

1788:805

B.L.

**Faculdade de Engenharia da Universidade
do Porto**



Departamento de Engenharia Civil

**ANÁLISE E SÍNTESE DE
MEIOS IRREGULARES DE BETÃO ARMADO
PELO MODELO ESCORA-TIRANTE**

6241043 Pinho/AVK
UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA N.
N.º 20665 - ef
CDU
Data 6 6 95
U.N.6012

Maria João Martins Dias de Pinho

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
da Universidade do Porto para a obtenção do grau de
Mestre em Estruturas de Engenharia Civil

Porto, Fevereiro de 1995

043 M
P 729 a

3)

RESUMO

No presente trabalho apresenta-se o desenvolvimento de um modelo para o tratamento, análise e dimensionamento, de meios irregulares bidimensionais de betão armado pelo método escora-tirante.

A formulação apresentada permite resolver os seguintes problemas: (1) determinar a distribuição de armadura óptima na estrutura e (2) determinar a carga de colapso da estrutura supondo conhecidas a quantidade e localização das armaduras.

O modelo baseia-se na aplicação dos teoremas da análise plástica limite e desenvolve-se em duas fases fundamentais.

Na primeira fase o meio estrutural é discretizado através de uma malha de escoras e tirantes realizando uma estrutura articulada complexa cujo equilíbrio é garantido pela imposição do equilíbrio em cada nó. A exequibilidade do modelo pode ser imposta através das condições que limitam as secções das diversas escoras possíveis. Acrescentando uma condição de minimização da armadura (problema tipo 1) ou maximização da carga (problema tipo 2), obtem-se um programa matemático linear que fornece a solução desejada.

Na segunda fase deverão ser verificadas as tensões no betão. As escoras são dimensionadas de modo a que a resistência efectiva do betão à compressão não seja ultrapassada. Nos nós do modelo são estudados os campos de tensão, que uma vez representados graficamente permitem verificar a exequibilidade do modelo encontrado.

São apresentados alguns exemplos de aplicação que permitem demonstrar as potencialidades da formulação desenvolvida.

ABSTRACT

In the present work it is presented the development of a model for the treatment, analysis and dimensioning, of two-dimensional irregular concrete structures by the strut-and-tie model.

The presented formulation permits to solve the following problems: (1) to determine the optimal distribution of the reinforcement bars in the structure and (2) to determine the collapse load being known the quantity and location of the reinforcement.

The model is based on the theorems of the theory of plasticity. It is developed in two fundamental steps.

In the first one the structure is discretized through a mesh of struts and ties constructing a complex truss whose equilibrium is guaranteed by the conditions which impose the equilibrium in each node. The exequibility of the model may be imposed through conditions which limits the sections of the several possible strut-bars. Adding a condition in order to minimize reinforcement (problem type 1) or to maximize the load (problem type 2), it is obtained a linear mathematic programme which provides the desired solution.

In the second phase the stress in the concrete should be verified. The struts are dimensioned so that the compressive strenght of the concrete is not exceeded In the nodal zones the stress fields are constructed, which once graphically represented, permits to verify the exequibility of the model.

The examples presented illustrate the pontencialities of the developed formulation.

RÉSUMÉ

Le présent travail a comme objectif le développement d'un modèle pour le traitement, analyse et dimensionnement, des structures irréguliers bidimensionnel de béton armé par l'analogie du treillis.

La formulation présenté permet résoudre les problèmes suivants: (1) déterminer la distribution minimum d'acier dans la structure et (2) déterminer la charge limite de la structure supposant connues la quantité et localisation des aciers.

Le model utilise les théoremes de l'analyse plastique limite et se développe en deux phases fondamentaux.

Dans une première phase, la structure est substitué par une maille de bielles et tirants realizant une structure articulé complexe dont l'équilibre est assuré par l'imposition de l'équilibre de chaque noeud. La validité du model peut être imposer pour les conditions que limitent les sections des diverses bielles possibles. En ajoutant une condition pour minimiser l'acier (problème type 1) ou maximiser la charge (problème type 2), on obtient un programme mathématique linéaire qui fournit la solution désiré.

Dans une deuxième phase on devra vérifier les contraintes dans le béton. Les bielles sont dimensionnées de façon à que la resistance effective du béton à la compression ne soit pas dépasser. Dans les noeuds du model sont étudiées les champs de contraintes, qu'une fois représentés graphiquement permettent vérifier la possibilité d'exécution du model obtnue.

Ils sont présentés quelques exemples d'aplication qui permettent démontrer les potencialités de la formulation développé.

Índice do texto

Capítulo 1

Pág.

INTRODUÇÃO

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	1.1
1.2 - OBJECTIVOS DO TRABALHO	1.2
1.3 - SÍNTESE DA TESE	1.3

Capítulo 2

SEGURANÇA ESTRUTURAL E MODELO ESCORA-TIRANTE

2.1 - INTRODUÇÃO	2.1
2.2 - MÉTODO ESCORA-TIRANTE. APRESENTAÇÃO	2.3
2.2.1 - Modelação e análise	2.5
2.2.2 - Dimensionamento dos tirantes, escoras e nós	2.9
2.2.2.1 - Tirantes e escoras	2.9

	Pág.
2.2.2.2 - Verificação dos nós	2.16
2.3 - DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS PLANAS DE BETÃO ARMADO COM BASE NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. BREVE REFERÊNCIA	2.19

REFERÊNCIAS

Capítulo 3

PROGRAMAÇÃO LINEAR

3.1 - INTRODUÇÃO	3.1
3.2 - OPTIMIZAÇÃO E PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA. CONCEITOS FUNDAMENTAIS	3.2
3.2.1 - Variáveis	3.3
3.2.2 - Restrições	3.4
3.2.3 - Função objectivo	3.5
3.3 - FORMULAÇÃO DO PROGRAMA MATEMÁTICO LINEAR	3.6
3.4 - RESOLUÇÃO DO PROGRAMA LINEAR	3.7
3.4.1 - Forma canónica do problema	3.7
3.4.2 - Método do simplex. Conceitos fundamentais	3.9

3.4.3 - Cálculo automático dos programas lineares	3.10
---	------

REFERÊNCIAS

Capítulo 4

ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE

4.1 - INTRODUÇÃO	4.1
4.2 - COMPORTAMENTO GERAL DOS MATERIAIS	4.2
4.3 - TEOREMAS FUNDAMENTAIS DA ANÁLISE PLÁSTICA	4.5
4.3.1 - Teorema estático	4.6
4.3.2 - Teorema cinemático	4.7
4.3.3 - Teorema da unicidade	4.8
4.4 - MÉTODOS DE ANÁLISE PLÁSTICA	4.9
4.5 - DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS COM BASE NA ANÁLISE PLÁSTICA	4.11

REFERÊNCIAS

Capítulo 5**MODELO ESCORA-TIRANTE EM ESTRUTURAS PLANAS
DE BETÃO ARMADO.
PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO**

5.1 - INTRODUÇÃO	5.1
5.2 - DIMENSIONAMENTO PLÁSTICO ÓPTIMO	5.3
5.2.1 - Variáveis do problema	5.3
5.2.2 - Restrições do problema	5.4
5.2.2.1 - Condições de equilíbrio	5.4
5.2.2.2 - Esforços máximos e mínimos nas escoras	5.5
5.2.2.3 - Armaduras máximas	5.6
5.2.2.4 - Reacções de apoio	5.7
5.2.2.5 - Armaduras mínimas	5.7
5.2.3 - Critério de optimização	5.8
5.2.4 - Formulação do programa matemático linear	5.9
5.3 - VERIFICAÇÃO DAS TENSÕES NO MODELO FINAL	5.10
5.3.1 - Nós formados pela convergência de campos uni- dimensionais com a mesma intensidade	5.11

	Pág.
5.3.2 - Nós formados por campos de tensão uni-dimensionais com diferentes intensidades	5.15
5.4 - ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE. CARGA DE ROTURA	5.16
5.4.1 - Variáveis do problema	5.17
5.4.2 - Condições do problema	5.17
5.4.3 - Critério de otimização	5.18
5.4.4 - Programa matemático linear	5.18
5.5 - DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA GLOBAL DE CÁLCULO	5.20
REFERÊNCIAS	

Capítulo 6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

6.1 - EXEMPLO 1. VIGA-PAREDE	6.1
6.1.1 - Dados gerais. Geometria, materiais e solicitação	6.1
6.1.2 - Análise da estrutura	6.2
6.2 - EXEMPLO 2. CONSOLA CURTA	6.7
6.2.1 - Dados gerais. Geometria, materiais e solicitação	6.7
6.2.2 - Análise da estrutura	6.8

	Pág.
6.3 - EXEMPLO 3. PAREDE EM CONSOLA	6.12
6.3.1 - Dados gerais. Geometria, materiais e solicitação	6.12
6.3.2 - Análise da estrutura	6.13
6.4 - EXEMPLO 4. VIGA-PAREDE CONTÍNUA COM ABERTURA	6.19
6.4.1 - Dados gerais. Geometria, materiais e solicitação	6.19
6.4.2 - Análise da estrutura	6.20
6.5 - EXEMPLO 5. VIGA SIMPLEMENTE APOIADA. ZONA DO APOIO	6.24
6.5.1 - Dados gerais do problema	6.24
6.5.2 - Análise da estrutura	6.25

REFERÊNCIAS

Capítulo 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 - INTRODUÇÃO	7.1
7.2 - FUTUROS DESENVOLVIMENTOS	7.2

Simbologia

Apresenta-se uma lista com os símbolos utilizados com maior frequência ao longo deste trabalho. Outros menos usados encontram-se definidos no próprio texto.

De um modo geral a definição dos símbolos é efectuada aquando da sua primeira aparição no texto.

A	Área da secção transversal
A_s	Área de armadura (por metro)
esp	Espessura
f_{cd}	Valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão
f_{cd}^*	Valor de cálculo da tensão de rotura efectiva do betão à compressão
f_{cd1}	Valor de cálculo da tensão de rotura do betão para campos de compressão unidimensionais não fendilhados (MC90)
f_{cd2}	Valor de cálculo da tensão de rotura do betão para campos de compressão unidimensionais fendilhados (MC90)
f_{ck}	Valor característico da tensão de rotura do betão à compressão
f_{syd}	Valor de cálculo da tensão de cedência do aço
F	Valor da força aplicada

g_j	Restrições
h	Espessura das placas
l	Comprimento dos tirantes
K	Coefficiente de aumento da resistência do betão em compressão bi-axial (MC90)
N	Esforço axial Forças nas escoras e nos tirantes
N^*	Esforço resistente da armadura (por metro)
N_c	Esforço de compressão no betão, na direcção principal (por metro)
N_x, N_y	Esforço normal na direcção x, y (por metro)
N_{xy}	Esforço de corte (por metro)
R	Valor da reacção de apoio
w	Percentagem mecânica de armadura transversal
x_i	Variáveis de projecto
Z	Função objectivo
ϵ_1	Extensão principal de tracção
ϵ_2	Extensão principal de compressão
ϵ_{cu}	Extensão última do betão em compressão
ϵ_s	Extensão do aço
λ	Parâmetro da carga

λ_c	Parâmetro da carga de colapso
ϕ	Diâmetro dos varões
ν	Factor de eficiência para a resistência à compressão do betão (EC2)
σ_1	Tensão principal de tracção Tensão principal máxima
σ_2	Tensão principal de compressão Tensão principal mínima
θ	Ângulo de inclinação da direcção das compressões do betão

Subscritos / Superscritos

c	betão
d	cálculo
máx	máximo
mín	mínimo
s	aço
u	último
x	relativo ao eixo dos x
y	relativo ao eixo dos y cedência

Capítulo 1

Introdução

1.1 - Considerações Gerais

A análise dos meios estruturais na vizinhança da rotura constitui um problema complexo que os modelos de análise não linear resolvem com apoio em métodos de discretização como o método dos elementos finitos. Os meios informáticos disponíveis actualmente permitem resolver a generalidade dos problemas correntes com que o projectista de betão armado se depara, mesmo quando se trate de meios irregulares.

Os modelos escora-tirante resolvem aquele mesmo problema de uma forma simples e com apoio em meios informáticos limitados, constituindo uma alternativa, sobretudo quando se trata de uma fase de concepção e pré-dimensionamento da estrutura.

Além disso o método escora-tirante é hoje considerado por investigadores e projectistas como a base racional e apropriada para o dimensionamento de meios irregulares de betão armado.

Este método tem por isso conhecido um grande desenvolvimento e interesse nos últimos anos.

O método escora-tirante baseia-se no teorema do limite inferior da análise plástica e a sua utilização resulta perfeitamente válida para estruturas de betão desde que se tomem as medidas necessárias para assegurar a ductilidade da estrutura.

Recorrendo aos princípios da análise plástica limite é possível não só estimar o valor das cargas máximas que uma estrutura suporta, como também, para uma dada estrutura e carregamento, determinar a posição e quantidade de armadura.

1.2 - Objectivos

O trabalho apresentado pretende constituir um incentivo para a aplicação prática do método escora-tirante e se possível contribuir para o seu desenvolvimento.

Os principais objectivos do presente trabalho são,

1. Apresentação de um modelo baseado nos princípios do modelo escora-tirante para tratamento de meios irregulares planos de betão armado.
2. Preparação de um código de cálculo automático que permite efectuar a análise limite (dentro dos pressupostos da análise plástica) de meios irregulares bidimensionais, supondo conhecidas as armaduras (quantidades e localização).
3. Preparação de um código de cálculo automático para a determinação da posição óptima das armaduras e a sua quantidade.
4. Desenvolvimento de programas de cálculo automático que permite a visualização gráfica da exequibilidade dos modelos.
5. Aplicação a vários exemplos das técnicas referidas nos pontos anteriores, tendo em vista ilustrar a utilidade do modelo de cálculo desenvolvido.

1.3 - Síntese da tese

A presente tese, para além de um capítulo de introdução ao tema onde também se referem os principais objectivos do trabalho, é composta pelos seguintes capítulos cujo conteúdo se apresenta resumidamente.

Capítulo 2

Procede-se ao enquadramento dos modelos escora-tirante no contexto da actual filosofia de verificação da segurança estrutural. Os modelos escora-tirante são apresentados na sua generalidade dando-se particular relevo às principais disposições regulamentares contidas nos códigos internacionais bem como aos trabalhos dos principais investigadores nesta área.

É feita uma breve referência ao dimensionamento de estruturas planas de betão armado com base no método dos elementos finitos.

Capítulo 3

Neste capítulo abordam-se os princípios gerais da programação matemática, apresentando-se a sua formulação geral. Desenvolvem-se os conceitos e pressupostos inerentes à programação matemática linear, apresentando-se, igualmente, a sua formulação geral e método de resolução.

Capítulo 4

Neste capítulo apresentam-se os princípios gerais da análise plástica e são enunciados os teoremas fundamentais da teoria da plasticidade.

É feita a caracterização dos problemas de análise plástica limite e dimensionamento plástico óptimo e estabelece-se a relação com a programação linear que permite resolver estes problemas.

Capítulo 5

Desenvolve-se uma formulação baseada no modelo escora-tirante, que através da programação matemática linear permite efectuar a optimização rígido-plástico e a análise plástica limite de meios irregulares bidimensionais de betão armado. Para cada um dos problemas é feita a definição da variáveis de projecto do programa linear, caracterizando também as restrições do problema e a função objectivo.

Capítulo 6

Apresentam-se vários exemplos de aplicação, fazendo-se uma descrição dos mesmos e analisando-se os resultados obtidos.

Capítulo 7

Neste capítulo são apresentadas algumas considerações finais sobre o assunto, com a explanação das principais conclusões e enumeração de alguns temas cujo desenvolvimento é proposto.

Capítulo 2

Segurança Estrutural e Modelo Escora-tirante

2.1 - Introdução

O cálculo de estruturas contendo zonas de descontinuidade estática ou geométrica (zonas próximas de cargas concentradas, nós de pórticos, zonas junto a aberturas, etc.) e de meios contínuos irregulares de betão armado em geral, tem sido de certa forma negligenciado, nomeadamente por parte do projectista comum.

Este tipo de problemas tem-se resolvido, na maioria das vezes, recorrendo a regras empíricas, resultados experimentais e à experiência do próprio projectista.

Refira-se, que a par da reconhecida complexidade do problema, a quase inexistência de regulamentação adequada, que permita uma abordagem do mesmo de forma sistemática e com fundamento teórico, muito tem contribuído para esta situação. É este o caso da regulamentação nacional. Com efeito, o Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (REBAP) [10] é praticamente omissivo relativamente aos problemas de análise e dimensionamento das estruturas acima referidas, indicando apenas que as análises efectuadas devem ser convenientemente justificadas e apresentando regras de dimensionamento aplicáveis a alguns casos como sejam, por exemplo, as consolas curtas e as vigas-parede.

No entanto, a situação que se acaba de expor tem vindo gradualmente a ser alterada devido essencialmente aos desenvolvimentos que se têm verificado na teoria das estruturas de betão armado.

Actualmente os modelos de análise baseadas no método dos elementos finitos, admitindo um comportamento elástico linear ou não linear para o material, permitem resolver a generalidade dos problemas de betão armado. Surgem dificuldades, no entanto, quando se pretende obter o dimensionamento da armadura a partir dos esforços resultantes da análise pelo método dos elementos finitos.

Mais recentemente surgiu o método da escora-tirante, baseado nos princípios da análise plástica limite, que permite resolver os problemas acima referidos de uma forma clara e simples, constituindo assim uma alternativa válida ao método dos elementos finitos.

Os ensaios experimentais revelam que a estrutura resistente na vizinhança do colapso (estrutura resistente última) se assemelha a uma estrutura articulada. Por essa razão, os modelos escora-tirante consideram-se particularmente adequados na análise do comportamento de meios contínuos de betão armado próximo da rotura.

A importância crescente dos métodos referidos conduziu à sua introdução nas disposições contidas na nova regulamentação internacional, Código Modelo 90 [2] e Eurocódigo 2 [3].

Neste capítulo vão ser apresentados de forma genérica os métodos referidos e as principais disposições regulamentares que lhes dizem respeito.

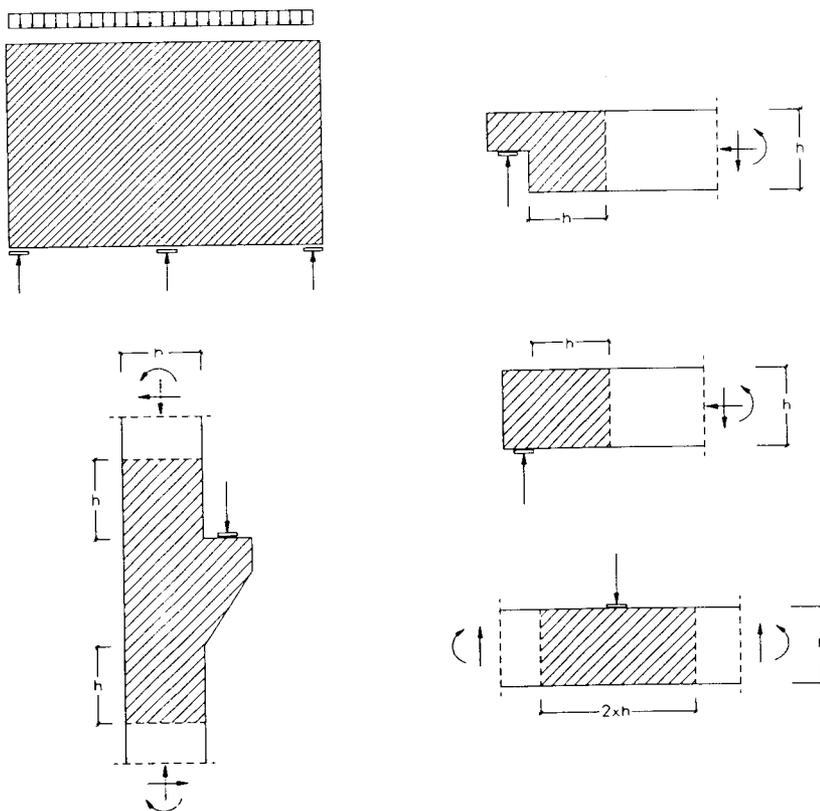
Em relação ao método da escora-tirante será dado um maior relevo, apresentando de forma mais ou menos detalhada os principais aspectos regulamentares, apresentação essa que será complementada com referências ao trabalho dos principais investigadores nesta área.

Relativamente à aplicação do método dos elementos finitos ao cálculo de estruturas de betão armado, e não sendo esta metodologia objecto de estudo deste trabalho, pretende-se apenas com esta apresentação dar conta das possibilidades e das principais limitações e dificuldades surgidas quando se passa à aplicação prática do método. A apresentação do método dos elementos finitos como alternativa ao método da escora-tirante justifica o interesse da sua abordagem neste trabalho.

2.2 - Método da escora-tirante. Apresentação

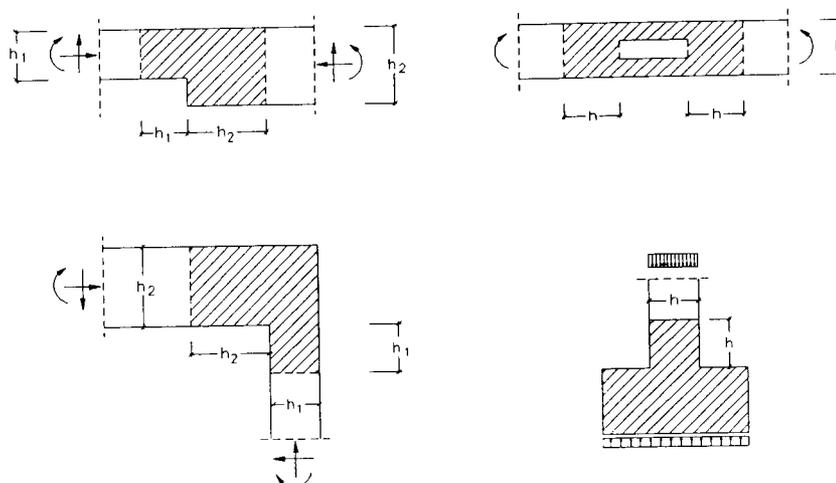
O método da escora-tirante surge como uma generalização do modelo de treliça, aplicável a qualquer zona da estrutura, nomeadamente e preferencialmente às estruturas ou partes destas em que não é válida a hipótese de distribuição linear de extensões (hipótese de Bernoulli das secções planas).

Estas zonas, já referidas anteriormente como zonas de descontinuidade estática ou geométrica (fig. 2.1) são designadas zonas-D (termo introduzido por Schlaich) em oposição às zonas-B onde a hipótese de Bernoulli é aplicável.



Descontinuidades estáticas e/ou geométricas

Fig. 2.1a) - Exemplos de zonas-D



Descontinuidades geométricas

Fig. 2.1b) - Exemplos de zonas-D

Os modelos escora-tirante resultam do facto das estruturas de betão poderem ser idealizadas como uma treliça, constituída por escoras que transmitem as forças de compressão no betão e tirantes (a armadura) capazes de traduzir o mecanismo de transmissão interna de forças. Na vizinhança da rotura a estrutura articulada, constituída por aquelas escoras e tirantes, evidencia o esqueleto resistente da estrutura.

O cálculo de estruturas de betão por esta metodologia envolve em geral as seguintes fases,

1. Desenvolver o modelo escora-tirante. As escoras e os tirantes condensam a verdadeira distribuição de tensões em linhas rectas e a curvatura do campo de tensões é concentrada nos nós que asseguram a transferência de carga entre as diversas escoras e tirantes.
2. Calcular as forças nas escoras e nos tirantes que satisfazem o equilíbrio. Estas são as forças interiores.

3. Dimensionar as escoras, tirantes e nós para as forças interiores calculadas, o que se traduz basicamente por determinar a quantidade de armadura nos tirantes e verificar as tensões de compressão no betão.

Este método implica que o dimensionamento da estrutura é feito de acordo com o teorema do limite inferior da teoria da plasticidade (este assunto será retomado noutra capítulo). Obviamente tanto o Eurocódigo 2 como o Código Modelo 90 apresentam o método da escora-tirante como um método de análise plástica. Estes códigos recomendam a sua utilização para paredes, vigas-parede e zonas de descontinuidade em geral. O Eurocódigo 2 em particular, refere que a sua aplicação deve ser acompanhada de medidas apropriadas para assegurar que as condições de ductilidade sejam satisfeitas.

2.2.1 - Modelação e análise

Apesar do cálculo de estruturas usando o método da escora-tirante se apresentar de uma forma simples, a modelação da estrutura não é de todo fácil e linear.

O desenvolvimento do modelo escora-tirante mais adequado para cada caso requer do projectista uma considerável experiência e entendimento estrutural.

Esta tarefa é no entanto facilitada se as tensões elásticas e as direcções principais de tensão forem conhecidas. Actualmente uma análise elástica recorrendo ao método dos elementos finitos pode ser realizada sem qualquer dificuldade. A localização e orientação das principais escoras e tirantes pode então ser obtida a partir da direcção média das tensões principais.

Esta é aliás a filosofia proposta quer no Eurocódigo 2 quer no Código Modelo 90. Pretende-se com esta disposição assegurar uma certa compatibilidade de deformações e deste modo o mesmo modelo poder ser utilizado para a verificação da segurança relativamente aos estados últimos de resistência e aos estados limites de utilização.

Com efeito, o Código Modelo 90 refere-o claramente na capítulo referente à análise estrutural (secção 5.6.3.) e acrescenta ainda noutra ponto que se a disposição da armadura for feita de acordo com o campo elástico linear de tensões a verificação aos estados limites de utilização pode, em geral, ser evitada.

Este procedimento de orientar a geometria do modelo levanta, no entanto, algumas questões. Por um lado, e como refere Schlaich [12], é-se conduzido a uma capacidade de

carga da estrutura inferior à obtida por aplicação pura da teoria da plasticidade. Além disso, a fendilhação da estrutura e a redistribuição de esforços mesmo para as cargas de serviço pode conduzir a uma distribuição de esforços diferente da obtida através de uma análise elástica linear. Finalmente, uma disposição prática e económica da armadura poderá desviar-se do campo elástico linear de tensões [7].

Quando não for possível realizar uma análise elástica linear pode-se utilizar um outro método designado “método dos caminhos de carga” (Load Path Method) descrito por Schlaich [12].

Para aplicação deste método é necessário proceder a uma análise global da estrutura determinando todas as cargas que sobre ela actuam de forma a que esta se encontre em equilíbrio. Essas cargas incluem, para além das forças aplicadas, as reacções de apoio bem como os esforços transmitidos pelas zonas-B adjacentes. Nas fronteiras de ligação com as zonas-B pode-se admitir, por exemplo, uma distribuição linear de tensões (ver figs. 2.2 e 2.3).

O diagrama de tensões é dividido de tal forma que de um lado da estrutura se encontrem cargas de igual valor sem que os caminhos de carga que ligam cada um dos lados se intersectem. Estes caminhos de carga têm a direcção das forças aplicadas ou reacções e tendem a tomar o caminho mais curto entre o respectivo par de forças. As curvaturas localizam-se junto à concentração de tensões (reacções, cargas pontuais, etc.). Noutros casos o caminho de carga “entra” e “sai” da estrutura pelo mesmo lado formando um “U” (fig. 2.3).

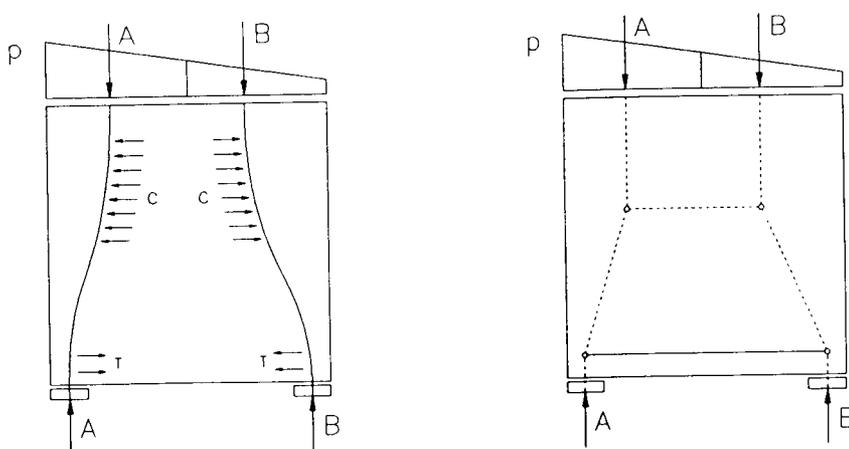


Fig. 2.2 - Caminhos de carga e modelo escora-tirante

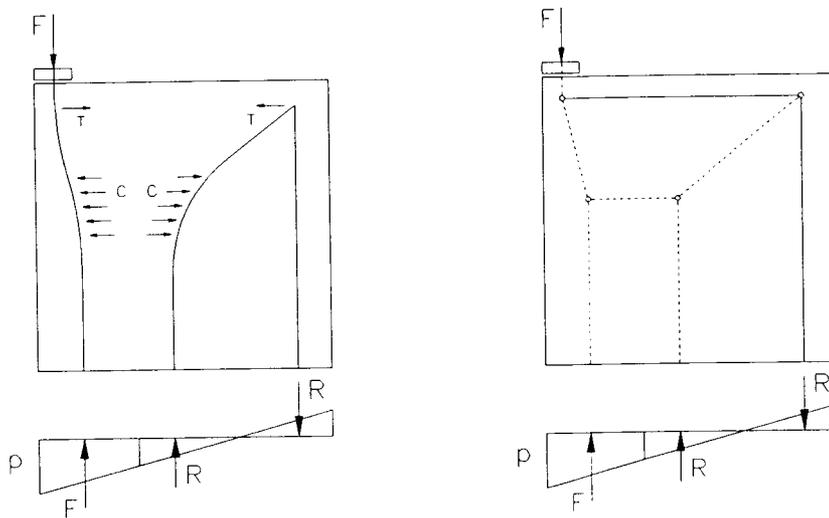


Fig. 2.3 - Caminhos de carga (incluindo volta em “U”) e modelo escora-tirante

Quando se substituem os caminhos de carga, que apresentam curvaturas, por polígonos é necessário considerar escoras e tirantes adicionais que garantam o equilíbrio na direcção transversal. Neste caso os tirantes deverão ser escolhidos tendo em consideração disposições práticas de armadura (geralmente paralela às faces do elemento) e o controlo da fendilhação.

Em casos de estruturas mais complicadas poder-se-á ainda combinar os dois métodos descritos, isto é, análise elástica pelo método dos elementos finitos e o método do caminho de carga (ver Schlaich [12]).

O Código Modelo 90 para além de descrever detalhadamente o modo como se pode obter o modelo escora-tirante a partir de uma análise elástica linear das tensões, apresenta alguns modelos escora-tirante para zonas de descontinuidade típicas, nomeadamente zonas junto a cargas concentradas, nós de pórticos e consolas curtas (fig. 2.4).

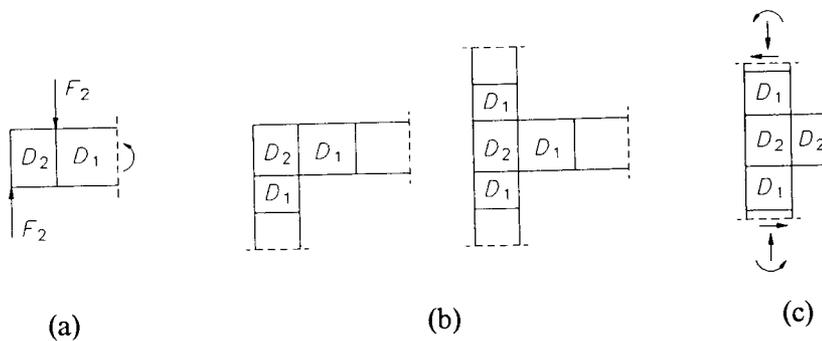


Fig. 2.4 - Exemplos de zonas de descontinuidade típicas: a) numa viga, b) num pórtico, c) numa consola curta

Algumas destas zonas-D típicas encontram-se em várias e diferentes estruturas. Por isso mesmo, exemplos como o da figura 2.5 apresentado no Código Modelo 90 poderão constituir uma preciosa ajuda para o projectista menos experiente.

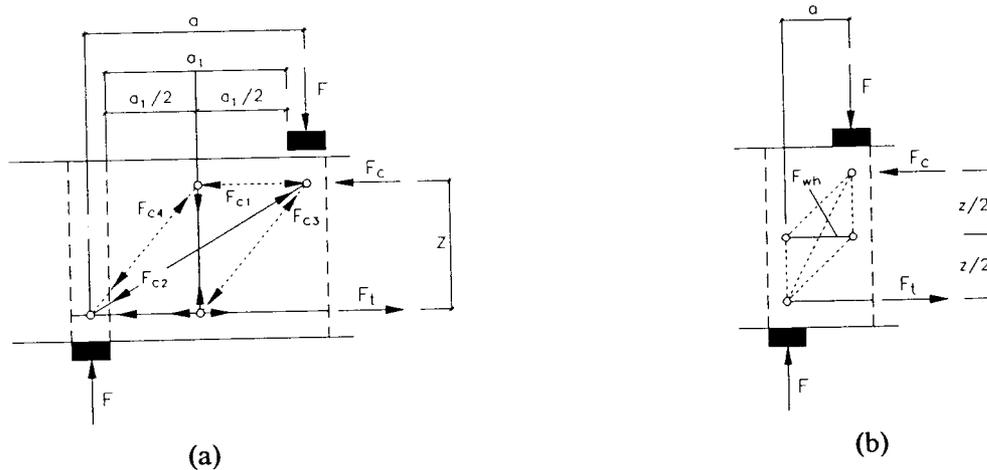


Fig. 2.5 - Modelação de uma zona-D típica
a) $a > \frac{1}{2}z$ e $a < z \cot \theta$, b) $a < \frac{1}{2}z$

Também Schlaich [12] e Marti [8] apresentam diversos exemplos de modelos escora-tirante típicos aplicáveis a vários tipos de estruturas.

Apesar de tudo é de esperar que, de um modo geral surjam dúvidas na escolha do modelo. Não existe uma solução única e a solução mais adequada para cada caso poderá não ser óbvia.

Por isso mesmo e na tentativa de ajudar o projectista na tarefa de modelação, têm surgido diversos trabalhos cujo objectivo fundamental é o desenvolvimento de métodos computacionais que permitam, de um modo mais ou menos automático, desenvolver e analisar modelos escora-tirante. Refira-se a propósito os trabalhos de Anderheggen e M. Schlaich [1], Harris e Fardis [5] e Rückert [11].

2.2.2 - Dimensionamento dos tirantes, escoras e nós

Quando se substitui o campo de tensões real por um conjunto de barras rectas com dimensões finitas (as escoras e os tirantes) está implícito que o desvio das forças está concentrado nos nós. Os nós do modelo correspondem a zonas nodais onde se desenvolvem estados de tensão bi-axiais ou tri-axiais.

Assim, ao efectuar-se o dimensionamento de uma estrutura é necessário não só escolher as dimensões das escoras e as armaduras dos tirantes para as cargas que eles têm de suportar, mas também, verificar a capacidade resistente dos nós assegurando que a transmissão de carga entre os diversos elementos que nele concorrem é possível.

O funcionamento do nó afecta o escoamento das cargas e conseqüentemente a resistência das escoras e tirantes que a ele estão ligados.

2.2.2.1 - Tirantes e escoras

Os tirantes e escoras a dimensionar são basicamente de dois tipos:

T_s - tirantes de aço à tracção

C_c - escoras de betão à compressão

Um terceiro tipo, os tirantes de betão à tracção (T_c), não são habitualmente considerados. O Código Modelo 90 refere precisamente que, de um modo geral, não se

deve contar com a resistência de betão à tracção no dimensionamento de qualquer tirante principal.

Não significa contudo, que estes tirantes não sejam particularmente importantes em determinados problemas específicos como sejam o caso das ancoragens da armadura, das lajes ou outros elementos sujeitos ao corte sem armadura de esforço transversal e outros, onde não seria de esperar um comportamento satisfatório se não se considerasse a resistência à tracção do betão.

Dimensionamento dos tirantes

Uma vez que não se considera a resistência do betão à tracção, a armadura deverá ser dimensionada para resistir à totalidade das forças de tracção nos tirantes. No caso de só existirem armaduras ordinárias o dimensionamento é directo,

$$A_s = \frac{T_s}{f_{syd}} \quad (2.1)$$

onde T_s é a força no tirante, A_s a área de armadura correspondente e f_{syd} é o valor de cálculo da tensão de cedência do aço.

No caso de existirem armaduras de pré-esforço deverá ser tido em conta o seu contributo na resistência a T_s .

O eixo da armadura tem de coincidir com o eixo do tirante. Além disso a pormenorização da armadura deve garantir a verificação das disposições construtivas regulamentares.

Dimensionamento das escoras

Ao contrário dos tirantes, formados pelas armaduras que são essencialmente lineares correspondendo a campos uni-dimensionais de tensões, as escoras de betão (e também os tirantes de betão já referidos) são campos de tensões bi-dimensionais ou tri-dimensionais.

O alargamento do campo de tensões entre dois nós adjacentes conduz ao aparecimento de tensões de tracção transversais. Na verificação das escoras este efeito tem de ser tido em consideração quer introduzindo a influência das tensões de tracção no critério de rotura do betão, quer refinando o modelo escora-tirante por forma a que os tirantes do próprio modelo contenham essas tensões.

Schlaich [12] considera que para cobrir todas as possibilidades de campos de compressão são suficientes as seguintes configurações típicas,

- . o leque (fig. 2.6 a),
- . a garrafa (fig. 2.6 b),
- . o prisma (fig. 2.6 c), que corresponde a um caso particular dos primeiros

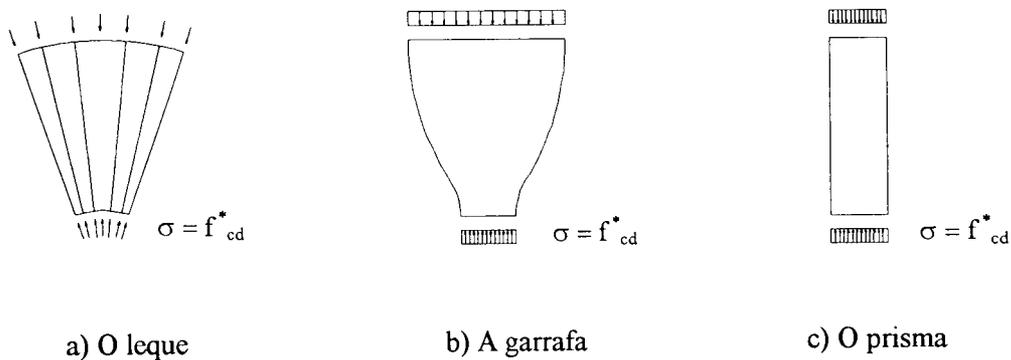


Fig. 2.6 - Campos de compressão típicos.

Relativamente aos campos de compressão do tipo garrafa, o alargamento das forças origina compressão bi-axial ou tri-axial junto ao ponto de aplicação da carga e tracções transversais na zona mais afastada, o mesmo não acontecendo no caso dos campos de compressão do tipo leque ou prismático.

Descrição do betão - critério de rotura

Dada a complexidade do material betão, a descrição da sua lei constitutiva, ou seja, a caracterização do seu comportamento desde o início do carregamento até à rotura, exige um grande número de parâmetros. No entanto, no presente trabalho, considera-se suficiente a sua caracterização através de um único parâmetro, a tensão de rotura efectiva do betão à compressão, f_{cd}^* . Pressupõe-se assim, que o betão é um material rígido-plástico (este assunto será referido noutro capítulo). Dado que, na realidade a ductilidade do betão é limitada, a consideração de uma tensão efectiva do betão pretende exactamente ter em conta o efeito de diminuição da resistência do betão que se verifica quando se processa a redistribuição de tensões.

A resistência efectiva dos campos uni-direccionais de compressão no betão depende de diversos factores, nomeadamente do seu estado multi-axial de tensão, da fendilhação e da existência ou não de armadura transversal,

- . A compressão transversal é favorável particularmente se actua em ambas as direcções transversais, como é o caso de zonas confinadas. O confinamento pode resultar da armadura transversal ou do próprio betão envolvente,
- . As tensões de tracção transversais e a fendilhação resultante são desfavoráveis. No entanto, a diminuição da capacidade resistente do betão será menos acentuada se existir armadura transversal adequada.

Pretendendo ter em atenção estes factores alguns autores tem proposto valores da resistência efectiva do betão à compressão.

Schlaich apresenta, para o dimensionamento de campos de compressão do tipo garrafa, o ábaco apresentado na figura 2.7.

Este tipo de campo de compressão pode ser caracterizado pelos parâmetros a , b e l (ver fig. 2.7).

O diagrama apresenta diversas linhas correspondentes a outras tantas percentagens de armadura transversal,

$$w = \frac{a_s \cdot f_{syd}}{t \cdot f_{cd}} \quad (2.2)$$

onde a_s é a área de armadura transversal por unidade de comprimento.

Verifica-se que uma percentagem de armadura w de 0.06 compensa aproximadamente a não consideração da resistência do betão à tracção.

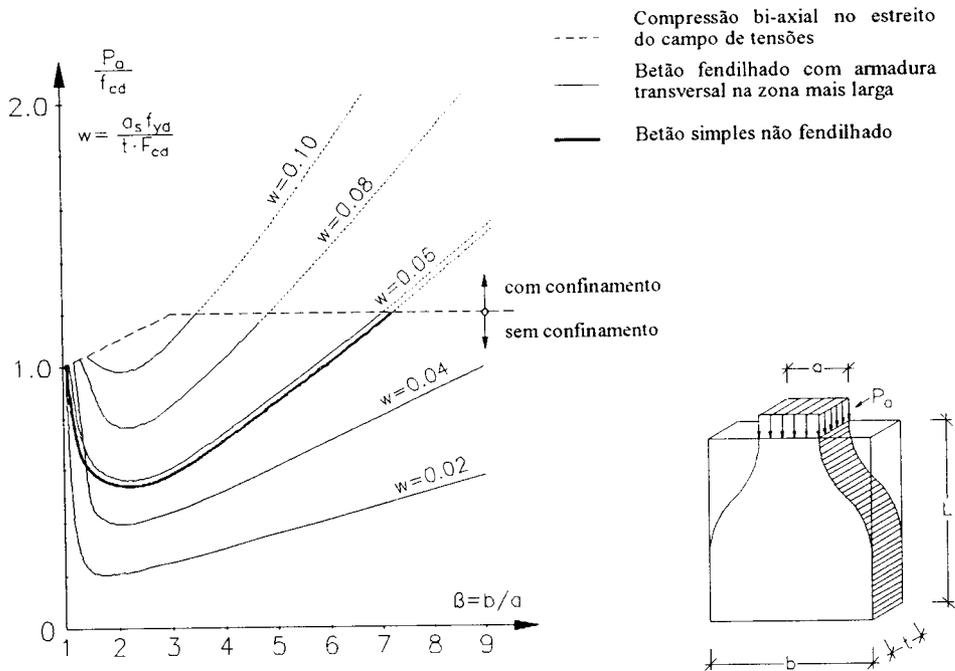


Fig. 2.7 - Dimensionamento de campos de compressão planos do tipo garrafa

A linha reforçada do ábaco corresponde ao caso do betão sem armadura transversal e a sua determinação é baseada numa análise elástica onde se admitiu para a tensão de tracção do betão, f_{ct} , o valor,

$$f_{ct} = \frac{f_{cd}}{15}$$

Neste caso pode-se verificar que uma tensão de apenas $0.6f_{cd}$ pode causar fendilhação. No entanto a carga de rotura da escora é, de um modo geral, superior à sua carga de fendilhação e comparações com resultados experimentais mostram que na generalidade dos casos este diagrama apresenta-se do lado da segurança.

Os trabalhos realizados na Universidade de Toronto por Collins, Mitchell e outros, tiveram como objectivo o estudo da influência da extensão transversal de tracção na resistência efectiva do betão.

Estes autores e também o código canadiano M84 [4] apresentam a seguinte expressão para a determinação da resistência efectiva de compressão nas escoras,

$$f_{cd}^* = \frac{f_{cd}}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq f_{cd} \quad (2.3)$$

onde ε_1 é a extensão principal de tracção. A compatibilidade de deformação entre o betão e a armadura na vizinhança da escora é usada para determinar o valor de ε_1 . Admitindo que o valor da extensão principal de compressão ε_2 é 0.002, a extensão principal de tracção é,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0.002) \tan^2 \alpha_s \quad (2.4)$$

em que ε_s é a extensão do tirante que atravessa a escora e α_s o ângulo entre a escora e o tirante.

Concretizando para alguns valores de α_s e admitindo $\varepsilon_s = 0.002$,

$$\begin{aligned} \alpha_s = 90^\circ & \rightarrow f_{cd}^* = 0.877f_{cd} \\ \alpha_s = 45^\circ & \rightarrow f_{cd}^* = 0.550f_{cd} \end{aligned}$$

Constata-se assim que a resistência efectiva de compressão nas escoras, é fortemente penalizada com a diminuição do valor do ângulo α_s .

Como refere Lourenço [7] esta parece ser, ao nível do conhecimento actual, a proposta mais adequada para a resolução do problema em questão. No entanto, uma abordagem deste tipo implica o conhecimento das extensões referidas anteriormente, para cada nível de carga, o que não acontece nos casos correntes de análise e dimensionamento.

Assim são sugeridos valores de f_{cd}^* , considerados seguros, para alguns casos correntes.

O Eurocódigo 2, e na ausência de outros dados, recomenda o valor de $0.6f_{cd}$ para a resistência efectiva de compressão nas escoras. Refere no entanto que valores mais elevados (mesmo superiores a f_{cd}) poderão justificar-se no caso dum estado tri-axial de tensões de compressão, desde que se possa demonstrar que a compressão transversal complementar pode ser efectivamente realizada.

Diversos autores (Schlaich, Marti, etc.) consideram este valor de $0.6f_{cd}$ adequado para os casos correntes de fendilhação transversal à direcção da escora. No entanto, sugerem que valores inferiores ou superiores podem ser considerados, dependendo de factores tais como a redistribuição necessária das forças interiores, a existência de armadura distribuída e de confinamento lateral e outros similares.

Schlaich, por exemplo, recomenda os seguintes valores,

$f_{cd}^* = 1.0f_{cd}$, para campos uniaxiais de compressão, não fendilhados

$f_{cd}^* = 0.8f_{cd}$, quando a presença de tensões de tracção ou de armadura na direcção normal à escora possam causar fendilhação aproximadamente paralela à direcção da escora

$f_{cd}^* = 0.6f_{cd}$, para campos de compressão com fendilhação inclinada relativamente à escora

$f_{cd}^* = 0.4f_{cd}$, como no caso anterior mas para grande largura de fendas, o que pode acontecer quando se verificam grandes redistribuições das forças interiores

O Código Modelo 90, por sua vez, indica os seguintes valores para dois casos distintos,

- Zonas não fendilhadas

$$f_{cd}^* = f_{cd1} = 0.85 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (2.5)$$

- Zonas fendilhadas, onde a resistência à compressão pode ser reduzida devido ao efeito da tensão transversal produzida pela armadura e pela necessidade de transmitir forças através das fendas

$$f_{cd}^* = f_{cd2} = 0.60 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (2.6)$$

com f_{ck} em Mpa.

O Código Modelo 90 indica que estes valores são válidos na condição da máxima extensão em qualquer fibra ser igual a,

$$\varepsilon_{cu}^* = 0.004 - 0.002 \frac{f_{ck}}{100} \quad (2.7)$$

com f_{ck} em Mpa.

Contudo o Código Modelo 90 autoriza a dispensa de verificação das tensões nas escoras, desde que os nós singulares correspondentes sejam verificados e seja colocada armadura transversal adequada.

2.2.2.2 - Verificação dos nós

Os nós do modelo resultam da intersecção de três ou mais barras (escoras ou tirantes), cargas aplicadas ou reacções de apoio e são responsáveis pela transferência de forças entre eles, razão pela qual deve ser garantido o equilíbrio em cada um dos nós do modelo.

A introdução dum nó no modelo implica uma mudança brusca na direcção das forças internas, que na realidade ocorre num certo comprimento e largura. As dimensões do nó dependem essencialmente da geometria e direcção dos campos de tensão nela convergentes.

Schlaich [12] designa de singulares os nós onde concorrem escoras ou tirantes representando um campo de tensões concentrado. Por outro lado, se as escoras de betão ou a armadura se desenvolvem numa largura apreciável, de tal forma que o desvio das forças tende a espalhar-se num certo comprimento, o nó é designado de distribuído.

A grande variedade de nós existentes bem como a complexidade da distribuição de tensões no seu interior (particularmente no caso de nós singulares) dificulta, de certa forma, o seu dimensionamento expedito e sistemático.

No entanto, segundo Schlaich e o Código Modelo 90 é possível resumir o dimensionamento e verificação da segurança das zonas nodais, nos seguintes pontos fundamentais:

1. A geometria do nó tem de ser ajustada aos campos de tensão nele convergentes (que incluem obviamente as cargas aplicadas e as reacções de apoio). Em particular, em nós onde são ancorados tirantes a armadura deve ser distribuída

numa altura cujo valor depende da espessura dos campos de tensões que aí concorrem.

2. A tensão de compressão na região de nó tem de ser verificada por forma a não ultrapassar determinados valores limites.

De acordo com Schlaich, a tensão no nó tem de ser inferior a,

$f_{cd}^* = 1.1f_{cd}$, em nós onde convergem apenas escoras, criando assim um estado de compressão bi- ou tri-axial no nó,

$f_{cd}^* = 0.8f_{cd}$, em nós onde são ancorados tirantes.

Schlaich acrescenta, no entanto, que regra geral pode-se admitir que qualquer zona-D é segura se a tensão nas placas de apoio ou ancoragem mais carregadas for inferior a $0.6f_{cd}$ e as forças de tracção forem resistidas por armadura convenientemente ancorada.

O Código Modelo 90, por sua vez, apresenta as seguintes valores máximos para a tensão de cálculo de qualquer superfície ou secção de um nó singular,

$f_{cd}^* = f_{cd1}$, em nós em que concorrem apenas escoras, ou em qualquer zona nodal desde que o ângulo entre os tirantes e as escoras principais não seja inferior a 55° e a disposição da armadura nessa zona seja realizada com especial cuidado (por exemplo, distribuída em várias camadas, com varões transversais),

$f_{cd}^* = f_{cd2}$, em nós onde são ancorados os tirantes principais.

Valores superiores a f_{cd1} (ver Código Modelo 90) podem ser considerados em nós onde é possível assegurar um estado de compressão tri-axial (devido, por exemplo, a compressão local ou ao confinamento lateral) e desde que todas as forças de tracção nessa região sejam resistidas por armadura.

Também a norma canadiana M84 [4] apresenta valores limites para as tensões nas zonas nodais,

$f_{cd}^* = 0.85f_{cd}$, em zonas nodais limitadas por escoras e placas de apoio,

$f_{cd}^* = 0.75f_{cd}$, em zonas nodais onde é ancorado apenas um tirante,

$f_{cd}^* = 0.60f_{cd}$, para as zonas nodais onde são ancorados tirantes em mais do que uma direcção.

3. É necessário garantir uma amarração segura dos tirantes que concorrem nos nós. O comprimento de amarração é contado a partir da secção onde a trajectória das tensões de compressão transversais intersecta a armadura e é desviada (ver fig. 2.8). O comprimento de amarração deve estender-se no mínimo até ao limite da zona nodal. Para além disso, é necessário garantir os comprimentos de amarração mínimos regulamentares bem como os raios de dobragem mínimos e outras disposições regulamentares relacionadas.

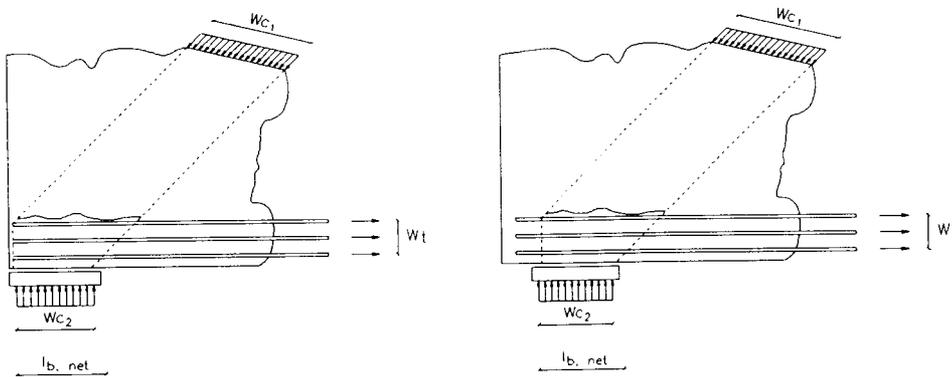


Fig. 2.8 - Pormenor da zona de amarração dos nós

O Código Modelo 90 e também Schlaich [14] apresentam vários exemplos de nós típicos que se repetem frequentemente em variadas estruturas distintas. As diversas figuras apresentadas permitirão, com certeza, um melhor entendimento dos principais pontos acima referidos.

2.3 - Dimensionamento de estruturas planas de betão armado com base no método dos elementos finitos. Breve referência

Tal como a generalidade dos regulamentos, o Eurocódigo 2 e o Código Modelo 90 reconhecem a validade da hipótese de comportamento linear elástico para análise de estruturas em geral, e em particular para estruturas planas carregadas no seu próprio plano.

Os dois códigos indicam que este tipo de análise pode ser utilizada tanto para os estados limites de utilização como para os estados limites últimos. Impõem, no entanto, que para os estados limites últimos se proceda a pormenorizações da armadura que permitam garantir a absorção da totalidade dos valores de cálculo das tensões de tracção no betão e que satisfaçam as condições de equilíbrio.

Segundo o Eurocódigo 2 e o Código Modelo 90 o efeito da fendilhação no betão em zonas de elevada concentração de tensões deverá ser tido em consideração. Refere-se que isso poderá ser feito reduzindo a rigidez nas referidas zonas, não sendo indicados no entanto, quaisquer valores de referência.

Na maioria dos casos é indispensável a utilização de métodos numéricos (por exemplo, o método dos elementos finitos) para a análise deste tipo de estruturas.

O resultado da análise através do método dos elementos finitos é traduzido por um conjunto de elementos planos (resultantes da discretização da estrutura) sujeitos a esforços de membrana por unidade de comprimento N_x , N_y , e N_{xy} (fig. 2.9).

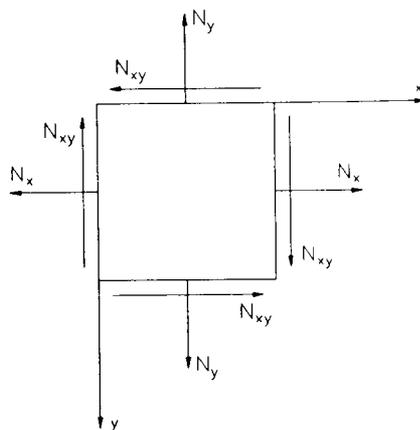


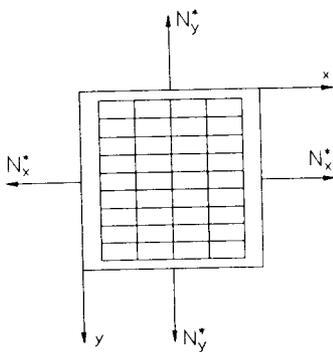
Fig. 2.9 - Esforços de membrana num elemento de placa

A partir destes resultados pretende-se então obter o dimensionamento da armadura e verificar a segurança da estrutura.

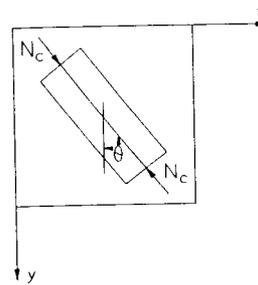
A solução para este problema é conhecida. Essa solução é apresentada, por exemplo, por Lourenço [7] recorrendo para isso às equações de equilíbrio. Faz-se em seguida um resumo das expressões a que se é conduzido.

Admita-se que a armadura é constituída por varões ortogonais orientados segundo as direcções x e y . $A_{s,x}$ e $A_{s,y}$ será então a armadura existente por metro nas referidas direcções, dimensionada para os esforços N_x^* , N_y^* , respectivamente (ver fig. 2.10), ou seja,

$$A_{s,x} = \frac{N_x^*}{f_{syd}} \quad \text{e} \quad A_{s,y} = \frac{N_y^*}{f_{syd}} \quad (2.8)$$



a) Contribuição da armadura



b) Contribuição do betão

Fig. 2.10 - Esforços no betão e na armadura

Admita-se ainda que o betão é caracterizado pela tensão efectiva de rotura f_c^* , (inferior à tensão obtida nos testes de compressão uni-axial de betão em cilindros). Deste modo temos $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_2 \geq -f_c^*$, onde σ_1 e σ_2 são as tensões principais no betão. É possível então estabelecer as seguintes equações de equilíbrio, em termos de esforços,

$$N_x = N_x^* + N_c \sin^2 \theta \quad (2.9)$$

$$N_y = N_y^* + N_c \cos^2 \theta \quad (2.10)$$

$$N_{xy} = -N_c \sin \theta \cos \theta \quad (2.11)$$

em que,

$$N_c \geq -h \cdot f_c^* \quad (2.12)$$

onde θ é o ângulo que σ_1 faz com o eixo x ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) e h é a espessura da placa.

A resolução deste sistema conduz a quatro casos distintos (fig. 2.11) cujas expressões se resumem em seguida,

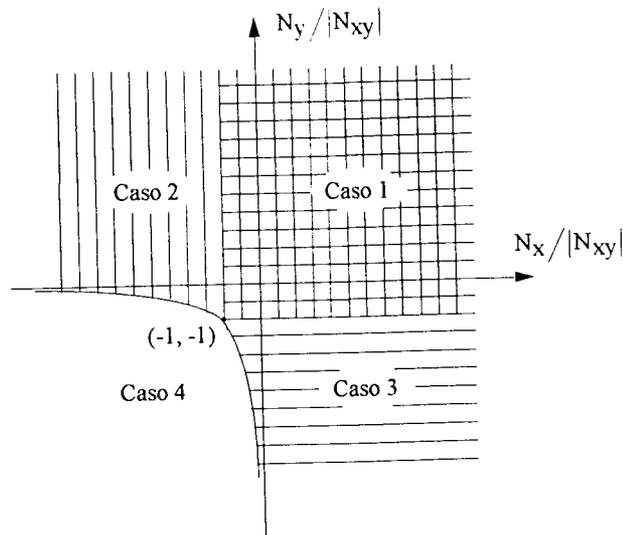
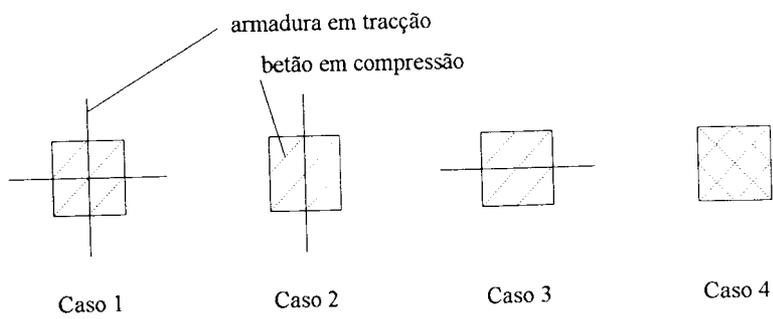


Fig. 2.11 - Sistemas resistentes (fronteira desenhada para $\theta = \pi/4$)

. Caso 1 - A_x e A_y necessárias

$$\begin{aligned} N_x &\geq -|N_{xy}| & N_y &\geq -|N_{xy}| \\ N_x^* &= N_x + |N_{xy}| & N_y^* &= N_y + |N_{xy}| \\ N_c &= -2 |N_{xy}| \end{aligned}$$

. Caso 2 - Só A_y necessária

$$\begin{aligned} N_x &< -|N_{xy}| & N_y &> \frac{N_{xy}^2}{N_x} \\ N_x^* &= 0 & N_y^* &= N_y - \frac{N_{xy}^2}{N_x} \\ N_c &= N_x + \frac{N_{xy}^2}{N_x} \end{aligned}$$

. Caso 3 - Só A_x necessária

$$\begin{aligned} N_x &> \frac{N_{xy}^2}{N_y} & N_y &< -|N_{xy}| \\ N_x^* &= N_x - \frac{N_{xy}^2}{N_y} & N_y^* &= 0 \\ N_c &= N_y + \frac{N_{xy}^2}{N_y} \end{aligned}$$

. Caso 4 - A_x e A_y desnecessárias. Compressão bi-axial

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x < -|N_{xy}| \\ N_y < \frac{N_{xy}^2}{N_x} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} N_y < -|N_{xy}| \\ N_x < \frac{N_{xy}^2}{N_y} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_x^* = 0 \\ N_y^* = 0 \\ N_{c1,c2} = \frac{N_x + N_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} \end{cases}$$

O Eurocódigo 2 apresenta em anexo expressões para o dimensionamento, idênticas às acima obtidas para os casos 1, 2 e 3, expressas em termos de tensões (σ_x , σ_y e τ_{xy}).

Relativamente à verificação da rotura do betão e sendo a tensão no betão,

$$f_c = \frac{N_c}{h} \quad (2.13)$$

o Eurocódigo 2 indica que para placas com armadura devidamente ancorada em ambas as faces,

$$f_c \leq f_{cd} \quad (2.14)$$

devendo verificar-se ainda a condição,

$$|\tau_{xy}| \leq \frac{1}{2} v f_{cd} \quad (2.15)$$

onde,

$$v = 0.7 - \frac{f_{ck}}{200} \geq 0.5 \quad (2.16)$$

O Código Modelo 90 indica os seguintes limites para a tensão no betão,

$$f_c \leq f_{cd2} \quad - \text{nos casos 1 a 3} \quad (2.17)$$

$$f_c \leq K f_{cd1} \quad - \text{no caso 4} \quad (2.18)$$

em que f_{cd1} e f_{cd2} são dados pelas expressões (2.5) e (2.6), respectivamente e K é um factor que quantifica o aumento da resistência do betão em compressão bi-axial (ver Código Modelo 90).

Note-se que o método de dimensionamento indicado é válido apenas para uma malha ortogonal de armaduras.

Tanto o Eurocódigo 2 como o Código Modelo 90 são omissos relativamente ao caso mais geral de colocação da armadura segundo duas ou mais direcções não ortogonais. Para este caso Lourenço [7] apresenta um método aproximado para verificação da segurança, sendo o dimensionamento da armadura efectuado por tentativas.

Referências

- [1] Anderheggen, E. e Schlaich, M. (1990) - Computer-Aided Design of Reinforced Concrete Structures Using the Truss Model Approach, Computer-Aided Analysis of Concrete Structures, Proc. 2nd International Conference, Áustria, pp. 539-550
- [2] Comité Euro-International du Béton (1993) - CEB-FIP Model Code 1990, Design Code, Thomas Telford Ltd., London
- [3] Comité Européen de Normalisation (1991) - Eurocódigo 2: Projecto de Estruturas de Betão - Parte 1: Regras Gerais e Regras para Edifícios (Versão portuguesa)
- [4] CSA - Canadian Standards Association (1984) - Design of Concrete Structures for Buildings, CAN3 - A23.3 - M84, Rexdale, Ontario, Canadá
- [5] Harisis, A. e Fardis, M.N (1991) - Computer Aided-Automatic Construction of Strut-and-Tie Models, IABSE, Vol. 62, Stuttgart, pp. 373-377
- [6] Jirsa, J. et al. (1991) - Experimental Studies of Nodes in Strut-and-Tie Models, IABSE, Vol. 62, Stuttgart, pp. 525-531
- [7] Lourenço, P.B. (1992), Novas Metodologias para Dimensionamento de Estruturas de Betão Armado, Provas de Aptidão Científica e Pedagógica, Universidade do Minho
- [8] Marti, P. (1991) - Dimensioning and Detailing, IABSE, Vol. 62, Stuttgart, pp. 411-443
- [9] Mitchell, D. e Cook, W.D. (1991) - Design of Disturbed Regions, IABSE, Vol. 62, Stuttgart, pp. 533-538

-
- [10] Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1983), Decreto-Lei nº 349-C/83, Imprensa Nacional Casa da Moeda, Lisboa
- [11] Rückert, K.J. (1991) - Design and Analysis with Strut-and-Tie Models - Computer-Aided Methods, IABSE, Vol. 62, Stuttgart, pp. 379-384
- [12] Schlaich, J. et al. (1987) - Toward a Consistent Design of Structural Concrete, PCI Journal, Vol. 32(3), pp. 74-150
- [13] Schlaich, J. (1991) - The Need for Consistent and Translucent Models, IABSE, Vol. 62, Stuttgart, pp. 169-184
- [14] Schlaich, J. e Schafer, K. (1991) - Design and Detailing of Structural Concrete Using Strut-and-Tie Models, The Structural Engineer, Vol. 69(6)

Capítulo 3

Programação Linear

3.1 - Introdução

Um sistema estrutural é caracterizado por uma grande variedade de parâmetros, através dos quais se pretende obter uma descrição da realidade tão rigorosa quanto possível. Esses parâmetros são variáveis dentro de certos limites, e dizem respeito a aspectos diversos como sejam os relativos ao material constituinte (propriedades físicas e mecânicas) e ao tipo de estrutura (topologia, características geométricas, etc.). Cabe ao engenheiro a sua definição e quantificação por forma a que as estruturas cumpram com segurança os fins para os quais foram concebidas.

Deste modo, ao longo de todo o processo de concepção, análise e dimensionamento de uma estrutura, o engenheiro é sistematicamente confrontado com a escolha entre diferentes possibilidades de actuação. A decisão a tomar não é, na maioria dos casos, evidente. Nesta altura, ainda que de uma forma inconsciente, recorre muitas vezes a um processo de optimização baseado sobretudo na sua intuição e experiência.

A complexidade crescente dos problemas de decisão em geral, obrigou ao desenvolvimento de abordagens segundo uma perspectiva científica com recurso a métodos quantitativos. Surge assim a Investigação Operacional.

A Programação Matemática (ramo da Investigação Operacional), na medida em que permite formular e resolver problemas de decisão, escolhendo a alternativa que melhor satisfaz o critério de selecção pré-estabelecido, poderá contribuir de forma significativa para a tarefa do projectista.

Em termos matemáticos um problema de optimização consiste então em determinar a solução, que satisfaz um dado objectivo, estando essa solução condicionada, ou não, por restrições. Quer o objectivo quer as restrições podem ser traduzidos por relações funcionais.

A multiplicidade de problemas de optimização levou à introdução de diversas classificações, sendo uma das mais usuais aquela que distingue entre problemas lineares e não lineares, consoante as relações que traduzem o objectivo e as restrições sejam, ou não, lineares.

A Programação Linear tem sido uma das técnicas de optimização mais usadas já que alia grandes potencialidades a uma estrutura matemática muito simples, permitindo resolver uma grande variedade de problemas, entre os quais se podem incluir muitos de optimização estrutural, em particular os que dizem respeito à análise plástica limite.

3.2 - Optimização e programação matemática. Conceitos fundamentais

Como já foi referido, qualquer problema de optimização, nomeadamente os de optimização estrutural, pode ser traduzido matematicamente por um programa matemático. Na sua forma mais genérica, um problema de programação matemática pode ser apresentado do seguinte modo,

Minimizar (Maximizar)	$Z = f(X)$	$(x_i : i = 1, 2, \dots, n)$
sujeito a		
\dots		
$g(X) \{ \leq, =, \geq \} 0$		
$(g_j : j = 1, 2, \dots, m)$		

(3.1)

O vector \mathbf{X} tem n componentes que se designam por *variáveis de projecto*. A função f é escalar e designa-se por *função objectivo*. As funções \mathbf{g} , em número de m são as *restrições*.

Designa-se por região admissível o lugar geométrico dos pontos \mathbf{X} que satisfazem todas as restrições.

Em seguida faz-se uma breve descrição dos parâmetros envolvidos num programa matemático cuja formulação geral se acaba de apresentar, tendo em atenção os aspectos mais directamente relacionados com os problemas de optimização estrutural, que são afinal aqueles que nos interessam.

3.2.1 - Variáveis

As variáveis de projecto, designadas genericamente por,

$$\mathbf{X} = \{x_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

onde n é o número de variáveis, constituem as incógnitas do problema e podem ser do tipo discreto ou contínuo.

Sob o ponto de vista estrutural, as variáveis de projecto não são mais do que os parâmetros caracterizadores da estrutura que são variáveis durante o processo de optimização e cujo valor final é o resultado deste mesmo processo.

As variáveis de projecto não são, em muitos problemas, de fácil definição. É tarefa do projectista identificar as variáveis que melhor traduzem o problema que se pretende resolver, tendo em consideração o objectivo em causa.

Relativamente aos parâmetros que não são variáveis, não sofrendo por isso alteração durante o processo de optimização, alguns estão definidos à partida devido a imposições de ordem funcional ou outras alheias ao projecto estrutural, outros serão arbitrados pelo projectista com base na sua experiência e conhecimento de casos anteriores em que se obtiveram bons resultados.

Contrariamente aos parâmetros pré-definidos, aqueles que são arbitrados pelo projectista não são, de forma alguma, inalteráveis ao longo do projecto. Sempre que se considere conveniente, poderá proceder-se à comparação de processos de optimização distintos em que foram considerados valores diferentes de um determinado parâmetro. Será preferível um procedimento deste tipo por forma a minimizar o número de variáveis e a simplificar o problema. A consideração de um grande número de variáveis de diferentes tipos, conduzirá a um processo complexo, pouco claro e de difícil controlo.

3.2.2 - Restrições

As restrições a que estão sujeitas as variáveis de projecto de um qualquer problema de optimização destinam-se a garantir a admissibilidade e fiabilidade da solução encontrada.

As soluções deverão estar contidas num domínio Ω , designado por região admissível e que é definido por um conjunto de equações e inequações que constituem as restrições do problema. Estas restrições são representadas matematicamente de um modo geral por,

$$g_j(X) \{ \leq, =, \geq \} b_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

sendo m o número de restrições.

As restrições são designadas de restrições desigualdade ou restrições igualdade conforme se verifique nas expressões (3.3) as relações \leq ou \geq , ou $=$, respectivamente.

As restrições estão intimamente ligadas, e por isso mesmo condicionadas, ao sistema a modelar e ao tipo de análise que se pretende efectuar relativamente a esse mesmo sistema.

Do ponto de vista físico as restrições podem ser de dois tipos. As chamadas restrições de projecto resultam da imposição de valores limites (mínimos ou máximos) às variáveis de projecto e são devidas a factores diversos de natureza funcional, estética ou ligados à própria construção. As restrições que derivam do tipo de modelo e análise estruturais adoptados, têm a ver com as exigências de comportamento da estrutura e são, por isso mesmo, designados de restrições de comportamento. Limitação de tensões e deslocamentos máximos são exemplos deste tipo de restrições.

3.2.3 - Função objectivo

De um modo geral existe uma infinidade de soluções admissíveis, isto é, que satisfazem as restrições do problema em estudo. A escolha da melhor solução, ou solução óptima, é feita em função de um objectivo pré-estabelecido. Para isso é necessário estabelecer uma expressão, função das variáveis do problema, que traduza o critério decisional. Esta função é designada função objectivo e representa-se por,

$$Z = f(X) \quad (3.4)$$

O valor da função objectivo permite avaliar o desempenho de determinada solução relativamente ao objectivo que se pretende satisfazer.

A construção da função objectivo não é de todo uma tarefa fácil. Embora em algumas situações exista uma função objectivo óbvia, na generalidade dos casos tal não acontece.

Na verdade, os sistemas reais são geralmente caracterizados pela multiplicidade de critérios de decisão pelo que a sua formulação em termos de uma só função escalar é sempre difícil.

Dada a variedade de critérios e parâmetros caracterizadores de um sistema, a função objectivo pode apresentar formas bastante complexas que, no entanto, serão de evitar já que podem tornar-se pouco sensíveis às variações das variáveis de projecto. Do ponto de vista prático é preferível introduzir certas simplificações garantindo, no entanto, que o verdadeiro objectivo seja satisfeito.

Na optimização estrutural a função objectivo representa na maioria das vezes o custo da solução. Ou seja aquilo que se pretende minimizar no projecto de uma estrutura é o seu custo.

Nos casos correntes o custo pode muitas vezes ser representado apenas por um parâmetro, por exemplo o peso da estrutura. No entanto uma função mais geral desse custo pode incluir ainda o custo dos materiais, o transporte, a construção e outras grandezas que se considerem relevantes.

3.3 - Formulação do programa matemático linear

Num programa linear a função objectivo e as restrições são lineares relativamente às variáveis de projecto.

Assim, um programa linear com m restrições e n variáveis pode ser formulado da seguinte maneira,

$$\text{Minimizar (Maximizar)} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeito a

$$\begin{array}{rccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1j}x_j + & \dots + & a_{1n}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots + & a_{2j}x_j + & \dots + & a_{2n}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_2 \\ \dots & & & & & & & \\ a_{i1}x_1 + & a_{i2}x_2 + & \dots + & a_{ij}x_j + & \dots + & a_{in}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_i \\ \dots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots + & a_{mj}x_j + & \dots + & a_{mn}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_m \end{array}$$

(3.5)

onde a_{ij} , b_i e c_j , com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, são constantes e designam-se por coeficientes técnicos, por termos independentes e por coeficientes da função objectivo [3], respectivamente.

Em cada restrição verifica-se apenas uma e uma só das relações \leq , $=$ ou \geq .

3.4 - Resolução do programa linear

Para a resolução dos problemas de programação linear foram desenvolvidos métodos analíticos que se procurou serem suficientemente gerais por forma a não haver necessidade de introduzir hipóteses quer quanto à forma, quer quanto à dimensão do problema. O método do simplex, sendo o mais eficiente, é o mais largamente usado na resolução deste tipo de problemas.

Apresenta-se em seguida a forma que o problema deve assumir para poder ser resolvido e os conceitos fundamentais em que o método se baseia.

3.4.1 - Forma canónica do problema

Para a resolução de um problema de programação linear é necessário converter o problema original à forma canónica (ou forma estandardizada).

Um problema de programação linear encontra-se na forma canónica quando as restrições se apresentam apenas sob a forma de igualdades e as variáveis são não negativas.

Qualquer problema de programação linear como o apresentado em 3.3 pode ser escrito na forma canónica do modo apresentado em (3.6),

onde: $i = 1, 2, \dots, m$

$j = 1, 2, \dots, nt$

sendo: m o número de restrições do problema e
 nt o número de variáveis do problema na forma canónica.

$$\text{Minimizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1nt}x_{nt} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2nt}x_{nt} = b_2$$

.....

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{int}x_{nt} = b_i$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mnt}x_{nt} = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_{nt} \geq 0$$

(3.6)

A redução de um problema geral de programação linear à sua forma canónica é facilmente realizada através de simples operações algébricas.

- Se se tratar de um problema de maximização basta multiplicar a função objectivo por (-1) para passar a ter um problema de minimização dado que

$$\text{Maximizar } Z = \text{Minimizar } (-Z)$$

- A conversão das inequações (correspondentes às restrições desigualdade) em equações é feita à custa da introdução de variáveis, não negativas, designadas por variáveis de desvio ou variáveis de folga. Os coeficientes destas variáveis de desvio deve ser (+1) no caso da restrição ser do tipo \leq ou (-1) no caso da restrição ser do tipo \geq . Na função objectivo os coeficientes das variáveis de desvio são nulos. Este procedimento implica que as nt variáveis do sistema (3.6) incluem, para além das n variáveis principais, originais do problema, l variáveis de desvio, sendo l o número de restrições desigualdade do problema. Deste modo temos $nt = n + l$.

- . As condições de não negatividade, $x_i \geq 0$, nem sempre ocorrem no problema original. Assim, no caso de existir uma variável que pode tomar valores negativos, esta deverá ser substituída pela diferença algébrica de duas variáveis não negativas, ou seja,

$$x_i = x'_i - x''_i$$

$$\text{com } x_i \in]-\infty, +\infty [$$

$$\text{e } x'_i \in [0, +\infty [\wedge x''_i \in]-\infty, 0]$$

Deste modo as condições de não negatividade serão sempre verificadas. Este procedimento tem como única desvantagem o aumento do número de variáveis.

3.4.2 - Método do simplex. Conceitos fundamentais.

Ao programa linear expresso por (3.6) corresponde um sistema de m equações a nt incógnitas. Na generalidade dos casos que nos interessam $nt > m$ o que nos conduz a um sistema indeterminado a que corresponde, em geral, uma infinidade de soluções. A solução pretendida é aquela que minimiza a função objectivo.

Referem-se agora alguns conceitos fundamentais para a compreensão do método do simplex.

Se as restrições são linearmente independentes é possível exprimir m variáveis (por exemplo x_1, x_2, \dots, x_m) em função das restantes $(nt-m)$ variáveis ($x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{nt}$). Qualquer solução obtida desta forma que satisfaça simultaneamente as restrições do problema e as condições de não negatividade designa-se por solução admissível do problema.

Designa-se por solução básica admissível aquela que é obtida igualando a zero as $(nt-m)$ variáveis $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{nt}$ que são designadas por variáveis não básicas. As restantes m variáveis x_1, x_2, \dots, x_m são as variáveis básicas.

Na resolução dos problemas de programação linear, é de grande importância o Teorema Fundamental da Programação Linear ao afirmar que “se existe uma solução ótima admissível então existe uma solução ótima básica admissível” [4]. Deste modo a solução ótima, caso exista, pode ser encontrada fazendo incidir a procura apenas entre as soluções básicas admissíveis. Ao contrário das soluções admissíveis, em geral infinitas, o número máximo das soluções básicas admissíveis é finito e é dado por,

$$\binom{nt}{m} = \frac{nt!}{m!(nt - m)!}$$

A procura da solução ótima entre todas as soluções básicas admissíveis constitui, no entanto, um processo pouco eficaz.

O método do simplex surge como um processo extremamente poderoso que, de uma forma sistemática, permite obter soluções básicas admissíveis. No caso da solução não corresponder ao ótimo, o método fornece uma outra solução básica admissível à qual corresponde um melhor valor da função objectivo. O processo é repetido até se atingir a solução ótima. Não é necessário experimentar todas as soluções básicas admissíveis dado que o método dispõe de um critério que permite saber quando se alcança a solução ótima.

Por outro lado, o método do simplex permite ainda detectar os casos em que o valor da função objectivo é não limitado no conjunto das soluções admissíveis (região admissível) e aqueles em que não existem soluções admissíveis (problema impossível).

De referir ainda que o método do simplex pode recorrer a vários algoritmos designados por primal, dual e primal-dual.

3.4.3 - Cálculo automático dos programas lineares

Existe disponível uma grande variedade de programas de cálculo automático de resolução de problemas de programação linear, cuja eficiência e fiabilidade se encontra amplamente comprovada.

Neste trabalho foi usado um desses programas, o LP87 (versão 7.03) [1], para a resolução dos problemas de optimização estrutural.

O LP87 usa o método do simplex, recorrendo ao algoritmo revisto do mesmo. Este programa revelou-se bastante eficiente possibilitando a resolução em tempos razoáveis, de

sistemas de dimensão considerável, tanto em termos do número de variáveis como em termos do número de restrições. De referir, que o programa permite resolver problemas de programação linear com um máximo de 1000 restrições e 5000 variáveis (incluindo as variáveis de desvio).

Uma das vantagens deste programa reside no facto de a introdução de dados relativos aos programas lineares poder ser feita através de ficheiros (escritos em formato livre) que são lidos pelo próprio programa. Os programas podem ser escritos tal qual são formulados não sendo necessário convertê-los na forma canónica. Por outro lado, após a resolução, a solução do problema pode ser escrita em ficheiros que poderão ser lidos e interpretados por outros programas.

Esta possibilidade (de leitura e escrita de dados e resultados, respectivamente, em ficheiros) conduziu à elaboração de programas de cálculo automático que geram e escrevem os dados dos programas lineares e lêem os resultados apresentando-os graficamente, contribuindo assim, para uma redução considerável do tempo dispensando em todo o processo de optimização.

Referências

- [1] Eastern Software Products, Inc. (1987) - LP87 User's Manuel, Alexandria, Virginia
- [2] Kirsch, U. (1981) - Optimum Structural Design - Concepts, Methods and Applications, McGraw-Hill, Book Company, New York
- [3] Ramalhete, M.; Guerreiro, J. e Magalhães, A. (1984) - Programação Linear, Vol.1, McGraw-Hill, Lisboa
- [4] Valadares Tavares, L. e Nunes Correia, F. (1986) - Optimização Linear e Não Linear - Conceitos, Métodos e Algoritmos, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa

Capítulo 4

Análise Plástica Limite

CAPÍTULO 4

ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE

4.1 - Introdução

O problema geral da análise estrutural consiste em determinar a resposta da estrutura, caracterizada em termos de esforços, tensões, deslocamentos ou deformações, conhecidas que sejam as suas características mecânicas, geométricas e topológicas bem como as cargas que a solicitam. Para isso é necessário estabelecer um modelo analítico que represente adequadamente o comportamento da estrutura sob a acção das cargas exteriores.

Actualmente o projecto de estruturas é baseado simultaneamente nos métodos de análise elástica e nos métodos de análise plástica. Os dois métodos não são exclusivos mas sim complementares. Este procedimento decorre naturalmente da filosofia de verificação da segurança das estruturas adoptada pela generalidade dos regulamentos, e que se baseia na consideração de determinados estados limites, nomeadamente estados limites de utilização e estados limites últimos, para além dos quais a estrutura deixa de satisfazer as exigências de projecto para as quais foi concebida.

A análise elástica de uma estrutura é adequada à verificação da segurança relativamente aos estados limites de utilização, dado que nesta fase de utilização normal da

estrutura e para o nível de carga correspondente, esta exhibe um comportamento essencialmente elástico.

Quando a carga aumenta e tendo para a carga limite, a teoria da elasticidade torna-se inadequada para representar a resposta da estrutura.

Em estado limite último (estado limite associado à rotura local ou global da estrutura) a análise plástica torna-se então particularmente relevante. A importância da análise plástica limite é desde há muito reconhecida. Além da sua importância prática ao assegurar um dimensionamento económico, os métodos de análise plástica possuem um considerável interesse teórico dado que representam uma situação extrema em que as condições de colapso são estudadas, condições estas que são muitas vezes condicionantes para o seu dimensionamento.

O objectivo fundamental da análise plástica é então o de prever a carga de colapso de uma estrutura devido ao desenvolvimento de deformações excessivos, bem como o respectivo modo de colapso.

Em seguida far-se-á uma breve descrição do comportamento geral dos materiais, o que permitirá uma melhor compreensão das condições de aplicabilidade e ao mesmo tempo das limitações da análise plástica limite.

4.2 - Comportamento geral dos materiais

O comportamento dos materiais e das próprias estruturas segue de forma esquemática o diagrama representado na figura 4.1.

Depois de um comportamento inicial elástico (OA) segue-se uma fase mais ou menos extensa de comportamento não linear (AB) que antecede a rotura.

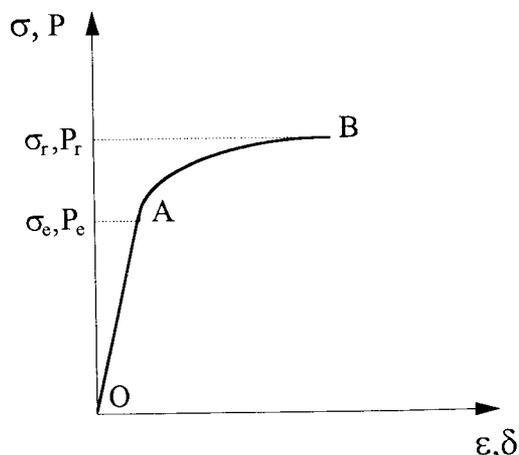


Fig. 4.1 - Diagrama esquemático do comportamento material ($\sigma - \varepsilon$) e estrutural ($P - \delta$)

Esquemáticamente o processo de deformação dos materiais mais frequentemente utilizados nas construções pode-se então dividir nas seguintes fases,

1. fase elástica, na qual as deformações são muito pequenas, reversíveis e sensivelmente proporcionais aos esforços,
2. fase de cedência plástica, na qual as deformações são essencialmente irreversíveis e crescem sem variação sensível dos esforços,
3. fase de rotura plástica, na qual as deformações aumentam muito mais rapidamente do que os esforços, até se atingir o limite de resistência do material.

Relativamente às estruturas, na fase de cedência plástica há uma redistribuição de esforços das zonas mais esforçadas onde se atinge o limite elástico para as zonas menos esforçadas. Quando o número de secções plastificadas é tal que a estrutura se transforma num mecanismo, um ligeiro aumento de carga conduz a um estado de equilíbrio instável e consequentemente à rotura.

O dimensionamento de estruturas baseado numa análise elástica despreza esta reserva adicional de resistência para além do limite elástico, resultando por isso menos económico.

A análise plástica limite é um tipo de análise que se preocupa apenas com a obtenção da carga de colapso da estrutura não fornecendo qualquer informação sobre o seu estado de deformação, ou sobre o seu comportamento durante a sua utilização normal.

Sendo assim, os métodos de análise plástica aplicam-se a estruturas apresentando uma qualquer relação tensões-extensões até que a tensão de cedência seja atingida, exigindo apenas que o material estrutural apresente um patamar de cedência.

O modelo de comportamento mais simples que satisfaz esta condição é o modelo rígido-plástico ilustrado na figura 4.2.

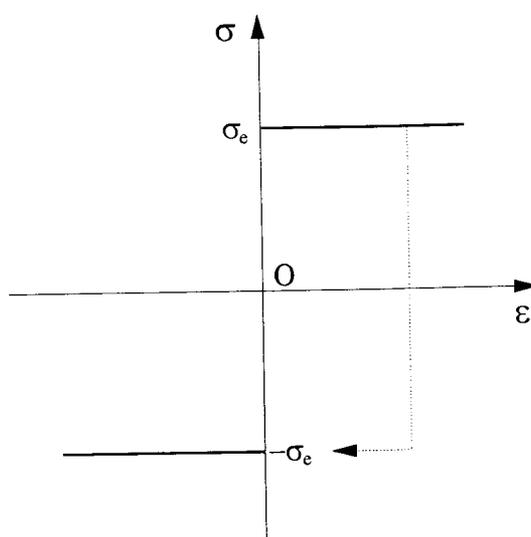


Fig. 4.2 - Relação tensões-extensões para um comportamento rígido-plástico do material

Este é apenas um modelo matemático aproximado mas que apresenta grandes vantagens do ponto de vista teórico e resultados satisfatórios relativamente ao tipo de análise em causa.

Ainda relativamente à condição de existência de um patamar de cedência, é importante referir que se tal condição se verifica para materiais como o aço macio o mesmo não acontece, pelo menos de forma tão evidente, com o betão estrutural. Daí algumas questões que se possam colocar relativamente à aplicação da análise plástica limite a estruturas de betão armado. No entanto a experiência e a comparação com testes experimentais revelaram que a análise limite conduz a resultados satisfatórios, desde que se tomem medidas apropriadas por forma a que sejam satisfeitas as condições de ductilidade necessária à formação do mecanismo de colapso.

4.3 - Teoremas fundamentais da análise plástica

A carga de colapso de uma estrutura poderá ser calculada de uma forma simples desde que o mecanismo de colapso seja conhecido. Para algumas estruturas simples existe apenas um mecanismo de colapso possível, no entanto, na maioria dos casos tal não acontece. É então necessário estabelecer métodos de cálculo que permitam seleccionar o verdadeiro mecanismo de colapso de entre os vários possíveis.

Os teoremas da análise plástica formam a base a partir da qual se desenvolveram os métodos de cálculo existentes. São dois os teoremas fundamentais e designam-se respectivamente por teorema estático ou do limite inferior e teorema cinemático ou do limite superior. Os teoremas da análise plástica aplicam-se a estruturas com um comportamento rígido-plástico, como o descrito na secção anterior.

Em qualquer problema de análise estrutural devem ser satisfeitas determinadas condições,

1. Condições de equilíbrio - as forças exteriores, incluindo as reacções, aplicadas ao sistema devem estar em equilíbrio com os esforços internos
2. Condições de compatibilidade - que estabelecem a compatibilidade das deformações
3. Relações constitutivas
4. Condições fronteira

Em particular num problema de análise plástica e para um comportamento rígido-plástico do material, as relações constitutivas traduzem-se basicamente nas condições de cedência (ou condições de plasticidade) que impõem que os esforços actuates sejam inferiores ou iguais aos esforços resistentes (correspondentes à plastificação do material) em qualquer secção da estrutura.

De um modo geral não é possível satisfazer de uma vez as três condições de cálculo plástico. É necessário partir de duas destas condições e ensaiar a satisfação da terceira por tentativas. Existem, com efeito, duas aproximações ou métodos diferentes baseados nos teoremas estático e cinemático, respectivamente.

Na apresentação que se segue considera-se o caso de carregamento proporcional, isto é, as cargas aplicadas à estrutura crescem proporcionalmente. Deste modo, um

qualquer conjunto de cargas $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n$ em que P_1, P_2, \dots, P_n são constantes pode ser representado genericamente pelo parâmetro de carga λ que caracteriza completamente a intensidade da solitação.

O problema da análise limite consiste em determinar o parâmetro de carga de colapso λ_c , para o qual a estrutura atinge a rotura por formação de um mecanismo. Este parâmetro pode então ser interpretado como sendo o coeficiente de segurança em relação ao colapso da estrutura para a solitação em causa.

É ainda considerada a hipótese de pequenas deformações pelo que as equações de equilíbrio são estabelecidas para a estrutura indeformada.

4.3.1 - Teorema estático

Em geral, para uma qualquer estrutura, existe uma infinidade de distribuições de esforços que satisfazem as condições de equilíbrio com um dado conjunto de cargas exteriores. Uma distribuição de esforços deste tipo designa-se por estaticamente admissível. Por outro lado, uma distribuição de esforços que satisfaça as condições de cedência em qualquer ponto da estrutura é designada de estável.

Para que uma estrutura seja capaz de suportar uma determinada solitação é condição necessária que exista pelo menos uma distribuição de esforços estável em toda a estrutura e que seja ao mesmo tempo estaticamente admissível. Segundo o teorema estático esta é também uma condição suficiente.

Admitindo as hipóteses acima referidas é possível demonstrar o teorema estático, também designado teorema do limite inferior, que a seguir se enuncia,

Qualquer carga λ para a qual é possível encontrar uma distribuição de esforços simultaneamente estável e estaticamente admissível é inferior ou igual à carga de colapso λ_c .

Conclui-se assim que, qualquer parâmetro de carga λ que satisfaça as condições do teorema estático é um limite inferior do parâmetro de carga de colapso λ_c , ou ainda que, o parâmetro de carga de colapso é o limite superior de todos os parâmetros de carga estáticos (satisfazem o equilíbrio e as condições de cedência),

$$\lambda_c = \max (\lambda_i) \quad (4.1)$$

Refira-se que o cálculo plástico baseado no teorema estático é conservador, fornecendo soluções pelo lado da segurança.

Um corolário deste teorema, apontado pela primeira vez por Feinberg, diz respeito ao efeito de se reforçar a estrutura aumentando a capacidade plástica de um ou mais dos seus elementos, o que quer dizer, que a carga de colapso de uma estrutura não pode ser reduzida se se aumentar a resistência de um qualquer dos seus elementos.

Com efeito, se uma estrutura entra em colapso para um parâmetro de carga λ_c , tem de existir pelo menos uma distribuição de esforços estável e estaticamente admissível para a solicitação de colapso. Se a resistência de um ou mais elementos da estrutura for aumentada a referida distribuição terá de permanecer estável e estaticamente admissível para as mesmas cargas λ_c , pois as condições de equilíbrio não são afectadas e se as condições de cedência eram satisfeitas na estrutura original também o serão na estrutura reforçada [4].

4.3.2 - Teorema cinemático

Se, para uma dada estrutura e carregamento, o mecanismo de colapso é conhecido, a carga de colapso pode ser calculada por aplicação da equação dos trabalhos virtuais igualando o trabalho das forças exteriores, durante um deslocamento virtual do mecanismo de colapso, ao trabalho interno de deformação plástica (trabalho realizado pelas forças interiores). Quando o mecanismo de colapso não é conhecido, uma equação dos trabalhos virtuais pode ser escrita para um qualquer mecanismo cinematicamente admissível (compatível com as condições de apoio e o trabalho das forças exteriores positivo), obtendo-se assim o valor do parâmetro de carga λ correspondente a esse mecanismo.

O teorema cinemático ou teorema do limite superior pode ser formulado da seguinte forma,

Toda a carga λ à qual corresponde um mecanismo de colapso cinematicamente admissível é superior ou igual à carga de colapso λ_c .

Consequentemente, qualquer parâmetro de carga correspondente a um mecanismo cinematicamente admissível é um limite superior do parâmetro de carga de colapso λ_c . Do mesmo modo, conclui-se também, que o parâmetro de carga de colapso é o menor de todos os parâmetros de carga que se obtêm por aplicação da equação dos trabalhos virtuais a um mecanismo cinematicamente admissível,

$$\lambda_c = \min (\lambda_i) \quad (4.2)$$

Tal como para o teorema estático também no caso do teorema cinemático é possível estabelecer um corolário que tem a ver com a diminuição da capacidade resistente da estrutura por diminuição da capacidade plástica de um ou mais dos seus elementos. Assim, a carga de colapso de uma estrutura não pode ser aumentada se se reduzir a resistência de um qualquer dos seus elementos [4].

Note-se que a existência de um mecanismo cinematicamente admissível ao qual corresponde um parâmetro de carga λ , não implica necessariamente que as condições da estática (condição de equilíbrio e condição de cedência) se verifiquem para esse mecanismo. As soluções obtidas a partir da aplicação do teorema cinemático encontram-se, de um modo geral, do lado da insegurança.

4.3.3 - Teorema da unicidade

Os teoremas estático e cinemático podem ser combinados para formar o chamado teorema da unicidade da solução plástica. Com efeito, é sabido do teorema estático que para qualquer valor da carga λ superior à carga de colapso, não é possível obter uma distribuição de esforços que seja simultaneamente estável e estaticamente admissível. Além disso, pelo teorema cinemático sabe-se que não existe nenhum mecanismo cinematicamente admissível ao qual corresponda um valor do parâmetro de carga λ inferior ao parâmetro de carga de colapso λ_c . Combinando estes resultados, o teorema da unicidade pode ser formulado como se segue,

Quando for possível fazer corresponder a um mecanismo de colapso cinematicamente admissível uma distribuição de esforços estável e

estaticamente admissível, a carga comum correspondente é a carga de colapso.

O teorema da unicidade assegura portanto a satisfação simultânea das condições de equilíbrio, mecanismo e cedência.

De notar que o teorema da unicidade garante apenas a unicidade do parâmetro de carga de colapso da estrutura. Tanto a distribuição de esforços na rotura como o mecanismo de colapso podem não ser únicos.

Um dos aspectos importantes deste teorema resulta do facto de a sua aplicação permitir verificar se as soluções obtidas com base nos teoremas estático ou cinemático correspondem efectivamente à carga de colapso real.

Resumindo os teoremas da análise plástica apresentados,

$$\begin{array}{l} \text{Teorema do limite inferior } \lambda \leq \lambda_c \\ \text{Teorema do limite superior } \lambda \geq \lambda_c \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Equilíbrio} \\ \text{Cedência} \\ \text{Mecanismo} \end{array} \right\} \text{Teorema da unicidade } \lambda = \lambda_c$$

4.4 - Métodos de análise plástica

Ao contrário dos métodos de análise não linear que analisam a evolução das deformações e esforços numa estrutura desde o início do carregamento até à rotura fornecendo directamente a carga última, os métodos de análise plástica limite (estáticos ou cinemáticos) são métodos de cálculo por tentativas.

Como foi referido atrás, a carga de colapso de uma estrutura poderá ser facilmente calculada desde que o mecanismo de colapso seja conhecido. O método consistirá essencialmente em verificar que, para esse mecanismo, é possível encontrar uma distribuição de esforços estável e estaticamente admissível.

Para isso, são inicialmente estabelecidas as equações de equilíbrio usando o teorema dos trabalhos virtuais. A resolução do sistema de equações assim obtido conduz à distribuição de esforços na rotura bem como ao parâmetro de carga de colapso

correspondente. Obtida a distribuição dos esforços é então possível proceder à verificação das condições de cedência.

Este método é adequado apenas no caso de estruturas simples ou no caso de estruturas menos simples quando, com base na experiência, se supõe conhecer o mecanismo de colapso. Quando o mecanismo de colapso não é conhecido, o que acontece na maioria dos casos, é necessário recorrer a métodos de cálculo que, de uma forma sistemática, conduzem à carga de colapso da estrutura e ao mecanismo correspondente.

Existem basicamente duas aproximações ou métodos de cálculo plástico, conforme se adopte o teorema estático ou o teorema cinemático. Qualquer que seja o teorema adoptado existem diferentes formas de abordar o problema as quais se traduzem em métodos de cálculo distintos. A escolha do método é ditada essencialmente pelo tipo e características da estrutura em estudo.

O método das desigualdades de Neal e Symonds baseado no teorema estático, permite seleccionar a configuração de colapso entre um conjunto de distribuições de esforços estaticamente admissíveis. Uma técnica bastante diferente que recorre ao mesmo teorema é a da distribuição de momentos desenvolvida simultaneamente por Horne [1] e English.

O teorema cinemático é utilizado por Neal e Symonds no método da combinação de mecanismos [3].

Particularmente importante é a relação existente entre a análise plástica e a programação linear. Com efeito, o teorema estático da análise plástica, que se pode traduzir genericamente por,

Maximizar $Z = \lambda$

sujeito a

Condições de equilíbrio

Condições de cedência

em que as condições de equilíbrio e cedência são traduzidas por um conjunto de equações e inequações lineares em λ , representa um problema de programação linear e foi pela primeira vez identificado como tal por Charnes e Greenberg.

A teoria da dualidade da programação linear foi utilizada por Dorn e Greenberg e por Charnes para estabelecer métodos de cálculo plástico baseados no teorema cinemático [3].

A aplicação das técnicas da programação linear aos problemas de análise plástica limite é tanto mais vantajosa porquanto facilita a implementação do cálculo automático na resolução deste tipo de problemas, aumentando significativamente a eficiência e facilidade de aplicação dos métodos de cálculo plástico.

4.5 - Dimensionamento de estruturas com base na análise plástica

Como foi visto até aqui, o objectivo principal da análise plástica é determinar a carga de colapso de uma estrutura conhecida a capacidade resistente dos elementos que a constituem. Está implícito portanto um pré-dimensionamento da estrutura, o que aliás acontece na generalidade dos problemas de cálculo estrutural, em que se é conduzido a um processo iterativo onde são realizadas sucessivamente as operações

- . pré-dimensionamento da estrutura
 - . análise da estrutura
 - . dimensionamento
 - . eventual reanálise da estrutura com base nas novas dimensões
- ⋮

O cálculo estrutural é então, em geral, dividido em duas fases separadas mas inter-relacionadas que são a análise global para determinação dos esforços e o dimensionamento da estrutura.

Com o dimensionamento pretende-se, para uma dada estrutura e carregamento, calcular as secções dos seus elementos (e a armadura, no caso de elementos de betão armado) capazes de resistir aos esforços calculados, garantindo simultaneamente o nível de segurança pretendido, ou seja, um parâmetro de carga mínimo.

Com base na análise plástica, em particular no teorema estático, e atendendo às condições de segurança pretendidas, é possível formular um programa linear que conduz ao dimensionamento directo (sem ser necessário recorrer a um processo iterativo) da estrutura.

Do teorema estático da teoria da plasticidade pode-se concluir que, para que uma estrutura seja capaz de suportar uma dada solicitação é necessário e suficiente que se verifiquem as condições de equilíbrio e as condições de cedência, ou seja, uma vez verificadas as referidas condições tem-se $\lambda \leq \lambda_c$ e conseqüentemente estão satisfeitas as condições de segurança da estrutura.

Para a exposição vai-se tomar como exemplo o caso mais simples das estruturas articuladas.

Considera-se então uma estrutura cuja geometria e material constituinte são conhecidos, submetida a uma dada solicitação também conhecida.

As condições de equilíbrio têm a forma,

$$[C] \{N\} = \{F\} \quad (4.3)$$

Os elementos de matriz de ligação $[C]$ dependem da geometria da estrutura e são por isso constantes. $\{N\}$ é o vector dos esforços nos elementos da estrutura e $\{F\}$ é um vector que representa o carregamento considerando um dado parâmetro de carga (coeficiente de segurança) e é constituído pelas forças aplicadas à estrutura.

Os esforços $\{N\}$ devem ainda satisfazer as seguintes condições de cedência,

$$[\sigma_{\min}] \{A\} \leq \{N\} \leq [\sigma_{\max}] \{A\} \quad (4.4)$$

onde $[\sigma_{\min}]$ é uma matriz diagonal que contem os valores mínimos das tensões (tensão máxima de compressão, uma vez que esta assume valores negativos) e $[\sigma_{\max}]$ é uma matriz diagonal contendo os valores máximos das tensões (tensão máxima de tracção). $\{A\}$ é o vector das áreas das secções transversais dos elementos da estrutura.

Qualquer conjunto de variáveis $\{A\}$ e $\{N\}$ que satisfaça as relações (4.3) e (4.4) constitui uma solução do lado da segurança para o problema. Isto indica claramente que para uma dada estrutura e carregamento existe um grande número de dimensionamentos possíveis. Na maioria dos casos não é evidente qual a melhor solução para o problema. É necessário estabelecer um critério que deverá ser ao mesmo tempo representativo e importante e susceptível de tratamento formal. O critério geralmente usado, embora outros

possam ser considerados, é o de minimizar o custo da estrutura e que é aproximadamente equivalente a minimizar o seu peso.

O peso da estrutura é dado neste caso por,

$$\sum_{i=1}^n l_i A_i = \{l\}^T \{A\} \quad (4.5)$$

onde n é o número de elementos da estrutura e l_i e A_i são o comprimento e a área da secção transversal do elemento i , respectivamente.

O problema do cálculo da estrutura resume-se então a

$$\text{Minimizar} \quad Z = \{l\}^T \{A\} \quad (4.6)$$

sujeito às condições impostas pelas relações (4.3) e (4.4).

Associando as condições de equilíbrio e de cedência à função objectivo obtém-se o seguinte programa matemático,

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad Z = \{l\}^T \{A\} \\ &\text{sujeito a} \\ &\quad [C] \{N\} = \{F\} \\ &\quad [\sigma_{\min}] \{A\} \leq \{N\} \leq [\sigma_{\max}] \{A\} \end{aligned}$$

(4.7)

onde $\{A\}$ e $\{N\}$ são as incógnitas do problema e são variáveis durante o processo de optimização.

A resolução do problema de programação matemática fornece então a estrutura óptima relativamente ao critério de decisão escolhido.

A mesma formulação pode ser usada para a optimização da forma de estruturas articuladas.

Para isso, e uma vez definido o domínio no interior do qual a estrutura se pode desenvolver, é construída uma malha articulada, mais ou menos densa, constituída por barras que podem funcionar à compressão ou à tracção.

A aplicação a essa malha das condições de equilíbrio (4.3) e cedência (4.4) associadas ao critério de óptimo definido em (4.6) conduz ao programa linear (4.7).

Neste programa A_i e N_i podem assumir valores nulos. A resolução do problema de programação linear permite eliminar as barras em “excesso” (não necessárias para assegurar o equilíbrio) e assim obter a estrutura com o menor peso, capaz de resistir à acção considerada.

A estrutura óptima assim obtida satisfaz concertemente as condições de equilíbrio e cedência mas pode corresponder a um mecanismo (estrutura hipostática), representando uma configuração instável para um carregamento geral. Um modo de resolver este problema será adicionar barras à configuração óptima obtida [2]. Estas barras não são necessárias para o equilíbrio, mas apenas para tornar a estrutura estável.

Atendendo ao que se acaba de expor pode-se concluir que, recorrendo aos princípios da análise plástica limite é possível não só estimar o valor das cargas máximas que uma estrutura suporta, como também, para uma dada estrutura e carregamento, obter o dimensionamento óptimo.

Referências

- [1] Horne, M.R. (1978) - Plastic Theory of Structures, Pergamon Press, Oxford
- [2] Kirsch, U. (1981) - Optimum Structural Design-Concepts, Methods and Applications, McGraw-Hill Book Company, New York
- [3] Neal, B.G. (1977) - The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman and Hall, London
- [4] Teixeira de Freitas, J.A. (1981) - Análise Plástica de Estruturas por Programação Linear, CTE - 21, CMEST, Lisboa

Capítulo 5

Modelo Escora-Tirante em Estruturas Planas de Betão Armado Programa de Cálculo Automático

5.1 - Introdução

Os modelos escora-tirante foram apresentados no capítulo 2, de forma mais ou menos detalhada, como o método mais racional e coerente para o cálculo de meios contínuos irregulares de betão.

O facto de não existir uma abordagem universal e standard do método escora-tirante, nomeadamente por parte da regulamentação existente, tem dificultado a sua aplicação prática.

As dificuldades surgem não só ao nível da modelação, mas também ao nível do dimensionamento dos diversos elementos que constituem o modelo.

Na tentativa de apoiar e facilitar o trabalho do engenheiro na aplicação do método escora-tirante foi desenvolvida uma formulação que permite resolver os seguintes problemas,

1. determinar o modelo escora-tirante que minimiza o total de armadura a colocar na estrutura e

2. para um dado modelo escora-tirante, determinar a carga máxima que ele pode suportar.

O modelo adoptado baseia-se no teorema do limite inferior da teoria da plasticidade e envolve duas fases.

Na primeira fase são determinadas as forças nas barras do modelo escora-tirante impondo a condição de armadura mínima ou carga máxima conforme se pretende efectuar o dimensionamento plástico óptimo (problema tipo 1) ou a análise plástica limite da estrutura (problema tipo 2), respectivamente. Nesta fase é usada a programação matemática linear que permite resolver o problema de optimização.

Na segunda fase deverão ser verificadas as tensões no betão. As escoras são dimensionadas de modo a que a resistência efectiva do betão à compressão não seja ultrapassada. Nos nós do modelo são estudados os campos de tensão, que uma vez representados graficamente permitem verificar a exequibilidade do modelo encontrado.

A formulação desenvolvida baseia-se em determinados pressupostos fundamentais subjacentes ao próprio método escora-tirante.

Assim, como foi visto no capítulo 2, um modelo escora-tirante é equivalente a uma estrutura articulada, em que as escoras de compressão se podem desenvolver entre dois quaisquer pontos do meio irregular contínuo. A sua secção máxima admissível é condicionada inicialmente apenas pelos limites da estrutura. Os tirantes, por sua vez, existem em zonas de possível colocação das armaduras.

A análise plástica limite de meios irregulares de betão é assim equivalente à análise plástica limite de uma estrutura articulada com um determinado número de tirantes com secção máxima conhecida (a armadura) e um número ilimitado de escoras de secção indeterminada.

A imposição a um modelo deste tipo das condições de equilíbrio e das condições de plasticidade, traduzidas genericamente pela verificação das tensões nos diversos elementos que o constituem, garantem, com base no teorema do limite inferior da análise plástica, a verificação das condições de segurança do modelo final.

5.2 - Dimensionamento plástico óptimo

O meio estrutural é discretizado através de uma malha de escoras e tirantes que formam uma estrutura articulada complexa. Esta estrutura é construída por forma a conter múltiplos modelos escora-tirante. Se o modelo assim obtido, por combinação de diversos modelos possíveis, for constituído por mais barras do que as estritamente necessários para assegurar o equilíbrio, é possível minimizar a quantidade de armadura a colocar na estrutura.

Para a determinação do modelo escora-tirante óptimo pretendido é possível construir um programa matemático. A caracterização desse programa é feita em seguida.

5.2.1 - Variáveis do problema

As variáveis de projecto a adoptar são aquelas que permitem caracterizar a solução, constituindo ao mesmo tempo, as incógnitas do problema.

No presente problema a solução final é completamente caracterizada pelas forças nas escoras e pela quantidade de armadura nos tirantes. A armadura, por sua vez, é função da força no respectivo tirante, pelo que este conjunto de variáveis limitar-se-á aos esforços nas barras.

Será considerado ainda um outro conjunto de variáveis, as reacções nos apoios, já que também estas dependem do modelo final obtido.

Resumindo, as variáveis do problema são os esforços nas barras do modelo (escoras e tirantes) e as reacções nos apoios, representados genericamente por N_i e R_j , respectivamente, onde i varia de 1 até ao número de barras do modelo e j varia de 1 até ao número de reacções de apoio.

5.2.2 - Restrições do problema

As condições a impor decorrem directamente do modelo de análise estrutural adoptado.

Sendo assim, as restrições do presente problema são basicamente de dois tipos,

- . restrições resultantes da imposição do equilíbrio nos nós do modelo,
- . restrições destinadas a garantir a exequibilidade do modelo e que resultam na limitação dos esforços nas barras e das reacções nos apoios.

5.2.2.1 - Condições de equilíbrio

Da imposição do equilíbrio em cada um dos nós do modelo escora-tirante resultam as seguintes equações que exprimem o equilíbrio segundo dois eixos ortogonais, Ox e Oy (ver fig. 5.1),

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \times \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{NR} R_j \times \cos\beta_j + \sum_{k=1}^{NF} F_k \times \cos\gamma_k = 0 \quad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \times \text{sen}\alpha_i + \sum_{j=1}^{NR} R_j \times \text{sen}\beta_j + \sum_{k=1}^{NF} F_k \times \text{sen}\gamma_k = 0 \quad (5.2)$$

onde,

NB - número de barras convergentes no nó

NR - número de reacções de apoio no nó

NF - número de forças concentradas exteriores aplicadas ao nó

N_i - esforço axial na barra i

R_j - reacção de apoio de ordem j

F_k - valor de cálculo da força concentrada de ordem k

α_i - ângulo que a barra i faz com o eixo Ox

β_j - ângulo que a reacção R_j faz com o eixo Ox

γ_k - ângulo que a força F_k faz com o eixo Ox

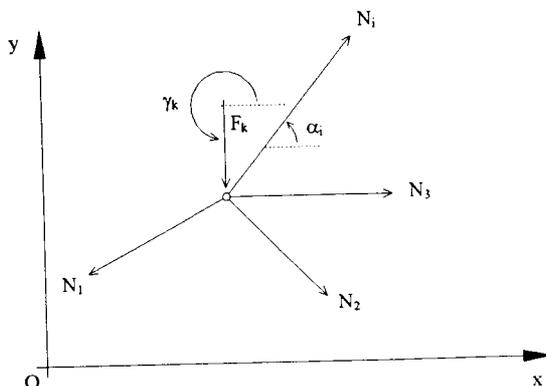


Fig. 5.1 - Equilíbrio de forças. Referencial local

5.2.2.2 - Esforços máximos e mínimos nas escoras

Designando por N_i o esforço axial na escora i e sendo negativos os esforços de compressão, tem-se então para cada escora,

$$N_i \leq 0 \quad (5.3)$$

Por outro lado, os esforços nas escoras não podem ultrapassar determinados valores de forma a garantir que as secções correspondentes se encontrem dentro dos contornos do meio estrutural.

Os valores limites desses esforços são facilmente determinados desde que sejam conhecidas as dimensões máximas das escoras (largura e espessura) e a resistência efectiva de cálculo do betão à compressão (f_{cd}^*), ou seja,

$$N_{i,\min} = A_{c,i} \times f_{cd}^* \quad (5.4)$$

5.2.2.4 - Reacções de apoio

Nas estruturas em que as dimensões de um ou mais apoios são conhecidos, deve-se limitar o valor das respectivas reacções, resultando nas duas condições,

$$R_j \leq R_{j,\max} \quad (5.9)$$

$$R_j \geq -R_{j,\max} \quad (5.10)$$

dado que o valor das reacções podem ser positivos ou negativos.

5.2.2.5 - Armaduras mínimas

Quando se procede à pormenorização da armadura nas peças de betão armado, além das armaduras estritamente necessárias, resultantes do dimensionamento da estrutura, são colocadas outras armaduras, nomeadamente as armaduras construtivas e as quantidades mínimas regulamentares.

Em alguns casos poderá ser vantajoso tirar partido dessas armaduras, permitindo assim diminuir a quantidade de armadura a colocar nos tirantes principais.

Surgem assim as condições,

$$A_{s,i} \geq A_{s,\min} \quad (5.11)$$

e que conduzem a,

$$N_i \geq N_{i,\min} \quad (5.12)$$

5.2.3 - Critério de optimização

Tal como foi visto para o caso das estruturas articuladas (capítulo 4), qualquer conjunto de variáveis, N_i e R_j , que satisfaça as condições (5.1), (5.2), (5.3), (5.5), (5.8), (5.9) e (5.10) corresponde a um modelo escora-tirante capaz de resistir com segurança ao carregamento da estrutura.

A modelação de estruturas em escoras e tirantes permite assim uma liberdade de escolha que pode ser orientada para um qualquer objectivo considerado representativo.

No presente trabalho, de entre os modelos escora-tirante possíveis pretende-se obter o mais económico.

Dado que a geometria da estrutura é conhecida, a quantidade de betão é fixa. Deste modo, o menor “custo” da solução corresponde ao mínimo de armadura a colocar na estrutura. Resulta então para a função a otimizar,

$$Z = \sum_{i=1}^{NT} A_{s,i} \times l_i \quad (5.13)$$

onde,

- Z - “custo” da solução
- NT - número de tirantes
- $A_{s,i}$ - armadura no tirante i
- l_i - comprimento do tirante i

A armadura no tirante relaciona-se com o respectivo esforço do seguinte modo,

$$N_i = A_{s,i} \times f_{syd} \quad (5.14)$$

e sendo f_{syd} constante para cada tipo de aço, resulta que o critério de óptimo, função das variáveis do problema, é,

$$\text{Mínimo } Z = \sum_{i=1}^{NT} N_i \times l_i \quad (5.15)$$

Refira-se que a função representativa do custo não considera as quantidades adicionais de armadura relativas a armaduras construtivas, comprimentos de amarração, etc., já que a solução final ainda não é conhecida. É de esperar, no entanto, que quando o objectivo é comparar, em termos de “custo”, diferentes soluções, o peso relativo destas armaduras não seja significativo.

5.2.4 - Formulação do programa matemático linear

Associando o conjunto de restrições definidas em 5.2.2 ao critério de optimização traduzido por (5.15), e atendendo a que todas as funções envolvidas são lineares relativamente as variáveis do problema, obtem-se o programa matemático linear que se apresenta na página seguinte.

A resolução do programa matemático fornece o valor dos esforços nas barras e das reacções de apoio. Obtido, deste modo, o modelo escora-tirante pretendido, isto é, com o menor custo em armadura, é necessário proceder à verificação da exequibilidade do mesmo.

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{NT} N_i \times l_i$$

Sujeito a

. para cada nó

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \times \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{NR} R_j \times \cos\beta_j + \sum_{k=1}^{NF} F_k \times \cos\gamma_k = 0$$

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \times \text{sen}\alpha_i + \sum_{j=1}^{NR} R_j \times \text{sen}\beta_j + \sum_{k=1}^{NF} F_k \times \text{sen}\gamma_k = 0$$

. para cada biela

$$N_i \leq 0$$

$$N_i \geq N_{i,\min}$$

. para cada tirante

$$N_i \leq N_{i,\max}$$

$$N_i \geq N_{i,\min}$$

. para as reacções dos apoios com dimensões fixas

$$|R_j| \leq R_{j,\max}$$

(5.16)

5.3 - Verificação das tensões no modelo final

Para a implementação desta fase, de verificação de tensões, no processo automático desenvolvido, foi necessário recorrer a uma metodologia de análise e dimensionamento das zonas nodais diferente da apresentada no capítulo 2. Para isso foi usado um algoritmo

desenvolvido por M Schlaich [3] que possibilita a verificação automática da segurança dos nós.

Na estrutura resistente as escoras correspondem a campos de compressão uni-dimensionais no betão cuja intensidade não pode exeder a resistência de cálculo do betão à compressão. Os tirantes, por sua vez, podem ser considerados como escoras actuando no lado oposto do nó. Nos nós, onde concorrem diversas escoras e tirantes, desenvolvem-se campos de tensões bi-dimensionais.

Para verificar a capacidade resistente do nó aplica-se o teorema do limite inferior da análise plástica. Assim, as condições de segurança no nó são verificadas se se obtiver para o nó uma distribuição de tensões estaticamente admissível (verifica o equilíbrio e as condições fronteira) e estável (verifica as condições de cedência).

5.3.1 - Nós formados pela convergência de campos uni-dimensionais com a mesma intensidade

A intersecção de três escoras, com igual intensidade (isto é, com a mesma tensão efectiva) e em equilíbrio, define um triângulo de lados perpendiculares às direcções dessas escoras (fig. 5.2). Dentro desta área triangular existe um campo de tensões pseudo-hidrostático com,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = f_{cd} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = 0$$

De acordo com o anteriormente exposto este campo de tensões é estável.

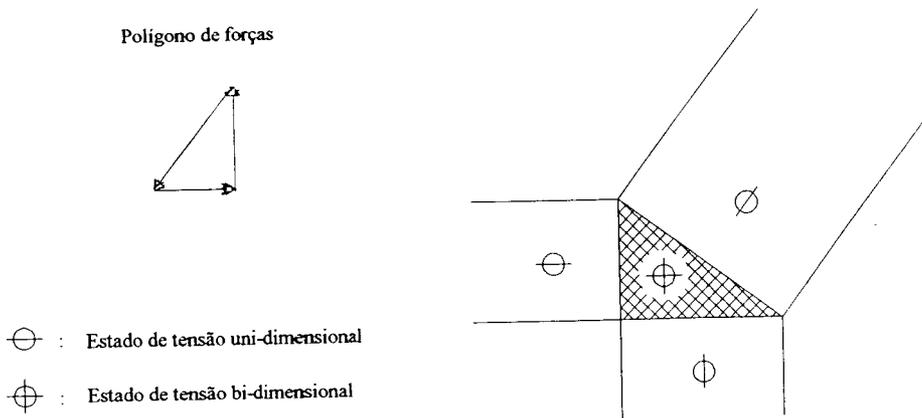


Fig. 5.2 - Nó formado por três campos de tensão uni-dimensionais com a mesma intensidade

De modo semelhante, se mais do que três escoras convergem num nó obtém-se uma área poligonal definida pela intersecção dos vários campos de tensões (fig. 5.3).

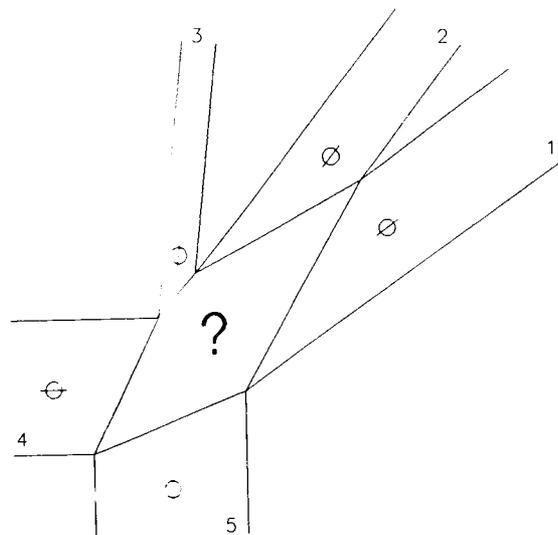


Fig. 5.3 - Área nodal formada pela intersecção de cinco campos de tensão uni-dimensionais

Dentro desta área existe um campo de tensões bi-dimensionais, não homogéneo, difícil de calcular uma vez que as escoras não são, de um modo geral, perpendiculares à linha que define o polígono.

Na estrutura real, no entanto, a zona nodal não se restringe à área resultante da intersecção das escoras. Dado que o nó está rodeado de betão cuja resistência pode ser explorada, a dimensão e forma da zona nodal é limitada apenas pela fronteira da estrutura e pelos campos de tensão adjacentes de modo que não surjam sobreposições.

Sendo assim, é possível encontrar um campo de tensões estável e estaticamente admissível, desde que se considere uma área nodal ligeiramente superior à obtida pela intersecção dos campos de tensão convergentes no nó. Esta área é formada por rectângulos e triângulos com estados de tensão constantes e estáveis, uni-axiais para as áreas rectangulares com,

$$\sigma_1 = f_{cd} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

e pseudo-hidroestáticos para as áreas triangulares (fig. 5.4). O campo de tensões assim obtido é descontínuo, mas estaticamente admissível desde que se verifique o equilíbrio nas linhas de descontinuidade. Para isso as tensões normais a estas linhas têm de ser de igual intensidade e as tensões tangenciais têm de ser nulas.

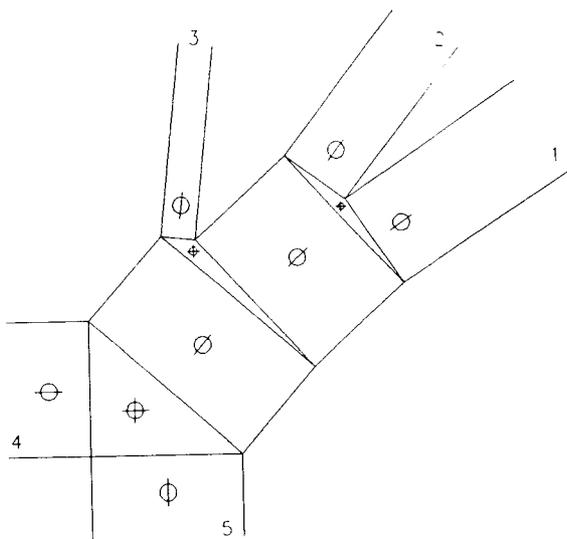


Fig. 5.4 - Campo de tensões nodal estável e estaticamente admissível

O procedimento a seguir para a construção duma área nodal como a referida, consiste em combinar duas escoras adjacentes, criteriosamente escolhidas, numa única escora resultante e repetir este processo até todos os campos de tensões estarem combinados.

Exemplificando, e como se pode ver na figura 5.5, inicialmente os campos de tensão 1 e 2 são combinados dando origem ao campo de tensão uni-dimensional II.. Atendendo a que os campos de tensão 1, 2 e II têm a mesma intensidade e devem estar em equilíbrio, AB e AC têm de ser perpendiculares às escoras 1 e 2, respectivamente. Os pontos B e C podem então ser directamente determinados, sendo a direcção do campo de tensão II perpendicular a BC. O estado de tensão na área triangular I é pseudo-hidroestático. O processo repete-se substituindo agora 3 e 5 por IV e assim sucessivamente até se obter finalmente a área triangular V.

A zona nodal assim construída consiste então nas duas áreas rectangulares, II e IV, com o mesmo estado de tensão uni-dimensional, e nas três áreas triangulares, I, III e V. Esta área nodal é apenas ligeiramente superior à obtida directamente pela intersecção das escoras 1 a 5.

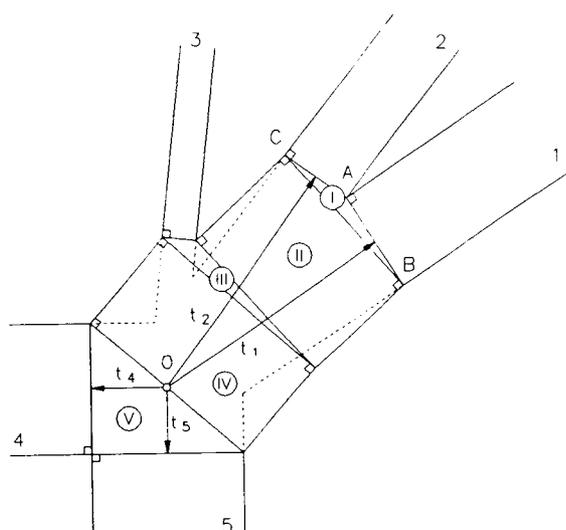


Fig. 5.5 - Construção geométrica do campo de tensões da fig. 5.4

A aplicação do processo descrito a diversos nós conduziu às seguintes regras:

1. Os campos de tensão correspondentes às escoras adjacentes só podem ser combinados se os vértices dos “triângulos pseudo-hidroestáticos” se encontrarem no exterior ou na fronteira da área definida pela intersecção dos restantes campos de tensão. No exemplo apresentado (fig. 5.3), no início do processo apenas os pares de escoras 1-2 e 4-5 podem ser combinados.

2. Depois de encontrados todos os pares de escoras cuja combinação é possível, o par escolhido deverá ser sempre aquele a que corresponde o maior valor de $(t_i + t_j)$ (na figura 5.5 $i = 1$ e $j = 2$ ou $i = 4$ e $j = 5$). Esta regra foi obtida por tentativas e é aproximadamente equivalente a encontrar o campo de tensões resultante com a máxima distância ao centro do nó (ponto O na figura 5.5).

O algoritmo desenvolvido com base nestas regras foi testado com sucesso para várias centenas de nós gerados aleatoriamente e com um máximo de 40 forças por nó.

Apesar de não existir uma prova matemática exacta para este algoritmo os inúmeros testes realizados permitem concluir, que para qualquer nó com um número arbitrário de campos de tensão convergentes de igual intensidade e em equilíbrio, é sempre possível encontrar um campo de tensões estável e estaticamente admissível, isto é, satisfazendo as condições do teorema do limite inferior da teoria da plasticidade.

No presente trabalho, a metodologia apresentada foi automatizada, permitindo uma verificação visual e imediata da exequibilidade da solução.

5.3.2 - Nós formados por campos de tensão uni-dimensionais com diferentes intensidades

Até aqui admitiu-se que todos os campos de tensões convergentes no nó tinham a mesma intensidade. No entanto, no caso de existir no nó, armadura, cargas exteriores distribuídas ou apoios com resistência efectiva diferente da resistência efectiva do nó, a hipótese admitida não é correcta.

Nestes casos é também possível construir campos de tensão estáveis e estaticamente admissíveis, se a largura dos campos de tensão uni-dimensional for alterada por forma a que todos os campos tenham a mesma intensidade no nó.

O campo de tensões que converge no nó terá de afunilar ou alargar conforme a resistência efectiva do nó é, respectivamente, superior ou inferior à resistência efectiva desse campo de tensões (fig. 5.6).

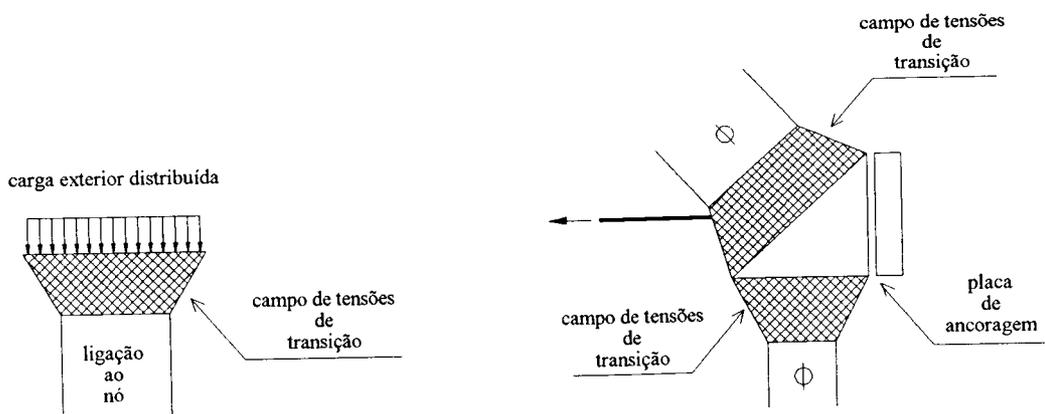


Fig. 5.6 - Campos de tensão de transição

De modo semelhante às áreas nodais deduzidas na secção anterior, o estado de tensão nas zonas de transição terá que ser estável e estaticamente admissível.

Estas áreas de transição, deduzidas por Thürlimann, devido à sua forma de leque obrigam à consideração de armadura transversal para assegurar a estabilidade. Por outro lado, M. Schlaich deduz o comprimento mínimo necessário para a zona de transição, de modo que a resistência à tracção do betão não seja ultrapassada.

Refira-se que no presente trabalho admitiu-se que todos os campos de tensão convergentes num nó têm a mesma intensidade e por isso não foram consideradas as zonas de transição.

5.4 - Análise plástica limite. Carga de rotura

Conhecida a geometria da estrutura e fornecido o modelo escora-tirante capaz de traduzir o mecanismo de transmissão de forças internas, pretende-se determinar a carga máxima que o modelo pode resistir.

O modelo fornecido é caracterizado essencialmente pela posição dos tirantes, admitindo-se, como se viu, que as escoras se podem materializar em qualquer zona do meio estrutural contínuo.

Tal como em 5.2, também para a resolução deste problema é possível obter um programa matemático linear.

5.4.1 - Variáveis do problema

A solução deste problema envolve, para além da definição dos valores dos esforços nas escoras e nos tirantes e das reacções de apoio, a quantificação do parâmetro de carga máximo, λ_c , que conduz precisamente ao colapso da estrutura.

Admite-se, neste caso, a hipótese de carregamento paramétrico (ou proporcional), pelo que a intensidade da solicitação é completamente caracterizada pelo parâmetro de carga λ .

Consideram-se então para variáveis do problema os esforços nas barras e as reacções nos apoios, N_i e R_j , respectivamente, e o parâmetro de carga de colapso, λ_c .

5.4.2 - Condições do problema

Como em qualquer problema de análise plástica limite (e como foi referido no capítulo 4) deverão ser cumpridas as condições de equilíbrio e as condições de cedência.

As condições de cedência, que correspondem à limitação dos esforços nas barras e das reacções nos apoios, apresentam-se com a mesma forma das condições derivadas em 5.2.2.2 a 4 para o caso do problema de optimização aí apresentado, uma vez que os valores limites impostos são independentes do carregamento da estrutura, dependendo apenas das suas características geométricas e mecânicas.

Por sua vez, a formulação do equilíbrio para cada um dos nós do modelo e segundo dois eixos ortogonais, O_x e O_y , conduz às seguintes equações,

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \times \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{NR} R_j \times \cos\beta_j + \lambda_c \cdot \sum_{k=1}^{NF} F_k \times \cos\gamma_k = 0 \quad (5.17)$$

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \times \operatorname{sen}\alpha_i + \sum_{j=1}^{NR} R_j \times \operatorname{sen}\beta_j + \lambda_c \cdot \sum_{k=1}^{NF} F_k \times \operatorname{sen}\gamma_k = 0 \quad (5.18)$$

onde λ_c é o parâmetro de carga de colapso e os restantes parâmetros têm o significado apresentado em 5.2.2.1.

5.4.3 - Critério de optimização

Do teorema do limite inferior da análise plástica é sabido que o parâmetro de carga de colapso é o maior de todos os parâmetros de carga que satisfazem as condições de equilíbrio e de cedência.

Deste modo para se encontrar a carga correspondente à rotura da estrutura terá que se maximizar o valor do parâmetro de carga, ou seja, o valor da função objectivo pretendido é,

$$\text{Máximo } Z = \lambda_c \quad (5.19)$$

5.4.4 - Programa matemático linear

Mais uma vez, associando todas as restrições atrás descritas ao critério de optimização resulta o seguinte programa matemático linear,

Maximizar $Z = \lambda_c$

Sujeito a

. para cada nó

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \times \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{NR} R_j \times \cos\beta_j + \lambda_c \cdot \sum_{k=1}^{NF} F_k \times \cos\gamma_k = 0$$

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \times \text{sen}\alpha_i + \sum_{j=1}^{NR} R_j \times \text{sen}\beta_j + \lambda_c \cdot \sum_{k=1}^{NF} F_k \times \text{sen}\gamma_k = 0$$

. para cada biela

$$N_i \leq 0$$

$$N_i \geq N_{i,\min}$$

. para cada tirante

$$N_i \leq N_{i,\max}$$

. para as reacções dos apoios com dimensões fixas

$$|R_j| \leq R_{j,\max}$$

(5.20)

Uma vez resolvido o problema de programação linear e obtidos os esforços nas barras do modelo correspondentes à rotura bem como a carga respectiva, terá que se proceder à verificação das tensões de modo a garantir a validade da solução obtida. Essa verificação é feita de acordo com o disposto na secção 5.3.

5.5 - Descrição da estrutura global de cálculo

O modelo de cálculo apresentado neste trabalho desenvolve-se, como foi referido anteriormente, em duas fases fundamentais correspondendo a cada uma delas um programa de cálculo automático.

Na primeira fase é determinado o modelo escora-tirante óptimo, recorrendo-se para tal à programação matemática linear. Para a resolução do problema de optimização utiliza-se o programa LP87 [1] cujas principais características foram já referidas no capítulo 3.

Na segunda fase são verificadas as tensões no modelo obtido. Para isso foi elaborado um programa de cálculo automático, com a designação de DRWMOD, que com base no algoritmo apresentado na secção 5.3, constroi os campos de tensões em torno dos nós e das escoras, o que possibilita uma verificação visual da exequibilidade da solução.

Este programa permite ainda, numa primeira fase, visualizar o modelo inicial a optimizar. Posteriormente efectua o tratamento dos resultados do programa de optimização (LP87), fornecendo a imagem gráfica do modelo final optimizado bem como os esforços nas barras desse modelo.

Um outro programa auxiliar foi elaborado, designado por GLPDAT, para proceder à escrita do ficheiro de dados para o programa LP87.

Este programa lê os dados gerais da estrutura, escritos num ficheiro criado pelo utilizador, formulando em seguida o problema de optimização. A definição do problema inclui,

- . cálculo do número de variáveis e de restrições
- . definição das restrições igualdade e desigualdade
- . definição da função objectivo

Independentemente do tipo de solução pretendida (modelo mais económico ou carga de colapso), a sequência de cálculo para a resolução do problema apresenta as seguintes fases,

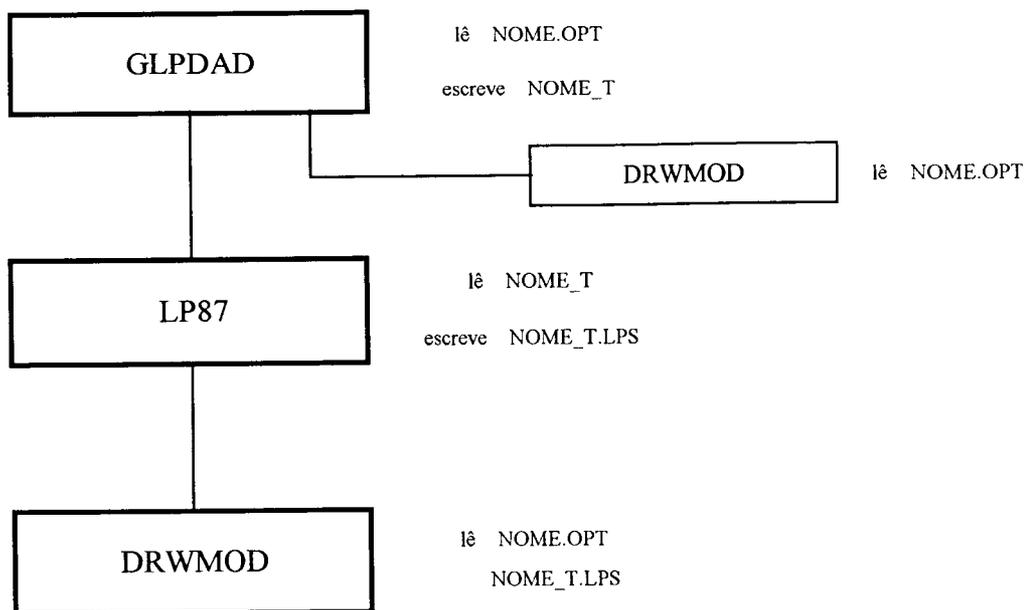


Fig. 5.7 - Sequência de cálculo

em que,

NOME - é o nome base do problema com o máximo de seis caracteres

T - é um índice que define o tipo de problema

T = D, para o problema de dimensionamento óptimo

T = C, para o problema de determinação da carga de colapso

Referências

- [1] Eastern Software Products, Inc. (1987) - LP87 User's Manuel, Alexandria, Virginia

- [2] Pinho, M.J. e Serra Neves, A. (1994) - Análise de Peças Irregulares de Betão Armado Através de Modelos Bielas-Tirantes, Encontro Nacional Betão Estrutural 1994, Porto, pp. 41-54

- [3] Schlaich, M. e Anagnostou, G. (1990) - Stress Fields for Nodes of Strut-and-Tie Models, ASCE 116(1), Journal of Struct. Eng., pp. 13-23

Capítulo 6

Exemplos de Aplicação

6.1 - Exemplo 1 - Viga-parede

6.1.1 - Dados gerais. Geometria, materiais e solicitação

No presente exemplo estuda-se uma viga-parede solicitada por duas cargas concentradas simétricas. Trata-se de uma estrutura “simples” que permite ilustrar de uma forma clara variados aspectos da formulação apresentada.

A viga-parede tem a geometria apresentada na figura 6.1. Tem uma espessura de 0.30 m e é apoiada em dois pilares com uma secção de $0.40 \times 0.30 \text{ m}^2$. É solicitada simetricamente por duas forças concentradas verticais, $F_{sd} = 1250 \text{ KN}$.

Os materiais usados apresentam as seguintes características,

. Betão B25	$f_{cd} = 13.3 \text{ Mpa}$
. Aço A400	$f_{syd} = 348 \text{ Mpa}$

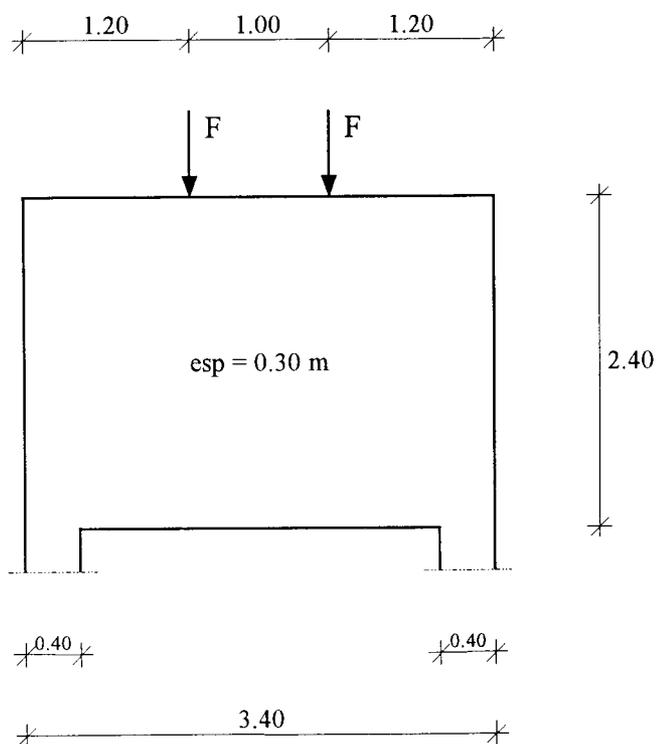


Fig. 6.1 - Viga-parede

Pretende-se definir a solução óptima de armadura para a viga.

6.1.2 - Análise da estrutura

A estrutura foi discretizada do modo apresentado na figura 6.2. Admitiu-se que todas as barras podem corresponder quer a escoras quer a tirantes para não limitar à partida a procura da solução mais económica.

Na geração deste modelo inicial houve o cuidado de colocar os eixos das barras afastados do contorno da viga para permitir a realização das escoras (têm que estar contidas no interior do meio estrutural), e no caso dos tirantes para que as armaduras verifiquem as disposições regulamentares relativas ao recobrimento e espaçamento mínimos. Como é

evidente, um procedimento semelhante será adoptado em todos os exemplos que se seguem.

O modelo inicial da figura 6.2 vai ser optimizado, sendo impostas diferentes restrições ao longo do estudo que se segue.

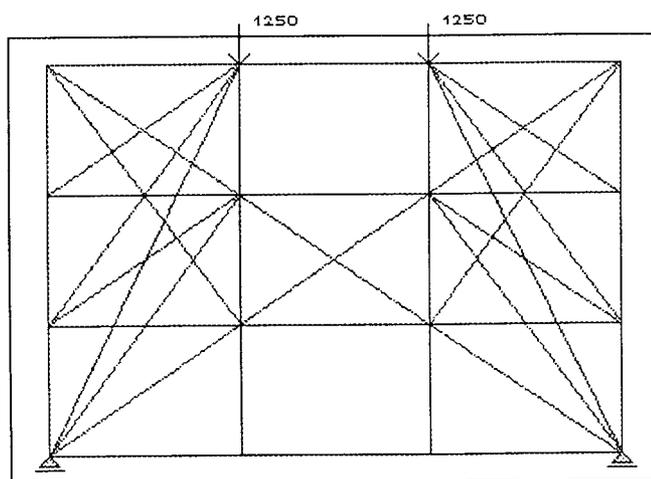


Fig. 6.2 - Viga-parede. Modelo inicial

A estrutura é inicialmente estudada condicionando apenas as reacções de apoio. Conhecidas as dimensões do apoio bem como o material que os constitui tem-se,

$$R_{\max} = A_{\text{ap}} \times f_{\text{cd}} = 0.40 \times 0.30 \times 13300 = 1596 \text{ KN}$$

Esta condição não vai ser condicionante, uma vez que dada a simetria da estrutura e da solicitação as reacções nos apoios, R , serão,

$$R = F = 1250 \text{ KN} < 1596 \text{ KN}$$

O modelo escora-tirante obtido apresenta-se na figura 6.3. Nesta figura são ainda indicados os esforços nas barras, sendo positivos os esforços nos tirantes e negativos nas escoras, e é feita a verificação das tensões.

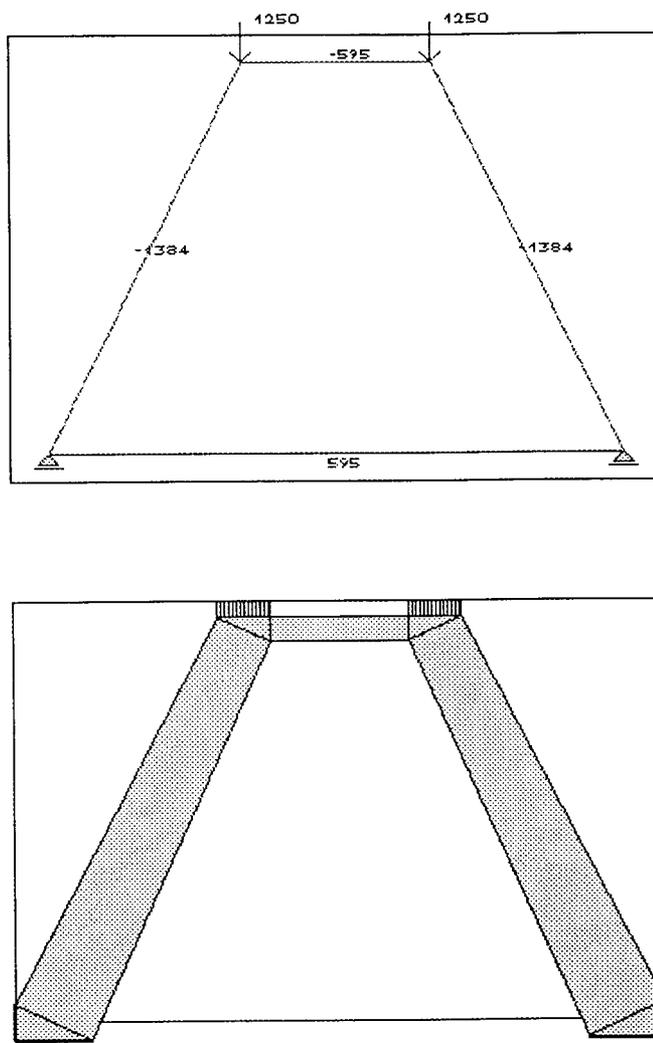


Fig. 6.3 - Exemplo 1.1. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

Como se pode verificar a solução obtida é estável. Os campos de tensões estão contidos no interior da fronteira da viga e não se verificam sobreposições dos mesmos.

No estudo seguinte impôs-se um esforço máximo de 560 kN nos tirantes, que corresponde a uma área de armadura de aproximadamente 16 cm^2 ($8\phi 16$).

O modelo escora-tirante obtido apresenta-se de seguida bem como a correspondente verificação das tensões (fig. 6.4). Mais uma vez as tensões na estrutura são verificadas.

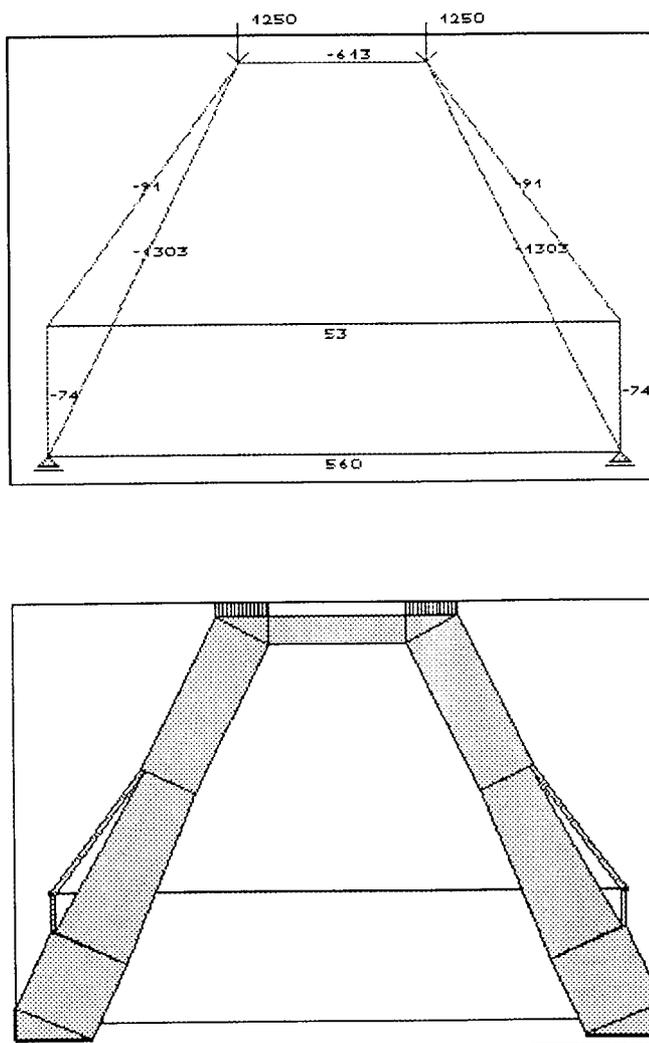


Fig. 6.4 - Exemplo 1.2. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

Finalmente pretendeu-se tirar partido da armadura distribuída que se irá colocar na viga. Para isso, obrigou-se a que existisse armadura horizontal em três níveis impondo-se esforços de tracção mínimos nas barras correspondentes. Esse esforço mínimo é,

$$N_{\min} = A_{s,\min} \times f_{syd} = 2.01 \times 348 / 10 = 70 \text{ KN} \quad \text{que corresponde a } 4\phi 8.$$

Como se pode ver na figura 6.5 o modelo final é ligeiramente mais complexo e também aqui as tensões são verificadas.

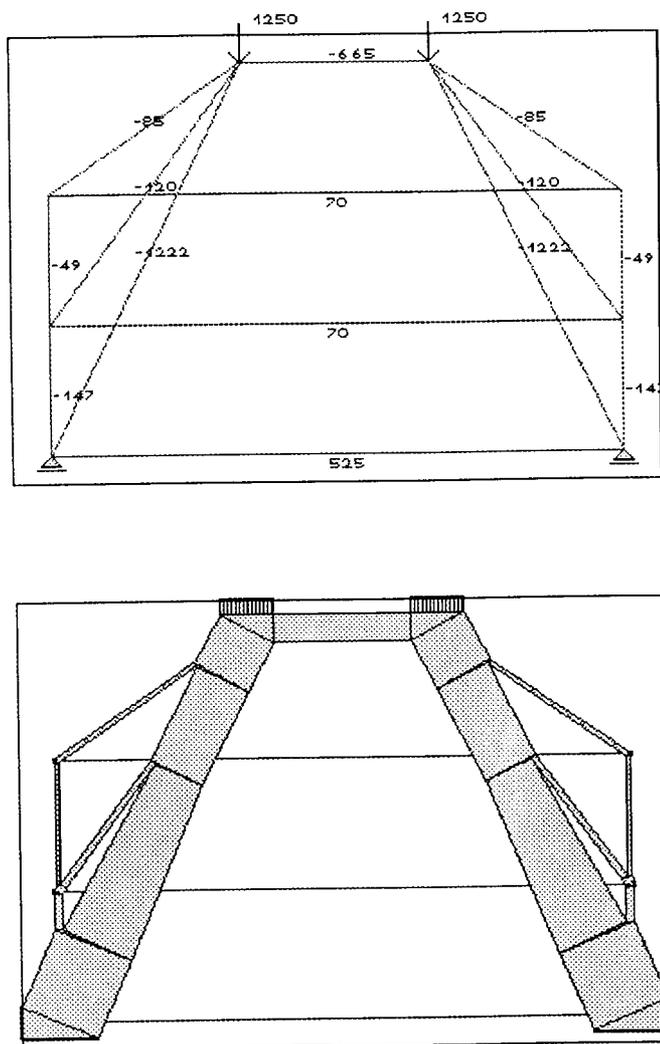


Fig. 6.5 - Exemplo 1.3. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

Analisando o “custo” dos três modelos verifica-se que há um aumento do primeiro para o último. É no entanto pouco significativo, registando-se um aumento máximo de cerca de 10% do último relativamente ao primeiro.

Em nenhum dos casos foi necessário proceder à limitação dos esforços nas escoras já que se obtiveram sempre soluções estáveis.

6.2 - Exemplo 2 - Consola curta

6.2.1 - Dados gerais. Geometria, materiais e solicitação

As consolas curtas constituem um tipo estrutural em que tradicionalmente se tem recorrido ao uso dos modelos escora-tirante com resultados satisfatórios.

Neste exemplo vai ser analisada uma consola curta apoiada num pilar e solicitada na extremidade por uma força concentrada. Tal como no exemplo anterior pretende-se otimizar a solução relativamente à quantidade de armadura a colocar na estrutura.

A consola curta estudada tem a geometria apresentada na figura 6.6. Tem uma espessura de 0.45 m e é apoiada num pilar com a mesma espessura.

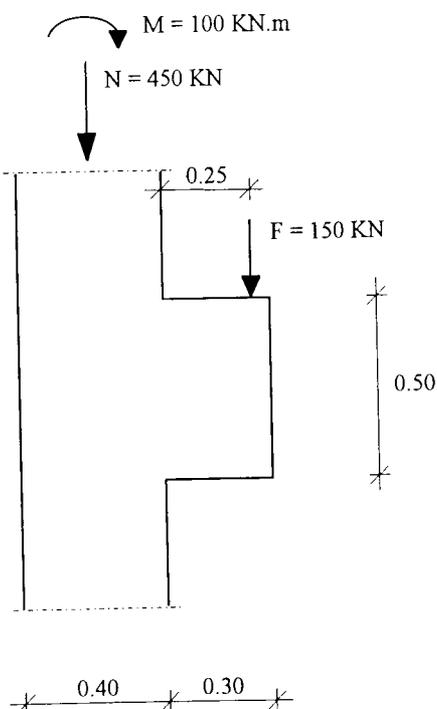


Fig. 6.6 - Consola curta

A consola é solicitada por uma força vertical concentrada e o pilar está submetido a um esforço axial e a um momento flector para além da acção transmitida pela consola. Os valores de cálculo da solicitação são indicados na figura anterior.

Os materiais usados são,

. Betão B25	$f_{cd} = 13.3 \text{ Mpa}$
. Aço A400	$f_{syd} = 348 \text{ Mpa}$

6.2.2 - Análise da estrutura

Para se efectuar o estudo desta estrutura segundo a formulação apresentada foi necessário substituir a solicitação do pilar (esforço axial e momento flector) por uma solicitação equivalente constituída por forças concentradas aplicadas aos nós do modelo articulado.

A estrutura foi discretizada do modo apresentado na figura 6.7. Como no exemplo anterior admitiu-se que todas as barras podem funcionar quer como escoras quer como tirantes para não limitar a procura da solução mais económica.

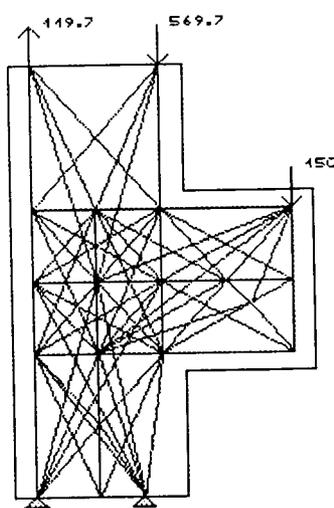


Fig. 6.7 - Consola curta. Modelo inicial

No primeiro estudo realizado foram apenas limitados os valores das reacções de apoio.

O modelo escora-tirante obtido apresenta-se na figura 6.8. Nesta figura são ainda indicados os esforços nas barras e é feita a verificação das tensões.

Como se pode ver na figura a solução obtida não é exequível. Os problemas ocorrem essencialmente na zona de encastramento da consola, em particular na zona superior onde a ancoragem do tirante inclinado que aí se realiza faz com que o campo de tensões em torno do nó não se encontre dentro dos limites da estrutura.

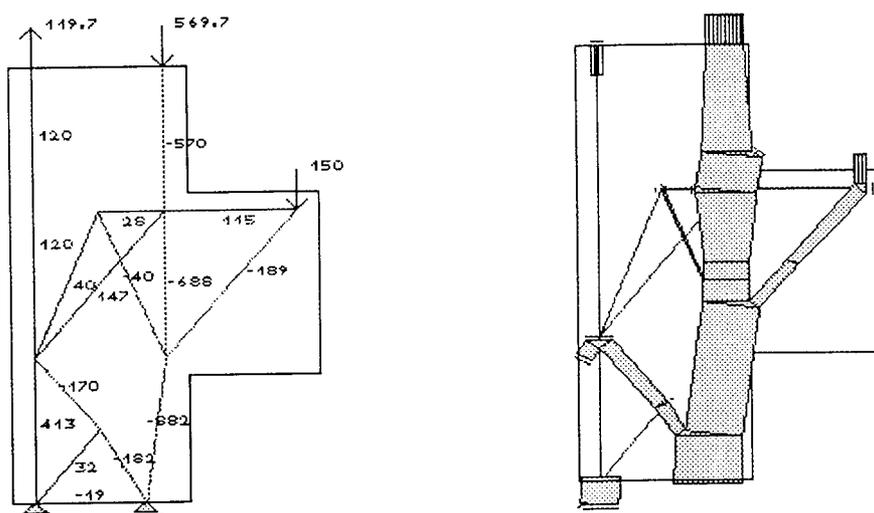


Fig. 6.8 - Exemplo 2.1. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

A imposição de limites máximos ao valor do esforço no referido tirante não conduziu a resultados satisfatórios.

Optou-se finalmente por impedir a realização desse tirante e obteve-se o modelo escora-tirante da figura 6.9. Na mesma figura é feita a análise dos campos de tensões. Como se pode verificar a solução obtida é estável. Os campos de tensões estão contidos no interior do contorno da estrutura e não se verificam sobreposições dos mesmos.

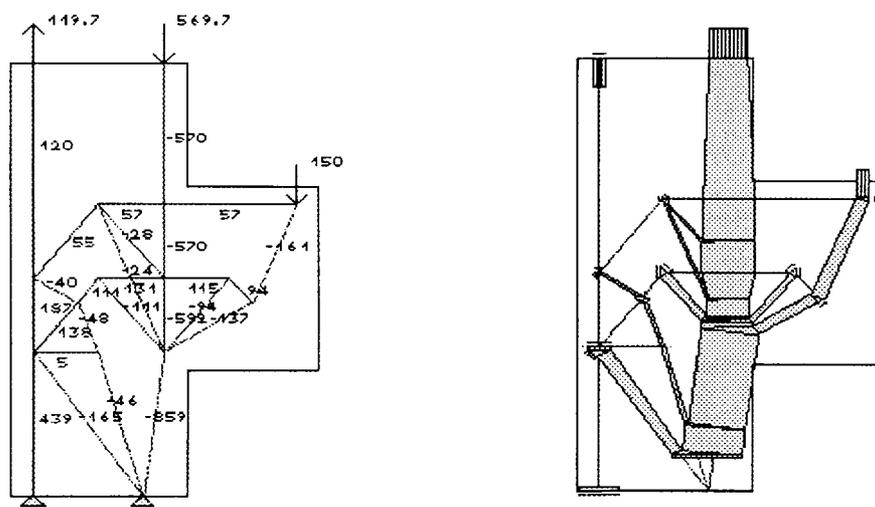


Fig. 6.9 - Exemplo 2.2. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

Apesar da imposição referida o aumento do “custo” do primeiro para o segundo modelo não é de considerar, não atingindo 1%.

No estudo seguinte foram retirados ao modelo inicial (fig. 6.7) os tirantes inclinados. Deste modo são obtidas soluções em que a armadura é colocada apenas segundo as direcções vertical e horizontal, o que pode ser vantajoso sob o ponto de vista construtivo.

O modelo escora-tirante obtido (fig. 6.10) é um modelo muito simples. Este modelo é em tudo semelhante aos propostos pela generalidade da regulamentação, nomeadamente o REBAP [3] e o Eurocódigo 2 [2], para o dimensionamento deste tipo de estruturas.

No entanto a solução não é estável. O campo de tensões em torno do nó inferior da zona de encastramento da consola intersecta de forma significativa o contorno da estrutura. O problema surge essencialmente devido ao facto da resistência efectiva do nó vir diminuída em consequência da ancoragem do tirante horizontal nessa zona.

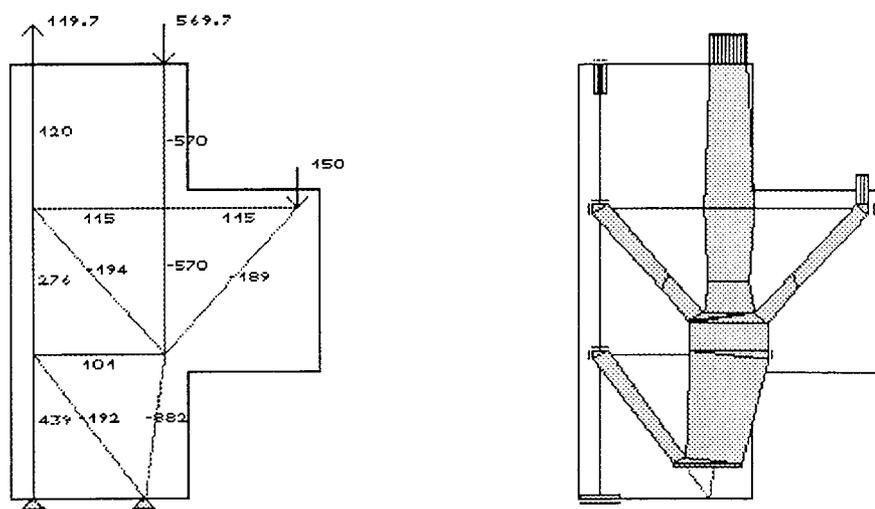


Fig. 6.10 - Exemplo 2.3. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

Um modo de resolver este problema seria desenvolver um novo modelo inicial em que os eixos das barras estivessem mais afastados do contorno da estrutura. Esta solução provoca um aumento considerável do custo em armadura.

Outro modo, será actuar de forma a que a resistência efectiva do betão na zona do nó em causa seja superior. Para isso retiraram-se do modelo inicial os tirantes que aí convergem.

Procedeu-se então à optimização da estrutura e obteve-se o modelo que se apresenta na figura seguinte. É um modelo ligeiramente mais elaborado apresentando no entanto as mesmas características do anterior. Neste modelo obteve-se uma distribuição de tensões que permite a realização desta solução.

Mais uma vez o aumento do “custo” desta solução relativamente à anterior não é de considerar. Por outro lado, quando se comparam os dois últimos modelos estudados (apenas armadura vertical e horizontal) com os dois primeiros verifica-se um aumento do “custo” de aproximadamente 10%.

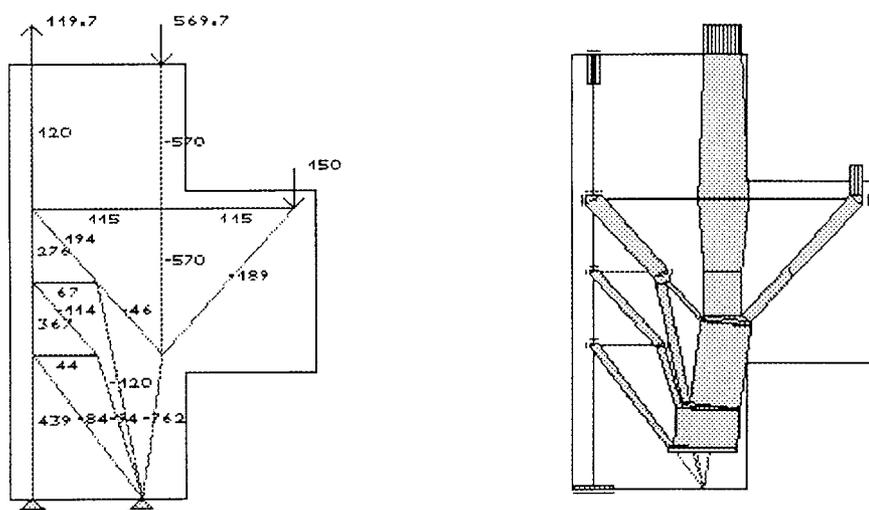


Fig. 6.11 - Exemplo 1.4. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

6.3 - Exemplo 3 - Parede em consola

6.3.1 - Dados gerais. Geometria, materiais e solicitação

A parede a analisar é constituída por duas zonas de espessuras diferentes. Na superior, de menor espessura, existe uma abertura de dimensões apreciáveis condicionando o funcionamento da estrutura (fig. 6.12).

A parede é solicitada no topo superior por uma força horizontal de 300 kN (valor de cálculo), originando um funcionamento em consola.

Os materiais que constituem a estrutura são,

. Betão B30 $f_{cd} = 16.7 \text{ Mpa}$

Aço A400 $f_{syd} = 348 \text{ Mpa}$

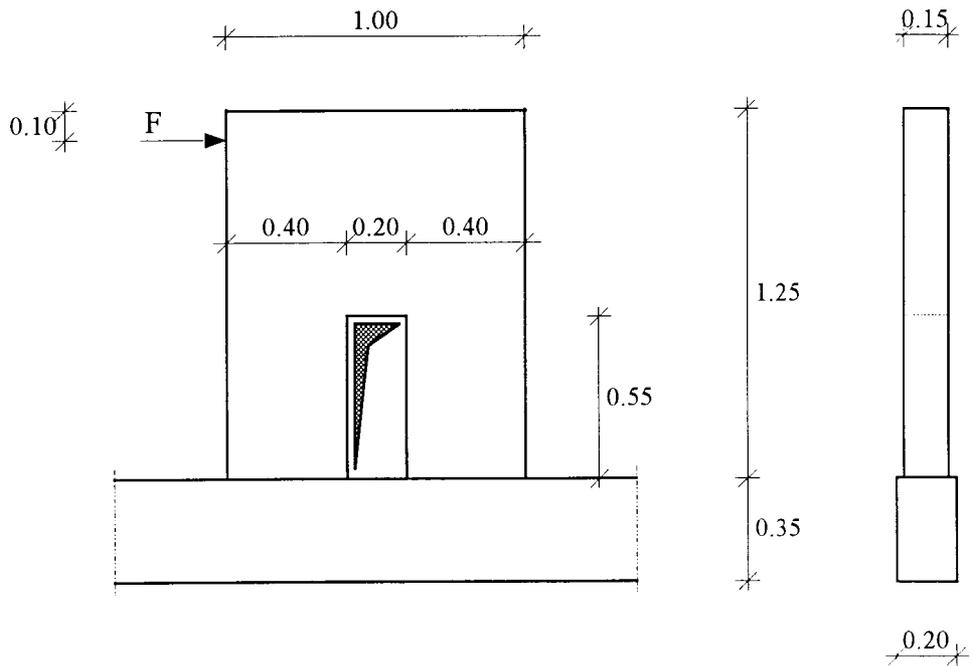


Fig. 6.12 - Parede em consola

6.3.2 - Análise da estrutura

Para discretizar a estrutura foi inicialmente usado o modelo da figura 6.13.

Considerou-se que todas as barras podem funcionar à compressão ou à tracção, podendo assim existir armadura nas direcções horizontal, vertical e inclinada a 45° .

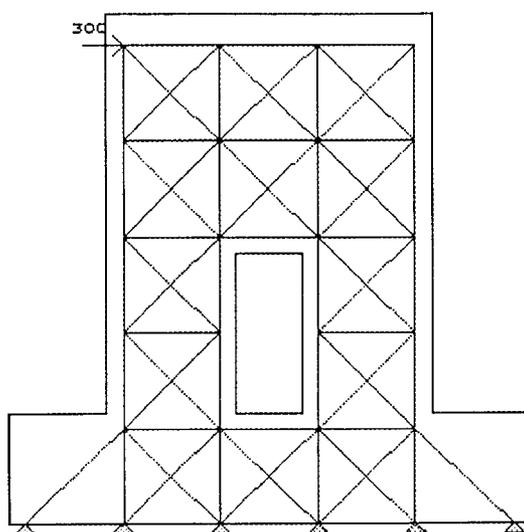


Fig. 6.13 - Parede em consola. Modelo inicial 1

No primeiro estudo realizado foram limitados os esforços nas escoras adjacentes ao contorno da parede.

Com exceção das escoras horizontais junto ao topo da parede, todas as outras estão afastadas 5 cm das faces da parede não podendo deste modo ter uma largura superior a 10 cm. Uma vez conhecida a secção máxima, A_c , mobilizável para cada elemento e a tensão de cálculo à rotura do betão, f_{cd} , o esforço limite admitido é,

$$N_{lim} = A_c \times f_{cd} = 0.10 \times 0.15 \times 16700 = 250.5 \text{ KN}$$

Para as escoras horizontais que distam 10 cm do topo da parede temos,

$$N_{lim} = 0.20 \times 0.15 \times 16700 = 501 \text{ KN}$$

Depois de obtido o modelo final e após a verificação das tensões (fig. 6.14) concluiu-se que, apesar das limitações impostas o modelo não é realizável, havendo campos de tensões que não estão dentro dos limites da estrutura como se pode ver na figura.

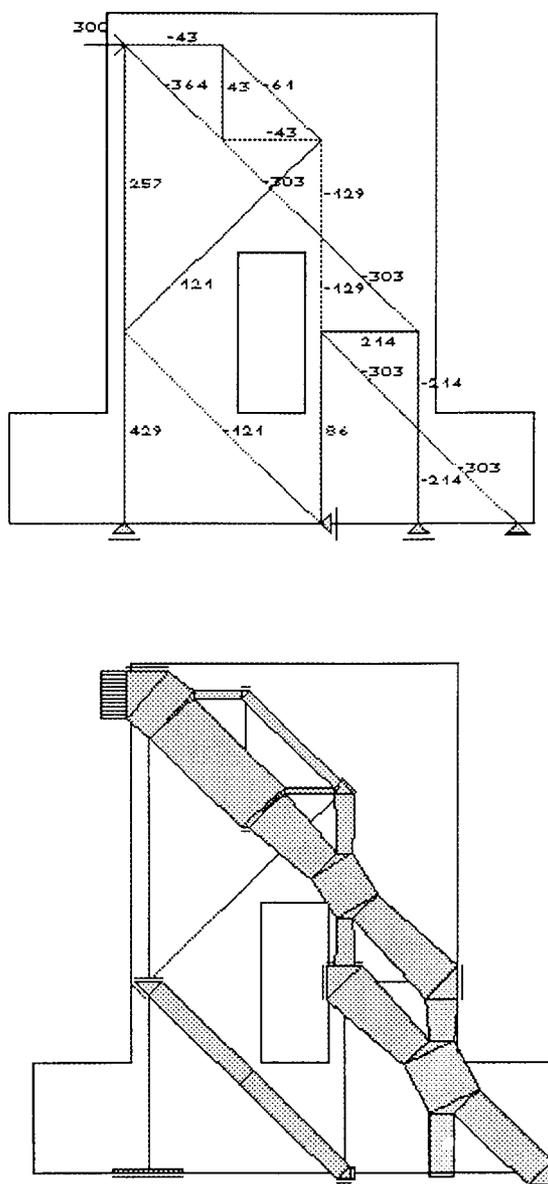


Fig. 6.14 - Exemplo 3.1. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

No estudo seguinte, para permitir a procura de novos modelos, juntaram-se ao modelo inicial as escoras que se podem ver na figura 6.15. Todas as outras condições foram mantidas, nomeadamente as relativas à colocação da armadura (horizontal, vertical e inclinada a 45°) e aos limites dos esforços nas escoras.

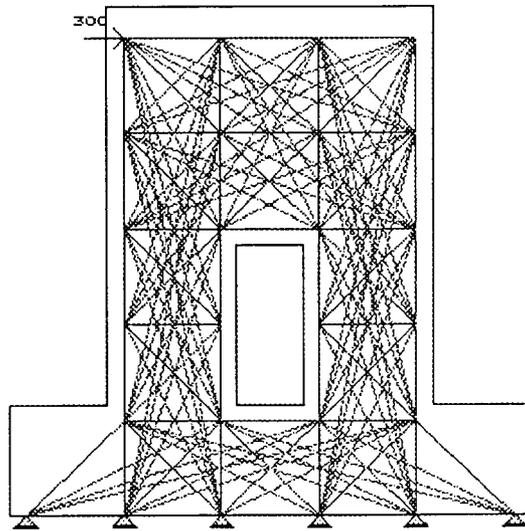


Fig. 6.15 - Parede em consola. Modelo inicial 2

Após a otimização da estrutura o modelo obtido apresenta-se na figura 6.16. É um modelo mais simples e que conduziu a um “custo” inferior. O funcionamento é análogo ao anterior, isto é, continua a existir um tirante principal vertical junto à face esquerda da parede, havendo uma transmissão das cargas por intermédio das escoras para os apoios do lado direito da estrutura.

Apesar dos novos elementos, mais uma vez os campos de tensões intersectam os limites da parede. Os problemas surgem nos nós ao longo do tirante principal, nomeadamente na zona de aplicação da força, e eventualmente na escora tangente à abertura na parede.

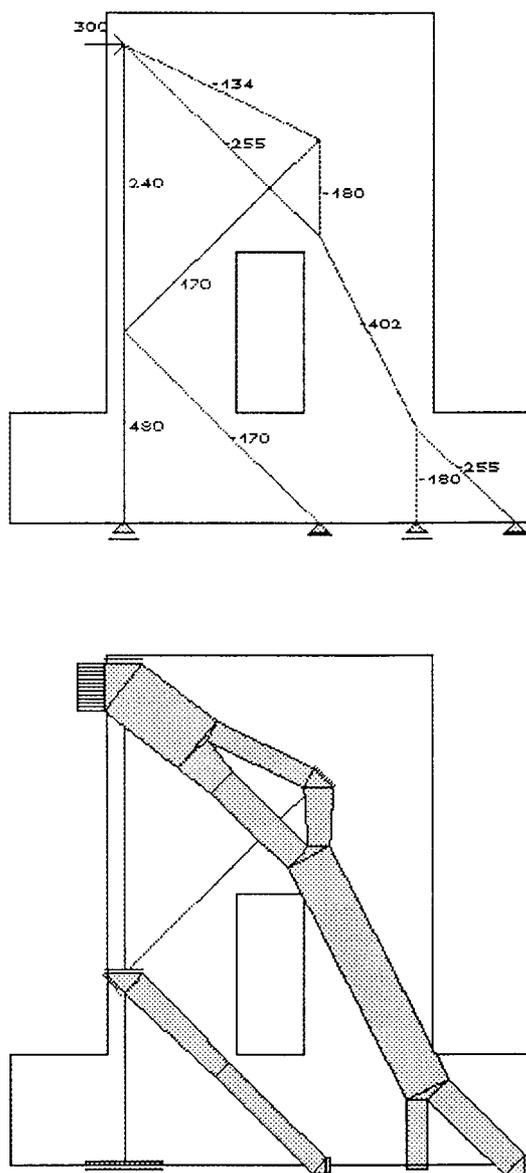


Fig. 6.16 - Exemplo 3.2. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

Para se obter uma solução estável deve-se então actuar nas zonas atrás referidas. Para isso vão-se limitar os esforços nas barras em questão.

O esforço na escora junto à abertura foi limitado a 410 KN, valor que permite que esta seja realizada no interior da estrutura.

Também no tirante principal foram limitados os esforços máximos. Na zona inferior (até ao primeiro nó da fig. 6.16) foi imposto um esforço limite de 437.5 KN correspondente a cerca de $4\phi 20$. Esta armadura não deverá ser ultrapassada para que se possam verificar as disposições regulamentares relativas a recobrimentos mínimos e a espaçamentos mínimos entre armaduras.

No tirante superior entendeu-se que o valor máximo do respectivo esforço deveria ser inferior aos 437.5 KN para que o campo de tensões no nó onde está aplicada a carga pudesse ser realizável dentro dos limites da estrutura. Assim, atendendo à resistência efectiva do betão que nessa zona é de $f_{cd}^* = 0.8f_{cd}$, e à largura disponível chegou-se a um valor do esforço máximo para esse tirante de 200 KN.

Procedeu-se então à optimização da estrutura e obteve-se o modelo que se apresenta na figura seguinte (fig. 6.17). É um modelo mais elaborado, apresentando no entanto as mesmas características dos anteriores. De salientar que o “custo” da solução sofreu um aumento relativamente ao anterior de apenas 2%, que se pode considerar sem significado.

Neste modelo obteve-se uma distribuição de tensões que permite a realização desta solução.

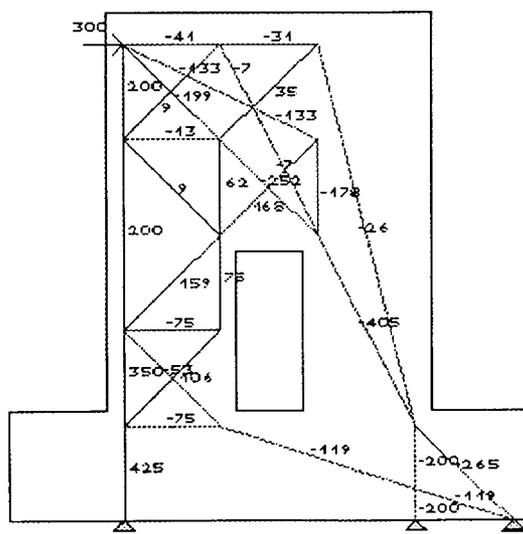


Fig. 6.17a) - Exemplo 3.3. Modelo final - Esforços nas barras

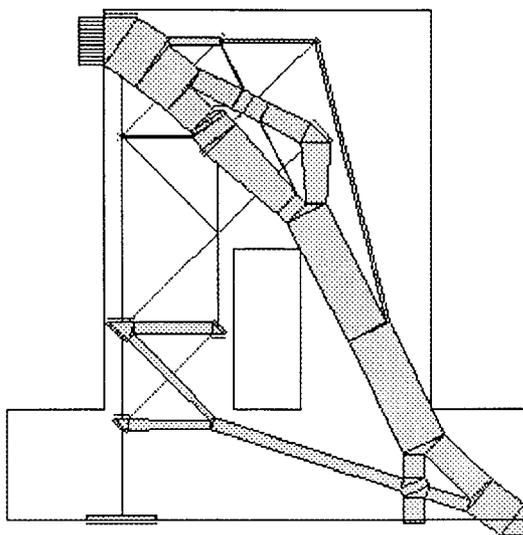


Fig. 6.17b) - Exemplo 3.3. Modelo final - Verificação das tensões

Na resolução deste problema poder-se-ia ter actuado doutras formas como, por exemplo, proceder ao desenvolvimento de um outro modelo inicial em que os eixos das barras estivessem mais afastados do contorno da estrutura.

6.4 - Exemplo 4 - Viga-parede contínua com abertura

6.4.1 - Dados gerais. Geometria, materiais e solicitação

Neste exemplo estuda-se uma viga-parede contínua simétrica dotada de uma abertura de dimensões médias (fig. 6.18).

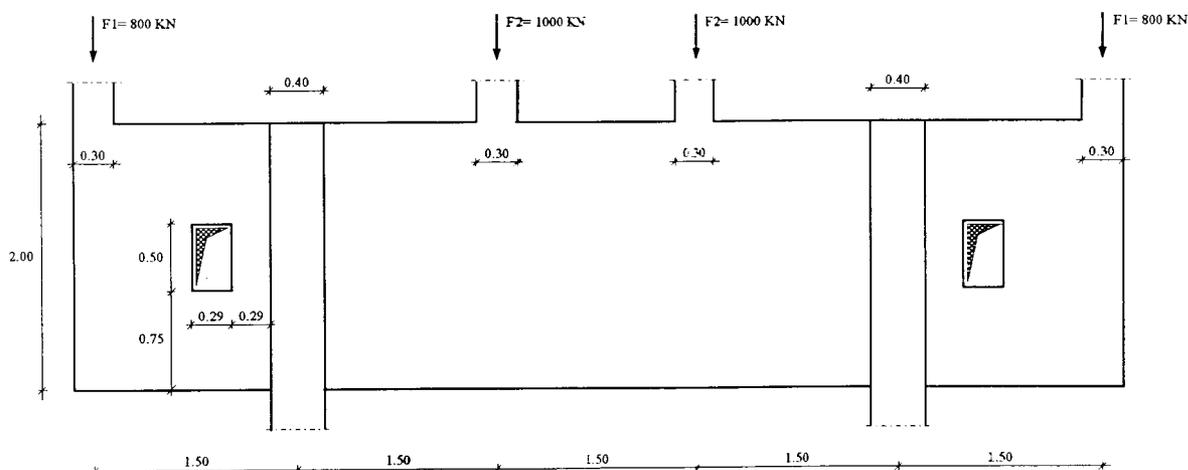


Fig. 6.18 - Viga-parede contínua

A viga, com espessura de 0.25 m, apresenta um vão intermédio em continuidade e dois vãos extremos em consola, nos quais existe uma abertura que condiciona o funcionamento da estrutura.

É solicitada por forças verticais concentradas transmitidas por quatro pilares de $0.30 \times 0.25 \text{ m}^2$ de secção. Os pilares extremos transmitem uma força $F1_{sd} = 800 \text{ kN}$ e os intermédios uma força $F2_{sd} = 1000 \text{ kN}$. A viga está apoiada em dois pilares de $0.40 \times 0.40 \text{ m}^2$, secção esta que se mantém em toda a sua altura.

Os materiais que constituem a estrutura apresentam as seguintes características,

- . Betão B25 $f_{cd} = 13.3 \text{ Mpa}$
- . Aço A400 $f_{syd} = 348 \text{ Mpa}$

6.4.2 - Análise da estrutura

Tendo em conta a simetria do problema só se analisou metade da estrutura. Para tal, foram colocados apoios simples ao longo da altura da viga na sua secção de simetria.

Para discretizar a estrutura foi inicialmente usado o modelo da figura 6.19. Na construção deste modelo, e tal como no exemplos anteriores, houve o cuidado de colocar os eixos das barras afastados do contorno da parede. Considerou-se que todas as barras podem funcionar à compressão ou à tracção.

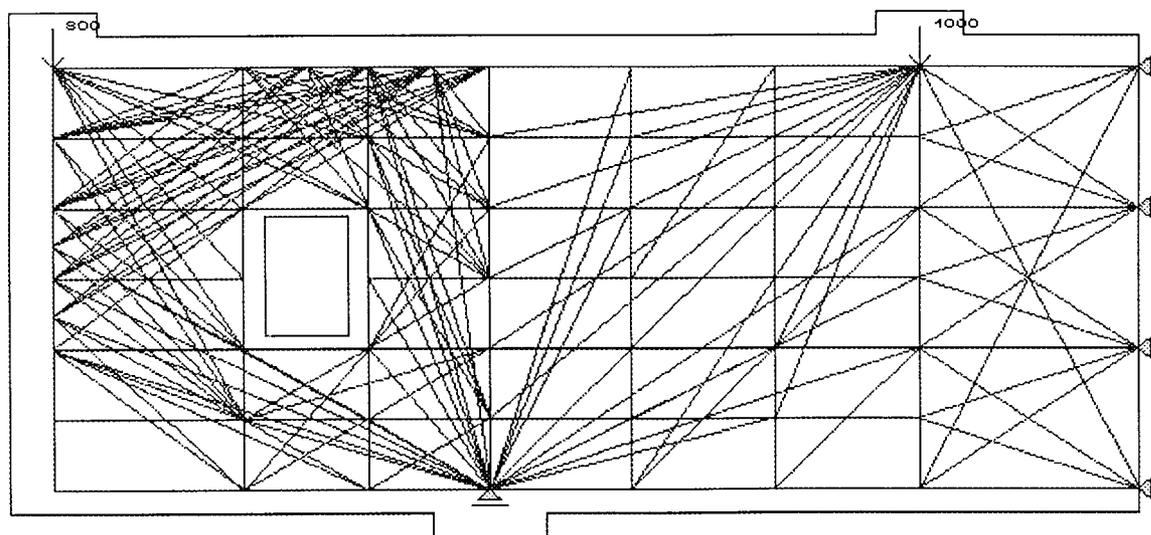


Fig. 6.19 - Viga-parede contínua. Modelo inicial

Neste estudo procedeu-se à limitação dos esforços nas escoras adjacentes ao contorno da viga. Conhecida a secção máxima de betão, A_c , mobilizável para cada escora e a tensão de cálculo à rotura do betão à compressão, f_{cd} , tem-se o esforço limite admitido. Por exemplo, para as escoras verticais adjacentes à abertura,

$$N_{lim} = A_c \times f_{cd} = 0.14 \times 0.25 \times 13300 = 465.5 \text{ KN}$$

Uma vez obtido o modelo final, quando se procede à construção dos campos de tensões (fig. 6.20) verifica-se que, apesar das limitações impostas o modelo não é realizável, havendo campos de tensões que não estão dentro dos limites da estrutura. Surgem intersecções na zona de aplicação da força F2 e junto à abertura.

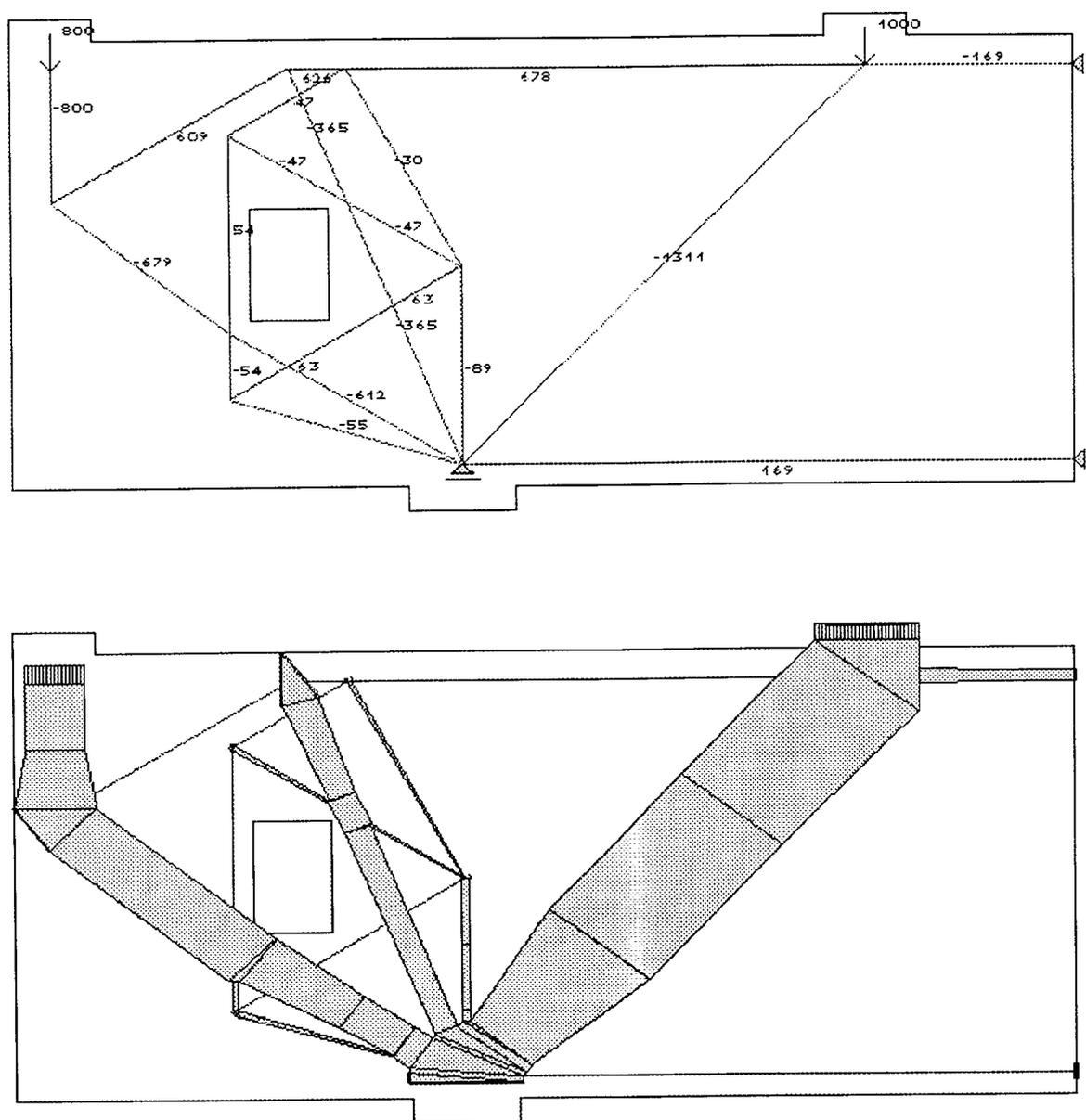


Fig. 6.20 - Exemplo 4.1. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

Para se tentar obter uma solução estável foi aumentado o recobrimento das barras paralelas ao topo da viga. Simultaneamente houve uma alteração da coordenada vertical do nó junto ao canto inferior da abertura.

Após a otimização da estrutura o modelo obtido apresenta-se na figura 6.21. É um modelo mais simples do que o anterior em que o aumento do “custo” é pouco significativo. O funcionamento é análogo ao anterior, continuando a existir os principais tirantes e escoras nas mesmas posições.

Após a verificação das tensões (fig. 6.22) concluiu-se que o modelo é exequível.

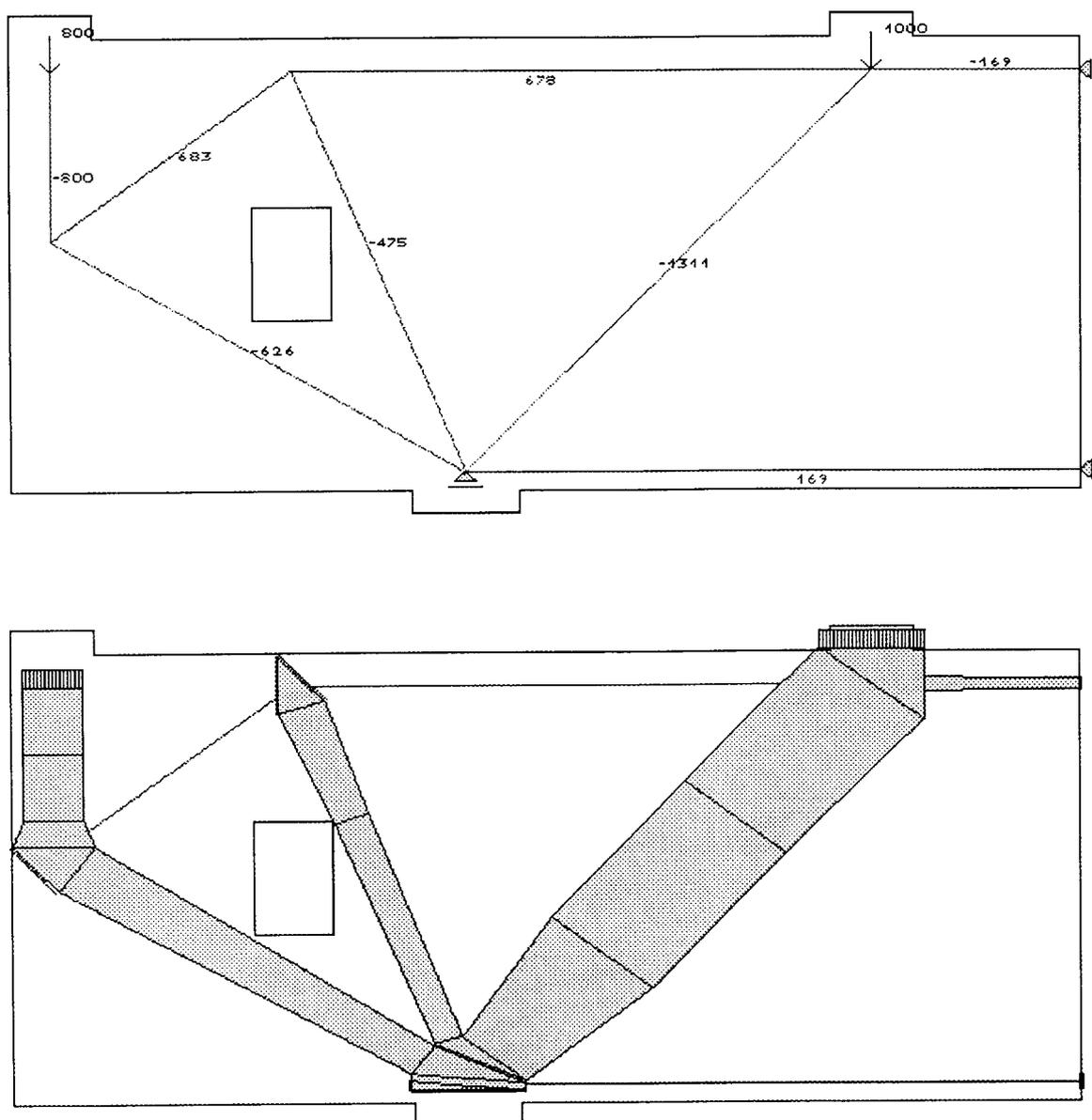


Fig. 6.21 - Exemplo 4.2. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

6.5 - Exemplo 5 - Viga simplesmente apoiada. Zona do apoio

6.5.1 - Dados gerais do problema

No presente exemplo pretende-se estudar a zona do apoio de uma viga simplesmente apoiada. Para isso vai-se considerar apenas um troço de viga junto ao apoio. O comprimento do troço deverá ser suficientemente longo para que a perturbação introduzida pelo corte na viga não se faça sentir na zona do apoio.

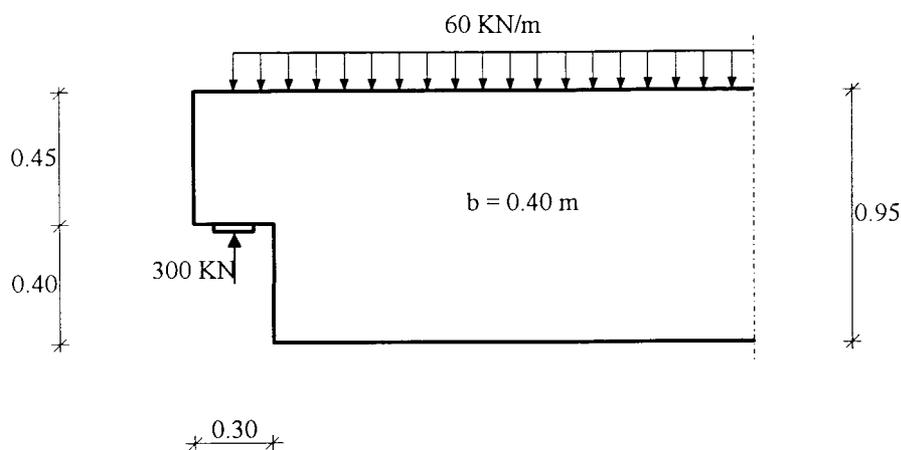


Fig. 6.22 - Viga simplesmente apoiada

A viga é solicitada por uma carga distribuída de 60 kN/m e apresenta um vão total de 10 m .

Os materiais usados na estrutura são o betão B25 com $f_{cd} = 13.3 \text{ Mpa}$ e o aço A400 com $f_{syd} = 348 \text{ Mpa}$.

6.5.1 - Análise da estrutura

A carga distribuída de 60 KN/m foi substituída por um conjunto de cargas concentradas equivalentes aplicadas aos nós da estrutura.

Na secção de interrupção da viga foram colocados apoios duplos. Em vez da colocação de apoios, podiam-se ter aplicado os esforços seccionais na fronteira do elemento em estudo. Estes esforços são facilmente quantificados dado que a estrutura é isostática.

Para efectuar a optimização da armadura na estrutura foi construído o seguinte modelo inicial.

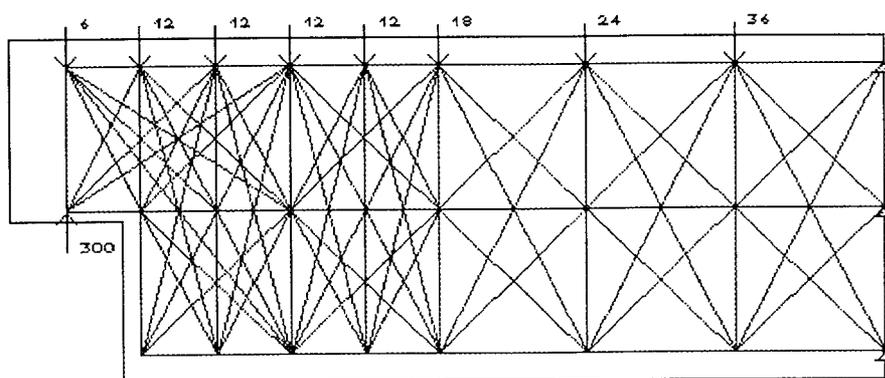


Fig. 6.23 - Viga simplesmente apoiada. Modelo inicial

No primeiro estudo realizado permitiu-se que os tirantes tivessem qualquer inclinação.

Como se pode ver na figura seguinte, a solução óptima obtida apresenta estribos inclinados a 45° . Por sua vez, as escoras apresentam inclinação variável verificando-se ainda que as cargas aplicadas próximo do apoio são transferidas directamente para este por intermédio de escoras.

Na mesma figura apresenta-se ainda o resultado da verificação das tensões.

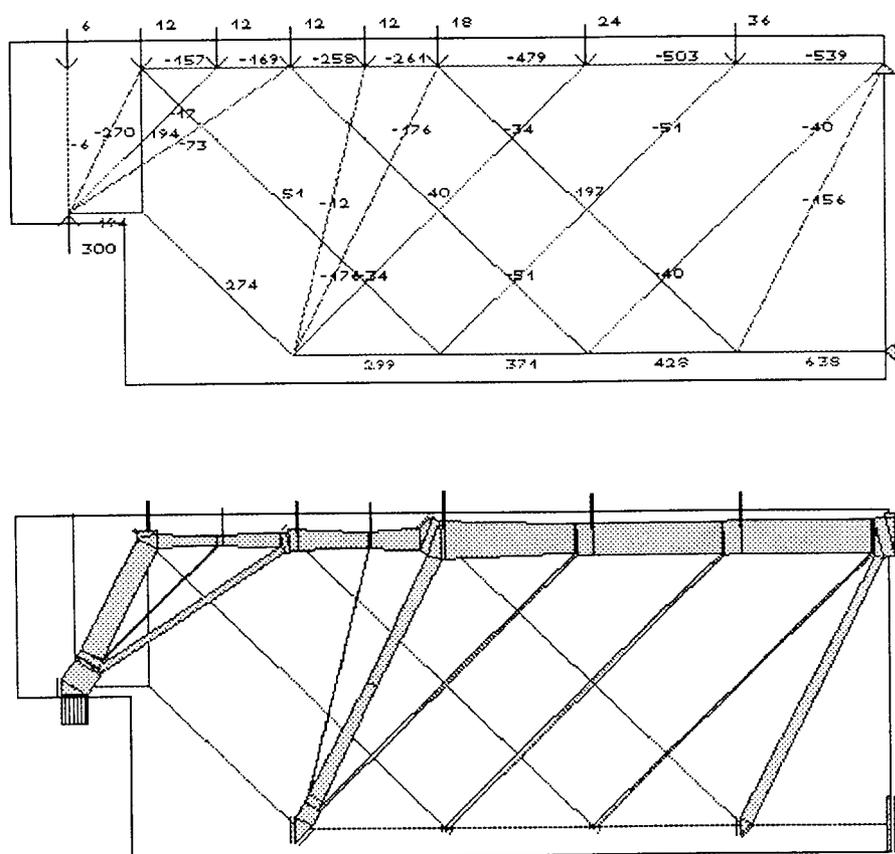


Fig. 6.24 - Exemplo 5.1. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

Em seguida optimizou-se o mesmo modelo inicial, impedindo no entanto a realização de tirantes inclinados.

O modelo escora-tirante óptimo bem como o respectivo campo de tensões encontram-se representados na figura seguinte.

De salientar que houve um aumento de custo relativamente ao primeiro modelo de cerca de 17.5%.

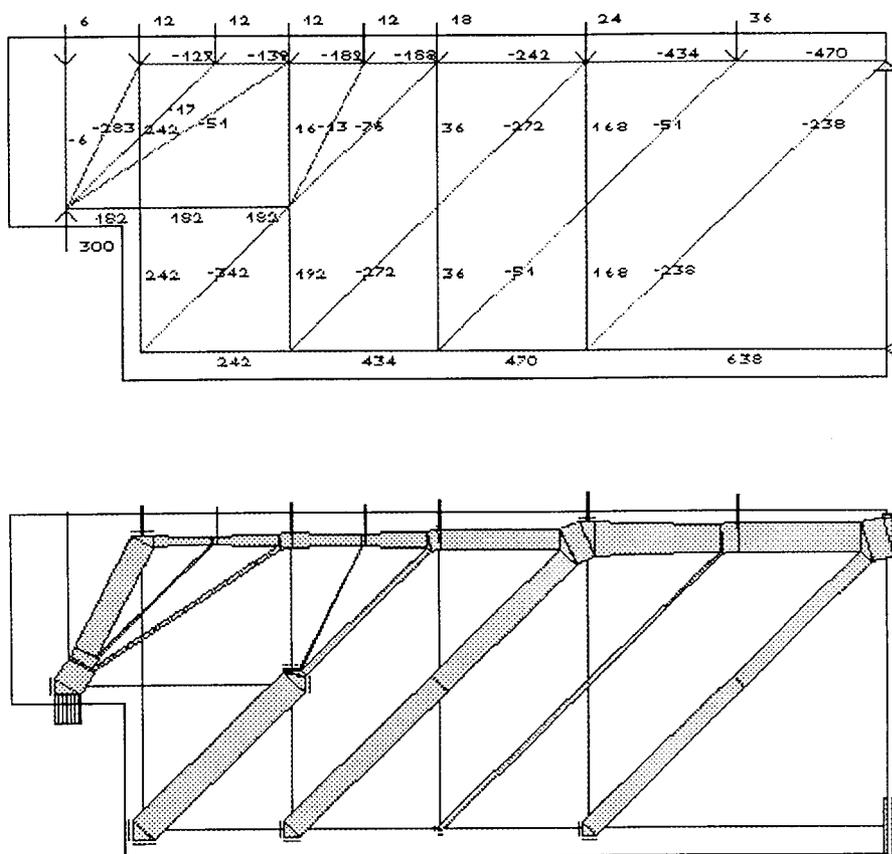


Fig. 6.25 - Exemplo 5.2. Modelo final - Esforços nas barras e Verificação das tensões

O estudo realizado permite concluir que o dimensionamento das estruturas utilizando a formulação exposta nos conduz a um processo iterativo, em que os modelos escoras-tirantes devem ir sendo ajustados às soluções obtidas até se chegar a um modelo final estável e exequível.

Referências

- [1] Comité Euro-International du Béton (1993) - CEB-FIP Model Code 1990, Design Code, Thomas Telford Ltd., London

- [2] Comité Européen de Normalisation (1991) - Eurocódigo 2: Projecto de Estruturas de Betão - Parte 1: Regras Gerais e Regras para Edifícios (Versão portuguesa)

- [3] Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1983), Decreto-Lei nº 349-C/83, Imprensa Nacional Casa da Moeda, Lisboa

- [4] Schlaich, J. et al. (1987) - Toward a Consistente Design of Structural Concrete, PCI Journal, Vol. 32(3), pp. 74-150

Capítulo 7

Considerações Finais

7.1 - Introdução

O modelo escora-tirante constitui uma ferramenta de análise e dimensionamento de meios irregulares planos de betão armado que se revela útil e de fácil utilização tendo em vista a verificação dos estados limites últimos de resistência.

Vários autores têm-se dedicado ao desenvolvimento destas técnicas e a regulamentação estrutural tem consagrado esta via como o compromisso possível entre a segurança dos resultados a obter e a necessidade de um modelo simples.

O presente trabalho constitui a contribuição do autor para esse desenvolvimento, considerando que a preparação de códigos de cálculo automático simples e versáteis poderá constituir não só a ferramenta para o tratamento daqueles problemas como também uma via para a divulgação da técnica e incentivo a novos investigadores para o estudo desta área.

Relativamente aos objectivos propostos no capítulo 1 considera o autor terem sido atingidos no essencial.

7.2 - Futuros desenvolvimentos

O modelo escora-tirante tal como tem sido desenvolvido e apresentado nesta tese e nos trabalhos de outros autores, limitam-se à criação de malhas articuladas possíveis, para as quais são fixados as coordenadas dos nós de malha.

Esta via tem a vantagem de conduzir a um reduzido número de incógnitas e a um programa linear. No entanto, se as coordenadas dos nós são também tomadas como variáveis do problema, o modelo adquire muito maior generalidade. Assim propõe-se,

1. Desenvolvimento de um modelo escora-tirante para o qual as coordenadas dos nós constituem variáveis do problema, gerando assim um programa matemático mais complexo cuja a resolução implica o recurso à programação não linear.

O modelo escora-tirante visa directa ou indirectamente a verificação dos estados limites últimos de resistência. No entanto a regulamentação da segurança estrutural obriga ainda à verificação dos estados limites de utilização. Propõe-se então,

2. Desenvolvimento de um modelo que englobe não só estado limite último de resistência, como também estados limites de utilização como sejam, por exemplo, o controle de deformações e tensões instaladas.

A análise de meios tridimensionais de betão armado constitui um problema ainda mais complexo que a análise de meios bidimensionais. É de esperar portanto que o modelo escora-tirante possa aí, revelar-se uma boa alternativa como método de análise e dimensionamento das armaduras. Assim, propõe-se ainda,

3. Generalização do modelo escora-tirante a meios tridimensionais com aplicação na área da análise e dimensionamento.



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



000006012

