

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

# Sistemas de Formação de Imagens Temporais

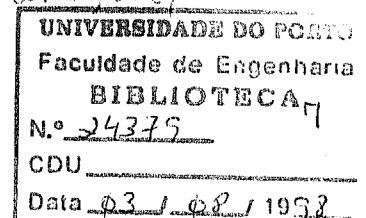
Carlos Alberto Afonso Vinhais

Licenciado em Física, área de especialização em Óptica e Electrónica,  
pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de  
Mestre em Engenharia Electrotécnica e de Computadores  
(Área de especialização de Telecomunicações)

Dissertação realizada sob a supervisão de  
Prof. Dr. Francisco José de Oliveira Restivo  
do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores  
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto, Setembro de 1997



FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

# **Sistemas de Formação de Imagens Temporais**

Carlos Alberto Afonso Vinhais

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de  
Mestre em Engenharia Electrotécnica e de Computadores  
(Área de especialização de Telecomunicações)

Dissertação realizada sob a supervisão de  
Prof. Dr. Francisco José de Oliveira Restivo

Porto, Setembro de 1997

Quero agradecer a todos que, directa ou indirectamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Em particular, quero expressar a minha gratidão ao Prof. Francisco José O. Restivo, pelas discussões estimulantes sobre o tema e ao Prof. Luís Miguel Bernardo pela disponibilidade demonstrada ao longo da realização desta tese. As suas críticas e sugestões foram importantes na correcção e melhoria da escrita da dissertação.

Finalmente, agradeço aos meus pais, que pacientemente me apoiaram. A eles dedico este trabalho.

*C.A.V.*

---

## RESUMO

Existe uma analogia interessante entre o fenómeno da difracção espacial de Fresnel e o fenómeno da dispersão temporal. Esta analogia espaço-tempo permite deduzir expressões para a distância focal de uma lente temporal, vista como o dual de uma lente espacial. Uma lente temporal corresponde simplesmente a uma modulação de fase quadrática no tempo, aproximada por uma porção de uma modulação de fase sinusoidal. Usando moduladores de fase quadrática como lentes temporais e pares de redes de difracção ou fibras ópticas como elementos dispersivos, sistemas de formação de imagens temporais (perfeitamente análogos aos sistemas de formação de imagens espaciais) podem ser implementados permitindo a expansão ou compressão, sem distorção, de formas de onda ópticas.

Descreve-se, nesta tese, uma técnica de compressão de impulsos ópticos baseada no uso de moduladores de fase electroópticos, para produzir um *sweep* linear de frequências, ou seja uma modulação *chirp*. Ao contrário das técnicas passivas de *chirp*, tal como *Self-phase Modulation*, este método activo de compressão de impulsos não depende da potência óptica, sendo aplicável a *lasers* de estado sólido de baixa potência.

Os princípios da formação de imagens temporais são desenvolvidos: os conceitos de condição de formação de imagem, factor de ampliação e resposta impulsional de um sistema de formação de imagens temporais são deduzidos no domínio temporal.

A dualidade espaço-tempo é estendida ao estudo do desempenho de processadores ópticos temporais ultra rápidos. Propõe-se um sistema análogo à configuração espacial  $4f$  para a filtragem óptica de impulsos, sugerindo várias aplicações tais como convolução ou correlação de sinais

temporais. Os aspectos de implementação e alguns exemplos são apresentados, e discute-se a possibilidade de gerar impulsos ópticos ultra curtos.

---

## *ABSTRACT*

There is an interesting analogy between the spatial problem of Fresnel diffraction and the temporal problem of dispersion. This space-time analogy is extended to derive expressions for the focal length of a time lens as a dual of a spatial lens. The time lens is simply a quadratic optical phase modulator in time, which is approximated by a portion of a sinusoidal phase modulator. Using quadratic phase modulators as (time) lenses and grating pairs or optical fibres as dispersive elements, complete temporal imaging systems can be constructed in exact duality with spatial imaging systems, allowing for the distortionless expansion or compression of optical waveforms in time.

We describe a pulse compression technique that uses electro-optic phase modulator to linearly chirp optical pulses. In contrast to passive chirp techniques such as self-phase modulation, this approach of active pulse compression does not depend on the optical power and thus promise for applications to low-power solid state lasers as an alternative to mode locking for realising picosecond sources.

The principles of temporal imaging are developed and time-domain analogs for the imaging condition, magnification ratio and impulse response of a temporal imaging system are derived.

The analysis leads to the conclusion that ultra fast optical temporal processors can be implemented. The space-time duality is extended to optical pulse filtering: an analog set-up in the  $4f$  spatial-filter configuration is proposed and several applications such as the temporal signal convolver or correlator are suggested. The implementation aspects and examples of this approach are discussed, as well as the possibility of generating optical pulses in the picosecond range.

---

## ÍNDICE

|   |    |
|---|----|
| <b>Notação</b>  | xi |
| <b>1 Introdução</b>   | 1  |
| <b>2 Analogia Espaço-Tempo</b>                                    | 5  |
| 2.1 Difraccção paraxial   | 5  |
| 2.2 Dispersão de banda estreita                                   | 8  |
| 2.3 Dualidade espaço-tempo  | 11 |
| 2.4 Soluções das equações de onda                                 | 12 |
| <b>3 Lentes Espaciais e Lentes Temporais</b>                      | 15 |
| 3.1 Lente espacial e distância focal $f$                          | 15 |
| 3.2 Lente temporal e tempo focal $f_T$                            | 18 |
| <b>4 Sistemas de Formação de Imagens Temporais</b>                | 23 |
| 4.1 Sistemas temporais  | 23 |
| 4.2 Condição de formação de imagem                                | 28 |
| 4.3 Ampliação do sistema  | 29 |
| 4.4 Resposta impulsional do sistema                               | 31 |
| 4.5 Resolução do sistema  | 35 |
| <b>5 Simulação de um Sistema de Formação de Imagens Temporais</b> | 39 |
| 5.1 Mecanismos de dispersão                                       | 39 |
| 5.1.1 Fibra óptica  | 39 |

---

|  |           |
|--|-----------|
| 5.1.2 Par de redes de difracção                    | 43        |
| 5.2 Modulação de fase quadrática                   | 48        |
| 5.2.1 Modulação de fase quadrática com um MEO      | 48        |
| 5.2.2 Abertura temporal de um MEO                  | 52        |
| 5.3 Compressão/expansão de impulsos ópticos        | 53        |
| 5.3.1 Imagem temporal de impulsos rectangulares    | 55        |
| 5.3.2 Imagem temporal de impulsos Gaussianos       | 60        |
| 5.3.3 Imagem temporal de outras formas de onda     | 66        |
| <b>6 Aplicações dos Sistemas Temporais</b>         | <b>69</b> |
| 6.1 Transformador de Fourier                       | 69        |
| 6.1.1 Impulso de entrada no MEO                    | 70        |
| 6.1.2 Impulso de entrada na fibra óptica           | 73        |
| 6.2 Processamento de Sinal                         | 75        |
| 6.2.1 O sistema temporal $4f_T$                    | 75        |
| 6.2.2 Correlação/convolução de duas formas de onda | 77        |
| 6.2.3 Reconhecimento de padrões: filtro adaptado   | 80        |
| 6.3 Geração de impulsos ópticos ultra curtos       | 83        |
| <b>7 Conclusões</b>                                | <b>89</b> |
| <b>Apêndice</b>                                    | <b>91</b> |
| <b>Referências</b>                                 | <b>97</b> |

---

## NOTAÇÃO

|            |   |
|------------|---|
| $i$        | Entidade imaginária: $i = \sqrt{-1}$  |
| $x, y, z$  | Coordenadas cartesianas   |
| $t$        | Variável temporal (tempo)   |
| $c$        | Velocidade da luz no vazio  |
| $\lambda$  | Comprimento de onda da luz no vazio   |
| $k$        | Número de onda de uma onda electromagnética   |
| $\beta$    | Constante de propagação de uma onda electromagnética  |
| $E$        | Campo eléctrico   |
| $E$        | Envolvente espacial do campo eléctrico  |
| $A$        | Envolvente temporal do campo eléctrico (também designada por pacote de ondas, forma de onda ou impulso)                             |
| $\omega_0$ | Frequência angular de uma portadora óptica, ou frequência angular central do espectro da envolvente temporal $A$ do campo eléctrico |
| $\omega$   | Frequência angular de uma componente espectral da envolvente temporal   |
| $\tau$     | Tempo local   |
| $\xi$      | Variável de propagação  |
| $n$        | Índice de refacção de um material   |
| $v$        | Velocidade de uma componente espectral de frequência angular $\omega$   |
| $n_g$      | Índice de refacção de grupo   |
| $v_g$      | Velocidade de grupo   |
| $\tau_g$   | Atraso de grupo   |

|                 |   |
|-----------------|---|
| $\beta_2^{(i)}$ | dispersão de velocidade de grupo, DVG, do meio ( $i$ )                          |
| $L_D$           | Comprimento de dispersão  |
| $\Lambda$       | Período de uma rede de difracção  |
| $\theta_i$      | Ângulo de incidência de uma onda com a normal ao plano de uma rede de difracção |
| $\theta_r$      | Ângulo de difracção de uma onda com a normal ao plano de uma rede de difracção  |
| $\phi$          | Atraso de fase  |
| $f$             | Distância focal de uma lente espacial   |
| $t_i$           | Transmitância de uma lente espacial   |
| $k_i$           | Frequência espacial instantânea   |
| $f_T$           | Tempo focal de uma lente temporal   |
| $H$             | Transmitância de uma lente temporal   |
| $\omega_i$      | Frequência (angular) temporal instantânea                                       |
| $P$             | Função pupila de uma lente temporal   |
| $h$             | Resposta impulsional de um sistema temporal                                     |
| $M$             | Factor de ampliação de um sistema temporal                                      |
| $A$             | Amplitude (pico) de modulação do MEO (modulador electroóptico)                  |
| $\omega_m$      | Frequência (angular) de modulação do MEO  |
| $T_m$           | Período de modulação do MEO   |
| $\tau_a$        | Abertura temporal de um MEO   |
| $T_0, T_1$      | Largura, $e^{-1}$ da intensidade, de um impulso                                 |
| $T_{FWHM}$      | Largura total, à meia altura, de um impulso                                     |
| $\tilde{Q}$     | Transformada de Fourier ( $TF$ ) - espectro de frequências - da função $Q$      |

---

## INTRODUÇÃO

Actualmente, existe um interesse considerável nas técnicas de compressão e nos métodos de geração de impulsos ópticos ultra curtos, que não podem ser obtidos directamente da saída de *lasers*. Assim, impulsos ultra curtos são geralmente produzidos por compressão dos impulsos gerados por *mode-locking*. A saída de *lasers mode-locked* assume a forma de trens de impulsos curtos, com duração entre 0.4 ns (para o *laser* de He-Ne) e 2 ps (para o *laser* Nd:glass), e separados pelo tempo de trânsito de uma volta dentro da cavidade laser, tipicamente da ordem de poucos ns.

Uma das técnicas de compressão de impulsos ópticos baseia-se no uso de um par de redes de difracção numa configuração de dispersão de velocidade de grupo DVG positiva, permitindo a compressão de mais de 1000 vezes a duração inicial dos impulsos <sup>[Pessot 87; Treacy 68; Treacy 69]</sup>.

Por outro lado, o fenómeno de SPM (*Self Phase Modulation*) observado em fibras ópticas tem encontrado, com sucesso, aplicações na compressão de impulsos ópticos. Este fenómeno corresponde a uma modulação *chirp* (modulação de fase quadrática) produzindo um *sweep* linear na frequência óptica instantânea de cada impulso; a compressão dos impulsos ópticos ocorre posteriormente numa linha de dispersão tal como um par de redes de difracção ou outra fibra óptica <sup>[Agraw. 89]</sup>.

O método baseado na SPM é um método excelente para gerar impulsos ultra curtos que, no entanto, apresenta alguns inconvenientes: em particular, uma vez que o processo de *chirping* baseado na SPM é um processo óptico não linear que depende da intensidade, esta técnica não é aplicável a impulsos de baixa potência.

Posteriormente, foram sugeridos métodos electroópticos de compressão de impulsos que oferecem grande estabilidade e alto poder de controlo. O MEO (modulador de fase electroóptico) surge como alternativa ao fenómeno de SPM observado dentro de fibras ópticas: este tipo de modulador permite realizar uma modulação *chirp*, cuja taxa depende da potência e frequência de excitação do próprio MEO, e não da potência óptica de entrada. Esta técnica é um processo de compressão de impulsos activa (uma vez que potência externa é aplicada) permitindo que o perfil do impulso, a sua posição temporal e a largura do impulso comprimido sejam altamente controlados electricamente.

Recentemente, a atenção dos investigadores recaiu sobre uma dualidade matemática existente entre equações diferenciais que descrevem os fenómenos da difracção paraxial e da dispersão de banda estreita. De facto, o estudo do problema da difracção espacial associado à propagação no espaço livre de feixes ópticos é formalmente idêntico ao estudo do problema da dispersão temporal observada durante a propagação de impulsos ópticos em meios dieléctricos.

Assim, um MEO e uma linha de dispersão representam os componentes básicos de um compressor de impulsos ópticos, correspondente, no domínio espacial, à focagem de feixes ópticos por uma lente espacial [Treacy 69]. Este sistema de compressão de impulsos ópticos foi melhorado [Kolner 89] adicionando uma linha de dispersão antes do MEO, permitindo produzir uma réplica comprimida do impulso de entrada, de forma análoga à formação de imagens espaciais [Kolner 94a]. Os componentes destes sistemas são linhas de dispersão e moduladores *chirp* que simulam a propagação no espaço livre e lentes espaciais, respectivamente: estes sistemas são designados (naturalmente) por *sistemas de formação de imagens temporais*.

A analogia [Kolner 92; Kolner 94a] entre os fenómenos da difracção óptica e dispersão óptica estende-se aos conceitos espaciais tais como distância, distância focal e frequências espaciais. Estes conceitos possuem análogos no domínio temporal: tempo, tempo focal e frequência óptica. A distância focal de uma lente espacial (distância à qual um feixe colimado é reduzido a um pequeno *spot*) associa-se a uma condição de formação de imagem, prescrevendo as distâncias entre objecto, lente e imagem. A origem da distância focal reside na particularidade de uma lente espacial produzir uma transformação de fase. No domínio temporal, o análogo desta operação é simplesmente uma modulação de fase temporal. Neste contexto, um MEO é designado por *lente temporal*.

A compressão de impulsos ópticos, da difracção de Fresnel e das comunicações por fibras ópticas podem, dentro de certas condições, ser analisados como respostas a filtros de fase quadráticos [Papou. 94]. Esta aproximação estabelece analogias muito estreitas entre áreas aparentemente não relacionadas: teoria da difracção, fibras ópticas e processamento de sinal.

A configuração da formação de imagens temporais é estendida para efectuar filtragem temporal. A configuração final do sistema temporal sugerido é equivalente ao processador espacial  $4f$  e muitos dos seus usos, tal como correlação e convolução podem ser estendidos ao domínio temporal.

Os fenómenos da difracção e da dispersão são problemas descritos por equações diferenciais parabólicas com coeficientes imaginários, admitindo por isso soluções de onda. No Capítulo 2, apresentam-se as soluções das equações de onda para cada caso, considerando a aproximação paraxial (no caso da difracção) e a aproximação de banda estreita (na caso da dispersão). A evolução da envolvente (espacial ou temporal) do campo eléctrico é encontrada efectuando a transformação de Fourier da distribuição inicial do campo, multiplicando o espectro por uma função quadrática na variável de Fourier e linear na variável de propagação, e finalmente aplicando a transformação de Fourier inversa. As aproximações consideradas evidenciam a analogia existente entre estes dois fenómenos, manifestando-se pelo alargamento da envolvente espacial (no caso da difracção) e da envolvente temporal (no caso da dispersão) do campo eléctrico, a medida que a forma de onda se propaga.

No Capítulo 3, as lentes espaciais e as lentes temporais são vistas como transformadores de fase quadrática. Os conceitos de distância focal e tempo focal, são descritos em termos da taxa de *chirp* da frequência instantânea (espacial ou temporal) de Fourier.

A configuração dos sistemas de formação de imagens temporais é apresentada no Capítulo 4. Demonstra-se que, por escolha adequada dos parâmetros da lente temporal e das linhas de dispersão, é satisfeita a condição de formação de imagem temporal. Tal como no caso espacial, estes sistemas são basicamente caracterizados por uma resposta impulsional (correspondente à  $TF$  da função pupila da lente temporal). Apresenta-se um critério de resolução do sistema, que depende fundamentalmente da abertura temporal da lente.

No Capítulo 5, são caracterizados vários componentes que representam os elementos constituintes dos sistemas temporais: fibras ópticas e par(es) de redes de difracção podem ser usados como linhas de dispersão, enquanto que moduladores electroópticos (MEO) realizam a

acção de uma lente temporal, quando excitado por um sinal sinusoidal. Resultados computacionais (compressão e expansão de impulsos ópticos) exemplificam a formação de imagens temporais.

Muitas operações paralelas podem ser convertidas facilmente num conjunto de operações em série. O processamento óptico ultra rápido em série é simulado no Capítulo 6, com vários sistemas ópticos (temporais) sugeridos com base na analogia espaço-tempo. Estes sistemas são capazes de realizar transformadas de Fourier temporais e operações de filtragem temporal, tendo assim aplicações no domínio do processamento de sinal. Finalmente, o sistema temporal é implementado como método poderoso de geração de impulsos ultra curtos.

---

## ANALOGIA ESPAÇO-TEMPO

Verifica-se uma dualidade matemática entre as equações que descrevem a difracção paraxial (difracção de Fresnel) de feixes confinados no espaço e a dispersão de impulsos de largura de banda estreita em guias de onda dieléctricos [Kolner 94a].

Geralmente, as evoluções espacial e temporal de uma função de onda são estudadas separadamente. As equações de onda são, para cada caso, obtidas com base em aproximações, tornando-se assim equações com soluções exactas.

Apresentar-se-á neste Capítulo a equação de onda para o campo eléctrico (ou magnético), para cada caso, construída a partir das equações de Maxwell. A solução mais geral (relativamente difícil de obter) da equação de onda permite a descrição da evolução temporal de uma função de onda de forma arbitrária.

### 2.1 Difracção paraxial

Consideremos um feixe óptico que se propaga segundo uma direcção, coincidente com o eixo  $z$ . O campo eléctrico total  $\mathbf{E}$  que descreve o feixe assume a forma

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E(x, y, z) \exp\{i[\omega t - k(\omega)z]\} \quad (2.1)$$

onde  $E(x, y, z)$  é uma função envolvente que varia suavemente e que descreve o perfil transversal do feixe óptico num plano  $xy$  perpendicular ao eixo  $z$ ,  $k$  o número de onda dado por  $k = 2\pi/\lambda$ ,

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda óptico do feixe.

A equação que descreve a difracção paraxial do campo dado por (2.1) é obtida a partir das equações de Maxwell, aplicando as técnicas usuais de cálculo vectorial, e exprime-se por

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

onde se assumiu o campo eléctrico como função escalar da posição. Na equação anterior,  $\mu$  e  $\varepsilon$  são a permeabilidade e a permitividade, respectivamente, do meio onde a onda se propaga.

A primeira aproximação considerada no estudo da difracção é assumir o espectro de frequência do campo como um espectro *monocromático*, de frequência angular óptica  $\omega_0$ , ou seja,

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, \omega) = \mathbf{E}_0(x, y, z) \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.3)$$

$\omega_0$  corresponde à frequência angular da portadora óptica, modulada pela função espacial  $\mathbf{E}(x, y, z)$  - envolvente - do impulso, e  $\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, \omega)$  é a transformada de Fourier, espectro de frequência, do campo eléctrico  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ . Na relação (2.3),  $\delta$  representa a função *delta* de Dirac (ver Apêndice, Secção A).

A equação de onda (2.2) reduz-se então à equação de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.4)$$

onde o número de onda  $k$  é tal que

$$k^2 = \mu \varepsilon \omega_0^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \quad (2.5)$$

Prossegue-se o estudo da equação (2.4) para o caso de raios paraxiais, ou seja, feixe confinado ao longo do eixo de propagação: *aproximação paraxial*. A variação de fase mais rápida ocorre então ao longo do eixo  $z$ . Esta dependência pode ser identificada explicitamente

# Temporal Imaging Systems

Carlos Alberto Afonso Vinhais

FEUP, September 1997

## *Abstract:*

There is an interesting analogy between the spatial problem of Fresnel diffraction and the temporal problem of dispersion. This space-time analogy is extended to derive expressions for the focal length of a time lens as a dual of a spatial lens. The time lens is simply a quadratic optical phase modulator in time, which is approximated by a portion of a sinusoidal phase modulator. Using quadratic phase modulators as (time) lenses and grating pairs or optical fibres as dispersive elements, complete temporal imaging systems can be constructed in exact duality with spatial imaging systems, allowing for the distortionless expansion or compression of optical waveforms in time.

We describe a pulse compression technique that uses electro-optic phase modulator to linearly chirp optical pulses. In contrast to passive chirp techniques such as self-phase modulation, this approach of active pulse compression does not depend on the optical power and thus promise for applications to low-power solid state lasers as an alternative to mode locking for realising picosecond sources.

The principles of temporal imaging are developed and time-domain analogs for the imaging condition, magnification ratio and impulse response of a temporal imaging system are derived.

The analysis leads to the conclusion that ultra fast optical temporal processors can be implemented. The space-time duality is extended to optical pulse filtering: an analog set-up in the  $4f$  spatial-filter configuration is proposed and several applications such as the temporal signal convolver or correlator are suggested. The implementation aspects and examples of this approach are discussed, as well as the possibility of generating optical pulses in the picosecond range.

escrevendo:

$$E_0(x, y, z) = E(x, y, z) \exp(-ikz) \quad (2.6)$$

onde  $E(x, y, z)$  é uma função envolvente que varia suavemente comparada com o número de onda  $k$ . Usando  $E_0$  dado pela equação (2.6) na equação de Helmholtz (equação (2.4)), obtém-se a equação de onda reduzida:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

A aproximação paraxial pode ser matematicamente expressa pelas relações seguintes:

$$\left| \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right| \quad (2.8)$$

$$\left| \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \right| \quad (2.9)$$

$$\left| \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial E}{\partial z} \right| \quad (2.10)$$

das quais resulta a “equação de onda paraxial”:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

ou, de uma forma mais compacta,

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_t^2 E \quad (2.12)$$

onde  $\nabla_t$  é o operador Laplaciano nas direcções transversais, ou ainda

$$E_z = -\frac{i}{2k}(E_{xx} + E_{yy}) \quad (2.13)$$

Os subscritos da amplitude dos campos implicam diferenciação parcial relativamente à respectiva coordenada.

As equações (2.11) - (2.13) descrevem a evolução da envolvente do campo eléctrico durante a sua propagação ao longo do eixo  $z$ , dentro da aproximação paraxial.

## 2.2 Dispersão de banda estreita

Neste capítulo, deduz-se a equação diferencial para a evolução da envolvente do campo eléctrico de um impulso ou “pacote de ondas”, de largura de banda estreita, durante a sua propagação ao longo de um eixo.

O campo eléctrico total para este problema pode ser representado por:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = A(z, t) \exp\{i[\omega t - \beta(\omega)z]\} \quad (2.14)$$

onde  $A(z, t)$  é uma função envolvente que varia suavemente no tempo, e que descreve um pacote de ondas que se propaga numa direcção coincidente com o eixo  $z$ .  $\beta(\omega)$  é designado por número de onda, dado por  $n\omega/c$ , onde  $n$  é o índice de refração do meio onde o impulso se propaga e  $c$  a velocidade da luz no vazio.

Na análise que se segue, será ignorado o perfil espacial do impulso, aproximando-o a uma *onda plana infinita*. Uma segunda aproximação será usada: deixar-se-á de assumir um campo monocromático, ou seja, considera-se o espectro de frequências temporais limitado a um intervalo conveniente  $\Delta\omega$ , ou seja, uma *banda estreita* de frequências.

Na propagação de qualquer componente espectral do impulso será considerada a expansão em série de Taylor da constante de propagação  $\beta(\omega)$ , até a segunda ordem em  $\omega$ . Assim poder-se-á encontrar uma equação diferencial para uma componente espectral arbitrária  $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$  e sobrepor todas as componentes para encontrar o espectro  $\tilde{A}(z, \omega)$  do impulso.

Considera-se a envolvente  $A(z, t)$  uma função que varia suavemente no tempo e ao longo da coordenada  $z$ . A transformada desta função, usando  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  e  $\Delta\beta = \beta - \beta_0$  como as variáveis de Fourier, é dada (ver Apêndice, Secção B) por

$$\tilde{A}\left(\frac{\Delta\beta}{2\pi}, \frac{\Delta\omega}{2\pi}\right) = TF\{A(z, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) \exp[-i(\Delta\omega t - \Delta\beta z)] dz dt \quad (2.15)$$

A transformada de Fourier inversa ( $TF^{-1}$ ) será então definida como

$$A(z, t) = TF^{-1}\left\{\tilde{A}\left(\frac{\Delta\beta}{2\pi}, \frac{\Delta\omega}{2\pi}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}\left(\frac{\Delta\beta}{2\pi}, \frac{\Delta\omega}{2\pi}\right) \exp[i(\Delta\omega t - \Delta\beta z)] d(\Delta\beta) d(\Delta\omega) \quad (2.16)$$

Considerando a largura de banda  $\tilde{A}$  estreita e centrada à volta da frequência  $\omega_0$ , a expansão, em série de Taylor, da constante de propagação  $\beta(\omega)$  à volta de  $\omega_0$  é:

$$\beta(\omega) \cong \beta_0 + (\omega - \omega_0) \left. \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right|_{\omega=\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left. \frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} + \dots \quad (2.17)$$

A equação (2.16) permite verificar que as funções  $\partial A/\partial t$  e  $\partial A/\partial z$  podem ser identificados como as transformadas de Fourier das funções  $i\Delta\omega\tilde{A}$  e  $-i\Delta\beta\tilde{A}$ , respectivamente. Usando este facto, rescreve-se  $\Delta\omega$  e  $\Delta\beta$  como  $-i\partial/\partial t$  e  $i\partial/\partial z$ . Assim, a expansão (2.17) expressa-se em termos destes operadores como

$$i \frac{\partial}{\partial z} = -i \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

Operando (2.18) na função  $A(z, t)$  envolvente do campo eléctrico, obtém-se

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) A(z, t) = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

onde  $v_g$  é definida como a velocidade de grupo do impulso:

$$v_g = \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (2.20)$$

Introduzindo a mudança de variáveis seguinte,

$$\tau = (t - t_0) - \left( \frac{z - z_0}{v_g} \right) \quad (2.21)$$

$$\xi = z - z_0 \quad (2.22)$$

onde  $t_0$  e  $z_0$  são referências (constantes) arbitrárias, a equação (2.19) é simplificada para assumir a forma

$$\frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \quad (2.23)$$

ou ainda

$$A_\xi = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} A_{\tau\tau} \quad (2.24)$$

onde os subscritos significam diferenciação parcial relativamente à respectiva coordenada.

A equação (2.23), ou (2.24), assume uma forma particularmente conveniente, uma vez que a solução refere-se à evolução do impulso centrado na envolvente ( $\tau = 0$ ), movendo-se à velocidade de grupo  $v_g$ , usando o parâmetro  $\xi$  como distância de propagação, ou seja, à evolução do impulso no referencial de grupo. A variável  $\tau$  será designada por *tempo local*.

### 2.3 Dualidade espaço-tempo

É interessante notar, da análise anterior, que existe uma dualidade entre as aproximações complementares usadas no estudo dos problemas da difracção paraxial e dispersão de banda estreita. Esta dualidade é ilustrada na Figura 2.1, onde se consideram os espectros de frequência espacial e temporal para cada caso.

No problema da difracção paraxial, a monocromaticidade de uma função de onda é representada por uma função *delta* no seu espectro de frequência temporal, posicionada na frequência portadora  $\omega = \omega_0$ . A natureza paraxial do perfil espacial implica uma banda estreita de frequências espaciais centrada à volta de  $k_x = k_y = 0$ , para um feixe que se propaga segundo uma direcção  $z$ .

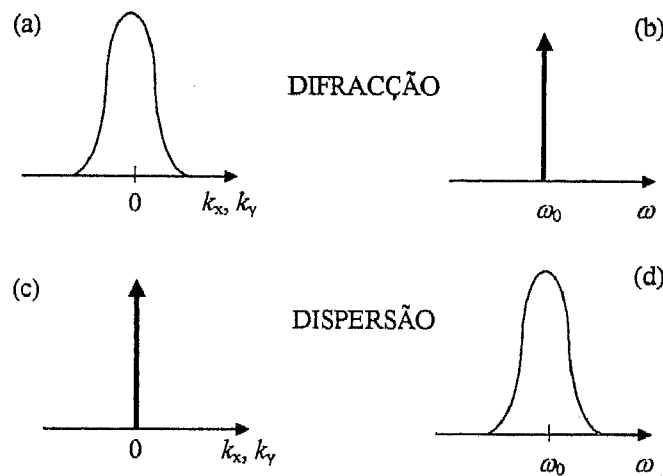


Figura 2.1: Dualidade entre as aproximações usadas na análise dos problemas da difracção: (a) paraxial e (b) monocromático, e dispersão: (c) onda plana e (d) banda estreita.

No caso do fenómeno da dispersão, a estrutura temporal (e.g. impulsos) leva a considerar uma banda estreita (finita) de frequências temporais centrada na frequência temporal  $\omega_0$  da portadora óptica. Aproximar uma função de onda a uma onda plana infinita requer a existência de uma forma espacial da cromaticidade, i.é., o espectro de frequência espacial será uma função *delta* em  $k_x = k_y = 0$ .

## 2.4 Solução das equações de onda

Viu-se como aproximações complementares nas equações de onda levaram a novas equações das envolventes dos campos eléctricos para os casos da difracção paraxial e dispersão de banda estreita.

Estas aproximações permitiram transformar equações hiperbólicas em equações diferenciais parabólicas, que normalmente se associam às equações de difusão. No entanto estas equações têm coeficientes imaginários, sendo por isso equações de onda para ondas de dispersão linear, também chamadas equações de Schrödinger.

É possível demonstrar <sup>[Goodm. 68]</sup> que a solução das equações de onda (2.11) e (2.23) assume, para o problema da difracção paraxial, a forma integral seguinte:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \tilde{E}(k_x, k_y, 0) \exp\left[i \frac{(k_x^2 + k_y^2)z}{2\kappa}\right] \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y \quad (2.25)$$

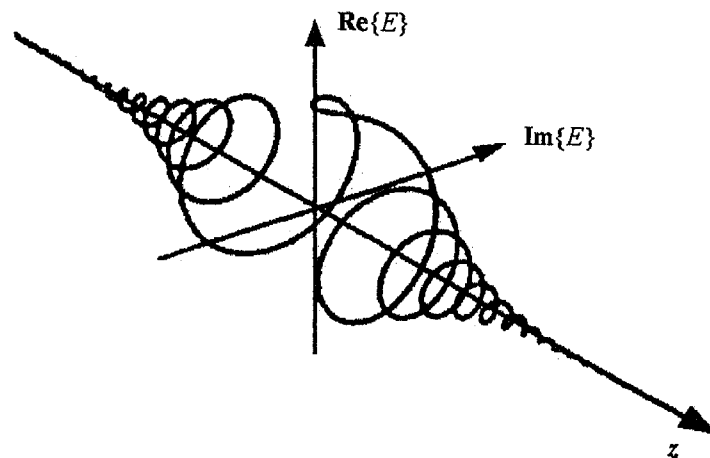
e <sup>[Agraw. 89]</sup>,

$$A(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega) \exp\left(-i \frac{\xi}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \omega^2\right) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (2.26)$$

para o problema da dispersão de largura de banda estreita.

As soluções (2.25) e (2.26) da propagação de ondas são encontradas multiplicando o espectro inicial por um termo de fase, quadrático em frequência e linear na variável de propagação. Este efeito introduz uma espiral no espectro complexo de Fourier, como ilustrado na Figura 2.2.

O termo de fase quadrático pode ser visto como produzindo um efeito de filtragem: à medida que o campo se propaga, o aumento das oscilações de fase rápidas associadas às frequências elevadas tende a reduzir a sua contribuição no integral (de sobreposição) de Fourier. Este efeito traduz-se num alargamento espacial (no caso da difracção), e num alargamento temporal (no caso da dispersão), da envolvente do campo, no espaço real.



**Figura 2.2:** Filtragem no domínio das frequências para equações diferenciais parabólicas. Para a difracção e dispersão, o espectro do campo eléctrico  $\mathbf{E}$  é multiplicado por uma função de fase quadrática cujo declive aumenta com o tempo <sup>[Kolner 94a]</sup>.

É importante notar que a difracção paraxial e a dispersão de banda estreita não alteram a magnitude do espectro de Fourier (ambas são efeitos não dissipativos). Observa-se meramente um rearranjo de fase do espectro inicial, alterando assim a forma de onda inicial.

Neste Capítulo, viu-se que o estudo do problema da difracção associado à propagação no espaço livre de feixes ópticos é formalmente idêntico ao estudo do problema da dispersão observada durante a propagação de formas de onda temporais, e.g. impulsos ópticos, em meios dieléctricos.

As equações de onda e respectivas soluções exactas para cada caso são obtidas introduzindo a aproximação paraxial (na caso da difracção) e a aproximação de banda estreita (na caso da dispersão). Estas aproximações evidenciam a analogia existente entre estes dois fenómenos: a difracção paraxial traduz-se num efeito de alargamento espacial da envolvente espacial do campo eléctrico, e a dispersão de banda estreita num efeito de alargamento temporal da envolvente temporal, à medida que a forma de onda se propaga.

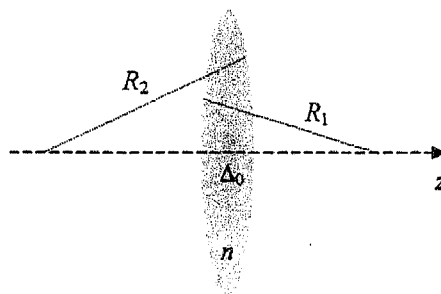
---

## LENTE ESPACIAIS E LENTE TEMPORAIS

No Capítulo anterior, mostrou-se como a dispersão de banda estreita no domínio temporal pode ser vista como o análogo da difração paraxial espacial. Esta dualidade espaço-tempo sugere um estudo mais profundo da relação entre fenômenos observados no domínio espacial e temporal. Propõe-se, neste Capítulo, definir o análogo temporal de uma lente espacial, uma vez que as lentes espaciais são componentes de relativa importância usados em várias aplicações.

### 3.1 Lente espacial e distância focal $f$

Consideremos uma lente espacial representada na Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Lente espacial convencional:  $R_1$  e  $R_2$ : raios de curvatura das superfícies da lente;  $n$ : índice de refração do material (vidro);  $\Delta_0$ : espessura máxima da lente.

O efeito de uma lente pode ser descrito por uma transformação de fase, ou transmitância da

lente, da forma [Born 80; Goodm. 68]

$$t_l(x, y) = \exp(-ikn\Delta_0) \exp\left[i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right] \quad (3.1)$$

ou ainda,

$$t_l(x, y) = \exp(-ikn\Delta_0) \exp\left(i\frac{k}{2f}x^2\right) \exp\left(i\frac{k}{2f}y^2\right) \quad (3.2)$$

onde  $\Delta_0$  é a espessura máxima da lente e  $f$  é a distância focal contendo as propriedades físicas da lente tais como os raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$  (por convenção,  $R_1 > 0$  e  $R_2 < 0$ ) das duas superfícies e o índice de refração  $n$  do material que constitui a lente (geralmente vidro):

$$f = \frac{1}{(n-1)} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

O primeiro termo exponencial de (3.1) representa um simples atraso de fase e poderá ser ignorado na exposição seguinte. O segundo termo é a essência da operação de uma lente: uma lente produz uma modulação de fase quadrática, instantânea, no espaço real. Por seu lado, a modulação de fase quadrática produzida pela difracção paraxial verifica-se no espaço de Fourier.

A função de fase espacial produzida por uma lente é então, de (3.1), representada por

$$\phi(x, y) = \frac{k(x^2 + y^2)}{2f} \quad (3.4)$$

ou ainda, de (3.2),

$$\phi(x, y) = \phi_x + \phi_y = \frac{kx^2}{2f} + \frac{ky^2}{2f} \quad (3.5)$$

Escrevendo a função de fase da forma mais geral em termos de série de MacLaurin, para a coordenada transversal  $x$ , obtém-se

$$\phi_x = \phi_x(0) + x \left. \frac{d\phi_x}{dx} \right|_{x=0} + \frac{x^2}{2} \left. \frac{d^2\phi_x}{dx^2} \right|_{x=0} + \dots \quad (3.6)$$

e igualando o primeiro membro a uma função de fase específica (3.5) termo a termo, identifica-se imediatamente a relação

$$f = \frac{k}{\frac{d^2\phi}{dx^2}} \quad (3.7)$$

Esta expressão para a distância focal  $f$  pode ser interpretada como a razão entre o número de onda  $k$  e a curvatura de fase introduzida pela lente.

Definindo a *frequência espacial instantânea*,  $k_i$ , ou número de onda instantâneo, como a derivada transversal da fase espacial <sup>[Kolner 94b]</sup>

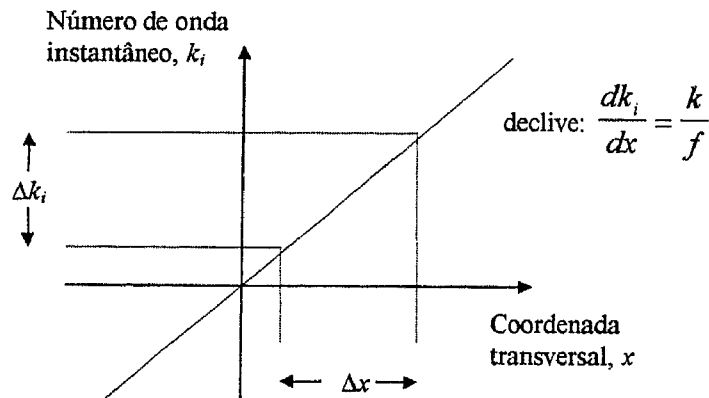
$$k_i \equiv \frac{d\phi_x}{dx} = \frac{kx}{f} \quad (3.8)$$

verifica-se que, para o caso simples de fase quadrática, o número de onda instantâneo é uma função linear do espaço e passa pelo valor nulo no eixo da lente. Esta dependência ilustra-se na Figura 3.2, onde, lembrando o Capítulo 2,  $\Delta k_i$  representa a largura de banda de frequências espaciais, de uma forma de onda na aproximação paraxial.

A taxa de variação, ou declive, da função (3.8)

$$\frac{dk_i}{dx} = \frac{d^2\phi_x}{dx^2} = \frac{k}{f} \quad (3.9)$$

é importante, podendo ser designada por *taxa de chirp* da frequência espacial instantânea, directamente relacionada com a distância focal  $f$ .



**Figura 3.2:** Número de onda (transversal) instantâneo  $k_i$  produzido por uma lente, na aproximação paraxial (feixe confinado na vizinhança do eixo da lente - eixo de propagação).

Pode-se então redefinir a distância focal em termos da taxa de *chirp* :

$$f = \frac{k}{\frac{dk_i}{dx}} \quad (3.10)$$

A equação (3.10) representa a expressão mais geral da distância focal, para a restrição de curvatura de segunda ordem.

### 3.2 Lente temporal e tempo focal $f_T$

Qualquer mecanismo produzindo uma modulação de fase quadrática, no tempo, poder-se-á considerar como o análogo no domínio temporal de uma lente espacial, ou seja, uma *lente temporal*.

Para encontrar o equivalente a uma lente espacial, no domínio temporal, a análise é baseada nas equações parabólicas como orientação.

Uma vez que a lente espacial produz uma modulação de fase quadrática nas variáveis de perfil  $x$  e  $y$ , é natural tentar relacionar a acção de uma lente temporal com esta forma de modulação, i. é., uma modulação de fase quadrática na variável temporal (tempo local)  $\tau$ . Poder-se-ia definir esta modulação por  $\phi(\tau) = \mu\tau^2$ , com  $\mu$  constante. Em vez disso, recordando a dualidade espaço-tempo, procurar-se-á escrever a função de fase produzida por uma lente temporal na forma

$$\phi(\tau) = \frac{\omega_0 \tau^2}{2f_T} \quad (3.11)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência óptica da portadora e  $f_T$  é definido como o *tempo focal* da lente temporal. Esta função de fase temporal será então o dual da sua componente espacial (3.4).

A transmitância de uma lente temporal será então descrita pela função

$$H(\tau) = \exp[i\phi(\tau)] = \exp\left(i \frac{\omega_0 \tau^2}{2f_T}\right) \quad (3.12)$$

Pode-se encontrar, tal como no caso espacial, uma expressão geral para o tempo focal de uma lente temporal realizada por qualquer processo físico, comparando (3.11) com a expansão, em série de Taylor, da função de fase  $\phi(\tau)$  à volta do instante de tempo (referência)  $\tau_0$ :

$$\phi(\tau) = \phi_0(\tau_0) + (\tau - \tau_0) \left. \frac{d\phi}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} + \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2!} \left. \frac{d^2\phi}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_0} + \dots \quad (3.13)$$

Uma vez que a origem do tempo é arbitrária, pode-se impor  $\tau_0 = 0$ . Equacionando o segundo termo de (3.13) a (3.11), obtém-se

$$f_T = \frac{\omega_0}{\frac{d^2\phi}{d\tau^2}} \quad (3.14)$$

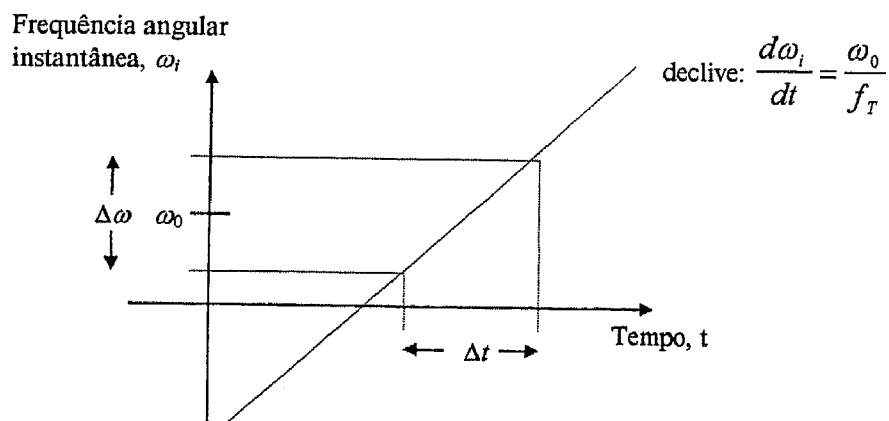
Invocando novamente o conceito de frequência instantânea (desta vez no domínio temporal), define-se, de uma forma análoga ao caso espacial, uma *frequência angular instantânea*  $\omega_i$ , em função da frequência óptica portadora  $\omega_0$ , por <sup>[Kolner 94b]</sup>.

$$\omega_i \equiv \omega_0 + \frac{d\phi}{d\tau} = \omega_0 + \frac{d\phi}{dt} \quad (3.15)$$

Diferenciando novamente e substituindo em (3.14) redefine-se o tempo focal em termos da taxa de *chirp*,  $d\omega/dt$ , por

$$f_T = \frac{\omega_0}{\frac{d\omega_i}{dt}} \quad (3.16)$$

A Figura 3.3 representa a variação da frequência angular instantânea  $\omega_i$  com o tempo, realçando a relação entre a taxa de *chirp* e o tempo focal.



**Figura 3.3:** Frequência temporal instantânea  $\omega_i$  produzida por uma lente temporal na aproximação quadrática.

Toda a análise anterior permite constatar que as características de uma lente temporal podem ser estudadas nas mesmas bases teóricas das lentes espaciais. Estas características são ditadas pelo mecanismo físico particularmente escolhido para produzir uma modulação de fase

adrática, ou seja, para implementar uma lente temporal.

A dualidade espaço-tempo verificada entre os fenómenos da difracção paraxial e dispersão de banda estreita permite aprofundar o estudo no sentido de encontrar mecanismos físicos estruturais que possam ser considerados como o análogo no domínio temporal de componentes espaciais.

Uma lente temporal poderá ser representada por qualquer componente capaz de produzir a modulação (temporal) de fase quadrática. No Capítulo 5, o princípio de funcionamento dos moduladores electroópticos é focado. Estes componentes são particularmente interessantes, uma vez que conseguem providenciar, dentro de certas condições, este tipo de modulação.

---

## SISTEMAS DE FORMAÇÃO DE IMAGENS TEMPORAIS

Uma vez estabelecida a analogia temporal da difracção paraxial e lentes espaciais, é natural considerar estes elementos dispostos de forma a constituir um sistema.

A característica mais conhecida das lentes espaciais é a sua capacidade de formar imagens (espaciais). No domínio espacial, colocar uma lente depois de uma distância conveniente de difracção permite um feixe óptico seja focado num plano posterior à lente. Esta situação corresponde, no domínio temporal, à focagem (compressão) temporal de um impulso óptico de perfil variável no tempo, ou seja de um sinal temporal.

A configuração de um sistema temporal é obtida com uma lente temporal colocada entre duas linhas de dispersão. Quando as grandezas das dispersões de entrada e saída são convenientemente escolhidas em relação às características de uma dada lente temporal, realiza-se um sistema de formação de imagens temporais.

### 4.1 Sistemas temporais

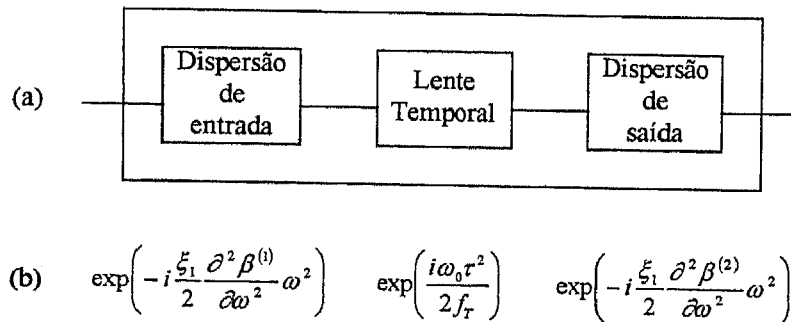
Num sistema de formação de imagens temporais, a forma de onda de saída do sistema é uma réplica, com escala temporal diferente, da forma de onda de entrada do sistema, expandida ou comprimida no tempo, com um factor de escala de potência para satisfazer a conservação de energia. Para caracterizar tal sistema, usar-se-á o facto do sistema ser linear na amplitude do campo eléctrico, aplicando as respectivas técnicas *standard* onde elas se possam tornar úteis.

Recordando o Capítulo 2, o problema da dispersão implica que o espectro inicial seja multiplicado por um termo de fase quadrático na variável de Fourier  $\omega$ . Num sistema de coordenadas centrado na envolvente de uma onda  $A(0, \tau)$  (referencial de grupo), representa-se o seu espectro de frequência pela função  $\tilde{A}(0, \omega)$ . No fim da dispersão de entrada (linha de dispersão que precede a lente) caracterizada pelo parâmetro  $\beta^{(1)}$ , ou seja após propagar-se uma distancia  $\xi_1$ , a envolvente do campo é dada pela equação (2.26):

$$A(\xi_1, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega) \exp\left(-i \frac{\xi_1}{2} \frac{\partial^2 \beta^{(1)}}{\partial \omega^2} \omega^2\right) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (2.26)$$

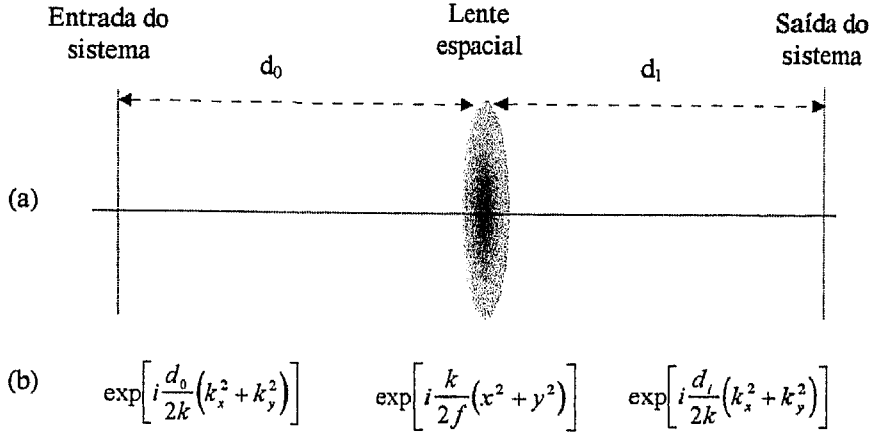
Por outro lado, o efeito de uma lente temporal (descrito pela relação (3.12)) consiste em multiplicar o campo  $A(\xi_1, \tau)$  por um termo de fase quadrático na variável *tempo*.

Se este novo campo (modulado) passar por outra linha de dispersão - dispersão de saída - e se se propagar nele ao longo de uma distancia  $\xi_2$ , a saída do sistema é então encontrada por análise destes três efeitos em cascata (Figura 4.1).



**Figura 4.1:** (a) Configuração de um sistema de formação de imagens temporais. As dispersões de entrada e de saída assumem o papel da difracção na propagação livre. (b) A análise é feita pelo estudo dos três processos em cascata: dispersão de entrada | lente temporal | dispersão de saída. Compare com a Figura 4.2.

Uma escolha conveniente dos parâmetros  $\beta^{(1)}$  e  $\beta^{(2)}$  que caracterizam as linhas de dispersão de entrada e de saída, e dos parâmetros que caracterizam a lente, permite que se obtenha a imagem de  $A(0, \tau)$  na saída do sistema.



**Figura 4.2:** (a) Sistema de formação de imagens espaciais convencional. A envolvente do campo de saída é uma réplica ampliada da envolvente do campo de entrada. (b) A análise é feita pelo estudo dos três processos em cascata: difracção de entrada | lente espacial | difracção de saída. Compare com a Figura 4.1.

A Figura 4.2 ilustra uma análise idêntica aplicada ao caso de sistemas de formação de imagens espaciais: os termos de fase quadráticos são aplicados no espaço (domínio) de Fourier que descreve o fenómeno de difracção e no espaço real para descrever a acção de uma lente.

Consideremos a forma de onda arbitrária  $A(0, \tau)$  como entrada do sistema de formação de imagens temporais da Figura 4.1. Para simplificar a exposição seguinte, agruparam-se na Tabela I todas as funções importantes do domínio temporal e do domínio das frequências.

Após a propagação ao longo da linha de dispersão de entrada, a envolvente do campo é dada, como foi visto, pela equação (2.26). De uma forma mais compacta, usando a Tabela I, pode-se escrever

$$A(\xi_1, \tau) = TF^{-1} \left\{ \tilde{A}(0, \omega) \tilde{G}_1(\xi_1, \omega) \right\} \quad (4.1)$$

onde  $TF^{-1}$  representa a transformação de Fourier inversa. O campo imediatamente após a lente temporal é:

$$A(\xi_1^+, \tau) = TF^{-1} \left\{ \tilde{A}(0, \omega) \tilde{G}_1(\xi_1, \omega) \right\} H(\tau) \quad (4.2)$$

**Tabela I:** Funções do domínio temporal e do domínio das frequências (ver Apêndice, Secção B) correspondentes aos fenómenos de dispersão e à acção de uma lente temporal num sistema de formação de imagens temporais <sup>[Kolner 94a]</sup>.

|                      | TEMPO   | FREQUÊNCIA   |
|----------------------|---|--|
| Dispersão de entrada | $G_1(\xi_1, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(i \frac{\tau^2}{4a}\right)$ | $\tilde{G}_1(\xi_1, \omega) = \exp(-ia\omega^2)$   |
| Dispersão de saída   | $G_2(\xi_2, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \exp\left(i \frac{\tau^2}{4b}\right)$ | $\tilde{G}_2(\xi_2, \omega) = \exp(-ib\omega^2)$   |
| Lente temporal       | $H(\tau) = \exp\left(i \frac{\tau^2}{4c}\right)$                                  | $\tilde{H}(\omega) = \sqrt{4\pi c} \exp(-ic\omega^2)$  |
|                      | $a = \frac{\xi_1}{2} \frac{\partial^2 \beta^{(1)}}{\partial \omega^2}$            | $b = \frac{\xi_2}{2} \frac{\partial^2 \beta^{(2)}}{\partial \omega^2}$ $c = \frac{f_T}{2\omega_0}$ |

e, finalmente, a envolvente do campo no fim da dispersão de saída (após uma propagação  $\xi_2$ ) representa-se por:

$$A(\xi_2, \tau) = TF^{-1} \left\{ \tilde{A}(0, \omega) \tilde{G}_1(\xi_1, \omega) \otimes \tilde{H}(\omega) \right\} \tilde{G}_2(\xi_2, \omega) \quad (4.3)$$

onde  $\tilde{H}(\omega)$  é a transformada de Fourier da função de transmitância da lente temporal e  $\otimes$  representa a operação de convolução.

Para denunciar as implicações da expressão (4.3), expande-se o integral de convolução

$$\tilde{A}(0, \omega) \tilde{G}_1(\xi_1, \omega) \otimes \tilde{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega') \tilde{G}_1(\xi_1, \omega') \tilde{H}(\omega - \omega') d\omega' \quad (4.4)$$

e substituindo-o na equação (4.3), obtém-se:

$$A(\xi_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega') \tilde{G}_1(\xi_1, \omega') \tilde{H}(\omega - \omega') d\omega' \tilde{G}_2(\xi_2, \omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (4.5)$$

ou ainda,

$$A(\xi_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega') \tilde{G}_1(\xi_1, \omega') d\omega' \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_2(\xi_2, \omega) \tilde{H}(\omega - \omega') \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (4.6)$$

Pode-se agora determinar o segundo integral, em ordem à variável  $\omega$ . Da Tabela I,

$$\tilde{H}(\omega - \omega') = \sqrt{4\pi ic} \exp[-ic(\omega - \omega')^2] \quad (4.7)$$

O segundo integral de (4.6) pode então exprimir-se por:

$$\begin{aligned} & \sqrt{4\pi ic} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ib\omega^2) \exp[-ic(\omega - \omega')^2] \exp(i\omega\tau) d\omega \\ &= \sqrt{4\pi ic} \exp(-ic\omega'^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(b+c)\omega^2] \exp[i\omega(\tau + 2c\omega')] d\omega \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{c}{b+c}} \exp(-ic\omega'^2) \exp\left[\frac{i(\tau + 2c\omega')^2}{4(b+c)}\right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

O integral corresponde a uma transformação de Fourier inversa de uma fase quadrática com uma referência temporal transladada. Colocando este resultado na expressão (4.6),  $A(\xi_2, \tau)$  vem dado pela equação

$$A(\xi_2, \tau) = \sqrt{\frac{c}{b+c}} \exp\left[\frac{i\tau^2}{4(b+c)}\right] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega') \exp\left[-i\left(a+c-\frac{c^2}{b+c}\right)\omega'^2\right] \exp\left[i\omega'\left(\frac{c}{b+c}\right)\tau\right] d\omega' \quad (4.9)$$

Esta relação mostra que a forma de onda de saída  $A(\xi_2, \tau)$  de um sistema temporal pode ser determinada por multiplicação do espectro inicial  $\tilde{A}(0, \omega)$  da onda de entrada  $A(0, \tau)$  por uma fase quadrática e modificando a sua escala temporal.

## 4.2 Condição de formação de imagem

O estudo desta Secção baseia-se na procura de condições para as quais a onda de saída poderia ser considerada uma “imagem razoável” da onda de entrada, ou seja apresentasse o mesmo perfil, embora possivelmente uma escala temporal alterada. Eliminando o termo quadrático em  $\omega'$  no integral (4.9), obtém-se esse resultado, uma vez que o integral representa a transformada de Fourier inversa do espectro da onda original com uma escala de tempo diferente. De facto, o termo quadrático desaparece se se verificar a condição

$$a + c = \frac{c^2}{b + c} \quad (4.10)$$

encontrando que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c} \quad (4.11)$$

Substituindo  $a$ ,  $b$  e  $c$  dados pela Tabela I, tem-se

$$\frac{1}{\xi_1 \frac{\partial^2 \beta^{(1)}}{\partial \omega^2}} + \frac{1}{\xi_2 \frac{\partial^2 \beta^{(2)}}{\partial \omega^2}} = -\frac{\omega_0}{f_T} \quad (4.12)$$

A relação (4.12) representa a *condição de formação de imagens temporais*. Esta relação está, como seria de esperar, intimamente ligada à expressão encontrada no caso espacial:

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f} \quad (4.13)$$

onde  $d_0$  e  $d_1$  correspondem às distâncias de propagação (difracção) do objecto e da imagem respectivamente, e  $f$  a distância focal da lente espacial (ver Figura 4.2).

### 4.3 Ampliação do sistema

É importante o estudo do factor de escala temporal do kernel da transformada de Fourier presente na equação (4.9). De facto, a variável temporal  $\tau$  (tempo local) vem multiplicada pelo factor  $c/b+c$ . Aplicando a condição de formação de imagem (12), encontra-se que

$$\frac{b+c}{c} = -\frac{b}{a} \quad (4.14)$$

A escala temporal da saída de um sistema temporal é diferente da de entrada: é alterada pelo factor (4.14), designado por *factor de ampliação*  $M$ . Usando novamente as expressões da Tabela I, rescreve-se a relação (4.14), observando que a ampliação  $M$  de um sistema temporal é dada pela razão entre as dispersões de entrada e de saída:

$$M = -\frac{b}{a} = -\frac{\xi_2 \frac{\partial^2 \beta^{(2)}}{\partial \omega^2}}{\xi_1 \frac{\partial^2 \beta^{(1)}}{\partial \omega^2}} \quad (4.15)$$

Esta expressão também possui um dual no domínio espacial: a razão entre a distância da imagem e a distância do objecto (à lente espacial)  $d_1/d_0$ .

Usando a condição de formação de imagem, e a definição de ampliação (4.15), pode-se rescrever (4.9) como

$$A(\xi_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{M}} \exp\left(i \frac{\omega_0 \tau^2}{2Mf_T}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega) \exp\left(i\omega \frac{\tau}{M}\right) d\omega \quad (4.16)$$

ou ainda,

$$A(\xi_2, \tau) = \frac{1}{\sqrt{M}} \exp\left(i \frac{\omega_0 \tau^2}{2Mf_T}\right) A\left(0, \frac{\tau}{M}\right) \quad (4.17)$$

Este é o resultado principal da formação de imagens temporais. Através de um *design* adequado de um sistema temporal, a forma de onda de saída  $A(\xi_2, \tau)$  do sistema parece ser uma réplica da forma de onda de entrada do mesmo, com escala temporal diferente: a saída corresponderá a uma expansão temporal da entrada no caso de um factor de ampliação  $M < -1$ , e a uma compressão no caso de  $M > -1$ . No Capítulo 5, são apresentados exemplos de compressão/expansão de vários tipos de impulsos.

Verifica-se em (4.17) que existe um termo de fase quadrático, também encontrado no caso espacial, e um factor de escala  $1/\sqrt{M}$  em amplitude para verificar a conservação de energia.

É possível determinar a distância focal  $f_T$  assumindo que o equivalente temporal de uma onda plana (ver Capítulo 2) incide no sistema de formação de imagens temporais. Esta forma de onda é simplesmente uma sinusóide de duração infinita e pode ser produzida por um impulso que se propaga num meio de dispersão infinita (uma onda plana é gerada por uma fonte pontual colocada no infinito). Da equação (4.12), e fazendo  $\xi_1 = \infty$ , obtém-se

$$\xi_2 \frac{\partial^2 \beta^{(2)}}{\partial \omega^2} = -\frac{f_T}{\omega_0} \quad (4.18)$$

Uma vez que, relembrando a equação (2.20),

$$\frac{\partial \beta^{(2)}}{\partial \omega} = \frac{1}{v_g} \quad (4.19)$$

é válida a relação

$$\frac{\partial^2 \beta^{(2)}}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{v_g} \right) \quad (4.20)$$

Se um impulso se propaga ao longo de uma distância  $\xi_2$  neste meio, ele sofre um atraso  $\xi_2/v_g = \tau_g$ ;  $\tau_g$  é chamado de *atraso de grupo*. Então:

$$\xi_2 \frac{\partial^2 \beta^{(2)}}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\xi_2}{v_g} \right) = \frac{\partial \tau_g}{\partial \omega} \quad (4.21)$$

Substituindo na equação (4.18),

$$\frac{\partial \tau_g}{\partial \omega} = -\frac{f_T}{\omega_0} \quad (4.22)$$

encontra-se finalmente que

$$f_T = -\left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \tau_g \quad (4.23)$$

O tempo focal para a frequência central  $\omega_0$  da envolvente é então igual ao atraso de grupo sofrido pela onda no meio dispersivo que sucede a lente temporal. A origem do sinal negativo na equação reside na diferença fundamental entre as equações parabólicas que governam a difracção e dispersão.

#### 4.4 Resposta impulsional do sistema

Como em qualquer sistema de formação de imagem espaciais, um sistema de formação de imagens temporais está submetido a efeitos equivalentes à difracção devido a aberturas finitas. Nesta Secção, ir-se-ão considerar, no plano da imagem, os efeitos de uma abertura temporal finita explorando a natureza linear de um sistema de formação de imagens temporais descrevendo-o em

termos da sua resposta impulsional [Goodm. 68]. Também serão usados os conceitos de condição de formação de imagens e de ampliação derivados na Secção anterior.

A linearidade do sistema permite escrever a sua saída como um integral de sobreposição:

$$A(\xi_1, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau; \tau_0) A(0, \tau_0) d\tau_0 \quad (4.24)$$

onde  $h(\tau; \tau_0)$  é a resposta do sistema no instante de tempo  $\tau$  a um impulso (função *dirac*) aplicado à entrada do sistema num instante  $\tau_0$ , e  $A(0, \tau_0)$  é a forma de onda de entrada.

Para encontrar uma expressão para a resposta impulsional, assume-se que a entrada do sistema é um impulso atrasado de  $\tau_0$  no tempo, no referencial de grupo. Então,  $A(0, \tau_0) = \delta(\tau - \tau_0)$  e após a dispersão de entrada (propagação de uma distância  $\xi_1$ ), os campos são:

$$A(\xi_1, \tau) = G_1(\xi_1, \tau) \otimes \delta(\tau - \tau_0) = G_1(\xi_1, \tau - \tau_0) \quad (4.25)$$

Para modelizar o efeito de uma abertura finita, é introduzida a função pupila  $P(\tau)$  à lente temporal, que corresponde a uma janela temporal (intervalo de tempo  $\tau_a$ ) durante a qual a modulação de fase introduzida pela lente é considerada. A transmitância da lente passa a ser representada pela função  $H(\tau)P(\tau)$ . Desta forma, separam-se os efeitos de fase quadrática e os efeitos da abertura. Imediatamente após a passagem da lente, a forma de onda é:

$$A(\xi_1^+, \tau) = G_1(\xi_1, \tau - \tau_0) H(\tau) P(\tau) \quad (4.26)$$

e, após a dispersão de saída (propagação de uma distância  $\xi_2$ ),

$$h(\tau, \tau_0) = A(\xi_2, \tau) = [G_1(\xi_1, \tau - \tau_0) H(\tau) P(\tau)] \otimes G_2(\xi_2, \tau) \quad (4.27)$$

A função  $A(\xi_2, \tau)$  dada por (4.27) representa a resposta do sistema no instante  $\tau$ , devido a um impulso aplicado na entrada do sistema no instante  $\tau_0$ , ou seja, a resposta impulsional  $h(\tau, \tau_0)$  do sistema temporal. Expande-se a convolução (4.27) escrevendo

$$h(\tau, \tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\xi_1, \tau' - \tau_0) H(\tau') P(\tau') G_2(\xi_2, \tau - \tau') d\tau' \quad (4.28)$$

ou seja, usando as expressões da Tabela I,

$$h(\tau, \tau_0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{ab}} \exp\left(i\frac{\tau_0^2}{4a}\right) \exp\left(i\frac{\tau^2}{4b}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau') \exp\left[\frac{i\tau'^2}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right] \exp\left[-i\frac{\tau'}{2}\left(\frac{\tau_0}{a} + \frac{\tau}{b}\right)\right] d\tau' \quad (4.29)$$

Evocando a condição de formação de imagem (4.12), a exponencial do termo quadrático em  $\tau'$  desaparece; a equação (4.29) mostra então que a resposta impulsional do sistema é proporcional à transformada de Fourier da função pupila num sistema de coordenadas de escala diferente e transladado, tal como no caso das figuras de difracção de Fraunhofer.

Pode-se ainda simplificar um pouco mais este resultado: tratando-se de uma resposta impulsional, a maior contribuição para  $h(\tau, \tau_0)$  advém de uma pequena região à volta de  $\tau_0$ ; assim, pode-se substituir  $\tau_0$  por  $\tau/M$ . A segunda exponencial de (4.29) é então ser aproximada por

$$\exp\left(i\frac{\tau_0^2}{4a}\right) \approx \exp\left(i\frac{\tau^2}{4aM^2}\right) \quad (4.30)$$

Fazendo uso da definição de ampliação  $M = -b/a$  e rearranjando os termos no kernel da transformada de Fourier, a relação (4.29) vem dada por (omitindo os factores de fase exteriores ao integral (4.29)):

$$h(\tau, \tau_0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{ab}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau') \exp\left[-i\frac{\tau'}{2b}(\tau - M\tau_0)\right] d\tau' \quad (4.31)$$

Introduzindo a seguinte mudança de variáveis:

$$\hat{\tau}' = \frac{\tau'}{2b} \quad (4.32)$$

$$\hat{\tau}_0 = M\tau_0 \quad (4.33)$$

a equação (4.31) é equivalente a

$$h(\tau; \hat{\tau}_0) = \frac{\sqrt{|M|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(2b\hat{\tau}') \exp[-i\hat{\tau}'(\tau - \hat{\tau}_0)] d\hat{\tau}' \quad (4.34)$$

Constata-se que, no referencial de grupo, a resposta impulsional é invariante no tempo. É fácil verificar que a resposta impulsional do sistema temporal corresponde, a menos de um factor de fase, à transformada de Fourier da função pupila  $P(2b\hat{\tau}')$ .

Aplicando as novas variáveis (4.32) e (4.33) ao integral de sobreposição (4.24),

$$A(\xi_2, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\tau - \hat{\tau}_0)}{M} A\left(0, \frac{\hat{\tau}_0}{M}\right) d\hat{\tau}_0 \quad (4.35)$$

Com a definição

$$\hat{h} = \frac{h}{|M|} \quad (4.36)$$

a resposta impulsional escreve-se

$$\hat{h}(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|M|}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(2b\hat{\tau}') \exp(-i\hat{\tau}'\tau) d\hat{\tau}' \quad (4.37)$$

e

$$A(\xi_2, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\tau - \hat{\tau}_0) A\left(0, \frac{\hat{\tau}_0}{M}\right) d\hat{\tau}_0 \quad (4.38)$$

O resultado (4.38) é uma característica de um sistema linear e invariante: a forma de onda de saída do sistema de formação de imagens temporais corresponde a uma réplica ampliada da entrada, convoluída com a resposta impulsional. De (4.37), a resposta impulsional de um sistema de formação de imagens temporais corresponde à transformada de Fourier da função pupila, ou seja, abertura temporal da lente. Este resultado era esperado, tendo em mente a dualidade entre os sistemas de formação de imagens espaciais e imagens temporais.

No limite de grandes aberturas temporais, a função pupila aproxima-se da unidade e a resposta impulsional (4.34) reduz-se a

$$h(\tau - \hat{\tau}_0) = \sqrt{|M|} \delta(\tau - \hat{\tau}_0) \quad (4.39)$$

Usando este resultado, a saída do sistema é, de (4.35),

$$A(\xi_2, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|M|}} A\left(0, \frac{\tau}{M}\right) \quad (4.40)$$

estando em perfeito acordo com os resultados obtidos na Secção anterior (equação (4.17)) onde se aproximou o problema no domínio das frequências, com abertura temporal infinita.

#### 4.5 Resolução do sistema

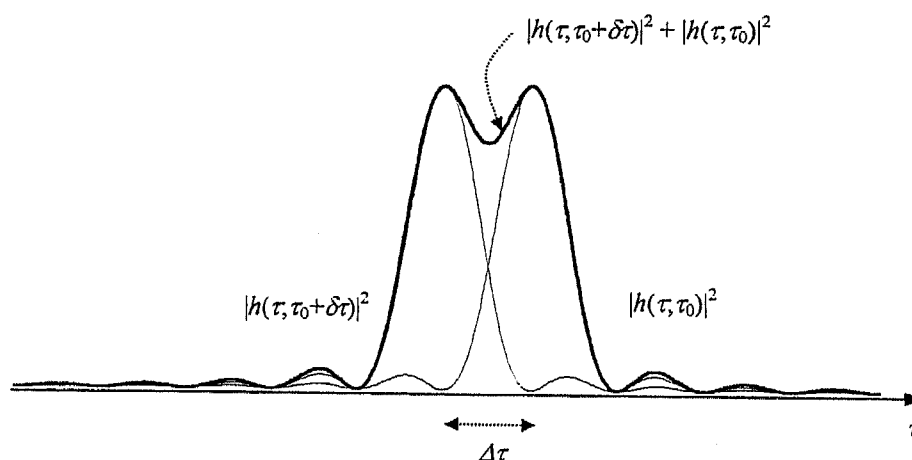
Consideremos um sistema temporal no qual a modulação de fase introduzida pela lente temporal ocorre durante  $\tau_a$  segundos. A função pupila  $P(\tau)$  é então definida por um rectângulo com largura temporal  $\tau_a$  segundos, ou seja,

$$P(\tau) = \text{rect}\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right) \quad (4.41)$$

A resposta impulsional (4.37) é dada por (ver Apêndice, Secção B)

$$\hat{h}(\tau - \hat{\tau}_0) = \frac{1}{4\pi b \sqrt{|M|}} \text{sinc}\left[\frac{\tau_a(\tau - \hat{\tau}_0)}{4\pi b}\right] \quad (4.42)$$

Este exemplo permite-nos definir um critério de resolução de, por exemplo, um microscópio temporal usado para expandir formas de onda ópticas rápidas.



**Figura 4.3:** Definição do critério de resolução de um sistema temporal: as respostas impulsivas de dois impulsos *delta* aplicados à entrada do sistema são consideradas *resolvidas* quando o máximo de uma resposta coincidir com o primeiro zero da segunda. A separação temporal  $\Delta\tau$  das respostas impulsivas corresponde a uma resolução temporal de entrada  $\delta\tau$ .

As respostas impulsivas (dadas por (4.42)) de dois impulsos (*deltas*) aplicados à entrada do sistema temporal nos instantes  $\tau_0$  e  $\tau_0 + \delta\tau$ , (ou equivalentemente  $\hat{\tau}_0$  e  $\hat{\tau}_0 + \delta\tau$ ) podem ser consideradas *resolvidas* ("separadas") quando o pico da resposta impulsional (máximo da função *sinc*) correspondente ao primeiro impulso coincidir com o primeiro zero da resposta impulsional do segundo impulso, como ilustrado na Figura 4.3.

A separação das duas respostas impulsivas, à saída do sistema, corresponde ao primeiro zero da função (4.42). Este intervalo de tempo  $\Delta\tau$  (igualando à unidade o argumento da função *sinc*) é dado por

$$\Delta\tau = (\tau - \hat{\tau}_0) = \frac{4\pi b}{\tau_a} \quad (4.43)$$

Na escala de tempo de entrada, este intervalo corresponde à resolução temporal  $\delta\tau$  (de entrada) do sistema

$$\delta\tau = \left| \frac{4\pi b}{M\tau_a} \right| = \frac{4\pi\alpha}{\tau_a} \quad (4.44)$$

Na maioria dos casos, a ampliação dos microscópios é grande, e a distância da imagem à lente é muito maior que a do objecto; pode-se então aproximar a distância do objecto como sendo igual à distância focal. No sistema temporal, tal facto implica que a dispersão de saída seja muito maior que a de entrada, ou seja, que  $b \gg a$ . Consequentemente, obtém-se de (4.11)  $a \approx c = -f_T/\omega_0$  e a expressão (4.44) fica

$$\delta\tau = T \frac{f_T}{\tau_a} \quad (4.45)$$

onde  $T = 2\pi/\omega_0$  é o período da onda portadora óptica.

Esta aproximação estabelece no domínio temporal o equivalente ao “critério de Rayleigh” [Bom 80] definido no domínio espacial. No entanto, é praticamente impossível construir uma abertura rectangular  $P(\tau)$  definida pela equação (4.41) no domínio temporal (ao contrário do caso espacial) devido aos requisitos a impor à largura de banda do sistema (qualquer sistema temporal tem largura de banda finita).

No domínio espacial, as características e desempenho dos sistemas de formação de imagens temporais são bastante bem conhecidos <sup>[Goodm. 68]</sup>. Mostrou-se neste Capítulo que a implementação destes sistemas estende-se ao domínio temporal: colocando uma lente temporal entre duas linhas de dispersão, obtém-se um sistema de formação de imagens temporais. Estes sistemas, tal como no caso espacial, são basicamente caracterizados por uma resposta impulsional (correspondente à  $TF$  da função pupila da lente); a saída de um sistema temporal é dada por um integral de sobreposição, uma vez que estes sistemas são lineares.

Por escolha adequada dos parâmetros da lente temporal e das linhas de dispersão, é possível satisfazer a condição de formação de imagem: obtém-se à saída do sistema uma réplica do sinal de entrada, com uma escala temporal diferente, associada ao factor de ampliação do sistema.

A função pupila de uma lente temporal é um factor que determina o desempenho de um sistema temporal, uma vez que a resolução do mesmo depende da abertura temporal da lente. Torna-se portanto interessante, e importante, estudar as consequências das possíveis funções de abertura, na resolução de um sistema de formação de imagens temporais. Esta caracterização do sistema será focada no próximo Capítulo.

---

## SIMULAÇÃO DE UM SISTEMA DE FORMAÇÃO DE IMAGENS TEMPORAIS

Neste Capítulo, pretende-se apresentar e discutir alguns componentes práticos que possam desempenhar o papel dos constituintes de um sistema de formação de imagens temporais.

Fibras ópticas e pares de redes de difracção podem ser usados como linhas de dispersão, enquanto que moduladores de fase electroópticos simulam a modulação de fase de uma lente temporal. Para cada um desses componentes, são apresentadas as suas características e limitações.

Especificados os parâmetros característicos de um dado sistema temporal, alguns resultados são apresentados para ilustrar a formação da imagem temporal de algumas formas de onda, tais como impulsos rectangulares, Gaussianos ou secante hiperbólicos.

### 5.1 Mecanismos de dispersão

#### 5.1.1 Fibra Óptica

Quando uma onda electromagnética interage com um meio dieléctrico, a resposta do meio depende, geralmente, da frequência óptica  $\omega$ . Esta propriedade, designada por *dispersão cromática*, manifesta-se pela dependência espectral do índice de refracção  $n(\omega)$  do meio.

A dispersão observada numa fibra óptica desempenha um papel crítico na propagação de impulsos ópticos curtos, uma vez que as componentes espectrais associadas ao impulso se propagam com velocidades diferentes. A velocidade de uma componente espectral de frequência  $\omega$  é

$$v(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} \quad (5.1)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vázio.

Mesmo que numa dada fibra óptica os efeitos não lineares não sejam importantes, o alargamento de impulsos devido à dispersão da fibra pode ser um factor determinante no desempenho dos sistemas de comunicações ópticas.

Para estudar a dispersão observada numa fibra, consideremos a forma de onda -impulso- estudada no Capítulo 2, para a qual a função envolvente do campo eléctrico total foi designada por  $A(\xi, \tau)$ . A solução da equação de propagação desta forma de onda foi deduzida na Secção 2.5, e representada pela equação (2.26)

$$A(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega) \exp\left(-i \frac{\xi}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \omega^2\right) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (2.26)$$

onde  $\tilde{A}(\xi, \omega)$  é o espectro de frequência de  $A(\xi, \tau)$ . Os efeitos da dispersão são estudados matematicamente expandindo a constante de propagação  $\beta(\omega)$  numa série de Taylor à volta da frequência central  $\omega_0$  do impulso:

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= n(\omega) \frac{\omega}{c} \\ &\cong \beta_0 + (\omega - \omega_0) \beta_1 + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \beta_2 + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde se introduziu a notação simplificada

$$\beta_m = \left. \frac{\partial^m \beta}{\partial \omega^m} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.3)$$

Como foi visto na Secção 2.3, a envolvente  $A(\xi, \tau)$  de um impulso move-se com uma

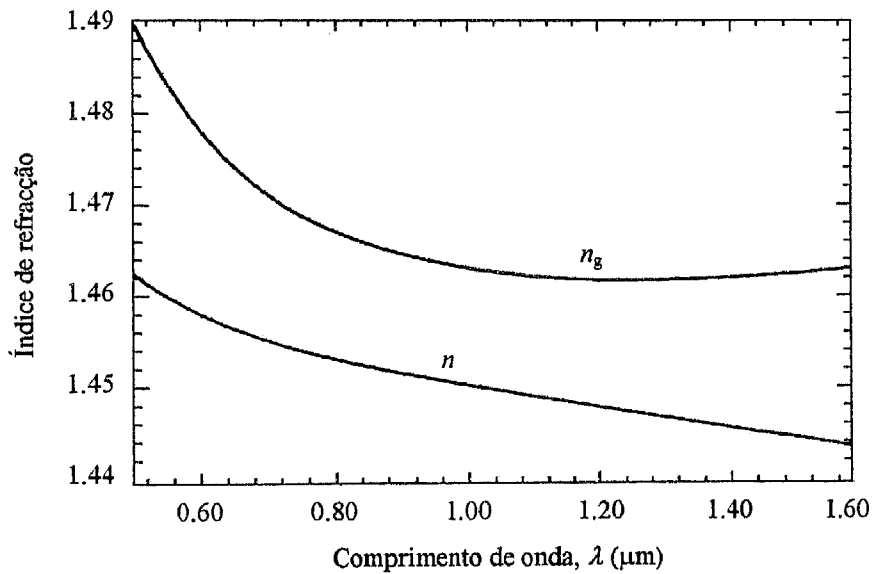
velocidade de grupo  $v_g=1/\beta_1$ , enquanto que o parâmetro de dispersão  $\beta_2$  é responsável pelo alargamento do impulso. Os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  estão relacionados com o índice de refração  $n$  da fibra óptica através das equações [Agraw. 89; Keiser 91]

$$\beta_1 = \frac{1}{c} \left( n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{v_g} \quad (5.4)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left( 2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2n}{d\omega^2} \right) \cong \frac{\omega}{c} \frac{d^2n}{d\omega^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \quad (5.5)$$

onde  $n_g$  é o índice de refração de grupo.

As Figuras 5.1 e 5.2 mostram a variação de  $n$ ,  $n_g$  e  $\beta_2$  em função do comprimento de onda  $\lambda$ , para o caso da sílica fundida.



**Figura 5.1:** Variação do índice de refração  $n$  e índice de refração de grupo  $n_g$  com o comprimento de onda  $\lambda$ , para a sílica fundida [Agraw. 89, pág. 8].

Na Figura 5.2, nota-se que  $\beta_2$  se anula para um comprimento de onda  $\lambda \approx 1,27 \mu\text{m}$ , tornando-se negativo para comprimentos de onda maiores. O comprimento de onda para o qual  $\beta_2 = 0$  é designado por comprimento de onda de dispersão nula  $\lambda_D$ . No entanto, a dispersão não

se anula para  $\lambda = \lambda_D$ : o estudo da propagação de impulsos na vizinhança de  $\lambda = \lambda_D$  requer a inclusão do termo cúbico na expansão (5.2) de  $\beta_2$ .

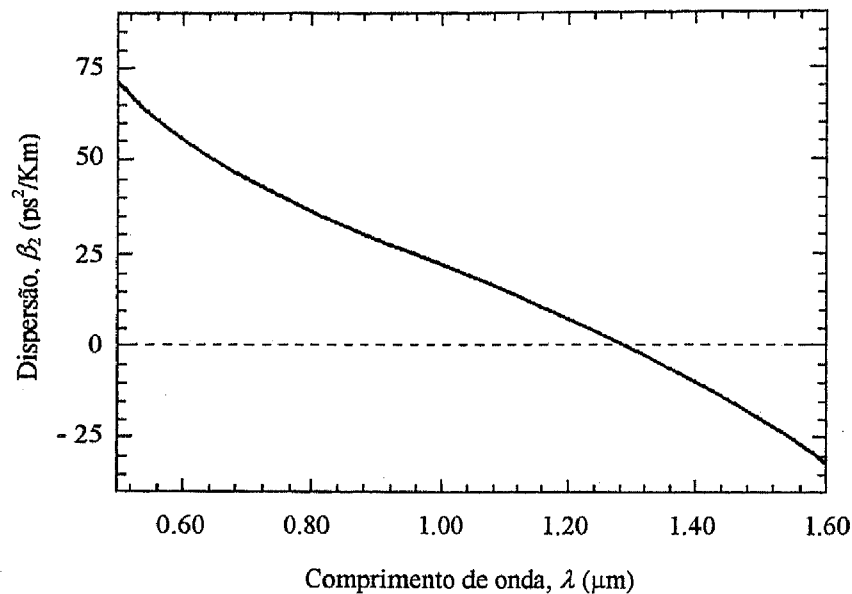


Figura 5.2: Variação do parâmetro de dispersão  $\beta_2$  com o comprimento de onda  $\lambda$ , para a sílica fundida. O parâmetro  $\beta_2 = 0$ , na vizinhança de  $\lambda = 1.27 \mu\text{m}$  [Agraw. 89, pág. 9].

O comportamento do parâmetro de dispersão  $\beta_2$  nas fibras de vidro actuais é ligeiramente diferente daquele ilustrado nas Figuras 5.1 e 5.2. De facto, o próprio guia de onda contribui para a dispersão (devido por exemplo a pequenas quantidades de dopantes, tais como o  $\text{GeO}_2$ , no núcleo da fibra). Esta contribuição, *dispersão do guia de onda*, deve ser adicionada à contribuição do material para obter o valor da dispersão total da fibra óptica.

A dispersão do guia de onda é desprezável comparada com a dispersão cromática, excepto na vizinhança do comprimento de onda de dispersão nula  $\lambda_D$ , onde estas são da mesma ordem de grandeza. O efeito principal da dispersão do guia de onda é deslocar  $\lambda_D$  para comprimentos de onda maiores:  $\lambda_D = 1.31 \mu\text{m}$ , para fibras ópticas típicas.

Usando a expressão (5.2), é possível rescrever o parâmetro de dispersão como

$$\beta_2 = \frac{d\beta_1}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{v_g} \right) = -\frac{1}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega} \quad (5.6)$$

Por este motivo, o parâmetro  $\beta_2$  é geralmente designado por *dispersão da velocidade de grupo* (DVG).

A dispersão de um meio, caracterizada pelo parâmetro DVG,  $\beta_2$ , é responsável pelo alargamento do impulso durante a sua propagação nesse meio: diferentes componentes espectrais do impulso propagam-se com velocidades diferentes; qualquer desfasamento temporal na chegada dessas componentes traduz-se num alargamento do impulso.

Para comprimentos de onda tais que  $\lambda < \lambda_D$ ,  $\beta_2 > 0$ , diz-se que a fibra exhibe dispersão normal. No regime de dispersão normal, as baixas frequências do espectro do impulso viajam mais rapidamente que as frequências elevadas: o impulso adquire um *sweep* de frequências negativo.

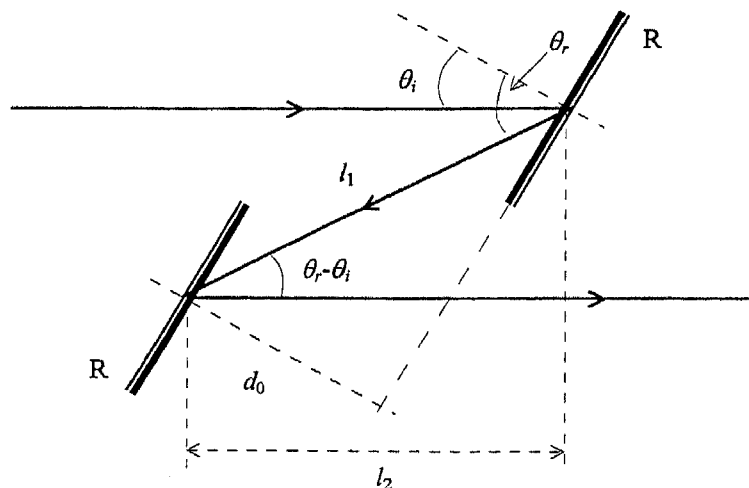
Em contraste, a situação oposta ocorre no regime de dispersão anómalo onde  $\beta_2 < 0$ . A modulação *chirp* é neste caso positiva: o *sweep* de frequências é positivo. Como se ilustra na Figura 5.2, uma fibra exhibe dispersão anómala quando o comprimento de onda da luz  $\lambda$  do impulso é maior que  $\lambda_D$ .

Tipicamente, o parâmetro de dispersão vale  $\beta_2 = 60 \text{ ps}^2/\text{km}$  na região do visível, mas assume o valor  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{km}$  para  $\lambda = 1.55 \text{ }\mu\text{m}$  com uma mudança de sinal à volta de  $1.3 \text{ }\mu\text{m}$ .

### 5.1.2 Par de redes de difracção

Esta Secção discute brevemente o princípio de operação de um par de redes de difracção, usado como linha de dispersão de impulsos ópticos. O papel do par de redes de difracção corresponde a criar uma dispersão de velocidade de grupo anómala dos impulsos durante a sua propagação entre o par de redes. Os impulsos adquirem um *chirp* positivo.

A Figura 5.3 ilustra esquematicamente a geometria a implementar e a notação usada na análise do par de redes de difracção.



**Figura 5.3:** Ilustração esquemática da geometria e notação usadas na análise do par de redes de difração (R).

Quando um impulso incide numa rede de difração de um par de redes paralelas, as diferentes componentes espectrais (frequências) do impulso são difractadas segundo ângulos ligeiramente diferentes. Como consequência, estas componentes experimentam tempos de atraso diferentes durante a propagação entre as duas redes.

A dependência espectral do ângulo de difração  $\theta_r$  é governada pela lei da rede de difração. No caso da difração de primeira ordem, e para uma componente espectral de frequência  $\omega$ ,  $\theta_r$  é dado pela relação

$$\sin \theta_r = \frac{2\pi c}{\omega \Lambda} - \sin \theta_i \quad (5.7)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $\theta_i$  corresponde ao ângulo de incidência do impulso na primeira rede e  $\Lambda$  ao período da rede (espaçamento entre linhas, geralmente expresso em linhas/mm).  $\theta_i$  e  $\theta_r$  são assumidos no mesmo lado da normal ao plano da rede (ver Figura 5.3).

O tempo de atraso é dado por

$$t_d = \frac{l(\omega)}{c} = \frac{d\phi_c(\omega)}{d\omega} \quad (5.8)$$

onde  $l(\omega)$  representa o comprimento do caminho óptico e  $\phi_c(\omega)$  o atraso de fase.  $l(\omega)$  pode ser determinado a partir da Figura 5.3, usando considerações geométricas, sendo dado por

$$l(\omega) = l_1 + l_2 = d_0 \frac{1 + \cos(\theta_r - \theta_i)}{\cos \theta_r} \quad (5.9)$$

A quantidade de interesse é o atraso de fase  $\phi_c(\omega)$  adquirido pela componente espectral de frequência  $\omega$ . É útil considerar a expansão de  $\phi_c(\omega)$  à volta da frequência central  $\omega_0$  do espectro do impulso,

$$\phi_c(\omega) = \phi_0 + t_c(\omega - \omega_0) - a_c(\omega - \omega_0)^2 + b_c(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (5.10)$$

onde  $\phi_0$  é uma constante,  $t_c$  um atraso constante, e  $a_c$  e  $b_c$  caracterizam a dispersão do par de redes de difracção. Os parâmetros  $a_c$  e  $b_c$  são obtidos das equações anteriores e expandindo  $l(\omega)$  em série de Taylor. Facilmente se poderá verificar <sup>[Agraw. 89]</sup> que:

$$a_c = \frac{4\pi^2 c b_0}{\omega_0^3 \Lambda^2 \cos \theta_{r_0}} \quad (5.11)$$

e

$$b_c = \frac{4\pi^2 c b_0 (1 + \sin \theta_i \sin \theta_{r_0})}{\omega_0^4 \Lambda \cos^4 \theta_{r_0}} \quad (5.12)$$

onde  $\theta_{r_0}$  é determinado pela expressão (5.7) fazendo  $\omega = \omega_0$ :

$$\sin \theta_{r_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0 \Lambda} - \sin \theta_i \quad (5.13)$$

e  $b_0$  (distância entre os centros das redes) é dado por

$$b_0 = d_0 \sec \theta_{r_0} \quad (5.14)$$

Em muitos casos de interesse, a largura espectral  $\Delta\omega$  é tal que  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , podendo-se assim desprezar o termo cúbico na expansão (5.10). Ignorando os termos de fase constantes e lineares, o atraso de fase  $\phi_c(\omega)$  assume a forma

$$\phi_c(\omega) \cong -\alpha_c (\omega - \omega_0)^2 \quad (5.15)$$

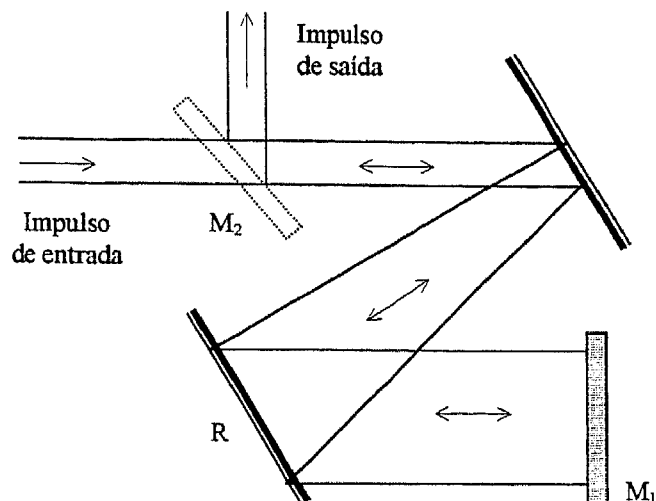
Uma vez que  $\alpha_c$  é positivo,  $\phi_c(\omega)$  é negativo. O par de redes de difracção consegue então providenciar uma dispersão de velocidade de grupo anómala, com parâmetro efectivo

$$\beta_2 = \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} = -\frac{2\alpha_c}{b_0} \quad (5.16)$$

Pode-se fazer uma estimativa da ordem de grandeza de  $\beta_2$ . Considerando, por exemplo, os valores típicos  $\lambda = 2\pi c/\omega_0 = 0,5 \mu\text{m}$  e  $\Lambda = 0,5 \mu\text{m}$  (2000 linhas/mm), obtém-se de (5.15)  $\beta_2 = -4 \text{ ps}^2/\text{m}$ .

A separação das redes, dada por  $d_0$  (ver Figura 5.3) ou  $b_0$  (equação (5.14)), depende da quantidade de dispersão que se pretende obter. É possível aumentar o valor da dispersão dada por (5.16) fazendo incidir o impulso de entrada na rede segundo o ângulo de *grazing*, tal que  $\theta_0$  se aproxime de  $\pi/2$ . No entanto, é evidente, de (5.12), que tal situação aumentaria a contribuição da dispersão de ordem superior, devendo assim considerar-se o efeito dos termos de ordem superior na expansão (5.10).

Um dos inconvenientes do par de redes de difracção é o facto das componentes espectrais de um impulso serem dispersas não só temporalmente mas também espacialmente: o feixe óptico diverge entre as duas redes. Esta deformação do feixe é muitas vezes inaceitável quando a separação entre elas é grande. Uma solução simples consiste em reflectir o feixe para o par de redes: configuração de passagem dupla, ilustrada na Figura 5.4.



**Figura 5.4:** Esquema de um par de redes de difração numa configuração de passagem dupla. R: rede de difração; M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>: espelhos. O espelho M<sub>2</sub> situa-se acima do plano da figura. O espelho M<sub>1</sub> é ligeiramente inclinado para separar os feixes (impulsos) de entrada e saída.

Uma passagem dupla pelo sistema da Figura 5.4 permite uma recolimação do feixe óptico. A quantidade de dispersão obtida é dupla, podendo assim reduzir a distância entre as redes para metade.

Outro problema que surge quando um par de redes é usado como linha de dispersão são as perdas de difração observadas: somente 60 a 80% da energia do impulso permanece na primeira ordem de difração da rede; esta redução de energia aumenta de um factor dois na configuração de passagem simples (Figura 5.3), e de um factor quatro na configuração de passagem dupla (Figura 5.4).

Existem outros esquemas que podem produzir dispersão de velocidade de grupo anómala, com perdas de energia significativamente menores: por exemplo, o uso de um par de prismas, baseado no fenómeno de refração. No entanto, para um mesmo valor de dispersão, o espaçamento entre prismas é duas ordens de grandeza superior àquele que seria no caso de redes de difração (devido à pequena dispersão observada na sílica fundida). Esse espaçamento pode ser reduzido usando outros materiais, como por exemplo TeO<sub>2</sub>.

## 5.2 Modulação de fase quadrática

Para obter uma relação mais específica do tempo focal de uma lente temporal, discutido na Secção 3.2, é necessário examinar um mecanismo físico particular capaz de produzir uma modulação de fase quadrática, ou seja uma modulação *chirp*. Existem actualmente vários esquemas de *chirping* que produzem um *sweep* linear em frequência.

Um dos métodos de modulação *chirp* é o fenómeno conhecido por *Self Phase Modulation* (SPM). Numa fibra óptica que exhibe dispersão anómala, o balanço entre os efeitos não lineares (SPM) e de dispersão (DVG) é de tal forma que (através de uma escolha adequada de parâmetros, tais como o comprimento de onda, largura e potência de um impulso) a fibra possa suportar *solitons* ópticos [Agraw. 89; Haseg. 90]. *Solitons* são formas de onda especiais que podem propagar-se ao longo de grandes distâncias sem sofrer distorção, e que não sofrem alterações depois da colisão entre eles. No regime de dispersão normal, o efeito combinado de SPM e DVG tem aplicações na compressão de impulsos ópticos [Agraw. 89].

A técnica SPM corresponde a um processo óptico não linear, que apresenta alguns inconvenientes: depende da intensidade e da forma do impulso: esta técnica não é aplicável a impulsos de baixa potência (obtidos, por exemplo, com *lasers* díodos semicondutores) e a amplitude do ruído de um trem de impulsos é também aumentada.

Outro método baseia-se no uso de moduladores de fase electroópticos (MEO). O uso destes componentes permite uma modulação de fase quadrática (dentro de certas aproximações) independente das características ópticas do impulso. A taxa de *chirp* só depende da potência e da frequência (RF) de excitação do MEO. Uma vez que estes parâmetros são facilmente controlados, esta técnica é muito mais atraente que a SPM.

### 5.2.1 Modulação de fase quadrática com um MEO [Kolner 94a; Godil 94]

O atraso de fase total sofrido por uma onda durante a sua propagação ao longo de um MEO, devido ao efeito electroóptico do cristal é um efeito cumulativo, calculado pelo integral [Kolner 94b]

$$\phi(\xi, \tau) = \frac{\omega_0}{c} \int_0^\xi \Delta n(\xi', \tau) d\xi' \quad (5.17)$$

onde a quantidade  $\Delta n(\xi', \tau)$  é a perturbação do índice de refração  $n$  do cristal produzido pelo efeito electroóptico do MEO. Na equação (5.17),  $\omega_0$  é a frequência óptica da portadora da onda  $A(\xi, \tau)$  que se propaga dentro do MEO;  $\xi$  (variável de propagação) e  $\tau$  (tempo local) são as variáveis que descrevem a sua evolução no referencial de grupo. Recordando as relações da Secção 2.3:

$$\tau = (t - t_0) - \left( \frac{z - z_0}{v_g} \right) \quad (2.21)$$

$$\xi = z - z_0 \quad (2.22)$$

com  $t_0$  e  $z_0$  referências (constantes) arbitrárias.

É praticamente impossível realizar um modulador de fase quadrática, necessário para criar uma lente temporal. No entanto, a modulação pretendida pode ser aproximada por uma porção de uma modulação de fase sinusoidal. Na região de qualquer extremo da sinusóide, a modulação é essencialmente quadrática. Assim, dentro de certa aproximação, um modulador sinusoidal poderá representar um modulador de fase quadrática, ou seja uma lente temporal.

Um componente, que na prática poderá realizar a acção de uma lente temporal, é um modulador electroóptico excitado por uma forma de onda sinusoidal, com voltagem

$$V(\tau) = V_0 \cos(\omega_m \tau) \quad (5.18)$$

Qualquer onda luminosa  $A(\xi, \tau)$  confinada na região dos extremos da sinusóide (5.18) receberá uma modulação de fase quadrática ou atraso de fase relativamente ao caminho óptico na ausência do campo eléctrico modulador (5.18). Esse efeito pode ser visto como sendo produzido pela modulação do índice de refração do cristal electroóptico, e consequentemente do comprimento do caminho óptico dentro do mesmo.

Quando um MEO é excitado pelo campo (5.18), a perturbação do índice de refração  $\Delta n(\xi', \tau)$  vem dada por

$$\Delta n(\xi', \tau) = \Delta n_0 \cos(\omega_m \tau + k_m \xi' + \varphi) \quad (5.19)$$

Na equação anterior,  $\Delta n_0$  é o pico da variação do índice de refração,  $\omega_m$  representa a frequência angular do campo de excitação (frequência de modulação),  $k_m$  o número de onda do mesmo e  $\varphi$  uma fase inicial de *offset*, ajustável.

Assumindo a onda óptica confinada num extremo do campo, o atraso (5.17) pode ser escrito como

$$\phi(\xi, \tau) = A \cos(\omega_m \tau) \quad (5.20)$$

onde  $A$  representa o pico de fase (pico ou amplitude de modulação), que depende da amplitude do campo eléctrico aplicado, do coeficiente electroóptico do cristal e do comprimento de interacção do mesmo (comprimento do MEO).

Neste caso, a frequência (temporal) instantânea  $\omega_i(t)$  da onda modulada é obtida tendo em conta a relação (3.15):

$$\omega_i(\tau) = \omega_0 - A \omega_m \sin(\omega_m \tau) \quad (5.21)$$

A função  $\omega_i(\tau)$  está representada na Figura 5.5. Na vizinhança de

$$\omega_m \tau = n\pi \quad (n \text{ inteiro}) \quad (5.22)$$

a frequência óptica instantânea da onda sofre um *chirp* quase linear, como se mostra na Figura 5.5. Nos instantes de tempo  $\tau$  dados por (5.22) (extremos de  $\phi(\tau)$ ) as taxas de *chirp* são dadas por:

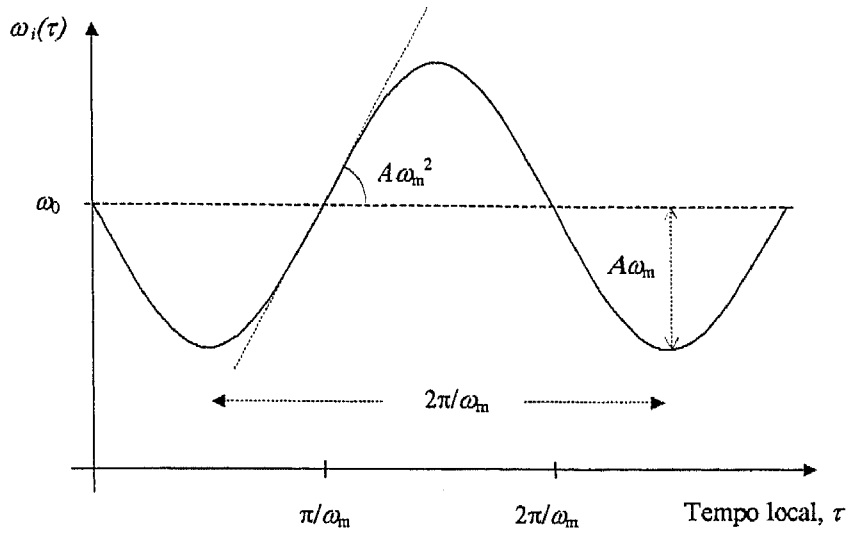


Figura 5.5: Frequência óptica instantânea  $\omega_i(\tau)$  de uma onda luminosa (de frequência portadora  $\omega_0$ ) modulada em fase pela função  $\phi(\tau) = A\cos(\omega_m\tau)$ .

$$\left. \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} \right|_{\text{extremos}} = \pm A\omega_m^2 \quad (5.23)$$

Consideremos a seguir, a expansão da função  $\cos(x)$ , até a 4ª ordem:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \dots \quad (5.24)$$

À volta de  $\tau = 0$ , e usando (5.24), a aproximação quadrática da função de fase  $\phi(\xi, \tau)$  dada pela expressão (5.20) escreve-se da seguinte forma:

$$\phi(\tau) \cong A \left( 1 - \frac{\omega_m^2 \tau^2}{2} \right) \quad (5.25)$$

Usando (5.25) na equação (3.11) ou (3.14), conclui-se que o tempo focal, para uma função de modulação de fase  $\phi(\tau)$  descrita por (5.20), é dado por

$$f_T = \frac{\omega_0}{A\omega_m^2} \quad (5.26)$$

Assim, a lente temporal criada pelo processo de modulação electroóptica é caracterizada, numa aproximação quadrática, por uma transformação de fase

$$\begin{aligned} H(\tau) &= \exp(iA) \exp\left(-i \frac{\omega_0 \tau^2}{2f_T}\right) \\ &= \exp(iA) \exp\left(-i \frac{A\omega_m^2 \tau^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

### 5.2.2 Abertura Temporal de um MEO

É importante relembrar o facto de que um MEO só poderá representar uma lente temporal se a condição (5.25) for satisfeita, isto é, sempre que a modulação de fase sinusoidal (5.20) possa ser aproximada por uma modulação de fase quadrática.

Torna-se portanto necessário definir (de uma forma natural) a *abertura* da lente temporal,  $\tau_a$ , como a largura máxima da janela temporal dentro da qual a modulação de fase  $\phi(\tau)$  é essencialmente quadrática.

Consideremos os termos da expansão (5.24) da função  $\phi(\tau) = A\cos(\omega_m \tau)$  até à 4ª ordem, à volta de  $\tau = 0$ . Se se impuser que dentro de um intervalo  $\Delta\tau$ , com  $|\Delta\tau| \leq \tau_a/2$ , o termo de ordem 4 seja inferior, por exemplo, a 2% do termo quadrático (ordem 2), então a abertura temporal  $\tau_a$  é tal que

$$\tau_a \cong \frac{1}{\omega_m} = \frac{T_m}{2\pi} \quad (5.28)$$

A abertura de uma lente temporal realizada por um modulador electroóptico corresponde, aproximadamente, a 1/6 do período  $T_m$  da modulação de fase  $\phi(\tau)$  [Kolner 88]. Durante esta abertura, a modulação criada pela lente temporal poderá ser considerada quadrática.

### 5.3 Compressão/expansão de impulsos ópticos

Recordando o Capítulo 4, um sistema de formação de imagens temporais é simplesmente constituído por uma lente temporal colocada entre duas linhas de dispersão. Fibras ópticas podem representar essas linhas, enquanto que um modulador electroóptico poderá efectuar a acção de uma lente. A Figura 5.6 apresenta um esquema de um sistema temporal, baseado nesses componentes.

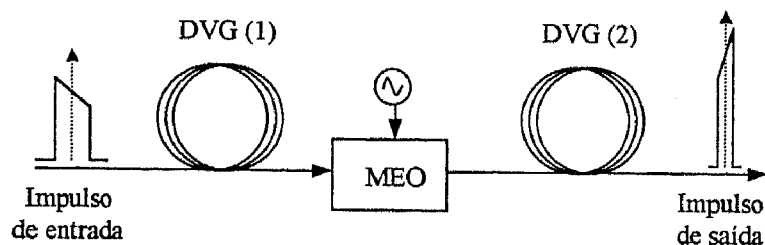
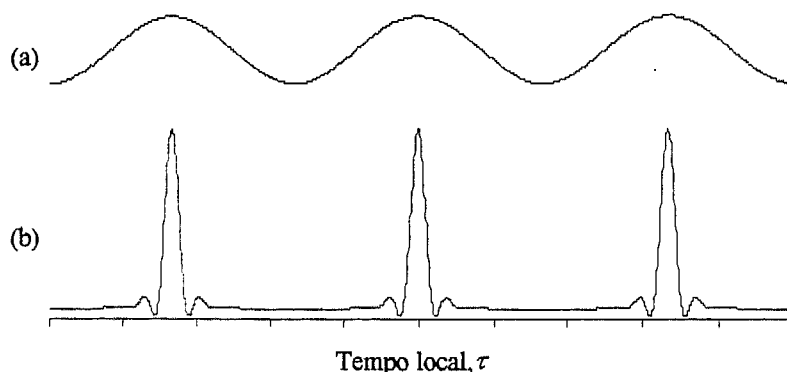


Figura 5.6: Representação esquemática de um sistema de formação de imagens temporais, usando fibras ópticas como linhas de dispersão; DVG (1): fibra óptica de dispersão  $\beta_2^{(1)}$  e comprimento  $\xi_1$ ; DVG (2): fibra óptica de dispersão  $\beta_2^{(2)}$  e comprimento  $\xi_2$ ; MEO: modulador de fase electroóptico, de frequência  $\omega_m$ .

Na implementação de um sistema de formação de imagens temporais dever-se-á ter em conta o sinal do parâmetro de dispersão  $\beta_2$  das linhas de dispersão: uma vez que a lente temporal terá que actuar contra a modulação *chirp* natural do meio que a precede, o sinal da curvatura de fase introduzida pela lente (por exemplo dada pela equação (5.20)) deve ser diferente do sinal de  $\beta_2$ .

Se considerarmos o caso da dispersão anómala,  $\beta_2 < 0$ , somente as porções da forma de onda (ou impulsos) que caíam na parte positiva da modulação da lente temporal poderão sofrer uma modulação *chirp* negativa para compensar o *sweep* de frequência positivo adquirido durante a propagação na linha de dispersão que precede a lente.



**Figura 5.7:** (a): Modulação de fase quadrática (nos extremos) de uma lente temporal; (b): trem de impulsos durante a sua passagem pela lente temporal. Ajustado aos máximos da modulação (a), a imagem temporal dos impulsos poderá ser convenientemente obtida num sistema temporal.

Um impulso (ou trem de impulsos cuja taxa de repetição é igual à frequência de modulação) coincidente com os máximos da modulação de fase da lente temporal (ver Figura 5.7), será então convenientemente ‘processado’, tornando-se possível encontrar a imagem temporal do impulso na saída do sistema.

Por uma questão de simplicidade, e sem perda de generalidade, podem considerar-se linhas de dispersão de entrada e dispersão de saída do sistema de formação de imagens temporais, com o mesmo valor do parâmetro DVG, ou seja  $\beta_2^{(1)} = \beta_2^{(2)} = \beta_2$ . Por exemplo, os elementos dispersivos são representados pela mesma fibra óptica, exibindo dispersão anómala ( $\beta_2 < 0$ ). Esta opção leva a considerar comprimentos de onda dos impulsos  $\lambda$  superiores a  $\lambda_D = 1.31 \mu\text{m}$ . Um comprimento de onda, de particular interesse na área das comunicações ópticas, que cai nesta região, é  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ . Para este valor, fibras ópticas típicas apresentam o valor DVG  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{Km}$ , como se ilustra na Figura 5.2.

Assim, uma vez caracterizadas a dispersão de entrada e de saída (escolhendo  $\beta_2$ ), o sistema temporal fica completamente definido, fixando a amplitude  $A$  e a frequência de modulação  $\omega_m$  do MEO.

### 5.3.1 Imagem temporal de impulsos rectangulares

Uma primeira abordagem para analisar o desempenho de tais sistemas consiste em considerar a modulação de fase sinusoidal produzida pela lente aproximada pela função quadrática (5.25). Neste caso, o tempo focal  $f_T$  do sistema é dado por (5.26):

$$f_T = \frac{\omega_0}{A\omega_m^2} \quad (5.26)$$

Recordando a análise apresentada no Capítulo 4, a relação entre os comprimentos das linhas de dispersão de entrada e saída,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , é ditada pela condição de formação de imagens temporais (4.12). Assim, dever-se-á verificar, usando (5.26),

$$\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} = -\beta_2 A\omega_m^2 \quad (5.29)$$

para que, à distância  $\xi_2$  da lente, se possa encontrar a imagem  $M$  vezes ampliada de um impulso (ou de uma forma de onda qualquer) de entrada do sistema (ver Figura 5.6). Uma vez que o factor de ampliação  $M = -\xi_2/\xi_1$ , fazendo  $\beta_2^{(1)} = \beta_2^{(2)} = \beta_2$  na equação (4.15), e fixando os parâmetros  $\beta_2$ ,  $A$  e  $\omega_m$ , a equação (5.29) pode ser resolvida em ordem a  $\xi_1$ .

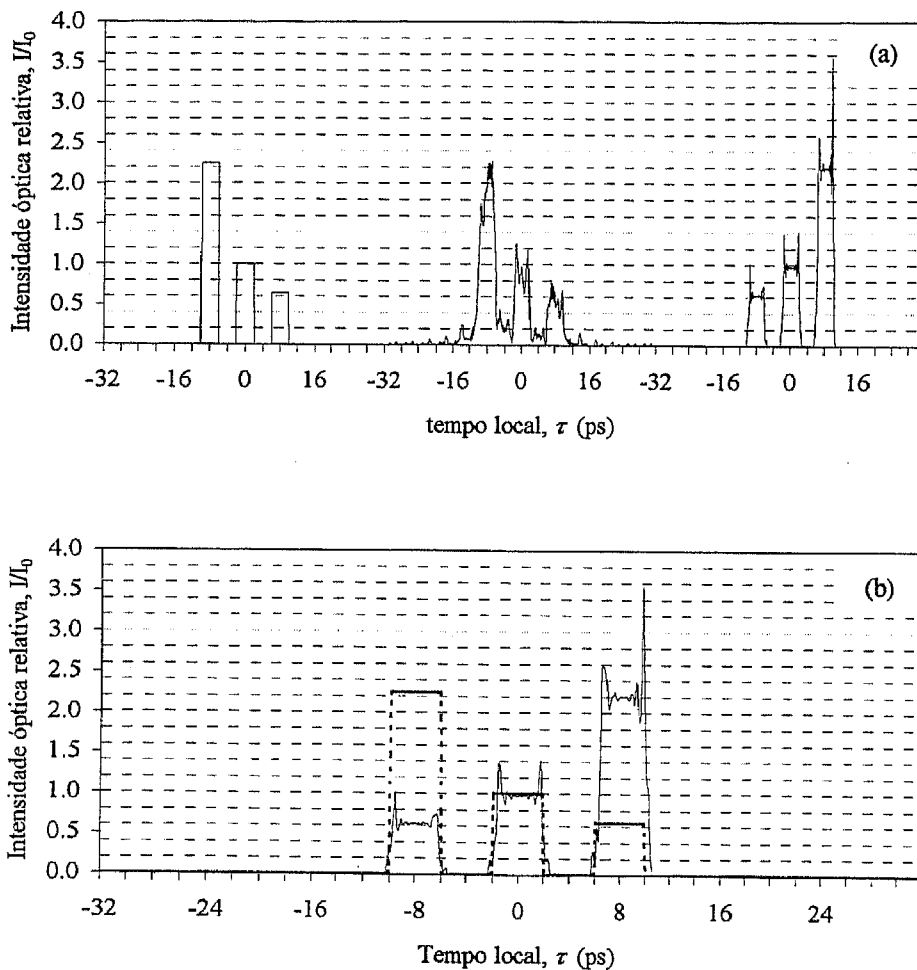
$$\xi_1 = \frac{|M|+1}{|M|} \left( -\frac{1}{\beta_2 A\omega_m^2} \right) \quad (5.30)$$

O comprimento,  $\xi_2$ , da linha de dispersão que sucede a lente é  $\xi_2 = |M| \xi_1$ .

A Figura 5.8 representa a propagação de um conjunto de três impulsos rectangulares de larguras  $T_0 = 4$  ps (usado como forma de onda de entrada) ao longo do sistema da Figura 5.6, com factor de ampliação  $M = -1$  (imagem 1:1). O sistema foi simulado<sup>†</sup> com os parâmetros  $\lambda =$

<sup>†</sup> Os resultados computacionais das simulações foram obtidos pelo método *Split-Step Fourier* (baseado no algoritmo *FFT*), implementado no programa *MATLAB 4.0 for Windows*, e posteriormente processados no programa *MS EXCEL 7.0*.

$1.55 \mu\text{m}$ ,  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{Km}$ ,  $A = 50 \text{ rad}$  e  $\omega_m = 2\pi \cdot 20 \text{ GHz}$ . Das equações (5.26) e (5.28), resulta que este sistema é caracterizado por uma lente temporal cujo tempo focal é  $f_T = 1.54 \text{ ns}$  e a abertura temporal  $\tau_a = 7.95 \text{ ps}$ .



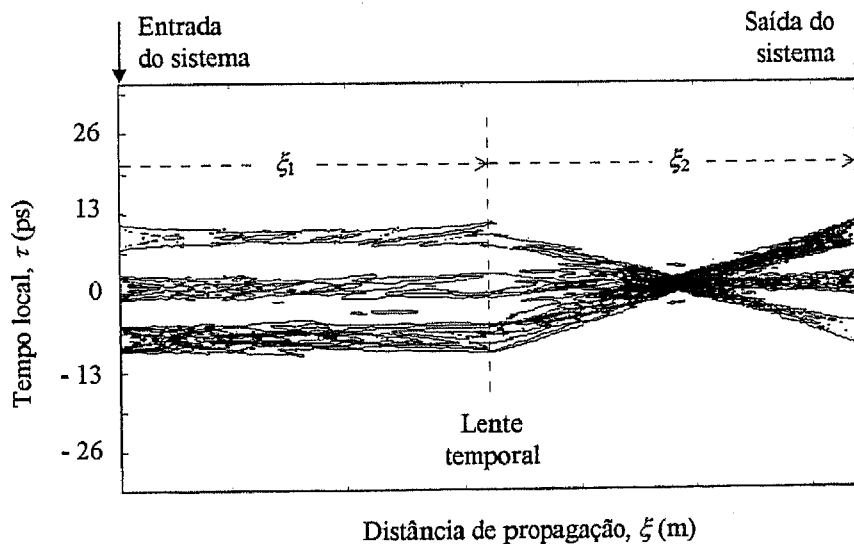
**Figura 5.8:** Formação da imagem temporal 1:1 ( $M = -1$ ) de impulsos retangulares, com  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ,  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{Km}$ ,  $A = 50 \text{ rad}$  e  $\omega_m = 2\pi \cdot 20 \text{ GHz}$ . O tempo focal deste sistema é  $f_T = 1.54 \text{ ns}$ . (a) Propagação dos impulsos ao longo do sistema: as curvas representam, respectivamente, o perfil da intensidade do sinal de entrada, a intensidade do sinal antes da lente temporal (propagação de  $\xi_1 = 126.6 \text{ m}$ ) e o sinal à saída do sistema (propagação de  $\xi_2 = \xi_1$ ); (b) O sinal de entrada (tracejado) e a sua imagem temporal (sinal de saída).

A resolução do sistema medida na escala temporal de entrada é dada pela relação (4.45), sendo neste caso  $\delta\tau = 1 \text{ ps}$ . As distâncias de propagação (comprimento das fibras ópticas) são dadas pela equação (5.30), e valem  $\xi_1 = \xi_2 = 126.6 \text{ m}$ .

Um factor de ampliação negativo implica uma imagem invertida do sinal de entrada (o mesmo se verifica nos sistemas de formação de imagens espaciais) como se pode ver na Figura 5.8. O ruído e as oscilações observadas no sinal de saída são devidos à largura de banda limitada que o sistema pode suportar: este efeito é conhecido por *fenómeno de Gibbs*.

O tempo de atraso entre os sinais (conjuntos de três impulsos) representados na Figura 5.8(a), é menor que aquele que deveria ser, para proporcionar qualidade de apresentação. De facto, no sistema 1:1 da Figura 5.8,  $\xi_1 = \xi_2 = 126.6$  m; estes parâmetros correspondem às distâncias propagadas nas fibras durante o intervalo de tempo  $2f_T = 4.5$  ns, tempo de propagação muito maior que a duração  $T_0$  dos impulsos considerados.

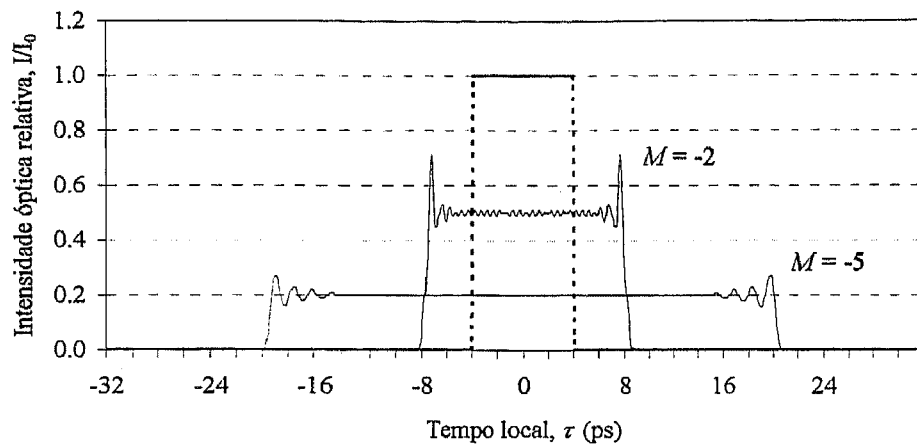
A Figura 5.9 mostra linhas de contorno (de intensidade) do conjunto de impulsos rectangulares usado como entrada do sistema temporal 1:1 durante a sua propagação ao longo do mesmo.



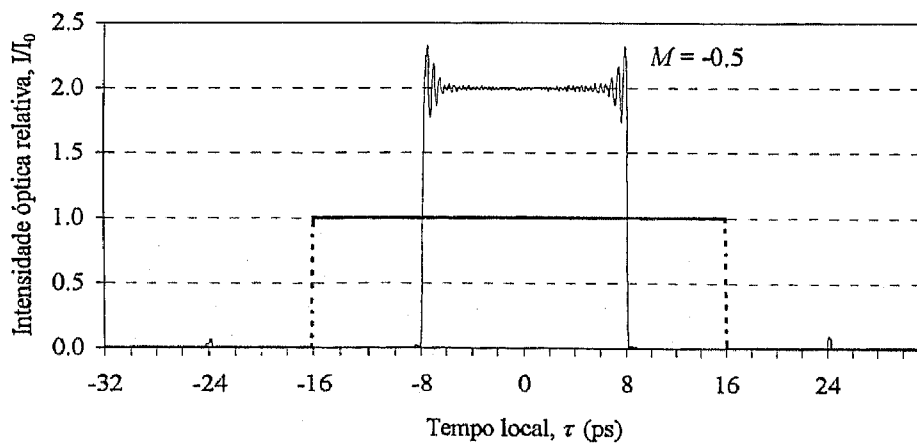
**Figura 5.9:** Linhas de contorno (de intensidade) do conjunto de impulsos da Figura 5.8 (a), durante a sua propagação no sistema de formação de imagem 1:1 ( $M = -1$ ). As distâncias  $\xi_1$  e  $\xi_2$  (medidas relativamente à lente temporal) correspondem à propagação durante  $2f_T$  segundos.

Durante a propagação dos impulsos (sinal) ao longo do sistema temporal, verifica-se que a energia se concentra num determinado instante, designado por *foco* da lente temporal. Assim, é possível localizar o sinal no foco da lente, depois de ele se propagar durante o intervalo de tempo  $f_T$  (tempo focal) após a sua passagem pela lente.

As Figuras 5.10 e 5.11 mostram outros exemplos da formação da imagem temporal de um impulso rectangular, para factores de ampliação  $M < -1$  (ampliação do impulso) e  $M > -1$  (compressão do impulso), respectivamente. Para ambos os casos, os parâmetros escolhidos do sistema são  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ,  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{Km}$ ,  $A = 50 \text{ rad}$  e  $\omega_m = 2\pi \cdot 20 \text{ GHz}$  (correspondendo a uma lente temporal de tempo focal  $f_T = 1.54 \text{ ns}$  e abertura temporal  $\tau_a = 7.95 \text{ ps}$ ).



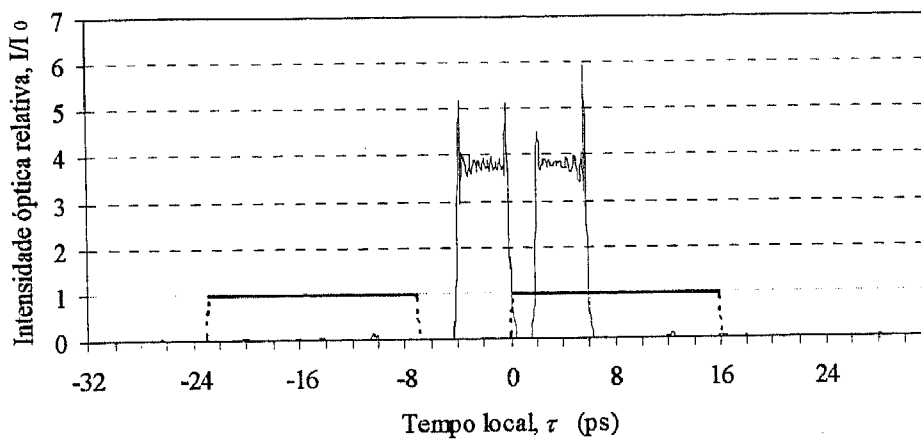
**Figura 5.10:** Imagens temporais  $1:M$  de um impulso rectangular (curva tracejada) de largura  $T_0 = 8 \text{ ps}$ , para  $M = -2$  e  $M = -5$ , com  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ,  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{Km}$ ,  $A = 50 \text{ rad}$  e  $\omega_m = 2\pi \cdot 20 \text{ GHz}$ , e  $f_T = 1.54 \text{ ns}$ . As distâncias de propagação são  $\xi_1 = 95.0 \text{ m}$  e  $\xi_2 = 190.0 \text{ m}$  ( $M = -2$ ), e  $\xi_1 = 76.0 \text{ m}$  e  $\xi_2 = 379.9 \text{ m}$  ( $M = -5$ ).



**Figura 5.11:** O mesmo que Figura 5.10, para um impulso de largura  $T_0 = 32 \text{ ps}$ , e factor de ampliação  $M = -0.5$ . Neste caso,  $\xi_1 = 190.0 \text{ m}$  e  $\xi_2 = 95.0 \text{ m}$ .

A Figura 5.10 ilustra os casos relativos a  $M = -2$  e  $M = -5$ , para os quais o comprimento das fibras de entrada e de saída são  $\xi_1 = 95.0$  m e  $\xi_2 = 190.0$  m, e  $\xi_1 = 76.0$  m e  $\xi_2 = 379.9$  m, respectivamente. Como seria de esperar, nos sistemas de formação de imagem para  $M = -2$  e  $M = -0.5$  (Figura 5.11), as distâncias  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são iguais, mas trocadas.

Na Figura 5.12, mostra-se a imagem temporal de dois impulsos rectangulares ( $T_0 = 16$  ps), obtida por um sistema com os mesmos parâmetros relativos às Figuras 5.10 e 5.11.



**Figura 5.12:** Imagens temporais  $1:M$  de dois impulsos rectangulares (curva tracejada), com  $T_0 = 16$  ps, para  $M = -0.25$ . Os parâmetros característicos do sistema são os mesmos que os das Figuras 5.10 e 5.11, com  $\xi_1 = 316,6$  m e  $\xi_2 = 79,2$  m.

Neste caso, a imagem corresponde a dois impulsos de largura 4 ps, uma vez que o sistema foi considerado com um factor de ampliação  $M = -0.25$ . Nota-se que o tempo entre os dois impulsos de entrada também é comprimido.

Nos exemplos anteriores (Figuras 5.8 - 5.12), os efeitos da abertura da lente não foram considerados. Na verdade, como se viu na Secção 5.2.1, um MEO usado como lente temporal só providencia uma modulação de fase quadrática dentro de um certo intervalo de tempo - abertura temporal. Além disso, a aproximação de banda estreita, considerada aquando a análise dos sistemas de formação de imagens com base numa analogia espaço-tempo, não é válida quando se consideram impulsos rectangulares. Esta violação é denunciada pelo fenómeno de Gibbs. Torna-se necessário estudar outras formas de onda como entrada de sistemas temporais.

### 5.3.2 Imagem temporal de impulsos Gaussianos

Os impulsos ópticos emitidos por vários *lasers* podem ser aproximados por funções (perfis) Gaussianas. Este tipo de impulsos apresentam largura de banda finita.

Num sistema temporal, um impulso Gaussiano será representado pelo campo de entrada

$$A(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right) \quad (5.31)$$

onde  $T_0$  é definido como a meia largura do impulso (largura a 1/e da intensidade). Na prática, é comum usar a largura total a meia altura (FWHM) para definir a largura do impulso, em vez de  $T_0$ . Para um impulso Gaussiano, estas duas grandezas relacionam-se por:

$$T_{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2}T_0 \cong 1.665T_0 \quad (5.32)$$

Usando as equações (4.1)-(4.2) e (5.31) e efectuando a integração, a amplitude do impulso, após uma propagação  $\xi_1$  é dada por

$$A(\xi_1, \tau) = \left(\frac{T_0^2}{T_0^2 - i\beta_2\xi_1}\right) \exp\left[-\frac{\tau^2}{2(T_0^2 - i\beta_2\xi_1)}\right] \quad (5.33)$$

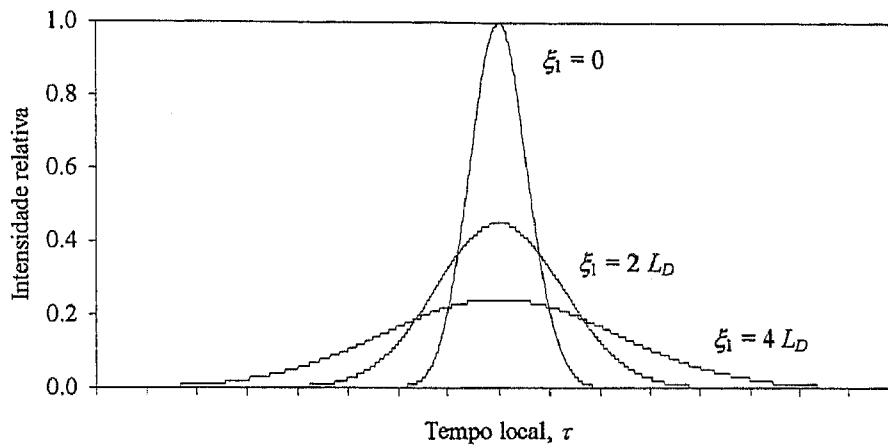
Logo, durante a propagação num meio dispersivo, um impulso Gaussiano mantém a sua forma, enquanto que a sua largura aumenta de  $T_0$  para  $T_1$ , com

$$T_1 = T_0 \left[1 + \left(\frac{\xi}{L_D}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.34)$$

A grandeza  $L_D$  é definida como o *comprimento de dispersão*, dado por

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad (5.35)$$

A equação (5.34) mostra que a dispersão alarga o impulso. A extensão do alargamento é governada pelo comprimento de dispersão  $L_D$ : para uma dada distância de propagação  $\xi_1$ , impulsos curtos alargam mais porque apresentam comprimentos de dispersão mais pequenos.



**Figura 5.13:** Alargamento de um impulso Gaussiano devido à dispersão. Para  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_1 = 2L_D$  e  $\xi_1 = 4L_D$ . O comprimento de dispersão  $L_D = T_0^2 / |\beta_2|$  onde  $\beta_2$  é o parâmetro de dispersão.

A Figura 5.13 ilustra o alargamento dispersivo para um impulso Gaussiano, para diferentes distâncias de propagação. Quando  $\xi_1 = L_D$ , o impulso alarga de um factor  $\sqrt{2}$ .

Uma comparação das equações (5.31) e (5.33) mostram que, mesmo que o impulso não seja inicialmente *chirped* (sem modulação de fase inicial), o impulso transmitido torna-se *chirped*. Este facto é claramente visto escrevendo  $A(\xi, \tau)$  (equação (5.33)) na forma

$$A(\xi_1, \tau) = |A(\xi_1, \tau)| \exp[i\phi(\xi_1, \tau)] \quad (5.36)$$

onde

$$\phi(\xi_1, \tau) = -\frac{\text{sgn } \beta_2 \left( \frac{\xi_1}{L_D} \right) \tau^2}{1 + \left( \frac{\xi_1}{L_D} \right)^2 T_0^2} + \tan^{-1} \left( \frac{\xi_1}{L_D} \right) \quad (5.37)$$

A dependência temporal da função de fase  $\phi(\xi_1, \tau)$  implica que a frequência instantânea  $\omega$  difere, ao longo do impulso, da frequência central  $\omega_0$ . Esta diferença  $\delta\omega$  não é mais que a derivada temporal  $\partial\phi(\xi_1, \tau)/\partial\tau$ , dada por

$$\delta\omega = \frac{\partial\phi(\xi_1, \tau)}{\partial\tau} = -\frac{2 \operatorname{sgn} \beta_2 \left(\frac{\xi_1}{L_D}\right) \tau}{1 + \left(\frac{\xi_1}{L_D}\right)^2} \frac{1}{T_0^2} \quad (5.38)$$

A relação (5.38) mostra que a frequência varia linearmente ao longo do impulso: o impulso sofre um *chirp* linear em frequência. Este *chirp*  $\delta\omega$  depende do sinal da dispersão  $\beta_2$  que caracteriza o meio de propagação. No regime de dispersão normal ( $\beta_2 > 0$ ),  $\delta\omega$  é negativo na cauda do impulso ( $\tau < 0$ ) e aumenta linearmente ao longo do impulso; o contrário acontece na região de dispersão anômala ( $\beta_2 < 0$ ).

De notar que para um impulso sem modulação de fase inicial, a equação (5.34) mostra que o alargamento do impulso devido a DVG não depende do sinal de  $\beta_2$ : para um dado valor do comprimento de dispersão  $L_D$ , o impulso alarga de uma mesma quantidade nos regimes de dispersão normal e dispersão anômala da fibra.

Se se considerar um impulso de forma Gaussiana à entrada de um sistema temporal, ilustrado na Figura 5.6, torna-se necessário impor que a largura  $T_1$  do impulso (calculada pela relação (5.34)), depois de se propagar ao longo da linha de dispersão que precede a lente temporal, seja inferior (ou igual) à abertura temporal  $\tau_a$  da lente, para que a imagem do impulso seja convenientemente obtida à saída do sistema. A condição  $T_1 \leq \tau_a$  pode ser escrita como

$$T_0 \left[ 1 + \left( \frac{\xi_1 \beta_2}{T_0^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \tau_a \quad (5.39)$$

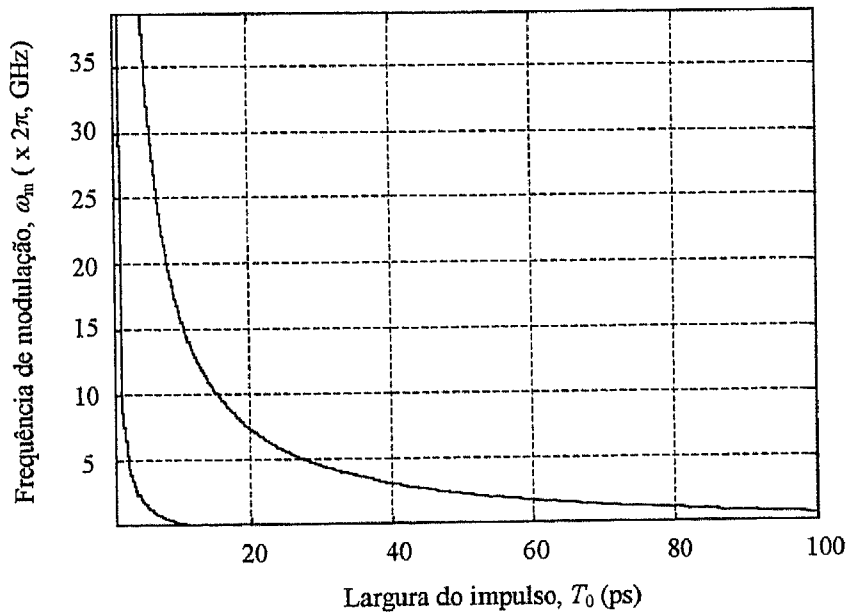
Tendo em conta as relações (5.28), (5.30), a equação (5.39) é equivalente a

$$T_0 \left[ 1 + \left( -\frac{C}{A\omega_m^2 T_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\omega_m} \quad (5.40)$$

onde

$$C = \frac{|M|+1}{|M|} \quad (5.41)$$

A equação (5.40) impõe uma relação entre a largura inicial  $T_0$  de um impulso Gaussiano e a frequência de modulação  $\omega_m$  do MEO, para que a sua imagem seja obtida, para um determinado factor de ampliação  $M$  e uma dada amplitude de modulação  $A$ .



**Figura 5.14:** Frequência de modulação  $\omega_m$  do MEO como função da largura  $T_0$  de um impulso Gaussiano de entrada de um sistema temporal da Figura 5.6, com  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ,  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{Km}$ ,  $A = 50 \text{ rad}$ , para  $M = -1$ . As curvas limitam uma região na qual  $T_1 \leq \tau_a$ .

Na Figura 5.14, mostram-se as curvas (linhas de contorno) da função  $\omega_m = \omega_m(T_0)$ , para as quais a igualdade em (5.40) se verifique, ou seja,  $T_1 = \tau_a$ . Note-se que a igualdade  $T_1 = \tau_a$

corresponde à situação na qual o impulso Gaussiano  $A(\xi_1, \tau)$  dada por (5.33) preenche completamente a lente (abertura) temporal.

Na formação da imagem temporal de um impulso de uma dada largura  $T_0$ , dever-se-á escolher um valor de frequência de modulação  $\omega_m$  dentro da região delimitada pelas curvas da Figura 5.14.

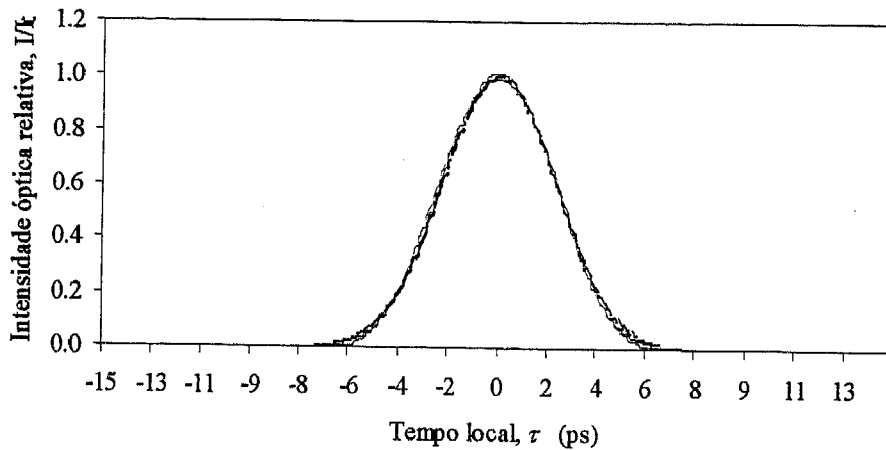


Figura 5.15: Imagens temporais 1:1 ( $M = -1$ ) de um impulso Gaussiano (curva tracejada) de largura  $T_0 = 8.33$  ps, com  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ,  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{Km}$ ,  $A = 50$  rad, para  $\omega_m = 2\pi \cdot 15$  GHz ( $\tau_a = 10.61$  ps) e  $\omega_m = 2\pi \cdot 20$  GHz ( $\tau_a = 7.95$  ps).

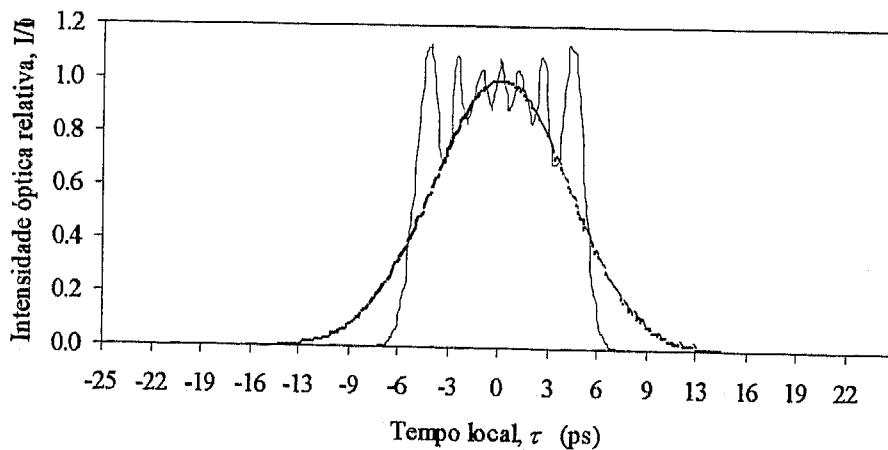
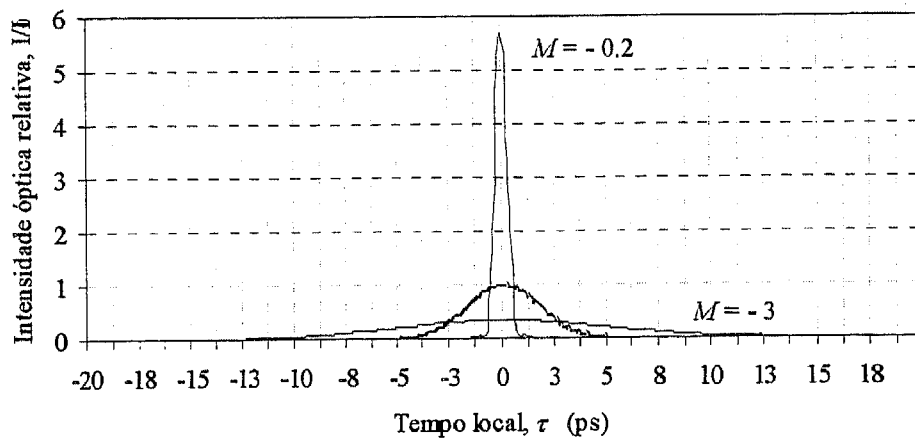


Figura 5.16: O mesmo que Figura 5.15, para um impulso de 16.6 ps (curva tracejada) e  $\omega_m = 2\pi \cdot 20$  GHz. Para esta largura do impulso de entrada, o valor da frequência de modulação não se situa na região delimitada da Figura 5.14: a largura do impulso (16.6 ps) é bastante maior que a abertura temporal da lente (7.95 ps). A imagem do impulso de entrada aparece distorcida.

Considerando o sistema temporal da Figura 5.6, caracterizado pelos parâmetros  $\lambda = 1.55$   $\mu\text{m}$ ,  $\beta_2 = -20$   $\text{ps}^2/\text{Km}$  e  $A = 50$  rad, as imagens 1:1 ( $M = -1$ ) de um impulso Gaussiano de entrada de largura  $T_0 = 8.33$  ps são mostradas na Figura 5.15, para os valores  $\omega_m = 2\pi.15$  GHz e  $\omega_m = 2\pi.20$  GHz (correspondendo a aberturas temporais  $\tau_a = 10.61$  ps e  $\tau_a = 7.95$  ps, respectivamente). Nota-se que estas imagens são (praticamente) iguais para estes valores de frequência de modulação considerados.

Impulsos de larguras  $T_1$  maiores que a abertura temporal da lente possuem grande parte de energia fora da região quadrática do ciclo RF (modulação quadrática da lente) induzindo *chirp* não linear, causando distorção na imagem do impulso de entrada. A Figura 5.16 ilustra um exemplo, para um impulso de largura  $T_0 = 16.6$  ps e frequência de modulação  $\omega_m = 2\pi.20$  GHz ( $\tau_a = 7.95$  ps).

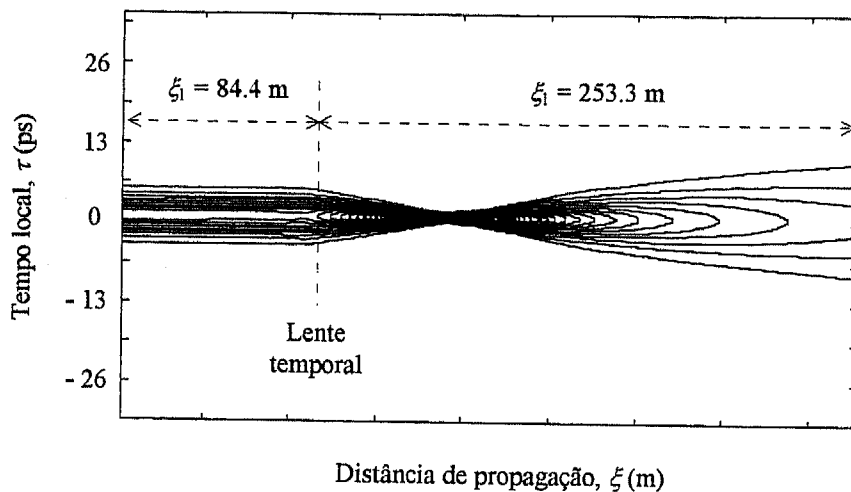
A Figura 5.17 ilustra outro exemplo da formação da imagem temporal de um impulso de perfil Gaussiano, para factores de ampliação  $M < -3$  (ampliação do impulso) e  $M > -0.2$  (compressão do impulso), respectivamente.



**Figura 5.17:** Imagens temporais 1: $M$  de um impulso de perfil Gaussiano (curva tracejada) de largura  $T_0 = 2.4$  ps, para  $M = -0.2$  e  $M = -3$ , com  $\lambda = 1.55$   $\mu\text{m}$ ,  $\beta_2 = -20$   $\text{ps}^2/\text{Km}$ ,  $A = 50$  rad e  $\omega_m = 2\pi.20$  GHz, e  $f_T = 1.54$  ns ( $\tau_a = 7.95$  ps e  $\delta\tau = 1$  ps). As distâncias de propagação nas linhas de dispersão são  $\xi_1 = 379.9$  m e  $\xi_2 = 76.0$  m ( $M = -0.2$ ), e  $\xi_1 = 84.4$  m e  $\xi_2 = 253.3$  m ( $M = -3$ ).

Para ambos os casos, os parâmetros escolhidos do sistema são  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ,  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{Km}$ ,  $A = 50 \text{ rad}$  e  $\omega_m = 2\pi \cdot 20 \text{ GHz}$ .

A Figura 5.18 mostra linhas de contorno (de intensidade) do impulso de perfil Gaussiano considerado no exemplo da Figura 5.17 usado como entrada do sistema temporal  $1:M$ , para  $M = -0.2$ . As distâncias de propagação durante a sua propagação ao longo do mesmo são também indicadas.



**Figura 5.18:** Linhas de contorno (de intensidade) do impulso de perfil Gaussiano da Figura 5.17, durante a sua propagação no sistema de formação de imagem  $1:M$ , para  $M = -0.2$ . São assinaladas as distâncias de propagação,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , nas linhas de dispersão, relativamente à localização da lente temporal.

Na Figura 5.18, é evidente a localização do foco da lente temporal. O perfil da intensidade da forma de onda no foco é de particular interesse, e será analisado de forma mais profunda no próximo Capítulo (Secção 6.1).

### 5.3.3 Imagem temporal de outras formas de onda

Embora os impulsos emitidos por muitos *lasers* possam ser aproximados por perfis (funções) Gaussianos, é muitas vezes necessário considerar outros: um perfil de interesse

particular é a função secante hiperbólica, usada na representação de impulsos gerados por *mode-locking*, ou de *solitons* ópticos. O campo incidente associado a impulsos deste tipo é da forma

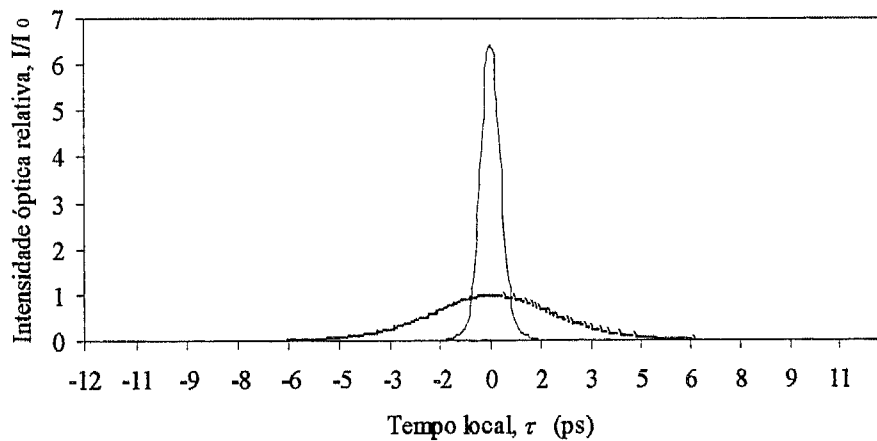
$$A(0, \tau) = \operatorname{sech}\left(\frac{\tau}{T_0}\right) \quad (5.42)$$

Note-se que  $T_0$  não corresponde à largura FWHM, mas relaciona-se com esta por

$$T_{FWHM} = 2 \ln(1 + \sqrt{2}) T_0 \cong 1.763 T_0 \quad (5.43)$$

Esta relação deve ser usada se a comparação é feita com base na largura FWHM. A mesma relação para impulsos Gaussianos é dada por (5.30).

O campo transmitido  $A(\xi, \tau)$  é obtido usando (5.42) nas equações (4.1) e (4.2). Infelizmente, o cálculo do integral (4.1) não é trivial para formas de onda não Gaussianas.



**Figura 5.19:** O mesmo que Figura 5.17, para um impulso de perfil secante hiperbólico (curva tracejada), para  $M = -0.2$ .

As características qualitativas do alargamento causado em impulsos devido à DVG são praticamente idênticas para impulsos Gaussianos e secante hiperbólicos: a Figura 5.19 ilustra o mesmo exemplo apresentado na Figura 5.17, para o caso de um impulso de perfil secante hiperbólico.

Neste Capítulo, foram apresentadas as características de vários componentes que poderão representar os elementos constituintes dos sistemas temporais: fibras ópticas e par(es) de redes de difracção podem ser usados como linhas de dispersão, enquanto que moduladores electroópticos (MEO) podem realizar a acção de uma lente temporal.

Um MEO poderá ser considerado uma lente temporal somente durante a abertura temporal do MEO: neste intervalo de tempo, a modulação de fase introduzida pelo MEO é - aproximadamente - quadrática. Quando a passagem de um sinal (ou parte deste sinal) através da lente temporal ocorre fora (antes ou depois) desta abertura, a forma de onda não é convenientemente modulada: este sinal adquire um *chirp* não linear, causando aberrações (distorções) na sua imagem temporal, obtida à saída do sistema.

A formação de imagens temporais foi exemplificada (simulada) com aplicações na compressão e expansão de impulsos ópticos, i.é., formas de onda de perfil variável no tempo. A compressão de um impulso corresponde a um factor de ampliação  $M > -1$ , enquanto que a expansão destes sinais leva a considerar factores de ampliação  $M < -1$ .

Outras aplicações dos sistemas temporais, como por exemplo permutações (*shuffle*) de sinais ópticos <sup>[Lohm. 92a]</sup>, são encontradas no domínio do processamento de sinal.

---

## APLICAÇÕES DOS SISTEMAS TEMPORAIS

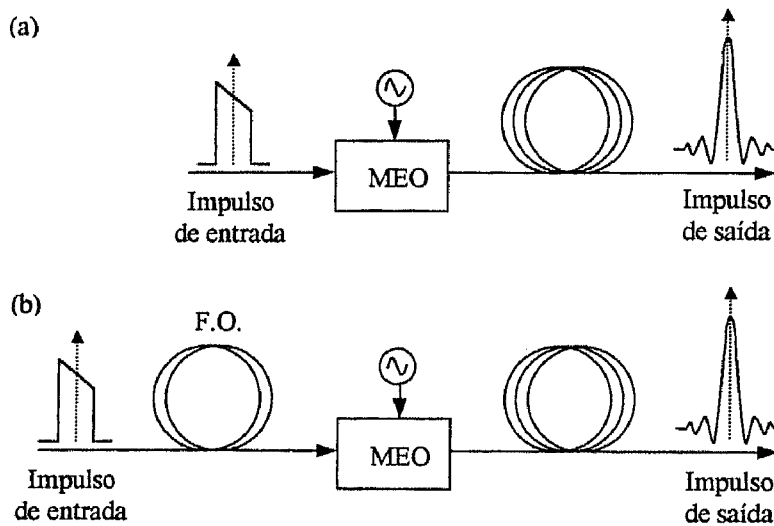
Uma das mais notáveis propriedades de uma lente espacial é a sua capacidade de realizar Transformadas de Fourier (*TF*). Esta operação analógica relativamente complicada pode ser efectuada com simplicidade em sistemas ópticos coerentes, tirando partido das leis básicas de propagação das formas de onda, ou impulsos. Nas Secções 6.1 e 6.2, um transformador de Fourier é implementado por um sistema temporal  $2f_T$ , sendo visto como um analisador de espectros de tempo-real. As potencialidades de um sistema  $2f_T$  são estendidas à realização de filtragem temporal: dois sistemas  $2f_T$ , idênticos, colocados em série, formam um *sistema temporal*  $4f_T$ , permitindo realizar operações tais como correlação e convolução.

Na Secção 6.3, descreve-se a análise teórica de um método de geração de impulsos ópticos ultra curtos, a partir da saída de um laser operando em CW (modo contínuo), através do uso de sistemas temporais.

### 6.1 Transformador de Fourier

Nesta Secção, são analisadas duas configurações, representadas na Figura 6.1, que podem ser usadas para efectuar transformações de Fourier de sinais temporais aplicados à entrada destes sistemas.

No caso do arranjo da Figura 6.1(a), uma forma de onda (impulso) entra no sistema temporal directamente no MEO (lente temporal).



**Figura 6.1:** Duas geometrias de sistemas temporais usados para efectuar Transformadas de Fourier. MEO: modulador electroóptico (lente temporal); F.O.: fibras ópticas (linhas de dispersão  $\beta_2$ ).

O esquema da Figura 6.1(b) difere do anterior, uma vez que o impulso se propaga ao longo de uma distância  $\xi_1$  na linha de dispersão de entrada, antes de ser modulado pelo MEO.

A análise destes dois sistemas torna-se evidente recordando os resultados encontrados no Capítulo 4.

### 6.1.1 Impulso de entrada no MEO

Seja uma forma de onda, ou impulso,  $A(0, \tau)$  incidente no MEO (lente temporal) do sistema da Figura 6.1(a). Designando por  $P(\tau)$  a função pupila - abertura temporal - da lente (definida na Secção 4.5), a distribuição de amplitude do impulso imediatamente após a sua passagem pelo MEO é

$$A_1(0, \tau) = A(0, \tau)P(\tau)H(\tau) \tag{6.1}$$

$H(\tau)$  é a modulação de fase quadrática introduzida pela lente. Usando as funções definidas na Tabela I da Secção 4.1, pode-se escrever (6.1) como

$$A_t(0, \tau) = A(0, \tau)P(\tau) \exp\left(i \frac{\omega_0 \tau^2}{2f_T}\right) \quad (6.2)$$

Pretende-se encontrar a expressão para o campo no *foco* da lente temporal  $A(f, \tau)$ , na saída do sistema temporal.  $A(f, \tau)$  é a envolvente do campo  $A_t(0, \tau)$  (equação (6.2)) após ter-se propagado uma distância  $f$  na linha de dispersão que sucede a lente:  $f$  corresponde então à distância de propagação do impulso durante o tempo focal  $f_T$ .

Recordando de novo a Tabela I da Secção 4.1,

$$A(f, \tau) = A_t(0, \tau) \otimes G_2(f, \tau) \quad (6.3)$$

ou, sob a forma integral, e usando (6.2):

$$A(f, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi b_f}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(0, \tau') P(\tau') \exp\left(i \frac{\omega_0 \tau'^2}{2f_T}\right) \exp\left[i \frac{(\tau' - \tau)^2}{4b_f}\right] d\tau' \quad (6.4)$$

onde

$$b_f = \frac{f}{2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial \omega^2} = \frac{f}{2} \beta_2 \quad (6.5)$$

Desenvolvendo o termo exponencial do integral (6.4), obtém-se

$$A(f, \tau) = \frac{\exp\left(i \frac{\tau^2}{2f\beta_2}\right)}{\sqrt{2\pi f\beta_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(0, \tau') P(\tau') \exp\left(i \frac{\omega_0 \tau'^2}{2f_T} + i \frac{\tau'^2}{2f\beta_2}\right) \exp\left(-i \frac{\tau'\tau}{f\beta_2}\right) d\tau' \quad (6.6)$$

O primeiro termo exponencial do integral (6.6), quadrático em  $\tau'$ , desaparece se

$$\frac{\omega_0}{2f_T} = -\frac{1}{2f\beta_2} \quad (6.7)$$

ou seja, se se verificar a condição

$$f = -\frac{1}{\omega_0 \beta_2} f_T = -\frac{1}{\beta_2 A \omega_m^2} \quad (6.8)$$

onde se usou a relação (5.26) para o tempo focal  $f_T$ .

Considerando que a largura do impulso é menor que a abertura temporal  $P(\tau)$  da lente,  $P(\tau) \cong 1$ , e a equação (6.6) rescreve-se como

$$A(f, \tau) = \frac{\exp\left(i \frac{\tau^2}{2f\beta_2}\right)}{\sqrt{2\pi f\beta_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(0, \tau') \exp\left(-i \frac{\tau'\tau}{f\beta_2}\right) d\tau' \quad (6.9)$$

A relação (6.9) mostra que a amplitude do campo no foco da lente temporal (saída do sistema) é proporcional à Transformada de Fourier da porção do campo delimitado pela abertura temporal da lente:

$$A(f, \tau) = \frac{\exp\left(i \frac{\tau^2}{2f\beta_2}\right)}{\sqrt{2\pi f\beta_2}} \tilde{A}\left(0, \frac{\tau}{2\pi f\beta_2}\right) \quad (6.10)$$

As componentes espectrais da forma de onda de entrada  $A(0, \tau)$  são dadas por  $A(f, \tau)$ , medidas nas frequências temporais

$$\omega = \frac{\tau}{2\pi f\beta_2} \quad (6.11)$$

A relação de Transformada de Fourier (6.10) entre  $A(0, \tau)$  e  $A(f, \tau)$  (ou seja  $\tilde{A}(0, \tau)$ ) não é completa devido à presença do factor de fase quadrático. No entanto, se a intensidade do campo é pretendida (como na maior parte dos casos), a distribuição de fase é irrelevante.

### 6.1.2 Impulso de entrada na fibra óptica

Considera-se, de seguida, o sistema mais geral (Figura 6.1(b)) onde a forma de onda  $A(0, \tau)$  se propaga ao longo de uma distância  $\xi_1$ , na fibra de entrada (caracterizada também pelo parâmetro  $\beta_2$ ), antes da sua passagem pela lente. Designando  $\tilde{A}(0, \omega)$  o espectro de Fourier do sinal de entrada  $A(0, \tau)$ , e  $\tilde{A}(\xi_1, \omega)$  o espectro de Fourier de  $A(\xi_1, \tau)$ , ou seja:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(0, \omega) &= TF\{A(0, \tau)\} \\ \tilde{A}(\xi_1, \omega) &= TF\{A(\xi_1, \tau)\}\end{aligned}\quad (6.12)$$

os dois espectros de (6.12) relacionam-se por

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\xi_1, \omega) &= \tilde{A}(0, \omega)\tilde{G}_1(\xi_1, \omega) \\ &= \tilde{A}(0, \omega)\exp(-ia\omega^2)\end{aligned}\quad (6.13)$$

onde, da Tabela I do Capítulo 4,

$$a = \frac{\xi_1}{2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial \omega^2} = \frac{\xi_1}{2} \beta_2 \quad (6.14)$$

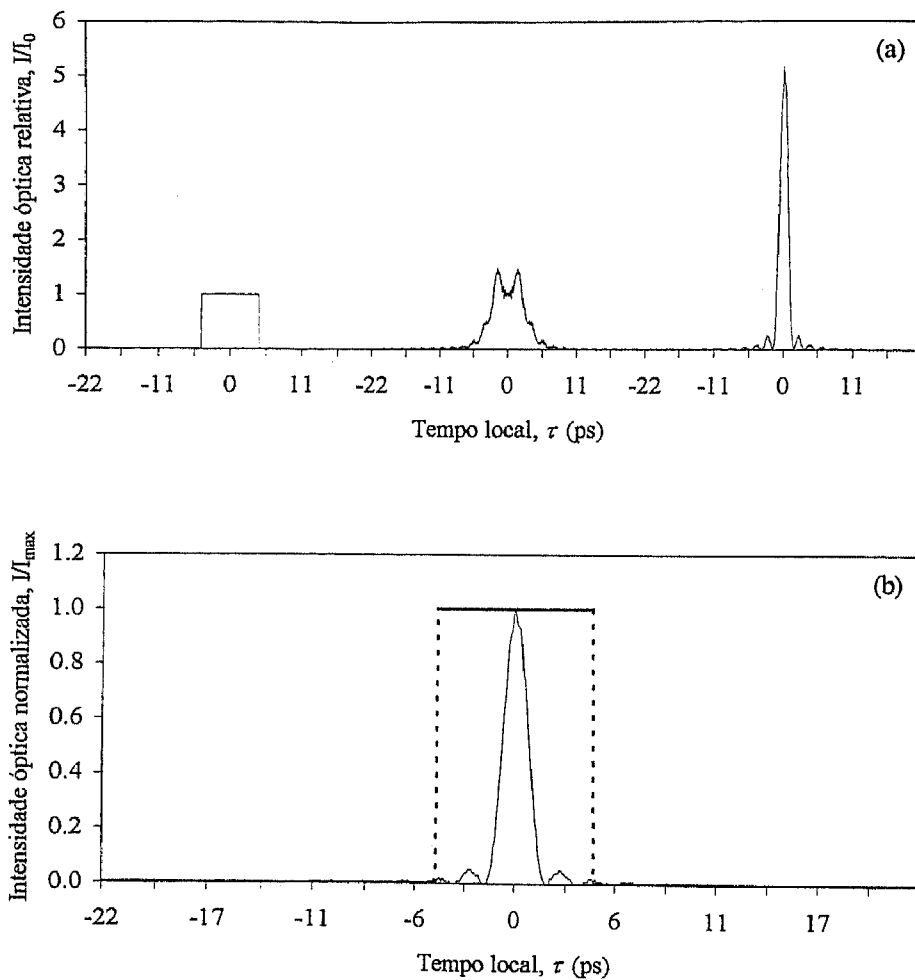
Substituindo (6.13) em (6.10), e usando (6.11), tem-se que

$$A(f, \tau) = \frac{\exp\left[i \frac{\tau^2}{2f\beta_2} \left(1 - \frac{\xi_1}{f}\right)\right]}{\sqrt{2\pi f\beta_2}} \tilde{A}\left(0, \frac{\tau}{2\pi f\beta_2}\right) \quad (6.15)$$

A amplitude e fase da saída do sistema relacionam-se novamente com a amplitude e fase do espectro de entrada, nas frequências  $\tau/2\pi f\beta_2$ . Nota-se que o termo de fase quadrática se pode anular para o caso especial do sistema no qual  $\xi_1 = f$ , a curvatura de fase da saída do sistema desaparece. Tal sistema será designado por *sistema temporal*  $2f\tau$ . Esta designação é também usada no caso dos sistemas espaciais. Com  $\xi_1 = f$ , a relação (6.15) é dada por

$$A(f, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f \beta_2}} \tilde{A}\left(0, \frac{\tau}{2\pi f \beta_2}\right) \quad (6.16)$$

Um exemplo desta aplicação dos sistemas  $2f_T$  é ilustrado na Figura 6.2, para o qual se consideraram a frequência e a amplitude de modulação do MEO  $\omega_m = 2\pi \cdot 15$  GHz e  $A = 50$  rad.



**Figura 6.2:** (a) Propagação de um impulso rectangular ao longo de um sistema  $2f_T$ : as curvas representam, respectivamente, o perfil da intensidade do sinal de entrada, a intensidade do sinal antes da lente temporal (propagação de  $f = 112.6$  m) e o sinal à saída do sistema, ou seja no foco da lente temporal (propagação de  $f$  depois da lente); (b) O sinal de entrada (tracejado) e a sua Transformada de Fourier normalizada (função *sinc*) obtida na saída do sistema (foco da lente). Os parâmetros do sistema são  $\beta_2 = -20$  ps<sup>2</sup>/Km ( $\lambda = 1.55$   $\mu$ m),  $\omega_m = 2\pi \cdot 15$  GHz e  $A = 50$  rad. O tempo focal deste sistema é  $f_T = 3.95$  ns.

Para estes valores, a abertura temporal da lente é  $\tau_a = 10.61$  ps e tempo focal  $f_T = 3.95$  ns.

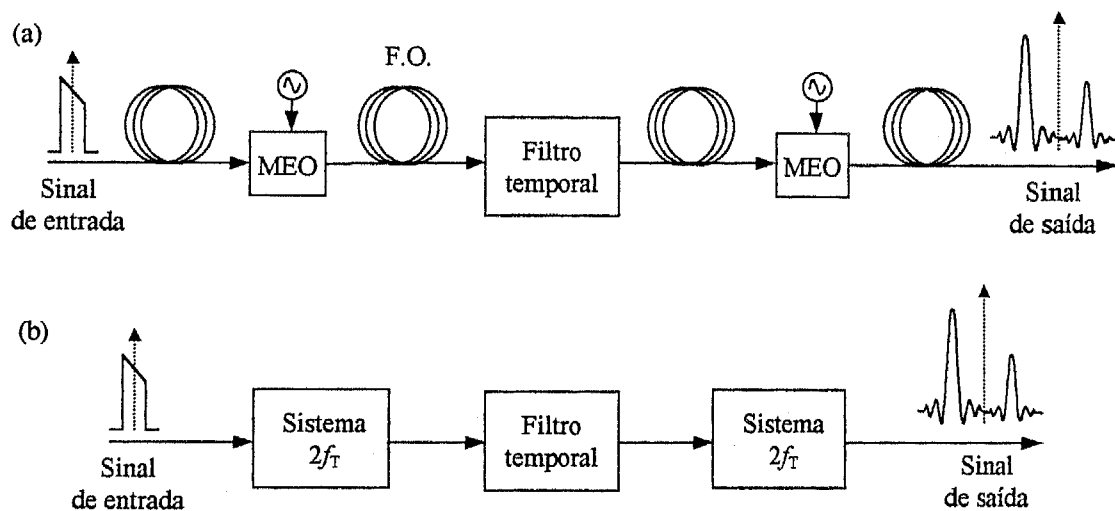
A resolução do sistema é neste caso  $\delta\tau = 1.33$  ps. O impulso rectangular, de largura  $T_0 = 8.6$  ps, propaga-se ao longo de uma distância  $f = 126.6$  m. A sua transformada de Fourier (que neste caso corresponde a uma função *sinc*), dada pela equação (6.15), é obtida à saída do sistema  $2f_T$ , à mesma distância  $f$  da lente, ou seja, depois de se propagar  $f_T = 3.59$  ns após a sua passagem pela lente.

Um sistema temporal  $2f_T$  corresponde então a um Transformador de Fourier, e pode ser visto como um analisador de espectros ópticos de tempo-real. Este sistema pode ser usado como técnica de conversão tempo - frequências, permitindo com um espectrómetro, a medição do perfil (de intensidade) temporal de impulsos ópticos no domínio das frequências [Kauf. 94].

## 6.2 Processamento de sinal

### 6.2.1 O sistema temporal $4f_T$

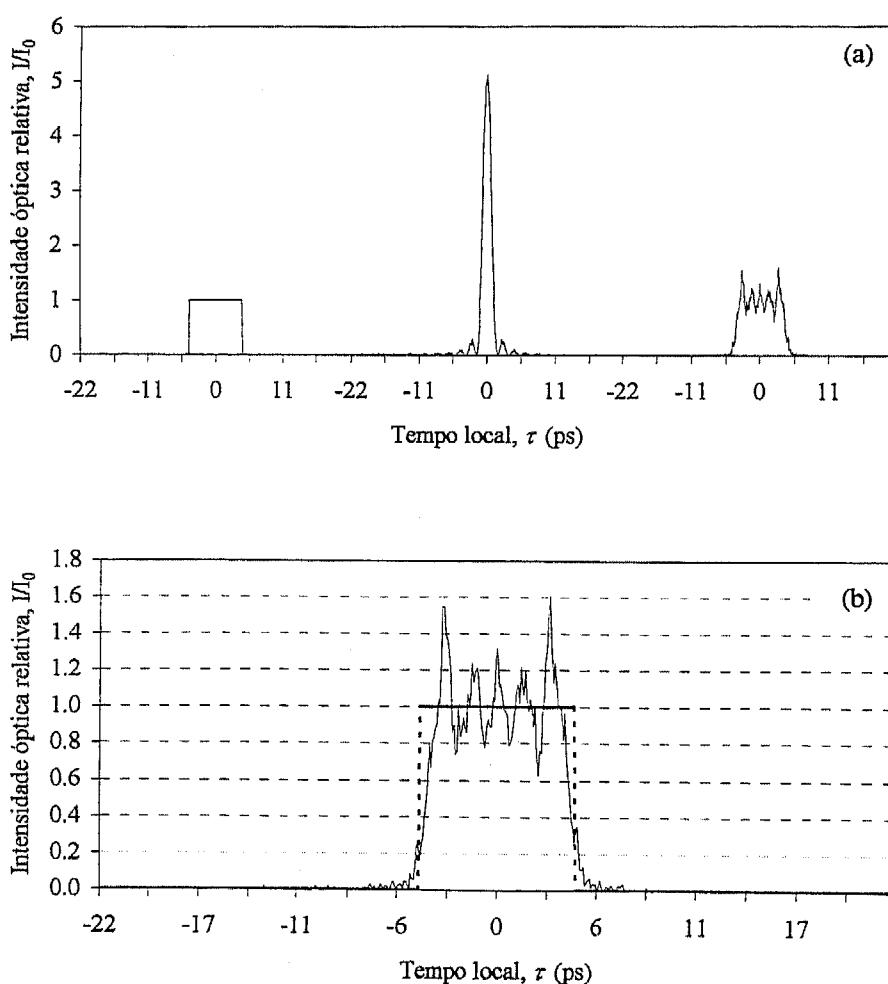
Nesta Secção, a configuração do sistema  $2f_T$  é estendida à realização de filtragem temporal. O sistema aqui analisado consiste em dois sistemas  $2f_T$ , idênticos, colocados em série, formando assim um *sistema temporal*  $4f_T$ , representado esquematicamente na Figura 6.3.



**Figura 6.3:** (a) Sistema temporal  $4f_T$  usado no processamento de sinais temporais. MEO: modulador electroóptico (lente temporal); F.O.: fibra óptica. (b) Diagrama de blocos do sistema (a). O sistema  $4f_T$  é constituído por dois sistemas  $2f_T$  idênticos.

Um sistema  $4f_T$  representa um processador de Fourier. Uma vez que o filtro temporal é aplicado à saída do primeiro sistema  $2f_T$ , i.é., à Transformada de Fourier do sinal de entrada, o sistema  $4f_T$  permite efectuar filtragem de Fourier [Lhom. 92b; Mendl. 95].

Quando não é usado qualquer filtro temporal, um sistema  $4f_T$  é equivalente a um sistema de formação de imagens 1:1. A Figura 6.4 mostra o mesmo impulso rectangular da Figura 6.2, de largura  $T_0 = 8.6$  ps, usado como entrada do sistema  $4f_T$  da Figura 6.3.



**Figura 6.4:** (a) Propagação de um impulso rectangular ao longo do sistema  $4f_T$ : as curvas representam, respectivamente, o perfil da intensidade do sinal de entrada, a intensidade do sinal à saída do primeiro sistema  $2f_T$  ( $TF$  do sinal de entrada), e o sinal de saída. (b) O sinal de entrada (tracejado) e a sua imagem temporal 1:1 (sinal de saída). Os dois sistemas  $2f_T$  são idênticos ao sistema usado para a Figura 6.2 ( $f_T = 3.95$  ns).

Na Figura 6.4, a imagem temporal 1:1 do impulso é obtida se não for colocado qualquer filtro no sistema. Nota-se na Figura 6.4(b) que o fenómeno de Gibbs é novamente evidente no caso de considerar impulsos rectangulares.

### 6.2.2 Correlação/convolução de duas formas de onda

Vários tipos de filtragem (de Fourier) poder-se-ão efectuar com sistemas  $4f_T$ , através de uma escolha adequada do filtro temporal.

Uma das aplicações dos sistemas  $4f_T$  consiste na correlação (convolução) de dois sinais de entrada  $U(0, \tau)$  e  $V(0, \tau)$ , desfasados temporalmente [Goodm. 68; Lohm. 92]. O sinal  $U(0, \tau)$  representa a resposta impulsional (sinal de referência) pretendido e  $V(0, \tau)$  o sinal que se pretende filtrar. A Figura 6.5 mostra a montagem (sistema  $4f_T$ ) que permite obter a saída filtrada.

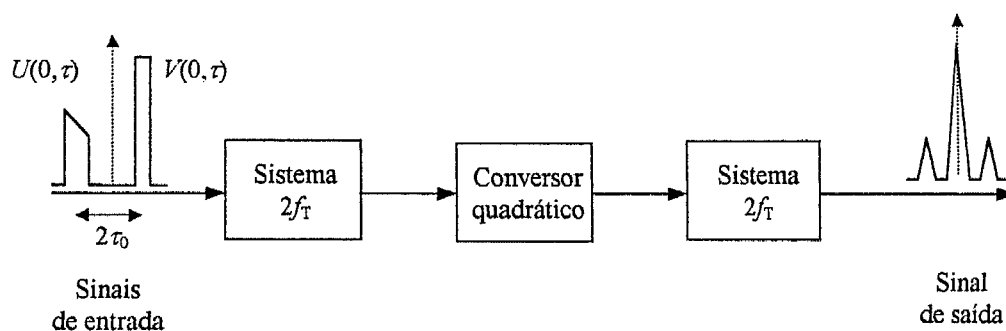


Figura 6.5: Diagrama de blocos do sistema temporal  $4f_T$  usado na correlação/convolução de dois sinais de entrada. A separação (atraso) temporal entre os dois sinais é  $2\tau_0$ . O filtro temporal consiste num conversor quadrático.

No sistema da Figura 6.5, representa-se o sinal de entrada por

$$A(0, \tau) = U(0, \tau + \tau_0) + V(0, \tau - \tau_0) \quad (6.17)$$

onde  $2\tau_0$  é o tempo de atraso de um sinal relativamente ao outro.

Após a propagação no primeiro sistema  $2f_T$ , a forma de onda,  $A(2f^-, \tau)$ , imediatamente antes do filtro, é dada usando (6.17) na equação (6.16):

$$A(2f^-, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f \beta_2}} \left[ \tilde{U}\left(0, \frac{\tau}{2\pi f \beta_2}\right) \exp\left(i2\pi \frac{\tau_0 \tau}{2f\beta_2}\right) + \tilde{V}\left(0, \frac{\tau}{2\pi f \beta_2}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{\tau_0 \tau}{2f\beta_2}\right) \right] \quad (6.18)$$

ou, de uma forma mais simplificada,

$$A(2f^-, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f \beta_2}} \left[ \tilde{U} \exp\left(i2\pi \frac{\tau_0 \tau}{2f\beta_2}\right) + \tilde{V} \exp\left(-i2\pi \frac{\tau_0 \tau}{2f\beta_2}\right) \right] \quad (6.19)$$

A acção do filtro, conversor quadrático, permite escrever

$$A(2f^+, \tau) = |A(2f^-, \tau)|^2 \quad (6.20)$$

ou seja, de (6.19),

$$A(2f^+, \tau) = \frac{1}{2\pi f \beta_2} \left[ |\tilde{U}|^2 + |\tilde{V}|^2 + \tilde{U}\tilde{V}^* \exp\left(i2\pi \frac{\tau_0 \tau}{2f\beta_2}\right) + \tilde{U}^*\tilde{V} \exp\left(-i2\pi \frac{\tau_0 \tau}{2f\beta_2}\right) \right] \quad (6.21)$$

Na equação (6.21),  $U^*(0, \tau/2\pi f \beta_2)$  corresponde ao conjugado da função  $U(0, \tau/2\pi f \beta_2)$ .

O sinal de saída do sistema  $4f_T$  (saída do segundo sistema  $2f_T$ ) é então a Transformada de Fourier de (6.21):

$$A(4f, \tau) = TF\{A(2f^+, \tau)\} \quad (6.22)$$

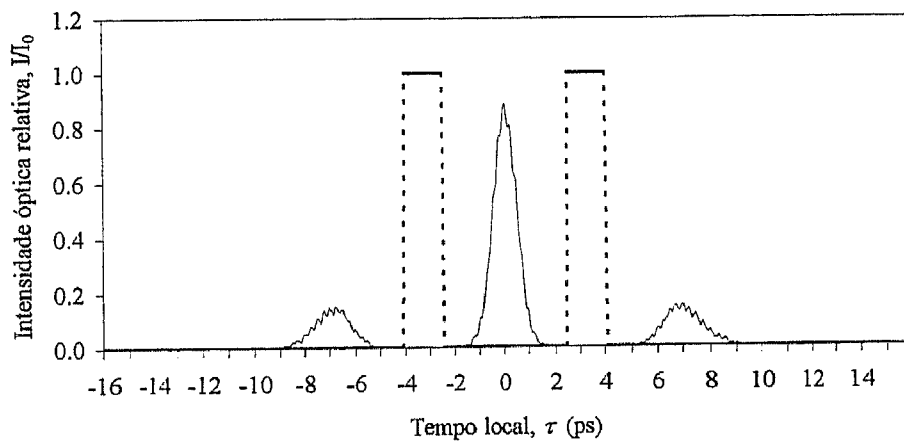
encontrando

$$\begin{aligned} A(4f, \tau) = \frac{1}{f\beta_2} & \left[ U(4f, \tau) \otimes U^*(4f, -\tau) + V(4f, \tau) \otimes V^*(4f, -\tau) \right. \\ & + U(4f, \tau) \otimes V^*(4f, -\tau) \otimes \delta(\tau + \tau_0) \\ & \left. + U^*(4f, -\tau) \otimes V(4f, \tau) \otimes \delta(\tau - \tau_0) \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

Na expressão (6.23), os termos de interesse são os dois últimos. Na forma integral, eles são representados por

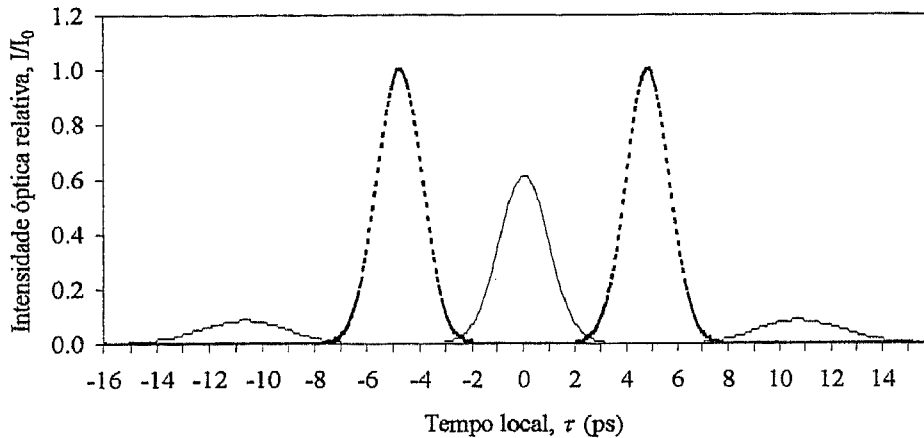
$$\begin{aligned}
 U(4f, \tau) \otimes V^*(4f, -\tau) \otimes \delta(\tau + \tau_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(4f, \tau') V^*(4f, \tau' - \tau - \tau_0) d\tau' \\
 U^*(4f, -\tau) \otimes V(4f, \tau) \otimes \delta(\tau - \tau_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(4f, \tau') U^*(4f, \tau' - \tau + \tau_0) d\tau'
 \end{aligned}
 \tag{6.24}$$

Ambas as expressões em (6.24) correspondem à função de correlação entre as funções  $U(0, \tau)$  e  $V(0, \tau)$ . Uma delas é centrada na coordenada  $\tau = \tau_0$  e a outra em  $\tau = -\tau_0$  (uma é a imagem espelhada da outra, relativamente a  $\tau = 0$ ). Usando como entrada do sistema  $4f_T$  os sinais  $U(0, \tau + \tau_0)$  e  $V^*(0, \tau - \tau_0)$ , e realizando o mesmo processo, a saída do sistema é a convolução dos sinais  $U(0, \tau)$  e  $V(0, \tau)$ , em vez da correlação.



**Figura 6.6:** Correlação entre dois sinais de entrada (curva tracejada), obtida à saída do mesmo sistema temporal  $4f_T$  usado para o caso da Figura 6.5. Os impulsos de entrada, de largura  $T_0 = 1.63$  ps, são desfasados de  $2\tau_0 = 6.52$  ps.

Dois exemplos de correlação entre impulsos rectangulares e impulsos Gaussianos, obtida por este processo, são mostrados na Figura 6.6 e 6.7 respectivamente.



**Figura 6.7:** O mesmo que Figura 6.6, para o caso de dois impulsos Gaussianos de entrada (curva tracejada). Os impulsos de entrada, de largura  $T_0 = 1.20$  ps ( $T_{FWHM} = 2$  ps), são desfasados de  $2\tau_0 = 4.8$  ps.

A separação dos termos da correlação (convolução) do termo centrado em  $\tau = 0$  requer uma separação  $2\tau_0$  adequada entre os sinais de entrada. Se  $T_U$  e  $T_V$  representam as larguras temporais dos sinais  $U$  e  $V$ , esta separação é equivalente a

$$2\tau_0 > 2 \max\{T_U, T_V\} + T_U + T_V \quad (6.25)$$

Este tipo de transformador (correlacionador) é particularmente vantajoso em aplicações de tempo-real, i.é., em sistemas que requerem uma mudança rápida da resposta impulsional do filtro.

### 6.2.3 Reconhecimento de padrões: filtro adaptado

Outra aplicação importante no processamento de sinal é encontrada no campo do reconhecimento de padrões (sinais de referência). Neste tipo de problemas, o conceito de *filtro adaptado* desempenha um papel importante.

Um filtro é dito adaptado a um sinal particular  $U(t)$  se a sua resposta impulsional  $h(t)$  é dada por

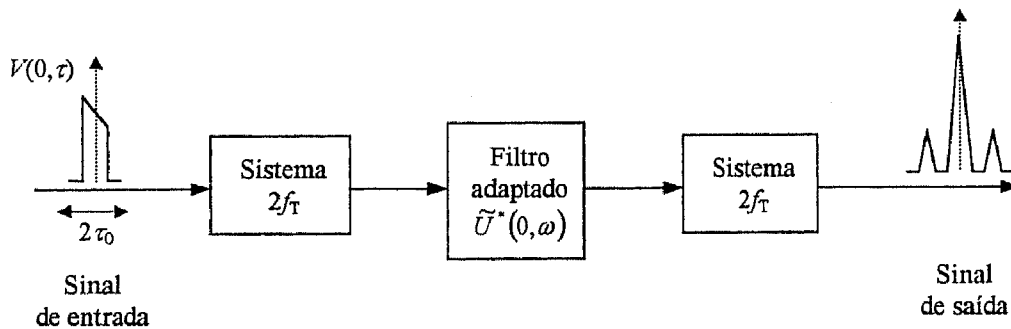
$$h(t) = U^*(-t) \quad (6.26)$$

Se um sinal  $V(t)$  for aplicado a um filtro adaptado ao sinal  $U(t)$ , a saída  $W(t)$

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')V(t')dt' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(t')U^*(t'-t)dt' \end{aligned} \quad (6.27)$$

identificando-se com a correlação entre os sinais  $U(t)$  e  $V(t)$ .

Esta operação de filtragem adaptada pode ser realizada por um sistema  $4f_T$ , representado na Figura 6.8.

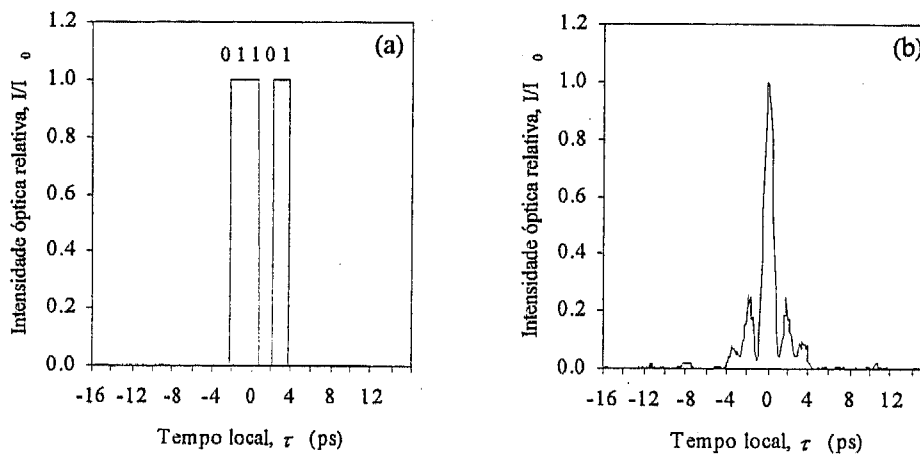


**Figura 6.8:** Diagrama de blocos do sistema temporal  $4f_T$  usado no reconhecimento de padrões. O filtro temporal consiste num filtro adaptado a um sinal de referência  $U(\tau)$ .

O filtro temporal adaptado ao sinal  $U(\tau)$  é obtido por um sistema  $2f_T$ , e registado à sua saída. A transformada de Fourier (6.26) implica que a função de transferência do filtro adaptado seja

$$\tilde{h}(0, \omega) = \tilde{U}^*(0, \omega) \quad (6.28)$$

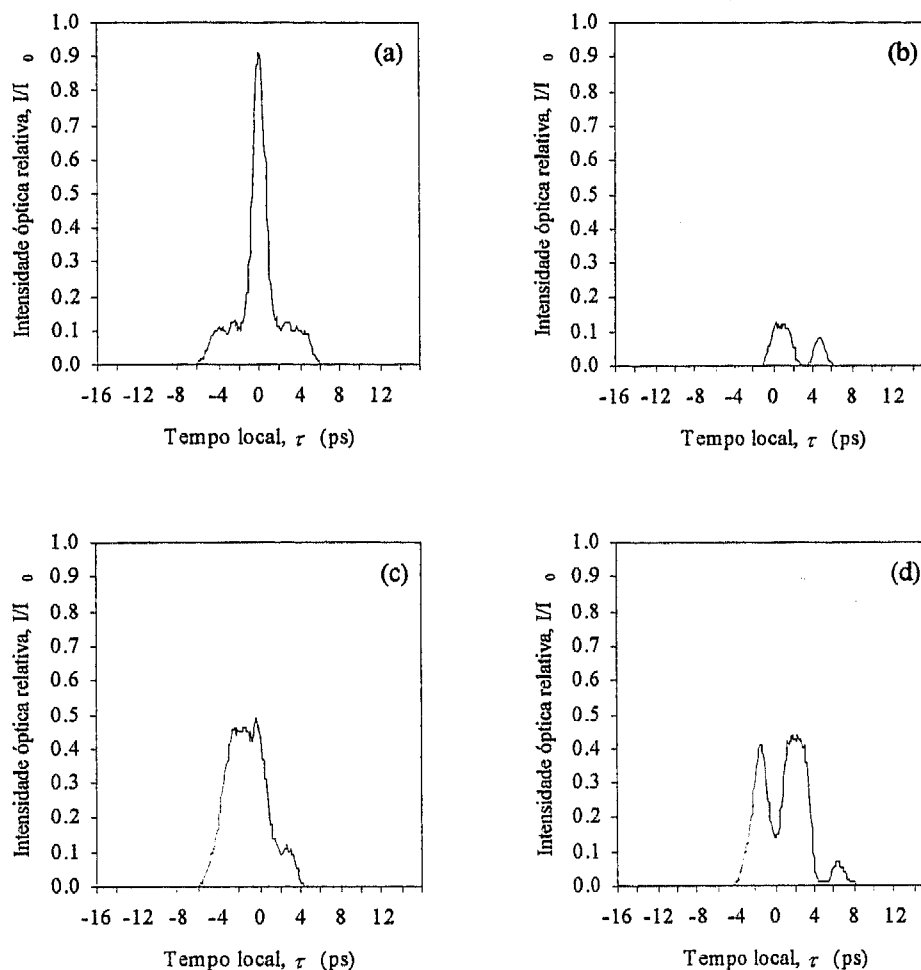
No foco da lente temporal, a amplitude do filtro é então proporcional a  $\tilde{U}^*$ . Quando o sinal  $U$  é a entrada do sistema da Figura 6.8, o perfil do sinal, depois da passagem pelo filtro é proporcional a  $UU^*$ , ou seja puramente real: o filtro cancela exactamente a curvatura de fase do sinal. Geralmente, para uma entrada diferente de  $U$ , tal não acontece e não se observa um pico de correlação bem definido.



**Figura 6.9:** (a) Sinal de referência  $U(\tau)$ , constituído por uma sequência de impulsos rectangulares. (b) Filtro  $\tilde{U}^*(\omega)$  ( $\omega = \tau / f\beta_2$ ) adaptado ao sinal (a). A sequência pode ser expressa pelo código 01101.

Como exemplo de aplicação da filtragem adaptada, considera-se o sinal de referência  $U(\tau)$  da Figura 6.9. Por uma questão de simplicidade, assume-se o sinal representado por uma sequência de “zeros” (0) e “uns” (1 = impulso): neste caso,  $U(\tau) = 01101$ . Na Figura 6.9(b) é mostrada a intensidade do filtro adaptado ao sinal  $U(\tau)$ .

As Figuras 6.10(a)-(d) mostram a saída do sistema  $4f_T$  da Figura 6.8, para diversas formas de onda de entrada. O pico de correlação mais acentuado aparece, como seria de esperar, quando a entrada do sistema é o próprio sinal de referência.



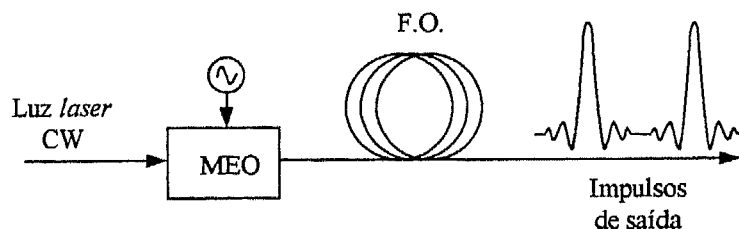
**Figura 6.10:** Saídas do sistema  $4f_T$  (funções de correlação), usando o filtro adaptado ao sinal 01101 da Figura 6.9(a). Os sinais de entrada são sequências de impulsos representados pelos códigos: (a) 01101 (sinal de referência), (b) 01000, (c) 00111 e (d) 10110 (espelho do sinal de referência).

### 6.3 Geração de impulsos ultra curtos

Esta Secção descreve a análise teórica de um método de geração de impulsos ópticos ultra curtos, a partir da saída de um laser operando em CW (modo contínuo), através do uso de sistemas temporais.

Porções da luz CW que caíam na parte positiva da modulação sinusoidal do MEO (lente temporal) são focadas no tempo permitindo criar um trem de impulsos ópticos, com uma taxa de repetição igual à de modulação.

O esquema fundamental de um sistema temporal de geração de impulsos ópticos é ilustrado na Figura 6.11. Note-se que este sistema é equivalente ao sistema da Figura 6.1(a).



**Figura 6.11:** Esquema do sistema temporal usado para gerar impulsos ópticos ultra curtos a partir de luz CW; MEO: modulador electro-óptico (lente temporal); F.O.: fibra óptica de dispersão  $\beta_2$ . A saída do sistema corresponde a um trem de impulsos, cuja taxa de repetição é igual à frequência de modulação do MEO.

A amplitude da saída óptica de um laser operando em CW é representada simplesmente pela forma de onda (normalizada)  $A(0, \tau) = 1$ . A acção da lente temporal (MEO) é desta vez a modulação de fase sinusoidal

$$H(\tau) = \exp[iA \cos(\omega_m \tau)] \quad (6.29)$$

A saída do sistema temporal da Figura 6.11 pode ser encontrada aplicando o mesmo procedimento da Secção 6.1.1. Assim, a distribuição de amplitude do campo  $A(0, \tau)$  após a lente é dada pela equação (6.1), que neste caso se escreve como

$$A_i(0, \tau) = \exp[iA \cos(\omega_m \tau)] \quad (6.30)$$

Aplicando (6.3), a saída do sistema  $A(f, \tau)$ , no foco da lente temporal, vem dada por

$$A(f, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f \beta_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iA \cos(\omega_m \tau')] \exp\left[i \frac{(\tau' - \tau)^2}{2f\beta_2}\right] d\tau' \quad (6.31)$$

A análise é simplificada usando a relação

$$\exp[iA \cos(\omega_m \tau')] = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q(A) \exp[iq\omega_m \tau'] \quad (6.32)$$

Substituindo (6.32) no integral (6.31), obtém-se, desenvolvendo o termo quadrático,

$$A(f, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f \beta_2}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q(A) \exp\left(i \frac{\tau^2}{2f\beta_2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i \frac{\tau'^2}{2f\beta_2}\right) \exp\left[i\left(q\omega_m - \frac{\tau^2}{f\beta_2}\right)\tau'\right] d\tau' \quad (6.33)$$

Após algum desenvolvimento da expressão (6.33) (resolvendo o integral de Fresnel), é fácil concluir que a amplitude do campo de saída do sistema é

$$A(f, \tau) = \exp\left(i \frac{\tau^2}{f\beta_2}\right) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q(A) \exp(iq\omega_m \tau) \exp\left(-i \frac{f\beta_2}{2} q^2 \omega_m^2\right) \quad (6.34)$$

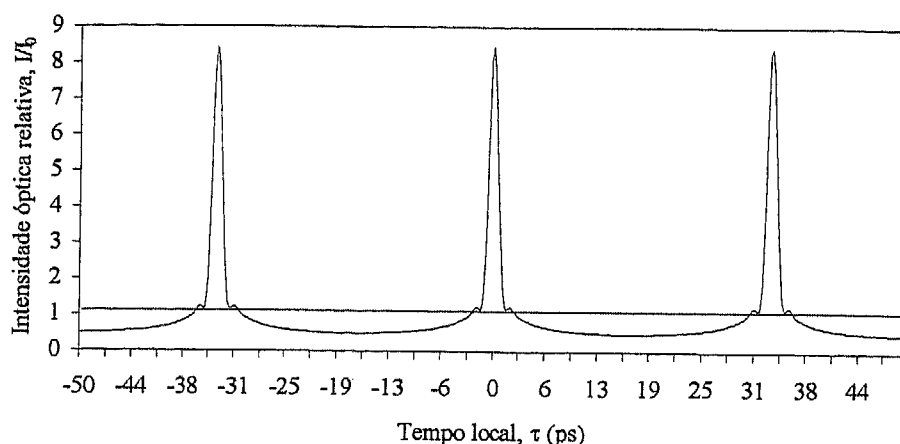
O perfil da intensidade da saída óptica do sistema temporal é então dado por

$$I(f, \tau) = |A(f, \tau)|^2 = I_0 \left| \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q(A) \exp(iq\omega_m \tau) \exp\left(-i \frac{f\beta_2}{2} q^2 \omega_m^2\right) \right|^2 \quad (6.35)$$

onde se assumiu o valor  $I_0$  para a intensidade do *laser* operando em modo contínuo. A Figura 6.12 ilustra um exemplo calculado para um sistema temporal constituído por um MEO excitado a uma frequência  $\omega_m = 2\pi \cdot 30$  GHz, e amplitude de modulação  $A = 10$  rad.

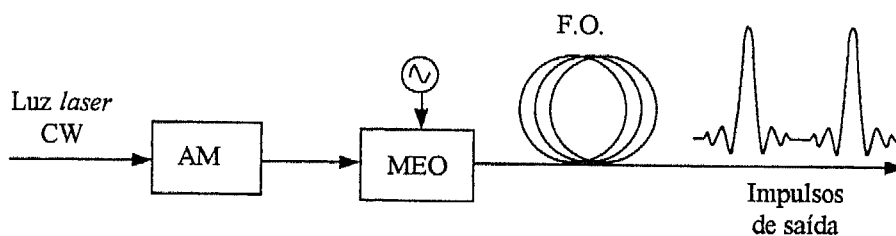
O método de geração de impulsos ópticos a partir de laser operando em CW apresenta dois problemas para resolver:

- a taxa de repetição dos impulsos assim gerados é demasiada elevada para algumas aplicações (no exemplo anterior, esta taxa é de dezenas de GHz);
- a potência óptica residual no ponto central entre dois impulsos adjacentes, depois da compressão, não é suficientemente baixa (ver Figura 6.12).



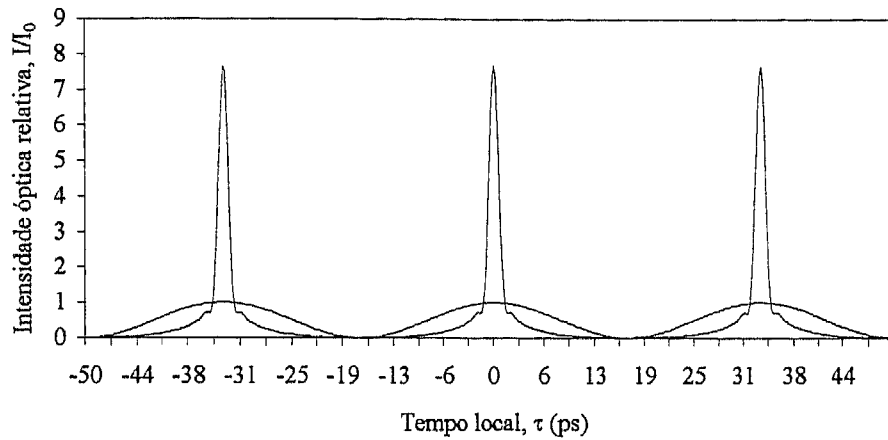
**Figura 6.12:** Saída do sistema temporal da Figura 6.11. Os impulsos gerados a partir de luz CW apresentam uma largura  $T_{FWHM} = 1.50$  ps, para um sistema caracterizado por  $A = 10$  rad, e  $\omega_m = 2\pi \cdot 30$  GHz. O tracejado corresponde à intensidade CW.

O segundo problema citado é ultrapassado, introduzindo uma modulação de amplitude antes de efectuar a modulação de fase quadrática, como se mostra na Figura 6.13.

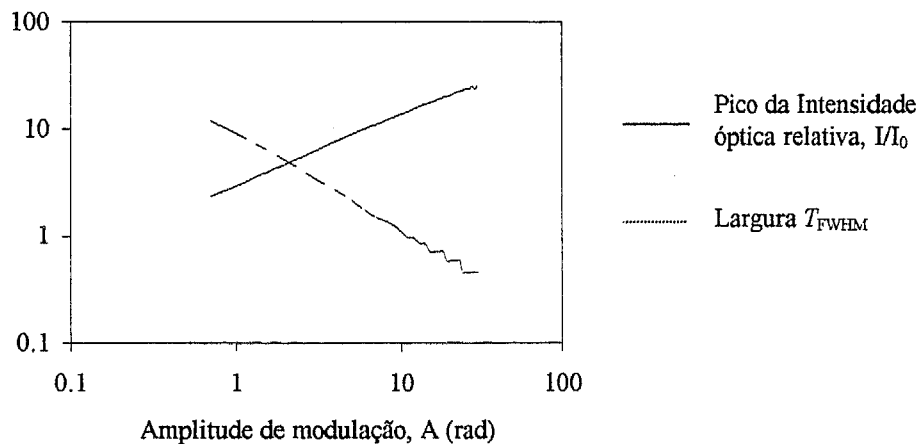


**Figura 6.13:** Sistema temporal da Figura 6.11, alterado para reduzir a potência óptica residual entre dois impulsos adjacentes. AM: modulação de amplitude.

A Figura 6.14 ilustra o resultado calculado para o caso de uma modulação de amplitude 100%, aplicada antes da modulação de fase, com a mesma frequência de modulação do MEO. Vê-se claramente que a energia óptica entre impulsos adjacentes é praticamente eliminada.



**Figura 6.14:** Saída do sistema da Figura 6.13, para os mesmos parâmetros da Figura 6.12. A linha tracejada representa a intensidade CW modulada em amplitude (100%), com frequência de modulação  $\omega_m$ . Neste caso, os impulsos têm largura  $T_{FWHM} = 1.38$  ps.



**Figura 6.15:** Pico da intensidade óptica (relativa) e largura  $T_{FWHM}$  dos impulsos gerados pelo sistema temporal da Figura 6.11, em função da amplitude de modulação  $A$  do MEO.

Na Figura 6.15 é representada a intensidade óptica (relativa) e a largura  $T_{FWHM}$  como funções da amplitude (pico) de modulação  $A$  do MEO para o caso anterior.

---

Neste Capítulo, foram apresentados e simulados sistemas temporais que podem ser aplicados em diversas aplicações. Estes sistemas possuem a propriedade de poder efectuar com similitude operações analógicas.

No foco de uma lente temporal, o perfil da forma de onda corresponde à transformada de Fourier temporal do sinal de entrada do sistema. Este sistema temporal é designado por  $2f_T$  e poderá ser visto como um transformador de Fourier, ou seja, um analisador de espectro.

Dois sistemas  $2f_T$  colocados em série formam um sistema temporal  $4f_T$ , capaz de realizar operações de filtragem temporal, tendo assim aplicações no domínio do processamento de sinais.

Uma outra aplicação de um sistema temporal é a sua capacidade de gerar impulsos curtos, com taxas de repetição igual à frequência de modulação do MEO, i.é., da lente temporal.

---

## CONCLUSÕES

A origem dos princípios da formação de imagens temporais reside na dualidade entre os problemas da difracção paraxial e dispersão de banda estreita. Estes problemas foram analisados com base em aproximações análogas nas larguras de banda do espectro espacial ou temporal de Fourier.

Com base na analogia entre difracção e dispersão, viu-se que uma modulação de fase temporal quadrática (aproximada por uma porção de uma modulação de fase sinusoidal) actua como uma lente temporal à qual se pode associar o conceito análogo de distância focal, designado por tempo focal. Este conceito representa um papel importante nas especificações de sistemas de compressão de impulsos ópticos.

Quando se combina o efeito de dispersão com uma lente temporal, cria-se o análogo no domínio temporal de um sistema de formação de imagens espaciais, ou seja um sistema de formação de imagens temporais. Com base na analogia espaço-tempo, deduziram-se expressões que relacionam a forma de onda de saída de um sistema temporal com a forma de onda de entrada. Quando estas formas de onda possuem o mesmo perfil, mas possivelmente uma escala de tempo alterada, considera-se a saída do sistema uma imagem da entrada. As condições para as quais esta situação se verifica resultam numa condição de formação de imagens, conceptualmente idêntica à lei das lentes.

Um sistema temporal fica completamente caracterizado pela análise das limitações de resolução. Como seria de esperar, estas são devidas à abertura finita ou janela temporal através da qual as formas de onda devem passar. A análise da resposta impulsional de um sistema de

formação de imagens temporais revela que a resolução está relacionada com a transformada de Fourier da função pupila, sendo assim o equivalente temporal da difracção de Fraunhofer.

O sistema temporal aqui estudado foi baseado num método electroóptico, e simulado para impulsos com larguras temporais da ordem dos picosegundos. Muitos análogos temporais de sistemas de formação de imagens espaciais convencionais poderão ser implementados, através de um estudo cuidadoso dos componentes disponíveis. Estas configurações poderão encontrar muitas aplicações na geração e compressão de impulsos, microscopia temporal (ampliação de formas de onda), processamento de sinal ultra rápido, e comunicações.

---

## APÊNDICE

### A - Função *delta* de Dirac

A função *delta* de Dirac é largamente usada na análise de sistemas. Não é propriamente uma função, mas sim uma entidade mais geralmente designada por *funcional* ou *distribuição*.

A característica que define a "função" *delta* é a propriedade ("*sifting*") integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - b)h(\xi)d\xi = h(b) \quad (\text{A.1})$$

para um ponto  $b$  de continuidade da função  $h$ .

O integral (A.1) pode ser visto como o limite de um conjunto de integrais, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - b)h(\xi)d\xi \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_N(\xi - b)h(\xi)d\xi \quad (\text{A.2})$$

onde  $g_N$  é uma sequência de funções que, no limite  $N \rightarrow \infty$ , exhibe a propriedade (A.1). Estas funções devem possuir áreas unitárias e devem, de certa forma, tornar-se mais estreitas à medida que  $N$  cresce. Assim, define-se a "função" *delta* por

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) \quad (\text{A.3})$$

Por exemplo, as funções

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \exp(-N^2 \pi x^2) \quad (\text{A.4})$$

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{rect}(Nx) \quad (\text{A.5})$$

satisfazem a condição (A.1), e podem ser usadas para representar a função *delta* de Dirac. A função *rect* (função "rectângulo"), introduzida na equação (A.5), é definida na próxima Secção. Todos estes resultados são facilmente estendidos ao caso bidimensional.

## B - Transformada de Fourier (TF)

### Definição

Uma ferramenta matemática de grande utilidade na análise de fenómenos lineares e não lineares (por exemplo, redes eléctricas e sistemas de comunicação) é a *análise de Fourier*. A Transformada de Fourier (TF), designada também por *espectro de Fourier* ou *espectro de frequências*, de uma função  $G(x, y)$ , de duas variáveis independentes  $x$  e  $y$ , é definida pelo integral

$$TF\{G(x, y)\} = \tilde{G}(u, v) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int G(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (\text{B.1})$$

A transformada definida pela relação (B.1) é uma função complexa de duas variáveis independentes  $u$  e  $v$ , geralmente designadas por *frequências*. Similarmente, a Transformada de Fourier inversa de uma função  $\tilde{G}(u, v)$  é representada por  $TF^{-1}\{\tilde{G}(u, v)\}$  e definida como

$$TF^{-1}\{\tilde{G}(u, v)\} = G(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \tilde{G}(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)] du dv \quad (\text{B.2})$$

As relações (B.1) e (B.2) diferem unicamente no sinal da exponencial do integral.

### *TF como decomposição*

Na análise de sistemas lineares, é muitas vezes útil decompor uma entrada "complicada" num conjunto de entradas mais "simples", afim de poder calcular a resposta do sistema a estas funções elementares e sobrepor as respostas individuais para encontrar a resposta total. A análise de Fourier permite efectuar este tipo de decomposição. Considerando  $G(t)$ , como função (unidimensional) do tempo  $t$ , dada por

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(f) \exp(-i2\pi ft) df \quad (\text{B.3})$$

a função temporal  $G(t)$  é expressa em termos do seu espectro de frequências  $f$ . A equação (B.3) pode ser vista como uma decomposição de  $G(t)$ , ou seja, como combinação linear (integral) de funções elementares, com forma específica  $\exp(-i2\pi ft)$ .  $\tilde{G}(f)$  é simplesmente um factor de peso que deve ser aplicado à função elementar de frequência  $f$  para sintetizar a função  $G(t)$ .

### *Teoremas (propriedades) da Transformada de Fourier*

A definição básica (B.1) da *TF* leva a considerar uma estrutura matemática associada a esta transformação. Algumas das propriedades da *TF* são aqui apresentadas como teoremas considerando funções unidimensionais. O caso bidimensional é uma simples generalização dos resultados. No que se segue,  $G(x)$  e  $H(x)$  são funções de *TF*  $\tilde{G}(u)$  e  $\tilde{H}(u)$ , respectivamente, e  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  constantes.

#### 1- Teorema da Linearidade

$$TF\{\alpha G + \beta H\} = \alpha TF\{G\} + \beta TF\{H\} \quad (\text{B.4})$$

## 2- Teorema da Similaridade

$$TF\{G(ax)\} = \frac{1}{|a|} \tilde{G}\left(\frac{u}{a}\right) \quad (\text{B.5})$$

## 3- Teorema da Translação

$$TF\{G(x-a)\} = \tilde{G}(u) \exp[-i2\pi(au)] \quad (\text{B.6})$$

## 4- Teorema de Rayleigh (teorema de Perversal)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(u)|^2 du \quad (\text{B.7})$$

## 5- Teorema da Convolução

$$TF\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)H(x-\xi)d\xi\right\} = TF\{G(x)\otimes H(x)\} = \tilde{G}(u)\tilde{H}(u) \quad (\text{B.8})$$

## 6- Teorema da Auto-correlação

$$TF\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)G^*(\xi-x)d\xi\right\} = |\tilde{G}(u)|^2 \quad (\text{B.9})$$

## 7- Teorema do Integral de Fourier

$$TF TF^{-1}\{G(x)\} = TF^{-1} TF\{G(x)\} = G(x) \quad (\text{B.10})$$

**Exemplos de Transformadas de Fourier**

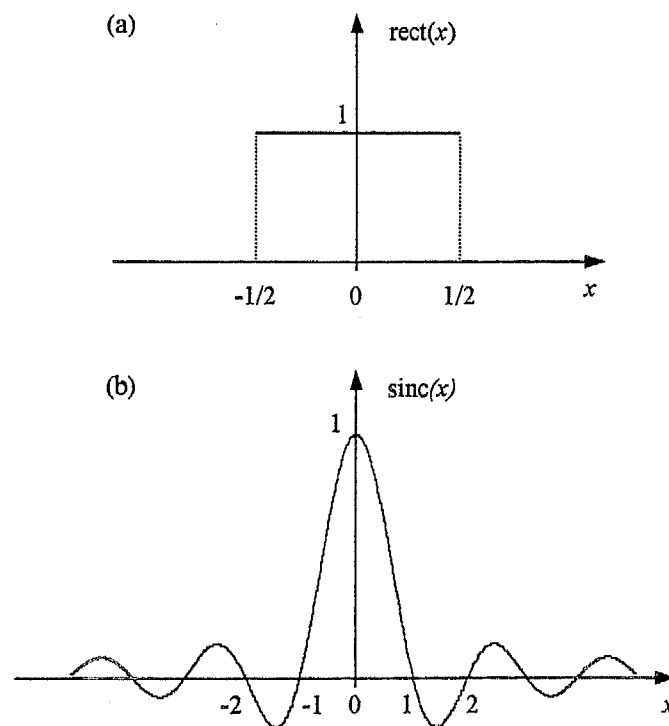
A função *rect* (função retângulo) definida por

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

e a função *sinc* (função seno cardinal) dada por

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (\text{B.12})$$

representam um par de transformada de Fourier. Estas duas funções são ilustradas na Figura B1.



**Figura B1:** (a) Função *rect*( $x$ ) e (b) função *sinc*( $x$ ), transformada de Fourier de (a), definidas pelas equações (B.11) e (B.12), respectivamente.

Outros exemplos de pares de  $TF$  apresentam-se a seguir:

$$TF\{\exp(-\pi a^2 x^2)\} = \frac{1}{a} \exp\left(-\pi \frac{u^2}{a^2}\right) \quad (\text{B.13})$$

$$TF\{\delta(x)\} = 1 \quad (\text{B.14})$$

$$TF\{\exp(-i\pi ax)\} = \delta\left(u - \frac{a}{2}\right) \quad (\text{B.15})$$

$$TF\{\exp(-i\pi a^2 x^2)\} = \frac{i}{a} \exp\left(-\pi \frac{u^2}{a^2}\right) \quad (\text{B.16})$$

A demonstração dos teoremas apresentados nesta Secção são facilmente encontrados na literatura <sup>[Goodm. 68]</sup>.

---

## REFERÊNCIAS

- [Agraw. 89] Agrawal G. P., **Nonlinear Fiber Optics**, Academic Press, San Diego, Calif., 1989
- [Born 80] Born M. *and* Wolf E., **Principles of Optics**, Pergamon Press, 1980
- [Giord. 68] Giordmaine J. A. *et al.*, **Compression of Optical Pulses**, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. QE-4, No. 5, May 1968
- [Godil 94] Godil A. A. , Auld B. A., *and* Bloom D. M., **Picosecond Time-Lenses**, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 30, No. 3, March 1994
- [Goodm. 68] Goodman J. W., **Introduction to Fourier Optics**, Mc Graw-Hill, San Francisco, Calif., 1968
- [Haseg. 90] Hasegawa A., **Optical Solitons in Fibers**, Springer Verlag, Berlin, 1990
- [Kauff. 93] Kauffman M. T., Godil A. A., Auld B. A., Banyai W. C. *and* Bloom D. M., **Applications of Time Lens Optical Systems**, Electronics Letters, Vol. 29, No. 3, 4 February 1993
- [Kauff. 94] Kauffman M. T., Banyai W. C., Godil A. A. *and* Bloom D. M., **Time to frequency converter for measuring picosecond optical pulses**, Appl. Phys. Lett., 64 (3), 17 January 1994
- [Keiser 91] Keiser G., **Optical Fiber Communications**, McGraw-Hill, Singapore, 1991
- [Kobay. 88] Kobayashi T., Yao H., Amano K., Fukushima Y., Morimoto A. *and* Sueta T., **Optical Pulse Compression Using High-Frequency Electrooptic Phase Modulation**, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 24, No. 2, February 1988

- [Kolner 88] Kolner B. H., **Active Pulse Compression Using an Integrated Electro-Optic Phase Modulator**, Appl. Phys. Lett., 52 (14), 4 April 1988
- [Kolner 92] Kolner B. H., Nazarathy M., **Temporal Imaging with a Time Lens**, Optics Letters, Vol. 14, No. 12, 15 June 1992
- [Kolner 94a] Kolner B. H., **Space-Time Duality and the Theory of Temporal Imaging**, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 30, No. 8, March 1994
- [Kolner 94b] Kolner B. H., **Generalization of the Concepts of Focal length and f-number to space and Time**, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 11, No. 12, December 1994
- [Lohm. 92a] Lohmann A. W. *and* Mendlovic D., **Temporal Perfect-Shuffle Optical Processor**, Optics Letters, Vol. 17, No. 11, 1 June 1992
- [Lohm. 92b] Lohmann A. W. *and* Mendlovic D., **Temporal Filtering with Time Lenses**, Applied Optics, Vol. 31, No. 29, 10 October 1992
- [Mendl. 95] Mendlovic D., Melamed O. *and* Ozaktas H. M., **Compact Optical Temporal Processors**, Applied Optics, Vol. 34, No. 20, 10 July 1995
- [Nuss 95] Nuss M. C., **Time-Domain images**, Optics Letters, Vol. 20, No. 7, April 1, 1995
- [Papou. 94] Papoulis A., **Pulse Compression, Fiber Communications, and Diffraction: a unified Approach**, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 11, No. 1, January 1994
- [Pessot 87] Pessot M., Maine P. *and* Mourou G., **1000 time expansion/compression of optical pulses for chirped pulse amplification**, Optics Communications, Vol. 62, No. 6, 15 June 1987
- [Treacy 69] Treacy E. B., **Optical Pulse Compression with Diffraction Gratings**, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. QE-5, No. 9, September 1969
- [Treacy 68] Treacy E. B., **Compression of picosecond light pulses**, Physics Letters, Vol. 28A, No. 1, 21 October 1968