

# Determinação dos descritores de desempenho dos processos de classificação de uma instalação industrial de lavagem de caulinos

José Alexandre Pinto de Oliveira

Dissertação realizada no âmbito do  
Mestrado em Engenharia de Minas e Geo-Ambiente

Orientadores:

Professora Aurora Magalhães Futuro Silva

Professor Rui Jorge Coelho de Sousa

Julho de 2020



## Agradecimentos

O meu muito obrigado

À minha família e amigos por todo apoio que sempre me dão

Aos meus professores pelo conhecimento transmitido, em especial à Professora Aurora Futuro, ao Professor Rui Sousa e ao Professor Machado Leite, pela orientação que recebi na elaboração desta dissertação

À Mota Mineral S.A. e ao Engenheiro Valdemar pela ajuda e disponibilidade que demonstraram sempre que me receberam.



## Resumo

Esta dissertação tem como objetivo final a simulação de uma instalação de tratamento de caulinos, aproximando-se da realidade tanto quanto possível.

Para a obtenção de dados sobre os quais se possa trabalhar foi necessário o levantamento de uma instalação de tratamento de caulinos em funcionamento, a amostragem completa da mesma e a análise granulométrica dessas mesmas amostras.

Os dados obtidos permitiram então a determinação dos descritores de desempenho relevantes, nomeadamente a distribuição do calibre das partículas, as curvas de partição dos separadores do sistema e o rendimento ponderal da operação, indicadores fortes de como uma instalação opera. Foram necessárias também técnicas de minimização de erros para contrariar algumas deficiências nos dados em si, algo características deste tipo de amostragem.

O ajuste de modelos teóricos aos dados obtidos foi realizado para que, com os modelos teóricos se possa então montar uma simulação matemática da instalação de tratamento.

Por fim foi possível simular a instalação de tratamento de caulino como ela está a funcionar, e também a simular algumas hipóteses teóricas, vendo quais seriam os efeitos das alterações.

Palavras-chave: caulino, tratamento de minérios, classificação, ciclone, análise granulométrica, simulação



## Abstract

This dissertation's ultimate goal is to simulate a kaolin treatment plant, getting as close to reality as possible.

To obtain workable data it was needed to get a scheme of the kaolin treatment plant as it is operating, its complete sampling and the granulometric analysis of those very samples.

The obtained data allowed the determination of the relevant performance descriptors, namely the particle size distribution, the partition curves of the present separators and the weight recovery, strong indicators on how a plant is operating. Error minimizing techniques were needed to suppress some deficiencies present in the data, characteristic of this type of sampling.

Adjusting theoretical models to the obtained data was required, so that with those models a mathematical simulation of the plant could be done.

Finally, it was possible to simulate the treatment plant as it is operating now, as well as simulating some theoretical hypothesis, observing what the effect of the changes would be.

Keywords: Kaolin, mineral processing, classification, cyclone, granulometric analysis, simulation



## Índice

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| Agradecimentos .....                                                       | III |
| Resumo .....                                                               | V   |
| Abstract.....                                                              | VII |
| Índice de Figuras .....                                                    | X   |
| Índice de Tabelas .....                                                    | XI  |
| Índice de equações .....                                                   | XI  |
| 1. Introdução.....                                                         | 14  |
| 2. Estado de arte .....                                                    | 16  |
| 1. Caulino .....                                                           | 16  |
| 2. Beneficiamento de caulinos.....                                         | 19  |
| 3. Caulinos em Portugal .....                                              | 22  |
| 3. Materiais e metodologias .....                                          | 25  |
| 1. Depósito de Oliveira de Azeméis (Caulino de Bustelo).....               | 25  |
| 2. Diagrama da instalação de processamento de caulinos.....                | 27  |
| 3. Processo de esquematização de circuitos de tratamento de minérios ..... | 31  |
| 4. Planeamento da amostragem.....                                          | 33  |
| 5. Procedimento experimental de preparação das amostras .....              | 35  |
| 6. Resultados da amostragem.....                                           | 36  |
| 4. Tratamento de dados.....                                                | 39  |
| 1. Introdução à metodologia usada na reconciliação de dados .....          | 39  |
| 2. Ajuste de fluxos.....                                                   | 41  |
| 3. Balanço de massas em circuitos complexos .....                          | 46  |
| 4. Minimização de erros.....                                               | 51  |
| 5. Ajuste e simulação .....                                                | 65  |
| 1. Ajuste de curvas de partição aos dados.....                             | 65  |
| 2. Simulação com os dados obtidos.....                                     | 71  |
| 3. Simulação de outras condições de funcionamento .....                    | 80  |
| 6. Conclusão.....                                                          | 87  |
| 7. Referências bibliográficas .....                                        | 88  |

## Índice de Figuras

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 - Instalação de tratamento de caulinos em estudo .....                                                         | 15 |
| Figura 2 - Produção mundial de Caulino em 2016, Fonte: USGS .....                                                       | 16 |
| Figura 3 - Esquema base do beneficiamento de caulinos por via húmida .....                                              | 21 |
| Figura 4 - Presença de caulinos em Portugal. (Recursos Minerais – O Potencial de Portugal, 2010) ..                     | 22 |
| Figura 5 - Produção de caulino em Portugal, Fonte:DGEG .....                                                            | 23 |
| Figura 6 - Exportação de caulino em Portugal, Fonte:DGEG .....                                                          | 23 |
| Figura 7 - Importação de caulino em Portugal, Fonte:DGEG .....                                                          | 24 |
| Figura 8 - Caulino de Bustelo.(A. M. S. Coelho, 2006) .....                                                             | 25 |
| Figura 9 - Enquadramento geológico local da área de exploração do caulino de Bustelo, (A. Coelho et al., 2006) .....    | 26 |
| Figura 10 - Representação esquemática da instalação de tratamento de caulinos .....                                     | 27 |
| Figura 11 - Filtro curvo, (Gupta & Yan, 2016) .....                                                                     | 28 |
| Figura 12 - Representação de um ciclone, (Wills & Finch, 2016).....                                                     | 29 |
| Figura 13 - Instalação de tratamento de caulinos em estudo .....                                                        | 30 |
| Figura 14 - Diagrama da instalação de caulinos em nós complexos.....                                                    | 31 |
| Figura 15 - a) nó de separação simples, b) nó de mistura simples, (Wills & Finch, 2006).....                            | 31 |
| Figura 16 - Transformação de um nó complexo em dois nós simples.....                                                    | 32 |
| Figura 17 - Diagrama da instalação de tratamento em nós simples .....                                                   | 32 |
| Figura 18 - Cumulantes das 3 amostras do overflow da nora .....                                                         | 33 |
| Figura 19 - Cumulantes das 2 amostras do underflow do 1º ciclone .....                                                  | 34 |
| Figura 20 - Cumulantes das 3 amostras do underflow do 2º ciclone .....                                                  | 34 |
| Figura 21- Cumulantes das 3 amostras do overflow do 2º ciclone .....                                                    | 34 |
| Figura 22 - Local de recolha das amostras.....                                                                          | 36 |
| Figura 23 - Exemplo de nó onde foi necessário o cálculo de uma nova alimentação .....                                   | 41 |
| Figura 24 - Parte do circuito usada no cálculo do fluxo 11.....                                                         | 42 |
| Figura 25 - Exemplo de cálculo de fluxos para o calibre 38 µm.....                                                      | 43 |
| Figura 26 - Partições nó 1.....                                                                                         | 66 |
| Figura 27 - Partições nó 2.....                                                                                         | 67 |
| Figura 28 - Partições nó 3.....                                                                                         | 67 |
| Figura 29 - Partições nó 6.....                                                                                         | 68 |
| Figura 30 - Partições nó 8.....                                                                                         | 68 |
| Figura 31 - Partições nó 9.....                                                                                         | 69 |
| Figura 32 - Partições nó 11 .....                                                                                       | 69 |
| Figura 33 - Partições nó 13 .....                                                                                       | 70 |
| Figura 34 - Diferenças entre o fluxo 3 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados..... | 78 |
| Figura 35- Diferenças entre o fluxo 5 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados.....  | 78 |
| Figura 36- Diferenças entre o fluxo 17 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erro minimizados ..... | 78 |
| Figura 37- Diferenças entre o fluxo 18 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados..... | 79 |
| Figura 38- Diferenças entre o fluxo 23 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados..... | 79 |
| Figura 39- Diferenças entre o fluxo 24 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados..... | 79 |

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 40 - Cumulantes das alimentações usadas para testar o simulador..... | 80 |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|

## Índice de Tabelas

|                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 - Análise SWOT do Caulino, adaptado de ("Boletim de Minas," 2008).....                | 18 |
| Tabela 2 - Resultado da crivagem das amostras.....                                             | 36 |
| Tabela 3 - Histograma da amostragem, fluxos 1 a 11.....                                        | 37 |
| Tabela 4 - Histograma da amostragem, fluxos 12 a 20.....                                       | 38 |
| Tabela 5 - Exemplo de análise granulométrica dos fluxos de um ciclone .....                    | 39 |
| Tabela 6 - Histograma ajustado .....                                                           | 40 |
| Tabela 7 - Comparação de erros de fecho .....                                                  | 40 |
| Tabela 8 - Resultado do cálculo dos caudais.....                                               | 43 |
| Tabela 9 - Histograma ajustado, fluxos 1 a 14.....                                             | 44 |
| Tabela 10 - Histograma ajustado, fluxos 15 a 29.....                                           | 45 |
| Tabela 11 - Matriz de Ligações.....                                                            | 47 |
| Tabela 12 - Melhor estima dos $R_p^*$ .....                                                    | 53 |
| Tabela 13 - Tabela dos $\Delta f$ .....                                                        | 58 |
| Tabela 14 - Novo histograma, fluxos 1 a 14.....                                                | 59 |
| Tabela 15 - Novo histograma, fluxos 15 a 29.....                                               | 60 |
| Tabela 16 - Novo histograma ajustado, fluxos 1 a 14.....                                       | 61 |
| Tabela 17 - Novo histograma ajustado, fluxos 15 a 29.....                                      | 62 |
| Tabela 18 - Diferença em percentagem entre o novo histograma e o original, fluxos 1 a 14.....  | 63 |
| Tabela 19 - Diferença em percentagem entre o novo histograma e o original, fluxos 15 a 29..... | 64 |
| Tabela 20 - Coeficientes das curvas de partição.....                                           | 70 |
| Tabela 21 - Divisão de fluxos nos nós 12, 15 e 17.....                                         | 70 |
| Tabela 22 - Coeficientes das curvas de partição sem minimização do erro .....                  | 76 |
| Tabela 23 - Divisão de fluxos sem minimização do erro .....                                    | 76 |
| Tabela 24 - Coeficientes de partição com um m superior .....                                   | 83 |
| Tabela 25 - Coeficientes de partição com um $A_s$ inferior .....                               | 84 |

## Índice de equações

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Equação 1 - Caulinização.....                                                     | 17 |
| Equação 2 - Equação de Frew, (Wills & Finch, 2006).....                           | 32 |
| Equação 3 - Cálculo dos erros de fecho .....                                      | 39 |
| Equação 4 - Rendimento ponderal .....                                             | 39 |
| Equação 5 - Exemplo de equação Lagrangeana.....                                   | 39 |
| Equação 6 - Cálculo ajuste na alimentação.....                                    | 40 |
| Equação 7 – Cálculo do ajuste no overflow .....                                   | 40 |
| Equação 8 – Cálculo do ajuste no underflow.....                                   | 40 |
| Equação 9 - Multiplicador de Lagrange .....                                       | 40 |
| Equação 10 - Balanço de componentes.....                                          | 41 |
| Equação 11 - Cálculo do histograma da alimentação .....                           | 41 |
| Equação 12 - Equação de Frew aplicado ao circuito da figura 24 .....              | 42 |
| Equação 13 - Forma matricial das equações para cálculo de caudais .....           | 43 |
| Equação 14 - Cálculo do histograma do fluxo 11.....                               | 44 |
| Equação 15 - Cálculo do número de fluxos separadores e misturadores .....         | 46 |
| Equação 16 - Cálculo do número de fluxos a amostrar para o circuito em causa..... | 46 |

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| Equação 17 - Balanço de massa para o nó geral.....                     | 48 |
| Equação 18 - Balanço de massa para o nó 1.....                         | 48 |
| Equação 19 - Balanço de massa para o nó 2.....                         | 48 |
| Equação 20 - Balanço de massa para o nó 3.....                         | 48 |
| Equação 21 - Balanço de massa para o nó 4.....                         | 48 |
| Equação 22 - Balanço de massa para o nó 5.....                         | 48 |
| Equação 23 - Balanço de massa para o nó 6.....                         | 48 |
| Equação 24 - Balanço de massa para o nó 7.....                         | 48 |
| Equação 25 - Balanço de massa para o nó 8.....                         | 48 |
| Equação 26 - Balanço de massa para o nó 9.....                         | 48 |
| Equação 27 - Balanço de massa para o nó 10.....                        | 48 |
| Equação 28 - Balanço de massa para o nó 11.....                        | 48 |
| Equação 29 - Balanço de massa para o nó 12.....                        | 48 |
| Equação 30 - Balanço de massa para o nó 13.....                        | 48 |
| Equação 31 - Balanço de massa para o nó 14.....                        | 49 |
| Equação 32 - Balanço de massa para o nó 15.....                        | 49 |
| Equação 33 - Balanço de massa para o nó 16.....                        | 49 |
| Equação 34 - Balanço de massa para o nó 17.....                        | 49 |
| Equação 35 - Balanço de histograma granulométrico para o nó geral..... | 49 |
| Equação 36 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 1.....     | 49 |
| Equação 37 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 2.....     | 49 |
| Equação 38 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 3.....     | 49 |
| Equação 39 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 4.....     | 49 |
| Equação 40 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 5.....     | 49 |
| Equação 41 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 6.....     | 49 |
| Equação 42 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 7.....     | 49 |
| Equação 43 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 8.....     | 49 |
| Equação 44 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 9.....     | 49 |
| Equação 45 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 10.....    | 49 |
| Equação 46 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 11.....    | 50 |
| Equação 47 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 12.....    | 50 |
| Equação 48 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 13.....    | 50 |
| Equação 49 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 14.....    | 50 |
| Equação 50 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 15.....    | 50 |
| Equação 51 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 16.....    | 50 |
| Equação 52 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 17.....    | 50 |
| Equação 53 - Balanço de massa em um separador .....                    | 51 |
| Equação 54 - Balanço de histograma em um separador .....               | 51 |
| Equação 55 - Rendimento ponderal .....                                 | 51 |
| Equação 56 - Divisão de eq. 54 por A .....                             | 51 |
| Equação 57 - Substituição de eq. 55 na eq. 56 .....                    | 51 |
| Equação 58 - Rendimento ponderal .....                                 | 51 |
| Equação 59 - Erro de fecho .....                                       | 52 |
| Equação 60 - Erro de fecho .....                                       | 52 |
| Equação 61 - Somatório do quadrado dos erros de fecho .....            | 52 |
| Equação 62 - Somatório do quadrado dos erros de fecho expandido .....  | 52 |
| Equação 63 - Derivada da eq. 62 em ordem a $R_p$ .....                 | 52 |
| Equação 64 - Melhor estima do rendimento ponderal .....                | 52 |

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Equação 65 - Somatório do quadrado dos ajustamentos.....              | 53 |
| Equação 66 - Ajustamento .....                                        | 53 |
| Equação 67 - Balanço de histograma coerente .....                     | 53 |
| Equação 68 - Balanço de histograma coerente .....                     | 53 |
| Equação 69 - Erro de fecho .....                                      | 53 |
| Equação 70 - Equação Lagrangeana .....                                | 54 |
| Equação 71 - Equação Lagrangeana do caso em estudo .....              | 54 |
| Equação 72 - Ajuste no fluxo 1.....                                   | 54 |
| Equação 73 - Ajuste no fluxo 2.....                                   | 54 |
| Equação 74 - Ajuste no fluxo 3.....                                   | 54 |
| Equação 75 - Ajuste no fluxo 4.....                                   | 54 |
| Equação 76 - Ajuste no fluxo 5.....                                   | 55 |
| Equação 77 - Ajuste no fluxo 6.....                                   | 55 |
| Equação 78 - Ajuste no fluxo 7.....                                   | 55 |
| Equação 79 - Ajuste no fluxo 8.....                                   | 55 |
| Equação 80 - Ajuste no fluxo 9.....                                   | 55 |
| Equação 81 - Ajuste no fluxo 10.....                                  | 55 |
| Equação 82 - Ajuste no fluxo 11.....                                  | 55 |
| Equação 83 - Ajuste no fluxo 12.....                                  | 55 |
| Equação 84 - Ajuste no fluxo 13.....                                  | 55 |
| Equação 85 - Ajuste no fluxo 14.....                                  | 55 |
| Equação 86 - Ajuste no fluxo 15.....                                  | 55 |
| Equação 87 - Ajuste no fluxo 18.....                                  | 55 |
| Equação 88 - Ajuste no fluxo 19.....                                  | 55 |
| Equação 89 - Ajuste no fluxo 20.....                                  | 55 |
| Equação 90 - Ajuste no fluxo 21.....                                  | 55 |
| Equação 91 - Ajuste no fluxo 22.....                                  | 55 |
| Equação 92 - Ajuste no fluxo 23.....                                  | 56 |
| Equação 93 - Ajuste no fluxo 26.....                                  | 56 |
| Equação 94 - Ajuste no fluxo 29.....                                  | 56 |
| Equação 95 - $\lambda_1$ .....                                        | 56 |
| Equação 96 - $\lambda_2$ .....                                        | 56 |
| Equação 97 - $\lambda_3$ .....                                        | 56 |
| Equação 98 - $\lambda_4$ .....                                        | 56 |
| Equação 99 - $\lambda_5$ .....                                        | 56 |
| Equação 100 - $\lambda_6$ .....                                       | 56 |
| Equação 101 - $\lambda_7$ .....                                       | 56 |
| Equação 102 - $\lambda_8$ .....                                       | 56 |
| Equação 103 - $\lambda_9$ .....                                       | 57 |
| Equação 104 - $\lambda_{10}$ .....                                    | 57 |
| Equação 105 - $\lambda_{11}$ .....                                    | 57 |
| Equação 106 - $\lambda_{13}$ .....                                    | 57 |
| Equação 107 - $\lambda_{14}$ .....                                    | 57 |
| Equação 108 - $\lambda_{16}$ .....                                    | 57 |
| Equação 109 - Curva de partição .....                                 | 65 |
| Equação 110 - Modelo de Lynch para a curva de partição reduzida ..... | 65 |
| Equação 111 - Modelo de Lynch para a curva de partição .....          | 65 |

## 1. Introdução

Qualquer instalação de tratamento de minérios pode ser simulada se forem conhecidos os descritores de desempenho das classificações que realiza, esta dissertação foca-se num caso particular de uma instalação industrial de processamento de caulinos.

Neste caso os descritores de desempenho em causa são a distribuição dos calibres presente em cada fluxo, representado tipicamente sobre a forma de histograma, as curvas de partição, também conhecidas como curvas de Tromp ou de Terra, e o rendimento ponderal global. Em conjunto estes descritores irão facilitar a perceção de como a instalação opera na prática, isto é, as separações que esta realiza para produzir os seus produtos finais e a qualidade das separações em si.

A distribuição de calibres em cada fluxo, em conjunto com os caudais, são os principais dados para o conhecimento desta instalação. O rendimento ponderal é uma razão de caudais entre o underflow, o fluxo das partículas acima do calibre de corte e a alimentação, que permite identificar a percentagem de partículas que segue pelo underflow de um separador. Como a alimentação de um separador será igual à soma do overflow, fluxo das partículas abaixo do calibre de corte, e do underflow de um separador, a soma do rendimento ponderal do underflow com o rendimento ponderal do overflow será igual a 1 e o rendimento ponderal do overflow pode ser calculado subtraindo a 1 o rendimento ponderal do underflow. As curvas de partição traduzem a operação de um separador, indicando qual o seu calibre de corte, a perfeição do corte e qual o arrasto, se este estiver presente.

Estes poderão ser usados como previsores do desempenho global do circuito, permitindo prever alguns dos parâmetros tecnológicos do processo, como por exemplo o Rendimento ponderal global e a recuperação de frações granulométricas importantes para a caracterização da qualidade do produto final.

Tradicionalmente os descritores de desempenho também incluem a curva de lavabilidade, a curva teor-recuperação e curva de Mayer, mas neste caso em particular não é feita qualquer análise em relação ao teor, inviabilizando a construção destes descritores, com maior aplicação noutros contextos, como no processamento de minérios metálicos.

Para se conhecer uma instalação de tratamento é necessário fazer o levantamento e a esquematização de como as suas operações individuais estão organizadas, bem como as condições em que estas operam.

A determinação dos parâmetros que traduzem matematicamente as condições de operação implica a recolha de amostras, para que se possam realizar análises granulométricas com as quais o cálculo de caudais se torna possível.

A necessidade do cálculo de caudais advém do facto de que, em geral como neste caso particular, a recolha completa dos caudais envolvidos é impossível, nem existe a disponibilidade de uso de um caudalímetro, impossibilitando assim a sua medida direta.

Ao longo deste trabalho os caudais utilizados não possuem unidades, isto porque eles vêm normalizados em relação à alimentação do circuito, que irá assumir o valor 1. Desta forma consegue-se resolver o sistema sem possuir valores para os caudais. O cálculo dos caudais reais é trivial obtendo-se o valor real para a alimentação e multiplicando todos os caudais por este valor. Se, por exemplo, a instalação estivesse a trabalhar a 10 t/h aquando da amostragem o caudal de caulinos produzidos seria de 3,07 t/h, que é 30,7% da alimentação, valor obtido mais à frente na simulação do circuito.

Mesmo assim, não estando disponíveis pontos de amostragem específicos para o efeito, a recolha de simples amostras também se revela difícil por vezes, fruto da dificuldade física de acesso a muitos fluxos.



*Figura 1 - Instalação de tratamento de caulinos em estudo*

Este facto, associado a heterogeneidade típica do minério bruto, à condição de funcionamento de um circuito real, que nunca estará permanentemente em regime contínuo, e aos erros sempre presentes em qualquer medição originam incongruências aquando do balanço de massas nos vários pontos do circuito. Por outras palavras o que entra não é necessariamente igual ao que sai, contrariando até o senso comum.

Estes erros precipitaram a necessidade de desenvolvimento de técnicas que os minimizem, exemplo das quais será empregue no decorrer deste trabalho.

Finalmente, se dados em sintonia com a realidade puderem ser obtidos, uma simulação matemática teórica de uma instalação real pode não só ser construída, como calibrada para ter um desempenho em tudo similar à instalação real.

A simulação em si pode evidenciar factos sobre como uma instalação está realmente a funcionar, e talvez, até seja mais importante como ferramenta no auxílio da previsão de como a instalação real irá reagir a alterações da mais variada natureza que nela possam ser introduzidas.

É dentro desse âmbito que surge esta dissertação, com o objetivo de criar uma simulação matemática de uma instalação de tratamento, e tanto quanto possível a aproximar de uma instalação de tratamento de caulinos em operação.

## 2. Estado de arte

### 1. Caulino

O caulino é um produto que, na sua composição, apresenta obrigatoriamente caulinite, um filossilicato de alumínio hidratado, mas tipicamente também é constituído por quartzo, feldspato, micas, óxidos de ferro e de titânio. Os minerais presentes em cada caulino, bem como as suas percentagens variam para cada depósito, dependendo da rocha mãe e do grau de alteração em que se encontram. Existem depósitos de caulino em exploração em que a percentagem de caulinite é da ordem dos 10%, razão pela qual são necessárias operações de concentração posteriores à extração. (Lopes, Lisboa, Carvalho, Mateus, & Martins, 2018)

O caulino, tal como a caulinite, possui uma granulometria fina, em que cerca de 70% das suas partículas têm um calibre a variar entre 25 e 35  $\mu\text{m}$  (Yahaya, Jikan, Badarulzaman, & Adamu, 2017). Mas, não há valores exatos para a granulometria do caulino, pois ela varia consoante o depósito de onde é extraído, no entanto estará dentro desta ordem de grandeza.

Em 2016 foram produzidas cerca de 37 milhões de toneladas métricas de caulino, sendo os Estados Unidos o maior produtor, responsáveis por 5,32 milhões de toneladas métricas. Em Portugal foram produzidas 260000 toneladas métricas, que colocam o nosso país como o 22º maior produtor mundial de caulino. As reservas mundiais são cerca de 14,2 biliões de toneladas, podendo ser considerado um recurso quase que ilimitado, especialmente tendo em conta que as reservas não se encontram conhecidas na sua totalidade. (Vasconcelos, 2008)

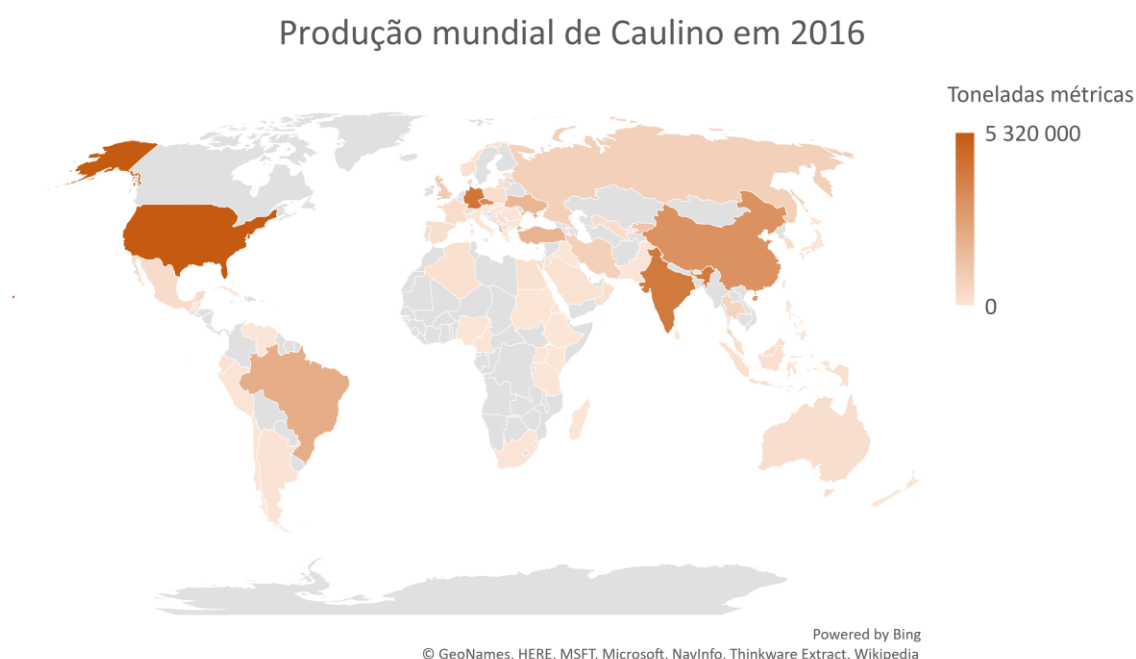
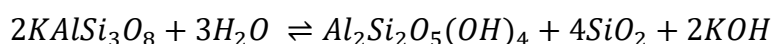


Figura 2 - Produção mundial de Caulino em 2016, Fonte: USGS

Em termos genéticos o caulino pode ser classificado como caulino primário ou secundário. O caulino primário, ou residual, é aquele que se originou in situ pela alteração de rochas ricas em feldspatos, tipicamente granitos (Lopes et al., 2018), através de ações de meteorização, habitualmente reações de hidrólise, e de ações hidrotermais. Este processo de alteração é designado por caulinização e pode ser descrito pela reação seguinte:

*Feldspato potássico + Água  $\rightleftharpoons$  Caulinite + Sílica + Hidróxido de potássio*



*Equação 1 - Caulinização*

São considerados caulinos secundários aqueles que na sua gênese têm implícito um processo de transporte do material gerado pela meteorização, desde a rocha mãe até ao local de deposição, que são normalmente lagos e deltas. Estes apresentam, em média, uma granulometria mais fina que os caulinos primários, para além de possuir menor percentagem de quartzo e de micas e maior percentagem de óxidos de ferro e de titânio. A presença destes elementos é responsável pela menor brancura dos caulinos secundários, quando comparados com os primários. (Luz & Lins, 2008)

A caulinite tem uma forma lamelar, é não abrasiva, não reativa com ácidos e bases, é plástica, tem elevada brancura, constitui suspensões facilmente e é relativamente barata ("Boletim de Minas," 2008), razões pelas quais é amplamente usada em variadas indústrias, sendo as mais relevantes:

*Cerâmica*

A indústria cerâmica é a indústria mais tradicional para o uso de caulinos e é aquela que consome grande parte dos caulinos produzidos em Portugal. O caulino quando aquecido a temperaturas superiores a 1000°C transforma-se em mulite, formando uma fase vítrea que suporta os restantes constituintes e confere resistência mecânica e resistência à deformação pirolástica durante o processo de queima. Nesta indústria o caulino é usado em porcelana, em sanitários, azulejos, refratários e em porcelana elétrica.

*Papel*

Pela sua brancura, opacidade, grande área superficial e baixa abrasividade o caulino é das matérias primas mais importantes na indústria do papel, apesar de, parcialmente poder ser substituído pelo carbonato de cálcio. O caulino é usado como carga e também para revestimento do papel. A aplicação de caulino também é muito relevante do ponto de vista económico porque, para além de apresentar um custo inferior ao da celulose, também diminui os gastos energéticos na secagem do papel e na refinação.

*Fibra de vidro*

O caulino tem vindo a ganhar importância na produção de fibra de vidro nos últimos anos, em grande parte pela proibição do uso de amianto. Na fibra de vidro o caulino fornece a sílica e a alumina necessária, sendo que o seu uso está condicionado à obrigatoriedade de conter um baixo teor de óxido de ferro e de titânio.

*Plástico*

Dentro dos plásticos o caulino encontrou uso na produção de nylon, poliolefinas, PVC e polietilenos. É usado como carga funcional e como modificador reológico, pois melhora as propriedades mecânicas, elétricas e térmicas, fornece um acabamento mais liso, oculta as fibras, reduz a contração e a fratura e protege contra a corrosão química.

*Tintas*

O caulino é empregue na produção de tintas porque melhora a suspensão, a viscosidade, o acabamento, a maciez e a resistência da tinta após secagem. O caulino também é usado como extensor de dióxido de titânio, que é o principal pigmento branco, em tintas à base de água. Os extensores são minerais incorporados com o intuito de diminuir os custos de produção.

### Borracha

O caulino é das principais cargas funcionais usadas no fabrico de borracha, porque aumenta a resistência mecânica, a resistência à abrasão, a rigidez e a viscosidade. O seu uso depende do tamanho e da forma das partículas, bem como da sua atividade.

### Cimento

Os cimentos de alto desempenho possuem uma melhor resistência e durabilidade quando comparados aos restantes cimentos, em parte pela ocupação dos espaços intersticiais por partículas muito finas, como as da metacaulinite, que aumentam a densidade, reduzem a quantidade de água necessária e melhoram a fluidez do cimento.

### Catalisadores

Apesar de ter uma capacidade catalítica muito pobre o caulino é empregue no fabrico de catalisadores para a refinação do petróleo, para melhorar as propriedades físicas destes.

Como resumo apresenta-se uma análise SWOT (Strengths – Pontos fortes, Weaknesses – Pontos fracos, Opportunities – Oportunidades, Threats – Ameaças), onde estão refletidos os pontos fortes bem como os fracos, próprios do caulino, bem como as oportunidades e ameaças resultantes do mercado em que se encontra inserido.

Tabela 1 - Análise SWOT do Caulino, adaptado de ("Boletim de Minas," 2008)

| Strengths                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Weaknesses                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Elevada lamelaridade</li><li>• Brancura elevada</li><li>• Baixa abrasividade</li><li>• Resistência a ácidos e a bases</li><li>• Boas características reológicas</li><li>• Hidrofilia elevada</li><li>• Preço atraente</li></ul>                                        | <ul style="list-style-type: none"><li>• Custos de produção</li><li>• Suspensões com teores de sólidos inferiores aos carbonatos de cálcio</li><li>• Brancura inferior ao carbonato de cálcio</li><li>• Versatilidade inferior ao carbonato de cálcio</li><li>• Dilatação e abrasividade do caulino calcinado</li></ul> |
| Opportunities                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Threats                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Aumento da presença em mercados como a agricultura, catalisadores, fibra de vidro e resinosos</li><li>• Mercado asiático em crescimento</li><li>• Caulinos manipulados</li><li>• Tratamento químico da caulinite</li><li>• Desenvolvimento de multipigmentos</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Aumento do uso do carbonato de cálcio na indústria do papel</li><li>• Surgimento de novos produtos minerais</li><li>• Importância crescente de mercados regionais</li><li>• Esgotamento das reservas de alta qualidade em países desenvolvidos</li></ul>                       |

## 2. Beneficiamento de caulinos

O processo de produção de caulinos inicia-se com a extração a céu aberto, uma vez que os custos de produção e a geomecânica das rochas envolvidas inviabilizam a exploração subterrânea. O desmonte pode ser feito através de dois métodos distintos: o desmonte hidráulico e o desmonte mecânico.

O desmonte hidráulico consiste na projeção de jatos de água a altas pressões na frente de desmonte, que desagregam o material e formam uma polpa, que por gravidade, desce até à cota mais baixa aonde é bombeada para a estação de tratamento. Este método implica o uso de grandes quantidades de água.

O método de desmonte mecânico emprega retroescavadoras e pás carregadoras para extrair o material da frente de desmonte em bancadas sucessivas e posteriormente é transportado para a central de tratamento.

O caulino bruto apresenta, normalmente, teores em caulinite inferiores a 40%, por vezes inferior a 30%, que são bastante inferiores aos exigidos pelo mercado, associado à presença de impurezas, razão pela qual o beneficiamento do caulino bruto é necessário antes de este ser comercializado. Tendo em vista as aplicações industriais torna-se necessário promover o seu enriquecimento para valores que podem situar entre 80 e 95%.

O beneficiamento do caulino é tradicionalmente feito por via húmida, mas quando o caulino bruto possui uma alvura elevada, uma distribuição granulométrica adequada e um baixo teor em quartzo pode ser feito via seca. Mas, dada as elevadas exigências impostas são poucos os jazigos que podem ser enriquecidos por esta via. Para estes depósitos o processo de beneficiação consiste numa primeira etapa de desagregação, onde o minério é seco e moído a calibres muito finos, em moinhos de rolos para, de seguida, ser separado por aero-separação, que por uma corrente ascendente de ar aquecido transporta as partículas mais pequenas para o topo do separador.

O processamento físico por via húmida, frequentemente designado por “lavagem”, consiste basicamente em 3 etapas:

### *Desagregação*

Num trommel o minério seco é desagregado e transformado numa polpa densa, com uma percentagem de sólidos de 35 a 70 %, através da adição de água, dispersantes químicos inorgânicos, como o silicato de sódio, o pirofosfato de sódio, o hexametáfosfato de sódio e orgânicos (sendo o poliácrlato de sódio o mais típico) e de reguladores de pH, normalmente por adição carbonato de sódio, para elevar o pH para 6,5 a 7. (Kogel, Trivedi, Barker, & Krukowski)

### *Fracionamento granulométrico*

Ou classificação granulométrica, é a etapa que separa o minério por classes granulométricas pelo uso de crivos, classificadores mecânicos, hidrociclones, separadores centrífugos e tanques de sedimentação. Nesta classificação são removidos o resíduo mais grosseiro, as areias, as micas e a fração mais fina corresponde ao caulino.

### *Espessamento e Filtração*

O overflow da etapa anterior é espessado em espessadores/decantadores circulares onde é removida grande parte da água presente na polpa, e cujo underflow é enviado para a secção de filtragem em filtros prensa ou filtros tambor. Após a filtração o caulino tipicamente apresenta uma humidade residual entre 30 a 55%.

### *Secagem*

A secagem vai diminuir a humidade resultante da filtração para valores na ordem dos 6%, em secadores rotativos, de esteiras ou de atomização, onde o caulino é aquecido a temperaturas na ordem dos 300°C.

Posteriormente o caulino “lavado” é transportado para o destino final. Mas, este pode ainda ser sujeito a tratamentos adicionais para melhoramento da qualidade e propriedades reológicas de acordo com as exigências do mercado. Esses processos podem ser:

### *Floculação seletiva*

O princípio de funcionamento da floculação seletiva é o de agregar partículas de um mineral específico enquanto que permite que outros minerais continuem dispersos, possibilitando a separação por gravidade. No beneficiamento de caulinos a floculação seletiva é normalmente usada para remover anatase.

### *Flutuação*

Quando o caulino apresenta quantidades relevantes de quartzo ou de dióxidos de titânio em calibres muito reduzidos a flutuação permite remover estas frações, baixando a abrasividade e melhorando a brancura do caulino, respetivamente.

### *Separação magnética*

A remoção das impurezas hematite, pirite, rútilo e anatase, muito prejudiciais à brancura do caulino, pode ser feita num separador magnético, em que estes minerais que pela sua permeabilidade magnética natural são separados dos não magnéticos, usando campos magnéticos de 1,8 a 2,2 Tesla.

### *Lixiviação*

No beneficiamento de caulinos, nomeadamente para aumentar a sua brancura, podem ser usadas lixiviações oxidantes e/ou lixiviações redutoras. A lixiviação oxidante tem o intuito de remover matéria orgânica que possa estar presente no caulino partindo as ligações duplas das moléculas orgânicas, produzindo compostos solúveis em água. Na lixiviação redutora o ferro presente nos óxidos de ferro é reduzido a ferro ferroso, que é solúvel em água e assim removido. Para que a reação obtenha bons resultados é necessário operar na região de estabilidade do ferro (II), baixando o pH para valores de 3 a 4,5, pela adição de ácido sulfúrico ou clorídrico.

### *Delaminação*

A delaminação é o processo de separar as partículas de caulinite de forma lamelar por atrito com esferas de um material mais duro num moinho. A delaminação produz partículas de caulinite muito finas e com grande superfície, isto é, com grande área específica, melhorando também a brancura do caulino, apesar de piorar as propriedades reológicas deste.

### *Calcinação*

A calcinação, feita a temperaturas elevadas, permite alterar algumas características do caulino, tornando-o mais atraente a indústrias como a do papel e das tintas. A calcinação pode ser parcial quando este é tratado a temperaturas na ordem dos 700 °C, fazendo com que este obtenha melhor resistência, opacidade, alvura. A calcinação total, que ocorre a temperaturas entre os 1000 e os 1050 °C, aumenta o seu índice de refração, a sua opacidade, a dureza e a brancura, aumentando também a abrasividade.

Na figura 3 está representado um diagrama esquemático dos diferentes processos incluídos no beneficiamento de caulinos que acabamos de descrever.

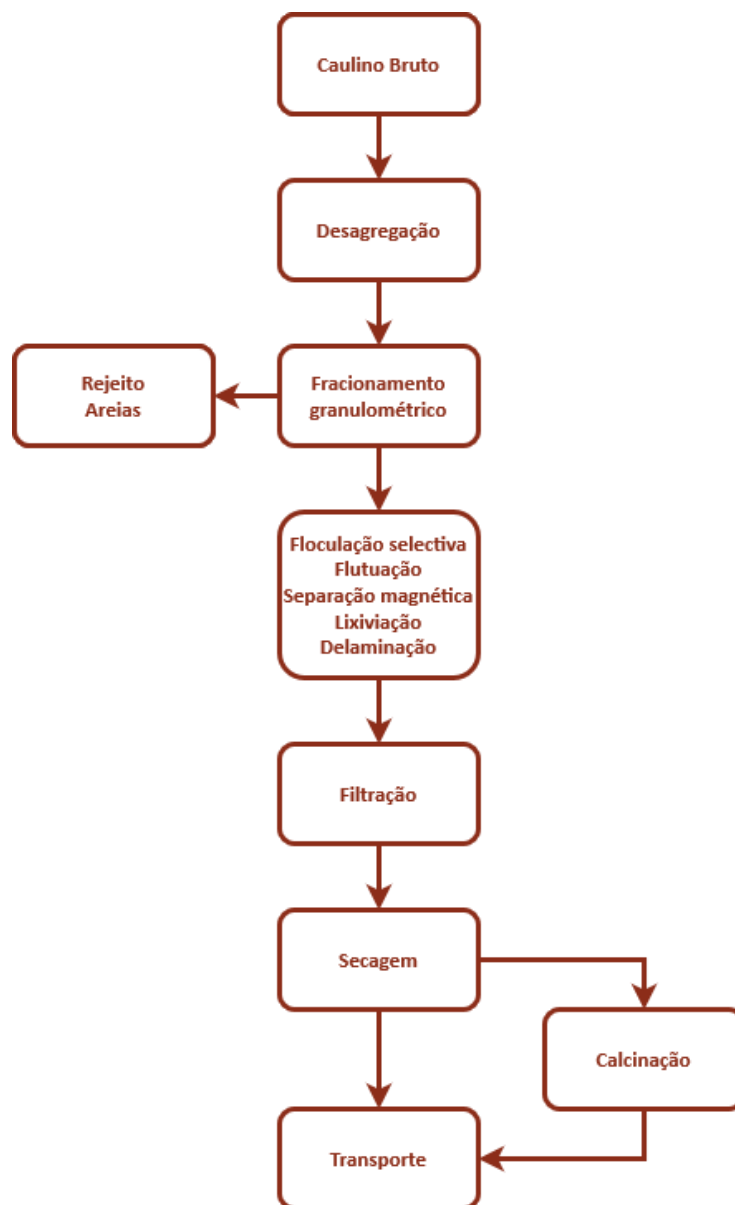


*Figura 3 - Esquema base do beneficiamento de caulinos por via húmida*

### 3. Caulinos em Portugal

Apesar da enorme extensão de afloramentos graníticos em Portugal, os depósitos de caulino estendem-se por uma área geográfica muito limitada, consistindo numa estreita faixa litoral entre Viana do Castelo e Peniche e que compreende depósitos de origem residual e sedimentar (figura 4) Portugal é um país com reservas consideráveis de caulino, as reservas das concessões em exploração ou em reserva situam-se nas 13,9 Mt (*Recursos Minerais – O Potencial de Portugal*, 2010). Mas, quando comparado com os demais países, o caulino português é de qualidade mediana.

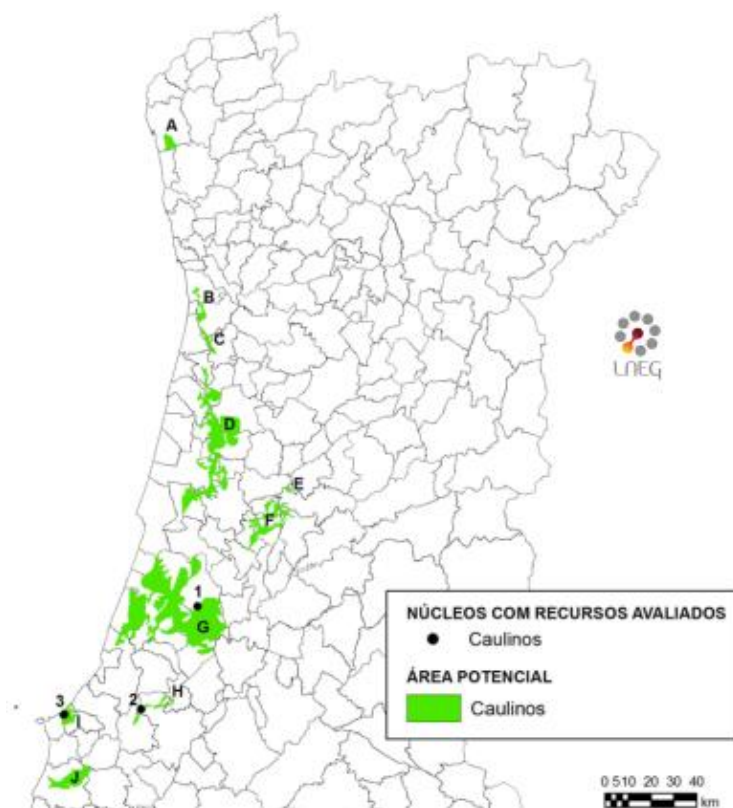


Figura 4 - Presença de caulinos em Portugal. (*Recursos Minerais – O Potencial de Portugal*, 2010)

Em Portugal continental encontram-se caulinos principalmente em duas áreas: na bacia Meso-Cenozóica Lusitana e numa faixa entre Viana do Castelo e Aveiro. É nesta faixa que se encontram todos os depósitos de caulino primário, associados a plataformas graníticas ou gnaíssicas numa zona de dobra do planalto Ibérico, afetada por falhas e cavalgamentos. A maior parte dos depósitos estão associados à falha de cisalhamento Porto-Coimbra-Tomar. A indústria cerâmica é a grande consumidora do caulino nacional, com uma cota de mais de 90%. (Lopes et al., 2018)

Viana do Castelo é a zona do país com mais história na exploração de caulino, principalmente devido ao depósito de Alvarães, com cerca de 2 Mt em reservas. O caulino deste depósito possui propriedades adequadas para a indústria do papel e da cerâmica.

Matosinhos foi a zona com maior produção de caulino em Portugal até ao final dos anos 80, mas, apesar de continuar a possuir grandes reservas e o caulino ser de boa qualidade, a pressão urbanística levou ao encerramento de todas as explorações na área.

Os caulinos secundários na bacia Meso-Cenozóica Lusitana estão associados a unidades geológicas siliclásticas, do Cretácico Inferior e do Plio-Pleistoceno, acompanhados normalmente por areias

siliciosas, que são um subproduto interessante. Estes caulinos são normalmente usados nas áreas de construção e da cerâmica.

É expectável que o consumo e a produção de caulino continuem a aumentar em Portugal (figura 5) por três razões: os grandes produtores nacionais de cerâmica associaram-se a grandes grupos económicos e estão a virar as suas atenções para mercados em crescimento, como África, o Médio Oriente e a Ásia. A instabilidade política que afeta alguns dos maiores exportadores de caulino para Portugal, como o caso da Ucrânia, levam a que haja um crescimento da produção nacional, e os novos mercados que se abrem para os produtores de cerâmica por associação com grandes distribuidores de retalho, como o acordo entre a Vista Alegre Atlantis e a IKEA, também leva a crer que irá aumentar o consumo de caulino (Lopes et al., 2018).

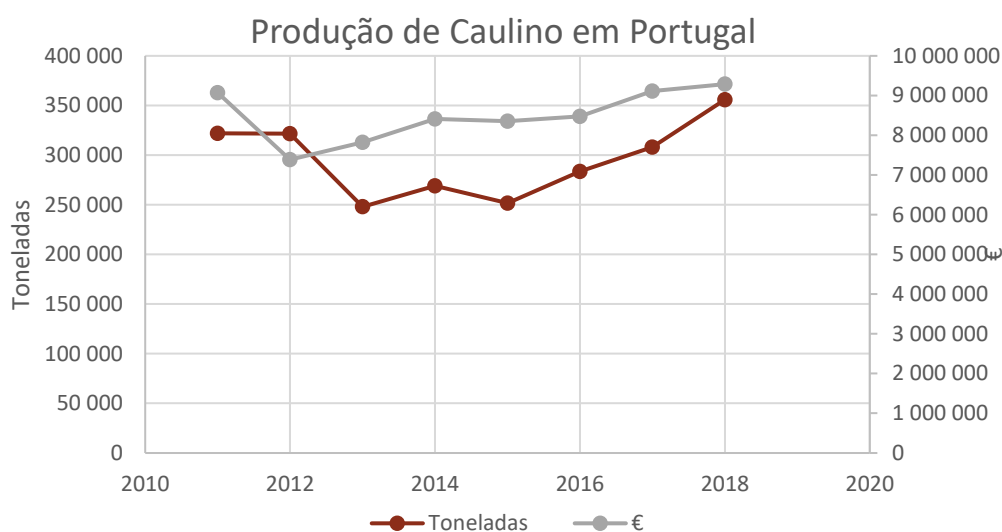


Figura 5 - Produção de caulino em Portugal, Fonte:DGEG

A exportação de caulino tem vindo a diminuir nos anos mais recentes, após ter atingido um pico em 2014 (figura 6).

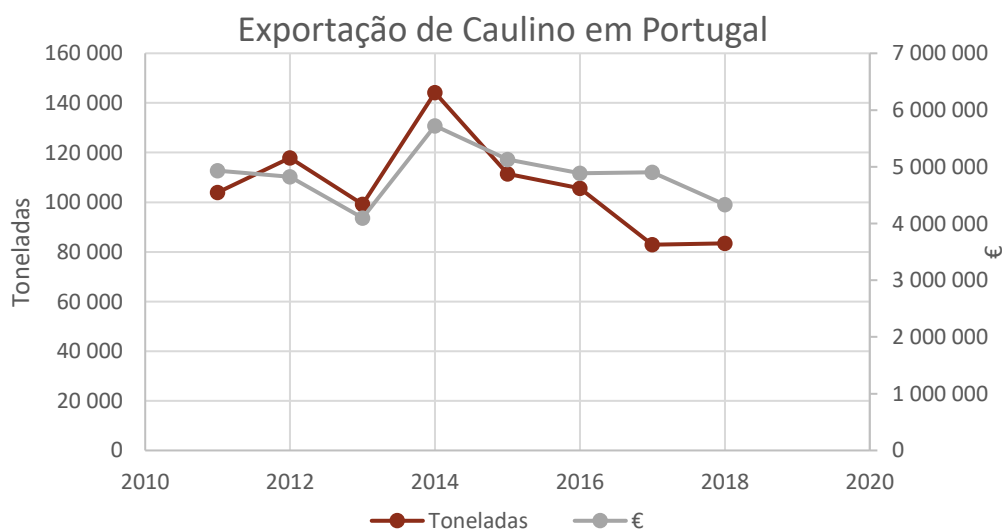


Figura 6 - Exportação de caulino em Portugal, Fonte:DGEG

Por outro lado, a importação de caulino também tem vindo a aumentar no nosso país desde os anos 90 (Figura 7), fruto da exigência crescente das indústrias cerâmicas, que requer caulinos de maior qualidade, e também pelo fraco ordenamento do território nacional, que forçou o encerramento de várias unidades extrativas que produziam caulino de boa qualidade.

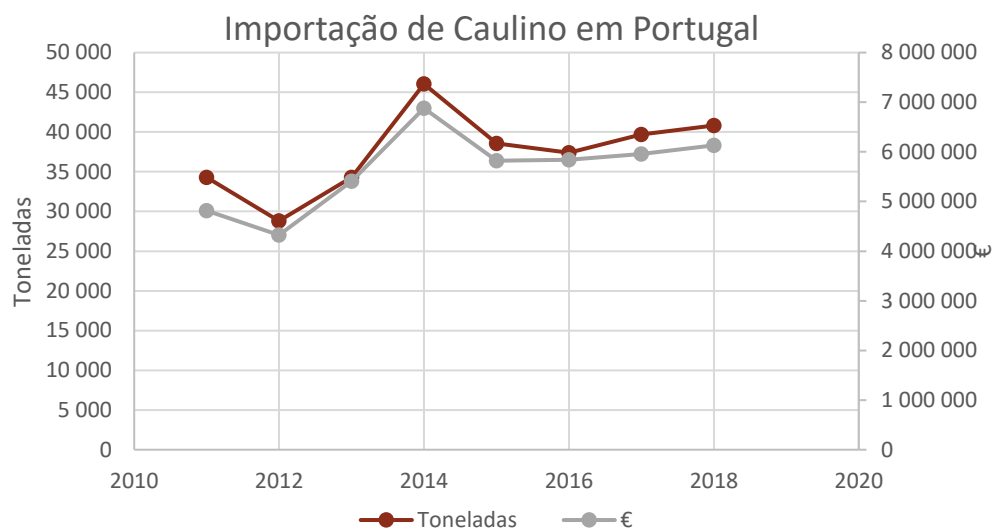


*Figura 7 - Importação de caulino em Portugal, Fonte:DGEG*

### 3. Materiais e metodologias

#### 1. Depósito de Oliveira de Azeméis (Caulino de Bustelo)

O trabalho que nos propusemos desenvolver tem como estudo de caso o caulino de Bustelo explorado em Oliveira de Azeméis.



*Figura 8 - Caulino de Bustelo. (A. M. S. Coelho, 2006)*

O caulino de Bustelo (Figura 8) desenvolve-se em granitos gnaíssicos, de feldspatos ocelados, com duas micas, grão grosseiro e com foliação segundo N 20 W bem definida (Figura 9).

A rocha apresenta-se bastante tectonizada, mas praticamente sem preenchimento filoneano, contrariamente a alguns dos depósitos que ocorrem na região, como por exemplo o de Macieira de Sarnes e Pinhão (Barbosa, 1983). A fracturação que afeta o granito tem orientação N 45 W, N 25 E e N 70 E.

A área caulinizada constitui uma superfície aplanada de cota entre 250-260 m. O desenvolvimento da superfície aplanada, com ou sem sedimentos correlativos pode estar relacionada com plataformas marinhas fósseis, terraços fluviais ou áreas aplanadas do interior acima do nível pliocénico, que é o caso do depósito em estudo.

Neste depósito a caulinização desenvolveu quer à superfície, quer em profundidade de uma forma bastante irregular, existindo zonas em que a possança máxima é de 20 m, por exemplo junto da estrada de Bustelo, enquanto em outras a possança é bastante menor.

Em termos de síntese podemos referir que o jazigo de Bustelo se desenvolve em gnaisses ocelados de grão grosseiro, que se encontra numa superfície aplanada, com uma cota de aproximadamente 250m e que data do Pliocénico (Barbosa, 1983).

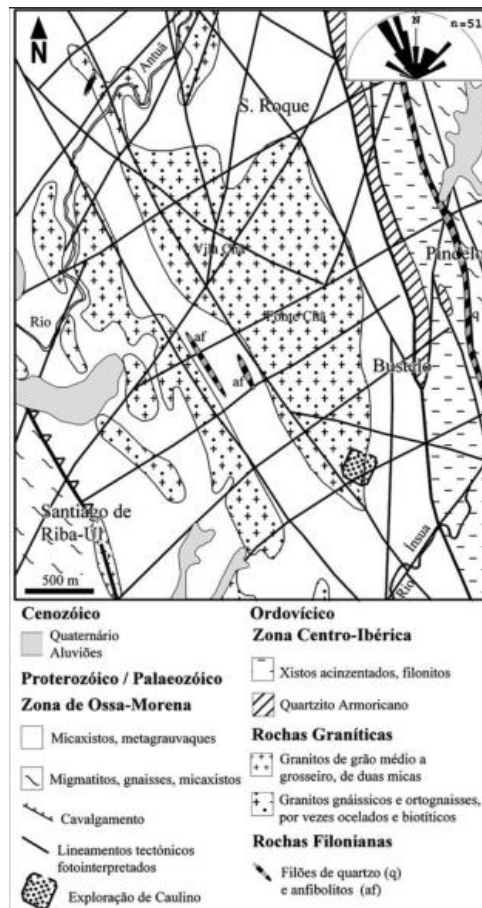


Figura 9 - Enquadramento geológico local da área de exploração do caulino de Bustelo, (A. Coelho et al., 2006)



Na figura 10, apresenta-se um diagrama esquemático da instalação, em que estão representados os vários equipamentos que o compõe, bem como os diferentes produtos de saída finais: caulino, micas e areias de diferentes granulometrias.

Analizando o diagrama é possível verificar que a classificação granulométrica é feita recorrendo a processos diretos de avaliação de calibre, que descreveremos de seguida, bem como processos indiretos.

#### Breves considerações sobre os equipamentos de classificação presentes na instalação

Os **trommels** são crivos rotativos em que a superfície de crivagem é cilíndrica, ou ligeiramente cônica, que se movimenta através de um movimento de rotação em torno do eixo longitudinal. O eixo possui uma inclinação que varia entre 4 e 10 graus, dependendo da aplicação e do material nele utilizado, que auxilia a progressão das partículas. Eles podem trabalhar via seca, ou via húmida. A velocidade de rotação varia entre 35-40 % da velocidade crítica (velocidade mínima na qual as partículas não centrifugam). Nestas condições, a superfície efetiva de crivagem será de cerca de 30% da área total. A superfície de crivagem, pode ser constituída por uma única tela, ou por vários tecidos de crivagem com diferentes malhas.

No trommel existente na instalação de tratamento de caulinos que estamos a estudar possui duas superfícies de crivagem. Por isso, o material que o alimenta será dividido em três fluxos: fluxo de grosseiros, fluxo de areia grossa e o fluxo de granulometria mais fina que alimenta o restante circuito.

Este tipo de equipamento, é normalmente uma boa opção nas instalações de caulinos, porque para além de retirarem o material de calibres grosseiros, também funcionam como desagregadores.

Os **filtros curvos** (Figura 11) apresentam uma boa propriedade de remoção de água para além da sua função de crivagem. Estes compreendem uma base curva formada por fios/barras paralelas entre si, formando um ângulo de 90° com a alimentação. A alimentação entra tangencialmente na parte superior do filtro e flui sendo distribuída ao longo de toda a superfície de crivagem. A separação das partículas ocorre para calibre perto da metade do espaçamento entre as barras que constituem a superfície de crivagem. O calibre de corte depende da percentagem de sólidos da polpa, o que faz com que esse parâmetro tenha de ser bem controlado para que se possa obter um rendimento adequado do crivo. Uma das vantagens da utilização deste equipamento é a elevada resistência à colmatção.

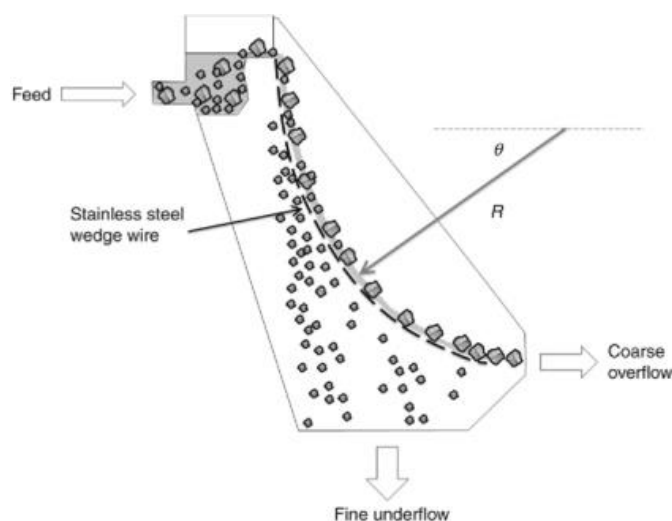


Figura 11 - Filtro curvo, (Gupta & Yan, 2016)

Os **filtros**, ou grelhas de enxaguo servem essencialmente para a remoção de água nos fluxos de saídas do circuito. A única força atuante é a força da gravidade e por isso estes equipamentos possuem uma superfície inclinada para assegurar a inexistência de água no fluxo.

Os **hidrociclones**, são o tipo de classificadores mais usados industrialmente na classificação de produtos mais finos, tais como os caulinos.

São um dispositivo mecânico sem partes móveis, de forma cilindro-cônica e variam em tamanho de apenas alguns milímetros de diâmetro a algumas centenas de milímetros, possuindo uma relação entre o diâmetro e o comprimento que pode variar entre 1:2 e 1:8. O funcionamento dos hidrociclones depende uma fonte externa de energia, que normalmente consiste numa bomba centrífuga de fluxo contínuo que introduz a polpa no ciclone. A velocidade de alimentação da polpa e a pressão da alimentação, devido à geometria, serão imediatamente convertidas em aceleração angular e linear, criando o efeito de ciclonagem em que a aceleração angular aumenta à medida que a polpa se move da parede externa do ciclone para o interior em direção ao eixo de rotação (Figura 12). À medida que a aceleração angular aumenta, as forças centrífugas também aumentam, induzindo a separação das partículas por tamanho e/ou por densidade.

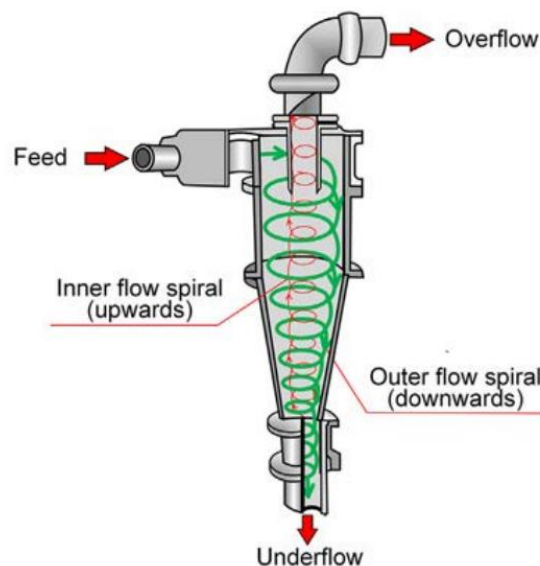


Figura 12 - Representação de um ciclone, (Wills & Finch, 2016)

A alimentação é introduzida tangencialmente sob pressão na parte superior cilíndrica do ciclone. O que equivale a dizer que é introduzida no ciclone a elevada velocidade, descrevendo no seu interior uma trajetória helicoidal de passo descendente. A elevada força centrífuga a que todas as partículas são submetidas, terá como consequência uma tendência generalizada destas para circular em junto às paredes e saírem pelo orifício inferior – apex. Contudo, devido ao efeito da ciclonagem, forma-se no centro do equipamento uma zona de forte sucção que tende a deslocar o ar inspirado pelo orifício inferior e a polpa que se encontra próxima dessa zona, forma um outro movimento em espiral mas com passo ascendente, efetuando-se a saída do produto mais fino pela zona superior do ciclone – o vortex.

A saída de uma partícula pelo underflow, ou pelo overflow depende da sua posição relativamente ao eixo do aparelho, ou seja, se a força centrífuga que atua na partícula for maior que a força de arrasto

originada pela espiral ascendente e sairá pelo underflow. Caso contrário, será arrastada para o centro do ciclone e sairá pela parte superior com o overflow. Maioritariamente todas as partículas passam pela zona de maior velocidade tangencial antes de passarem para a espiral interior ou exterior. Por essa razão estes equipamentos possuem uma elevada eficiência na produção de overflows quase isentos de partículas grosseiras.

#### Breve descrição do diagrama de classificação por calibres presente na instalação

Como pode ser visto no diagrama esquemático da instalação, representado na figura 10, o caulino bruto é transportado por pá carregadora até à tremonha de alimentação do circuito, seguindo para o trommel aonde é desagregado (Figura 13). No trommel é também efetuada uma classificação granulométrica pelos dois crivos que compõem a superfície de crivagem, originando-se dois lotes de material graúdo: um designado genericamente por grosseiros e o outro por areia grossa.

A polpa resultante desta operação, que é constituída por calibres mais finos segue para uma operação de crivagem, feita numa nora. Neste equipamento cada uma das pás corresponde a um crivo. O material acima do calibre de corte - supracrivo ou supra (designado por underflow no diagrama), segue para os filtros curvos. O infracrivo, (material abaixo do calibre de corte) é recolhido num tanque do qual é bombeado para o primeiro estágio de ciclonagem.

A alimentação do ciclone é composta pelo fluxo anterior, bem como pelo infra do filtro curvo e o infra do filtro de saída das areias 0/2 e 0/4. O underflow do ciclone é dividido em dois fluxos, parte sai como areia 0/2 e parte é adicionada ao supra do filtro curvo para formar a areia 0/4.

O overflow deste estágio de hidrociclonagem é recolhido num tanque, onde é também adicionado o overflow do espessador da mica, e em conjunto são bombeados para o segundo estágio de ciclonagem. O underflow deste segundo estágio de ciclonagem segue para o espessador de micas, e o overflow corresponde ao produto final, o caulino.



*Figura 13 - Instalação de tratamento de caulinos em estudo*

### 3. Processo de esquematização de circuitos de tratamento de minérios

O passo inicial para que se possa efetuar uma análise a um qualquer circuito de tratamento de minérios deverá ser o levantamento de todas as suas operações individuais e os seus fluxos. As operações individuais, de separação ou de mistura, serão então representadas como nós, ditando as relações entre os fluxos.

A instalação de tratamento de caulino em estudo, como descrita anteriormente e representada na figura 10, pode ser esquematizada em nós complexos, um nó complexo é aquele que possui mais do que três fluxos, como na figura seguinte temos os nós 1, 3 e 6:

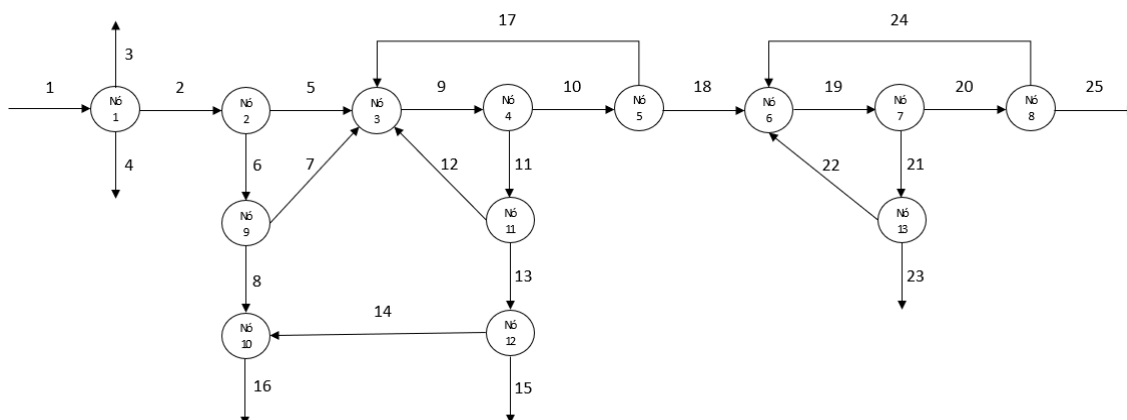


Figura 14 - Diagrama da instalação de caulinos em nós complexos

Todas as operações individuais presentes numa instalação de tratamento de minérios, sejam de separação ou de mistura, podem, por mais complexas que sejam, ser simplificadas em um ou mais nós simples. Um nó simples é entendido como tendo uma entrada e duas saídas para nós separadores e como tendo duas entradas e uma saída para nós de mistura.

A divisão de um nó complexo em nós simples vem simplificar a análise do circuito, com o custo de criar fluxos extra, como demonstrado na figura 17.



Figura 15 - a) nó de separação simples, b) nó de mistura simples, (Wills & Finch, 2006)

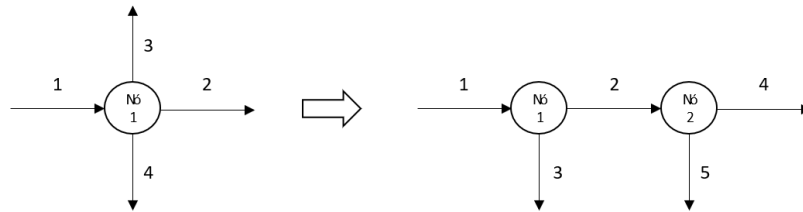


Figura 16 - Transformação de um nó complexo em dois nós simples

A passagem de um nó complexo a nós simples implica, pelo menos, a criação de um nó extra e de um fluxo entre os nós, permitindo assim que em cada nó apenas interajam três fluxos. A figura 16 exemplifica o processo de simplificação do nó 1 do diagrama em nós complexos.

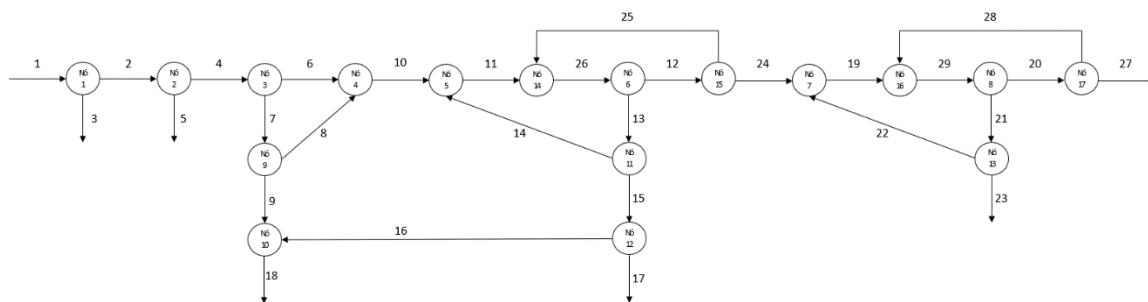


Figura 17 - Diagrama da instalação de tratamento em nós simples

Para analisar e quantificar os fluxos de uma instalação, que pode ser vista como um sistema complexo em equilíbrio, recorre-se habitualmente à escrita de equações de balanço de massa. Para cada nó do circuito serão escritas duas equações, uma de balanço de caudais e uma de balanço de constituintes, que poderão ser teor ou frações de material de um histograma de calibres. Dessa forma será possível escrever um conjunto de equações lineares para  $n$  incógnitas, sendo cada incógnita o caudal, ou uma razão de caudais, de cada fluxo.

O número de fluxos que será necessário amostrar,  $N$ , poderá ser calculado pela equação de Frew, que depende do número de fluxos de alimentação do circuito vindos diretamente do exterior ( $A$ ) e do número de separadores simples ( $S$ ).

$$N = 2(A + S) - 1$$

Equação 2 - Equação de Frew, (Wills & Finch, 2006)

#### 4. Planeamento da amostragem

A amostragem consistiu na recolha de uma amostra com um volume de 2 litros para um recipiente fechado de todos os fluxos a que fosse possível ter acesso. Em vários locais foi impossível fazer a colheita de uma amostra representativa do fluxo, quer pelo caudal envolvido, quer pela geometria da instalação em si. Os fluxos das alimentações dos ciclones foram, notoriamente, dos mais difíceis de amostrar porque era impossível retirar uma amostra na entrada do ciclone, ou na bomba de alimentação, apenas se conseguia amostrar a mistura de fluxos na cuba aonde a bomba estava instalada.

Antecedendo a amostragem completa do circuito foi feito um ensaio exploratório de colheita de amostras, com o objetivo de determinar o volume de polpa que seria necessário recolher para garantir a representatividade do fluxo em análise, colhendo várias amostras do mesmo fluxo e verificando se os resultados eram coerentes entre si. A amostragem foi feita em quatro fluxos e todas as amostras foram recolhidas em triplicado. Os fluxos amostrados foram o overflow da nora, o underflow dos dois ciclones (para o underflow do primeiro ciclone apenas foram colhidas amostras em duplicado) e o overflow do segundo ciclone, o caulino.

Antes da análise granulométrica ser efetuada todo o material colhido na instalação de lavagem de caulino foi seco numa estufa e posteriormente desagregado, de acordo com o procedimento apresentado.

As análises granulométricas foram feitas recorrendo a um granulómetro laser e a uma série de crivagem. O resultado das análises pode ser observado nas figuras seguintes, onde estão representadas as curvas cumulantes do material.

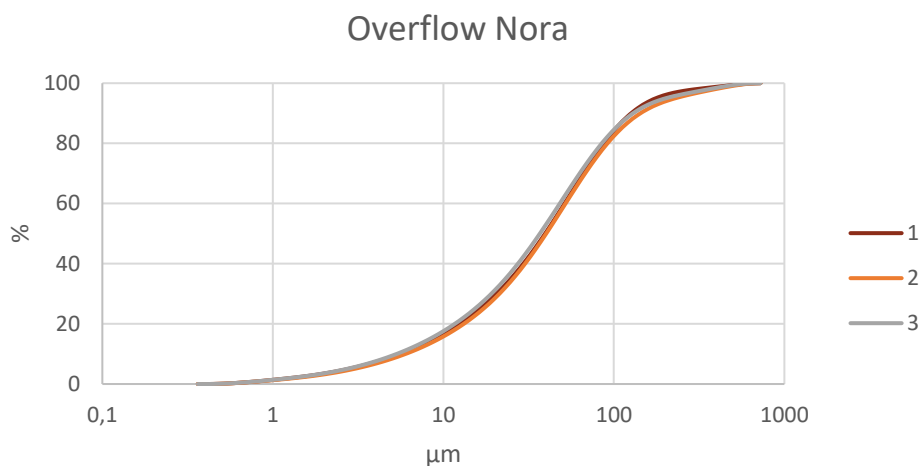


*Figura 18 - Cumulantes das 3 amostras do overflow da nora*

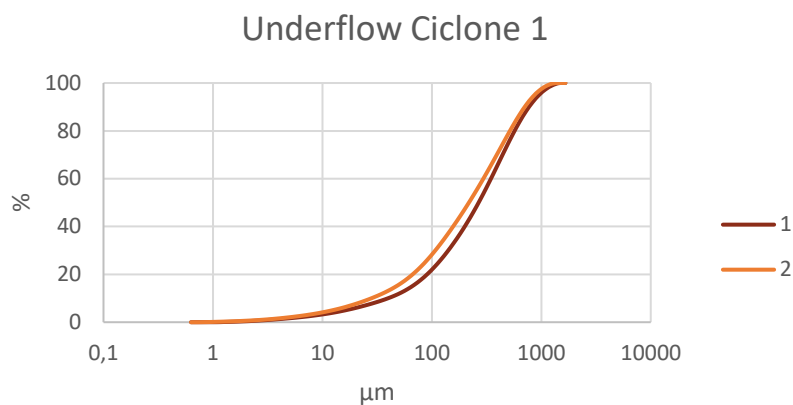


*Figura 19 - Cumulantes das 2 amostras do underflow do 1º ciclone*

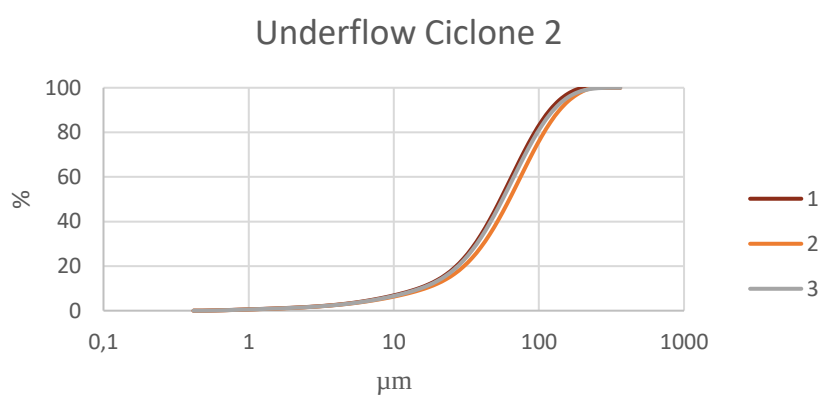


*Figura 20 - Cumulantes das 3 amostras do underflow do 2º ciclone*

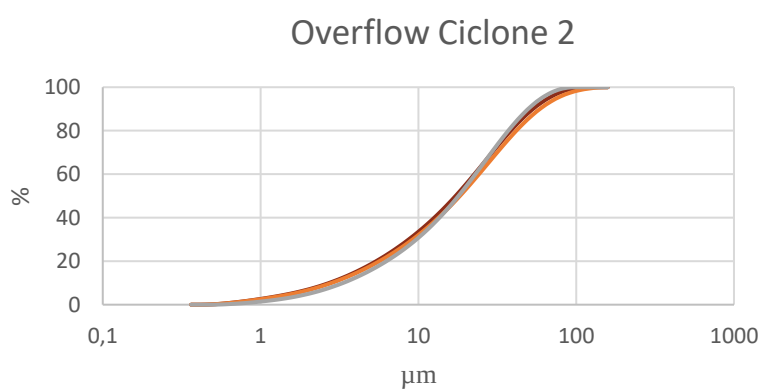


*Figura 21- Cumulantes das 3 amostras do overflow do 2º ciclone*

Da análise das figuras anteriores pode concluir-se que as curvas cumulantes são praticamente sobreponíveis, o que significa que as amostras são semelhantes, logo que o volume de polpa recolhida é suficiente e que os dados são bastante coerentes entre si. Daqui se conclui que a metodologia adotada poderia ser usada.

## 5. Procedimento experimental de preparação das amostras

As amostras após serem recolhidas foram decantadas e transferidas para tabuleiros metálicos para que pudessem ser levadas à estufa até estarem completamente secas.

De seguida foram desagregadas para desfazer os acumulados de partículas que se formaram durante o processo de seca e pesadas.

As amostras a analisar possuem partículas com granulometrias muito distintas, que variam entre 37,5 mm e 0,417  $\mu\text{m}$ , o que obrigou a efetuar a sua análise granulométrica através de dois métodos distintos, cada um deles mais adequado à gama de calibres existente.

Efetuuou-se a análise granulométrica da fração mais grosseira, acima de 1,18 mm, através de peneiração e a fração mais fina com a utilização de um granulómetro laser

A fração superior a 1,18 mm foi analisada via seca, através de uma série de peneiros convenientes, usando uma agitação durante 20 minutos. Utilizou-se para o efeito a seguinte série de crivos da ASTM: 37,5; 25; 19; 13,2; 9,5; 6,7; 4,75; 3,35; 2,36; 1,7 e 1,18 mm. A fração retida em cada um dos peneiros foi pesada e determinou-se a percentagem em peso de cada fração em relação ao peso total de cada amostra.

A fração inferior a 1,18 mm foi analisada num granulómetro laser de marca Malvern - Mastersizer 2000. A opção feita para o limite inferior de crivagem teve a ver com o facto de o calibre máximo admitido pelo granulómetro ser de 2 mm. Dado tratar-se de um produto muito fino, as partículas de menor calibre tendem a aglomerar-se e a formar flocos aparentemente de maior calibre. Este fenómeno foi evidenciado em alguns produtos analisados, o que obrigou a uma atenção redobrada, pois muitos dos resultados mostravam uma granulometria mais grosseira do que era na realidade. Para evitar esse efeito, que falsearia os resultados, principalmente nos calibres onde se encontra a maior quantidade de matéria prima, o caulino, foi necessário recorrer ao uso da função de ultrassons que o equipamento possui.

As classes granulométricas utilizadas foram escolhidas, de entre as várias opções que o equipamento possui, a série de crivagem ISO 565:1990, que segue uma relação de tamizagem semelhante à utilizada na peneiração das partículas grosseiras.

Após a obtenção dos resultados no Mastersizer procedeu-se à compatibilização dos dados obtidos pelas duas vias utilizadas para a determinação dos grãos e dos finos, de modo a obter-se o histograma da composição granulométrica.

## 6. Resultados da amostragem

Dos 29 fluxos em que o circuito foi decomposto, como está esquematizado na figura 17, apenas foram colhidas 19 amostras. Contudo existem no circuito 3 nós – nós 12, 15 e 17, em que apenas se faz divisão do fluxo de entrada, por isso 6 fluxos extra são conhecidos. Isto porque o histograma dos fluxos de saída de cada nó será igual ao da sua alimentação. Neste caso teremos que o histograma dos fluxos 15, 16 e 17 serão iguais entre si, os dos fluxos 12, 24 e 25 também serão iguais entre si, assim como os fluxos 20, 27 e 28. Os restantes 4 fluxos são fruto da transformação de nós complexos do circuito em nós simples. Estes não são fluxos reais, por isso a recolha de amostras não é possível, no entanto eles podem ser estimados, o que será feito posteriormente.

As amostras, foram tratadas de acordo com o procedimento experimental anteriormente descrito. O material foi crivado até 1,18 mm e o infracrivo analisado no granulómetro laser. Na tabela seguinte os resultados estão apresentados segundo o número da amostra, não da numeração dos fluxos em si.

Tabela 2 - Resultado da crivagem das amostras

| Resultado da crivagem das amostras (%) |       |     |     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |     |     |     |       |       |     |
|----------------------------------------|-------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----|-------|-------|-----|
| mm                                     | 1     | 2   | 3   | 4     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    | 15  | 16  | 17  | 18    | 19    | 20  |
| -1,18                                  | 99,99 | 100 | 100 | 93,26 | 94,22 | 73,52 | 99,98 | 65,09 | 99,99 | 0,54  | 8,92  | 58,16 | 80,67 | 100 | 100 | 100 | 99,16 | 73,61 | 100 |
| 1,18                                   | 0,01  |     |     | 6,74  | 3,18  | 10,99 | 0,02  | 14,52 | 0,01  | 0,04  | 1,24  | 15,92 | 19,33 |     |     |     | 0,84  | 8,24  |     |
| 1,7                                    |       |     |     |       | 1,53  | 7,25  |       | 10,04 |       | 0,08  | 1,84  | 12,63 |       |     |     |     |       | 5,68  |     |
| 2,36                                   |       |     |     |       | 0,55  | 5,35  |       | 7,02  |       | 0,16  | 6,04  | 8,90  |       |     |     |     |       | 4,44  |     |
| 3,35                                   |       |     |     |       | 0,46  | 2,58  |       | 3,09  |       | 0,42  | 19,81 | 3,91  |       |     |     |     |       | 3,08  |     |
| 4,75                                   |       |     |     |       | 0,07  | 0,31  |       | 0,24  |       | 0,65  | 26,72 | 0,48  |       |     |     |     |       | 1,62  |     |
| 6,7                                    |       |     |     |       |       |       |       |       |       | 0,43  | 27,07 |       |       |     |     |     |       | 1,16  |     |
| 9,5                                    |       |     |     |       |       |       |       |       |       | 0     | 8,35  |       |       |     |     |     |       | 0,65  |     |
| 13,2                                   |       |     |     |       |       |       |       |       |       | 3,15  |       |       |       |     |     |     |       | 0,32  |     |
| 19                                     |       |     |     |       |       |       |       |       |       | 0     |       |       |       |     |     |     |       | 1,19  |     |
| 25                                     |       |     |     |       |       |       |       |       |       | 18,26 |       |       |       |     |     |     |       |       |     |
| 37,5                                   |       |     |     |       |       |       |       |       |       | 76,27 |       |       |       |     |     |     |       |       |     |
| Total                                  | 100   | 100 | 100 | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100 | 100 | 100 | 100   | 100   | 100 |

A fração de partículas inferior a 1,18 mm foi então analisada num Malvern Mastersizer 2000, cuja análise granulométrica, segundo a série de crivagem ISO 565:1990 foi combinado com o resultado da crivagem para produzir o histograma completo das amostras apresentados nas tabelas 3 e 4.

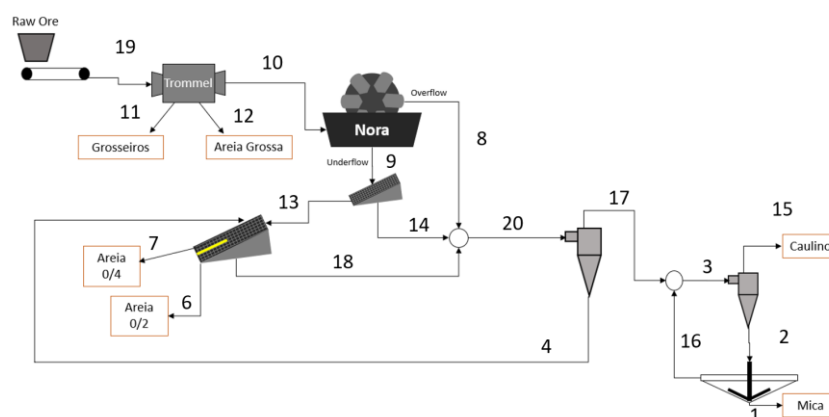


Figura 22 - Local de recolha das amostras

Tabela 3 - Histograma da amostragem, fluxos 1 a 11

| Histograma |        |        |       |        |       |        |        |        |        |        |
|------------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| μm         | 1      | 2      | 3     | 4      | 6     | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     |
| 0,417      | 20,72  | 22,22  | 54,34 | 5,63   | 2,96  | 1,51   | 34,25  | 3,84   | 33,93  | 0,07   |
| 38         | 5,89   | 6,00   | 6,50  | 1,05   | 0,51  | 0,31   | 3,68   | 0,39   | 3,30   | 0,01   |
| 45         | 6,69   | 6,76   | 6,43  | 1,27   | 0,68  | 0,38   | 3,70   | 0,40   | 3,26   | 0,01   |
| 53         | 7,97   | 7,98   | 6,68  | 1,69   | 1,01  | 0,54   | 4,07   | 0,46   | 3,53   | 0,02   |
| 63         | 8,70   | 8,61   | 6,31  | 2,13   | 1,45  | 0,72   | 4,29   | 0,49   | 3,68   | 0,02   |
| 75         | 9,37   | 9,18   | 5,81  | 2,75   | 2,09  | 0,99   | 4,69   | 0,55   | 4,01   | 0,02   |
| 90         | 8,22   | 7,98   | 4,30  | 2,96   | 2,47  | 1,12   | 4,37   | 0,53   | 3,76   | 0,02   |
| 106        | 7,69   | 7,42   | 3,36  | 3,44   | 3,10  | 1,37   | 4,51   | 0,57   | 3,94   | 0,02   |
| 125        | 7,42   | 7,14   | 2,57  | 4,35   | 4,16  | 1,80   | 5,04   | 0,71   | 4,52   | 0,03   |
| 150        | 6,03   | 5,78   | 1,52  | 4,90   | 4,96  | 2,11   | 4,99   | 0,86   | 4,67   | 0,03   |
| 180        | 4,17   | 4,00   | 0,71  | 4,87   | 5,11  | 2,16   | 4,37   | 1,00   | 4,28   | 0,03   |
| 212        | 3,09   | 2,96   | 0,34  | 5,33   | 5,75  | 2,47   | 4,24   | 1,35   | 4,35   | 0,03   |
| 250        | 2,33   | 2,22   | 0,21  | 6,30   | 6,95  | 3,14   | 4,43   | 2,08   | 4,77   | 0,04   |
| 300        | 1,33   | 1,19   | 0,21  | 6,08   | 6,85  | 3,37   | 3,76   | 2,64   | 4,24   | 0,04   |
| 355        | 0,37   | 0,55   | 0,30  | 6,59   | 7,57  | 4,22   | 3,56   | 3,73   | 4,20   | 0,04   |
| 425        | 0,02   | 0,02   | 0,28  | 5,85   | 6,82  | 4,46   | 2,67   | 4,24   | 3,34   | 0,04   |
| 500        | 0,00   | 0,00   | 0,11  | 6,19   | 7,33  | 5,77   | 2,17   | 5,70   | 3,02   | 0,03   |
| 600        | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 5,19   | 6,19  | 5,99   | 1,05   | 5,98   | 1,94   | 0,02   |
| 710        | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 4,85   | 5,76  | 6,90   | 0,15   | 6,83   | 1,10   | 0,00   |
| 850        | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 3,69   | 4,30  | 6,33   | 0,00   | 6,16   | 0,18   | 0,00   |
| 1000       | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 3,09   | 3,46  | 6,12   | 0,00   | 5,83   | 0,00   | 0,00   |
| 1180       | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 5,31   | 3,93  | 10,09  | 0,01   | 11,21  | 0,01   | 0,02   |
| 1400       | 0,01   | 0,00   | 0,00  | 5,75   | 3,56  | 10,80  | 0,01   | 12,43  | 0,01   | 0,02   |
| 1700       | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,75   | 1,97  | 9,10   | 0,00   | 11,69  | 0,00   | 0,08   |
| 2360       | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,55  | 5,35   | 0,00   | 7,02   | 0,00   | 0,16   |
| 3350       | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,46  | 2,58   | 0,00   | 3,09   | 0,00   | 0,42   |
| 4750       | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,07  | 0,31   | 0,00   | 0,24   | 0,00   | 0,65   |
| 6700       | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,43   |
| 9500       | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   |
| 13200      | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 3,15   |
| 19000      | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   |
| 25000      | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 18,26  |
| 37500      | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 76,27  |
| Total      | 100,01 | 100,01 | 99,98 | 100,01 | 99,99 | 100,01 | 100,00 | 100,01 | 100,02 | 100,00 |

Tabela 4 - Histograma da amostragem, fluxos 12 a 20

| Histograma    |        |        |        |       |       |        |        |        |       |
|---------------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|
| $\mu\text{m}$ | 12     | 13     | 14     | 15    | 16    | 17     | 18     | 19     | 20    |
| 0,417         | 1,49   | 3,20   | 6,35   | 78,24 | 22,44 | 54,98  | 10,12  | 27,74  | 56,57 |
| 38            | 0,13   | 0,35   | 0,74   | 6,00  | 5,97  | 6,01   | 1,32   | 2,80   | 5,64  |
| 45            | 0,13   | 0,35   | 0,77   | 4,88  | 6,69  | 5,93   | 1,44   | 2,86   | 5,44  |
| 53            | 0,14   | 0,39   | 0,87   | 4,05  | 7,87  | 6,17   | 1,74   | 3,09   | 5,59  |
| 63            | 0,15   | 0,41   | 0,94   | 2,96  | 8,48  | 5,88   | 2,05   | 3,05   | 5,32  |
| 75            | 0,17   | 0,45   | 1,04   | 2,03  | 9,02  | 5,52   | 2,54   | 2,93   | 5,06  |
| 90            | 0,16   | 0,44   | 0,99   | 1,06  | 7,79  | 4,21   | 2,68   | 2,22   | 3,96  |
| 106           | 0,18   | 0,49   | 1,09   | 0,56  | 7,16  | 3,43   | 3,12   | 1,71   | 3,34  |
| 125           | 0,21   | 0,65   | 1,39   | 0,20  | 6,74  | 2,80   | 4,00   | 1,24   | 2,86  |
| 150           | 0,23   | 0,80   | 1,73   | 0,01  | 5,32  | 1,84   | 4,59   | 0,75   | 2,02  |
| 180           | 0,23   | 0,91   | 2,00   | 0,00  | 3,60  | 1,01   | 4,64   | 0,63   | 1,22  |
| 212           | 0,26   | 1,17   | 2,62   | 0,00  | 2,67  | 0,60   | 5,16   | 1,10   | 0,81  |
| 250           | 0,32   | 1,69   | 3,79   | 0,00  | 2,11  | 0,43   | 6,18   | 2,34   | 0,61  |
| 300           | 0,33   | 2,04   | 4,44   | 0,00  | 1,42  | 0,33   | 6,02   | 3,53   | 0,46  |
| 355           | 0,41   | 2,84   | 5,71   | 0,00  | 1,16  | 0,37   | 6,57   | 5,07   | 0,47  |
| 425           | 0,43   | 3,26   | 5,87   | 0,00  | 0,80  | 0,32   | 5,88   | 5,04   | 0,38  |
| 500           | 0,55   | 4,55   | 7,10   | 0,00  | 0,59  | 0,17   | 6,34   | 4,86   | 0,22  |
| 600           | 0,56   | 5,03   | 6,69   | 0,00  | 0,16  | 0,00   | 5,45   | 2,44   | 0,02  |
| 710           | 0,64   | 6,10   | 6,90   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 5,29   | 0,19   | 0,00  |
| 850           | 0,58   | 5,82   | 5,71   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 4,20   | 0,00   | 0,00  |
| 1000          | 0,55   | 5,79   | 5,07   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 3,65   | 0,00   | 0,00  |
| 1180          | 1,01   | 11,99  | 12,40  | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 3,34   | 3,49   | 0,00  |
| 1400          | 1,11   | 13,54  | 14,45  | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 2,78   | 4,75   | 0,00  |
| 1700          | 2,01   | 14,45  | 1,34   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,92   | 5,68   | 0,00  |
| 2360          | 6,04   | 8,90   | 0,00   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 4,44   | 0,00  |
| 3350          | 19,81  | 3,91   | 0,00   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 3,08   | 0,00  |
| 4750          | 26,72  | 0,48   | 0,00   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 1,62   | 0,00  |
| 6700          | 27,07  | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 1,16   | 0,00  |
| 9500          | 8,35   | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,65   | 0,00  |
| 13200         | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,32   | 0,00  |
| 19000         | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 1,19   | 0,00  |
| 25000         | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00  |
| 37500         | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00  | 0,00  | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00  |
| Total         | 100,00 | 100,01 | 100,00 | 99,99 | 99,99 | 100,00 | 100,02 | 100,00 | 99,99 |

## 4. Tratamento de dados

### 1. Introdução à metodologia usada na reconciliação de dados

Os dados granulométricos a tratar para a caracterização de instalações de tratamento de minérios deste género são, muitas vezes, incoerentes entre si.

Na prática isto acontece pela possível falta de representatividade da amostragem, pelos erros do equipamento e do operador na análise das mesmas, pelo funcionamento da instalação em regime não permanente, ou seja, a instalação nunca irá operar em condições exatamente iguais ao longo do tempo, e pelo facto de quê a instalação trata um minério não homogéneo por natureza.

Estas razões levaram à necessidade de mitigar os erros introduzidos pelos dados na análise do circuito de tratamento, a metodologia empregue neste trabalho será de seguida explicada e exemplificada. Imaginando que a análise granulométrica de um ciclone produziu os seguintes resultados:

*Tabela 5 - Exemplo de análise granulométrica dos fluxos de um ciclone*

| $\mu\text{m}$ | Alimentação | Overflow | Underflow |
|---------------|-------------|----------|-----------|
| 38            | 0,123       | 0,158    | 0,092     |
| 45            | 0,248       | 0,313    | 0,208     |
| 53            | 0,332       | 0,303    | 0,322     |
| 63            | 0,218       | 0,181    | 0,266     |
| 75            | 0,079       | 0,044    | 0,112     |

Após o cálculo do rendimento ponderal, que é a razão entre o caudal presente no underflow e o caudal de alimentação, neste caso será de 0,551, calculado pela equação 4, cuja explicação se encontra na página 52, verificamos que existem diferenças não nulas, denominadas de erros de fecho, entre os fluxos nas várias frações granulométricas. Como já referido o rendimento ponderal entende-se como a razão entre o underflow e a alimentação, e o underflow mais o overflow será igual à alimentação logo a equação 3 permite-nos calcular o valor das diferenças, que idealmente seriam 0.

$$ai - Rp^* ui - (1 - Rp^*) oi = \Delta N$$

*Equação 3 - Cálculo dos erros de fecho*

$$Rp^* = \frac{\sum_{i=1}^n (ai - oi)(ui - oi)}{\sum_{i=1}^n (ui - oi)^2}$$

*Equação 4 - Rendimento ponderal*

Estas diferenças não nulas serão eliminadas usando o método dos multiplicadores de Lagrange, que consiste na introdução de um multiplicador de Lagrange,  $\lambda$ , na equação, constituída pelas várias variáveis a minimizar e pela restrição, que será a equação 3. De seguida a Lagrangeana é derivada em ordem a todas as incógnitas, obtendo-se as equações para o seu cálculo.

$$\mathcal{L} = (\Delta ai^2 + \Delta oi^2 + \Delta ui^2) + 2\lambda (\Delta N - \Delta ai + Rp^* 1 \Delta ui + (1 - Rp^* 1) \Delta oi)$$

*Equação 5 - Exemplo de equação Lagrangeana*

$$\Delta ai = \lambda$$

*Equação 6 - Cálculo ajuste na alimentação*

$$\Delta oi = (Rp^* - 1) \lambda$$

*Equação 7 – Cálculo do ajuste no overflow*

$$\Delta ui = -Rp^* \lambda$$

*Equação 8 – Cálculo do ajuste no underflow*

$$\lambda = \frac{\Delta N}{2Rp^{*2} - 2Rp^* + 2}$$

*Equação 9 - Multiplicador de Lagrange*

Estas equações vão permitir o cálculo dos deltas, que representam os ajustes nos dados iniciais para que estes se tornem coerentes, e subtraindo então aos dados estes valores obtém-se os valores dos novos histogramas granulométricos, que já estarão isentos de erros de fecho.

*Tabela 6 - Histograma ajustado*

| $\mu m$ | Alimentação | Overflow | Underflow |
|---------|-------------|----------|-----------|
| 38      | 0,12208     | 0,15841  | 0,09251   |
| 45      | 0,25273     | 0,31088  | 0,20539   |
| 53      | 0,31969     | 0,30852  | 0,32878   |
| 63      | 0,22455     | 0,17806  | 0,26239   |
| 75      | 0,08065     | 0,04326  | 0,11109   |

*Tabela 7 - Comparação de erros de fecho*

| $\mu m$ | Sem ajuste | Com ajuste |
|---------|------------|------------|
| 38      | 0,00139    | 0          |
| 45      | -0,00711   | 0          |
| 53      | 0,01853    | 0          |
| 63      | -0,00986   | 0          |
| 75      | -0,00249   | 0          |

Como se verifica na tabela 7, o método dos multiplicadores de Lagrange vem tornar os dados coerentes para que de seguida estes possam ser trabalhados na análise e na simulação do circuito. Esta é a metodologia base usada reconciliação de dados na análise de uma instalação de tratamento, aqui exemplificada no caso mais simples, a instalação real, objeto deste trabalho, é bastante mais complexa, mas a metodologia usada na reconciliação dos dados reais obtidos terá a mesma base, aumentando a sua complexidade fruto da complexidade do problema.

## 2. Ajuste de fluxos

Após ter sido feita a correspondência das amostras com os fluxos representados no diagrama de nós do circuito, verificou-se que os dados apresentavam algumas inconsistências, como a inexistência de certos calibres no fluxo de alimentação que estão presentes nos fluxos de saída, ou que a cumulante da alimentação intersectava a cumulante do overflow e/ou do underflow.

Para corrigir esses problemas alguns fluxos foram recalculados para que façam sentido, tomando partido do conhecimento de que as saídas foram melhor amostradas do que as alimentações e como tal os resultados das suas análises granulométricas estarão mais próximos da realidade, quando existiam inconsistências o fluxo que foi refeito foi o da alimentação.

Para esse efeito foi calculado, nó a nó, o rendimento ponderal da separação para todas as classes granulométricas. Após a sua análise foi identificado o intervalo de calibres em que o Rendimento ponderal apresentava um comportamento dentro do esperado, ou seja, um intervalo com valores muito semelhantes entre si. Com esse conjunto de valores foi estimado um rendimento ponderal que foi extrapolado para todas as classes granulométricas. Usando o rendimento ponderal escolhido e a distribuição granulométrica dos fluxos de saída do nó separador o histograma da alimentação pode ser calculado:

$$A_{ai} = U_{ui} + O_{oi}$$

*Equação 10 - Balanço de componentes*

$$a_i = R_p u_i + (1 - R_p) o_i$$

*Equação 11 - Cálculo do histograma da alimentação*

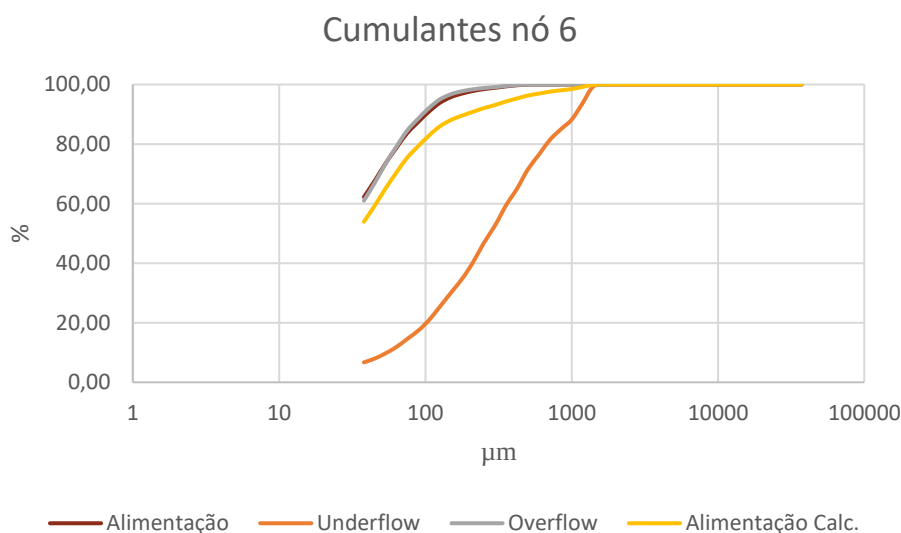


*Figura 23 - Exemplo de nó onde foi necessário o cálculo de uma nova alimentação*

Como se pode ver na figura 23 onde são mostradas as distribuições granulométricas dos produtos envolvidos do nó 6, que representa o primeiro estágio de ciclonagem, a curva cumulante da alimentação original é muito semelhante à do overflow, o que significa que todo o material estaria abaixo do calibre de corte. Por outro lado, pode ver-se que no underflow existe material grosseiro, o

que evidencia nitidamente para um problema na colheita da amostra da alimentação. Por isso, uma alimentação mais adequada foi calculada usando a partir do rendimento ponderal.

O facto de alimentação ter uma granulometria mais fina do que o esperado pode ser explicado pelo facto de a amostra ter sido retirada da cuba onde a bomba recolhe o fluxo. Aí, provavelmente, as granulometrias mais grosseiras sedimentam mais rápido e não são apanhadas pela amostra na quantidade em que deveriam estar presentes.

Como já referido anteriormente, a análise do circuito foi feita decompondo-o em nós simples, entendendo-se um nó simples como aquele que apenas tem três fluxos, ora existindo no circuito em questão nós complexos estes foram divididos em dois ou em três nós simples, consoante o número de fluxos presentes, dando origem a fluxos “virtuais”. Na figura 24 está presente um exemplo disso, os nós 5 e 14 são dois nós simples consecutivos de mistura que na realidade são um só, a divisão desse nó único em dois veio gerar o fluxo 11.

Estes fluxos virtuais não têm presença física no circuito, logo não são passíveis de serem amostrados, no entanto podem ser calculados. Para o circuito completo, os fluxos em questão são os fluxos 2, 10, 11 e 19. O fluxo 2 foi calculado tomando partido de um rendimento ponderal estimado. O fluxo 10 é resultante da junção dos fluxos 6 e 8. Para o cálculo dos fluxos 11 e 19 foi empregue o método matricial descrito de seguida.

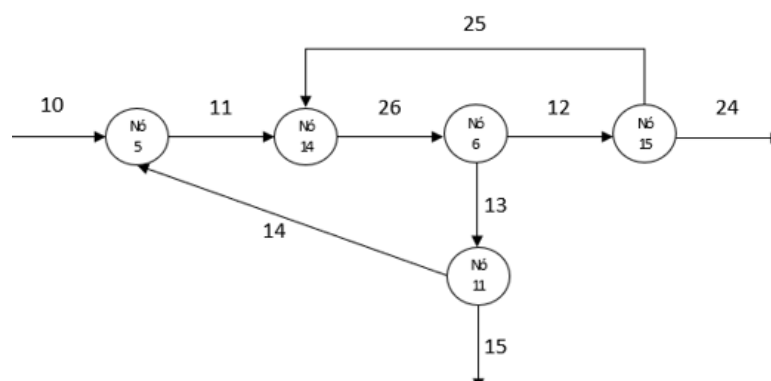


Figura 24 - Parte do circuito usada no cálculo do fluxo 11

Tendo um sistema em que um ou mais fluxos sejam desconhecidos estes podem ser calculados se forem conhecidos fluxos suficientes, o que pode ser verificado pela equação de Frew (equação 2). Neste exemplo estão presentes 1 caudal de entrada e 3 nós separadores:

$$N = 2(1 + 3) - 1 = 7$$

Equação 12 - Equação de Frew aplicado ao circuito da figura 24

Logo será preciso conhecer 7 fluxos. Dos 9 presentes, 8 foram amostrados, assim será possível calcular o restante.

No estudo não se considerou o valor absoluto de todos os caudais, mas sim uma razão entre eles e o fluxo da alimentação, que por essa razão assumirá o valor de 1. Para determinar os caudais dos 8 fluxos restantes são necessárias 8 equações, neste caso podem ser escritas as 5 equações de balanço

de massa dos 5 nós presentes e 3 equações de balanço de componente (histograma granulométrico). Para as equações de constituinte não podem ser usados os nós 5 e 14 porque o histograma do fluxo 11 ainda não é conhecido. Por isso, foram usadas as equações dos nós 6, 11 e do nó geral.

O nó geral corresponde ao nó que se obteria se se simplificasse todo o circuito a um nó apenas. Assim todos os fluxos internos seriam eliminados e apenas as alimentações e as saídas do sistema em si apareciam no nó. O balanço de massas para o nó geral é igual a qualquer outro nó, em que a massa na alimentação tem que ser igual à massa das saídas.

Escrevendo as equações na forma matricial

$$M_{ij} = C_{ij}B_j$$

*Equação 13 - Forma matricial das equações para cálculo de caudais*

Em que a matriz M é constituída pela coluna da alimentação, o fluxo 10, neste caso, multiplicado por -1, a matriz C é composta pelas colunas correspondentes aos restantes fluxos, 11 a 26, e onde as linhas correspondem aos nós indicados, a matriz B vai ser a matriz em que serão calculados todos os caudais desconhecidos. A matriz B foi calculada multiplicando a inversa da matriz C pela matriz M.

| C  |       |        |       |        |       |        |       |       | B |      | M      |
|----|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|-------|---|------|--------|
|    | 11    | 12     | 13    | 14     | 15    | 24     | 25    | 26    |   |      | 10     |
| 5  | -1,00 | 0,00   | 0,00  | 1,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00  | x | 1,25 | -1,00  |
| 6  | 0,00  | -1,00  | -1,00 | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 1,00  |   | 4,38 | 0,00   |
| 11 | 0,00  | 0,00   | 1,00  | -1,00  | -1,00 | 0,00   | 0,00  | 0,00  |   | 0,65 | 0,00   |
| 14 | 1,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 1,00  | -1,00 |   | 0,25 | 0,00   |
| 15 | 0,00  | 1,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | -1,00  | -1,00 | 0,00  |   | 0,41 | 0,00   |
| 6  | 0,00  | -54,98 | -5,66 | 0,00   | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 48,57 |   | 0,59 | 0,00   |
| 11 | 0,00  | 0,00   | 5,66  | -10,12 | -2,96 | 0,00   | 0,00  | 0,00  |   | 3,79 | 0,00   |
| G. | 0,00  | 0,00   | 0,00  | 0,00   | -2,96 | -54,98 | 0,00  | 0,00  |   | 5,03 | -33,77 |

*Figura 25 - Exemplo de cálculo de fluxos para o calibre 38 µm*

Repetindo este cálculo para todas as classes granulométricas obtém-se todos os caudais do circuito em análise.

*Tabela 8 - Resultado do cálculo dos caudais*

| Fluxo | Caudal |
|-------|--------|
| 10    | 1,000  |
| 11    | 1,235  |
| 12    | 4,533  |
| 13    | 0,622  |
| 14    | 0,235  |
| 15    | 0,388  |
| 24    | 0,612  |
| 25    | 3,920  |
| 26    | 5,155  |

Finalmente conhecendo os caudais pode-se calcular o histograma do fluxo desconhecido 11 pela junção dos fluxos 10 e 14. Para o fluxo 19 a metodologia usada foi a mesma que descrita e exemplificada para o fluxo 11.

$$f_{11i} = \frac{F_{10}f_{10i} + F_{14}f_{14i}}{F_{11}}$$

Equação 14 - Cálculo do histograma do fluxo 11

O histograma do circuito completo após os ajustes é o seguinte:

Tabela 9 - Histograma ajustado, fluxos 1 a 14

| Histograma ajustado |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| μm                  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13   | 14    |
| 0,417               | 28,24 | 28,66 | 0,07  | 30,13 | 1,49  | 34,25 | 3,84  | 6,35  | 3,20  | 33,77 | 29,28 | 54,98 | 5,66 | 10,12 |
| 38                  | 3,03  | 3,07  | 0,01  | 3,23  | 0,13  | 3,68  | 0,39  | 0,74  | 0,35  | 3,63  | 3,19  | 6,01  | 0,81 | 1,32  |
| 45                  | 3,05  | 3,09  | 0,01  | 3,25  | 0,13  | 3,70  | 0,40  | 0,77  | 0,35  | 3,65  | 3,23  | 5,93  | 0,96 | 1,44  |
| 53                  | 3,35  | 3,40  | 0,02  | 3,58  | 0,14  | 4,07  | 0,46  | 0,87  | 0,39  | 4,01  | 3,58  | 6,17  | 1,28 | 1,74  |
| 63                  | 3,54  | 3,59  | 0,02  | 3,77  | 0,15  | 4,29  | 0,49  | 0,94  | 0,41  | 4,23  | 3,82  | 5,88  | 1,68 | 2,05  |
| 75                  | 3,87  | 3,92  | 0,02  | 4,13  | 0,17  | 4,69  | 0,55  | 1,04  | 0,45  | 4,63  | 4,23  | 5,52  | 2,26 | 2,54  |
| 90                  | 3,61  | 3,66  | 0,02  | 3,85  | 0,16  | 4,37  | 0,53  | 0,99  | 0,44  | 4,31  | 4,00  | 4,21  | 2,55 | 2,68  |
| 106                 | 3,73  | 3,78  | 0,02  | 3,98  | 0,18  | 4,51  | 0,57  | 1,09  | 0,49  | 4,45  | 4,20  | 3,43  | 3,11 | 3,12  |
| 125                 | 4,17  | 4,24  | 0,03  | 4,45  | 0,21  | 5,04  | 0,71  | 1,39  | 0,65  | 4,98  | 4,79  | 2,80  | 4,10 | 4,00  |
| 150                 | 4,15  | 4,21  | 0,03  | 4,43  | 0,23  | 4,99  | 0,86  | 1,73  | 0,80  | 4,93  | 4,87  | 1,84  | 4,82 | 4,59  |
| 180                 | 3,67  | 3,72  | 0,03  | 3,91  | 0,23  | 4,37  | 1,00  | 2,00  | 0,91  | 4,33  | 4,39  | 1,01  | 4,93 | 4,64  |
| 212                 | 3,61  | 3,66  | 0,03  | 3,85  | 0,26  | 4,24  | 1,35  | 2,62  | 1,17  | 4,21  | 4,39  | 0,60  | 5,52 | 5,16  |
| 250                 | 3,86  | 3,92  | 0,04  | 4,11  | 0,32  | 4,43  | 2,08  | 3,79  | 1,69  | 4,42  | 4,75  | 0,43  | 6,66 | 6,18  |
| 300                 | 3,39  | 3,44  | 0,04  | 3,61  | 0,33  | 3,76  | 2,64  | 4,44  | 2,04  | 3,77  | 4,20  | 0,33  | 6,54 | 6,02  |
| 355                 | 3,37  | 3,42  | 0,04  | 3,58  | 0,41  | 3,56  | 3,73  | 5,71  | 2,84  | 3,60  | 4,16  | 0,37  | 7,19 | 6,57  |
| 425                 | 2,72  | 2,76  | 0,04  | 2,88  | 0,43  | 2,67  | 4,24  | 5,87  | 3,26  | 2,72  | 3,32  | 0,32  | 6,47 | 5,88  |
| 500                 | 2,50  | 2,54  | 0,03  | 2,65  | 0,55  | 2,17  | 5,70  | 7,10  | 4,55  | 2,25  | 3,03  | 0,17  | 6,96 | 6,34  |
| 600                 | 1,63  | 1,66  | 0,02  | 1,72  | 0,56  | 1,05  | 5,98  | 6,69  | 5,03  | 1,15  | 1,97  | 0,00  | 5,91 | 5,45  |
| 710                 | 1,02  | 1,03  | 0,00  | 1,05  | 0,64  | 0,15  | 6,83  | 6,90  | 6,10  | 0,27  | 1,22  | 0,00  | 5,58 | 5,29  |
| 850                 | 0,81  | 0,82  | 0,00  | 0,84  | 0,58  | 0,00  | 6,16  | 5,71  | 5,82  | 0,10  | 0,88  | 0,00  | 4,26 | 4,20  |
| 1000                | 0,77  | 0,78  | 0,00  | 0,79  | 0,55  | 0,00  | 5,83  | 5,07  | 5,79  | 0,09  | 0,76  | 0,00  | 3,53 | 3,65  |
| 1180                | 1,48  | 1,50  | 0,02  | 1,53  | 1,01  | 0,01  | 11,21 | 12,40 | 11,99 | 0,22  | 0,81  | 0,00  | 3,71 | 3,34  |
| 1400                | 1,64  | 1,66  | 0,02  | 1,69  | 1,11  | 0,01  | 12,43 | 14,45 | 13,54 | 0,26  | 0,74  | 0,00  | 3,27 | 2,78  |
| 1700                | 1,58  | 1,61  | 0,08  | 1,58  | 2,01  | 0,00  | 11,69 | 1,34  | 14,45 | 0,02  | 0,19  | 0,00  | 1,57 | 0,92  |
| 2360                | 1,20  | 1,21  | 0,16  | 0,95  | 6,04  | 0,00  | 7,02  | 0,00  | 8,90  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,34 | 0,00  |
| 3350                | 1,40  | 1,41  | 0,42  | 0,42  | 19,81 | 0,00  | 3,09  | 0,00  | 3,91  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,29 | 0,00  |
| 4750                | 1,39  | 1,40  | 0,65  | 0,03  | 26,72 | 0,00  | 0,24  | 0,00  | 0,48  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,04 | 0,00  |
| 6700                | 1,37  | 1,39  | 0,43  | 0,00  | 27,07 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 9500                | 0,42  | 0,43  | 0,00  | 0,00  | 8,35  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 13200               | 0,05  | 0,00  | 3,15  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 19000               | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 25000               | 0,27  | 0,00  | 18,26 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 37500               | 1,14  | 0,00  | 76,27 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| Total               | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100  | 100   |

Tabela 10 - Histograma ajustado, fluxos 15 a 29

| Novo histograma ajustado |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| μm                       | 15   | 16   | 17   | 18    | 19    | 20    | 21    | 22    | 23    | 24    | 25    | 26    | 27    | 28    | 29    |
| 0,417                    | 2,96 | 2,96 | 2,96 | 1,51  | 47,14 | 78,24 | 22,22 | 24,42 | 20,72 | 54,98 | 54,98 | 48,57 | 78,24 | 78,24 | 54,36 |
| 38                       | 0,51 | 0,51 | 0,51 | 0,31  | 6,00  | 6,00  | 6,00  | 6,16  | 5,89  | 6,01  | 6,01  | 5,37  | 6,00  | 6,00  | 6,00  |
| 45                       | 0,68 | 0,68 | 0,68 | 0,38  | 6,11  | 4,88  | 6,76  | 6,86  | 6,69  | 5,93  | 5,93  | 5,32  | 4,88  | 4,88  | 5,68  |
| 53                       | 1,01 | 1,01 | 1,01 | 0,54  | 6,58  | 4,05  | 7,98  | 8,00  | 7,97  | 6,17  | 6,17  | 5,59  | 4,05  | 4,05  | 5,72  |
| 63                       | 1,45 | 1,45 | 1,45 | 0,72  | 6,51  | 2,96  | 8,61  | 8,48  | 8,70  | 5,88  | 5,88  | 5,39  | 2,96  | 2,96  | 5,37  |
| 75                       | 2,09 | 2,09 | 2,09 | 0,99  | 6,36  | 2,03  | 9,18  | 8,90  | 9,37  | 5,52  | 5,52  | 5,16  | 2,03  | 2,03  | 5,08  |
| 90                       | 2,47 | 2,47 | 2,47 | 1,12  | 5,07  | 1,06  | 7,98  | 7,63  | 8,22  | 4,21  | 4,21  | 4,05  | 1,06  | 1,06  | 4,01  |
| 106                      | 3,10 | 3,10 | 3,10 | 1,37  | 4,33  | 0,56  | 7,42  | 7,03  | 7,69  | 3,43  | 3,43  | 3,43  | 0,56  | 0,56  | 3,48  |
| 125                      | 4,16 | 4,16 | 4,16 | 1,80  | 3,75  | 0,20  | 7,14  | 6,73  | 7,42  | 2,80  | 2,80  | 3,00  | 0,20  | 0,20  | 3,16  |
| 150                      | 4,96 | 4,96 | 4,96 | 2,11  | 2,68  | 0,01  | 5,78  | 5,42  | 6,03  | 1,84  | 1,84  | 2,24  | 0,01  | 0,01  | 2,47  |
| 180                      | 5,11 | 5,11 | 5,11 | 2,16  | 1,63  | 0,00  | 4,00  | 3,75  | 4,17  | 1,01  | 1,01  | 1,51  | 0,00  | 0,00  | 1,70  |
| 212                      | 5,75 | 5,75 | 5,75 | 2,47  | 1,10  | 0,00  | 2,96  | 2,77  | 3,09  | 0,60  | 0,60  | 1,21  | 0,00  | 0,00  | 1,26  |
| 250                      | 6,95 | 6,95 | 6,95 | 3,14  | 0,83  | 0,00  | 2,22  | 2,06  | 2,33  | 0,43  | 0,43  | 1,19  | 0,00  | 0,00  | 0,95  |
| 300                      | 6,85 | 6,85 | 6,85 | 3,37  | 0,59  | 0,00  | 1,19  | 0,99  | 1,33  | 0,33  | 0,33  | 1,08  | 0,00  | 0,00  | 0,51  |
| 355                      | 7,57 | 7,57 | 7,57 | 4,22  | 0,56  | 0,00  | 0,55  | 0,81  | 0,37  | 0,37  | 0,37  | 1,18  | 0,00  | 0,00  | 0,23  |
| 425                      | 6,82 | 6,82 | 6,82 | 4,46  | 0,44  | 0,00  | 0,02  | 0,02  | 0,02  | 0,32  | 0,32  | 1,04  | 0,00  | 0,00  | 0,01  |
| 500                      | 7,33 | 7,33 | 7,33 | 5,77  | 0,27  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,17  | 0,17  | 0,95  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 600                      | 6,19 | 6,19 | 6,19 | 5,99  | 0,04  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,67  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 710                      | 5,76 | 5,76 | 5,76 | 6,90  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,63  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 850                      | 4,30 | 4,30 | 4,30 | 6,33  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,48  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 1000                     | 3,46 | 3,46 | 3,46 | 6,12  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,40  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 1180                     | 3,93 | 3,93 | 3,93 | 10,09 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,69  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 1400                     | 3,56 | 3,56 | 3,56 | 10,80 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,01  | 0,00  | 0,00  | 0,75  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 1700                     | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 9,10  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,10  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 2360                     | 0,55 | 0,55 | 0,55 | 5,35  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 3350                     | 0,46 | 0,46 | 0,46 | 2,58  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 4750                     | 0,07 | 0,07 | 0,07 | 0,31  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 6700                     | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 9500                     | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 13200                    | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 19000                    | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 25000                    | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 37500                    | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| Total                    | 100  | 100  | 100  | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   |

### 3. Balanço de massas em circuitos complexos

Tendo como base a representação da instalação em nós simples, como representado na figura 17, foi elaborada a matriz de ligações do sistema. A escrita da matriz de ligações, que relaciona cada fluxo com os diferentes nós, é um instrumento útil e importante para a apreciação e quantificação do circuito.

Na matriz de ligações, estabeleceu-se que quando um fluxo é de entrada num determinado nó este é representado pelo valor 1, no caso de o fluxo sair de um nó é lhe atribuído o valor -1, podendo também tomar o valor 0 quando o fluxo não tem influência no nó em análise. Como cada linha representa cada um dos nós existentes no diagrama, contam-se o número de entradas e o número de saídas, do circuito de modo a calcular o número de separadores simples e de misturadores simples de acordo com:

$$N^{\circ} \text{ Separadores} = N^{\circ} \text{ saídas} - 1$$

$$N^{\circ} \text{ Misturadores} = N^{\circ} \text{ entradas} - 1$$

*Equação 15 - Cálculo do número de fluxos separadores e misturadores*

Como cada coluna representa um fluxo real do diagrama, o somatório de todos os elementos da coluna, deverá também valer +1, -1 ou 0, sendo qualquer outro valor indicativo de existência de erro. Deste modo é possível identificar os fluxos do circuito, através do resultado do somatório de cada coluna. Se o somatório valer:

- 1 – O fluxo é uma alimentação do exterior;
- -1 – O fluxo é um produto final;
- 0 – Trata-se de um fluxo interno;

Como se constata pela Matriz de Ligações (tabela 11), no circuito em análise estão presentes um fluxo de alimentação, 6 fluxos de saída, 6 misturadores e 11 nós separadores.

Substituindo na equação de Frew A e S pelos valores determinados na Matriz de ligações, A=1 e S=11,

$$N = 2(1 + 11) - 1 = 23$$

*Equação 16 - Cálculo do número de fluxos a amostrar para o circuito em causa*

determina-se que será necessário amostrar 23 fluxos para resolver o circuito, ou seja, determinar o número de incógnitas.

Tabela 11 - Matriz de Ligações

| Matriz Ligações |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |
|-----------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|
| Fluxos<br>Nós   | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | M | S  |
| 1               | 1 | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1  |
| 2               | 0 | 1  | 0  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1  |
| 3               | 0 | 0  | 0  | 1  | 0  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1  |
| 4               | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1 | 0  |
| 5               | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1 | 0  |
| 6               | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1  |
| 7               | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1 | 0  |
| 8               | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0 | 1  |
| 9               | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1  |
| 10              | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1 | 0  |
| 11              | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1  |
| 12              | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1  |
| 13              | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1  |
| 14              | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  | 1 | 0  |
| 15              | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 1  |
| 16              | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | 1 | 0  |
| 17              | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  | 0 | 1  |
| Soma            | 1 | 0  | -1 | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 6 | 11 |

Se observarmos cuidadosamente a matriz de ligações, verifica-se que por trás desta matriz se encontram as equações de balanço de massa total, escritas para todos os nós reais, envolvendo as incógnitas do problema em estudo, de modo que a partir dela se podem escrever as equações de balanço de massa total de cada nó do circuito

As equações de balanço de massa, para os caudais ou fluxos - F, para os 17 nós do circuito são:

$$F1 - F3 - F5 - F17 - F18 - F23 - F27 = 0$$

*Equação 17 - Balanço de massa para o nó geral*

$$F1 - F2 - F3 = 0$$

*Equação 18 - Balanço de massa para o nó 1*

$$F2 - F4 - F5 = 0$$

*Equação 19 - Balanço de massa para o nó 2*

$$F4 - F6 - F7 = 0$$

*Equação 20 - Balanço de massa para o nó 3*

$$F6 + F8 - F10 = 0$$

*Equação 21 - Balanço de massa para o nó 4*

$$F10 + F14 - F11 = 0$$

*Equação 22 - Balanço de massa para o nó 5*

$$F26 - F12 - F13 = 0$$

*Equação 23 - Balanço de massa para o nó 6*

$$F24 + F22 - F19 = 0$$

*Equação 24 - Balanço de massa para o nó 7*

$$F29 - F20 - F21 = 0$$

*Equação 25 - Balanço de massa para o nó 8*

$$F7 - F8 - F9 = 0$$

*Equação 26 - Balanço de massa para o nó 9*

$$F9 + F16 - F18 = 0$$

*Equação 27 - Balanço de massa para o nó 10*

$$F13 - F14 - F15 = 0$$

*Equação 28 - Balanço de massa para o nó 11*

$$F15 - F16 - F17 = 0$$

*Equação 29 - Balanço de massa para o nó 12*

$$F21 - F22 - F23 = 0$$

*Equação 30 - Balanço de massa para o nó 13*

$$F_{11} + F_{25} - F_{26} = 0$$

*Equação 31 - Balanço de massa para o nó 14*

$$F_{12} - F_{24} - F_{25} = 0$$

*Equação 32 - Balanço de massa para o nó 15*

$$F_{19} + F_{28} - F_{29} = 0$$

*Equação 33 - Balanço de massa para o nó 16*

$$F_{20} - F_{27} - F_{28} = 0$$

*Equação 34 - Balanço de massa para o nó 17*

Como anteriormente referido, para cada nó é também possível escrever 17 equações de balanço para o constituinte, neste caso o histograma granulométrico:

$$F_{1f1i} - F_{3f3i} - F_{5f5i} - F_{17f17i} - F_{18f18i} - F_{23f23i} - F_{27f20i} = 0$$

*Equação 35 - Balanço de histograma granulométrico para o nó geral*

$$F_{1f1i} - F_{2f2i} - F_{3f3i} = 0$$

*Equação 36 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 1*

$$F_{2f2i} - F_{4f4i} - F_{5f5i} = 0$$

*Equação 37 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 2*

$$F_{4f4i} - F_{6f6i} - F_{7f7i} = 0$$

*Equação 38 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 3*

$$F_{6f6i} + F_{8f8i} - F_{10f10i} = 0$$

*Equação 39 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 4*

$$F_{10f10i} + F_{14f14i} - F_{11f11i} = 0$$

*Equação 40 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 5*

$$F_{26f26i} - F_{12f12i} - F_{13f13i} = 0$$

*Equação 41 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 6*

$$F_{24f12i} + F_{22f22i} - F_{19f19i} = 0$$

*Equação 42 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 7*

$$F_{29f29i} - F_{20f20i} - F_{21f21i} = 0$$

*Equação 43 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 8*

$$F_{7f7i} - F_{8f8i} - F_{9f9i} = 0$$

*Equação 44 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 9*

$$F_{9f9i} + F_{16f15i} - F_{18f18i} = 0$$

*Equação 45 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 10*

$$F_{13f13i} - F_{14f14i} - F_{15f15i} = 0$$

*Equação 46 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 11*

$$F_{15f15i} - F_{16f15i} - F_{17f15i} = 0$$

*Equação 47 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 12*

$$F_{21f21i} - F_{22f22i} - F_{23f23i} = 0$$

*Equação 48 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 13*

$$F_{11f11i} + F_{25f12i} - F_{26f26i} = 0$$

*Equação 49 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 14*

$$F_{12f12i} - F_{24f12i} - F_{25f12i} = 0$$

*Equação 50 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 15*

$$F_{19f19i} + F_{28f20i} - F_{29f29i} = 0$$

*Equação 51 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 16*

$$F_{20f20i} - F_{27f20i} - F_{28f20i} = 0$$

*Equação 52 - Balanço de histograma granulométrico para o nó 17*

Nas equações anteriores  $F_x$  representam fluxos, enquanto  $f_{xi}$  representam as várias frações granulométricas que compõe a composição granulométrica em cada fluxo.

#### 4. Minimização de erros

Com as duas equações de balanço escritas para cada nó separador é possível determinar o rendimento ponderal da operação, que é a razão entre o fluxo do supra (material acima do calibre de corte) e o fluxo de alimentação. Para os misturadores é igualmente possível determinar uma razão de caudais entre um dos fluxos de alimentação e o de saída.

Usando uma nomenclatura mais habitual no processamento de minérios as equações anteriores podem ser reescritas na forma:

$$A - U - O = 0$$

*Equação 53 - Balanço de massa em um separador*

$$A a_i - U u_i - O o_i = 0$$

*Equação 54 - Balanço de histograma em um separador*

Em que A, U e O são o caudal de Alimentação, o Underflow e o Overflow, respetivamente. As frações granulométricas desses fluxos são  $a_i$ ,  $u_i$  e  $o_i$ .

Se como é habitual dividirmos todos os caudais por um deles, normalmente a alimentação ao nó, para que os outros sejam calculados em função dele, e designarmos por

$$Rp = \frac{U}{A}$$

*Equação 55 - Rendimento ponderal*

as duas equações são equivalentes a:

$$a_i - \frac{U}{A} u_i - \frac{O}{A} o_i = 0$$

*Equação 56 - Divisão de eq. 54 por A*

$$a_i - Rp u_i - (1 - Rp) o_i = 0$$

*Equação 57 - Substituição de eq. 55 na eq. 56*

em que  $Rp$  representa o rendimento ponderal da operação e será igual a:

$$Rp = \frac{a_i - o_i}{u_i - o_i}$$

*Equação 58 - Rendimento ponderal*

Quando se olha para a expressão verifica-se que em cada nó há excesso de dados, de modo que se podem calcular várias estimativas para o rendimento ponderal,  $Rp$ , à custa de cada uma das frações granulométricas que compõem o histograma, sendo cada uma independente das outras e, aparentemente, igualmente válidas. O problema será escolher aquela que deverá ser usada para produzir o balanço coerente e aquelas que são redundantes. Na maioria dos casos, nenhum desses componentes será capaz de produzir um balanço coerente, porque:

- a colheita das amostras nos vários fluxos está sempre sujeita a erros por falta de representatividade;
- as técnicas analíticas usadas para tratamento das amostras estão também sujeitas a erro

- os regimes permanentes contínuos não existem nos circuitos de tratamento de minérios, a não ser durante tempos muito curtos, pelo que fluxos amostrados em tempos distintos correspondem, em geral, a regimes diferentes.

Como acabamos de referir ao substituir os dados das análises granulométricas na equação verificou-se que não existe um valor único para  $R_p$ , mas sim um valor para cada calibre  $i$ . Mas, como só foi efetuado uma separação única apenas haverá um rendimento ponderal único afetando todos os componentes. Se na equação 57 se substituir cada  $R_p$  por um  $R_p^*$  único essas expressões apresentarão um erro de fecho, não nulo, passando a ter a forma:

$$a_i - R_p^* u_i - (1 - R_p^*) o_i = \Delta N_i$$

*Equação 59 - Erro de fecho*

$$(a_i - o_i) - R_p^*(u_i - o_i) = \Delta N_i$$

*Equação 60 - Erro de fecho*

O cálculo da melhor estimativa  $R_p^*$  para o valor de  $R_p$ , cuja confiança depende do rigor dos dados e do nível em que cada componente é separado, pode ser determinado pela minimização da soma dos quadrados dos erros de fecho de cada equação de balanço:

$$S = \sum_{i=1}^n (\Delta N_i)^2$$

*Equação 61 - Somatório do quadrado dos erros de fecho*

$$S = \sum_{i=1}^n (a_i - o_i)^2 + R_p^2 \sum_{i=1}^n (u_i - o_i)^2 - 2R_p \sum_{i=1}^n (a_i - o_i)(u_i - o_i)$$

*Equação 62 - Somatório do quadrado dos erros de fecho expandido*

$S$  nunca toma o valor de 0, mas é minimizado para a melhor estima  $R_p^*$  que ocorre quando a derivada se anula,  $\frac{dS}{dR_p} = 0$ , ou seja:

$$2R_p^* \sum_{i=1}^n (u_i - o_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (a_i - o_i)(u_i - o_i) = 0$$

*Equação 63 - Derivada da eq. 62 em ordem a  $R_p$*

$$R_p^* = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - o_i)(u_i - o_i)}{\sum_{i=1}^n (u_i - o_i)^2}$$

*Equação 64 - Melhor estima do rendimento ponderal*

O  $R_p^*$  calculado para todos os nós do circuito está presente na tabela seguinte. Como nos nós 12, 15 e 17 apenas se divide o caudal de entrada em dois sem alterar as composições granulométricas, os fluxos presentes nesses nós têm a mesma composição granulométrica, não existe a necessidade da minimização de erros.

Tabela 12 - Melhor estima dos  $Rp^*$

| $Rp^*$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1      | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 13    | 14    | 16    |
| 0,015  | 0,051 | 0,135 | 0,017 | 0,190 | 0,129 | 0,255 | 0,426 | 0,781 | 0,665 | 0,623 | 0,594 | 0,243 | 0,767 |

Uma vez determinada a melhor estimativa  $Rp^*$ , é aplicado um segundo critério para a tornar coerente as equações de balanço de cada nó, a minimização da soma dos quadrados dos ajustamentos a fazer sobre as determinações de cada componente:

$$S = \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2$$

Equação 65 - Somatório do quadrado dos ajustamentos

sendo

$$\Delta x_i = x_i - x_i^*$$

Equação 66 - Ajustamento

isto é, cada ajustamento é igual à diferença entre o valor medido e o calculado que torna o balanço coerente.

O objetivo deste passo é tornar o valor dos vários componentes  $x_i$  ( $a_i$ ,  $u_i$  e  $o_i$ ) consistentes com o valor do rendimento ponderal calculado. Para tal os erros de fecho deverão ser distribuídos entre todos os componentes de modo a obter-se equações de balanço coerentes:

$$a_i^* - Rp^* u_i^* - (1 - Rp^*) o_i^* = 0$$

Equação 67 - Balanço de histograma coerente

$$(a_i - \Delta a_i) - Rp^* (u_i - \Delta u_i) - (1 - Rp^*) (o_i - \Delta o_i) = 0$$

Equação 68 - Balanço de histograma coerente

Subtraindo a equação anterior à equação original dos erros de fecho dá:

$$\Delta a_i - Rp^* \Delta u_i - (1 - Rp^*) \Delta o_i = \Delta N_i$$

Equação 69 - Erro de fecho

A expressão das restrições a que devem obedecer os valores  $\Delta a_i$ ,  $\Delta u_i$  e  $\Delta o_i$  face ao valor  $Rp^*$  e aos vários erros de fecho  $\Delta N_i$  minimizados por  $Rp^*$ .

Embora querendo minimizar  $\Delta a_i$ ,  $\Delta u_i$  e  $\Delta o_i$ , a liberdade não é total pois é necessário satisfazer a equação anterior, daí ser uma constrição. Para a minimização de um problema desta natureza pode recorrer ao método dos multiplicadores de Lagrange onde estão presentes todos os  $\Delta i$  individuais bem como as constrições para cada nó.

Para se encontrar a solução ótima, aquela que minimiza os erros de fecho, neste caso, irá ser usado um método de cálculo determinístico, o método dos multiplicadores de Lagrange. Este método consiste em introduzir na equação a minimizar uma nova variável, o multiplicador de Lagrange,  $\lambda$ , que permite, através das derivadas parciais da nova equação, encontrar os pontos estacionários, que são os pontos em que as derivadas parciais são iguais a zero, ou seja, os máximos ou mínimos da função. O método dos multiplicadores de Lagrange introduz na equação a minimizar restrições, para que se possa encontrar a solução global.

Querendo minimizar ou maximizar uma função  $f(x, y)$  sujeito a uma restrição  $g(x, y) = c$  a equação Lagrangeana será:

$$\mathcal{L} = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$$

*Equação 70 - Equação Lagrangeana*

Como já referido para se então encontrar a solução ótima será necessário fazer as derivadas parciais de  $\mathcal{L}$ .

No caso em estudo a equação tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\Delta f1i^2 + \Delta f2i^2 + \Delta f3i^2 + \Delta f4i^2 + \Delta f5i^2 + \Delta f6i^2 + \Delta f7i^2 + \Delta f8i^2 + \Delta f9i^2 + \Delta f10i^2 \\ & + \Delta f11i^2 + \Delta f12i^2 + \Delta f13i^2 + \Delta f14i^2 + \Delta f15i^2 + \Delta f18i^2 + \Delta f19i^2 + \Delta f20i^2 \\ & + \Delta f21i^2 + \Delta f22i^2 + \Delta f23i^2 + \Delta f26i^2 + \Delta f29i^2) + 2\lambda1 (\Delta N1 - \Delta f1 \\ & + Rp^*1 \Delta f3 + (1 - Rp^*1) \Delta f2) + 2\lambda2 (\Delta N2 - \Delta f2 + Rp^*2 \Delta f5 \\ & + (1 - Rp^*2) \Delta f4) + 2\lambda3 (\Delta N3 - \Delta f4 + Rp^*3 \Delta f7 + (1 - Rp^*3) \Delta f6) \\ & + 2\lambda4 (\Delta N4 - \Delta f10 + Rp^*4 \Delta f8 + (1 - Rp^*4) \Delta f6) + 2\lambda5 (\Delta N5 - \Delta f11 \\ & + Rp^*5 \Delta f14 + (1 - Rp^*5) \Delta f10) + 2\lambda6 (\Delta N6 - \Delta f26 + Rp^*6 \Delta f13 \\ & + (1 - Rp^*6) \Delta f12) + 2\lambda7 (\Delta N7 - \Delta f19 + Rp^*7 \Delta f22 + (1 - Rp^*7) \Delta f12) \\ & + 2\lambda8 (\Delta N8 - \Delta f29 + Rp^*8 \Delta f21 + (1 - Rp^*8) \Delta f20) + 2\lambda9 (\Delta N9 - \Delta f7 \\ & + Rp^*9 \Delta f9 + (1 - Rp^*9) \Delta f8) + 2\lambda10 (\Delta N10 - \Delta f18 + Rp^*10 \Delta f9 \\ & + (1 - Rp^*10) \Delta f15) + 2\lambda11 (\Delta N11 - \Delta f13 + Rp^*11 \Delta f15 \\ & + (1 - Rp^*11) \Delta f14) + 2\lambda13 (\Delta N13 - \Delta f21 + Rp^*13 \Delta f23 \\ & + (1 - Rp^*13) \Delta f22) + 2\lambda14 (\Delta N14 - \Delta f26 + Rp^*14 \Delta f11 \\ & + (1 - Rp^*14) \Delta f12) + 2\lambda16 (\Delta N16 - \Delta f29 + Rp^*16 \Delta f19 \\ & + (1 - Rp^*16) \Delta f20) \end{aligned}$$

*Equação 71 - Equação Lagrangeana do caso em estudo*

Derivando a expressão anterior em ordem a cada  $\Delta fki$  e a cada multiplicador de Lagrange,  $\lambda i$ , obtêm-se:

$$\Delta f1 = \lambda1$$

*Equação 72 - Ajuste no fluxo 1*

$$\Delta f2 = \lambda1 Rp^*1 + \lambda2 - \lambda1$$

*Equação 73 - Ajuste no fluxo 2*

$$\Delta f3 = -\lambda1 Rp^*1$$

*Equação 74 - Ajuste no fluxo 3*

$$\Delta f4 = \lambda2 Rp^*2 + \lambda3 - \lambda2$$

*Equação 75 - Ajuste no fluxo 4*

$$\Delta f_5 = -\lambda_2 R p^* 2$$

*Equação 76 - Ajuste no fluxo 5*

$$\Delta f_6 = \lambda_4 R p^* 4 + \lambda_3 R p^* 3 - \lambda_4 - \lambda_3$$

*Equação 77 - Ajuste no fluxo 6*

$$\Delta f_7 = \lambda_9 - \lambda_3 R p^* 3$$

*Equação 78 - Ajuste no fluxo 7*

$$\Delta f_8 = \lambda_9 R p^* 9 - \lambda_4 R p^* 4 - \lambda_9$$

*Equação 79 - Ajuste no fluxo 8*

$$\Delta f_9 = -\lambda_9 R p^* 9 - \lambda_{10} R p^* 10$$

*Equação 80 - Ajuste no fluxo 9*

$$\Delta f_{10} = \lambda_5 R p^* 5 - \lambda_5 + \lambda_4$$

*Equação 81 - Ajuste no fluxo 10*

$$\Delta f_{11} = \lambda_5 - \lambda_{14} R p^* 14$$

*Equação 82 - Ajuste no fluxo 11*

$$\Delta f_{12} = \lambda_7 R p^* 7 + \lambda_6 R p^* 6 + \lambda_{14} R p^* 14 - \lambda_7 - \lambda_6 - \lambda_{14}$$

*Equação 83 - Ajuste no fluxo 12*

$$\Delta f_{13} = \lambda_{11} - \lambda_6 R p^* 6$$

*Equação 84 - Ajuste no fluxo 13*

$$\Delta f_{14} = -\lambda_5 R p^* 5 + \lambda_{11} R p^* 11 - \lambda_{11}$$

*Equação 85 - Ajuste no fluxo 14*

$$\Delta f_{15} = -\lambda_{11} R p^* 11 + \lambda_{10} R p^* 10 - \lambda_{10}$$

*Equação 86 - Ajuste no fluxo 15*

$$\Delta f_{18} = \lambda_{10}$$

*Equação 87 - Ajuste no fluxo 18*

$$\Delta f_{19} = \lambda_7 - \lambda_{16} R p^* 16$$

*Equação 88 - Ajuste no fluxo 19*

$$\Delta f_{20} = \lambda_8 R p^* 8 + \lambda_{16} R p^* 16 - \lambda_8 - \lambda_{16}$$

*Equação 89 - Ajuste no fluxo 20*

$$\Delta f_{21} = \lambda_{13} - \lambda_8 R p^* 8$$

*Equação 90 - Ajuste no fluxo 21*

$$\Delta f_{22} = -\lambda_7 R p^* 7 + \lambda_{13} R p^* 13 - \lambda_{13}$$

*Equação 91 - Ajuste no fluxo 22*

$$\Delta f_{23} = -\lambda_{13} R p^{*13}$$

*Equação 92 - Ajuste no fluxo 23*

$$\Delta f_{26} = \lambda_6 + \lambda_{14}$$

*Equação 93 - Ajuste no fluxo 26*

$$\Delta f_{29} = \lambda_8 + \lambda_{16}$$

*Equação 94 - Ajuste no fluxo 29*

Substituindo estas equações no resultado da derivação em ordem a cada  $\lambda_i$  e resolvendo fica:

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda_2 R p^{*1} - \Delta N_1 - \lambda_2}{2 R p^{*1^2} - 2 R p^{*1} + 2}$$

*Equação 95 -  $\lambda_1$*

$$\lambda_2 = -\frac{\lambda_2 R p^{*2} + \lambda_1 R p^{*1} - \Delta N_2 - \lambda_3 - \lambda_1}{2 R p^{*2^2} - 2 R p^{*2} + 2}$$

*Equação 96 -  $\lambda_2$*

$$\lambda_3 = -\frac{(\lambda_4 R p^{*3} - \lambda_4) R p^{*4} + (-\lambda_9 - \lambda_4) R p^{*3} + \lambda_2 R p^{*2} - \Delta N_3 - \lambda_4 - \lambda_2}{2 R p^{*3^2} - 2 R p^{*3} + 2}$$

*Equação 97 -  $\lambda_3$*

$$\lambda_4 = \frac{\lambda_9 R p^{*4} R p^{*9} - \lambda_5 R p^{*5} + (-\lambda_3 R p^{*3} - \lambda_9 + \lambda_3) R p^{*4} + \lambda_3 R p^{*3} - \Delta N_4 + \lambda_5 - \lambda_3}{2 R p^{*4^2} - 2 R p^{*4} + 2}$$

*Equação 98 -  $\lambda_4$*

$$\lambda_5 = \frac{(\lambda_{11} R p^{*11} - \lambda_4 - \lambda_{11}) R p^{*5} + \lambda_{14} R p^{*14} + \Delta N_5 + \lambda_4}{2 R p^{*5^2} - 2 R p^{*5} + 2}$$

*Equação 99 -  $\lambda_5$*

$\lambda_6$

$$= -\frac{(\lambda_7 R p^{*6} - \lambda_7) R p^{*7} + (\lambda_{14} R p^{*14} - \lambda_7 - \lambda_{14} - \lambda_{11}) R p^{*6} - \lambda_{14} R p^{*14} - \Delta N_6 + \lambda_7 + 2\lambda_{14}}{2 R p^{*6^2} - 2 R p^{*6} + 2}$$

*Equação 100 -  $\lambda_6$*

$\lambda_7$

$$= -\frac{(\lambda_6 R p^{*6} + \lambda_{14} R p^{*14} - \lambda_{13} R p^{*13} - \lambda_6 - \lambda_{14} + \lambda_{13}) R p^{*7} - \lambda_6 R p^{*6} - \lambda_{16} R p^{*16} - \lambda_{14} R p^{*14} - \Delta N_7 + \lambda_6 + \lambda_{14}}{2 R p^{*7^2} - 2 R p^{*7} + 2}$$

*Equação 101 -  $\lambda_7$*

$$\lambda_8 = -\frac{(\lambda_{16} R p^{*16} - \lambda_{16} - \lambda_{13}) R p^{*8} - \lambda_{16} R p^{*16} - \Delta N_8 + 2\lambda_{16}}{2 R p^{*8^2} - 2 R p^{*8} + 2}$$

*Equação 102 -  $\lambda_8$*

$$\lambda_9 = \frac{(\lambda_4 Rp^*4 - \lambda_{10} Rp^*10) Rp^*9 - \lambda_4 Rp^*4 + \lambda_3 Rp^*3 + \Delta N_9}{2 Rp^*9^2 - 2 Rp^*9 + 2}$$

*Equação 103 -  $\lambda_9$*

$$\lambda_{10} = - \frac{\lambda_9 Rp^*10 Rp^*9 + (\lambda_{11} - \lambda_{11} Rp^*10) Rp^*11 - \Delta N_{10}}{2 Rp^*10^2 - 2 Rp^*10 + 2}$$

*Equação 104 -  $\lambda_{10}$*

$$\lambda_{11} = \frac{\lambda_6 Rp^*6 + (\lambda_5 Rp^*11 - \lambda_5) Rp^*5 + (\lambda_{10} Rp^*10 - \lambda_{10}) Rp^*11 + \Delta N_{11}}{2 Rp^*11^2 - 2 Rp^*11 + 2}$$

*Equação 105 -  $\lambda_{11}$*

$$\lambda_{13} = \frac{\lambda_8 Rp^*8 + (\lambda_7 Rp^*13 - \lambda_7) Rp^*7 + \Delta N_{13}}{2 Rp^*13^2 - 2 Rp^*13 + 2}$$

*Equação 106 -  $\lambda_{13}$*

$$\lambda_{14} = - \frac{(\lambda_7 Rp^*14 - \lambda_7) Rp^*7 + (\lambda_6 Rp^*14 - \lambda_6) Rp^*6 + (-\lambda_7 - \lambda_6 - \lambda_5) Rp^*14 - \Delta N_{14} + \lambda_7 + 2\lambda_6}{2 Rp^*14^2 - 2 Rp^*14 + 2}$$

*Equação 107 -  $\lambda_{14}$*

$$\lambda_{16} = - \frac{(\lambda_8 Rp^*16 - \lambda_8) Rp^*8 + (-\lambda_8 - \lambda_7) Rp^*16 - \Delta N_{16} + 2\lambda_8}{2 Rp^*16^2 - 2 Rp^*16 + 2}$$

*Equação 108 -  $\lambda_{16}$*

Utilizando estas fórmulas é possível calcular os  $\Delta f_i$ , logo o novo histograma.

Tabela 13 - Tabela dos  $\Delta f$ 

|         | $\Delta f$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mu m$ | 1          | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    | 15    | 18    | 19    | 20    | 21    | 22    | 23    | 26    | 29    |
| 0,417   | 0,34       | 0,35  | -0,01 | 0,38  | -0,03 | 0,38  | 0,34  | -0,08 | 0,52  | 0,38  | 0,30  | -0,18 | -0,14 | -0,02 | -0,22 | -1,34 | -0,14 | -0,27 | -0,07 | 0,12  | -0,19 | -0,23 | -0,18 |
| 38      | -0,02      | -0,02 | 0,00  | -0,03 | 0,00  | -0,03 | -0,01 | 0,00  | 0,05  | -0,03 | -0,02 | 0,05  | 0,03  | -0,01 | 0,05  | -0,05 | -0,01 | -0,01 | 0,00  | 0,01  | -0,01 | 0,07  | -0,01 |
| 45      | 0,01       | 0,01  | 0,00  | 0,01  | 0,00  | 0,01  | -0,01 | 0,00  | 0,04  | 0,01  | 0,01  | 0,17  | -0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,06 | 0,08  | -0,18 | -0,05 | 0,04  | -0,12 | 0,18  | -0,12 |
| 53      | 0,07       | 0,07  | 0,00  | 0,08  | -0,01 | 0,09  | -0,01 | 0,00  | 0,04  | 0,09  | 0,07  | 0,23  | -0,08 | 0,00  | -0,12 | -0,08 | 0,14  | -0,34 | -0,10 | 0,08  | -0,23 | 0,24  | -0,24 |
| 63      | 0,16       | 0,16  | 0,00  | 0,18  | -0,02 | 0,21  | -0,01 | 0,00  | 0,03  | 0,21  | 0,17  | 0,19  | -0,17 | 0,01  | -0,28 | -0,11 | 0,14  | -0,44 | -0,13 | 0,11  | -0,30 | 0,20  | -0,31 |
| 75      | 0,29       | 0,30  | 0,00  | 0,32  | -0,03 | 0,38  | -0,02 | 0,00  | 0,02  | 0,37  | 0,31  | 0,05  | -0,30 | 0,03  | -0,49 | -0,16 | 0,06  | -0,50 | -0,15 | 0,15  | -0,35 | 0,07  | -0,35 |
| 90      | 0,38       | 0,39  | -0,01 | 0,42  | -0,04 | 0,49  | -0,02 | 0,00  | 0,02  | 0,48  | 0,40  | -0,16 | -0,38 | 0,04  | -0,63 | -0,19 | -0,09 | -0,43 | -0,11 | 0,16  | -0,30 | -0,13 | -0,30 |
| 106     | 0,48       | 0,49  | -0,01 | 0,54  | -0,05 | 0,63  | -0,03 | 0,00  | 0,03  | 0,62  | 0,51  | -0,37 | -0,48 | 0,06  | -0,80 | -0,24 | -0,25 | -0,37 | -0,09 | 0,18  | -0,26 | -0,34 | -0,25 |
| 125     | 0,64       | 0,64  | -0,01 | 0,71  | -0,07 | 0,83  | -0,05 | 0,00  | 0,06  | 0,81  | 0,67  | -0,64 | -0,62 | 0,09  | -1,04 | -0,33 | -0,48 | -0,32 | -0,06 | 0,21  | -0,24 | -0,60 | -0,21 |
| 150     | 0,68       | 0,69  | -0,01 | 0,75  | -0,07 | 0,88  | -0,07 | 0,00  | 0,09  | 0,87  | 0,72  | -0,82 | -0,65 | 0,09  | -1,10 | -0,38 | -0,63 | -0,20 | -0,01 | 0,20  | -0,16 | -0,78 | -0,12 |
| 180     | 0,60       | 0,60  | -0,01 | 0,66  | -0,06 | 0,77  | -0,06 | 0,00  | 0,12  | 0,76  | 0,63  | -0,79 | -0,56 | 0,08  | -0,95 | -0,39 | -0,62 | -0,09 | 0,02  | 0,17  | -0,09 | -0,76 | -0,05 |
| 212     | 0,54       | 0,55  | -0,01 | 0,60  | -0,06 | 0,70  | -0,03 | 0,00  | 0,14  | 0,69  | 0,57  | -0,73 | -0,50 | 0,07  | -0,84 | -0,42 | -0,56 | -0,06 | 0,02  | 0,15  | -0,06 | -0,72 | -0,03 |
| 250     | 0,48       | 0,49  | -0,01 | 0,54  | -0,05 | 0,62  | 0,03  | -0,02 | 0,13  | 0,61  | 0,50  | -0,62 | -0,43 | 0,06  | -0,72 | -0,46 | -0,44 | -0,09 | 0,00  | 0,13  | -0,08 | -0,63 | -0,05 |
| 300     | 0,30       | 0,30  | 0,00  | 0,33  | -0,03 | 0,36  | 0,12  | -0,03 | 0,07  | 0,36  | 0,29  | -0,33 | -0,24 | 0,03  | -0,41 | -0,38 | -0,13 | -0,11 | -0,02 | 0,07  | -0,08 | -0,37 | -0,08 |
| 355     | 0,15       | 0,16  | 0,00  | 0,17  | -0,02 | 0,16  | 0,22  | -0,05 | -0,04 | 0,16  | 0,13  | 0,03  | -0,11 | 0,01  | -0,18 | -0,28 | 0,11  | -0,23 | -0,07 | 0,05  | -0,16 | -0,06 | -0,16 |
| 425     | -0,07      | -0,07 | 0,00  | -0,07 | 0,01  | -0,13 | 0,27  | -0,06 | -0,16 | -0,13 | -0,11 | 0,21  | 0,09  | -0,02 | 0,16  | -0,05 | 0,34  | -0,11 | -0,06 | -0,04 | -0,07 | 0,13  | -0,09 |
| 500     | -0,34      | -0,34 | 0,01  | -0,38 | 0,03  | -0,49 | 0,33  | -0,07 | -0,32 | -0,48 | -0,39 | 0,35  | 0,34  | -0,04 | 0,57  | 0,26  | 0,37  | 0,18  | 0,03  | -0,14 | 0,14  | 0,26  | 0,12  |
| 600     | -0,60      | -0,61 | 0,01  | -0,67 | 0,06  | -0,81 | 0,26  | -0,04 | -0,42 | -0,80 | -0,66 | 0,46  | 0,56  | -0,06 | 0,94  | 0,61  | 0,32  | 0,49  | 0,12  | -0,23 | 0,35  | 0,38  | 0,33  |
| 710     | -0,92      | -0,93 | 0,01  | -1,02 | 0,09  | -1,20 | 0,15  | -0,01 | -0,52 | -1,18 | -0,98 | 0,69  | 0,83  | -0,09 | 1,38  | 1,03  | 0,43  | 0,74  | 0,18  | -0,34 | 0,53  | 0,62  | 0,50  |
| 850     | -0,75      | -0,76 | 0,01  | -0,84 | 0,08  | -0,97 | 0,00  | 0,01  | -0,47 | -0,95 | -0,78 | 0,56  | 0,64  | -0,06 | 1,06  | 1,06  | 0,35  | 0,60  | 0,14  | -0,27 | 0,43  | 0,50  | 0,40  |
| 1000    | -0,63      | -0,64 | 0,01  | -0,70 | 0,06  | -0,78 | -0,13 | 0,04  | -0,43 | -0,77 | -0,63 | 0,46  | 0,49  | -0,04 | 0,82  | 1,10  | 0,28  | 0,49  | 0,12  | -0,22 | 0,35  | 0,41  | 0,33  |
| 1180    | -0,73      | -0,74 | 0,01  | -0,81 | 0,07  | -0,81 | -0,78 | 0,19  | 0,08  | -0,80 | -0,66 | 0,45  | 0,54  | -0,06 | 0,89  | 1,15  | 0,28  | 0,48  | 0,11  | -0,22 | 0,35  | 0,67  | 0,33  |
| 1400    | -0,67      | -0,68 | 0,01  | -0,75 | 0,07  | -0,70 | -1,02 | 0,24  | 0,30  | -0,69 | -0,57 | 0,38  | 0,47  | -0,06 | 0,78  | 1,06  | 0,23  | 0,41  | 0,10  | -0,18 | 0,29  | 0,71  | 0,27  |
| 1700    | -0,26      | -0,26 | 0,00  | -0,29 | 0,03  | -0,39 | 0,34  | -0,07 | 0,31  | -0,38 | -0,32 | 0,22  | 0,40  | -0,08 | 0,69  | -0,73 | 0,14  | 0,24  | 0,06  | -0,11 | 0,17  | 0,14  | 0,16  |
| 2360    | -0,05      | -0,05 | 0,00  | -0,05 | 0,00  | -0,09 | 0,22  | -0,05 | 0,20  | -0,09 | -0,08 | 0,05  | 0,14  | -0,03 | 0,25  | -0,54 | 0,03  | 0,06  | 0,01  | -0,03 | 0,04  | 0,02  | 0,04  |
| 3350    | -0,07      | -0,07 | 0,00  | -0,07 | 0,01  | -0,09 | 0,06  | -0,01 | 0,04  | -0,09 | -0,08 | 0,06  | 0,09  | -0,01 | 0,15  | -0,10 | 0,04  | 0,06  | 0,01  | -0,03 | 0,04  | 0,02  | 0,04  |
| 4750    | -0,02      | -0,02 | 0,00  | -0,02 | 0,00  | -0,01 | -0,09 | 0,02  | 0,06  | -0,01 | -0,01 | 0,01  | 0,01  | 0,00  | 0,02  | 0,02  | 0,01  | 0,01  | 0,00  | -0,01 | 0,01  | 0,01  | 0,01  |
| 6700    | 0,00       | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 9500    | 0,00       | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 13200   | 0,00       | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 19000   | 0,00       | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 25000   | 0,00       | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 37500   | 0,00       | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |

Tabela 14 - Novo histograma, fluxos 1 a 14

| Novo Histograma |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| μm              | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13   | 14    |
| 0,417           | 27,90 | 28,32 | 0,08  | 29,76 | 1,52  | 33,87 | 3,50  | 6,43  | 2,68  | 33,40 | 28,98 | 55,16 | 5,80 | 10,14 |
| 38              | 3,05  | 3,10  | 0,01  | 3,26  | 0,13  | 3,71  | 0,40  | 0,74  | 0,30  | 3,66  | 3,21  | 5,96  | 0,79 | 1,33  |
| 45              | 3,04  | 3,09  | 0,01  | 3,24  | 0,13  | 3,69  | 0,41  | 0,77  | 0,31  | 3,64  | 3,22  | 5,76  | 0,97 | 1,45  |
| 53              | 3,28  | 3,33  | 0,02  | 3,50  | 0,15  | 3,98  | 0,47  | 0,87  | 0,35  | 3,92  | 3,51  | 5,94  | 1,36 | 1,74  |
| 63              | 3,37  | 3,42  | 0,02  | 3,59  | 0,17  | 4,08  | 0,50  | 0,94  | 0,38  | 4,03  | 3,65  | 5,69  | 1,85 | 2,04  |
| 75              | 3,58  | 3,63  | 0,03  | 3,80  | 0,20  | 4,31  | 0,56  | 1,04  | 0,43  | 4,26  | 3,92  | 5,47  | 2,56 | 2,51  |
| 90              | 3,23  | 3,27  | 0,03  | 3,43  | 0,20  | 3,88  | 0,55  | 1,00  | 0,42  | 3,83  | 3,60  | 4,37  | 2,92 | 2,63  |
| 106             | 3,24  | 3,29  | 0,03  | 3,44  | 0,23  | 3,88  | 0,60  | 1,09  | 0,47  | 3,83  | 3,69  | 3,80  | 3,58 | 3,06  |
| 125             | 3,54  | 3,59  | 0,04  | 3,75  | 0,28  | 4,21  | 0,76  | 1,39  | 0,59  | 4,17  | 4,12  | 3,44  | 4,72 | 3,91  |
| 150             | 3,47  | 3,53  | 0,04  | 3,68  | 0,30  | 4,11  | 0,93  | 1,73  | 0,70  | 4,06  | 4,15  | 2,66  | 5,47 | 4,50  |
| 180             | 3,07  | 3,12  | 0,04  | 3,25  | 0,29  | 3,59  | 1,06  | 2,00  | 0,79  | 3,57  | 3,76  | 1,80  | 5,49 | 4,56  |
| 212             | 3,07  | 3,11  | 0,04  | 3,25  | 0,31  | 3,54  | 1,38  | 2,63  | 1,03  | 3,52  | 3,82  | 1,33  | 6,02 | 5,08  |
| 250             | 3,37  | 3,43  | 0,05  | 3,57  | 0,37  | 3,81  | 2,05  | 3,81  | 1,55  | 3,81  | 4,25  | 1,05  | 7,09 | 6,12  |
| 300             | 3,09  | 3,14  | 0,04  | 3,28  | 0,36  | 3,40  | 2,52  | 4,47  | 1,98  | 3,42  | 3,90  | 0,66  | 6,78 | 5,99  |
| 355             | 3,22  | 3,26  | 0,05  | 3,41  | 0,43  | 3,40  | 3,51  | 5,76  | 2,87  | 3,44  | 4,03  | 0,34  | 7,30 | 6,57  |
| 425             | 2,78  | 2,82  | 0,04  | 2,96  | 0,42  | 2,80  | 3,97  | 5,93  | 3,42  | 2,85  | 3,43  | 0,11  | 6,37 | 5,90  |
| 500             | 2,84  | 2,88  | 0,03  | 3,02  | 0,51  | 2,66  | 5,38  | 7,16  | 4,88  | 2,73  | 3,43  | -0,18 | 6,61 | 6,38  |
| 600             | 2,23  | 2,27  | 0,01  | 2,38  | 0,50  | 1,86  | 5,73  | 6,73  | 5,45  | 1,94  | 2,62  | -0,46 | 5,35 | 5,51  |
| 710             | 1,94  | 1,97  | -0,01 | 2,08  | 0,55  | 1,35  | 6,68  | 6,91  | 6,61  | 1,45  | 2,20  | -0,69 | 4,75 | 5,37  |
| 850             | 1,56  | 1,58  | -0,01 | 1,67  | 0,50  | 0,97  | 6,16  | 5,70  | 6,29  | 1,05  | 1,66  | -0,56 | 3,62 | 4,27  |
| 1000            | 1,39  | 1,41  | -0,01 | 1,49  | 0,49  | 0,78  | 5,96  | 5,03  | 6,22  | 0,86  | 1,40  | -0,46 | 3,04 | 3,69  |
| 1180            | 2,20  | 2,24  | 0,01  | 2,33  | 0,94  | 0,82  | 11,98 | 12,21 | 11,92 | 1,02  | 1,47  | -0,45 | 3,17 | 3,40  |
| 1400            | 2,31  | 2,35  | 0,01  | 2,44  | 1,04  | 0,72  | 13,45 | 14,21 | 13,24 | 0,95  | 1,31  | -0,38 | 2,80 | 2,84  |
| 1700            | 1,84  | 1,87  | 0,07  | 1,87  | 1,98  | 0,39  | 11,36 | 1,41  | 14,14 | 0,41  | 0,52  | -0,22 | 1,17 | 1,00  |
| 2360            | 1,24  | 1,26  | 0,16  | 1,00  | 6,04  | 0,09  | 6,80  | 0,05  | 8,69  | 0,09  | 0,08  | -0,05 | 0,20 | 0,03  |
| 3350            | 1,46  | 1,48  | 0,42  | 0,49  | 19,80 | 0,09  | 3,03  | 0,01  | 3,87  | 0,09  | 0,08  | -0,06 | 0,20 | 0,01  |
| 4750            | 1,41  | 1,42  | 0,65  | 0,05  | 26,72 | 0,01  | 0,32  | -0,02 | 0,42  | 0,01  | 0,01  | -0,01 | 0,03 | 0,00  |
| 6700            | 1,37  | 1,39  | 0,43  | 0,00  | 27,07 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 9500            | 0,42  | 0,43  | 0,00  | 0,00  | 8,35  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 13200           | 0,05  | 0,00  | 3,15  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 19000           | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 25000           | 0,27  | 0,00  | 18,26 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 37500           | 1,14  | 0,00  | 76,27 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| Total           | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100  | 100   |

Tabela 15 - Novo histograma, fluxos 15 a 29

| Novo Histograma |      |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mu\text{m}$   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19    | 20    | 21    | 22    | 23    | 24    | 25    | 26    | 27    | 28    | 29    |
| 0,417           | 3,18 | 3,18 | 3,18 | 2,85 | 47,28 | 78,51 | 22,29 | 24,30 | 20,91 | 55,16 | 55,16 | 48,80 | 78,51 | 78,51 | 54,55 |
| 38              | 0,46 | 0,46 | 0,46 | 0,36 | 6,01  | 6,01  | 6,00  | 6,16  | 5,90  | 5,96  | 5,96  | 5,29  | 6,01  | 6,01  | 6,01  |
| 45              | 0,69 | 0,69 | 0,69 | 0,44 | 6,03  | 5,06  | 6,81  | 6,82  | 6,81  | 5,76  | 5,76  | 5,14  | 5,06  | 5,06  | 5,81  |
| 53              | 1,13 | 1,13 | 1,13 | 0,61 | 6,44  | 4,39  | 8,08  | 7,92  | 8,20  | 5,94  | 5,94  | 5,35  | 4,39  | 4,39  | 5,96  |
| 63              | 1,73 | 1,73 | 1,73 | 0,83 | 6,37  | 3,40  | 8,74  | 8,37  | 9,00  | 5,69  | 5,69  | 5,19  | 3,40  | 3,40  | 5,68  |
| 75              | 2,58 | 2,58 | 2,58 | 1,15 | 6,31  | 2,53  | 9,33  | 8,75  | 9,72  | 5,47  | 5,47  | 5,09  | 2,53  | 2,53  | 5,43  |
| 90              | 3,10 | 3,10 | 3,10 | 1,32 | 5,16  | 1,49  | 8,09  | 7,47  | 8,52  | 4,37  | 4,37  | 4,18  | 1,49  | 1,49  | 4,30  |
| 106             | 3,90 | 3,90 | 3,90 | 1,61 | 4,58  | 0,93  | 7,51  | 6,85  | 7,95  | 3,80  | 3,80  | 3,77  | 0,93  | 0,93  | 3,73  |
| 125             | 5,20 | 5,20 | 5,20 | 2,13 | 4,23  | 0,52  | 7,20  | 6,52  | 7,66  | 3,44  | 3,44  | 3,60  | 0,52  | 0,52  | 3,36  |
| 150             | 6,05 | 6,05 | 6,05 | 2,49 | 3,31  | 0,21  | 5,79  | 5,21  | 6,19  | 2,66  | 2,66  | 3,02  | 0,21  | 0,21  | 2,59  |
| 180             | 6,05 | 6,05 | 6,05 | 2,55 | 2,25  | 0,09  | 3,98  | 3,59  | 4,26  | 1,80  | 1,80  | 2,27  | 0,09  | 0,09  | 1,75  |
| 212             | 6,59 | 6,59 | 6,59 | 2,89 | 1,66  | 0,06  | 2,94  | 2,62  | 3,15  | 1,33  | 1,33  | 1,94  | 0,06  | 0,06  | 1,29  |
| 250             | 7,67 | 7,67 | 7,67 | 3,60 | 1,27  | 0,09  | 2,22  | 1,93  | 2,41  | 1,05  | 1,05  | 1,82  | 0,09  | 0,09  | 1,00  |
| 300             | 7,26 | 7,26 | 7,26 | 3,74 | 0,72  | 0,11  | 1,21  | 0,92  | 1,41  | 0,66  | 0,66  | 1,45  | 0,11  | 0,11  | 0,58  |
| 355             | 7,74 | 7,74 | 7,74 | 4,50 | 0,45  | 0,23  | 0,62  | 0,76  | 0,53  | 0,34  | 0,34  | 1,24  | 0,23  | 0,23  | 0,40  |
| 425             | 6,66 | 6,66 | 6,66 | 4,50 | 0,09  | 0,11  | 0,08  | 0,06  | 0,09  | 0,11  | 0,11  | 0,91  | 0,11  | 0,11  | 0,10  |
| 500             | 6,76 | 6,76 | 6,76 | 5,51 | -0,10 | -0,18 | -0,03 | 0,14  | -0,14 | -0,18 | -0,18 | 0,70  | -0,18 | -0,18 | -0,12 |
| 600             | 5,25 | 5,25 | 5,25 | 5,38 | -0,28 | -0,49 | -0,12 | 0,23  | -0,35 | -0,46 | -0,46 | 0,29  | -0,49 | -0,49 | -0,33 |
| 710             | 4,37 | 4,37 | 4,37 | 5,86 | -0,43 | -0,74 | -0,18 | 0,34  | -0,53 | -0,69 | -0,69 | 0,01  | -0,74 | -0,74 | -0,50 |
| 850             | 3,23 | 3,23 | 3,23 | 5,27 | -0,35 | -0,60 | -0,14 | 0,27  | -0,43 | -0,56 | -0,56 | -0,02 | -0,60 | -0,60 | -0,40 |
| 1000            | 2,64 | 2,64 | 2,64 | 5,02 | -0,28 | -0,49 | -0,12 | 0,22  | -0,35 | -0,46 | -0,46 | -0,01 | -0,49 | -0,49 | -0,33 |
| 1180            | 3,03 | 3,03 | 3,03 | 8,95 | -0,28 | -0,48 | -0,11 | 0,22  | -0,34 | -0,45 | -0,45 | 0,02  | -0,48 | -0,48 | -0,33 |
| 1400            | 2,77 | 2,77 | 2,77 | 9,74 | -0,23 | -0,41 | -0,10 | 0,18  | -0,29 | -0,38 | -0,38 | 0,03  | -0,41 | -0,41 | -0,27 |
| 1700            | 1,28 | 1,28 | 1,28 | 9,84 | -0,14 | -0,24 | -0,06 | 0,11  | -0,17 | -0,22 | -0,22 | -0,04 | -0,24 | -0,24 | -0,16 |
| 2360            | 0,30 | 0,30 | 0,30 | 5,89 | -0,03 | -0,06 | -0,01 | 0,03  | -0,04 | -0,05 | -0,05 | -0,02 | -0,06 | -0,06 | -0,04 |
| 3350            | 0,31 | 0,31 | 0,31 | 2,68 | -0,04 | -0,06 | -0,01 | 0,03  | -0,04 | -0,06 | -0,06 | -0,02 | -0,06 | -0,06 | -0,04 |
| 4750            | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,29 | -0,01 | -0,01 | 0,00  | 0,01  | -0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,01 |
| 6700            | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 9500            | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 13200           | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 19000           | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 25000           | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 37500           | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| Total           | 100  | 100  | 100  | 100  | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   |

Como se pode constatar nas tabelas anteriores existem alguns valores negativos nos novos histogramas, evidenciados a vermelho. Apesar de serem os valores que, matematicamente minimizam o erro, fisicamente são incoerentes, não têm qualquer sentido, pois é impossível existirem frações granulométricas com percentagens negativas. Como tal estes valores irão assumir o valor 0, o que irá piorar o ajuste, mas, por outro lado torna os dados obtidos mais realistas.

Tabela 16 - Novo histograma ajustado, fluxos 1 a 14

| Novo histograma ajustado |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| μm                       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13   | 14    |
| 0,417                    | 27,90 | 28,32 | 0,08  | 29,76 | 1,52  | 33,87 | 3,50  | 6,43  | 2,68  | 33,40 | 28,98 | 53,29 | 5,80 | 10,14 |
| 38                       | 3,05  | 3,10  | 0,01  | 3,26  | 0,13  | 3,71  | 0,40  | 0,74  | 0,30  | 3,66  | 3,21  | 5,76  | 0,79 | 1,33  |
| 45                       | 3,04  | 3,09  | 0,01  | 3,24  | 0,13  | 3,69  | 0,41  | 0,77  | 0,31  | 3,64  | 3,22  | 5,57  | 0,97 | 1,44  |
| 53                       | 3,28  | 3,33  | 0,02  | 3,50  | 0,15  | 3,98  | 0,47  | 0,87  | 0,35  | 3,92  | 3,51  | 5,73  | 1,36 | 1,74  |
| 63                       | 3,37  | 3,42  | 0,02  | 3,59  | 0,17  | 4,08  | 0,50  | 0,94  | 0,38  | 4,03  | 3,65  | 5,49  | 1,85 | 2,04  |
| 75                       | 3,58  | 3,63  | 0,03  | 3,80  | 0,20  | 4,31  | 0,56  | 1,04  | 0,43  | 4,26  | 3,92  | 5,28  | 2,56 | 2,51  |
| 90                       | 3,23  | 3,27  | 0,03  | 3,43  | 0,20  | 3,88  | 0,55  | 1,00  | 0,42  | 3,83  | 3,60  | 4,22  | 2,92 | 2,63  |
| 106                      | 3,24  | 3,29  | 0,03  | 3,44  | 0,23  | 3,88  | 0,60  | 1,09  | 0,47  | 3,83  | 3,69  | 3,67  | 3,58 | 3,06  |
| 125                      | 3,54  | 3,59  | 0,04  | 3,75  | 0,28  | 4,21  | 0,76  | 1,39  | 0,59  | 4,17  | 4,12  | 3,32  | 4,72 | 3,91  |
| 150                      | 3,47  | 3,53  | 0,04  | 3,68  | 0,30  | 4,11  | 0,93  | 1,72  | 0,70  | 4,06  | 4,15  | 2,57  | 5,47 | 4,50  |
| 180                      | 3,07  | 3,12  | 0,04  | 3,25  | 0,29  | 3,59  | 1,06  | 2,00  | 0,79  | 3,57  | 3,76  | 1,74  | 5,49 | 4,56  |
| 212                      | 3,07  | 3,11  | 0,04  | 3,25  | 0,31  | 3,54  | 1,38  | 2,62  | 1,03  | 3,52  | 3,82  | 1,29  | 6,02 | 5,08  |
| 250                      | 3,37  | 3,43  | 0,05  | 3,57  | 0,37  | 3,81  | 2,05  | 3,81  | 1,55  | 3,81  | 4,25  | 1,01  | 7,09 | 6,12  |
| 300                      | 3,09  | 3,14  | 0,04  | 3,28  | 0,36  | 3,40  | 2,52  | 4,47  | 1,98  | 3,42  | 3,90  | 0,64  | 6,78 | 5,99  |
| 355                      | 3,22  | 3,26  | 0,05  | 3,41  | 0,43  | 3,40  | 3,51  | 5,76  | 2,87  | 3,44  | 4,03  | 0,33  | 7,30 | 6,57  |
| 425                      | 2,78  | 2,82  | 0,04  | 2,96  | 0,42  | 2,80  | 3,97  | 5,93  | 3,42  | 2,85  | 3,43  | 0,10  | 6,37 | 5,89  |
| 500                      | 2,84  | 2,88  | 0,03  | 3,02  | 0,51  | 2,66  | 5,38  | 7,16  | 4,88  | 2,73  | 3,43  | 0,00  | 6,61 | 6,37  |
| 600                      | 2,23  | 2,27  | 0,01  | 2,38  | 0,50  | 1,86  | 5,73  | 6,73  | 5,45  | 1,94  | 2,62  | 0,00  | 5,35 | 5,51  |
| 710                      | 1,94  | 1,97  | 0,00  | 2,08  | 0,55  | 1,35  | 6,68  | 6,91  | 6,61  | 1,45  | 2,20  | 0,00  | 4,75 | 5,37  |
| 850                      | 1,56  | 1,59  | 0,00  | 1,67  | 0,50  | 0,97  | 6,16  | 5,70  | 6,29  | 1,05  | 1,66  | 0,00  | 3,62 | 4,26  |
| 1000                     | 1,39  | 1,41  | 0,00  | 1,49  | 0,49  | 0,78  | 5,96  | 5,03  | 6,22  | 0,86  | 1,40  | 0,00  | 3,04 | 3,69  |
| 1180                     | 2,20  | 2,24  | 0,01  | 2,33  | 0,94  | 0,82  | 11,98 | 12,21 | 11,92 | 1,02  | 1,47  | 0,00  | 3,17 | 3,40  |
| 1400                     | 2,31  | 2,35  | 0,01  | 2,44  | 1,04  | 0,72  | 13,45 | 14,21 | 13,24 | 0,95  | 1,31  | 0,00  | 2,80 | 2,84  |
| 1700                     | 1,84  | 1,87  | 0,07  | 1,87  | 1,98  | 0,39  | 11,35 | 1,41  | 14,14 | 0,41  | 0,52  | 0,00  | 1,17 | 1,00  |
| 2360                     | 1,24  | 1,26  | 0,16  | 1,00  | 6,04  | 0,09  | 6,80  | 0,05  | 8,69  | 0,09  | 0,08  | 0,00  | 0,20 | 0,03  |
| 3350                     | 1,46  | 1,48  | 0,42  | 0,49  | 19,80 | 0,09  | 3,03  | 0,01  | 3,87  | 0,09  | 0,08  | 0,00  | 0,20 | 0,01  |
| 4750                     | 1,41  | 1,42  | 0,65  | 0,05  | 26,72 | 0,01  | 0,32  | 0,00  | 0,42  | 0,01  | 0,01  | 0,00  | 0,03 | 0,00  |
| 6700                     | 1,37  | 1,39  | 0,43  | 0,00  | 27,07 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 9500                     | 0,42  | 0,43  | 0,00  | 0,00  | 8,35  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 13200                    | 0,05  | 0,00  | 3,15  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 19000                    | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 25000                    | 0,27  | 0,00  | 18,26 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| 37500                    | 1,14  | 0,00  | 76,25 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00 | 0,00  |
| Total                    | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100  | 100   |

Tabela 17 - Novo histograma ajustado, fluxos 15 a 29

| Novo histograma ajustado |      |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--------------------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| μm                       | 15   | 16   | 17   | 18   | 19    | 20    | 21    | 22    | 23    | 24    | 25    | 26    | 27    | 28    | 29    |
| 0,417                    | 3,18 | 3,18 | 3,18 | 2,85 | 46,28 | 75,67 | 22,09 | 24,29 | 20,36 | 53,29 | 53,29 | 48,74 | 75,67 | 75,67 | 53,20 |
| 38                       | 0,46 | 0,46 | 0,46 | 0,36 | 5,88  | 5,80  | 5,95  | 6,15  | 5,74  | 5,76  | 5,76  | 5,29  | 5,80  | 5,80  | 5,86  |
| 45                       | 0,69 | 0,69 | 0,69 | 0,44 | 5,90  | 4,87  | 6,75  | 6,82  | 6,63  | 5,57  | 5,57  | 5,14  | 4,87  | 4,87  | 5,66  |
| 53                       | 1,13 | 1,13 | 1,13 | 0,61 | 6,31  | 4,23  | 8,01  | 7,91  | 7,98  | 5,73  | 5,73  | 5,34  | 4,23  | 4,23  | 5,82  |
| 63                       | 1,73 | 1,73 | 1,73 | 0,83 | 6,23  | 3,28  | 8,67  | 8,36  | 8,77  | 5,49  | 5,49  | 5,19  | 3,28  | 3,28  | 5,54  |
| 75                       | 2,58 | 2,58 | 2,58 | 1,15 | 6,17  | 2,44  | 9,24  | 8,75  | 9,46  | 5,28  | 5,28  | 5,09  | 2,44  | 2,44  | 5,29  |
| 90                       | 3,10 | 3,10 | 3,10 | 1,32 | 5,05  | 1,44  | 8,02  | 7,47  | 8,30  | 4,22  | 4,22  | 4,18  | 1,44  | 1,44  | 4,20  |
| 106                      | 3,90 | 3,90 | 3,90 | 1,61 | 4,48  | 0,89  | 7,44  | 6,85  | 7,74  | 3,67  | 3,67  | 3,77  | 0,89  | 0,89  | 3,64  |
| 125                      | 5,20 | 5,20 | 5,20 | 2,13 | 4,14  | 0,50  | 7,13  | 6,52  | 7,45  | 3,32  | 3,32  | 3,60  | 0,50  | 0,50  | 3,28  |
| 150                      | 6,05 | 6,05 | 6,05 | 2,49 | 3,24  | 0,20  | 5,74  | 5,21  | 6,02  | 2,57  | 2,57  | 3,01  | 0,20  | 0,20  | 2,52  |
| 180                      | 6,05 | 6,05 | 6,05 | 2,55 | 2,21  | 0,09  | 3,95  | 3,58  | 4,14  | 1,74  | 1,74  | 2,27  | 0,09  | 0,09  | 1,71  |
| 212                      | 6,59 | 6,59 | 6,59 | 2,89 | 1,63  | 0,06  | 2,91  | 2,62  | 3,07  | 1,29  | 1,29  | 1,93  | 0,06  | 0,06  | 1,26  |
| 250                      | 7,67 | 7,67 | 7,67 | 3,60 | 1,24  | 0,09  | 2,20  | 1,93  | 2,35  | 1,01  | 1,01  | 1,82  | 0,09  | 0,09  | 0,97  |
| 300                      | 7,26 | 7,26 | 7,26 | 3,74 | 0,71  | 0,11  | 1,20  | 0,92  | 1,38  | 0,64  | 0,64  | 1,44  | 0,11  | 0,11  | 0,57  |
| 355                      | 7,74 | 7,74 | 7,74 | 4,50 | 0,44  | 0,22  | 0,62  | 0,76  | 0,51  | 0,33  | 0,33  | 1,24  | 0,22  | 0,22  | 0,39  |
| 425                      | 6,66 | 6,66 | 6,66 | 4,50 | 0,09  | 0,11  | 0,08  | 0,06  | 0,09  | 0,10  | 0,10  | 0,91  | 0,11  | 0,11  | 0,10  |
| 500                      | 6,76 | 6,76 | 6,76 | 5,51 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,14  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,70  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 600                      | 5,25 | 5,25 | 5,25 | 5,38 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,23  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,29  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 710                      | 4,37 | 4,37 | 4,37 | 5,86 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,34  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,01  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 850                      | 3,23 | 3,23 | 3,23 | 5,27 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,27  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 1000                     | 2,64 | 2,64 | 2,64 | 5,02 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,22  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 1180                     | 3,03 | 3,03 | 3,03 | 8,94 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,22  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,02  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 1400                     | 2,77 | 2,77 | 2,77 | 9,74 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,18  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,03  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 1700                     | 1,28 | 1,28 | 1,28 | 9,84 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,11  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 2360                     | 0,30 | 0,30 | 0,30 | 5,89 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,03  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 3350                     | 0,31 | 0,31 | 0,31 | 2,68 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,03  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 4750                     | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,29 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,01  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 6700                     | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 9500                     | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 13200                    | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 19000                    | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 25000                    | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| 37500                    | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
| Total                    | 100  | 100  | 100  | 100  | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   |

Tabela 18 - Diferença em percentagem entre o novo histograma e o original, fluxos 1 a 14

| Diferença entre o novo histograma e o original |     |     |     |      |     |        |     |    |     |       |      |      |     |    |
|------------------------------------------------|-----|-----|-----|------|-----|--------|-----|----|-----|-------|------|------|-----|----|
| µm                                             | 1   | 2   | 3   | 4    | 5   | 6      | 7   | 8  | 9   | 10    | 11   | 12   | 13  | 14 |
| 0,417                                          | 1%  | 1%  | 7%  | 1%   | 2%  | 1%     | 9%  | 1% | 16% | 1%    | 1%   | 3%   | 3%  | 0% |
| 38                                             | 1%  | 1%  | 3%  | 1%   | 2%  | 1%     | 2%  | 0% | 13% | 1%    | 1%   | 4%   | 3%  | 1% |
| 45                                             | 0%  | 0%  | 1%  | 0%   | 1%  | 0%     | 2%  | 0% | 12% | 0%    | 0%   | 6%   | 1%  | 0% |
| 53                                             | 2%  | 2%  | 6%  | 2%   | 5%  | 2%     | 2%  | 0% | 9%  | 2%    | 2%   | 7%   | 6%  | 0% |
| 63                                             | 5%  | 5%  | 12% | 5%   | 11% | 5%     | 2%  | 0% | 7%  | 5%    | 4%   | 7%   | 10% | 0% |
| 75                                             | 8%  | 8%  | 18% | 8%   | 18% | 8%     | 3%  | 0% | 5%  | 8%    | 7%   | 4%   | 13% | 1% |
| 90                                             | 11% | 11% | 24% | 11%  | 24% | 11%    | 4%  | 0% | 5%  | 11%   | 10%  | 0%   | 15% | 2% |
| 106                                            | 13% | 13% | 29% | 14%  | 28% | 14%    | 5%  | 0% | 6%  | 14%   | 12%  | 7%   | 15% | 2% |
| 125                                            | 15% | 15% | 33% | 16%  | 30% | 16%    | 7%  | 0% | 9%  | 16%   | 14%  | 19%  | 15% | 2% |
| 150                                            | 16% | 16% | 35% | 17%  | 30% | 18%    | 8%  | 0% | 12% | 18%   | 15%  | 39%  | 13% | 2% |
| 180                                            | 16% | 16% | 32% | 17%  | 27% | 18%    | 6%  | 0% | 13% | 18%   | 14%  | 72%  | 11% | 2% |
| 212                                            | 15% | 15% | 26% | 16%  | 22% | 17%    | 3%  | 0% | 12% | 16%   | 13%  | 114% | 9%  | 1% |
| 250                                            | 13% | 13% | 19% | 13%  | 16% | 14%    | 1%  | 0% | 8%  | 14%   | 11%  | 135% | 6%  | 1% |
| 300                                            | 9%  | 9%  | 11% | 9%   | 9%  | 10%    | 4%  | 1% | 3%  | 9%    | 7%   | 93%  | 4%  | 1% |
| 355                                            | 5%  | 5%  | 5%  | 5%   | 4%  | 5%     | 6%  | 1% | 1%  | 4%    | 3%   | 11%  | 1%  | 0% |
| 425                                            | 2%  | 2%  | 3%  | 3%   | 2%  | 5%     | 6%  | 1% | 5%  | 5%    | 3%   | 68%  | 1%  | 0% |
| 500                                            | 13% | 14% | 15% | 14%  | 6%  | 22%    | 6%  | 1% | 7%  | 21%   | 13%  | 100% | 5%  | 1% |
| 600                                            | 37% | 37% | 52% | 39%  | 11% | 77%    | 4%  | 1% | 8%  | 70%   | 33%  | 0%   | 10% | 1% |
| 710                                            | 90% | 90% | 0%  | 97%  | 15% | 803%   | 2%  | 0% | 8%  | 444%  | 80%  | 0%   | 15% | 2% |
| 850                                            | 93% | 93% | 0%  | 100% | 13% | 0%     | 0%  | 0% | 8%  | 963%  | 89%  | 0%   | 15% | 1% |
| 1000                                           | 82% | 82% | 0%  | 88%  | 12% | 0%     | 2%  | 1% | 7%  | 879%  | 83%  | 0%   | 14% | 1% |
| 1180                                           | 49% | 49% | 61% | 53%  | 7%  | 10590% | 7%  | 2% | 1%  | 359%  | 81%  | 0%   | 14% | 2% |
| 1400                                           | 41% | 41% | 41% | 44%  | 6%  | 6726%  | 8%  | 2% | 2%  | 265%  | 77%  | 0%   | 14% | 2% |
| 1700                                           | 16% | 16% | 5%  | 18%  | 1%  | 0%     | 3%  | 5% | 2%  | 1652% | 167% | 0%   | 25% | 8% |
| 2360                                           | 4%  | 4%  | 0%  | 6%   | 0%  | 0%     | 3%  | 0% | 2%  | 0%    | 0%   | 0%   | 41% | 0% |
| 3350                                           | 5%  | 5%  | 0%  | 18%  | 0%  | 0%     | 2%  | 0% | 1%  | 0%    | 0%   | 0%   | 31% | 0% |
| 4750                                           | 1%  | 1%  | 0%  | 71%  | 0%  | 0%     | 37% | 0% | 13% | 0%    | 0%   | 0%   | 30% | 0% |
| 6700                                           | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%  | 0%     | 0%  | 0% | 0%  | 0%    | 0%   | 0%   | 0%  | 0% |
| 9500                                           | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%  | 0%     | 0%  | 0% | 0%  | 0%    | 0%   | 0%   | 0%  | 0% |
| 13200                                          | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%  | 0%     | 0%  | 0% | 0%  | 0%    | 0%   | 0%   | 0%  | 0% |
| 19000                                          | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%  | 0%     | 0%  | 0% | 0%  | 0%    | 0%   | 0%   | 0%  | 0% |
| 25000                                          | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%  | 0%     | 0%  | 0% | 0%  | 0%    | 0%   | 0%   | 0%  | 0% |
| 37500                                          | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%  | 0%     | 0%  | 0% | 0%  | 0%    | 0%   | 0%   | 0%  | 0% |

Tabela 19 - Diferença em percentagem entre o novo histograma e o original, fluxos 15 a 29

| Diferença entre o novo histograma e o original |     |     |     |     |      |       |      |      |      |      |      |      |       |       |       |
|------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|------|-------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| μm                                             | 15  | 16  | 17  | 18  | 19   | 20    | 21   | 22   | 23   | 24   | 25   | 26   | 27    | 28    | 29    |
| 0,417                                          | 8%  | 8%  | 8%  | 89% | 2%   | 3%    | 1%   | 1%   | 2%   | 3%   | 3%   | 0%   | 3%    | 3%    | 2%    |
| 38                                             | 10% | 10% | 10% | 15% | 2%   | 3%    | 1%   | 0%   | 2%   | 4%   | 4%   | 2%   | 3%    | 3%    | 2%    |
| 45                                             | 1%  | 1%  | 1%  | 15% | 3%   | 0%    | 0%   | 1%   | 1%   | 6%   | 6%   | 3%   | 0%    | 0%    | 0%    |
| 53                                             | 12% | 12% | 12% | 14% | 4%   | 4%    | 0%   | 1%   | 0%   | 7%   | 7%   | 4%   | 4%    | 4%    | 2%    |
| 63                                             | 19% | 19% | 19% | 15% | 4%   | 11%   | 1%   | 1%   | 1%   | 7%   | 7%   | 4%   | 11%   | 11%   | 3%    |
| 75                                             | 24% | 24% | 24% | 16% | 3%   | 20%   | 1%   | 2%   | 1%   | 4%   | 4%   | 1%   | 20%   | 20%   | 4%    |
| 90                                             | 26% | 26% | 26% | 17% | 0%   | 35%   | 1%   | 2%   | 1%   | 0%   | 0%   | 3%   | 35%   | 35%   | 5%    |
| 106                                            | 26% | 26% | 26% | 17% | 4%   | 59%   | 0%   | 3%   | 1%   | 7%   | 7%   | 10%  | 59%   | 59%   | 4%    |
| 125                                            | 25% | 25% | 25% | 18% | 10%  | 149%  | 0%   | 3%   | 0%   | 19%  | 19%  | 20%  | 149%  | 149%  | 4%    |
| 150                                            | 22% | 22% | 22% | 18% | 21%  | 1878% | 1%   | 4%   | 0%   | 39%  | 39%  | 35%  | 1878% | 1878% | 2%    |
| 180                                            | 19% | 19% | 19% | 18% | 35%  | 0%    | 1%   | 4%   | 1%   | 72%  | 72%  | 50%  | 0%    | 0%    | 0%    |
| 212                                            | 15% | 15% | 15% | 17% | 48%  | 0%    | 2%   | 5%   | 1%   | 114% | 114% | 59%  | 0%    | 0%    | 0%    |
| 250                                            | 10% | 10% | 10% | 15% | 49%  | 0%    | 1%   | 6%   | 1%   | 135% | 135% | 53%  | 0%    | 0%    | 3%    |
| 300                                            | 6%  | 6%  | 6%  | 11% | 20%  | 0%    | 1%   | 7%   | 4%   | 93%  | 93%  | 34%  | 0%    | 0%    | 12%   |
| 355                                            | 2%  | 2%  | 2%  | 7%  | 22%  | 0%    | 12%  | 6%   | 39%  | 11%  | 11%  | 5%   | 0%    | 0%    | 66%   |
| 425                                            | 2%  | 2%  | 2%  | 1%  | 79%  | 0%    | 275% | 191% | 327% | 68%  | 68%  | 12%  | 0%    | 0%    | 1024% |
| 500                                            | 8%  | 8%  | 8%  | 5%  | 100% | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 100% | 100% | 27%  | 0%    | 0%    | 0%    |
| 600                                            | 15% | 15% | 15% | 10% | 100% | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 57%  | 0%    | 0%    | 0%    |
| 710                                            | 24% | 24% | 24% | 15% | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 98%  | 0%    | 0%    | 0%    |
| 850                                            | 25% | 25% | 25% | 17% | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 100% | 0%    | 0%    | 0%    |
| 1000                                           | 24% | 24% | 24% | 18% | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 100% | 0%    | 0%    | 0%    |
| 1180                                           | 23% | 23% | 23% | 11% | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 98%  | 0%    | 0%    | 0%    |
| 1400                                           | 22% | 22% | 22% | 10% | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 100% | 0%   | 0%   | 96%  | 0%    | 0%    | 0%    |
| 1700                                           | 35% | 35% | 35% | 8%  | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 100% | 0%    | 0%    | 0%    |
| 2360                                           | 45% | 45% | 45% | 10% | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%    | 0%    | 0%    |
| 3350                                           | 33% | 33% | 33% | 4%  | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%    | 0%    | 0%    |
| 4750                                           | 32% | 32% | 32% | 5%  | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%    | 0%    | 0%    |
| 6700                                           | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%    | 0%    | 0%    |
| 9500                                           | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%    | 0%    | 0%    |
| 13200                                          | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%    | 0%    | 0%    |
| 19000                                          | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%    | 0%    | 0%    |
| 25000                                          | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%    | 0%    | 0%    |
| 37500                                          | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%   | 0%    | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%   | 0%    | 0%    | 0%    |

As tabelas anteriores mostram a diferença percentual entre o histograma calculado e o original, onde se pode ver que existe uma quantidade significativa de valores acima de 10%, destacados a vermelho, um grande número de ajustes individuais acima de 10% pode ser tomado como um dado que os dados apresentam uma quantidade de inconsistências.

Existem também alguns valores extremamente elevados que são explicados pelo facto de que, no histograma original estas frações granulométricas apresentarem valores muito pequenos, próximos de 0. Um ajuste, mesmo que pequeno, irá ser percentualmente muito grande quando relacionado com números tão pequenos.

## 5. Ajuste e simulação

### 1. Ajuste de curvas de partição aos dados

Um dos métodos de avaliar a eficiência de um classificador é utilizar a sua curva de partição. Elas são consideradas a característica operacional de um separador e são calculadas como a razão entre a massa de cada componente recuperada no supra e a massa original presente na alimentação.

$$P_i = R_p \cdot \frac{u_i}{a_i}$$

*Equação 109 - Curva de partição*

Em que  $u_i$  e  $a_i$  são a percentagem de partículas de calibre  $i$  existentes no Supra (underflow no caso do ciclone) e na Alimentação do classificador, respetivamente e  $R_p$  o Rendimento ponderal do supra da operação.

Ela é definida como a probabilidade de as partículas da alimentação passarem ao lote das partículas que constituem o supra. Mas, é sabido que os processos de classificação possuem ineficiências, por exemplo material desgarrado que por imperfeição do aparelho se encontra, na separação real, no lote errado em relação à separação ideal. Na prática verifica-se que esta curva varia bastante com as condições de trabalho do classificador, pelo que é costume propor-se o modelo de Curva de Partição Reduzida que consiste em deixar de lado os efeitos mecânicos devido ao arrastamento indiscriminado para realçar os efeitos do fenómeno físico envolvido na separação.

A modelagem de Curvas Partição tem sido realizada por vários autores usando aproximações analíticas, monotonamente crescentes com o calibre, controladas por dois parâmetros condensados, um que se destina a definir o calibre de corte a 50%,  $d_{50}$  (que corresponde ao calibre em que uma partícula tem igual probabilidade de ir para o overflow ou para o underflow) e outro que define a forma,  $m$ , da curva. O modelo mais utilizado e que foi adotado neste trabalho é o apresentado por Lynch:

$$C_i = \frac{\exp\left(m \frac{x_i}{d_{50}}\right) - 1}{\exp\left(m \frac{x_i}{d_{50}}\right) + \exp(m) - 2}$$

*Equação 110 - Modelo de Lynch para a curva de partição reduzida*

Onde  $m$  é o parâmetro forma da curva e traduz a perfeição da separação (em regra, quanto maior o valor deste parâmetro, mais perfeita será a separação,  $x_i$  é o calibre de cada partícula e  $d_{50}$  é o calibre de corte a 50 % da Curva de Partição Corrigida,  $C_i$ ).

No entanto, o ajuste dos dados experimentais só poderá ser conseguido se no modelo for incluído um efeito do arrastamento no supra,  $A_s$ , que corresponde à percentagem de material de calibres mais finos que são arrastados indiscriminadamente com os calibres mais grosseiros para o underflow.

Assim um modelo que contemple imperfeição e arrastamento indiscriminado é expressa pela expressão:

$$P_i = A_s + (1 - A_s)C_i$$

*Equação 111 - Modelo de Lynch para a curva de partição*

O ajuste deste modelo com os dados experimentais, para simular o circuito de tratamento de caulinos, conduzirá à determinação dos 3 parâmetros em questão:

- As - Arrastamento no supra
- d50 - Calibre de corte a 50% da partição corrigida (em  $\mu\text{m}$ )
- m - Imperfeição da curva de partição corrigida.

os quais vão ser utilizados para a avaliação da eficiência de cada nó separador, bem como da eficiência global do circuito.

Apresentam-se a seguir o resultado dos ajustes do modelo aos dados das diferentes curvas, para cada classificador, obtidas através da minimização do somatório dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os simulados pelo modelo.

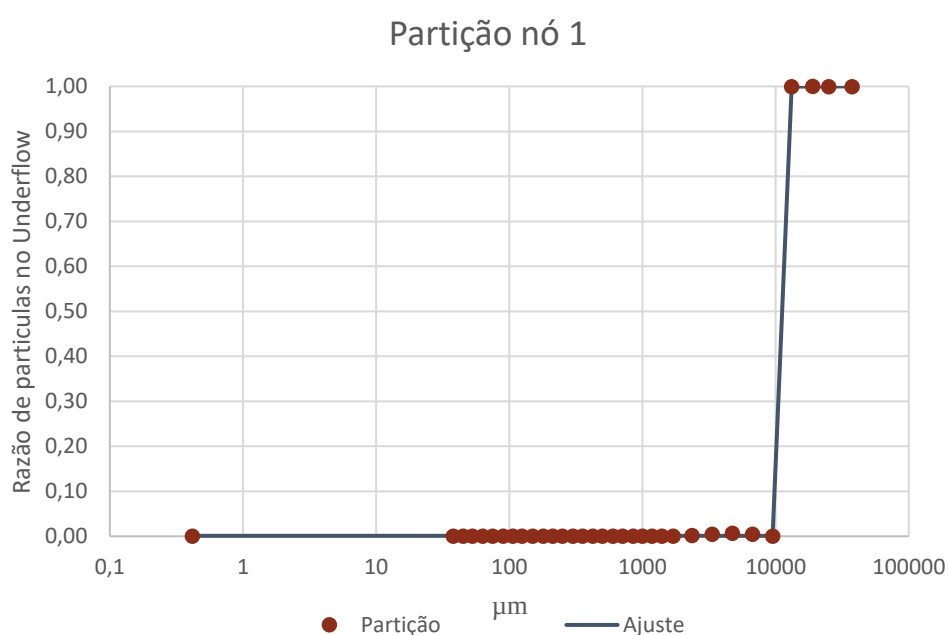


Figura 26 - Partições nó 1

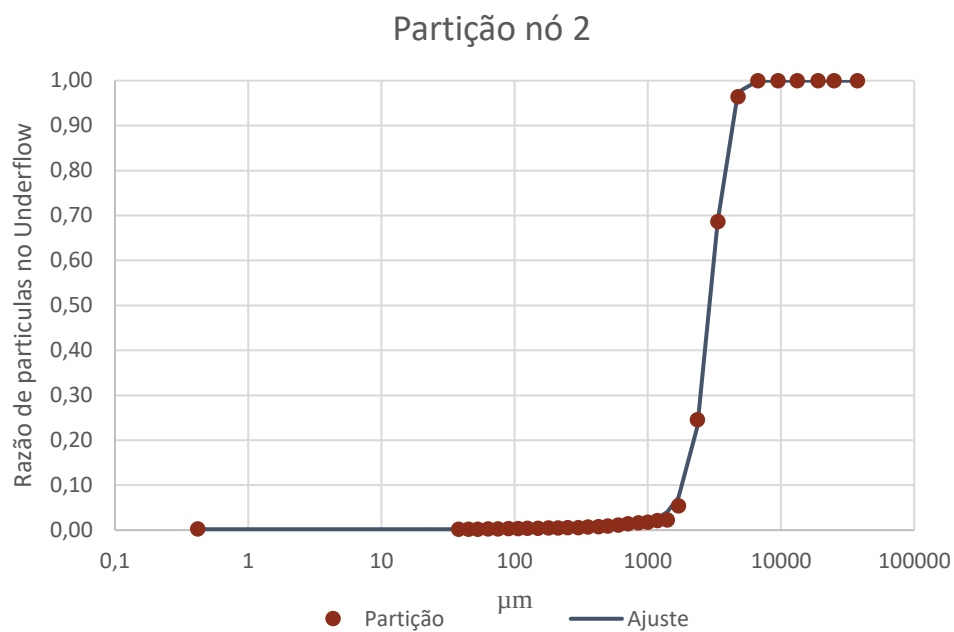


Figura 27 - Partições nó 2

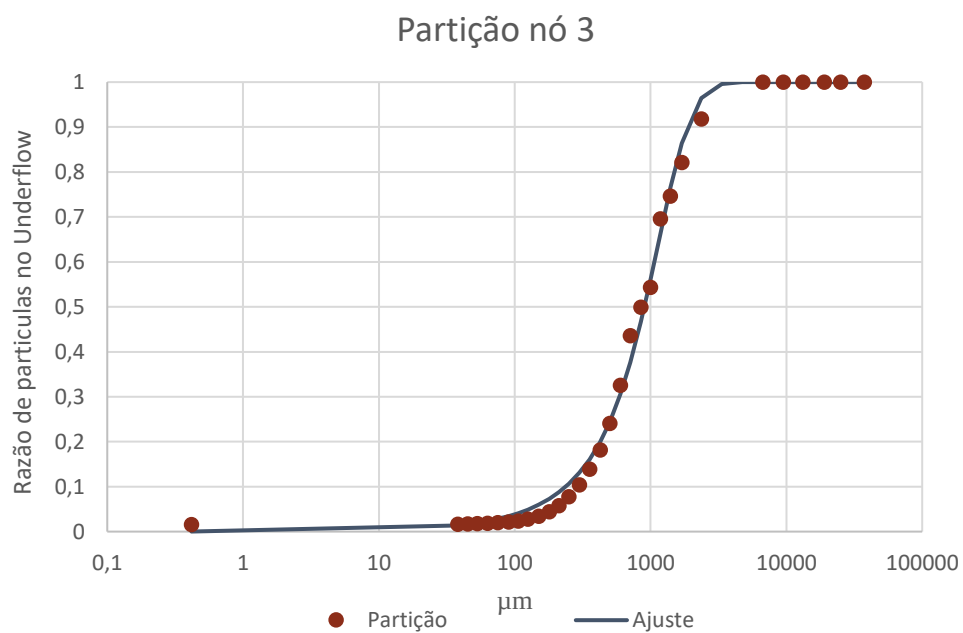


Figura 28 - Partições nó 3

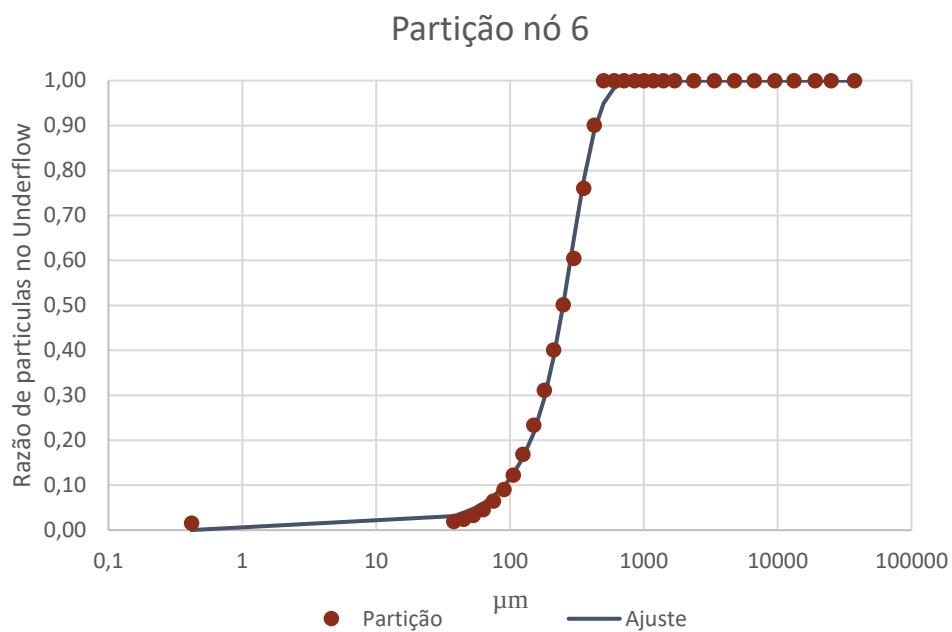


Figura 29 - Partições nó 6

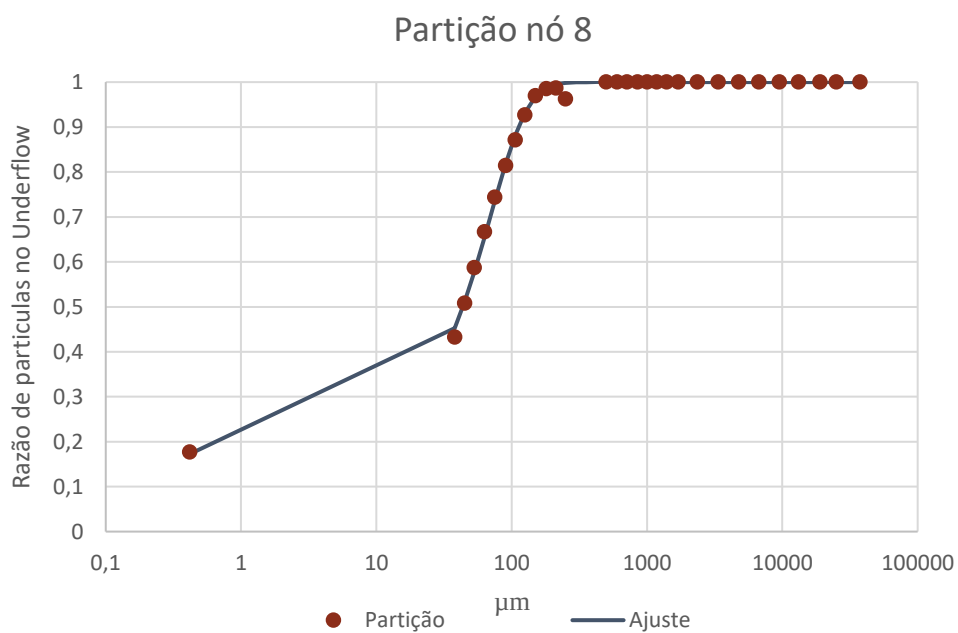


Figura 30 - Partições nó 8

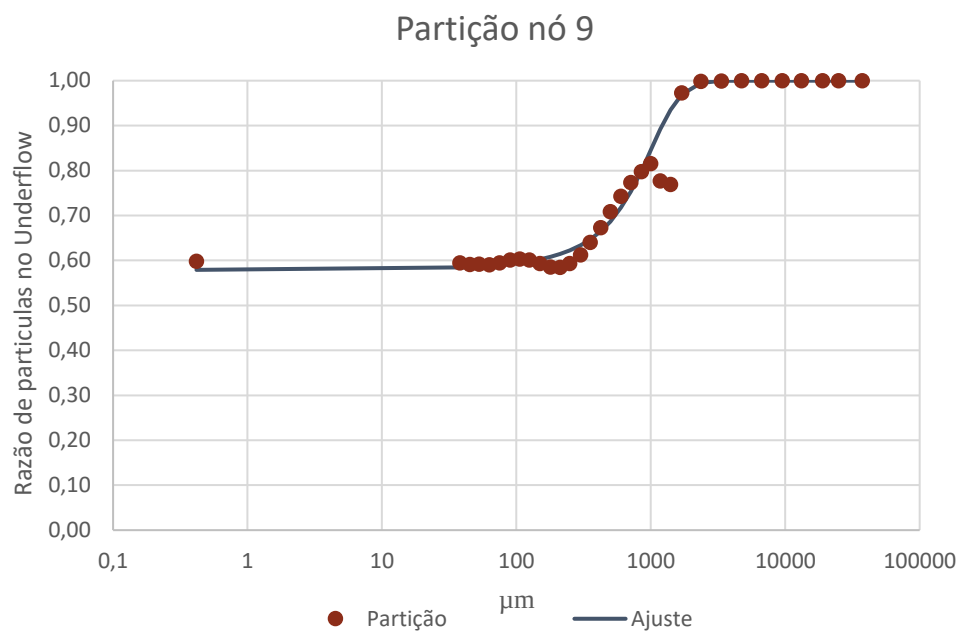


Figura 31 - Partições nó 9

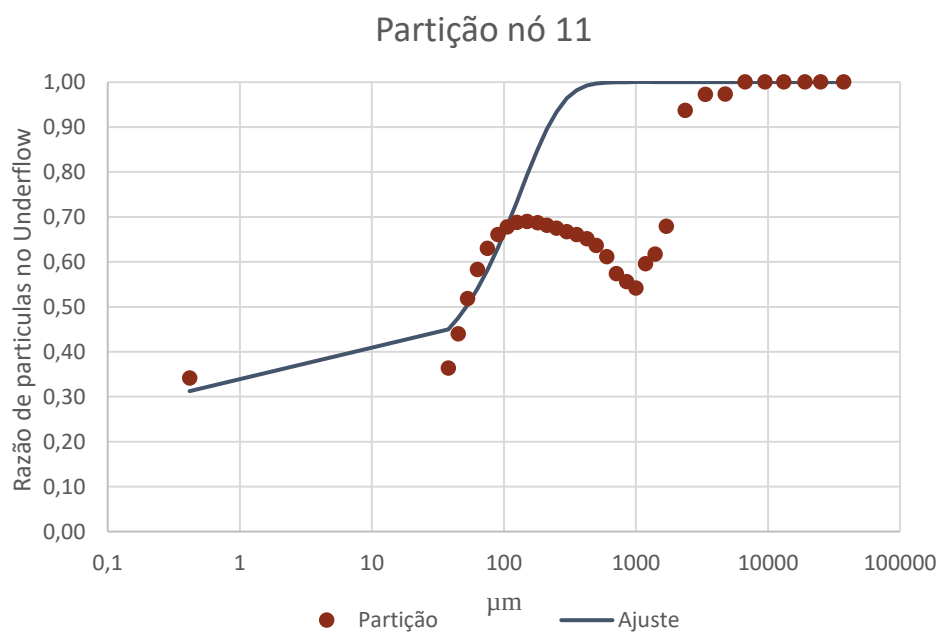


Figura 32 - Partições nó 11

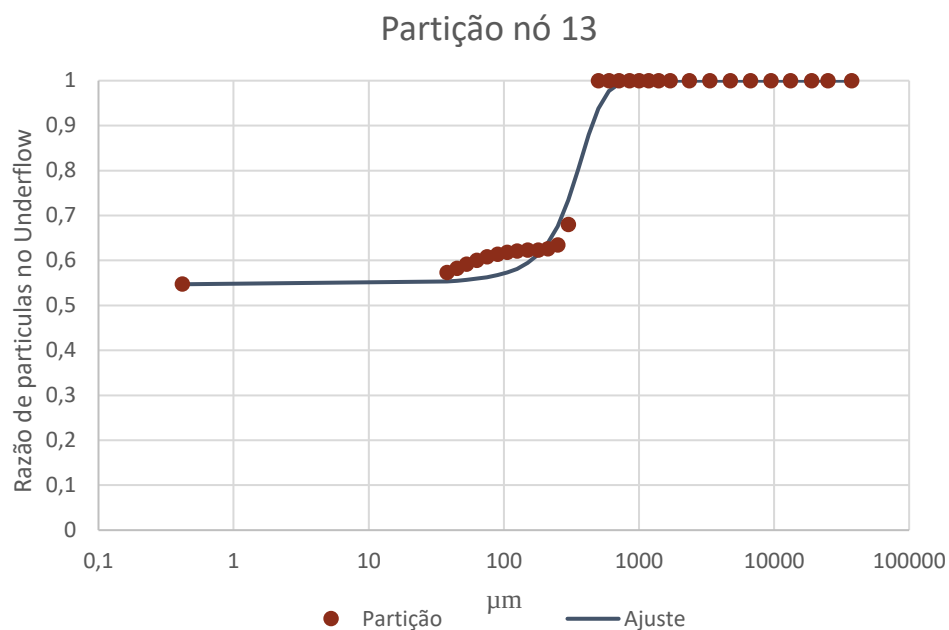


*Figura 33 - Partições nó 13*

Os valores dos parâmetros que minimizam o ajuste da partição real e a partição descrita pelo modelo de Lynch são:

*Tabela 20 - Coeficientes das curvas de partição*

| Coeficientes partição |           |          |         |         |        |         |        |         |
|-----------------------|-----------|----------|---------|---------|--------|---------|--------|---------|
|                       | 1         | 2        | 3       | 6       | 8      | 9       | 11     | 13      |
| <b>d50 (μm)</b>       | 12343,071 | 2958,520 | 902,914 | 250,078 | 53,999 | 820,309 | 97,775 | 331,718 |
| <b>m</b>              | 115,540   | 5,993    | 1,952   | 2,883   | 1,690  | 2,273   | 1,244  | 3,573   |
| <b>As</b>             | 0,001     | 0,002    | 0,000   | 0,000   | 0,170  | 0,579   | 0,311  | 0,547   |

A divisão de fluxos no nó 12 foi calculada a partir da razão entre os fluxos 9 e 16 que origina o fluxo 18. Conhecendo também os valores dos fluxos 9 e 15, determina-se a razão entre o fluxo 16 e o 15. As divisões nos nós 15 e 17 foram calculadas determinando os fluxos através do método matricial já descrito anteriormente aquando da estima dos fluxos.

*Tabela 21 - Divisão de fluxos nos nós 12, 15 e 17*

| Divisão fluxos |        |        |
|----------------|--------|--------|
| 12             | 15     | 17     |
| 0,1427         | 0,9073 | 0,2750 |

## 2. Simulação com os dados obtidos

A simulação do circuito foi feita em Matlab e necessita como entrada, para além dos coeficientes já referidos, do histograma da alimentação e da série de calibres usados.

A partir destes dados são calculados todos os caudais presentes no sistema, bem como os seus histogramas. Como output teremos: os histogramas dos fluxos de saída, os seus caudais e os rendimentos ponderais dos dois ciclones e do circuito no geral.

Para a simulação foi criada uma função denominada `particao` que calcula o underflow e o overflow para cada separação tendo os calibres de entrada, o fluxo de alimentação e os parâmetros  $As$ ,  $m$  e  $d50$ .

Os códigos são os seguintes:

```
%Função que calcula o underflow(PU) e o overflow (PO) de um
separador a partir de uma série de crivagem (c), o histograma da
alimentação (A), do arrasto (As), do parâmetro forma da curva (m) e
do calibre de corte (d50)
function [PU,PO] = particao(c,A,As,m,d50)
n=length(c);
PU=zeros(n,1);
PO=zeros(n,1);
for i=1:n
    PU(i)=(As+(1-As)*(exp(m*c(i)/d50)-1)/(exp(m*c(i)/d50)+exp(m)-
2))*A(i);
    PO(i)=(1-(As+(1-As)*(exp(m*c(i)/d50)-1)/(exp(m*c(i)/d50)+exp(m)-
2)))*A(i);
end

%Valores iniciais
c=[0.417;38;45;53;63;75;90;106;125;150;180;212;250;300;355;425;500;6
00;710;850;1000;1180;1400;1700;2360;3350;4750;6700;9500;13200;19000;
25000;37500];
f1=[27.90;3.05;3.04;3.28;3.37;3.58;3.23;3.24;3.54;3.47;3.07;3.07;3.3
7;3.09;3.22;2.78;2.84;2.23;1.94;1.56;1.39;2.20;2.31;1.84;1.24;1.46;1
.41;1.37;0.42;0.05;0;0.27;1.14];
d501=12343.071;
m1=115.540;
as1=0.001;
d502=2958.520;
m2=5.993;
as2=0.002;
d503=902.914;
m3=1.952;
as3=0;
d506=250.078;
m6=2.883;
as6=0;
d508=53.999;
m8=1.690;
as8=0.170;
d509=820.309;
m9=2.273;
```

```

as9=0.579;
d5011=97.775;
m11=1.244;
as11=0.311;
d5013=331.718;
m13=3.573;
as13=0.547;
p12=0.1427;
p15=0.9073;
p17=0.2750;

%Calculo dos fluxos 2 a 10
n=length(c);
[f3,f2]=particao(c,f1,as1,m1,d501);
[f5,f4]=particao(c,f2,as2,m2,d502);
[f7,f6]=particao(c,f4,as3,m3,d503);
[f9,f8]=particao(c,f7,as9,m9,d509);
f10=f6+f8;
sf10=sum(f10);

%Cálculo dos fluxos envolvidos no primeiro estágio de ciclonagem,
como há
%retorno de fluxos, são feitas iterações até que a diferença entre o
%fluxo de entrada f10 e os fluxos de saída f15 e f24 seja inferior a
%0.00001
f11=zeros(n,1);
f14=zeros(n,1);
f25=zeros(n,1);
f26=zeros(n,1);
f12=zeros(n,1);
f13=zeros(n,1);
f24=zeros(n,1);
f15=zeros(n,1);
sf15=0;
sf24=0;
itel=0;
while sum(abs(sf10-sf15-sf24))>.00001
    itel=itel+1;
    for i=1:n
        f11=f10+f14;
        f26=f11+f25;
        [f13,f12]=particao(c,f26,as6,m6,d506);
        [f15,f14]=particao(c,f13,as11,m11,d5011);
        f11(33)=0;
        f12(33)=0;
        f13(33)=0;
        f14(33)=0;
        f15(33)=0;
        f26(33)=0;
        sf15=sum(f15);
        f25=f12*p15;
        f24=f12*(1-p15);
        sf24=sum(f24);
    end
end

```

```

f16=f15*p12;
f17=f15*(1-p12);
f18=f9+f16;

%Cálculo dos fluxos envolvidos no segundo estágio de ciclonagem,
como há
%retorno de fluxos, são feitas iterações até que a diferença entre o
%fluxo de entrada f24 e os fluxos de saída f23 e f27 seja inferior a
%0.00001
f19=zeros(n,1);
f22=zeros(n,1);
f28=zeros(n,1);
f29=zeros(n,1);
f20=zeros(n,1);
f21=zeros(n,1);
f23=zeros(n,1);
f27=zeros(n,1);
ite2=0;
sf23=0;
sf27=0;
while sum(abs(sf24-sf23-sf27))>.00001
    ite2=ite2+1;
    f19=f24+f22;
    f29=f19+f28;
    for j=1:n
        [f21,f20]=particao(c,f29,as8,m8,d508);
        [f23,f22]=particao(c,f21,as13,m13,d5013);
        for k=30:n
            f20(k)=0;
            f21(k)=0;
            f22(k)=0;
            f23(k)=0;
        end
        f28=f20*p17;
        f27=f20*(1-p17);
        sf23=sum(f23);
        sf27=sum(f27);
    end
end

%Geração do output
tab=[f1 f3 f5 f17 f18 f23 f27];
st=sum(tab);
l=length(st);
for k=1:l
    tab(:,k)=tab(:,k)./st(k);
end
tab=round(tab,4)*100;
rp1=sum(f12)/sum(f26)*100;
rp2=sum(f20)/sum(f29)*100;
rpc=st(7);
cm=c/1000;
disp('O histograma é:');
disp('      mm      1      3      5      17      18
23      27')

```

```

disp([cm tab])
disp('Os Fluxos são:');
disp('      1      3      5      17      18      23
27')
disp(st)
disp(['Rendimento ponderal ciclone 1: ' ,num2str(rp1), ' %'])
disp(['Rendimento ponderal ciclone 2: ' num2str(rp2), ' %'])
disp(['Rendimento ponderal circuito : ' num2str(rpc), ' %'])

```

O simulador recorre à função *particao*, como referido, que calcula uma curva de partição segundo o modelo de Lynch, para simular os nós separadores, e gera o overflow e o underflow de acordo com estes. Os fluxos gerados são adicionados de forma igual ao circuito real, no caso dos nós de mistura. Quando existem situações de retorno de fluxos a simulação itera até que os caudais de entrada e de saída difiram entre si um máximo de 0.0001, garantindo o equilíbrio do sistema.

Assim que os caudais e os histogramas de todos os fluxos estejam finalizados, o simulador produz como resultado os histogramas e os caudais da entrada e das saídas da instalação, sendo elas 1 – Alimentação, 3 – Grosseiros, 5 – Areia Grossa, 17 – Areia 0/2, 18 – Areia 0/4, 23 – Mica e 27 – Caulino.

O simulador calcula também o rendimento ponderal dos dois estágios de ciclonagem bem como o rendimento ponderal do circuito em geral, que são considerados indicadores do desempenho do circuito.

Exemplo do output para os valores em causa:

O histograma é:

| mm      | 1       | 3       | 5       | 17     | 18      | 23      | 27      |
|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|
| 0.0004  | 27.9100 | 1.7900  | 1.1100  | 0.0800 | 0.0400  | 22.6100 | 78.1100 |
| 0.0380  | 3.0500  | 0.2000  | 0.1300  | 1.1600 | 0.5400  | 6.0400  | 5.1900  |
| 0.0450  | 3.0400  | 0.2000  | 0.1300  | 1.4500 | 0.6600  | 6.6200  | 4.4900  |
| 0.0530  | 3.2800  | 0.2100  | 0.1500  | 1.9500 | 0.8800  | 7.7800  | 4.0400  |
| 0.0630  | 3.3700  | 0.2200  | 0.1600  | 2.5100 | 1.1200  | 8.6000  | 3.2000  |
| 0.0750  | 3.5800  | 0.2300  | 0.1700  | 3.3400 | 1.4800  | 9.5000  | 2.3900  |
| 0.0900  | 3.2300  | 0.2100  | 0.1600  | 3.7700 | 1.6500  | 8.4700  | 1.3100  |
| 0.1060  | 3.2400  | 0.2100  | 0.1700  | 4.5300 | 1.9800  | 7.9000  | 0.7300  |
| 0.1250  | 3.5400  | 0.2300  | 0.1900  | 5.8100 | 2.5600  | 7.4700  | 0.3700  |
| 0.1500  | 3.4700  | 0.2200  | 0.2000  | 6.5900 | 2.9500  | 5.7200  | 0.1300  |
| 0.1800  | 3.0700  | 0.2000  | 0.1900  | 6.5100 | 3.0000  | 3.6000  | 0.0300  |
| 0.2120  | 3.0700  | 0.2000  | 0.2000  | 6.9900 | 3.3500  | 2.4500  | 0.0100  |
| 0.2500  | 3.3700  | 0.2200  | 0.2400  | 8.0300 | 4.0500  | 1.6900  | 0       |
| 0.3000  | 3.0900  | 0.2000  | 0.2500  | 7.5500 | 4.1100  | 0.8400  | 0       |
| 0.3550  | 3.2200  | 0.2100  | 0.3000  | 7.8700 | 4.7100  | 0.4500  | 0       |
| 0.4250  | 2.7800  | 0.1800  | 0.3000  | 6.6700 | 4.5400  | 0.1700  | 0       |
| 0.5000  | 2.8400  | 0.1800  | 0.3600  | 6.5800 | 5.1900  | 0.0700  | 0       |
| 0.6000  | 2.2300  | 0.1400  | 0.3500  | 4.8600 | 4.7100  | 0.0200  | 0       |
| 0.7100  | 1.9400  | 0.1200  | 0.3800  | 3.8700 | 4.7700  | 0       | 0       |
| 0.8500  | 1.5600  | 0.1000  | 0.4100  | 2.7200 | 4.5800  | 0       | 0       |
| 1.0000  | 1.3900  | 0.0900  | 0.5000  | 2.0200 | 4.8200  | 0       | 0       |
| 1.1800  | 2.2000  | 0.1400  | 1.1400  | 2.4700 | 8.9600  | 0       | 0       |
| 1.4000  | 2.3100  | 0.1500  | 1.8600  | 1.7800 | 10.7900 | 0       | 0       |
| 1.7000  | 1.8400  | 0.1200  | 2.6400  | 0.7800 | 9.4600  | 0       | 0       |
| 2.3600  | 1.2400  | 0.0800  | 5.6500  | 0.1100 | 5.9400  | 0       | 0       |
| 3.3500  | 1.4600  | 0.0900  | 19.9600 | 0.0100 | 2.9100  | 0       | 0       |
| 4.7500  | 1.4100  | 0.0900  | 27.2400 | 0      | 0.2300  | 0       | 0       |
| 6.7000  | 1.3700  | 0.0900  | 27.1500 | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 9.5000  | 0.4200  | 0.0300  | 8.3300  | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 13.2000 | 0.0500  | 3.2100  | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 19.0000 | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 25.0000 | 0.2700  | 17.3200 | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 37.5000 | 1.1400  | 73.1500 | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |

Os Fluxos são:

| 1       | 3      | 5      | 17      | 18      | 23      | 27      |
|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 99.9700 | 1.5585 | 5.0388 | 30.4223 | 15.5074 | 16.7034 | 30.7396 |

Rendimento ponderal ciclone 1: 92.2683 %

Rendimento ponderal ciclone 2: 59.0852 %

Rendimento ponderal circuito : 30.7396 %

Para comparação a simulação também foi testada com os dados originais, isto é, antes da minimização do erro, e cujas curvas de partição possuem os seguintes coeficientes e output:

*Tabela 22 - Coeficientes das curvas de partição sem minimização do erro*

| Coeficientes partição                     |           |          |         |         |        |          |          |         |
|-------------------------------------------|-----------|----------|---------|---------|--------|----------|----------|---------|
|                                           | 1         | 2        | 3       | 6       | 8      | 9        | 11       | 13      |
| <b>d50<br/>(<math>\mu\text{m}</math>)</b> | 12111,542 | 2897,702 | 584,864 | 210,131 | 53,122 | 1225,033 | 1504,599 | 361,059 |
| <b>m</b>                                  | 115,692   | 5,987    | 6,567   | 2,924   | 2,129  | 5,261    | 1,843    | 9,250   |
| <b>As</b>                                 | 0,001     | 0,005    | 0,027   | 0,000   | 0,170  | 0,659    | 0,548    | 0,600   |

*Tabela 23 - Divisão de fluxos sem minimização do erro*

| Divisão fluxos |        |        |
|----------------|--------|--------|
| 12             | 15     | 17     |
| 0,1892         | 0,8649 | 0,4907 |

O histograma é:

| mm      | 1       | 3       | 5       | 17      | 18     | 23      | 27      |
|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|
| 0.0004  | 28.2300 | 1.8100  | 2.6900  | 0.1100  | 3.1100 | 23.4200 | 80.9300 |
| 0.0380  | 3.0300  | 0.1900  | 0.3000  | 1.2600  | 0.8200 | 5.3000  | 4.8300  |
| 0.0450  | 3.0500  | 0.2000  | 0.3000  | 1.5300  | 0.9200 | 5.8700  | 4.0900  |
| 0.0530  | 3.3500  | 0.2100  | 0.3400  | 2.0200  | 1.1500 | 7.0300  | 3.5900  |
| 0.0630  | 3.5400  | 0.2300  | 0.3600  | 2.6000  | 1.3900 | 7.9900  | 2.7600  |
| 0.0750  | 3.8700  | 0.2500  | 0.4000  | 3.4700  | 1.7600 | 9.1000  | 1.9600  |
| 0.0900  | 3.6100  | 0.2300  | 0.3800  | 3.9800  | 1.9300 | 8.4200  | 1.0000  |
| 0.1060  | 3.7300  | 0.2400  | 0.4000  | 4.9200  | 2.3200 | 8.1600  | 0.5100  |
| 0.1250  | 4.1700  | 0.2700  | 0.4600  | 6.5300  | 3.0000 | 8.0500  | 0.2400  |
| 0.1500  | 4.1500  | 0.2700  | 0.4700  | 7.7300  | 3.4800 | 6.4400  | 0.0700  |
| 0.1800  | 3.6700  | 0.2400  | 0.4300  | 7.9300  | 3.5400 | 4.1700  | 0.0100  |
| 0.2120  | 3.6100  | 0.2300  | 0.4400  | 8.6800  | 3.8800 | 2.8200  | 0       |
| 0.2500  | 3.8600  | 0.2500  | 0.4900  | 10.0400 | 4.5500 | 1.8600  | 0       |
| 0.3000  | 3.3900  | 0.2200  | 0.4600  | 9.2700  | 4.3900 | 0.8400  | 0       |
| 0.3550  | 3.3700  | 0.2200  | 0.4900  | 9.3100  | 4.8200 | 0.3800  | 0       |
| 0.4250  | 2.7200  | 0.1700  | 0.4400  | 7.2600  | 4.5700 | 0.1100  | 0       |
| 0.5000  | 2.5000  | 0.1600  | 0.4500  | 6.0400  | 5.3200 | 0.0300  | 0       |
| 0.6000  | 1.6300  | 0.1000  | 0.3400  | 3.0700  | 4.8900 | 0       | 0       |
| 0.7100  | 1.0200  | 0.0700  | 0.2600  | 1.3600  | 3.9600 | 0       | 0       |
| 0.8500  | 0.8100  | 0.0500  | 0.2600  | 0.7800  | 3.6200 | 0       | 0       |
| 1.0000  | 0.7700  | 0.0500  | 0.3200  | 0.5900  | 3.6600 | 0       | 0       |
| 1.1800  | 1.4800  | 0.0900  | 0.8600  | 0.8300  | 7.4500 | 0       | 0       |
| 1.4000  | 1.6400  | 0.1100  | 1.4300  | 0.5200  | 8.7400 | 0       | 0       |
| 1.7000  | 1.5800  | 0.1000  | 2.4100  | 0.1700  | 8.6300 | 0       | 0       |
| 2.3600  | 1.2000  | 0.0800  | 5.7200  | 0.0100  | 5.5000 | 0       | 0       |
| 3.3500  | 1.4000  | 0.0900  | 19.1700 | 0       | 2.4100 | 0       | 0       |
| 4.7500  | 1.3900  | 0.0900  | 25.8900 | 0       | 0.1800 | 0       | 0       |
| 6.7000  | 1.3700  | 0.0900  | 26.0500 | 0       | 0      | 0       | 0       |
| 9.5000  | 0.4200  | 0.0300  | 7.9900  | 0       | 0      | 0       | 0       |
| 13.2000 | 0.0500  | 3.2100  | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       |
| 19.0000 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       |
| 25.0000 | 0.2700  | 17.3200 | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       |
| 37.5000 | 1.1400  | 73.1400 | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       |

Os Fluxos são:

| 1        | 3      | 5      | 17      | 18      | 23      | 27      |
|----------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 100.0300 | 1.5586 | 5.2510 | 26.4846 | 16.2971 | 23.1020 | 27.3367 |

Rendimento ponderal ciclone 1: 86.8905 %

Rendimento ponderal ciclone 2: 58.3301 %

Rendimento ponderal circuito : 27.3367 %

Apesar de se saber que a qualidade da amostragem não foi a melhor, a recolha de amostras das saídas do circuito não apresenta dificuldades de maior, e por isso pode se assumir que esses dados são razoáveis, fornecendo uma métrica pela qual se consegue comparar qual das duas simulações mais se aproxima da realidade.

O histograma da simulação que utilizou os dados provenientes da minimização de erro apresenta, em média, uma diferença para os dados recolhidos de 0,49%, enquanto o histograma dos dados em que o erro não foi minimizado tem uma diferença em média de 0,79%, representando uma redução

significativa da diferença entre os dados originais e os calculados, como se pode ver nos gráficos seguintes. Assim os valores produzidos após a minimização de erro podem ser considerados como mais próximos dos valores reais do que os originais.

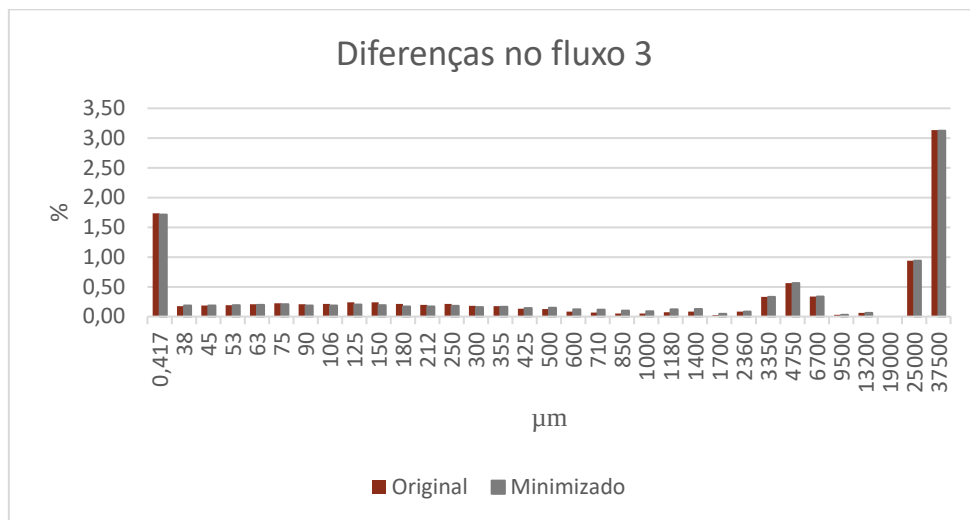


Figura 34 - Diferenças entre o fluxo 3 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados

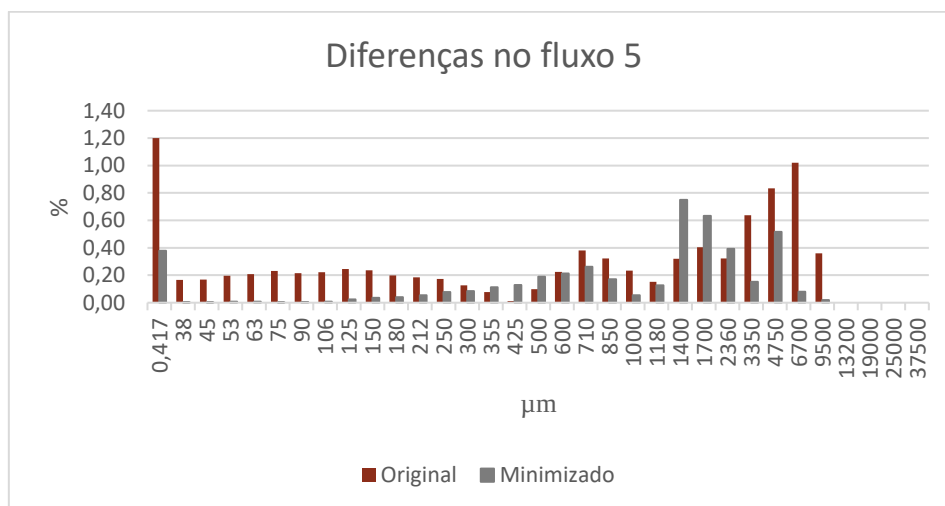


Figura 35- Diferenças entre o fluxo 5 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados

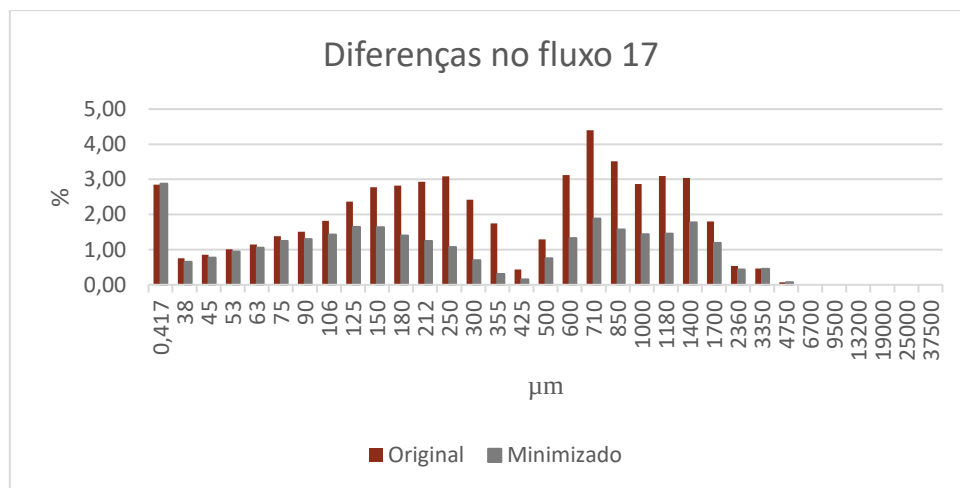


Figura 36- Diferenças entre o fluxo 17 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erro minimizados

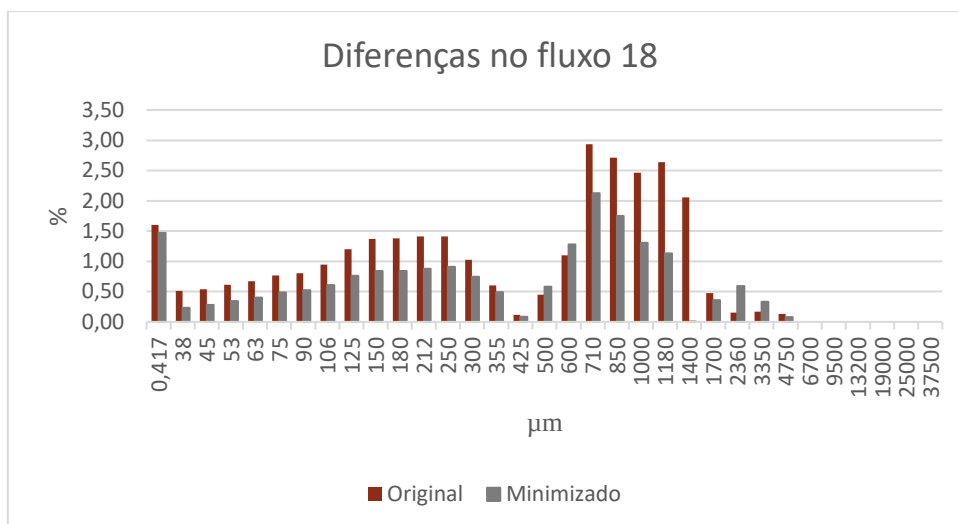


Figura 37- Diferenças entre o fluxo 18 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados

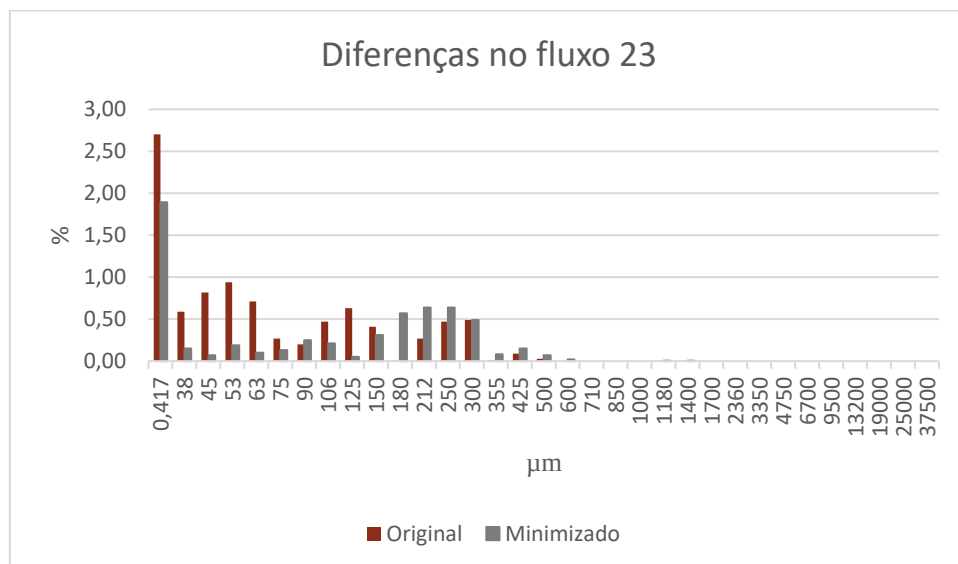


Figura 38- Diferenças entre o fluxo 23 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados

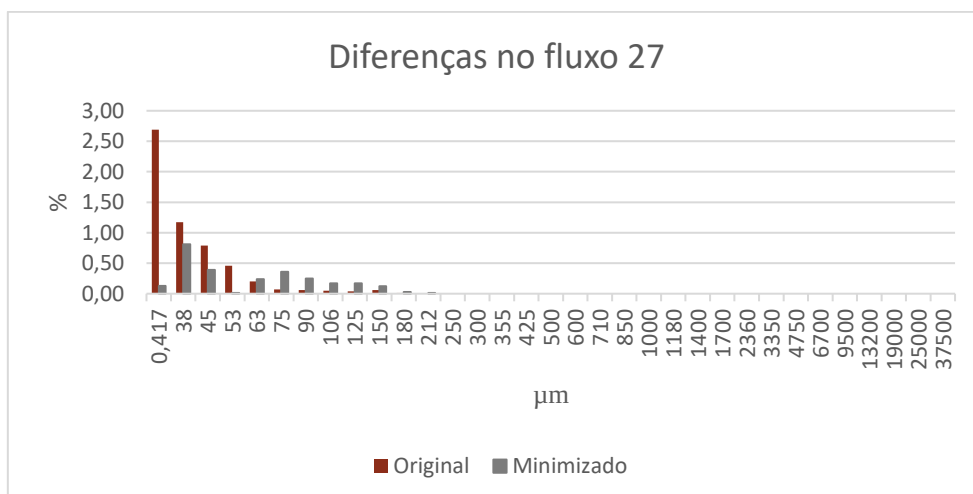


Figura 39- Diferenças entre o fluxo 24 amostrado e o simulado usando os dados originais e os com erros minimizados

### 3. Simulação de outras condições de funcionamento

A principal utilidade do simulador é a sua capacidade de previsão sobre o que ocorreria sobre o circuito se as suas condições de funcionamento forem alteradas. Nomeadamente o simulador irá ser usado para testar qual o efeito do uso de alimentações diferentes da atual, assim como irá variar o desempenho da instalação de tratamento se os parâmetros de funcionamento dos separadores forem alterados.

Para além da alimentação original, como exemplo, foram testadas outras duas, uma mais fina e outra com maior percentagem de calibres grosseiros, mantendo todos os outros parâmetros inalterados.

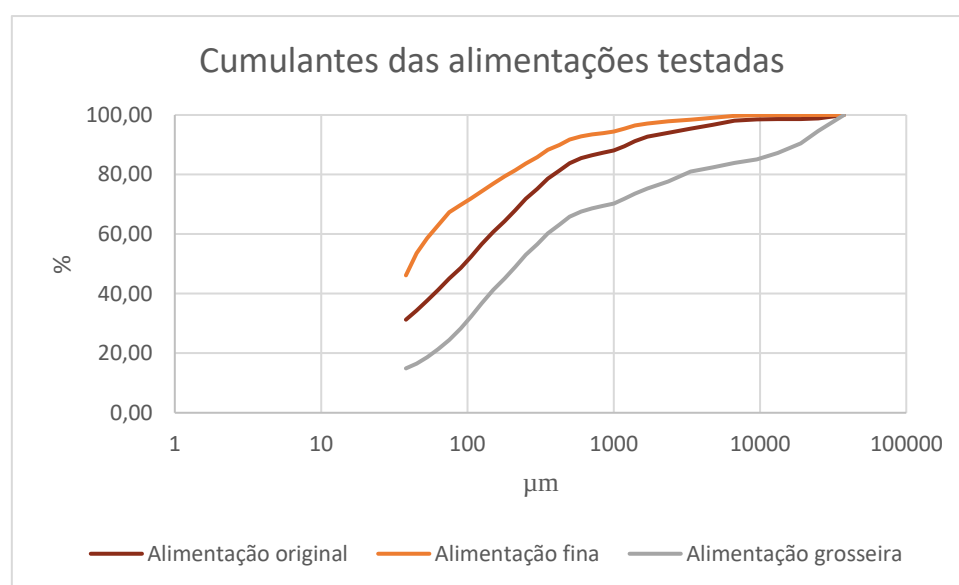


*Figura 40 - Cumulantes das alimentações usadas para testar o simulador*

Os resultados obtidos foram de encontro ao que seria esperado, se for usada uma alimentação mais fina, o rendimento ponderal do circuito aumenta, aumentando o caudal do fluxo 27, que corresponde aos caulinos, cuja produção é o objetivo principal da instalação. Quando a alimentação mais grosseira é usada na simulação os resultados obtidos são os inversos, como seria expectável tendo em conta que o produto final da instalação de tratamento tem uma granulometria caracteristicamente fina, e que na instalação não é feita qualquer redução de calibre das partículas.

Para os valores de alimentações fina e grosseira simuladas, a diferença de rendimento ponderal do circuito é muito grande, com um rendimento de 44,8% na alimentação fina e de 16,4% na alimentação grosseira. A dimensão da diferença destes valores vem atestar à importância da alimentação para o funcionamento de uma qualquer instalação de tratamento de minério.

Output da simulação usando uma alimentação mais fina:

O histograma é:

| mm      | 1       | 3       | 5       | 17     | 18     | 23      | 27      |
|---------|---------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|
| 0.0004  | 37.4100 | 28.7900 | 3.0500  | 0.1400 | 0.0900 | 24.0300 | 71.8900 |
| 0.0380  | 8.7300  | 6.7200  | 0.7800  | 4.4800 | 2.6500 | 13.6900 | 10.1900 |
| 0.0450  | 7.4800  | 5.7500  | 0.6800  | 4.8100 | 2.8100 | 12.9200 | 7.5800  |
| 0.0530  | 4.9900  | 3.8400  | 0.4600  | 3.9900 | 2.3000 | 9.3800  | 4.2100  |
| 0.0630  | 4.3700  | 3.3600  | 0.4200  | 4.4000 | 2.5000 | 8.8300  | 2.8500  |
| 0.0750  | 4.3700  | 3.3600  | 0.4300  | 5.5100 | 3.1000 | 9.1900  | 2.0000  |
| 0.0900  | 2.4500  | 1.8800  | 0.2500  | 3.8500 | 2.1600 | 5.0900  | 0.6800  |
| 0.1060  | 2.1600  | 1.6600  | 0.2300  | 4.0700 | 2.2800 | 4.1700  | 0.3300  |
| 0.1250  | 2.3500  | 1.8100  | 0.2600  | 5.2000 | 2.9300 | 3.9300  | 0.1700  |
| 0.1500  | 2.6400  | 2.0300  | 0.3100  | 6.7600 | 3.8600 | 3.4500  | 0.0700  |
| 0.1800  | 2.4000  | 1.8500  | 0.3000  | 6.8700 | 4.0400 | 2.2300  | 0.0200  |
| 0.2120  | 2.0900  | 1.6100  | 0.2800  | 6.4200 | 3.9200 | 1.3200  | 0       |
| 0.2500  | 2.2500  | 1.7300  | 0.3300  | 7.2300 | 4.6500 | 0.9000  | 0       |
| 0.3000  | 2.2000  | 1.6900  | 0.3700  | 7.2500 | 5.0400 | 0.4800  | 0       |
| 0.3550  | 2.4700  | 1.9000  | 0.4600  | 8.1500 | 6.2200 | 0.2700  | 0       |
| 0.4250  | 1.5700  | 1.2100  | 0.3400  | 5.0800 | 4.4200 | 0.0800  | 0       |
| 0.5000  | 1.8600  | 1.4300  | 0.4800  | 5.8200 | 5.8500 | 0.0400  | 0       |
| 0.6000  | 1.0300  | 0.7900  | 0.3300  | 3.0300 | 3.7400 | 0.0100  | 0       |
| 0.7100  | 0.6600  | 0.5100  | 0.2700  | 1.7800 | 2.7900 | 0       | 0       |
| 0.8500  | 0.4600  | 0.3500  | 0.2500  | 1.0800 | 2.3300 | 0       | 0       |
| 1.0000  | 0.5200  | 0.4000  | 0.3800  | 1.0200 | 3.1000 | 0       | 0       |
| 1.1800  | 0.9700  | 0.7500  | 1.0300  | 1.4700 | 6.7900 | 0       | 0       |
| 1.4000  | 1.0500  | 0.8100  | 1.7300  | 1.0900 | 8.4400 | 0       | 0       |
| 1.7000  | 0.7100  | 0.5500  | 2.0900  | 0.4100 | 6.2800 | 0       | 0       |
| 2.3600  | 0.6500  | 0.5000  | 6.0800  | 0.0800 | 5.3600 | 0       | 0       |
| 3.3500  | 0.6300  | 0.4800  | 17.6700 | 0      | 2.1600 | 0       | 0       |
| 4.7500  | 0.6500  | 0.5000  | 25.7600 | 0      | 0.1900 | 0       | 0       |
| 6.7000  | 0.6100  | 0.4700  | 24.8000 | 0      | 0      | 0       | 0       |
| 9.5000  | 0.2500  | 0.1900  | 10.1700 | 0      | 0      | 0       | 0       |
| 13.2000 | 0.0300  | 23.0700 | 0       | 0      | 0      | 0       | 0       |
| 19.0000 | 0       | 0       | 0       | 0      | 0      | 0       | 0       |
| 25.0000 | 0       | 0       | 0       | 0      | 0      | 0       | 0       |
| 37.5000 | 0       | 0       | 0       | 0      | 0      | 0       | 0       |

Os Fluxos são:

| 1        | 3      | 5      | 17      | 18     | 23      | 27      |
|----------|--------|--------|---------|--------|---------|---------|
| 100.0200 | 0.1300 | 2.4558 | 22.5455 | 9.0119 | 21.0780 | 44.7988 |

Rendimento ponderal ciclone 1: 95.2916 %

Rendimento ponderal ciclone 2: 62.2383 %

Rendimento ponderal circuito : 44.7988 %

Output da simulação usando uma alimentação mais grosseira:

O histograma é:

| mm      | 1       | 3       | 5       | 17     | 18      | 23      | 27      |
|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|
| 0.0004  | 13.8500 | 0.0900  | 0.3800  | 0.0400 | 0.0200  | 13.2000 | 72.6500 |
| 0.0380  | 1.0700  | 0.0100  | 0.0300  | 0.3900 | 0.1900  | 2.4900  | 3.4100  |
| 0.0450  | 1.6000  | 0.0100  | 0.0500  | 0.7400 | 0.3500  | 4.1000  | 4.4300  |
| 0.0530  | 2.1300  | 0.0100  | 0.0700  | 1.2200 | 0.5700  | 5.9500  | 4.9100  |
| 0.0630  | 2.6600  | 0.0200  | 0.0800  | 1.9200 | 0.8800  | 7.9800  | 4.7400  |
| 0.0750  | 3.2000  | 0.0200  | 0.1000  | 2.8900 | 1.3200  | 9.9900  | 4.0000  |
| 0.0900  | 3.8400  | 0.0300  | 0.1300  | 4.3300 | 1.9600  | 11.8400 | 2.9200  |
| 0.1060  | 3.9700  | 0.0300  | 0.1400  | 5.3700 | 2.4200  | 11.3800 | 1.6700  |
| 0.1250  | 4.4400  | 0.0300  | 0.1600  | 7.0500 | 3.2000  | 11.0200 | 0.8800  |
| 0.1500  | 4.4200  | 0.0300  | 0.1700  | 8.1200 | 3.7500  | 8.5700  | 0.3000  |
| 0.1800  | 3.9100  | 0.0300  | 0.1600  | 8.0200 | 3.8100  | 5.3900  | 0.0700  |
| 0.2120  | 3.8400  | 0.0300  | 0.1700  | 8.4600 | 4.1700  | 3.6100  | 0.0200  |
| 0.2500  | 4.1100  | 0.0300  | 0.2000  | 9.4700 | 4.9200  | 2.4300  | 0       |
| 0.3000  | 3.6100  | 0.0200  | 0.2000  | 8.5300 | 4.7900  | 1.1600  | 0       |
| 0.3550  | 3.5900  | 0.0200  | 0.2200  | 8.4900 | 5.2400  | 0.5900  | 0       |
| 0.4250  | 2.8900  | 0.0200  | 0.2100  | 6.7100 | 4.7100  | 0.2000  | 0       |
| 0.5000  | 2.6700  | 0.0200  | 0.2300  | 5.9900 | 4.8700  | 0.0800  | 0       |
| 0.6000  | 1.7400  | 0.0100  | 0.1900  | 3.6600 | 3.6600  | 0.0100  | 0       |
| 0.7100  | 1.0800  | 0.0100  | 0.1500  | 2.0900 | 2.6500  | 0       | 0       |
| 0.8500  | 0.8600  | 0.0100  | 0.1600  | 1.4500 | 2.5200  | 0       | 0       |
| 1.0000  | 0.8200  | 0.0100  | 0.2000  | 1.1500 | 2.8400  | 0       | 0       |
| 1.1800  | 1.5700  | 0.0100  | 0.5600  | 1.7100 | 6.3700  | 0       | 0       |
| 1.4000  | 1.7500  | 0.0100  | 0.9600  | 1.3000 | 8.1500  | 0       | 0       |
| 1.7000  | 1.6900  | 0.0100  | 1.6500  | 0.6900 | 8.6700  | 0       | 0       |
| 2.3600  | 2.3400  | 0.0200  | 7.2700  | 0.2000 | 11.1700 | 0       | 0       |
| 3.3500  | 3.3000  | 0.0200  | 30.7800 | 0.0100 | 6.5600  | 0       | 0       |
| 4.7500  | 1.4800  | 0.0100  | 19.5100 | 0      | 0.2400  | 0       | 0       |
| 6.7000  | 1.4600  | 0.0100  | 19.7400 | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 9.5000  | 1.1900  | 0.0100  | 16.1000 | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 13.2000 | 2.1300  | 14.1900 | 0.0100  | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 19.0000 | 3.2000  | 21.3300 | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 25.0000 | 4.2600  | 28.3900 | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 37.5000 | 5.3300  | 35.5200 | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |

Os Fluxos são:

| 1        | 3       | 5      | 17      | 18      | 23      | 27      |
|----------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 100.0000 | 15.0044 | 7.3833 | 31.4504 | 15.5537 | 14.2009 | 16.4073 |

Rendimento ponderal ciclone 1: 88.2651 %

Rendimento ponderal ciclone 2: 47.8771 %

Rendimento ponderal circuito : 16.4073 %

O simulador também pode ser usado para testar o efeito as alterações produzidas no circuito se os parâmetros de desempenho dos separadores variarem.

Na simulação seguinte foi aumentado o valor do parâmetro  $m$ , que reflete a perfeição da separação, para ver até que ponto esse parâmetro influencia o desempenho do circuito.

Tabela 24 - Coeficientes de partição com um  $m$  superior

| Coeficientes partição |           |          |         |         |        |         |        |         |
|-----------------------|-----------|----------|---------|---------|--------|---------|--------|---------|
|                       | 1         | 2        | 3       | 6       | 8      | 9       | 11     | 13      |
| d50 ( $\mu\text{m}$ ) | 12343,071 | 2958,520 | 902,914 | 250,078 | 53,999 | 820,309 | 97,775 | 331,718 |
| $m$                   | 115,540   | 10       | 5       | 5       | 5      | 5       | 5      | 5       |
| As                    | 0,001     | 0,002    | 0,000   | 0,000   | 0,170  | 0,579   | 0,311  | 0,547   |

O histograma é:

| mm      | 1       | 3       | 5       | 17      | 18      | 23      | 27      |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0004  | 27.9100 | 1.7900  | 1.1800  | 0.0200  | 0.0100  | 16.8100 | 77.2000 |
| 0.0380  | 3.0500  | 0.2000  | 0.1300  | 0.2700  | 0.1100  | 3.5100  | 6.9800  |
| 0.0450  | 3.0400  | 0.2000  | 0.1300  | 0.3500  | 0.1400  | 4.6700  | 6.0400  |
| 0.0530  | 3.2800  | 0.2100  | 0.1400  | 0.5200  | 0.1900  | 6.9700  | 5.0100  |
| 0.0630  | 3.3700  | 0.2200  | 0.1400  | 0.7600  | 0.2800  | 9.7700  | 3.0500  |
| 0.0750  | 3.5800  | 0.2300  | 0.1500  | 1.2400  | 0.4500  | 12.4600 | 1.3400  |
| 0.0900  | 3.2300  | 0.2100  | 0.1400  | 1.8600  | 0.6500  | 11.4700 | 0.3100  |
| 0.1060  | 3.2400  | 0.2100  | 0.1400  | 2.9300  | 1.0000  | 10.3600 | 0.0600  |
| 0.1250  | 3.5400  | 0.2300  | 0.1500  | 4.7200  | 1.5900  | 9.2800  | 0.0100  |
| 0.1500  | 3.4700  | 0.2200  | 0.1500  | 6.3800  | 2.1500  | 6.6500  | 0       |
| 0.1800  | 3.0700  | 0.2000  | 0.1300  | 7.1000  | 2.4000  | 3.8300  | 0       |
| 0.2120  | 3.0700  | 0.2000  | 0.1300  | 8.2000  | 2.7900  | 2.2800  | 0       |
| 0.2500  | 3.3700  | 0.2200  | 0.1500  | 9.8600  | 3.4000  | 1.2700  | 0       |
| 0.3000  | 3.0900  | 0.2000  | 0.1400  | 9.5000  | 3.3800  | 0.4500  | 0       |
| 0.3550  | 3.2200  | 0.2100  | 0.1400  | 10.0500 | 3.7400  | 0.1600  | 0       |
| 0.4250  | 2.7800  | 0.1800  | 0.1300  | 8.6300  | 3.4700  | 0.0300  | 0       |
| 0.5000  | 2.8400  | 0.1800  | 0.1300  | 8.6500  | 3.9200  | 0.0100  | 0       |
| 0.6000  | 2.2300  | 0.1400  | 0.1100  | 6.4700  | 3.6800  | 0       | 0       |
| 0.7100  | 1.9400  | 0.1200  | 0.1000  | 5.1300  | 4.1600  | 0       | 0       |
| 0.8500  | 1.5600  | 0.1000  | 0.0900  | 3.3000  | 4.9100  | 0       | 0       |
| 1.0000  | 1.3900  | 0.0900  | 0.1000  | 1.9500  | 6.2500  | 0       | 0       |
| 1.1800  | 2.2000  | 0.1400  | 0.2000  | 1.5000  | 12.9000 | 0       | 0       |
| 1.4000  | 2.3100  | 0.1500  | 0.3500  | 0.5300  | 15.4900 | 0       | 0       |
| 1.7000  | 1.8400  | 0.1200  | 0.6200  | 0.0800  | 12.8700 | 0       | 0       |
| 2.3600  | 1.2400  | 0.0800  | 3.1100  | 0       | 7.8600  | 0       | 0       |
| 3.3500  | 1.4600  | 0.0900  | 24.3800 | 0       | 2.2000  | 0       | 0       |
| 4.7500  | 1.4100  | 0.0900  | 29.7300 | 0       | 0.0200  | 0       | 0       |
| 6.7000  | 1.3700  | 0.0900  | 28.9500 | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 9.5000  | 0.4200  | 0.0300  | 8.8800  | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 13.2000 | 0.0500  | 3.2100  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 19.0000 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 25.0000 | 0.2700  | 17.3200 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 37.5000 | 1.1400  | 73.1500 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |

Os Fluxos são:

|         |        |        |         |         |         |         |
|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 1       | 3      | 5      | 17      | 18      | 23      | 27      |
| 99.9700 | 1.5585 | 4.7274 | 26.4271 | 13.8926 | 22.1697 | 31.1947 |

Rendimento ponderal ciclone 1: 94.5269 %

Rendimento ponderal ciclone 2: 52.0355 %

Rendimento ponderal circuito : 31.1947 %

Como se pode ver pelo resultado obtido aparentemente as variações nos resultados não foram muito expressivas, o rendimento ponderal global do circuito melhorou ligeiramente, aumentando de 30,74% para 31,19%.

Este parâmetro não aparenta possuir um impacto muito significativo na performance da instalação, talvez contrariando o que seria de esperar. A um aumento para mais do dobro de muitos dos parâmetros m correspondeu uma diferença no rendimento ponderal final de cerca de meio ponto percentual.

De qualquer modo o aumento da perfeição do corte conduziu a um aumento do rendimento da instalação, aumento que, ainda que ligeiro, pode vir ter um impacto não desprezável no desempenho da instalação, tendo em conta que esta trata grandes quantidades de minério bruto.

Um outro parâmetro com influência nas separações realizadas é o arrastamento, As, que representa as partículas finas que deviam ir para o overflow mas são arrastadas indiscriminadamente para o underflow. Como os caulinos apresentam uma granulometria muito fina é de esperar que a diminuição deste parâmetro aumente o desempenho da instalação.

Tabela 25 - Coeficientes de partição com um As inferior

| Coeficientes partição |           |          |         |         |        |         |        |         |
|-----------------------|-----------|----------|---------|---------|--------|---------|--------|---------|
|                       | 1         | 2        | 3       | 6       | 8      | 9       | 11     | 13      |
| d50 (µm)              | 12343,071 | 2958,520 | 902,914 | 250,078 | 53,999 | 820,309 | 97,775 | 331,718 |
| m                     | 115,540   | 5,993    | 1,952   | 2,883   | 1,690  | 2,273   | 1,244  | 3,573   |
| As                    | 0,001     | 0,002    | 0,000   | 0,000   | 0,100  | 0,200   | 0,100  | 0,200   |

O histograma é:

| mm      | 1       | 3       | 5       | 17     | 18      | 23      | 27      |
|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|
| 0.0004  | 27.9100 | 1.7900  | 1.1100  | 0.0200 | 0.0200  | 7.9300  | 70.3800 |
| 0.0380  | 3.0500  | 0.2000  | 0.1300  | 0.7600 | 0.3600  | 4.2800  | 6.0000  |
| 0.0450  | 3.0400  | 0.2000  | 0.1300  | 1.0100 | 0.4700  | 5.1400  | 5.4900  |
| 0.0530  | 3.2800  | 0.2100  | 0.1500  | 1.4400 | 0.6500  | 6.6600  | 5.2800  |
| 0.0630  | 3.3700  | 0.2200  | 0.1600  | 1.9800 | 0.8900  | 8.2600  | 4.5400  |
| 0.0750  | 3.5800  | 0.2300  | 0.1700  | 2.8000 | 1.2400  | 10.3600 | 3.7200  |
| 0.0900  | 3.2300  | 0.2100  | 0.1600  | 3.3400 | 1.4600  | 10.5700 | 2.2400  |
| 0.1060  | 3.2400  | 0.2100  | 0.1700  | 4.1800 | 1.8300  | 10.9900 | 1.3300  |
| 0.1250  | 3.5400  | 0.2300  | 0.1900  | 5.5400 | 2.4300  | 11.3200 | 0.7100  |
| 0.1500  | 3.4700  | 0.2200  | 0.2000  | 6.4600 | 2.8500  | 9.1700  | 0.2400  |
| 0.1800  | 3.0700  | 0.2000  | 0.1900  | 6.5100 | 2.9200  | 5.9100  | 0.0500  |
| 0.2120  | 3.0700  | 0.2000  | 0.2000  | 7.0700 | 3.2400  | 4.0400  | 0.0100  |
| 0.2500  | 3.3700  | 0.2200  | 0.2400  | 8.1900 | 3.8800  | 2.7900  | 0       |
| 0.3000  | 3.0900  | 0.2000  | 0.2500  | 7.7700 | 3.8900  | 1.3900  | 0       |
| 0.3550  | 3.2200  | 0.2100  | 0.3000  | 8.1900 | 4.3900  | 0.7500  | 0       |
| 0.4250  | 2.7800  | 0.1800  | 0.3000  | 7.0200 | 4.1800  | 0.2800  | 0       |
| 0.5000  | 2.8400  | 0.1800  | 0.3600  | 7.0100 | 4.7600  | 0.1200  | 0       |
| 0.6000  | 2.2300  | 0.1400  | 0.3500  | 5.2600 | 4.3400  | 0.0300  | 0       |
| 0.7100  | 1.9400  | 0.1200  | 0.3800  | 4.2600 | 4.4800  | 0.0100  | 0       |
| 0.8500  | 1.5600  | 0.1000  | 0.4100  | 3.0400 | 4.4600  | 0       | 0       |
| 1.0000  | 1.3900  | 0.0900  | 0.5000  | 2.2900 | 4.8900  | 0       | 0       |
| 1.1800  | 2.2000  | 0.1400  | 1.1400  | 2.8100 | 9.4600  | 0       | 0       |
| 1.4000  | 2.3100  | 0.1500  | 1.8600  | 2.0300 | 11.8100 | 0       | 0       |
| 1.7000  | 1.8400  | 0.1200  | 2.6400  | 0.8800 | 10.6600 | 0       | 0       |
| 2.3600  | 1.2400  | 0.0800  | 5.6500  | 0.1200 | 6.8300  | 0       | 0       |
| 3.3500  | 1.4600  | 0.0900  | 19.9600 | 0.0100 | 3.3600  | 0       | 0       |
| 4.7500  | 1.4100  | 0.0900  | 27.2400 | 0      | 0.2700  | 0       | 0       |
| 6.7000  | 1.3700  | 0.0900  | 27.1500 | 0      | 0.0100  | 0       | 0       |
| 9.5000  | 0.4200  | 0.0300  | 8.3300  | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 13.2000 | 0.0500  | 3.2100  | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 19.0000 | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 25.0000 | 0.2700  | 17.3200 | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 37.5000 | 1.1400  | 73.1500 | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       |

Os Fluxos são:

| 1       | 3      | 5      | 17      | 18      | 23      | 27      |
|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 99.9700 | 1.5585 | 5.0388 | 30.9016 | 13.4361 | 10.7348 | 38.3002 |

Rendimento ponderal ciclone 1: 91.9199 %

Rendimento ponderal ciclone 2: 54.9775 %

Rendimento ponderal circuito : 38.3002 %

Olhando para os valores obtidos para esta nova configuração, eles parecem corroborar a nossa expectativa, de que com a diminuição da quantidade de material fino arrastado o desempenho do circuito melhorasse. O Rendimento ponderal global do circuito melhorou apreciavelmente, aumentando de 30,74% para 38,3%.

Este resultado, embora deva ser encarado como indicativo, parece apontar para o facto de haver perdas sucessivas de partículas finas – caulino, até à corrente final do estéril.

Na prática a diminuição do arrasto pode não ser facilmente exequível, mas pode se assumir que a ser feita uma diminuição no arrasto esta iria trazer melhorias no desempenho da instalação, aumentando bastante a produção do caudal 27, caulino, ao mesmo tempo reduzindo em muito a produção do caudal 23, mica, que baixou cerca de 36%, baixando assim a produção de estéril e os custos associados ao seu armazenamento.

Muitas outras hipóteses podem ser testadas com o simulador, como a alteração do calibre de corte, a alteração dos fluxos de retorno que garantem caudais suficientes para a boa operação dos ciclones, pode ser também usado para testar outras configurações de organização do sistema em si, alterando as conexões entre nós ou mesmo a remoção de um separador.

Estas hipóteses não foram aqui postas pois iriam alterar bastante o sistema assim como as saídas, quando o objetivo passava mais por testar qual as hipóteses de melhoria do sistema mantendo as saídas com as suas características perto das atuais. O facto de o modelo suportar alterações desse tipo pode, no entanto, vir-se a revelar útil no futuro.

## 6. Conclusão

Com este trabalho foi possível determinar os descritores de desempenho de uma instalação de tratamento de caulino, o rendimento ponderal, a distribuição de calibres numa população de partículas e as curvas de partição descritoras dos diferentes separadores, apesar das já referidas dificuldades na obtenção de dados que traduzam a realidade completo do circuito.

O desenvolvimento do trabalho esteve rodeado de dificuldades, principalmente de as que resultaram dos problemas de amostragem dos vários fluxos. Para além das dificuldades encontradas, as amostras apresentam uma granulometria extremamente fina e as partículas possuem dimensões muito diferentes segundos os três eixos, o que dificulta a sua análise granulométrica.

Para fazer face a estas adversidades foram usadas ferramentas de reconciliação de dados e ajustes dos dados disponíveis, de modo a poder realizar a sua modelação e subsequente otimização do desempenho global do circuito.

Desta forma consegue-se simular o circuito de tratamento produzindo resultados coerentes, que poderá ser uma ferramenta interessante para prever qual o resultado de alterações introduzidas no circuito. Como mostrado anteriormente o simulador pode ser usado com sucesso como previsor dos produtos finais do circuito se for usada uma outra alimentação diferente, ou como previsão da eficiência da instalação se a configuração dos separadores for alterada.

A análise dos descritores de desempenho evidência que, em alguns separadores, muitas das partículas que deveriam ir para o overflow são arrastadas para o underflow, a simulação vem indicar que da redução desta imperfeição poderá advir um aumento apreciável do desempenho da instalação, sendo que na prática a redução significativa do arrasto, poderá não ser trivial.

Idealmente deveriam ter sido feitas mais amostragens para aumentar o grau de confiança nos dados, o que infelizmente não foi possível, dado o trabalho ter sido realizado em plena pandemia COVID 19. Por essa razão, apontamos, como perspetivas para o futuro:

- O prolongamento deste trabalho que poderá ser realizado aplicando sistematicamente os métodos desenvolvidos a amostragens de rotina a realizar periodicamente;
- A calibração das curvas de partição em diferentes condições operatórias, como sejam, por exemplo, a variação da percentagem de sólidos e de pressão de trabalho dos ciclones.

Deste modo, não só se procederia à validação das conjeturas propostas para obtenção de melhorias de eficiência, como se passaria a dispor de diferentes conjuntos de regulações adaptadas a diferentes tipos de minérios a tratar ou produtos finais a obter.

## 7. Referências bibliográficas

- Barbosa, B. P. (1983). Origem e idade dos caulinos portugueses em granitos. *Boletim da Sociedade Geológica de Portugal*, XXIV.
- Boletim de Minas. (2008). In (Vol. 43). Lisboa: DGEG.
- Coelho, A., Teixeira, J., Chaminé, H. I., Gomes, A., Fonseca, P. E., & Rocha, F. T. (2006). *Controlo geotectónico e morfoestrutural dos depósitos de caulino ao longo da faixa metamórfica de Porto-Albergaria-a-Velha (NW de Portugal)*. Paper presented at the VII Congresso Nacional de Geologia, Estremoz.
- Coelho, A. M. S. (2006). *Depósitos de caulino associados a faixas de fracturação: geologia, morfotectónica e georrecurso*. Universidade de Aveiro,
- Gupta, A., & Yan, D. (2016). *Mineral Processing Design and Operations* (2 ed.). Amsterdam: Elsevier.
- Kogel, J. E., Trivedi, N. C., Barker, J. M., & Krukowski, S. T. Kaolin. In *Industrial Minerals and Rocks - Commodities, Markets, and Uses (7th Edition)*: Society for Mining, Metallurgy, and Exploration (SME).
- Lopes, C., Lisboa, V., Carvalho, J., Mateus, A., & Martins, L. (2018). Challenges to access and safeguard mineral resources for society: A case study of kaolin in Portugal. *Land Use Policy*, 79, 263-284. doi:10.1016/j.landusepol.2018.07.035
- Luz, A. B. d., & Lins, F. A. F. (2008). *Rochas & Minerais Industriais* (2ª ed.). Rio de Janeiro: CETEM-MCT.
- Recursos Minerais – O Potencial de Portugal*. (2010). LNEG
- Vasconcelos, M. C. d. S. C. e. (2008). *Caulino. Das origens às aplicações. Perspectivas para o Século XXI*. Universidade de Aveiro,
- Wills, B. A., & Finch, J. A. (2016). *Wills' Mineral Processing Technology* (8 ed.). Boston: Butterworth-Heinemann.
- Yahaya, S., Jikan, S., Badarulzaman, N. A., & Adamu, A. (2017). Chemical Composition and Particle Size Analysis of Kaolin. *Path of Science*, 3, 1001. doi:10.22178/pos.27-1
- Wills, B. A., & Finch, J. A. (2006). *Wills' Mineral Processing Technology* (7 ed.). Boston: Butterworth-Heinemann.