

Resumo

Neste trabalho são estudadas condições de optimalidade para duas classes de problemas de controlo ótimo: problemas com restrições de estado e problemas impulsivos.

Os problemas com restrições de estado têm dinâmicas não lineares, caracterizadas por inclusões diferenciais. São problemas de tempo fixo e a função custo a minimizar apenas depende do estado final. As restrições de estado são expressas por uma relação de pertença a um conjunto.

As condições de optimalidade aqui obtidas tomam a forma de existência de funções de verificação Lipschitz contínuas, funções estas que satisfazem uma equação generalizada de Hamilton-Jacobi. É apresentada uma forma construtiva de obter tais funções, e mostra-se que a sua Lipschitz continuidade é equivalente a uma qualificação das restrições de estado, caracterizada pela noção de calma. São demonstradas relações entre o conceito de calma e a existência de multiplicadores normais das condições necessárias de optimalidade.

É também demonstrada uma relação entre elementos obtidos a partir de multiplicadores de condições necessárias de optimalidade e gradientes de funções de verificação.

É ainda introduzido o conceito de função valor estendida, sendo estabelecida uma relação entre esta função e um multiplicador das condições necessárias de optimalidade. Esta relação justifica a interpretação heurística de que a medida que faz parte dos multiplicadores das condições necessárias de optimalidade se obtém a partir da variação do custo ótimo com o relaxamento da restrição de estado do problema.

Os problemas impulsivos abordados possuem dinâmicas não lineares caracterizadas por inclusões diferenciais impulsivas com medidas vectoriais. São problemas de tempo fixo e com função custo apenas dependente do estado final.

É definida a função valor para a classe de problemas impulsivos considerados e são estudadas as suas propriedades. Nomeadamente, mostra-se que sob certas condições esta função é Lipschitz contínua. Esta demonstração faz uso de um resultado sobre aproximação por trajectórias admissíveis também apresentado e demonstrado neste trabalho. É também mostrado que a função valor satisfaz um conjunto de condições de Hamilton-Jacobi generalizadas, com uma determinada condição fronteira. Uma versão relaxada destes condições é ainda utilizada para a identificação de condições suficientes de optimalidade.

É também obtida uma relação entre um multiplicador das condições necessárias de optimalidade e a função valor aqui considerada. Este resultado constitui uma extensão para problemas impulsivos de outros existentes, mas para problemas com trajectórias absolutamente contínuas.

Abstract

This work addresses the derivation of optimality conditions for two classes of optimal control problems: state constrained problems and impulsive problems.

The problems with state constraints have nonlinear dynamics, characterized by differential inclusions. They are fixed time problems and the cost function only depends on the final state. The state constraints are expressed by a set inclusion relationship.

The optimality conditions derived here take the form of existence of Lipschitz continuous verification functions. These functions satisfy generalized Hamilton-Jacobi equations. It is shown that these functions can be obtained as value functions of auxiliary families of related problems. The Lipschitz continuity of verification functions is shown to be equivalent to a state constraint qualification, expressed by the calmness concept. Relationships between calmness and the existence of normal multipliers of the necessary conditions of optimality are also studied.

The significance of the definition of verification functions used in this work can also be assessed by a relationship between normal multipliers and generalized gradients of verification functions obtained here.

The concept of extended value function is introduced. A relationship between gradients of this function and multipliers of the necessary conditions of optimality is also obtained. This relationship contributes to validate heuristic claims concerning the connection between the measure element of the multiplier of the necessary conditions of optimality and the optimal value of problems obtained by relaxing the state constraints of the original problem.

The impulsive control problems have dynamics characterized by impulsive differential inclusions driven by vector valued measures. They are fixed time problems and the cost functions only depends on the final state.

A definition of the value function for such class of problems is given and its main properties are derived. A result on the existence of neighboring feasible trajectories is derived and sufficient conditions for the Lipschitz continuity of the value function are obtained. It is also shown that the value function satisfies generalized Hamilton-Jacobi conditions as well as a certain boundary condition. A relaxed version of these conditions is used to identify sufficient conditions of optimality.

A relationship between a multiplier of the necessary conditions of optimality and the value function is obtained. This result extends to impulsive control problems similar results available for problems with absolutely continuous trajectories.