

***UM ELEMENTO FINITO
TRIANGULAR PARA FLEXÃO DE
PLACAS DELGADAS***

Joaquim J. M. Sabino Domingues

***UM ELEMENTO FINITO
TRIANGULAR PARA FLEXÃO DE
PLACAS DELGADAS***

Joaquim J. M. Sabino Domingues

*UM ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PARA
FLEXÃO DE PLACAS DELGADAS*

por
Joaquim J. M. Sabino Domingues (*)

Tese de dissertação para obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Mecânica, opção de Engenharia Estrutural,
pelo Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto, Março de 1995

(*) Eng^o Mecânico (UP), Assistente do ISEP

RESUMO

Com base na teoria das placas delgadas de Kirchhoff, é derivado um elemento triangular, com 12 nós e 15 graus de liberdade, para análise de flexão de placas segundo o Método dos Elementos Finitos. As variáveis nodais estabelecidas são seis deslocamentos (nos vértices e a meio dos bordos) e nove rotações normais (três por cada bordo). O campo de deslocamentos é obtido por interpolação, usando um polinómio completo do 4º grau. Define-se uma metodologia para o cálculo exacto da matriz de rigidez do elemento e do vector das forças nodais.

São apresentados diversos testes e respectivos resultados, obtidos numericamente, com a finalidade de aferir a validade da formulação, com especial relevo para a prova de convergência e a comparação de resultados com os obtidos por outros autores e diferentes vias.

Este trabalho é dedicado

*aos meus filhos, Tiago, Nuno, Rita, André e Miguel,
à minha mulher,
e aos meus pais.*

Agradecimentos

Os meus maiores agradecimentos vão para o Prof. Rogério A. F. Martins, orientador desta tese e autor da ideia original, pelo dedicado empenho e elevado suporte científico prestado. Estes foram o garante da boa execução do trabalho. Em nome de uma amizade que perdura há mais de 20 anos, expresso-lhe também todo o meu reconhecimento pela confiança que em mim depositou.

Agradeço ainda a todos os meus familiares, amigos e colegas que, mesmo tendo decorrido um já longo período após conclusão da licenciatura, sempre me encorajaram com demonstrações de confiança nas minhas capacidades para a realização desta tarefa.

INDICE

INTRODUÇÃO	3
Capítulo I - TEORIA DE PLACAS DELGADAS DE KIRCHHOFF	5
1.1 - Definições e Hipóteses Fundamentais	5
1.2 - Deslocamentos e Deformações	6
1.3 - Tensões. Lei de Hooke	8
1.4 - Equações de Equilíbrio	12
1.5 - Solução Analítica Geral de um Problema de Placas	13
1.6 - Energia de Deformação Elástica em Flexão	14
Capítulo II - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO ÀS PLACAS	15
2.1 - Introdução	15
2.2 - Discretização. Deslocamentos Generalizados. Campo de Deslocamentos. Funções de Forma	16
2.3 - Energia de Deformação Elástica no Elemento Finito. Matriz das Deformações e Matriz de Rigidez	17
2.4 - Trabalho Realizado pelas Forças Exteriores	18
2.5 - Expressão do Equilíbrio Energético Global	21
2.6 - Deslocamentos, Deformações e Tensões Finais	22
2.7 - Continuidade. Convergência. Patch Test	23
2.8 - Revista dos Elementos de Placa Existentes	24
Capítulo III - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO	27
3.1 - Definição do Elemento. Nós e Graus de Liberdade	27
3.2 - Referencial Global e Local. Transformações	28
3.3 - Normais e Derivadas Normais	29
3.4 - Funções de Forma	31
3.5 - Gráficos das Funções de Forma	33
3.6 - Expressões Gerais dos Termos Polinomiais	35
3.7 - Matriz [B]	36
3.8 - Matriz $[K^e]$	37
3.9 - Forças Nodais Equivalentes	38
3.9.1 - Forças de Superfície	39
3.9.2 - Forças Linearmente Distribuídas	40
3.9.3 - Momentos Linearmente Distribuídos	41
3.10 - Cálculo das Tensões	42

Capítulo IV - TESTES DO ELEMENTO

44

4.1 - Introdução	44
4.2 - Patch Test	45
4.3 - Placas Rectangulares	48
4.4 - Placas Circulares	59
4.5 - Placa Triangular	66
4.6 - Valores Próprios	69
4.7 - Sensibilidade do Elemento ao Factor λ	70

CONCLUSÕES

73

ANEXO I - Formulário de Placas.

74

REFERÊNCIAS

87

INTRODUÇÃO

Todos os corpos se deformam, em maior ou menor grau, quando submetidos à acção de forças exteriores. Dentro de certos limites de intensidade das acções, a maioria dos corpos deforma-se seguindo uma lei de proporcionalidade linear estabelecida pela primeira vez por Robert Hooke, em 1678: "*ut tensio sic vis*", literalmente, "tal força tal alongamento".

A teoria geral da elasticidade linear ensina-nos a relacionar deformações com deslocamentos e tensões com deformações. Estas relações traduzem-se por um conjunto de equações diferenciais de derivadas parciais cuja solução deve satisfazer também certas condições, ditas de fronteira, de restrições aos deslocamentos em dado sub-domínio.

Em geral, dada a complexidade geométrica dos corpos e a diversidade das acções, a resolução de um problema de elasticidade é impossível seguindo a via da integração analítica. A necessidade imposta pelo desenvolvimento tecnológico em dimensionar economicamente peças e estruturas tendo em conta o seu comportamento elástico e no âmbito das mais variadas indústrias (mecânica, civil, naval, automóvel, aeronáutica, militar, espacial, etc.), levou inúmeros investigadores a desenvolver métodos aproximados de integração das equações da elasticidade.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) foi gradualmente desenvolvido durante as décadas de 40 e 50 com o contributo parcelar de diversos físicos, matemáticos e engenheiros. Segundo Burnnet [B1], o nome do método, "elementos finitos", apareceu pela primeira vez numa publicação de Clough [C1] em 1960. Nos finais dos anos 60 o método era já universalmente aceite como o mais eficaz para resolver os problemas práticos de elasticidade. Note-se, contudo, que este método não é exclusivo da elasticidade, nem mesmo da mecânica dos sólidos em geral. Muitas outras áreas técnicas e científicas onde os fenómenos físicos se regem por leis da mesma natureza formal, como a mecânica dos fluidos, a transferência de calor, o electromagnetismo, a acústica, etc., aplicam hoje em dia, e também intensamente, este mesmo método.

O MEF pode ser utilizado em elasticidade, quer numa formulação geral tri- ou bi-dimensional de um meio sólido contínuo, quer aplicado às estruturas discretas ou aos sistemas compostos por diversos corpos orientados de natureza distinta (estruturas reticuladas, estruturas mistas de barras, cascas e placas, etc.).

No âmbito do estudo das placas e cascas à flexão, a primeira formulação (embrionária) de elementos finitos foi apresentada por Turner, Clough, Martin e Topp [T1], em 1956, ao modelizar os painéis de geometria complexa das asas dos aviões de alta velocidade como um agrupamento de painéis mais pequenos de forma triangular simples.

Desde 1956 até aos nossos dias, foram apresentadas múltiplas publicações onde constam cerca de uma centena de diferentes formulações de elementos de placa, sendo aproximadamente metade as que usam elementos triangulares [H1]. Isto demonstra, por um lado, o interesse nesta área de investigação e, por outro, a dificuldade em obter o elemento universalmente aceite como o "ideal" para a resolução dos problemas de placas.

O elemento finito que aqui formulámos é um elemento de geometria triangular com um conjunto de pontos e variáveis nodais nunca utilizado por outros autores. No trabalho desenvolvido introduzimos ainda um método, que supomos inédito, de efectuar a integração exacta, estendida a áreas triangulares, de polinómios de qualquer grau.

Para a elaboração deste texto foi adoptada a seguinte orientação:

- No Capítulo I apresentamos a teoria geral de flexão das placas delgadas. Com base nas hipóteses de Kirchhoff, são aqui deduzidas as equações fundamentais que regem o fenómeno da flexão, nomeadamente as relações que envolvem as variáveis típicas: deslocamentos, rotações, momentos e curvaturas.
- No Capítulo II fazemos a apresentação do Método dos Elementos Finitos aplicado à análise de placas em geral e deduzimos a fundamentação do método.
- Nos Capítulos III e IV formulamos especificamente o novo elemento triangular e apresentamos um conjunto de testes com os respectivos resultados que demonstram a validade da formulação.
- No final destes quatro capítulos tentamos extrair algumas conclusões sobre o trabalho desenvolvido e apresentamos algumas orientações para futuros desenvolvimentos.
- No Anexo I reproduzimos um formulário de placas extendido aos casos que foram objecto de testes, nomeadamente de placas quadradas, circulares e triangulares.
- Na parte final deste trabalho apresentamos uma lista completa de todas as referências bibliográficas que no texto são citadas entre parêntesis rectos.

Capítulo I

TEORIA DE PLACAS DELGADAS DE KIRCHHOFF

1.1 - Definições e Hipóteses Fundamentais

No estudo do comportamento mecânico das estruturas, o termo placa é utilizado para referir um caso particular de outro mais geral das estruturas conhecidas como cascas.

Uma casca é um corpo contínuo relativamente ao qual uma das dimensões que caracterizam a sua forma - a espessura - é de uma ordem de grandeza significativamente inferior às restantes outras duas. Uma casca fica geometricamente definida pelo conhecimento da sua superfície média e pela espessura em qualquer ponto.

As placas são o caso particular das cascas cuja superfície média constitui um plano.

Considerando que sobre uma placa actua um qualquer sistema de forças e momentos, representados genericamente na Figura 1.1, podemos sempre considerar agrupadas, por um lado, a componente das forças segundo o plano da placa V_t com a componente normal dos vectores momento M_n e, por outro, a componente normal das forças V_n com a componente dos vectores momento segundo o plano da placa, M_t . O primeiro destes grupos de componentes origina um estado de tensão-deformação que é tratado basicamente no âmbito da Elasticidade Plana Bidimensional. Quando uma placa está submetida a um sistema de forças e momentos que se englobem no segundo daqueles grupos, então caímos no âmbito da Flexão de Placas. Em geral, quando se usa o termo *placa* subentende-se que, para além de estarmos a especificar uma forma geométrica própria, também estamos em presença de cargas normais e/ou momentos que provocam a sua flexão.

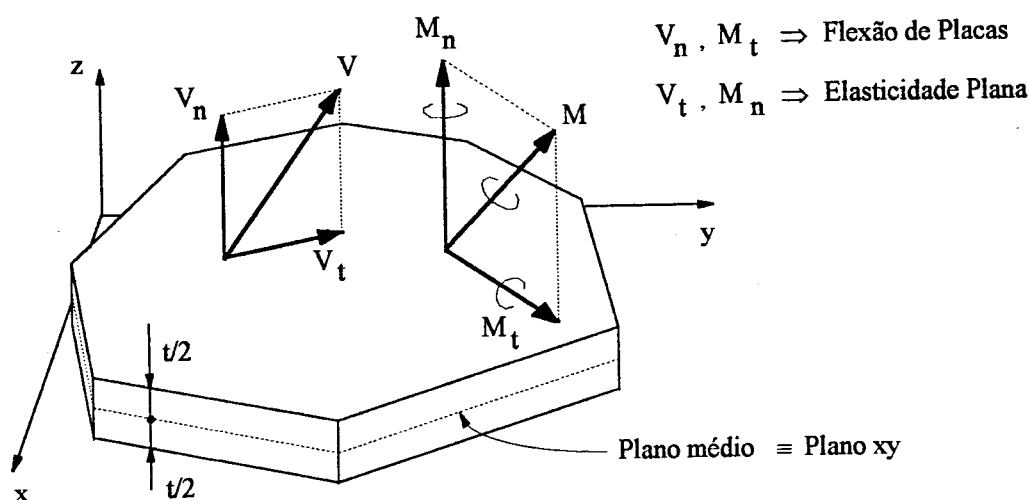


Figura 1.1

Existem diversas teorias de análise da flexão de placas. Consoante a natureza dos problemas, umas são mais ou menos indicadas para o seu estudo. Por exemplo, quando a espessura de uma placa é significativa (relação espessura/vão maior que 1:10) então a Teoria de Mindlin fornece melhores resultados que a teoria de Kirchhoff [O1]. Também, se uma placa for capaz de sofrer grandes deformações elásticas, as teorias de flexão baseadas na análise não-linear fornecem seguramente melhores resultados que os obtidos pela teoria de Kirchhoff. Contudo, na maioria dos casos práticos verificam-se as hipóteses fundamentais da teoria de Kirchhoff, sendo por isso aquela que é a mais vulgarmente utilizada.

A teoria de flexão das placas delgadas de Kirchhoff assenta nas seguintes hipóteses fundamentais:

- 1) Os pontos do plano médio da placa só se deslocam segundo a normal ao plano e os valores desses deslocamentos são pequenos com relação ao vão.
- 2) Todos os pontos contidos numa normal ao plano médio mantêm-se, após a deformação, numa linha recta que permanece ortogonal à deformada.
- 3) A tensão normal na direcção perpendicular ao plano médio é nula.

1.2 - Deslocamentos e Deformações

Consideremos um referencial, como indicado na Figura 1.1, em que o plano xy coincida com o plano médio e o eixo do z seja normal à placa e positivo para cima.

Sejam u, v, w os deslocamentos de um ponto qualquer da placa, segundo as direcções dos 3 eixos coordenados x, y, z , respectivamente.

Consideremos, numa placa deformada, um ponto genérico P do plano médio e duas secções de intersecção da placa com 2 planos verticais, a passar em P , paralelos aos planos xz e yz . As duas secções assim obtidas estão representadas na Figura 1.2 (a) e (b), respectivamente.

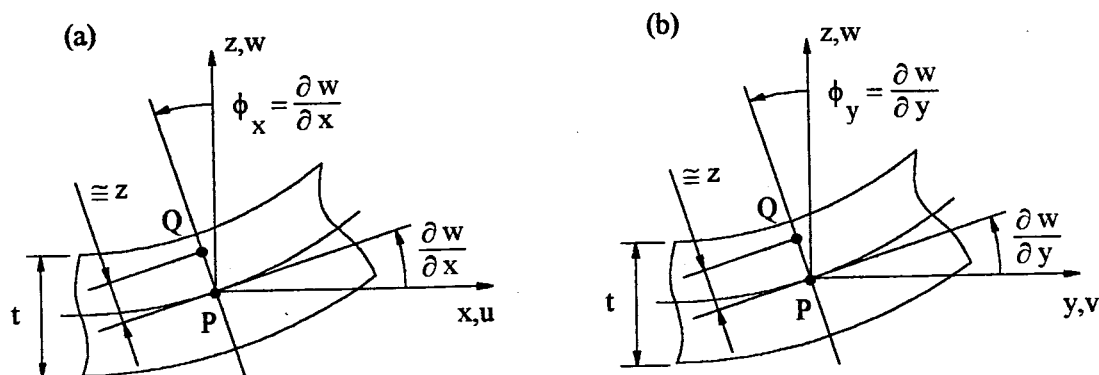


Figura 1.2

Representando por $w=w(x,y)$ o deslocamento segundo z do ponto P e tendo em consideração as hipóteses 1 e 2 de Kirchhoff, então um ponto qualquer Q , à distância z segundo a normal tirada por P , sofre um deslocamento cujas componentes são, desprezando infinitésimos de 2ª ordem,

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{com } -\frac{t}{2} \leq z \leq +\frac{t}{2} \quad (1.1)$$

Pode assim já verificar-se que o campo de deslocamentos no interior da placa fica perfeitamente determinado com o conhecimento da função $w=w(x,y)$, que representa o deslocamento normal dos pontos pertencentes ao plano médio.

Com vista à obtenção das deformações no ponto Q , recordemos agora as equações diferenciais da análise linear elástica [T2]:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} ; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1.2)$$

em que $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ são as componentes do tensor das deformações.

Substituindo (1.1) em (1.2) obtemos

$$\begin{cases} \epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; \epsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} ; \gamma_{xz} = 0 ; \gamma_{yz} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

As expressões (1.3) mostram que são somente 3 as deformações relevantes na flexão de placas delgadas: as extensões ϵ_x e ϵ_y , e a distorsão γ_{xy} .

Designando por $\{\epsilon\}$ o vector dessas deformações relevantes num ponto qualquer

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

e por $\{\hat{\varepsilon}\}$ o vector das deformações generalizadas definido por

$$\{\hat{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

então as expressões (1.3) podem reescrever-se na forma mais condensada de uma única equação vectorial

$$\{\varepsilon\} = -z\{\hat{\varepsilon}\} \quad (1.6)$$

Esta equação evidencia que nos pontos do plano médio da placa a deformação é nula e que a lei de variação da deformação ao longo da espessura é de proporcionalidade com a distância z dum ponto genérico ao plano médio.

Há também a notar que as componentes do vector das deformações generalizadas têm um significado geométrico. A geometria diferencial mostra-nos que aquelas componentes são exactamente as 3 curvaturas da superficie deformada $w(x,y)$ do plano médio [T3]. Por tal motivo também se designa o vector das deformações generalizadas por vector das curvaturas.

Como se verá mais tarde, há ainda toda a conveniência em expressar o vector $\{\hat{\varepsilon}\}$ na forma matricial

$$\{\hat{\varepsilon}\} = [L]w \quad (1.7)$$

utilizando o operador diferencial de 2ª ordem

$$[L] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

1.3 - Tensões. Lei de Hooke

Recordemos a lei de Hooke generalizada ao estado de tensão-deformação triaxial [T2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \text{com } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal, ou módulo de Young, ν o coeficiente de Poisson, e $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ as componentes do tensor das tensões, cujo significado, segundo a convenção de sentidos positivos, é o que a Figura 1.3 (a) representa.

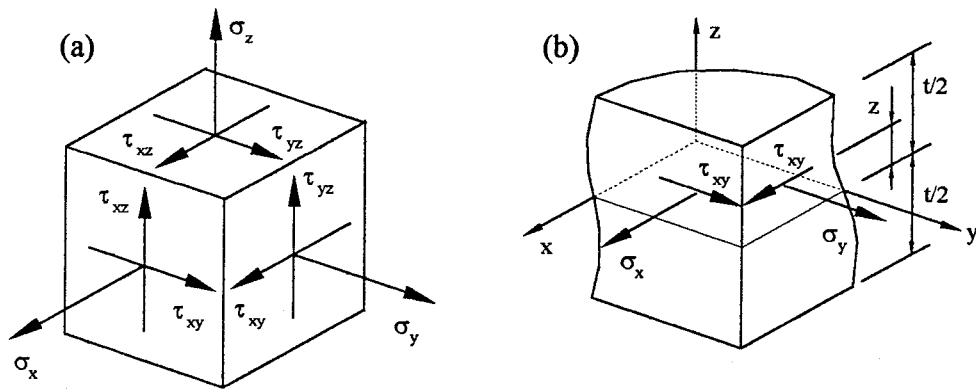


Figura 1.3

Levando em conta os valores nulos das componentes da deformação obtidos em (1.3), e tendo em consideração que segundo a 3ª hipótese de Kirchhoff $\sigma_z = 0$, então a lei de Hooke aplicada a um ponto qualquer da placa fica reduzida a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x \\ \epsilon_z = 0 \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

A conclusão de nulidade da deformação normal ϵ_z e das tensões de corte segundo a normal τ_{xz} e τ_{yz} não é exacta, contudo, resulta das hipóteses postuladas. Como se verá mais adiante, existirão necessariamente tensões de corte segundo a normal, por força da existência de esforço de corte nessas direcções, indispensável ao equilíbrio de um qualquer elemento infinitesimal de placa sujeito à acção de cargas normais. O que as expressões (1.10) denotam é

que somente as componentes da tensão e da deformação no plano xy são significativas no trabalho de deformação por flexão. Uma vez resolvido um problema de placas delgadas segundo a teoria de Kirchhoff com o conhecimento das componentes significativas, então as componentes agora "nulas" poderão ser calculadas à posteriori, como se indicará mais adiante.

As componentes da tensão com significado no trabalho de deformação da placa estão indicadas na Figura 1.3 (b).

A relação (1.10) entre as componentes da tensão com as da deformação pode ser expressa da seguinte forma matricial condensada:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (1.11)$$

sendo $\{\sigma\}$ o vector das tensões num ponto qualquer

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

e $[D]$ a matriz de elasticidade num ponto

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

A integração das componentes da tensão ao longo da espessura da placa, multiplicadas pela distância z à superfície média, fornece-nos os momentos por unidade de comprimento, os quais, agrupados pela mesma ordem das tensões sob a forma de um vector, designaremos por tensões generalizadas $\{\hat{\sigma}\}$:

$$\{\hat{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (1.14)$$

O sinal negativo na expressão (1.14) justifica-se para permitir adoptar a convenção habitual de sentidos positivos para os momentos que representamos na Figura 1.4.

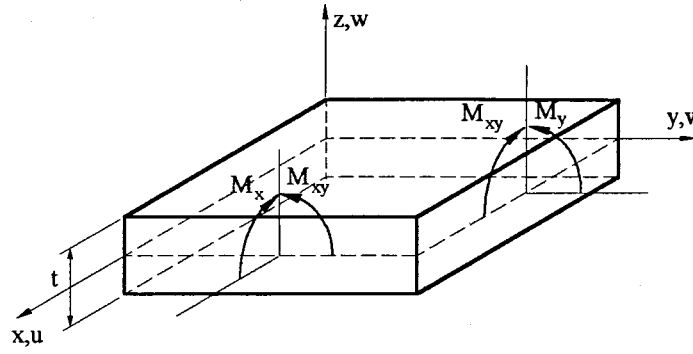


Figura - 1.4

O integral de (1.14) pode ser desenvolvido substituindo as tensões em função das deformações dadas pela lei de Hooke (1.11) e levando em conta a relação destas com as deformações generalizadas (1.6),

$$\{\hat{\sigma}\} = - \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \{\sigma\} z dz = - [D] \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \{\varepsilon\} z dz = [D] \{\hat{\varepsilon}\} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z^2 dz = [D] \{\hat{\varepsilon}\} \frac{t^3}{12} \quad (1.15)$$

Obtemos assim a relação de Hooke para as placas

$$\{\hat{\sigma}\} = [\hat{D}] \{\hat{\varepsilon}\} \quad (1.16)$$

em que $\{\hat{\sigma}\}$ é o vector das tensões generalizadas, ou momentos, $\{\hat{\varepsilon}\}$ é o vector das deformações generalizadas, ou curvaturas, as quais se podem expressar, como definido em (1.5), pelas derivadas parciais de segunda ordem dos deslocamentos w em ordem a x e y e, finalmente, $[\hat{D}]$ é a matriz de elasticidade de flexão, a qual possui a seguinte constituição:

$$[\hat{D}] = \frac{t^3}{12} [D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Ao factor escalar que intervém na definição da matriz $[\hat{D}]$ é habitual identificá-lo como sendo o módulo de rigidez à flexão, ou constante de placa, D :

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.18)$$

1.4 - Equações de Equilíbrio

Consideremos isoladamente um elemento infinitesimal de placa e o conjunto de todas as forças e momentos que sobre ele actua, Figura 1.5.

Para além dos momentos M_x, M_y e M_{xy} , temos a considerar também os esforços de corte por unidade de comprimento, segundo a normal, Q_x e Q_y e, na superfície do elemento, a carga normal exterior q .

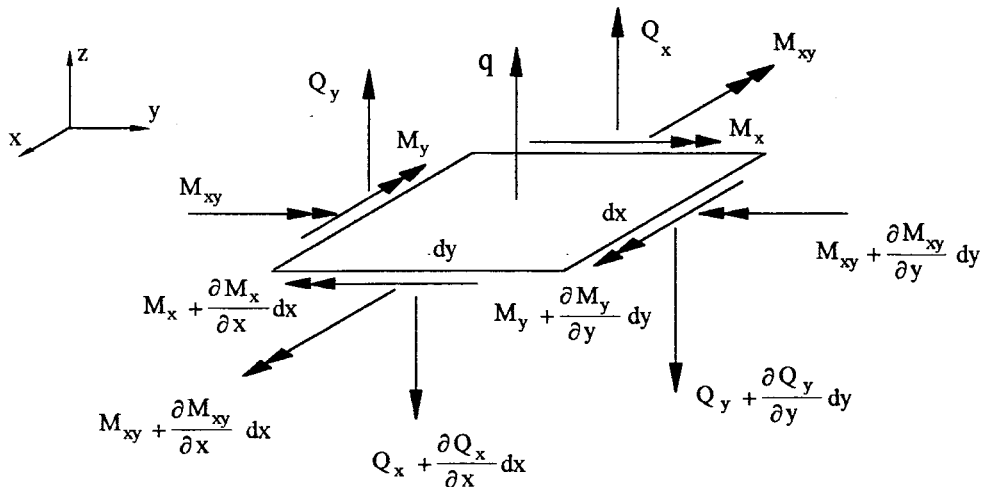


Figura 1.5

Aplicando a condição de equilíbrio estático referente às projecções das forças segundo o eixo dos zz, obtemos

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0 \quad (1.19)$$

donde resulta

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q \quad (1.20)$$

Aplicando a condição de equilíbrio estático referente às projecções dos momentos segundo o eixo dos xx, e desprezando infinitésimos de ordem superior, obtemos

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx - Q_y dx dy = 0 \quad (1.21)$$

donde resulta

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (1.22)$$

Do mesmo modo, tomando o equilíbrio das projecções de momentos segundo o eixo dos yy, obtemos

$$Q_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (1.23)$$

Substituindo agora os valores de Q_x e Q_y das expressões (1.22) e (1.23) na expressão (1.20), chegamos à equação de equilíbrio

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = q \quad (1.24)$$

1.5 - Solução Analítica Geral de um Problema de Placas

As 3 equações representadas de uma forma condensada pela expressão (1.16), juntamente com a equação de equilíbrio (1.24), formam um sistema de 4 equações diferenciais de derivadas parciais de segunda ordem em x e y nas incógnitas w, M_x , M_y e M_{xy} , que permitem, com a introdução das condições fronteira específicas a cada caso, determinar formalmente aquelas incógnitas de modo bem definido.

Uma das vias de resolução analítica deste problema consiste em eliminar as incógnitas M_x , M_y e M_{xy} , obtendo uma só equação diferencial em w. De facto, ao substituir as componentes de $\{\hat{\sigma}\}$ dadas por (1.16) na equação de equilíbrio (1.24), obtemos facilmente a seguinte equação diferencial de quarta ordem, conhecida como a equação diferencial da superfície elástica, ou equação de Lagrange [T3]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1.25)$$

Considerando ser possível integrar analiticamente esta equação de modo a cumprir todas as condições fronteira, então os momentos e os esforços de corte ficarão determinados derivando a função $w(x,y)$ de acordo com as expressões (1.16), (1.22) e (1.23).

As tensões em qualquer ponto ao longo da espessura da placa ficam finalmente definidas pela utilização das expressões clássicas da Resistência de Materiais [T4]:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{12 M_x}{t^3} z \\ \sigma_y = -\frac{12 M_y}{t^3} z \\ \sigma_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{xy} = -\frac{12 M_{xy}}{t^3} z \\ \tau_{xz} = -\frac{3 Q_x}{2 t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \\ \tau_{yz} = -\frac{3 Q_y}{2 t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (1.26)$$

1.6 - Energia de Deformação Elástica em Flexão

Como vimos, um problema de flexão elástica de placas pode ser resolvido com o estabelecimento das relações entre deslocamentos e deformações, destas com as tensões e, finalmente, com uma expressão das condições de equilíbrio de tensões com as acções exteriores.

Em alternativa às equações de equilíbrio, é possível estabelecer outras expressões que resultem da aplicação de princípios fundamentais da Mecânica dos Meios Contínuos envolvendo balanços energéticos entre o trabalho das forças exteriores e a energia interna de deformação da placa.

O processo utilizado na análise de placas pelo Método dos Elementos Finitos envolve precisamente esse conceito de energia de deformação.

Recordemos da elasticidade triaxial [T2] a expressão da energia de deformação elástica acumulada num elemento infinitesimal de volume:

$$du = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (1.27)$$

Como vimos no parágrafo 1.3, somente as componentes de tensão-deformação axial segundo os eixos xx e yy e de distorsão segundo xy são relevantes na flexão de placas delgadas. Anulando assim os respectivos termos em (1.27) e usando a notação (1.4) e (1.12) para representar os vectores das deformações e das tensões num ponto qualquer da placa, a energia elementar de deformação pode expressar-se por

$$du = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (1.28)$$

ou, atendendo à relação (1.6) entre o vector das deformações num ponto $\{\varepsilon\}$ com o vector das curvaturas $\{\hat{\varepsilon}\}$,

$$du = -z \frac{1}{2} \{\hat{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV \quad (1.29)$$

Estando determinada uma lei de variação das tensões ao longo da espessura da placa, então é possível desde já efectuar sobre a expressão (1.29) uma integração na variável z. Passando a designar por du a energia de deformação acumulada num elemento infinitesimal com espessura t e área $dA = dx dy$ e tendo presente a definição (1.14) de vector das tensões generalizadas, ou dos momentos, então a expressão (1.29) pode desenvolver-se da seguinte forma:

$$du = \frac{1}{2} \{\hat{\varepsilon}\}^T \left(- \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \{\sigma\} z dz \right) dA = \frac{1}{2} \{\hat{\varepsilon}\}^T \{\hat{\sigma}\} dA \quad (1.30)$$

Capítulo II

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO ÀS PLACAS

2.1 - Introdução

Como vimos no capítulo anterior, a solução do problema de flexão de placas passa pela integração de uma equação diferencial de quarta ordem ou, em alternativa, pela resolução de um sistema de quatro equações simultâneas diferenciais de segunda ordem, devendo a solução cumprir sempre as condições fronteira. A possibilidade de encontrar uma solução pela via analítica encontra-se naturalmente restringida aos casos de geometria, condições fronteira e carregamento não muito complexos. Na prática, surgem com frequência situações onde tais condições não existem, sendo virtualmente impossível encontrar soluções analíticas satisfatoriamente rigorosas para resolver os problemas de dimensionamento ou análise de tensões e deformações.

Para ultrapassar tais situações, e pondo de lado os métodos experimentais, a via passa pela utilização de métodos numéricos, hoje em dia vulgarmente utilizados, também pela razão de existir um fácil acesso a potentes computadores.

Dentro dos diversos métodos de análise numérica ressalta, pela sua versatilidade, o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O MEF é um método numérico que assenta nas seguintes bases fundamentais:

- Discretização do meio contínuo em elementos finitos.
- Definição de um certo número de pontos nodais na fronteira (eventualmente, também no interior dos elementos) e de variáveis associadas a esses pontos, as quais podem ser deslocamentos ou tensões, quer no sentido restrito quer generalizado, e que irão constituir as incógnitas do problema.
- Estabelecimento de funções aproximadas para o campo de deslocamentos e/ou de tensões no interior dos elementos, por interpolação geométrica dos valores das variáveis nos pontos nodais.
- Aplicação de um princípio físico, geralmente energético, que permite ligar todas as variáveis nodais e constituir um sistema de equações com igual número de incógnitas.

O MEF pode ser classificado quanto à natureza das variáveis interpoladas no interior dos elementos e a natureza das incógnitas resultantes no sistema de equações final. De acordo com Hrabok e Hruday [H1] e Pian e Tong [P1], temos:

- O método dos deslocamentos, quando as variáveis de interpolação são deslocamentos e as incógnitas finais são os deslocamentos generalizados.
- O método do equilíbrio, quando as variáveis de interpolação são tensões e as incógnitas finais são, quer os deslocamentos generalizados, quer os factores de tensão.
- O método misto, em que os deslocamentos e as tensões aparecem, quer como variáveis de interpolação no interior do elemento, quer como incógnitas finais.
- O método híbrido, em que as variáveis de interpolação podem ser os deslocamentos ou as tensões, mas um grupo delas é eliminado ao nível da formulação do elemento, não fazendo assim parte do grupo de incógnitas finais.

Historicamente, foi o método dos deslocamentos o primeiro a ser utilizado na análise de problemas de elasticidade. Actualmente, parece ser ainda o mais popular, nomeadamente para a análise linear elástica de placas e cascas. É este o método que seguiremos.

Existem diversos fundamentos físicos e matemáticos que podem dar suporte ao MEF. Aquele que usaremos baseia-se no conceito de energia de deformação elástica e no princípio da conservação de energia.

2.2 - Discretização. Deslocamentos Generalizados. Campo de Deslocamentos. Funções de Forma.

Seja uma placa com uma geometria qualquer e divida-se o seu domínio em elementos finitos com uma topologia definida, por exemplo, triângulos ou quadriláteros. Considere-se um número restrito de pontos de ligação entre elementos (e, eventualmente, de pontos do interior do elemento), os quais genericamente designamos por nós, e associe-se a cada nó um certo número de graus de liberdade, ou variáveis nodais, por exemplo deslocamento normal, rotação segundo um dado eixo, etc. O número e natureza das variáveis nodais não têm que ser necessariamente igual para todos os nós.

Designemos por

$$\{\delta^e\} = \{\delta_1^e, \delta_2^e, \dots, \delta_n^e\}^T \quad (2.1)$$

o vector dos deslocamentos nodais generalizados do elemento, composto pelas n variáveis nodais associadas a todos os seus nós, segundo uma qualquer ordem arbitrária, mas sempre a mesma para todos os elementos.

O campo de deslocamentos $w=w(x,y)$ relativo aos pontos da superfície média vai ser tomado, por aproximação, como uma combinação dos deslocamentos nodais generalizados, afectados de coeficientes de combinação N_i , funções das variáveis geométricas x e y .

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) \delta_i^e \quad (2.2)$$

Os coeficientes de combinação $N_i(x,y)$, para $i=1$ a n , também se designam por funções interpoladoras, funções de peso ou, mais correntemente, funções de forma.

A expressão (2.2) pode tomar uma forma matricial mais conveniente

$$w = [N] \{ \delta^e \} \quad (2.3)$$

sendo $[N]$ a matriz das funções de forma, constituída, no caso da flexão de placas delgadas, por uma única linha e n colunas:

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \quad (2.4)$$

2.3 - Energia de Deformação Elástica no Elemento Finito. Matriz das Deformações e Matriz de Rigidez.

A energia de deformação elástica acumulada num elemento finito, U^e , calcula-se, naturalmente, por integração da energia elementar infinitesimal obtida pela expressão (1.30). Sendo A a área do elemento, então

$$U^e = \int_e du = \frac{1}{2} \int_A \{ \hat{\epsilon} \}^T \{ \hat{\sigma} \} dA \quad (2.5)$$

Levando em conta a relação de Hooke (1.16), a expressão anterior transforma-se em,

$$U^e = \frac{1}{2} \int_A \{ \hat{\epsilon} \}^T [\hat{D}] \{ \hat{\epsilon} \} dA \quad (2.6)$$

Por outro lado, tendo em conta (1.7) e (2.3), o vector das curvaturas $\{ \hat{\epsilon} \}$ pode agora ser expresso por

$$\{ \hat{\epsilon} \} = [L] w = [L] [N] \{ \delta^e \} = [B] \{ \delta^e \} \quad (2.7)$$

sendo esta nova matriz $[B]$ designada por matriz das deformações cuja definição é

$$[B] = [L] [N] \quad (2.8)$$

Substituindo em (2.6) o vector $\{ \hat{\epsilon} \}$ pela relação obtida em (2.7), e tendo em conta que $\{ \delta^e \}$ é independente das variáveis geométricas de integração, obtemos finalmente para U^e a seguinte expressão:

$$U^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K^e] \{\delta^e\} \quad (2.9)$$

onde $[K^e]$ é designada por matriz de rigidez do elemento e a sua definição é

$$[K^e] = \int_A [B]^T [\hat{D}] [B] dA \quad (2.10)$$

A matriz de rigidez $[K^e]$ é uma matriz simétrica. A prova desta sua característica seria facilmente deduzida a partir da definição (2.10) e da propriedade de igualdade de uma matriz simétrica com a sua transposta.

2.4 - Trabalho Realizado pelas Forças Exteriores

As forças (no seu sentido generalizado, forças e momentos) que actuam exteriormente ao elemento são de duas naturezas diferentes: as que resultam da ligação mútua com os elementos adjacentes, e as forças propriamente exteriores à placa. Em virtude do princípio de reciprocidade dos efeitos de acção-reacção, o trabalho realizado pelas forças de ligação sobre um dado elemento é anulado pelo trabalho dessas mesmas forças, mas com sentido inverso, sobre os elementos adjacentes. Por este facto, omitiremos tais parcelas nas expressões do trabalho realizado.

Consideremos as seguintes forças exteriores a actuar sobre um elemento:

- q - Forças distribuídas pela área, Fig. 2.1 (a)
- p - Forças distribuídas por um segmento recto, Fig. 2.1 (b)
- m - Momentos distribuídos por um segmento recto, Fig. 2.1 (c)
- P - Forças concentradas num ponto, Fig. 2.1 (d)
- M - Momentos concentrados num ponto, Fig. 2.1 (d)

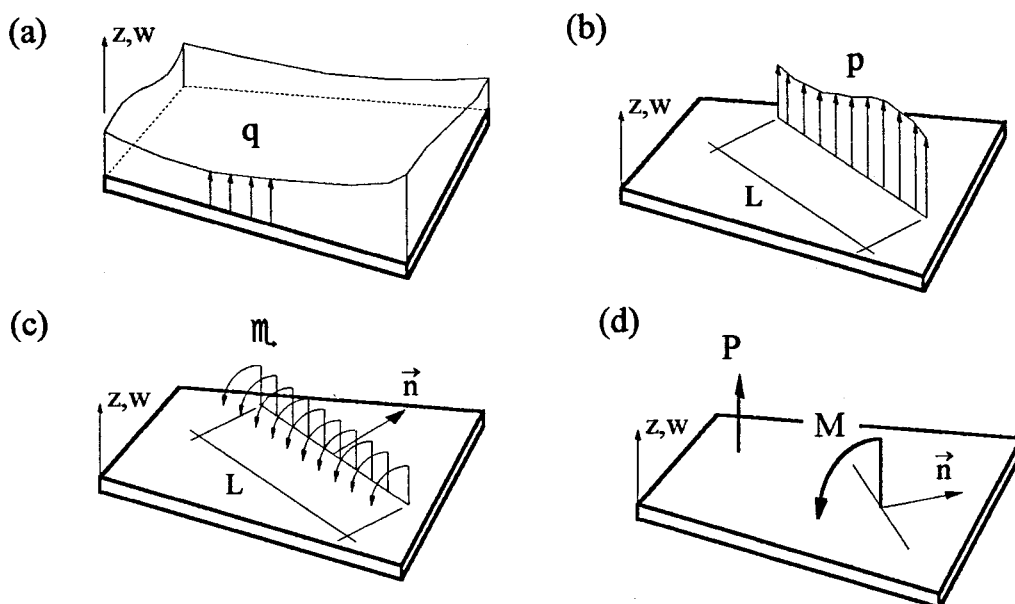


Fig. 2.1

Passemos a calcular o trabalho realizado por cada um destes 5 tipos de cargas:

a) O trabalho realizado pelas forças q distribuídas pela área é

$$W_q^e = \frac{1}{2} \int_A q w dA \quad (2.11)$$

Substituindo w pela interpolação (2.3) e desenvolvendo, obtemos

$$W_q^e = \frac{1}{2} \int_A q [N] \{\delta^e\} dA = \frac{1}{2} \int_A q \{\delta^e\}^T [N]^T dA = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \int_A q [N]^T dA \quad (2.12)$$

expressão esta que pode tomar a forma mais condensada

$$W_q^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \{f_q^e\} \quad (2.13)$$

em que o vector $\{f_q^e\}$ é designado por vector das forças nodais equivalentes a uma carga distribuída e a sua definição é

$$\{f_q^e\} = \int_A q [N]^T dA \quad (2.14)$$

b) O trabalho realizado pelas forças p distribuídas por um segmento rectilíneo é

$$W_p^e = \frac{1}{2} \int_L p w dL \quad (2.15)$$

Efectuando as mesmas operações que no caso anterior, facilmente se conclui que

$$W_p^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \{f_p^e\} \quad (2.16)$$

em que o vector $\{f_p^e\}$ é designado por vector das forças nodais equivalentes a uma carga distribuída segundo um segmento rectilíneo e a sua definição é

$$\{f_p^e\} = \int_L p [N]^T dL \quad (2.17)$$

c) O trabalho realizado pelos momentos m distribuídos por um segmento rectilíneo é

$$W_m^e = \frac{1}{2} \int_L m \frac{\partial w}{\partial n} dL \quad (2.18)$$

sendo n a variável geométrica associada à normal ao segmento rectilíneo.

Atendendo a que

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} ([N] \{\delta^e\}) = \frac{\partial}{\partial n} (\{\delta^e\}^T [N]^T) = \{\delta^e\}^T \frac{\partial}{\partial n} [N]^T \quad (2.19)$$

então, à semelhança dos casos anteriores, obtém-se

$$W_m^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \{f_m^e\} \quad (2.20)$$

em que o vector $\{f_m^e\}$ é designado por vector das forças nodais equivalentes a um momento distribuído segundo um segmento rectilíneo e a sua definição é

$$\{f_m^e\} = \int_L m \frac{\partial [N]^T}{\partial n} dL \quad (2.21)$$

d) O trabalho realizado por cada uma das forças concentradas P é

$$W_P^e = \frac{1}{2} P w \quad (2.22)$$

De modo semelhante, pode concluir-se que

$$W_P^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \{f_P^e\} \quad (2.23)$$

em que o vector $\{f_P^e\}$ é designado por vector das forças nodais equivalentes a uma carga concentrada e a sua definição é

$$\{f_P^e\} = P [N]^T \quad (2.24)$$

e) O trabalho realizado por cada um dos momentos concentrados M é

$$W_M^e = \frac{1}{2} M \frac{\partial w}{\partial n} \quad (2.25)$$

sendo n a variável geométrica associada à normal ao vector momento M .

Atendendo ao que já se demonstrou nos casos anteriores, pode concluir-se que

$$W_M^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \{f_M^e\} \quad (2.26)$$

em que o vector $\{f_M^e\}$ é designado por vector das forças nodais equivalentes a um momento concentrado e a sua definição é

$$\{f_M^e\} = M \frac{\partial [N]^T}{\partial n} \quad (2.27)$$

Chegamos, finalmente, à conclusão que o trabalho de todas as acções exteriores a um elemento se pode resumir numa só expressão

$$W^e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \{f^e\} \quad (2.28)$$

em que

$$\{f^e\} = \{f_q^e\} + \{f_p^e\} + \{f_m^e\} + \{f_P^e\} + \{f_M^e\} \quad (2.29)$$

e cada uma das parcelas do segundo membro de (2.29) tem a definição indicada em (2.14), (2.17), (2.21), (2.24) e (2.27), respectivamente.

2.5 - Expressão do Equilíbrio Energético Global

Supondo não haver perdas, o trabalho realizado por todas as forças exteriores é integralmente convertido em energia interna de deformação elástica em todos os m elementos de uma placa, ou seja

$$\sum_{e=1}^m U^e = \sum_{e=1}^m W^e \quad (2.30)$$

Substituindo a energia acumulada pelo valor encontrado na expressão (2.9) e o trabalho realizado pelo da expressão (2.28), obtemos

$$\sum_{e=1}^m \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [K^e] \{\delta^e\} = \sum_{e=1}^m \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T \{f^e\} \quad (2.31)$$

condição esta que se verifica sempre que

$$[K]\{\delta\} = \{f\} \quad (2.32)$$

em que:

- $\{\delta\} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell\}^T$ é o vector global dos ℓ deslocamentos nodais generalizados independentes da placa,

- $[K]$ a matriz de rigidez global da placa, cujas $\ell \times \ell$ componentes se obtêm somando as componentes referentes a deslocamentos comuns de todas as matrizes $[K^e]$, e
- $\{f\}$ é o vector global de forças nodais equivalentes, cujos ℓ elementos se obtêm somando os componentes referentes a deslocamentos comuns de todos os vectores $\{f^e\}$.

A expressão (2.32) representa, de uma forma muito condensada, um sistema global de ℓ equações simultâneas e lineares nas incógnitas que são todos os ℓ deslocamentos generalizados nodais da placa.

Da mesma forma que as matrizes de rigidez dos elementos, também a matriz de rigidez global $[K]$ é uma matriz simétrica. Além disto, a matriz $[K]$ é uma matriz singular, isto é, o seu determinante é nulo. De facto, podemos concluir que seria absurdo que aquela matriz o não fosse, já que em tal caso haveria desde logo uma solução bem determinada para os deslocamentos, quando, numa perspectiva física, as condições de não imposição de quaisquer restrições a deslocamentos tornaria a placa um corpo livre, passível portanto de uma infinidade de configurações de deslocamentos correspondentes a um movimento de corpo rígido.

O sistema de equações representado por (2.32) transforma-se num sistema bem determinado quando se impõe um determinado número de restrições correspondentes às condições fronteira. O número mínimo de restrições é, obviamente, aquele que é o mínimo necessário para impedir movimentos de corpo rígido. Para a flexão de placas este número é, em geral, de 3 deslocamentos generalizados nodais.

2.6 - Deslocamentos, Deformações e Tensões Finais

Com a resolução do sistema de equações (2.32) ficam conhecidos todos os deslocamentos generalizados nodais da placa e, por reagrupamento, ficam conhecidos os vectores dos deslocamentos generalizados nodais $\{\delta^e\}$ de todos os elementos. A partir destes,

- o deslocamento de um ponto qualquer no interior ou na fronteira do elemento calcula-se recorrendo à expressão (2.3), $w = [N]\{\delta^e\}$
- a rotação de um ponto qualquer em torno de um dado eixo de normal n calcula-se por derivação de (2.3),

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial [N]}{\partial n} \{\delta^e\} \quad (2.33)$$

- as deformações generalizadas, ou curvaturas, são calculadas por intermédio da expressão (2.7), $\{\hat{\epsilon}\} = [B]\{\delta^e\}$

- as tensões generalizadas, ou momentos, são calculados pelas expressões (1.16) e (2.7)

$$\{\hat{\sigma}\} = [D]\{\hat{\epsilon}\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (2.34)$$

2.7 - Continuidade. Convergência. Patch Test

A continuidade de deslocamentos, deformações e tensões na fronteira entre elementos não é garantida, em geral, pelo MEF, excepto no que se refere às variáveis nodais e unicamente nos pontos nodais.

Em problemas de flexão designa-se por continuidade do tipo C^0 aquela em que o deslocamento linear w é contínuo em toda a fronteira, e por continuidade do tipo C^1 aquela em que a derivada dos deslocamentos segundo a normal à fronteira, ou rotação normal, é contínua em todo o domínio dessa mesma fronteira. Um elemento de placa diz-se conforme quando possui continuidade do tipo C^1 . Contudo, mesmo num elemento conforme, não existe continuidade dos momentos, já que estes são proporcionais às derivadas de segunda ordem dos deslocamentos.

As condições de continuidade estão directamente relacionadas com o estabelecimento do número e natureza das variáveis nodais e com as funções de forma.

A procura de elementos triangulares conformes tem-se revelado difícil e levado alguns investigadores em MEF a desenvolver formulações de certo modo sofisticadas. Também, com a excepção dos elementos de elevada ordem, parecem revelar-se muito rígidos. Por outro lado, alguns investigadores provaram a convergência de diversos elementos não conformes, nalguns casos com elevada eficácia. Por este motivo, existe um cepticismo considerável quanto à necessidade de cumprir o requisito de continuidade C^1 [H1].

A convergência de um elemento finito pode ser testada por intermédio de um procedimento muito simples, desenvolvido por Irons [I1] [I2], designado por "patch test". Este procedimento, que poderíamos traduzir por teste da parcela ou teste do retalho, baseia-se na selecção de um conjunto, ou parcela, de elementos e aplicar nos nós do seu contorno deslocamentos prescritos correspondentes a um campo de deslocamentos pré-fixados e conhecidos no seu todo [O1]. Diz-se então que o elemento satisfaz o "patch test", o que garante a sua convergência, se a solução obtida para os *deslocamentos* e *deformações* no interior da parcela coincidir com a que se deduziria analiticamente do campo de deslocamentos conhecido [T5].

Do "patch test" podem deduzir-se duas importantes condições para a convergência do elemento: a condição de *movimento de corpo rígido* e a de *deformação constante*. A primeira condição está associada ao facto do estado de deformação ser necessariamente nulo no interior de um conjunto de elementos que é submetido a um movimento de corpo rígido. A segunda condição tem a ver com o facto das condições existentes no interior de cada elemento se irem aproximando cada vez mais, à medida que se refina a malha de um corpo, com as de um estado de deformação constante.

2.8 - Revista dos Elementos de Placa Existentes.

No presente parágrafo iremos passar em revista os elementos de placa de geometria triangular conhecidos. Serão somente abordados aqueles elementos que, segundo o método dos deslocamentos (veja-se parágrafo 2.1), são formulados segundo a teoria de placas delgadas de Kirchhoff. Muitos dos elementos aqui referidos foram catalogados por Hrabok e Hradey [H1]. Nos textos de Holand e Bell [H2] e de Oñate [O1] encontra-se também uma descrição pormenorizada de alguns deles.

O elemento conhecido com menor número de graus de liberdade é o elemento de deformação constante de Morley [M1] [M2] com 6 gdl, Fig. 2.2 (a). Usa funções de forma derivadas de um polinómio completo do 2º grau em x e y (daqui a razão de ser de deformação constante, já que esta é proporcional às derivadas de 2ª ordem dos deslocamentos). É um elemento não conforme que se tornou bastante popular pela sua simplicidade. Passa pelo "patch test", mas possui uma convergência muito lenta.

Um dos primeiros elementos de placa a ter sido desenvolvido foi, em 1961, o elemento de Adini [A1] com 9 gdl, Fig. 2.2 (b). Neste elemento foi usado um polinómio incompleto do 3º grau, tendo sido omitido o termo em xy . Não consegue, por isso, reproduzir estados de curvatura de torção constante. Também não é conforme e a sua convergência é errática [H1].

Um segundo elemento deste mesmo tipo foi desenvolvido pouco tempo depois por Tocher [T6]. Este autor propôs que no polinómio do 3º grau se agrupassem num só os termos em x^2y e xy^2 . Este elemento produz matrizes singulares para certas formas e orientações dos elementos. É também um elemento não conforme.

Uma evolução para um elemento conforme foi obtida por Clough e Tocher [C2] a partir de uma ideia de Hsieh e Clough. Este elemento, popularmente conhecido por HCT, possui ainda os 9 gdl assinalados na configuração da Fig. 2.2 (b). A base da sua formulação assenta na divisão do domínio do elemento em 3 sub-domínios com eliminação final das variáveis internas.

Bazeley, Cheung, Irons e Zienkiewicz [B2] desenvolveram um elemento com a mesma configuração de 9 gdl da Fig. 2.2 (b) usando uma abordagem bastante diferente no que respeita às funções de forma. A aproximação dos deslocamentos consiste num polinómio incompleto do 3º grau estabelecido em coordenadas de área. Este elemento, designado por CKZ, não é conforme, pese embora convirja de maneira razoavelmente satisfatória. Posteriormente, quer os seus criadores, quer outros investigadores, aperfeiçoaram o elemento CKZ. Uma evolução conforme deste elemento pode encontrar-se no texto de Zienkiewicz [Z1].

Outros autores apresentaram ainda diferentes formulações para elementos com os mesmos 9 gdl da Fig. 2.2 (b) [I3] [R1] [C4] [S1] [S2].

Com o objectivo de conseguir uma aproximação dos deslocamentos por intermédio de um polinómio completo do 3º grau, Harvey e Kelsey [H3] tiveram a ideia de acrescentar ao elemento anterior um nó interior central ao qual associaram um deslocamento como nova variável nodal. Obtiveram assim o elemento com 10 gdl representado na Fig. 2.2 (c). Este

elemento possui um mau comportamento de base, mas os autores demonstraram, introduzindo determinadas correcções à formulação, que o elemento satisfaz o "patch test" e converge correctamente.

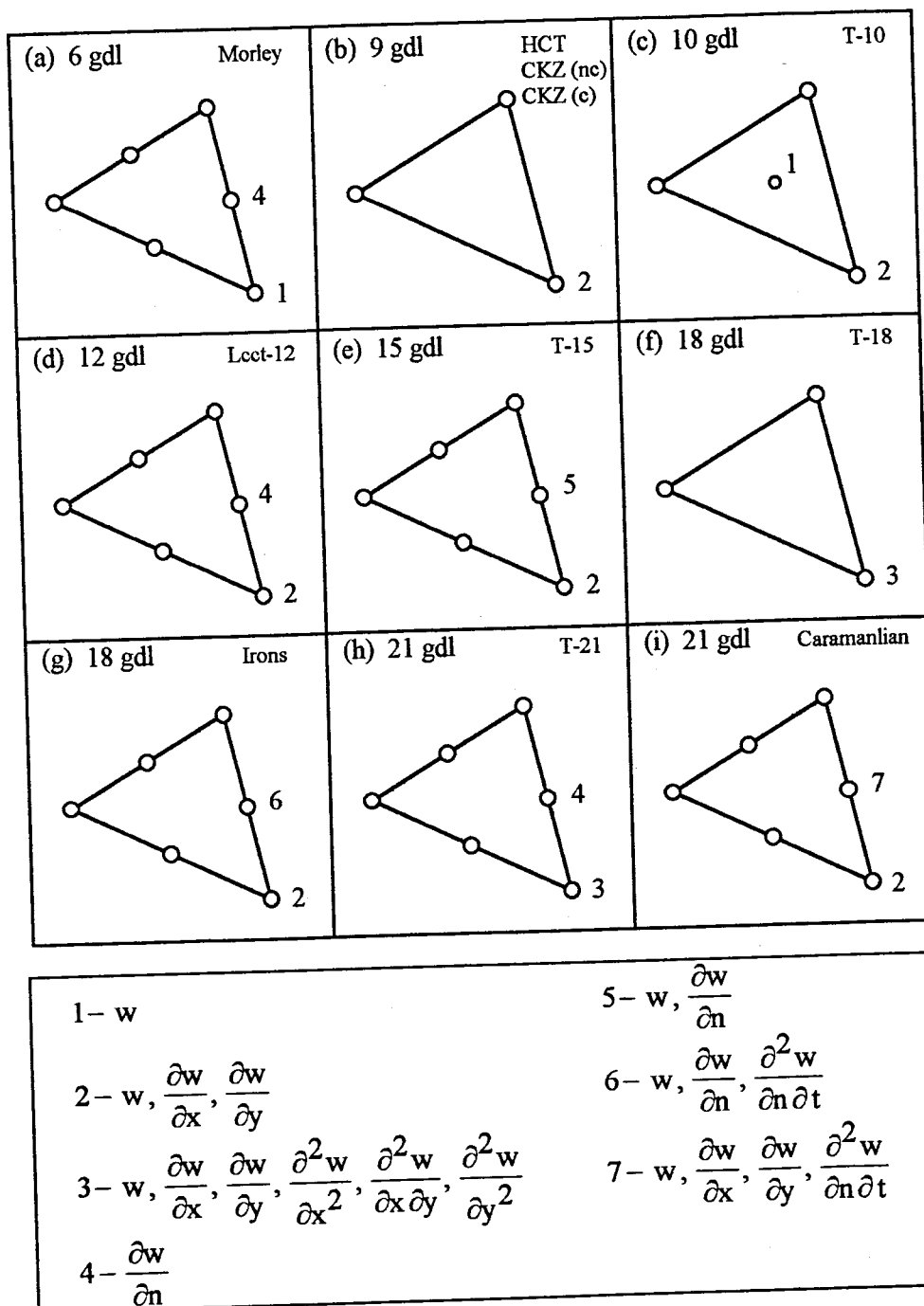


Figura 2.2

Uma nova via para obter conformidade foi proposta por Clough e Felippa [C3]. A partir do elemento CKZ, adicionaram as rotações normais a meio dos 3 lados do elemento, obtendo desta forma o elemento com 12 gdl representado na Fig. 2.2 (d). A formulação apresentada por estes autores constitui um refinamento do processo de divisão em sub-

domínios, tendo sido usados polinómios completos do 3º grau e reduzido as variáveis, por eliminação das internas, de um total de 30 para os 12 gdl finais. Este elemento é conforme [Z1].

Um elemento não conforme com 15 gdl é formulado por Bell [B3] [B4] e Chu e Schnobrich [C5], utilizando um polinómio completo do 4º grau e acrescentando às três variáveis dos vértices do elemento CKZ duas novas variáveis a meio de cada lado do triângulo: um deslocamento e uma rotação normal, Fig. 2.2 (e).

Nova via de evolução para os elementos conformes surge com a introdução de derivadas de ordem superior como variáveis nodais. Nesta linha, Cowper *et al.* [C6] propõem um elemento com 18 gdl, Fig. 2.2 (f), no qual o deslocamento dos vértices e todas as suas primeiras e segundas derivadas cartesianas constituem as variáveis nodais. Referências ao comportamento deste elemento podem também ver-se em Bell [B3] [B4] e Argyris [A2].

O elemento anterior pode melhorar-se adicionando ao meio dos lados as rotações normais. Transforma-se assim no elemento de 21 gdl representado na Fig. 2.2 (h) em cuja formulação é usado um polinómio completo do 5º grau [B3] [A2].

B. M. Irons [I4] propõe também um elemento conforme de 18 gdl que, como mostra a Fig. 2.2 (g), usa a mesma quantidade de variáveis nos seus 6 nós. Nos nós laterais surge como inovação, para além do deslocamento e rotação normal, a derivada cruzada de segunda ordem relativa às direcções do lado e da normal $\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}$.

Há ainda a referir o elemento conforme de 21 gdl proposto por Caramanlian, Selby e Will [C7] que representamos na Fig 2.2 (i).

No catálogo anteriormente citado [H1] podem ainda encontrar-se elementos de placa triangulares, desenvolvidos segundo o método dos deslocamentos e pela teoria de Kirchhoff, com ainda maior número de graus de liberdade, nomeadamente elementos de 28 e 36 gdl [A2] e de 33 gdl [S3].

Capítulo III

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

3.1 - Definição do Elemento. Nós e Graus de Liberdade.

O elemento que iremos desenvolver é um elemento triangular com 12 nós e 15 graus de liberdade. A localização e referência dos nós e graus de liberdade é a representada na Figura 3.1. O círculo com duas setas, indicando o sentido directo, estabelece a sequência pela qual são consideradas as variáveis nodais. Os nós intermédios **1b**, **2b** e **3b** situam-se ao meio dos respectivos lados. Os restantes nós intermédios são todos posicionados por um mesmo parâmetro adimensional $\lambda \in]0,1]$. Em geral, utilizámos o valor $\lambda = \sqrt{0.6} = 0.774597$ usado na fórmula da quadratura de Gauss unidimensional de 3 pontos [Z1].

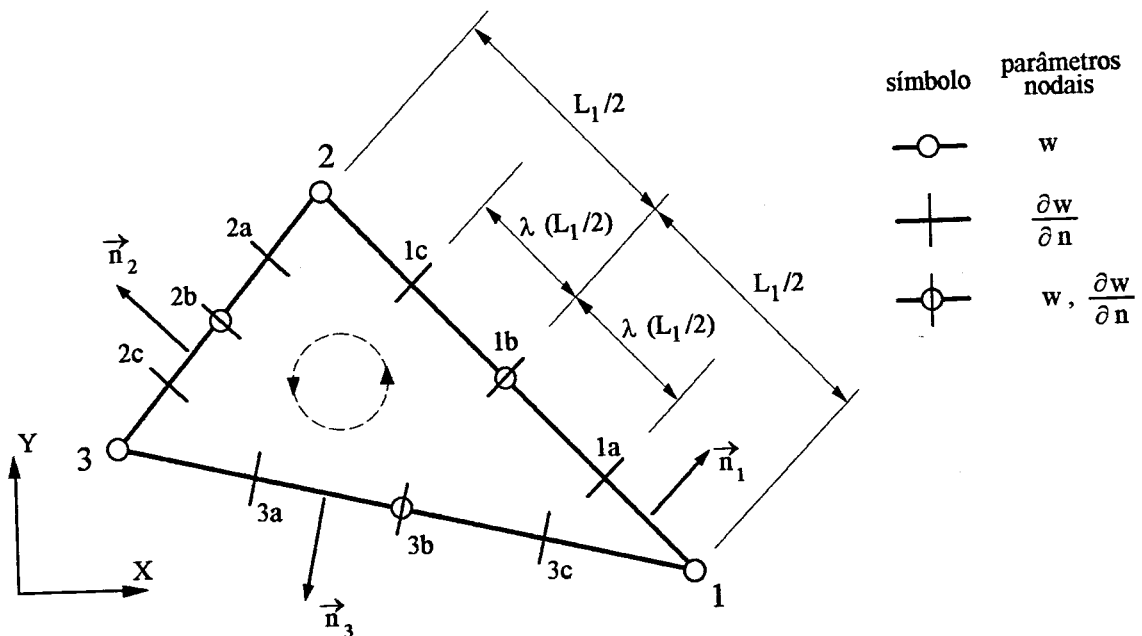


Figura 3.1

O vector dos deslocamentos nodais generalizados do elemento assume a seguinte forma

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta^e\}_1 \\ \{\delta^e\}_2 \\ \{\delta^e\}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

sendo os deslocamentos generalizados associados a cada lado genérico $j = 1, 2, 3$ dados por

$$\{\delta^e\}_j = \left\{ w_j, \left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{ja}, w_{jb}, \left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{jb}, \left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{jc} \right\}^T \quad (3.2)$$

onde w_j e w_{jb} são os deslocamentos verticais nos nós j e jb , respectivamente, e as derivadas $\left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{ja}$, $\left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{jb}$ e $\left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{jc}$ são as rotações segundo a direcção da normal ao lado j nos pontos ja , jb e jc , respectivamente.

3.2 - Referencial Global e Local . Transformações

Há toda a conveniência em utilizar um sistema de eixos local para cada elemento triangular com vista às integrações necessárias à obtenção da matriz de rigidez e do vector das forças nodais. Assinalaremos o referencial global pelo sistema de eixos XY (maiúsculas) e o local pelo sistema de eixos xy (minúsculas).

Conforme representado na Figura 3.2, o referencial local é definido com o eixo dos xx orientado segundo a recta que une o vértice 1 ao vértice 2 e o eixo dos yy perpendicular ao eixo dos xx e a passar pelo vértice 3. O eixo dos zz do referencial local e global são coincidentes.

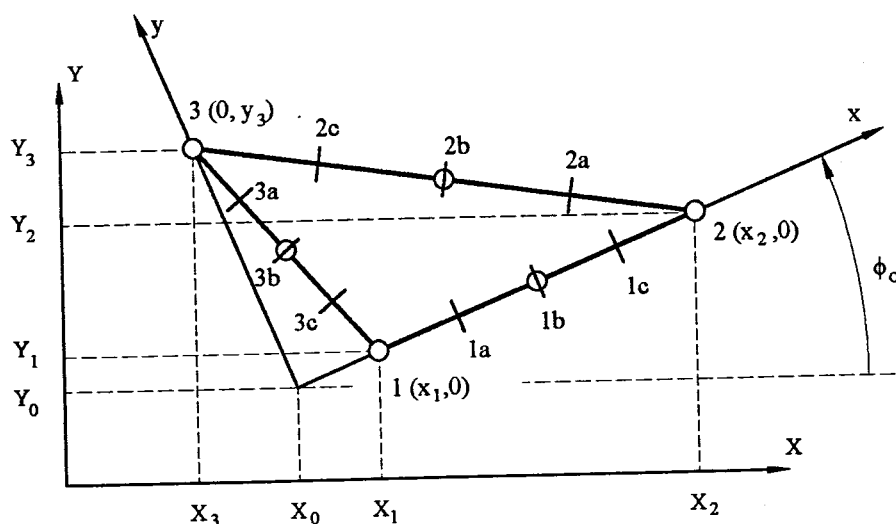


Figura 3.2

A transformação de coordenadas do referencial local para o global faz-se por

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} + [T] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

em que

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e a transformação do referencial global para o local faz-se pela transformação inversa

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} \right) = [T]^T \left(\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} \right) \quad (3.5)$$

Os valores de ϕ_0 , X_0 e Y_0 obtêm-se facilmente por considerações geométricas a partir das coordenadas globais dos vértices 1, 2 e 3.

Assim, sendo

$$\{V_{12}\} = \begin{Bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{V_{13}\} = \begin{Bmatrix} X_3 - X_1 \\ Y_3 - Y_1 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

então

$$\begin{Bmatrix} \cos\phi_0 \\ \sin\phi_0 \end{Bmatrix} = \frac{\{V_{12}\}}{\sqrt{\{V_{12}\}^T \{V_{12}\}}} \quad (3.7)$$

e

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} + \frac{\{V_{12}\}^T \{V_{13}\}}{\{V_{12}\}^T \{V_{12}\}} \{V_{12}\} \quad (3.8)$$

3.3 - Normais e Derivadas Normais

A derivada do deslocamento vertical w em ordem à normal ao lado genérico j - k pode exprimir-se em função das derivadas parciais relativas às coordenadas locais x e y e do ângulo ϕ_j formado pelo vector normal com o eixo dos xx . De acordo com a Figura 3.3, temos

$$\frac{\partial w}{\partial n_j} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n_j} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n_j} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos\phi_j + \frac{\partial w}{\partial y} \sin\phi_j \quad (3.9)$$

Para garantir que a rotação de um mesmo nó de um lado comum a dois triângulos tenha o mesmo sentido, quer quando a rotação é referida a um ou ao outro triângulo adjacente, torna-se necessário estabelecer uma convenção de sentidos para o vector normal. Adoptaremos aqui a convenção de considerar o vector normal dirigido para o exterior do elemento quando a numeração do nó k for superior à do nó j . O vector normal será dirigido

para o interior do elemento no caso contrário, isto é, quando a numeração do nó j for superior à do nó k .

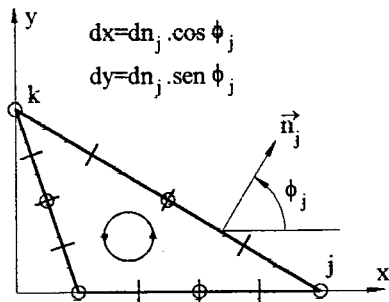


Figura 3.3

O vector normal ao lado $j-k$ pode expressar-se em função do ângulo ϕ_j

$$\{n_j\} = \pm \begin{Bmatrix} \cos \phi_j \\ \sin \phi_j \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

em que o sinal positivo é aplicado no caso do nó k ter numeração superior à do nó j e negativo no caso contrário.

O vector normal calcula-se a partir de relações geométricas simples, envolvendo as coordenadas locais dos nós j e k

$$\{n_j\} = \pm \frac{1}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \begin{Bmatrix} y_k - y_j \\ x_j - x_k \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Finalmente, a expressão (3.9) da derivada em ordem à normal, ou rotação normal, pode assumir a forma definitiva e mais conveniente de produto matricial

$$\frac{\partial w}{\partial n_j} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right] \{n_j\} \quad (3.12)$$

A Figura 3.4 elucida sobre a associação entre o sentido positivo das rotações e o sentido do vector normal a um lado $j-k$ comum a 2 elementos triangulares adjacentes.

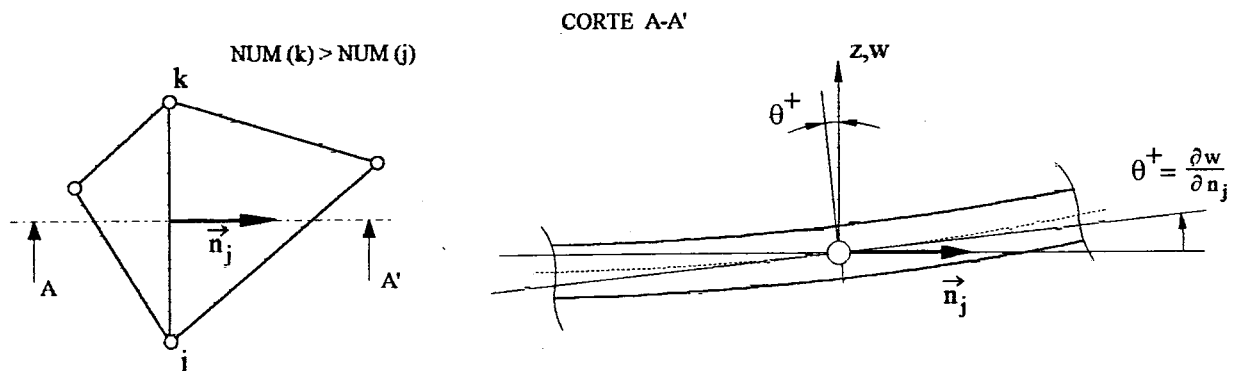


Figura 3.4

3.4 - Funções de Forma

O campo de deslocamentos w vai ser obtido por interpolação, usando um polinómio completo do 4º grau em x e y . Um tal polinómio possui 15 coeficientes independentes, exactamente tantos quantos os parâmetros nodais existentes no elemento.

Assim, temos

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^4 + \alpha_{12} x^3 y + \alpha_{13} x^2 y^2 + \alpha_{14} xy^3 + \alpha_{15} y^4 \quad (3.13)$$

Esta expressão pode transformar-se na expressão vectorial

$$w = \{\alpha\}^T \{P\} \quad (3.14)$$

fazendo

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{14}, \alpha_{15}\}^T \quad (3.15)$$

$$\{P\} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3, x^4, x^3 y, x^2 y^2, xy^3, y^4\}^T \quad (3.16)$$

Os elementos do vector $\{\alpha\}$ devem ficar univocamente determinados impondo a condição dos deslocamentos w e derivadas normais $\frac{\partial w}{\partial n}$ satisfazerem os valores fronteira, ou seja, igualarem os parâmetros nodais $\{\delta^e\}$ nas coordenadas nodais respectivas.

Assim, substituindo (3.14) em (3.12), comecemos por exprimir a derivada normal ao lado j - k na forma

$$\frac{\partial w}{\partial n_j} = \{\alpha\}^T \{Q_j\} \quad (3.17)$$

em que o vector derivado $\{Q_j\}$ é definido por

$$\{Q_j\} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \{P\}, \frac{\partial}{\partial y} \{P\} \right] \{n_j\} \quad (3.18)$$

e o vector normal $\{n_j\}$ é o definido por (3.10) ou (3.11).

Por derivação obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \{P\} = \{0, 1, 0, 2x, y, 0, 3x^2, 2xy, y^2, 0, 4x^3, 3x^2 y, 2xy^2, y^3, 0\}^T \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\{P\} = \{0, 0, 1, 0, x, 2y, 0, x^2, 2xy, 3y^2, 0, x^3, 2x^2y, 3xy^2, 4y^3\}^T \quad (3.20)$$

Aplicando agora (3.14) e (3.17) em (3.2) obtemos

$$\begin{aligned} \{\delta^e\}_j &= \left\{ \{\alpha\}^T \{P_j\}, \{\alpha\}^T \{Q_{ja}\}, \{\alpha\}^T \{P_{jb}\}, \{\alpha\}^T \{Q_{jb}\}, \{\alpha\}^T \{Q_{jc}\} \right\}^T = \\ &= \left[\{P_j\}, \{Q_{ja}\}, \{P_{jb}\}, \{Q_{jb}\}, \{Q_{jc}\} \right]^T \{\alpha\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

que pode condensar-se na forma

$$\{\delta^e\}_j = [C]_j \{\alpha\} \quad (3.22)$$

em que

$$[C]_j = \left[\{P_j\}, \{Q_{ja}\}, \{P_{jb}\}, \{Q_{jb}\}, \{Q_{jc}\} \right]^T \quad (3.23)$$

Esta é uma matriz de 15 colunas por 5 linhas cujos elementos estão associados ao lado j-k, sendo a 1ª e 3ª linhas referentes aos valores dos termos do polinómio {P} nos pontos j e jb, respectivamente, e a 2ª, 4ª e 5ª linhas referentes aos valores dos termos de {Qj} nos pontos ja, jb e jc, respectivamente.

Recordando (3.1) e tendo em conta (3.22) podemos agora exprimir que

$$\{\delta^e\} = [C] \{\alpha\} \quad (3.24)$$

fazendo

$$[C] = \begin{bmatrix} [C]_1 \\ [C]_2 \\ [C]_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Esta matriz [C] é, assim, uma matriz quadrada de 15 colunas por 15 linhas cujos elementos são constantes que só dependem da geometria do elemento.

Resolvendo a equação (3.24) por inversão da matriz dos coeficientes obtém-se

$$\{\alpha\} = [\bar{C}] \{\delta^e\} \quad (3.26)$$

expressão esta na qual passamos a usar uma nova notação

$$[\bar{C}] = [C]^{-1} \quad (3.27)$$

Estamos agora em posição de determinar as funções de forma. Retomando (3.14) e tendo em conta (3.26) podemos deduzir que

$$w = \{\alpha\}^T \{P\} = \{P\}^T \{\alpha\} = \{P\}^T [\bar{C}] \{\delta^e\} \quad (3.28)$$

Por outro lado, a definição das funções de forma, estabelecida no capítulo precedente pela expressão (2.3), é

$$w = [N] \{\delta^e\} \quad (3.29)$$

Comparando (3.28) com (3.29) concluímos finalmente que a matriz das funções de forma é dada por

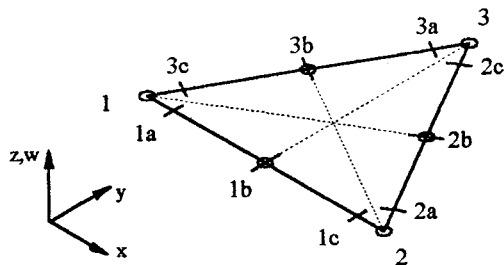
$$[N] = \{P\}^T [\bar{C}] \quad (3.30)$$

A matriz de funções de forma $[N]$ é, assim, uma matriz de uma única linha por 15 colunas, sendo cada elemento a função de forma associada ao deslocamento generalizado da mesma ordem na sequência dos elementos do vector $\{\delta^e\}$.

3.5 - Gráficos das Funções de Forma

Na Figura 3.5 apresentam-se os gráficos das 15 funções de forma associadas a cada um dos 15 parâmetros nodais, segundo a ordem estabelecida, relativamente a um elemento com a forma de um triângulo equilátero. Nestes gráficos usou-se $\lambda = 0,774597$.

Os gráficos mostram as curvas relativas ao desenvolvimento de cada uma das funções ao longo dos 3 bordos e das 3 medianas do triângulo. Dada a regularidade da geometria, os grupos de funções N6 a N10 e das funções N11 a N15 são obtidos a partir do grupo N1 a N5 por uma rotação no sentido directo de, respectivamente, 120° e 240° em torno do centro do triângulo.



Funções de Forma
 Triângulo equilátero. $\lambda = 0.774597$
 $(\theta \equiv \frac{\partial w}{\partial n_j})$

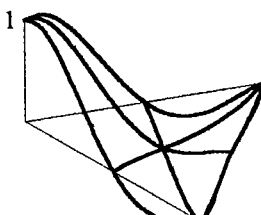
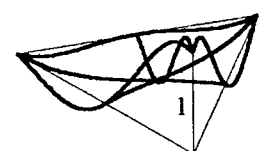
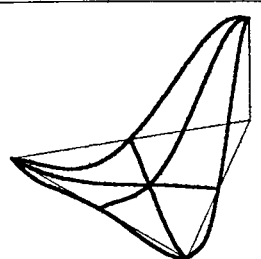
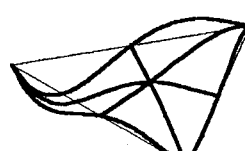
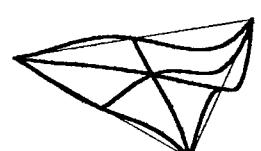
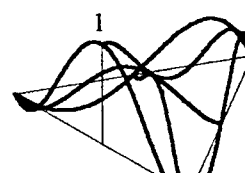
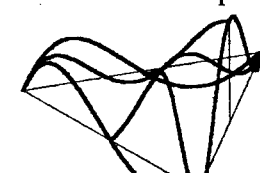
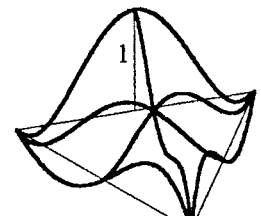
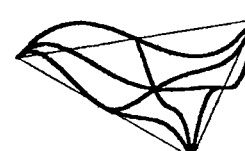
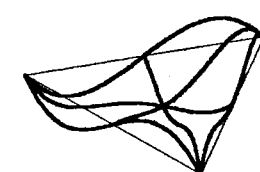
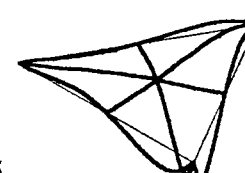
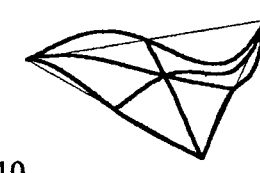
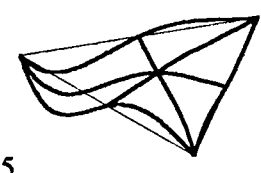
$j = 1$		$j = 2$		$j = 3$		
 N1		 N6		 N11		w_j
 N2		 N7		 N12		θ_{ja}
 N3		 N8		 N13		w_{jb}
 N4		 N9		 N14		θ_{jb}
 N5		 N10		 N15		θ_{jc}

Figura 3.5

3.6 - Expressões Gerais dos Termos Polinomiais

É de toda a conveniência, para efeitos de programação, a utilização de uma expressão geral para as componentes do vector polinómio $\{P\}$ e dos seus derivados.

A expressão geral do termo de ordem i , para $i=1, 2, \dots, 15$, do vector $\{P\}$ é dada por

$$P_i = x^{m(i)} y^{n(i)} \quad (3.31)$$

em que os expoentes $m(i)$ e $n(i)$ são funções inteiras de variável inteira dadas por

$$\begin{cases} m(i) = 1 + \beta(i) - i \\ n(i) = \alpha(i) - \beta(i) + i \end{cases} \quad (3.32)$$

sendo

$$\alpha(i) = \text{INT} \left(\frac{\sqrt{8i-7}-3}{2} \right) \quad (3.33)$$

$$\beta(i) = [\alpha(i) + 1][\alpha(i) + 4] / 2 \quad (3.34)$$

Os valores gerados pelas expressões anteriores, para $i=1, 2, \dots, 15$, são apresentados na seguinte tabela:

i	α	β	$m(i)$	$n(i)$
1	-1	0	0	0
2	0	2	1	0
3	0	2	0	1
4	1	5	2	0
5	1	5	1	1
6	1	5	0	2
7	2	9	3	0
8	2	9	2	1
9	2	9	1	2
10	2	9	0	3
11	3	14	4	0
12	3	14	3	1
13	3	14	2	2
14	3	14	1	3
15	3	14	0	4

O termo geral do vector $\{Q_j\}$ de ordem i , para $i=1, 2, \dots, 15$, associado ao lado j -k do elemento, pode exprimir-se por

$$Q_{ji} = \left[m(i) x^{m(i)-1} y^{n(i)}, n(i) x^{m(i)} y^{n(i)-1} \right] \{n_j\} \quad (3.35)$$

em que $m(i)$ e $n(i)$ são os números inteiros definidos em (3.32) e $\{n_j\}$ é o vector normal definido em (3.10) e (3.11).

Na expressão (3.35) há que ressaltar os casos $m=0$ ou $n=0$, relativamente aos quais se verifica que

$$\begin{cases} \text{se } m(i) = 0 \Rightarrow m(i) x^{m(i)-1} y^{n(i)} = 0 \\ \text{se } n(i) = 0 \Rightarrow n(i) x^{m(i)} y^{n(i)-1} = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

3.7 - Matriz [B]

Substituindo (3.30) em (2.8), podemos determinar a matriz de deformações na forma

$$[B] = [B'] [\bar{C}] \quad (3.37)$$

fazendo

$$[B'] = \{L\} \{P\}^T \quad (3.38)$$

sendo $[\bar{C}]$ a matriz de elementos geométricos constantes definida em (3.27), $\{L\}$ a matriz de operadores diferenciais de 2ª ordem definida em (1.8) e $\{P\}$ o vector polinómio definido em (3.16).

O resultado da multiplicação indicada em (3.38) leva à obtenção de uma matriz $[B']$ com a seguinte composição:

$$[B'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 12x^2 & 6xy & 2y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 0 & 2x^2 & 6xy & 12y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 0 & 6x^2 & 8xy & 6y^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Os elementos desta matriz podem ser gerados por expressões gerais. Assim, representando por b'_{ij} , com $i=1, 2, 3$ e $j=1, 2, \dots, 15$, o elemento genérico da matriz $[B']$, então é possível escrever

$$b'_{ij} = r_{ij} x^{m_{ij}} y^{n_{ij}} \quad (3.40)$$

sendo as funções inteiras r_{ij} , m_{ij} e n_{ij} dadas por

$i =$	$r_{ij} =$	$m_{ij} =$	$n_{ij} =$
1	$m(j) [m(j) - 1] \geq 0$	$m(j) - 2 \geq 0$	$n(j)$
2	$n(j) [n(j) - 1] \geq 0$	$m(j)$	$n(j) - 2 \geq 0$
3	$2 m(j) n(j)$	$m(j) - 1 \geq 0$	$n(j) - 1 \geq 0$

(3.41)

em que $m(j)$ e $n(j)$ são as funções inteiras definidas em (3.32).

3.8 - Matriz $[K^e]$

Considerando a expressão (2.10) de definição da matriz de rigidez do elemento e substituindo nela a matriz das deformações obtida por (3.37), chega-se com facilidade à expressão

$$[K^e] = [\bar{C}]^T [K'^e] [\bar{C}] \quad (3.42)$$

em que

$$[K'^e] = \int_A [B']^T [\hat{D}] [B'] dA \quad (3.43)$$

sendo $[\bar{C}]$ a matriz de constantes definida em (3.27) e $[\hat{D}]$ a matriz de elasticidade da flexão definida em (1.17).

Como vamos ver, é possível encontrar uma forma exacta para calcular a matriz $[K'^e]$ que dispensa a integração numérica.

Fazendo d_{ij} , para $i, j=1, 2, 3$, o elemento genérico da matriz $[\hat{D}]$, então cada elemento k'_{ij} , com $i, j=1, 2, \dots, 15$, da matriz $[K'^e]$ pode obter-se por

$$k'_{ij} = \int_A \left[\sum_{k=1}^3 \left(b'_{kj} \sum_{l=1}^3 b'_{li} d_{lk} \right) \right] dA = \int_A \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 b'_{kj} b'_{li} d_{lk} \right) dA \quad (3.44)$$

Substituindo agora (3.40) em (3.44) obtém-se

$$k'_{ij} = \int_A \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 d_{lk} r_{kj} r_{li} x^{(m_{kj}+m_{li})} y^{(n_{kj}+n_{li})} \right) dA \quad (3.45)$$

Sendo $d_{lk}r_{kj}r_{li}$ constantes, então a expressão anterior pode ainda condensar-se na forma

$$k'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 d_{lk}r_{kj}r_{li} J_{ijkl} \quad (3.46)$$

em que

$$J_{ijkl} = \int_A x^{(m_{kj}+m_{li})} y^{(n_{kj}+n_{li})} dA \quad (3.47)$$

Para avaliar os integrais de (3.47) utilizaremos a expressão geral de cálculo de integrais do tipo $\int_A x^m y^n dA$ extendidos à área de um triângulo, com m e n inteiros, citada em [O1]. Deste modo, adoptando a presente notação, obtém-se

$$J_{ijkl} = y_3^{n+1} (x_2^{m+1} - x_1^{m+1}) \frac{m!n!}{(m+n+2)!} \quad (3.48)$$

em que os inteiros m e n valem agora

$$\begin{cases} m = m_{kj} + m_{li} \\ n = n_{kj} + n_{li} \end{cases} \quad (3.49)$$

e x_1 , x_2 e y_3 são as componentes não nulas das coordenadas locais dos vértices 1, 2 e 3, respectivamente, conforme já se referiu anteriormente e se elucida na Figura 3.2.

3.9 - Forças Nodais Equivalentes

Do conjunto de forças nodais equivalentes referidas no Capítulo II vamos abordar três casos importantes: as que são devidas às forças de superfície e as devidas às forças e momentos linearmente distribuídos.

As forças concentradas serão consideradas sempre como aplicadas nos nós dos elementos, pelo que irão integrar directamente o vector global de forças nodais. De notar o facto do termo *forças* ser usado no sentido generalizado (vectores força e vectores momento), sendo por isso possível introduzir momentos concentrados nos nós laterais referenciados por a , b e c nas figuras, tendo sempre em atenção, como vimos no parágrafo 3.3, à convenção de sentidos positivos que está associada à numeração dos nós e é válida, quer para as rotações, quer para os momentos.

3.9.1 - Forças de Superfície

Iremos considerar unicamente a situação da carga q ser uniformemente distribuída por toda a área do elemento, conforme mostra a figura 3.6.

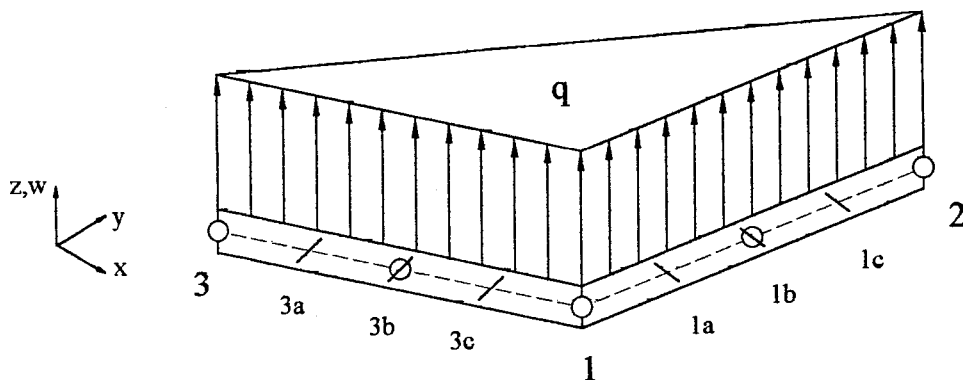


Fig. 3.6

O vector das forças nodais equivalentes determina-se recorrendo à expressão (2.14), sendo que neste caso q é constante, e introduzindo a matriz das funções de forma dadas pela expressão (3.30).

Assim temos

$$\{f_q^e\} = q \int_A [N]^T dA = p [\bar{C}]^T \int_A \{P\} dA \quad (3.50)$$

ou ainda

$$\{f_q^e\} = q [\bar{C}]^T \{R\} \quad (3.51)$$

em que

$$\{R\} = \int_A \{P\} dA \quad (3.52)$$

Como vimos no parágrafo 3.6, cada elemento do vector $\{P\}$ é um termo do polinómio completo do 4º grau em x e y , cuja expressão geral se definiu por (3.31). O integral de (3.52) pode então ser calculado usando a mesma expressão (3.48) que já utilizámos no cálculo da matriz de rigidez.

Assim, cada elemento genérico R_i , para $i=1, 2, \dots, 15$, do vector $\{R\}$ é dado por

$$R_i = y_3^{n+1} \left(x_2^{m+1} - x_1^{m+1} \right) \frac{m!n!}{(m+n+2)!} \quad (3.53)$$

em que $m=m(i)$ e $n=n(i)$ são os inteiros definidos em (3.32) e x_1 , x_2 e y_3 continuam a ser as componentes não nulas das coordenadas locais dos vértices 1, 2 e 3, respectivamente.

3.9.2 - Forças Linearmente Distribuídas

Vamos considerar somente o caso de uma carga linear p uniformemente distribuída ao longo de um qualquer bordo do elemento triangular. Na Figura 3.7 representa-se, a título de exemplo, a situação de um elemento com carga distribuída pelo bordo 2-3.

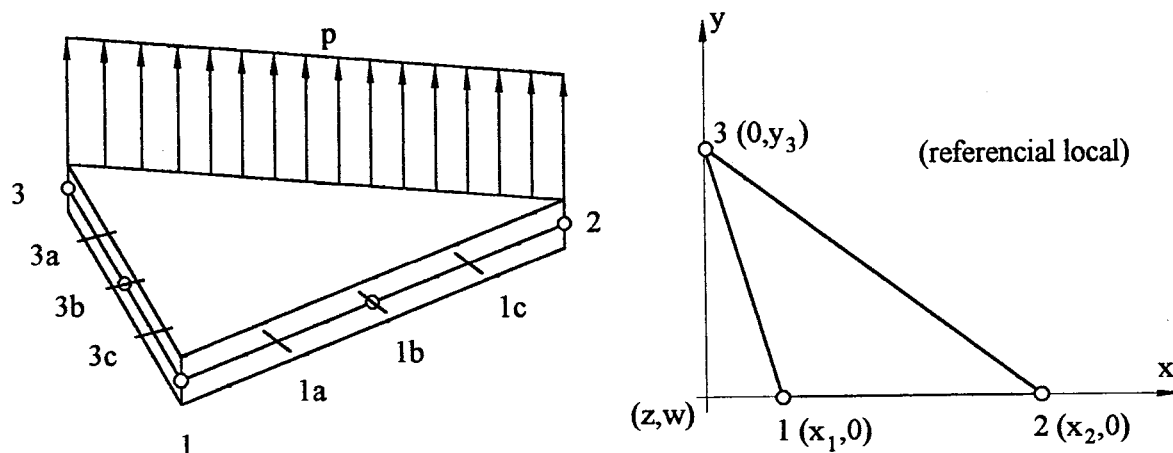


Figura 3.7

O vector das forças nodais equivalentes determina-se agora pela expressão (2.17), sendo p constante, e utilizando a matriz das funções de forma dadas por (3.30).

Assim, sendo L o comprimento de um lado genérico do triângulo, temos

$$\{f_p^e\} = p \int_L [N]^T dL = p [\bar{C}]^T \int_L \{P\} dL \quad (3.54)$$

ou ainda

$$\{f_p^e\} = p [\bar{C}]^T \{S\} \quad (3.55)$$

em que

$$\{S\} = \int_L \{P\} dL \quad (3.56)$$

O desenvolvimento do integral (3.56) conduz-nos a expressões diferentes consoante o lado de aplicação da carga é o lado 1-2 (coincidente com o eixo dos xx) ou qualquer um dos outros dois.

Designando por S_i , para $i=1, 2, \dots, 15$, o elemento genérico do vector $\{S\}$ e sendo x_1 , x_2 e y_3 as componentes não nulas das coordenadas locais dos vértices 1, 2 e 3, respectivamente, e sendo ainda $m=m(i)$ e $n=n(i)$ os inteiros definidos em (3.32), então

- se a carga for distribuída pelo lado 1-2, a expressão de S_i é

$$\begin{cases} \text{se } n \neq 0 & S_i = 0 \\ \text{se } n = 0 & S_i = \frac{x_2^{m+1} - x_1^{m+1}}{m+1} \end{cases} \quad (3.57)$$

- se a carga for distribuída pelo lado 2-3, a expressão de S_i é

$$\begin{cases} \text{caso geral} & S_i = x_2^m y_3^n \sqrt{x_2^2 + y_3^2} \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \\ \text{se } x_2 = m = 0 & S_i = \frac{y_3^{n+1}}{n+1} \end{cases} \quad (3.58)$$

- se a carga for distribuída pelo lado 3-1, é válida a expressão (3.58) substituindo x_2 por x_1 .

3.9.3 - Momentos Linearmente Distribuídos

Vamos considerar somente o caso do momento M_L ser linear e uniformemente distribuído ao longo de um qualquer bordo do elemento triangular, como é exemplificado na Figura 3.8 relativamente ao lado 2-3.

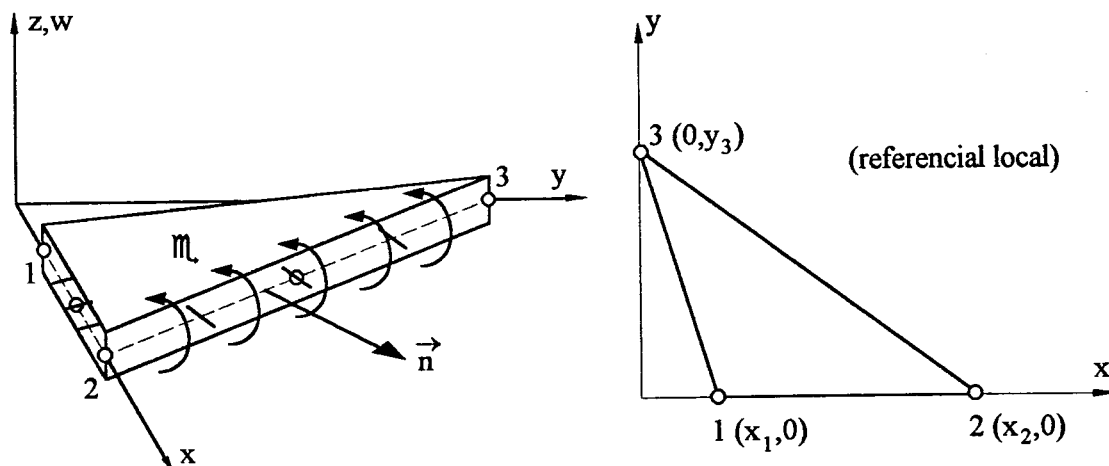


Figura 3.8

Note-se que o sentido indicado para o momento M_L na Figura 3.8 é positivo se, conforme denota o sentido do vector $\vec{n}$, a numeração do nó 3 for superior à do nó 2.

O vector das forças nodais equivalentes determina-se agora pela expressão (2.21), sendo m_L constante, utilizando a matriz das funções de forma dadas por (3.30) e atendendo à definição (3.18) do vector derivado $\{Q_j\}$.

Assim, sendo L o comprimento de um lado genérico do triângulo, temos

$$\{f_m^e\} = m_L \int_L \frac{\partial [N]^T}{\partial n_j} dL = m_L [\bar{C}]^T \int_L \frac{\partial \{P\}}{\partial n_j} dL = m_L [\bar{C}]^T \int_L \{Q_j\} dL \quad (3.59)$$

ou ainda

$$\{f_m^e\} = m_L [\bar{C}]^T \{V_j\} \quad (3.60)$$

em que

$$\{V_j\} = \int_L \{Q_j\} dL \quad (3.61)$$

Recordando a expressão geral dos termos do vector $\{Q_j\}$ definida por (3.35) e designando por V_{ji} , com $i=1, 2, \dots, 15$, o termo genérico de $\{V_j\}$, temos

$$V_{ji} = \int_L [V_{xji}, V_{yji}] \{n_j\} dL \quad (3.62)$$

sendo

$$V_{xji} = \int_L m(i) x^{m(i)-1} y^{n(i)} dL \quad (3.63)$$

e

$$V_{yji} = \int_L n(i) x^{m(i)} y^{n(i)-1} dL \quad (3.64)$$

Para calcular estes integrais utilizamos agora a mesma técnica que a usada anteriormente no caso de forças linearmente distribuídas.

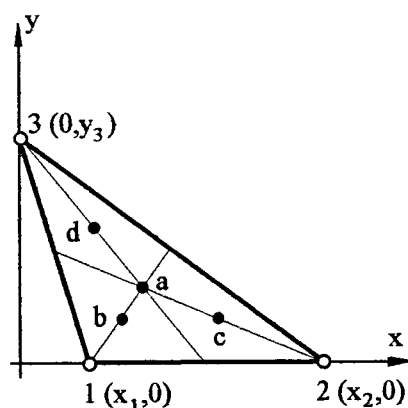
3.10 - Cálculo das Tensões

Estando definidas as matrizes de rigidez locais de todos elementos, as mesmas são agrupadas, como foi visto no Capítulo precedente, numa matriz de rigidez global, sendo que não há lugar, neste caso, a proceder a qualquer transformação de referencial, já que o eixo z, w é comum a ambos os referenciais, e que está garantida, pela convenção estabelecida no

parágrafo 3.3, uma regra de unicidade para as rotações $\frac{\partial w}{\partial n}$ relativas aos nós laterais comuns a dois elementos adjacentes.

Fazendo também o agrupamento de todos os vectores de forças nodais, e uma vez fixados os deslocamentos nodais de valor prescrito, ficamos a conhecer, pela resolução de um sistema de equações com o mesmo número de incógnitas, todos os deslocamentos nodais generalizados. Por reagrupamento das incógnitas então já determinadas, ficam assim determinados todos os vectores $\{\delta^e\}$ dos deslocamentos generalizados associados aos elementos.

Os momentos, ou tensões generalizadas, são agora calculados por intermédio da expressão (2.34), o que poderá ser feito em qualquer ponto de cada elemento. No programa desenvolvido, calcularam-se momentos nos 4 pontos de integração correspondentes à quadratura de Gauss de terceiro grau para áreas triangulares [Z1]. Na Figura 3.9 mostramos a localização desses 4 pontos e os correspondentes valores das coordenadas de área e das coordenadas cartesianas locais.



Ponto de Gauss	Coordenadas de área			Coordenadas cartesianas locais	
	L_1	L_2	L_3	x	y
a	1/3	1/3	1/3	$(x_1 + x_2)/3$	$y_3/3$
b	0,6	0,2	0,2	$0,6 x_1 + 0,2 x_2$	$0,2 y_3$
c	0,2	0,6	0,2	$0,2 x_1 + 0,6 x_2$	$0,2 y_3$
d	0,2	0,2	0,6	$0,2 x_1 + 0,2 x_2$	$0,6 y_3$

Figura 3.9

Os momentos assim calculados vêm referidos ao sistema de eixos local do elemento. Para efectuar a conversão para o referencial global XY há que aplicar a matriz de transformação $[T]$, definida por (3.4), fazendo

$$\begin{bmatrix} M_X & M_{XY} \\ M_{XY} & M_Y \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} [T]^T \quad (3.65)$$

Capítulo IV

TESTES DO ELEMENTO FORMULADO

4.1 - Introdução

Neste capítulo apresentamos diversos testes realizados com o elemento triangular de placa anteriormente formulado.

Os testes que efectuámos tiveram em vista:

- Verificar que o elemento passa o "patch test".
- Comparar resultados obtidos com valores determináveis por via analítica.
- Determinar o grau de convergência do elemento.
- Comparar o comportamento do elemento com outros elementos de placa.

Foi uma das nossas preocupações testar o comportamento do elemento em situações extremas de irregularidade de forma (triângulos com ângulos muito agudos e muito obtusos) e em situações diversificadas de alinhamento de malha com os eixos coordenados, quer globais quer locais, e ainda verificar que o seu comportamento é independente do referencial (propriedade de invariância geométrica).

Para realizar estes testes desenvolvemos especialmente um programa, escrito em Fortran, que nos dispensamos de aqui reproduzir. A estrutura do programa foi estabelecida à semelhança do programa de Hinton e Owen [H4]. Como se pode constatar nos desenhos das malhas incluídos nas figuras que se seguirão, só são numerados os nós dos elementos correspondentes aos vértices dos triângulos, uma vez que o próprio programa efectua a numeração automática dos 3 nós intermédios de cada lado. Com esta facilidade conseguimos obter uma redução substancial de tempo na fase de introdução dos dados.

Tendo-se verificado que a precisão dos valores teóricos apresentados por Timoshenko [T3], referentes às placas rectangulares, são insuficientes para o rigor da presente análise (detectou-se um caso com 0,85% de erro), decidimos recalcular numericamente deslocamentos e momentos em pontos típicos, com base na solução analítica de desenvolvimento em séries trigonométricas [T3]. No Anexo I apresentamos as fórmulas utilizadas e as tabelas de valores correspondentes. Neste mesmo anexo inserimos ainda as fórmulas referentes às soluções analíticas conhecidas de placas circulares e triangulares, obtidas a partir de [T3], relativas aos casos que também aqui foram tratados.

Em todos os problemas analisados adoptámos um valor $\sqrt{0,6}$ para o parâmetro λ (veja-se o significado geométrico de λ no parágrafo 3.1). No último parágrafo deste capítulo apresentamos um estudo de sensibilidade do elemento ao factor λ e, de alguma forma, justificamos a razão de tomar por defeito aquele valor concreto.

4.2 - Patch Test

Como referimos anteriormente (veja-se o parág. 2.7), há duas importantes condições que um elemento deve satisfazer para assegurar a convergência: a condição de movimento de corpo rígido e a condição de deformação constante.

Como Timoshenko demonstrou [T3], um estado de deformação (curvatura) constante pode obter-se quando fazemos actuar um momento normal uniforme ao longo de toda a fronteira de uma placa de geometria qualquer. Diz-se, neste caso, que a flexão é pura. Para realizar os testes de condição de deformação constante usámos precisamente esta técnica, atendendo à facilidade com que neste elemento se pode introduzir um momento linearmente distribuído (veja-se parág. 3.9.3). A prescrição de deslocamentos limitou-se, neste caso, a fixarmos a zero o deslocamento de 3 pontos não colineares de modo a impedir movimento de corpo rígido.

Nos testes de movimento de corpo rígido, simplesmente foram impostos 3 deslocamentos diferentes em outros tantos nós não colineares, e não foi aplicada qualquer carga.

(i) Elemento isolado

Testámos cinco configurações diferentes de elementos isolados com as geometrias e condições indicadas na Fig. 4.1.

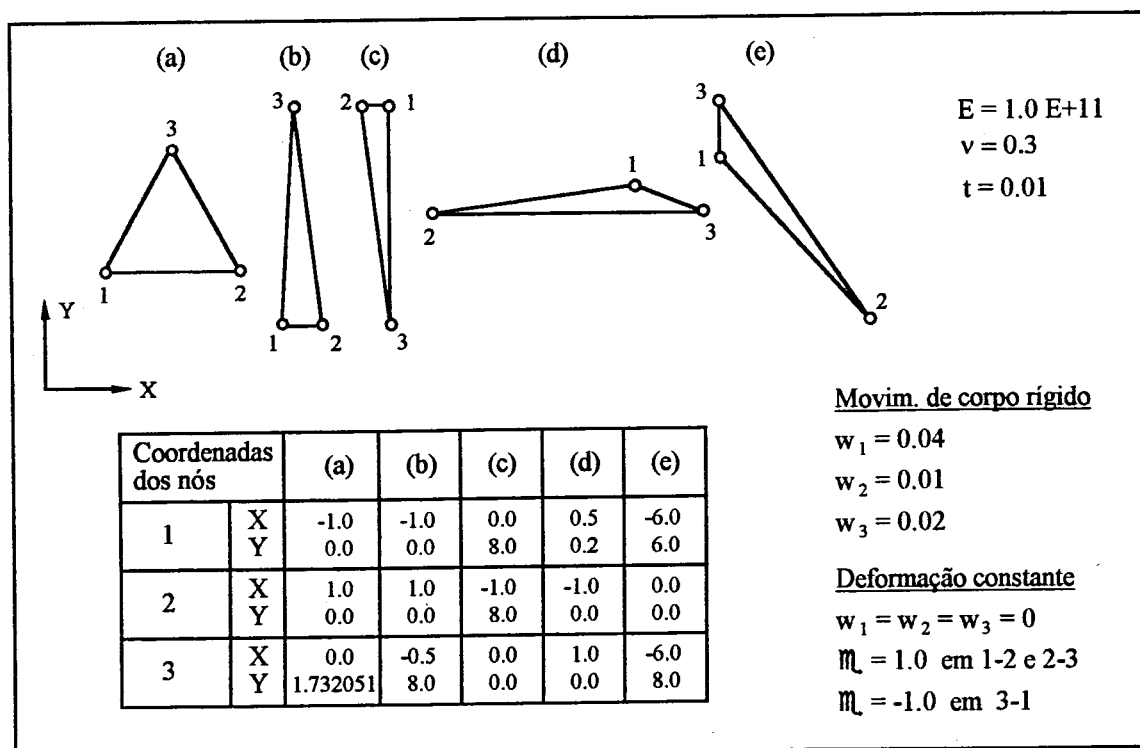


Figura 4.1

Os resultados obtidos em todos estes casos, e referentes às componentes no referencial global do vector momento em todos os 4 pontos de Gauss, foram:

Movimento de corpo rígido: $M_X = 0.000000$
 $M_Y = 0.000000$
 $M_{XY} = 0.000000$

Estado de deformação constante: $M_X = 1.000000$
 $M_Y = 1.000000$
 $M_{XY} = 0.000000$

Vê-se assim que os resultados coincidem com os valores teóricos esperados com uma precisão, no mínimo, até à 6ª casa decimal.

(ii) Parcela com vários elementos

Testámos seguidamente 6 parcelas quadradas com as malhas indicadas na Fig. 4.2.

No Quadro 4.1 apresentamos os resultados extremos obtidos para cada um destes casos no que se refere às componentes no referencial global do vector momento em todos os 4 pontos de Gauss.

Desvios Extremos dos Momentos							
		Fig. 4.2 (a)	Fig. 4.2 (b)	Fig. 4.2 (c)	Fig. 4.2 (d)	Fig. 4.2 (e)	Fig. 4.2 (f)
Movim. de corpo rígido							
Momento M_x	max	0.000020	0.000348	0.001039	0.001331	0.001136	0.000719
	min	-0.000028	-0.000482	-0.000935	-0.001322	-0.002619	-0.000647
Momento M_y	max	0.000091	0.000514	0.001532	0.001063	0.001112	0.001075
	min	-0.000099	-0.000476	-0.000630	-0.001071	-0.000541	-0.001060
Momento M_{xy}	max	0.000047	0.000263	0.000792	0.000463	0.000517	0.000348
	min	-0.000048	-0.000239	-0.001169	-0.000550	-0.000665	-0.000467
Deformação constante							
Momento M_x	max	0.000000	0.000001	0.000005	0.000003	0.000005	0.000001
	min	0.000000	-0.000001	-0.000002	-0.000003	-0.000003	-0.000001
Momento M_y	max	0.000001	0.000001	0.000001	0.000002	0.000001	0.000002
	min	0.000000	-0.000002	-0.000006	-0.000004	-0.000004	-0.000003
Momento M_{xy}	max	0.000000	0.000000	0.000002	0.000001	0.000001	0.000002
	min	0.000000	-0.000001	-0.000001	-0.000001	-0.000001	0.000000

Quadro 4.1

No Quadro 4.2 apresentamos os resultados dos deslocamentos e rotações obtidos nalguns pontos de referência.

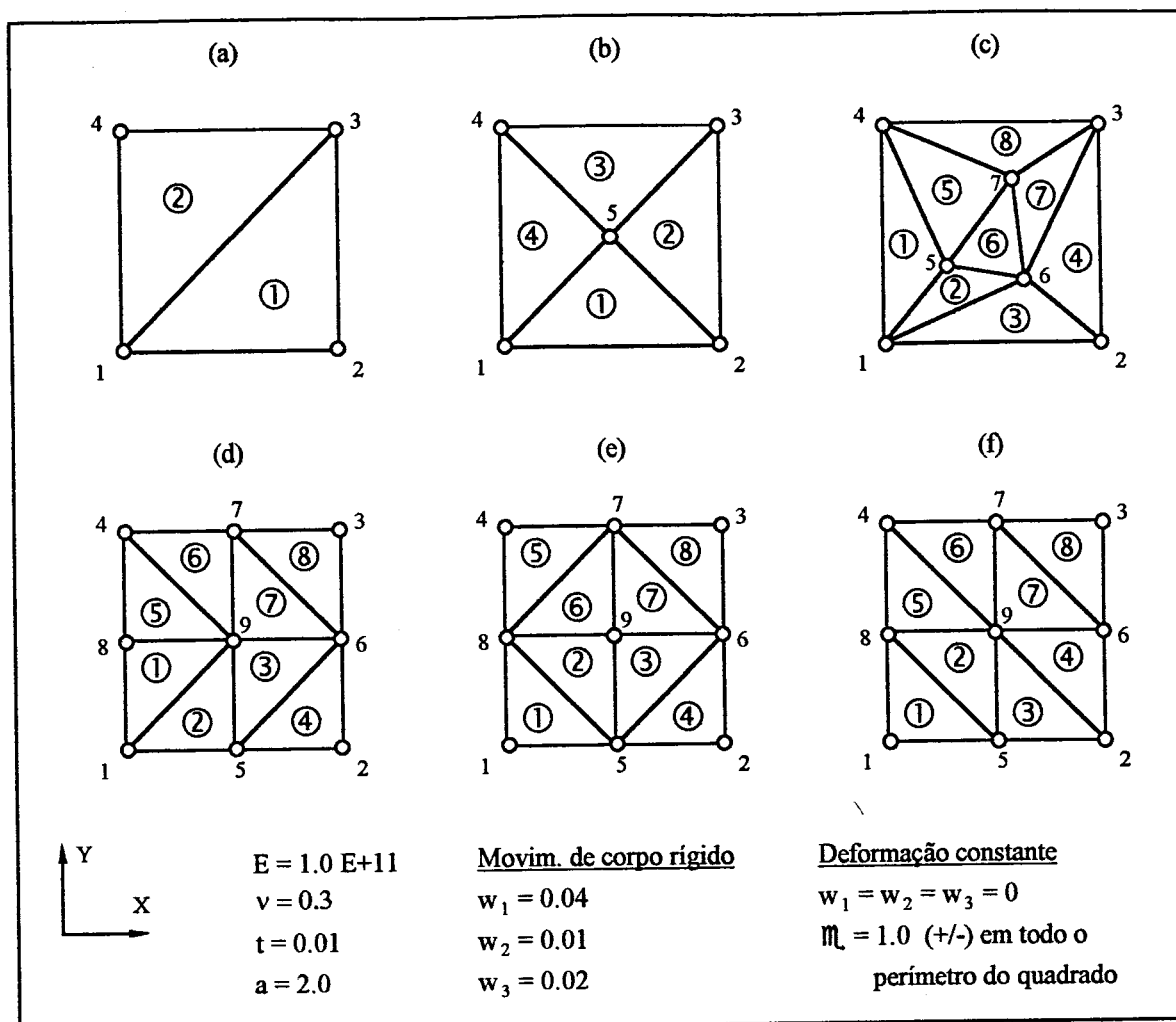


Figura 4.2

Deslocamentos e Rotações							
	teórico	Fig. 4.2 (a)	Fig. 4.2 (b)	Fig. 4.2 (c)	Fig. 4.2 (d)	Fig. 4.2 (e)	Fig. 4.2 (f)
<u>Movim. de corpo rígido</u>							
(Factor 1.0E-2)							
Deslocamento no nó 4	5	5.00000	5.00000	5.00000	5.00000	5.00001	5.00000
Desloc. no centro do quadrado	3	3.00000	3.00000	-	3.00000	3.00000	3.00000
Desloc. a meio do lado 1-2	2.5	2.50000	2.50000	2.50000	2.50000	2.50000	2.50000
Rotação normal a meio do lado 1-2	-0.5	-0.500000	-0.500000	-0.499999	-	-	-
Rotação normal a meio do lado 1-5	-0.5	-	-	-	-0.500000	-0.500002	-0.500000
<u>Deformação constante</u>							
(Factor 1.0E-4)							
Deslocamento no nó 4	0	0.000001	0.000001	-0.000004	-0.000002	0.000000	-0.000003
Desloc. no centro do quadrado	-0.84	-0.840000	-0.839999	-	-0.840000	-0.839999	-0.840000
Desloc. a meio do lado 1-2	-0.42	-0.420001	-0.419999	-0.420000	-0.419999	-0.419999	-0.420000
Rotação normal a meio do lado 1-2	0.84	0.839999	0.840000	0.840000	-	-	-
Rotação normal a meio do lado 1-5	0.84	-	-	-	0.840000	0.839999	0.840002

Quadro 4.2

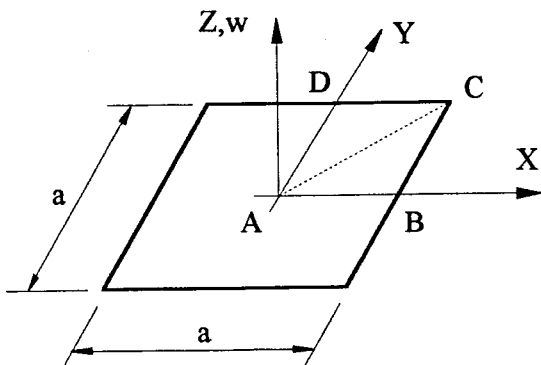
Os pequenos desvios verificados em todos estes resultados parecem ficar a dever-se aos erros naturais de arredondamento dos cálculos numéricos.

Concluimos assim que o elemento consegue reproduzir satisfatoriamente um estado de deformação nula devida a movimento de corpo rígido e um estado de deformação (curvatura) constante provocado por um momento normal uniformemente distribuído ao longo de toda a fronteira.

4.3 - Placas Rectangulares

Um dos casos típicos de teste de um elemento de placa é o da determinação do campo de deslocamentos e momentos em placas quadradas sujeitas a carga uniformemente distribuída e carga concentrada no centro, com condições fronteira de bordo simplesmente apoiado e bordo encastrado, casos estes para os quais existem soluções analíticas [T3]. Também com estes casos é possível efectuar comparações de comportamento, pois estes são normalmente os utilizados por outros autores para verificar o grau de convergência de um elemento.

Os dados referentes à placa analisada estão definidos na Fig. 4.3. As malhas que usámos estão referenciadas por M1 a M5 e M8. Dada a simetria do problema, foi somente analisado 1/4 de placa, excepto para a malha M8 onde se analisou 1/8 de placa.



$$E = 1.0 \text{ E}+11$$

$$\nu = 0.3$$

$$t = 0.01$$

$$a = 2.0$$

Carga distribuída uniforme, $q = -1000$

Carga concentrada em A, $P = -4000$

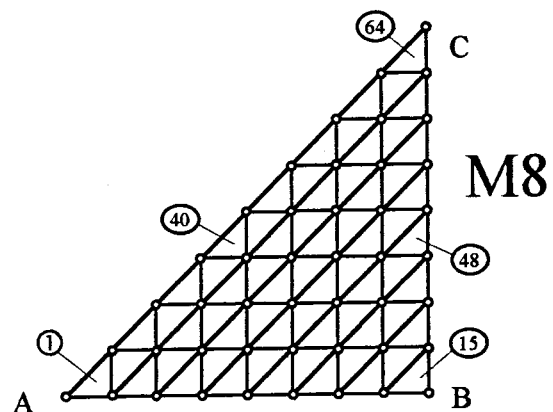
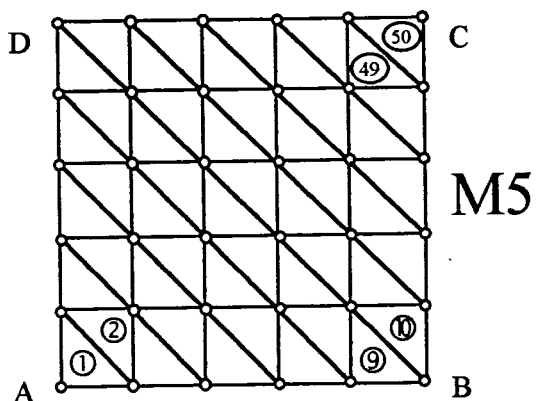
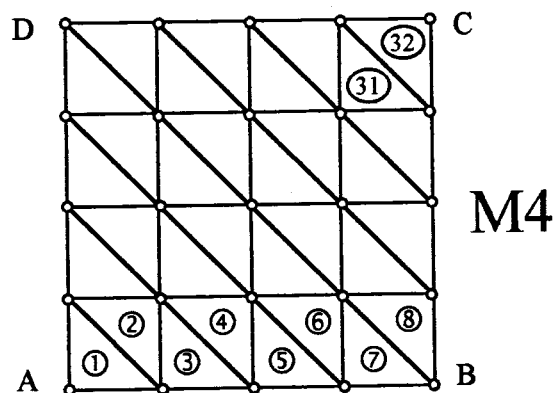
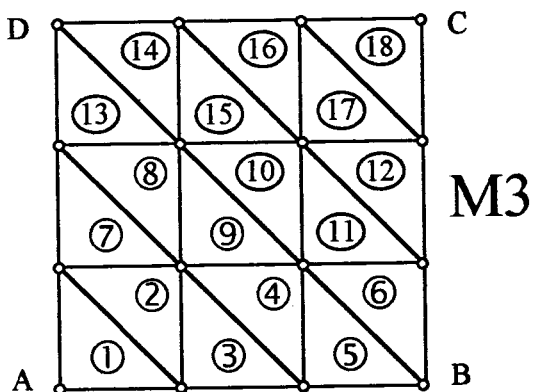
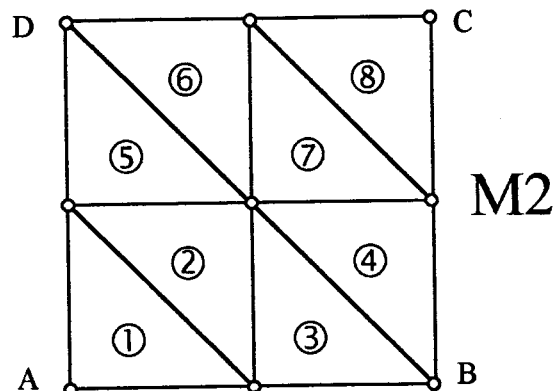
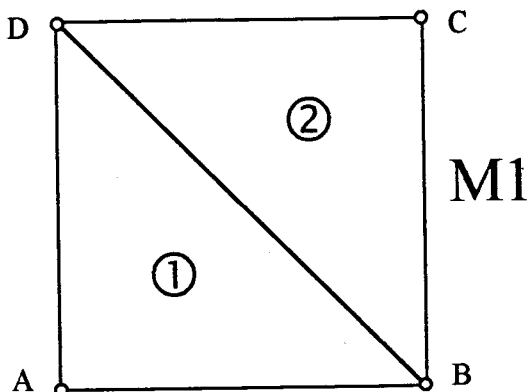


Figura 4.3

No Quadro 4.3 e Fig. 4.4 apresentamos a evolução da convergência para zero do erro relativo do deslocamento vertical no centro da placa para as 4 combinações de casos de carga e condições fronteira referidas.

Placa Quadrada											
Malha				Deslocamento Central (Factor = -1E-3)							
Ref ^a	N	NELEM	GDL	Carga Uniformemente Distribuida				Carga Concentrada ao Centro			
				Simpl. Apoiada		Encastrada		Simpl. Apoiada		Encastrada	
				w	Δ (%)	w	Δ (%)	w	Δ (%)	w	Δ (%)
M1	1	2	24	7.07186	-0.36	2.18172	-1.31	19.5259	-3.67	9.01931	-8.02
M2	2	8	73	7.10236	0.07	2.22676	0.72	20.1021	-0.82	9.65773	-1.50
M3	3	18	148	7.10056	0.04	2.21780	0.32	20.1997	-0.34	9.74423	-0.62
M4	4	32	249	7.09940	0.02	2.21448	0.17	20.2318	-0.18	9.77242	-0.33
M5	5	50	376	7.09887	0.02	2.21304	0.10	20.2462	-0.11	9.78503	-0.21
M8	8	64	477	7.09825	0.01	2.21127	0.02	20.2671	-0.01	9.80339	-0.02
Valores Teóricos				7.09774		2.21077		20.2689		9.80521	

Quadro 4.3

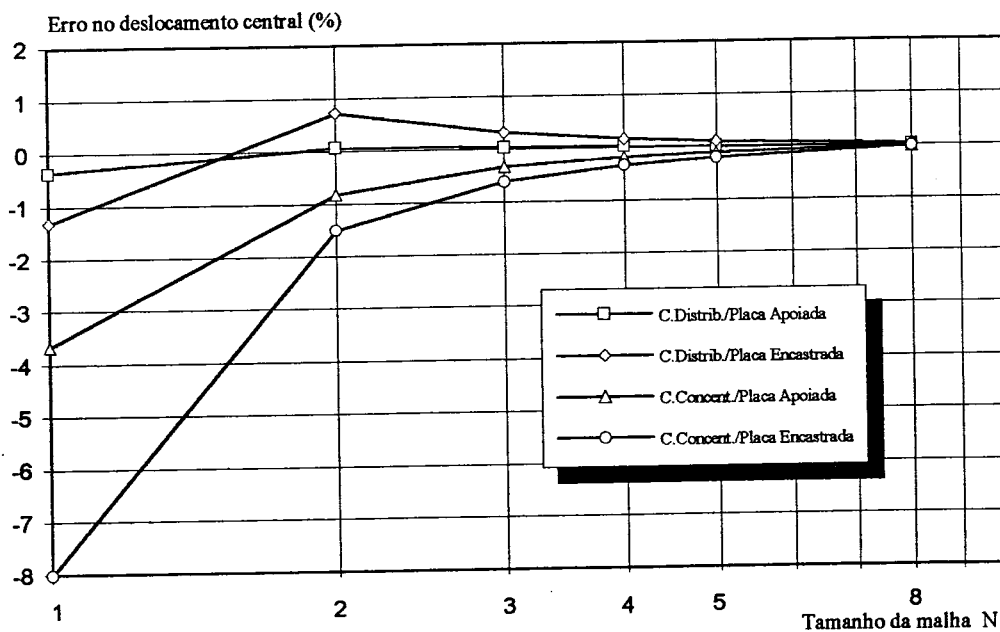


Figura 4.4

Na Fig. 4.5 mostra-se o comportamento deste elemento comparado com alguns dos elementos triangulares referidos no parágrafo 2.8. O parâmetro de comparação é o erro relativo do deslocamento ao centro correspondente ao caso da placa quadrada com bordos encastrados e carga concentrada central. O gráfico aqui reproduzido foi obtido em [O1].

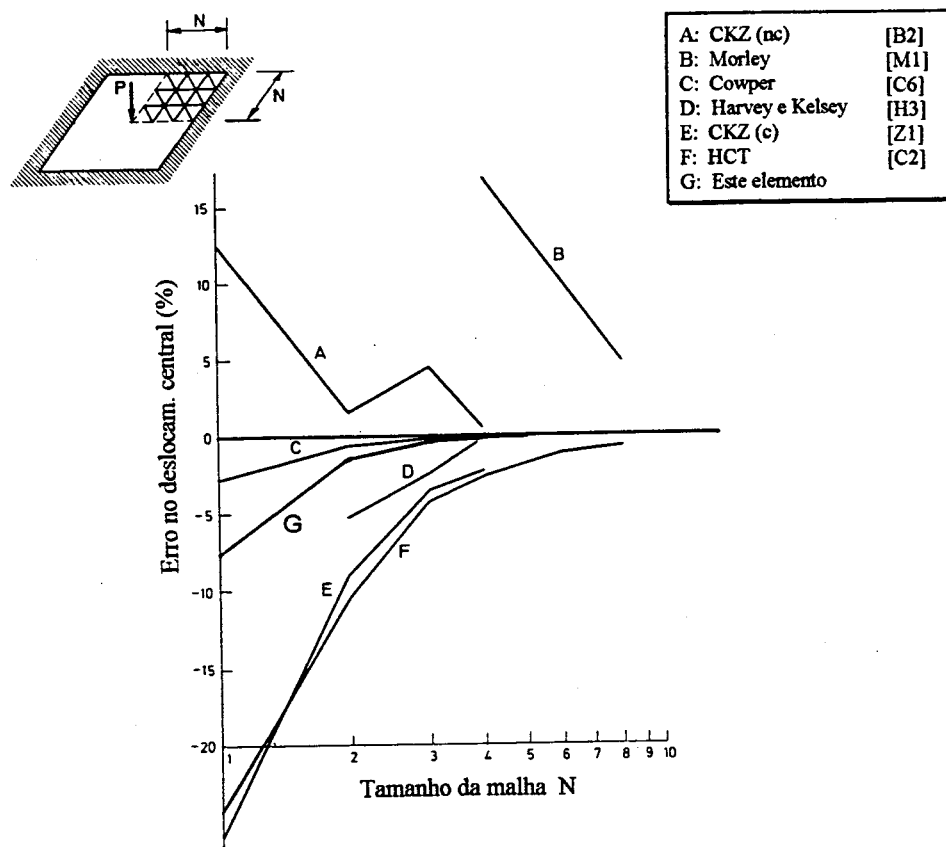
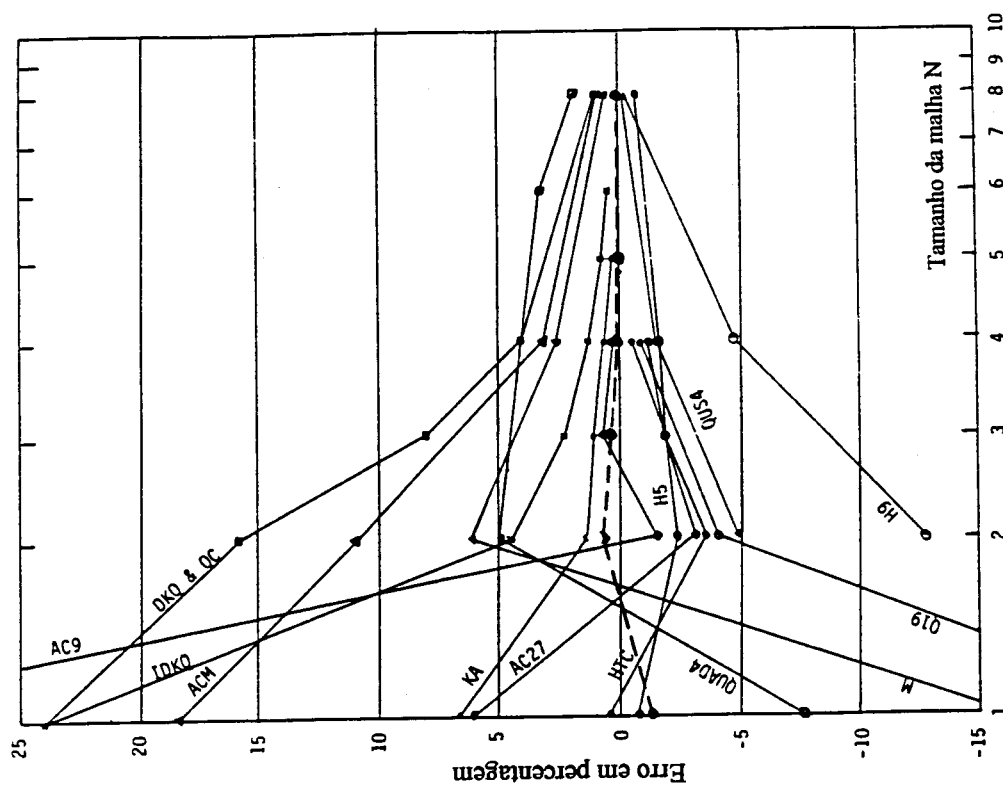


Figura 4.5

Nas Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 mostramos outras comparações do comportamento deste elemento, agora com relação a elementos rectangulares e quadrangulares de 12 gdl, reproduzindo os gráficos retirados de [J1]. O significado das referências dos elementos destes gráficos pode ser encontrado em [B5].

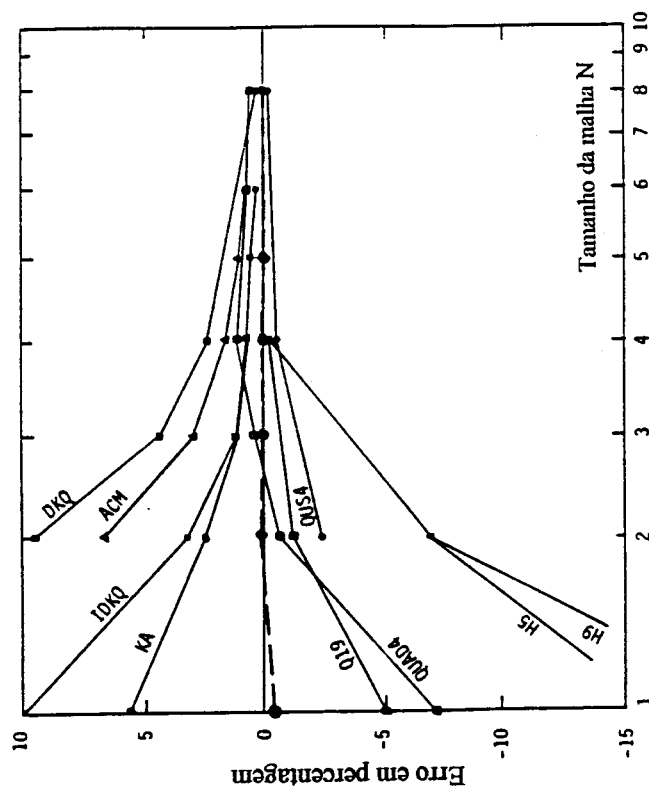
Nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13 apresentamos as curvas referentes à solução analítica da variação dos deslocamentos e dos dois momentos principais segundo, respectivamente, as linhas AB e AC da Figura 4.3 e os valores obtidos com o elemento para as malhas M1 (2 elementos) e M3 (18 elementos).



Placa quadrada encastrada, carga distribuída
Deslocamento central

Figura 4.6

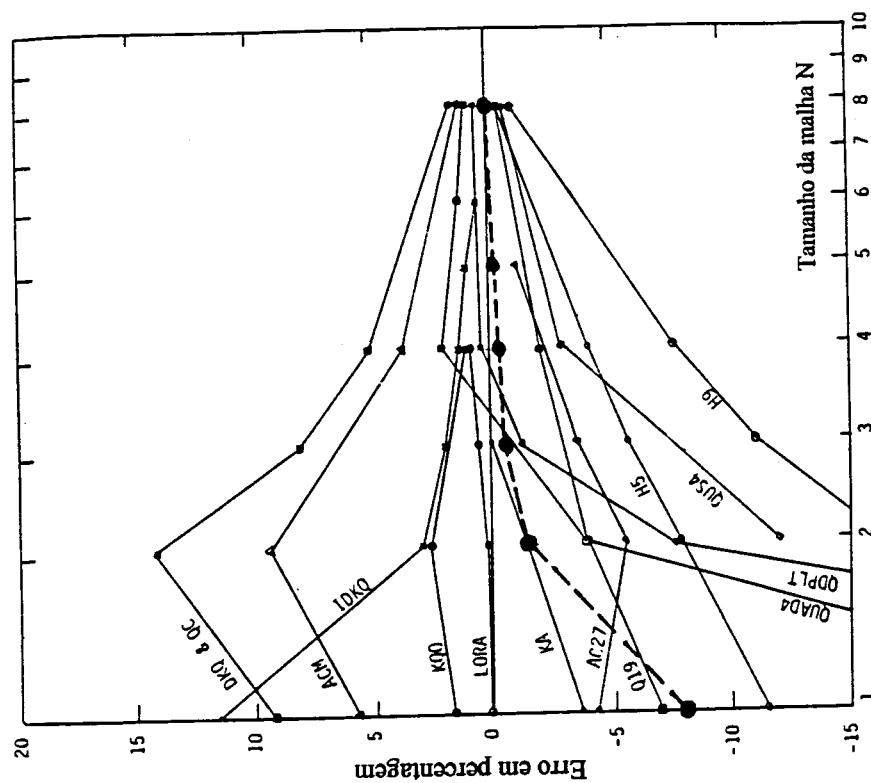
----- Este elemento



Placa quadrada apoiada, carga distribuída
Deslocamento central

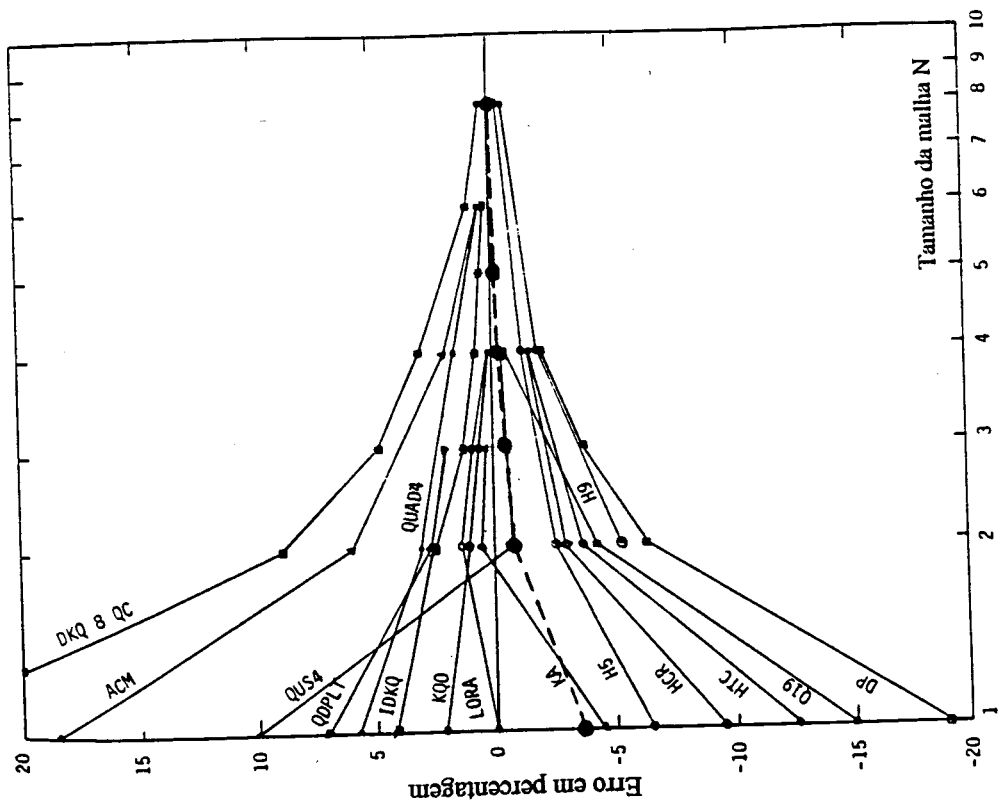
Figura 4.7

----- Este elemento



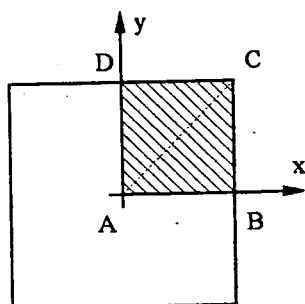
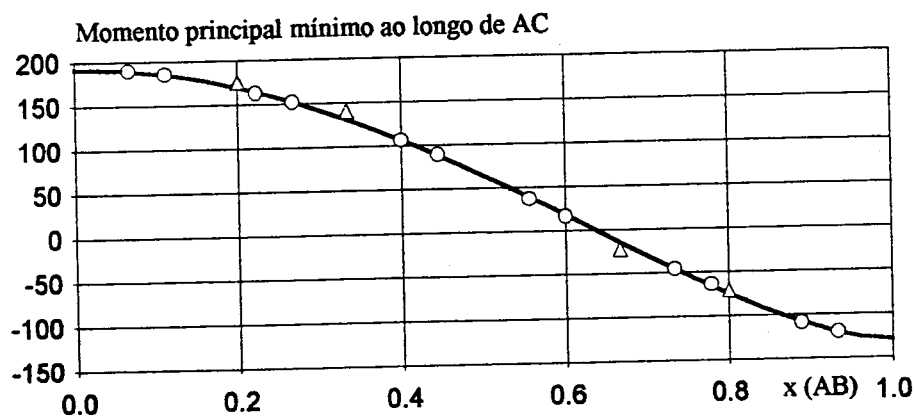
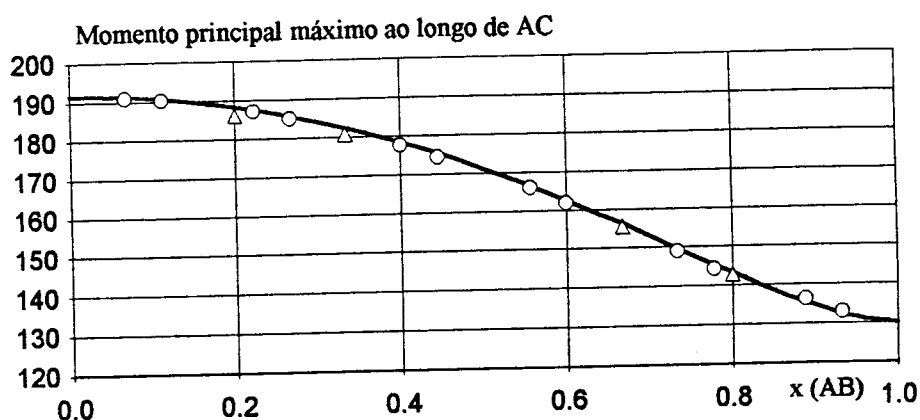
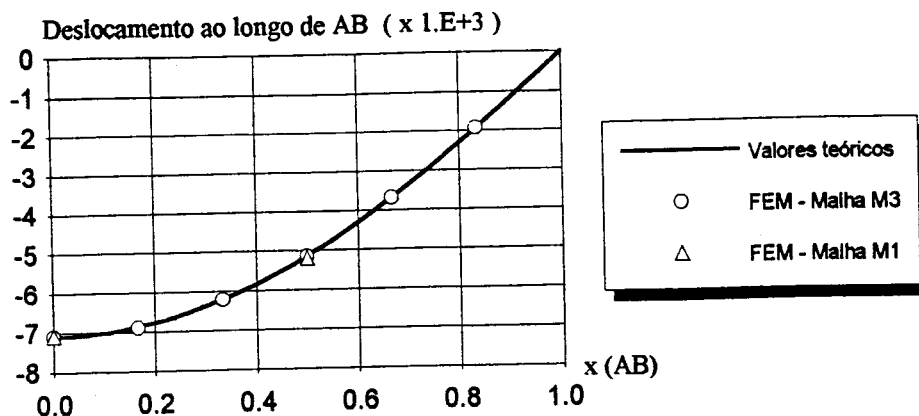
Placa quadrada encastrada, carga concentrada central
Deslocamento central

Figura 4.8



Placa quadrada apoiada, carga concentrada central
Deslocamento central

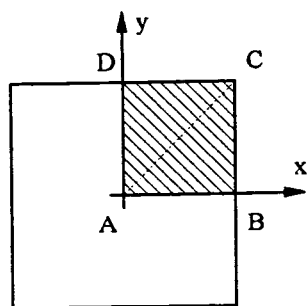
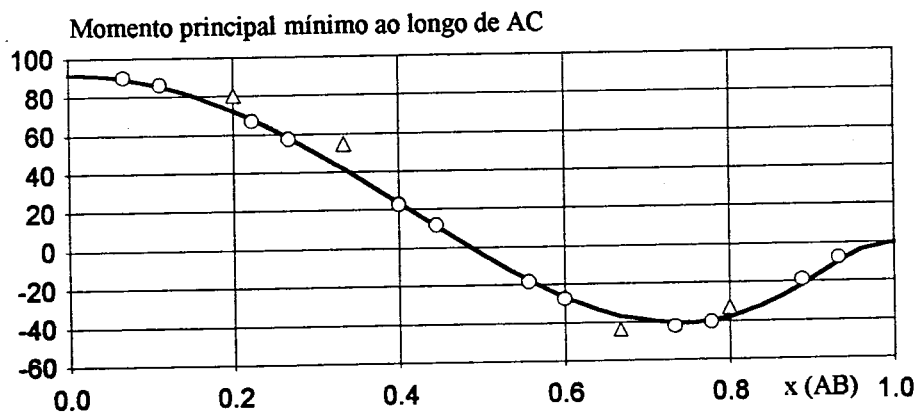
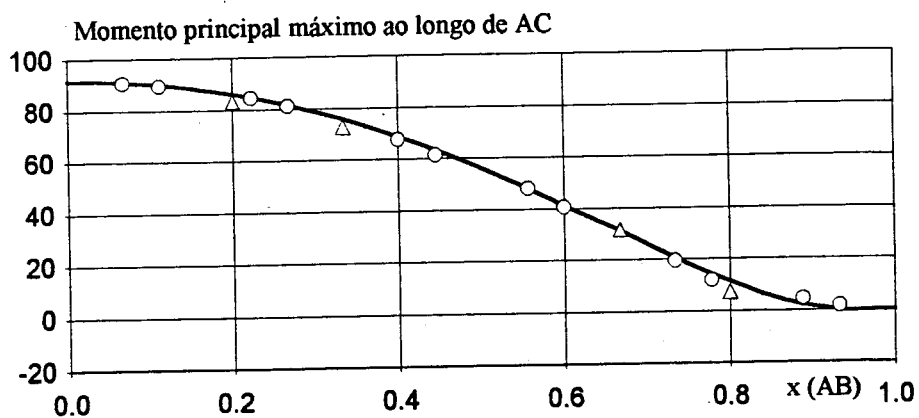
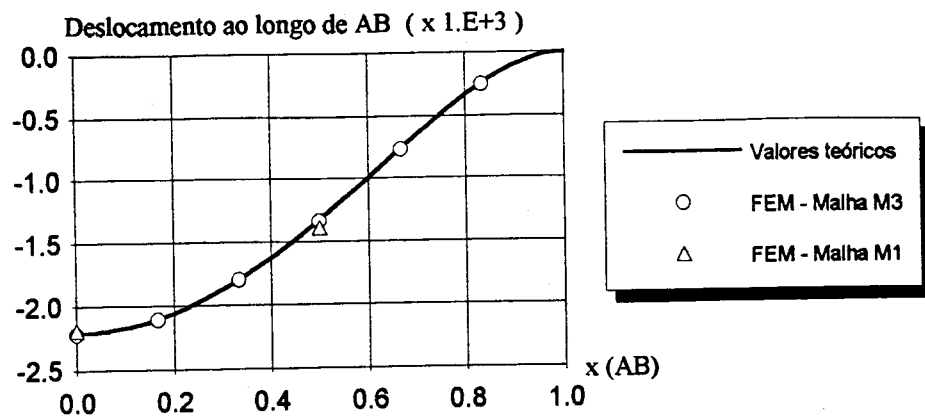
Figura 4.9



$q = -1000$
 $a = 2.0$
 $E = 10^{11}$
 $\nu = 0.3$
 $t = 0.01$

BCD - Bordos apoiados
 DAB - Bordos com simetria

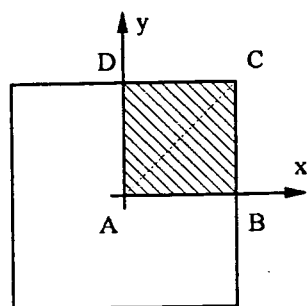
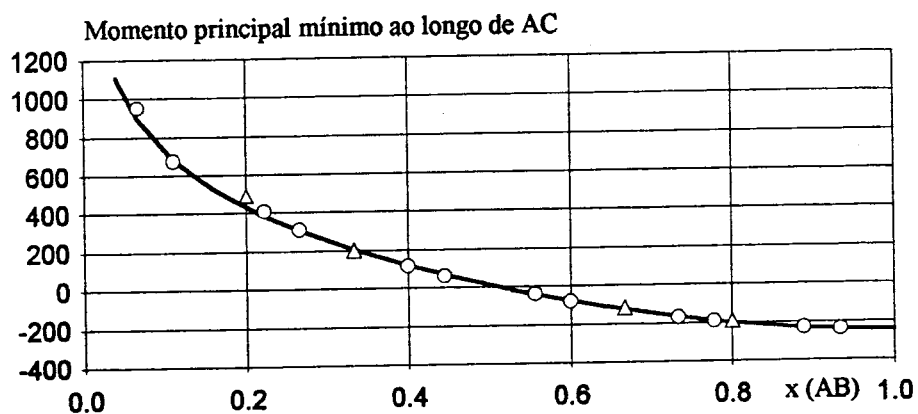
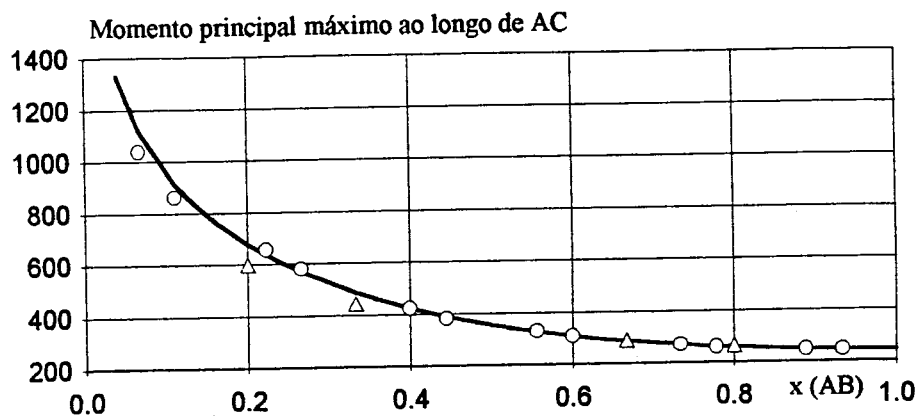
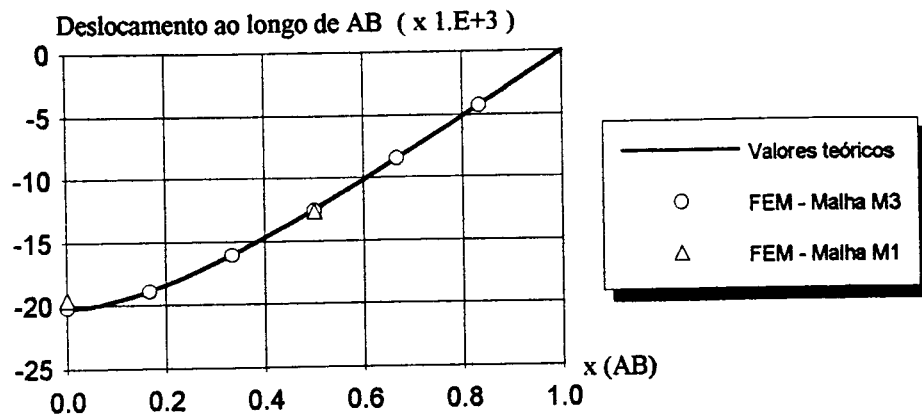
Fig. 4.10 - Placa quadrada apoiada, carga distribuída.



$q = -1000$
 $a = 2.0$
 $E = 10^{11}$
 $\nu = 0.3$
 $t = 0.01$

BCD - Bordos encastrados
 DAB - Bordos com simetria

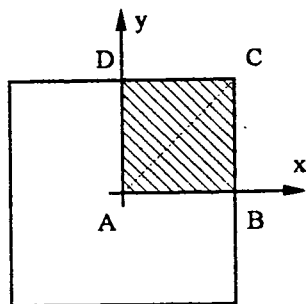
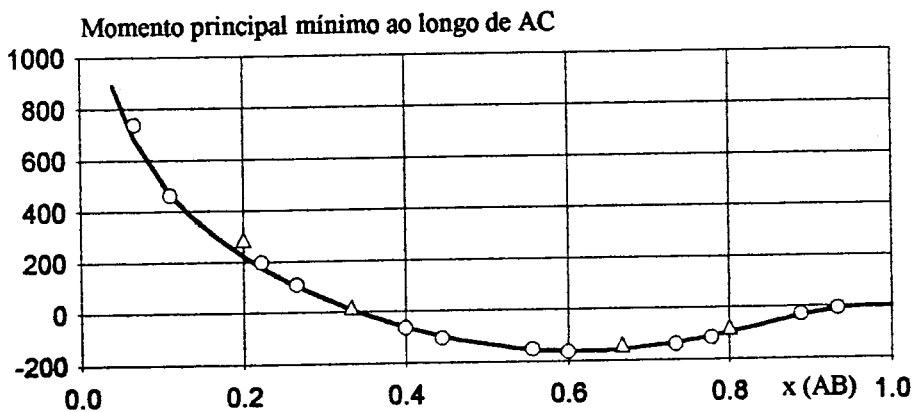
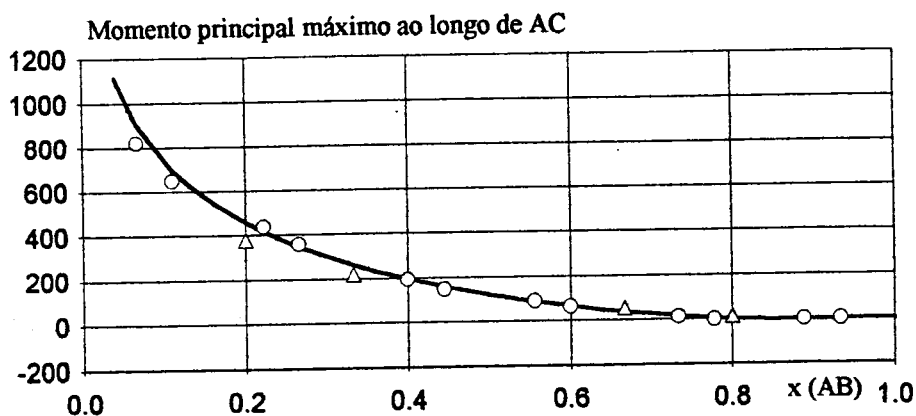
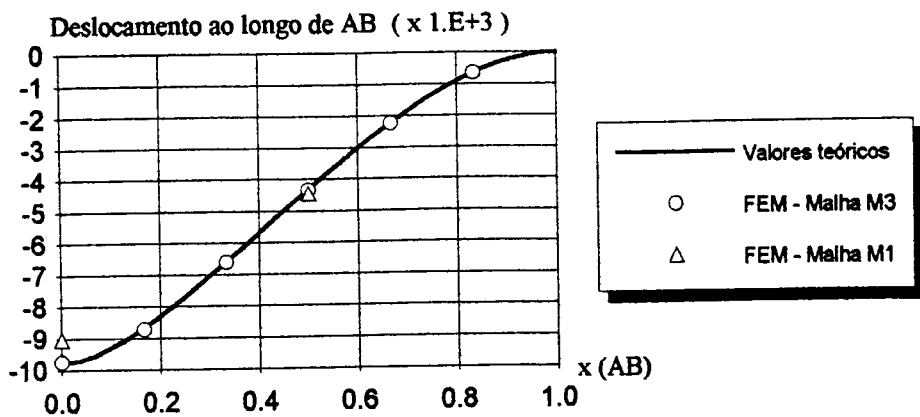
Fig. 4.11 - Placa quadrada encastrada, carga distribuída.



$P = 4000$
 $a = 2.0$
 $E = 10^{11}$
 $\nu = 0.3$
 $t = 0.01$

BCD - Bordos apoiados
 DAB - Bordos com simetria

Fig. 4.12 - Placa quadrada apoiada, carga concentrada ao centro.



$$P = -4000$$

$$a = 2.0$$

$$E = 10^{11}$$

$$\nu = 0.3$$

$$t = 0.01$$

BCD - Bordos encastrados

DAB - Bordos com simetria

Fig. 4.13 - Placa quadrada encastrada, carga concentrada ao centro.

Outro problema analisado no âmbito das placas rectangulares foi o de uma placa submetida a esforços típicos de torção. Na Fig. 4.14 mostra-se o esquema do caso estudado e os resultados obtidos com este elemento comparado com os resultados obtidos por outros autores com elementos diferentes.

O gráfico reproduzido foi retirado da referência [J1] onde se pode encontrar o significado das referências aos elementos de comparação.

O modelo que usámos foi criado com dois elementos triangulares.

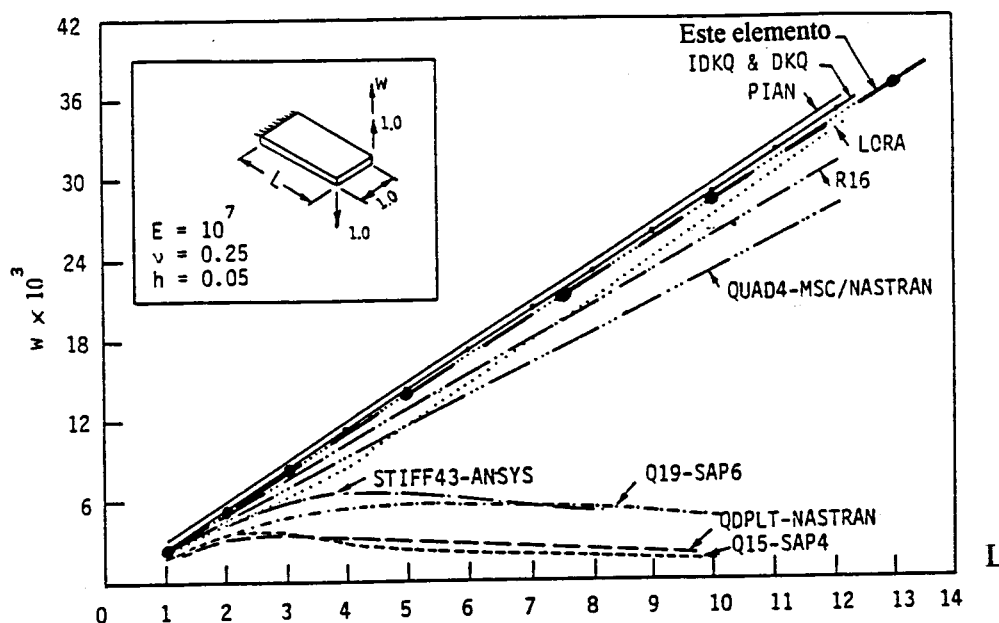


Figura 4.14

De acordo com a Fig. 4.14 verifica-se que o comportamento deste elemento é perfeitamente linear e que os valores encontrados para o deslocamento se encontram satisfatoriamente ao mesmo nível dos restantes.

4.4 - Placas circulares

A reprodução de um estado de tensão-deformação numa placa com fronteiras curvas usando elementos de bordos rectos é difícil dada a necessidade de usar um elevado número de segmentos de recta para aproximar essa fronteira.

Um caso simples de placa com fronteira curva é o da placa circular com contorno apoiado ou encastrado. Analisámos o comportamento do elemento numa situação de placa circular com carga uniformemente distribuída e com carga concentrada ao centro, para ambas as condições fronteira referidas.

A solução analítica destes casos é muito simples [T3]. No Anexo I reproduzimos as expressões analíticas usadas nos gráficos de avaliação do comportamento do elemento.

Na Figura 4.15 estão indicados os dados do problema e as malhas usadas numa análise a 1/4 da placa. Além das malhas C3 a C6 ali referidas, analisámos ainda o mesmo problema em 1/16 de placa com uma malha refinada. Esta foi refenciada por D6 e está reproduzida na Figura 4.16.

Os deslocamentos prescritos introduzidos foram:

Contorno circular:

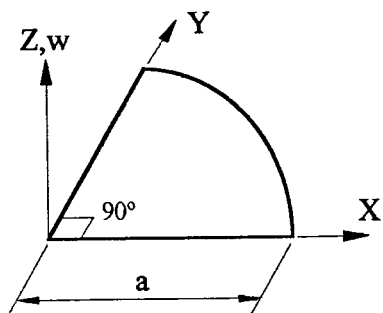
- placa apoiada: $w = 0$ só nos vértices do contorno circular.
- placa encastrada: $w = 0$ e $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ em todos os nós do contorno circular (nós dos vértices e nós dos lados do contorno).

Eixos de simetria:

- placa apoiada e encastrada: $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ nos nós dos lados de simetria.

No Quadro 4.4 e Fig. 4.17 apresentamos a evolução da convergência para zero do erro relativo do deslocamento vertical no centro da placa para as 4 combinações resultantes dos casos de carga e condições fronteira referidos.

Nas Figuras 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21 apresentamos as curvas da solução analítica da variação dos deslocamentos e dos momentos radial e tangencial em função do raio, e os valores obtidos com o elemento para as malhas C5 e D6. Os pontos marcados no gráfico dos deslocamentos referem-se aos nós da fronteira $Y=0$. Os pontos que representam os momentos referem-se aos pontos de Gauss centrais dos elementos situados sobre a bissectriz do sector circular.



$$E = 1.0 \text{ E}+11$$

$$\nu = 0.3$$

$$t = 0.01$$

$$a = 1.0$$

Carga distribuída, $q = -1000$

Carga concentrada

no centro, $P = -4000$ (360°)

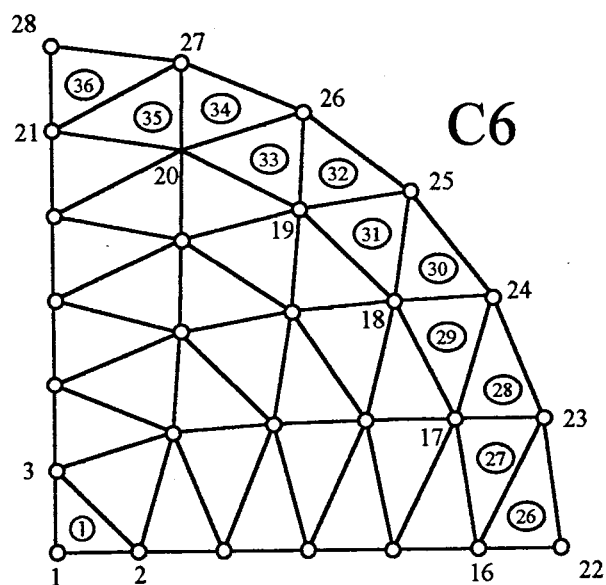
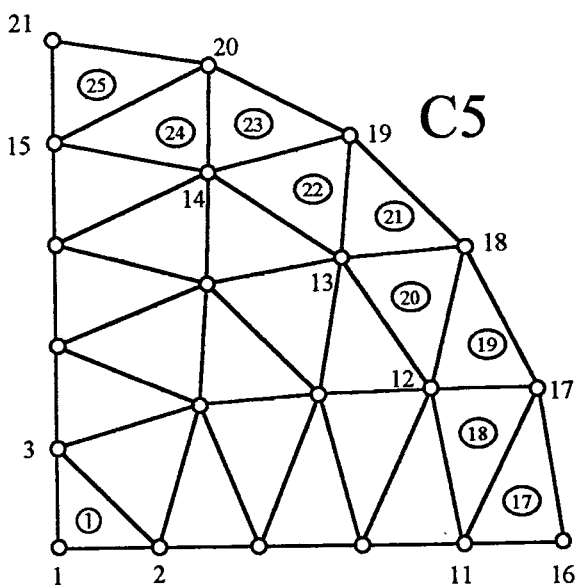
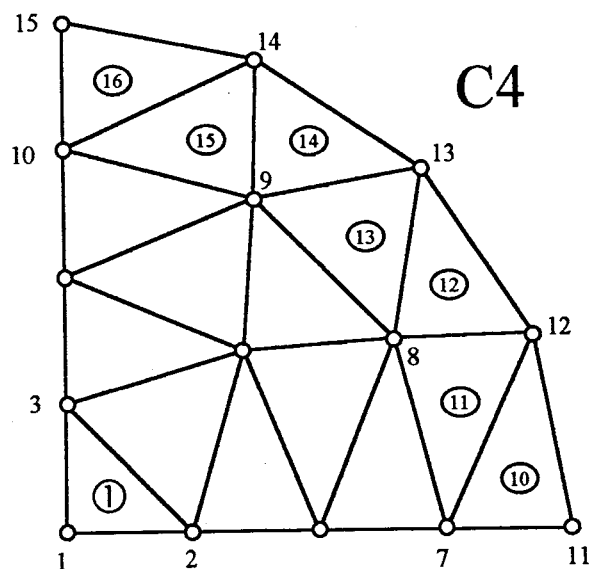
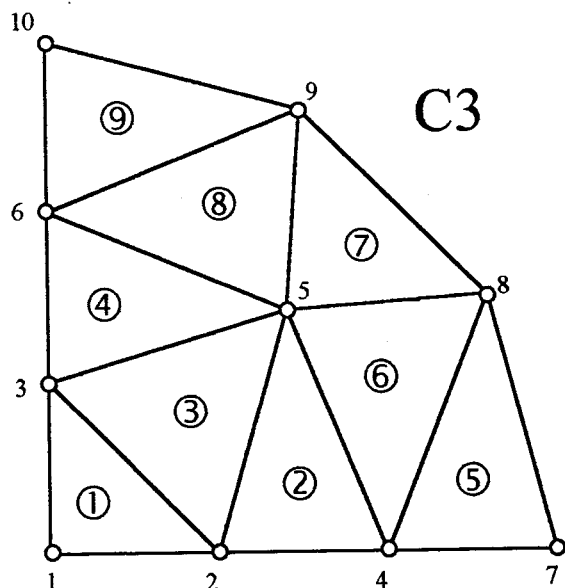


Figura 4.15

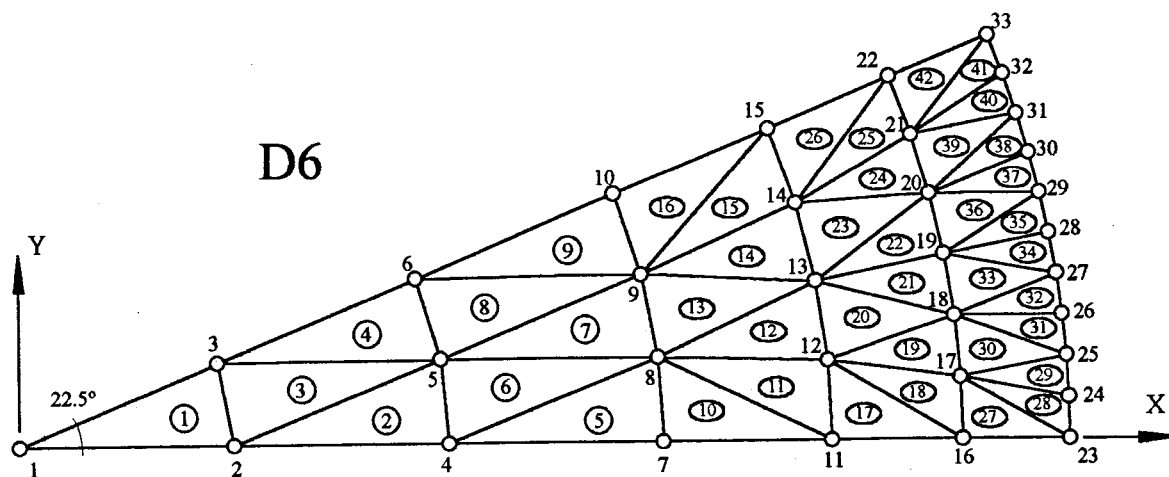


Figura 4.16

Placa Circular											
Malha				Deslocamento Central (Factor = -1.E-3)							
Ref ^a	NELEM	GDL	GDL (360°)	Carga Uniformemente Distribuída				Carga Concentrada ao Centro			
				Simpl. Apoiada		Encastrada		Simpl. Apoiada		Encastrada	
				w	Δ (%)	w	Δ (%)	w	Δ (%)	w	Δ (%)
C3	9	82	265	7.16372	2.98	1.54094	-9.69	22.4056	1.57	8.17200	-5.96
C4	16	135	457	7.05500	1.42	1.61410	-5.40	22.2203	0.73	8.40450	-3.28
C5	25	201	701	7.01279	0.81	1.64787	-3.42	22.1510	0.42	8.51039	-2.07
C6	36	280	997	6.99256	0.52	1.66606	-2.36	22.1183	0.27	8.56702	-1.41
D6	42	329	4769	6.95731	0.02	1.70575	-0.03	22.0609	0.01	8.68794	-0.02
Valores Teóricos				6.95625		1.70625		22.0589		8.68986	

Quadro 4.4

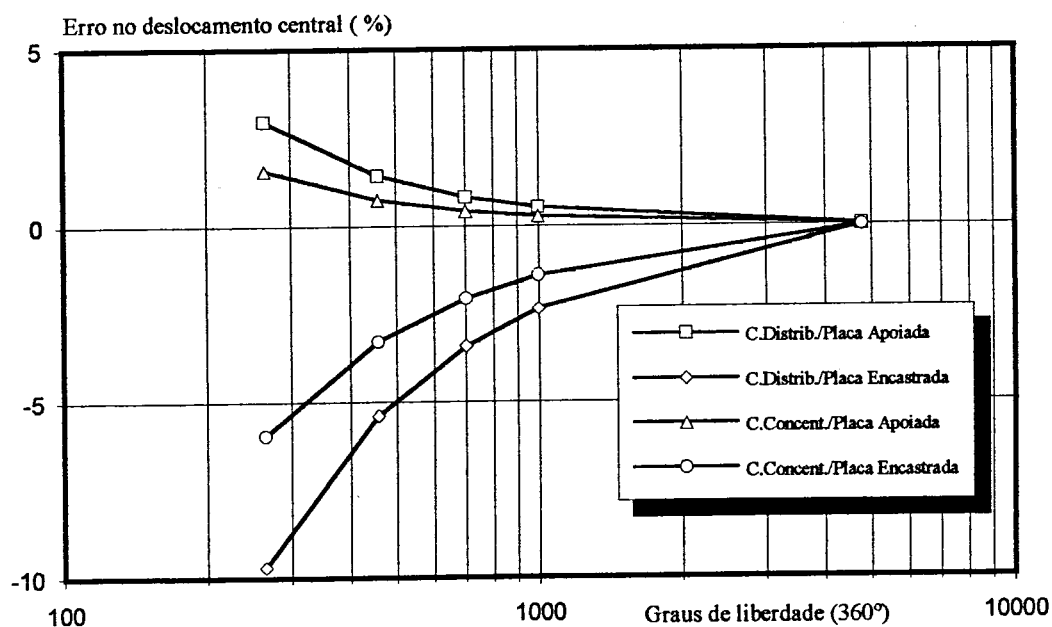


Figura 4.17

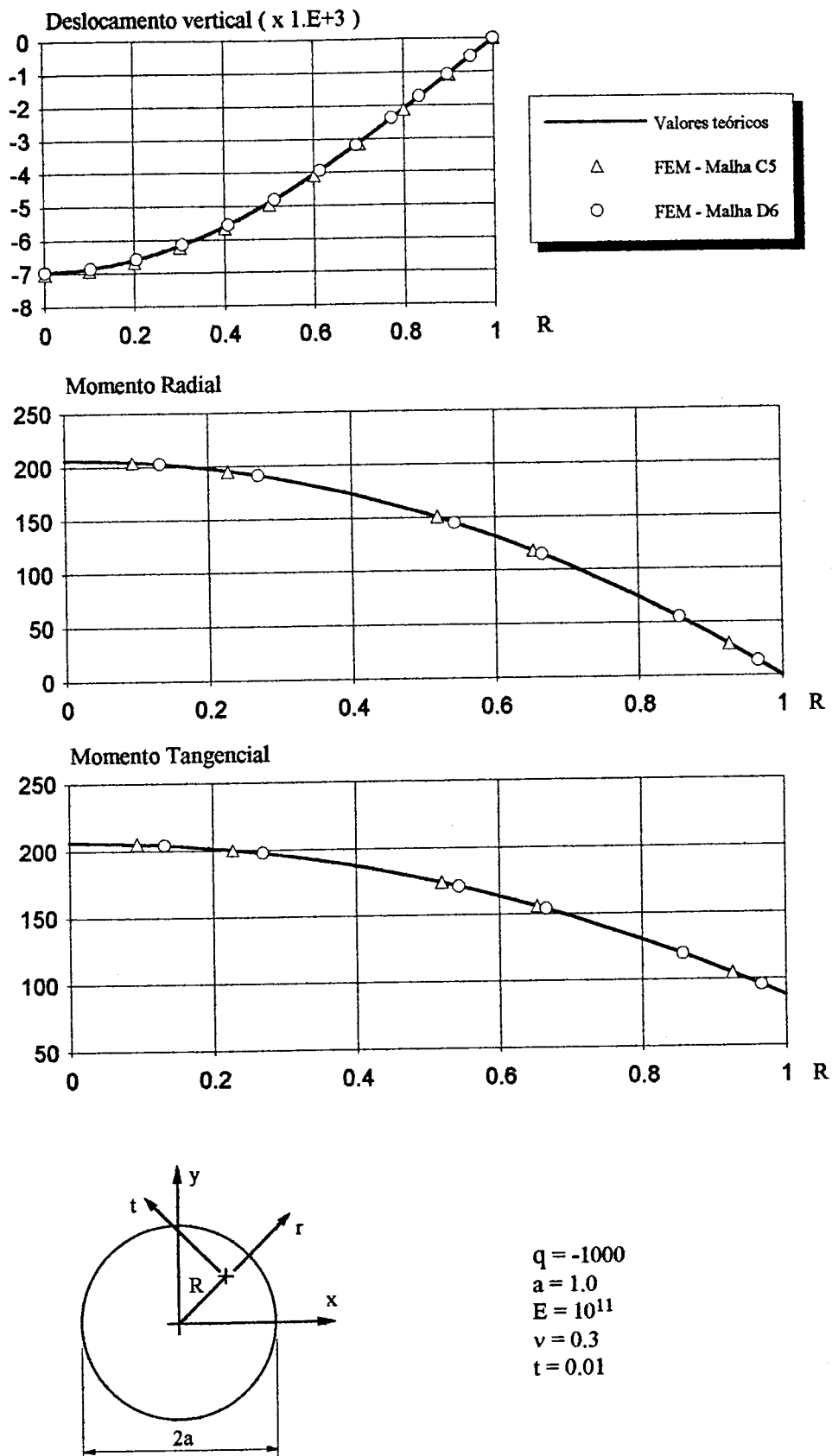


Fig. 4.18 - Placa circular apoiada, carga distribuída.

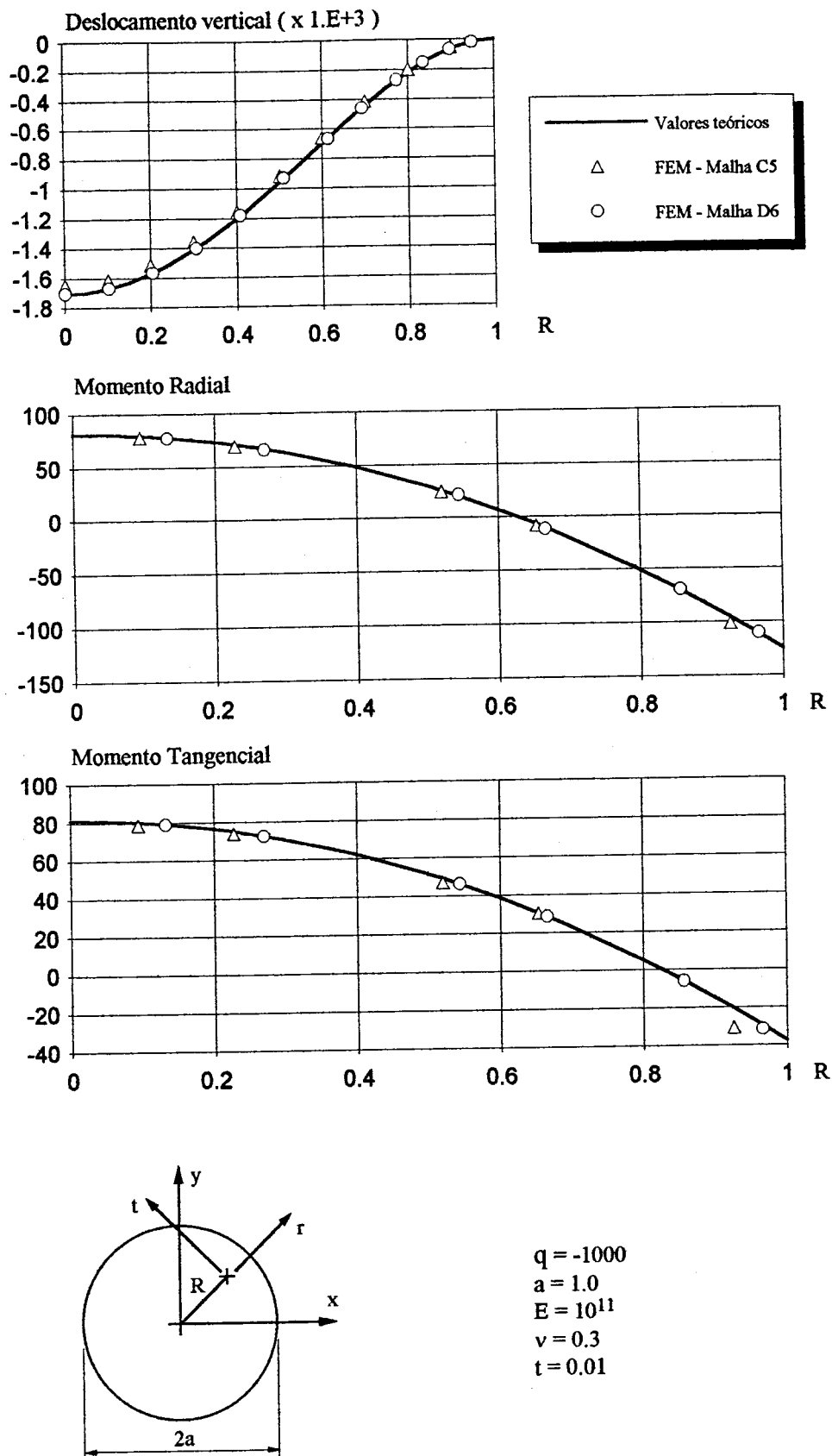


Fig. 4.19 - Placa circular encastrada, carga distribuída.

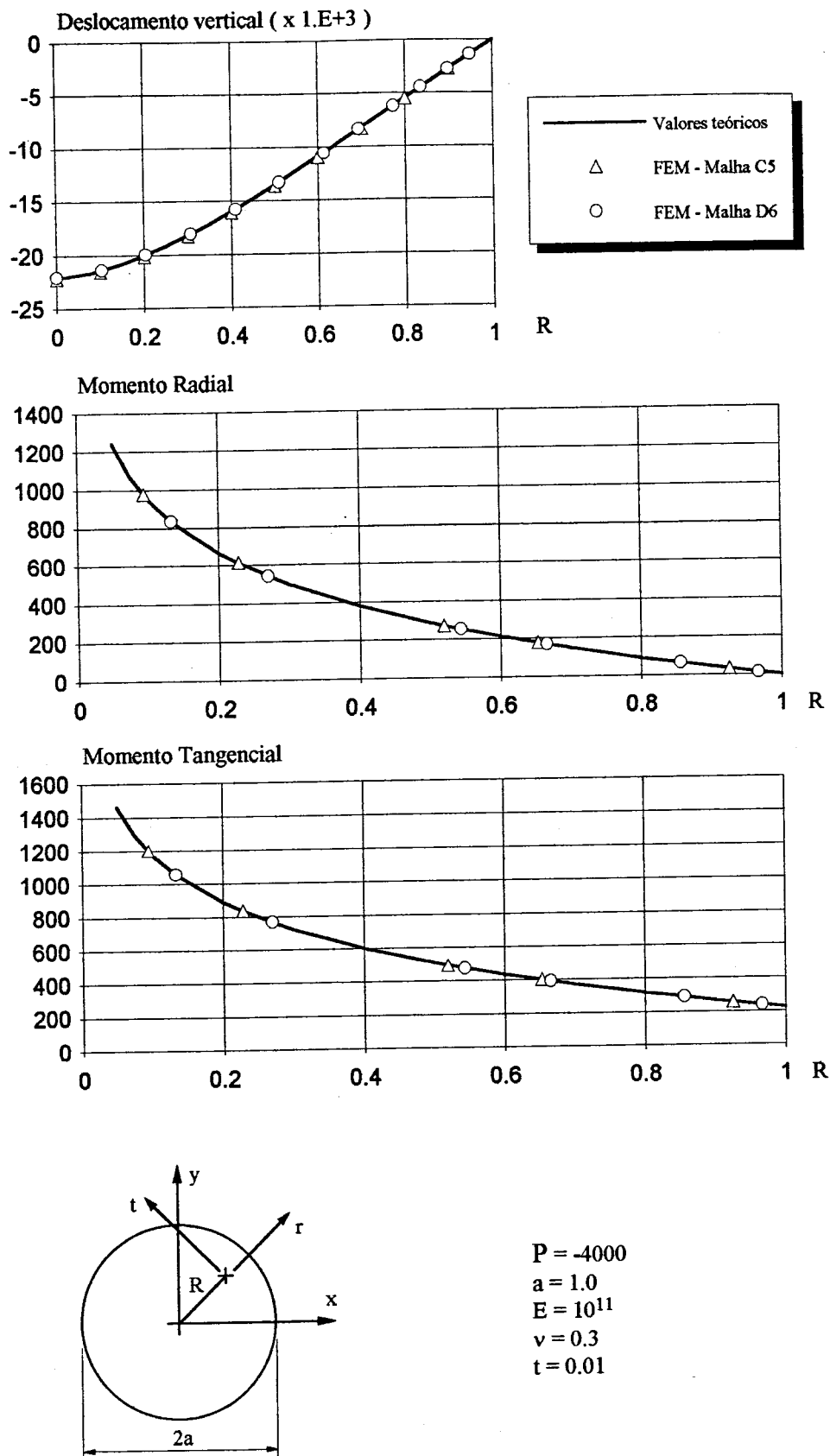


Fig. 4.20 - Placa circular apoiada, carga concentrada ao centro.

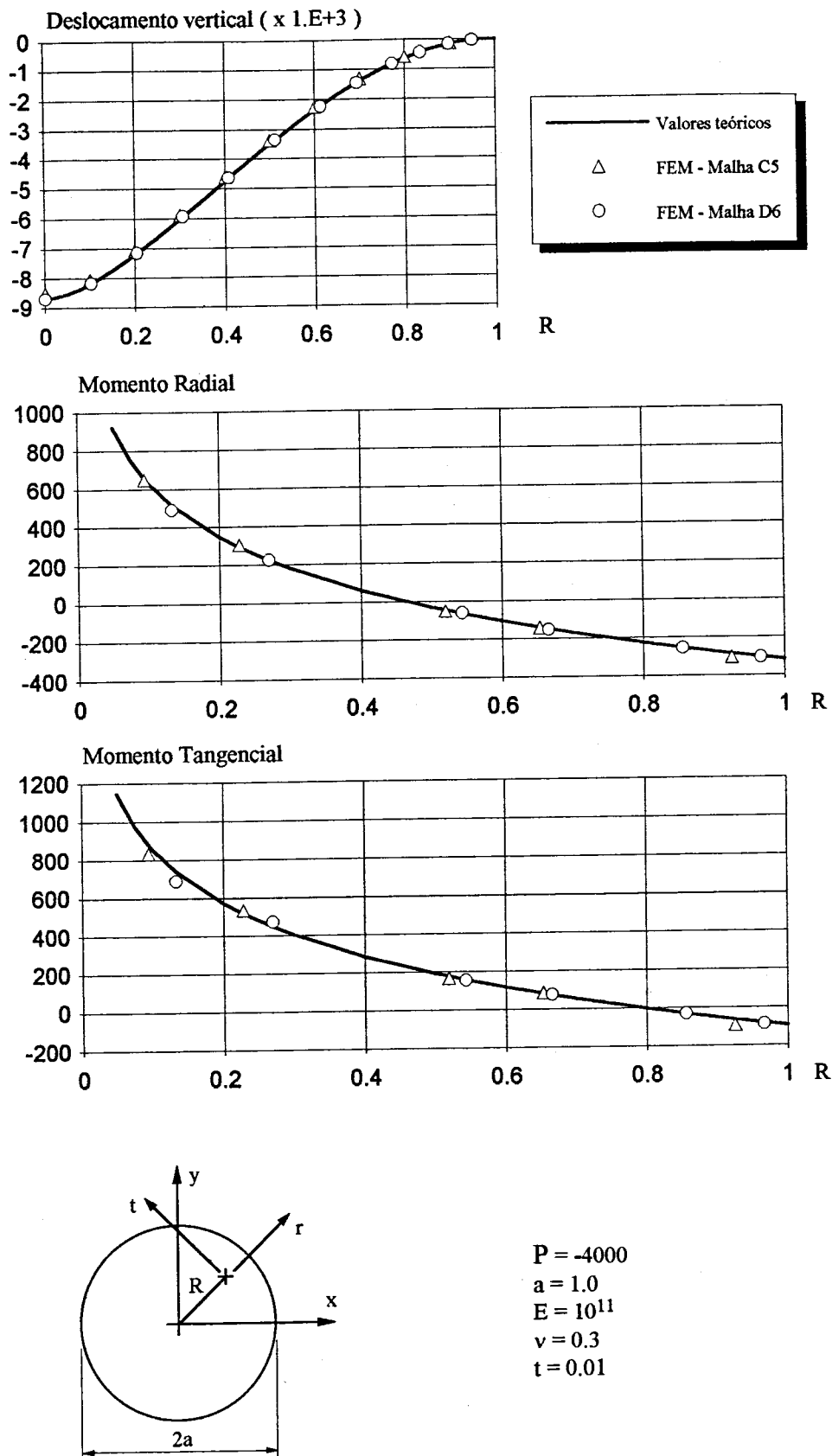


Fig. 4.21 - Placa circular encastrada, carga concentrada ao centro.

4.5 - Placa triangular

Um caso simples de flexão de placas com solução analítica conhecida é o de um triângulo equilátero com os três bordos apoiados e submetido a uma carga uniformemente distribuída.

No Anexo I reproduzimos de [T3] as expressões analíticas referentes à superfície deformada e aos momentos.

Na Figura 4.22 estão indicados os dados do problema e as malhas usadas. As malhas com as referências T1, T2 e T3 fazem a discretização do triângulo equilátero completo por virtude de pretendemos as tensões ao longo da linha $Y=0$. As malhas S1, S2 e S3 referem-se somente a 1/6 da placa.

Os deslocamentos prescritos introduzidos foram $w=0$ ao longo dos 3 bordos da fronteira.

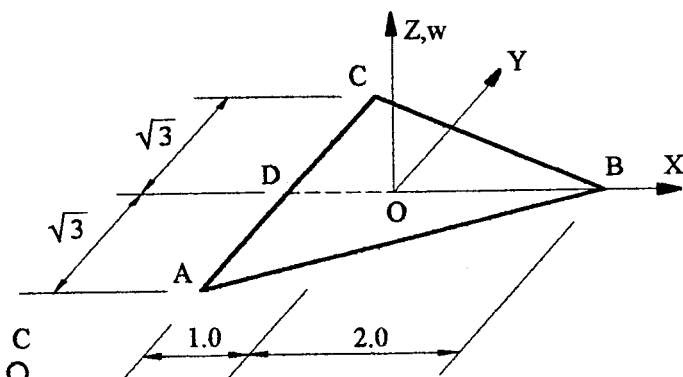
No Quadro 4.5 apresentamos os valores obtidos com as malhas S1, S2 e S3 para o deslocamento vertical no ponto central da placa.

Malha	NELEM	GDL	w	Δ (%)
S1	4	42	9.12469	0.27
S2	9	82	9.10921	0.10
S3	16	135	9.10474	0.05
Valor Teórico			9.10000	

(Factor = -1.E-3)

Quadro 4.5

Na Figura 4.23 apresentamos as curvas da solução analítica da variação dos deslocamentos e dos momentos M_x e M_y ao longo da linha $Y=0$, e os valores obtidos pelo MEF para as malhas T1, T2 e T3.



$$E = 1.0 \text{ E}+11$$

$$\nu = 0.3$$

$$t = 0.01$$

$$w = 0 \text{ em AB, BC e CA}$$

$$\text{Carga distribuída, } q = -1000$$

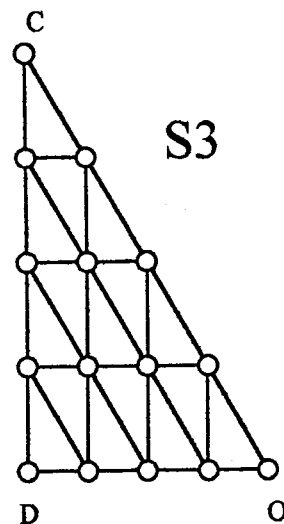
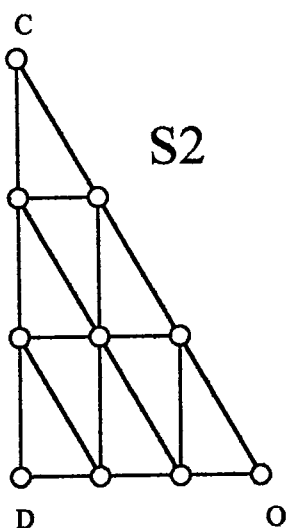
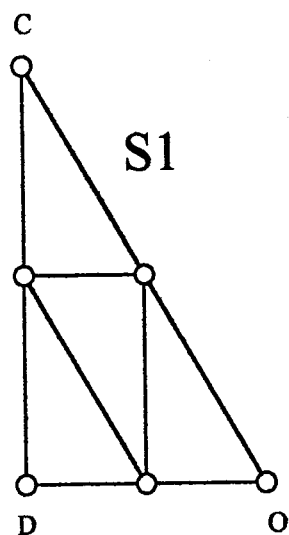
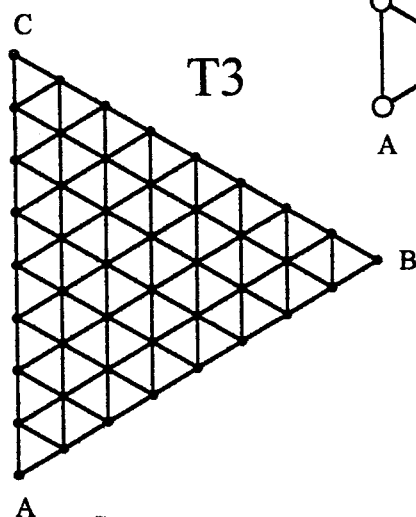
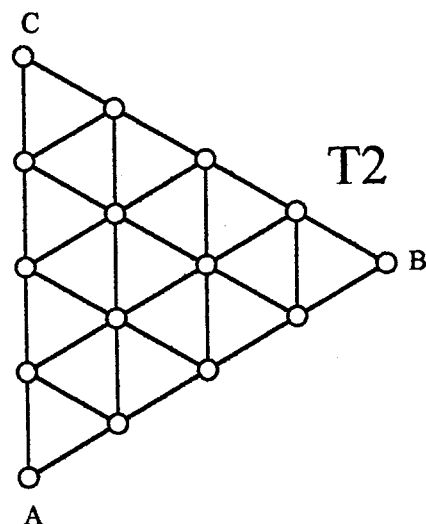
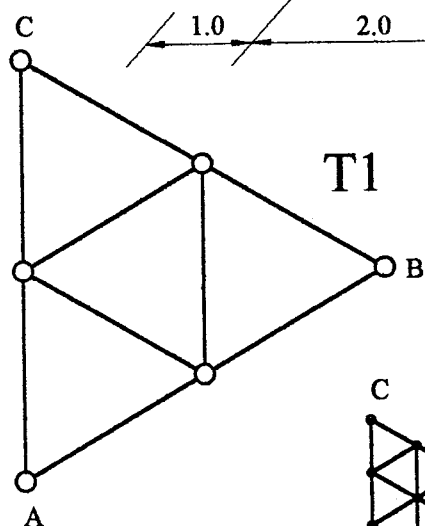


Figura 4.22

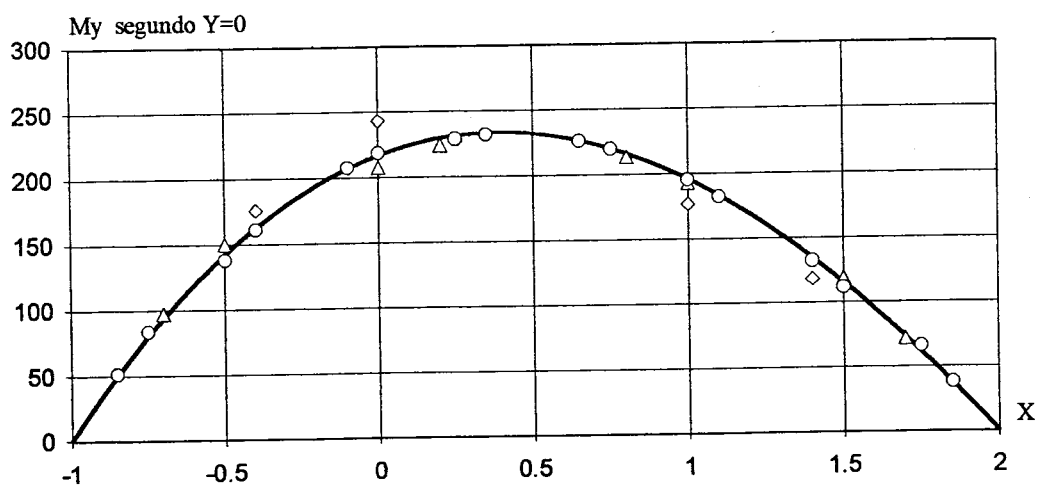
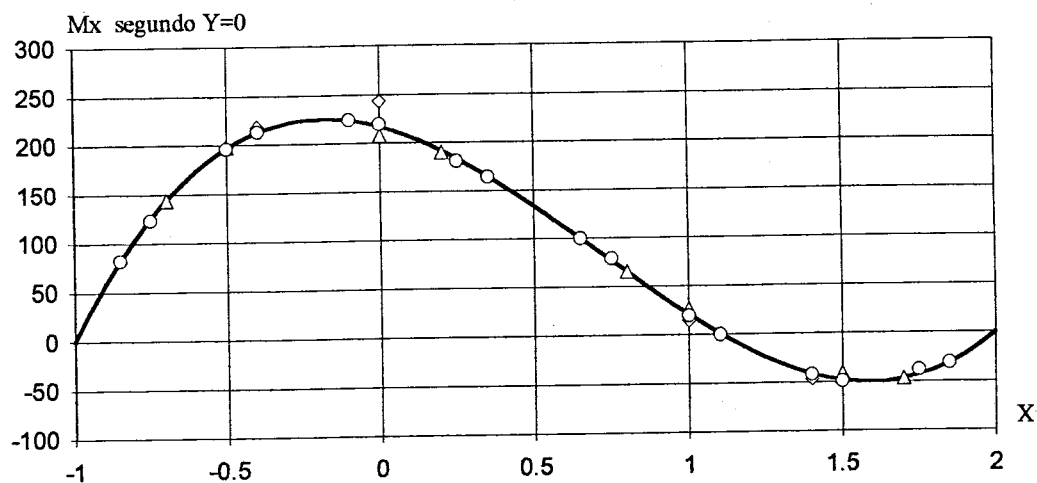
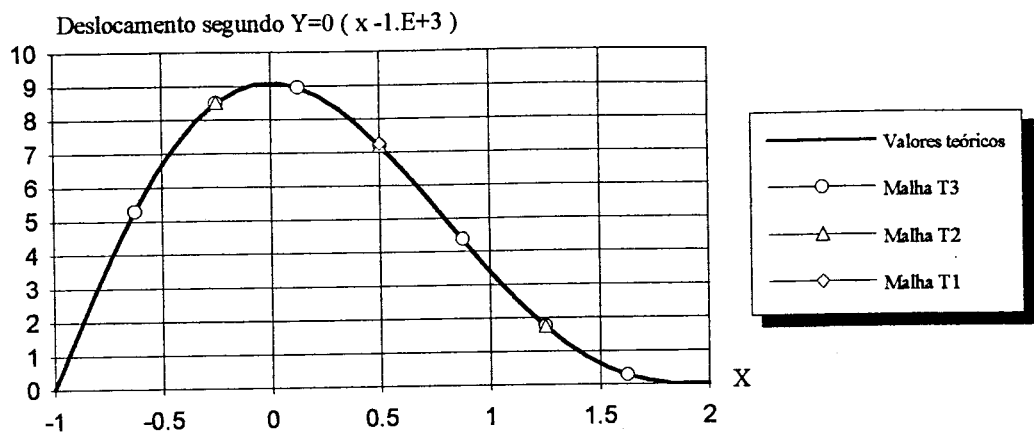


Figura 4.23 - Placa triangular apoiada, carga distribuída.

4.6 - Valores próprios

Um outro tipo de teste que pode aferir a "qualidade" de um elemento consiste em determinar os valores próprios ("eigenvalues") da matriz de rigidez.

Os valores próprios de uma matriz $[K]$ de dimensão n são as n raízes λ_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, da seguinte equação polinomial do n -ésimo grau em λ :

$$\text{Det}([K] - \lambda[I]) = 0$$

sendo $[I]$ a matriz diagonal identidade de ordem n .

O número de valores próprios nulos deve igualar o número de movimentos de corpo rígido possíveis. Como vimos em (2.5) esse número é de três para o elemento formulado.

É sabido que, em certos elementos onde a matriz de rigidez é obtida por integração numérica em número limitado de pontos de Gauss, o número de valores próprios nulos excede o número de graus de liberdade possíveis, daqui decorrendo a existência de modos próprios correspondentes a configurações espúrias [O2].

No Quadro 4.6 apresentamos os 15 valores próprios que obtivemos para cada um dos cinco elementos isolados representados na Fig. 4.1.

Valores Próprios				
Fig. 4.1 (a)	Fig. 4.1 (b)	Fig. 4.1 (c)	Fig. 4.1 (d)	Fig. 4.1 (e)
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5,315.39	463.54	234.18	654.87	219.85
5,315.39	1,289.64	768.69	2,396.30	696.43
6,168.27	4,854.64	2,547.43	4,879.41	2,830.57
10,795.40	5,602.86	3,993.94	6,450.55	3,460.37
28,534.60	11,717.70	18,203.50	40,188.90	14,334.80
28,635.70	21,661.30	45,007.70	48,621.70	20,694.10
28,635.80	64,148.20	129,015.00	98,748.50	61,990.10
70,248.30	146,983.00	334,730.00	196,843.00	96,756.30
70,248.30	271,980.00	1,219,690.00	247,561.00	242,639.00
261,623.00	467,429.00	2,625,630.00	358,814.00	290,157.00
976,343.00	1,112,690.00	6,590,370.00	4,933,800.00	1,365,450.00
976,343.00	15,651,400.00	320,024,000.00	76,980,400.00	3,106,910.00

Quadro 4.6

Confirma-se assim que são somente 3 os valores próprios nulos.

Constata-se ainda que os primeiros valores próprios dos elementos correspondentes às Figuras 4.1 (b), (c), (d) e (e) são bastante inferiores aos obtidos para o caso da Fig. 4.1 (a). Este facto está relacionado com a distorsão acentuada daqueles elementos.

De notar ainda a ocorrência de alguns valores próprios múltiplos no elemento de geometria regular da Fig. 4.1 (a).

4.7 - Sensibilidade do elemento ao factor λ

Uma questão pertinente na formulação deste elemento é a da localização dos nós sobre os bordos do triângulo, concretamente dos 2 nós de cada bordo que têm somente rotações normais como variáveis nodais associadas. A localização destes nós está definida pelo parâmetro adimensional λ , conforme se mostrou anteriormente na Fig. 3.1.

Nos exemplos até aqui apresentados fez-se sempre $\lambda = \sqrt{0.6} = 0.774597$ pelas razões que a seguir exporemos.

Note-se, desde já, que um valor de $\lambda=0$ corresponde à existência de um só nó, o nó situado a meio do bordo, ao qual estariam associadas 3 variáveis nodais repetidas, nomeadamente, a rotação normal. Nestas circunstâncias, a matriz de rigidez do elemento é, naturalmente, uma matriz singular com característica superior a 3, pelo que aquele valor limite de λ é de excluir.

Começamos por apresentar na Figura 4.24 os valores obtidos para o deslocamento central na placa triangular analisada anteriormente, utilizando as malhas S2 e S3 (ver parágrafo 4.5 e Figura 4.22), fazendo variar λ desde 0.1 a 1.0.

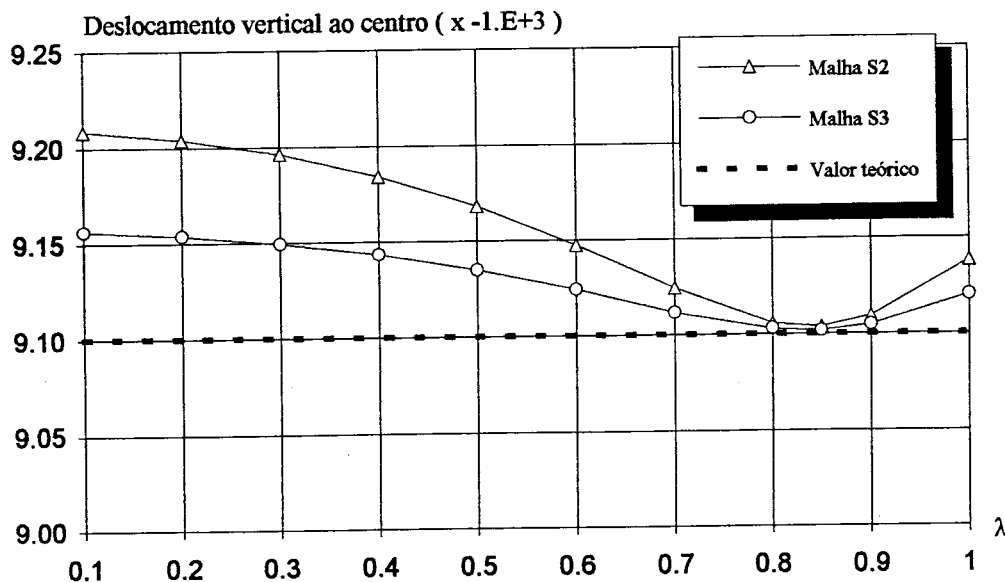


Figura 4.24 - Placa triangular, carga distribuída.

Verifica-se assim, para este caso de placa triangular de bordo simplesmente apoiado e carga uniformemente distribuída, que a melhor aproximação do deslocamento central se obtém para um valor aproximado de $\lambda=0.84$.

Na Figura 4.25 apresentamos os gráficos da variação do deslocamento central como função de λ , agora relativos a uma placa quadrada submetida a carga uniformemente distribuída e com condições fronteira de bordo apoiado e bordo encastrado. A análise foi efectuada considerando as malhas M2 e M3 (ver Fig. 4.3, parágrafo 4.3).

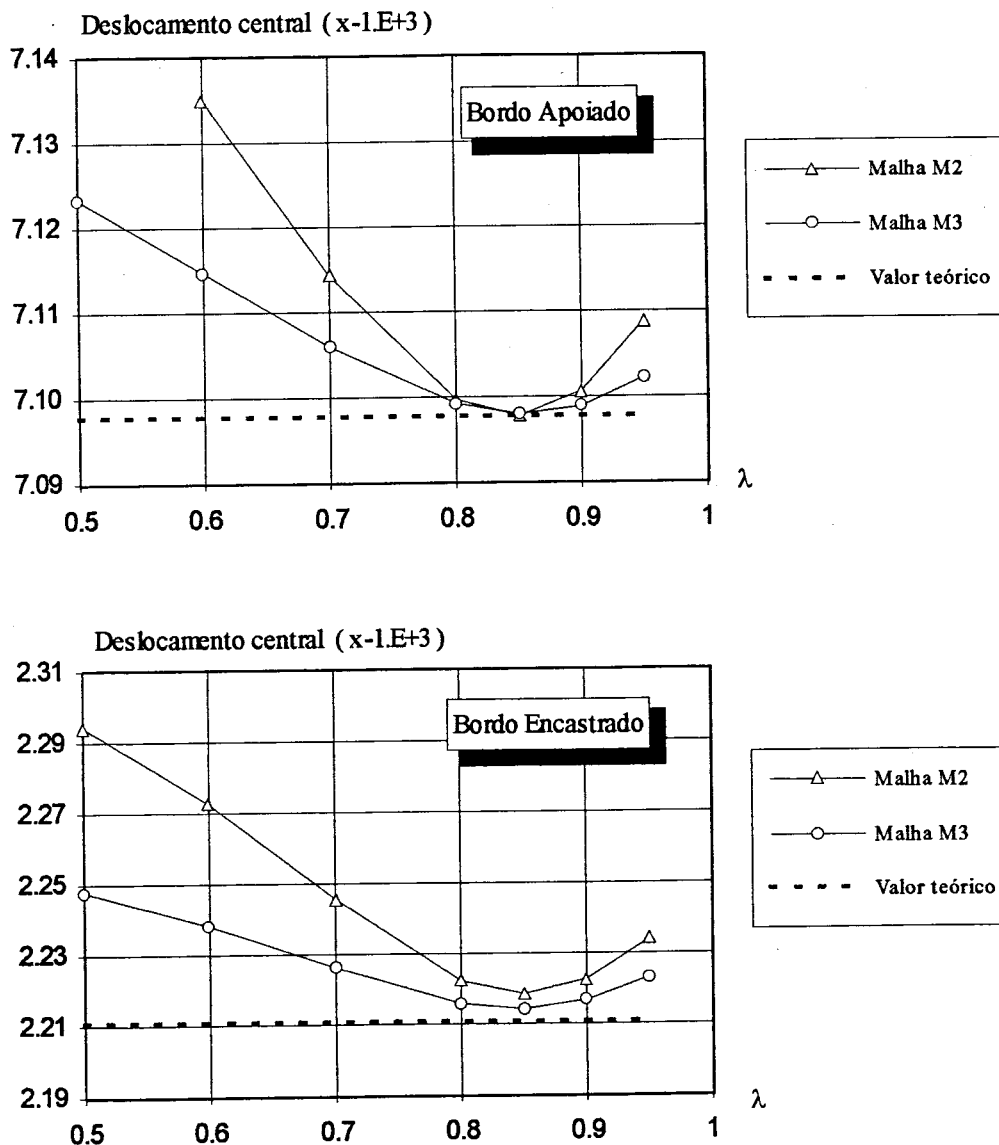


Figura 4.25 - Placa quadrada, carga distribuída.

Nestes casos verifica-se ainda que a melhor aproximação do deslocamento central se obtém para um valor aproximado de $\lambda=0.84$.

Analisámos a mesma situação de placa quadrada, mas agora com carga concentrada ao centro. Na Figura 4.26 apresentamos os gráficos correspondentes aos resultados obtidos.

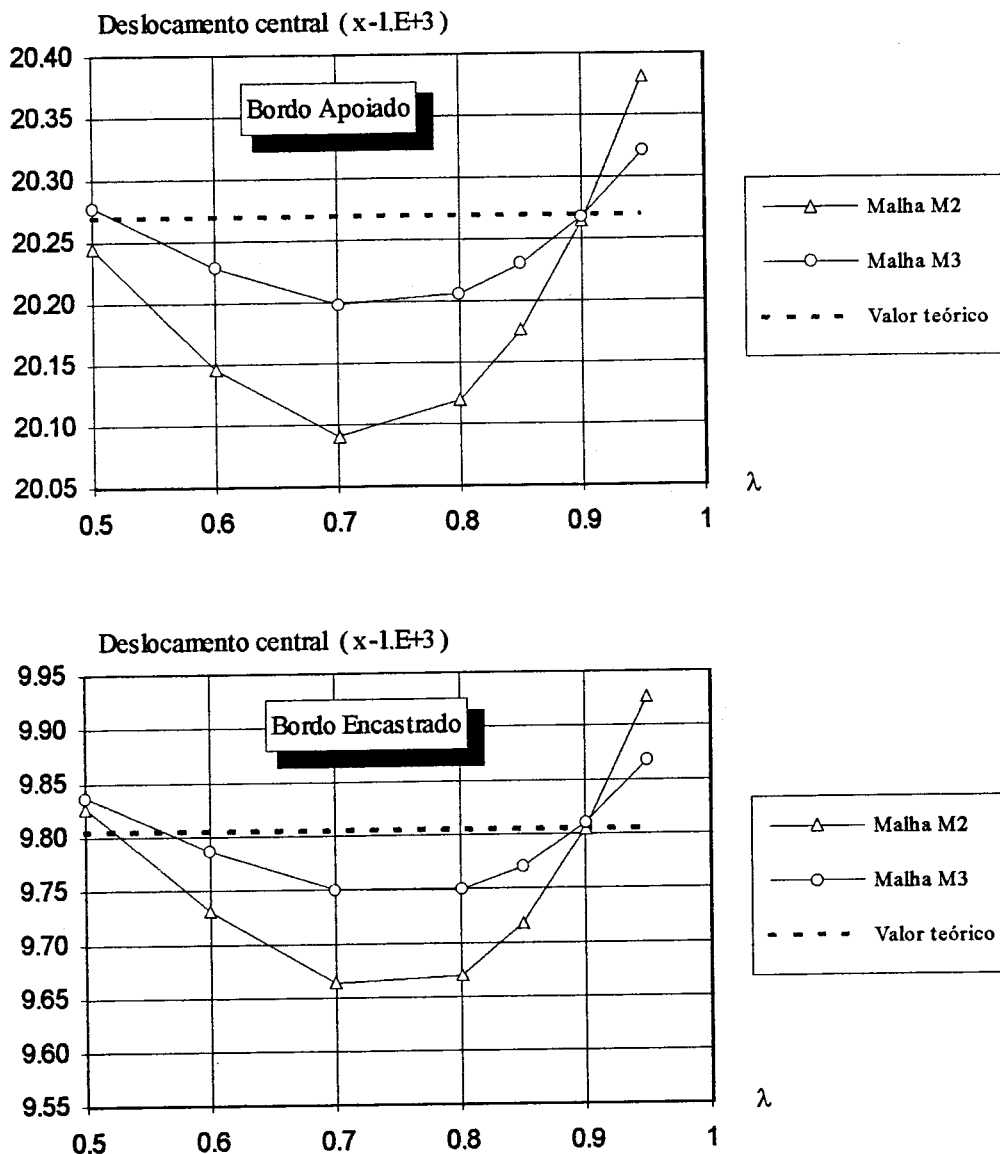


Figura 4.26 - Placa quadrada, carga concentrada.

Notamos agora que a obtenção do deslocamento central é pouco sensível a pequenas variações de λ em torno de um valor fixo, compreendido entre 0.7 e 0.8, que parece ser independente da malha utilizada.

Da análise de todos estes resultados, e tendo em conta a diversidade de situações, concluímos, sumariamente, que um valor compreendido entre 0.7 e 0.9 possa ser o valor "ideal" de λ . O valor $\lambda = \sqrt{0.6} = 0.774597$ foi assim escolhido, quer por corresponder àquele critério, quer porque define os pontos de integração usados na quadratura de Gauss unidimensional de 3 pontos.

CONCLUSÕES

Baseando-nos na teoria de placas delgadas de Kirchhoff, formulámos um elemento triangular de 12 nós, não conforme, com 15 graus de liberdade, sendo usadas como variáveis nodais 6 deslocamentos e 9 rotações normais aos bordos. Escrevemos em linguagem Fortran um programa para testar este elemento. Estabelecemos uma série apreciável de testes a que sujeitámos o elemento, nas condições que relatamos pormenorizadamente no Capítulo IV. Tentamos mostrar, quase sempre pela via gráfica, os resultados mais relevantes obtidos numericamente. Nalguns casos o significado dos resultados é absoluto, noutros é relativo, quer aos valores obtidos pela via analítica, quer aos obtidos por outros autores, também pelo MEF, mas com elementos diferentes.

As conclusões a que chegámos foram as seguintes:

- O elemento consegue reproduzir satisfatoriamente um estado de ausência de tensões-deformações quando submetido a uma condição de movimento de corpo rígido e reproduz ainda satisfatoriamente um estado de tensão-deformação constante não nulo.
- O elemento converge sempre para a solução exacta à medida que a malha é refinada, sendo o grau de convergência superior, em geral, à maioria dos outros elementos usados como termos de comparação. Nos casos de placas com fronteiras circulares a convergência é comparativamente mais lenta do que nos casos de fronteiras lineares, como aliás seria de esperar para um elemento de bordos rectos.
- Não conseguimos encontrar quaisquer limitações ao seu uso, sejam de natureza geométrica, de numeração dos elementos e/ou pontos nodais, da natureza das acções exteriores ou da fixação das condições fronteira, salvo aquelas que são naturalmente impostas pelas hipóteses de base da formulação e pelo método numérico usado.

Em face destas circunstâncias, julgamos ser este um elemento válido para o uso pelo Método dos Elementos Finitos na análise geral da flexão de placas delgadas.

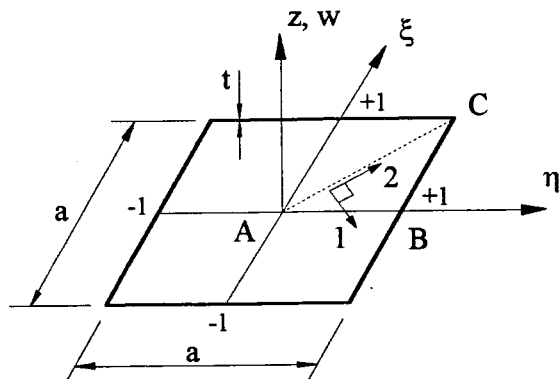
A reflexão sobre as características e o comportamento deste elemento, no tratamento geral dos problemas práticos de flexão, sugere-nos os seguintes melhoramentos, que poderão ser matéria para futuros trabalhos de desenvolvimento:

- a generalização das expressões que permitem determinar as forças nodais equivalentes aos casos de solicitação não uniforme;
- a extensão da formulação a elementos triangulares de lados curvos;
- a exploração de um novo elemento rectangular com 20 graus de liberdade, usando 4 subdomínios triangulares constituídos por este elemento e eliminando variáveis internas;
- a exploração, nos mesmos moldes deste elemento triangular, de um outro com 21 graus de liberdade, usando para o efeito um polinómio interpolador completo do 5º grau.

Anexo I

FORMULÁRIO DE PLACAS

1 - Placa Quadrada



E = 1.0 E+11

$\nu = 0.3$

$t = 0.01$

$a = 2.0$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Condições fronteira: (i) contorno apoiado
(ii) contorno encastrado

Carregamento: (i) carga uniformemente distribuída $q = -1000$
(ii) carga concentrada ao centro $P = -4000$

Variáveis determinadas:

(i) deslocamento vertical ao longo de AB	$w(\eta, \xi = 0)$
(ii) momento principal máximo ao longo de AC	$M_1(\eta, \xi = \eta)$
(ii) momento principal mínimo ao longo de AC	$M_2(\eta, \xi = \eta)$

Notação geral usada nas placas quadradas:

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{2}, \text{ ou } \alpha_i = \frac{i\pi}{2} \quad (1)$$

$$I_m = (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \text{ ou } I_i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \quad (2)$$

$$\alpha_{m\eta} = \eta \alpha_m \quad (3)$$

$$\alpha'_{m\eta} = (1 - \eta)\alpha_m \quad (4)$$

1.1 - Placa Apoiada, Carga Distribuída

Notação:
$$A_m = \frac{1}{\alpha_m^3 \cosh \alpha_m} \quad (5)$$

$$B_m = -A_m (\alpha_m \tanh \alpha_m + 2) \quad (6)$$

Funções de η (somatórios para $m=1,3,5,\dots \infty$):

$$W_0 = \sum_m \frac{2 + \alpha_m^3 B_m}{\alpha_m^5} I_m \cos \alpha_{m\eta} \quad (7)$$

$$D_{11} = - \sum_m (A_m \alpha_{m\eta} \sinh \alpha_{m\eta} + B_m \cosh \alpha_{m\eta}) I_m \cos \alpha_{m\eta} \quad (8)$$

$$D_{22} = \sum_m [A_m \alpha_{m\eta} \sinh \alpha_{m\eta} + (2A_m + B_m) \cosh \alpha_{m\eta}] I_m \cos \alpha_{m\eta} \quad (9)$$

$$D_{12} = \sum_m [A_m \alpha_{m\eta} \sinh \alpha_{m\eta} + (A_m + B_m) \sinh \alpha_{m\eta}] I_m \sin \alpha_{m\eta} \quad (10)$$

Deslocamentos verticais:

$$w(\eta, \xi = 0) = \frac{qa^4}{16D} W_0 \quad (11)$$

Momentos principais:

$$M_1(\eta, \xi = \eta) = \frac{qa^2}{4} \left[D_{11} + \nu D_{22} + \frac{\eta^2 - 1}{2} + (1 - \nu) D_{12} \right] \quad (12)$$

$$M_2(\eta, \xi = \eta) = \frac{qa^2}{4} \left[D_{11} + \nu D_{22} + \frac{\eta^2 - 1}{2} - (1 - \nu) D_{12} \right] \quad (13)$$

**PLACA APOIADA - CARGA DISTRIBUIDA
SOLUCAO ANALITICA TIMOSHENKO**

N	η	w (x1000)	M1	M2	(a)	(b)	(c)	(d)
1	0.000000	-7.097742	191.546	191.546	51	9	9	0
2	0.040000	-7.084872	191.416	190.636	25	9	9	13
3	0.066667	-7.062002	191.185	189.022	15	9	9	13
4	0.111111	-6.998503	190.542	184.561	9	9	9	13
5	0.133333	-6.954941	190.099	181.511	37	9	9	13
6	0.160000	-6.892249	189.462	177.145	31	9	11	11
7	0.200000	-6.776532	188.286	169.186	5	5	5	11
8	0.222222	-6.702176	187.518	164.053	41	11	11	9
9	0.240000	-6.636693	186.845	159.593	37	11	11	13
10	0.266667	-6.529239	185.737	152.331	41	11	11	13
11	0.333333	-6.217933	182.403	131.293	3	3	3	13
12	0.360000	-6.067259	180.937	121.902	25	13	13	11
13	0.400000	-5.829253	178.441	106.732	43	13	13	5
14	0.440000	-5.567940	175.704	90.461	25	13	15	15
15	0.444444	-5.537490	175.384	88.593	43	11	15	9
16	0.466667	-5.381058	173.741	79.084	15	13	15	13
17	0.533333	-4.871053	168.391	49.127	43	13	17	15
18	0.555556	-4.687775	166.480	38.766	9	9	9	17
19	0.560000	-4.650515	166.089	36.676	41	15	17	17
20	0.600000	-4.304204	162.438	17.630	5	5	5	17
21	0.640000	-3.935733	158.731	-1.516	39	17	21	19
22	0.666667	-3.680804	156.544	-14.688	53	19	21	3
23	0.733333	-3.010475	149.620	-45.707	15	15	15	19
24	0.760000	-2.730291	147.002	-57.812	25	25	25	21
25	0.777778	-2.540180	145.252	-65.684	9	9	9	23
26	0.800000	-2.298512	143.330	-75.358	51	29	31	5
27	0.840000	-1.854566	139.462	-91.232	25	25	25	31
28	0.866667	-1.552840	137.153	-100.995	15	15	15	35
29	0.888889	-1.298352	135.443	-108.458	53	47	53	9
30	0.933333	-0.782903	132.347	-120.754	59	59	83	15
31	0.960000	-0.470609	130.956	-126.106	51	93	101	25
32	1.000000	0.000000	129.929	-129.929	0	0	0	241

- (a) - N° de iterações efectuadas na expressão (7) até atingir um termo $< 1.0E-8$ do valor acumulado
(b) - N° de iterações efectuadas na expressão (8) até atingir um termo $< 1.0E-7$ do valor acumulado
(c) - N° de iterações efectuadas na expressão (9) até atingir um termo $< 1.0E-7$ do valor acumulado
(d) - N° de iterações efectuadas na expressão (10) até atingir um termo $< 1.0E-7$ do valor acumulado

1.2 - Placa Apoiada, Carga Concentrada

Funções de η (somatórios para $m=1,3,5,\dots\infty$):

$$W_0 = \sum_m \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \frac{\cos \alpha_{m\eta}}{\alpha_m^3} \quad (14)$$

$$D_{11} = \sum_m \left[\alpha'_{m\eta} \cosh \alpha'_{m\eta} - (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m) \sinh \alpha'_{m\eta} \right] \frac{\cos \alpha_{m\eta}}{\alpha_m \cosh \alpha_m} \quad (15)$$

$$D_{12} = \sum_m \left[\alpha'_{m\eta} \sinh \alpha'_{m\eta} - \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \alpha'_{m\eta} \right] \frac{\sin \alpha_{m\eta}}{\alpha_m \cosh \alpha_m} \quad (16)$$

Deslocamentos verticais:

$$w(\eta, \xi = 0) = \frac{Pa^2}{16D} W_0 \quad (17)$$

Momentos principais:

$$M_1(\eta, \xi = \eta) = \frac{P}{4} [(1 + \nu) D_{11} + (1 - \nu) D_{12}] \quad (18)$$

$$M_2(\eta, \xi = \eta) = \frac{P}{4} [(1 + \nu) D_{11} - (1 - \nu) D_{12}] \quad (19)$$

**PLACA APOIADA - CARGA CONCENTRADA
SOLUCAO ANALITICA TIMOSHENKO**

N	η	w (x1000)	M1	M2	(a)	(b)	(c)
1	0.000000	-20.268867	∞	∞	241	0	0
2	0.040000	-20.149176	1329.593	1105.883	75	75	199
3	0.066667	-19.976951	1121.275	895.980	75	75	143
4	0.111111	-19.566151	912.007	682.332	63	63	87
5	0.133333	-19.313515	838.082	605.415	127	67	73
6	0.160000	-18.973787	764.818	527.871	119	57	61
7	0.200000	-18.399127	676.493	431.753	55	51	51
8	0.222222	-18.050433	635.505	385.749	149	51	51
9	0.240000	-17.757470	605.942	351.833	121	51	51
10	0.266667	-17.296811	566.094	304.908	131	51	51
11	0.333333	-16.048209	484.818	203.289	51	51	51
12	0.360000	-15.514751	458.058	167.440	75	51	51
13	0.400000	-14.684133	422.786	117.659	183	51	51
14	0.440000	-13.820811	392.485	71.968	75	51	51
15	0.444444	-13.723021	389.391	67.118	155	51	51
16	0.466667	-13.229138	374.667	43.500	75	51	51
17	0.533333	-11.702210	337.200	-21.459	137	51	51
18	0.555556	-11.179906	326.679	-41.273	63	51	51
19	0.560000	-11.074789	324.681	-45.129	141	51	51
20	0.600000	-10.118627	308.189	-78.261	55	51	51
21	0.640000	-9.146488	294.161	-108.575	139	51	51
22	0.666667	-8.490771	286.040	-127.212	257	51	51
23	0.733333	-6.829130	269.531	-168.175	75	51	51
24	0.760000	-6.157015	264.284	-182.241	75	51	51
25	0.777778	-5.706940	261.174	-190.860	63	51	51
26	0.800000	-5.142322	257.700	-200.764	259	51	51
27	0.840000	-4.121229	252.526	-216.101	75	51	51
28	0.866667	-3.437670	249.797	-224.506	75	51	51
29	0.888889	-2.866612	247.936	-230.374	269	51	51
30	0.933333	-1.721607	245.279	-238.957	269	51	51
31	0.960000	-1.033316	244.337	-242.061	299	51	51
32	1.000000	0.000000	243.811	-243.811	0	0	51

(a) - N° de iterações efectuadas na expressão (14) até atingir um termo $< 1.0E-7$ do valor acumulado

(b) - N° de iterações efectuadas na expressão (15) até atingir um termo $< 1.0E-7$ do valor acumulado

(c) - N° de iterações efectuadas na expressão (16) até atingir um termo $< 1.0E-7$ do valor acumulado

Nota: Imposta a condição do n° de iterações ser maior que 50.

1.3 - Placa Encastrada, Carga Distribuída

Notação:

E_m para $m=1,3,5,\dots \infty$, são as incógnitas do seguinte sistema de ∞ equações:

$$\frac{E_i}{i} \left(\tanh \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} \right) + \frac{8i}{\pi} \sum_m \frac{E_m}{m^3 \left[1 + \left(\frac{i}{m} \right)^2 \right]^2} = \frac{1}{i^4} \left(\tanh \alpha_i - \frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} \right) \quad (20)$$

$$F_m = \frac{I_m \alpha_m E_m}{\pi^5 m^2 \cosh \alpha_m} \quad (21)$$

Funções de η (somatórios para $m=1,3,5,\dots \infty$):

$$W_0 = \sum_m F_m \left[\eta \sinh \alpha_{m\eta} - \tanh \alpha_m (\cosh \alpha_{m\eta} + \cos \alpha_{m\eta}) \right] \quad (22)$$

$$D_{11} = \sum_m F_m \alpha_m \cosh \alpha_{m\eta} \cos \alpha_{m\eta} \quad (23)$$

$$D_{12} = \sum_m F_m \alpha_m \left[(1 - \alpha_m \tanh \alpha_m) \sinh \alpha_{m\eta} + \alpha_{m\eta} \cosh \alpha_{m\eta} \right] \sin \alpha_{m\eta} \quad (24)$$

Deslocamentos verticais:

$$w(\eta, \xi = 0) = w_{\text{(placa apoiada)}} + \frac{2qa^4}{D} W_0 \quad (25)$$

Momentos principais:

$$M_1(\eta, \xi = \eta) = M_{1 \text{ (placa apoiada)}} + 16qa^2 \left[(1 + \nu) D_{11} + (1 - \nu) D_{12} \right] \quad (26)$$

$$M_2(\eta, \xi = \eta) = M_{2 \text{ (placa apoiada)}} + 16qa^2 \left[(1 + \nu) D_{11} - (1 - \nu) D_{12} \right] \quad (27)$$

**PLACA ENCASTRADA - CARGA DISTRIBUIDA
SOLUCAO ANALITICA TIMOSHENKO**

N	η	w (x1000)	M1	M2
1	0.000000	-2.210765	91.620	91.620
2	0.040000	-2.204611	91.393	90.809
3	0.066667	-2.193685	90.989	89.373
4	0.111111	-2.163399	89.865	85.428
5	0.133333	-2.142701	89.091	82.754
6	0.160000	-2.112975	87.974	78.956
7	0.200000	-2.058079	85.916	72.132
8	0.222222	-2.023448	84.571	67.799
9	0.240000	-1.992819	83.392	64.079
10	0.266667	-1.942804	81.452	58.112
11	0.333333	-1.802536	75.652	41.479
12	0.360000	-1.731443	73.049	34.408
13	0.400000	-1.625041	68.693	23.438
14	0.440000	-1.510331	63.919	12.356
15	0.444444	-1.497114	63.363	11.132
16	0.466667	-1.429721	60.508	5.062
17	0.533333	-1.216342	51.280	-12.167
18	0.555556	-1.142110	48.012	-17.390
19	0.560000	-1.127287	47.347	-18.394
20	0.600000	-0.992584	41.205	-26.746
21	0.640000	-0.853693	35.002	-33.438
22	0.666667	-0.762250	31.183	-37.266
23	0.733333	-0.539447	20.476	-41.087
24	0.760000	-0.454747	16.549	-40.762
25	0.777778	-0.400502	14.021	-39.872
26	0.800000	-0.335138	11.254	-38.093
27	0.840000	-0.227527	6.314	-32.155
28	0.866667	-0.164336	3.687	-26.804
29	0.888889	-0.117872	2.001	-21.611
30	0.933333	-0.045265	-0.151	-9.971
31	0.960000	-0.016936	-0.425	-3.660
32	1.000000	0.000000	0.035	-0.035

Nota: Usaram-se 50 termos na resolução do sistema de equações (20) e nos somatórios (22), (23) e (24).

1.4 - Placa Encastrada, Carga Concentrada

Notação:

E_m para $m=1,3,5,\dots\infty$, são as incógnitas do seguinte sistema de ∞ equações:

$$\frac{E_i}{i} \left(\tanh \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} \right) + \frac{8i}{\pi} \sum_m \frac{E_m}{m^3 \left[1 + \left(\frac{i}{m} \right)^2 \right]^2} = \frac{I_i \alpha_i \tanh \alpha_i}{i^2 \cosh \alpha_i} \quad (28)$$

$$F_m = \frac{I_m \alpha_m E_m}{\pi^3 m^2 \cosh \alpha_m} \quad (29)$$

Funções de η (somatórios para $m=1,3,5,\dots\infty$):

$$W_0 = \sum_m F_m \left[\eta \sinh \alpha_{m\eta} - \tanh \alpha_m (\cosh \alpha_{m\eta} + \cos \alpha_{m\eta}) \right] \quad (30)=(22)$$

$$D_{11} = \sum_m F_m \alpha_m \cosh \alpha_{m\eta} \cos \alpha_{m\eta} \quad (31)=(23)$$

$$D_{12} = \sum_m F_m \alpha_m \left[(1 - \alpha_m \tanh \alpha_m) \sinh \alpha_{m\eta} + \alpha_{m\eta} \cosh \alpha_{m\eta} \right] \sin \alpha_{m\eta} \quad (32)=(24)$$

Deslocamentos verticais:

$$w(\eta, \xi = 0) = w_{\text{(placa apoiada)}} + \frac{Pa^2}{2D} W_0 \quad (33)$$

Momentos principais:

$$M_1(\eta, \xi = \eta) = M_{1\text{(placa apoiada)}} + \frac{Pa^2}{2} \left[(1 + \nu) D_{11} + (1 - \nu) D_{12} \right] \quad (34)$$

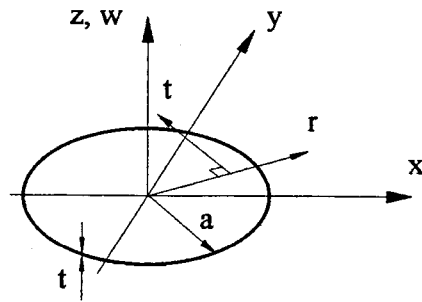
$$M_2(\eta, \xi = \eta) = M_{2\text{(placa apoiada)}} + \frac{Pa^2}{2} \left[(1 + \nu) D_{11} - (1 - \nu) D_{12} \right] \quad (35)$$

**PLACA ENCASTRADA - CARGA CONCENTRADA
SOLUCAO ANALITICA TIMOSHENKO**

N	η	w (x1000)	M1	M2
1	0.000000	-9.805206	∞	∞
2	0.040000	-9.699958	1114.564	891.117
3	0.066667	-9.553415	906.014	681.459
4	0.111111	-9.214002	696.101	468.566
5	0.133333	-9.010484	621.729	392.229
6	0.160000	-8.741546	547.819	315.607
7	0.200000	-8.297396	458.295	221.457
8	0.222222	-8.033880	416.519	176.923
9	0.240000	-7.815608	386.263	144.416
10	0.266667	-7.477960	345.267	100.053
11	0.333333	-6.595105	260.542	7.783
12	0.360000	-6.231564	232.171	-22.867
13	0.400000	-5.681626	194.231	-62.926
14	0.440000	-5.130559	160.979	-96.224
15	0.444444	-5.069447	157.541	-99.515
16	0.466667	-4.765004	141.049	-114.745
17	0.533333	-3.868414	97.898	-148.129
18	0.555556	-3.577612	85.398	-155.093
19	0.560000	-3.520120	83.002	-156.232
20	0.600000	-3.012967	62.939	-162.651
21	0.640000	-2.527855	45.466	-162.140
22	0.666667	-2.218997	35.210	-157.980
23	0.733333	-1.507662	14.439	-134.853
24	0.760000	-1.251295	8.125	-120.998
25	0.777778	-1.090492	4.572	-110.531
26	0.800000	-0.901702	0.890	-96.291
27	0.840000	-0.599265	-3.561	-68.467
28	0.866667	-0.426957	-4.955	-49.455
29	0.888889	-0.302973	-5.178	-34.230
30	0.933333	-0.113989	-3.396	-9.101
31	0.960000	-0.042162	-1.474	-0.507
32	1.000000	0.000000	0.038	-0.038

Nota: Usaram-se 50 termos na resolução do sistema de equações (28) e nos somatórios (30), (31) e (32).

2 - Placa Circular



$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Condições fronteira: (i) contorno apoiado
(ii) contorno encastrado

Carregamento: (i) carga uniformemente distribuída q
(ii) carga concentrada ao centro P

Variáveis determinadas:

(i) deslocamento vertical ao longo do raio	$w(r)$
(ii) momento radial ao longo do raio	$M_r(r)$
(ii) momento tangencial ao longo do raio	$M_t(r)$

2.1 - Carga Distribuída

Bordos encastrados:

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (36)$$

$$M_r = -\frac{q}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)] \quad (37)$$

$$M_t = -\frac{q}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)] \quad (38)$$

Bordos apoiados:

$$w = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right) \quad (39)$$

$$M_r = -\frac{q}{16} (3 + \nu)(a^2 - r^2) \quad (40)$$

$$M_t = -\frac{q}{16} \left[a^2 (3 + \nu) - r^2 (1 + 3\nu) \right] \quad (41)$$

2.2 - Carga Concentrada

Bordos encastrados:

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left[a^2 - r^2 \left(1 - 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right] \quad (42)$$

$$M_r = -\frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right] \quad (43)$$

$$M_t = -\frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} - \nu \right] \quad (44)$$

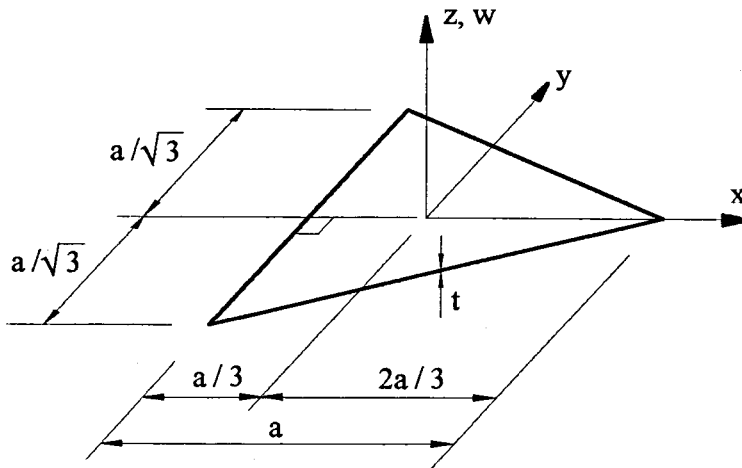
Bordos apoyados:

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right] \quad (45)$$

$$M_r = -\frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{a}{r} \quad (46)$$

$$M_t = -\frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu \right] \quad (47)$$

3 - Placa Triangular (Triângulo Equilátero)



$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Condições fronteira: (i) contorno apoiado

Carregamento: (i) carga uniformemente distribuída q

Variáveis determinadas:

(i) deslocamento vertical	$w(x, y)$
(ii) momento segundo x	$M_x(x, y)$
(ii) momento segundo y	$M_y(x, y)$
(iv) momento segundo xy	$M_{xy}(x, y)$

$$w = \frac{q}{64aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right) \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{q}{64aD} \left(-20x^3 + 12ax^2 + \frac{8}{3}a^2x + 12xy^2 + 4ay^2 - \frac{32}{27}a^3 \right) \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{q}{64aD} \left(4x^3 + 4ax^2 - \frac{8}{3}a^2x + 36xy^2 + 12ay^2 - \frac{32}{27}a^3 \right) \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{q}{64aD} \left(12x^2y + 8axy - \frac{8}{3}a^2y + 12y^3 \right) \quad (51)$$

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (52)$$

$$M_y = D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (53)$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (54)$$

REFERÊNCIAS

- [A1] Adini, A. e Clough, R. W., "Analysis of plate bending by the finite element method", Nat. Sci. Foundation, G7337, 1960.
- [A2] Argyris, J. H., Fried, L. e Scharpf, D. W., "The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method", Aeronautical Journal of the Royal Aeron. Society, Vol. 72, pp 701-709, 1968.
- [B1] Burnett, D. S., "Finite Element Analysis", Addison-Wesley Publishing Co., 1987.
- [B2] Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M. e Zienkiewicz, O. C., "Triangular elements bending-conforming and non conforming solutions", Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
- [B3] Bell, K., "A refined triangular plate bending finite element", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol 1, pp 101-122, 1969.
- [B4] Bell, K., "Analysis of thin plates in bending using triangular finite elements", Div. of Struct. Mech. Eng, Report, The Tech. University of Norway, Trondheim, 1968
- [B5] Batoz, J. L. e Tahar, M. B., "Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol 18, pp 1655-1677, 1982.
- [C1] Clough, R. W., "The finite element method in plane stress analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. Electronic Computation, Pittsburg PA, pp 345-378, 1960.
- [C2] Clough, R. W. e Tocher, J. L., "Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending", Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, pp 515-545, 1965.
- [C3] Clough, R. W. e Felippa, C. A., "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending", Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, pp 399-440, 1968.
- [C4] Connor, J. e Will, G., "A triangular flat plate bending element", Tech. Rep. 68-3, Depart. of Civil Eng., M. I. T., Cambridge, Mass., 1968.
- [C5] Chu, T. C. e Schnobrich, W. C., "Finite element analysis of translational shells", Comput. & Structures, 2, pp 197-222, 1972.
- [C6] Cowper, G. R., Kosko, E., Lindberg, G. M. e Olson, D. M., "A high precision triangular plate bending element", Report LR-514, National Aeronautical Establishment, Nat. Research Council of Canada, Ottawa, 1968.
- [C7] Caramanlian, C., Selby, K. A. e Will, G. T., "A quintic conforming plate bending triangle", Int. J. Num. Meth. Eng. 12 (7), pp 1109-1130, 1978.

- [H1] Hrabok, M. M. e Hrudey, T. M., "A review and catalogue of plate bending finite elements", *Comput. & Structures*, Vol. 19, no. 3, pp 479-485, 1984.
- [H2] Holand, I. e Bell, K., "Finite element methods in stress analysis", Ed. Tapir, Trondheim, Norway, 1969.
- [H3] Harvey, J. W. e Kelsey, S., "Triangular plate elements with enforced continuity", *A. I. A. A. J.*, Vol. 9, pp 1026, 1971.
- [H4] Hinton, E. e Owen, D. R. J., "Finite Element Programming", Academic Press, 1977.
- [I1] Irons, B. M. e Razzaque, A., "Experience with the patch test for convergence of finite element method", *Math. Found. of Finite Elem. Meth.*, pp 557-587, Academic Press, 1972.
- [I2] Irons, B. M. e Ahmad, S., "Techniques of finite elements", Ellis Harwood, Chichester, 1980.
- [I3] Irons, B. M. e Razzaque, A., "Shape function formulations for elements other than displacement models", *Symp. on Variational Meth. in Eng.*, Univ. of Southampton, pp 4/59-71, 1972.
- [I4] Irons, B. M., "A conforming quartic triangular element for plate bending", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 1, pp 29-46, 1969.
- [J1] Jeyachandrabrose, C. e Kirkhope, J. e Meekisho, L., "An improved discrete Kirchhoff quadrilateral thin-plate bending element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 24, pp 635-654, 1987.
- [M1] Morley, L. S. D., "On the constant moment plate bending element", *J. Strain Analysis*, Vol. 6, pp 20-24, 1971.
- [M2] Morley, L. S. D., "Finite element criteria for some shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 20, pp 587-592, 1984.
- [O1] Oñate, E., "Cálculo de estruturas por el método de elementos finitos", Centro Internacional de Métodos Num. en Ingeniería, 1992.
- [O2] Oliveira, C. A. M. e Martins, R. A. F., "An analysis of the Semiloof shell element stiffness and mass matrices", *Engineering Computations*, Vol. 2 (4), 1985.
- [P1] Pian, T. H. H. e Tong, P., "Basis of finite element methods for solid continua", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1 (1), pp 3-28, 1969.
- [R1] Razzaque, A., "Finite element analysis of plates and shells", Ph.D. Thesis, Civil Eng. Depart., Univ. of Wales, Swansea, 1972.
- [S1] Shieh, W., Lee, S. L. e Parmelee, R., "Analysis of plate bending by triangular elements", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE 94, EM5, pp 1089-1107, 1968.

- [S2] Specht, B., "Modified shape function for three noded plate bending element passing the patch test", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 26, pp 705-715, 1988.
- [S3] Svec, O. J., Gladwell, G. M. L., "A triangular plate bending element for contact problems", Int. J. Solids Structures, 9 (3), pp 435-446, 1973.
- [T1] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. e Topp, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aeron. Sci., Vol. 23 (9), pp 805-823 e 854, 1956.
- [T2] Timoshenko, S. P. e Goodier, J. N., "Teoria de la elasticidad", Ed. Urmo, 1968.
- [T3] Timoshenko, S. P. e Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", 2nd ed., McGraw-Hill, 1970.
- [T4] Timoshenko, S. P., "Resistência dos Materiais", Vol. 1 e 2, Ao Livro Técnico SA, 1969.
- [T5] Taylor, R. L., Zienkiewicz, O. C., Simo, J. C. e Chan, A. H. C., "The patch test - A condition for assessing FEM convergence", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 22, pp 32-62, 1986.
- [T6] Tocher, J. L., "Analysis of plates using triangular elements", Ph.D. Thesis, Depart. of Civil Eng., Univ. of California, Berkeley, 1962.
- [Z1] Zienkiewicz, O. C., "The finite element methode", 3rd ed., McGraw-Hill, 1977.

