, a repetição da mesma expressão (e da mesma estrutura na implementação) não acrescenta qualquer informação relevante ao modelo.

Assim concluiu-se que seria possível substituir as quatro variáveis de estado das tensões nos condensadores por apenas duas:

$$\begin{cases} V_{C12} = V_{C1} + V_{C2} \\ V_{C34} = V_{C3} + V_{C4} \end{cases} \quad (4.14)$$

Readaptando o modelo às novas variáveis de estado

$$\dot{X}_{med}^{simples} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{L1_{med}} \\ \dot{i}_{L2_{med}} \\ \dot{V}_{C12_{med}} \\ \dot{V}_{C34_{med}} \end{bmatrix}$$

o novo conjunto de expressões, agora de ordem quatro, toma a forma:

$$\dot{X}_{med}^{simples} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{DV_{C12}}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{DV_{C34}}{L_2} \\ \frac{2Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-2D^3 + 3D^2 - D)V_{C12}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(2D^3 + D^2(4\phi_p - 3) + D(1 - 4\phi_p) + 2\phi_p^2)V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{2Di_{L2}}{C_s} + \frac{(2D^3 - 3D^2 + D(2\phi_p + 1) - 2\phi_p^2)V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-2D^3 + D^2(-4\phi_p + 3) + D(2\phi_p - 1))V_{C34}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

O novo diagrama de blocos, apesar de simplificado, apresenta estrutura semelhante à anterior:

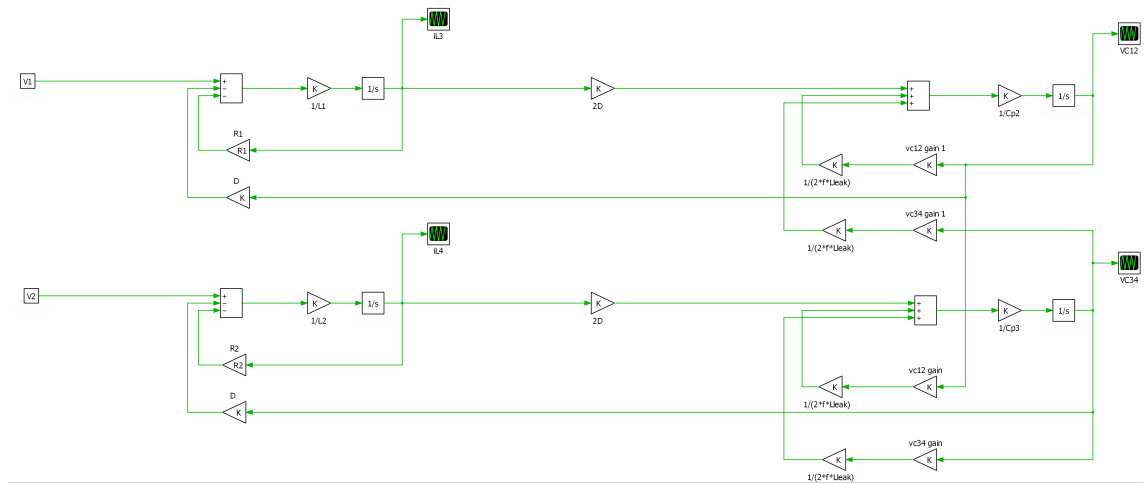


Figura 4.12: Modelo média Simplificado em diagrama de blocos para o Modo 1

Os resultados de simulação (em condições iguais às anteriores) comprovam a manutenção das formas de onda das correntes do modelo de 6ª ordem. Por outro lado, as novas variáveis apresentam o comportamento desejado, representando a soma das tensões relativas a cada lado do conversor. Deste modo, estava assim confirmada a validade do modelo simplificado:

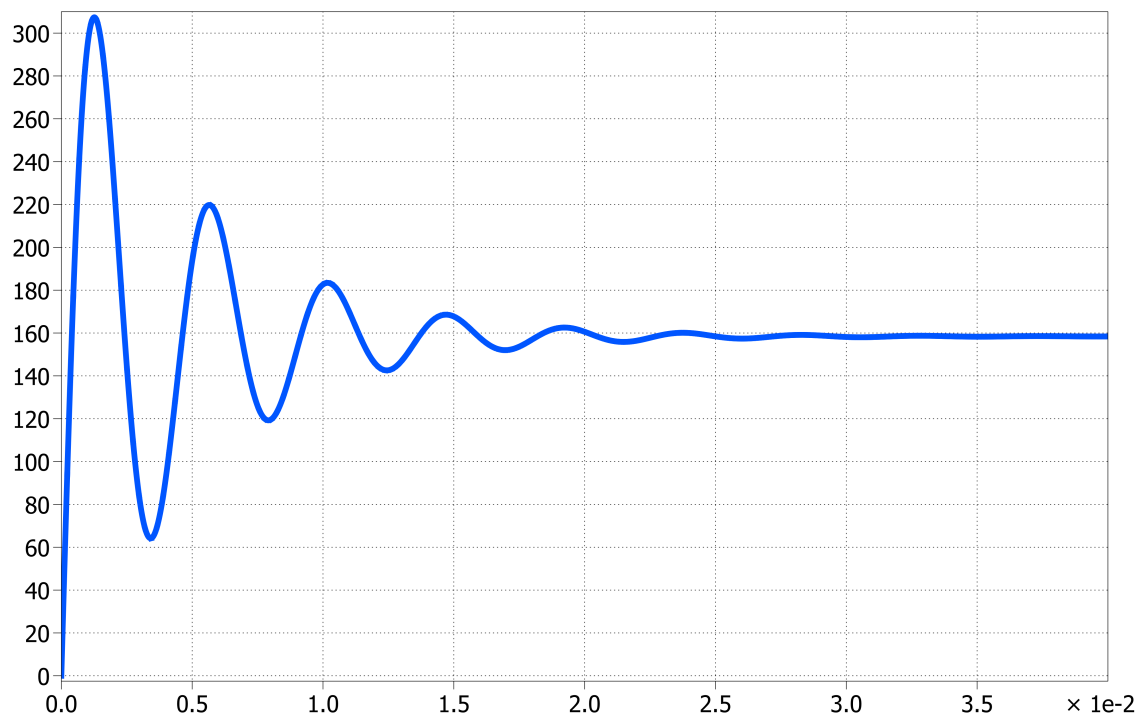


Figura 4.13: Resultado simulação do Modelo Média Simplificado para Modo 1 -  $i_{L1}$

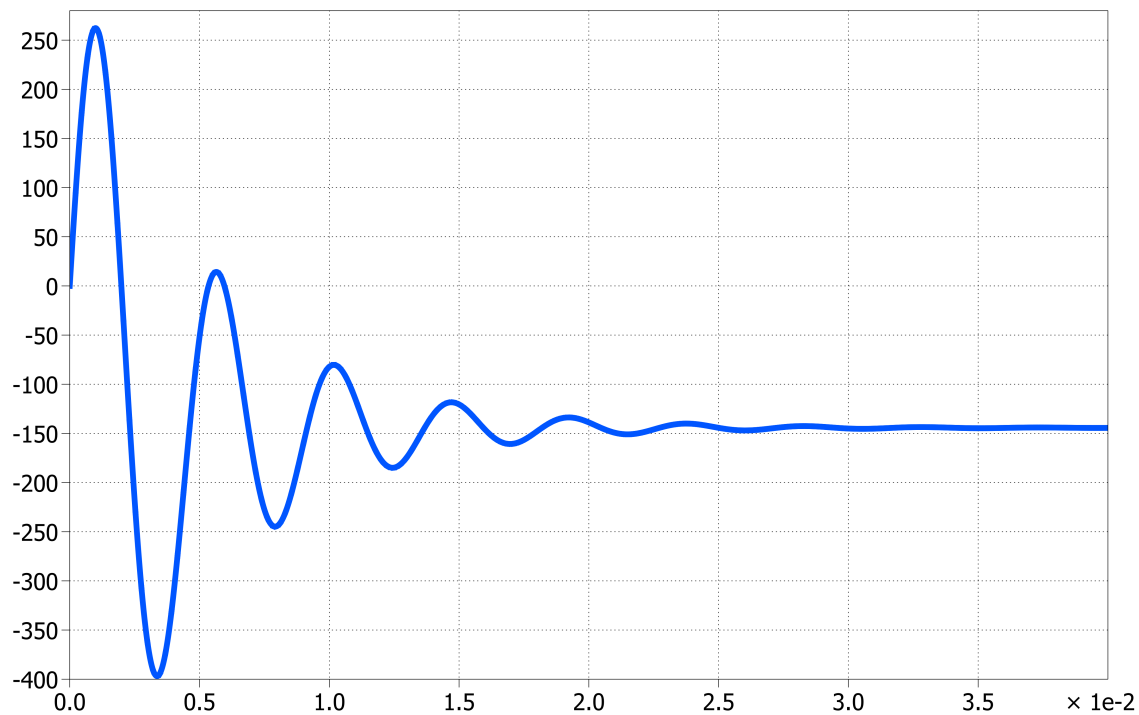


Figura 4.14: Resultado simulação do Modelo Média Simplificado para Modo 1 -  $i_{L2}$



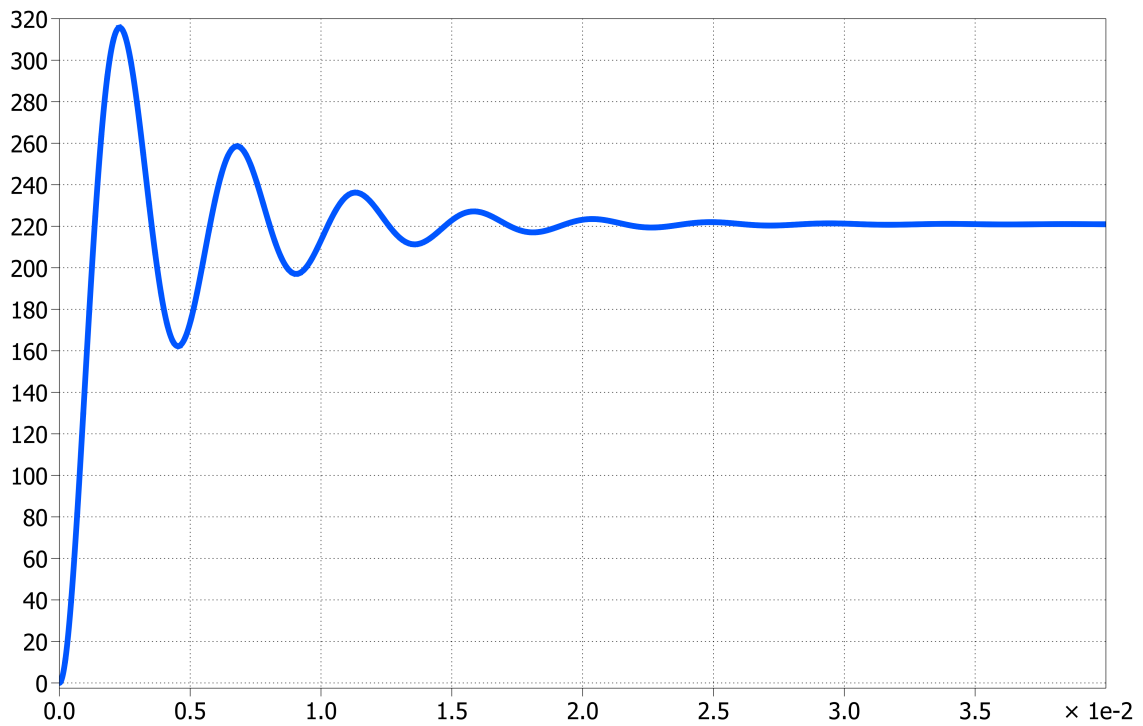


Figura 4.15: Resultado simulação do Modelo Média Simplificado para Modo 1 -  $V_{C12}$

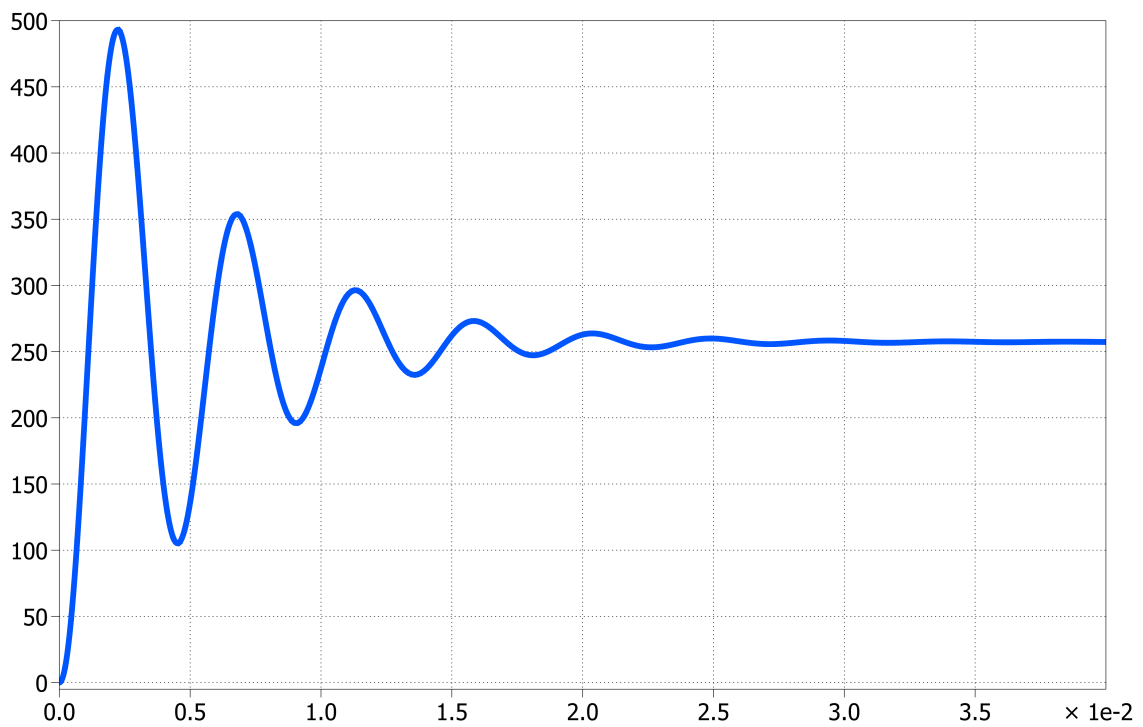


Figura 4.16: Resultado simulação do Modelo Média Simplificado para Modo 1 -  $V_{C34}$

Se fixarmos  $D = 50\%$ , o modelo de média virá:

$$\dot{X}_{l_{med}}^{simples} \Big|_{D=50\%} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{V_{C12}}{2L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{V_{C34}}{2L_2} \\ \frac{i_{L1}}{C_p} + \frac{(2\phi_p^2 - \phi_p)V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{i_{L2}}{C_s} - \frac{(2\phi_p^2 - \phi_p)V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

O que está de acordo com o que é obtido para conversores semelhantes, como os que foram abordados em [10] e [19]. De notar que nos casos apresentados, sendo a estrutura relativamente ao lado secundário ligeiramente diferente do caso aqui em estudo, naturalmente também as expressões relacionadas com esse mesmo lado serão distintas.

Pretendendo-se demonstrar os resultados dos modelos de média simplificados de todos os modos, apresentando uma estrutura base igual tal que:

$$\begin{cases} i_{L1} = \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{DV_{C12}}{L_1} \\ i_{L2} = \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{DV_{C34}}{L_2} \\ \dot{V}_{C12} = \frac{2Di_{L1}}{C_p} + \frac{\mathbf{K}_{11}V_{C12}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{\mathbf{K}_{12}V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} \\ \dot{V}_{C34} = \frac{2Di_{L2}}{C_s} + \frac{\mathbf{K}_{21}V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{\mathbf{K}_{22}V_{C34}}{2fL_{leak}C_s} \end{cases} \quad (4.15)$$

A sua organização será apresentada sob a forma de tabela, em que, uma vez que as "bases" das expressões das correntes  $i_{L1}$  e  $i_{L2}$  são sempre as mesmas, apenas se apresentará as expressões referentes aos ganhos  $\mathbf{K}_{11}$ ,  $\mathbf{K}_{12}$ ,  $\mathbf{K}_{21}$  e  $\mathbf{K}_{22}$ .

|                 | Ganho    | Modo 1                                                | Modo 2                                     | Modo 3                                                               |
|-----------------|----------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\dot{V}_{C12}$ | $K_{11}$ | $-2D^3 + 3D^2 - D$                                    | $-2D^3 + 3D^2 - D$                         | $-2D^3 + 3D^2 - D$                                                   |
|                 | $K_{12}$ | $2D^3 + 4D^2\phi_p - 3D^2 - 4D\phi_p + 2\phi_p^2 + D$ | $2D^3 + 4D^2\phi_p - 5D^2 + D$             | $2D^3 + 4D^2\phi_p - 7D^2 - 4D\phi_p - 2\phi_p^2 + 5D + 4\phi_p - 2$ |
| $\dot{V}_{C34}$ | $K_{21}$ | $2D^3 - 3D^2 + 2D\phi_p - 2\phi_p^2 + D$              | $2D^3 - D^2 - 2D\phi_p + D$                | $2D^3 - 3D^2 - 2D\phi_p + 2\phi_p^2 + 3D - 2\phi_p$                  |
|                 | $K_{22}$ | $-2D^3 - 4D^2\phi_p + 3D^2 + 2D\phi_p - D$            | $-2D^3 - 4D^2\phi_p + 3D^2 + 2D\phi_p - D$ | $-2D^3 - 4D^2\phi_p + 7D^2 + 6D\phi_p - 7D - 2\phi_p + 2$            |

Tabela 4.1: Ganhos Modelo Simplificado de Média para modos  $D < 50\%$

|                 | Ganho    | Modo 4                                                | Modo 5                                                    | Modo 6                                                               |
|-----------------|----------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\dot{V}_{C12}$ | $K_{11}$ | $-2D^3 + 3D^2 - D$                                    | $-2D^3 + 3D^2 - D$                                        | $-2D^3 + 3D^2 - D$                                                   |
|                 | $K_{12}$ | $2D^3 + 4D^2\phi_p - 3D^2 - 4D\phi_p + 2\phi_p^2 + D$ | $2D^3 + 4D^2\phi_p - 5D^2 - 8D\phi_p + 5D + 4\phi_p - 2$  | $2D^3 + 4D^2\phi_p - 7D^2 - 4D\phi_p - 2\phi_p^2 + 5D + 4\phi_p - 2$ |
| $\dot{V}_{C34}$ | $K_{21}$ | $2D^3 - 3D^2 + 2D\phi_p - 2\phi_p^2 + D$              | $2D^3 - 5D^2 + 2D\phi_p + 3D - 2\phi_p$                   | $2D^3 - 3D^2 - 2D\phi_p + 2\phi_p^2 + 3D - 2\phi_p$                  |
|                 | $K_{22}$ | $-2D^3 - 4D^2\phi_p + 3D^2 + 2D\phi_p - D$            | $-2D^3 - 4D^2\phi_p + 7D^2 + 6D\phi_p - 7D - 2\phi_p + 2$ | $-2D^3 - 4D^2\phi_p + 7D^2 + 6D\phi_p - 7D - 2\phi_p + 2$            |

Tabela 4.2: Ganhos Modelo Simplificado de Média para modos  $D > 50\%$ 

De destacar que, tal como já havia sido concluído na secção 3.2.1 relativa à derivação da expressão de potência transferida, da análise das expressões dos modelos simplificados se verificam semelhanças entre os modos 1/3 e 2/4. De facto, quer para um caso quer para o outro as expressões relativas à evolução das correntes e tensões do conversor são exactamente as mesmas, tal como se comprova pela análise das tabelas 4.1 e 4.2.

Durante a derivação destes modelos  $D$  e  $\phi_p$  foram considerados parâmetros do conversor - logo invariáveis durante a operação do mesmo. Contudo, na realidade, são estas duas variáveis que permitem controlar o funcionamento do conversor. Ao invés, a variação do valor de tensão das fontes - numa aplicação real uma delas poderá ser uma bateria - será algo indesejável que, no limite, se pretenderá apenas compensar. Sendo assim, fará mais sentido considerar  $D$  e  $\phi_p$  como entradas do sistema, assumindo por simplificação que  $V_1$  e  $V_2$  são constantes, o que facilmente leva à conclusão de que os conjuntos de equações diferenciais obtidos, embora simplificados, sejam altamente não lineares. Daqui para a frente continuar-se-á a dar mais ênfase à modelação do conversor operando no Modo 1.

## 4.4 Linearização

O interesse na linearização do modelo do sistema justifica-se, essencialmente, por dois factores: possibilidade de verificação de estabilidade (local) e aplicabilidade de conceitos de *design* de controladores (apenas válidos em sistemas lineares) [2]. Adicionalmente, a linearização de um sistema, representando uma redução de complexidade do mesmo, resulta numa menor exigência computacional, traduzida em tempos de simulação reduzidos. Embora esta simplificação também signifique alguma perda de informação, uma vez mais, dependendo do objectivo do modelo, tal consequência poderá não ser relevante.

Como foi referido anteriormente, o principal objectivo da modelação do conversor na dissertação que aqui se apresenta era o desenvolvimento de um controlador, por forma a operar o sistema

em malha fechada. Como tal, procedeu-se à linearização do modelo simplificado obtido na secção anterior. Antes disso, porém, considerou-se pertinente a apresentação dos conceitos gerais de linearização aplicados a funções dependentes de uma ou mais variáveis.

#### 4.4.1 Explicação intuitiva

O conceito de linearização resume-se à obtenção de uma aproximação linear de uma dada função (não linear), num dado ponto de funcionamento. Assim sendo, independentemente da complexidade e número de variáveis de um sistema, o seu modelo linearizado será obtido aproximando cada equação que o define, no mesmo ponto de funcionamento.

Para efeitos de simplificação da explicação, considere-se o seguinte circuito exemplo:

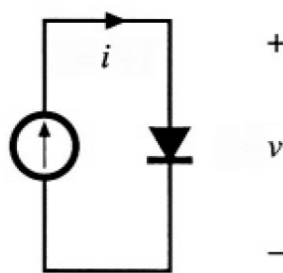


Figura 4.17: Sistema exemplo definido por uma equação não linear [2]

Definindo como entrada do sistema a corrente  $i$  no díodo e como saída a queda de tensão  $v$  que lhe está associada, a relação entre ambos será uma função não linear que permite modelar este circuito. De seguida apresenta-se a representação gráfica dessa relação:

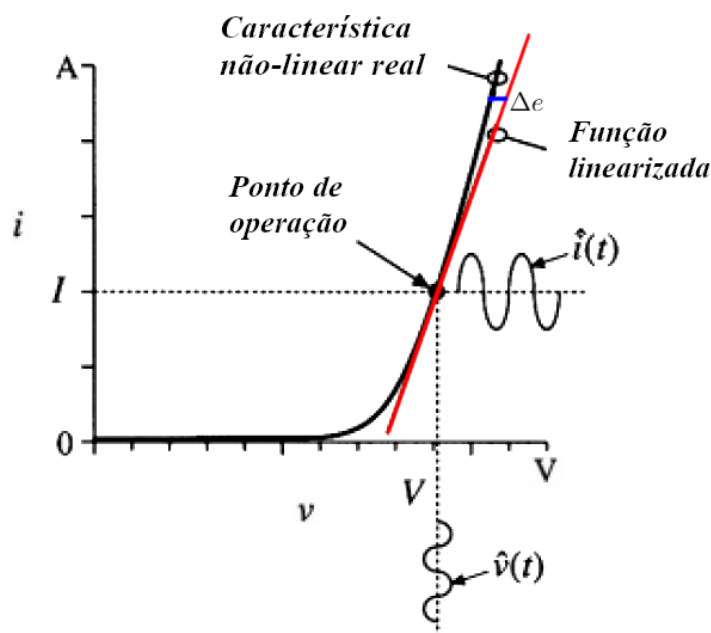


Figura 4.18: Gráfico da função não linear e nova função linearizada [2]

De uma forma genérica, a relação entre  $v$  e  $i$  pode ser definida como:

$$v = f(i) \quad (4.16)$$

Tal como a imagem sugere, a linearização de uma função pode ser conseguida determinando a função tangente à original, num dado ponto. Intuitivamente se percebe a validade de tal operação, a partir do gráfico apresentado: se se considerar pequenas variações de  $i$  em torno do ponto de operação, os valores resultantes de  $v$  na função original e na função linear serão, praticamente, coincidentes. Se definirmos  $\Delta e$  como a distância (ou erro) entre o valor real de  $v$  e aquele obtido pela linearização, para o mesmo  $i$ , é possível perceber que para valores de corrente próximos do ponto de operação o seu valor será praticamente nulo. Pelo contrário, à medida que se afasta desse ponto a aproximação linear revela-se demasiado distante da função real.

De um modo geral, uma função linear pode ser descrita como:

$$y = b + mx \quad (4.17)$$

Pretendendo representar a recta tangente da função apresentada na fig.4.18 e escolhendo um ponto de funcionamento tal que:

$$V = f(I) \quad (4.18)$$

A eq.4.17 virá:

$$v = V + f'(I)(i - I) \quad (4.19)$$

Devendo a recta sofrer um *offset* (em relação à origem) para o ponto de funcionamento  $(I, V)$  e o seu declive ser igual à derivada da função original, avaliada no ponto de funcionamento.

Mais ainda, se definirmos a entrada e a saída como:

$$\begin{cases} i = I + \hat{i}(t) \\ v = V + \hat{v}(t) \end{cases} \quad (4.20)$$

sendo  $\hat{i}(t)$  e  $\hat{v}(t)$  pequenas variações das respectivas grandezas, a equação linear representativa do sistema resultará:

$$\hat{v} = f'(I)\hat{i} \quad (4.21)$$

Se se definir ainda  $f'(I) = r_D$ , o modelo linear anterior pode ser representado sob a forma de circuito:

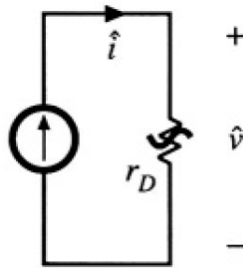


Figura 4.19: Circuito resultante de linearização [2]

Em que a resistência é variável pois tomará um valor diferente dependendo do ponto de funcionamento escolhido.

#### 4.4.2 Série de Taylor

A explicação apresentada, ainda que intuitiva, tem por base um conceito bem definido e estudado há vários séculos atrás: o desenvolvimento da série de Taylor de uma função. A expansão de Taylor pode ser definida como a representação aproximada de uma zona de uma função, através da soma entre um polinómio (de Taylor) de certo grau e uma função infinitesimal de ordem superior ao polinómio (o erro, ou Resto de Taylor) [20].

O polinómio de Taylor de uma função pode ser definido como a soma infinita de termos associados às suas derivadas:

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (4.22)$$

Pela expressão, intuitivamente se percebe que uma condição necessária à obtenção deste polinómio será a derivabilidade à ordem  $n$  da função que se pretende aproximar. Embora necessária, esta condição não garante que o desenvolvimento da série de Taylor seja equivalente à própria função. Uma vez que esta justificação recai fora do âmbito desta dissertação, a sua explicação não será aqui desenvolvida, sugerindo-se a leitura de [21]. A partir deste ponto desenvolve-se a explicação assumindo que a eq.4.22 é aplicável a  $f$  e o seu resultado uma boa aproximação da função.

No caso apresentado previamente o valor de  $n$  imposto foi 1, uma vez que se pretendia uma aproximação linear, isto é, dependente apenas de termos de primeiro grau de  $x$ . Se substituirmos o valor de  $n$  por 1 na eq.4.22 obtém-se:

$$g = f(a) + f'(a)(x-a) \quad (4.23)$$

As semelhanças com a eq.4.19 são evidentes.

Se, à semelhança do que foi feito no exemplo apresentado, se substituir  $x - a$  por  $\Delta x$  e se desenvolver a eq.4.22 obtém-se:

$$g = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2}\Delta x^2 + \frac{f'''(a)}{6}\Delta x^3 + (\dots) \quad (4.24)$$

Impondo um intervalo de variação de  $x$  pequeno, ou seja, se  $\Delta x$  tomar valores pequenos, os termos da eq.4.24 acima de ordem 1 serão praticamente desprezáveis. Deste modo, a aplicação da série de Taylor até à primeira ordem de derivada é uma boa aproximação linear, numa zona de variação reduzida em torno de um ponto de funcionamento definido, de uma função não linear (admitindo a validade da série de Taylor).

#### 4.4.3 Funções não lineares de múltiplas variáveis

O conceito de linearização apresentado poderá ser estendido a funções definidas por mais que uma variável, partindo de uma generalização da série de Taylor:

Sendo  $f$  uma função definida por uma combinação não linear de  $x$  e  $y$  tal que:

$$f = f(x, y) \quad (4.25)$$

Definindo um ponto de funcionamento em  $(x, y) = (a, b)$  a série de Taylor será definida por:

$$g = f(a, b) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a,b} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{a,b} \Delta y + \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right|_{a,b} \Delta x^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{a,b} \Delta x \Delta y + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \right|_{a,b} \Delta y^2 \right] + (\dots) \quad (4.26)$$

Com  $\Delta x = x - a$  e  $\Delta y = y - b$ . Para casos com maior número de variáveis a expressão mantém uma forma semelhante, sendo naturalmente necessário desenvolver uma maior número de derivadas parciais.

#### 4.4.4 Aplicação no conversor

No caso do conversor em análise, como se verificou anteriormente, trata-se de um sistema definido (na sua forma simplificada) por 4 equações diferenciais. Numa primeira fase, por simplificação de análise, considerou-se o *duty-cycle* e *phase-shift* como parâmetros do sistema, constantes durante o seu funcionamento. Todavia, o controlo de operação deste circuito depende exactamente desses dois valores, pelo que, na realidade, se tornam variáveis cruciais para alteração de estado do sistema. Deste modo, considerando estas duas variáveis como entradas do sistema:

$$U = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ D \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

Relembrando as equações que definem o modelo simplificado (para o modo 1):

$$\begin{cases} \dot{i}_{L1} = \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{DV_{C12}}{L_1} \\ \dot{i}_{L2} = \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{DV_{C34}}{L_2} \\ \dot{V}_{C12} = \frac{2Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-2D^3 + 3D^2 - D)V_{C12}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(2D^3 + D^2(4\phi_p - 3) + D(1 - 4\phi_p) + 2\phi_p^2)V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} \\ \dot{V}_{C34} = \frac{2Di_{L2}}{C_s} + \frac{(2D^3 - 3D^2 + D(2\phi_p + 1) - 2\phi_p^2)V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-2D^3 + D^2(-4\phi_p + 3) + D(2\phi_p - 1))V_{C34}}{2fL_{leak}C_s} \end{cases} \quad (4.27)$$

Adaptando à notação utilizada nas secções anteriores, as equações diferenciais que definem as dinâmicas das variáveis de estado do conversor podem ser vistas como:

$$\dot{x}_i = f_i(X, U) \quad (4.28)$$

ou

$$\dot{x}_i = f_i(i_{L1}, i_{L2}, V_{C12}, V_{C34}, V_1, V_2, D, \phi_p) \quad (4.29)$$

Posto isto, para proceder à linearização do sistema bastava aplicar a série de Taylor, de 1ª ordem, a cada uma das expressões  $i$ , correspondentes às dinâmicas de cada variável de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = f_i(a, b, c, d, e, f, g, h) &+ \frac{\partial f_i}{\partial i_{L1}} \Big|_{a,b,c,d,e,f,g,h} \Delta i_{L1} + \frac{\partial f_i}{\partial i_{L2}} \Big|_{a,b,c,d,e,f,g,h} \Delta i_{L2} + \frac{\partial f_i}{\partial V_{C12}} \Big|_{a,b,c,d,e,f,g,h} \Delta V_{C12} \\ &+ \frac{\partial f_i}{\partial V_{C34}} \Big|_{a,b,c,d,e,f,g,h} \Delta V_{C34} + \frac{\partial f_i}{\partial V_1} \Big|_{a,b,c,d,e,f,g,h} \Delta V_1 + \frac{\partial f_i}{\partial V_2} \Big|_{a,b,c,d,e,f,g,h} \Delta V_2 \\ &+ \frac{\partial f_i}{\partial D} \Big|_{a,b,c,d,e,f,g,h} \Delta D + \frac{\partial f_i}{\partial \phi_p} \Big|_{a,b,c,d,e,f,g,h} \Delta \phi_p \end{aligned} \quad (4.30)$$



Sendo  $a, b, c, d, e, f, g, h$  os valores de  $i_{L1}, i_{L2}, V_{C12}, V_{C34}, V_1, V_2, D, \phi_p$  no ponto de funcionamento escolhido.

Antes de aplicar a série de Taylor era necessário contudo "escolher" este ponto. Uma vez que, dependendo das variáveis de entrada e parâmetros do sistema, este tenderá para um determinado estado - isto é, as variáveis de estado tendem para um valor concreto, constante -, faz sentido considerar como ponto de funcionamento o estado de regime permanente do sistema. Tendo definido o modelo sob a forma de  $\dot{X} = f(X, U)$  é fácil determinar este ponto resolvendo:

$$\dot{X} = 0 \quad (4.31)$$

Que se resumirá à resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} i_{L1} = 0 \\ i_{L2} = 0 \\ \dot{V}_{C12} = 0 \\ \dot{V}_{C34} = 0 \end{cases} \iff \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{DV_{C12}}{L_1} = 0 \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{DV_{C34}}{L_2} = 0 \\ \frac{2Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-2D^3 + 3D^2 - D)V_{C12}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(2D^3 + D^2(4\phi_p - 3) + D(1 - 4\phi_p) + 2\phi_p^2)V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} = 0 \\ \frac{2Di_{L2}}{C_s} + \frac{(2D^3 - 3D^2 + D(2\phi_p + 1) - 2\phi_p^2)V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-2D^3 + D^2(-4\phi_p + 3) + D(2\phi_p - 1))V_{C34}}{2fL_{leak}C_s} = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Nota: A resolução deste sistema foi realizada usando o *software Maple*, originando quatro expressões (para cada variável de estado), em função das diversas variáveis de entrada e parâmetros do sistema. Uma vez que a apresentação das expressões genéricas resultantes nenhum valor acrescentaria a esta dissertação, opta-se por apresentar o resultado da sua avaliação para a situação paramétrica de simulação apresentada em 4.13.

$$\begin{cases} i_{L1_{equi}} = 158.45 \text{ A} \\ i_{L2_{equi}} = -144.26 \text{ A} \\ V_{C12_{equi}} = 220.99 \text{ V} \\ V_{C34_{equi}} = 257.31 \text{ V} \end{cases} \quad (4.34)$$

Aplicando agora a expressão 4.4.4, para o ponto de funcionamento definido pelos valores deduzidos em 4.34, obteve-se o seguinte modelo linearizado do conversor, para os parâmetros indicados:

$$\begin{cases} \dot{\Delta i}_{L1} = -217.39 \cdot \Delta i_{L1} - 1811.59 \cdot \Delta V_{C12} - 1.60e6 \cdot \Delta D \\ \dot{\Delta i}_{L2} = -217.39 \cdot \Delta i_{L2} - 1811.59 \cdot \Delta V_{C34} - 1.86e6 \cdot \Delta D \\ \dot{\Delta V}_{C12} = 1063.83 \cdot \Delta i_{L1} - 1246.68 \cdot \Delta V_{C12} + 415.55 \cdot \Delta V_{C34} - 2.42e5 \cdot \Delta D - 8.55e5 \cdot \Delta \phi_p \\ \dot{\Delta V}_{C34} = 1063.83 \cdot \Delta i_{L2} + 1662.23 \cdot \Delta V_{C12} - 831.11 \cdot \Delta V_{C34} + 1.81e5 \cdot \Delta D + 8.55e5 \cdot \Delta \phi_p \end{cases} \quad (4.35)$$

Nota: por simplificação, assumiu-se que  $V_1$  e  $V_2$  se manteriam constantes, pelo que durante a aplicação da série de Taylor estas duas variáveis de entrada foram tratadas como parâmetros. É de referir também que a escolha deste ponto permite também simplificar o polinómio de Taylor obtido para cada expressão já que tendo a sua "escolha" sido com base na condição indicada em 4.31, isto assegurará precisamente que  $f_i(a, b, c, d, e, f, g, h) = 0$ , na eq.4.4.4.

Estava assim derivado o sistema de equações diferenciais linear que definia o conversor, no ponto de funcionamento indicado em 4.34. Era agora também possível descrever o sistema na estrutura tradicional (linear) de espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta i}_{L1} \\ \dot{\Delta i}_{L2} \\ \dot{\Delta V}_{C12} \\ \dot{\Delta V}_{C34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -217.39 & 0 & -1811.59 & 0 \\ 0 & -217.39 & 0 & -1811.59 \\ 1063.83 & 0 & -1246.68 & 415.55 \\ 0 & 1063.83 & 1662.23 & -831.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta i_{L2} \\ \Delta V_{C12} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.6e6 & 0 \\ -1.86e6 & 0 \\ -2.42e5 & -8.55e5 \\ 1.81e5 & 8.55e5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta \phi_p \end{bmatrix}$$

Tendo sido definido como saídas apenas as variações das próprias variáveis de estado:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \\ \Delta y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta i_{L2} \\ \Delta V_{C12} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta i_{L2} \\ \Delta V_{C12} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta \phi_p \end{bmatrix}$$

O modelo derivado foi implementado em *PLECS* introduzindo os valores das matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  no bloco "state-space" que o programa disponibiliza. Uma vez que o modelo apenas descreve as variações das saídas em relação às variações das entradas, a cada saída do modelo foi adicionado o valor respectivo em regime permanente - determinado em 4.34. A estrutura implementada tomou a seguinte forma:

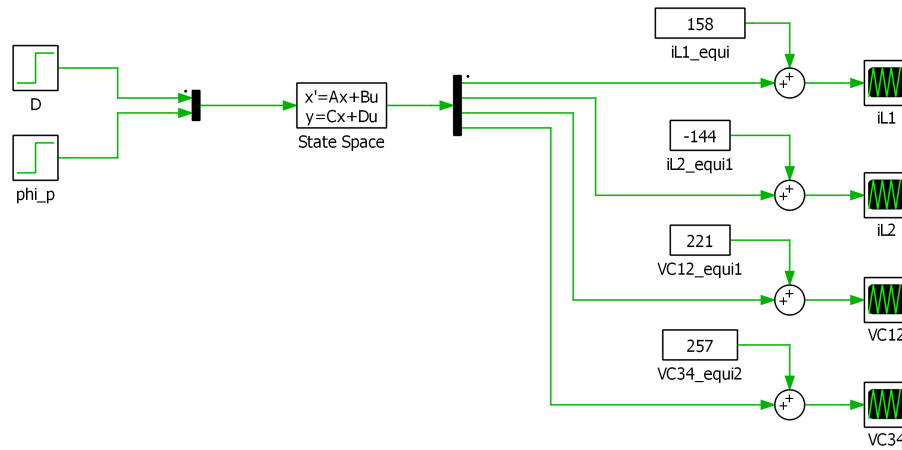


Figura 4.20: Implementação do modelo em Espaço de Estados (linear)

#### 4.4.5 Comparação com Modelo de Média Simplificado

Reajustando o modelo simplificado apresentado na fig.4.12 por forma a tomar como entradas as variáveis de controlo  $D$  e  $\phi_p$ , obteve-se:

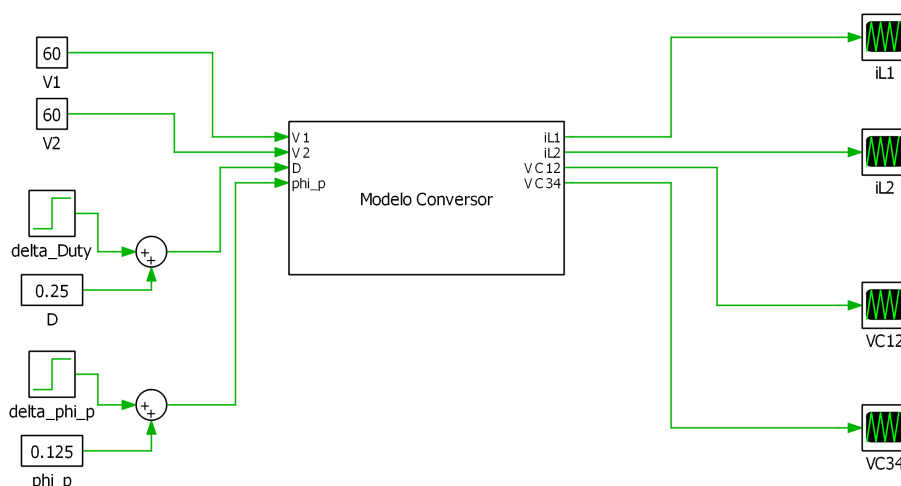


Figura 4.21: Modelo Simplificado controlável externamente

Este modelo mais completo serviria de termo de comparação relativamente ao detalhe do modelo linear obtido.

Ambos os modelos, além de estarem sujeitos aos mesmos parâmetros e entradas (valores de ponto de funcionamento) - no primeiro caso reflectem-se nos coeficientes das matrizes de espaço de estados, no segundo são introduzidos manualmente no modelo simplificado - também deverão sofrer exactamente as mesmas perturbações nas entradas.

Para a primeira simulação foi definido que as perturbações tomariam a forma de variações em degrau de 0.001 (correspondente a 0.1%) para  $D$  e  $\phi_p$ , 50 ms após o início das simulações. As formas de onda nas saídas são apresentadas de forma sobreposta nas imagens seguintes:

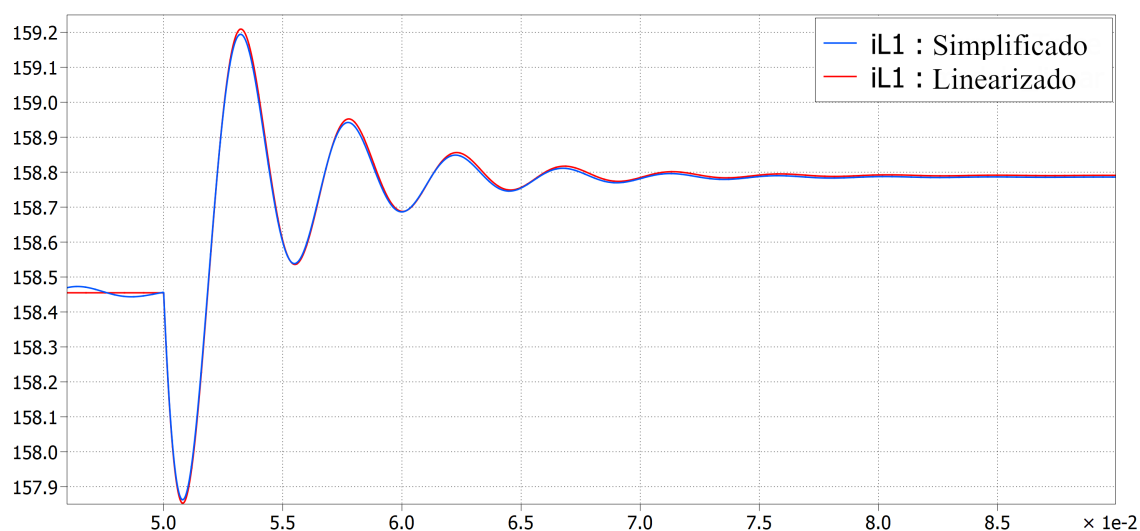


Figura 4.22: Comparação entre Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, pequenas perturbações -  $i_{L1}$

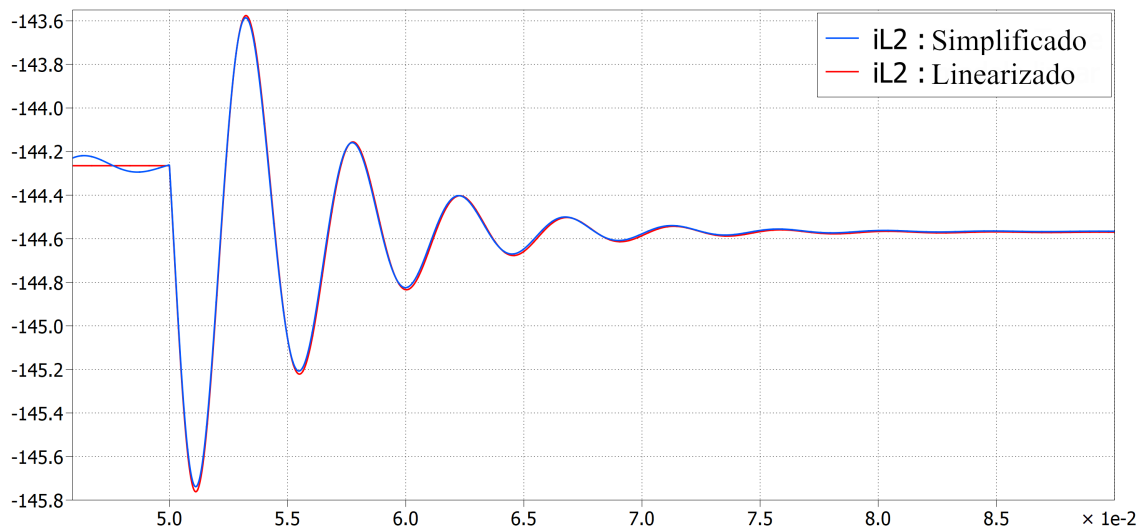


Figura 4.23: Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, pequenas perturbações -  $i_{L2}$

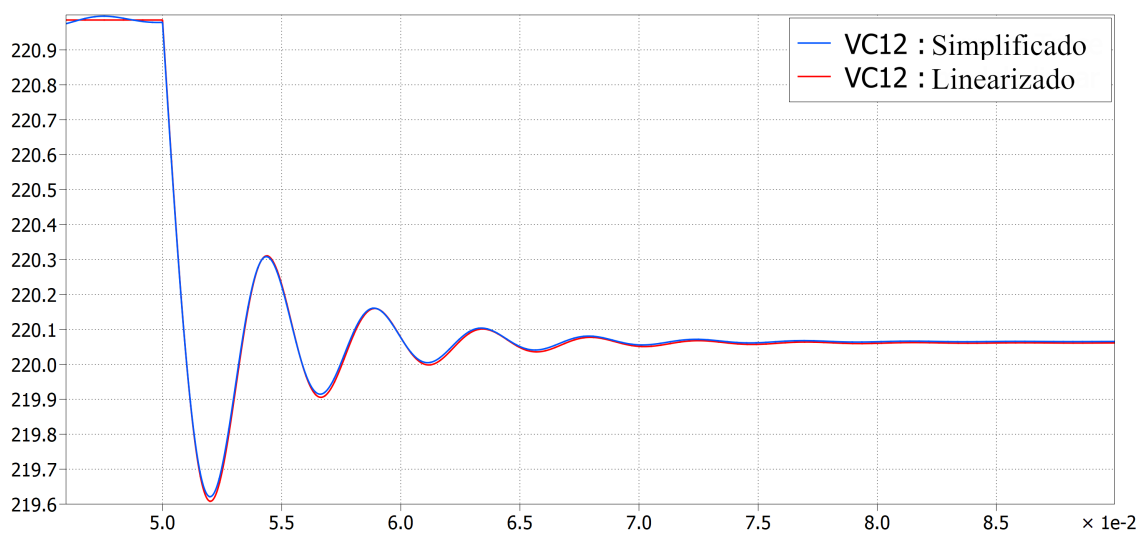


Figura 4.24: Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, pequenas perturbações -  $V_{C12}$

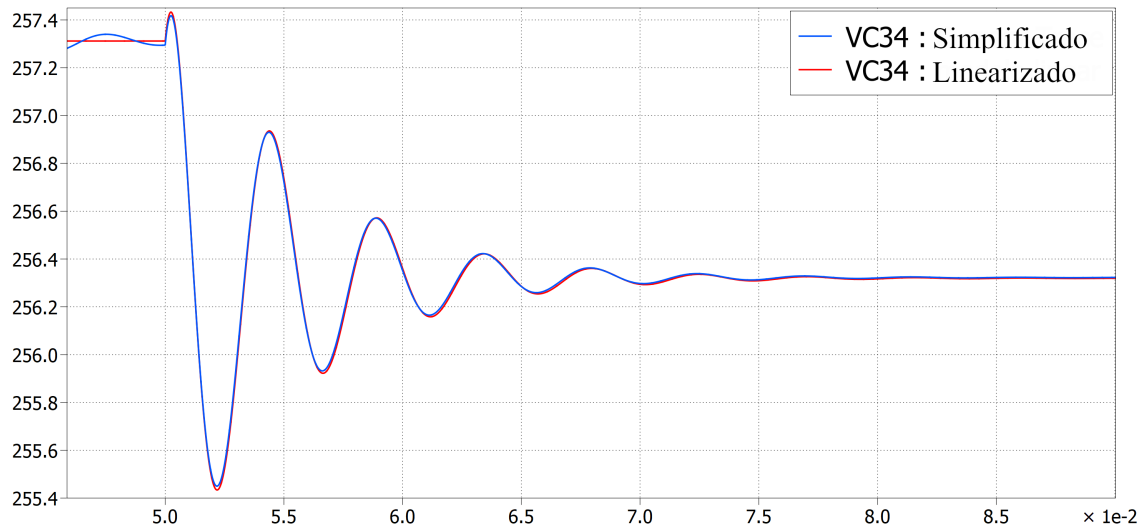


Figura 4.25: Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, pequenas perturbações -  $V_{C34}$

Para o segundo teste foi definido que as perturbações tomariam a forma de variações em degrau de 0.05 (correspondente a 5%) para  $D$  e  $\phi_p$ , 50 ms após o início das simulações.

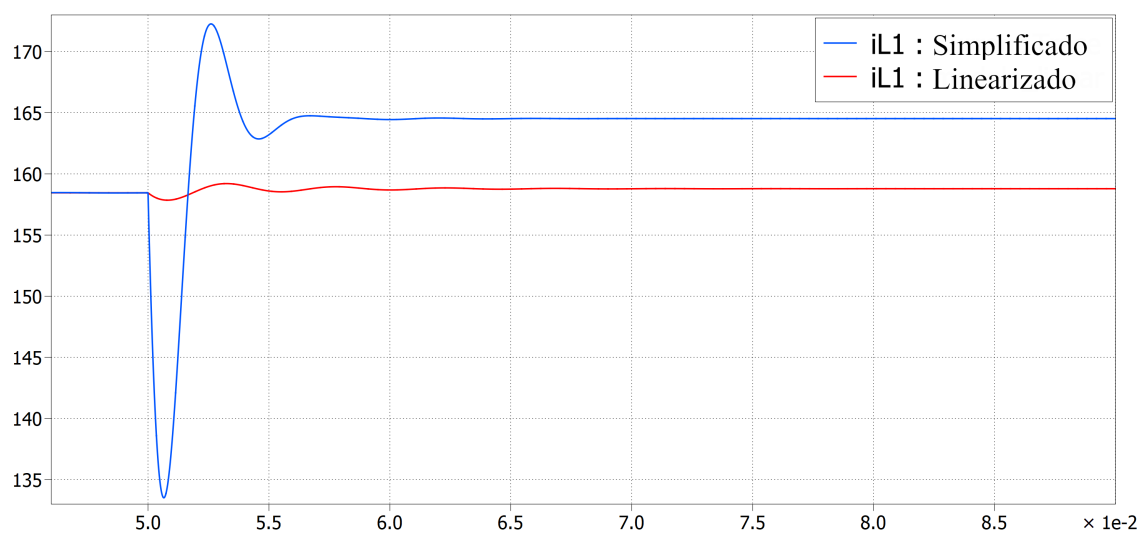


Figura 4.26: Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, grandes perturbações -  $i_{L1}$

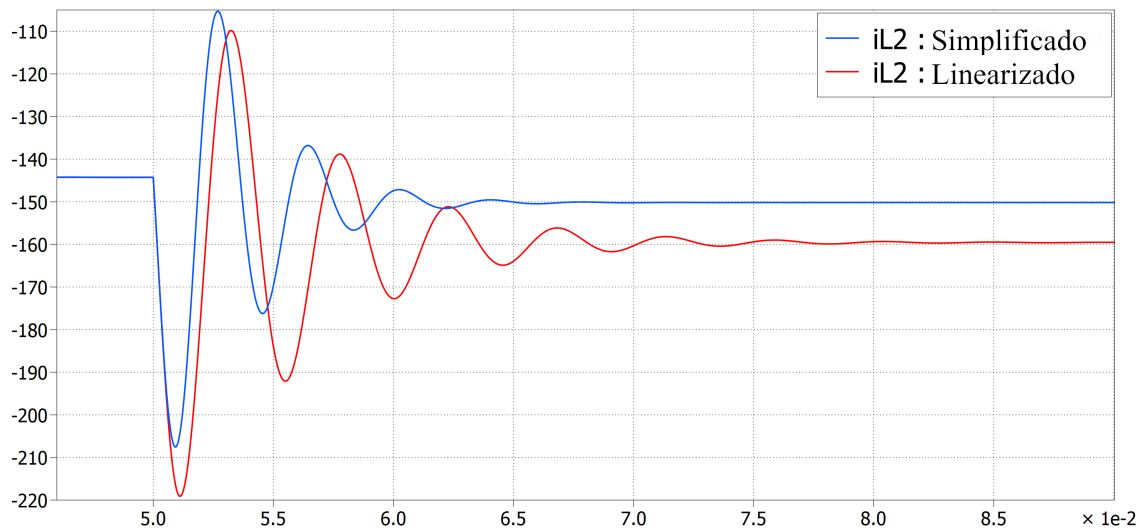


Figura 4.27: Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, grandes perturbações -  $i_{L2}$

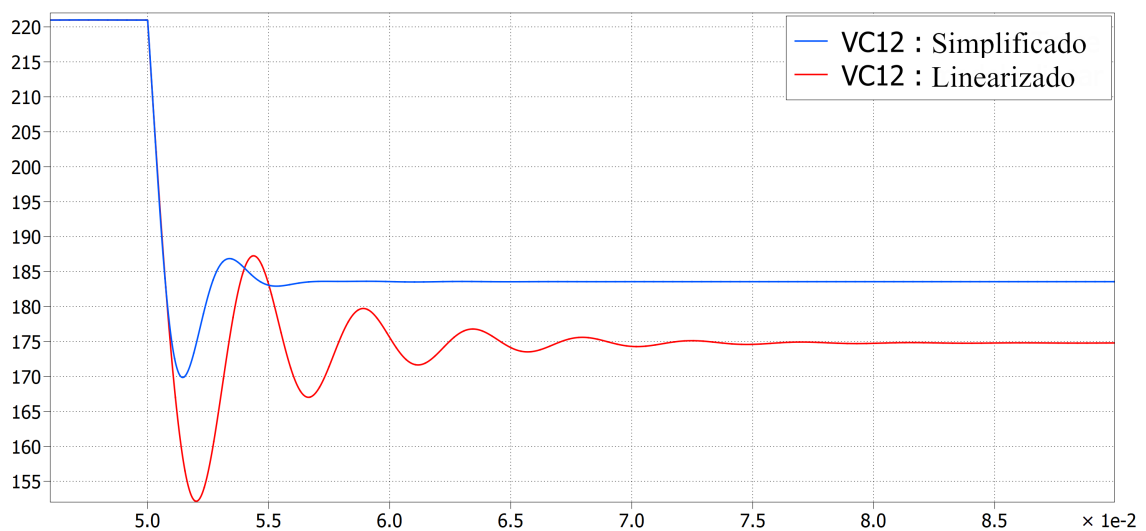


Figura 4.28: Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, grandes perturbações -  $V_{C12}$

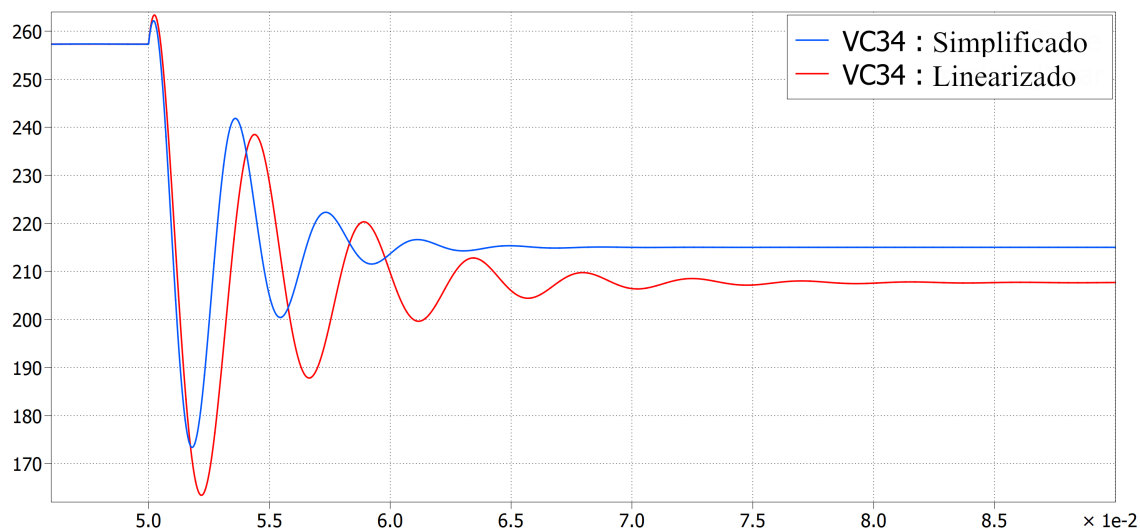


Figura 4.29: Comparação Modelo Linear e Modelo Média Simplificado, grandes perturbações -  $V_{C34}$

Analisando os dois testes, como seria de esperar, o modelo linear representa uma excelente aproximação do comportamento do conversor, quando sujeito a pequenas variações em torno do ponto de funcionamento definido. Para todas as saídas a forma de onda resultante do modelo linear é praticamente coincidente com o sinal do modelo simplificado, sendo assim possível afirmar que o erro é praticamente inexistente. Por outro lado, impondo uma perturbação dos sinais de controlo mais significativa, o modelo linear origina sinais muito distantes daqueles esperados. Além de existir um ligeiro atraso nas formas de onda do modelo linearizado em relação ao modelo simplificado e uma discrepância não constante em relação à amplitude das oscilações durante o período transitório, também o valor final em todas as simulações não corresponde ao valor "real", dado pelo modelo simplificado.



## Capítulo 5

# Projecto de Controladores

Havendo desenvolvido um modelo linearizado do conversor e retomando o objectivo inicial que serviu de mote para a modelação, estavam agora reunidas condições para o *design* de uma estrutura controlada do sistema.

Para tal, primeiramente seria necessário definir o que deveria ser controlado: a decisão recaiu sobre a corrente de entrada  $i_{L1}$  e pela soma de tensões  $V_{C34}$  já que são, de facto, duas variáveis do sistema cuja regulação controlada suscita interesse prático.

Recuperando o exemplo de aplicação do conversor, este pode ser caracterizado como o elemento fundamental num módulo de armazenamento/fornecimento de energia, a funcionar em paralelo com um sistema principal de produção de energia. Relativamente ao controlo de  $i_{L1}$ , por exemplo, tratando-se de uma corrente associada ao carregamento/descarregamento de um elemento de armazenamento de energia - como uma bateria -, será interessante, além de definir um valor médio específico, assegurar uma menor variação possível da sua amplitude.

Como foi possível demonstrar pelas secções anteriores, o conversor estudado, pela sua configuração mas também pela forma de controlo (desacoplado) que se procurou explorar, apresenta um conjunto de dinâmicas complexo. Tal facto é comprovado pela relação de influência entre as variáveis de estado e a dependência, não linear, relativamente às variáveis de controlo  $D$  e  $\phi_p$ .

Por forma a estudar com mais detalhe características como a estabilidade ou a resposta a variações em degrau, foi necessário linearizar o sistema sob um ponto de funcionamento (regime permanente, dado um conjunto de condições e parâmetros escolhidos). A partir daqui seria possível analisar o sistema e desenvolver um controlador aplicando as técnicas conhecidas, associadas a modelos lineares.

### 5.1 Desenvolvimento de um controlador para um sistema *SISO*

Dada a já referida complexidade do sistema, mesmo linearizado, optou-se por, numa fase inicial, fixar o valor de  $D$  em 25%, isto é, não considerando eventuais oscilações do *duty-cycle* e tomando como entrada do sistema apenas  $\Delta\phi_p$ . Mais ainda, procurou-se controlar apenas as dinâmicas associadas a  $i_{L1}$ , como prova de conceito. O modelo do conversor ficava assim definido

como um sistema de uma entrada e uma saída - SISO. Posto isto, o sistema linearizado referido em 4.35, foi simplificado para:

$$\begin{cases} \dot{\Delta i}_{L1} = -217.39 \cdot \Delta i_{L1} - 1811.59 \cdot \Delta V_{C12} \\ \dot{\Delta i}_{L2} = -217.39 \cdot \Delta i_{L2} - 1811.59 \cdot \Delta V_{C34} \\ \dot{\Delta V}_{C12} = 1063.83 \cdot \Delta i_{L1} - 1246.68 \cdot \Delta V_{C12} + 415.55 \cdot \Delta V_{C34} - 8.55e^5 \cdot \Delta \phi_p \\ \dot{\Delta V}_{C34} = 1063.83 \cdot \Delta i_{L2} + 1662.23 \cdot \Delta V_{C12} - 831.11 \cdot \Delta V_{C34} + 8.55e^5 \cdot \Delta \phi_p \end{cases} \quad (5.1)$$

Com uma única saída tal que:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{i}_{L1} \\ \Delta \dot{i}_{L2} \\ \Delta \dot{V}_{C12} \\ \Delta \dot{V}_{C34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -217.39 & 0 & -1811.59 & 0 \\ 0 & -217.39 & 0 & -1811.59 \\ 1063.83 & 0 & -1246.68 & 415.55 \\ 0 & 1063.83 & 1662.23 & -831.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta i_{L2} \\ \Delta V_{C12} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.55e^5 \\ 8.55e^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta i_{L2} \\ \Delta V_{C12} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi_p \end{bmatrix}$$

### 5.1.1 Obtenção da função de transferência

A partir da representação do sistema linearizado, em espaço de estados, seria possível determinar a sua função de transferência, no domínio de Laplace:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \iff \begin{cases} X(s) = [sI - A]^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = [C[sI - A]^{-1}B + D] U(s) \quad (5.2)$$

Para o caso em estudo foi obtida a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1.55e9s^2 + 9.809e11s + 3.126e15}{s^4 + 2513s^3 + 5.15e6s^2 + 5.091e9s + 4.601e12} \quad (5.3)$$

### 5.1.2 Análise do Lugar das Raízes

Uma vez determinada a função de transferência do sistema no domínio de Laplace, seria possível utilizar algumas técnicas para a análise e *design* de controladores. Sendo que o programa *MATLAB* disponibiliza algumas ferramentas que facilitam este tipo de análise, optou-se por usar uma delas: o *SISOTool*. Esta ferramenta permite a obtenção de alguns gráficos como diagramas de Bode e Lugar das Raízes, para uma dada estrutura de controlo escolhida, possibilitando ainda a interacção gráfica com os mesmos, fazendo variar os pólos em malha fechada do sistema. Ao mesmo tempo, disponibiliza a resposta temporal do sistema realimentado, face a uma referência em degrau: o que permite verificar as alterações das características da resposta face à alteração de posição dos pólos.

Considerando a seguinte estrutura simples realimentada:

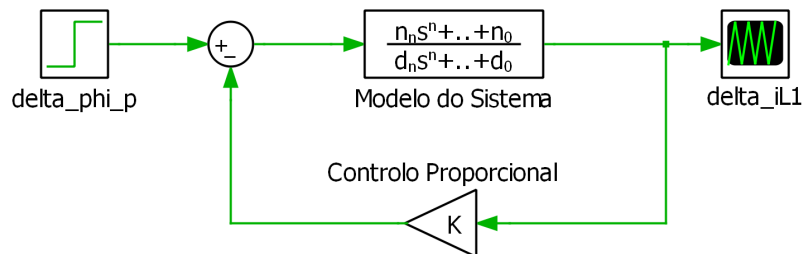


Figura 5.1: Modelo do Sistema realimentado com controlador proporcional

Analisando o gráfico do Lugar das Raízes é possível observar a localização dos pólos e zeros do sistema em malha fechada, considerando os vários valores de  $K \in [0, +\infty[$ :

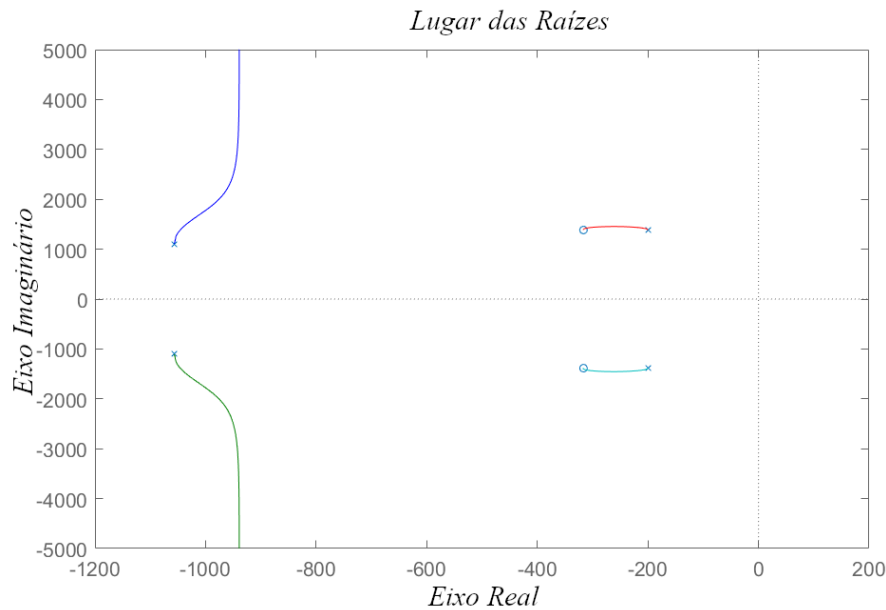


Figura 5.2: Lugar de Raízes Sistema realimentado com controlador proporcional

Sendo os pólos representados por "X" e os zeros por "O", é possível verificar desde já que o sistema é estável - segundo a definição BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) - pois apenas apresenta pólos no semi-plano esquerdo do plano complexo, qualquer que seja o valor de  $K$ . Considerando  $K = 0$  teremos, na verdade, uma estrutura em malha aberta. Pelo gráfico é possível perceber que, nestas circunstâncias, o sistema apresenta dois pólos dominantes, perto do eixo imaginário, o que significa que apresentará um comportamento semelhante a um sistema de segunda ordem. Tal pode ser confirmado pela resposta temporal a uma entrada em degrau. Nota: nesta e nas seguintes simulações será utilizada uma referência de valor 0.001.

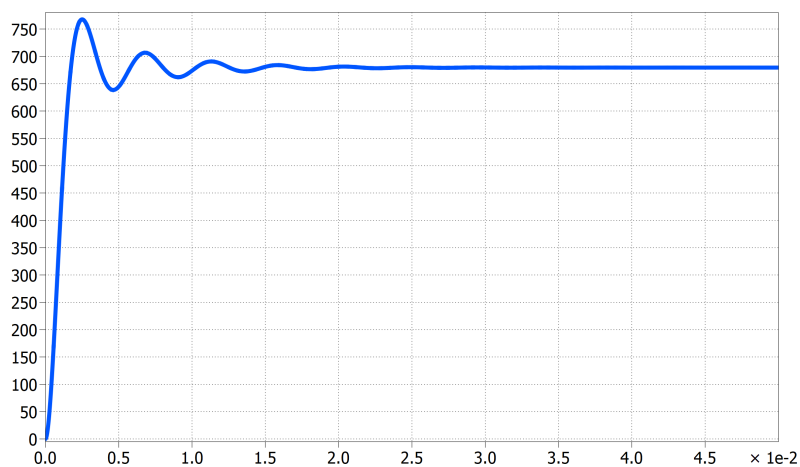


Figura 5.3: Resposta do sistema em malha aberta ( $K = 0$ ), a uma entrada em degrau

Pretendendo-se controlar o sistema, fazendo-o acompanhar uma referência,  $K$  não poderá ser

nulo. Contudo, tal como se percebe pela fig.5.2, a alteração de  $K$  apenas poderá ser feita até um dado valor limite já que, a partir daí, o par de pólos mais "rápido" apresenta uma parte imaginária que aumenta abruptamente. Na prática, isto significará oscilações indesejáveis na resposta temporal. De seguida são apresentadas duas respostas a uma referência em degrau, respectivamente para  $K = 0.0022429$  e  $K = 1$ . Na primeira apresenta-se uma simulação realimentada semelhante àquela que é possível observar em malha aberta, sem grandes oscilações. Na segunda demonstra-se o efeito de *ringing* dos pólos distantes do eixo real.

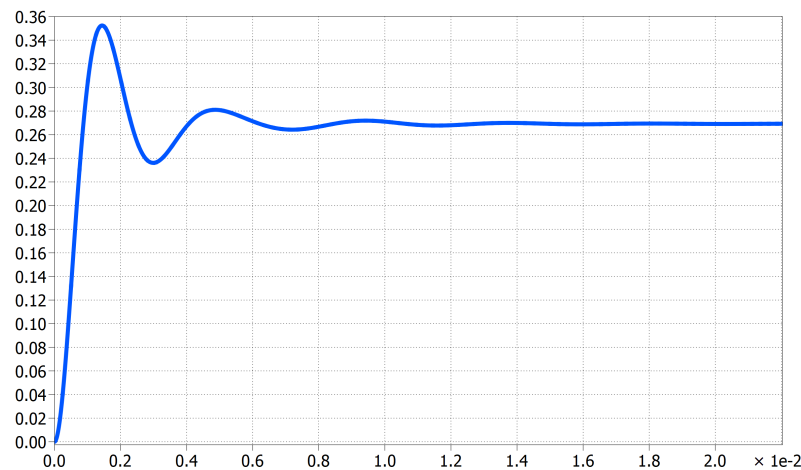


Figura 5.4: Resposta do sistema em malha fechada ( $K = 0.0022429$ ), a uma entrada em degrau

O comportamento observado é o esperado, mantendo-se semelhante a um sistema de segunda ordem. Ainda assim, existe alguma oscilação e *overshoot* em relação ao valor final, que se encontra bastante acima da referência desejada. Isto indica que, a implementar este tipo de controlo, se deveria acrescentar um bloco de ganho em relação à referência, de modo a ajustar a sua ordem de grandeza ao valor a que está a ser comparado, que é proporcional à saída.

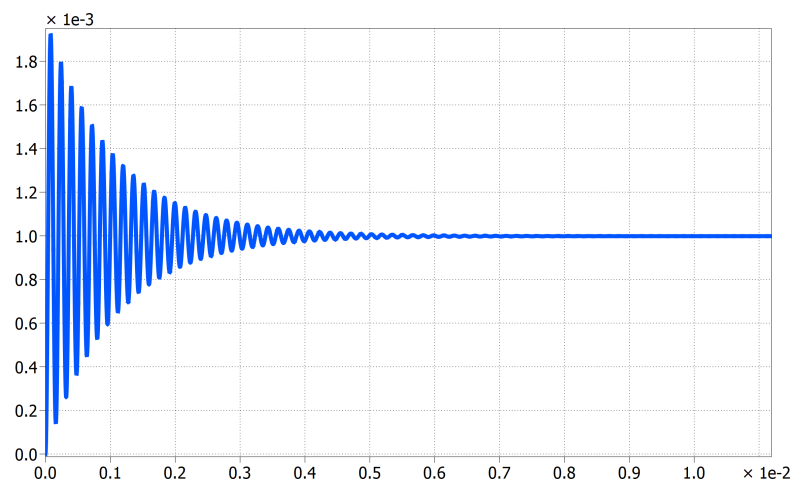


Figura 5.5: Resposta do sistema em malha fechada ( $K = 1$ ), a uma entrada em degrau

Mais uma vez, verifica-se o comportamento previsto, extremamente oscilatório, ainda que atinja o valor final desejado.

Após esta análise, chegou-se à conclusão que este tipo de estrutura realimentada não seria suficiente para ajustar a dinâmica do sistema ao comportamento desejado, procurando uma resposta menos oscilatória e de acordo com o valor de referência imposto.

### 5.1.3 Controlador PID

Como tal, em vez de apenas introduzir uma realimentação proporcional optou-se por adicionar um controlador PID que impusesse uma entrada no sistema com base na evolução do erro entre referência e saída. A nova estrutura considerada toma a seguinte forma:

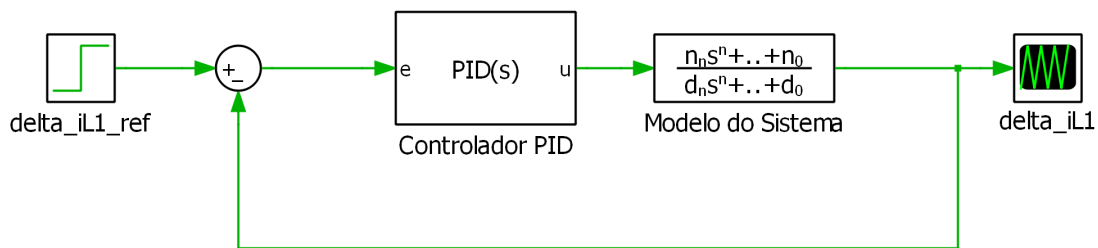


Figura 5.6: Estrutura do sistema em malha fechada, com um controlador PID

Tal como no caso anterior, recorreu-se a uma funcionalidade do MATLAB - o *PID Tuner* - para a determinação dos parâmetros (iniciais) do controlador PID. Esta ferramenta permite, à semelhança do *SISOTool*, uma interacção gráfica, neste caso fazendo alterar a rapidez e robustez da resposta ao degrau. Estando estabelecido um comportamento satisfatório, é possível obter directamente os ganhos do controlador que garantirão tal resposta. A partir destes valores é implementada a estrutura de controlo e testada a resposta obtida. Os ganhos deverão ser ajustados de forma fina até que a resposta na saída apresente o comportamento mais próximo do desejado - baixo valor de *settling time* e *overshoot* e acompanhamento total da referência desejada. Efectuando este procedimento, foram impostos os seguintes parâmetros do controlador:

$$\begin{cases} K_P = 2.213e-4 \\ K_I = 0.2775 \\ K_D = 4.413e-8 \end{cases} \quad (5.4)$$

O que resulta na seguinte resposta ao degrau:

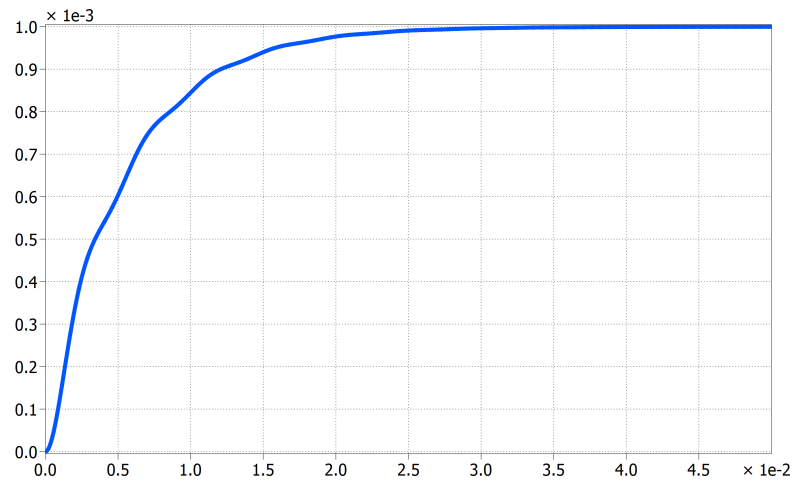


Figura 5.7: Saída do sistema: resposta temporal a uma referência em degrau, com controlador PID

Comparando com as respostas obtidas usando apenas uma realimentação proporcional da saída (fig.5.4 e 5.5), claramente que a solução resultante da utilização do PID é bem mais satisfatória: a resposta é rápida (com um *settling time* de cerca de 21 ms), verifica-se oscilação praticamente inexistente e a saída tende para o valor de referência desejado de 0.001, sem qualquer *overshoot*.

## 5.2 Desenvolvimento de um controlador para um sistema MIMO

Uma vez implementada e testada uma estrutura de controlo para um sistema simplificado, de apenas uma entrada e uma saída, prosseguiu-se com a abordagem ao modelo como sistema MIMO. Desta forma, ambas as variáveis de controlo  $D$  e  $\phi_p$  poderiam ser alteradas de modo a regular as saídas escolhidas  $i_{L1}$  e  $V_{C34}$ . Assumindo tal estrutura, seria interessante o desenvolvimento de um esquema de controlo que permitisse o seguimento independente de referência, para cada saída. Sendo assim, partindo do conjunto de expressões apresentado em 4.35 (desta vez não aplicando qualquer simplificação adicional) e tendo em conta as duas saídas escolhidas, a representação em espaço de estados do sistema vem como:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{i}_{L1} \\ \Delta \dot{i}_{L2} \\ \Delta \dot{V}_{C12} \\ \Delta \dot{V}_{C34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -217.39 & 0 & -1811.59 & 0 \\ 0 & -217.39 & 0 & -1811.59 \\ 1063.83 & 0 & -1246.68 & 415.55 \\ 0 & 1063.83 & 1662.23 & -831.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta i_{L2} \\ \Delta V_{C12} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.6e6 & 0 \\ -1.86e6 & 0 \\ -2.42e5 & -8.55e5 \\ 1.81e5 & 8.55e5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta \phi_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta i_{L2} \\ \Delta V_{C12} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta \phi_p \end{bmatrix}$$

### 5.2.1 Obtenção da função de transferência

No caso de um sistema MIMO, ao contrário da situação da secção anterior, este não será definido por uma função de transferência (no domínio de Laplace) mas sim por um conjunto de funções que relacionam cada entrada com cada saída. Para o caso em estudo, cada saída será definida pela soma das funções de transferência em relação a  $D$  e  $\phi_p$ .

Novamente, partir da representação em espaço de estados é possível obter as funções de transferência do sistema completo, seguindo o que foi feito na secção 5.1.1, resultando:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{cases} \frac{\Delta i_{L1}}{\Delta D}(s) = \frac{-1.601e6s^3 - 3.238e9s^2 - 4.04e12s - 1.582e15}{s^4 + 2513s^3 + 5.15e6s^2 + 5.091e9s + 4.601e12} \\ \frac{\Delta i_{L1}}{\Delta \phi_p}(s) = \frac{1.55e9s^2 + 9.809e11s + 3.126e15}{s^4 + 2513s^3 + 5.15e6s^2 + 5.091e9s + 4.601e12} \\ \frac{\Delta V_{C34}}{\Delta D}(s) = \frac{1.811e5s^3 - 2.08e9s^2 - 5.454e12s - 4.908e15}{s^4 + 2513s^3 + 5.15e6s^2 + 5.091e9s + 4.601e12} \\ \frac{\Delta V_{C34}}{\Delta \phi_p}(s) = \frac{8.554e5s^3 + 1.644e7s^2 + 1.534e12s + 3.416e14}{s^4 + 2513s^3 + 5.15e6s^2 + 5.091e9s + 4.601e12} \end{cases} \quad (5.5)$$

De notar que a função para  $\frac{\Delta i_{L1}}{\Delta \phi_p}$  é exactamente igual à que foi apresentada em 5.3, tal como esperado.

A partir deste conjunto de expressões era possível representar o sistema segundo o seguinte diagrama de blocos:



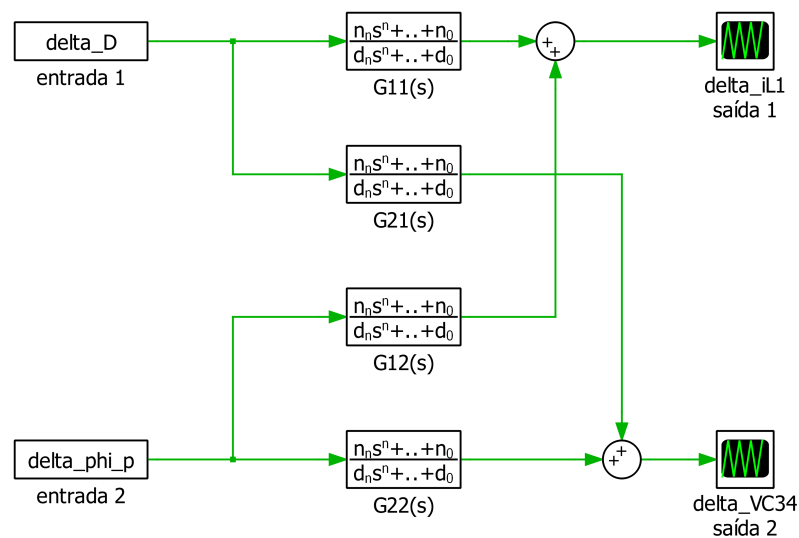


Figura 5.8: Diagrama Blocos genérico do conversor assumindo sistema MIMO

Em que os blocos  $G_{ij}(s)$  representam as funções de transferência apresentadas em 5.5, sendo  $i$  referente à saída associada ( $1 \rightarrow \Delta i_{L1}$  e  $2 \rightarrow \Delta V_{C34}$ ) e  $j$  referente à entrada associada ( $1 \rightarrow \Delta D$  e  $2 \rightarrow \Delta \phi_p$ ).

Relembrando que o objectivo principal seria o de conseguir um controlo independente de cada saída, facilmente se percebe que tal poderá ser não trivial, para o caso de sistemas MIMO: a regulação controlada de uma saída obriga a variações nas entradas, o que, por sua vez, também poderá provocar alterações noutras saídas. A este acontecimento iremos chamar "influência cruzada".

Ainda assim, dependendo do sistema, certas variáveis de entrada poderão ter maior "peso" na determinação de uma saída que as outras. Em particular, se uma entrada em específico definir maioritariamente a dinâmica de uma saída, ao anular-se as influências, nessa mesma saída, de outras entradas, poderá obter-se um sistema cujas saídas são determinadas por uma única função de transferência, em relação a uma única variável entrada - controlo desacoplado.

Admitindo um sistema em que o controlo de cada variável regula o valor de apenas uma saída - ou seja, o sistema é constituído por um conjunto de sub-sistemas SISO -, será possível desenvolver uma estrutura de controlo que garanta o seguimento de um qualquer número referências (tantas quanto as entradas/saídas), independentes, para as saídas [9][22][23][24]. Ora, com isto em mente, é possível, desde já, definir uma limitação deste método de controlo: o sistema tem de ser "quadrado", i.e. terá de ter o mesmo número de entradas e saídas.

O diagrama apresentado na fig.5.8 poderá ser resumido na seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta \phi_p \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Pelo que se verifica que, no caso apresentado, o sistema é de facto "quadrado".

### 5.2.2 Pairing de entradas/saídas - RGA

O primeiro passo para o desenvolvimento da estrutura de controlo desacoplado será a determinação dos pares entrada/saída cuja influência do primeiro no segundo é maior, comparativamente com as restantes entradas.

Para tal, poderá ser calculado o RGA - *Relative Gain Array* - do sistema. Por vezes também denominado de *Bristol Array*, é uma matriz cujos valores definem, quantitativamente, a relação de influência de cada entrada em cada saída. Em específico, quanto mais próximo de 1 estiver um valor da matriz, maior será a dependência da saída (linha da matriz) em relação à entrada (coluna). Por outro lado, quanto mais afastado de 1 estiver um valor da matriz, mais susceptível estará a saída a "interferências" de outras variáveis de entrada [9][23] [24][25].

Formalmente, o RGA é definido como:

$$\Lambda_{n \times n} = [\lambda_{ij}] \quad (5.7)$$

Em que

$$\lambda_{ij} = \frac{\left. \frac{dy_i}{du_j} \right|_{u_k = \text{constante}, \forall k \neq j}}{\left. \frac{dy_i}{du_j} \right|_{y_k = \text{constante}, \forall k \neq i}} \quad (5.8)$$

Da maneira como está formulado, tem em conta as funções de transferência entre cada saída e entrada, no domínio de Laplace. É prática comum, contudo, avaliar as expressões para os valores finais (*steady-state*) dos ganhos do sistema do sistema.

A partir de 5.6, avaliando  $G_{ij}$  para a situação de regime permanente:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Steady-State}} K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

De uma forma simplificada, segundo [23] e [24], o RGA, em regime permanente, poderá ser obtido como:

$$\Lambda = K .* [K^{-1}]^T \quad (5.10)$$

Em que  $.*$  denota a multiplicação elemento-a-elemento entre as matrizes e  $[K^{-1}]^T$  representa a matriz transposta, da matriz inversa de  $K$ .

Tendo em conta as funções de transferência apresentadas em 5.5, foram obtidos os seguintes valores para  $K$ , no sistema em causa:

$$K = \begin{bmatrix} -343.76 & 679.54 \\ -1066.80 & 74.24 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

O que resultou no seguinte RGA:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.0365 & 1.036 \\ 1.036 & -0.0365 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Rapidamente se percebe que este sistema poderá ser desacoplado, associando a primeira entrada ( $\Delta D$ ) com a segunda saída ( $\Delta V_{C34}$ ) e a segunda entrada ( $\Delta \phi_p$ ) com a primeira saída ( $\Delta i_{L1}$ ).

### 5.2.3 Compensação do sistema

Tendo definido as combinações preferenciais para o controlo desacoplado, deveria agora ser desenvolvida a estrutura de compensação dos efeitos cruzados da entrada, de forma a garantir o desacoplamento desejado.

A estrutura do sistema compensado escolhida - com base em [9][22][25] - foi a seguinte:

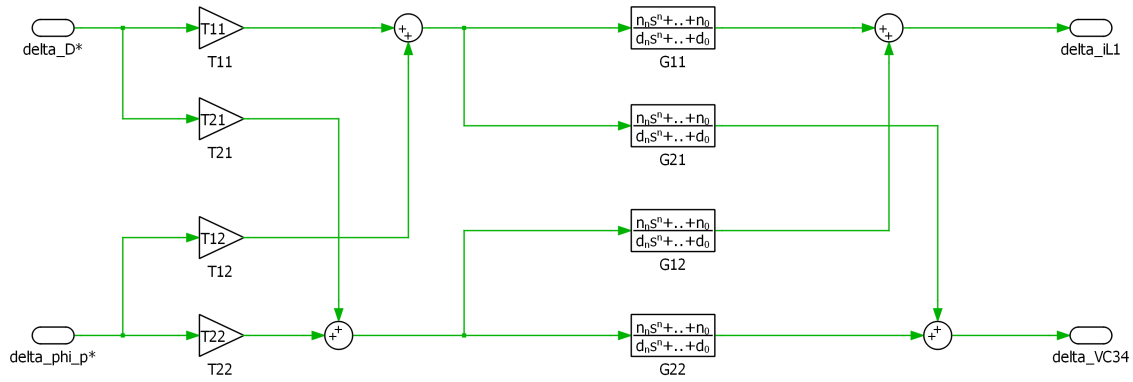


Figura 5.9: Diagrama Blocos Compensado do conversor, assumindo sistema MIMO

Ora, pela figura percebe-se que a compensação poderá ser conseguida determinando as funções de transferência dos blocos  $T_{ij}$ . Contudo, segundo a literatura encontrada e trabalhos sobre o tópico de desacoplamento de sistemas MIMO, uma boa alternativa será determinar os blocos de compensação considerando os valores finais de  $G_{ij}$  no sistema e não as funções de transferências.

Analisando o diagrama apresentado e tendo em conta que se pretende que  $\Delta i_{L1}$  dependa apenas de  $\Delta \phi_p$  e  $\Delta V_{C34}$  de  $\Delta D$ , é possível resumir o problema da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta V_{C34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_{12} \\ \mu_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta \phi_p \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Sendo  $\mu_{12}$  e  $\mu_{21}$  as funções de transferência desacopladas resultantes.

A partir da expressão anterior e assumindo, por simplificação  $T_{11} = T_{22} = 1$ , obtém-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} K_{11} + K_{12} \cdot T_{21} = 0 \\ K_{21} \cdot T_{12} + K_{22} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} T_{21} = -\frac{K_{11}}{K_{12}} \\ T_{12} = -\frac{K_{22}}{K_{21}} \end{cases} \quad (5.14)$$

Para o caso em estudo determinaram-se os seguintes valores para os blocos de compensação:

$$\begin{cases} T_{21} = 0.5059 \\ T_{12} = 0.0696 \end{cases} \quad (5.15)$$

## 5.2.4 Controlo de estrutura compensada

Uma vez determinados os blocos de compensação, em teoria, o sistema deveria agora comportar-se como um conjunto de dois sistemas SISO independentes. Isto querará dizer que será possível

assumir uma estrutura realimentada, para cada entrada/saída, semelhante à usada na secção 5.1.

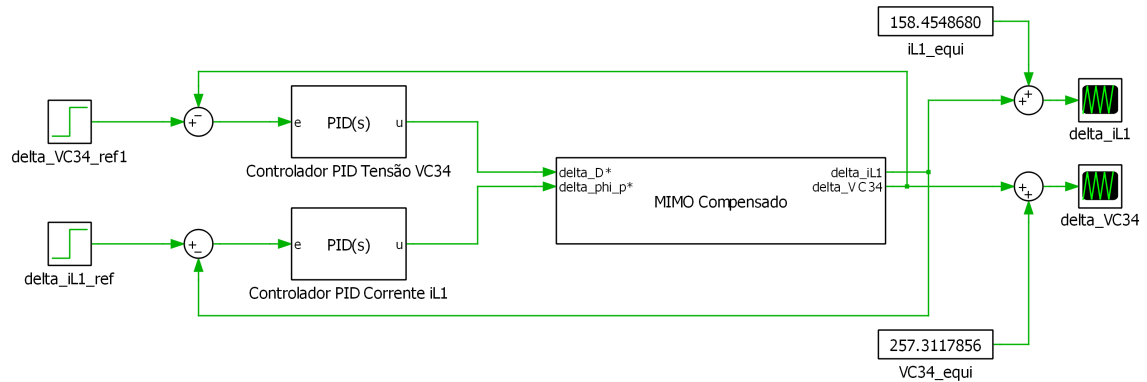


Figura 5.10: Diagrama Blocos Compensado do conversor, assumindo sistema MIMO - adição de controladores PID

Similarmente ao que também foi feito na secção 5.1, tratando-se de dois sistemas SISO a serem controlados por dois PID, poderá ser usada a ferramenta *PID Tuner* para determinar valores iniciais dos ganhos para cada situação, procedendo de seguida ao seu ajuste de forma a otimizar a resposta. No final, os ganhos impostos para cada PID foram os seguintes:

$$PID_{i_{L1}} = \begin{cases} K_P = 0.000001 \\ K_I = 0.6 \\ K_D = 0.000000001 \end{cases} \quad (5.16)$$

$$PID_{V_{C34}} = \begin{cases} K_P = 0.000151 \\ K_I = 0.001 \\ K_D = 2.65e - 07 \end{cases} \quad (5.17)$$



## Capítulo 6

# Resultados em Malha Fechada

Tendo projectado os controladores do sistema, faria agora sentido implementá-los, testando a sua operação sobre o conversor. Idealmente tal deveria ser feito num contexto real, contudo, na impossibilidade de tal situação, o seu teste poderia ser realizado com um modelo de simulação, o mais próximo da realidade possível. Adicionalmente serão também apresentados resultados da aplicação dos conversores nos modelos de média e linearizado, como forma de comparação.

Uma vez que, durante a fase de análise de funcionamento do conversor, foi necessário averiguar a correcção das expressões/condições derivadas, já havia sido implementado um modelo detalhado do conversor num simulador de circuitos. Posto isto, primeiramente será apresentada a implementação desse mesmo modelo.

### 6.1 Implementação em Simulação de Modelo Detalhado

Inicialmente o *software* escolhido foi o Simulink (MATLAB), dada a familiaridade do autor com esta ferramenta. Contudo, uma vez que o conversor deveria trabalhar a frequências algo elevadas (dezenas de  $kHz$ ), pretendendo manter algum nível de detalhe nas formas de onda - o que implica a utilização de um passo de simulação relativamente reduzido -, rapidamente se verificou que a exigência computacional era elevada, resultando em tempos de simulação excessivamente longos.

Como tal, o *software* PLECS revelou-se uma alternativa bem mais apelativa: dispõe de um *Refine Factor* que, no fundo, permite a subdivisão do tempo de amostragem, obtendo os sub-pontos resultantes de simulação por interpolação, baseado num polinómio de ordem elevada [26], o que é computacionalmente menos exigente. Comparativamente com o Simulink, permite a utilização de passos de simulação maiores e, por conseguinte, tempos de simulação bastante inferiores, mantendo um nível de detalhe adequado ao estudo a realizar.

#### 6.1.1 Estrutura do Conversor

Posto isto, foi necessário desenvolver o modelo de simulação completo do conversor na nova ferramenta. Começou-se por implementar uma versão simplificada, com interruptores ideais, um

transformador ideal e uma bobina que deveria representar a indutância de fugas do transformador. As resistências em série com os interruptores representam a  $R_{on}$  de cada um, enquanto que os condensadores em paralelo seriam utilizados para garantir o *Soft Switching*.

O esquema obtido é apresentado de seguida.

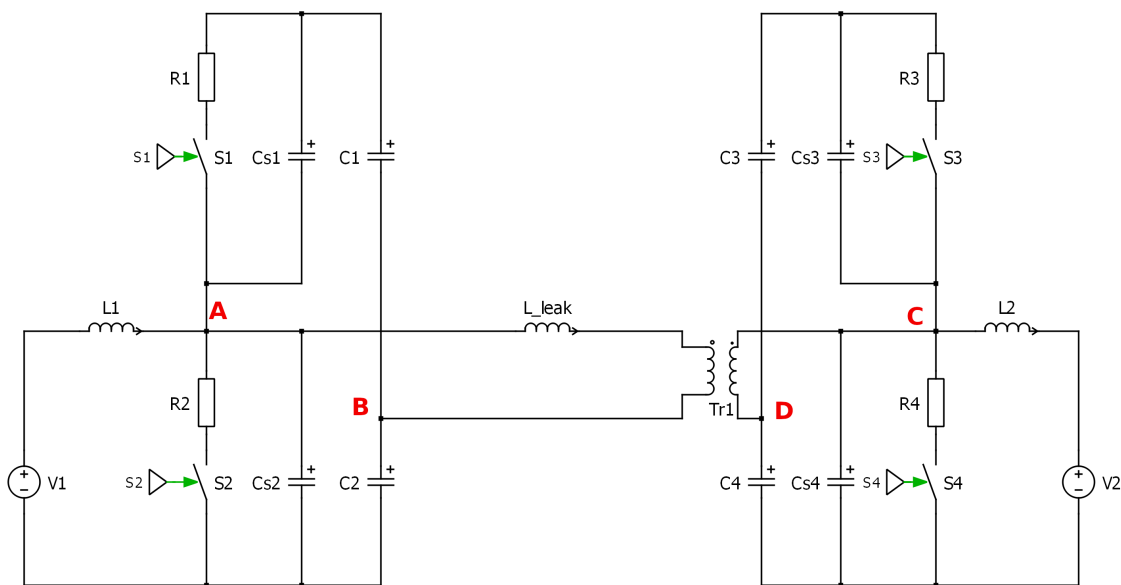


Figura 6.1: Esquema do conversor no software de simulação PLECS

### 6.1.2 Produção dos sinais de controlo

O primeiro procedimento a realizar seria o desenvolvimento dos blocos de criação das formas de onda de controlo dos interruptores, possibilitando a variação dos parâmetros a estudar: *Duty-cycle*, *Phase-Shift* e *Dead Time*. O problema da criação destes sinais podia ser resumido em três passos: primeiro criar uma onda quadrada, com a frequência e *duty-cycle* desejados, obtendo igualmente o seu sinal complementar - estas duas formas de onda corresponderiam aos sinais de controlo dos dois interruptores do "braço" esquerdo do conversor; o segundo passo seria, a partir dos dois sinais anteriores, adicionar um *dead-time*, isto é, um intervalo de tempo entre a comutação dos dois sinais "complementares"; por último tornar-se-ia necessário criar os dois sinais de controlo do "braço" da direita, com base no desfasamento desejado. O esquema geral virá assim:



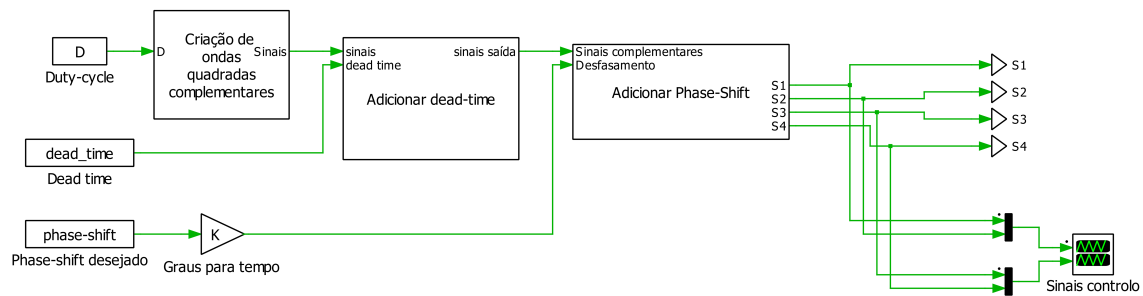
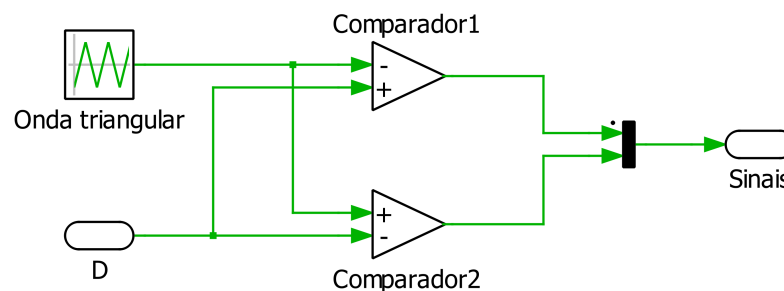


Figura 6.2: Sub-bloco de criação dos sinais de controlo do conversor

### 6.1.2.1 Criação dos sinais complementares do braço esquerdo

Para produzir as duas ondas do braço esquerdo, com frequência e *duty-cycle* desejado, foi utilizado o esquema de modulação a seguir apresentado:

Figura 6.3: Esquema de criação de ondas complementares, dependentes do *duty-cycle* definido

A onda triangular é definida com uma amplitude pico-a-pico de 1 e frequência igual à de comutação desejada. Utilizando um comparador de forma a que na sua saída se obtenha um sinal activo enquanto a onda triangular for inferior à onda constante - de magnitude igual ao valor de *duty-cycle* desejado - e um sinal nulo caso contrário, é possível produzir uma onda quadrada, de largura de estado activo controlável. Naturalmente, assim como o próprio *duty-cycle* numa onda quadrada, apenas fará sentido fazer variar a magnitude do sinal constante entre os valores 0 e 1. O sinal obtido servirá de controlo do interruptor cimeiro.

Facilmente se percebe que, para o interruptor de baixo, desejando-se o sinal complementar do anterior, deverá apenas trocar-se a ordem de comparação entre a onda triangular e o sinal constante. Deste modo, em contraste com a primeira situação, dever-se-á obter na saída do respectivo comparador um sinal activo para instantes em que a onda triangular é superior ao sinal constante e vice-versa.

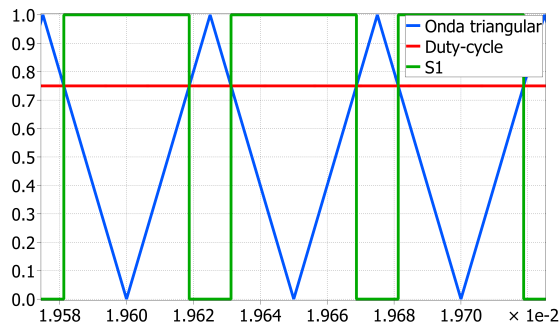


Figura 6.4: Exemplo de formas de onda para criação de S1, para um *duty-cycle* de 75%

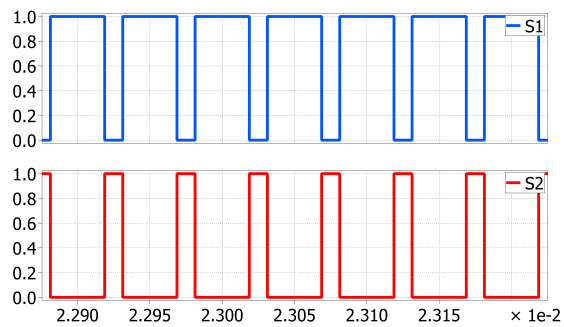


Figura 6.5: Sinais de controlo complementares de S1 e S2, para um *duty-cycle* de 75%

Assim, pretendendo-se alterar a frequência de comutação do conversor bastaria alterar a frequência da onda triangular. De modo similar, o controlo do *duty-cycle* das ondas quadradas de controlo dos interruptores resumir-se-ia à alteração da magnitude do sinal constante, utilizado na comparação.

### 6.1.2.2 Adicionar *dead-time*

Ainda que, numa fase inicial, a adição de um intervalo de tempo entre as transições dos sinais complementares não fosse relevante - uma vez que o estudo analítico em simulação poderia ser realizado com pressupostos ideais, considerou-se pertinente a implementação deste sub-bloco no seguimento do desenvolvimento dos restantes módulos relativos à produção dos sinais de controlo.

O interesse na adição do *dead-time* justificar-se-ia pela possibilidade de implementação de mecanismos de comutação sem perdas mas também, em contexto real, como forma de garantia de não condução de interruptores do mesmo braço.

A forma encontrada para introduzir este elemento controlável aos sinais de controlo foi "cortando" parte do intervalo positivo de cada sinal, o que resulta num atraso na transição ascendente, que não se repercute na transição oposta.

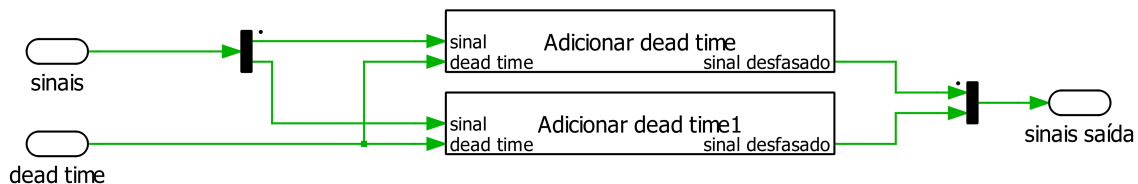


Figura 6.6: Esquema de adição de *dead-time* aos sinais de controlo do braço esquerdo

Para conseguir este encurtamento das ondas, tirou-se partido do facto de se tratarem de ondas quadradas cuja amplitude alterna apenas entre 1 e 0: ao realizar o produto entre a onda original e esse mesmo sinal atrasado de um tempo correspondente ao *dead-time*, obter-se-á na saída a onda desejada. Na fig.6.7 é apresentado o diagrama de blocos representativo de tais operações, seguindo-se um exemplo ilustrativo.

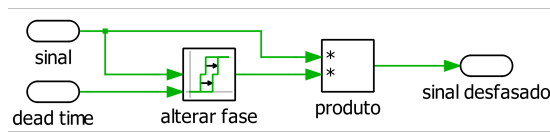


Figura 6.7: Diagrama de blocos representativo do processo de adição de *dead-time*

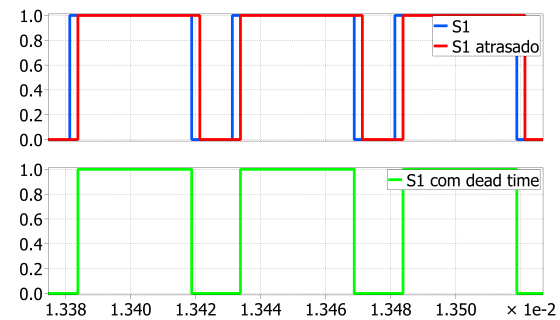


Figura 6.8: Formas de onda de bloco de adição de *dead-time* para situação exemplo

No final, os dois sinais complementares apresentarão a seguinte forma:

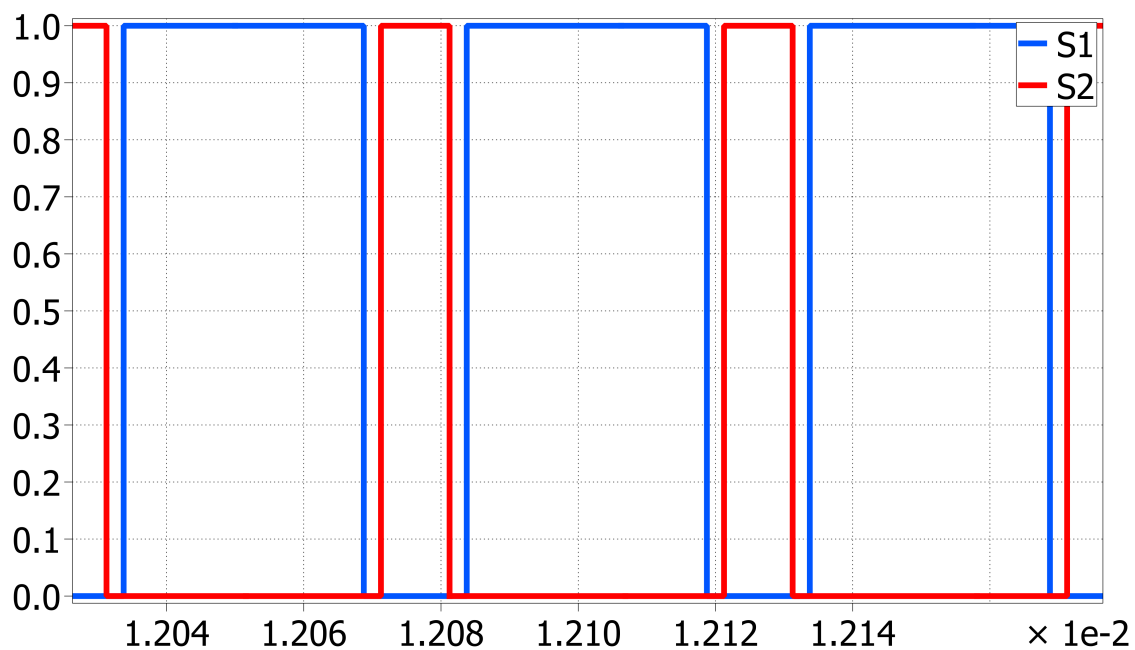


Figura 6.9: Formas de onda de S1 e S2, com *dead-time*, para a situação exemplo.

### 6.1.2.3 Criação dos sinais desfasados do braço direito

O terceiro elemento de controlo a ser adicionado seria o desfasamento dos sinais da meia ponte secundária, em relação à primária. Para tal, seria necessário apenas tirar partido de um bloco de atraso que o PLECS já disponibilizava. Sendo assim, os sinais de controlo relativos a S3 e S4 não serão mais que os sinais S1 e S2, respectivamente, desfasados de uma dada quantidade de tempo desejada, que terá um valor correspondente em ângulos ou radianos.

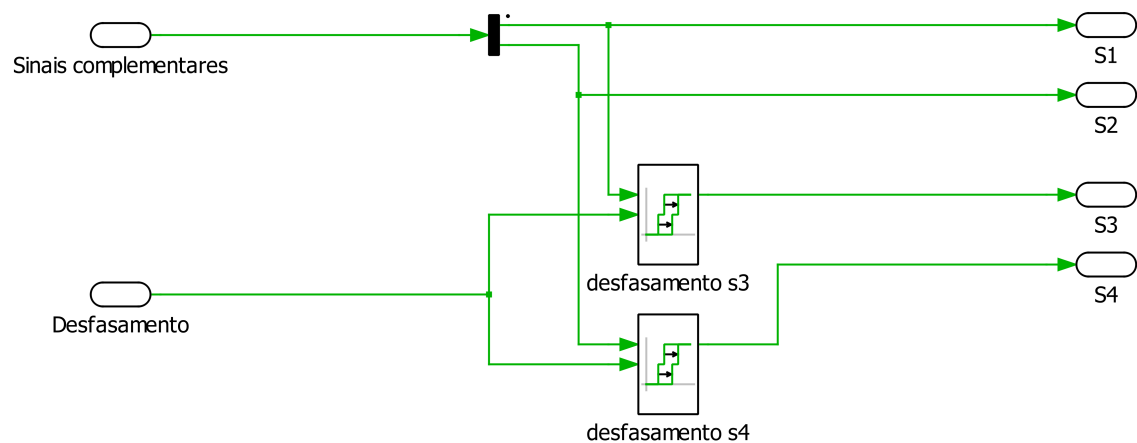


Figura 6.10: Bloco para adição de *Phase-Shift*

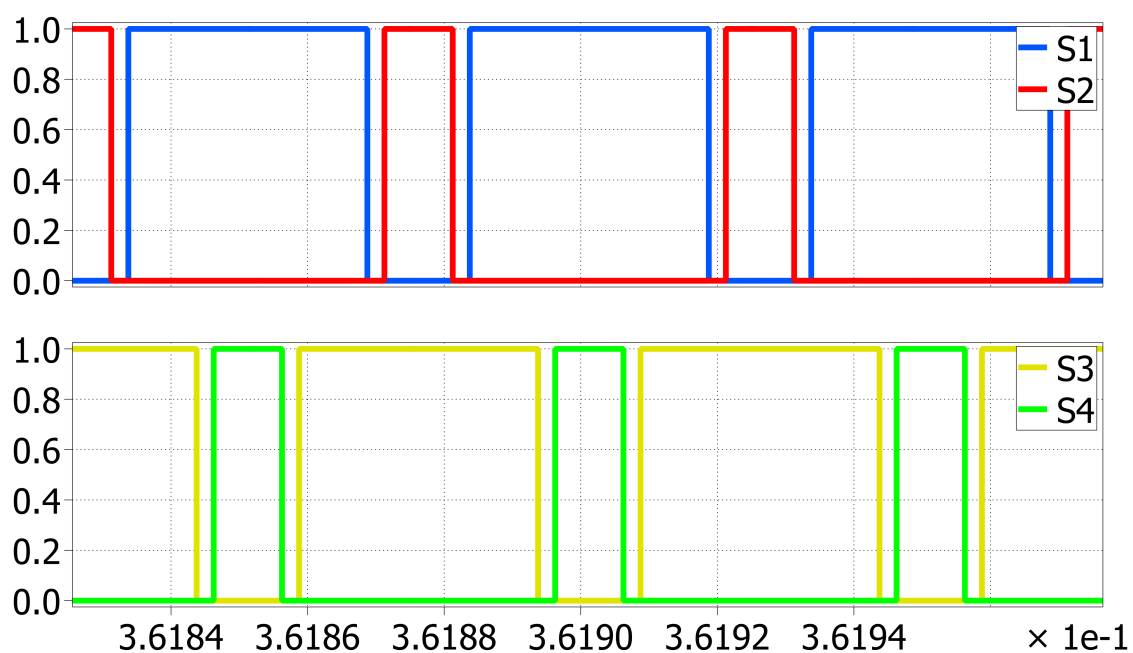


Figura 6.11: Formas de onda do bloco de adição de *Phase-Shift* para situação exemplo de  $45^\circ$

Posto isto, estavam assim garantidas formas de variação dos três elementos fundamentais relativos aos sinais de controlo do conversor e, portanto, estavam igualmente reunidas condições para o início do estudo analítico e verificação da influência da modificação destes factores no trânsito de potência do conversor.

## 6.2 Resultados de simulação controlada do conversor como sistema SISO

Tendo definido os parâmetros do controlador para a situação de sistema SISO - na secção 5.1.3, faria sentido aplicá-lo aos diversos modelos do conversor. Inicialmente optou-se por demonstrar o seu funcionamento comparando as respostas dadas pelo modelo linear e pelo modelo de média simplificado, obtido na secção 4.3.5.

### 6.2.1 Comparação controlo de Modelo de Média e Modelo Linearizado

Tendo em conta que a função de transferência usada para o *design* do controlador apenas é válida para variações em torno do ponto de funcionamento, correspondente ao regime permanente, por forma a comparar as saídas obtidas entre modelos, o diagrama da fig.5.6 foi adaptado para o seguinte:

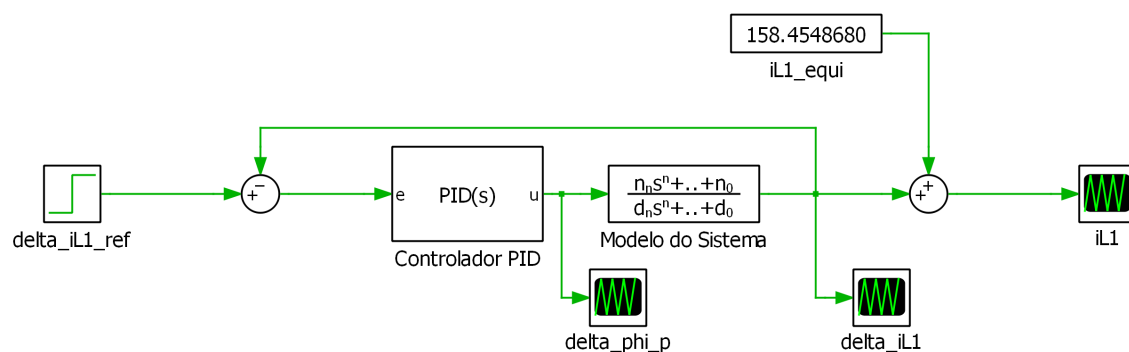


Figura 6.12: Estrutura realimentada para Modelo Linearizado, como SISO - adaptação com valores finais de  $i_{L1}$

O controlador PID foi incorporado no modelo simplificado e é apresentado abaixo.

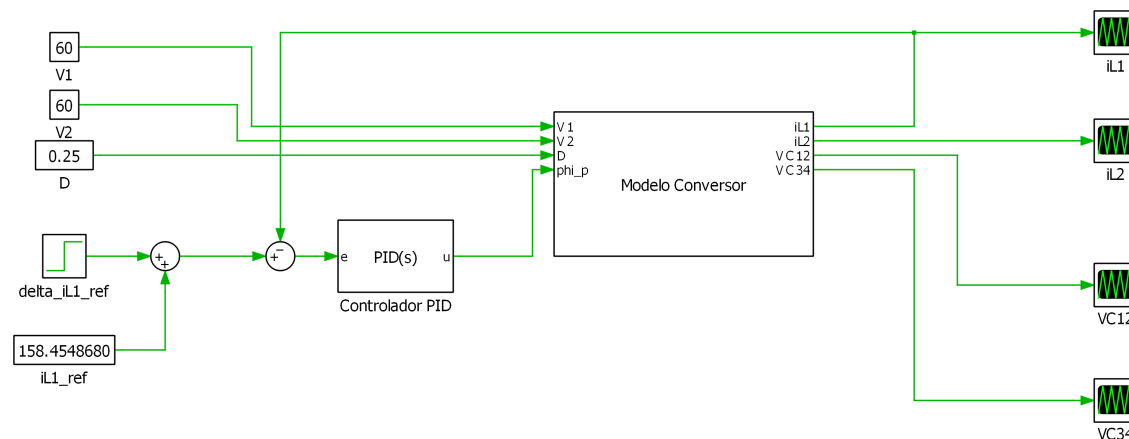


Figura 6.13: Estrutura realimentada para Modelo Média Simplificado, como SISO

Como referência foi usado o valor final de  $i_{L1}$  (para as condições impostas anteriormente, indicadas em 4.13), acrescentado de um bloco de variação em degrau de amplitude 0.1 A. Esta mesma variação foi, obviamente, utilizada na estrutura com o modelo linear.

Ambas as situações foram simuladas e os resultados são apresentados abaixo, sobrepostos no mesmo gráfico para efeitos de melhor comparação:

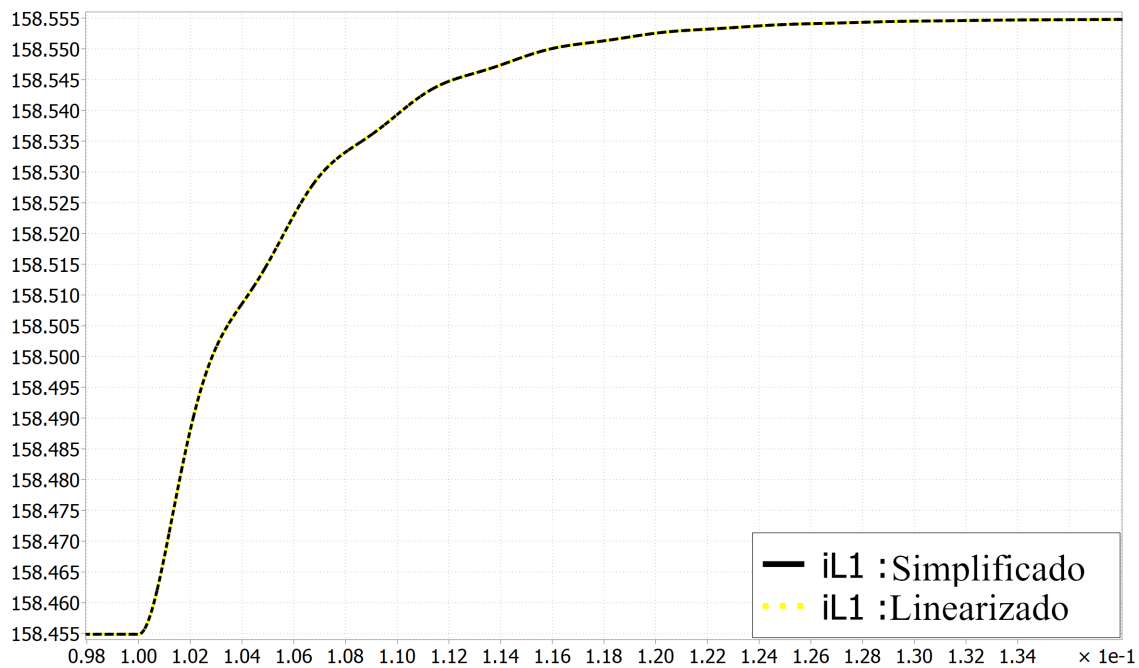


Figura 6.14: Resposta do Modelo Simplificado do Conversor, incorporando um controlador PID sobre a corrente  $i_{L1}$ , com uma variação na referência de 0.1

Como se percebe pelo gráfico, ambos os sinais coincidem por completo pelo que, por um lado, se volta a confirmar a boa representação do modelo linear, para pequenas variações de entrada, e por outro se valida o comportamento desejado do sistema controlado.

Considerou-se pertinente também analisar a forma de onda na saída do controlador (que corresponde à entrada do sistema) de modo a assegurar que os valores que esta toma são praticáveis: neste caso o valor de  $\Delta\phi_p$  resultante nunca poderia implicar que  $\phi_p$  saísse fora do intervalo  $[0, 1]$ . De facto, como se verifica pela figura apresentada em baixo, os valores na saída do controlador encontram-se dentro de tal intervalo, pelo que o controlo poderá ser aplicado em contexto real.

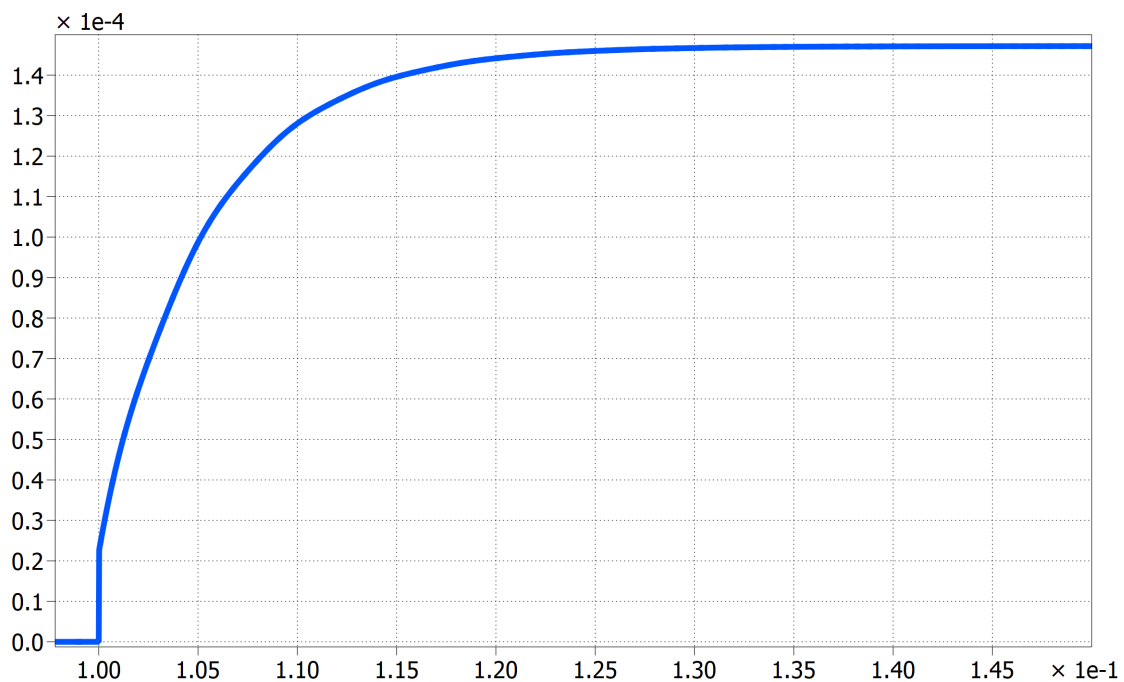


Figura 6.15: Saída do controlador PID para situações de simulação com uma variação na referência de 0.1 A

### 6.2.2 Controle de Modelo detalhado

O passo seguinte seria a verificação de operação do controle sobre o modelo de simulação detalhado, apresentado em 6.1. Para tal, à estrutura apresentada anteriormente foram adicionados os seguintes blocos:

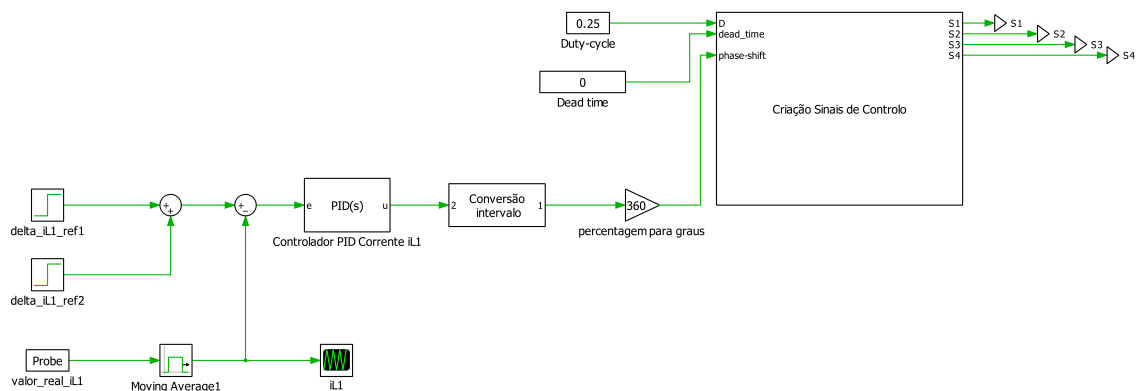


Figura 6.16: Estrutura de controle de modelo detalhado - situação SISO

Daqui há a destacar os seguintes aspectos:

- A soma dos blocos "delta\_iL1\_ref" apenas pretende introduzir uma referência variável em degrau. Inicialmente ocorre um *step* de amplitude 100 A e aos 0.1s decorre uma nova variação em degrau de amplitude -200 A, resultando numa referência de -100 A;

- O sinal a ser comparado com a referência, deverá ser o valor médio da corrente já que, tal como demonstrado na secção de análise do conversor, a sua forma de onda será sempre uma onda triangular. Deste modo, na verdade será controlado o valor médio da corrente  $i_{L1}$ ;
- O controlador PID foi implementado com os ganhos indicados em 5.4, exactamente os mesmos usados para o modelo de média e o modelo linearizado no caso apresentado anteriormente;
- A saída do controlador, sendo o resultado da avaliação do erro entre a referência e o valor médio da corrente, poderá tomar valores positivos ou negativos. Uma vez que representará um valor percentual de *phase-shift*, foi limitada ao intervalo  $[-0.5, 0.5]$ . O bloco "Conversão intervalo" é utilizado para enquadrar os valores da saída do controlador no intervalo  $[0, 1]$  já que, dada a forma como a criação dos sinais de controlo foi implementada, apenas são aceites valores de desfasamento entre 0 e  $360^\circ$ ;
- O bloco de ganho 360 permite apenas converter os valores percentuais resultantes do conversor, em graus.

Simulando nas mesmas condições do teste anterior (à excepção da referência usada), a evolução do valor médio de  $i_{L1}$  apresenta-se de seguida.

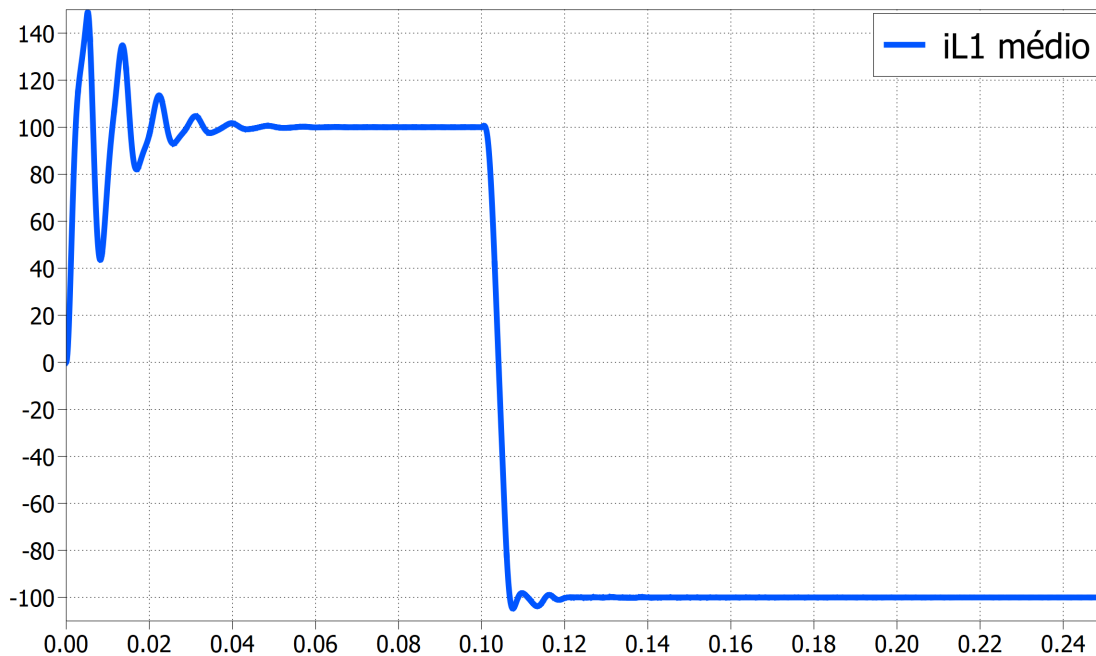


Figura 6.17: Forma de onda de  $i_{L1}$  para simulação de estrutura controlada, no Modelo Detalhado, seguindo uma referência de 100 e  $-100\text{ A}$

Desde logo, há que referir o período transitório oscilatório inicial, verificado até aos 0.05s. Embora coincida com o instante de aplicação de referência em degrau de 100 A, as oscilações



verificadas são características do arranque de operação do conversor, no caso desta corrente resultado do "carregamento" energético inicial da bobina  $L_1$ . Como é possível perceber, o controlador não consegue mitigar estas irregularidades, pelo que, numa implementação real, poder-se-ia proceder a um arranque controlado (suave), por exemplo fazendo aumentar a referência sob a forma de uma rampa. Após este período inicial, a corrente segue na perfeição o valor inicial de referência desejado. Aos 0.1s a referência altera-se para  $-100\text{ A}$  e é possível confirmar a actuação adequada do controlador, rapidamente (e sem grandes oscilações) estabilizando a saída no valor desejado.

Para efeitos de comparação, de seguida apresenta-se a resposta do modelo de média simplificado a esta mesma referência (variável).

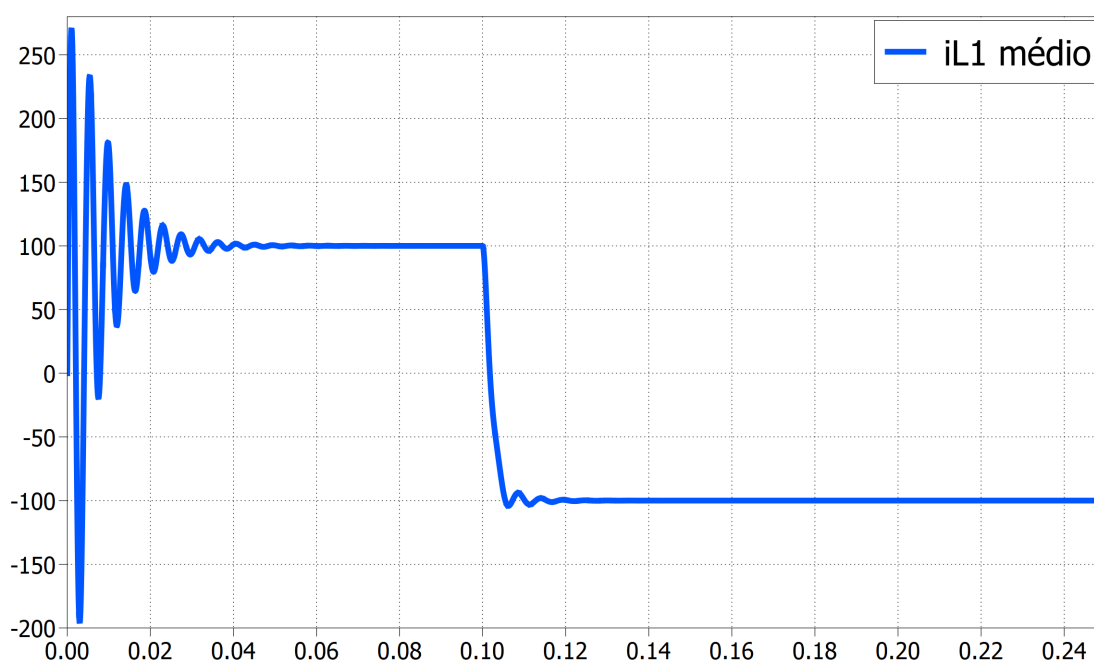


Figura 6.18: Forma de onda de  $i_{L1}$  para simulação de estrutura controlada, no Modelo de Média Simplificado, seguindo uma referência de 100 e  $-100\text{ A}$

Como seria de esperar, o comportamento é em tudo similar à simulação anterior, destacando-se amplitudes de oscilação inicial superiores neste caso. Isto poderá ser explicado pelo facto deste modelo não ter em conta algumas não idealidades, como a  $R_{on}$  dos interruptores, que iria resultar num ligeiro amortecimento da resposta da corrente, durante o período transitório.

### 6.3 Resultados de simulação controlada do conversor como sistema MIMO

De forma semelhante ao que foi feito para a abordagem do conversor como sistema SISO, de seguida apresenta-se um conjunto de simulações para a implementação do controlo - adicionando

os blocos de compensação cruzada - aos modelos do conversor, assumindo-o como um sistema MIMO.

### 6.3.1 Comparação controlo de Modelo de Média e Modelo Linearizado

As estruturas utilizadas foram as da fig.5.10 para o Modelo Linearizado e a fig.6.19, apresentada de seguida, para o Modelo de Média.

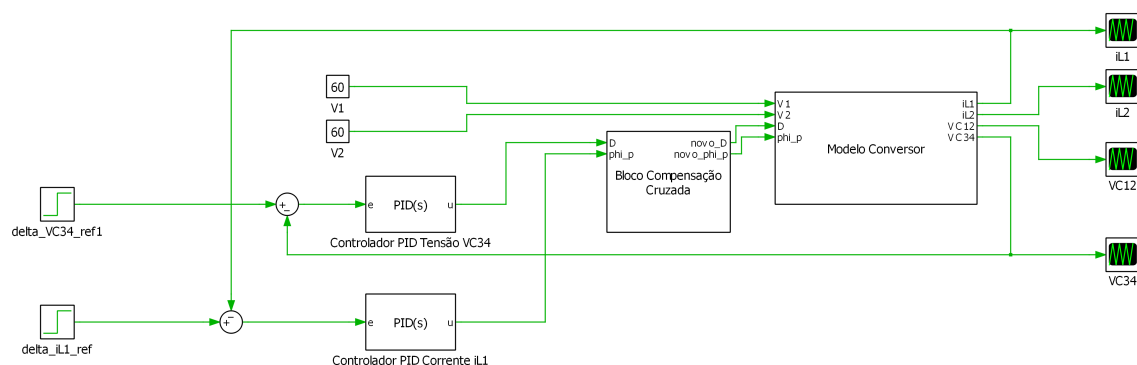


Figura 6.19: Estrutura realimentada para Modelo Média Simplificado, como MIMO

Além de obviamente ter sido introduzida uma malha de realimentação (com controlador PID), para a tensão  $V_{C34}$ , destaca-se a presença do bloco "Compensação Cruzada". Como o nome indica, este inclui a estrutura compensação para cancelamento dos efeitos cruzados, tal como apresentada abaixo.

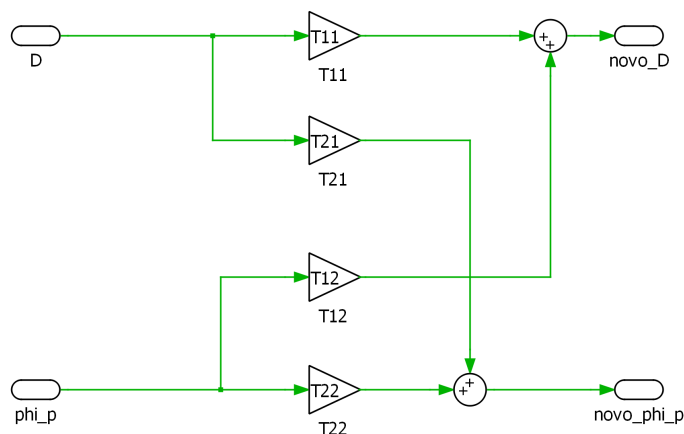


Figura 6.20: Bloco Compensação Cruzada

Tendo sido utilizados os valores de  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{21}$  e  $T_{22}$  determinados em 5.15.

Neste caso, contudo, foi necessário modificar os ganhos determinados em 5.16 e 5.17, por forma a otimizar a resposta do modelo de média simplificado. Os valores aplicados foram os

seguintes:

$$PID_{i_{L1}} = \begin{cases} K_P = -0.555055e-9 \\ K_I = 0.045905 \\ K_D = -0.100000e-06 \end{cases} \quad (6.1)$$

$$PID_{V_{C34}} = \begin{cases} K_P = -5.54887e-06 \\ K_I = -0.12970 \\ K_D = -0.000000001 \end{cases} \quad (6.2)$$

Para esta simulação, foram usados como valores de referência de  $i_{L1}$  e  $V_{C34}$  os respectivos valores finais - mais uma vez, para as condições consideradas em 4.13 -, adicionados de um degrau de  $0.1\text{ A}$  e  $-0.2\text{ V}$ , respectivamente. Estas variações em *step* foram despoletadas apenas a partir dos  $0.3\text{ s}$ , por forma a garantir primeiro a estabilização do modelo de média no ponto de funcionamento. Focando a atenção na simulação a partir deste ponto, verificam-se as seguintes respostas (tal como no caso SISO, apresentadas de forma sobreposta) para  $i_{L1}$  e  $V_{C34}$ :

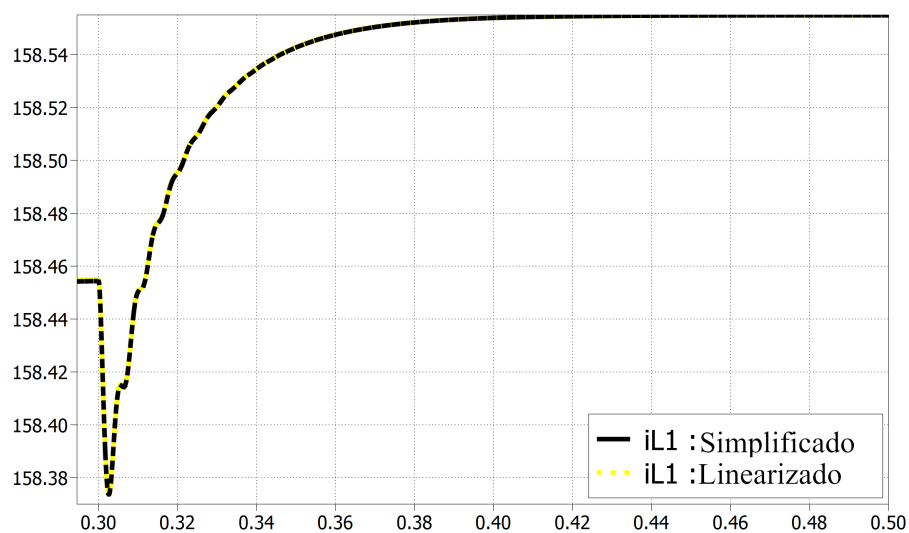


Figura 6.21: Comparação de respostas entre Modelo de Média Simplificado e Modelo Linear, para  $i_{L1}$  - sistema MIMO

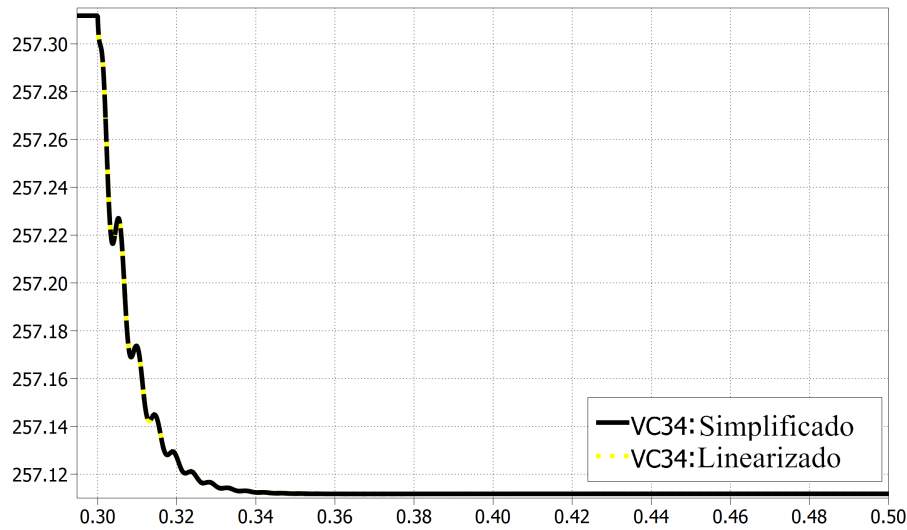


Figura 6.22: Comparação de respostas entre Modelo de Média Simplificado e Modelo Linear, para  $V_{C34}$  - sistema MIMO

Tal como para o caso SISO, as respostas coincidem na perfeição, tendendo rapidamente para as referências desejadas. Ainda assim, é de referir que, para o caso da corrente, se verifica uma transição inicial no sentido contrário, enquanto que, no caso de  $V_{C34}$ , apenas há a destacar ligeiras oscilações. Em ambas as situações o controlador respectivo não foi capaz de mitigar os problemas, levando a querer que os ganhos poderiam ter sido melhor ajustados, com base num método de "tentativa e erro". Todavia, não sendo o objectivo principal assegurar o controlo óptimo dos modelos matemáticos desenvolvidos mas sim do modelo detalhado, optou-se por não proceder à alteração dos ganhos.

### 6.3.2 Controlo de Modelo detalhado

Tendo garantido o funcionamento dos controladores PID, para os modelos matemáticos desenvolvidos, o passo final seria a sua implementação em conjunto com o modelo detalhado.

De maneira similar ao que foi efectuado no diagrama da fig.6.16, foi estabelecida a seguinte estrutura realimentada para a abordagem do conversor como sistema MIMO:

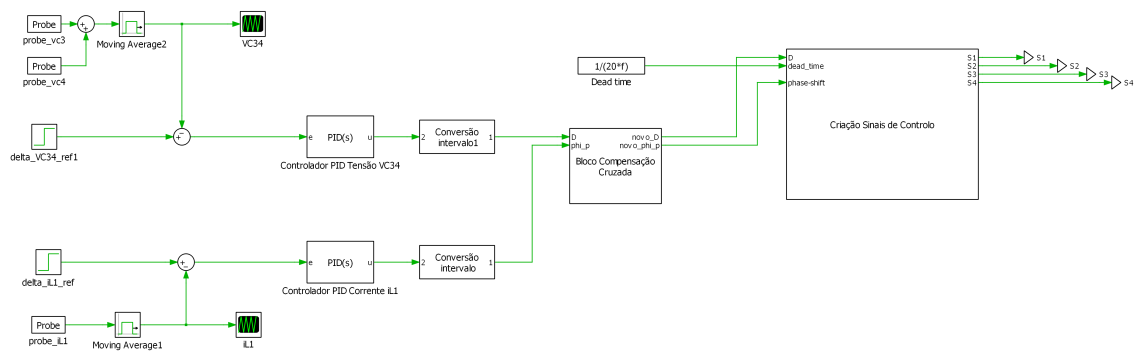


Figura 6.23: Estrutura de controlo de modelo detalhado - situação MIMO

Embora os ganhos dos controladores PID assegurassem-se o correcto seguimento de referência para os modelos de média e linearizado, aquando da sua utilização na estrutura apresentada na fig.6.23, os resultados não foram os esperados. De facto, as saídas não conseguiam acompanhar as referências impostas. Tal acontecimento não é, de todo, surpreendente, uma vez que os controladores haviam sido desenvolvidos tendo por base modelos aproximados do conversor. No caso do modelo de média, não só foi desenvolvido tendo-se assumindo algumas simplificações em relação ao conversor original, como o processo matemático utilizado para a sua obtenção (*Averaging*) introduziu erros de representação das formas de onda das saídas. Sendo que o modelo linear foi obtido a partir do modelo de média, é natural que compartilhe das mesmas limitações de detalhe.

Posto isto, seria necessário proceder ao ajuste fino dos ganhos de cada controlador, por forma a assegurar o acompanhamento das referências para as duas saídas. Contudo, não foi possível realizar este procedimento em tempo útil, pelo que se omitem quaisquer resultados.



## Capítulo 7

# Conclusões e Trabalho Futuro

### 7.1 Satisfação dos Objectivos

De um modo geral é possível afirmar que os objectivos principais desta dissertação foram atingidos com elevado grau de satisfação. A análise e estudo de operação da configuração proposta, face à escassez de documentação e trabalhos de investigação, revelaram-se desafios interessantíssimos. Por um lado, a quase inexistência de informação sobre a configuração estudada e o modo de controlo, acrescenta valor ao trabalho realizado, por outro, naturalmente isto implica dificuldades adicionais, por falta de termos de comparação/confirmação de resultados. Este problema, todavia, foi ultrapassado recorrendo a simulações detalhadas e documentação sobre conversores de estrutura semelhante. Isto permitiu confirmar algumas partes do trabalho, de forma isolada.

Ainda assim, quer o carácter inovador da configuração - concretizada nesta dissertação pela análise funcional realizada e consequentes relações/condições deduzidas -, quer a imposição de um trabalho maioritariamente autónomo, serviram de motivação pessoal para um esforço permanente de investigação e desenvolvimento.

Objectivamente, o sucesso da investigação realizada explica-se pelo cumprimento de metas estabelecidas desde o início. A análise teórica inicial permitiu perceber as condições para a operação no modo desacoplado de *duty-cycle* e *phase-shift*, ao mesmo tempo que ficaram definidas condições importantes para a compreensão da evolução de algumas formas de onda do circuito e, essencialmente, de que forma o trânsito de potência era afectado pela regulação das variáveis de controlo. Posteriormente, todo o processo de modelação matemática, pretendendo obter um conjunto de equações lineares que definissem o conversor, embora trabalhoso, foi realizado com sucesso. No final, foi possível representar um sistema de funcionamento altamente não linear - e descontínuo - por um conjunto único de equações de primeiro grau.

A determinação de um modelo linear tinha como principal finalidade a possibilidade de desenvolvimento de uma estrutura de controlo. Primeiramente, para um caso simplificado observando apenas a variação de uma saída, face ao controlo de uma variável de entrada, o cumprimento deste objectivo foi conseguido com relativa facilidade, demonstrando o seu correcto funcionamento num modelo detalhado de simulação do conversor. Contudo, relativamente ao caso mais

complexo (sistema MIMO), mais aproximado de uma situação real desejada, além do desenvolvimento teórico dos controladores não ser trivial - obrigando a duas associações entrada/saída e uma compensação de efeitos cruzados -, também a demonstração prática se revelou problemática. Embora funcionasse, de forma satisfatória, actuando sobre os modelos de média e linearizado, ao aplicar a estrutura de controlo/compensação ao modelos detalhado, as respostas obtidas não foram as desejadas.

De forma complementar aos resultados obtidos, todo o processo de desenvolvimento do projecto potencializou a assimilação de novas competências e o aprofundamento de conhecimentos. Na impossibilidade de implementação real do conversor, tornou-se necessário trabalhar de forma contínua com *softwares* de simulação de circuitos. Ainda que este tipo de programas não fosse uma "novidade" para mim, o contacto mais regular dotou-me de uma maior agilidade perante sua utilização. Uma vez que acabei por utilizar dois simuladores diferentes, pude também desenvolver um maior espírito crítico em relação às vantagens e desvantagens de cada um, podendo sem dúvida alguma associar uma maior rapidez ao *PLECS*, pecando, contudo, relativamente ao detalhe na modelação de componentes - tal como assumido pela própria *PLEXIM*. Por outro lado, o *Simulink/Matlab* apresenta exactamente os problemas opostos, permitindo a simulação detalhada de fenómenos não ideais, à custa de tempos de simulação significativamente superiores.

Outro dos programas que utilizei com grande regularidade foi o *MAPLE*, com o qual nunca tinha trabalhado anteriormente. Este revelou-se também extremamente importante em muitas das deduções/simplificações efectuadas. Na realidade, a possibilidade de simplificação de cálculos de inúmeras expressões, aplicação de derivadas ou fórmulas e a representação gráfica de algumas relações, muitas vezes em apenas alguns segundos, foi algo que permitiu avançar com o trabalho de investigação, ultrapassando "acções" sem valor acrescentado para os resultados finais.

Em relação ao tópico da modelação, gostaria de destacar a possibilidade de aplicação prática de diversos conceitos como a análise de circuitos, "Averaging" ou linearização, que apenas havia estudado (alguns muito brevemente) em teoria, o que, na minha opinião, dificulta a sua compreensão por falta de contextos de aplicação. O melhor exemplo disto será a questão de "Averaging" dos sistemas de duas escalas temporais (TTS), cuja definição e aplicabilidade se tornou bastante clara, no exemplo apresentado nesta dissertação.

Por último, gostaria de salientar a oportunidade de aprendizagem ao nível do desenvolvimento completo de um projecto de investigação, constantemente alternando (e por vezes até em simultâneo) com componentes teóricas/analíticas - investigação sobre certos conceitos, análises gráficas ou cálculos *a priori*, "à mão"-, componentes de resolução numérica, por *software*, e componentes práticas/simulação. Dada a extensão deste tipo de projectos, necessariamente devem ser elaborados percorrendo diversas fases. Tal divisão de trabalhos pode ser associada aos três grandes objectivos definidos, já apresentados.

Conclusivamente, reafirmo a satisfação total com o trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação. Ainda que a informação disponível, à partida, fosse escassa, todas as fases que me propus desenvolver foram realizadas com sucesso - umas com mais dificuldades que outras é certo -, tendo podido trabalhar de forma autónoma, pôr à prova os meus conhecimentos mas também o meu es-



pírito crítico. Obviamente, este trabalho revelou-se um processo de aprendizagem contínuo, em diversas áreas, cuja ideologia tentarei manter ao longo de desafios profissionais futuros.

## 7.2 Trabalho Futuro

Tal como foi já dito repetidamente, nenhum dos objectivos principais desta dissertação ficou por concluir: foi realizado um estudo teórico do conversor, desenvolvido (mais que) um modelo representativo e desenvolvida (mais que uma) estrutura realimentada de controlo do conversor. É possível, todavia, enumerar alguns assuntos cuja a abordagem pudesse ter sido um pouco mais aprofundada ou outros cuja inclusão, havendo tempo para tal, acrescentaria valor a esta dissertação. Posto isto, destaca-se os seguintes pontos:

- **Comparações com outras estruturas e modos de operação:** tendo analisado com detalhe o funcionamento desta configuração de conversor bidireccional isolado, seria de todo o interesse desenvolver um estudo de comparação com as alternativas mais utilizadas - DAB ou DHB -, por forma a concluir sobre vantagens/desvantagens de cada situação. De igual forma, apresentados os modos de funcionamento resultantes do controlo simultâneo do *duty-cycle* e desfasamento e as relações com algumas grandezas do circuito, poderia ser investigado com maior detalhe as repercussões da adição deste grau de liberdade, em relação ao controlo tradicional;
- **Implementação real do conversor:** tendo desenvolvido um estudo teórico/analítico do conversor faria todo o sentido a sua implementação em contexto real. Isto possibilitaria não só a comprovação das deduções efectuadas e do nível de detalhe dos modelos desenvolvidos, como a exploração de outros aspectos como o dimensionamento de componentes ou exploração dos níveis de eficiência do conversor;
- **Teste e Validação do controlo:** Em consequência do ponto anterior, seria possível também implementar a estrutura de controlo realimentada do conversor, testando a sua actuação e analisando resposta obtida. Com base nisso validar-se-ia a estrutura ou ajustar-se-ia o controlador;
- **Soft Switching:** Embora tenha sido um assunto abordado durante a Revisão Bibliográfica, este acabou por ser, deliberadamente, não desenvolvido durante a dissertação, dada a limitação temporal do trabalho. Por um lado, tal justifica-se pela extensão e complexidade dos objectivos principais, que consumiram toda a minha atenção. Por outro, a escolha pelo *software PLECS* não foi realizada sem alguns inconvenientes (tal como já referido): a grande velocidade de simulação é conseguida retirando complexidade a alguns modelos de componentes. Um exemplo disso são os interruptores *MOSFET* ou *IGBT*, que são sempre tratados como *switches* ideais, focando-se apenas na modelação numérica das perdas, com base em valores concretos fornecidos pelos fabricantes dos componentes. Sendo assim, a reprodução das formas de onda de tensão e corrente nestes elementos não é rigorosa, representando

apenas com detalhe os valores de perdas de condução e comutação, com base em tabelas de *look-up* do modelo térmico do componente. Num trabalho futuro, poder-se-ia utilizar um outro *software* (mais rigoroso ao nível da comutação dos interruptores) para o estudo e aplicação de técnicas de *Soft Switching* neste conversor, aproveitando depois uma eventual implementação real do mesmo para confirmação de redução de perdas.

- **Potência vs Corrente RMS:** Relativamente à análise funcional do conversor, destaca-se apenas o estudo da relação entre Potência Transferida e Corrente Eficaz (RMS) no transformador, em concreto explorando regiões/condições que garantissem menores valores de corrente para um dado valor de potência desejado;
- **Controlador para sistema MIMO:** Como foi mencionado, não foi possível desenvolver um controlo satisfatório para o seguimento de duas referências, relativamente às saídas do conversor. De igual forma, a limitação temporal inviabilizou a averiguação das causas de tais falhas, deixando assim a sua resolução como tópico a abordar no futuro.

# Referências

- [1] Gang Ma, Wenlong Qu, Gang Yu, Yuanyuan Liu, Ningchuan Liang, e Wenzhong Li. A zero-voltage-switching bidirectional DC-DC converter with state analysis and soft-switching-oriented design consideration. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(6):2174–2184, 2009.
- [2] Dragan Maksimovic Robert W. Erickson. *Fundamentals of Power Electronics*. Kluwer Academic, 2001.
- [3] William P. Robbins Ned Mohan, Tore M. Undeland. *Power Electronics*. John Wiley and Sons, Inc, 1995.
- [4] Hamid R., Hamid Daneshpajoo, Alireza Safaee, Praveen Jain, e Alireza Bakhshai. Bidirectional DC - DC Converters for Energy Storage Systems. *Energy Storage in the Emerging Era of Smart Grids*, 2011.
- [5] Deepak Ravi, Bandi Mallikarjuna Reddy, S.L. Shimi, e Paulson Samuel. Bidirectional dc to dc converters: An overview of various topologies, switching schemes and control techniques. *International Journal of Engineering & Technology*, páginas 360–365, 2018.
- [6] Armando Araújo. *Slides Electrónica Automóvel*, 2019.
- [7] Carlos A. Sá. *Slides Máquinas Eléctricas - Motor de Indução*, 2019.
- [8] Fang Z. Peng, Hui Li, Gui Jia Su, e Jack S. Lawler. A new ZVS bidirectional DC-DC converter for fuel cell and battery application. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 19(1):54–65, 2004.
- [9] Kang Xiangli, Shouxiang Li, e Keyue Ma Smedley. Decoupled PWM Plus Phase-Shift Control for a Dual-Half-Bridge Bidirectional DC-DC Converter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 33(8):7203–7213, 2018.
- [10] Wei Jiang, Liu Kai, Renjie Hu, e Wu Chen. Novel modeling and design of a dual half bridge DC-DC converter applied in supercapacitor energy storage system. *Electric Power Components and Systems*, 42(13):1398–1408, 2014.
- [11] Shiladri Chakraborty e Souvik Chattopadhyay. Minimum-RMS-current operation of asymmetric dual active half-bridge converters with and without ZVS. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 32(7):5132–5145, 2017.
- [12] Alberto Rodríguez Alonso, Diego G. Lamar, Aitor Vazquez, Javier Sebastian, e Marta M. Hernando. An overall study of a dual active bridge for bidirectional dc/dc conversion.

- [13] Rik W. A. A. De Doncker e Mustansir H. Kheraluwala. A three-phase soft-switched high-power-density dc/dc converter for high-power applications. 1991.
- [14] Hai N. Tran e Sewan Choi. A family of ZVT DC-DC converters with low-voltage ringing. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 35(1):59–69, 2020. doi:10.1109/TPEL.2019.2911040.
- [15] Carlos A. Sá. *Slides Máquinas Eléctricas - Transformadores Eléctricos*, 2019.
- [16] Dingyü Xue, YanQuan Chen, e Derek Atherton. *Linear Feedback Control, Analysis and design with MATLAB - Advances in Design and Control*. 2007.
- [17] Rui Manuel Esteves Araújo. *Modelação, Identificação e Controlo do Motor de Indução Trifásico*. 2001.
- [18] Jian Sun e Horst Grotstollen. Averaged modelling of switching power converters: Reformulation and theoretical basis. *PESC Record - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference*, páginas 1165–1172, 1992.
- [19] Jack Lawler. Modeling, Simulation, and Experimental Verification of Soft-switched Bi-directional dc-dc Converters. páginas 736–742, 2001.
- [20] Claudio Canuto e Anita Tabacco. *Mathematical Analysis I*, volume 42. 2004.
- [21] Michael D. Greenberg. *Advanced Engineering Mathematics*. 1998.
- [22] Chuanhong Zhao, Simon D. Round, e Johann W. Kolar. An isolated three-port bidirectional dc-dc converter with decoupled power flow management. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 23(5):2443–2453, 2008. doi:10.1109/TPEL.2008.2002056.
- [23] Ali Khaki-Sedigh e Bijan Moaveni. *Control configuration selection of nonlinear multivariable plants*, volume 391. 2009.
- [24] Michael Mulholland. *Applied Process Control*. 2016.
- [25] Francisco Vázquez e Fernando Morilla. *Tuning decentralized pid controllers for MIMO systems with decouplers*, volume 15. IFAC, 2002. URL: <http://dx.doi.org/10.3182/20020721-6-ES-1901.00139>, doi:10.3182/20020721-6-es-1901.00139.
- [26] Plexim. *User Manual*, 2019.

## Anexo A

# Matrizes do Modelo de Média

### A.1 Modos 2 a 6

#### A.1.1 Modo 2

Referência a fig.3.13.

$$\dot{X}_2^I = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_2^{II} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ 0 \\ -\frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_2^{III} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} + \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_2^{IV} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D\phi_p(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ 0 \\ -\frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D\phi_p(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

Obtendo:

$$\dot{X}_{2_{med}} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{D(V_{C1} + V_{C2})}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{D(V_{C3} + V_{C4})}{L_2} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + 2D^2(\phi_p - 1))V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 3) + D)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + 2D^2(\phi_p - 1))V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 3) + D)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{D^3 V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + D(1 - 2\phi_p))V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(1 - 2\phi_p))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(1 - \phi_p) + D(2\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{D^3 V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + D(1 - 2\phi_p))V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(1 - 2\phi_p))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(1 - \phi_p) + D(2\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

Aplicando a simplificação indicada no capítulo 4

$$\dot{X}_{2_{med}}^{simples} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{DV_{C12}}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{DV_{C34}}{L_2} \\ \frac{2Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-2D^3 + 3D^2 - D)V_{C12}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(2D^3 + D^2(4\phi_p - 5) + D)V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{2Di_{L2}}{C_s} + \frac{(2D^3 - D^2 + D(1 - 2\phi_p))V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-2D^3 + D^2(3 - 4\phi_p) + D(2\phi_p - 1))V_{C34}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

### A.1.2 Modo 3

Referência a fig.3.15.

$$\dot{X}_3' = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 2)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] + 2(1 - \phi_p)V_{C3} + (3 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak}C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} - \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 2)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] + 2(1 - \phi_p)V_{C3} + (3 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak}C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$



$$\dot{X}_3^{II} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_3^{III} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ 0 \\ -\frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_3^{IV} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} + \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

Obtendo:

$$\dot{X}_{3_{med}} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{D(V_{C1} + V_{C2})}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{D(V_{C3} + V_{C4})}{L_2} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 3) + 2D(1 - \phi_p) - (1 - \phi_p)^2)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + 2D^2(\phi_p - 2) + D(3 - 2\phi_p) - (1 - \phi_p)^2)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 3) + 2D(1 - \phi_p) - (1 - \phi_p)^2)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + 2D^2(\phi_p - 2) + D(3 - 2\phi_p) - (1 - \phi_p)^2)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + (1 - \phi_p)^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + D(3 - 2\phi_p) + \phi_p^2 - 1)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(3 - 2\phi_p) + 2D(\phi_p - 1))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(2 - \phi_p) + D(4\phi_p - 5) - 2(\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + (1 - \phi_p)^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + D(3 - 2\phi_p) + \phi_p^2 - 1)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(3 - 2\phi_p) + 2D(\phi_p - 1))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(2 - \phi_p) + D(4\phi_p - 5) - 2(\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

Aplicando a simplificação indicada no capítulo 4

$$\dot{X}_{3_{med}}^{simpl} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{DV_{C12}}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{DV_{C34}}{L_2} \\ \frac{2Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-2D^3 + 3D^2 - D)V_{C12}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(2D^3 + D^2(4\phi_p - 7) + D(5 - 4\phi_p) - 2(1 - \phi_p)^2)V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{2Di_{L2}}{C_s} + \frac{(2D^3 - 3D^2 + D(3 - 2\phi_p) + 2\phi_p(\phi_p - 1))V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-2D^3 + D^2(7 - 4\phi_p) + D(6\phi_p - 7) - 2(\phi_p - 1))V_{C34}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

### A.1.3 Modo 4

Referência a fig.3.13.

$$\dot{X}_4^I = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_4^{II} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - 2\phi_p V_{C3} + (1 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} - \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - 2\phi_p V_{C3} + (1 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2 \pi^2 L_{leak} C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_4^{III} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} + \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2(\phi_p - 1)D(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_4^{IV} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D\phi_p(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ 0 \\ -\frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D\phi_p(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

Obtendo:

$$\dot{X}_{4_{med}} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{D(V_{C1} + V_{C2})}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{D(V_{C3} + V_{C4})}{L_2} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 1) - 2D\phi_p + \phi_p^2)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 2) + D(1 - 2\phi_p) + \phi_p^2)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 1) - 2D\phi_p + \phi_p^2)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 2) + D(1 - 2\phi_p) + \phi_p^2)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + 2D\phi_p - \phi_p^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + D - \phi_p^2)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(1 - 2\phi_p))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(1 - \phi_p) + D(2\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + 2D\phi_p - \phi_p^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + D - \phi_p^2)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(1 - 2\phi_p))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(1 - \phi_p) + D(2\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

Aplicando a simplificação indicada no capítulo 4

$$\dot{X}_{4_{med}}^{simples} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{DV_{C12}}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{DV_{C34}}{L_2} \\ \frac{2Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-2D^3 + 3D^2 - D)V_{C12}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(2D^3 + D^2(4\phi_p - 3) + D(1 - 4\phi_p) + 2\phi_p^2)V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{2Di_{L2}}{C_s} + \frac{(2D^3 - 3D^2 + D(2\phi_p + 1) - 2\phi_p^2)V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-2D^3 + D^2(-4\phi_p + 3) + D(2\phi_p - 1))V_{C34}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

Nota: Todas as matrizes são exactamente iguais às do Modo 1, pelo que o modelo final também o é. Isto está de acordo com as conclusões relativamente às expressões de potência transferida, deduzidas na secção de análise funcional. O mesmo se verifica entre os Modos 3 e 6.

#### A.1.4 Modo 5

Referência a fig.3.19.

$$\dot{X}_5^I = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 2)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] + 2(1 - \phi_p)V_{C3} + (3 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} - \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 2)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] + 2(1 - \phi_p)V_{C3} + (3 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_5^{II} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_5^{III} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 2)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - 2\phi_p V_{C3} + (1 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} - \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 2)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - 2\phi_p V_{C3} + (1 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_5^{IV} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} + \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2(\phi_p - 1)D(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

Obtendo:

$$\dot{X}_{5med} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{D(V_{C1} + V_{C2})}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{D(V_{C3} + V_{C4})}{L_2} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + 2D^2(\phi_p - 1) + 2D(1 - 2\phi_p) + 2\phi_p - 1)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 3) + D(3 - 4\phi_p) + 2\phi_p - 1)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + 2D^2(\phi_p - 1) + 2D(1 - 2\phi_p) + 2\phi_p - 1)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 3) + D(3 - 4\phi_p) + 2\phi_p - 1)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + 2D\phi_p - 2\phi_p + 1)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(3 - 2\phi_p) + 2D(\phi_p - 1))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(2 - \phi_p) + D(4\phi_p - 5) - 2(\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + 2D\phi_p - 2\phi_p + 1)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(3 - 2\phi_p) + 2D(\phi_p - 1))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(2 - \phi_p) + D(4\phi_p - 5) - 2(\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

Aplicando a simplificação indicada no capítulo 4

$$\dot{X}_{5med}^{simples} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{DV_{C12}}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{DV_{C34}}{L_2} \\ \frac{2Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-2D^3 + 3D^2 - D)V_{C12}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(2D^3 + D^2(4\phi_p - 5) + D(5 - 8\phi_p) + 2(2\phi_p - 1))V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{2Di_{L2}}{C_s} + \frac{(2D^3 - 5D^2 + D(2\phi_p + 3) - 2\phi_p)V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-2D^3 + D^2(7 - 4\phi_p) + D(6\phi_p - 7) - 2(\phi_p - 1))V_{C34}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

### A.1.5 Modo 6

Referência a fig.3.21.

$$\dot{X}_6^I = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 2)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] + 2(1 - \phi_p)V_{C3} + (3 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2\pi^2 L\_leak C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} - \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 2)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] + 2(1 - \phi_p)V_{C3} + (3 - 2\phi_p)V_{C4} - V_{C2}]\pi - \theta(V_{C1} - V_{C3})}{4f^2\pi^2 L\_leak C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_6^{II} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1} - V_{C1} - V_{C2}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} + \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2\pi^2 L\_leak C_p} \\ \frac{i_{L1}}{2\pi f C_p} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C3} + V_{C4} - V_{C1} - V_{C2}) + 2D[(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C1} + V_{C2}] - V_{C2} + V_{C4}]\pi - \theta(V_{C1} + V_{C4})}{4f^2\pi^2 L\_leak C_s} \end{bmatrix}$$



$$\dot{X}_6^{III} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ 0 \\ -\frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + V_{C2} - V_{C4}]\pi - \theta(V_{C2} - V_{C4})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_6^{IV} = \begin{bmatrix} \frac{V_1 - R_1 i_{L1}}{2\pi f L_1} \\ \frac{V_2 - R_2 i_{L2} - V_{C3} - V_{C4}}{2\pi f L_2} \\ 0 \\ \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_p} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} + \frac{[D^2(V_{C1} + V_{C2} - V_{C3} - V_{C4}) - 2D(\phi_p - 1)(V_{C3} + V_{C4}) + 2\phi_p V_{C3} - (1 - 2\phi_p)V_{C4} + V_{C2}]\pi - \theta(V_{C2} + V_{C3})}{4f^2\pi^2 L_{leak} C_s} \\ \frac{i_{L2}}{2\pi f C_s} \end{bmatrix}$$

Obtendo:

$$\dot{X}_{6_{med}} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{D(V_{C1} + V_{C2})}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{D(V_{C3} + V_{C4})}{L_2} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 3) + 2D(1 - \phi_p) - (1 - \phi_p)^2)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + 2D^2(\phi_p - 2) + D(3 - 2\phi_p) - (1 - \phi_p)^2)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-D^3 + D^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(-D^3 + 2D^2 - D)V_{C2}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + D^2(2\phi_p - 3) + 2D(1 - \phi_p) - (1 - \phi_p)^2)V_{C3}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(D^3 + 2D^2(\phi_p - 2) + D(3 - 2\phi_p) - (1 - \phi_p)^2)V_{C4}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + (1 - \phi_p)^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + D(3 - 2\phi_p) + \phi_p^2 - 1)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(3 - 2\phi_p) + 2D(\phi_p - 1))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(2 - \phi_p) + D(4\phi_p - 5) - 2(\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \\ \frac{Di_{L2}}{C_s} + \frac{(D^3 - D^2 + (1 - \phi_p)^2)V_{C1}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(D^3 - 2D^2 + D(3 - 2\phi_p) + \phi_p^2 - 1)V_{C2}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + D^2(3 - 2\phi_p) + 2D(\phi_p - 1))V_{C3}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-D^3 + 2D^2(2 - \phi_p) + D(4\phi_p - 5) - 2(\phi_p - 1))V_{C4}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

Aplicando a simplificação indicada no capítulo 4

$$\dot{X}_{6med}^{simples} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{DV_{C12}}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} - \frac{R_2 i_{L2}}{L_2} - \frac{DV_{C34}}{L_2} \\ \frac{2Di_{L1}}{C_p} + \frac{(-2D^3 + 3D^2 - D)V_{C12}}{2fL_{leak}C_p} + \frac{(2D^3 + D^2(4\phi_p - 7) + D(5 - 4\phi_p) - 2(1 - \phi_p)^2)V_{C34}}{2fL_{leak}C_p} \\ \frac{2Di_{L2}}{C_s} + \frac{(2D^3 - 3D^2 + D(3 - 2\phi_p) + 2\phi_p(\phi_p - 1))V_{C12}}{2fL_{leak}C_s} + \frac{(-2D^3 + D^2(7 - 4\phi_p) + D(6\phi_p - 7) - 2(\phi_p - 1))V_{C34}}{2fL_{leak}C_s} \end{bmatrix}$$

## **Anexo B**

# **Script para obtenção de Modelo de Média e Simplificação, em MAPLE**

### **B.1 Exemplo para Modo 1**

## Modelo de média

```

with(LinearAlgebra);

phi2 := 2*Pi*Duty
omega := 2*Pi*f;
phi := 2*phi_p*Pi;
RC1:= 0
RC2:= 0
RC3:= 0
RC4:= 0
Ron := 0
RL_leak := 0
C2:= C1
C1:= Cp
C4:= C3
C3:= Cs
VC1=VCp
VC3=VCs
VC2=VC1
VC4=VC3

iL_11 := iL_01 + (VC1+VC4)*theta / (omega*L_leak)
iL_12 := subs(theta=phi, iL_11) + (VC1-VC3)/(omega*L_leak) * (theta
-phi)
iL_13 := subs(theta = phi2, iL_12) - (VC2+VC3)/(omega*L_leak)*(theta
-phi2)
iL_14 := subs(theta = phi + phi2, iL_13) + (VC4-VC2)/(omega*L_leak)
* (theta - phi - phi2)

i_L11_med := int(iL_11, theta=0 .. phi)/(2*Pi)
i_L12_med := int(iL_12, theta = phi..phi2)/(2*Pi)
i_L13_med := int(iL_13, theta = phi2..phi2+phi)/(2*Pi)
i_L14_med := int(iL_14, theta = phi2+phi..2*Pi)/(2*Pi)

i_L1total_med := (i_L11_med + i_L12_med + i_L13_med + i_L14_med)

iL_01 := simplify(solve(i_L1total_med = 0, iL_01))

iL_1 := simplify(piecewise(theta > 0 and theta ≤ phi, iL_11, theta
> phi and theta < phi2, iL_12, theta ≥ phi2 and theta < phi+phi2,
iL_13, theta > phi+phi2 and theta ≤ 2*Pi, iL_14));

```

## Modo 1 : $\phi_p < D \wedge D < 50 \%$

```

B := Matrix(6, 2, [[1/(omega*L1), 0], [0, 1/(omega*L2)], [0, 0], [0, 0],
[0, 0], [0, 0]])

```

```
U := Matrix(2, 1, [V1, V2])
```

```
X1 := Matrix(7, 1, [iL1, iL2, iL_11, VC1, VC2, VC3, VC4])
```

```
X2 := Matrix(7, 1, [iL1, iL2, iL_12, VC1, VC2, VC3, VC4])
```

```
X3 := Matrix(7, 1, [iL1, iL2, iL_13, VC1, VC2, VC3, VC4])
```

```
X4 := Matrix(7, 1, [iL1, iL2, iL_14, VC1, VC2, VC3, VC4])
```

## S1 & S4

```
A11 := Matrix(6, 7, [[-(R1 + Ron) / (omega * L1), 0, (Ron) / (omega * L1), -1 / (omega * L1), -1 / (omega * L1), 0, 0], [0, -(R2 + Ron) / (omega * L2), -(Ron) / (omega * L2), 0, 0, 0, 0], [(1) / (omega * C1), 0, -(1) / (omega * C1), 0, 0, 0, 0], [(1) / (omega * C2), 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0], [0, 0, -1 / (omega * C4), 0, 0, 0, 0]])
```

```
X_dot_11 := simplify(A11.X1 + B.U)
```

## S1 & S3

```
A12 := Matrix(6, 7, [[-(R1 + Ron) / (omega * L1), 0, (Ron) / (omega * L1), -1 / (omega * L1), -1 / (omega * L1), 0, 0], [0, -(R2 + Ron) / (omega * L2), -(Ron) / (omega * L2), 0, 0, -1 / (omega * L2), -1 / (omega * L2)], [(1) / (omega * C1), 0, -(1) / (omega * C1), 0, 0, 0, 0], [(1) / (omega * C2), 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1 / (omega * C3), 1 / (omega * C3), 0, 0, 0, 0], [0, 1 / (omega * C4), 0, 0, 0, 0, 0]])
```

```
X_dot_12 := simplify(A12.X2 + B.U)
```

## S2 & S3

```
A13 := Matrix(6, 7, [[-(R1 + Ron) / (omega * L1), 0, (Ron) / (omega * L1), 0, 0, 0, 0], [0, -(R2 + Ron) / (omega * L2), -(Ron) / (omega * L2), 0, 0, -1 / (omega * L2), -1 / (omega * L2)], [0], [0, 0, (1) / (omega * C2), 0, 0, 0, 0], [0, 1 / (omega * C3), 1 / (omega * C3), 0, 0, 0, 0], [0, 1 / (omega * C4), 0, 0, 0, 0, 0]])
```

```
X_dot_13 := simplify(A13.X3 + B.U)
```

## S2 & S4

```
A14 := Matrix(6, 7, [[-(R1 + Ron) / (omega * L1), 0, (Ron) / (omega * L1), 0, 0, 0, 0], [0, -(R2 + Ron) / (omega * L2), -(Ron) / (omega * L2), 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, (1) / (omega * C2), 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, -1 / (omega * C4), 0, 0, 0, 0]])
```

```

X_dot_14 := simplify(A14.X4 + B.U)

X_dot_TOTAL1 := (map(int, X_dot_11, theta=0 .. phi) + map(int, X_dot_12,
    theta=phi .. phi2) + map(int, X_dot_13, theta=phi2 .. phi+phi2)
    + map(int, X_dot_14, theta=phi+phi2 .. 2*Pi))/(2*Pi)

X_dot_TOTAL1 := simplify(X_dot_TOTAL1 * omega)

X_dot_TOTAL1_separado := collect(X_dot_TOTAL1, [iL1, iL2, VC1, VC2,
    VC3, VC4, V1, V2])

```

## Simplificado

```

VC2 := VC1
VC1 := VCp
VC4 := VC3
VC3 := VCs
VCp := VC12/2
VCs := VC34/2

X_dot_TOTAL1_separadoNOVO := simplify(X_dot_TOTAL1_separado)

X_dot_simplificado1 := Matrix(4, 1, [[X_dot_TOTAL1_separadoNOVO[1]],
    [X_dot_TOTAL1_separadoNOVO[2]], [2*X_dot_TOTAL1_separadoNOVO[3]], [2
    *X_dot_TOTAL1_separadoNOVO[5]])

X_dot_simplificado1_separado := collect(X_dot_simplificado1, [iL1,
    iL2, VC12, VC34, V1, V2])

```

## Caso D = 50%

```

subs(Duty = 0.5, X_dot_simplificado1_separado)

```

## **Anexo C**

# **Script para obtenção de Modelo Linear, em MAPLE**

### **C.1 Exemplo para Modo 1**

## Linearização por Série de Taylor ·(apenas 1 as derivadas)

```

delta_iL1_dot := subs(iL1 = iL1x, iL2 = iL2x, VC12 = VC12x, VC34
= VC34x, V1 = V1x, V2 = V2x, Duty = Dutyx, phi_p = phi_px,
mtaylor(X_dot_simplificado1[1], [iL1 = iL1_e, iL2 = iL2_e, VC12
= VC12_e, VC34 = VC34_e, V1 = V1_e, V2 = V2_e, Duty = Duty_e, phi_p
= phi_p_e], 2) - subs(iL1 = iL1_e, iL2 = iL2_e, VC12 = VC12_e, VC34
= VC34_e, V1 = V1_e, V2 = V2_e, Duty = Duty_e, phi_p = phi_p_e,
X_dot_simplificado1[1]))
delta_iL2_dot := subs(iL1 = iL1x, iL2 = iL2x, VC12 = VC12x, VC34
= VC34x, V1 = V1x, V2 = V2x, Duty = Dutyx, phi_p = phi_px,
mtaylor(X_dot_simplificado1[2], [iL1 = iL1_e, iL2 = iL2_e, VC12
= VC12_e, VC34 = VC34_e, V1 = V1_e, V2 = V2_e, Duty = Duty_e, phi_p
= phi_p_e], 2) - subs(iL1 = iL1_e, iL2 = iL2_e, VC12 = VC12_e, VC34
= VC34_e, V1 = V1_e, V2 = V2_e, Duty = Duty_e, phi_p = phi_p_e,
X_dot_simplificado1[2]))
delta_VC12_dot := subs(iL1 = iL1x, iL2 = iL2x, VC12 = VC12x, VC34
= VC34x, V1 = V1x, V2 = V2x, Duty = Dutyx, phi_p = phi_px,
mtaylor(X_dot_simplificado1[3], [iL1 = iL1_e, iL2 = iL2_e, VC12
= VC12_e, VC34 = VC34_e, V1 = V1_e, V2 = V2_e, Duty = Duty_e, phi_p
= phi_p_e], 2) - subs(iL1 = iL1_e, iL2 = iL2_e, VC12 = VC12_e, VC34
= VC34_e, V1 = V1_e, V2 = V2_e, Duty = Duty_e, phi_p = phi_p_e,
X_dot_simplificado1[3]))
delta_VC34_dot := subs(iL1 = iL1x, iL2 = iL2x, VC12 = VC12x, VC34
= VC34x, V1 = V1x, V2 = V2x, Duty = Dutyx, phi_p = phi_px,
mtaylor(X_dot_simplificado1[4], [iL1 = iL1_e, iL2 = iL2_e, VC12
= VC12_e, VC34 = VC34_e, V1 = V1_e, V2 = V2_e, Duty = Duty_e, phi_p
= phi_p_e], 2) - subs(iL1 = iL1_e, iL2 = iL2_e, VC12 = VC12_e, VC34
= VC34_e, V1 = V1_e, V2 = V2_e, Duty = Duty_e, phi_p = phi_p_e,
X_dot_simplificado1[4]))

iL1x := delta_iL1 + iL1_e
iL2x := delta_iL2 + iL2_e
VC12x := delta_VC12 + VC12_e
VC34x := delta_VC34 + VC34_e
V1x := delta_V1 + V1_e
V2x := delta_V2 + V2_e
Dutyx := delta_Duty + Duty_e
phi_px := delta_phi_p + phi_p_e

delta_X_dot := Matrix(4, 1, [[delta_iL1_dot], [delta_iL2_dot],
[delta_VC12_dot], [delta_VC34_dot]])

```

## Resolução das equações igualadas a 0 = Ponto de funcionamento

```

sys := {X_dot_simplificado1[1]=0, X_dot_simplificado1[2]=0,
X_dot_simplificado1[3]=0, X_dot_simplificado1[4]=0}

```



```
solucoes := simplify(solve(sys, {iL1, iL2, VC12, VC34}))
```

## Matriz Final Solução Steady State

```
VC12_e_expr := simplify(subs(V1 = 60, V2 = 60, Duty = 0.25, phi_p = 0.125,
    rhs(solucoes[1])))
```

```
VC34_e_expr := simplify(subs(V1 = 60, V2 = 60, Duty = 0.25, phi_p = 0.125,
    rhs(solucoes[2])))
```

```
iL1_e_expr := simplify(subs(V1 = 60, V2 = 60, Duty = 0.25, phi_p = 0.125,
    rhs(solucoes[3])))
```

```
iL2_e_expr := simplify(subs(V1 = 60, V2 = 60, Duty = 0.25, phi_p = 0.125,
    rhs(solucoes[4])))
```

```
V1_e_expr := 60
```

```
V2_e_expr := 60
```

```
Duty_e_expr := 0.25
```

```
phi_p_e_expr := 0.125
```

```
solucoes_finais := Matrix(8, 1, [[iL1_e_expr], [iL2_e_expr],
    [VC12_e_expr], [VC34_e_expr], [V1_e_expr], [V2_e_expr], [Duty_e_expr],
    [phi_p_e_expr]])
```

```
solucoes_teste := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6,
    L2 = 138e-6, L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6,
    solucoes_finais))
```

```
iL1_e := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6, L2
    = 138e-6, L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6,
    iL1_e_expr))
```

```
iL2_e := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6, L2
    = 138e-6, L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6,
    iL2_e_expr))
```

```
VC12_e := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6, L2
    = 138e-6, L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6,
    VC12_e_expr))
```

```
VC34_e := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6, L2
    = 138e-6, L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6,
    VC34_e_expr))
```

```
V1_e := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6, L2 = 138e-6,
    L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6, V1_e_expr))
```

```
V2_e := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6, L2 = 138e-6,
    L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6, V2_e_expr))
```

```
Duty_e := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6, L2
    = 138e-6, L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6,
    Duty_e_expr))
```

```
phi_p_e := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6, L2
    = 138e-6, L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6,
    phi_p_e_expr))
```

```
delta_X_dot := collect(simplify(delta_X_dot), [delta_iL1, delta_iL2,
```

```

    delta_VC12, delta_VC34, delta_V1, delta_V2, delta_Duty,
    delta_phi_p])

delta_X_dot_TESTE := simplify(subs(R1 = 30e-3, R2 = 30e-3, L1 = 138e-6,
    L2 = 138e-6, L_leak = 4e-6, f = 20e3, Cp = 470e-6, Cs = 470e-6,
    delta_X_dot))

A_final := Matrix(4, 4, [[diff(delta_X_dot_TESTE[1], delta_iL1),
    diff(delta_X_dot_TESTE[1], delta_iL2), diff(delta_X_dot_TESTE[1],
    delta_VC12), diff(delta_X_dot_TESTE[1], delta_VC34)],
    [diff(delta_X_dot_TESTE[2], delta_iL1), diff(delta_X_dot_TESTE[2],
    delta_iL2), diff(delta_X_dot_TESTE[2], delta_VC12),
    diff(delta_X_dot_TESTE[2], delta_VC34)], [diff(delta_X_dot_TESTE[3],
    delta_iL1), diff(delta_X_dot_TESTE[3], delta_iL2),
    diff(delta_X_dot_TESTE[3], delta_VC12), diff(delta_X_dot_TESTE[3],
    delta_VC34)], [diff(delta_X_dot_TESTE[4], delta_iL1),
    diff(delta_X_dot_TESTE[4], delta_iL2), diff(delta_X_dot_TESTE[4],
    delta_VC12), diff(delta_X_dot_TESTE[4], delta_VC34)])])

B_final := Matrix(4, 4, [[diff(delta_X_dot_TESTE[1], delta_V1),
    diff(delta_X_dot_TESTE[1], delta_V2), diff(delta_X_dot_TESTE[1],
    delta_Duty), diff(delta_X_dot_TESTE[1], delta_phi_p)],
    [diff(delta_X_dot_TESTE[2], delta_V1), diff(delta_X_dot_TESTE[2],
    delta_V2), diff(delta_X_dot_TESTE[2], delta_Duty),
    diff(delta_X_dot_TESTE[2], delta_phi_p)],
    [diff(delta_X_dot_TESTE[3], delta_V1), diff(delta_X_dot_TESTE[3],
    delta_V2), diff(delta_X_dot_TESTE[3], delta_Duty),
    diff(delta_X_dot_TESTE[3], delta_phi_p)],
    [diff(delta_X_dot_TESTE[4], delta_V1), diff(delta_X_dot_TESTE[4],
    delta_V2), diff(delta_X_dot_TESTE[4], delta_Duty),
    diff(delta_X_dot_TESTE[4], delta_phi_p)])])

C_final := Matrix(4, 4, [[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]])

delta_X := Matrix(4, 1, [[delta_iL1], [delta_iL2], [delta_VC12],
    [delta_VC34]])
delta_U := Matrix(4, 1, [[delta_V1], [delta_V2], [delta_Duty],
    [delta_phi_p]])

```