6-1x

ANTÓNIO AUGUSTO DE SOUSA TAVEIRA

PERMEABILIDADE DOS MATERIAIS AQUÍFEROS
SUA DETERMINAÇÃO

1949

043)
/PER

Do Ex.mo Snr. Engenheiro
António Augusto Ferreira
Rio, com a mais consideração e
estima. Jerez
António Augusto Ferreira

Janeiro 1950

PERMEABILIDADE DOS MATERIAIS AQUÍFEROS
SUA DETERMINAÇÃO

ANTÓNIO AUGUSTO DE SOUSA TAVEIRA

PERMEABILIDADE DOS MATERIAIS AQUÍFEROS SUA DETERMINAÇÃO

Dissertação para doutoramento em engenharia civil, na Faculdade de Engenharia da Univerdade do Porto.

532/38-A

043 D
T 234 p
ex. 2

UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA M
N.º 1133 1-01
CDU 532:539.217.3
Data 11 / 3 / 1980

(043) TAVA/PER

N.º 5915

1949

À MEMÓRIA DE MEU PAI

PREFÁCIO

É geralmente atribuido a Henry Darcy o ter apresentado pela primeira vez, há cerca de 100 anos, a lei que relaciona a velocidade de filtração através dos meios pulverulentos com a perda de carga, lei que passou a ser universalmente conhecida pelo seu nome — lei de Darcy. Esta lei é do tipo linear e ao coeficiente de proporcionalidade entre aquelas duas variáveis, denominado coeficiente de permeabilidade ou simplesmente permeabilidade, foi conferida desde então granae importância como elemento caracterizador fundamental dos materiais aquíferos.

Após Darcy, muitos investigadores dedicaram-se a verificar a exactidão daquela lei, bem como a fixar os limites da sua aplicação. Com Dupuit e, mais tarde com Thiem, a permeabilidade passou a desempenhar papel preponderante nos estudos de pesquisa de águas para abastecimento ou para irrigação de terrenos.

O conhecimento da permeabilidade tornou-se também imprescindível no estudo do tratamento por filtração das águas de abastecimento das povoações e das águas negras de esgotos.

Os inúmeros estudos e ensaios a que os investigadores procederam comprovaram, duma maneira geral, a lei de Darcy, tendo-se precisado melhor a determinação do seu coeficiente assim como a sua dependência das várias características dos terrenos e dos meios pulverulentos.

Embora primeiramente não fosse considerado o seu conhecimento para o estudo dos solos, pois que a coesão e

o ângulo de atrito eram as únicas características introduzidas, Terzaghi, ao estabelecer em 1925 as bases da nova ciência que intitulou «A Mecânica do Solo», incluiu a permeabilidade entre as características fundamentais, sem as quais um solo não poderá ser suficientemente conhecido sob o ponto de vista mecânico.

O conhecimento da permeabilidade é também muito importante, senão fundamental, para o estudo do abaixamento das toalhas freáticas, drenagem dos terrenos, percolação através das barragens de terra, nomeadamente as de aterro hidráulico, escolha dos materiais constituintes destas barragens, estudo de fundações, principalmente das barragens sobre terra, injecções de impermeabilização e consolidação, pesquisa e refinação de petróleos, etc.

Dada assim a importância que actualmente possui o conhecimento da permeabilidade, procuramos, no presente trabalho, reunir numa exposição sistematizada os diferentes estudos e métodos que até hoje foram apresentados pelos mais destacados investigadores que a este importante assunto se dedicaram.

No primeiro capítulo, além de breves considerações a propósito das definições e unidades mais usadas no estudo da permeabilidade, apresenta-se a classificação dos métodos mais utilizados para a sua determinação. Servimo-nos da classificação preconizada no Geological Survey Americano que modificamos ligeiramente no sentido de a tornar mais geral.

No capítulo segundo fazemos a descrição dos principais método indirectos conhecidos. Concordando com a opinião de Meinzer, segundo a qual, o bom êxito na aplicação duma determinada fórmula depende em grande parte do conhecimento pormenorizado das hipóteses que presidiram ao seu estabelecimento, e considerando que a maior parte das fórmulas apresentadas foram obtidas empìricamente, acompanhamos tão de perto quanto possível a sua dedução pois assim ficar-se-á com um conhecimento mais perfeito dos casos em que as referidas fórmulas se podem aplicar, bem como da aproximação dos resultados a que conduzem.

No fim deste capítulo fazemos um estudo comparativo das leis expostas.

No capítulo terceiro apresentamos os métodos directos mais usados, alguns deles bastantes conhecidos e que, na sua maior parte, continuam a ser praticados em muitos casos com os melhores resultados. Nestes métodos incluímos os que se baseiam no movimento da água devido à capilaridade: são métodos pouco rigorosos mas, em compensação, são muito expeditos, tornando-se por isso de grande utilidade nos casos, em que, tendo de realizar muitos ensaios, se pode sacrificar a precisão à rapidez.

Descrevemos finalmente no capítulo quarto os denominados métodos de campo. De entre estes métodos desenvolvemos os que se relacionam com a descarga de poços, pois são os mais indicados no estudo de pesquisa de águas e

irrigação ou drenagem de terrenos e que conduzem à determinação da permeabilidade média de grandes formações aquíferas. Salientamos entre os diversos métodos o método de Theis; este autor, apresentando a sua fórmula em 1935, deduzida a partir de interessantes considerações sôbre o movimento não permanente das águas subterrâneas nos meios permeáveis em pequeno, marcou o início duma nova era no estudo hidráulico das águas percoladoras. Desde então um número cada vez maior de engenheiros e geólogos americanos têm dedicado especial atenção ao estudo e aplicação desta fórmula a variados problemas práticos; embora as hipóteses em que se baseia a sua dedução se verifiquem raramente nos casos da prática, os resultados que têm sido sucessivamente obtidos, são de molde a aumentar cada vez mais a confiança que desde o início foi dada a este método. Terminamos este capítulo com um estudo comparativo entre as diversas hipóteses em que se baseiam as diferentes fórmulas e as condições reais da sua aplicação, notando algumas correcções que em determinados casos se podem fazer, bem como certas adaptações de fórmulas a casos concretos especiais.

Com este trabalho julgamos contribuir para um melhor e mais largo conhecimento dos processos que permitirão ajudar a resolução de inúmeros problemas e obras que constantemente aparecem neste sector da Engenharia Moderna.

ERRATAS

Pág.	Linha	Onde se lê	Deve ler-se
14	3	$e = \frac{1-n}{n}$	$e = \frac{n}{1-n}$
16	– 4	$V =$	$v =$
18	14	em *d* é o diâmetro das particulares	em que *d* é o diâmetro das particulas
»	19	Bonnefant	Bonnenfant
23	7	Variação	Abaixamento
57	25	Vaiores	Valores
70	8	probabilidades	variações
73	17	$u = \frac{g}{K}\frac{\rho}{\mu}\frac{p^3}{(1-p)^2}\left(\frac{\Omega}{V}\right)^2 J$	$u = \frac{g}{K}\frac{\rho}{\mu}\frac{p^3}{(1-p)^2}\left(\frac{V}{\Omega}\right)^2 J$
86	10	que que	que
96	16	a livre	o livre
100	6	meio de	meio do
104	2	perculador	percolador
143	20	$= \frac{m}{E_s}\, ds$	$= -\frac{m}{E_s}\, ds$
144	6	$dn = (1-n)\frac{k}{E_s}\, dp$	$dn = (1-n)\frac{k}{E_s}\, dp$ . . . . . (60)
»	10	. . . . . (62)	. . . . . (61)
»	18	$\frac{\partial^2 M}{\partial A_z\, \partial \rho} =$	$\frac{\partial^2 M}{\partial A_z\, \partial t} =$
150	26	e de *r*	e de *t* ou *r*
152	– 1	$- Log \frac{0{,}25\ a_1^2\ S}{T\ t}$	$- Log \frac{0{,}25\ a^2\ S}{T\ t}$
168	– 10	a coeficiente	o coeficiente

Capítulo I

Definições. Unidades. Classificação dos métodos

a) **Definições**:

São muito variadas as definições de permeabilidade e porosidade, assim como são muitas as unidades adoptadas para a primeira destas características físicas.

Segundo a Associação Internacional da Ciência do Solo e a Comissão Internacional da Engenharia Rural definir-se-á:

Permeabilidade, ρ, é o teor em água móvel dum material; exprime-se em fracção decimal do volume aparente, num dado instante.

Porosidade, p, é a capacidade total em água estável e móvel dum dado maciço filtrante. Mede-se também em fracção decimal do volume total quando completamente saturado de água.

Grau de humidade máximo, $\Theta_{máx.}$, é a capacidade máxima dum material em água estável, expresso como acima, em fracção decimal.

Destas definições resulta que

$$p = \Theta_{máx.} + \rho .$$

O coeficiente de proporcionalidade **K** da fórmula de Darcy

$$u = \mathbf{K}\ J,$$

designado correntemente na hidráulica geral por coeficiente de permeabilidade ou coeficiente de Darcy, é denominado pelas entidades internacionais acima citadas por *velocidade de filtração,* define-se como sendo a velocidade aparente por unidade de perda de carga, e tem as dimensões duma velocidade.

Últimamente na América tem sido dedicada especial atenção à hidrologia, principalmente no que diz respeito ao estudo das águas subterrâneas e sua captação. Em 1923, Oscar Edward Meinzer, hidrologista do United States Geological Survey, publicou num pequeno livro, na série Water-Supply Papers, uma tentativa de normalização das definições relativas à hidrologia subterrânea. Este trabalho, notável a todos os títulos, foi o resultado de dezasseis anos dedicados quase exclusivamente ao estudo das águas subterrâneas; antes de ser publicado foi lido e criticado por mais de 50 cientistas, incluindo geólogos, engenheiros hidráulicos, químicos, especialistas do solo, etc., que o enriqueceram com as suas sugestões. Hoje é citado por grande parte dos autores americanos e alguns europeus aceitando-lhe as definições e até as unidades por ele propostas.

Segundo Meinzer, a permeabilidade hidráulica duma rocha ou maciço filtrante é a sua capacidade de deixar passar a água sob pressão. Esta capacidade exprime-se quantitativamente pelo caudal de água escoado através da unidade de superfície do material considerado, cuja normal tem a direcção do movimento, quando a perda de carga ou gradiante hidráulico é a unidade, e a uma dada temperatura.

A fórmula de Darcy pode escrever-se

$$Q = \mathbf{K}\, S J$$

ou ainda

$$V = \mathbf{K}\, S J\, t$$

em que Q é o caudal através da superfície S e V o volume atravessado no tempo t.

Considerar-se-á em tudo o que segue como coeficiente de permeabilidade, ou simplesmente permeabilidade, o coeficiente **K** de qualquer das três expressões anteriores, nas quais difere

apenas em representar uma velocidade, um caudal ou um volume, embora as suas dimensões sejam sempre as de uma velocidade.

A permeabilidade, em hidrologia subterrânea, está ligada à existência de poros ou vazios *sensíveis* nos corpos sólidos ou entre os elementos constituintes dos meios pulverulentos, através dos quais a água se desloca sob a acção das pressões verificadas nos casos da prática. Adjectivam-se os poros ou os vazios de sensíveis porque na realidade não se conhecem corpos absolutamente impermeáveis aos líquidos: até os metais mais resistentes, diz Fantoli, se deixam atravessar pelos líquidos sob pressões elevadíssimas e a passagem far-se-á necessàriamente através dos poros existentes.

O grau de humidade máximo, $\Theta_{máx.}$ atrás definido, é denominado pelos hidrologistas americanos *retenção específica* ou *poder de retenção* e à permeabilidade ρ chamam *rendimento específico* ou *poder de percolação*. Segundo Meinzer, o poder de percolação é a razão entre o volume de água drenado pela acção da gravidade de uma dada amostra saturada e o volume desta. O poder de retenção é o cociente entre o volume de água retido numa dada amostra e o seu próprio volume. O poder de percolação é denominado por certos autores porosidade efectiva, no entanto, a definição mais correcta desta característica física é a seguinte: cociente entre o volume de água fornecido por uma dada amostra saturada, sob quaisquer condições hidráulicas especificadas, e o volume da amostra.

A porosidade duma rocha ou solo, ainda segundo Meinzer, é a sua propriedade de conter interstícios e exprime-se quantitativamente como a razão do volume dos vazios para o volume total (expressa ou não em percentagem). Bonnenfant chama a este cociente, quando expresso em fracção decimal, *proporção de vazios n*, reservando o termo porosidade para designar o produto $100\,n$; estas duas definições serão adoptadas indistintamente na sequência deste trabalho.

Outra importante característica física dos terrenos ou meios pulverulentos é o *índice de vazios e,* definido como sendo a razão do volume de vazios existente numa dada amostra e o

volume da matéria sólida. O índice de vazios está ligado com a proporção de vazios pela relação

$$e = \frac{1 - n}{n}.$$

A determinação da proporção de vazios ou da porosidade faz-se geralmente pesando uma certa quantidade de amostra seca P e determinando o volume V que ela ocupa. Conhecendo o peso específico $\overline{w}$ do material constituinte da amostra, a proporção de vazios é dada por

$$n = 1 - \frac{P}{V\,\overline{w}}$$

e a porosidade por

$$p = 100 - \frac{100\,P}{V\,\overline{w}}.$$

Se forem conhecidos o volume v de água necessário para saturar o volume V, o volume v' ocupado pela parte sólida, o peso específico $\overline{w}'$ da amostra seca ou o peso específico $\overline{w}_1$ de amostra saturada, a porosidade pode ser obtida por uma das seguintes expressões equivalentes à anterior,

$$p = 100\,\frac{v}{V} = 100\,\frac{V - v'}{V} = 100\,\frac{\overline{w} - \overline{w}'}{\overline{w}} = 100\,(\overline{w}_1 - \overline{w}').$$

Das propriedades físicas dos solos ou materiais filtrantes que interessam a este estudo resta tratar da sua composição granulométrica.

Os métodos usados para determinar a grandeza das partículas ou grãos constituintes duma dada amostra dependem do seu tamanho. Para a parte macroscópica daquela (grãos acima de 1 mm.) pode usar-se a medida directa e a peneiração ou crivagem. Para a microscópica (dimensões das partículas compreendidas entre 1 mm. e 0,0001 mm.) os métodos a empregar são a crivagem (até 0,1 mm.), medidas microscópicas, análise mecânica, separação pelo vento e centrifugação.

Das diversas colecções de peneiros as mais usadas são: a do American Foundation Comittee em que as dimensões das malhas estão em progressão geométrica de razão 2; a série Renard em que a razão é $\sqrt[10]{10}$; a série usada em várias Universidades americanas em que a razão é $\sqrt{2}$ e a das normas DIN, cujas características são as seguintes:

Rêde n.º	N.º de malhas /cm²	Largura da malha em mm.	Diâmetro dos fios em mm.
4	16	1,5	1,00
5	25	1,2	0,80
6	36	1,02	0,65
8	64	0,75	0,50
10	100	0,60	0,40
11	121	0,54	0,37
14	196	0,43	0,28
16	256	0,385	0,24
20	400	0,300	0,20
24	576	0,250	0,17
30	900	0,200	0,13
40	1600	0,150	0,10
50	2500	0,120	0,080
60	3600	0,102	0,065
70	4900	0,088	0,055
80	6400	0,075	0,050
100	10000	0,060	0,040

A tolerância admitida na dimensão das malhas é de 5 %.

Costumam usar-se com os anteriores, embora não estejam normalizados, os seguintes peneiros, chamados suplementares:

1E	1	6	3,4
2E	4	3	2,0
3E	9	2	1,5
90E	8100	0,066	0,045

A peneiração dos elementos muito finos pode fazer-se em presença dum líquido, geralmente a água. O peneiro ou a colecção de peneiros é mergulhado várias vezes na água de modo que as partículas mais finas são arrastadas com o líquido que se escoa através das malhas. Este processo facilita imenso a peneiração mas tem o seguinte inconveniente: as partículas cujo tamanho é ligeiramente inferior à largura das malhas em questão, permanecem sobre este e só passam quando o resíduo for novamente peneirado depois de seco.

A análise mecânica é o mais importante dos métodos utilizados quando a grandeza das partículas varia entre 0,1 e 0,001 mm. É baseada sobre o princípio físico seguinte: partículas pequenas quando lançadas num fluído caem neste com uma velocidade constante. Existem fórmulas que relacionam a velocidade de queda com a grandeza das partículas; todas elas porém são do tipo da de Stokes.

Este autor estabeleceu que a resistência a que uma esfera de raio r está sujeita, quando cai num fluído de viscosidade absoluta μ e com velocidade v, é

$$R = 6 \pi r \mu v.$$

A queda, que inicialmente é acelerada, torna-se uniforme logo que a resistência atinge um valor igual ao peso efectivo da esfera no fluído. A partir do instante em que tal igualdade se verifica será

$$R = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_1 - \rho_2) g$$

ou

$$V = \frac{2}{9} r^2 \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\mu} g,$$

em que ρ_1 e ρ_2 são as massas específicas da esfera e do fluido.

À análise mecânica pertencem os processos da sedimentação, levigação, densimétricos, da pipeta, etc.

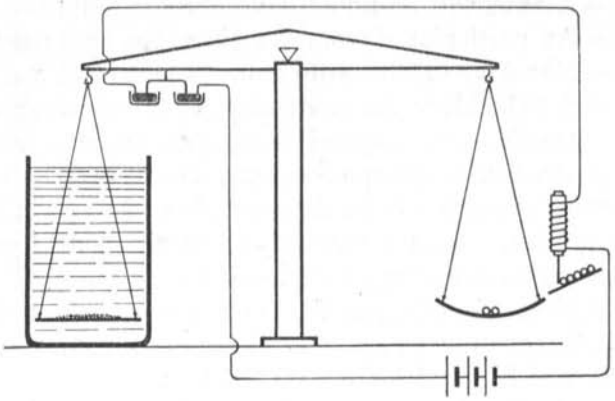


FIG. 1

As figuras 1 e 2 representam o aparelho de Sven Oden (processo de sedimentação) e uma bateria de levigadores.

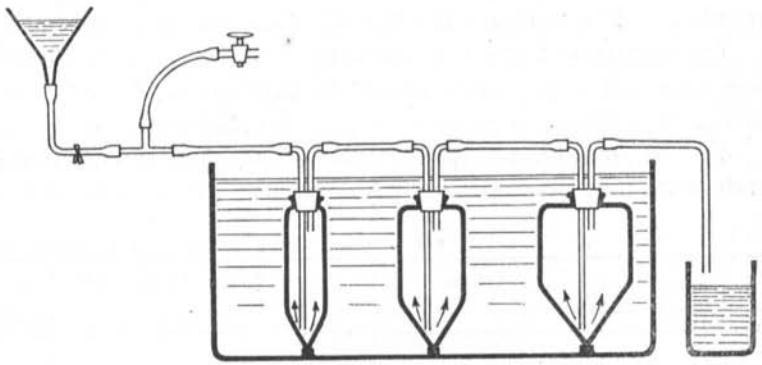


FIG. 2

Para poder aplicar a fórmula de Stokes devem observar-se as seguintes condições:

1.ª — As partículas devem ser esféricas;
2.ª — As moléculas do fluido devem ser pequenas em relação às partículas sólidas;
3.ª — Deve obter-se uma velocidade de queda constante; a fórmula é, pois, válida sòmente um certo tempo após o início da queda;

4.ª — A extensão do fluido deve ser ilimitada;
5.ª — As partículas devem ser rígidas e sem rugosidade;
6.ª — Não deve existir atrito entre as partículas e o líquido;
7.ª — A velocidade das partículas não deve ser demasiado grande, ou, o que é o mesmo, as suas dimensões não devem ultrapassar um certo valor.

Como a maior parte destas condições não se verifica nos casos da prática, diversos autores introduziram na fórmula de Stokes termos ou coeficientes correctivos.

Há também fórmulas empíricas que determinam o diâmetro das partículas em função da velocidade de queda. Uma muito empregada nos laboratórios é a de Schöne:

$$d = \frac{0{,}0518}{(D-1)} V^{\frac{7}{11}}$$

em d é o diâmetro das particulares em mm., D a densidade das partículas, e V a velocidade em milímetros por segundo.

Os materiais filtrantes, como os terrenos, podem classificar-se segundo a grandeza das suas partículas. Entre as numerosas classificações existentes podem citar-se:

1) — Bonnefant aproveita a classificação usada em França introduzindo uma pequena variação no limite superior das areias:

5,0	1,0	0,5	0,2	0,5	0,05	0,02	0,005	0,002	0,001	0 0002	mm.
Areão médio	Areão fino	Areia média	Areia fina	Grosso	Médio	Fino	Grossa	Média	Fina		Ultra Argila
				Silte			Argila				

2) — Classificação do Bureau of Soils, U. S. D. A.:

2,0	1,0	0,5	0,25	0,1	0,05	0.005	mm.
Areão fino	Areia grossa	Areia média	Areia fina	Areia finíssima	Silte	Argila	

3) — Classificação do Instituto de Tecnologia de Massachusetts:

2,0	0,6	0,2	0,06	0,02	0,006	0.002	0 0006	0,0002	mm.
Areia grossa	Areia média	Areia fina	Silte grosso	Silte médio	Silte fino	Argila grossa	Argila méd a	Argila fina (coloidal	

4) — Classificação da Sociedade Suiça dos Engenheiros e Arquitectos:

2,0	0,1	0,05	0,01	mm.
Areia grossa	Areia fina	Silte	Argila	

b) **Unidades**:

O coeficiente de permeabilidade tem sido expresso nas mais variadas unidades. A Divisão das Águas Subterrâneas do Geological Survey Americano faz uso de dois coeficientes de permeabilidade:

Um, definido por Meinzer e usado nos trabalhos de laboratório, é o caudal, expresso em galões (1) por dia, que atravessa a secção de um pé quadrado (normal à direcção do movimento) quando a perda de carga é a unidade e a temperatura é de 60º F. (15,55º C).

O outro coeficiente, usado nos trabalhos de campo, é definido como sendo o caudal, expresso em galões por dia, que passa através de uma secção rectangular (normal à direcção do movimento) cuja base é igual a 1 milha e altura 1 pé, tendo a perda de carga o valor de 1 pé por cada milha.

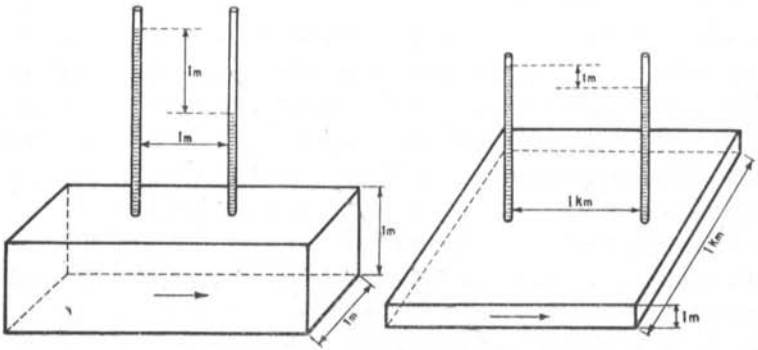


FIG. 3

Recorrendo às unidades métricas podem, em correspondência com aquelas, estabelecer-se as seguintes unidades:

(1) Galão americano – 3,79 litros.

1 — $\mathbf{K}_L$, o caudal, em litros por dia, que atravessa a secção de 1 m² quando a perda de carga é a unidade e a temperatura de 15º C.

2 — $\mathbf{K}_C$, o caudal, em litros por dia, que atravessa a secção de 1 metro por 1 quilómetro, quando a perda de carga é de um metro por cada quilómetro.

Como o segundo coeficiente não especifica a temperatura, a relação entre os dois coeficientes

$$\mathbf{K}_L = C_t \times \mathbf{K}_C$$

implica a introdução dum factor correctivo C_t.

Segundo Wenzel, este factor tem os seguintes valores:

Temperatura º C.	Factor correctivo C_t
10°	1,16
12°	1,10
14°	1,04
16°	0,99
18°	0,94
20°	0,89

Outras unidades de permeabilidade são usadas em diversos países principalmente nos Estados Unidos da América do Norte:

1 — Centímetros cúbicos por segundo e por centímetro quadrado sob um gradiante hidráulico de 100 por cento a uma temperatura de 25º C.

2 — Centímetros cúbicos por segundo e por centímetro quadrado sob a queda de pressão de um grama por centímetro quadrado por centímetro.

3 — Centímetros cúbicos por segundo e por centímetro quadrado quando a perda de pressão é de 1 dine por centímetro quadrado por centímetro, tendo o fluido a viscosidade de 1 centipoise.

4 — (Muskat, Botset) Centímetros cúbicos por segundo e por centímetro quadrado quando a perda de carga é de uma

atmosfera por centímetro e a viscosidade de 1 centipoise. Esta unidade chama-se darcy.

5 — (Slichter) Pés cúbicos por minuto e por pé quadrado quando a perda de carga é igual à unidade.

6 — Pés cúbicos por segundo e por pé quadrado por unidade de gradiante potencial e a 15,5º C. A unidade de gradiante potencial é definida por 1/g de pé por pé.

7 — Polegadas cúbicas por hora e por pé quadrado sob a diferença de pressão de uma libra por polegada quadrada e por meia polegada de comprimento.

8 — Polegadas cúbicas por minuto e por polegada quadrada sob a diferença de pressão de uma libra por polegada quadrada e por uma polegada de comprimento, à temperatura de 20º C.

9 — Pés cúbicos por segundo e por pé quadrado sob a diferença de pressão de uma libra por pé quadrado e por pé de comprimento.

10 — Centímetros por segundo sob um gradiante de 100 por cento.

11 — Polegadas por hora sob um gradiante de 100 por cento.

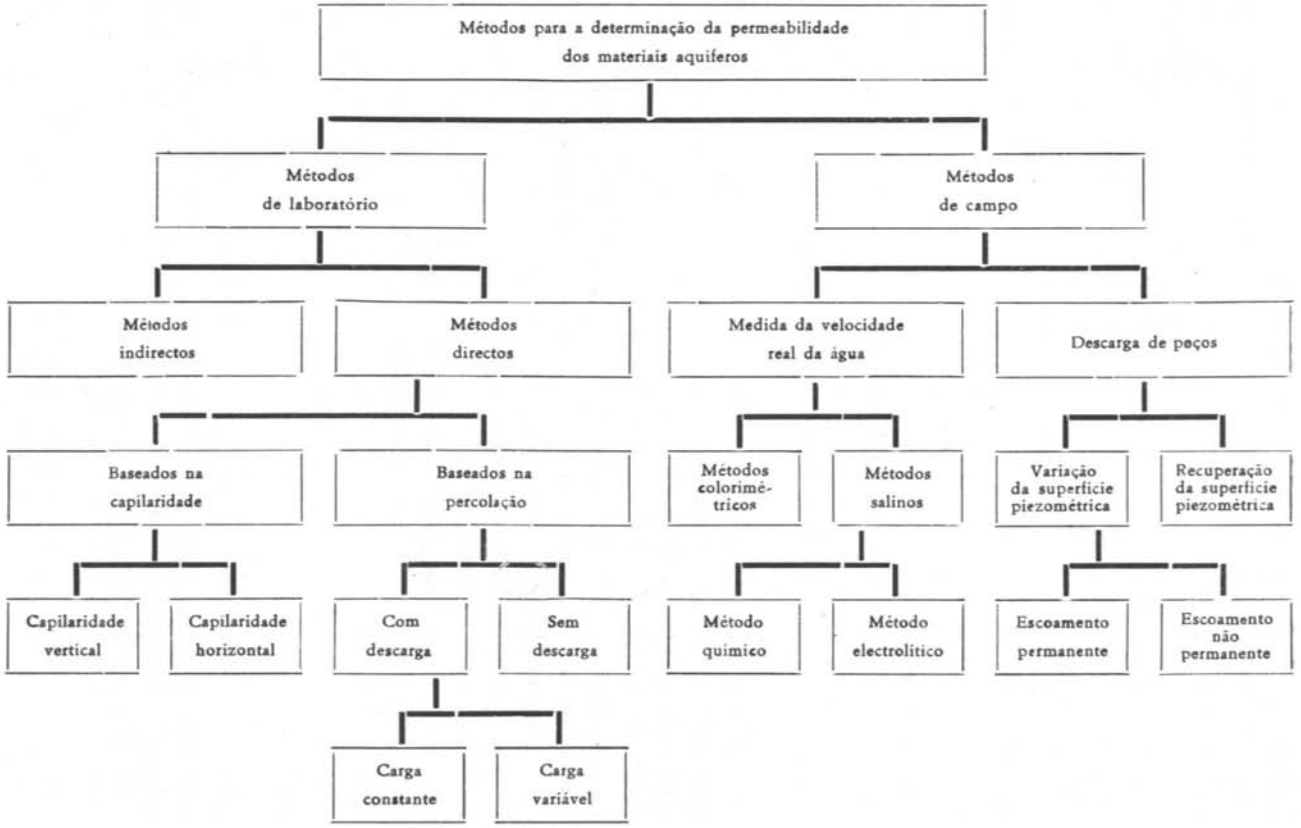
c) **Classificação**:

Os processos de determinação da permeabilidade dos terrenos e dos materiais pulverulentos são muitos e muito variados. Muitos dos investigadores, engenheiros e físicos que se dedicaram a este problema, apresentaram o seu método, que muitas vezes consistia em ligeiras alterações a um método já conhecido, alterações essas que, no caso concreto a que o método se destinava, melhoravam a sua aplicação. Grande parte dos métodos conhecidos baseiam-se na lei da percolação de Darcy o que equivale a supor que o movimento da água é laminar. Outros métodos consistem na determinação da velocidade real da água, usando para tal diversas substâncias como sais e còrantes, que por sua vez são pesquisadas por processos colorimétricos, químicos ou eléctricos. Ainda outros métodos fundamentam-se no movimento da toalha freática ou superfície piezométrica dos poços.

Depois da leitura dos variadíssimos trabalhos sobre a permeabilidade dos materiais e sua determinação, pode-se concluir que o método a escolher é função do fim a que o conhecimento da permeabilidade se destina, natureza dos materiais, importância da obra, grau de rigor exigido, etc.

Assim, concretizando, se se deseja estudar a permeabilidade dum material destinado à filtração, os métodos laboratoriais, directos ou indirectos, são com certeza os preferíveis; mas se se pretende fazer uma captação de águas por meio de poços ou galerias filtrantes ou uma drenagem de certo vulto, estão indicados os métodos locais ou de campo como os mais adequados.

Podem classificar-se os métodos de determinação da permeabilidade dos materiais aquíferos conforme o quadro a seguir:


Métodos para a determinação da permeabilidade dos materiais aquíferos
Métodos de laboratório
Métodos de campo
Métodos indirectos
Métodos directos
Medida da velocidade real da água
Descarga de poços
Baseados na capilaridade
Baseados na percolação
Métodos colorimétricos
Métodos salinos
Variação da superfície piezométrica
Recuperação da superfície piezométrica
Capilaridade vertical
Capilaridade horizontal
Com descarga
Sem descarga
Método químico
Método electrolítico
Escoamento permanente
Escoamento não permanente
Carga constante
Carga variável

Capítulo II

Métodos indirectos

Todos os métodos indirectos, que são aqueles em que a permeabilidade é calculada a partir do conhecimento da composição granulométrica, porosidade, tamanho dos grãos, temperatura, etc., consideram a lei de Darcy como a única aplicável ao movimento da água nas camadas aquíferas. Todas as fórmulas que adiante serão apresentadas são do tipo da de Darcy.

Muitos investigadores porém, como Smrecker, Forchheimer, Ehrenberger, Kröber e outros, segundo experiências a que se dedicaram, concluiram que a velocidade de percolação não era directamente proporcional à perda de carga; obtiveram expressões mais ou menos diferentes as quais se podem reduzir a dois tipos principais

$$u = k J^{\frac{1}{n}}$$

e

$$J = k_1 u + k_2 u^2 + \ldots ,$$

em que n varia entre 1 e 2 conforme o diâmetro dos grãos, segundo Smrecker, e tem o valor 8/7 na opinião de Ehrenberger.

Kröber deduziu, para areias quartzozas, a fórmula

$$u = 173 \left(\frac{d}{90} J\right)^{\frac{0{,}8 + d}{0{,}8 + 2d}} \quad \text{cm/s}$$

em que *d* representa o diâmetro dos grãos em centímetros. Esta expressão mostra que, conforme o diâmetro é pequeno ou grande assim a perda de carga é proporcional, aproximadamente, à velocidade ou ao seu quadrado.

Tanto a expressão de Darcy como estas podem representar o movimento das águas subterrâneas; a primeira supõe que o movimento é laminar e estas admitem a existência duma certa turbulência. Embora a turbulência possa ser criada com relativa facilidade, visto ser função do número de Reynolds e portanto de diferentes variáveis, verifica-se modernamente que nos casos dos terrenos e materiais pulverulentos da prática, onde a inclinação da superfície piezométrica raramente excede 5%, e mesmo que a camada aquífera seja constituida por areia grossa ou godo, a turbulência é virtualmente inexistente. Nos casos da prática não existe portanto limite superior para a aplicação da lei de Darcy.

Quanto ao limite inferior, existia a dúvida se a lei de Darcy seria aplicável a movimentos em que os gradiantes fossem muito pequenos. Pôde-se considerar parcialmente dissipada esta dúvida depois dos cuidadosos ensaios realizados por Meinzer e Fishel no Laboratório Hidrológico do United States Geological Survey. Servindo-se de um aparelho especialmente projectado para obter pequenas inclinações piezométricas, o qual será adiante descrito, o segundo daqueles investigadores comunicou que «os resultados das experiências feitas mostram bastante decisivamente que, para o material experimentado (areia fina), o caudal é directamente proporcional ao gradiante hidráulico quando este toma valores compreendidos entre 270 pés e 2 a 3 polegadas por milha (5% a 0,4 ‰), e há indicações que a lei de Darcy se verifica para gradiantes indefinidamente pequenos».

Em oposição a Fishel, porém, foi apresentada uma teoria em 1933 ao Primeiro Congresso das Barragens, realizado em Estocolmo, pelo investigador russo S. Isbach. Este autor baseia todas as suas considerações na hipótese de que, para cada material aquífero e dependendo da sua espessura, existe um certo valor da carga, carga crítica, abaixo do qual o referido material é impermeável. Segundo a opinião de Terzaghi, um

dos relatores das comunicações apresentadas no mencionado congresso, esta hipótese vai contra todas as leis conhecidas da hidráulica e acrescenta: «as conclusões a que o autor chegou só devem ser aceites se a exactidão da hipótese fundamental for provada pelos resultados de ensaios realizados de acordo com a física experimental e descritos com pormenor. Os dados apresentados na comunicação não são conclusivos.»

Apesar deste breve comentário, o trabalho de Isbash parece não dever ser posto totalmente de parte: pois embora no caso dos materiais pulverulentos vulgares essa carga crítica *não exista* ou melhor, seja *tão pequena que se possa desprezar,* já o mesmo poderá não acontecer com outros materiais menos permeáveis. Se se considerar os materiais vulgarmente conhecidos como impermeáveis a carga crítica toma valores enormes; nos metais a grandeza da carga crítica é da ordem das dezenas de milhar de atmosferas. Será também desprezável a carga crítica quando os materiais são constituidos por argila com grande percentagem de argila coloidal (como por exemplo no núcleo de estanqueidade das barragens de terra)? Seria interessante fazer investigações nesse sentido, assim como averiguar a veracidade da afirmação de Isbash: «*criar a impermeabilidade* num dado conjunto (grãos sólidos, água e ar) é pretender que todo esse conjunto trabalhe dentro dos limites de elasticidade.» A percolação significará portanto que um componente do conjunto, a água, ultrapassa, no seu funcionamento, os limites de elasticidade, e então terá lugar o escoamento.

Muito recentemente, Cambefort realizou ensaios sobre o escoamento da água através dos meios pulverulentos e chegou à conclusão que, para gradiantes extremamente pequenos, a lei de Darcy não se verificava e deveria ser substituida por uma expressão da forma

$$J = - a_1 u^2 + a_2 u.$$

Por esta conclusão se vê que a lei de Darcy é limitada inferiormente no seu campo de aplicação, sendo o limite diferente de zero, embora na prática este limite seja muito próximo de zero.

Quer tenham razão, porém, Fishel ou Cambefort, Terzaghi ou Isbash, não deve existir dúvida que no caso que interessa presentemente, isto é, a determinação da permeabilidade dos materiais e terrenos pulverulentos da prática, a lei de Darcy deve reger o escoamento das águas percoladoras.

Lei de Darcy

No segundo quartel do passado século, o físico alemão Hagen e o médico francês Poiseuille, desconhecendo cada um os trabalhos do outro, estudaram pela primeira vez o movimento da água nos tubos capilares, tendo chegado à conclusão que o caudal era proporcional à perda de carga unitária ou gradiante hidráulico. O gradiante hidráulico é, como se sabe, o cociente da diferença das pressões entre dois pontos, expressas em altura de água (no caso do líquido em estudo ser, evidentemente, a água) e a correspondente distância entre esses dois pontos.

Em 1856, Henry Darcy publicou num livro intitulado «Les fontaines publiques de la ville de Dijon» os resultados de numerosas experiências realizadas com o fim de estudar o movimento da água através dos interstícios capilares das areias filtrantes. Ao elaborar o projecto de captação e distribuição de águas para a cidade de Dijon, este autor previu, entre outros meios, a alimentação feita por fontes e poços artesianos; para ter um melhor conhecimento das condições em que se fazia o movimento da água e para poder estudar a sua purificação, que pretendia realizar por meio de filtros, concebeu um aparelho com o qual efectuou as experiências. Segundo a descrição de Engels, este aparelho consistia essencialmente de um cilindro com, aproximadamente, 35 centímetros de diâmetro e 3,5 metros de altura; um pouco acima da parte inferior, 20 centímetros mais ou menos, tinha soldadas três grelhas com orifícios de respectivamente 7,5 e 2 milímetros. Junto do cimo e do fundo estavam localizadas tomadas de pressão ligadas a manómetros de mercúrio, piezómetros, por meio dos quais eram observadas as pressões.

Os materiais usados nos ensaios foram: murraça, fragmentos de conchas, etc., 17 %, areias com diâmetro sensìvelmente de 2 milímetros, 12 %, areias com 1 milímetro, 13 % e

areias com 0,77 milímetros, 58 %. A porosidade da mistura, depois de bem mexida e compactada era de 38 %.

Os ensaios foram realizados sob cargas diferentes, variando os seus valores entre 1,5 e 13,2 vezes as alturas das colunas da mistura, e portanto com perdas de carga unitárias variando entre 1,5 e 13,2. A água movia-se verticalmente, de cima para baixo, através de 2 camadas por lavar, com altura de 58 e 113 centímetros e uma camada lavada com a altura de 168 centímetros.

Destas experiências tirou Darcy a conclusão que os resultados obtidos por Poiseuille e Hagen eram os mesmos do seu estudo, isto é, que o caudal que passava através da coluna de material era directamente proporcional à carga aplicada às extremidades da coluna e inversamente proporcional à altura da mesma. Exprimiu esta lei pela fórmula

$$Q = \mathbf{K}\ A\ \frac{h}{l} = \mathbf{K}\ A\ J$$

em que A é área da coluna e $\mathbf{K}$ é o coeficiente da proporcionalidade denominado também coeficiente de permeabilidade; este coeficiente que tem, como se disse atrás, as dimensões duma velocidade, sendo constante para cada caso concreto, dependia especialmente das dimensões e arranjo dos grãos. Darcy obteve para $\mathbf{K}$ valores que variavam entre 176×10^{-4} e 317×10^{-4} centímetros por segundo.

Alguns autores escrevem a expressão acima sob a forma:

$$\frac{Q}{A} = u = \mathbf{K}\ J$$

em que u representa a velocidade bruta ou de filtração em vez da velocidade real da água nos interstícios.

Em 1890, F. King, baseado nas investigações de Hagen, Poiseuille e Darcy e nas de Meyer e Graham, estas sobre o movimento dos gases nos capilares, pretendeu determinar o diâmetro dos grãos dum dado material de ensaio empregando uma fórmula análoga à de Poiseuille. Para isso construiu um aparelho — o aspirador — com o qual obtinha os dados neces-

sários. Este aparelho e o correspondente método, conhecido pelo método do aspirador, foram muito pouco empregados e hoje estão postos de parte, embora o seu autor e Slichter lhes tenham atribuido grandes vantagens sobre os métodos até então usados.

Enquanto King se dedicava a comprovar o seu novo método, apareceu publicado um artigo de Wollny no qual o autor descrevia as suas investigações e acabava por concluir que não existia proporcionalidade entre a pressão e o caudal. Esta conclusão levou King a fazer numerosas experiências sobre o movimento da água e do ar através de redes metálicas finíssimas, discos perfurados de latão, arenitos, areias e tubos capilares,compilando ao mesmo tempo os resultados das recentes investigações de Hagen, Seelheim, Trautwine, Welitschkowsky e Wollny sobre o movimento da água através de variados materiais filtrantes, e de Fleck, Welitschkowsky, Renk, Ammon e Wollny sobre o movimento do ar através de outros materiais. Entre estes investigadores, uns constataram a proporcionalidade, como por exemplo, Seelheim que, para a areia quartzoza da qual removeu todas as matérias estranhas incluindo os silicatos solúveis e o carbonato de cálcio por meio de ácido clorídrico, deduziu a fórmula para a temperatura de 12° C.,

$$u = 0{,}376\, d^2 J \qquad \text{cm/s}$$

sendo d o diâmetro, em milímetros, do grão de peso médio, suposto perfeitamente esférico. Outros investigadores encontraram valores que se afastavam de forma sensível da tão discutida proporcionalidade.

Depois de ter estudado minuciosamente as diferenças destes últimos, King concluiu que estas eram sistemàticamente maiores ou menores; tudo se passava como se essas diferenças fossem devidas a erros de observação.

Por uma cuidadosa inspecção dos valores obtidos pelos diversos investigadores pôde-se concluir que na realidade essas diferenças deviam ser causadas por várias razões, entre as quais avultavam o pequeno diâmetro dos tubos que continham o material a ensaiar (na generalidade 5 cm.), o seu pequeno compri-

mento e pressões demasiado grandes; em resumo, nem sempre eram perfeitamente preenchidas as condições necessárias para que o regime estabelecido fosse laminar, o qual, averiguou-se mais tarde, era exigido para que se verificasse a lei de Darcy.

Fórmulas do tipo da de Darcy

Lei de Hazen:

Entre 1880 e 1882, Allen Hazen, químico chefe da Estação Experimental de Lawrence, Massachusetts, fez experiências com areias e godos isentos de impurezas com o fim de determinar as propriedades físicas dos materiais filtrantes a usar na correcção de águas de abastecimento e depuração do afluente de esgotos. O aparelho que Hazen usou, de sua autoria, é o representado na figura 4.

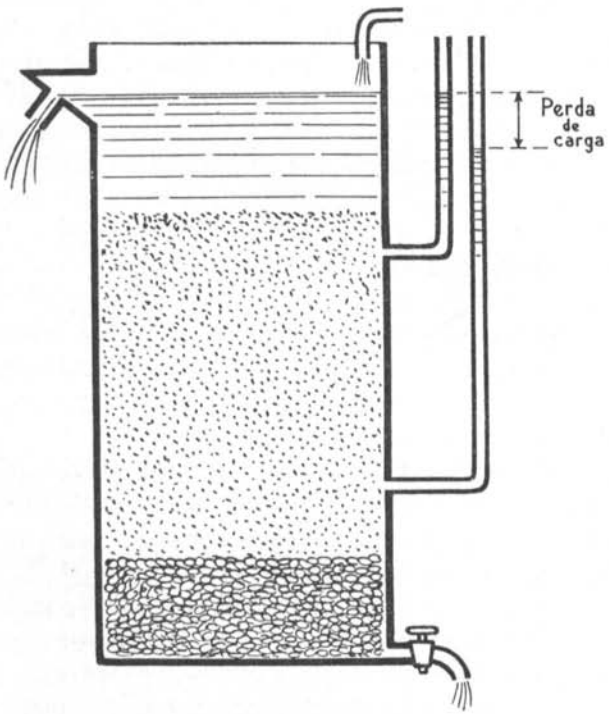


FIG. 4

As primeiras experiências, realizadas com areias de diâmetro sensìvelmente igual, e à temperatura de 10° C., mostraram que a velocidade de filtração da água era proporcional a perda de carga, obtendo o mesmo resultado que Darcy. Verificou também que o coeficiente de permeabilidade variava proporcionalmente com o quadrado do diâmetro dos grãos, isto é,

$$\mathbf{K} = c\, d^2 .$$

Substituindo em seguida as areias estudadas por outras, compostas de grãos com diâmetros diferentes e com uma certa curva granolumétrica acumulada, Hazen supôs que ainda se podia empregar a fórmula acima escrita desde que *d* representasse o diâmetro constante dos grãos duma areia ideal cuja permeabilidade fosse a mesma da areia real em estudo. Depois dum cuidadoso exame comparativo, Hazen concluiu que o diâmetro a tomar para os cálculos como sendo o que na realidade melhor representava o efeito total de resistência ao movimento, era o indicado pela abscissa do ponto de intersecção da curva granulométrica acumulada com a paralela ao eixo das abscissas conduzidas pela ordenada correspondente a 10 %. Este diâmetro, denominado *diâmetro efectivo,* é tal que 90 % *em peso* (as curvas granolumétricas para estes casos são obtidas em função do peso das amostras) da areia considerada, têm grãos de diâmetro superior e os resultantes 10 % têm grãos de diâmetro inferior. Esta conclusão mostra que os 10 % mais finos duma dada amostra têm tanta influência na filtração como os 90 % mais grossos.

Hazen introduziu também a noção de *coeficiente de uniformidade*, para indicar se os grãos são todos do mesmo diâmetro ou se há uma grande variação nos seus diâmetros; foi definido como sendo o cociente do diâmetro do grão cuja medida é igual à da malha do peneiro que permite a passagem dos 60 % mais finos dividido pelo diâmetro efectivo. Em certa medida, exprime a inclinação da curva granolumétrica sobre o eixo dos diâmetros; quanto mais uniforme for uma areia, menor é o coeficiente de uniformidade e menos inclinada é a curva, atingindo este coeficiente o limite inferior igual a 1 para uma areia unigranular.

Outros autores propuseram definir coeficiente de uniformidade pela inclinação da recta que unia os pontos localizados pelos 20 e 80 % de grãos mais finos que os considerados. Não foi porém generalizada esta definição.

As considerações feitas pelo autor sobre a influência da porosidade resumem-se na expressa indicação de que as experiências foram efectuadas com as areias lançadas no aparelho *sem calcar*, e mais tarde numa vaga dependência da constante *c* com a compacidade; não se sabe definitivamente quais as porosidades com que realizou as experiências mas pela indicação acima pode inferir-se que deviam variar entre 38 e 40 %.

Como já se disse, todas estas experiências foram realizadas à temperatura de 10° C. A esta temperatura obteve o autor

$$u = c\ d_H^2\ J.$$

Para qualquer outra temperatura introduziu Hazen um factor correctivo; como se sabe, à variação da temperatura corresponde uma variação da viscosidade da água que se pode traduzir, aproximadamente, por

$$\mu = \frac{\mu_{10^\circ C}}{0{,}7 + 0{,}03\ t}.$$

A expressão final será pois

$$u = c\ d_H^2\ (0{,}7 + 0{,}03\ t)\ J \qquad cm/s$$

e a permeabilidade

$$\boxed{\mathbf{K} = c\ d_H^2\ (0{,}7 + 0{,}03\ t)} \qquad cm/s$$

Para diâmetros efectivos compreendidos entre 0,1 e 3 mm e coeficientes de uniformidade inferiores a 5, a constante tem o

valor médio de 1,157 quando d_H é expresso em milímetros e u em centímetros por segundo.

Mais tarde, em 1901, Hazen verificou que o valor de c não era inteiramente constante mas que dependia do coeficiente de uniformidade (dependência que nunca se traduziu quantitativamente), da compacidade e pureza das areias e da forma e composição química dos grãos: para uma areia perfeitamente limpa e muito uniforme c podia ter o valor 1,389 e para areia muito compacta, contendo grande quantidade de alumina ou ferro, c valeria 0,465. Constatou também que c variava inversamente com o coeficiente de uniformidade.

Esta fórmula só se pode aplicar, com os valores de c acima expressos, a areias cujos diâmetros efectivos e coeficientes de uniformidade estejam respectivamente compreendidos entre 0,1 e 3 mm e entre 1 e 5. Não é aplicável às argilas, hardpans, solos e outros materiais.

Lei de Slichter:

Foi Charles Slichter quem primeiro estudou matemàticamente o movimento da água através dos meios pulverulentos. A esta lei chamou Forchheimer lei de Boussinesq-Slichter, visto este último autor ter lançado mão de importantes conclusões a que Boussinesq tinha chegado, em 1868, no estudo da influência da forma da secção transversal dum tubo sobre a velocidade média de escoamento dum líquido.

Antes de se entrar pròpriamente na exposição da lei de Slichter far-se-á esse estudo; depois de estabelecida a equação geral do movimento determina-se a velocidade média em tubos de secção circular, elíptica, triangular e rectangular, comparando-se em seguida os valores encontrados.

Para estudar o movimento da água através dos meios porosos partiu-se do princípio que aquele movimento se fazia em tubos muito finos, supostos constituidos pela sucessão dos poros ou interstícios, mas de secção constante. Ainda por hipótese, os tubos tinham a secção tão pequena e o movimento através deles era tão lento que se pôde considerar laminar.

Supondo um desses tubos, cujo eixo coincide com o eixo dos xx, orientado no sentido do escoamento e fazendo com a

horizontal um ângulo igual a i, as equações mais gerais do movimento dum fluido viscoso, são:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - u' + \nu \Delta u + \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - v' + \nu \Delta v + \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - w' + \nu \Delta w + \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

onde são, relativamente à 1.ª equação,

$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$	derivada substancial de u
$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$	laplaciano de u
$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$	dilatação cúbica
$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	viscosidade cinemática
μ	viscosidade absoluta
λ	uma constante
p	pressão, supondo o fluido perfeito
ρ	massa específica do fluido
X, Y e Z	componentes da força por unidade de massa.

Considerando o fluido, no caso em questão a água, pràticamente incompressível e portanto

$$\Theta = 0,$$

obtêm-se as equações de Navier,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - u' + \nu \Delta u$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - v' + \nu \Delta v$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - w' + \nu \Delta w.$$

Se o movimento no tubo é laminar e uniforme, as componentes v e w da velocidade são nulas, assim como as suas derivadas em relação às coordenadas espaciais e ao tempo. Da equação da dilatação cúbica ou da continuidade tira-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

e, portanto,

$$u' = 0.$$

As componentes X, Y e Z tomam os valores, respectivamente,

$$X = g \; sen \; i$$
$$Y = 0$$
$$Z = - g \; cos \; i,$$

e as equações de Navier escrever-se-ão

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g \; sen \; i + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = o$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = - g \; cos \; i.$$

As últimas equações mostram que, em qualquer secção transversal, a distribuição das pressões é hidrostática. Dividindo ambos os membros de (1) por g e fazendo

$$sen \; i - \frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial p}{\partial x} = J,$$

vem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\overline{w} J}{\mu} \qquad \ldots\ldots (2)$$

onde J representa a inclinação motriz ou perda de carga unitária.

Toda a função que satisfaça a esta equação diferencial de derivadas parciais pode representar um movimento num tubo fino; as paredes são definidas pela condição

$$u = 0.$$

a) **Tubo de secção circular**: quando a secção é circular, as componentes u iguais distribuem-se em circunferências concêntricas, com centro no eixo do tubo. Escrevendo a equação (2) em coordenadas polares, r e φ, vem,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = - \frac{\overline{w} J}{\mu}$$

na qual, pela condição acima apontada,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

e portanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\overline{w} J}{\mu},$$

ou

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\overline{w} J}{\mu},$$

ou ainda

$$d \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\overline{w} J}{\mu} r \, d r,$$

que, integrando, dá

$$r \frac{d u}{d r} = - \frac{\overline{w} J}{\mu} \frac{r^2}{2} + c_1$$

e, integrando novamente,

$$u = - \frac{\overline{w} J}{\mu} \frac{r^2}{4} + c_1 \log r + c_2.$$

Desde que a velocidade sobre o eixo tem de ser finita c_1 deve ser nula; c_2 determina-se pela condição limite de ser $u = 0$ para $r = R$. E assim,

$$c_2 = \frac{\overline{w} J}{\mu} \frac{R^2}{4}$$

e, finalmente,

$$u = \frac{\overline{w} J}{4 \mu} (R^2 - r^2).$$

O caudal é dado por

$$Q = 2\pi \int_0^R u\, r\, dr$$

$$= \frac{\pi \overline{w} J R^4}{8 \mu}$$

$$= \frac{\overline{w} A^2 J}{8 \pi \mu}$$

sendo A a área da secção; a velocidade média é

$$U = \frac{1}{8\pi} \frac{\overline{w} A J}{\mu}$$

ou

$$\boxed{U = 0{,}03979 \frac{\overline{w} A J}{\mu}}$$

b) **Tubo de secção elíptica:** poder-se-ia seguir um processo análogo para se obter a velocidade média neste tubo; aproveita-se porém, uma interessante analogia que Greenhill apresentou em 1881. Segundo este matemático, as condições analíticas do movimento dum líquido viscoso ao longo dum tubo cilíndrico cuja secção transversal tem uma determinada forma, são análogas às do movimento dum líquido perfeito num cilindro que gira à volta do seu eixo, e cuja secção transversal tem a mesma forma, desde que a velocidade angular de rotação ω seja igual a $\frac{\overline{w} J}{2 \mu}$.

Neste último caso, a função de corrente é dada, duma forma geral, por

$$\Psi = k\, f\,(y, z) + \frac{1}{2}\,\omega\,(y^2 + z^2) + B$$

em que $f(y, z)$ é a função implícita que representa a linha limite da secção transversal do cilindro, ω é a velocidade angular, k uma constante ou função de y e z, e B outra constante.

No caso dum cilindro de secção elíptica é

$$f(y, z) = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1$$

e

$$k = -\frac{a^2\, b^2\, \omega}{a^2 + b^2}$$

que se determinou com a conhecida condição de irrotacionalidade

$$\Delta\ \Psi = 0.$$

Vem pois, substituindo em cima,

$$\Psi = -\frac{a^2\, b^2\, \omega}{a^2 + b^2}\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right) + \frac{1}{2}\,\omega\,(y^2 + z^2) + \frac{a^2}{a^2 + b^2}\frac{b^2\ \omega}{} + B.$$

Segundo Greenhill, portanto, a função de corrente no movimento dum líquido viscoso num tubo de secção elíptica é a mesma que a anterior se nela se substituir ω por $\frac{\overline{w}\, J}{2\,\mu}$.

Por outro lado, sabe-se da hidrodinâmica clássica que a velocidade ao longo do tubo, quando o eixo dos xx coincide com o eixo do tubo, tem como expressão geral,

$$u = \Psi - \frac{\overline{w}\, J}{4\,\mu}(y^2 + z^2)$$

e, no caso em vista, depois de substituir Ψ pelo valor acima e ω por $\frac{\overline{w}\, J}{2\,\mu}$, vem

$$u = -\frac{\overline{w}\, J}{2\,\mu}\frac{a^2\, b^2}{a^2 + b^2}\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right) + \frac{\overline{w}\, J}{2\,\mu}\ \frac{a^2\, b^2}{a^2 + b^2} + B.$$

A constante B, determinada pela condição de u se anular nas paredes do tubo, é nula.

Resulta pois

$$u = \frac{\overline{w}\, J}{2\,\mu} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right).$$

O caudal é dado por

$$Q = 4 \int_{OAB} \int u \, dy \, dz$$

$$= \frac{1}{4\,\pi} \frac{A^2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \frac{\overline{w}\, J}{\mu}$$

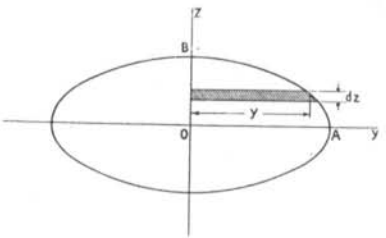


FIG. 5

em que

$$A = \pi\, a\, b.$$

A velocidade média será, finalmente,

$$U = \frac{1}{4\,\pi} \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \frac{\overline{w}\, A\, J}{\mu}$$

ou

$$\boxed{U = \frac{1}{4\,\pi} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{2 - e^2} \frac{\overline{w}\, A\, J}{\mu}}$$

onde

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = sen\ \varphi$$

é, por definição, a excentricidade, e φ o ângulo formado pelo plano da elipse com o plano da circunferência de raio a da qual se obtém, por projecção, a referida elipse.

c) **Tubo de secção triangular**: a expressão geral do integral da equação (2), pelo método Monge-Ampère, é

$$u = f_1 (y + i\, z) + f_2 (y - i\, z) + c\, (y, z)$$

onde f_1 e f_2 são funções arbitrárias e $c\,(y, z)$ é uma função tal que

$$\Delta\, c = - \frac{\overline{w}\, J}{\mu}.$$

No caso em estudo, se se fizer

$$f_1(y+iz) = -\frac{1}{2}(y+iz)^3,$$

$$f_2(y-iz) = -\frac{1}{2}(y-iz)^3,$$

e

$$c(y, z) = 3m(y^2 - 3z^2),$$

em que

$$m = \frac{\overline{w}J}{12\mu}$$

é o raio do círculo inscrito no triângulo, encontra-se, substituindo na expressão geral,

$$u = 3yz^2 - y^3 + 3my^2 - 9mz^2$$
$$= (3m - y)(y^2 - 3z^2).$$

Os pontos onde

$$u = 0$$

estão situados sobre as rectas

$$y = 3m$$

e

$$z = \pm \frac{y}{\sqrt{3}}$$

que definem o triângulo equilátero OAB de lado $2\sqrt{3}\ m$, fig. 6.

O caudal é

$$Q = \iint_{OAB} u\,dy\,dz$$

$$= \frac{81}{5\sqrt{3}} m^5$$

$$= \frac{3mA^2}{5\sqrt{3}},$$

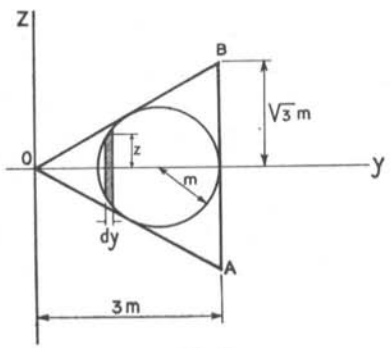


FIG. 6

sendo

$$A = 3\sqrt{3}\, m^2 .$$

A velocidade média é

$$U = \frac{3\, m\, A}{5\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{20\sqrt{3}} \; \frac{\overline{w}\, A\, J}{\mu}$$

ou

$$\boxed{U = 0{,}02887 \; \frac{\overline{w}\, A\, J}{\mu}}$$

d) **Tubo de secção rectangular**: considerando a secção definida pelos seus dois lados $2a$ e $2b$ e supondo a origem das coordenadas coincidindo com o seu centro de gravidade e os eixos paralelos aos lados, a expressão de velocidade é, segundo Boussinesq,

$$u = \frac{\overline{w}\, J}{2\mu} \; \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} + 2 \sum_{k' = o}^{k' = \infty} \frac{\pm 1}{k} \left(1 - \frac{2}{k^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{e^{k\frac{z}{a}} + e^{-k\frac{z}{a}}}{e^{k\frac{b}{a}} + e^{-k\frac{b}{a}}} \cos k\, \frac{y}{a} + \frac{e^{k\frac{y}{b}} + e^{-k\frac{y}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}} \cos k\, \frac{z}{b} \right] \right\}$$

em que k' é um número inteiro e positivo e k representa a expressão $(2k' + 1)\, \frac{\pi}{2}$.

O caudal é, pois,

$$Q = \iint u\, dy\, dz$$

$$= \alpha \; \frac{\overline{w}\, J}{\mu} \; \frac{A^2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$$

sendo

$$\alpha = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3} + 2\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\left[\frac{a}{b}\,\frac{e^{k\frac{b}{a}} - e^{-k\frac{b}{a}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{b}{a}\,\frac{e^{k\frac{a}{b}} - e^{-k\frac{a}{b}}}{e^{k\frac{a}{b}} + e^{-k\frac{a}{b}}}\right]\right\}$$

A velocidade média é

$$\boxed{U = \frac{\alpha}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}\,\frac{\overline{w}AJ}{\mu}}$$

Os valores de α foram determinados por Boussinesq para diversos valores de a/b:

Para $\frac{a}{b} =$ 1 2 3 4 5 10 ∞

vem $\alpha =$ 0,0703 0,0715 0,0731 0,0747 0,0757 0,0786 0,0833

O quadro resume os valores do coeficiente $\frac{\overline{w}\,A\,J}{\mu}$ para as diversas formas da secção, assim como contém as variações da velocidade média resultantes da substituição da secção circular por cada uma das outras, supondo que a área se conserva.

Forma da Secção	Coeficiente de $\frac{\overline{w}\,A\,J}{\mu}$	Variação em percentagem
circular	0,03979	—
elíptica		
$e = sen\ ? = 0{,}6$	0,03882	— 2,5 %
$e =\ \ = 0{,}714$	0,03740	— 3,5 %
$e =\ \ = 0{,}866$	0,03183	— 20,0 %
quadrada	0,03515	— 12,0 %
rectangular		
$a/b = 2$	0,02860	— 28,0 %
triangular equilátera	0,02887	— 27,0 %

Verifica-se que a velocidade diminui muito pouco quando se substitui a secção circular pela elíptica com a mesma área, desde que $\varphi < 45^{o}$. Desta verificação pode-se concluir, por analogia, que a velocidade também variará muito pouco se se substituir a secção com a forma de um triângulo equilátero por outra com a mesma área mas com a forma de um triângulo escaleno, desde que o ângulo φ seja pequeno. Esta conclusão permite encarar com segurança a dedução da fórmula de Slichter.

Slichter, em 1897, ao procurar deduzir a expressão analítica representativa do movimento da água através dos materiais aquíferos, admitiu a existência dum material pulverulento constituido por grãos esféricos, todos com o mesmo diâmetro, dispostos de maneira determinada e tal que permitisse a passagem do mesmo caudal que o material em estudo. A disposição relativa destes grãos esféricos e o seu diâmetro seriam variáveis com a disposição e tamanho dos grãos constituintes do material pulverulento real, porém, deveriam ser tais que o material ideal assim obtido tivesse a mesma capacidade de transmissão (transmission capacity) ou permeabilidade, conservadas a porosidade e a temperatura.

Foi sobre este material ideal que Slichter fez as considerações geométricas que seguem; ao diâmetro comum dos seus grãos chamou o autor «diâmetro efectivo».

As partículas líquidas no seu movimento percorrem a sucessão dos poros, com secção transversal aproximadamente triangular. As suas dimensões são função do diâmetro dos grãos e do seu arranjo relativo, isto é, da sua compacidade.

Supondo um elemento de volume constituido por 8 esferas, estas podem dispor-se de tal maneira que as linhas que unem os seus centros definam ou um cubo ou um romboedro. No primeiro caso (figura 7) a compacidade é a menor que se pode obter e cada esfera toca só em seis adjacentes; no segundo caso (figura 8) a capacidade aumenta à medida que o ângulo menor θ do romboedro diminui, atingindo o seu valor máximo para $\theta = 60^{o}$. Para este valor do ângulo θ, denominado ângulo de empilhamento, cada esfera toca em 12 adjacentes. A disposição das esferas correspondentes à máxima compacidade ainda se pode

obter doutra forma (figura 9); neste caso os lados das faces do sólido formado fazem ângulos de 90° e 60°.

A porosidade p varia com o ângulo de empilhamento. A expressão que relaciona estas grandezas determina-se por meio de considerações geométricas simples. Suponha-se o romboedro de lado d da figura 10, caso de máxima compacidade:

O triângulo esférico BCD é equilátero tendo os seus lados o valor comum θ. Do triângulo esférico COB, rectângulo em O, tira-se que

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2},$$

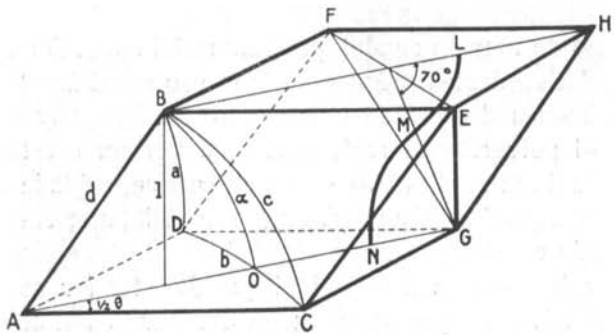


FIG. 10

ou

$$\cos \alpha = \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}},$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

e, depois de várias transformações,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{1 + \cos \theta}.$$

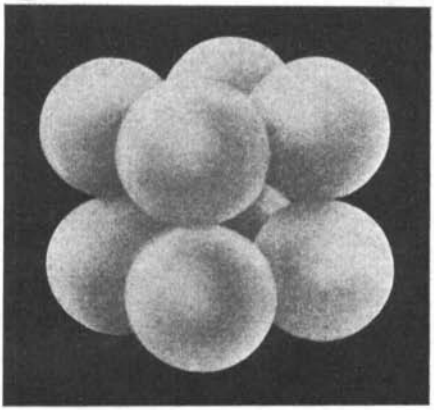


FIG. 7

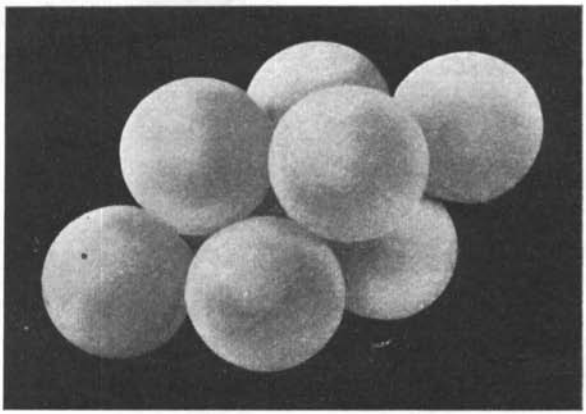


FIG. 8

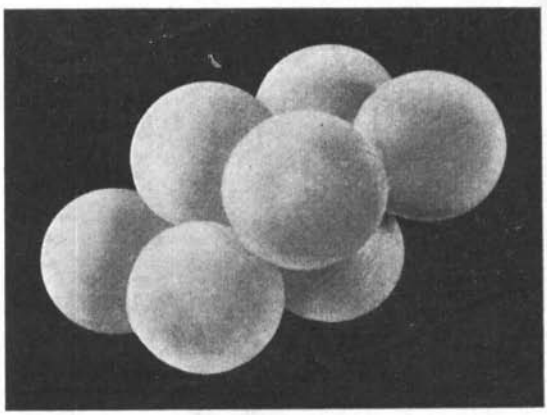


FIG. 9

O volume do romboedro é

$$V = \frac{sen\ \theta \sqrt{1 + 2\ cos\ \theta}}{1 + cos\ \theta}\ sen\ \theta\ d^3$$

$$= (1 - cos\ \theta) \sqrt{1 + 2\ cos\ \theta}\ d^3,$$

e a porosidade é

$$p = \frac{(1 - cos\ \theta) \sqrt{1 + 2\ cos\ \theta} - \frac{\pi}{6}}{(1 - cos\ \theta) \sqrt{1 + 2\ cos\ \theta}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{\pi}{6}}{(1 - cos\ \theta) \sqrt{1 + 2\ cos\ \theta}}. \qquad \ldots\ldots\ (3)$$

O quadro seguinte dá os valores de p para diversos valores de θ:

θ	p
60º	26,0 %
65	33,3
70	38,6
75	42,8
80	45,4
85	47,1
90	47,6

A determinação de θ quando p é dado resulta da resolução da equação (3) em ordem a θ:

$$2\ cos^3\ \theta - 3\ cos^2\ \theta + 1 - \frac{\pi^2}{36\ (1 - p)^2} = 0\ .$$

O comprimento dos tubos capilares, de secção aproximadamente triangular como já se disse, é, evidentemente, maior

que o lado do romboedro, visto seguir, com grande aproximação o caminho indicado na figura 11.

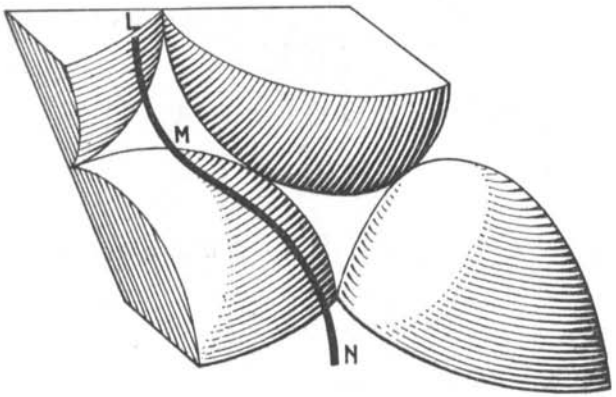


FIG. 11

Se o tubo capilar tivesse o seu eixo rectilíneo, o seu comprimento seria, no elemento de volume,

$$d = l \ cosec \ \alpha$$

$$= \frac{1 + cos \ \theta}{sen \ \theta \sqrt{1+2cos\theta}} \ l.$$

Todavia, o comprimento do tubo real d' é maior, e no caso em estudo, verifica-se experimentalmente que

$$\frac{d'}{d} = 1{,}065,$$

e, para qualquer valor de θ, é

$$\frac{d'}{d} = 1 + \frac{0{,}065 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 1{,}195 - 0{,}39 \frac{\theta}{\pi},$$

e portanto

$$d' = \frac{1 + cos \ \theta}{sen \ \theta \sqrt{1 + 2 \ cos \ \theta}} \left(1{,}195 - 0{,}39 \frac{\theta}{\pi}\right) l \ .$$

No quadro seguinte representam-se os valores de d' em função de d para diversos valores de θ, assim como os erros que resultariam da substituição de d' por d.

θ	d'	*erro*
60°	1,065 d	6,1 %
70	1,043 d	4,1
80	1,022 d	2,1
90	1,000 d	0

No elemento do volume em estudo, podem considerar-se dois tubos, o eixo dum dos quais está representado na figura 11, cujas secções variam de área no seu percurso. Verifica-se por razões de simetria que as áreas mínimas se encontram localizadas, respectivamente, nos planos ACGD, BEHF e FEG da figura 10 para um dos tubos, e ACGD, BEHF e BCD para o outro.

A área mínima dos tubos é dada pela diferença entre a área da face do romboedro e a do círculo, dividida por 2, ou seja,

$$A_{min.} = \frac{sen\ \theta - \frac{\pi}{4}}{2} d^2 .$$

A razão da área dos poros para a área total (proporção de vazios na face do romboedro) é,

$$n = \frac{sen\ \theta - \frac{\pi}{4}}{sen\ \theta}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}\ cosec\ \theta .$$

No percurso LN do tubo cujo eixo está representado nas figuras 10 e 11, a secção em L é mínima, cresce e depois descresce até M, onde é novamente mínima. Por considerações geométricas verifica-se que o ângulo formado pelo plano

FEG com a face BEHF é de 70°, de modo que se pode supor que a secção tem a área máxima a uma distância angular de cerca de 35°, medida sobre o arco LM.

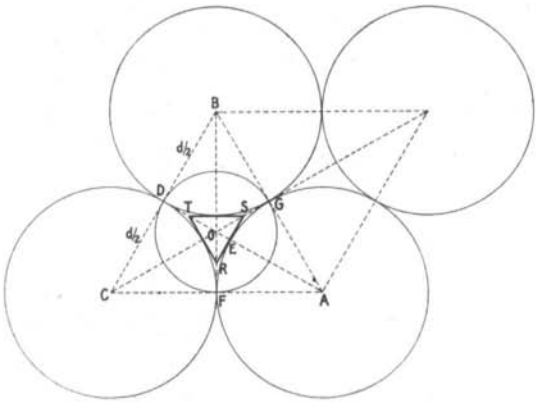


FIG. 12

Slichter considerou, para o seu estudo, a secção média e a secção mínima.

A área da secção média triangular TRS determina-se do modo seguinte: da figura 12 tira-se que,

$$AB = d, \quad BF = \frac{\sqrt{3}}{2}\, d, \quad AO = \frac{d}{\sqrt{3}},$$

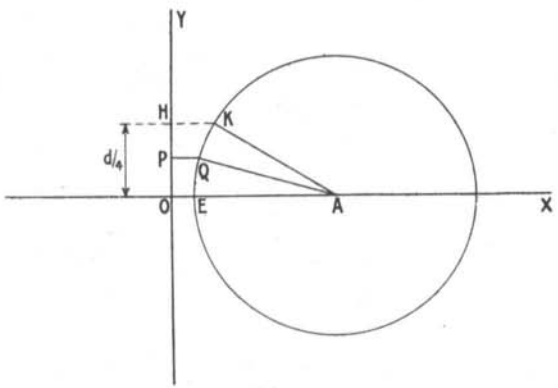


FIG. 13

e

$$OE = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \frac{d}{2},$$

e portanto,

$$\overset{\frown}{RST} = 3\sqrt{3}\ \overline{OE}^2;$$

da figura 13 vê-se que qualquer abcissa PQ é dada por

$$PQ = \frac{d}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - y^2}.$$

A área da secção triangular, de ordenada corrente OP é semelhante à expressão anterior, $3\sqrt{3}\ \overline{PQ}^2$, e o valor da área média é obtido por

$$A_m \frac{d}{4} = 3\sqrt{3}\int_0^{\frac{d}{4}} \left(\frac{d}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - y^2}\right)^2 dy$$

ou

$$A_m = \left(\frac{15\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{2}\right) d^2$$

$$= 0{,}0530\ d^2.$$

Para área mínima tomou Slichter um valor um pouco superior à média aritmética da área do triângulo RST e a do triângulo de lados curvos DFG. Estas duas áreas são, respectivamente,

$$A_{RST} = 3\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \frac{d^2}{4}$$

$$= 0{,}0311\ d^2,$$

e

$$A_{DFG} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}\right) d^2$$

$$= 0{,}0403\ d^2.$$

Slichter adoptou para área mínima o valor $0{,}0371\ d^2$. Este valor, um pouco superior à média entre A_{RST} e A_{DFG}, é arbitrário como ele próprio o diz, mas compreende-se que deva assim ser, e além disso, a variação que se pudesse atribuir como razoável não iria afectar o resultado senão de poucas unidades por cento.

Constata-se que o valor da área média, 0,0530 d^2, é cerca de 43 % superior ao valor da área mínima tomado, 0,0371 d^2.

Seria ainda necessário verificar se a variação da secção do tubo ao longo do percurso provoca diminuição apreciável na velocidade; de facto, os sucessivos estreitamentos e alargamentos são sede de perdas de carga. Aplicando, porém, a lei de Newton às duas secções máxima e mínima consecutivas, chegava-se fàcimente à conclusão que a acção retardadora é muito pequena pelo que se pode, com erro desprezável, substituir o tubo de secção variável por um de secção constante.

Depois de todas estas considerações o problema apresenta-se da seguinte forma: Qual é a velocidade de filtração e o caudal que passa através dum dado meio pulverulento?

Em cada elemento de volume existem dois tubos capilares de percurso sinuoso e de secção variável. Acabou de ver-se que se pode substituir o tubo de secção variável por outro de secção constante. Se se substituir a secção média cujo valor é 0,0530 d^2 pela secção mínima, suposta um triângulo equilátero de lados rectilíneos e de área 0,0371 d^2, comete-se um erro, para menos, de cerca de 43 %. Por outro lado, supondo a secção triangular substituida por uma circular com a mesma área, vê-se fàcilmente que a velocidade vem aumentada de cerca de 38 %. Resta compensar um erro de, aproximadamente, 5 % o que se realiza fàcilmente substituindo o comprimento do tubo curvo d' pelo lado do elemento de volume d.

Viu-se que a área da secção mínima era

$$A = \frac{sen\ 0 - \frac{\pi}{4}}{2}\ d^2;$$

substituindo este valor na expressão de Poiseuille

$$U = \frac{\overline{w}\ AJ}{8\ \pi\ \mu},$$

resulta

$$U = \frac{\overline{w}\ J}{8\ \pi\ \mu}\left(\frac{sen\ 0 - \frac{\pi}{4}}{2}\right) d^2\ . \qquad \ldots\ldots\ (4)$$

Nesta expressão será

$$\overline{w}\, J = \frac{P}{d'},$$

em que P representa a diferença de pressões existente entre as duas extremidades do tubo. Ainda, pela hipótese feita acima de substituir d' por d virá

$$\overline{w} J = \frac{sen\ \theta \sqrt{1 + 2\cos\theta}}{1 + \cos\theta} \frac{P}{l}$$

e, fazendo a substituição em (4),

$$U = \frac{P d^2}{16 \pi \mu l} \frac{sen\ \theta \sqrt{1 + 2\cos\theta} \left(sen\ \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \cos\theta}.$$

Se for S a área total da camada pulverulenta, a área útil da secção dos poros é dada por

$$n S = \left(1 - \frac{\pi}{4} cosec\ \theta \right) S,$$

e o caudal que passa através de S é

$$Q = \frac{P d^2 S}{16 \pi \mu l} \frac{\sqrt{1 + 2\cos\theta} \left(sen\ \theta - \frac{\pi}{4} \right)^2}{1 + \cos\theta},$$

ou ainda

$$Q = \frac{P d^2 S}{16 \pi \mu l} \frac{\sqrt{1 + 2\cos\theta}\ (1 - \cos\theta) \left(sen\ \theta - \frac{\pi}{4} \right)^2}{sen^2\ \theta}.$$

Esta expressão pode simplificar-se: da equação (3) tira-se que

$$\sqrt{1 + 2\cos\theta}\ (1 - \cos\theta) = \frac{\frac{\pi}{6}}{1 - p},$$

e fazendo

$$\frac{(1 - p)\, sen^2\ \theta}{\left(sen\ \theta - \frac{\pi}{4} \right)^2} = \frac{1 - p}{\left(1 - \frac{\pi}{4} cosec\ \theta \right)^2} = K, \quad \ldots\ldots (5)$$

vem

$$Q = \frac{P\, d^2\, S}{96\, \mu\, l\, K} \cdot \qquad \ldots\ldots (6)$$

Medindo P em centímetros de água a 4° C., chega-se à conhecida fórmula, expressa em unidades c. g. s.,

$$Q = [\,1{,}0094\,]\, \frac{P\, d^2\, S}{\mu\, l\, K} \qquad cm^3/s$$

em que [1,0094] representa o logaritmo dum factor. Esta é a expressão original de Slichter.

A expressão anterior (6) pode escrever-se em função da perda de carga unitária

$$Q = \frac{\overline{w}\; d^2\; SJ}{96\, \mu\, K}, \qquad \ldots\ldots (7)$$

ou, para a temperatura de 10° C.,

$$Q = 780\, \frac{d^2\, SJ}{K},$$

por ser

$$\mu_{10^\circ} = 0{,}0131.\ g/cm.s$$

A velocidade de filtração é, finalmente,

$$u = 7{,}80\, \frac{d^2\, J}{K}, \qquad cm/s \qquad \ldots\ldots (8)$$

exprimindo d em milímetros. K é função de θ e de p que, por sua vez, depende também de θ. Slichter calculou uma tabela com alguns valores de K, por intermédio de (5). A 5.ª coluna foi acrescentada à tabela original para efeito de permitir a modificação da fórmula que a seguir é apresentada.

θ	p	K	$\frac{1}{K}$	$\frac{p}{45}$
60°	26,0°/₀	85,6	0,0117	0,578
65	33,3	37,5	0,0267	0,740
70	38,6	22,6	0,0442	0,858
75	42,8	16,4	0,0609	0,951
80	45,4	13,3	0,0752	1,009
85	47,1	12,0	0,0833	1,047
90	47,6	11,4	0,0877	1,058

A equação (8) pode apresentar outro aspecto, substituindo nela o valor de $1/K$ por uma expressão dependente de p, ou melhor, de $p/45$; a escolha da variável $p/45$ em vez de p, tem por fim permitir fazer a comparação desta fórmula com a de Hatch, que adiante será descrita.

Com os valores da tabela anterior pode determinar-se gràficamente as constantes da expressão

$$\frac{1}{K} = C\left(\frac{p}{45}\right)^{x},$$

a qual se supõe representar a dependência de K com p.

Da figura 14, cujos eixos estão graduados logarìtmicamente, tira-se que a ordenada na origem da recta nela representada é

$$C = 0{,}074$$

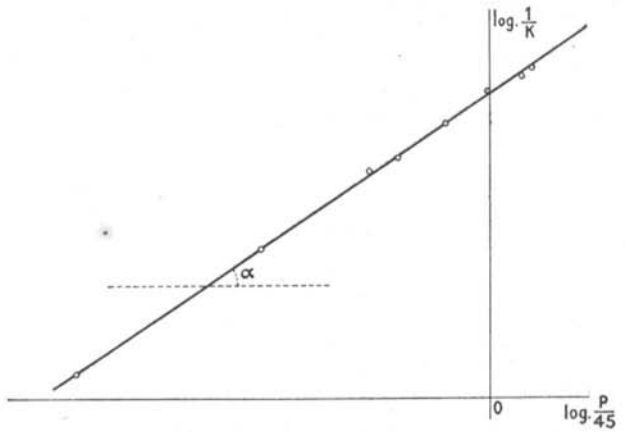


FIG 14

e

$$x = tg\ \alpha = 3{,}3$$

e portanto

$$\frac{1}{K} = 0{,}074\left(\frac{p}{45}\right)^{3{,}3}.$$

Substituindo este valor em (8) tem-se (o índice s indica que é segundo Slichter),

$$u = 0{,}577\left(\frac{p}{45}\right)^{3{,}3} d_S^2 J. \qquad \ldots\ldots (9)$$

Uma última correcção deverá ainda ser feita a esta expressão, quando a temperatura da água não for a de 10o C. Introduzindo o factor correctivo admitido por Hazen, (9) toma a forma final

$$u = 0{,}577 \left(\frac{p}{45}\right)^{3{,}3} d_s^2 \,(0{,}7 + 0{,}03\,t) J \,. \qquad cm/s$$

O coeficiente de permeabilidade é pois

$$\mathbf{K} = 0{,}577 \left(\frac{p}{45}\right)^{3{,}3} d_s^2 \,(0{,}7 + 0{,}03\,t) \,. \qquad cm/s$$

Deve notar-se que os valores de u obtidos por meio desta fórmula, quando a temperatura for diferente de 10º C., afastam-se dos verdadeiros, e tanto mais quanto a temperatura se afastar de 10º C.; se se quiser obter valores mais exactos, deve usar-se a fórmula (7) que pode escrever-se, no sistema c. g. s., mas exprimindo d_s em milímetros,

$$u = 0{,}102 \frac{d_s^2}{\mu\, K} J \,, \qquad cm/s$$

ou ainda

$$u = 0{,}00755 \frac{d_s^2}{\mu} \left(\frac{p}{45}\right)^{3{,}3} J. \qquad cm/s$$

Os valores do coeficiente de viscosidade da água para diversas temperaturas estão incluidos no quadro seguinte:

t^o C.	μ
8º	0,0138
10	0,0131
12	0,0124
14	0,0117
16	0,0111
18	0,0106
20	0,0101
22	0,0096

Slichter aconselhou que a determinação do diâmetro efectivo fosse efectuada pelo método do aspirador. Como o método de contagem e pesagem, até essa altura usado, dava resultados falsos, principalmente quando os diâmetros dos grãos componentes eram muito variados, King sugeriu o método atrás denominado e procurou a ajuda de Slichter para que este autor fizesse a investigação matemática deste processo. Dos seus estudos resultou a fórmula

$$d_S^2 = 8{,}778 \frac{K}{STJ} ,$$

em que d_S é expresso em milímetros, K a função dependente da porosidade já conhecida, T o tempo, em minutos, necessário para que passem 5000 centímetros cúbicos de ar, à temperatura de 20° C. através da amostra a ensaiar, S a área da amostra em centímetros quadrados e J a perda de carga unitária. Esta fórmula não é senão a (7) aplicada a estas condições especiais.

Do que acima está exposto conclue-se que, para se fazer a aplicação da fórmula de Slichter (método indirecto), é necessário recorrer ao emprego dum método directo, mais complicado talvez na sua realização, para a determinação de d_S; parece que, visto ter de se realizar um ensaio de permeabilidade ao ar, será mais fácil talvez proceder imediatamente ao ensaio da permeabilidade à água da amostra em questão.

Por este motivo, vários autores tentaram substituir o diâmetro efectivo de Slichter pelo diâmetro efectivo de Hazen nas fórmulas (7) ou (8); assim o fizeram, por exemplo, Smith nos seus estudos em Rillito Valley, Arizona, e Lee em Gilla Valley e Salt River Valley, no estado de Arizona também. Os resultados não foram, porém, de molde a encorajar a continuação do processo.

Lei de Baldwin-Wiseman:

Este investigador apresentou, em 1910, uma nova fórmula, que, na sua opinião, representava mais exactamente a percolação através das areias filtrantes.

Baldwin-Wiseman, tentando aplicar a fórmula de Hazen a vários filtros de areia ingleses, constatou que a sua aplicação

resultava deficiente, pois obtinha valores para a velocidade de percolação muito diferentes dos fornecidos pelas medidas directas. Partindo do princípio que a deficiência da fórmula era devida à pouca precisão com que o coeficiente de Hazen *c* estava determinado e que, além disso, o diâmetro efectivo definido pelo mesmo autor nem sempre representava com a exactidão necessária a influência do tamanho dos grãos, o autor dedicou-se a laboriosos ensaios no sentido de encontrar uma fórmula mais precisa.

Começou por determinar a influência da capacidade de armazenamento ou retenção específica das areias sobre a velodade de percolação, a qual devia traduzir *duma maneira mais aproximada,* segundo a sua opinião, a influência do diâmetro dos grãos, da porosidade etc. Tendo determinado a capacidade de armazenamento pelo método vulgar, exprimiu-a em espessura duma película ideal que envolvesse cada grão, e verificou que essa espessura variava em muito maior grau do que a porosidade. Embora essa película ideal não tivesse, provàvelmente, existência real, a capacidade de armazenamento existia e a sua variação caracterizaria mais concretamente a dependência da velocidade de percolação do tamanho, forma e disposição dos grãos constituintes.

Ao verificar esta hipótese, o autor chegou à conclusão que a variação da velocidade de percolação com a espessura da película era directa, e que a lei assim encontrada se verificava com mais exactidão nos materiais filtrantes homogéneos do que nos heterogéneos, o que, aliás, não é de admirar, dada a indeterminação dos pontos de contacto nestes últimos.

Outro factor que Baldwin-Wiseman considerou como responsável na variação da velocidade de percolação foi a superfície dos grãos por unidade de volume; dos ensaios conduzidos para determinar a influência desta superfície específica resultou que a variação era inversamente proporcional.

Durante as experiências, realizadas com diferentes perdas de carga (variando entre 0,5 e 40,0) o autor constatou que a percolação não era directamente proporcional a estas, e as divergências eram maiores para as baixas pressões do que para as altas (nas baixas pressões a carga variava entre 7,5 e 37,5 cm

e nas altas entre 40 e 60 m; para as primeiras, as espessuras das camadas percoladoras variavam entre 7,5 e 37,5 cm e para as segundas entre 60 e 130 cm). Estas divergências, que eram relativamente pequenas nos primeiros ensaios, nos quais a água e as areias eram eram isentas de impurezas, revelaram-se consideràvelmente maiores quando o estado das camadas percoladoras era o de relativa obstrução. O autor introduziu então na sua fórmula um coeficiente k, constante para cada valor da perda de carga mas que diminuía quando esta aumentava.

Considerando as diversas curvas de variação, a fórmula da velocidade de percolação apresentou-se com a seguinte forma:

$$u = k \frac{e^{pf}}{a} \left(\frac{t' + 10}{60} \right) J \qquad \ldots\ldots (10)$$

em que p representa a porosidade, f a espessura da película ideal em polegadas, a a superfície dos grãos contidos na unidade de volume, expressa em pés^{-1}, h e l respectivamente a carga e a espessura da camada filtrante medidas na mesma unidade, t' a temperatura em graus Fahrenheit e u a velocidade de percolação em pés por hora; e representa a base dos logaritmos neperianos.

A constante k, segundo os resultados das experiências e para as unidades escolhidas pelo autor, tem o valor 600 quando $J=1$, e a sua variação é, aproximadamente, inversamente proporcional à raiz quadrada da perda de carga como se pode constatar no quadro abaixo:

Valores de J	Valores de k	Vaiores de k'
0,5	900	0,250
1	600	0,166
2	400	0,111
5	250	0,069
10	180	0,050
20	130	0,036
30	110	0,031
40	100	0,028

Se se medir f em milímetros, a em centímetros quadrados por centímetro cúbico e a temperatura em graus centígrados, a expressão (10) toma a forma

$$u = k' \frac{e^{p\frac{f}{25,4}}}{a} (0,3 + 0,07\, t)\, J\,, \qquad cm/s$$

e portanto

$$\boxed{\mathbf{K} = k' \frac{e^{p\frac{f}{25,4}}}{a} (0,3 + 0.07\, t)\,,} \qquad cm/s$$

na qual k' passa a ter os valores indicados na 3.ª coluna do quadro atrás, para que a velocidade venha expressa em centímetros por segundo.

Lei de Terzaghi:

Terzaghi, o iniciador da mecânica do solo, quando estudava, em 1925, as diferenças entre a areia e a argila, estabeleceu fórmulas semi-empíricas destinadas a obter a permeabilidade destes materiais. Admitindo a validade da lei de Darcy tanto para o movimento da água através da areia como da argila, desde que a carga seja moderada, e comparando a fórmula de Slichter, obtida teòricamente, com a de Hazen, explicou que os resultados diferentes a que conduzem as duas fórmulas, quando aplicadas a um mesmo material, eram devidos ao facto de Slichter ter suposto os vazios sensìvelmente iguais entre si, o que não acontece na realidade. A fórmula que Terzaghi deduziu baseia-se na hipótese de que as secções maiores dos canalículos pelos quais a água se move são, pelo menos, cinco vezes maiores que as mais estreitas. Então a perda de carga unitária através destas será, pelo menos também, 25 vezes maior que naquelas, desde que, evidentemente, o caudal seja o mesmo.

Dada esta proporção, o movimento da água através da areia pode supor-se análogo àquele que teria lugar através dum conjunto de peneiros colocados paralelamente; a resistência ao movimento limita-se à existente na passagem dos peneiros, sendo desprezável a que existe entre eles.

O autor criou também a noção de um volume limite para os vazios, uma vez atingido o qual a permeabilidade é nula; encontrou por via empírica, para esse volume limite o correspondente valor de $n = 0{,}13$.

A fórmula a que o autor chegou foi, para a areia,

$$u = C \frac{\mu_o}{\mu_t} \left(\frac{n - 0{,}13}{\sqrt[3]{1 - n}} \right)^2 d_H^2 J$$

em que C é um coeficiente que depende da forma dos grãos e da uniformidade da areia, μ_o e μ_t os coeficientes de viscosidade absoluta da água a10° C. e à temperatura t respectivamente, n a proporção de vazios e d_H o diâmetro efectivo segundo Hazen, medido em centímetros. Os valores de C variam entre 800 (grãos arredondados e grande uniformidade) e 460 (grãos de forma irregular e pequena uniformidade). Exprimindo μ_o em unidades do sistema c. g. s. e d_H em milímetros, a fórmula acima pode escrever-se

$$u = \frac{C_1}{\mu_t} \left(\frac{n - 0{,}13}{\sqrt[3]{1 - n}} \right)^2 d_H^2 J \qquad cm/s$$

em que

$$0{,}1048 \geq C_1 \geq 0{,}0603 .$$

O coeficiente de permeabilidade é então,

$$\boxed{\mathbf{K} = \frac{C_1}{\mu_t} \left(\frac{n - 0{,}13}{\sqrt[3]{1 - n}} \right)^2 d_H^2 .} \qquad cm/s$$

Sobre a determinação da permeabilidade das argilas, Terzaghi também fez vários ensaios. Verificou em primeiro lugar que a lei de Darcy era também válida, pelo menos para o movimento da água em argilas com médio ou pequeno grau de humidade (consistência plástica ou semi-sólida). Verificou também que a fórmula acima, deduzida para as areias, não se podia aplicar às argilas pelas razões seguintes:

1.ª — As partículas de argila diferem dos grãos de areia pela sua forma; aquelas tem geralmente a forma de placas ou

escamas muito finas e flexíveis e os interstícios entre elas tem por isso a forma de fendas.

Um estudo conduzido sobre esta verificação conduziu à expressão seguinte:

$$u = \frac{c}{\mu_0}\frac{\mu_0}{\mu_t}(e - 0{,}15)^3 (1 + e) d_H^2 J,$$

onde e representa o índice de vazios, o qual está ligado à proporção de vazios pela relação já conhecida,

$$e = \frac{n}{1 - n}.$$

2.ª — A viscosidade da água aumenta se as dimensões transversais dos interstícios diminuem, e se estes são da ordem de grandeza de 0,0001 mm o aumento é notável. Este facto foi plenamente constatado mas as razões justificativas variam com os autores. Devido a esta segunda razão, Terzaghi modificou a fórmula anterior, escrevendo,

$$u = \frac{c}{\mu_0}\frac{\mu_0}{\mu_t}\frac{(e - 0{,}15)^{11}(1 + e)}{(e - 0{,}15)^8 + \frac{c_1}{d_H^2}} d_H^2 J.$$

O coeficiente de permeabilidade das argilas é dado portanto por

$$\boxed{\mathbf{K} = \frac{c}{\mu_0}\frac{\mu_0}{\mu_t}\frac{(e - 0{,}15)^{11}(1 + e)}{(e - 0{,}15)^8 + \frac{c_1}{d_H^2}} d_H^2} \quad \ldots\ldots (11)$$

O autor ainda apresentou expressões análogas a (11) que permitem relacionar as argilas cujos diâmetros efectivos são d_H e md_H. Se, por exemplo, para a primeira é

$$\mathbf{K} = 5{,}56 \times 10^{-9}\frac{\mu_0}{\mu_t}\frac{(e - 0{,}15)^{11}(1 + e)}{\mu_t (e - 0{,}15)^8 + 0{,}0166}, \; cm/s$$

para a segunda será

$$\mathbf{K} = 5{,}56 \times 10^{-9}\frac{\mu_0}{\mu_t}\frac{(e - 0{,}15)^{11}(1 + e)}{(e - 0{,}15)^8 + \frac{0{,}0166}{m^8}} m^2. \quad cm/s$$

Terzaghi aconselha a usar estas expressões para determinar m, e portanto md_H, em vez de seguir os processos já citados da análise mecânica, medidas microscópicas, separação pelo vento, centrifugação, etc., que são difíceis e delicados; é necessário porém conhecer a curva permeabilidade-índice de vazios da argila em estudo.

Lei de Kozeny:

Em 1927, Kozeny deduziu uma nova expressão da velocidade de filtração. A sua dedução baseia-se também nas leis de Darcy e Poiseuille e supõe portanto que o movimento da água nos poros é puramente laminar; como se vai ver acompanha muito de perto as considerações teóricas feitas por Slichter, mas, por assim dizer, completa-as, chegando a uma expressão mais exacta.

O caudal Q que passa através da secção dum dado meio permeável de área S é dado por

$$Q = u\ S = u_e\ s\ ,$$

em que u é a velocidade de filtração cuja expressão se procura determinar, u_e é a velocidade efectiva média nos poros e s a área da secção dos vazios existentes em S.

Desta igualdade se tira que

$$u = u_e \frac{s}{S}$$

isto é, u é igual ao produto de duas grandezas independentes.

Como se viu atrás na dedução da lei de Slichter, seja qual for a forma da secção dos tubos em que se dá o movimento, se este é laminar, é válida a equação

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u'_e = \Delta\, u'_e = -\frac{\overline{w} J}{\mu}\ , \qquad \ldots\ldots\ (12)$$

em que u'_e representa a velocidade efectiva em cada ponto da secção.

Se for s_p a área da secção dum desses tubos, fazendo a mudança de variáveis

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{s_p}},$$

e

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{s_p}},$$

a equação (12) toma o aspecto

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) u'_e = -\frac{\overline{w} J s_p}{\mu},$$

a cuja solução geral se pode dar a forma

$$u'_e = \frac{\overline{w} J s_p}{\mu} F\left(\frac{x}{\sqrt{s_p}}, \frac{y}{\sqrt{s_p}}\right), \qquad \ldots\ldots (13$$

em que, segundo o método de Monge-Ampère,

$$F\left(\frac{x}{\sqrt{s_p}}, \frac{y}{\sqrt{s_p}}\right) = -\frac{x^2 + y^2}{4 s_p} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \Phi_n (x + i y)$$

sendo Φ_n uma função harmónica e a_n uma constante; introduzindo as coordenadas polares r e θ,

$$F\left(\frac{r \cos\theta}{\sqrt{s_p}}, \frac{r \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{s_p}}\right) = -\frac{r^2}{4 s_p} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \Phi_n (r e^{i\theta}) \ldots\ldots (14)$$

Nos pontos situados sobre as paredes, de coordenadas ρ e θ, deve verificar-se a condição

$$u'_e = 0$$

o que exige

$$\frac{\rho^2}{4 s_p} = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \Phi_n (\rho e^{i\theta}).$$

Chamando χ_p ao perímetro molhado da secção s_p e ρ_m ao raio do círculo cujo perímetro é o mesmo, tem-se

$$\rho_m = \frac{\chi_p}{2\pi},$$

e a expressão (14) pode escrever-se da forma seguinte

$$F\left(\frac{r\cos\theta}{\sqrt{s_p}}, \frac{r\,sen\,\theta}{\sqrt{s_p}}\right) = \frac{\rho_m^2}{4 s_p}\left[\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \Phi_n(r e^{i\theta}) \frac{4 s_p}{\rho_m^2} - \frac{r^2}{\rho_m^2}\right]$$

$$= \frac{\chi_p^2}{16\pi^2 s_p}\left[\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \Phi_n(r e^{i\theta}) \frac{4 s_p}{\rho_m^2} - \frac{r^2}{\rho_m^2}\right]$$

$$= \frac{\chi_p^2}{16\pi^2 s_p} K.$$

Substituindo este valor em (13), a velocidade efectiva média vem

$$u_e = \frac{\overline{w} J s_p}{\mu} \frac{\chi_p^2}{16\pi^2 s_p} \frac{\iint K r\,dr\,d\theta}{s_p}. \qquad \ldots\ldots (15)$$

É necessário agora calcular o valor de $\frac{\iint K r\,dr\,d\theta}{s_p}$; vê-se da expressão (15) que, relativamente a uma secção, quanto maior é o perímetro, menor tem de ser K visto que, no caso limite, todos os pontos são periféricos e $u_e = 0$.

De entre todos os valores que K pode tomar, escolhe-se, com Kozeny, o valor médio tal que

$$\frac{\iint K r\,dr\,d\theta}{s_p} = K_m = 16 c_1 \pi^2 \frac{s_p^2}{\chi_p^4}$$

em que c_1 é um valor constante para cada forma de secção. Com este valor de K_m satisfaz-se à condição de independência entre u_e e s/S.

De facto, substituindo em (15), e considerando agora a área total dos poros, obtem-se

$$u_e = \frac{\overline{w}}{\mu} \frac{J}{} \frac{s}{} c_1 \frac{s}{\chi^2} = \frac{\overline{w}}{\mu} J c_1 \frac{s}{\chi^2} \frac{s}{S} S$$

onde se verifica que u_e não varia se s/S variar. (1)

Comparando a primeira igualdade com os valores obtidos anteriormente (na lei de Slichter), quando se determinaram as expressões de u_e para os tubos com diversas formas de secção, vê-se que $c_1 \frac{s}{\chi^2}$ é igual à constante numérica dessas expressões. A constante c_1 tem, por conseguinte, os valores abaixo:

	secção circular	secção elíptica $e=0{,}600$	secção elíptica $e=0{,}714$	secção elíptica $e=0{,}866$	secção quadrada	secção rectangular $b/a=1/2$	secção triang.lar equilát.
coeficiente de $\frac{\overline{w}\,A\,J}{\mu}$	0,03979	0,03882	0,03740	0,03183	0,03515	0,02860	0,02837
s/χ^2	0,07958	0,07811	0,07590	0,06690	0,06250	0,05556	0,04811
c_1	0,500	0,496	0,492	0,475	0,562	0,515	0,600

A velocidade da filtração é então

$$u = \frac{\overline{w}\,J}{\mu}\, c_1 \frac{s}{S} \left(\frac{s}{\chi}\right)^2.$$

Como s/S e s/χ são independentes e além disso a equação anterior é idêntica à de Darcy, é lícito escrever-se

$$\left.\begin{aligned} \frac{s}{S} &= \text{constante} \\ \frac{s}{\chi} &= \text{constante} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (16)$$

(1) Com efeito assim é: se numa secção S existem n secções de poros, a área de cada um será s/n e o perímetro molhado χ/n. Se, por qualquer motivo, se obstruir um poro, ter-se-á como nova área total dos poros

$$s_1 = s - \frac{s}{n} = \frac{n-1}{n}\, s\,,$$

e como novo perímetro total

$$\chi_1 = \chi - \frac{\chi}{n} = \frac{n-1}{n}\, \chi\,,$$

donde

$$\frac{s_1}{\chi_1^2}\,\frac{s_1}{S} = \frac{s}{\chi^2}\,\frac{s}{S}$$

Se se fizer a hipótese dos poros serem cilíndricos e se for l o seu comprimento comum, ter-se-á como volume total

$$S\,l = V$$

e como volume de vazios

$$s\,l = V_p\,.$$

As duas igualdades atrás podem escrever-se então

$$\frac{s}{S} = \frac{V_p}{V} = p\,,$$

e

$$\frac{s}{\chi} = \frac{s\,l\,S}{\chi\,l\,S} = \frac{p\,V}{\Omega}$$

em que p é a porosidade e Ω é a superfície interior dos poros.

Estas expressões definem as propriedades geométricas do terreno ideal, que é definido, por sua vez, pela hipótese acima. Neste terreno ideal, a velocidade de filtração toma a forma

$$u = c_1 \frac{p^3}{\Omega^2} V^2 \frac{\overline{w}\,J}{\mu}.$$

Para fazer a aplicação desta fórmula a um terreno real é necessário ainda fazer uma observação a respeito da perda de carga J. Com efeito, este valor, que representa a perda de carga no terreno ideal, é de facto menor, porque o comprimento dos poros no terreno real é maior. Supondo que a perda de carga total é a mesma nos dois terrenos, verificar-se-á a igualdade

$$J_r\,l_r = J\,l$$

em que l_r é o comprimento real dos poros.

A velocidade de filtração virá então

$$u = c_1 \frac{p^3}{\Omega^2} V^2 \frac{\overline{w}}{\mu} \frac{l}{l_r} J\,. \qquad \ldots\ldots (17)$$

Teòricamente

$$\frac{l}{l_r} \simeq \frac{2}{\pi} = 0{,}64,$$

porém, na prática, os resultados de muitas experiências conduziram a um valor de $l/l_r \cong 1/2$; na continuação será usado este valor, seguindo-se assim o conselho de Kozeny.

Para

$$c_1 \cong 0{,}6,$$

e

$$\mu_{10^\circ C.} = 0{,}00001335\ g.\ s/cm^2,$$ (no sistema g−peso. cm. s)

a expressão (17) toma a forma

$$u = 22470\ \frac{p^3}{\Omega^2}\ V^2\ J\ . \qquad \ldots\ldots\ (18)$$

Kozeny considera, para efeito da determinação de $(V/\Omega)^2$, um novo terreno ideal constituido por grãos esféricos de diâmetro tal que a porosidade e a superfície total dos grãos se conserve. Se for n o número de grãos ter-se-á

$$\left.\begin{aligned} n\ \pi\ d_K^2 &= \Omega \\ \frac{n\ \pi\ d_K^3}{6} &= (1 - p)\ V, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ (19)$$

e

ou, dividindo membro a membro,

$$d_K = \frac{6\ (1 - p)}{\Omega}\ V \qquad \ldots\ldots\ (20)$$

ou ainda,

$$\frac{V}{\Omega} = \frac{d_K}{6\ (1 - p)}\ ,$$

valor este que substituido em (18) dá finalmente

$$u = 6{,}25\ \frac{p^3}{(1 - p)^2}\ d_K^2\ J\ , \qquad cm/s$$

com d_K expresso em milímetros.

Para uma temperatura diferente de 10° C., será

$$u = 6{,}25\ \frac{p^3}{(1 - p)^2}\ d_K^2\ (0{,}7 + 0{,}03\ t)\ J. \qquad cm/s$$

O coeficiente de permeabilidade é então

$$\boxed{\mathbf{K} = 6{,}25\ \frac{p^3}{(1 - p)^2}\ d_K^2\ (\ 0{,}7 + 0{,}03\ t\ )} \qquad cm/s$$

O diâmetro d_K de todos os grãos que constituem o terreno ideal de Kozeny é denominado pelo autor, também, diâmetro eficaz. Deve-se tomar em consideração, porém, que a sua definição é diferente da dada pelos autores precedentes. Com efeito, neste terreno ideal deve conservar-se a porosidade e a superfície total dos grãos existentes na amostra em estudo.

A determinação de d_K, também segundo Kozeny, faz-se do seguinte modo:

Dada uma areia ou um terreno, constroi-se a sua curva granulométrica acumulada. Por meio desta sabe-se que existe um certo número de grupos de grãos, em cada um dos quais o diâmetro está compreendido entre um máximo e um mínimo limites, relativamente próximos. Cada grupo tem um certo peso Δg que se supõe expresso pelo mesmo número que a percentagem em que existe na amostra.

Portanto

$$\Sigma \Delta g = 1.$$

Substituindo em cada grupo os grãos por esferas, todas com o mesmo diâmetro d' (compreendido entre o máximo e o mínimo) a superfície total dos grãos será

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_n ,$$

em que Ω_1, Ω_2 ... representam as superfícies de todos os grãos esféricos de cada grupo; aquelas são, por sua vez, segundo a primeira das equações (19),

$$\Omega_1 = n_1 \pi d_1'^2 , \quad \Omega_2 = n_2 \pi d_2'^2 \ldots \quad \Omega_n = n_n \pi d_n'^2$$

e, pela segunda das equações (19) obtém-se,

$$\frac{\Delta g_1}{w}(1-p) = n_1 \frac{\pi d_1'^3}{6}$$

$$\frac{\Delta g_2}{w}(1-p) = n_2 \frac{\pi d_2'^3}{6}$$

. . . . . .

$$\frac{\Delta g_n}{w}(1-p) = n_n \frac{\pi d_n'^3}{6} .$$

Dividindo membro a membro e resolvendo em ordem a Ω vem

$$\Omega_1 = \frac{6(1-p)}{\overline{w}} \frac{\Delta g_1}{d'_1}$$

$$\Omega_2 = \frac{6(1-p)}{\overline{w}} \frac{\Delta g_2}{d'_2}$$

. . . . . .

$$\Omega_n = \frac{6(1-p)}{\overline{w}} \frac{\Delta g_n}{d'_n} .$$

e, substituindo estes valores na soma atrás indicada, vem

$$\Omega = \frac{6(1-p)}{\overline{w}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\Delta g_k}{d'_k} ,$$

ou ainda

$$\frac{6(1-p)}{\Omega} = \frac{\overline{w}}{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\Delta g_k}{d'_k}} .$$

No terreno ideal de grãos com diâmetro d_K, segundo (20), será

$$d_K = \frac{6(1-p)}{\Omega} \frac{\Sigma \Delta g}{\overline{w}}$$

e, substituindo $\frac{6(1-p)}{\Omega}$ pelo seu valor, vem finalmente, por por ser $\Sigma \Delta g = 1$,

$$\frac{1}{d_K} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\Delta g_k}{d'_k} . \qquad \ldots\ldots (21)$$

O valor de cada $1/d'_k$ calcula-se, achando a média harmónica pesada,

$$\frac{1}{d'_k} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{d_k} + \frac{2}{d_k + d_{k+1}} + \frac{1}{d_{k+1}} \right) ,$$

sendo d_k e d_{k+1} os diâmetros mínimo e máximo de cada grupo (diâmetros de dois peneiros adjacentes). Kozeny verificou que

os valores obtidos desta forma, compreendidos entre as médias aritmética (superior) e geométrica (inferior), eram os que conduziam a resultados mais exactos.

O cômputo de d_K faz-se geralmente por via gráfica.

A partir de vários pontos da curva granulométrica acumulada, curva $A\,B$ da figura 15, marquem-se no sentido positivo do eixo dos *dd* segmentos iguais aos inversos dos diâmetros, abscissas dos mesmos pontos. Trace-se a curva, lugar geométrico

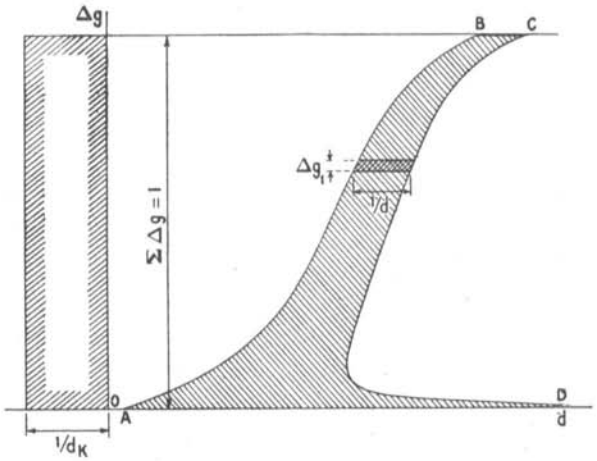


FIG. 15

das extremidades dos segmentos assim desenhados. Obtém-se desta forma a área $A\,B\,C\,D$ que é o somatório procurado $\Sigma \frac{\Delta g}{d'}$.

O diâmetro eficaz será obtido procurando o lado do rectângulo que tenha a mesma área que $A\,B\,C\,D$ e cujo outro lado seja $\Sigma\,\Delta\,g = 1$; o lado procurado é $1/d_K$.

Usando este processo, todavia, nem sempre a determinação de d_K é feita com a suficiente exactidão, e tanto menor será esta quanto menor for o diâmetro dos grãos. De facto, se estes forem muito pequenos os seus inversos serão muito grandes, e portanto o ramo inferior da curva $C\,D$ torna-se muito extenso e com um traçado muito impreciso, tendendo a ser assintótico ao eixo dos diâmetros; tal acontece, por exemplo, quando na amostra em estudo existir argila.

Neste caso, à expressão (21) pode dar-se uma nova forma, destinada a atender à existência de grãos de diâmetro muito pequeno. Se se diminuirem os intervalos Δ cada vez mais, pode escrever-se (21) com a forma

$$\int \frac{dg}{d} = \frac{1}{d_K},$$

e integrando por partes,

$$\frac{1}{d_K} = \frac{g}{d} + \int \frac{g}{d^2}\, d(d).$$

Kozeny demonstrou, por meio do cálculo das probabilidades, que a segunda parcela do segundo termo tem um valor finito para o intervalo dos diâmetros 0 a d_1 e apresentou a fórmula final, aplicável na prática,

$$\frac{1}{d_K} \simeq \sum_{k=2}^{k=n} \frac{\Delta g_k}{d'_k} + \frac{3\,\Delta g_1}{2\,d_1}$$

Lei de Fair e Hatch:

Gordon Fair e Loranus Hatch apresentaram, em 1933, uma fórmula da velocidade de filtração especialmente destinada ás areias usadas nos filtros, e que foi deduzida com o auxílio da análise dimensional. Esta fórmula, muito parecida com a de Kozeny mas mais completa, visto que considera de maneira mais explícita a forma dos grãos, pode aplicar-se igualmente a outros materiais pulverulentos, estratificados ou não.

As hipóteses feitas por estes dois investigadores são, na sua essência, as mesmas que Slichter e Kozeny estabeleceram nas suas deduções.

Partindo do princípio que o movimento dos líquidos através dos meios pulverulentos é de natureza puramente laminar e que é regido pelos mesmos factores que o movimento laminar nos tubos, Fair e Hatch entenderam que um estudo mais desenvolvido da hidráulica dos tubos e orientado segundo as novas circunstâncias, devia conduzir à determinação da permeabilidade.

Uma vez que se conheçam os factores que influem no movimento laminar dum líquido num tubo, a análise dimensional fornece, quase que imediatamente, a expressão da velocidade de filtração. Começando por estudar um tubo de secção circular, as múltiplas constatações experimentais indicaram que esses factores são:

a) Característica geométrica: o diâmetro d;

b) Característica física: a viscosidade absoluta μ;

c) Característica cinemática: a velocidade efectiva média u_e, e

d) Característica dinâmica: a variação de pressão $-dp/dx$.

Entre estes factores existe uma relação

$$F\left(d, u_e, \mu, -\frac{dp}{dx}\right)$$

que, pelo conhecido teorema dos $\pi\,\pi$, se pode escrever,

$$-\frac{d^2\frac{dp}{dx}}{u_e\ \mu} = K$$

ou, visto $-\frac{dp}{dx} = \overline{w}J$,

$$J = \frac{h}{l} = \frac{K}{g}\ \frac{\mu}{\rho}\ \frac{u_e}{d^2} \qquad \ldots\ldots (22)$$

onde K toma o valor 32, como fàcilmente se verificava.

Na expressão (22) h representa a altura correspondente à diferença de pressões nas extremidades do tubo e l o seu comprimento.

Se se considerar agora o tubo constituido pela sucessão dos poros, a expressão atrás deverá conservar o seu aspecto geral, embora sujeita a algumas alterações resultantes das novas condições. E assim, começando pela constante K, que no caso anterior tinha o valor 32, terá agora um novo valor, dada a desigualdade de áreas das sucessivas secções transversais e a natureza das paredes dos tubos considerados, umas vezes constituídas pelos grãos e outras pelo próprio líquido em repouso.

Enquanto os valores de h, g, ρ e μ permanecem inalteráveis (h será constante se se supuser que a diferença de pressões é a mesma nos dois casos) o mesmo não acontece a u, d e l que têm de ser analizados neste novo caso. Considere-se em primeiro lugar a velocidade e o comprimento.

a) Velocidade e comprimento: Assemelhando a camada do meio permeável a um conjunto de tubos de vários comprimentos e com a mesma secção, vê-se fàcilmente, fig. 16, que enquanto h for constante,

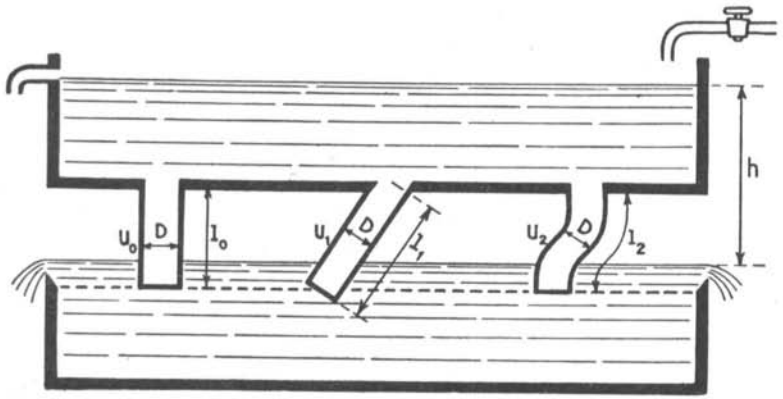


FIG. 16

$$h = \left(\frac{K}{g} \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{d^2} \right) l\, u_e = K_0\, u_{e0}\, l_0 = K_0\, u_{e1}\, l_1 = K_0\, u_{e2}\, l_2.$$

A hipótese dos tubos terem o mesmo diâmetro não é destituida de fundamento se se admitir a isotropia da camada. Conclue-se portanto que o produto ul é constante e por isso pode-se considerar a espessura da camada em vez do verdadeiro percurso das partículas líquidas, assim como a velocidade de filtração em vez da velocidade efectiva. Esta será, pois, substituída por $\frac{u}{p}$ em que u é a velocidade de filtração e p a porosidade.

b) Diâmetro: Fair e Hatch empregaram em vez do diâmetro, característica que neste caso define incompletamente a secção transversal por ser essencialmente variável, o raio

médio, que, como se sabe, é costume usar na hidráulica quando se pretendem caracterizar secções diferentes da circular.

No caso dum tubo ter-se-ia

$$R = \frac{s}{\chi}$$

$$= \frac{s\,l}{\chi\,l}$$

$$= \frac{\textit{volume da água contida no tubo}}{\textit{superfície interior do tubo}}\ ;$$

no caso em estudo escrever-se-á, por analogia,

$$R = \frac{\textit{volume de água}}{\textit{superfície dos grãos}}$$

ou, exprimindo R em função do volume dos grãos, tem-se que

$$\textit{volume de água} = p \times \textit{volume total}$$

$$= \frac{p}{1-p} \times \textit{volume ocupado pelos grãos},$$

e portanto

$$R = \frac{p}{1-p}\,\frac{V}{\Omega}\,.$$

Substituindo estes valores na expressão geral (22) obtém-se

$$\frac{h}{l} = \frac{K}{g}\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{u}{p}\left(\frac{1-p}{p}\right)^2\left(\frac{\Omega}{V}\right)^2, \qquad \ldots\ldots (23)$$

ou

$$u = \frac{g}{K}\,\frac{\rho}{\mu}\,\frac{p^3}{(1-p)^2}\left(\frac{\Omega}{V}\right)^2 J\,. \qquad \ldots\ldots (24)$$

Pela simples inspecção desta fórmula se verifica que o cociente V/Ω, chamado razão volume-área, é talvez o único factor de difícil determinação, pois varia não só com o diâmetro dos grãos mas também com a sua forma. Se se tiver uma areia ideal, constituída por grãos esféricos, todos com o mesmo diâmetro d_{FH} (diâmetro eficaz), escolhido de forma que a

permeabilidade desta seja igual à da areia da prática, a razão volume-área é

$$\frac{V}{\Omega} = \frac{d_{FH}}{6} .$$

No caso, porém, da areia da prática, a esfericidade dos grãos não existe, e por isso é natural que o denominador do segundo membro seja diferente de 6, variando de caso para caso. Pode escrever-se portanto a igualdade anterior, de uma maneira geral,

$$\frac{V}{\Omega} = \frac{d_{FH}}{F}$$

na qual d_{FH}, determinado por Fair e Hatch pela média geométrica dos diâmetros dos crivos adjacentes, é o factor que faz intervir o tamanho dos grãos, e F é o factor que entra em linha de conta com a forma dos grãos (factor de forma). Duma maneira geral, portanto, a fórmula (24) pode escrever-se

$$u = \frac{g}{K} \frac{\rho}{\mu} \frac{p^3}{(1-p)^2} \frac{d_{FH}^2}{F^2} J .$$

Realizando inúmeras e cuidadosas experiências, Fair e Hatch encontraram para K o valor 5, valor este depois confirmado pelas experiências realizadas pelo Comité da Divisão de Engenharia Sanitária da Sociedade Americana dos Engenheiros Civis.

Para $\mu_{10^\circ\,c.} = 0{,}0131$ (sistema c. g. s.) e exprimindo d_{FH} em milímetros, a velocidade de filtração é dada, finalmente, por

$$u = \frac{149{,}81}{F^2} \frac{p^3}{(1-p)^2} d_{FH}^2 \, (0{,}7 + 0{,}03\, t)\, J \quad cm/s \qquad \ldots\ldots (25)$$

sendo t a temperatura em graus centigrados, e o coeficiente de permeabilidade por

$$\mathbf{K} = \frac{149{,}81}{F^2} \frac{p^3}{(1-p)^2} d_{FH}^2 \, (0{,}7 + 0{,}03\, t) . \qquad cm/s$$

Os autores, baseados nos trabalhos de Martin e Bowes, realizados em Inglaterra, e em investigações próprias, sugeriram os seguintes valores para o factor de forma:

forma do grão	F
esférica	6,0
arredondada	6,1
sub-arredondada	6,4
angular	7,0
sub-angular	7,7

Na figura 17 representam-se os contornos de algumas areias consideradas pelos autores como prototipos dos valores acima dados.

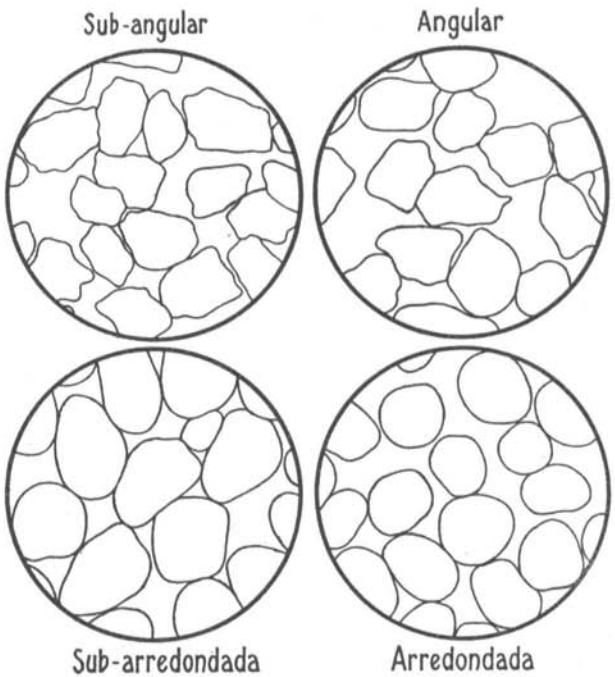


FIG. 17

A expressão (25) permite determinar a velocidade de filtração através duma camada permeável limpa e que tenha elevado

grau de uniformidade, isto é, pràticamente constituída por grãos cujo diâmetro esteja compreendido entre os de dois crivos adjacentes. Pode, todavia, aplicar-se também aos materiais filtrantes constituídos por misturas de grãos de diferentes diâmetros, desde que se determine convenientemente d_{FH}.

Dois casos se podem considerar:

1.° — *Materiais não estratificados:* Nestes materiais, idênticos ao de qualquer filtro lento, a composição granulométrica é a mesma em todos os pontos. Para qualquer volume é

$$\frac{V}{\Omega} = \frac{1}{F} \frac{\Sigma\, d^3 \ (\textit{de todos os grãos})}{\Sigma\, d^2 \ (\textit{de todos os grãos})}.$$

Este volume é constituído por grupos de grãos em cada um dos quais o diâmetro está compreendido entre dois valores próximos d_1 e d_2. Substituindo em cada grupo, de peso Δg, os grãos por outros de diâmetro

$$d = \sqrt{d_1\, d_2}$$

ter-se-á

$$\Omega = \frac{F}{d} \cdot \frac{\Delta g}{\overline{w}},$$

sendo $\overline{w}$ o peso específico comum dos grãos.

Para 100 gramas, por exemplo,

$$\Omega = \frac{F}{\overline{w}} \sum \frac{\Delta g}{d}$$

e

$$V = \frac{100}{\overline{w}}.$$

A razão volume-área será então

$$\frac{V}{\Omega} = \frac{100}{F} \frac{1}{\sum \frac{\Delta g}{d}},$$

ou, se as parcelas Δg forem expressas em percentagem do total,

$$\frac{V}{\Omega} = \frac{1}{F} \frac{1}{\sum \frac{\Delta g}{d}}.$$

A expressão (25) pode portanto aplicar-se com a condição de d_{FH} ser determinado por

$$\frac{1}{d_{FH}} = \sum \frac{\Delta g}{d} .$$

2.º – *Materiais estratificados:* As camadas de materiais estratificados, usadas nos filtros rápidos, são constituídas por grãos de vários diâmetros, estando os mais grossos situados no fundo e os mais finos à superfície. Sem alterar a porosidade, pode-se classificar de camada estratificada a que se obtém sobrepondo, por ordem decrescente de diâmetros, os diversos grupos de grãos em que se divide, por sucessivas crivagens, uma dada amostra.

A cada uma destas sub-camadas, de espessura l, pode aplicar-se a equação (23) resolvida em ordem a h (que representará a perda da carga respectiva). E assim

$$h = \frac{K}{g} \frac{\mu}{\varrho} \frac{(1-p)^2}{p^3} u \left(\frac{\Omega}{V} \right)^2 l$$

$$= \frac{K}{g} \frac{\mu}{\varrho} \frac{(1-p)^2}{p^3} u \frac{F^2}{d^2} l .$$

Se a espessura total da camada for L pode supor-se

$$\frac{l}{L} = \Delta g ,$$

e a perda de carga total será

$$H = \Sigma h = \frac{K}{g} \frac{\mu}{\varrho} \frac{(1-p)^2}{p^3} u L F^2 \sum \frac{\Delta g}{d^2} .$$

Resolvendo em ordem a u e substituindo as constantes pelos seus valores, obtém-se

$$u = \frac{149{,}81}{F^2} \frac{p^3}{(1-p)^2} \frac{1}{\sum \frac{\Delta g}{d^2}} J ;$$

para que se possa aplicar a expressão (25) é necessário determinar o diâmetro eficaz pela igualdade

$$\frac{1}{d^2_{FH}} = \sum \frac{\Delta g}{d^2}$$

Lei de Hulbert e Feben:

Esta lei, de carácter empírico, resultou de experiências aturadas feitas com o fim de estudar especialmente o funcionamento das camadas de areia estratificadas, usadas nos modernos filtros rápidos.

De facto, as múltiplas e variáveis condições em que o movimento da água se produz numa dessas camadas eram muito pouco conhecidas, pois toda a atenção tinha sido até aí dirigida para o estudo do movimento da água através de camadas de areia, tais como a de que é exemplo clássico o antigo filtro lento estudado por Allen Hazen.

O problema mais complexo num filtro rápido, segundo a opinião de Hulbert e Feben, é o problema da obstrução, fenómeno funcionalmente ainda bastante desconhecido e importantíssimo nos filtros deste tipo, onde a água deposita substâncias em suspensão depois do lançamento prévio de coagulantes; este problema encontra um poderoso auxílio para a sua resolução, ainda na opinião dos mesmos autores, no conhecimento perfeito da hidráulica do movimento da água limpa através duma camada estratificada de areia isenta de impurezas.

Foi com este fim que aqueles dois químicos, em 1933, empreenderam muitas centenas de ensaios, usando dois tipos de areias: umas, uniformes e com grãos arredondados, distinguindo-se umas das outras pelo diâmetro, e as outras com granulometrias e formas de grão diferentes, escolhidas entre aquelas que são usadas correntemente nos filtros rápidos.

A expressão procurada era da forma

$$h = f\,(l,\ u,\ p,\ d,\ t^l)$$

em que l é a espessura da camada de areia, u a velocidade de filtração, p a porosidade, d a característica representativa do tamanho dos grãos e t^l a temperatura; h representa a perda de

carga total. As unidades escolhidas pelos autores para medir estas variáveis foram, respectivamente, a polegada, o milhão de galões americanos por acre (1) e por dia, o milímetro, o grau Fahrenheit e o pé. Para se poder comparar a expressão obtida com as dos outros autores conservar-se-á sòmente a terceira, tomando para as outras, respectivamente, o centímetro, o centímetro cúbico por segundo e por centímetro quadrado (centímetro por segundo), o grau centígrado e o centímetro.

Como a perda de carga total é função de mais de uma variável, a maneira de obter mais fàcilmente esta função será isolar uma variável de cada vez e estudar o seu efeito individual; o isolamento é feito, como é óbvio, mantendo as variáveis fora de estudo com valor constante.

Em primeiro lugar, os autores procuraram a relação entre a perda de carga, a espessura da camada e o caudal por unidade de superfície ou seja a velocidade. Usaram-se as areias de grão uniforme e os ensaios foram realizados a temperatura constante (sendo regeitados todos os valores dos ensaios durante os quais a temperatura variasse mais de 1 grau Fahrenheit).

Estes ensaios dividiram-se em duas categorias: na primeira conservou-se constante a espessura da camada e na segunda a velocidade. Com os valores obtidos construiram-se gráficos pelos quais se constatou mais uma vez a estricta proporcionalidade que liga estas duas características à variável dependente h.

Para a determinação do efeito da temperatura, foram utilizadas as mesmas areias e as medidas da perda de carga foram reduzidas a uma espessura e velocidade bases de, respectivamente, 100 polegadas e 125 milhões de galões por acre e por dia. As curvas perda-de-carga (pés) — temperatura (graus Fahrenheit) obtidas foram, como era de esperar, do tipo já conhecido temperatura-viscosidade, e com grande aproximação, podiam ser representadas pela equação,

$$h = \frac{a}{t^l + k} .$$

(1) Um acre vale aproximadamente 4050 metros quadrados.

Nesta expressão k é teòricamente constante, e o seu valor, obtido depois de numerosas experiências, foi de 20,6.

Nas novas unidades escolhidas, a expressão acima escrever-se-á,

$$h = \frac{a}{1{,}8\,t + 52{,}6}\,.$$

A variável a foi calculada atendendo à influência do diâmetro dos grãos. Conservando as bases de 125 mg/ad e 100 polegadas de espessura e ainda a temperatura constante, fizeram-se novas experiências, agora para se construir gràficamente a curva a-diâmetro dos grãos (mm). Esta curva, quando representada em papel logarítmico, transformava-se em recta e a sua expressão matemática era da forma

$$a = \frac{123}{d_{FH}^{1{,}89}}\,,$$

em que d_{FH} representava o diâmetro dos grãos em milímetros (diâmetro obtido pelo método da contagem e pesagem).

Eliminando a entre as duas últimas expressões obteve-se

$$h = \frac{123}{d_{FH}^{1{,}89}\,(1{,}8\,t + 52{,}6)}$$

e se, em vez das condições bases anteriores, a velocidade e a espessura forem outras quaisquer u e l, pode-se ainda escrever, e nas novas unidades, em virtude de já verificada proporcionalidade,

$$h = \frac{108{,}93}{d_{FH}^{1{,}89}}\,\frac{ul}{1{,}8\;t\;+\;52{,}6}\,.$$

Usando esta expressão determinou-se em seguida a perda de carga em camadas constituídas por diferentes areias do segundo tipo, compararam-se os valores obtidos com as perdas de carga determinadas por meios directos, e verificou-se que aqueles eram sempre maiores do que estas. Estas diferenças só podiam ser atribuidas à influência da porosidade a qual ainda não tinha sido estudada.

Para a tomar em consideração, afectou-se o segundo termo da equação anterior de um coeficiente, c_p, coeficiente de porosidade, definido como sendo o cociente da perda de carga obtida experimentalmente pela obtida a partir da fórmula. A expressão que traduz a relação de c_p com a porosidade foi calculada gràficamente, representando, num sistema de eixos ortogonais, os valores de c_p em ordenadas e em abscissas as as respectivas porosidades (determinadas pelo método do turbidímetro de Jackson). Encontrou-se assim a relação

$$c_p = 0{,}0246\ (69{,}43 - p), \qquad \ldots\ldots\ (26)$$

e expressão final será

$$h = \frac{2{,}68}{d_{HF}^{1{,}89}} \frac{u\, l\,(69{,}43 - p)}{1{,}8\, t + 52{,}6}, \qquad \ldots\ldots\ (27)$$

ou, exprimindo a velocidade de filtração em função da perda de carga, como habitualmente,

$$u = 0{,}373 \frac{1{,}8\ t + 52{,}6}{69{,}43 - p} d_{HF}^{1{,}89}\, J\ .\quad cm/s \qquad \ldots\ldots\ (28)$$

Deve notar-se que esta expressão foi deduzida para areias uniformes, representando d_{HF} a média geométrica dos diâmetros dos orifícios dos peneiros adjacentes entre os quais ficaram retidos os grãos. Todavia, os autores usam-na também para areias não-uniformes da forma seguinte: a cada grupo obtido por peneirações sucessivas aplica-se a expressão (27), sendo l expresso pelo mesmo número que o respectivo peso Δg (percentagem do total). Fazendo a hipótese que a porosidade se conserva, a perda de carga total será a soma destas perdas parcelares.

A expressão (27) foi mais tarde corrigida. Os autores verificaram que, na determinação da porosidade pelo método acima citado, a amostra não se dispunha durante a operação duma maneira análoga à que toma nos filtros rápidos. Por este motivo os valores vinham falseados e, em face disto, preconizaram outro modo de operar que a seguir se descreve.

No tubo de Jackson (um tubo de vidro com cerca de 3 centímetros de diâmetro e 75 centímetros de comprimento) contendo

água até meio, lançam-se P gramas da amostra. O conteúdo é agitado várias vezes até todo o ar arrastado pela areia ser expulso. Tapa-se o tubo e inverte-se. Depois, ràpidamente, leva-se à posição primitiva. Desta maneira os grãos tomam uma disposição análoga à que têm nos filtros rápidos. A porosidade é determinada então pela expressão

$$p = 100 - \frac{100\ P}{\overline{w}\ V},$$

sendo $\overline{w}$ o peso específico dos grãos e V o volume em centímetros cúbicos ocupado pelos P gramas dentro do tubo, depois do assentamento acima descrito.

Devido a este novo metodo de operar, a expressão (26) toma a forma

$$c_p = 0{,}0274\,(73 - p)$$

e (28) escrever-se-á

$$u = 0{,}335\,\frac{1{,}8\ t + 52{,}6}{73 - p}\,d_{FH}^{1{,}89}\,J; \quad cm/s$$

a permeabilidade será

$$\boxed{\mathbf{K} = 0{,}335\,\frac{1{,}8\ t + 52{,}6}{73 - p}\,d_{FH}^{1{,}89}.} \quad cm/s$$

Convém frisar que o processo de determinação da porosidade acima descrito, é particularmente dedicado ao estado especial em que a areia destinada à filtração rápida se encontra em funcionamento, principalmente depois de ser lavada. Como se sabe, a lavagem desta espécie de filtros faz-se provocando uma corrente rápida em sentido contrário ao do normalmente seguido pela água; esta corrente dá lugar a uma expansão da camada filtrante e portanto a um aumento de porosidade.

Lei de Hatch:

Harry Hatch, em 1934, estudando no laboratório de Cobble Mountain (Massachusetts, E. U. A.) os materiais usados na construção de diversas barragens de terra de aterro hidráulico,

e principalmente na barragem de Cobble Mountain, e fazendo variados ensaios de consolidação e permeabilidade dos materiais que constituiam os núcleos estanques dessas barragens, deduziu uma fórmula que traduz o movimento da água através desses núcleos.

A fórmula de que Hatch partiu, depois de a ter verificado para os materiais em questão, foi ainda a de Darcy

$$u = \mathbf{K}\, J\,,$$

limitando-se o seu estudo à determinação da função que liga o coeficiente de permeabilidade **K** com a porosidade, tamanho dos grãos e temperatura.

A variação da permeabilidade com a temperatura foi admitida por Hatch, como aliás por quase todos os investigadores, como sendo a apresentada por Hazen, isto é,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0\ (0{,}7 + 0{,}03\ t)$$

em que $\mathbf{K}_0$ representa, como já se viu, a permeabilidade a 10° C.

Nas suas inúmeras experiências com as amostras dos vários núcleos, verificou que a permeabilidade variava nìtidamente com a porosidade; em presença das curvas que obteve para representar essas variações, o autor concluiu que estas podiam ser expressas pela equação geral

$$\mathbf{K} = a\ p^m,$$

na qual o valor de a variava entre 2,86 e 0,48 e m entre 5,40 e 7,20. A este expoente pode atribuir-se, com razoável exactidão, o valor 6. Pela expressão acima se vê que o valor de **K** para $p = 45\ \%$ será cerca de 2 vezes superior ao da permeabilidade para $p = 40\ \%$, o que é notável.

Quanto à influência do diâmetro dos grãos, Hatch verificou ainda que, conservando-se a temperatura constante e igual a 10° C, o coeficiente de permeabilidade da fórmula de Darcy era igual ao produto $c\ d_H^2$ da fórmula de Hazen,

$$u = c\ d_H^2\ (0{,}7 + 0{,}03\ t)\ J$$

e na qual d_H é o diâmetro eficaz, definido pelo mesmo autor, e expresso, como habitualmente, em milímetros. Esta igualdade

só existia, porém, quando a porosidade do material experimentado era igual a 45 %.

Para esta porosidade, e principalmente para os valores dos diâmetros eficazes dos materiais em questão, valores compreendidos entre 0,003 mm e 0,012 mm, o valor da constante *c* resultou muito baixo e igual a 150 (**K** expresso em metros por dia).

A fórmula a empregar para qualquer outra porosidade ou temperatura será então,

$$u = 0{,}174\, d_H^2 \left(\frac{p}{45}\right)^6 (0{,}7 + 0{,}03\, t)\, J, \qquad cm/s$$

e o coeficiente de permeabilidade será dado por

$$\boxed{\mathbf{K} = 0{,}174\, d_H^2 \left(\frac{p}{45}\right)^6 (0{,}7 + 0{,}03\, t).} \qquad cm/s$$

Estudo comparativo:

Um facto se nota imediatamente após a leitura das sucessivas leis que acabam de ser expostas: é que, em presença dum caso concreto, nem todas as fórmulas podem ser usadas sem que daí resultem valores os mais dispares. Foi preocupação da maior parte dos autores obter uma fórmula que especialmente se adaptasse ao seu caso particular; por isso deve verificar-se a natureza dos materiais que constituem o terreno ou a amostra em estudo, e empregar a fórmula que tenha sido deduzida para um caso análogo. O emprego, por exemplo, da lei de Hatch a um problema de filtração, conduziria a resultados tão erróneos como a lei de Hazen aplicada à determinação da permeabilidade dum material destinado ao núcleo estanque duma barragem de terra.

Das várias expressões deduzidas conclue-se que a permeabilidade é função de diferentes factores, independentes entre si: duma maneira geral, o coeficiente de permeabilidade pode representar-se como produto de diversas funções,

$$\mathbf{K} = f_1(t)\ f_2(p)\ f_3(d)\ f_4(f)$$

cada uma das quais exprimirá a influência duma determinada característica. Essas características são a temperatura, a porosidade, o tamanho dos grãos e a forma destes.

Temperatura: a dependência $f_1(t)$ pode considerar-se conhecida. A influência da temperatura é indirecta visto que faz variar a permeabilidade por intermédio da variação da viscosidade da água. Poiseuille constatou que, no movimento que tem o seu nome, a velocidade variava inversamente com o coeficiente de viscosidade absoluta, conservadas constantes as outras características. No movimento das águas subterrâneas verifica-se a mesma variação, visto o movimento ser considerado na maior parte dos casos da prática, e pela quase totalidade dos investigadores, como laminar. Por sua vez, a viscosidade varia com a temperatura segundo a expressão, devida a Helmholtz (em unidades c. g. s.)

$$\mu = \frac{0{,}0178}{1 + 0{,}0337\, t + 0{,}000221\, t^2}$$

em que o numerador representa a viscosidade absoluta a 0º C.

Como a temperatura média das águas subterrâneas regula por 10º C., Hazen substituiu a anterior por

$$\mu = \frac{\mu_{10^\circ C}}{0{,}7 + 0{,}03\, t}$$

o que equivale, supostos os outros factores constantes a

$$\mathbf{K}_{t^\circ} = \mathbf{K}_{10^\circ}\,(0{,}7 + 0{,}03\, t),$$

expressão que fornece valores com aproximação suficiente para as temperaturas usuais dos sub-solos.

E assim

$$f_1(t) = 0{,}7 + 0{,}03\, t.$$

Porosidade: a importância desta característica na determinação da permeabilidade é muito grande. Das variadas expressões que toma a função $f_2(p)$ nas fórmulas atrás expostas

pode concluir-se à primeira vista que estas não podem ser aplicadas arbitràriamente. As principais expressões são

AUTOR	$f_2(p)$
Slichter	$\left(\frac{p}{45}\right)^{3,3}$
Terzaghi	$\left(\frac{n-0,13}{\sqrt[3]{1-n}}\right)^2$
Kozeny e Fair e Hatch	$\frac{p^3}{(1-p)^2}$
Hulbert e Feben	$\frac{1}{73-p}$
Hatch	$\left(\frac{p}{45}\right)^6$

A disparidade que que existe entre elas pode ser explicada pela seguinte razão: os diferentes materiais a que elas se destinam (exceptuando as fórmulas de Slichter, Kozeny e Fair e Hatch, que têm um campo maior de aplicação, todas as outras quase que só se podem empregar com êxito aos materiais que serviram para as suas deduções) podem originar porosidades muito diversas. Com efeito, a porosidade depende também de vários factores entre os quais avultam o tamanho absoluto dos grãos, a não-uniformidade dos grãos em tamanho, as proporções dos vários tamanhos e a forma dos grãos. Embora, teòricamente, o tamanho absoluto dos grãos não tenha influência na porosidade, quando aqueles se assemelham a esferas, na prática, porém, a porosidade aumenta com a diminuição do seu tamanho, devido principalmente ao atrito, à adesão e ao efeito de ponte. Por outro lado, a não-uniformidade é de fundamental importância na porosidade, visto que a mistura de grãos de diferentes tamanhos conduz a uma porosidade menor do que a que se obteria com materiais de um só diâmetro: na realidade se a adição dum grão de tamanho maior, por exemplo, aumenta a porosidade

pelo facto de diminuir os pontos de contacto entre os grãos adjacentes, diminue-a também, visto que vai ocupar espaço onde existiam, anteriormente, grãos menores e vazios. Está provado que destas duas variações prevalece a segunda. As proporções em que os vários tamanhos de grãos existem numa amostra, fazem aumentar ou diminuir a sua porosidade segundo os seus valores relativos e as razões entre os vários diâmetros. Frazer mostrou que, com areias de 1,3 2,3 e 8,1 mm de diâmetro, era possível obter a mesma porosidade, de cerca de 33 %, com misturas nas proporções a seguir descriminadas:

1,3 mm	2,3 mm	8,1 mm
10,51	9,63	79,86
29,57	41,39	29,04
41,48	29,85	28,67
10,17	44,49	45,34

Se se notar que na maior parte dos terrenos existem 6 a 7 tamanhos de grãos, pode concluir-se a dificuldade, senão impossibilidade, de tradução matemática da influência da proporção dos grãos.

Quanto à influência da forma dos grãos na porosidade, embora seja difícil de determinar, sabe-se que está intimamente ligada com o tamanho dos grãos e é responsável em grande parte nos efeitos acima citados do atrito e da adesão. A irregularidade de forma dos grãos aumenta geralmente a porosidade, e não se diz sempre, porque mostrou-se que a porosidade diminui quando a sua forma é a de disco.

Tamanho dos grãos: quase todos os autores exprimiram a influência do tamanho dos grãos sobre a permeabilidade pela expressão

$$f_3(d) = d^2 ,$$

em que d representava um determinado diâmetro característico dos grãos.

Exceptuam-se, nas fórmulas apresentadas, a de Baldwin-Wiseman e a de Hulbert e Feben. A primeira, embora não contenha explìcitamente nenhum factor que exprima a dependência da permeabilidade do tamanho dos grãos, entra em con-

sideração com este por intermédio de $1/a$, pois, anàlogamente a Krüger, a pode ser considerado como superfície eficaz dos grãos, e por isso,

$$\frac{1}{a} = d\,.$$

Por seu lado, Hulbert e Feben encontraram nas suas experiências

$$f_3\,(d) = d^{1{,}89}$$

em que d era obtido pelo método de «contagem e pesagem» (1).

Em todas as outras fórmulas, embora a função $f_3\,(d)$ tenha a mesma expressão, o diâmetro não é escolhido ou determinado a partir do mesmo critério. Hazen apresentou o critério já citado a propósito da sua fórmula, critério adoptado também por Terzaghi e por Hatch, a partir do qual o diâmetro eficaz é determinado, na curva granulométrica acumulada, pela abscissa do ponto de intersecção desta curva com a linha horizontal correspondente aos 10 por cento de grãos mais finos. Este critério, puramente empírico, não pode todavia ser aplicado indiscriminadamente a todos os meios pulverulentos, e por isso o autor limitou a sua aplicação por meio do coeficiente de uniformidade, também já atrás definido, embora se veja imediatamente que a determinação de dois únicos pontos não pode, satisfatòriamente, englobar a diversidade de forma das curvas granulométricas de grãos não uniformes.

O valor de d na fórmula de Slichter é determinado duma maneira muito especial pois exige que o terreno ideal constituído por grãos uniformes tenha a mesma permeabilidade, mantida sòmente a porosidade. Viu-se já que para aplicar esta fórmula era necessária a realização dum ensaio directo pelo que o seu emprego é hoje muito reduzido.

Por este método, o diâmetro é obtido da expressão

$$P = \frac{\overline{w}}{6}\,\pi\,N\,d^3\,,$$

em que P é o peso dum certo número N de grãos da areia real de peso específico $\overline{w}$.

Atingem, com certeza, mais exactamente o objectivo em vista as fórmulas de Fair e Hatch e de Kozeny, pois que, para a determinação do diâmetro característico, tomam em consideração todos os grupos de grãos existentes na amostra, ao mesmo tempo que atendem ao facto de as partículas mais finas terem maior influência na permeabilidade do que as mais grossas. Tanto numa como noutra determina-se o diâmetro efectivo pela expressão (21), mas enquanto Fair e Hatch obtêm os valores dos diâmetros médios dos diferentes grupos por

$$d'_k = \sqrt{d_k \cdot d_{k+1}} ,$$

Kozeny determina-os por

$$\frac{1}{d'_k} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d_k} + \frac{2}{d_k + d_{k+1}} + \frac{1}{d_{k+1}}\right);$$

este último autor verificou pelo cálculo de probabilidades que este valor era o mais exacto. Donat comprovou, por ensaios que realizou, a sua maior exactidão.

Forma dos grãos: Nas fórmulas estudadas, constata-se que Hazen e Terzaghi tomaram em consideração, duma maneira muito vaga, a forma dos grãos, fazendo variar adequadamente a constante da fórmula respectiva.

Por sua vez, Kozeny pretendeu também considerar a sua influência, tomando valores diferentes para c_1 na expressão (17), pois esta constante tem por fim traduzir o efeito da forma da secção transversal dos interstícios a qual está intimamente ligada à forma dos grãos.

Foram, porém, Fair e Hatch que se aproximaram mais da solução completa do problema introduzindo a noção do coeficiente de forma F, o qual determinaram para as diferentes formas dos grãos de areia. Segundo estes autores

$$f(f) = \frac{1}{F^2} \cdot$$

*
* *

De todas as fórmulas deduzidas racionalmente, pode-se afirmar que são as de Kozeny e de Fair e Hatch as que melhor traduzem, duma maneira mais geral, a influência das diferentes características dum meio pulverulento sobre a permeabilidade. E, com certeza, se obterão melhores resultados se se usar a fórmula de Fair e Hatch determinando os diâmetros médios dos diferentes grupos de areia, obtidos por peneiração, pelo critério de Kozeny.

Seria interessante realizar ensaios directos com outros materiais diferentes das areias, comparando os resultados com os obtidos por esta fórmula, assim modificada; ao mesmo tempo que se verificaria a excelência da fórmula e se aumentaria o seu campo de aplicação, far-se-ia a determinação de novos valores de F os quais constituiriam, por certo, um óptimo meio de continuar a estudar a ainda pouco conhecida influência da forma dos grãos.

Capítulo III

Métodos directos

A — Métodos baseados na capilaridade

A determinação da permeabilidade dum material pulverulento pode fazer-se aproveitando a propriedade da subida da água no seu meio, subida essa devida à pressão capilar. Esta é originada pelo conjunto de acções existentes entre as moléculas líquidas, as que constituem a parede sólida e as do fluido em contacto com a água (neste caso o ar). Estas acções, juntamente com as resultantes da coesão, solicitam as moléculas existentes à superfície da água e numa espessura igual ao raio de atracção molecular, as quais constituem como que uma membrana elástica em estado de tensão. Esta tensão designa-se correntemente por tensão superficial. O seu valor médio, para a água pura, é de 76,4 dines/cm. A dissolução nesta de sais minerais aumenta a tensão superficial: assim, foi determinado que por cada molécula-grama/litro de sal das cozinhas, dissolvida na água, a tensão superficial aumenta de 1,75 dines/cm. Pelo contrário, as substâncias orgânicas, quando dissolvidas na água, diminuem a sua tensão superficial.

A pressão capilar, que só se faz sentir com valor apreciável nos tubos ou interstícios cujo diâmetro ou dimensão caracteristica é da ordem de grandeza do raio de atracção molecular, toma valores consideráveis nos terrenos ou meios pulverulentos

constituidos por grãos de muito pequeno tamanho. Como exemplo, no caso de um terreno constituido por argila com bastantes elementos coloidais, a pressão capilar que nele se pode desenvolver é já muito importante: se a dimensão característica dos vazios for da mesma ordem de grandeza da dos grãos ou partículas, em média 0,00019 mm, o número de vazios por centímetro quadrado pode computar-se em 5×10^9, cada um dos quais com um perímetro de, aproximadamente, 3×10^{-5} cm; em cada interstício desenvolver-se-á uma pressão que, pela fórmula de Laplace aplicada ao caso, é de 234×10^{-8} gramas.

A pressão capilar total será pois de

$$5 \times 10^9 \times 234 \times 10^{-8} \simeq 12 \text{ kg/cm}^2,$$

valor que, em alguns terrenos, pode ser ainda ultrapassado em muito.

a) — **Capilaridade vertical**: Nestes métodos, para se fazer a determinação da permeabilidade duma dada amostra, é geralmente necessário conhecer a altura máxima de ascenção capilar. Esta pode obter-se pràticamente, introduzindo em água a extremidade inferior dum tubo contendo a amostra em questão e esperar que a água suba até atingir uma posição de equilíbrio; simplesmente este equilíbrio só é atingido ao fim dum tempo relativamente longo (teòricamente infinito), durante o qual o nível da superfície da água terá de conservar-se rigorosamente constante (compensar portanto a água que subiu e a perdida por evaporação) visto que é notório o aumento de altura de ascenção com o abaixamento do nível. Podem ainda apontar-se outros inconvenientes na medida prática da altura máxima: a linha de separação do terreno seco do molhado é pouco definida e variável com o estado de limpeza do vidro do tubo e dos grãos, e com o maior ou menor diâmetro característico dos interstícios. Por estas razões alguns autores preconizam os métodos indirectos para a determinação da altura máxima de ascenção capilar.

Seja S a secção duma coluna de terreno na qual se quer determinar a altura máxima de ascenção capilar. Esta é provo-

cada, como se viu, pela pressão capilar e contrariada pelo peso da água e pela resistência oferecida pelo material. Pelo teorema da quantidade de movimento, a variação desta no tempo é igual à soma algébrica das forças acima referidas, ou seja,

$$\frac{dM}{dt} = P - G - R, \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

em que: a quantidade de movimento é

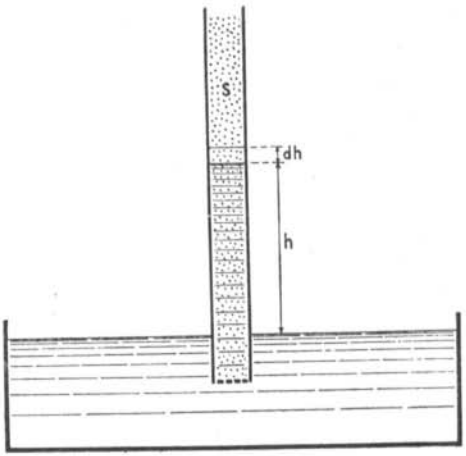


FIG. 18

$$M = \frac{\overline{w}}{g} n S h \frac{dh}{dt}$$

e

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\overline{w}}{g} \frac{n S}{2} \frac{d^2(h^2)}{dt^2};$$

por outro lado a pressão capilar é dada por

$$P = \sigma \chi,$$

o peso da coluna por

$$G = \overline{w} n S h,$$

e a resistência por

$$R = \overline{w} s h',$$

em que σ é o tensão superficial, χ o perímetro total dos vazios existentes na secção S, s a área total dos vazios na mesma secção, n a proporção de vazios e h' a altura da coluna de líquido, de peso específico $\overline{w}$, necessária para vencer a resistência R.

Pela lei de Darcy, para a amostra de permeabilidade **K** e quando o comprimenfo é $l = h$, obtém-se,

$$\frac{dh}{dt} = \mathbf{K} \frac{h'}{h}$$

e portanto

$$h' = \frac{h}{\mathbf{K}} \frac{dh}{dt} .$$

O valor de χ, viu-se a páginas 65 e 66, é dado por

$$\chi = \frac{6\ (1 - n)}{d_K}\ S$$

e, finalmente,

$$s = n\,S .$$

Substituindo estes valores em (29) obtém-se,

$$\frac{\overline{w}}{g} \frac{n\,S}{2} \frac{d^2(h^2)}{dt^2} = \frac{6\ (1-n)}{d_K}\ S\sigma - \overline{w}\ n\,S\,h - \overline{w}\ n\ \frac{S}{2\,\mathbf{K}} \frac{d(h^2)}{dt}$$

ou

$$\frac{d^2(h^2)}{dt^2} + \frac{g}{\mathbf{K}} \frac{d(h^2)}{dt} + 2\,g\,h - \frac{12\ (1 - n)}{n\,\varrho}\ \frac{\sigma}{d_K} = 0$$

ou ainda, fazendo a hipótese de que a velocidade é muito pequena e que se podem desprezar as suas potências de ordem superior à primeira,

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{g}{\mathbf{K}} \frac{dh}{dt} - \frac{6\ (1 - n)}{n\,\varrho}\ \frac{\sigma}{h} \frac{1}{d_K} + g = 0.$$

Sem fazer a integração, o valor H da ascenção capilar máxima é imediatamente deduzido desta equação diferencial,

$$H = \frac{6\ (1 - n)}{n\ \overline{w}}\ \frac{\sigma}{d_K}$$

$$= \frac{0{,}457}{e}\ \frac{1}{d_K}$$

sendo expresso nas mesmas unidades que d_K, diâmetro eficaz dos grãos constituintes da amostra.

Recentemente, sob a orientação do Professor Mavis, realizaram-se ensaios destinados a determinar, empìricamente, a ascenção capilar máxima da água nos materiais pulverulentos. Foram usadas quatro qualidades de areias, denominadas grossa, média, natural e fina, caracterizadas pelos seus diâmetros médios harmónicos, respectivamente, 1,52, 0,75, 0,21 e 0,47 mm.

Verificou-se que a ascensão capilar era função do tamanho dos poros, das características da areia e da tensão superficial da água, sendo esta por sua vez função da temperatura; mais explìcitamente, a ascenção capilar máxima era directamente proporcional à tensão superficial e ao perímetro molhado dos poros e variava inversamente com a área da secção transversal dos poros e com o peso específico da água. Os dados obtidos das inúmeras experiências foram representados geomètricamente, tendo todas as curvas obtidas sido englobadas na expressão geral

$$H = \frac{k}{d_K}\left(\frac{1-n}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{k}{d_K}\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{3}}$$

em que k é constante para cada natureza do material, d_K é o diâmetro eficaz obtido pela média harmónica, expresso em milímetros, e n e e respectivamente, a proporção e o índice de vazios. Para as areias acima referidas o valor de k é 0,0866 quando H é expresso em milímetros.

Conhecido H para o material em estudo, a permeabilidade determina-se fàcilmente enchendo um tubo de vidro com o material seco, imergindo a extremidade inferior em água e registando a altura h_1 a que a água subiu ao fim do tempo t_1.

Para qualquer instante durante o processo de subida será, com efeito,

$$n\,dh = \mathbf{K}\,\frac{H-h}{h}\,dt,$$

se se admitir a hipótese de, em cada momento, o regime a que corresponde o gradiante $(H-h)/h$ ser atingido instantâneamente. Integrando entre zero e h_1 e zero e t_1 obtém-se

$$\mathbf{K} = 2{,}303\,n\,\frac{H}{t_1}\left(log\,\frac{H}{H-h_1} - \frac{h_1}{2{,}303\,H}\right).$$

Devido à pouca exactidão na determinação de H, à pouca nitidez da superfície de avanço do líquido através da amostra seca e ao facto de nem sempre se poder admitir a hipótese

acima feita, a determinação da permeabilidade por este processo não é rigorosa; por outro lado faz-se com rapidez e portanto é aconselhável nos casos em que se necessitem de muitas determinações sem que seja exigida grande exactidão. Como exemplo, cita-se a escolha dos materiais para a construção de barragens de terra.

b) — **Capilaridade horizontal**: Casagrande imaginou o método que vai ser exposto em seguida. Este método, como o anterior, não dá valores muito exactos mas em compensação é muito rápido. Exige também o conhecimento da ascensão capilar máxima para o respectivo material.

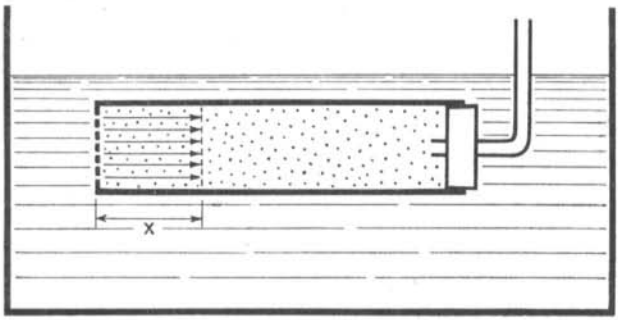


FIG. 19

Num tubo, fechado numa das extremidades por meio duma rede fina destinada a conter o material, lança-se a amostra de que se pretende determinar a permeabilidade. A outra extremidade é obturada depois com uma rolha atravessada por um tubo curvo que tem por fim permitir a livre escape do ar contido na amostra.

Mergulha-se em seguida ràpidamente num vaso com água o tubo e só até ficar completamente imerso, conforme se representa na figura 19, e observa-se o deslocamento da linha de saturação durante o tempo t_1. A água começa a mover-se dentro do tubo em direcção à rolha sob a influência da pressão capilar. Ao fim do tempo t_1 a linha de saturação dista de x da origem. Neste instante o gradiante é, portanto, H/x e o caudal real unitário será

$$\mathbf{K}\,\frac{H}{x}\,\frac{1+e}{e}.$$

A velocidade será dx/dt, e portanto pode escrever-se

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{K}\,\frac{H}{x}\,\frac{1+e}{e}.$$

Integrando

$$\frac{x^2}{2} = \mathbf{K}\,t_1\,H\,\frac{1+e}{e},$$

e a permeabilidade será dada por

$$\boxed{\mathbf{K} = \frac{x^2}{2\,t_1\,H}\,\frac{e}{1+e}.}$$

Casagrande apresentou ainda uma fórmula, para a aplicação da qual não é necessário o conhecimento da ascenção capilar máxima.

Se x representar, como atrás, o percurso saturado no tempo T, é, segundo aquele autor,

$$x^2 = T\sqrt{\frac{\mathbf{K}F}{n}}$$

em que n é a proporção de vazios e F uma constante. Se x for medido em centímetros e T em minutos, **K** vem expresso em centímetros por segundo. A constante F, determinada experimentalmente em variados tipos de solos, tem o valor médio de 100.000; para os solos vulgares (americanos) o seu valor varia entre 50.000 (solos com grande variedade de tamanhos de grãos) e 150.000 (solos uni-granulares). Para determinações mais aproximadas da permeabilidade é necessária a realização de ensaios de calibragem os quais fornecerão o valor de F.

B — Métodos baseados na percolação

De todos os métodos directos, usados nos laboratórios para determinar a permeabilidade dos materiais aquíferos, são concerteza os mais antigos aqueles em que é necessária a medição do caudal percolador. Dentre eles começaram por

usar-se, a princípio, aparelhos em que a carga motriz se conservava constante durante toda a experiência. Com aperfeiçoamentos que sucessivamente foram introduzidos, são deste tipo os aparelhos usados por Darcy, Hazen, Seelheim, King, etc. A determinação directa da permeabilidade foi usada, inicialmente e depois dum modo geral, para estudar a lei de Darcy, deduzir novas fórmulas ou verificar as que sucessivamente se iam obtendo indirectamente; nesta primeira fase do emprego dos aparelhos de determinação laboratorial, fase em que os material em estudo eram na sua maior parte de composição arenosa, foram quase que exclusivamente usados os de carga constante com liberdade de escoamento da água percoladora.

Actualmente, porém, pretende-se principalmente a determinação directa da permeabilidade das amostras trazidas ao laboratório. Os aparelhos aperfeiçoaram-se e modificaram-se no sentido de atingir mais cómoda e ràpidamente o fim agora em vista, não diminuindo todavia o grau de precisão exigido. E assim apareceram, ao lado dos aparelhos anteriores, os que, embora mantendo a descarga, são de carga variável, e os que não necessitam de descarga, ou melhor, aqueles que não descarregam para o exterior.

Todas estas variedades resultaram do facto de que a natureza das amostras a estudar é muito diferente de caso para caso. Os aparelhos de carga variável aplicam-se com vantagem quando os materiais são muito pouco permeáveis; empregam-se também com sucesso ao estudo da permeabilidade em amostras não perturbadas. Os aparelhos sem descarga são especialmente destinados a trabalhar com muito pequenas cargas motrizes.

a) — **Aparelhos com descarga**

I — *Carga constante:* O tipo clássico deste género de aparelhos é o que está representado na figura 4. Pelo simples exame desta se compreende o seu modo de funcionamento: a perda de carga total obtém-se medindo a diferença de nível nos dois piezómetros laterais, cujo diâmetro deve ser tal que torne desprezável a subida devida à capilaridade, e o percurso, no

qual essa perda de carga se verifica, é medido verticalmente entre os centros dos orifícios de inserção dos piezómetros. O volume de água escoado pela torneira durante a experiência é recolhido num vaso graduado. A carga é mantida constante, regulando a entrada superior de modo a que sobre o descarregador exista sempre uma certa lâmina de água embora de espessura muito pequena.

Este aparelho foi dotado de diversos aperfeiçoamentos destinados principalmente a medir com maior rigor a perda de carga e o caudal.

Em 1925, Meinzer imaginou o aparelho representado na figura 20. Neste o sentido do movimento da água através do

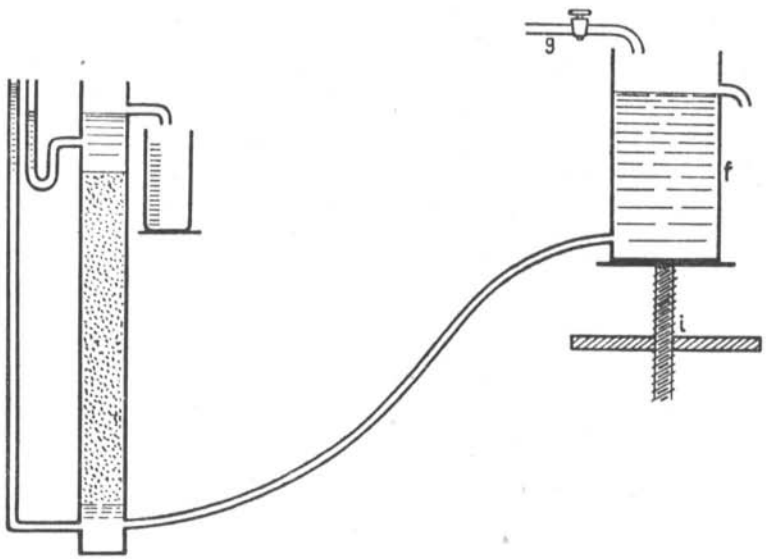


FIG. 20

material a ensaiar é o de baixo para cima. O sentido do movimento tem sido, em todos os tempos, motivo de discussão entre os investigadores: apontam como principal vantagem os que preconizam o movimento ascendente, o facto de assim se facilitar a saída do ar existente no interior da amostra, que tantas vezes falseia os resultados obtidos; por seu lado, os que advogam o sentido contrário, atribuem ao movi-

mento ascendente o inconveniente de expandir em certa medida o meio pulverulento, provocando variações na porosidade. Parece que um e outro processos são igualmente bons desde que se realizem os ensaios com os cuidados devidos.

No aparelho de Meinzer a realização da carga faz-se por meio de depósito de alimentação *f* no qual o nível é mantido constante por meio do descarregador e da regulação conveniente do tubo de alimentação *g*. Por meio do dispositivo *i*, um parafuso rìgidamente ligado ao reservatório de alimentação, conseguem-se diversos valores para a carga, elevando mais ou menos este relativamente ao cilindro de ensaio.

Esta inovação veio tornar mais lato o campo de experimentação permitindo assim obter valores mais ajustados.

Sendo *S* a secção constante do material, *I* a inclinação da piezométrica ou perda de carga unitária, obtida pelo cociente entre a perda de carga *h* (medida pela diferença de nível nos piezómetros) e o comprimento da amostra *l* (medido entre centros dos orifícios de inserção daqueles), *V* o volume de percolação obtido no copo graduado durante o tempo *t*, a permeabilidade será dada por

$$\mathbf{K} = \frac{VI}{St}$$

ou

$$\boxed{\mathbf{K} = \frac{Vl}{Sth}} \quad cm/s$$

se *V* for medido em centímetros cúbicos, *S* em centímetros quadrados, *l* e *h* em centímetros e *t* em segundos.

II — *Carga variável:* O primeiro aparelho deste tipo foi projectado, segundo diversos autores, pelo Dr. Theis em 1933; destinou-se de início à determinação da permeabilidade, no campo, de amostras não perturbadas de materiais relativamente pouco permeáveis. Constava essencialmente, figura 21, de um cilindro de latão *a*, dentro do qual se colocava a amostra, e dum tubo manométrico *b*, graduado; a ligação destas duas peças era feita por um tubo em *U* de cobre, *f*, o qual por sua vez era montado numa base de chumbo *c*. A carga motriz

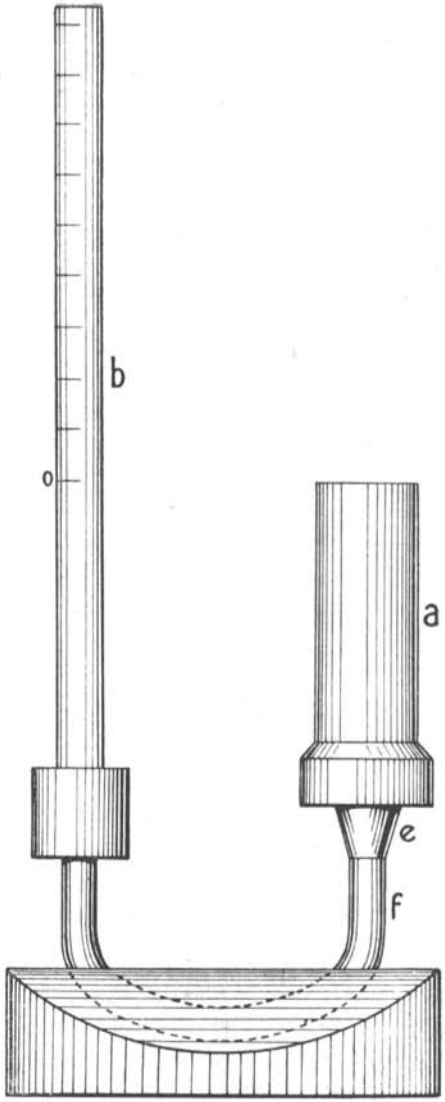


FIG. 21

era produzida pela altura de água dentro do tubo manométrico o qual alimentava a percolação no cilindro; neste tipo o movimento da água fazia-se no sentido ascendente, transbordando superiormente.

Com este aparelho a colheita de amostras era muito facilitada pois bastava retirar o cilindro do redutor de ligação *e* e enterrá-lo cuidadosamente no local donde se desejava retirar a amostra. Para facilitar a penetração do cilindro o seu bordo superior era talhado em bisel.

Outro aparelho deste tipo mas modificado e aperfeiçoado, e que é presentemente muito usado nos Estados Unidos da América, está representado na figura 22. O nível de água a jusante, na qual está imersa a base do aparelho, é conservado constante por meio duma descarga apropriada. O tubo manométrico é rigorosamente calibrado e graduado. O material a ensaiar é encerrado no cilindro *A* de secção *S* e comprimento *L*. Se a amostra é não alterada, introduz-se no cilindro com todo o cuidado e preenche-se o espaço entre a amostra e o cilindro com parafina. Ao realizar esta operação

BIBLIOTECA F.E. PORTO

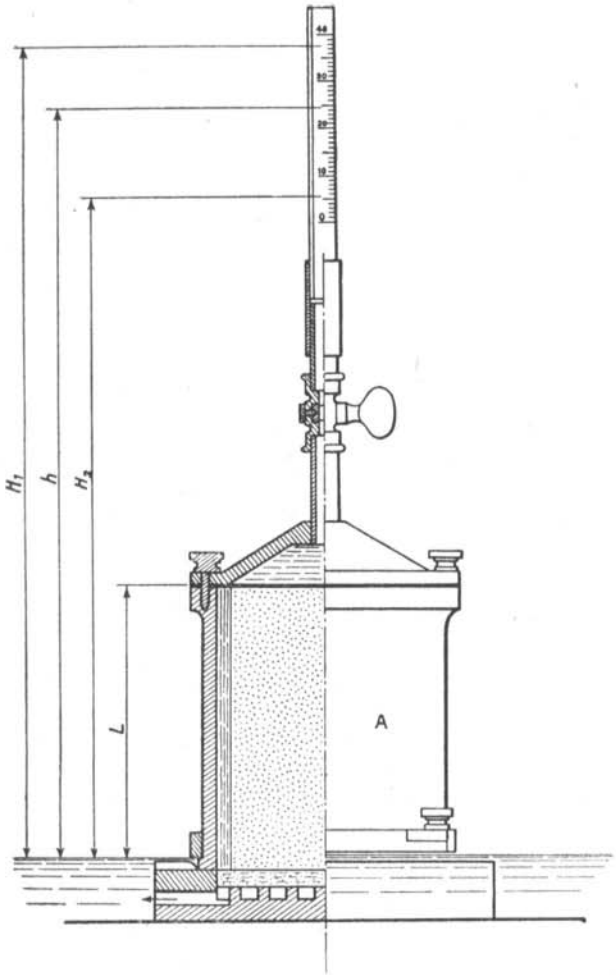


FIG. 22

não se deve aquecer a parafina a uma temperatura muito superior à da fusão para evitar que ela se torne muito fluida e penetre demasiadamente na amostra. Com este cuidado a parafina não penetra mais do que, em média, dois milímetros; será necessário fazer a devida correcção na determinação de S.

A amostra assenta no fundo sobre um disco poroso cuja resistência ao movimento da água é escolhida de modo a poder

desprezar-se em face da da amostra. Supondo nulas também as resistências dos outros acidentes do aparelho, torneira, tubo manométrico e base, as alturas H representam em qualquer instante a carga total.

Em qualquer destes aparelhos a permeabilidade determina-se por um cálculo simples. Se s representar a secção do tubo manométrico e h a carga no instante t, o volume escoado no tempo dt será

$$- s\, dh = \mathbf{K} \frac{h}{L} A\, dt .$$

Se no instante t_1 for $h = H_1$ e no instante t_2 $h = H_2$, ter-se-á por integração

$$\mathbf{K} = \frac{s\, L}{S} \frac{1}{t_2 - t_1} Log \frac{H_1}{H_2}$$

ou

$$\boxed{\mathbf{K} = 2{,}303 \frac{d^2}{D^2} \frac{L}{t_2 - t_1} log \frac{H_1}{H_2}} \quad cm/s$$

designando por d e D respectivamente os diâmetros do tubo manométrico e do cilindro de percolação A; as unidades escolhidas foram o centímetro e o segundo.

Fishel aconselha a substituir o disco poroso por uma rede, e o cilindro, que é geralmente de metal não corrosivo, por um de vidro, sempre que as amostras são inalteradas visto que é muito mais fácil constatar e eliminar as bolhas de ar que, nesta espécie de amostras, ficam retidas no fundo.

Segundo a natureza das amostras assim se escolhe convenientemente o calibre dos tubos manométricos os quais são amovíveis assim como os discos porosos

b) — **Aparelhos sem descarga**

É exemplo deste tipo de aparelhos o que foi projectado por Meinzer, em 1933, e que tinha por fim a verificação da lei de Darcy para gradiantes muito pequenos. O aparelho esque-

máticamente representado na figura 23, consta essencialmente dum longo tubo perculador de cobre em forma de *U*, com dois metros de comprimento total e um diâmetro de cerca de 20 milímetros, mergulhado numa câmara a temperatura constante, ligeiramente superior à do ambiente. As extremidades deste tubo estão respectivamente ligadas a dois reservatórios, um

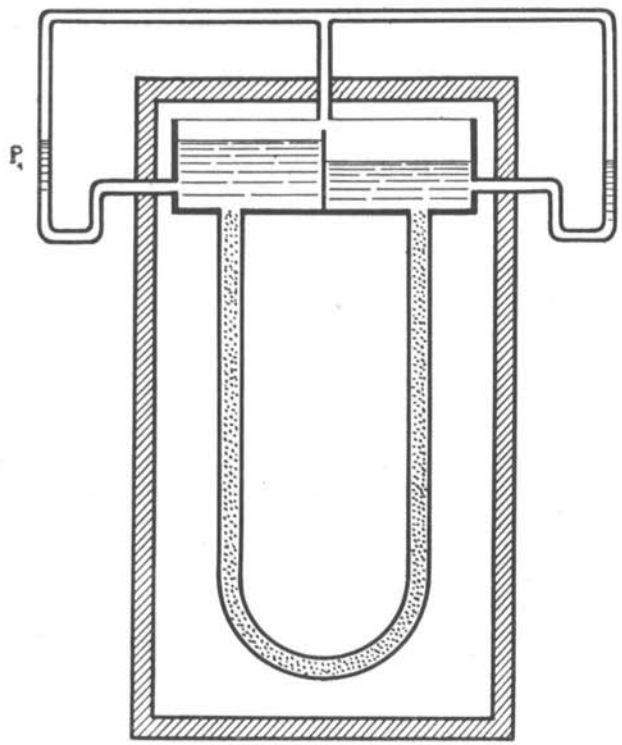


FIG. 23

alimentador e outro receptor. Para evitar a evaporação, de grande influência neste caso, os reservatórios estão hermèticamente fechados e ligados na parte superior do septo, que é incompleto, para assegurar a igualdade de pressões. Por meio do tubo manométrico de medida, representado na figura, determinam-se as cargas em diferentes instantes, medidas por meio dum catetómetro.

A expressão que dá a permeabilidade obtém-se duma maneira análoga à do caso anterior — aparelhos com carga variável — .

Em cada espaço de tempo dt o volume da água que atravessa a amostra é

$$dV = \frac{\mathbf{K}\, s\, h}{l}\, dt\,, \qquad \ldots\ldots (30)$$

em que h é a carga, diferença de nível medida pelo catetómetro nos dois braços do tubo de medida, l o comprimento do tubo percolador e s a área da secção deste.

Durante o tempo t a água descerá no reservatório alimentador duma quantidade

$$Z_1 = \frac{V}{S_1}\,,$$

em que V é o volume percolado durante esse tempo e S_1 é a área da secção do reservatório e do ramo do tubo de medida P_1. A subida de nível no reservatório receptor será, anàlogamente,

$$Z_2 = \frac{V}{S_2}\,.$$

A diferença de níveis, quando no tubo percolou o volume de água V, é

$$h_0 - h = Z_1 + Z_2 = \frac{V(S_1 + S_2)}{S_1\, S_2}\,.$$

Se o intervalo de tempo for dt, obtém-se por diferenciação,

$$-\, dh = \frac{dV(S_1 + S_2)}{S_1\, S_2}$$

e, resolvendo em ordem a dV e substituindo em (30) vem,

$$-\,\frac{S_1\, S_2}{S_1 + S_2}\,\frac{dh}{h} = \frac{\mathbf{K}\, s}{l}\, dt\,;$$

integrando entre os limites $t = t_1$, $h = H_1$ e $t = t_2$, $h = H_2$ vem

$$\mathbf{K} = \frac{l}{s\,(t_2 - t_1)} \frac{S_1\,S_2}{S_1 + S_2} Log \frac{H_1}{H_2},$$

ou quando $S_1 = S_2 = S$,

$$\boxed{\mathbf{K} = \frac{2{,}303\ l\ S}{2\,s\,(t_2 - t_1)} log \frac{H_1}{H_2}} \quad cm/s$$

se l, S e s forem medidos, respectivamente, em centímetros e centímetros quadrados, e $t_2 - t_1$ em segundos.

Pode concluir-se da descrição dos métodos até aqui estudados, que é aconselhável fazer a determinação da permeabilidade dos solos encontrados na maior parte dos casos da prática pelos métodos laboratoriais directos, pois conduzem a resultados mais próximos da realidade do que os obtidos pelos métodos indirectos.

Os métodos directos, todavia, são difíceis de realizar, podendo-se apontar entre outras dificuldades a vencer, a colocação das amostras a ensaiar em condições análogas às da realidade (mesmo quando as amostras são não perturbadas), a a eliminação das bolhas de ar do seu interior, a evaporação da humidade das amostras e da água percoladora durante os ensaios e a prevenção do crescimento de organismos, quando os ensaios são demorados.

Uma desvantagem inerente a todos os métodos laboratoriais é a aplicação dos valores obtidos ás condições reais. De facto, dado o carácter essencialmente heterogéneo da maioria dos terrenos naturais, a permeabilidade duma amostra, geralmente, está longe de representar a permeabilidade média da formação em estudo. Devem, pois, ser obtidas as amostras suficientes e retiradas de locais judiciosamente escolhidos, de modo que, dos valores obtidos, se possa inferir com segurança o seu valor médio que representará a permeabilidade requerida.

Capítulo IV

Métodos de campo

A) — Determinação da velocidade efectiva de percolação

A determinação da permeabilidade dos materiais aquíferos a partir do conhecimento da velocidade efectiva de percolação tem sido usada com sucesso em diversos países.

Os métodos primitivamente usados têm sofrido, desde o início, diversos e importantes aperfeiçoamentos que os tornaram susceptíveis de fornecer resultados que, na maioria dos casos, são satisfatórios.

Nestes métodos continua a admitir-se a validade da lei de Darcy

$$u = \mathbf{K}\, I$$

em que I é o gradiante hidráulico e u a velocidade de filtração, isto é, a velocidade com que a água se move supondo que não existe o material aquífero.

A água de percolação, no entanto, ocupa sòmente os vazios do material; pretendendo obter a velocidade *média* de percolação, isto é, o volume de água que passa através da unidade de secção real, bastará dividir a velocidade de filtração pela proporção de vazios ou porosidade,

$$u_a = \frac{\mathbf{K}\, I}{n}$$

A velocidade média é calculada portanto supondo que toda a água existente nos vazios se move, o que não corresponde à verdade; como não há processos directos de medir, no campo, a velocidade média, lançou-se mão da noção de velocidade efectiva de percolação. A parte da água existente nos poros que está em repouso pode supor-se, sem grande erro, volumètricamente igual à chamada água pelicular (água aderente às paredes dos poros). A parte dos interstícios ocupada por esta água mede-se pela retenção específica. A outra parte, ocupada pela água móvel, é medida pela proporção de vazios efectiva; esta é representada pelo rendimento específico (1).

A velocidade efectiva é, portanto, a velocidade da água móvel, e é definida por

$$u_e = \frac{\mathbf{K}\ I}{n_e} \qquad \ldots\ldots (31)$$

em que n_e é a proporção de vazios efectiva.

Das duas expressões se verifica que

$$u_e\ n_e = u_a\ n.$$

Esta igualdade permite determinar a velocidade média de percolação, uma vez conhecidos n, n_e e u_e. A determinação de n_e não está ainda normalizada mas da própria definição (razão, expressa ou não em percentagem, do volume de água que uma dada amostra saturada perde pela acção da gravidade, para o volume total da amostra) se depreendem imediatamente as linhas gerais do processo a seguir. Se a retenção específica, complemento do rendimento específico para a porosidade, for conhecida, o problema também está resolvido uma vez conhecida esta.

Quer portanto, para a determinação de u_a, quer para a determinação de **K** por meio da expressão (31), é necessário o conhecimento de u_e.

Para obter u_e usam-se vários métodos que consistem, essencialmente, em lançar substâncias — indicadores — num local a montante da camada aquífera em estudo, e determinar

(1) O rendimento específico e a proporção de vazios efectiva têm aqui idêntico significado.

o tempo que aqueles levam a atingir um ou mais poços a jusante e medindo, ao mesmo tempo, as distâncias que separam estes poços de observação do local de lançamento dos indicadores.

As substâncias primeiramente ensaiadas dividiam-se em quatro categorias principais:

1) – Substâncias dissolvidas na água e pesquisadas por meio de ensaios químicos ou físicos; cloreto de sódio, cloreto de cálcio, cloreto de amónio, nitrato de potássio, sais de lítio, sais de ferro, etc.
2) – Substâncias dissolvidas na água e reconhecidas pela cor: permanganato de potássio, fucsina, vermelho do Congo, azul de metileno, fluoresceína, etc.
3) – Substâncias suspensas na água e reconhecidas pelo exame microscópico: amido, farinha, gomas, etc.
4) – Culturas de bactérias suspensas na água e pesquisadas pelas suas características de cultura: Bacillus prodigiosus, Bacillus violaceus, Bacillus subtilis, Saccharomyces cerevisiæ, Micoderma aceti, etc.

As principais propriedades em que se deve basear a escolha dum indicador, são:

1) – Deve infiltrar-se e atravessar a camada aquífera em estudo duma maneira semelhante à da água e com a mesma velocidade desta;
2) – Deve ser fácil e ràpidamente pesquisável nas amostras;
3) – Não deve ser decomposto ou afectado na sua concentração pelos materiais e substâncias com as quais vai sucessivamente entrando em contacto.

A escolha do indicador depende também, evidentemente, do processo que vai ser utilizado para o pesquisar nas amostras ou no terreno.

Das quatro categorias de indicadores acima nomeadas, só as duas primeiras são usadas actualmente. Do seu emprego resultaram os métodos colorimétricos e os salinos.

a) — **Métodos colorimétricos**

Apesar de ter sido Kandler quem propôs, em 1864, o emprego de substâncias còrantes, foi sòmente Kop, em 1877, que empregou pela primeira vez este método fazendo uso da fluo-

resceína. Atribuem-se, porém, ao Dr. Dionis des Carrières as primeiras experiências colorimétricas, que consagraram o método, quando pesquisava, em 1882, a origem de uma grave epidemia de febre tifoide na cidade de Auxerre, nas quais usou como còrante uma solução alcoólica de anilina.

Os resultados foram além das previsões mais optimistas, e desde então o emprego dos còrantes generalisou-se no estudo do movimento das águas subterrâneas.

Trillat, em 1899, dedicou-se a investigar a eficácia de alguns còrantes destinados a ser usados como indicadores, e o efeito sobre eles da sua passagem através das camadas aquíferas. Entre os còrantes que estudou destacou-se a fluoresceína que reune as melhores qualidades para tal efeito.

A fluoresceína (resorcina-ftalaína, tetraoxiftalfenona ou indicador de Kruger) é um produto obtido do alcatrão da hulha. Pode obter-se aquecendo duas moléculas de resorcina com uma molécula de anidrido ftálico, num banho de óleo entre 190º e 200º C., até que os vapores aquosos formados durante o aquecimento deixem de se desprender. O produto obtido não é solúvel na água, sendo-o porém os seus sais sódicos ou potássicos. Destes, o mais conhecido e usado é a uranina, sal sódico de fluoresceína o qual, segundo Meinzer, tem sido incorrectamente denominado fluoresceína; é um pó vermelho-alaranjado que, uma vez dissolvido na água, esta toma uma cor verde clara quando examinada através da luz. Por meio de fluoroscópio, aparelho inventado por Trillat e aperfeiçoado por Marboutin, consegue-se verificar a existência de uranina na água na proporção de 1 para 10 biliões; a olho nu reconhece-se até à proporção de 1 para 40 milhões. Deve notar-se que a cor verde só existe quando a diluição é grande.

O ensaio colorimétrico realiza-se da seguinte maneira: Lança-se a solução no local escolhido. O título varia com a distância que a água tem a percorrer, o tempo do percurso, a espessura da camada aquífera e a natureza do material a atravessar. Geralmente é de 300 gramas por litro. No poço ou poços de observação, também chamados de ensaio, serão tomadas as amostras, normalmente de hora a hora. Os poços que porventura existam na região a estudar servem para a experiência (desde que sejam

de paredes permeáveis) mas se não existirem, ou forem em pequeno número, é necessário praticá-los; para este fim servem os chamados poços instantâneos, abissínios ou Norton.

A aparição do indicador nos diversos postos de observação costuma sistematizar-se traçando as chamadas curvas isocrono-cromáticas, isto é, os lugares geométricos dos pontos onde o indicador chega no mesmo espaço de tempo.

Se for L a distância medida desde o ponto onde se lançou a solução até ao local onde se fez a amostragem, e t o tempo que decorreu entre o instante em que se lançou a solução até ao instante em que se colheu a primeira amostra positiva, a velocidade efectiva será,

$$u_e = \frac{L}{t} .$$

Segundo M. de la Forest, a velocidade efectiva assim determinada é sempre menor que a real. Com efeito, o tempo t é igual a $t_1 + t_2$, sendo t_1 o tempo gasto na infiltração até à camada em estudo e t_2 o tempo verdadeiro que o indicador gasta a percorrer a distância L. A velocidade efectiva real é então,

$$u'_e = \frac{L}{t_2} = \frac{L}{t - t_1}$$

e a diferença será

$$u'_e - u_e = \frac{L}{t - t_1} - \frac{L}{t_1 + t_2} = \frac{L\, t_1}{t\, t_2} \quad \ldots . \quad (32)$$

sendo pois tanto maior quanto maior for t_1.

Verifica-se também que, para uma dada camada aquífera

$$t_2 = k\, L ,$$

e portanto

$$u_e = \frac{L}{t_1 + kL} = \frac{1}{\frac{t_1}{L} + k} .$$

Com o auxílio de dois poços de observação fàcilmente se determinam k, t_1 e t_2.

A diferença acima escrita (32) torna-se tanto menor quanto maior for L pois diminui o cociente t_1/t_2. Se o local escolhido

para o lançamento da solução for também um poço, então, pràticamente,

$$u'_e = u_e .$$

A fluoresceína (uranina) tem um grau de difusão muito grande, mas, segundo Dole e outros investigadores, tem o defeito de ter tendência a ocupar os lugares mais baixos do percurso, devido ao facto de a sua densidade ser superior à da água. Apresenta também o inconveniente de ser descòrada pela luz solar, pelos ácidos e pelas soluções calcáreas muito concentradas, pelos terrenos turfosos ou contendo certa espécie de argilas. A cor da fluoresceína, perdida pela acção do ácido carbónico, regenera-se adicionando algumas gotas de amoníaco que fixa o anidrido carbónico; é, porém o único caso de regeneração.

A Sociedade Belga de Geologia aconselha mesmo que à uranina seja sempre adicionada uma quantidade de amoníaco embora diminuta, antes de ser utilizada. Segundo esta Sociedade e contraditando a opinião de Dole, a água còrada por este indicador comporta-se como se fosse água pura e portanto não modifica as suas condições de movimento; o atrazo vulgarmente atribuido ao movimento da uranina sobre o da água que a transporta verificou-se ser uma errada interpretação proveniente dos erros cometidos nos ensaios.

Martel, grande investigador francês de águas subterrâneas, é bastante céptico quanto ao facto de a fluoresceína fornecer dados concretos sobre a velocidade efectiva da água percolante; segundo a sua opinião, deve-se limitar o seu emprego a investigar se existe ou não comunicação entre determinados pontos. Por outro lado, porém, Imbeaux, Meinzer, Wenzel, Tolman e outros modernos hidrologistas, não só confirmam a excelência do método como o aconselham recomendando todavia os maiores cuidados na sua realização.

b) — **Métodos salinos**

Foi Adolfo Thiem o paladino da aplicação dos métodos salinos para a determinação da velocidade efectiva das águas subterrâneas, tendo realizado por este método imensas pesquisas

destinadas ao abastecimento de água a muitas cidades da Alemanha e publicado os resultados em vários artigos entre 1879 e 1892.

Um avanço notável nestes métodos deve-se a Slichter quando,em 1902, publicou os resultados obtidos com o seu novo processo, designado por método electrolítico.

Os métodos salinos constam essencialmente do seguinte: constroi-se um poço, poço emissor, onde se lança uma solução dum sal, geralmente cloreto de sódio, cloreto de cálcio ou cloreto de amónio. A uma distância deste poço, variando conforme a profundidade a que se encontra a toalha freática, localiza-se o poço de ensaio, onde o sal vai ser pesquisado.

A linha que une os dois poços deverá tanto quanto possível ser uma linha de maior declive da toalha de água. Para obviar o inconveniente de tal não acontecer, Slichter recomenda a construção de três poços de ensaio, situados sobre um arco de círculo cujo centro fica no poço emissor, não devendo ultrapassar 30° os ângulos formados pelas linhas que unem este aos poços extremos e a linha central, sendo esta coincidente tanto quanto possível com a linha de maior declive. Segundo o mesmo autor, a distância entre o poço emissor e os de ensaio deve ser de 4 pés (1,20 m) se a profundidade da camada não ultrapassar 30 pés (9 m), 6 pés (1,80 m) se a profundidade não ultrapassar 75 pés (22,5m) e 10 pés para profundidades maiores.

Lançada a solução observam-se dois fenómenos: o primeiro é a difusão do sal à volta do poço emissor e o segundo é o seu transporte no sentido da corrente subterrânea; esta segunda fase desenvolve-se duma maneira muito irregular em virtude da heterogeneidade das camadas aquíferas.

Medida a distância entre dois poços, resta conhecer o tempo que o sal leva a aparecer no poço de ensaio. A pesquisa do sal pode fazer-se por dois processos: o processo químico e o electrolítico.

Sempre que seja necessário praticar novos poços estes podem ser do tipo instantâneo ou Norton.

I—*Método químico*: O mais antigo caso de emprego deste método foi a tentativa, aliás coroada de êxito, de localizar a origem duma veia de água subterrânea encontrada ao efectuar-se