

Condições de Optimalidade para Problemas de Optimização Dinâmica

ANÍBAL CASTILHO COIMBRA DE MATOS



FACULDADE DE ENGENHARIA

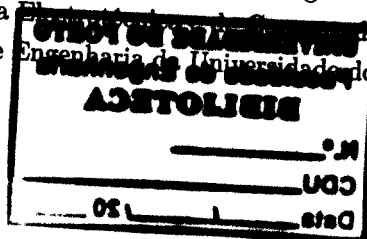
UNIVERSIDADE DO PORTO

2001

Condições de Optimalidade para Problemas de Optimização Dinâmica

ANÍBAL CASTILHO COIMBRA DE MATOS

Dissertação elaborada para obtenção do grau de doutor
em Engenharia Electrotécnica e de Computadores pela
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



Orientador

Fernando Manuel Ferreira Lobo Pereira

Professor Associado com Agregação do Departamento de Engenharia
Electrotécnica e de Computadores da Faculdade de Engenharia da
Universidade do Porto

Durante parte do período de realização deste trabalho o autor foi bolseiro do PRO-DEP II, Acção 5.2.

Aos meus Pais

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Fernando Lobo Pereira, por todo o apoio prestado, pelas constantes sugestões e pelas condições que permitiram a realização deste trabalho. Desejo agradecer à minha família pela confiança que em mim depositou. Os meus agradecimentos vão ainda para todos os colegas, especialmente para aqueles que contribuíram para criar um ambiente favorável à execução deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho são estudadas condições de optimalidade para duas classes de problemas de controlo óptimo: problemas com restrições de estado e problemas impulsivos.

Os problemas com restrições de estado têm dinâmicas não lineares, caracterizadas por inclusões diferenciais. São problemas de tempo fixo e a função custo a minimizar apenas depende do estado final. As restrições de estado são expressas por uma relação de pertença a um conjunto.

As condições de optimalidade aqui obtidas tomam a forma de existência de funções de verificação Lipschitz contínuas, funções estas que satisfazem uma equação generalizada de Hamilton-Jacobi. É apresentada uma forma construtiva de obter tais funções, e mostra-se que a sua Lipschitz continuidade é equivalente a uma qualificação das restrições de estado, caracterizada pela noção de calma. São demonstradas relações entre o conceito de calma e a existência de multiplicadores normais das condições necessárias de optimalidade.

É também demonstrada uma relação entre elementos obtidos a partir de multiplicadores de condições necessárias de optimalidade e gradientes de funções de verificação.

É ainda introduzido o conceito de função valor estendida, sendo estabelecida uma relação entre esta função e um multiplicador das condições necessárias de optimalidade. Esta relação justifica a interpretação heurística de que a medida que faz parte dos multiplicadores das condições necessárias de optimalidade se obtém a partir da variação do custo óptimo com o relaxamento da restrição de estado do problema.

Os problemas impulsivos abordados possuem dinâmicas não lineares caracterizadas por inclusões diferenciais impulsivas com medidas vectoriais. São problemas de tempo fixo e com função custo apenas dependente do estado final.

É definida a função valor para a classe de problemas impulsivos considerados e são estudadas as suas propriedades. Nomeadamente, mostra-se que sob certas condições esta função é Lipschitz contínua. Esta demonstração faz uso de um resultado sobre aproximação por trajectórias admissíveis também apresentado e demonstrado neste trabalho. É também mostrado que a função valor satisfaz um conjunto de condições de Hamilton-Jacobi generalizadas, com uma determinada condição fronteira. Uma versão relaxada destes condições é ainda utilizada para a identificação de condições suficientes de optimalidade.

É também obtida uma relação entre um multiplicador das condições necessárias de optimalidade e a função valor aqui considerada. Este resultado constitui uma extensão para problemas impulsivos de outros existentes, mas para problemas com trajectórias absolutamente contínuas.

Abstract

This work addresses the derivation of optimality conditions for two classes of optimal control problems: state constrained problems and impulsive problems.

The problems with state constraints have nonlinear dynamics, characterized by differential inclusions. They are fixed time problems and the cost function only depends on the final state. The state constraints are expressed by a set inclusion relationship.

The optimality conditions derived here take the form of existence of Lipschitz continuous verification functions. These functions satisfy generalized Hamilton-Jacobi equations. It is shown that these functions can be obtained as value functions of auxiliary families of related problems. The Lipschitz continuity of verification functions is shown to be equivalent to a state constraint qualification, expressed by the calmness concept. Relationships between calmness and the existence of normal multipliers of the necessary conditions of optimality are also studied.

The significance of the definition of verification functions used in this work can also be assessed by a relationship between normal multipliers and generalized gradients of verification functions obtained here.

The concept of extended value function is introduced. A relationship between gradients of this function and multipliers of the necessary conditions of optimality is also obtained. This relationship contributes to validate heuristic claims concerning the connection between the measure element of the multiplier of the necessary conditions of optimality and the optimal value of problems obtained by relaxing the state constraints of the original problem.

The impulsive control problems have dynamics characterized by impulsive differential inclusions driven by vector valued measures. They are fixed time problems and the cost functions only depends on the final state.

A definition of the value function for such class of problems is given and its main properties are derived. A result on the existence of neighboring feasible trajectories is derived and sufficient conditions for the Lipschitz continuity of the value function are obtained. It is also shown that the value function satisfies generalized Hamilton-Jacobi conditions as well as a certain boundary condition. A relaxed version of these conditions is used to identify sufficient conditions of optimality.

A relationship between a multiplier of the necessary conditions of optimality and the value function is obtained. This result extends to impulsive control problems similar results available for problems with absolutely continuous trajectories.

Résumé

Ce travail adresse la dérivation des conditions d'optimalité pour deux classes des problèmes de commande optimale: problèmes avec des contraintes d'état et problèmes de contrôle impulsionnel.

Les problèmes avec des contraintes d'état ont des dynamiques non linéaires, caractérisées par des inclusions différentielles, ont lieu en temps fixe et la fonction de coût dépend seulement de l'état final. Les contraintes d'état sont exprimées par un rapport d'inclusion dans un ensemble.

Les conditions d'optimalité dérivés ici prennent la forme de l'existence des fonctions de vérification continues de Lipschitz. Ces fonctions satisfont des équations généralisées de Hamilton-Jacobi. On lui montre que ces fonctions peuvent être obtenues comme fonctions valeur des familles des problèmes auxiliaires. La continuité de Lipschitz des fonctions de vérification s'avère équivalente à une qualification des contraintes d'état, exprimée par le concept de calme. Des relations entre le concept de calme et l'existence des multiplicateurs normaux des conditions nécessaires de l'optimalité sont également étudiés.

La importance de la définition des fonctions de vérification utilisées dans ce travail peut également être évaluée par un relation entre les multiplicateurs normaux et les gradients généralisés des fonctions de vérification obtenu ici.

Le concept de fonction valeur étendue est présenté. Une relation entre les gradients de cette fonction et les multiplicateurs des conditions nécessaires de l'optimalité est également obtenu. Cette relation contribue pour valider des réclamations heuristiques au sujet de la connexion entre l'élément de mesure du multiplicateur des conditions nécessaires de l'optimalité et la valeur optimale des problèmes obtenus en détendant les contraintes d'état du problème initial.

Les problèmes de contrôle impulsionnelle ont des dynamiques caractérisées par des inclusions différentielles impulsionnelles pilotées par des mesures vectorielles, ont lieu en temps fixe et la fonction de coût dépend seulement de l'état final.

Une définition de la fonction valeur pour cette classe des problèmes est donnée et ses propriétés principales sont dérivées. Un résultat sur l'existence des trajectoires faisables voisines est dérivé et des conditions suffisantes pour la continuité de Lipschitz de la fonction valeur est obtenu. On lui montre également que la fonction valuer satisfait des conditions généralisées de Hamilton-Jacobi aussi bien qu'une certain condition de frontière. Une version détendue de ces conditions est employée pour identifier des conditions suffisantes de l'optimalité.

Une relation entre les multiplicateur des conditions nécessaires l'optimalité et la fonction valeur est obtenu.

Conteúdo

1	Introdução	3
1.1	Descrição do trabalho	3
1.2	Organização do documento	4
1.3	Principais contribuições	6
2	Conceitos e Resultados Elementares	8
2.1	Multifunções	8
2.2	Funções distância	9
2.3	Cálculo não diferenciável	9
2.4	Inclusões diferenciais	12
2.5	Convexidade	15
3	Controlo Ótimo com Restrições de Estado	16
3.1	Formulação do problema	16
3.2	Existência de solução	17
3.3	Condições necessárias de optimalidade	17
4	Função Valor e Condições de Hamilton-Jacobi	21
4.1	Problemas com estado livre	21
4.2	Equação de Hamilton-Jacobi	24
4.3	Funções de verificação e condições suficientes	27
4.4	Condições necessárias e função valor	29
4.5	Problemas com restrições de estado	29
5	Verificação em Problemas com Restrições de Estado	33
5.1	Calma local e calma	33
5.2	Hipóteses sobre os dados	36
5.3	Família de problemas auxiliares	37
5.4	Função valor da família de problemas auxiliares	38
5.5	Condições necessárias de optimalidade	44
5.6	Condições suficientes de optimalidade	45
5.7	Funções de verificação local	48
5.8	Condições de optimalidade local	51

6 Calma e Multiplicadores	53
6.1 Multiplicadores normais e subproblemas	53
6.2 Calma e normalidade	54
7 Funções de Verificação e Multiplicadores	61
7.1 Multiplicadores e gradientes de funções de verificação	61
7.2 Problema auxiliar	62
7.3 Demonstração do teorema 7.1.1	69
8 Função Valor Estendida	72
8.1 Família de problemas e função valor estendida	73
8.2 Qualificação das restrições de estado	74
8.3 Equação de Hamilton-Jacobi e condições de optimalidade	77
8.4 Gradientes da função valor e multiplicadores	78
9 Controlo Ótimo Impulsional	82
9.1 Problema abordado	82
9.2 Reparametrização associada a uma medida	83
9.3 Trajectórias admissíveis	85
9.4 Condições necessárias de optimalidade	88
10 Função Valor em Problemas Impulsionais	90
10.1 Família de problemas	90
10.2 Propriedades elementares	91
10.3 Trajectórias próximas reparametrizadas	93
10.4 Continuidade da função valor	95
11 Condições de Optimalidade em Problemas Impulsionais	99
11.1 Função de verificação	99
11.2 Condições de Hamilton-Jacobi	100
11.3 Função valor e multiplicadores	105
12 Conclusões	110
Bibliografia	116

Capítulo 1

Introdução

1.1 Descrição do trabalho

O objecto fundamental deste trabalho é o estudo de condições de optimalidade para problemas de controlo óptimo. São abordadas duas classes distintas de problemas: problemas com restrições de estado e trajectórias contínuas, e problemas impulsivos.

Relativamente aos problemas com restrições de estado, são obtidas e analisadas condições de optimalidade sob a forma de existência de funções de verificação. Estas funções satisfazem uma equação generalizada de Hamilton-Jacobi. Uma qualificação das restrições de estado, caracterizada pela noção de calma, desempenha um papel relevante na obtenção de tais funções. São também estabelecidas relações entre funções de verificação e multiplicadores das condições necessárias de optimalidade. Introduce-se ainda a noção de função valor estendida. Esta noção generaliza a função valor clássica e satisfaz, sob condições de continuidade, uma relação envolvendo multiplicadores das condições necessárias de optimalidade.

Os problemas abordados possuem dinâmicas não lineares, caracterizadas por inclusões diferenciais. São problemas em tempo fixo e a função custo a minimizar apenas depende do estado final. As restrições de estado são expressas por uma relação de pertença a um conjunto.

Em relação aos problemas impulsivos, são estabelecidas condições que garantem propriedades de continuidade da função valor de uma família de problemas, parametrizada pelo instante e estado iniciais de cada problema. São também obtidas condições de optimalidade na forma de condições estendidas de Hamilton-Jacobi, com uma determinada condição fronteira. São ainda estabelecidas relações entre multiplicadores de condições necessárias de optimalidade e a função valor considerada.

Os problemas abordados caracterizam-se por possuírem dinâmicas expressas por in-

clusões diferenciais impulsionais. Nestas, o termo singular depende de uma medida vectorial, não sendo considerados quaisquer requisitos de comutatividade sobre o campo vectorial caracterizador do termo singular. Estes problemas são formulados em tempo fixo e a função custo apenas depende do estado final.

1.2 Organização do documento

Inicialmente, no capítulo 2, é feita uma apresentação de alguns conceitos e resultados que serão posteriormente utilizados. Tais conceitos e resultados são fundamentalmente relativos a Análise Funcional, Análise Não Suave e Inclusões Diferenciais.

No capítulo 3 é apresentado o problema de controlo óptimo com restrições de estado que será alvo do estudo aqui desenvolvido. Este problema encontra-se formulado no paradigma de inclusões diferenciais. São ainda referidos os resultados sobre condições necessárias de optimalidade na forma hamiltoniana existentes na literatura mais relevantes para o estudo em causa.

O capítulo 4 constitui uma revisão da literatura sobre a função valor em controlo óptimo bem como sobre condições de Hamilton-Jacobi. Nesta revisão, são inicialmente focados problemas sem restrições de estado ao longo do tempo, sendo analisadas as propriedades da função valor para tais problemas, para além de diversos conceitos de solução generalizada da equação de Hamilton-Jacobi. Relativamente a estes problemas, e particularmente no caso de existirem restrições no estado final, é ainda analisado o conceito de função de verificação e as suas ligações com a equação de Hamilton-Jacobi e com condições de optimalidade. Em relação a problemas com restrições de estado, são especialmente analisados os resultados sobre qualificação das restrições que concorrem para garantir a continuidade da função valor.

No capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos sobre funções de verificação para problemas de controlo óptimo com restrições de estado. As hipóteses impostas sobre os dados do problema permitem concluir que a existência de funções de verificação Lipschitz contínuas é equivalente a uma qualificação das restrições de estado expressa pela noção de calma, que caracteriza o comportamento do valor do problema face a perturbações na restrição de estado. Demonstra-se também que as funções de verificação Lipschitz contínuas satisfazem uma equação que pode ser considerada uma generalização da equação de Hamilton-Jacobi. São ainda obtidas condições de optimalidade, tanto necessárias como suficientes, com base em funções de verificação.

O capítulo 6 aborda as relações entre a propriedade de calma e a existência de multiplicadores normais das condições necessárias de optimalidade na forma hamiltoniana. Mais precisamente, mostra-se que a propriedade de calma é uma condição intermédia entre a normalidade e a normalidade forte. Desta forma, é estabelecida uma relação entre a existência de funções de verificação Lipschitz contínuas e a existência de multiplicadores normais.

No capítulo 7 é demonstrada uma relação entre os multiplicadores das condições necessárias de optimalidade e gradientes de funções de verificação. Uma vez que as funções de verificação não são em geral diferenciáveis, a relação obtida considera o gradiente generalizado da função de verificação. O resultado obtido constitui uma generalização para problemas com restrições de estado, de outros resultados análogos já existentes para problemas com estado livre. Tem especial significado a interpretação do multiplicador associado à restrição de estado.

O capítulo 8 endereça a função valor em problemas com restrições de estado. No seguimento do estudo apresentado sobre funções de verificação para esta classe de problemas, a função valor aqui considerada difere daquela que classicamente é considerada pela dependência num parâmetro adicional relacionado com o grau de violação das restrições. Postulando hipóteses semelhantes às habitualmente consideradas na literatura, demonstram-se propriedades de continuidade da função valor proposta. É também demonstrado que esta função satisfaz uma equação que se pode considerar, mais uma vez, uma generalização da equação de Hamilton-Jacobi. É ainda estabelecida uma relação entre multiplicadores das condições necessárias de optimalidade e gradientes da função valor, relação que é em alguns aspectos análoga àquela obtida no capítulo 7 e relativa a funções de verificação.

No capítulo 9 é apresentada a classe de problemas de controlo impulsional endereçada neste trabalho. É definida a noção de trajectória admissível para a dinâmica impulsional considerada, bem como um conjunto de conceitos auxiliares. É estabelecida uma comparação com outras noções de trajectória admissível existentes na literatura e são também apresentados diversos resultados sobre propriedades das trajectórias admissíveis.

O capítulo 10 apresenta um estudo sobre a função valor para os problemas impulsivos considerados. A função valor aqui proposta depende apenas do instante e estado iniciais, não se impondo qualquer restrição sobre a variação total do termo impulsional, como é habitual na literatura. Pretende-se desta forma efectuar o estudo da função valor em problemas impulsivos de um modo análogo ao que é feito para problemas com trajectórias absolutamente contínuas. Para além da dedução de propriedades de continuidade de tal função, é ainda apresentado e demonstrado um resultado sobre aproximação por trajectórias admissíveis. Este resultado tem um forte impacto em todo o estudo sobre a continuidade da função valor.

No capítulo 11 são obtidas condições de optimalidade, quer necessárias quer suficientes, na forma de condições de Hamilton-Jacobi para os problemas impulsivos aqui endereçados. Mostra-se que a função valor, quando Lipschitz contínua, satisfaz tais condições de Hamilton-Jacobi. As condições suficientes são obtidas na forma de existência de uma função de verificação. Finalmente, é apresentado e demonstrado um resultado que relaciona um multiplicador das condições necessárias de optimalidade com a função valor.

1.3 Principais contribuições

Problemas com restrições de estado

Uma das contribuições fundamentais deste trabalho consistiu na definição e estudo de funções de verificação para problemas de controlo óptimo com restrições de estado. Estas funções foram utilizadas para a obtenção de condições de optimalidade, tanto necessárias como suficientes. As funções de verificação aqui consideradas são obtidas de uma forma construtiva, como funções valor de famílias de problemas auxiliares. Mostrou-se que tais funções satisfazem, num dado sentido, uma equação de Hamilton-Jacobi. Mostrou-se ainda que a existência de tais funções é equivalente a uma qualificação das restrições dada pela noção de calma.

Outro assunto abordado consistiu no estabelecimento de relações entre a qualificação das restrições traduzida pela noção de calma e a existência de multiplicadores normais das condições necessárias de optimalidade.

O facto da existência de funções de verificação ser uma condição equivalente à calma do problema, e sendo esta qualificação das restrições uma condição suficiente para a existência de multiplicadores normais, foi utilizado para demonstrar uma relação de pertença entre elementos obtidos a partir de um multiplicador e o gradiente generalizado da função de verificação.

Outra contribuição deste trabalho resulta do estudo das propriedades do que se designou por função valor estendida. Esta função é uma generalização da definição clássica da função valor em problemas com restrições de estado. Foram identificadas condições de qualificação das restrições que asseguram a Lipschitz continuidade da função valor estendida e foi demonstrada uma relação entre o gradiente generalizado desta função e elementos obtidos a partir de um multiplicador das condições necessárias de optimalidade.

As relações obtidas entre multiplicadores normais das condições necessárias de optimalidade e gradientes de funções de verificação, por um lado, e gradientes da função valor estendida, por outro, vêm justificar as interpretações heurísticas da medida do multiplicador como "derivada do custo óptimo relativamente ao relaxamento das restrições de estado".

Problemas impulsivos

O resultado sobre aproximação de funções por trajectórias admissíveis para problemas de controlo impulsional constitui outra das contribuições deste trabalho. Este resultado pode ser encarado como uma extensão, para a classe de problemas de controlo impulsional aqui considerada, de outros existentes na literatura sobre aproximação por trajectórias admissíveis para inclusões diferenciais.

O estudo das propriedades da função valor aqui considerada para os problemas de controlo impulsional é também de destacar. Por um lado, são estabelecidas condi-

ções mediante as quais tal função é localmente Lipschitz contínua e, por outro, são obtidas condições de Hamilton-Jacobi que tal função terá de satisfazer. A demonstração destas condições baseia-se no resultado sobre aproximação por trajectórias admissíveis acima referido, o que realça a sua importância.

É ainda de referir a relação obtida entre um multiplicador das condições necessárias de optimalidade e a função valor para os problemas impulsivos. Esta relação, que constitui uma extensão para o contexto impulsional de outras existentes para problemas com trajectórias absolutamente contínuas, justifica por si só a definição de função valor aqui considerada.

Capítulo 2

Conceitos e Resultados Elementares

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e resultados elementares sobre diversos corpos teóricos que serão posteriormente utilizados na exposição e demonstração dos principais resultados apresentados neste trabalho. As referências bibliográficas utilizadas vão sendo indicadas ao longo do texto.

2.1 Multifunções

Uma multifunção $G : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$, é uma aplicação que associa a cada elemento x de A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, representado por $G(x)$.

Em seguida apresentam-se alguns conceitos e resultados sobre multifunções que terão utilidade no trabalho que se apresenta. Estes conceitos e resultados podem ser encontrados num vasto conjunto de obras de que são exemplo [Cla83] e [AF90].

Uma multifunção $G : A \rightrightarrows S$ diz-se fechada, compacta, convexa, ou não vazia em $B \subset A$ quando os conjuntos $G(x)$ tiverem respectivamente essas propriedades para cada $x \in B$.

O grafo de uma multifunção $G : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ define-se como o conjunto $\{(x, y) : x \in A \wedge y \in G(x)\}$ e representa-se por $\text{gr}(G)$.

Uma multifunção $G : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ diz-se mensurável quando para qualquer $C \subset \mathbb{R}^n$ aberto, o conjunto $\{x \in A : G(x) \cap C \neq \emptyset\}$ for mensurável.

Uma multifunção $G : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ diz-se Lipschitz contínua se existir uma constante $k > 0$ tal que

$$G(x) \subset G(y) + k|x - y|\bar{B}^n$$

para todos os $x, y \in A$. $\bar{B}^n$ representa a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ (centrada na origem).

Uma multifunção $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ diz-se semicontínua superior em $x \in \mathbb{R}^n$ se para todo o $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$G(z) \subset G(x) + \varepsilon B^m \quad \forall z \in x + \delta B^n,$$

onde B^n e B^m são, respectivamente, as bolas abertas unitárias de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

2.2 Funções distância

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ não vazio. A função $d_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_C(x) = \inf\{|x - y| : y \in C\}$$

designa-se por função distância (ao conjunto C). Esta função é Lipschitz contínua de constante 1 em $\mathbb{R}^n$. Se o conjunto C for fechado, então a condição $d_C(x) = 0$ é equivalente a $x \in C$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e considere-se uma multifunção $X : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ não vazia e Lipschitz contínua em A com constante k . Então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a função $z \mapsto d_{X(z)}(x)$ é Lipschitz contínua de constante k em A .

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \neq \emptyset$ e $X^c \neq \emptyset$ (X^c representa o complementar de X). A função $\Delta_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Delta_X(x) = \begin{cases} d_X(x) & \text{se } x \notin X \\ -d_{X^c}(x) & \text{se } x \in X \end{cases}$$

designa-se por função distância com sinal (ao conjunto X). Também se verifica que esta função é Lipschitz contínua de constante 1. Supondo ainda que X é fechado pode concluir-se que $\Delta_X(x) > 0$ se $x \notin X$, $\Delta_X(x) = 0$ se $x \in \partial X$, e $\Delta_X(x) < 0$ se $x \in \text{int}(X)$. (∂X representa a fronteira de X).

Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e considere-se uma multifunção $X : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Suponha-se que esta multifunção e sua complementar são não vazias e Lipschitz contínuas em A com constante k . Então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a função $z \mapsto \Delta_{X(z)}(x)$ é Lipschitz contínua de constante k em A .

2.3 Cálculo não diferenciável

Nesta secção são apresentados alguns conceitos e resultados de cálculo não diferenciável que serão utilizados ao longo do trabalho. Tais conceitos e resultados podem ser encontrados, de uma forma mais ou menos sistematizada, em diversos trabalhos, dos quais se destacam [Cla83], [Cla89] e [CLSW98].

Normal proximal e subgradiente proximal

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$, fechado e não vazio, e seja $s \in S$. O cone normal proximal a S no ponto s , representado por $PN_S(s)$, é o conjunto

$$PN_S(s) = \{\zeta : \exists t > 0 \text{ tal que } d_S(s + t\zeta) = t|\zeta|\}.$$

Os elementos deste conjunto designam-se por normais proximais (a S em s).

Seja agora uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontínua inferior. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto onde f é finita. Um elemento $\zeta \in \mathbb{R}^n$ designa-se por subgradiente proximal de f em x quando

$$(\zeta, -1) \in PN_{\text{epi}f}(x, f(x)).$$

O conjunto de todos os subgradientes proximais de f em x designa-se por subdiferencial proximal e representa-se por $\partial_P f(x)$.

Para funções f semicontínuas superiores define-se, de modo análogo, o sobrediferencial proximal de f em x (ponto onde f é finita) como sendo o conjunto $-\partial_P(-f)(x)$, que se representa por $\partial^P f(x)$.

Normal limite e subgradiente limite

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$, fechado e não vazio, e seja $s \in S$. O cone normal limite a S no ponto s , representado por $LN_S(s)$, é o conjunto

$$LN_S(s) = \{\zeta : \zeta_i \rightarrow \zeta, x_i \rightarrow x, x_i \in S, \zeta_i \in PN_S(x_i)\}.$$

Qualquer elemento deste conjunto designa-se por normal limite a S em s .

Seja uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontínua inferior. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto onde f é finita. Um elemento $\zeta \in \mathbb{R}^n$ designa-se por subgradiente limite de f em x quando

$$(\zeta, -1) \in LN_{\text{epi}f}(x, f(x)).$$

O conjunto de todos os subgradientes limite de f em x designa-se por subdiferencial limite e representa-se por $\partial_L f(x)$.

Gradiente generalizado e cone normal

Sejam $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz numa vizinhança de x e $v \in \mathbb{R}^n$. A derivada direcional generalizada de f em x na direcção v , representada por $f^0(x; v)$ define-se por

$$f^0(x; v) = \limsup_{y \rightarrow x, h \downarrow 0} \frac{f(y + hv) - f(y)}{h}.$$

O seguinte resultado apresenta algumas propriedades fundamentais da derivada direcional generalizada.

Proposição 2.3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz de constante k numa vizinhança $\mathcal{V}$ de $x \in \mathbb{R}^n$. Então*

- (1) *para qualquer $y \in \mathcal{V}$, a função $v \mapsto f^0(y; v)$ é finita, positivamente homogénea, subaditiva e Lipschitz de constante k em $\mathbb{R}^n$; verifica-se ainda a relação $|f^0(y; v)| \leq k|v|$;*
- (2) *$(y, v) \mapsto f^0(y; v)$ é semicontínua superior em $\mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$;*
- (3) *$f^0(x; -v) = (-f)^0(x; v)$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$.*

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$, não vazio, e seja $s \in S$. O elemento $v \in \mathbb{R}^n$ diz-se tangente a S em s se $d_S^0(s; v) = 0$. O conjunto de todos os elementos tangentes a S em s é representado por $T_S(s)$. Este conjunto é um cone não vazio, fechado e convexo, e designa-se por cone tangente a S em s . O conjunto

$$N_S(s) = \{\zeta : \zeta \cdot v \leq 0, \forall v \in T_S(s)\}$$

é um cone e designa-se por cone normal a S em s .

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz numa vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$. O gradiente generalizado de f em x , representado por $\partial f(x)$ é o conjunto definido por

$$\partial f(x) = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : f^0(x; v) \geq \zeta \cdot v, \forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Apresentam-se em seguida alguns resultados sobre propriedades do gradiente generalizado.

Proposição 2.3.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz de constante k numa vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$. Então*

- (1) *$\partial f(x)$ é não vazio, convexo e compacto; tem-se ainda que $|\zeta| \leq k$ para todo o $\zeta \in \partial f(x)$;*
- (2) *para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$ tem-se que*

$$f^0(x; v) = \max\{\zeta \cdot v : \zeta \in \partial f(x)\};$$

- (3) *a multifunção $y \mapsto \partial f(y)$ é semicontínua superior em x .*

Sendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz contínua num aberto de $\mathbb{R}^n$, o teorema de Rademacher assegura que f é diferenciável quase sempre (isto é, excepto num conjunto de medida de Lebesgue nula) nesse mesmo aberto. Baseado neste facto, o seguinte resultado (ver [Cla83]) fornece uma caracterização do gradiente generalizado de f a partir de gradientes de f em pontos onde esta função é diferenciável. Γ_f representa o conjunto de pontos onde f não é diferenciável.

Teorema 2.3.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz numa vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$ e S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com medida de Lebesgue nula. Então*

$$\partial f(x) = \text{co}\{\lim \nabla f(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin S, x_i \notin \Gamma_f\}.$$

Derivada inferior de Dini

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontínua inferior, $x \in \text{dom}(f)$, e $v \in \mathbb{R}^n$. A derivada inferior de Dini, de f em x na direcção v é definida por

$$d^- f(x; v) = \liminf_{u \rightarrow v, t \downarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

2.4 Inclusões diferenciais

Nesta secção são apresentados alguns conceitos e resultados elementares sobre sistemas dinâmicos descritos por inclusões diferenciais, [Cla83], [Smi94].

Tubos e trajectórias

Dado $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, definam-se os conjuntos I e Ω_t por

$$I = \{t : (t, x) \in \Omega \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\Omega_t = \{x : (t, x) \in \Omega\}.$$

Tal conjunto Ω designa-se por *tubo* se I for um intervalo $[a, b]$ e se existirem uma função $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e uma função $\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e positiva, tais que $\Omega_t = \omega(t) + \varepsilon(t)B^n$ para todo o $t \in [a, b]$ (B^n representa a bola aberta unitária de $\mathbb{R}^n$). Diz-se ainda que Ω é um tubo em $[a, b]$.

Sendo $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e $\varepsilon > 0$, o “ ε – tubo em torno de x ”, é o tubo

$$\{(s, y) : a \leq s \leq b, |y - x(s)| < \varepsilon\} \quad (2.4.1)$$

que se representa por $T(x; \varepsilon)$. Dados uma função $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um tubo Ω em $[a, b]$, diz-se que x está em Ω quando $\text{gr}(x) \subset \Omega$. É imediato concluir que se uma função contínua x está num tubo Ω então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $T(x; \varepsilon) \subset \Omega$.

Definição 2.4.1. *Seja Ω um tubo em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. A multifunção $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ diz-se mensurável de Lipschitz (de constante k) em Ω quando:*

- (i) *para cada $x \in \mathbb{R}^n$ a multifunção $t \mapsto F(t, x)$ é Lebesgue mensurável em $[a, b]$;*
- (ii) *existe $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável tal que para cada $t \in [a, b]$ a multifunção $x \mapsto F(t, x)$ é não vazia e Lipschitz de característica $k(t)$ no conjunto Ω_t .*

Definição 2.4.2. *Seja Ω um tubo em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. A multifunção $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ diz-se integravelmente limitada (por ϕ) em Ω se existir $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, tal que $\forall (t, x) \in \Omega \quad v \in F(t, x) \Rightarrow |v| \leq \phi(t)$.*

No que se segue, $[a, b]$ é um intervalo real, Ω um tubo em $[a, b]$ e $F : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma multifunção.

Como é habitual, uma função $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua é designada por *arco* (em $[a, b]$). O conjunto de tais funções é usualmente representado por $AC([a, b]; \mathbb{R}^n)$.

Definição 2.4.3. Um arco $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, diz-se ser uma *trajectória de F* (no intervalo $[a, b]$) quando $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$, $t \in [a, b] - \text{q.s.}$.

Propriedades das trajectórias

O resultado seguinte (ver [AC84], teorema 1, pág. 120) estabelece condições de existência de trajectórias de uma inclusão diferencial suficientemente próximas de qualquer arco, possivelmente não admissível.

Teorema 2.4.1. Suponha-se que F é mensurável de Lipschitz de constante k . Sejam x um arco em $[a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. Seja também $p \in L^1([a, b]; \mathbb{R})$, com valores positivos, tal que

$$d_{F(t, x(t))}(\dot{x}(t)) \leq p(t), \quad t \in [a, b] - \text{q.s.}$$

Defina-se a função

$$\xi(t) = |x(a) - y_0| e^{\int_a^t k(s) ds} + \int_a^t e^{\int_s^t k(u) du} p(s) ds,$$

e seja c tal que $\xi(t) < \varepsilon$ para todo o $t \in [a, c]$. Então existe y , trajectória de F no intervalo $[a, c]$, que satisfaz as condições

$$y(a) = y_0,$$

$$|y(t) - x(t)| \leq \xi(t), \quad \forall t \in [a, c],$$

$$|\dot{y}(t) - \dot{x}(t)| \leq k(t)\xi(t) + p(t), \quad t \in [a, c] - \text{q.s.}$$

Note-se que como $\xi(t) < \varepsilon$ no intervalo $[a, c]$, a trajectória y está no ε -tubo em torno de x , nesse mesmo intervalo. Como a função ξ é sempre crescente, se x , y_0 , ε e p , forem tais que $\xi(b) < \varepsilon$, então a trajectória y estará definida em todo o intervalo $[a, b]$.

Caso x seja em si mesmo uma trajectória de F , então p pode ser identificada com a função nula, e assim a função ξ é simplesmente dada por

$$\xi(t) = |x(a) - y_0| e^{\int_a^t k(s) ds}.$$

O seguinte resultado, teorema 3.1.7 de [Cla83], estabelece propriedades de compactidade para um conjunto de trajectórias de multifunções. É um resultado importante na medida em que permite assegurar a existência de solução de problemas de controlo óptimo.

Teorema 2.4.2. Seja F uma multifunção definida num tubo Ω em $[a, b]$. Suponha-se que F é não vazia, convexa, compacta e integravelmente limitada por ϕ em Ω ;

Considerem-se também a multifunção $X : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ e a função $\varepsilon : [a, b] \rightarrow]0, +\infty[$, tais que

- $X(t) + \varepsilon(t)B^n \subset \Omega_t$, $\forall t \in [a, b]$;
- para qualquer $t \in [a, b]$ e para qualquer $x \in X(t) + \varepsilon(t)B^n$, a multifunção $y \mapsto F(t, y)$ é semicontínua superior em x ;
- para cada $(t, x) \in \Omega$, a multifunção $s \mapsto F(s, x)$ é Lebesgue mensurável numa vizinhança de t .

Seja $\{x_i\}$ uma sucessão de arcos em $[a, b]$ que satisfazem:

- $x_i(t) \in X(t)$ e $|\dot{x}_i(t)| \leq \phi(t)$, $t \in [a, b] - \text{q.s.}$;
- $\dot{x}_i(t) \in F(t, x_i(t) + y_i(t)) + r_i(t)B^n$, $\forall t \in A_i$, onde $\{y_i\}$ e $\{r_i\}$ são sucessões de funções mensuráveis em $[a, b]$ e convergentes uniformemente para 0, e onde $\{A_i\}$ é uma sucessão de subconjuntos de $[a, b]$ mensuráveis e com medidas convergentes para $b - a$;
- a sucessão $\{x_i(a)\}$ é limitada.

Então, existe uma subsucessão de $\{x_i\}$ que converge uniformemente para um arco x que é uma trajectória de F em $[a, b]$.

O teorema seguinte, ver [VP82] ou [Cla83], está de alguma forma relacionado com o anterior, na medida em que, para uma dada inclusão que se verifica ao longo de uma sucessão, estabelece condições mediante as quais tal inclusão se verifica no limite.

Teorema 2.4.3. *Considere-se uma multifunção $G : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, não vazia, compacta, convexa, com grafo fechado e cujas imagens estão contidas num dado conjunto limitado. Seja $\{\nu_i\}$ uma sucessão de medidas positivas em $[a, b]$ convergindo fracamente* para uma medida ν_0 . Seja também $\{x_i\}$ uma sucessão de arcos convergindo uniformemente para x , tal que para cada i existe uma função $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mensurável tal que $\gamma_i(t) \in G(t, x_i(t))$, $\nu_i - \text{q.s.}$. Então existe uma função mensurável γ_0 , que é ν_0 integrável, tal que $\gamma_0(t) \in G(t, x(t))$, $\nu_0 - \text{q.s.}$, e tal que existe uma subsucessão de medidas $\{\gamma_i \nu_i\}$ que converge fracamente* para a medida $\gamma_0 \nu_0$.*

Função hamiltoniano

Seja Ω um tubo em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. Seja também a multifunção $F : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. O hamiltoniano associado a F é a função $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(t, x, p) = \sup\{p \cdot v : v \in F(t, x)\}.$$

O resultado seguinte apresenta as principais propriedades do hamiltoniano, ver [Cla83].

Teorema 2.4.4. *Sejam Ω , F e H como acima. Suponha-se que F é convexa, fechada, mensurável de Lipschitz de constante k e integralmente limitada por ϕ em Ω . Então H é finito em $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Mais ainda, se $(t, x) \in \text{int}(\Omega)$ e $p \in \mathbb{R}^n$, verificam-se as seguintes condições:*

- (1) $s \mapsto H(s, x, p)$ é Lebesgue mensurável numa vizinhança de t ;
- (2) $y \mapsto H(t, y, p)$ é Lipschitz de constante $|p|k(t)$ numa vizinhança de x ;
- (3) $q \mapsto H(t, x, q)$ é Lipschitz de constante $\phi(t)$ numa vizinhança de p ;
- (4) se $(\alpha, \beta) \in \partial H(t, x, p)$, então $\beta \in \partial_p H(t, x, p)$ e $H(t, x, p) = \beta \cdot p$;
- (5) se $(\alpha, \beta) \in \partial H(t, x, p)$, então para qualquer $\lambda > 0$, $(\lambda\alpha, \beta) \in H(t, x, \lambda p)$; para qualquer $\beta \in F(t, x)$ tem-se que $(0, \beta) \in \partial H(t, x, 0)$.

Nas condições (4) e (5) deste teorema, $\partial H(t, x, p)$ representa, para cada t , o gradiente generalizado da função $(x, p) \mapsto H(t, x, p)$, e $\partial_p H(t, x, p)$ representa, para cada par (t, x) , o gradiente generalizado da função $p \mapsto H(t, x, p)$.

Conjunto de estados atingíveis

Seja agora uma multifunção $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ e considere-se a inclusão diferencial $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$. Sejam também $t_0, t_1 \in [a, b]$, com $t_0 < t_1$, e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quaisquer. O conjunto de estados atingíveis por F em t_1 , partindo de x_0 em t_0 , define-se por

$$R_F(t_1, t_0, x_0) = \{x(t_1) : x(t_0) = x_0 \wedge \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \forall t \in [t_0, t_1]\}.$$

Se a multifunção F for convexa, fechada, mensurável de Lipschitz e integravelmente limitada, então para quaisquer (t_1, t_0, x_0) como acima o conjunto $R_F(t_1, t_0, x_0)$ é compacto.

2.5 Convexidade

O seguinte resultado sobre separação de convexos disjuntos (ver [Smi94]) será também usado neste trabalho.

Teorema 2.5.1. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ não vazios, convexos e fechados, com X limitado. Se $X \cap Y = \emptyset$ então existem $p \in \mathbb{R}^n$, não nulo, e $q > 0$ tais que*

$$p \cdot x + q < p \cdot y \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y.$$

Capítulo 3

Controlo Óptimo com Restrições de Estado

Neste capítulo apresenta-se o problema de controlo óptimo com restrições de estado que será alvo de estudo neste trabalho. Para além de se enunciarem as hipóteses básicas que os dados do problema devem satisfazer, são apresentadas condições necessárias de optimalidade, na forma de existência de um multiplicador, disponíveis na literatura. Apresenta-se ainda uma discussão destas condições, nomeadamente no que se refere a questões de normalidade e degenerescência dos multiplicadores.

3.1 Formulação do problema

Nesta secção é apresentado o problema de controlo óptimo com restrições de estado ao longo do tempo. Considera-se um problema em tempo fixo e com estado final fixo.

A formulação geral do problema considerado é a seguinte:

$$(P) \quad \min \quad g(x(1))$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (3.1.1)$$

$$d(t, x(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad (3.1.2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (3.1.3)$$

Como é habitual nestes problemas, a minimização é realizada nas funções $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínuas que satisfazem as condições (3.1.1)-(3.1.3).

Neste problema, a dinâmica do sistema é caracterizada pela multifunção $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, a função objectivo a minimizar é definida por $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ caracteriza as restrições de estado ao longo do tempo, e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é

o estado inicial. O intervalo de tempo considerado é, por simplicidade de notação, $[0, 1]$, facto que não constitui qualquer perda de generalidade uma vez que apenas serão considerados problemas em tempo fixo.

Ao longo do presente capítulo consideram-se válidas as seguintes hipóteses sobre os dados do problema

- (H1) $\forall x \in \mathbb{R}^n \ t \mapsto F(t, x)$ é Lebesgue mensurável;
- (H2) existe $k_v \geq 0$ tal que $F(t, x) \subset k_v \bar{B}^n \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$;
- (H3) $\forall t \in [0, 1] \ x \mapsto F(t, x)$ é Lipschitz de constante k_F em $\mathbb{R}^n$;
- (H4) $x \mapsto g(x)$ é Lipschitz de constante k_g em $\mathbb{R}^n$;
- (H5) a função d é Lipschitz contínua em $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$.

3.2 Existência de solução

Uma questão que se coloca relativamente a qualquer problema de optimização é a da existência de solução. Esta questão apresenta duas vertentes. Por um lado, há que garantir que o conjunto de elementos que satisfazem as restrições (elementos admissíveis) é não vazio. Por outro lado, há que garantir que existe um elemento admissível que minimiza a função custo, isto é, que tem um custo não superior a qualquer outro elemento admissível.

As hipóteses acima apresentadas para o problema em análise não garantem a existência de arcos x que satisfaçam as restrições (3.1.1)-(3.1.3). No entanto, garantem que se existirem arcos admissíveis então existe um arco óptimo. Para demonstrar tal resultado basta considerar uma sucessão de arcos admissíveis com custos decrescentes e convergentes para o custo óptimo. Tal sucessão terá forçosamente de existir, pois por hipótese existem arcos admissíveis e pela própria definição de custo óptimo existirá tal sucessão. Uma aplicação simples do teorema 2.4.2 permite concluir que existe uma subsucessão convergindo uniformemente para um arco ainda admissível. A continuidade da função g permite concluir directamente que tal arco será óptimo.

3.3 Condições necessárias de optimalidade

A obtenção de condições necessárias de optimalidade para problemas de controlo óptimo com restrições de estado tem sido objecto de estudo por parte de diversos autores: [VP82], [Cla83], [Loe85], [CL87], [LCV88], [RV93].

Têm sido abordadas diferentes variantes do problema, quer com a dinâmica caracterizada por uma inclusão diferencial quer com a dinâmica caracterizada por uma equação diferencial com termo de controlo.

As condições necessárias de optimalidade na forma de inclusão hamiltoniana estabelecem a existência de um elemento, designado por multiplicador, que satisfaz um conjunto de relações. O interesse prático de tais condições reside na possibilidade de estas serem utilizadas para a resolução do problema de controlo óptimo, na medida em que elas estabelecem um conjunto de relações que toda a solução do problema terá de verificar. Por um lado, tais relações podem ser utilizadas na eliminação de elementos admissíveis mas que não satisfaçam as condições de optimalidade. Por outro lado, é muitas vezes possível utilizar as referidas relações para obter uma caracterização construtiva das soluções do problema.

Seja x admissível para (P) . Designa-se por multiplicador das condições necessárias de optimalidade para x todo o elemento (λ, μ, p) onde

- λ é um escalar não negativo,
- μ é uma medida regular não negativa em $[0, 1]$, e
- $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua,

e para o qual existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, mensurável, tais que são satisfeitas as condições

$$-p(1) - \int_{[0,1]} \gamma d\mu \in \lambda \partial_L g(x(1)), \quad (3.3.1)$$

$$(-\dot{p}(t), \dot{x}(t)) \in \partial H(t, x(t), p(t) + \int_{[0,t]} \gamma d\mu) \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (3.3.2)$$

$$\text{Supp}(\mu) \subset \{t \in [0, 1] : d(t, x(t)) = 0\}, \quad (3.3.3)$$

$$\gamma(t) \in \partial_x^+ d(t, x(t)) \quad \mu - \text{q.s.} \quad (3.3.4)$$

Nas expressões acima, $\text{Supp}(\mu)$ representa o conjunto suporte da medida μ , e $\partial_x^+ d(t, x)$ representa o conjunto

$$\partial_x^+ d(t, x) = \text{co}\{\lim \zeta_i : \zeta_i \in \partial_x d(t_i, x_i), (t_i, x_i) \rightarrow (t, x)\}.$$

As condições necessárias de optimalidade consistem em afirmar a existência de um multiplicador não identicamente nulo, para cada solução do problema, ver [Cla83], [Cla89], ou [CL87].

Teorema 3.3.1 (Condições necessárias de optimalidade). *Se x é solução local de (P) , então existe um multiplicador (λ, μ, p) para x tal que*

$$\lambda + \mu([0, 1]) > 0. \quad (3.3.5)$$

O multiplicador das condições necessárias de optimalidade pode ser encarado como um “multiplicador de Lagrange” de um problema de optimização, em que os diferentes elementos do multiplicador representam contribuições da função objectivo e das restrições para a caracterização das soluções. O elemento λ do multiplicador traduz a influência da função custo e a medida μ é consequência da existência de

restrições de estado. A condição (3.3.3) que caracteriza o suporte de μ pode ser encarada como uma generalização da tradicional condição de folgas complementares. O elemento p resulta da restrição imposta pela inclusão diferencial que caracteriza a dinâmica.

A condição (3.3.5) afirma que é possível escolher um multiplicador não trivial, isto é, diferente do elemento identicamente nulo. De facto, sem tal condição o teorema acima seria completamente trivial, pois sendo λ e μ nulos, as condições (3.3.1) e (3.3.2) implicam que o elemento p do multiplicador seja identicamente nulo.

Uma propriedade dos multiplicadores das condições necessárias de optimalidade reside no facto do conjunto de multiplicadores para uma dada solução local constituir um cone. De facto, sendo x uma solução local de (P) , (λ, μ, p) um multiplicador para x e α um escalar positivo, facilmente se verifica que $(\alpha\lambda, \alpha\mu, \alpha p)$ é também um multiplicador para x (ver [Cla83]).

Os multiplicadores para uma dada solução do problema (P) dividem-se naturalmente em dois conjuntos distintos, conforme o elemento λ seja nulo ou não. No primeiro caso, os multiplicadores não possuem nenhuma informação sobre a função objectivo. A existência de multiplicadores com $\lambda > 0$ é caracterizada na literatura pela noção de normalidade ([Cla83], [Loe85]). Este conceito tem sido definido na literatura de várias formas nem sempre coincidentes. As noções de normalidade e normalidade forte que serão utilizadas neste trabalho constituem uma transposição para problemas com restrições de estado daquelas utilizadas em [CV83], num âmbito de problemas apenas com restrições sobre o estado final.

Definição 3.3.1 (Normalidade). *Seja x uma solução local de (P) . Diz-se que (P) é normal em x se existir um multiplicador para x com $\lambda = 1$.*

Por simplicidade de linguagem, todo o multiplicador com $\lambda > 0$ designa-se por multiplicador normal.

Definição 3.3.2 (Normalidade forte). *Seja x uma solução local de (P) . Diz-se que (P) é fortemente normal em x se todo o multiplicador para x que verifica $\lambda = 0$ também verifica $\mu \equiv 0$.*

Seguindo tais noções, é imediato concluir que se (P) for fortemente normal numa dada solução então será normal nessa mesma solução.

Em [FV94] (ver também [Fer94]) é analisado um problema que inclui como caso particular o problema aqui tratado. Aí é observado que, quando a restrição de estado está activa no instante inicial, existe sempre um multiplicador das condições necessárias de optimalidade que se caracteriza ter $\lambda = 0$, μ ser a medida unitária concentrada em $\{0\}$ e $p \equiv -d_x(0, x_0)$, onde d_x representa a componente segundo o estado da derivada direccionada da função d , que se supõe continuamente diferenciável. A existência de tais multiplicadores, ditos multiplicadores degenerados, retira qualquer utilidade às condições necessárias de optimalidade, tais como formuladas

no teorema 3.3.1, uma vez que ela é válida para qualquer trajectória x admissível para (P) .

Em [Fer94] e [FV94] são propostas condições de qualificação das restrições que garantem a existência de multiplicadores não degenerados. No caso mais geral aí abordado são apresentadas qualificações das restrições que garantem a existência de multiplicadores tais que

$$\lambda + \mu([0, 1]) > 0.$$

São também estudadas condições de qualificação das restrições que garantem a existência de multiplicadores normais.

Em [RV95] é também apresentada uma qualificação das restrições que garante a existência de multiplicadores normais. Esta qualificação será discutida no capítulo 4 pois também está relacionada com propriedades de continuidade da função valor.

A problemática da existência de multiplicadores degenerados é também analisada em [AA97]. Nos problemas aí tratados, as restrições de estado são invariantes no tempo e a multifunção F depende de uma forma Lipschitz contínua conjuntamente no tempo e no estado. Tais características permitem efectuar uma mudança de variável incorporando o tempo na variável de estado. Desta forma, na definição de multiplicador aí utilizada, é incluída a condição de a função $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \begin{cases} H(t, x(t), p(t)) + \int_{[0, t[} \gamma d\mu & t \in]0, 1] \\ H(0, x_0, p(0)) & t = 0 \end{cases}$$

ser absolutamente contínua em $[0, 1]$; a condição (3.3.2) é substituída por

$$(\dot{h}(t), -\dot{p}(t), \dot{x}(t)) \in \partial H(t, x(t), p(t)) + \int_{[0, t[} \gamma d\mu \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (3.3.6)$$

onde agora o gradiente generalizado é relativo aos três argumentos do hamiltoniano (que será neste caso uma função Lipschitz contínua). A continuidade da função h fornece uma caracterização adicional das singularidades da medida μ . Em particular, elimina em muitas situações os multiplicadores degenerados acima referidos, uma vez que de um modo geral tais multiplicadores tornam a função h descontínua em 0.

Capítulo 4

Função Valor e Condições de Hamilton-Jacobi

Neste capítulo é feita uma revisão da literatura sobre função valor e condições de Hamilton-Jacobi para problemas de controlo óptimo. Inicialmente aborda-se o caso de problemas sem restrições de estado ao longo do tempo (problemas de estado livre), sendo depois tratados os problemas com restrições de estado.

Relativamente aos problemas com estado livre, é feita uma breve introdução sobre a função valor para esta classe de problemas e as suas principais propriedades. Segue-se uma apresentação da equação de Hamilton-Jacobi, que fornece uma caracterização pontual da função valor, sendo apresentadas diversas generalizações do conceito de solução desta equação que têm vindo a ser propostas. Posteriormente analisam-se alguns resultados sobre funções de verificação e condições suficientes de optimalidade. Estes resultados têm especial interesse em problemas com restrições sobre o estado final.

Relativamente aos problemas com restrições de estado, são apresentados e discutidos os resultados mais relevantes relacionados com condições que garantem propriedades de continuidade da função valor. São também analisados resultados que relacionam a função valor com a equação de Hamilton-Jacobi. O facto do conjunto de estados admissíveis ser fechado, levanta desde logo a questão de como definir o significado da equação de Hamilton-Jacobi em pontos da fronteira deste conjunto. Neste contexto, é de realçar a noção de solução viscosa restrita da equação de Hamilton-Jacobi.

4.1 Problemas com estado livre

Considere-se o seguinte problema de controlo óptimo com estado livre, onde a dinâmica é descrita por uma inclusão diferencial definida pela multifunção $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, o custo a minimizar é traduzido pela função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o estado inicial é fixo e

representado pelo ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e o conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ traduz eventuais restrições sobre o estado final.

$$(L) \quad \min g(x(1))$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (4.1.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.1.2)$$

$$x(1) \in C. \quad (4.1.3)$$

Na apresentação que se segue, e excepto quando expressamente referido, consideram-se válidas as seguintes hipóteses sobre os dados do problema:

(H1) $F(t, x)$ é não vazio, compacto e convexo para todo o (t, x) ;

(H2) a multifunção F é mensurável de Lipschitz;

(H3) a função g é localmente Lipschitz contínua;

(H4) o conjunto C é fechado.

Considere-se o problema (L) embebido numa família de problemas $(L_{s,y})$, onde $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ representa a condição inicial a que terão de obedecer todos os arcos admissíveis, isto é,

$$(L_{s,y}) \quad \min g(x(1))$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [s, 1] - \text{q.s.}, \quad (4.1.4)$$

$$x(s) = y, \quad (4.1.5)$$

$$x(1) \in C. \quad (4.1.6)$$

A função valor associada ao problema (L) é definida por

$$V(s, y) = \inf\{L_{s,y}\} \quad \forall (s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n, \quad (4.1.7)$$

onde $\inf\{L_{s,y}\}$ representa o custo óptimo do problema $(L_{s,y})$, ver, por exemplo, [FR75] ou [FS93]. Caso $(L_{s,y})$ não tenha soluções admissíveis, convencionam-se que $V(s, y) = +\infty$. Quando a condição inicial é da forma $(1, y)$ o problema de optimização correspondente será trivial. Em tais casos, a função valor será, obviamente, dada por

$$V(1, y) = \begin{cases} g(y), & y \in C, \\ +\infty, & y \notin C. \end{cases}$$

Partindo desta definição, facilmente se podem concluir algumas propriedades de monotonia da função valor (ver [FR75]) quando avaliada ao longo de trajectórias da inclusão diferencial.

Facto 4.1.1. *Seja x uma trajectória de F num subintervalo de $[0, 1]$. Então $t \mapsto V(t, x(t))$ é crescente nesse mesmo subintervalo.*

Facto 4.1.2. *Seja $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ e seja x^* uma solução de $(L_{s,y})$. Então $t \mapsto V(t, x^*(t))$ é constante em $[s, 1]$.*

Um dos tópicos que desde há muito tem sido alvo de atenção por parte de muitos investigadores é a forma como os dados do problema influenciam as propriedades da função valor. Ou seja, de que forma propriedades da multifunção F , da função g , e do conjunto C , afectam propriedades de continuidade e diferenciabilidade da função valor.

Suponha-se por agora que não existem restrições no estado final. Neste caso, pode concluir-se que a função valor é finita. Esta afirmação é uma consequência imediata da existência de trajectórias da inclusão diferencial, da continuidade da função g e do teorema 2.4.2. É também possível concluir que a função valor é localmente Lipschitz contínua, resultado que se pode obter por aplicação directa do teorema 2.4.1 sobre trajectórias da inclusão diferencial. Estas propriedades encontram-se demonstradas em diversos trabalhos, como por exemplo [FR75], [Cla83] ou [VW90].

Relativamente a propriedades de diferenciabilidade da função valor, e ainda no caso sem restrições sobre o estado final, verifica-se existirem muitos problemas de interesse para os quais não é possível garantir a diferenciabilidade da função valor em todo o seu domínio. Exemplos ilustrativos podem ser encontrados em [FR75] ou [Cla83].

Considerem-se agora problemas com restrições no estado final. Em tais casos podem existir condições iniciais (s, y) para as quais não há soluções admissíveis para $(L_{s,y})$, pelo facto de não existirem trajectórias de F em $[s, 1]$ com condição inicial y e estado final no conjunto C . Como já referido, em tais pontos atribui-se a V o valor $+\infty$. Assim, para problemas com restrições sobre o estado final, não é possível, de uma forma relativamente genérica, estabelecer condições sobre os dados do problema que garantam a continuidade, quanto mais a diferenciabilidade, da função valor. Nestes problemas, pode ainda acontecer que o conjunto onde a função valor toma valores finitos tenha interior vazio. É de referir que em alguns trabalhos, como [Fra89] ou [Fra93], os problemas com restrições sobre o estado final são reduzidos a problemas com estado final livre, tomando como custo a função $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in C, \\ +\infty & x \notin C. \end{cases}$$

Para estes problemas, demonstra-se em [Fra93] que a função valor é semicontínua inferior. Este resultado resulta de uma aplicação simples dos teoremas 2.4.1 e 2.4.2 e do facto da função $\tilde{g}$ ser semicontínua inferior (uma vez que C é fechado).

4.2 Equação de Hamilton-Jacobi

As propriedades de monotonia da função valor quando avaliada ao longo de trajetórias dinamicamente admissíveis constituem uma caracterização integral da função valor.

Sob certas hipóteses, é possível substituir esta caracterização da função valor por uma outra equivalente, mas de carácter pontual. Uma das hipóteses habitualmente considerada na literatura ([Cla83], [Loe93], [FS93]) é a continuidade da multifunção F que define a dinâmica. Em toda esta secção é admitida esta hipótese, excepto quando expressamente se afirme o contrário.

Quando a função valor é diferenciável num dado ponto (s, y) pode concluir-se que nesse ponto se verifica a equação

$$V_t(s, y) - H(s, y, -V_x(s, y)) = 0. \quad (4.2.1)$$

Esta equação em derivadas parciais é habitualmente designada por equação de Hamilton-Jacobi-Bellman ou simplesmente equação de Hamilton-Jacobi, ver [FR75]. No caso da função valor V ser diferenciável em todo o $(s, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n$, verifica-se que satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi com a condição fronteira $V(1, y) = g(y)$ para todo o $y \in C$.

Como já foi referido, de um modo geral a função valor não é diferenciável, mesmo em problemas sem restrições no estado final. Assim, a caracterização da função valor como solução da equação de Hamilton-Jacobi (com a condição fronteira acima referida) não pode, na maioria dos casos, ser interpretada no sentido clássico, mas sim como sendo uma solução generalizada de tal equação.

O estudo de soluções generalizadas da equação de Hamilton-Jacobi tem sido alvo de diversos trabalhos, tais como [Cla83], [CL83], [CEL84], [Fra89], [VW90], [Fra93], [FS93] e [CLSW95]. De uma forma geral, pode afirmar-se que os diversos conceitos de solução generalizada propostos nos trabalhos referidos vão no sentido de substituir a equação (4.2.1) por outras condições que envolvem conceitos generalizados de gradiente ou de derivada direccionada da função valor. Outro assunto que também é abordado em alguns destes trabalhos é a unicidade de solução (generalizada) da equação de Hamilton-Jacobi com a respectiva condição fronteira.

Em seguida é feita uma breve apresentação dos principais resultados constantes dos trabalhos acima referidos.

Solução quase-sempre

Uma função Lipschitz contínua diz-se ser uma solução quase-sempre da equação de Hamilton-Jacobi se esta for válida em todos os pontos (s, y) em que a função for diferenciável.

Como já foi referido, em problemas com estado final livre, a função valor V é localmente Lipschitz. O teorema de Rademacher permite afirmar que V é diferenciável

excepto num conjunto de medida de Lebesgue nula (em $\mathbb{R}^{1+n}$). Segue-se então que V é solução quase-sempre da equação de Hamilton-Jacobi.

Quando aplicado a problemas com restrições no estado final, este conceito não se revela muito interessante, pois podem existir diversas soluções quase-sempre da equação de Hamilton-Jacobi satisfazendo a condição fronteira $V(1, y) = g(y)$ em C , ver [FS93].

Solução estendida

Seja W uma função localmente Lipschitz. Diz-se que W é uma solução da equação de Hamilton-Jacobi estendida se

$$\min_{(\alpha, \beta) \in \partial W(t, x)} \{\alpha - H(t, x, -\beta)\} = 0 \quad \forall (t, x) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n. \quad (4.2.2)$$

Este conceito de solução é apresentado em [Cla83] e nos trabalhos aí referenciados.

Note-se que esta equação se reduz à clássica equação de Hamilton-Jacobi caso a função W seja diferenciável. Em particular, pode concluir-se que para qualquer x trajectória de F e para qualquer W que satisfaça (4.2.2) a função $t \mapsto W(t, x(t))$ é crescente (ver [Cla83]).

Pode ainda mostrar-se que se a função valor for localmente Lipschitz, tal como se verifica quando o estado final é livre, então ela é solução da equação de Hamilton-Jacobi estendida.

Solução viscosa

A noção de solução viscosa, proposta em [CL83], constitui outra forma de generalizar o conceito de solução da equação de Hamilton-Jacobi. Esta noção tem por base as definições que se seguem ([FS93]).

Definição 4.2.1 (Subsolução viscosa). *Seja $v : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. v diz-se uma subsolução viscosa da equação de Hamilton-Jacobi se sempre que $v - \varphi$ atinge um máximo, igual a zero, num ponto $(s, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n$, para alguma função $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suave, se verifica que*

$$\varphi_t(s, y) - H(s, y, -\varphi_x(s, y)) \geq 0.$$

Definição 4.2.2 (Sobressolução viscosa). *Seja $v : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. v diz-se uma sobressolução viscosa da equação de Hamilton-Jacobi se sempre que $v - \varphi$ atinge um mínimo, igual a zero, num ponto $(s, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n$, para alguma função $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suave, se verifica que*

$$\varphi_t(s, y) - H(s, y, -\varphi_x(s, y)) \leq 0.$$

Definição 4.2.3 (Solução viscosa). *Seja $v : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. v diz-se uma solução viscosa da equação de Hamilton-Jacobi se v for simultaneamente subsolução viscosa e sobressolução viscosa.*

Caracterizações equivalentes da noção de solução viscosa podem ser encontradas em [CEL84]. A importância da noção de solução viscosa da equação de Hamilton-Jacobi reside num resultado de unicidade demonstrado em [CL83]. Este resultado assegura que se a função valor for contínua e limitada, então ela será a única solução viscosa da equação de Hamilton-Jacobi com a respectiva condição fronteira. Um vez que para problemas com estado final livre, a função valor é contínua (e logo limitada em qualquer conjunto limitado), este resultado garante uma caracterização pontual única da função valor, em qualquer conjunto limitado.

Solução contingente

Em [Fra89] e [Fra93] são abordados problemas cuja função custo g toma valores em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nestes problemas será necessário considerar que a função valor V pode tomar valores infinitos. No entanto, considerando apenas os pontos onde V é finita, é possível estabelecer resultados de monotonia de V ao longo de trajectórias, bem como interpretar a função valor como solução da equação de Hamilton-Jacobi num sentido generalizado.

Em [Fra93] mostra-se que a função valor V é semicontínua inferior e que satisfaz duas desigualdades em todos os pontos onde é finita. Estas desigualdades envolvem derivadas inferiores de Dini (também designadas por epiderivadas contingentes), são válidas em todo o $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ e tomam a seguinte forma

$$\inf_{v \in F(s, y)} d^- V((s, y); (1, v)) \leq 0, \quad \text{se } s < 1, \quad (4.2.3)$$

$$\sup_{v \in F(s, y)} d^- V((s, y); (-1, -v)) \leq 0, \quad \text{se } s > 0. \quad (4.2.4)$$

Naturalmente que a função valor continua a satisfazer a condição fronteira terminal $V(1, y) = g(y)$, $\forall y$. É também mostrado que a função valor é a única função que satisfaz a condição fronteira final e as desigualdades acima. Note-se, mais uma vez, que estas desigualdades se reduzem à equação de Hamilton-Jacobi caso V seja diferenciável.

Em [Fra93] é ainda estabelecida uma relação entre funções contínuas que sejam solução de (4.2.3)-(4.2.4) e soluções viscosas da equação de Hamilton-Jacobi.

Solução proximal

Em [CLSW95] é efectuada uma caracterização da função valor como solução proximal da equação de Hamilton-Jacobi.

Para problemas com estado final livre, mas com função custo $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontínua inferior, demonstra-se que existe uma única função semicontínua in-

ferior $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que satisfaz

$$\theta + \min_{v \in F(t, x)} \{\zeta \cdot v\} = 0 \quad \forall (\theta, \zeta) \in \partial_P \varphi(t, x) \quad \forall (t, x) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n, \quad (4.2.5)$$

$$\liminf_{t \uparrow 1, y \rightarrow x} \varphi(t, x) = g(x) = \varphi(1, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2.6)$$

Mostra-se ainda que tal função é a função valor.

Caso g seja contínua, a condição (4.2.5) pode ser substituída pelas condições

$$\theta + \min_{v \in F(t, x)} \{\zeta \cdot v\} \leq 0 \quad \forall (\theta, \zeta) \in \partial_P \varphi(t, x) \quad \forall (t, x) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n, \text{ e}$$

$$\theta + \min_{v \in F(t, x)} \{\zeta \cdot v\} \leq 0 \quad \forall (\theta, \zeta) \in \partial^P \varphi(t, x) \quad \forall (t, x) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n,$$

Neste caso, é ainda mostrado que as noções de solução proximal, solução contingente e solução viscosa são equivalentes.

Problemas com dinâmica mensurável

Uma análise dos mecanismos envolvidos na obtenção da equação de Hamilton-Jacobi, na sua versão clássica ou em qualquer das generalizações apresentadas atrás, permite constatar que o facto da dinâmica ter uma dependência contínua na variável independente desempenha um papel fundamental. Em [VW90] é apresentada uma generalização da equação de Hamilton-Jacobi para problemas em que tal dependência é simplesmente mensurável. Aí é demonstrado que a função valor V satisfaz a equação

$$\min_{v \in F(s, y)} d^- V((s, y); (1, v)) = 0 \quad \forall (s, y) \in J \times \mathbb{R}^n,$$

onde J é um subconjunto de $[0, 1]$ de medida total.

4.3 Funções de verificação e condições suficientes

A constância da função valor ao longo de uma trajectória é uma condição necessária à optimalidade dessa mesma trajectória. No entanto, o conceito de função de verificação (ver [FR75], [Cla83], ou [Loe93]), relacionado com o de função valor, permite estabelecer condições suficientes de optimalidade.

Definição 4.3.1 (Função de verificação). *Seja $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ uma condição inicial. A função $W : [s, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ diz-se ser uma função de verificação para esta condição inicial se $W(1, x) = g(x)$, $\forall x \in C$, e se para todo o x trajectória de F , com $x(s) = y$, a função $t \mapsto W(t, x(t))$ for crescente.*

É de notar que a função valor será sempre uma função de verificação, para qualquer condição inicial. No entanto, poderão existir condições iniciais para as quais existam mais funções de verificação, para além da função valor. O seguinte resultado, ver [FR75], exprime a forma como se podem obter condições suficientes de optimalidade partindo de funções de verificação, justificando o interesse deste conceito.

Facto 4.3.1. *Seja (s, y) uma condição inicial e W uma função de verificação para esta condição; seja x^* uma trajectória de F , com $x(s) = y$ e $x^*(1) \in C$, e tal que $t \mapsto W(t, x^*(t))$ é constante. Então x^* é óptima para $(L_{s,y})$. Tem-se ainda que $W(s, y) = V(s, y)$.*

A propriedade de monotonia das funções de verificação quando avaliadas ao longo de trajectórias de F pode, sob certas condições, ser caracterizada de uma forma pontual. Esta caracterização pontual é descrita por uma desigualdade do tipo

$$W_t(s, y) - H(s, y, -W_x(s, y)) \geq 0 \quad (4.3.1)$$

no caso da função de verificação W ser diferenciável no ponto (s, y) .

Em [Cla83] a condição (4.3.1) é substituída por

$$\min_{(\alpha, \beta) \in \partial W(s, y)} \{\alpha - H(s, y, -\beta)\} \geq 0 \quad (4.3.2)$$

para funções de verificação W localmente Lipschitz.

O facto da função valor em problemas sem restrições de estado final ser localmente Lipschitz assegura a existência de funções de verificação localmente Lipschitz para tais problemas.

Em problemas com restrições no estado final, a função valor não é, de um modo geral, localmente Lipschitz. Em [CV83] (ver também [Cla83]) é apresentada uma condição que garante a existência de funções de verificação localmente Lipschitz para problemas com restrições no estado final. Esta condição está relacionada com o comportamento do custo óptimo do problema face a perturbações na restrição sobre o estado final. Este comportamento é caracterizado pela seguinte noção de calma. Esta propriedade do problema é uma forma de qualificação da restrição sobre o estado final e caracteriza a sensibilidade do custo óptimo do problema face a perturbações na restrição sobre o estado final.

Definição 4.3.2 (Calma). *Seja x^* uma solução de (L) . (L) diz-se calmo se*

$$\exists K > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \inf \{L_u\} \geq g(x^*(1)) - K|u|$$

onde $\inf \{L_u\}$ representa o custo óptimo do problema que se obtém substituindo no problema (L) a restrição no estado final por $x(1) \in C + u$.

O resultado seguinte [CV83] relaciona a propriedade de calma com a existência de funções de verificação localmente Lipschitz, estabelecendo condições necessárias e suficientes de optimalidade.

Facto 4.3.2. *Seja x^* admissível para (L) .*

Suponha-se que existe uma função $W : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz tal que

$$\min_{(\alpha, \beta) \in \partial W(s, y)} \{\alpha - H(s, y, -\beta)\} = 0 \quad \forall (s, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n, \quad (4.3.3)$$

$$W(1, y) = g(y) \quad \forall y \in C, \text{ e} \quad (4.3.4)$$

$$W(0, x_0) = g(x^*(1)). \quad (4.3.5)$$

Então x^ é solução de (L) e (L) é calmo.*

Suponha-se que x^ é solução de (L) e que (L) é calmo. Então existe uma função $W : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que as condições acima se verificam.*

Também em [CV83] são apresentados resultados que relacionam os conceitos de normalidade e de calma, estabelecendo uma ligação entre condições necessárias de optimalidade na forma de princípio do máximo e condições suficientes de optimalidade na forma de existência de funções de verificação Lipschitz contínuas.

4.4 Condições necessárias e função valor

As condições necessárias de optimalidade para uma solução x de (L) na forma hamiltoniana (ver [Cla83], por exemplo) garantem a existência de um arco p e de um escalar $\lambda > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|p\| + \lambda &> 0, \\ -p(1) &\in \lambda \partial_L g(x(1)) + LN_C(x(1)), \\ (-\dot{p}(t), \dot{x}(t)) &\in \partial H(t, x(t), p(t)), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.} \end{aligned}$$

A noção intuitiva de que em cada instante o valor $p(t)$ caracteriza a variação do custo óptimo em função de perturbações na variável de estado, é analisada num contexto não diferenciável em alguns trabalhos.

Em [CV87] mostra-se que sob certas condições, de que $C = \mathbb{R}^n$ é um caso particular, existem um multiplicador das condições necessárias de optimalidade p e uma função de verificação W tais que a relação

$$-p(t) \in \partial_x W(t, x(t))$$

se verifica num subconjunto de $[0, 1]$ de medida total e que contém os pontos 0 e 1.

Em [Vin88] abordam-se problemas com $C = \mathbb{R}^n$ e mostra-se que a função valor, Lipschitz neste caso, é tal que para algum multiplicador das condições necessárias de optimalidade se tem que

$$\begin{aligned} -p(0) &\in \partial_x V(0, x(0)), \\ (h(t), -p(t)) &\in \partial V(t, x(t)), \quad \forall t \in]0, 1[, \end{aligned}$$

onde $h(t) = H(t, x(t), p(t))$.

4.5 Problemas com restrições de estado

No caso de problemas de controlo óptimo com restrições de estado, formulados como o problema (P) apresentado no capítulo 3, é também possível construir uma família

de problemas parametrizada pelas condições iniciais que tomará a seguinte forma:

$$(P_{s,y}) \quad \min \quad g(x(1))$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [s, 1] - \text{q.s.}, \quad (4.5.1)$$

$$d(t, x(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [s, 1], \quad (4.5.2)$$

$$x(s) = y. \quad (4.5.3)$$

As hipóteses sobre os dados do problema são, no que respeita a g e a F , as mesmas que se consideraram nos problemas de estado livre, continuando a supor-se que F é contínua. Assume-se também que a função d que caracteriza a restrição de estado é localmente Lipschitz contínua.

A esta família de problemas pode igualmente associar-se uma função V , designada ainda por função valor e definida por $V(s, y) = \inf\{P_{s,y}\}$. Mais uma vez, considera-se que $V(s, y) = +\infty$ sempre que o problema $(P_{s,y})$ não tenha trajectórias admissíveis. Tal acontece, em particular, quando $d(s, y) > 0$.

Esta definição de função valor constitui uma óbvia extensão para problemas com restrições de estado daquela considerada em problemas com estado livre (ver [Son86] ou [FS93], por exemplo). Em seguida apresenta-se uma revisão dos principais resultados disponíveis na literatura sobre a função valor em problemas com restrições de estado. Estes resultados podem dividir-se em dois grandes grupos. Por um lado, têm-se procurado caracterizações das restrições de estado que garantam propriedades de continuidade da função valor, encontrando-se os trabalhos [Son86], [RV95], [FR99], e [Mot95] entre os mais significativos. Por outro, tem havido um esforço no sentido de relacionar a função valor com a equação de Hamilton-Jacobi, destacando-se nesse tópico os trabalhos [Son86], [Lor87], [IK96], [FS93]. Esta divisão não é de forma alguma estanque, até porque a interpretação da função valor como solução, num sentido generalizado, da equação de Hamilton-Jacobi exige em alguns casos propriedades de continuidade.

Paralelamente ao que acontece em problemas de estado livre, a função valor V acima definida possui as propriedades enunciadas em seguida.

Facto 4.5.1. *Seja x uma trajectória de F num subintervalo de $[0, 1]$ e satisfazendo aí a condição $d(t, x(t)) \leq 0$. Então $t \mapsto V(t, x(t))$ é crescente nesse mesmo subintervalo.*

Facto 4.5.2. *Seja $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ e seja x^* uma solução de $(P_{s,y})$. Então $t \mapsto V(t, x^*(t))$ é constante em $[s, 1]$.*

É de notar que a monotonia de V é agora válida apenas ao longo de trajectórias de F que satisfazem a restrição de estado. A consideração de restrições de estado pode ainda acarretar que a função valor não seja contínua, ou mesmo finita, um pouco à semelhança do que acontecia em problemas com restrições apenas sobre o estado final.

Uma condição que garante a continuidade da função valor é a existência de trajectórias próximas admissíveis (ver [RV95], [FR99]). Esta hipótese consiste em afirmar que existe uma constante $K > 0$ tal que para qualquer $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$, verificando $d(s, y) \leq 0$, e qualquer x trajectória de F em $[s, 1]$, verificando $x(s) = y$, existe z , trajectória de F em $[s, 1]$, verificando $z(s) = y$,

$$d(t, z(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [s, 1], \text{ e}$$

$$\max_{t \in [s, 1]} |x(t) - z(t)| \leq K \max_{t \in [s, 1]} (d(t, x(t)) \vee 0).$$

O facto da existência de trajectórias próximas admissíveis ser uma condição suficiente para a Lipschitz continuidade local da função valor resulta de uma simples aplicação do teorema 2.4.1.

Em [RV95] é apresentada uma qualificação das restrições de estado que garante a existência de trajectórias próximas admissíveis. A principal limitação do resultado aí apresentado prende-se com a necessidade da função d ser duas vezes continuamente diferenciável.

Em [FR99] é apresentada outra qualificação das restrições que também garante a existência de trajectórias próximas admissíveis. Tal qualificação generaliza a anterior, na medida em que impõe hipóteses mais fracas sobre a restrição de estado. Contudo, considera-se que a restrição de estado é independente do tempo. Aí, a restrição de estado é caracterizada por uma relação da forma $x(t) \in \overline{X}$, onde X é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. A qualificação das restrições consiste em afirmar que o conjunto X satisfaz as seguintes condições:

- $X = X_1 \cap X_2$, onde X_1 e X_2 são abertos que verificam as seguintes condições, respectivamente;
- existem constantes η, q e r , positivas, e α selecção contínua de F , definida em $[0, 1] \times \partial X + \eta B^n$, tais que para qualquer $(t, x) \in [0, 1] \times (X_1 \cup (\partial X + \eta B^n))$ se tem

$$x + s\alpha(t, x) + srB^n \subset X_1, \quad \forall s \in]0, q];$$

- $\forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial X_2$ verifica-se que $0 \in F(t, x)$; mais ainda, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $(t, x) \in [0, 1] \times \partial X_2$ existe um cone fechado C e uma constante $\varepsilon > 0$ tais que

$$(x + C_\varepsilon) \cap (x + \delta B^n) \cap \overline{X_2} = \{x\} \quad \text{e} \quad F(s, y) \subset C,$$

$\forall (s, y) \in ((t, x) + \delta B^{1+n}) \cap ([0, 1] \times \overline{X_2})$, onde C_ε representa a ε vizinhança cónica de C .

O resultado aí apresentado pode resumir-se na seguinte proposição, adaptada para as hipóteses sobre os dados aqui consideradas.

Proposição 4.5.1. *Suponha-se que a restrição de estado é caracterizada pela condição $x(t) \in \overline{X}$ onde o conjunto X satisfaz as hipóteses acima considerada. Então*

existe $K > 0$ tal que, para quaisquer $(s, y) \in [0, 1] \times \overline{X}$ e x , trajectória de F em $[s, 1]$ com $x(s) = y$, existe z , trajectória de F em $[s, 1]$ com $z(s) = y$, verificando

$$z(t) \in X(t) \quad \forall t \in [s, 1],$$

$$\max_{t \in [s, 1]} |z(t) - x(t)| \leq K \max_{t \in [s, 1]} d_X(x(t)).$$

A principal dificuldade na interpretação da função valor como solução da equação de Hamilton-Jacobi resulta do facto de esta apenas estar definida no conjunto de pontos (s, y) que satisfazem a restrição de estado. Em particular, será necessário definir o significado da equação de Hamilton-Jacobi nos pontos (s, y) , com $s \in]0, 1[$, que estão na fronteira do conjunto de pontos que satisfazem a restrição de estado.

Em [Son86] é introduzido o conceito de solução viscosa restrita da equação de Hamilton-Jacobi, que se apresenta em seguida (ver também [FS93]). Este conceito encontra-se apenas definido para problemas em que as restrições de estado são invariantes no tempo. É também habitual que a restrição de estado seja caracterizada pela relação $x(t) \in \overline{X}$, onde $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Obviamente que tal conceito pode ser aplicado a problemas com restrições variantes no tempo por inclusão da variável independente no estado, isto se a dinâmica for Lipschitz no tempo.

Definição 4.5.1. *Uma função contínua v diz-se uma solução viscosa restrita da equação de Hamilton-Jacobi em $]0, 1[\times \overline{X}$ se v for uma subsolução viscosa da equação de Hamilton-Jacobi em $]0, 1[\times X$ e uma sobressolução viscosa em $]0, 1[\times \overline{X}$.*

Em [Son86] é demonstrado que se a função valor V for limitada e uniformemente contínua em $\overline{X}$, então ela é a única solução viscosa restrita da equação de Hamilton-Jacobi em $]0, 1[\times \overline{X}$ com a condição fronteira $V(1, x) = g(x)$ para todo o $x \in \overline{X}$. Neste trabalho é também considerada uma qualificação das restrições, semelhante às acima referidas, e que garante as propriedades da função valor atrás supostas.

Em [IK96] a noção de solução viscosa restrita é estendida para funções possivelmente descontínuas mas limitadas. Esta extensão é efectuada recorrendo a conceitos de envelopes semicontínuos superiores e inferiores. Aí, é também considerada uma qualificação das restrições, mais uma vez com grandes semelhanças com as acima referidas, que garante a continuidade da função valor.

Capítulo 5

Verificação em Problemas com Restrições de Estado

Neste capítulo apresenta-se um conjunto de resultados sobre funções de verificação para problemas de controlo óptimo com restrições de estado. Como será mostrado, propriedades de monotonia de funções de verificação avaliadas ao longo de trajetórias admissíveis podem ser utilizadas para estabelecer condições suficientes de optimalidade. Desta forma, generaliza-se para problemas com restrições de estado uma técnica comum nos problemas sem restrições de estado. Demonstra-se ainda que toda a função de verificação Lipschitz contínua satisfaz uma equação que se pode considerar uma generalização da equação de Hamilton-Jacobi.

Mostra-se também que a existência de funções de verificação Lipschitz contínuas é equivalente a uma determinada qualificação das restrições de estado, expressa pela noção de calma. Esta propriedade caracteriza a variação do custo óptimo face a perturbações nas restrições de estado.

A existência de funções de verificação Lipschitz contínuas, sob a hipótese de calma, é demonstrada de uma forma construtiva, uma vez que estas funções são obtidas como funções valor de famílias de problemas auxiliares.

5.1 Calma local e calma

O estudo aqui apresentado incidirá sobre problemas de controlo óptimo com restrições de estado que se possam reduzir à formulação indicada no capítulo 3. De um modo geral, este problema será ainda identificado por (P) .

Em seguida é apresentada a qualificação das restrições de estado que será utilizada ao longo deste capítulo. Seja então $\bar{x}$ admissível para (P) e seja $\epsilon > 0$. Considere-se a família de problemas, $P_{\bar{x},\epsilon}(\alpha)$, onde α é um escalar não negativo, definida em

seguida.

$$P_{\bar{x},\epsilon}(\alpha) \quad \min \quad g(x(1))$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (5.1.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (5.1.2)$$

$$d(t, x(t)) \leq \alpha, \quad \forall t \in [0, 1], \quad (5.1.3)$$

$$\text{gr}(x) \subset T(\bar{x}; \epsilon). \quad (5.1.4)$$

Para cada $\alpha \geq 0$, $\inf\{P_{\bar{x},\epsilon}(\alpha)\}$ irá representar o custo óptimo de $P_{\bar{x},\epsilon}(\alpha)$.

Designa-se ainda por (P_α) , onde $\alpha \geq 0$, o problema que se obtém retirando a restrição (5.1.4) do problema $P_{\bar{x},\epsilon}(\alpha)$. Note-se que esta nova família de problemas não está relacionada com qualquer trajectória admissível para (P) . De um modo semelhante, $\inf\{P_\alpha\}$ representa o custo óptimo de (P_α) .

A qualificação das restrições de estado é caracterizada pelas seguintes noções.

Definição 5.1.1 (Calma local). *Seja x^* uma trajectória localmente óptima para o problema (P) . Se existirem números ϵ e K , maiores do que zero, tais que*

$$\inf\{P_{x^*,\epsilon}(\alpha)\} \geq g(x^*(1)) - K \cdot \alpha \quad \forall \alpha \geq 0 \quad (5.1.5)$$

então diz-se que (P) é localmente calmo (de constante K) em x^ .*

Definição 5.1.2 (Calma). *Se existir uma constante $K > 0$ tal que*

$$\inf\{P_\alpha\} \geq \inf\{P\} - K \cdot \alpha \quad \forall \alpha \geq 0 \quad (5.1.6)$$

então diz-se que (P) é calmo (de constante K).

A noção de calma é habitualmente utilizada em problemas de optimização para caracterizar a variação do custo óptimo face a perturbações em algumas ou mesmo em todas as restrições presentes na formulação do problema, tal como pode ser visto em [Cla83] para problemas abstractos de programação matemática.

As noções de calma acima apresentadas são semelhantes àquela utilizada em [RV95] (ver também [CV83] num contexto de restrições apenas sobre o estado final). Estas noções caracterizam a sensibilidade do custo óptimo do problema relativamente a perturbações nas restrições de estado. De um modo simplista, é possível afirmar que quando um problema é localmente calmo numa dada solução local, o valor do custo óptimo local depende de uma forma Lipschitz contínua num parâmetro que mede o relaxamento das restrições de estado.

Note-se que se o problema (P) for calmo (de constante K) então tem-se que (P) é localmente calmo (de constante K) em toda a solução óptima. No entanto, a implicação contrária não é necessariamente válida.

Como será exposto em seguida, a qualificação das restrições de estado expressa pelas noções de calma local ou de calma permite obter condições de optimalidade

na forma de uma equação de Hamilton-Jacobi generalizada. Como é de supor, estas condições terão um carácter local ou global, conforme se postule a propriedade de calma local ou a de calma.

Por forma a realçar o papel desempenhado pela qualificação das restrições, são apresentados em primeiro lugar os resultados obtidos assumindo a hipótese de calma, que é uma noção global. Posteriormente, serão expostos resultados obtidos quando a hipótese imposta é apenas a de calma local.

Considere-se, para cada $s \in [0, 1]$, o problema $Q(s)$ definido da seguinte forma

$$Q(s) \quad \min \quad g(x(1))$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (5.1.7)$$

$$x(s) = x^*(s), \quad (5.1.8)$$

$$d(t, x(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (5.1.9)$$

Nesta definição, x^* é uma solução local de (P) . Note-se que tal suposição implica que $x^*|_{[s, 1]}$ seja ainda solução local de $Q(s)$.

O resultado seguinte afirma que a propriedade de calma de um problema se mantém válida (com a mesma constante) para subproblemas com condições iniciais ao longo da trajectória óptima em causa.

Lema 5.1.1. *Seja x^* solução local de (P) e suponha-se (P) localmente calmo (de constante K) em x^* . Então para $\forall s \in [0, 1]$, $Q(s)$ é localmente calmo de constante K em $x^*|_{[s, 1]}$.*

Demonstração.

Suponha-se que a conclusão do lema não é verdadeira. Então para qualquer $\epsilon > 0$ existem $\alpha > 0$ e y admissível para $Q(s)$, com $\text{gr}(y) \subset T(x^*|_{[s, 1]}; \epsilon)$, tais que

$$\begin{aligned} d(t, y(t)) &\leq \alpha, \text{ e} \\ g(y(1)) &< g(x^*(1)) - K\alpha. \end{aligned}$$

Construa-se o arco $\tilde{y}$ em $[0, 1]$ da seguinte forma:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} x^*(t) & t \in [0, s], \\ y(t) & t \in]s, 1]. \end{cases}$$

Facilmente se conclui que este arco é admissível para o problema $P_{x^*, \epsilon}(\alpha)$. Assim, tem-se que

$$\inf\{P_{x^*, \epsilon}(\alpha)\} \leq g(\tilde{y}(1)) = g(y(1)) < g(x^*(1)) - K \cdot \alpha,$$

contrariando o facto de (P) ser localmente calmo de constante K em x^* . $\square$

A manutenção da calma local ao longo de qualquer trajectória localmente óptima permite antever uma estreita relação entre tal conceito e princípios de programação dinâmica.

5.2 Hipóteses sobre os dados

Enunciam-se em seguida as hipóteses de base sobre os dados do problema (P) , no que respeita à dinâmica e à função custo:

- (H1) a multifunção F é contínua e tem imagens, não vazias, convexas e fechadas;
- (H2) existe $k_v \geq 0$ tal que $F(t, x) \subset k_v \bar{B}^n \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$;
- (H3) $\forall t \in [0, 1] \ x \mapsto F(t, x)$ é Lipschitz de constante k_F em $\mathbb{R}^n$;
- (H4) $x \mapsto g(x)$ é Lipschitz de constante k_g em $\mathbb{R}^n$.

Relativamente às restrições de estado expressas pela condição

$$d(t, x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad (5.2.1)$$

tal como anteriormente apresentado, definam-se o conjunto $X = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} : d(t, x) \leq 0\}$ e, para cada $t \in [0, 1]$ o conjunto $X_t = \{x \in \mathbb{R}^n : d(t, x) \leq 0\}$.

Obviamente que a restrição de estado representada pela condição (5.2.1) pode ser substituída por qualquer uma das expressões equivalentes

$$x(t) \in X_t \quad \forall t \in [0, 1], \quad (5.2.2)$$

$$(t, x(t)) \in X \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (5.2.3)$$

Considerando a distância com sinal de um ponto a um conjunto, estas condições são ainda equivalentes a

$$\Delta_{X_t}(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad (5.2.4)$$

$$\Delta_X(t, x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (5.2.5)$$

Nos resultados apresentados em seguida, considera-se que a restrição de estado é representada por esta última condição. Uma vantagem em exprimir a restrição de estado desta forma advém do facto da função $(t, x) \mapsto \Delta_X(t, x)$ ser Lipschitz contínua.

Considera-se ainda que as restrições de estado do problema (P) satisfazem as seguintes hipóteses:

- (H5) o conjunto $X \subset [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ é fechado;
- (H6) existe $k_R \geq 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n \ d_{X_1}(x) \leq k_R d_X(1, x)$.

A primeira destas hipóteses é habitual na literatura. A sua consideração torna possível a aplicação do teorema 2.4.2 sobre compacticidade do conjunto de trajectórias admissíveis para (P) . Por outro lado, o facto de $X^c \subset \mathbb{R}^{1+n}$ ser não vazio permite afirmar que $\Delta_X(t, x)$ é finito para todo o (t, x) . A relação expressa pela outra hipótese será fundamental para o estabelecimento de condições fronteira para as funções de verificação. Esta hipótese traduz uma condição sobre o comportamento da restrição de estado em instantes vizinhos do instante final.

5.3 Família de problemas auxiliares

Ao longo desta secção, considera-se que o arco x^* é uma solução de (P) e que este problema é calmo, de constante K .

Seja agora a seguinte família de problemas parametrizada por um elemento (s, y, r) de $[0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

$$N(s, y, r) \quad \min \quad g(x(1)) + K \cdot w$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [s, 1] - \text{q.s.}, \quad (5.3.1)$$

$$x(s) = y, \quad (5.3.2)$$

$$w \geq \max\{r, 0\}, \quad (5.3.3)$$

$$\Delta_X(t, x(t)) \leq w, \quad \forall t \in [s, 1]. \quad (5.3.4)$$

Em cada um destes problemas, a minimização é efectuada nos elementos (x, w) , onde $x \in AC([s, 1]; \mathbb{R}^n)$ e $w \in \mathbb{R}$, que satisfazem as condições (5.3.1) -(5.3.4).

Segue-se um conjunto de resultados sobre existência e caracterização de soluções para alguns destes problemas.

Teorema 5.3.1. $\forall (s, y, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, o problema $N(s, y, r)$ tem solução.

Demonstração.

Em primeiro lugar, note-se que para qualquer elemento (s, y, r) existe (x, w) admissível para $N(s, y, r)$. De facto, seja x uma trajectória de F em $[s, 1]$ com $x(s) = y$; a existência de tal trajectória está assegurada pelas propriedades de F ; mais ainda, $t \mapsto x(t)$ é contínua, e logo limitada em $[s, 1]$; assim, a função $t \mapsto \Delta_X(t, x(t))$ é também limitada neste mesmo intervalo; fazendo w maior ou igual a $\max\{0, r, \max_{t \in [s, 1]} \{\Delta_X(t, x(t))\}\}$ obtém-se um elemento (x, w) admissível para o problema.

A existência de solução para $N(s, y, r)$ resulta agora de uma aplicação directa do teorema 2.4.2 sobre compactidade das trajectórias de F . $\square$

Seja $[t_1, t_2]$ um intervalo real e $x : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Por forma a simplificar a notação, no que se segue, $dX(t_1, t_2, x)$ representará o valor

$$\max_{t \in [t_1, t_2]} \{\Delta_X(t, x(t))\}. \quad (5.3.5)$$

Teorema 5.3.2. Toda a solução de $N(s, y, r)$ é da forma (x, w) onde x é uma trajectória de F em $[s, 1]$ com $x(s) = y$ e $w = \max\{r, dX(s, 1, x), 0\}$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é trivial. $\square$

Teorema 5.3.3. $\forall s \in [0, 1]$ $(x^*_{|[s, 1]}, 0)$ é solução do problema $N(s, x^*(s), 0)$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é trivial. $\square$

5.4 Função valor da família de problemas auxiliares

Para cada $(s, y, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ defina-se a função $\phi(s, y, r) = \inf\{N(s, y, r)\}$. Esta não é mais do que a função valor associada a esta família de problemas. Note-se que o teorema 5.3.1 garante que ϕ está bem definida.

Nesta secção são apresentados e demonstrados alguns resultados sobre as propriedades da função ϕ .

Os dois resultados seguintes constituem aquilo que se pode designar por “princípio de programação dinâmica” para a família de problemas $N(s, y, r)$. Como se pode verificar, este princípio apenas pode ser aplicado localmente e em pontos (s, y, r) tais que $\Delta_X(s, y) < r$, pois como é afirmado no primeiro resultado, a função valor é, no caso geral, decrescente ao longo de qualquer trajectória óptima.

Lema 5.4.1. *Seja $(s, y, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e seja (x, w) uma solução de $N(s, y, r)$. Então*

$$\phi(t, x(t), r) \leq \phi(s, y, r) \quad \forall t \in [s, 1].$$

Demonstração.

Seja (s, y, r) qualquer e seja (x, w) uma solução de $N(s, y, r)$. Seja também $t \geq s$ qualquer. Como $dX(t, 1, x) \leq dX(s, 1, x)$ conclui-se que $(x|_{[t, 1]}, w)$ ainda é admissível para $N(t, x(t), r)$. Logo $\phi(t, x(t), r) \leq g(x(1)) + K \cdot w = \phi(s, y, r)$. $\square$

Lema 5.4.2. *Seja $(s, y, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que $\Delta_X(s, y) < r$. Seja x uma trajectória de F em $[s, 1]$. Então existe $\beta > 0$ tal que*

$$\phi(t, x(t), r) \geq \phi(s, y, r) \quad \forall t \in [s, \min\{s + \beta, 1\}].$$

Seja agora (x, w) uma solução de $N(s, y, r)$. Então existe $\beta > 0$ tal que

$$\phi(t, x(t), r) = \phi(s, y, r) \quad \forall t \in [s, \min\{s + \beta, 1\}].$$

Demonstração.

Seja (s, y, r) como no enunciado e x uma trajectória de F em $[s, 1]$. A continuidade da função $t \mapsto \Delta_X(t, x(t))$ e a hipótese sobre r permitem concluir a existência de $\beta > 0$ tal que $\Delta_X(t, x(t)) < r$ para qualquer $t \in [s, \min\{s + \beta, 1\}]$. Escolha-se então t como indicado e seja (x_1, w_1) uma solução de $N(t, x(t), r)$. O arco $z : [s, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$z(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & \tau \in [s, t[\\ x_1(\tau), & \tau \in [t, 1] \end{cases}$$

é uma trajectória de F . Como $w_1 \geq r$, a escolha de t permite concluir que $w_1 \geq dX(s, 1, z)$ e assim (z, w_1) é admissível para $N(s, y, r)$. Logo

$$\phi(s, y, r) \leq g(z(1)) + K \cdot w_1 = \phi(t, x(t), r),$$

demonstrando a primeira afirmação.

Seja agora (x, w) uma solução de $N(s, y, r)$. Argumentando como acima e aplicando o lema 5.4.1 demonstra-se a segunda afirmação. $\square$

Lema 5.4.3. *Para qualquer $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ a função $r \mapsto \phi(s, y, r)$ é crescente.*

Demonstração.

Seja $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ qualquer. Sejam r_1 e r_2 tais que $r_1 \leq r_2$. Seja (x, w) admissível para $N(s, y, r_2)$. Então tem-se que $w \geq r_2$ e que $w \geq dX(s, 1, x)$. Logo $w \geq r_1$ e portanto (x, w) é ainda admissível para $N(s, y, r_1)$. Desta inclusão conclui-se directamente que $\phi(s, y, r_1) \leq \phi(s, y, r_2)$, demonstrando o resultado. $\square$

Lema 5.4.4. *Seja $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$. Então, para qualquer $r < 0$ tem-se que $\phi(s, y, r) = \phi(s, y, 0)$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado é trivial. $\square$

Teorema 5.4.1. *A função ϕ acima introduzida é Lipschitz contínua.*

A demonstração do teorema 5.4.1 é consequência imediata dos três lemas que em seguida se apresentam e demonstram.

Lema 5.4.5. *Para qualquer $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ a função $r \mapsto \phi(s, y, r)$ é Lipschitz contínua (de constante K).*

Demonstração.

Sejam $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ e $r_1, r_2 \in [0, +\infty[$ quaisquer.

Suponha-se por agora que $r_1 \leq r_2$. Então,

$$\phi(s, y, r_1) \leq \phi(s, y, r_2). \quad (5.4.1)$$

Seja (x, w_1) uma solução de $N(s, y, r_1)$. Logo,

$$w_1 = \max\{r_1, dX(s, 1, x)\}.$$

Defina-se $w_2 = w_1 + r_2 - r_1$. É fácil concluir que $w_2 \geq dX(s, 1, x)$ e também que $w_2 \geq r_2$. Estas duas desigualdades permitem concluir que (x, w_2) é admissível para $N(s, y, r_2)$, o que implica que

$$\phi(s, y, r_2) \leq g(x(1)) + K \cdot (w_1 + r_2 - r_1) = \phi(s, y, r_1) + K \cdot (r_2 - r_1). \quad (5.4.2)$$

De (5.4.1) e desta desigualdade conclui-se então que

$$|\phi(s, y, r_2) - \phi(s, y, r_1)| \leq K|r_2 - r_1|. \quad (5.4.3)$$

No caso de $r_2 \leq r_1$, um raciocínio análogo permite concluir que esta última condição também se verifica, demonstrando-se assim a Lipschitz continuidade da função $r \mapsto \phi(s, y, r)$ quando $r \geq 0$. O lema 5.4.4 permite estender este resultado para todo o $r \in \mathbb{R}$. $\square$

Lema 5.4.6. Para qualquer $(s, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ a função $y \mapsto \phi(s, y, r)$ é Lipschitz contínua.

Demonstração.

Sejam $(s, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ quaisquer.

Seja (x, w) uma solução do problema $N(s, y_1, r)$. Então

$$\phi(s, y_1, r) = g(x(1)) + K \cdot w, \text{ e}$$

$$w = \max\{r, dX(s, 1, x), 0\}.$$

Uma aplicação do lema 2.4.1 garante a existência de x_2 , trajectória de F em $[s, 1]$ com $x_2(s) = y_2$, tal que

$$\max_{t \in [s, 1]} |x_2(t) - x(t)| \leq e^{k_F} |y_2 - y_1|.$$

A Lipschitz continuidade da função distância com sinal permite afirmar que

$$\forall t \in [s, 1] \quad \Delta_X(t, x_2(t)) \leq \Delta_X(t, x(t)) + |x_2(t) - x(t)|.$$

Conclui-se então que

$$dX(s, 1, x_2) \leq dX(s, 1, x) + e^{k_F} |y_1 - y_2|.$$

Defina-se $w_2 = w + e^{k_F} |y_1 - y_2|$. Facilmente se conclui que $w_2 \geq r$, $w_2 \geq 0$, e

$$w_2 \geq dX(s, 1, x_2).$$

Então, pode afirmar-se que (x_2, w_2) é admissível para $N(s, y_2, r)$ e logo

$$\phi(s, y_2, r) \leq g(x_2(1)) + K \cdot w_2.$$

Da Lipschitz continuidade de g e da definição de w_2 resulta que

$$\phi(s, y_2, r) \leq g(x(1)) + k_g e^{k_F} |y_1 - y_2| + K \cdot w + K e^{k_F} |y_1 - y_2|,$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(s, y_2, r) \leq \phi(s, y_1, r) + e^{k_F} (K + k_g) |y_1 - y_2|.$$

Trocando os papeis de y_1 e y_2 conclui-se, por um processo semelhante, que

$$\phi(s, y_1, r) \leq \phi(s, y_2, r) + e^{k_F} (K + k_g) |y_1 - y_2|.$$

Demonstra-se assim que $y \mapsto \phi(s, y, r)$ é Lipschitz contínua de constante $k_Y = e^{k_F} (K + k_g)$. $\square$

Lema 5.4.7. Para qualquer $(y, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a função $s \mapsto \phi(s, y, r)$ é Lipschitz contínua.

Demonstração.

Sejam $(y, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $s_1, s_2 \in [0, 1]$ quaisquer.

Suponha-se que $s_1 \leq s_2$.

Seja (x_1, w_1) uma solução de $N(s_1, y, r)$. Então

$$\phi(s_1, y, r) = g(x_1(1)) + K \cdot w_1, \text{ e}$$

$$w_1 = \max\{r, dX(s_1, 1, x_1), 0\}.$$

Pelo lema 5.4.1 tem-se que

$$\phi(s_2, x_1(s_2), r) \leq \phi(s_1, y, r).$$

Das propriedades de F conclui-se que $|x_1(s_2) - y| \leq k_v |s_2 - s_1|$ e então, o lema 5.4.6 permite concluir que

$$\phi(s_2, x_1(s_2), r) \geq \phi(s_2, y, r) - K_Y k_v |s_2 - s_1|,$$

Conclui-se assim que

$$\phi(s_1, y, r) \geq \phi(s_2, y, r) - K_Y k_v |s_2 - s_1|. \quad (5.4.4)$$

Seja agora (x_2, w_2) uma solução de $N(s_2, y, r)$. Então

$$\phi(s_2, y, r) = g(x_2(1)) + K \cdot w_2, \text{ e}$$

$$w_2 = \max\{r, dX(s_2, 1, x_2), 0\}.$$

Prolongue-se x_2 como trajectória de F a todo o intervalo $[s_1, 1]$ (continuando a designar o arco por x_2). Da Lipschitz continuidade de $t \mapsto x_2(t)$, tem-se que

$$\forall t \in [s_1, s_2], \quad |x_2(t) - y| \leq k_v |s_2 - s_1|.$$

Então $\forall t \in [s_1, s_2], \Delta_X(t, x_2(t)) \leq \Delta_X(t, y) + k_v |s_2 - s_1|$. Por outro, a Lipschitz continuidade da função valor com sinal permite concluir que

$$\Delta_X(t, y) \leq \Delta_X(s_2, y) + |t - s_2|.$$

Pode então escrever-se que $\forall t \in [s_1, s_2], \Delta_X(t, x_2(t)) \leq \Delta_X(s_2, y) + (1 + k_v) |s_2 - s_1|$. Conclui-se portanto que

$$dX(s_1, 1, x_2) \leq dX(s_2, 1, x_2) + (1 + k_v) |s_2 - s_1|.$$

Seja $w = w_2 + (1 + k_v) |s_2 - s_1|$. Então $w \geq r$, $w \geq 0$ e $w \geq dX(s_1, 1, x_2)$. Logo (x_2, w) é admissível para $N(s_1, x_2(s_1), r)$ e então

$$\phi(s_1, x_2(s_1), r) \leq g(x_2(1)) + K \cdot w_2 + K \cdot (1 + k_v) |s_2 - s_1|.$$

Do lema 5.4.6 e da Lipschitz continuidade de $t \mapsto x_2(t)$ tem-se que

$$\phi(s_1, y, r) \leq \phi(s_1, x_2(s_1), r) + K_Y \cdot k_v |s_2 - s_1|.$$

Conclui-se então que

$$\phi(s_1, y, r) \leq \phi(s_2, y, r) + (K \cdot (1 + k_v) + K_Y \cdot k_v) |s_1 - s_2|.$$

Esta expressão e (5.4.4) permitem agora afirmar que

$$|\phi(s_1, y, r) - \phi(s_2, y, r)| \leq (K \cdot (1 + k_v) + K_Y \cdot k_v) |s_1 - s_2|.$$

Aplicando um raciocínio semelhante no caso de $s_1 \geq s_2$ fica demonstrada a Lipschitz continuidade de $s \mapsto \phi(s, y, r)$. $\square$

O teorema seguinte fornece uma caracterização pontual da função ϕ .

Teorema 5.4.2. *Seja $(s, y, r) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que $\Delta_X(s, y) < r$. Então*

$$\max_{v \in F(s, y)} \phi^0((s, y, r); (-1, -v, 0)) = 0. \quad (5.4.5)$$

Demonstração.

Seja (s, y, r) como no enunciado. Seja (x, w) uma solução de $N(s, y, r)$. Seja $\beta > 0$ dado pelo lema 5.4.2. Escolha-se um ponto $\tau \in]s, \min\{s + \frac{\beta}{2}, 1\}[$ tal que

$$\begin{aligned} t \mapsto \phi(t, x(t), r) &\text{ é diferenciável em } \tau, \\ \tau &\text{ é ponto de Lebesgue de } t \mapsto \dot{x}(t), \\ \dot{x}(\tau) &\in F(\tau, x(\tau)), \end{aligned}$$

e defina-se $z = x(\tau)$. Seja também $h \in [0, \frac{\beta}{2}]$ qualquer. Então, do lema 5.4.2 conclui-se que

$$\phi(\tau + h, x(\tau + h), r) = \phi(\tau, z, r).$$

As condições sobre o ponto τ e a Lipschitz continuidade de ϕ permitem concluir facilmente que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\phi(\tau + h, x(\tau + h), r) - \phi(\tau, z, r)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\phi(\tau + h, z + h\dot{x}(\tau), r) - \phi(\tau, z, r)}{h} \\ &\geq -(-\phi)^0((\tau, z, r); (1, \dot{x}(\tau), 0)) \\ &= -\phi^0((\tau, z, r); (-1, -\dot{x}(\tau), 0)). \end{aligned}$$

Conclui-se então que

$$\max_{v \in F(\tau, z)} \{\phi^0((\tau, z, r); (-1, -v, 0))\} \geq 0.$$

Notando que para qualquer (s, y) o ponto (τ, z) pode ser escolhido arbitrariamente próximo de (s, y) , é possível definir sucessões $\{s_i\}$, $\{y_i\}$ e $\{v_i\}$ tais que $s_i \rightarrow s$, $y_i \rightarrow y$, $v_i \in F(s_i, y_i)$ e

$$\phi^0((s_i, y_i, r); (-1, -v_i, 0)) \geq 0.$$

Como para todo o i se tem $|v_i| \leq k_v$, podem escolher-se subsucessões tais que $\{v_i\}$ converge para um dado limite v . A semicontinuidade superior da derivada direccional generalizada permite afirmar que

$$\phi^0((s, y, r); (-1, -v, 0)) \geq 0.$$

Das propriedades de F conclui-se que $v \in F(s, y)$. Segue-se então que

$$\max_{v \in F(s, y)} \{\phi^0((s, y, r); (-1, -v, 0))\} \geq 0. \quad (5.4.6)$$

Considere-se agora um elemento (s, y, r) como no enunciado, tal que ϕ é diferenciável em (s, y, r) . Seja $v \in F(s, y)$ e defina-se no intervalo $[0, s]$ a função

$$x(t) = y + (t - s)v.$$

A continuidade de F nos seus argumentos permite afirmar que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{s-\epsilon}^s d_{F(t, x(t))}(\dot{x}(t)) dt = 0. \quad (5.4.7)$$

Seja agora $\{s_i\}$ uma sucessão em tal que $s_i \uparrow s$. Uma aplicação do teorema 2.4.1 garante a existência, para cada i , de um arco z_i , trajectória de F em $[s_i, s]$, satisfazendo $z_i(s) = y$. Da condição (5.4.7) conclui-se que

$$\lim_i \frac{1}{s - s_i} \int_{s_i}^s |\dot{z}_i(t) - v| dt = 0. \quad (5.4.8)$$

A hipótese sobre r permite afirmar que para i suficientemente elevado se tem que $dX(s_i, s, z_i) < r$. Uma aplicação do lema 5.4.2 permite concluir que para tais i se terá

$$\phi(s, y, r) \geq \phi(s_i, z_i(s_i), r). \quad (5.4.9)$$

A diferenciabilidade de ϕ em (s, y, r) e a condição (5.4.8) garantem a existência de

$$\lim_i \frac{\phi(s, y, r) - \phi(s_i, z_i(s_i), r)}{s - s_i}.$$

As condições (5.4.8) e (5.4.9) e a Lipschitz continuidade de ϕ tornam possível afirmar que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_i \frac{\phi(s, y, r) - \phi(s_i, z_i(s_i), r)}{s - s_i} \\ &= \lim_i \frac{\phi(s, y, r) - \phi(s_i, y - \int_{s_i}^s \dot{z}_i(t) dt, r)}{s - s_i} \\ &= \lim_i \frac{\phi(s, y, r) - \phi(s_i, y - (s - s_i)v, r)}{s - s_i} \\ &= \nabla \phi(s, y, r) \cdot (1, v, 0). \end{aligned}$$

Da arbitrariedade na escolha de v pode agora concluir-se que

$$\nabla \phi(s, y, r) \cdot (-1, -v, 0) \leq 0 \quad \forall v \in F(s, y).$$

Utilizando a caracterização do gradiente generalizado dada pelo teorema 2.3.1 é possível afirmar que

$$(a, b, c) \cdot (-1, -v, 0) \leq 0 \quad \forall v \in F(s, y) \quad \forall (a, b, c) \in \partial\phi(s, y, r),$$

onde (s, y, r) satisfaz as condições do enunciado. A relação entre gradiente generalizado e derivada direcciona generalizada permite ainda afirmar que

$$\max_{v \in F(s, y)} \phi^0((s, y, r); (-1, -v, 0)) \leq 0,$$

concluindo a demonstração do resultado. □

A expressão (5.4.5) não é mais do que uma equação de Hamilton-Jacobi generalizada. Da relação entre gradiente generalizado e derivada direcciona generalizada pode então concluir-se que a expressão (5.4.5) é equivalente a

$$\min_{(a, b, c) \in \partial\phi(s, y, r)} \{a - H(s, y, -b)\} = 0.$$

5.5 Condições necessárias de optimalidade

A propriedade de calma do problema (P) assegura a existência de uma função (obtida como função valor de uma família de problemas auxiliares) que possui determinadas propriedades, entre as quais o crescimento ao longo de qualquer trajectória admissível para (P) . Quando esta função é avaliada ao longo de uma qualquer solução óptima x^* verifica-se que esta função é constante. Desta forma, a existência de uma função com tais propriedades aparece como uma condição necessária à optimalidade de x^* , como se mostra no resultado seguinte.

Teorema 5.5.1. *Seja x^* uma solução óptima de (P) e suponha-se que (P) é calmo. Então existe uma função $\psi : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitz contínua, que verifica*

- (i) $\psi(1, x, 0) = g(x) \quad \forall x \in X_1,$
- (ii) $\psi(0, x_0, 0) = g(x^*(1)),$
- (iii) $\psi(s, y, r) = \psi(s, y, 0) \quad \forall (s, y, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times]-\infty, 0[,$
- (iv) $\psi(t_2, x(t_2), dX(t_1, t_2, x)) \geq \psi(t_1, x(t_1), \Delta_X(t_1, x(t_1)))$ para qualquer x trajectória de F em qualquer $[t_1, t_2] \subset [0, 1]$.

Demonstração.

A função ψ , cuja existência é garantida por este teorema, é exactamente a função valor da família de problemas $N(\cdot, \cdot, \cdot)$ definida anteriormente e representada por ϕ . De facto, como já mostrado, esta função é Lipschitz contínua.

A condição (i) obtém-se directamente a partir de problemas $N(1, x, 0)$ onde $x \in X$.

A condição (ii) é uma consequência directa do teorema 5.3.3 e a condição (iii) está demonstrada no lema 5.4.4.

Para demonstrar a condição (iv), considere-se um subintervalo $[t_1, t_2]$ de $[0, 1]$ qualquer, e uma trajectória x de F em $[t_1, t_2]$ também qualquer. Seja (x_2, w_2) uma solução de $N(t_2, x(t_2), dX(t_1, t_2, x))$. Defina-se o arco $\tilde{x}$ em $[t_1, 1]$ da seguinte forma

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_1, t_2], \\ x_2(t), & t \in]t_2, 1]. \end{cases}$$

Uma vez que $w_2 \geq dX(t_2, 1, x_2)$ e que $w_2 \geq dX(t_1, t_2, x)$, conclui-se que $(\tilde{x}, w_2)$ é admissível para $N(t_1, x(t_1), \Delta_X(t_1, x(t_1)))$. Da arbitrariedade da escolha de $[t_1, t_2]$ e de x conclui-se (iv). $\square$

A condição (iv) apresentada acima constitui uma versão integral de um princípio de programação dinâmica que a função ψ satisfaz. Atendendo ao teorema 5.4.2 pode ainda afirmar-se que esta função satisfaz a equação (5.4.5).

5.6 Condições suficientes de optimalidade

O teorema apresentado em seguida fornece condições suficientes de optimalidade, a partir de uma função de verificação Lipschitz contínua.

Teorema 5.6.1. *Seja x^* um arco admissível para o problema (P). Suponha-se que existe uma função $\psi : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitz contínua, que verifica:*

- (i) $\psi(1, x, 0) = g(x) \quad \forall x \in X_1,$
- (ii) $\psi(0, x_0, 0) = g(x^*(1)),$
- (iii) $\psi(s, y, r) = \psi(s, y, 0) \quad \forall (s, y, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times]-\infty, 0],$
- (iv) $\psi(t_2, x(t_2), dX(t_1, t_2, x)) \geq \psi(t_1, x(t_1), \Delta_X(t_1, x(t_1)))$ para qualquer x trajectória de F em qualquer $[t_1, t_2] \subset [0, 1]$.

Então x^* é solução óptima de (P). Mais ainda, (P) é calmo.

Demonstração.

Para cada $(x, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ defina-se a função $A(x, r) = \psi(1, x, r) - g(x)$. É óbvio que esta função é Lipschitz. Seja K_A uma constante de Lipschitz de A , então para qualquer (x, r) tem-se que

$$\psi(1, x, r) - g(x) \leq \psi(1, x, 0) - g(x) + K_A \max\{0, r\}, \quad (5.6.1)$$

uma vez que se $r < 0$ se tem que $\psi(1, x, r) = \psi(1, x, 0)$.

Seja agora $x \in \mathbb{R}^n$ qualquer. Suponha-se que $x \notin X_1$. Então $\Delta_{X_1}(x) = d_{X_1}(x)$ e também $\Delta_X(1, x) = d_X(1, x)$. Seja agora $e \in \text{proj}_{X_1}(x)$ qualquer. De (i) e do facto da função A ser Lipschitz tem-se que

$$\psi(1, x, 0) - g(x) \leq \psi(1, e, 0) - g(e) + K_A|x - e| = K_A \cdot d_{X_1}(x).$$

Das hipóteses sobre os dados do problema tem-se que $d_{X_1}(x) \leq k_R d_X(1, x)$, podendo concluir-se que

$$\psi(1, x, 0) - g(x) \leq k_R K_A \Delta_X(1, x).$$

Como no caso de $x \in X_1$ se tem $\psi(1, x, 0) = g(x)$ e $\Delta_X(1, x) \leq 0$, segue-se que

$$\psi(1, x, 0) - g(x) \leq k_R K_A \max\{\Delta_X(1, x), 0\}.$$

Combinando estas condições com (5.6.1) tem-se agora que

$$\psi(1, x, r) - g(x) \leq K_A \max\{0, r\} + k_R K_A \max\{\Delta_X(1, x), 0\},$$

ou ainda

$$\psi(1, x, r) \leq g(x) + (1 + k_R)K_A \max\{r, \Delta_X(1, x), 0\},$$

expressão que é válida para qualquer $(x, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Seja agora z uma trajectória de F com $z(0) = x_0$. Do exposto acima conclui-se que

$$\psi(1, z(1), dX(0, 1, z)) \leq g(z(1)) + (1 + k_R)K_A \max\{dX(0, 1, z), 0\},$$

e aplicando a propriedade (iv) verifica-se facilmente que

$$\psi(0, x_0, 0) \leq g(z(1)) + (1 + k_R)K_A \max\{0, dX(0, 1, z)\}.$$

Utilizando a propriedade (ii) pode-se ainda escrever que

$$g(z(1)) \geq g(x^*(1)) - (1 + k_R)K_A \max\{0, dX(0, 1, z)\}. \quad (5.6.2)$$

Desta última condição conclui-se imediatamente que x^* é solução de (P) , pois se z for admissível para (P) tem-se que $g(z(1)) \geq g(x^*(1))$. Conclui-se também que (P) é calmo. $\square$

Este teorema apresenta condições suficientes para a optimalidade de uma trajectória, com base na existência de uma função (designada função de verificação) que é Lipschitz contínua e satisfaz um conjunto de condições, nomeadamente uma propriedade de monotonia quando avaliada ao longo de trajectórias dinamicamente admissíveis. Note-se no entanto que esta monotonia é caracterizada de uma forma integral, pois é feita utilizando trajectórias de F em subintervalos de $[0, 1]$.

Uma questão relevante é a de saber se existe uma caracterização pontual para as funções de verificação que permita obter condições suficientes para a optimalidade de uma trajectória. O teorema que se segue garante que existe tal caracterização. Esta aparece sob a forma de uma equação envolvendo as velocidades admissíveis e elementos do gradiente generalizado da função de verificação. Tal equação não é mais do que uma generalização da equação de Hamilton-Jacobi.

Teorema 5.6.2. O teorema 5.6.1 continua válido se a condição (iv) for substituída por

$$\min_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \partial \psi(s, y, r)} \{\alpha - H(s, y, -\beta)\} = 0, \quad (5.6.3)$$

para qualquer $(s, y, r) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que verifique $\Delta_X(s, y) < r$, e por

$r \mapsto \psi(s, y, r)$ é crescente.

Demonstração.

Para demonstrar este teorema basta mostrar que a condição (iv) do teorema 5.6.1 é consequência das condições acima e das demais hipóteses daquele teorema.

Seja $[t_1, t_2] \subset [0, 1]$ qualquer e seja x uma qualquer trajectória de F em $[t_1, t_2]$. Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > dX(t_1, t_2, x)$.

Escolha-se um ponto $s \in [t_1, t_2]$ tal que

$$t \mapsto \psi(t, x(t), r) \text{ é diferenciável em } s, \quad (5.6.4)$$

$$s \text{ é um ponto de Lebesgue de } t \mapsto \dot{x}(t), \quad (5.6.5)$$

$$\dot{x}(s) \in F(s, x(s)). \quad (5.6.6)$$

A primeira destas condições permite escrever que

$$\frac{d}{dt} \psi(t, x(t), r) \Big|_{t=s} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\psi(s+h, x(s+h), r) - \psi(s, x(s), r)}{h}.$$

A Lipschitz continuidade de ψ e de $t \mapsto x(t)$, e a condição (5.6.5) permitem escrever este limite como

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\psi(s+h, x(s) + h \dot{x}(s), r) - \psi(s, x(s), r)}{h}.$$

Da definição de derivada direccional generalizada é fácil concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\psi(s+h, x(s) + h \dot{x}(s), r) - \psi(s, x(s), r)}{h} \\ \geq -(-\psi)^0((s, x(s), r); (1, \dot{x}(s), 0)). \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Uma vez que a condição (5.6.3) é equivalente a

$$\max_{v \in F(s, y)} (-\psi)^0((s, y, r); (1, v, 0)) = 0,$$

a condição (5.6.6) e a expressão (5.6.7) permitem concluir finalmente que

$$\frac{d}{dt} \psi(t, x(t), r) \Big|_{t=s} \geq 0.$$

Notando agora que os pontos s que satisfazem as condições (5.6.4), (5.6.5) e (5.6.6) constituem um subconjunto de medida total de $[t_1, t_2]$, conclui-se então que

$$\psi(t_2, x(t_2), r) \geq \psi(t_1, x(t_1), r).$$

Desta condição e do suposto para r tem-se ainda que

$$\psi(t_2, x(t_2), r) \geq \psi(t_1, x(t_1), \Delta_X(t_1, x(t_1))), \quad (5.6.8)$$

expressão que é válida para qualquer $r > dX(t_1, t_2, x)$.

Considere-se agora uma sucessão real $\{r_i\}$ com $r_i \downarrow dX(t_1, t_2, x)$. Uma vez que a expressão (5.6.8) continua válida ao substituir r por r_i , e sendo ψ contínua, tem-se que

$$\psi(t_2, x(t_2), dX(t_1, t_2, x)) \geq \psi(t_1, x(t_1), \Delta_X(t_1, x(t_1))),$$

demonstrando o teorema. □

5.7 Funções de verificação local

Nesta secção apresenta-se uma forma de obter funções de verificação para soluções locais de (P) . Como seria de esperar, a existência de tais funções apenas está assegurada num tubo em torno da solução local em análise. A hipótese de base para a existência de tais funções é a propriedade de calma local.

A principal diferença em relação ao caso global, apresentado anteriormente, está relacionada com a definição da família de problemas auxiliares cuja função valor será uma função de verificação para a solução local do problema original.

Nesta secção, x^* será uma solução local do problema (P) e supõe-se que este problema é localmente calmo nesta solução. Desta hipótese pode deduzir-se a existência de constantes positivas ε e K tais que a relação

$$g(x(1)) + K \max_{t \in [0,1]} \{\Delta_X(t, x(t)) \vee 0\} \geq g(x^*(1)) \quad (5.7.1)$$

é válida para todo o x , trajectória de F em $[0, 1]$ que verifica $x(0) = x_0$ e $\text{gr}(x) \subset T(x^*; \varepsilon)$. As hipóteses sobre os dados do problema (P) , nomeadamente a continuidade da função g e o facto de F ser limitada, juntamente com a propriedade de $T(x^*; \varepsilon)$ ser limitado, permitem afirmar que existe um escalar $G > 0$ tal que

$$|g(z)| \leq G \quad \forall z \in \bigcup_{(s,y) \in T(x^*; \varepsilon)} R_F(1, s, y).$$

Defina-se ainda a função $l : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}$ por intermédio de

$$l(t, x) = \max\{|x - x^*(t)| - \frac{\varepsilon}{2}, 0\}.$$

Defina-se, para todo o par (x, w) , onde $x : [s, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um arco e $w \in \mathbb{R}$, o funcional J por

$$J(x, w) = g(x(1)) + Kw + L \int_s^1 l(t, x(t)) dt,$$

onde L é uma constante positiva.

Considere-se agora a seguinte família de problemas auxiliares, parametrizada por um elemento $(s, y, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\bar{N}(s, y, r) \quad \min \quad J(x, w)$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [s, 1] - \text{q.s.}, \quad (5.7.2)$$

$$x(s) = y, \quad (5.7.3)$$

$$w \geq \max\{0, r\}, \quad (5.7.4)$$

$$\Delta_X(t, x(t)) \leq w, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (5.7.5)$$

Esta família de problemas apenas difere daquela considerada anteriormente pela inclusão de um termo que penaliza o afastamento de x do elemento de referência x^* . Como argumentado anteriormente, facilmente se conclui para qualquer elemento (s, y, r) o problema $\bar{N}(s, y, r)$ tem solução.

O resultado seguinte apresenta condições suficientes para que todas as soluções dos problemas auxiliares estejam suficientemente próximas de $(x^*, 0)$.

Lema 5.7.1. *Sejam α , δ e L tais que*

$$\alpha > 0, \quad (5.7.6)$$

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2e^{k_F}}\right\}, \quad (5.7.7)$$

$$L > \frac{16k_v}{\varepsilon^2} \cdot (K\varepsilon/2 + 2G + \alpha). \quad (5.7.8)$$

Então para qualquer $(s, y, r) \in T(x^; \delta) \times]-\delta, \delta[$ tem-se que todos os (x, w) que são solução de $\bar{N}(s, y, r)$ satisfazem*

$$\text{gr}(x) \subset T(x^*; \varepsilon) \quad e \quad w < \varepsilon. \quad (5.7.9)$$

Demonstração.

Seja (s, y, r) como suposto. Uma aplicação do teorema 2.4.1 permite concluir que existe $\tilde{x}$, trajectória de F em $[s, 1]$, com $\tilde{x}(s) = y$ tal que

$$\max_{t \in [s, 1]} |\tilde{x}(t) - x^*(t)| \leq e^{k_F} \delta < \varepsilon/2.$$

A Lipschitz continuidade de constante 1 da função $z \mapsto \Delta_X(t, z)$ e a admissibilidade de x^* para (P) permitem ainda afirmar que

$$\max_{t \in [s, 1]} \Delta_X(t, \tilde{x}(t)) < \varepsilon/2.$$

Fazendo $\tilde{w} = \max\{0, r, \max_{t \in [s, 1]} \{\Delta_X(t, \tilde{x}(t))\}\}$, tem-se que $0 \leq \tilde{w} < \varepsilon/2$ e também que o par $(\tilde{x}, \tilde{w})$ é admissível para $\bar{N}(s, y, r)$. Segue-se que

$$\inf\{\bar{N}(s, y, r)\} \leq J(\tilde{x}, \tilde{w}) = g(\tilde{x}(1)) + K\tilde{w} \leq G + K\varepsilon/2.$$

Seja agora (x, w) um par admissível para $\bar{N}(s, y, r)$, tal que $\text{gr}(x) \not\subset T(x^*; \varepsilon)$. A continuidade de $t \mapsto x(t)$ permite afirmar que existe um instante τ tal que

$l(\tau, x(\tau)) = \varepsilon/2$. Como a função $t \mapsto l(t, x(t))$ é Lipschitz de constante $2k_v$, facilmente se conclui que

$$\int_s^1 l(t, x(t))dt \geq \frac{\varepsilon^2}{16k_v}.$$

Pode então afirmar-se que

$$\begin{aligned} J(x, w) &= g(x(1)) + Kw + L \int_s^1 l(t, x(t))dt \\ &\geq -G + 0 + L \frac{\varepsilon^2}{16k_v} \\ &> G + K\varepsilon/2 + \alpha \\ &\geq \inf\{\bar{N}(s, y, r)\} + \alpha. \end{aligned}$$

Desta última relação conclui-se imediatamente que tal par (x, w) não pode ser solução de $\bar{N}(s, y, r)$.

Para qualquer (x, w) solução de $\bar{N}(s, y, r)$ tem-se que

$$w = \max\{0, r, \max_{t \in [s, 1]} \{\Delta_X(t, x(t))\}\}.$$

Por outro lado, tem-se que $\Delta_X(t, x(t)) \leq |x(t) - x^*(t)|$, concluindo-se directamente que $w < \varepsilon$. $\square$

Escolham-se agora constantes α , δ e L , de acordo com as hipóteses do lema 5.7.1, e considere-se a família de problemas $\bar{N}(s, y, r)$. Defina-se a função $\bar{\phi} : T(x^*; \delta) \times \delta B \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a função valor da família de problemas $\bar{N}(s, y, r)$, isto é, $\bar{\phi}(s, y, r) = \inf\{\bar{N}(s, y, r)\}$.

Apresenta-se em seguida um conjunto de resultados que caracterizam a função $\bar{\phi}$. Estes resultados são análogos aos obtidos para o caso da optimalidade global, diferindo no facto de apenas interessar definir a função $\bar{\phi}$ no conjunto $T(x^*; \delta) \times \delta B$, da optimalidade de x^* para (P) ser local, e de se supor também uma condição de calma local.

As demonstrações destes resultados utilizam raciocínios em tudo análogos aqueles apresentados para o caso da optimalidade global. Assim, apenas se referem nestas demonstrações os pontos que resultam das diferenças entre as definições da função $\bar{\phi}$ e da função ϕ , considerada no caso de condições globais.

Lema 5.7.2. $\forall s \in [0, 1] \quad (x^*_{|[s, 1]}, 0)$ é solução óptima de $\bar{N}(s, x^*(s), 0)$.

Demonstração.

O único ponto a referir é que toda a solução (x, w) de $\bar{N}(s, x^*(s), 0)$ satisfaz a condição (5.7.9). Desta forma, a condição (5.7.1) é aplicável e conclui-se que

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(s, x^*(s), 0) &= J(x, w) \\ &\geq g(x(1)) + Kw \\ &= g(x(1)) + K \max_{t \in [s, 1]} \{\Delta_X(t, x(t)) \vee 0\} \\ &\geq g(x^*(1)). \end{aligned}$$

□

Corolário 5.7.1. $\bar{\phi}(0, x_0, 0) = g(x^*(1))$.

Lema 5.7.3. $\bar{\phi}(1, y, 0) = g(y) \quad \forall y \in X_1 \cap (x^*(1) + \delta B^n)$.

O seguinte resultado estabelece um “princípio de programação dinâmica” para a família de problemas $\bar{N}(s, y, r)$.

Lema 5.7.4. *Seja $(s, y, r) \in T(x^*, \delta) \times \delta B$.*

Seja (x, w) uma solução de $\bar{N}(s, y, r)$. Então

$$\bar{\phi}(t, x(t), r) \leq \bar{\phi}(s, y, r) \quad \forall t \in [s, 1]. \quad (5.7.10)$$

Seja x uma trajetória de F em $[s, 1]$ com $x(s) = y$ e suponha-se que $\Delta_X(s, y) < r$. Então existe $\beta > 0$ tal que

$$\bar{\phi}(t, x(t), r) \geq \bar{\phi}(s, y, r) \quad \forall t \in [s, 1]. \quad (5.7.11)$$

Demonstração.

A demonstração deste resultado é em tudo análoga à demonstração dos lemas 5.4.1 e 5.4.2.

O único ponto a realçar é que sendo $(s, y, r) \in T(x^*; \delta) \times \delta B$ e sendo (x, w) admissível para $\bar{\phi}(s, y, r)$ se pode concluir que existe $\beta' > 0$ tal que

$$J(x, w) = J(x|_{[s+\beta', 1]}, w).$$

Este facto resulta da Lipschitz continuidade da função $(t, x) \mapsto l(t, x)$ e do facto desta função ser nula em $T(x^*; \delta)$. □

Os três resultados que se apresentam em seguida obtêm-se de uma forma completamente análoga aos resultados homólogos apresentados na secção 5.4.

Lema 5.7.5. *Seja $(s, y) \in T(x^*; \delta)$. A função $r \mapsto \bar{\phi}(s, y, r)$ é crescente em δB ; mais ainda, $\bar{\phi}(s, y, r) = \bar{\phi}(s, y, 0)$ para todo o $r \in]-\delta, 0[$.*

Lema 5.7.6. *A função $\bar{\phi}$ é Lipschitz contínua em $T(x^*; \delta) \times \delta B$.*

Lema 5.7.7. *Seja $(s, y, r) \in \text{int}(T(x^*, \delta)) \times \delta B$ tal que $r > \Delta_X(s, y)$. Então*

$$\max_{v \in F(s, y)} \bar{\phi}^0((s, y, r); (-1, -v, 0)) = 0.$$

5.8 Condições de optimalidade local

Apresenta-se em seguida um resultado que relaciona a hipótese de calma local numa solução local de (P) com a existência de uma função de verificação. De uma forma semelhante ao que se mostrou para o caso de optimalidade global e calma, prova-se

que a qualificação das restrições de estado expressa pela propriedade de calma local é condição necessária e suficiente para a existência de uma função de verificação local, ou seja, para a obtenção de condições de optimalidade na forma de uma equação de Hamilton-Jacobi generalizada.

Teorema 5.8.1. *Seja x uma trajectória admissível para (P) .*

Suponha-se que x é localmente óptimo para (P) e que (P) é localmente calmo em x . Então existem $\delta > 0$ e uma função $\psi : T(x; \delta) \times \delta B \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitz contínua, que verificam as condições

$$\psi(0, x_0, 0) = g(x(1)), \quad (5.8.1)$$

$$\psi(1, y, 0) = g(y) \quad \forall y \in X_1 \cap (x(1) + \delta B^n), \quad (5.8.2)$$

$$\forall (s, y) \in T(x; \delta) \text{ a função } r \mapsto \psi(s, y, r) \text{ é crescente}, \quad (5.8.3)$$

$$\forall (s, y, r) \in T(x; \delta) \times]-\delta, 0] \quad \psi(s, y, r) = \psi(s, y, 0), \quad (5.8.4)$$

$$\begin{aligned} &\forall (s, y, r) \in \text{int}(T(x; \delta)) \times \delta B \\ &\Delta_X(s, y) < r \Rightarrow \max_{v \in F(s, y)} \psi^0((s, y, r); (-1, -v, 0)) = 0. \end{aligned} \quad (5.8.5)$$

Se existirem $\delta > 0$ e uma função $\psi : T(x; \delta) \times \delta B \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitz contínua, que verifiquem as condições (5.8.1) -(5.8.5) então x é localmente óptimo para (P) e este problema é localmente calmo em x .

Demonstração.

A primeira afirmação do teorema é uma consequência directa dos resultados sobre a função $\bar{\phi}$ apresentados na secção anterior.

A segunda afirmação demonstra-se de um modo semelhante ao empregue na demonstração dos teoremas 5.6.1 e 5.6.2. Note-se que o facto de a função $\bar{\phi}$ apenas estar definida numa vizinhança de $(x, 0)$ implica que apenas se possam considerar trajectórias de F próximas de x , pelo que apenas se pode garantir a optimalidade local de x e a calma local de (P) em x . $\square$

Capítulo 6

Calma e Multiplicadores

Neste capítulo são apresentados alguns resultados que relacionam as propriedades de calma e calma local com a existência de multiplicadores das condições necessárias de optimalidade em que o elemento que traduz a influência da função custo é não nulo.

6.1 Multiplicadores normais e subproblemas

Seja x^* uma solução local de (P) . Considere-se a família de problemas $P(s)$, com $s \in [0, 1[$, semelhantes a (P) , mas em que a otimização é feita no intervalo $[s, 1]$ e a condição inicial de (P) é substituída por $x(s) = x^*(s)$. Obviamente que $x^*|_{[s, 1]}$ é solução óptima para $P(s)$, para qualquer s .

Uma questão relevante é determinar se é possível obter multiplicadores de condições necessárias de optimalidade para $P(s)$ a partir de um multiplicador das condições necessárias de optimalidade para (P) . O seguinte resultado, de simples demonstração, afirma que tal é possível sempre que o multiplicador para (P) verifique a condição $\lambda > 0$.

Teorema 6.1.1. *Seja x^* uma solução local de (P) e suponha-se que existe um multiplicador (λ, μ, p) , com $\lambda > 0$. Seja $s \in]0, 1[$. Então os multiplicadores $(\lambda, \mu|_{[s, 1]}, \bar{p})$ e $(\lambda, \tilde{\mu}, \tilde{p})$ onde*

$$\begin{aligned}\bar{p}(t) &= p(t) + \int_{[0, s[} \gamma d\mu \quad \forall t \in [s, 1], \\ \tilde{p}(t) &= p(t) + \int_{[0, s]} \gamma d\mu \quad \forall t \in [s, 1], \\ \tilde{\mu}(A) &= \mu(A \setminus \{s\}) \quad \forall A \subset [s, 1] \text{ de Borel,}\end{aligned}$$

são multiplicadores das condições necessárias de optimalidade para $P(s)$. (Nas expressões acima, a função γ tem existência assegurada pela própria definição de multiplicador.)

Demonstração.

É óbvio que para qualquer $s \in [0, 1[$, e considerando a função $\gamma_{[s, 1]}$, os multiplicadores $(\lambda, \mu_{[s, 1]}, \bar{p})$ e $(\lambda, \tilde{\mu}, \bar{p})$ satisfazem a condição de transversalidade final, a inclusão hamiltoniana, bem como as condições relacionadas com a actividade das restrições no intervalo $[s, 1]$. Uma vez que $\lambda > 0$, a não trivialidade destes multiplicadores fica automaticamente satisfeita. $\square$

Este teorema estabelece um princípio de “invariância” dos multiplicadores ao longo de uma família de subproblemas, de um modo análogo ao princípio de programação dinâmica.

É de notar que para multiplicadores de (P) com $\lambda = 0$ este resultado poderá não ser válido, uma vez que a medida μ poderá estar toda concentrada num intervalo da forma $[0, s]$ com $s < 1$, ou até mesmo no conjunto $\{0\}$.

A exigência de supor que o multiplicador para x^* satisfaça $\lambda > 0$ é uma situação intrínseca aos problemas com restrições de estado ao longo do tempo. Por exemplo, em problemas com restrições apenas sobre o estado final, a “invariância” de um multiplicador não identicamente nulo ao longo de uma família de subproblemas como a aqui definida, é assegurada mesmo no caso do multiplicador não ser normal.

6.2 Calma e normalidade

Nesta secção apresentam-se resultados que relacionam a qualificação das restrições expressa pela noção de calma e as propriedades de normalidade e normalidade forte. A calma aparece como uma condição intermédia entre as condições de normalidade e de normalidade forte, pois é uma condição necessária à normalidade forte e suficiente para a normalidade, como se mostrará em seguida.

O resultado seguinte é de alguma forma uma generalização de um outro obtido em [RV95], onde se mostra a existência de multiplicadores normais como consequência da existência de trajectórias próximas admissíveis.

Teorema 6.2.1. *Seja x^* uma solução local de (P) e seja (P) localmente calmo, de constante K , em x^* . Então, existe um multiplicador (λ, μ, p) das condições necessárias de optimalidade com $\lambda = 1$. Este multiplicador satisfaz ainda a condição $\mu([0, 1]) \leq K$.*

Obviamente que sendo (P) calmo, (P) será localmente calmo em toda a solução global, pelo que este teorema assegura também, em tais casos, a existência de multiplicadores normais.

A demonstração deste teorema baseia-se no resultado que se apresenta em seguida.

Lema 6.2.1. *Sejam x^* e (P) e K como no teorema 6.2.1. Então (x^*, w^*) , onde*

$w^* \equiv 0$, é solução local do seguinte problema de optimização:

$$(P'_K) \quad \min \quad g(x(1)) + K \cdot \max\{0, w(1)\}$$

sujeito a:

$$(\dot{x}(t), \dot{w}(t)) \in F(t, x(t)) \times \{0\}, \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (6.2.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (6.2.2)$$

$$\Delta_X(t, x(t)) - w(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (6.2.3)$$

Demonstração.

Suponha-se que a conclusão deste resultado é falsa. Então, para quaisquer $K \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ existem x , trajectória de F com $x(0) = x_0$, e $\alpha \geq 0$, tais que

$$\text{gr}(x) \subset T(x^*; \varepsilon),$$

$$\alpha < \varepsilon,$$

$$\max_{t \in [0, 1]} \Delta_X(t, x(t)) \leq \alpha,$$

e também

$$g(x(1)) + K\alpha \leq g(x^*(1)).$$

Dada a arbitrariedade da escolha de K e ε , esta última condição permite concluir que (P) não é localmente calmo em x^* como suposto, ficando deste modo demonstrado o resultado. $\square$

Demonstração do teorema 6.2.1.

Passo 1. Como é fácil verificar, o problema (P'_K) satisfaz as hipóteses básicas. Assim, a aplicação das condições necessárias de optimalidade na solução óptima (x^*, w^*) , onde $w^* \equiv 0$, permite afirmar a existência de

- um escalar $\lambda \geq 0$,
- uma função $(p, q) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ absolutamente contínua,
- uma medida μ em $[0, 1]$ não negativa, e
- uma função $(\gamma, \theta) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mensurável,

tais que

$$\lambda + \mu([0, 1]) > 0, \quad (6.2.4)$$

$$(-\dot{p}(t), -\dot{q}(t), \dot{x}^*(t), 0) \in \partial \tilde{H}(t, x^*(t), 0, \bar{p}(t), \bar{q}(t)), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (6.2.5)$$

$$(\gamma(t), \theta(t)) \in \partial_{xy}^+ r(t, x^*(t), 0), \quad \mu - \text{q.s.}, \quad (6.2.6)$$

$$\text{Supp}(\mu) \subset \{t \in [0, 1] : r(t, x^*(t), 0) = 0\}, \quad (6.2.7)$$

$$-\bar{p}(1) - \gamma(1)\mu(1) \in \lambda \partial_L g(x^*(1)), \quad (6.2.8)$$

$$-\bar{q}(1) - \theta(1)\mu(1) \in \lambda[0, K], \quad (6.2.9)$$

$$q(0) = 0, \quad (6.2.10)$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{p}(t) &= p(t) + \int_{[0,t[} \gamma d\mu, \\ \bar{q}(t) &= q(t) + \int_{[0,t[} \theta d\mu, \\ r(t, x, y) &= \Delta_X(t, x) - y, \\ \tilde{H}(t, x, y, p, q) &= \max_{(v_1, v_2) \in F(t, x) \times \{0\}} \{p \cdot v_1 + q \cdot v_2\}.\end{aligned}$$

Passo 2. Da definição de $\tilde{H}$ resulta directamente que $\dot{q}(t) = 0$. Logo

$$q(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Passo 3. Da definição de r facilmente se conclui que $\theta(t) = -1$, μ -q.s.. Conclui-se também que

$$\begin{aligned}\gamma(t) &\in \partial_x^+ \Delta_X(t, x^*(t)), \quad \mu - \text{q.s.}, \\ \text{Supp}(\mu) &\subset \{t \in [0, 1] : \Delta_X(t, x^*(t)) = 0\}.\end{aligned}$$

Passo 4. Suponha-se agora que $\lambda = 0$. Dos passos 2 e 3 acima e da condição (6.2.9) obtém-se que $\mu([0, 1]) = 0$. Desta forma, a condição (6.2.4) não é satisfeita. Assim ter-se-á que $\lambda > 0$. Efectuando um escalamento dos elementos p , q , μ e λ pode então considerar-se que $\lambda = 1$.

Passo 5. Da condição (6.2.5) e do passo 2 conclui-se facilmente que

$$(-\dot{p}(t), \dot{x}(t)) \in \partial H(t, x(t), p(t) + \int_{[0,t[} \gamma d\mu), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}.$$

Verifica-se assim que o multiplicador (λ, μ, p) , onde $\lambda = 1$, satisfaz as condições necessárias de optimalidade para (P) .

Passo 6. A condição $\mu([0, 1]) \leq K$ resulta agora da expressão (6.2.9), do passo 2 acima e da escolha de $\lambda = 1$. □

O resultado seguinte mostra que a normalidade forte é uma condição suficiente para a calma local.

Teorema 6.2.2. *Seja x^* solução local de (P) e suponha-se que (P) é fortemente normal em x^* . Então (P) é localmente calmo em x^* .*

Nos argumentos que se seguem e que concorrem para a demonstração deste teorema, considera-se que x^* é solução local de (P) e que $\varepsilon > 0$ é tal, que para todo o x admissível para (P) , com $\text{gr}(x) \subset T(x^*; \varepsilon)$, se verifica que $g(x(1)) \geq g(x^*(1))$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sejam α_i , κ_i e ϵ_i constantes positivas, e seja (P^i) o seguinte

problema de controlo óptimo

$$(P^i) \quad \min J_i(x, w)$$

sujeito a:

$$(\dot{x}(t), \dot{w}(t)) \in F(t, x(t)) \times \{0\}, \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (6.2.11)$$

$$x(0) = x_0, \quad (6.2.12)$$

$$w(0) \geq \Delta_X(0, x_0), \quad (6.2.13)$$

$$\Delta_X(t, x(t)) - w(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad (6.2.14)$$

onde $J_i(x, w)$ representa o funcional

$$J_i(x, w) = \kappa_i g(x(1)) + \max\{w(1), 0\} + \alpha_i \int_0^1 l_i(t, x(t)) dt,$$

e $l_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ se define por

$$l_i(t, x) = \max\{|x - x^*(t)| - \epsilon_i, 0\}.$$

Considere-se ainda uma constante G tal que

$$|g(z)| \leq G \quad \forall z \in R_F(0, 1, x_0).$$

Lema 6.2.2. *Escolhendo para cada $i \in \mathbb{N}$ escalares positivos β_i , α_i , κ_i e ϵ_i tais que*

$$\frac{\alpha_i \epsilon_i^2}{4k_v} > 2\kappa_i G + \beta_i, \quad (6.2.15)$$

pode afirmar-se que toda a solução (x_i, w_i) de (P^i) satisfaz

$$\text{gr}(x_i) \subset T(x^*; 2\epsilon_i); \quad (6.2.16)$$

mais ainda, se (P) não for localmente calmo em x^ e $\epsilon_i < \frac{\epsilon}{2}$ então também se verifica que*

$$w_i > 0.$$

Demonstração.

Em primeiro lugar é de referir que, para qualquer i , o par (x^*, w^*) , onde $w^* \equiv 0$, é admissível para (P^i) . Assim, uma aplicação do teorema 2.4.2 garante que o problema (P^i) tem solução.

Seja agora (x_i, w_i) uma qualquer solução de (P^i) .

Suponha-se que a condição (6.2.16) não se verifica. Então existe $s \in [0, 1]$ tal que $|x_i(s) - x^*(s)| = 2\epsilon_i$. O facto da função $t \mapsto |x_i(t) - x^*(t)|$ ser Lipschitz contínua de constante $2k_v$ permite concluir que

$$\int_0^1 l_i(t, x_i(t)) dt \geq \frac{\epsilon_i^2}{4k_v}.$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned}
J_i(x_i, w_i) &= \kappa_i g(x_i(1)) + \max\{w_i(1), 0\} + \alpha_i \int_0^1 l_i(t, x_i(t)) dt \\
&\geq \kappa_i g(x_i(1)) + 0 + \frac{\alpha_i \epsilon_i^2}{4k_v} \\
&> -\kappa_i G + 2\kappa_i G + \beta_i \\
&= \kappa_i G + \beta_i \\
&\geq \kappa_i g(x^*(1)) + \beta_i \\
&> J_i(x^*, w^*).
\end{aligned}$$

Uma vez que esta expressão contraria a optimalidade de (x_i, w_i) para (P^i) , conclui-se que a condição (6.2.16) é válida.

Considere-se que (P) não é localmente calmo em x^* , que $\epsilon_i < \frac{\epsilon}{2}$, e suponha-se também que $w_i \equiv 0$. Tem-se então que x_i é admissível para (P) e também que $\text{gr}(x) \subset T(x^*; \epsilon)$. A optimalidade local de x^* permite afirmar que $g(x_i(1)) \geq g(x^*(1))$. Da hipótese de (P) não ser localmente calmo em x^* deduz-se a existência de (x, w) admissível para (P^i) tal que

$$\begin{aligned}
\text{gr}(x) &\subset T(x^*; \epsilon_i), \\
\kappa_i g(x(1)) + \max\{w(1), 0\} &< \kappa_i g(x^*(1)).
\end{aligned}$$

Notando que $l_i(t, x(t)) = 0$ em todo o intervalo $[0, 1]$, as afirmações anteriores permitem concluir que

$$\begin{aligned}
J_i(x, w) &= \kappa_i g(x(1)) + \max\{w(1), 0\} + \alpha_i \int_0^1 l_i(t, x(t)) dt \\
&< \kappa_i g(x^*(1)) \\
&\leq \kappa_i g(x_i(1)) \\
&\leq J_i(x_i, w_i).
\end{aligned}$$

Como esta condição contraria a optimalidade de (x_i, w_i) para (P^i) , conclui-se finalmente que $w_i > 0$. □

Demonstração do teorema 6.2.2.

Suponha-se que (P) não é localmente calmo em x^* .

Considerem-se sucessões $\{\epsilon_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ e $\{\kappa_i\}$ de números positivos e convergentes para zero, tais que para cada i se verifica que $\epsilon_i < \frac{\epsilon}{2}$ e a relação (6.2.15) é válida.

Para cada i , seja (x_i, w_i) uma solução de (P^i) . Aplicando as condições necessárias de optimalidade a esta solução, e notando que $w_i > 0$, de acordo com o resultado anterior, conclui-se a existência de

- um escalar $\lambda_i \geq 0$,
- um arco $p_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

- uma medida regular não negativa μ_i , e
- uma função $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mensurável,

tais que

$$\begin{aligned} (-\dot{p}_i(t), \dot{x}_i(t)) \in \partial H(t, x_i(t), p_i(t) + \int_{[0,t[} \gamma_i d\mu_i) \\ - \lambda_i \alpha_i \partial_x l_i(t, x_i(t)) \times \{0\} \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

$$-p_i(1) - \int_{[0,1]} \gamma_i d\mu_i \in \lambda_i \kappa_i \partial_L g(x_i(1)), \quad (6.2.18)$$

$$\mu_i([0, 1]) = \lambda_i, \quad (6.2.19)$$

$$\text{Supp}(\mu_i) \subset \{t \in [0, 1] : \Delta_X(t, x_i(t)) = 0\}, \quad (6.2.20)$$

$$\gamma_i(t) \in \partial_x^+ \Delta_X(t, x_i(t)) \quad \mu_i - \text{q.s.}, \quad (6.2.21)$$

$$\lambda_i + \mu_i([0, 1]) > 0. \quad (6.2.22)$$

Das condições (6.2.19) e (6.2.22) facilmente se pode concluir que $\lambda_i > 0$. Efectuando um escalamento dos elementos λ_i , p_i e μ_i pode afirmar-se que $\lambda_i = 1$.

Fazendo agora $i \rightarrow +\infty$, um processo de extracção de subsucessões permite afirmar que p_i converge uniformemente para um arco p , x_i converge uniformemente para x^* (note-se que $\text{gr}(x_i) \subset T(x^*; 2\epsilon_i)$ e $\epsilon_i \rightarrow 0$), μ_i converge fracamente* para uma medida regular não negativa μ , e $\gamma_i \mu_i$ converge fracamente* para $\gamma \mu$, onde γ é uma função mensurável. Atendendo a que $\alpha_i \rightarrow 0$ e $\kappa_i \rightarrow 0$, as propriedades dos elementos envolvidos permitem afirmar que p , μ e γ satisfazem

$$\begin{aligned} (-\dot{p}(t), \dot{x}(t)) \in \partial H(t, x(t), p(t) + \int_{[0,t[} \gamma d\mu) \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \\ p(1) + \int_{[0,1]} \gamma d\mu = 0, \\ \text{Supp}(\mu) \subset \{t \in [0, 1] : \Delta_X(t, x(t)) = 0\}, \\ \gamma(t) \in \partial_x^+ \Delta_X(t, x(t)) \quad \mu - \text{q.s.}, \\ \mu([0, 1]) = 1. \end{aligned}$$

Como estas condições contrariam a normalidade forte de (P) em x^* , o teorema fica demonstrado. $\square$

O resultado apresentado em seguida relaciona ainda a normalidade forte e a calma, mas agora num cenário de soluções globais.

Teorema 6.2.3. *Suponha-se que o problema (P) é fortemente normal em todas as soluções (globais). Então (P) é calmo.*

Demonstração.

A demonstração deste teorema é semelhante à demonstração do teorema 6.2.2. Para tal basta construir uma família de problemas auxiliares semelhante à família (P^i) ,

mas agora com o custo sem o termo integral. Efectuando uma análise em tudo semelhante à apresentada atrás, pode concluir-se que cada um dos problemas auxiliares tem solução e, tomando limites quando $i \rightarrow +\infty$, é possível concluir que existe uma subsucessão ao longo da qual as soluções dos problemas auxiliares convergem para alguma solução do problema (P) e os multiplicadores de cada problema auxiliar convergem para um multiplicador (λ, μ, p) do problema (P) . Este multiplicador satisfaz $\lambda = 0$ e $\mu([0, 1]) = 1$, contrariando a normalidade forte na solução de (P) obtida como limite. $\square$

Capítulo 7

Funções de Verificação e Multiplicadores

Neste capítulo é estabelecida uma relação entre multiplicadores das condições necessárias de optimalidade e o gradiente generalizado de funções de verificação, para soluções locais de problemas de controlo óptimo com restrições de estado.

A hipótese de base para obter esta relação é mais uma vez a condição do problema ser localmente calmo na solução local em causa.

Continua a supor-se que as restrições de estado estão formuladas como no capítulo 5, assim como se supõem válidas as hipóteses sobre os dados do problema então postuladas.

7.1 Multiplicadores e gradientes de funções de verificação

Considere-se uma solução local x^* de (P) . Suponha-se que o problema é localmente calmo em x^* . De acordo com o que foi apresentado anteriormente, é possível assegurar a existência de uma função de verificação para esta solução.

Por outro lado, a optimalidade local de x^* garante a existência de um multiplicador normal que verifica as condições necessárias de optimalidade.

O resultado que se apresenta em seguida estabelece uma relação entre um multiplicador das condições necessárias de optimalidade para (P) e elementos do gradiente generalizado da função de verificação.

Teorema 7.1.1. *Seja x^* uma solução local de (P) , que se supõe localmente calmo em x^* . Seja ainda ϕ uma função de verificação local para x^* . Então existe um multiplicador das condições necessárias de optimalidade (λ, μ, p) , com $\lambda = 1$, que*

verifica as condições

$$(h(t), -p(t) - \int_{[0,t]} \gamma d\mu, \mu([0,t])) \in \partial\phi(t, x^*(t), 0) \quad \forall t \in]0, 1[, \quad e \quad (7.1.1)$$

$$(h_d(t), -p(t) - \int_{[0,t]} \gamma d\mu, \mu([0,t])) \in \partial\phi(t, x^*(t), 0) \quad \forall t \in]0, 1[, \quad (7.1.2)$$

onde $h(t)$ e $h_d(t)$ são definidos por

$$h(t) = H(t, x^*(t), p(t) + \int_{[0,t]} \gamma d\mu),$$

$$h_d(t) = H(t, x^*(t), p(t) + \int_{[0,t]} \gamma d\mu).$$

As propriedades do gradiente generalizado da função de verificação ϕ , o facto do hamiltoniano ser contínuo nos seus argumentos, a regularidade da medida μ do multiplicador, e a continuidade das funções x^* e p , permitem concluir que a condição (7.1.2) é uma consequência imediata da condição (7.1.1). Por este motivo, na demonstração apresentada para este teorema apenas se justifica esta última condição.

7.2 Problema auxiliar

Nesta secção será considerado um problema de controlo óptimo, baseado no problema (P) , em x^* , solução local de (P) , e numa função de verificação local ϕ . O estudo deste problema servirá posteriormente para demonstrar o teorema 7.1.1.

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, defina-se a multifunção $D_\varepsilon : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}^{1+n+1}$ da seguinte forma

$$D_\varepsilon(t) = \overline{\text{co}} \{ (a, b, c) \in \partial\phi(s, y, r) : s \in [0, 1], \\ (s, y, r) \in (t, x^*(t), 0) + \varepsilon \bar{B} \times \varepsilon \bar{B}^n \times 2\varepsilon \bar{B} \}.$$

Sendo ϕ Lipschitz contínua, as propriedades do gradiente generalizado de ϕ permitem assegurar que existe uma constante $L > 0$ tal que $\forall t \in [0, 1], \forall m \in D_\varepsilon(t), |m| \leq L$. Da definição de D_ε e deste facto pode concluir-se que para qualquer $t \in [0, 1]$ o conjunto $D_\varepsilon(t)$ é não vazio, convexo e compacto.

Defina-se a função l_ε , para cada $(t, u, v, w) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1+1}$, por

$$l_\varepsilon(t, u, v, w) = \max_{(a,b,c) \in D_\varepsilon(t)} \{ (a, b, c) \cdot (w, -(1+w)u, -(1+w)v) \}.$$

Defina-se também a multifunção $\bar{F}_\varepsilon : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1+1} \rightrightarrows \mathbb{R}^{n+1+1}$ da seguinte forma

$$\bar{F}_\varepsilon(t, x, y, z) = \{ ((1+w)(f+u), (1+w)v, \eta) : f \in F(t, x), \\ -\frac{\varepsilon}{2} \leq w \leq \frac{\varepsilon}{2}, u \in \varepsilon \bar{B}^n, -\varepsilon \leq v \leq \varepsilon, \\ l_\varepsilon(t, u, v, w) \leq \eta \leq 3\varepsilon L \}.$$

Considere-se ainda o seguinte sistema dinâmico, definido no intervalo $[0,1]$,

$$\begin{aligned} (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) &\in \bar{F}_\varepsilon(t, x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \\ \Delta_X(t, x(t)) - y(t) &\leq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \\ (S_\varepsilon) \quad x(0) &= x_0, \\ z(0) &= 0, \\ (x(t), y(t), z(t)) &\in (x^*(t), 0, 0) + \varepsilon B^n \times \varepsilon B \times \varepsilon B, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

O seguinte resultado sintetiza as propriedades fundamentais da multifunção que caracteriza a dinâmica das trajectórias de (S_ε) .

Lema 7.2.1. *Para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+1+1}$ a multifunção $t \mapsto \bar{F}_\varepsilon(t, x, y, z)$ é Lebesgue mensurável.*

Para qualquer $t \in [0, 1]$ a multifunção $(x, y, z) \mapsto \bar{F}_\varepsilon(t, x, y, z)$ é Lipschitz contínua.

Para qualquer $(t, x, y, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1+1}$ o conjunto $\bar{F}_\varepsilon(t, x, y, z)$ é não vazio, compacto e convexo.

Demonstração.

A mensurabilidade em t de $\bar{F}_\varepsilon$ é uma consequência directa da continuidade em t de F e da semicontinuidade superior em t da função l_ε , a qual é por sua vez consequência directa das propriedades do gradiente generalizado da função ϕ .

As demais propriedades de $\bar{F}_\varepsilon$ resultam directamente da sua definição e das hipóteses sobre a multifunção F . $\square$

O resultado que a seguir se apresenta traduz uma propriedade de monotonia das trajectórias de (S_ε) .

Lema 7.2.2. *Seja (x, y, z) uma trajectória para (S_ε) . Então, verifica-se que*

$$\phi(1, x(1), y(1)) + z(1) \geq \phi(0, x_0, 0).$$

Demonstração.

Seja (x, y, z) uma qualquer trajectória de (S_ε) . Considere-se também um escalar $\alpha \in]0, \varepsilon[$.

Tome-se um ponto $s \in [0, 1]$ que verifique as seguintes condições:

$$t \mapsto \phi(t, x(t), y(t) + \alpha) \text{ é derivável em } s, \quad (7.2.1)$$

$$s \text{ é ponto de Lebesgue de } t \mapsto (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \quad (7.2.2)$$

$$(\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s)) \in \bar{F}_\varepsilon(s, x(s), y(s), z(s)). \quad (7.2.3)$$

De (7.2.1) tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(-\phi)(t, x(t), y(t) + \alpha) \Big|_{t=s} &= \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{(-\phi)(s+h, x(s+h), y(s+h) + \alpha) - (-\phi)(s, x(s), y(s) + \alpha)}{h} \end{aligned}$$

A continuidade de Lipschitz de ϕ e a condição (7.2.2) permitem concluir que este limite é ainda igual a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{(-\phi)(s+h, x(s) + h\dot{x}(s), y(s) + \alpha + h\dot{y}(s)) - (-\phi)(s, x(s), y(s) + \alpha)}{h}.$$

Da definição de derivada direccional generalizada, pode então afirmar-se que

$$\left. \frac{d}{dt}(-\phi)(t, x(t), y(t) + \alpha) \right|_{t=s} \leq (-\phi)^0((s, x(s), y(s) + \alpha); (1, \dot{x}(s), \dot{y}(s))).$$

A condição (7.2.3) garante a existência de $f \in F(s, x(s))$, $w \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$, $u \in \varepsilon \bar{B}^n$ e $v \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, tais que $\dot{x}(s) = (1+w)(f+u)$ e $\dot{y}(s) = (1+w)v$. As propriedades da derivada direccional generalizada permitem agora concluir que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(-\phi)(t, x(t), y(t) + \alpha) \right|_{t=s} &\leq (-\phi)^0((s, x(s), y(s) + \alpha); (1, (1+w)(f+u), (1+w)v)) \\ &= (-\phi)^0((s, x(s), y(s) + \alpha); (1+w)(1, f, 0) + (-w, (1+w)u, (1+w)v)) \\ &\leq (1+w)(-\phi)^0((s, x(s), y(s) + \alpha); (1, f, 0)) + \\ &\quad + (-\phi)^0((s, x(s), y(s) + \alpha); (-w, (1+w)u, (1+w)v)). \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

Uma vez que $\Delta_X(s, x(s)) < y(s) + \alpha$, $f \in F(s, x(s))$ e $1+w > 0$, o teorema 5.4.2 permite afirmar que

$$(1+w)(-\phi)^0((s, x(s), y(s) + \alpha); (1, f, 0)) \leq 0. \quad (7.2.5)$$

Por outro lado, as propriedades do gradiente generalizado, o facto de

$$\partial\phi(s, x(s), y(s) + \alpha) \subset D_\varepsilon(s)$$

e a condição (7.2.3), permitem concluir que

$$\begin{aligned} &(-\phi)^0((s, x(s), y(s) + \alpha); (-w, (1+w)u, (1+w)v)) \\ &= \max_{p \in \partial(-\phi)(s, x(s), y(s) + \alpha)} \{p \cdot (-w, (1+w)u, (1+w)v)\} \\ &= \max_{p \in \partial(-\phi)(s, x(s), y(s) + \alpha)} \{(-p) \cdot (w, -(1+w)u, -(1+w)v)\} \\ &= \max_{p \in \partial\phi(s, x(s), y(s) + \alpha)} \{p \cdot (w, -(1+w)u, -(1+w)v)\} \\ &\leq \max_{(p, q, r) \in D_\varepsilon(s)} \{(p, q, r) \cdot (w, -(1+w)u, -(1+w)v)\} \\ &= l_\varepsilon(s, u, v, w) \\ &\leq \dot{z}(s). \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Combinando as expressões (7.2.4), (7.2.5) e (7.2.6) obtém-se então que

$$\left. \frac{d}{dt}\phi(t, x(t), y(t) + \alpha) \right|_{t=s} + \dot{z}(s) \geq 0.$$

As propriedades da função ϕ e das trajectórias de (S_ϵ) permitem afirmar que o conjunto dos pontos s que satisfazem as condições (7.2.1), (7.2.2) e (7.2.3) é um subconjunto de $[0, 1]$ de medida total. Notando que $z(0) = 0$, é então trivial concluir que

$$\phi(1, x(1), y(1) + \alpha) + z(1) \geq \phi(0, x_0, y(0) + \alpha).$$

Uma vez que esta expressão é válida para todo o $\alpha \in]0, \epsilon[$, a consideração de uma sucessão $\{\alpha_i\} \subset]0, \epsilon[$ com $\alpha_i \downarrow 0$, permite concluir, pois a função ϕ é contínua, que

$$\phi(1, x(1), y(1)) + z(1) \geq \phi(0, x_0, y(0)).$$

Das propriedades de ϕ tem-se ainda que

$$\phi(0, x_0, y(0)) \geq \phi(0, x_0, 0) \quad \text{se } y(0) \geq 0, \text{ e}$$

$$\phi(0, x_0, y(0)) = \phi(0, x_0, 0) \quad \text{se } y(0) \leq 0.$$

Conclui-se assim finalmente que

$$\phi(1, x(1), y(1)) + z(1) \geq \phi(0, x_0, 0),$$

como se pretendia mostrar. □

A inclusão diferencial que define a dinâmica das trajectórias de (S_ϵ) permite concluir facilmente o seguinte resultado.

Lema 7.2.3. *Todo o arco (x, y, z) , onde x é admissível para (P) e está no ϵ -tubo em torno de x^* , $y \equiv 0$, e $z \equiv 0$, é uma trajectória de (S_ϵ) .*

Sendo ϕ uma função de verificação, está garantida a existência de um escalar $K \geq 0$ tal que

$$\phi(1, x, r) \leq g(x) + K \max\{0, r, \Delta_X(1, x)\}, \quad (7.2.7)$$

para todo o $(x, r) \in (x^*(1), 0) + \epsilon \bar{B}^n \times 2\epsilon \bar{B}$.

Considerando agora a constante K acima assegurada, defina-se o seguinte problema de controlo óptimo

$$(R_\epsilon) \quad \min \quad J(x, y, z) = g(x(1)) + K \max\{0, y(1)\} + z(1)$$

sujeito a:

$$(x, y, z) \text{ é trajectória de } (S_\epsilon).$$

O resultado seguinte permite obter uma solução óptima para o problema (R_ϵ) .

Lema 7.2.4. *O arco (x^*, y^*, z^*) , onde $y^* \equiv 0$ e $z^* \equiv 0$, é solução óptima de (R_ϵ) .*

Demonstração.

A admissibilidade de (x^*, y^*, z^*) para (R_ϵ) é assegurada pelo lema 7.2.3. Por outro lado, tem-se que

$$J(x^*, y^*, z^*) = g(x^*(1)) = \phi(0, x_0, 0).$$

Seja agora (x, y, z) admissível para (R_ε) . O lema 7.2.2 e a relação expressa por (7.2.7) permitem concluir que

$$g(x(1)) + K \max\{0, y(1), \Delta_X(1, x(1))\} + z(1) \geq \phi(0, x_0, 0).$$

No entanto, a admissibilidade de (x, y, z) implica que $y(1) \geq \Delta_X(1, x(1))$. Combinando este facto com as duas últimas condições obtém-se que

$$J(x, y, z) = g(x(1)) + K \max\{0, y(1)\} + z(1) \geq J(x^*, y^*, z^*),$$

demonstrando-se a optimalidade de (x^*, y^*, z^*) . $\square$

O resultado que se apresenta em seguida estabelece a forma como as condições necessárias de optimalidade de (x^*, y^*, z^*) , onde $w^* \equiv 0$ e $z^* \equiv 0$, para (R_ε) permitem obter uma relação entre multiplicadores das condições necessárias de optimalidade de x^* para (P) e a função de verificação ϕ .

Lema 7.2.5. *Existe um elemento (p, μ, γ) , onde $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua, μ é uma medida regular não negativa em $[0, 1]$, e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é mensurável, que satisfaz as condições*

$$-p(1) - \int_{[0,1]} \gamma d\mu \in \partial_L g(x^*(1)) \quad (7.2.8)$$

$$\begin{aligned} (-\dot{p}(t), \dot{x}(t)) &\in \partial H(t, x^*(t), p(t) + \int_{[0,t]} \gamma d\mu) + \\ &\varepsilon \cdot \kappa \cdot (1 + |p(t)| + \mu([0, 1])) \bar{B}^{2n}, \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.} \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

$$\gamma(t) \in \partial_x^+ \Delta_X(t, x^*(t)), \quad \mu - \text{q.s.} \quad (7.2.10)$$

$$\text{Supp}(\mu) \subset \{t \in [0, 1] : \Delta_X(t, x^*(t)) = 0\} \quad (7.2.11)$$

$$(h(t), -p(t) - \int_{[0,t]} \gamma d\mu, \mu([0, t])) \in D_\varepsilon(t), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.} \quad (7.2.12)$$

onde $h(t) = H(t, x^*(t), p(t) + \int_{[0,t]} \gamma d\mu)$, e κ é uma constante positiva.

Demonstração.

Passo 1. A optimalidade de (x^*, y^*, z^*) , onde $y^* \equiv z^* \equiv 0$, para o problema (R_ε) , permite afirmar a existência de

- um escalar $\lambda \geq 0$,
- uma função $(p, p_2, p_3) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1+1}$ absolutamente contínua,
- uma medida regular μ em $[0, 1]$ não negativa, e
- uma função $(\gamma, \gamma_2) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mensurável,

tais que se verificam as seguintes condições

$$\lambda + \mu([0, 1]) > 0 \quad (7.2.13)$$

$$\begin{aligned} &(-\dot{p}(t), -\dot{p}_2(t), -\dot{p}_3(t), \dot{x}^*(t), 0, 0) \\ &\in \partial \bar{H}_\varepsilon(t, x^*(t), 0, 0, \bar{p}(t), \bar{p}_2(t), p_3(t)) \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.} \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

$$(\gamma(t), \gamma_2(t)) \in \partial_{xy}^+ r(t, x^*(t), 0) \quad \mu - \text{q.s.} \quad (7.2.15)$$

$$\text{Supp}(\mu) \subset \{t \in [0, 1] : r(t, x^*(t), 0) = 0\} \quad (7.2.16)$$

$$-\bar{p}(1) - \gamma(1)\mu(\{1\}) \in \lambda \partial_L g(x^*(1)) \quad (7.2.17)$$

$$-\bar{p}_2(1) - \gamma_2(1)\mu(\{1\}) \in \lambda[0, K] \quad (7.2.18)$$

$$-p_3(1) = \lambda \quad (7.2.19)$$

$$p_2(0) = 0 \quad (7.2.20)$$

onde

$$\begin{aligned} r(t, x, y) &= \Delta_X(t, x) - y, \\ \bar{p}(t) &= p(t) + \int_{[0, t[} \gamma d\mu, \\ \bar{p}_2(t) &= p_2(t) + \int_{[0, t[} \gamma_2 d\mu, \end{aligned}$$

e $\bar{H}_\varepsilon$ designa o hamiltoniano correspondente a $\bar{F}_\varepsilon$.

Passo 2. O facto da função $\bar{H}$ não depender de y nem de z tem como consequência que os elementos pertencentes a $\partial \bar{H}$ tenham as segundas e terceiras componentes sempre nulas. Desta forma, a inclusão hamiltoniana (7.2.14) implica que

$$\dot{p}_2(t) = \dot{p}_3(t) = 0, \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}.$$

Verifica-se então que

$$\begin{aligned} p_2(t) &= 0, \quad \forall t \in [0, 1], \\ p_3(t) &= -\lambda, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Passo 3. Da definição de r acima, conclui-se que todo o elemento $(\beta, \beta_2) \in \partial_{xy}^+ r(t, x, 0)$ verifica as condições $\beta \in \partial_x^+ \Delta_X(t, x)$ e $\beta_2 = -1$. Assim, $\gamma_2(t) = -1$, $\mu - \text{q.s.}$, e logo

$$\bar{p}_2(t) = \mu([0, t]). \quad (7.2.21)$$

Passo 4. Suponha-se que o escalar λ é nulo. As condições (7.2.18) e (7.2.21) permitem concluir que

$$\mu([0, 1]) = 0.$$

Mas então ter-se-ia que $\lambda + \mu([0, 1]) = 0$, contrariando a condição (7.2.13). Este raciocínio permite concluir que $\lambda > 0$.

Passo 5. Uma vez que os elementos p, p_2, p_3, μ e λ podem ser definidos a menos de um factor positivo, ir-se-á considerar em seguida um escalamento destes elementos de forma a que $\lambda = 1$.

Passo 6. Da definição de r , do passo 3 acima, e das condições (7.2.15) e (7.2.16) pode concluir-se que

$$\begin{aligned}\gamma(t) &\in \partial_x^+ \Delta_X(t, x^*(t)) \quad \mu - \text{q.s.}, \text{ e} \\ \text{Supp}(\mu) &\subset \{t \in [0, 1] : \Delta_X(t, x^*(t)) = 0\}.\end{aligned}$$

Passo 7. Sendo λ igual a 1, a condição (7.2.8) obtém-se directamente de (7.2.17).

Passo 8. O passo 1 permite agora escrever que

$$(-\dot{p}(t), 0, 0, \dot{x}^*(t), 0, 0) \in \partial \bar{H}_\varepsilon(t, x^*(t), 0, 0, \bar{p}(t), \bar{p}_2(t), -1) \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}.$$

Desta condição conclui-se a existência de uma constante $\kappa > 0$ tal que

$$(-\dot{p}(t), \dot{x}^*(t)) \in \partial H(t, x^*(t), \bar{p}(t)) + \varepsilon \cdot \kappa \cdot (1 + |p(t)| + \mu([0, 1])) \bar{B}^{2n} \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.},$$

que não é mais do que uma versão relaxada da inclusão hamiltoniana das condições necessárias de optimalidade de x^* para (P) .

Passo 9. Fixe-se agora um ponto t tal que a condição (7.2.14) seja válida. Então, das propriedades do hamiltoniano resulta que

$$h(t) = \bar{H}_\varepsilon(t, x^*(t), 0, 0, \bar{p}(t), \bar{p}_2(t), -1) = \bar{p}(t) \cdot \dot{x}^*(t),$$

ou, ainda,

$$\bar{p}(t) \cdot (1 + w)(f + u) + \bar{p}_2(t)(1 + w)v - \sigma \leq h(t),$$

expressão esta que é válida para todos os $f \in F(t, x^*(t))$, $u \in \varepsilon \bar{B}^n$, $v \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $w \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ e $\sigma \in [l_\varepsilon(t, u, v, w), 3\varepsilon L]$. Tomando $f = \dot{x}^*(t)$ e $\sigma = l_\varepsilon(t, u, v, w)$, esta condição implica que

$$\bar{p}(t) \cdot (1 + w)(\dot{x}^*(t) + u) + \bar{p}_2(t)(1 + w)v - l_\varepsilon(t, u, v, w) \leq h(t),$$

o que após algum rearranjo resulta em

$$w \cdot h(t) + (1 + w) \bar{p}(t) \cdot u + (1 + w) \bar{p}_2(t)v \leq l_\varepsilon(t, u, v, w), \quad (7.2.22)$$

válida para todos os $u \in \varepsilon \bar{B}^n$, $v \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, e $w \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$.

Fixe-se agora (u, v, w) como acima e seja $\tau > 0$ qualquer. Da definição de l_ε , conclui-se a existência de um elemento $(a, b, c) \in D_\varepsilon(t)$, dependente de τ , tal que

$$w \cdot a - (1 + w)u \cdot b - (1 + w)v \cdot c \geq l_\varepsilon(t, u, v, w) - \tau.$$

Conjugando esta expressão com (7.2.22) obtém-se então que

$$(h(t) - a)w + (1 + w)(\bar{p}(t) + b) \cdot u + (1 + w)(\bar{p}_2(t) + c)v \leq \tau.$$

Fazendo agora $\tau \downarrow 0$ facilmente se conclui que

$$\inf_{(a, b, c) \in D_\varepsilon(t)} \{(h(t) - a)w + (1 + w)(\bar{p}(t) + b) \cdot u + (1 + w)(\bar{p}_2(t) + c)v\} \leq 0.$$

A arbitrariedade na escolha de (u, v, w) permite afirmar que esta desigualdade é válida para todo o $(u, v, w) \in \bar{B}^n \times [-1, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Notando que $1 + w$ é sempre positivo, pode ainda concluir-se que

$$\inf_{(a,b,c) \in D_\varepsilon(t)} \{(h(t) - a, \bar{p}(t) + b, \bar{p}_2(t) + c) \cdot (w, u, v)\} \leq 0,$$

agora para todo o $(w, u, v) \in [-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}] \times \varepsilon \bar{B}^n \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, conjunto este que contém uma vizinhança de $(0, 0, 0)$ elemento de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Esta desigualdade afirma a não existência de qualquer hiperplano que separe o ponto $(h(t), -\bar{p}(t), -\bar{p}_2(t))$ do conjunto $D_\varepsilon(t)$. Uma vez que este conjunto é não vazio, convexo e fechado, uma aplicação directa do teorema da separação permite concluir que

$$(h(t), -\bar{p}(t), -\bar{p}_2(t)) \in D_\varepsilon(t).$$

A condição (7.2.12) obtém-se facilmente notando que os pontos t para os quais a condição acima é satisfeita constituem um subconjunto de $[0, 1]$ de medida total, substituindo $\bar{p}(t)$ por $p(t) + \int_{[0,t]} \gamma d\mu$ e $\bar{p}_2(t)$ por $-\mu([0, t])$, como visto. Desta forma fica concluída a demonstração deste resultado. $\square$

7.3 Demonstração do teorema 7.1.1

Seja agora uma sucessão $\{\varepsilon_i\}$ com $\varepsilon_i \downarrow 0$. Considere-se ainda para cada i o problema (R_{ε_i}) . O lema 7.2.5 permite afirmar que para cada i suficientemente elevado existem

- uma função $p_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua,
- uma medida regular não negativa μ_i em $[0, 1]$, e
- uma função $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mensurável,

tais que as relações (7.2.8)-(7.2.12) são satisfeitas, substituindo ε por ε_i e (p, μ, γ) por (p_i, μ_i, γ_i) .

A demonstração do teorema 7.1.1 é agora obtida por um processo de extracção sucessiva de subsucessões quando $i \rightarrow +\infty$, apresentado em seguida. De forma a simplificar a notação, as sucessivas subsucessões que vão sendo consideradas não serão alvo de indexação.

Passo 1. O facto das medidas μ_i serem limitadas em $[0, 1]$ permite afirmar, eventualmente considerando uma subsucessão, que existe uma medida não negativa μ em $[0, 1]$ tal que

$$\mu_i \xrightarrow{\text{fracamente}^*} \mu.$$

Uma vez que a condição (7.2.11) se verifica ao longo de toda a sucessão conclui-se então que esta mesma condição se verifica no limite.

Passo 2. Notando agora que a condição (7.2.10) é satisfeita para todo o i e atendendo às propriedades da multifunção $(t, x) \mapsto \partial_x^+ \Delta_X(t, x)$, o teorema 2.4.3 permite

afirmar, eventualmente após consideração de uma nova subsucessão, a existência de uma função $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, mensurável, que satisfaz

$$\gamma_i \mu_i \xrightarrow{\text{fracamente}^*} \gamma \mu, \\ \gamma(t) \in \partial_x^+ \Delta_X(t, x^*(t)), \quad \mu - \text{q.s.}.$$

Passo 3. As propriedades do subgradiente limite de g , o facto desta função ser Lipschitz contínua, as condições sobre as funções γ_i e a condição (7.2.8), que é satisfeita para todo o i , permitem concluir que $\{p_i(1)\}$ é limitada. Uma aplicação do teorema 2.4.2 permite afirmar que existe uma função $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, absolutamente contínua, tal que, eventualmente considerando uma subsucessão,

$$p_i \xrightarrow{\text{fortemente}} p.$$

As propriedades do gradiente generalizado, o facto do subgradiente limite ter grafo fechado, e o passo 2 acima, permitem concluir que no limite a condição (7.2.8) é satisfeita e também que

$$(-\dot{p}(t), \dot{x}^*(t)) \in \partial H(t, x^*(t), \bar{p}(t)), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}.$$

Passo 4. Para terminar a demonstração do teorema, falta ainda demonstrar a condição (7.1.1). Uma vez que a condição (7.2.12) é satisfeita para todo o i , facilmente se conclui que no limite se tem

$$(h(t), -\bar{p}(t), \mu([0, t])) \in \bigcap_{\delta > 0} D_\delta(t) \quad (7.3.1)$$

para todo o $t \in [0, 1] - \text{q.s.}$ Mais uma vez $\bar{p}(t)$ representa a quantidade $p(t) + \int_{[0, t]} \gamma d\mu$. Seja agora $t \in [0, 1]$ tal que (7.3.1) é válida. Suponha-se que para tal t a inclusão

$$(h(t), -\bar{p}(t), \mu([0, t])) \in \partial \phi(t, x^*(t), 0) \quad (7.3.2)$$

não se verifica. O facto de $\partial \phi(t, x^*(t), 0)$ ser um conjunto convexo e fechado permite afirmar que existem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, elemento de $\mathbb{R}^{1+n+1}$, e $\beta > 0$, tais que

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (h(t), -\bar{p}(t), \mu([0, t])) > (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (a, b, c) + \beta$$

para todo o $(a, b, c) \in \partial \phi(t, x^*(t), 0)$. A relação entre o gradiente generalizado e a derivada direccional generalizada permite ainda escrever que

$$\phi^0((t, x^*(t), 0); (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = \max_{(a, b, c) \in \partial \phi(t, x^*(t), 0)} \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (a, b, c)\}.$$

Destas duas expressões pode concluir-se que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $\beta > 0$ são tais que

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (h(t), -\bar{p}(t), \mu([0, t])) > \phi^0((t, x^*(t), 0); (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) + \beta.$$

A semicontinuidade superior da derivada direccional generalizada garante a existência de um escalar $\delta_1 > 0$ tal que

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (h(t), -\bar{p}(t), \mu([0, t])) > \phi^0((s, y, r); (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) + \frac{\beta}{2}$$

para todos os $(s, y, r) \in (t, x^*(t), 0) + \delta_1 \bar{B} \times \delta_1 \bar{B}^n \times 2\delta_1 \bar{B}$, tais que $0 < s < 1$. Voltando a utilizar a relação entre derivada direcciona! generalizada e gradiente generalizado, esta última condiç!o pode ser escrita da seguinte forma

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (h(t), -\bar{p}(t), \mu([0, t])) > \sup_{(a, b, c) \in G(t)} \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (a, b, c)\} + \frac{\beta}{2}, \quad (7.3.3)$$

onde o conjunto $G(t)$ é dado por

$$G(t) = \{(a, b, c) \in \partial\phi(s, y, r) : 0 < s < 1, \\ (s, y, r) \in (t, x^*(t), 0) + \delta_1 \bar{B} \times \delta_1 \bar{B}^n \times 2\delta_1 \bar{B}\}.$$

A express!o (7.3.3) afirma que é possível separar estritamente, por intermédio de um hiperplano, o elemento $(h(t), -\bar{p}(t), \mu([0, t]))$ do conjunto do conjunto $G(t)$. Segue-se ent!o que

$$(h(t), -\bar{p}(t), \mu([0, t])) \notin \overline{\text{co}} G(t).$$

Uma vez que $\overline{\text{co}} G(t) = D_{\delta_1}(t)$, esta condiç!o contradiz a express!o (7.3.1). Conclui-se assim que a inclus!o (7.3.2) é vá!ida, para todo o t pertencente a um subconjunto de $[0, 1]$ de medida total.

Notando agora que as funç!es

$$t \mapsto \mu([0, t]) \\ t \mapsto p(t) + \int_{[0, t]} \gamma d\mu$$

s!o contínuas à esquerda e lembrando que o gradiente generalizado possui grafo fechado, pode concluir-se que o facto da condiç!o (7.3.2) ser vá!ida num subconjunto de $[0, 1]$ de medida total implica que esta condiç!o seja ainda vá!ida para todo o $t \in]0, 1[$.

Capítulo 8

Função Valor Estendida

Neste capítulo é apresentada uma definição alternativa para a função valor em problemas com restrições de estado. Esta nova função é designada por função valor estendida e, tal como a função valor habitualmente usada, é definida como o custo óptimo de uma família de problemas que inclui, como caso particular, o problema original.

A família de problemas aqui considerada está parametrizada por três elementos. Os dois primeiros caracterizam a condição inicial de cada problema, tal como é habitual na definição de funções valor. A diferença entre a função valor estendida e a função valor habitualmente considerada reside na consideração do terceiro elemento da parametrização. Este elemento caracteriza o grau de satisfação da restrição de estado a que têm de obedecer as trajectórias admissíveis para cada problema. Esta nova função valor constitui uma generalização da função valor clássica na medida em que esta última se obtém tornando nulo o terceiro elemento parametrizador.

Após a definição da função valor estendida, é efectuada uma análise das suas propriedades elementares, nomeadamente as relacionadas com a sua monotonia quando avaliada ao longo de trajectórias admissíveis.

Em seguida, sob uma qualificação das restrições semelhante às que têm sido propostas na literatura, demonstra-se que a função valor estendida é Lipschitz contínua. Mostra-se também que a função valor estendida satisfaz uma equação generalizada de Hamilton-Jacobi sempre que for localmente Lipschitz contínua. É ainda apresentado um resultado que relaciona multiplicadores normais das condições necessárias de optimalidade com gradientes da função valor estendida.

Em todo este capítulo considera-se o problema de controlo óptimo com restrições de estado apresentado no capítulo 3. Como então, este problema é designado por (P) . Supõe-se ainda que a restrição de estado se encontra representada na forma $\Delta_X(t, x(t)) \leq 0$ e consideram-se válidas as hipóteses sobre os dados do problema formuladas no capítulo 5, no que respeita à dinâmica e à função objectivo. O conjunto $X \subset [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ continua a supor-se fechado.

8.1 Família de problemas e função valor estendida

Seja (s, y, r) um elemento de $[0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e considere-se a seguinte família de problemas, parametrizada por tal elemento.

$$(P_{s,y,r}) \quad \min \quad g(x(1))$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [s, 1] - \text{q.s.}, \quad (8.1.1)$$

$$x(s) = y, \quad (8.1.2)$$

$$\Delta_X(t, x(t)) \leq \max\{0, r, \Delta_X(s, y)\}, \quad \forall t \in [s, 1]. \quad (8.1.3)$$

A função valor estendida será a função $V : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por $V(s, y, r) = \inf\{P_{s,y,r}\}$.

Em seguida são enunciados e demonstrados alguns resultados sobre propriedades da função valor estendida. Alguns destes resultados não são mais do que meras extensões de resultados já existentes sobre a função valor.

Lema 8.1.1. *Para qualquer $(x, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tem-se que $V(1, x, r) = g(x)$.*

Lema 8.1.2. *Seja $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ qualquer. Então a função $r \mapsto V(s, y, r)$ é decrescente.*

Demonstração.

Este resultado é uma consequência directa do facto de todo o x admissível para $P(s, y, r)$ também ser admissível para $(P_{s,y,r'})$, para qualquer $r' \geq r$. $\square$

O resultado seguinte estabelece um princípio de programação dinâmica para a família de problemas $(P_{s,y,r})$. É de notar o facto deste princípio apenas ser válido quando a condição inicial (s, y, r) satisfaz a condição $r \geq \Delta_X(s, y)$.

Lema 8.1.3. *Seja (s, y, r) tal que $r \geq \Delta_X(s, y)$. Seja x admissível para $(P_{s,y,r})$. Então, para qualquer $t > s$ tem-se que $x|_{[t,1]}$ é admissível para $(P_{t,x(t),r})$. Consequentemente, a função $t \mapsto V(t, x(t), r)$ é crescente em $[s, 1]$.*

Demonstração.

Seja (s, y, r) como suposto e seja x admissível para $(P_{s,y,r})$. A condição $r \geq \Delta_X(s, y)$ implica que $\Delta_X(\tau, x(\tau)) \leq \max\{r, 0\}$, para todo o $\tau \in [s, 1]$. Logo, para qualquer $t \in [s, 1]$ tem-se que $x|_{[t,1]}$ é admissível para $(P_{t,x(t),r})$. A segunda conclusão é agora uma consequência imediata. $\square$

Corolário 8.1.1. *Seja (s, y, r) tal que $r \geq \Delta_X(s, y)$. Seja x^* solução de $(P_{s,y,r})$. Então, a função $t \mapsto V(t, x^*(t), r)$ é constante em $[s, 1]$.*

8.2 Qualificação das restrições de estado

A função valor estendida V , anteriormente definida, não é necessariamente finita, pois, sob as hipóteses consideradas, poderão existir condições iniciais (s, y, r) para as quais o problema $(P_{s,y,r})$ não tenha trajectórias admissíveis. Pode também acontecer que o domínio de V , isto é, o conjunto de pontos em que V é finita, tenha interior vazio, ou ainda que a restrição de V ao seu domínio não seja contínua.

Repare-se que estas observações também se aplicam, em geral, à função valor habitualmente considerada.

Apresenta-se em seguida uma qualificação das restrições de estado e mostra-se que tal condição é suficiente para a Lipschitz continuidade da função valor estendida.

(QR) Existem $\eta > 0$, $q > 0$, $p > 0$ e uma função $\alpha : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua e satisfazendo $\alpha(t, x) \in F(t, x) \forall (t, x)$, tais que

$$\forall r \geq 0 \quad \forall (t, x) \in (B(X, r) \cap B(\partial(B(X, r)), \eta)) \cap]0, 1[\times \mathbb{R}^n$$

$$\text{tem-se que } B((t + s, x + s\alpha(t, x)), sp) \subset B(X, r) \quad \forall s \in]0, q].$$

Nesta expressão, $B(Z, \beta)$ representa o conjunto $\{z : d_Z(z) \leq \beta\}$.

Esta qualificação das restrições constitui de alguma forma uma extensão daquela proposta em [FR99] (e referida na secção 4.5), pois permite considerar diferentes níveis de satisfação das restrições de estado, níveis esses determinados pelo parâmetro r acima. O seguinte teorema garante a existência de trajectórias próximas admissíveis para a família de problemas $(P_{s,y,r})$, supondo válida esta qualificação das restrições.

Teorema 8.2.1. *Suponha-se válida a qualificação das restrições (QR). Então, existe $K > 0$ tal que para quaisquer $(s, y, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1}$ e x , trajectória de F em $[s, 1]$ com $x(s) = y$, existe z , trajectória de F em $[s, 1]$ com $z(s) = y$, verificando*

$$\max_{t \in [s, 1]} \Delta_X(t, z(t)) \leq m$$

$$\max_{t \in [s, 1]} |z(t) - x(t)| \leq K \max\left\{\max_{t \in [s, 1]} \{\Delta_X(t, x(t))\} - m, 0\right\}$$

onde $m = \max\{0, r, \Delta_X(s, y)\}$.

Demonstração.

Este teorema é uma consequência directa do teorema 4.1 de [FR99], apresentado aqui na proposição 4.5.1. $\square$

Teorema 8.2.2. *Suponha-se válida a qualificação das restrições (QR). Então a função valor estendida é Lipschitz contínua.*

A demonstração deste teorema é uma consequência imediata dos três lemas que em seguida se enunciam e demonstram.

Lema 8.2.1. *Seja $(s, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ qualquer. Então a função $y \mapsto V(s, y, r)$ é Lipschitz contínua em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração.

Seja (s, y) como acima e sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$.

Definam-se $m_1 = \max\{0, r, \Delta_X(s, y_1)\}$ e $m_2 = \max\{0, r, \Delta_X(s, y_2)\}$. Note-se que $m_1 \leq m_2 + |y_1 - y_2|$.

Seja x_1 uma solução de $(P_{s, y_1, r})$. Uma aplicação do teorema 2.4.1 garante a existência de z_2 , trajectória de F com $z_2(s) = y_2$, tal que

$$\max_{t \in [s, 1]} |x_1(t) - z_2(t)| \leq e^{k_F} |y_1 - y_2|.$$

Se $\max_{t \in [s, 1]} \Delta_X(t, z_2(t)) \leq m_2$, então z_2 é admissível para $(P_{s, y_2, r})$, concluindo-se que

$$V(s, y_2, r) \leq g(z_2(1)) \leq V(s, y_1, r) + k_g e^{k_F} |y_1 - y_2|.$$

Caso $\max_{t \in [s, 1]} \Delta_X(t, z_2(t)) > m_2$, uma aplicação do teorema 8.2.1 assegura a existência de x_2 , admissível para $(P_{s, y_2, r})$ tal que

$$\max_{t \in [s, 1]} |x_2(t) - z_2(t)| \leq K \left(\max_{t \in [s, 1]} \{\Delta_X(t, z_2(t))\} - m_2 \right).$$

Segue-se facilmente que

$$\max_{t \in [s, 1]} |x_2(t) - z_2(t)| \leq (K(1 + e^{k_F})) |y_1 - y_2|.$$

Uma aplicação da desigualdade triangular permite concluir que

$$V(s, y_2, r) \leq V(s, y_1, r) + k_g (e^{k_F} + K(1 + e^{k_F})) |y_1 - y_2|.$$

Partindo agora de uma solução de $(P_{s, y_2, r})$ e aplicando um raciocínio análogo demonstra-se o pretendido. $\square$

Lema 8.2.2. *Seja $(y, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ qualquer. Então a função $s \mapsto V(s, y, r)$ é Lipschitz contínua em $[0, 1]$.*

Demonstração.

Sejam (y, r) como acima, e $s_1, s_2 \in [0, 1]$.

Definam-se $m_1 = \max\{0, r, \Delta_X(s_1, y)\}$ e $m_2 = \max\{0, r, \Delta_X(s_2, y)\}$. Note-se que $m_1 \leq m_2 + |s_2 - s_1|$.

Sem perda de generalidade, suponha-se que $s_1 \leq s_2$. Seja x_1 solução de $(P_{s_1, y, r})$. Uma aplicação do corolário 8.1.1, as propriedades de F , e o lema acima, permitem concluir que

$$V(s_1, y, r) \leq V(s_2, y, r) + k_x k_v |s_2 - s_1|,$$

onde k_x é a constante de Lipschitz assegurada pelo lema acima.

Aplicando novamente o teorema 2.4.1 conclui-se que existe z_2 , trajectória de F em $[s_2, 1]$ com $z_2(s_2) = y$, tal que

$$\max_{t \in [s_2, 1]} |z_2(t) - x_1(t)| \leq e^{k_F} |x_1(s_2) - y| \leq e^{k_F} k_v |s_2 - s_1|.$$

Se z_2 for admissível para $(P_{s_2, y, r})$ então conclui-se imediatamente que

$$V(s_2, y, r) \leq g(z_2(1)) \leq V(s_1, y, r) + k_g e^{k_F} k_v |s_2 - s_1|.$$

Caso contrário, uma aplicação do teorema 8.2.1 garante a existência de x_2 , admissível para $(P_{s_2, y, r})$, tal que

$$\max_{t \in [s_2, 1]} |z_2(t) - x_2(t)| \leq K \left(\max_{t \in [s_2, 1]} \{\Delta_X(t, z_2(t))\} - m_2 \right).$$

Notando que $\max_{t \in [s_2, 1]} \Delta_X(t, z_2(t)) \leq m_1 + e^{k_F} k_v |s_2 - s_1|$, conclui-se facilmente que

$$V(s_2, y, r) \leq V(s_1, y, r) + (K + (1 + K)(e^{k_F} + k_v)) |s_2 - s_1|,$$

ficando demonstrado o resultado. $\square$

Lema 8.2.3. *Seja $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ qualquer. Então a função $r \mapsto V(s, y, r)$ é Lipschitz contínua em $\mathbb{R}$.*

Demonstração.

Sejam (s, y) como no enunciado e $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer.

Definam-se $m_1 = \max\{0, r_1, \Delta_X(s, y)\}$ e $m_2 = \max\{0, r_2, \Delta_X(s, y)\}$. Note-se que $m_1 \leq m_2 + |r_1 - r_2|$.

Sem perda de generalidade, suponha-se que $r_2 \leq r_1$. Então, do lema 8.1.2 conclui-se imediatamente que

$$V(s, y, r_1) \leq V(s, y, r_2).$$

Seja x_1 uma solução de (P_{s, y, r_1}) . Se x_1 for admissível para (P_{s, y, r_2}) então

$$V(s, y, r_2) \leq V(s, y, r_1).$$

Caso contrário, uma aplicação do teorema 8.2.1 garante a existência de x_2 , admissível para (P_{s, y, r_2}) , tal que

$$\max_{t \in [s, 1]} |x_1(t) - x_2(t)| \leq K \left(\max_{t \in [s, 1]} \{\Delta_X(t, x_1(t))\} - m_2 \right).$$

Segue-se que $\max_{t \in [s, 1]} |x_1(t) - x_2(t)| \leq K|r_1 - r_2|$, do que se deduz que

$$V(s, y, r_2) \leq g(x_2(1)) \leq V(s, y, r_1) + k_g K |r_1 - r_2|,$$

demonstrando o pretendido. $\square$

8.3 Equação de Hamilton-Jacobi e condições de optimalidade

Nesta secção assume-se que a função valor estendida é localmente Lipschitz contínua. Neste caso, é possível concluir que a função valor satisfaz uma equação de Hamilton-Jacobi, semelhante àquela demonstrada no capítulo 5 para o caso de funções de verificação Lipschitz contínuas. Tal como então, esta equação é válida apenas em condições iniciais tais que $\Delta_X(s, y) < r$. No entanto, no caso da função valor estendida é ainda possível mostrar que uma das desigualdades de Hamilton-Jacobi permanece válida mesmo quando $\Delta_X(s, y) = r$.

Teorema 8.3.1. *Seja $(s, y, r) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^{n+1}$. Se $r > \Delta_X(s, y)$ verifica-se que*

$$\max_{v \in F(s, y)} V^0((s, y, r); (-1, -v, 0)) \leq 0. \quad (8.3.1)$$

Se $r \geq \Delta_X(s, y)$ tem-se ainda que

$$\max_{v \in F(s, y)} V^0((s, y, r); (-1, -v, 0)) \geq 0. \quad (8.3.2)$$

Demonstração.

A demonstração deste teorema é em tudo semelhante à demonstração apresentada para o teorema 5.4.2, uma vez que o lema 8.1.3 e o corolário 8.1.1 asseguram agora as propriedades de V que então o lema 5.4.2 assegurava para a função de verificação ϕ . A única diferença reside no facto de agora ser possível estabelecer a desigualdade (8.3.2) mesmo em pontos onde $r = \Delta_X(s, y)$. Tal possibilidade resulta directamente da validade do corolário 8.1.1 para tais condições iniciais $\square$

Uma consequência da Lipschitz continuidade da função valor estendida é a calma do problema (P) . De facto, sendo $\alpha \geq 0$, o problema $P(\alpha)$, considerado no capítulo 5, não é mais do que o problema $(P_{0, x_0, \alpha})$, concluindo-se então que

$$\inf\{P(\alpha)\} = V(0, x_0, \alpha) \geq V(0, x_0, 0) - K\alpha = \inf\{(P)\} - K\alpha,$$

onde K é constante de Lipschitz de V . A implicação contrária não é de um modo geral verdadeira, como se pode constatar pelo exemplo seguinte.

Exemplo 8.3.1. *Considere-se o seguinte problema*

$$\min \quad x_1(1) - 2x_2(1)$$

sujeito a:

$$(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \in F, \quad t \in [s, 1] - \text{q.s.},$$

$$(x_1(0), x_2(0)) = (0, -1/2),$$

$$(x_1(t), x_2(t)) \in X, \quad \forall t \in [0, 1],$$

onde

$$F = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1, u \leq 0, v \geq 0\},$$

$$X = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \leq y \text{ ou } z \geq -y\}.$$

Facilmente se conclui que o custo óptimo do problema é $-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Sendo agora $r > 0$ e substituindo a restrição de estado acima por

$$\Delta_X(x_1(t), x_2(t)) \geq r,$$

pode também concluir-se que o custo óptimo do problema que assim se obtém é, para r suficientemente pequeno, dado por

$$-\sqrt{5} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{4} + 2r^2} \right) - \sqrt{2}r.$$

Desta expressão conclui-se que este problema é calmo. No entanto, a função valor estendida para este problema não é Lipschitz contínua. Para verificar tal afirmação basta considerar o problema que se obtém substituindo a condição inicial por

$$(x_1(0), x_2(0)) = (-\epsilon, -1/2),$$

onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno; o custo óptimo de tais problemas será -3ϵ ; basta agora fazer $\epsilon \rightarrow 0$ para concluir a não continuidade da função valor.

8.4 Gradientes da função valor e multiplicadores

O resultado que se apresenta em seguida estabelece uma relação entre um multiplicador normal das condições necessárias de optimalidade e o gradiente generalizado da função valor estendida, a qual se supõe localmente Lipschitz. A relação aqui apresentada é semelhante à obtida no capítulo 7, então no caso de funções de verificação.

Teorema 8.4.1. *Seja x^* solução de (P) e suponha-se que a função valor estendida é localmente Lipschitz contínua. Então, existe um multiplicador das condições necessárias de optimalidade $(1, \mu, p)$ que verifica as condições*

$$(h(t), -p(t) - \int_{[0,t]} \gamma d\mu, -\mu([t, 1])) \in \partial V(t, x^*(t), 0) \quad \forall t \in]0, 1[, \text{ e} \quad (8.4.1)$$

$$(h_d(t), -p(t) - \int_{[0,t]} \gamma d\mu, -\mu(]t, 1])) \in \partial V(t, x^*(t), 0) \quad \forall t \in]0, 1[, \quad (8.4.2)$$

onde $h(t)$ e $h_d(t)$ se definem por

$$h(t) = H(t, x(t), p(t)) + \int_{[0,t]} \gamma d\mu, \text{ e}$$

$$h_d(t) = H(t, x(t), p(t)) + \int_{[0,t]} \gamma d\mu.$$

As semelhanças entre este resultado e o teorema 7.1.1 permitem efectuar uma demonstração seguindo um procedimento análogo ao empregue para demonstrar tal teorema. Assim, a demonstração apresentada em seguida é propositadamente sucinta, de forma a não repetir argumentos semelhantes aos anteriormente utilizados.

Demonstração.

Passo 1. Tal como no teorema 7.1.1, facilmente se conclui que a condição (8.4.2) se obtém directamente da condição (8.4.1).

Passo 2. Escolha-se $\varepsilon > 0$ qualquer.

Defina-se a multifunção $D_\varepsilon : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}^{1+n+1}$ por

$$D_\varepsilon(t) = \overline{\text{co}} \{ (a, b, c) \in \partial V(s, y, r) : s \in [0, 1], \\ (s, y, r) \in (t, x^*(t), 0) + \varepsilon \bar{B} \times \varepsilon \bar{B}^n \times 2\varepsilon \bar{B} \}.$$

Para $(t, u, v, w) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1+1}$ defina-se a função l_ε por

$$l_\varepsilon(t, u, v, w) = \max_{(a, b, c) \in D_\varepsilon(t)} \{ (a, b, c) \cdot (w, -(1+w)u, -(1+w)v) \}.$$

Defina-se também a multifunção $\bar{F}_\varepsilon : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1+1} \rightrightarrows \mathbb{R}^{n+1+1}$ da seguinte forma

$$\bar{F}_\varepsilon(t, x, y, z) = \{ ((1+w)(f+u), (1+w)v, \eta) : f \in F(t, x), \\ -\frac{\varepsilon}{2} \leq w \leq \frac{\varepsilon}{2}, u \in \varepsilon \bar{B}^n, -\varepsilon \leq v \leq \varepsilon, \\ l_\varepsilon(t, u, v, w) \leq \eta \leq 3\varepsilon L \},$$

onde a constante $L > 0$ é tal que $\forall t \in [0, 1], \forall m \in D_\varepsilon(t), |m| \leq L$.

Considere-se agora o seguinte sistema dinâmico, definido no intervalo $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) &\in \bar{F}_\varepsilon(t, x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \\ \Delta_X(t, x(t)) - y(t) &\leq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \\ (S_\varepsilon) \quad x(0) &= x_0, \\ z(0) &= 0, \\ (x(t), y(t), z(t)) &\in (x^*(t), 0, 0) + \varepsilon B^n \times \varepsilon B \times \varepsilon B, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Passo 3. Por semelhança com a demonstração do teorema 7.1.1, conclui-se que o lema 7.2.1, que sintetiza as propriedades da multifunção que caracteriza a dinâmica de (S_ε) , continua válido.

Passo 4. É também possível concluir que todo o (x, y, z) trajectória de (S_ε) satisfaz a relação

$$V(1, x(1), y(1)) + z(1) \geq V(0, x_0, y(0)). \quad (8.4.3)$$

O facto de (x^*, y^*, z^*) , onde $y^* \equiv 0$ e $z^* \equiv 0$, ser uma trajectória de (S_ε) , bem como as propriedades da função valor estendida V , permitem afirmar que (x^*, y^*, z^*) é

solução do problema de controlo óptimo (R_ϵ) , definido como

$$(R_\epsilon) \quad \min J(x, y, z) = g(x(1)) + z(1)$$

sujeito a:

$$(x, y, z) \text{ é trajectória de } (S_\epsilon),$$

$$y(0) = 0.$$

Passo 5. A condição (8.4.3) permite concluir que o problema (R_ϵ) é localmente calmo de constante K , onde K é uma constante de Lipschitz de V em $T(x^*; \epsilon) \times [-\epsilon, \epsilon]$.

Passo 6. Os dois pontos acima permitem afirmar a existência de

- uma função $(p, p_2, p_3) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1+1}$ absolutamente contínua,
- uma medida regular μ em $[0, 1]$ não negativa, e
- uma função $(\gamma, \gamma_2) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mensurável,

que verificam as condições

$$\mu([0, 1]) \leq K \tag{8.4.4}$$

$$(-\dot{p}(t), -\dot{p}_2(t), -\dot{p}_3(t), \dot{x}^*(t), 0, 0) \in \partial \bar{H}_\epsilon(t, x^*(t), 0, 0, \bar{p}(t), \bar{p}_2(t), p_3(t)) \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.} \tag{8.4.5}$$

$$(\gamma(t), \gamma_2(t)) \in \partial_{x,y}^+ r(t, x^*(t), 0) \quad \mu - \text{q.s.} \tag{8.4.6}$$

$$\text{Supp}(\mu) \subset \{t \in [0, 1] : r(t, x^*(t), 0) = 0\} \tag{8.4.7}$$

$$-\bar{p}(1) - \gamma(1)\mu(\{1\}) \in \partial_L g(x^*(1)) \tag{8.4.8}$$

$$-\bar{p}_2(1) - \gamma_2(1)\mu(\{1\}) = 0 \tag{8.4.9}$$

$$-p_3(1) = 1 \tag{8.4.10}$$

onde

$$r(t, x, y) = \Delta_X(t, x) - y,$$

$$\bar{p}(t) = p(t) + \int_{[0,t[} \gamma d\mu,$$

$$\bar{p}_2(t) = p_2(t) + \int_{[0,t[} \gamma_2 d\mu,$$

e $\bar{H}_\epsilon$ designa o hamiltoniano correspondente a $\bar{F}_\epsilon$.

Passo 7. Analisando as condições estabelecidas no ponto acima, e argumentando de forma análoga ao efectuado na demonstração do lema 7.2.5, pode concluir-se facilmente que $\bar{p}_2(t) = \mu([t, 1])$, $p_3(t) = -1$, assim como

$$\gamma(t) \in \partial_x^+ \Delta_X(t, x^*(t)) \quad \mu - \text{q.s.}, \tag{8.4.11}$$

$$\text{Supp}(\mu) \subset \{t \in [0, 1] : \Delta_X(t, x^*(t)) = 0\}, \tag{8.4.12}$$

$$(-\dot{p}(t), \dot{x}^*(t)) \in \partial H(t, x^*(t), \bar{p}(t)) + \epsilon \cdot \kappa \cdot (1 + |p(t)| + \mu([0, 1])) \bar{B}^{2n}, \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \tag{8.4.13}$$

onde κ é uma constante positiva. Argumentando ainda como na demonstração do lema 7.2.5 pode também concluir-se que

$$(h(t), -\bar{p}(t), -\bar{p}_2(t)) \in D_\varepsilon(t) \quad t \in [0, 1] - \text{q.s.}, \quad (8.4.14)$$

onde $h(t) = H(t, x^*(t), \bar{p}(t))$.

Passo 8. Considere-se agora uma sucessão $\{\varepsilon_i\}$ com $\varepsilon_i \downarrow 0$ e, para cada i , o problema (R_{ε_i}) . Do exposto acima pode concluir-se a existência, para cada i , de

- uma função $p_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua,
- uma medida regular não negativa μ_i em $[0, 1]$, e
- uma função $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mensurável,

tais que as condições (8.4.8), (8.4.11) -(8.4.13) e (8.4.14) são satisfeitas, substituindo ε por ε_i e (p, μ, γ) por (p_i, μ_i, γ_i) . Notando que as medidas μ_i são uniformemente limitadas (pela constante K mencionada no passo 5), um processo de extracção de subsucessões garante a existência de

- uma função $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua,
- uma medida regular não negativa μ em $[0, 1]$, e
- uma função $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mensurável,

tais que as condições (8.4.8), e (8.4.11) -(8.4.13) são satisfeitas. Argumentando como na demonstração do teorema 7.1.1 pode ainda concluir-se que a condição

$$(h(t), -\bar{p}(t), -\mu([t, 1])) \in \partial V(t, x^*(t), 0) \quad \forall t \in]0, 1[$$

é satisfeita, ficando assim demonstrado o teorema. □

Capítulo 9

Controlo Ótimo Impulsional

Neste capítulo é apresentado o problema de controlo ótimo impulsional que será alvo de estudo neste trabalho.

É introduzido um conjunto de conceitos e noções que permitem uma definição adequada da inclusão que caracteriza a dinâmica impulsional considerada. São também apresentados alguns resultados sobre propriedades das trajectórias dinamicamente admissíveis, que são relevantes para o estudo aqui desenvolvido, bem como condições necessárias de optimalidade para este problema existentes na literatura.

9.1 Problema abordado

O problema de controlo ótimo impulsional abordado neste trabalho pode ser formulado da seguinte forma

$$(P) \quad \min \quad h(x(1))$$

sujeito a:

$$dx(t) \in F(t, x(t))dt + G(t, x(t))\mu(dt), \quad t \in [0, 1], \quad (9.1.1)$$

$$\mu \in \mathcal{K}, \quad (9.1.2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (9.1.3)$$

Aqui, $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é uma multifunção e $G : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^{n \times q}$ um vector de multifunções. A função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ caracteriza o custo do problema, que apenas depende do valor final do estado, e o elemento $x_0 \in \mathbb{R}^n$ representa o estado inicial. $\mathcal{K}$ é o subconjunto do espaço de medidas regulares $C^*([0, 1]; \mathbb{R}^q)$ constituído pelas medidas μ tais que $\mu(A) \in K$, para todo o $A \subset [0, 1]$ de Borel, e onde $K \subset \mathbb{R}^q$ é um cone positivo, convexo, fechado e contendo a origem. Aqui, e por forma a simplificar a exposição, não é feita qualquer distinção entre os elementos de $C^*([0, 1]; \mathbb{R}^q)$ e as medidas de Borel que os representam. O conjunto $\mathcal{K}$ é por vezes representado por $C^*([0, 1]; K)$.

Esta formulação, apresentada em [PS00] no âmbito da derivação de condições necessárias de optimalidade, constitui uma generalização para o caso vectorial de dinâmicas descritas por inclusões diferenciais com medidas, descritas em [SV96], [SV97] e [PSV98]. Uma das características mais relevantes desta formulação advém do facto do termo que caracteriza a dinâmica impulsional ser dependente do estado e de, simultaneamente, serem consideradas medidas vectoriais, isto sem que sejam impostas quaisquer condições de comutatividade sobre os campos vectoriais definidos pelas colunas da multifunção G . Esta formulação, como realçado em [PS00], é, por um lado, bastante geral, mas necessita que a noção de trajectória admissível seja convenientemente definida.

9.2 Reparametrização associada a uma medida

Uma das formas habituais de abordar problemas de controlo impulsional consiste em efectuar uma mudança de variável independente, de modo a que as trajectórias dinamicamente admissíveis sejam absolutamente contínuas, quando expressas como função dessa nova variável. Esta abordagem, inicialmente desenvolvida em [Ris65], tem sido utilizada em diversos trabalhos, tais como [SV96], [SV97] ou [PS00]. Tal abordagem é habitualmente designada por reparametrização da variável independente e será também utilizada neste trabalho. A forma de definir a nova variável independente aqui utilizada é semelhante à empregue em [PS00].

Seja $[a, b]$ um intervalo real, e considere-se $\mu \in C^*([a, b]; K)$ como acima. Defina-se a medida escalar positiva $\bar{\mu}$ como sendo a medida de variação total associada a μ , isto é, $\bar{\mu}(dt) = \sum_{i=1}^q \mu^i(dt)$, uma vez que o cone K é positivo. Aqui, μ^i , $i = 1, \dots, q$, representam as componentes da medida μ . Definam-se também $M : [a, b] \rightarrow K$ e $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$M(t) = \begin{cases} \int_{[a, t]} \mu(ds) & \forall t \in]a, b] \\ 0 & \text{se } t = a, \end{cases}$$

$$\eta(t) = t - a + \sum_{i=1}^q M^i(t),$$

Seja também a função $\theta : [0, \eta(b)] \rightarrow [a, b]$ definida por

$$\theta(s) = \sup\{t \in [a, b] : \eta(t) \leq s\}. \quad (9.2.1)$$

Sejam ainda $\{t_j\}_{j=1}^N$ (onde $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$) uma enumeração dos átomos de $\bar{\mu}$ e, para cada j , $S_j = \theta^{-1}(\{t_j\})$.

A função η , definida acima, designa-se por reparametrização associada à medida μ . Toda a função $(\theta, \gamma) : [0, \eta(b)] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$ onde θ é como acima e γ satisfaz

$$\gamma(s) = \begin{cases} M(\theta(s)), & s \in [0, \eta(b)] \setminus \bigcup_j S_j, \\ M(t_j^-) + \int_{\eta(t_j^-)}^s v_j(\sigma) d\sigma, & s \in S_j, \text{ para algum } j \end{cases} \quad (9.2.2)$$

onde para cada j , v_j é uma função de S_j em K que satisfaz as condições

$$\sum_{i=1}^q v_j^i(\sigma) = 1, \quad S_j - \text{q.s.}, \quad (9.2.3)$$

$$\int_{S_j} v_j(\sigma) d\sigma = \mu(\{t_j\}), \quad (9.2.4)$$

é designada por fecho gráfico da medida μ . No exposto acima, sempre que tal apareça, considera-se que a^- significa a .

É fácil concluir que a função de reparametrização associada a qualquer medida $\mu \in C^*([a, b]; K)$ está bem definida e que existe sempre um fecho gráfico (θ, γ) . De facto, no caso vectorial ($q > 1$), para cada medida com átomos existirão sempre uma infinidade de fechos gráficos a ela associados.

A principal diferença entre a reparametrização acima definida e aquela empregue em [PS00] consiste no facto de aí ser efectuada uma normalização das funções de reparametrização de modo que o contradomínio destas seja sempre o intervalo $[0, 1]$.

O seguinte resultado (ver proposição 2.2 de [PS00] ou proposição 2.1 de [SV97]) resume algumas das propriedades dos fechos gráficos associados a uma medida.

Proposição 9.2.1. *Sejam $\mu \in C^*([a, b]; K)$, onde $[a, b]$ é um intervalo real e K é um cone como acima, e η a função de reparametrização associada a μ .*

Seja (θ, γ) um fecho gráfico de μ . Então

1. *θ e γ são funções Lipschitz contínuas, não decrescentes e tais que*

$$\dot{\theta}(s) + \sum_{i=1}^q \dot{\gamma}^i(s) = 1, \quad s \in [0, \eta(b)] - \text{q.s.}.$$

2. *Para qualquer $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, Lebesgue integrável, e qualquer $S \subset [0, \eta(b)]$, de Borel, tem-se que $\theta(S)$ é também de Borel e verifica-se que*

$$\int_S f(\theta(s)) \dot{\theta}(s) ds = \int_{\theta(S)} f(t) dt.$$

3. *Para qualquer $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times q}$, μ -integrável, e qualquer $T \subset [a, b]$, de Borel, tem-se que*

$$\int_{\theta^{-1}(T)} g(\theta(s)) \dot{\gamma}(s) ds = \int_T g(t) \mu(dt).$$

Seja $\{\mu_i\} \subset C^([a, b]; K)$ uma sucessão de medidas, tal que $\mu_i \rightarrow \mu$ fracamente*. Para cada i , seja (θ_i, γ_i) um fecho gráfico de μ_i . Então, existe (θ, γ) , fecho gráfico de μ , tal que para alguma subsucessão se tem que*

$$\begin{aligned} (\theta_i, \gamma_i) &\rightarrow (\theta, \gamma) \quad \text{uniformemente,} \\ (\dot{\theta}_i, \dot{\gamma}_i) &\rightarrow (\dot{\theta}, \dot{\gamma}) \quad \text{fracamente em } L^1. \end{aligned}$$

9.3 Trajectórias admissíveis

Nesta secção define-se o significado de trajectória admissível para a inclusão diferencial impulsional (9.1.1), sendo também apresentadas algumas propriedades que resultam da definição utilizada. Os conceitos e resultados aqui apresentados seguem os de [SV96] e de [PS00]. Por forma a tornar a notação mais leve, considera-se sempre o intervalo $[0, 1]$ para a definição da inclusão diferencial impulsional. Obviamente que todas as definições e resultados abaixo se estendem para qualquer outro intervalo, com as devidas alterações.

Definição 9.3.1 (Trajectória reparametrizada). *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e uma medida $\mu \in C^*([0, 1]; K)$. Seja ainda (θ, γ) um fecho gráfico de μ . A função $z \in AC([0, \eta(1)]; \mathbb{R}^n)$ designa-se por trajectória reparametrizada de (9.1.1), correspondente à condição inicial x_0 e ao fecho gráfico (θ, γ) de μ , se for tal que*

$$\dot{z}(s) \in F(\theta(s), z(s))\dot{\theta}(s) + \mathbf{G}(\theta(s), z(s))\dot{\gamma}(s), \quad s \in [0, \eta(1)] - \text{q.s.}, \quad (9.3.1)$$

$$z(0) = x_0, \quad (9.3.2)$$

onde, como acima, η representa a reparametrização associada a μ . A expressão (9.3.1) significa que existem $f \in L^1([0, \eta(1)]; \mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1([0, \eta(1)]; \mathbb{R}^{n \times q})$ tais que $f\dot{\theta}$ e $g\dot{\gamma}$ são integráveis e

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= f(s)\dot{\theta}(s) + g(s)\dot{\gamma}(s), & s \in [0, \eta(1)] - \text{q.s.}, \\ f(s) &\in F(\theta(s), z(s)), & s \in [0, \eta(1)] - \text{q.s.}, \\ g(s) &\in \mathbf{G}(\theta(s), z(s)), & s \in [0, \eta(1)] - \text{q.s.} \end{aligned}$$

A definição de trajectória admissível para a dinâmica impulsional é dada pela noção de solução robusta abaixo considerada. A noção aqui utilizada constitui uma extensão directa para o caso de medidas vectoriais daquela introduzida em [SV96].

Contrariamente à definição introduzida em [PS00], a definição de solução robusta proposta neste trabalho não entra em consideração com a função objectivo do problema. A definição de [PS00], ao considerar implicitamente uma minimização da função objectivo, não é facilmente estendível para situações em que se consideram subintervalos de $[0, 1]$, como será frequente do decorrer do trabalho aqui apresentado, nomeadamente no estudo de propriedades da função valor

Definição 9.3.2 (Solução robusta). *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in C^*([0, 1]; K)$. A função $x \in BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^q)$ designa-se por solução robusta da inclusão diferencial impulsional (9.1.1), correspondente à condição inicial x_0 e à medida μ , se existirem $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, Lebesgue integrável, $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mu}$ integrável, tais que*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau) d\tau + \int_{[0, t]} g(\tau) \bar{\mu}(d\tau), \quad \forall t \in]0, 1],$$

$$x(0) = x_0,$$

$$f(t) \in F(t, x(t)), \quad [0, 1] - \text{q.s.},$$

$$g(t) \in \tilde{G}(t, x(t^-); \mu(\{t\})), \quad \bar{\mu} - \text{q.s.},$$

onde $\bar{\mu}$ é a medida de variação total de μ e a multifunção $\tilde{G} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\tilde{G}(t, z; \alpha) = \begin{cases} \{\psi w(t) : \psi \in G(t, z)\}, & \text{se } |\alpha|_1 = 0, \\ \left\{ \frac{y(|\alpha|_1) - y(0)}{|\alpha|_1} : \dot{y}(s) \in G(t, y(s))\dot{\gamma}(s), \right. \\ \quad (0, \dot{\gamma}(s)) \in K_1, s \in [0, |\alpha|_1] - \text{q.s.}, \\ \quad \left. y(0) = z, \gamma(0) = 0, \gamma(|\alpha|_1) = \alpha \right\}, & \text{se } |\alpha|_1 > 0. \end{cases}$$

Aqui, $|\alpha|_1 = \sum_{i=1}^q \alpha^i$, $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^q$ é a derivada de Radon-Nikodym de μ relativamente a $\bar{\mu}$, e K_1 é o subconjunto de $\mathbb{R}^{1+q}$ definido por

$$K_1 = \{(r_0, r) \in [0, 1] \times K : r_0 + \sum_{i=1}^q r^i = 1\}.$$

Novamente, 0^- significa 0.

Todo o elemento da forma (x, μ) , onde $\mu \in C^*([0, 1]; K)$ e $x \in BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ é uma solução robusta de (9.1.1) correspondente a μ , designa-se habitualmente por processo admissível para a dinâmica impulsional descrita por (9.1.1)-(9.1.2). $BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ representa o conjunto das funções de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}^n$ de variação limitada e contínuas à direita em $]0, 1[$. A variação total de um elemento $x \in BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ é representada por $\|x\|_{TV}$. A medida de Borel associada a um elemento $x \in BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ representa-se por dx .

Tal como na definição de [PS00], para uma condição inicial x_0 e uma medida μ , a completa definição de uma solução robusta da dinâmica impulsional necessita não só da explicitação de selecções das multifunções F e $\tilde{G}$, mas também da própria caracterização de $\tilde{G}$ nos átomos de μ , a qual terá de ser feita à custa de “controles adicionais”.

É de realçar que a noção de solução robusta aqui proposta continua a gozar de propriedades análogas às da noção introduzida em [PS00], nomeadamente no que respeita à relação entre soluções robustas e trajectórias reparametrizadas e a propriedades de compacticidade, como se mostra nos dois resultados abaixo apresentados.

O seguinte resultado, ver [SV96] (teorema 4.1) e também [PS00], estabelece uma relação de equivalência entre soluções robustas e trajectórias reparametrizadas. Desta forma, torna-se possível, sob as hipóteses enunciadas, substituir o problema de controlo impulsional (P) por um outro em que as trajectórias são funções absolutamente contínuas.

Proposição 9.3.1. *Suponha-se que F e G tomam valores conjuntos fechados, F é Lebesgue $\times$ Borel mensurável e G é Borel mensurável. Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in C^*([0, 1]; K)$ quaisquer, e η a função de reparametrização de μ .*

Seja x uma solução robusta de (9.1.1), correspondente a x_0 e μ . Então existe z , trajectória reparametrizada de (9.1.1), tal que

$$x(t) = z(\eta(t)), \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (9.3.3)$$

Seja agora z uma trajectória reparametrizada de (9.1.1), correspondente a x_0 e a um fecho gráfico (θ, γ) de μ . Então existe x , solução robusta de (9.1.1), tal que (9.3.3) se verifica.

Sejam x uma solução robusta e z uma trajectória reparametrizada de (9.1.1) tais que (9.3.3) se verifica. Então tem-se que $\|x\|_{TV} \leq \|z\|_{TV}$.

Seja (x, μ) um processo admissível para (9.1.1)-(9.1.2). Diz-se que o elemento (y, θ, γ) é um processo reparametrizado de (9.1.1)-(9.1.2), correspondente a (x, μ) , ou também que é uma reparametrização de (x, μ) , se (θ, γ) for um fecho gráfico de μ e y for uma trajectória reparametrizada de (9.1.1) correspondente a (θ, γ) tal que a condição (9.3.3) se verifique.

Seja (x, μ) um processo admissível para (9.1.1)-(9.1.2) a que corresponde a reparametrização (y, θ, γ) . O fecho gráfico de x , relativo a tal reparametrização, é o subconjunto de $\mathbb{R}^{1+n}$

$$\overline{gr}(x) = \{(\theta(s), y(s)) : s \in [0, \eta(1)]\},$$

onde η é a função de reparametrização associada à medida μ .

Apresenta-se em seguida um resultado sobre propriedades de compactidade de conjuntos de soluções robustas da equação diferencial impulsional (9.1.1). Este resultado é a extensão natural para o caso de medidas vectoriais do teorema 5.1 de [SV96], e é de alguma forma análogo à proposição 2.5 de [PS00], mas agora utilizando o conceito de solução robusta acima introduzido.

Proposição 9.3.2. *Sejam F e G como atrás e definam-se as multifunções $F_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, para $i \in \mathbb{N}$. Suponha-se que F , G e F_i , $i \in \mathbb{N}$, tomam valores conjuntos compactos e ainda que:*

- $F(t, \cdot)$ e $F_i(t, \cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, têm grafos fechados, $\forall t \in [0, 1]$;
- $F(t, x)$ é convexo $\forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$;
- $G(\cdot, \cdot)$ tem grafo fechado e $G(t, x)$ é convexo $\forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$;
- F e F_i , $i \in \mathbb{N}$, são Lebesgue $\times$ Borel mensuráveis e G é Borel mensurável.

Suponha-se também que

- $\mathcal{L}(\{t : F_i(t, \cdot) \neq F(t, \cdot)\}) \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$.

($\mathcal{L}(A)$ representa a medida de Lebesgue do conjunto $A \subset [0, 1]$.)

Sejam $\{x_0^i\}$ uma sucessão em $\mathbb{R}^n$ e $\{\mu_i\}$ uma sucessão em $C^*([0, 1]; K)$, e sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in C^*([0, 1]; K)$ tais que $x_0^i \rightarrow x_0$, e $\mu_i \rightarrow \mu$ fracamente*. Seja também $\{x_i\}$ uma sucessão em $BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ tal que, para cada i , x_i é uma solução robusta da inclusão diferencial impulsional que se obtém de (9.1.1) substituindo F por F_i , e correspondente à medida μ_i e à condição inicial x_0^i . Suponha-se ainda que existem

$\beta \in L^1([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ e $c > 0$ tais que para cada i se verifica que $F_i(t, x_i(t)) \subset \beta(t)B^n$, $t \in [0, 1] - \text{q.s.}$ e $G(t, x_i(t)) \subset cB^{n \times q}$, $\forall t \in [0, 1]$.

Então, existem uma sucessão $\{y_i\} \subset AC([0, \eta_i(1)]; \mathbb{R}^n)$, $y \in AC([0, \eta(1)]; \mathbb{R}^n)$, $x \in BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$, tais que, para cada i , y_i é uma trajectória reparametrizada de (9.1.1), com F substituída por F_i , correspondente à medida μ_i , e y é uma trajectória reparametrizada e x uma solução robusta de (9.1.1), ambas correspondentes a μ e a x_0 . Estes elementos verificam as condições

$$\begin{aligned} x_i(t) &= y_i(\eta_i(t)) \quad \forall t \in [0, 1], \\ x(t) &= y(\eta(t)) \quad \forall t \in [0, 1], \end{aligned}$$

onde η é a reparametrização associada a μ e, para cada i , η_i é a reparametrização associada a μ_i .

Ao longo de uma subsucessão tem-se que

$$\begin{aligned} y_i &\rightarrow y \text{ uniformemente,} \\ dx_i &\rightarrow dx \text{ fracamente}^*, \\ x_i(t) &\rightarrow x(t) \quad \forall t \in ([0, 1] \setminus C_\mu) \cup \{0, 1\}, \end{aligned}$$

onde C_μ representa o conjunto dos átomos de μ .

A noção de solução robusta de uma inclusão diferencial impulsional permite o estabelecimento de um quadro adequado à definição de solução de problemas de controlo óptimo impulsional como o problema (P) aqui abordado.

Assim, diz-se que (x, μ) , onde $x \in BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ e $\mu \in C^*([0, 1]; K)$ é um processo admissível para (P) se x for uma solução robusta de (9.1.1) correspondente à condição inicial x_0 e à medida μ . Diz-se ainda que o processo admissível (x, μ) é óptimo, ou que é solução de (P), sempre que para qualquer processo admissível (y, ν) se tenha que $h(y(1)) \geq h(x(1))$.

9.4 Condições necessárias de optimalidade

O resultado apresentado em seguida, teorema 3.1 de [PS00], estabelece condições necessárias de optimalidade para problemas de controlo impulsional.

Considere-se o seguinte problema de controlo impulsional

$$\begin{aligned} (Q) \quad & \min \quad h(x(0), x(1)) \\ & \text{sujeito a:} \\ & dx(t) \in F(t, x(t))dt + G(t, x(t))\mu(dt), \quad t \in [0, 1], \\ & \mu \in \mathcal{K}, \\ & (x(0), x(1)) \in C. \end{aligned}$$

Neste problema, h representa a função objectivo, agora dependente dos valores inicial e final do estado, F , G e K são como acima, e $C \subset \mathbb{R}^{2n}$ é um conjunto fechado. As noções de processo admissível e de processo óptimo para (Q) são naturais extensões daquelas para (P) .

Proposição 9.4.1. *Suponha-se que os dados do problema (Q) satisfazem as seguintes hipóteses:*

- (H1) *A função h é localmente Lipschitz contínua;*
- (H2) *A multifunção F é mensurável de Lipschitz;*
- (H3) *Para cada t a multifunção $x \mapsto G(t, x)$ é Lipschitz contínua com constante independente de t , e para cada x a multifunção $t \mapsto G(t, x)$ é contínua;*
- (H4) *F e G são multifunções com grafos fechados e que tomam valores conjuntos convexos.*

Seja (x, μ) uma solução de (Q) , e (θ, γ) o fecho gráfico correspondente. Então existem um escalar não negativo λ e uma função $p \in BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\lambda + \|p\| > 0$ e tais que

1. no intervalo $[0, 1]$, (x, p) é solução robusta da inclusão diferencial impulsional

$$(-dp(t), dx(t)) \in \partial H_F(t, x(t), p(t))dt + \partial H_G(t, x(t), p(t))\mu(dt), \quad (9.4.1)$$

correspondente ao fecho gráfico (θ, γ) ,

2. as seguintes condições são satisfeitas

$$(p(0), -p(1)) \in \lambda \partial_L h(x(0), x(1)) + LN_C((x(0), x(1))),$$

$$\sigma_K(H_G(t, x(t), p(t))) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$\sigma_K(H_G(t, x(t), p(t))) \geq 0, \quad \mu - \text{q.s.},$$

3. para cada $t \in [0, 1]$ tal que $\bar{\mu}(\{t\}) > 0$, existem $\xi_t, \alpha_t \in AC([0, \bar{\mu}(\{t\})]; \mathbb{R}^n)$ e $\gamma_t \in AC([0, \bar{\mu}(\{t\})]; \mathbb{R}^q)$ tais que

$$(-\dot{\alpha}_t(s), \dot{\xi}_t(s)) \in \partial H_G(t, \xi_t(s), \alpha_t(s))\dot{\gamma}_t(s), \quad s \in [0, \bar{\mu}(\{t\})] - \text{q.s.}, \quad (9.4.2)$$

$$(x(t^-), p(t^-)) = (\xi_t(0), \alpha_t(0)), \quad (9.4.3)$$

$$(x(t), p(t)) = (\xi_t(\bar{\mu}(\{t\})), \alpha_t(\bar{\mu}(\{t\}))), \quad (9.4.4)$$

$$\sigma_K(H_G(t, \xi_t(s), \alpha_t(s))) \geq 0, \quad s \in [0, \bar{\mu}(\{t\})] - \text{q.s.}, \quad (9.4.5)$$

$$\gamma_t(0) = 0, \quad \gamma_t(\bar{\mu}(\{t\})) = \mu(\{t\}), \quad (9.4.6)$$

$$(0, \dot{\gamma}_t(s)) \in K_1, \quad s \in [0, \bar{\mu}(\{t\})] - \text{q.s.} \quad (9.4.7)$$

Nas expressões acima, H_F representa a função hamiltoniano associada à multifunção F , H_G representa o vector de $\mathbb{R}^q$ formado pelos hamiltonianos das multifunções componentes de G e, para cada $r \in \mathbb{R}^q$, $\sigma_K(r) = \sup_{p \in K} \{p \cdot r\}$.

Capítulo 10

Função Valor em Problemas Impulsionais

Neste capítulo são apresentados e demonstrados alguns resultados sobre programação dinâmica e também sobre a função valor para a classe de problemas de controlo impulsional apresentada no capítulo anterior.

Inicialmente é apresentada uma família de problemas auxiliares, parametrizados pelas condições iniciais da variável independente e do estado, definindo-se a função valor como o custo óptimo de cada problema. Em seguida são derivados alguns resultados elementares que mostram que tal família de problemas satisfaz o princípio da programação dinâmica. É também apresentado e demonstrado um resultado sobre aproximação de funções por trajectórias admissíveis reparametrizadas. Este resultado será posteriormente utilizado na derivação de propriedades de continuidade da função valor aqui definida, sob um conjunto de hipóteses consideradas.

10.1 Família de problemas

A aplicação de conceitos de programação dinâmica a problemas de controlo impulsional tem sido alvo de diversos estudos, tais como os apresentados em [MR96], [MR97], e [BJM93], este último num contexto de jogos diferenciais impulsivos. Nestes trabalhos consideram-se famílias de problemas auxiliares, e funções valor, que dependem não só do instante e estado iniciais, mas ainda de um parâmetro adicional que quantifica a variação total permitida para o termo singular. Em todos eles, mostra-se que as funções valor aí definidas satisfazem condições que podem ser encaradas como princípios de programação dinâmica. São também apresentadas equações generalizadas de Hamilton-Jacobi que as funções valor satisfazem. No entanto, a consideração de tal parâmetro adicional visa sobretudo garantir que cada um dos problemas auxiliares está, por construção, bem formulado, no sentido em que o seu custo óptimo é limitado inferiormente e que existe pelo menos uma

trajectória admissível que permite atingir tal custo. É também de notar que tal definição permite com alguma facilidade demonstrar propriedades de continuidade das funções valor.

Contrariamente a estes trabalhos, é aqui explorada uma definição mais simples de função valor, considerando-se que a família de problemas auxiliares apenas se encontra parametrizada pelos instante e estado iniciais.

Para cada $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ considere-se o problema de controlo impulsional $(P_{s,y})$ definido por:

$$(P_{s,y}) \quad \min \quad h(x(1))$$

sujeito a:

$$dx(t) \in F(t, x(t))dt + G(t, x(t))\mu(dt), \quad t \in [s, 1], \quad (10.1.1)$$

$$\mu \in C^*([s, 1]; K), \quad (10.1.2)$$

$$x(s) = y. \quad (10.1.3)$$

Em todos estes problemas, a função h , as multifunções F e G , e o cone K são como na definição do problema (P) , formulado no capítulo 9. Os conceitos de processo admissível e de solução para cada um destes problemas são, obviamente, considerados como as naturais adaptações dos correspondentes conceitos para o problema (P) . No que se segue, representa-se por $X(s, y)$ o conjunto dos processos admissíveis para $(P_{s,y})$.

A função valor, $V : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ aqui utilizada será então definida como

$$V(s, y) = \inf_{(x, \mu) \in X(s, y)} h(x(1)).$$

10.2 Propriedades elementares

As propriedades elementares da função valor são consequência do designado princípio de programação dinâmica e, em última análise, das propriedades de concatenação de trajectórias de sistemas dinâmicos, também habitualmente designadas por propriedades de semigrupo.

Para sistemas com trajectórias contínuas, não faz grande sentido falar em trajectórias definidas em intervalos triviais, isto é, só com um ponto, pois tais trajectórias identificam-se com a própria condição inicial. Tal situação pode já não ocorrer quando se trata de sistemas impulsivos, nomeadamente em pontos correspondentes a átomos da medida interveniente.

Sejam então $t \in [0, 1]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e $\mu \in C^*([0, 1]; K)$. Obviamente que $\mu(\{t\})$ será completamente identificado por um elemento do conjunto K . Defina-se $\alpha = \sum_{i=1}^q \int_{\{t\}} d\mu^i$, onde μ^i , $i = 1, \dots, q$, representam as componentes de μ .

A função $y \in AC([0, \alpha]; \mathbb{R}^n)$ designa-se por trajectória reparametrizada da inclusão diferencial impulsional em $\{t\}$, correspondente à medida μ e à condição inicial x_0 ,

se $y(0) = x_0$ e existirem funções $g \in L^1([0, \alpha]; \mathbb{R}^{n \times q})$ e $v \in L^1([0, \alpha]; K)$ tais que

$$\begin{aligned} \dot{y}(s) &= g(s)v(s), \quad s \in [0, \alpha] - \text{q.s.}, \\ \sum_{i=1}^q v^i(s) &= 1, \quad s \in [0, \alpha] - \text{q.s.}, \\ g(s) &\in \mathbf{G}(t, y(s)), \quad s \in [0, \alpha] - \text{q.s.}, \\ \int_0^\alpha v(s)ds &= \mu(\{t\}). \end{aligned}$$

Por abuso de notação, mas de forma a tornar a nomenclatura uniforme, diz-se que o elemento (x, μ) , onde μ é como acima e $x : \{t, t^+\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, é um processo admissível para a inclusão diferencial impulsional em $\{t\}$, correspondente à condição inicial x_0 , se $x(t) = x_0$ e se existir y , trajectória reparametrizada correspondente a μ (como definido acima), tal que $x(t^+) = y(\alpha)$. Em tal caso, diz-se ainda que o elemento (y, θ, γ) , onde $\theta \equiv 0$ e $\gamma(s) = \int_0^s v(\tau)d\tau$, é um processo reparametrizado da inclusão diferencial impulsional em $\{t\}$, correspondente a (x, μ) .

Lema 10.2.1. *Considerem-se os subintervalos $[a, b]$ e $[b, c]$ de $[0, 1]$ e sejam (x_1, μ_1) e (x_2, μ_2) admissíveis para a dinâmica impulsional, respectivamente em $[a, b]$ e $[b, c]$. Suponha-se ainda que $x_1(b) = x_2(b)$. Então (x, μ) , com $x \in BV^+([a, c]; \mathbb{R}^n)$ e $\mu \in C^*([a, c]; K)$, definidos como*

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & \text{se } t \in [a, b[, \\ x_2(b^+), & \text{se } t = b, \\ x_2(t), & \text{se } t \in]b, c], \end{cases}$$

$$\mu(A) = \mu_1(A \cap [a, b]) + \mu_2(A \cap [b, c]), \quad \forall A \subset [a, c] \text{ de Borel},$$

é admissível para a dinâmica impulsional no intervalo $[a, c]$.

Demonstração.

Sejam η_1 e η_2 as funções de reparametrização de μ_1 e μ_2 , respectivamente. Sejam ainda $(y_1, \theta_1, \gamma_1, y_1)$ e $(y_2, \theta_2, \gamma_2)$ processos reparametrizados, correspondentes a (x_1, μ_1) e (x_2, μ_2) , respectivamente, e cuja existência está assegurada pela proposição 9.3.1. Definam-se $\eta : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta(t) = \begin{cases} \eta_1(t) & \text{se } t \in [a, b[, \\ \eta_1(b) + \eta_2(b^+) & \text{se } t = b, \\ \eta_1(b) + \eta_2(t) & \text{se } t \in]b, c], \end{cases}$$

$\theta : [0, \eta_1(b) + \eta_2(c)] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\theta(s) = \begin{cases} \theta_1(s) & \text{se } s \in [0, \eta_1(b)[, \\ \theta_2(s - \eta_1(b)) & \text{se } s \in [\eta_1(b), \eta_1(b) + \eta_2(c)], \end{cases}$$

$\gamma : [0, \eta_1(b) + \eta_2(c)] \rightarrow \mathbb{R}^q$ por

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_1(s) & \text{se } s \in [0, \eta_1(b)[, \\ \gamma_2(s - \eta_1(b)) + \gamma_1(\eta_1(b)) & \text{se } s \in [\eta_1(b), \eta_1(b) + \eta_2(c)], \end{cases}$$

e $y : [0, \eta_1(b) + \eta_2(c)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$y(s) = \begin{cases} y_1(s) & \text{se } s \in [0, \eta_1(b)[, \\ y_2(s - \eta_1(b)) & \text{se } s \in [\eta_1(b), \eta_1(b) + \eta_2(c)]. \end{cases}$$

Então, é fácil concluir que η é a função de reparametrização da medida μ , acima definida, que (θ, γ) constitui um fecho gráfico de μ , e ainda que y é uma trajectória reparametrizada da inclusão diferencial impulsional correspondente ao fecho gráfico (θ, γ) . Uma vez que a função x satisfaz a condição $x(t) = y(\eta(t))$ para todo o $t \in [a, c]$, a proposição 9.3.1 permite concluir directamente este resultado. $\square$

Apresentam-se em seguida alguns resultados que sintetizam propriedades elementares da função valor acima definida.

Lema 10.2.2. *Para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$ tem-se que $V(1, y) \leq g(y)$.*

Demonstração.

Este resultado é uma consequência directa do facto do par (y, μ) , onde μ é a medida nula, ser admissível para o problema $(P_{1,y})$, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Lema 10.2.3. *Sejam $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ quaisquer e seja (x, μ) admissível para $(P_{s,y})$. Então para qualquer $t \in [s, 1]$ verifica-se que $V(s, y) \leq V(t, x(t))$.*

Mais ainda, se (x, μ) for óptimo para $(P_{s,y})$ então $V(s, y) = V(t, x(t))$ para qualquer $t \in [s, 1]$.

Demonstração.

Este resultado é uma consequência imediata do lema 10.2.1. $\square$

10.3 Trajectórias próximas reparametrizadas

Nesta secção é apresentado e demonstrado um resultado sobre aproximação de funções por trajectórias reparametrizadas. Este resultado constitui, de algum modo, uma extensão da proposição 2.4.1 para o contexto de controlo impulsional, e será posteriormente utilizado no estudo de propriedades da função valor em problemas de controlo óptimo impulsional, bem como na caracterização de soluções generalizadas da equação de Hamilton-Jacobi para tais problemas.

Teorema 10.3.1. *Seja um intervalo $[a, b]$, e sejam $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ e $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^{n \times q}$ tais que $F(\cdot, x)$ e $G(\cdot, x)$ são mensuráveis para $\forall x \in \mathbb{R}^n$, e $F(t, \cdot)$ e $G(t, \cdot)$ são*

Lipschitz contínuas de constante k para todo o $t \in \mathbb{R}$. Sejam ainda $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^q$ Lipschitz contínuas e tais que

$$\dot{\theta}(s) + \sum_{i=1}^q \dot{\gamma}^i(s) = 1, \quad (10.3.1)$$

$$\dot{\gamma}^i(s) \geq 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (10.3.2)$$

$$\dot{\theta}(s) \geq 0, \quad (10.3.3)$$

para $s \in [a, b] - \text{q.s.}$. Considere-se também $z \in AC([a, b]; \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\dot{z}(s) = \phi(s)\dot{\theta}(s) + \psi(s)\dot{\gamma}(s), \quad t \in [a, b] - \text{q.s.}, \quad (10.3.4)$$

onde $\phi \in L^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ e $\psi \in L^1([a, b]; \mathbb{R}^{n \times q})$. Seja $p \in L^1([a, b]; \mathbb{R})$ tal que

$$d_{F(\theta(s), z(s))}(\phi(s)) \leq p(s), \quad \dot{\theta}(s) \neq 0 - \text{q.s.} \quad (10.3.5)$$

$$d_{G(\theta(s), z(s))}(\psi(s)) \leq p(s), \quad \dot{\gamma}(s) \neq 0 - \text{q.s.} \quad (10.3.6)$$

e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qualquer. Seja a função $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(s) = |z(a) - x_0|e^{k(s-a)} + \int_a^s e^{k(s-\sigma)} p(\sigma) d\sigma. \quad (10.3.7)$$

Então, existem $x \in AC([a, b]; \mathbb{R}^n)$, e f e g , selecções mensuráveis de $F(\theta(s), x(s))$ e $G(\theta(s), x(s))$, respectivamente, satisfazendo

$$\dot{x}(s) = f(s)\dot{\theta}(s) + g(s)\dot{\gamma}(s), \quad s \in [a, b] - \text{q.s.} \quad (10.3.8)$$

$$x(a) = x_0 \quad (10.3.9)$$

e tais que

$$|x(s) - z(s)| \leq \lambda(s) \quad \forall s \in [a, b] \quad (10.3.10)$$

$$|\dot{x}(s) - \dot{z}(s)| \leq k\lambda(s) + p(s), \quad s \in [a, b] - \text{q.s.} \quad (10.3.11)$$

$$|f(s) - \phi(s)| \leq k\lambda(s) + p(s), \quad \dot{\theta}(s) \neq 0 - \text{q.s.} \quad (10.3.12)$$

$$|g(s) - \psi(s)| \leq k\lambda(s) + p(s), \quad \dot{\gamma}(s) \neq 0 - \text{q.s.} \quad (10.3.13)$$

Demonstração.

Considere-se a multifunção $\tilde{F} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ definida por

$$\tilde{F}(s, y) = F(\theta(s), y)\dot{\theta}(s) + G(\theta(s), y)\dot{\gamma}(s).$$

Das propriedades das multifunções F e G e das funções θ e γ facilmente se conclui que $\tilde{F}(\cdot, x)$ é mensurável para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e que $\tilde{F}(s, \cdot)$ é Lipschitz contínua de constante k para quase todo o $s \in [a, b]$.

Para s num subconjunto de $[a, b]$ de medida total tem-se ainda que

$$\begin{aligned}
d_{\tilde{F}(s, z(s))}(\dot{z}(s)) &= d_{\tilde{F}(s, z(s))}(\phi(s)\dot{\theta}(s) + \psi(s)\dot{\gamma}(s)) \\
&= \min_{\substack{v \in F(\theta(s), z(s))\dot{\theta}(s) \\ w \in G(\theta(s), z(s))\dot{\gamma}(s)}} \{|v + w - \phi(s)\dot{\theta}(s) - \psi(s)\dot{\gamma}(s)|\} \\
&\leq \min_{\substack{v \in F(\theta(s), z(s))\dot{\theta}(s) \\ w \in G(\theta(s), z(s))\dot{\gamma}(s)}} \{|v - \phi(s)\dot{\theta}(s)| + |w - \psi(s)\dot{\gamma}(s)|\} \\
&= \min_{f \in F(\theta(s), z(s))} \{|(f - \phi(s))\dot{\theta}(s)|\} + \min_{g \in G(\theta(s), z(s))} \{|(g - \psi(s))\dot{\gamma}(s)|\} \\
&\leq p(s)\dot{\theta}(s) + p(s) \sum_{i=1}^q \dot{\gamma}^i(s) \\
&= p(s).
\end{aligned}$$

Aplicando agora o teorema 2.4.1, sobre aproximação por trajectórias de inclusões diferenciais, conclui-se a existência de $x \in AC([a, b]; \mathbb{R}^n)$ tal que

$$x(a) = x_0, \quad (10.3.14)$$

$$\dot{x}(s) \in \tilde{F}(s, x(s)), \quad s \in [a, b] - \text{q.s.}, \quad (10.3.15)$$

$$|x(s) - z(s)| \leq \lambda(s), \quad \forall s \in [a, b], \quad (10.3.16)$$

$$|\dot{x}(s) - \dot{z}(s)| \leq k\lambda(s) + p(s), \quad s \in [a, b] - \text{q.s.}, \quad (10.3.17)$$

com λ como definido acima. A demonstração fica agora completa notando que a condição (10.3.15) garante a existência das funções f e g descritas no enunciado, sendo as condições (10.3.12) e (10.3.13) uma consequência imediata de (10.3.17) e das condições (10.3.5) e (10.3.6). $\square$

10.4 Continuidade da função valor

Em seguida apresenta-se e demonstra-se um resultado que garante a Lipschitz continuidade da função valor acima definida. Este resultado constitui uma generalização para problemas impulsivos de resultados semelhantes para problemas com trajectórias absolutamente contínuas.

As hipóteses sobre os dados do problema consideradas na derivação deste resultado são a extensão natural daquelas supostas para dinâmicas não impulsivas (ver capítulos 4 e 8). No entanto, é também incluída uma hipótese que visa garantir que cada problema da família considerada está bem definido. A necessidade de inclusão de uma hipótese desta natureza advém do facto de para cada problema não ser imposta qualquer restrição à variação total da medida, o que se traduz na possibilidade dos conjuntos de estados atingíveis serem, em geral, ilimitados.

Teorema 10.4.1. *Considerem-se válidas as seguintes hipóteses:*

- (i) a função h é Lipschitz contínua de constante k_h em $\mathbb{R}^n$;

- (ii) a multifunção F é contínua, e para cada $t \in [0, 1]$ $F(t, \cdot)$ é Lipschitz contínua de constante k ;
- (iii) a multifunção G é Lipschitz contínua de constante k ;
- (iv) para qualquer $r > 0$ existe uma constante $k_o(r) \in \mathbb{R}$, tal que existe uma solução (x, μ) de $(P_{s,y})$ que satisfaz $\|\mu\| \leq k_o(r)$, isto para todo o y tal que $|y| \leq r$, e para todo o $s \in [0, 1]$.

Então, a função valor V acima definida é localmente Lipschitz contínua.

No enunciado deste teorema e na demonstração que se segue, para $\mu \in C^*([s, 1]; K)$, $\|\mu\|$ representa o valor $\sum_{i=1}^q \mu^i([s, 1])$.

Este teorema é uma consequência imediata dos dois lemas abaixo apresentados e demonstrados. Neles, continuam a supor-se válidas as hipóteses acima postuladas.

Lema 10.4.1. *Seja $s \in [0, 1]$ qualquer. Então a função $y \mapsto V(s, y)$ é localmente Lipschitz.*

Demonstração.

Sejam $s \in [0, 1]$ e $r > 0$ quaisquer e escolham-se $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|y_1| \leq r$ e $|y_2| \leq r$. As hipóteses postuladas permitem afirmar que existem (x_1, μ_1) e (x_2, μ_2) , respectivamente soluções de (P_{s,y_1}) e de (P_{s,y_2}) , tais que $\max\{\|\mu_1\|, \|\mu_2\|\} \leq k_o(r)$. Sejam ainda $(z_1, \theta_1, \gamma_1)$ e $(z_2, \theta_2, \gamma_2)$ reparametrizações de tais soluções, respectivamente. Uma aplicação do teorema 10.3.1 permite afirmar a existência de trajectórias reparametrizadas $(\tilde{z}_1, \theta_1, \gamma_1)$ e $(\tilde{z}_2, \theta_2, \gamma_2)$, respectivamente para os problemas (P_{s,y_2}) e (P_{s,y_1}) , que verificam

$$\begin{aligned} \max_{s \in [0, \eta_1(1)]} |\tilde{z}_1(s) - z_1(s)| &\leq e^{k(1+k_o(r))} |y_2 - y_1|, \\ \max_{s \in [0, \eta_1(1)]} |\tilde{z}_2(s) - z_2(s)| &\leq e^{k(1+k_o(r))} |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

onde η_1 e η_2 são as funções de reparametrização associadas a μ_1 e a μ_2 , respectivamente.

Destas expressões conclui-se imediatamente que

$$|V(s, y_1) - V(s, y_2)| \leq k_h e^{k(1+k_o(r))} |y_1 - y_2|$$

demonstrando o resultado. □

Lema 10.4.2. *Seja $y \in \mathbb{R}^n$ qualquer. Então a função $s \mapsto V(s, y)$ é Lipschitz contínua em $[0, 1]$.*

Demonstração.

Fixe-se $y \in \mathbb{R}^n$ qualquer e escolham-se $s_1, s_2 \in [0, 1]$ tais que $s_1 < s_2$. Seja (x_2, μ_2) uma solução de $(P_{s_2,y})$. Seja $\hat{x}_2$ uma trajectória de F em $[s_1, s_2]$ e definam-se em

$[s_1, 1]$ a função $\tilde{x}_2$ por

$$\tilde{x}_2(t) = \begin{cases} \hat{x}_2(t) & t \in [s_1, s_2[\\ x_2(t) & t \in [s_2, 1] \end{cases}$$

e a medida $\tilde{\mu}_2$ por

$$\tilde{\mu}_2(A) = \mu(A \cap [s_2, 1])$$

para qualquer $A \subset [s_1, 1]$ de Borel. É trivial que $(\tilde{x}_2, \tilde{\mu}_2)$ é dinamicamente admissível e das propriedades de F tem-se que

$$|x_2(s_1) - y| \leq k|s_2 - s_1|.$$

Aplicando agora o teorema 10.3.1 conclui-se a existência de $(x_3, \tilde{\mu}_2)$ admissível para $(P_{s_1, y})$ tal que $|x_3(1) - x_2(1)| \leq ke^{(1+k_0(r))}|s_2 - s_1|$, onde $r > |y| + 1$. Então tem-se que

$$V(s_1, y) \leq V(s_2, y) + k_h ke^{(1+k_0(r))}|s_2 - s_1|. \quad (10.4.1)$$

Seja agora (x_1, μ_1) uma solução de $(P_{s_1, y})$ e seja $(z_1, \theta_1, \gamma_1)$ uma reparametrização correspondente. Defina-se $\alpha = \eta_1(1)$, onde η_1 é a reparametrização do tempo associada a μ_1 . Escolha-se $p \in \theta^{-1}(\{s_2\})$ e defina-se a função $\tilde{\theta} : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ por intermédio de

$$\tilde{\theta}(\sigma) = \max\{s_2, \theta_1(\sigma)\}.$$

Defina-se também a função $\tilde{\gamma} : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^q$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(0) &= 0, \\ \dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) &= \begin{cases} \dot{\gamma}_1(\sigma) & \sigma \in]p, \alpha], \\ \frac{\dot{\gamma}_1(\sigma)}{1 - \dot{\theta}_1(\sigma)} & \sigma \in [0, p] \wedge \dot{\theta}_1(\sigma) \neq 1, \\ \zeta & \sigma \in [0, p] \wedge \dot{\theta}_1(\sigma) = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

onde $\zeta \in K$ é tal que $\sum_i \zeta^i = 1$. Facilmente se conclui que $(\tilde{\theta}, \tilde{\gamma})$ é o fecho gráfico de uma medida em $C^*([s_2, 1]; K)$. No intervalo $[0, p]$ também se verifica que $\dot{\tilde{\theta}}(\sigma) = 0$. Para $i = 1, \dots, q$, definam-se em $[0, p]$ as funções l^i da seguinte forma,

$$l^i(\sigma) = \begin{cases} g_1^i(\sigma) + (f_1(\sigma) - g_1^i(\sigma))\dot{\theta}_1(\sigma) & \text{se } \dot{\theta}_1(\sigma) \neq 1, \\ f_i(\sigma) & \text{se } \dot{\theta}_1(\sigma) = 1. \end{cases}$$

Então, verifica-se que $\dot{z}_1(\sigma) = \sum_i l^i(\sigma)\dot{\tilde{\gamma}}^i(\sigma)$ para $\sigma \in [0, p] - \text{q.s.}$. Também se pode concluir que

$$d_{G^i(\tilde{\theta}(\sigma), z_1(\sigma))}(l^i(\sigma)) \leq k \cdot (s_2 - s_1) + (2k)\dot{\theta}_1(\sigma) \quad \sigma \in [0, p] - \text{q.s.}$$

Aplicando agora o teorema 10.3.1, garante-se a existência de $z_2 \in AC([0, p]; \mathbb{R}^n)$, trajectória reparametrizada correspondente a $(\tilde{\theta}, \tilde{\gamma})$, tal que $z_2(0) = y$ e

$$\max_{s \in [0, p]} |z_1(s) - z_2(s)| \leq e^{k \cdot p} \cdot k \cdot (p + 2) \cdot (s_2 - s_1),$$

ou ainda,

$$\max_{s \in [0, p]} |z_1(s) - z_2(s)| \leq e^{k \cdot p} \cdot k \cdot (p + 2) \cdot (s_2 - s_1).$$

Defina-se agora em $[p, \alpha]$ o arco z_3 de acordo com

$$z_3(\sigma) = z_1(\sigma) - z_1(p) + z_2(p).$$

Então, tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{z}_3(\sigma) &= \dot{z}_1(\sigma), \quad \sigma \in [p, \alpha] - \text{q.s. e} \\ \max_{s \in [p, \alpha]} |z_3(s) - z_1(s)| &\leq e^{k \cdot p} \cdot k \cdot (p + 2) \cdot (s_2 - s_1). \end{aligned}$$

Aplicando novamente o teorema 10.3.1, pode afirmar-se a existência de um elemento $z_4 \in AC([p, \alpha])$, trajectória reparametrizada correspondente a $(\tilde{\theta}, \tilde{\gamma})$, tal que $z_4(p) = z_3(p) = z_2(p)$ e

$$\max_{s \in [p, \alpha]} |z_4(s) - z_3(s)| \leq e^{k \cdot \alpha} \cdot \alpha \cdot k \cdot e^{k \cdot p} \cdot k \cdot (p + 2) \cdot (s_2 - s_1).$$

Então, verifica-se que o elemento $(\tilde{z}, \tilde{\theta}, \tilde{\gamma})$, onde $\tilde{z}$ é o arco definido em $[0, \alpha]$ por

$$\tilde{z}(\sigma) = \begin{cases} z_2(\sigma) & \sigma \in [0, p[, \\ z_4(\sigma) & \sigma \in [p, \alpha], \end{cases}$$

corresponde a uma trajectória reparametrizada admissível para o problema $(P_{s_2, y})$.

Das condições acima, pode ainda concluir-se que

$$|\tilde{z}(\alpha) - z_1(\alpha)| \leq (1 + k \cdot \alpha \cdot e^{k \cdot \alpha}) \cdot e^{k \cdot p} \cdot k \cdot (p + 2) \cdot (s_2 - s_1).$$

A Lipschitz continuidade local da função objectivo permite então afirmar que

$$V(s_2, y) \leq V(s_1, y) + \tilde{k} \cdot (s_2 - s_1),$$

onde $\tilde{k}$ é uma constante que apenas depende de y e dos dados do problema. Esta expressão e a condição (10.4.1) demonstram o pretendido. $\square$

Capítulo 11

Condições de Optimalidade em Problemas Impulsionais

Neste capítulo são apresentadas e demonstradas condições de optimalidade para problemas de controlo óptimo impulsional. É definido o conceito de função de verificação para a classe de problemas abordados, e com base neste conceito são obtidas condições suficientes de optimalidade. São também estudadas propriedades da função valor para tais problemas, demonstrando-se que esta função satisfaz condições generalizadas de Hamilton-Jacobi. São ainda obtidos resultados que permitem relacionar multiplicadores das condições necessárias de optimalidade com gradientes da função valor.

11.1 Função de verificação

A noção geral de função de verificação está associada à obtenção de condições de optimalidade envolvendo propriedades de monotonia destas funções quando avaliadas ao longo de trajectórias dinamicamente admissíveis.

Nesta secção é definido o conceito de função de verificação para a classe de problemas de controlo óptimo impulsional abordada neste trabalho. Tal definição constitui a extensão natural para o contexto de problemas impulsionais das definições habitualmente consideradas em problemas com trajectórias absolutamente contínuas.

Definição 11.1.1 (Função de verificação). *Um função $W : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se ser uma função de verificação para o problema de controlo óptimo impulsional (P) quando*

1. W é localmente Lipschitz contínua;
2. $W(1, x) \leq h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$

3. W satisfaz as condições

$$\max_{\substack{(r_0, r) \in K_1 \\ f \in F(t, x) \\ g \in G(t, x)}} \{W^0((t, x); -(r_0, fr_0 + gr))\} \leq 0, \quad \forall (t, x) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n, \quad (11.1.1)$$

$$\max_{\substack{r \in K \\ g \in G(t, x)}} \{W_{(t)}^0(x; -gr)\} \leq 0, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n, \quad (11.1.2)$$

Nesta definição, e ao longo deste capítulo, $W_{(t)}$ representa, para cada $t \in [0, 1]$, a função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ definida por $W_{(t)}(x) = W(t, x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, onde $W : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Contrariamente aos problemas não impulsivos, onde a monotonia das funções de verificação era traduzida apenas por uma condição diferencial, é necessário considerar aqui ambas as condições (11.1.1) e (11.1.2). Esta última condição destina-se a garantir a monotonia ao longo de arcos singulares que correspondem a descontinuidades na trajectória. É de referir que estas condições não são completamente independentes, verificando-se que a validade de (11.1.1) no conjunto indicado implica a validade de (11.1.2) no mesmo conjunto. Contudo, é necessário considerar esta última condição para todos os instantes do intervalo $[0, 1]$ pois as trajectórias admissíveis poderão ser descontínuas em 0 ou em 1. De facto, uma pequena reformulação da família de problemas, considerando valores da variável independente inferiores a 0, permitiria que a condição (11.1.2) em pontos da forma $(0, x)$, com $x \in \mathbb{R}^n$, fosse obtida a partir da condição (11.1.1), pois então esses pontos seriam interiores ao conjunto onde esta última expressão seria válida.

11.2 Condições de Hamilton-Jacobi

O teorema seguinte apresenta condições suficientes de optimalidade na forma da existência de uma função de verificação.

Teorema 11.2.1 (Condições suficientes de optimalidade). *Sejam (z, ν) um processo admissível para (P) e W uma função de verificação tais que $h(z(1)) = W(0, x_0)$. Então (z, ν) é solução de (P) .*

Demonstração.

Seja (x, μ) um processo admissível para (P) e seja (y, θ, γ) uma reparametrização de (x, μ) . Sejam f e g mensuráveis tais que

$$\dot{y}(s) = f(s)\dot{\theta}(s) + g(s)\dot{\gamma}(s), \quad (11.2.1)$$

$$f(s) \in F(\theta(s), y(s)), \quad (11.2.2)$$

$$g(s) \in G(\theta(s), y(s)), \quad (11.2.3)$$

para quase todo o $s \in [0, \eta(1)]$, onde η é a função de reparametrização associada a

μ . Definam-se também

$$s_0 = \sup\{s \in [0, \eta(1)] : \theta(s) = 0\}, \text{ e}$$

$$s_1 = \inf\{s \in [0, \eta(1)] : \theta(s) = 1\}.$$

Seja $s \in [s_0, s_1]$ tal que

- $\sigma \rightarrow W(\theta(\sigma), y(\sigma))$ é diferenciável em s ;
- s é ponto de Lebesgue de $\dot{\theta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{y}$, f e g ;
- as condições (11.2.1)-(11.2.3) são satisfeitas;
- $(\dot{\theta}(s), \dot{\gamma}(s)) \in K_1$.

Para tais pontos s , a condição (11.1.1) permite afirmar que

$$\left. \frac{d}{d\sigma} W(\theta(\sigma), y(\sigma)) \right|_{\sigma=s} \geq -W^0((\theta(s), y(s)); -(\dot{\theta}(s), \dot{y}(s))) \geq 0.$$

Uma vez que estes pontos constituem um subconjunto de $[s_0, s_1]$ de medida total, tem-se ainda que

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds} W(\theta(s), y(s)) ds \geq 0. \quad (11.2.4)$$

Considerem-se agora pontos $s \in [0, s_0]$ tais que

- $\sigma \rightarrow W_{(0)}(y(\sigma))$ é diferenciável em s ;
- s é ponto de Lebesgue de $\dot{\gamma}$, $\dot{y}$ e g ;
- a condição (11.2.3) é satisfeita;
- $\dot{\gamma}(s) \in K$ e $\dot{y}(s) = g(s)\dot{\gamma}(s)$.

Da condição (11.1.2) conclui-se que para tais pontos se tem

$$\left. \frac{d}{d\sigma} W_{(0)}(y(\sigma)) \right|_{\sigma=s} \geq -W_{(0)}^0(y(s); -\dot{y}(s)) \geq 0.$$

Como tais pontos s constituem um subconjunto de $[0, s_0]$ de medida total, e $\theta(s) = 0$ em $[0, s_0]$, pode afirmar-se que

$$\int_0^{s_0} \frac{d}{ds} W(\theta(s), y(s)) ds = \int_0^{s_0} \frac{d}{ds} W_{(0)}(y(s)) ds \geq 0. \quad (11.2.5)$$

Aplicando um raciocínio semelhante, pode também concluir-se que

$$\int_{s_1}^{\eta(1)} \frac{d}{ds} W(\theta(s), y(s)) ds \geq 0.$$

Esta condição e as condições (11.2.4) e (11.2.5) permitem concluir que $W(1, x(1)) \geq W(0, x_0)$, ou ainda, que $h(x(1)) \geq h(x_0)$.

Conclui-se então que $h(x(1)) \geq h(z(1))$, ou seja, que o processo (z, ν) é solução do problema (P). $\square$

O resultado seguinte apresenta a função valor como solução de uma equação generalizada de Hamilton-Jacobi, obedecendo a uma determinada condição fronteira.

Teorema 11.2.2. *Considere-se que a função valor V é localmente Lipschitz contínua em $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$. Então ela satisfaz as seguintes propriedades*

$$\max_{\substack{(r_0, r) \in K_1 \\ f \in F(s, y) \\ g \in G(s, y)}} \{V^0((s, y); -(r_0, fr_0 + gr))\} = 0, \quad \forall (s, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n, \quad (11.2.6)$$

$$\max_{\substack{r \in K \\ g \in G(s, y)}} \{V_{(s)}^0(y; -gr)\} \leq 0, \quad \forall (s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n, \quad (11.2.7)$$

$$\max\left\{\max_{\substack{r \in K \\ g \in G(1, y)}} \{V_{(1)}^0(y; -gr)\}, V(1, y) - h(y)\right\} = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (11.2.8)$$

Demonstração.

Passo 1. Sejam $s \in]0, 1[$ e $y \in \mathbb{R}^n$ quaisquer. Seja (x, μ) uma solução de $(P_{s, y})$, e seja (z, θ, γ) uma reparametrização correspondente. Então existem ϕ e ψ , mensuráveis, tais que $\phi(s) \in F(\theta(s), z(s))$, $\psi(s) \in G(\theta(s), z(s))$ e $\dot{z}(s) = \phi(s)\dot{\theta}(s) + \psi(s)\dot{\gamma}(s)$, num subconjunto de medida total de $[0, \eta(1)]$, onde η é a função de reparametrização associada a μ . O lema 10.2.3 permite afirmar que $V(s, y) = V(\theta(\sigma), z(\sigma))$, para todo o $\sigma \in [0, \eta(1)]$.

Seja S o conjunto constituído pelos pontos τ de $[0, \eta(1)]$ tais que:

$$\begin{aligned} \phi(\tau) &\in F(\theta(\tau), z(\tau)), \\ \psi(\tau) &\in G(\theta(\tau), z(\tau)), \\ \dot{z}(\tau) &= \phi(\tau)\dot{\theta}(\tau) + \psi(\tau)\dot{\gamma}(\tau), \\ \tau &\text{ é ponto de Lebesgue de } \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\gamma} \text{ e } \dot{z}, \\ (\dot{\theta}(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) &\in K_1, \\ \sigma \rightarrow V(\theta(\sigma), z(\sigma)) &\text{ é diferenciável em } \tau. \end{aligned}$$

Para qualquer $\tau \in S$ verifica-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{l \downarrow 0} \frac{V(\theta(\tau + l), z(\tau + l)) - V(\theta(\tau), z(\tau))}{l} \\ &= \lim_{l \downarrow 0} \frac{V(\theta(\tau) + l\dot{\theta}(\tau), z(\tau) + l\dot{z}(\tau)) - V(\theta(\tau), z(\tau))}{l} \\ &\geq -(-V)^0((\theta(\tau), z(\tau)); (\dot{\theta}(\tau), \dot{z}(\tau))) \\ &= -V^0((\theta(\tau), z(\tau)); -(\dot{\theta}(\tau), \dot{z}(\tau))). \end{aligned}$$

Seja agora $\{\tau_i\} \subset S$ tal que $\tau_i \rightarrow 0$. Obviamente que $\theta(\tau_i) \rightarrow s$ e $z(\tau_i) \rightarrow y$. Uma vez que as sucessões $\{\dot{\theta}(\tau_i)\}$, $\{\dot{\gamma}(\tau_i)\}$, $\{\phi(\tau_i)\}$ e $\{\psi(\tau_i)\}$ são limitadas, pode escolher-se uma subsucessão i_j tal que as correspondentes subsucessões acima sejam convergentes, respectivamente para r_0 , r , f e g . Tem-se ainda que $\dot{z}(\tau_{i_j}) \rightarrow fr_0 + gr$. Pelo exposto acima e pela semicontinuidade superior da derivada direccional generalizada conclui-se que

$$V^0((s, y); -(r_0, fr_0 + gr)) \geq 0.$$

Como o conjunto K_1 é fechado e as multifunções F e G têm grafos fechados, pode ainda afirmar-se que $(r_0, r) \in K_1$, $f \in F(s, y)$ e $g \in G(s, y)$. Tem-se então que

$$\max_{\substack{(r_0, r) \in K_1 \\ f \in F(s, y) \\ g \in G(s, y)}} \{V^0((s, y); -(r_0, fr_0 + gr))\} \geq 0,$$

para todo o $(s, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n$.

Passo 2. Escolha-se $(s, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n$ tal que V seja diferenciável em (s, y) . Escolham-se $(r_0, r) \in K_1$, $f \in F(s, y)$ e $g \in G(s, y)$ quaisquer e definam-se as multifunções F_1 e G_1 , respectivamente por $F_1(t, x) = (-F)(s - t, x)$ e $G_1(t, x) = (-G)(s - t, x)$.

Escolha-se $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e defina-se a função $z_1 : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$z_1(\sigma) = y - f r_0 \sigma - g r \sigma.$$

Note-se que $\dot{z}_1(\sigma) = (-f)r_0 + (-g)r$ e seja $p : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$p(\sigma) = \max\{d_{F_1(r_0\sigma, z_1(\sigma))}(-f), d_{G_1(r_0\sigma, z_1(\sigma))}(-g)\}.$$

Desta definição resulta que $\lim_{\sigma \downarrow 0} p(\sigma) = 0$.

Seja agora uma sucessão $\{\sigma_i\} \subset [0, \epsilon]$ com $\sigma_i \rightarrow 0$. Uma aplicação do teorema 10.3.1 permite concluir a existência, para cada i , de $\tilde{x}_i$, $\tilde{\phi}_i$ e $\tilde{\psi}_i$ tais que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i(\sigma) &= \tilde{\phi}_i(\sigma)r_0 + \tilde{\psi}_i(\sigma)r, \\ \tilde{x}_i(0) &= y, \\ \tilde{\phi}_i(\sigma) &\in F_1(r_0\sigma, \tilde{x}_i(\sigma)), \\ \tilde{\psi}_i(\sigma) &\in G_1(r_0\sigma, \tilde{x}_i(\sigma)), \\ \lim_i \frac{1}{\sigma_i} \int_0^{\sigma_i} |\dot{\tilde{x}}_i(\sigma) - (-f r_0 - g r)| d\sigma &= 0. \end{aligned}$$

Para cada i , definam-se no intervalo $[0, \sigma_i]$, as funções x_i , ϕ_i , ψ_i , θ_i e γ_i por

$$\begin{aligned} x_i(\sigma) &= \tilde{x}_i(\sigma_i - \sigma), \\ \phi_i(\sigma) &= -\tilde{\phi}_i(\sigma_i - \sigma), \\ \psi_i(\sigma) &= -\tilde{\psi}_i(\sigma_i - \sigma), \\ \theta_i(\sigma) &= s + (\sigma - \sigma_i)r_0, \\ \gamma_i(\sigma) &= \sigma r. \end{aligned}$$

Facilmente se conclui que, para cada i , $(x_i, \theta_i, \gamma_i)$ é uma trajectória reparametrizada da dinâmica impulsional, satisfazendo $x_i(\sigma_i) = y$ e $\theta_i(\sigma_i) = s$. Aplicando agora o lema 10.2.3 verifica-se que

$$V(s, y) \geq V(\theta_i(0), x_i(0)),$$

expressão que é válida para todo o i . Uma vez que $\theta_i(0) \rightarrow s$ e $x_i(0) \rightarrow y$, e V é diferenciável em (s, y) conclui-se que

$$\lim_i \frac{V(s, y) - V(\theta_i(0), x_i(0))}{\sigma_i}$$

existe e também que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_i \frac{V(s, y) - V(\theta_i(0), x_i(0))}{\sigma_i} \\
&= \lim_i \frac{V(s, y) - V(s - \sigma_i r_0, \tilde{x}_i(\sigma_i))}{\sigma_i} \\
&= \lim_i \frac{V(s, y) - V(s - \sigma_i r_0, y + \int_0^{\sigma_i} \dot{\tilde{x}}_i(\sigma) d\sigma)}{\sigma_i} \\
&= \lim_i \frac{V(s, y) - V(s - \sigma_i r_0, y - (f r_0 + g r)\sigma_i)}{\sigma_i} \\
&= \nabla V(s, y) \cdot (r_0, f r_0 + g r).
\end{aligned}$$

A arbitrariedade da escolha de (r_0, r) , f e g permite ainda afirmar que

$$\nabla V(s, y) \cdot (-r_0, -f r_0 - g r) \leq 0, \quad \forall f \in F(s, y), g \in G(s, y), (r_0, r) \in K_1.$$

Uma vez que a função V é localmente Lipschitz, a caracterização do gradiente generalizado dada pelo teorema 2.3.1 permite finalmente obter a condição

$$\max_{\substack{(r_0, r) \in K_1 \\ f \in F(s, y) \\ g \in G(s, y)}} \{V^0((s, y); -(r_0, f r_0 + g r))\} \leq 0, \quad \forall (s, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^n, \quad (11.2.9)$$

o que juntamente com o passo 1 acima demonstra a validade de (11.2.6).

Passo 3. A condição (11.2.7) para $s \in]0, 1[$ é uma consequência directa da condição (11.2.9) e do facto de

$$V_{(s)}^0(y; r) \leq V^0((s, y); (0, r)),$$

que se obtém directamente da definição de derivada direcciona generalizada. A demonstração de (11.2.7) para $s \in \{0, 1\}$ pode ser efectuada de uma forma completamente análoga àquela apresentada no passo 2 acima, considerando a função $V_{(s)}$ em vez da função V e apenas trajectórias com componente singular.

Passo 4. Do lema 10.2.2 e da condição (11.2.7) decorre directamente que

$$\max\left\{\max_{\substack{r \in K \\ g \in G(1, y)}} \{V_{(1)}^0(y; -gr)\}, V(1, y) - h(y)\right\} \leq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Escolha-se agora $y \in \mathbb{R}^n$. Se $V(1, y) = h(y)$ a condição (11.2.8) fica automaticamente satisfeita. Suponha-se agora que $V(1, y) < h(y)$. Então, existe uma trajectória reparametrizada x , associada a uma medida não nula, que corresponde a uma solução de $(P_{1, y})$. Logo, existe $\alpha > 0$ tal que $\dot{x}(s) = g(s)\dot{\gamma}(s)$ em $[0, \alpha]$ - q.s., onde $g(s) \in G(1, x(s))$ e $(0, \dot{\gamma}(s)) \in K_1$, também em $[0, \alpha]$ - q.s.. Tem-se ainda que $V(1, y) = V(1, x(s))$ em $[0, \alpha]$.

Suponha-se que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$V_{(1)}^0(y; -gp) < -\varepsilon \quad \forall (0, p) \in K_1 \quad \forall g \in G(1, y). \quad (11.2.10)$$

Notando que a função

$$z \mapsto \max_{\substack{(0, p) \in K_1 \\ g \in G(1, z)}} V_{(1)}^0(z; -gp)$$

é semicontínua superior, facilmente se conclui que para quase todo o s suficientemente pequeno se tem que

$$V_{(1)}^0(x(s); -\dot{x}(s)) < -\varepsilon/2.$$

Então, para $\sigma > 0$ suficientemente pequeno, tem-se que

$$\begin{aligned} V(1, y) &= V(1, x(\sigma)) + \int_0^\sigma \frac{d}{ds}(-V_{(1)})(x(s)) ds \\ &\leq V(1, x(\sigma)) + \int_0^\sigma (-V_{(1)})^0(x(s); \dot{x}(s)) ds \\ &< V(1, x(\sigma)) + \sigma(-\varepsilon/2) \\ &< V(1, x(\sigma)) \end{aligned}$$

contrariando o suposto. Assim, a condição (11.2.10) não pode ser válida, ficando demonstrado o pretendido. $\square$

Este teorema apresenta a função valor como uma função de verificação. De facto, de todas as funções de verificação para o problema (P) , a função valor é aquela que em cada ponto $(s, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ apresenta o maior valor, tal como se verifica em problemas com trajectórias absolutamente contínuas.

11.3 Função valor e multiplicadores

Em seguida é apresentado um resultado que permite relacionar o multiplicador das condições necessárias de optimalidade com a função valor para os problemas de controlo impulsional aqui abordados.

Teorema 11.3.1. *Considerem-se as seguintes hipóteses sobre os dados de (P)*

- (H1) *a função h é localmente Lipschitz contínua;*
- (H2) *a multifunção F é contínua, e para cada t a multifunção $x \mapsto F(t, x)$ é Lipschitz contínua;*
- (H3) *para cada t a multifunção $x \mapsto G(t, x)$ é Lipschitz contínua com constante independente de t , e para cada x a multifunção $t \mapsto G(t, x)$ é contínua;*
- (H4) *F e G são multifunções com grafos fechados e que tomam valores conjuntos convexos.*

e suponha-se também que a função valor V da família de problemas $(P_{s,y})$ é localmente Lipschitz contínua.

Seja (x^, μ^*) uma solução de (P) . Então existe um multiplicador das condições necessárias de optimalidade p que satisfaz*

$$-p(0) \in \partial V_{(0)}(x_0) \tag{11.3.1}$$

$$(h(t), -p(t)) \in \partial V(t, x^*(t)), \quad \forall t \in]0, 1[, \tag{11.3.2}$$

onde $h(t) = H_F(t, x^*(t), p(t))$.

Demonstração.

A demonstração deste resultado é em parte semelhante à demonstração dos teoremas 7.1.1 e 8.4.1, pelo que a exposição seguinte é propositadamente sintética, dando-se relevo apenas aos pontos relacionados com o facto do problema possuir uma dinâmica impulsional.

No que se segue, considera-se que $(y^*, \theta^*, \gamma^*)$ é uma reparametrização do processo (x^*, μ^*) , e que η^* é a função de reparametrização associada a μ^* . Sejam ainda s_0 e s_1 definidos por

$$s_0^* = \sup\{s \in [0, \eta^*(1)] : \theta^*(s) = 0\}, \text{ e}$$

$$s_1^* = \inf\{s \in [0, \eta^*(1)] : \theta^*(s) = 1\}.$$

Passo 1. Escolha-se $\varepsilon > 0$ qualquer e definam-se a multifunção $D_\varepsilon : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}^{1+n}$ por

$$D_\varepsilon(t) = \overline{\text{co}}\{(a, b) \in \partial V(\tau, \xi) : |\tau - t| < \varepsilon, (\tau, \xi) \in \overline{\text{gr}}(x) + \varepsilon B^{1+n}, 0 < \tau < 1\},$$

e a função $l_\varepsilon : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$l_\varepsilon(t, u, w) = \sup\{(a, b) \cdot (w, -(1+w)u) : (a, b) \in D_\varepsilon(t)\}.$$

Seja ainda a multifunção $\tilde{F}_\varepsilon : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1} \rightrightarrows \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$\tilde{F}_\varepsilon(t, x, z) = \{((1+w)(f+u), \xi) : f \in F(t, x),$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq w \leq \frac{\varepsilon}{2}, u \in \varepsilon B^n, l_\varepsilon(t, u, w) \leq \xi \leq 3\varepsilon L\},$$

onde a constante $L > 0$ é tal que $\forall t \in [0, 1], \forall m \in D_\varepsilon(t), |m| \leq L$, e $\tilde{G} : [0, 1] \times \mathbb{R}^{n+1} \rightrightarrows \mathbb{R}^{(n+1) \times q}$ é definida por

$$\tilde{G}(t, x, z) = \{(g^i, 0)_{i=0}^q : (g^i)_{i=0}^q \in G(t, x)\}.$$

Considere-se também o sistema dinâmico impulsional, definido no intervalo $[0, 1]$,

$$(S_\varepsilon) \quad \begin{aligned} (dx(t), dz(t)) &\in \tilde{F}_\varepsilon(t, x(t), z(t))dt + \tilde{G}(t, x(t), z(t))\mu(dt), \quad t \in [0, 1] \\ \mu(dt) &\in K \\ z(0) &= 0 \\ \overline{\text{gr}}((x, z)) &\subset \overline{\text{gr}}((x^*, z^*)) + \varepsilon B^{1+n+1} \end{aligned}$$

onde $z^* \equiv 0$.

Passo 2. Seja (x, z, μ) um processo admissível para o sistema dinâmico impulsional (S_ε) . Seja também (y, w, θ, γ) uma reparametrização de (x, z, μ) e seja η a função de reparametrização associada a μ . Sejam ainda s_0 e s_1 definidos por

$$s_0 = \sup\{s \in [0, \eta(1)] : \theta(s) = 0\}, \text{ e}$$

$$s_1 = \inf\{s \in [0, \eta(1)] : \theta(s) = 1\}.$$

Da definição de (S_ε) facilmente se pode concluir que $D_\varepsilon(\theta(s)) \supset \partial V(\theta(s), y(s))$ para todo o $s \in]s_0, s_1[$. Notando que em $[0, s_0]$ e em $[s_1, \eta(1)]$ se verifica que w é constante, um raciocínio análogo ao empregue na demonstração do teorema 11.2.1 permite concluir que $V_{(1)}(x(1)) + z(1) \geq V_{(0)}(x(0))$. Aplicando o lema 10.2.2 pode ainda escrever-se que

$$h(x(1)) + z(1) - V_{(0)}(x(0)) \geq 0.$$

É também simples concluir que (x^*, z^*, μ^*) , onde $z^* \equiv 0$, é um processo admissível para (S_ε) , correspondente ao fecho gráfico (θ^*, γ^*) . Como $h(x^*(1)) = V_{(0)}(x_0)$, conclui-se que o processo (x^*, z^*, μ^*) é óptimo para o seguinte problema de controlo impulsional.

$$(R_\varepsilon) \quad \min J(x, z, \mu) = h(x(1)) + z(1) - V_{(0)}(x(0))$$

sujeito a:

$$(x, z, \mu) \text{ é admissível para } (S_\varepsilon).$$

Passo 3. As propriedades das multifunções $\tilde{F}_\varepsilon$ e $\tilde{G}$ são tais que é possível aplicar a proposição 9.4.1 e afirmar a existência de uma função $p \in BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ tal que

1. (p, p_z, x^*, z^*) , onde $p_z \equiv -1$, é solução robusta da inclusão diferencial impulsional

$$\begin{aligned} &(-dp(t), -dp_z(t), dx^*(t), dz^*(t)) \in \\ &\partial H_{\tilde{F}_\varepsilon}(t, x^*(t), z^*(t), p(t), p_z(t))dt + \\ &\partial H_{\tilde{G}}(t, x^*(t), z^*(t), p(t), p_z(t))\mu^*(dt), \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

correspondente ao fecho gráfico (θ^*, γ^*) ,

2. as seguintes condições são verdadeiras

$$-p(1) \in \partial_L h(x^*(1)), \quad (11.3.4)$$

$$-p(0) \in \partial_L V_{(0)}(x_0), \quad (11.3.5)$$

$$\sigma_K(H_G(t, x^*(t), p(t))) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad (11.3.6)$$

$$\sigma_K(H_G(t, x^*(t), p(t))) \geq 0, \quad \mu^* - \text{q.s.}, \quad (11.3.7)$$

3. e, para cada $t \in [0, 1]$ tal que $\bar{\mu}^*({t}) > 0$, existem funções ξ_t e α_t tais que as condições (9.4.2)-(9.4.7) se verificam, com x substituído por x^* e μ por μ^* .

O ponto 1 acima é equivalente a afirmar a existência de $r \in AC([0, \eta^*(1)], \mathbb{R}^n)$ tal que $r(\eta^*(t)) = p(t)$ para todo o $t \in [0, 1]$ e

$$\begin{aligned} &(\dot{r}(s), 0, \dot{y}^*(s), 0) \in \\ &\partial H_{\tilde{F}_\varepsilon}(\theta^*(s), y^*(s), 0, r(s), -1) \dot{\theta}^*(s) + \\ &\partial H_{\tilde{G}}(\theta^*(s), y^*(s), 0, r(s), -1) \dot{\gamma}^*(s), \quad s \in [0, \eta^*(1)] - \text{q.s.} \end{aligned}$$

Passo 4. Das propriedades da função Hamiltoniano e das definições de $\tilde{F}_\varepsilon$ e $\tilde{G}$ conclui-se que (p, x^*) é solução robusta da inclusão diferencial impulsional

$$(-dp(t), dx^*(t)) \in \partial H_F(t, x^*(t), p(t))dt + \varepsilon \cdot \kappa \cdot (1 + |p(t)|) \bar{B}^{2n} dt + \partial H_G(t, x^*(t), p(t))\mu^*(dt), \quad (11.3.8)$$

no intervalo $[0, 1]$, ou ainda que

$$(-\dot{r}(s), \dot{y}^*(s)) \in \partial H_F(\theta^*(s), y^*(s), r(s))\dot{\theta}^*(s) + \varepsilon \cdot \kappa \cdot (1 + |r(s)|) \bar{B}^{2n} \dot{\theta}^*(s) + \partial H_G(\theta^*(s), y^*(s), r(s))\dot{\gamma}^*(s), \quad (11.3.9)$$

para $s \in [0, \eta^*(1)] - \text{q.s.}$, e onde κ é uma constante positiva. Verifica-se assim que a função p , acima definida, satisfaz as condições necessárias de optimalidade de (x^*, μ^*) para o problema (P) de acordo com a proposição 9.4.1, com exceção da condição (9.4.1), que é substituída pela condição (11.3.8).

Passo 5. De uma forma análoga à demonstração do teorema 7.1.1, pode concluir-se que a função r satisfaz

$$(H_F(\theta^*(s), y^*(s), r(s)), -r(s)) \in D_\varepsilon(\theta^*(s)), \quad s \in [0, \eta^*(1)] - \text{q.s.} \quad (11.3.10)$$

Passo 6. Considere-se agora uma sucessão $\{\varepsilon_i\}$, onde, para cada i , se tem que ε_i é positivo e suficientemente pequeno, e $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Pode então afirmar-se que, para cada i , o elemento (x^*, z^*, μ^*) é solução do problema (R_{ε_i}) . Do exposto acima conclui-se que para cada i existe p_i , satisfazendo as condições necessárias de optimalidade, com exceção da condição (9.4.1), que é substituída pela condição (11.3.8), ambas com p substituído por p_i , e correspondente a uma reparametrização r_i que verifica a condição (11.3.10), com r , substituído por r_i .

Como, para cada i , a condição (11.3.9) é satisfeita, com r substituído por r_i , tem-se que a sucessão $\{r_i\}$ é uniformemente limitada e equicontínua. Extraindo uma subsucessão (sem re-indexar) pode garantir-se que $r_i \rightarrow r$, para alguma função r absolutamente contínua. Facilmente se conclui que tal função r verifica a condição (11.3.9), assim como

$$(H_F(\theta^*(s), y^*(s), r(s)), -r(s)) \in \bigcap_{\delta > 0} D_\delta(\theta^*(s)) \quad s \in [s_0^*, s_1^*] - \text{q.s.} \quad (11.3.11)$$

Definindo agora a função $p \in BV^+([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ por $p(t) = r(\eta^*(t))$, para todo $t \in [0, 1]$, é também possível afirmar que esta função constitui um multiplicador das condições necessárias de optimalidade de (x^*, μ^*) para (P) , para além de verificar as condições (11.3.4) e (11.3.5).

Passo 7. Tal como na demonstração do teorema 7.1.1, é possível mostrar que a condição (11.3.11) implica que

$$(H_F(\theta^*(s), y^*(s), r(s)), -r(s)) \in \partial V(\theta^*(s), y^*(s)), \quad s \in [s_0^*, s_1^*] - \text{q.s.}$$

Seja agora $t \in]0, 1[$ qualquer. Então existe $\{\sigma_i\} \subset [s_0^*, s_1^*]$ tal que $\sigma_i \downarrow \eta(t)$. Como θ^* é contínua, y^* e r são contínuas e $\theta^*(\eta^*(t)) = t$, a semicontinuidade superior do

gradiente generalizado permite finalmente concluir que

$$(H_F(t, x^*(t), p(t)), -p(t)) \in \partial V(t, x^*(t)).$$

□

Capítulo 12

Conclusões

O trabalho aqui apresentado consistiu no estudo de condições de optimalidade para problemas de controlo óptimo com restrições de estado, e para problemas de controlo impulsional com medidas vectoriais.

Problemas com restrições de estado

Uma das principais contribuições residiu na obtenção de condições necessárias e suficientes de optimalidade na forma de funções de verificação. Estas funções são obtidas como funções valor de uma família de problemas auxiliares. Tais problemas auxiliares possuem ainda restrições de estado. Contudo, supondo uma qualificação das restrições, materializada na noção de calma, é possível garantir que tais funções valor são localmente Lipschitz contínuas. O estabelecimento de um princípio de programação dinâmica para tal família de problemas (algo diferente do tradicional) permitiu obter uma caracterização pontual daquelas funções, a qual pode ser interpretada como uma generalização da equação de Hamilton-Jacobi, com uma determinada condição fronteira. Mostrou-se ainda que a noção de calma é a mais fraca qualificação das restrições que garante as propriedades acima enunciadas, na medida em que é em si mesma uma consequência da existência de funções de verificação com as referidas propriedades.

Foram também obtidos resultados que permitem relacionar a noção de calma com a existência de multiplicadores normais das condições necessárias de optimalidade. Estes resultados estendem outros existentes na literatura, demonstrando que a calma é uma propriedade intermédia entre a normalidade e a normalidade forte.

A relação entre os conceitos de calma e normalidade deixa antever uma relação entre funções de verificação e multiplicadores das condições necessárias de optimalidade. Nesta linha, foi demonstrado, assumindo mais uma vez a qualificação das restrições caracterizada pela noção de calma, que o gradiente generalizado de uma função de verificação contém um elemento que pode ser obtido a partir dos multiplicadores das condições necessárias de optimalidade. Fundamental para o estabelecimento de

tal relação foi a forma como foram definidas as funções de verificação, em particular a sua dependência num parâmetro que de alguma forma caracteriza o relaxamento das restrições de estado.

Outra contribuição deste trabalho consistiu numa definição alternativa da função valor para problemas com restrições de estado, aqui designada por função valor estendida. De um modo algo análogo ao que foi considerado para as funções de verificação, a função valor estendida depende, para além do instante e estado iniciais, de um parâmetro adicional que estipula o grau de violação possível das restrições de estado. Esta definição surge de uma forma natural, na medida em que a família de problemas subjacente à definição desta função satisfaz um princípio de programação dinâmica com uma formulação tradicional. Foram ainda apresentadas condições que garantem a Lipschitz continuidade da função valor estendida. Estas condições constituem uma generalização de outras existentes na literatura e que garantem propriedades semelhantes para a função valor clássica. As propriedades de monotonia da função valor estendida, quando avaliada ao longo de trajectórias admissíveis para o problema original, garantem que esta satisfaz uma equação generalizada de Hamilton-Jacobi sempre que for Lipschitz contínua. Provavelmente, a característica mais relevante da função valor estendida é o facto do seu gradiente generalizado (mais uma vez assumindo a Lipschitz continuidade) conter um elemento obtido a partir de um multiplicador das condições necessárias de optimalidade. Este resultado, inovador para problemas com restrições de estado, constitui uma extensão de outros já conhecidos mas para problemas com estado livre.

Problemas impulsivos com medidas vectoriais

Outra contribuição importante deste trabalho consistiu no resultado sobre aproximação por trajectórias admissíveis para a dinâmica impulsional aqui considerada. Este resultado constitui uma extensão para inclusões diferenciais impulsivas de outros existentes na literatura mas apenas para inclusões diferenciais. A sua relevância pode ser atestada pela forma simples como foi utilizado neste trabalho para caracterizar propriedades da função valor.

A forma de definição da função valor em problemas impulsivos aqui utilizada, ao não considerar qualquer dependência em termos que limitem a variação total do termo singular da dinâmica, afigura-se mais intuitiva. No entanto, tal definição permite que cada um dos problemas auxiliares tenha conjuntos de estados atingíveis possivelmente ilimitados, podendo dar-se o caso do custo de tais problemas não estar limitado inferiormente. Desta forma, será natural, e mesmo necessário, impor hipóteses adicionais de boa definição de cada um destes problemas, tal como considerado neste trabalho.

É também inovador o resultado que mostra que a função valor aqui definida, quando Lipschitz contínua, satisfaz um conjunto de condições de Hamilton-Jacobi com uma adequada condição fronteira. A identificação de condições suficientes de optimali-

dade para estes problemas foi outro dos resultados aqui obtidos. Estas condições estão ligadas ao conceito de função de verificação para tal classe de problemas.

A relação entre um multiplicador das condições necessárias de optimalidade para problemas impulsivos e a função valor obtida neste trabalho é idêntica a outras já conhecidas, mas para problemas sem impulsos. O facto da função valor aqui considerada satisfazer tal relação justifica, de algum modo, a adequação da sua definição.



Bibliografia

- [AA97] A. V. Arutyunov and S. M. Aseev, *Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints*, SIAM Journal on Control and Optimization **35** (1997), no. 3, 930–952.
- [AC84] J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [AF90] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set valued analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [BJM93] E. N. Barron, R. Jensen, and J. L. Menaldi, *Optimal control and differential games with measures*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **21** (1993), no. 4, 241–268.
- [CEL84] M. G. Crandall, L. C. Evans, and P. L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society **282** (1984), no. 2, 487–502.
- [CL83] M. G. Crandall and P. L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society **277** (1983), no. 1, 1–41.
- [CL87] F. H. Clarke and P. D. Loewen, *State constraints in optimal control: A case study in proximal normal analysis*, SIAM Journal on Control and Optimization **25** (1987), no. 6, 1440–1456.
- [Cla83] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Addison-Wesley, New York, 1983.
- [Cla89] F. H. Clarke, *Methods of dynamic and nonsmooth optimization*, SIAM, Philadelphia, 1989.
- [CLSW95] F. Clarke, Yu. Ledyayev, R. Stern, and P. Wolenski, *Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey*, Journal of Dynamical and Control Systems (1995), no. 1, 1–48.

- [CLSW98] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski, *Nonsmooth analysis and control theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [CV83] F. H. Clarke and R. B. Vinter, *Local optimality conditions and lipschitzian solutions to the Hamilton-Jacobi equation*, SIAM Journal on Control and Optimization **21** (1983), no. 6, 856–870.
- [CV87] F. H. Clarke and R. B. Vinter, *The relationship between the maximum principle and dynamic programming*, SIAM Journal on Control and Optimization **25** (1987), no. 5, 1291–1311.
- [Fer94] M. M. Ferreira, *Novo princípio do máximo para problemas de controlo óptimo com restrições de estado*, Ph.D. thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1994.
- [FR75] W. H. Fleming and R. W. Rishel, *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [FR99] H. Frankowska and F. Rampazzo, *Relaxation of control systems under state constraints*, SIAM Journal on Control and Optimization **37** (1999), no. 4, 1291–1309.
- [Fra89] H. Frankowska, *Optimal trajectories associated with a solution of the contingent Hamilton-Jacobi equation*, Applied Mathematics and Optimization **19** (1989), 291–311.
- [Fra93] H. Frankowska, *Lower semicontinuous solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, SIAM Journal on Control and Optimization **31** (1993), no. 1, 257–272.
- [FS93] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [FV94] M. M. Ferreira and R. B. Vinter, *When is the maximum principle for state constrained problems nondegenerate?*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **187** (1994), 438–467.
- [IK96] H. Ishii and S. Koike, *A new formulation of state constrained problems for first-order PDEs*, SIAM Journal on Control and Optimization **34** (1996), no. 2, 554–571.
- [LCV88] P. D. Loewen, F. H. Clarke, and R. B. Vinter, *Differential inclusions with free time*, Ann. Inst. Henri Poincaré - Analyse non linéaire **5** (1988), no. 6, 573–593.
- [Loe85] P. D. Loewen, *Proximal normal analysis in dynamic optimization*, Ph.D. thesis, University of British Columbia, 1985.
- [Loe93] P. D. Loewen, *Optimal control via nonsmooth analysis*, American Mathematical Society, Montréal, 1993.

- [Lor87] P. Loretto, *Some properties of constrained viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, SIAM Journal on Control and Optimization **25** (1987), no. 5, 1244–1252.
- [Mot95] M. Motta, *On nonlinear optimal control problems with state constraints*, SIAM Journal on Control and Optimization **33** (1995), no. 5, 1411–1424.
- [MR96] M. Motta and F. Rampazzo, *Dynamic programming for impulsive systems driven by ordinary and impulsive controls*, SIAM Journal on Control and Optimization **34** (1996), no. 1, 199–225.
- [MR97] M. Motta and F. Rampazzo, *The value function of a slow growth control problem with state constraints*, Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control **7** (1997), no. 3, 1–20.
- [PS00] F. L. Pereira and G. N. Silva, *Necessary conditions of optimality for vector-valued impulsive control problems*, Systems & Control Letters **40** (2000), 205–215.
- [PSV98] F. L. Pereira, G. N. Silva, and R. B. Vinter, *Necessary conditions of optimality for impulsive differential inclusions*, Proceedings of the Conference on Decision and Control'98 (1998), 16–18.
- [Ris65] R. W. Rishel, *An extended pontryagin principle for control systems whose laws contain measures*, SIAM Journal on Control **3** (1965), no. 2, 191–205.
- [RV93] J. D. Rowland and R. B. Vinter, *Dynamic optimization problems with free-time and active state constraints*, SIAM Journal on Control and Optimization **31** (1993), no. 3, 677–697.
- [RV95] F. Rampazzo and R. B. Vinter, *A theorem on existence of neighbouring trajectories satisfying a state constraint, with applications to optimal control*, Preprint, 1995.
- [Smi94] G. V. Smirnov, *Introduction to the theory of differential inclusions*, SISSA Lecture Notes, SISSA, Trieste, 1994.
- [Son86] H. M. Soner, *Optimal control with state space constraints I*, SIAM Journal on Control and Optimization **24** (1986), no. 3, 552–561.
- [SV96] G. N. Silva and R. B. Vinter, *Measure differential inclusions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **202** (1996), 727–746.
- [SV97] G. N. Silva and R. B. Vinter, *Necessary conditions for optimal impulsive control problems*, SIAM Journal on Control and Optimization **35** (1997), no. 6, 1829–1846.

- [Vin88] R. B. Vinter, *New results on the relationship between dynamic programming and the maximum principle*, Mathematics of Control, Signals and Systems **1** (1988), 97–105.
- [VP82] R. B. Vinter and G. Pappas, *A maximum principle for non-smooth optimal control problems with state constraints*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **89** (1982), 212–232.
- [VW90] R. B. Vinter and P. Wolenski, *Hamilton-Jacobi theory for optimal control problems with data measurable in time*, SIAM Journal on Control and Optimization **28** (1990), no. 6, 1404–1419.