

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS  
PORTICADAS PLANAS DE BETÃO

Paulo Jorge de Sousa Cruz



1991



FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

# ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS PORTICADAS PLANAS DE BETÃO

Paulo Jorge de Sousa Cruz

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil

621.049.3 / CAUP / ANA  
UNIVERSIDADE DO PORTO  
Faculdade de Engenharia  
BIBLIOTECA 1  
N.º 18970-04  
CDU  
Data 3 / 6 / 1991  
U.N. 5958

Orientador científico:

Professor Joaquim Azevedo Figueiras

PORTO  
Março  
1991

043 M  
C 962 a

”Tudo começou como começam as coisas que são desconhecidas, mas que são sentidas como se já se soubesse tudo, com a consciência que não se sabe nada, e as certezas ficam para uma dia mais tarde, quando já não forem precisas para nada.”

Eugénia M. Castro

Aos meus pais,

## AGRADECIMENTOS

Desejo manifestar o mais profundo agradecimento, a todos os

- Professores que com seus ensinamentos,
- Colegas com suas opiniões,
- Amigos com a sua presença,
- Familiares com muito carinho,

tornaram possível este trabalho.

Pretendo contudo salientar:

- A amizade, a disponibilidade e a forma dedicada como o Professor Joaquim Figueiras acompanhou, encorajou e orientou este trabalho.
- A compreensão e apoio do Professor Barreiros Martins e os incentivos de todos os colegas do Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Minho.
- Os esclarecimentos informáticos prestados pelos Engenheiros Álvaro Azevedo e Ricardo Santos, bem como a possibilidade de utilização do software gráfico por eles desenvolvido.
- As ideias, sempre oportunas do Engenheiro Rui Póvoas.
- A camaradagem dos Engenheiros António Abel e Joaquim Barros.
- A disponibilidade do Professor Couto Marques e do Engenheiro António Arede.
- A forma rápida e empenhada como o Sr. Domingos Barros processou este texto.
- A competência e simpatia do Sr. Minas da Reprografia da Universidade do Minho.

## RESUMO

No presente trabalho desenvolve-se uma técnica de análise não linear, material e geométrica, aplicada a estruturas porticadas planas de betão armado.

O modelo baseia-se no Método dos Elementos Finitos, utilizando elementos de dois nós de formulação hermitiana e elementos de três nós de formulação lagrangeana; recorrendo a uma técnica incremental e iterativa, com solução das equações de equilíbrio e satisfação simultânea das condições de compatibilidade.

Na análise não linear material a relação incremental entre esforços instalados e deformações da secção (matriz de elasticidade), é avaliada directamente para qualquer combinação de momento flector e esforço axial.

Para o betão em compressão é considerada uma lei elasto-plástica, e em tracção após fendilhação, é considerado um diagrama de retenção das tensões de tracção. Para o aço é considerado um diagrama trilinear. Tanto para o aço como para o betão são simuladas as descargas e recargas, nas relações constitutivas.

Para a análise não linear geométrica é utilizada uma formulação lagrangeana total, podendo efectuar em cada incremento uma previsão da carga crítica da estrutura, através da resolução, por um método iterativo, de um problema de valores e vectores próprios.

É ainda prevista a análise da construção de uma estrutura por fases e a avaliação da influência da rigidez do solo de fundação.

Com estes procedimentos foi desenvolvido um programa de cálculo automático designado por FEMPOR, vocacionado para o dimensionamento e a verificação da segurança aos estados limites últimos de resistência (cuja ocorrência provocaria sérios prejuízos) e em relação aos estados limites de utilização (cuja ocorrência poderia comprometer a qualidade de funcionamento, durabilidade e aparência) de estruturas porticadas planas de betão e que será descrito neste trabalho.

São apresentados e analisados os resultados da aplicação desta técnica em várias etapas do seu desenvolvimento.

## ABSTRACT

This work presents a finite element model for the materially and geometrically nonlinear analysis of plane reinforced concrete frames.

Two-node Hermitian and three-node Lagrangian elements are used and an incremental-iterative technique is adopted (to satisfy equilibrium and compatibility).

Regarding material nonlinearity the incremental relation between stress resultants and strains is directly computed for any combination of bending moment and axial force values. An elastoplastic law is considered for concrete in compression; tension stiffening effects after tensile cracking are accounted for. A trilinear diagram is adopted for the steel. Unloading and reloading of both concrete and steel are simulated.

A total Lagrangian formulation is utilized for geometrical nonlinear modelling. The critical load may be calculated within each load increment by iterative eigenvalue analysis.

Additional capabilities are the modelling of the construction sequence and the influence of foundation deformability.

FEMPOR, a code incorporating all the above features, is described in detail, as well as the results obtained in a number of selected applications.

# ÍNDICE

<b>1 – INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 – Generalidades e objectivos .....	1
1.2 – Descrição sucinta do trabalho desenvolvido .....	2
<b>2 – ANÁLISE ELÁSTICA LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS</b> .....	4
2.1 – Introdução .....	4
2.2 – Formulação dos elementos finitos de barra e de viga .....	5
2.2.1 – Elemento de barra de dois nós .....	5
2.2.1.1 – Aproximação do campo de deslocamentos .....	5
2.2.1.2 – Relações geométricas .....	7
2.2.1.3 – Relações constitutivas .....	8
2.2.1.4 – Equações regentes do fenómeno .....	9
2.2.2 – Elemento de barra isoparamétrico de dois nós .....	12
2.2.3 – Elemento de viga isoparamétrico de dois nós de Hermite .....	15
2.2.3.1 – Introdução .....	15
2.2.3.2 – Aproximação do campo de deslocamentos .....	15
2.2.3.3 – Relações geométricas .....	18
2.2.3.4 – Relações constitutivas .....	19
2.2.3.5 – Matriz de rigidez .....	20
2.2.3.6 – Vector solicitação .....	21
2.2.4 – Elemento de barra isoparamétrico de três nós .....	23
2.2.4.1 – Introdução .....	23



2.2.4.2 – Aproximação do campo de deslocamentos .....	23
2.2.4.3 – Relações geométricas .....	24
2.2.5 – Elemento de viga isoparamétrico de três nós de Timoshenko .....	26
2.2.5.1 – Introdução .....	26
2.2.5.2 – Aproximação do campo de deslocamentos .....	27
2.2.5.3 – Relações geométricas .....	28
2.2.5.4 – Relações constitutivas .....	28
2.2.5.5 – Matriz de rigidez .....	29
2.2.5.6 – Vector solicitação .....	29
2.4 – Descrição dos elementos finitos utilizados .....	32
2.4.1 – Elemento isoparamétrico de dois nós .....	32
2.4.2 – Elemento isoparamétrico de três nós .....	34
2.5 – Integração numérica .....	35
2.5.1 – Introdução .....	35
2.5.2 – Regra de integração de Gauss – Legendre .....	36
2.5.3 – Regra de integração de Gauss – Lobatto .....	38
2.6 – Implementação num programa de cálculo automático de pórticos planos ....	39
2.7 – Exemplos .....	43
2.8 – Conclusões .....	50
2.9 – Bibliografia .....	51

<b>3 – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA</b> .....	53
3.1 – Introdução .....	53
3.2 – Métodos de solução numérica de problemas não lineares .....	53
3.2.1 – Método de Newton – Raphson .....	56
3.2.2 – Método de Newton – Raphson modificado .....	58
3.2.3 – Método da rigidez inicial .....	59
3.3 – Critérios de convergência .....	59
3.4 – Formulação adoptada na análise não linear geométrica .....	61
3.4.1 – Introdução .....	61
3.4.2 – Vector deformação .....	63
3.4.2.1 – Elemento isoparamétrico de dois nós .....	64
3.4.2.2 – Elemento isoparamétrico de três nós .....	65
3.4.3 – Matriz de deformação .....	66
3.4.4 – Matriz de rigidez .....	67
3.4.5 – Forças nodais equivalentes ao estado de tensão .....	71
3.5 – Instabilidade – previsão das cargas críticas .....	71
3.6 – Exemplos .....	81
3.6.1 – Pórtico de três barras .....	81
3.6.2 – Pilares de betão armado submetidos à flexão composta .....	85
3.7 – Conclusões .....	88
3.8 – Bibliografia .....	89

<b>4 – ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL</b> .....	91
4.1 – Introdução .....	91
4.2 – Análise não linear material de vigas submetidas à flexão simples .....	92
4.2.1 – Introdução .....	92
4.2.2 – Relações constitutivas .....	92
4.2.3 – Curvas momento – curvatura .....	100
4.2.3.1 – Fase I .....	102
4.2.3.2 – Fase II .....	103
4.2.3.3 – Fase III .....	104
4.2.4 – Implementação desta técnica no programa de cálculo automático ...	104
4.2.5 – Desenvolvimentos necessários para a adaptação do método à análise não linear de pórticos ou vigas submetidas à flexão composta .....	116
4.3 – Análise não linear material de pórticos planos .....	107
4.3.1 – Introdução .....	107
4.3.2 – Relações constitutivas do aço e do betão .....	107
4.3.3 – Equações de equilíbrio .....	122
4.3.4 – Relações constitutivas da secção de betão armado .....	125
4.3. – Forças nodais equivalentes ao estado de tensão .....	128
4.4 – Exemplos .....	129
4.4.1 – Faixa de laje .....	130
4.4.2 – Pórtico de três barras .....	134
4.4.3 – Vigas 1 e 2 .....	135
4.5 – Conclusões .....	146
4.6 – Bibliografia .....	147

<b>5 – APLICAÇÕES</b>	149
5.1 – Introdução	149
5.2 – Construção por fases	149
5.3 – Influência da rigidez do solo de fundação	152
5.4 – Pórtico de dois pisos	153
5.4.1 – Estados limites de utilização	153
5.4.2 – Análise à rotura	168
5.4.3 – Simulação da construção por fases	182
5.5 – Pórtico de oito pisos	188
5.5.1 – Introdução	188
5.5.2 – Análise do terceiro piso	190
5.5.3 – Análise do pórtico completo	208
5.6 – Conclusões	234
5.7– Bibliografia	236
<b>6 – CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS</b>	237
6.1 – Conclusões	237
6.2 – Perspectivas de desenvolvimentos futuros	238
<b>APÊNDICE I – ESTRUTURAÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO FEMPOR</b>	239
A1.1 – Fluxograma global	239
A1.2 – Pormenorização	244

# 1 – INTRODUÇÃO

## 1.1 Generalidades e objectivos

Os métodos de análise não linear, de estruturas porticadas, têm tido um incremento significativo devido à necessidade crescente de se aferir com rigor a segurança (capacidade de carga última) e conhecer o estado de deformação e fendilhação nas várias fases da vida de um edifício; por forma a obter estruturas cada vez mais económicas, arrojadas e seguras.

A optimização da geometria das estruturas e da utilização dos seus materiais constituintes (no caso do presente estudo o aço e o betão), obriga a que o comportamento de cada um deles seja simulado por um modelo o mais próximo possível da realidade.

A não linearidade material de uma estrutura de betão armado resulta fundamentalmente dos seguintes aspectos:

- comportamento frágil do betão (fendilhação do betão quando traccionado);
- comportamento não linear do betão comprimido;
- comportamento elasto-plástico da armadura;
- comportamento das regiões fendilhadas de betão armado (ligação aço-betão),

que se procurou ter em conta neste trabalho.

É ainda considerada a possibilidade da existência de uma relação não linear entre deslocamentos e deformações – não linearidade geométrica – tendo-se adoptado uma formulação lagrangeana total; podendo efectuar a previsão da carga crítica da estrutura em cada incremento do processo de análise.

No presente trabalho é descrita uma técnica de análise não linear de pórticos planos de betão armado e a sua implementação num programa de cálculo automático desenvolvido para o efeito em FORTRAN 77 e designado genericamente por FEMPOR.

A principal preocupação ao desenvolver este trabalho foi a de que a utilização do programa agora referido para estruturas correntes, fosse computacionalmente exequível, rápido

e económico, objectivos que, mesmo num pequeno computador já obsoleto, se consideram atingidos.

São apresentados e analisados resultados da aplicação deste programa em várias etapas do seu desenvolvimento e a aplicação a exemplos práticos de maior dimensão no quinto capítulo.

## **1.2 Descrição sucinta do trabalho desenvolvido**

Este trabalho encontra-se dividido em seis capítulos e um apêndice com a seguinte estruturação:

### **Capítulo 1 – INTRODUÇÃO**

Considerações iniciais e descrição sucinta do trabalho desenvolvido

### **Capítulo 2 – ANÁLISE ELÁSTICA LINEAR**

São apresentados os aspectos principais do método dos elementos finitos (formulação dos deslocamentos), os elementos utilizados e os aspectos específicos da aplicação a um programa de pórticos planos.

São ainda apresentados exemplos de aferição da performance dos elementos utilizados e das regras de integração numérica.

### **Capítulo 3 – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA**

É apresentada a formulação utilizada (formulação lagrangeana total) e o método adoptado para a análise da instabilidade (previsão de cargas críticas).

São analisados vários exemplos de aferição da técnica de análise não linear e de previsão de cargas críticas.

## Capítulo 4 – ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL

É inicialmente descrita uma técnica global de análise não linear material de vigas submetidas à flexão simples e em seguida a técnica utilizada para a análise não linear material de estruturas porticadas em que cada elemento pode estar submetido à flexão composta.

São apresentados e analisados vários exemplos de aplicação destas técnicas, comparando os resultados obtidos com os resultados experimentais e numéricos referidos por vários autores. Em dois destes exemplos é simultaneamente considerado o comportamento não linear geométrico.

## Capítulo 5 – APLICAÇÕES

É descrita a técnica utilizada, para a análise de uma estrutura construída por fases e para a avaliação da influência da rigidez do solo de fundação.

É verificada a capacidade de carga de um pórtico real de dimensões correntes. O pórtico é analisado parcialmente (só um andar), e integralmente (todo o pórtico) tendo em conta as duas não linearidades em estudo.

É apresentado ainda um exemplo simples da construção por fases e da influência da rigidez do solo de fundação.

## Capítulo 6 – CONCLUSÕES

São referidas as principais conclusões resultantes da elaboração deste trabalho e apresentadas algumas sugestões para futuros desenvolvimentos.

## Apêndice I – ESTRUTURAÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO FEMPOR

É descrita a estruturação do programa de cálculo automático FEMPOR.

### 2.1 Introdução

Normalmente a complexidade da geometria, da solicitação e ou das ligações ao exterior de uma estrutura corrente, dificulta ou impossibilita que se consiga uma solução analítica da resolução das equações diferenciais regentes do fenómeno em análise. Nestes casos o recurso a métodos numéricos (em que se destaca, pela sua importância e potencialidades, o Método dos Elementos Finitos), permite resolver a grande maioria dos problemas de uma forma satisfatória.

Desde o advento do Método dos Elementos Finitos, na década de 50, muitos artigos, livros, teses e tratados foram escritos sobre o método e suas aplicações. Aventurar-me a apresentar nesta introdução uma descrição detalhada deste poderoso método, para além de hercúleo e pretensioso por o muito que ficaria inevitavelmente por dizer; seria forçosamente, desnecessário e excessivo, face aos objectivos deste trabalho, pela imensa qualidade e quantidade de informações que se pode actualmente encontrar na vasta bibliografia da especialidade [3, 6, 9, 11, 12, 16, 18, 22, 23, 24].

O Método dos Elementos Finitos, que inicialmente começou por ser um processo de análise estrutural e que foi alargando o seu campo de acção a inúmeros domínios da Engenharia e da Física, é, no caso da Mecânica Estrutural, fundamentalmente um processo em que um meio contínuo com infinitos graus de liberdade é discretizado num conjunto de elementos finitos, ligados entre si num número reduzido de pontos nodais.

Na formulação dos deslocamentos, em que os deslocamentos desses pontos são as incógnitas bases do problema, as relações geométricas (relações entre os deslocamentos e deformações), as relações constitutivas (relações entre deformações e tensões) e as equações diferenciais regentes do fenómeno (equações de equilíbrio) são estabelecidas para o domínio que é o elemento.

Neste capítulo são apresentados os aspectos específicos da aplicação do Método dos Elementos Finitos à análise de pórticos planos e a formulação do problema para os dois tipos de elementos utilizados (elemento de dois nós de Hermite e elemento de três nós de Timoshenko).



## 2.2 Formulação dos elementos finitos de barra e de viga

### 2.2.1 Elemento de barra de dois nós

#### 2.2.1.1 Aproximação do campo de deslocamentos

Adoptando-se uma aproximação linear para o campo de deslocamentos axiais no interior de um elemento, o deslocamento axial  $u(x)$  num ponto genérico desse elemento será:

$$u(x) = ax + b \quad (2.1)$$

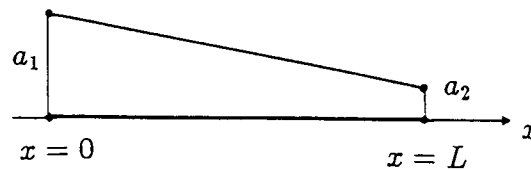


Fig. 2.1 – Campo de deslocamentos axiais no interior de um elemento.

como

$$\begin{cases} u = a_1 = b & , \quad x = 0 \\ u = a_2 = a\ell + b & , \quad x = \ell \end{cases} \quad (2.2)$$

então

$$\begin{cases} b = a_1 \\ a = \frac{a_2 - a_1}{\ell} \end{cases} \quad (2.3)$$

substituindo (2.3) em (2.1) resulta

$$u(x) = \left( \frac{a_2 - a_1}{\ell} \right) x + a_1 \quad (2.4)$$

ou

$$u(x) = a_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + a_2 \left( \frac{x}{\ell} \right) \quad (2.5)$$

pelo que

$$u(x) = N_1(x)a_1 + N_2(x)a_2 \quad (2.6)$$

se

$$N_1(x) = \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) \quad \text{e} \quad N_2(x) = \frac{x}{\ell} \quad (2.7)$$

ou, matricialmente

$$u = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [N] \{a\} \quad (2.8)$$

em que  $N_1$  e  $N_2$  são, normalmente, designadas por funções de forma.

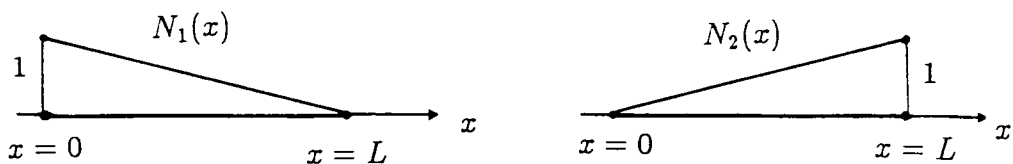


Fig. 2.2 – Funções de forma.

A expressão (2.6) para o cálculo do deslocamento axial de um ponto genérico do interior do elemento, pode então ter a seguinte interpretação geométrica:

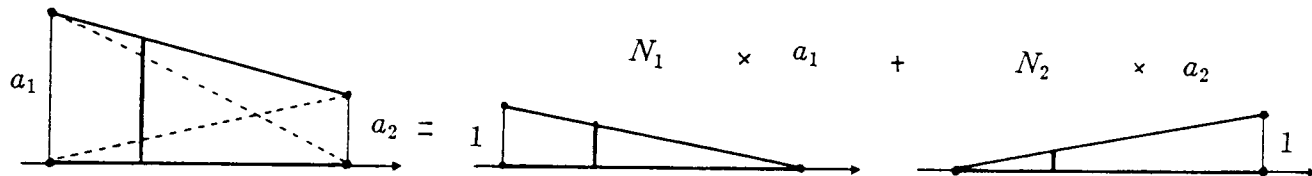


Fig. 2.3 – Aplicação das funções de forma.

### 2.2.1.2 Relações geométricas

A relação entre deslocamentos e deformações axiais é, no caso do elemento de barra,

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.9)$$

ou, sob a forma matricial,

$$\{\epsilon\} = [L] \{u\} \quad (2.10)$$

em que  $[L]$  é então um operador diferencial dado por:

$$[L] = \left[ \frac{d}{dx} \right] \quad (2.11)$$

Substituindo a equação (2.6) na equação (2.10)

$$\epsilon_x = \frac{d}{dx} (N_1 a_1 + N_2 a_2) \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_x = \frac{dN_1}{dx} a_1 + \frac{dN_2}{dx} a_2 \quad (2.13)$$

ou, exprimindo-a sob a forma matricial,

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

ou

$$\varepsilon_x = [B_0] \{a\} \quad (2.15)$$

em que

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

é designada por matriz das deformações, ou seja,

$$[B_0] = \left[ \frac{d}{dx} \right] [N_1 \ N_2] = [L] [N] \quad (2.17)$$

### 2.2.1.3 Relações constitutivas

A relação entre tensões e deformações generalizadas é, neste caso, traduzida pela lei de Hooke

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{ou} \quad N = E A \varepsilon \quad (2.18)$$

ou, matricialmente,

$$\{\sigma\} = [D_0] \{\varepsilon\} \quad (2.19)$$

em que  $\{\sigma\}$  e  $\{\varepsilon\}$  têm o significado de tensões e deformações generalizadas e  $N$  é o esforço axial da barra.

Sendo neste caso a rigidez axial  $EA$ , a constante elástica da matriz de elasticidade  $[D_0]$  agora referida, em que  $E$  é módulo de elasticidade ou de Young do material e  $A$  a área de secção transversal do elemento.

#### 2.2.1.4 Equações regentes do fenómeno

No caso em análise, em que se adopta a formulação dos deslocamentos, as equações regentes do fenómeno são equações diferenciais de equilíbrio e a sua consideração no Método dos Elementos Finitos pode ser feita por vários processos entre os quais se destacam:

- Princípio dos Trabalhos Virtuais;
- Métodos Variacionais;
- Método dos Resíduos Pesados.

Por ser talvez mais simples e usual, apenas será descrita a aplicação do primeiro dos processos agora referidos.

Para esse efeito considere-se a estrutura em equilíbrio elástico submetida à acção de dois sistemas de forças exteriores i) e ii) independentes:

- Sob a acção de um sistema de forças exteriores (forças distribuídas  $q$ , forças concentradas aplicadas na barra  $P_i$  e forças aplicadas nos nós  $Q_i$ ) desenvolve-se um estado de tensão interno  $\sigma$ , que satisfaz as equações de equilíbrio;
- Sob a acção do segundo sistema de forças desenvolvem-se deslocamentos  $u^*$  e deformações  $\varepsilon^*$  compatíveis e designados por deslocamentos e deformações virtuais.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais, impõe como condição necessária e suficiente para que um corpo esteja em equilíbrio elástico sob a acção de um sistema de forças exteriores, que numa deformação virtual do corpo, o trabalho virtual das forças exteriores seja igual ao trabalho virtual de deformação (qualquer deformação infinitamente pequena e compatível com as ligações ao exterior).

Considerando o elemento de barra solicitado por uma força uniformemente distribuída  $q$ , forças concentradas nos  $n$  nós  $Q_i$ , e  $m$  forças concentradas nas barras  $P_i$ ; o trabalho destas forças exteriores na deformada produzida pela outra solicitação é dada por:

$$w_e = \sum_{i=1}^n Q_i a_i^* + \sum_{i=1}^m P_i u_i^* + \int_0^L u^* q dx \quad (2.20)$$

Tendo em conta a expressão (2.8)

$$w_e = \{a^*\}^T \{Q\} + \{a^*\}^T \sum_{i=1}^m [N]^T P_i + \{a^*\}^T \int_0^L [N]^T q dx \quad (2.21)$$

em que  $\int_0^L [N]^T q dx$  é o vector das forças nodais estaticamente equivalentes à força distribuída  $\sum_{i=1}^m [N]^T P_i$  é o vector das forças nodais estaticamente equivalentes às forças concentradas aplicadas na barra e  $\{Q\}$  é o vector das forças aplicadas nos nós.

O trabalho das forças interiores é dado por

$$w_i = \int_V \varepsilon^* \sigma dV = \int_V \varepsilon^* E \varepsilon dV \quad (2.22)$$

$$w_i = \int_V \left( \{a_1^* a_2^*\} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \right) dV \quad (2.23)$$

ou seja

$$w_i = \{a^*\}^T \int_V [B_0]^T [D_0] [B_0] dV \{a\} \quad (2.24)$$

Igualando as expressões do trabalho das forças exteriores e interiores

$$\begin{aligned}
& \{a^*\}^T \int_V [B_0]^T [D_0] [B_0] dV \{a\} = \\
& = \{a^*\}^T \{Q\} + \{a^*\}^T \sum_{i=1}^m [N]^T P_i + \{a^*\}^T \int_0^L [N]^T q dx
\end{aligned} \tag{2.25}$$

e como o campo de deslocamentos  $\{a^*\}$  é arbitrário, resulta que

$$\int_V [B_0]^T [D_0] [B_0] dV \{a\} = \{Q\} + \sum_{i=1}^m [N]^T P_i + \int_0^L [N]^T q dx \tag{2.26}$$

ou seja

$$[k_0] \{a\} = \{f\} \tag{2.27}$$

em que

$$[k_0] = \int_V [B_0]^T [D_0] [B_0] dV \tag{2.28}$$

é a matriz de rigidez do elemento e

$$\{f\} = \{Q\} + \sum_{i=1}^m [N]^T P_i + \int_0^L [N]^T q dx \tag{2.29}$$

é o vector de solitação do elemento.

Considerando a barra com a secção transversal constante,

$$dV = A dx \tag{2.30}$$

e atendendo a (2.7) e (2.16) a expressão (2.28) pode-se escrever

$$[k_0] = \int_0^L \left( \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{L} [-1 \ 1] \right) A dx \tag{2.31}$$

e, portanto, a matriz de rigidez do elemento será

$$[k_0] = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{EA}{L^2} & -\frac{EA}{L^2} \\ -\frac{EA}{L^2} & \frac{EA}{L^2} \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

### 2.2.2 Elemento de barra isoparamétrico de dois nós.

Introduzindo o conceito de elemento isoparamétrico (muito utilizado no Método dos Elementos Finitos, sobretudo em problemas com uma geometria complexa), é apenas necessário efectuar alterações pontuais ao descrito em 2.2.1.

Num elemento isoparamétrico a geometria do elemento é definida utilizando as coordenadas dos pontos nodais e as mesmas funções de forma utilizadas na aproximação das incógnitas, no caso corrente o campo de deslocamentos.

Com toda a generalidade

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

sendo as funções de forma expressas num sistema de eixos local em que cada coordenada varia entre  $-1$  e  $1$ .

Assim sendo no elemento de barra de 2 nós o campo de deslocamentos é aproximado pela seguinte expressão

$$u(\xi) = N_1(\xi) a_1 + N_2(\xi) a_2 \quad (2.34)$$

com as funções de forma  $N_1$  e  $N_2$  expressas no novo sistema de eixos local  $\xi$  do elemento.



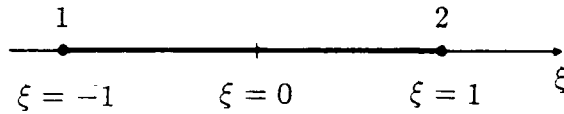


Fig. 2.4 – Elemento isoparamétrico

$$N_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (2.35)$$

A relação entre as coordenadas nos dois sistemas de eixos, é estabelecida utilizando as mesmas funções interpoladas

$$x(\xi) = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \quad (2.36)$$

A matriz de rigidez é calculada pelo processo descrito em 2.2.1.4 em que desta feita na matriz  $[B_0]$  o cálculo das derivadas em ordem a  $x$  será feito através do conhecimento das derivadas em ordem a  $\xi$ . Como,

$$\frac{dN_i}{d\xi} = \frac{dN_i}{dx} \frac{dx}{d\xi} \quad (2.37)$$

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \quad (2.38)$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \end{pmatrix} = \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} \\ \frac{dN_2}{d\xi} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Derivando (2.36) em ordem a  $\xi$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{2} \quad \frac{dN_2}{d\xi} = \frac{1}{2} \quad (2.40)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (2.41)$$

Os elementos da matriz de rigidez são obtidos através da expressão

$$[k_0] = \int_0^L [B_0]^T EA [B_0] dx \quad (2.42)$$

Expressando  $dx$  em função de  $d\xi$

$$dx = \left( \frac{dx}{d\xi} \right) d\xi \quad (2.43)$$

e atendendo a (2.41)

$$[k_0] = \int_{-1}^1 [B_0]^T EA [B_0] \frac{L}{2} d\xi \quad (2.44)$$

em que  $[B]$  é expresso em função de  $\xi$ . Das expressões (2.16) e (2.38),

$$[B_0] = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} dN_1 & dN_2 \\ d\xi & d\xi \end{bmatrix} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Sendo então a matriz de rigidez dada por:

$$\begin{aligned} [k] &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} EA \frac{1}{L} [-1 \ 1] \right) \frac{L}{2} d\xi \\ &= EA \int_{-1}^1 \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.46)$$

## 2.2.3 Elemento de viga isoparamétrico de dois nós de Hermite

### 2.2.3.1 Introdução

Este elemento em que não são consideradas as deformações de corte, toma por base as hipóteses de Navier – Bernoulli para a deformação à flexão de peças lineares:

- As secções normais ao eixo antes da deformação mantêm-se planas e perpendiculares ao eixo após a deformação.

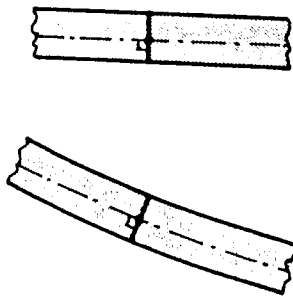


Fig. 2.5 – Deformação de um elemento de viga.

- As tensões normais ao eixo da viga são desprezáveis.

### 2.2.3.2 Aproximação do campo de deslocamentos

Pelo facto de os elementos hermitianos imporem a continuidade, entre elementos, da variável principal e das suas primeiras derivadas; a sua aplicação a elementos de viga na formulação dos deslocamentos, implica a compatibilização dos deslocamentos verticais e das rotações entre os elementos.

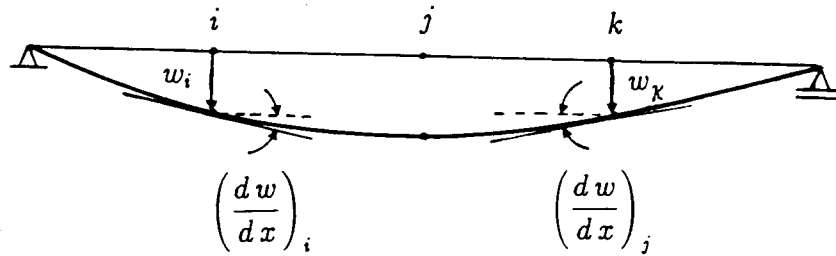


Fig. 2.6 – Compatibilização de deslocamentos verticais e rotações.

Deste modo, são normalmente utilizados os deslocamentos e as suas derivadas como parâmetros incógnitas da função de aproximação dos deslocamentos,

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) w_i + \sum_{i=1}^2 N'_i(\xi) \left( \frac{dw}{d\xi} \right)_i \quad (2.47)$$

As funções de forma  $N_i$  e  $N'_i$  podem ser obtidas através da interpolação de Hermite,

$$N_i(\xi) = \left( 1 - 2 \frac{d}{d\xi} (L_i)_{\xi=\xi_i} (\xi - \xi_i) \right) (L_i)^2 \quad (2.48)$$

$$N'_i(\xi) = (\xi - \xi_i) (L_i)^2 \quad (2.49)$$

em que  $L_i$  é uma função interpoladora de Lagrange de primeiro grau,

$$L_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad L_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (2.50)$$

e, portanto,

$$N_1 = \left( 1 - 2 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{2}(1 - \xi) \right)_{\xi=-1} (\xi + 1) \right) \left( \frac{1}{2}(1 - \xi) \right)^2 = \frac{(2 + \xi)(1 - \xi)^2}{4} \quad (2.51)$$

$$N_2 = \left(1 - 2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2}(1 + \xi)\right) (\xi - 1)\right) \left(\frac{1}{2}(1 + \xi)\right)^2 = \frac{(2 - \xi)(\xi + 1)^2}{4} \quad (2.52)$$

$$N'_1 = (\xi + 1) \left(\frac{1}{2}(1 - \xi)\right)^2 = \frac{(\xi + 1)(1 - \xi)^2}{4} \quad (2.53)$$

$$N'_2 = (\xi - 1) \left(\frac{1}{2}(1 + \xi)\right)^2 = \frac{(\xi - 1)(1 + \xi)^2}{4} \quad (2.54)$$

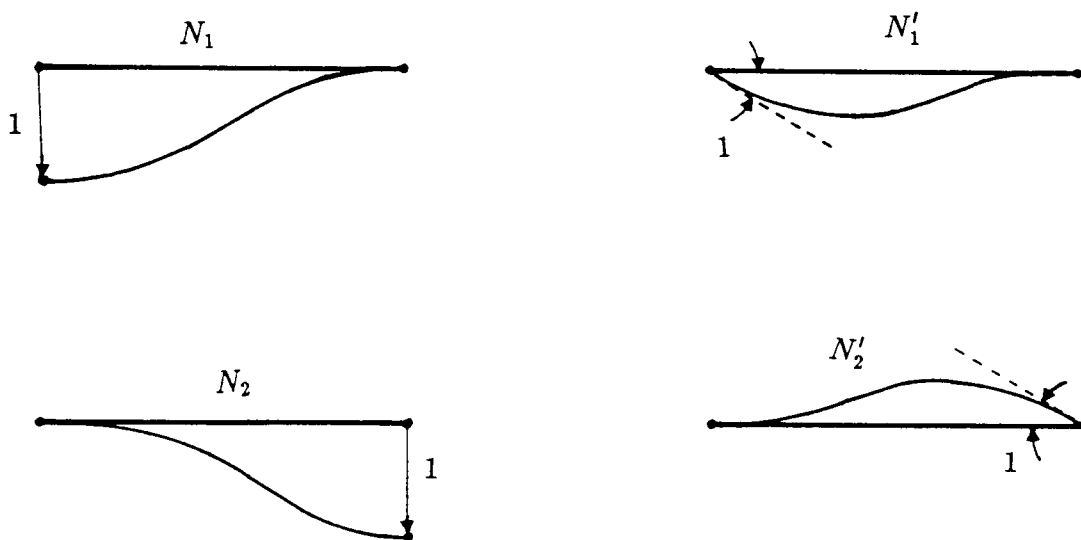


Fig. 2.7 - Funções de forma de Hermite.

Retomando a expressão (2.47), tendo em conta que

$$\frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{d\xi} \quad (2.55)$$

em que

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=x_i} = \theta_i \quad (2.56)$$

da expressão (2.41), resulta

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) w_i + \sum_{i=1}^2 N'_i(\xi) \frac{L}{2} \theta_i \quad (2.57)$$

### 2.2.3.3 Relações geométricas

No caso deste elemento da viga, as deformações generalizadas a analisar são as curvaturas

$$\chi = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.58)$$

pelo que tendo em conta a expressão (2.57)

$$\chi = \frac{d^2 N_1}{dx^2} w_1 + \frac{d^2 N'_1}{dx^2} \frac{L}{2} \theta_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} w_2 + \frac{d^2 N'_2}{dx^2} \frac{L}{2} \theta_2 \quad (2.59)$$

ou, na forma matricial,

$$\{\varepsilon\} = [B_0] \{a\} \quad (2.60)$$

em que  $\{a\}$  é o vector dos deslocamentos nodais

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ w_1 \\ \theta_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

e  $[B_0]$  a matriz de deformação

$$[B_0] = \left[ \left( \frac{d^2 N'_1}{dx^2} \frac{L}{2} \right) \left( \frac{d^2 N_1}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 N'_2}{dx^2} \frac{L}{2} \right) \left( \frac{d^2 N_2}{dx^2} \right) \right] \quad (2.62)$$

E atendendo a (2.37)

$$\frac{d^2 N_i}{d\xi^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dN_i}{dx} \frac{dx}{d\xi} \right) \frac{dx}{d\xi} \quad (2.63)$$

pelo que

$$\frac{d^2 N_i}{d\xi^2} = \frac{d^2 N_i}{dx^2} \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^2 \quad (2.64)$$

e portanto

$$\frac{d^2 N_i}{dx^2} = \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-2} \frac{d^2 N_i}{d\xi^2} \quad (2.65)$$

pelo que a matriz de deformação  $[B_0]$  será

$$[B_0] = \frac{4}{L^2} \left[ \left( \left( \frac{-2+6\xi}{4} \right) \frac{L}{2} \right) \left( \frac{6\xi}{4} \right) \left( \left( \frac{2+6\xi}{4} \right) \frac{L}{2} \right) \left( -\frac{6\xi}{4} \right) \right] \quad (2.66)$$

#### 2.2.3.4 Relações constitutivas

A relação entre os esforços e as deformações é

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.67)$$

ou, na forma matricial

$$\{\sigma\} = [D_0] \{\varepsilon\} \quad (2.68)$$

em que  $\{\sigma\}$  e  $\{\varepsilon\}$  têm o significado de tensões e deformações generalizadas,  $M$  é o momento flector e  $[D_0]$  a matriz de elasticidade, constituída pela rigidez à flexão  $EI$ , em que  $E$  é o módulo de elasticidade ou de Young do material e  $I$  o momento de inércia da secção transversal.

### 2.2.3.5 Matriz de rigidez

A matriz de rigidez será de uma forma análoga ao definido no elemento de barra (2.44) dada por

$$[k_0] = \int_{-1}^1 [B_0]^T [D_0] [B_0] \frac{L}{2} d\xi \quad (2.69)$$

Desenvolvendo o integral da expressão (2.69) obtem-se:

$$[K_0] = \begin{bmatrix} K_{ee} & \vdots & K_{ed} \\ \dots\dots\dots & & \\ K_{de} & \vdots & K_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \vdots & \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} \\ & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \vdots & \frac{6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} \\ \dots\dots\dots & & & & & \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \vdots & \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} \\ & & & & & \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & \vdots & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

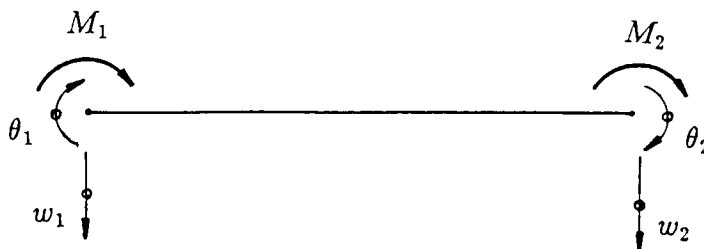


Fig. 2.8 – Deslocamentos e esforços generalizados.



### 2.2.3.6 Vector solicitação

Se a solicitação do elemento, for por exemplo uma carga uniformemente distribuída normal ao elemento

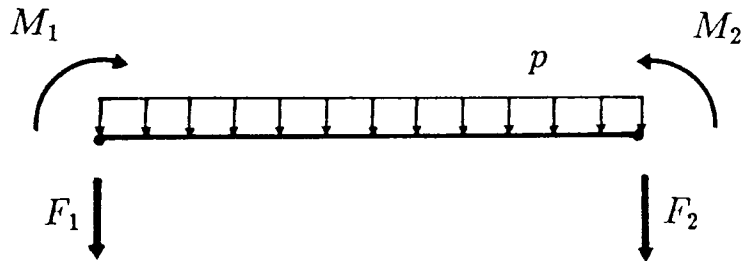


Fig. 2.9 – Forças nodais equivalentes à solicitação exterior.

as forças generalizadas nodais equivalentes à solicitação, serão determinadas impondo que em cada nó essas forças produzam o mesmo trabalho que a força distribuída, no campo de deslocamentos, em que apenas o deslocamento generalizado em questão nesse nó é unitário sendo os restantes deslocamentos nulos.

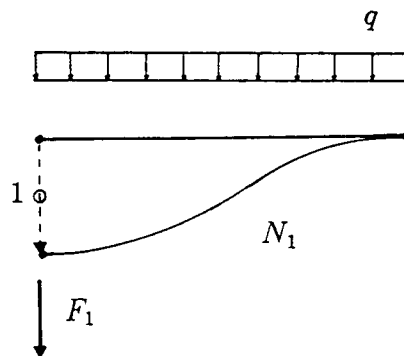


Fig. 2.10 – Determinação de  $F_1$ .

$$F_1 \times 1 = \int_0^L w_{(x)} q dx$$

$$F_1 \times 1 = \int_0^L (1 \times N_1(x)) q dx$$

$$F_1 \times 1 = \int_{-1}^1 q \frac{(2 + \xi)(1 - \xi)^2}{4} \frac{L}{2} d\xi$$

$$F_1 = \frac{qL}{8} \left[ \frac{\xi^4}{4} - \frac{3\xi^2}{2} + 2\xi \right]_{-1}^1 = \frac{qL}{2} \quad (2.71)$$

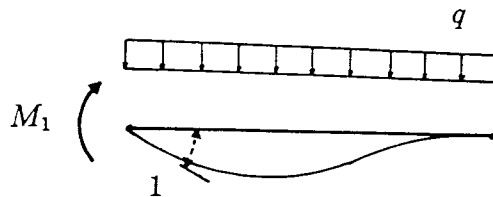


Fig. 2.11 - Determinação de  $M_1$ .

$$M_1 \times 1 = \int_0^L \frac{dw}{dx} q dx$$

e atendendo a (2.56) e (2.57)

$$M_1 \times 1 = \int_{-1}^1 \left( 1 \times \frac{dx}{d\xi} N_1'(\xi) \right) q \frac{L}{2} d\xi$$

$$M_1 = q \frac{L^2}{16} \left[ \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \xi \right]_{-1}^1 = q \frac{L^2}{12} \quad (2.72)$$

e portanto, neste caso, o vector solicitação será dado por

$$\{f\}^T = \left\{ \left( \frac{pL^2}{12} \right) \left( \frac{pL}{2} \right) \left( -\frac{pL^2}{12} \right) \left( \frac{p\ell}{2} \right) \right\} \quad (2.73)$$

## 2.2.4 Elemento de barra isoparamétrico de três nós

### 2.2.4.1 Introdução

Para adequar o descrito em 2.2.1 e 2.2.2 ao elemento de barra isoparamétrico de três nós é necessário apenas efectuar algumas modificações localizadas. Assim sendo são apresentados unicamente os aspectos em que essas diferenças sejam mais significativas.

### 2.2.4.2 Aproximação do campo de deslocamentos

Pelo facto de se pretender representar com um polinómio uma função de uma variável, em que apenas se impõe a continuidade do valor da função entre elementos, e sendo o valor do polinómio em determinados pontos previamente escolhidos os parâmetros incógnitos; as funções da forma  $N_i$  podem ser determinadas directamente através das funções interpoladas de Lagrange.

Para o elemento de 3 nós a função de interpolação é de segundo grau, sendo  $N_i(\xi)$  dado por

$$N_i(\xi) = \prod_{j=1}^3 \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}, \quad i \neq j \quad (2.74)$$

e como  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$  e  $\xi_3 = 1$

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{\xi}{2}(\xi - 1) \quad (2.75)$$

$$N_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = (1 + \xi)(1 - \xi) \quad (2.76)$$

$$N_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{\xi}{2}(\xi + 1) \quad (2.77)$$

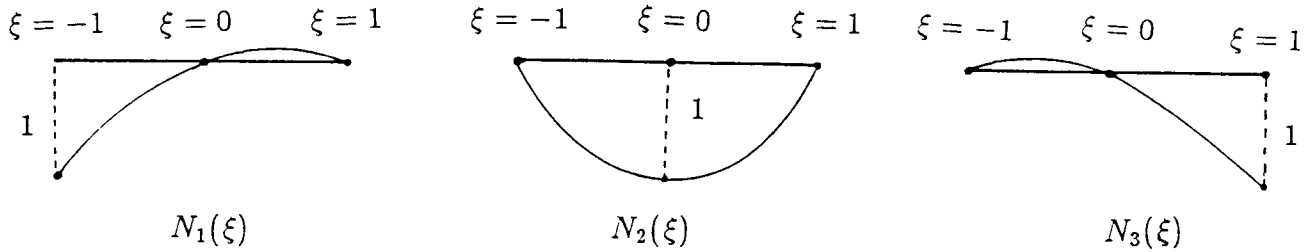


Fig. 2.12 - Funções de forma.

### 2.2.4.3 Relações geométricas

Relacionando os deslocamentos em qualquer ponto do elemento com os deslocamentos nodais, pela expressão

$$u(\xi) = N_1(\xi)a_1 + N_2(\xi)a_2 + N_3(\xi)a_3 \quad (2.78)$$

a matriz de deformação  $[B_0]$  será (ver 2.9 a 2.17)

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_3}{dx} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

e atendendo a (2.38)

$$[B_0] = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} & \frac{dN_3}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Generalizando a expressão (2.36), obtém-se

$$x(\xi) = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + N_3(\xi)x_3 \quad (2.81)$$

pelo que

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi}(\xi)x_1 + \frac{dN_2}{d\xi}(\xi)x_2 + \frac{dN_3}{d\xi}(\xi)x_3 \quad (2.82)$$

como

$$\frac{dN_1}{d\xi} = \xi - \frac{1}{2} \quad \frac{dN_2}{d\xi} = -2\xi \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \xi + \frac{1}{2} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \left(\xi - \frac{1}{2}\right)x_1 - 2\xi x_2 + \left(\xi + \frac{1}{2}\right)x_3 \\ &= \xi(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{x_3 - x_1}{2} \\ &= \xi((x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)) + \frac{x_3 - x_1}{2} \\ &= \xi\left(-\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right) + \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (2.84)$$

resultando que

$$\begin{aligned} [B_0] &= \frac{2}{L} \left[ \frac{dN_1}{d\xi} \frac{dN_2}{d\xi} \frac{dN_3}{d\xi} \right] \\ &= \frac{2}{L} \left[ \left(\xi - \frac{1}{2}\right) (-2\xi) \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.85)$$

## 2.2.5 Elemento de viga isoparamétrico de três nós de Timoshenko

### 2.2.5.1 Introdução

Na teoria de vigas (por exemplo no elemento de Hermite já apresentado) considera-se frequentemente a hipótese de a normal ao eixo da peça antes da deformação continuar rectilínea e normal a esse eixo após a deformação.

Tal hipótese deixa no entanto de ser válida ao analisar vigas espessas, nas quais se deve ter em conta a deformação provocada pelo esforço transverso. Neste caso as hipóteses de base deverão ser:

- As secções normais ao eixo da viga antes da deformação mantêm-se planas mas não necessariamente perpendiculares ao eixo após a deformação.
- As tensões normais ao eixo da viga, são desprezáveis.

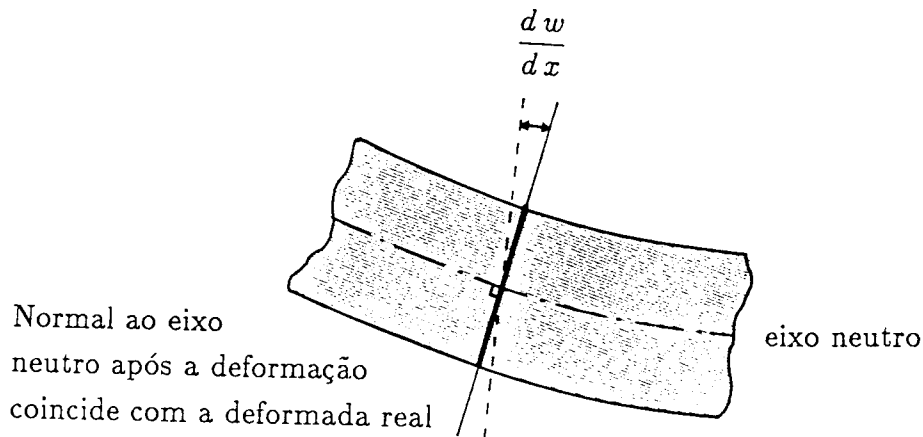


Fig. 2.13 – Deformação de um elemento da viga (viga de Bernoulli-Navier).

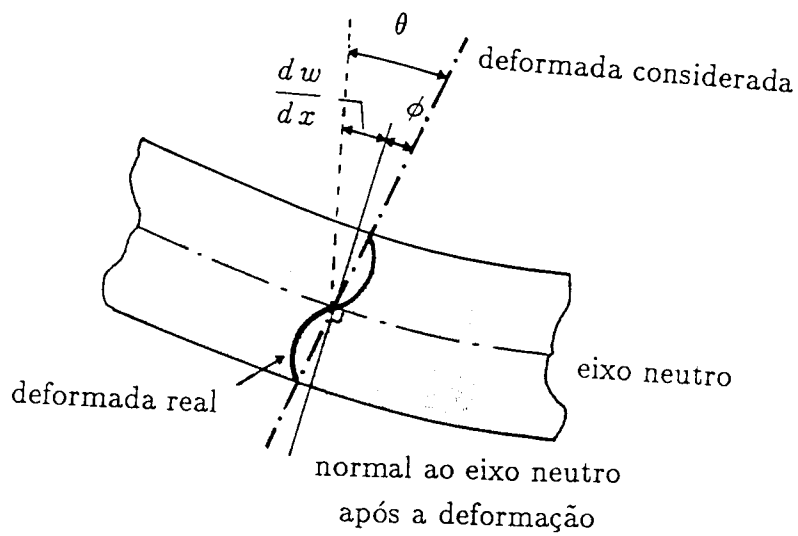


Fig. 2.14 – Deformação de um elemento de viga (viga de Timoshenko).

### 2.2.5.2 Aproximação do campo de deslocamentos

Considerando-se as rotações independentes dos deslocamentos verticais, a rotação  $\theta(\xi)$  e o deslocamento vertical  $w(\xi)$  em qualquer ponto do elemento serão definidos respectivamente a partir do conhecimento das rotações e deslocamentos dos pontos nodais e utilizando as mesmas funções de forma descritas em 2.2.4

$$w(\xi) = N_1(\xi) w_1 + N_2(\xi) w_2 + N_3(\xi) w_3 \quad (2.86)$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi) \theta_1 + N_2(\xi) \theta_2 + N_3(\xi) \theta_3 \quad (2.87)$$

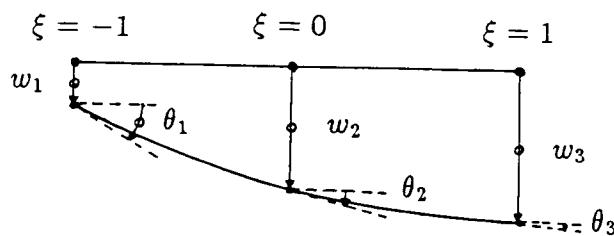


Fig. 2.15 – Elemento de três nós de Timoshenko.

mantendo-se válida a expressão (2.81).

### 2.2.5.3 Relações geométricas

As deformações em questão  $\frac{d\theta}{dx}$  ou pseudo-curvatura e  $\phi = -\frac{dw}{dx} + \theta$  ou rotação efectiva de corte, são definidas a partir dos deslocamentos nodais e das derivadas das funções de forma, pelas expressões

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dN_1}{dx} \theta_1 + \frac{dN_2}{dx} \theta_2 + \frac{dN_3}{dx} \theta_3 \quad (2.88)$$

$$\phi = -\frac{dw}{dx} + \theta = -\left(\frac{dN_1}{dx} w_1 + \frac{dN_2}{dx} w_2 + \frac{dN_3}{dx} w_3\right) + (N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \theta_3) \quad (2.89)$$

ou, matricialmente

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\theta}{dx} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & \frac{dN_3}{dx} & 0 \\ N_1 & -\frac{dN_1}{dx} & N_2 & -\frac{dN_2}{dx} & N_3 & -\frac{dN_3}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ w_1 \\ \theta_2 \\ w_2 \\ \theta_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

Tendo em conta as expressões (2.38) e (2.84)

$$[B_0] = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & 0 & \frac{dN_2}{d\xi} & 0 & \frac{dN_3}{d\xi} & 0 \\ N_1 & -\frac{dN_1}{d\xi} & N_2 & -\frac{dN_2}{d\xi} & N_3 & -\frac{dN_3}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

### 2.2.5.4 Relações constitutivas

A relação entre tensões e deformações generalizadas é, neste elemento,



$$\begin{Bmatrix} M \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\theta}{dx} \\ \phi \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\sigma\} = [D_0] \{\varepsilon\} \quad (2.92)$$

sendo no caso de secções rectangulares

$$S = (\alpha A) G = (\alpha A) \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{EA}{2.4(1+\nu)} \quad (2.93)$$

em que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material e  $\alpha A$  a área reduzida de corte.

### 2.2.5.5 Matriz de rigidez

A matriz de rigidez é calculada pela expressão (2.69) que neste caso toma a forma

$$[k_0] = \int_{-1}^1 \left( \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{d\xi} & N_i \\ 0 & -\frac{dN_i}{d\xi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \frac{dN_j}{d\xi} & N_j \\ 0 & -\frac{dN_j}{d\xi} \end{bmatrix} \right) \frac{L}{2} d\xi \quad (2.94)$$

ou seja

$$[k_0] = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 EI \left( \frac{dN_i}{d\xi} \right) \left( \frac{dN_j}{d\xi} \right) d\xi + \int_{-1}^1 S N_i N_j d\xi & \vdots & -\int_{-1}^1 S N_i \frac{dN_j}{d\xi} d\xi \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ \int_{-1}^1 S \left( \frac{dN_i}{d\xi} \right) N_j d\xi & \vdots & \int_{-1}^1 S \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

### 2.2.5.6 Vector solicitação

Utilizando o mesmo processo indicado em 2.2.3.6 é apresentado o cálculo das forças nodais equivalentes a uma carga uniformemente distribuída.

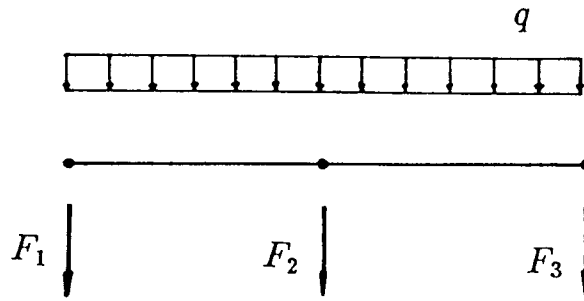


Fig. 2.16 – Forças nodais equivalentes à solicitação exterior.

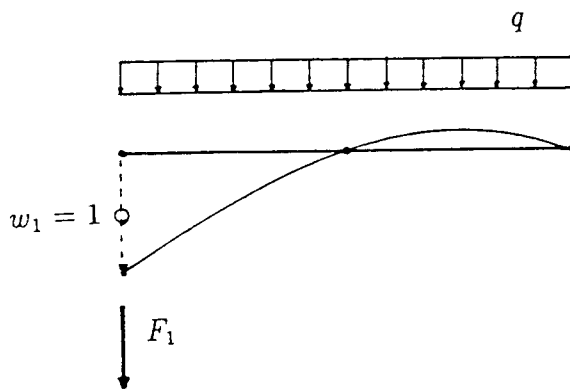


Fig. 2.17 – Determinação de  $F_1$ .

$$F_1 \times 1 = \int_0^L (w(x)) q dx$$

$$F_1 \times 1 = \int_0^L (N_1(x) \cdot w_1) q dx$$

$$F_1 = \int_{-1}^1 q \left( -\frac{\xi(1-\xi)}{2} \right) \frac{L}{2} d\xi$$

$$F_1 = q \frac{L}{4} \left[ \frac{-\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^1 = q \frac{L}{6} \quad (2.96)$$

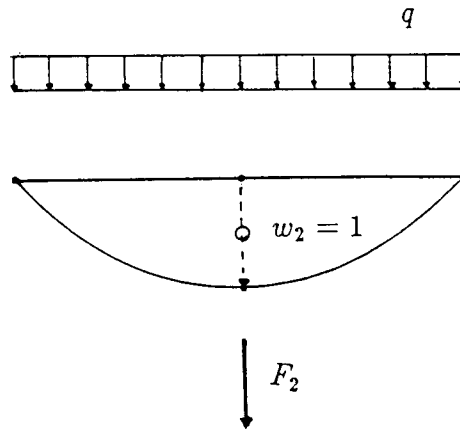


Fig. 2.18 - Determinação de  $F_2$ .

$$F_2 \times 1 = \int_{-1}^1 q(1 - \xi)(1 + \xi) \frac{L}{2} d\xi$$

$$F_2 = q \frac{L}{2} \left[ \xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 \frac{qL}{3} \quad (2.97)$$

como neste elemento os deslocamentos verticais são independentes das rotações, não são necessários momentos nodais para a representação da carga distribuída.

Sendo assim, o vector solicitação será:

$$\{f\}^T = \left\{ 0 \quad \frac{qL}{6} \quad 0 \quad \frac{4qL}{6} \quad 0 \quad \frac{qL}{6} \right\} \quad (2.98)$$

## 2.4 Descrição dos elementos finitos utilizados

### 2.4.1 Elemento isoparamétrico de dois nós

Se se reunir num só, o elemento de barra isoparamétrico de dois nós e o elemento de viga isoparamétrico de dois nós de Hermite, resulta um elemento com os seguintes graus de liberdade:

$$\{a\}^T = \left\{ \theta_1 \quad w_1 \quad u_1 \quad ; \quad \theta_2 \quad w_2 \quad u_2 \right\}$$



Fig. 2.19 – Elemento isoparamétrico de dois nós.

a partir dos quais se obtêm as deformações (curvatura e extensão) utilizando uma matriz de deformação que contem as matrizes de deformação descritas em 2.2.2 e 2.2.3, ou seja,

$$\left\{ \begin{matrix} \chi \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{d^2 w}{dx^2} \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1^b}{d\xi^2} & \frac{2}{L} \frac{d^2 N_1^b}{d\xi^2} & 0 & \vdots & \frac{d^2 N_2^b}{d\xi^2} & \frac{2}{L} \frac{d^2 N_2^b}{d\xi^2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{dN_1^a}{d\xi} & \vdots & 0 & 0 & \frac{dN_2^a}{d\xi} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{matrix} \theta_1 \\ w_1 \\ u_1 \\ \dots \\ \theta_2 \\ w_2 \\ u_2 \end{matrix} \right\} \quad (2.99)$$

Agrupando com a designação  $a_i^b$  os deslocamentos generalizados de flexão  $\theta_i$  e  $w_i$  do nó  $i$  e designando por  $a_i^a$  o deslocamento axial  $u_i$  no mesmo nó, o vector dos deslocamentos desse nó pode-se representar simplificada por,

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} a_i^b \\ a_i^a \end{Bmatrix}$$

podendo-se generalizar que o vector de deslocamentos do elemento tenha a mesma representação

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a^b \\ \dots \\ a^a \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^b \\ \dots \\ \epsilon^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \chi \\ \dots \\ \epsilon \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^b & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & B_0^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^b \\ \dots \\ a^a \end{Bmatrix} \quad (2.100)$$

em que o índice  $b$  identifica as componentes de flexão e o índice  $a$  as componentes axiais.

A matriz de elasticidade  $[D_0]$  reúne também as matrizes referidas em 2.2.2 e 2.2.3.

$$[D_0] = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & EA \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

As relações constitutivas são:

$$\begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & EA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi \\ \epsilon \end{Bmatrix} \quad (2.102)$$

Desenvolvendo o integral da expressão (2.69) obtem-se para a matriz de rigidez do elemento

$$[k_0] = \begin{bmatrix} k_{ee} & \vdots & k_{ed} \\ \dots & \vdots & \dots \\ k_{de} & \vdots & k_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \vdots & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \vdots & \frac{5EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & \vdots & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \vdots & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \vdots & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \vdots & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

## 2.4.2 Elemento isoparamétrico de três nós

Seguindo igual procedimento para o elemento de três nós obtém-se um elemento com os seguintes graus de liberdade:

$$\{a\}^T = \left\{ \theta_1 \ w_1 \ u_1 \ : \ \theta_2 \ w_2 \ u_2 \ : \ \theta_3 \ w_3 \ u_3 \right\}$$

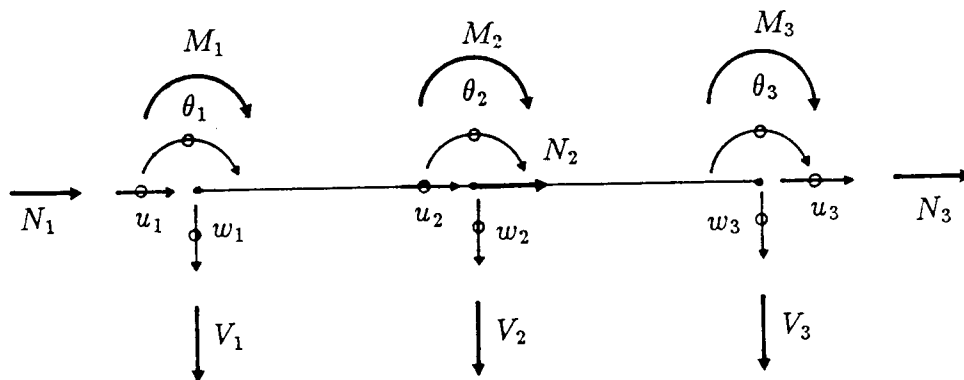


Fig. 2.20 – Elemento isoparamétrico de três nós.

e em que as deformações (pseudo-curvatura, rotação efectiva de corte e extensão) são obtidas a partir destes deslocamentos e da seguinte matriz de deformação,

$$\begin{Bmatrix} \chi \\ \dots \\ \phi \\ \dots \\ \varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \frac{dN_1}{d\xi} & 0 & 0 & \vdots & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{d\xi} & 0 & 0 & \vdots & \frac{2}{L} \frac{dN_3}{d\xi} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_1 & -\frac{2}{L} \frac{dN_1}{d\xi} & 0 & \vdots & N_2 & -\frac{2}{L} \frac{dN_2}{d\xi} & 0 & \vdots & N_3 & -\frac{2}{L} \frac{dN_3}{d\xi} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_1}{d\xi} & \vdots & 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{d\xi} & \vdots & 0 & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_3}{d\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ w_1 \\ u_1 \\ \dots \\ \theta_2 \\ w_2 \\ u_2 \\ \dots \\ \theta_3 \\ w_3 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^b \\ \dots \\ \varepsilon^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \chi \\ \phi \\ \dots \\ \varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^b & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & B_0^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^b \\ \dots \\ \delta^a \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

As relações constitutivas são, então:

$$\begin{Bmatrix} M \\ V \\ N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{2,4(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi \\ \phi \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

obtendo-se mais uma vez a matriz de rigidez através da expressão (2.69).

## 2.5 Integração numérica

### 2.5.1 Introdução

Como vem sendo indicado, o Método dos Elementos Finitos requer, para a determinação da matriz de rigidez e das forças nodais equivalentes, o cálculo de determinados integrais que apenas em casos muito simples consegue ser efectuado analiticamente.

É por esta razão habitual proceder-se à avaliação numérica destes integrais, apresentando de seguida a regra de Gauss – Legendre e a regra de Gauss – Lobatto.

Em qualquer uma destas regras a determinação do integral de uma função  $Y(\xi)$ , com  $\xi$  assumindo valores entre  $-1$  e  $1$ ; será efectuado através do somatório dos produtos, do valor da função em determinados pontos  $\xi_i$ , por um coeficiente  $H_i$ .

$$I_n = \int_{-1}^1 Y(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i Y(\xi_i) \quad (2.107)$$

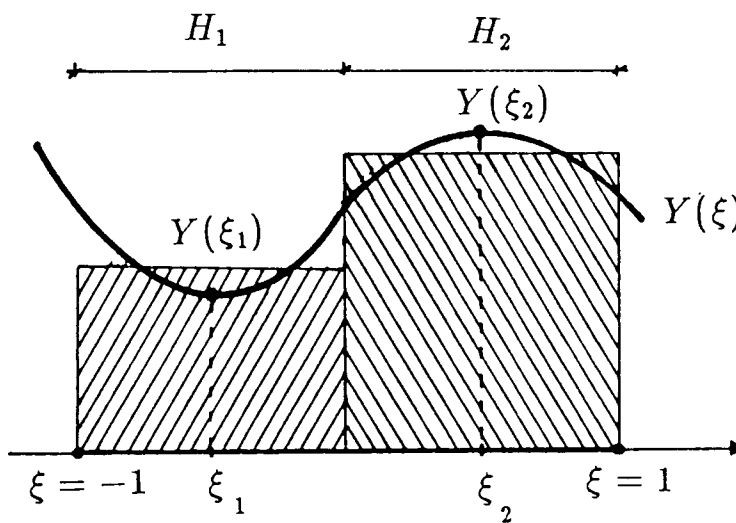


Fig. 2.21 – Integração de Gauss

## 2.5.2 Regra de integração de Gauss – Legendre

No quadro que se segue apresenta-se a localização e o peso de cada ponto de Gauss para várias ordens de integração.



Ordem $n$	Localização $\xi_i$	Peso $H_i$
2	$\pm$ 0.577350269190	1.000000000000
3	$\pm$ 0.774596669241 0.000000000000	0.555555555556 0.888888888889
4	$\pm$ 0.861136311594 0.339981043585	0.347854845137 0.652145154863
5	$\pm$ 0.906179845939 $\pm$ 0.538469310106 0.000000000000	0.236926885056 0.478628670499 0.568888888889
6	$\pm$ 0.932469514203 $\pm$ 0.661209386466 $\pm$ 0.238619186083	0.171324492379 0.360761573048 0.467913934573
7	$\pm$ 0.949107912343 $\pm$ 0.741531125599 $\pm$ 0.405845151377 0.000000000000	0.129484966169 0.279705391489 0.381830050505 0.417959183673
8	$\pm$ 0.960289856498 $\pm$ 0.796666477414 $\pm$ 0.525532409916 $\pm$ 0.183434642496	0.101228536290 0.222381034453 0.313706645878 0.362683783378
9	$\pm$ 0.968160239508 $\pm$ 0.836031107327 $\pm$ 0.613371432701 $\pm$ 0.324253423404 $\pm$ 0.000000000000	0.081274388362 0.180648160695 0.260610696403 0.312347077040 0.330239355001
10	$\pm$ 0.973906528517 $\pm$ 0.865063366689 $\pm$ 0.679409568299 $\pm$ 0.433395394129 $\pm$ 0.148874338982	0.066671344309 0.149451349151 0.219086362516 0.269266719310 0.295524224715

Refira-se que  $n$  pontos de Gauss – Legendre integram exactamente qualquer polinómio de grau  $(2 \times n - 1)$ .

A utilização de uma ordem de integração mais baixa que a estritamente necessária para se obter uma integração exacta pode, no caso de vigas, conduzir a uma melhoria da

solução.

Prova-se [6] que o elemento da viga de três nós de Timoshenko tem um comportamento semelhante ao da viga teórica se se utilizar uma integração reduzida (utilizando apenas dois pontos de Gauss, tanto para a parcela de corte como para a de flexão) e um comportamento demasiado rígido se se efectuar uma integração completa (três pontos de Gauss), sobretudo nos casos em que a razão vão/espessura é elevada (vigas muito esbeltas), a consideração da integração completa tende a sobrevalorizar a parcela de rigidez de corte, sendo este fenómeno habitualmente designado por "Locking" [23].

### 2.5.3 Regra de integração de Gauss – Lobatto

$N$  pontos de Gauss – Lobatto integram exactamente um polinómio de grau  $(2n - 3)$

Ordem $n$	Localização $\xi_i$	Peso $H_i$
2	$\pm 1.000000000000$	1.000000000000
3	$\pm 1.000000000000$ $0.000000000000$	0.333333333333 1.333333333333
4	$\pm 1.000000000000$ $\pm 0.4472135955$	0.166666666667 0.833333333333
5	$\pm 1.000000000000$ $\pm 0.654653670708$ $0.000000000000$	0.100000000000 0.544444444444 0.711111111111
6	$\pm 1.000000000000$ $\pm 0.765055323930$ $\pm 0.285231516481$	0.066666666667 0.378474956298 0.554858377036
7	$\pm 1.000000000000$ $\pm 0.830223896279$ $\pm 0.468848793471$ $0.000000000000$	0.047619047619 0.276826047362 0.431745381210 0.487619047620
8	$\pm 1.000000000000$ $\pm 0.871740148510$ $\pm 0.591700181433$ $\pm 0.209299217903$	0.035714285714 0.210704227144 0.341122692484 0.412458794659

Ordem $n$	Localização $\xi_i$	Peso $H_i$
9	$\pm$ 1.000000000000	0.027777777778
	$\pm$ 0.899757995412	0.165495361561
	$\pm$ 0.677186279511	0.274538712500
	$\pm$ 0.363117463826	0.346428510973
	0.000000000000	0.371519274376
10	$\pm$ 1.000000000000	0.022222222222
	$\pm$ 0.919533908167	0.133305990851
	$\pm$ 0.738773865106	0.224889342063
	$\pm$ 0.477924949810	0.292042683680
	$\pm$ 0.165278957666	0.327539761184

## 2.6 Implementação num programa de cálculo automático de pórticos planos

Os vectores de deslocamentos  $\{a\}$  e de esforços nodais  $\{f\}$  apresentados em 2.2 e 2.3 foram referidos a um sistema de eixos local  $Oxy$  (o eixo dos  $xx$  coincidente com o eixo do elemento).

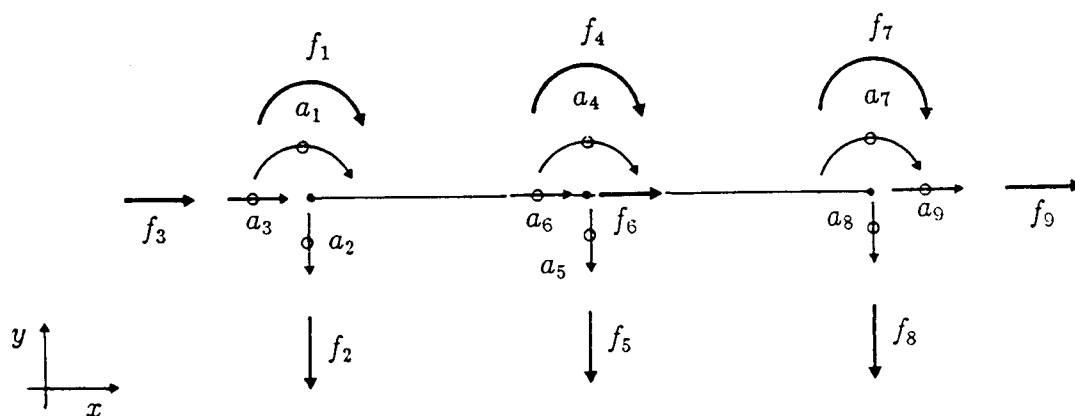


Fig. 2.22 – Deslocamentos e esforços locais.

Se o elemento ocupar uma posição qualquer no plano [2, 10, 13], os deslocamentos e esforços nodais deverão ser referidos a um sistema de eixos global  $xy$ .

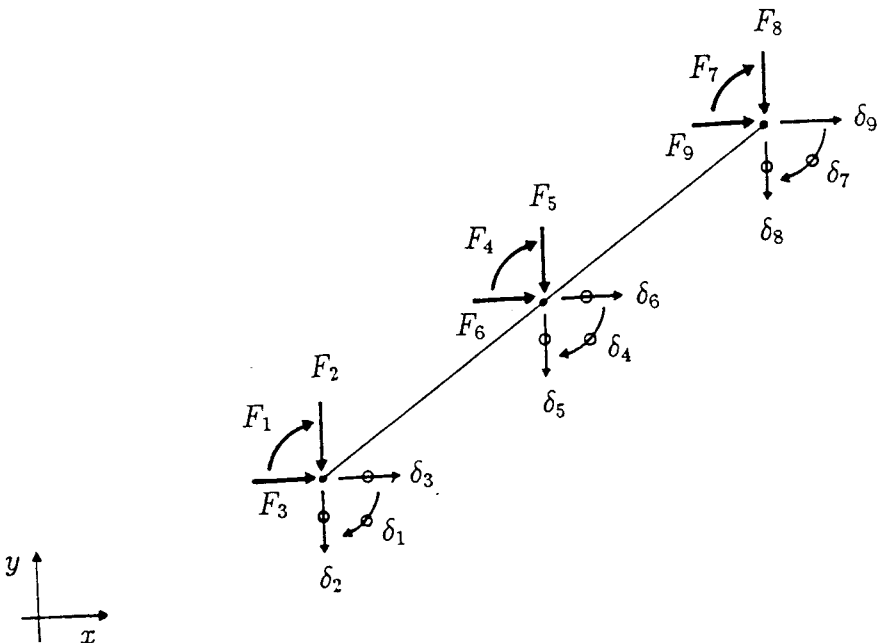


Fig. 2.23 – Deslocamentos e esforços globais.

Os deslocamentos e esforços no sistema de eixos global estão relacionados com os deslocamentos e esforços no sistema de eixos local, pela matriz de transformação dos sistemas de eixos  $[T]$ .

$$\{\delta\} = [T] \{a\} \tag{2.108}$$

$$\{F\} = [T] \{f\} \tag{2.109}$$

em que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & & \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & \vdots & [0] & \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \\ & & & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ [0] & & & \vdots & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ & & & \vdots & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \tag{2.110}$$

no caso do elemento de dois nós, e

$$[T] = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & \vdots & [0] & \vdots & [0] \\
 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\
 & & & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots \\
 [0] & & & \vdots & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & \vdots & [0] \\
 & & & \vdots & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & \vdots & \vdots \\
 \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & 0 & 0 \\
 [0] & & & \vdots & [0] & & & \vdots & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha
 \end{bmatrix} \tag{2.111}$$

no caso do elemento de três nós.

Como,

$$\{f\} = [k_0] \{a\} \tag{2.112}$$

e

$$\{a\} = [T]^{-1} \{\delta\} \tag{2.113}$$

ou, pelo facto de  $[T]$  ser uma matriz ortogonal,

$$\{a\} = [T]^T \{\delta\} \tag{2.114}$$

então,

$$\{f\} = [k_0] [T]^T \{\delta\} \tag{2.115}$$

$$\{F\} = [T] \{f\} = [T] [k_0] [T]^T \{\delta\} \quad (2.116)$$

expressa a relação entre esforços e deslocamentos no sistema de eixos global.

Sabendo que,

$$\{F\} = [K_0] \{\delta\} \quad (2.117)$$

a matriz de rigidez do elemento no sistema de eixos global  $[K_0]$  está relacionada com a matriz de rigidez do elemento no sistema de eixos local  $[k_0]$  pela expressão

$$[K_0] = [T] [k_0] [T]^T \quad (2.118)$$

e atendendo à equação (2.69)

$$[K_0] = \int_{-1}^1 ([T] [B_0]^T) [D_0] ([B_0] [T]^T) \frac{L}{2} d\xi \quad (2.119)$$

Definindo por este processo a matriz de rigidez e o vector solicitação de cada elemento no sistema de eixos global; a matriz de rigidez da estrutura  $K_0^e$  e o vector solicitação da estrutura no mesmo sistema de eixos, é neste trabalho obtida pela técnica de espalhamento, muito utilizada em Mecânica Estrutural.

Conhecidos então, a matriz de rigidez e o vector solicitação da estrutura, os deslocamentos nodais são determinados resolvendo o sistema de equações

$$[K_0^e] \{\delta^e\} = \{F^e\} \quad (2.120)$$

tendo para o efeito sido escolhida a resolução em banda do sistema.

Após a determinação destes deslocamentos, as tensões em qualquer ponto de um dado elemento, nomeadamente nos pontos de Gauss, são obtidos através da expressão,

$$\{\sigma\} = [D_0] \left( [B_0] [T]^T \right) \{\delta\} \quad (2.121)$$

As expressões (2.118) e (2.120) evidenciam o facto de esta mudança de eixos, poder ser facilmente efectuada se forem introduzidas as transformações respectivas na matriz de deformação.

## 2.7 Exemplos

Por ser extraordinariamente laborioso, não é o objectivo deste trabalho, efectuar um estudo paramétrico dos vários factores que influenciam os resultados obtidos por este método (número de elementos, tipo de elemento, tipo de ordem de integração, etc.).

Procura-se então, com os exemplos muito simples apresentados neste capítulo, apenas evidenciar a influência nos resultados obtidos de:

- tipo de elemento;
- tipo e ordem de integração;
- existência ou não de esforço axial;
- altura dos elementos.

Apesar de não terem sido ainda descritas a não linearidade material e geométrica os seus efeitos foram já considerados nesta análise, para que este esforço de síntese não seja repetido noutros capítulos e sobretudo para tentar extrair possíveis ilações que sejam úteis para a boa qualidade dos resultados de qualquer exemplo a analisar e a apresentar neste trabalho.

Com este objectivo, são consideradas duas vigas simplesmente apoiadas com a designação Viga 1 e Viga 2, que serão analisadas com pormenor no capítulo 4.

As duas vigas têm o mesmo vão de 6,4008 *m* e são solicitadas apenas por uma força concentrada *P* a meio vão.

A razão vão/altura é de 11,4 para a Viga 1 ( $h = 0,56134\text{ m}$ ) e de 40,0 para a Viga 2. ( $h = 0,160\text{ m}$ ), sendo a largura das duas vigas  $0,30734\text{ m}$ .

A percentagem de armadura (1,135%) em cada face, é igual nas duas vigas; considerando-se um recobrimento de  $0,1\text{ h}$ .

Para cada viga, são ainda consideradas duas condições distintas de ligações ao exterior (permitindo ou não o deslocamento horizontal). As características dos materiais utilizados são as referidas em 4.4.3.

Devido à simetria da solicitação e da geometria das vigas é apenas analisada metade da estrutura, discretizada em quatro elementos refinados próximo do ponto de aplicação da carga  $P$ .

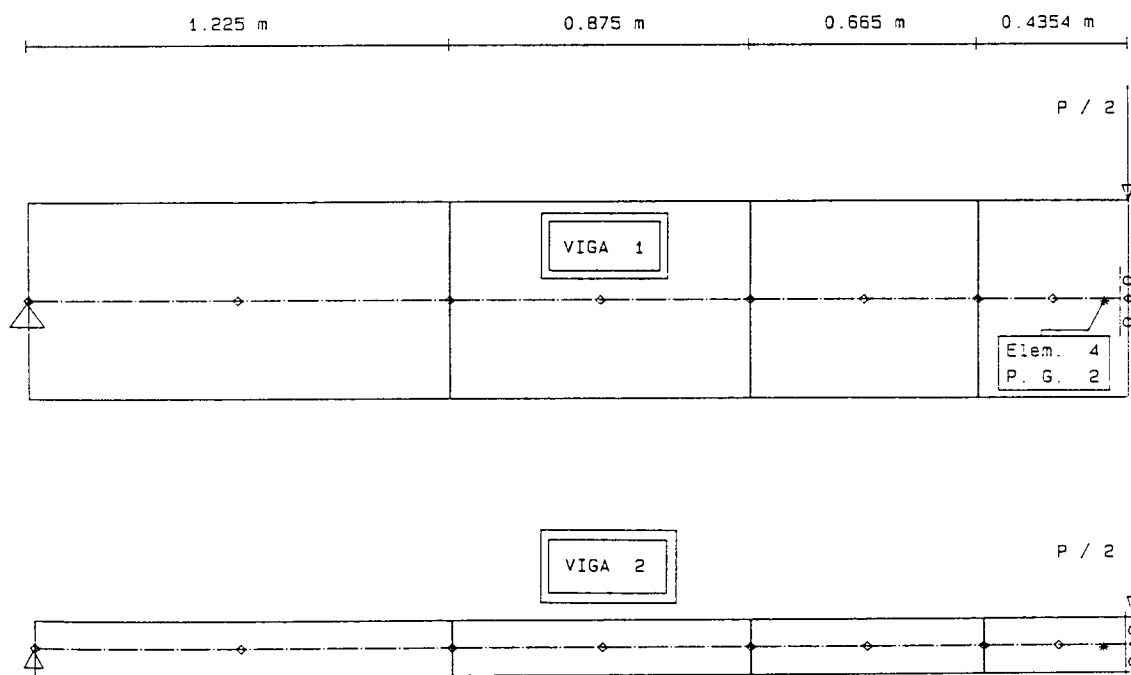


Fig. 2.24 – Malha de elementos finitos utilizada.

São apresentados de seguida alguns resultados (deslocamento vertical sob o ponto de aplicação da carga, esforço axial e momento flector no ponto de integração mais próximo do eixo de simetria), para todas as análises efectuadas (Quadros I a IV).

Nestes quadros a designação  $S$  ou  $D$  significa que o deslocamento horizontal é permitido ou não. A designação  $LG$  ou  $NLG$  significa se foi considerado um comportamento



linear ou não linear geométrico. Foi ainda considerada simultaneamente a não linearidade material *NLM* e ou um comportamento linear material *LM*. Em cada um destes casos foi utilizada a integração de Gauss ou de Gauss – Lobatto com dois, três ou quatro pontos.

São ainda apresentados os valores do momento flector e esforço axial nos vários pontos de integração do quarto elemento da Viga 1 (Quadros V a VIII), quando a metade da viga descrita com liberdade de deslocamento horizontal é solicitada por uma força vertical de  $20\text{ kN}$  sobre o eixo de simetria e uma força horizontal de  $20\text{ kN}$  no apoio simples.

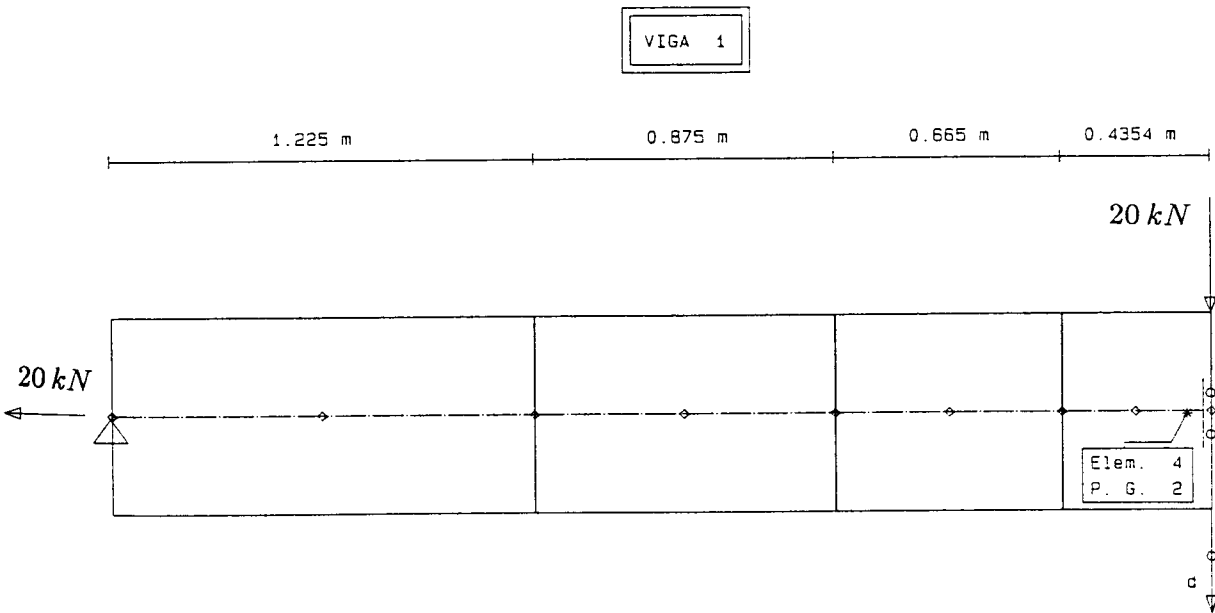


Fig. 2.25 – Geometria da viga e solicitação considerada.

Foram para este efeito consideradas todas as combinações das seguintes hipóteses:

- comportamento elástico linear;
- comportamento não linear geométrico;
- comportamento não linear material;
- comportamento não linear geométrico e material;
- elementos de dois ou três nós;
- integração de Gauss – Legendre ou Gauss – Lobatto com dois, três e quatro pontos.

Quadro I

4 elementos de 2 nós			(P) (kN)	Integração de Gauss			Integração de Gauss - Lobatto		
				2 PG	3 PG	4 PG	2 PGL	3 PGL	4 PGL
V 1 S	L M	d (mm)	450	18.21	18.21	18.21	17.94	18.21	18.21
		N (kN)		—	—	—	—	—	—
		M (kN.m)		699.39	709.05	713.29	687.44	720.09	720.09
	N L M	d (mm)	450	72.35	72.32	72.39	71.83	72.54	72.40
		N (kN)		-120.36	-156.64	-172.42	-6.95	-196.59	-197.24
		M (kN.m)		699.39	708.02	711.77	687.44	717.55	717.68
V 1 D L G	L M	d (mm)	450	18.21	18.21	18.21	17.94	18.21	18.21
		N (kN)		—	—	—	—	—	—
		M (kN.m)		699.39	709.05	713.29	687.44	720.09	720.09
	N L M	d (mm)	450	26.53	26.54	26.54	26.19	26.55	26.54
		N (kN)		-1296.64	-1320.85	-1330.21	-1266.55	-1346.36	-1344.93
		M (kN.m)		699.47	708.51	712.42	687.51	718.62	718.65
V 1 D N L G	L M	d (mm)	450	18.16	18.16	18.16	17.89	18.16	18.16
		N (kN)		95.71	95.29	95.18	90.67	95.13	95.12
		M (kN.m)		697.56	707.22	711.45	685.64	718.25	718.25
	N L M	d (mm)	450	29.44	29.43	29.42	28.93	29.43	29.42
		N (kN)		-1269.24	-1309.27	-1321.95	-1218.34	-1352.84	-1347.67
		M (kN.m)		733.68	740.71	743.09	720.99	748.52	747.81

Quadro II

4 elementos de 2 nós			(P) (kN)	Integração de Gauss			Integração de Gauss - Lobatto		
				2 PG	3 PG	4 PG	2 PGL	3 PGL	4 PGL
V 2 S	L M	d (mm)	350	61.17	61.17	61.17	60.27	61.17	61.17
		N (kN)		—	—	—	—	—	—
		M (kN.m)		54.40	55.15	55.48	53.47	56.01	56.01
	N L M	d (mm)	350	216.65	216.03	216.19	214.42	216.12	216.78
		N (kN)		-32.73	-42.72	-47.03	-18.93	-53.70	-53.79
		M (kN.m)		54.40	55.07	55.36	53.47	55.81	55.82
V 2 D L G	L M	d (mm)	350	61.17	61.17	61.17	60.27	61.17	61.17
		N (kN)		—	—	—	—	—	—
		M (kN.m)		54.40	55.15	55.48	53.47	56.01	56.01
	N L M	d (mm)	350	87.99	88.03	88.03	86.90	88.05	88.01
		N (kN)		-353.83	-361.20	-363.88	-345.25	-368.42	-367.64
		M (kN.m)		54.40	55.11	55.42	53.48	55.90	55.91
V 2 D N L G	L M	d (mm)	350	48.30	48.30	48.30	47.58	48.30	48.30
		N (kN)		191.27	190.34	190.10	179.59	189.96	189.96
		M (kN.m)		44.66	45.38	45.70	43.98	46.21	46.21
	N L M	d (mm)	350	121.18	120.98	120.90	118.28	120.86	121.07
		N (kN)		87.28	77.47	75.16	88.96	72.55	76.43
		M (kN.m)		39.07	39.65	39.79	38.74	39.97	39.78

Quadro III

4 elementos de 3 nós			(P) (kN)	Integração de Gauss			Integração de Gauss - Lobatto		
				2 PG	3 PG	4 PG	2 PGL	3 PGL	4 PGL
V 1 S	L M	d (mm)	450	18.60	18.51	18.51	18.20	18.44	18.51
		N (kN)		—	—	—	—	—	—
		M (kN.m)		699.39	707.46	711.53	671.11	715.28	718.04
	N L M	d (mm)	450	73.54	72.70	72.83	72.09	72.56	72.85
		N (kN)		-0.40	1.54	2.03	—	1.49	3.05
		M (kN.m)		699.45	691.69	693.91	671.11	686.93	697.43
V 1 D L G	L M	d (mm)	450	18.60	18.51	18.51	18.20	18.44	18.51
		N (kN)		—	—	—	—	—	—
		M (kN.m)		699.39	707.46	711.53	671.11	715.28	718.04
	N L M	d (mm)	450	26.99	26.85	26.85	26.41	26.74	26.86
		N (kN)		-1232.71	-1226.98	-1228.56	-1224.84	-1223.42	-1227.17
		M (kN.m)		699.47	704.90	708.55	671.19	708.61	714.35
V 1 D N L G	L M	d (mm)	450	18.54	18.46	18.46	18.14	18.39	18.46
		N (kN)		102.78	102.57	102.99	100.15	102.91	103.77
		M (kN.m)		697.49	705.58	709.64	669.29	713.41	716.16
	N L M	d (mm)	450	30.72	30.07	30.19	29.26	29.75	30.21
		N (kN)		-1228.18	-1226.53	-1231.20	-1174.08	-1225.50	-1240.80
		M (kN.m)		736.69	732.36	735.36	705.54	731.08	738.67

Quadro IV

4 elementos de 3 nós			(P) (kN)	Integração de Gauss			Integração de Gauss - Lobatto		
				2 PG	3 PG	4 PG	2 PGL	3 PGL	4 PGL
V 2 S	L M	d (mm)	35	61.27	60.27	60.27	59.93	60.10	60.27
		N (kN)		—	—	—	—	—	—
		M (kN.m)		54.40	54.12	54.33	52.20	53.82	54.68
	N L M	d (mm)	35	225.58	214.00	213.84	213.47	213.71	214.00
		N (kN)		-0.0	-0.02	-0.01	-0.03	-0.02	—
		M (kN.m)		54.40	52.47	52.50	52.20	52.35	52.54
V 2 D L G	L M	d (mm)	35	61.27	60.27	60.27	59.93	60.10	60.27
		N (kN)		—	—	—	—	—	—
		M (kN.m)		54.40	54.12	54.33	52.20	53.82	54.68
	N L M	d (mm)	35	88.36	86.86	86.86	86.47	86.65	86.86
		N (kN)		-335.56	-333.00	-332.94	-333.48	-333.33	-332.96
		M (kN.m)		54.40	53.43	53.56	52.21	53.04	53.78
V 2 D N L G	L M	d (mm)	35	48.53	48.10	48.10	47.68	48.02	48.10
		N (kN)		200.79	198.73	199.66	197.30	200.72	201.34
		M (kN.m)		44.67	44.66	44.87	42.79	44.43	45.20
	N L M	d (mm)	35	121.65	122.40	122.37	120.91	122.21	122.37
		N (kN)		135.41	129.66	132.60	125.31	136.40	137.33
		M (kN.m)		37.96	36.67	36.52	36.56	36.14	36.29

Quadro V

Integração de Gauss		Elementos de 2 nós							
		ALG + ALM		ANLG + ALM		ALG + ANLM		ANLG + ANLM	
		M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)
2PG	PG 1	57.14	20.00	57.11	20.03	57.14	20.08	57.12	20.10
	PG 2	62.17	20.00	62.14	19.97	62.17	19.92	62.14	19.90
3PG	PG 1	56.28	20.00	56.25	20.04	56.28	20.10	56.26	20.13
	PG 2	59.65	20.00	59.62	19.99	59.65	20.00	59.63	20.00
	PG 3	63.03	20.00	62.99	19.97	63.03	19.90	63.00	19.87
4PG	PG 1	55.90	20.00	55.87	20.05	55.90	20.11	55.88	20.15
	PG 2	58.17	20.00	58.14	20.01	58.17	20.05	58.15	20.05
	PG 3	61.13	20.00	61.10	19.98	61.13	19.96	61.11	19.94
	PG 4	63.40	20.00	63.37	19.97	63.40	19.88	63.38	19.86

Quadro VI

Integração de Gauss - Lobatto		Elementos de 2 nós							
		ALG + ALM		ANLG + ALM		ALG + ANLM		ANLG + ANLM	
		M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)
2PGL	PGL 1	58.20	20.00	58.17	20.05	58.20	20.04	58.18	20.08
	PGL 2	61.10	20.00	61.07	19.95	61.10	19.96	61.08	19.92
3PGL	PGL 1	55.30	20.00	55.27	20.06	55.30	20.13	55.28	20.17
	PGL 2	59.65	20.00	59.62	19.99	59.65	20.00	59.63	20.00
	PGL 3	64.01	20.00	63.98	19.97	64.01	19.86	63.98	19.84
4PGL	PGL 1	55.30	20.00	55.27	20.06	55.30	20.13	55.28	20.17
	PGL 2	57.71	20.00	57.68	20.02	57.71	20.06	57.68	20.07
	PGL 3	61.60	20.00	61.57	19.98	61.60	19.94	61.58	19.92
	PGL 4	64.01	20.00	63.98	19.97	64.01	19.86	63.98	19.84

Quadro VII

Integração de Gauss		Elementos de 3 nós											
		ALG + ALM			ANLG + ALM			ALG + ANLM			ANLG + ANLM		
		M (kN.m)	V (kN)	N (kN)	M (kN.m)	V (kN)	N (kN)	M (kN.m)	V (kN)	N (kN)	M (kN.m)	V (kN)	N (kN)
2PG	PG 1	57.14	20.00	20.00	57.11	20.00	20.00	57.14	20.00	20.00	57.12	20.00	20.00
	PG 2	62.17	20.00	20.00	62.14	20.00	20.00	62.17	20.00	20.00	62.14	20.00	20.00
3PG	PG 1	56.42	21.67	20.00	56.39	21.67	20.01	56.39	21.29	20.00	56.37	21.29	20.00
	PG 2	59.65	17.91	20.00	59.62	17.91	19.99	59.65	18.38	20.00	59.63	18.38	20.00
	PG 3	62.89	21.67	20.00	62.85	21.67	20.01	62.92	21.29	20.00	62.89	21.29	20.00
4PG	PG 1	56.06	22.56	20.00	56.03	22.55	20.01	56.03	21.98	20.00	56.00	21.97	20.00
	PG 2	58.24	18.64	20.00	58.20	18.63	20.00	58.22	18.94	20.00	58.20	18.94	20.00
	PG 3	61.07	18.64	20.00	61.04	18.63	20.00	61.09	18.94	20.00	61.06	18.94	20.00
	PG 4	63.25	22.56	20.00	63.21	22.56	20.01	63.28	21.98	20.00	63.26	21.98	20.00

Quadro VIII

Integração de Gauss - Lobatto		Elementos de 3 nós											
		ALG + ALM			ANLG + ALM			ALG + ANLM			ANLG + ANLM		
		M (kN.m)	V (kN)	N (kN)	M (kN.m)	V (kN)	N (kN)	M (kN.m)	V (kN)	N (kN)	M (kN.m)	V (kN)	N (kN)
2PGL	PGL 1	59.63	20.00	20.00	59.62	20.00	20.00	59.65	20.00	20.00	59.63	20.00	20.00
	PGL 2	59.63	20.00	20.00	59.62	20.00	20.00	59.65	20.00	20.00	59.63	20.00	20.00
3PGL	PGL 1	55.73	23.93	20.00	55.70	23.93	20.02	55.64	23.08	20.00	55.61	23.08	20.01
	PGL 2	59.65	18.03	20.00	59.62	18.03	19.99	59.65	18.46	20.00	59.63	18.46	20.00
	PGL 3	63.58	23.93	20.00	63.55	23.93	20.02	63.67	23.08	20.00	63.65	23.08	20.01
4PGL	PGL 1	55.48	24.18	20.00	55.45	24.17	20.02	55.44	23.23	20.00	55.42	23.23	20.01
	PGL 2	57.79	19.16	20.00	57.76	19.16	20.00	57.77	19.35	20.00	57.74	19.35	20.00
	PGL 3	61.52	19.16	20.00	61.49	19.16	20.00	61.54	19.35	20.00	61.51	19.35	20.00
	PGL 4	63.83	24.18	20.00	63.79	24.18	20.02	63.87	23.23	20.00	63.84	23.23	20.01

Da análise detalhada destes quadros, importa salientar:

- Admitindo um comportamento elástico linear:

- i) com o elemento de três nós e a integração reduzida (2 PG) obtém-se a solução teórica.
- ii) o mesmo elemento com uma integração completa (3 PG, 4 PG, . . . 4 PGL . . .) manifesta um comportamento mais rígido que o real detectando-se alguma perturbação nos esforços nos vários pontos de integração de um elemento (nomeadamente o esforço

transverso).

- iii) o elemento de dois nós com integração completa (2 *PG*, 3 *PG*, 4 *PG*, . . ., 3 *PGL*, 4 *PGL*, . . .) permite obter a solução teórica.

– Admitindo um comportamento não linear:

- iv) com o elemento de três nós e integração reduzida continua-se a encontrar resultados muito bons.
- v) neste elemento, com integração completa é mais uma vez detectada alguma perturbação no valor dos esforços.
- vi) o elemento de dois nós, com qualquer ordem de integração, apresenta alguma perturbação no valor dos esforços (nomeadamente nos valores do esforço axial).

É curioso salientar que nos exemplos apresentados nos quadros V e VII, em que o esforço axial deveria valer 20 *kN* em qualquer ponto da viga por não se ter iniciado ainda a fendilhação; foi detectada uma perturbação dos valores encontrados nos vários pontos de integração de um elemento, embora a sua média seja, ou pelo menos tende para, o valor correcto (satisfazendo-se o equilíbrio entre as forças nodais equivalentes e as forças exteriores).

## 2.8 Conclusões

- Pelos aspectos indicados no fim do capítulo 2.6, parece aconselhável adoptar nos exemplos a apresentar neste trabalho, a utilização de elementos de três nós com integração reduzida.
- Importa salientar a influência do refinamento na qualidade de resultados encontrados, como será evidenciado por exemplo no capítulo 5.

## 2.9 Bibliografia

- [1] Angel L.L. and Rowland R. – Full - Range Analysis of Concrete Frames – Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No ST8, Aug. 1973, pp. 1761 – 1783.
- [2] Araújo F.C. – Cálculo Matricial das Estruturas Reticuladas – 2<sup>as</sup>. Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Rio de Janeiro – S. Paulo, Agosto 1967.
- [3] Bathe K.J. and Wilson E.L. – Numerical Methods in Finite Element Analysis – Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1956.
- [4] Coates R.C., Coutie M.G. and Kong F.K. – Structural Analysis – Thomas Nelson and Sons Ltd., 1972.
- [5] Corradi L. and Poggi C. – A Refined Finite Element Model for the Analysis of Elastic - Plastic Frames – Department of Structural Engineering, Politecnico di Milano.
- [6] Delgado R.M. – O Método dos Elementos Finitos na Análise Dinâmica de Barragens Incluindo a Interação Sólido - Líquido – Tese de doutoramento, Faculdade de Engenharia, Porto 1986.
- [7] Pereira E.M.B.R. – Análise Fisicamente Não Linear de Pórticos Tridimensionais de Betão Armado – Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1989.
- [8] Ganaba T.H. and May I.M. – Some Observations on Through Depth Numerical Integration for Finite Element Analysis of Slabs – Civil & Structural Engineering, University of Bradford.
- [9] Hinton E. and Owen D.R.J. – An Introduction to Finite Element Computations – Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1981.
- [10] Holzer S.M. – Computer Analysis of Structures - Matrix Structural Analysis Structured Programming – Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1985.
- [11] Irons B. and Ahmad S. – Techniques of Finite Elements – Ellis Horwood Limited, 1986.
- [12] Irons B. and Shrive N. – Finite Element Primer – Ellis Horwood Limited, 1983.
- [13] Jenkins W.M. – Matrix and Digital Computer Methods in Structural Analysis – Mc Graw-Hill, London, 1969.
- [14] Martin H.C. – Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis – Mc Graw-Hill Book Company, 1966.

- [15] Martin H.C. and Cary G. – Introduction to Finite Element - Theory and Application, Analysis – Mc Graw-Hill Book Company, 1973.
- [16] Owen D.R.J. and Hinton E. – Finite Element Programming – Academic Press, 1977.
- [17] Pestel E.C. and Leckie F.A. – Matrix Methods in Elastomechanics – Mc Graw-Hill Book Company, 1963.
- [18] Reddy J.N. – An Introduction to the Finite Element Method – Mc Graw-Hill, 1985.
- [19] Stolarski H. and Belytschko T. – Shear and Membrane Locking in Curved *C o* Elements – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 41, 1983, pp. 279 – 296.
- [20] Wang P.C. – Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics – John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [21] Wayne C.K., Martin J.G. and Robert H.L. – Finite Element for Reinforced Concrete Frame Study – Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No ST 7, July 1973, pp. 1371 – 1390.
- [22] White R.E. – An Introduction to the Finite Element Method With Applications to Nonlinear Problems – A Wiley - Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1985.
- [23] Zienkiewicz O.C. – The Finite Element Method in Engineering Science – Mc Graw-Hill, London, 1971.
- [24] Zienkiewicz O.C. and Morgan K. – Finite Elements and Approximation – A Wiley - Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1983.



## 3 – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

### 3.1 Introdução

Em qualquer dos elementos finitos apresentados no capítulo anterior as relações geométricas e constitutivas foram consideradas lineares e os deslocamentos e deformações admitidos muito pequenos (a geometria da estrutura mantinha-se praticamente inalterada quando esta era solicitada não tendo sido considerados pois, os efeitos de segunda ordem).

Mesmo sendo válida a hipótese de pequenas deformações, se se pretender efectuar uma avaliação mais rigorosa dos deslocamentos e da capacidade de carga; em determinadas estruturas, será necessário considerar as alterações da geometria, ou seja efectuar uma análise não linear geométrica, tendo pois em conta, a não linearidade das relações entre deformações e deslocamentos.

Acrescente-se que em geral quando se trata de estruturas de betão é necessário ou conveniente combinar a não linearidade geométrica com a não linearidade material (não linearidade das relações constitutivas — relações entre tensões e deformações), que será descrita no capítulo seguinte, o que não acarretará qualquer incompatibilidade com o descrito neste capítulo.

Neste capítulo são apresentados alguns métodos para a solução dos problemas não lineares agora referidos e é analisada em pormenor a metodologia utilizada para a abordagem da não linearidade geométrica baseada numa formulação lagrangeana total [14, 15, 17, 23].

### 3.2 Métodos de solução numérica de problemas não lineares

Na análise não linear de uma estrutura [2 a 6], para se acompanhar a evolução do campo de tensões e deformações, aumentando a precisão do método de análise, dever-se-á aplicar a solicitação por incrementos.

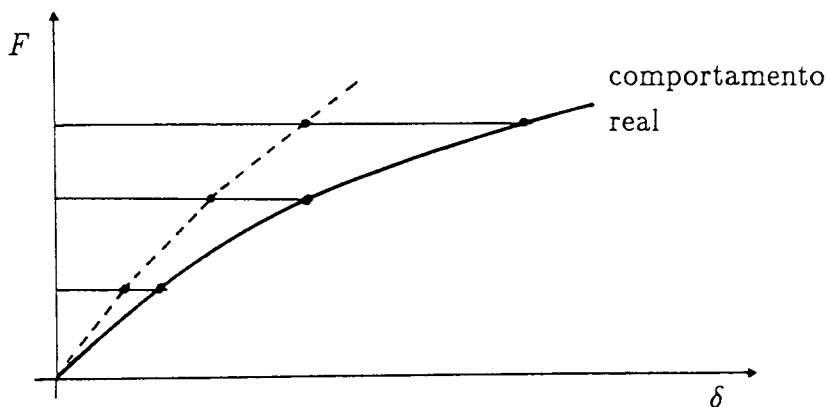


Fig. 3.1 – Método incremental não iterativo.

Por não ser exequível a aplicação de incrementos de carga infinitamente pequenos é conveniente a utilização de métodos incrementais e iterativos, a descrever neste capítulo, para que a sollicitação não se afaste significativamente da solução correcta.

Comece-se por recordar o método de Newton-Raphson para a resolução de equações não lineares de uma só variável da forma

$$\psi(x) = 0 \quad (3.1)$$

Se na  $n$ -ésima tentativa o valor  $x_n$  ainda não satisfaz a equação 3.1

$$\psi(x)_n \neq 0$$

desenvolvendo (3.1) em série de Taylor e considerando apenas os dois primeiros termos obtem-se

$$\psi(x)_{n+1} \simeq \psi(x)_n + \frac{d}{dx} (\psi(x))_n \Delta x_n = 0 \quad (3.2)$$

estando o novo valor  $x_{n+1}$  relacionado com o anterior  $x_n$  pela equação

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \quad (3.3)$$

em que

$$\Delta x_n = -\frac{\psi(x)_n}{\frac{d}{dx}(\psi(x))_n} \quad (3.4)$$

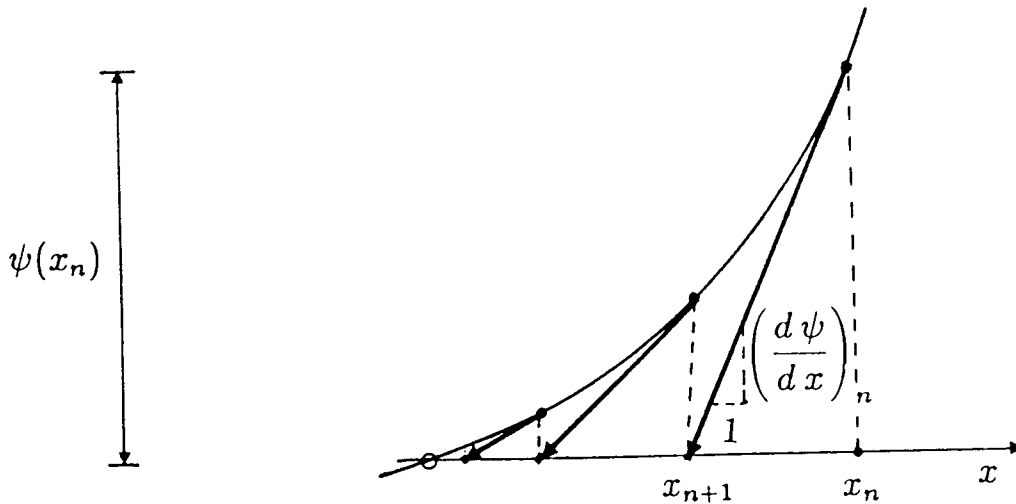


Fig. 3.2 – Método de Newton-Raphson.

Uma alternativa a este método seria a de considerar sempre o mesmo valor para a derivada da função  $\psi$ , ou seja, considerando que a solução era procurada seguindo sempre um caminho paralelo à tangente inicial

$$\frac{d}{dx}(\psi(x))_0$$

pelo que

$$\Delta x_n = -\frac{\psi(x)_n}{\frac{d}{dx}(\psi(x))_0} \quad (3.5)$$

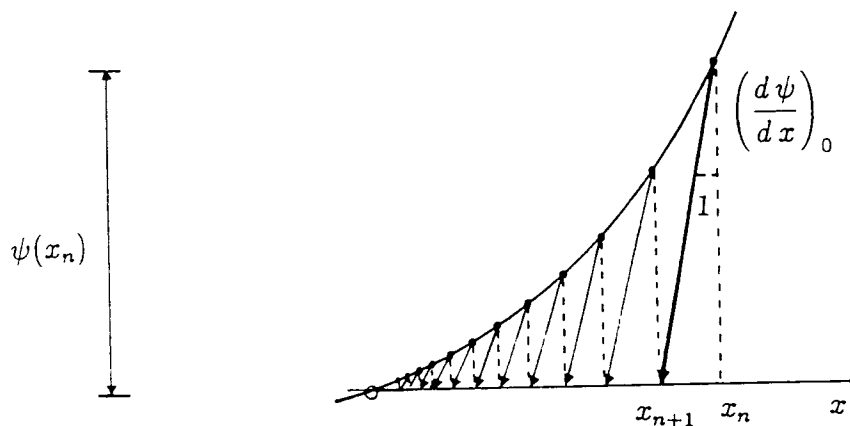


Fig. 3.3 – Método de inclinação constante (rigidez inicial).

As ideias agora expostas, para a resolução de equações de uma só variável, podem ser alargadas à resolução de equações com mais do que uma variável.

### 3.2.1 Método de Newton – Raphson

Quer os deslocamentos e deformações de uma estrutura, possam ser considerados grandes ou pequenos, as condições de equilíbrio entre "forças" exteriores e interiores, que resultam da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, tem de ser satisfeita.

A aplicação do princípio dos trabalhos virtuais resulta na seguinte expressão

$$\psi(\{\delta\}) = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \{F\} \quad (3.6)$$

em que

$\psi(\{\delta\})$  – são as forças residuais não equilibradas;

$\{F\}$  – forças generalizadas aplicadas à estrutura;

$\{\sigma\}$  – estado de tensão actual;

$\int_V [B]^T \{\sigma\} dV$  – forças interiores (forças nodais equivalentes).

Considerando agora as variações  $d\{\delta\}$  (já que no método de Newton – Raphson pretende-se obter a relação entre  $d\{\delta\}$  e  $d\{\psi\}$ ) e como  $\{F\}$  é considerado independente de  $\{\delta\}$

$$d\{\psi\} = \int_V d[B]^T \sigma dV + \int_V [B]^T d\{\sigma\} dV \quad (3.7)$$

e se

$$d\{\sigma\} = [D_0] \{d\varepsilon\} = [D_0] [B] d\{\delta\} \quad (3.8)$$

em que  $[D_0]$  é a matriz de elasticidade. No caso da consideração simultânea da não linearidade material esta matriz será, como veremos, a matriz  $[D]$ .

$$d\{\psi\} = \left( \int_V [B]^T [D_0] [B] dV + \int_V d[B]^T \sigma dV \right) d\{\delta\} = [K_T] d\{\delta\} \quad (3.9)$$

A aplicação do método de Newton - Raphson a um processo de resolução incremental e iterativo resulta então em:

- Se na  $n$ -ésima iteração as forças residuais não são nulas, determina-se a correcção a aplicar à solução obtida nessa iteração.

$$\Delta\{\delta\}_n = -[k_T]_n^{-1} \{\psi\}_n \quad (3.10)$$

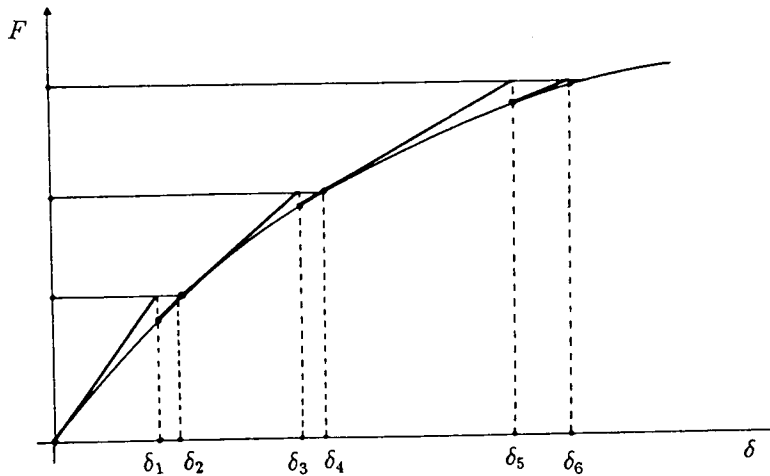


Fig. 3.4 - Método de Newton - Raphson.

### 3.2.2 Método de Newton – Raphson modificado

Só em determinadas iterações do processo incremental iterativo é que é calculada a matriz de rigidez tangente da estrutura.

É habitual, em análise não linear, a modificação do método de Newton – Raphson por forma e que a matriz de rigidez seja actualizada apenas numa dada iteração; mantendo-se constante nas restantes iterações de cada incremento. Tem a vantagem, em relação ao método de Newton – Raphson, de reduzir o tempo de computação por iteração, necessitando no entanto de mais iterações para ser atingida a convergência.

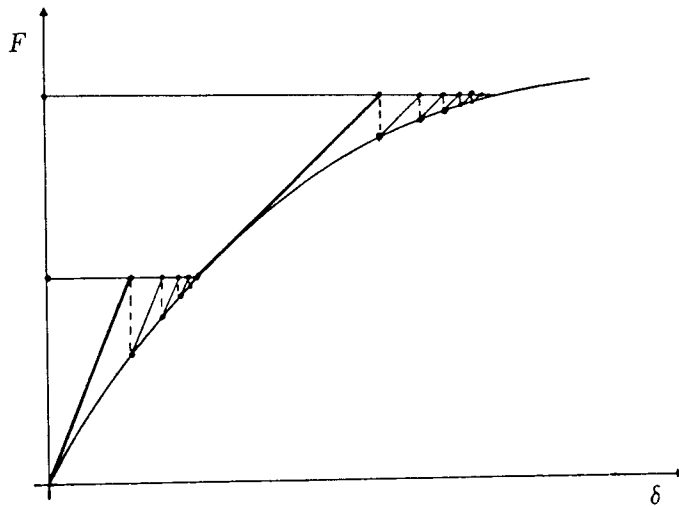


Fig. 3.5 – Método de Newton – Raphson modificado na primeira iteração.

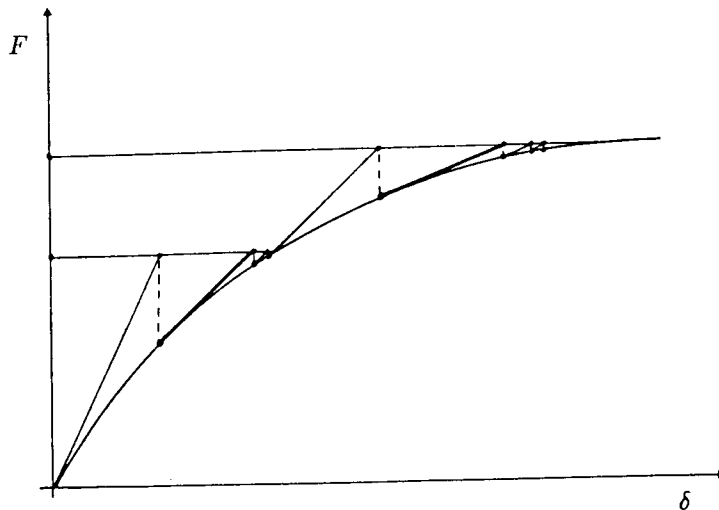


Fig. 3.6 – Método de Newton – Raphson modificado na segunda iteração.

### 3.2.3 Método da rigidez inicial

Neste método a matriz de rigidez nunca é recalculada, mantendo-se sempre no processo incremental e iterativo a matriz de rigidez tangente inicial da estrutura.

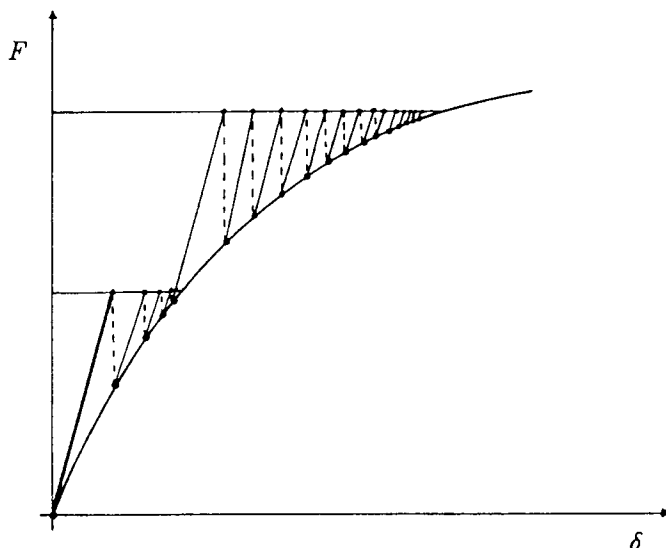


Fig. 3.7 – Método da rigidez inicial.

O esforço de computação é o menor possível dentro de cada iteração, necessitando no entanto, eventualmente, de um maior número de iterações para se atingir a convergência.

## 3.3 Critérios de convergência

Em cada iteração do processo incremental e iterativo é necessário verificar se, a menos de uma tolerância pré-definida, a actual configuração da estrutura garante o equilíbrio. Se a convergência tiver sido atingida nessa iteração, será aplicado um novo incremento de solicitação prosseguindo o processo de análise; caso contrário nova iteração será necessária, até um máximo pré-definido.

Os critérios de convergência utilizados neste trabalho consistem num critério energético e num critério de forças aplicado separadamente a cada grau de liberdade.

No critério energético utilizado, compara-se o trabalho de deformação da estrutura realizado numa dada iteração, com o trabalho realizado na primeira iteração do incremento em questão.

$$\text{Resíduo} = \frac{\sum_{i=1}^n (\psi_i^r(j)) \times (\delta_i^r(j) - \delta_i^{r-1}(j))}{\sum_{i=1}^n (\psi_i^1(j)) \times (\delta_i^1(j) - \delta_i^0(j))} \quad (3.11)$$

em que  $\psi_i^r(j)$  são as componentes das forças residuais na iteração  $r$  associadas aos graus de liberdade  $j$  do nó  $i$  e  $\delta_i^r(j)$  os correspondentes deslocamentos de  $i$ .

Mesmo se num dado incremento a resposta da estrutura for elástica linear, o critério energético agora descrito, obriga que seja efectuada uma segunda iteração, visto que na primeira iteração de cada incremento o resíduo dado por este critério é unitário.

Para evitar esta situação, cumulativamente com este critério é considerado um critério de convergência em termos de forças, em que se compara o valor da norma das forças residuais com o da norma das forças totais aplicadas à estrutura.

$$\text{Resíduo} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\psi_i^r(j))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i^r(j))^2}} \quad (3.12)$$

em que  $f_i^r(j)$  é a componente segundo o grau de liberdade ( $j$ ) das forças totais, que actuam no nó  $i$  na iteração  $r$ .

A menos que seja indicado outro valor, a tolerância adoptada nos exemplos analisados será de 0,001.



## 3.4 Formulação adotada na análise não linear geométrica

### 3.4.1 Introdução

No estudo da não linearidade geométrica, são normalmente utilizadas três formulações distintas [14, 15, 17, 23], conforme o sistema de eixos escolhido para referenciar as variáveis estáticas (forças) e cinemáticas (deslocamentos).

Essas formulações são:

- i) FORMULAÇÃO LAGRANGEANA TOTAL – O sistema de eixos de referência (Fig. 3.8) está ligado à configuração inicial da estrutura indeformada

$$a^i = a^0 + u^i \quad (3.13)$$

- ii) FORMULAÇÃO LAGRANGEANA MODIFICADA – Em qualquer configuração de equilíbrio toma-se como referência a configuração de equilíbrio anterior (Fig. 3.8).

$$a^j = a^i + u^j \quad (3.14)$$

- iii) FORMULAÇÃO EULERIANA – é escolhida a configuração de equilíbrio final para sistema de referência (Fig. 3.8).

$$a^i = a^F + u^F \quad (3.15)$$

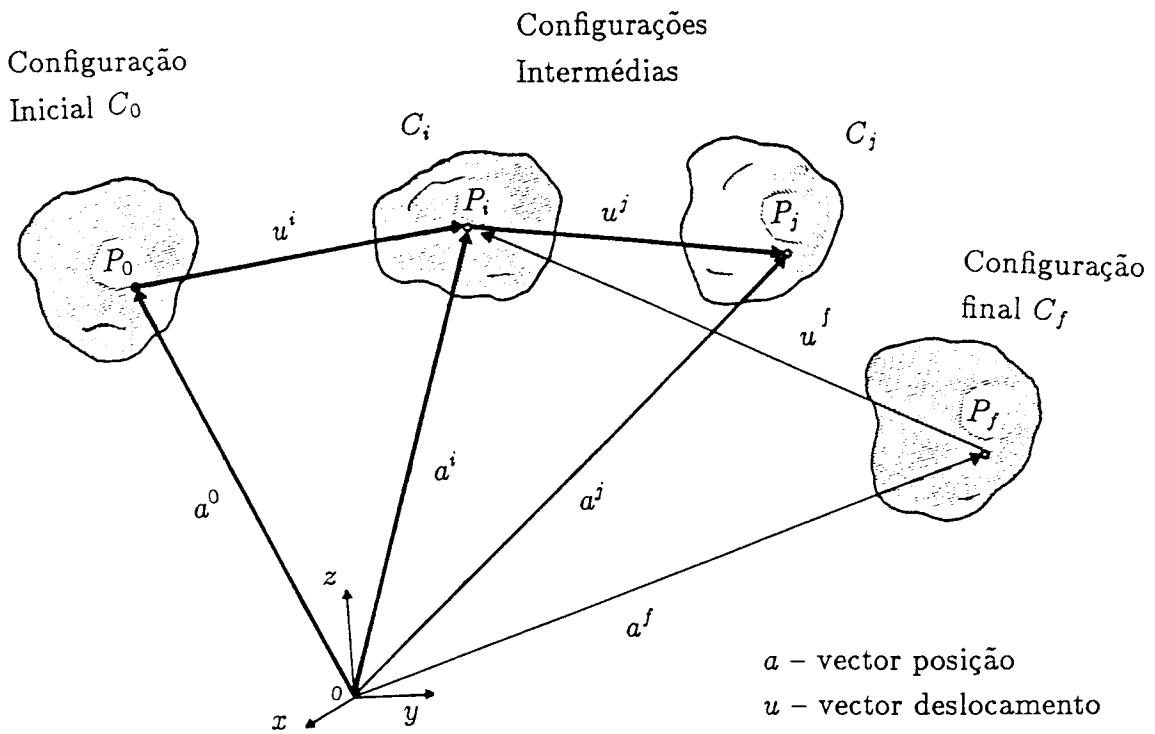


Fig. 3.8 - Evolução da deformação de uma estrutura com grandes deslocamentos.

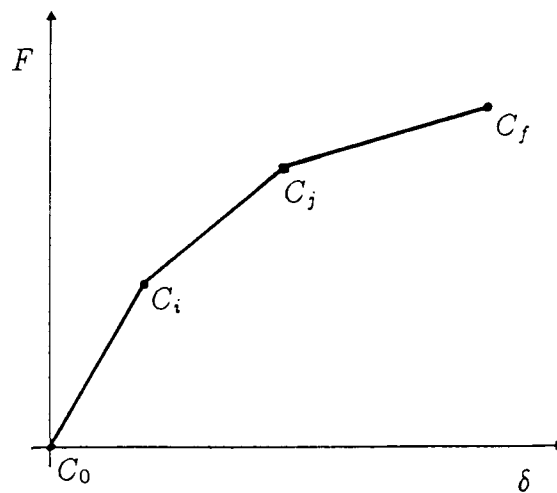


Fig. 3.9 - Configurações de equilíbrio da estrutura.

Neste trabalho foi utilizada a formulação lagrangeana total, pelo facto de esta formulação reduzir o esforço de cálculo automático. Algumas matrizes, como é caso da matriz

de deformação para os pequenos deslocamentos  $[B_0]$  e a matriz de transformação de coordenadas  $[T]$ , mantêm-se constantes ao longo do processo de análise não linear.

### 3.4.2 Vector deformação

Para apresentar a aplicação desta formulação à análise não linear geométrica de estruturas porticadas planas, comecemos por estudar a deformada de um trecho de viga de comprimento infinitesimal  $dx$  [23].

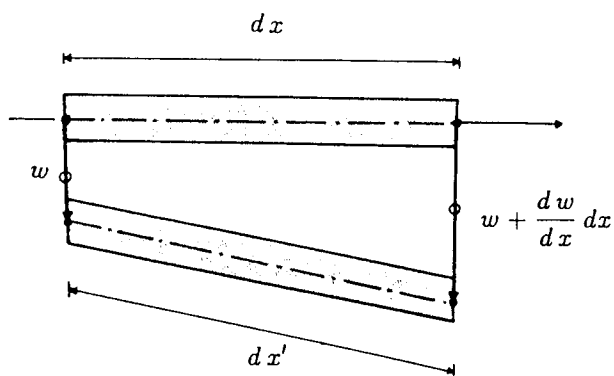


Fig. 3.10 – Aumento de comprimento do eixo devido à deformação transversal.

O comprimento  $dx'$ , desse trecho de viga após deformação será

$$dx' = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{dw}{dx} dx\right)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \quad (3.16)$$

$$dx' \simeq dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right] \quad (3.17)$$

e a extensão desse trecho provocada pela flexão valerá

$$\epsilon_x^b = \frac{dx' - dx}{dx} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \quad (3.18)$$

e a extensão total

$$\varepsilon_x \simeq \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (3.19)$$

pelo que o vector de deformação toma a seguinte forma

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_L\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^b \\ \varepsilon^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^b \\ \dots \\ \varepsilon_0^a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ \varepsilon_L^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^b \\ \dots \\ \frac{du}{dx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

em que o índice  $a$  identifica as componentes axiais e o índice  $b$  as componentes de flexão. Nesta expressão os termos com o índice zero são os termos lineares, já apresentados no capítulo anterior e com o índice  $L$  os termos não lineares, que serão analisados de seguida para os dois tipos de elementos descritos em 2.2.6.

### 3.4.2.1 Elemento isoparamétrico de dois nós

Derivando em ordem a  $\xi$  a expressão (2.47) do deslocamento vertical de um ponto genérico do elemento, resulta

$$\frac{dw}{d\xi} = \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i^b}{d\xi} w_i + \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i'^b}{d\xi} \frac{L}{2} \theta_i \quad (3.21)$$

e como

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\xi} \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \quad (3.22)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2}{L} \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i^b}{d\xi} w_i + \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i'^b}{d\xi} \frac{L}{2} \theta_i \right] \quad (3.23)$$

Substituindo a expressão (3.23) na expressão (3.20)

$$\varepsilon_L^a = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{2}{L} \frac{dN_i^b}{d\xi} w_i + \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i'^b}{d\xi} \theta_i \right]^2 \quad (3.24)$$

e designando por

$$\{G\}^T = \left\{ \left( \frac{dN_1^{a'}}{d\xi} \right) \left( \frac{2}{L} \frac{dN_1^b}{d\xi} \right) \left( \frac{dN_2^{a'}}{d\xi} \right) \left( \frac{2}{L} \frac{dN_2^b}{d\xi} \right) \right\} \quad (3.25)$$

A deformação axial não linear será dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= \frac{1}{2} \left( \{G\}^T \times \{\delta^b\} \right) \times \left( \{\delta^b\}^T \times \{G\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{G\}^T \times \{\delta^b\} \times \{G\}^T \times \{\delta^b\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

e então

$$\{\varepsilon_L\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ \varepsilon_L^a \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [0] \\ \dots & \vdots & \dots \\ \{G\}^T \{\delta^b\} & \{G\}^T & [0] \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta^b \\ \dots \\ \delta^a \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

ou seja

$$\{\varepsilon_L\} = \frac{1}{2} [B_L] \{\delta\} \quad (3.28)$$

com

$$[B_L] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [B_L^a] & [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [0] \\ \dots & \vdots & \dots \\ \{G\}^T \{\delta^b\} & \{G\}^T & [0] \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

### 3.4.2.2 Elemento isoparamétrico de três nós

Derivando em ordem a  $\xi$  a expressão (2.86) do deslocamento vertical de um ponto genérico do elemento, resulta

$$\frac{dw}{d\xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i^b}{d\xi} w_i \quad (3.30)$$

e de (2.37) e (2.41)

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2}{L} \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i^b}{d\xi} w_i \right] \quad (3.31)$$

Substituindo a expressão (3.31) na expressão (3.20)

$$\varepsilon_L^a = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{2}{L} \frac{dN_i^b}{d\xi} w_i \right]^2 \quad (3.32)$$

e designando por

$$\{G\}^T = \left\{ 0 \quad \frac{2}{L} \frac{dN_1^b}{d\xi} \quad 0 \quad \frac{2}{L} \frac{dN_2^b}{d\xi} \quad 0 \quad \frac{2}{L} \frac{dN_3^b}{d\xi} \right\} \quad (3.33)$$

a deformação axial não linear é dada pela expressão (3.26), continuando válidas as expressões (3.27) a (3.29).

### 3.4.3 Matriz de deformação

Considerando-se os incrementos das deformações agora referidas para os dois elementos obtém-se

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_0\} + \{\Delta\varepsilon_L\} \quad (3.34)$$

com

$$\{\Delta\varepsilon_0\} = [B_0] \{\Delta\delta\} \quad (3.35)$$

e

$$\{\Delta \varepsilon_L\} = [B_L] \{\Delta \delta\} + \frac{1}{2} [\Delta B_L] \{\Delta \delta\} \quad (3.36)$$

em que

$$[\Delta B_L^b] = [G]^T \{\Delta \delta^b\} \{G\}^T \quad (3.37)$$

As equações (3.34) a (3.37) justificam-se [15] [17] analisando a expressão dos incrementos das deformações de Green - Lagrange:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta \delta_{i,j} + \Delta \delta_{j,i} + \delta_{k,i} \Delta \delta_{k,j} + \delta_{k,j} \Delta \delta_{k,i} + \Delta \delta_{k,i} \Delta \delta_{k,j}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (\Delta \delta_{i,j} + \Delta \delta_{j,i})}_{[B_0]\{\Delta \delta\}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\delta_{k,i} \Delta \delta_{k,j} + \delta_{k,j} \Delta \delta_{k,i})}_{[B_L]\{\Delta \delta\}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\Delta \delta_{k,i} \Delta \delta_{k,j})}_{1/2[\Delta B_L]\{\Delta \delta\}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

e portanto a matriz de deformação assume a expressão

$$[B] = [B_0] + [B_L] + \frac{1}{2} [\Delta B_L] \quad (3.39)$$

### 3.4.4 Matriz de rigidez

A matriz de rigidez pode ser determinada aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais [23]. Substituindo então na equação (3.9) a matriz de deformação  $[B]$  pela expressão (3.39), resultaria uma matriz de rigidez não simétrica devido ao termo  $\frac{1}{2} [\Delta B_L]$  da matriz de deformação. Para que a matriz de rigidez seja então simétrica é adoptada a seguinte expressão simplificada para a matriz de deformação,

$$[B] \simeq [B_0] + [B_L] \quad (3.40)$$

resulta

$$d\{\psi\} = \int_V [d[B_0]^T + d[B_L]^T] \{\sigma\} dV + \int_V [[B_0]^T + [B_L]^T] d\{\sigma\} dV \quad (3.41)$$

como  $[B_0]$  é independente de  $\delta$

$$d\{\psi\} = \int_V d[B_L]^T \times \{\sigma\} dV + \int_V [[B_0]^T + [B_L]^T] [D_0] [[B_0] + [B_L]] d\{\delta\} dV \quad (3.42)$$

ou, sob outra forma

$$d\{\psi\} = [k_\sigma] d\{\delta\} + [[k_0] + [k_L]] d\{\delta\} = [[k_0] + [k_L] + [k_\sigma]] d\{\delta\} = [k_T] d\{\delta\} \quad (3.43)$$

em que

$[k_0]$  – Matriz de rigidez para pequenos deslocamentos

$[k_L]$  – Matriz de rigidez devida aos deslocamentos iniciais

$[k_\sigma]$  – Matriz de rigidez devido ao nível de tensões iniciais

$[k_T]$  – Matriz de rigidez tangente

Começemos por calcular então a parcela  $[k_0] + [k_L]$  da equação (3.43). Desenvolvendo o segundo termo da equação (3.42)

$$\begin{aligned} [k_0] + [k_L] &= \int_{-1}^1 [[B_0] + [B_L]]^T [D_0] [[B_0] + [B_L]] \frac{L}{2} d\xi \\ &= \int_{-1}^1 [B_0]^T [D_0] [B_0] \frac{L}{2} d\xi + \\ &\quad + \int_{-1}^1 ([B_0]^T [D_0] [B_L] + [B_L]^T [D_0] [B_0] + [B_L]^T [D_0] [B_L]) \frac{L}{2} d\xi \end{aligned} \quad (3.44)$$



em que

$$[k_0] = \begin{bmatrix} [k_0^b] & \vdots & [0] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [0] & \vdots & [k_0^a] \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B_0^b]^T & [D_0^b] & [B_0^b] & \vdots & [0] \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ [0] & \vdots & [B_0^a]^T & [D_0^a] & [B_0^a] \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi \quad (3.45)$$

e

$$\begin{aligned} [k_L] = \int_{-1}^1 & \left( \begin{bmatrix} [B_0^b]^T & [0] \\ [0] & [B_0^a]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_0^b] & [0] \\ [0] & [D_0^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [B_L^b] & [0] \end{bmatrix} + \right. \\ & + \begin{bmatrix} [0] & [B_L^b]^T \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_0^b] & [0] \\ [0] & [D_0^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_0^b] & [0] \\ [0] & [B_0^a] \end{bmatrix} + \\ & \left. + \begin{bmatrix} [0] & [B_L^b]^T \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_0^b] & [0] \\ [0] & [D_0^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [B_L^b] & [0] \end{bmatrix} \right) \frac{L}{2} d\xi \end{aligned} \quad (3.46)$$

ou seja

$$\begin{aligned} [k_L] = \int_{-1}^1 & \left( \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [0] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [B_0^a]^T & [D_0^a] & [B_L^b] & \vdots & [0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [B_L^b]^T & [D_0^a] & [B_0^a] \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ [0] & \vdots & [0] & \vdots & [0] \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} [B_L^b] & [D_0^a] & [B_L^b] & \vdots & [0] \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ [0] & \vdots & [0] & \vdots & [0] \end{bmatrix} \right) \frac{L}{2} d\xi \end{aligned} \quad (3.47)$$

e portanto

$$[k_L] = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B_L^b]^T & [D_0^a] & [B_L^b] & \vdots & [B_L^b]^T & [D_0^a] & [B_0^a] \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & & \\ [B_0^a]^T & [D_0^a] & [B_L^b] & \vdots & & & [0] \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi \quad (3.48)$$

Retomando as expressões (3.42) e (3.43)

$$\begin{aligned} [k_\sigma] d\{\delta\} &= \int_V d[B_L]^T \{\sigma\} dV = \\ &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [0] & d[B_L^b]^T \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\} \frac{L}{2} d\xi \\ &= \int_{-1}^1 d[B_L]^T \{N\} \frac{L}{2} d\xi \end{aligned} \quad (3.49)$$

Da equação (3.29)

$$d([B_L^b]) = d(\{G\}^T \{\delta^b\} \{G\}^T) = \{G\}^T d\{\delta^b\} \{G\}^T \quad (3.50)$$

já que  $\{G\}$  é independente de  $\delta$  e, portanto, de  $\delta^b$ , (3.25) e (3.33); então

$$[k_\sigma] d\{\delta\} = \int_V \{G\} \{N\} \{G\}^T d\{\delta\} dV \quad (3.51)$$

e, portanto,

$$[k_\sigma] = \int_{-1}^1 \{G\} \{N\} \{G\}^T \frac{L}{2} d\xi \quad (3.52)$$

Das expressões (3.43), (3.45), (3.48) e (3.52) resulta, finalmente,

$$[k] = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B_0^b] & [D_0^b] & [B_0^b] + & \vdots \\ + [B_L^b] & [D_0^a] & [B_L^b] + & \vdots \\ + \{G\} \{N\} & \{G\}^T & & \vdots \\ \dots & & & \vdots \\ [B_0^a]^T & [D_0^a] & [B_L^b] & \vdots \\ & & & [B_0^a]^T & [D_0^a] & [B_0^a] \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi \quad (3.53)$$

### 3.4.5 Forças nodais equivalentes ao estado de tensão

Em qualquer configuração de equilíbrio, as forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado são dadas por

$$\{F_i\} = \int_{-1}^1 [B]^T \{\sigma\} \frac{L}{2} d\xi \quad (3.54)$$

em que  $[B]$  é dado pela expressão (3.40).

## 3.5 Instabilidade – Previsão das cargas críticas

Supondo atingida a configuração de equilíbrio  $i$  no processo de análise de uma dada estrutura submetida a um nível de carga  $P$ , é válida a seguinte condição de equilíbrio

$$[k_T(P)] \cdot \{\delta\} = \{P\} \quad (3.55)$$

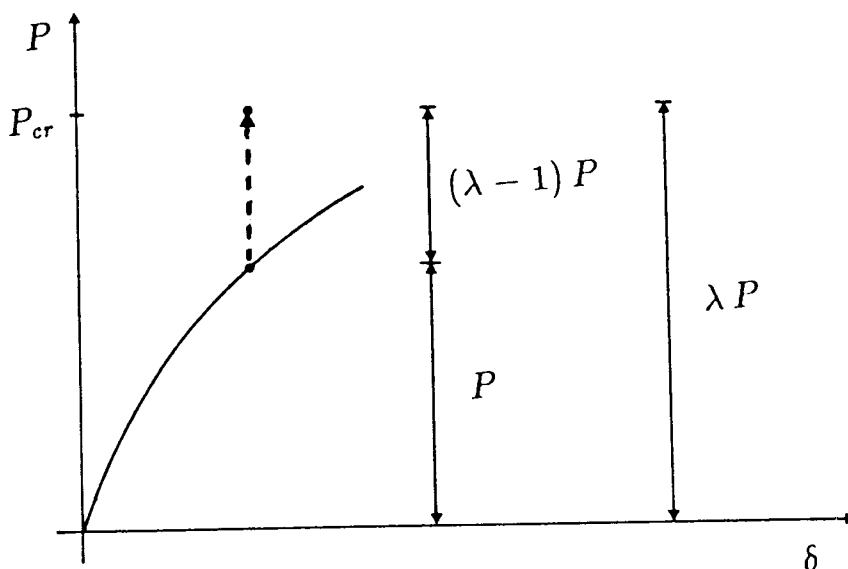


Fig. 3.11 – Configuração de equilíbrio e previsão da carga crítica.

A instabilidade da estrutura [6, 10, 12, 14] ocorrerá para um nível de solicitação designado por  $P_{cr}$  (carga crítica),  $\lambda$  vezes superior ao nível de carga instalado nesta configuração de equilíbrio; para o qual o sistema de equações anterior resulta indeterminado.

$$P_{cr} = \lambda P \quad (3.56)$$

Como as parcelas da matriz de rigidez devidas aos deslocamentos e tensões iniciais dependem do nível de carregamento,

$$[K_T(\lambda P)] = [K_0(P)] + [K_L(\lambda P)] + [K_\sigma(\lambda P)] \quad (3.57)$$

Assim sendo, admitindo nessa configuração convergida uma evolução linear dos esforços e dos deslocamentos, teremos

$$[K_T(\lambda P)] = [K_0(P)] + \lambda ([K_L(P)] + [k_\sigma(P)]) \quad (3.58)$$

A instabilidade da estrutura ocorrerá quando o sistema de equações (3.55) for indeterminado, ou seja, quando

$$\det [[K_0(P)] + \lambda([K_L(P)] + [K_\sigma(P)])] = 0 \quad (3.59)$$

o que equivale a formular o seguinte problema de valores próprios:

$$([K_0(P)] + \lambda([K_L(P)] + [K_\sigma(P)])) \{\delta\} = 0 \quad (3.60)$$

O método utilizado neste trabalho, que a seguir se descreve, para a determinação do primeiro valor e vector próprio, é um método iterativo, conhecido [3] por método de Vianello (por ter sido este autor o primeiro a aplicar o método de Stodola, utilizado na análise de vibrações, ao estudo da instabilidade).

Reescrevendo a equação (3.60) sob a forma

$$[K_0] \{\delta\} = -\lambda ([K_L] + [K_\sigma]) \{\delta\} = -\lambda [K_{NL}] \{\delta\} \quad (3.61)$$

ou

$$\{\delta\} = -[K_0]^{-1} ([K_{NL}] \{\delta\}) \lambda \quad (3.62)$$

admitindo uma aproximação  $\{\delta^0\}$  para o vector de deslocamentos  $\{\delta\}$ , para o que se poderá considerar o vector de deslocamentos nodais da estrutura nessa configuração de equilíbrio, teremos:

$$\{f^0\} = [K_{NL}] [\delta^0] \quad (3.63)$$

e um novo vector de deslocamentos

$$\{\delta^1\} = [K_0]^{-1} [f^0] \quad (3.64)$$

Se todas as componentes destes dois vectores de deslocamentos, forem proporcionais, e o quociente de todas as componentes homólogas iguais à mesma constante de proporcionalidade;

$$\frac{\delta_1^1}{\delta_1^0} \approx \frac{\delta_2^1}{\delta_2^0} \approx \dots \approx \frac{\delta_n^1}{\delta_n^0} \approx z$$

então, o valor do parâmetro de carga  $\lambda$  está encontrado e será  $\lambda = -\frac{1}{z}$ , caso contrário, efectua-se nova iteração determinando o vector de deslocamentos  $\{\delta^2\}$  pelo método agora descrito, determinado que está  $\{\delta^1\}$ , e assim sucessivamente até que seja satisfeita a equação.

O critério desenvolvido para a comparação das componentes homólogas dos dois vectores de deslocamentos, consiste em calcular a média e o desvio padrão dos quocientes dessas componentes e em verificar a condição:

$$\frac{\text{Desvio padrão } (Z_i)}{\text{Média } (Z_i)} < \text{Tolerância}$$

Cumulativamente a este método de análise da instabilidade, é possível a resolução do problema, pela detecção da ocorrência de um acréscimo de deslocamentos elevado para um pequeno acréscimo da solicitação e ou pela detecção de uma variação brusca do parâmetro de rigidez corrente que é uma medida da evolução da rigidez global da estrutura [6].

Sem pretender efectuar uma descrição exaustiva dos vários processos possíveis de instabilidade de uma estrutura, que dependem da geometria da mesma, das condições de apoio, da solicitação, das propriedades elásticas do material, etc., são apresentadas de seguida algumas formas de instabilidade e aspectos da aplicação deste método a cada uma delas.

### —Problema normal

Seja, por exemplo, o caso de uma barra prismática traccionada conforme a figura 3.12.

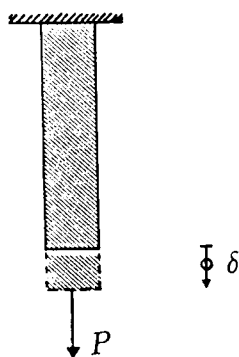


Fig. 3.12 – Exemplo de um problema normal.

Solicitando esta barra por uma força  $P$  axial continuamente crescente; o ponto de aplicação da carga experimentará um deslocamento continuamente crescente, existindo univocidade entre a carga e o deslocamento.

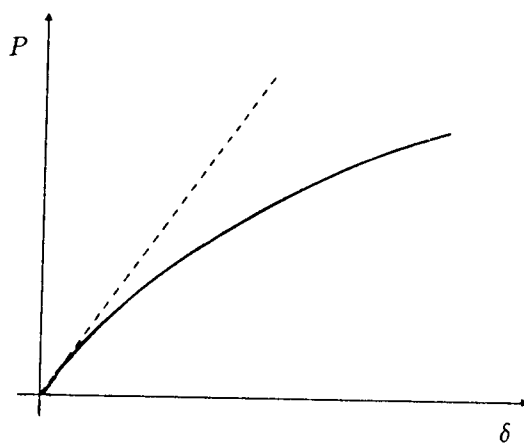


Fig. 3.13 – Curva carga deslocamento de um problema normal.

—Problema com bifurcação de equilíbrio

Seja, por exemplo, o caso de uma barra vertical, articulada na extremidade inferior e apoiada com uma mola na extremidade superior, conforme a figura 3.14.

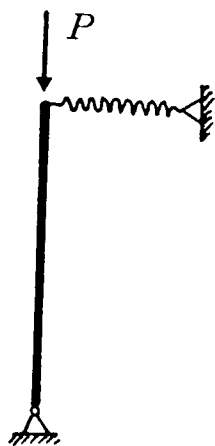


Fig. 3.14 – Exemplo de um problema com bifurcação de equilíbrio.

A partir de um certo valor da carga  $P$  (carga crítica), deixa de haver univocidade entre a carga e o deslocamento do seu ponto de aplicação.

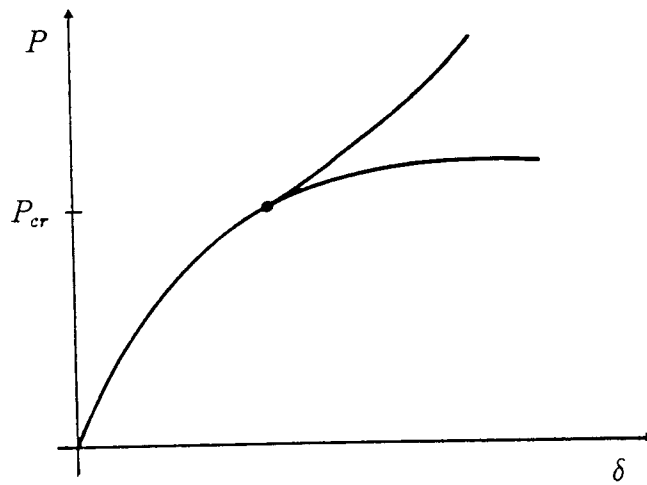


Fig. 3.15 – Curva carga deslocamento de um problema com bifurcação de equilíbrio.

—Problema de inversão de equilíbrio com descontinuidade ("snap - through")

Seja o caso de duas hastes biarticuladas comprimidas conforme a figura 3.16.

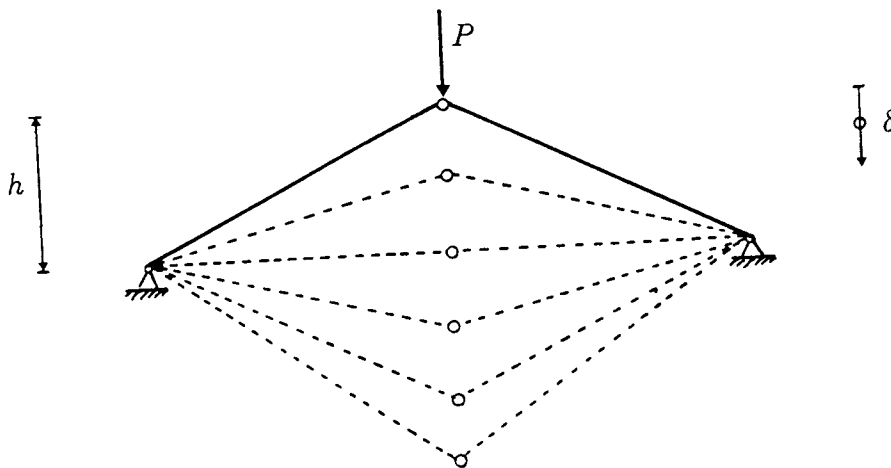


Fig. 3.16 – Exemplo de um problema com inversão de equilíbrio.



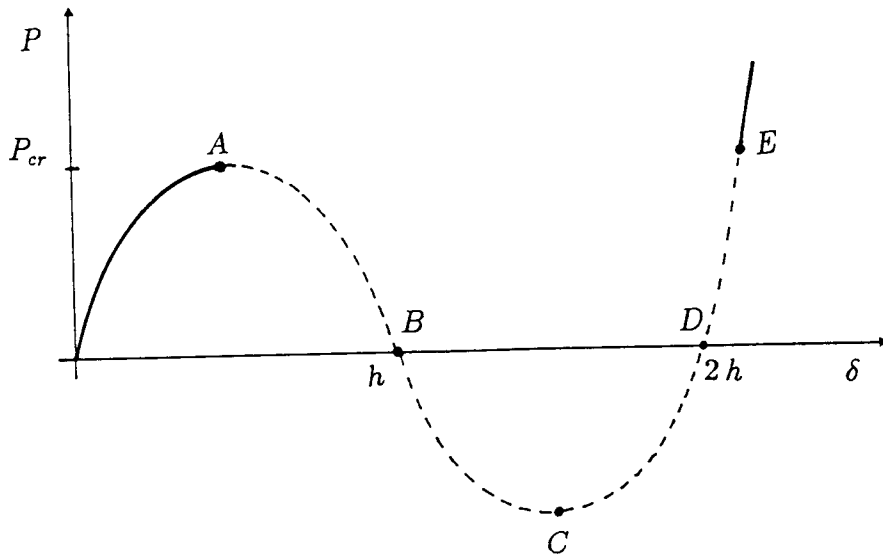


Fig. 3.17 – Curva carga–deslocamento de um problema com inversão de equilíbrio.

Desde o início da aplicação da força  $P$  o deslocamento  $\delta$  aumenta até que a força atinge o valor  $P_A$  correspondente a uma situação de equilíbrio indiferente (a rigidez da estrutura anula-se). Ultrapassada essa carga, a estrutura atinge uma nova posição de equilíbrio no ponto  $E$ , tendo havido um deslocamento brusco entre  $A$  e  $E$ .

Se, no entanto, se conseguir diminuir a intensidade da força  $P$ , o ponto  $B$  representaria a configuração horizontal das duas barras ( $P = 0$ ), o ponto  $C$  correspondente a  $P = -P_A$  e o ponto  $D$  para  $P = 0$ .

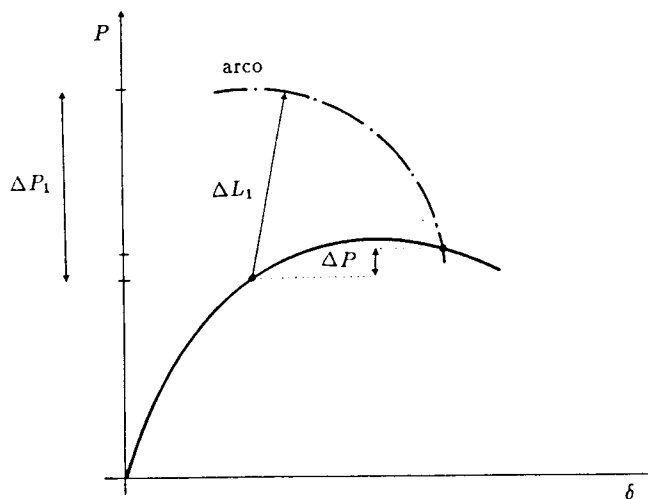


Fig. 3.18 – Arc - Length.

No programa de cálculo automático a análise do troço de curva *A B C D E* será, por exemplo, possível através da habitual técnica de "arc - length" [22] (ver Fig. 3.18) que, no entanto, nesta fase não foi ainda implementada no programa de cálculo automático FEMPOR, por se considerar improvável a ocorrência deste fenómeno de instabilidade nas estruturas a que se destina a aplicação deste programa (estruturas porticadas de betão armado). Tal já não seria válido se se pretendesse estudar, por exemplo, cascas cilíndricas de pequena curvatura ou estruturas abatidas, como a descrita na figura 3.16.

#### —Problema com inflexão da trajectória de equilíbrio

A curva característica das estruturas com este comportamento, tem um primeiro ramo que apresenta uma degradação da rigidez com o aumento da carga, seguida de outro ramo em que a estrutura recupera a rigidez.

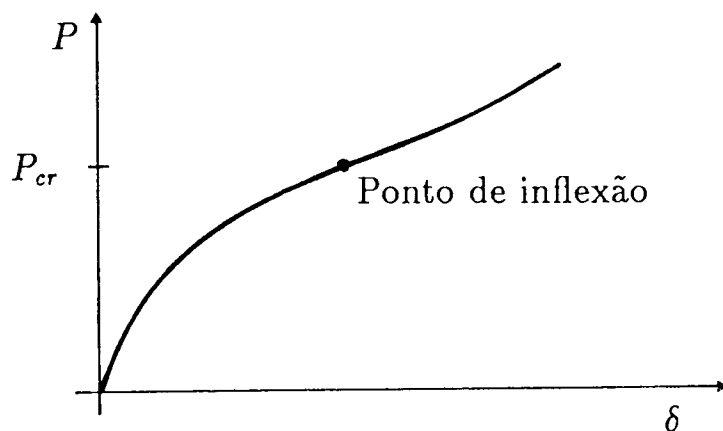


Fig. 3.19 – Instabilidade por inflexão.

Embora em rigor não se deva designar este comportamento como uma forma de instabilidade, por não haver perda de equilíbrio, justifica-se, no entanto, esta designação pelo facto de a rigidez da estrutura apresentar um valor mínimo numa fase intermédia da análise.

Analisemos agora a aplicação do método descrito à previsão das cargas críticas nos vários tipos de fenómenos de instabilidade descritos.

## —Instabilidade normal e instabilidade por "snap - through"

As várias fases de aplicação do método são:

- Aplicação do primeiro incremento de solitação;
- Attingido o equilíbrio, é formulado o problema de valores e vectores próprios, calculando a carga crítica;
- Repete-se o passo anterior para cada novo incremento de solitação.

Com este procedimento obtém-se uma curva de cargas críticas correspondente a cada problema de valores próprios resolvido; e a curva carga - deslocamento, da análise não linear acabada de efectuar. O ponto de intersecção das duas curvas, corresponde ao valor da carga crítica pretendido, ( $P = P_{cr}$  ou seja  $\lambda = 1$ ).

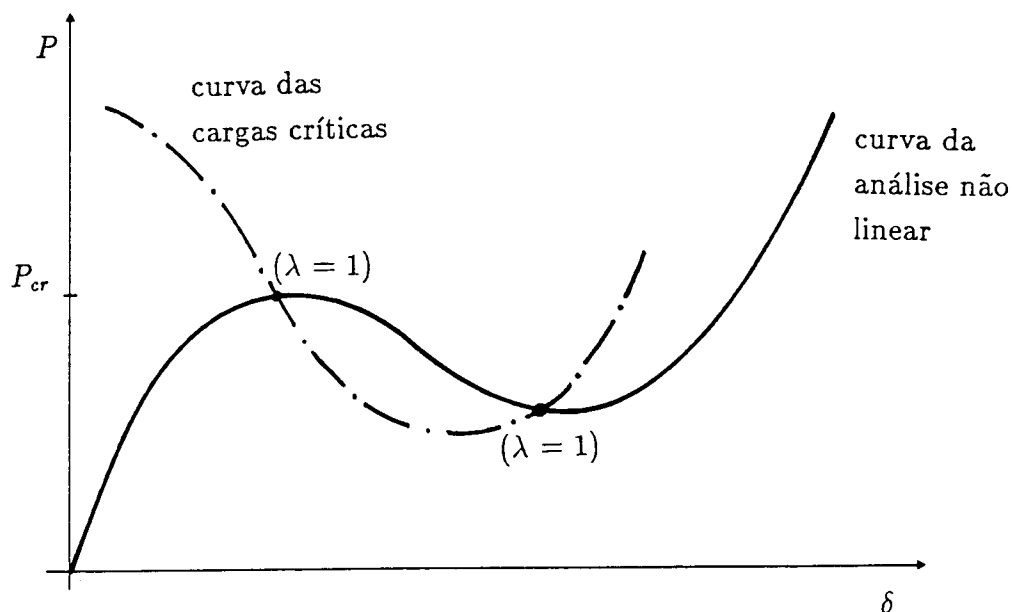


Fig. 3.20 - Instabilidade por "snap - through".

## —Instabilidade por bifurcação

O método descrito não tem nestes casos aplicação directa ( a curva das cargas críticas não intersecta a curva da análise não linear).

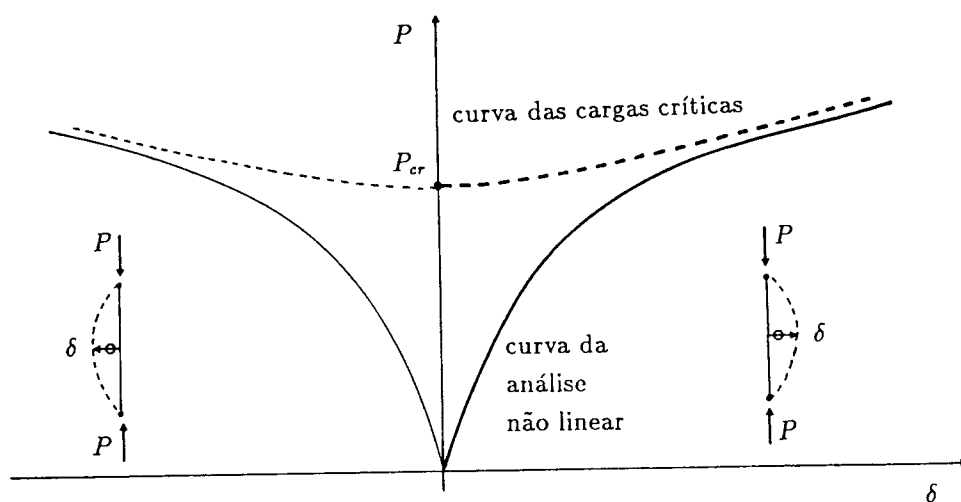


Fig. 3.21 – Instabilidade por bifurcação de equilíbrio.

—Instabilidade por inflexão

Recordando que o significado atribuído ao parâmetro  $\lambda$  foi o da distância do nível de carga instalado à carga crítica, nos problemas de instabilidade por inflexão, em que a curva das cargas críticas e a da análise não linear não se intersectam; a carga crítica é definida como a carga aplicada a que corresponde o mínimo valor de  $\lambda$ .

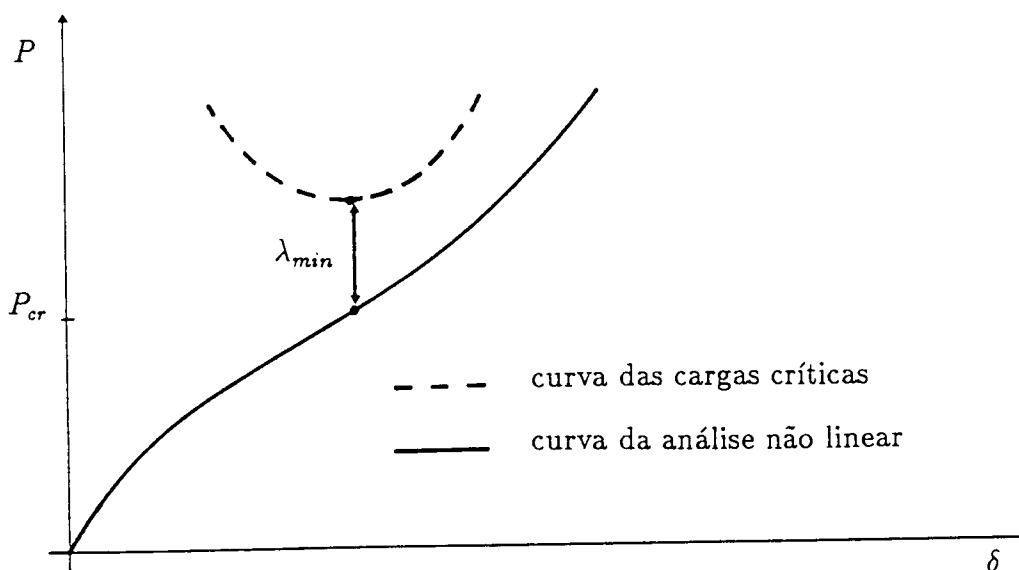


Fig. 3.22 – Instabilidade por inflexão.

## 3.6 Exemplos

Apesar de nos capítulos 4 e 5 serem analisados, em vários exemplos, os efeitos da não linearidade geométrica (em simultâneo com a não linearidade material da estrutura), são apresentados neste capítulo três exemplos simples de aferição da formulação lagrangeana total implementada.

O primeiro exemplo é o de um pórtico de três barras [9] [20] [22] analisado considerando apenas a não linearidade geométrica e fazendo pelo processo descrito a determinação da carga crítica.

No segundo e terceiro exemplos são analisados dois pilares de betão armado submetidos à flexão composta [7] [13], em que cumulativamente com a não linearidade geométrica é admitido o comportamento não linear dos materiais (embora este aspecto só seja apresentado no capítulo 4).

### 3.6.1 Pórtico de três barras

Começando por converter para o Sistema Internacional as unidades inglesas, em que este exemplo vem referido na bibliografia [9, 20, 22],

$$\begin{aligned} 1 \text{ in} &= 0,0254 \text{ m} & 1 \text{ kip} &= 4,448 \text{ kN} \\ 1 \text{ ft} &= 0,3048 \text{ m} & 1 \text{ ksi} &= 6,895 \text{ MPa} \end{aligned}$$

as características do pórtico são então as seguintes:

$$\begin{aligned} E &= 206.85 \text{ GPa} & b &= 0,016813 \text{ m} & L &= 3,048 \text{ m} \\ \nu &= 0.3 & h &= 0.451634 \text{ m} \end{aligned}$$

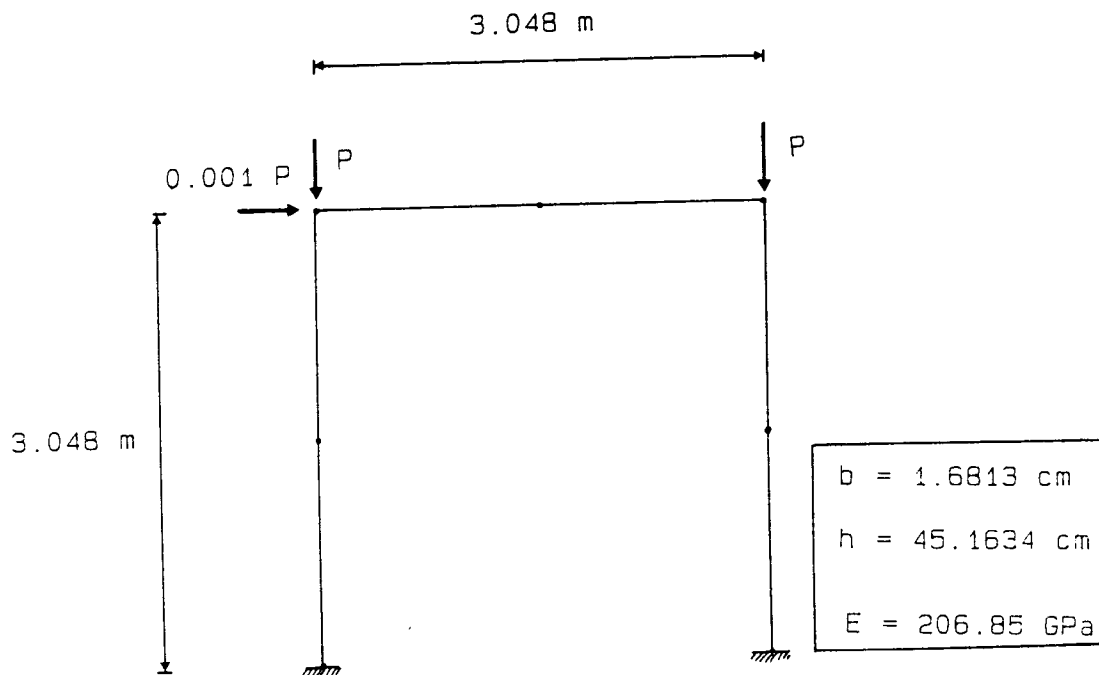


Fig. 3.23 – Geometria e ligações ao exterior.

Discretizando cada barra por apenas um elemento [20] de três nós, foram efectuadas duas análises diferindo no valor admitido para a tolerância dos resíduos no critério de resolução iterativo de Newton - Raphson. Na primeira análise foi considerada uma tolerância de 5% e na segunda uma tolerância de 1%.

Na figura 3.24 apresenta-se a evolução do deslocamento de andar nestes dois casos, comparando os resultados com os referidos em [9, 20, 22].

Da análise da figura 3.24 pode-se concluir da muito boa concordância dos resultados obtidos com os referidos [9, 20, 22] e da pequena importância neste caso do refinamento da tolerância admissível para os resíduos.

A carga crítica deste pórtico foi determinada pelo processo descrito em 3.5, sem a consideração da carga horizontal [9, 20] e considerando duas hipóteses de ligações ao exterior (apoios de encastramento e apoios duplos).

Na figura 3.25 é apresentada a evolução da carga crítica para os dois pórticos e valores da tolerância considerados.

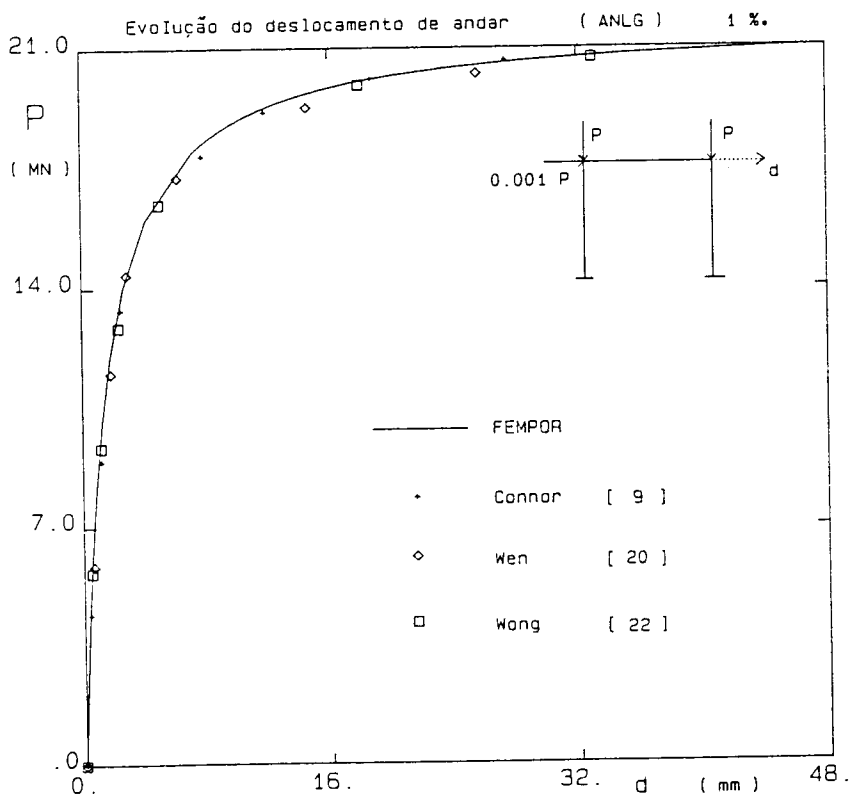
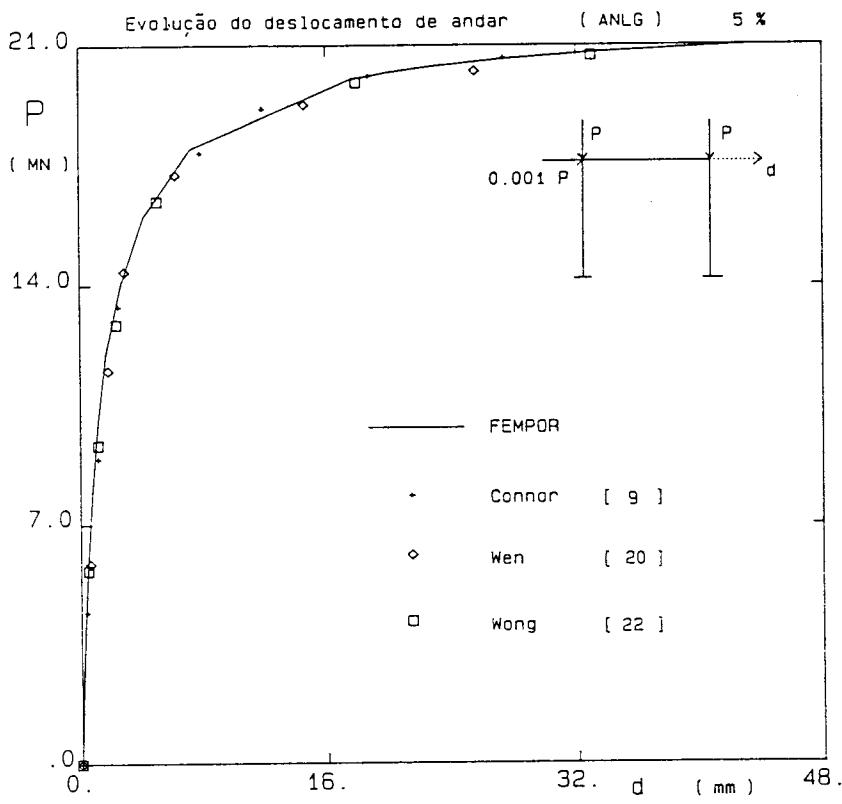


Fig. 3.24 - Evolução do deslocamento de andar.

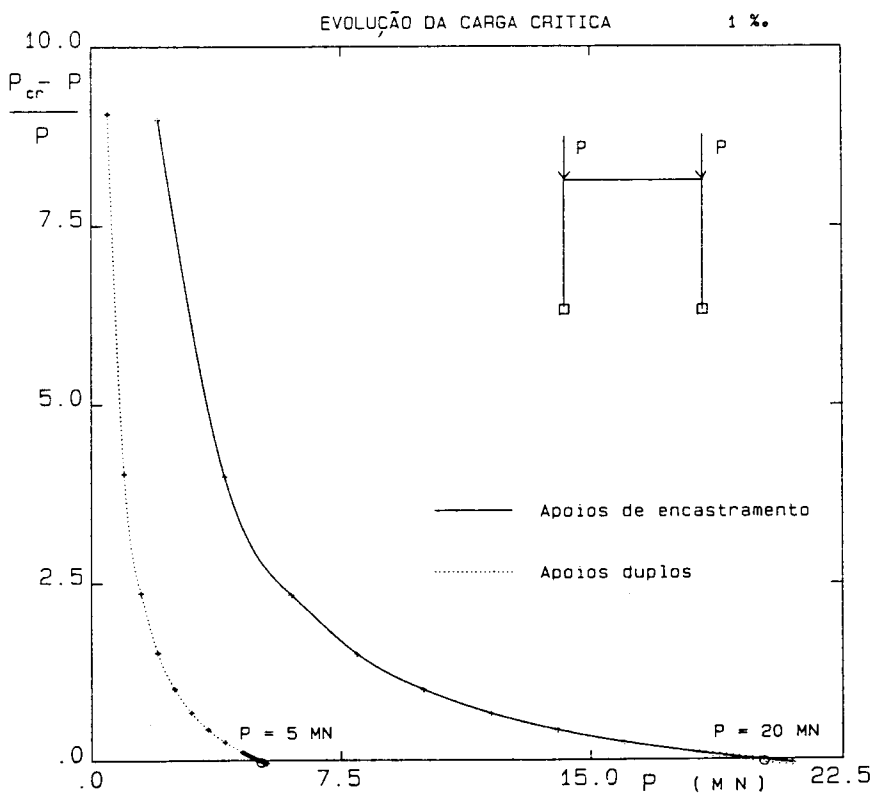
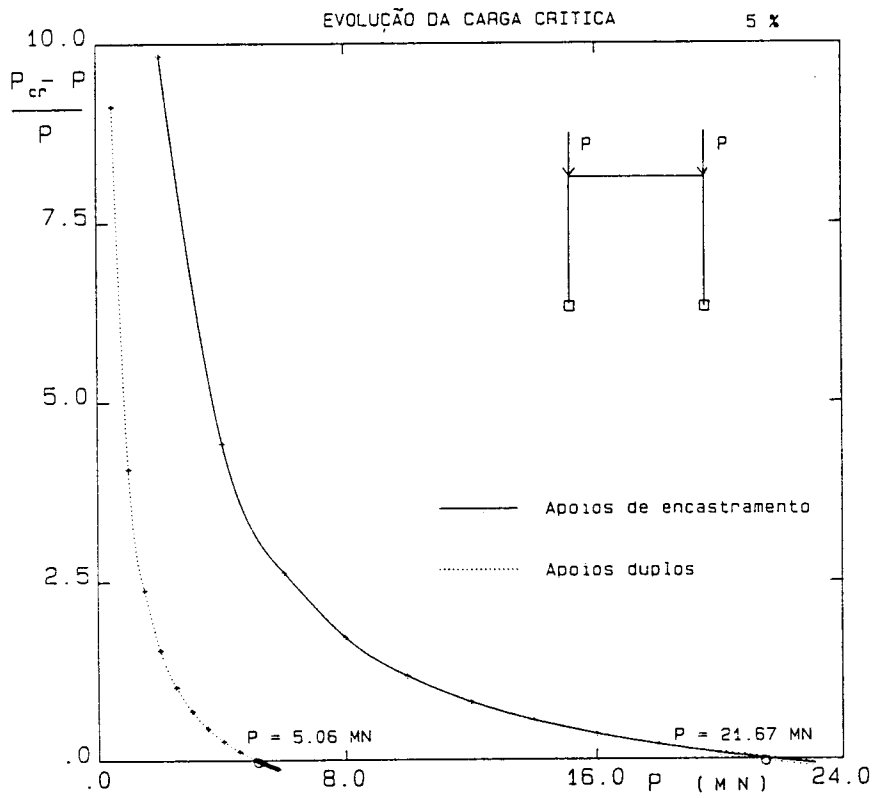


Fig. 3.25 – Evolução da carga crítica.



Os resultados obtidos para a carga crítica foram aproximadamente:

Pórtico biencastrado		Pórtico biarticulado	
Tol. = 5%	Tol. = 1‰	Tol. = 5%	Tol. = 1‰
$P_{cr} \simeq 21.7$	$P_{cr} \simeq 20.0$	$P_{cr} \simeq 5.1$	$P_{cr} \simeq 5.0$

semelhantes aos valores de  $21.1 MN$  [9] ou  $20.7 MN$  [20] referidos para o pórtico biencastrado e o valor de  $5.2 MN$  [9] referido para o pórtico biarticulado.

### 3.6.2 Pilares de betão armado submetidos à flexão composta

Os dois pilares analisados [7] [13] têm a geometria e ligações ao exterior apresentadas na figura 3.26.

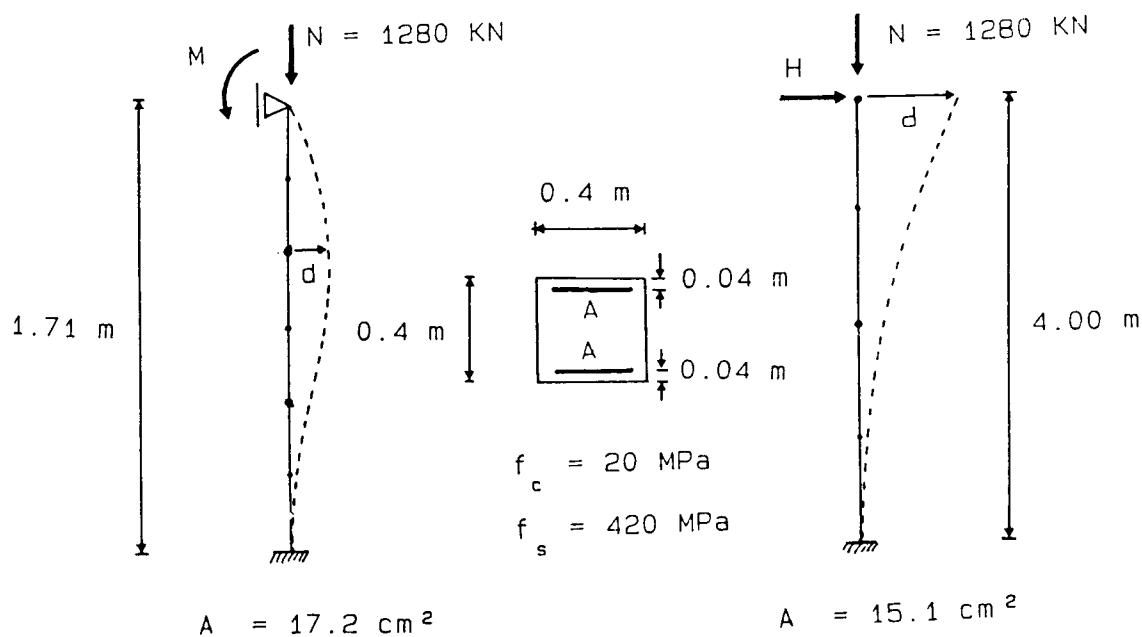


Fig. 3.26 – Geometria e ligações ao exterior.

Os dois pilares têm a mesma secção transversal ( $0.40 \times 0.40 \text{ m}$ ) diferindo na altura e quantidade de armadura (ver Fig. 3.26).

As características adoptadas para os materiais foram:

Betão

$$\begin{aligned} E_c &= 20.0 \times 10^6 \text{ KPa} & \varepsilon_{cu} &= 3.5 \times 10^{-3} \\ f_{ck} &= 20.0 \times 10^3 \text{ KPa} & \varepsilon_{tu} &= 1.74 \times 10^{-3} \\ f_{ctm} &= 2.0 \times 10^3 \text{ KPa} & \nu &= 0.2 \\ \varepsilon_{cp} &= 2.0 \times 10^{-3} & \beta &= 0.6 \end{aligned}$$

Aço

$$\begin{aligned} E_s &= 210.0 \times 10^6 \text{ KPa} & E_1 &= E_2 = 0 \\ \varepsilon_{sy} &= 2.0 \times 10^{-3} & \varepsilon_{su} &= 10.0 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

O Pilar 1 foi discretizado em dois elementos iguais [13] de três nós e o Pilar 2 em três elementos iguais [13] de três nós.

Foi efectuada a análise não linear material e geométrica dos dois pilares, considerando em ambos os casos duas solicitações aplicadas sequencialmente [13].

A primeira solicitação, igual nos dois pilares, é uma força de compressão de  $1280 \text{ kN}$  aplicada em apenas um incremento e que se mantém constante até ao fim da análise.

A segunda solicitação é uma carga horizontal aplicada incrementalmente no topo do Pilar 1, ou um momento aplicado incrementalmente no topo do Pilar 2.

Na figura 3.27 são apresentados os resultados obtidos nestas duas análises comparando-os com os referidos em [7, 13].

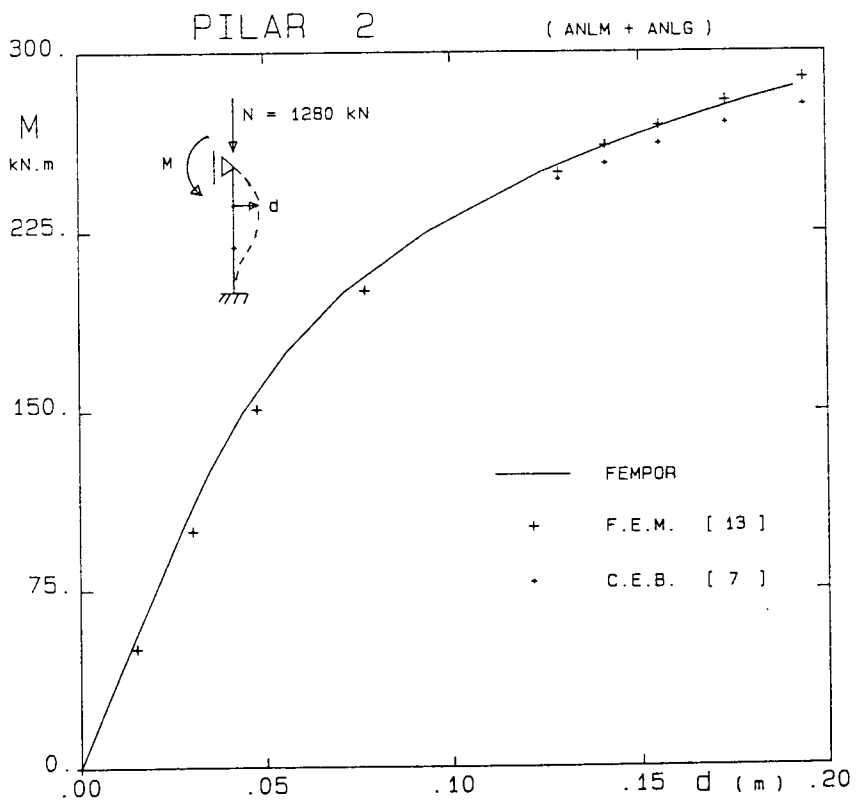
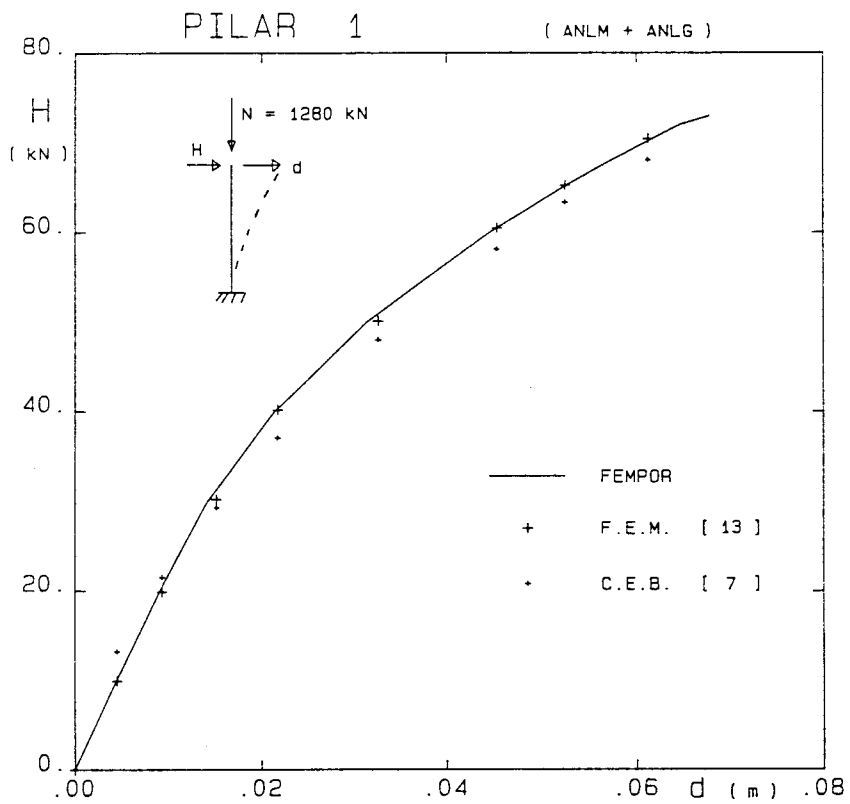


Fig. 3.27 - Evolução do deslocamento  $d$ .

Da análise da figura 3.27 pode concluir-se da boa concordância dos resultados obtidos com os referidos; sobretudo com os apresentados em [13] em que também é utilizado o método dos elementos finitos, apesar do diagrama do betão aí adoptado ser um diagrama simplificado parábola - rectângulo.

### 3.7 Conclusões

Pela boa concordância dos resultados obtidos com esta formulação em vários exemplos de aferição (apresentados neste capítulo e a apresentar em 4.4) e os resultados de outros autores, obtidos frequentemente com técnicas (elementos finitos bidimensionais ...) e dados (diagrama parábola - rectângulo ...) ligeiramente diferentes; parece legítimo concluir ser bastante boa a adequação da formulação adoptada aqui descrita e implementada no programa de cálculo automático FEMPOR.

### 3.8 Bibliografia

- [1] Awadalla E.S. – Elastic Critical Loads on Multistory Rigid Frames – Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 109, No 5, May 1983, pp. 1091 – 1106.
- [2] Bathe K.J. and Cimento A.P. – Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1980, pp. 59 – 85.
- [3] Bathe K.J. and Wilson E.L. – Numerical Methods in Finite Element Analysis – Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [4] Bergan P.G. – Solution Algorithms for Nonlinear Structural Problems – Computers & Structures, Vol. 12, Jan. 1980, pp. 497 – 509.
- [5] Bergan P.G., Horrigmoe G., Krakeland B. and Soreides T.H. – Solution Techniques for Nonlinear Finite Element Problems – International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, 1978, pp. 1677 – 1696.
- [6] Bergan P.G. and Soreide T.H. – Solution of Large Displacement and Instability Problems Using the Current Stiffness Parameter – Finite Elements in Nonlinear Mechanics, International Conference on Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, Vol. 2, Norway, Aug 1977.
- [7] CEB / FIP – Manual of Buckling and Instability – The Construction Press, Lancaster, England, 1978.
- [8] Clough R.W. and Penzien J. – Dynamics of Structures – Mc Graw-Hill Book Company, International Student Edition, 1985.
- [9] Connor J.J. and Logcher R.D. and Chan S.C. – Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures – Journal of the Structural Division, ASCE 94, June 1988, pp. 1525 – 1547.
- [10] Costa A.P.S. – Instabilidade Linear e Não Linear de Estruturas Tipo Casca – Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia, Porto, 1985.
- [11] Cruz P.J.S. e Figueiras A.J. – Análise Não Linear de Estruturas Porticadas de Betão – 2<sup>as</sup>. JPEE, LNEC, Lisboa, Nov. 1990, Tema A, pp. 469 – 479.
- [12] Gerard G. – Introduction to Structural Stability Theory – Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- [13] Malerb P.G. and Bontempi F. – Material and Geometric Nonlinear Analysis of Reinforced Concret Frames – EPMESC III, Vol. 1, Macau, Aug. 1990.

- [14] Martins R.A.F., *Análise de Alguns Modelos de Comportamento Não Linear de Estruturas, Lição de Síntese – Faculdade de Engenharia, Porto, 1990.*
- [15] Mattiasson K. – *On the Co - Rotational Finite Element Formulation for Large Deformation Problems – Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, Publication 83:1, 1983.*
- [16] Meek J.L. and Loganathan S. – *Geometric and Material Non-linear Behaviour of Beam - Columns – Computers & Structures, Vol. 34, No 1, 1990, pp. 87 – 100.*
- [17] Sá J.A.C. – *Numerical Modelling of Incompressible Problems in Glass Forming and Rubber Technology – Ph. D. Thesis, University College of Swansea, U.K., May 1986.*
- [18] Szilard R. – *Structural and Dynamic Stability, Critical Load and Post-Buckling Analysis by FEM Using Energy Balancing Technique – Computers & Structures, vol. 20, No 1 – 3, 1985 pp. 277 – 286.*
- [19] Toma S. and Chen W.F. – *Post - Buckling Behaviour of Tubular Beam - Columns – Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 109, No 8, Aug. 1983, pp. 1918 – 1932.*
- [20] Wen R.K. and Rahimzadeh J. – *Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Element – Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 109, No 8, Aug. 1983, pp. 1952 – 1971.*
- [21] Wong M.B. and Tin-Loi F. – *Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures – Computers & Structures, vol. 34, No 4, 1990, pp. 633 – 640.*
- [22] Wong M.B. and Tin-Loi F. – *Analysis of Frames Involving Geometrical and Material Nonlinearities – Computers & Structures, vol. 34, No 4, 1990, pp. 641 – 646.*
- [23] Zienkiewicz O.C. – *The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw - Hill, London, 1971.*

## 4 – ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL

### 4.1 Introdução

Pelo facto de o betão ser um material com uma resistência à tracção muito pequena quando comparada com a resistência que possui à compressão, para que seja rentável a sua aplicação em estruturas é necessária a utilização de um segundo material, normalmente o aço, para resistir às tensões de tracção; resultando assim um material compósito designado por betão armado.

A pequena resistência do betão à tracção faz com que este fendilhe mesmo sob a acção moderada de tensões de tracção, provocando um considerável decréscimo da rigidez do elemento em questão. Este efeito e o facto de tanto o aço como o betão terem um comportamento elasto-plástico complexo (para além dos efeitos diferidos no tempo que neste estudo não são tidos em conta) são, entre outros, responsáveis pelo comportamento não linear material das estruturas de betão armado.

A consideração do comportamento não linear material das estruturas de betão armado é, pelo menos de uma forma indirecta, correntemente utilizada em projecto quando, por exemplo, ao se pretender avaliar a segurança da estrutura em relação aos estados limites últimos se efectuam redistribuições dos esforços obtidos sob a hipótese de comportamento elástico linear; ou para se calcular os deslocamentos da estrutura em condições de serviço se utilizam diagramas momento-curvatura bilineares.

Com este trabalho pretende-se desenvolver uma ferramenta que permita o dimensionamento e a verificação da segurança aos estados limites últimos de resistência (cuja ocorrência provocaria sérios prejuízos) e em relação aos estados limites de utilização (cuja ocorrência poderia comprometer a qualidade de funcionamento, durabilidade e a aparência) de estruturas porticadas planas de betão armado.

Neste capítulo será inicialmente analisada uma técnica global de análise não linear material de vigas submetidas à flexão simples, por utilização de curvas momento-curvatura. Seguidamente é descrita uma técnica que, para além da resolução deste problema, permite sem dificuldade adicional, a análise de estruturas porticadas, em que cada elemento pode estar submetido à flexão composta.

## 4.2 Análise não linear material de vigas submetidas à flexão simples

### 4.2.1 Introdução

No que se segue apenas se considera a não linearidade da rigidez de flexão  $EI$  das matrizes de elasticidade referidas em 2.3, considerando a rigidez de corte constante e igual à correspondente rigidez elástica.

### 4.2.2 Relações constitutivas

Na construção é habitual a consideração de dois tipos de aço e concomitantemente de dois tipos de diagramas tensão-deformação.

Um primeiro diagrama para um provete de aço macio traccionado axialmente.

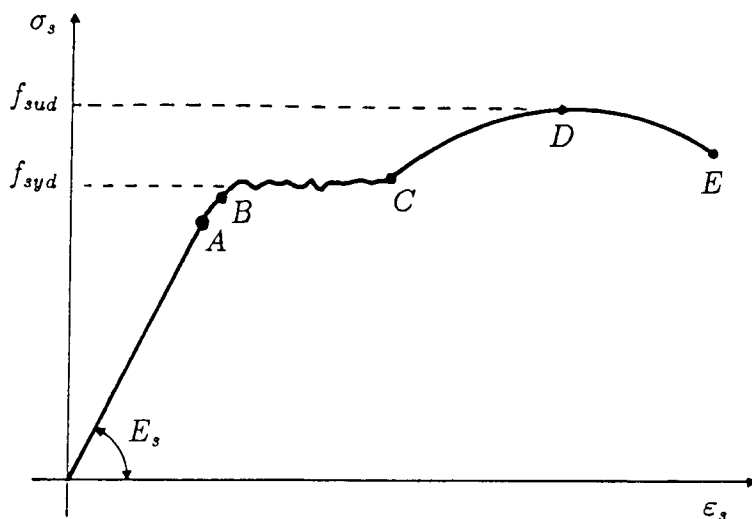


Fig. 4.1 - Diagrama de comportamento de um provete de aço macio traccionado axialmente.

O diagrama é linear até ao ponto A que se designa limite de proporcionalidade. O ponto B limita a reversibilidade das deformações mas, pela dificuldade inerente à sua determinação, esse ponto é normalmente confundido com o ponto C ou limite de cedência.



Ultrapassado esse ponto e até atingir o ponto *D* as deformações aumentam sob tensão quase constante. Após o ponto *D* são possíveis novos acréscimos de tensão aos quais correspondem acréscimos de deformação elasto-plástica. A zona decrescente do diagrama é devida ao facto de as tensões serem calculadas com a secção inicial, e esta diminuir, (estricção). No ponto *E* acontece a rotura do provete.

Para os aços duros o diagrama é o representado na figura 4.2.

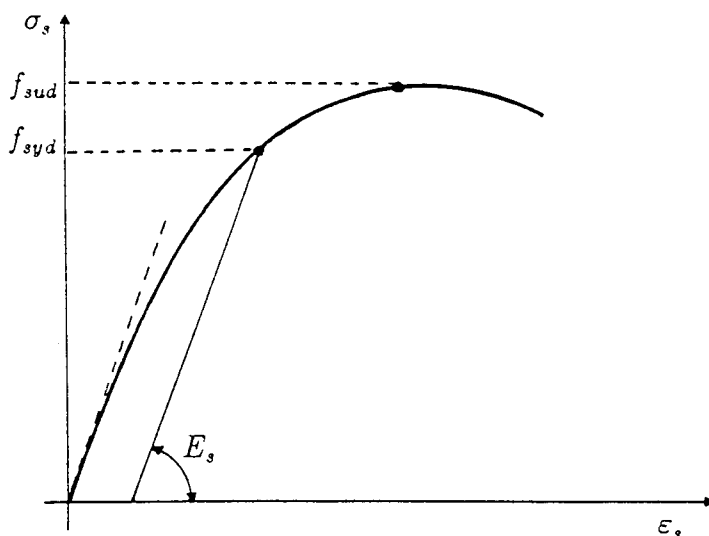


Fig. 4.2 – Diagrama de comportamento de um provete de aço duro traccionado axialmente.

Nestes aços não é nítido o início de plastificação sendo o limite de elasticidade convencionalmente definido como a tensão à qual corresponde uma deformação residual de 0.2% após descarga.

Nos dois tipos de aço consideram-se válidos os mesmos limites, para a armadura em compressão.

No programa de cálculo automático o diagrama de comportamento do aço é aproximado por um diagrama bilinear, trilinear ou tetralinear (em que o quarto ramo corresponde a um comportamento perfeitamente plástico).

Para o betão à compressão é mais difícil definir um limite de proporcionalidade e de elasticidade já que este manifesta um comportamento pronunciadamente não linear.

Neste trabalho o comportamento do betão comprimido, é aproximado pela seguinte

expressão, utilizada com bons resultados por vários autores [5, 16, 26]:

$$\sigma_c = \frac{E_c \varepsilon_c}{1 + \left( \frac{E_c \varepsilon_{cp}}{f_c} - 2 \right) \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right) + \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right)^2} \quad (4.1)$$

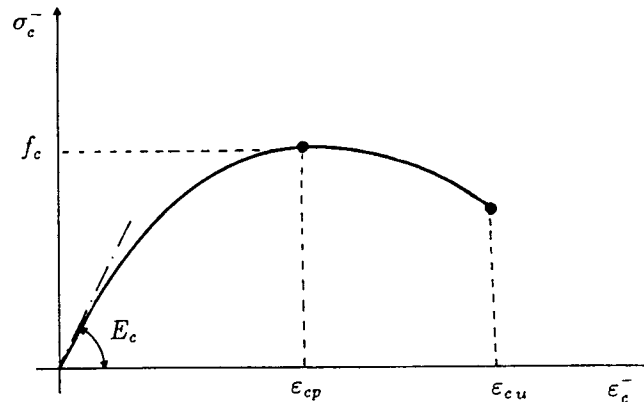


Fig. 4.3 – Diagrama de comportamento do betão comprimido.

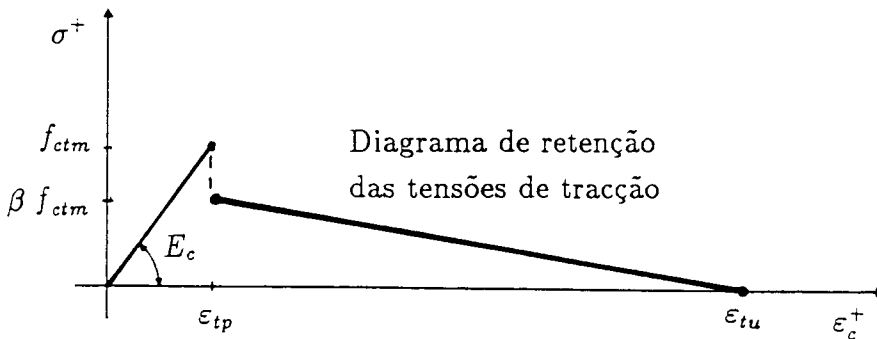


Fig. 4.4 – Diagrama de comportamento do betão traccionado.

Para o betão à tracção é proposto um modelo que tem em conta a retenção de tensões de tracção do betão entre fendas [6, 10, 11, 17, 24] (em língua inglesa "tension stiffening") que advém da heterogeneidade da resistência do betão à tracção, da eventual falta de aderência com as armaduras e da disposição destas.

Neste modelo admite-se que o betão traccionado tem um comportamento elástico linear até se atingir a resistência do betão à tracção. Ultrapassada esta tensão admite-se que o betão retem uma determinada percentagem das tensões de tracção.

Normalmente o parâmetro  $\beta$ , indicado na figura 4.4, é considerado com o valor de 0.6 ; considerando-se para a extensão última do betão traccionado, o valor da extensão de cedência do aço da armadura  $\epsilon_{tu} \simeq \epsilon_{sy}$ .

Para tornar mais perceptível este procedimento é conveniente analisar o comportamento de um tirante de betão armado solicitado à tracção pura [2, 8].

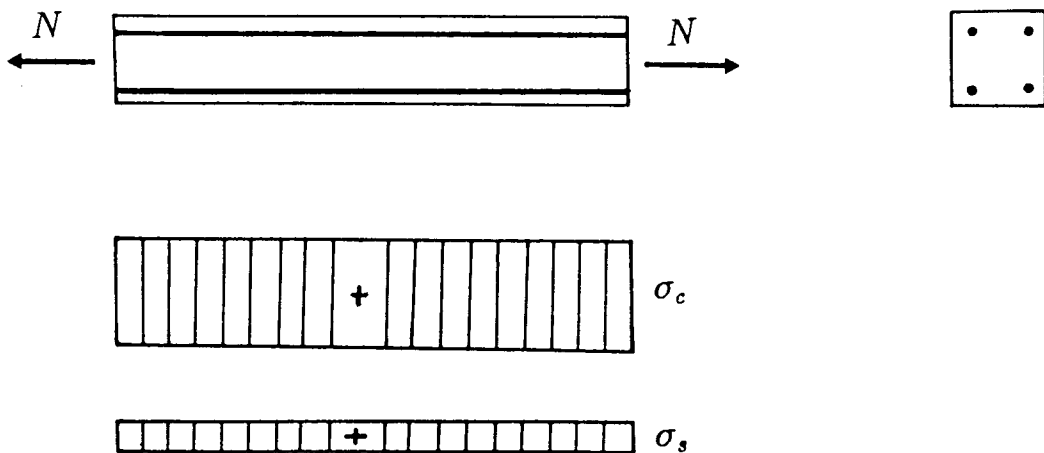


Fig. 4.5 – Tracções no betão e no aço de um tirante de betão armado não fendilhado.

Para esforços de tracção reduzidos (não ultrapassada a resistência do betão à tracção  $f_{ctm}$ ) as tensões são uniformes. Atingida essa tensão inicia-se a fendilhação do betão e nesse instante em cada secção fendilhada a tensão até aí absorvida pelo betão passa a ser absorvida pela armadura. Geram-se pois tensões diferentes na armadura e no betão o que provoca a abertura da fenda.

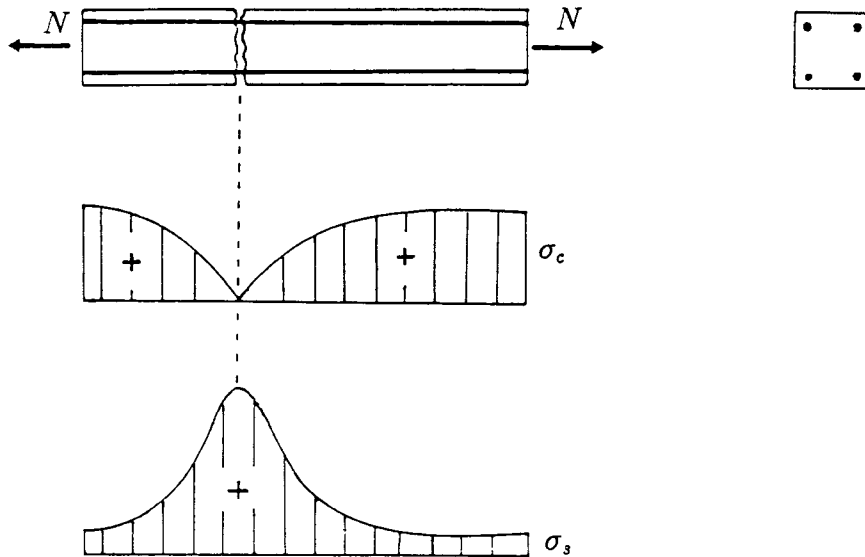


Fig. 4.6 – Tracções no betão e no aço de um tirante de betão armado fendilhado.

O deslocamento relativo entre a armadura e o betão é condicionado pelas tensões que se geram na superfície de contacto dos dois materiais. Só a uma determinada distância dessa fissura é que a compatibilidade entre as extensões dos dois materiais é restabelecida e que teoricamente poderá ter lugar nova fissura; visto que antes dessa secção, as tensões de aderência são insuficientes para transmitir ao betão um esforço de tracção capaz de o fendilhar.

Assim sendo a extensão média do tirante de betão armado fendilhado será

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{s_2} - \Delta\epsilon_s \quad (4.2)$$

em que  $\epsilon_{s_2}$  é a extensão da armadura na hipótese de betão fendilhado (estado II) e  $\Delta\epsilon_s$  a diminuição dessa extensão devido à contribuição do betão entre fendas.

A diminuição da extensão média  $\Delta\epsilon_s$  pode ser aproximada pela expressão:

$$\Delta\epsilon_s = (\epsilon_{s_{2r}} - \epsilon_{s_{1r}}) \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad (4.3)$$

em que

$\sigma_{sr}$  - tensão na armadura, correspondente ao esforço para o qual se atinge a máxima tensão de tracção no betão ( $f_{ctm}$ )

$$\sigma_{sr} = \frac{N_r}{A_s} \quad (4.4)$$

$\sigma_{s2}$  - tensão na armadura, na secção fendilhada.

$\varepsilon_{s1r}$  - extensão da armadura para a tensão  $\sigma_{sr}$ , na hipótese de secção não fendilhada (estado I).

$\varepsilon_{s2r}$  - extensão de armadura para a tensão  $\sigma_{sr}$ , na hipótese de secção fendilhada (estado II).

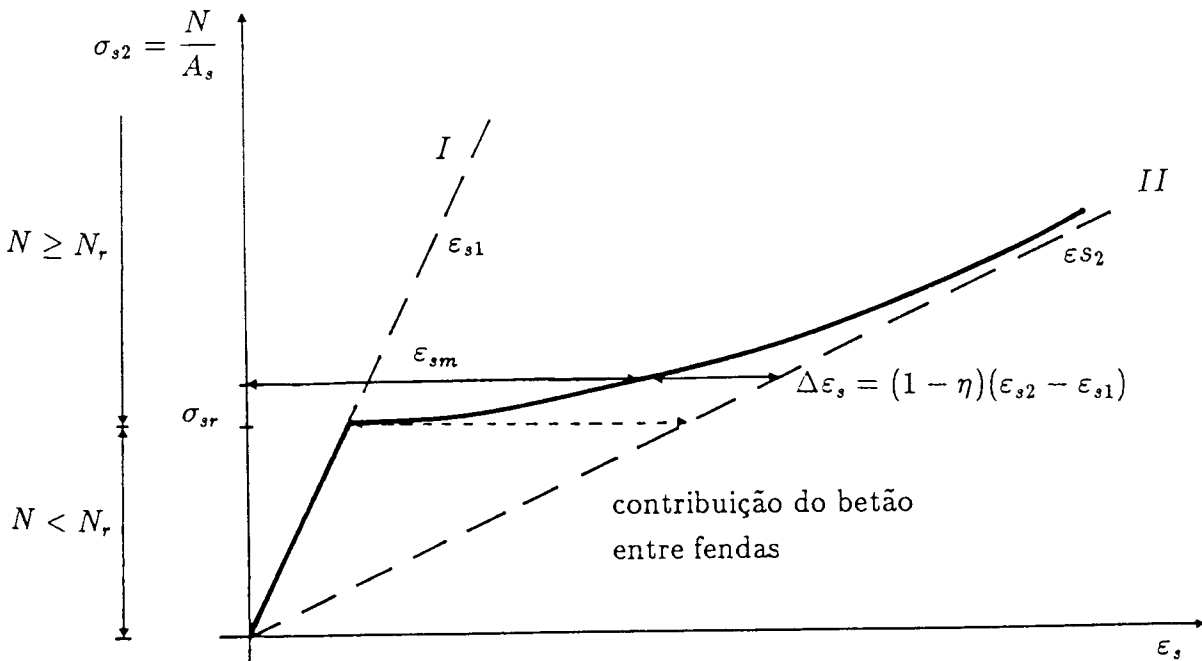


Fig. 4.7 - Comportamento à tracção do tirante de betão armado.

Substituindo a expressão (4.3) na expressão (4.2), resulta:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} \cdot \zeta + \varepsilon_{s1}(1 - \zeta) \quad (4.5)$$

com

$$\begin{cases} \zeta = 1 - \left(\frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{N_1}{N}\right)^2, & \sigma_{s2} \geq \sigma_{sr} \\ \zeta = 0, & \sigma_{s2} < \sigma_{sr} \end{cases} \quad (4.6)$$

e em que

$\varepsilon_{s1}$  - extensão da armadura na hipótese de betão não fendilhado (estado I)

$$\varepsilon_{s1} = \frac{N}{E_c A_c} \quad (4.7)$$

$\varepsilon_{s2}$  - extensão de armadura na hipótese de betão fendilhado (estado II)

$$\varepsilon_{s2} = \frac{N}{E_s A_s} \quad (4.7.a)$$

$A_c$  - área da secção de betão

$A_s$  - área da secção de armadura

A extensão média no betão é:

$$\varepsilon_{cm} = (1 - \zeta) \varepsilon_{c1} \quad (4.8)$$

como

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{c1} = \frac{N}{E_c (A_c + \alpha A_s)} \quad (4.9)$$

em que  $\alpha$  é coeficiente de homogeneização de aço em betão

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.10)$$

e atendendo à expressão (4.4)

$$N_r = f_{ctm} (A_c + \alpha A_s) \quad (4.11)$$

Repare-se finalmente que, no modelo adoptado (Fig. 4.4), o troço curvo da relação constitutiva durante a fendilhação, agora descrito, é substituído por uma relação linear.

A descontinuidade desta relação quando se inicia a fendilhação e o valor de 0,6 sugerido para  $\beta$ ; advêm da aproximação do diagrama parabólico de variação de tensões normais, no betão fendilhado de um tirante traccionado, representado na figura 4.6, por um diagrama rectangular com a mesma área.

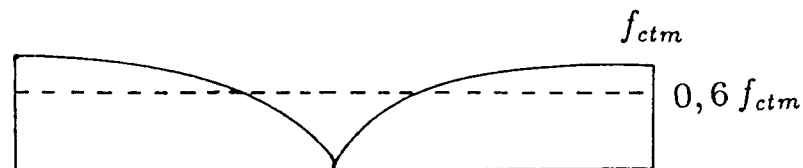


Fig. 4.8 - Aproximação por um diagrama rectangular do diagrama parabólico das tensões normais, no betão fendilhado de um tirante traccionado.

### 4.2.3 Curvas momento – curvatura

Por um processo idêntico ao agora descrito para a tracção simples; pode-se analisar o comportamento de um provete de betão armado submetido à flexão simples [8], mantendo-se válida a expressão (4.5) que define neste caso a extensão média da armadura.

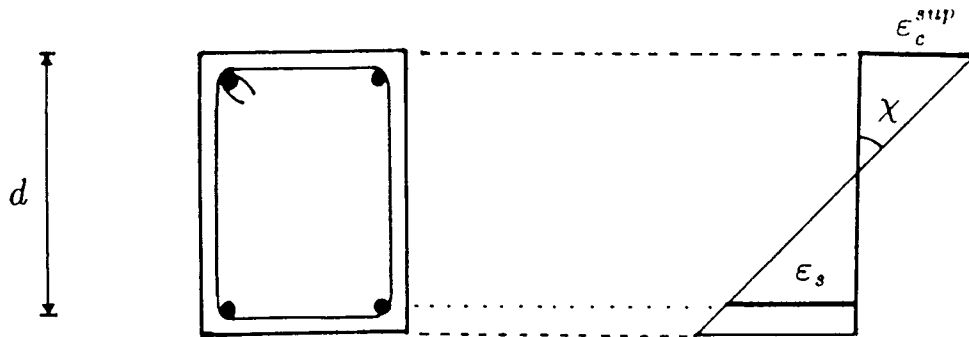


Fig. 4.9 – Deformação de uma secção transversal.

Estabelecendo a relação entre a curvatura de uma secção ( $\chi$  ou  $\frac{1}{r}$ ) e o momento flector que a solicita, em que

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_s - \epsilon_c^{sup}}{d} \quad (4.12)$$

e definindo a extensão média do betão,

$$\epsilon_{cm} = (1 - \zeta)\epsilon_{c1} + \zeta\epsilon_{c2} \quad (4.13)$$

com

$$\zeta = 1 - \left( \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}} \right)^2 = 1 - \frac{M_{cr}}{M} \quad (4.14)$$



consegue-se a expressão para a curvatura média após o início da fendilhação

$$\left(\frac{1}{r}\right)_m = (1 - \zeta) \left(\frac{1}{r}\right)_1 + \zeta \left(\frac{1}{r}\right)_2 \quad (4.15)$$

em que

$\left(\frac{1}{r}\right)_1$  – curvatura para o momento flector  $M$ , no estado I

$\left(\frac{1}{r}\right)_2$  – curvatura para o momento flector  $M$ , no estado II

A relação momento–curvatura adoptada compreende três zonas diferentes, uma primeira zona linear até se iniciar a fendilhação (fase I), uma segunda zona parabólica até ao início da cedência da armadura (fase II) e uma terceira zona linear correspondente à plastificação da armadura (fase III).

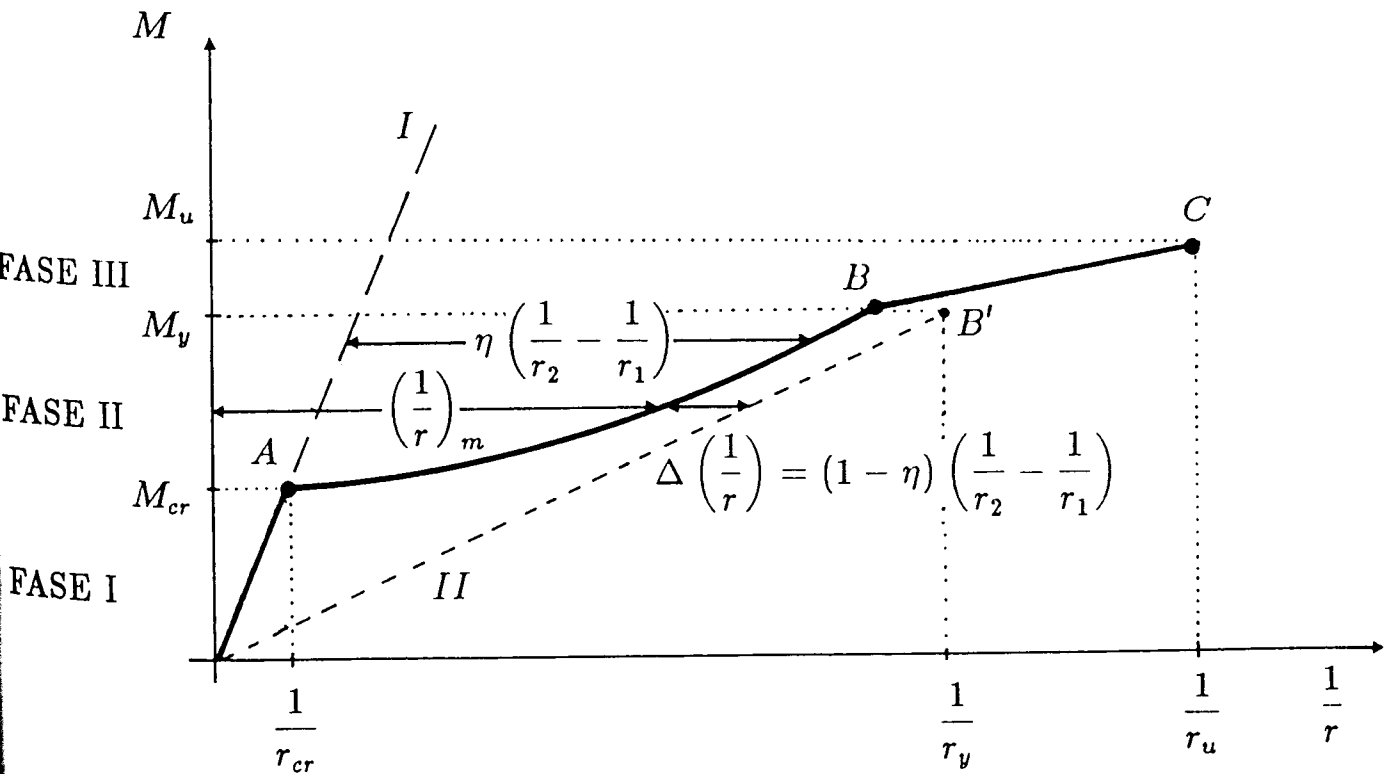


Fig. 4.10 – Comportamento à flexão simples de um provete de betão armado.

De seguida, no caso de uma secção rectangular, apresentam-se indicações para o cálculo do momento de início de fendilhação, momento de cedência e momento último e das curvaturas correspondentes; fixando assim a posição dos pontos notáveis, *A*, *B* e *C* desta curva.

#### 4.2.3.1 Fase I

O momento de início de fendilhação  $M_{cr}$ , será determinado impondo que a tensão instalada na fibra mais traccionada seja a tensão resistente à tracção do betão  $f_{ctm}$ .

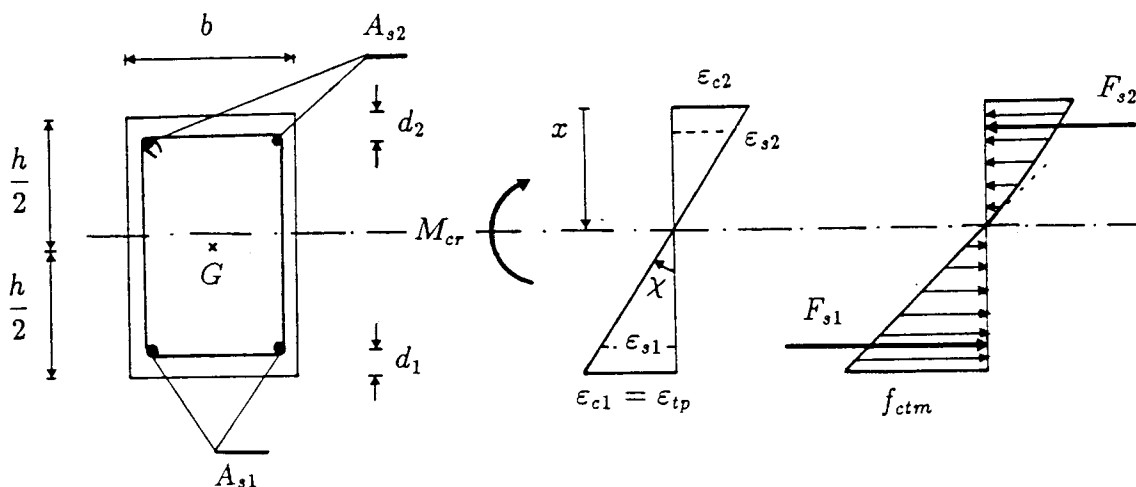


Fig. 4.11 - Diagrama de deformações e tensões de uma secção não fendilhada (fase I), submetida à flexão simples.

Com base na figura 4.11, a profundidade  $x$  do eixo neutro será determinada, impondo o equilíbrio das forças representadas,

$$F_{s1} + F_{s2} + F_c = 0 \quad (4.16)$$

ou seja,

$$E_s (\varepsilon_{s1} A_{s1} + \varepsilon_{s2} A_{s2}) + \Omega * b = 0 \quad (4.16a)$$

em que  $\Omega$  representa a área do diagrama de tensões no betão.

No programa de cálculo automático, a determinação desta profundidade é feita por tentativas, impondo vários valores para  $\epsilon_{c2}$  até ser satisfeita a equação de equilíbrio agora referida.

Obtida esta profundidade, e portanto conhecendo a intensidade e ponto de aplicação das forças  $F_{s1}$ ,  $F_{s2}$ ,  $F_{c1}$  e  $F_{c2}$  agora referidas, o valor de  $M_{cr}$  é determinado com a seguinte equação de momentos

$$M_{cr} = F_{s1} \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) - F_{s2} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) + F_c \left( \frac{h}{2} - 2 \right) \quad (4.17)$$

#### 4.2.3.2 Fase II

O momento de cedência  $M_y$  da mesma secção, é determinado pelo processo referido em 4.2.3.1, desta feita com a hipótese de a armadura traccionada estar no início da plasticificação.

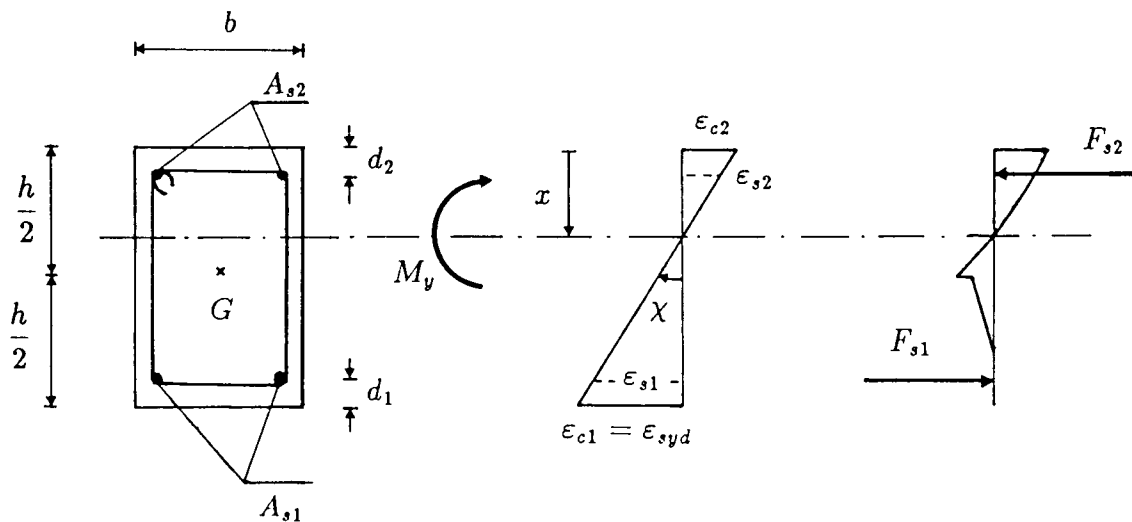


Fig. 4.12 - Diagrama de deformações e tensões, de uma secção fendilhada (fase II), submetida à flexão simples.

### 4.2.3.3 Fase III

O momento último  $M_u$ , ou máximo momento possível de aplicar à secção, é determinado tal como em 4.2.3.1 impondo que haja o equilíbrio das forças que se geram na armadura e no betão.

No programa de cálculo automático começa-se por impor a extensão última à armadura traccionada; calculando-se por tentativas a profundidade do eixo neutro e, com o conhecimento desta, o momento  $M_u$  e a curvatura  $\frac{1}{r_u}$ .

De seguida, na armadura traccionada, é imposta uma extensão ligeiramente inferior à última; calculando  $M_u^2$  e  $\frac{1}{r_{u2}}$ .

Efectuando um número pré-definido de iterações obtém-se o momento último  $M_u$  como sendo o maior dos  $M_u^i$  atrás determinados e  $\frac{1}{r_u}$  a correspondente curvatura  $\frac{1}{r_u^i}$ .

### 4.2.4 Implementação desta técnica no programa de cálculo automático

No programa de cálculo automático, para cada secção tipo da estrutura, são inicialmente escolhidas duas curvas momento-curvatura. Uma correspondente à armadura inferior traccionada e a outra à armadura superior traccionada (momentos e curvaturas positivos ou negativos, respectivamente).

Estas curvas serão utilizadas, em todas as iterações, para o cálculo da matriz de rigidez e momento flector em cada ponto de Gauss; determinada que esteja a curvatura deste.

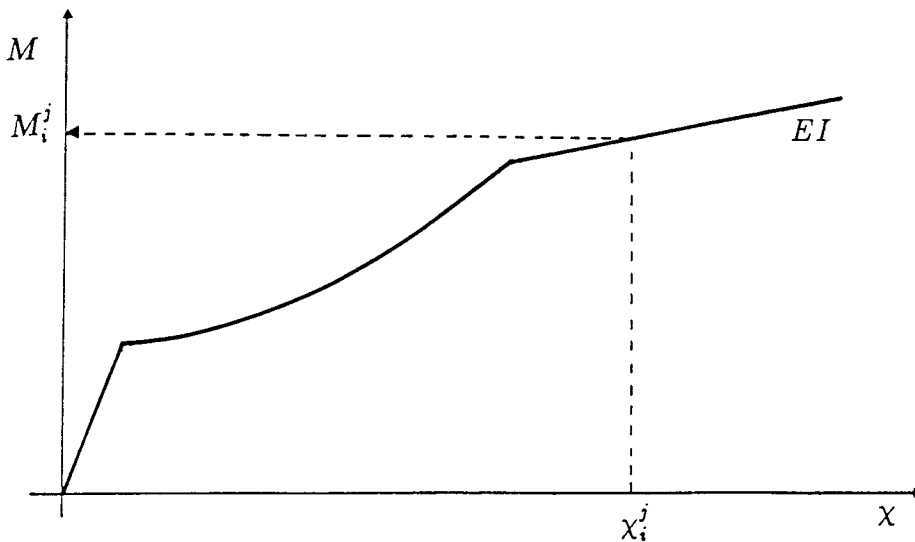


Fig. 4.13 – Cálculo do momento fletor e da rigidez à flexão num ponto de Gauss.

A matriz de elasticidade num ponto de Gauss  $j$  na iteração  $i$ , será então, no elemento de dois nós

$$[D_T]_i^j = [EI(x)] \quad (4.18)$$

e, no caso do elemento de três nós,

$$[D_T]_i^j = \begin{bmatrix} EI(x) & 0 \\ 0 & \frac{(EA)_0}{2,4(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.18a)$$

O momento fletor nesse ponto de Gauss será nos dois tipos de elementos (ver Fig. 4.13)

$$M = M_i^j \quad (4.19)$$

e o esforço transversal no elemento de três nós será

$$V = \frac{EA}{2,4(1 + \nu)} \phi \quad (4.19a)$$

com  $EA$  constante.

#### 4.2.5 Desenvolvimentos necessários, para a adaptação desta técnica, à análise não linear material de pórticos planos ou vigas submetidas à flexão composta.

Num elemento submetido à flexão composta, a curva esforço axial – extensão apresentada em 4.2.2, depende do valor do momento flector aplicado à secção; dependendo a curva momento – curvatura apresentada em 4.2.3, do valor do esforço axial instalado nessa secção.

Assim enquanto que em flexão simples, é necessária apenas uma curva momento – curvatura para a definição do comportamento não linear material dum elemento; em flexão composta será teóricamente necessário um número ilimitado de curvas esforço axial – extensão e momento – curvatura cada uma estabelecida para um valor constante de  $N$ .

A aplicação deste processo no programa de cálculo automático, obrigaria à definição, à priori, de uma base bastante complexa de curvas momento – curvatura e esforço axial – extensão [4].

Como não foi possível dispôr neste trabalho de um conjunto destas curvas e pelo facto de a sua definição, ou pelo menos a sua aferição, obrigaram a grande e exaustiva campanha de ensaios experimentais incomportável face aos objectivos deste trabalho; optou-se por implementar um método alternativo que, sem o inconveniente do agora referido, permita avaliar directamente a rigidez de flexão e axial numa secção para qualquer combinação de carga e que será descrito em 4.3.

## 4.3 Análise não linear material de pórticos planos

### 4.3.1 Introdução

Nesta técnica [10 a 16] de análise do comportamento não linear material de elementos sujeitos a qualquer combinação de esforço axial e momento flector, mantêm-se válidas as relações constitutivas do aço e do betão descritas em 4.2.2, tendo sido simulada nessas relações a ocorrência de descargas e recargas.

Esta necessidade advém do facto de mesmo em problemas com uma história de carregamento monotónico, poderem ocorrer descargas ou recargas localizadas devido a redistribuições de tensões. Estas descargas e recargas podem ser mesmo bastante pronunciadas pelo facto de no programa de cálculo automático se prever a possibilidade de analisar uma estrutura submetida à acção de várias solicitações aplicadas sequencialmente.

Com este objectivo, para simular o comportamento da armadura ao longo da história do carregamento, foi adoptada a formulação elasto-plástica dos problemas unidimensionais [3, 21]. O comportamento do betão é simulado no programa de cálculo automático por uma estruturação de blocos "IF".

A principal distinção entre esta técnica e a anterior, é que na primeira conhecido o vector de deformação num dado ponto da estrutura e num dado instante, o vector de tensão correspondente e a matriz de elasticidade eram obtidos a partir de uma curva momento-curvatura pré-definida; enquanto na presente técnica, conhecido esse vector de deformação e admitindo a hipótese de distribuição linear de extensões nessa secção, a matriz de elasticidade será obtida pelo método das diferenças finitas, para qualquer combinação de momento axial e momento flector, após a integração do diagrama de tensões correspondente, o que permite o cálculo das tensões respectivas.

### 4.3.2 Relações constitutivas do aço e do betão

Começemos por considerar um diagrama de comportamento bilinear, para o aço (Fig. 4.14).

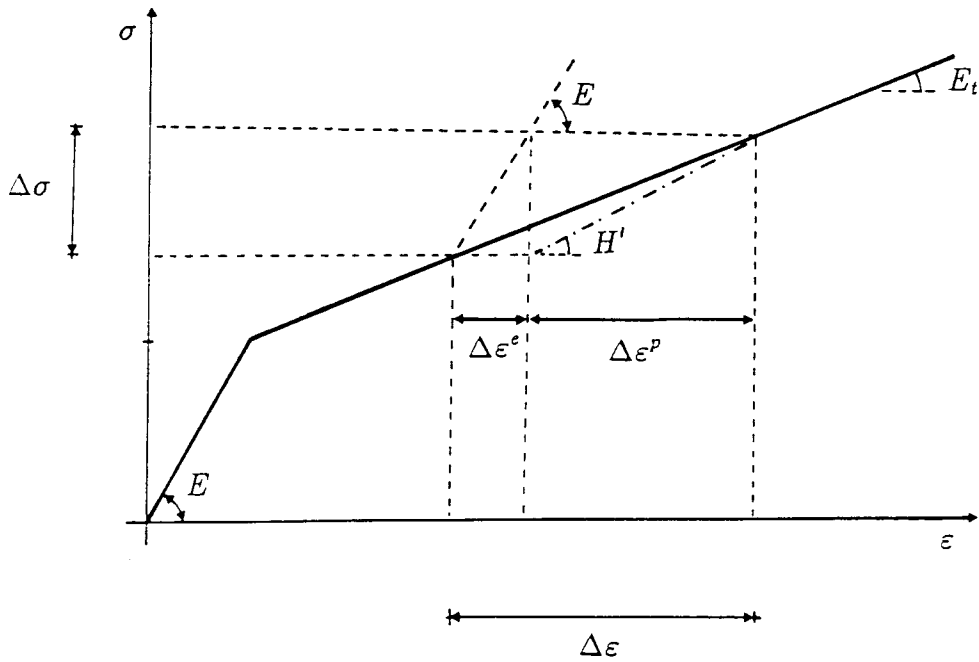


Fig. 4.14 – Comportamento elasto-plástico uniaxial, com endurecimento linear.

Este diagrama tem um trecho inicial, elástico linear de inclinação  $E$  (módulo elástico) até atingir a tensão de cedência do material  $\sigma_y$ , seguido por um trecho elasto-plástico linear de inclinação  $E_T$  (módulo tangente).

Ultrapassada a tensão de cedência, a um incremento de tensão  $d\sigma$  está associado um incremento de deformação  $d\varepsilon$  tal que

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (4.20)$$

sendo  $d\varepsilon^e$  a parcela de deformação elástica e  $d\varepsilon^p$  a parcela de deformação plástica.

Definindo o parâmetro de endurecimento  $H'$  como sendo a inclinação da parcela de deformação plástica

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (4.21)$$

como

$$d\sigma = d\varepsilon_e \cdot E = d\varepsilon \cdot E_T \quad (4.22)$$



e atendendo a 4.20,

$$H' = \frac{d\varepsilon E_T}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{E_T}{1 - \frac{d\varepsilon^e}{d\varepsilon}} = \frac{E_T}{1 - \frac{\frac{d\sigma}{E}}{\frac{d\sigma}{E_T}}} = \frac{E_T}{1 - \frac{E}{E_T}} \quad (4.23)$$

então

$$E_T = E \left( \frac{H'}{E + H'} \right) \quad (4.24)$$

Adoptanto então, como o descrito em 3.2, um método incremental e iterativo para a resolução do problema não linear, analisemos segundo a teoria elasto-plástica, o cálculo do acréscimo de tensão numa dada iteração  $i$  provocado por um acréscimo de deformação  $\Delta\varepsilon^i$ .

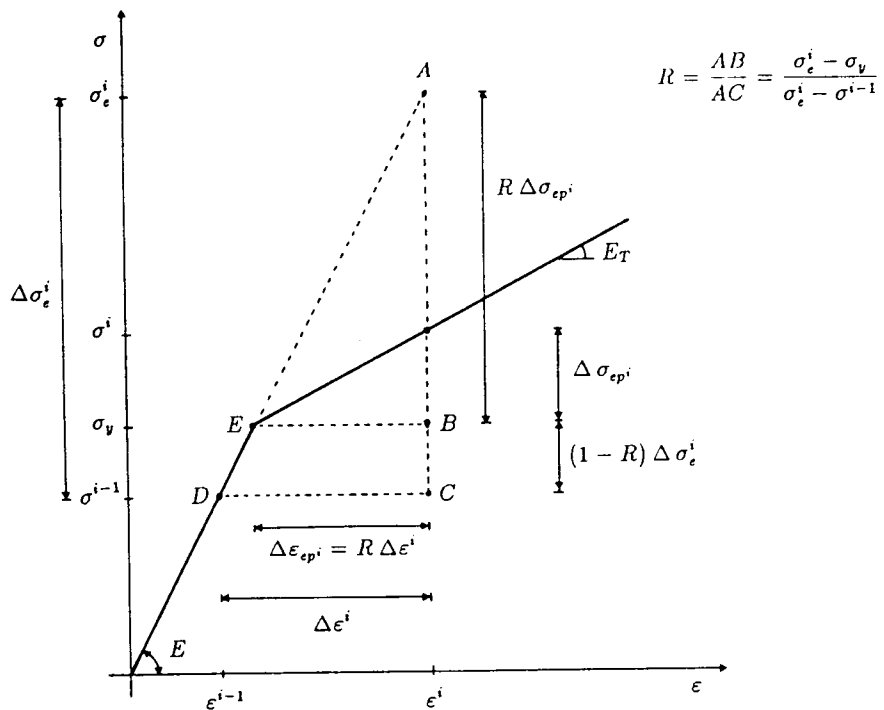


Fig. 4.15 - Variação da tensão e da deformação num problema elasto-plástico na iteração em que excede a tensão de cedência.

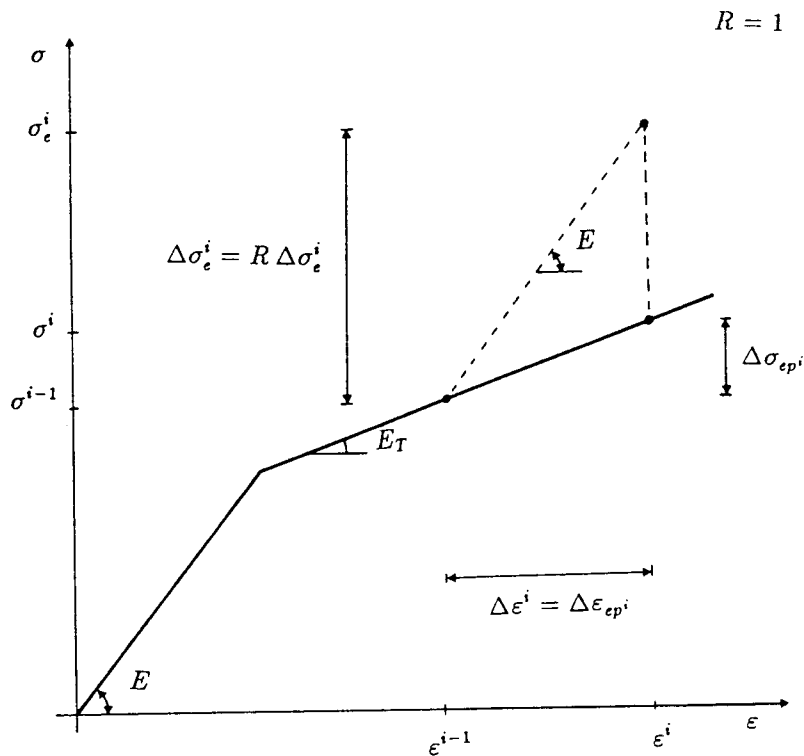


Fig. 4.16 - Variação da tensão e da deformação num problema elasto-plástico, em que já se havia ultrapassado a tensão de cedência.

Pela análise da figura 4.15 e estabelecendo a relação de semelhança entre os triângulos  $[AEB]$  e  $[ADC]$ , como

$$\begin{aligned}
 AB &= \sigma_e^i - \sigma_y & DC &= \Delta \varepsilon^i \\
 AC &= \Delta \sigma_e^i & EB &= \Delta \varepsilon_{ep}^i
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

então

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC} \quad \text{ou} \quad EB = \frac{AB \times DC}{AC}
 \tag{4.26}$$

pelo que

$$\Delta \varepsilon_{ep}^i = AB \frac{\Delta \varepsilon^i}{\Delta \sigma_e^i}
 \tag{4.27}$$

Designando por  $R$  o quociente

$$R = \frac{AB}{\Delta\sigma_e^i} = \frac{\sigma_e^i - \sigma_y}{\sigma_e^i - \sigma^{i-1}} \quad (4.28)$$

e então

$$\Delta\varepsilon_{ep}^i = R \Delta\varepsilon^i \quad (4.29)$$

como

$$\Delta\sigma_{ep}^i = E_T \Delta\varepsilon_{ep}^i \quad (4.30)$$

Atendendo às equações (4.24) e (4.29)

$$\Delta\sigma_{ep}^i = E \left( 1 - \frac{E}{E + H'} \right) R \Delta\varepsilon^i \quad (4.31)$$

e, finalmente,

$$\sigma^i = \sigma^{i-1} + \Delta\sigma_{ep}^i + (1 - R)\Delta\sigma_e^i \quad (4.32)$$

já que,

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \Delta\sigma_e^i - R\Delta\sigma_e^i = \Delta\sigma_e^i(1 - R)$$

Da análise da figura 4.16, em que na iteração anterior  $i - 1$  já se tinha ultrapassado a tensão de cedência, mantém-se válida a expressão (4.32) para o cálculo da tensão na iteração corrente  $i$ , sendo desta feita  $R = 1$ , visto que na equação (4.28) para a avaliação de  $R$ ,  $\sigma_y$  deverá ser substituído por  $\sigma^{i-1}$ .

A deformação plástica total poderá ser avaliada através da expressão

$$\varepsilon_p^i = \varepsilon_p^{i-1} + \Delta\varepsilon_p^i \quad (4.33)$$

como

$$\Delta \sigma^i = E \Delta \varepsilon_e^i = H' \Delta \varepsilon_p^i \quad (4.34)$$

ou seja

$$\Delta \varepsilon_p^i = \frac{E \Delta \varepsilon_e^i}{H'} \quad (4.34a)$$

e

$$\Delta \sigma^i = E \Delta \varepsilon_e^i = E_T \Delta \varepsilon_{ep}^i \quad (4.35)$$

ou

$$\Delta \varepsilon_e^i = \frac{E_T \Delta \varepsilon_{ep}^i}{E} \quad (4.35a)$$

Substituindo a expressão (4.35a) na expressão (4.34a) e tendo em conta a equação (4.24) resulta, finalmente,

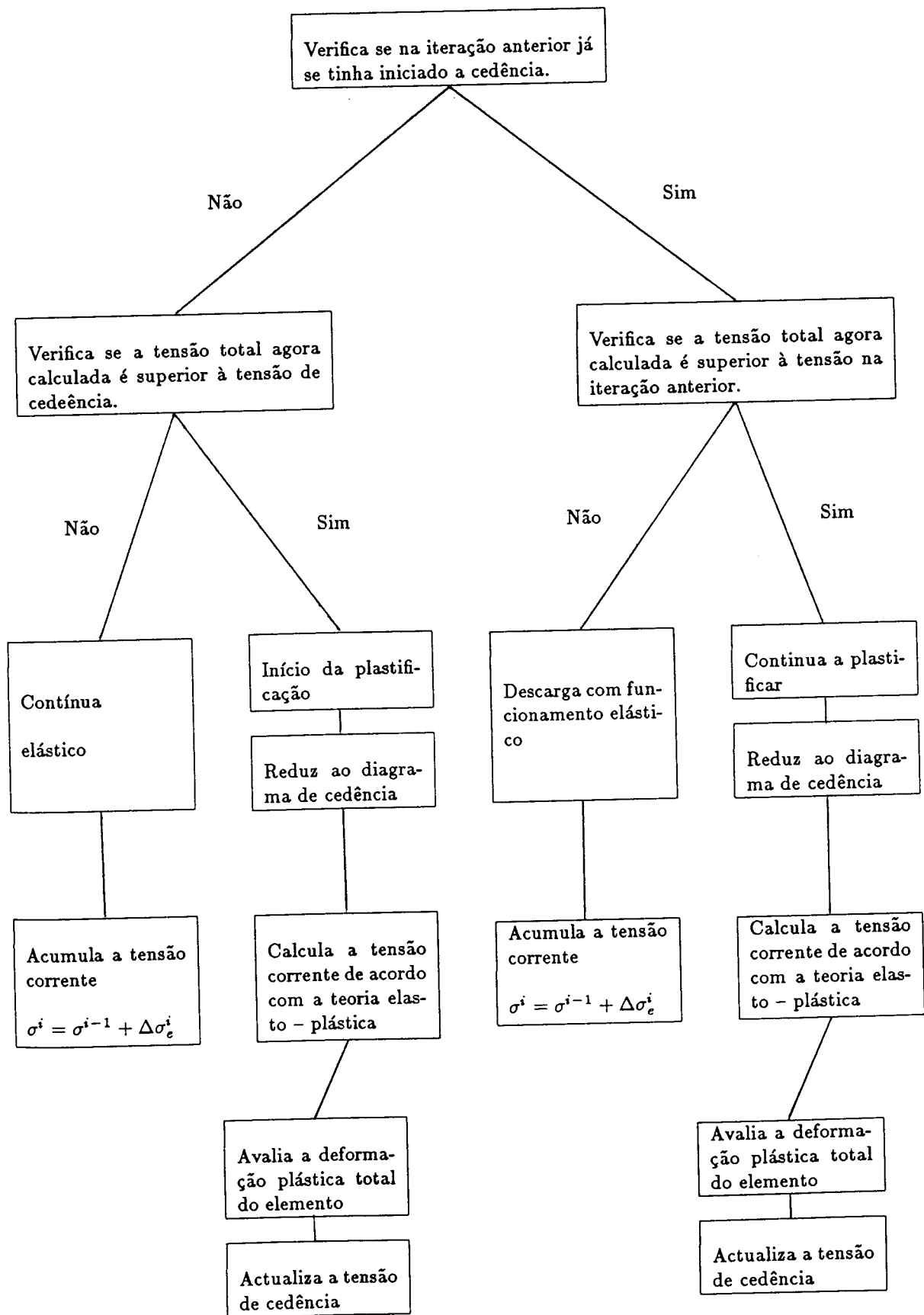
$$\Delta \varepsilon_p^i = \frac{E}{E + H'} \Delta \varepsilon_{ep}^i = \frac{E}{E + H'} R \Delta \varepsilon^i \quad (4.36)$$

e, então

$$\varepsilon_p^i = \varepsilon_p^{i-1} + \frac{R \Delta \varepsilon^i}{1 + \frac{H'}{E}} \quad (4.37)$$

A implementação desta teoria no programa de cálculo automático necessita, na iteração  $i$  de qualquer incremento, das seguintes fases:

i) Cálculo do acréscimo de deformação  $\Delta \varepsilon^i$



ii) Cálculo do incremento elástico de tensão, sem obedecer ao critério de cedência

$$\Delta\sigma_e^i = E\Delta\varepsilon^i$$

iii) Cálculo da tensão total acumulada

$$\sigma_e^i = \sigma^{i-1} + \Delta\sigma_e^i$$

em que  $\sigma^{i-1}$  é a tensão total (tendo respeitado o critério de cedência) na iteração anterior.

iv) Analisa o estado da tensão em função da relação de comportamento

v) Acumula a tensão corrente

$$\sigma^i = \sigma^{i-1} + \Delta\sigma_e^i$$

vi) Iniciada a plastificação, calcula a tensão corrente de acordo com a teoria elasto-plástica

$$\sigma^i = \sigma^{i-1} + \Delta\sigma_{ep}^i + (1 - R)\Delta\sigma_e^i$$

vii) Se a armadura estiver em cedência calcula a deformação plástica total do elemento

$$\varepsilon_p^i = \varepsilon_p^{i-1} + \frac{R\Delta\varepsilon^i}{1 + \frac{H'}{E}}$$

viii) Actualiza a tensão de cedência

$$\sigma_y = \sigma_y + H' \Delta\varepsilon_p^i$$

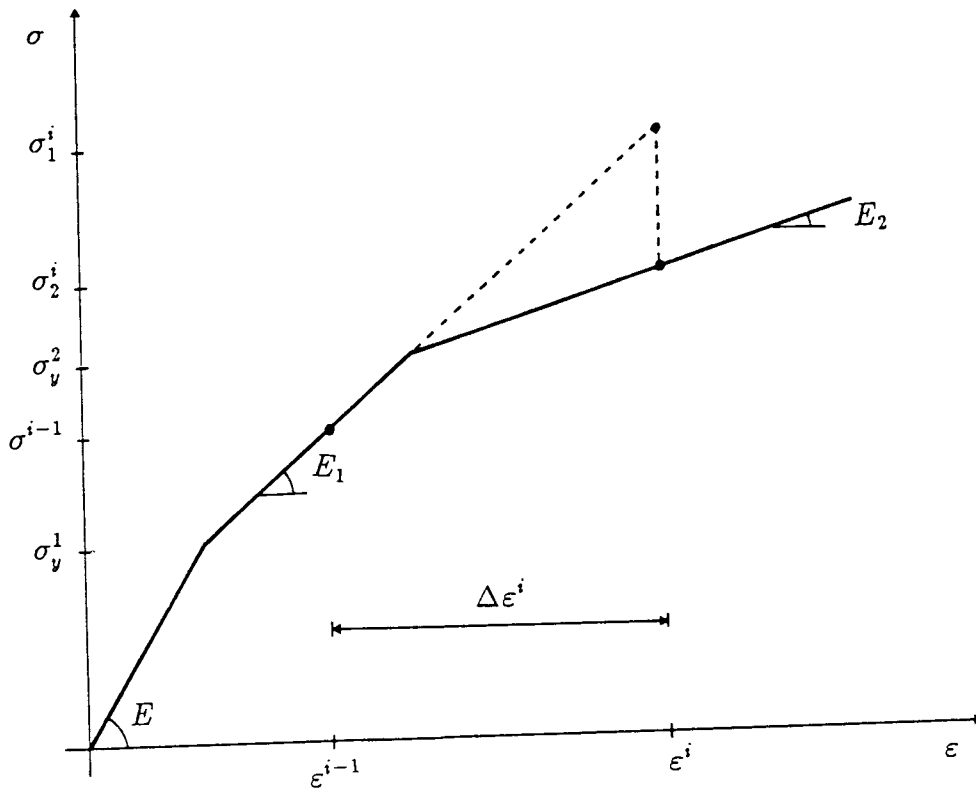


Fig. 4.17 – Lei do comportamento trilinear para o aço.

Considerando-se um diagrama de comportamento trilinear para o aço em relação ao descrito para a lei de comportamento bilinear é necessário prever a situação de transição entre o primeiro e o segundo troço de cedência, representada na figura 4.17; e o caso desse elemento de armadura se encontrar no segundo ramo de cedência.

Se na iteração  $i - 1$  o elemento já se encontrava no segundo ramo de cedência da curva de comportamento, a equação (4.32) para o cálculo da tensão total corrente e a equação (4.37) da deformação plástica total na iteração  $i$ , mantêm-se válidas se substituir  $\sigma_y$  por  $\sigma_{y2}$  tendo  $R$  o valor unitário.

Nesta situação de transição a expressão (4.32) para o cálculo da tensão total corrente continua válida, desta feita com

$$R = \frac{\sigma_e^i - \sigma_{y2}}{\sigma_e^i - \sigma^{i-1}} \quad (4.38)$$

A expressão da deformação plástica total é deduzida facilmente através de uma análise da figura 4.18

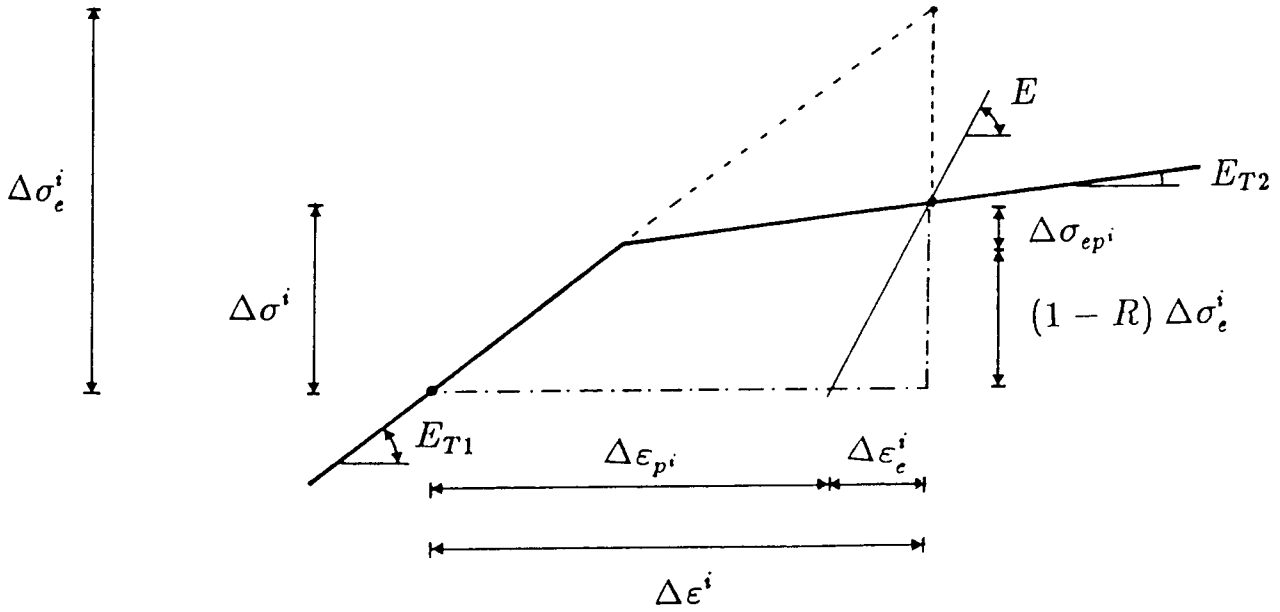


Fig. 4.18 – Transição entre o segundo e o terceiro ramo de cedência.

Com efeito, como o acréscimo de deformação plástica  $\Delta\epsilon_p^i$  pode-se obter do acréscimo de deformação  $\Delta\epsilon^i$  pela expressão

$$\Delta\epsilon_p^i = \Delta\epsilon^i - \Delta\epsilon_e^i \quad (4.39)$$

analisando a figura 4.18 o acréscimo de deformação elástica será

$$\Delta\epsilon_e^i = \frac{\frac{R(\Delta\epsilon^i E_1)}{E_1} E_2 + (1-R)(\Delta\epsilon^i E_1)}{E} \quad (4.40)$$



e então a deformação plástica total é dada por:

$$\varepsilon_p^i = \varepsilon_p^{i-1} + \left[ \Delta\varepsilon^i - \frac{R \Delta\varepsilon^i E_2 + (1 - R) \Delta\varepsilon^i E_1}{E} \right] \quad (4.41)$$

e finalmente

$$\varepsilon_p^i = \varepsilon_p^{i-1} + (1 - R) \left( \frac{E - E_1}{E} \right) \Delta\varepsilon^i + R \left( \frac{E - E_2}{E} \right) \Delta\varepsilon^i \quad (4.42)$$

Como exemplo da implementação deste método são apresentados três diagramas de comportamento (linear, bilinear e trilinear), correspondentes à mesma história de carregamento, com zonas de carga, descarga e recarga. Qualquer um destes diagramas evidencia o modelo de endurecimento isotrópico considerado.

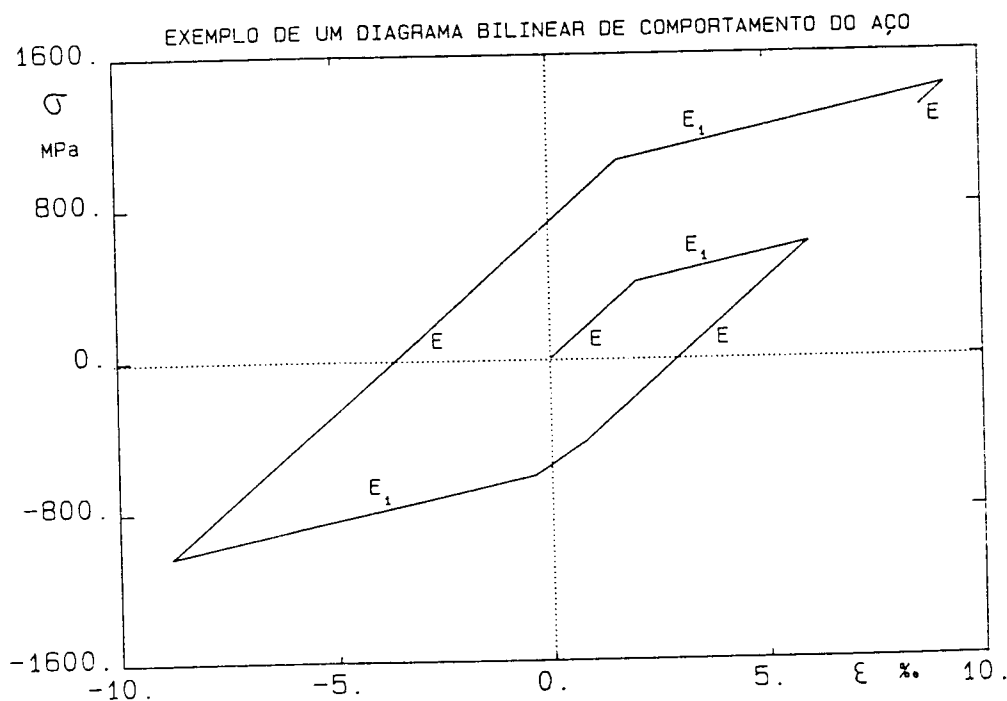


Fig. 4.19 - Exemplo de diagrama de comportamento bilinear do aço.

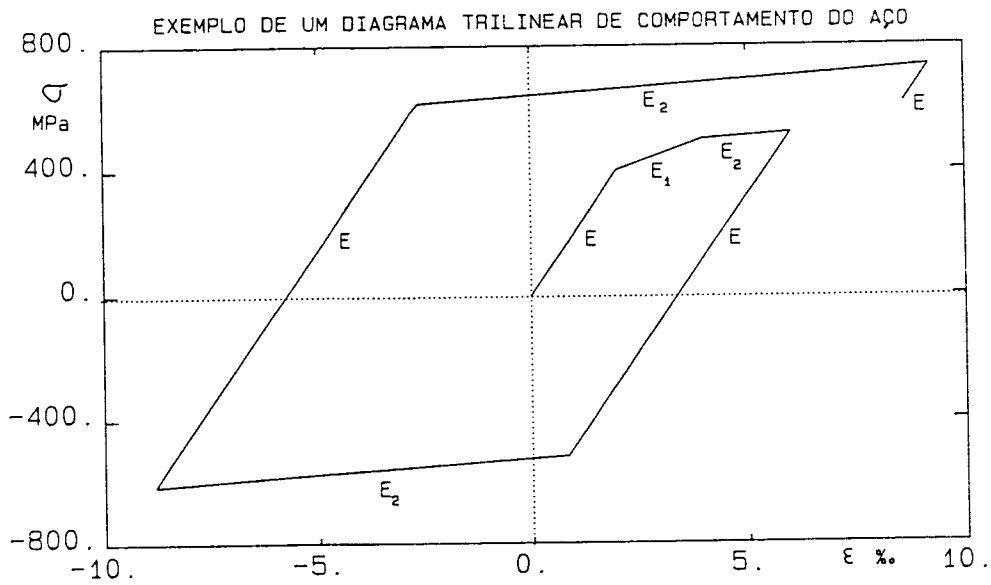


Fig. 4.20 – Exemplo de diagrama de comportamento trilinear do aço.

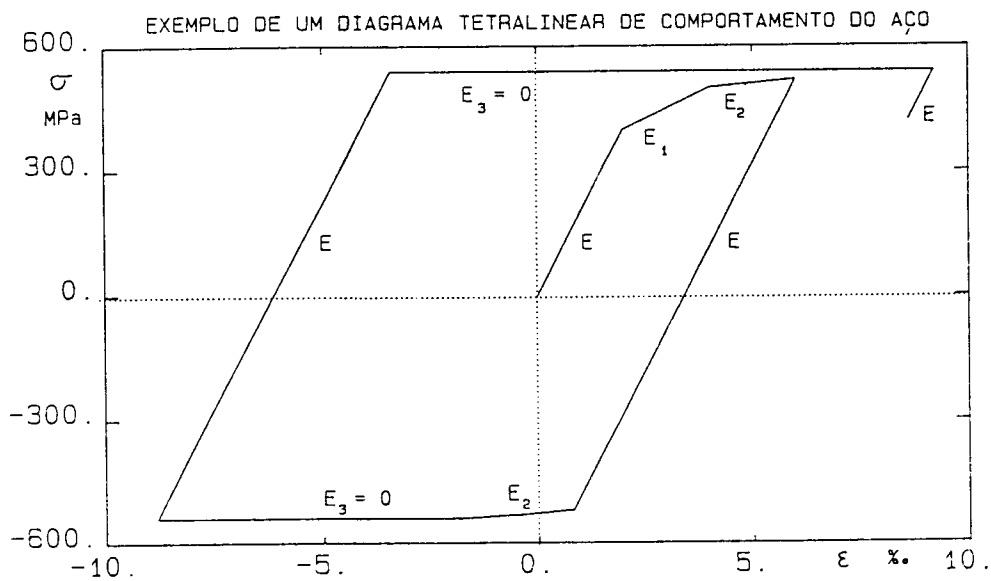


Fig. 4.21 – Exemplo de diagrama de comportamento tetralinear do aço.

Os ciclos de carga, descarga e recarga do betão são simulados no programa de cálculo automático, por uma estruturação de blocos *IF*.

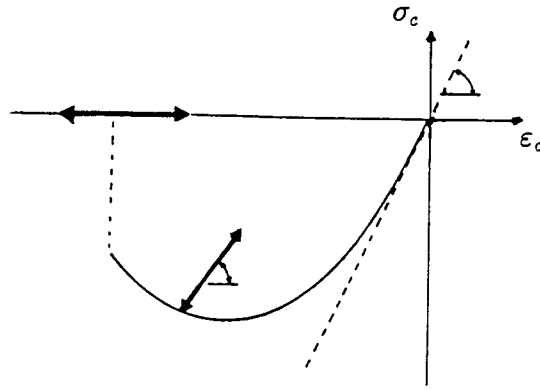


Fig. 4.22 - Descarga - recarga em compressão.

Essa estruturação, procurou reflectir os aspectos específicos do comportamento do betão [24, 25], em descarga e recarga, a seguir referidos e que constituem uma aproximação do comportamento real do betão, observável experimentalmente:

- i) A descarga e recarga do betão comprimido, desenvolve-se segundo uma recta paralela à tangente a esse diagrama na origem. Uma vez ultrapassada a extensão de compressão última o betão não mais deixará de apresentar um módulo de elasticidade e tensão resistente nulos.
- ii) Considera-se que a descarga e a recarga do betão traccionado, se processa segundo a recta que une o ponto representativo do estado de tensão e deformação na iteração anterior à origem do sistema de eixos coordenados  $(\epsilon_c, \sigma_c)$ . O que é válido antes ou depois de iniciada a fendilhação.

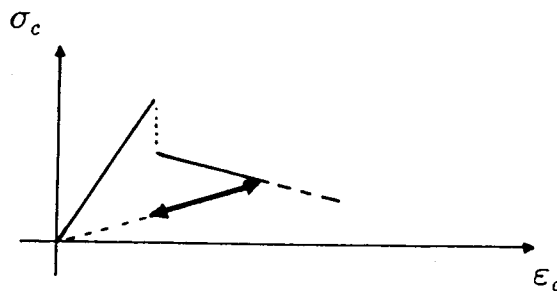


Fig. 4.23 - Descarga - recarga em tracção.

- iii) Se na recarga em tracção for ultrapassada a máxima extensão já verificada; a tensão correspondente será a mesma que se verificaria caso não tivesse ocorrido alguma descarga.

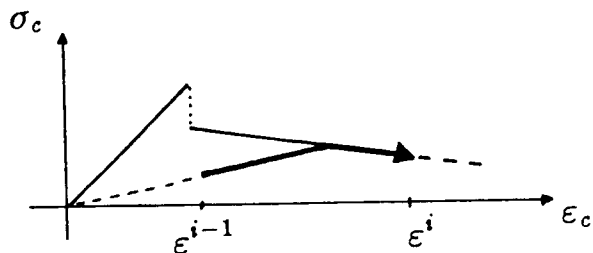


Fig. 4.24 - Recarga em tracção.

- iv) Numa descarga em compressão, a tensão calculada segundo i), deixa de ser válida se for positiva e se previamente já tiver ocorrido fendilhação.

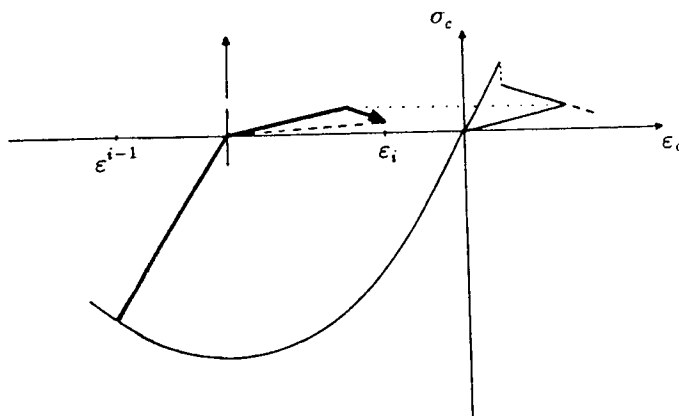


Fig. 4.25 - Recarga em tracção na descarga em compressão.

Trata-se pois, de uma situação de recarga em tracção na descarga em compressão; sendo válidos os princípios referidos em ii) e iii) para uma extensão  $\epsilon_i$  superior a  $\epsilon_0$ .

Tal como se pode observar na figura 4.25,  $\epsilon_0$  será a extensão resultante da descarga referida em i) e para a qual a tensão instalada é nula.

Numa posterior recarga em compressão, o caminho seguido será tal como em ii), sobre a recta que une o ponto representativo do estado de tensão e deformação na

iteração anterior à origem do novo sistema de eixos coordenados  $(\epsilon_c, \sigma_c^0)$ , até atingir a extensão de compressão máxima já experimentada. Após esta continuará sobre o ramo de carga em compressão.

- v) Se numa descarga em tracção a extensão corrente for negativa, a tensão respectiva será calculada em compressão como se não houvesse ocorrido tracção.

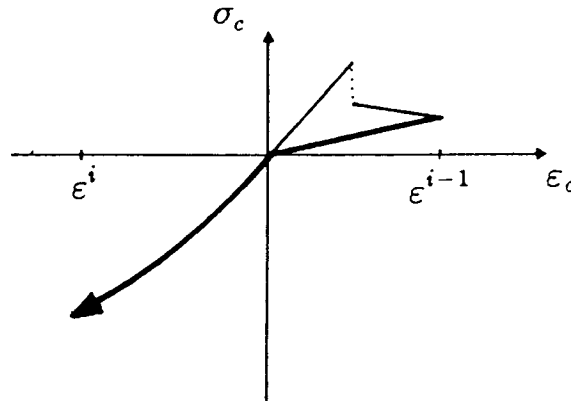


Fig. 4.26 – Carga em compressão na descarga em tracção.

Estes aspectos estão evidenciados, nas figuras 4.27 e 4.28, que representam os resultados da aplicação deste procedimento à simulação de duas histórias de carga distintas.

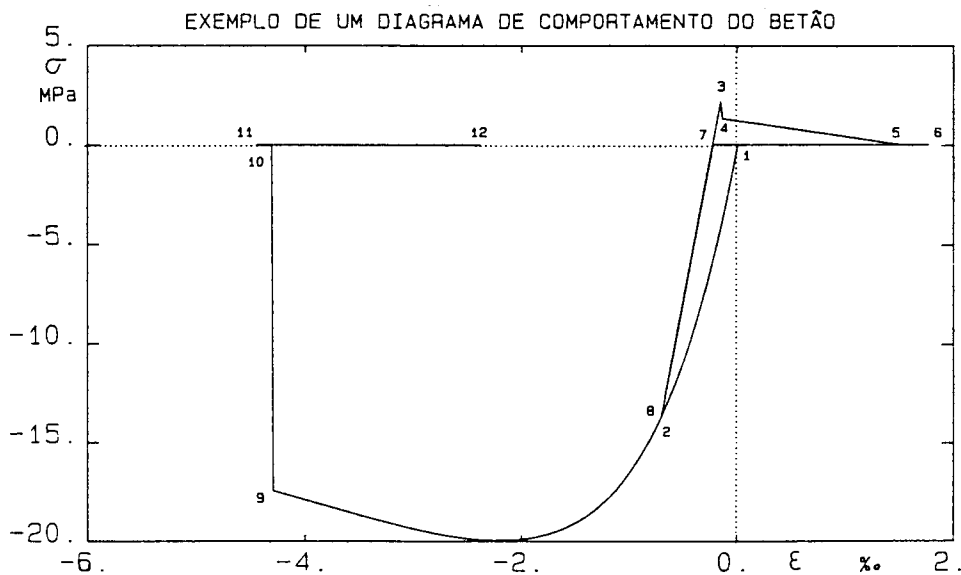


Fig. 4.27 – Exemplo de diagrama de comportamento do betão.

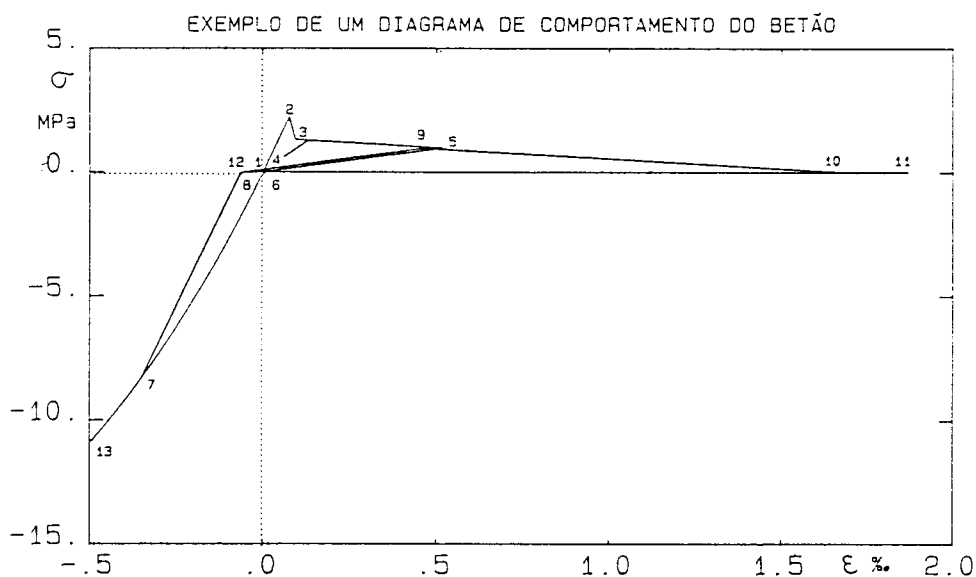


Fig. 4.28 – Exemplo de diagrama de comportamento do betão.

Para que num dado incremento os estados de tensão correspondentes a iterações intermédias não convergidas não alterem as relações constitutivas, condicionando portanto, eventualmente, o estado de tensão numa posterior iteração convergida, procurou-se tornar o processo de análise incremental e iterativo independente da história de carregamento, o que normalmente se designa por "path-independent".

Com este objectivo, em qualquer iteração do processo de análise os acréscimos de deslocamentos, deformações e tensões do aço e do betão são referidos aos encontrados na última iteração convergida do incremento anterior e não com os da iteração anterior; actualizando-se apenas as correspondentes grandezas totais ao atingir-se a convergência.

### 4.3.3 Equações de equilíbrio

Considerando a hipótese de distribuição linear das extensões ao longo da altura de uma secção transversal; conhecida a extensão e a curvatura em cada secção, a distribuição de tensões correspondente a esse estado de deformação será, sem perda de generalidade, a indicada na figura 4.29.

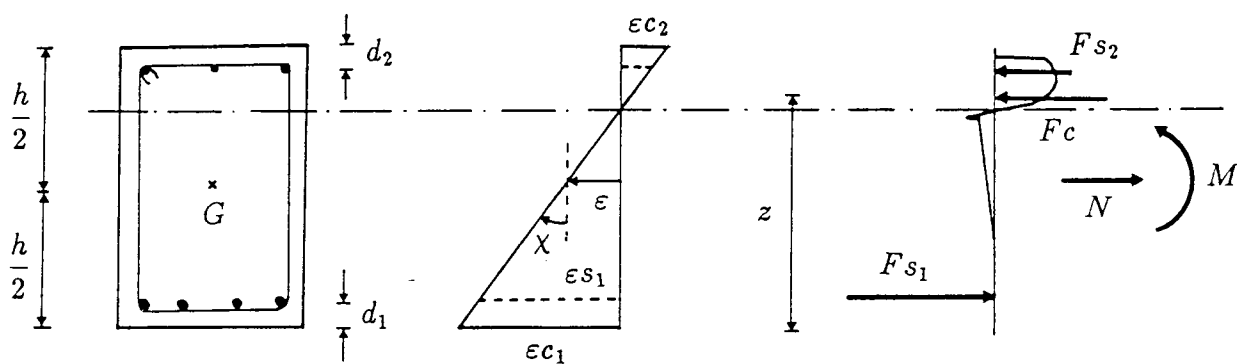


Fig. 4.29 - Diagrama de extensões e tensões de uma secção transversal.

em que

$\epsilon$  - extensão medida no centro de gravidade da secção de betão

$\chi$  - curvatura da secção

$N$  - força axial actuando no centro de gravidade da secção de betão

$M$  - momento flector aplicado à secção.

Com base na figura 4.29 deduz-se facilmente as equações de equilíbrio da secção.

$$N = F_{s1} + F_{s2} + F_c \tag{4.43}$$

$$M = F_{s1} \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) - F_{s2} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) + F_c \left( \frac{h}{2} - z \right)$$

em que

$F_{s1}$  - Força na armadura inferior

$F_{s2}$  - Força na armadura superior

$F_c$  - Resultante dos esforços, de compressão e de tracção, no betão

$d_1$  - Recobrimento da armadura inferior

$d_2$  - Recobrimento da armadura superior

$b$  - Base da secção

$h$  - Altura da secção

$z$  - Localização da resultante dos esforços na secção de betão

A resultante dos esforços no betão e a localização dessa resultante são calculados no programa FEMPOR discretizando essa secção num número escolhido de camadas (vinte, por exemplo).

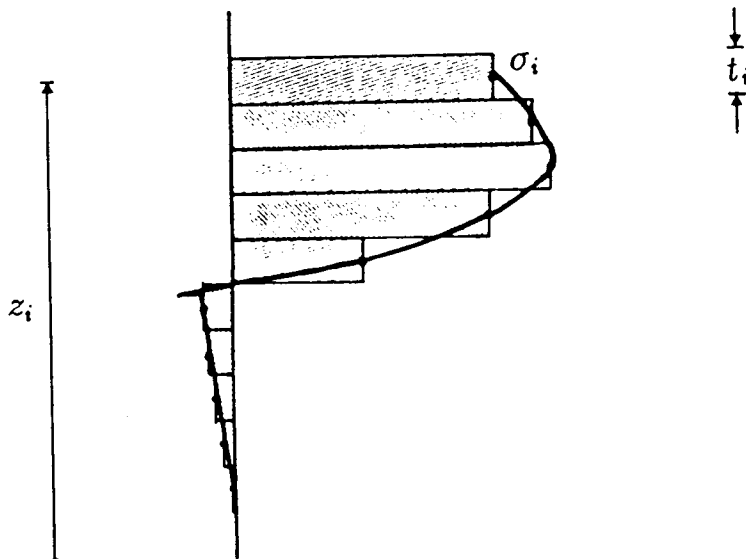


Fig. 4.30 - Discretização da secção transversal em camadas.



A extensão e a tensão é calculada no ponto médio de cada camada, de altura  $t$ , sendo:

$$F_c \simeq \Sigma \sigma_i t_i b \quad (4.44)$$

e

$$z \simeq \frac{\Sigma z_i \sigma_i t_i b}{\Sigma \sigma_i t_i b} \quad (4.45)$$

#### 4.3.4 Relações constitutivas da secção de betão armado

Para definir os elementos da matriz de elasticidade [10] [16] numa iteração  $i$  e num dado ponto, é necessário calcular primeiro o vector das deformações e tensões nesse ponto

$$\{\chi_i, \varepsilon_i\}^T$$

$$\{M_i, N_i\}^T$$

Conhecendo o vector de deformação  $\{\chi_{i-1}, \varepsilon_{i-1}\}^T$  e o vector das tensões  $\{M_{i-1}, N_{i-1}\}^T$  na iteração anterior pode-se estabelecer as seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ N_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{i-1} \\ N_{i-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta M \\ \Delta N \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \chi_i \\ \varepsilon_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \chi_{i-1} \\ \varepsilon_{i-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

A relação entre os vectores de tensão e deformação infinitesimais assume a forma:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} d\varepsilon$$

$$dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \quad (4.47)$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} dM \\ dN \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial \chi} & \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N}{\partial \chi} & \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\chi \\ d\varepsilon \end{Bmatrix} = [D_T] \begin{Bmatrix} d\chi \\ d\varepsilon \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

em que  $[D_T]$  é a matriz de elasticidade tangente da secção.

Substituindo na equação anterior as variações infinitesimais dos valores das deformações e das tensões, por incrementos finitos, pode escrever-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M \\ \Delta N \end{Bmatrix} = [D_T] \begin{Bmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

Os elementos da matriz de elasticidade tangente da secção podem, ser avaliados numericamente, utilizando o método das diferenças finitas.

Neste trabalho utiliza-se para o efeito as diferenças finitas centradas. Considera-se para a curvatura e extensão, variações incrementais muito pequenas (em dupla precisão  $\Delta \chi = \Delta \varepsilon \simeq 10^{-10}$ ), calculando pelas equações de equilíbrio os correspondentes momentos e esforços axiais.

A aplicação do método das diferenças finitas a cada secção (ponto de Gauss) encontra-se ilustrado na figura 4.31.

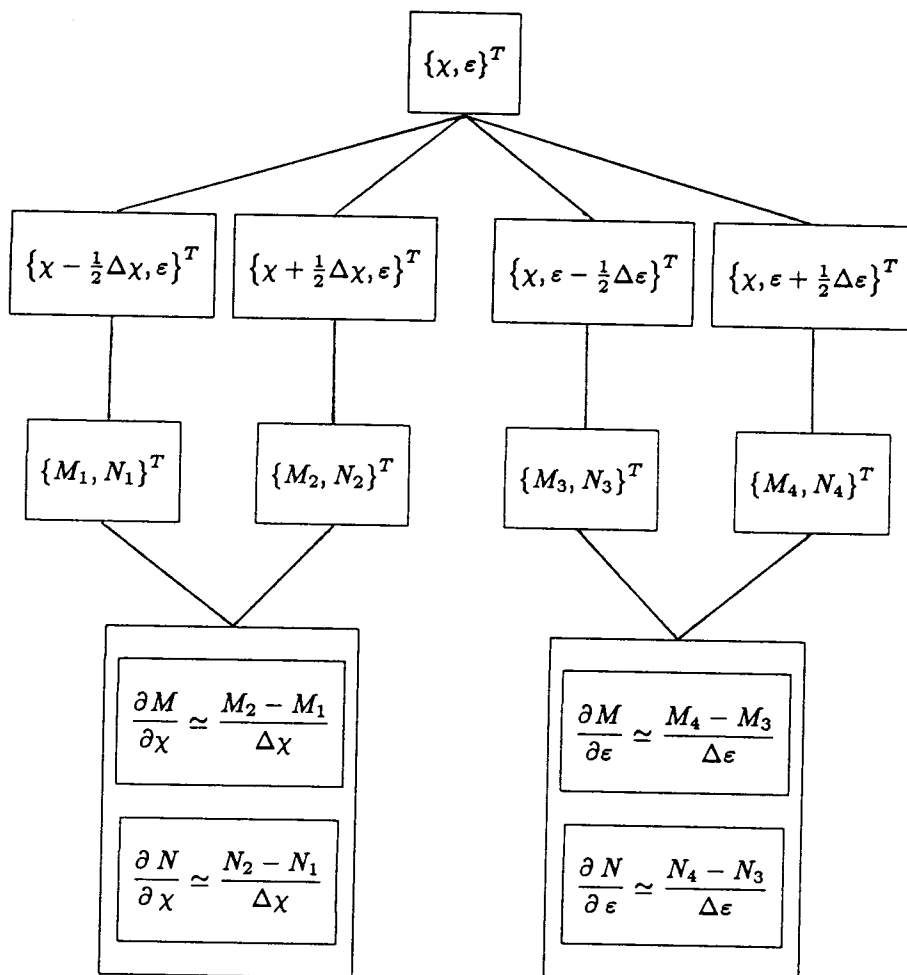


Fig. 4.31 – Esquema de aplicação do método das diferenças finitas.

Com este procedimento a matriz de elasticidade tangente será dada pela expressão:

$$[D_T] = \begin{bmatrix} \frac{M_2 - M_1}{\Delta\chi} & \frac{M_4 - M_3}{\Delta\epsilon} \\ \frac{N_2 - N_1}{\Delta\chi} & \frac{N_4 - N_3}{\Delta\epsilon} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Na figura 4.32, simula-se algumas situações da aplicação deste método a uma camada genérica da secção de betão e a qualquer nível da armadura.

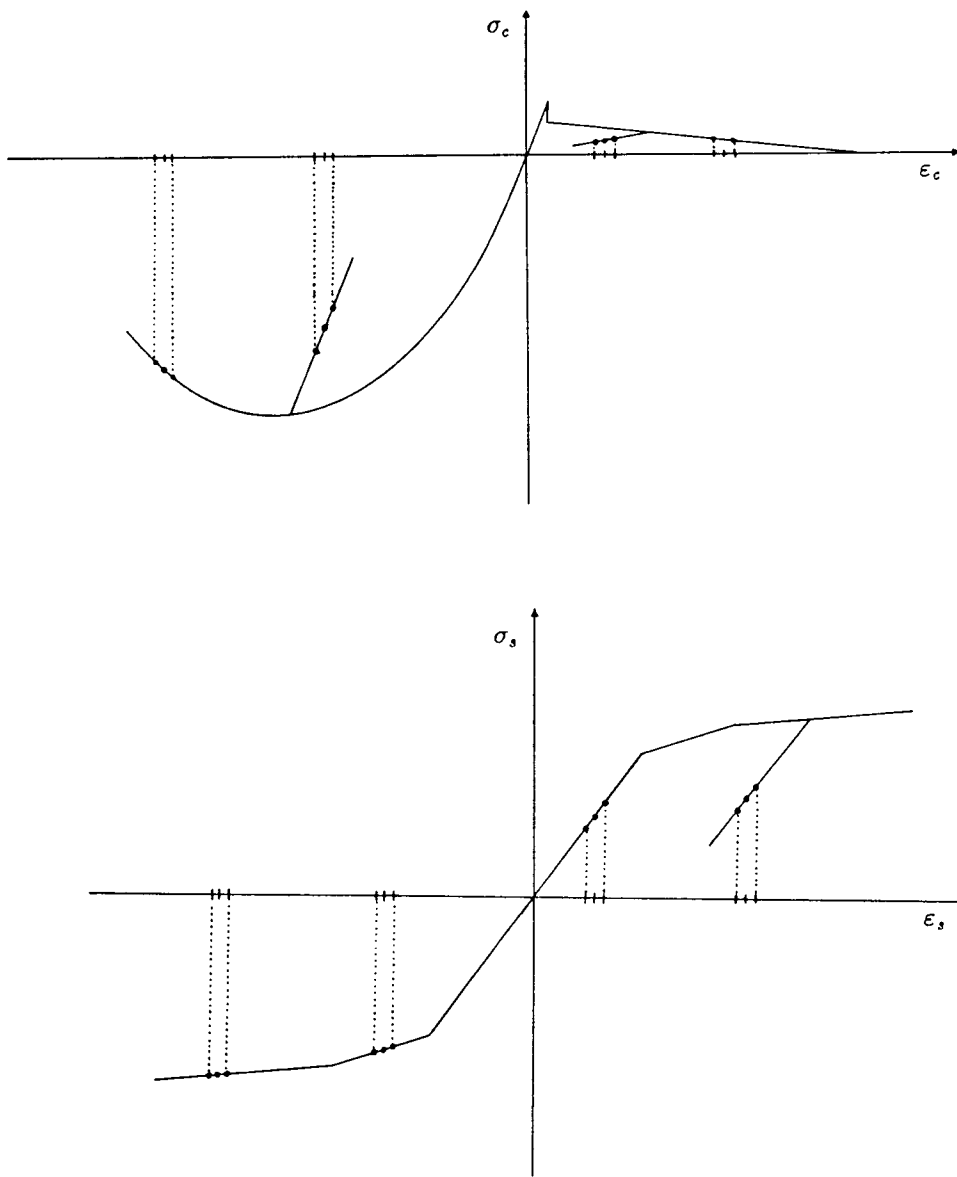


Fig. 4.32 - Aplicação das relações constitutivas à dedução da matriz de elasticidade tangente.

### 4.3.5 Forças nodais equivalentes ao estado de tensão

Em qualquer configuração de equilíbrio as forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado são dadas por:

$$\{f_i\} = \int_{-1}^1 [B]^T \{\sigma\} \frac{L}{2} d\xi \quad (4.51)$$

em que a matriz de deformação  $[B]$  é a matriz  $[B_0]$  definida no segundo capítulo para o caso da análise linear geométrica ou a matriz  $[B]$  definida no terceiro capítulo para o caso de análise não linear geométrica.

O vector das tensões  $\{\sigma\}$  em cada ponto de Gauss, é calculado pelas equações de equilíbrio expressas em 4.3.3, tendo em conta a história do carregamento e as relações constitutivas do aço e do betão descritas em 4.3.2 (ver figuras 4.19 a 4.23).

## 4.4 Exemplos

Neste capítulo são apresentados quatro exemplos de aplicação do programa de cálculo automático FEMPOR para a simulação do comportamento não linear material de estruturas.

No primeiro exemplo é analisada uma faixa de laje simplesmente apoiada sob a acção de duas forças concentradas, comparando os resultados obtidos com resultados experimentais e numéricos [19], resultados numéricos obtidos com um programa não linear de elementos finitos bidimensionais [17].

No segundo exemplo são comparados os resultados experimentais do ensaio de um pórtico de três barras [7, 22] com os resultados encontrados neste estudo.

Os dois últimos exemplos são de duas vigas simplesmente apoiadas [17]; com o mesmo comprimento, a mesma largura, a mesma percentagem de armadura, solicitadas ambas a meio vão por uma força concentrada e diferindo sobretudo na altura. São consideradas nesta análise várias hipóteses de ligação ao exterior (permitindo ou não o deslocamento horizontal) estudando-se cada uma das vigas assim definidas considerando a não linearidade material e ou a não linearidade geométrica.

#### 4.4.1 Faixa de laje

Devido à simetria da estrutura e do carregamento é apenas simulada metade da faixa com uma discretização em onze elementos de três nós refinados na proximidade da carga conforme o representado na figura 4.33,

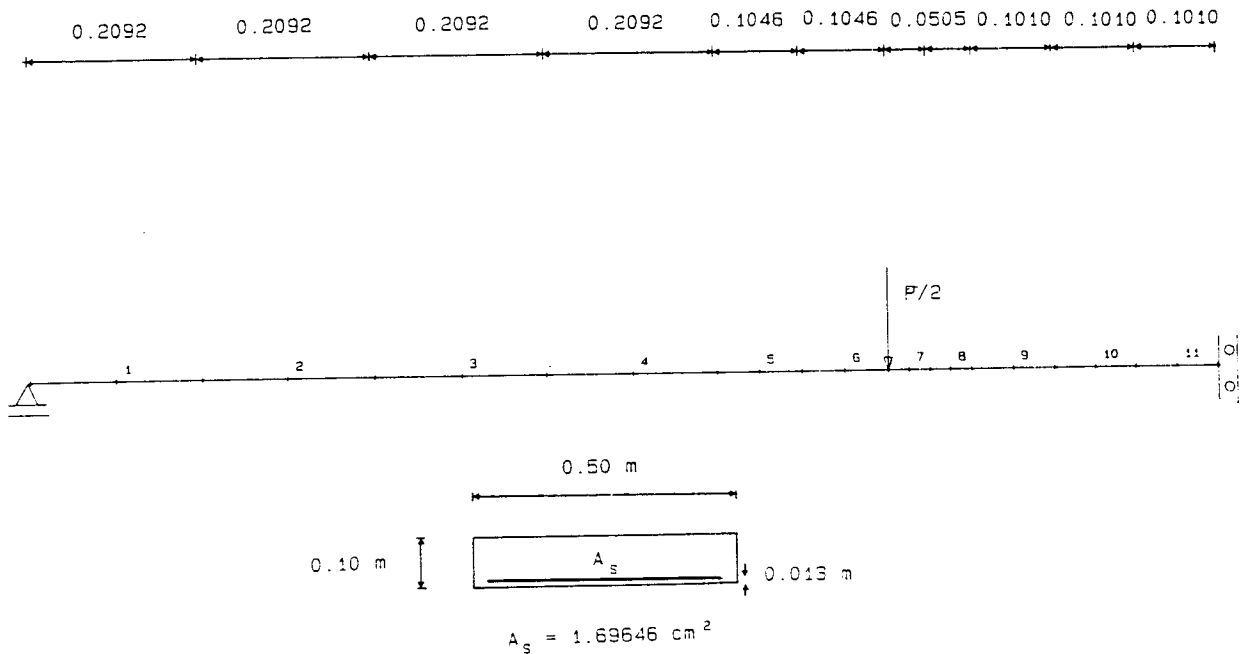


Fig. 4.33 – Malha de elementos finitos utilizada.

As características adotadas para os materiais são:

#### Betão

$$\begin{array}{ll}
 E_c = 24,0 \times 10^6 \text{ KPa} & \epsilon_{tu} = 2,25 \times 10^{-3} \\
 f_{ck} = 16,0 \times 10^3 \text{ KPa} & \epsilon_{cu} = 4,0 \times 10^{-3} \\
 f_{ctm} = 2,5 \times 10^3 \text{ KPa} & \beta = 0,6 \\
 \epsilon_{cp} = 2,0 \times 10^{-3} & \nu = 0,2
 \end{array}$$

## Aço (diagrama tetralinear)

$$\begin{aligned} E_s &= 200,0 \times 10^6 \text{ KPa} & E_{s2} &= 9 \times 10^6 \text{ KPa} \\ \varepsilon_{sy} &= 2,75 \times 10^{-3} & \varepsilon_{s2} &= 20,643 \times 10^{-3} \\ E_{s1} &= 29,0 \times 10^6 \text{ KPa} & E_{s3} &= 0 \\ \varepsilon_{s1} &= 6,198 \times 10^{-3} & & \end{aligned}$$

As dimensões da secção transversal rectangular são, uma largura de  $0,5 \text{ m}$  e uma altura de  $0,1 \text{ m}$ .

Existe apenas armadura na face inferior com uma área de  $1,69646 \text{ cm}^2$  ( $6\phi6$ ), com um recobrimento de  $0,013 \text{ m}$ .

Na análise efectuada, o peso próprio da laje e o peso dos aparelhos de medida são substituídos por uma força equivalente de  $3,21 \text{ kN}$  com a localização da força  $P$  e que provoca o mesmo momento máximo que as cargas agora referidas.

Na análise numérica é simulado o ciclo de descarga total – recarga efectuado no ensaio. Realizada a descarga apenas se considera a carga equivalente ao peso próprio da laje e dos aparelhos de medida.

Na figura 4.34 são apresentados os resultados desta análise – diagrama carga – deslocamento a meio vão e diagrama momento – curvatura na zona intermédia de flexão circular. Comparam-se estes resultados com os resultados experimentais [19] e numéricos, obtidos utilizando um programa não linear de elementos finitos bidimensionais [17] [19], sendo apreciável a concordância de resultados.

Na figura 4.35 apresenta-se a curva momento – curvatura definida utilizando a técnica global descrita em 4.2 considerando-se dois ramos de plastificação da armadura e os resultados obtidos neste exemplo.

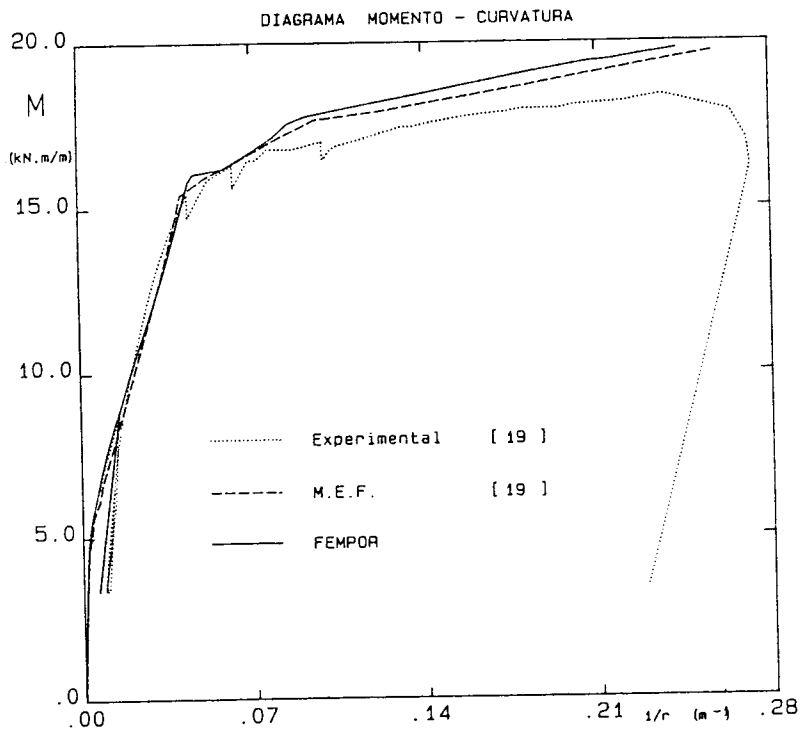
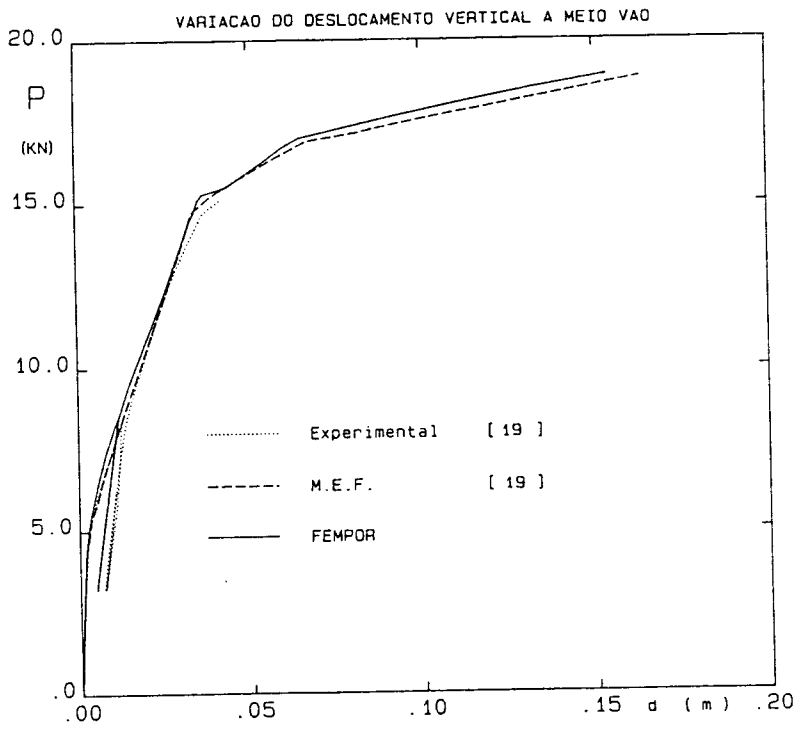


Fig. 4.34 - Diagrama  $P - d$  e momento - curvatura.



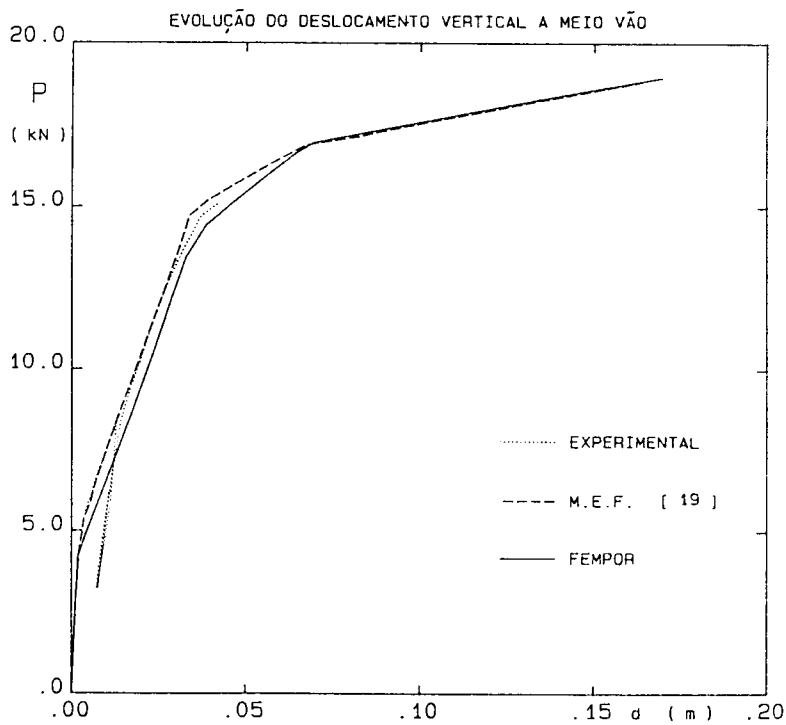
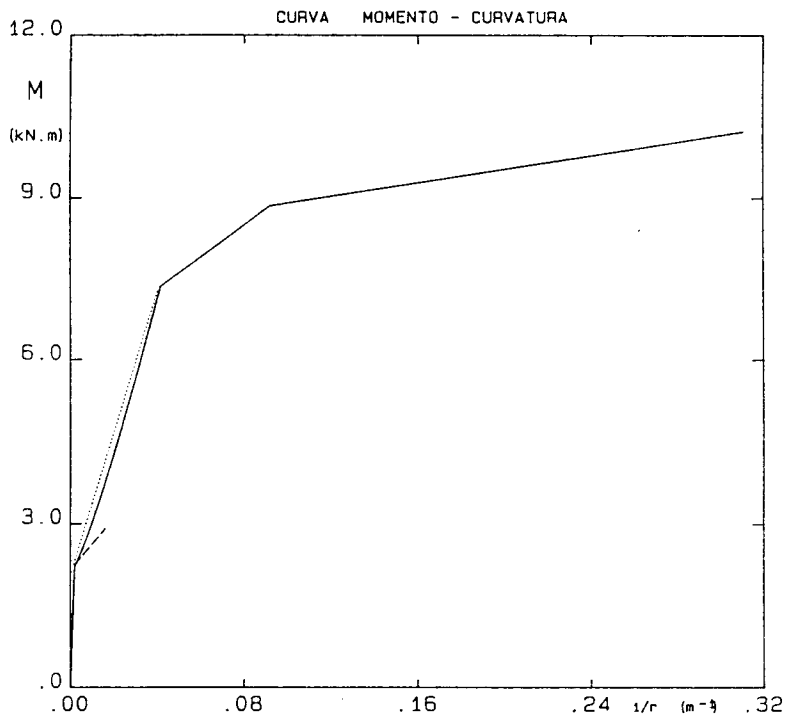


Fig. 4.35 - Curva momento - curvatura definida e variação do deslocamento a meio vão.

#### 4.4.2 Pórtico de três barras

O pórtico em questão [7, 22], com a geometria apresentada na figura 4.36, foi discretizado em 12 elementos de três nós com igual comprimento (0,254 m), tendo-se convertido as unidades do sistema inglês em unidades do sistema internacional.

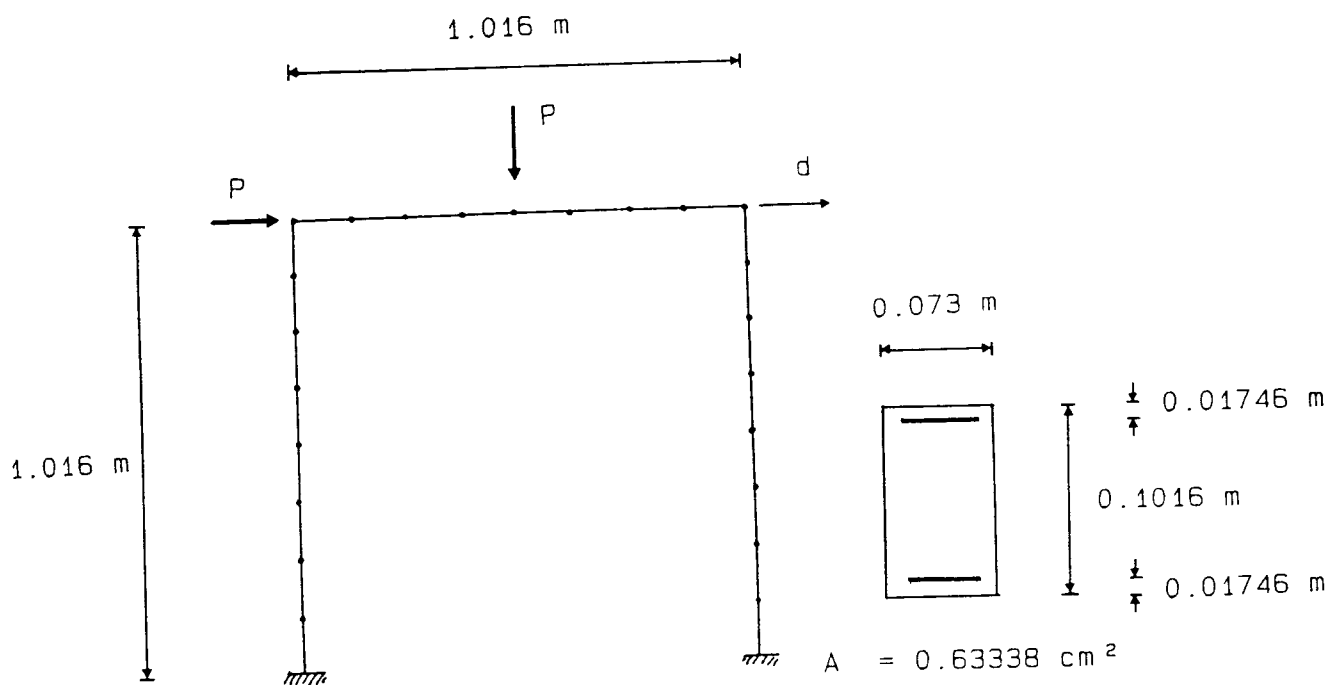


Fig. 4.36 – Geometria do pórtico.

As características adoptadas para os materiais são:

#### Betão

$$\begin{aligned} E_c &= 13,79 \times 10^6 \text{ KPa} \\ f_{ck} &= 29,027 \times 10^3 \text{ KPa} \\ f_{ctk} &= 2,068 \times 10^3 \text{ KPa} \\ \epsilon_{cp} &= 6,0 \times 10^{-3} \\ \epsilon_{cu} &= 10,0 \times 10^{-3} \\ \beta &= 0,4 \\ \nu &= 0,2 \end{aligned}$$

## Aço (diagrama trilinear)

$$\begin{aligned} E_s &= 202,706 \times 10^6 \text{ KPa} \\ \varepsilon_{sy} &= 1,641 \times 10^{-3} \\ E_{s1} = E_{s2} &= 0,689 \times 10^6 \text{ KPa} \\ \varepsilon_{s2} &= 170,0 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Todos os elementos têm uma secção rectangular com largura de  $0,073 \text{ m}$  e uma altura de  $0,1016 \text{ m}$  e armadura igual nas faces inferior e superior de  $0,63338 \text{ cm}^2$  ( $2 \# 2 = 2\frac{2}{8}$ ) com um recobrimento de  $1,746 \text{ cm}$ .

Na figura 4.37 são comparados os resultados obtidos por este processo com os resultados da análise experimental [7], sendo bastante apreciável a concordância de resultados.

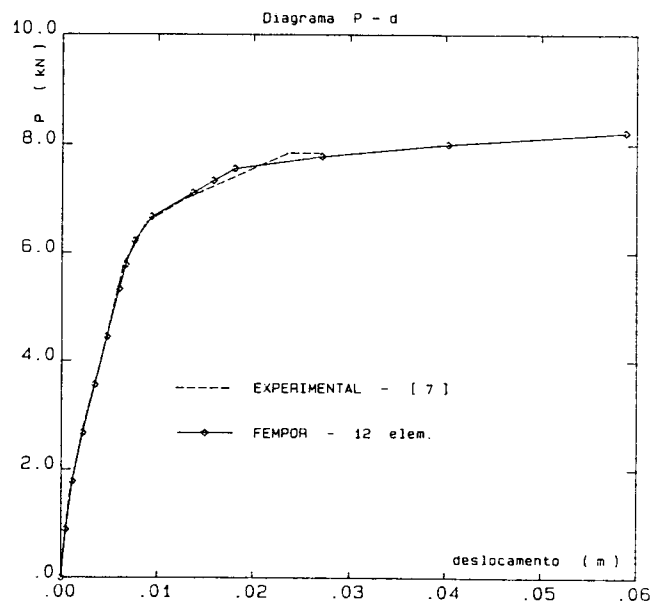


Fig. 4.37 - Diagrama  $P - d$ .

### 4.4.3 Vigas 1 e 2

As duas vigas [17] têm o mesmo comprimento ( $6,4008 \text{ m}$ ), secção rectangular com a mesma largura ( $0,30734 \text{ m}$ ), a mesma percentagem de armadura ( $1,135 \%$ ), solicitadas ambas por uma força concentrada a meio vão.

A Viga 1 tem uma altura de  $0,56134 \text{ m}$  ( $\ell/h = 11,4$ ) e a Viga 2  $0,160 \text{ m}$  ( $\ell/h = 40$ ).

Devido à simetria da geometria e da solicitação das vigas apenas é estudada metade de cada viga, utilizando a malha de quatro elementos finitos [17] de três nós indicada na figura 4.38.

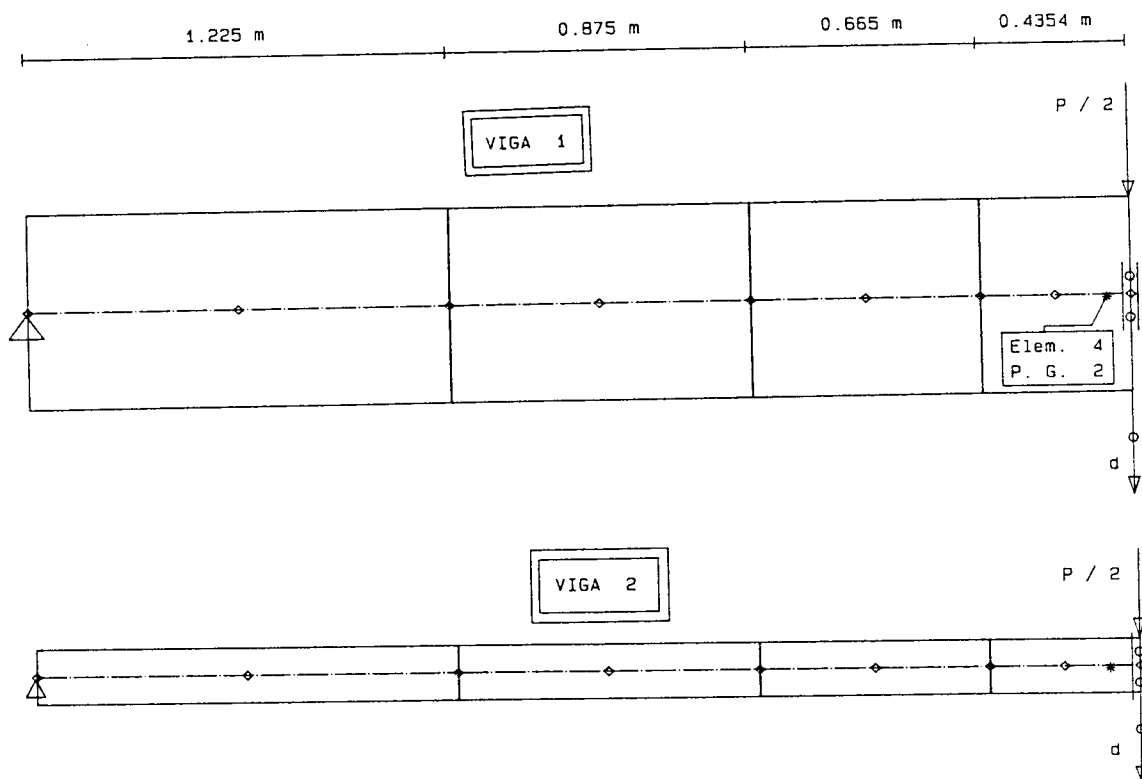


Fig. 4.38 – Malhas de elementos finitos.

Em cada uma destas vigas são consideradas duas hipóteses distintas de ligação ao exterior, com liberdade de deslocamento horizontal ( $VS$ ) ou com esse deslocamento impedido ( $VD$ ); considerando-se a não linearidade geométrica ( $NLG$ ) ou admitindo-se um comportamento linear geométrico ( $LG$ ) e considerando-se sempre o comportamento não linear material.

Com esta identificação  $V1DNLG$  significa, a Viga 1 impedida de se deslocar horizontalmente e em que se considera a não linearidade geométrica.

De seguida são apresentados os resultados obtidos com o programa de cálculo automático FEMPOR comparando-os com os resultados referidos em [17] obtidos com um programa não linear de elementos finitos bidimensionais, podendo-se desde já salientar a excelente concordância destes resultados.

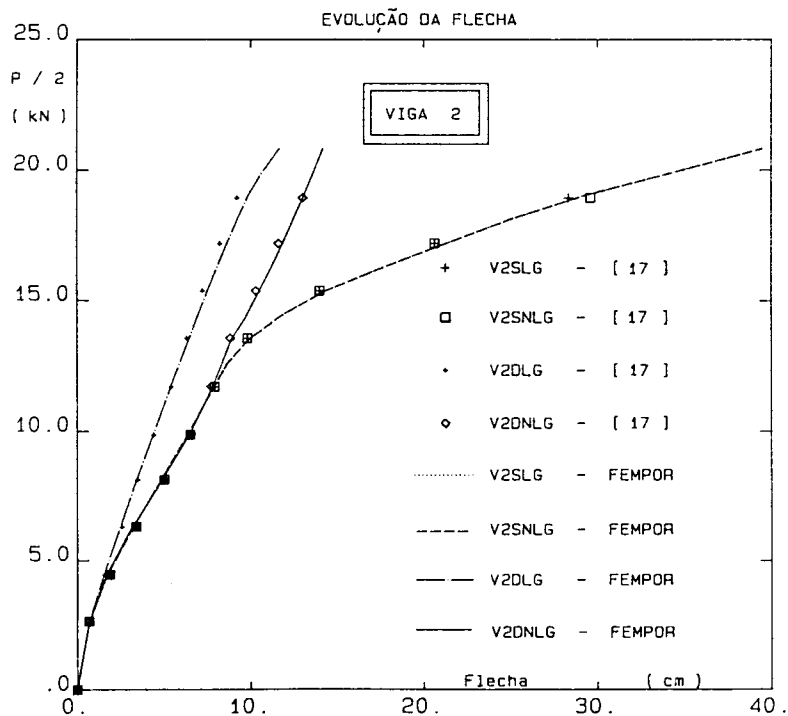
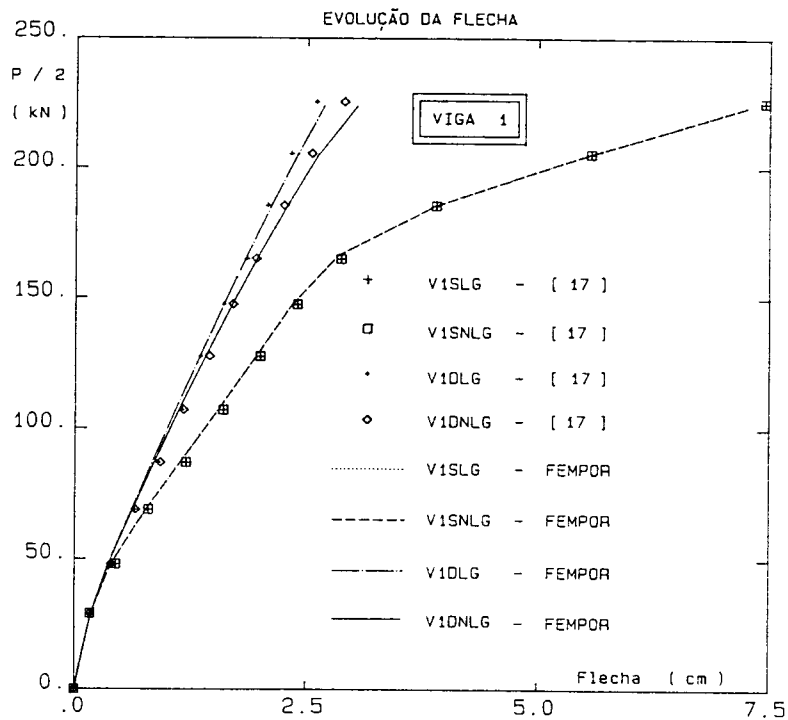


Fig. 4.39 - Evolução do deslocamento vertical a meio vão.

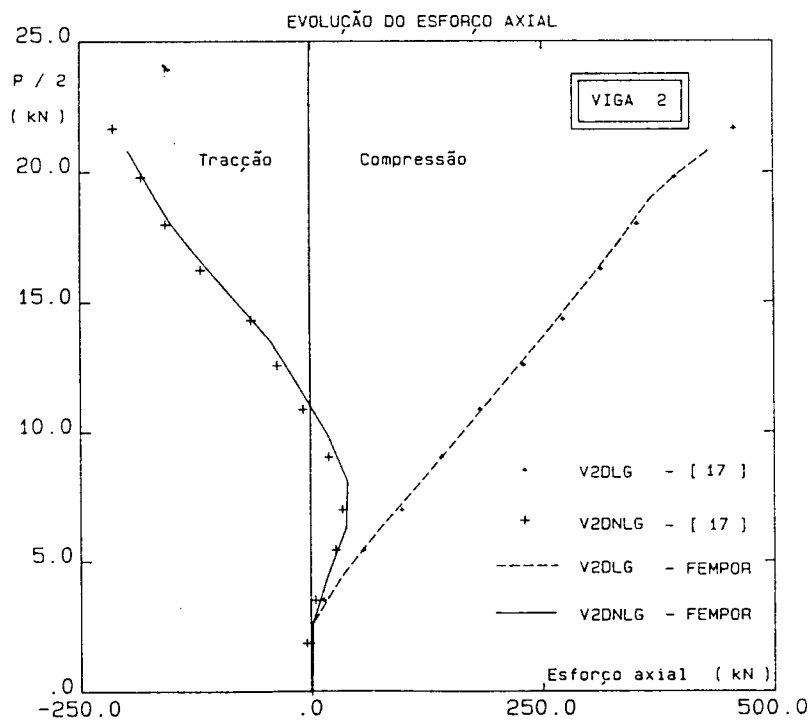
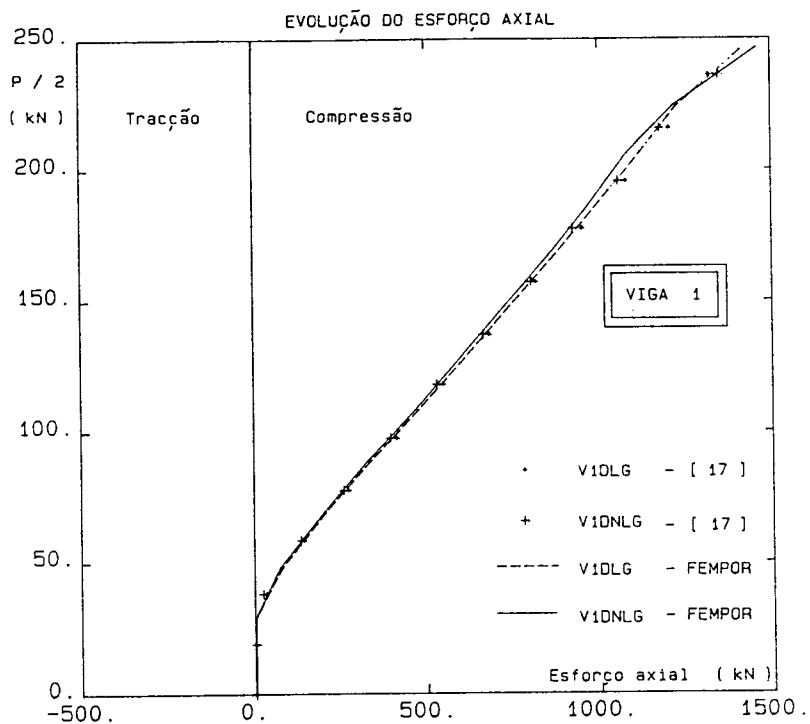


Fig. 4.40 – Evolução do esforço axial (elem. 4, P.G. 2).

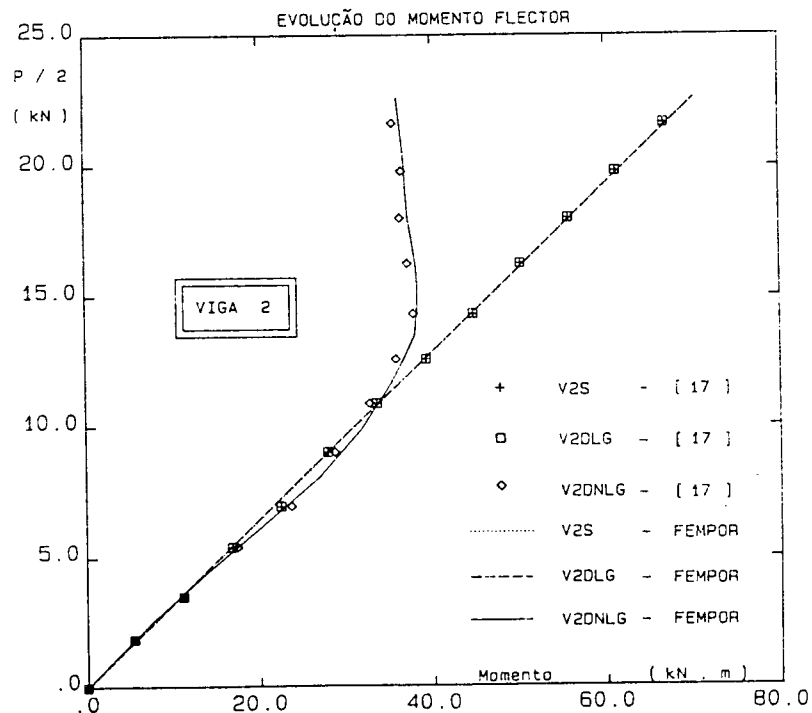
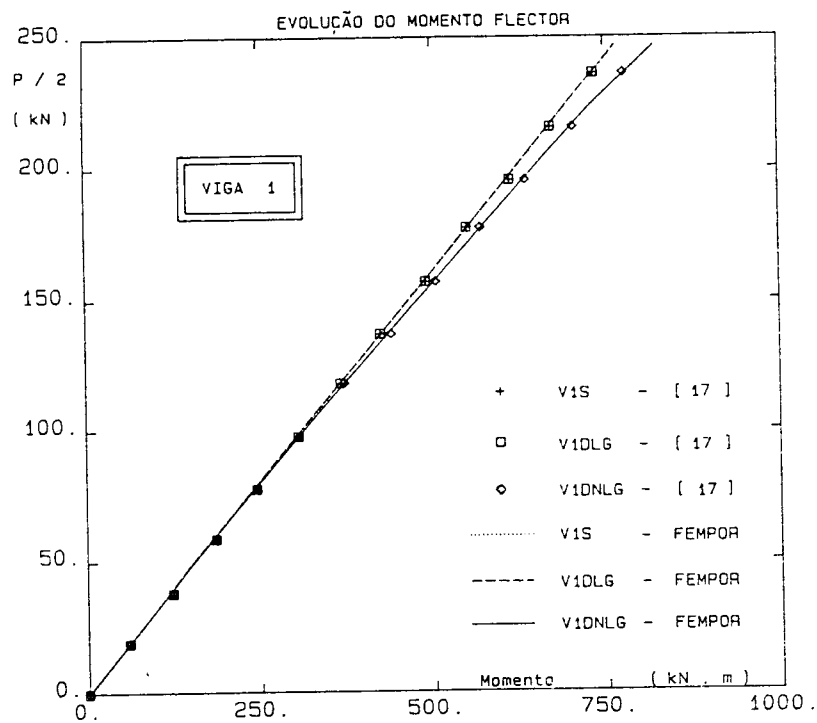


Fig. 4.41 - Evolução do momento flector (elem. 4, P.G. 2).

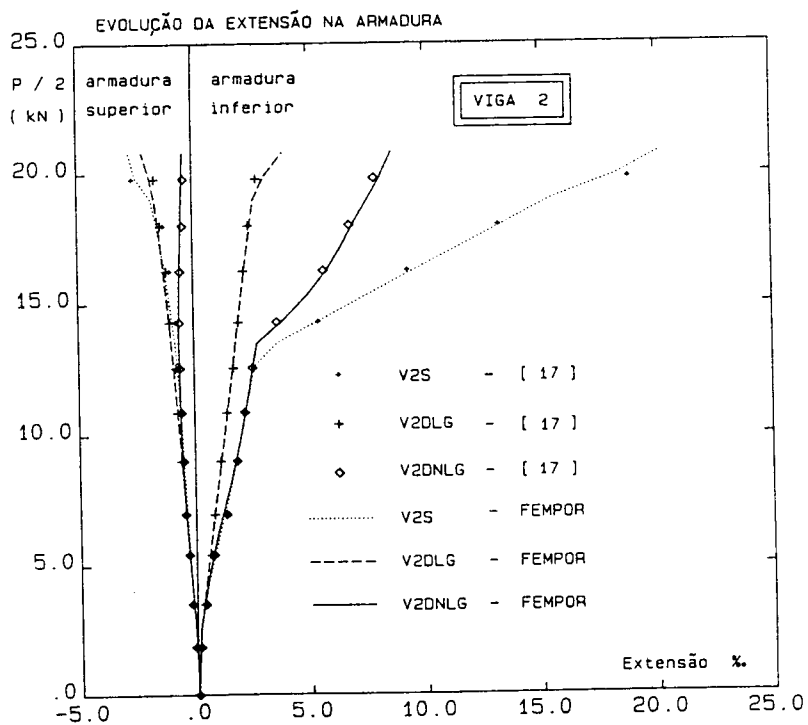
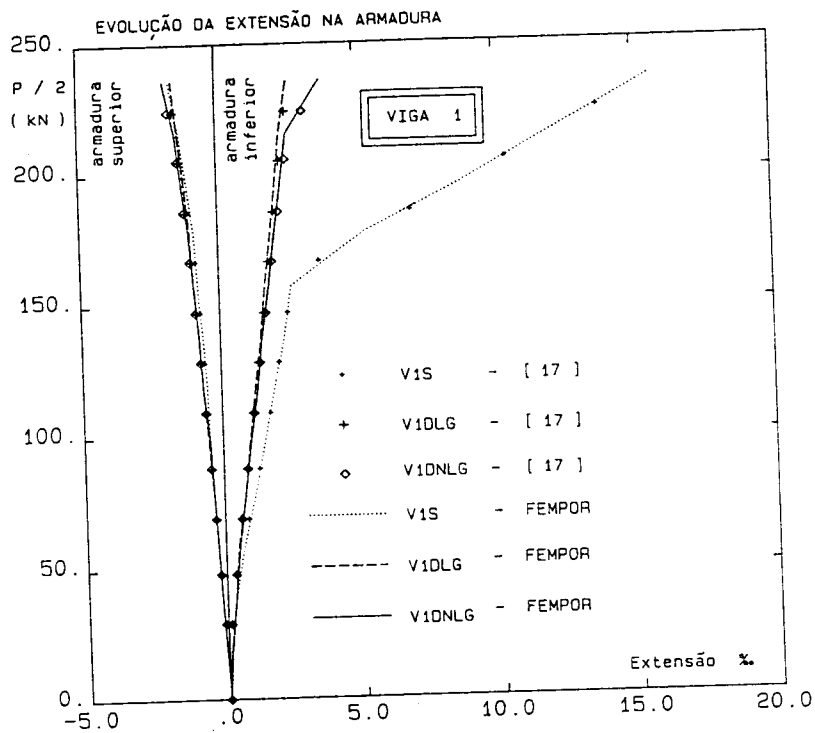


Fig. 4.42 – Evolução da extensão nas armaduras (elem. 4, P.G. 2).



Na figura 4.39 é apresentada, para cada viga, a evolução do deslocamento vertical a meio vão correspondente a cada uma das análises referidas ( $VSLG$ ,  $VSNLG$ ,  $VDLG$ ,  $V DNLG$ ).

Naturalmente que, permitindo o deslocamento horizontal, não se desenvolve esforço axial coincidindo nesse caso os resultados obtidos admitindo comportamento linear geométrico ou não ( $V1SLG$  ou  $V1SNLG$  e  $V2SLG$  ou  $V2SNLG$ ).

### Viga 1

Na Viga 1 nos quatro casos estudados, a rotura dá-se por esmagamento do betão na zona central e superior da viga para as seguintes cargas:

CARGA DE ROTURA ( $kN$ )

Viga 1	FEMPOR	F.E.M. [17]
$V_1S$	470,9	475
$V_1DLG$	543,1	530
$V_1DNLG$	500,0	485

Note-se que quando o deslocamento horizontal se encontra impedido, os resultados encontrados quando efectuada uma análise linear geométrica ( $V1DLG$ ) ou não linear ( $V1DNLG$ ) geométrica apenas diferem a partir do início da fendilhação, por se começarem a desenvolver esforços axiais consideráveis na viga.

### Viga 2

Impedindo o deslocamento horizontal, as diferenças da resposta da viga considerando um comportamento linear geométrico ( $V2DLG$ ) ou não linear geométrico ( $V2DNLG$ ) são muito mais acentuadas que na Viga 1, sendo no último caso ( $V2DNLG$ ) encontrada uma rotura por cedência da armadura e não por esmagamento do betão. Na primeira hipótese de análise agora referida a rotura foi encontrada por esmagamento do betão para uma carga de  $44,2 kN$  ( $44,0 kN$ , [17]).

Na figura 4.40 está representada a evolução do esforço axial quando efectuada uma análise linear geométrica ou não linear geométrica, estando ambas as vigas impedidas de se deslocarem horizontalmente.

Iniciada a fendilhação, por consequência da subida do eixo neutro instala-se na Viga 1 um esforço axial de compressão.

Na Viga 2 essa tendência começa por se verificar para as duas análises (*V2DLG* e *V2DNLG*), notando-se que considerando um comportamento não linear geométrico ao começarem a ser excessivas as deformações é instalada uma força de tracção na viga (o que explica o modo de rotura encontrado – plastificação da armadura).

Na figura 4.41 estão indicados os valores encontrados para o momento flector, do segundo ponto de Gauss no quarto elemento.

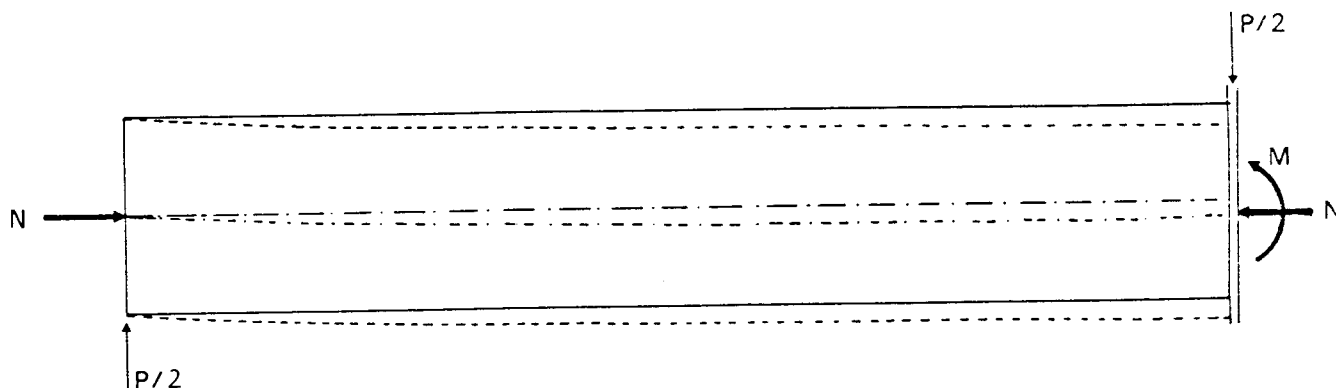


Fig. 4.43 – Deformada e esforços instalados na Viga 1.

Como a Viga 1 se encontra comprimida (Fig. 4.43) o momento provocado pelas forças de compressão acentua-se quando é considerada a não linearidade geométrica (já que a distância dessas forças aumenta), justificando-se assim que o momento no ponto de Gauss e elemento indicado seja superior quando é admitido o comportamento não linear geométrico.

Um raciocínio idêntico permite justificar a diminuição do momento na Viga 2 quando é efectuada uma análise não linear geométrica, já que a força de tracção que com esta análise se instala na viga faz diminuir este momento (Fig. 4.44).

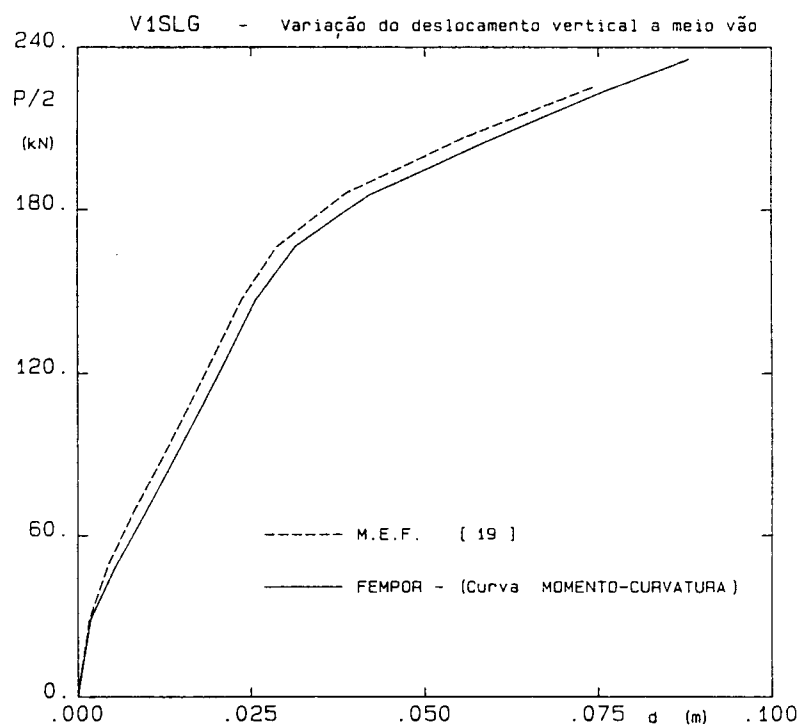
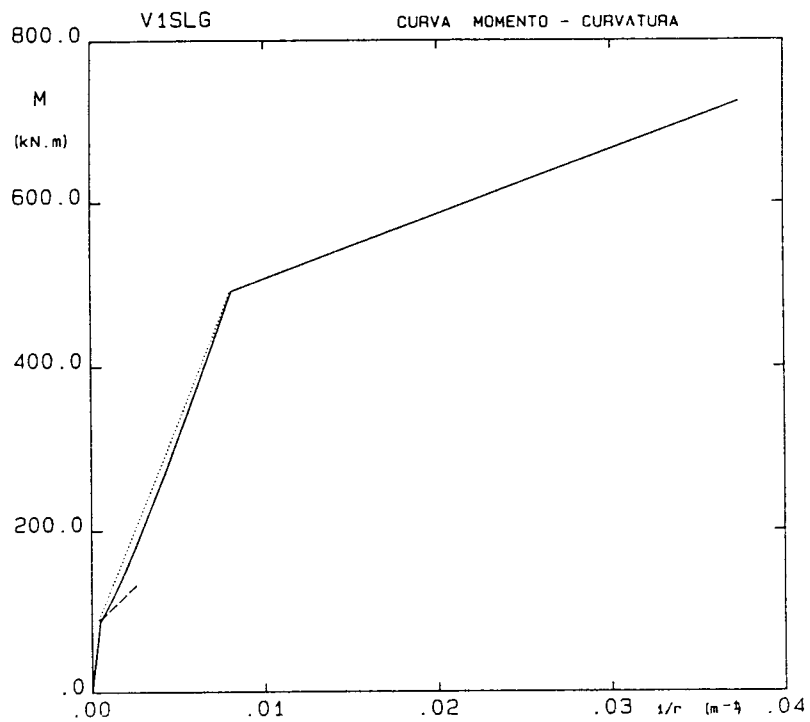


Fig. 4.45 - V1S - Curva momento - curvatura definida e variação do deslocamento vertical a meio vão.

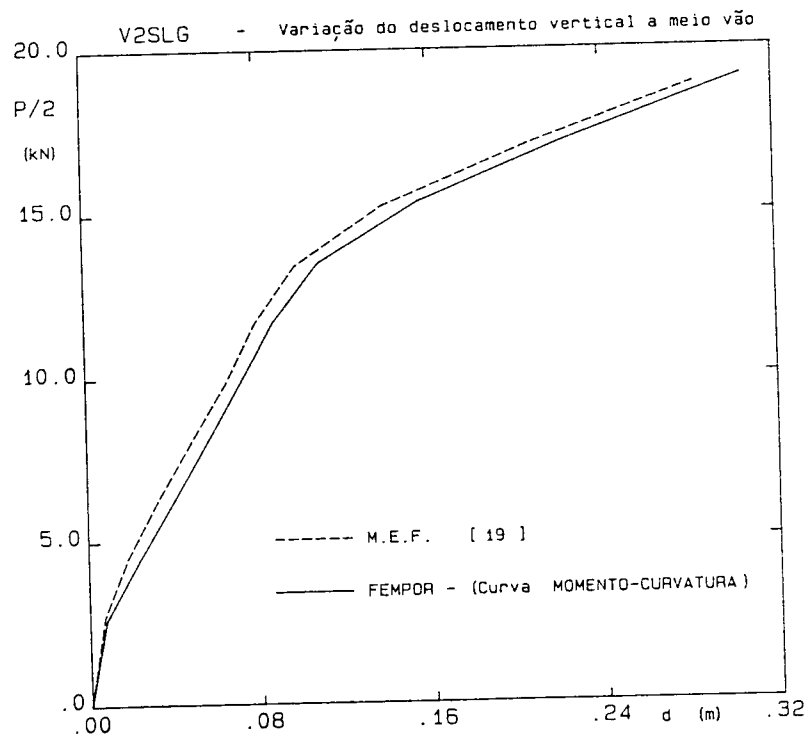
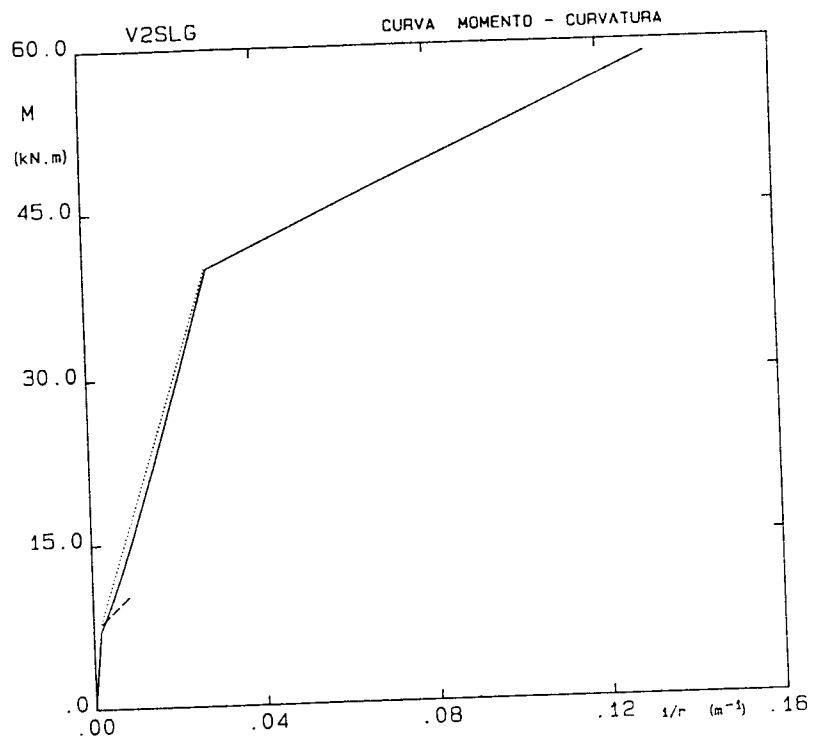


Fig. 4.46 - V2S - Curva momento - curvatura definida e variação do deslocamento vertical a meio vão.

## 4.5 Conclusões

Dos resultados apresentados é legítimo concluir da boa adequação da técnica desenvolvida para simular o comportamento não linear material de estruturas porticadas, considerando ou não a linearidade geométrica e em que cada elemento pode estar submetido à flexão composta.

A técnica global de análise não linear material de vigas submetidas à flexão simples, com a limitação referida, revelou-se eficiente na análise dos dois problemas apresentados.

Para a boa qualidade dos resultados apresentados, importa referir que a atenção dedicada aos modelos de descarga e recarga implementados para o aço e betão e o facto do processo de análise incremental e iterativo ser "path - independent" (em qualquer iteração as deformações e esforços do aço e do betão são comparadas com as encontradas na última iteração (convergida) do incremento anterior e não com as da iteração anterior), desempenham um papel preponderante.

## 4.6 Bibliografia

- [1] Alwis W.A.M. – Trilinear Moment-Curvature Relationship for Reinforced Concrete Beams – ACI Structural Journal, May – June 1990, pp. 276 – 283.
- [2] Appleton J. – Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Betão Armado sujeitos à Flexão – Seminário 295, LNEC, Lisboa, 1982.
- [3] Azevedo A.F.M. – Análise Não Linear de Estruturas Planas de Betão Armado pelo Método dos Elementos Finitos – Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia, Porto, 1985.
- [4] Bairrão R. – Flecode - Numerical Modelling of Reinforced Concrete Beams Under Normal Force and 2D Bending – Memórias I Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería, SEMNI, Las Palmas de Gran Canaria, Jun 1990, pp. 341 – 347.
- [5] Bazant Z.P. and Oh B.H. – Deformation of Progressively Cracking Reinforced Concrete Beams – ACI Journal, May – June, 1984, pp. 268 – 278.
- [6] Bazant Z.P., Pan J. and Cabot G.P. – Softening in Reinforced Concrete Beams and Frames – Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 113, No 12, Dec. 1987, pp. 2333 – 2347.
- [7] Bertero U.U. and Clure G.M. – Behaviour of Reinforced Concrete Frames Subjected to Repeated Reversible Loads – A.C.I. Proc. 61, 1964, pp. 1305 – 1330.
- [8] CEB – Comité Euro-Internacional do Betão – B.I. no 195 e 196, CEB-FIP, Model Code, Mar. 1990.
- [9] CEB, Manuel du CEB – Fissuration et Déformations – École Polytechnique Fédéral de Lausanne, Suisse, 1983.
- [10] Cruz P.J.S. e Figueiras J.A. – Técnica de Análise Não Linear de Estruturas Reticulares de Betão Armado – Memórias I Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería, SEMNI, Las Palmas de Gran Canaria, Jun 1990, pp. 442 – 448.
- [11] Cruz P.J.S. e Figueiras J.A. – Análise Não Linear de Estruturas Porticadas de Betão, II J.P.E.E., LNEC, Lisboa, Nov. 1990, Tema A, pp. 469 – 479.
- [12] EL - Metwally S.E. and Chen W.F. – Load - Deformation Relations for Reinforced Concrete Sections – ACI Structural Journal, V. 86 No 2, Mar - Apr. 1989, pp. 163 – 167.
- [13] EL - Metwally S.E. and Chen W.F. – Nonlinear Behaviour of R/C Frames – Structural Engineering, CE - STR - 87 - 5, School of Civil Engineering, Purdue University, 1987.

- [14] EL - Metwally S.E. and Chen W.F. – Generalized Stress - Strain Relations for Reinforced Concrete Sections – Structural Engineering, CE - STR - 87 - 6, School of Civil Engineering, Purdue University, 1987.
- [15] EL - Metwally S.E. and Chen W.F. – On Moment - Rotation Modeling for R/C Beam - Column Connections – Structural Engineering, CE - STR - 87 - 7, School of Civil Engineering, Purdue University, 1987.
- [16] EL - Metwally S.E. – Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames – Ph. D. Thesis, Purdue University, Dec. 1986.
- [17] Figueiras J.A. – Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells – Ph. D. Thesis, Swansea, U.K., Sep. 1983.
- [18] Ganaba T.H. and May I.M. – Some Observation on Through Depth Numerical Integration for Finite Element Analysis of Slabs – Research Report, Civil & Structural Engineering, University of Bredford.
- [19] Juvandes L.F.P. – Modelos de Análise de Estruturas Laminares Planas Flectidas – Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia, Porto, 1990.
- [20] Mirza S.A. – Flexural Stiffness of Rectangular Reinforced concrete Columns – ACI Structural Journal, July - Aug., 1990, pp. 425 - 435.
- [21] Owen D.R.J. and Hinton E. – Finite Elements in Plasticity – Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980.
- [22] Pereira E.M.B.R. – Análise Fisicamente Não Linear de Pórticos Tridimensionais de Betão Armado – Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1989.
- [23] Pereira E.M.B.R. e Freitas J.A.T. – Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames in Mini Computers – EPMESC III, Vol. 1, Macau, Aug. 1990, pp. 133 - 142.
- [24] Póvoas R.H.C.F. and Figueiras J.A. – Nonlinear Modelling of Plane RC Structures – Computational Plasticity - Models, Software and Applications, Proceedings of the International Conference, Barcelona, Spain, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1987, pp 1851 - 1865.
- [25] Póvoas R.H.C.F. and Figueiras J.A. – Técnicas Computacionais Aplicadas à Análise Não Linear de Estruturas de Betão, R.P.E.E., nº 31, 1990.
- [26] Saenz L.P. – Discussion of "Equation for the Stress - Strain Curve of Concrete" by Prakash Resayi and S. Krishnan – ACI Journal, Proc. 61 Nº 9, Sep. 1974, pp. 1229 - 1235.

## 5 – APLICAÇÕES

### 5.1 Introdução

Neste capítulo é descrita a técnica utilizada para a análise de uma estrutura construída por fases e para a avaliação da influência da rigidez do solo de fundação. São ainda apresentados com detalhe os resultados da análise não linear de duas estruturas porticadas distintas.

No primeiro exemplo procura-se efectuar a verificação da segurança de um pórtico com dois vãos e dois pisos à rotura e em relação aos estados limites de utilização (fendilhação e deformação). São consideradas duas condições de ligação ao exterior (encastramentos perfeitos e fundações assentes em meio elástico), simulando-se ainda o faseamento da construção do pórtico.

O segundo exemplo consiste na verificação da segurança à rotura de um pórtico de um edifício corrente (três vãos e oito pisos), projectado e construído sem terem sido consideradas as acções horizontais, nomeadamente a acção do vento e a sísmica. É pois, manifesta a insuficiência da armadura superior nas vigas junto aos pilares extremos e na generalidade dos pilares, eventualmente compensada pelo excesso de armadura inferior no vão das vigas. São efectuadas várias análises, quer isolando (pela consideração de rótulas a meia altura dos pilares) o piso que uma análise elástica linear revelou encontrar-se na situação mais desfavorável, quer considerando o pórtico completo.

### 5.2 Construção por fases

Como os pórticos de edifícios com vários andares são habitualmente construídos por fases (andar a andar), tendo eventualmente os vários pilares de cada piso secções e esforços muito diferentes, em qualquer fase da construção os diversos pilares ficam pois sujeitos a deformações distintas.



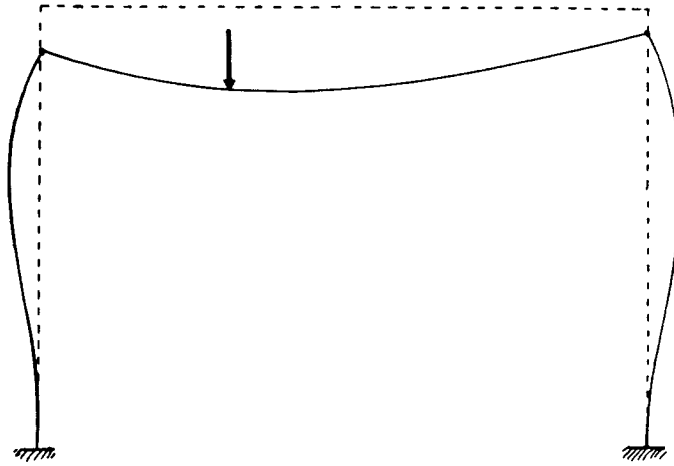


Fig. 5.1 – Deformada do primeiro piso.

Ao construir a fase seguinte e posteriormente as restantes é normalmente efectuada uma correcção da altura dos novos pilares (correção das coordenadas dos nós), para compensar as deformações já experimentadas pelos restantes pisos.

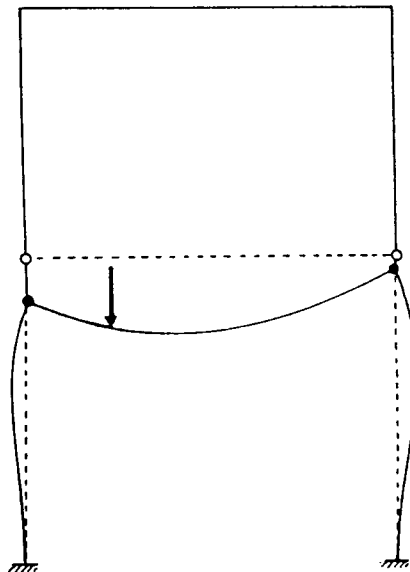


Fig. 5.2 – Correção das coordenadas dos nós do segundo piso.

O programa de cálculo automático FEMPOR, permite então analisar uma estrutura porticada, construída por fases, em que cada fase será a construção de um piso; ou, por economia de cálculo ou pelo facto de se pretender traduzir fases de retirada de escoramento, a construção de um conjunto de pisos.

Cada fase pode ser analisada considerando a não linearidade material, a não linearidade geométrica e a influência da rigidez do solo de fundação.

Concluída a análise, incremental e iterativa, de uma dada fase, são acrescentados os elementos referentes à nova fase corrigindo as dimensões dos pilares com nós comuns à fase anterior pelo facto de estes já não ocuparem a posição inicial.

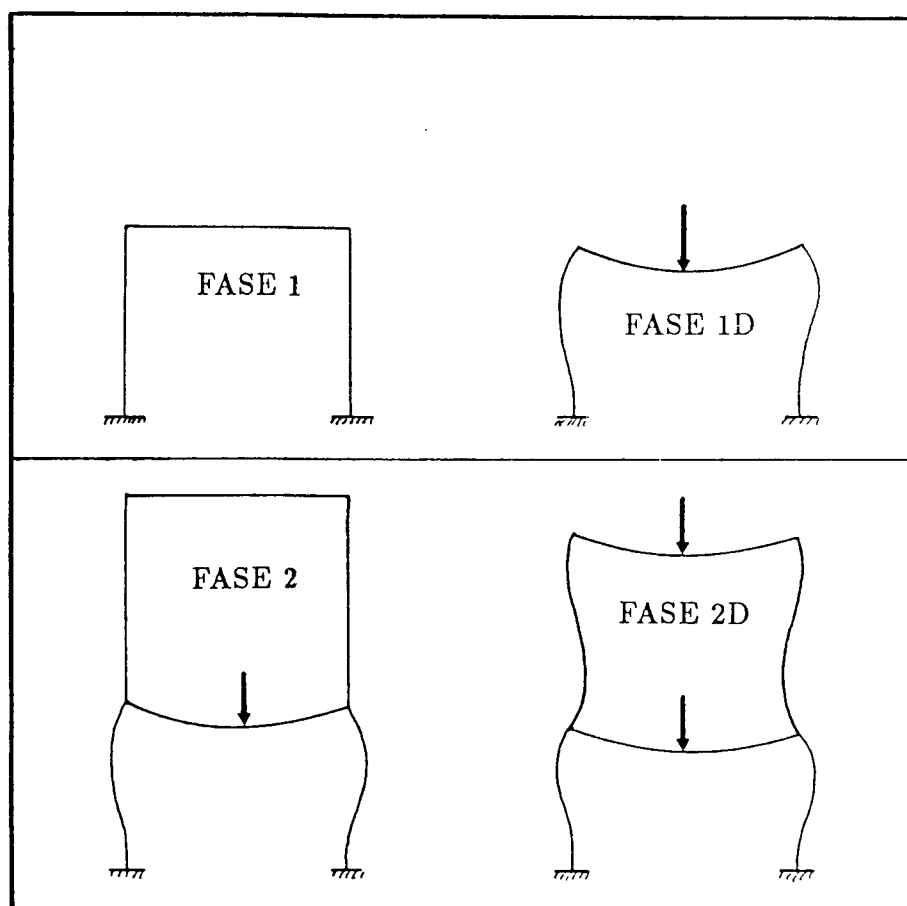


Fig. 5.3 – Construção por fases.

Na secção 5.4 será apresentado um exemplo de aplicação desta técnica.

## 5.3 Influência da rigidez do solo de fundação

Pretendendo-se dispor de uma ferramenta que permita aferir, mesmo que de uma forma simplificada, a importância da contribuição da rigidez do solo de fundação na análise de um dado pórtico; optou-se pelo seguinte procedimento [3]:

- i) Obtenção prévia da matriz de rigidez do solo de fundação. Para este efeito adaptou-se um programa de elementos finitos bidimensionais já existente [4].
- ii) Ao programa anterior foi concatenada uma subrotina de condensação de matrizes [1], para que a matriz de rigidez do solo de fundação seja condensada aos graus de liberdade (g.lib.) que estão ligados ao pórtico em questão.

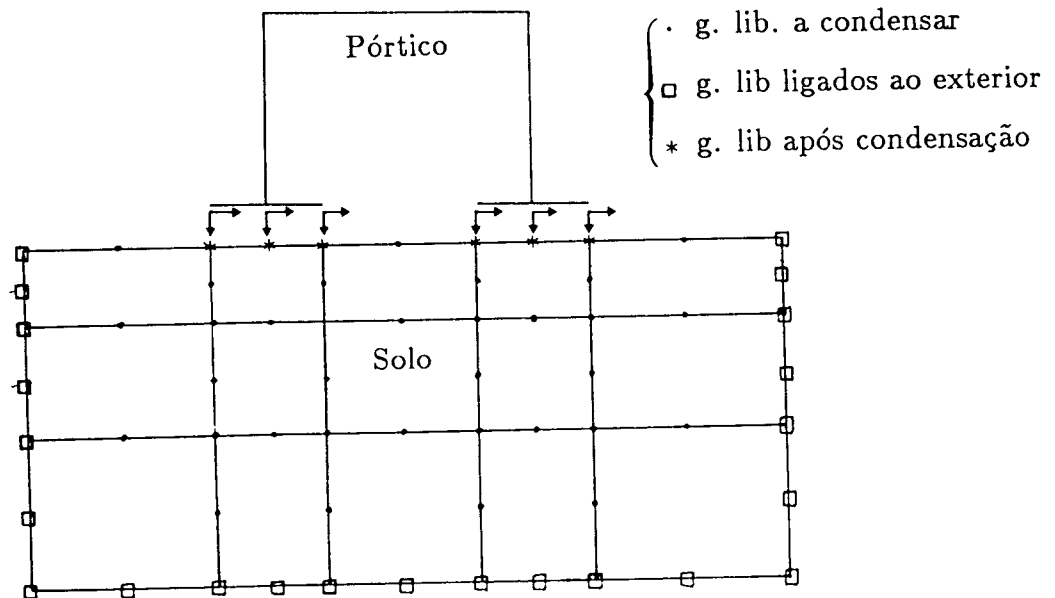


Fig. 5.4 - Exemplo de ligação da malha de elementos finitos do solo de fundação à malha do pórtico.

- iii) A matriz de rigidez condensada agora referida é lida pelo programa de cálculo automático FEMPOR, sendo assemblada, pela técnica de espalhamento, à matriz de rigidez global do pórtico.
- iv) As forças de reação do solo sobre os nós dos elementos de fundação do pórtico são obtidas multiplicando a matriz de rigidez condensada do solo pelos deslocamentos dos

respectivos nós. Estes valores são, no caso da análise não linear, acrescentados ao vector das forças exteriores.

Não é pois, nesta metodologia, considerada a não linearidade no comportamento do solo de fundação, nem se pretendeu quantificar o estado de tensão e deformação em qualquer ponto genérico do maciço de fundação. Julga-se, no entanto, que a análise de interactividade pórtico – solo de fundação, em que tanto ao pórtico como ao maciço de fundação estejam associados modelos de comportamento não linear, é perfeitamente exequível pela técnica agora referida.

Tal como no caso da construção por fases, é apresentado na secção 5.4 um exemplo de aplicação desta metodologia.

## 5.4 Pórtico de dois pisos

### 5.4.1 Estados limites de utilização

O pórtico em questão que pertence a um edifício destinado a restaurante no primeiro piso e bar no segundo piso, tem a geometria indicada na figura 5.5 e é constituído por um betão *B25* e aço *A 400 NR*.

As características adoptadas para os materiais (valores característicos) são:

**Aço**

$$E_s = 200.00 \times 10^6 \text{ KPa} \quad \varepsilon_{sy} = 1.75 \times 10^{-3}$$

$$E_1 = 22.22 \times 10^6 \text{ KPa} \quad \varepsilon_{sI} = 4.00 \times 10^{-3}$$

$$E_2 = 4.54 \times 10^6 \text{ KPa} \quad \varepsilon_{sII} = 15.00 \times 10^{-3}$$

## Betão

$$E_c = 29.00 \times 10^6 \text{ KPa}$$

$$\varepsilon_{cp} = 2.20 \times 10^{-3}$$

$$f_{ck} = 19.95 \times 10^3 \text{ KPa}$$

$$\varepsilon_{cu} = 4.30 \times 10^{-3}$$

$$f_{ctm} = 2.20 \times 10^3 \text{ KPa}$$

$$\nu = 0.20$$

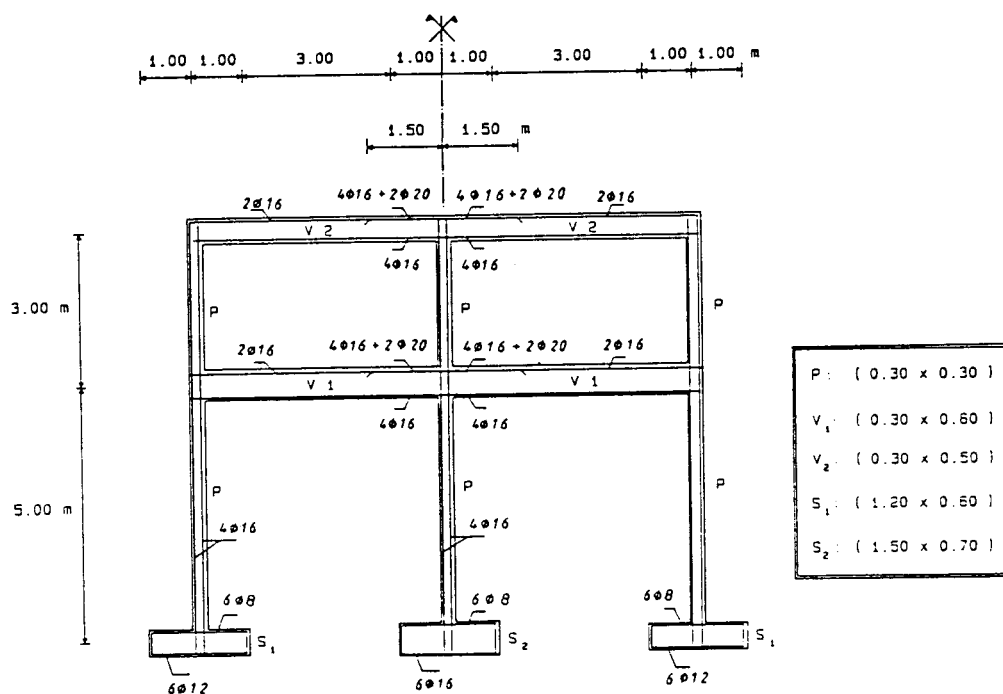


Fig. 5.5 – Geometria do pórtico.

De acordo com o Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes (RSA) [6] e atendendo ao esquema estrutural do edifício (constituído por estruturas porticadas espaçadas de 5 m), considera-se o pórtico submetido às seguintes acções (apenas se consideram acções verticais):

### Acções permanentes (G):

- Revestimentos	5.00 $kN/m$
- Peso das paredes divisórias	10.50 $kN/m$
- Peso próprio da laje do 1º piso	20.00 $kN/m$
- Peso próprio da laje do 2º piso	16.25 $kN/m$
- Peso próprio das vigas do 1º piso	4.50 $kN/m$
- Peso próprio das vigas do 2º piso	3.75 $kN/m$

### Acções variáveis (Q):

- Sobrecarga	20.00 $kN/m$
--------------	--------------

São admitidas as várias hipóteses regulamentares [6] de combinação das acções, correspondentes a:

- Estados limites de muito curta duração – COMBINAÇÕES RARAS  $(G_k + Q_k)$ .
- Estados limites de curta duração – COMBINAÇÕES FREQUENTES  $(G_k + \psi_1 Q_k)$ .
- Estados limites de longa duração – COMBINAÇÕES QUASE PERMANENTES  $(G_k + \psi_2 Q_k)$ .

Resulta assim para cada piso os valores característicos das acções indicado no Quadro I.

Quadro I

COMBINAÇÕES	Piso 1	Piso 2
Raras	$G_k = 40.0 \text{ kN/m}$ $Q_k = 20.0 \text{ kN/m}$	$G_k = 25.0 \text{ kN/m}$ $Q_k = 20.0 \text{ kN/m}$
Frequentes	$G_k = 40.0 \text{ kN/m}$ $\psi_1 Q_k = 12.0 \text{ kN/m}$	$G_k = 25.0 \text{ kN/m}$ $\psi_1 Q_k = 12.0 \text{ kN/m}$
Quase permanentes	$G_k = 40.0 \text{ kN/m}$ $\psi_2 Q_k = 8.0 \text{ kN/m}$	$G_k = 25.0 \text{ kN/m}$ $\psi_2 Q_k = 8.0 \text{ kN/m}$

São analisadas duas condições de ligação ao exterior. Na primeira (PORTR) considera-se o pórtico ligado ao exterior por três encastramentos e na segunda (PORTS) considera-se o pórtico apoiado sobre sapatas isoladas assentes em meio elástico.

Quadro II

	$b$ (m)	$h$ (m)	$a_i$ (m)	$A_{s,sup.}$ ( $cm^2$ )	$A_{s,inf}$ ( $cm^2$ )
Pilares	0.30	0.30	0.03	4.0212	4.0212
Fundações	1.20	0.60	0.05	6.7858	3.0159
	1.50	0.70	0.05	12.0637	3.0159
Vigas	0.30	0.60	0.05	8.0429	4.0212
1º piso				8.0429	14.3257
Vigas	0.30	0.50	0.04	8.0429	4.0212
2º piso				8.0429	14.3257

Em qualquer um destes casos os pilares foram discretizados em dois elementos de igual comprimento, as vigas em três elementos (os extremos com 1.5 m de comprimento e o central com 2.0 m) e as fundações em apenas um elemento.

Na figura 5.6 apresenta-se a numeração dos elementos identificando-se no Quadro II as secções, recobrimentos e armaduras utilizadas, que correspondem ao cálculo usual em regime elástico linear e sem redistribuição de esforços.

Os segundos valores indicados para as armaduras de cada viga e nos elementos de fundação correspondem ao elemento contíguo ao pilar central.

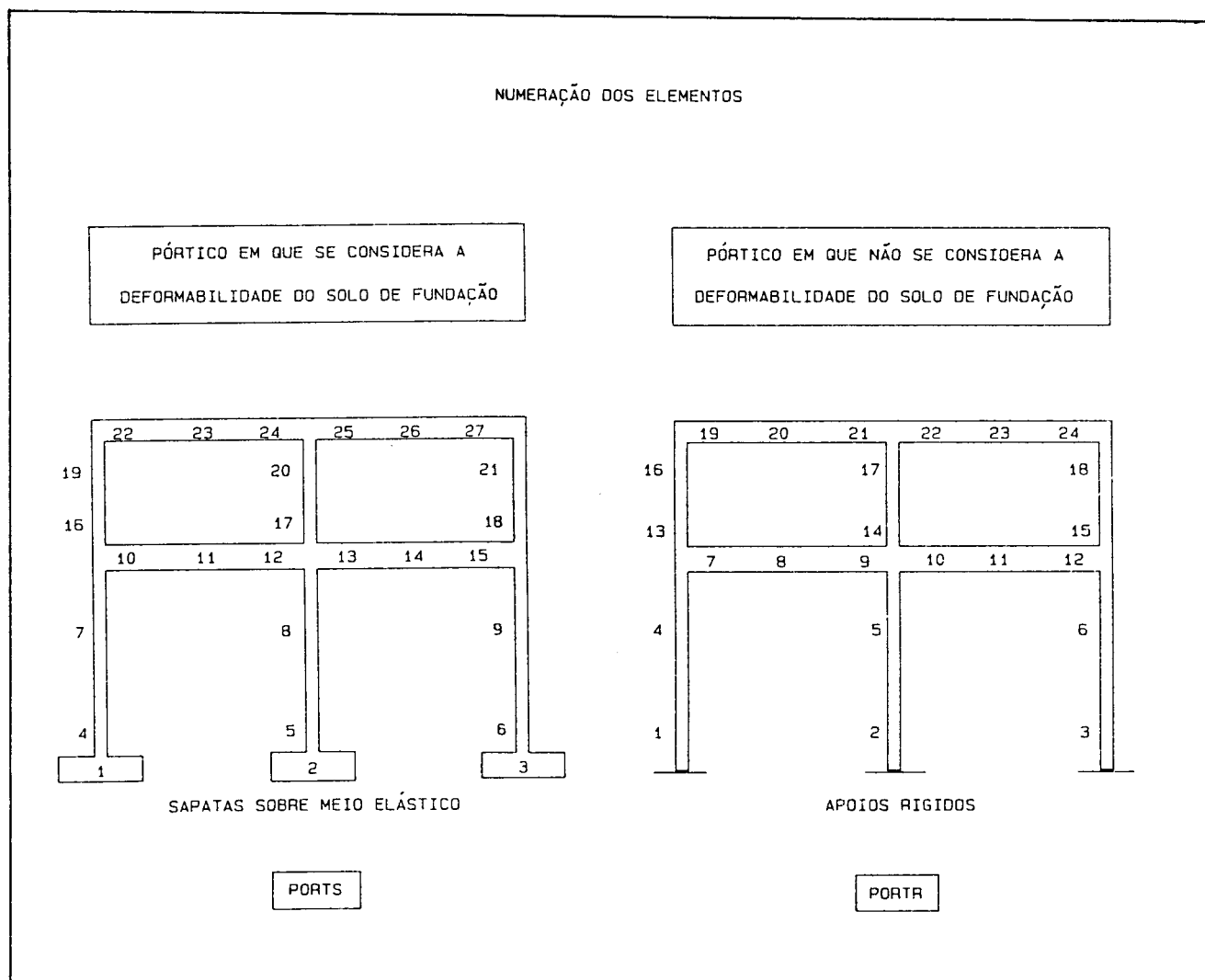


Fig. 5.6 – Numeração dos elementos.



Na análise da estrutura PORTS (em que se considera a deformabilidade do solo) admitiu-se que o maciço de fundação é estratificado e constituído por dois tipos de solos com as propriedades indicadas no Quadro III.

Quadro III

Solo 1		Solo 2	
$E$ (MPa)	$\nu$	$E$ (MPa)	$\nu$
36.0	0.3	3.0	0.3

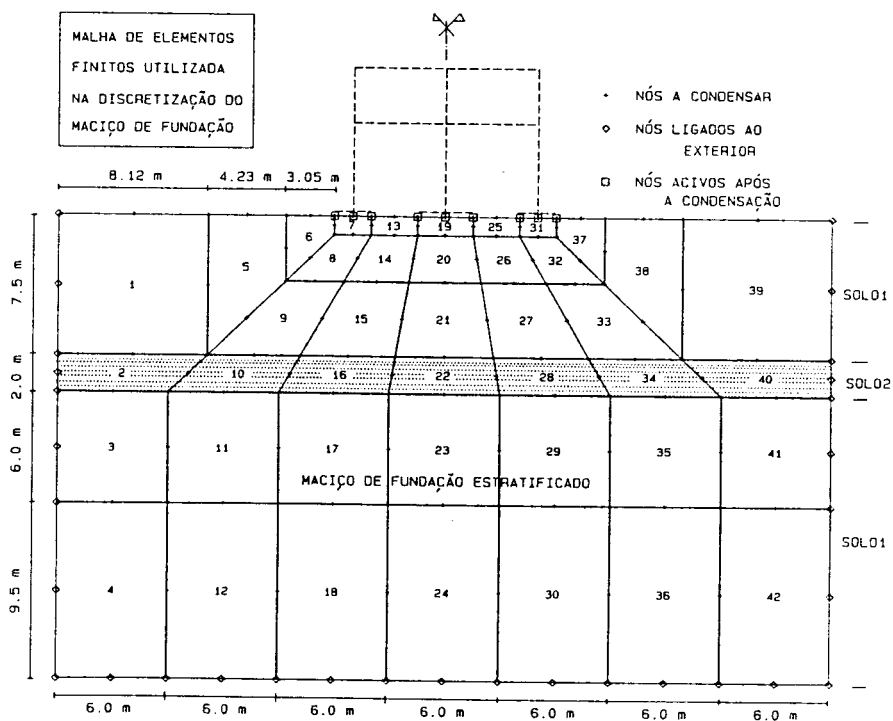


Fig. 5.7 - Características da malha de elementos finitos utilizada na discretização do maciço de fundação.

Nas figuras 5.8 e 5.10 apresentam-se os diagramas de momentos flectores para cada uma das combinações e pórticos referidos, considerando-se o comportamento elástico linear e não linear material.

Utilizando-se a técnica descrita em 5.2, determinou-se a seguinte matriz de rigidez do solo, condensada aos dezoito graus de liberdade comuns à superestrutura:

-----  
Matriz de rigidez condensada:

1a Linha	.487E+05	-.188E+04	-.469E+05	.518E+04	.858E+04	.335E+03
	-.253E+04	.457E+03	-.625E+03	-.204E+03	-.236E+03	-.284E+03
	-.467E+03	.921E+02	-.164E+03	-.176E+03	-.225E+03	-.181E+03
2a Linha	-.188E+04	.287E+05	-.700E+03	-.171E+05	.389E+03	-.523E+04
	-.304E+03	-.383E+03	-.174E+03	-.130E+04	.360E+03	-.200E+03
	.485E+02	-.396E+02	.315E+02	-.230E+02	.181E+03	.112E+03
3a Linha	-.469E+05	-.700E+03	.101E+06	-.133E+04	-.489E+05	.221E+04
	-.439E+03	-.794E+03	-.734E+03	.954E+03	-.558E+03	.658E+02
	-.156E+03	-.499E+02	-.961E+02	.109E+03	-.164E+03	-.315E+02
4a Linha	.518E+04	-.171E+05	-.133E+04	.432E+05	-.332E+04	-.179E+05
	-.299E+02	.169E+04	-.127E+04	-.384E+04	.339E+03	-.532E+03
	-.260E+03	-.626E+02	-.109E+03	-.327E+03	.176E+03	-.230E+02
5a Linha	.858E+04	.389E+03	-.489E+05	-.332E+04	.529E+05	-.685E+03
	-.296E+04	.209E+04	-.993E+03	.421E+03	-.211E+04	.469E+03
	-.527E+03	.261E+01	-.156E+03	.260E+03	-.467E+03	-.485E+02
6a Linha	.335E+03	-.523E+04	.221E+04	-.179E+05	-.685E+03	.331E+05
	-.267E+04	-.849E+04	.161E+04	.217E+04	-.657E+03	-.888E+03
	-.261E+01	.868E+02	.499E+02	-.626E+02	-.921E+02	-.396E+02
7a Linha	-.253E+04	-.304E+03	-.439E+03	-.299E+02	-.296E+04	-.267E+04
	.464E+05	.126E+04	-.373E+05	.334E+04	.387E+04	-.281E+03
	-.211E+04	.657E+03	-.558E+03	-.339E+03	-.236E+03	-.360E+03
8a Linha	.457E+03	-.383E+03	-.794E+03	.169E+04	.209E+04	-.849E+04
	.126E+04	.300E+05	-.365E+04	-.145E+05	.281E+03	-.490E+04
	-.469E+03	-.888E+03	-.658E+02	-.532E+03	.284E+03	-.200E+03
9a Linha	-.625E+03	-.174E+03	-.734E+03	-.127E+04	-.993E+03	.161E+04
	-.373E+05	-.365E+04	.817E+05	-.625E-10	-.373E+05	.365E+04
	-.993E+03	-.161E+04	-.734E+03	.127E+04	-.625E+03	.174E+03
10a Linha	-.204E+03	-.130E+04	.954E+03	-.384E+04	.421E+03	.217E+04
	.334E+04	-.145E+05	-.625E-10	.392E+05	-.334E+04	-.145E+05
	-.421E+03	.217E+04	-.954E+03	-.384E+04	.204E+03	-.130E+04
11a Linha	-.236E+03	.360E+03	-.558E+03	.339E+03	-.211E+04	-.657E+03
	.387E+04	.281E+03	-.373E+05	-.334E+04	.464E+05	-.126E+04
	-.296E+04	.267E+04	-.439E+03	.299E+02	-.253E+04	.304E+03
12a Linha	-.284E+03	-.200E+03	.658E+02	-.532E+03	.469E+03	-.888E+03
	-.281E+03	-.490E+04	.365E+04	-.145E+05	-.126E+04	.300E+05
	-.209E+04	-.849E+04	.794E+03	.169E+04	-.457E+03	-.383E+03
13a Linha	-.467E+03	.485E+02	-.156E+03	-.260E+03	-.527E+03	-.261E+01
	-.211E+04	-.469E+03	-.993E+03	-.421E+03	-.296E+04	-.209E+04
	.529E+05	.685E+03	-.489E+05	.332E+04	.858E+04	-.389E+03
14a Linha	.921E+02	-.396E+02	-.499E+02	-.626E+02	.261E+01	.868E+02
	.657E+03	-.888E+03	-.161E+04	.217E+04	.267E+04	-.849E+04
	.685E+03	.331E+05	-.221E+04	-.179E+05	-.335E+03	-.523E+04
15a Linha	-.164E+03	.315E+02	-.961E+02	-.109E+03	-.156E+03	.499E+02
	-.658E+03	-.658E+02	-.734E+03	-.954E+03	-.439E+03	.794E+03
	-.489E+05	-.221E+04	.101E+06	.133E+04	-.469E+05	.700E+03
16a Linha	-.176E+03	-.230E+02	.109E+03	-.327E+03	.260E+03	-.626E+02
	-.339E+03	-.532E+03	.127E+04	-.384E+04	.299E+02	.169E+04
	.332E+04	-.179E+05	.133E+04	.432E+05	-.518E+04	-.171E+05
17a Linha	-.225E+03	.181E+03	-.164E+03	.176E+03	-.467E+03	-.921E+02
	-.236E+03	.284E+03	-.625E+03	.204E+03	-.253E+04	-.457E+03
	.858E+04	-.335E+03	-.469E+05	-.518E+04	.487E+05	.188E+04
18a Linha	-.181E+03	.112E+03	-.315E+02	-.230E+02	-.485E+02	-.396E+02
	-.360E+03	-.200E+03	.174E+03	-.130E+04	.304E+03	-.383E+03
	-.389E+03	-.523E+04	.700E+03	-.171E+05	.188E+04	.287E+05

-----

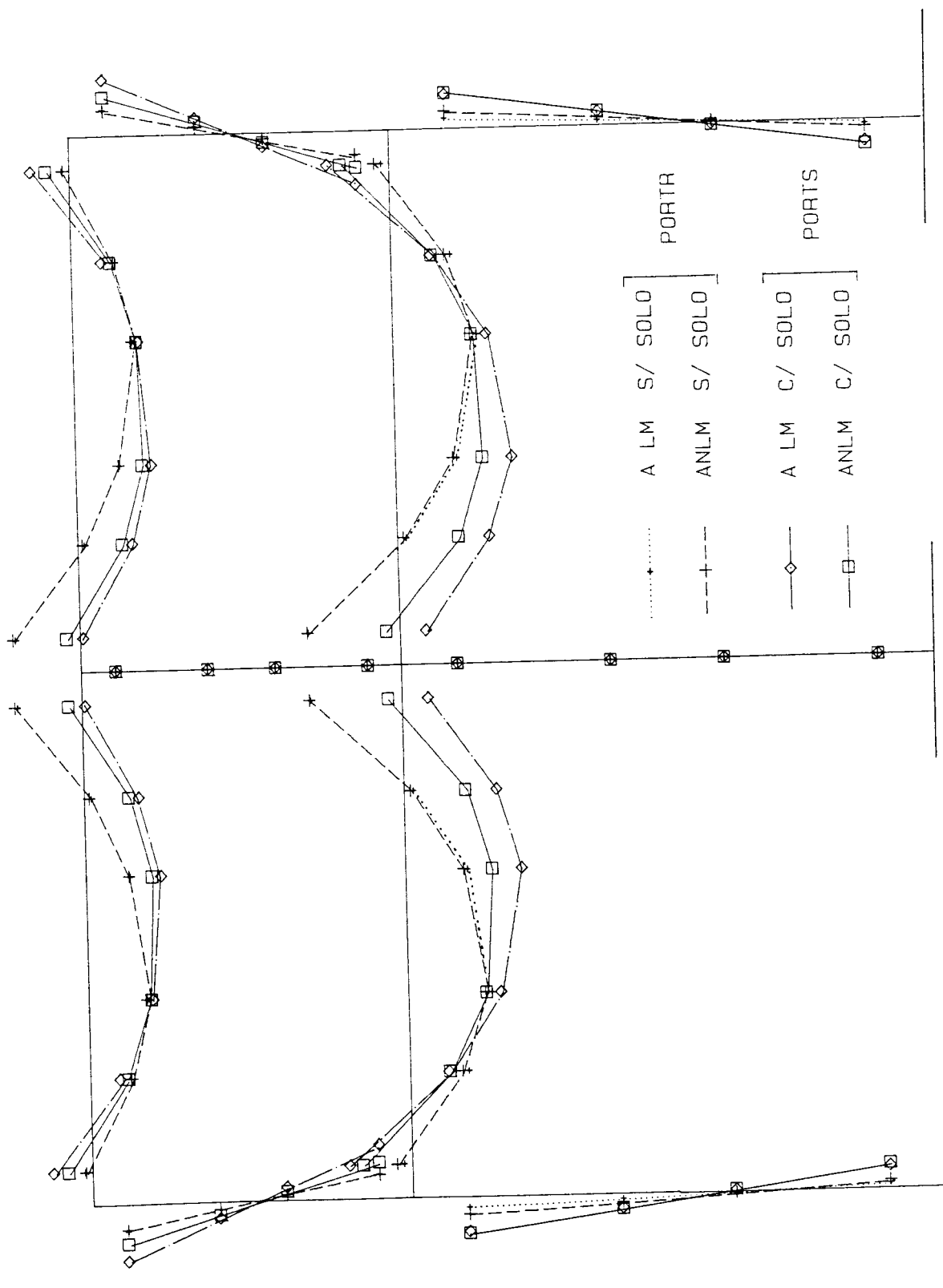


Fig. 5.8 - Combinações quase permanentes - Diagrama de momentos.

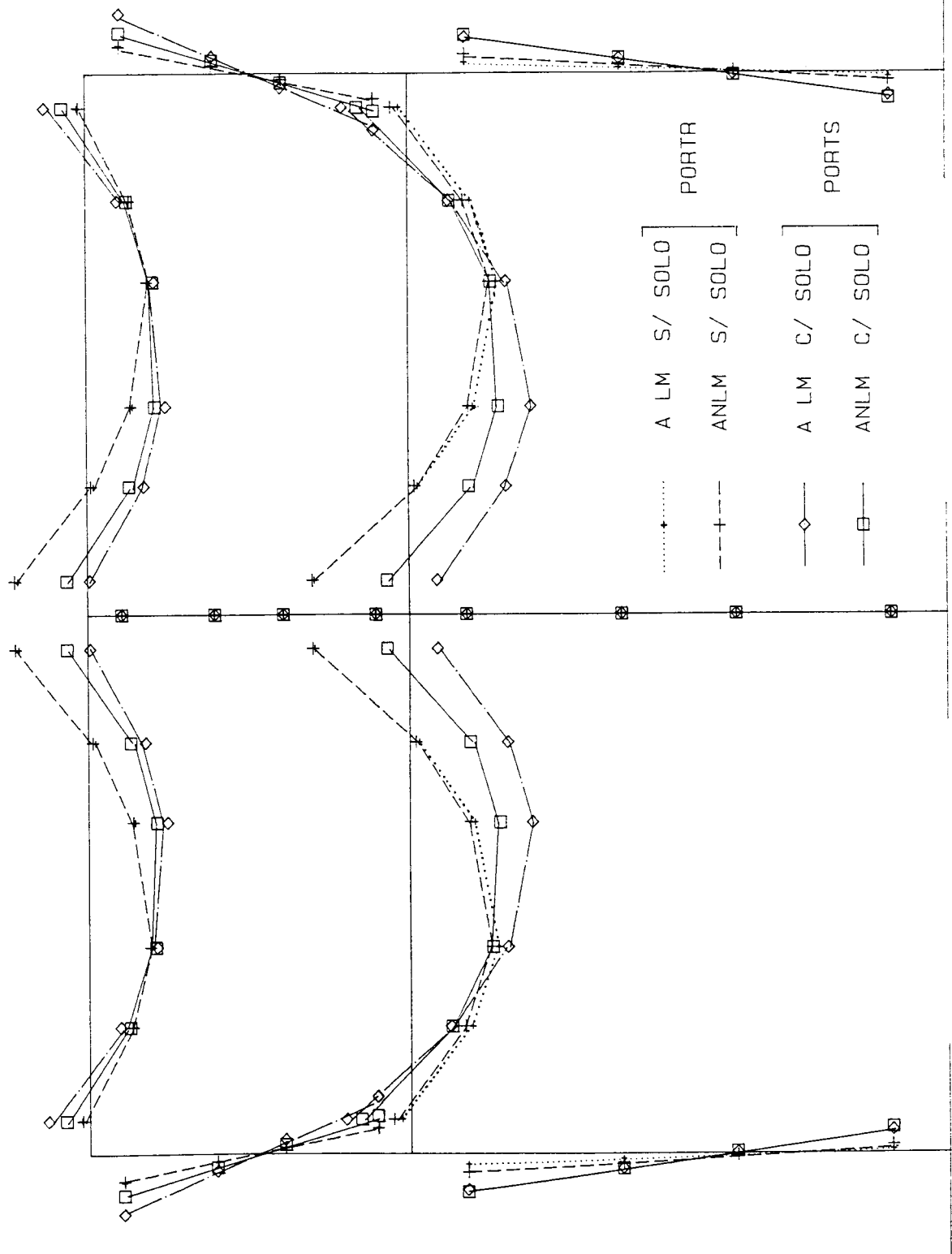


Fig. 5.9 - Combinações frequentes - Diagrama de momentos.

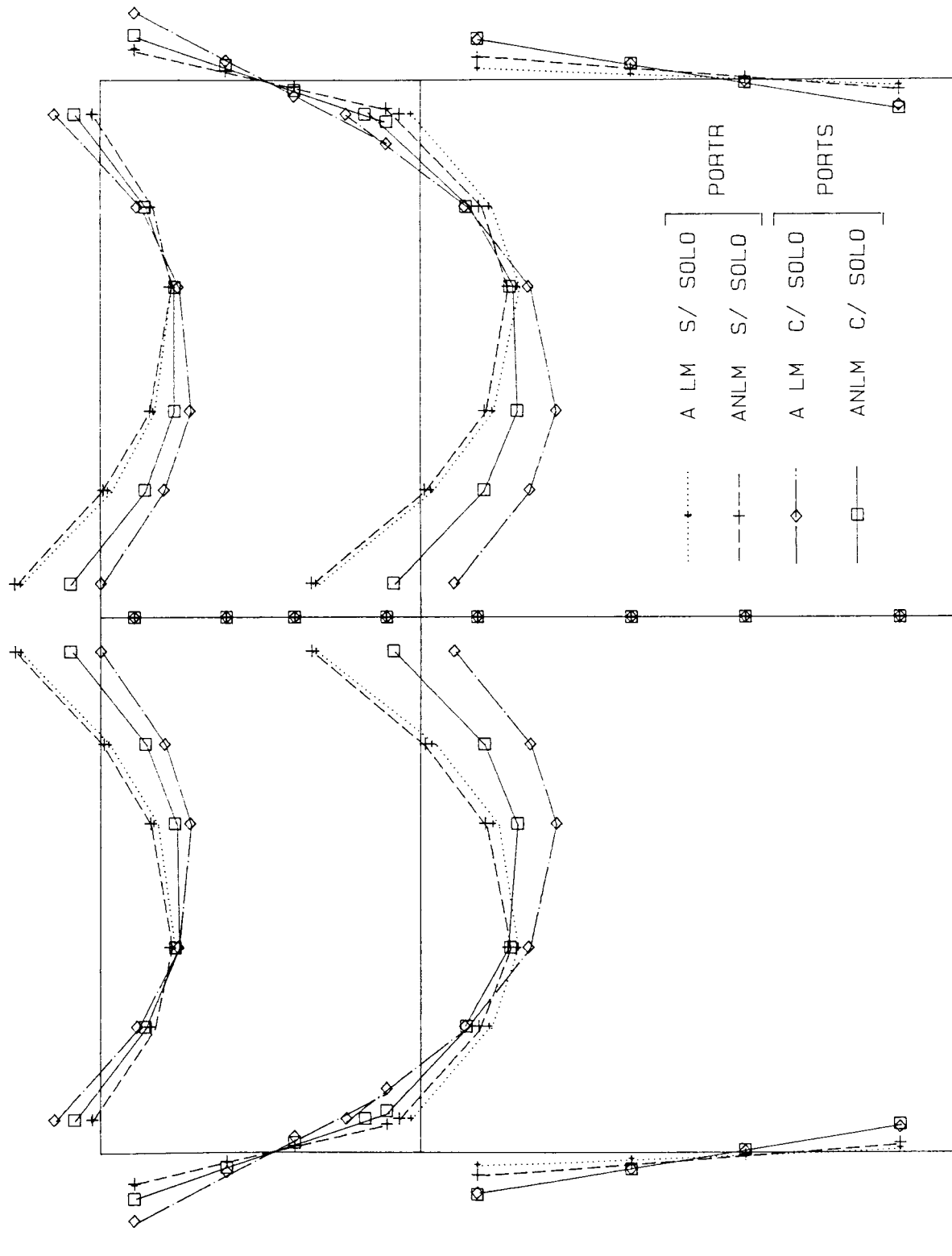
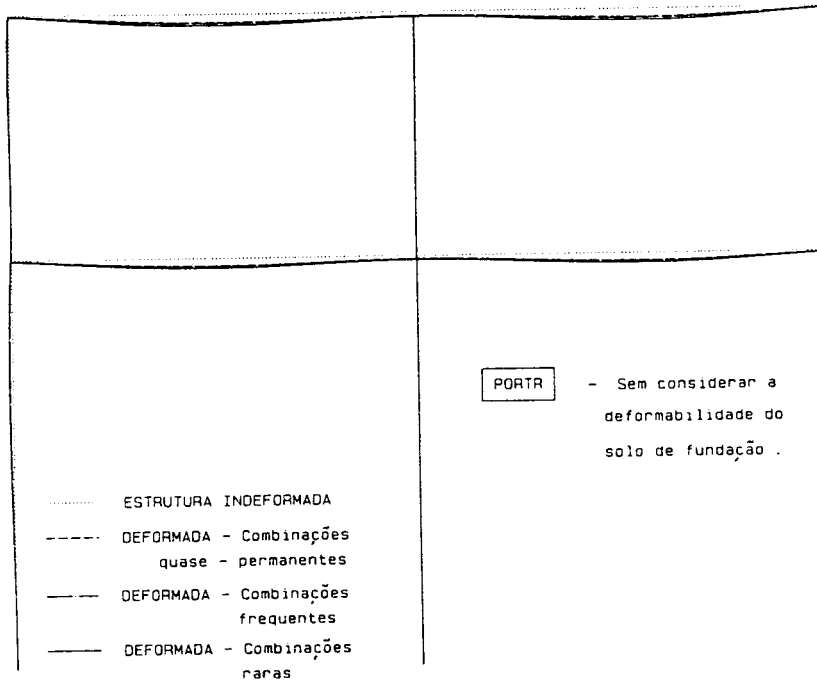


Fig. 5.10 - Combinações raras - Diagrama de momentos.

ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO - Evolução da deformada



ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO - Evolução da deformada

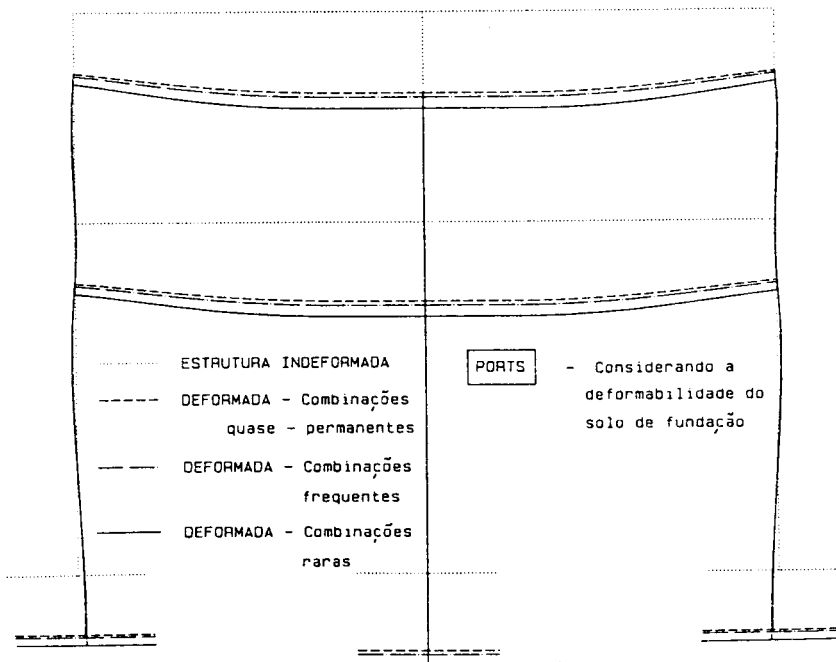


Fig. 5.11 - Estados limites de utilização - deformadas.

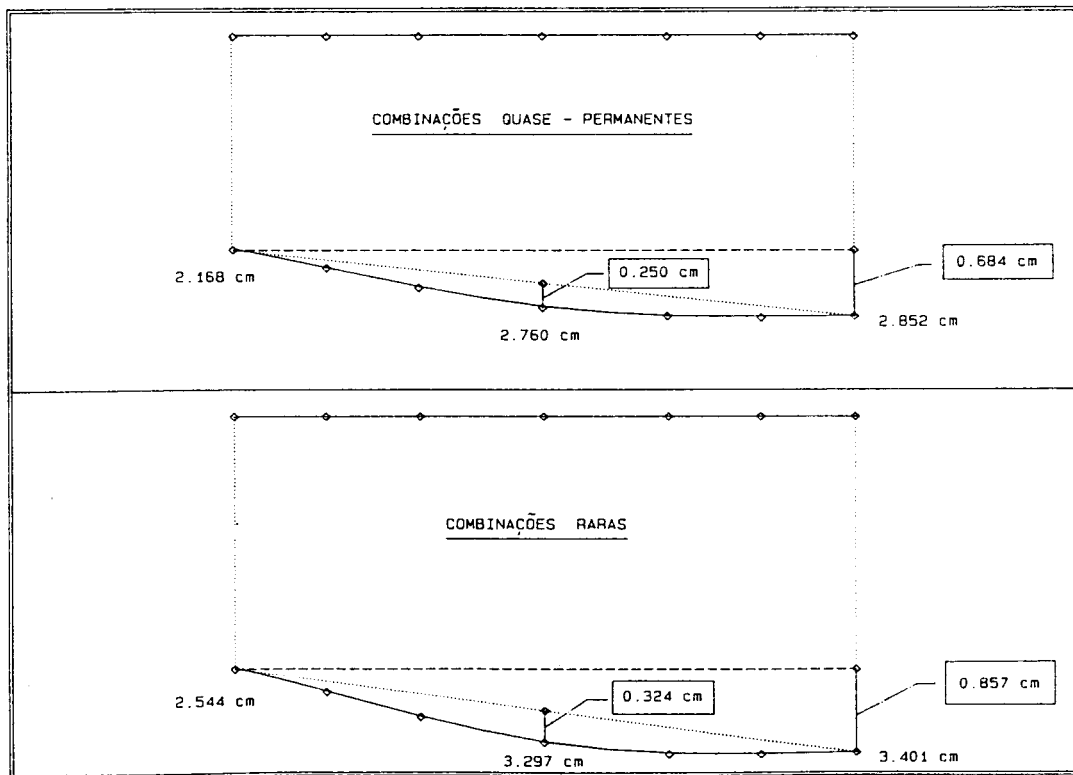
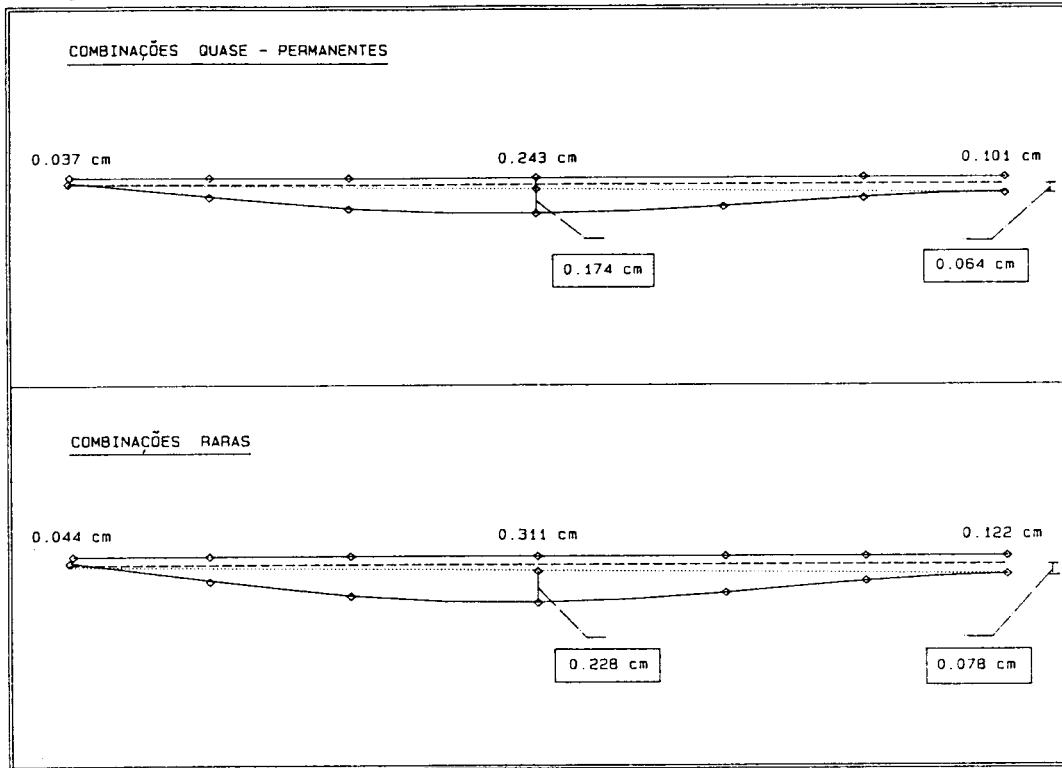


Fig. 5.12 – Estados limites de utilização – deformada do primeiro piso.

Estes diagramas evidenciam que:

- É muito pequena a alteração do diagrama de momentos quando no pórtico encastrado (PORTR), para os estados limites de utilização, se considera a análise não linear material ou linear material.
- Esta alteração é no entanto significativa quando se considera a deformabilidade do solo (PORTS). É de salientar que, como esperado, ao admitir o comportamento não linear a estrutura vai-se adaptando aos assentamentos diferenciais que experimenta redistribuindo os esforços para as zonas mais rígidas, diminuindo gradualmente a importância desses assentamentos diferenciais. Admitindo-se um comportamento linear, verificam-se de facto valores apreciáveis para os assentamentos agora referidos.

Na figura 5.11 apresenta-se a deformada de cada estrutura ao admitir-se o comportamento não linear, tendo-se considerado o mesmo factor de escala nos dois pórticos.

Na figura 5.12 isolou-se a deformada de uma das vigas do primeiro piso de cada pórtico considerado.

O Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (REBAP) [5] preconiza para vigas e lajes de edifícios  $\frac{1}{400}$  do vão como limitação da flecha calculada considerando os comportamentos em fase fendilhada e não fendilhada, permitindo que apenas se efectue a verificação deste estado limite para combinações frequentes de acções. Neste caso teremos então como limitação o valor de 1.25 cm.

Multiplicando os valores da deformação encontrados com as combinações quase permanentes por um factor aproximadamente igual a 2.5 e inferior a este no caso de combinações frequentes, para ter em conta o comportamento diferido no tempo e analisando os valores obtidos para as combinações raras, conclui-se que a limitação da deformação é satisfeita nos três casos agora referidos.

Na figura 5.13 representa-se a fendilhação no betão, para as combinações raras de acções nos dois pórticos considerados.



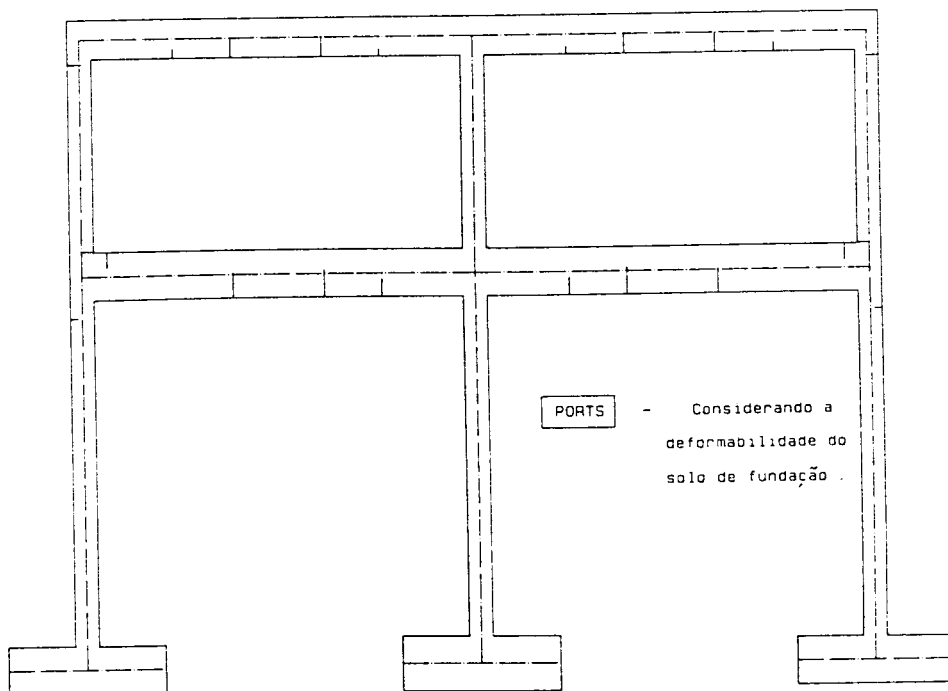
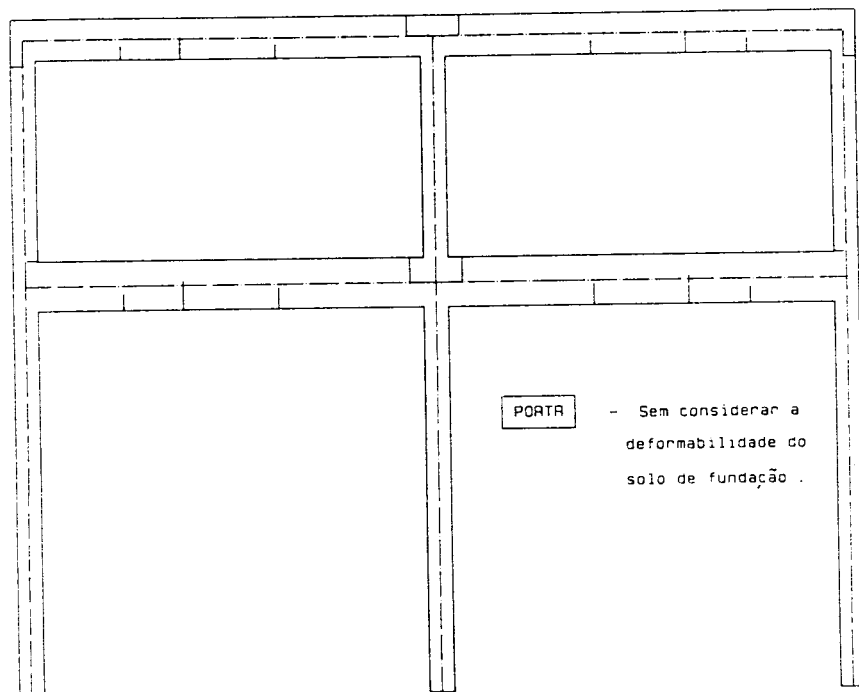


Fig. 5.13 - Combinações raras - fendilhação no betão.

Esta figura evidencia bem a alteração do estado de tensão e deformação provocada na estrutura pelo assentamento diferencial dos apoios. Da inspecção desta figura, seleccionou-se o primeiro ponto de Gauss do oitavo elemento do pórtico encastrado para exemplificar como, de acordo com o REBAP [5] e utilizando o programa FEMPOR, se efectua a verificação do estado limite de largura de fendas.

Admitindo que a estrutura em questão se encontra num ambiente muito agressivo, de acordo com o regulamento referido [5] considera-se satisfeita a segurança em relação ao estado limite de largura de fendas, se o valor característico da largura das fendas ao nível da armadura mais traccionada, calculada para combinações raras de acções, não exceder neste caso o valor de 0.1 mm. Este valor característico pode ser determinado pela expressão,

$$w_k = 1.7 \epsilon_{sm} s_{rm}$$

em que  $\epsilon_{sm}$  é a extensão média da armadura, obtida nesta análise, e  $s_{rm}$  a distância média entre fendas.

Na figura 5.14 identifica-se o diagrama de deformação na secção em estudo.

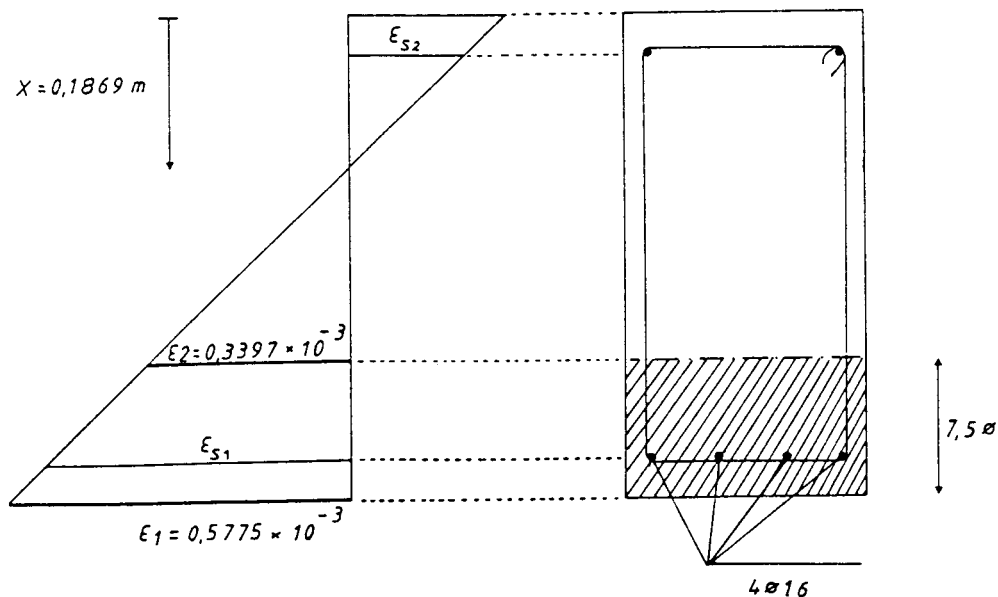


Fig. 5.14 – Diagrama de deformações.

O mesmo Regulamento recomenda a seguinte expressão para o cálculo da distância média entre fendas:

$$s_{rm} = 2 \left( c + \frac{s}{10} \right) + \eta_1 \eta_2 \frac{\phi}{\rho_r}$$

As diversas grandezas intervenientes assumem neste caso os seguintes valores,

$$\begin{array}{lll} c = 0.05 \text{ m} & s = 0.05 \text{ m} & \phi = 0.016 \text{ m} \\ \eta_1 = 0.04 & \eta_2 = 0.19853 & \rho_r = 0.01577 \end{array}$$

pelo que o valor característico da largura das fendas será:

$$w_k = 1.7 \times 0.5076 \times 10^{-3} \times 0.1906 \times 10^3 \simeq 0.16 \text{ mm}$$

superior ao valor máximo preconizado, não se verificando pois a segurança ao estado limite de largura de fendas.

Dos resultados agora apresentados importa sobretudo salientar a facilidade com que, utilizando a presente técnica de análise não linear, é efectuada a verificação aos estados limites de utilização.

## 5.4.2 Análise à rotura

Realizadas estas verificações continuou-se a análise dos dois pórticos prosseguindo o carregamento até à rotura.

Nas figura 5.15 e 5.16 representa-se a evolução dos diagramas de momentos nos dois pórticos.

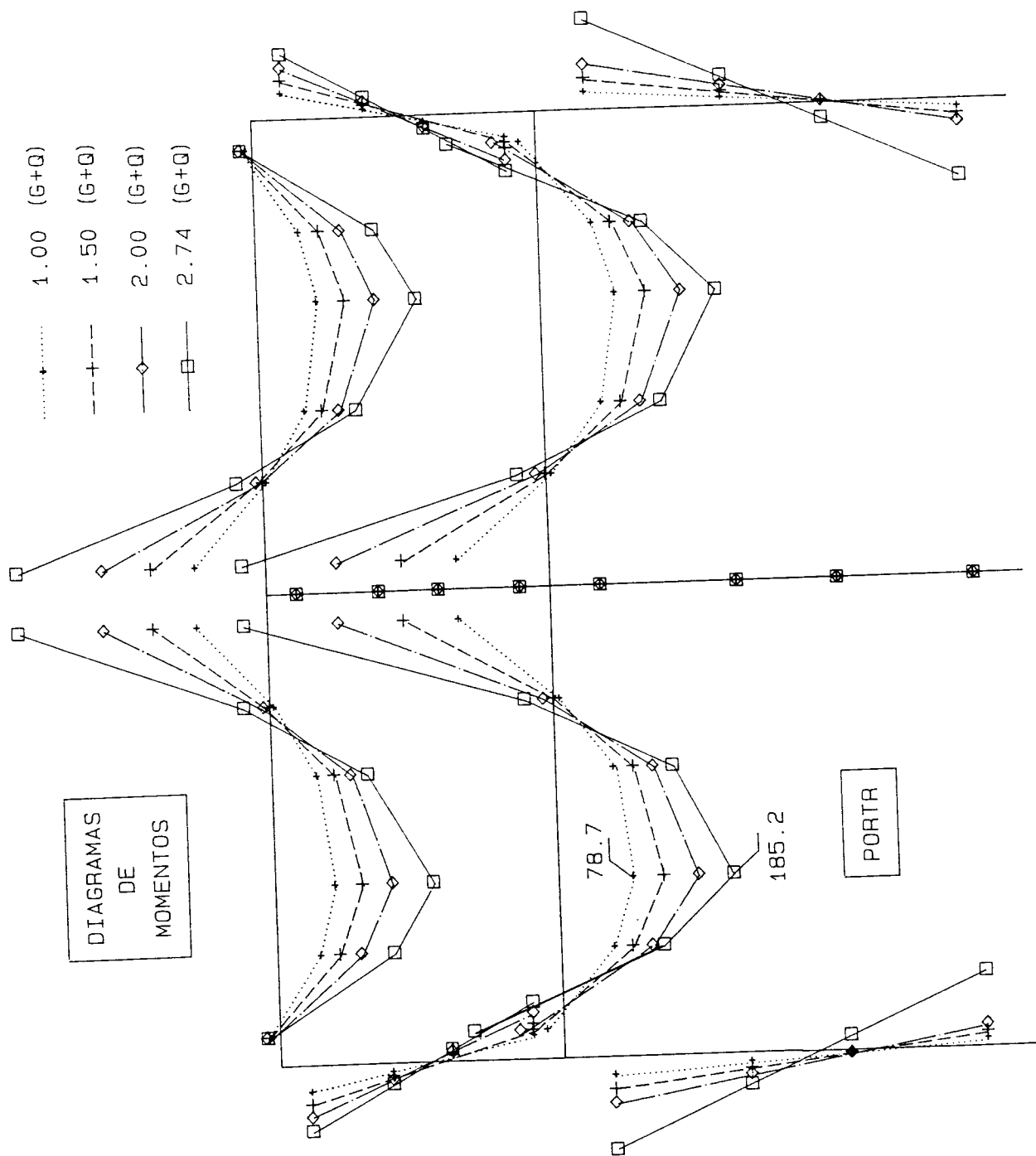


Fig. 5.15 - Evolução do diagrama de momentos - PORTA.

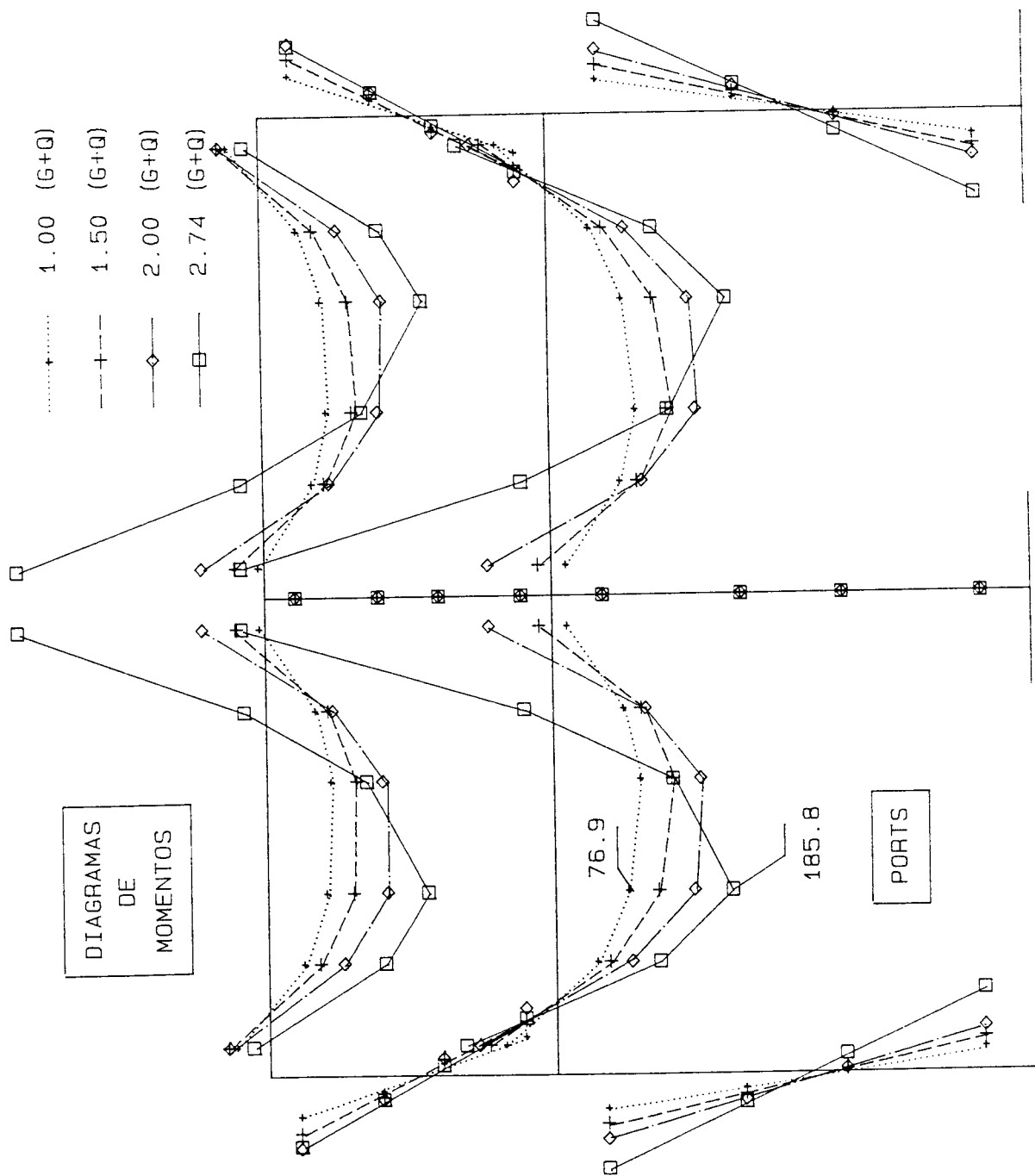


Fig. 5.16 - Evolução do diagrama de momentos - PORTS.

Note-se que as diferenças bastante acentuadas detectadas nos dois diagramas ao efectuar a análise dos estados limites de utilização, ou seja para valores moderados da solicitação, vão-se atenuando com o aumento da solicitação e correspondente degradação da rigidez da estrutura.

Pode parecer curioso ter-se encontrado para os dois pórticos a mesma carga de rotura ( $2.74 (G + Q)$ ). No entanto, atendendo ao facto de os dois pórticos terem as mesmas características geométricas e solicitações, a evolução da degradação da estrutura, sobretudo das vigas, origina que os assentamentos induzidos deixem de introduzir esforços nesta. A estrutura começa então a comportar-se como se tivesse deixado de haver ligação entre os vários pilares (com o decréscimo acentuado da rigidez, as vigas deixam de opor qualquer resistência aos assentamentos dos pilares, manifestando pois um comportamento independente destes.

Sendo a rotura do pórtico encastrado PORTR, provocada pelo esmagamento do betão das vigas (acompanhada de pronunciada plastificação da armadura), é perfeitamente lógico que tendo as vigas do pórtico PORTS as mesmas características do anterior, a carga de colapso seja de facto igual nos dois casos.

As figura 5.17 a 5.20 representam a evolução da plastificação da armadura nos dois casos.

Estas figuras, juntamente com as 5.15 e 5.16, evidenciam que apesar da plastificação ser inicialmente mais desfavorável no pórtico encastrado, próximo do colapso os dois pórticos apresentam o mesmo estado de plastificação.

As figuras 5.21 a 5.23 representam a evolução da fendilhação do betão nos dois pórticos. Naturalmente o estado de fendilhação nos dois casos é, pelas razões anteriores, semelhante junto ao colapso.

Na figura 5.24, em que se desenha a evolução da deformada dos dois pórticos, é notório o agravamento brusco da deformada das vigas próximo do colapso. Note-se a este propósito, que no pórtico em que se considera a deformabilidade do solo, próximo da rotura a um acréscimo insignificante de carga e concomitantemente do assentamento dos pilares corresponde um agravamento de deformação nas vigas bastante acentuado.

As figuras 5.25 e 5.26 representam a evolução dos estados de tensão no betão e na armadura, nos dois pontos de Gauss do elemento 12 do pórtico com deformabilidade da fundação, realçando a significativa alteração do estado de tensão verificada ao atingir-se o colapso.

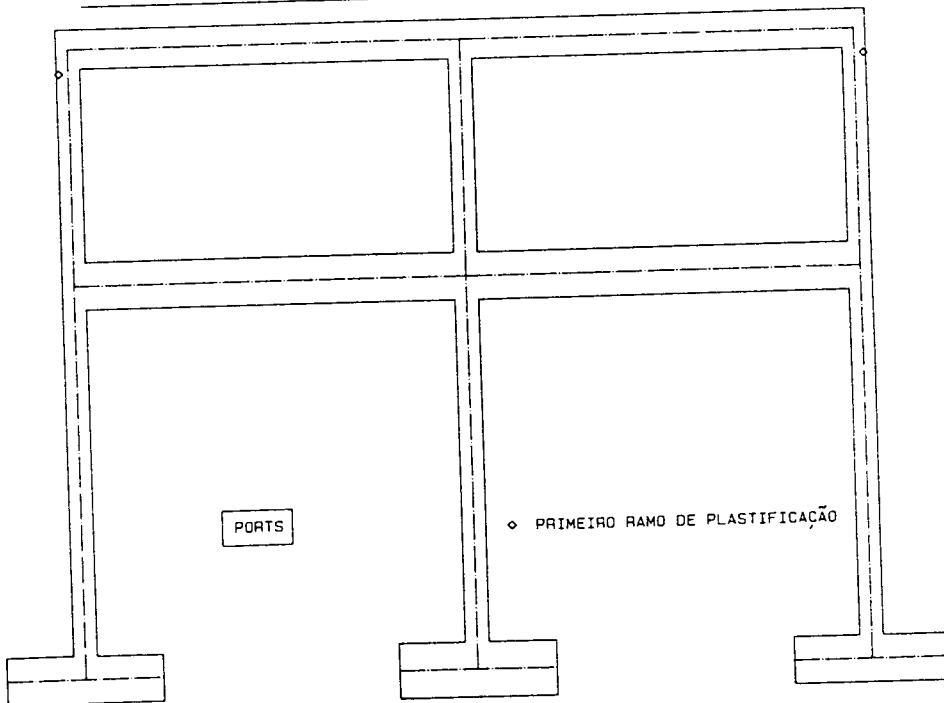
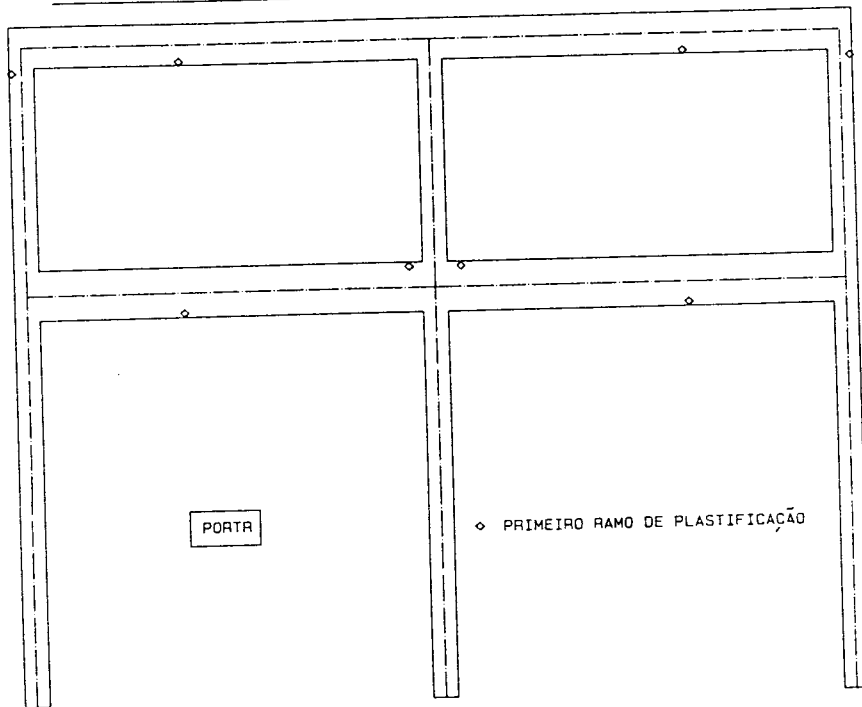


Fig. 5.17 - Plastificação da armadura.

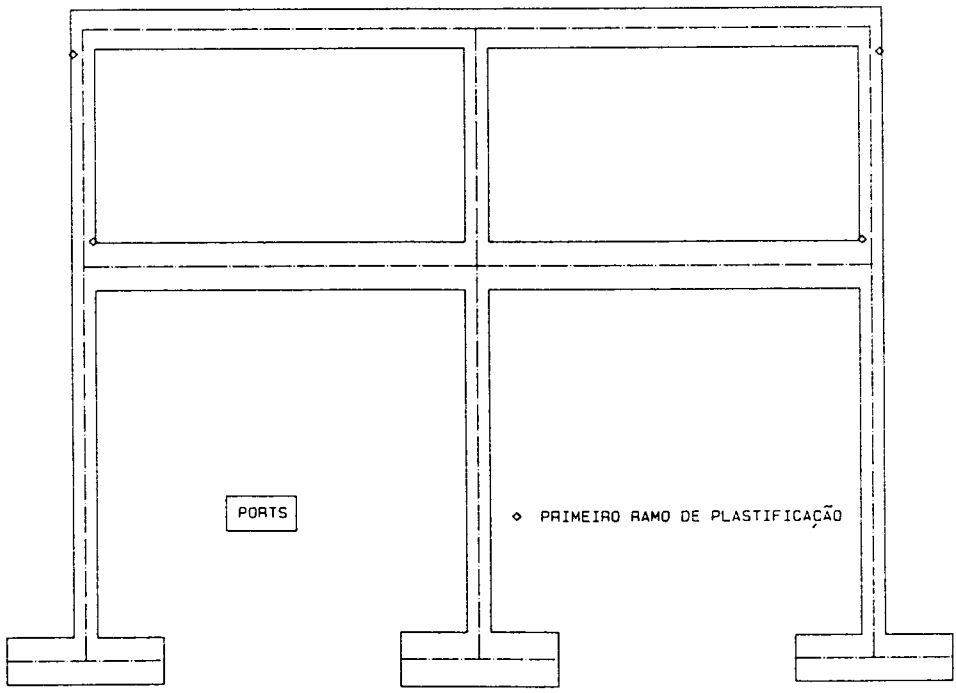
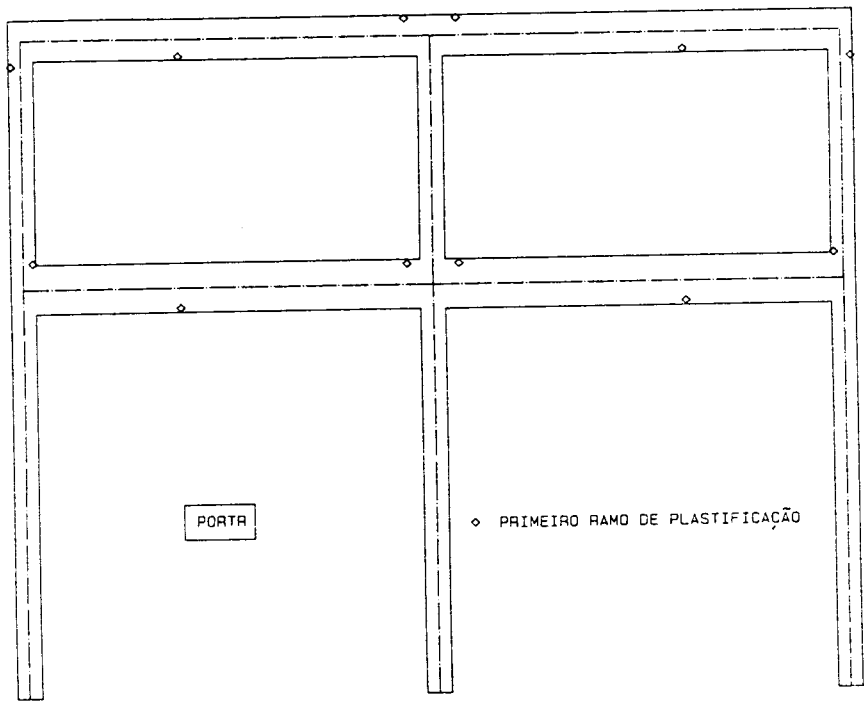


Fig. 5.18 - Plastificação da armadura.



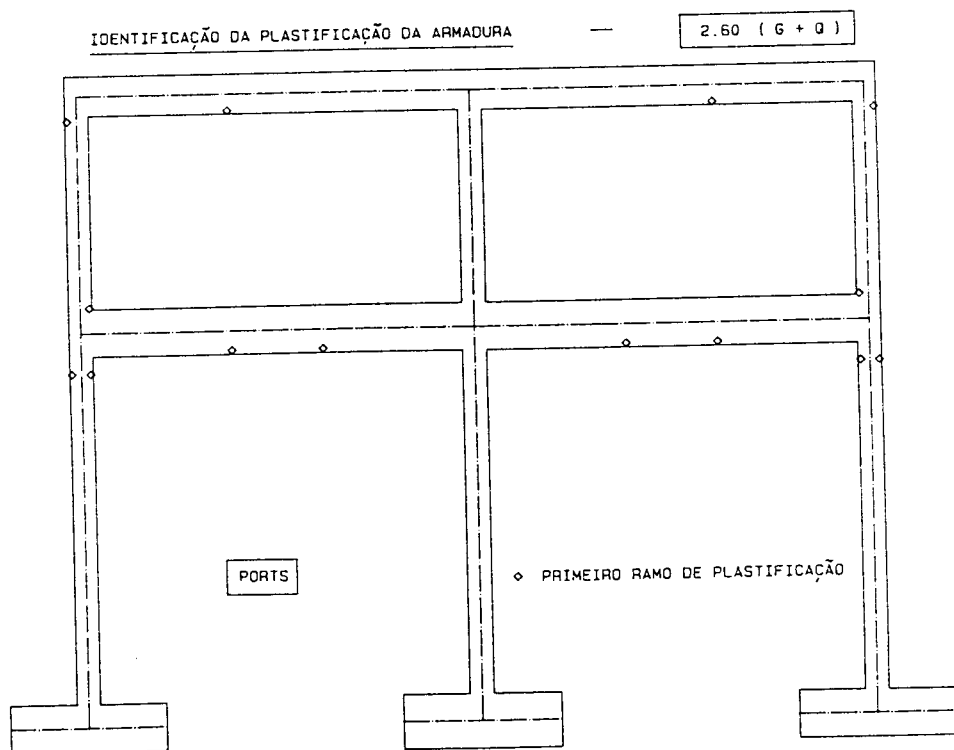
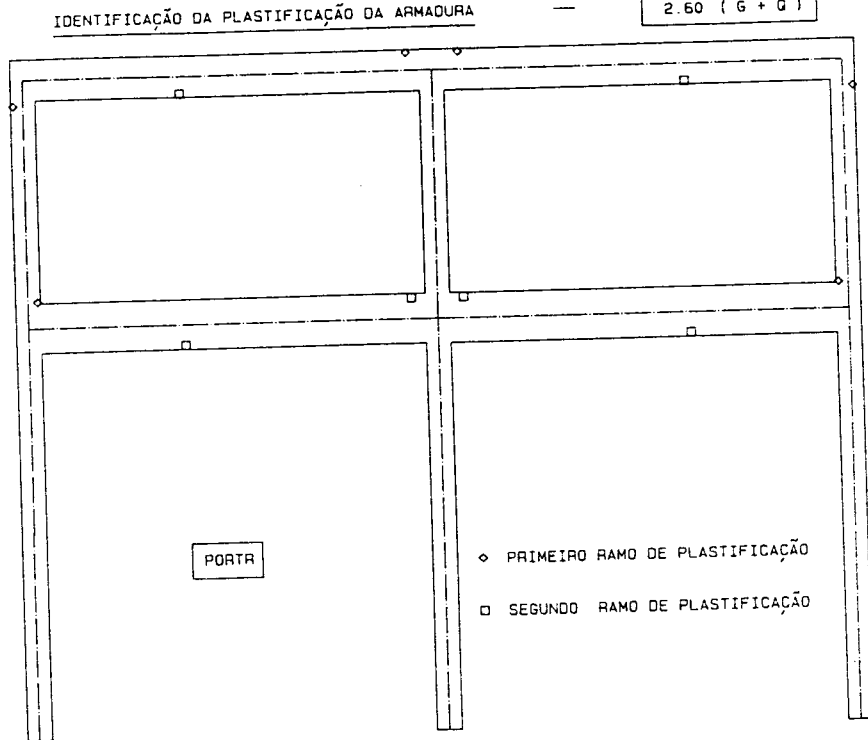


Fig. 5.19 – Plastificação da armadura.

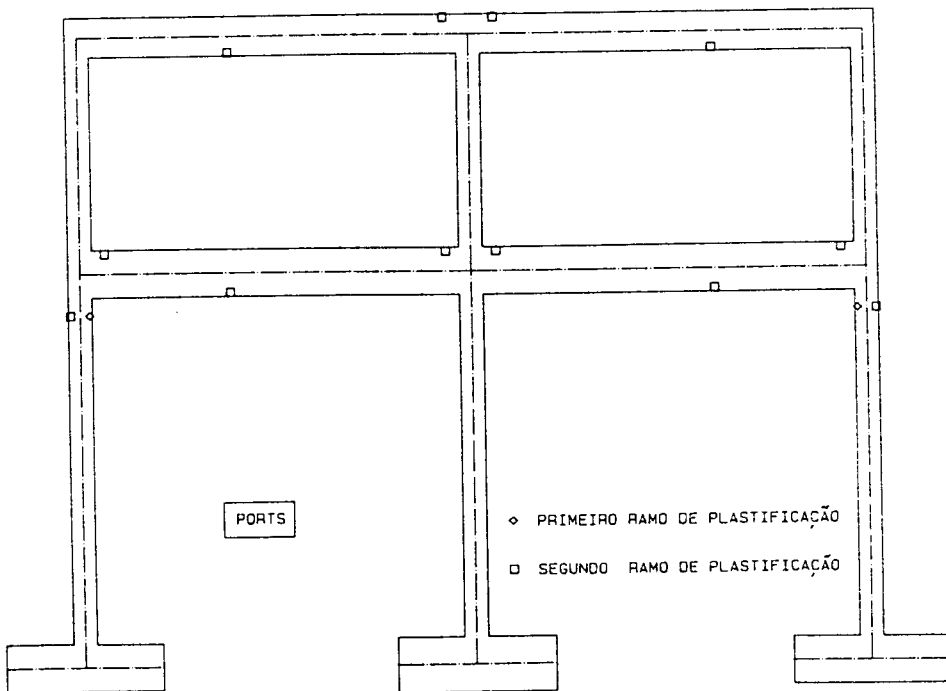
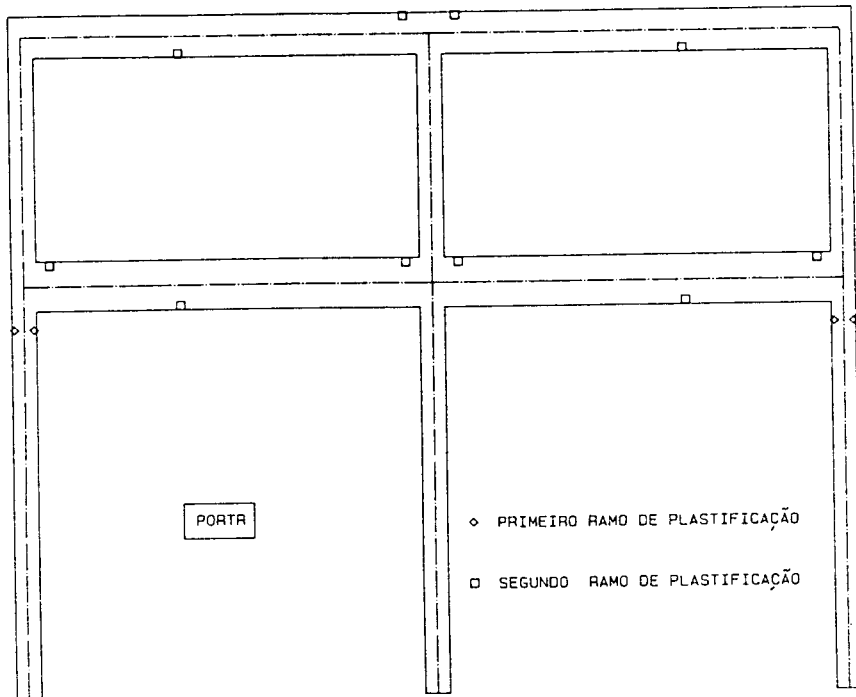


Fig. 5.20 - Plastificação da armadura.

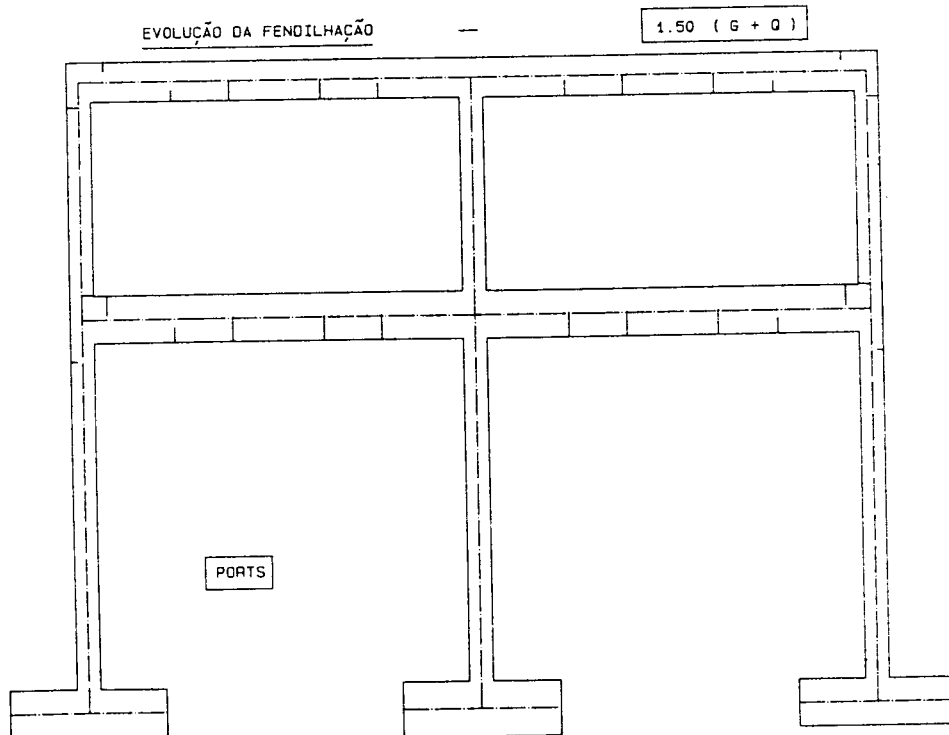
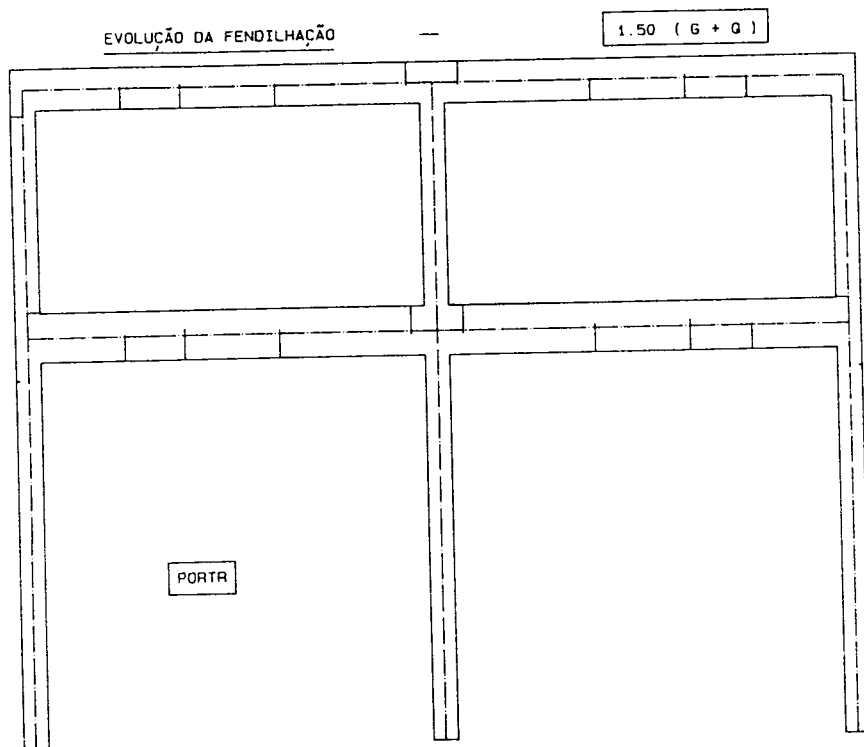


Fig. 5.21 - Fendilhação no betão.

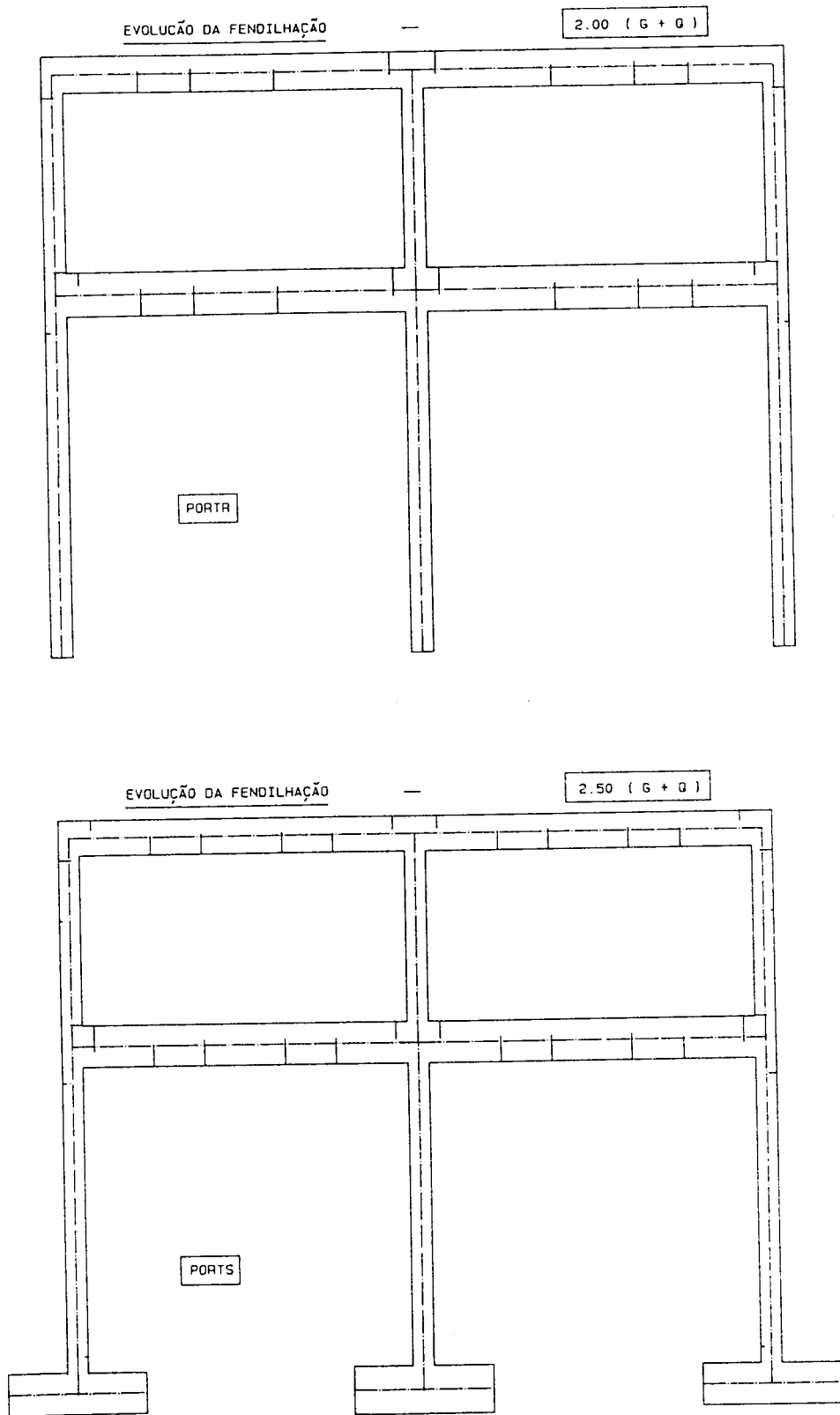


Fig. 5.22- Fendilhação no betão.

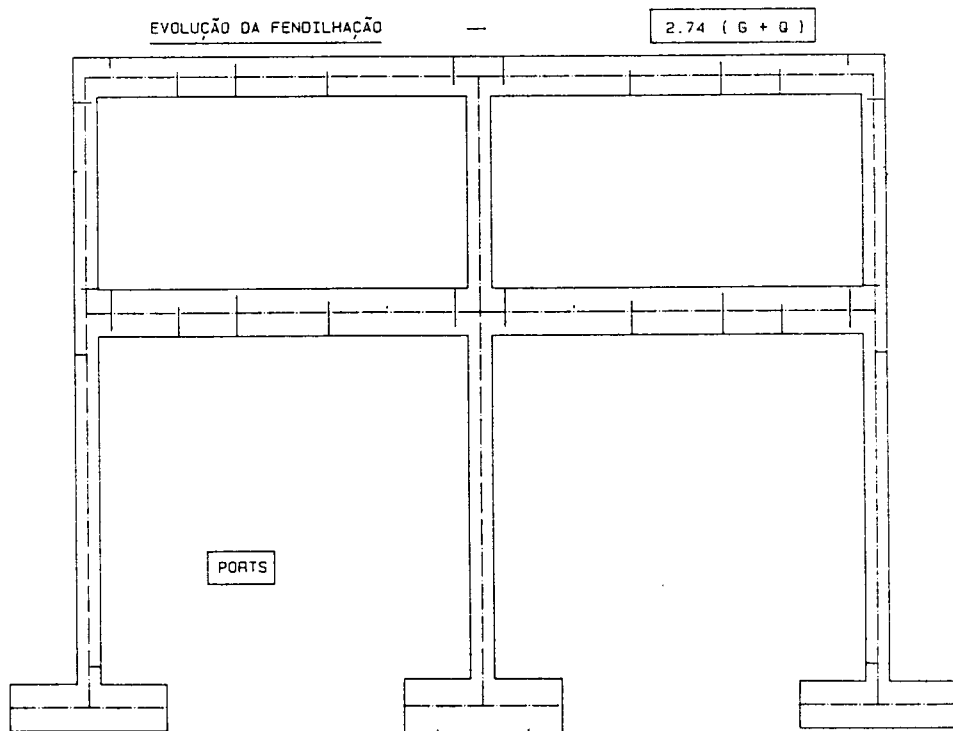
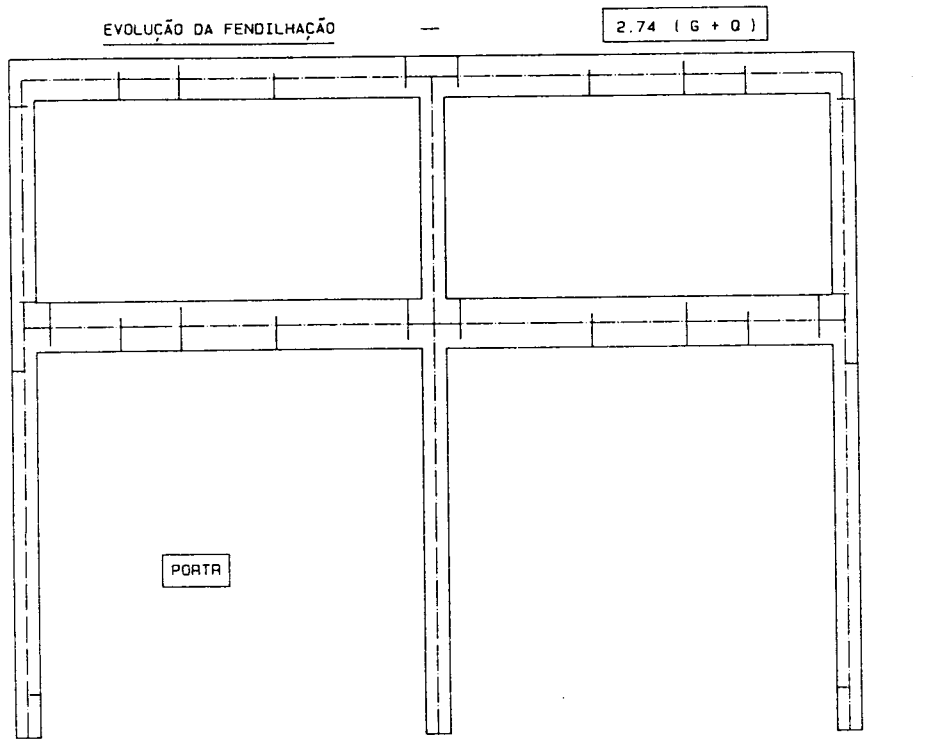


Fig. 5.23 – Fendilhação no betão.

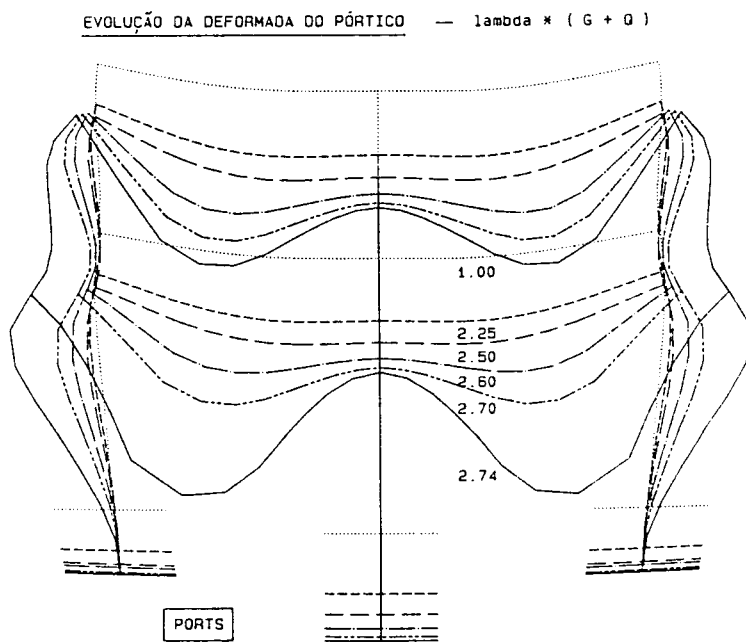
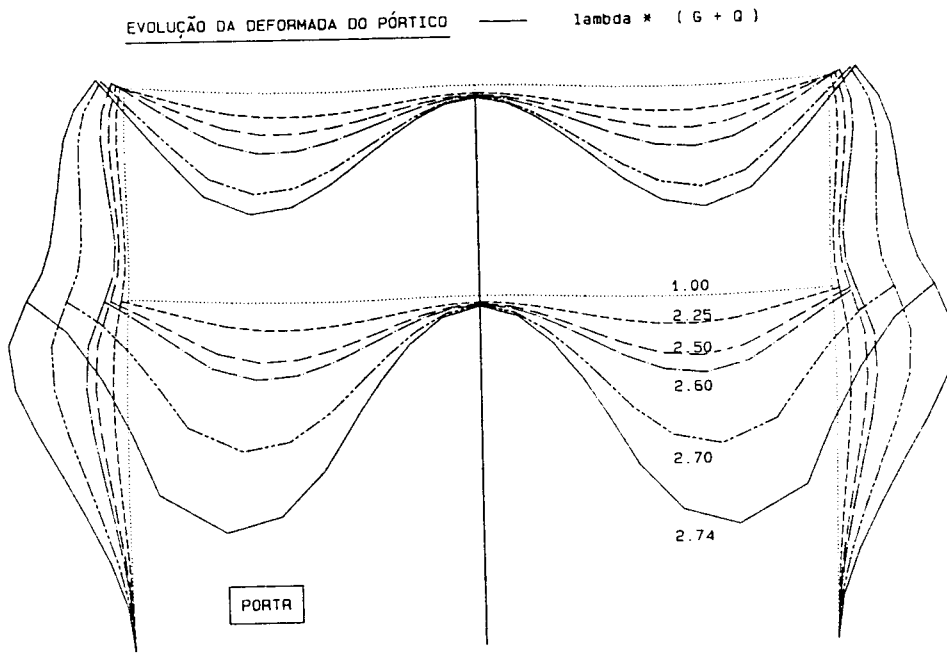


Fig. 5.24 - Evolução da deformada.

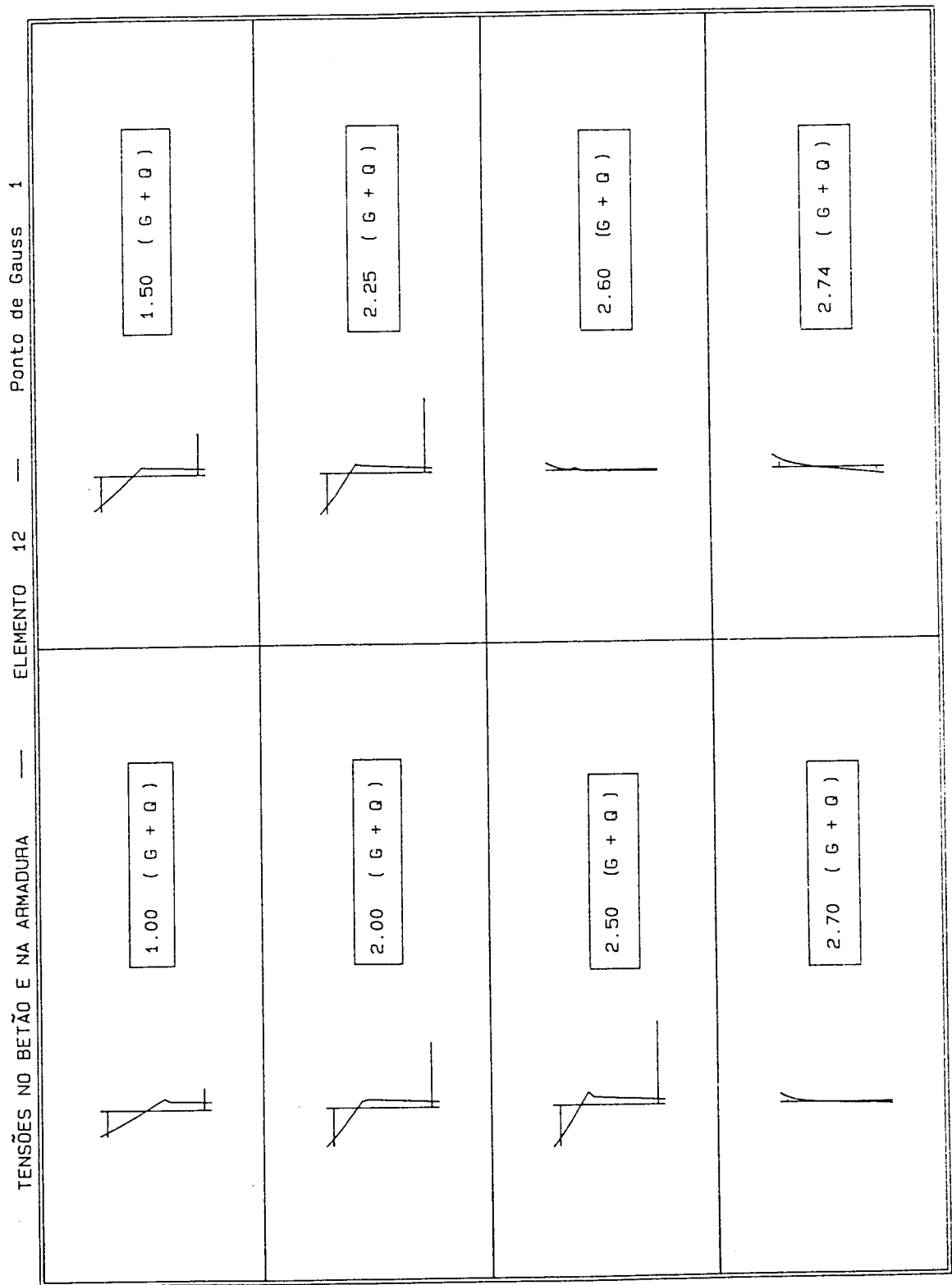


Fig. 5.25 - Evolução do estado de tensão na armadura e no betão.

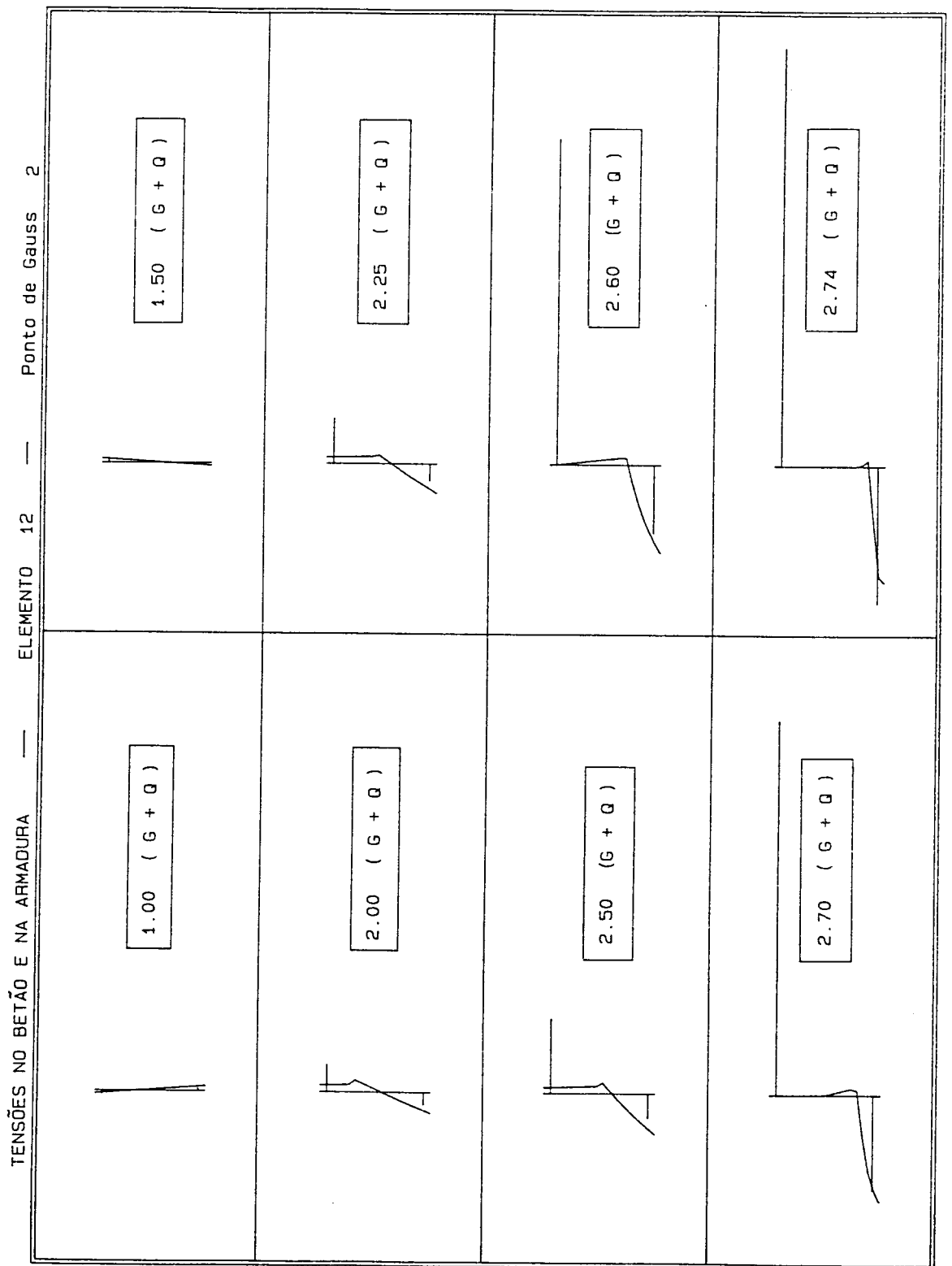


Fig. 5.26 - Evolução do estado de tensão na armadura e no betão.



Dando-se a rotura do pórtico por esmagamento do betão e tendo-se considerado os valores característicos das propriedades dos materiais considera-se verificada a segurança da estrutura à rotura, pelo facto de o parâmetro de carga 2,74 encontrado na rotura ser superior ao valor mínimo 2,25 necessário para que se verifique a segurança ( $S_d = 1.5 (S_{Gk} + S_{Qk}) \leq \frac{R_k}{1.5}$  ou seja  $2.25 (S_{Gk} + S_{Qk}) \leq R_k$ ).

### 5.4.3 Simulação da construção por fases

Efectuadas estas duas verificações realiza-se ainda a simulação da construção por fases dos dois pórticos em questão, para as combinações raras de acções; certos porém, que a influência da consideração deste efeito deve ser insignificante devido às pequenas dimensões dos pórticos em estudo. Crê-se no entanto que esta limitação não compromete a percepção da técnica adoptada.

Sendo assim, com algumas limitações (não se consideram elementos de barra que representem os escoramentos, não são simuladas as paredes de enchimento e naturalmente as solicitações a considerar mereceriam um estudo mais minucioso, etc.), foram consideradas simplificadaamente as seguintes fases:

#### Fase 1

Correspondente à construção do primeiro piso. Considerou-se como solicitação nesta fase, apenas as cargas permanentes no primeiro piso.

#### Fase 2

Sobre a estrutura anterior deformada, é construído o segundo piso. Como primeira solicitação (Fase 2A) acrescenta-se apenas as cargas permanentes do segundo piso.

Para concluir esta análise, considera-se uma segunda solicitação (Fase 2B) correspondente às sobrecargas no primeiro e segundo pisos.

As figuras 5.27 a 5.29 representam a evolução da deformada, da fendilhação do betão e do diagrama de momentos do pórtico PORTS, evidenciando o faseamento descrito.

A figura 5.30 representa o diagrama de momentos do pórtico encastrado PORTR.

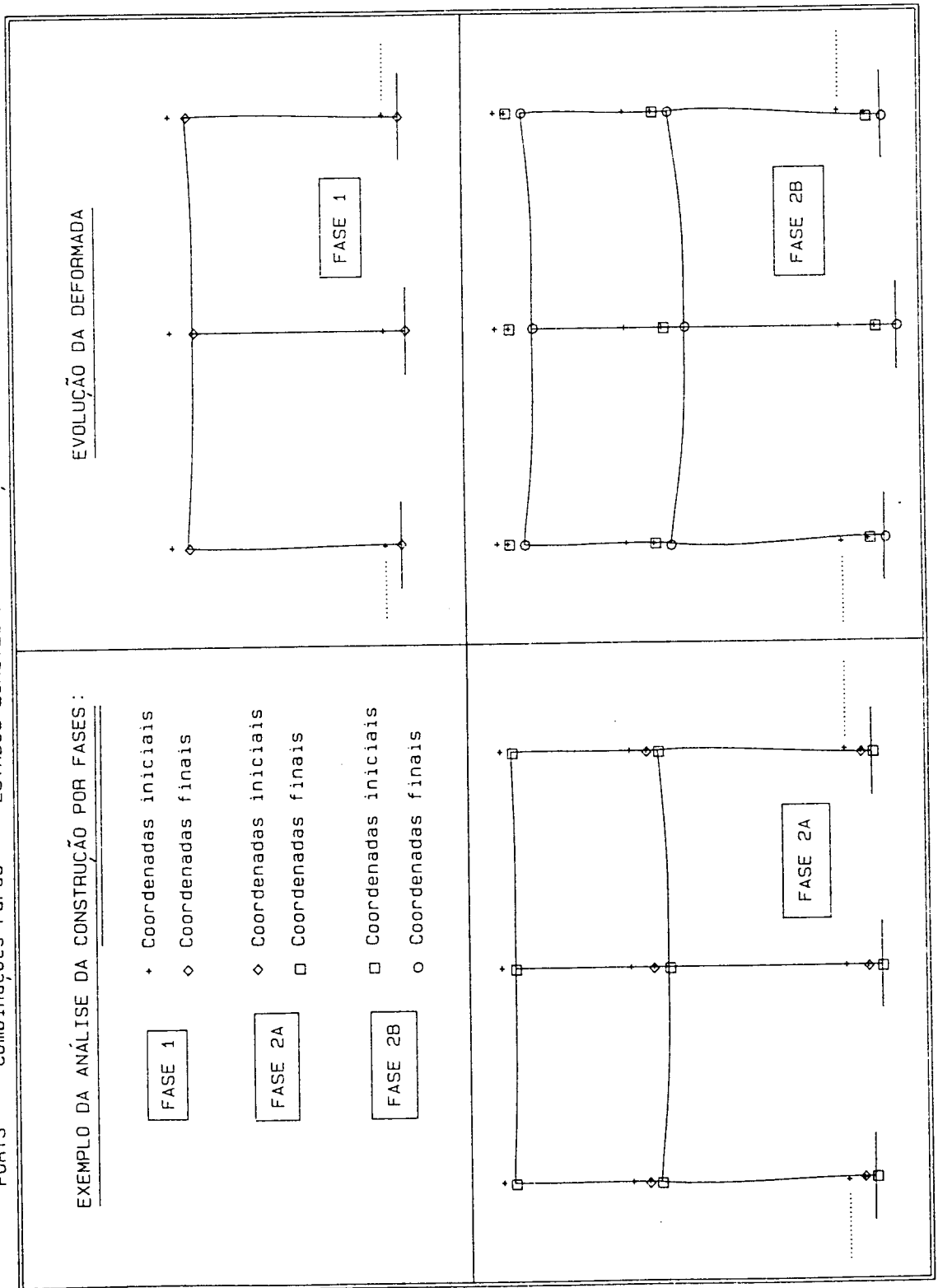


Fig. 5.27 - PORTS - Evolução da deformada - construção por fases.

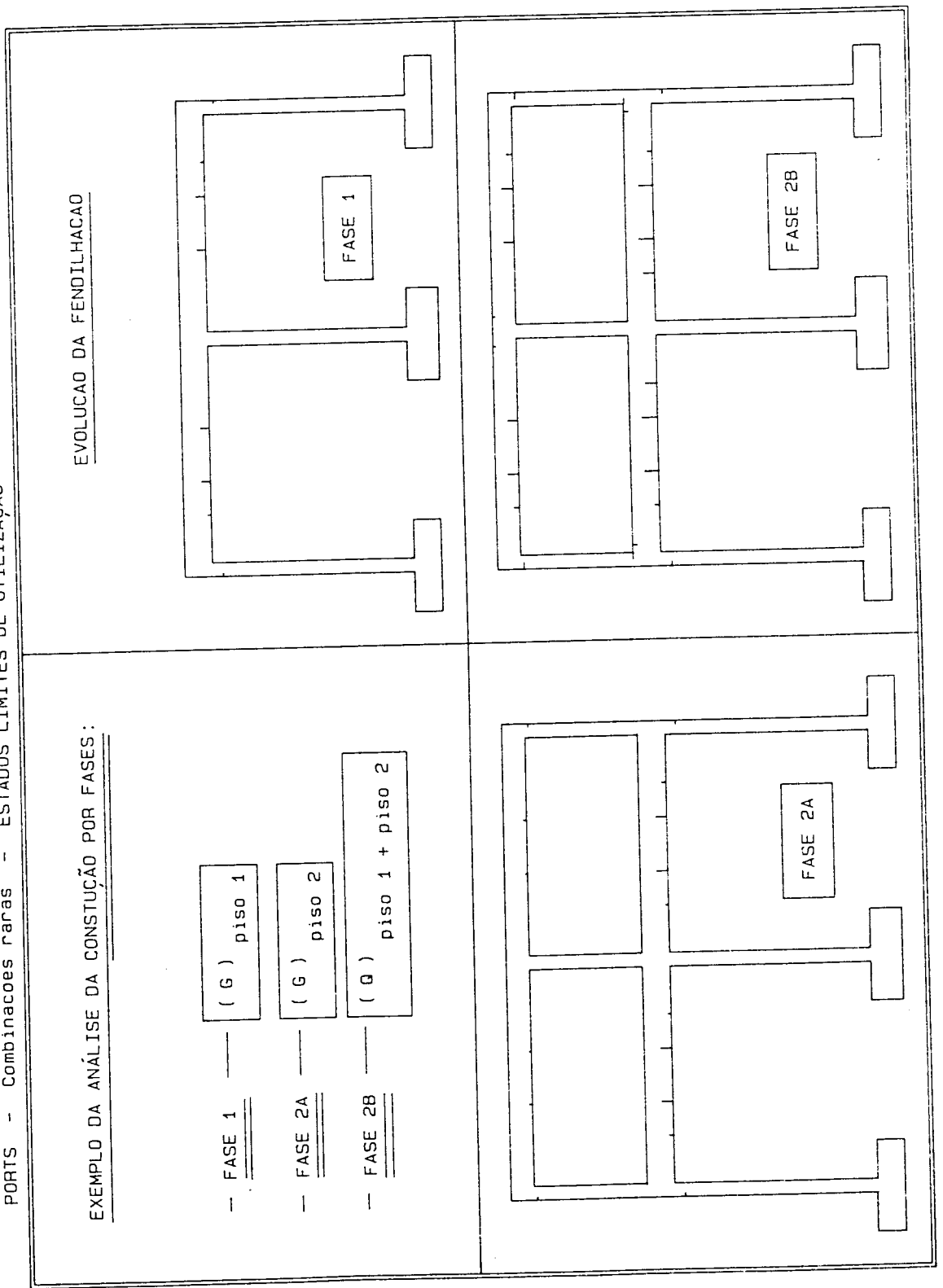


Fig. 5.28 - PORTS - Evolução da fendilhação do betão - construção por fases.

PORTS - Combinações raras - ESTADOS LÍMITES DE UTILIZAÇÃO

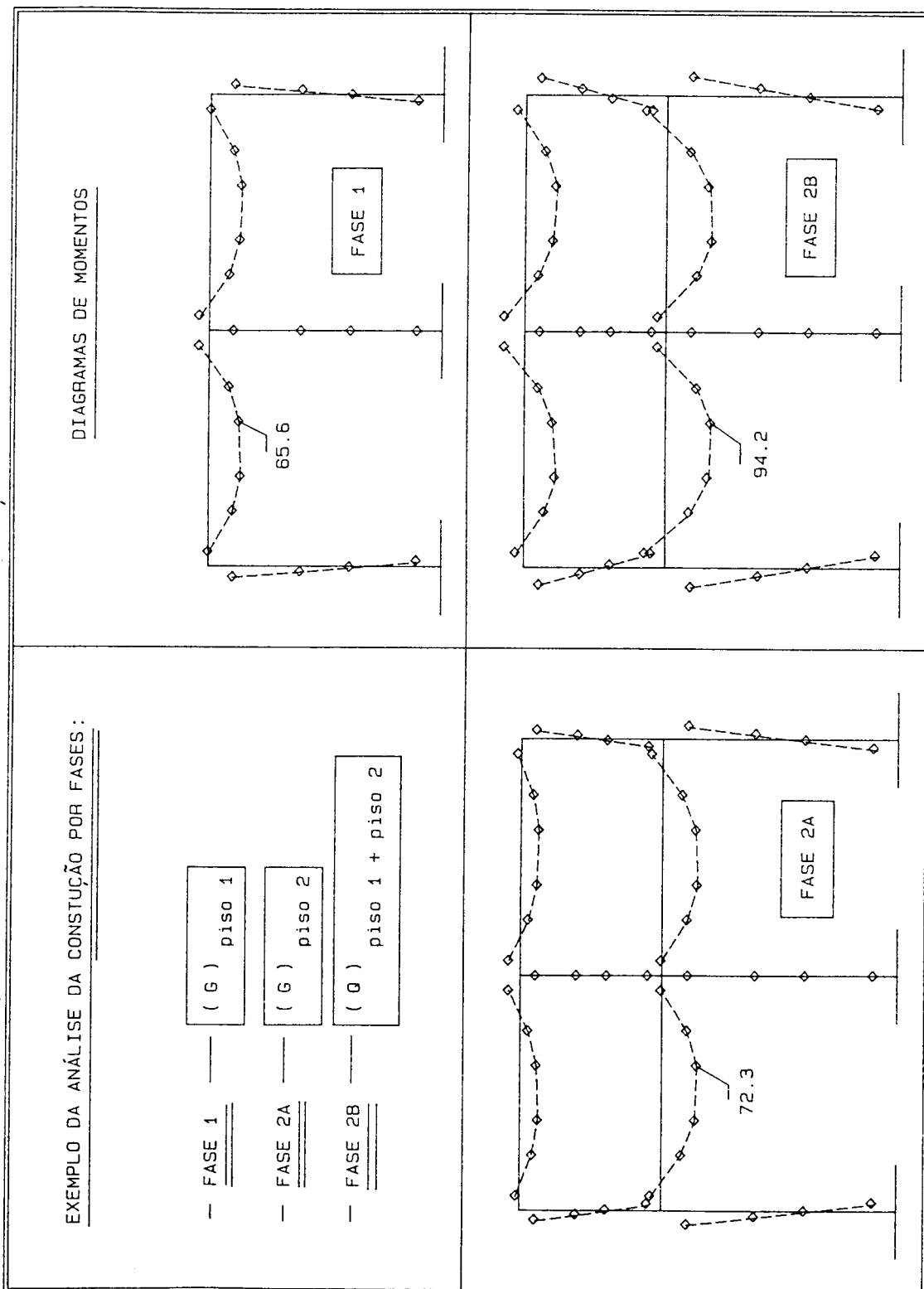


Fig. 5.29 – PORTS - Evolução do diagrama de momentos - construção por fases.

PORTR - Combinações raras - ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

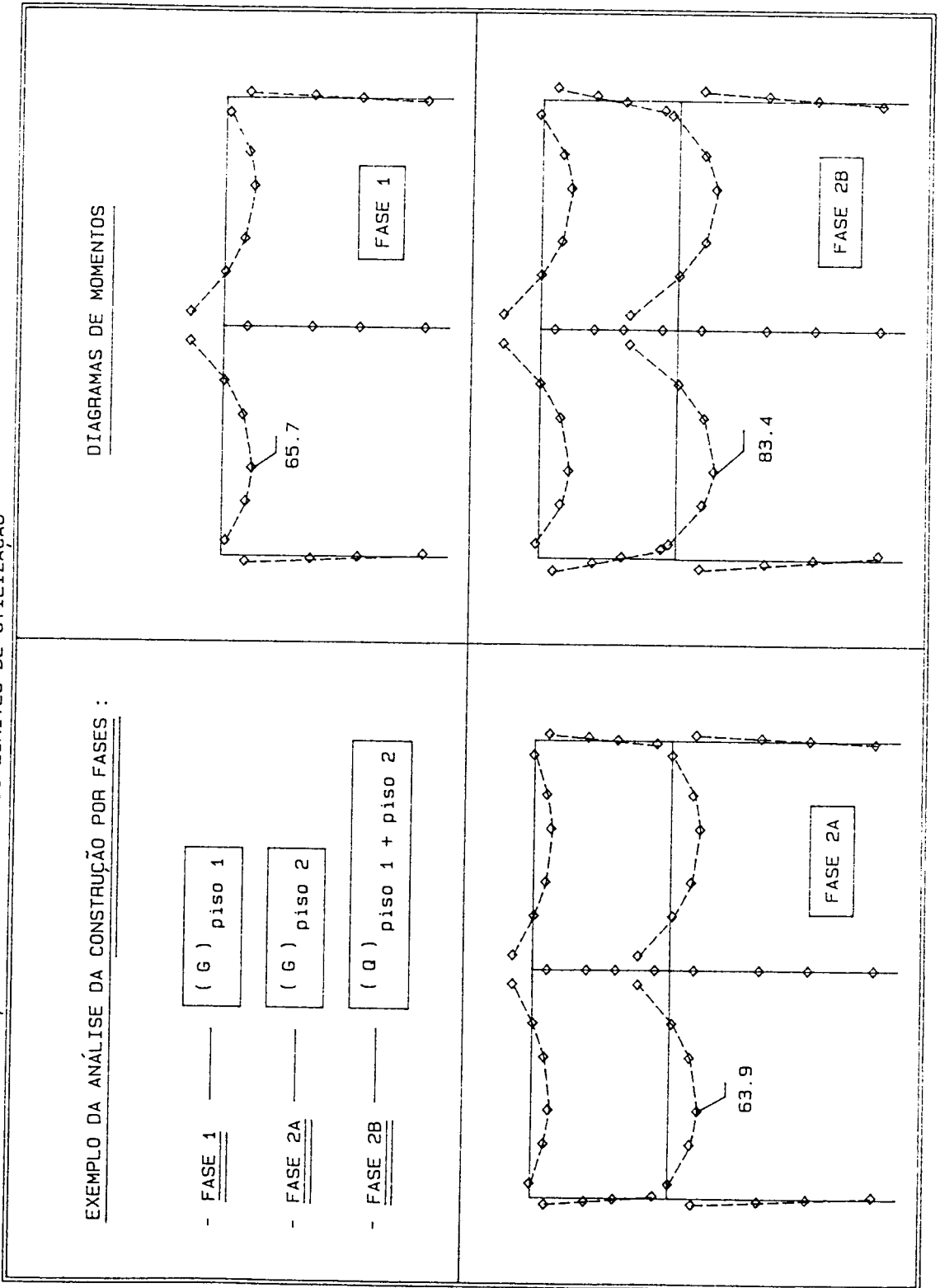
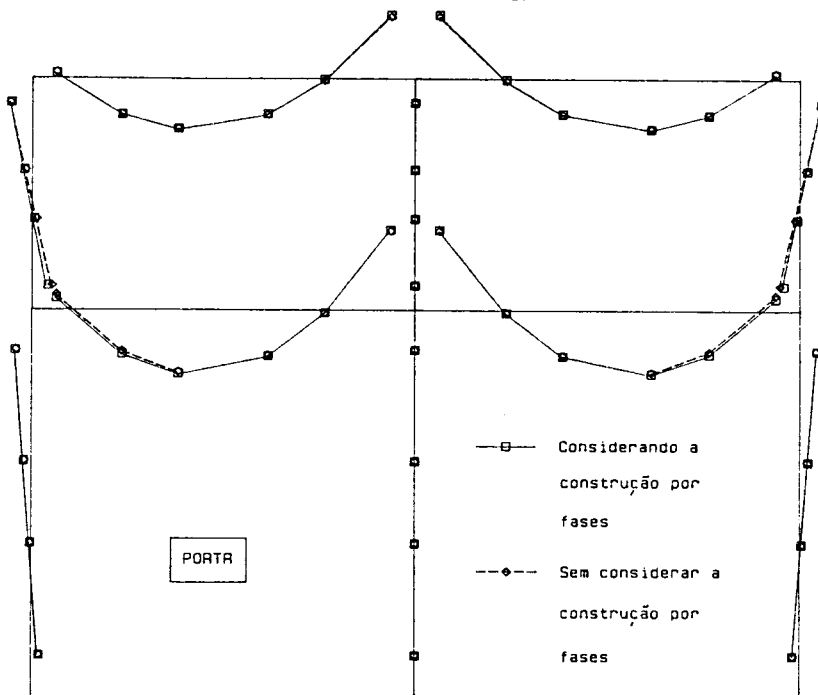


Fig. 5.30 - PORTR - Evolução do diagrama de momentos - construção por fases.

DIAGRAMAS DE MOMENTOS



DIAGRAMAS DE MOMENTOS

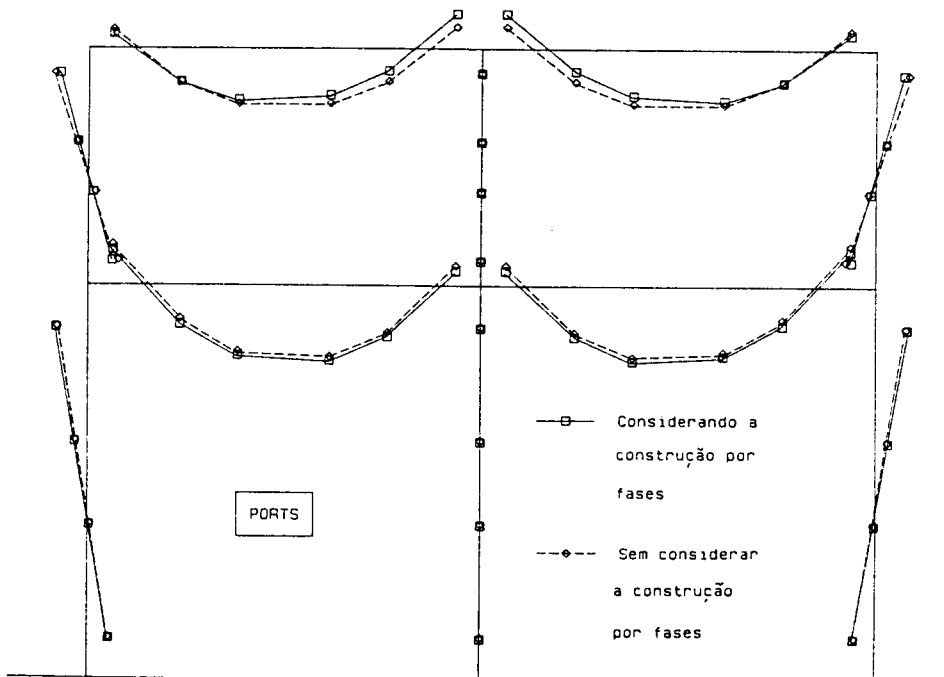


Fig. 5.31 – Diagramas de momentos com e sem construção por fases.

A comparação destes diagramas com os apresentados quando não se considerou a construção por fases, comparação essa salientada na figura 5.31, permite efectivamente concluir a pequena importância da consideração do faseamento da construção, neste exemplo de pequenas dimensões, sobretudo no pórtico encastrado PORTR.

Repare-se no entanto (Fig. 5.31) que a maior alteração ocorrida no diagrama de momentos do pórtico PORTS, verificou-se nas vigas do segundo piso próximo do pilar central, no sentido de aproximar o comportamento ao do pórtico encastrado PORTR; pelo facto da consideração do faseamento da construção ter reduzido a grandeza do assentamento diferencial.

## 5.5 Pórtico de oito pisos

### 5.5.1 Introdução

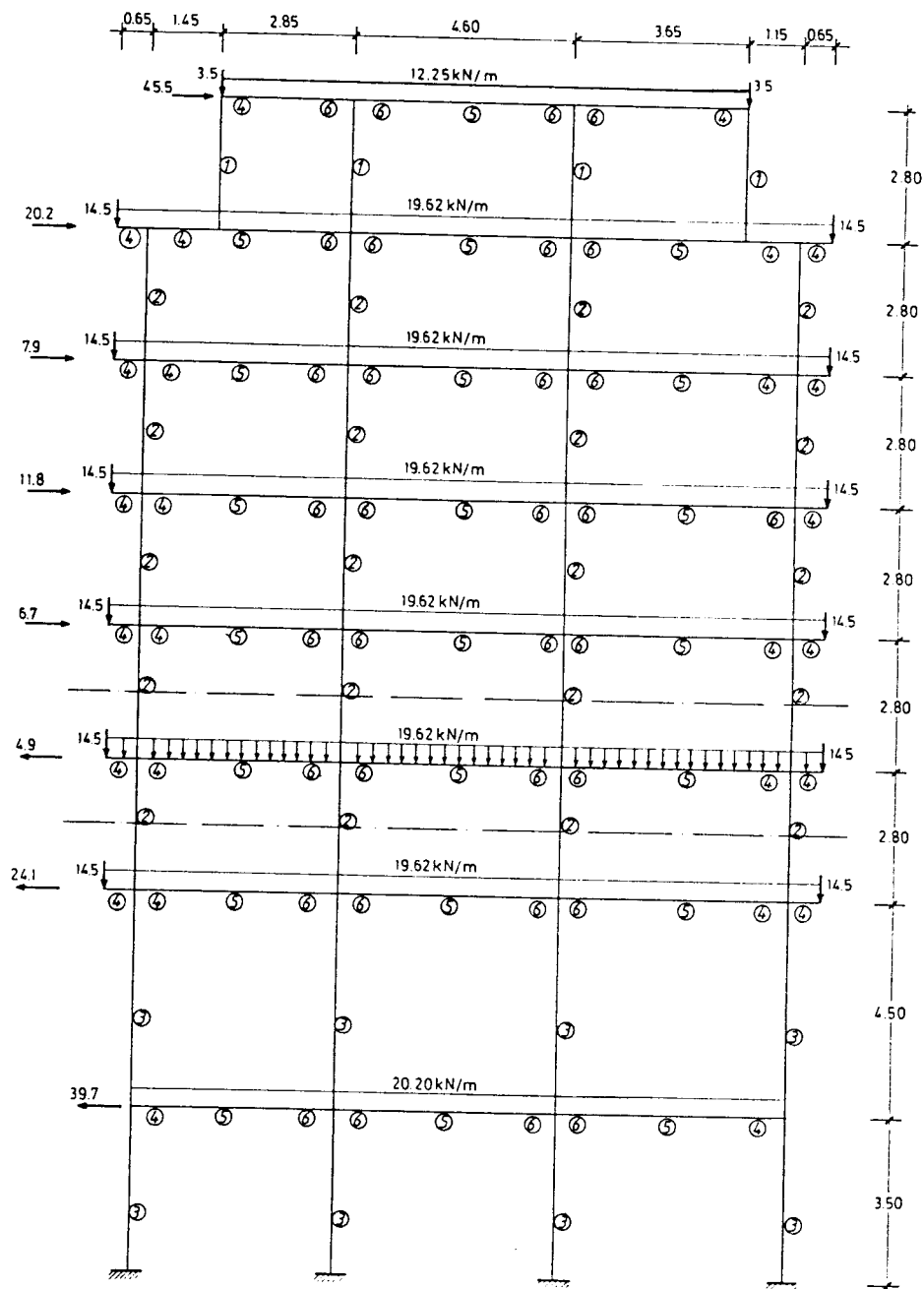
Este exemplo procura abordar a verificação da segurança à rotura de um pórtico de um edifício corrente (oito pisos e três vãos), projectado e construído negligenciando as acções horizontais, nomeadamente a acção sísmica [2].

O edifício construído na zona sísmica C é constituído por uma estrutura porticada de betão, tendo-se com uma análise elástica linear detectado a insuficiência de armadura superior na generalidade das vigas, sobretudo junto aos pilares extremos.

Na figura 5.32 está representada a geometria do pórtico seleccionado para esta análise, indicando-se os valores característicos da solicitação considerada para a acção de base sísmica, obtidos com uma análise elástica baseada no método de Rayleigh.

Da análise elástica referida concluiu-se que as vigas do terceiro piso e os pilares adjacentes se encontram nas condições mais desfavoráveis, face à verificação da segurança. Por este facto e por o pórtico ter dimensões consideráveis efectuou-se uma primeira análise isolando este piso, pela consideração de articulações a meia altura dos pilares.

O Quadro IV, que compara a área de armadura necessária e a efectivamente utilizada, e a figura 5.33, que apresenta a envolvente do diagrama de momentos flectores de cálculo nas vigas do terceiro piso, salientam a insuficiência da armadura neste pórtico.



Material	Base(m)	Altura(m)	Arm. inf.(cm <sup>2</sup> )	Arm. sup.(cm <sup>2</sup> )	d inf.(cm)	d sup.(cm)
1	0.20	0.30	4.0210	4.0210	3.30	3.30
2	0.30	0.30	4.0210	4.0210	3.30	3.30
3	0.30	0.40	4.0210	4.0210	3.30	3.30
4	0.30	0.40	6.2832	3.5814	3.20	3.20
5	0.30	0.40	6.2832	1.5710	3.20	3.00
6	0.30	0.40	6.2832	7.6030	3.20	3.20

Fig. 5.32 – Geometria do pórtico e forças equivalentes à acção sísmica.



Quadro IV

$M_{sd} (kN)$	104	95	47
$A_{s,cal} (cm^2)$	8.80	8.20	3.90
$A_{s,ef} (cm^2)$	3.58	7.60	6.28

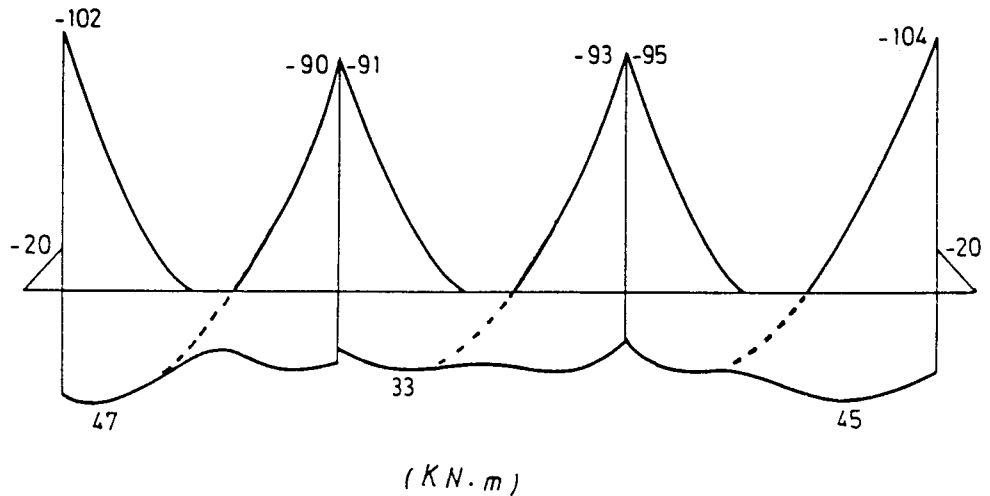
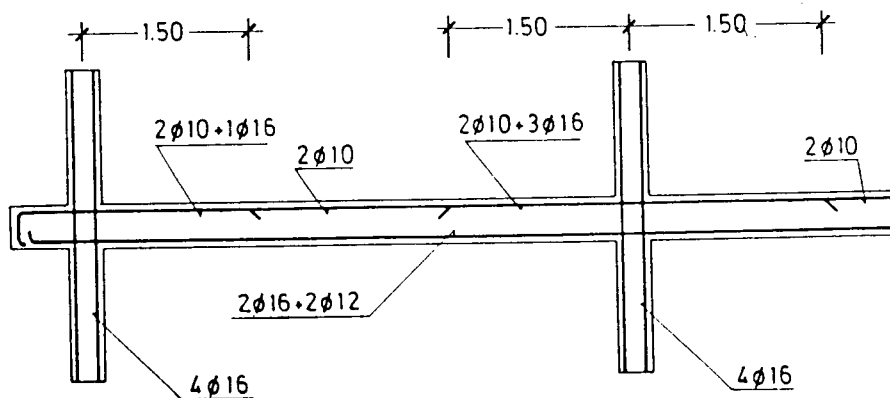
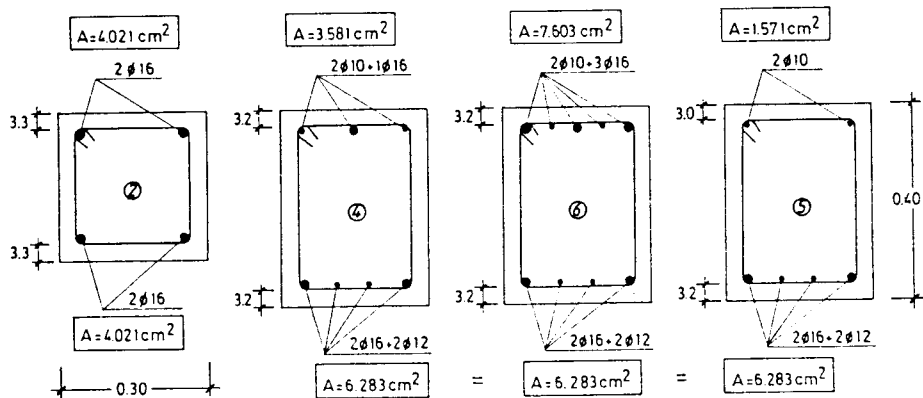
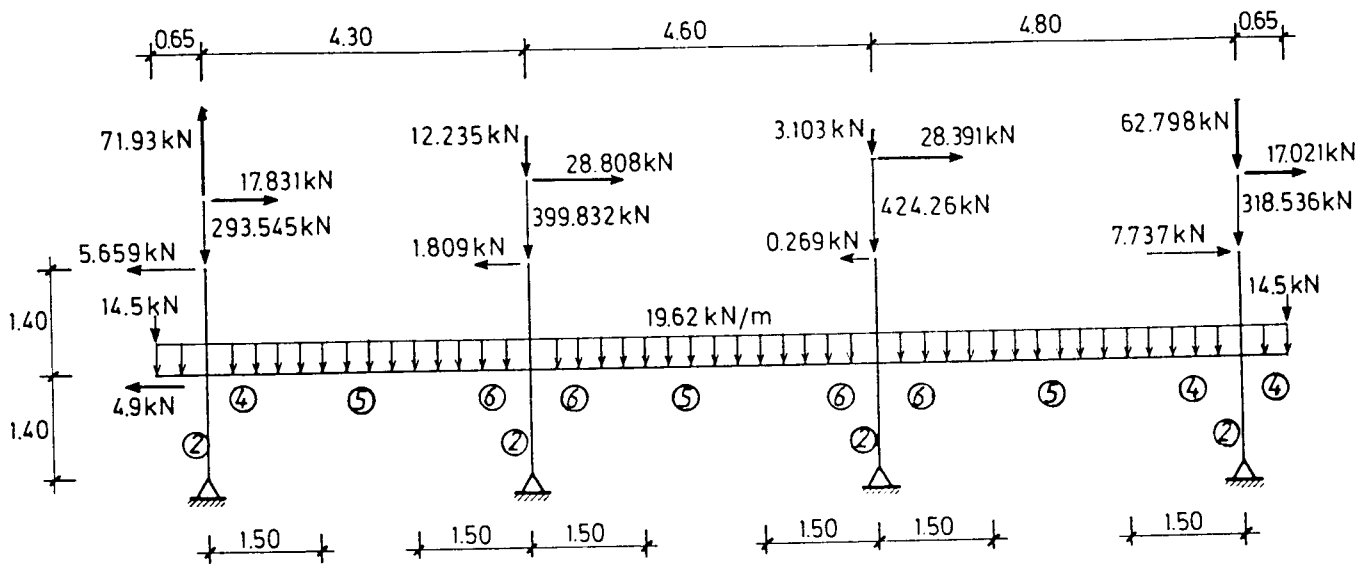


Fig. 5.33 – Envoltória dos momentos nas vigas do terceiro piso (análise elástica).

### 5.5.2 Análise do terceiro piso

O esquema estrutural adoptado nesta análise, a geometria disposição e quantidade de armaduras bem como os valores característicos das acções actuantes (obtidas de uma análise elástica), encontram-se representados na figura 5.34.

Nesta análise foram consideradas duas malhas de elementos finitos distintas. Uma primeira malha de 19 elementos – PORT19 (um elemento por pilar e zona de armadura nas vigas) e uma segunda malha mais refinada de 52 elementos, ambas identificadas na figura 5.35.



MATERIAIS :  
 Betão: B25  
 Aço: A 400

Fig. 5.34 - Esquema estrutural, ações actuantes e disposição de armaduras no terceiro piso.

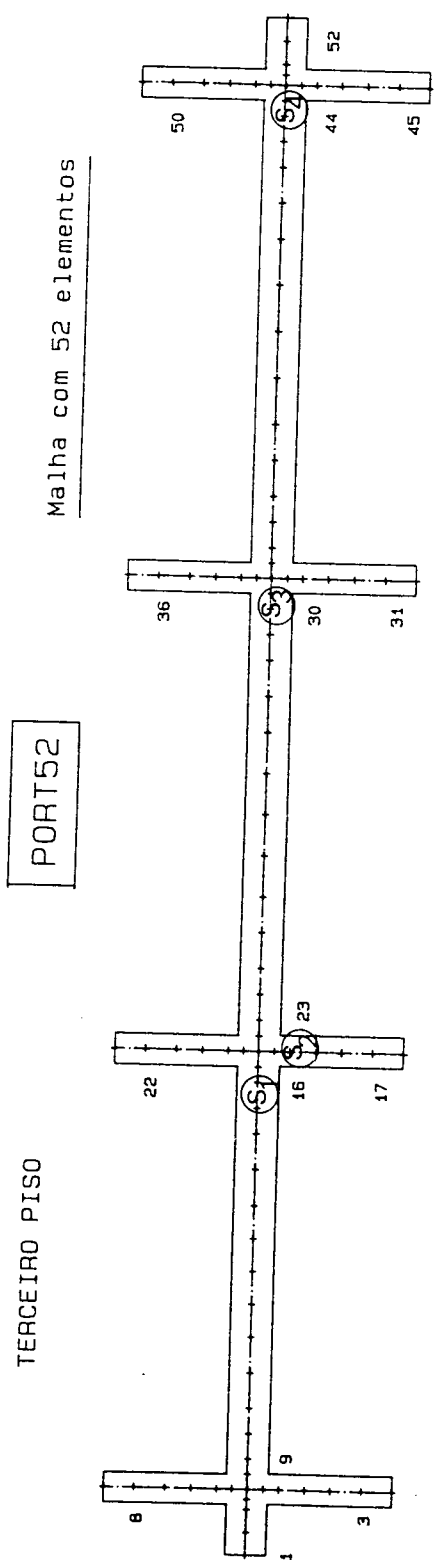
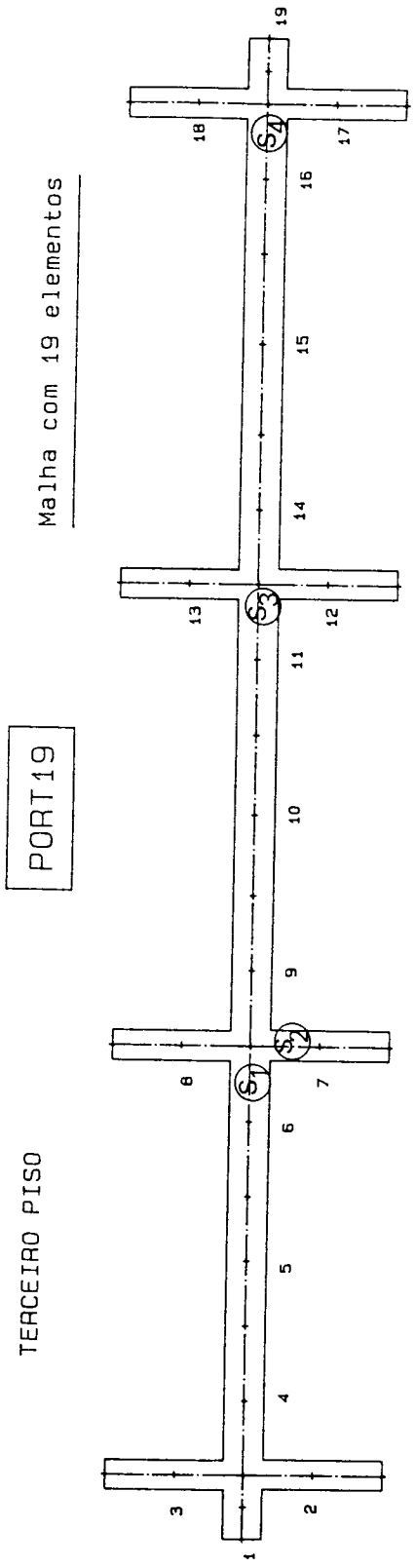


Fig. 5.35 – Malhas utilizadas na discretização do terceiro piso.

As características adoptadas para os materiais (valores característicos) são:

#### Aço (A 400 NR)

$$\begin{aligned} E_s &= 200.00 \times 10^6 \text{ KPa} & \varepsilon_{sy} &= 1.75 \times 10^{-3} \\ E_1 &= 22.22 \times 10^6 \text{ KPa} & \varepsilon_{sI} &= 4.00 \times 10^{-3} \\ E_2 &= 4.54 \times 10^6 \text{ KPa} & \varepsilon_{sII} &= 15.00 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

#### Betão (B25)

$$\begin{aligned} E_c &= 29.00 \times 10^6 \text{ KPa} & \varepsilon_{cp} &= 2.20 \times 10^{-3} \\ f_{ck} &= 19.95 \times 10^3 \text{ KPa} & \varepsilon_{cu} &= 4.30 \times 10^{-3} \\ f_{ctm} &= 2.20 \times 10^3 \text{ KPa} & \nu &= 0.20 \end{aligned}$$

Das duas análises efectuadas foram consideradas duas solicitações aplicadas sequencialmente. A primeira solicitação, aplicada em cinco incrementos, corresponde às cargas permanentes ( $G$ ) e ao valor quase permanente da sobrecarga ( $\psi_2 Q$ ). A segunda solicitação, que corresponde às forças equivalentes à acção sísmica (representadas a traço grosso na figura 5.34), foi aplicada incrementalmente até se atingir o colapso.

A rotura ocorreu por esmagamento do betão na secção  $S_2$  (Fig. 5.35), para um factor de majoração do valor característico da acção sísmica de aproximadamente 2.30 no caso da malha de 19 elementos e de aproximadamente 1.88 no caso da malha mais refinada.

Esta discrepância de resultados justifica-se pelo facto de na malha mais grosseira as secções adoptadas (pontos de Gauss) para a comparação dos esforços actuantes e a correspondente capacidade resistente, encontrarem-se significativamente afastados dos nós, atrasando o colapso, por não representarem os momentos flectores máximos aí actuantes.

A carga de colapso agora referida pode ser aferida através de uma análise plástica do mecanismo evidenciado pela análise efectuada e que se representa na figura 5.36.

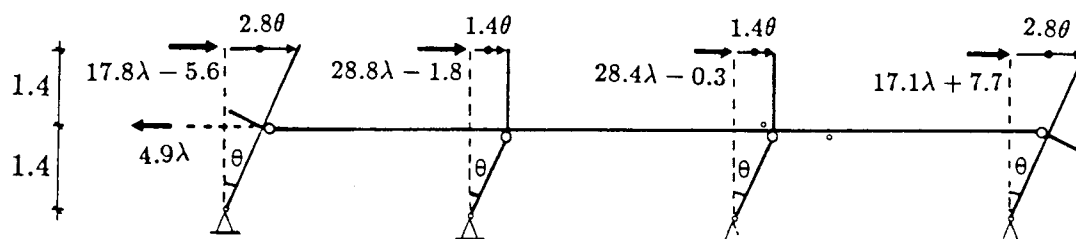


Fig. 5.36 – Mecanismo de rotura mais provável.

Com base nesta figura podemos estabelecer as seguintes expressões dos trabalhos de deformação:

$$w_e = (17.8\lambda - 5.6) \times 2.8\theta + (28.8\lambda - 1.8) \times 1.4\theta + (28.4\lambda - 0.3) \times 1.4\theta + (17.1\lambda + 7.7) \times 2.8\theta - 4.9\lambda \times 1.4\theta = 171\lambda\theta + 2.9\theta$$

$$w_i = 89\theta + 95\theta + 95\theta + 48\theta = 327\theta$$

Igualando estas duas expressões encontrou-se o valor de 1.90 para o parâmetro de carga muito próximo do valor encontrado na análise não linear efectuada com a malha mais refinada.

Nas figuras seguintes está representada a evolução dos diagramas de momentos, das deformadas, da fendilhação do betão, da plastificação da armadura e alguns diagramas de tensões (nas secções  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  da figura 5.35) para as duas análises efectuada.

Será interessante efectuar uma análise comparativa minuciosa dos diagramas de momentos e de plastificação da armadura e naturalmente concluir que nas secções em que a armadura se encontra plastificada, por se estar a esgotar a capacidade resistente, o momento flector mantém-se praticamente constante. A formação de rótulas encontra-se também bem evidenciada na figura 5.40 que representa a deformada da estrutura. Note-se ainda que na malha de apenas 19 elementos, a extrapolação dos deslocamentos a partir de deslocamentos nodais elevados, em elementos de grande comprimento, afecta a forma da deformada.

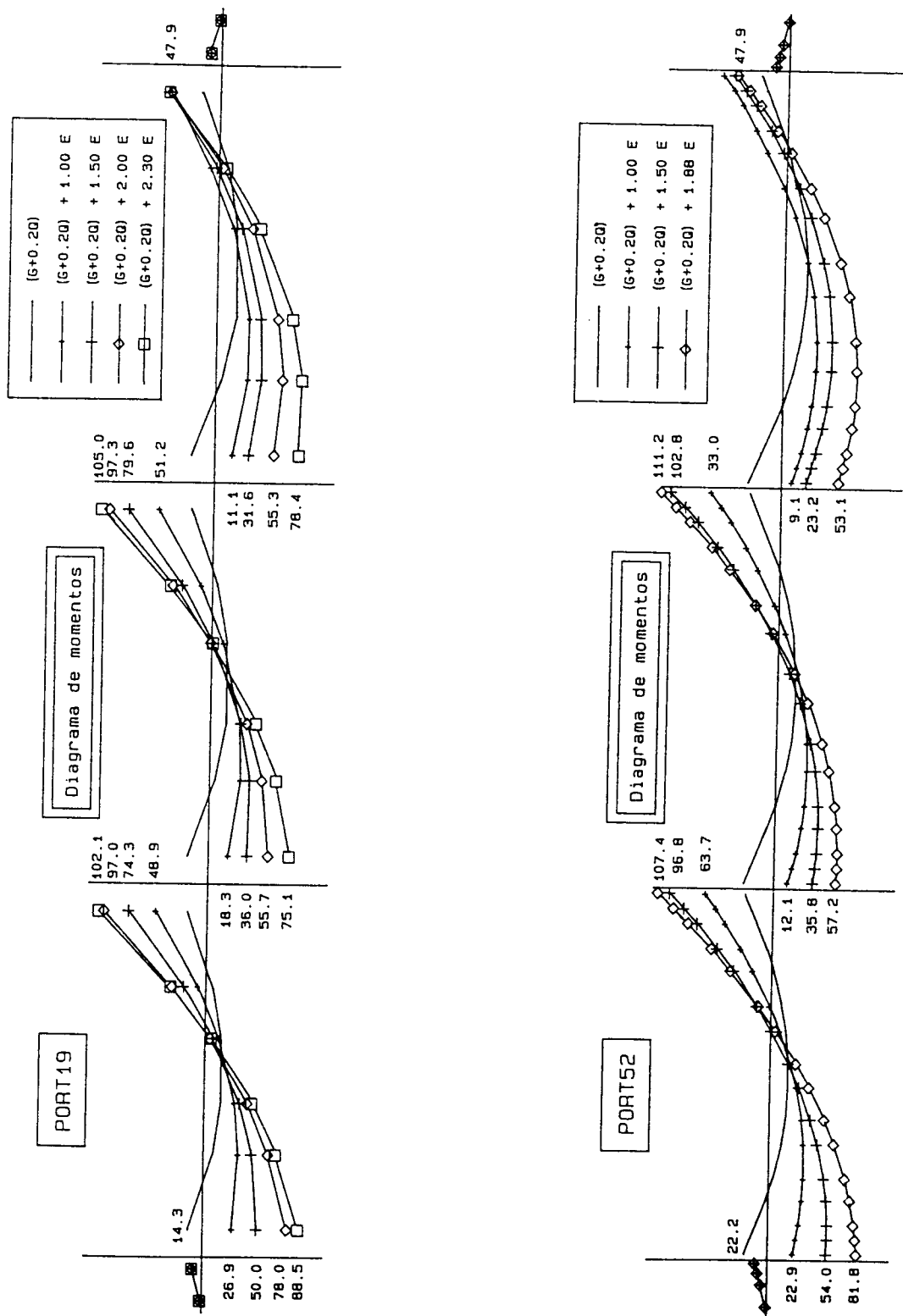


Fig. 5.37 – Evolução do diagrama de momentos nas vigas.

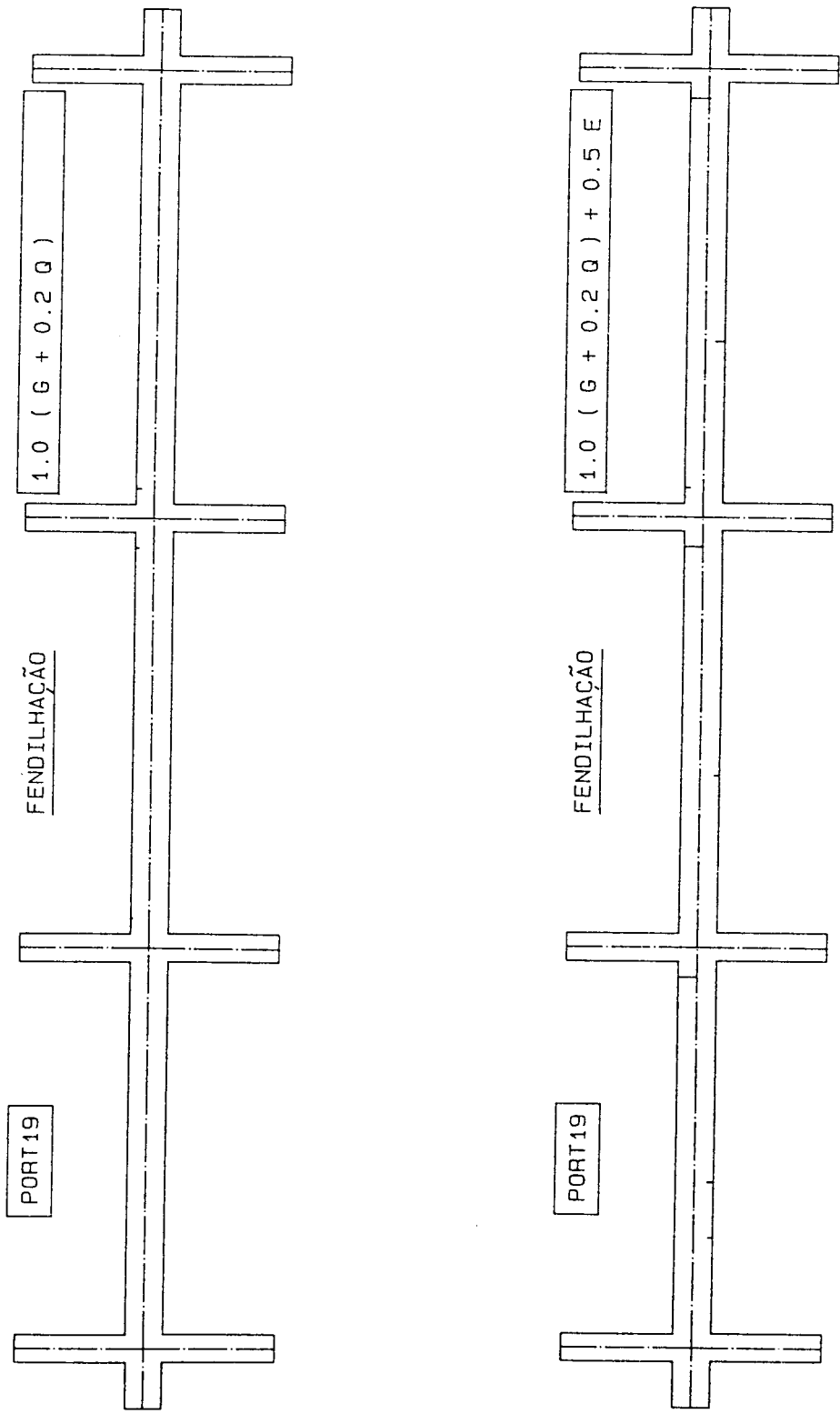


Fig. 5.38.a - Evolução da fendilhação do betão.

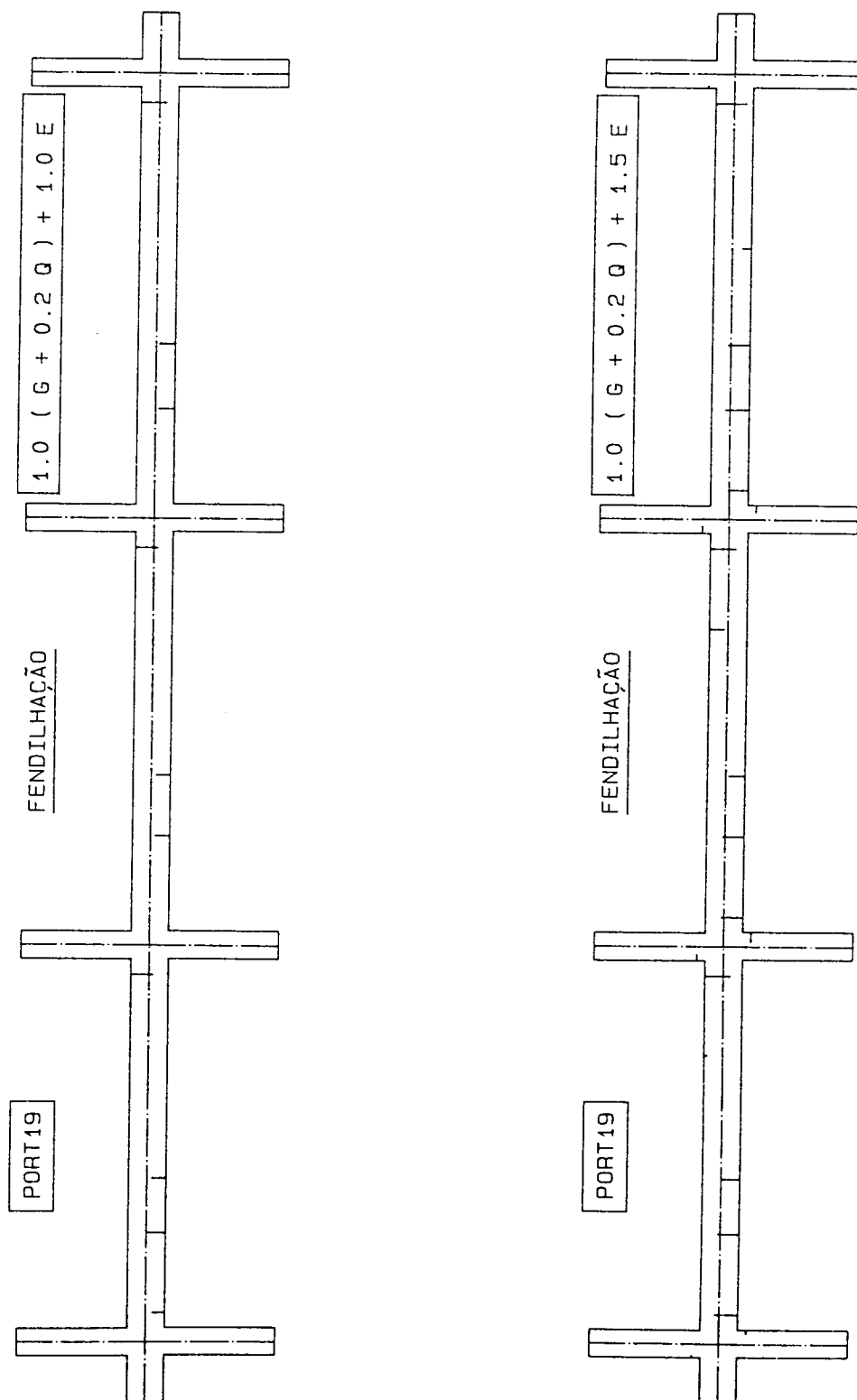


Fig. 5.38.b – Evolução da fendilhação do betão.



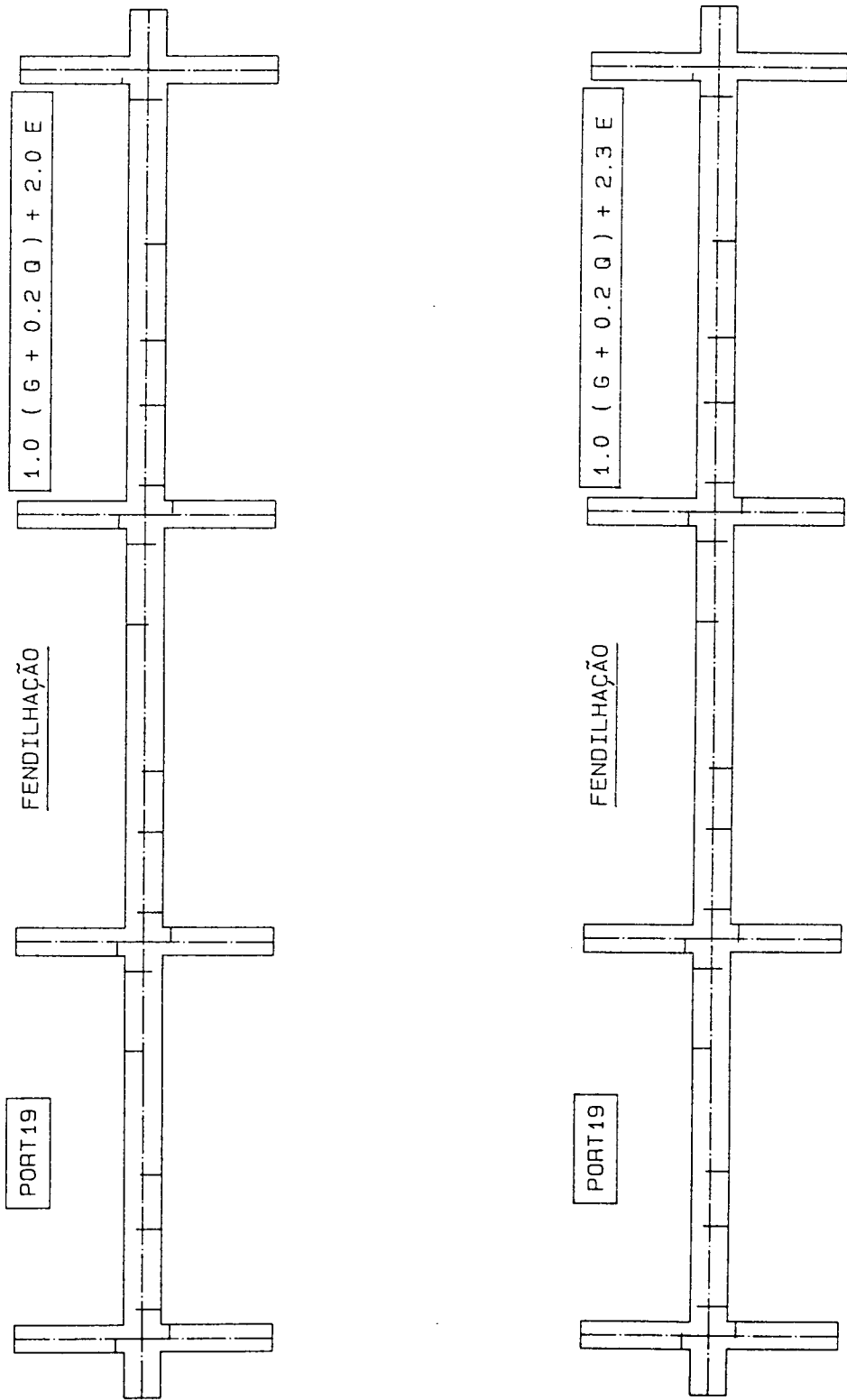


Fig. 5.38.c – Evolução da fendilhação do betão.

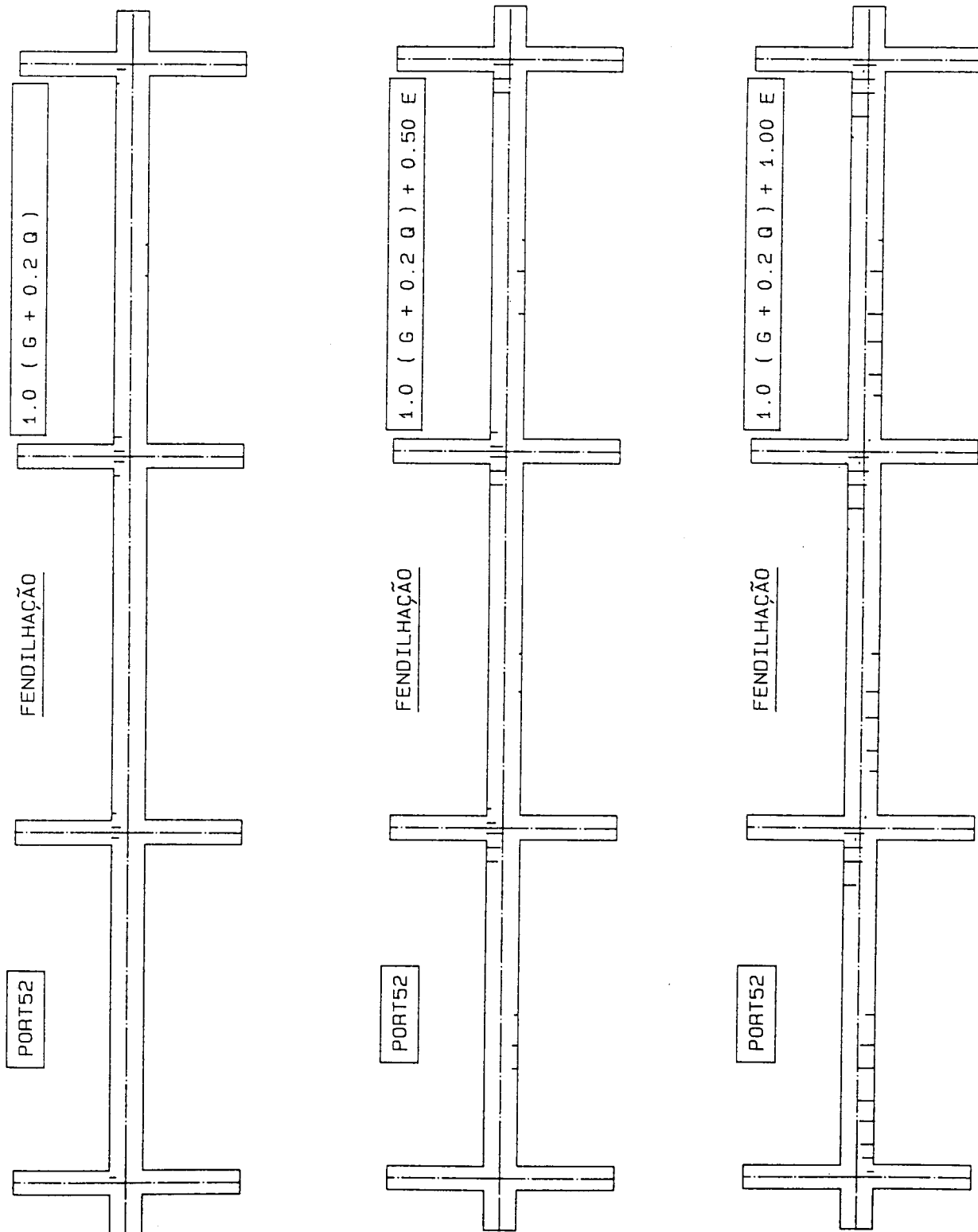


Fig. 5.38.d – Evolução da fendilhação do betão.

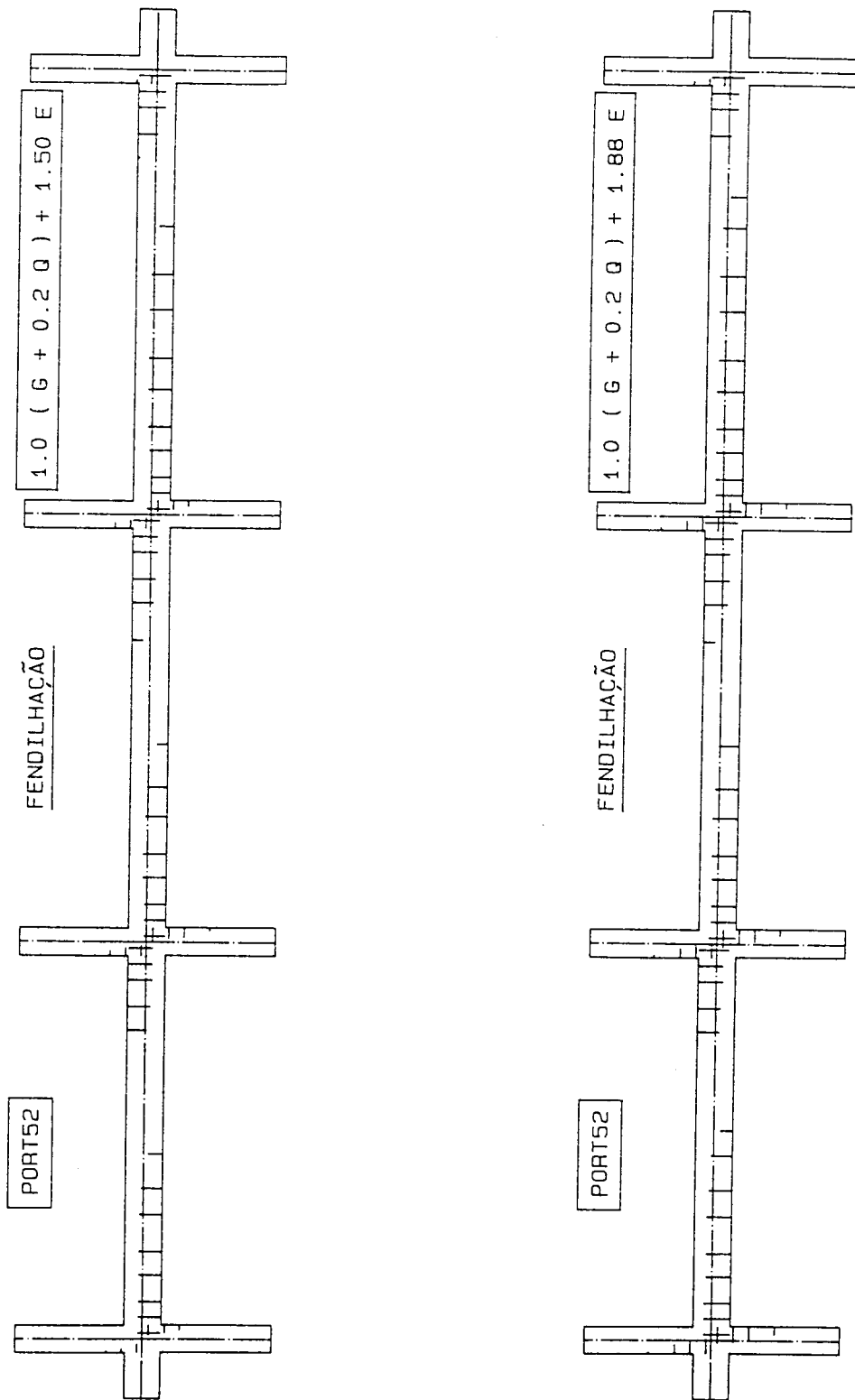


Fig. 5.38.e - Evolução da fendilhação do betão.

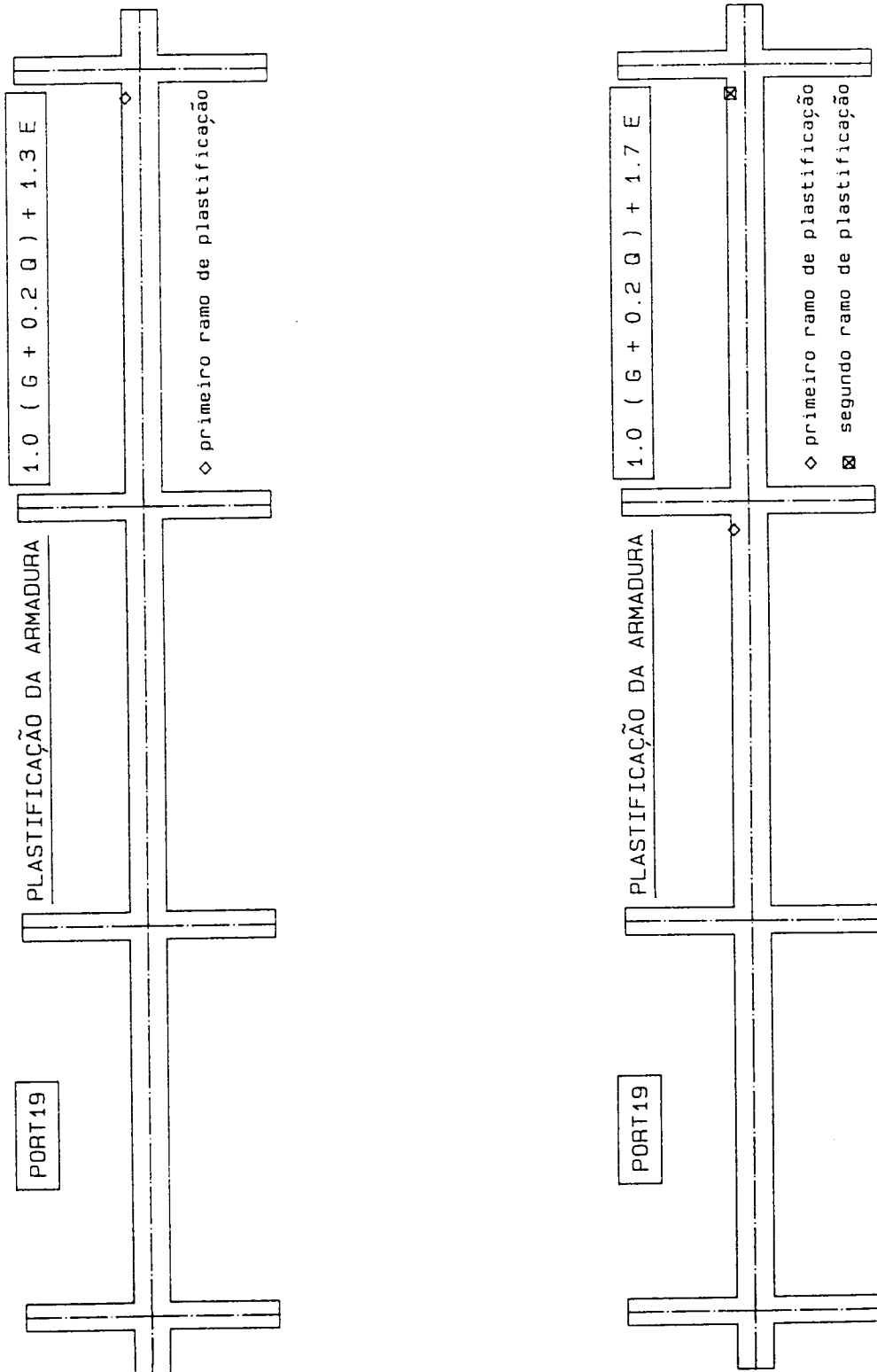


Fig. 5.39.a - Evolução da plastificação das armaduras.

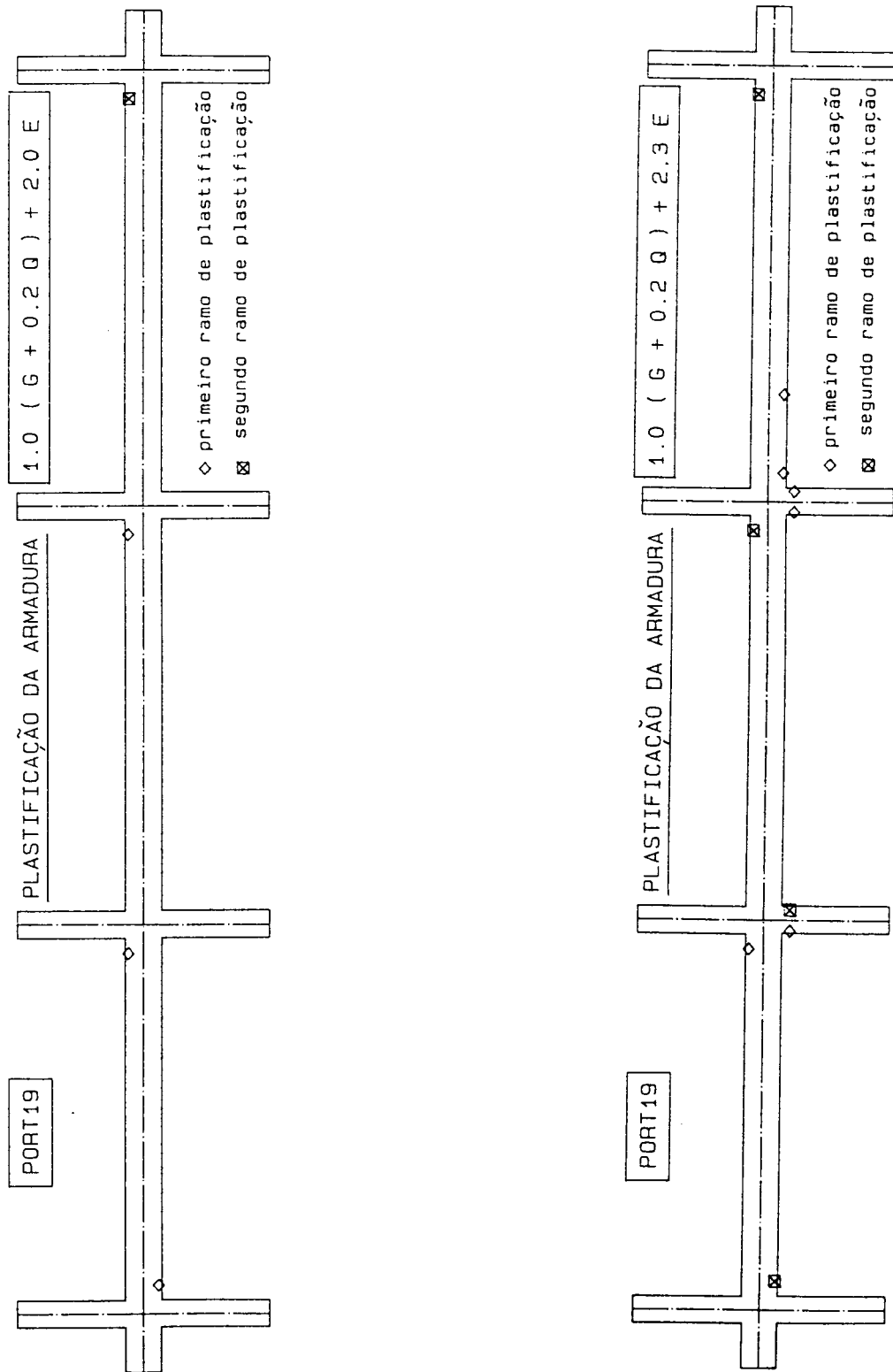


Fig. 5.39.b – Evolução da plastificação das armaduras.

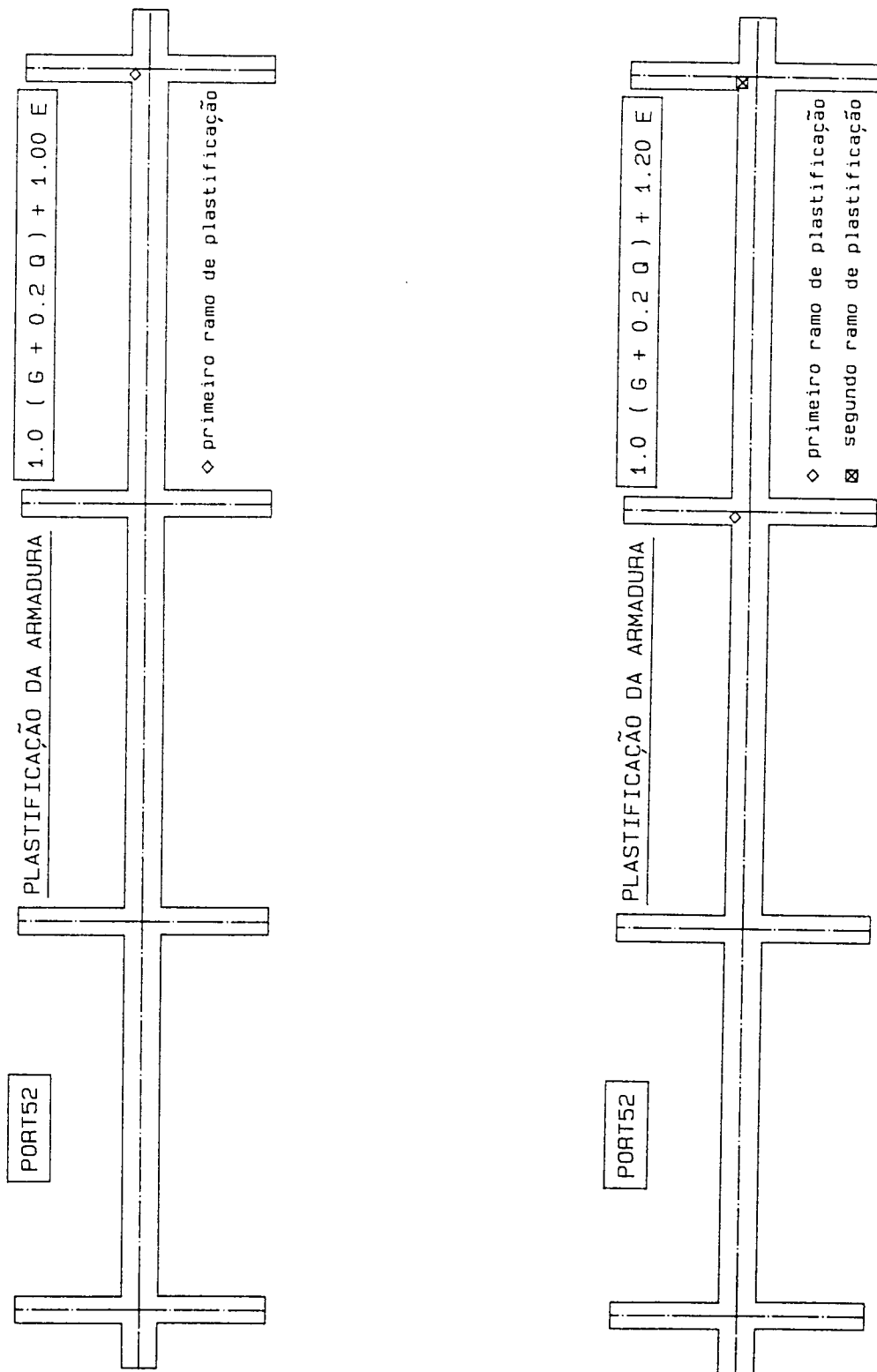


Fig. 5.39.c - Evolução da plastificação das armaduras.

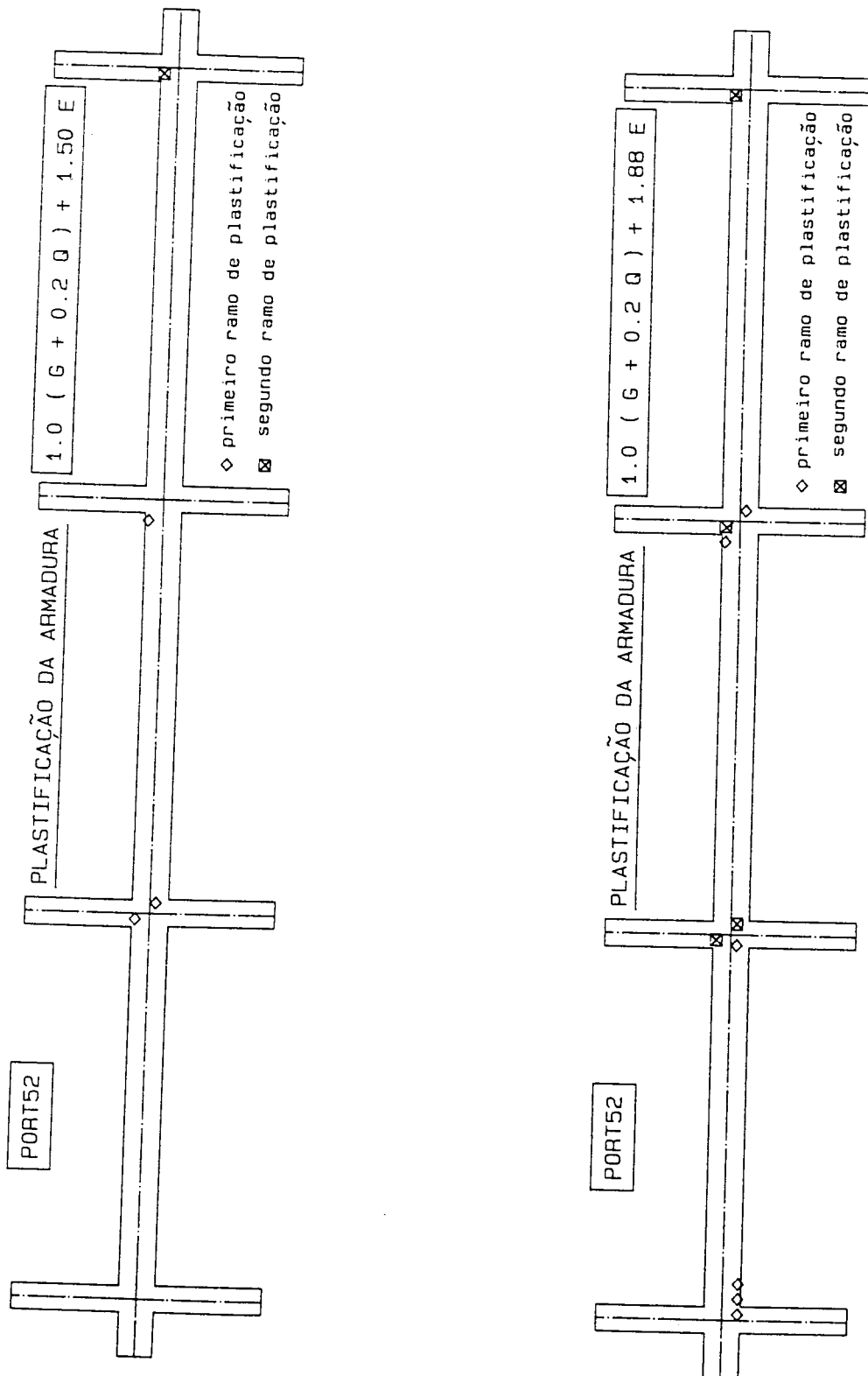


Fig. 5.39.d – Evolução da plastificação das armaduras.

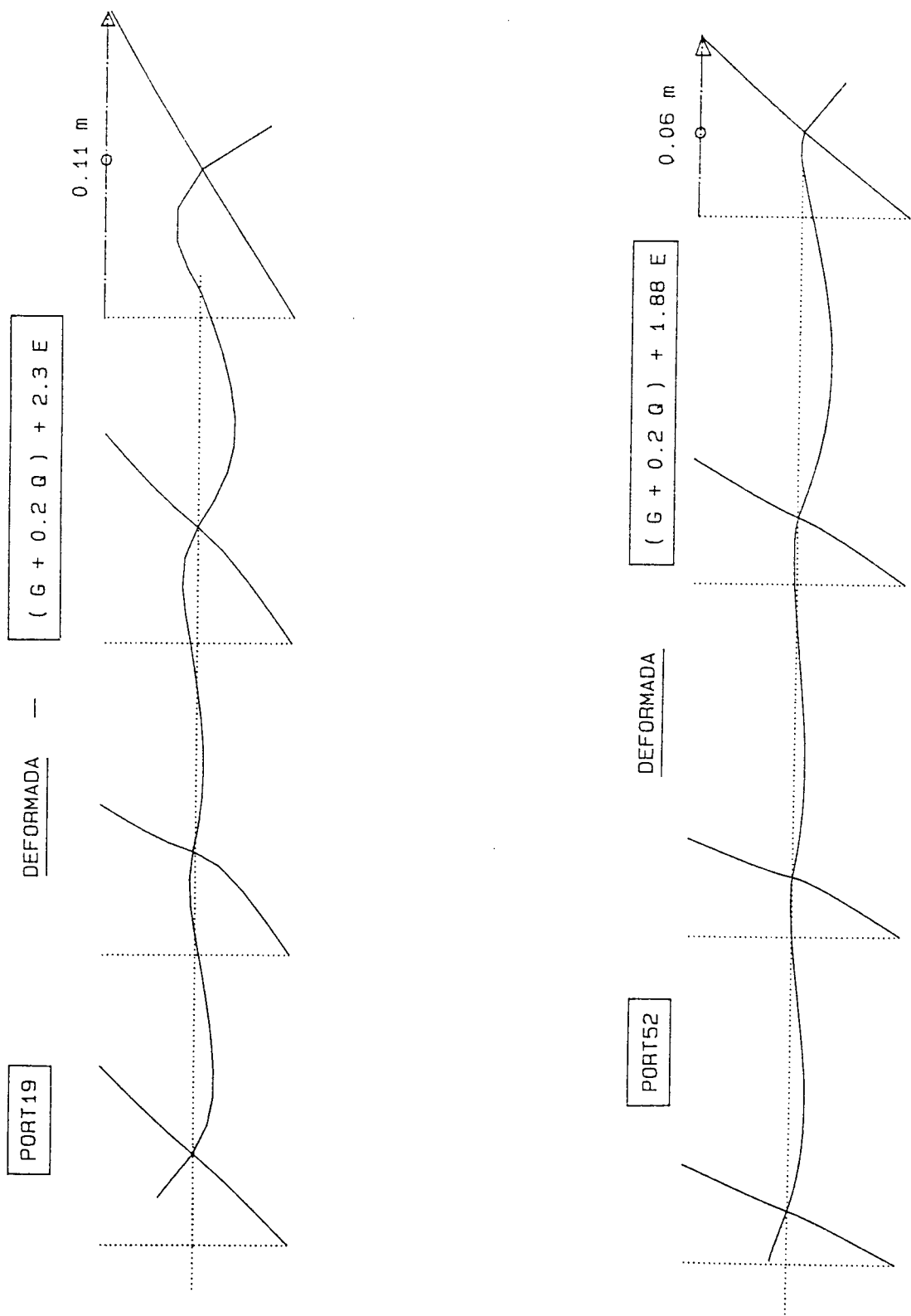


Fig. 5.40 - Deformada junto ao colapso.



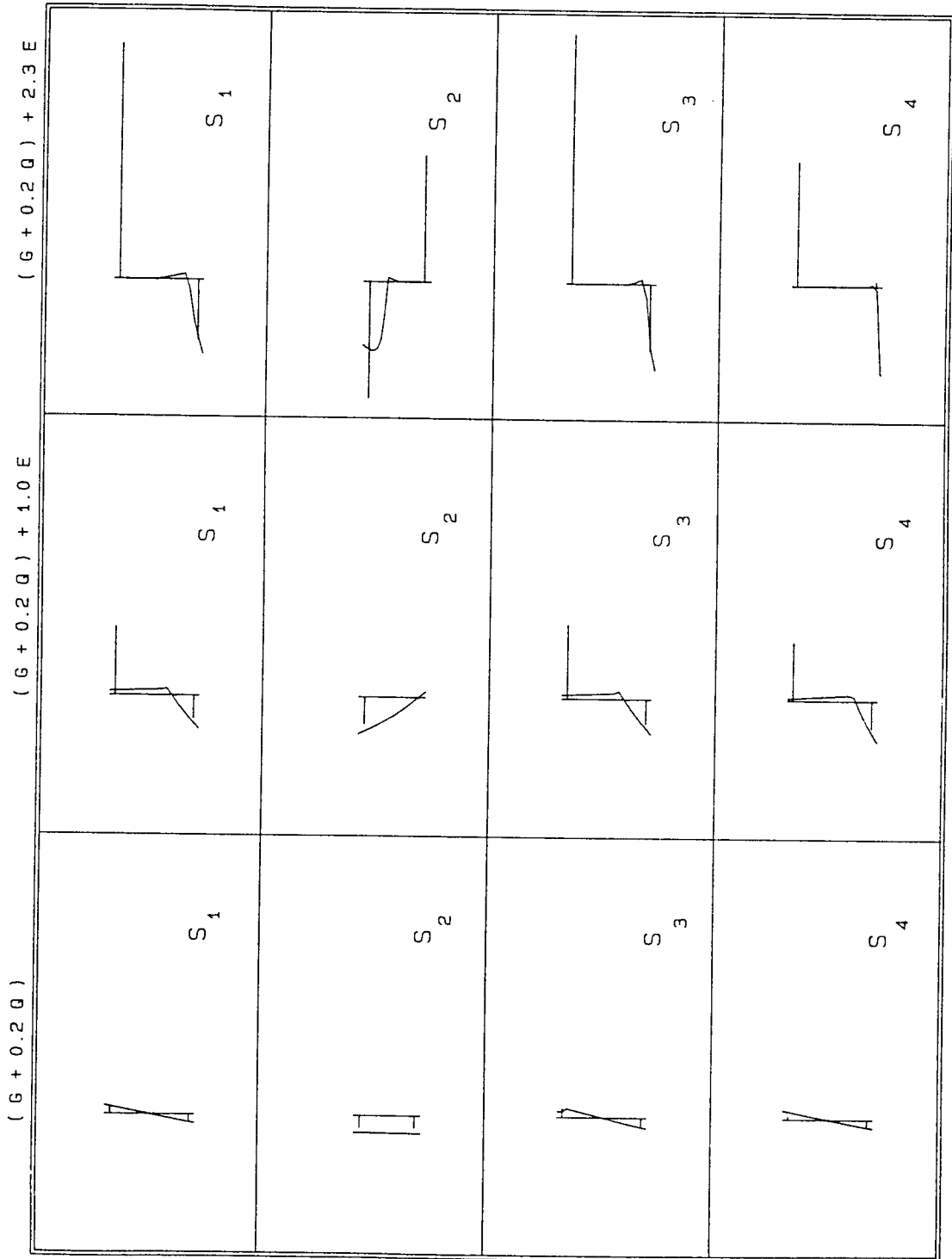


Fig. 5.41.a - Evolução do estado de tensão.

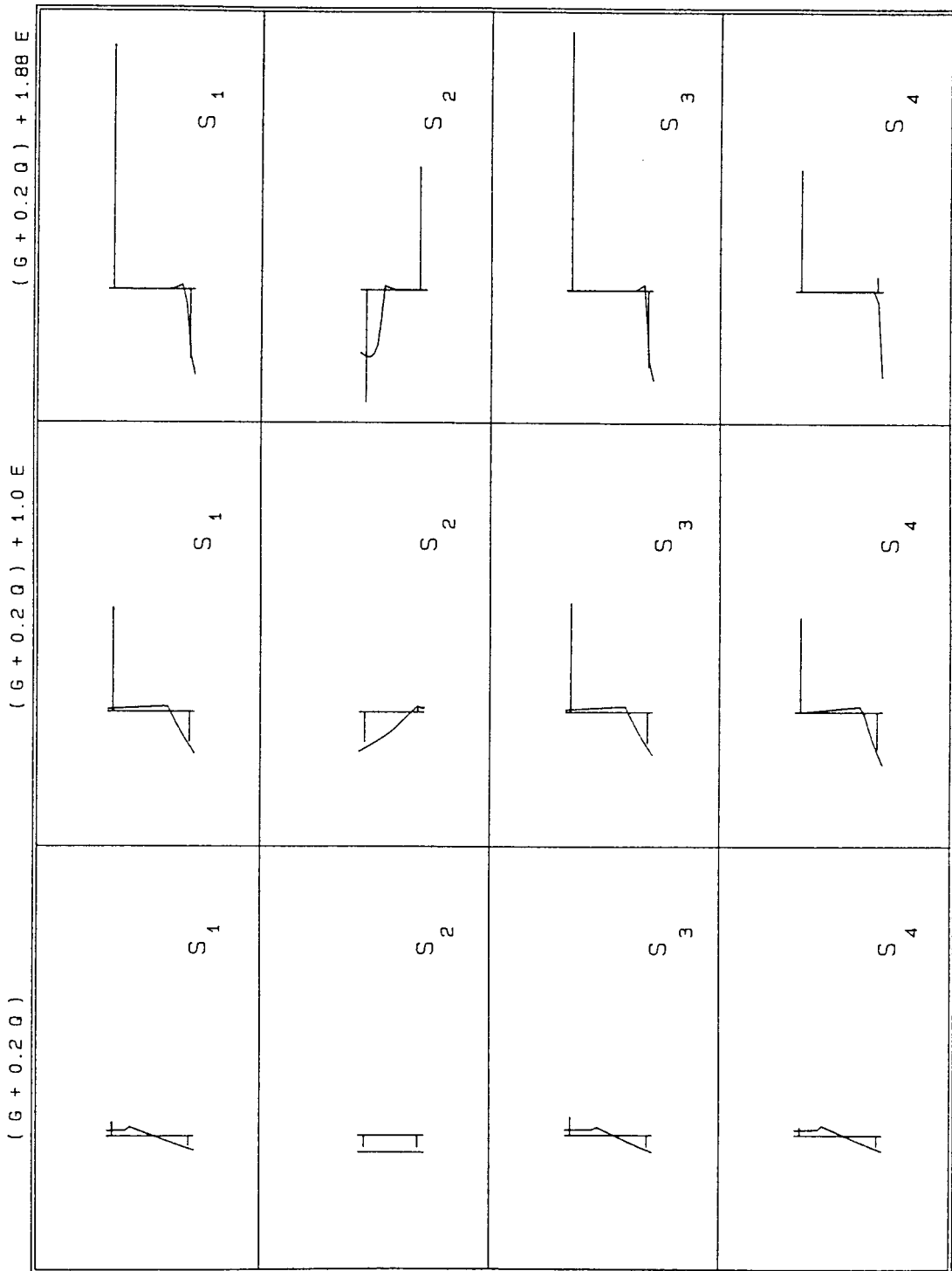


Fig. 5.41.b - Evolução do estado de tensão.

### 5.5.3 Análise do pórtico completo

Efectuadas estas duas análises do terceiro piso, seguiu-se o estudo do pórtico completo, utilizando-se uma discretização semelhante à da estrutura PORT19 descrita e considerando apenas a não linearidade material ou as duas não linearidades em simultâneo.

Ao considerar-se a não linearidade material a carga de rotura encontrada foi de aproximadamente  $G + 0,2 Q) + 2,60 E$ . Admitindo simultaneamente um comportamento não linear geométrico, detectou-se uma resposta mais flexível da estrutura e a antecipação da rotura  $(G + 0,2 Q) + 2,15 E$ , (ver Fig. 5.42)

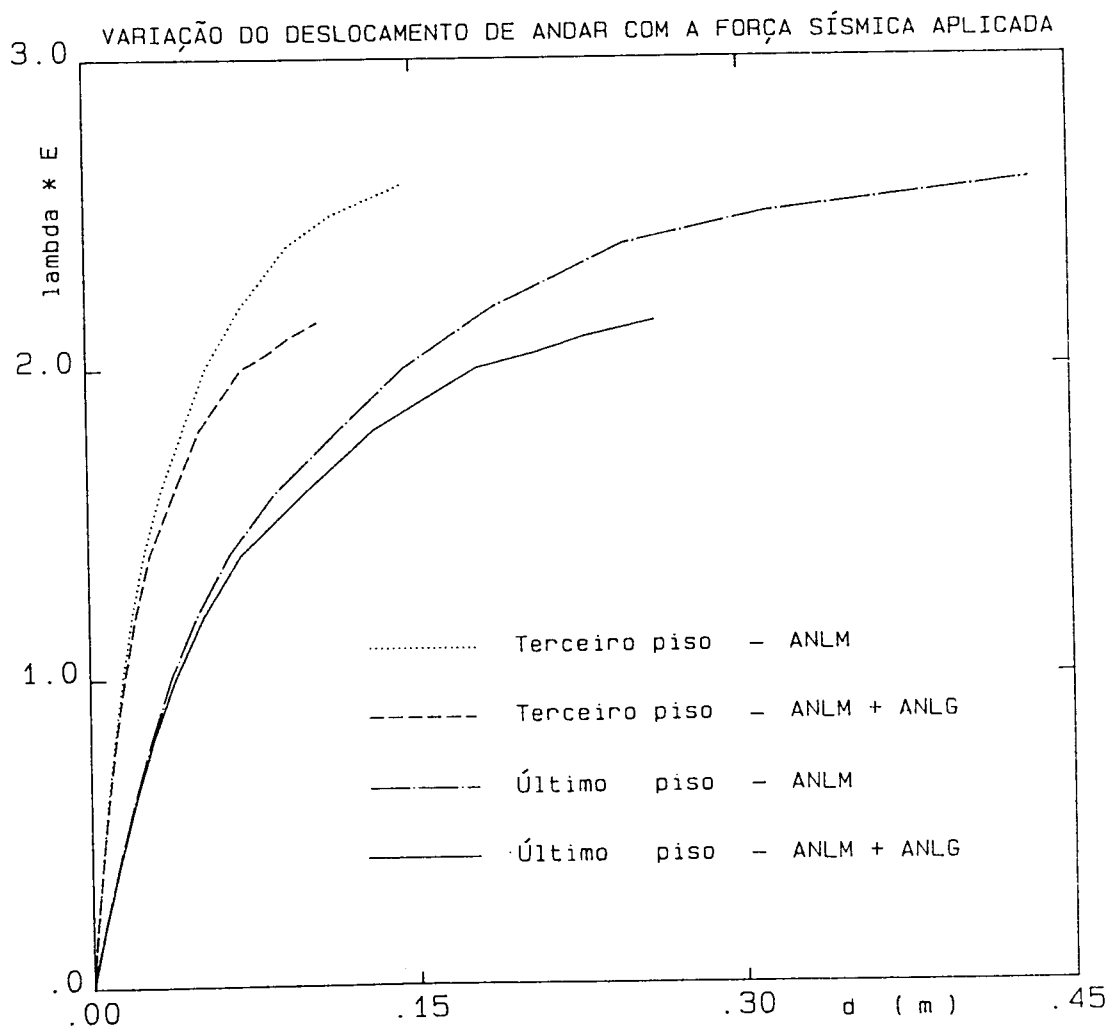


Fig. 5.42 - Variação do deslocamento de andar com a força sísmica aplicada.

Nas figuras seguintes apresenta-se os resultados essenciais destas análises, podendo desde já salientar a significativa semelhança dos resultados do terceiro piso agora obtidos e os encontrados na análise, já descrita, desse piso isolado (PORT19).

Como se pode observar na figura 5.42 a resposta da estrutura é muito semelhante nos dois tipos de análises realizadas para valores moderados da acção sísmica aplicada (até aproximadamente  $1,00 E$ ).

Com efeito nas figuras 5.43 a 5.48 é notória a semelhança dos diagramas de momentos e do estado de fendilhação no betão até esse valor de acção sísmica.

É de facto significativa a semelhança de resultados agora obtidos, sobretudo no caso em que se considerou a não linearidade geométrica, e os resultados encontrados na análise do terceiro piso isolado; que se pode constatar pela comparação dos diagramas de momentos e do estado de fendilhação no betão, respectivos.

Nas figuras 5.49 a 5.55 representa-se a evolução do diagrama de momentos, da plastificação da armadura e da fendilhação do betão até à rotura, quando se admite apenas o comportamento não linear material (*ANLM*).

As figuras 5.56 a 5.63 representam a correspondente evolução até à rotura do diagrama de momentos, plastificação da armadura e fendilhação do betão ao admitir-se o comportamento não linear material e geométrico (*ANLM + ANLG*).

O diagrama de momentos próximo do colapso agora obtido, bem como o correspondente estado de plastificação na armadura e fendilhação no betão, são, neste caso, muito semelhantes aos encontrados na análise do terceiro piso isolado com idêntica discretização (PORT19).

As figuras 5.64 e 5.65 representam ainda a evolução da deformada do pórtico nos dois tipos de análise efectuados.

A figura 5.66 representa, por fim, a evolução do estado de tensão no betão e na armadura, no ponto de Gauss mais próximo da extremidade direita de cada piso, apenas para o segundo tipo de análise (*ANLM + ANLG*) pelo facto de, a esta escala, os dois desenhos serem bastante semelhantes.

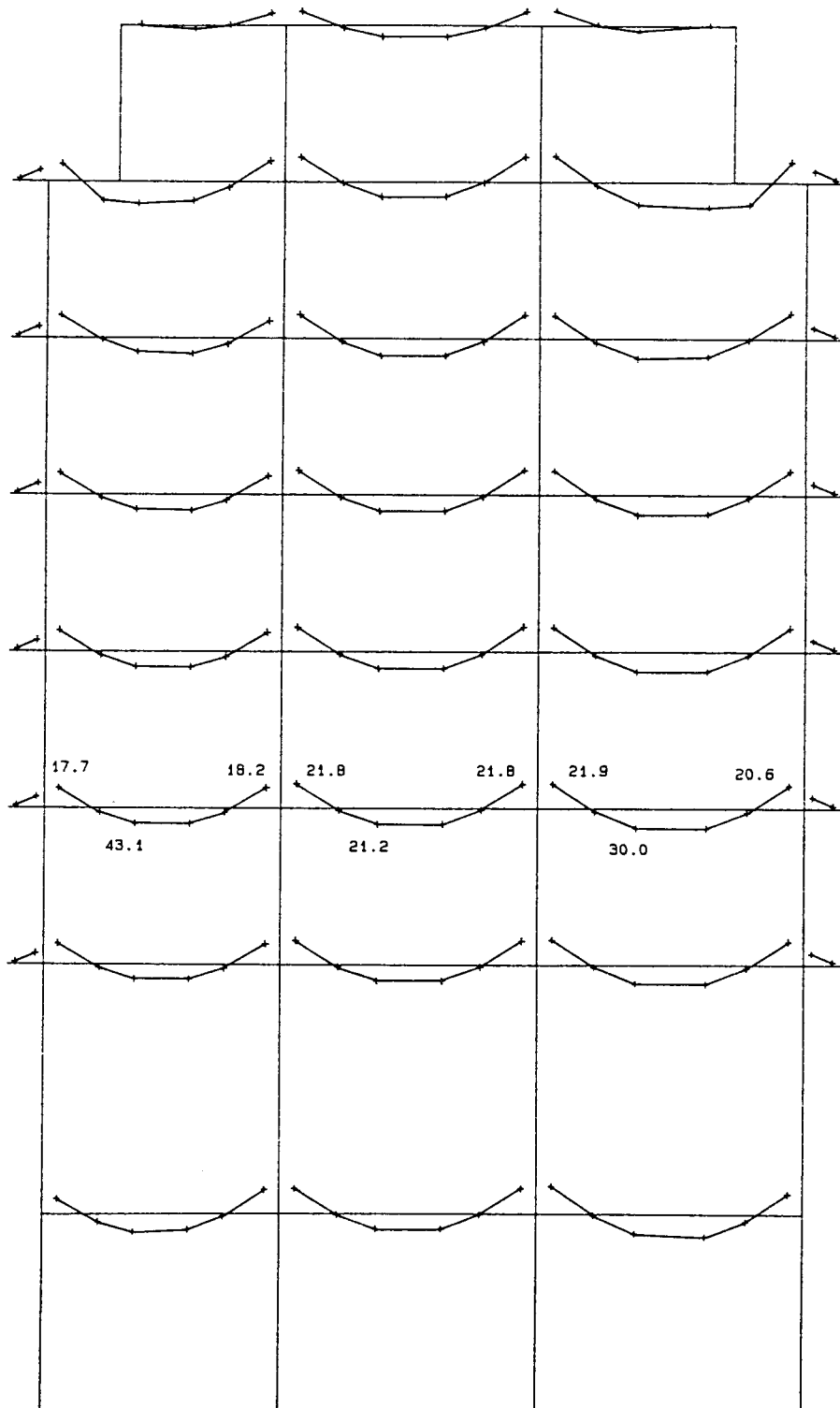


Fig. 5.43 - Diagrama de momentos - ( $G + 0.2 Q$ ) - ANLM ou ANLM e ANLG.

FENDILHAÇÃO DO BETÃO  
( G + 0.2 Q )

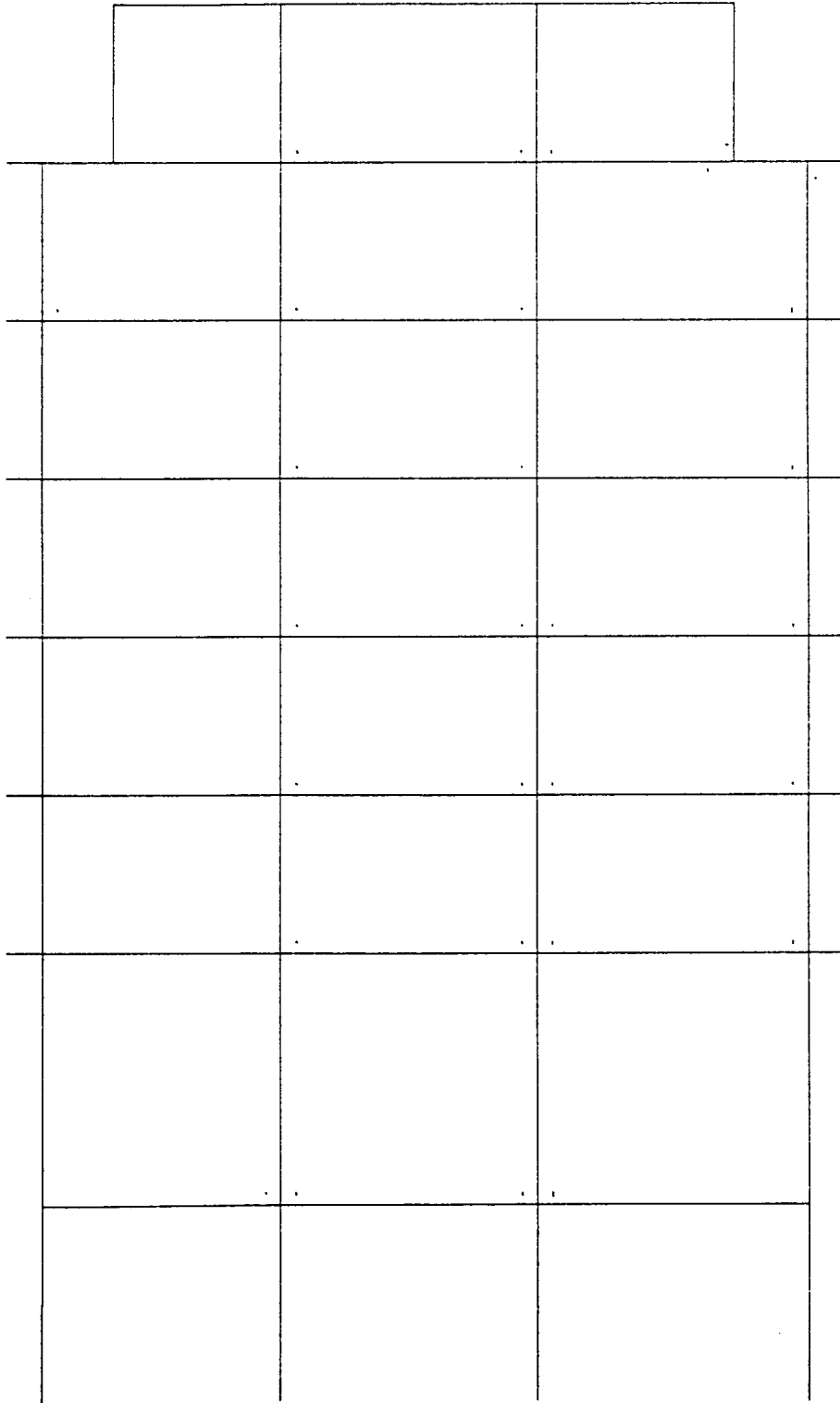


Fig. 5.44 – Fendilhação no betão - (  $G + 0.2 Q$  ) - ANLM ou ANLM e ANLG.

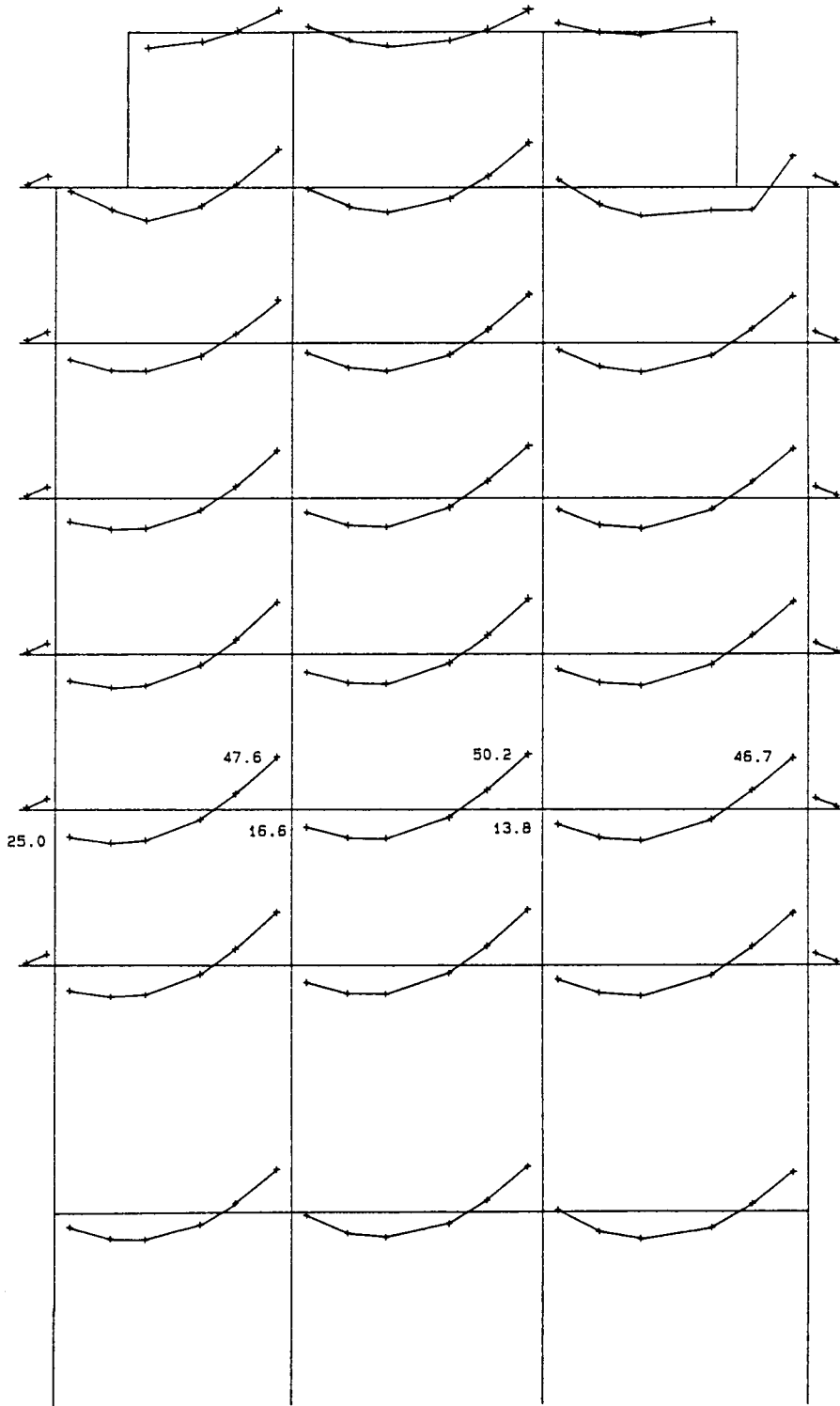


Fig. 5.45 - Diagrama de momentos -  $((G + 0.2 Q) + 1.0 E)$  - ANLM.

ANLM + ANLG

DIAGRAMA DE MOMENTOS ( G + 0.2 Q ) + 1.00 E

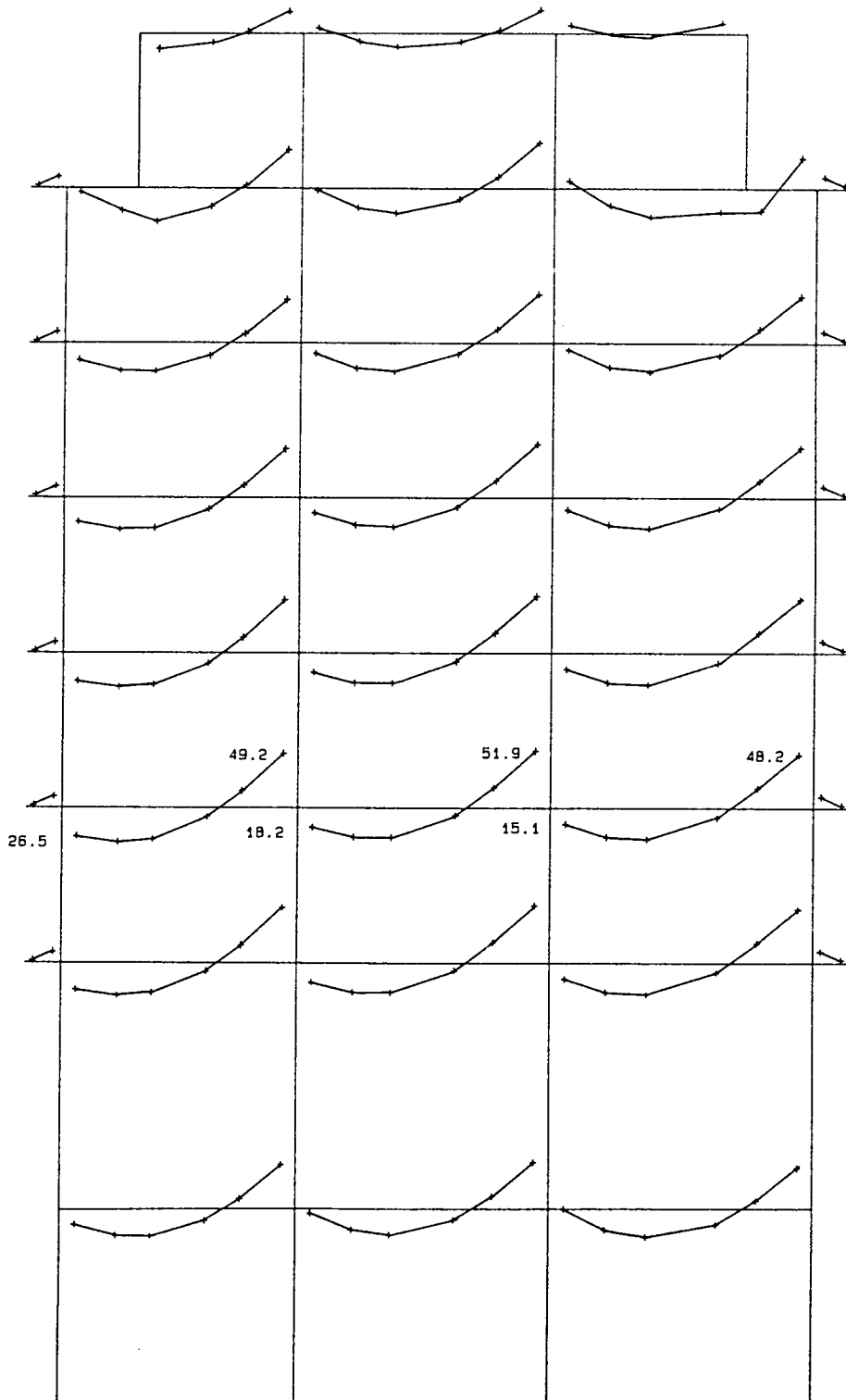


Fig. 5.46 - Diagrama de momentos -  $((G + 0.2Q) + 1.0E)$  - ANLM + ANLG.



FENDILHAÇÃO DO BETÃO

ANLM

( G + 0.2 Q ) + 1.00 E

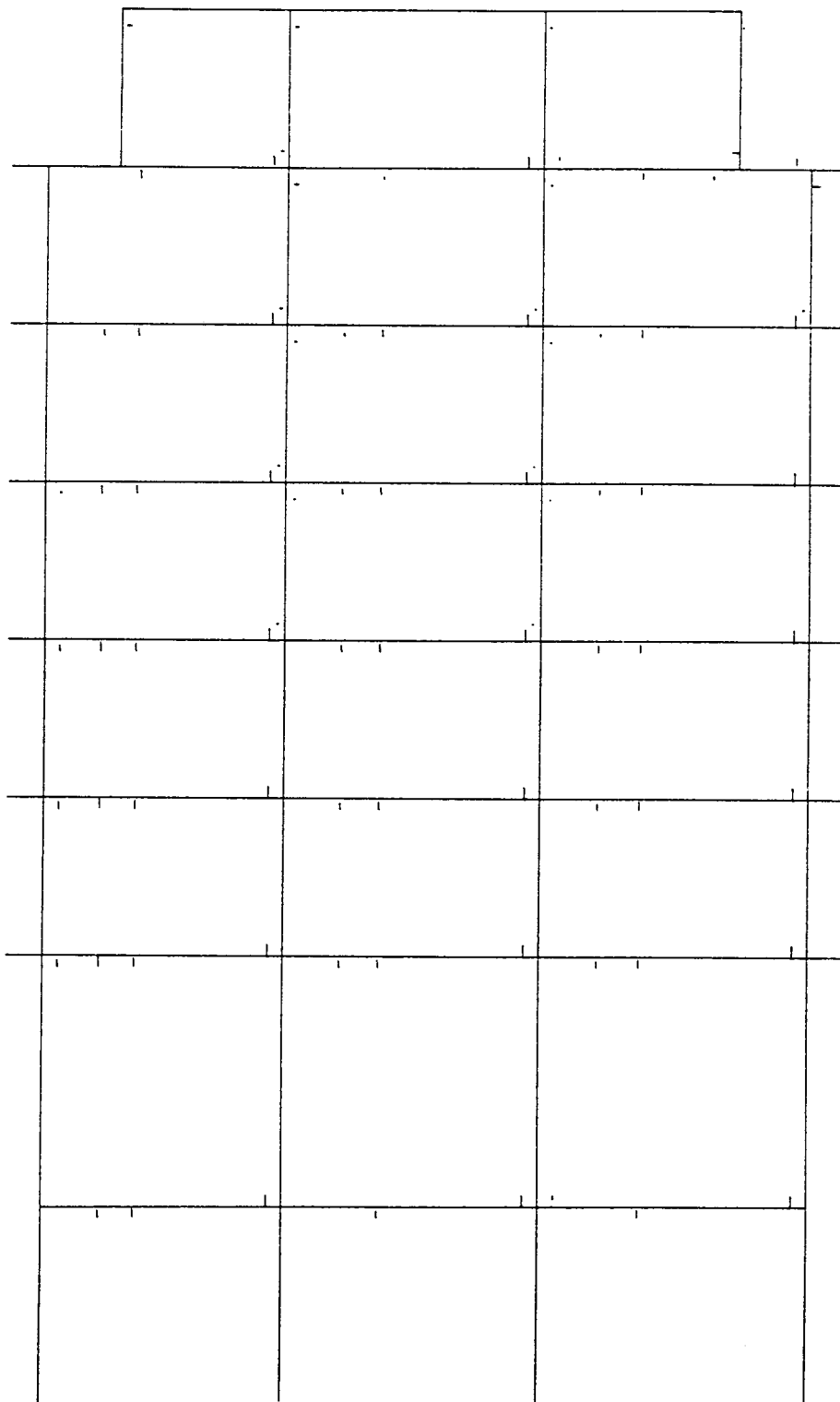


Fig. 5.47 – Fendilhação no betão -  $((G + 0.2Q) + 1.0E)$  - ANLM.

FENDILHAÇÃO DO BETÃO  
ANLM + ANLG ( G + 0.2 Q ) + 1.00 E

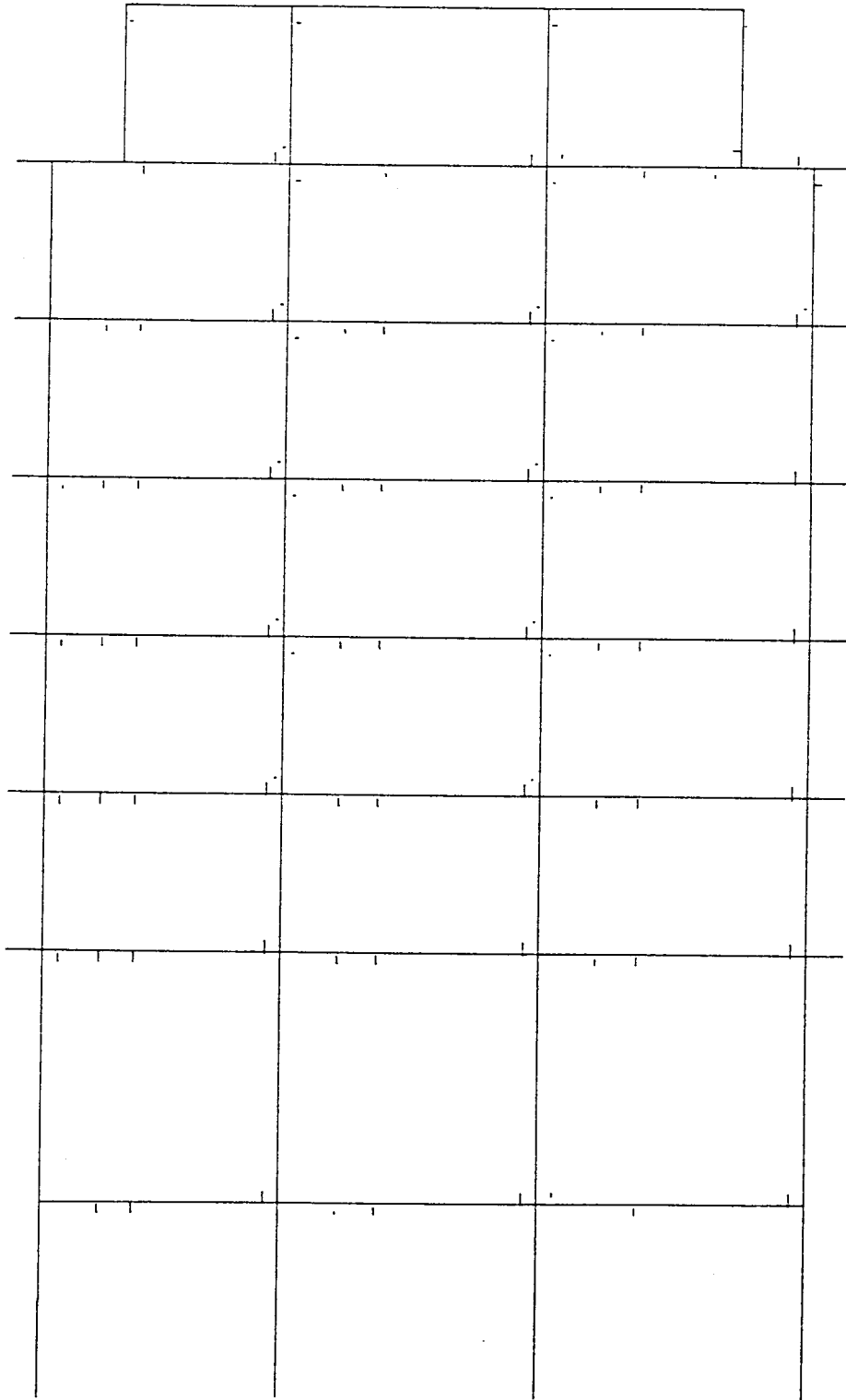


Fig. 5.48 – Fendilhação no betão -  $((G + 0.2Q) + 1.0E)$  - ANLM + ANLG.

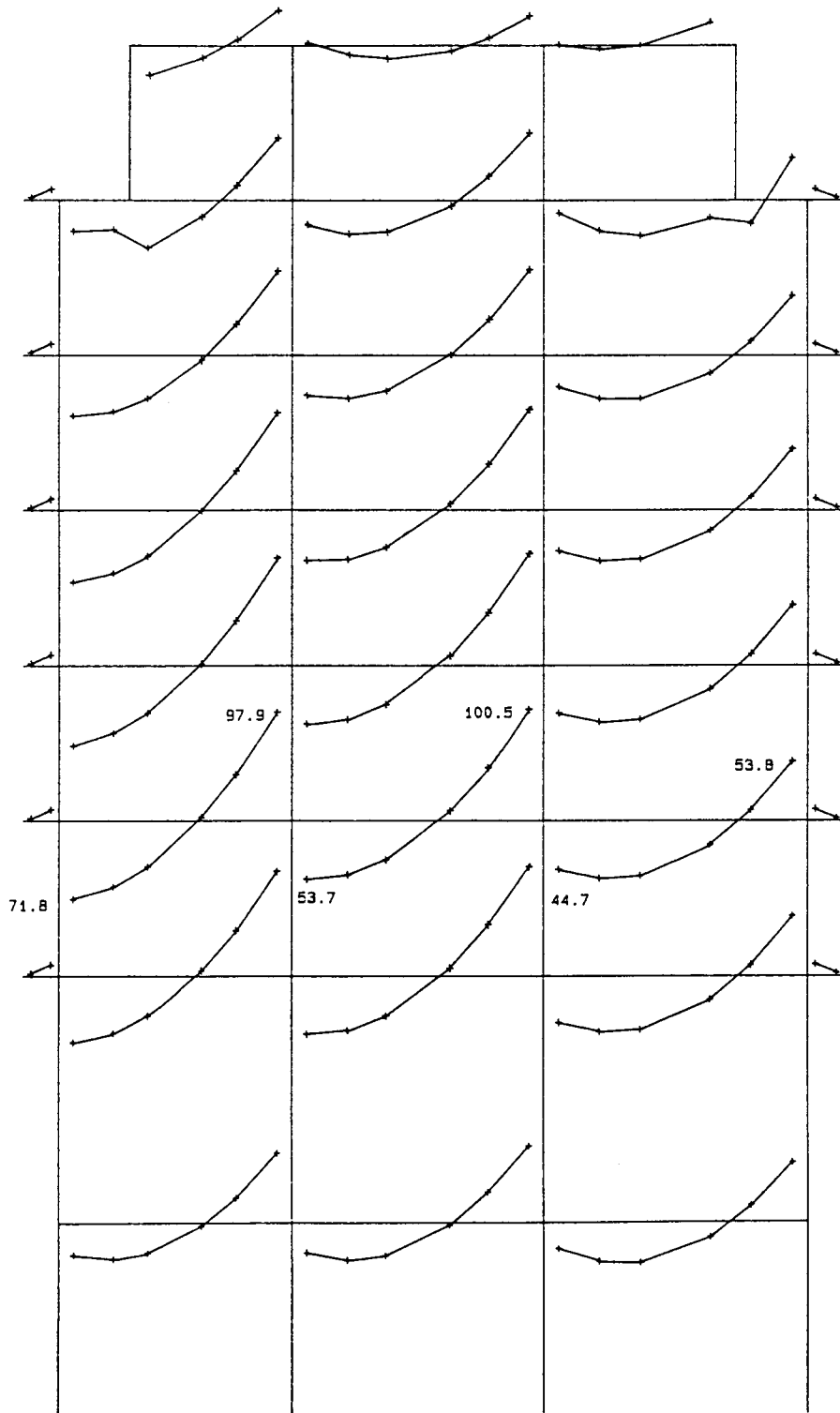


Fig. 5.49 - Diagrama de momentos - ((G + 0.2 Q) + 2.0 E).

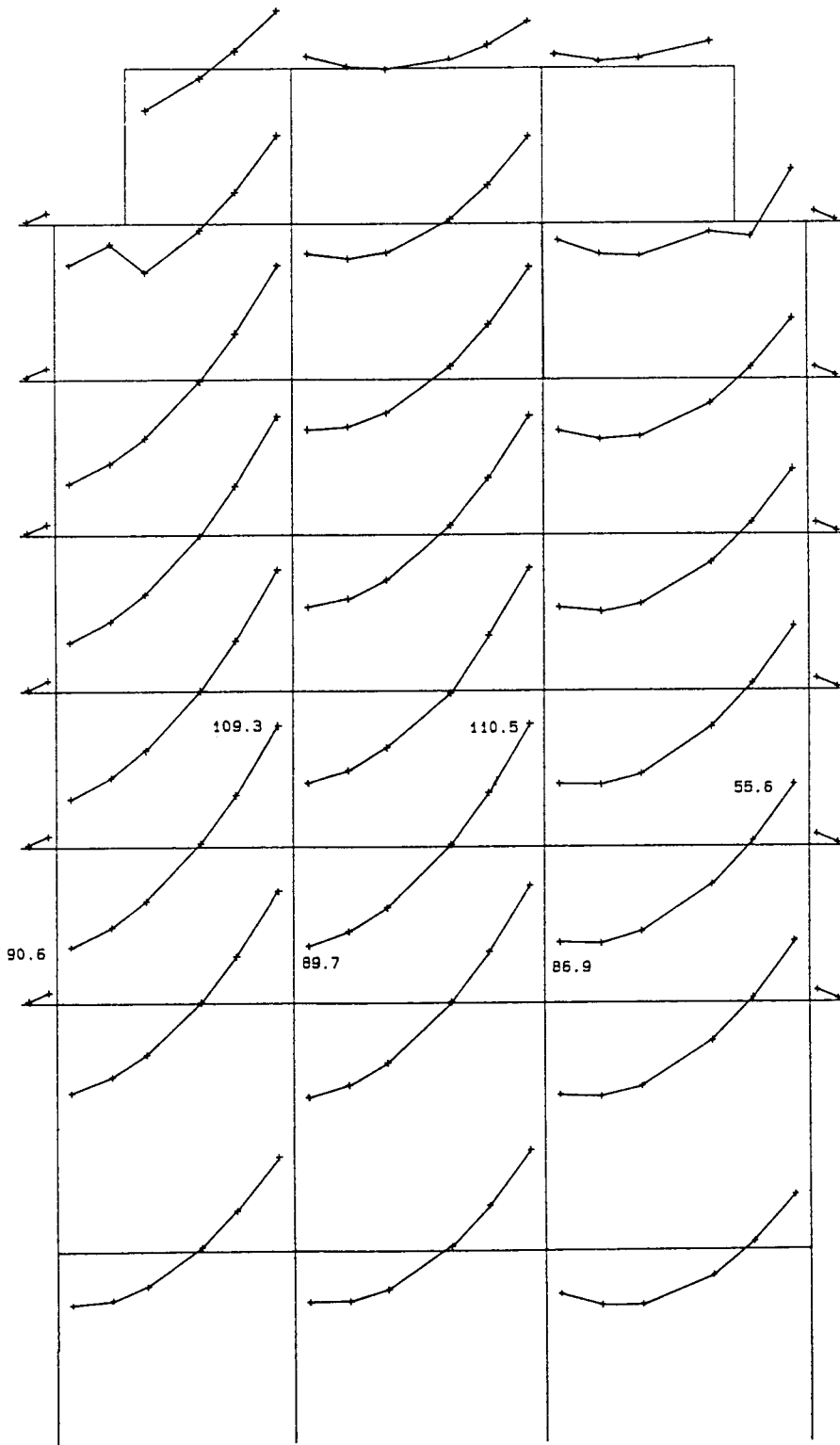
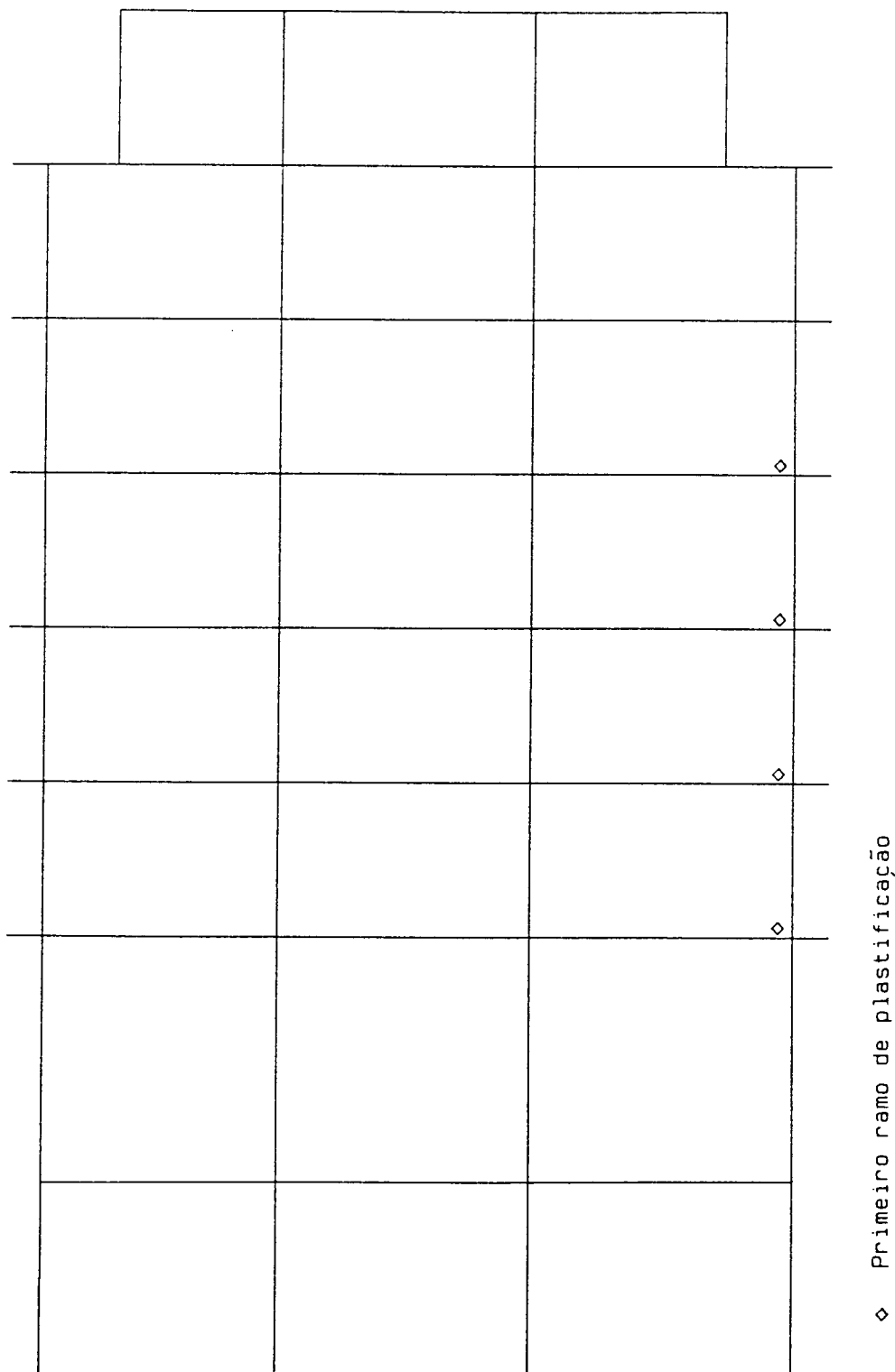


Fig. 5.50 - Diagrama de momentos -  $((G + 0.2Q) + 2.6E)$ .

PLASTIFICAÇÃO DA ARMADURA

ANLM

$$(G + 0.2 Q) + 1.60 E$$



◇ Primeiro ramo de plastificação

Fig. 5.51 - Plastificação da armadura -  $((G + 0.2Q) + 1.6E)$ .

PLASTIFICAÇÃO DA ARMADURA

ANLM

$$(G + 0.2 Q) + 2.20 E$$

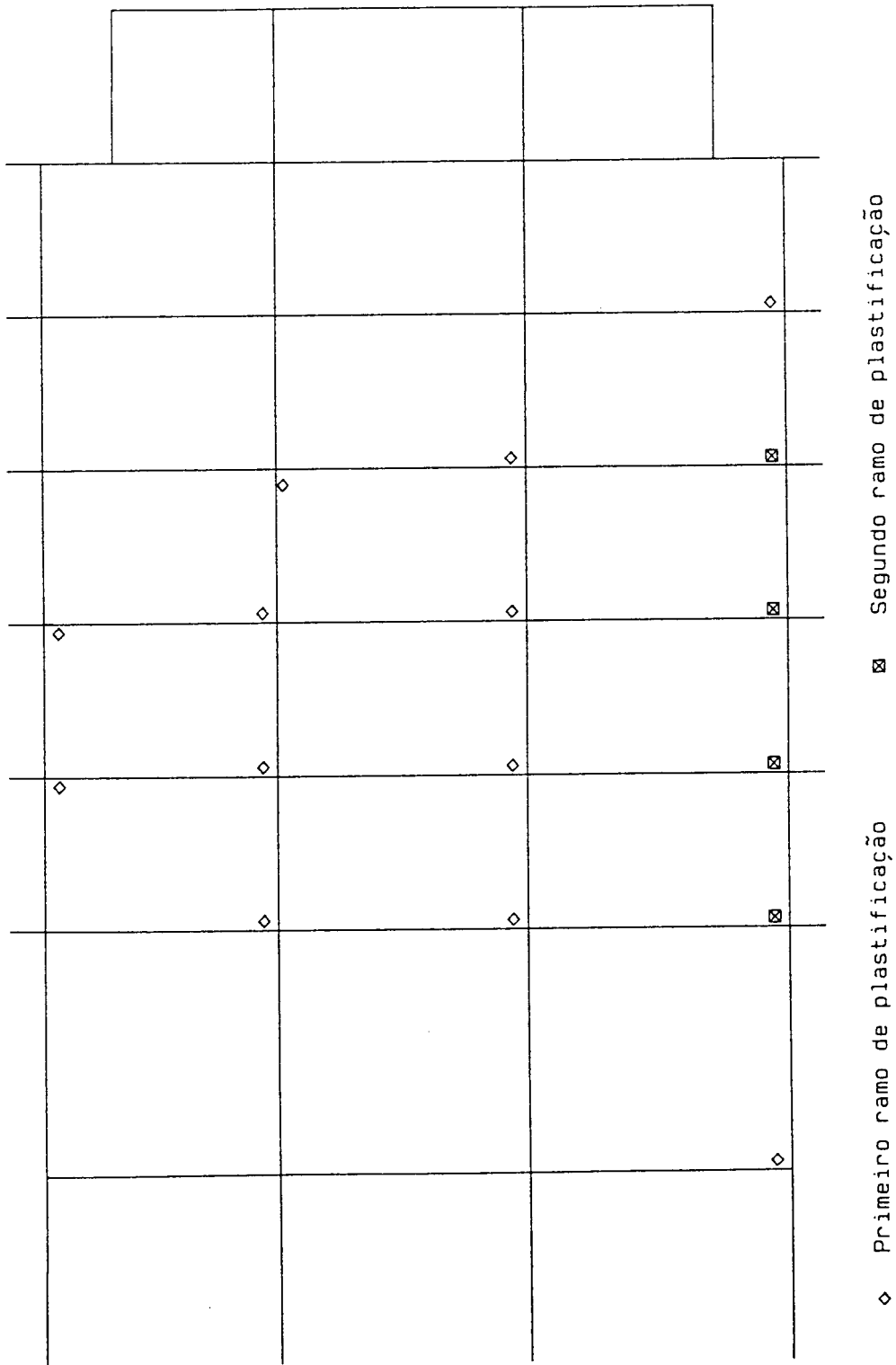


Fig. 5.52 - Plastificação da armadura -  $((G + 0.2Q) + 2.2E)$ .

PLASTIFICAÇÃO DA ARMADURA

ANLM

$$(G + 0.2 Q) + 2.60 E$$

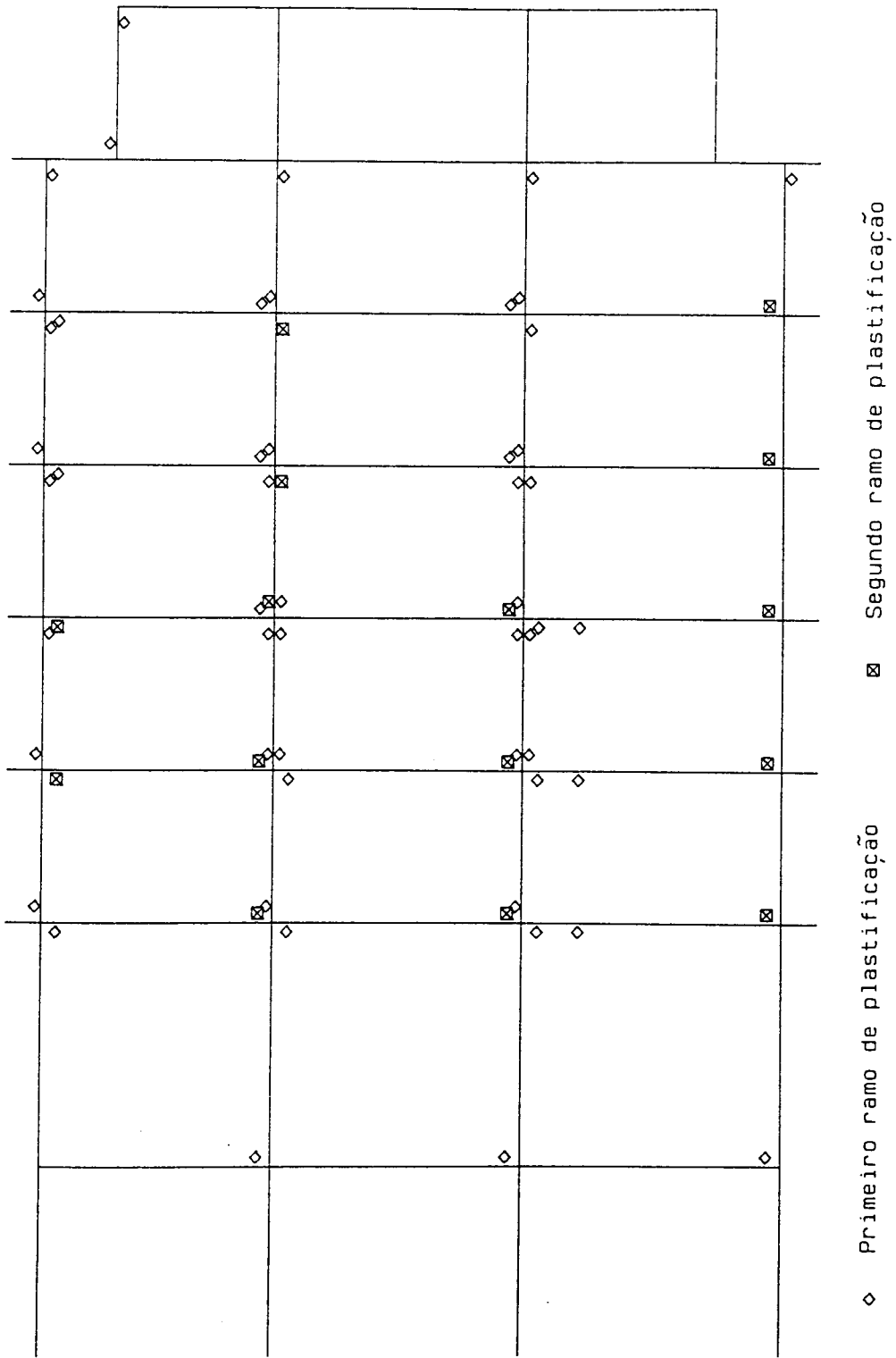


Fig. 5.53 – Plasticificação da armadura -  $((G + 0.2Q) + 2.6E)$ .

FENDILHAÇÃO DO BETÃO

ANLM

( G + 0.2 Q ) + 2.00 E

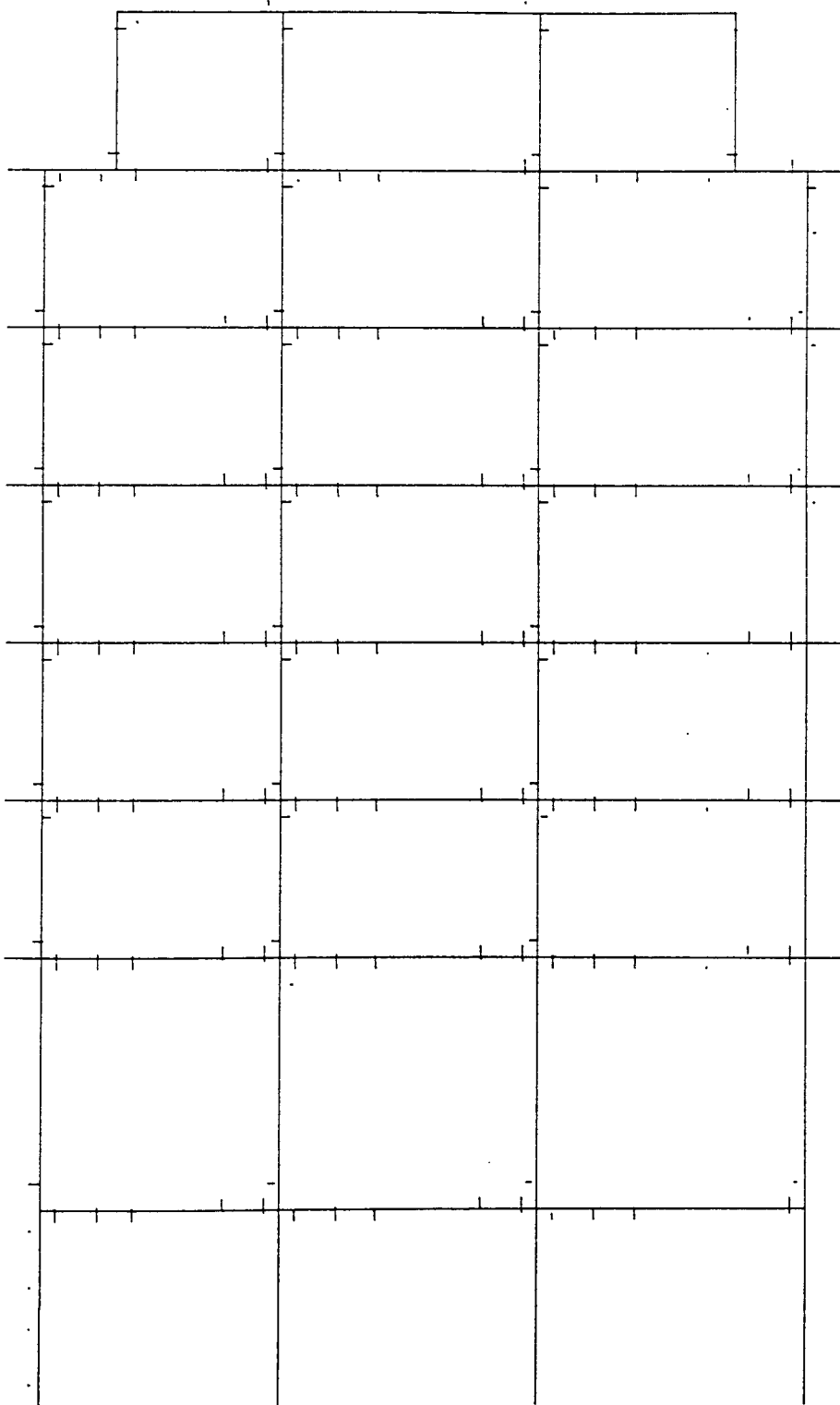


Fig. 5.54 – Fendilhação do betão -  $((G + 0.2Q) + 2.0E)$ .



FENDILHAÇÃO DO BETÃO

ANLM

( G + 0.2 Q ) + 2.60 E

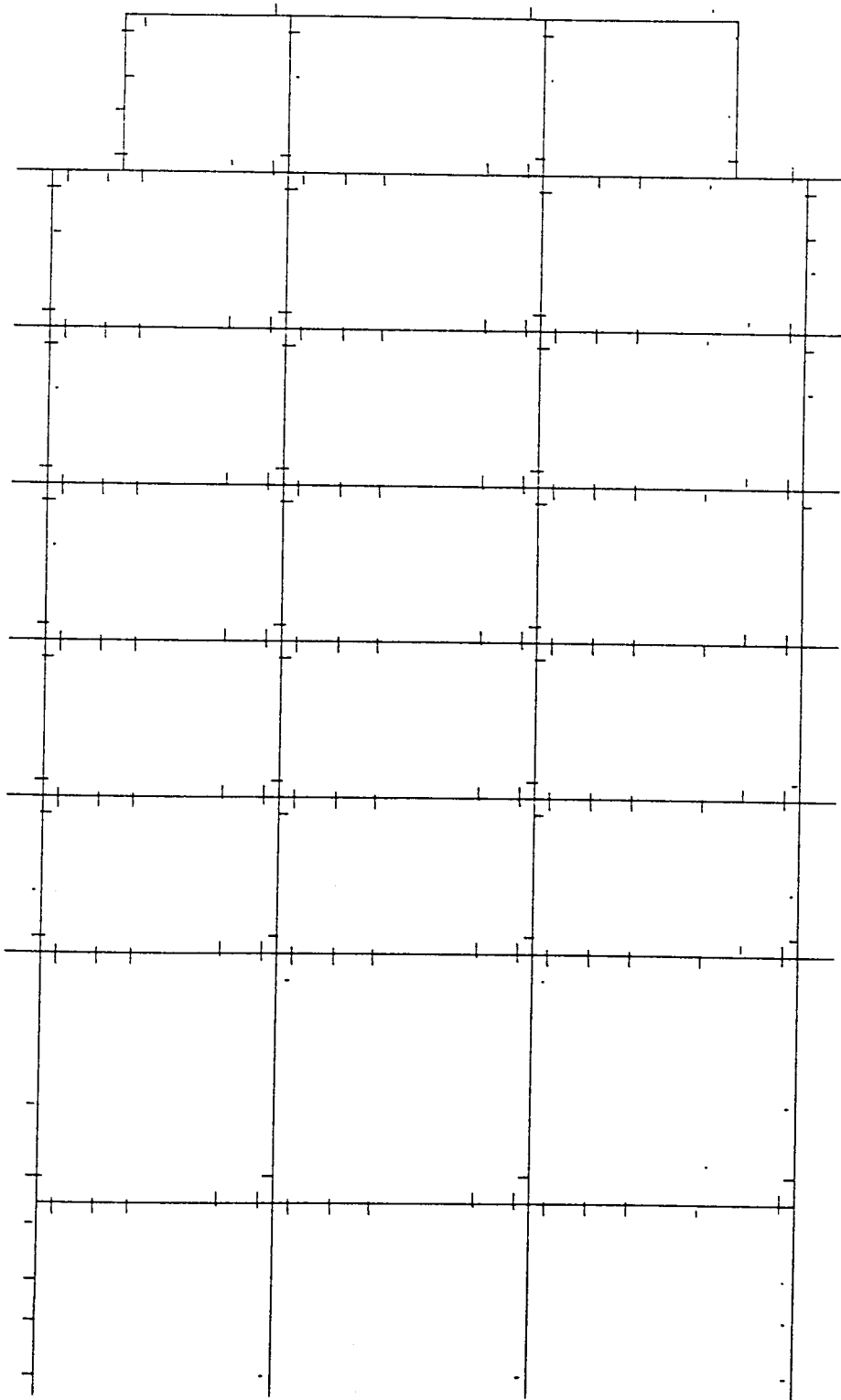


Fig. 5.55 - Fendilhação do betão -  $((G + 0.2 Q) + 2.6 E)$ .

DIAGRAMA DE MOMENTOS

( G + 0.2 Q ) + 2.00 E

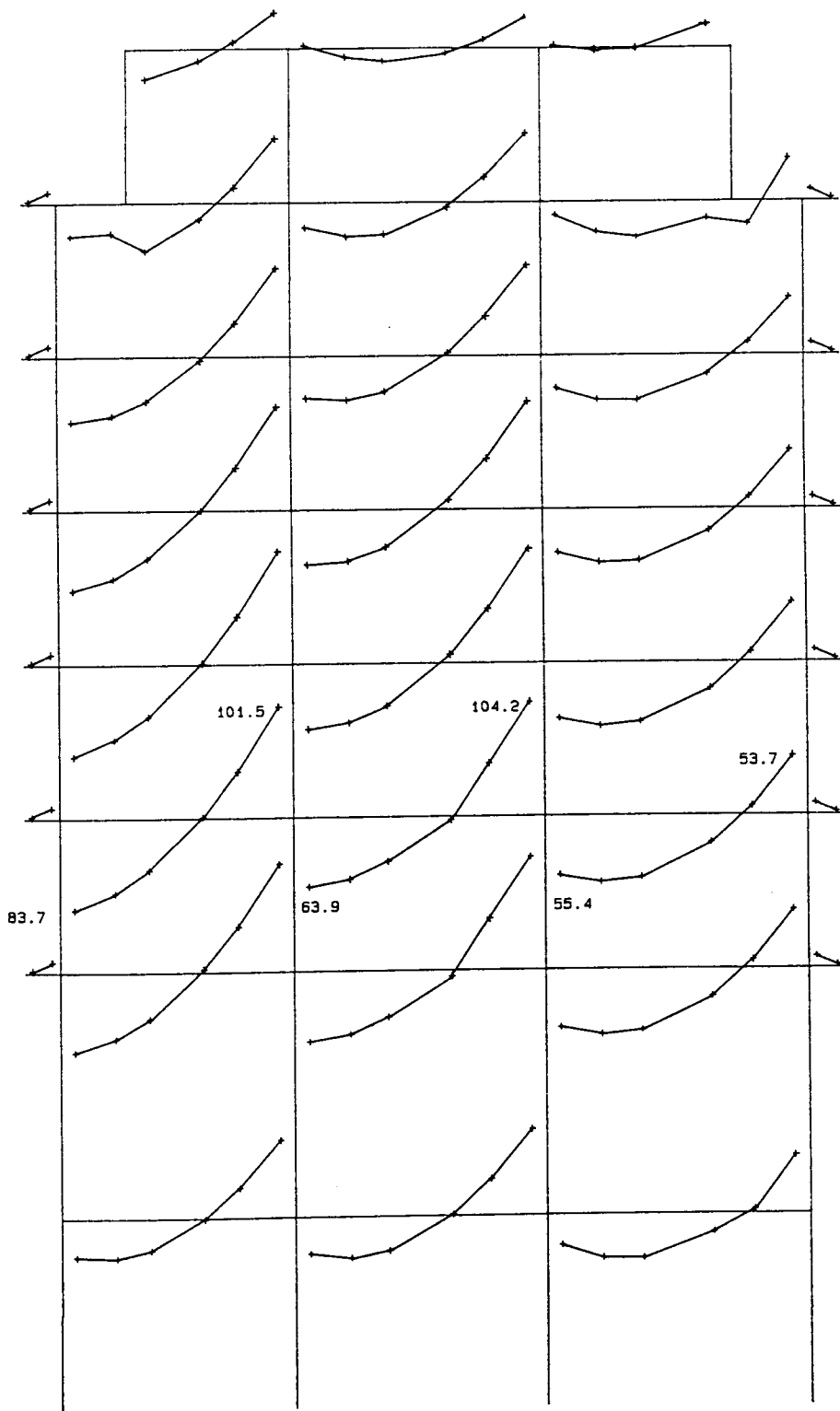


Fig. 5.56 - Diagrama de momentos - ((G + 0.2 Q) + 2.00 E).

DIAGRAMA DE MOMENTOS

( G + 0.2 Q ) + 2.15 E

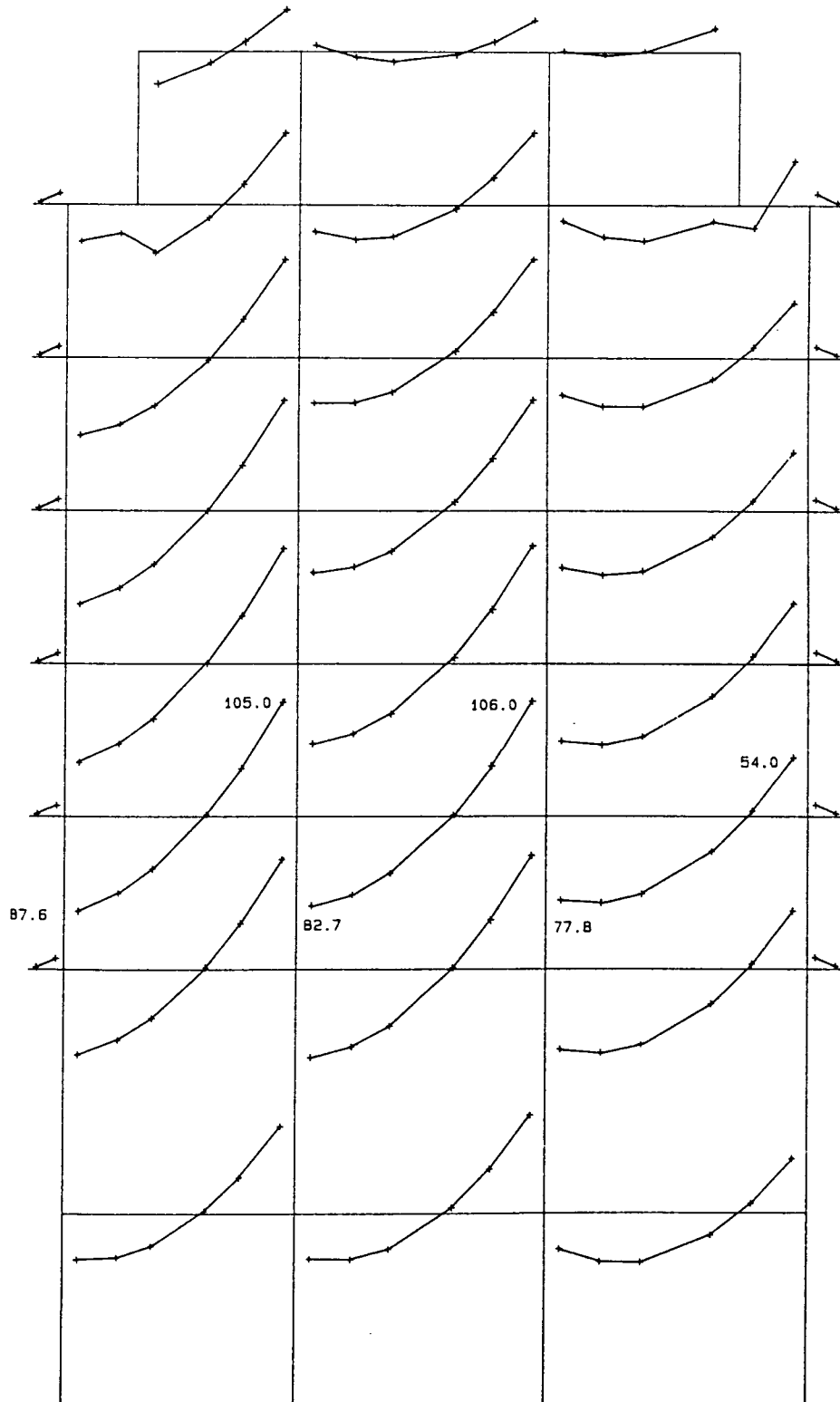


Fig. 5.57 - Diagrama de momentos - ((G + 0.2 Q) + 2.15 E).

PLASTIFICAÇÃO DA ARMADURA

ANLM + ANLG

( G + 0.2 Q ) + 1.60 E

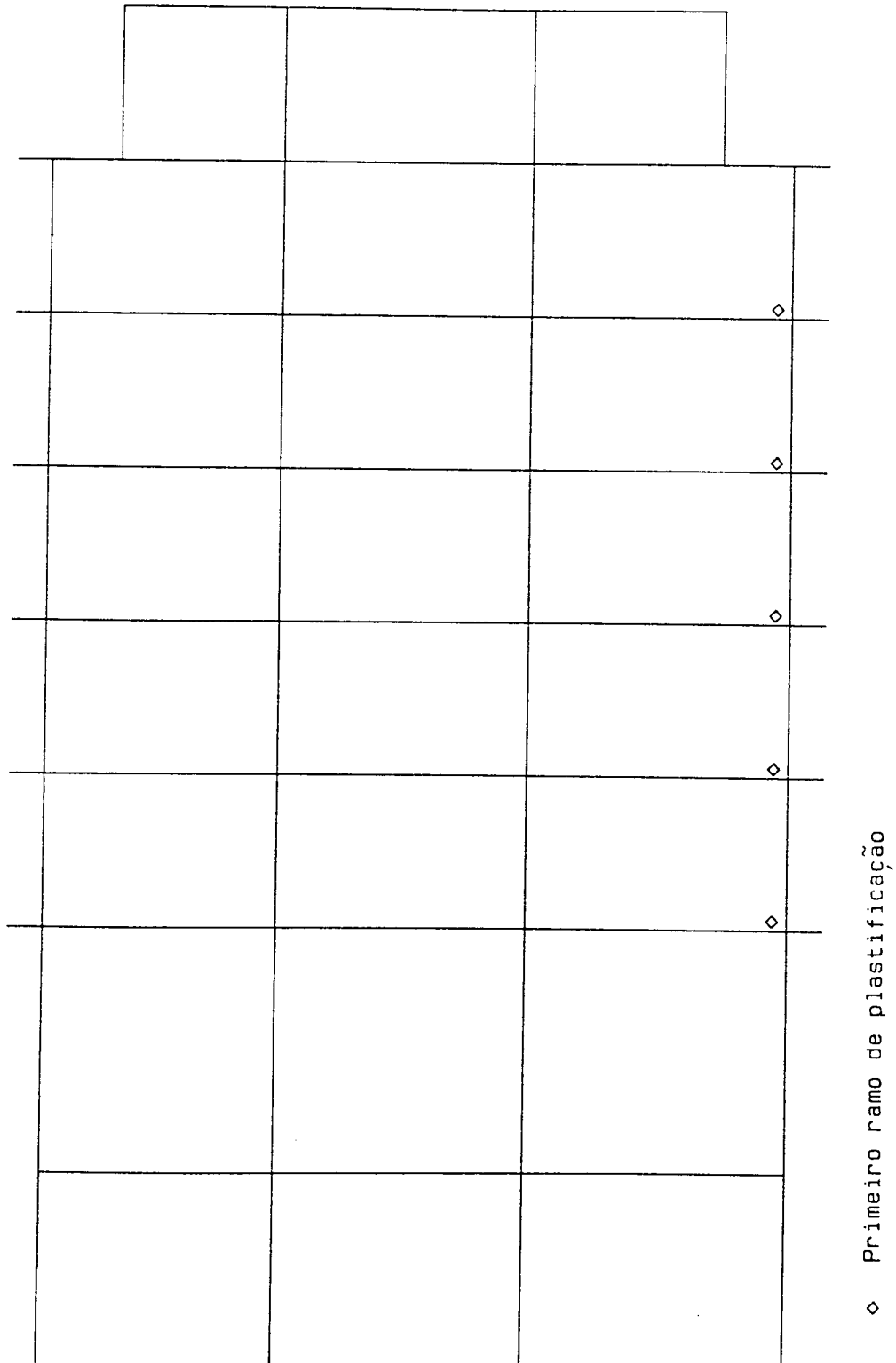


Fig. 5.58 - Plastificação da armadura -  $((G + 0.2 Q) + 1.60 E)$ .

PLASTIFICAÇÃO DA ARMADURA

ANLM + ANLG

( G + 0.2 Q ) + 2.00 E

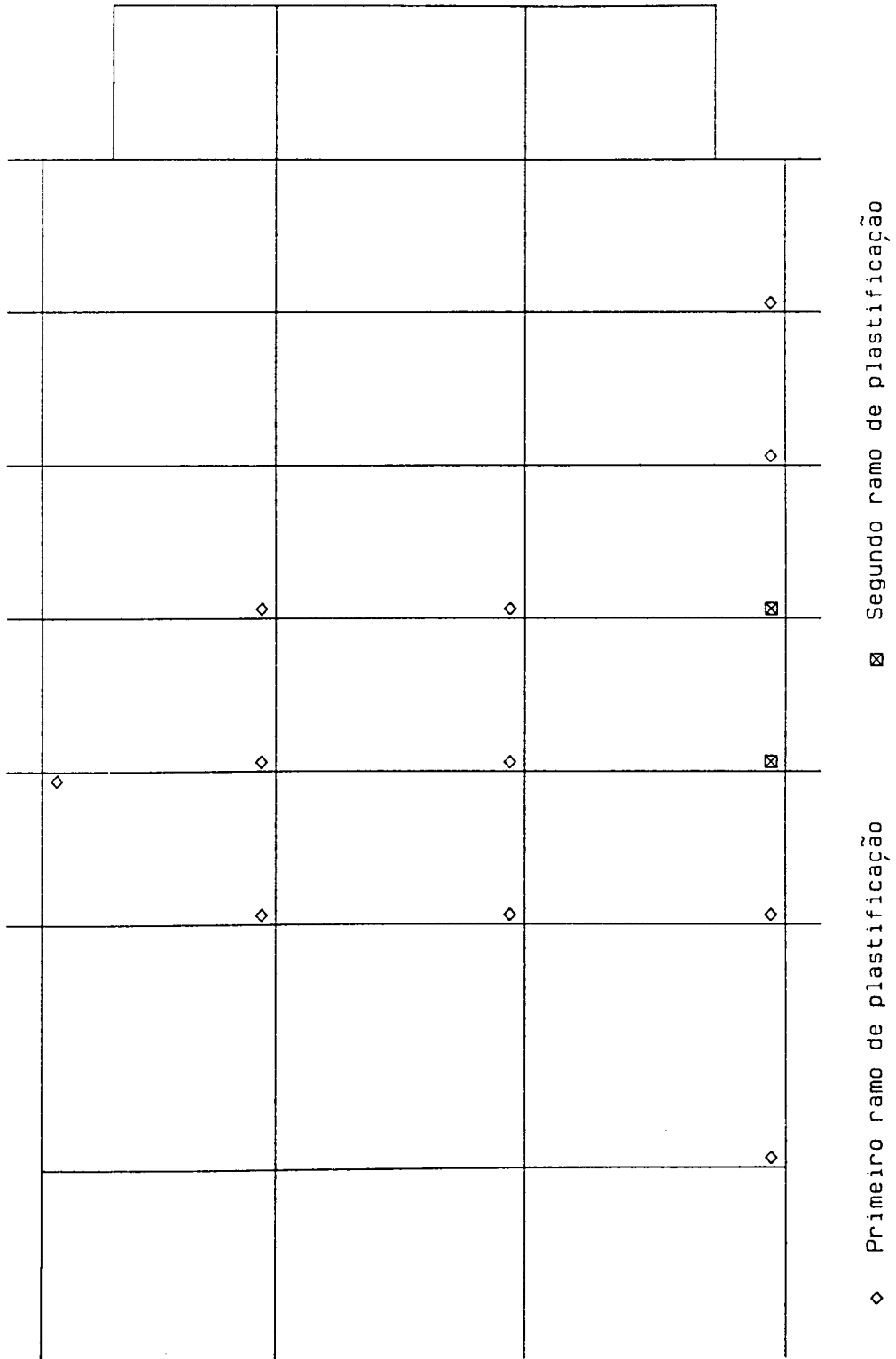


Fig. 5.59 - Plastificação da armadura -  $((G + 0.2 Q) + 2.00 E)$ .

PLASTIFICAÇÃO DA ARMADURA

ANLM + ANLG

$(G + 0.2 Q) + 2.10 E$

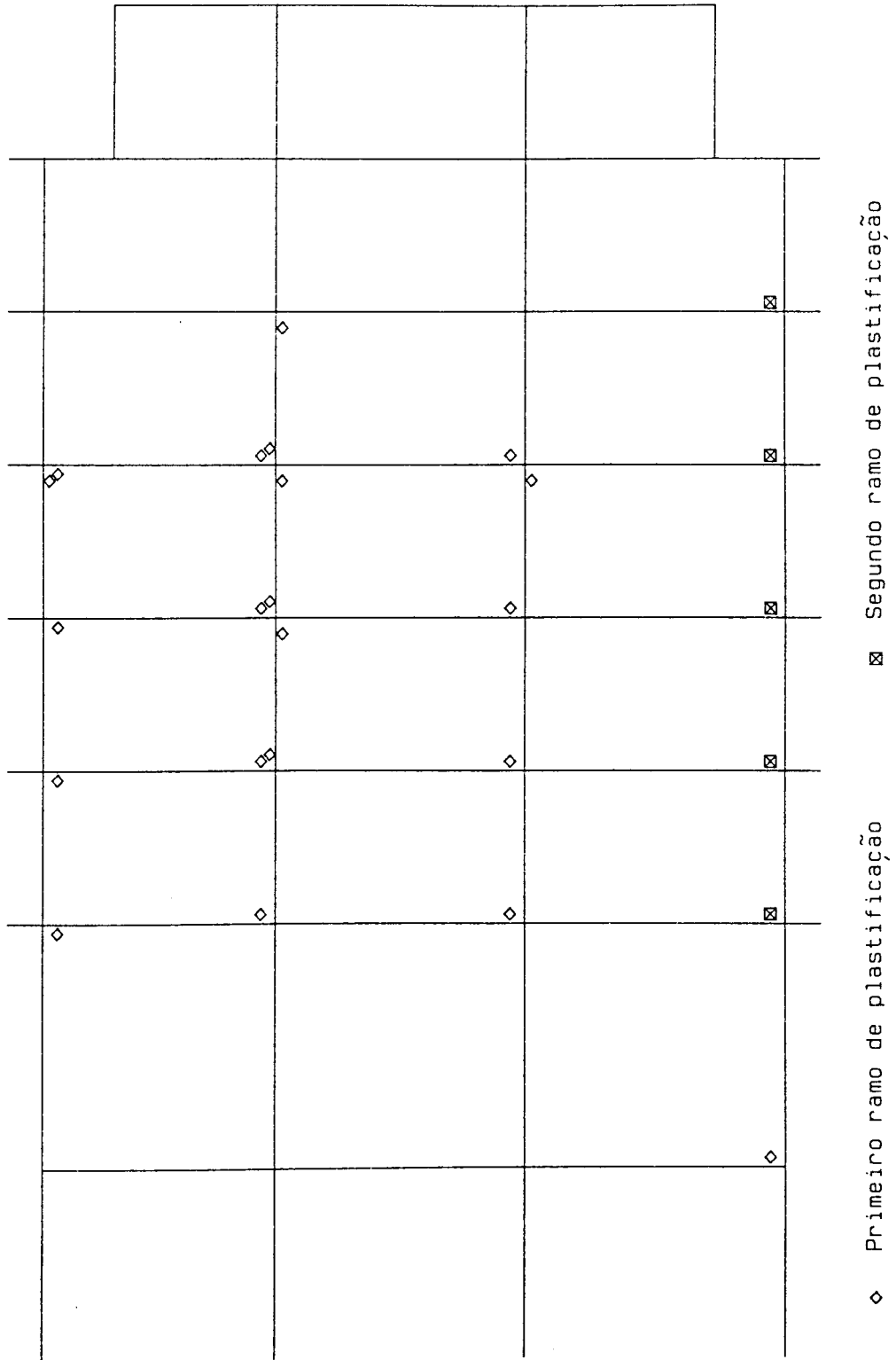


Fig. 5.60 - Plastificação da armadura -  $((G + 0.2 Q) + 2.10 E)$ .

PLASTIFICAÇÃO DA ARMADURA

ANLM + ANLG

$$(G + 0.2 Q) + 2.15 E$$

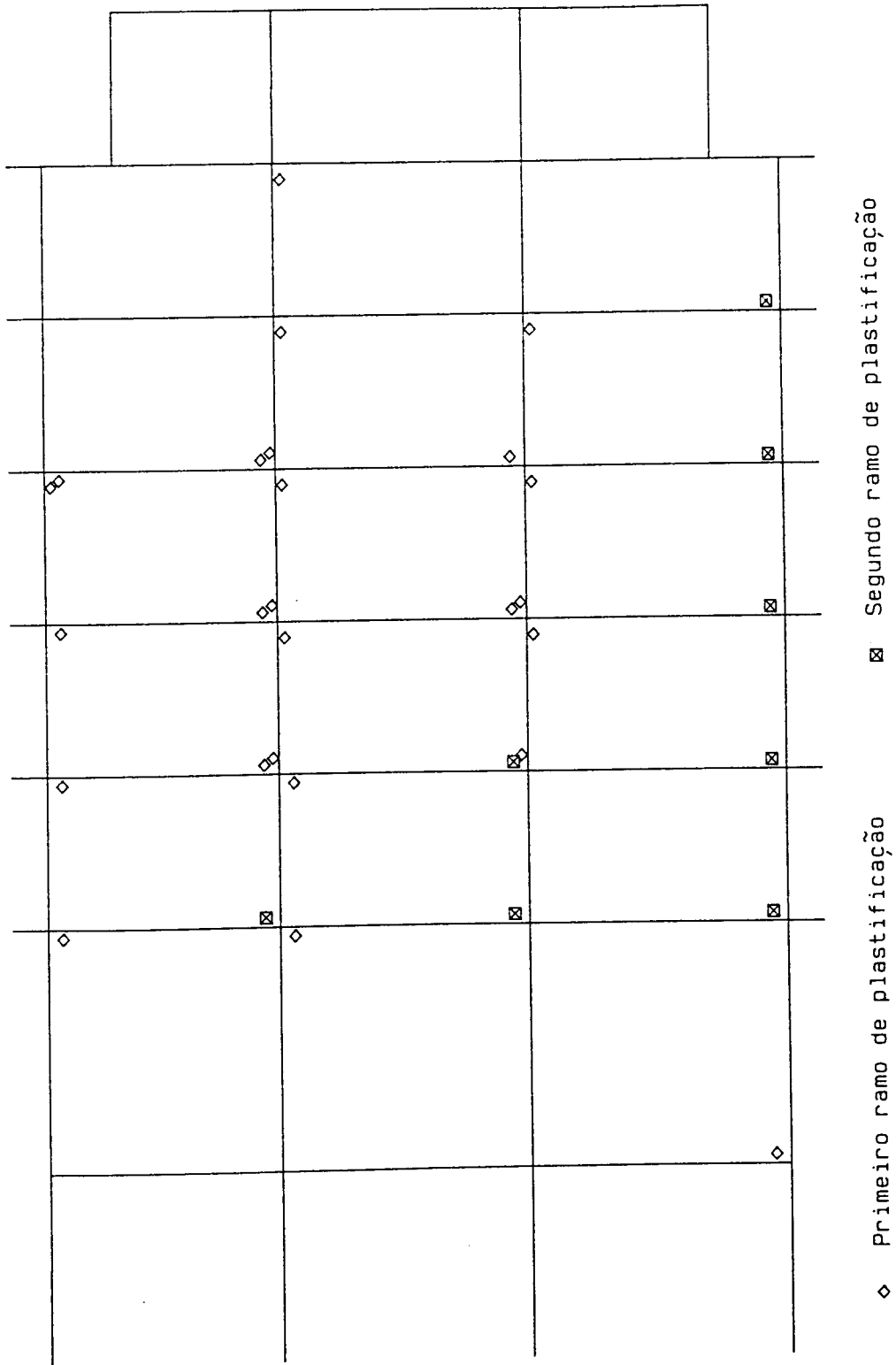


Fig. 5.61 - Plastificação da armadura -  $((G + 0.2 Q) + 2.15 E)$ .

FENDILHAÇÃO DO BETÃO

ANLM + ANLG

( G + 0.2 Q ) + 1.60 E

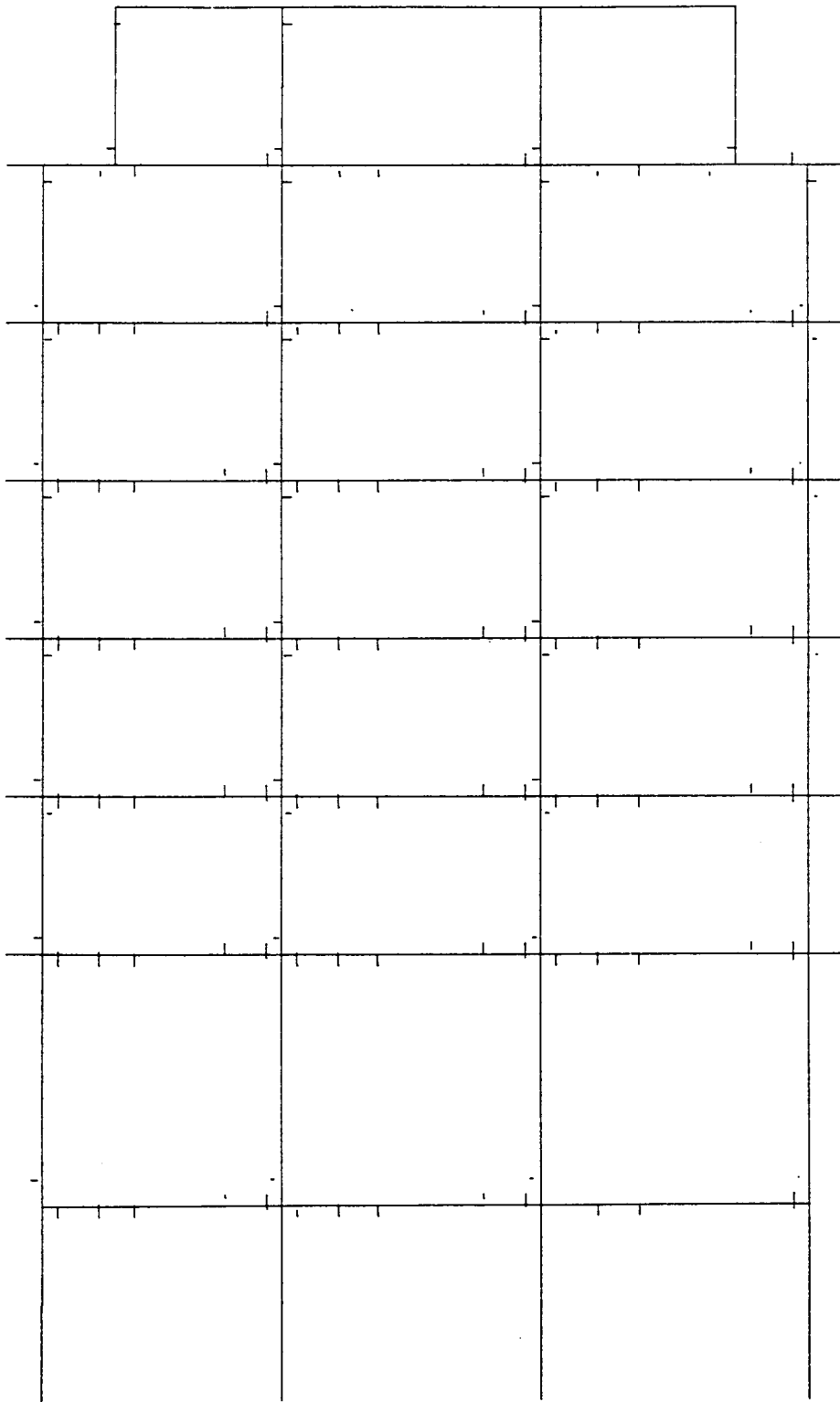


Fig. 5.62 – Fendilhação do betão -  $((G + 0.2 Q) + 1.60 E)$ .



FENDILHAÇÃO DO BETÃO

ANLM + ANLG

( G + 0.2 Q ) + 2.15 E

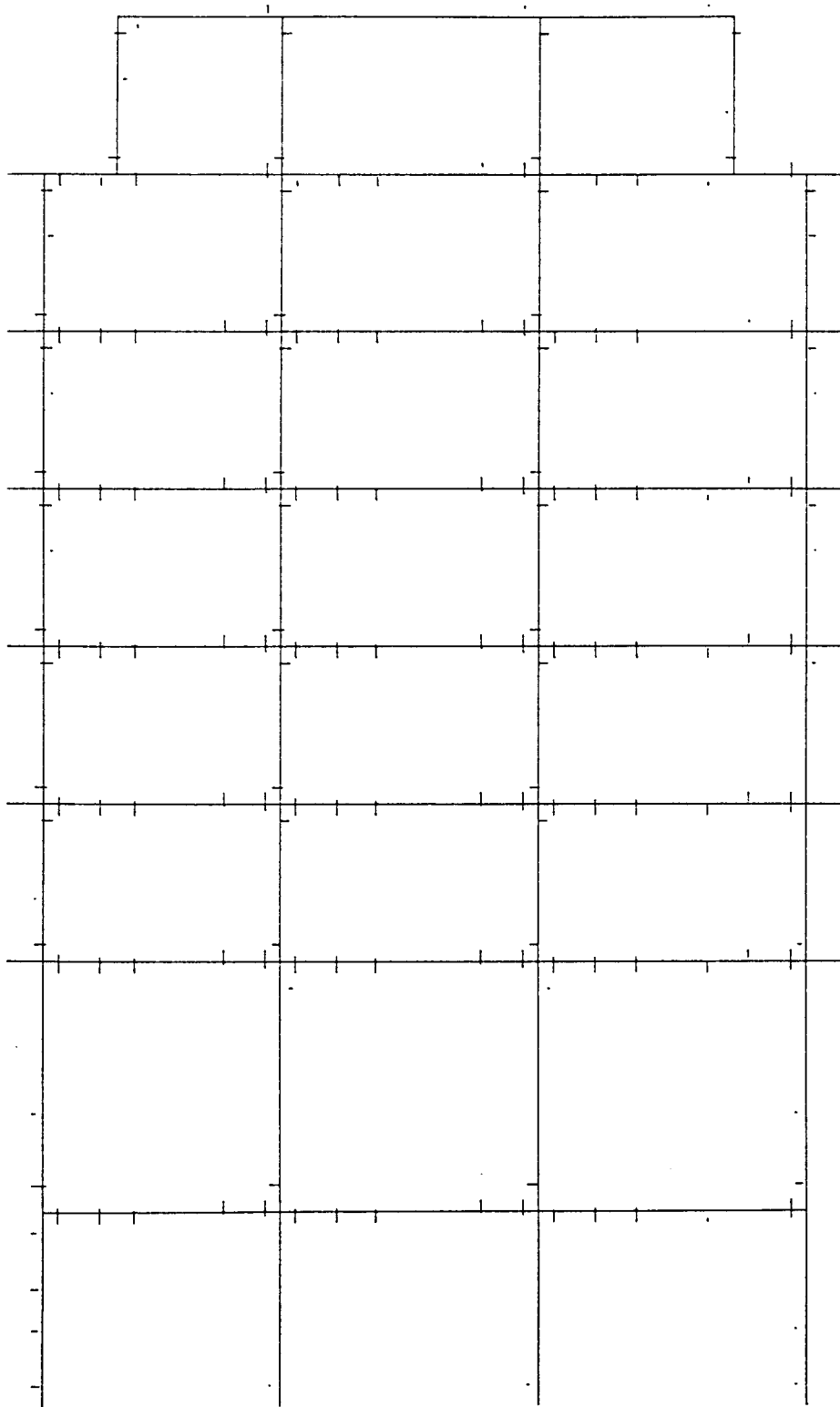


Fig. 5.63 - Fendilhação do betão -  $((G + 0.2Q) + 2.15E)$ .

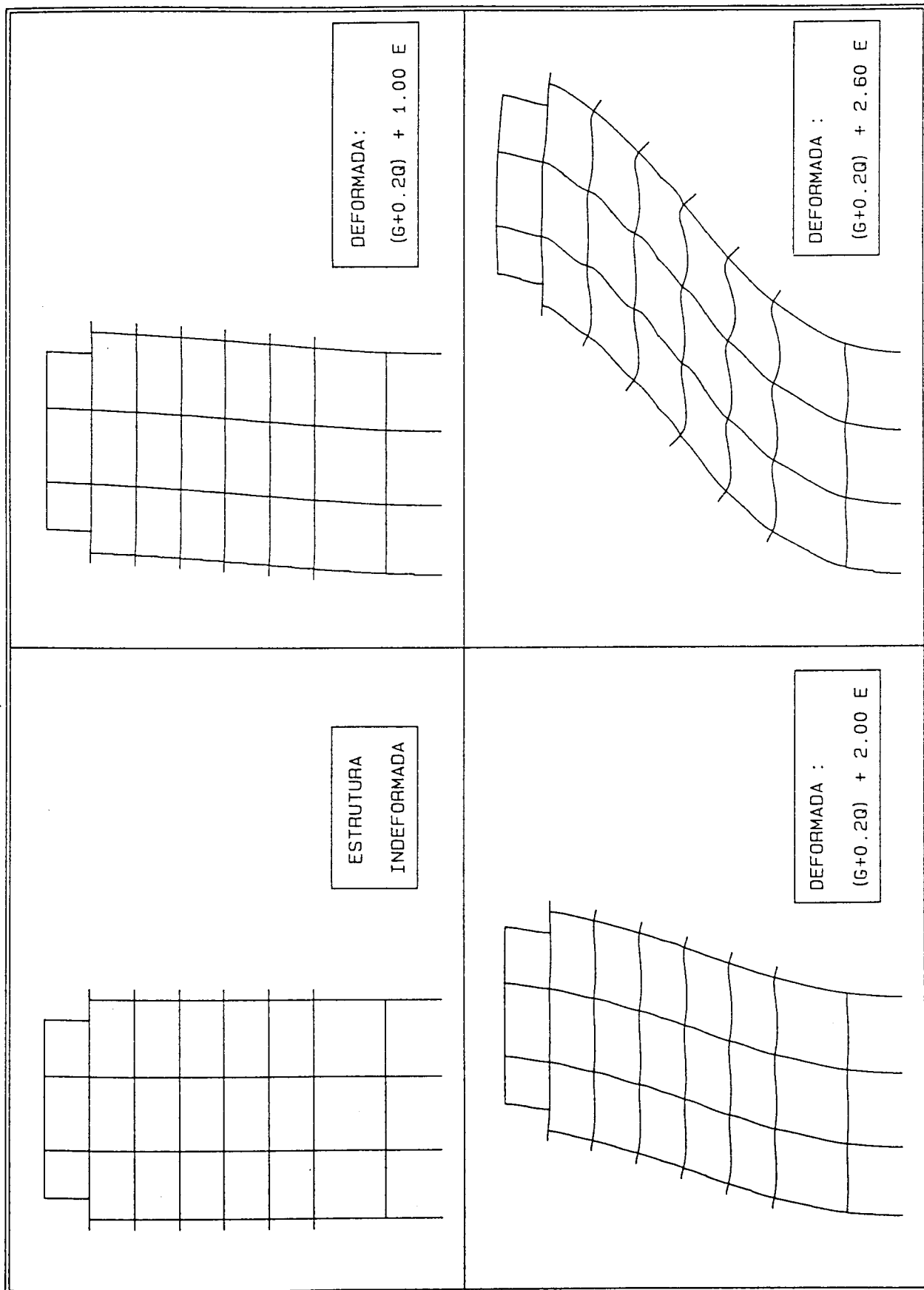


Fig. 5.64 - Evolução da deformada (ANLM).

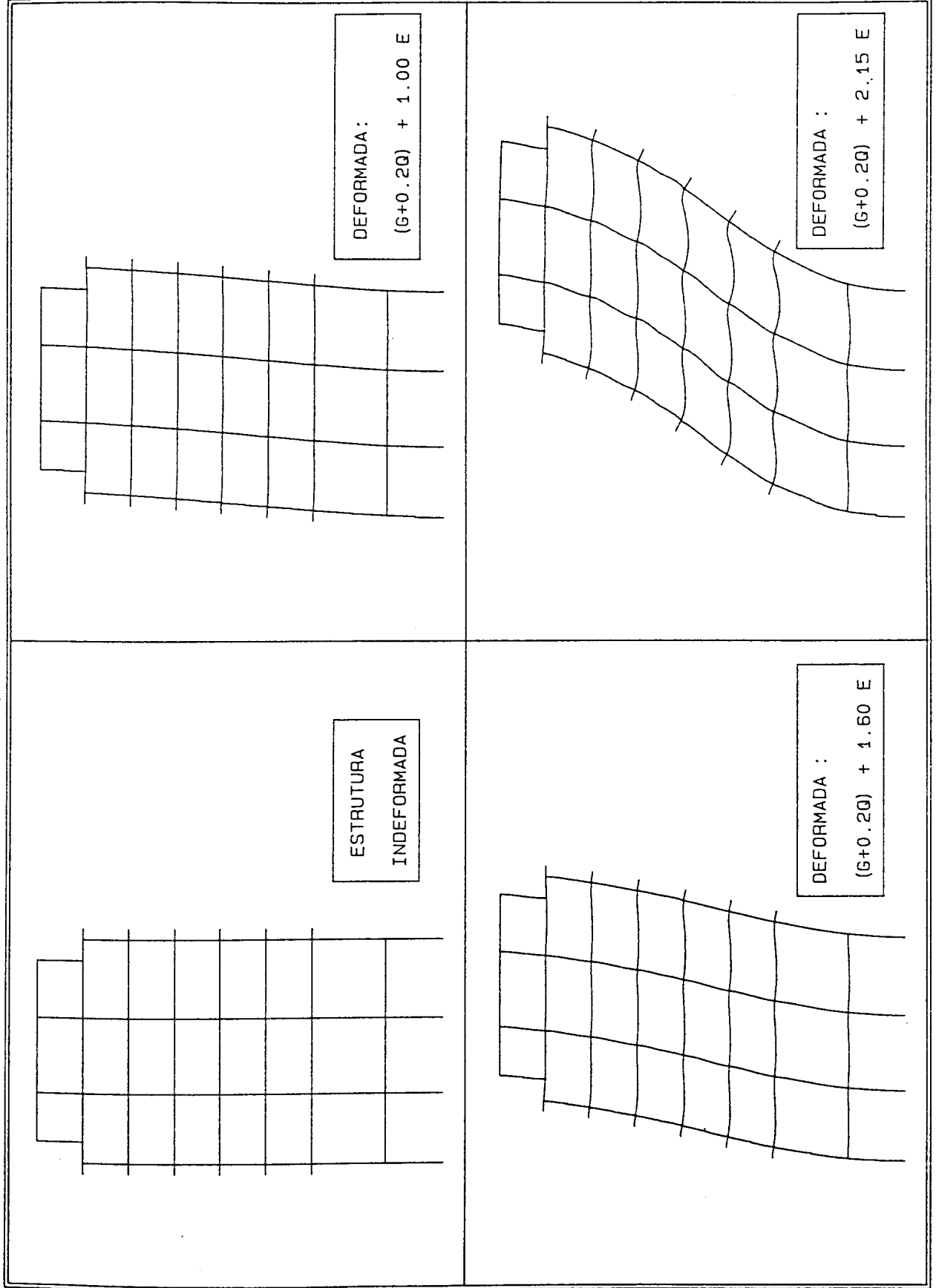


Fig. 5.65 - Evolução da deformada (ANLM + ANLG).

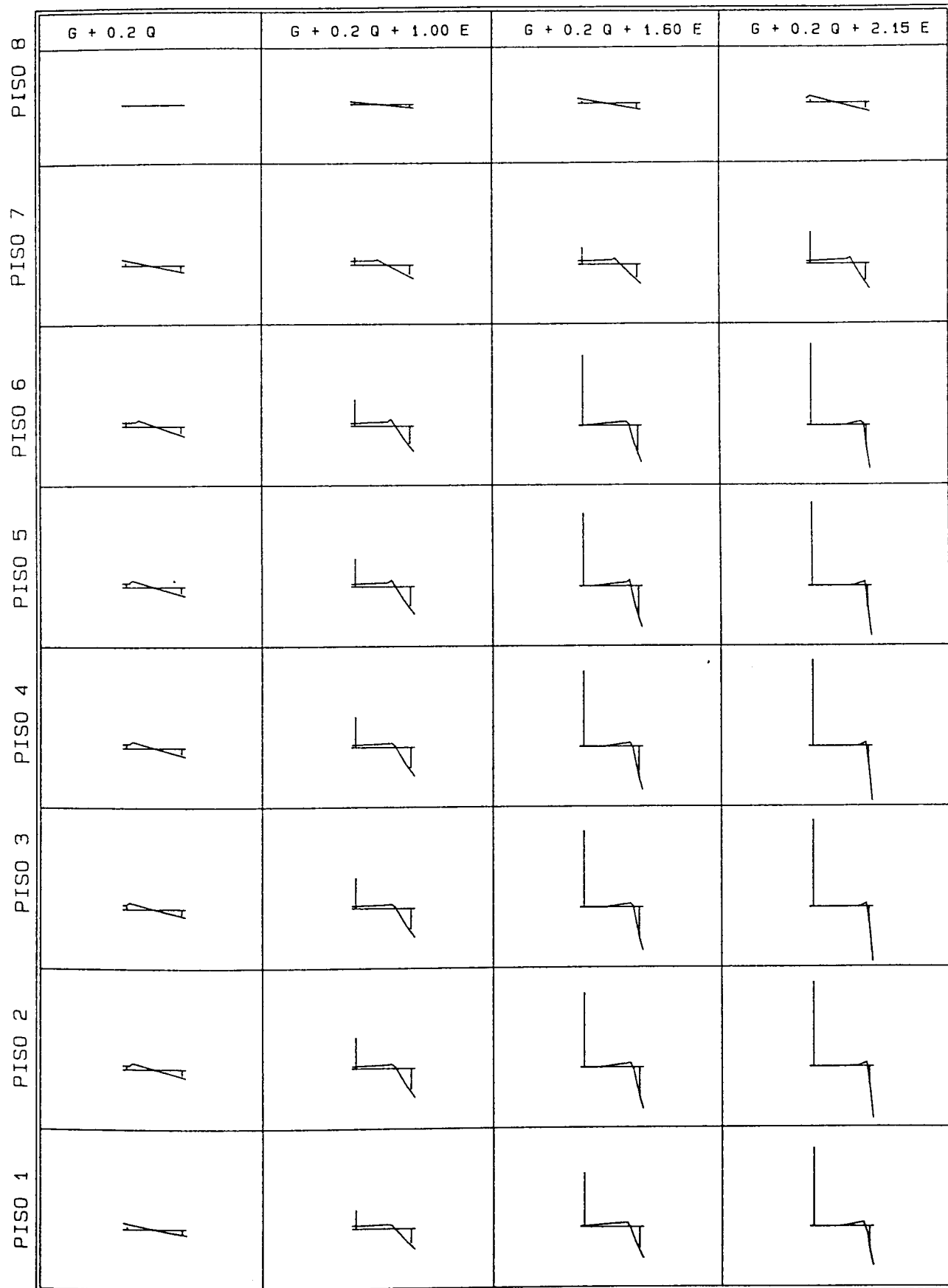


Fig. 5.66 - Evolução do estado de tensão.

Se o objectivo for a verificação da capacidade de carga deste pórtico, tendo em conta que houve um decréscimo em cerca de 20% da carga de rotura ao refinar a malha de elementos finitos na análise do terceiro piso isolado; será de esperar que um refinamento semelhante do pórtico completo provoque edêntico decréscimo da carga de rotura, encontrando-se então uma carga de rotura, por esmagamento do betão, próxima de  $(G + 0.2 Q) + 1.8 E$ .

Se adoptarmos então para este efeito um coeficiente de minoração da resistência característica do betão  $\gamma_m = 1.5$ , conclui-se que o coeficiente de segurança em relação à acção sísmica utilizada será aproximadamente  $\gamma_E = 1.2$ , inferior ao valor de 1.5 preconizado pelo RSA [6], não se considerando por este motivo verificada a segurança.

## 5.6 Conclusões

Dos exemplos apresentados neste capítulo é legítimo concluir que a presente técnica de análise não linear, implementada no programa de cálculo automático FEMPOR, permite de uma forma eficiente estudar com bastante rigor problemas práticos de dimensões consideráveis (verificação da segurança aos estados limites últimos e de utilização, análise da construção por fases e da influência da deformabilidade do solo de fundação, etc.).

Apesar das conclusões mais significativas terem já sido apresentadas na descrição destes exemplos, são agora de novo resumidas:

- A verificação dos estados limites últimos e de utilização é, por este processo, efectuada com bastante facilidade.
- No primeiro exemplo considerado, de reduzidas dimensões, é já significativa a importância da deformabilidade do solo de fundação nos estados limites de utilização. A sua consideração, pelas razões já referidas, é irrelevante para os estados limites últimos. Refira-se ainda que a consideração deste efeito nos exemplos analisados em nada comprometeu a eficiência do programa de cálculo automático.
- A simulação da construção por fases no primeiro exemplo, de pequenas dimensões, tem alguma importância se for considerada a deformabilidade do solo de fundação, reduzindo a grandeza dos assentamentos diferenciais.
- No segundo exemplo apresentado é notória a importância do refinamento da malha, tornando a estrutura mais flexível.

- É bastante significativa a semelhança dos resultados obtidos ao considerar o terceiro piso isolado ou o pórtico completo.
- O mecanismo e a carga de rotura do terceiro piso isolado foram confirmados utilizando uma técnica de análise plástica limite.
- A importância da consideração da não linearidade geométrica no pórtico completo, tornando a resposta mais flexível e antecipando a rotura.

## 5.7 Bibliografia

- [1] Arede A.J.C. – Tese de Mestrado – Faculdade de Engenharia, Porto, 1991 (a publicar).
- [2] Cruz P.J.S. e Figueiras J.A. – Análise Não Linear de Estruturas Porticadas de Betão – 2<sup>as</sup>. Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, Lisboa, LNEC, 20 – 23 de Novembro, 1990 – Tema A, pp. 469 – 479.
- [3] Cruz P.J.S. e Figueiras J.A. – Cálculo de Sapatas de Fundações e Interactividade Solo - Pórticos Planos – Relatório de Actividades, Faculdade de Engenharia, Porto, Nov. 88.
- [4] Marques J.M.M.C. – Finite and Infinite Elements in Static and Dynamic Structural Analysis – Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea, 1984.
- [5] Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado – Imprensa Nacional Casa da Moeda, Lisboa 1990.
- [6] Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes – Imprensa Nacional Casa da Moeda, Lisboa 1988.

## 6 – CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

### 6.1 Conclusões

As principais conclusões a extrair do trabalho desenvolvido são:

- Dos dois elementos finitos utilizados, dos dois tipos de integração implementados e qualquer ordem de integração disponível, o elemento de três nós com integração reduzida (dois pontos de Gauss) permitiu obter resultados muito bons, parecendo ser o mais aconselhável.
- A formulação lagrangeana total, escolhida para a abordagem da não linearidade geométrica, mostrou-se computacionalmente eficiente conseguindo-se obter resultados muito próximos dos resultados numéricos e experimentais referidos por outros autores.
- Idêntica conclusão pode ser referida quanto à técnica adoptada para a simulação do comportamento não linear material deste tipo de estruturas. Mais, pode-se afirmar que se manteve e mesma eficiência nos exemplos testados com a consideração simultânea das duas não linearidades.
- Não se notou diferenças acentuadas no tempo de cálculo, associadas à alteração do tipo de algoritmo utilizado (Newton – Raphson ou Newton – Raphson modificado) tendo por isso sido normalmente utilizado o método de Newton – Raphson.
- Dos dois tipos de critérios de verificação da convergência implementados, o critério designado por energético mostrou-se ser bastante eficiente.
- Nos problemas em que intervem a não linearidade material, tornou-se de extraordinária importância para a resolução de alguns problemas de convergência pertinente o cuidado dispensado à simulação das descargas e recargas nas relações constitutivas dos materiais e o facto de se ter tornado o processo de análise "path – independent".
- Mesmo não tendo sido abordados com detalhe os problemas da interação com o solo e da construção por fases, estes dois aspectos foram apresentados num exemplo tendo evidenciado a boa adequação desta técnica de análise não linear a estes objectivos.
- No último exemplo procurou-se por fim salientar a importância desta técnica para a análise de problemas reais em que, como nesse, se pretende aferir a capacidade de carga de um pórtico para verificação da segurança respectiva.



- Sem procurar fazer futurologia termina-se estas conclusões referindo que, face à qualidade e quantidade de informação extraída de uma ferramenta de análise não linear como a presente (deslocamentos, esforços, fendilhação e esmagamento do betão, extensões na armadura, plasticação da armadura, etc.), consegue-se efectuar a verificação, por exemplo, dos estados limites de utilização e últimos com facilidade e rigor.

Atendendo ainda ao desenvolvimento galopante dos meios de cálculo automático disponíveis, tornando ridículos os tempos de cálculo e capacidade de memória agora experimentados; supõe-se então, ser cada vez mais importante e requerido o desenvolvimento de técnicas de análise não linear como esta, tornando possível a abordagem de problemas como os que a seguir são sugeridos.

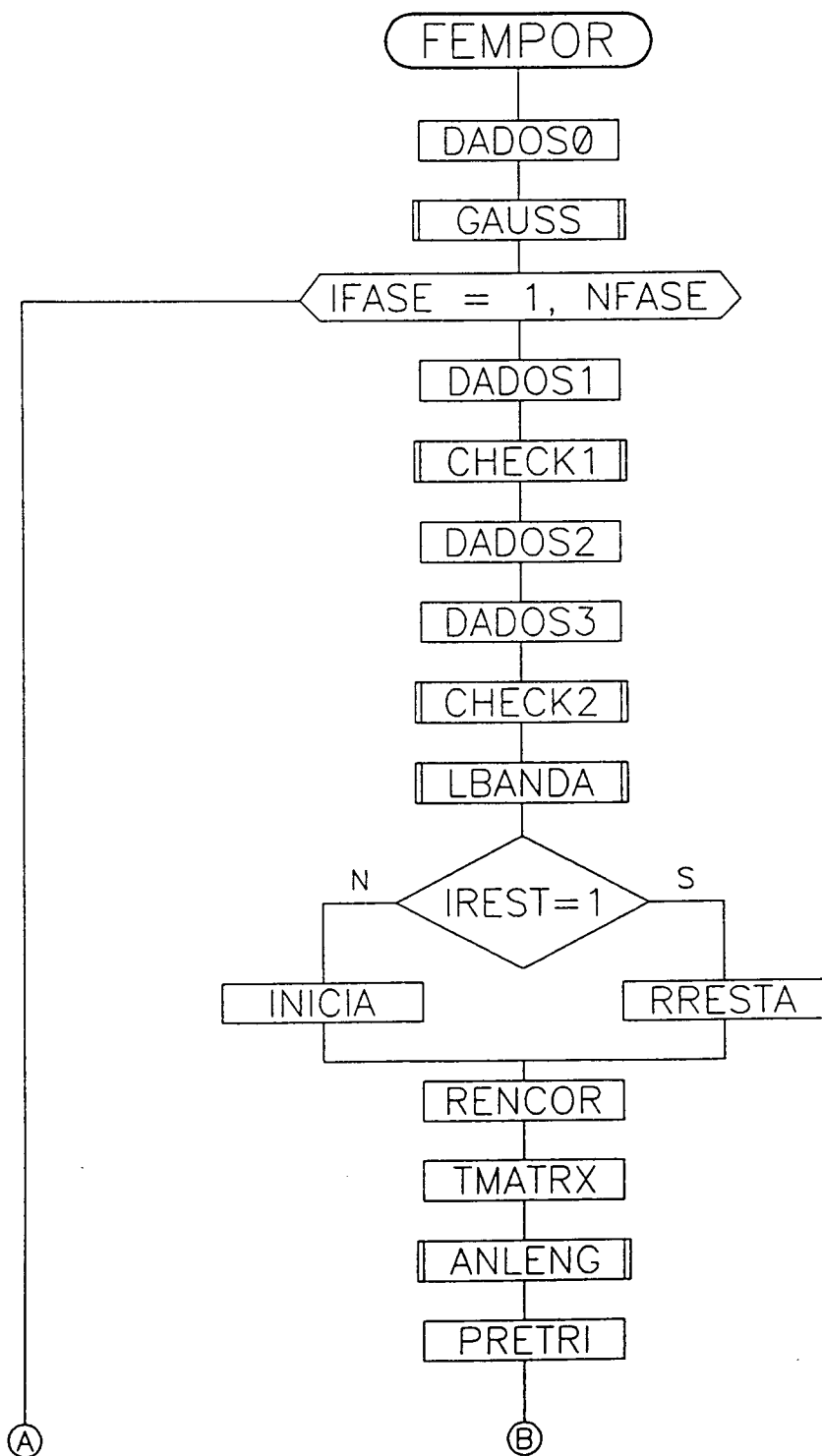
## 6.2 Perspectivas de desenvolvimentos futuros

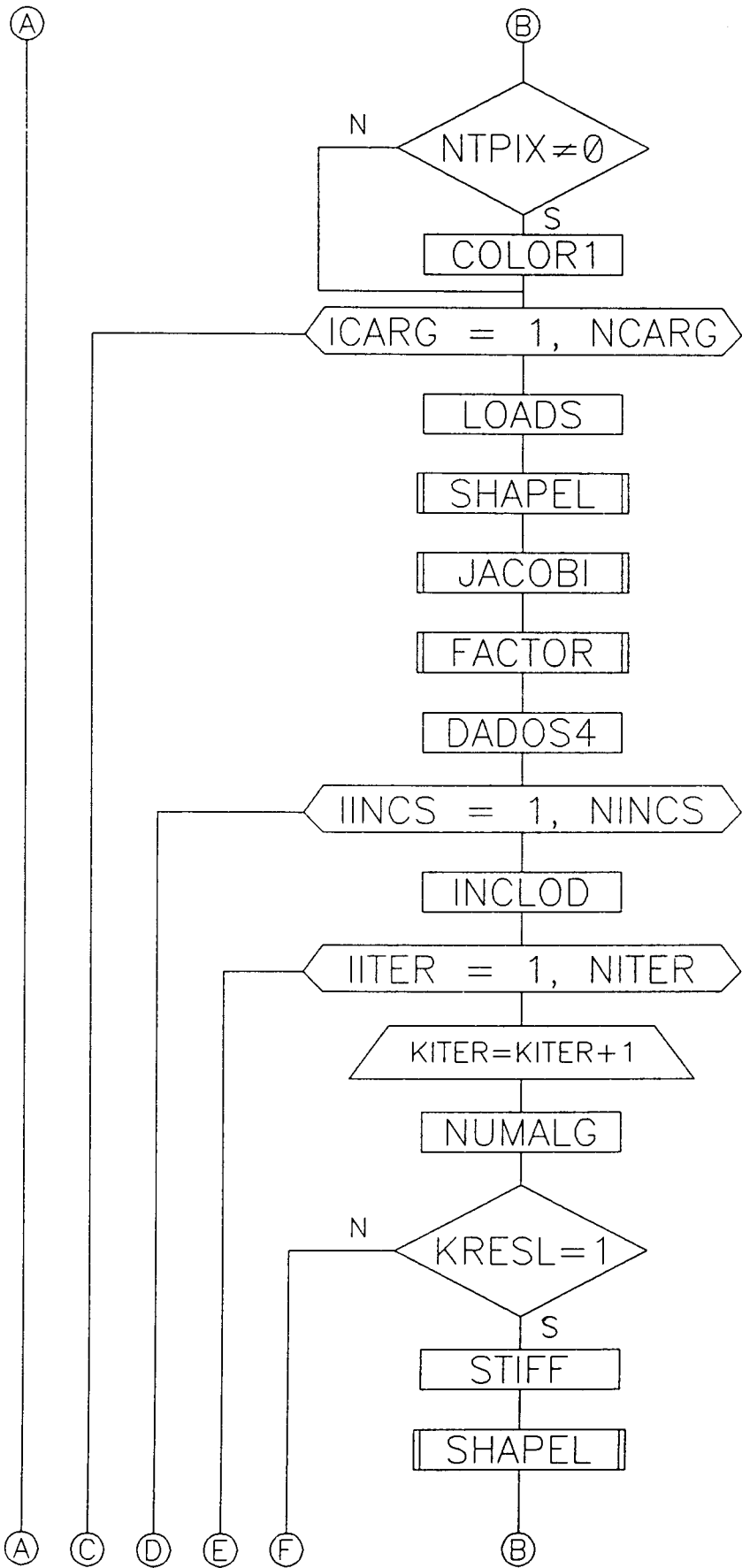
Entre as inúmeras possibilidades de evolução deste trabalho salientam-se algumas por parecerem ser as mais prioritárias e interessantes:

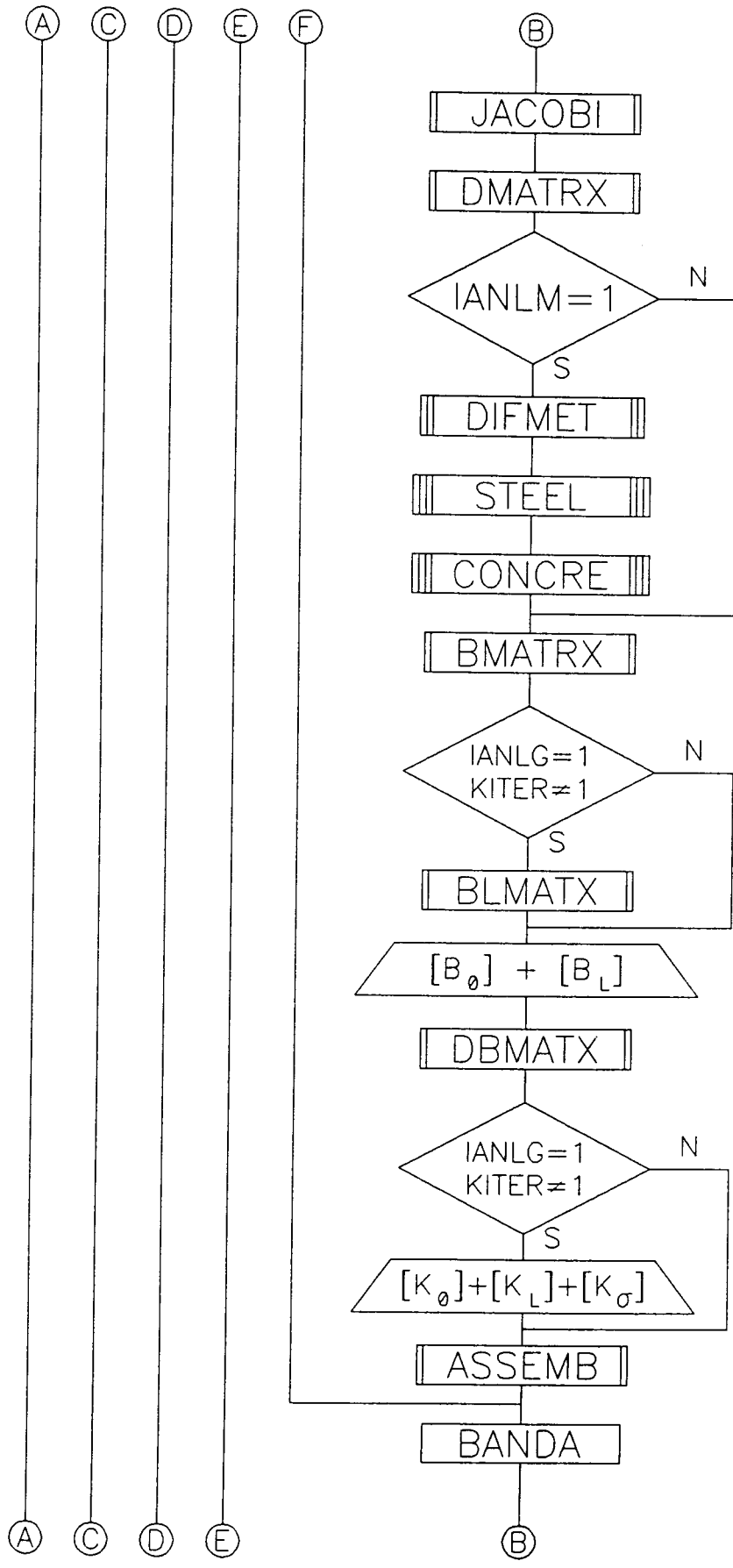
- Melhoramento dos modelos de descarga e recarga descritos, procurando traduzir o comportamento histerético dos materiais.
- Generalizar esta formulação a pórticos tridimensionais.
- Incluir neste programa elementos finitos bidimensionais, paredes e eventualmente lajes, tendo em conta o seu comportamento não linear.
- Consideração dos efeitos diferidos (retracção e fluência).
- Introdução de pré-esforço.
- Estudar com detalhe a interacção solo estrutura e problemas práticos da construção por fases.

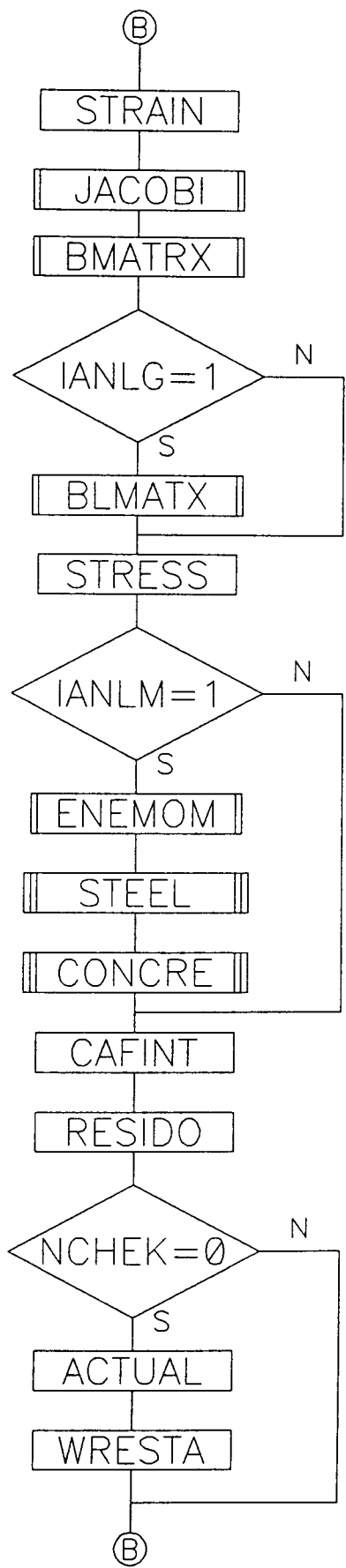
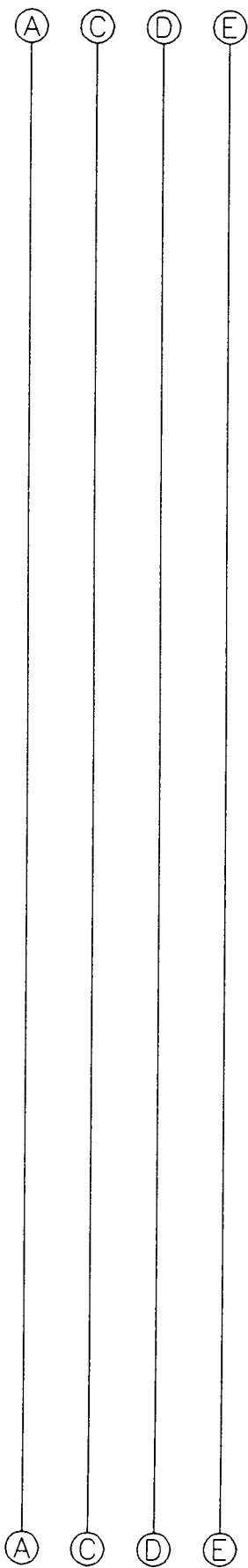
# APÊNDICE I – ESTRUTURAÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO FEMPOR

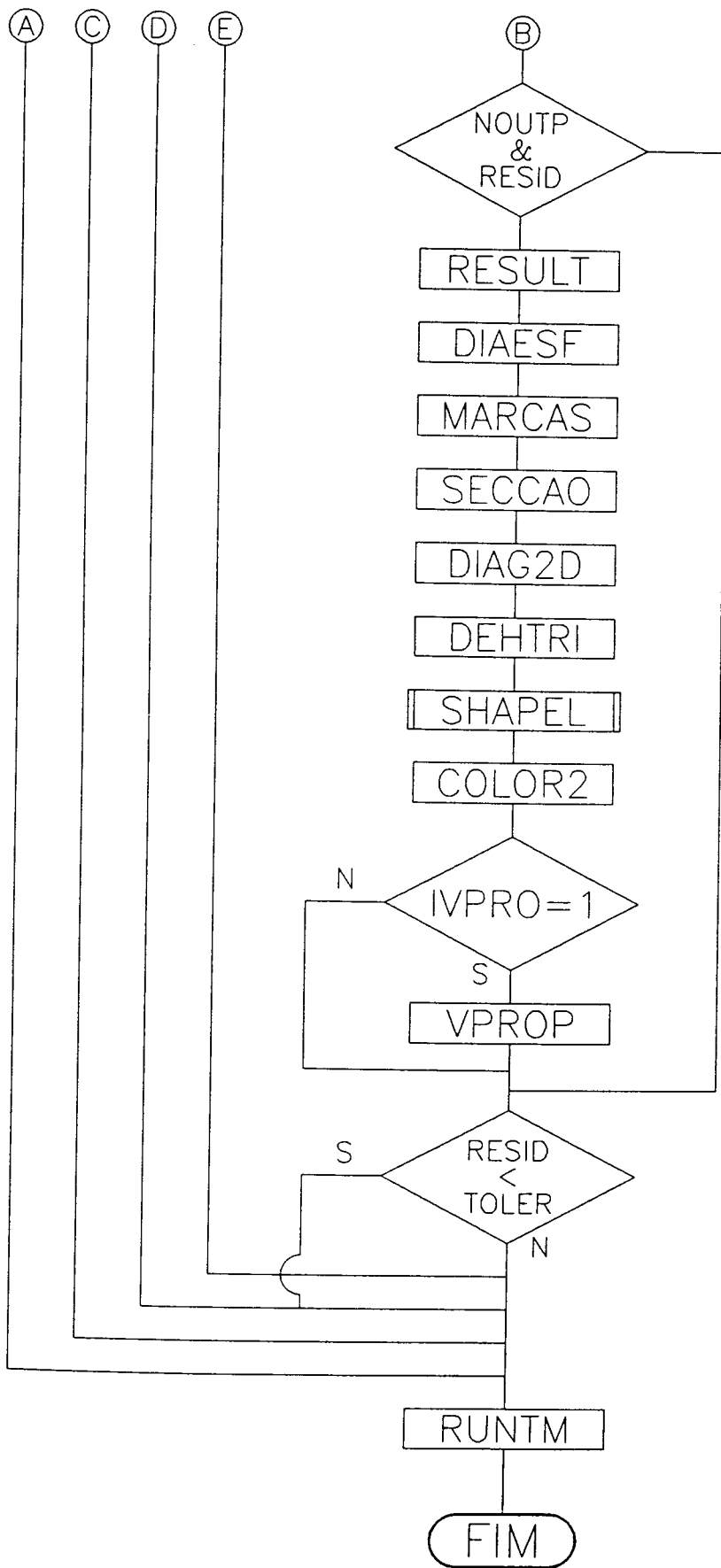
## A 1.1 – Fluxograma global











## A 1.2 – Pormenorização

### PROGRAMA FEMPOR

O segmento principal deste programa efectua a abertura e o fecho de todos os ficheiros utilizados, a chamada sequencial de todas as subrotinas e gere o processo incremental, iterativo, de construção por fases e de análise da estrutura para várias solicitações.

### DADOS 0

Efectua a leitura de dados e saída para o ficheiro de resultados, dos principais dados de controle, tais como se é pretendida a análise não linear material e ou a análise não linear geométrica, se vai ser efectuada uma análise por fases da estrutura, se é pretendida a representação de resultados em gráfico e ou a coloração das tensões no betão, o tipo de elemento e de algoritmo a utilizar, o número de pontos de Gauss e se é pretendida a integração de Gauss – Legendre ou de Gauss – Lobatto.

Chama a subrotina GAUSS que define a posição e o peso dos pontos de integração

PARA CADA FASE DE ANÁLISE DA ESTRUTURA:

### DADOS 1

Continuação da leitura e escrita dos dados de controle tais como o número de nós, elementos, apoios, materiais e solicitações que são acrescentados à estrutura nesta fase, o tipo de saída de resultados e a tolerância.

Chama a subrotina CHECK 1 que testa a validade de alguns destes dados e grava mensagens de erro.

### DADOS 2

Efectua a leitura e a escrita, das coordenadas dos nós e das ligações ao exterior. No caso de se pretender a interacção com o solo identifica os graus de liberdade condicionados.

### DADOS 3

Efectua a leitura e a escrita das características dos materiais (dimensões da secção transversal, área e recobrimento das armaduras).

Identifica e escreve ainda, quais os nós e material de cada elemento.

Chama a subrotina CHECK2 que testa a validade de alguns destes dados e grava mensagens de erros, e LBANDA que calcula a largura da semi-banda.

### INICIA

Inicializa algumas constantes, vectores e matrizes acumulativos.

### RRESTA

No caso de se reiniciar a análise interrompida de um problema, atribuir às grandezas que inicializaria os valores gravados num ficheiro correspondentes à última iteração convergida.

### RENCOR

Finda cada fase de análise, actualiza as coordenadas dos nós.

### TMATRX

Define em cada elemento a matriz de transformação do sistema de eixos local para o global. Necessita da subrotina ANLENG que calcula o comprimento e a inclinação de cada elemento.

### PRETRI

Grava num ficheiro as coordenadas dos nós a identificação dos nós dos elementos e as ligações ao exterior para posteriormente desenhar a estrutura indeformada.

### COLOR 1

Caso nesta fase da análise seja pretendida a coloração das tensões no betão, grava um ficheiro que prepara o desenho de uma malha fictícia de elementos finitos de quatro nós que irá possibilitar essa coloração.

Estes nós coincidem com os pontos de discretização em altura da secção transversal de cada ponto de Gauss (divisão em camadas).

PARA CADA SOLICITAÇÃO A CONSIDERAR NESTA FASE:

### LOADS

Efectua a leitura e escrita da solicitação (cargas concentradas e distribuídas).

No caso das cargas distribuídas procede a integração numérica para definir as forças nodais equivalentes (ver 2.2.3.6). Para tal em cada ponto de Gauss necessita da subrotina SHAPEL que calcula nesse ponto o valor das funções de forma e das suas derivadas e a subrotina JACOBI que calcula o jacobiano e as derivadas das funções de forma.

Por fim agrupa o vector solicitação de cada elemento no vector de solicitação global



da estrutura  $\{F^e\}$  e caracteriza o factor de carga a utilizar em cada incremento, o número de incrementos e o número máximo de iterações admissíveis.

#### DADOS 4

Leitura do número de colorações a efectuar nesta fase e em que incrementos são pretendidas e definição do tipo de diagrama que se pretende efectuar.

PARA CADA INCREMENTO DE SOLICITAÇÃO:

#### INCLOD

Incrementação do vector solicitação (incrementação das cargas exteriores aplicadas e acumulação do novo acréscimo de solicitação às forças residuais no incremento anterior).

PARA CADA ITERAÇÃO:

#### NUMALG

Identifica o algoritmo de resolução a utilizar — rigidez inicial, Newton – Raphson, Newton – Raphson modificado na primeira iteração ou modificado na segunda iteração.

CONFORME O ALGORITMO ESCOLHIDO:

(SE SE PRETENDER A ACTUALIZAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ),

#### STIFF

Calcula a matriz de rigidez de cada elemento finito isoparamétrico agrupando-os para formar a matriz de rigidez global da estrutura.

Para tal, em cada elemento começa por calcular a matriz de elasticidade  $[D]$  e a matriz de deformação  $[B]$ .

Ao calcular a matriz de elasticidade, se for pretendida a ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL utiliza o método descrito em 4.3.3 DIFMET, tendo em conta as relações constitutivas do aço e betão STEEL e CONCRE.

No caso da ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA à matriz de deformação  $[B_0]$  adiciona a matriz de deformação de segunda ordem  $[B_L]$ .

Calcula na subrotina DBMATX o produto das duas matrizes  $[D_T] [B]$ .

A matriz de rigidez de cada elemento no referencial local, é calculada avaliando numericamente o integral  $[k] = \int_{-1}^1 [B]^T ([D_T] [B]) \frac{L}{2} d\xi$  para o que necessita da subrotina SHAPEL e JACOBI já descritas.

No caso da ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA a esta matriz terá de se agrupar a matriz  $[k_\sigma]$  (ver 3.44) devido ao nível de tensões instalado. Para cada elemento conhecendo a matriz de transformação do sistema de eixos local no sistema de eixos global, determina-se a matriz de rigidez do elemento  $[k]$  no sistema de eixos global pela expressão  $[K] = [T] [k] [T]^T$ .

Na subrotina ASSEMB, pela técnica do espalhamento de matrizes, é construída a matriz de rigidez global da estrutura  $[K]^e$ .

#### BANDA

Subrotina de resolução do sistema de equações  $[K]^e \cdot \Delta \{\delta^e\} = \{\psi\}$

A técnica adoptada é a de resolução em banda.

#### STRAIN

Calcula o vector de deformação corrente, nesta iteração, em cada ponto de Gauss de todos os elementos.

Começa por converter os acréscimos de deslocamentos nodais, para o referencial local de cada barra.

De seguida determina a matriz de deformação em cada ponto de Gauss, caso se pretenda a ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA terá de se considerar a matriz de deformação de segunda ordem  $[B_L]$ .

É finalmente determinada a deformação corrente, nessa iteração, por acumulação do acréscimo de deformação agora determinado à deformação total na iteração anterior.

#### STRESS

Calcula as tensões correntes nesta iteração, em cada ponto de Gauss de todos os elementos, e as forças nodais equivalentes ao estado de tensão para cada elemento.

No caso de se considerar a ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL, conhecido o vector de deformação, as tensões são determinadas em ENEMOM, tendo em conta as relações constitutivas do aço STEEL e do betão CONCRE e a história do carregamento destes (analisa se está em carga, descarga ou recarga).

Efectuando-se uma ANÁLISE LINEAR MATERIAL as tensões correntes em cada ponto de Gauss são calculadas multiplicando as deformações correntes pela matriz de elasticidade  $[D_0]$ .

#### CAFINT

Calcula as forças residuais  $\{\psi^e\}$  dessa iteração, ou seja, a diferença entre as forças exteriores aplicadas à estrutura até à iteração em questão (inclusivé) e as forças nodais equivalentes expressas no sistema de eixos global.

#### RESIDO

Calcula o valor do resíduo nessa iteração, para cada grau de liberdade, pelo critério energético e pelo critério das forças. Calcula ainda o parâmetro de rigidez corrente que permite uma avaliação qualitativa de evolução da rigidez global da estrutura.

#### ACTUAL

Atualiza as grandezas necessárias ao processo de análise "path – independent".

#### WRESTA

Grava em ficheiro os valores necessários para um posterior rearranque do problema.

#### RESULT

Grava alguns resultados no ficheiro de resultados (deslocamentos dos pontos nodais, reacções, tensões nos pontos de Gauss).

#### DIAESF

Prepara os desenhos dos diagramas de esforços.

#### MARCAS

Prepara os desenhos que identificam a evolução da fendilhação e esmagamento do betão e da plastificação da armadura.

#### SECÇÃO

Grava informação para o desenho do diagrama de tensões no betão e nas armaduras em secções escolhidas.

#### DIAG2D

Caso seja pretendido, grava um ficheiro que permite o traçado de curvas força – deslocamento e ou curvas momento – curvatura (num dado ponto de Gauss).

### DEHTRI

Se pretendido grava um ficheiro que permite desenhar a estrutura deformada. Conhecidos os deslocamentos dos pontos nodais de um elemento no referencial global, o deslocamento de qualquer ponto intermédio desse elemento é extrapolado a partir dos deslocamentos nodais, usando as funções de forma SHAPEL

### COLOR 2

Se pretendido grava um ficheiro com o valor da tensão no betão, em todas as camadas das secções transversais que contém cada ponto de Gauss; que, juntamente com o ficheiro gravado na subrotina COLOR 1, efectua a coloração do campo de tensões no betão.

SE FOR PRETENDIDA A DETERMINAÇÃO DE CARGAS CRÍTICAS:

### VPROP

Prevê o valor da carga crítica pela resolução de um problema de valores e vectores próprios.





FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



000005958