

Carla Maria da Cunha Roque

Métodos sem malha para a análise de placas e cascas compósitas

*Tese submetida à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica*

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

2007

Resumo

A maior parte dos actuais métodos numéricos para a resolução de problemas estruturais assentam em formulações de elementos finitos. No entanto, têm vindo a surgir formas alternativas de soluções, sem malha, que mantêm a qualidade da solução, considerando apenas uma rede de nós.

As estruturas tipo placa e casca em materiais compósitos e sanduiche têm vindo a ser cada vez mais utilizados em indústrias de elevada exigência técnica. Pretende-se nesta tese aplicar um método sem malha para a análise de placas e cascas compósitas. Nesse sentido são apresentadas equações diferenciais do movimento para diversas teorias de placa e casca.

O método sem malha escolhido é o método de colocação com funções de base radial. Trata-se de um método de implementação relativamente simples, que já mostrou ser excelente para a resolução de equações diferenciais, mas é pouco aplicado na área da engenharia mecânica. Pretende-se por isso mostrar algumas aplicações nesta área, de forma a demonstrar a eficácia do método.

O método revela-se excelente para a análise estática de placas e cascas, ainda que na análise dinâmica tenha revelado menor eficácia. Alguns dos problemas associados terão origem no mau condicionamento da matriz dos coeficientes e na escolha por vezes incorrecta do parâmetro de forma. Por este motivo apresenta-se uma técnica estatística que permite uma escolha quase independente do utilizador, para a aplicações envolvendo análise estática.

Abstract

Today, most of the numerical methods are based on the well-known finite element method. However, innovative and alternative formulations have been developed, based on meshless methods. These new methods use a nodal grid, keeping the quality of the numerical solution.

In the last decades, structures formed by plates and shells and using composite materials and sandwich laminates have experienced very high rates of development. In this work one intends to apply a meshless method to analyze the mechanical behavior of those structures. For this purpose, differential equations of the movement related with several theories of plates and shells are presented.

The radial basis function collocation method is the chosen method. The method has an easy implementation and it has been applied successfully in several areas. However, its application in mechanical engineering problems has been kept limited. In order to demonstrate the performance of the method, the present work shows some applications related with that area.

The method showed excellent results when applied within the study of static analysis of plates and shells, but its application on dynamic analysis is not so efficient. Some of the revealed problems could be related with the ill-conditioning of the matrix of coefficients, and a bad value chosen for the shape parameter. Therefore, to static analysis, and to promote an independent choice from the user, a statistical technique is used.

Résumé

La plupart des actuelles méthodes numériques pour la solution de problèmes structurels sont basées dans des formulations d'éléments finis. Néanmoins, il existe des formes alternatives de solutions, sans maille, qui maintiennent la qualité de la solution, en considérant seulement une maille de noeuds.

Les structures type plaque et coque aux matériaux composites et sandwich sont de plus en plus utilisés dans des industries d'élévée performance technique. Sur cette these on applique une méthode sans maille pour l'analyse de plaques et des coques composites. Pour cella, des équations différentielles du mouvement sont présentées pour diverses théories de plaque et de coques.

La méthode sans maille choisie est la méthode de collocation avec des fonctions de base radiale. Il s'agit d'une méthode de mise en oeuvre relativement simple, laquelle a déjà montrée être excellent pour la résolution d'équations différentielles, mais est peu appliqué dans le secteur de l'ingénierie mécanique. Il se prétend donc montrer quelques applications dans ce secteur, de manière à démontrer l'efficacité de la méthode.

La méthode se révèle excellente pour l'analyse statique de plaques et coques, malgré dans l'analyse dynamique ait révélé une efficacité plus réduit. Certains des problèmes associés auront origine dans le mauvais conditionnement de la matrice des coefficients, et dans le choix parfois incorrect du paramètre de forme. Concernant le paramètre de forme, est présentée une technique statistique pour un choix presque indépendant de l'utilisateur, pour l'analyse statique.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus orientadores de tese, os Professores António Joaquim Mendes Ferreira e Renato Manuel Natal Jorge, pela orientação e ajuda na elaboração desta tese.

Aos colegas do cecom/umat Pedro Vieira e Cristina Ribeiro e do laboratório de computação Jorge Belinha, António Melro, Marco Parente e Cassilda Tavares, o apoio e boa disposição partilhada ao longo destes anos.

Dedico esta tese aos meus pais, pela formação pessoal e carinho, à minha sogra e à memória do meu sogro, por me fazerem sentir parte da família.

Ao Pedro, pelo carinho, paciência e incentivo.

Conteúdo

1	Introdução	1
	Referências	5
2	Métodos sem malha	9
2.1	Considerações gerais	9
2.1.1	Hidrodinâmica de partículas suavizadas, (SPH)	13
2.1.2	Método Galerkin sem elementos	14
2.1.3	Método de interpolação de pontos e método de interpolação de pontos radial (PIM , RPIM)	18
2.1.4	Métodos com colocação	18
2.2	Resumo	19
	Referências	19
3	O método das funções de base radial	25
3.1	Introdução	25
3.2	Interpolação com funções de base radial	25
3.3	Colocação assimétrica de Kansa	29
3.3.1	O problema das vibrações livres	33
3.4	Parâmetro de forma	35
3.5	Resumo	36
	Referências	37
4	Materiais e laminados compósitos	39
4.1	Introdução	39

4.2	Estado de tensão e deformação	43
4.3	Lei de Hooke generalizada	45
4.4	Sistema de coordenadas global e local	50
4.5	Homogeneização	53
4.5.1	Lei das misturas para duas fases	54
4.5.2	Método Mori-Tanaka para duas fases	57
4.6	Resumo	58
	Referências	59
5	Modelos de deformação para placas e cascas laminadas	61
5.1	Introdução	61
5.2	Equações de Euler-Lagrange	62
5.2.1	Exemplo-teoria clássica de placas	65
5.3	Teorias de deformação para placa	70
5.3.1	Revisão bibliográfica	70
5.3.2	Escolha das teorias de deformação de placa usadas nesta tese . .	75
5.3.3	Teoria de placa de Kirchhoff (teoria clássica)	75
5.3.4	Teoria de placa de Mindlin (teoria de primeira ordem)	77
5.3.5	Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy para placa	83
5.3.6	Teoria de deformação trigonométrica para placa	86
5.3.7	Teoria de deformação trigonométrica em zigzag para placa .	89
5.3.8	Teoria de deformação de ordem superior de Kant para placa . .	95
5.4	Teorias de deformação para casca	99
5.4.1	Revisão bibliográfica	99
5.4.2	Escolha das teorias de deformação de casca usadas nesta tese . .	102
5.4.3	Propriedades geométricas de uma casca	103
5.4.4	Relação deformação-deslocamento	105
5.4.5	Teoria de deformação de corte de primeira ordem de Donnell para casca	106
5.4.6	Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Donnell- Reddy para casca	109
5.5	Resumo	112

Referências	112
6 Colocação assimétrica com funções de base radial para análise estática de placas laminadas	119
6.1 Introdução	119
6.2 Teoria de deformação de corte de primeira ordem	123
6.2.1 Equações de equilíbrio	123
6.2.2 Interpolação das equações de equilíbrio	125
6.2.3 Condições de fronteira	128
6.3 Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy	130
6.3.1 Equações de equilíbrio	130
6.3.2 Interpolação das equações de equilíbrio	134
6.3.3 Condições de fronteira	137
6.4 Teoria de deformação trigonométrica	139
6.4.1 Equações de equilíbrio	139
6.4.2 Interpolação das equações de equilíbrio	140
6.4.3 Condições de fronteira	141
6.5 Teoria zigzag trigonométrica	142
6.5.1 Equações de equilíbrio	142
6.5.2 Interpolação das equações de equilíbrio	145
6.5.3 Condições de fronteira	147
6.6 Teoria de deformação de corte de ordem superior de Kant	148
6.6.1 Equações de equilíbrio	148
6.6.2 Interpolação das equações de equilíbrio	151
6.6.3 Condições de fronteira	155
6.7 Exemplos numéricos	158
6.7.1 Placa quadrada isotrópica, sob carga uniforme	158
6.7.2 Laminado ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sob carga sinusoidal	167
6.7.3 Sanduiche compósita sob carga uniforme	176
6.7.4 Placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades, sob carga uniforme	201
6.8 Comparação das diferentes teorias de deformação na análise estática de placas laminadas	209

6.9	Resumo e conclusões	213
	Referências	214
7	Colocação assimétrica com funções de base radial para análise de vibrações livres de placas laminadas	217
7.1	Introdução	217
7.2	Teoria de deformação de corte de primeira ordem	218
7.2.1	Análise das vibrações livres	220
7.2.2	Interpolação das equações de equilíbrio	222
7.3	Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy	224
7.3.1	Análise das vibrações livres	227
7.3.2	Interpolação das equações de equilíbrio	230
7.4	Teoria de deformação trigonométrica	234
7.4.1	Análise das vibrações livres	235
7.4.2	Interpolação das equações de equilíbrio	236
7.5	Teoria ziguezague trigonométrica	238
7.5.1	Análise das vibrações livres	241
7.5.2	Interpolação das equações de equilíbrio	244
7.6	Teoria de ordem superior de Kant	247
7.6.1	Análise das vibrações livres	249
7.6.2	Interpolação das equações de equilíbrio	253
7.7	Exemplos numéricos	257
7.7.1	Placa quadrada simplesmente apoiada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$), ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)	258
7.7.2	Placas enviesadas ($90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$), ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ$) . .	265
7.7.3	Vibrações livres para uma placa de material com gradiente fun- cional de propriedades	269
7.7.4	Sanduche quadrada ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{núcleo}/0^\circ/90^\circ/0^\circ$)	288
7.8	Comparação das diferentes teorias de deformação na análise dinâmica de placas laminadas	290
7.9	Resumo e conclusões	291
	Referências	292

8 Colocação assimétrica com funções de base radial para análise es-	
tática de cascas laminadas	295
8.1 introdução	295
8.2 Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Donnell-Reddy . .	296
8.2.1 Interpolação das equações de equilíbrio	298
8.3 Exemplos numéricos	300
8.3.1 Casca laminada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) com raio infinito, sob carga sinu-	
soidal	301
8.3.2 Casca esférica ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sob carga sinusoidal	302
8.3.3 Casca laminada, ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$), ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$), sob carga sinusoidal	303
8.3.4 Casca laminada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$), ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) e ($0^\circ/90^\circ$), sob carga	
uniforme	304
8.4 Resumo e conclusões	311
Referências	312
9 Colocação assimétrica com funções de base radial para análise de	
vibrações livres de cascas laminadas	315
9.1 introdução	315
9.2 Teoria de deformação de corte de primeira ordem de Donnell	316
9.2.1 Análise das vibrações livres	317
9.2.2 Interpolação das equações de equilíbrio	319
9.3 Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Donnell-Reddy . .	321
9.3.1 Análise das vibrações livres	324
9.3.2 Interpolação das equações de equilíbrio	326
9.4 Exemplos numéricos	329
9.4.1 Vibrações livres de cascas esféricas de laminados cruzados ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$),	
($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) e ($0^\circ/90^\circ$)	329
9.4.2 Vibrações livres de cascas cilíndricas de laminados cruzados ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$),	
($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) e ($0^\circ/90^\circ$)	332
9.5 Comparação das diferentes teorias de deformação na análise dinâmica	
de cascas laminadas	336
9.6 Resumo e conclusões	338
Referências	338

10 Uma escolha otimizada do parâmetro de forma, c	339
10.1 Introdução	339
10.2 Cálculo de um valor ótimo de c	341
10.3 Exemplos numéricos	343
10.3.1 Placa de material com gradiente funcional de propriedades com teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy . . .	343
10.3.2 Casca compósita com teoria de corte de terceira ordem de Donnell- Reddy	346
10.4 Resumo e conclusões	350
Referências	350
11 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	353
Lista de apêndices	361
A Exemplos de códigos em MATLAB para colocação	363
A.1 Interpolação de uma função	363
A.2 Análise estática da viga de Timoshenko encastrada	364
A.3 Análise das vibrações livres para a viga de Timoshenko encastrada . . .	367

Lista de Figuras

1.1	Porcentagem de publicações científicas sobre o método das multiquádricas, scopus®	3
2.1	Publicações científicas sobre métodos sem malha-scopus®	10
3.1	Influência do parâmetro de forma c na função multiquádrica	27
3.2	Representação gráfica de algumas funções de base radial típicas	27
3.3	Interpolação da função $f = 1/(1 + 25x^2)$	28
3.4	Imagem da matriz de interpolação, com $N = 23$	28
3.5	Discretização do domínio para aplicação da colocação de Kansa	29
3.6	Viga bi-encastada, com carga uniforme	31
3.7	Solução para a viga de Timoshenko	32
3.8	Valores da matriz de interpolação para a viga de Timoshenko	32
3.9	Valores não nulos da matriz de interpolação para a viga de Timoshenko	33
3.10	Primeiros cinco modos de vibração para a placa de Timoshenko bi-encastada	34
3.11	Valores não nulos da matriz de interpolação (parte dinâmica) para a viga de Timoshenko	35
4.1	Fases materiais de um compósito	40
4.2	Meta material	40
4.3	Deformação de corte ϵ e deformação de corte de engenharia γ	44
4.4	Tensão num elemento de volume	48
4.5	Sistema de coordenadas material (local), x_1, x_2, x_3 e da estrutura (global), x, y, z	51

4.6	Elemento de volume representativo, RVE	54
4.7	Representação da matriz e das fibras	54
4.8	Elemento sujeito a uma força F_1	55
4.9	Material com gradiente funcional de propriedades	57
5.1	Placa com altura h , área Ω_0 e pressão aplicada $q(x, y)$	65
5.2	Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria clássica	76
5.3	Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria de primeira ordem	77
5.4	Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy	83
5.5	Geometria de uma casca	103
6.1	Tensão transversal ao longo da espessura, calculada pelas equações de equilíbrio e constitutivas, para uma placa com empilhamento $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ sujeita a uma carga sinusoidal	122
6.2	Contagem de z_k e z_{k+1} para a camada k	124
6.3	Placa rectangular isotrópica	159
6.4	Teoria TSDT. Deflexão do ponto central de uma placa quadrada isotrópica para diferentes teorias de deformação e métodos numéricos	162
6.5	Teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento $\bar{u}$ para uma placa isotrópica quadrada	164
6.6	a-Placa $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ b-Aplicação de carga sinusoidal no domínio $[0, 1] \times [0, 1]$	167
6.7	Teoria TSDT. Deflexão do ponto central de uma placa laminada quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para diferentes quocientes a/h	170
6.8	Teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento $\bar{u}$ para uma placa quadrada cross-ply	171
6.9	Teoria zigzague trigonométrica e teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento, $\bar{u}$ para uma placa quadrada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$	174
6.10	Teoria zigzague trigonométrica e teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento, $\bar{u}$ para uma placa quadrada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$	174
6.11	Esquema da placa sanduiche quadrada com altura total h e largura a	176
6.12	Teoria TSDT. Deflexão central para uma placa sanduiche quadrada	183

6.13	Teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento $\bar{u}$ para uma placa sanduiche quadrada	187
6.14	Comparação de alguns resultados para a placa sanduiche para as teorias trigonométrica e zigzag trigonométrica	192
6.15	Esquema da placa fgm com altura total h e largura a	201
6.16	Gráfico com os resultados da tabela 6.33	204
6.17	Deformação do ponto central de uma placa isotrópica, para diferentes teorias de deformação	209
6.18	(Pormenor da figura 6.17). Deformação do ponto central de uma placa isotrópica, para as teorias de deformação de primeira e terceira ordem	211
6.19	(Pormenor da figura 6.17). Deformação do ponto central de uma placa isotrópica, para as teorias de deformação trigonométricas	211
6.20	(Pormenor da figura 6.17). Deformação do ponto central de uma placa isotrópica, para as teorias de deformação de ordem superior de Reddy e de Kant	211
6.21	Deformação do ponto central de uma placa laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para diferentes teorias de deformação	212
6.22	Deformação do ponto central de uma placa sanduiche, para diferentes teorias de deformação	212
7.1	Rede regular com 11×11 nós, para uma placa enviesada	265
7.2	Erro relativo da frequência natural para uma placa quadrada laminada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$	290
8.1	Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo da deformada central para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)	302
8.2	Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo de σ_x para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)	303
8.3	Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo de σ_y para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)	304
8.4	Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo de τ_{xz} para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)	305

8.5	Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo de τ_{xy} para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)	305
8.6	Teoria de Donnell-Reddy. Variação da deflexão central com R/a para uma casca esférica ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)	308
8.7	Teoria de Donnell-Reddy. Variação da deflexão central com R/a para uma casca esférica ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)	308
8.8	Teoria de Donnell-Reddy. Variação da deflexão central com R/a para uma casca esférica ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	309
8.9	Teoria de Donnell-Reddy. Variação da deflexão central com R/a para uma casca esférica ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	309
9.1	Teoria de Donnell. Modos de vibração para uma casca esférica ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	330
9.2	Casca esférica $[0/90/90/0]$; $a/h = 10$ (esquerda); $a/h = 100$ (direita) . .	336
9.3	Casca esférica $[0/90/0]$; $a/h = 10$ (esquerda); $a/h = 100$ (direita)	336
9.4	Casca esférica $[0/90]$; $a/h = 10$ (esquerda); $a/h = 100$ (direita)	336
9.5	Casca cilíndrica $[0/90]$; $a/h = 100$ (esquerda); $a/h = 10$ (direita)	337
9.6	Casca cilíndrica $[0/90/0]$; $a/h = 100$ (esquerda); $a/h = 10$ (direita) . . .	337
9.7	Casca cilíndrica $[0/90/90/0]$; $a/h = 100$ (esquerda); $a/h = 10$ (direita) .	337
10.1	Amostra original	340
10.2	Treino das partições para interpolação usando a função multiquádrica .	340

Lista de Tabelas

2.1	Classificação dos métodos sem malha, segundo Gu [2005]	11
3.1	Algumas formas de calcular o parâmetro de forma para a função multiquádrica	36
4.1	Classificação dos materiais compósitos laminados [Skorokhod, 2003] . .	42
6.1	Teoria FSDT. Placa quadrada isotrópica sob carga uniforme	160
6.2	Teoria TSDT. Placa quadrada isotrópica sob carga uniforme	161
6.3	Teoria trigonométrica. Placa isotrópica sob carga uniforme	163
6.4	Teoria ziguezague trigonométrica. Deformação do ponto central $\bar{w}$, e tensão $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa isotrópica sob carga uniforme	165
6.5	Placa quadrada isotrópica sob carga uniforme	166
6.6	Teoria FSDT. Placa laminada quadrada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sob carga sinusoidal	168
6.7	Teoria TSDT. Placa laminada quadrada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sob carga sinusoidal	169
6.8	Teoria trigonométrica. Placa quadrada [$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$] sob carga sinusoidal	172
6.9	Teoria ziguezague trigonométrica. Placa quadrada [$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$] sob carga sinusoidal	173
6.10	Teoria de ordem superior de Kant. Placa laminada quadrada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sob carga sinusoidal	175
6.11	Teoria FSDT. Deflexão do ponto central de uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	178

6.12	Teoria FSDT. Tensões $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	179
6.13	Teoria FSDT. Tensões $\bar{\sigma}_{yy}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	180
6.14	Teoria FSDT. Tensões $\bar{\tau}_{xz}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	181
6.15	Teoria TSDT. Deflexão do ponto central de uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	182
6.16	Teoria TSDT. Tensões $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	184
6.17	Teoria TSDT. Tensões $\bar{\sigma}_{yy}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	185
6.18	Teoria TSDT. Tensões $\bar{\tau}_{xz}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	186
6.19	Teoria trigonométrica. Deformação central, $\bar{w}$ para uma placa sanduiche quadrada sob carga uniforme	188
6.20	Teoria trigonométrica. Tensão $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa sanduiche quadrada sob carga uniforme	189
6.21	Teoria trigonométrica. Tensão $\bar{\sigma}_{yy}$ para uma placa sanduiche quadrada sob carga uniforme	190
6.22	Teoria trigonométrica. Tensão $\bar{\tau}_{xz}$ para uma placa sanduiche quadrada sob carga uniforme	191
6.23	Teoria ziguezague trigonométrica. Deformação central para uma placa sanduiche quadrada sob carga uniforme	193
6.24	Teoria ziguezague trigonométrica. Tensão normalizada, σ_{xx} para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	194
6.25	Teoria ziguezague trigonométrica. Tensão normalizada, σ_{yy} para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	195
6.26	Teoria ziguezague trigonométrica. Tensão normalizada, τ_{xz} para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	196
6.27	Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central de uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme	197

6.28	Teoria de ordem superior de Kant. Tensões $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa sandui- che quadrada, sob carga uniforme	198
6.29	Teoria de ordem superior de Kant. Tensões $\bar{\sigma}_{yy}$ para uma placa sandui- che quadrada, sob carga uniforme	199
6.30	Teoria de ordem superior de Kant. Tensões $\bar{\tau}_{xz}$ para uma placa sandui- che quadrada, sob carga uniforme	200
6.31	Teoria FSDT. Deflexão do ponto central, para a placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1	202
6.32	Teoria FSDT. Deflexão do ponto central para as placas de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1 e fgm2	202
6.33	Teoria FSDT. Deflexão do ponto central da placa de material com gra- diente funcional de propriedades, fgm1, pelo método de Mori-Tanaka	203
6.34	Teoria FSDT. Deflexão do ponto central da placa de material com gra- diente funcional de propriedades, fgm1	203
6.35	Teoria TSDT. Deflexão do ponto central, para a placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1	204
6.36	Teoria TSDT. Deflexão do ponto central para as placas de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1 e fgm2	205
6.37	Teoria TSDT. Deflexão do ponto central da placa de material com gra- diente funcional de propriedades, fgm1, pelo método de Mori-Tanaka	205
6.38	Teoria TSDT. Deflexão do ponto central da placa de material com gra- diente funcional de propriedades, fgm1	206
6.39	Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central, para a placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1	206
6.40	Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central para as placas de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1 e fgm2	207
6.41	Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central da placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, pelo método de Mori-Tanaka	207
6.42	Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central da placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1	208

7.1	Teoria FSDT. Frequência natural para uma placa simplesmente apoiada quadrada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$	259
7.2	Teoria FSDT. Frequências naturais para uma placa quadrada $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, para várias condições de fronteira	259
7.3	Teoria FSDT. Frequência natural para uma placa quadrada $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, para várias condições de fronteira e quocientes a/h	260
7.4	Teoria TSDT. Frequência natural para uma placa simplesmente apoiada quadrada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$	261
7.5	Teoria trigonométrica. Frequência natural para uma placa simplesmente apoiada quadrada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$	261
7.6	Teoria trigonométrica. Frequência natural para uma placa quadrada $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, para vários quocientes a/h	262
7.7	Ziguezague trigonométrica. Frequência fundamental normalizada, para uma placa quadrada simplesmente apoiada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$	262
7.8	Ziguezague trigonométrica. Frequência natural para uma placa quadrada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$, para vários quocientes a/h	263
7.9	Teoria de ordem superior de Kant. Frequência natural para uma placa simplesmente apoiada quadrada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$	263
7.10	Teoria de ordem superior de Kant. Frequências naturais para uma placa quadrada $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$	264
7.11	Teoria de ordem superior de Kant. Frequência natural para uma placa quadrada $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, para vários quocientes a/h	264
7.12	Teoria FSDT. Frequência natural normalizada para uma placa enviesada $(90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ simplesmente apoiada, para vários ângulos de α	266
7.13	Teoria FSDT. Frequência natural normalizada para uma placa enviesada $(90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ encastrada, para vários ângulos de α	266
7.14	Teoria FSDT. Frequência natural normalizada para uma placa enviesada $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$ simplesmente apoiada, para vários ângulos de α	266
7.15	Teoria FSDT. Frequência natural normalizada para uma placa enviesada $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$ encastrada, para vários ângulos de α	267

7.16	Teoria FSDT. Frequências naturais para vários modos de vibração, para uma placa enviesada ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ$) simplesmente apoiada, para vários ângulos de α	267
7.17	Teoria FSDT. Frequências naturais para vários modos de vibração, para uma placa enviesada ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ$) encastrada, para vários ângulos de α	268
7.18	Teoria FSDT. Primeiras dez frequências para uma placa simplesmente apoiada de material com gradiente funcional de propriedades	270
7.19	Teoria FSDT. Primeiras dez frequências para uma placa simplesmente apoiada de material com gradiente funcional de propriedades	270
7.20	Teoria TSDT. Frequência fundamental para uma placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades, simplesmente apoiada, usando o método de Mori-Tanaka	272
7.21	Teoria TSDT. Frequência fundamental para uma placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades simplesmente apoiada, usando o método de Mori-Tanaka	273
7.22	Teoria TSDT. Primeiras dez frequências naturais para uma placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades, simplesmente apoiada, usando o método de Mori-Tanaka	273
7.23	Teoria TSDT. Primeiras dez frequências naturais para uma placa de material com gradiente funcional de propriedades, com os bordos encastrados, simplesmente apoiados/encastrados, encastrados/livres	276
7.24	Teoria de ordem superior de Kant. Evolução da frequência própria, $\bar{\omega}$ com n , para uma placa simplesmente apoiada com gradiente funcional de propriedades	277
7.25	Teoria de ordem superior de Kant. Evolução da frequência própria, $\bar{\omega}$ com n , para uma placa simplesmente apoiada com gradiente funcional de propriedades	277
7.26	Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências ($\bar{\omega}$) com n , para uma placa simplesmente apoiada com gradiente funcional de propriedades	278

7.27	Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências ($\bar{\omega}$) com n , para uma placa simplesmente apoiada com gradiente funcional de propriedades	279
7.28	Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências ($\bar{\omega}$) com n , para uma placa com gradiente funcional de propriedades encastrada	281
7.29	Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências ($\bar{\omega}$) com n , para uma placa com gradiente funcional de propriedades CSCS	283
7.30	Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências ($\bar{\omega}$) com n , para uma placa com gradiente funcional de propriedades CFCF	286
7.31	Ziguezague trigonométrica. Frequência fundamental normalizada, para uma placa sanduiche simplesmente apoiada ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{núcleo}/0^\circ/90^\circ/0^\circ$)	289
7.32	Ziguezague trigonométrica. Frequência fundamental normalizada, para uma placa sanduiche simplesmente apoiada ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{núcleo}/0^\circ/90^\circ/0^\circ$)	289
8.1	Teoria de Donnell-Reddy. Deflexão do ponto central, e tensões, para uma casca laminada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$), $R/a = 10^9$	306
8.2	Teoria de Donnell-Reddy. Deflexão do ponto central, e tensões, para uma casca esférica ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	307
8.3	Teoria de Donnell-Reddy. Deflexão do ponto central, para diferentes quocientes R/a , para $R_1 = R_2$	310
8.4	Teoria de Donnell-Reddy. Deflexão do ponto central, para diferentes quocientes R/a , com $R_1 = R_2$, carga uniforme	311
9.1	Teoria de Donnell. Frequência fundamental para uma casca laminada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	331
9.2	Teoria de Donnell. Frequência fundamental para uma casca laminada, ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)	331
9.3	Teoria de Donnell. Frequência fundamental para uma casca laminada ($0^\circ/90^\circ$)	332

9.4	Teoria de Donnell-Reddy. Frequências fundamentais para uma casca esférica laminada	333
9.5	Teoria de Donnell. Frequência fundamental para uma casca cilíndrica laminada	334
9.6	Teoria de Donnell-Reddy. Frequências fundamentais para uma casca cilíndrica cruzada	335
10.1	Comparação da deflexão central $\bar{w}$, para uma placa simplesmente apoiada FGM1	344
10.2	Comparação da deflexão central $\bar{w}$, para uma placa simplesmente apoiada FGM1, e FGM2	344
10.3	Comparação da deflexão central $\bar{w}$, para uma placa simplesmente apoiada FGM1	345
10.4	Comparação de da tensão σ_{xx} nos topos de uma placa quadrada simplesmente apoiada, FGM1	345
10.5	Deflexão, $\bar{w}$ e tensões $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{zx}, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ para uma casca $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $R/a = 10^9$, com carregamento sinusoidal.	346
10.6	Deflexão central, $\bar{w}$ e tensões $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}$, para uma casca $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$, com $R_1 = R_2$	347
10.7	Variação da deflexão central, $\bar{w} = w \frac{10^3 E_2 h^3}{P_0 a^4}$ para vários valores de nós da rede/lado, n , para diferentes quocientes R/a , com $R_1 = R_2$, com carga sinusoidal	348
10.8	Variação da deflexão central, $\bar{w} = w \frac{10^3 E_2 h^3}{P_0 a^4}$ com o número de pontos da rede/lado, n , para diferentes quocientes R/a , com $R_1 = R_2$, com carregamento uniforme	349

Nomenclatura

ϵ	tensor das deformações infinitesimais
σ	tensor das tensões
$\dot{x}$	derivada da variável real x em ordem à variável tempo, t
η	coeficientes de influência mútua
$\mathbf{C}$	tensor de elasticidade, (ou rigidez)
$\mathbf{E}$	tensor de deformação de Green-Lagrange
$\mathbf{Q}$	matriz de rigidez reduzida
$\mathbf{S}$	tensor de flexibilidade
$\mu_{ij,kl}$	coeficientes de Chentsov
ν_{ij}	coeficientes de Poisson para uma deformação transversal na direcção j , resultante de uma tensão normal aplicada na direcção ortogonal, i
ρ	densidade
C_{ij}	constantes elásticas do tensor de elasticidade

E_i	módulos de Young para uma tensão normal aplicada na direcção i
G_{ij}	módulo de corte correspondente a uma tensão de corte aplicada no plano ij
h	espessura total de uma placa ou casca
K	módulo de incompressibilidade
k	factor de correcção de corte transversal
MQ	função multiquádrica
N	número de nós da rede
n	no caso de uma rede regular, número de nós da rede/lado
N_B	número de nós da fronteira
nc	número total de camadas de um laminado
q	carga aplicada
u_0, v_0, w_0	deslocamentos no plano médio
BNM	<i>boundary node method</i>
BPIM	<i>boundary point interpolation method</i>
CLT	<i>classical laminated theory</i> : teoria clássica dos laminados
DEM	<i>diffuse element method</i>
EFG	<i>element free-Galerkin</i>

FEM, FE, EF *Finite element method*: métodos dos elementos finitos

fgm *functionally graded material*: material com gradiente funcional de propriedades

FPM *finite point method*

FSDT *first order shear deformation theory*: teoria de deformação de primeira ordem

GFDM *general finite difference method*

HSDT *Higher order shear deformation theory*: teoria de deformação de ordem superior

LRPIM *local radial point interpolation method*

MCM *meshless collocation method*

MFS *method of fundamental solutions*

MK *moving kriging interpolation*

MLPG *meshless local Petrov-Galerkin method*

MLS *moving least squares*

MRPIM *meshfree radial point interpolation method*

MWS *mesgfree-weak-strong method*

PU *partition of unity*

RKPM *reproducing kernel particle method*

RPIM	<i>radial point interpolation method</i>
RVE	<i>representative volume element</i> : elemento de volume representativo
SPAM	<i>smoothed particle applied mechanics</i>
SPH	<i>smooth particle hidrodynamics</i>
TSDT	<i>third order shear deformation theory</i> : teoria de deformação de terceira ordem

Introdução

O método das funções de base radial para aproximação de funções é hoje uma das técnicas mais usadas para aproximar dados dispersos em várias dimensões. A aproximação por funções de base radial revela-se particularmente útil no caso em que as funções a aproximar dependem de várias variáveis ou parâmetros, são definidas por vários dados, ou ainda quando esses dados estão espalhadas num dado domínio [Buhmann, 2003].

O primeiro trabalho sobre funções de base radial a ter visibilidade e relativo ao domínio da interpolação é atribuído a Hardy [1971], onde a função de base radial multiquádrica é usada para interpolação de superfícies geográficas. Mais tarde, Franke [1982] faz uma revisão pormenorizada de vários métodos de interpolação. Baseado nos critérios: exactidão, aspecto visual, sensibilidade a parâmetros, tempo de execução, esforço computacional e facilidade de implementação, classificou o esquema de Hardy de multiquádrica como um dos melhores.

Um resultado importante obtido por Micchelli [1986], prova que a interpolação por multiquádricas dá sempre origem a um sistema solúvel, para um conjunto de dados distintos.

Stead [1984] examinou vários métodos para a estimativa de derivadas parciais com dados dispersos. Concluiu que a função multiquádrica apresenta um comportamento

excelente em superfícies com uma grande curvatura, e um comportamento pobre em superfícies com pequena curvatura. Madych e Nelson [1990] provaram teoricamente a convergência exponencial da interpolação multiquádrica.

Nos anos 90 surgem os trabalhos de Kansa [1990a,b] que constituem a base das metodologias usadas nesta tese. Nestes artigos é usada com sucesso uma colocação directa de funções de base radial (colocação assimétrica de Kansa) na resolução de equações diferenciais de derivadas parciais. Também é mostrado que este método é mais eficiente que o método das diferenças finitas, que requer mais operações para atingir o mesmo grau de precisão. Um estudo de Li et al. [2003] sugere que a precisão atingida pelo método das multiquádricas é superior à precisão do método dos elementos finitos, com a vantagem de a codificação deste método sem malha ser muito mais simples que a dos elementos finitos.

Uma das características que pode facilitar a utilização deste método em relação ao método dos elementos finitos é a eliminação da geração de uma malha. Em especial, a geração de malhas 3D é um dos problemas apontados ao método dos elementos finitos. A facilidade de implementação do método das funções de base radial explica-se observando por exemplo, a função multiquádrica: $\phi = \sqrt{r^2 + c^2}$. Os parâmetros r^2 e c^2 são respectivamente uma distância e um parâmetro de forma (escolhido pelo utilizador). A distância r é facilmente descrita para n dimensões, o que vem simplificar a codificação do método numérico. Outra característica deste método é o uso de uma formulação forte, onde as equações utilizadas correspondem às equações físicas do problema.

Tendo em conta os trabalhos citados, o método das funções de base radial tem vindo a impor-se como uma boa alternativa ao método dos elementos finitos. Uma pesquisa bibliográfica mostra facilmente que este método não se encontra devidamente explorado e testado na área da análise de estruturas. Encontram-se algumas referências neste contexto, por exemplo [Leitão, 2001, 2004; Leitão e Tiago, 2002; Tiago e Leitão, 2006; Zhang et al., 2000; Misra et al., 2007; Ferreira, 2005, 2003; Ferreira et al., 2006a, 2005a, a, 2007, 2006b,c, 2005b,c, 2003; Roque et al., 2007, 2006, 2005]. O objectivo principal desta tese é então o de promover essa utilização, abordando alguns temas da mecânica das estruturas.

Ao longo da tese, o método das multiquádricas é usado na análise numérica de placas e cascas compósitas (laminados, sanduiches e materiais com gradiente funcional de propriedades). Também são testadas diferentes teorias de deformação de placa e casca, no intuito de perceber os limites e qualidade dos modelos teóricos. Os resultados obtidos são frequentemente comparados com outros métodos numéricos. É com agrado que se nota que os trabalhos elaborados no decorrer desta tese foram bem aceites pela comunidade científica, e espera-se que este seja apenas o início para a construção de um método robusto e de fácil implementação (figura 1.1).

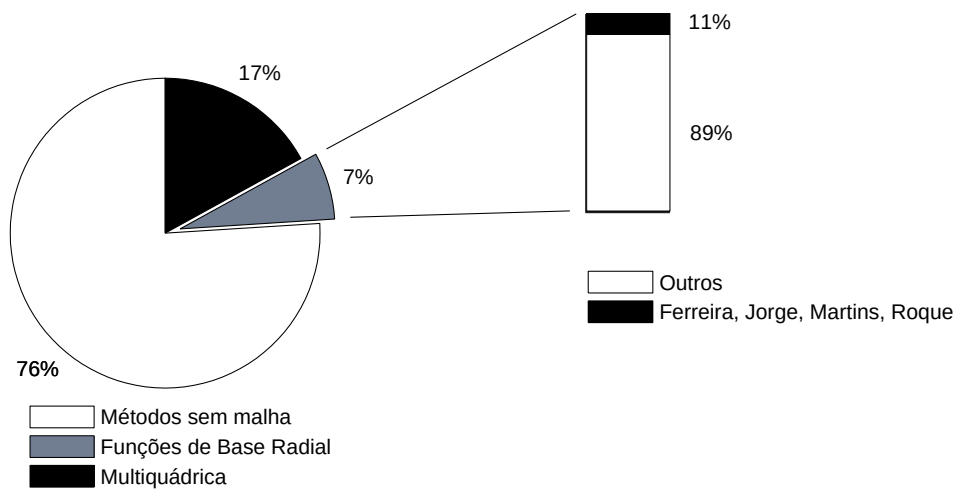


Figura 1.1: Percentagem de publicações científicas sobre o método das multiquadricas, scopus®

O presente documento encontra-se organizado em onze capítulos, e três apêndices.

No capítulo 2 é feito um levantamento sucinto dos métodos sem malha mais utilizados. Com base na revisão bibliográfica efectuada, são descritos os principais métodos sem malha, sendo ainda feito o respectivo enquadramento cronológico.

No capítulo 3, o método das funções de base radial é descrito pormenorizadamente (mais concretamente a colocação assimétrica de Kansa). Para uma melhor compreensão do método, são apresentados alguns exemplos simples ($y' + y = 0$; $y(0) = 1$, e a viga de

Timoshenko encastrada), constando os respectivos códigos em MATLAB no apêndice A.

No capítulo 4 é apresentada alguma terminologia relacionada com os materiais compósitos, e revistos alguns conceitos da mecânica dos meios contínuos que são necessários nesta tese para o estudo dos materiais compósitos.

No capítulo 5 é descrito o procedimento seguido ao longo da tese para o estabelecimento das equações de equilíbrio associadas a cada teoria de deformação utilizada. Como exemplo, as equações do campo de deslocamentos da teoria clássica são trabalhadas até obter as equações de equilíbrio associadas. Geralmente estas equações podem ser encontradas nos livros de texto da especialidade, ou em artigos científicos publicados. No entanto, no caso de teorias menos divulgadas, o procedimento descrito neste capítulo torna-se útil para a obtenção das equações do movimento (como é o caso das teorias trigonométrica e zig-zague trigonométrica utilizadas nesta tese). Uma vez que o ponto de partida para a derivação das equações de equilíbrio são os campos de deslocamentos, são apresentados alguns exemplos, entre os quais os campos associados às teorias de deformação utilizadas para a modelação de placas e cascas ao longo da tese. Com base na forma destes campos de deslocamentos, é possível fazer uma estimativa da qualidade da teoria de deformação. Dos campos de deslocamentos recolhidos da literatura, foram escolhidos os campos da teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT), teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy, teoria de deformação trigonométrica, teoria de deformação zig-zague trigonométrica, e teoria de deformação de ordem superior de Kant. Esta escolha foi influenciada pela precisão esperada da teoria, bem como pelo custo computacional estimado. São derivadas neste capítulo as equações de equilíbrio de placa e casca para as teorias seleccionadas. É ainda feita uma introdução à terminologia relacionada com placas e cascas, e uma pequena descrição sumária da sua geometria.

No capítulo 6 é feita a análise numérica da flexão de placas usando o método das multiquádricas. É feita uma pequena introdução à terminologia associada às placas, e explicado a forma de cálculo da tensão de corte τ_{xz} a partir das equações de equilíbrio. A restante estrutura deste capítulo é mantida nos capítulos 7, 8 e 9. Primeiro, as di-

ferentes teorias de deformação são desenvolvidas de forma a apresentar as respectivas equações de equilíbrio escritas em ordem aos deslocamentos. A discretização das equações de equilíbrio para aplicação do método das multiquádricas é apresentada para as diferentes teorias de deformação. De seguida, são descritos os exemplos numéricos utilizados no capítulo (geometria e propriedades materiais das placas, adimensionalização dos resultados, carga aplicada, enumeração dos exemplos utilizados para comparação dos resultados). No final do capítulo, é feita uma análise global dos resultados obtidos.

O capítulo 7 é dedicado à análise de vibrações livres de placa, o capítulo 8 à análise da flexão de cascas, e o capítulo 9 à análise de vibrações livres de casca. Nestes capítulos são apresentados alguns resultados numéricos e comparados com outros na literatura.

No capítulo 10, é apresentado um esquema para uma escolha otimizada do parâmetro de forma c para o caso da flexão de placas. Alguns exemplos são repetidos no sentido de comparar os resultados anteriores com os novos resultados.

No capítulo 11 são apresentados alguns comentários finais, e feitas algumas sugestões para futuros trabalhos.

Referências

Buhmann, M. D. (2003). *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge University Press.

Ferreira, A. J. M. (2003). A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates. *Composite Structures*, 59(3): 385–392.

Ferreira, A. J. M. (2005). Analysis of composite plates using a layerwise theory and multiquadrics discretization. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 12(2): 99–112.

Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F. e Jorge, R. M. N. (2006a). Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. *Composite Structures*, 75(1-4):593–600.

Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F. e Martins, P. A. L. S. (2005a). Static analysis of functionally graded plates using third-order shear

- deformation theory and a meshless method. *Composite Structures*, 69(4):449–457.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C., Fasshauer, G. E., Jorge, R. M. N. e Batra, R. C. (a). Analysis of functionally graded plates by a robust meshless method. *Journal of Mechanics of Advanced Materials and Structures*, *aceite para publicação*.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2005b). Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers and Structures*, 83(27):2225–2237.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2005c). Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by fsdt and radial basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39-41):4265–4278.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2006b). Modelling cross-ply laminated elastic shells by a higher-order theory and multiquadrics. *Computers and Structures*, 84(19-20):1288–1299.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2006c). Static and free vibration analysis of composite shells by radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(9):719–733.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2007). Natural frequencies of fsdt cross-ply composite shells by multiquadrics. *Composite Structures*, 77(3):296–305.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Martins, P. A. L. S. (2003). Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method. *Composites Part B: Engineering*, 34(7):627–636.
- Franke, R. (1982). Scattered data interpolation tests of some methods. *Mathematics of Computation*, 38(157):181–200.
- Hardy, R. L. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 176:1905–1915.
- Kansa, E. J. (1990a). Multiquadrics. a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. i. surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9):127–145.
- Kansa, E. J. (1990b). Multiquadrics. a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. ii. solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9):147–161.
- Leitão, V. M. A. (2001). A meshless method for kirchhoff plate bending problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(10):1107–1130.
- Leitão, V. M. A. (2004). Rbf-based meshless methods for 2d elastostatic problems.

Engineering Analysis with Boundary Elements, 28(10):1271–1281.

Leitão, V. M. A. e Tiago, C. M. (2002). The use of radial basis functions for one-dimensional structural analysis problems. *International Series on Advances in Boundary Elements*, 13:165–179.

Li, J., Cheng, A. H. D. e Chen, C.-S. (2003). A comparison of efficiency and error convergence of multiquadric collocation method and finite element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(3):251–257.

Madych, W. R. e Nelson, S. A. (1990). Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions ii. *Mathematics of Computation*, 54(189):211–230.

Micchelli, C. A. (1986). Interpolation of scattered data distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, 2(1):11–22.

Misra, R., Sandeep, K. e Misra, A. (2007). Analysis of anisotropic plate using multiquadric radial basis function. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(1):28–34.

Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M. e Jorge, R. M. N. (2005). Modelling of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions. *Composites Part B: Engineering*, 36(8):559–572.

Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M. e Jorge, R. M. N. (2006). Free vibration analysis of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 8(6):497–515.

Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M. e Jorge, R. M. N. (2007). A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3-5):1048–1070.

Stead, S. (1984). Estimation of gradients from scattered data. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14:265–279.

Tiago, C. M. e Leitão, V. M. A. (2006). Application of radial basis functions to linear and nonlinear structural analysis problems. *Computers and Mathematics with Applications*, 51(8):1311–1334.

Zhang, X., Song, K., Lu, M. e Liu, X. (2000). Meshless methods based on collocation with radial basis functions. *Computational Mechanics*, 26(4):333–343.

Métodos sem malha

2.1 Considerações gerais

Embora o método dos elementos finitos (FEM) seja um método robusto e amplamente usado na área da engenharia, a crescente complexidade dos problemas da mecânica computacional têm mostrado algumas das limitações deste método numérico. Por exemplo, no estudo de problemas que envolvam grandes deformações e propagação de fracturas, problemas com fronteiras em movimento e ainda processos adaptativos que requerem a actualização da malha [Belytschko et al., 1996; Liu, 2003; Gu, 2005]. Muitos desses problemas têm origem no facto de o FEM necessitar de uma malha, ou seja, de um conjunto de nós que estão relacionados entre si de forma pré-definida. O objectivo dos métodos sem malha é, tal como o nome indica, eliminar o processo de geração da malha, tal como ela é entendida nos métodos computacionais convencionais, como o método dos elementos finitos. Segundo Liu [2003], o método sem malha ideal não necessita de uma malha no decorrer da resolução de um problema descrito por um sistema de equações diferenciais parciais, com uma geometria arbitrária, sujeito a qualquer condição de fronteira.

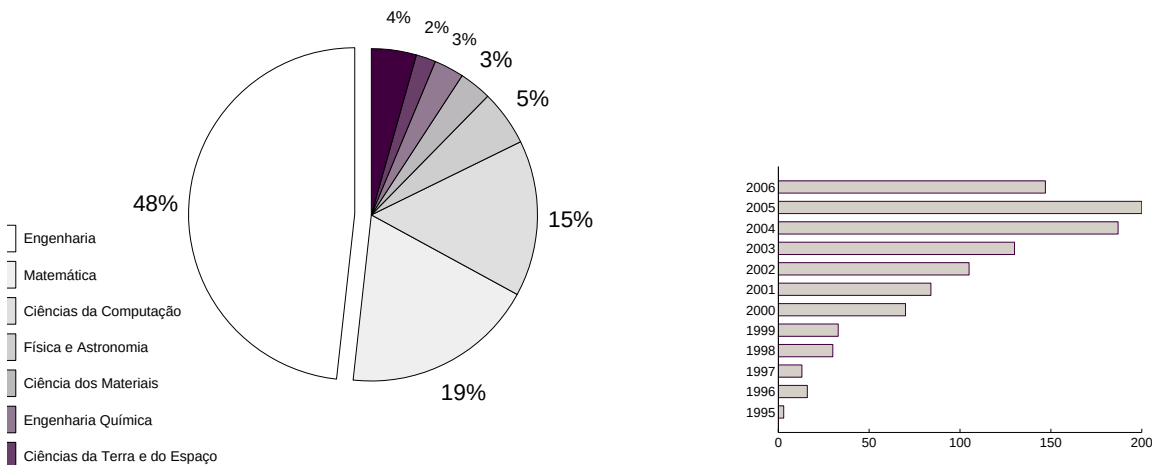


Figura 2.1: Publicações científicas sobre métodos sem malha-scopus®

Uma busca rápida na base de dados scopus® dá-nos uma indicação do crescente interesse que estes métodos despertam em diversas áreas da investigação (figura 2.1). Uma vez que estes métodos sem malha surgem em resposta a problemas levantados em áreas da engenharia, não é com surpresa que se verifica que essa é a principal área de investigação, seguindo-se a matemática [Smyrlis e Karageorghis, 2004], ciências da computação [Guo e Qin, 2005], física e astronomia [Shi et al., 2005], ciência dos materiais [Reutskiy, 2005], engenharia química [Liu et al., 2005], ciências da terra e do espaço [Hansen, 2003], e em menor peso em áreas tão diversas como química [Vadapalli et al., 2003], energia [Yang, 2004], ambiente [Reeves e Moran, 2000], ciências da decisão [Yin et al., 2004], medicina [De et al., 2001], e bioquímica [Li et al., 2004].

As primeiras referências a métodos numéricos sem malha surgem nos anos 30, relacionados com métodos de colocação [Frazer et al., 1937; Slater, 1934]. No entanto, o primeiro método sem malha a ser desenvolvido de forma consistente surgiu apenas nos anos 70 para modelação de fenómenos da astrofísica, o método hidrodinâmica de partículas suavizadas (SPH-smooth particle hydrodynamics) [Lucy, 1977; Gingold e Monaghan, 1977; Monaghan, 1992]. Mas apenas nos anos 90 é dada uma atenção regular aos métodos sem malha, em especial a métodos baseados em formulações fracas. Alguns desses métodos são o método dos elementos difusos (DEM-difuse element method) [Nayroles et al., 1992], o método livre de elementos de Galerkin/método Galerkin sem elementos (EFG-element free-Galerkin) [Belytschko et al., 1994b], o método de interpolação com ponto radial (RPIM-radial point interpolation method) [Liu e Gu,

2001b], o reproducing kernel particle method (RKPM) [Liu et al., 1995], o método sem malha local de Petrov-Galerkin (MLPG-meshless local Petrov-Galerkin method) [Atluri e Zhu, 1998], boundary node method (BNM) [Kothnur et al., 1999], boundary point interpolation method (BPIM) [Gu e Liu, 2002], etc. Também surgiram combinações de métodos sem malha/métodos com malha, tais como EFG/FEM [Belytschko et al., 1995b], EFG/BEM [Gu e Liu, 2001], MLPG/FEM/BEM Gu e Liu [2003], etc.

A tabela 2.1 classifica os métodos sem malha de acordo com três parâmetros: a formulação do problema a nível das equações diferenciais, as funções de forma usadas, e a representação do domínio do problema [Gu, 2005].

Tabela 2.1: Classificação dos métodos sem malha, segundo Gu [2005]

tipo de formulação:	formulação forte: GFDM, FPM, hp-cloud, MCM, MFS formulação fraca: DEM, EFG, RPIM, MLPG, LRPIM formulação fraca-forte: MWS representação integral: SPH
função de forma:	representação integral: SPH, RKPM moving least squares (mls): MLPG, BNM funções de base radial: MRPIM, LRPIM outros: hp-cloud, PU, MK
representação do domínio:	domínio e fronteira: EFG, MLPG, SPH, RKPM fronteira: BNM, BRPIM

Métodos sem malha baseados na forma fraca: nestes métodos, as equações do movimento e as equações de fronteira são primeiro transformadas num conjunto de equações na forma fraca e são então usadas para obter um sistema algébrico de equações: DEM [Nayroles et al., 1992], EFG [Belytschko et al., 1994b], RPIM [Wang e Liu, 2002], MLPG [Atluri e Zhu, 1998], LRPIM [Liu e Gu, 2001a]

Métodos sem malha baseados na formulação forte: as equações de derivadas ordinárias ou parciais do movimento são directamente discretizadas nos nós, através de técnicas simples de colocação e funções de forma para discretizar um sistema de equações: GFDM [Liszka e Orkisz, 1980], FPM [Oñate et al., 1996], hp-meshless cloud method [Liszka et al., 1996], meshless collocation method [Kansa, 1990a,b], MFS [Bogomolny,

1985].

Métodos sem malha baseados na formulação fraca-forte: métodos baseados na combinação da forma fraca integral e na forma forte. As duas formulações são usadas no mesmo problema, para diferentes grupos de nós, que têm diferentes equações ou restrições: MWS [Liu e Gu, 2003].

Métodos sem malha baseados na representação integral: nestes métodos, a aproximação à função é feita com uma forma fraca (integral), mas as equações são directamente discretizadas por colocação (forma forte), nas partículas: SPH Monaghan [1992], RKPM [Aluru, 2000].

Métodos sem malha baseados no moving least squares (MLS): estes métodos usam como função de forma o interpolante MLS. São exemplo deste tipo de métodos o MLPG e BNM.

Métodos sem malha baseados em funções de base radial: estes métodos usam como função de forma funções de base radial: MRPIM, LRPIM.

Métodos sem malha baseados noutros esquemas de interpolação: hp-cloud method, partition of unity (PU), moving kriging interpolation (MK)[Tongsuk e Kanok-Nukulchai, 2004].

Métodos sem malha baseados no domínio: nestes métodos, o domínio e a fronteira do problema são usados para discretizar o sistema de equações: EFG, MLPG, SPH, RKPM.

Métodos sem malha baseados na fronteira: nestes métodos, apenas a fronteira do problema é usada para discretizar o sistema de equações: BNM, BRPIM.

Um dos procedimentos mais importantes no desenvolvimento dos métodos sem malha é a escolha da função de forma. Segundo Liu [2003], uma função de forma, deve ser

suficientemente robusta para admitir nós relativamente arbitrários, deve ser estável, deve satisfazer uma certa ordem de continuidade, e finalmente deve ser computacionalmente eficiente.

2.1.1 Hidrodinâmica de partículas suavizadas, (SPH)

O método SPH foi inicialmente usado na área da astrofísica, modelação da formação e evolução de proto-estrelas e galáxias. O movimento do conjunto das partículas envolvidas é idêntico ao movimento de um líquido, ou gás, e podem ser modeladas pelas leis da hidrodinâmica clássica. Hoje, o método é usado em diversas áreas, tais como na mecânica dos sólidos, dinâmica e fractura [Randles e Libersky, 1996; Libersky et al., 1993; Benz e Asphaug, 1995; Hoover et al., 2004]. Alguns autores alteraram mesmo o nome do método para SPAM (Smoothed Particle Applied Mechanics), de forma a reflectir a sua generalização [Kum et al., 1995; Posch et al., 1995].

O método SPH usa uma aproximação $u^h(x)$ de $u(x)$ definido no domínio Ω

$$u^h(x) = \int_{\Omega} W(x - y, h) u(y) d\Omega_y \quad (2.1)$$

$$\approx \sum_{i=1}^N W(x - y_i, h) u(y_i) \Delta V_i \quad (2.2)$$

em que $W(x - y, h)$ é uma função de peso, (kernel) e h é uma medida do tamanho do suporte Ω . Na área do SPH, a função $W(x - y, h)$ e o parâmetro h são frequentemente denominados função de suavização (smoothing function) e comprimento de suavização (smoothing length), respectivamente. Se o kernel usado for de suporte compacto, então h mede o raio do suporte compacto.

Se $W(x - y, h)$ for a função delta, então $u^h(x) \equiv u(x)$. O kernel é então uma função que tende para a função delta quando a escala h tende para zero. O kernel é normalizado a 1 para que as constantes y_i sejam interpoladas exactamente. Para impedir variações bruscas nas constantes físicas associadas ao problema, o kernel deve ser diferenciável

pelo menos uma vez (daí o nome smoothed). De uma forma mais formal, o kernel deve ter as seguintes propriedades [Monaghan, 1982]:

1. $w(x - y, h) > 0$ num subdomínio de Ω , Ω_I
2. $w(x - y, h) = 0$ fora do subdomínio Ω_I
3. $\int_{\Omega} w(x - y, h) d\Omega = 1$
4. $w(\|x - y\|, h)$ é monotonicamente decrescente
5. $w(\|x - y\|, h) \rightarrow \delta(\|x - y\|)$ quando $h \rightarrow 0$, onde $\delta(\|x - y\|)$ é a função delta.

A equação (2.2) é a forma discreta de (2.1) e é obtida por quadratura, e ΔV_i é uma medida do domínio em torno de i . Uma das dificuldades deste método é definir ΔV_i para cada uma das partículas i para geometrias complexas, como é frequente encontrar-se em engenharia. Existem também dificuldades na implementação de condições de fronteira essenciais.

Uma forma mais sofisticada do método SPH deu origem ao método RKPM (reproducing kernel particle method).

2.1.2 Método Galerkin sem elementos

Método Galerkin

O método Galerkin, desenvolvido pelo matemático Boris Galerkin, insere-se nos métodos de resíduos pesados. Um método de resíduos pesados usa um número finito de funções $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^n$ para resolver a equação

$$L(y(x)) + f(x) = 0, \text{ onde } L \text{ é um operador diferencial linear} \quad (2.3)$$

Multiplicando a equação anterior por uma função de peso arbitrária, $w(x)$, e integrando no intervalo $[a, b]$ obtém-se:

$$\int_a^b w(x)(L(y(x)) + f(x)) dx = 0, \text{ para qualquer } w(x) \quad (2.4)$$

Substituindo $y(x)$ por um função de tentativa, $u(x) = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x)$ define-se o resíduo R como

$$L(u(x)) + f(x) = R \quad (2.5)$$

pretendendo-se $u(x)$ tal que

$$\int_a^b w(x)(L(u(x)) + f(x)) dx = 0, \text{ para algum } w(x) \quad (2.6)$$

Considere-se que $\phi_i \in X$ e $w \in Y$. Se X e Y forem espaços de Hilbert (H), o método Galerkin é denominado método Petrov-Galerkin. Se, além disso, ($X = Y = H$) e $w_i = \phi_i$, denomina-se método Bubnov-Galerkin. Se ($X = Y = H$) e $w_i = L(\phi_i)$, denomina-se método dos mínimos quadrados. Se a função de peso for a função delta, então trata-se de um método de colocação. Variações da aplicação do método de Galerkin deram origem a vários métodos sem malha, como o EFG, hp-coug, PUFEM, RKFM. As formas fracas globais dos métodos de Galerkin continuam no entanto a necessitar de uma malha de fundo para fazer as integrações. As formas locais dos métodos de Galerkin evitam essa malha, denominados por isso de “verdadeiramente” sem malha [Atluri e Shen, 2005]. Nesta classe de métodos sem malha inclui-se o MLPG, que serve de base ao FPM [Oñate et al., 1996], método das nuvens finitas (FCM-finite cloud method)[Aluru e Li, 2001], SPH [Monaghan, 1985], método das esferas finitas (FSM-finite sphere method) [De e Bathe, 2000], LPIM, RBNM (regular boundary node method) [Zhang e Yao, 2001], BNM [Chati e Mukherjee, 2000], BCM [Li e Aluru, 2002] etc.

Método Galerkin sem elementos

O método Galerkin sem elementos resulta de uma combinação do interpolante MLS com um procedimento Galerkin [Belytschko et al., 1994b]. O interpolante MLS foi anteriormente usado por Nayroles et al. [1992], dando origem ao método DEM. Belytschko et al. [1995a] e Lu et al. [1995] utilizam interpolantes MLS como funções de tentativa e teste, com uma formulação variacional para resolver problemas lineares elásticos, envolvendo fractura e propagação de fendas. Uma versão melhorada do método DEM foi proposta por Krongauz e Belytschko [1997], combinando o DEM com uma formulação de Petrov-Galerkin, dando origem ao método PGDEM.

A equação (2.6) pode ser integrada por partes, dando origem à formulação fraca do problema. Para resolver o sistema de equações resultante, é necessário usar um esquema de interpolação, por exemplo, MLS, PUM, RKPM, nuvens-hp, funções de Shepard, etc.

Considere-se a função $u(x)$ definida no domínio Ω . Para o ponto $x \in \Omega$ define-se Ω_x , $x \in \Omega_x$, $\Omega \supset \Omega_x$. Para qualquer ponto $x \in \Omega_x$, a função $u(x)$ pode ser aproximada por

$$u^h(x) \approx \{1 \ x \ y \ x^2 \ \dots\} \begin{Bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ a_3(x) \\ \dots \end{Bmatrix} = p^T(x)a(x) \ , \ x \in \Omega_x \quad (2.7)$$

Usando a técnica MLS [Lancaster e Salkauskas, 1981], os coeficientes a_i podem ser obtidos minimizando a expressão:

$$E[a(x)] = \sum_{i=1}^n w(x, x_i) [u_i - u(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n w(x, x_i) [u_i - p^T(x_i)a(x)]^2, \ x_i \in \Omega_x \quad (2.8)$$

ou de forma matricial:

$$E[a(x)] = \{u - P^T(x_i)a(x)\} W(x, x_i) \{u - P^T(x_i)a(x)\} \quad (2.9)$$

onde $W(x, x_i)$ é uma matriz diagonal de dimensão $n \times n$, $P(x_i)$ tem dimensão $m \times n$,

sendo m é o número de funções em $p(x)$, n é o número de nós em Ω_x .

Com a minimização de (2.9) em relação a a obtém-se

$$A(x)a(x) = B(x)u \quad (2.10)$$

onde $A(x) = P^T(x_i)W(x, x_i)P(x_i)$ e $B(x) = P^T(x_i)W(x, x_i)$.

Se $n > m$ e $A(x)$ não é singular, obtém-se para a função aproximada

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)u \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.7), obtém-se

$$u^h(x) = p^T(x)A^{-1}(x)B(x)u = \sum_i^n \sum_j^m p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{ji}u_i \equiv \sum_i^n \phi_i(x)u_i \quad (2.12)$$

Em que a função de forma, $\phi_x(x)$ é definida por

$$\phi_i(x) = \sum_j^m p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{ji} \quad (2.13)$$

A equação (2.12) é o interpolante MLS para $u(x)$. As derivadas de $u(x)$ podem ser calculadas de varias formas. Nayroles et al. [1992] considera $a(x)$ uma constante, e nesse caso, $\frac{\partial u^h}{\partial x} \approx p_{,x}(x)a(x)$. Belytschko et al. [1994b] usam outra forma:

$$u_{,x}^h(x) = \sum_i^n \phi_{i,x}(x)u_i = \sum_j^m \{p_{j,x}(A^{-1}B)_{ji} + p_j(A_{,x}^{-1}B + A^{-1}B_{,x})_{ji}\} u_i \quad (2.14)$$

De uma forma geral, o interpolante MLS não satisfaz as condições de fronteira essenciais, uma vez que não tem a propriedade da função delta. Existem vários métodos para impor as condições de fronteira, tais como o método dos multiplicadores de Lagrange [Belytschko et al., 1994b], o método das penalidades [Belytschko et al., 1994a], o método das transformações [Chen et al., 1996], o método de fronteira kernel singular [Lancaster e Salkauskas, 1981], integração por quadratura e integração nodal.

2.1.3 Método de interpolação de pontos e método de interpolação de pontos radial (PIM , RPIM)

A formulação do método de interpolação de pontos (PIM, RPIM) pode ser escrito como:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n B_i(x) a_i \quad (2.15)$$

onde $B_i(x)$ é uma função de base, n é o número de funções de base e a_i são os coeficientes a serem determinados. Se a função de base for um polinómio, o método denomina-se PIM, se for uma função de base radial, denomina-se RPIM. O método RPIM surgiu como resposta ao problema de singularidades encontradas no PIM devido ao uso de polinómios. O método RPIM combina o método de Galerkin na forma fraca, com funções de base radial. Comparado com o MCM de Kansa [1990a,b], tem duas vantagens: ordem das derivadas mais baixas, e implementação mais fácil das condições de fronteira. No entanto, o RPIM continua a necessitar de uma malha para integração, sendo portanto um pseudo método sem malha [Wang e Liu, 2002]. As funções de base radial podem ser usadas com um método de colocação, dando origem ao MCM (meshless collocation method).

2.1.4 Métodos com colocação

Os métodos que usam a técnica da colocação apresentam diversas vantagens, entre as quais uma discretização e codificação fácil das equações do movimento, são computacionalmente eficientes uma vez que não usam integração numérica, e não necessitam de qualquer malha ao longo de todo o processo de resolução do problema [Gu, 2005]. O método utilizado nesta tese é um método de colocação e será explicado em pormenor no capítulo 3.

2.2 Resumo

Neste capítulo, é feita uma pequena exposição de diferentes métodos numéricos sem malha. Verifica-se que muitos métodos ditos sem malha necessitam num qualquer momento da sua implementação de algum tipo de malha. O método de colocação sem malha usado nesta tese apresenta a característica de não necessitar de qualquer tipo de malha durante a sua implementação, sendo por isso denominado por alguns autores de “verdadeiramente sem malha”. Entende-se por “sem malha” algum tipo de elo de ligação entre nós.

Espera-se que a extensa bibliografia apresentada seja um bom ponto de partida para os potenciais interessados nos diferentes métodos numéricos referidos neste capítulo.

Referências

- Aluru, N. R. (2000). A point collocation method based on reproducing kernel approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(6):1083–1121.
- Aluru, N. R. e Li, G. (2001). Finite cloud method: A true meshless technique based on fixed reproducing kernel approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(10):2373–2410.
- Atluri, S. N. e Shen, S. (2005). The basis of meshless domain discretization: The meshless local petrov-galerkin (mlpg) method. *Advances in Computational Mathematics*, 23(1-2):73–93.
- Atluri, S. N. e Zhu, T. (1998). A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22(2):117–127.
- Belytschko, T., Gu, L. e Lu, Y. Y. (1994a). Fracture and crack-growth by element free galerkin methods. *Modelling and Simulation In Materials Science and Engineering*, 2(3A):519–534.
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. e Krysl, P. (1996). Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):3–47.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y. e Gu, L. (1994b). Element-free galerkin methods. *Internati-*

onal Journal for Numerical Methods in Engineering, 37(2):229–256.

Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. e Tabbara, M. (1995a). Element-free galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 32(17-18):2547–2570.

Belytschko, T., Organ, D. e Krongauz, Y. (1995b). Coupled finite element-element-free galerkin method. *Computational Mechanics*, 17(3):186–195.

Benz, W. e Asphaug, E. (1995). Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. *Computer Physics Communications*, 87:253–265.

Bogomolny, A. (1985). Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 22(4):644–669.

Chati, M. K. e Mukherjee, S. (2000). The boundary node method for three-dimensional problems in potential theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(9):1523–1547.

Chen, J. S., Pan, C., Wu, C. T. e Liu, W. K. (1996). Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):195–227.

De, S. e Bathe, K. J. (2000). The method of finite spheres. *Computational Mechanics*, 25(4):329–345.

De, S., Kim, J. e Srinivasan, M. A. (2001). A meshless numerical technique for physically based real time medical simulations. *Studies in health technology and informatics*, 81:113–118.

Frazer, A., Jones, W. P. e Skan, S. W. (1937). Approximation to functions and to the solutions of differential equations. *Great Britain Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda*, No 1799.

Gingold, R. A. e Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamicstheory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society*, 181(2):375–389.

Gu, Y. T. (2005). Meshfree methods and their comparisons. *International Journal of Computational Methods*, 2(4):477–515.

Gu, Y. T. e Liu, G. R. (2001). A coupled element free galerkin/boundary element method for stress analysis of tow-dimensional solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(34):4405–4419.

Gu, Y. T. e Liu, G. R. (2002). A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. *Computational Mechanics*, 28:47–54.

Gu, Y. T. e Liu, G. R. (2003). Hybrid boundary point interpolation methods and their

- coupling with the element free galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(9):905–917.
- Guo, X. e Qin, H. (2005). Real-time meshless deformation. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 16(3-4):189–200.
- Hansen, D. L. (2003). A meshless formulation for geodynamic modeling. *Journal of Geophysical Research B: Solid Earth*, 108(11).
- Hoover, W. G., Hoover, C. G. e Merritt, E. C. (2004). Smooth-particle applied mechanics: Conservation of angular momentum with tensile stability and velocity averaging. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 69(1 2):016702.
- Kansa, E. J. (1990a). Multiquadrics. a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. i. surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9):127–145.
- Kansa, E. J. (1990b). Multiquadrics. a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. ii. solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9):147–161.
- Kothnur, V. S., Mukherjee, S. e Mukherjee, Y. X. (1999). Two-dimensional linear elasticity by the boundary node method. *International Journal of Solids and Structures*, 36(8):1129–1147.
- Krongauz, Y. e Belytschko, T. (1997). A petrov-galerkin diffuse element method (pg dem) and its comparison to efg. *Computational Mechanics*, V19(4):327–333.
- Kum, O., Hoover, W. G. e Posch, H. A. (1995). Viscous conducting flows with smooth-particle applied mechanics. *Physical Review E*, 52(5):4899–4908.
- Lancaster, P. e Salkauskas, K. (1981). Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37:141–158.
- Li, G. e Aluru, N. R. (2002). Boundary cloud method: A combined scattered point/boundary integral approach for boundary-only analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(21-22):2337–2370.
- Li, H., Yuan, Z., Lam, K. Y., Lee, H. P., Chen, J., Hanes, J. e Fu, J. (2004). Model development and numerical simulation of electric-stimulus-responsive hydrogels subject to an externally applied electric field. *Biosensors and Bioelectronics*, 19(9):1097–1107.
- Libersky, L. D., Petschek, A. G., Carney, T. C., Hipp, J. R. e Allahdadi, F. A. (1993). High-strain lagrangian hydrodynamicsa 3-dimensional sph code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 109(1):67–75.
- Liszka, T. e Orkisz, J. (1980). Finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers and Structures*, 11(1-2):83–95.

- Liszka, T. J., Duarte, C. A. M. e Tworzydło, W. W. (1996). hp-meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):263–288.
- Liu, G. R. (2003). *Mesh Free Methods. Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press.
- Liu, G. R. e Gu, Y. T. (2001a). A local radial point interpolation method (lrpim) for free vibration analyses of 2-d solids. *Journal of Sound and Vibration*, 246(1):29–46.
- Liu, G. R. e Gu, Y. T. (2001b). A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4):937–951.
- Liu, G. R. e Gu, Y. T. (2003). A meshfree method: Meshfree weak-strong (mws) form method, for 2-d solids. *Computational Mechanics*, 33(1):2–14.
- Liu, W. K., Jun, S. e Zhang, Y. F. (1995). Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20(8-9):1081–1106.
- Liu, Y. H., Chen, J. e Li, C. X. (2005). Advances in the study and application of meshless methods in metal forming. *Suxing Gongcheng Xuebao/Journal of Plasticity Engineering*, 12(5):43–48.
- Lu, Y. Y., Belytschko, T. e Tabbara, M. (1995). Element-free galerkin method for wave propagation and dynamic fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(1-2):131–153.
- Lucy, L. B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82:1013–1024.
- Monaghan, J. J. (1982). Why particle methods work. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3(4):422–433.
- Monaghan, J. J. (1985). Particle methods for hydrodynamics. *Computer physics reports*, 3(2).
- Monaghan, J. J. (1992). Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30:543–574.
- Nayroles, B., Touzot, G. e Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10(5):307–318.
- Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. (1996). A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22):3839–3866.
- Posch, H. A., Hoover, W. G. e Kum, O. (1995). Steady-state shear flows via nonequilibrium molecular-dynamics and smooth-particle applied mechanics. *Physical Review E*, 52(2):1711–1720.

- Randles, P. W. e Libersky, L. D. (1996). Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):375–408.
- Reeves, H. W. e Moran, B. (2000). Meshless methods in contaminant hydrology. *Computational methods in water resources - Volume 2 - Computational methods, surface water systems and hydrology*, páginas 713–718.
- Reutskiy, S. Y. (2005). The method of fundamental solutions for eigenproblems with laplace and biharmonic operators. *Computers, Materials and Continua*, 2(3):177–188.
- Shi, B. J., Shu, D. W., Song, S. J. e Zhang, Y. M. (2005). Solving burgers equation by a meshless method. *Modern Physics Letters B*, 19(28-29):1651–1654.
- Slater, J. C. (1934). Electronic energy bands in metals. *Physical Review*, 45:794–801.
- Smyrlis, Y. S. e Karageorghis, A. (2004). Numerical analysis of the mfs for certain harmonic problems. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(3):495–517.
- Tongsuk, P. e Kanok-Nukulchai, W. (2004). Further investigation of element-free galerkin method using moving kriging interpolation. *International Journal of Computational Methods*, 1:345–365.
- Vadapalli, R. K., Weatherford, C. A., Banicescu, I., Cariño, R. L. e Zhu, J. (2003). Transient effect of a free particle wave packet in the hydrodynamic formulation of the time-dependent schrödinger equation. *International Journal of Quantum Chemistry*, 94(1):1–6.
- Wang, J. G. e Liu, G. R. (2002). A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(11):1623–1648.
- Yang, J. (2004). Nonlinear-oscillating meshless boundary element method for the prediction of blade reliability. *Reneng Dongli Gongcheng/Journal of Engineering for Thermal Energy and Power*, 19(2):175–178.
- Yin, Z., Song, J. e Jiang, S. (2004). A new strategy for direct generation of tool shape from a cad model based on a meshless method. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 17(4):327–338.
- Zhang, J. e Yao, Z. (2001). Meshless regular hybrid boundary node method. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(3):307–318.

O método das funções de base radial

3.1 Introdução

As funções de base radial ganharam visibilidade no trabalho de Franke [1982] onde são revistos vários algoritmos de interpolação de dados dispersos. De acordo com os parâmetros testados (tempo e espaço de computação, exactidão, aspecto visual, e facilidade de implementação), Franke concluiu que os métodos de interpolação global eram geralmente melhores que os métodos de interpolação locais, e que a multiquádrica de Hardy [1971, 1975] gerava os resultados mais exactos, seguindo-se a thin-plate spline de Duchon [1976, 1975].

3.2 Interpolação com funções de base radial

Considere-se um conjunto de dados arbitrários e distintos a ser interpolado, $(p, f(p)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Os dados p pertencem a um conjunto de $\mathcal{P}$, que é um conjunto finito de $\mathbb{R}^n$ com mais que um elemento. Os interpolantes de base radial $s(p) = f(p), p \in \mathcal{P}$ são da

forma:

$$s(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p \phi(\|x - p\|), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

onde λ_p são coeficientes reais. A matriz $\mathbf{A} = \phi(\|x - p\|)_{x,p \in \mathcal{P}}$ é denominada matriz de interpolação ou matriz dos coeficientes, e os pontos p são denominados *centros*. A função $\phi(\|x - p\|)$ é uma função de base radial, por exemplo a função multiquádrica. Outras funções de base radial têm sido aplicadas, como por exemplo, [Schaback, 2000]:

$$\phi(r) = (c + r^2)^\beta; \quad \beta > 0 \quad \text{multiquádrica} \quad (3.1)$$

$$\phi(r) = (c + r^2)^\beta; \quad \beta < 0 \quad \text{multiquádrica inversa} \quad (3.2)$$

$$\phi(r) = e^{-cr^2}; \quad c > 0 \quad \text{gaussiana} \quad (3.3)$$

$$\phi(r) = r^2 \log r; \quad \text{thin plate spline} \quad (3.4)$$

com $r = \|x - p\|$ e onde c representa um parâmetro de forma que influencia a forma da função (figura 3.1) e que pode alterar significativamente a qualidade da solução. Como se pode observar, o aumento do parâmetro c vai originar funções multiquádricas com menor gradiente e mais suaves. Nesta tese são usados parâmetros de forma c , para a função multiquádrica, tipicamente entre 0 e 1.

Na figura 3.2 estão representadas várias funções de base radial no domínio $[0, 1] \times [0, 1]$, com centro em $p = (0.5, 0.5)$. Para as funções multiquádrica e multiquádrica inversa, foi usado $\beta = 1/2$ e $\beta = -1/2$, respectivamente. Nesta tese é usada exclusivamente a função de base radial multiquádrica.

Exemplo: interpolação de uma função. Considere-se, a título de exemplo, o problema de interpolar a função $f = \frac{1}{1 + 25x^2}$ com um determinado número de pontos de interpolação, e com funções multiquádricas, $\phi(r) = (c + r^2)^{1/2}$. O resultado da interpolação é excelente, como se pode ver na figura 3.3. O código em MATLAB é apresentado no apêndice A.1.

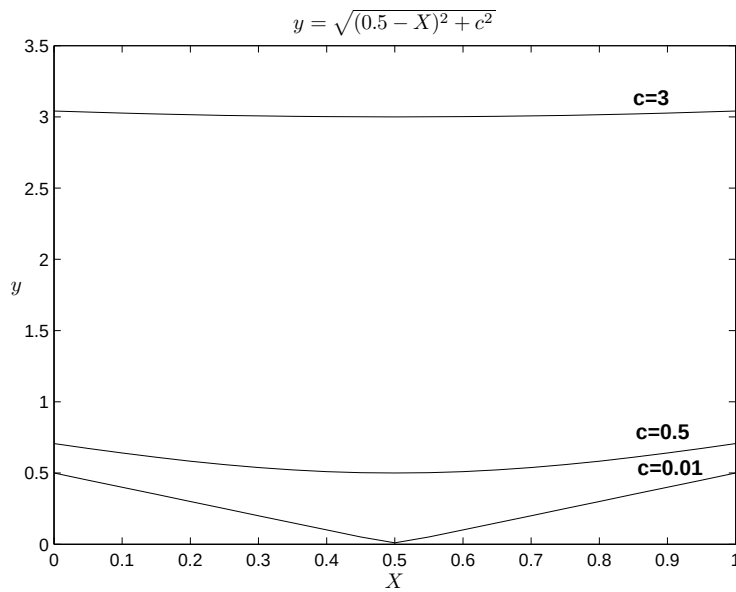


Figura 3.1: Influência do parâmetro de forma c na função multiquádrica

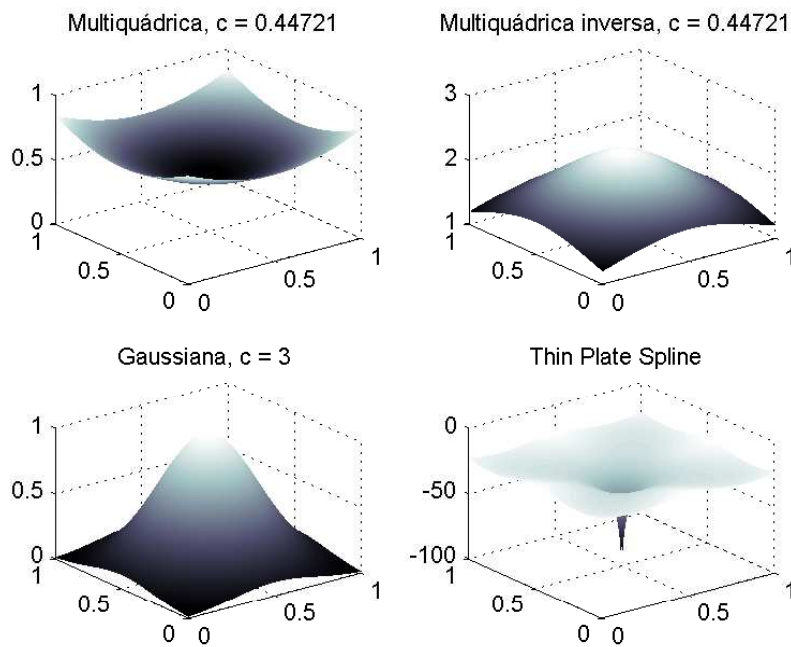


Figura 3.2: Representação gráfica de algumas funções de base radial típicas

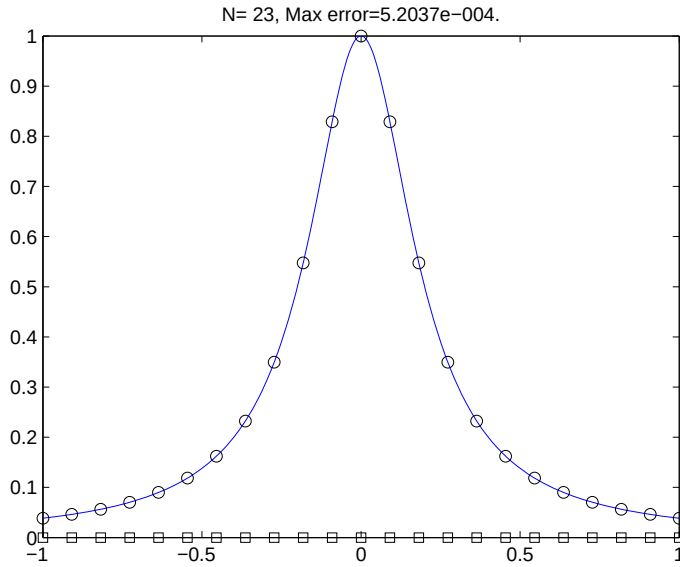


Figura 3.3: Interpolação da função $f = 1/(1 + 25x)$, com $N = 23$ pontos, no domínio $x \in [-1, 1]$. —função a ser interpolada; $\circ$ função interpolada; $\square$ rede de nós (regular)

Note-se que a matriz de interpolação, A é mal condicionada ($\text{cond}=1 \times 10^4$)¹, cheia e simétrica. No entanto, o erro da interpolação é muito pequeno. A figura 3.4 mostra os valores da matriz de interpolação, A , para $N = 23$.

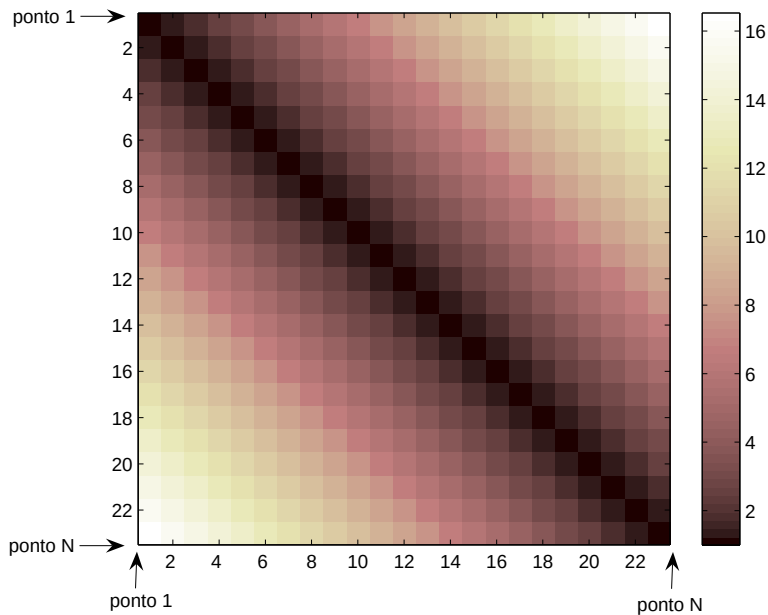


Figura 3.4: Imagem da matriz de interpolação, com $N = 23$

¹cond $\equiv$ número de condicionamento da matriz. Valores de cond perto de 1 indicam uma matriz bem condicionada

3.3 Funções de base radial na resolução numérica de equações diferenciais. Colocação assimétrica de Kansa

Um problema de equações diferenciais com condições de fronteira pode ser descrito genericamente por:

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

$$Bu|_{\partial\Omega} = q \quad (3.6)$$

onde $\partial\Omega$ representa a fronteira do domínio Ω , sendo L e B operadores diferenciais e $u(x)$ representa a função de campo pretendida. No caso da flexão de placas e cascas, $f(x)$ pode representar a carga exterior aplicada à superfície média. Os nós de colocação situam-se na fronteira ($p_j, j = 1, \dots, N_B$) e no domínio ($p_j, j = N_B + 1, \dots, N$) (figura 3.5).

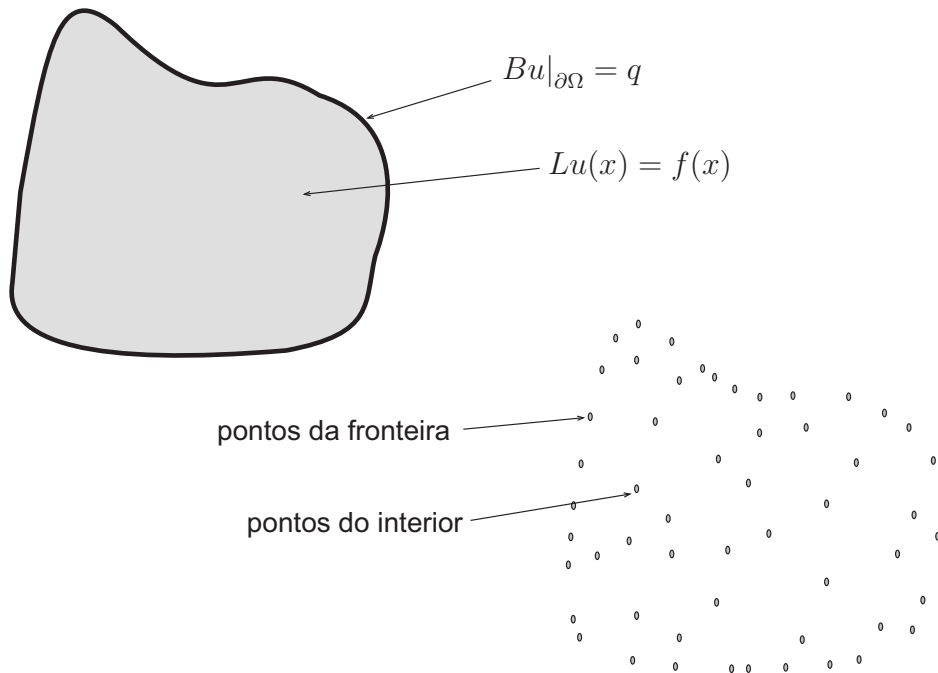


Figura 3.5: Discretização do domínio para aplicação da colocação de Kansa

Considere-se agora $s(x, c)$ como interpolante de base radial da solução $u(x)$,

$$s(\mathbf{x}, c) = \sum_{j=1}^N a_j g(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_j\|, c) \quad (3.7)$$

onde N é o número total de pontos e a_j são um conjunto de parâmetros a determinar. A colocação de Kansa [1990a,b] (colocação directa, ou assimétrica) da equação (3.7) dá origem às equações:

$$s_B(\mathbf{x}, c) \equiv \sum_{j=1}^N a_j Bg(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_j\|, c) = \lambda(\mathbf{p}_i), i = 1, \dots, N_B \quad (3.8)$$

$$s_L(\mathbf{x}, c) \equiv \sum_{j=1}^N a_j Lg(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_j\|, c) = \Phi(\mathbf{p}_i), i = N_B + 1, \dots, N \quad (3.9)$$

onde $\lambda(\mathbf{p}_i)$, $\Phi(\mathbf{p}_i)$ são os valores do problema nos pontos da fronteira e no pontos do interior do domínio, respectivamente. Note-se que os operadores diferenciais se aplicam directamente às funções de base radial, o que constitui uma facilidade não desprezável. Note-se ainda que as funções (ver (3.1)-(3.4)) são infinitamente deriváveis.

Aplicando a colocação em N pontos, obtém-se um sistema de equações cuja representação na forma matricial é,

$$\begin{bmatrix} B\mathbf{g} \\ L\mathbf{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Note-se que a matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} B\mathbf{g} \\ L\mathbf{g} \end{bmatrix}$ é não simétrica e cheia. Foi mostrado que este tipo de colocação pode dar origem a matrizes mal condicionadas ou mesmo singulares [Hon e Schaback, 2001]. Todavia, os problemas de mau condicionamento podem ser atenuados usando técnicas de decomposição de domínio [Kansa e Hon, 2000], ou usando funções de forma locais [Wendland, 1995; Wu, 1995].

Como exemplo, considere-se a equação diferencial $y' + y = 0$, com condição de fronteira $y(0) = 1$. A formulação usando o método de colocação de Kansa, sob a forma matricial

é $A\lambda = f$, ou seja:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}_{\text{matriz } A} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}}_{\text{vector } \lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{vector } f} \quad (3.11)$$

Escolhendo a função multiquádrica como função de base radial, $g_{ij} = ((x_i - x_j)^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$, os coeficientes a_{ij} e b_{ij} são da forma:

$$b_{ij} = g_{ij} = ((x_i - x_j)^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

$$a_{ij} = \frac{dg_{ij}}{dx_j} + g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{2x_i - 2x_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}} + \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2} \quad (3.13)$$

Resolvendo o sistema de equações em ordem a $\lambda = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ é possível obter a solução $y(x) = A\lambda$.

Exemplo da aplicação a uma viga em flexão. Para uma viga Timoshenko de comprimento L , com o sistema de coordenadas com origem no canto esquerdo (figura 3.6), o problema consiste em resolver as seguintes equações :

$$GAk \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \right) = -q$$

$$EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} + GAk \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) = 0$$

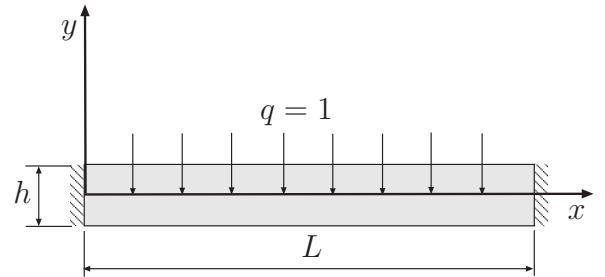


Figura 3.6: Viga bi-encastada, com carga uniforme

em que E , G , I , A , e k representam o módulo de elasticidade, o módulo de corte, o segundo momento de área, a secção recta e o factor de correcção ao corte respecti-

vamente. As variáveis w e θ representam as incógnitas do problema e são a flecha e a rotação em $y > 0$. As condições de fronteira, para uma viga encastrada são: $w(0, L) = 0$, $\theta(0, L) = 0$. A rotina de cálculo de funções multiquádricas, suas derivadas de primeira e segunda ordem, e resolução do problema é apresentada no apêndice A.2. A solução obtida é apresentada na figura 3.7. Na solução apresentada utilizam-se 63 pontos ($N = 63$), tendo-se obtido um valor para o erro de 0.15% (a meio vão).

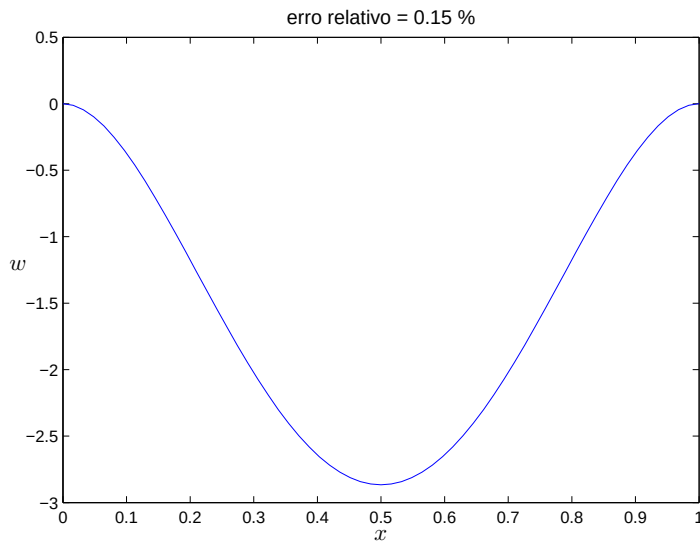


Figura 3.7: Solução para a viga de Timoshenko, $N = 63$

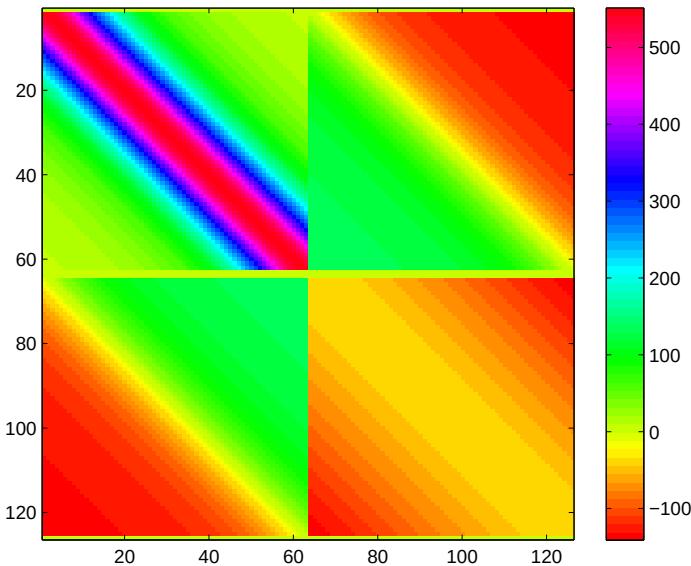


Figura 3.8: Valores da matriz de interpolação para a viga de Timoshenko, $N = 63$

A matriz de interpolação K é assimétrica (figura 3.8), apresenta um número de condicionamento muito elevado ($\text{cond} = 5 \times 10^{18}$), e é cheia (figura 3.9).



Figura 3.9: Valores não nulos da matriz de interpolação para a viga de Timoshenko, $N = 63$. Os quadrados a cinzento representam valores não nulos, e os quadrados a branco representam valores nulos da matriz

3.3.1 O problema das vibrações livres

O problema de vectores e valores próprios pode ser formulado da seguinte forma:

Considere-se um operador diferencial linear L e um domínio Ω in $\mathbb{R}^n$ com uma fronteira $\partial\Omega$.

Procuram-se valores próprios (λ) e vectores próprios ($\mathbf{u}$) que satisfazem o sistema de equações:

$$L\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega \quad (3.14)$$

$$L_B\mathbf{u} = 0 \text{ on } \partial\Omega \quad (3.15)$$

O problema (3.14) e (3.15) é aproximado pelo interpolante das multiquádricas,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i L\phi(\|x - y_i\|_2) = \lambda\tilde{\mathbf{u}}(x_j), j = 1, 2, \dots, N_I \quad (3.16)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i L_B \phi(\|x - y_i\|_2) = 0, j = N_I + 1, \dots, N \quad (3.17)$$

ou

$$\begin{bmatrix} L^I \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \underline{\alpha} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{A}^I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \underline{\alpha} \quad (3.18)$$

onde:

$$L^I = L\phi(\|x_{N_I} - y_j\|_2)_{N_I \times N}; \quad \mathbf{A}^I = \phi(\|x_{N_I} - y_j\|_2)_{N_I \times N}; \quad (3.19)$$

$$\mathbf{B} = L_B \phi(\|x_{N_I+1} - y_j\|_2)_{N_B \times N} \quad (3.20)$$

O sistema pode ser facilmente resolvido usando a função `eig` do MATLAB. O código para o cálculo das frequências livres da viga Timoshenko é apresentado no apêndice A.3. O resultado é comparado com uma solução apresentada por Lee e Schultz [2004].

Para um número de nós $N = 35$, os cinco primeiros modos de vibração são apresentados na figura 3.10.

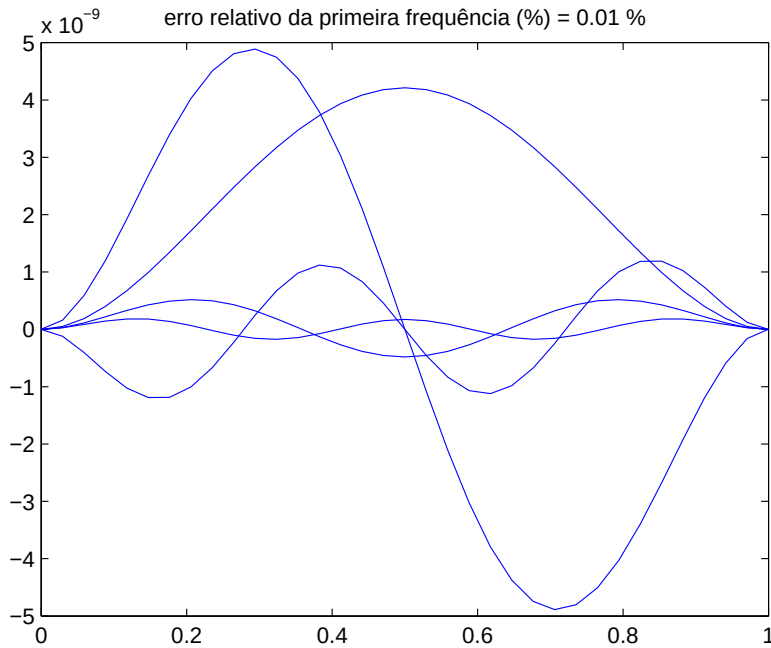


Figura 3.10: Primeiros cinco modos de vibração para a placa de Timoshenko bi-encastada, para $N = 35$. O erro relativo em percentagem para a primeira frequência é de 0.01%

A estrutura da equação (3.18) com os seus blocos de zeros pode ser facilmente vista no gráfico da figura 3.11.

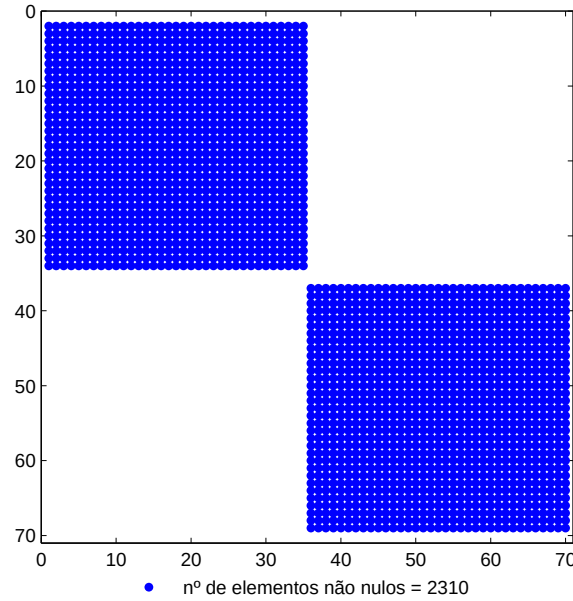


Figura 3.11: Valores não nulos da matriz de interpolação (parte dinâmica) para a viga de Timoshenko, $N = 53$. Os quadrados a cinzento representam valores não nulos, e os quadrados a branco representam valores nulos da matriz

Além da colocação assimétrica utilizada nesta tese, existe um tipo de colocação simétrica proposto por Wu [1992] e Fasshauer [1996]. Uma revisão de diferentes tipos de colocação pode ser encontrada em Larsson e Fornberg [2003]. Estudos numéricos de Chinchapatnam et al. [2006] envolvendo várias funções de base radial globais sugerem que a colocação simétrica é marginalmente melhor que a colocação assimétrica.

3.4 Parâmetro de forma

Outro problema que este método apresenta é a escolha do parâmetro de forma, c da função multiquádrica, $g_{ij} = ((x_i - x_j)^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$. Existem na literatura várias formas de escolher um valor do parâmetro de forma para a função multiquádrica.

Nos exemplos apresentados ao longo desta tese é utilizado principalmente $c = 2/\sqrt{n}$ (onde n é o número de pontos por lado), com resultados satisfatórios, ainda que existam

diversas expressões utilizadas por outros autores (tabela 3.1). No entanto, verifica-se que em alguns casos os resultados tendem a piorar com o aumento do número de nós da rede. Este é um fenómeno observado por vários autores, e julga-se que estará relacionado com o aumento do número de condicionamento da matriz. O condicionamento da matriz está relacionado com o número de nós, mas também com o tipo de equações que estão a ser resolvidas. Tendo estes aspectos em conta, foi desenvolvido no capítulo 10 desta tese um método para escolha do parâmetro de forma. O método é uma adaptação de um algoritmo de [Rippa, 1999], baseado numa técnica estatística que considera não só a rede usada, mas também as equações do problema a resolver.

Tabela 3.1: Algumas formas de calcular o parâmetro de forma para a função multiquádrica

referência	parâmetro de forma, c	observações
[Hardy, 1971]	$c = 0.815d$	$d = (1/N) \sum_{i=1}^N d_i$; d_i : distância entre o ponto i e o vizinho mais próximo; N : número total de nós
[Franke, 1982]	$c = 1.25D/\sqrt{N}$	D : diâmetro mínimo do cír- culo que contem todos os pon- tos; N : número total de nós
[Kansa, 1990a,b]	$c^2 = c_{\min}^2 \min(c_{\max}^2/c_{\min}^2)^{(j-1)/(N-1)}$ $j = 1, 2, \dots, N$	$c_{\max}^2$ e $c_{\min}^2$ são dados pelo utilizador; N : número total de nós
[Fasshauer, 2002]	$c = 2/\sqrt{N}$	N : número total de nós

3.5 Resumo

Neste capítulo é apresentado o método numérico sem malha utilizado ao longo desta tese, o método das funções de base radial com colocação assimétrica. Mais concretamente, o método das multiquádricas, uma vez que é essa a função de base radial usada em todos os exemplos numéricos deste tese. Como exemplo, é estudada a viga de Timoshenko à flexão, bem como o problema das vibrações livres.

Para terminar, é abordada a questão da escolha do parâmetro de forma da multiquá-

drica, c . É apresentado um resumo das expressões usadas por diversos autores para escolher este parâmetro. Este assunto é revisitado no capítulo 10, onde é apresentado um método estatístico para a escolha automática do parâmetro de forma.

Referências

- Chinchapatnam, P., Djidjeli, K. e Nair, P. (2006). Unsymmetric and symmetric meshless schemes for the unsteady convection-diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(19-22):2432–2453.
- Duchon, J. (1975). Fonctions-spline du type plaque mince en dimension 2. Relatório técnico No.231, Grenoble.
- Duchon, J. (1976). Fonctions-spline à energie invariante par rotation. Relatório técnico No. 27,, Grenoble.
- Fasshauer, G. (1996). Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions. Em LeMéhauté, A., Rabut, C. e Schumaker, L. L., editores : *Chamonix Proceedings*. Vanderbilt University Press, Nashville, TN.
- Fasshauer, G. E. (2002). Newton iteration with multiquadrics for the solution of non-linear pdes. *Computers and Mathematics with Applications*, 43(3-5):423–438.
- Franke, R. (1982). Scattered data interpolation tests of some methods. *Mathematics of Computation*, 38(157):181–200.
- Hardy, R. L. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 76:1905–1915.
- Hardy, R. L. (1975). Research results in the application of multiquadric equations to surveying and mapping problems. *Surv Mapp*, 35(4):321–332.
- Hon, Y. C. e Schaback, R. (2001). On unsymmetric collocation by radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, 119(2–3):177–186.
- Kansa, E. J. (1990a). Multiquadrics. a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. i. surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9):127–145.
- Kansa, E. J. (1990b). Multiquadrics. a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. ii. solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9):147–161.
- Kansa, E. J. e Hon, Y. C. (2000). Circumventing the ill-conditioning problem with mul-

tiquadric radial basis functions: applications to elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 39(7-8):123–137.

Larsson, E. e Fornberg, B. (2003). A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic pdes. *Computers and Mathematics with Applications*, 46(5-6):891–902.

Lee, J. e Schultz, W. (2004). Eigenvalue analysis of timoshenko beams and axisymmetric mindlin plates by the pseudospectral method. *Journal of Sound and Vibration*, 269(3-5):609–621.

Rippa, S. (1999). An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 11(2-3):193–210.

Schaback, R. (2000). Remarks on meshless local construction of surfaces. páginas 34–58.

Wendland, H. (1995). Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, V4(1): 389–396.

Wu, Z. (1995). Compactly supported positive definite radial functions. *Adv. in Comp. Math.*, 11:283–292.

Wu, Z. M. (1992). Hermite-birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions. *Approximation Theory and Applications*, 8:1–10.

Materiais e laminados compósitos

4.1 Introdução

Grande parte dos exemplos apresentados nesta tese envolvem materiais compósitos. As vantagens destes materiais são conhecidas desde a antiguidade, e o seu estudo tem aplicações em vários domínios da ciência e engenharia. No domínio da geologia, o estudo dos compósitos é importante para a indústria petrolífera [Zekri e Almehaideb, 2006]. A construção civil (madeira e cimento), a biomecânica (osso), engenharia espacial e equipamentos desportivos (fibra de vidro reforçado com carbono) são exemplos de áreas em que os materiais compósitos têm dado um grande contributo.

A palavra compósito (do latim *compositu-*, composto) significa de uma forma geral, mesclado, heterogéneo; artificial ou a nível técnico, material constituído pela mistura de duas ou mais substâncias [Infopédia, 2006]. No entanto, a definição de material compósito, não é definitiva nem consensual.

Segundo as recomendações IUPAC [Work et al., 2004], um material compósito é um material formado por diversos componentes, exibindo múltiplos e diferentes domínios de fase (não gasosos), em que pelo menos um dos domínios de fase é um domínio de fase contínuo. Por domínio de fase entende-se uma região de material com composição

química e estado físico uniformes. Um domínio de fase contínuo consiste num domínio de fase único presente numa mistura heterogénea através da qual se pode definir um caminho contínuo que liga todas as fronteiras dos restantes domínios de fase presentes, sem no entanto as atravessar. O domínio de fase contínuo é vulgarmente denominado no contexto dos materiais compósitos por *matriz*.

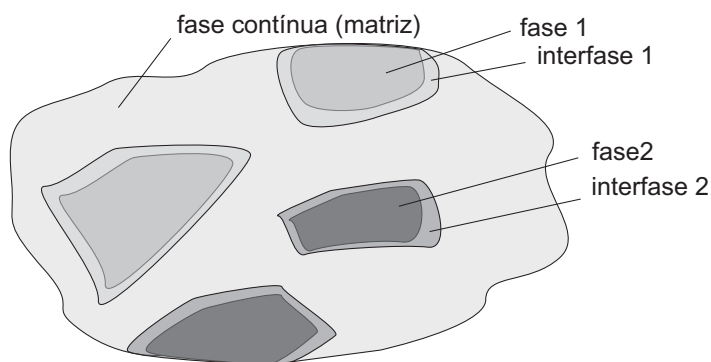


Figura 4.1: Fases materiais de um compósito

Por outro lado, outros autores são mais abrangentes na sua definição de material compósito. Para Milton [2001] um material compósito é um material que tem inhomogeneidades numa escala maior que a escala atómica (o suficiente para aplicar as leis da física clássica), mas que são estatisticamente homogéneas a um nível macroscópico, ou pelo menos a um nível intermédio de escalas. O autor engloba nesta definição suspensões coloidais e espumas. Nevoeiro, chuva e orvalho, são classificados compósitos constituídos por ar e água. Núvens de alta altitude, compósitos constituídos por ar e cristais de gelo. O ar atmosférico, com flutuações na sua densidade (compósito funcional), o gelo do mar (água com bolsas de sal), a lã e o algodão (compósitos de fibras e ar), todos estes exemplos são considerados materiais compósitos.

Por vezes é considerada uma fase adicional denominada interfase entre a fase contínua e as fases descontínuas, também designadas de reforço (figura 4.1).

O objectivo em construir um material compósito é obter um material cujas propriedades sejam diferentes das propriedades dos seus constituintes, seja por motivos mecânicos, económicos, ou mesmo estéticos. Nalguns casos, foram mesmo criados materiais cujas propriedades são até hoje, desconhecidas na natureza, tais como os meta-



Figura 4.2: Meta material

(http://physics.ucsd.edu/~drs/neg_ref_home.htm)

materiais, (ou materiais *left-handed* (LHM)) (figura 4.2). Os metamateriais são compósitos com propriedades electromagnéticas únicas, com aplicações na área da óptica e telecomunicações [Veselago, 1968; Shelby et al., 2001].

De um ponto de vista estrutural, pretende-se um material cujas propriedades mecânicas sejam superiores às propriedades de cada um dos constituintes. De seguida apresenta-se uma possível classificação dos compósitos de duas fases na área da mecânica.

Classificação quanto ao tipo de matriz e de fibra [Daniel e Ishai, 1994]

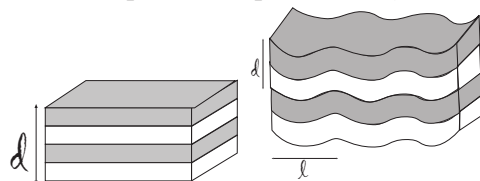
- Classificação quanto ao tipo de fibra
 - compósito particulado: partículas de vários tamanhos e formas encontram-se dispersas pela matriz. Devido ao carácter aleatório da dispersão, estes compósitos podem ser considerados quase-isotrópicos.
 - compósito de fibras descontínuas (ou fibras curtas): contem fibras curtas como fase de reforço. Podem estar orientadas numa mesma direcção ou orientadas aleatoriamente. No primeiro caso, o compósito pode ser considerado ortotrópico e no segundo, quase-isotrópico.
 - compósito de fibras contínuas: as fibras podem ser todas paralelas (fibras unidireccionais) ou formarem ângulos rectos entre si (fibras cruzadas), ou orientadas em várias direcções (fibras multi direccionais).
- Classificação quanto ao tipo de matriz
 - compósito de matriz polimérica
 - compósito de matriz metálica
 - compósito de matriz cerâmica

Os materiais compósitos podem ser ainda empilhados de forma a formar um material compósito laminado. Um laminado é um material formado por mais que uma camada (ou lâmina), sendo as lâminas distintas em composição ou propriedades de anisotropia [Work et al., 2004].

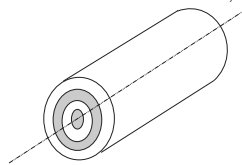
Tabela 4.1: Classificação dos materiais compósitos laminados [Skorokhod, 2003]

• estruturas regulares

-lâminas paralelas periódicas, lâminas onduladas periódicas



-'toro' cilíndrico, lâminas coaxiais de igual espessura



-'casca de cebola', esfera constituída por lâminas esféricas de igual espessura



• estruturas irregulares

-sanduiche, lâminas paralelas alternadas aleatoriamente

-estruturas onduladas com espessura e periodicidade aleatórias

-cilíndrico não circular ou objectos esferóides com lâminas de espessura aleatória

Uma vez que um compósito laminado pode ter muitas camadas, foi necessário desenvolver uma nomenclatura para descrever a forma de empilhamento. Cada camada é designada por um número que indica em graus o ângulo entre a direcção das fibras e o eixo xx de referência. Sucessivas camadas são separadas pelo símbolo “/”, se os seus ângulos forem diferentes. Camadas sucessivas com a mesma orientação são indicadas por um índice numérico. As camadas são designadas de forma sequencial, de acordo com o eixo de referência. Parêntesis rectos ou curvos indicam o início e o fim da sequência de empilhamento.

Exemplos:

			0
			45
			90
			0
		90	45
		45	90
		45	90
45			
0	0	0	45
45	30	0	0
90	-30	45	90
90	-45	45	45
30	45	90	0
[30/90 ₂ /45/0/45]	[±45/∓30/0]	[90/45 ₂ /0] _s	[(0/45/90) ₂] _s ou [0/45/90] _{2s}

O índice s indica simetria e n é o número de camadas, ou conjunto de camadas. Uma sequência $[0/90]_n$ denomina-se laminado cruzado (cross-ply).

4.2 Estado de tensão e deformação

Quando um corpo é deformado sob acção de forças externas, o ponto P de coordenadas $X = (X_1, X_2, X_3)$ move-se para uma nova posição $x = (x_1, x_2, x_3)$, sendo o deslocamento do ponto P dado por $u = x - X$.

A deformação num ponto pode ser medida através do tensor de deformação de Green-Lagrange, $\mathbf{E}$, cujas componentes cartesianas são expressas por:

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right]$$

$$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
E_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\
E_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\
E_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \\
E_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Para pequenas deformações, pode-se assumir como desprezável os termos infinitesimais de segunda ordem, obtendo-se o tensor das deformações infinitesimais, ϵ , cujas componentes são:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \gamma_{12} \equiv 2\epsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\
\epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \gamma_{13} \equiv 2\epsilon_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\
\epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \gamma_{23} \equiv 2\epsilon_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

A notação ϵ, γ usada em (4.2) é da autoria de van Kármán. As quantidades $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ são as deformações de corte de engenharia. A deformação de corte de engenharia

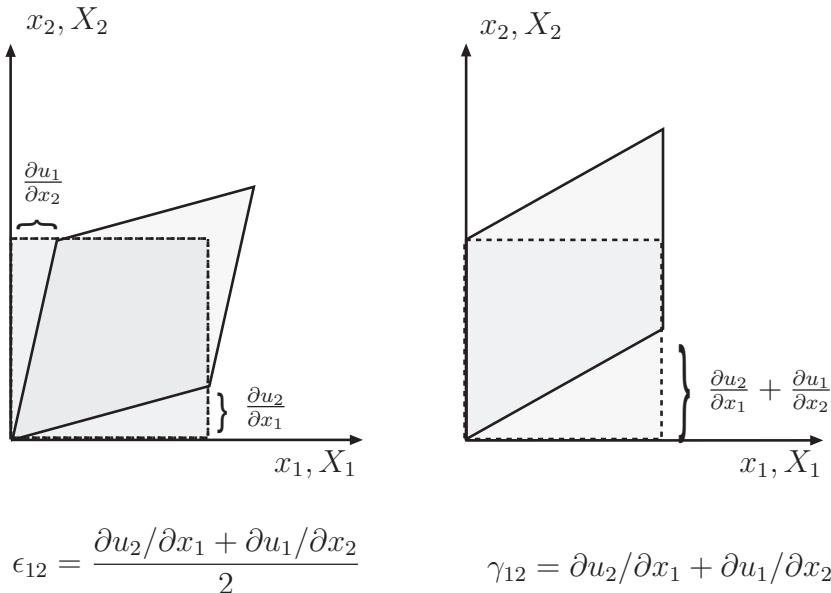


Figura 4.3: Deformação de corte ϵ e deformação de corte de engenharia γ

$\gamma_{ij}, (i \neq j)$ pode ser vista como a deformação angular no plano ij , enquanto que a deformação de corte ϵ_{ij} é uma média simples das deformações no plano ij (ver figura 4.2).

4.3 Lei de Hooke generalizada

O modelo linear constitutivo para uma deformação infinitesimal foi generalizado por Cauchy [1828], sendo denominado Lei de Hooke generalizada, podendo ser enunciada como,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (4.3)$$

onde C_{ijkl} são constituídas pelas constantes elásticas do material, e o seu conjunto forma o tensor de elasticidade, $\mathbf{C}$. Sem simplificações, o tensor de elasticidade tem 81 elementos, e os tensores de tensão e deformação 9. De forma mais explícita, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

De forma a simplificar a escrita e manipulação de (4.4), pode usar-se a notação de Voigt-Kelvin [Dellinger et al., 1998]. A notação de Voigt [Voigt, 1928] pretende representar

um tensor simétrico, reduzindo a sua ordem. Por exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ 2a_{12} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \equiv \{\mathbf{A}\} \quad (4.5)$$

Para conservar a norma $\sum_{ij} C_{ij}^2 = \sum_{ijkl} C_{ijkl}^2$, Kelvin introduz o factor 2 de forma a representar as contribuições de a_{12} e a_{21} .

Como o tensor das tensões e das deformações são simétricos, ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$), e considerando o caso da hiperelasticidade, (existe uma função densidade da energia de deformação $\frac{\partial^2 U_0}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}}$ duas vezes diferenciável), o número de constantes elásticas independentes é reduzida para 21 [Reddy, 1984, 2004]. No caso de um material anisotrópico, a equação (4.3) pode ser escrita da forma:

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad (4.6)$$

ou na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \equiv \sigma_1 \\ \sigma_{22} \equiv \sigma_2 \\ \sigma_{33} \equiv \sigma_3 \\ \sigma_{23} \equiv \sigma_4 \\ \sigma_{13} \equiv \sigma_5 \\ \sigma_{12} \equiv \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \equiv \epsilon_{11} \\ \epsilon_2 \equiv \epsilon_{22} \\ \epsilon_3 \equiv \epsilon_{33} \\ \epsilon_4 \equiv 2\epsilon_{23} \equiv \gamma_{23} \\ \epsilon_5 \equiv 2\epsilon_{13} \equiv \gamma_{13} \\ \epsilon_6 \equiv 2\epsilon_{12} \equiv \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Se a matriz $\mathbf{C}$ for invertível, então é possível definir o tensor de flexibilidade, $\mathbf{S} \equiv \mathbf{C}^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Os coeficientes S_{ij} e C_{ij} podem ser determinados experimentalmente, em função das “constantes de engenharia”, ou constantes elásticas, E , ν , η e μ [Jones, 1999].

Tem-se portanto para um material anisotrópico, 21 constantes elásticas independentes:

$$\mathbf{C}_{\text{anisotrópico}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Para um material monoclinico (1 plano de simetria), as constantes elásticas reduzem-se a 13. Por exemplo, para um material monoclinico com simetria em torno do plano 1-2:

$$\mathbf{C}_{\text{monoclinico}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Para um material ortotrópico (3 planos de simetria, ex: madeira), as constantes elásticas reduzem-se a 9

$$\mathbf{C}_{\text{ortotrópico}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Se o material tiver um plano de isotropia, é um material transversalmente isotrópico,

e as constantes elásticas reduzem-se a 5

$$\mathbf{C}_{\text{isotrópico transverso}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Para um material isotrópico (infinitos planos de simetria), as constantes elásticas reduzem-se a 2

$$\mathbf{C}_{\text{isotrópico}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

As relações tensão-deformação podem ser ainda simplificadas assumindo um estado de tensão plano. Esta aproximação assume que a tensão σ_3 é desprezável em relação aos restantes componentes da tensão, no caso em que o sistema de coordenadas material se encontra no plano da placa, como é exemplificado na figura 4.4. As relações deformação-

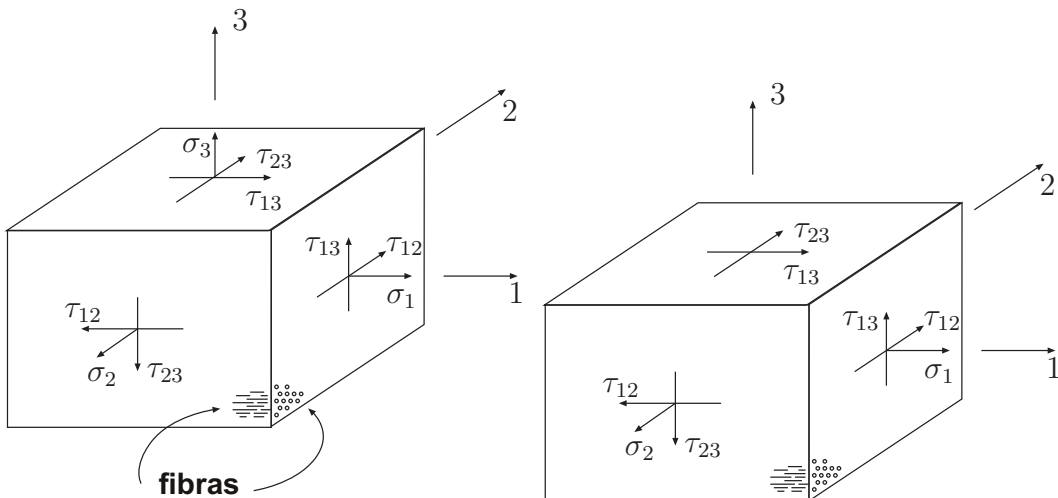


Figura 4.4: (a) Tensão num elemento de volume; (b) Estado plano de tensão

tensão para esta situação podem ser escritas na forma:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Da terceira equação de (4.14) constata-se que $\epsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \neq 0$.

No caso das relações tensão-deformação, pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Da mesma forma, conclui-se que $0 = C_{13}\epsilon_1 + C_{23}\epsilon_2 + C_{33}\epsilon_3$. Escrevendo em ordem a ϵ_3 obtém-se, $\epsilon_3 = -\frac{C_{13}}{C_{33}}\epsilon_1 - \frac{C_{23}}{C_{33}}\epsilon_2$. Daqui se conclui que a matriz que relaciona a tensão com a deformação para o estado plano de tensão é diferente da matriz (4.7). Define-se, assim, a matriz de rigidez reduzida, Q :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Os elementos da matriz de rigidez reduzida relacionam-se com os elementos da matriz de rigidez, matriz de flexibilidade, e constantes de engenharia da forma:

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (4.17)$$

$$Q_{12} = -C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (4.18)$$

$$Q_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (4.19)$$

$$Q_{66} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}} = G_{12} \quad (4.20)$$

$$Q_{44} = C_{44} = \frac{1}{S_{44}} = G_{23} \quad (4.21)$$

$$Q_{55} = C_{55} = \frac{1}{S_{55}} = G_{13} \quad (4.22)$$

sendo

$$\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{E_1} \quad (4.23)$$

NOTA. Por uma questão de comodidade, a matriz de rigidez reduzida (4.16) passa a ser escrita da forma (4.24), onde o elemento Q_{66} passa a ser escrito Q_{33} .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

4.4 Sistema de coordenadas global e local

As equações usadas até ao momento são escritas no sistema de coordenadas do material (m) (ou referencial local), x_1, x_2, x_3 . No caso de um material compósito, constituído por várias lâminas, torna-se necessário encontrar um referencial da estrutura (e) (ou referencial global), x, y, z .

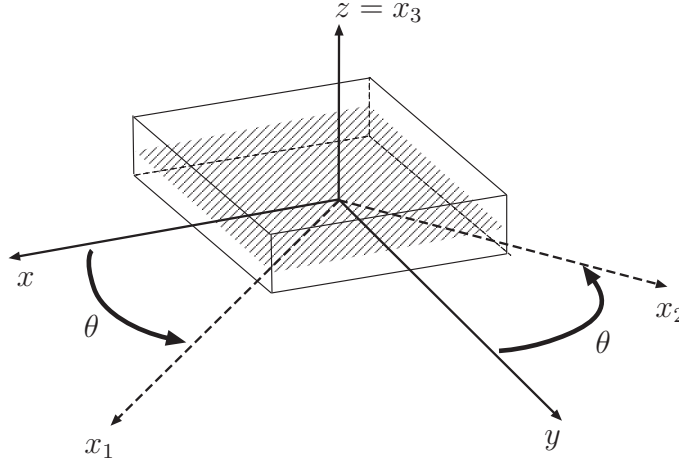


Figura 4.5: Sistema de coordenadas material (local), x_1, x_2, x_3 e da estrutura (global), x, y, z

Para os referenciais contidos na figura 4.5, o estado de tensão no referencial global pode ser obtido a partir do estado de tensão no referencial local, por intermédio de uma matriz de transformação, $[T]$:

$$\{\sigma\}_e = [T] \{\sigma\}_m$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

No caso das deformações, a matriz usada é [Reddy, 2004]:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

No problema de uma estrutura laminada, também os coeficientes da matriz de rigidez

têm de ser escritos no sistema de coordenadas da estrutura. A matriz de rigidez no sistema de coordenadas do problema é denominada matriz de rigidez transformada, $[\bar{C}]$ e relacionada com $[C]$ da forma:

$$[\bar{C}] = [T][C][T]^T \quad (4.27)$$

com $[\bar{C}] = [C]_e$ e $[C] = [C]_m$

No caso de um laminado com camadas ortotrópicas, as relações tensão-deformação no referencial local podem ser expressas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Os valores de Q_{ij} são dados por:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{12} = \nu_{12}Q_{11};$$

$$Q_{33} = G_{12}; \quad Q_{44} = G_{23}; \quad Q_{55} = G_{31};$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$$

onde E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} , G_{23} and G_{31} são as propriedades materiais para cada camada.

Utilizando a matriz de rotação $[T]$, as relações tensão-deformação no sistema de coor-

denadas global x-y-z pode ser obtido por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{13} & \overline{Q}_{23} & \overline{Q}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

onde $[\overline{Q}] = [T][Q][T]^T$

4.5 Homogeneização

A micromecânica é usada para estimar as propriedades mecânicas dos materiais compósitos, a partir de propriedades conhecidas das fibras e da matriz [Kollar, 2003]. No contexto desta tese, é usada para estimar as propriedades efectivas de materiais com gradiente funcional de propriedades (fgm: functionally graded materials). Estes materiais foram propostos na perspectiva do desenvolvimento de materiais com barreiras térmicas [Koizumi, 1997], e têm como característica uma distribuição em forma de gradiente das suas propriedades mecânicas, como pode ser visto de forma esquemática na figura 4.9 (neste caso, na distribuição ao longo da espessura).

Quer a lei das misturas quer o método Mori-Tanaka podem ser aplicados a materiais com gradiente funcional, embora seja uma aproximação muito grosseira do problema. Este tipo de métodos sugere a existência de um elemento de volume representativo, RVE (Representative Volume Element). Se a dispersão das fibras na figura 4.6 for estatisticamente homogênea, faz sentido falar de RVE estatisticamente igual ao compósito, o que não acontece num material com gradiente funcional de propriedades [Pindera et al., 1995].

Outras técnicas de homogeneização foram desenvolvidas tendo em conta as particularidades dos fgm's [Aboudi et al., 1999]. No entanto, no presente trabalho optou-se por

usar a lei das misturas e o método Mori-Tanaka, uma vez que existem mais resultados para comparação na literatura.

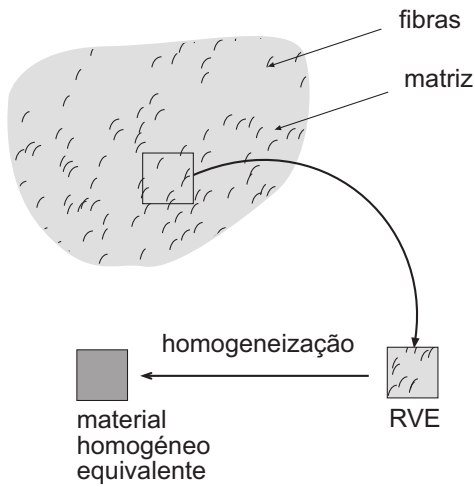


Figura 4.6: Elemento de volume representativo, RVE

4.5.1 Lei das misturas para duas fases

A lei das misturas proposta por Voigt [1889] é a técnica de homogeneização mais simples que se pode aplicar a um compósito. Considere-se um elemento de volume V , constituído por fibras e uma matriz, e cujo volume é dado por:

$$V = V_f + V_m \quad (4.30)$$

onde os índices f e m representam as fibras e a matriz, respectivamente.

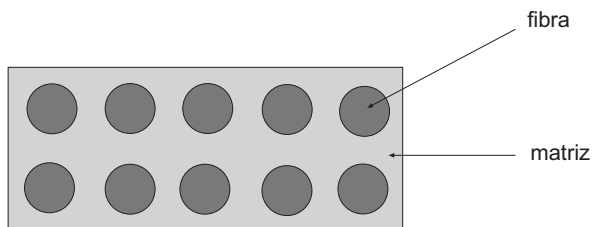


Figura 4.7: Representação da matriz e das fibras

A fracção volúmica das fibras e da matriz é dada por:

$$v_f = \frac{V_f}{V} \quad (4.31)$$

$$v_m = \frac{V_m}{V} \quad (4.32)$$

De forma análoga, a massa do elemento da figura 4.7 é dada por

$$M = M_f + M_m \quad (4.33)$$

Se ρ_f e ρ_m forem as densidades de fibra e matriz, respectivamente, pode-se escrever:

$$M = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (4.34)$$

Cálculo do módulo de Young E_1 O elemento da figura 4.8 é sujeito a uma força F_1 na direcção da fibra. A distribuição da força pela superfície é dada por:

$$F_1 = \sigma A \quad (4.35)$$

onde σ_1 é a média da tensão normal ao longo da secção recta $A = L^2$.

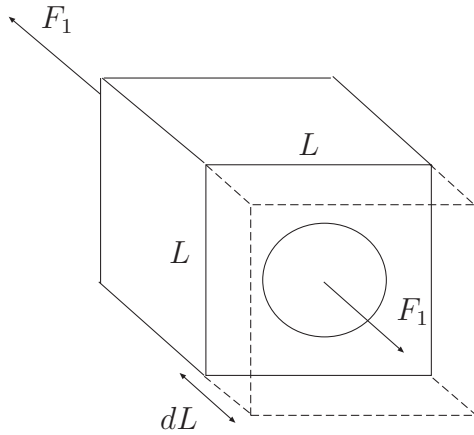


Figura 4.8: Elemento sujeito a uma força F_1

Uma parte da força é transmitida às fibras, e outra parte à matriz. Se A_f e A_m forem as áreas das secções rectas das fibras e da matriz, respectivamente, pode-se escrever,

$$\sigma_1 A = A_f \sigma_{f1} + A_m \sigma_{m1} \quad (4.36)$$

o que representa o equilíbrio de forças no elemento. Com base na lei de Hooke, a tensão

normal no elemento σ_1 , nas fibras, σ_{f1} e na matriz σ_{m1} podem ser expressas por,

$$\sigma_1 = \epsilon_1 E_1 \quad (4.37)$$

$$\sigma_{f1} = \epsilon_{f1} E_{f1} \quad (4.38)$$

$$\sigma_{m1} = \epsilon_{m1} E_{m1} \quad (4.39)$$

onde E_1 , E_{f1} e E_m são os módulos de Young do compósito, módulo de Young longitudinal da fibra, e o módulo de Young da matriz respectivamente. Substituindo (4.37) em (4.36), obtém-se:

$$\epsilon_1 E_1 = \frac{A_f}{A} \epsilon_{f1} E_{f1} + \frac{A_m}{A} \epsilon_{m1} E_{m1} \quad (4.40)$$

Considerando $\epsilon_1 = \epsilon_{f1} = \epsilon_{m1}$, as fracções volúmicas podem escrever-se:

$$v_f = \frac{A_f}{A} \quad (4.41)$$

$$v_m = \frac{A_m}{A} \quad (4.42)$$

Substituindo (4.40) em (4.41), obtém-se a expressão para o módulo de Young, E_1 do compósito em termos dos módulos da matriz e da fibra, dada pela lei das misturas,

$$E_1 = v_f E_{f1} + v_m E_m = v_f E_{f1} (1 - v_f) E_m \quad (4.43)$$

A aplicação da equação (4.43) é aplicada aos materiais fgm baseados em misturas de cerâmica e metal tendo então a forma:

$$E = v_m E_m + v_c E_c \quad (4.44)$$

onde os índices m e c representam o metal e a cerâmica.

Considera-se nestes materiais funcionais que a fracção volúmica da cerâmica é dada

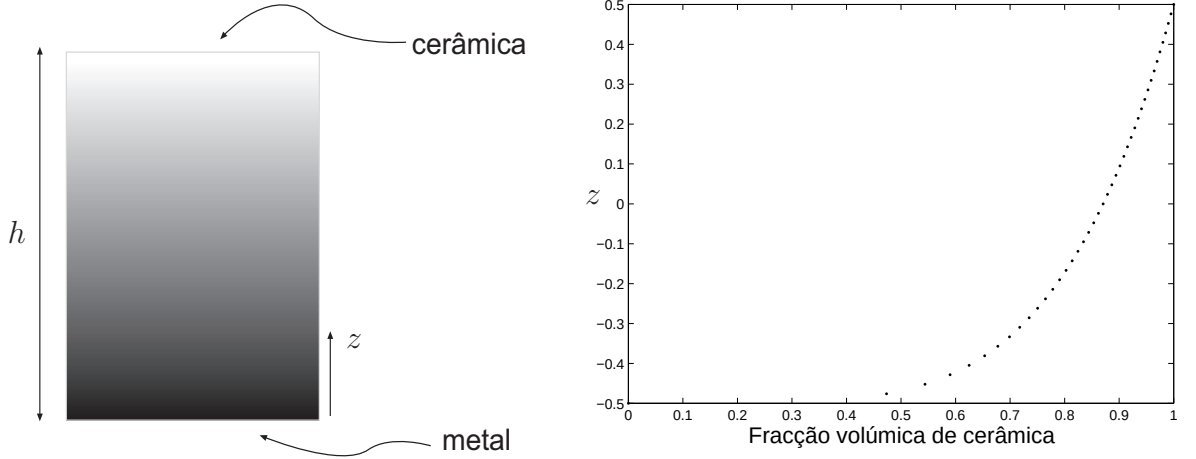


Figura 4.9: Material com gradiente funcional de propriedades

pela expressão [Vel e Batra, 2004]:

$$v_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (4.45)$$

$v_c = 0$ em $z = -h/2$ e $v_c = 1$ no topo da estrutura (em $z = h/2$).

4.5.2 Método Mori-Tanaka para duas fases

O método de Mori-Tanaka [Mori e Tanaka, 1973] considera as interações entre inclusões e a forma das inclusões. Para o caso em que a fase da matriz, representado pelo índice 1, é reforçada por partículas esféricas (fase de índice 2), o módulo volumétrico, (ou de incompressibilidade) e o módulo de corte, são obtidos respectivamente por,

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2) \frac{K_2 - K_1}{K_1 + \frac{4}{3}G_1}} \quad (4.46)$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2) \frac{G_2 - G_1}{G_1 + f_1}} \quad (4.47)$$

onde $f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)}$, e V_2 é a fracção volúmica da fase 2.

O módulo de Young efectivo E , e o coeficiente de Poisson ν são então calculados pelas

equações:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (4.48)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (4.49)$$

As fracções volúmicas V_2 e V_1 podem ser expressas, tal como na lei das misturas, por:

$$V_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (4.50)$$

$$V_1 = (1 - V_2) \quad (4.51)$$

sendo a massa efectiva do compósito dada por:

$$\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \quad (4.52)$$

4.6 Resumo

Neste capítulo é introduzido o conceito de material compósito e apresentada uma possível classificação destes materiais, quanto ao tipo de fibra e tipo de matriz; é ainda apresentada a nomenclatura para o empilhamento de lâminas que é usada nos capítulos 6, 7, 8, 9 e 10.

São revistos alguns conceitos e equações da mecânica dos sólidos, necessários à obtenção das equações diferenciais usadas na modelação de placas e cascas compósitas.

A ponte entre as propriedades mecânicas conhecidas das fibras e matriz e as propriedades do compósito é feita através de dois métodos de homogeneização (lei das misturas e método Mori-Tanaka), para materiais funcionais gradativos.

Referências

- Aboudi, J., Pindera, M. J. e Arnold, S. M. (1999). Higher-order theory for functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, 30(8):777–832.
- Cauchy, A. L. (1828). Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique. Em *Exercices de Mathématiques*.
- Daniel, I. M. e Ishai, O. (1994). *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press.
- Dellinger, J., Vasicek, D. e Sondergeld, C. (1998). Kelvin notation for stabilizing elastic-constant inversion. *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, 53(5):709–719.
- Infopédia (2003-2006). Porto editora.
- Jones, R. M. (1999). *Mechanics Of Composite Materials*. Taylor & Francis.
- Koizumi, M. (1997). Fgm activities in japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2):1–4.
- Kollar, L. P. (2003). *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press.
- Milton, G. W. (2001). *Theory of Composites*. Cambridge University Press.
- Mori, T. e Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 21:571–574.
- Pindera, M.-J., Aboudi, J. e Arnold, S. M. (1995). Limitations of the uncoupled, rve-based micromechanical approach in the analysis of functionally graded composites. *Mechanics of Materials*, 20(1):77–94.
- Reddy, J. N. (1984). *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. Wiley.
- Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. CRC Press.
- Shelby, R. A., Smith, D. R., Nemat-Nasser, S. C. e Schultz, S. (2001). Microwave transmission through a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterial. *Applied Physics Letters*, 78(4):489–491.
- Skorokhod, V. V. (2003). Layered composites: Structural classification, thermophysical and mechanical properties. *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, 42(9-10):437–446.
- Vel, S. S. e Batra, R. C. (2004). Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5):703–730.

- Veselago, V. G. (1968). The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet Physics USPEKI*, 10:509–514.
- Voigt, W. (1889). Über die beziehung zwischen den beiden elastizitätskonstanten isotroper körper. *Wiedemann's Annalen*, 38:573–587.
- Voigt, W. (1928). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, Leipzig.
- Work, W. J., Horie, K., Hess, M. e Stepto, R. F. T. (2004). Definitions of terms related to polymer blends, composites, and multiphase polymeric materials (iupac recommendations 2004). *Pure and Applied Chemistry*, 76(11):1985–2007.
- Zekri, A. Y. e Almehaideb, R. A. (2006). Relative permeability measurements of composite cores - an experimental approach. *Petroleum Science and Technology*, 24(6): 717–736.

Modelos de deformação para placas e cascas laminadas

5.1 Introdução

A análise de placas e cascas compósitas laminadas pode fazer-se por via da teoria tridimensional da elasticidade, ou de teorias de placa e casca laminadas. Na teoria tridimensional da elasticidade, cada camada é considerada um meio contínuo elástico, com propriedades diferentes da camada adjacente. O número de equações diferenciais de equilíbrio geradas por esta hipótese é $3 \times n^\circ$ camadas. Na interface entre camadas, são ainda utilizadas equações adicionais para garantir a continuidade de deslocamentos e tensões. À medida que o número de camadas aumenta, o sistema de equações a resolver torna-se cada vez maior, dificultando a sua resolução. Por outro lado, nas teorias de casca e placa laminadas, um laminado é considerado um estado de tensão plano, com camadas individuais elásticas, com ligação perfeita entre camadas (ou seja sem deslizamento). As propriedades do material do laminado, tais como a rigidez, são obtidas integrando as propriedades materiais de cada camada, ao longo da espessura do laminado [Reddy e Liu, 1987]. Portanto, as teorias de casca e placa laminadas podem ser equivalentes a teorias de uma camada, reduzindo assim o número de equações

necessárias para descrever o sistema. Ao longo deste trabalho, são apresentadas várias teorias de casca e placa laminadas, baseadas num campo de deslocamento assumido. A origem das teorias baseadas em campos de deslocamentos é atribuída a Basset [1890]. O campo de deslocamentos de Basset para uma casca consiste numa expansão em série da coordenada da espessura, ζ . Por exemplo, $u_1(\xi_1, \xi_2, \zeta) = u_1^0(\xi_1, \xi_2) + \sum \zeta_n u_1^{(n)}(\xi_1, \xi_2)$ onde ξ_1, ξ_2 são coordenadas curvilíneas da superfície média da casca, onde $u_1^{(n)}(\xi_1, \xi_2) = \left. \frac{d^n u_1}{d\zeta^n} \right|_{\zeta=0}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Mais tarde, Hildebrand et al. [1949] apresenta uma teoria com deformação de corte para casca, cujo campo de deslocamento é

$$u_1(\xi_1, \xi_2, \zeta) = u^0(\xi_1, \xi_2) + \zeta \phi_x(\xi_1, \xi_2) \quad (5.1)$$

$$u_2(\xi_1, \xi_2, \zeta) = v^0(\xi_1, \xi_2) + \zeta \phi_y(\xi_1, \xi_2) \quad (5.2)$$

$$u_3(\xi_1, \xi_2, \zeta) = w^0(\xi_1, \xi_2) \quad (5.3)$$

Esta aproximação dá origem a cinco equações diferenciais, e é por vezes denominada teoria de placa de Mindlin, ou teoria de primeira ordem. Mindlin [1951] apresentou uma teoria dinâmica para placas isotrópicas baseada no campo de deslocamento (5.1)-(5.3), originalmente apresentado por Hencky [1947]. Outras teorias de deformação de corte de ordem superior foram estudadas por Librescu [1975], Lo et al. [1977a,b], Murthy [1981] e Levinson [1980], entre outros.

5.2 Equações de Euler-Lagrange

As equações de placa e casca que são numericamente resolvidas neste trabalho pelo método das funções de base radial são obtidas por um método variacional. O cálculo variacional procura uma extremal de um funcional, isto é um mínimo, máximo ou inflexão de uma função de funções (em termos físicos, um mínimo ou um máximo). Nesta secção é apresentada uma explicação simplificada do princípio de Hamilton, e da derivação das equações de Euler-Lagrange [Maia, 2000; Hazewinkel, 2002; Reddy, 2004].

A equação de Euler-Lagrange foi desenvolvida por Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange, num estudo relacionado com o problema da tautocrone. O problema pode ser enunciado da seguinte forma: Dados dois pontos A e B num plano vertical, fazer corresponder a uma partícula móvel M o trajecto AMB pelo qual a partícula, descendo sobre o seu próprio peso, passa do ponto A para o ponto B no mais curto espaço de tempo.

Lagrange resolveu este problema em 1755 e enviou a solução para Euler. Os dois desenvolveram o método utilizado por Lagrange e aplicaram-no à mecânica, de onde surgiu a mecânica lagrangeana, e mais tarde o Cálculo Variacional, termo aplicado por Euler em 1766 [O'Connor e Robertson, 1999].

Considere-se o caminho definido pelo integral (entre os instantes t_1 e t_2):

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (5.4)$$

O integral I é denominado integral da acção e a eq.(5.4) traduz matematicamente o princípio de Hamilton, ou princípio da acção estacionária. O princípio de Hamilton [Hamilton, 1835] foi estabelecido por William Hamilton e mais tarde generalizado por Ostrogradski [1850]. A acção L é denominada função lagrangeana, e representa um balanço entre a energia cinética e a energia potencial de um sistema. Em certos casos, o valor estacionário corresponde a um mínimo, podendo então o princípio de Hamilton ser denominado de princípio da acção mínima.

Pretende-se encontrar soluções estacionárias do funcional I , sem calcular explicitamente $L(q, \dot{q}, t)$. No caso do estudo de placas e cascas, pretende-se encontrar as respectivas equações de equilíbrio dinâmico.

As soluções estacionárias do integral da acção são dadas pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = Q \quad (5.5)$$

onde Q representa as forças generalizadas não conservativas.

Qualquer solução das equações de Euler-Lagrange diz-se uma extremal do problema variacional (5.4).

As equações de Euler-Lagrange podem ser encontradas da seguinte forma:

Considere-se a função lagrangeana $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$, onde q_k são coordenadas generalizadas. Os valores estacionários do funcional I podem ser encontrados calculando $\delta I = 0$:

$$\begin{aligned} {}^1\delta I &= \int \left(\delta L + \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \right) dt \\ &= \int \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + Q_k \delta q_k \right) \right] dt \end{aligned} \quad (5.6)$$

Integrando o termo em $\delta \dot{q}_k$ por partes, obtém-se

$$\int \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d(\delta q_k)}{dt} dt = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt \quad (5.7)$$

e substituindo em (5.6) resulta:

$$\delta I = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \delta q_k dt \quad (5.8)$$

Para garantir que $\delta I = 0$ para qualquer (pequena) variação de δq_k , tem-se para cada coeficiente de δq_k :

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = -Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

¹A notação δ foi introduzida por Lagrange para considerar uma variação virtual de uma função, e embora tenha um significado físico diferente da derivada, d , partilha das mesmas propriedades matemáticas (se $dz = m dx$, então $\delta z = m \delta x$). No entanto, uma variação virtual é considerada independente da variável tempo. Por exemplo, para $L = L(q, \dot{q}, t)$:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt; \quad \delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

Estas são conhecidas como as equações de Euler-Lagrange.

5.2.1 Exemplo-teoria clássica de placas

As equações de equilíbrio usadas ao longo desta tese são obtidas usando o princípio dos trabalhos virtuais. Embora este seja um processo bem conhecido, por uma questão de enquadramento, vai-se de seguida mostrar os passos para a obtenção daquelas equações. Por ser um processo repetitivo e fastidioso optou-se por o fazer apenas para o caso da teoria clássica.

Considere-se uma placa de altura h , área Ω_0 , sujeita a uma pressão aplicada, $q(x, y)$ e densidade ρ_0 (figura 5.1). As componentes energéticas a considerar são a energia de deformação, U , energia cinética, K e a energia produzida pelas forças externas aplicadas, V .

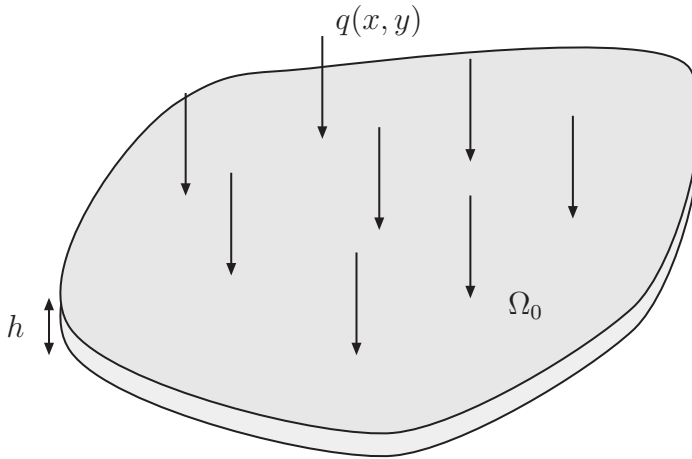


Figura 5.1: Placa com altura h , área Ω_0 e pressão aplicada $q(x, y)$

Para encontrar as equações Euler-Lagrange associadas à teoria clássica, procura-se um extremal (que neste caso coincide com um mínimo) de $I = \int_0^T (U + V - K) dt$. Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, e igualando a variação a zero, obtém-se:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (5.10)$$

com

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{xy} 2 \delta \epsilon_{xy}) dz dx dy \quad (5.11)$$

$$\delta V = \int_{\Omega_0} q \delta w dx dy \quad (5.12)$$

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz dx dy \quad (5.13)$$

As expressões de u, v, w denominam-se campo dos deslocamentos, e podem ser estabelecidas com base em hipóteses. Estas expressões permitem descrever o comportamento de um ponto da placa ao longo dos eixos xx, yy, zz . Diferentes hipóteses dão origem a diferentes campos de deslocamentos, que por sua vez dão origem a diferentes equações de Euler-Lagrange. Neste exemplo considera-se o mais simples dos campos de deslocamentos para uma placa, que dá origem à teoria clássica de deformação de placas.

O campo dos deslocamentos é então assumido por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\partial w_0 / \partial x \\ -\partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

Aplicando o tensor das deformações infinitesimais, ϵ (equação (4.2)), obtém-se as equações cinemáticas:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \partial^2 w_0 / \partial x^2 \\ \partial^2 w_0 / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w_0 / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

Substituindo (5.15) em (5.11), obtém-se

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) dz \Big\} dx dy \\
& = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} dz - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} dz \right. \\
& \quad - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} dz \\
& \quad \left. - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} 2z \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} dz \right\} dx dy \\
& = \int_{\Omega_0} \left\{ N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right\} dx dy \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Substituindo (5.14) em (5.13), obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta K & = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 \left[\left(\dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \left(\delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right) \left(\delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy \\
& = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\rho_0 \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 - \rho_0 z \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} - \rho_0 z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \rho_0 z^2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right. \\
& \quad \left. + \rho_0 \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 - \rho_0 z \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} - \rho_0 z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 + \rho_0 z^2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \rho_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy \\
& = \int_{\Omega_0} \left[I_0 \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 - I_1 \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + I_0 \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 \right. \\
& \quad \left. - I_1 \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + I_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dx dy \tag{5.17}
\end{aligned}$$

As quantidades N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} são os esforços, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} são os momentos resultantes e I_0, I_1, I_2 , são os momentos de inércia. As equações das resultantes são obtidas por integração das componentes de tensão através da direcção da espessura da forma:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (5.18)$$

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (5.19)$$

enquanto que os momentos de inércia são obtidos por:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} dz \quad (5.20)$$

Para obter as dependências em $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$, é necessário integrar os termos de (5.16) por partes:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int N_{xx} \delta u_0 dy - \iint \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u_0 dx dy - \int M_{xx} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} dy + \iint \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} dx dy \\ &+ \int N_{yy} \delta v_0 dx - \iint \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \delta v_0 dx dy - \int M_{yy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} dx + \iint \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} dx dy \\ &+ \int N_{xy} \delta u_0 dx - \iint \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy + \int N_{xy} \delta v_0 dy - \iint \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy \\ &- \int 2M_{xy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} dx + \iint 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} dx dy \\ &= \int N_{xx} \delta u_0 dy - \iint \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u_0 dx dy - \int M_{xx} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} dy + \int \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \delta w_0 dy \\ &- \iint \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta w_0 dx dy + \int N_{yy} \delta v_0 dx - \iint \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \delta v_0 dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int M_{yy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} dx + \int M_{yy} \delta w_0 dx - \iint \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \delta w_0 dx dy \\
& + \int N_{xy} \delta u_0 dx - \iint \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy + \int N_{xy} \delta v_0 dy - \iint \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 dx dy \\
& - \int 2M_{xy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} dx + \int 2M_{xy} \delta w_0 dx - \iint 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} \delta w_0 dx dy
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Procedendo da mesma forma para (5.17), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\delta K = & \iint I_0 \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 dx dy - \int I_1 \dot{u}_0 \delta \dot{w}_0 dy + \iint I_1 \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} \delta \dot{w}_0 dx dy \\
& - \iint I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 dx dy + \int I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{w}_0 dy - \iint I_2 \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} \delta \dot{w}_0 dx dy \\
& + \iint I_0 \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 dx dy - \int I_1 \dot{v}_0 \delta \dot{w}_0 dx + \iint I_1 \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \delta \dot{w}_0 dx dy \\
& - \iint I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 dx dy + \int I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{w}_0 dx - \iint I_2 \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2} \delta \dot{w}_0 dx dy \\
& + \iint I_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 dx dy
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
\int (\delta K) dt = & \iint I_0 \dot{u}_0 \delta u_0 dx dy - \iiint I_0 \ddot{u}_0 \delta u_0 dx dy dt - \int I_1 \dot{u}_0 \delta w_0 dy \\
& + \iint I_1 \ddot{u}_0 \delta w_0 dy dt + \iint I_1 \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} \delta w_0 dx dy - \iiint I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \delta w_0 dx dy dt \\
& - \iint I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta u_0 dx dy - \iiint I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \delta u_0 dx dy dt + \int I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta w_0 dy \\
& - \iint I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \delta w_0 dy dt - \iint I_2 \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} \delta w_0 dx dy \\
& + \iiint I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \delta w_0 dx dy dt + \iint I_0 \dot{v}_0 \delta v_0 dx dy - \iiint I_0 \ddot{v}_0 \delta v_0 dx dy dt \\
& - \int I_1 \dot{v}_0 \delta w_0 dx + \iint I_1 \ddot{v}_0 \delta w_0 dx dt + \iint I_1 \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \delta w_0 dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \iiint I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \delta w_0 \, dx \, dy \, dt - \iint \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta v_0 \, dx \, dy + \iiint I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \delta v_0 \, dx \, dy \, dt \\
& + \int I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta w_0 \, dx - \iint I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \delta w_0 \, dx \, dt - \iint I_2 \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2} \delta w_0 \, dx \, dy \\
& + \iiint I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \delta w_0 \, dx \, dy \, dt + \iint I_0 \dot{w}_0 \delta w_0 \, dx \, dy \\
& - \iiint I_0 \ddot{w}_0 \delta w_0 \, dx \, dy \, dt
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Substituindo em (5.10), e retendo os termos em $\iiint dx \, dy \, dz \, dt$ obtém-se as seguintes equações de equilíbrio dinâmico

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \\
\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
& + I_0 \ddot{w}_0
\end{aligned} \tag{5.24}$$

5.3 Teorias de deformação para placa

5.3.1 Revisão bibliográfica

Todas as teorias de deformação usadas neste trabalho partem de um campo de deslocamentos assumido, dando origem às equações de equilíbrio de Euler-Lagrange. O campo de deslocamentos usa as coordenadas generalizadas do problema.

Com os exemplos seguintes pretende-se apresentar uma lista não exaustiva de alguns campos de deslocamentos. Uma análise mais detalhada sobre diversas teorias de deformação pode ser encontrado nos artigos de revisão de Rohwer et al. [2005], Carrera

[2003] e Altenbach [1998].

Teoria clássica. A teoria clássica considera apenas 3 graus de liberdade, u_0 , v_0 e w_0 , o que computacionalmente é uma vantagem. É uma teoria que se adequa a estruturas pouco espessas [Rohwer et al., 2005].

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\partial w_0 / \partial x \\ -\partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} z \quad (5.25)$$

Teoria de primeira ordem. A teoria de primeira ordem considera cinco graus de liberdade, u_0 , v_0 , w_0 , u_1 , u_2 e prevê melhor o comportamento de estruturas mais espessas do que a teoria clássica [Rohwer et al., 2005]. Necessita de um factor de correcção ao corte, que depende de relações geométricas, propriedades materiais e esquema de empilhamento do laminado. Esta teoria de primeira ordem foi aplicada a estruturas compósitas por [Yang et al., 1966] e [Whitney e Pagano, 1970].

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z \quad (5.26)$$

Teorias de ordem superior. De uma forma geral, as teorias de ordem superior têm campos de deslocamentos da forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ z_i \end{Bmatrix} z^i \quad (5.27)$$

O parâmetro n é habitualmente inferior a 3, de forma a não aumentar muito o esforço computacional. As teorias de ordem superior são caracterizadas por não necessitarem do uso de factores de correcção de corte, tendo em conta uma boa aproximação da energia de corte transversa.

Teorias de terceira ordem. Segundo Jemlelita [1990], a primeira teoria de deformação de terceira ordem foi proposta por Vlasov, em 1957. No entanto a proposta de Vlasov precisa no mínimo de 7 graus de liberdade. Foram então apresentadas várias teorias que mantendo os termos de terceira ordem, reduzem os graus de liberdade do sistema. Murthy [1981] e Reddy [1984b] apresentaram teorias de terceira ordem, com apenas cinco graus de liberdade, e com precisão idêntica. Diferentes considerações na formulação das teorias originam os campos de deslocamentos abaixo indicados:

[Murthy, 1981]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5\beta_x + \partial w_0 / \partial x \\ 5\beta_y + \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{z}{4} - \begin{Bmatrix} \beta_x + \partial w_0 / \partial x \\ \beta_y + \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{5z^3}{3h^2} \quad (5.28)$$

[Reddy, 1984b]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z - \begin{Bmatrix} u_1 + \partial w_0 / \partial x \\ v_1 + \partial w_0 / \partial y \\ w_0 \end{Bmatrix} \frac{4z^3}{3h^2} \quad (5.29)$$

Baseando-se na teoria de Reddy, Senthilnathan et al. [1987] desenvolveram uma teoria de terceira ordem com apenas 4 graus de liberdade. No entanto, a teoria de Senthilnathan tem uma precisão inferior à teoria de Reddy.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b + w_s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \partial w_b / \partial x \\ \partial w_b / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} z - \begin{Bmatrix} \partial w_s / \partial x \\ \partial w_s / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{4z^3}{3h^2} \quad (5.30)$$

Nesta tese é usada uma teoria de terceira ordem de Manjunatha e Kant [1992], com 7 graus de liberdade:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ 0 \end{Bmatrix} z^3 \quad (5.31)$$

Outras teorias de ordem superior. Outro tipo de teoria de ordem superior aumenta a ordem do polinómio no deslocamento transversal, w . Kwon e Akin [1987] apresentam o campo de deslocamentos abaixo indicado. Neste caso, o número de graus de liberdade é de 5. Não é necessário um factor de correcção, mas os resultados obtidos com esta teoria são ligeiramente inferiores aos resultados obtidos com uma teoria de primeira ordem com um factor de corte adequado.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \end{Bmatrix} z^2 \quad (5.32)$$

Por sua vez, Reissner [1975] propôs a combinação de uma expansão em z^2 do deslocamento transversal, juntamente com uma expansão cúbica dos termos em u e v . Esta teoria produz resultados muito precisos, à custa de 8 graus de liberdade. Foi aplicada a placas laminadas por Lo et al. [1977b,a], e desenvolvida por Pandya e Kant [1988].

[Reissner, 1975]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \end{Bmatrix} z^2 + \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ 0 \end{Bmatrix} z^3 \quad (5.33)$$

[Pandya e Kant, 1988]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 0 \end{Bmatrix} z^2 + \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ 0 \end{Bmatrix} z^3 \quad (5.34)$$

Teorias trigonométricas. As teorias trigonométricas usam uma função trigonométrica para formular o campo de deslocamentos. Os resultados da teoria proposta por Idlbi et al. [1997] estão mais próximos das soluções obtidas pela formulação 3D da elasticidade do que os resultados da teoria clássica, de primeira ordem, e de terceira ordem de Reddy, e com apenas 5 graus de liberdade.

[Idlbi et al., 1997]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \partial w_0 / \partial x \\ \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} w_1 + \partial w_0 / \partial x \\ w_2 + \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (5.35)$$

[Shimpi et al., 2003]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \partial w_0 / \partial x \\ \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1 \end{Bmatrix} \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (5.36)$$

Nesta tese, é usada uma variação da teoria de Shimpi et al. [2003], onde o desenvolvimento do deslocamento transversal em cosseno é desprezado.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \partial w_0 / \partial x \\ \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (5.37)$$

Teorias ziguezague. As teorias ziguezague são, genericamente da forma:

$$\begin{Bmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \\ w^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0^{(k)}(x, y) \\ v_0^{(k)}(x, y) \\ w_0^{(k)}(x, y) \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^n \begin{Bmatrix} u_j^{(k)}(x, y) \chi^{(k)}(z) \\ v_j^{(k)}(x, y) \chi^{(k)}(z) \\ w_j^{(k)}(x, y) \varphi^{(k)}(z) \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

Num laminado com N camadas, o número de graus de liberdade é de $3(n+1)N$, o que é computacionalmente exigente. Nesta tese não são abordadas este tipo de teorias. No entanto, a teoria em ziguezague de Arya et al. [2002] recorre a termos $A^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}, D^{(k)}$, que melhoram os resultados para placas espessas, (uma vez que continua a ser uma teoria ziguezague) sem no entanto aumentar o número de graus de liberdade da formulação.

Teoria ziguezague trigonométrica. Uma teoria em ziguezague com termos trigonométricos para viga foi proposta por Arya et al. [2002], e nesta tese é estendida para placas, com excelentes resultados. Nesta teoria o número de graus de liberdade é 5.

$$\begin{Bmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \\ w^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \partial w_0 / \partial x \\ \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} A^{(k)} \\ C^{(k)} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B^{(k)} \\ D^{(k)} \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ 0 \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (5.39)$$

5.3.2 Escolha das teorias de deformação de placa usadas nesta tese

Depois de recolhidas na literatura algumas ideias sobre as diversas teorias de deformação para a análise de placas, foram escolhidas para serem usadas nesta tese a teoria de primeira ordem (5.26), a teoria de terceira ordem de Reddy (5.29), a teoria de ordem superior de Kant (5.31), uma teoria trigonométrica (5.37) e uma teoria ziguezague trigonométrica (5.39). Espera-se verificar que a teoria de terceira ordem de Reddy produz melhores resultados em relação à teoria de primeira ordem na análise de placas compósitas. Espera-se ainda que as teorias trigonométricas sejam uma boa aposta na análise deste tipo de materiais, especialmente a teoria trigonométrica ziguezague. A teoria de ordem superior de Kant foi também escolhida, como uma alternativa à teoria de terceira ordem de Reddy.

De seguida mostram-se de forma sucinta os passos para a obtenção das equações de equilíbrio das teorias usadas nesta tese, partindo dos respectivos campos de deslocamentos.

5.3.3 Teoria de placa de Kirchhoff (teoria clássica)

A teoria clássica de placa (CPT-Classical Plate Theory) assume como válida a hipótese de Kirchhoff: Uma linha recta, normal à superfície média, permanece recta e normal

à superfície média deformada, ao longo de toda a deformação (figura 5.2). A primeira teoria de placa consistente com esta hipótese foi desenvolvida por Gustav Kirchhoff [Kirchhoff, 1850]. Alguns anos mais tarde, Augustus Love [Love, 1888] apresenta a correspondente teoria para cascas.

As deformações e tensões transversais não são consideradas neste modelo. A deformação do corpo é unicamente determinada pela deformação da superfície média. Embora esta teoria esteja ultrapassada, ainda é considerada válida em certos casos em que as estruturas são extremamente finas, e continua a ser objecto de estudo [Areias et al., 2005; Arnold et al., 2002; Becache et al., 2005].

Uma vez que a teoria clássica não é usada ao longo deste estudo (salvo para comparação de resultados), não é aqui apresentada uma derivação das equações. Mais pormenores podem ser encontrados em [Reddy, 2004] e [Hyer, 1997].

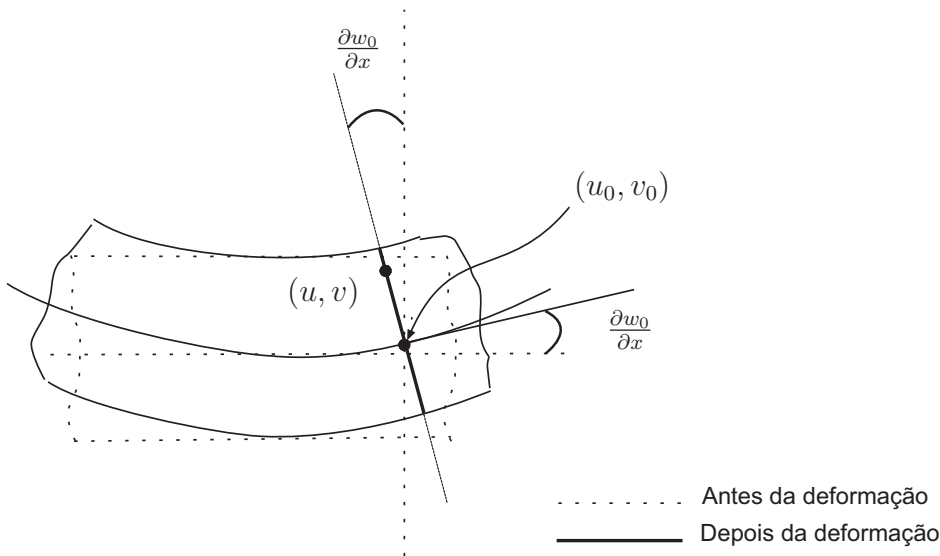


Figura 5.2: Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria clássica

O campo de deslocamentos é estabelecido pelas seguintes equações:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \tag{5.40}$$

sendo u_0 , v_0 e w_0 os deslocamentos de um ponto genérico da superfície média da placa, relativamente aos três eixos de coordenadas, respectivamente. As equações de equilíbrio Euler-Lagrange são expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q &= \\ I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.3.4 Teoria de placa de Mindlin (teoria de primeira ordem)

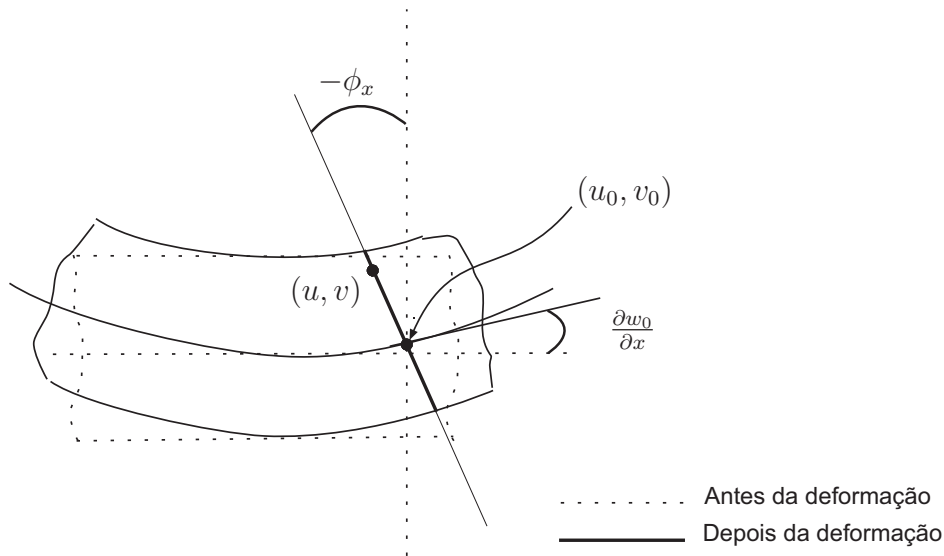


Figura 5.3: Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria de primeira ordem

A teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT-First-order Shear Deformation Theory), ou teoria de Mindlin, difere da teoria clássica na inclusão de termos de corte (γ_{xz} , γ_{yz} , τ_{xz} , τ_{yz}) nas relações tensão-deslocamento. A hipótese de Kirchhoff é parcialmente mantida, mas agora a linha recta inicialmente normal à superfície média da placa não necessita de permanecer normal a essa superfície, após a deformação (figura 5.3).

As primeiras teorias de placa que têm em conta efeitos de corte transversal são atribuídas a Heinrich Hencky [1947], Eric Reissner [1944, 1945] e Raymond Mindlin [1951]. Uma teoria de casca correspondente foi estabelecida por Paul Naghdi [1957].

A teoria de Mindlin considera ainda (tal como na teoria clássica) que o comprimento da normal ao plano médio não varia após a deformação (condição inextensível), e que as tensões transversais são desprezáveis. Quando se considera o coeficiente de Poisson, ν , diferente de zero, estas duas condições tornam-se contraditórias.²

Uma forma simples de abordar este problema consiste em corrigir a resultante Q_x, Q_y de um factor k , denominado factor de correcção de corte. O factor k é calculado de tal forma que a energia de deformação devida às tensões transversais é igual à energia de deformação devida às tensões transversais prevista pela teoria tridimensional da elasticidade.

Pela teoria tridimensional tem-se:

$$\sigma_{xz}^{trid} = \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad (5.42)$$

enquanto que na teoria de Mindlin:

$$\sigma_{xz}^{mind} = \frac{Q}{h} \quad (5.43)$$

A energia de deformação é, nas duas teorias, obtida por:

$$U_s^{trid} = \frac{1}{2G_{13}} \int_A (\sigma_{xz}^{trid})^2 dA = \frac{3Q_x^2}{5G_{13}h}; \quad U_s^{mind} = \frac{1}{2G_{13}} \int_A (\sigma_{xz}^{mind})^2 dA = \frac{Q_x^2}{2G_{13}h} \quad (5.44)$$

Dividindo U_s^{mind} por U_s^{trid} obtém-se um factor de correcção de corte de $k = 5/6$.

Embora o factor de correcção de corte de um laminado dependa de factores geometricos,

²com base na teoria tridimensional e considerando $\sigma_z(z = -h/2) = -q; \sigma_z(z = h/2) = 0$; através das equações de equilíbrio, $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$, obtém-se

$$\sigma_x = \frac{12zM_x}{h^3}; \quad \sigma_y = \frac{12zM_y}{h^3}; \quad \tau_{xy} = -\frac{12M_{xy}}{h^3};$$

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]; \quad \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]; \quad \sigma_z = -\frac{3q}{4} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right]$$

propriedades materiais e esquema de empilhamento, o valor $5/6$ é usado por vários autores, independentemente do tipo de laminado usado [Reddy, 2004]. Registe-se que Owen e Figueiras [1983] apresentaram um método de cálculo de factores correctivos ao corte transversal, com base em suposições de flexão pura em duas direcções distintas. Mais tarde Ferreira [2003] usou esta técnica na análise de placas laminadas por funções de base radial. Este factor correctivo só é relevante se o material ao longo da direcção da espessura mudar, como por exemplo em estruturas sanduiche ou materiais funcionais gradativos. Se o material for o mesmo, mas variar apenas o ângulo da camada, o factor de $5/6$ é adequado.

Na teoria de Mindlin, a deformação transversal é constante ao longo da espessura do laminado. No entanto, mesmo para secções homogéneas, é aceite que a variação da deformação é uma função parabólica de z . Para compensar a média da energia de deformação ao longo da espessura, introduz-se o factor de correcção de corte, k .

A equação de equilíbrio na direcção x para uma placa heterogénea pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (5.45)$$

Para simplificar, assume-se flexão cilíndrica

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz = - \int_{-h/2}^z \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{D_1(z)}{R_1} z dz = - \frac{Q_x}{R_1} \int_{-h/2}^z D_1(z) z dz = \frac{Q_x}{R_1} g(z) \quad (5.46)$$

onde Q_x é a força de corte no plano xz .

$R_1 = \int_{-h/2}^{h/2} D_1(z) z^2 dz$ é a rigidez à flexão na direcção x ; z é a coordenada ao longo da espessura; $g(z) = - \int_{-h/2}^z D_1(z) z dz$ é a função de forma do corte.

A função $g(z)$ que modela o diagrama da tensão de corte toma a expressão $g(z) = [D_1 h^2 / 8] [1 - 4(z/h)^2]$ no caso de uma secção homogénea. A energia de deformação é

dada por:

$$w_s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau_{xz}^2}{G_{13}(z)} dz = \frac{Q_x^2}{R_1^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g^2(z)}{G_{13}(z)} dz \quad (5.47)$$

onde $G_{13}(z)$ é o módulo de corte ao longo da espessura, no plano xz .

A energia de deformação, supondo a deformação de corte constante é dada por:

$$\bar{w}_s = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\gamma}_{xz} G_{13}(z) \bar{\gamma}_{xz} dz = \frac{Q_x^2}{h^2 \bar{G}_1^2} h \bar{G}_1 = \frac{Q_x^2}{h \bar{G}_1} \quad (5.48)$$

onde

$$h \bar{G}_1 = \int_{-h/2}^{h/2} G_{13}(z) dz \quad (5.49)$$

e $\bar{\gamma}_{xz}$ é o valor médio da deformação de corte. É então possível calcular o factor de correcção de corte k_1 no plano xz :

$$k_1 = \frac{\bar{w}_s}{w_s} = \frac{R_1^2}{h \bar{G}_1 \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z)/G_{13}(z) dz} \quad (5.50)$$

O procedimento é idêntico para k_2 , utilizando-se nos exemplos numéricos testados $k = k_1 = k_2$.

O campo de deslocamentos da teoria de deformação de corte de primeira ordem é dado por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (5.51)$$

para um dado instante t , onde u, v, w são os deslocamentos em qualquer ponto da placa,

u_0, v_0, w_0 são pontos da superfície média da placa. No caso da teoria de primeira ordem com deformação de corte, as componentes do tensor das deformações infinitesimais (4.2) é da forma:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Aplicando o campo de deslocamentos (5.51) podemos escrever as equações cinemáticas:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} + \phi_x \\ \frac{\partial v_0}{\partial z} + \phi_y \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

As equações de equilíbrio para esta teoria de placa de primeira ordem são obtidas usando a versão dinâmica do princípio dos trabalhos virtuais,

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (5.54)$$

onde a energia virtual de deformação é dada por

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx}(\delta \epsilon_{xx}^{(0)} + z \delta \epsilon_{xx}^{(1)}) + \sigma_{yy}(\delta \epsilon_{yy}^{(0)} + z \delta \epsilon_{yy}^{(1)}) + \right. \right. \\ \left. \left. \sigma_{xy}(\delta \gamma_{xy}^{(0)} + \gamma_{xy}^{(1)}) + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(0)} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(0)} \right] dz \right\} dx dy \quad (5.55)$$

a energia virtual das forças externas é obtida por

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} q \delta w_0 dx dy \quad (5.56)$$

e a energia virtual produzida pelas forças de inércia é expressa por

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 \left[(\dot{u}_0 + z\dot{\phi}_x)(\delta\dot{u}_0 + \delta\dot{\phi}_x) + (\dot{v}_0 + z\dot{\phi}_y)(\delta\dot{v}_0 + \delta\dot{\phi}_y) + \dot{w}_0\delta\dot{w}_0 \right] dz \right\} dx dy \quad (5.57)$$

Substituindo (5.55)-(5.57) em (5.54) e integrando ao longo de dz , obtém-se:

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[N_{xx}\delta\epsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx}\delta\epsilon_{xx}^{(1)} + N_{yy}\delta\epsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy}\delta\epsilon_{yy}^{(1)} + N_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(0)} + \right. \right. \\ \left. M_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(1)} + Q_x\delta\gamma_{xz}^{(0)} + Q_y\delta\gamma_{yz}^{(0)} - q\delta w_0 - I_0(\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + \dot{w}_0\delta\dot{w}_0) + \right. \\ \left. I_1(\dot{\phi}_x\delta\dot{u}_0 + \dot{\phi}_y\delta\dot{v}_0 + \dot{u}_0\delta\dot{\phi}_x + \dot{v}_0\delta\dot{\phi}_y) - I_2(\dot{\phi}_x\delta\dot{\phi}_x + \dot{\phi}_y\delta\dot{\phi}_y) \right] dx dy \right\} dt \end{aligned} \quad (5.58)$$

onde:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz; & \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz; \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= k \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz; & \begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_0 dz \end{aligned} \quad (5.59)$$

As equações de Euler-Lagrange são obtidas igualando os coeficientes de δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta\phi_x$, $\delta\phi_y$ em Ω_0 a zero, separadamente:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (5.60)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (5.61)$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (5.62)$$

$$\delta\phi_x : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (5.63)$$

$$\delta\phi_y : \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (5.64)$$

Estas expressões (5.60)-(5.64) podem em seguida ser apresentadas em termos dos deslocamentos generalizados $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$, para a devida interpolação com funções de base radial (como se mostrará em capítulos seguintes).

5.3.5 Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy para placa

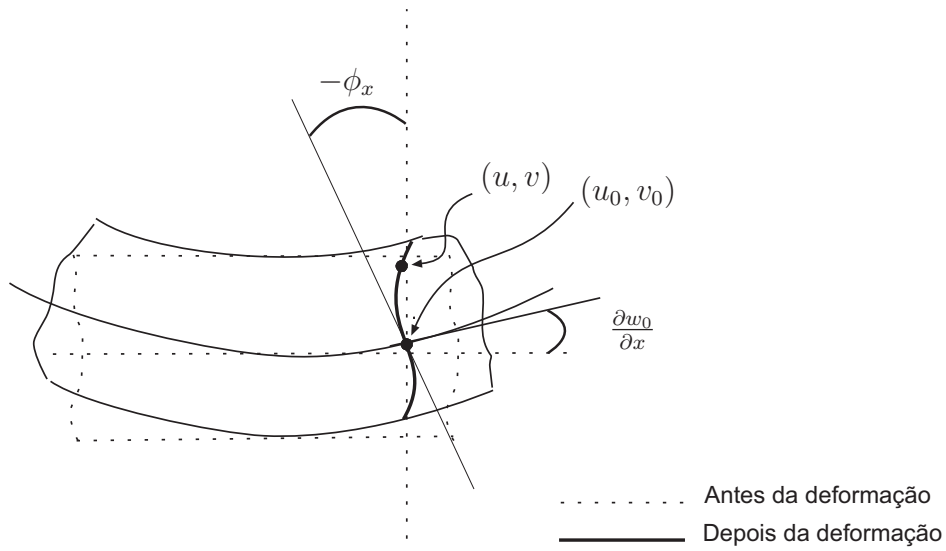


Figura 5.4: Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy

A teoria de deformação de terceira ordem de Reddy (TSDT-Third-order Shear Deformation Theory) [Reddy, 1984c,b] relaxa ainda mais a hipótese de Kirchhoff, permitindo que o campo de deslocamentos tenha uma variação cúbica ao longo da espessura da

placa (figura 5.4), na forma

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) - c_1 z^3 \left(\phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \right) \quad (5.65)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) - c_1 z^3 \left(\phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (5.66)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (5.67)$$

onde $c_1 = \frac{4}{3h^2}$; $c_2 = 3c_1$.

Os termos c_1 e c_2 são calculados de forma a anular as tensões de corte σ_{xz}, σ_{yz} nos topos da placa: $\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2, t) = 0$; $\sigma_{yz}(x, y, \pm h/2, t) = 0$. Repare-se ainda que para $c_1 = 0$, se está perante a teoria de placa de primeira ordem.

De forma análoga à teoria de primeira ordem, substituindo as expressões do campo de deslocamentos nas relações tensão-deformação (5.52), obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(2)} \\ \epsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(3)} \\ \epsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \\ \gamma_{yz}^{(3)} \\ \gamma_{xz}^{(3)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - z^2 c_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} - z^3 c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.68)$$

As tensões de corte transversais apresentam uma dependência em z^2 , como previsto pela teoria da elasticidade. Daí não ser necessário acrescentar um factor de correcção de corte, como foi feito na teoria de primeira ordem.

Usando a versão dinâmica do princípio dos trabalhos virtuais, e procedendo de forma idêntica ao exemplo anterior (teoria de primeira ordem), obtém-se as equações de equilíbrio (5.71)-(5.75).

Os momentos e forças resultantes são definidos por:

$$\begin{pmatrix} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ P_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{pmatrix} dz; \quad \begin{pmatrix} Q_{\alpha} \\ R_{\alpha} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha z} \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 \end{pmatrix} dz \quad (5.69)$$

$$I_i = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \rho^{(k)}(z)^i dz, \quad (5.70)$$

onde α, β representam x, y e $i = 0, 1, 2, \dots, 6$.

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - c_1 I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (5.71)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - c_1 I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + c_1 \left(\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} \right) + q = \\ I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - c_1 I_6 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + c_1 \left[I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + J_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\delta \phi_x : \frac{\partial \bar{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(J_1 u_0 + K_2 \phi_x - c_1 J_4 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (5.74)$$

$$\delta \phi_y : \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yy}}{\partial y} - \bar{Q}_y = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(J_1 v_0 + K_2 \phi_y - c_1 J_4 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (5.75)$$

onde:

$$\overline{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - c_1 P_{\alpha\beta}; \quad \overline{Q}_\alpha = Q_\alpha - c_2 R_\alpha; \quad J_i = I_i - c_1 I_{i+2} \quad (i = 1, 4); \quad (5.76)$$

$$K_2 = I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6; \quad c_1 = \frac{4}{3h^2}; \quad c_2 = \frac{4}{h^2} = 3c_1 \quad (5.77)$$

5.3.6 Teoria de deformação trigonométrica para placa

A evolução na direcção dos deslocamentos generalizados pode ser obtida através de muitas funções. Por exemplo no campo de deslocamentos seguinte, usam-se funções trigonométricas [Shimpi et al., 2003; Arya et al., 2002].

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_x(x, y, t) \quad (5.78)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_y(x, y, t) \quad (5.79)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (5.80)$$

onde u e v são os deslocamentos de um ponto de coordenadas (x, y, z) , u_0 e v_0 são os deslocamentos de um ponto $(x, y, 0)$ no plano médio, w é a deflexão, ϕ_x , ϕ_y e ϕ_z são rotações da normal ao plano médio em torno dos eixos xx , yy e zz respectivamente.

As deformações podem então ser expressas por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(z)} \\ \epsilon_{yy}^{(z)} \\ \gamma_{xy}^{(z)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sin \frac{\pi z}{h} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(s)} \\ \epsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{yz}^{(c)} \\ \gamma_{xz}^{(c)} \end{Bmatrix} \quad (5.81)$$

As deformações podem agora ser detalhadas na forma

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(z)} \\ \epsilon_{yy}^{(z)} \\ \gamma_{xy}^{(z)} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}; \quad (5.82)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(s)} \\ \epsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(c)} \\ \gamma_{xz}^{(c)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} \quad (5.83)$$

A teoria de deformação trigonométrica satisfaz a condição de anulação das tensões de corte nos topos da placa (facilmente verificável pela forma de cosseno em (5.81)), sendo portanto uma melhor aproximação do que a teoria de primeira ordem.

A energia de deformação virtual (δU) é, para esta teoria, dada por:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} \left(\delta \epsilon_{xx}^{(1)} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \epsilon_{xx}^{(s)} + z \delta \epsilon_{xx}^{(z)} \right) + \sigma_{yy} \left(\delta \epsilon_{yy}^{(1)} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \epsilon_{yy}^{(s)} + z \delta \epsilon_{yy}^{(z)} \right) \right. \right. \\ &\quad + \sigma_{zz} \left(-\frac{\pi}{h} \phi_z \sin \frac{\pi z}{h} \delta \epsilon_{zz}^{(s)} \right) + \tau_{xy} \left(\delta \gamma_{xy}^{(1)} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \gamma_{xy}^{(s)} + z \delta \gamma_{xy}^{(z)} \right) + \tau_{xz} \frac{\pi}{h} \delta \phi_x \\ &\quad \left. \left. + \tau_{yz} \frac{\pi}{h} \delta \phi_y \right] dz \right\} dx dy \\ &= \int_{\Omega_0} \left(N_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(1)} + N_{sxx} \delta \epsilon_{xx}^{(s)} + M_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(z)} + N_{yy} \delta \epsilon_{yy}^{(1)} + N_{syy} \delta \epsilon_{yy}^{(s)} + M_{yy} \delta \epsilon_{yy}^{(z)} \right. \\ &\quad \left. + N_{xy} \delta \epsilon_{xy}^{(1)} + N_{sxy} \delta \epsilon_{xy}^{(s)} + M_{xy} \delta \epsilon_{xy}^{(z)} + T_{cxz} \frac{\pi}{h} \delta \phi_x + T_{cyz} \frac{\pi}{h} \delta \phi_y \right) dx dy \quad (5.84) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_T \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\rho \left(\dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \dot{\theta}_x \right) \left(\delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \delta \dot{\theta}_x \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \rho \left(\dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \dot{\theta}_y \right) \left(\delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \delta \dot{\theta}_y \right) \right] dz \right\} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \Big] dz \Big\} dx dy dt \\
& = \int_T \int_{\Omega_0} \left[\left(I_0 \dot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + I_{0s} \dot{\theta}_x \right) \delta \dot{u}_0 + \left(I_0 \dot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + I_{0s} \dot{\theta}_y \right) \delta \dot{v}_0 \right. \\
& \quad + I_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 + \left(-I_1 \dot{u}_0 + I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} - I_{1s} \dot{\theta}_x \right) \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \left(-I_1 \dot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} - I_{1s} \dot{\theta}_y \right) \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \\
& \quad \left. + \left(I_{0s} \dot{u}_0 - I_{1s} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + I_{0ss} \dot{\theta}_x \right) \delta \dot{\theta}_x + \left(I_{0s} \dot{v}_0 - I_{1s} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + I_{0ss} \dot{\theta}_y \right) \delta \dot{\theta}_y \right] dx dy dt \quad (5.85)
\end{aligned}$$

O trabalho virtual (δV) feito pela força aplicada é:

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} q \delta w_0 dx dy \quad (5.86)$$

onde Ω_0 representa a superfície média do laminado e q é a força externa aplicada.

Definindo as forças e momentos resultantes da forma:

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} \\ N_{s\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sin \frac{\pi z}{h} \\ z \end{Bmatrix} dz; \quad T c_{\alpha z} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha z} \cos \frac{\pi z}{h} dz \quad (5.87)$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_{0s} \\ I_{0ss} \\ I_1 \\ I_{1s} \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ \sin \frac{\pi z}{h} \\ (\sin \frac{\pi z}{h})^2 \\ z \\ z \sin \frac{\pi z}{h} \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (5.88)$$

onde α, β representam x, y , é possível escrever as equações de equilíbrio:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - I_{0s} \ddot{\phi}_x \quad (5.89)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = -I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - I_{0s} \ddot{\phi}_y \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = -I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\ - I_0 \ddot{w}_0 - I_{1s} \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - I_{1s} \frac{\partial \ddot{\phi}_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\delta \phi_x : \frac{\partial N_{sxx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{sxy}}{\partial y} - \frac{\pi}{h} T_{c_{xz}} = -I_{0s} \ddot{u}_0 + I_{1s} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - I_{I0ss} \ddot{\phi}_x \quad (5.92)$$

$$\delta \phi_y : \frac{\partial N_{syy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{sxy}}{\partial x} - \frac{\pi}{h} T_{c_{yz}} = -I_{0s} \ddot{v}_0 + I_{1s} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - I_{I0ss} \ddot{\phi}_y \quad (5.93)$$

5.3.7 Teoria de deformação trigonométrica em zigzague para placa

Na teoria zigzague trigonométrica, o campo de deslocamento na camada k é definido, para uma placa com espessura h e nc camadas como:

$$u^k(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \left(A^k + z B^k + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \theta_x(x, y, t) \right) \quad (5.94)$$

$$v^k(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \left(C^k + z D^k + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \theta_y(x, y, t) \right) \quad (5.95)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (5.96)$$

onde u^k e v^k representam os deslocamentos num ponto (x^k, y^k, z) na camada k , u_0 e v_0 são os deslocamentos no plano médio, w é a deformada, θ_x e θ_y são as rotações em torno dos eixos y e x . Os parâmetros A^k , B^k , C^k e D^k são obtidos impondo continuidade das componentes de tensão transversais e nos deslocamentos, em cada interface, sendo então obtidos por

$$B^k = \frac{Q_{55}^{k-1}}{Q_{55}^k} B^{k-1} + \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi h_k}{h} \left(\frac{Q_{55}^{k-1}}{Q_{55}^k} - 1 \right)$$

$$A^k = A^{k-1} + z^k (B^{k-1} - B^k)$$

$$D^k = \frac{Q_{44}^{k-1}}{Q_{44}^k} D^{k-1} + \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi h_k}{h} \left(\frac{Q_{44}^{k-1}}{Q_{44}^k} - 1 \right)$$

$$C^k = C^{k-1} + z^k (D^{k-1} - D^k); \quad k = 2, \dots, nc \quad (5.97)$$

Podem obter-se, para laminados simétricos, os parâmetros para a primeira camada, para poder iniciar o processo em (5.97). Os parâmetros para a primeira camada, no caso de laminados simétricos, são dados por:

$$B^1 = 0; \quad A^1 = - \sum_{i=2}^{k_{\text{plano médio}}} z(i) (B^{i-1} - B^i) \quad (5.98)$$

$$D^1 = 0; \quad C^1 = - \sum_{i=2}^{k_{\text{plano médio}}} z(i) (D^{i-1} - D^i) \quad (5.99)$$

As deformações podem agora ser expressas por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + A^k \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(A)} \\ \epsilon_{yy}^{(A)} \\ \gamma_{xy}^{(A)} \end{Bmatrix} + C^k \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(C)} \\ \epsilon_{yy}^{(C)} \\ \gamma_{xy}^{(C)} \end{Bmatrix} + \sin \frac{\pi z}{h} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(s)} \\ \epsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(z)} \\ \epsilon_{yy}^{(z)} \\ \gamma_{xy}^{(z)} \end{Bmatrix} \\ &+ z B^k \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(zB)} \\ \epsilon_{yy}^{(zB)} \\ \gamma_{xy}^{(zB)} \end{Bmatrix} + z D^k \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(zD)} \\ \epsilon_{yy}^{(zD)} \\ \gamma_{xy}^{(zD)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.100)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(c)} \\ \gamma_{xz}^{(c)} \end{Bmatrix} + D^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(D)} \\ \gamma_{xz}^{(D)} \end{Bmatrix} + B^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(B)} \\ \gamma_{xz}^{(B)} \end{Bmatrix} \quad (5.101)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(A)} \\ \epsilon_{yy}^{(A)} \\ \gamma_{xy}^{(A)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(C)} \\ \epsilon_{yy}^{(C)} \\ \gamma_{xy}^{(C)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad (5.102)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(s)} \\ \epsilon_{yy}^{(s)} \\ \gamma_{xy}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(z)} \\ \epsilon_{yy}^{(z)} \\ \gamma_{xy}^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(zB)} \\ \epsilon_{yy}^{(zB)} \\ \gamma_{xy}^{(zB)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.103)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(zD)} \\ \epsilon_{yy}^{(zD)} \\ \gamma_{xy}^{(zD)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^{(c)} \\ \gamma_{xz}^{(c)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^{(D)} \\ \gamma_{xz}^{(D)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^{(B)} \\ \gamma_{xz}^{(B)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_x \end{pmatrix}; \quad (5.104)$$

A energia virtual de deformação (δU), vem dada por:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} (\delta \epsilon_{xx}^{(1)} + A^k \delta \epsilon_{xx}^{(A)} + C^k \delta \epsilon_{xx}^{(C)} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \epsilon_{xx}^{(s)} + z \delta \epsilon_{xx}^{(z)} + z B^k \delta \epsilon_{xx}^{(zB)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z D^k \delta \epsilon_{xx}^{(zD)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{yy} (\delta \epsilon_{yy}^{(1)} + A^k \delta \epsilon_{yy}^{(A)} + C^k \delta \epsilon_{yy}^{(C)} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \epsilon_{yy}^{(s)} + z \delta \epsilon_{yy}^{(z)} + z B^k \delta \epsilon_{yy}^{(zB)} + z D^k \delta \epsilon_{yy}^{(zD)}) \right. \\ &\quad \left. + \tau_{xy} (\delta \gamma_{xy}^{(1)} + A^k \delta \gamma_{xy}^{(A)} + C^k \delta \gamma_{xy}^{(C)} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \gamma_{xy}^{(s)} + z \delta \gamma_{xy}^{(z)} + z B^k \delta \gamma_{xy}^{(zB)} \right. \\ &\quad \left. + z D^k \delta \gamma_{xy}^{(zD)}) + \tau_{xz} \left(\frac{\pi}{h} \delta \theta_x + B^k \delta \theta_x \right) + \left(\tau_{yz} \frac{\pi}{h} \delta \theta_y + D^k \delta \theta_y \right) \right] dz \Big\} dx dy \\ &= \int_{\Omega_0} \left(N_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(1)} + N_{Axx} \delta \epsilon_{xx}^{(A)} + N_{sxx} \delta \epsilon_{xx}^{(s)} + M_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(z)} + M_{Bxx} \delta \epsilon_{xx}^{(zB)} \right. \\ &\quad \left. + N_{yy} \delta \epsilon_{yy}^{(1)} + N_{Cyy} \delta \epsilon_{yy}^{(C)} + N_{syy} \delta \epsilon_{yy}^{(s)} + M_{yy} \delta \epsilon_{yy}^{(z)} + M_{Dyy} \delta \epsilon_{yy}^{(zD)} \right. \\ &\quad \left. + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)} + N_{Axy} \delta \gamma_{xy}^{(A)} + N_{Cxy} \delta \gamma_{xy}^{(C)} + N_{sxy} \delta \gamma_{xy}^{(s)} + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(z)} + M_{Bxy} \delta \gamma_{xy}^{(zB)} \right. \\ &\quad \left. + M_{Dxy} \delta \gamma_{xy}^{(zD)} + T_{Bxz} \delta \theta_x + T_{cxz} \frac{\pi}{h} \delta \theta_x + T_{Dyz} \delta \theta_y + T_{cyz} \frac{\pi}{h} \delta \theta_y \right) dx dy \end{aligned}$$

e a energia cinética virtual (δK) por:

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\rho^k \left(\dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + A^k \dot{\theta}_x + z B^k \dot{\theta}_x + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \dot{\theta}_x \right) \right. \right. \\
&\quad \left(\delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + A^k \delta \dot{\theta}_x + z B^k \delta \dot{\theta}_x + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \delta \dot{\theta}_x \right) \\
&\quad + \rho^k \left(\dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + C^k \dot{\theta}_y + z D^k \dot{\theta}_y + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \dot{\theta}_y \right) \\
&\quad \left. \left(\delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + C^k \delta \dot{\theta}_y + z D^k \delta \dot{\theta}_y + \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \delta \dot{\theta}_y \right) + \rho^k \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz \Big\} dx dy \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\left(I_0 \dot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + (I_{0A} + I_{1B} + I_{0s}) \dot{\theta}_x \right) \delta \dot{u}_0 \right. \\
&\quad + \left(I_0 \dot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + (I_{0C} + I_{1D} + I_{0s}) \dot{\theta}_y \right) \delta \dot{v}_0 \\
&\quad + I_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 + \left(-I_1 \dot{u}_0 + I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} - (I_{1A} + I_{2B} + I_{1s}) \dot{\theta}_x \right) \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \\
&\quad + \left(-I_1 \dot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} - (I_{1C} + I_{2D} + I_{1s}) \dot{\theta}_y \right) \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \\
&\quad + \left((I_{0A} + I_{1B} + I_{0s}) \dot{u}_0 - (I_{1A} + I_{2B} + I_{1s}) \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right. \\
&\quad + (I_{0AA} + 2I_{1AB} + 2I_{0As} + I_{2BB} + 2I_{1Bs} + I_{0ss}) \dot{\theta}_x \Big) \delta \dot{\theta}_x \\
&\quad + \left((I_{0C} + I_{1D} + I_{0s}) \dot{v}_0 - (I_{1C} + I_{2D} + I_{1s}) \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right. \\
&\quad + (I_{0CC} + 2I_{1CD} + 2I_{0Cs} + I_{2DD} + 2I_{1Ds} + I_{0ss}) \dot{\theta}_y \Big) \delta \dot{\theta}_y \Big] dx dy \tag{5.105}
\end{aligned}$$

O trabalho virtual feito pelas forças aplicadas (δV) é dado por

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} q \delta w_0 dx dy \tag{5.106}$$

onde Ω_0 é o plano médio da placa, e q representa a carga externa aplicada na superfície média da placa.

As equações de equilíbrio são obtidas usando a versão dinâmica do princípio dos trabalhos virtuais, na forma

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + (I_{0A} + I_{1B} + I_{0s}) \ddot{\theta}_x \quad (5.107)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + (I_{0C} + I_{1D} + I_{0s}) \ddot{\theta}_y \quad (5.108)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - q = I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\ + I_0 \ddot{w}_0 + (I_{1A} + I_{2B} + I_{1s}) \frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + (I_{1C} + I_{2D} + I_{1s}) \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_x : \frac{\partial N_{Axx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{Bxx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{sxx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Axy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{Bxy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{sxy}}{\partial y} - T_{Bxz} - \frac{\pi}{h} T_{cxz} \\ = (I_{0A} + I_{1B} + I_{0s}) \ddot{u}_0 - (I_{1A} + I_{2B} + I_{1s}) \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \\ + (I_{0AA} + 2I_{1AB} + 2I_{0As} + I_{2BB} + 2I_{1Bs} + I_{0ss}) \ddot{\theta}_x \end{aligned} \quad (5.110)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_y : \frac{\partial N_{Cyy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{Dyy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{syy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Cxy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{Dxy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{sxy}}{\partial x} - T_{Dyz} - \frac{\pi}{h} T_{cyz} \\ = (I_{0C} + I_{1D} + I_{0s}) \ddot{v}_0 - (I_{1C} + I_{2D} + I_{1s}) \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \\ + (I_{0CC} + 2I_{1CD} + 2I_{0Cs} + I_{2DD} + 2I_{1Ds} + I_{0ss}) \ddot{\theta}_y \end{aligned} \quad (5.111)$$

As forças resultantes de membrana e corte, os momentos flectores e os termos de inércia

são dados por:

$$\begin{pmatrix} N_{\alpha\beta} \\ N_{\Theta\alpha\beta} \\ N_{s\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ M_{\Theta\alpha\beta} \end{pmatrix} = \sum_{z=1}^{nc} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ \Theta^k \\ \sin \frac{\pi z}{h} \\ z \\ z\Theta^k \end{pmatrix} dz; \quad \begin{pmatrix} T_{\Theta\alpha z} \\ T_{c\alpha z} \end{pmatrix} = \sum_{z=1}^{nc} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha z} \begin{pmatrix} \Theta^k \\ \cos \frac{\pi z}{h} \end{pmatrix} dz \quad (5.112)$$

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_{0\Theta} \\ I_{0\Theta\Theta} \\ I_{0s} \\ I_{0\Theta s} \\ I_{0ss} \\ I_1 \\ I_{1\Theta} \\ I_{1\Theta\Theta} \\ I_{1s} \\ I_{1\Theta s} \\ I_2 \\ I_{2\Theta} \\ I_{2\Theta\Theta} \end{pmatrix} = \sum_{z=1}^{nc} \int_{-h/2}^{h/2} \rho^k \begin{pmatrix} 1 \\ \Theta^k \\ \Theta^k \Theta^k \\ \sin \frac{\pi z}{h} \\ \Theta^k \sin \frac{\pi z}{h} \\ (\sin \frac{\pi z}{h})^2 \\ z \\ z\Theta^k \\ z\Theta^k \Theta^k \\ z \sin \frac{\pi z}{h} \\ z\Theta^k \sin \frac{\pi z}{h} \\ z^2 \\ z^2 \Theta^k \\ z^2 \Theta^k \Theta^k \end{pmatrix} dz \quad (5.113)$$

onde α, β são equivalentes a x, y e Θ substitui os símbolos A, B, C, D .

5.3.8 Teoria de deformação de ordem superior de Kant para placa

Uma das várias teorias de ordem superior proposta por Manjunatha e Kant [1992], apresenta o seguinte campo de deslocamentos:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^3\phi_x^*(x, y, t) \quad (5.114)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^3\phi_y^*(x, y, t) \quad (5.115)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (5.116)$$

onde ϕ_x^* e ϕ_y^* representam rotações de ordem superior, independentes das rotações de 1ª ordem ϕ_x , ϕ_y .

Note-se que esta teoria produz, tal como a teoria de Reddy, deformações de corte transversal parabólicas, o que evita o uso de factores correctivos de corte transversal. No entanto, ao contrário do que acontece com a teoria de Reddy, não está garantida a anulação das tensões de corte transversal em $\pm h/2$. No entanto, esta teoria teve um popular acolhimento na formulação por elementos finitos, dado que pode ser formulada com elementos de continuidade C^0 , ao contrário da formulação de Reddy que necessita de elementos com continuidade C^1 . A presença de graus de liberdade adicionais ϕ_x^* , ϕ_y^* faz com que esta formulação seja computacionalmente mais cara que a de Reddy, tendo em conta o sistema de equações a resolver. No âmbito desta tese, tendo em conta a interpolação por funções de base radial dos deslocamentos generalizados e das suas derivadas, não se coloca o problema da continuidade C^0 ou C^1 , pelo facto de não haver elementos. Portanto não há aumento de dificuldade a nível de implementação na mudança de uma teoria para outra.

As equações cinemáticas para a teoria de Kant são:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(3)} \\ \epsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.117)$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (5.118)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(2)} \\ \epsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3\phi_y^* \\ 3\phi_x^* \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(3)} \\ \epsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \\ \gamma_{yz}^{(3)} \\ \gamma_{xz}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^*}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.119)$$

De forma análoga às teorias anteriores, obtém-se a energia virtual de deformação,

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} (\delta \epsilon_{xx}^{(0)} + z \delta \epsilon_{xx}^{(1)} + z^3 \delta \epsilon_{xx}^{(3)}) + \sigma_{yy} (\delta \epsilon_{yy}^{(0)} + z \delta \epsilon_{yy}^{(1)} + z^3 \delta \epsilon_{yy}^{(3)}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau_{xy} (\delta \gamma_{xy}^{(0)} + z \delta \gamma_{xy}^{(1)} + z^3 \delta \gamma_{xy}^{(3)}) + \tau_{xz} (\delta \gamma_{xz}^{(0)} + z^2 \delta \gamma_{xz}^{(2)}) + \tau_{yz} (\delta \gamma_{yz}^{(0)} + z^2 \delta \gamma_{yz}^{(2)}) \right] \right. \\ &\quad \left. dz \right\} dx dy \\ &= \int_{\Omega_0} (N_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(1)} + S_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(3)} + N_{yy} \delta \epsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy} \delta \epsilon_{yy}^{(1)} + S_{yy} \delta \epsilon_{yy}^{(3)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} \\ &\quad + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)} + S_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(3)} + N_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(0)} + M_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(2)} + S_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(2)} + N_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(0)} + M_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(2)} + S_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(2)}) \end{aligned}$$

$$+ M_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(1)} + S_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(3)} + Q_{xz}\delta\gamma_{xz}^{(0)} + 3T_{xz}\delta\gamma_{xz}^{(2)} + Q_{yz}\delta\gamma_{yz}^{(0)} + 3T_{yz}\delta\gamma_{yz}^{(2)} dx dy \quad (5.120)$$

a energia virtual produzida pelas forças de inércia,

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_T \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[(\dot{u}_0 + z\dot{\phi}_x + z^3\dot{\phi}_x^*)(\delta\dot{u}_0 + z\delta\dot{\phi}_x + z^3\delta\dot{\phi}_x^*) \right. \\ &\quad \left. + (\dot{v}_0 + z\dot{\phi}_y + z^3\dot{\phi}_y^*)(\delta\dot{v}_0 + z\delta\dot{\phi}_y + z^3\delta\dot{\phi}_y^*) + \dot{w}_0\delta\dot{w}_0 \right] dz dx dy dt \\ &= \int_T \int_{\Omega_0} \left(I_0\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + I_1\dot{\phi}_x\delta\dot{u}_0 + I_3\dot{\phi}_x^*\delta\dot{u}_0 + I_1\dot{u}_0\delta\dot{\phi}_x + I_2\dot{\phi}_x\delta\dot{\phi}_x + I_4\dot{\phi}_x^*\delta\dot{\phi}_x + I_3\dot{u}_0\delta\dot{\phi}_x^* \right. \\ &\quad \left. + I_4\dot{\phi}_x\delta\dot{\phi}_x^* + I_6\dot{\phi}_x^*\delta\dot{\phi}_x^* + I_0\dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + I_1\dot{\phi}_y\delta\dot{v}_0 + I_3\dot{\phi}_y^*\delta\dot{v}_0 + I_1\dot{v}_0\delta\dot{\phi}_y + I_2\dot{\phi}_y\delta\dot{\phi}_y \right. \\ &\quad \left. + I_4\dot{\phi}_x^*\delta\dot{\phi}_y + I_3\dot{v}_0\delta\dot{\phi}_y^* + I_4\dot{\phi}_y\delta\dot{\phi}_y^* + I_6\dot{\phi}_y^*\delta\dot{\phi}_y^* + I_0\dot{w}_0\delta\dot{w}_0 \right) dx dy dt \end{aligned} \quad (5.121)$$

e a energia virtual associada às forças externas

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} q\delta w_0 dx dy \quad (5.122)$$

Considerando as forças e momentos resultantes definidos por (5.123) e (5.124), obtêm-se as equações de equilíbrio (5.125)-(5.131).

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ S_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{Bmatrix} dz; & \begin{Bmatrix} Q_{\alpha z} \\ T_{\alpha z} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha z} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} dz; \end{aligned} \quad (5.123)$$

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_6 \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^6 \end{pmatrix} dz \quad (5.124)$$

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\phi}_x + I_3 \ddot{\phi}_x^* \quad (5.125)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\phi}_y + I_3 \ddot{\phi}_y^* \quad (5.126)$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - q = I_0 \ddot{w}_0 \quad (5.127)$$

$$\delta \phi_x : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_x + I_4 \ddot{\phi}_x^* \quad (5.128)$$

$$\delta \phi_y : \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\phi}_y + I_4 \ddot{\phi}_y^* \quad (5.129)$$

$$\delta \phi_x^* : \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - 3T_{xz} = I_3 \ddot{u}_0 + I_4 \ddot{\phi}_x + I_6 \ddot{\phi}_x^* \quad (5.130)$$

$$\delta \phi_y^* : \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} - 3T_{yz} = I_3 \ddot{v}_0 + I_4 \ddot{\phi}_y + I_6 \ddot{\phi}_y^* \quad (5.131)$$

5.4 Teorias de deformação para casca

5.4.1 Revisão bibliográfica

Usa-se o termo *casca* quando um corpo está definido entre duas superfícies curvas, sendo a distância entre essas superfícies pequena quando comparada com outras dimensões do corpo. O comprimento do segmento perpendicular às duas superfícies define a espessura da casca, h . O conjunto dos pontos equidistantes das duas superfícies curvas formam o plano ou superfície média da casca, e é a geometria do plano médio em cada ponto que define a geometria da casca. A curvatura de uma casca é um dos factores mais importantes no seu comportamento a cargas aplicadas. Dependendo da curvatura, as cascas podem ser cilíndricas (circular e não circular), cónicas, esféricas, elipsóides parabolóides, toroidais e hiperbólica parabolóide. As placas podem ser consideradas cascas sem curvatura e nesse sentido alguns autores denominam as cascas por placas curvas [Ventsel e Theodor, 2001].

As cascas podem ainda ser finas ou espessas. Uma casca fina tem um valor máximo h/R desprezável em relação à unidade $(1 + h/R) \approx 1$. Ou, do ponto de vista da engenharia, $\max(h/R) \leq 1/20$ [Ventsel e Theodor, 2001].

Love desenvolveu uma das primeiras teorias de cascas baseada na teoria clássica da elasticidade. A teoria de Love, também denominada teoria de casca com aproximação de primeira ordem, aplica à geometria da casca a hipótese de Kirchhoff juntamente com o aproximação para pequenas deformações e de casca fina (hipótese Kirchhoff-Love). Um dos problemas desta teoria é o tratamento inconsistente dado a termos pequenos e da mesma ordem, sendo uns desprezados e outros não. Como resultado, nalguns casos, as equações de equilíbrio tornam-se assimétricas, indo contra o teorema de reciprocidade de Betti. Alguns destes problemas foram resolvidos por Reissner [1941], com o desenvolvimento de uma teoria linear, também de primeira ordem. Esta teoria considera a hipótese Kirchhoff-Love e despreza os termos de ordem z/R_i quando são pequenos em relação à unidade. A teoria de primeira ordem de Sanders [1959] obtém as

equações de equilíbrio a partir do princípio dos trabalhos virtuais e aplicando a hipótese Kirchhoff-Love, melhorando algumas inconsistências da teoria de Love. Entre as teorias baseadas em hipóteses de Love, podemos enumerar as teorias de Byrne [1944], Flügge [1962, 1934], Gol'denveizer [1961], Lur'ye [1940], Novozhilov [1964], Love [1892, 1888], Timoshenko [1959], Reissner [1941], Naghdi e Berry [1964], Vlasov [1964], Sanders [1959], Donnell [1935], e Mushtari [1938]. As teorias de deformação de primeira ordem produzem bons resultados quando a relação R/h é grande, e a anisotropia do material não é muito acentuada. No entanto, a aplicação destas teorias a materiais compósitos produz erros na ordem dos 30% na análise de deformações, tensões e frequências de cascas [Reddy, 2004].

Teorias de deformação de casca de segunda ordem foram desenvolvidas independentemente por Lur'ye [1940], Flügge [1962] e Byrne [1944]. As teorias de segunda ordem são teorias lineares, em que pelo menos uma das hipóteses de Kirchhoff-Love é desprezada. No caso da teoria Lure-Flügge-Byrne, o pressuposto de espessura de Kirchhoff-Love não é à partida assumido, e não despreza os termos z/R nas relações deformação-deslocamento e das resultantes mesmo que sejam pequenos em relação à unidade. Outras teorias de segunda ordem foram desenvolvidas por Novozhilov [1964], Gol'denveizer [1961] e Vlasov [1964]. A aproximação de segunda ordem de Vlasov é formulada da teoria tridimensional da elasticidade linear para uma casca espessa. As componentes transversal e de corte da deformação são descartados, e as restantes componentes são representadas pelos primeiros três termos da expansão em série.

Outra classe de teorias de aproximação de segunda ordem propostas por Reissner [1952, 1949], Naghdi [1957], etc não desprezam a deformação transversal e a hipótese da conservação da normal antes e após a deformação é abandonada. Uma revisão mais detalhada destas teorias pode ser encontrada em [Leissa, 1973]. Também foram desenvolvidas por vários autores diversas teorias não lineares, tais como [Reissner, 1950], [Naghdi e Nordgren, 1963], [Sanders, 1963], [Koiter, 1945], [Mushtari e Galimov, 1957] e [Simonds e Danielson, 1972]. Uma casca diz-se rebaixada se $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \ll 1$. Outro grupo de teorias foi desenvolvido baseando-se em propriedades específicas da casca, tais como a sua geometria, intervalos de deformação, cargas aplicadas, condições de tensão, etc. Exemplos dessas teorias são a teoria de membrana para cascas finas [Beltrami, 1882],

[Lecornu, 1880], [Reissner, 1912], [Sokolovskii, 1938], teoria de cascas rebaixada, (teoria Donnel-Vlasov-Mushtari, DVM) desenvolvida independentemente por Donnel [1976], Vlasov [1964] e Mushtari [1938]. Marguerre [1939] estabeleceu as equações do movimento para uma placa com uma curvatura inicial. As teorias para cascas com pequena curvatura são relativamente simples e têm grande aplicação na engenharia, como é o caso de telhados com pequena altura em relação à largura. Outra geometria com grande importância na engenharia são as cascas de revolução, tais como a casca esférica [Reissner, 1912], casca de forma de revolução arbitrária e espessura variável [Meissner, 1915], casca cônica circular [Hoff, 1955], casca esférica e cônica sob carga arbitrária [Flügge, 1932], casca toroidal [Wissler, 1916], casca cilíndrica com secção recta arbitrária [Parkus, 1951]. [Donnel, 1976], [Dishinger, 1935], [Hoff, 1954] e [Vlasov, 1964] introduziram simplificações importantes na teoria de cascas cilíndricas.

Na área das vibrações de cascas, Love [1892] apresentou as equações de vibrações livres para cascas elásticas finas. Kraus [1967], Flügge [1934] e Epstein [1942] apresentaram as equações do movimento com aproximações de primeira ordem e ordem superior.

O desenvolvimento de teorias com deformação de corte está relacionado com a generalização do estudo de estruturas laminadas, uma vez que estas estruturas podem apresentar valores elevados do quociente módulo de Young no plano/transverso [Reddy e Arciniega, 2004]. Ambartsumyan [1953] é considerado o primeiro a analisar cascas laminadas ortotrópicas. Dong et al. [1969], formularam uma teoria para cascas finas laminadas anisotrópicas. Cheng e Ho [1963], apresentaram uma análise de cascas laminadas anisotrópicas com base na teoria de casca de Flugge. O efeito do corte transversal e isotropia transversa foi considerado por Gulati e Essensbur [1967] e Zukas e Vinson [1971]. Dong e Tso [1972] apresentaram uma teoria aplicável a cascas laminadas cilíndricas ortotrópicas, e Whitney e Sun [1973] desenvolveram uma teoria de ordem superior. Reddy [1984a] apresenta uma teoria de primeira ordem com deformação de corte inspirada na teoria de Sanders para cascas laminadas compósitas. Em Reddy e Liu [1985], a teoria de Sanders para cascas é modificada de forma a dar origem à teoria de terceira ordem de deformação de corte de Reddy para cascas.

5.4.2 Escolha das teorias de deformação de casca usadas nesta tese

Neste tese são usadas duas teorias para o estudo de cascas compósitas. Ambas são baseadas na teoria de Donnel, que por sua vez se baseia nas hipóteses de Kirchhoff-Love [Love, 1892], que dão origem à teoria de primeira aproximação de Love:

(1) A espessura da casca é pequena quando comparada com outras dimensões, por exemplo, o menor raio de curvatura da superfície média da casca. (No desenvolvimento das teorias baseadas nesta hipótese, e para uma casca de espessura h e menor raio de curvatura R , podem-se desprezar os termos z/R ou h/R em relação à unidade).

(2) As deformações e os deslocamentos são suficientemente pequenos para que as quantidades de segunda ou de ordem superiores nas relações deformação-deslocamento possam ser desprezadas em relação aos termos de primeira ordem. (Desta forma as equações lineares permanecem lineares).

(3) A tensão transversal normal é pequena em relação às outras componentes da tensão normal, e pode ser desprezável.

(4) As linhas rectas normais à superfície média antes da deformação permanecem rectas e normais à superfície média após a deformação e não sofrem extensão. (Análoga à hipótese de Kirchhoff implicando $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\epsilon_{zz} = 0$).

A primeira teoria usada, a teoria de Donnell utiliza um campo de deslocamentos de primeira ordem. A segunda teoria, a teoria de Donnell-Reddy usa um campo de deslocamentos de terceira ordem, da autoria de Reddy.

5.4.3 Propriedades geométricas de uma casca

Uma vez que as cascas apresentam superfícies curvas, recorre-se a sistemas de coordenadas curvilíneas para descrever a sua geometria. A medição de comprimentos num sistema de coordenadas curvilíneo é feito através dos coeficientes métricos, a_α .

A figura 5.5 mostra uma casca de espessura uniforme, onde (ξ_1, ξ_2, ζ) são as coordenadas de um sistema ortogonal curvilíneo, tal que as curvas ξ_1 e ξ_2 são as linhas de curvatura da superfície média ($\zeta = 0$), $\vec{r}$ é o vector posição de um ponto $(\xi_1, \xi_2, 0)$ na superfície média, e $\vec{R}$ é o vector posição de um ponto arbitrário de coordenadas (ξ_1, ξ_2, ζ) .

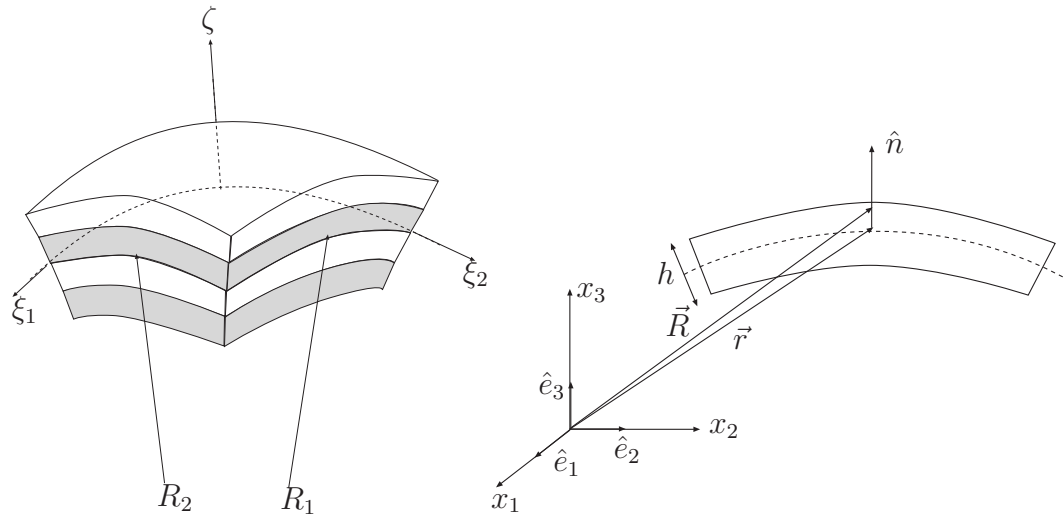


Figura 5.5: Geometria de uma casca

O quadrado da distância (ds^2) entre dois pontos $(\xi_1, \xi_2, 0)$ e $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, 0)$ na superfície média é dada por

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = a_1^2(d\xi_1)^2 + a_2^2(d\xi_2)^2 \quad (5.132)$$

com

$$d\vec{r} = \vec{g}_1 d\xi_1 + \vec{g}_2 d\xi_2; \quad \vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_\alpha}; \quad g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta \quad (5.133)$$

O quadrado da distância $(dS)^2$ entre dois pontos (ξ_1, ξ_2, ζ) e $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \zeta + d\zeta)$

é dado por

$$(dS)^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R} = A_1^2(d\xi_1)^2 + A_2^2(d\xi_2)^2 + A_3^2(d\zeta)^2 \quad (5.134)$$

com

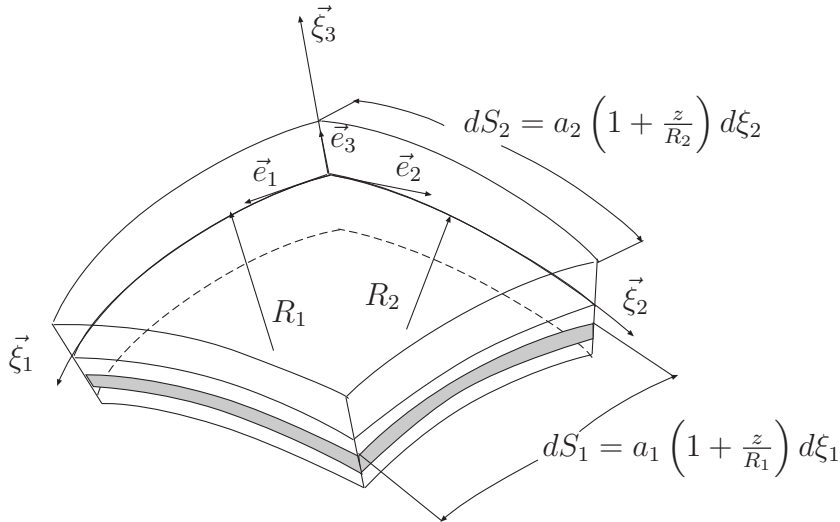
$$d\vec{R} = \vec{G}_1 d\xi_1 + \vec{G}_2 d\xi_2 + \hat{n} d\zeta \quad (5.135)$$

Os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 são os coeficientes de Lamé, e relacionam-se com os coeficientes métricos, a_α da forma:

$$A_1 = a_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) = \sqrt{G_{11}}; \quad A_2 = a_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) = \sqrt{G_{22}}; \quad A_3 = 1$$

O tensor métrico de superfície, $g_{\alpha\beta}$, $\alpha = 1, 2$ relaciona-se com os coeficientes a_1 e a_2 da forma:

$$a_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \quad (5.136)$$



Os elementos de área da secção recta são dados por:

$$dS_1 d\zeta = A_1 d\xi_1 d\zeta = a_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\xi_1 d\zeta; \quad dS_2 d\zeta = A_2 d\xi_2 d\zeta = a_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\xi_2 d\zeta$$

O elemento de área da superfície média é dado por

$$dA_0 = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \cdot \hat{n} \right) d\xi_1 d\xi_2 = a_1 a_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.137)$$

e o elemento de área na superfície em ζ é dada por

$$dA_\zeta = d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2 \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_2} \cdot \hat{n} \right) d\xi_1 d\xi_2 = A_1 A_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.138)$$

O elemento de volume, acima da superfície média é dado por:

$$dV = d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2 \cdot \hat{n} d\zeta = dA_\zeta d\zeta = A_1 A_2 d\xi_1 d\xi_2 d\zeta \quad (5.139)$$

Uma descrição mais pormenorizada dos sistemas de coordenadas curvilíneo pode ser encontrado em Reddy [2004]; Wempner e Talaslidis [2003].

5.4.4 Relação deformação-deslocamento

As relações deformação-deslocamento para a teoria tridimensional da elasticidade num sistema ortogonal curvilíneo, são [Reddy, 2004]:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} u_2 + \frac{a_1}{R_1} u_3 \right) \quad (5.140)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} u_1 + \frac{a_2}{R_2} u_3 \right) \quad (5.141)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} \quad (5.142)$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} + A_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) \equiv \epsilon_4 \quad (5.143)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + A_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \equiv \epsilon_5 \quad (5.144)$$

$$\gamma_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \equiv \epsilon_6 \quad (5.145)$$

No caso de uma casca com raios R_1 e R_2 constantes, as relações deformação-deslocamento (5.140)-(5.145) podem ser escritas da forma:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{R_1 + \zeta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + u_3 \right); \quad \gamma_{23} = \frac{1}{R_2 + \zeta} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \zeta}; \quad (5.146)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{R_2 + \zeta} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + u_3 \right); \quad \gamma_{13} = \frac{1}{R_1 + \zeta} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}; \quad (5.147)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \zeta}; \quad \gamma_{12} = \frac{1}{R_1 + \zeta} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_2 + \zeta} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}; \quad (5.148)$$

Diferentes aproximações às equações (5.140)-(5.145) dão origem a diferentes teorias de deformação para casca. Uma análise de diferentes teorias de casca fina pode ser encontrada no relatório de Leissa [1973].

5.4.5 Teoria de deformação de corte de primeira ordem de Donnell para casca

A teoria de Donnell é adequada para cascas finas ou moderadamente espessas, e relativamente rasas. Nesse sentido, é feita a aproximação $1 + \frac{\zeta}{R_1} \approx 1$. As equações (5.146)-(5.148) apresentam então uma forma simplificada,

$$\epsilon_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_3}{R_1}; \quad \gamma_{23} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \zeta}; \quad (5.149)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_3}{R_2}; \quad \gamma_{13} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}; \quad (5.150)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}; \quad (5.151)$$

e o campo de deslocamentos apresenta uma relação linear, de forma a satisfazer a hipótese de Kirchhoff,

$$u_1(\xi_1, \xi_2, \zeta, t) = u_0(\xi_1, \xi_2, t) + \zeta \phi_1(\xi_1, \xi_2, t) \quad (5.152)$$

$$u_2(\xi_1, \xi_2, \zeta, t) = v_0(\xi_1, \xi_2, t) + \zeta \phi_2(\xi_1, \xi_2, t) \quad (5.153)$$

$$u_3(\xi_1, \xi_2, \zeta, t) = w_0(\xi_1, \xi_2, t) \quad (5.154)$$

onde, u_0 , v_0 e w_0 são os deslocamentos da superfície média, e ϕ_1 e ϕ_2 são as rotações das normais em torno dos eixos ξ_1 e ξ_2 , respectivamente.

Substituindo este campo de deslocamentos em (5.149)-(5.151), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^{(0)} \\ \epsilon_2^{(0)} \\ \gamma_{12}^{(0)} \\ \gamma_{13}^{(0)} \\ \gamma_{23}^{(0)} \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \\ \gamma_{12}^{(1)} \\ \gamma_{13}^{(1)} \\ \gamma_{23}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_0}{\partial \xi_1} + \frac{w_0}{R_1} \\ \frac{1}{R_2} \frac{\partial v_0}{\partial \xi_2} + \frac{w_0}{R_2} \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_0}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_0}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial \xi_1} + \phi_1 \\ \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial \xi_2} + \phi_2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} \\ \frac{1}{R_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.155)$$

As componentes de deformação num referencial ortogonal curvilíneo são da forma abaixo indicada, onde x_i representa as coordenadas cartesianas e $\frac{1}{\partial x_i} = \frac{1}{R_i} \frac{1}{\partial \xi_i}$, $i = 1, 2$.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^{(0)} \\ \epsilon_2^{(0)} \\ \gamma_{12}^{(0)} \\ \gamma_{13}^{(0)} \\ \gamma_{23}^{(0)} \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \\ \gamma_{12}^{(1)} \\ \gamma_{13}^{(1)} \\ \gamma_{23}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{w_0}{R_1} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{w_0}{R_2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \phi_1 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \phi_2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.156)$$

Usando o princípio de Hamilton, obtém-se as equações de equilíbrio da teoria de primeira ordem para casca:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \\ &= \int_0^t \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \int_{\Omega} \left[\sigma_1 \delta \epsilon_1 + \sigma_2 \delta \epsilon_2 + \sigma_6 \delta \epsilon_6 + \sigma_4 \delta \epsilon_4 + \sigma_5 \delta \epsilon_5 \right] dx_1 dx_2 \right\} d\zeta \right] \end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} q \delta w \, dx_1 \, dx_2 - \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \int_{\Omega} \rho \left[\dot{u} \delta \dot{v} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w} \right] \, dx_1 \, dx_2 \right\} d\zeta \, dt \quad (5.157)$$

As equações de equilíbrio para a teoria de deformação de casca de Donnell são então (nas equações seguintes, x_1, x_2 é substituído por x, y , para simplificar a escrita):

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\phi}_x \quad (5.158)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\phi}_y \quad (5.159)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = I_0 \ddot{w}_0 \quad (5.160)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_x \quad (5.161)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\phi}_y \quad (5.162)$$

onde q é a carga distribuída, N_i , M_i e Q_i são as forças resultantes de membrana, momentos flectores e forças de corte respectivamente, dadas por:

$$(N_i, M_i) = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \sigma_i^{(k)}(1, \zeta) d\zeta; \quad (Q_x, Q_y) = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} (\sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}) d\zeta; \quad (5.163)$$

$$I_i = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \rho^{(k)} \zeta^i d\zeta \quad (5.164)$$

onde $i = xx, yy, xy$; nc representa o número de camadas da casca e ζ_k, ζ_{k-1} indicam a coordenada ζ para a superfície superior e inferior da camada k .

5.4.6 Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Donnell-Reddy para casca

Nesta teoria de ordem superior, considera-se uma casca composta por um número finito de camadas ortotrópicas de espessura constante. A aproximação $1 + \frac{\zeta}{R_1} \approx 1$ continua a ser feita, mas o campo de deslocamentos apresenta uma variação em ζ^3 .

Sejam (ξ_1, ξ_2, ζ) as coordenadas de um sistema de coordenadas ortogonal curvilíneo, tal que ξ_1 e ξ_2 representam as curvaturas da superfície média $\zeta = 0$, sendo as rectas ζ perpendiculares à superfícies média. Para cascas cilíndricas e esféricas, as linhas dos principais raios de curvatura, R_1 e R_2 coincidem com as linhas do sistema de coordenadas.

O campo de deslocamentos num dado instante t para esta teoria é expresso por:

$$u(\xi_1, \xi_2, \zeta, t) = u_0(\xi_1, \xi_2, t) + \zeta \phi_1(\xi_1, \xi_2, t) - \frac{4}{3h^2} \zeta^3 \left(\phi_1(\xi_1, \xi_2, t) + \frac{\partial w_0(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial \xi_1} \right) \quad (5.165)$$

$$v(\xi_1, \xi_2, \zeta, t) = v_0(\xi_1, \xi_2, t) + \zeta \phi_2(\xi_1, \xi_2, t) - \frac{4}{3h^2} \zeta^3 \left(\phi_2(\xi_1, \xi_2, t) + \frac{\partial w_0(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial \xi_2} \right) \quad (5.166)$$

$$w(\xi_1, \xi_2, \zeta, t) = w_0(\xi_1, \xi_2, t) \quad (5.167)$$

onde u_0 , v_0 e w_0 são os deslocamentos da superfície média da casca, ϕ_1 e ϕ_2 são as rotações das normais em torno de dos eixos ξ_1 e ξ_2 , respectivamente. Num referencial ortogonal curvilíneo o campo de deformação é indicado seguidamente, onde x_i

representam as coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_1^{(0)} \\ \epsilon_2^{(0)} \\ \gamma_{12}^{(0)} \\ \gamma_{13}^{(0)} \\ \gamma_{23}^{(0)} \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \epsilon_1^{(1)} \\ \epsilon_2^{(1)} \\ \gamma_{12}^{(1)} \\ \gamma_{13}^{(1)} \\ \gamma_{23}^{(1)} \end{Bmatrix} - \zeta^2 \frac{4}{h^2} \begin{Bmatrix} \epsilon_1^{(2)} \\ \epsilon_2^{(2)} \\ \gamma_{12}^{(2)} \\ \gamma_{13}^{(2)} \\ \gamma_{23}^{(2)} \end{Bmatrix} - \zeta^3 \frac{4}{3h^2} \begin{Bmatrix} \epsilon_1^{(3)} \\ \epsilon_2^{(3)} \\ \gamma_{12}^{(3)} \\ \gamma_{13}^{(3)} \\ \gamma_{23}^{(3)} \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{w_0}{R_1} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{w_0}{R_2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \phi_1 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \phi_2 \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \zeta^2 \frac{4}{h^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \\ \phi_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \end{Bmatrix} - \zeta^3 \frac{4}{3h^2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.168}$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \\
 &= \int_0^t \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \int_{\Omega} \left(\sigma_1 \delta \epsilon_1 + \sigma_2 \delta \epsilon_2 + \sigma_6 \delta \epsilon_6 + \sigma_4 \delta \epsilon_4 + \sigma_5 \delta \epsilon_5 \right) dx_1 dx_2 \right\} d\zeta \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\Omega} q \delta w dx_1 dx_2 - \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \int_{\Omega} \rho \left(\dot{u} \delta \dot{v} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w} \right) dx_1 dx_2 \right\} d\zeta \right] dt
 \end{aligned} \tag{5.169}$$

onde q é a carga distribuída. N_i , M_i , etc. são os esforços resultantes, dadas por:

$$(N_i, M_i, P_i) = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \sigma_i^{(k)}(1, \zeta, \zeta^3) d\zeta \quad (i=1, 2, 3) \tag{5.170}$$

$$(Q_1, K_1) = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \sigma_5^{(k)}(1, \zeta^2) d\zeta; \quad (Q_2, K_2) = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \sigma_4^{(k)}(1, \zeta^2) d\zeta \tag{5.171}$$

$$I_i = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \rho^{(k)} \zeta^i d\zeta; \quad J_i = I_i - c_1 I_{i+2}; \quad L_2 = I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6 \quad (5.172)$$

$$c_1 = \frac{4}{3h^2}; c_2 = 3c_1 \quad (5.173)$$

onde nc indica o número de camadas ortotrópicas da casca, e ζ_k, ζ_{k-1} as coordenadas da superfície superior e inferior da camada k .

As equações de equilíbrio podem ser encontradas usando o princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_3}{\partial x_2} = I_0 \ddot{u}_0 + J_1 \ddot{\phi}_1 - c_1 I_3 \frac{\ddot{u}_0}{\partial x_1} \quad (5.174)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_3}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = I_0 \ddot{v}_0 + J_1 \ddot{\phi}_2 - c_1 I_3 \frac{\ddot{v}_0}{\partial x_2} \quad (5.175)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - \frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial K_1}{\partial x_1} + \frac{\partial K_2}{\partial x_2} \right) + \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 P_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ & - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + q = I_0 \ddot{w}_0 - c_1^2 I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{u}_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \ddot{v}_0}{\partial x_2^2} \right) + c_1 \left[I_3 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x_1} + I_3 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial x_2} \right. \\ & \left. + J_4 \left(\frac{\partial \ddot{\phi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \ddot{\phi}_2}{\partial x_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.176)$$

$$\delta \phi_1 : \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_3}{\partial x_2} - Q_1 + \frac{4}{h^2} K_1 - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_3}{\partial x_2} \right) = J_1 \ddot{u}_0 + L_2 \ddot{\phi}_1 - c_1 J_4 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x_1} \quad (5.177)$$

$$\delta \phi_2 : \frac{\partial M_3}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 + \frac{4}{h^2} K_2 - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} \right) = J_1 \ddot{v}_0 + L_2 \ddot{\phi}_2 - c_1 J_4 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial x_2} \quad (5.178)$$

5.5 Resumo

Neste capítulo é feita uma breve apresentação de diversas teorias de deformação de placa e de casca. Das teorias de deformação apresentadas são escolhidas algumas para aplicar o método das funções de base radial:

- Teorias de deformação de placa:
 - teoria de primeira ordem
 - teoria de terceira ordem de Reddy
 - teoria trigonométrica
 - teoria zigzag trigonométrica
 - teoria de ordem superior de Kant
- Teorias de deformação de casca:
 - teoria de primeira ordem de Donnel
 - teoria de terceira ordem de Donnel-Reddy

Para cada uma destas teorias, são derivadas equações de equilíbrio, recorrendo ao princípio dos trabalhos virtuais. No capítulo seguinte essas equações de equilíbrio são relacionadas com os respectivos deslocamentos e com uma matriz de rigidez, para serem de seguida discretizadas por funções de base radial. Estas últimas são as equações a serem resolvidas pelo método das funções de base radial.

Referências

- Altenbach, H. (1998). Theories for laminated and sandwich plates. a review. *Mechanics of Composite Materials*, 34(3):243–252.
- Ambartsumyan, S. A. (1953). Calculation of laminated anisotropic shells. *Izvestia Akademiia Nauk Armenskoi SSR, Ser. Fiziko-Mat. Estonski Tech.*, 6:15.
- Areias, P. M. A., Song, J.-H. e Belytschko, T. (2005). A finite-strain quadrilateral

shell element based on discrete kirchhoff - love constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(9):1166–1206.

Arnold, D. N., Madureira, A. L. e Zhang, S. (2002). On the range of applicability of the reissner-mindlin and kirchhoff-love plate bending models. *Journal of Elasticity*, 67(3):171–185.

Arya, H., Shimpi, R. P. e Naik, N. K. (2002). A zigzag model for laminated composite beams. *Composite Structures*, 56(1):21–24.

Basset, A. (1890). On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 181:433–480.

Becache, E., Chaigne, A., Derveaux, G. e Joly, P. (2005). Numerical simulation of a guitar. *Computers & Structures*, 83(2-3):107–126.

Beltrami, E. (1882). Sull’equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. *Memorie dell’Accademia delle Scienze dell’Istituto di Bologna*, 3:217–265.

Byrne, R. (1944). *Theory of small deformations of a thin elastic shell*, volume 2 de *Seminar Reports in Math.* UCLA Publications in Mathematics.

Carrera, E. (2003). Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 56(3):287–308.

Cheng, S. e Ho, B. P. C. (1963). Stability of heterogeneous aeolotropic cylindrical shells under combined loading. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1(4):892–898.

Dishinger, F. (1935). Die strenge berechnung der kreiszyinderschale in ihrer anwendung auf die zeics-dywidag-schalen. *Beton u. Eisen*, 34:257–264, 283–294.

Dong, S. B., Pister, K. S. e Taylor, R. L. (1969). On the theory of laminated anisotropic shells and plates. *Journal of Aeronautical Science*, 29:969–975.

Dong, S. B. e Tso, F. K. W. (1972). Laminated orthotropic shell theory including transverse shear deformation. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of The Asme*, 39(4):1091–1097.

Donnel, L. H. (1976). *Beams, Plates, and Shells*. McGraw-Hill, New York.

Donnell, L. H. (1935). Stability of thin-walled tubes under torsion. Relatório técnico NACA-TR-479, NASA.

Epstein, P. S. (1942). On the theory of elastic vibrations in plates and shells. *Journal of Mathematical Physics*, 21:198–209.

Ferreira, A. J. M. (2003). A formulation of the multiquadric radial basis function

- method for the analysis of laminated composite plates. *Composite Structures*, 59(3): 385–392.
- Flügge, W. (1932). Die stabilität der kreiszylinderschale. *Ingenieur-Archiv*, 3:463–506.
- Flügge, W. (1934). *Static und Dynamik der Schalen*. Julius Springer, Berlin.
- Flügge, W. (1962). *Stresses in Shells*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edn edição.
- Gol'denveizer, A. L. (1961). *Theory of Thin Shells*. Pergamon Press, New York.
- Gulati, S. T. e Essenbur, F. (1967). Effects of anisotropy in axisymmetric cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 34(3):659–666.
- Hamilton, W. (1835). Second essay on a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, páginas 95–144.
- Hazewinkel, M., editor (2002). *Encyclopaedia of Mathematics Online*. Springer-Verlag.
- Hencky, H. (1947). Über die berucksichtigung der schubverzerrung in ebenen platten. *Ingenieur Archiv*, 16:72–76.
- Hildebrand, F. B., Reissner, E. e Thomas, G. B. (1949). Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. Relatório técnico NACA-TN-1833, NASA.
- Hoff, N. J. (1954). Boundary-value problems of the thin-walled circular cylinder. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 21(4):343–350.
- Hoff, N. J. (1955). Thin circular conical shells under arbitrary loads. *Journal of Applied Mechanics*, 22:557–562.
- Hyer, M. W. (1997). *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*. McGraw-Hill.
- Idlbi, A., Karama, M. e Touratier, M. (1997). Comparison of various laminated plate theories. *Composite Structures*, 37(2):173–184.
- Jemlelita, G. (1990). On kinematical assumptions of refined theories of plates: A survey. *ASME J. Appl. Mech.*, 57:1088–1091.
- Kirchhoff, G. (1850). Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 40:51–88. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen: http://www-gdz.sub.uni-goettingen.de/cgi-bin/digbib.cgi?PPN243919689_0040.
- Koiter, W. T. (1945). *The stability of elastic equilibrium*. Tese de doutoramento, Dissertation at the Technische Hooge School, Delft. English translation by E. Riks: technical report AFFDL-TR-70-25, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Air Force

Systems Command, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1970.

Kraus, H. (1967). *Thin Elastic Shells*. John Wiley and Sons, New York.

Kwon, Y. W. e Akin, J. E. (1987). Analysis of layered composite plates using a high-order deformation theory. *Computers and Structures*, 27(5):619–623.

Lecornu, L. (1880). Sur l'équilibre des surfaces exibles et inextensibles. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 29:1–109.

Leissa, A. W. (1973). Vibration of shells. Relatório técnico LC-77-186367; NASA-SP-288, NASA.

Levinson, M. (1980). An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7(6):343–350.

Librescu, L. (1975). *Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-type Structures*. Noordhoff, The Netherlands.

Lo, K. H., Christensen, R. M. e Wu, E. M. (1977a). High-order theory of plate deformation - 1. homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 44:663–668.

Lo, K. H., Christensen, R. M. e Wu, E. M. (1977b). High-order theory of plate deformation - 2. laminated plates. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 44:669–676.

Love, A. E. H. (1888). On the small free vibrations and deformations of thin elastic shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 17:491–546.

Love, A. E. H. (1892). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 1st edn edição. 4th. edn, Dover, New York, 1944.

Lur'ye, A. I. (1940). General theory of elastic shells. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 4:7–34.

Maia, N. M. M. (2000). *Introdução à Dinâmica Analítica*. IST press.

Manjunatha, B. e Kant, T. (1992). Comparison of 9 and 16 node quadrilateral elements based on higher-order laminate theories for estimation of transverse stresses. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 11(9):968–1002.

Marguerre, K. (1939). Zur theorie der gekrümmten platten grosser formänderung. Em *Proc 5th Int Congr Appl Mech*, páginas 93–101. Cambridge, Mass.

Meissner, E. (1915). Das elastizitätsproblem für dünne schalen von ringflächen. *Kugel- und Kegelvj-Schr Naturf Ges, Zürich*, 60:23–47.

Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of

isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18:31–38.

Murthy, M. V. V. (1981). An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. Relatório técnico L-14533; NASA-TP-1903, Langley Research Center.

Mushtari, K. M. (1938). Certain generalizations of the theory of thin shells. *Izv Fiz Mat O-va pri Kazan Un-te*, 11.

Mushtari, K. M. e Galimov, K. Z. (1957). *Non-linear theory of thin elastic shells*. NASA. Nelineinaya Teoriya Uprugikh Obolochek; Russian.

Naghdi, P. M. (1957). On the theory of thin elastic shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 14:369–380.

Naghdi, P. M. e Berry, J. G. (1964). On the equations of motion of cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 21(2):160–166.

Naghdi, P. M. e Nordgren, R. P. (1963). On the nonlinear theory of shells under the kirchhoff hypothesis. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21:49–60.

Novozhilov, V. V. (1964). *Theory of Thin Elastic Shells*. P. Noordhoff, Groningen, 2nd edn edição.

O'Connor, J. e Robertson, E. (1999). The mactutor history of mathematics archive-<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/biographies/lagrange.html>.

Ostrogradski, M. (1850). Mémoire sur les équations différentielles relatives aux problèmes des isopérimètres. *Mem. Acad. St.-Pétersbourg*, VI:385–517.

Owen, D. R. J. e Figueiras, J. A. (1983). Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(4):541–566.

Pandya, B. N. e Kant, T. (1988). Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model. *Composites Science and Technology*, 32(2):137–155.

Parkus, H. (1951). Die grundgleichungen der allgemeinen zylinderschale. *Österr Ing-Arch*, 6:30–35.

Reddy, J. N. (1984a). Exact solutions of moderately thick laminated shells. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(5):794–809.

Reddy, J. N. (1984b). Refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 20(9-10):881–896.

Reddy, J. N. (1984c). Simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 51(4):745–752.

- Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. CRC Press.
- Reddy, J. N. e Arciniega, R. A. (2004). Shear deformation plate and shell theories: From stavsky to present. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11(6 II): 535–582.
- Reddy, J. N. e Liu, C. F. (1985). Higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 23(3):319–330.
- Reddy, J. N. e Liu, C. F. (1987). A higher-order theory for geometrically nonlinear analysis of composite laminates. Relatório técnico NAS 1.264056, NASA-CR-4056, VPI-E-86.21, NASA.
- Reissner, E. (1941). A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells. *American Journal of Mathematics*, 63:177–184.
- Reissner, E. (1944). On the theory of bending of elastic plates. *Journal of Mathematics and Physics*, 23:184–191.
- Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12:69–77.
- Reissner, E. (1949). On the theory of thin elastic shells. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55(3):295–295.
- Reissner, E. (1950). On axisymmetrical deformation of thin shells of revolution. Em *Proc. Symposia in Applied Mathematics*, volume 3, páginas 27–52.
- Reissner, E. (1952). Stress strain relations in the theory of thin elastic shells. *Journal of Mathematics and Physics*, 31(2):109–119.
- Reissner, E. (1975). On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 11(5):569–573.
- Reissner, H. (1912). *Spannungen in Kugelschalen*. Müller-Breslau-Festschrift, Leipzig.
- Rohwer, K., Friedrichs, S. e Wehmeyer, C. (2005). Analyzing laminated structures from fibre-reinforced composite material- an assessment. *Technische Mechanik*, 25:59–79.
- Sanders, J. L. (1959). An improved first-approximation theory for thin shells. Relatório técnico NASA-TR-R-24, Langley Research Center.
- Sanders, J. L. (1963). Nonlinear theories for thin shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21:21–36.
- Senthilnathan, N. R., Lim, S. P., Lee, K. H. e Chow, S. T. (1987). Buckling of shear-deformable plates. *AIAA Journal*, 25(9):1268–1271.
- Shimpi, R. P., Arya, H. e Naik, N. K. (2003). A higher order displacement model for

- the plate analysis. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 22(18):1667–1688.
- Simonds, J. G. e Danielson, D. A. (1972). Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 39 Ser E(4):1085–1090.
- Sokolovskii, V. V. (1938). Momentless shells of revolution. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1:81–88.
- Timoshenko, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York.
- Ventsel, E. e Theodor, K. (2001). *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*. Taylor & Francis.
- Vlasov, V. Z. (1964). General theory of shells and its applications in engineering. Relatório técnico NASA-TT-F-99, NASA. Apr. 1964 925 p refs transl. into english of "obshchaya teoriva obolochek i yeye prilozheniya v tekhnike", moscow, gos. izd. tekh. teor. lit., 1949.
- Wempner, G. e Talaslidis, D. (2003). *Mechanics of Solids and Shells: Theories and Approximations*. CRC PRESS.
- Whitney, J. e Pagano, N. (1970). Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *A Appl Mech Trans ASME*, 37 Ser E(4):1031–1036.
- Whitney, J. M. e Sun, C. T. (1973). Higher-order theory for extensional motion of laminated composites. *Journal of Sound and Vibration*, 30(1):85–97.
- Wissler, H. (1916). *Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen*. Diss, Zürich.
- Yang, P. C., Norris, C. H. e Stavsky, Y. (1966). Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2(4):665–684.
- Zukas, J. A. e Vinson, J. R. (1971). Laminated transversely isotropic cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 38(2):400–407.

Colocação assimétrica com funções de base radial para análise estática de placas laminadas

6.1 Introdução

Existem várias teorias de deformação que se adequam ao estudo de placas em flexão (secção 5.3). Os exemplos seguintes pretendem, validar o método sem malha com multiquádricas, utilizando várias teorias de deformação de placa. São apresentados resultados para deflexão de placas compósitas, usando as teorias de deformação de primeira e terceira ordem de Reddy [Reddy, 2004], teoria de deformação trigonométrica [Shimpi et al., 2003], teoria de deformação zigzague trigonométrica, adaptado de Arya et al. [2002], e teoria de ordem superior de Kant [Pandya e Kant, 1988]. Uma vez que as placas compósitas são constituídas por várias camadas, podem atingir quocientes a/h relativamente pequenos ou apresentar grandes variações das propriedades materiais de camada para camada. Por isso preferiu-se testar principalmente teorias de ordem superior. As teorias de ordem superior, de forma geral, não requerem um factor de correcção de corte, e conseguem representar melhor o estado de tensão entre

as camadas de um laminado do que as teorias de 1ª ordem. No entanto, como envolvem resultantes de ordem superior de difícil interpretação física, e são computacionalmente mais exigentes, só devem ser usadas quando necessárias [Reddy, 2004]. Nesta perspectiva, as teorias de primeira ordem, podem ser um compromisso, desde que o factor de correcção de corte transversal usado seja adequado.

As tensões de corte, $(\tau_{xz}$ e $\tau_{yz})$ são calculadas a partir das equações de equilíbrio,

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (6.3)$$

integrando as equações (6.1) e (6.2) em ordem a z , respectivamente,

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz \quad (6.4)$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz \quad (6.5)$$

As tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} apresentadas nos resultados numéricos são calculadas pelas equações constitutivas:

$$\sigma_{ij} = Q_{ij} \epsilon_{ij}, \quad i, j = x, y \quad (6.6)$$

Por exemplo, usando a teoria de terceira ordem de Reddy, o campo dos deslocamentos é da forma:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) - c_1 z^3 \left(\phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \right) \quad (6.7)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) - c_1 z^3 \left(\phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (6.8)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (6.9)$$

As deformações, considerando a teoria linear da elasticidade são da forma:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (6.11)$$

Por exemplo, para uma matriz de rigidez reduzida da forma $\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{pmatrix}$, pode-se escrever para o ponto $z = i$,

$$\tau_{xz}(i) = - \int_{-h/2}^i (\mathcal{A}) dz, \quad \text{com } \mathcal{A} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (6.12)$$

as componentes da tensão σ_{xx} e τ_{xy} podem ser calculadas pelas equações constitutivas, $\sigma_{ij} = Q_{ij}\epsilon_{ij}$,

$$\sigma_{xx} = Q_{11}\epsilon_{xx} + Q_{12}\epsilon_{yy} \quad (6.13)$$

$$\tau_{xy} = Q_{33}\gamma_{xy} \quad (6.14)$$

Substituindo (6.7)-(6.9) em (6.10), o resultado do integral (6.12) no ponto i é:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(i) = & -Q_{11} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} (z^2(i) - z^2(i-1)) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} (z(i) - z(i-1)) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} c_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} (z^4(i) - z^4(i-1)) - \frac{1}{4} c_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} (z^4(i) - z^4(i-1)) \right] \\ & - Q_{12} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} (z^2(i) - z^2(i-1)) - \frac{1}{4} c_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} (z^4(i) - z^4(i-1)) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} c_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} (z^4(i) - z^4(i-1)) + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} (z(i) - z(i-1)) \right] \\ & - Q_{33} \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} (z(i) - z(i-1)) - \frac{1}{4} c_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} (z^4(i) - z^4(i-1)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}c_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} (z^4(i) - z^4(i-1)) - \frac{1}{4}c_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} (z^4(i) - z^4(i-1)) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} (z^2(i) - z^2(i-1)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} (z^2(i) - z^2(i-1)) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} (z(i) - z(i-1)) \Big]
\end{aligned}
\tag{6.15}$$

A título ilustrativo, a figura 6.1 mostra a tensão transversal τ_{xz} usando as equações de equilíbrio e as equações constitutivas, para a teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy, para uma placa laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Para a componente em análise, as tensões calculadas utilizando as equações de equilíbrio são contínuas ao longo da espessura da placa, uma vez que são derivadas de forma a satisfazer condições de continuidade entre as interfaces do laminado, enquanto que as tensões calculadas usando as equações constitutivas são descontínuas, para as teorias de camada equivalente [Reddy, 2004].

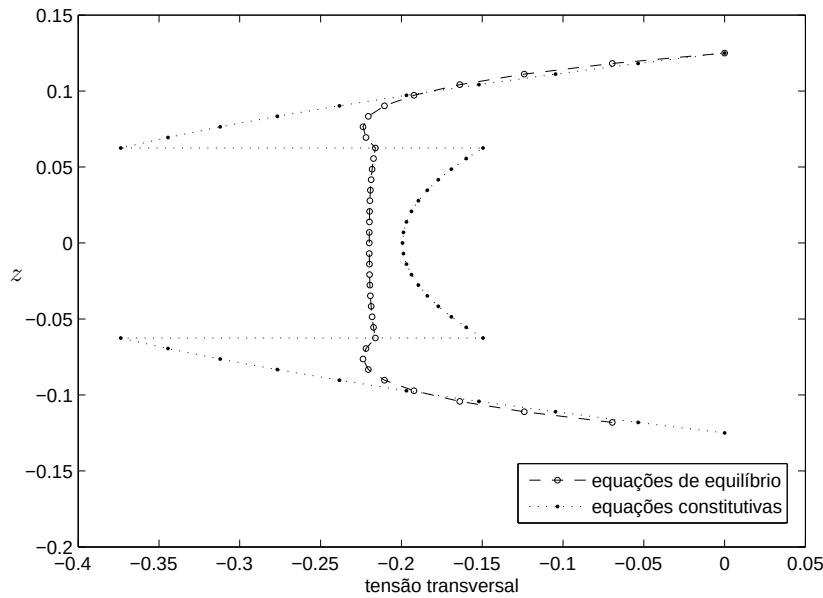


Figura 6.1: Tensão transversal ao longo da espessura, calculada pelas equações de equilíbrio e constitutivas, para uma placa com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sujeita a uma carga sinusoidal, com $n = 15$, $c = 2/\sqrt{n}$, $a/h = 4$

6.2 Teoria de deformação de corte de primeira ordem

6.2.1 Equações de equilíbrio

Os momentos e forças resultantes podem ser escritos em ordem aos deslocamentos (5.53) da forma:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^{(0)}\} \\ \{\epsilon^{(1)}\} \end{Bmatrix}; \quad \{Q\} = k [A] \{\gamma^{(0)}\} \quad (6.16)$$

Substituindo as expressões de $\epsilon^{(0)}$, $\epsilon^{(1)}$ e $\gamma^{(0)}$, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = k \left\{ \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \right\} \quad (6.19)$$

onde

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (6.20)$$

$\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ são os elementos da matriz de rigidez reduzida da camada k , e nc é o número total de camadas do laminado. A contagem de z_k e z_{k+1} para a camada k é feita da forma indicada na figura 6.2.

Substituindo em (5.60)-(5.64) as expressões das forças e dos momentos em ordem aos

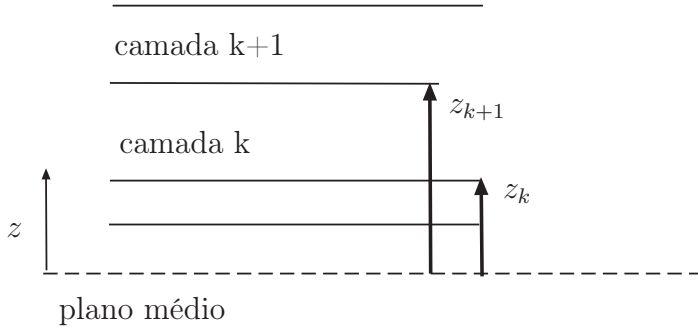


Figura 6.2: Contagem de z_k e z_{k+1} para a camada k

deslocamentos obtém-se:

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{13} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{13} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & A_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{33} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{23} \left(2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \\
 & + B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + B_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[kA_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + kA_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[kA_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + kA_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] + q = 0
\end{aligned} \tag{6.23}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{13} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{13} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2D_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - kA_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - kA_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{6.24}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + 2B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{33} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2D_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{23} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - kA_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - kA_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{6.25}$$

onde D_{ij} e A_{ij} são os componentes da matriz de rigidez e k é o factor de correcção de corte.

6.2.2 Interpolação das equações de equilíbrio

O sistema de equações é então aproximado usando o método das multiquádricas: Ou seja supõe-se, por exemplo em u_0 que $u_0^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$. Por uma questão

de simplificação de escrita nas equações seguintes, g designa $g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$.

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.26}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + A_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + A_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.27}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[kA_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2kA_{45} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + kA_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]$$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[kA_{55} \frac{\partial g}{\partial x} + kA_{45} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[kA_{45} \frac{\partial g}{\partial x} + kA_{44} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + q = 0 \quad (6.28)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-kA_{45} \frac{\partial g}{\partial y} - kA_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[D_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2D_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - kA_{55} g \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[D_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + D_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - kA_{45} g \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-kA_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - kA_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[D_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + D_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - kA_{45} g \right] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2D_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - kA_{44}g \right] = 0 \quad (6.30)$$

6.2.3 Condições de fronteira

As condições de fronteira para um bordo simplesmente apoiado são:

(a) Simplesmente apoiado

$$\bullet \text{ SS1, } u_t = 0; w = 0; N_n = 0; M_n = 0; \phi_t = 0$$

Os índices n e t referem-se às direcções normal e tangencial do bordo, respectivamente.

As resultantes cuja normal é representada por $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ podem ser expressas por:

$$M_n = n_x^2 M_{xx} + 2n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_{yy} \quad (6.31)$$

$$N_n = n_x^2 N_{xx} + 2n_x n_y N_{xy} + n_y^2 N_{yy} \quad (6.32)$$

$$\phi_t = n_x \phi_y - n_y \phi_x \quad (6.33)$$

$$u_t = n_x u - n_y v \quad (6.34)$$

No caso de uma placa rectangular, com bordos em $x = 0$, $x = a$ e $y = 0$, $y = b$, as condições de fronteira podem escrever-se:

nos bordos $x = 0, x = a$:

$$M_{xx} = 0; \quad N_{xx} = 0; \quad \phi_y = 0; \quad u_t = v_0 = 0; \quad w_0 = 0; \quad (6.35)$$

nos bordos $y = 0, y = b$:

$$M_{yy} = 0; \quad N_{yy} = 0; \quad \phi_x = 0; \quad u_t = u_0 = 0; \quad w_0 = 0; \quad (6.36)$$

As condições de fronteira relacionam-se com os deslocamentos da forma: As condições de fronteira são interpoladas da mesma forma que as equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 N_{xx} = & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
 N_{yy} = & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{12} \frac{\partial g}{\partial x} + A_{23} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{22} \frac{\partial g}{\partial y} + A_{23} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{12} \frac{\partial g}{\partial x} + B_{23} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{22} \frac{\partial g}{\partial y} + B_{23} \frac{\partial g}{\partial x} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xx} = & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[D_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + D_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[D_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + D_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned}
 M_{yy} = & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{12} \frac{\partial g}{\partial x} + B_{23} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{22} \frac{\partial g}{\partial y} + B_{23} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[D_{12} \frac{\partial g}{\partial x} + D_{23} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[D_{22} \frac{\partial g}{\partial y} + D_{23} \frac{\partial g}{\partial x} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

$$Q_y = \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[kA_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + kA_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} kA_{45}g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} kA_{44}g \tag{6.41}$$

$$Q_x = \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[kA_{45} \frac{\partial g}{\partial y} + kA_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} kA_{55}g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} kA_{45}g \tag{6.42}$$

6.3 Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy

6.3.1 Equações de equilíbrio

A teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy não necessita de um factor de correcção de corte, e tem apenas cinco graus de liberdade.

As resultantes $\{N\}$, $\{M\}$, $\{P\}$, $\{Q\}$ e $\{R\}$ relacionam-se com as deformações, para um laminado, em termos de uma matriz de rigidez de membrana $[A]$, outra relacionada com membrana-flexão $[B]$, outra apenas para flexão $[D]$ e termos de ordem superior $[E]$, $[F]$, $[H]$ na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \\ \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [A] & [B] & [E] & [0] & [0] \\ [B] & [D] & [F] & [0] & [0] \\ [E] & [F] & [H] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [A] & [D] \\ [0] & [0] & [0] & [D] & [F] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^{(0)}\} \\ \{\epsilon^{(1)}\} \\ \{\epsilon^{(3)}\} \\ \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix} \quad (6.43)$$

Substituindo pelas expressões dos deslocamentos, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ - c_1 \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\
&- c_1 \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\
&- c_1 \left\{ \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \right\} \\
&- c_1 \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} - c_2 \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \quad (6.46)$$

com

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (6.47)$$

Deste modo é possível escrever as equações Euler-Lagrange em ordem aos deslocamentos, u_0 , v_0 , w_0 , ϕ_x e ϕ_y , substituindo as expressões das forças e momentos (6.43), (6.47) nas equações de equilíbrio (5.71)-(5.75).

As equações resultantes desta substituição são apresentadas abaixo (6.48)-(6.52).

1ª equação de equilíbrio:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{3h^2}E_{12}\left(\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^3w_0}{\partial y^2\partial x}\right) + A_{33}\left(\frac{\partial^2u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2v_0}{\partial y\partial x}\right) + B_{33}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi_y}{\partial y\partial x}\right) \\
& -\frac{4}{3h^2}E_{33}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi_y}{\partial y\partial x} + 2\frac{\partial^3w_0}{\partial y^2\partial x}\right) = 0
\end{aligned} \tag{6.48}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{33}\left(\frac{\partial^2u_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2v_0}{\partial x^2}\right) + B_{33}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}\right) - \frac{4}{3h^2}E_{33}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^3w_0}{\partial y\partial x^2}\right) \\
& + A_{12}\frac{\partial^2u_0}{\partial y\partial x} + A_{22}\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2} + B_{12}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y\partial x} + B_{22}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2}E_{12}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^3w_0}{\partial y\partial x^2}\right) \\
& - \frac{4}{3h^2}E_{22}\left(\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3w_0}{\partial y^3}\right) = 0
\end{aligned} \tag{6.49}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{55}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}\right) - \frac{8}{h^2}D_{55}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}\right) + \frac{16}{h^4}F_{55}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}\right) \\
& + A_{44}\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2w_0}{\partial y^2}\right) - \frac{8}{h^2}D_{44}\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2w_0}{\partial y^2}\right) + \frac{16}{h^4}F_{44}\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2w_0}{\partial y^2}\right) + \\
& + \frac{4}{3}\left[E_{11}\frac{\partial^3u_0}{\partial x^3} + E_{12}\frac{\partial^3v_0}{\partial y\partial x^2} + F_{11}\frac{\partial^3\phi_x}{\partial x^3} + F_{12}\frac{\partial^3\phi_y}{\partial y\partial x^2} - \frac{4}{3h^2}H_{11}\left(\frac{\partial^3\phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4w_0}{\partial x^4}\right)\right. \\
& - \frac{4}{3h^2}H_{12}\left(\frac{\partial^3\phi_y}{\partial y\partial x^2} + \frac{\partial^4w_0}{\partial y^2\partial x^2}\right) + 2E_{33}\left(\frac{\partial^3u_0}{\partial y^2\partial x} + \frac{\partial^3v_0}{\partial y\partial x^2}\right) + 2F_{33}\left(\frac{\partial^3\phi_x}{\partial y^2\partial x} + \frac{\partial^3\phi_y}{\partial y\partial x^2}\right) \\
& - \frac{8}{3h^2}H_{33}\left(\frac{\partial^3\phi_x}{\partial y^2\partial x} + \frac{\partial^3\phi_y}{\partial y\partial x^2} + 2\frac{\partial^4w_0}{\partial y^2\partial x^2}\right) + E_{12}\frac{\partial^3u_0}{\partial y^2\partial x} + E_{22}\frac{\partial^3v_0}{\partial y^3} + F_{12}\frac{\partial^3\phi_x}{\partial y^2\partial x} \\
& \left. + F_{22}\frac{\partial^3\phi_y}{\partial y^3} - \frac{4}{3h^2}H_{12}\left(\frac{\partial^3\phi_x}{\partial y^2\partial x} + \frac{\partial^4w_0}{\partial y^2\partial x^2}\right) - \frac{4}{3h^2}H_{22}\left(\frac{\partial^3\phi_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^4w_0}{\partial y^4}\right)\right]\frac{1}{h^2} \\
& = -q
\end{aligned} \tag{6.50}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& -A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{8}{h^2} D_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \frac{16}{h^4} F_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} F_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \\
& - \frac{4}{3} \left[E_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + E_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + F_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + F_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} H_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \right. \\
& \left. - \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \right] \frac{1}{h^2} + B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) + D_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{4}{3} \left[B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) \right. \\
& \left. + F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) - \frac{4}{3h^2} H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \right] \frac{1}{h^2} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{6.51}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& -A_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{8}{h^2} D_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \frac{16}{h^4} F_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& + B_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \\
& - \frac{4}{3} \left[E_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + E_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + F_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + F_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{4}{3h^2} H_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \right] \frac{1}{h^2} + B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + D_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) - \frac{4}{3} \left[E_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) \left] \frac{1}{h^2} \right. \\
& = 0
\end{aligned} \tag{6.52}$$

6.3.2 Interpolação das equações de equilíbrio

O sistema de equações é então aproximado usando o método das multiquádricas: Ou seja supõe-se, por exemplo em u_0 que $u_0^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$. Por uma questão de simplificação de escrita nas equações seguintes, g designa $g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$.

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-\frac{4}{3h^2} E_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{33} 2 \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.53}$$

2ª equação:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-\frac{4}{3h^2} E_{33} 2 \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{33} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} E_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.54}$$

3ª equação:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[\frac{4}{3h^2} E_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} + \frac{4}{3h^2} 2E_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[\frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{4}{3h^2} 2E_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{4}{3h^2} E_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[A_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{8}{h^2} D_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{16}{h^4} F_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{8}{h^2} D_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right. \\
& + \frac{16}{h^4} F_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} - \frac{32}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^4 g}{\partial y^2 \partial x^2} - \frac{32}{9h^4} H_{33} 2 \frac{\partial^4 g}{\partial y^2 \partial x^2} - \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} \left. \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[A_{55} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{8}{h^2} D_{55} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{16}{h^4} F_{55} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{4}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \right. \\
& + \frac{4}{3h^2} 2F_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - \frac{32}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} + \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \left. \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[A_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{8}{h^2} D_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{16}{h^4} F_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} \right. \\
& + \frac{4}{3h^2} 2F_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{32}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} - \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \left. \right] = -q
\end{aligned} \tag{6.55}$$

4ª equação:

$$\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} B_{33} \frac{\partial g}{\partial y \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-A_{55} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{8}{h^2} D_{55} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{16}{h^4} F_{55} + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{4}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \right. \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} + \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - \frac{4}{3h^2} F_{33} 2 \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \\
& \left. + 2 \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-A_{55} g + \frac{8}{h^2} D_{55} g - \frac{16}{h^4} F_{55} g + D_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right. \\
& - \frac{8}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{8}{3h^2} F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left. \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[+ D_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{8}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right. \\
& \left. - \frac{8}{3h^2} F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] = 0 \tag{6.56}
\end{aligned}$$

5ª equação:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} E_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-A_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{8}{h^2} D_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{16}{h^4} F_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right. \\
& \left. + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} - \frac{4}{3h^2} F_{33} 2 \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{16}{9h^4} H_{33} 2 \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[D_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{8}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{8}{3h^2} F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \Big] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-A_{44}g + \frac{8}{h^2} D_{44}g - \frac{16}{h^4} F_{44}g + D_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{8}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right. \\
& \left. + D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{8}{3h^2} F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.57}$$

6.3.3 Condições de fronteira

As condições de fronteira num bordo simplesmente apoiado (S-simply supported) são:

(a) Simplesmente apoiado

$$\bullet \text{ SS1, } u_t = 0; w = 0; N_n = 0; \overline{M}_n = 0; \phi_t = 0$$

As resultantes cuja normal é representada por $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ podem ser expressas por:

$$\overline{M}_n = n_x^2 \overline{M}_{xx} + 2n_x n_y \overline{M}_{xy} + n_y^2 \overline{M}_{yy} \tag{6.58}$$

$$N_n = n_x^2 N_{xx} + 2n_x n_y N_{xy} + n_y^2 N_{yy} \tag{6.59}$$

$$P_n = n_x^2 P_{xx} + 2n_x n_y P_{xy} + n_y^2 P_{yy} \tag{6.60}$$

$$\phi_t = n_x \phi_y - n_y \phi_x \tag{6.61}$$

$$u_t = n_x u - n_y v \tag{6.62}$$

com $\overline{M} = M - c_1 P$; $c_1 = \frac{4}{3h^2}$. No caso de placa rectangular, com bordos em $x = 0$, $x = a$ e $y = 0$, $y = b$, as condições de fronteira podem escrever-se:

nos bordos $x = 0, x = a$:

$$\overline{M}_{xx} = 0; N_{xx} = 0; \phi_y = 0; u_t = v_0 = 0; w_0 = 0; \tag{6.63}$$

nos bordos $y = 0, y = b$:

$$\overline{M}_{yy} = 0; N_{yy} = 0; \phi_x = 0; u_t = u_0 = 0; w_0 = 0; \quad (6.64)$$

Por exemplo, para o bordo simplesmente apoiado em $x = 0$ e $x = a$, as equações de fronteira podem ser interpoladas por:

$$\begin{aligned} N_{xx} = & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-E_{11}c_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{12}c_1 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2E_{13}c_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial y} - E_{11}c_1 \frac{\partial g}{\partial x} - E_{13}c_1 \frac{\partial g}{\partial y} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial x} - E_{12}c_1 \frac{\partial g}{\partial y} - E_{13}c_1 \frac{\partial g}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_{xx} = & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[-c_1 E_{13} \frac{\partial g}{\partial y} - c_1 E_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[-c_1 E_{13} \frac{\partial g}{\partial x} - c_1 E_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-F_{12}c_1 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - F_{11}c_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2H_{13}c_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + H_{12}c_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right. \\ & \left. + H_{11}c_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2F_{13}c_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-2F_{13}c_1 \frac{\partial g}{\partial y} - 2F_{11}c_1 \frac{\partial g}{\partial x} \right. \\ & \left. + H_{13}c_1^2 \frac{\partial g}{\partial y} + H_{11}c_1^2 \frac{\partial g}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + D_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-2F_{13}c_1 \frac{\partial g}{\partial x} \right. \\ & \left. - 2F_{12}c_1 \frac{\partial g}{\partial y} + H_{13}c_1^2 \frac{\partial g}{\partial x} + H_{12}c_1^2 \frac{\partial g}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + D_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\phi_y = \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} g = 0 \quad (6.67)$$

$$v_0 = \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} g = 0 \quad (6.68)$$

$$w_0 = \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} g = 0 \quad (6.69)$$

6.4 Teoria de deformação trigonométrica

6.4.1 Equações de equilíbrio

A teoria aqui apresentada é uma simplificação da teoria tridimensional de Shimpi et al. [2003]. A simplificação introduzida no campo dos deslocamentos traduz-se numa redução do número de graus de liberdade e no número de equações de equilíbrio do sistema, de seis para cinco. É portanto uma teoria com nível de complexidade de implementação idêntica à teoria de deformação de terceira ordem de Reddy. Uma vez que nesta tese a teoria trigonométrica só é aplicada a laminados simétricos, desprezam-se os termos relacionados com δu_0 e δv_0 , o que implica desprezar as duas primeiras equações em (5.89)-(5.93) e os termos em u_0 e v_0 nas restantes três equações. O mesmo procedimento é adoptado para a teoria trigonométrica zigzague.

As equações Euler-Lagrange podem ser expressas em termos dos deslocamentos:

3ª equação de equilíbrio:

$$Gzs(1, 1) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - Gzz(1, 1) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}$$

$$\begin{aligned}
& -2G_{zz}(1,2)\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} + G_{zs}(1,2)\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + G_{zs}(2,2)\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} \\
& -G_{zz}(2,2)\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 2G_{zs}(3,3)\left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x}\right) - 4G_{zz}(3,3)\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} = -q \quad (6.70)
\end{aligned}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& G_{ss}(1,1)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{ss}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{zs}(1,1)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\
& -G_{zs}(1,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + G_{ss}(3,3)\left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2}\right) - 2G_{zs}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \\
& -\frac{H_{cc}(5,5)\pi^2 \phi_x}{h^2} = 0 \quad (6.71)
\end{aligned}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& G_{ss}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{ss}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - G_{zs}(1,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& -G_{zs}(2,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + G_{ss}(3,3)\left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y}\right) - 2G_{zs}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& -\frac{H_{cc}(4,4)\pi^2 \phi_y}{h^2} = 0 \quad (6.72)
\end{aligned}$$

6.4.2 Interpolação das equações de equilíbrio

Aplicando o método das multiquádricas, as equações de equilíbrio são interpoladas, para cada nó da rede i , da forma:

3ª equação de equilíbrio:

$$\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-G_{zz}(1,1)\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} - 2G_{zz}(1,2)\frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} - G_{zz}(2,2)\frac{\partial^4 g}{\partial y^4} - 4G_{zz}(3,3)\frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[Gzs(1, 1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} + 2Gzs(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + Gzs(2, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} + 2Gzs(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \right] = -q
\end{aligned} \tag{6.73}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-Gzs(1, 1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} - 2Gzs(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[Gss(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + Gss(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - Hcc(5, 5) \frac{\pi^2}{h^2} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[Gss(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + Gss(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.74}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - Gzs(2, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - 2Gzs(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \right] + \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[Gss(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + Gss(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] + \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[Gss(2, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + Gss(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - Hcc(4, 4) \frac{\pi^2}{h^2} g \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.75}$$

6.4.3 Condições de fronteira

As condições de fronteira para a teoria trigonométrica são idênticas às condições de fronteira para a teoria zigzague trigonométrica, com $A = B = C = D = 0$. A

equações são portanto apresentadas no capítulo seguinte.

6.5 Teoria ziguezague trigonométrica

6.5.1 Equações de equilíbrio

As resultantes relacionam-se com as deformações, para um laminado, em termos de uma matriz de rigidez na forma

$$\begin{pmatrix} \{N\} \\ \{N_A\} \\ \{N_C\} \\ \{N_s\} \\ \{M\} \\ \{M_B\} \\ \{M_D\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [G_1] & [G_A] & [G_C] & [G_s] & [G_z] & [G_{zB}] & [G_{zD}] \\ [G_A] & [G_{AA}] & [G_{CA}] & [G_{sA}] & [G_{zA}] & [G_{zBA}] & [G_{zDA}] \\ [G_C] & [G_{CA}] & [G_{CC}] & [G_{sC}] & [G_{zC}] & [G_{zB}] & [G_{zDC}] \\ [G_s] & [G_{sA}] & [G_{sC}] & [G_{ss}] & [G_{zs}] & [G_{zsBs}] & [G_{zDs}] \\ [G_z] & [G_{zA}] & [G_{zC}] & [G_{zs}] & [G_{zz}] & [G_{zBz}] & [G_{zDz}] \\ [G_{zB}] & [G_{zBA}] & [G_{zBC}] & [G_{zBs}] & [G_{zBz}] & [G_{zB}] & [G_{zDzB}] \\ [G_{zD}] & [G_{zDA}] & [G_{zDC}] & [G_{zDs}] & [G_{zDz}] & [G_{zDzB}] & [G_{zDzD}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\epsilon^{(1)}\} \\ \{\epsilon^{(A)}\} \\ \{\epsilon^{(E)}\} \\ \{\epsilon^{(s)}\} \\ \{\epsilon^{(z)}\} \\ \{\epsilon^{(zB)}\} \\ \{\epsilon^{(zF)}\} \end{pmatrix} \quad (6.76)$$

$$\begin{pmatrix} \{T_D\} \\ \{T_B\} \\ \{T_c\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [H_{DD}] & [H_{DB}] & [H_{Dc}] \\ [H_{DB}] & [H_{BB}] & [H_{Bc}] \\ [H_{Dc}] & [H_{Bc}] & [H_{cc}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma^{(F)}\} \\ \{\gamma^{(B)}\} \\ \{\gamma^{(c)}\} \end{pmatrix} \quad (6.77)$$

As equações de equilíbrio (5.107)-(5.111) podem ser expressas em relação aos deslocamentos, w_0 , ϕ_x e ϕ_y , para laminados simétricos:

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & G_{zs}(1,1) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + G_{zs}(1,2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - G_{zz}(1,1) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2G_{zz}(1,2) \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \\
 & + G_{zs}(1,2) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + G_{zs}(2,2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} + 2G_{zs}(3,3) \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \right) \\
 & - G_{zz}(2,2) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 4G_{zz}(3,3) \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} = -q
 \end{aligned} \tag{6.78}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & -2\frac{\pi}{h} H_{Bc}(5,5) \phi_x + G_{AA}(1,1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{CA}(1,2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2G_{sA}(1,1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + G_{sA}(1,2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{zA}(1,1) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - G_{zA}(1,2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + 2G_{zBA}(1,1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + G_{zDA}(1,2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{zBC}(1,2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2G_{zBs}(1,1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{zBs}(1,2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
 & - G_{zDz}(1,1) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - G_{zBz}(1,2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + G_{zBzB}(1,1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{zDzB}(1,2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
 & + G_{sC}(1,2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{ss}(1,1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{ss}(1,2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{zs}(1,1) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\
 & - G_{zs}(1,2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + G_{zDs}(1,2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{AA}(3,3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{CA}(3,3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
 & - 2G_{zA}(3,3) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + 2G_{zBA}(3,3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{zDA}(3,3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - H_{BB}(5,5) \phi_x \\
 & - \frac{\pi^2}{h^2} H_{cc}(5,5) \phi_x + G_{zBC}(3,3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - 2G_{zDz}(3,3) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + G_{zBzB}(3,3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \\
 & + G_{zDzB}(3,3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2G_{sA}(3,3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{sC}(3,3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - 2G_{zs}(3,3) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2G_{zBs}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{zDs}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{zBs}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{sA}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
& + G_{ss}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{ss}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned} \tag{6.79}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& 2G_{sC}(2, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{sC}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{CC}(2, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{zDA}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zDs}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDs}(2, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{CA}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDC}(2, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& + G_{zBC}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - G_{zC}(1, 2) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - G_{zC}(2, 2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + G_{CA}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& + G_{CC}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - 2G_{zC}(3, 3) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + G_{zBC}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDC}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& - G_{zDz}(2, 2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + G_{zDzB}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{zDzD}(2, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{ss}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& + G_{zDs}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{ss}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - 2G_{zDz}(3, 3) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\
& + G_{zDzB}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{zDzD}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + G_{sA}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{sC}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& - 2G_{zs}(3, 3) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + G_{zBs}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDs}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - H_{DD}(4, 4) \phi_y \\
& - 2\frac{\pi}{h} H_{Dc}(4, 4) \phi_y + G_{sC}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\pi^2}{h^2} H_{cc}(4, 4) \phi_y + G_{ss}(2, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - G_{zs}(2, 2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + G_{zBs}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{sA}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& + G_{ss}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned} \tag{6.80}$$

6.5.2 Interpolação das equações de equilíbrio

O sistema de equações é aproximado usando o método das multiquádricas, supondo $u_0^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$. Por uma questão de simplificação de escrita, nas equações seguintes, g designa $g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$.

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-G_{zz}(1, 1) \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} - 2G_{zz}(1, 2) \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} - G_{zz}(2, 2) \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} - 4G_{zz}(3, 3) \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[G_{zs}(1, 1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} + 2G_{zs}(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + G_{zs}(2, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} + 2G_{zs}(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \right] = -q \end{aligned} \quad (6.81)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-G_{zA}(1, 1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - G_{zA}(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - G_{zDz}(1, 1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - G_{zBz}(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \right. \\ & - G_{zs}(1, 1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - 2G_{zA}(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - 2G_{zDz}(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \\ & \left. - 2G_{zs}(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-2\frac{\pi}{h} H_{Bc}(5, 5)g + G_{AA}(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{sA}(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{zBA}(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right. \\ & + 2G_{zBs}(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + G_{zBzB}(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + G_{ss}(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + G_{AA}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ & + 2G_{zBA}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - H_{BB}(5, 5)g - \frac{\pi^2}{h^2} H_{cc}(5, 5)g + G_{zBzB}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 2G_{sA}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2G_{zBs}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + G_{ss}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \Big] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \Big[+ G_{CA}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBC}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{sA}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zBs}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDzB}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{sC}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{ss}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zDs}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{CA}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBC}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zDzB}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{sC}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDs}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBs}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{sA}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{ss}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \Big] = 0 \tag{6.82}
\end{aligned}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \Big[- G_{zC}(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - G_{zC}(2, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} - 2G_{zC}(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - G_{zDz}(2, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \\
& - 2G_{zDz}(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - 2G_{zs}(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - G_{zs}(2, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \Big] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \Big[+ G_{sC}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDs}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{CA}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zBC}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{CA}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBC}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDzB}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zDs}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{ss}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDzB}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{sA}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBs}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{sC}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBs}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{sA}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{ss}(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[2G_{sC}(2, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + G_{CC}(2, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 2G_{zDs}(2, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 2G_{zDC}(2, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right. \\
& G_{CC}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{zDC}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + G_{zDzD}(2, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + G_{ss}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\
& + G_{zDzD}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{sC}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{zDs}(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - H_{DD}(4, 4)g \\
& \left. - 2\frac{\pi}{h} H_{Dc}(4, 4)g - \frac{\pi^2}{h^2} H_{cc}(4, 4)g + G_{ss}(2, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.83}$$

6.5.3 Condições de fronteira

As condições de fronteira para um bordo simplesmente apoiado, encastrado e livre são:

(a) Simplesmente apoiado

- SS1, $w = 0$; $M_n = 0$; $M_{ns} = 0$

onde n e s referem-se às direcções normal e tangencial ao bordo, respectivamente. Os momentos e forças resultantes cuja normal de pode representar da forma $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ podem ser expressas por:

$$M_n = n_x^2 M_x + 2n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_y \tag{6.84}$$

$$Q_n = n_x Q_x + n_y Q_y \tag{6.85}$$

$$\theta_n = n_x \theta_x + n_y \theta_y \tag{6.86}$$

$$\theta_s = n_x \theta_y - n_y \theta_x \tag{6.87}$$

Por exemplo para o bordo $x = a$ simplesmente apoiado,

$$w_{(x=a)} = 0 \tag{6.88}$$

$$\phi_{y(x=a)} = 0 \quad (6.89)$$

$$M_{x(x=a)} = Gzs(1, 1) \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + Gzs(1, 2) \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - Gzz(1, 1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - Gzz(1, 2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Usando a interpolação por multiquádricas, obtém-se

$$\sum_{j=1}^N a_j^w g_i = 0 \quad (6.90)$$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} g_i = 0 \quad (6.91)$$

$$\sum_{j=1}^N a_j^w \left[-Gzz(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - Gzz(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] + a_j^{\phi_x} Gzs(1, 1) \frac{\partial g}{\partial x} + a_j^{\phi_y} Gzs(1, 2) \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (6.92)$$

6.6 Teoria de deformação de corte de ordem superior de Kant

6.6.1 Equações de equilíbrio

As equações Euler-Lagrange podem ser escritas em ordem aos deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{S\} \\ \{Q\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] & 0 & 0 \\ [B] & [F] & [G] & 0 & 0 \\ [E] & [G] & [H] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [I] & [K] \\ 0 & 0 & 0 & [K] & [I] \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\epsilon^{(0)}\} \\ \{\epsilon^{(1)}\} \\ \{\epsilon^{(3)}\} \\ \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix} \quad (6.93)$$

onde

$$(A_{ij}, B_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^3, z^2, z^4, z^6) dz; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.94)$$

$$(I_{ij}, K_{ij}, L_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z^2, z^4) dz; \quad i, j = 4, 5 \quad (6.95)$$

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - A_{13} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - A_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & - B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - B_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\ & - E_{11} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - E_{12} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} - E_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) - E_{23} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6.96)$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - A_{23} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - A_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\ & - B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - B_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\ & - E_{12} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} - E_{22} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - E_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) - E_{13} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6.97)$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& -I_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - I_{45} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) - I_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\
& - 3K_{44} \frac{\partial \phi_y^*}{\partial y} - 3K_{45} \left(\frac{\partial \phi_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^*}{\partial x} \right) - 3K_{55} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x} = q
\end{aligned} \tag{6.98}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& -B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{13} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& - F_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - F_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - F_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - F_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
& - G_{11} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} - G_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) - G_{23} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) \\
& + I_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + I_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 3K_{45} \phi_y^* + 3K_{55} \phi_x^* = 0
\end{aligned} \tag{6.99}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& -B_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{23} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\
& - F_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - F_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - F_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\
& - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} - G_{22} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - G_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) - G_{13} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) \\
& + I_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + I_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 3K_{44} \phi_y^* + 3K_{45} \phi_x^* = 0
\end{aligned} \tag{6.100}$$

6ª equação de equilíbrio:

$$-E_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - E_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - E_{13} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - E_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -G_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - G_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
& -H_{11} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - H_{12} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} - H_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) - H_{23} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) \\
& + 3K_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 3K_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 9L_{45} \phi_y^* + 9L_{55} \phi_x^* = 0
\end{aligned} \tag{6.101}$$

7ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& -E_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - E_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - E_{23} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - E_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\
& -G_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - G_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - G_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - G_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\
& -H_{12} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} - H_{22} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - H_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) - H_{13} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) \\
& + 3K_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 3K_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 9L_{44} \phi_y^* + 9L_{45} \phi_x^* = 0
\end{aligned} \tag{6.102}$$

6.6.2 Interpolação das equações de equilíbrio

O sistema de equações é aproximado usando o método das multiquádricas, supondo $u_0^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$. Por uma questão de simplificação de escrita, nas equações seguintes, g designa $g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$.

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j^{u_0} \left[-A_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - A_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{v_0} \left[-A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - A_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x} \left[-B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y} \left[-B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x^*} \left[-E_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y^*} \left[-E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.103}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j^{u_0} \left[-A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - A_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{v_0} \left[-A_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - A_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x} \left[-B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - B_{33} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y} \left[-B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x^*} \left[-E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y^*} \left[-E_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.104}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j^{w_0} \left[-I_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - I_{45} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - I_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x} \left[-I_{45} \frac{\partial g}{\partial y} - I_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y} \left[-I_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - I_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x^*} \left[-3K_{45} \frac{\partial g}{\partial y} - 3K_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y^*} \left[-3K_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - 3K_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] = q
\end{aligned} \tag{6.105}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j^{u_0} \left[-B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{v_0} \left[-B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{w_0} \left[I_{45} \frac{\partial g}{\partial y} + I_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x} \left[-F_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - F_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + I_{55} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y} \left[-F_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - F_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - F_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + I_{45} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x^*} \left[-G_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 3K_{55} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y^*} \left[-G_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 3K_{45} g \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.106}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^{u_0} \left[-B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{v_0} \left[-B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{w_0} \left[I_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + I_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x} \left[-F_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - F_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - F_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + I_{45} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y} \left[-F_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - F_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + I_{44} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x^*} \left[-G_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 3K_{45} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y^*} \left[-G_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 3K_{44} g \right] = 0 \tag{6.107}
\end{aligned}$$

6ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j^{u_0} \left[-E_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{v_0} \left[-E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{w_0} \left[3K_{45} \frac{\partial g}{\partial y} + 3K_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x} \left[-G_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 3K_{55} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y} \left[-G_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 3K_{45} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x^*} \left[-H_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - H_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 9L_{55} g \right]
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y^*} \left[-H_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - H_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - H_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 9L_{45}g \right] = 0 \quad (6.108)$$

7ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^{u_0} \left[-E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{v_0} \left[-E_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{23} \frac{2\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{w_0} \left[3K_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + 3K_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x} \left[-G_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 3K_{45}g \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y} \left[-G_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{23} \frac{2\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 3K_{44}g \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_x^*} \left[-H_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - H_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - H_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 9L_{45}g \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \alpha_j^{\phi_y^*} \left[-H_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - H_{23} \frac{2\partial^2 g}{\partial x \partial y} - H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 9L_{44}g \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.109)$$

6.6.3 Condições de fronteira

As condições de fronteira num bordo simplesmente apoiado (S-simply supported) são:

(a) Simplesmente apoiado

- SS1, $u_t = 0$; $w = 0$; $N_n = 0$; $M_n = 0$; $S_n = 0$; $\phi_t = 0$; $\phi_t^* = 0$

No caso de uma placa rectangular, com bordos em $x = 0$, $x = a$ e $y = 0$, $y = b$, as condições de fronteira podem escrever-se:

nos bordos $x = 0, x = a$:

$$M_{xx} = 0; N_{xx} = 0; S_{xx} = 0; \phi_y = 0; \phi_y^* = 0; u_t = v_0 = 0; w_0 = 0; \quad (6.110)$$

nos bordos $y = 0, y = b$:

$$M_{yy} = 0; N_{yy} = 0; S_{yy} = 0; \phi_x = 0; \phi_x^* = 0; u_t = u_0 = 0; w_0 = 0; \quad (6.111)$$

As condições de fronteira relacionam-se com os deslocamentos da forma:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &+ z^3 \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^*}{\partial x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.112)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &+ z^3 \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^*}{\partial x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.113)$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\
&+ z^3 \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^*}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.114)
\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{44} & I_{45} \\ I_{45} & I_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} + 3z^2 \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_y^* \\ \phi_x^* \end{Bmatrix} \quad (6.115)$$

$$\begin{Bmatrix} T_y \\ T_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} + 3z^2 \begin{bmatrix} L_{44} & L_{45} \\ L_{45} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_y^* \\ \phi_x^* \end{Bmatrix} \quad (6.116)$$

As interpolações são feitas do modo habitual, por exemplo, para o bordo em $x = 0$ e $x = a$ tem-se

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[E_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + E_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[E_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \quad (6.117)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{xx} &= \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + B_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[F_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + F_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[F_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + F_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[G_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + G_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[G_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + G_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \quad (6.118)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{xx} = & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[E_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + E_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[E_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[G_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + G_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[G_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + G_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[H_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + H_{13} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[H_{12} \frac{\partial g}{\partial y} + H_{13} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \quad (6.119)
\end{aligned}$$

6.7 Exemplos numéricos

Para o estudo da deformação estática de placas à flexão, foram escolhidos quatro exemplos para testar as diferentes teorias de deformação.

- placa quadrada isotrópica sob carga uniforme
- placa quadrada compósita $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal
- placa sanduiche quadrada sob carga uniforme
- placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades

6.7.1 Placa quadrada isotrópica, sob carga uniforme

Neste exemplo é considerada uma placa isotrópica simplesmente apoiada, de lado a e altura total h , sujeita a uma carga uniforme, q (figura 6.3).

As propriedades materiais da placa são:

$$E = E_1 = E_2 = 10920; \quad G_{23} = E_2/2.5; \quad G_{12} = G_{13} = G_{23}; \quad \nu_{12} = \nu_{21} = 0.25$$

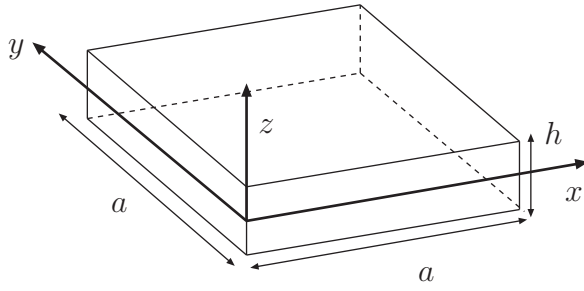


Figura 6.3: Placa rectangular isotrópica

Os resultados numéricos são normalizados da seguinte forma:

$$\bar{w} = \frac{Ewh^3 10^2}{qa^4}; \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx} h^2}{qa^2};$$

Os resultados são comparados com uma teoria de deformação de primeira ordem de Reddy (FSDT) implementada com elementos finitos [Reddy, 1993], e com um valor considerado exacto [Reddy, 1984a]. Neste exemplo, o parâmetro de forma usado é $c = 2/\sqrt{n}$.

Os resultados numéricos para a teoria FSDT são apresentados na tabela 6.1. Uma conclusão geral desta tese é que o parâmetro de forma c tem um papel muito importante quer nos resultados obtidos, quer na convergência da solução com o número de pontos da rede. Neste caso em particular, pode-se observar alguns problemas de convergência, que talvez possam ser resolvidos com outra escolha do parâmetro de forma.

Tabela 6.1: Teoria FSDT. Placa quadrada isotrópica sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$
10	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.770	0.2899
	exacto [Reddy, 1984a]	4.791	0.2762
	presente (n=11)	5.2987	0.2716
	presente (n=15)	4.9740	0.2751
	presente (n=21)	5.2251	0.2794
20	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.570	0.2683
	exacto [Reddy, 1984a]	4.625	0.2762
	presente (n=11)	4.5642	0.2738
	presente (n=15)	4.5939	0.2753
	presente (n=21)	4.7344	0.2846
50	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.496	0.2667
	exacto [Reddy, 1984a]	4.579	0.2762
	presente (n=11)	4.6763	0.2806
	presente (n=15)	4.5836	0.2766
	presente (n=21)	4.5593	0.2754
100	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.482	0.2664
	exacto [Reddy, 1984a]	4.572	0.2762
	presente (n=11)	4.8015	0.2867
	presente (n=15)	4.6023	0.2777
	presente (n=21)	4.5708	0.2751

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Os resultados numéricos para a teoria TSDT são apresentados na tabela 6.2. Podem-se observar na tabela 6.2 que os resultados obtidos são ligeiramente melhores que os obtidos pelo método dos elementos finitos em [Reddy, 1993], e tendem a convergir para a solução considerada exacta [Reddy, 1984a]. Os resultados da tabela 6.2 estão representados graficamente na figura 6.4. Desta forma torna-se fácil observar a dependência da deflexão central da placa com a razão a/h . À medida que o valor de a/h aumenta, para o mesmo valor de carga, a deflexão central da placa diminui, estabilizando em torno de $a/h = 50$.

Tabela 6.2: Teoria TSDT. Placa quadrada isotrópica sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$
10	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.770	0.2899
	exacto [Reddy, 1984a]	4.791	0.2762
	presente (n=11) [Ferreira, 2003]	4.7015	0.2739
	presente (n=15) [Ferreira, 2003]	4.7634	0.2767
	presente (n=21) [Ferreira, 2003]	4.7866	0.2777
20	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.570	0.2683
	exacto [Reddy, 1984a]	4.625	0.2762
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	4.5594	0.2737
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	4.5983	0.2755
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	4.6132	0.2761
50	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.496	0.2667
	exacto [Reddy, 1984a]	4.579	0.2762
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	4.6341	0.2787
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	4.5735	0.2761
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	4.5753	0.2762
100	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.482	0.2664
	exacto [Reddy, 1984a]	4.572	0.2762
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	4.7525	0.2844
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	4.5925	0.2772
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	4.5737	0.2764

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

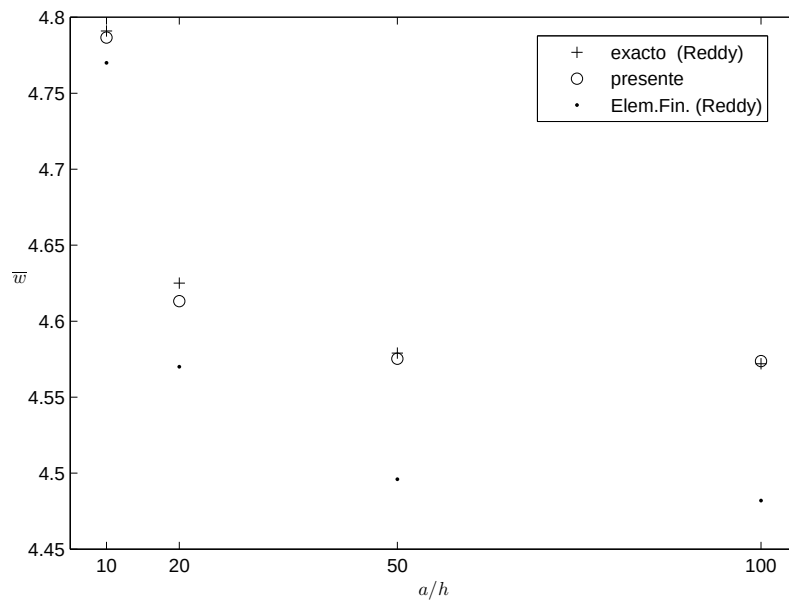


Figura 6.4: Teoria TSDT. Deflexão do ponto central de uma placa quadrada isotrópica para diferentes teorias de deformação e métodos numéricos, $n = 21$

A deformada central $\bar{w}$ e as tensões $\bar{\sigma}_{xx}$ calculadas com a teoria trigonométrica são apresentadas na tabela 6.3. Da análise da tabela 6.3 podemos concluir que para placas isotrópicas, a teoria trigonométrica parece não apresentar vantagens sobre a teoria de terceira ordem de Reddy. Na figura 6.5 pode-se observar o perfil em cosseno do deslocamento u_0 ao longo da espessura da placa.

Tabela 6.3: Teoria trigonométrica. Placa isotrópica sob carga uniforme

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$
10	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.770	0.2899
	exacto [Reddy, 1984a]	4.791	0.2762
	TSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=21)	4.7866	0.2777
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	4.7484	0.2762
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	4.7792	0.2775
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.7883	0.2779
20	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.570	0.2683
	exacto [Reddy, 1984a]	4.625	0.2762
	TSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=21)	4.6132	0.2761
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	4.5830	0.2749
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	4.6127	0.2761
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.6158	0.2765
50	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.496	0.2667
	exacto [Reddy, 1984a]	4.579	0.2762
	TSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=21)	4.5753	0.2762
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	4.5367	0.2745
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	4.5660	0.2758
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.5781	0.2763
100	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.482	0.2664
	exacto [Reddy, 1984a]	4.572	0.2762
	TSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=21)	4.5737	0.2764
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	4.5300	0.2744
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	4.5592	0.2757
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.5715	0.2762

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria trigonométrica

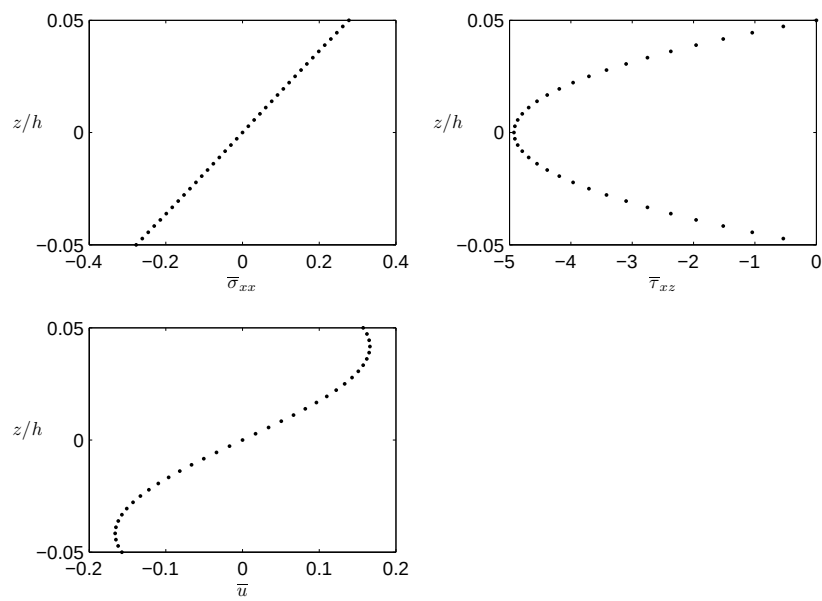


Figura 6.5: Teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento $\bar{u}$ para uma placa isotrópica quadrada com $n = 15$, $a/h = 10$

Tabela 6.4: Teoria ziguezague trigonométrica. Deformação do ponto central $\bar{w}$, e tensão $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa isotrópica sob carga uniforme

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$
10	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.770	0.2899
	exacto [Reddy, 1984a]	4.791	0.2762
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n=21$ [Ferreira et al., 2003]	4.7866	0.2777
	presente ($n=11$) [Roque et al., 2005]	4.7484	0.2762
	presente ($n=15$) [Roque et al., 2005]	4.7792	0.2775
	presente ($n=21$) [Roque et al., 2005]	4.7883	0.2779
20	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.570	0.2683
	exacto [Reddy, 1984a]	4.625	0.2762
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n=21$ [Ferreira et al., 2003]	4.6132	0.2761
	presente ($n=11$) [Roque et al., 2005]	4.5830	0.2749
	presente ($n=15$) [Roque et al., 2005]	4.6127	0.2761
	presente ($n=21$) [Roque et al., 2005]	4.6158	0.2765
50	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.496	0.2667
	exacto [Reddy, 1984a]	4.579	0.2762
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n=21$ [Ferreira et al., 2003]	4.5753	0.2762
	presente ($n=11$) [Roque et al., 2005]	4.5367	0.2745
	presente ($n=15$) [Roque et al., 2005]	4.5660	0.2758
	presente ($n=21$) [Roque et al., 2005]	4.5781	0.2763
100	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.482	0.2664
	exacto [Reddy, 1984a]	4.572	0.2762
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n=21$ [Ferreira et al., 2003]	4.5737	0.2764
	presente ($n=11$) [Roque et al., 2005]	4.5300	0.2744
	presente ($n=15$) [Roque et al., 2005]	4.5592	0.2757
	presente ($n=21$) [Roque et al., 2005]	4.5715	0.2762

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

Os resultados numéricos apresentados na tabela 6.4 são obtidos usando a teoria ziguezague trigonométrica. A tabela 6.4 apresenta os valores de $\bar{w}$ e $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma carregamento uniforme, e para vários quocientes a/h . Uma vez que neste exemplo $A = B = C = D = 0$, a teoria ziguezague trigonométrica é igual à teoria trigonométrica utilizada anteriormente.

Por último, apresentam-se os resultados obtidos para a teoria de ordem superior de Kant. Os resultados são idênticos aos resultados obtidos com a teoria de terceira ordem de Reddy (tabela 6.5).

Tabela 6.5: Placa quadrada isotrópica sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$
10	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.770	0.2899
	exacto [Reddy, 1984a]	4.791	0.2762
	presente (n=11)	4.6867	0.2732
	presente (n=15)	4.7533	0.2762
	presente (n=21)	4.7812	0.2775
20	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.570	0.2683
	exacto [Reddy, 1984a]	4.625	0.2762
	presente (n=11)	4.5714	0.2742
	presente (n=15)	4.5971	0.2754
	presente (n=21)	4.6183	0.2764
50	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.496	0.2667
	exacto [Reddy, 1984a]	4.579	0.2762
	presente (n=11)	4.6762	0.2806
	presente (n=15)	4.5807	0.2764
	presente (n=21)	4.5744	0.2762
100	FSDT elementos finitos [Reddy, 1993]	4.482	0.2664
	exacto [Reddy, 1984a]	4.572	0.2762
	presente (n=11)	4.8012	0.2867
	presente (n=15)	4.6027	0.2777
	presente (n=21)	4.5741	0.2764

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

6.7.2 Laminado $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal

Neste exemplo considera-se uma placa laminada simplesmente apoiada com camadas igualmente espaçadas e empilhamento $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com lado a e altura total h . A placa é sujeita a uma carga sinusoidal da forma (figura 6.6):

$$p_z = P \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

As propriedades mecânicas do laminado são:

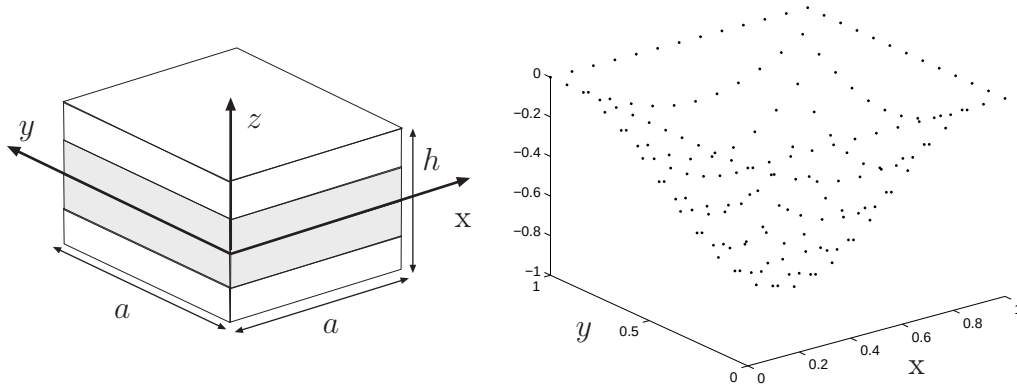


Figura 6.6: a-Placa $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ b-Aplicação de carga sinusoidal no domínio $[0, 1] \times [0, 1]$

$$E_1 = 25.0E_2; \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; \quad G_{23} = 0.2E_2; \quad \nu_{12} = 0.25$$

Os resultados numéricos encontram-se normalizados pelas expressões:

$$\bar{w} = \frac{10^2 w h^3 E_2}{P a^4}; \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx} h^2}{P a^2}; \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{\sigma_{yy} h^2}{P a^2}; \quad \bar{\tau}_{zx} = \frac{\tau_{zx} h}{P a}; \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} h^2}{P a^2}$$

Os resultados são comparados com uma teoria de deformação de corte de ordem superior implementada com o método 3 strip (método das tiras finitas) [Akhras et al., 1994], uma solução analítica da teoria HSDT [Reddy, 1984b], uma teoria de primeira ordem com factor de correcção de corte $k = 5/6$ [Akhras et al., 1993], e com a análise de elasticidade tridimensional [Pagano, 1970]. O parâmetro de forma usado é $c = 2/\sqrt{n}$.

Os resultados deste exemplo para a teoria FSDT encontram-se na tabela 6.6. Neste caso, o método apresenta uma boa convergência, para as deformações e para as tensões.

Também é possível observar que de facto a teoria de primeira ordem não é adequada para a análise de placas espessas. Há medida que o quociente a/h diminui, a solução de primeira ordem afasta-se da solução tridimensional da elasticidade, quer para a deformada, quer para as tensões. A solução obtida pelo método das multiquádricas é idêntica à solução obtida por 3 strip, usando a teoria de primeira ordem, excepto no caso da tensão de corte τ_{zx} .

Tabela 6.6: Teoria FSDT. Placa laminada quadrada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sob carga sinusoidal, $c = 2/\sqrt{n}$

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	1.8939	0.6806	0.6463	0.2109	0.0450
	HSDT [Reddy, 1984b]	1.8937	0.6651	0.6322	0.2064	0.0440
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	1.7100	0.4059	0.5765	0.1398	0.0308
	Elasticidade [Pagano, 1970]	1.954	0.720	0.666	0.270	0.0467
	presente (n=11)	1.7048	0.4027	0.5741	0.2508	0.0305
	presente (n=15)	1.7081	0.4050	0.5757	0.2610	0.0307
	presente (n=21)	1.7092	0.4057	0.5763	0.2660	0.0308
10	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.7149	0.5589	0.3974	0.2697	0.0273
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.7147	0.5456	0.3888	0.2640	0.0268
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.6628	0.4989	0.3615	0.1667	0.0241
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.743	0.559	0.403	0.301	0.0276
	presente (n=11)	0.6594	0.4958	0.3599	0.2970	0.0239
	presente (n=15)	0.6617	0.4980	0.3610	0.3090	0.0241
	presente (n=21)	0.6625	0.4987	0.3613	0.3150	0.0241
20	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.5061	0.5523	0.3110	0.2883	0.0233
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.5060	0.5393	0.3043	0.2825	0.0228
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4912	0.5273	0.2957	0.1749	0.0221
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.517	0.543	0.309	0.328	0.0230
	presente (n=11)	0.4891	0.5256	0.2943	0.3137	0.0219
	presente (n=15)	0.4905	0.5268	0.2952	0.3248	0.0220
	presente (n=21)	0.4910	0.5272	0.2956	0.3304	0.0221
100	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.4343	0.5507	0.2769	0.2948	0.0217
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.4343	0.5387	0.2708	0.2897	0.0213
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4337	0.5382	0.2705	0.1780	0.0213
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.4347	0.539	0.271	0.339	0.0214
	presente (n=11)	0.4577	0.5635	0.2783	0.3878	0.0233
	presente (n=15)	0.4402	0.5451	0.2726	0.3615	0.0219
	presente (n=21)	0.4351	0.5398	0.2709	0.3470	0.0214

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Os resultados para a teoria TSDT encontram-se na tabela 6.7, e a deformação central pode ser graficamente comparada para as várias soluções, na figura 6.7. Mais uma vez se confirma que as teorias de terceira ordem adequam-se melhor a placas espessas do que as teorias de primeira ordem.

Tabela 6.7: Teoria TSDT. Placa laminada quadrada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sob carga sinusoidal, $c = 2/\sqrt{n}$

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	1.8939	0.6806	0.6463	0.2109	0.0450
	HSDT [Reddy, 1984b]	1.8937	0.6651	0.6322	0.2064	0.0440
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	1.7100	0.4059	0.5765	0.1398	0.0308
	Elasticidade [Pagano, 1970]	1.954	0.720	0.666	0.270	0.0467
	presente (n=11) [Ferreira, 2003]	1.8804	0.6665	0.6292	0.1415	0.0423
	presente (n=15) [Ferreira, 2003]	1.8846	0.6660	0.6307	0.1372	0.0429
	presente (n=21) [Ferreira, 2003]	1.8864	0.6659	0.6313	0.1352	0.0433
10	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.7149	0.5589	0.3974	0.2697	0.0273
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.7147	0.5456	0.3888	0.2640	0.0268
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.6628	0.4989	0.3615	0.1667	0.0241
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.743	0.559	0.403	0.301	0.0276
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	0.7142	0.5464	0.4380	0.3267	0.0264
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	0.7150	0.5465	0.4382	0.3305	0.0266
20	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.5061	0.5523	0.3110	0.2883	0.0233
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.5060	0.5393	0.3043	0.2825	0.0228
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4912	0.5273	0.2957	0.1749	0.0221
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.517	0.543	0.309	0.328	0.0230
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	0.5074	0.5413	0.3650	0.3744	0.0227
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	0.5071	0.5407	0.3649	0.3789	0.0228
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	0.5070	0.5405	0.3648	0.3818	0.0228
100	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.4343	0.5507	0.2769	0.2948	0.0217
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.4343	0.5387	0.2708	0.2897	0.0213
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4337	0.5382	0.2705	0.1780	0.0213
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.4347	0.539	0.271	0.339	0.0214
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	0.4535	0.5596	0.3427	0.4417	0.0229
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	0.4406	0.5456	0.3376	0.4223	0.0218
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	0.4365	0.5413	0.3359	0.4106	0.0215

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

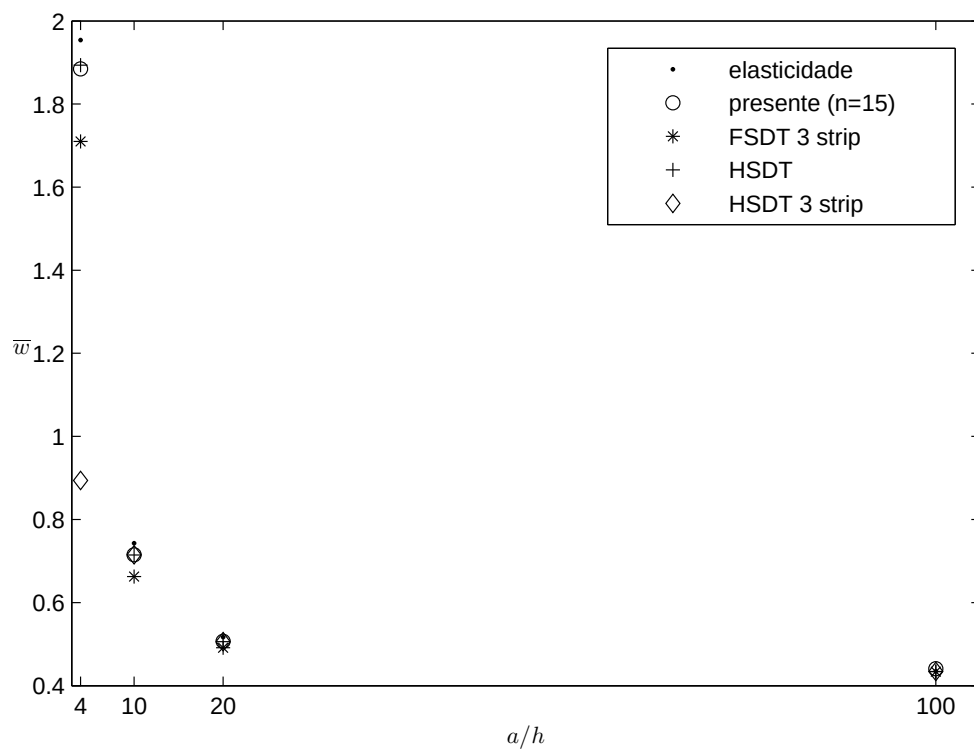


Figura 6.7: Teoria TSDT. Deflexão do ponto central de uma placa laminada quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para diferentes quocientes a/h .

Para a teoria trigonométrica, os resultados obtidos são apresentados na tabela 6.8. Na generalidade, os resultados são melhores que os resultados produzidos pela teoria de deformação de terceira ordem de Reddy, mas não de forma significativa. A figura 6.8 mostra a variação das tensões σ_{xx} , τ_{xz} e do deslocamento u ao longo da espessura da placa. É possível observar o perfil em cosseno do deslocamento, bem como a mudança de comportamento das tensões, nas interfaces do laminado.

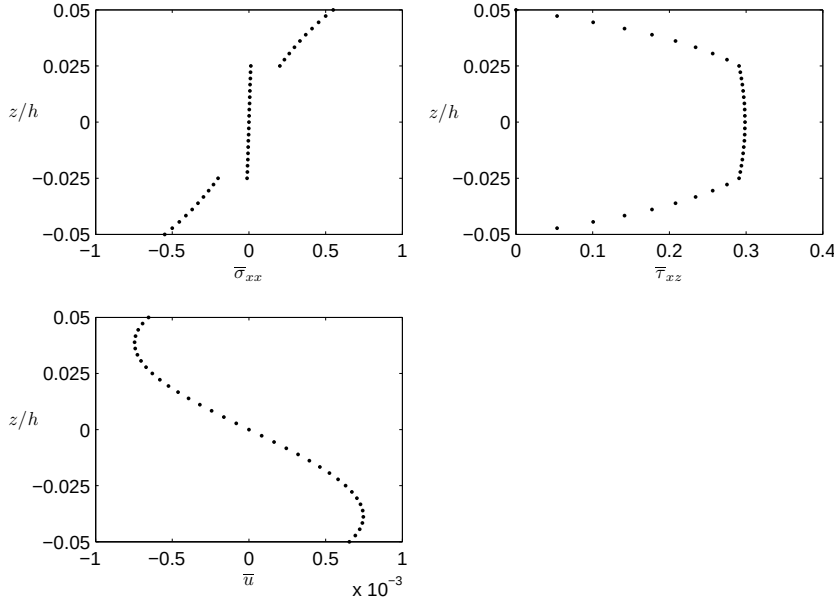


Figura 6.8: Teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento $\bar{u}$ para uma placa quadrada cross-ply com $n = 15$, $a/h = 10$

Os resultados normalizados para a teoria ziguezague trigonométrica são apresentados na tabela 6.9. As figuras 6.9, 6.10 representam as tensões $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ e o deslocamento $\bar{u}$ ao longo da espessura do laminado, para as teorias trigonométrica e ziguezague trigonométrica. Embora para este caso se tratem de valores pouco significativos, é visível a influência dos parâmetros A^k , B^k , C^k e D^k no comportamento das tensões e do deslocamento. Os resultados são idênticos aos resultados obtidos com as teorias de deformação de terceira ordem de Reddy e a teoria trigonométrica.

Tabela 6.8: Teoria trigonométrica. Placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	3 strip [Akhras et al., 1994]	1.8939	0.6806	0.6463	0.2109	0.0450
	HSDT [Reddy, 1984b]	1.8937	0.6651	0.6322	0.2064	0.0440
	FSDT [Akhras et al., 1993]	1.7100	0.4059	0.5765	0.1398	0.0308
	Elasticidade [Pagano, 1970]	1.954	0.720	0.666	0.270	0.0467
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=21) [Ferreira et al., 2003]	1.8864	0.6659	0.6313	0.1352	0.0433
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	1.8869	0.6876	0.6288	0.2154	0.0417
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	1.8950	0.6863	0.6307	0.2116	0.0431
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	1.8987	0.6856	0.6316	0.2093	0.0438
10	3 strip [Akhras et al., 1994]	0.7149	0.5589	0.3974	0.2697	0.0273
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.7147	0.5456	0.3888	0.2640	0.0268
	FSDT [Akhras et al., 1993]	0.6628	0.4989	0.3615	0.1667	0.0241
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.743	0.559	0.403	0.301	0.0276
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=21) [Ferreira et al., 2003]	0.7153	0.5466	0.4383	0.3347	0.0267
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	0.7169	0.5487	0.3903	0.2949	0.0260
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	0.7188	0.5491	0.3907	0.2986	0.0265
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	0.7194	0.5491	0.6909	0.2999	0.0266
20	3 strip [Akhras et al., 1994]	0.5061	0.5523	0.3110	0.2883	0.0233
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.5060	0.5393	0.3043	0.2825	0.0228
	FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4912	0.5273	0.2957	0.1749	0.0221
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.517	0.543	0.309	0.328	0.0230
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=21) [Ferreira et al., 2003]	0.5070	0.5405	0.3648	0.3818	0.0228
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	0.5057	0.5395	0.3046	0.3184	0.0222
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	0.5071	0.5401	0.3049	0.3239	0.0226
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	0.5074	0.5401	0.3050	0.3268	0.0228
100	3 strip [Akhras et al., 1994]	0.4343	0.5507	0.2769	0.2948	0.0217
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.4343	0.5387	0.2708	0.2897	0.0213
	FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4337	0.5382	0.2705	0.1780	0.0213
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.4347	0.539	0.271	0.339	0.0214
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=21) [Ferreira et al., 2003]	0.4365	0.5413	0.3359	0.4106	0.0215
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	0.4327	0.5380	0.2704	0.3274	0.0207
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	0.4340	0.5386	0.2708	0.3335	0.0211
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	0.4339	0.5384	0.2707	0.3360	0.0213

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria trigonométrica

Tabela 6.9: Teoria ziguezague trigonométrica. Placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	1.8939	0.6806	0.6463	0.2109	0.0450
	HSDT [Reddy, 1984b]	1.8937	0.6651	0.6322	0.2064	0.0440
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	1.7100	0.4059	0.5765	0.1398	0.0308
	elasticidade [Pagano, 1970]	1.954	0.720	0.666	0.270	0.0467
	HSDT, MQ [Ferreira et al., 2003] (n=21)	1.8864	0.6659	0.6313	0.1352	0.0433
	ziguezague [Ferreira, 2005] (n=21)	1.9075	0.6432	0.6228	0.2166	0.0441
	trigonométrico [Ferreira et al., 2005b] (n=21)	1.8987	0.6856	0.6316	0.2093	0.0438
	presente (n=11)[Roque et al., 2005]	1.8703	0.7580	0.6734	0.1975	0.0400
	presente (n=15)[Roque et al., 2005]	1.8800	0.7566	0.6764	0.1925	0.0414
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	1.8842	0.7560	0.6777	0.1885	0.0430
10	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.7149	0.5589	0.3974	0.2697	0.0273
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.7147	0.5456	0.3888	0.2640	0.0268
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.6628	0.4989	0.3615	0.1667	0.0241
	elasticidade [Pagano, 1970]	0.743	0.559	0.403	0.301	0.0276
	HSDT, MQ [Ferreira et al., 2003] (n=21)	0.7153	0.5466	0.4383	0.3347	0.0267
	ziguezague [Ferreira, 2005] (n=21)	0.7309	0.5496	0.3956	0.2888	0.0273
	trigonométrico [Ferreira et al., 2005b] (n=21)	0.7194	0.5491	0.6909	0.2999	0.0266
	presente (n=11)[Roque et al., 2005]	0.7320	0.5635	0.4046	0.2865	0.0264
	presente (n=15)[Roque et al., 2005]	0.7341	0.5638	0.4052	0.2897	0.0269
	presente (n=21)[Roque et al., 2005]	0.7350	0.5637	0.4055	0.2908	0.0272
20	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.5061	0.5523	0.3110	0.2883	0.0233
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.5060	0.5393	0.3043	0.2825	0.0228
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4912	0.5273	0.2957	0.1749	0.0221
	elasticidade [Pagano, 1970]	0.517	0.543	0.309	0.328	0.0230
	HSDT, MQ [Ferreira, 2005] (n=21)	0.5070	0.5405	0.3648	0.3818	0.0228
	ziguezague [Ferreira et al., 2003] (n=21)	0.5121	0.5417	0.3056	0.3248	0.0230
	trigonométrico [Ferreira et al., 2005b] (n=21)	0.5074	0.5401	0.3050	0.3268	0.0228
	presente (n=11)[Roque et al., 2005]	0.5109	0.5434	0.3089	0.3146	0.0223
	presente (n=15)[Roque et al., 2005]	0.5123	0.5440	0.3093	0.3201	0.0227
	presente (n=21)[Roque et al., 2005]	0.5127	0.5440	0.3094	0.3203	0.0223
100	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.4343	0.5507	0.2769	0.2948	0.0217
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.4343	0.5387	0.2708	0.2897	0.0213
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4337	0.5382	0.2705	0.1780	0.0213
	elasticidade [Pagano, 1970]	0.4347	0.539	0.271	0.339	0.0214
	HSDT, MQ [Ferreira et al., 2003] (n=21)	0.4365	0.5413	0.3359	0.4106	0.0215
	ziguezague [Ferreira, 2005] (n=21)	0.4374	0.5420	0.2697	0.3232	0.0216
	trigonométrico [Ferreira et al., 2005b] (n=21)	0.4339	0.5384	0.2707	0.3360	0.0213
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	0.4329	0.5381	0.2706	0.3256	0.0208
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	0.4342	0.5387	0.2710	0.3319	0.0211
	presente (n=21)[Roque et al., 2005]	0.4345	0.5388	0.2710	0.3354	0.0213

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

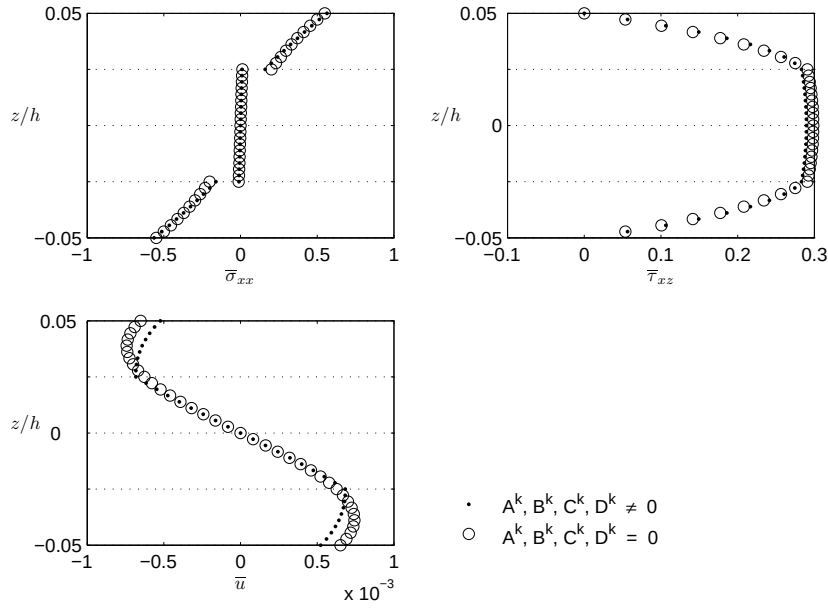


Figura 6.9: Teoria zigzeague trigonométrica e teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento, $\bar{u}$ para uma placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $n = 15$, $a/h = 10$

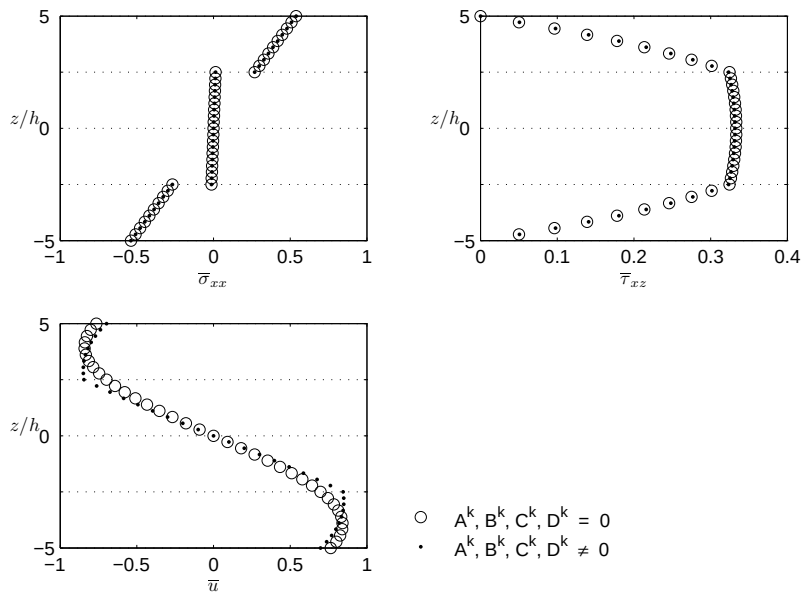


Figura 6.10: Teoria zigzeague trigonométrica e teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento, $\bar{u}$ para uma placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $n = 15$, $a/h = 100$

A teoria de ordem superior de Kant não apresenta melhorias significativas em relação aos resultados obtidos com a teoria de terceira ordem de Reddy. Os resultados para o exemplo da placa com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ para esta teoria de deformação encontram-se na tabela 6.10.

Tabela 6.10: Teoria de ordem superior de Kant. Placa laminada quadrada $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ sob carga sinusoidal, $c = 2/\sqrt{n}$

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	1.8939	0.6806	0.6463	0.2109	0.0450
	HSDT [Reddy, 1984b]	1.8937	0.6651	0.6322	0.2064	0.0440
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	1.7100	0.4059	0.5765	0.1398	0.0308
	Elasticidade [Pagano, 1970]	1.954	0.720	0.666	0.270	0.0467
	presente (n=11)	1.8971	0.7025	0.6282	0.2121	0.0457
	presente (n=15)	1.9008	0.7047	0.6301	0.2206	0.0460
	presente (n=21)	1.9020	0.7055	0.6307	0.2249	0.0461
10	3 strip [Akhras et al., 1994]	0.7149	0.5589	0.3974	0.2697	0.0273
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.7147	0.5456	0.3888	0.2640	0.0268
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.6628	0.4989	0.3615	0.1667	0.0241
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.7430	0.5590	0.4030	0.3010	0.0276
	presente (n=11)	0.7174	0.5579	0.3896	0.2849	0.0270
	presente (n=15)	0.7195	0.5600	0.3906	0.2963	0.0272
	presente (n=21)	0.7202	0.5607	0.3910	0.3020	0.0273
20	3 strip [Akhras et al., 1994]	0.5061	0.5523	0.3110	0.2883	0.0233
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.5060	0.5393	0.3043	0.2825	0.0228
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4912	0.5273	0.2957	0.1749	0.0221
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.517	0.543	0.309	0.328	0.0230
	presente (n=11)	0.5063	0.5423	0.3040	0.3106	0.0228
	presente (n=15)	0.5073	0.5432	0.3048	0.3211	0.0229
	presente (n=21)	0.5077	0.5435	0.3051	0.3265	0.0229
100	3 strip [Akhras et al., 1994]	0.4343	0.5507	0.2769	0.2948	0.0217
	HSDT [Reddy, 1984b]	0.4343	0.5387	0.2708	0.2897	0.0213
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4337	0.5382	0.2705	0.1780	0.0213
	Elasticidade [Pagano, 1970]	0.4347	0.539	0.271	0.339	0.0214
	presente (n=11)	0.4618	0.5674	0.2802	0.3969	0.0236
	presente (n=15)	0.4417	0.5466	0.2733	0.3648	0.0220
	presente (n=21)	0.4360	0.5406	0.2714	0.3484	0.0214

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

6.7.3 Sanduiche compósita sob carga uniforme

Uma sanduiche quadrada simplesmente apoiada de lado a , e altura total h é submetida a uma carga uniforme, q . A matriz de rigidez do núcleo da sanduiche, $\bar{Q}_{\text{núcleo}}$ é dada por:

$$\bar{Q}_{\text{núcleo}} = \begin{bmatrix} 0.999781 & 0.231192 & 0 & 0 & 0 \\ 0.231192 & 0.524886 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.262931 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.266810 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.159914 \end{bmatrix}$$

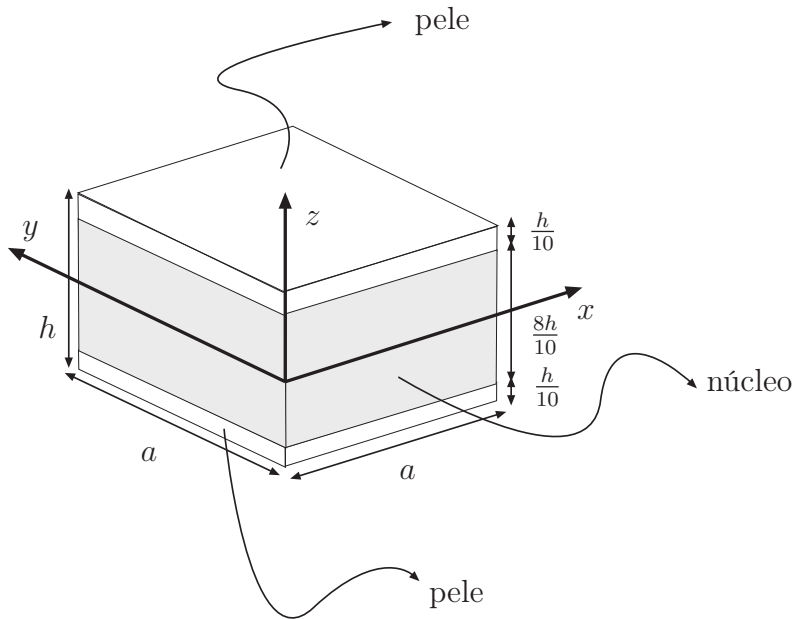


Figura 6.11: Esquema da placa sanduiche quadrada com altura total h e largura a

A matriz de rigidez das peles $\bar{Q}_{\text{pele}}$ relaciona-se com a matriz de rigidez do núcleo por um factor R ,

$$\bar{Q}_{\text{pele}} = R\bar{Q}_{\text{núcleo}}$$

A deflexão transversal e as tensões apresentadas são normalizadas pelas expressões:

$$\bar{w} = w \frac{0.999781}{hq}; \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{q}; \quad \bar{\tau}_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{q}$$

A solução calculada com o método das multiquádras é comparado com formulações de elementos finitos de primeira ordem e de ordem superior [Pandya e Kant, 1988], uma formulação de primeira ordem com o método da multiquádras [Ferreira, 2003], uma formulação de primeira ordem com correcção de corte (calculado pelo método exposto em 5.3.4, equação (5.50)) implementada com elementos finitos [Ferreira, 1997], uma formulação considerada exacta [Srinivas, 1973] e a teoria clássica dos laminados (CLT). O parâmetro de forma usado é $c = 2/\sqrt{n}$.

Na tabela 6.11 encontram-se valores da deflexão do ponto central, $\bar{w}$ calculadas para a teoria FSDT. O quociente a/h é igual a 10, e o parâmetro de forma é igual a $2/\sqrt{n}$. Os resultados obtidos para as tensões e de referência encontram-se nas tabelas, 6.12, 6.13 e 6.14.

É fácil de observar como esta teoria de primeira ordem com factor de correcção de 5/6 é desadequada para a análise deste problema, principalmente quando o valor de R é grande.

Comparando com os resultados obtidos por Ferreira [1997] e Akhras et al. [1993], é possível mostrar como um cálculo correcto do factor de correcção de corte é muito importante nesta teoria de primeira ordem. Os resultados obtidos com a teoria de primeira ordem e multiquádras aproximam-se dos resultados de primeira ordem calculada com elementos finitos [Akhras et al., 1993], uma vez que as duas formulações usam o mesmo factor de correcção de corte. A teoria que mais se aproxima da solução exacta é a teoria de primeira ordem encontrada em Ferreira [1997]. Este resultado demonstra que a teoria de primeira ordem, com um factor de correcção de corte adequado pode obter melhores resultados que a teoria de terceira ordem, que não necessita de factores de correcção de corte [Akhras et al., 1993].

Tabela 6.11: Teoria FSDT. Deflexão do ponto central de uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$, $a/h = 10$

R	Método	$\bar{w}$ (a/2,a/2,0)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	256.13
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	236.10
	CLT	216.94
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	258.74
	exacto [Srinivas, 1973]	258.97
	presente (n=11)	234.1509
	presente (n=15)	237.7464
	presente (n=21)	239.1255
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	152.33
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	131.095
	CLT	118.87
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	159.402
	exacto [Srinivas, 1973]	159.38
	presente (n=11)	130.3019
	presente (n=15)	132.2992
	presente (n=21)	133.0572
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	110.43
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	90.85
	CLT	81.768
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	121.821
	exacto [Srinivas, 1973]	121.72
	presente (n=11)	90.3963
	presente (n=15)	91.7792
	presente (n=21)	92.2969

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 6.12: Teoria FSDT. Tensões $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{\sigma}_{xx}^1$	$\bar{\sigma}_{xx}^2$	$\bar{\sigma}_{xx}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	62.38	46.91	9.382
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	61.87	49.50	9.899
	CLT	61.141	48.623	9.783
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	59.21	45.61	9.122
	exacto [Srinivas, 1973]	60.353	46.623	9.340
	presente (n=11)	58.8839	47.1071	9.4214
	presente (n=15)	59.6543	47.7234	9.5447
	presente (n=21)	59.9487	47.9589	9.5918
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	64.65	51.31	5.131
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	67.80	54.24	4.424
	CLT	65.332	48.857	5.356
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	64.16	47.72	4.772
	exacto [Srinivas, 1973]	65.332	48.857	4.903
	presente (n=11)	64.2603	51.4082	5.1408
	presente (n=15)	65.1134	52.0907	5.2091
	presente (n=21)	65.4355	52.3484	5.2348
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	66.62	51.97	3.465
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	70.04	56.03	3.753
	CLT	69.135	55.308	3.687
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	65.650	47.09	3.140
	exacto [Srinivas, 1973]	66.787	48.299	3.238
	presente (n=11)	66.2573	53.0058	3.5337
	presente (n=15)	67.1419	53.7135	3.5809
	presente (n=21)	67.4720	53.9776	3.5985

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 6.13: Teoria FSDT. Tensões $\bar{\sigma}_{yy}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{\sigma}_{yy}^1$	$\bar{\sigma}_{yy}^2$	$\bar{\sigma}_{yy}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	38.93	30.33	6.065
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	36.65	29.32	5.864
	CLT	36.622	29.297	5.860
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	37.88	29.59	5.918
	exacto [Srinivas, 1973]	38.491	30.097	6.161
	presente (n=11)	36.7458	29.3966	5.8793
	presente (n=15)	37.1821	29.7457	5.9491
	presente (n=21)	37.3450	29.8760	5.9752
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	42.83	33.97	3.397
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	40.10	32.08	3.208
	CLT	40.099	32.079	3.208
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	42.970	42.900	3.290
	exacto [Srinivas, 1973]	43.566	33.413	3.500
	presente (n=11)	40.3739	32.2991	3.2299
	presente (n=15)	40.8567	32.6853	3.2685
	presente (n=21)	41.0361	32.8289	3.2829
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	44.92	35.41	2.361
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	41.39	33.11	2.208
	CLT	41.410	33.128	2.209
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	45.850	34.420	2.294
	exacto [Srinivas, 1973]	46.424	34.955	2.494
	presente (n=11)	41.7618	33.4094	2.2273
	presente (n=15)	42.2623	33.8098	2.2540
	presente (n=21)	42.4450	33.9560	2.2637

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 6.14: Teoria FSDT. Tensões $\bar{\tau}_{xz}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
		(0,a/2,0)	(0,a/2,-2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.089	2.566
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.313	2.444
	CLT	4.5899	3.386
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.593	3.593
	exacto [Srinivas, 1973]	4.3641	3.2675
	presente (n=11)	4.0160	2.9626
	presente (n=15)	4.3389	3.2008
	presente (n=21)	4.5113	3.3280
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.147	2.587
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.152	2.676
	CLT	4.3666	3.7075
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.518	3.518
	exacto [Srinivas, 1973]	4.0959	3.5154
	presente (n=11)	3.8140	3.2383
	presente (n=15)	4.1227	3.5004
	presente (n=21)	4.2881	3.6409
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.035	2.691
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.091	2.764
	CLT	4.2825	3.8287
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.466	3.466
	exacto [Srinivas, 1973]	3.9638	3.5768
	presente (n=11)	3.7377	3.3416
	presente (n=15)	4.0409	3.6127
	presente (n=21)	4.1990	3.7541

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Na tabela 6.15 encontram-se valores da deflexão do ponto central, $\bar{w}$, utilizando a teoria TSDT.

Os resultados para as tensões encontram-se nas tabelas 6.16, 6.17 e 6.18. A figura 6.12 mostra claramente que a teoria de terceira ordem não se adequa à modelação de sanduiches, principalmente quando o quociente R é grande.

Tabela 6.15: Teoria TSDT. Deflexão do ponto central de uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{w}$ (a/2,a/2,0)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	256.13
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	236.10
	CLT	216.94
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	258.74
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	257.38
	exacto [Srinivas, 1973]	258.97
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	253.6710
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	256.2387
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	257.1100
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	152.33
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	131.095
	CLT	118.87
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	159.402
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	158.55
	exacto [Srinivas, 1973]	159.38
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	153.0084
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	154.2490
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	154.6581
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	110.43
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	90.85
	CLT	81.768
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	121.821
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	121.184
	exacto [Srinivas, 1973]	121.72
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	113.5941
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	114.3874
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	114.6442

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

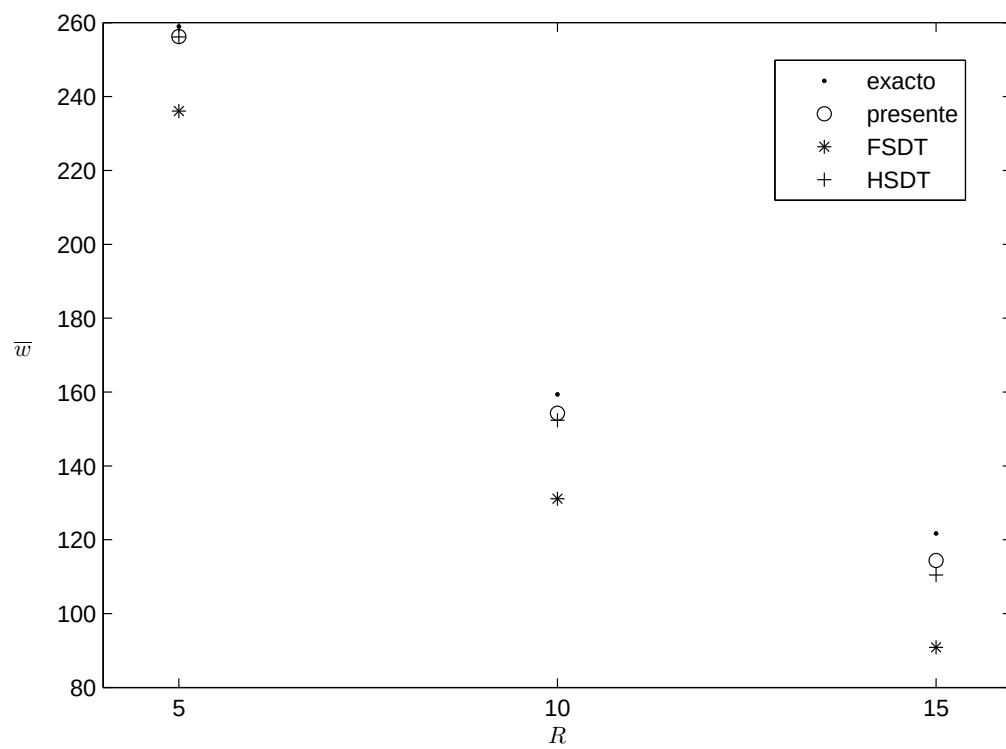


Figura 6.12: Teoria TSDT. Deflexão central para uma placa sanduiche quadrada, $c = 2/\sqrt{n}$

Tabela 6.16: Teoria TSDT. Tensões $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{\sigma}_{xx}^1$	$\bar{\sigma}_{xx}^2$	$\bar{\sigma}_{xx}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	62.38	46.91	9.382
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	61.87	49.50	9.899
	CLT	61.141	48.623	9.783
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	59.21	45.61	9.122
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	58.725	46.980	9.396
	exacto [Srinivas, 1973]	60.353	46.623	9.340
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	59.6447	46.4292	9.2858
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	60.1834	46.8581	9.3716
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	60.3660	47.0028	9.4006
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	64.65	51.31	5.131
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	67.80	54.24	4.424
	CLT	65.332	48.857	5.356
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	64.16	47.72	4.772
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	62.723	50.16	5.01
	exacto [Srinivas, 1973]	65.332	48.857	4.903
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	64.7415	49.4716	4.9472
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	65.2223	49.8488	4.9849
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	65.3809	49.9729	4.9973
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	66.62	51.97	3.465
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	70.04	56.03	3.753
	CLT	69.135	55.308	3.687
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	65.650	47.09	3.140
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	63.214	50.571	3.371
	exacto [Srinivas, 1973]	66.787	48.299	3.238
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	66.3646	49.8957	3.3264
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	66.7830	50.2175	3.3478
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	66.9196	50.3230	3.3549

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 6.17: Teoria TSDT. Tensões $\bar{\sigma}_{yy}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{\sigma}_{yy}^1$	$\bar{\sigma}_{yy}^2$	$\bar{\sigma}_{yy}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	38.93	30.33	6.065
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	36.65	29.32	5.864
	CLT	36.622	29.297	5.860
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	37.88	29.59	5.918
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	37.643	27.714	4.906
	exacto [Srinivas, 1973]	38.491	30.097	6.161
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	38.0694	29.9313	5.9863
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	38.3592	30.1642	6.0328
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	38.4563	30.2420	6.0484
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	42.83	33.97	3.397
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	40.10	32.08	3.208
	CLT	40.099	32.079	3.208
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	42.970	42.900	3.290
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	42.565	34.052	3.400
	exacto [Srinivas, 1973]	43.566	33.413	3.500
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	42.8860	33.3524	3.3352
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	43.1521	33.5663	3.3566
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	43.2401	33.6366	3.3637
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	44.92	35.41	2.361
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	41.39	33.11	2.208
	CLT	41.410	33.128	2.209
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	45.850	34.420	2.294
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	45.055	36.044	2.400
	exacto [Srinivas, 1973]	46.424	34.955	2.494
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	45.2979	34.9096	2.3273
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	45.5427	35.1057	2.3404
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	45.6229	35.1696	2.3446

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 6.18: Teoria TSDT. Tensões $\bar{\tau}_{xz}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
		(0,a/2,0)	(0,a/2,-2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.089	2.566
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.313	2.444
	CLT	4.5899	3.386
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.593	3.593
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	3.848	2.839
	exacto [Srinivas, 1973]	4.3641	3.2675
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	3.8449	1.9650
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	4.2768	2.2227
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	4.5481	2.3910
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.147	2.587
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.152	2.676
	CLT	4.3666	3.7075
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.518	3.518
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	3.596	3.053
	exacto [Srinivas, 1973]	4.0959	3.5154
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	2.7780	1.8207
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	3.1925	2.1360
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	3.5280	2.3984
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.035	2.691
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.091	2.764
	CLT	4.2825	3.8287
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.466	3.466
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	3.466	3.099
	exacto [Srinivas, 1973]	3.9638	3.5768
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2003]	2.1686	1.5578
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2003]	2.6115	1.9271
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2003]	3.0213	2.2750

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Os resultados para a teoria trigonométrica são apresentados nas tabelas 6.19, 6.20, 6.21, e 6.22. Na figura 6.13 é possível observar a evolução das componentes da tensão $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento $\bar{u}$ ao longo da espessura da placa. Os resultados são comparados com as referências anteriormente citadas, e com uma formulação ziguezague com o método da multiquádrica de Ferreira [2005].

Mais uma vez os resultados obtidos com a teoria trigonométrica são idênticos aos obtidos pela teoria de terceira ordem de Reddy.

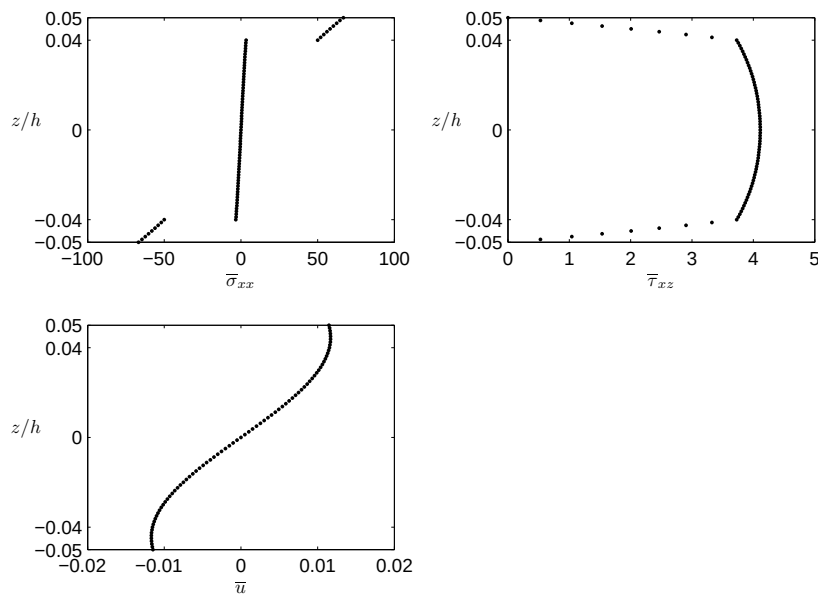


Figura 6.13: Teoria trigonométrica. Tensões normalizadas, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ e deslocamento $\bar{u}$ para uma placa sanduiche quadrada com $n = 15$, $R = 15$

Tabela 6.19: Teoria trigonométrica. Deformação central, $\bar{w}$ para uma placa sanduiche quadrada sob carga uniforme

R	Método	$\bar{w}$ (a/2,a/2,0)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	256.13
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	236.10
	CLT	216.94
	FSDT, elementos finitos[Ferreira, 1997]	258.74
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	257.38
	exacto [Srinivas, 1973]	258.97
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	257.1100
	Ziguezague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	257.5231
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	254.91
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	256.5
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	257.00
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	152.33
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	131.095
	CLT	118.87
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	159.402
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	158.55
	exacto [Srinivas, 1973]	159.38
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	154.6581
	Ziguezague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	158.3799
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	153.83
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	154.77
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	155.03
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	110.43
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	90.85
	CLT	81.768
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	121.821
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	121.184
	exacto [Srinivas, 1973]	121.72
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	114.6442
	Ziguezague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	120.9883
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	114.57
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	115.27
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	115.46

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria trigonométrica

Tabela 6.20: Teoria trigonométrica. Tensão $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa sanduiche quadrada sob carga uniforme

R	Método	$\bar{\sigma}_{xx}^1$	$\bar{\sigma}_{xx}^2$	$\bar{\sigma}_{xx}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	62.38	46.91	9.382
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	61.87	49.50	9.899
	CLT	61.141	48.623	9.783
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	59.21	45.61	9.122
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	58.725	46.980	9.396
	exacto [Srinivas, 1973]	60.353	46.623	9.340
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	60.3660	47.0028	9.4006
	Ziguezague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	59.9675	46.2906	9.2581
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	60.026	46.688	9.3376
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	60.303	46.897	9.3794
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	60.396	46.971	9.3941
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	64.65	51.31	5.131
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	67.80	54.24	4.424
	CLT	65.332	48.857	5.356
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	64.16	47.72	4.772
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	62.723	50.16	5.01
	exacto [Srinivas, 1973]	65.332	48.857	4.903
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	65.3809	49.9729	4.9973
	Ziguezague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	64.8462	48.4434	4.8443
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	64.999	49.55	4.955
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	65.29	49.763	4.9763
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	65.37	49.823	4.9823
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	66.62	51.97	3.465
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	70.04	56.03	3.753
	CLT	69.135	55.308	3.687
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	65.650	47.09	3.140
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	63.214	50.571	3.371
	exacto [Srinivas, 1973]	66.787	48.299	3.238
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	66.9196	50.3230	3.3549
	Ziguezague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	66.2911	47.8992	3.1933
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	66.51	49.783	3.3189
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	66.799	49.987	3.3325
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	66.87	50.041	3.3361

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria trigonométrica

Tabela 6.21: Teoria trigonométrica. Tensão $\bar{\sigma}_{yy}$ para uma placa sanduiche quadrada sob carga uniforme

R	Método	$\bar{\sigma}_{yy}^1$	$\bar{\sigma}_{yy}^2$	$\bar{\sigma}_{yy}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	38.93	30.33	6.065
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	36.65	29.32	5.864
	CLT	36.622	29.297	5.860
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	37.88	29.59	5.918
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	37.643	27.714	4.906
	exacto [Srinivas, 1973]	38.491	30.097	6.161
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	38.4563	30.2420	6.0484
	Ziguzague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	38.3209	29.9740	5.9948
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	38.231	30.044	6.0089
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	38.402	30.177	6.0354
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	38.46	30.222	6.0444
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	42.83	33.97	3.397
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	40.10	32.08	3.208
	CLT	40.099	32.079	3.208
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	42.970	42.900	3.290
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	42.565	34.052	3.400
	exacto [Srinivas, 1973]	43.566	33.413	3.500
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	43.2401	33.6366	3.3637
	Ziguzague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	43.3989	33.3062	3.3306
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	43.03	33.421	3.3421
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	43.22	33.564	3.3564
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	43.273	33.6006	3.3606
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	44.92	35.41	2.361
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	41.39	33.11	2.208
	CLT	41.410	33.128	2.209
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	45.850	34.420	2.294
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	45.055	36.044	2.400
	exacto [Srinivas, 1973]	46.424	34.955	2.494
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	45.6229	35.1696	2.3446
	Ziguzague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	46.2924	34.8898	2.3260
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	45.471	34.961	2.3307
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	45.669	35.107	2.3405
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	45.724	35.15	2.3433

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria trigonométrica

Tabela 6.22: Teoria trigonométrica. Tensão $\bar{\tau}_{xz}$ para uma placa sanduiche quadrada sob carga uniforme

R	Método	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
		(0,a/2,0)	(0,a/2,-2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.089	2.566
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.313	2.444
	CLT	4.5899	3.386
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.593	3.593
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	3.848	2.839
	exacto [Srinivas, 1973]	4.3641	3.2675
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	4.5481	2.3910
	Ziguezague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	4.0463	2.3901
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	4.2763	3.2288
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	4.4522	3.3395
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.5527	3.4087
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.147	2.587
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.152	2.676
	CLT	4.3666	3.7075
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.518	3.518
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	3.596	3.053
	exacto [Srinivas, 1973]	4.0959	3.5154
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	3.5280	2.3984
	Ziguezague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	3.9237	2.8809
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	4.0486	3.509
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	4.2133	3.6315
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.2843	3.6746
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.035	2.691
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.091	2.764
	CLT	4.2825	3.8287
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.466	3.466
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$ [Ferreira, 2003]	3.466	3.099
	exacto [Srinivas, 1973]	3.9638	3.5768
	HSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 21$ [Ferreira et al., 2003]	3.0213	2.2750
	Ziguezague, MQ, (n=21)[Ferreira, 2005]	3.8311	3.2562
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2005b]	3.953	3.6018
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2005b]	4.1113	3.7282
	presente (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.1772	3.7714

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria trigonométrica

Os resultados para a teoria ziguezague trigonométrica encontram-se nas tabelas 6.23, 6.24, 6.25 e 6.26. A figura 6.14 mostra que os índices A^k, B^k, C^k e D^k actuam principalmente a nível dos deslocamentos, o que também pode ser comprovado nas tabelas 6.23-6.26. A solução da deformação central da placa, $\bar{w}$ tem um comportamento mais próximo da solução exacta que as soluções dadas pelas teorias de deformação de terceira ordem, a teoria trigonométrica e a teoria ziguezague.

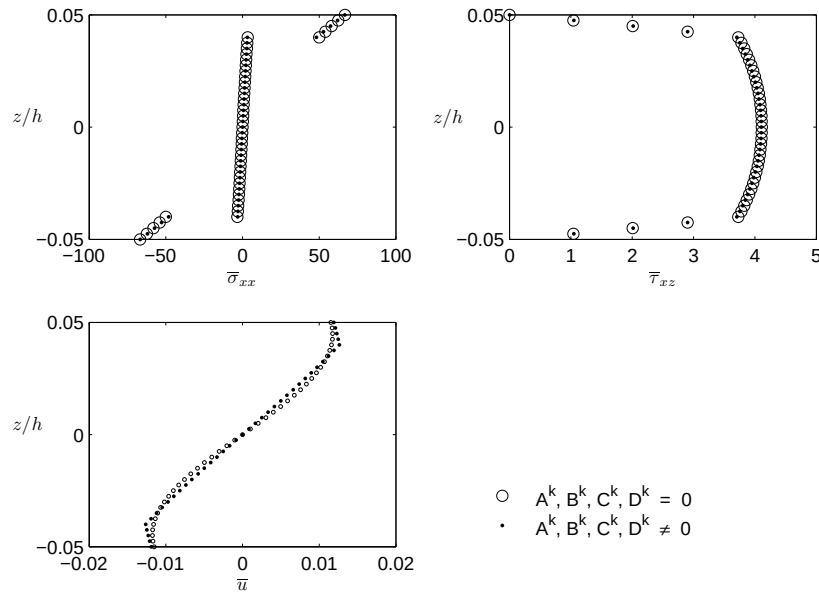


Figura 6.14: Comparação de alguns resultados para a placa sanduiche para as teorias trigonométrica ($A = B = C = D = 0$) e ziguezague trigonométrica ($A, B, C, D \neq 0$), com $n = 15$, $R = 15$

Tabela 6.23: Teoria ziguezague trigonométrica. Deformação central para uma placa sandui-che quadrada sob carga uniforme

R	Método	$\bar{w}$ (a/2, a/2, 0)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	256.13
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	236.10
	CLT	216.94
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	258.74
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	257.38
	exacto [Srinivas, 1973]	258.97
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	257.1100
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	257.5231
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	257.00
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	257.12
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	258.72
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	259.12
10	HSDT, elementos finitos[Pandya e Kant, 1988]	152.33
	FSDT, elementos finitos[Pandya e Kant, 1988]	131.095
	CLT	118.87
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	159.402
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	158.55
	exacto [Srinivas, 1973]	159.38
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	154.6581
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	158.3799
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	155.03
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	158.32
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	159.29
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	159.5
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	110.43
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	90.85
	CLT	81.768
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	121.821
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	121.184
	exacto [Srinivas, 1973]	121.72
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	114.6442
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	120.9883
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	115.46
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	120.95
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	121.68
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	121.88

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

Tabela 6.24: Teoria ziguezague trigonométrica. Tensão normalizada, σ_{xx} para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme

R	Método	$\bar{\sigma}_{xx}^1$	$\bar{\sigma}_{xx}^2$	$\bar{\sigma}_{xx}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	62.38	46.91	9.382
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	61.87	49.50	9.899
	CLT	61.141	48.623	9.783
	[Ferreira, 1997]	59.21	45.61	9.122
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	58.725	46.980	9.396
	exacto [Srinivas, 1973]	60.353	46.623	9.340
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	60.3660	47.0028	9.4006
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	59.9675	46.2906	9.2581
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	60.396	46.971	9.3941
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	59.985	46.305	9.2609
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	60.262	46.511	9.3021
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	60.338	46.57	9.314
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	64.65	51.31	5.131
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	67.80	54.24	4.424
	CLT	65.332	48.857	5.356
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	64.16	47.72	4.772
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	62.723	50.16	5.01
	exacto [Srinivas, 1973]	65.332	48.857	4.903
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	65.3809	49.9729	4.9973
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	64.8462	48.4434	4.8443
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	65.37	49.823	4.9823
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	64.926	48.514	4.8514
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	65.215	48.717	4.8717
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	65.279	48.279	4.8766
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	66.62	51.97	3.465
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	70.04	56.03	3.753
	CLT	69.135	55.308	3.687
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	65.650	47.09	3.140
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	63.214	50.571	3.371
	exacto [Srinivas, 1973]	66.787	48.299	3.238
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	66.9196	50.3230	3.3549
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	66.2911	47.8992	3.1933
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	66.87	50.041	3.3361
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	66.378	47.962	3.1974
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	66.659	48.148	3.2099
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	66.73	48.204	3.2136

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

Tabela 6.25: Teoria ziguezague trigonométrica. Tensão normalizada, σ_{yy} para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme

R	Método	$\bar{\sigma}_{yy}^1$	$\bar{\sigma}_{yy}^2$	$\bar{\sigma}_{yy}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	38.93	30.33	6.065
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	36.65	29.32	5.864
	CLT	36.622	29.297	5.860
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	37.88	29.59	5.918
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	37.643	27.714	4.906
	exacto [Srinivas, 1973]	38.491	30.097	6.161
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	38.4563	30.2420	6.0484
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	38.3209	29.9740	5.9948
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	38.46	30.222	6.0444
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	38.33	29.981	5.9962
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	38.501	30.112	6.0224
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	38.547	30.148	6.0295
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	42.83	33.97	3.397
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	40.10	32.08	3.208
	CLT	40.099	32.079	3.208
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	42.970	42.900	3.290
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	42.565	34.052	3.400
	exacto [Srinivas, 1973]	43.566	33.413	3.500
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	43.2401	33.6366	3.3637
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	43.3989	33.3062	3.3306
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	43.273	33.6006	3.3606
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	43.451	33.353	3.3353
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	43.641	33.493	3.3493
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	43.682	33.523	3.3523
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	44.92	35.41	2.361
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	41.39	33.11	2.208
	CLT	41.410	33.128	2.209
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	45.850	34.420	2.294
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	45.055	36.044	2.400
	exacto [Srinivas, 1973]	46.424	34.955	2.494
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	45.6229	35.1696	2.3446
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	46.2924	34.8898	2.3260
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	45.724	35.15	2.3433
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	46.334	34.926	2.3284
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	46.535	35.069	2.338
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	46.586	35.109	2.3406

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

Tabela 6.26: Teoria ziguezague trigonométrica. Tensão normalizada, τ_{xz} para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme

R	Método	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
		(0,a/2,0)	(0,a/2,-2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.089	2.566
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.313	2.444
	CLT	4.5899	3.386
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.593	3.593
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	3.848	2.839
	exacto [Srinivas, 1973]	4.3641	3.2675
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	4.5481	2.3910
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	4.0463	2.3901
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.5527	3.4087
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	4.2888	3.2173
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	4.4614	3.3305
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	4.5385	3.3837
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.147	2.587
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.152	2.676
	CLT	4.3666	3.7075
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.518	3.518
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	3.596	3.053
	exacto [Srinivas, 1973]	4.0959	3.5154
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	3.5280	2.3984
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	3.9237	2.8809
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.2843	3.6746
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	4.056	3.4914
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	4.2168	3.6165
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	4.29	3.6721
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.035	2.691
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.091	2.764
	CLT	4.2825	3.8287
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.466	3.466
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ (n=15)[Ferreira, 2003]	3.466	3.099
	exacto [Srinivas, 1973]	3.9638	3.5768
	HSDT, n=21 [Ferreira et al., 2003]	3.0213	2.2750
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	3.8311	3.2562
	trigonométrico (n=21) [Ferreira et al., 2005b]	4.1772	3.7714
	presente (n=11) [Roque et al., 2005]	3.9511	3.5773
	presente (n=15) [Roque et al., 2005]	4.1046	3.705
	presente (n=21) [Roque et al., 2005]	4.1668	3.7424

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

Os resultados para a teoria de ordem superior de Kant encontram-se nas tabelas 6.27, 6.28, 6.29 e 6.30.

Tabela 6.27: Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central de uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{w}$
		(a/2, a/2, 0)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	256.13
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	236.10
	CLT	216.94
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	258.74
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	257.38
	exacto [Srinivas, 1973]	258.97
	presente (n=11)	251.26
	presente (n=15)	255.09
	presente (n=21)	256.54
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	152.33
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	131.095
	CLT	118.87
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	159.402
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	158.55
	exacto [Srinivas, 1973]	159.38
	presente (n=11)	152.13
	presente (n=15)	154.43
	presente (n=21)	155.41
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	110.43
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	90.85
	CLT	81.768
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	121.821
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	121.184
	exacto [Srinivas, 1973]	121.72
	presente (n=11)	114.03
	presente (n=15)	115.75
	presente (n=21)	116.49
presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant		

Tabela 6.28: Teoria de ordem superior de Kant. Tensões $\bar{\sigma}_{xx}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{\sigma}_{xx}^1$	$\bar{\sigma}_{xx}^2$	$\bar{\sigma}_{xx}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	62.38	46.91	9.382
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	61.87	49.50	9.899
	CLT	61.141	48.623	9.783
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	59.21	45.61	9.122
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	58.725	46.980	9.396
	exacto [Srinivas, 1973]	60.353	46.623	9.340
	presente (n=11)	59.246	45.957	9.1915
	presente (n=15)	60.036	46.577	9.3153
	presente (n=21)	60.319	46.805	9.3611
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	64.65	51.31	5.131
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	67.80	54.24	4.424
	CLT	65.332	48.857	5.356
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	64.16	47.72	4.772
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	62.723	50.16	5.01
	exacto [Srinivas, 1973]	65.332	48.857	4.903
	presente (n=11)	64.215	48.519	4.8519
	presente (n=15)	65.101	49.204	4.9204
	presente (n=21)	65.475	49.491	4.9491
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	66.62	51.97	3.465
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	70.04	56.03	3.753
	CLT	69.135	55.308	3.687
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	65.650	47.09	3.140
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	63.214	50.571	3.371
	exacto [Srinivas, 1973]	66.787	48.299	3.238
	presente (n=11)	65.752	48.429	3.2286
	presente (n=15)	66.679	49.139	3.2759
	presente (n=21)	67.038	49.405	3.2937

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 6.29: Teoria de ordem superior de Kant. Tensões $\bar{\sigma}_{yy}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{\sigma}_{yy}^1$	$\bar{\sigma}_{yy}^2$	$\bar{\sigma}_{yy}^3$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,2h/5)	(a/2,a/2,2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	38.93	30.33	6.065
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	36.65	29.32	5.864
	CLT	36.622	29.297	5.860
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	37.88	29.59	5.918
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	37.643	27.714	4.906
	exacto [Srinivas, 1973]	38.491	30.097	6.161
	presente (n=11)	37.804	29.661	5.9322
	presente (n=15)	38.257	30.017	6.0033
	presente (n=21)	38.42	30.145	6.0291
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	42.83	33.97	3.397
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	40.10	32.08	3.208
	CLT	40.099	32.079	3.208
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	42.970	42.900	3.290
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	42.565	34.052	3.400
	exacto [Srinivas, 1973]	43.566	33.413	3.500
	presente (n=11)	42,634	32,938	3,2938
	presente (n=15)	43.151	33.341	3.3341
	presente (n=21)	43.367	33.506	3.3506
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	44.92	35.41	2.361
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	41.39	33.11	2.208
	CLT	41.410	33.128	2.209
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	45.850	34.420	2.294
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	45.055	36.044	2.400
	exacto [Srinivas, 1973]	46.424	34.955	2.494
	presente (n=11)	45.181	34.415	2.2943
	presente (n=15)	45.736	34.845	2.323
	presente (n=21)	45.945	35.033	2.3356

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 6.30: Teoria de ordem superior de Kant. Tensões $\bar{\tau}_{xz}$ para uma placa sanduiche quadrada, sob carga uniforme, $c = 2/\sqrt{n}$

R	Método	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
		(0,a/2,0)	(0,a/2,-2h/5)
5	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.089	2.566
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.313	2.444
	CLT	4.5899	3.386
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.593	3.593
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	3.848	2.839
	exacto [Srinivas, 1973]	4.3641	3.2675
	presente (n=11)	3.9104	2.9979
	presente (n=15)	4.1899	3.266
	presente (n=21)	4.2345	3.4196
10	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.147	2.587
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.152	2.676
	CLT	4.3666	3.7075
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.518	3.518
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	3.596	3.053
	exacto [Srinivas, 1973]	4.0959	3.5154
	presente (n=11)	3.6635	3.2381
	presente (n=15)	3.9216	3.5256
	presente (n=21)	4.0341	3.7246
15	HSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.035	2.691
	FSDT, elementos finitos [Pandya e Kant, 1988]	3.091	2.764
	CLT	4.2825	3.8287
	FSDT, elementos finitos [Ferreira, 1997]	3.466	3.466
	FSDT, MQ, $c = 2/\sqrt{n}$ [Ferreira, 2003]	3.466	3.099
	exacto [Srinivas, 1973]	3.9638	3.5768
	presente (n=11)	3.5485	3.3019
	presente (n=15)	3.7969	3.5928
	presente (n=21)	3.8819	3.8109

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

6.7.4 Placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades, sob carga uniforme

Como exemplo, utilizam-se duas placas simplesmente apoiadas de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1 e fgm2.

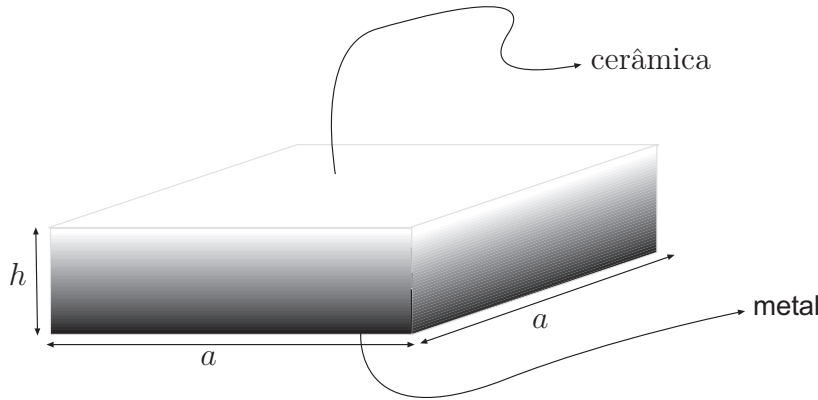


Figura 6.15: Esquema da placa fgm com altura total h e largura a

As propriedades materiais das placas são:

	placa fgm1	placa fgm2
propriedades do metal:	$E_m = 70, \nu_m = 0.3$	$E_m = 70, \nu_m = 0.3$
propriedades da cerâmica:	$E_c = 151, \nu_c = 0.3$	$E_c = 427, \nu_c = 0.17$

A deformação transversal, w , a tensão σ_{xx} , a carga q e a coordenada z são normalizados por:

$$\bar{w} = w/h; \quad \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}/q; \quad \bar{q} = q/E_m h^4; \quad \bar{z} = z/h$$

Os resultados obtidos são comparados com resultados obtidos por uma formulação Petrov-Galerkin sem malha de Qian et al. [2004] e uma teoria de ordem superior, com o método de Mori-Tanaka. O parâmetro de forma usado foi de $c = 2/\sqrt{n}$.

Os resultados numéricos para a teoria FSDT encontram-se nas tabelas 6.31, 6.32, 6.33 e 6.34. A escassez de resultados numéricos para placas fgm dificultam a análise deste exemplo. Mesmo assim é possível verificar que a solução por multiquádricas está dentro da ordem de grandeza da solução obtida por Qian et al. [2004]. A diferença nos resultados obtidos pode dever-se ao uso de teorias de deformação de primeira ordem

no caso das multiquádricas, e de terceira ordem no caso de Qian et al. [2004]. Os resultados começam a diferir à medida que o quociente a/h aumenta (figura 6.16 e tabela 6.33).

Tabela 6.31: Teoria FSDT. Deflexão do ponto central, para a placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, com $a/h = 20$, $c = 2/\sqrt{n}$

Expoente, p	Deflexão central, $\bar{w}$				MLPG código de Qian, Batra e Chen [Qian et al., 2004]
	Propriedades efectivas pela regra das misturas (presente)		Propriedades efectivas pelo método Mori-Tanaka (presente)		
	n=11	n=19	n=11	n=19	
0	0.0205	0.0208	0.0205	0.0208	0.02118
0.5	0.0263	0.0265	0.0275	0.0277	-
1.0	0.0294	0.0297	0.0305	0.0309	0.03150
2.0	0.0320	0.0324	0.0329	0.0332	0.03395
metal	0.0443	0.0448	0.0443	0.0448	0.04580
presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT					

Tabela 6.32: Teoria FSDT. Deflexão do ponto central para as placas de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1 e fgm2, para $a/h = 5$, $c = 2/\sqrt{n}$, $n = 15$

Expoente, p	Deflexão central, $\bar{w}$			MLPG código de Qian, Batra, e Chen [Qian et al., 2004]
	Propriedades efectivas pela regra das misturas (presente)	Propriedades efectivas pelo método Mori-Tanaka (presente)		
(a) fgm1				
0.0	0.0246	0.0246		0.02436
0.5	0.0313	0.0328		-
1.0	0.0350	0.0364		0.03634
2.0	0.0384	0.0396		0.03976
metal	0.0532	0.0532		0.05253
(b) fgm2				
0.0	0.0076	0.0090		0.00902
0.5	0.0120	0.0185		-
1.0	0.0159	0.0234		0.02391
2.0	0.0213	0.0281		0.02918
metal	0.0532	0.0532		0.05253
presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT				

Os resultados numéricos para a teoria TSDT encontram-se nas tabelas 6.35, 6.36, 6.37 e 6.38. Observa-se que os resultados obtidos com o método das multiquádricas tendem para a solução de Qian, para ambas as placas fgm1 e fgm2. Neste exemplo, não se notam diferenças significativas entre a formulação anterior de primeira ordem e a formulação de terceira ordem.

Tabela 6.33: Teoria FSDT. Deflexão do ponto central da placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, pelo método de Mori-Tanaka, $c = 2/\sqrt{n}$

a/h	MLPG, rede 8×8 [Qian et al., 2004]				presente, n=15			
	p=0	p=1.0	p=2.0	metal	p=0	p=1.0	p=2.0	metal
5	0.02436	0.03634	0.03976	0.05252	0.0246	0.0364	0.0396	0.0532
15	0.02115	0.03152	0.03401	0.04583	0.0209	0.0310	0.0335	0.0450
25	0.02123	0.03158	0.03404	0.04569	0.0206	0.0306	0.0330	0.0445
45	0.02158	0.03203	0.03456	0.04655	0.0206	0.0306	0.0336	0.0444
75	0.02190	0.03252	0.03501	0.04728	0.0207	0.0306	0.0331	0.0445
125	0.02225	0.03304	0.03562	0.04802	0.0205	0.0310	0.0331	0.0446

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 6.34: Teoria FSDT. Deflexão do ponto central da placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, com $n = 15$, $c = 2/\sqrt{n}$

Expoente p , ou quociente a/h		MLPG, rede 8×8 [Qian et al., 2004]		Presente	
		$\sigma_{xx}(-h/2)$	$\sigma_{xx}(h/2)$	$\sigma_{xx}(-h/2)$	$\sigma_{xx}(h/2)$
a/h=20	p=0 (ceramica)	0.29175	-0.29200	0.2867	-0.2867
	p=1	0.22617	-0.37875	0.1974	-0.4258
	p=2	0.24497	-0.40650	0.2130	-0.4595
	$p = \infty$ (metal)	0.29175	-0.29200	0.2869	-0.2869
p=1	$a/h = 5$	0.22540	-0.38812	0.2064	-0.4453
	$a/h = 10$	0.22420	-0.37760	0.1990	-0.4293
	$a/h = 15$	0.22502	-0.37742	0.1978	-0.4266
	$a/h = 20$	0.22617	-0.37875	0.1974	-0.4258
	$a/h = 100$	0.02331	-0.38980	0.2030	-0.4379

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Os resultados obtidos com a teoria de ordem superior de Kant encontram-se nas tabelas 6.39, 6.40, 6.41 e 6.42.

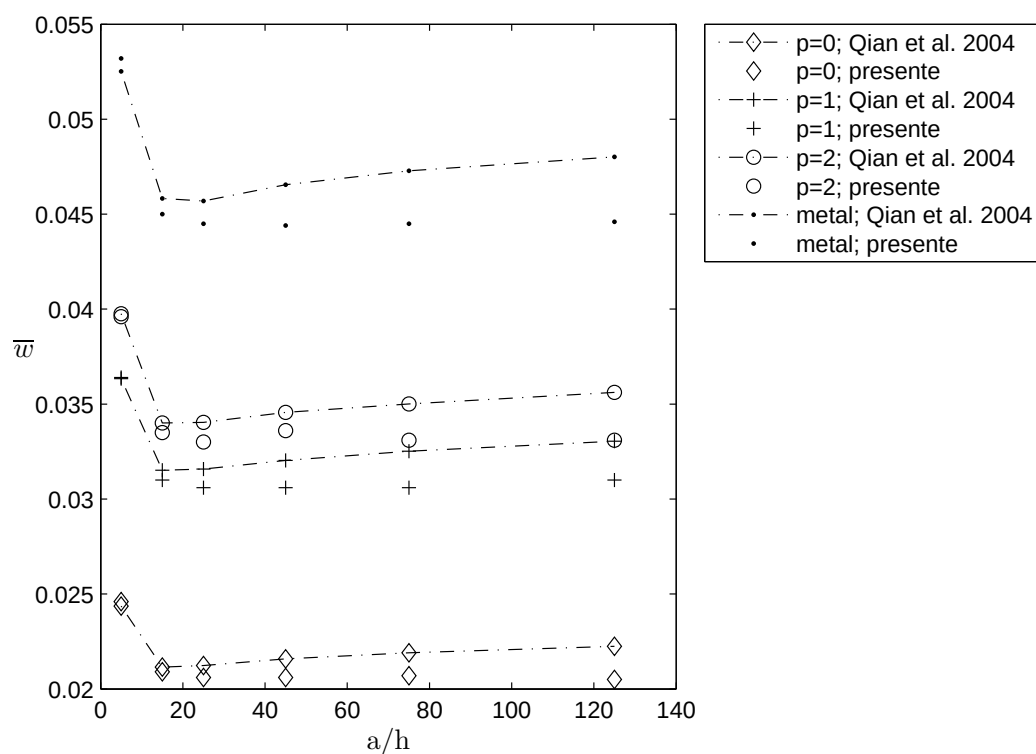


Figura 6.16: Gráfico com os resultados da tabela 6.33

Tabela 6.35: Teoria TSDT. Deflexão do ponto central, para a placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, com $a/h = 20$, $c = 2/\sqrt{n}$

Expoente, p	Deflexão central, $\bar{w}$				MLPG código de Qian, Batra e Chen [Qian et al., 2004]
	Propriedades efectivas pela regra das misturas [Ferreira et al., 2005a] (presente)		Propriedades efectivas pelo método Mori-Tanaka [Ferreira et al., 2005a] (presente)		
	n=11	n=19	n=11	n=19	
0	0.02050	0.02080	0.02050	0.02080	0.02118
0.5	0.02620	0.02650	0.02760	0.02790	-
1.0	0.02940	0.02970	0.03050	0.03090	0.03150
2.0	0.03230	0.03240	0.03300	0.03330	0.03395
metal	0.04430	0.0448	0.04430	0.04480	0.04580

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 6.36: Teoria TSDT. Deflexão do ponto central para as placas de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1 e fgm2, para $a/h = 5$, $c = 2/\sqrt{n}$

Expoente, p	Deflexão central, $\bar{w}$		
	Propriedades efectivas pela regra das misturas [Ferreira et al., 2005a] (presente)	Propriedades efectivas pelo método Mori-Tanaka [Ferreira et al., 2005a] (presente)	MLPG código de Qian, Batra, e Chen [Qian et al., 2004]
(a) fgm1			
0.0	0.02477	0.02477	0.02436
0.5	0.03135	0.03293	-
1.0	0.03515	0.03666	0.03634
2.0	0.03883	0.04009	0.03976
metal	0.05343	0.05343	0.05253
(b) fgm2			
0.0	0.007676	0.00909	0.00902
0.5	0.011973	0.01871	-
1.0	0.015967	0.02381	0.02391
2.0	0.021603	0.02903	0.02918
metal	0.053426	0.05343	0.05253

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 6.37: Teoria TSDT. Deflexão do ponto central da placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, pelo método de Mori-Tanaka, $c = 2/\sqrt{n}$

a/h	MLPG, rede 8×8 [Qian et al., 2004]				presente, n=15 [Ferreira et al., 2005a]			
	p=0	p=1.0	p=2.0	metal	p=0	p=1.0	p=2.0	metal
5	0.02436	0.03634	0.03976	0.05252	0.02476	0.03666	0.04009	0.05342
15	0.02115	0.03152	0.03401	0.04583	0.02090	0.03103	0.03354	0.04510
25	0.02123	0.03158	0.03404	0.04569	0.02062	0.03061	0.03305	0.04448
45	0.02158	0.03203	0.03456	0.04655	0.02057	0.03054	0.03295	0.04437
75	0.02190	0.03252	0.03501	0.04728	0.02062	0.03061	0.03302	0.04448
125	0.02225	0.03304	0.03562	0.04802	0.02069	0.03072	0.03314	0.04464

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 6.38: Teoria TSDT. Deflexão do ponto central da placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, com $n = 15$, $c = 2/\sqrt{n}$

Expoente p , ou quociente a/h		MLPG, rede 8×8 [Qian et al., 2004]		Presente [Ferreira et al., 2005a]	
		$\sigma_{xx}(-h/2)$	$\sigma_{xx}(h/2)$	$\sigma_{xx}(-h/2)$	$\sigma_{xx}(h/2)$
a/h=20	p=0 (ceramica)	0.29175	-0.29200	0.28650	-0.28650
	p=1	0.22617	-0.37875	0.17815	-0.38428
	p=2	0.24497	-0.40650	0.21278	-0.45899
	$p = \infty$ (metal)	0.29175	-0.29200	0.28650	-0.28650
p=1	$a/h = 5$	0.22540	-0.38812	0.20232	-0.43643
	$a/h = 10$	0.22420	-0.37760	0.19812	-0.42737
	$a/h = 15$	0.22502	-0.37742	0.19738	-0.42577
	$a/h = 20$	0.22617	-0.37875	0.19719	-0.42537
	$a/h = 200$	0.02331	-0.38980	0.19841	-0.42800

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 6.39: Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central, para a placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, com $a/h = 20$, $c = 2/\sqrt{n}$

Expoente, p	Deflexão central, $\bar{w}$				
	Propriedades efectivas pela regra das misturas (presente)		Propriedades efectivas pelo método Mori-Tanaka (presente)		MLPG código de Qian, Batra e Chen [Qian et al., 2004]
	n=11	n=19	n=11	n=19	
0	0.0206	0.0208	0.0206	0.0208	0.02118
0.5	0.0263	0.0265	0.0276	0.0278	-
1.0	0.0294	0.0297	0.0305	0.0308	0.03150
2.0	0.0321	0.0324	0.0330	0.0333	0.03395
metal	0.0444	0.0448	0.0444	0.0448	0.04580

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 6.40: Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central para as placas de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1 e fgm2, para $a/h = 5$, $c = 2/\sqrt{n}$

Expoente, p	Deflexão central, $\bar{w}$		
	Propriedades efectivas pela regra das misturas (presente)	Propriedades efectivas pelo método Mori-Tanaka (presente)	MLPG código de Qian, Batra, e Chen [Qian et al., 2004]
(a) fgm1			
0.0	0.0246	0.0246	0.02436
0.5	0.0312	0.0328	-
1.0	0.0350	0.0365	0.03634
2.0	0.0386	0.0399	0.03976
metal	0.0531	0.0531	0.05253
(b) fgm2			
0.0	0.0076	0.0090	0.00902
0.5	0.0119	0.0186	-
1.0	0.0159	0.0237	0.02391
2.0	0.0215	0.0289	0.02918
metal	0.0531	0.0531	0.05253

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 6.41: Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central da placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, pelo método de Mori-Tanaka, $c = 2/\sqrt{n}$

a/h	MLPG, rede 8×8 [Qian et al., 2004]				presente, n=15			
	p=0	p=1.0	p=2.0	metal	p=0	p=1.0	p=2.0	metal
5	0.02436	0.03634	0.03976	0.05252	0.0246	0.0365	0.0399	0.0531
15	0.02115	0.03152	0.03401	0.04583	0.0209	0.0310	0.0335	0.0451
25	0.02123	0.03158	0.03404	0.04569	0.0206	0.0306	0.0331	0.0445
45	0.02158	0.03203	0.03456	0.04655	0.0206	0.0306	0.0330	0.0444
75	0.02190	0.03252	0.03501	0.04728	0.0207	0.0307	0.0331	0.0446
125	0.02225	0.03304	0.03562	0.04802	0.0207	0.0308	0.0332	0.0448

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 6.42: Teoria de ordem superior de Kant. Deflexão do ponto central da placa de material com gradiente funcional de propriedades, fgm1, com $n = 15$, $c = 2/\sqrt{n}$

Expoente p , ou quociente a/h		MLPG, rede 8×8 [Qian et al., 2004]		Presente	
		$\sigma_{xx}(-h/2)$	$\sigma_{xx}(h/2)$	$\sigma_{xx}(-h/2)$	$\sigma_{xx}(h/2)$
a/h=20	p=0 (ceramica)	0.29175	-0.29200	0.2864	-0.2864
	p=1	0.22617	-0.37875	0.2221	-0.3715
	p=2	0.24497	-0.40650	0.2406	-0.3987
	$p = \infty$ (metal)	0.29175	-0.29200	0.2864	-0.2864
p=1	$a/h = 5$	0.22540	-0.38812	0.2264	-0.3809
	$a/h = 10$	0.22420	-0.37760	0.2227	-0.3730
	$a/h = 15$	0.22502	-0.37742	0.2221	-0.3717
	$a/h = 20$	0.22617	-0.37875	0.2221	-0.3715
	$a/h = 200$	0.02331	-0.38980	0.2256	-0.3772

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

6.8 Comparação das diferentes teorias de deformação na análise estática de placas laminadas

A figura 6.17 compara a deflexão central da placa isotrópica, calculada com diferentes teorias. A legenda encontra-se duplicada (um tipo de marcador e um tracejado diferentes para cada teoria), para melhor compreensão dos resultados. Confirma-se que a teoria de primeira ordem (FSDT) estabelece menos correctamente a deformada para placas espessas (quocientes a/h pequenos), quando comparada com as restantes teorias (figura 6.18). As teorias de ordem superior apresentam melhores resultados que a teoria de primeira ordem, mas divergem do resultado exacto à medida que a espessura da placa diminui (figura 6.20). Na figura 6.19, verifica-se que as teorias trigonométricas apresentam melhores resultados. São as que produzem menores erros relativos, e acompanham o desenho da curva para os resultados exactos. No caso da placa isotrópica, a teoria trigonométrica e trigonométrica ziguezague são idênticas, uma vez que os coeficiente A , B , C e D da teoria em ziguezague são nulos.

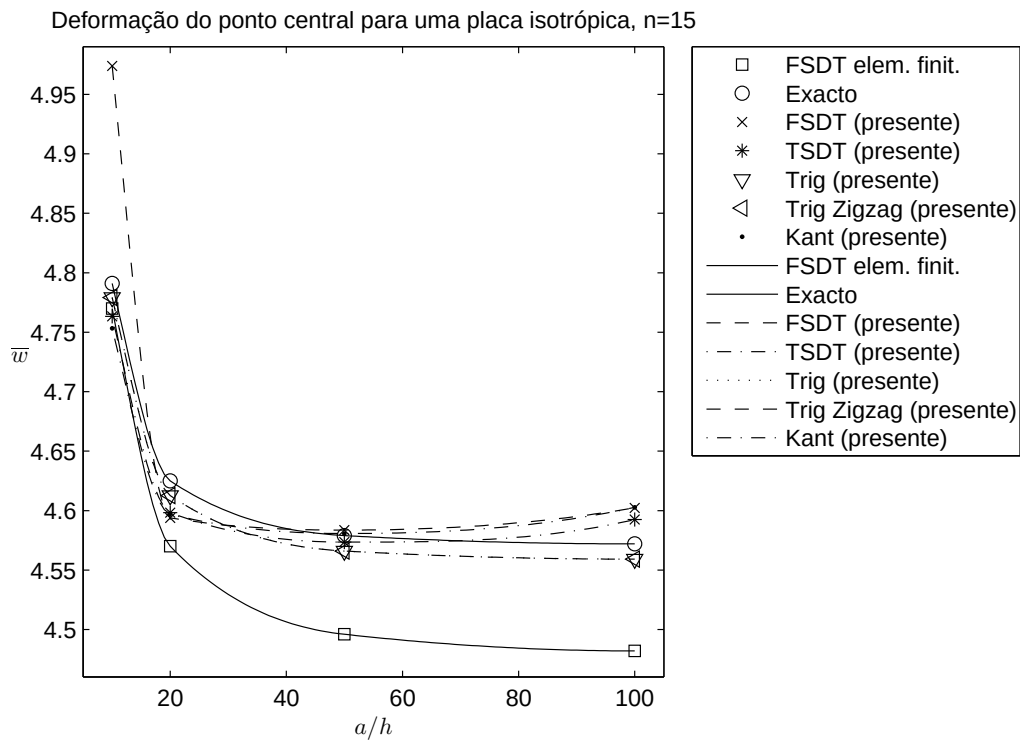


Figura 6.17: Deformação do ponto central de uma placa isotrópica, para diferentes teorias de deformação

No caso da placa laminada (figura 6.21), observa-se novamente um pior comportamento da teoria de primeira ordem para placas espessas, quando comparada com terias de ordem superior e trigonométricas. Para as restantes teorias, também se observa esse fenómeno, embora com menor intensidade.

A sanduiche compósita é bastante interessante uma vez que este exemplo apresenta uma grande diferença das propriedades materiais entre camadas (para $R = 15$). Os resultados apontam para a divisão das teorias de deformação em três grupos (figura 6.22). O primeiro grupo é o que apresenta piores resultados, e está associada às teorias clássica e de primeira ordem. O segundo grupo apresenta melhores resultados, e as teorias responsáveis são as teorias de ordem superior e trigonométrica. A teoria que apresenta melhores resultados foi a teoria trigonométrica ziguezague.

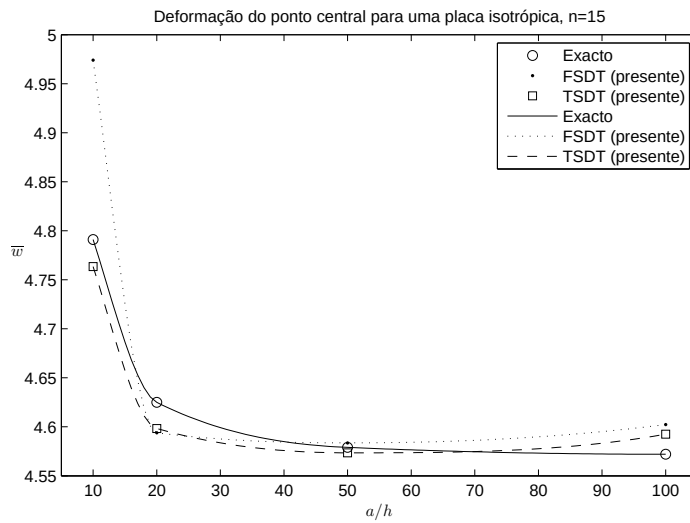


Figura 6.18: (Pormenor da figura 6.17). Deformação do ponto central de uma placa isotrópica, para as teorias de deformação de primeira e terceira ordem

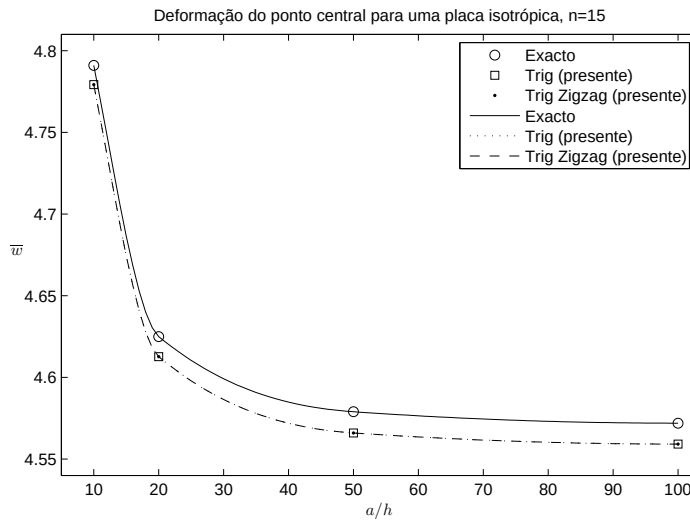


Figura 6.19: (Pormenor da figura 6.17). Deformação do ponto central de uma placa isotrópica, para as teorias de deformação trigonométricas

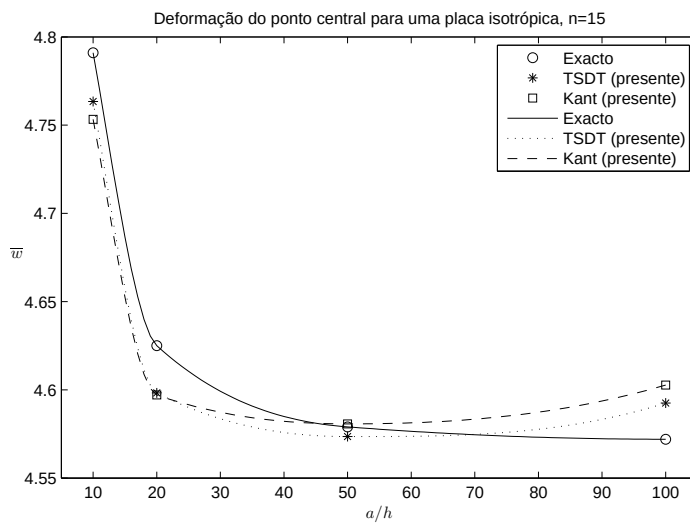


Figura 6.20: (Pormenor da figura 6.17). Deformação do ponto central de uma placa isotrópica, para as teorias de deformação de ordem superior de Reddy e de Kant

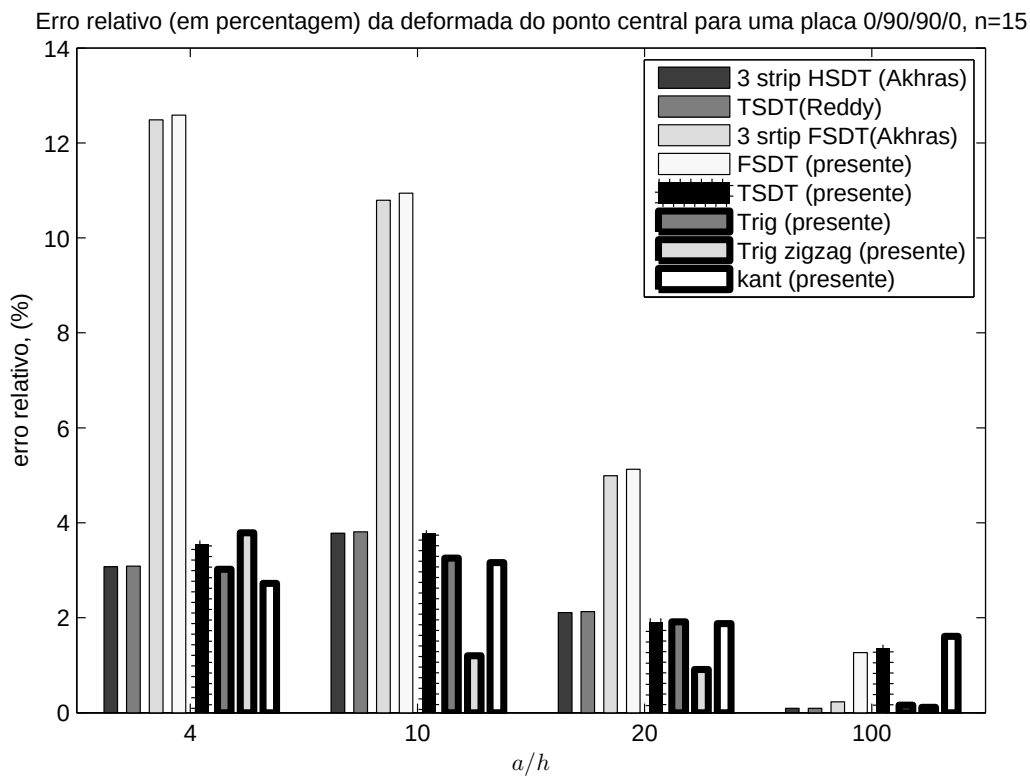


Figura 6.21: Deformação do ponto central de uma placa laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para diferentes teorias de deformação

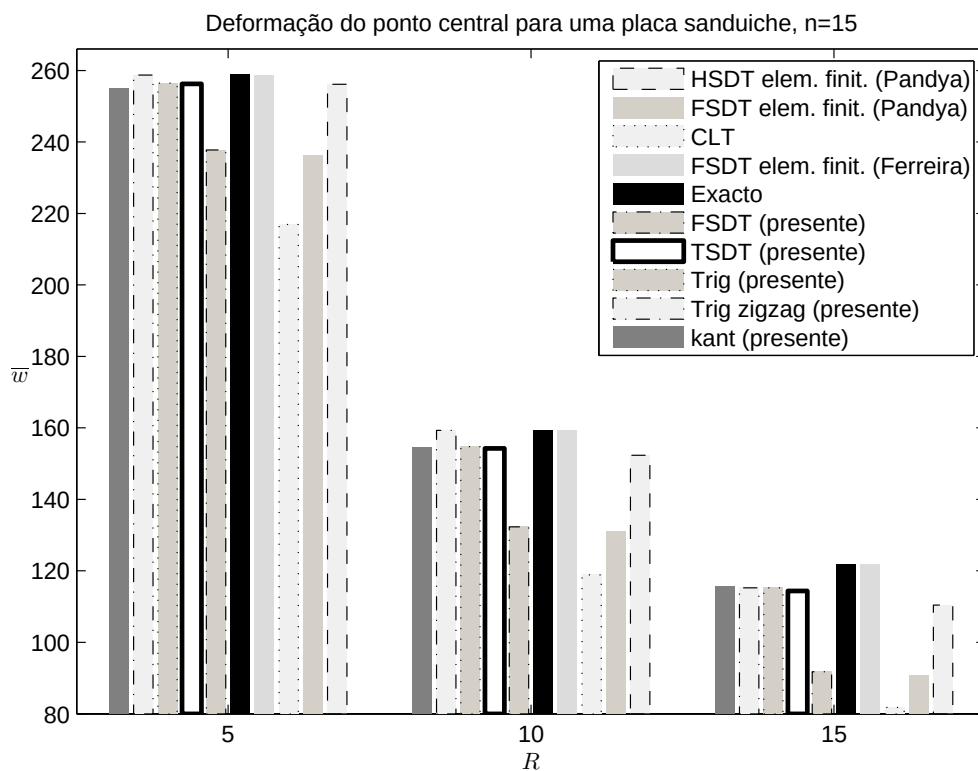


Figura 6.22: Deformação do ponto central de uma placa sanduiche, para diferentes teorias de deformação

6.9 Resumo e conclusões

Neste capítulo as equações de equilíbrio derivadas na capítulo 5 são resolvidas numericamente para o caso estático através da colocação assimétrica com funções de base radial. São analisados os seguintes exemplos de placas laminadas,

- placa quadrada isotrópica sob carga uniforme
- placa quadrada compósita $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal
- placa sanduiche quadrada sob carga uniforme
- placa quadrada de material com propriedades gradiente funcional de propriedades

Na análise numérica são utilizadas as teorias de deformação,

- teoria de primeira ordem
- teoria de terceira ordem de Reddy
- teoria trigonométrica
- teoria zigzague trigonométrica
- teoria de ordem superior de Kant

As equações de equilíbrio e condições de fronteira são escritas em ordem aos deslocamentos, e interpoladas pela função multiquádrica.

Pode-se concluir que para laminados espessos, devem usar-se teorias de ordem superior, por exemplo a teoria de terceira ordem de Reddy ou a teoria de Kant. Estas duas teorias apresentam graus de dificuldade de implementação idênticos, e produzem resultados idênticos, para os exemplos vistos neste capítulo. Para laminados pouco espessos, a teoria de primeira ordem produz bons resultados.

No caso do exemplo da placa sanduiche, conclui-se que as teorias de ordem superior produzem resultados pouco satisfatórios, sendo necessário recorrer a teorias zigzague para obter uma melhor aproximação. Outra opção que se revela particularmente eficaz é a teoria de primeira ordem, com um factor de correcção de corte adequado.

Também se conclui que para os exemplos apresentados, e para o cálculo da deflexão e tensões da uma placa, o parâmetro de forma $c = 2/\sqrt{n}$ produz resultados geralmente satisfatórios, embora se verifique em todos os casos um mau condicionamento da matriz dos coeficientes. Embora não tenham sido apresentados os resultados nesta tese, foram feitas simulações com outros valores do parâmetro de forma, obtendo-se resultados menos bons, quer a nível do valor numérico obtido, quer a nível da deformada obtida.

Registe-se que a aplicação do método da funções de base radial com estas teorias de deformação foi pela primeira vez apresentada pelo nosso grupo, apresentando uma alternativa de grande qualidade de solução.

Referências

- Akhras, G., Cheung, M. S. e Li, W. (1993). Static and vibration analysis of anisotropic composite laminates by finite strip method. *International Journal of Solids and Structures*, 30(22):3129–3137.
- Akhras, G., Cheung, M. S. e Li, W. (1994). Finite strip analysis of anisotropic laminated composite plates using higher-order shear deformation theory. *Computers and Structures*, 52(3):471–477.
- Arya, H., Shimpi, R. P. e Naik, N. K. (2002). A zigzag model for laminated composite beams. *Composite Structures*, 56(1):21–24.
- Ferreira, A. J. M. (1997). *Modelos numéricos para a análise de estruturas lamindas compósitas e sandwich*. Tese de doutoramento, FEUP, Porto.
- Ferreira, A. J. M. (2003). A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates. *Composite Structures*, 59(3):385–392.
- Ferreira, A. J. M. (2005). Analysis of composite plates using a layerwise theory and multiquadrics discretization. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 12(2):99–112.
- Ferreira, A. J. M. e Barbosa, J. T. (2000). Buckling behaviour of composite shells. *Composite Structures*, 50(1):93–98.
- Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F. e Martins, P. A. L. S. (2005a). Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Composite Structures*, 69(4):449–457.

- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2005b). Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers and Structures*, 83(27):2225–2237.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Martins, P. A. L. S. (2003). Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method. *Composites Part B: Engineering*, 34(7):627–636.
- Pagano, N. J. (1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, 4(JAN):20–34.
- Pandya, B. N. e Kant, T. (1988). Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates—finite element evaluations. *International Journal of Solids and Structures*, 24(12):1267–1286.
- Qian, L. F., Batra, R. C. e Chen, L. M. (2004). Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local petrov-galerkin method. *Composites Part B: Engineering*, 35(6-8):685–697.
- Reddy, J. N. (1984a). *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. Wiley.
- Reddy, J. N. (1984b). Simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 51(4):745–752.
- Reddy, J. N. (1993). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill.
- Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. CRC Press.
- Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M. e Jorge, R. M. N. (2005). Modelling of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions. *Composites Part B: Engineering*, 36(8):559–572.
- Shimpi, R. P., Arya, H. e Naik, N. K. (2003). A higher order displacement model for the plate analysis. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 22(18):1667–1688.
- Srinivas, S. (1973). Refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, 30(4):495–507.

Colocação assimétrica com funções de base radial para análise de vibrações livres de placas laminadas

7.1 Introdução

Neste capítulo, são abordados problemas de vibrações livres em placas laminadas recorrendo à teoria de 1ª ordem, 3ª ordem de Reddy, teoria trigonométrica, teoria ziguezague trigonométrica e teoria de ordem superior de Kant. Para cada teoria referida e relativa à deformação de placas, são apresentadas as respectivas equações do movimento.

Para a análise de vibrações livres, utiliza-se a técnica de separação de variáveis. Supondo uma solução para as variáveis u_i da forma $u_i(x, y, t) = U_i(x, y)T_i(t)$, a substituição da solução escolhida nas equações de equilíbrio escritas em ordem aos deslocamentos dá origem a um problema de valores próprios, cuja resolução está descrita na subsecção 3.3.1.

7.2 Teoria de deformação de corte de primeira ordem

Procedendo da mesma forma que em (6.21)-(6.25), e igualando a carga aplicada a zero, obtemos as equações de equilíbrio em ordem aos deslocamentos:

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{13} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{13} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\phi}_x
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & A_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{33} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{23} \left(2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \\
 & + B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + B_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\phi}_y
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[k A_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + k A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[k A_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + k A_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] = I_0 \ddot{w}_0
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{13} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{13} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2D_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - kA_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - kA_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_x
\end{aligned} \tag{7.4}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + 2B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{33} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2D_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{23} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - kA_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - kA_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\phi}_y
\end{aligned} \tag{7.5}$$

onde D_{ij} e A_{ij} são os componentes da matriz de rigidez, k é o factor de correcção de corte, e I_i são os factores de inércia definidos por:

$$I_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz; \quad I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \tag{7.6}$$

onde ρ e h são a densidade e a espessura total da placa, respectivamente.

Os momentos, M e as forças, Q podem ser expressos como funções dos deslocamentos,

$$M_{xx} = D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{13} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \tag{7.7}$$

$$M_{yy} = D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{23} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \tag{7.8}$$

$$M_{xy} = D_{13} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{23} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{33} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \tag{7.9}$$

$$Q_{xx} = kA_{55} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + kA_{45} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \tag{7.10}$$

$$Q_{yy} = kA_{45} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + kA_{55} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (7.11)$$

7.2.1 Análise das vibrações livres

Para a resolução do problema de vibrações livres, supomos uma solução do tipo harmônica, da forma

$$u_0(x, y, t) = u_0(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.12)$$

$$v_0(x, y, t) = v_0(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.13)$$

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.14)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \phi_x(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.15)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \phi_y(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.16)$$

onde ω é a frequência natural de vibração. Substituindo as soluções (7.12)-(7.16) nas equações (7.1)-(7.5), obtemos as seguintes equações

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{13} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{13} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\ & + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = -\omega^2 (I_0 u_0 + I_1 \phi_x) \end{aligned} \quad (7.17)$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{33} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{23} \left(2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \\
& + B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& + B_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = -\omega^2 (I_0 v_0 + I_1 \phi_y)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[k A_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + k A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[k A_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + k A_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] = -\omega^2 (I_0 w_0)
\end{aligned} \tag{7.19}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{13} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{13} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2D_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - k A_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - k A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = -\omega^2 (I_1 u_0 + I_2 \phi_x)
\end{aligned} \tag{7.20}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + 2B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& + D_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{33} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2D_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{23} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& - k A_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - k A_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = -\omega^2 (I_1 v_0 + I_2 \phi_y)
\end{aligned} \tag{7.21}$$

7.2.2 Interpolação das equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio e as condições de fronteira podem ser discretizadas usando o método das multiquádricas por:

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& = -\omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} I_0 g - \omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} I_1 g
\end{aligned} \tag{7.22}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + A_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + A_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& = -\omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} I_0 g - \omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} I_1 g
\end{aligned} \tag{7.23}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[k A_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2k A_{45} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + k A_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[k A_{55} \frac{\partial g}{\partial x} + k A_{45} \frac{\partial g}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[k A_{45} \frac{\partial g}{\partial x} + k A_{44} \frac{\partial g}{\partial y} \right] \\
& = -\omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} I_0 g
\end{aligned} \tag{7.24}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-k A_{45} \frac{\partial g}{\partial y} - k A_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[D_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2D_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - k A_{55} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[D_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + D_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - k A_{45} g \right]
\end{aligned}$$

$$= -\omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} I_1 g - \omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} I_2 g \quad (7.25)$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-kA_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - kA_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[D_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + D_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - kA_{45} g \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2D_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - kA_{44} g \right] \\ & = -\omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} I_1 g - \omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} I_2 g \end{aligned} \quad (7.26)$$

7.3 Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy

A TSDT de Reddy não necessita de um factor de correcção de corte, e tem apenas cinco graus de liberdade. Substituindo nas equações de equilíbrio N, M, P, Q, R e I pelas equações em (5.69) e (5.70) obtemos as equações de equilíbrio em termos das variáveis u_0, v_0, w_0, ϕ_x e ϕ_y :

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} E_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) + A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - c_1 I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (7.27)
\end{aligned}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) \\
& + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} E_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - c_1 I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (7.28)
\end{aligned}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{8}{h^2} D_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{h^4} F_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\
& + A_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \frac{8}{h^2} D_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{16}{h^4} F_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& + \frac{4}{3} \left[E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + E_{12} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + F_{11} \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + F_{12} \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial x^2} - \frac{4}{3h^2} H_{11} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) \right. \\
& - \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + 2E_{33} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} \right) + 2F_{33} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial x^2} \right) \\
& - \frac{8}{3h^2} H_{33} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + E_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + F_{12} \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \\
& \left. + F_{22} \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} - \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} H_{22} \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \right] \frac{1}{h^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - c_1 I_6 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
&+ c_1 \left[I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + J_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right] \quad (7.29)
\end{aligned}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
&- A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{8}{h^2} D_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \frac{16}{h^4} F_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \\
&+ D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} F_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \\
&- \frac{4}{3} \left[E_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + E_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + F_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + F_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} H_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \right. \\
&- \left. \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \right] \frac{1}{h^2} + B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) + D_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) \\
&- \frac{4}{3h^2} F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{4}{3} \left[B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) \right. \\
&+ \left. F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) - \frac{4}{3h^2} H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \right] \frac{1}{h^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(J_1 u_0 + K_2 \phi_x - c_1 J_4 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (7.30)
\end{aligned}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
&- A_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{8}{h^2} D_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \frac{16}{h^4} F_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
&+ B_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
&- \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{3} \left[E_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + E_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + F_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + F_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) \right. \\
& - \left. \frac{4}{3h^2} H_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \right] \frac{1}{h^2} + B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + D_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) - \frac{4}{3} \left[E_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \right. \\
& + \left. F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) \right] \frac{1}{h^2} \\
& = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(J_1 v_0 + K_2 \phi_y - c_1 J_4 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \tag{7.31}
\end{aligned}$$

7.3.1 Análise das vibrações livres

Para problemas de vibrações livres, supomos uma solução para u_0 , v_0 , w_0 , ϕ_x e ϕ_y do tipo:

$$u_0(x, y, t) = u_0(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.32}$$

$$v_0(x, y, t) = v_0(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.33}$$

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.34}$$

$$\phi_x(x, y, t) = \phi_x(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.35}$$

$$\phi_y(x, y, t) = \phi_y(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.36}$$

onde ω é a frequência de vibração.

Substituindo (7.32) nas equações de equilíbrio, e igualando a força externa a zero, obtêm-se as equações:

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} E_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) + A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) = -\omega^2 \left[I_0 u_0 + J_1 \phi_x - c_1 I_3 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \quad (7.37)
\end{aligned}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) \\
& + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) \\
& - \frac{4}{3h^2} E_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) = -\omega^2 \left[I_0 v_0 + J_1 \phi_y - c_1 I_3 \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \quad (7.38)
\end{aligned}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{8}{h^2} D_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{h^4} F_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\
& + A_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \frac{8}{h^2} D_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{16}{h^4} F_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{4}{3} \left[E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + E_{12} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + F_{11} \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + F_{12} \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial x^2} - \frac{4}{3h^2} H_{11} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) \right. \\
& - \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + 2E_{33} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} \right) + 2F_{33} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial x^2} \right) \\
& - \frac{8}{3h^2} H_{33} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + E_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} + E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + F_{12} \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \\
& \left. + F_{22} \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} - \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} H_{22} \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \right] \frac{1}{h^2}
\end{aligned}$$

$$= -\omega^2 \left[I_0 w_0 - c_1 I_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + c_1 \left[I_3 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + J_4 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right] \right] \quad (7.39)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{8}{h^2} D_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \frac{16}{h^4} F_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \\ & + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} F_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \\ & - \frac{4}{3} \left[E_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + E_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + F_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + F_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} H_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \right. \\ & \left. - \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \right] \frac{1}{h^2} + B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) + D_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) \\ & - \frac{4}{3h^2} F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{4}{3} \left[B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) \right. \\ & \left. + F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) - \frac{4}{3h^2} H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) \right] \frac{1}{h^2} \\ & = -\omega^2 \left[J_1 u_0 + K_2 \phi_x - c_1 J_4 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (7.40)$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -A_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{8}{h^2} D_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \frac{16}{h^4} F_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ & + B_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\ & - \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \\ & - \frac{4}{3} \left[E_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + E_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + F_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + F_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{3h^2}H_{22}\left(\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3w_0}{\partial y^3}\right)\left]\frac{1}{h^2}+B_{33}\left(\frac{\partial^2u_0}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2v_0}{\partial x^2}\right)+D_{33}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}\right)\right. \\
& -\frac{4}{3h^2}F_{33}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3w_0}{\partial y\partial x^2}\right)-\frac{4}{3}\left[E_{33}\left(\frac{\partial^2u_0}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2v_0}{\partial x^2}\right)\right. \\
& \left.+F_{33}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{33}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3w_0}{\partial y\partial x^2}\right)\right]\frac{1}{h^2} \\
& =-\omega^2\left[J_1v_0+K_2\phi_y-c_1J_4\frac{\partial w_0}{\partial y}\right]
\end{aligned} \tag{7.41}$$

7.3.2 Interpolação das equações de equilíbrio

O sistema de equações é aproximado usando o método das multiquádricas. Ou seja supõe-se, por exemplo em u_0 que $u_0^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$. Por uma questão de simplificação de escrita nas equações g designa $g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$.

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-\frac{4}{3h^2} E_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{33} 2 \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] \\
& = \omega^2 \left[-\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} I_0 g + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} c_1 I_3 \frac{\partial g}{\partial x} - \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} J_1 g \right]
\end{aligned} \tag{7.42}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-\frac{4}{3h^2} E_{33} 2 \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[B_{33} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} E_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& = \omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{v_0} I_0 g - \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} c_1 I_3 \frac{\partial g}{\partial y} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} J_1 g \right] \tag{7.43}
\end{aligned}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[\frac{4}{3h^2} E_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} + \frac{4}{3h^2} 2E_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[\frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{4}{3h^2} 2E_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{4}{3h^2} E_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[A_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{8}{h^2} D_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{16}{h^4} F_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{8}{h^2} D_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right. \\
& + \frac{16}{h^4} F_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} - \frac{32}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^4 g}{\partial y^2 \partial x^2} - \frac{32}{9h^4} H_{33} 2 \frac{\partial^4 g}{\partial y^2 \partial x^2} - \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} \left. \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[A_{55} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{8}{h^2} D_{55} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{16}{h^4} F_{55} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{4}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \right. \\
& + \frac{4}{3h^2} 2F_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - \frac{32}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} + \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[A_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{8}{h^2} D_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{16}{h^4} F_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} \right. \\
& + \left. \frac{4}{3h^2} 2F_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{32}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} - \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} c_1 I_3 \frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} c_1 I_3 \frac{\partial g}{\partial y} + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[I_0 w_0 - c_1 I_6 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) \right] \right. \\
& + \left. \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} c_1 J_4 \frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} c_1 J_4 \frac{\partial g}{\partial y} \right] \tag{7.44}
\end{aligned}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-A_{55} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{8}{h^2} D_{55} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{16}{h^4} F_{55} + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{4}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \right. \\
& - \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} + \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - \frac{4}{3h^2} F_{33} 2 \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} + \frac{16}{9h^4} H_{33} 2 \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \left. \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-A_{55} g + \frac{8}{h^2} D_{55} g - \frac{16}{h^4} F_{55} g + D_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{8}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right. \\
& + \left. D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{8}{3h^2} F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[+ D_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{8}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{8}{3h^2} F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right. \\
& + \left. \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] = \omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} J_1 g - \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} c_1 J_4 \frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} K_2 g \right] \tag{7.45}
\end{aligned}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{4}{3h^2} E_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-A_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{8}{h^2} D_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{16}{h^4} F_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{4}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} - \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right. \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} - \frac{4}{3h^2} F_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} + \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} \left. \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[D_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{8}{3h^2} F_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{8}{3h^2} F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right. \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \left. \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-A_{44} g + \frac{8}{h^2} D_{44} g - \frac{16}{h^4} F_{44} g + D_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{8}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right. \\
& + D_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{8}{3h^2} F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{16}{9h^4} H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left. \right] \\
& = \omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{v_0} J_1 g - \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} c_1 J_4 \frac{\partial g}{\partial y} + \sum_{j=1}^N a_j^g K_2 g \right] \tag{7.46}
\end{aligned}$$

As condições de fronteira num bordo $x = a$ são:

Bordo simplesmente apoiado (S-simply supported)

$$w_0(a, y) = 0, \quad v_0(a, y) = 0, \quad \phi_y(a, y) = 0, \quad N_{xx}(a, y) = 0, \quad \bar{M}_{xx}(a, y) = 0. \tag{7.47}$$

Bordo encastrado (C-clamped)

$$u_0(a, y) = 0, \quad v_0(a, y) = 0, \quad w_0(a, y) = 0, \quad \phi_x(a, y) = 0, \quad \phi_y(a, y) = 0. \tag{7.48}$$

Bordo livre (F-free)

$$\bar{Q}_x(a, y) = 0, \quad N_{xx}(a, y) = 0, \quad N_{xy}(a, y) = 0, \quad \bar{M}_{xy}(a, y) = 0, \quad \bar{M}_{xx}(a, y) = 0. \quad (7.49)$$

7.4 Teoria de deformação trigonométrica

As equações de Euler-Lagrange podem ser expressas em termos dos deslocamentos, e tomam a forma:

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & Gzs(1, 1) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - Gzz(1, 1) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ & - 2Gzz(1, 2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} + Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + Gzs(2, 2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} \\ & - Gzz(2, 2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 2Gzs(3, 3) \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \right) - 4Gzz(3, 3) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \\ & = I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - I_0 \ddot{w}_0 - I_{1s} \left(\frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\phi}_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7.50)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & Gss(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + Gss(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - Gzs(1, 1) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \\ & + Gss(3, 3) \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \right) - 2Gzs(3, 3) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} - \frac{Hcc(5, 5) \pi^2 \phi_x}{h^2} \\ & = I_{1s} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - I_{0ss} \ddot{\phi}_x \end{aligned} \quad (7.51)$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& G_{ss}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{ss}(2, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - G_{zs}(2, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\
& + G_{ss}(3, 3) \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) - 2G_{zs}(3, 3) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - \frac{H_{cc}(4, 4) \pi^2 \phi_y}{h^2} \\
& = I_{1s} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - I_{0ss} \ddot{\phi}_y
\end{aligned} \tag{7.52}$$

7.4.1 Análise das vibrações livres

Para problemas de vibrações livres, supomos uma solução para w_0 , ϕ_x e ϕ_y do tipo:

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.53}$$

$$\phi_x(x, y, t) = \phi_x(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.54}$$

$$\phi_y(x, y, t) = \phi_y(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.55}$$

onde ω é a frequência de vibração.

Substituindo (7.53) nas equações de equilíbrio, e igualando a força externa a zero, obtêm-se as equações:

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& G_{zs}(1, 1) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - G_{zz}(1, 1) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\
& - 2G_{zz}(1, 2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} + G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + G_{zs}(2, 2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} \\
& - G_{zz}(2, 2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 2G_{zs}(3, 3) \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \right) - 4G_{zz}(3, 3) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \\
& = -\omega^2 \left[I_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - I_0 w_0 - I_{1s} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.56}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& G_{ss}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{ss}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{zs}(1, 1) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \\
& + G_{ss}(3, 3) \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \right) - 2G_{zs}(3, 3) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} - \frac{H_{cc}(5, 5) \pi^2 \phi_x}{h^2} \\
& = -\omega^2 \left[I_{1s} \frac{\partial w_0}{\partial x} - I_{0ss} \phi_x \right]
\end{aligned} \tag{7.57}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& G_{ss}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{ss}(2, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - G_{zs}(2, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\
& + G_{ss}(3, 3) \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) - 2G_{zs}(3, 3) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - \frac{H_{cc}(4, 4) \pi^2 \phi_y}{h^2} \\
& = -\omega^2 \left[I_{1s} \frac{\partial w_0}{\partial y} - I_{0ss} \phi_y \right]
\end{aligned} \tag{7.58}$$

7.4.2 Interpolação das equações de equilíbrio

O sistema de equações é aproximado usando o método das multiquádricas. Ou seja supõe-se, por exemplo em u_0 que $u_0^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$. Por uma questão de simplificação de escrita nas equações g designa $g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}\|, c)$.

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-G_{zz}(1, 1) \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} - 2G_{zz}(1, 2) \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} - G_{zz}(2, 2) \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} - 4G_{zz}(3, 3) \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[G_{zs}(1, 1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} + 2G_{zs}(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + Gzs(2, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} + 2Gzs(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left(I_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + I_2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - I_0 g \right) - \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} I_{1s} \frac{\partial g}{\partial x} - \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} I_{1s} \frac{\partial g}{\partial y} \right] \quad (7.59)
\end{aligned}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-Gzs(1, 1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} - 2Gzs(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[Gss(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + Gss(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - Hcc(5, 5) \frac{\pi^2}{h^2} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[Gss(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + Gss(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} I_{1s} \frac{\partial g}{\partial x} - \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} I_{0ss} g \right] \quad (7.60)
\end{aligned}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-Gzs(1, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - Gzs(2, 2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - 2Gzs(3, 3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \right] + \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[Gss(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + Gss(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] + \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[Gss(2, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + Gss(3, 3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - Hcc(4, 4) \frac{\pi^2}{h^2} g \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} I_{1s} \frac{\partial g}{\partial y} - \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} I_{0ss} g \right] \quad (7.61)
\end{aligned}$$

7.5 Teoria ziguezague trigonométrica

As equações de equilíbrio (5.107) (5.111) podem ser expressas em relação aos deslocamentos, w_0 , ϕ_x e ϕ_y , para laminados simétricos:

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & G_{zs}(1, 1) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - G_{zz}(1, 1) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2G_{zz}(1, 2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \\
 & + G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + G_{zs}(2, 2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} + 2G_{zs}(3, 3) \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \right) \\
 & - G_{zz}(2, 2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 4G_{zz}(3, 3) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} = I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & - I_0 \ddot{w}_0 - (I_{1A} + I_{2B} + I_{1s}) \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - (I_{1C} + I_{2D} + I_{1s}) \frac{\partial \ddot{\phi}_y}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{7.62}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & - 2 \frac{\pi}{h} H_{Bc}(5, 5) \phi_x + G_{AA}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{CA}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2G_{sA}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + G_{sA}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{zA}(1, 1) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - G_{zA}(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + 2G_{zBA}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + G_{zDA}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{zBC}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2G_{zBs}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{zBs}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
 & - G_{zDz}(1, 1) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - G_{zBz}(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + G_{zBzB}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{zDzB}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
 & + G_{sC}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{ss}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{ss}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{zs}(1, 1) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\
 & - G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + G_{zDs}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{AA}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{CA}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2G_{zA}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + 2G_{zBA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{zDA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - H_{BB}(5,5)\phi_x \\
& - \frac{\pi^2}{h^2}H_{cc}(5,5)\phi_x + G_{zBC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - 2G_{zDz}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + G_{zBzB}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \\
& + G_{zDzB}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2G_{sA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{sC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - 2G_{zs}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \\
& + 2G_{zBs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{zDs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{zBs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{sA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
& + G_{ss}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{ss}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} = (I_{1A} + I_{2B} + I_{1s})\frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \\
& - (I_{0AA} + 2I_{1AB} + 2I_{0As} + I_{2BB} + 2I_{1Bs} + I_{0ss})\ddot{\phi}_x
\end{aligned} \tag{7.63}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& 2G_{sC}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{sC}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{CC}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{zDA}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zDs}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDs}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{CA}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDC}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& + G_{zBC}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - G_{zC}(1,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - G_{zC}(2,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + G_{CA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& + G_{CC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - 2G_{zC}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + G_{zBC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& - G_{zDz}(2,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + G_{zDzB}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{zDzD}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{ss}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& + G_{zDs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{ss}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - 2G_{zDz}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& + G_{zDzB}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{zDzD}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + G_{sA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{sC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& - 2G_{zs}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + G_{zBs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - H_{DD}(4,4)\phi_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2\frac{\pi}{h}H_{Dc}(4,4)\phi_y + G_{sC}(3,3)\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y} - \frac{\pi^2}{h^2}H_{cc}(4,4)\phi_y + G_{ss}(2,2)\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2} \\
 & - G_{zs}(1,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y} - G_{zs}(2,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + G_{zBs}(1,2)\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y} + G_{sA}(1,2)\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y} \\
 & + G_{ss}(1,2)\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y} = (I_{1C} + I_{2D} + I_{1s})\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y} \\
 & - (I_{0CC} + 2I_{1CD} + 2I_{0Cs} + I_{2DD} + 2I_{1Ds} + I_{0ss})\ddot{\phi}_y
 \end{aligned} \tag{7.64}$$

As condições de fronteira para um bordo simplesmente apoiado, encastrado e livre são:

(a) Simplesmente apoiado

- SS1, $w = 0; M_n = 0; M_{ns} = 0$

- SS2, $w = 0; M_n = 0; \phi_s = 0$

(b) Encastrado, $w = 0; \phi_n = 0; \phi_s = 0$

(c) Livre, $Q_n = 0; M_n = 0; M_{ns} = 0$

onde n e s referem-se às direcções normal e tangencial ao bordo, respectivamente. Os momentos e forças resultantes cuja normal se pode representar da forma $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ podem ser expressas por:

$$M_n = n_x^2 M_x + 2n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_y \tag{7.65}$$

$$M_{ns} = (n_x^2 - n_y^2) M_{xy} - n_x n_y (M_y - M_x) \tag{7.66}$$

$$Q_n = n_x Q_x + n_y Q_y \tag{7.67}$$

$$\theta_n = n_x \theta_x + n_y \theta_y \tag{7.68}$$

$$\theta_s = n_x \theta_y - n_y \theta_x \tag{7.69}$$

Por exemplo para o bordo $x = a$ simplesmente apoiado,

$$w_{(x=a)} = 0 \quad (7.70)$$

$$\phi_{y(x=a)} = 0 \quad (7.71)$$

$$M_{x(x=a)} = Gzs(1, 1) \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + Gzs(1, 2) \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - Gzz(1, 1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - Gzz(1, 2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Usando a interpolação por multiquádricas, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^N a_j^w g_i = 0 \quad (7.72)$$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} g_i = 0 \quad (7.73)$$

$$\sum_{j=1}^N \left(a_j^w \left[-Gzz(1, 1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - Gzz(1, 2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] + a_j^{\phi_x} Gzs(1, 1) \frac{\partial g}{\partial x} + a_j^{\phi_y} Gzs(1, 2) \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0 \quad (7.74)$$

7.5.1 Análise das vibrações livres

Para problemas de vibrações livres, supomos uma solução para w_0 , ϕ_x e ϕ_y do tipo:

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y) e^{i\omega t} \quad (7.75)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \phi_x(x, y) e^{i\omega t} \quad (7.76)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \phi_y(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.77)$$

onde ω é a frequência de vibração. As equações de equilíbrio podem ser expressas da forma:

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & G_{zs}(1, 1) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - G_{zz}(1, 1) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2G_{zz}(1, 2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \\ & + G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + G_{zs}(2, 2) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} + 2G_{zs}(3, 3) \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \right) \\ & - G_{zz}(2, 2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 4G_{zz}(3, 3) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} = -\omega^2 \left[I_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \left. - I_0 w_0 - (I_{1A} + I_{2B} + I_{1s}) \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - (I_{1C} + I_{2D} + I_{1s}) \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (7.78)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -2\frac{\pi}{h} H_{Bc}(5, 5) \phi_x + G_{AA}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{CA}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2G_{sA}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\ & + G_{sA}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{zA}(1, 1) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - G_{zA}(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + 2G_{zBA}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\ & + G_{zDA}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{zBC}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2G_{zBs}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{zBs}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\ & - G_{zDz}(1, 1) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - G_{zBz}(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + G_{zBzB}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{zDzB}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\ & + G_{sC}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{ss}(1, 1) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_{ss}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{zs}(1, 1) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & - G_{zs}(1, 2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + G_{zDs}(1, 2) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{AA}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{CA}(3, 3) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2G_{zA}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + 2G_{zBA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{zDA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - H_{BB}(5,5)\phi_x \\
& -\frac{\pi^2}{h^2}H_{cc}(5,5)\phi_x + G_{zBC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - 2G_{zDz}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + G_{zBzB}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \\
& + G_{zDzB}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2G_{sA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{sC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - 2G_{zs}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \\
& + 2G_{zBs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{zDs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{zBs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + G_{sA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
& + G_{ss}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + G_{ss}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} = -\omega^2 \left[(I_{1A} + I_{2B} + I_{1s}) \frac{\partial w_0}{\partial x} \right. \\
& \left. - (I_{0AA} + 2I_{1AB} + 2I_{0As} + I_{2BB} + 2I_{1Bs} + I_{0ss})\phi_x \right] \tag{7.79}
\end{aligned}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& 2G_{sC}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{sC}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{CC}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{zDA}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zDs}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDs}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{CA}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDC}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& + G_{zBC}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - G_{zC}(1,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - G_{zC}(2,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + G_{CA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& + G_{CC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - 2G_{zC}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + G_{zBC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& - G_{zDz}(2,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + G_{zDzB}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{zDzD}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + G_{ss}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& + G_{zDs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{ss}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - 2G_{zDz}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& + G_{zDzB}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{zDzD}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + G_{sA}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{sC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2G_{zs}(3,3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + G_{zBs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2G_{zDs}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - H_{DD}(4,4)\phi_y \\
& -2\frac{\pi}{h}H_{Dc}(4,4)\phi_y + G_{sC}(3,3)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\pi^2}{h^2}H_{cc}(4,4)\phi_y + G_{ss}(2,2)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& -G_{zs}(1,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - G_{zs}(2,2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + G_{zBs}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + G_{sA}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& + G_{ss}(1,2)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} = -\omega^2 \left[(I_{1C} + I_{2D} + I_{1s}) \frac{\partial w_0}{\partial y} \right. \\
& \left. - (I_{0CC} + 2I_{1CD} + 2I_{0Cs} + I_{2DD} + 2I_{1Ds} + I_{0ss})\phi_y \right] \tag{7.80}
\end{aligned}$$

7.5.2 Interpolação das equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio podem ser interpoladas da forma:

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-G_{zz}(1,1)\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} - 2G_{zz}(1,2)\frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} - G_{zz}(2,2)\frac{\partial^4 g}{\partial y^4} - 4G_{zz}(3,3)\frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[G_{zs}(1,1)\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + G_{zs}(1,2)\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} + 2G_{zs}(3,3)\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[G_{zs}(1,2)\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + G_{zs}(2,2)\frac{\partial^3 g}{\partial y^3} + 2G_{zs}(3,3)\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[I_2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) - I_0 g \right] - \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[(I_{1A} + I_{2B} + I_{1s}) \frac{\partial g}{\partial x} \right] \right. \\
& \left. - \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[(I_{1C} + I_{2D} + I_{1s}) \frac{\partial g}{\partial y} \right] \right] \tag{7.81}
\end{aligned}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-G_{zA}(1,1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - G_{zA}(1,2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - G_{zDz}(1,1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - G_{zBz}(1,2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \right. \\
& - G_{zs}(1,1) \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} - G_{zs}(1,2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - 2G_{zA}(3,3) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} - 2G_{zDz}(3,3) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \\
& \left. - 2G_{zs}(3,3) \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-2\frac{\pi}{h} H_{Bc}(5,5)g + G_{AA}(1,1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{sA}(1,1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{zBA}(1,1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right. \\
& + 2G_{zBs}(1,1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + G_{zBzB}(1,1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + G_{ss}(1,1) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + G_{AA}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\
& + 2G_{zBA}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - H_{BB}(5,5)g - \frac{\pi^2}{h^2} H_{cc}(5,5)g + G_{zBzB}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 2G_{sA}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\
& \left. + 2G_{zBs}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + G_{ss}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[+G_{CA}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBC}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{sA}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right. \\
& + G_{zBs}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDzB}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{sC}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{ss}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zDs}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{CA}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBC}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& + G_{zDzB}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{sC}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDs}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBs}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& \left. + G_{sA}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{ss}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[(I_{1A} + I_{2B} + I_{1s}) \frac{\partial g}{\partial x} \right] \right. \\
& \left. - \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[(I_{0AA} + 2I_{1AB} + 2I_{0As} + I_{2BB} + 2I_{1Bs} + I_{0ss})g \right] \right] \quad (7.82)
\end{aligned}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-G_{zC}(1,2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - G_{zC}(2,2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} - 2G_{zC}(3,3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - G_{zDz}(2,2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right. \\
& \quad \left. - 2G_{zDz}(3,3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - 2G_{zs}(3,3) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - G_{zs}(1,2) \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - G_{zs}(2,2) \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[+G_{sC}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDs}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{CA}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right. \\
& \quad + G_{zBC}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{CA}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBC}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDzB}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& \quad + G_{zDs}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{ss}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDA}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zDzB}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& \quad + G_{sA}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBs}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{sC}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{zBs}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
& \quad \left. + G_{sA}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + G_{ss}(1,2) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[2G_{sC}(2,2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + G_{CC}(2,2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 2G_{zDs}(2,2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 2G_{zDC}(2,2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right. \\
& \quad + G_{CC}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{zDC}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + G_{zDzD}(2,2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + G_{ss}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\
& \quad + G_{zDzD}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{sC}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2G_{zDs}(3,3) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - H_{DD}(4,4)g \\
& \quad \left. - 2\frac{\pi}{h}H_{Dc}(4,4)g - \frac{\pi^2}{h^2}H_{cc}(4,4)g + G_{ss}(2,2) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[(I_{1C} + I_{2D} + I_{1s}) \frac{\partial g}{\partial y} \right] - \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[(I_{0CC} + 2I_{1CD} + 2I_{0Cs} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + I_{2DD} + 2I_{1Ds} + I_{0ss})g \right] \right] \tag{7.83}
\end{aligned}$$

7.6 Teoria de ordem superior de Kant

As equações Euler-Lagrange podem ser escritas em ordem aos deslocamentos, e são de seguida apresentadas.

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & -A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - A_{13} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - A_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & -B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - B_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
 & -E_{11} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - E_{12} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} - E_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) - E_{23} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) \\
 & = -I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \ddot{\phi}_x - I_3 \ddot{\phi}_x^*
 \end{aligned} \tag{7.84}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & -A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - A_{23} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - A_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\
 & -B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - B_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\
 & -E_{12} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} - E_{22} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - E_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) - E_{13} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) \\
 & = -I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \ddot{\phi}_y - I_3 \ddot{\phi}_y^*
 \end{aligned} \tag{7.85}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$-I_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - I_{45} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) - I_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

$$- 3K_{44} \frac{\partial \phi_y^*}{\partial y} - 3K_{45} \left(\frac{\partial \phi_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^*}{\partial x} \right) - 3K_{55} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x} = -I_0 \ddot{w}_0 \quad (7.86)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & - B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{13} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & - F_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - F_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - F_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - F_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\ & - G_{11} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} - G_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) - G_{23} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) \\ & + I_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + I_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 3K_{45} \phi_y^* + 3K_{55} \phi_x^* = -I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \ddot{\phi}_x - I_4 \ddot{\phi}_y^* \end{aligned} \quad (7.87)$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & - B_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{23} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\ & - F_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - F_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - F_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\ & - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} - G_{22} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - G_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) - G_{13} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) \\ & + I_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + I_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 3K_{44} \phi_y^* + 3K_{45} \phi_x^* = -I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \ddot{\phi}_y - I_4 \ddot{\phi}_y^* \end{aligned} \quad (7.88)$$

6ª equação de equilíbrio:

$$- E_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - E_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - E_{13} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - E_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -G_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - G_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
& -H_{11} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - H_{12} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} - H_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) - H_{23} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) \\
& + 3K_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 3K_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 9L_{45} \phi_y^* + 9L_{55} \phi_x^* = -I_3 \ddot{u}_0 - I_4 \ddot{\phi}_x - I_6 \ddot{\phi}_x^*
\end{aligned} \tag{7.89}$$

7ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& -E_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - E_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - E_{23} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - E_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\
& -G_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - G_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - G_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - G_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\
& -H_{12} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} - H_{22} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - H_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) - H_{13} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) \\
& + 3K_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 3K_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 9L_{44} \phi_y^* + 9L_{45} \phi_x^* = -I_3 \ddot{v}_0 - I_4 \ddot{\phi}_y - I_6 \ddot{\phi}_y^*
\end{aligned} \tag{7.90}$$

7.6.1 Análise das vibrações livres

A análise das vibrações livres passa pela resolução um problema de valores próprios da forma indicada na subsecção 3.3.1.

Assumindo uma solução do problema de valores próprios do tipo:

$$u_0(x, y, t) = u_0(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.91}$$

$$v_0(x, y, t) = v_0(x, y) e^{i\omega t} \tag{7.92}$$

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.93)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \phi_x(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.94)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \phi_y(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.95)$$

$$\phi_x^*(x, y, t) = \phi_x^*(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.96)$$

$$\phi_y^*(x, y, t) = \phi_y^*(x, y)e^{i\omega t} \quad (7.97)$$

onde ω é a frequência própria. Substituindo nas equações anteriores, obtemos as equações:

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - A_{13} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - A_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & - B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - B_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\ & - E_{11} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - E_{12} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} - E_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) - E_{23} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) \\ & = I_0 u_0 + I_1 \phi_x + I_3 \phi_x^* \end{aligned} \quad (7.98)$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - A_{23} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - A_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - A_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\ & - B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - B_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\ & - E_{12} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} - E_{22} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - E_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) - E_{13} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

$$= I_0 v_0 + I_1 \phi_y + I_3 \phi_y^* \quad (7.99)$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -I_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - I_{45} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) - I_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ & - 3K_{44} \frac{\partial \phi_y^*}{\partial y} - 3K_{45} \left(\frac{\partial \phi_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^*}{\partial x} \right) - 3K_{55} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x} = I_0 w_0 \end{aligned} \quad (7.100)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{13} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & - F_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - F_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - F_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - F_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\ & - G_{11} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} - G_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) - G_{23} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) \\ & + I_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + I_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 3K_{45} \phi_y^* + 3K_{55} \phi_x^* = I_1 u_0 + I_2 \phi_x + I_4 \phi_x^* \end{aligned} \quad (7.101)$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & -B_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{23} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\ & - F_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - F_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - F_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - F_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\ & - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} - G_{22} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - G_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) - G_{13} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

$$+ I_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + I_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 3K_{44}\phi_y^* + 3K_{45}\phi_x^* = I_1 v_0 + I_2 \phi_y + I_4 \phi_y^* \quad (7.102)$$

6ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & - E_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - E_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - E_{13} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - E_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & - G_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - G_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - G_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\ & - H_{11} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - H_{12} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} - H_{13} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) - H_{23} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) \\ & + 3K_{45} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 3K_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 9L_{45}\phi_y^* + 9L_{55}\phi_x^* = I_3 u_0 + I_4 \phi_x + I_6 \phi_x^* \end{aligned} \quad (7.103)$$

7ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & - E_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - E_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - E_{23} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - E_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\ & - G_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - G_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - G_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - G_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - G_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\ & - H_{12} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} - H_{22} \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial y^2} - H_{23} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x \partial y} \right) - H_{13} \frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x^2} - H_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y^*}{\partial x^2} \right) \\ & + 3K_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 3K_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 9L_{44}\phi_y^* + 9L_{45}\phi_x^* = I_3 v_0 + I_4 \phi_y + I_6 \phi_y^* \end{aligned} \quad (7.104)$$

7.6.2 Interpolação das equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio podem ser interpoladas da forma:

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[-A_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - A_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[-A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - A_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[-E_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[-E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
 & = \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} I_0 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} I_1 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} I_3 g
 \end{aligned} \tag{7.105}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[-A_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - A_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - A_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[-A_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - A_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - B_{33} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[-E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[-E_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \\
& = \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} I_0 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} I_1 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} I_3 g
\end{aligned} \tag{7.106}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[-I_{44} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - I_{45} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - I_{55} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-I_{45} \frac{\partial g}{\partial y} - I_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-I_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - I_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[-3K_{45} \frac{\partial g}{\partial y} - 3K_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[-3K_{44} \frac{\partial g}{\partial y} - 3K_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] = \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} I_0 g
\end{aligned} \tag{7.107}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[-B_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[-B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[I_{45} \frac{\partial g}{\partial y} + I_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-F_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - F_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + I_{55} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-F_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - F_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - F_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + I_{45} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[-G_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 3K_{55} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[-G_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 3K_{45} g \right] \\
& = \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} I_1 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} I_2 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} I_4 g
\end{aligned} \tag{7.108}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[-B_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[-B_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - B_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - B_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[I_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + I_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-F_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - F_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - F_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + I_{45} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-F_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - F_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - F_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + I_{44} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[-G_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 3K_{45} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[-G_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{23} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 3K_{44} g \right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} I_1 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} I_2 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} I_4 g \quad (7.109)$$

6ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[-E_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[-E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[3K_{45} \frac{\partial g}{\partial y} + 3K_{55} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-G_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 3K_{55} g \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-G_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 3K_{45} g \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[-H_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - H_{13} 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 9L_{55} g \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[-H_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - H_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - H_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 9L_{45} g \right] \\ & = \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} I_3 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} I_4 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} I_6 g \end{aligned} \quad (7.110)$$

7ª equação de equilíbrio:

$$\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[-E_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[-E_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - E_{23} \frac{2\partial^2 g}{\partial x \partial y} - E_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[3K_{44} \frac{\partial g}{\partial y} + 3K_{45} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[-G_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 3K_{45} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[-G_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - G_{23} \frac{2\partial^2 g}{\partial x \partial y} - G_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 3K_{44} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x^*} \left[-H_{12} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - H_{23} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - H_{13} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 9L_{45} g \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} \left[-H_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - H_{23} \frac{2\partial^2 g}{\partial x \partial y} - H_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 9L_{44} g \right] \\
& = \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} I_3 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} I_4 g + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y^*} I_6 g
\end{aligned}
\tag{7.111}$$

7.7 Exemplos numéricos

Para os estudo das vibrações livres de placas, foram escolhidos os seguintes exemplos para testar diferentes implementações referentes a distintas teorias de deformação.

- placa quadrada laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$
- placa enviesada
- placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades.
- placa sanduiche quadrada com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{núcleo}/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

7.7.1 Placa quadrada simplesmente apoiada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

As propriedades do material são

$$\frac{E_1}{E_2} = 10, 20, 30 \text{ ou } 40; \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2; \quad G_3 = 0.5E_2; \quad \nu_{12} = 0.25; \quad \rho = 1$$

Os resultados apresentados encontram-se normalizados pela expressão:

$$\bar{\omega} = (\omega a^2/h) \sqrt{\rho/E_2}$$

em que a é o comprimento da placa, h é a espessura total do laminado, ρ é a densidade do material, e E_2 é o módulo de Young do material na direcção 2. Para a teoria FSDT o factor de correcção de corte usado é $k = \pi^2/12$, proposto por Liew et al. [2003]. O parâmetro de forma usado é $c = 1/(n - 1)$, e o quociente h/a é igual a 0.2. Na tabela 7.1 encontra-se a frequência fundamental para placas com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ com diferentes quocientes E_1/E_2 . Os resultados são comparados com um valor considerado exacto de [Reddy, 2004] e Khdeir e Librescu [1988] e uma formulação sem malha (quadratura diferencial com moving least squares) baseada na teoria de primeira ordem [Liew et al., 2003].

Os três primeiros modos de vibração para uma placa com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ são comparados com resultados teóricos de Khdeir e Librescu [1988] e numéricos de Liew et al. [2003] (tabela 7.2).

A influência das condições de fronteira e da relação espessura-largura da placa é considerada na tabela 7.3. Os bordos paralelos ao eixo x estão simplesmente apoiados, e os bordos paralelos ao eixo y são sujeitos a condições de fronteira simplesmente apoiada (S) e encastrada (C). A notação SS, SC, CC refere-se às condições de fronteira dos dois bordos paralelos ao eixo y . É considerada uma placa quadrada com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $E_1/E_2 = 40$. Os resultados são comparados com [Liew et al., 2003] e [Reddy, 2004].

Os resultados obtidos estão em concordância com os resultados exactos, e muito próxi-

mos dos resultados de Liew et al. [2003], para os vários tipos de condição de fronteira. Para a placa simplesmente apoiada, a diferença entre os resultados obtidos e os valores exactos variam de 0.11% (para $a/h = 2$) até 0.25% para $a/h = 10$. Para $a/h = 100$, a diferença ascende aos 2.8%. Para placas com condição de fronteira do tipo SC, os resultados variam de 0.11% para $a/h = 2$ até 0.14%. Para $a/h = 100$ a diferença é de 1.2%. Este último resultado difere apenas 0.0036% do resultado de Liew. Para condições de fronteira tipo CC, os resultados variam de 0.11% para $a/h = 2$ até 0.25% para $a/h = 100$.

Tabela 7.1: Teoria FSDT. Frequência natural para uma placa simplesmente apoiada quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $a/h = 5$

Método	Rede	E_1/E_2			
		10	20	30	40
FSDT [Liew et al., 2003]		8.2924	9.5613	10.320	10.849
Exacto [Reddy, 2004; Khdeir e Librescu, 1988]		8.2982	9.5671	10.326	10.854
Presente [Ferreira et al., 2005]	7×7	8.4011	9.6793	10.430	10.966
	9×9	8.3402	9.6130	10.372	10.899
	11×11	8.3181	9.5889	10.348	10.876
	13×13	8.3101	9.5801	10.349	10.864

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 7.2: Teoria FSDT. Frequências naturais para uma placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para várias condições de fronteira, $E_1/E_2 = 40$, $a/h = 10$, $n = 13$

Modos de vibração	Método	SS	SC	CC
1	FSDT [Liew et al., 2003]	14.767	17.176	19.669
	exacto [Khdeir e Librescu, 1988]	14.766	17.175	19.669
	presente [Ferreira et al., 2005]	14.784	17.178	19.667
2	FSDT [Liew et al., 2003]	22.149	23.668	25.342
	exacto [Khdeir e Librescu, 1988]	22.158	23.677	25.349
	presente [Ferreira et al., 2005]	22.208	23.718	25.389
3	FSDT [Liew et al., 2003]	36.594	37.415	38.345
	exacto [Khdeir e Librescu, 1988]	36.900	37.720	38.650
	presente [Ferreira et al., 2005]	36.916	37.763	38.689

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Os resultados numéricos para a teoria TSDT encontram-se na tabela 7.4. Neste caso, os resultados de Liew et al. [2003] com uma teoria de primeira ordem são melhores que os resultados obtidos com o presente método. Supõe-se que essa ocorrência se deve a uma escolha mais adequada do factor de correcção de corte por parte de Liew et al. [2003].

Tabela 7.3: Teoria FSDT. Frequência natural para uma placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para várias condições de fronteira e quocientes a/h , com $E_1/E_2 = 40$

a/h	Método	Rede	SS	SC	CC
2	FSDT [Liew et al., 2003]		5.205	5.210	5.257
	Exacto [Reddy, 2004]		5.205	5.211	5.257
	presente [Ferreira et al., 2005]	7×7	5.238	5.242	5.257
		9×9	5.218	5.223	5.269
		11×11	5.211	5.217	5.263
5	FSDT [Liew et al., 2003]		10.290	10.647	11.266
	Exacto [Reddy, 2004]		10.290	10.646	11.266
	presente [Ferreira et al., 2005]	7×7	10.380	10.715	11.316
		9×9	10.326	10.673	11.285
		11×11	10.307	10.658	11.274
10	FSDT [Liew et al., 2003]		14.767	17.176	19.669
	Exacto [Reddy, 2004]		14.767	17.175	19.669
	presente [Ferreira et al., 2005]	7×7	14.956	17.317	19.743
		9×9	14.845	17.299	19.693
		11×11	14.804	17.199	19.678
100	FSDT [Liew et al., 2003]		18.769	28.164	40.004
	Exacto [Reddy, 2004]		18.891	28.501	40.743
	presente [Ferreira et al., 2005]	7×7	15.679	28.088	43.359
		9×9	17.758	28.125	41.210
		11×11	18.355	28.165	40.234

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Os resultados para a teoria trigonométrica são apresentados nas tabelas 7.5 e 7.6. Na tabela 7.5 é apresentada a frequência natural para vários valores de E_1/R_2 . Os valores obtidos aproximam-se do valor exacto, mas tendem a afastar-se à medida que E_1/R_2 aumenta. Na tabela 7.6 apresentam-se os valores obtidos para diferentes espessuras da placa. Os resultados aproximam-se do resultado exacto à medida que o valor de a/h aumenta, sendo muito fracos para a/h pequenos. Para $a/h = 2$, o erro relativo é de 15% e para $a/h = 100$, o erro relativo é de 0.34%.

Os resultados obtidos com a teoria ziguezague trigonométrica encontram-se nas tabelas 7.7 e 7.8. A tabela 7.7 apresenta a frequência fundamental para uma placa simplesmente apoiada para vários quocientes E_1/E_2 . O valor de $a/h = 5$ é usado, com um parâmetro de forma, $c = 6(n - 1)$. O erro é pequeno, mesmo para valores de E_1/E_2 elevados. Na tabela 7.8 são apresentados os valores da primeira frequência para vários valores de a/h .

Tabela 7.4: Teoria TSDT. Frequência natural para uma placa simplesmente apoiada quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $a/h = 5$, $c = 1/\sqrt{n}$

Método	Rede	E_1/E_2			
		10	20	30	40
FSDT [Liew et al., 2003]		8.2924	9.5613	10.320	10.849
Exacto [Reddy, 2004]		8.2982	9.5671	10.326	10.854
Presente	9×9	8.2537	9.5728	10.3709	10.9319
	11×11	8.2657	9.5688	10.3558	10.9084
	13×13	8.2727	9.5674	10.3482	10.8959
	15×15	8.2774	9.5669	10.3439	10.8886

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 7.5: Teoria trigonométrica. Frequência natural para uma placa simplesmente apoiada quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $a/h = 5$, $c = 2/\sqrt{n}$

Método	Rede	E_1/E_2			
		10	20	30	40
FSDT [Liew et al., 2003]		8.2924	9.5613	10.320	10.849
Exacto [Reddy, 2004]		8.2982	9.5671	10.326	10.854
Presente	7×7	8.4092	9.707	10.491	10.9349
	11×11	8.3058	9.5861	10.3571	10.8978
	13×13	8.2958	9.5737	10.3424	10.8809
	15×15	8.2912	9.5675	10.3347	10.8716

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria trigonométrica

Os resultados melhoraram um pouco em relação à teoria de deformação trigonométrica. Com a teoria de deformação trigonométrica zigzague, o erro relativo para $a/h = 2$ é de 9.3% e para $a/h = 100$ é de 0.34%.

A aplicação da teoria de ordem superior de Kant ao estudo das vibrações livres de uma placa $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ revelou-se bastante difícil, no sentido da escolha de um parâmetro de forma adequado. Os resultados numéricos encontram-se nas tabelas 7.9, 7.10 e 7.11. Para a placa $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ (tabela 7.9) foram feitos vários testes com diferentes parâmetros de forma em torno de $2/\sqrt{n}$, com resultados pouco satisfatórios. Como exemplo, apresenta-se na tabela 7.9 os resultados para $c = 2/\sqrt{n}$ onde se pode observar que divergem claramente do resultado exacto.

O mesmo se passa para a placa com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Nas tabelas 7.10 e 7.11 são mostrados alguns resultados obtidos.

Tabela 7.6: Teoria trigonométrica. Frequência natural para uma placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para vários quocientes a/h , com $E_1/E_2 = 40$, $c = 3/(n - 1)$

a/h	Método	Rede	SS
2	FSDT [Liew et al., 2003]		5.205
	Exacto [Reddy, 2004]		5.205
	presente	11×11	6.0144
		15×15	5.9964
		19×19	5.9994
5	FSDT[Liew et al., 2003]		10.290
	Exacto [Reddy, 2004]		10.290
	presente	11×11	10.7047
		15×15	10.6483
		19×19	10.6278
10	FSDT [Liew et al., 2003]		14.767
	Exacto [Reddy, 2004]		14.767
	presente	11×11	15.0532
		15×15	14.9625
		19×19	14.9224
100	FSDT [Liew et al., 2003]		18.769
	Exacto [Reddy, 2004]		18.891
	presente	11×11	19.0187
		15×15	18.8840
		19×19	18.8254

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria trigonométrica

Tabela 7.7: Ziguezague trigonométrica. Frequência fundamental normalizada, para uma placa quadrada simplesmente apoiada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $a/h = 5$

Método	rede	$E1/E2$			
		10	20	30	40
FSDT [Liew et al., 2003]		8.2924	9.5613	10.320	10.849
exacto [Reddy, 2004; Khdeir e Librescu, 1988]		8.2982	9.5671	10.326	10.854
presente [Roque et al., 2006]	7×7	8.3280	9.6095	10.379	10.918
	9×9	8.3133	9.5922	10.361	10.899
	11×11	8.3062	9.5868	10.358	10.899
	13×13	8.3036	9.5866	10.360	10.903
	Erro (%)	0.07	0.2	0.3	0.4

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

Tabela 7.8: Ziguezague trigonométrica. Frequência natural para uma placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para vários quocientes a/h , com $E_1/E_2 = 40$, $c = 2/\sqrt{n}$

a/h	Método	Rede	SS
2	FSDT [Liew et al., 2003]		5.205
	Exacto [Reddy, 2004]		5.205
	presente	11×11	5.7393
		15×15	5.7041
		19×19	5.6883
5	FSDT [Liew et al., 2003]		10.290
	Exacto [Reddy, 2004]		10.290
	presente	11×11	10.4060
		15×15	10.3761
		19×19	10.3710
10	FSDT [Liew et al., 2003]		14.767
	Exacto [Reddy, 2004]		14.767
	presente	11×11	14.7668
		15×15	14.7381
		19×19	14.7300
100	FSDT[Liew et al., 2003]		18.769
	Exacto [Reddy, 2004]		18.891
	presente	11×11	18.8763
		15×15	18.8386
		19×19	18.8270

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

Tabela 7.9: Teoria de ordem superior de Kant. Frequência natural para uma placa simplesmente apoiada quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $a/h = 5$, $c = 2/\sqrt{n}$

Método	Rede	E_1/E_2			
		10	20	30	40
FSDT [Liew et al., 2003]		8.2924	9.5613	10.320	10.849
Exacto [Reddy, 2004]		8.2982	9.5671	10.326	10.854
Presente	9×9	8.3088	9.5573	10.2897	10.7897
	11×11	8.2881	9.5347	10.2672	10.7677
	13×13	8.2791	9.5249	10.2575	10.7582
	15×15	8.2748	9.5202	10.2528	10.7536

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 7.10: Teoria de ordem superior de Kant. Frequências naturais para uma placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $E_1/E_2 = 40$, $a/h = 10$, $n = 11$

Modos de vibração	Método	SS
1	FSDT [Liew et al., 2003]	14.767
	HSDT [Khdeir e Librescu, 1988]	14.766
	presente	14.7365
2	FSDT [Liew et al., 2003]	22.149
	HSDT [Khdeir e Librescu, 1988]	22.158
	presente	21.9417
3	FSDT [Liew et al., 2003]	36.594
	HSDT [Khdeir e Librescu, 1988]	36.900
	presente	36.8087

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 7.11: Teoria de ordem superior de Kant. Frequência natural para uma placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para vários quocientes a/h , com $E_1/E_2 = 40$, $c = 6/(n - 1)$

a/h	Método	Rede	SS
2	FSDT [Liew et al., 2003]		5.205
	Exacto [Reddy, 2004]		5.205
	presente	9×9	5.2393
		11×11	5.2353
		13×13	5.2333
5	FSDT [Liew et al., 2003]		10.290
	Exacto [Reddy, 2004]		10.290
	presente	9×9	10.2825
		11×11	10.2701
		13×13	10.2640
10	FSDT [Liew et al., 2003]		14.767
	Exacto [Reddy, 2004]		14.767
	presente	9×9	14.7659
		11×11	14.7366
		13×13	14.7230

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

7.7.2 Placas enviesadas $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$, $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$

Neste exemplo, consideram-se placas enviesadas de um ângulo α com empilhamentos cruzados simétricos, com ângulo α variável. A figura 7.1 ilustra uma placa enviesada, discretizada por uma rede de 11×11 nós. Os resultados apresentados são normalizados pela expressão:

$$\bar{\omega} = (\omega a^2)/(\pi^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$$

Os resultados são comparados com um método sem malha com uma teoria de primeira ordem [Liew et al., 2003] e um método de primeira ordem com B-spline de Wang [1997].

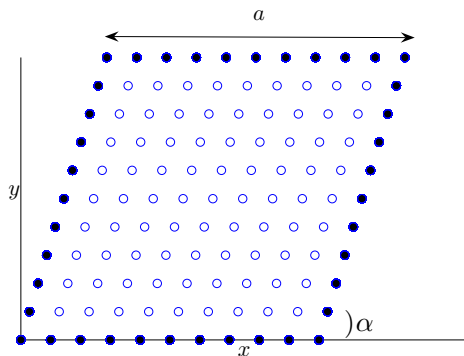


Figura 7.1: Rede regular com 11×11 nós, para uma placa enviesada; ● - nós da fronteira; ○ - Nós do interior

São consideradas condições de fronteira simplesmente apoiada e encastrada, e ângulos α iguais a $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$. A relação comprimento-espessura é de 10.

O parâmetro de forma usado é da forma $c = 1/(n - 1)$, e o factor de correcção de corte é (tal como no exemplo anterior) $\pi^2/12$. Este exemplo foi modelado apenas para a teoria TSDT. As tabelas 7.12 e 7.13 mostram as frequências naturais da placa $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$, simplesmente apoiada e encastrada, respectivamente. O problema é repetido nas tabelas 7.14 e 7.15, mas para diversos ângulos α . As tabelas 7.16 e 7.17 mostram as frequências para vários modos de vibração, para uma placa $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ simplesmente apoiada e encastrada, respectivamente.

Os resultados numéricos mostram uma dependência com o ângulo α (ângulos mais pequenos têm um pior comportamento), mas de uma forma geral observa-se uma boa concordância entre o presente método e os métodos de referência.

Tabela 7.12: Teoria FSDT. Frequência natural normalizada para uma placa enviesada $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ simplesmente apoiada, para vários ângulos de α $E_1/E_2 = 40$, $a/h = 10$

Método	Rede	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
FSDT [Liew et al., 2003]		9.1315	4.4998	2.8798	2.1026	1.6886	1.5709
FSDT B-spline [Wang, 1997]		-	-	2.8825	2.0844	-	1.5699
presente [Ferreira et al., 2005]	7×7	8.9774	4.4400	2.8818	2.2239	1.7050	1.8480
	9×9	8.9624	4.3999	2.8357	2.0858	1.6973	1.5585
	11×11	8.9586	4.3761	2.8228	2.0799	1.6917	1.5791

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 7.13: Teoria FSDT. Frequência natural normalizada para uma placa enviesada $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ encastrada, para vários ângulos de α $E_1/E_2 = 40$, $a/h = 10$

Método	Rede	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
FSDT [Liew et al., 2003]		9.3485	4.9430	3.4723	2.7927	2.4725	2.3790
FSDT B-spline [Wang, 1997]		-	-	3.4738	2.7921	-	2.3820
presente [Ferreira et al., 2005]	7×7	9.3489	4.9771	3.5355	2.8802	2.5791	2.4901
	9×9	9.3577	4.9626	3.5066	2.8223	2.5126	2.4221
	11×11	9.3575	4.9541	3.4923	2.8005	2.4932	2.4021

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 7.14: Teoria FSDT. Frequência natural normalizada para uma placa enviesada $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ simplesmente apoiada, para vários ângulos de α , com $E_1/E_2 = 40$, $a/h = 10$

Método	Rede	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$		
FSDT [Liew et al., 2003]		8.5230	4.0227	2.5028	2.0074	1.8838	1.8248
FSDT B-spline [Wang, 1997]		-	-	2.4788	2.0002	-	1.8792
presente [Ferreira et al., 2005]	7×7	8.4461	3.9643	2.5207	2.1347	1.8838	1.9661
	9×9	8.4115	3.8971	2.4974	2.0743	1.9004	1.8790
	11×11	8.3862	3.8619	2.4862	2.0382	1.8586	1.8357

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 7.15: Teoria FSDT. Frequência natural normalizada para uma placa enviesada $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ encastrada, para vários ângulos de α , com $E_1/E_2 = 40$, $a/h = 10$

Método	Rede	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
FSDT [Liew et al., 2003]		9.3079	4.8566	3.3594	2.6636	2.3504	2.2787
FSDT B-spline [Wang, 1997]		-	-	3.3523	2.6626	-	2.2857
presente [Ferreira et al., 2005]	7×7	9.2568	4.8765	3.4226	2.7638	2.4722	2.4088
	9×9	9.2819	4.8631	3.3902	2.7187	2.4202	2.3568
	11×11	9.2866	4.8548	3.3747	2.6981	2.3962	2.3324

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 7.16: Teoria FSDT. Frequências naturais para vários modos de vibração, para uma placa enviesada $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ simplesmente apoiada, para vários ângulos de α , com $E_1/E_2 = 40$, $a/h = 10$, $n = 15$

α	Método	Modos de vibração							
		1	2	3	4	5	6	7	8
15	FSDT [Liew et al., 2003]	8.6071	10.527	12.033	13.517	14.908	16.302	17.388	17.881
	presente [Ferreira et al., 2005]	8.3567	10.489	12.026	13.526	14.888	16.256	17.379	17.580
30	FSDT [Liew et al., 2003]	4.0269	5.7153	7.1165	8.4831	8.6817	9.8272	10.695	11.085
	presente [Ferreira et al., 2005]	3.8264	5.7799	7.1652	8.4668	8.6433	9.8235	10.762	11.127
45	FSDT [Liew et al., 2003]	2.5128	4.2184	5.5842	5.6579	6.9700	7.6413	8.2882	8.9075
	FSDT B-spline [Wang, 1997]	2.4788	4.2214	5.5857	5.5981	7.0029	7.6255	8.2928	8.8460
	presente [Ferreira et al., 2005]	2.4589	4.2624	5.5981	5.6027	6.9983	7.6964	8.2882	8.8868
60	FSDT [Liew et al., 2003]	2.0048	3.6181	4.3073	5.0523	6.2445	6.4914	6.7627	7.7242
	FSDT B-spline [Wang, 1997]	2.0002	3.6269	4.2830	5.0708	6.2499	6.5351	6.7219	7.7248
	presente [Ferreira et al., 2005]	1.9834	3.6743	4.3143	5.0831	6.3627	6.5872	6.8247	7.8022
75	FSDT [Liew et al., 2003]	1.8822	3.4856	3.6425	5.0403	5.5746	5.7213	6.5518	7.0695
	presente [Ferreira et al., 2005]	1.8161	3.4898	3.6272	5.0473	5.7081	5.8617	6.7139	7.1793
90	FSDT [Liew et al., 2003]	1.8466	3.3774	3.6425	4.9661	5.4348	5.5187	6.5628	6.8375
	FSDT B-spline [Wang, 1997]	1.8792	3.3776	3.6924	4.9682	5.4835	5.6002	6.5475	6.9139
	presente [Ferreira et al., 2005]	1.7960	3.3605	3.7124	4.9402	5.6044	5.6909	6.6156	7.0022

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 7.17: Teoria FSDT. Frequências naturais para vários modos de vibração, para uma placa enviesada $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ encastrada, para vários ângulos de α , com $E_1/E_2 = 40$, $a/h = 10$, $n = 15$

α	Método	Modos de vibração							
		1	2	3	4	5	6	7	8
15	Liew [Liew et al., 2003]	9.3077	11.155	12.572	13.966	15.233	16.535	17.401	17.719
	presente [Ferreira et al., 2005]	9.2863	11.124	12.572	13.982	15.302	16.626	17.460	17.912
30	Liew [Liew et al., 2003]	4.8564	6.3882	7.6800	8.8615	8.9977	10.181	10.959	11.403
	presente [Ferreira et al., 2005]	4.8452	6.3803	7.6862	8.8432	9.0157	10.214	10.950	11.458
45	Liew [Liew et al., 2003]	3.3579	4.8158	6.0818	6.1053	7.4101	7.9634	8.6367	9.1608
	Wang [Wang, 1997]	3.3523	4.8079	6.0520	6.1029	7.4169	7.9276	8.6466	9.0871
	presente [Ferreira et al., 2005]	3.3599	4.8238	6.0692	6.1277	7.4503	7.9589	8.6777	9.1166
60	Liew [Liew et al., 2003]	2.6627	4.1380	4.7258	5.4975	6.5481	6.8899	7.0209	7.9777
	Wang [Wang, 1997]	2.6626	4.1367	4.7227	5.4950	6.5410	6.8830	7.0054	7.9624
	presente [Ferreira et al., 2005]	2.6793	4.1651	4.7566	5.5375	6.5938	6.9408	7.0608	8.0417
75	Liew [Liew et al., 2003]	2.3499	3.8931	4.0536	5.3120	5.8764	6.0238	6.8027	7.2455
	presente [Ferreira et al., 2005]	2.3743	3.9405	4.0914	5.3898	5.9401	6.0844	6.9289	7.3393
90	Liew [Liew et al., 2003]	2.2785	3.7383	3.9583	5.1836	5.6808	5.8066	6.7358	7.0046
	Wang [Wang, 1997]	2.2857	3.7392	3.9813	5.1800	5.7019	5.8455	6.7167	7.0452
	presente [Ferreira et al., 2005]	2.3100	3.7854	4.0251	5.2530	5.7783	5.9121	6.8256	7.1515

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

7.7.3 Vibrações livres para uma placa de material com gradiente funcional de propriedades

Uma placa de material com gradiente funcional de propriedades, constituída por alumínio e zircónia é modelada. As propriedades materiais da placa são:

$$\text{Al: } E_m = 70 \text{ GPa} ; \quad \nu_m = 0.3; \quad \rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3;$$

$$\text{ZrO}_2: E_z = 200 \text{ GPa} ; \quad \nu_z = 0.3; \quad \rho_z = 5700 \text{ kg/m}^3$$

As frequências naturais calculadas são apresentadas de forma normalizada:

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

e os resultados numéricos são comparados com uma formulação sem malha Petrov-Galerkin com uma teoria de ordem superior [Qian et al., 2004].

O factor de correcção de corte escolhido neste exemplo para a teoria FSDT é $5/6$, com um parâmetro de forma $c = 6/(n - 1)$. O método de homogeneização utilizado é o método de Mori-Tanaka. Os resultados numéricos obtidos estão em concordância com o valor de referência, quer para variações do parâmetro p (tabela 7.19), quer para variações de espessura (tabela 7.18)

Tabela 7.18: Teoria FSDT. Primeiras dez frequências para uma placa simplesmente apoiada de material com gradiente funcional de propriedades Al/ZrO₂, $V_c^- = 0, V_c^+ = 1, p = 1.0, c = 6/(n - 1)$

	presente [Ferreira et al., 2006]			[Qian et al., 2004]
	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	
$h/a = 0.05$	0.0146	0.0148	0.0149	0.0149
	0.0393	0.0381	0.0378	0.0377
	0.0393	0.0381	0.0378	0.0377
	0.0613	0.0598	0.0595	0.0593
	0.0786	0.0758	0.0749	0.0747
	0.0789	0.0760	0.0750	0.0747
	0.1002	0.0967	0.0957	0.0769
	0.1002	0.0967	0.0957	0.0912
	0.1012	0.1015	0.1017	0.0913
	0.1013	0.1016	0.1017	0.1029
$h/a = 0.1$	0.0594	0.0593	0.0593	0.0584
	0.1460	0.1437	0.1431	0.1410
	0.1460	0.1437	0.1431	0.1410
	0.2024	0.2031	0.2035	0.2058
	0.2025	0.2031	0.2035	0.2058
	0.2232	0.2204	0.2196	0.2164
	0.2696	0.2689	0.2684	0.2646
	0.2700	0.2691	0.2686	0.2677
	0.2996	0.2954	0.2936	0.2913
	0.3444	0.3390	0.3373	0.3264

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Tabela 7.19: Teoria FSDT. Primeiras dez frequências para uma placa simplesmente apoiada de material com gradiente funcional de propriedades Al/ZrO₂, com $V_c^- = 0, V_c^+ = 1, h/a = 0.2, c = 6/(n - 1)$

	presente [Ferreira et al., 2006]			[Qian et al., 2004]
	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	
cerâmica	0.2479	0.2467	0.2462	0.2469
	0.4459	0.4474	0.4483	0.4535
	0.4462	0.4476	0.4484	0.4535
	0.5430	0.5407	0.5397	0.5441
	0.5431	0.5408	0.5398	0.5441
	0.6603	0.6509	0.6470	0.6418
	0.7861	0.7821	0.7804	0.7881
	0.8881	0.8963	0.8990	0.9076
	0.8896	0.8970	0.8994	0.9326
	0.9121	0.9185	0.9198	0.9354

(continua na pagina seguinte...)

(...continuação da página anterior)

	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	
p=1	0.2205	0.2195	0.2191	0.2152
	0.4047	0.4061	0.4069	0.4114
	0.4049	0.4062	0.4069	0.4114
	0.4852	0.4831	0.4822	0.4761
	0.4854	0.4831	0.4822	0.4761
	0.5991	0.5906	0.5871	0.5820
	0.7042	0.7004	0.6989	0.6914
	0.8070	0.8137	0.8159	0.8192
	0.8070	0.8137	0.8159	0.8217
	0.8180	0.8236	0.8248	0.8242
p=2	0.2218	0.2207	0.2203	0.2153
	0.3970	0.3983	0.3991	0.4034
	0.3972	0.3985	0.3992	0.4034
	0.4853	0.4833	0.4825	0.4720
	0.4854	0.4834	0.4825	0.4720
	0.5877	0.5793	0.5759	0.5709
	0.7023	0.6987	0.6972	0.6817
	0.7904	0.7976	0.8001	0.8056
	0.7917	0.7982	0.8004	0.8105
	0.8145	0.8203	0.8215	0.9022
p=5	0.2251	0.2240	0.2236	0.2194
	0.3900	0.3914	0.3921	0.3964
	0.3902	0.3915	0.3922	0.3964
	0.4887	0.4869	0.4861	0.4760
	0.4888	0.4869	0.4861	0.4760
	0.5774	0.5693	0.5659	0.5611
	0.7044	0.7010	0.6995	0.6832
	0.7767	0.7838	0.7862	0.7928
	0.7780	0.7844	0.7865	0.8053
	0.8152	0.8213	0.8226	0.8099

(continua na página seguinte...)

(...continuação da pagina anterior)

	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	
metal	0.2130	0.2120	0.2116	0.2122
	0.3831	0.3845	0.3852	0.3897
	0.3834	0.3846	0.3853	0.3897
	0.4665	0.4646	0.4638	0.4675
	0.4667	0.4647	0.4638	0.4675
	0.5674	0.5593	0.5560	0.5517
	0.6755	0.6720	0.6706	0.6772
	0.7631	0.7702	0.7725	0.7615
	0.7644	0.7707	0.7728	0.7799
	0.7837	0.7892	0.7904	0.8013

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria FSDT

Na tabela 7.22, os resultados para a teoria TSDT são comparados com uma solução Petrov-Galerkin sem malha [Qian et al., 2004] e ainda com uma solução exacta de Vel e Batra [2004] no caso das tabelas 7.20 e 7.21. Os resultados obtidos com o método das multiquádricas foram um pouco melhores que os obtidos pelo método Petrov-Galerkin. Os valores para as frequências naturais aproximam-se nos dois métodos. Na tabela 7.23 são apresentadas as frequências naturais para varias condições de fronteira. Os resultados não são comparados com outros métodos, uma vez que não foram encontrados estes exemplos na literatura.

Tabela 7.20: Teoria TSDT. Frequência fundamental para uma placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades, simplesmente apoiada, usando o método de Mori-Tanaka, $V_c^- = 0, V_c^+ = 1, p = 1, c = 6/(n - 1)$

a/h	Presente [Ferreira et al., 2006]	Meshless Petrov-Galerkin [Qian et al., 2004]	Exact [Vel e Batra, 2004]
20	0.0147	0.0149	0.0153
10	0.0592	0.0584	0.0596
5	0.2188	0.2152	0.2192

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 7.21: Teoria TSDT. Frequência fundamental para uma placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades simplesmente apoiada, usando o método de Mori-Tanaka, com $V_c^- = 0, V_c^+ = 1, a/h = 5, c = 6/(n - 1)$

p	Presente [Ferreira et al., 2006]	Meshless Petrov-Galerkin [Qian et al., 2004]	Exacto [Vel e Batra, 2004]
2	0.2188	0.2153	0.2197
3	0.2202	0.2172	0.2211
5	0.2215	0.2194	0.2225

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 7.22: Teoria TSDT. Primeiras dez frequências naturais para uma placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades, simplesmente apoiada, usando o método de Mori-Tanaka $V_c^- = 0, V_c^+ = 1, a/h = 5, c = 6/(n - 1)$

	Presente			Meshless Petrov-Galerkin [Qian et al., 2004]
	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	
cerâmica	0.2468	0.2459	0.2457	0.2469
	0.4459	0.4474	0.4483	0.4535
	0.4462	0.4476	0.4484	0.4535
	0.5409	0.5400	0.5395	0.5441
	0.5410	0.5401	0.5395	0.5441
	0.6603	0.6509	0.6470	0.6418
	0.7843	0.7821	0.7809	0.7881
	0.8881	0.8963	0.8990	0.9076
	0.8896	0.8970	0.8994	0.9326
	0.9130	0.9195	0.9209	0.9354
p=1	0.2192	0.2185	0.2188	0.2152
	0.4047	0.4061	0.3990	0.4114
	0.4050	0.4062	0.3992	0.4114
	0.4818	0.4810	0.4779	0.4761
	0.4818	0.4810	0.4779	0.4761
	0.5990	0.5906	0.5759	0.5820
	0.6997	0.6977	0.6897	0.6914
	0.8057	0.8131	0.8001	0.8192
	0.8070	0.8137	0.8163	0.8217
	0.8150	0.8208	0.8118	0.8242

(continua na página seguinte...)

(...continuação da pagina anterior)

	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	
p=2	0.2197	0.2190	0.2188	0.2153
	0.3970	0.3983	0.3991	0.4034
	0.3972	0.3985	0.3992	0.4034
	0.4788	0.4783	0.4779	0.4720
	0.4789	0.4783	0.4779	0.4720
	0.5876	0.5793	0.5759	0.5709
	0.6923	0.6906	0.6897	0.6817
	0.7904	0.7977	0.8001	0.8056
	0.7917	0.7982	0.8004	0.8105
	0.8040	0.8104	0.8118	0.9022
p=5	0.2224	0.2217	0.2215	0.2194
	0.3900	0.3914	0.3921	0.3964
	0.3902	0.3915	0.3922	0.3964
	0.4800	0.4798	0.4794	0.4760
	0.4801	0.4798	0.4795	0.4760
	0.5774	0.5692	0.5658	0.5611
	0.6907	0.6893	0.6884	0.6832
	0.7767	0.7839	0.7863	0.7928
	0.7780	0.7844	0.7866	0.8053
	0.7996	0.8065	0.8081	0.8099
metal	0.2121	0.2113	0.2111	0.2122
	0.3831	0.3845	0.3852	0.3897
	0.3834	0.3846	0.3853	0.3897
	0.4647	0.4640	0.4636	0.4675
	0.4648	0.4640	0.4636	0.4675
	0.5674	0.5593	0.5560	0.5517
	0.6839	0.6720	0.6710	0.6772
	0.7631	0.7702	0.7725	0.7615
	0.7644	0.7707	0.7728	0.7799
	0.7845	0.7901	0.7913	0.8013

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Nas tabelas 7.24 e 7.25 os resultados numéricos obtidos para a teoria de ordem superior de Kant são comparados com uma solução exacta de Vel e Batra [2004]. De uma forma geral, os resultados aproximam-se dos resultados exactos, mas convergem para valores ligeiramente superiores ou inferiores. Esse facto pode dever-se a uma escolha do parâ-

metro de forma, c inadequado. Nas tabelas 7.26 e 7.27 os resultados são comparados com Qian et al. [2004]. Observa-se que para modos de vibração superiores, por vezes as duas soluções não são concordantes. Os restantes resultados são comparados com uma solução com multiquádrica e TSDT de Reddy.

Tabela 7.23: Teoria TSDT. Primeiras dez frequências naturais para uma placa de material com gradiente funcional de propriedades, com os bordos encastrados (CCCC), simplesmente apoiados/encastrados (SCSC) encastrados/livres (CFCF), para $V_c^- = 0, V_c^+ = 1, a/h = 5, c = 6/(n - 1)$

	CCCC			SCSC			CFCF		
	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$
ceramica	0.3596	0.3596	0.3598	0.3070	0.3066	0.3066	0.2434	0.2383	0.2362
	0.6205	0.6263	0.6282	0.4495	0.4504	0.4509	0.2738	0.2611	0.2614
	0.6205	0.6263	0.6282	0.5581	0.5579	0.5578	0.4197	0.4231	0.4227
	0.8395	0.8462	0.8486	0.6004	0.6064	0.6082	0.4275	0.4246	0.4248
	0.8718	0.8696	0.8687	0.8023	0.8004	0.7997	0.5183	0.5278	0.5310
	0.8718	0.8696	0.8687	0.8090	0.8118	0.8126	0.5448	0.5603	0.5669
	0.9441	0.9639	0.9685	0.8627	0.8579	0.8558	0.7306	0.7309	0.7298
	0.9543	0.9739	0.9784	0.8946	0.9007	0.9025	0.7340	0.7400	0.7417
	1.0293	1.0325	1.0331	0.9133	0.9237	0.9258	0.7428	0.7465	0.7469
	1.1313	1.1489	1.1542	0.9410	0.9610	0.9656	0.7525	0.7494	0.7521
p=1	0.3202	0.3202	0.3204	0.2732	0.2729	0.2729	0.2162	0.2120	0.2117
	0.5535	0.5588	0.5605	0.4079	0.4088	0.4093	0.2438	0.2325	0.2324
	0.5535	0.5588	0.5605	0.4973	0.4971	0.4970	0.3802	0.3778	0.3769
	0.7497	0.7558	0.7579	0.5355	0.5409	0.5426	0.3806	0.3838	0.3834
	0.7895	0.7875	0.7867	0.7221	0.7246	0.7250	0.4618	0.4704	0.4734
	0.7895	0.7875	0.7867	0.7273	0.7256	0.7254	0.4855	0.4995	0.5056
	0.8427	0.8610	0.8653	0.7811	0.7768	0.7750	0.6513	0.6515	0.6507
	0.8519	0.8700	0.8742	0.8115	0.8171	0.8187	0.6624	0.6602	0.6612
	0.9334	0.9363	0.9369	0.8151	0.8246	0.8266	0.6652	0.6765	0.6766
	1.0113	1.0271	1.0320	0.8402	0.8586	0.8629	0.6814	0.6788	0.6816
p=2	0.3160	0.3162	0.3165	0.2708	0.2706	0.2706	0.2140	0.2095	0.2089
	0.5436	0.5490	0.5507	0.4001	0.4010	0.4014	0.2381	0.2307	0.2298
	0.5436	0.5490	0.5507	0.4928	0.4929	0.4928	0.3734	0.3757	0.3755
	0.7355	0.7415	0.7435	0.5269	0.5323	0.5340	0.3776	0.3765	0.3761
	0.7747	0.7727	0.7719	0.7113	0.7119	0.7113	0.4541	0.4626	0.4654
	0.7747	0.7727	0.7719	0.7136	0.7139	0.7147	0.4786	0.4924	0.4981
	0.8257	0.8437	0.8480	0.7665	0.7622	0.7604	0.6437	0.6436	0.6425
	0.8341	0.8519	0.8562	0.7961	0.8015	0.8032	0.6526	0.6554	0.6566
	0.9158	0.9186	0.9192	0.8045	0.8138	0.8158	0.6573	0.6638	0.6639
	0.9898	1.0057	1.0106	0.8236	0.8416	0.8460	0.6687	0.6661	0.6687
p=5	0.3148	0.3151	0.3154	0.2709	0.2708	0.2709	0.2130	0.2085	0.2103
	0.5387	0.5441	0.5458	0.3931	0.3940	0.3944	0.2362	0.2300	0.2306
	0.5387	0.5441	0.5458	0.4927	0.4930	0.4930	0.3669	0.3699	0.3696
	0.7279	0.7338	0.7358	0.5231	0.5285	0.5302	0.3782	0.3772	0.3764
	0.7617	0.7597	0.7590	0.7013	0.6997	0.6991	0.4508	0.4592	0.4617
	0.7617	0.7597	0.7590	0.7067	0.7094	0.7101	0.4763	0.4900	0.4952
	0.8163	0.8340	0.8384	0.7537	0.7495	0.7477	0.6415	0.6414	0.6398
	0.8239	0.8415	0.8458	0.7824	0.7877	0.7893	0.6420	0.6525	0.6527
	0.9000	0.9029	0.9034	0.8005	0.8097	0.8116	0.6575	0.6548	0.6570
	0.9771	0.9931	0.9980	0.8144	0.8322	0.8366	0.6575	0.6557	0.6574
metal	0.3090	0.3090	0.3092	0.2638	0.2635	0.2635	0.2083	0.2055	0.2044
	0.5332	0.5382	0.5398	0.3862	0.3871	0.3875	0.2345	0.2233	0.2250
	0.5332	0.5382	0.5398	0.4796	0.4794	0.4793	0.3606	0.3636	0.3632
	0.7214	0.7272	0.7291	0.5159	0.5211	0.5226	0.3667	0.3649	0.3657
	0.7491	0.7472	0.7464	0.6894	0.6878	0.6871	0.4453	0.4536	0.4563
	0.7491	0.7472	0.7464	0.6951	0.6975	0.6982	0.4682	0.4813	0.4871
	0.8112	0.8282	0.8322	0.7413	0.7371	0.7354	0.6279	0.6280	0.6270
	0.8200	0.8369	0.8407	0.7687	0.7739	0.7755	0.6307	0.6358	0.6374
	0.8844	0.8872	0.8877	0.7848	0.7937	0.7955	0.6383	0.6415	0.6418
	0.9721	0.9872	0.9918	0.8085	0.8257	0.8297	0.6466	0.6439	0.6463

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria TSDT

Tabela 7.24: Teoria de ordem superior de Kant. Evolução da frequência própria, $\bar{\omega}$ com n , para uma placa simplesmente apoiada com gradiente funcional de propriedades, SSSS, com $p = 1$, $c = 2/\sqrt{n}$

	Rede	a/h		
		5	10	20
presente, [Roque et al., 2007]	7×7	0.2199	0.0588	0.0140
	9×9	0.2190	0.0593	0.0148
	11×11	0.2187	0.0595	0.0152
	13×13	0.2186	0.0595	0.0156
	15×15	0.2185	0.0595	0.0152
	17×17	0.2184	0.0595	0.0152
	19×19	0.2184	0.0589	0.0152
exacto, [Vel e Batra, 2004]		0.2192	0.0596	0.0153
presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant				

Tabela 7.25: Teoria de ordem superior de Kant. Evolução da frequência própria, $\bar{\omega}$ com n , para uma placa simplesmente apoiada com gradiente funcional de propriedades, com $a/h = 5$, $c = 2/\sqrt{n}$

	Rede	p		
		2	3	5
presente, [Roque et al., 2007]	7×7	0.2205	0.2219	0.2232
	9×9	0.2195	0.2209	0.2222
	11×11	0.2192	0.2206	0.2219
	13×13	0.2191	0.2204	0.2217
	15×15	0.2190	0.2204	0.2216
	17×17	0.2190	0.2203	0.2216
	19×19	0.2189	0.2203	0.2216
exacto, [Vel e Batra, 2004]		0.2197	0.2211	0.2225
presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant				

Tabela 7.26: Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências ($\bar{\omega}$) com n , para uma placa simplesmente apoiada com gradiente funcional de propriedades, com $a/h = 10, 20$, $c = 2/\sqrt{n}$, $p = 1$

modo	n presente, [Roque et al., 2007]						[Qian et al., 2004]
	7	9	11	13	15	17	($n = 11$)
$a/h = 10$							
1	0.0588	0.0593	0.0595	0.0595	0.0595	0.0595	0.0584
2	0.1463	0.1435	0.1427	0.1423	0.1423	0.1421	0.1410
3	0.1464	0.1436	0.1429	0.1425	0.1426	0.1422	0.1410
4	0.2011	0.2036	0.2047	0.2052	0.2054	0.2056	0.2058
5	0.2013	0.2037	0.2047	0.2052	0.2054	0.2056	0.2058
6	0.2230	0.2201	0.2194	0.2187	0.2186	0.2185	0.2164
7	0.2739	0.2681	0.2670	0.2663	0.2656	0.2663	0.2646
8	0.2745	0.2682	0.2672	0.2667	0.2664	0.2663	0.2677
9	0.3003	0.2951	0.2930	0.2921	0.2916	0.2914	0.2913
10	0.3465	0.3380	0.3356	0.3350	0.3344	0.3343	0.3264
$a/h = 20$							
1	0.0140	0.0148	0.0152	0.0156	0.0152	0.0152	0.0149
2	0.0391	0.0381	0.0374	0.0378	0.0377	0.0377	0.0377
3	0.0392	0.0382	0.0378	0.0378	0.0377	0.0378	0.0377
4	0.0604	0.0595	0.0598	0.0596	0.0595	0.0595	0.0593
5	0.0807	0.0757	0.0746	0.0742	0.0739	0.0739	0.0747
6	0.0812	0.0760	0.0757	0.0772	0.0740	0.0739	0.0747
7	0.1000	0.0963	0.0951	0.0952	0.0949	0.0950	0.0769
8	0.1006	0.0970	0.0957	0.0957	0.0951	0.0950	0.0912
9	0.1007	0.1018	0.1023	0.1026	0.1027	0.1028	0.0913
10	0.1023	0.1019	0.1024	0.1026	0.1027	0.1028	0.1029

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 7.27: Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências ($\bar{\omega}$) com n , para uma placa simplesmente apoiada com gradiente funcional de propriedades, com $c = 2/\sqrt{n}$, $a/h = 5$, $p = 0$ (placa cerâmica), $p = 1$, $p = 2$, $p = 5$, $p \rightarrow \infty$ (placa metálica)

modo	n , presente, [Roque et al., 2007]					[Qian et al., 2004]
	7	9	11	13	15	($n = 11$)
cerâmica						
1	0.2477	0.2466	0.2462	0.2460	0.2459	0.2469
2	0.4431	0.4487	0.4510	0.4521	0.4526	0.4535
3	0.4435	0.4488	0.4510	0.4521	0.4526	0.4535
4	0.5458	0.5408	0.5392	0.5386	0.5383	0.5441
5	0.5461	0.5409	0.5393	0.5386	0.5384	0.5441
6	0.6619	0.6502	0.6457	0.6436	0.5815	0.6418
7	0.7900	0.7828	0.7804	0.7794	0.6426	0.7881
8	0.8843	0.8980	0.9026	0.9046	0.7789	0.9076
9	0.8864	0.8985	0.9028	0.9047	0.9056	0.9326
10	0.9248	0.9197	0.9197	0.9198	0.9056	0.9354
$p = 1$						
1	0.2199	0.2190	0.2187	0.2186	0.2185	0.2152
2	0.4022	0.4072	0.4093	0.4103	0.4108	0.4114
3	0.4026	0.4073	0.4093	0.4103	0.4108	0.4114
4	0.4863	0.4817	0.4803	0.4797	0.4794	0.4761
5	0.4865	0.4818	0.4803	0.4797	0.4794	0.4761
6	0.6005	0.5900	0.5859	0.5840	0.5831	0.5820
7	0.7049	0.6983	0.6964	0.6953	0.6949	0.6914
8	0.8023	0.8146	0.8188	0.8206	0.8214	0.8192
9	0.8041	0.8151	0.8189	0.8206	0.8214	0.8217
10	0.8262	0.8213	0.8211	0.8213	0.8215	0.8242
$p = 2$						
1	0.2205	0.2195	0.2192	0.2191	0.2190	0.2153
2	0.3945	0.3995	0.4015	0.4024	0.4029	0.4034
3	0.3949	0.3995	0.4015	0.4025	0.4030	0.4034
4	0.4835	0.4791	0.4777	0.4772	0.4766	0.4720
5	0.4837	0.4791	0.4777	0.4772	0.4769	0.4720
6	0.5890	0.5787	0.5747	0.5729	0.5720	0.5709
7	0.6976	0.6914	0.6893	0.6885	0.6879	0.6817
8	0.7870	0.7992	0.8032	0.8050	0.8059	0.8056
9	0.7888	0.7996	0.8034	0.8051	0.8059	0.8105
10	0.8159	0.8114	0.8114	0.8114	0.8114	0.9022

(continua na pagina seguinte...)

(...continuação da página anterior)

modo	n					$(n = 11)$
	7	9	11	13	15	
$p = 5$						
1	0.2232	0.2222	0.2219	0.2217	0.2216	0.2194
2	0.3876	0.3925	0.3944	0.3954	0.3959	0.3964
3	0.3879	0.3925	0.3945	0.3954	0.3959	0.3964
4	0.4848	0.4806	0.4793	0.4787	0.4785	0.4760
5	0.4850	0.4806	0.4793	0.4787	0.4785	0.4760
6	0.5788	0.5687	0.5647	0.5629	0.5620	0.5611
7	0.6961	0.6900	0.6881	0.6872	0.6869	0.6832
8	0.7734	0.7853	0.7894	0.7911	0.7920	0.7928
9	0.7752	0.7858	0.7895	0.7911	0.7920	0.8053
10	0.8119	0.8079	0.8080	0.8081	0.8082	0.8099
metal						
1	0.2128	0.2119	0.2116	0.2114	0.2113	0.2122
2	0.3807	0.3855	0.3875	0.3884	0.3889	0.3897
3	0.3811	0.3856	0.3875	0.3885	0.3889	0.3897
4	0.4690	0.4647	0.4633	0.4628	0.4625	0.4675
5	0.4692	0.4647	0.4634	0.4628	0.4626	0.4675
6	0.5687	0.5587	0.5548	0.5531	0.5522	0.5517
7	0.6788	0.6726	0.6706	0.6697	0.6693	0.6772
8	0.7599	0.7716	0.7756	0.7773	0.7781	0.7615
9	0.7616	0.7721	0.7757	0.7773	0.7782	0.7799
10	0.7946	0.7903	0.7903	0.7904	0.7905	0.8013

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 7.28: Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências $(\bar{\omega})$ com n , para uma placa com gradiente funcional de propriedades encastrada, CCCC com $c = 2/\sqrt{n}$, $a/h = 5$, $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, $p = 5$, $p \rightarrow \infty$

modo	n , presente, [Roque et al., 2007]					[Ferreira et al., 2006]
	7	9	11	13	15	($n = 11$)
cerâmica						
1	0.3816	0.3778	0.3765	0.3762	0.3756	0.3598
2	0.6647	0.6605	0.6589	0.6582	0.6578	0.6282
3	0.6647	0.6605	0.6589	0.6584	0.6579	0.6282
4	0.8729	0.8699	0.8687	0.8682	0.8679	0.8486
5	0.8729	0.8699	0.8687	0.8682	0.8679	0.8687
6	0.8986	0.8899	0.8869	0.8856	0.8851	0.8687
7	0.9983	1.0083	1.0100	1.0101	1.0097	0.9685
8	1.0127	1.0220	1.0237	1.0242	1.0216	0.9784
9	1.0313	1.0327	1.0331	1.0333	1.0333	1.0331
10	1.2090	1.2029	1.2009	1.1991	1.1987	1.1542
$p = 1$						
1	0.3405	0.3369	0.3357	0.3352	0.3350	0.3204
2	0.5948	0.5905	0.5889	0.5883	0.5878	0.5605
3	0.5948	0.5906	0.5889	0.5884	0.5878	0.5605
4	0.7905	0.7878	0.7867	0.7862	0.7860	0.7579
5	0.7905	0.7878	0.7867	0.7862	0.7860	0.7867
6	0.8050	0.7966	0.7936	0.7916	0.7915	0.7867
7	0.8948	0.9033	0.9044	0.9040	0.9040	0.8653
8	0.9076	0.9154	0.9167	0.9167	0.9164	0.8742
9	0.9353	0.9366	0.9369	0.9371	0.9371	0.9369
10	1.0845	1.0783	1.0761	1.0747	1.0741	1.0320
$p = 2$						
1	0.3379	0.3343	0.3330	0.3325	0.3322	0.3165
2	0.5870	0.5827	0.5810	0.5799	0.5790	0.5507
3	0.5871	0.5827	0.5812	0.5803	0.5801	0.5507
4	0.7757	0.7730	0.7719	0.7715	0.7712	0.7435
5	0.7757	0.7730	0.7719	0.7715	0.7712	0.7719
6	0.7928	0.7843	0.7818	0.7798	0.7793	0.7719
7	0.8809	0.8885	0.8893	0.8889	0.8882	0.8480
8	0.8933	0.9002	0.9011	0.9009	0.9003	0.8562
9	0.9176	0.9188	0.9192	0.9193	0.9194	0.9192
10	1.0660	1.0593	1.0568	1.0540	1.0545	1.0106

(continua na pagina seguinte...)

(...continuação da pagina anterior)

	modo	n					$(n = 11)$
	7	9	11	13	15		
$p = 5$							
	1	0.3381	0.3345	0.3333	0.3327	0.3324	0.3154
	2	0.5836	0.5793	0.5775	0.5763	0.5766	0.5458
	3	0.5836	0.5793	0.5776	0.5767	0.5768	0.5458
	4	0.7626	0.7600	0.7590	0.7585	0.7583	0.7358
	5	0.7626	0.7600	0.7590	0.7585	0.7583	0.7590
	6	0.7862	0.7778	0.7747	0.7737	0.7728	0.7590
	7	0.8729	0.8800	0.8806	0.8799	0.8800	0.8384
	8	0.8851	0.8916	0.8922	0.8919	0.8919	0.8458
	9	0.9018	0.9031	0.9034	0.9035	0.9036	0.9034
	10	1.0545	1.0477	1.0450	1.0437	1.0420	0.9980
metal							
	1	0.3279	0.3246	0.3235	0.3232	0.3229	0.3092
	2	0.5711	0.5675	0.5662	0.5658	0.5653	0.5398
	3	0.5711	0.5675	0.5663	0.5737	0.5658	0.5398
	4	0.7501	0.7474	0.7464	0.7460	0.7458	0.7291
	5	0.7501	0.7474	0.7464	0.7460	0.7458	0.7464
	6	0.7721	0.7647	0.7620	0.7610	0.7608	0.7464
	7	0.8578	0.8664	0.8679	0.8667	0.8676	0.8322
	8	0.8702	0.8781	0.8796	0.8807	0.8801	0.8407
	9	0.8862	0.8874	0.8877	0.8879	0.8879	0.8877
	10	1.0388	1.0336	1.0320	1.0173	1.0304	0.9918

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 7.29: Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências ($\bar{\omega}$) com n , para uma placa com gradiente funcional de propriedades CSCS, $c = 3/(n - 1)$, $a/h = 5$, $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, $p = 5$, $p \rightarrow \infty$

modo	n , presente, [Roque et al., 2007]							[Ferreira et al., 2006]
	9	11	13	15	17	19	21	($n = 11$)
cerâmica								
1	0.3193	0.3179	0.3172	0.3168	0.3165	0.3164	0.3163	0.3066
2	0.4279	0.4314	0.4339	0.4357	0.4372	0.4383	0.4393	0.4509
3	0.5757	0.5716	0.5694	0.5680	0.5671	0.5665	0.5660	0.5578
4	0.6382	0.6361	0.6349	0.6343	0.6339	0.6336	0.6334	0.6082
5	0.7950	0.7943	0.7940	0.7940	0.7940	0.7941	0.7942	0.7997
6	0.8431	0.8383	0.8357	0.8341	0.8331	0.8324	0.8319	0.8126
7	0.8624	0.8579	0.8555	0.8540	0.8530	0.8523	0.8518	0.8558
8	0.8737	0.8790	0.8823	0.8846	0.8863	0.8877	0.8888	0.9025
9	0.9539	0.9464	0.9424	0.9400	0.9383	0.9371	0.9362	0.9258
10	1.0089	1.0079	1.0071	1.0065	1.0060	1.0057	1.0055	0.9656
$p = 1$								
1	0.2845	0.2832	0.2825	0.2822	0.2819	0.2818	0.2817	0.2729
2	0.3885	0.3916	0.3939	0.3956	0.3969	0.3979	0.3987	0.4093
3	0.5133	0.5096	0.5076	0.5064	0.5056	0.5050	0.5045	0.4970
4	0.5705	0.5684	0.5674	0.5667	0.5663	0.5660	0.5658	0.5426
5	0.7209	0.7202	0.7100	0.7199	0.7200	0.7200	0.7201	0.7250
6	0.7537	0.7493	0.7469	0.7454	0.7444	0.7438	0.7433	0.7254
7	0.7810	0.7770	0.7748	0.7735	0.7726	0.7720	0.7715	0.7750
8	0.7927	0.7975	0.8005	0.8026	0.8041	0.8054	0.8064	0.8187
9	0.8524	0.8455	0.8418	0.8396	0.8381	0.8370	0.8361	0.8266
10	0.9039	0.9027	0.9018	0.9012	0.9007	0.9004	0.9001	0.8629

(continua na página seguinte...)

(...continuação da pagina anterior)

modo		n							$(n = 11)$
		9	11	13	15	17	19	21	
$p = 2$									
1	0.2829	0.2816	0.2810	0.2806	0.2804	0.2802	0.2801	0.2706	
2	0.3810	0.3841	0.3863	0.3880	0.3893	0.3903	0.3911	0.4014	
3	0.5093	0.5057	0.5037	0.5025	0.5017	0.5011	0.5007	0.4928	
4	0.5633	0.5612	0.5601	0.5594	0.5590	0.5587	0.5585	0.5340	
5	0.7072	0.7065	0.7063	0.7063	0.7063	0.7064	0.7065	0.7113	
6	0.7438	0.7394	0.7370	0.7355	0.7345	0.7339	0.7334	0.7147	
7	0.7664	0.7624	0.7603	0.7589	0.7581	0.7575	0.7570	0.7604	
8	0.7777	0.7823	0.7853	0.7873	0.7889	0.7901	0.7911	0.8032	
9	0.8411	0.8344	0.8309	0.8288	0.8273	0.8262	0.8254	0.8158	
10	0.8891	0.8877	0.8867	0.8859	0.8854	0.8850	0.8847	0.8460	
$p = 5$									
1	0.2839	0.2826	0.2819	0.2815	0.2813	0.2811	0.2810	0.2709	
2	0.3743	0.3774	0.3795	0.3812	0.3824	0.3834	0.3842	0.3944	
3	0.5096	0.5060	0.5041	0.5029	0.5021	0.5015	0.5011	0.4930	
4	0.5605	0.5584	0.5572	0.5565	0.5561	0.5558	0.5556	0.5302	
5	0.6951	0.6944	0.6942	0.6942	0.6942	0.6943	0.6944	0.6991	
6	0.7396	0.7352	0.7328	0.7314	0.7304	0.7298	0.7293	0.7101	
7	0.7535	0.7496	0.7475	0.7462	0.7453	0.7447	0.7443	0.7477	
8	0.7642	0.7688	0.7716	0.7737	0.7752	0.7764	0.7774	0.7893	
9	0.8363	0.8299	0.8266	0.8245	0.8231	0.8221	0.8213	0.8116	
10	0.8806	0.8792	0.8780	0.8773	0.8767	0.8763	0.8760	0.8366	

(continua na pagina seguinte...)

(...continuação da página anterior)

modo	n							$(n = 11)$
	9	11	13	15	17	19	21	
metal								
1	0.2744	0.2732	0.2725	0.2722	0.2720	0.2718	0.2718	0.2635
2	0.3677	0.3707	0.3728	0.3744	0.3757	0.3766	0.3775	0.3875
3	0.4947	0.4912	0.4893	0.4881	0.4873	0.4867	0.4863	0.4793
4	0.5484	0.5466	0.5456	0.5450	0.5446	0.5444	0.5442	0.5226
5	0.6832	0.6825	0.6823	0.6823	0.6823	0.6824	0.6825	0.6871
6	0.7245	0.7203	0.7181	0.7167	0.7158	0.7152	0.7148	0.6982
7	0.7410	0.7372	0.7351	0.7338	0.7330	0.7324	0.7320	0.7354
8	0.7507	0.7553	0.7581	0.7601	0.7616	0.7628	0.7638	0.7755
9	0.8197	0.8132	0.8098	0.8077	0.8062	0.8052	0.8044	0.7955
10	0.8669	0.8661	0.8654	0.8648	0.8645	0.8642	0.8640	0.8297

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

Tabela 7.30: Teoria de ordem superior de Kant. Evolução das primeiras dez frequências ($\bar{\omega}$) com n , para uma placa com gradiente funcional de propriedades CFCF, com $c = 3/(n - 1)$, $a/h = 5$, $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, $p = 5$, $p \rightarrow \infty$

modo	n , presente, [Roque et al., 2007]							[Ferreira et al., 2006]
	7	9	11	13	15	17	19	($n = 11$)
cerâmica								
1	0.2619	0.1875	0.1899	0.2000	0.2088	0.2159	0.2215	0.2362
2	0.3745	0.2105	0.2083	0.2120	0.2159	0.2192	0.2218	0.2614
3	0.3763	0.3784	0.3823	0.3866	0.3906	0.3941	0.3970	0.4227
4	0.3903	0.4007	0.4025	0.4031	0.4034	0.4036	0.4038	0.4248
5	0.3945	0.4369	0.4707	0.4914	0.5049	0.5141	0.5207	0.5310
6	0.4880	0.4375	0.4739	0.4976	0.5137	0.5252	0.5338	0.5669
7	0.4880	0.6858	0.6867	0.6902	0.6942	0.6979	0.7012	0.7298
8	0.6946	0.7423	0.7363	0.7331	0.7318	0.7314	0.7314	0.7417
9	0.7318	0.7446	0.7422	0.7405	0.7393	0.7384	0.7377	0.7469
10	0.7455	0.7446	0.7467	0.7489	0.7503	0.7512	0.7519	0.7521
$p = 1$								
1	0.2456	0.1652	0.1652	0.1745	0.1828	0.1894	0.1947	0.2117
2	0.3230	0.1867	0.1833	0.1867	0.1904	0.1935	0.1960	0.2324
3	0.3357	0.3356	0.3388	0.3426	0.3463	0.3494	0.3521	0.3769
4	0.3372	0.3634	0.3651	0.3657	0.3660	0.3662	0.3664	0.3834
5	0.3576	0.3816	0.4143	0.4344	0.4475	0.4563	0.4627	0.4734
6	0.4106	0.3819	0.4167	0.4392	0.4545	0.4655	0.4737	0.5056
7	0.4106	0.6110	0.6117	0.6149	0.6184	0.6218	0.6249	0.6507
8	0.6191	0.6639	0.6560	0.6531	0.6520	0.6517	0.6518	0.6612
9	0.6626	0.6724	0.6723	0.6708	0.6697	0.6690	0.6684	0.6766
10	0.6768	0.6744	0.6764	0.6785	0.6798	0.6807	0.6813	0.6816

(continua na pagina seguinte...)

(...continuação da página anterior)

modo	n							$(n = 11)$
	7	9	11	13	15	17	19	
$p = 2$								
1	0.2377	0.1683	0.1686	0.1771	0.1847	0.1908	0.1958	0.2089
2	0.3272	0.1882	0.1851	0.1881	0.1913	0.1942	0.1964	0.2298
3	0.3390	0.3364	0.3392	0.3429	0.3463	0.3493	0.3519	0.3755
4	0.3393	0.3565	0.3581	0.3587	0.3590	0.3592	0.3594	0.3761
5	0.3508	0.3823	0.4127	0.4316	0.4438	0.4522	0.4581	0.4654
6	0.4315	0.3825	0.4156	0.4369	0.4514	0.4618	0.4695	0.4981
7	0.4315	0.6048	0.6055	0.6085	0.6120	0.6153	0.6182	0.6425
8	0.6130	0.6594	0.6516	0.6487	0.6475	0.6472	0.6472	0.6566
9	0.6502	0.6597	0.6596	0.6582	0.6571	0.6563	0.6558	0.6639
10	0.6644	0.6617	0.6637	0.6658	0.6670	0.6679	0.6685	0.6687
$p = 5$								
1	0.2293	0.1732	0.1744	0.1822	0.1893	0.1950	0.1992	0.2103
2	0.3381	0.1913	0.1891	0.1917	0.1946	0.1971	0.1995	0.2306
3	0.3424	0.3404	0.3432	0.3467	0.3499	0.3527	0.3531	0.3696
4	0.3447	0.3504	0.3519	0.3525	0.3527	0.3529	0.3552	0.3764
5	0.3497	0.3891	0.4167	0.4340	0.4452	0.4527	0.4582	0.4617
6	0.3782	0.3896	0.4204	0.4402	0.4536	0.4633	0.4706	0.4952
7	0.5247	0.6039	0.6046	0.6076	0.6110	0.6142	0.6170	0.6398
8	0.6120	0.6486	0.6485	0.6470	0.6460	0.6452	0.6447	0.6527
9	0.6393	0.6506	0.6524	0.6494	0.6482	0.6479	0.6478	0.6570
10	0.6532	0.6600	0.6525	0.6545	0.6557	0.6565	0.6571	0.6574

(continua na página seguinte...)

(...continuação da pagina anterior)

modo	n							$(n = 11)$
	7	9	11	13	15	17	19	
metal								
1	0.2250	0.1611	0.1632	0.1718	0.1794	0.1855	0.1903	0.2044
2	0.3218	0.1809	0.1790	0.1822	0.1855	0.1883	0.1906	0.2250
3	0.3235	0.3252	0.3285	0.3323	0.3357	0.3386	0.3412	0.3632
4	0.3354	0.3444	0.3458	0.3464	0.3466	0.3468	0.3470	0.3657
5	0.3389	0.3754	0.4045	0.4223	0.4338	0.4417	0.4474	0.4563
6	0.4185	0.3759	0.4072	0.4275	0.4413	0.4512	0.4587	0.4871
7	0.4185	0.5893	0.5901	0.5931	0.5965	0.5997	0.6025	0.6270
8	0.5968	0.6378	0.6327	0.6299	0.6288	0.6285	0.6285	0.6374
9	0.6288	0.6398	0.6377	0.6363	0.6352	0.6345	0.6339	0.6418
10	0.6425	0.6399	0.6416	0.6435	0.6447	0.6455	0.6460	0.6463

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de ordem superior de Kant

7.7.4 Sanduiche quadrada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{núcleo}/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Uma placa sanduiche simplesmente apoiada com espessura total h e comprimento a é considerada. A espessura do núcleo é denominada h_c e h_s é a espessura da pele.

As propriedades materiais da sanduiche são,

$$\text{pele : } E_1 = 24.51 \times 10^3; \quad E_2 = 7.77 \times 10^3; \quad G_{12} = G_{13} = 3.34 \times 10^3; \quad \rho = 1800;$$

$$G_{23} = 1.34 \times 10^3; \quad \nu_{21} = 0.078;$$

$$\text{núcleo : } E_c = 103.63; \quad G_c = 50; \quad \nu_c = 0.32; \quad \rho_c = 130$$

As frequências apresentadas são normalizadas por,

$$\bar{\omega} = (\omega a^2/h) \sqrt{\rho_c/E_c}$$

Tabela 7.31: Ziguezague trigonométrica. Frequência fundamental normalizada, para uma placa sanduiche simplesmente apoiada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{núcleo}/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

modo	a/h	presente [Roque et al., 2006]							analítica, HSDT [Meunier e Shenoi, 1999]
		7×7	9×9	11×11	13×13	15×15	17×17	19×19	
1	10	16.22	15.75	15.53	15.40	15.32	15.26	15.22	15.28
2		30.67	29.27	28.70	28.41	28.23	28.11	28.04	28.69
3		32.29	30.38	29.66	29.29	29.06	28.92	28.82	30.01
4		47.47	41.91	40.05	39.16	38.65	38.32	38.09	38.86

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

Tabela 7.32: Ziguezague trigonométrica. Frequência fundamental normalizada, para uma placa sanduiche simplesmente apoiada $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{núcleo}/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

modo	a/h	presente [Roque et al., 2006]							Elem.Fini. HSDT [Nayak et al., 2002]
		7×7	9×9	11×11	13×13	15×15	17×17	19×19	
1	5	10.54	10.08	9.87	9.76	9.69	9.65	9.62	9.42
2		20.28	17.89	17.12	16.76	16.57	16.46	16.40	15.56
3		22.45	18.86	17.80	17.32	17.06	16.91	16.81	15.96
1	10	16.22	15.75	15.53	15.40	15.32	15.26	15.22	15.04
2		30.67	29.27	28.70	28.41	28.23	28.11	28.04	28.10
3		32.29	30.38	29.66	29.29	29.06	28.92	28.82	29.20
4		47.47	41.91	40.05	39.16	38.65	38.32	38.09	37.76
1	20	20.95	20.48	20.23	20.08	19.99	19.93	19.88	19.23
2		44.35	43.30	42.81	42.52	42.33	42.19	42.10	41.70
3		47.30	46.03	45.45	45.11	44.90	44.75	44.64	44.88
1	30	22.45	21.97	21.72	21.57	21.47	21.41	21.36	20.49
2		50.66	49.69	49.19	48.88	48.67	48.53	48.42	47.36
3		55.09	53.93	53.37	53.03	52.80	52.65	52.53	52.03
1	40	23.07	22.57	22.32	22.17	22.07	22.01	21.96	20.99
2		53.74	52.79	52.26	51.94	51.72	51.57	51.46	49.99
3		59.12	58.02	57.44	57.09	56.85	56.69	56.57	55.53
1	50	23.37	22.86	22.61	22.46	22.36	22.30	22.25	21.24
2		55.40	54.44	53.90	53.57	53.35	53.19	53.07	51.37
3		61.37	60.29	59.70	59.33	59.09	58.92	58.80	57.42

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria ziguezague trigonométrica

Este exemplo foi modelado apenas com a teoria ziguezague trigonométrica. As tabelas 7.31 e 7.32 mostram a frequência fundamental de uma placa sanduiche simplesmente apoiada, para vários quocientes de a/h . A relação entre a espessura da pele e da placa é $h_c/h = 0.88$. O parâmetro de forma usado é $c = 2/(n - 1)$. Na tabela 7.31, os resultados são comparados com uma solução analítica de Meunier e Shenoi [1999] baseada na teoria de deformação de terceira ordem de Reddy. A solução apresentada em Nayak et al. [2002] é baseada na mesma teoria, mas implementada em elementos finitos. No caso dos resultados da tabela 7.31, os valores obtidos convergem para um valor ligeiramente inferior aos valores obtidos por Meunier e Shenoi [1999]. Na tabela 7.32, o erro relativo varia entre 2% e 5%.

7.8 Comparação das diferentes teorias de deformação na análise dinâmica de placas laminadas

A figura 7.2 mostra a variação do erro relativo da frequência natural com o quociente E_1/E_2 , para as diferentes teorias de deformação, para uma malha de 13×13 , para a placa quadrada com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$. A solução de primeira ordem de Liew et al. [2003] é a que apresenta menor erro, para quase todos os valores de E_1/E_2 . Das soluções calculadas com multiquádricas, a teoria trigonométrica é a que apresenta melhores resultados. Julga-se que terá sido uma má escolha do parâmetro de forma, c o factor responsável pelos fracos resultados obtidos. Este fenómeno observa-se de uma forma geral para todos os resultados obtidos neste capítulo. Não é então possível, com estes exemplos, tirar conclusões seguras sobre o comportamento das diferentes teorias de deformação na análise das vibrações livres de placas compósitas.

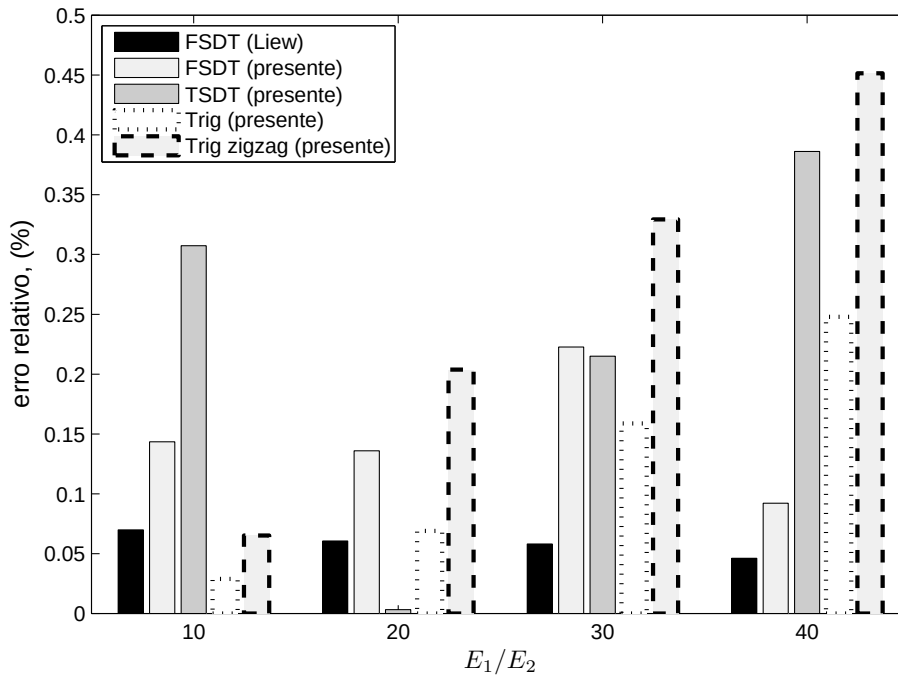


Figura 7.2: Erro relativo da frequência natural para uma placa quadrada laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, para $n = 13$

7.9 Resumo e conclusões

Neste capítulo as equações de equilíbrio derivadas na capítulo 5 são resolvidas numericamente para o caso dinâmico através da colocação assimétrica com funções de base radial. São analisados os seguintes exemplos de placas laminadas,

- placa quadrada laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$
- placa enviesada
- placa quadrada de material com gradiente funcional de propriedades.
- placa sanduiche quadrada com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{núcleo}/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Na análise numérica são utilizadas as teorias de deformação,

- teoria de primeira ordem
- teoria de terceira ordem de Reddy
- teoria trigonométrica
- teoria zigzague trigonométrica
- teoria de ordem superior de Kant

As equações de equilíbrio e condições de fronteira são escritas em ordem aos deslocamentos, e interpoladas pela função multiquádrica.

De um modo geral, a qualidade dos resultados obtidos para a análise de vibrações de placa é inferior à qualidade dos resultados obtidos na análise estática de placas e mostram uma grande sensibilidade ao parâmetro de forma escolhido. O parâmetro $c = 2/\sqrt{n}$ que se mostrou adequado aos exemplos de análise estática de deformações de placa, não produz resultados tão estáveis no caso das vibrações livres.

Os problemas passam por modos de vibração extremamente irregulares, incapacidade do MATLAB para resolver o problema de valores próprios, e por vezes alguma falta de memória do programa. Torna-se então necessário encontrar alguma forma de escolher um parâmetro de forma mais adequado, implementar um pré-condicionamento, ou fazer

uma decomposição do domínio de forma a reduzir o mau condicionamento da matriz dos coeficientes.

Referências

- Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F. e Jorge, R. M. N. (2006). Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. *Composite Structures*, 75(1-4):593–600.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2005). Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by fsdt and radial basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39-41):4265–4278.
- Khdeir, A. A. e Librescu, L. (1988). Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory: part ii - buckling and free vibration. *Composite Structures*, 9(4):259–277.
- Liew, K. M., Huang, Y. Q. e Reddy, J. N. (2003). Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on fsdt using the moving least squares differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(19):2203–2222.
- Meunier, M. e Shenoi, R. A. (1999). Free vibration analysis of composite sandwich plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 213(7):715–724.
- Nayak, A. K., Moy, S. S. J. e Shenoi, R. A. (2002). Free vibration analysis of composite sandwich plates based on reddy's higher-order theory. *Composites Part B: Engineering*, 33(7):505–519.
- Qian, L. F., Batra, R. C. e Chen, L. M. (2004). Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local petrov-galerkin method. *Composites Part B: Engineering*, 35(6-8):685–697.
- Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. CRC Press.
- Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M. e Jorge, R. M. N. (2006). Free vibration analysis of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 8(6):497–515.
- Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M. e Jorge, R. M. N. (2007). A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3-5):1048–1070.
- Shimpi, R. P., Arya, H. e Naik, N. K. (2003). A higher order displacement model for the plate analysis. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 22(18):1667–1688.

Vel, S. S. e Batra, R. C. (2004). Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5):703–730.

Wang, S. (1997). Free vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first-order shear deformation plate theory. *Computers and Structures*, 63(3): 525–538.

Colocação assimétrica com funções de base radial para análise estática de cascas laminadas

8.1 introdução

Neste capítulo apresenta-se a solução estática obtida por funções de base radial de estruturas tipo casca laminada. As equações relevantes para este capítulo encontram-se descritas na secção 5.4. É usada a teoria de terceira ordem de Donnell-Reddy para analisar os seguintes exemplos:

- Casca laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com raio infinito, sob carga sinusoidal
- Casca esférica $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal
- Casca laminada, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, sob carga sinusoidal
- Casca laminada, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$, sob carga uniforme

8.2 Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Donnell-Reddy

As resultantes das tensões e das forças podem ainda ser obtidas em termos das componentes da deformação por (5.170):

$$\begin{aligned}
 N_i &= A_{ij}\epsilon_j^{(0)} + B_{ij}k_j^{(0)} + E_{ij}k_j^{(2)}; \quad M_i = B_{ij}\epsilon_j^{(0)} + D_{ij}k_j^{(0)} + F_{ij}k_j^{(2)} \\
 P_i &= E_{ij}\epsilon_j^{(0)} + F_{ij}k_j^{(0)} + H_{ij}k_j^{(2)}; \quad (i, j = 1, 2, 3) \\
 Q_2 &= A_{4j}\epsilon_j^{(0)} + D_{4j}k_j^{(1)}; \quad Q_1 = A_{5j}\epsilon_j^{(0)} + D_{5j}k_j^{(1)} \\
 K_2 &= D_{4j}\epsilon_j^{(0)} + F_{4j}k_j^{(1)}; \quad K_1 = D_{5j}\epsilon_j^{(0)} + F_{5j}k_j^{(1)}; \quad (j = 4, 5)
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

onde A_{ij} , B_{ij} , etc. são os componentes de rigidez do laminado, e são obtidos por:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} Q_{ij}^{(k)}(1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^6) d\zeta \tag{8.2}$$

As equações de equilíbrio (5.174) podem então ser expressas em função dos deslocamentos u_0 , v_0 , w_0 e rotações ϕ_x , ϕ_y .

1ª equação de equilíbrio:

$$A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{8.3}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{A_{12}}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) = 0 \tag{8.4}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \frac{32}{9h^4} H_{66} \left(-\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} - 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{11} \left(-\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} \right) \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left(-\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} - \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{16}{h^4} F_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} \left(-\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} - 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + \frac{8}{h^2} D_{55} \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\
& + \frac{8}{h^2} D_{44} \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{16}{h^4} F_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\
& + \frac{8}{3h^2} F_{66} \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\
& + A_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + A_{12} \left(-\frac{2}{R_1 R_2} w_0 - \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\
& + \frac{A_{22}}{R_2} \left(-\frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} w_0 \right) + \frac{A_{11}}{R_1} \left(-\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{R_1} w_0 \right) = -q
\end{aligned} \tag{8.5}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \frac{16}{9h^4} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{11} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{11} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
& + A_{55} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{66} \left(-\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) + \frac{8}{h^2} D_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$+ D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{16}{h^4} F_{55} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \right) = 0 \quad (8.6)$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{h^2} D_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) + A_{44} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \right) + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\ & + \frac{4}{3h^2} F_{22} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) \\ & + \frac{8}{3h^2} F_{66} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\ & + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{16}{h^4} F_{44} \left(-\phi_y - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\ & + \frac{16}{9h^4} H_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

8.2.1 Interpolação das equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio podem ser então discretizadas por multiquádricas.

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (A_{12} + A_{66}) \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (A_{66} + A_{12}) \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{66} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]$$

$$+ \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{A_{12}}{R_1} + \frac{A_{22}}{R_2} \right) \right] = 0 \quad (8.9)$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{A_{12}}{R_2} + \frac{A_{11}}{R_1} \right) \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[- \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{A_{22}}{R_2} + \frac{A_{12}}{R_1} \right) \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[g \left(-2 \frac{A_{12}}{R_1 R_2} - \frac{A_{22}}{R_2^2} - \frac{A_{11}}{R_1^2} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(+ \frac{16}{h^4} F_{55} - \frac{8}{h^2} D_{55} + A_{55} \right) \right. \\ & + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(\frac{16}{h^4} F_{44} - \frac{8}{h^2} D_{44} + A_{44} \right) - \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} - \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} \\ & \left. - \frac{\partial^4 g}{\partial y^2 \partial x^2} \left(\frac{64}{9h^4} H_{66} + \frac{32}{9h^4} H_{12} \right) \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(A_{55} + \frac{16}{h^4} F_{55} - \frac{8}{h^2} D_{55} \right) + \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \left(\frac{4}{3h^2} F_{11} - \frac{16}{9h^4} H_{11} \right) \right. \\ & + \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \left(\frac{4}{3h^2} F_{12} - \frac{32}{9h^4} H_{66} + \frac{8}{3h^2} F_{66} - \frac{16}{9h^4} H_{12} \right) \left. \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[\frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{16}{h^4} F_{44} - \frac{8}{h^2} D_{44} + A_{44} \right) + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \left(\frac{4}{3h^2} F_{22} - \frac{16}{9h^4} H_{22} \right) \right. \\ & + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{8}{3h^2} F_{66} + \frac{4}{3h^2} F_{12} - \frac{32}{9h^4} H_{66} - \frac{16}{9h^4} H_{12} \right) \left. \right] = -q \end{aligned} \quad (8.10)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{8}{h^2} D_{55} - \frac{16}{h^4} F_{55} - A_{55} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \right. \\ & + \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \left(\frac{16}{9h^4} H_{11} - \frac{4}{3h^2} F_{11} \right) + \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \left(\frac{16}{9h^4} H_{12} - \frac{4}{3h^2} F_{12} - \frac{8}{3h^2} F_{66} \right) \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[g \left(\frac{8}{h^2} D_{55} - A_{55} - \frac{16}{h^4} F_{55} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(D_{11} - \frac{8}{3h^2} F_{11} + \frac{16}{9h^4} H_{11} \right) \right. \\
& + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(D_{66} - \frac{4}{3h^2} F_{66} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \left(\frac{16}{9h^4} H_{12} - \frac{4}{3h^2} F_{12} \right) \Big] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(\frac{16}{9h^4} H_{22} - \frac{4}{3h^2} F_{22} \right) \right. \\
& + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \left(D_{12} - \frac{8}{3h^2} F_{12} - \frac{4}{3h^2} F_{66} + D_{66} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \right) \Big] = 0
\end{aligned} \tag{8.11}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{8}{h^2} D_{44} - A_{44} - \frac{16}{h^4} F_{44} \right) + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \left(\frac{16}{9h^4} H_{22} - \frac{4}{3h^2} F_{22} \right) \right. \\
& + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{16}{9h^4} H_{12} + \frac{32}{9h^4} H_{66} - \frac{8}{3h^2} F_{66} - \frac{4}{3h^2} F_{12} \right) \Big] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \left(D_{66} D_{12} - \frac{8}{3h^2} F_{66} - \frac{8}{3h^2} F_{12} + \frac{16}{9h^4} H_{66} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \right) \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[g \left(\frac{8}{h^2} D_{44} - A_{44} - \frac{16}{h^4} F_{44} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(D_{66} - \frac{8}{3h^2} F_{66} + \frac{16}{9h^4} H_{66} \right) \right. \\
& + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(D_{22} - \frac{8}{3h^2} F_{22} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \right) \Big] = 0
\end{aligned} \tag{8.12}$$

8.3 Exemplos numéricos

São analisados os seguintes exemplos, no estudo da deformação de cascas à flexão:

- Casca laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com raio infinito, sob carga sinusoidal

- Casca esférica $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal
- Casca laminada, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, sob carga sinusoidal
- Casca laminada, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$, sob carga uniforme

8.3.1 Casca laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com raio infinito, sob carga sinusoidal

Este exemplo tem como objectivo validar a teoria de terceira ordem de casca de Reddy para uma casca de raio infinito. Os resultados obtidos são comparados com várias formulações de placa. As propriedades mecânicas de cada lâmina são:

$$E_1 = 25.0E_2; \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; \quad G_{23} = 0.2E_2; \quad \nu_{12} = 0.25;$$

e a carga aplicada é da forma:

$$P = P_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

Os resultados numéricos apresentados são adimensionalizados da forma:

$$\bar{w} = w \frac{10^2 E_2 h^3}{P_0 a^4}; \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_i \frac{h^2}{P_0 a^2}; \quad i = x, y \quad \bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy} \frac{h^2}{P_0 a^2}; \quad \bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz} \frac{h}{P_0 a};$$

Este exemplo tem como objectivo validar a teoria de terceira ordem de casca de Reddy para uma casca de raio infinito. Os resultados obtidos são comparados com várias formulações de placa. Esta formulação de casca, em termos de resultados numéricos obtidos, aproxima-se da teoria de terceira ordem de Reddy para o caso da deformação central (figura 8.1) e apresenta ainda melhores resultados no caso do cálculo das tensões (figuras 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5). Resultados mais pormenorizados encontram-se sob a forma de tabela (8.1). O parâmetro de forma usado foi de $c = 2/\sqrt{n}$.

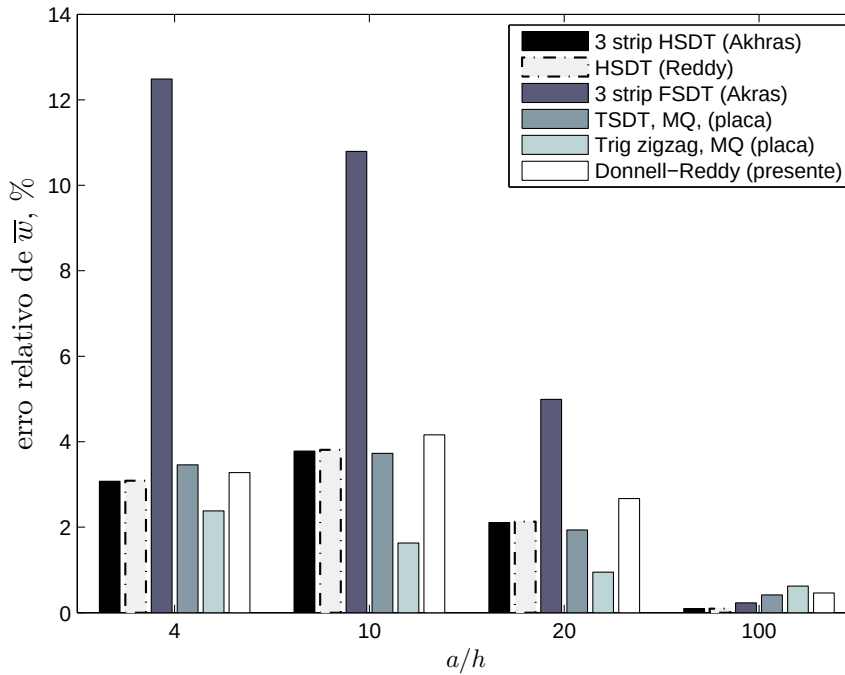


Figura 8.1: Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo da deformada central para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)

8.3.2 Casca esférica $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal

As propriedades mecânicas de cada lâmina são:

$$E_1 = 25.0E_2; \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; \quad G_{23} = 0.2E_2; \quad \nu_{12} = 0.25;$$

A carga aplicada é da forma:

$$P = P_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

Os resultados numéricos apresentados são adimensionalizados da forma:

$$\bar{w} = w \frac{10^2 E_2 h^3}{P_0 a^4}; \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_i \frac{h^2}{P_0 a^2}; \quad i = x, y \quad \bar{\tau}_{ij} = \tau_{ij} \frac{h^2}{P_0 a^2} (1 - \delta_{ij}) \quad i, j = x, y, z;$$

A solução obtida com o método da multiquádrica (com um parâmetro de forma $c = 2/\sqrt{n}$) é comparada com uma solução de [Hsu et al., 1981] e uma solução de primeira ordem com factor de correcção de corte $k = 5/6$ de [Reddy, 1982]. Os resultados numéricos encontram-se na tabela 8.2, verificando-se uma falta de convergência para

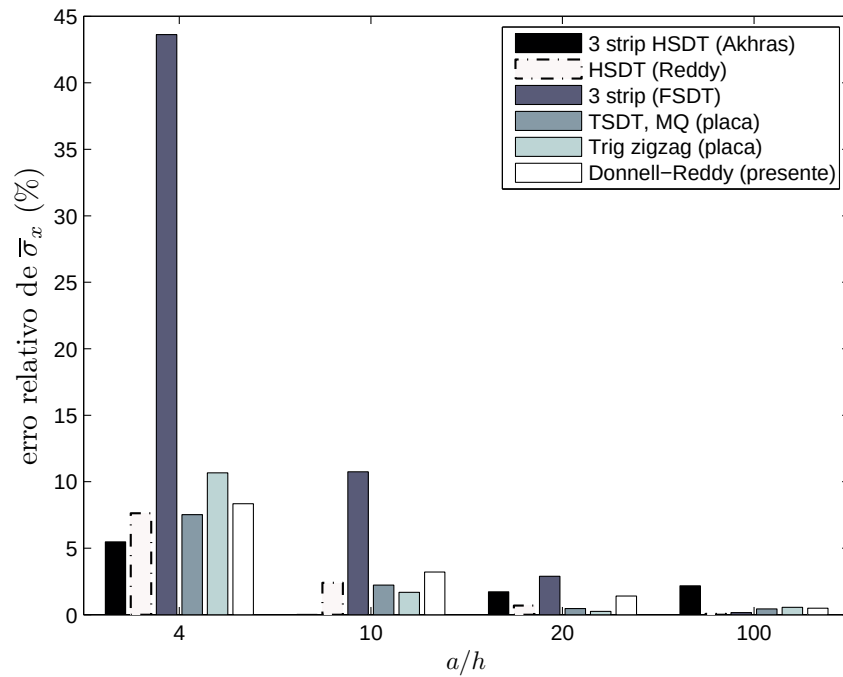


Figura 8.2: Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo de σ_x para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)

os valores de referência, mesmo para o caso da aproximação à placa. A diferença encontrada pode dever-se, ao facto de os valores de referência terem como base uma teoria de primeira ordem.

8.3.3 Casca laminada, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, sob carga sinusoidal

As propriedades mecânicas de cada lâmina são:

$$E_1 = 25.0E_2; \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; \quad G_{23} = 0.2E_2; \quad \nu_{12} = 0.25;$$

Os resultados numéricos apresentados são adimensionalizados da forma:

$$\bar{w} = w \frac{10^3 E_2 h^3}{P_0 a^4}$$

As figuras 8.6, 8.7, 8.8 e 8.9 mostram a variação da deflexão central com a curvatura da casca, R/a . Observa-se que para todos os casos, a solução encontrada é próxima

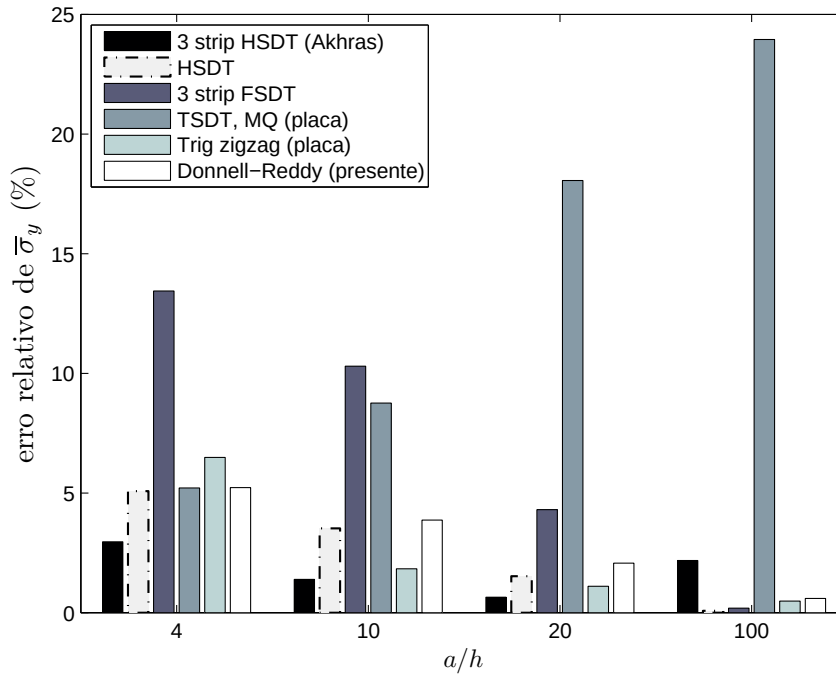


Figura 8.3: Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo de σ_y para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)

da solução de ordem superior de Reddy e Liu [1985]. No caso de cascas muito finas ($a/h = 100$), não se observam grandes diferenças entre os resultados gerados pela teoria de terceira ordem e a teoria de primeira ordem. Os resultados encontram-se tabelados em 8.3.

8.3.4 Casca laminada, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$, sob carga uniforme

As propriedades mecânicas de cada lâmina são:

$$E_1 = 25.0E_2; \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; \quad G_{23} = 0.2E_2; \quad \nu_{12} = 0.25;$$

Os resultados numéricos apresentados são adimensionalizados da forma:

$$\bar{w} = w \frac{10^3 E_2 h^3}{P_0 a^4}$$

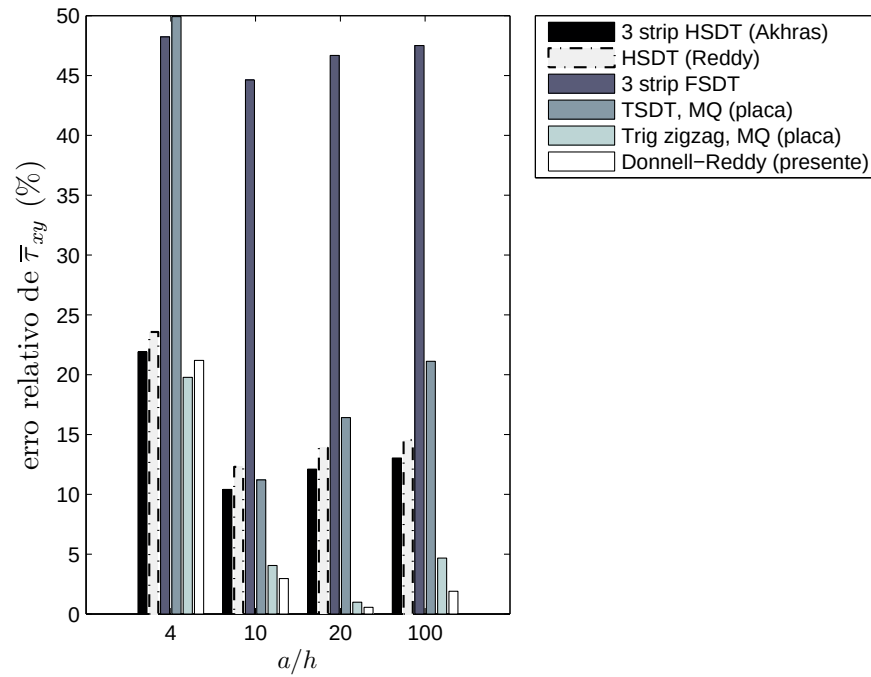


Figura 8.4: Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo de τ_{xz} para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)

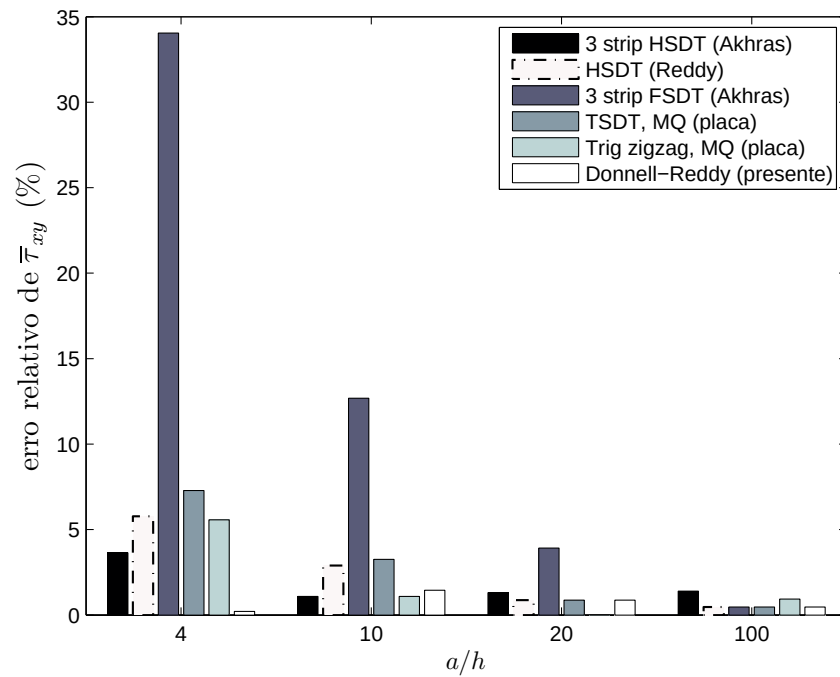


Figura 8.5: Teoria de Donnell-Reddy. Erro relativo de τ_{xy} para uma casca com raios infinitos (aproximação à placa)

Tabela 8.1: Teoria de Donnell-Reddy. Deflexão do ponto central, e tensões, para uma casca laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $R/a = 10^9$

$\frac{a}{h}$	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$ (a/2,a/2,h/2)	$\bar{\sigma}_y$ (a/2,a/2,h/4)	$\bar{\tau}_{zx}$ (0,a/2,0)	$\bar{\tau}_{xy}$ (0,0,-h/2)
4	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	1.8939	0.6806	0.6463	0.2109	0.0450
	HSDT [Reddy, 1984]	1.8937	0.6651	0.6322	0.2064	0.0440
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	1.7100	0.4059	0.5765	0.1398	0.0308
	elasticidade [Pagano, 1970]	1.954	0.720	0.666	0.270	0.0467
	TSDT, MQ, n=21 [Ferreira et al., 2003]	1.8864	0.6659	0.6313	0.1352	0.0433
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	1.9075	0.6432	0.6228	0.2166	0.0441
	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	1.8848	0.6616	0.6293	0.2185	0.0458
	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	1.8885	0.6604	0.6307	0.2148	0.0463
10	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.7149	0.5589	0.3974	0.2697	0.0273
	HSDT [Reddy, 1984]	0.7147	0.5456	0.3888	0.2640	0.0268
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.6628	0.4989	0.3615	0.1667	0.0241
	elasticidade [Pagano, 1970]	0.743	0.559	0.403	0.301	0.0276
	TSDT, MQ, n=21 [Ferreira et al., 2003]	0.7153	0.5466	0.4383	0.3347	0.0267
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	0.7309	0.5496	0.3956	0.2888	0.0273
	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	0.7115	0.5413	0.3873	0.2981	0.0269
	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	0.7120	0.5411	0.3874	0.2911	0.0271
20	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.5061	0.5523	0.3110	0.2883	0.0233
	HSDT [Reddy, 1984]	0.5060	0.5393	0.3043	0.2825	0.0228
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4912	0.5273	0.2957	0.1749	0.0221
	elasticidade [Pagano, 1970]	0.517	0.543	0.309	0.328	0.0230
	TSDT, MQ, [Ferreira et al., 2003], n=21	0.5070	0.5405	0.3648	0.3818	0.0228
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	0.5121	0.5417	0.3056	0.3248	0.0230
	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	0.5039	0.5365	0.3028	0.3238	0.0226
	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	0.5035	0.5358	0.3027	0.3259	0.0227
100	3 strip HSDT [Akhras et al., 1994]	0.4343	0.5507	0.2769	0.2948	0.0217
	HSDT [Reddy, 1984]	0.4343	0.5387	0.2708	0.2897	0.0213
	3 strip FSDT [Akhras et al., 1993]	0.4337	0.5382	0.2705	0.1780	0.0213
	elasticidade [Pagano, 1970]	0.4347	0.539	0.271	0.339	0.0214
	TSDT, MQ, n=21 [Ferreira et al., 2003]	0.4365	0.5413	0.3359	0.4106	0.0215
	ziguezague, n=21 [Ferreira, 2005]	0.4374	0.5420	0.2697	0.3232	0.0216
	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	0.4496	0.5546	0.2739	0.3737	0.0226
	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	0.4367	0.5408	0.2706	0.3466	0.0216
100	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	0.4327	0.5364	0.2694	0.3454	0.0213

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria Donnell-Reddy

Tabela 8.2: Teoria de Donnell-Reddy. Deflexão do ponto central, e tensões, para uma casca esférica $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $R_1 = R_2$; $n = 15$; $h = 0.1$; $P_0 = -1$;

R/h	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
			(a/2,a/2,-h/2)	(a/2,a/2,-h/4)	(0,0,-h/2)	(0,a/2,0)
10	Compact Form Solution [Hsu et al., 1981]	0.3229	0.1678	0.1032	0.04055	0.01824
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.3229	0.1678	0.1032	0.04055	0.01824
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]	0.3241	0.1632	0.1000	0.03947	0.01772
	FEM L2-F [Reddy, 1982]	0.2337	0.1459	0.1165	0.02184	0.01153
	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	0.2912	0.1663	0.1034	0.03753	0.00883
	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	0.3015	0.1746	0.1095	0.03934	0.01112
	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	0.3052	0.1775	0.1117	0.04001	0.01235
20	CFS [Hsu et al., 1981]	0.5254	0.3426	0.2331	0.04295	0.03201
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.5254	0.3426	0.2330	0.04294	0.03201
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]					
	FEM L2-F [Reddy, 1982]	0.4276	0.2597	0.1994	0.02615	0.02245
	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	0.5221	0.3475	0.2343	0.04367	0.01883
	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	0.5310	0.3555	0.2408	0.04480	0.02097
	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	0.5341	0.3582	0.2430	0.04522	0.02207
50	CFS [Hsu et al., 1981]	0.6362	0.4541	0.3216	0.03474	0.03955
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.6361	0.4540	0.3215	0.03473	0.03955
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]	0.6357	0.4427	0.3128	0.03391	0.03865
	FEM L2-F [Reddy, 1982]					
	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	0.6724	0.4859	0.3402	0.03777	0.02661
	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	0.6752	0.4887	0.3428	0.03822	0.02771
	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	0.6761	0.4896	0.3437	0.03840	0.02829
100	CFS [Hsu et al., 1981]	0.6559	0.4797	0.3437	0.02979	0.04090
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.6558	0.4796	0.3437	0.02978	0.04089
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]	0.6357	0.4678	0.3344	0.02909	0.03997
	FEM L2-F [Reddy, 1982]	0.5813	0.3349	0.2484	0.02000	0.03111
	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	0.7013	0.5202	0.3682	0.03295	0.02857
	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	0.7024	0.5211	0.3694	0.03326	0.02918
	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	0.7028	0.5214	0.3698	0.03339	0.02953
10 ⁹ (placa)	CFS [Hsu et al., 1981]	0.6627	0.4995	0.3589	0.02397	0.04136
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.6627	0.4954	0.3589	0.02396	0.04136
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]	0.6623	0.4832	0.3492	0.02340	0.04043
	FEM L2-F [Reddy, 1982]	0.5901	0.3339	0.2454	0.01629	0.03161
	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	0.7115	0.5413	0.3873	0.02688	0.02981
	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	0.7120	0.5211	0.3694	0.03326	0.02994
	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	0.7121	0.5214	0.3698	0.03339	0.03005

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria Donnell-Reddy

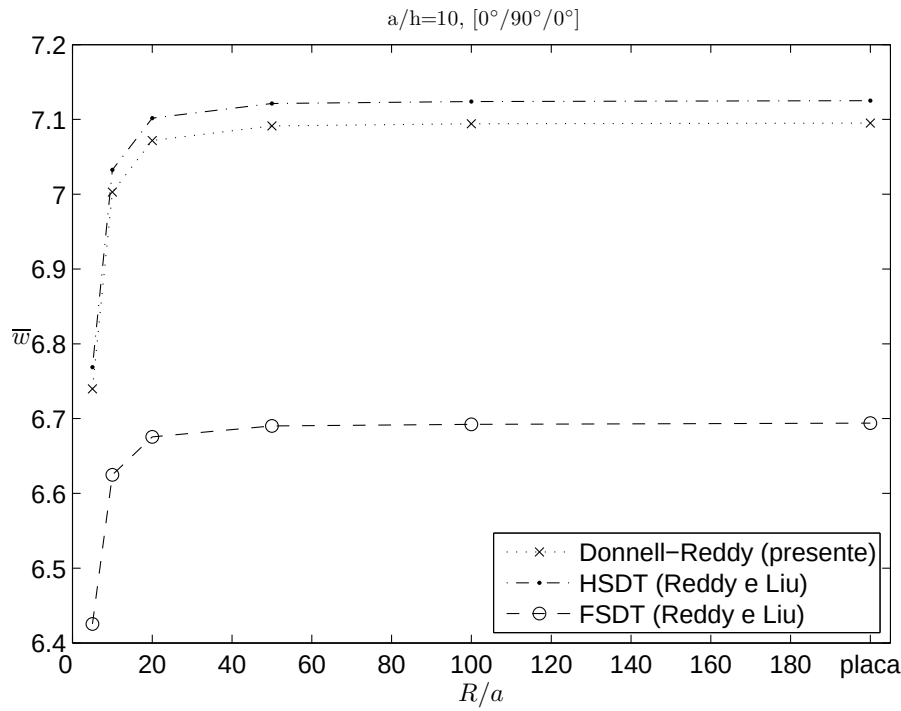


Figura 8.6: Teoria de Donnell-Reddy. Variação da deflexão central com R/a para uma casca esférica $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $a/h=10$

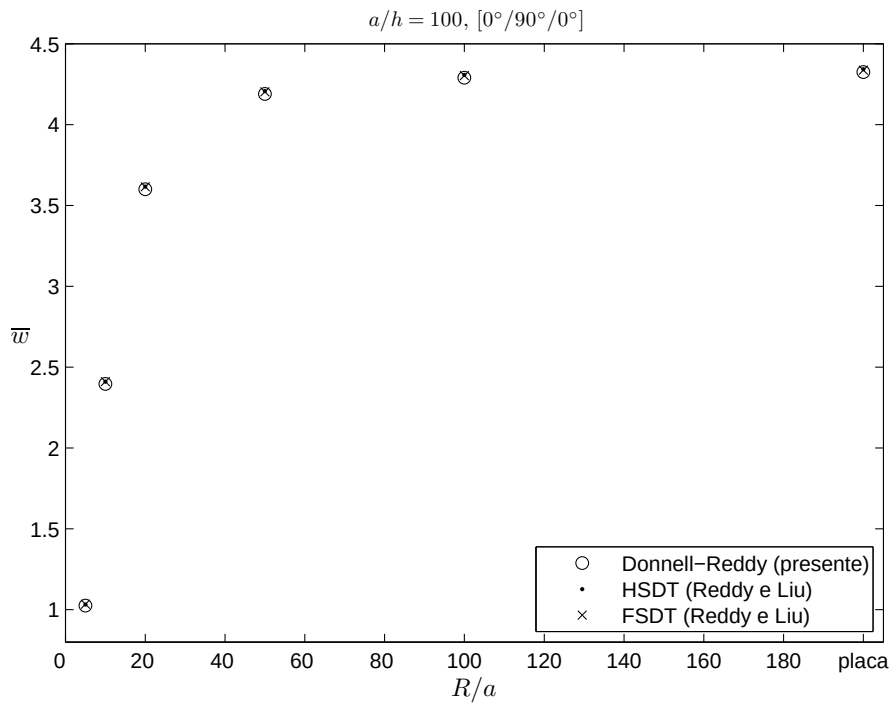


Figura 8.7: Teoria de Donnell-Reddy. Variação da deflexão central com R/a para uma casca esférica $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $a/h=100$

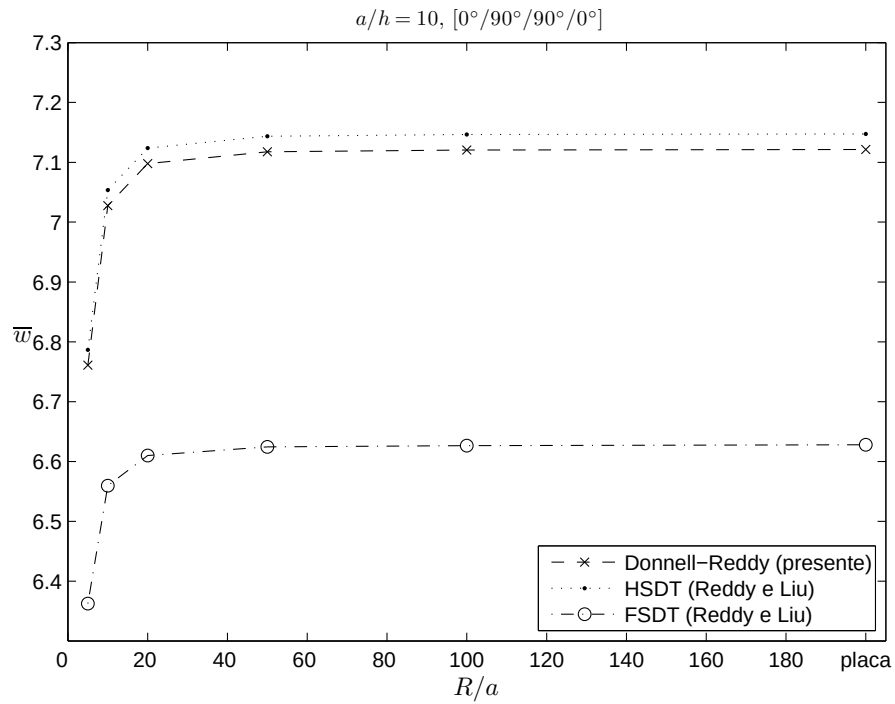


Figura 8.8: Teoria de Donnell-Reddy. Variação da deflexão central com R/a para uma casca esférica $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $a/h=10$

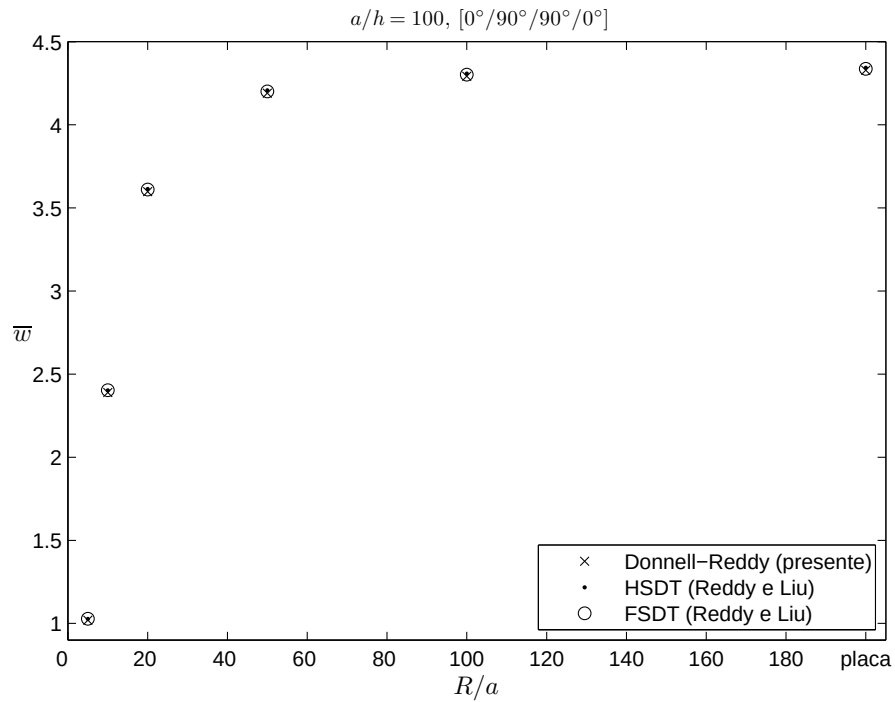


Figura 8.9: Teoria de Donnell-Reddy. Variação da deflexão central com R/a para uma casca esférica $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $a/h=100$

Tabela 8.3: Teoria de Donnell-Reddy. Deflexão do ponto central, para diferentes quocientes R/a , para $R_1 = R_2$

		Método	R/a					
			5	10	20	50	100	10^9
$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$								
10	presente, n=11	[Ferreira et al., 2006]	6.7047	6.9900	7.0652	7.0865	7.0896	7.0906
10	presente, n=15	[Ferreira et al., 2006]	6.7308	6.9994	7.0700	7.0900	7.0928	7.0938
10	presente, n=21	[Ferreira et al., 2006]	6.7396	7.0028	7.0718	7.0914	7.0942	7.0951
10	HSDT	[Reddy e Liu, 1985]	6.7688	7.0325	7.1016	7.1212	7.1240	7.125
10	FSDT	[Reddy e Liu, 1985]	6.4253	6.6247	6.6756	6.6902	6.6923	6.6939
100	presente, n=11	[Ferreira et al., 2006]	0.9608	2.3356	3.6423	4.3199	4.4379	4.4786
100	presente, n=15	[Ferreira et al., 2006]	1.0084	2.3810	3.6104	4.2209	4.3254	4.3614
100	presente, n=21	[Ferreira et al., 2006]	1.0253	2.3964	3.6003	4.1897	4.2900	4.3244
100	HSDT	[Reddy e Liu, 1985]	1.0321	2.4099	3.617	4.2071	4.3074	4.3420
100	FSDT	[Reddy e Liu, 1985]	1.0337	2.4109	3.6150	4.2027	4.3026	4.3370
$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$								
10	presente, n=11	[Ferreira et al., 2006]	6.7237	7.0127	7.0889	7.1105	7.1136	7.1146
10	presente, n=15	[Ferreira et al., 2006]	6.7515	7.0239	7.0955	7.1158	7.1187	7.1196
10	presente, n=21	[Ferreira et al., 2006]	6.7608	7.0277	7.0978	7.1176	7.1205	7.1214
10	HSDT	[Reddy e Liu, 1985]	6.7865	7.0536	7.1237	7.1436	7.1464	7.1474
10	FSDT	[Reddy e Liu, 1985]	6.3623	6.5595	6.6099	6.6244	6.6264	6.6280
100	presente, n=11	[Ferreira et al., 2006]	0.9572	2.3335	3.6495	4.3349	4.4544	4.4957
100	presente, n=15	[Ferreira et al., 2006]	1.0034	2.3752	3.6101	4.2254	4.3309	4.3672
100	presente, n=21	[Ferreira et al., 2006]	1.0198	2.3894	3.5974	4.1908	4.2919	4.3284
100	HSDT	[Reddy e Liu, 1985]	1.0264	2.4024	3.6133	4.2071	4.3082	4.3430
100	FSDT	[Reddy e Liu, 1985]	1.0279	2.4030	3.6104	4.2015	4.3021	4.3368

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria Donnell-Reddy

Os resultados encontram-se tabelados em 8.4 e é possível observar o mesmo comportamento que no exemplo anterior (com carga sinusoidal).

Tabela 8.4: Teoria de Donnell-Reddy. Deflexão do ponto central, para diferentes quocientes R/a , com $R_1 = R_2$, carga uniforme

Método		R/a					
a/h		5	10	20	50	100	10^9
[0°/90°]							
10	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	17.1112	18.4090	18.7638	18.8659	18.8807	18.8858
10	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	17.4314	18.6475	18.9780	19.0730	19.0867	19.0914
10	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	17.5408	18.7296	19.0518	19.1442	19.1578	19.1623
10	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	17.566	18.744	19.064	19.155	19.168	19.172
10	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	19.944	19.065	19.365	19.452	19.464	19.469
100	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	1.5323	5.0401	10.9689	16.1840	17.3556	17.7844
100	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	1.6849	5.3711	11.1385	15.7804	16.7727	17.1314
100	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	1.7370	5.5008	11.2346	15.7221	16.6678	17.008
100	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	1.7519	5.5388	11.268	15.711	16.642	16.977
100	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	1.7535	5.5428	11.273	15.714	16.645	16.980
[0°/90°/0°]							
10	presente (n=11)	10.132	10.614	10.741	10.777	10.783	10.784
10	presente (n=15)	10.285	10.725	10.841	10.874	10.878	10.88
10	presente (n=21)	10.339	10.765	10.876	10.908	10.913	10.914
10	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	10.332	10.752	10.862	10.893	10.898	10.899
10	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.7937	10.110	10.191	10.214	10.218	10.220
100	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	1.3436	3.3984	5.3948	6.4392	6.6216	6.6846
100	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	1.4589	3.562	5.4899	6.4562	6.6221	6.6793
100	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	1.499	3.6235	5.5358	6.4791	6.6421	6.6975
100	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	1.5092	3.6426	5.5503	6.4895	6.6496	6.7047
100	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	1.5118	3.6445	5.5473	6.4827	6.6421	6.6970
[0°/90°/90°/0°]							
10	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	10.269	10.761	10.891	10.928	10.933	10.935
10	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	10.427	10.876	10.994	11.028	11.033	11.034
10	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	10.482	10.917	11.031	11.063	11.068	11.069
10	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	10.476	10.904	11.017	11.049	11.053	11.055
10	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.8249	10.141	10.222	10.245	10.249	10.251
100	presente, n=11 [Ferreira et al., 2006]	1.3666	3.4735	5.5172	6.5875	6.7745	6.8392
100	presente, n=15 [Ferreira et al., 2006]	1.482	3.6379	5.608	6.5953	6.7649	6.8233
100	presente, n=21 [Ferreira et al., 2006]	1.5225	3.6997	5.6511	6.6153	6.7785	6.8366
100	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	1.5332	3.7195	5.666	6.6234	6.7866	6.8427
100	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	1.5358	3.7208	5.6618	6.6148	6.7772	6.8331

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria Donnell-Reddy

8.4 Resumo e conclusões

Neste capítulo a teoria de deformação de casca de Donnell-Reddy foi aplicada aos seguintes exemplos,

- Casca laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com raio infinito, sob carga sinusoidal
- Casca esférica $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal
- Casca laminada, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, sob carga sinusoidal
- Casca laminada, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$, sob carga uniforme

Conclui-se que com base nos exemplos analisados, que a teoria de Donnell-Reddy é adequada para a análise de cascas laminadas, apresentando mesmo melhores resultados no caso de aproximação à placa que a teoria de deformação de terceira ordem de Reddy para placa. Os resultados obtidos com a teoria Donnell-Reddy aproximam-se da solução analítica de Reddy e Liu [1985].

Referências

- Akhras, G., Cheung, M. S. e Li, W. (1993). Static and vibration analysis of anisotropic composite laminates by finite strip method. *International Journal of Solids and Structures*, 30(22):3129–3137.
- Akhras, G., Cheung, M. S. e Li, W. (1994). Finite strip analysis of anisotropic laminated composite plates using higher-order shear deformation theory. *Computers and Structures*, 52(3):471–477.
- Ferreira, A. J. M. (2005). Analysis of composite plates using a layerwise theory and multiquadrics discretization. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 12(2): 99–112.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2006). Modelling cross-ply laminated elastic shells by a higher-order theory and multiquadrics. *Computers and Structures*, 84(19-20):1288–1299.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Martins, P. A. L. S. (2003). Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method. *Composites Part B: Engineering*, 34(7):627–636.
- Hsu, Y. S., Reddy, J. N. e Bert, C. W. (1981). Thermoelasticity of circular cylindrical shells laminated of bimodulus composite materials. *J. Thermal Stresses*, 4:115–77.
- Pagano, N. J. (1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, 4(JAN):20–34.
- Reddy, J. N. (1982). Bending of laminated anisotropic shells by a shear deformable finite element. Em *Fibre Science and Technology*, volume 17, páginas 9–24.

-
- Reddy, J. N. (1984). Simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 51(4):745–752.
- Reddy, J. N. e Liu, C. F. (1985). Higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 23(3):319–330.

Colocação assimétrica com funções de base radial para análise de vibrações livres de cascas laminadas

9.1 introdução

Este capítulo segue uma organização semelhante à do capítulo 7. São usadas as teorias de deformação de corte de Donnell e Donnell-Reddy para calcular as vibrações livres de cascas esféricas e cilíndricas laminadas.

Os exemplos estudados são os seguintes:

- cascas esféricas com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$
- cascas cilíndricas com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$

9.2 Teoria de deformação de corte de primeira ordem de Donnell

As equações de equilíbrio podem ser expressas em função dos deslocamentos u_0 , v_0 , w_0 e rotações ϕ_x , ϕ_y

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{33} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \\ & = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\phi}_x \end{aligned} \quad (9.1)$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{A_{12}}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{33} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & = I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\phi}_y \end{aligned} \quad (9.2)$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + A_{12} \left(-\frac{2}{R_1 R_2} w_0 - \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ & + \frac{A_{22}}{R_2} \left(-\frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} w_0 \right) + \frac{A_{11}}{R_1} \left(-\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{R_1} w_0 \right) + q = I_0 \ddot{w}_0 \end{aligned} \quad (9.3)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{55} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
& = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_x
\end{aligned} \tag{9.4}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{44} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \right) + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
& = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\phi}_y
\end{aligned} \tag{9.5}$$

onde

$$I_i = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \rho^{(k)} z^i dz, (i = 0, 1, 2) \tag{9.6}$$

onde $\rho^{(k)}$ é a densidade da camada k .

9.2.1 Análise das vibrações livres

Na análise de vibrações livres, supõe-se uma solução harmónica em termos dos deslocamentos e rotações $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ da forma,

$$u_0(x, y, t) = u_0(w, y) e^{i\omega t} \tag{9.7}$$

$$v_0(x, y, t) = v_0(w, y) e^{i\omega t} \tag{9.8}$$

$$w_0(x, y, t) = w_0(w, y) e^{i\omega t} \tag{9.9}$$

$$\phi_x(x, y, t) = \phi_x(w, y) e^{i\omega t} \tag{9.10}$$

$$\phi_y(x, y, t) = \phi_y(w, y) e^{i\omega t} \tag{9.11}$$

onde ω é a frequência na vibração natural. Igualando a carga a zero, e substituindo a solução (9.7)-(9.11), nas equações (9.1)-(9.5), obtêm-se as equações de equilíbrio em

termos das amplitudes,

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{33} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \\ & = -I_0 \omega^2 u_0 - I_1 \omega^2 \phi_x \end{aligned} \quad (9.12)$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{A_{12}}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{33} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & = -I_0 \omega^2 v_0 - I_1 \omega^2 \phi_y \end{aligned} \quad (9.13)$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + A_{12} \left(-\frac{2}{R_1 R_2} w_0 - \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ & + \frac{A_{22}}{R_2} \left(-\frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} w_0 \right) + \frac{A_{11}}{R_1} \left(-\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{R_1} w_0 \right) = -I_0 \omega^2 w_0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{55} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \right) + D_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\ & = -I_1 \omega^2 u_0 - I_2 \omega^2 \phi_x \end{aligned} \quad (9.15)$$

5ª equação de equilíbrio:

$$A_{44} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \right) + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{33} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y}$$

$$= -I_1\omega^2 v_0 - I_2\omega^2 \phi_y \quad (9.16)$$

9.2.2 Interpolação das equações de equilíbrio

Aplicando o método das multiquádricas, as equações de equilíbrio são interpoladas em cada nó,

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (A_{12} + A_{33}) \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} \right) \right] = -I_0\omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} g - I_1\omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} g \end{aligned} \quad (9.17)$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (A_{33} + A_{12}) \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{33} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{A_{12}}{R_1} + \frac{A_{22}}{R_2} \right) \right] = -I_0\omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} g - I_1\omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} g \end{aligned} \quad (9.18)$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{A_{12}}{R_2} + \frac{A_{11}}{R_1} \right) \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[-\frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{A_{22}}{R_2} + \frac{A_{12}}{R_1} \right) \right] \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[g \left(-2\frac{A_{12}}{R_1 R_2} - \frac{A_{22}}{R_2^2} - \frac{A_{11}}{R_1^2} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} A_{55} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} A_{44} \right] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \frac{\partial g}{\partial x} A_{55} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \frac{\partial g}{\partial y} A_{44} = -I_0 \omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} g \quad (9.19)$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} A_{55} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left(-g A_{55} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} D_{11} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} D_{33} \right) \\ & + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (D_{12} + D_{33}) = -I_1 \omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} g - I_2 \omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} g \end{aligned} \quad (9.20)$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \frac{\partial g}{\partial y} A_{44} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} D_{33} D_{12} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left(-g A_{44} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} D_{33} \right) = \\ & - I_1 \omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} g - I_2 \omega^2 \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} g \end{aligned} \quad (9.21)$$

A interpolação das condições de fronteira têm um procedimento semelhante à interpolação das equações de equilíbrio. Por exemplo, a condição de bordo simplesmente apoiado é da forma,

$$w(x=a) = 0$$

$$u(x=a) = 0$$

$$\phi_x(x=a) = 0$$

$$M_x(x=a) = 0$$

$$N_x(x=a) = 0$$

e pode ser interpolada por funções de base radial por,

$$\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} g_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} g_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} g_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \frac{\partial g_j}{\partial x} D_{11} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \frac{\partial g_j}{\partial y} D_{12} = 0$$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} A_{11} \frac{\partial g_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} A_{12} \frac{\partial g_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[g_j \left(\frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} \right) \right] = 0$$

9.3 Teoria de deformação de corte de terceira ordem de Donnell-Reddy

As equações de equilíbrio (5.174) podem ser expressas em função dos deslocamentos u_0 , v_0 , w_0 e rotações ϕ_x , ϕ_y .

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \\ & = I_0 \ddot{u}_0 + J_1 \ddot{\phi}_1 - c_1 I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (9.22)$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{A_{12}}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& = I_0 \ddot{v}_0 + J_1 \ddot{\phi}_2 - c_1 I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{9.23}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \frac{32}{9h^4} H_{66} \left(-\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} - 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{11} \left(-\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} \right) \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left(-\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} - \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{16}{h^4} F_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} \left(-\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} - 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + \frac{8}{h^2} D_{55} \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\
& + \frac{8}{h^2} D_{44} \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{16}{h^4} F_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\
& + \frac{8}{3h^2} F_{66} \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\
& + A_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + A_{12} \left(-\frac{2}{R_1 R_2} w_0 - \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\
& + \frac{A_{22}}{R_2} \left(-\frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} w_0 \right) + \frac{A_{11}}{R_1} \left(-\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{R_1} w_0 \right) \\
& = I_0 \ddot{w}_0 - c_1^2 I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x_2^2} \right) + c_1 \left[I_3 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x_1} + I_3 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial x_2} + J_4 \left(\frac{\partial \ddot{\phi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \ddot{\phi}_2}{\partial x_2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{9.24}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\frac{16}{9h^4} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{3h^2} F_{11} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{11} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
& + A_{55} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{66} \left(-\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) + \frac{8}{h^2} D_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{16}{h^4} F_{55} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \right) = J_1 \ddot{u}_0 + K_2 \ddot{\phi}_1 - c_1 J_4 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x_1}
\end{aligned} \tag{9.25}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \frac{8}{h^2} D_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) + A_{44} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \right) + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{22} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) \\
& + \frac{8}{3h^2} F_{66} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\
& + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{16}{h^4} F_{44} \left(-\phi_y - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \\
& = J_1 \ddot{v}_0 + K_2 \ddot{\phi}_2 - c_1 J_4 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{9.26}$$

9.3.1 Análise das vibrações livres

Na análise de vibrações livres, supõe-se uma uma solução harmónica em termos dos deslocamentos e rotações $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ da forma,

$$u_0(x, y, t) = u_0(w, y)e^{i\omega t} \quad (9.27)$$

$$v_0(x, y, t) = v_0(w, y)e^{i\omega t} \quad (9.28)$$

$$w_0(x, y, t) = w_0(w, y)e^{i\omega t} \quad (9.29)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \phi_x(w, y)e^{i\omega t} \quad (9.30)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \phi_y(w, y)e^{i\omega t} \quad (9.31)$$

onde ω é a frequência na vibração natural.

1ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \\ & = -\omega^2 \left[I_0 u_0 + J_1 \phi_1 - c_1 I_3 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right] \end{aligned} \quad (9.32)$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{A_{12}}{R_1} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & = -\omega^2 \left[I_0 v_0 + J_1 \phi_2 - c_1 I_3 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (9.33)$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \frac{32}{9h^4} H_{66} \left(-\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} - 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{11} \left(-\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} \right) \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{11} \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left(-\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} - \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{16}{h^4} F_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{12} \left(-\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} - 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + \frac{8}{h^2} D_{55} \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\
& + \frac{8}{h^2} D_{44} \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{16}{h^4} F_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\
& + \frac{8}{3h^2} F_{66} \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y^2 \partial x} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\
& + A_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + A_{12} \left(-\frac{2}{R_1 R_2} w_0 - \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\
& + \frac{A_{22}}{R_2} \left(-\frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{1}{R_2} w_0 \right) + \frac{A_{11}}{R_1} \left(-\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{R_1} w_0 \right) \\
& = -\omega^2 \left[I_0 w_0 - c_1^2 I_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} \right) + c_1 \left[I_3 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + I_3 \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + J_4 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) \right] \right] \\
\end{aligned} \tag{9.34}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \frac{16}{9h^4} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) - \frac{4}{3h^2} F_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{11} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{11} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
& + A_{55} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{3h^2} F_{66} \left(-\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) + \frac{8}{h^2} D_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{16}{h^4} F_{55} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \right) = -\omega^2 \left[J_1 u_0 + K_2 \phi_1 - c_1 J_4 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right] \quad (9.35)
\end{aligned}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \frac{8}{h^2} D_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) + A_{44} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \right) + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
& + \frac{4}{3h^2} F_{22} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{3h^2} F_{12} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) \\
& + \frac{8}{3h^2} F_{66} \left(-\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\
& + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{16}{h^4} F_{44} \left(-\phi_y - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + \frac{16}{9h^4} H_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \\
& = -\omega^2 \left[J_1 v_0 + K_2 \phi_2 - c_1 J_4 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right] \quad (9.36)
\end{aligned}$$

As equações de equilíbrio podem ser então discretizado por multiquádricas,

9.3.2 Interpolação das equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio podem ser interpoladas da forma:

1ª equação de equilíbrio:

$$\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[A_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (A_{12} + A_{66}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} \right) \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} I_0 u_0 + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} J_1 \phi_1 - \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} c_1 I_3 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right]
\end{aligned} \tag{9.37}$$

2ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (A_{66} + A_{12}) \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[A_{66} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{A_{12}}{R_1} + \frac{A_{22}}{R_2} \right) \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{v_0} I_0 v_0 + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} J_1 \phi_2 - \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} c_1 I_3 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right]
\end{aligned} \tag{9.38}$$

3ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{A_{12}}{R_2} + \frac{A_{11}}{R_1} \right) \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} \left[-\frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{A_{22}}{R_2} + \frac{A_{12}}{R_1} \right) \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[g \left(-2 \frac{A_{12}}{R_1 R_2} - \frac{A_{22}}{R_2^2} - \frac{A_{11}}{R_1^2} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(+ \frac{16}{h^4} F_{55} - \frac{8}{h^2} D_{55} + A_{55} \right) \right. \\
& + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(\frac{16}{h^4} F_{44} - \frac{8}{h^2} D_{44} + A_{44} \right) - \frac{16}{9h^4} H_{11} \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} - \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} \\
& \left. - \frac{\partial^4 g}{\partial y^2 \partial x^2} \left(\frac{64}{9h^4} H_{66} + \frac{32}{9h^4} H_{12} \right) \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(A_{55} + \frac{16}{h^4} F_{55} - \frac{8}{h^2} D_{55} \right) + \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \left(\frac{4}{3h^2} F_{11} - \frac{16}{9h^4} H_{11} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \left(\frac{4}{3h^2} F_{12} - \frac{32}{9h^4} H_{66} + \frac{8}{3h^2} F_{66} - \frac{16}{9h^4} H_{12} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[\frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{16}{h^4} F_{44} - \frac{8}{h^2} D_{44} + A_{44} \right) + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \left(\frac{4}{3h^2} F_{22} - \frac{16}{9h^4} H_{22} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{8}{3h^2} F_{66} + \frac{4}{3h^2} F_{12} - \frac{32}{9h^4} H_{66} - \frac{16}{9h^4} H_{12} \right) \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[I_0 w_0 - c_1^2 I_6 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} \right) \right] + \sum_{j=1}^N a_j^{u_0} c_1 I_3 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^N a_j^{v_0} c_1 I_3 \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} c_1 J_4 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} c_1 J_4 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right] \quad (9.39)
\end{aligned}$$

4ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{8}{h^2} D_{55} - \frac{16}{h^4} F_{55} - A_{55} \right) + \frac{16}{9h^4} H_{22} \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \left(\frac{16}{9h^4} H_{11} - \frac{4}{3h^2} F_{11} \right) + \frac{\partial^3 g}{\partial y^2 \partial x} \left(\frac{16}{9h^4} H_{12} - \frac{4}{3h^2} F_{12} - \frac{8}{3h^2} F_{66} \right) \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[g \left(\frac{8}{h^2} D_{55} - A_{55} - \frac{16}{h^4} F_{55} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(D_{11} - \frac{8}{3h^2} F_{11} + \frac{16}{9h^4} H_{11} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(D_{66} - \frac{4}{3h^2} F_{66} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \left(\frac{16}{9h^4} H_{12} - \frac{4}{3h^2} F_{12} \right) \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(\frac{16}{9h^4} H_{22} - \frac{4}{3h^2} F_{22} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \left(D_{12} - \frac{8}{3h^2} F_{12} - \frac{4}{3h^2} F_{66} + D_{66} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \right) \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{u_0} J_1 u_0 + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} K_2 \phi_1 - \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} c_1 J_4 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right] \quad (9.40)
\end{aligned}$$

5ª equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} \left[\frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{8}{h^2} D_{44} - A_{44} - \frac{16}{h^4} F_{44} \right) + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \left(\frac{16}{9h^4} H_{22} - \frac{4}{3h^2} F_{22} \right) \right. \\
& + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{16}{9h^4} H_{12} + \frac{32}{9h^4} H_{66} - \frac{8}{3h^2} F_{66} - \frac{4}{3h^2} F_{12} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_x} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \left(D_{66} D_{12} - \frac{8}{3h^2} F_{66} - \frac{8}{3h^2} F_{12} + \frac{16}{9h^4} H_{66} + \frac{16}{9h^4} H_{12} \right) \right] \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} \left[g \left(\frac{8}{h^2} D_{44} - A_{44} - \frac{16}{h^4} F_{44} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(D_{66} - \frac{8}{3h^2} F_{66} + \frac{16}{9h^4} H_{66} \right) \right. \\
& + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(D_{22} - \frac{8}{3h^2} F_{22} + \frac{16}{9h^4} H_{22} \right) \left. \right] \\
& = -\omega^2 \left[\sum_{j=1}^N a_j^{v_0} J_1 v_0 + \sum_{j=1}^N a_j^{\phi_y} K_2 \phi_2 - \sum_{j=1}^N a_j^{w_0} c_1 J_4 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right] \tag{9.41}
\end{aligned}$$

9.4 Exemplos numéricos

Para o estudo das vibrações livres de cascas laminadas, foram escolhidos analisar os seguintes exemplos:

- cascas esféricas de laminados cruzados
- cascas cilíndricas de laminados cruzados

9.4.1 Vibrações livres de cascas esféricas de laminados cruzados [0°/90°/90°/0°], [0°/90°/0°] e [0°/90°]

As propriedades materiais para cada lâmina são:

$$E_1 = 25.0E_2; \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; \quad G_{23} = 0.2E_2; \quad \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25;$$

e os resultados numéricos obtidos são adimensionalizados da forma:

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}$$

Os resultados para a teoria de Donnell são apresentados nas tabelas 9.1, 9.2 e 9.3, adimensionalizados por $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}$. São considerados vários quocientes R/a . A aproximação à placa é feita considerando $R_1 = R_2 = 10^9$. Para analisar placas finas e espessas, foi escolhido $a/h = 10$ e $a/h = 100$. A solução é comparada com soluções de primeira e de terceira ordem [Reddy e Liu, 1985]. A figura 9.1 mostra as 25 primeiras frequências (representação por isocurvas de deslocamentos transversais) e os respectivos modos de vibração transversais.

As tabelas 9.1, 9.2 e 9.3 mostram a frequência fundamental de uma casca $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$, respectivamente.

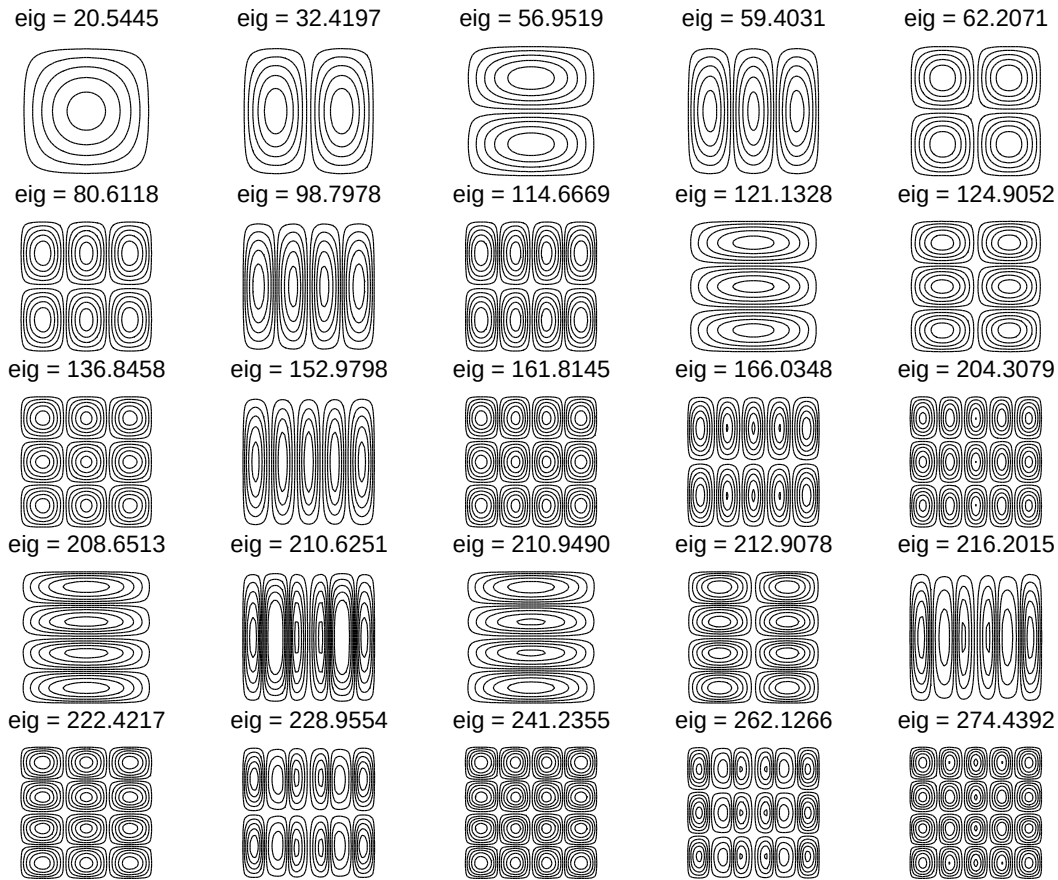


Figura 9.1: Teoria de Donnell. Modos de vibração para uma casca esférica $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $n = 11$, $R/a = 10$, $a/h = 100$

No caso da teoria de Donnell-Reddy o parâmetro de forma usado foi de $c = 2/\sqrt{n}$. Os

Tabela 9.1: Teoria de Donnell. Frequência fundamental para uma casca laminada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $c = 2/\sqrt{n}$

a/h		Método	R/a					
			5	10	20	50	100	10^9
10	presente (N=7) [Ferreira et al., 2007]		12.789	12.500	12.426	12.405	12.402	12.402
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2007]		12.614	12.379	12.319	12.302	12.300	12.299
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2007]		12.546	12.333	12.279	12.264	12.262	12.261
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2007]		12.516	12.314	12.262	12.248	12.246	12.245
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2007]		12.500	12.304	12.254	12.240	12.238	12.237
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2007]		12.493	12.299	12.250	12.236	12.234	12.233
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]		12.437	12.280	12.240	12.229	12.228	12.226
100	presente (n=7) [Ferreira et al., 2007]		35.165	20.564	14.709	12.582	12.247	12.134
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2007]		33.078	20.639	16.046	14.498	14.263	14.184
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2007]		32.122	20.545	16.389	15.018	14.812	14.743
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2007]		31.659	20.480	16.515	15.219	15.024	14.959
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2007]		31.423	20.443	16.571	15.311	15.125	15.059
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2007]		31.296	20.422	16.601	15.363	15.173	15.110
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]		31.079	20.380	16.638	15.426	15.245	15.184

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de Donnell

Tabela 9.2: Teoria de Donnell. Frequência fundamental para uma casca laminada, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $c = 2/\sqrt{n}$

a/h		Método	R/a					
			5	10	20	50	100	10^9
10	presente (N=7)		12.723	12.431	12.357	12.336	12.333	12.332
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2007]		12.548	12.312	12.252	12.235	12.233	12.232
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2007]		12.481	12.268	12.214	12.199	12.197	12.196
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2007]		12.451	12.249	12.197	12.183	12.181	12.180
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2007]		12.436	12.239	12.189	12.175	12.173	12.172
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2007]		12.428	12.234	12.185	12.171	12.169	12.169
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]		12.372	12.215	12.176	12.165	12.163	12.162
100	presente (n=7) [Ferreira et al., 2007]		35.214	20.699	14.917	12.831	12.505	12.394
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2007]		33.040	20.655	16.093	14.559	14.326	14.247
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2007]		32.059	20.534	16.404	15.043	14.839	14.770
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2007]		31.586	20.459	16.518	15.231	15.130	14.973
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2007]		31.344	20.420	16.569	15.314	15.176	15.067
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2007]		31.214	20.393	16.594	15.362	15.177	15.124
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]		30.993	20.347	16.627	15.424	15.244	15.183

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de Donnell

resultados são apresentados nas tabelas 9.4 e são de uma forma geral, satisfatórios. As dificuldades encontradas decorrer da análise dinâmica de placas não se mostraram tão agudas, quer para a teoria de primeira ordem de Donnell quer para a teoria de terceira ordem de Donnell-Reddy.

Tabela 9.3: Teoria de Donnell. Frequência fundamental para uma casca laminada $[0^\circ/90^\circ]$, com $c = 2/\sqrt{n}$

a/h	Método	R/a					
		5	10	20	50	100	10^9
10	present (n=7)[Ferreira et al., 2007]	9.5557	9.1552	9.0514	9.0220	9.0178	9.0164
	present (n=9)[Ferreira et al., 2007]	9.3927	9.0620	8.9768	8.9527	8.9493	8.9481
	present (n=11) [Ferreira et al., 2007]	9.3277	9.0266	8.9492	8.9274	8.9243	8.9232
	present (n=13)[Ferreira et al., 2007]	9.2981	9.0108	8.9371	8.9163	8.9133	8.9123
	present (n=15) [Ferreira et al., 2007]	9.2833	9.0030	8.9311	8.9108	8.9079	8.9070
	present (n=17) [Ferreira et al., 2007]	9.2755	8.9989	8.9280	8.9080	8.9051	8.9042
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.2309	8.9841	8.9212	8.9034	8.9009	8.8998
100	present (n=7)[Ferreira et al., 2007]	33.441	17.380	9.7046	5.9728	5.2256	4.9515
	present (n=9)[Ferreira et al., 2007]	31.052	17.186	11.251	8.9003	8.5114	8.3777
	present (n=11)[Ferreira et al., 2007]	29.970	16.971	11.593	9.5558	9.2280	9.1161
	present (n=13)[Ferreira et al., 2007]	29.451	16.852	11.714	9.8000	9.4951	9.3912
	present (n=15) [Ferreira et al., 2007]	29.187	16.790	11.769	9.9140	9.6184	9.5186
	present (n=17) [Ferreira et al., 2007]	29.044	16.754	11.800	9.9741	9.6836	9.5866
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	28.825	16.706	11.841	10.063	9.7826	9.6873

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de Donnell

9.4.2 Vibrações livres de cascas cilíndricas de laminados cruzados $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$

Este exemplo é idêntico ao exemplo anterior, nas características do material usado, e da adimensionalização feita. Para simular uma placa cilíndrica, o valor de R_1 foi igualado a 10^9 . Os resultados são apresentados na tabela 9.5. Na generalidade, os resultados convergem para a solução de primeira ordem de [Reddy e Liu, 1985].

Os resultados obtidos com a teoria de Donnell-Reddy, com um parâmetro de forma $c = 2/\sqrt{n}$ são apresentados nas tabelas 9.6 e 9.6 e são de uma forma geral, satisfatórios. Continuam-se a encontrar dificuldades numéricas na resolução do sistema de valores próprios, quer para a teoria de primeira ordem de Donnell quer para a teoria de terceira ordem de Donnell-Reddy.

Tabela 9.4: Teoria de Donnell-Reddy. Frequências fundamentais para uma casca esférica laminada, $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}$

a/h		Método	R/a					
			5	10	20	50	100	10^9
$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$								
10	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	12.239	11.933	11.854	11.832	11.829	11.828	
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	12.127	11.881	11.818	11.800	11.798	11.797	
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	12.085	11.862	11.806	11.790	11.787	11.787	
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	12.066	11.854	11.800	11.785	11.783	11.782	
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	12.056	11.850	11.798	11.783	11.781	11.780	
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	12.051	11.848	11.796	11.782	11.780	11.779	
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	12.040	11.840	11.790	11.780	11.780	11.780	
100	presente (n=7)	35.544	21.118	15.436	13.412	13.097	12.990	
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	33.213	20.816	16.260	14.730	14.498	14.420	
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	32.176	20.612	16.467	15.102	14.896	14.827	
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	31.681	20.506	16.545	15.250	15.055	14.990	
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	31.430	20.457	16.579	15.318	15.130	15.067	
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	31.296	20.422	16.595	15.359	15.170	15.109	
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	31.100	20.380	16.630	15.420	15.230	15.170	
$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$								
10	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	12.242	11.935	11.856	11.834	11.831	11.830	
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	12.134	11.889	11.826	11.809	11.806	11.805	
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	12.094	11.873	11.817	11.801	11.799	11.798	
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	12.076	11.867	11.813	11.798	11.796	11.795	
	presente (n=15) Ferreira et al. [2006]	12.068	11.863	11.811	11.797	11.794	11.794	
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	12.063	11.861	11.810	11.796	11.794	11.793	
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	12.060	11.860	11.810	11.790	11.790	11.790	
100	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	35.590	21.221	15.587	13.588	13.277	13.172	
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	33.177	20.828	16.297	14.778	14.548	14.471	
	presente (n=11) Ferreira et al. [2006]	32.114	20.600	16.480	15.124	14.920	14.851	
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	31.609	20.484	16.547	15.261	15.068	15.004	
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	31.353	20.425	16.578	15.326	15.139	15.077	
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	31.216	20.394	16.595	15.361	15.176	15.115	
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	31.020	20.350	16.620	15.420	15.240	15.170	
$[0^\circ/90^\circ]$								
10	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	9.5185	9.1233	9.0213	8.9926	8.9886	8.9873	
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	9.4085	9.0859	9.0031	8.9798	8.9765	8.9755	
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	9.3697	9.0754	8.9999	8.9787	8.9757	8.9747	
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	9.3536	9.0717	8.9995	8.9792	8.9763	8.9753	
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	9.3460	9.0702	8.9995	8.9796	8.9767	8.9758	
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	9.3420	9.0694	8.9995	8.9798	8.9770	8.9761	
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.3370	9.0680	8.9990	8.9800	8.9770	8.9760	
100	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	33.721	17.698	10.169	6.6587	5.9895	5.7476	
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	31.149	17.287	11.379	9.0525	8.6690	8.5372	
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	30.011	17.014	11.647	9.6176	9.2917	9.1806	
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	29.470	16.874	11.740	9.8312	9.5167	9.4196	
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	29.195	16.805	11.785	9.9302	9.6389	9.5375	
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	29.049	16,762	11,806	9,9822	9,6929	9,5905	
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	28.840	16.710	11.840	10.060	9.7840	9.6880	

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de Donnell-Reddy

Tabela 9.5: Teoria de Donnell. Frequência fundamental para uma casca cilíndrica laminada, $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}$, com $c = 2/\sqrt{n}$

R/a	Método	[0/90]		[0/90/0]		[0/90/90/0]	
		$a/h = 100$	$a/h = 10$	$a/h = 100$	$a/h = 10$	$a/h = 100$	$a/h = 10$
5	presente (n=7)[Ferreira et al., 2007]	20.1651	9.2338	24.2128	12.4881	22.7975	12.5322
	presente (n=9)[Ferreira et al., 2007]	18.4607	9.1124	22.3393	12.3305	21.6920	12.3859
	presente (n=11)[Ferreira et al., 2007]	17.6168	9.0653	21.3904	12.2705	21.0763	12.3306
	presente (n=13)[Ferreira et al., 2007]	17.1991	9.0441	20.9155	12.2440	20.7578	12.3062
	presente (n=15)[Ferreira et al., 2007]	16.9845	9.0336	20.6684	12.2309	20.5928	12.2943
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	16.668	8.9082	20.3320	12.2070	20.3610	12.2670
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	16.690	9.0230	20.3300	11.8500	20.3600	11.8300
10	presente (n=7)[Ferreira et al., 2007]	11.0328	9.0790	16.2254	12.3713	15.5364	12.4345
	presente (n=9)[Ferreira et al., 2007]	11.7604	8.9978	16.6572	12.2568	16.3974	12.3207
	presente (n=11)[Ferreira et al., 2007]	11.8363	8.9675	16.6800	12.2145	16.5597	12.2787
	presente (n=13)[Ferreira et al., 2007]	11.8418	8.9542	16.6635	12.1961	16.6043	12.2604
	presente (n=15)[Ferreira et al., 2007]	11.8403	8.9476	16.6494	12.1871	16.6203	12.2515
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	11.8310	8.8879	16.6250	12.173	16.634	12.236
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	11.8400	8.9790	16.6200	11.800	16.630	11.790
20	presente (n=7)[Ferreira et al., 2007]	6.9895	9.0359	13.4579	12.3416	13.0702	12.4097
	presente (n=9)[Ferreira et al., 2007]	9.3388	8.9647	14.8873	12.2382	14.7692	12.3042
	presente (n=11)[Ferreira et al., 2007]	9.8667	8.9386	15.2702	12.2004	15.2175	12.2656
	presente (n=13)[Ferreira et al., 2007]	10.0602	8.9272	15.4134	12.1840	15.3870	12.2488
	presente (n=15)	10.1493	8.9215	15.4777	12.1761	15.4640	12.2405
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	10.265	8.8900	15.5560	12.1660	15.5590	12.2300
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	10.2700	8.9720	15.5500	11.7900	15.5500	11.7800
50	presente (n=7)[Ferreira et al., 2007]	5.3272	9.0213	12.5703	12.3333	12.2885	12.4028
	presente (n=9)[Ferreira et al., 2007]	8.5379	8.9528	14.3517	12.2330	14.2792	12.2996
	presente (n=11)[Ferreira et al., 2007]	9.2400	8.9278	14.8510	12.1965	14.8195	12.2619
	presente (n=13)[Ferreira et al., 2007]	9.5014	8.9168	15.0444	12.1807	15.0282	12.2456
	presente (n=15)[Ferreira et al., 2007]	9.6224	8.9114	15.1331	12.1730	15.1249	12.2377
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.7816	8.8879	15.2240	12.1630	15.2450	12.2280
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.7830	8.9790	15.2400	11.7900	15.2300	11.7800
100	presente (n=7)[Ferreira et al., 2007]	5.0465	9.0184	12.4382	12.3321	12.1727	12.4018
	presente (n=9)[Ferreira et al., 2007]	8.4177	8.9501	14.2735	12.2323	14.2078	12.2989
	presente (n=11)[Ferreira et al., 2007]	9.1471	8.9252	14.7902	12.1959	14.7618	12.2614
	presente (n=13)[Ferreira et al., 2007]	9.4189	8.9143	14.9909	12.1802	14.9762	12.2451
	presente (n=15)[Ferreira et al., 2007]	9.5443	8.9090	15.0836	12.1726	15.0754	12.2373
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.7108	8.8974	15.1980	12.1630	15.1990	12.2270
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.7120	8.9750	15.1900	11.7900	15.1900	11.7800
Placa	presente (n=7)[Ferreira et al., 2007]	4.9525	9.0164	12.3938	12.3317	12.1338	12.4015
	presente (n=9)[Ferreira et al., 2007]	8.3777	8.9481	14.2473	12.2320	14.1839	12.2987
	presente (n=11)[Ferreira et al., 2007]	9.1161	8.9232	14.7698	12.1957	14.7425	12.2612
	presente (n=13)[Ferreira et al., 2007]	9.3912	8.9123	14.9730	12.1800	14.9589	12.2450
	presente (n=15)[Ferreira et al., 2007]	9.5186	8.9070	15.0670	12.1724	15.0590	12.2371
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.6873	8.8998	15.1830	12.1620	15.1840	12.2260
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.6880	8.9760	15.1700	11.7900	15.1700	11.7800

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de Donnell

Tabela 9.6: Teoria de Donnell-Reddy. Frequências fundamentais para uma casca cilíndrica cruzada, $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}$

R/a	Método	[0/90]		[0/90/0]		[0/90/90/0]	
		$a/h = 100$	$a/h = 10$	$a/h = 100$	$a/h = 10$	$a/h = 100$	$a/h = 10$
5	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	20.2936	9.1302	24.7600	11.9952	23.3888	11.9661
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	18.4646	9.0993	22.5379	11.9068	21.8946	11.8873
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	17.5967	9.0943	21.4708	11.8754	21.1533	11.8592
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	17.1762	9.0941	20.9488	11.8617	20.7891	11.8469
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	16.9639	9.0945	20.6803	11.8550	20.6023	11.8408
	presente (n=17)	16.8523	9.0949	20.5357	11.8513	20.5033	11.8376
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	16.668	8.9082	20.332	12.207	20.361	12.267
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	16.690	9.0230	20.330	11.850	20.360	11.830
10	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	11.2950	9.0109	16.8901	11.8717	16.2680	11.8626
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	11.8050	9.0053	16.8697	11.8310	16.6195	11.8196
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	11.8397	9.0084	16.7605	11.8177	16.6423	11.8050
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	11.8349	9.0112	16.6947	11.8120	16.6353	11.7986
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	11.8251	9.0129	16.6500	11.8092	16.6293	11.7954
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	11.8250	9.0139	16.6417	11.8076	16.6289	11.7937
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	11.831	8.8879	16.625	12.173	16.634	12.236
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	11.840	8.9790	16.620	11.800	16.630	11.790
20	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	7.4668	8.9872	14.1975	11.8402	13.8853	11.8364
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	9.4336	8.9824	15.1074	11.8118	15.0009	11.8025
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	9.8965	8.9850	15.3513	11.8032	15.3017	11.7913
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	10.0695	8.9874	15.4441	11.7995	15.4182	11.7865
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	10.1436	8.9888	15.4915	11.7976	15.4727	11.7840
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	10.1955	8.9895	15.5106	11.7966	15.5022	11.7827
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	10.265	8.8900	15.556	12.166	15.559	12.230
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	10.27	8.972	15.55	11.79	15.55	11.78
50	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	6.0147	8.9847	13.3418	11.8313	13.1374	11.8290
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	8.6719	8.9763	14.5747	11.8065	14.5144	11.7977
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	9.2903	8.9773	14.9324	11.7991	14.9043	11.7875
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	9.5239	8.9787	15.0764	11.7960	15.0616	11.7831
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	9.6417	8.9796	15.1422	11.7944	15.1326	11.7808
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	9.7022	8.9802	15.1789	11.7935	15.1726	11.7796
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.7816	8.8951	15.244	12.163	15.245	12.228
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.783	8.973	15.24	11.79	15.23	11.78
100	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	5.7976	8.9854	13.2148	11.8301	13.0270	11.8279
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	8.5648	8.9756	14.4969	11.8057	14.4435	11.7970
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	9.2045	8.9757	14.8716	11.7985	14.8467	11.7869
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	9.4466	8.9768	15.0216	11.7955	15.0076	11.7826
	presente (n=15) [Ferreira et al., 2006]	9.5542	8.9775	15.0932	11.7940	15.0840	11.7804
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	9.6201	8.9602	15.1306	11.7930	15.1261	11.7792
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.7108	8.8974	15.198	12.163	15.199	12.227
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.712	8.975	15.19	11.79	15.19	11.78
Placa	presente (n=7) [Ferreira et al., 2006]	5.7476	8.9873	13.1722	11.8296	12.9899	11.8276
	presente (n=9) [Ferreira et al., 2006]	8.5372	8.9755	14.4709	11.8054	14.4198	11.7968
	presente (n=11) [Ferreira et al., 2006]	9.1806	8.9747	14.8513	11.7983	14.8274	11.7867
	presente (n=13) [Ferreira et al., 2006]	9.4230	8.9753	15.0039	11.7953	14.9902	11.7824
	presente (n=15)	9.5364	8.9758	15.0737	11.7938	15.0672	11.7802
	presente (n=17) [Ferreira et al., 2006]	9.5985	8.9755	15.1157	11.7929	15.1087	11.7790
	FSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.6873	8.8998	15.183	12.162	15.184	12.226
	HSDT [Reddy e Liu, 1985]	9.6880	8.9760	15.170	11.790	15.170	11.780

presente- resultado obtido com o método rbf e teoria de Donnell-Reddy

9.5 Comparação das diferentes teorias de deformação na análise dinâmica de cascas laminadas

As figuras seguintes mostram os resultados obtidos para o exemplo da casca esférica, com $n = 17$. Os resultados numéricos obtidos são concordantes com as soluções analíticas de [Reddy e Liu, 1985].

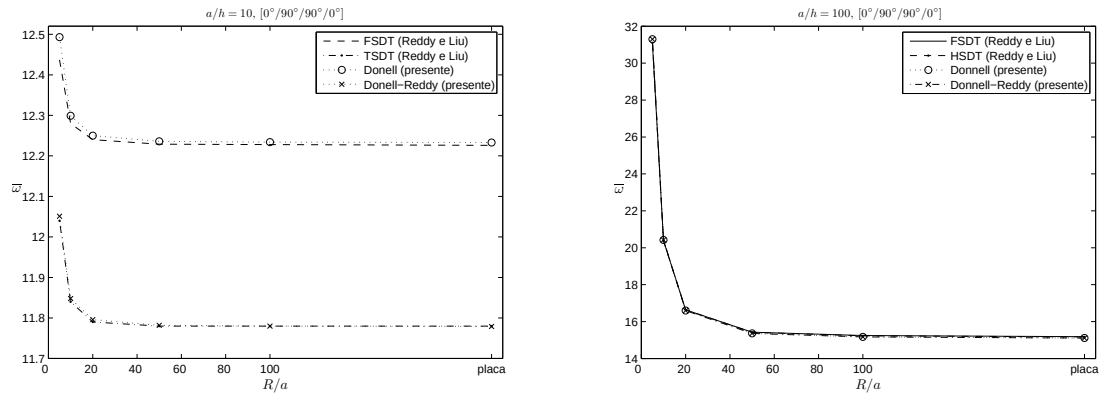


Figura 9.2: Casca esférica $[0/90/90/0]$; $a/h = 10$ (esquerda); $a/h = 100$ (direita)

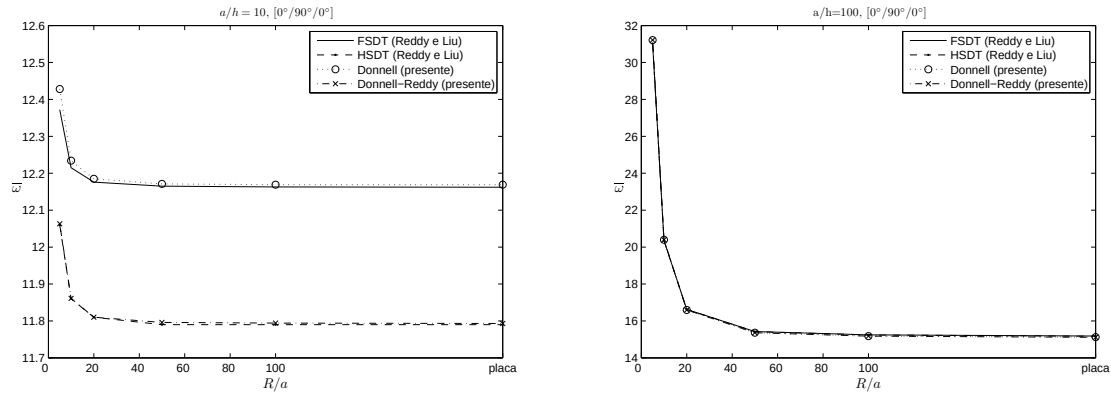


Figura 9.3: Casca esférica $[0/90/0]$; $a/h = 10$ (esquerda); $a/h = 100$ (direita)

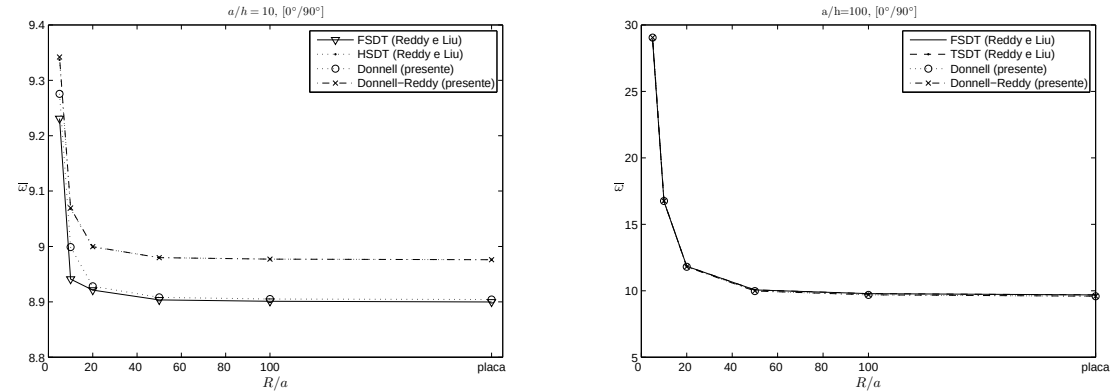


Figura 9.4: Casca esférica $[0/90]$; $a/h = 10$ (esquerda); $a/h = 100$ (direita)

As figuras seguintes mostram os resultados obtidos para o exemplo da casca cilíndrica, com $n = 13$. De forma geral os resultados são concordantes com as soluções analíticas de [Reddy e Liu, 1985]. No caso do laminado $[0^\circ/90^\circ]$, existe alguma discrepância entre os resultados numéricos, principalmente entre as teorias FSDT e Donnell. No caso da figura 9.7, as teorias de Donnell-Reddy e TSDT não são concordantes para $a/h = 20$. Trata-se de uma caso particular em que os resultados não convergem, como pode ser visto na tabela 9.6.

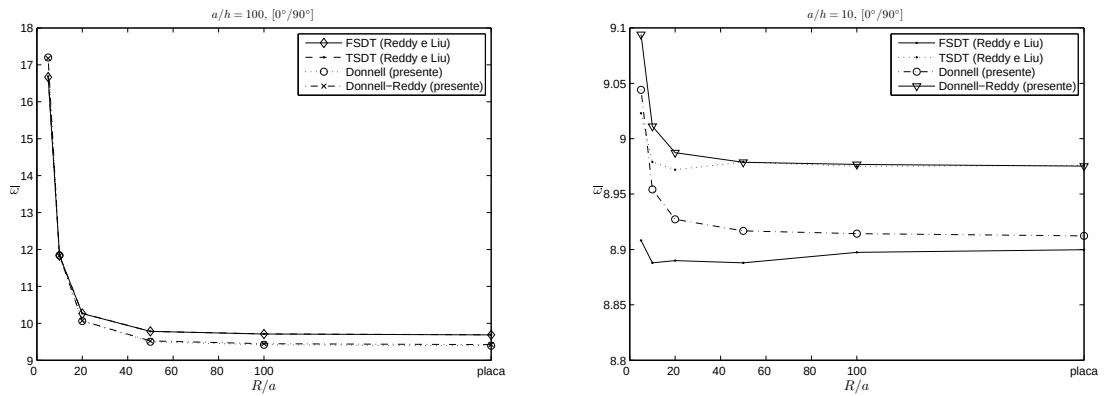


Figura 9.5: Casca cilíndrica $[0/90]$; $a/h = 100$ (esquerda); $a/h = 10$ (direita)

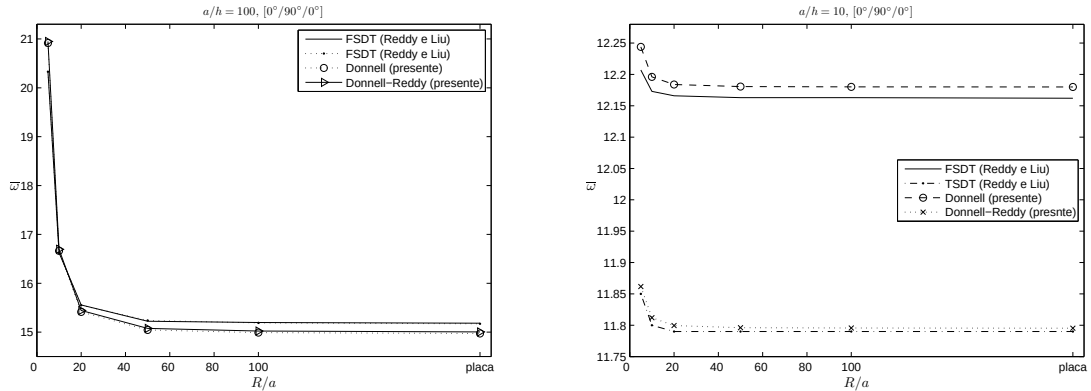


Figura 9.6: Casca cilíndrica $[0/90/0]$; $a/h = 100$ (esquerda); $a/h = 10$ (direita)

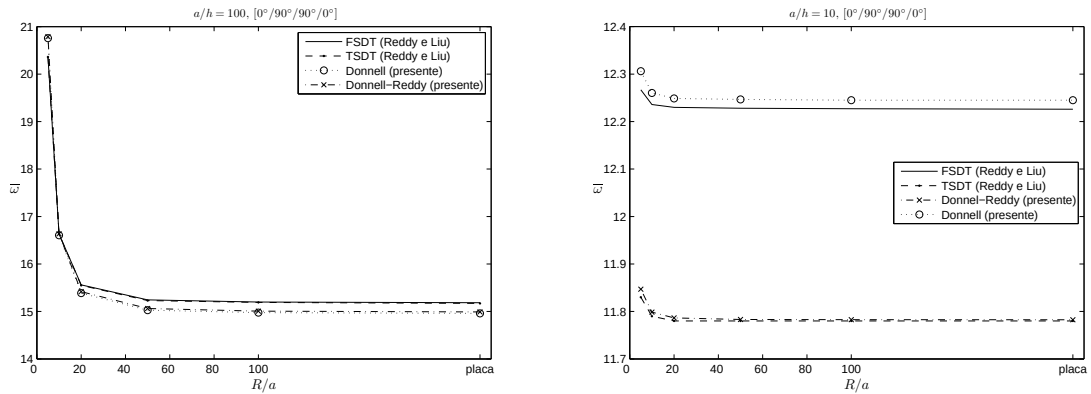


Figura 9.7: Casca cilíndrica $[0/90/90/0]$; $a/h = 100$ (esquerda); $a/h = 10$ (direita)

9.6 Resumo e conclusões

Neste capítulo é feita uma análise do problema das vibrações livres para cascas laminadas. A escassez de literatura disponível para comparação dos resultados limita os exemplos a modelar que são:

- cascas esféricas com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$
- cascas cilíndricas com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$

Conclui-se que a teoria de Donnel é adequada à análise dinâmica de cascas laminadas finas, mas quando se trata de placas espessas, a teoria de deformação de Donnell-Reddy produz resultados mais correctos. Em ambas as teorias de deformação utilizadas observam-se problemas na resolução do problema de valores próprios. A resolução deste problema pode passar por estratégias propostas anteriormente, numa tentativa de reduzir o mau condicionamento da matriz dos coeficientes: escolha de um parâmetro de forma mais adequado, implementação de um pré-condicionador, fazer uma decomposição do domínio.

Referências

- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2006). Static and free vibration analysis of composite shells by radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(9):719–733.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2007). Natural frequencies of fsdt cross-ply composite shells by multiquadrics. *Composite Structures*, 77(3):296–305.
- Reddy, J. N. e Liu, C. F. (1985). Higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 23(3):319–330.

Uma escolha otimizada do parâmetro de forma, c

10.1 Introdução

Um dos principais problemas do método de colocação de Kansa é o de seleccionar o parâmetro de forma presente na função interpoladora de base radial, por exemplo a multiquádrica, $g = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c_j^2}$ em $\mathbb{R}^2$, onde c_j representa o parâmetro de forma. Habitualmente, este parâmetro é seleccionado com base na tentativa/erro, o que representa uma menos valia para este método. Tem-se escolhido, ao longo desta tese, um parâmetro de forma $c = 2/\sqrt{n}$ para análise estática e por vezes $c = 6/(n - 1)$ para vibrações livres, sendo n o número de nós numa dada direcção.

Neste capítulo mostra-se que é possível melhorar os resultados, por selecção automática deste parâmetro de forma, recorrendo a um método de validação cruzada leave-one-out (cross-validation leave-one-out (cv-loo)). Uma vez que esta é uma técnica estatística computacionalmente exigente, foi usado um algoritmo rápido da autoria de Rippa [1999].

O critério da validação cruzada leave-one-out foi primeiro apresentado por Allen [1974].

Figura 10.1: Amostra original. Sabendo a solução f_i no ponto i do sistema $Aa(i) = f(i)$, a técnica de validação cruzada leave-one-out (cv-loo) avalia a qualidade de um interpolante no ponto i , usando elementos de teste.

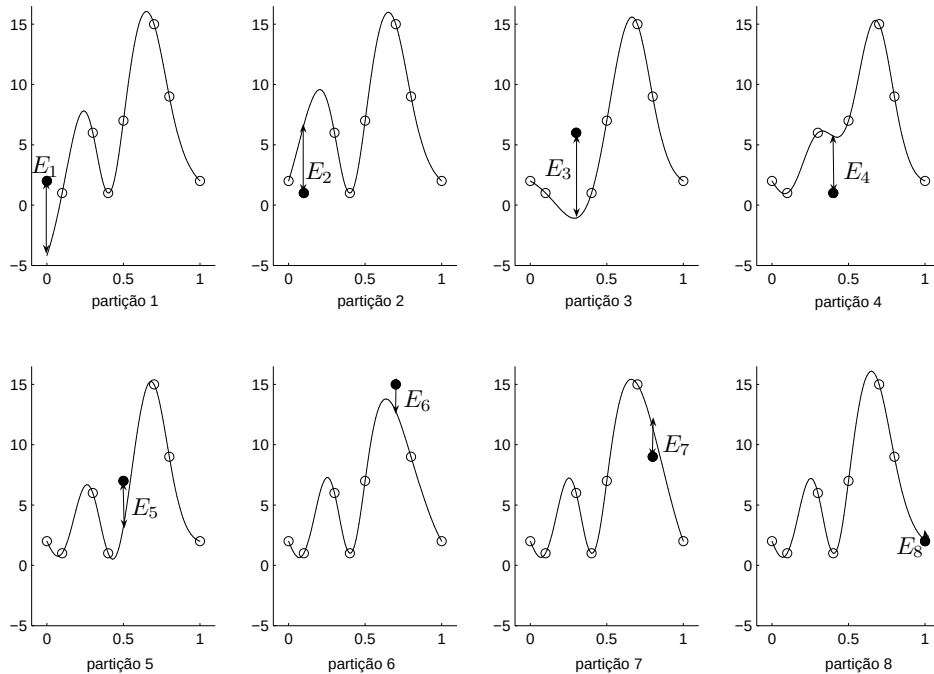
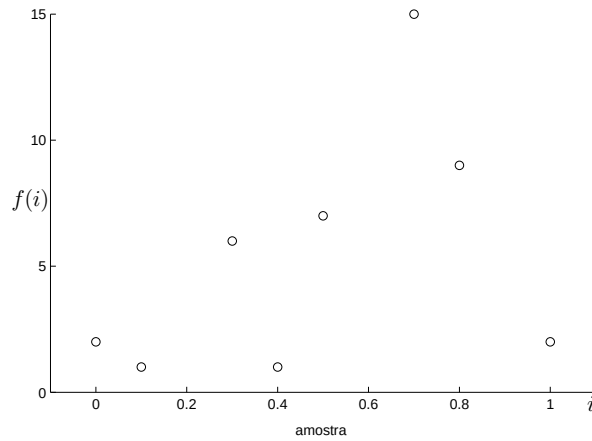


Figura 10.2: Treino das partições para interpolação usando a função multiquádrica, com $c = 0.1809$. $\circ$ -elementos de treino da partição k ; $\bullet$ -elemento de teste para a partição k . Para $c = 0.1809$, o erro associado será $E_t = \|(E_1, E_2, \dots, E_8)\|$. Percorrendo um dado intervalo de c , é possível escolher um valor de $c_{\text{ótimo}}$ que minimiza E_t .

Consiste em dividir uma amostra de dimensão N em N partições de dimensão $N-1$. As N novas partições são construídas retirando consecutivamente um elemento à amostra original. A cada partição chama-se conjunto de aprendizagem, ou treino, e ao elemento retirado da amostra, conjunto de teste (ou neste caso, elemento de teste). Cada partição vai ser usada para treinar um modelo (por exemplo, fazer uma interpolação dos dados), e o elemento de teste vai servir para construir algum tipo de erro entre o dado observado e o dado predito $(y_i - \hat{y}_1)^2$. O procedimento é repetido até todas as partições serem

usadas, de onde resulta um conjunto de erros, com o qual será possível fazer uma média [Martinez e Martinez, 2002; Loader, 1999].

As técnicas de validação cruzada para problemas de interpolação são usadas há já algum tempo, e o seu uso para optimização do parâmetro de forma de funções de base radial não é uma novidade. Em [Rippa, 1999], Rippa usa um algoritmo de validação cruzada leave-one-out (cv-loo) rápido para otimizar o parâmetro de forma, c do interpolante de base radial, a função multiquádrica. Para um dado problema de interpolação, $A\alpha = f$, $A_{ij} = g(\|x_i - x_j\|, c)$, onde g é uma função de base radial, Rippa conclui que a escolha do parâmetro de forma, c deve ter em conta o número e distribuição dos nós, a função g usada para a interpolação, o número de condicionamento da matriz A , e a precisão da computação. Em [Wang, 2004], é proposto uma alternativa ao algoritmo de Rippa, também baseado num esquema cv-loo. No domínio das equações diferenciais, o problema coloca-se para um sistema de equações diferenciais $\mathcal{L}\alpha(i) = f(i)$, onde $\mathcal{L}$ é um operador linear diferencial. Cheng et al. [2003] propõem o uso de um erro residual $\delta(i) = f(i) - \mathcal{L}\alpha(i)$ como indicador de erro. Em [Cheng et al., 2003] é mostrado para alguns exemplos numéricos com solução exacta conhecida, que a minimização de $\delta(i)$ e do erro da solução, em ordem ao parâmetro de forma, são equivalentes.

10.2 Cálculo de um valor óptimo de c

Um valor óptimo do parâmetro de forma c pode ser obtido para um problema de interpolação $A\alpha = f$, $A = g(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, c\|)$, pelo método de validação cruzada leave-one-out (cv-loo). O problema pode ser definido como encontrar c , num dado intervalo, que minimize uma função de custo dada pela norma de um vector erro $E(c)$ com componentes

$$E_i(c) = f_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_j^{(i)} g(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, c\|) \quad (10.1)$$

A expressão $\sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j^{(i)} g(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, c\|)$ representa o valor predito no ponto i usando o interpolante de função de base radial, baseado na partição k e o elemento de teste para a partição k .

De um ponto de vista computacional, o método da validação cruzada leave-one-out tem um custo computacional elevado. No entanto, Rippa desenvolveu um algoritmo rápido e eficaz. Segundo Rippa, os componentes do vector erro podem ser calculados por:

$$E_i(c) = \frac{\alpha_i}{A_{i,i}^{-1}} \quad (10.2)$$

onde α_i é o coeficiente i do problema de interpolação e $A_{i,i}^{-1}$ é o elemento i da diagonal da inversa da matriz de interpolação, A . Rippa testou várias normas, e conclui que a norma ℓ_1 do vector erro dá origem a melhores valores de c . Os resultados apresentados neste capítulo são obtidos usando a norma ℓ_1 .

Os métodos mencionados acima usam uma técnica de interpolação que depende de valores dados pela função f . No entanto, no problema de fronteira de deformação de placas e cascas, existe um conjunto de equações diferenciais no domínio, e um conjunto de condições de fronteira nos bordos da placa. Uma vez que os únicos dados do problema são as condições de fronteira, optou-se por usar um erro residual,

$$E_i(c) = \lambda_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j^{(i)} \mathcal{L}g(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, c\|) \quad (10.3)$$

Para um problema do tipo:

$$\begin{bmatrix} B\mathbf{g} \\ L\mathbf{g} \end{bmatrix} [\alpha] = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Xi \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

or

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} \end{bmatrix} [\alpha] = \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

pode-se generalizar o algoritmo de validação cruzada leave-one-out de Rippa como:

$$E_i(c) = \frac{\alpha_i}{\mathcal{L}_{i,i}^{-1}} \quad (10.6)$$

onde α_i é o coeficiente i do problema de colocação total (10.5) e $\mathcal{L}_{i,i}^{-1}$ é o elemento da diagonal do inverso da matriz $\mathcal{L}$. Tendo obtido a função de custo, pode-se usar a função de MATLAB `fminbnd` para encontrara um mínimo local.

10.3 Exemplos numéricos

Neste capítulo analisam-se placas e cascas laminadas compósitas, usando uma otimização do parâmetro de forma, c , recorrendo a um método de validação cruzada. O intervalo utilizado para procurar o parâmetro de forma otimizado é $c \in [0.1, 1]$. Consideram-se placas de material com gradiente funcional de propriedades e cascas de dupla curvatura, na perspectiva da teoria de deformação de corte de placa e casca de terceira ordem de Reddy.

10.3.1 Placa de material com gradiente funcional de propriedades com teoria de deformação de corte de terceira ordem de Reddy

São apresentados resultados para placas de material com gradiente funcional de propriedades quadrada simplesmente apoiada

As propriedades materiais das placas, FGM1 e FGM2 são apresentadas em baixo:

$$\text{FGM1: } E_1 = 70 \text{ GPa; } \quad \nu_1 = 0.3; \quad E_2 = 151 \text{ GPa; } \quad \nu_2 = 0.3$$

$$\text{FGM2: } E_1 = 70 \text{ GPa; } \quad \nu_1 = 0.3; \quad E_2 = 427 \text{ GPa; } \quad \nu_2 = 0.17$$

Tabela 10.1: Comparação da deflexão central $\bar{w}$, para uma placa simplesmente apoiada FGM1, com $a/h = 20$

Expoente p	Deflexão central, $\bar{w}$				
	$c = 2/\sqrt{N_a}; N_a = 11$	código MLPG de	c , ótimo, presente [Ferreira et al., a]		
	[Ferreira et al., 2005]	[Qian et al., 2004]	9×9	11×11	15×15
0	0.02050	0.02118	0.0200	0.0204	0.0207
0.5	0.02760	-	0.0268	0.0274	0.0270
1.0	0.03050	0.03150	0.0297	0.0305	0.0308
2.0	0.03300	0.03395	0.0321	0.0328	0.0338
metal	0.04430	0.04580	0.0432	0.0442	0.0447

presente- resultado obtido com o método rbf, com otimização de c e teoria TSDT

Tabela 10.2: Comparação da deflexão central $\bar{w}$, para uma placa simplesmente apoiada FGM1, e FGM2, para $a/h = 5$

Expoente p	Deflexão central, $\bar{w}$				
	$c = 2/\sqrt{n}; n = 15$	código MLPG de	c , ótimo, presente [Ferreira et al., a]		
	[Ferreira et al., 2005]	[Qian et al., 2004]	$n = 9$	$n = 11$	$n = 15$
(a) FGM1					
0.0	0.02477	0.02436	0.0243	0.0247	0.0248
0.5	0.03293	-	0.0323	0.0328	0.0330
1.0	0.03666	0.03634	0.0360	0.0365	0.0368
2.0	0.04009	0.03976	0.0394	0.0400	0.0402
metal	0.05343	0.05253	0.0524	0.0531	0.0536
(b) FGM2					
0.0	0.00909	0.00902	0.00891	0.00905	0.00901
0.5	0.01871	-	0.01835	0.01858	0.01876
1.0	0.02381	0.02391	0.02336	0.02370	0.02387
2.0	0.02903	0.02918	0.02847	0.02892	0.02910
metal	0.05343	0.05253	0.05245	0.05313	0.05358

presente- resultado obtido com o método rbf, com otimização de c e teoria TSDT

Nas tabelas apresentadas, o deslocamento w , a tensão σ_{xx} , a coordenada da espessura z e a carga q aplicada sobre a placa são normalizadas por:

$$\bar{w} = w/h; \quad \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}/q; \quad \bar{q} = q/E_1 h^4; \quad \bar{z} = z/h;$$

Tabela 10.3: Comparação da deflexão central $\bar{w}$, para uma placa simplesmente apoiada FGM1

a/h	MLPG, n=8 [Qian et al., 2004]				$c = 2/\sqrt{n}$; $n = 15$ [Ferreira et al., 2005]				presente, c ótimo; $n = 15$ [Ferreira et al., a]			
	$p = 0$	$p = 1.0$	$p = 2.0$	metal	$p = 0$	$p = 1.0$	$p = 2.0$	metal	$p = 0$	$p = 1.0$	$p = 2.0$	metal
5	0.02436	0.03634	0.03976	0.05252	0.02476	0.03666	0.04009	0.05342	0.02469	0.03651	0.03998	0.05313
15	0.02115	0.03152	0.03401	0.04583	0.02090	0.03103	0.03354	0.04510	0.02069	0.03075	0.03323	0.04479
25	0.02123	0.03158	0.03404	0.04569	0.02062	0.03061	0.03305	0.04448	0.02030	0.03013	0.03267	0.04388
45	0.02158	0.03203	0.03456	0.04655	0.02057	0.03054	0.03295	0.04437	0.02007	0.02993	0.03293	0.04351
75	0.02190	0.03252	0.03501	0.04728	0.02062	0.03061	0.03302	0.04448	0.01981	0.02938	0.03173	0.04292
125	0.02225	0.03304	0.03562	0.04802	0.02069	0.03072	0.03314	0.04464	0.01959	0.02922	0.03144	0.04270

presente- resultado obtido com o método rbf, com otimização de c e teoria TSDT**Tabela 10.4:** Comparação de da tensão σ_{xx} nos topos de uma placa quadrada simplesmente apoiada, FGM1

Expoente p	a/h	MLPG, $n = 8$ [Qian et al., 2004]		$c = 2/\sqrt{n}$; $n = 15$ [Ferreira et al., 2005]		c ótimo; $n = 15$ [Ferreira et al., a]	
		$\sigma_{xx}(-h/2)$	$\sigma_{xx}(h/2)$	$\sigma_{xx}(-h/2)$	$\sigma_{xx}(h/2)$	$\sigma_{xx}(-h/2)$	$\sigma_{xx}(h/2)$
0 (ceramic)	20	0.29175	-0.29200	0.28650	-0.28650	0.28648	-0.28648
1	20	0.22617	-0.37875	0.17815	-0.38428	0.22232	-0.37186
2	20	0.24497	-0.40650	0.21278	-0.45899	0.24111	-0.39955
∞ (metal)	20	0.29175	-0.29200	0.28650	-0.28650	0.28648	-0.28648
1	5	0.22540	-0.38812	0.20232	-0.43643	0.22788	-0.38349
1	10	0.22420	-0.37760	0.19812	-0.42737	0.22362	-0.37447
1	15	0.22502	-0.37742	0.19738	-0.42577	0.22255	-0.37236
1	20	0.22617	-0.37875	0.19719	-0.42537	0.22232	-0.37186
1	200	0.23310	-0.38980	0.19841	-0.42800	0.22058	-0.36882

presente- resultado obtido com o método rbf, com otimização de c e teoria TSDT

10.3.2 Casca compósita com teoria de corte de terceira ordem de Donnell-Reddy

Nesta secção são repetidos os exemplos da secção 8.2. Os resultados são apresentados na tabelas 10.5, 10.6, 10.7, 10.8 e são comparados com uma solução com multiquádrica apresentada anteriormente, com $c = 2/\sqrt{n}$. Os resultados obtidos são geralmente ligeiramente melhores que os resultados obtidos com $c = 2/\sqrt{n}$, mas não de forma significativa.

Tabela 10.5: Deflexão, $\bar{w}$ e tensões $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{zx}, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ para uma casca $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $R/a = 10^9$, com carregamento sinusoidal.

$\frac{a}{h}$	Method	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{xy}$
		(a/2,a/2,h/2)	(a/2,a/2,h/4)	(0,a/2,0)	(0,0,-h/2)	
4	elasticidade [Pagano, 1970]	1.954	0.720	0.666	0.270	0.0467
	MQ, Donnell-Reddy, $c = 2/\sqrt{n}, n = 21$ [Ferreira et al., 2006]	1.8900	0.6599	0.6312	0.2128	0.0466
	presente, $n = 11$	1.8932	0.6649	0.6318	0.2117	0.0440
	presente, $n = 15$	1.8939	0.6651	0.6323	0.2127	0.0441
	presente, $n = 21$	1.8931	0.6651	0.6320	0.2111	0.0440
10	elasticidade [Pagano, 1970]	0.743	0.559	0.403	0.301	0.0276
	MQ, Donnell-Reddy, $c = 2/\sqrt{n}, n=21$ [Ferreira et al., 2006]	0.7121	0.5411	0.3874	0.2921	0.0272
	presente $n = 11$	0.7144	0.5451	0.3886	0.2926	0.0267
	presente $n = 15$	0.7147	0.5455	0.3888	0.2945	0.0266
	presente $n = 21$	0.7147	0.5456	0.3888	0.2947	0.0268
20	elasticidade [Pagano, 1970]	0.517	0.543	0.309	0.328	0.0230
	MQ, Donnell-Reddy, $c = 2/\sqrt{n}, n=21$ [Ferreira et al., 2006]	0.5032	0.5354	0.3026	0.3262	0.0228
	presente $n = 11$	0.5054	0.5387	0.3040	0.3161	0.0228
	presente $n = 15$	0.5060	0.5392	0.3043	0.3196	0.0228
	presente $n = 21$	0.5060	0.5393	0.3043	0.3201	0.0228
100	elasticidade [Pagano, 1970]	0.4347	0.539	0.271	0.339	0.0214
	MQ, Donnell-Reddy, $c = 2/\sqrt{n}, n=21$ [Ferreira et al., 2006]	0.4327	0.5364	0.2694	0.3454	0.0213
	presente $n = 11$	0.4362	0.5408	0.2711	0.3308	0.0215
	presente $n = 15$	0.4344	0.5388	0.2708	0.3299	0.0214
	presente $n = 21$	0.4347	0.5391	0.2710	0.3391	0.0213

presente- resultado obtido com o método rbf, com optimização de c e teoria de Donnell-Reddy

Tabela 10.6: Deflexão central, $\bar{w} = w \frac{10^2 E_2 h^3}{P_0 a^4}$ e tensões $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\tau}_{xz}$, para uma casca $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, com $R_1 = R_2$, $a/h = 10$

R/h	Método	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
		(a/2,a/2,-h/2)	(a/2,a/2,-h/4)	(0,0,-h/2)	(0,a/2,0)	
10	CFS	0.3229	0.1678	0.1032	0.04055	0.01824
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.3229	0.1678	0.1032	0.04055	0.01824
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]	0.3241	0.1632	0.1000	0.03947	0.01772
	FEM L2-F [Reddy, 1982]	0.2337	0.1459	0.1165	0.02184	0.01153
	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]	0.3052	0.1775	0.1117	0.04001	0.01235
	presente (11 × 11)	0.3030	0.1766	0.1104	0.0394	0.0114
	presente (15 × 15)	0.3066	0.1797	0.1124	0.0400	0.0126
	presente (21 × 21)	0.3063	0.1794	0.1122	0.0399	0.0123
20	CFS	0.5254	0.3426	0.2331	0.04295	0.03201
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.5254	0.3426	0.2330	0.04294	0.03201
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]					
	FEM L2-F [Reddy, 1982]	0.4276	0.2597	0.1994	0.02615	0.02245
	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]	0.5341	0.3582	0.2430	0.04522	0.02207
	presente (11 × 11)	0.5321	0.3578	0.2413	0.0445	0.0207
	presente (15 × 15)	0.5363	0.3618	0.2442	0.0451	0.0221
	presente (21 × 21)	0.5364	0.3619	0.2443	0.0450	0.0221
50	CFS	0.6362	0.4541	0.3216	0.03474	0.03955
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.6361	0.4540	0.3215	0.03473	0.03955
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]	0.6357	0.4427	0.3128	0.03391	0.03865
	FEM L2-F [Reddy, 1982]					
	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, [Ferreira et al., 2006]	0.6761	0.4896	0.3437	0.03840	0.02829
	presente (11 × 11)	0.6775	0.4926	0.3441	0.0379	0.0273
	presente (15 × 15)	0.6783	0.4936	0.3448	0.0379	0.0277
	presente (21 × 21)	0.6786	0.4939	0.3451	0.0380	0.0280
100	CFS	0.6559	0.4797	0.3437	0.02979	0.04090
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.6558	0.4796	0.3437	0.02978	0.04089
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]	0.6357	0.4678	0.3344	0.02909	0.03997
	FEM L2-F [Reddy, 1982]	0.5813	0.3349	0.2484	0.02000	0.03111
	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, [Ferreira et al., 2006]	0.7028	0.5214	0.3698	0.03339	0.02953
	presente (N=11)	0.7045	0.5248	0.3705	0.0329	0.0285
	presente (N=15)	0.7053	0.5259	0.3712	0.0329	0.0291
	presente (N=21)	0.7054	0.5260	0.3712	0.0329	0.0291
10 ⁹ (placa)	CFS	0.6627	0.4995	0.3589	0.02397	0.04136
	FEM Q4-R [Reddy, 1982]	0.6627	0.4954	0.3589	0.02396	0.04136
	FEM Q2-F9 [Reddy, 1982]	0.6623	0.4832	0.3492	0.02340	0.04043
	FEM L2-F [Reddy, 1982]	0.5901	0.3339	0.2454	0.01629	0.03161
	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, [Ferreira et al., 2006]	0.7121	0.5214	0.3698	0.03339	0.03005
	presente (11 × 11)	0.7115	0.5413	0.3873	0.02688	0.02981
	presente (15 × 15)	0.7053	0.5259	0.3712	0.0329	0.0291
	presente (21 × 21)	0.6786	0.4939	0.3451	0.0380	0.0280

presente- resultado obtido com o método rbf, com otimização de c e teoria de Donnell-Reddy

Tabela 10.7: Variação da deflexão central, $\bar{w} = w \frac{10^3 E_2 h^3}{P_0 a^4}$ para vários valores de nós da rede/lado, n , para diferentes quocientes R/a , com $R_1 = R_2$, com carga sinusoidal

			Método	R/a					
				5	10	20	50	100	10^9
[0°/90°/0°]	10	presente, n=9		6.7214	7.0089	7.0847	7.1063	7.1093	7.1073
	10	presente, n=13		6.7649	7.0332	7.1001	7.1205	7.1222	7.1224
	10	presente, n=17		6.7666	7.0321	7.1012	7.1210	7.1237	7.1231
	10	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		6.7396	7.0028	7.0718	7.0914	7.0942	7.0951
	10	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		6.7688	7.0325	7.1016	7.1212	7.1240	7.125
	100	presente, n=9		0.9626	2.3123	3.5652	4.2021	4.3122	4.3501
	100	presente, n=13		1.0279	2.3978	3.6125	4.2066	4.3056	4.3462
	100	presente, n=17		1.0319	2.4049	3.6163	4.2086	4.3072	4.3419
	100	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		1.0253	2.3964	3.6003	4.1897	4.2900	4.3244
	100	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		1.0321	2.4099	3.617	4.2071	4.3074	4.3420
	10	presente, n=9		6.7379	7.0286	7.1053	7.1271	7.1288	7.1292
	10	presente, n=13		6.7835	7.0524	7.1230	7.1423	7.1439	7.1455
	10	presente, n=17		6.7843	7.0532	7.1235	7.1425	7.1458	7.1472
	10	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		6.7608	7.0277	7.0978	7.1176	7.1205	7.1214
	10	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		6.7865	7.0536	7.1237	7.1436	7.1464	7.1474
[0°/90°/90°/0°]	100	presente, n=9		0.9469	2.3077	3.5642	4.2056	4.3166	4.3549
	100	presente, n=13		1.0179	2.3964	3.6086	4.2046	4.3074	4.3567
	100	presente, n=17		1.0238	2.4012	3.6128	4.2088	4.3090	4.3428
	100	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		1.0198	2.3894	3.5974	4.1908	4.2919	4.3284
	100	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		1.0264	2.4024	3.6133	4.2071	4.3082	4.3430

presente- resultado obtido com o método rbf, com otimização de c e teoria de Donnell-Reddy

Tabela 10.8: Variação da deflexão central, $\bar{w} = w \frac{10^3 E_2 h^3}{P_0 a^4}$ com o número de pontos da rede/lado, n , para diferentes quocientes R/a , com $R_1 = R_2$, com carregamento uniforme

a/h		Método	R/a					
			5	10	20	50	100	10^9
[0°/90°]								
10	presente, n=9		16.7192	18.1996	18.5568	18.6607	18.6763	19.6821
10	presente, n=13		17.3850	18.6530	18.9394	19.1248	19.0492	19.0648
10	presente, n=17		17.5368	18.7135	19.0308	19.1349	19.1426	19.1467
10	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		17.5408	18.7296	19.0518	19.1442	19.1578	19.1623
10	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		17.566	18.744	19.064	19.155	19.168	19.172
100	presente, n=9		1.5993	4.9545	10.3990	14.6955	15.6512	17.1577
100	presente, n=13		1.7194	5.3939	10.9989	15.5309	16.4144	16.8481
100	presente, n=17		1.7195	5.5010	11.2010	15.6378	16.6748	16.9382
100	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		1.7370	5.5008	11.2346	15.7221	16.6678	17.008
100	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		1.7519	5.5388	11.268	15.711	16.642	16.977
[0°/90°/0°]								
10	presente, n=9		10.0692	10.5560	10.6844	10.7209	10.7262	10.7279
10	presente, n=13		10.3006	10.7413	10.8558	10.8758	10.8920	10.8852
10	presente, n=17		10.3105	10.7799	10.8832	10.9227	10.9228	10.9212
10	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		10.339	10.765	10.876	10.908	10.913	10.914
10	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		10.332	10.752	10.862	10.893	10.898	10.899
100	presente, n=9		1.3773	3.3441	5.1832	6.1219	6.2842	6.3403
100	presente, n=13		1.4788	3.5987	5.5432	6.4053	6.5595	6.6155
100	presente, n=17		1.5035	3.6143	5.5485	6.4596	6.6175	6.6761
100	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		1.499	3.6235	5.5358	6.4791	6.6421	6.6975
100	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		1.5092	3.6426	5.5503	6.4895	6.6496	6.7047
[0°/90°/90°/0°]								
10	presente, n=9		10.2058	10.7095	10.8362	10.8736	10.8789	10.8807
10	presente, n=13		10.4387	10.8970	11.0214	11.0368	11.0468	11.0532
10	presente, n=17		10.4811	10.9198	11.0439	11.0687	11.0698	11.1576
10	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		10.482	10.917	11.031	11.063	11.068	11.069
10	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		10.476	10.904	11.017	11.049	11.053	11.055
100	presente, n=9		1.3988	3.4109	5.2926	6.2542	6.4275	6.4781
100	presente, n=13		1.5307	3.6745	5.5905	6.5352	6.6952	6.7596
100	presente, n=17		1.5341	3.7017	5.6375	6.5943	6.7552	6.8190
100	MQ, $c = 2/\sqrt{n}$, n=21 [Ferreira et al., 2006]		1.5225	3.6997	5.6511	6.6153	6.7785	6.8366
100	HSDT [Reddy e Liu, 1985]		1.5332	3.7195	5.666	6.6234	6.7866	6.8427

presente- resultado obtido com o método rbf, com otimização de c e teoria de Donnell-Reddy

10.4 Resumo e conclusões

Neste capítulo foi desenvolvida uma técnica para a escolha do parâmetro de forma c da função multiquádrica. A técnica baseada no algoritmo de Rippa permite utilizar o método de colocação com funções de base radial quase sem a intervenção do utilizador, para os problemas de estática.

Embora os resultados numéricos apresentados não tenham melhorado significativamente (em relação à escolha prévia de $c = 2/\sqrt{n}$), o método torna-se assim menos dependente do utilizador, havendo uma base estatística para a escolha do parâmetro de forma, ao contrário do procedimento anterior.

Referências

- Allen, D. M. (1974). The relationship between variable selection and data augmentation and a method of prediction. *Technometrics*, 16:125–127.
- Cheng, A. H. D., Golberg, M. A., Kansa, E. J. e Zammuto, Q. (2003). Exponential convergence and h-c multiquadric collocation method for partial differential equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 19(5):571–594.
- Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F. e Martins, P. A. L. S. (2005). Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Composite Structures*, 69(4):449–457.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C., Fasshauer, G. E., Jorge, R. M. N. e Batra, R. C. (a). Analysis of functionally graded plates by a robust meshless method. *Journal of Mechanics of Advanced Materials and Structures*, aceite para publicação.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. e Jorge, R. M. N. (2006). Modelling cross-ply laminated elastic shells by a higher-order theory and multiquadrics. *Computers and Structures*, 84(19-20):1288–1299.
- Loader, C. (1999). *Local Regression & Likelihood*. Springer-Verlag New York.
- Martinez, W. L. e Martinez, A. R. (2002). *Computational Statistics Handbook with MATLAB*. Chapman & Hall/CRC.
- Pagano, N. J. (1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, 4(JAN):20–34.

- Qian, L. F., Batra, R. C. e Chen, L. M. (2004). Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local petrov-galerkin method. *Composites Part B: Engineering*, 35(6-8):685–697.
- Reddy, J. N. (1982). Bending of laminated anisotropic shells by a shear deformable finite element. Em *Fibre Science and Technology*, volume 17, páginas 9–24.
- Reddy, J. N. e Liu, C. F. (1985). Higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 23(3):319–330.
- Rippa, S. (1999). An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 11(2-3):193–210.
- Wang, B. P. (2004). Parameter optimization in multiquadric response surface approximations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(3-4):219–223.

Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Neste trabalho estudou-se o comportamento em flexão estática e vibrações livres de estruturas tipo placa e casca laminada. Considerou-se uma técnica de solução baseada em discretização por funções de base radial, uma técnica sem malha de grande precisão e flexibilidade em modelar várias geometrias.

Foram consideradas várias teorias de deformação de corte transversal para placas, em particular:

- uma teoria de 1ª ordem
- 2 teorias de 3ª ordem
- 2 teorias trigonométricas

Estas teorias foram posteriormente usadas para a obtenção das equações de equilíbrio e de movimento, equações estas que são então discretizadas por funções de base radial. Após a discretização das condições de fronteira obtêm-se sistemas de equações lineares ou equações de valores e vectores próprios que permitem obter os deslocamentos

generalizados ou as frequências naturais e os modos de vibração.

Foram também consideradas duas teorias de deformação de casca de dupla curvatura, uma de 3ª ordem e uma de 1ª ordem. Foram obtidas, para vários tipos de laminados, os deslocamentos generalizados, as frequências naturais e modos de vibração.

Tendo em conta a elevada dependência da qualidade da solução em termos do parâmetro de forma c , optou-se por estudar um método de optimização para esse parâmetro. Usou-se uma técnica de validação cruzada, sugerida por Rippa, com bons resultados nos casos estudados.

Em resumo, pode-se dizer que o principal aspecto inovador desta tese (sustentado pelas publicações em revista no período da tese) reside na aplicação do método das funções de base radial para a análise de placas e cascas laminadas compósitas, sanduiche e funcionais gradativas.

Por explorar ficam diversos tópicos, tais como:

1. *Aplicação sistemática a todos os exemplos apresentados de todas as teorias de deformação apresentadas*

Por falta de tempo, não foi conseguido o objectivo de aplicar a todos os exemplos todas as teorias de deformação escolhidas no final do capítulo 5. Esse esforço de sistematização infelizmente ficou por fazer, principalmente na análise de cascas laminadas.

2. *Desenvolvimento da técnica de optimização do parâmetro de forma c apresentada nesta tese, para o caso das vibrações livres.*

O sucesso da técnica apresentada nesta tese para a optimização do parâmetro c no caso da deformação de placas é um incentivo à sua aplicação no caso das vibrações livres.

3. *Extensão à análise não linear geométrica.*

Já existe algum trabalho neste domínio, que mostra que o método das funções de

base radial produz bons resultados. Seria interessante aplicar as diversas teorias de deformação à análise não linear geométrica.

- Tiago, C.M. e Leitão, V.M.A.(2006). Application of radial basis functions to linear and nonlinear structural analysis problems. *Computers and Mathematics with Applications*,51:1311-1334.

4. Aplicação do método das multiquádricas ao problema de fractura de placas e cascas.

A ausência de uma malha sugere que o método das multiquádricas poderá ser um bom método para o estudo da formação e propagação de fendas em placas e cascas. A aplicação de outros métodos sem malha nesta área da engenharia tem sido bem sucedido.

- Simonsen, B.C. e Li, S.(2004). Mesh-free simulation of ductile fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,60(8):1425-1450.
- Rao, B.N. e Rahman, S.(2003). Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*,70 (1):1-27.

5. Aplicação de outras técnicas estatísticas da família da validação cruzada, para optimização do parâmetro de forma c , tais como validação cruzada leave-n-out, jackknifing e bootstrapping.

São técnicas de estimativa de erros baseadas na re-amostragem. A técnica de validação cruzada leave-n-out é idêntica à técnica leave-one-out, mas em vez de ser retirado apenas um elemento ao conjunto dos dados, retiram-se grupos com n elementos. É um processo mais rápido que o leave-one-out. O bootstrapping é idêntico à validação cruzada leave-n-out, mas o grupo de treino é formado aleatoriamente, podendo um elemento dos dados ser repetido dos diferentes grupos de treino. A técnica de jackknifing mede o viés e não o erro generalizado da amostra. Existem estudos que indicam quando uma determinada técnica deve ser usada, dependendo do objectivo da optimização, tamanho da amostra, etc.

- Efron, B. (1983). Estimating the error rate of a prediction rule: Improvement on cross-validation. *J. of the American Statistical Association*, 78:316-331.
- Efron, B. (1982). The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans. Philadelphia: SIAM.

6. *Uso de pré-condicionadores ou decomposição do domínio para melhorar o condicionamento da matriz das multiquádricas.*

Um método para pré-condicionar problemas com colocação foi desenvolvido com sucesso por Ling e Kansa. Seria interessante aplicar este pré-condicionador aos códigos desenvolvidos no âmbito desta tese.

- Ling, L. e Kansa, E.J. (2005). A least-squares preconditioner for radial basis functions collocation methods. *Advances in Computational Mathematics*, 23(1-2):31-54.
- Ling, L. e Kansa, E.J. (2004). Preconditioning for radial basis functions with domain decomposition methods. *Mathematical and Computer Modelling*, 40(13):1413-1427.

7. *Análise transiente de placas e cascas com o método das multiquádricas.*

A análise transiente de placas e cascas pode ser feita usando um esquema Newmark para integração numérica no tempo. Uma opção mais interessante são as funções de base radial da forma $g(\mathbf{x}, y, t)$, já aplicadas a interpolação de funções do espaço-tempo.

- Myers, D.E., De Iaco, S., Posa, D. e L. De Cesare, (2002). Space-Time Radial Basis Functions. *Computers and Math. Applications* 34: 539-549.

8. *Exploração de funções de base radial normalizadas.*

As funções de base radial usadas no âmbito da resolução de equações diferenciais são da forma $\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N a_i \rho(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$.

Na área das redes neuronais, o uso de funções de base radial normalizadas (arquitetura normalizada), parece produzir melhores resultados que o uso das tradicionais funções de base radial. Estas funções são da forma: $\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N a_i \rho(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)}{\sum_{i=1}^N \rho(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)} = \sum_{i=1}^N a_i u(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$.

- Bugmann, G. (1998). Normalized Gaussian radial basis function networks. *Neurocomputing*, 20:97-110.

9. Exploração de funções de base anisotrópicas.

No âmbito da interpolação de funções, as funções de base anisotrópicas são obtidas substituindo a norma euclidiana geralmente usada nas funções de base radial, por uma métrica que considera a distribuição local dos pontos de interpolação: $\varphi = \sum_j 1^N \alpha_j \phi(\|x - x_j\|_T)$. Seria interessante, por exemplo, aplicar esta ideia à resolução de equações diferenciais com uma distribuição de pontos aleatória.

- Casciola, G., Lazzaro, D., Montefusco, L.B. e Morigi S. (2006). Shape preserving surface reconstruction using locally anisotropic radial basis function interpolants. *Computers & Mathematics with Applications*, 51(8) :1185-1198.
- Dinh, H. Q., Slabaugh, G. e Turk, G. (2001). Reconstructing surfaces using anisotropic basis functions. In Proceedings of International Conference on Computer Vision (ICCV) 606-613.

Lista de publicações em revista internacional relacionadas com esta tese

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C.; Fasshauer, G.E.; Jorge, R.M.N. e Batra, R.C. Analysis of functionally graded plates by a robust meshless method. Aceite para publicação no Journal of Mechanics of Advanced Materials and Structures.

Roque, C.M.C.; Ferreira, A.J.M. e Jorge, R.M.N. (2007). A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory. *Journal of Sound and Vibration* 300(3-5), 1048–1070.

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C. e Jorge, R.M.N. (2007). Natural frequencies of FSDT cross-ply composite shells by multiquadrics. *Composite Structures* 77(3), 296–305.

Ferreira, A.J.M.; Batra, R.C.; Roque, C.M.C.; Qian, L.F. e Jorge, R.M.N. (2006). Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. *Composite Structures* 75(1-4), 593–600.

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C. e Jorge, R.M.N. (2006). Modelling cross-ply laminated elastic shells by a higher-order theory and multiquadrics. *Computers and Structures* 84(19-20), 1288–1299.

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C. e Jorge, R.M.N. (2006). Static and free vibration analysis of composite shells by radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 30(9), 719–733.

Roque, C.M.C.; Ferreira, A.J.M. e Jorge, R.M.N. (2006). Free vibration analysis of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 8(6), 497–515.

Ferreira, A.J.M.; Batra, R.C.; Roque, C.M.C.; Qian, L.F. e Martins, P.A.L.S. (2005). Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Composite Structures* 69(4), 449–457.

Ferreira, A.J.M.; Martins, P.A.L.S. e Roque, C.M.C. (2005). Solving time-dependent engineering problems with multiquadrics. *Journal of Sound and Vibration* 280(3-5), 595–610.

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C. e Jorge, R.M.N. (2005). Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers and Structures* 83(27), 2225–2237.

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C. e Jorge, R.M.N. (2005). Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194(39-41), 4265–4278.

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C.; Jorge, R.M.N. e Kansa, E.J. (2005). Static deformations and vibration analysis of composite and sandwich plates using a layerwise theory and multiquadrics discretizations. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 29(12), 1104–1114.

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C. e Martins, P.A.L.S. (2005). Analysis of thin isotropic rectangular and circular plates with multiquadrics. *Strength of Materials* 37(2), 163–173.

Roque, C.M.C.; Ferreira, A.J.M. e Jorge, R.M.N. (2005). Modelling of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions. *Composites Part B: Engineering* 36(8), 559–572.

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C. e Martins, P.A.L.S. (2004). Radial basis functions and higher-order shear deformation theories in the analysis of laminated composite beams and plates. *Composite Structures* 66(1-4), 287–293.

Ferreira, A.J.M.; Roque, C.M.C. e Martins, P.A.L.S. (2003). Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method. *Composites Part B: Engineering* 34(7), 627–636.

Apêndices

A

Exemplos de códigos em MATLAB para colocação

Nos apêndices A.1 e A.2 são apresentados os códigos em MATLAB em apoio ao capítulo 3. As frases a cor mais clara e precedidas do símbolo % são comentários ao código.

A.1 Interpolação de uma função

A função multiquádrica é definida da forma:

```
rbf=@(r,epsilon)sqrt((epsilon*r).^2+1);
```

onde `epsilon` representa o parâmetro de forma, e `A` é a matriz de funções de base radial (ou matriz de colocação). Constrói-se também a matriz `Axx`, mas apenas para efeito de cálculo de erro.

O código completo para esta análise está abaixo indicado.

```
clear all;  
N=23;
```

```

f=@(x)1./(1+25*x.^2); %função a ser aproximada

%função multiquádrica interpoladora:
rbf=@(r,epsilon)sqrt((epsilon*r).^2+1);
fplot(f,[-1,1]);tp=title('','erasemode','xor'); hold on
fhandle=plot(1,0,'ko',1,0,'ks','MarkerSize',6);
x=linspace(-1,1,N)';
Nxx=201;xx=linspace(-1,1,Nxx)';pp=f(xx);
N=length(x);dx=diff(x);
epsilon=0.75*min([Inf;1./dx],[1./dx;Inf]);
[A,Axx]=deal(zeros(N),zeros(Nxx,N));
for j=1:N
    A(:,j)=rbf(x-x(j),epsilon(j));
    Axx(:,j)=rbf(xx-x(j),epsilon(j));
end
lambda=A\f(x);
err=norm(Axx*lambda-pp,inf);
set(tp,'string',sprintf('N=%3i, Max error=%0.4e.',N,err));
xdata=num2cell([x x]',2);ydata=num2cell([f(x) 0*x]',2);
set(fhandle,'xdata',xdata, 'ydata',ydata);
drawnow

```

A.2 Análise estática da viga de Timoshenko encastada

A função `mq.m` é de define a função multiquádrica `phi`, primeira derivada `phi1` e segunda derivada `phi2`. Esta função é chamada nos códigos de flexão e de vibrações livres da viga Timoshenko.

```
%função mq.m
function [phi,phi1,phi2]=mq(x,xc,c) %multiquadrica 1D
f=@(r,c)sqrt((c*r).^2+1);

r=x-xc;
phi=f(r,c);
if nargout>1
    phi1=(c^2)*r./phi;    %primeira derivada da função multiquádrica
    if nargout>2
        phi2=(c^2)./phi.^3; %segunda derivada da função multiquádrica
    end
end
```

Resolução do problema da viga à flexão:

```
clear all;
N=63;
h=0.01;
E=10920;I=h^3/12;G=E/2.6;k=5/6;EI=E*I;shear=k*h*G;
x=linspace(0,1,N);
epsilon=1/(2/sqrt(N));
LL=1:N;
K=zeros(2*N);
A=zeros(N);
A1=zeros(N);
A2=zeros(N);

for j=1:N
    %matriz dos coeficientes:
    [A(:,j),A1(:,j),A2(:,j)]=mq(x,x(j),epsilon);
end
```

```

%primeira equação:
K(1:N,1:N)=shear*A2;
K(1:N,N+1:2*N)=-shear*A1;

%segunda equação:
K(N+1:2*N,1:N)=shear*A1;
K(N+1:2*N,N+1:2*N)=EI*A2-shear*A;

%condições de fronteira, viga encastrada:

%em x=0, (ponto 1), w=0
K(1,1:N)=A(1,:);
K(1,N+1:2*N)=0;

%em x=1, (ponto N), w=0
K(N,1:N)=A(N,:);
K(N,N+1:2*N)=0;

%em x=0, \phi_x=0
K(N+1,1:N)=0;
K(N+1,N+1:2*N)=A(1,:);

%em x=1, \phi_x=0
K(2*N,1:N)=0;
K(2*N,N+1:2*N)=A(N,:);

f=zeros(2*N,1);f(2:N-1)=1; %carga

lambda=K\f;
solution=A*lambda(LL);

```

```

exacto_cc=1/384/EI;
erro_relativo=abs(exacto_cc-abs(min(solution)))/exacto_cc*100
plot(x,solution);
title(['erro relativo=',num2str(erro_relativo,'%6.2f'),' %'])

```

A.3 Análise das vibrações livres para a viga de Timoshenko encastrada

Resolução do problema de vibrações livres da viga Timoshenko:

```

clear all

N=35;
h=0.01;
E=10920; I=h^3/12; G=E/2.6; k=5/6; EI=E*I; shear=k*h*G; rho=1;

x=linspace(0,1,N);
epsilon=1/(2/sqrt(N));
LL=1:N;

K=zeros(2*N);
A=zeros(N);
A1=zeros(N);
A2=zeros(N);

for j=1:N
    [A(:,j),A1(:,j),A2(:,j)]=mq(x,x(j),epsilon);
end

%matrizes dos coeficientes

```

```

K(1:N,1:N)=shear*A2;
K(1:N,N+1:2*N)=-shear*A1;

K(N+1:2*N,1:N)=shear*A1;
K(N+1:2*N,N+1:2*N)=EI*A2-shear*A;

KK(1:N,1:N)=-rho*h*A;
KK(1:N,N+1:2*N)=0;

KK(N+1:2*N,1:N)=0;
KK(N+1:2*N,N+1:2*N)=-rho*I*A;

%condições de fronteira, viga encastrada

%em x=0, w=0
K(1,1:N)=A(1,:);
K(1,N+1:2*N)=0;

KK(1,1:N)=0;
KK(1,N+1:2*N)=0;

%em x=1(ponto N), w=0
K(N,1:N)=A(N,:);
K(N,N+1:2*N)=0;

KK(N,1:N)=0;
KK(N,N+1:2*N)=0;

%em x=0, \phi_x=0
K(N+1,1:N)=0;

```



```

K(N+1,N+1:2*N)=A(1,:);

KK(N+1,1:N)=0;
KK(N+1,N+1:2*N)=0;

%em x=1, \phi_x=0
K(2*N,1:N)=0;
K(2*N,N+1:2*N)=A(N,:);

KK(2*N,1:N)=0;
KK(2*N,N+1:2*N)=0;

f=zeros(2*N,1);f(2:N-1)=0;

[lambda_vec,lambda]=eig(K,KK);
lambda=(diag(lambda,0));
[lambda,indice]=sort(sqrt(sqrt(lambda)*sqrt(rho*h/(EI))));
lambda_vec=lambda_vec(:,(indice(:)));

exacto_cc=4.72840;
erro_relativo=abs(abs(exacto_cc)-abs(lambda(1)))/exacto_cc*100

for k=1:5
    model(:,k)=lambda_vec(1:N,k) '*A;
    figure(1)
    plot(x, model(:,k));hold on
end

title(['erro relativo da primeira frequência (%) = ',...
num2str(erro_relativo,'%6.2f'),' %'])

```