

JÚLIO BARREIROS MARTINS

●

CAPACIDADE DE CARGA DE FUNDAÇÕES

●

LOURENÇO MARQUES

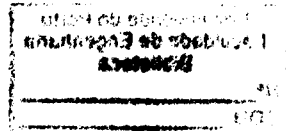
1965

CAPACIDADE DE CARGA DE FUNDAÇÕES

JÚLIO BARREIROS MARTINS

CAPACIDADE DE CARGA DE FUNDAÇÕES

DISSERTAÇÃO PARA DOUTORAMENTO EM ENGENHARIA CIVIL,
NA FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO



LOURENÇO MARQUES

1965

Universidade do Porto	
Faculdade de Engenharia	
Estatística	
Nº	58525
CDU	
Data	27/09/2001

*À memória de minha Avó materna, exemplo
de perseverança e espírito de sacrifício*

COMO adiante se documentará, o equilíbrio limite dos maciços terrosos em geral, e a capacidade de carga das fundações em particular, foram dos primeiros problemas a atrair a atenção das mais destacadas figuras da Engenharia Civil. Apesar disso pode dizer-se que ainda hoje a grande maioria dos colapsos em obras de engenharia civil se deve a cedência das fundações.

As razões pelas quais a maioria das cedências ou roturas se situa nos maciços terrosos ou rochosos de fundação são várias e de ordem vária. Em primeiro lugar os maciços terrosos ou rochosos são corpos naturais cujas características variam de ponto para ponto de maneira frequentemente imprevisível. Mesmo quando seja possível prever as variações das propriedades desses maciços, os seus efeitos na estabilidade do conjunto nem sempre podem ser correctamente avaliados, tanto mais que, muitas vezes o próprio estabelecimento da obra altera as características de resistência da fundação. Em segundo lugar os coeficientes de segurança que se usam na prática são na generalidade maiores para as estruturas do que para as fundações. Assim, por exemplo, enquanto que as tensões de segurança dos betões são de $1/3$ a $1/5$ dos valores da sua resistência à compressão simples, no cálculo da capacidade de carga das fundações usam-se coeficientes de segurança de dois ou mesmo menos. Na estabilidade de taludes chegam a aceitar-se coeficientes de segurança de $1,2$ inadmissíveis em qualquer hipótese em estruturas. No entanto, as características dos materiais utilizados nestas podem ser facilmente controladas durante a execução das obras e a previsão da distribuição das tensões e defor-

mações pode realizar-se para elas com grande aproximação, quer através do cálculo, quer por ensaio em modelos reduzidos. Na análise da estabilidade das fundações e das construções de terra, pelo contrário, as características dos maciços não podem ser controladas, os métodos de cálculo das tensões e deformações oferecem resultados com grandes variações entre si e em relação aos valores medidos, e o uso de modelos reduzidos não tem oferecido sucesso.

Daí que o problema mantenha actualidade e a maneira de o atacar seja dos assuntos mais controversos em todas as reuniões internacionais de Mecânica dos Solos.

*Não se conhecendo soluções analíticas rigorosas para a grande maioria, para não dizer de todos os problemas que se põem na prática, foram desde o início procuradas soluções baseadas na ideia de uma superfície de escorregamento única. Essa superfície é determinada pela condição de fornecer os valores mais desfavoráveis *. O cálculo foi sempre baseado numa condição de equilíbrio limite, o que implicitamente leva a admitir que o solo plastifica, pelo menos nas vizinhanças da superfície de escorregamento. A determinação da distribuição das tensões no interior dos maciços na fase de equilíbrio limite não tem sido abordada a não ser muito esporadicamente, em problemas muito elementares, e compreende-se porquê. Efectivamente se o problema elástico correspondente ainda hoje tem resolução apenas num reduzido número de casos, compreende-se que mais reduzido seja o número dos*

* Valores mínimos no caso da capacidade de carga de fundações.

problemas elasto-plásticos ou o dos problemas visco-elasto-plásticos tratados na literatura técnica internacional.

Antes do mais a dificuldade é a do volume de cálculo a efectuar. Se o cálculo pelos métodos clássicos, que apreciam apenas a estabilidade global dos maciços, é já bastante moroso, é de esperar que o cálculo das tensões no interior se torne, dum modo geral, tão moroso que seja proibitivo efectuá-lo.

Nestas condições, é natural que para o desenvolvimento dos métodos de cálculo das tensões no interior dos maciços em estado elasto-plástico se tenha de recorrer ao uso de calculadoras automáticas, que já em tantos outros domínios possibilitaram o ataque de problemas inatacáveis antes do seu aparecimento.

Aconteceu, porém, que as calculadoras automáticas vieram mostrar as reais dificuldades matemáticas de certos problemas, considerados teoricamente simples. É o caso da integração do sistema de equações diferenciais de tipo hiperbólico, a que conduz o problema que nos vai ocupar, quando há discontinuidades no interior (camadas com características diferentes). É ainda o caso de se procurar conhecer a relação entre os erros cometidos na integração numérica e o espaçamento escolhido para os pontos de cálculo, avaliação da estabilidade e convergência das soluções, da influência da distribuição das tensões na fronteira, etc., etc. Como adiante se mostrará não há, em geral, soluções analíticas para o problema em causa. O método proposto é, pois, o da integração numérica. Por essa via podemos tratar uma certa gama de casos particulares que conduziram à elaboração de tabelas para o

cálculo de fundações com dimensões várias, a várias profundidades e diversas condições de fronteira.

Como se referiu as soluções obtidas têm necessariamente valor aproximativo, mas a comparação de resultados com outros obtidos pelas vias clássicas, mostrou que os novos valores se situam entre os antigos. Por outro lado o cálculo feito variando o número de pontos calculados, dá-nos a ideia de que os erros cometidos não irão em média além de 2%.

Mais grosseira será necessariamente a aproximação quando se pretenda comparar os resultados de cálculo com os valores verificados na prática. Com efeito, às dificuldades de obtenção duma solução matemática rigorosa juntam-se questões de princípio como sejam a validade do critério de rotura ou da condição de plasticidade de Mohr Coulomb, a impossibilidade cinemática dalgumas soluções, o facto de que os solos são dos corpos reais que mais se afastam de qualquer dos corpos ideais: o corpo elástico de Hooke, o corpo plástico de St. Venant e o líquido viscoso de Newton, participando ao mesmo tempo de todos eles.

Terá com mais razão lugar aqui, o que Otto Mohr a respeito da resistência de materiais afirmava em 1901 na «Zeitung Ver. deut. Ing.» p. 740:*

«Em discussões com profissionais de engenharia, de bom senso, encontrei não infrequentemente a opinião de que seria

* Cf. Nadai, 1950, p. 3 (Vidé referências no fim do volume).

desperdiçar vãos esforços em procurar obter uma teoria na qual a resistência dos materiais pudesse ser baseada cientificamente. Corpos de materiais homogêneos — dizem-me — não existem, estados homogêneos de tensão não se encontram. Parece, portanto, completamente impossível deduzir uma lei da natureza da experiência. Visto que as irregularidades existentes são além disso duma tal natureza que quase completamente obscurecem qualquer comportamento ordenado, tem pouco interesse procurar descobrir os traços meio apagados de tais leis. Nestas circunstâncias nada mais resta do que realizar ensaios especiais em cada caso importante e não se preocupar com a interpretação dos resultados. Tive de admitir em cada caso que nada podia dizer-se contra esta maneira de racionar; e contudo durante mais de uma centena de anos, houve tentativas repetidas para se estabelecer uma ordem entre a confusa abundância de experiências. Se se conseguisse encontrar algumas regras às quais muitas experiências pudessem ser subordinadas — regras nas quais evidentemente alguma confiança possa ser depositada — nenhuma lei da natureza teria sido deduzida, mas ter-se-iam encontrado alguns meios para se julgar a probabilidade de novos resultados da experiência.»

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

1. Modos de encarar o comportamento mecânico dos corpos reais

A previsão do comportamento mecânico dos corpos reais pode ser encarada do ponto de vista atómico e molecular, do ponto de vista microscópico e do ponto de vista macroscópico ou fenomenológico. Dos dois primeiros pontos de vista se ocupam disciplinas como a física do estado sólido, a química-física, a química coloidal, a cristalografia, a metalurgia e a reologia estrutural. No que vai seguir-se referir-nos-emos ao aspecto macroscópico (fenomenológico) do comportamento dos corpos reais.

Um corpo real será, dum modo geral, um corpo deformável, onde coexistem as três fases, sólida, líquida e gasosa, estas duas últimas circulando, por hipótese, nos interstícios dum esqueleto visco-elasto-plástico. O corpo admite-se ligado de qualquer forma a um meio exterior e sobre ele actua um sistema de forças, momentos, variações de temperatura e assentamentos de apoios, além das forças de massa.

Dum modo geral um tal corpo seria ainda sede de fenómenos electro-magnéticos que criam acções de massa, mas esses fenómenos não são, em geral, considerados na mecânica dos corpos reais.

2. Os maciços terrosos como meios contínuos

Os corpos reais são como se viu dum modo geral heterogéneos e anisotrópicos isto é, as suas propriedades variam de ponto para ponto

e no mesmo ponto variam com a direcção que se considera. Além disso, admitimo-los porosos o que implica haver neles descontinuidades ou pelo menos variações bruscas nas suas características, em particular na densidade. No entanto, se admitirmos que os poros têm secções reduzidas e se tomarmos volumes elementares de grandeza suficiente, poderá supôr-se que, estatisticamente, o corpo se comporta como um meio contínuo e que os efeitos da percolação se reduzem a uma pressão interna (pressão neutra) que será um tensor esférico e uma força de massa (o gradiente da tensão neutra) que se adicionará vectorialmente à gravidade.

Embora nos maciços terrosos, especialmente nos incoerentes, existam partículas sólidas discretas cuja forma de empacotamento pode variar durante a aplicação das cargas, o modelo de corpo real que se acaba de descrever é, talvez, o que mais se pode aproximar dos maciços terrosos.

Pretende-se assim reduzir o estudo do comportamento mecânico dos maciços terrosos ao estudo do comportamento mecânico dos meios contínuos.

3. Noções fundamentais de cálculo tensorial

Para o estudo dos meios contínuos as principais noções de cálculo tensorial são fundamentais e vamos passá-los em revista.

Escalar — é um número tal como a distância entre dois pontos ou a energia cinética duma partícula que não depende da escolha de qualquer sistema de coordenadas.

Vector — é uma entidade que associa um escalar a cada direcção no espaço por meio duma expressão que é linear e homogénea nos cosenos directores da direcção escolhida.

Um vector $\mathbf{v}$ (por exemplo o vector velocidade) associa um escalar $v^{(n)}$ com cada direcção n do espaço pela relação

$$v^{(n)} = v_1 \cos(n, x_1) + v_2 \cos(n, x_2) + v_3 \cos(n, x_3), \quad (1.1)$$

$$\text{ou seja } v^{(n)} = v_i c_{ni}^* \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

onde $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$ são os eixos coordenados e c_{ni} os cosenos directores da direcção n .

Os valores das constantes v_i obtêm-se da própria expressão (1.1).

Se n for por exemplo a direcção do eixo dos xx , virá em (1.1) $\cos(n, x_1) = 1$ e $\cos(n, x_2) = \cos(n, x_3) = 0$ e, portanto $v^{(n)} = v_1 \cdot v_i$ é, pois, a componente do vector v na direcção do eixo dos xx . Será indiferente designar o vector por v ou pelas suas componentes v_i .

O produto dum escalar λ pelo vector v_i será por definição o vector $\omega_i = \lambda v_i$.

O produto escalar de dois vectores u_i e v_i será por definição o escalar $a = u_i v_i$.

O quadrado da grandeza ou do módulo dum vector é por definição o produto escalar do vector por si próprio:

$$v^2 = v_i v_i = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \quad (3.1)$$

O vector unidade é o vector de grandeza 1. As suas componentes n_i são os cosenos directores da direcção n que lhe está associada

$$n_i = \cos(n, x_i). \quad (4.1)$$

Tensor — é uma entidade que associa um vector v_i a cada direcção do espaço por intermédio duma expressão que é linear e homogénea nos cosenos directores da direcção escolhida.**

* Usar-se-á em todo este trabalho a convenção dos índices mudos, isto é, um monómio com um índice repetido significa uma soma de monómios em relação a esse índice.

** A noção de tensor generaliza-se facilmente:

Um tensor de ordem m é uma entidade que associa um tensor de ordem $(m-1)$ a cada direcção do espaço por intermédio duma expressão que é linear e homogénea

Pode demonstrar-se facilmente a partir desta definição que numa transformação ortogonal definida por

$$x'_i = a_i + \sum_{j=1, 2, 3} c_{ij} x_j \quad (5.1)$$

as componentes T_{ij} dum tensor (de 2.^a ordem) se transformam segundo as relações

$$T'_{rs} = \sum_{i, j=1, 2, 3} T_{ij} c_{ri} c_{sj} \quad (6.1)$$

Por exemplo, o tensor T_{ij} (tensão) associa um vector ρ_j (vector de tensão) a cada direcção do espaço pela relação

$$\rho_j = (T_1)_j \cos(j, x_1) + (T_2)_j \cos(j, x_2) + (T_3)_j \cos(j, x_3) \quad (7.1)$$

Se a direcção j coincide com o eixo dos xx , $\cos(j, x_1)=1$ e $\cos(j, x_2)=\cos(j, x_3)=0$. Portanto, $\rho_j=(T_1)_j$ é o vector de tensão aplicado a uma faceta cuja normal tem a direcção do eixo dos xx . Esse vector terá três componentes, T_{11} , T_{12} e T_{13} que são as componentes da tensão na direcção dos três eixos de referência.* Um tensor de 2.^a ordem será assim definido por 9 escalares T_{ij} que são as suas componentes,

* Desta definição se conclui que o primeiro índice indica a direcção da normal à faceta considerada e o segundo índice a direcção da tensão: T_{ij} seria uma tensão na direcção j aplicada à faceta cuja normal tem a direcção i . Haveria aqui que definir os sentidos positivos, o que será feito mais tarde.

nos cosenos directores da direcção escolhida. Um escalar seria um tensor de ordem zero e um vector um tensor de primeira ordem.

Um tensor de 3.^a ordem tem $3^3=27$ componentes e um de 4.^a ordem tem $3^4=81$ componentes.

O produto de dois tensores R_{ij} e S_k é a totalidade dos produtos que contêm uma componente de cada um dos tensores dados.

$T_{ijk}=R_{ij} S_k$ (um tensor de 2.^a ordem R_{ij} multiplicado por um vector S_k dá o tensor de 3.^a ordem T_{ijk}).

$$T_{ij} \equiv \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

O tensor unidade será definido pela matriz

$$\delta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

em qualquer sistema de coordenadas.

4. Decomposição dum tensor de 2.^a ordem na soma dum tensor simétrico com outro hemi-simétrico

$$\text{Um tensor diz-se simétrico se } T_{ij} = T_{ji} \quad (10.1)$$

$$\text{e anti-simétrico ou hemi-simétrico se } T_{ij} = -T_{ji} \quad (11.1)$$

$$\text{A identidade } T_{ij} = 1/2 (T_{ij} + T_{ji}) + 1/2 (T_{ij} - T_{ji}) \quad (12.1)$$

mostra que um tensor não simétrico se pode sempre decompor na soma de um tensor simétrico com um hemi-simétrico.

5. Direcções principais dum tensor simétrico

Os tensores de 2.^a ordem simétricos têm três direcções principais normais entre si. Uma direcção v_i é considerada principal em relação ao tensor simétrico T_{ij} se o vector $T_{ij}v_i$ é paralelo a v_i , isto é, se o vector $T_{ij}v_i$ toma a forma

$$T v_j = T v_i v_i \quad (13.1)$$

onde T é um escalar.

$$\text{Então,} \quad T_{ij}v_i - Tv_j = 0 \quad (14.1)$$

$$\text{ou seja} \quad (T_{ij} - T\delta_{ij})v_i = 0 \quad (15.1)$$

(15.1) forma um sistema de 3 eqs. homogêneas a 3 incógnitas v_i . Excluída a solução $v_i = 0$ por ser incompatível com a condição $v_i v_i = 1$, terá de ser

$$\left| T_{ij} - T\delta_{ij} \right| = 0 \quad (16.1)$$

6. Invariantes de um tensor

O determinante (16.1) conduz a uma equação cúbica da forma

$$T^3 - I_1 T^2 + I_2 T - I_3 = 0 \quad (17.1)$$

onde I_1 , I_2 e I_3 são funções das componentes T_{ij} do tensor. Visto que as raízes da eq. (17.1) terão de ser independentes do sistema de coordenadas, os coeficientes I_1 , I_2 e I_3 também o terão de ser e consequentemente são invariantes do tensor T_{ij} .

Desenvolvendo (16.1) poder-se-á concluir que

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} \equiv T_{ii} \quad (18.1)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - (T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{31}^2) \equiv \\ &\equiv 1/2 (T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \end{aligned} \quad (19.1)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= T_{11}T_{22}T_{33} + 2T_{12}T_{23}T_{31} - T_{11}T_{23}^2 - T_{22}T_{31}^2 - T_{33}T_{21}^2 \equiv \\ &\equiv 1/6 (2T_{ij}T_{jk}T_{ki} - 3T_{ij}T_{ji}T_{kk} + T_{ii}T_{jj}T_{kk}) \end{aligned} \quad (20.1)$$

7. O estado de tensão é representado por um tensor simétrico

Admitindo que o elemento dS de superfície que limita o volume do tetraedro elementar $P Q_1 Q_2 Q_3$ não transmite momentos ao interior desse volume e que além disso a tensão na superfície dS depende sòmente da posição de P mas não da forma da superfície dS ou da forma

da superfície S da qual dS faz parte, demonstra-se [17]* que o estado de tensão no ponto P é representado pelo tensor de 2.^a ordem σ_{ij} que

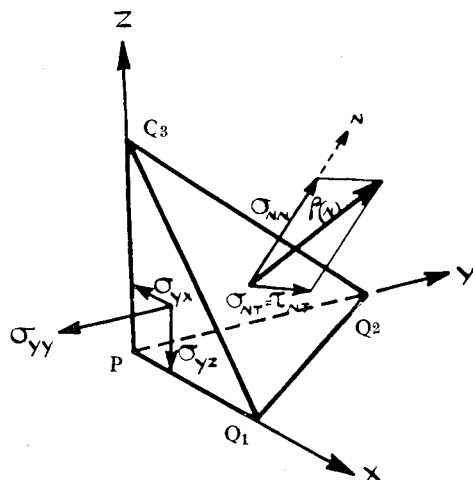


FIG. (1.1)

associa a cada direcção n do espaço um vector $\rho^{(n)}$ cuja componente segundo n é a tensão normal σ_{nn} e cuja componente no plano de dS é a tensão tangencial $\sigma_{nt} = \tau_{nt}$.

Aplicando a um paralelepípedo elementar as leis de Newton com as forças de inércia incluídas nas forças de massa, as equações de equilíbrio da estática são as seguintes:

$$\begin{array}{l} \text{Equilíbrio de} \\ \text{Forças} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + G_x = 0 \\ \text{etc.} \end{array} \right. \quad (21.1)$$

$$\begin{array}{l} \text{Equilíbrio de} \\ \text{Momentos} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \\ \text{etc.} \end{array} \right. \quad (22.1)$$

Na notação de Prager [67]** (21.1) e (22.1) escrevem-se

* Correia de Araújo (1961, p. 60). Ver Bibliografia no fim do volume.

** 1962.

$$\partial_i \sigma_{ij} + G_i = 0 \quad (23.1)$$

$$e \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i \neq j) \quad (24.1)$$

onde o operador ∂_i significa derivada parcial em ordem x_i . Como se vê o tensor das tensões é simétrico e portanto só seis das suas componentes são distintas. Para determinação dessas seis incógnitas têm-se apenas as 3 eqs. (23.1), o que mostra que o campo das tensões dos meios contínuos é estáticamente indeterminado. Há que juntar mais equações para tornar o problema determinado. Adiante se verá como obter essas equações. De momento vamos discutir algumas propriedades dos tensores simétricos.

8. Parte isotrópica e parte distorcional do tensor das tensões

Os tensores simétricos podem decompor-se em dois: um dito volumétrico, isotrópico ou esférico $T_{ij}^{(v)} \equiv \sigma_{ij}^{(v)}$ e outro distorcional ou desviatório $T_{ij}^{(d)} \equiv \sigma_{ij}^{(d)}$.

As expressões destes dois tensores são:

$$T_{ij}^{(v)} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 \end{pmatrix} = T_0 \delta_{ij} \quad e \quad T_{ij}^{(d)} = \begin{pmatrix} T_{11}-T_0 & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-T_0 & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-T_0 \end{pmatrix} \quad (23.1)$$

onde

$$T_0 = 1/3 (T_{11} + T_{22} + T_{33}) = 1/3 T_{kk}. \quad (24.1)$$

Os três invariantes do tensor distorcional, obtidos como no caso anterior são:

$$I_1^{(d)} = 0, \quad I_2^{(d)} = I_2 - 1/3 I_1^2 \quad e \quad I_3^{(d)} = I_3 - 1/3 I_1 (I_2 - 2/9 I_1^2) \quad (25.1)$$

9. Tensões principais. Os valores máximos das tensões tangenciais

Como antes se referiu existem para os tensores simétricos pelo menos três eixos normais principais. Para elementos de superfície normais

a esses eixos não existem tensões tangenciais, designando-se as tensões normais por tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 .

De acordo com a Fig. (1.1) em certa faceta cuja normal tem a direcção n está aplicado um vector de tensão $\rho^{(n)}$ cujas componentes normal σ_{nn} e tangencial σ_{nt} se podem calcular em função das tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 . Com efeito, se forem c_1 , c_2 e c_3 os cosenos directores da normal n , as componentes do vector $\rho^{(n)}$ são

$$\sigma_1 c_1, \sigma_2 c_2 \text{ e } \sigma_3 c_3;$$

portanto

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 c_1^2 + \sigma_2 c_2^2 + \sigma_3 c_3^2. \quad (26.1)$$

Como as componentes σ_{nn} e σ_{nt} são normais entre si, segue-se que

$$\begin{aligned} \sigma_{nt}^2 &= \rho_i^{(n)} \rho_i^{(n)} - \sigma_{nn}^2 \\ \text{ou} \quad \sigma_{nt}^2 &= \sigma_1^2 c_1^2 + \sigma_2^2 c_2^2 + \sigma_3^2 c_3^2 - \\ &\quad - (\sigma_1 c_1^2 + \sigma_2 c_2^2 + \sigma_3 c_3^2)^2 \end{aligned} \quad (27.1)$$

Substituindo c_3^2 pelo seu valor $1 - c_1^2 - c_2^2$, derivando sucessivamente em ordem a c_1 e a c_2 e igualando a zero, obtêm-se duas equações donde se deduzem alternadamente os três valores máximos das tensões tangenciais

$$T'_{nt} = 1/2 \left| \sigma_2 - \sigma_3 \right| \quad (28.1)$$

para as direcções $(0, \pm \sqrt{2}/2, \pm \sqrt{2}/2)$,

$$T''_{nt} = 1/2 \left| \sigma_3 - \sigma_1 \right| \quad (29.1)$$

para as direcções $(\pm \sqrt{2}/2, 0, \pm \sqrt{2}/2)$

$$T'''_{nt} = 1/2 \left| \sigma_1 - \sigma_2 \right| \quad (30.1)$$

para as direcções $(\pm \sqrt{2}/2, \pm \sqrt{2}/2, 0)$

T'_{nt} , T''_{nt} e T'''_{nt} são chamadas tensões tangenciais principais.

10. Tensões octaedrais normais e tangenciais

A partir das expressões (26.1) e (27.1) podem ainda calcular-se as tensões octaedrais respectivamente normal e tangencial. Estas são, por definição, as componentes normal σ_{on} e tangencial σ_{ot} do vector de tensão relativo a uma faceta inclinada em relação aos eixos principais como as faces dum octaedro em relação aos seus eixos. Como os cosenos directores da face do octaedro, pertencente ao primeiro octante são $c_1 = c_2 = c_3 = 1/\sqrt{3}$ segue-se de (26.1) e (27.1) que

$$\sigma_{on} = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = I_1/3 \quad (31.1)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_{ot}^2 &= 1/3 [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2] = \\ &= 1/9 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ &= 4/9 [(T'_{nt})^2 + (T''_{nt})^2 + (T'''_{nt})^2] = 2/3 I_2^{(d)} \end{aligned} \quad (32.1)$$

11. Deformações em termos de coordenadas de Lagrange e em termos de coordenadas de Euler

Os deslocamentos u_i dum ponto material dum corpo que se deforma são definidos pelas relações

$$u_i = x'_i - x_i \quad (33.1)$$

onde x'_i são as coordenadas do ponto material do corpo no estado deformado e x_i as coordenadas do mesmo ponto no estado inicial não deformado.

Há duas maneiras de definir a deformação dum corpo. Em termos das coordenadas de Lagrange as variáveis independentes são as coordenadas x_i dos pontos materiais no estado não deformado. Os deslocamentos e suas derivadas são funções de x_i . Em termos das coordenadas de Euler as variáveis independentes são as coordenadas dos pontos materiais no estado deformado; os deslocamentos e suas derivadas são funções de x'_i . Como só depois da deformação se atinge o equilíbrio das forças aplicadas a um corpo, as tensões σ_{ij} deveriam ser referidas às coordenadas dos pontos do corpo no estado deformado

e, consequentemente, as coordenadas de Euler seriam as mais indicadas para definir quer o estado de tensão quer o estado de deformação que dele é, em geral, dependente. Contudo, como «apriori» só as coordenadas dos pontos do corpo no estado inicial não deformado são conhecidas, compreende-se que seja mais fácil tratar o problema em termos de coordenadas de Lagrange. Em todo o nosso trabalho utilizam-se, pois, as coordenadas de Lagrange.

Se as deformações do corpo forem muito pequenas e as derivadas dos deslocamentos muito menores que a unidade os erros cometidos são desprezíveis [17]*.

12. Deformações finitas e deformações infinitesimais

O estudo da deformação dum corpo é consideravelmente simplificado se se considerarem apenas deformações infinitesimais. Com efeito, esse estudo em termos de deformações finitas, implica, antes de mais, que em vez das extensões em sentido usual, se considerem as chamadas extensões «naturais» que passamos a definir.

Seja r a distância entre dois pontos materiais O e P dum corpo no estado não deformado e seja $r' = O'P'$, a distância entre as mesmas partículas do corpo no estado deformado. Define-se como extensão natural na direcção $O'P'$ (O' e P' são as posições dos pontos materiais depois da deformação) o integral [64]**

$$\bar{\varepsilon} = \int_r^{r'} \frac{dr'}{r'} = \log_e \frac{r'}{r} = \log_e (1 + \varepsilon) \quad (34.1)$$

onde ε é a extensão em sentido usual definida por

$$\varepsilon = \frac{r' - r}{r} \quad (35.1)$$

* Correia de Araújo, 1961, p. 117.

** Nadai, 1950, p. 131.

Dada a complexidade das relações de tipo (34.1), compreende-se que, em geral se admita que as deformações dos corpos são tão pequenas em relação às suas dimensões, que se podem tratar com infinitesimais.

A simplificação agora enunciada encontra justificação no facto de que o funcionamento da maioria das obras de Engenharia Civil impõe deformações máximas que são pequenas em relação às menores dimensões dos seus órgãos.

13. Estado de deformação homogénea

Uma deformação diz-se homogénea quando os deslocamentos de cada ponto material são funções lineares homogéneas das coordenadas do ponto considerado. Se forem x_i as coordenadas do ponto antes da deformação, serão

$$x'_i = a_i + c_{ij}x_j \quad (36.1)$$

as coordenadas depois da deformação.

a_i e c_{ij} são constantes.

É fácil ver em face de (36.1) que numa deformação homogénea os pontos materiais que pertencem a um mesmo plano no estado não deformado, pertencem ainda a um mesmo plano no estado deformado. Com efeito, a equação dum plano é

$$A_i x_i + B = 0 \quad (37.1)$$

os pontos desse plano depois da deformação estarão sobre uma superfície que se obtém substituindo x_i em (37.1) pelos seus valores tirados de (36.1), obtendo-se por virtude da linearidade de (36.1) e de (37.1), uma expressão da forma

$$A'_j x'_j + B' = 0 \quad (38.1)$$

a qual representa ainda um plano.

Seria também fácil concluir que as rectas se transformam em rectas,

os planos paralelos em planos paralelos e as rectas paralelas em rectas paralelas. Um paralelepípedo rectângulo transforma-se, pois, num paralelepípedo, mas não já em geral rectângulo. Uma esfera transformar-se-á num elipsoide.

14. O tensor das deformações infinitesimais homogéneas. Sua decomposição

Se admitirmos que os deslocamentos são funções contínuas das coordenadas, quando se passa do ponto de coordenadas x_i para o seu vizinho de coordenadas $x_i + dx_i$, cada componente u_j do vector deslocamento sofrerá o incremento

$$du_j = \sum \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i. \quad (39.1)$$

O tensor
$$e_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \partial_i u_j \quad (40.1)$$

será dum modo geral não simétrico, mas poder-se-á decompôr na sua parte simétrica

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (41.1)$$

e na parte hemi-simétrica

$$\omega_{ij} = 1/2 (\partial_i u_j - \partial_j u_i) \quad (42.1)$$

15. Significado da parte simétrica e da hemi-simétrica do tensor das deformações. Deformação pura e rotação

Demonstra-se [67]* que se for nula a parte simétrica ε_{ij} do tensor $e_{ij} = \partial_i u_j$, isto é, se só existir a parte hemi-simétrica, então a vizinhança do ponto $P(x, y, z)$ considerado sofre uma rotação como se fosse um

* Prager, 1960.

corpo rígido, isto é, um triângulo formado por três pontos $P P' P''$ manteria a sua forma durante a deformação. Inversamente, se um tal triângulo mantiver a sua forma, então $\varepsilon_{ij} = 0$ e $e_{ij} \equiv \omega_{ij}$.

Por outro lado se $\omega_{ij} = 0$, $\varepsilon_{ij} \equiv e_{ij}$. A deformação será então irrotacional, isto é, tratar-se-á duma deformação pura.

16. Exemplos. Corte simples e corte puro. Extensão volumétrica e extensão distorcional

Supunhamos uma deformação, dita de corte simples, representada na Fig. (2.1) e definida pelas equações

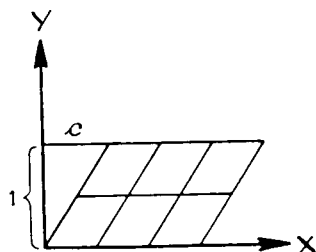


FIG. (2.1)

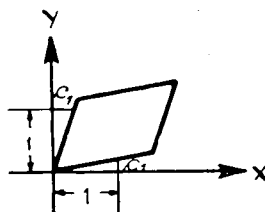


FIG. (3.1)

$u_x = cy$, $u_y = 0$, $u_z = 0$, onde c é uma constante. Aplicando (40.1), obter-se-á o tensor

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se vê e_{ij} não é simétrico. É, pois, composto duma deformação pura

$$\epsilon_{ij} = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c/2 & 0 \\ c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

à qual estará associada a rotação

$$\omega_{ij} = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c/2 & 0 \\ c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Não se trata portanto duma deformação pura. Já o caso representado na Fig. (3.1) e definido pelas equações

$$u_x = c_1 y, \quad u_y = c_1 x, \quad u_z = 0,$$

é um caso de deformação pura, porquanto o tensor

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ é simétrico. A constante } c_1 \text{ será aqui igual a}$$

metade da deformação angular $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$. No exemplo que acabamos de referir $\epsilon_{ii} = 0$, isto é, a componente volumétrica do tensor das extensões é nula e é por isso que esse estado de deformação se designa por corte. Dum modo geral e por semelhança com o que se disse para o tensor das tensões, o tensor das deformações puras por ser simétrico terá duas componentes. A componente volumétrica, deformação volumétrica* ou cúbica será dada por

$$E^{(v)} = \begin{pmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_c \end{pmatrix} = \epsilon_o \delta_{ij} \quad (43.1)$$

* Em rigor a deformação volumétrica é

$$dv/v = (1 + \epsilon_{xx})(1 + \epsilon_{yy})(1 + \epsilon_{zz}) - 1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} +$$

termos de ordem superior em $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$. (46.1)

Portanto ϵ_{ii} só representa a dilatação cúbica quando as deformações forem infinitesimais.

$$\text{onde } \varepsilon_o = 1/3 \varepsilon_{ii} \quad (44.1)$$

A componente distorcional terá por expressão

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_o & \gamma_{yx}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_o & \gamma_{zy}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_o \end{pmatrix} \quad (45.1)$$

Um caso de deformação distorcional pura (corte puro) é aquele em que um rombo seria transformado noutro rombo com os ângulos agudo e obtuso permutados. As componentes do vector deslocamento seriam

$$u_x = cx, \quad u_y = -\frac{c}{1+c} y, \quad u_z = 0$$

Aqui

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{1+c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ij}$$

a extensão volumétrica tal como é definida por (44.1) não é nula, mas segundo a expressão mais rigorosa (46.1)

$$\frac{dV}{V} = (1+c) \left(1 - \frac{c}{1+c} \right) (1+0) - 1 = 0.$$

Efectivamente este é um caso de corte puro mesmo em termos de deformações finitas.

Ainda um outro caso de corte puro é o da extensão sem variação de volume definida por

$$u_x = cx, \quad u_y = u_z = \frac{1}{\sqrt{1+c}} - 1.$$

O caso da extensão unidireccional

$u_x = cx$, $u_y = u_z = 0$, é composto duma

extensão volumétrica $\begin{pmatrix} c/3 & 0 & 0 \\ 0 & c/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e duma distorção $\begin{pmatrix} 2c/3 & 0 & 0 \\ 0 & -c/3 & 0 \\ 0 & 0 & -c/3 \end{pmatrix}$.

17. Homologia de propriedades entre os tensores das tensões, das extensões e das velocidades de extensão

Sendo o tensor das extensões ϵ_{ij} um tensor simétrico possui propriedades homólogas ao tensor das tensões. Bastará mudar a notação para se obterem as expressões para os invariantes, para as extensões octaedrais, etc.

Uma outra variável cinemática é a velocidade de deslocamento

$$\dot{u}_j = \frac{du_j}{dt} \quad (47.1)$$

onde t é o tempo.

Da mesma maneira que se obteve o tensor das deformações e_{ij} , assim se obteria o tensor das velocidades de deformação $\dot{e}_{ij}$. Se as vizinhanças de certo ponto material não rodarem como corpo rígido o tensor $\dot{e}_{ij}$ reduzir-se-á à componente simétrica $\dot{\epsilon}_{ij}$, que possuirá por consequência todas as propriedades de ϵ_{ij} . $\dot{\epsilon}_{ij}$ é pois, a velocidade de extensão.

18. Aspectos energéticos associados às tensões, às extensões e velocidades de extensão

Concomitantemente com as tensões, extensões e velocidade de extensão podem existir num corpo variações de temperatura com elas associadas. Importa, pois, referir alguns aspectos deste problema.

A energia contida no volume elementar dV do corpo, pode ser considerada composta da energia interna dU e da energia cinética dK . Se as deformações sofridas pelo corpo se derem de maneira suficientemente lenta, poderá admitir-se que é nula a energia cinética dK .

A energia interna poderá por sua vez considerar-se composta da energia intrínseca, associada ao estado de coacção do corpo [17]*, energia potencial elástica, associada ao estado de deformação recuperável e energia térmica, associada à temperatura e capacidade calorífica do corpo.

Se o corpo é homogéneo e simplesmente conexo, se as temperaturas são funções lineares das coordenadas e se a isso se não opuserem as ligações exteriores, poderão existir deformações térmicas no corpo, mas as correspondentes tensões serão nulas [17]**. O problema da determinação das deformações reduz-se então ao problema da determinação da distribuição das temperaturas no espaço e no tempo, isto é, ao problema da condução do calor. A equação que governa a condução do calor é, em coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (48.1)$$

ou seja
$$\partial_i (K_i \partial_i \theta) = \rho c \partial \theta / \partial t \quad (49.1)$$

onde K_i é a condutibilidade térmica na direcção do eixo x_i , ρ a massa específica, c o calor específico da substância e θ a temperatura.

À equação (48.1) devem ser associadas as condições de fronteira para que o problema fique definido.

Por outro lado se as ligações exteriores do corpo impedem a sua deformação de origem térmica, se as temperaturas não são funções lineares das coordenadas ou se o corpo é heterogéneo, as deformações térmicas produzirão alteração do estado de tensão do corpo.

* Correia de Araújo, op. cit., p. 197.

** Idem, idem, p. 184.

19. Transformações adiabáticas e transformações isotérmicas. Dois exemplos de efeitos termo-elásticos

Do ponto de vista térmico as transformações por que passará um corpo dum estado inicial não deformado para um estado final deformado poderão ser fundamentalmente de dois tipos: adiabáticas e isotérmicas. No primeiro caso o corpo não troca calor com o meio exterior; no segundo caso a transformação supõe-se suficientemente lenta para que não haja alteração na temperatura do corpo.

Uma experiência onde figuram transformações adiabáticas publicada por Lord Kelvin em 1890, a qual evidencia os efeitos termo-elásticos, é descrita [65]* nos termos seguintes: «Coloquemos uma tira de borracha em leve contacto com os lábios e estiquemo-la repentinamente — torna-se perceptivelmente mais quente; mantenhamo-la por algum tempo esticada próximo da rotura e deixemo-la repentinamente encolher — torna-se nitidamente mais fria, sendo o arrefecimento perceptível não só aos lábios mas aos dedos que seguram a tira». Na primeira parte da experiência, quando a tira de borracha é repentinamente esticada, não há tempo para troca de calor com o meio exterior: trata-se, portanto duma transformação adiabática. Como parte do trabalho realizado em esticar a tira é transformado em calor, a temperatura sobe. Nesse momento a energia do corpo é em parte energia elástica e em parte energia térmica. Pelo primeiro princípio da Termodinâmica o trabalho das forças exteriores dW realizado a esticar a tira tem de ser igual à variação dU da energia interna do sistema, se se admitir que é desprezível o trabalho dW' das forças de massa, uma vez que não houve calor dQ nem cedido nem recebido e que os estados inicial e final são ambos de repouso. Assim, a equação geral que exprime o primeiro princípio

$$dW + dW' + dQ = dU + dK \quad (50.1)$$

transforma-se em

$$dW = dU \quad (51.1)$$

* Nadai, 1963, II, p. 4.

com

$$dU = d\Phi' + d\Phi'' \quad (52.1)$$

onde $d\Phi'$ é a variação da energia potencial elástica e $d\Phi''$ é a variação da energia térmica do sistema.

Enquanto a tira de borracha permanece esticada há dissipação do calor acumulado, uma vez que a temperatura exterior é mais baixa que a do corpo.

Quando se deixa a tira encolher repentinamente volta a dar-se nova transformação adiabática, mas agora em sentido inverso. O trabalho das forças exteriores é agora negativo, mas em módulo superior ao decréscimo de energia elástica, pelo que o excedente é gasto em diminuir a temperatura do corpo. Devido à diferença de temperaturas em relação ao ambiente, a tira começa então a receber dele calor, restabelecendo-se o equilíbrio ao fim dum tempo que depende das características de condutibilidade, massa e calor específicos da substância, nos termos da equação (48.1) e das condições de fronteira que lhe estão associadas.

Nadai [65]* cita ainda outra experiência devida a Gough e referida por Lord Kelvin onde figuram transformações isotérmicas que também evidenciam os efeitos termo-elásticos. Gough suspendeu um peso duma tira de borracha. Aproximando bruscamente um corpo ao rubro da tira de borracha, verificou que o peso subia. O fenómeno explica-se pela forma seguinte: à aproximação repentina do corpo ao rubro o sistema não teve tempo de aumentar a sua temperatura (transformação isotérmica), e, portanto, de aumentar a sua energia térmica ($d\Phi'' = 0$), mas recebeu a quantidade de calor dQ . Como o trabalho dW realizado pelas forças exteriores é nulo, e não houve variação sensível da energia elástica ($d\Phi' = 0$), segue-se que para satisfazer a equação (50.1) terão as forças de massa de realizar um trabalho $dW = -dQ$, isto é, o peso subirá.

20. O problema geral de mecânica dos meios contínuos. As equações reológicas de estado

Acabámos de referir os dois tipos de transformações de energia fundamentais. No que vai seguir-se supõem-se transformações isotér-

* Op. cit. p. 4.

micas. A temperatura funcionará como parâmetro e as variáveis serão apenas as 6 componentes σ_{ij} do tensor das tensões, as 6 componentes ϵ_{ij} do tensor das extensões e as 3 componentes u_j do vector deslocamento. Ao todo 15 incógnitas, funções das coordenadas do espaço e do tempo. Para resolver o problema dispõe-se das 3 equações de equilíbrio (21.1), das 6 equações (41.1) que relacionam as componentes do tensor das extensões ϵ_{ij} com as componentes do vector dos deslocamentos. Faltam portanto 6 equações para que o problema seja determinado, uma vez que se acrescentarmos as 6 incógnitas $\dot{\epsilon}_{ij}$ das velocidades de extensão, teremos de acrescentar as 6 equações

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \quad (53.1)$$

o que mantém o número de incógnitas em 6.

A indeterminação levanta-se por intermédio das equações de constituição ou equações reológicas de estado [30]* que reflectem as características de constituição do corpo e podem ser obtidas por via experimental.

Essas equações têm a forma

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}) = 0. \quad (54.1)$$

21. O problema da elasticidade caso particular do problema geral da mecânica dos meios contínuos

Suponhamos o caso particular $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$ e em que F tem a forma

$$\sigma_{kl} - c_{klij}\epsilon_{ij} = 0 \quad (55.1)$$

onde c_{ijkl} é um tensor de 4.^a ordem cujas componentes seriam as constantes definidoras das características do material que constitui o corpo. Sendo 6 o número de equações (55.1) ficaríamos, portanto, ao todo com 15 equações a 15 incógnitas e o problema seria determinado.

* Folque, 1961, p. 16.

Todavia as dificuldades matemáticas para resolver um tal problema (o problema geral da elasticidade) seriam insuperáveis [17]*. O número de constantes c_{ijkl} seria de $9 \times 9 = 81$, mas sendo $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$ esse número reduz-se logo a $6 \times 6 = 36$. No sistema (55.1) em que por isso cada equação tem 6 parcelas é ainda $(c_{kl})_{ij} = c_{rs} = c_{sr}$; portanto o número de constantes elásticas baixa para 21. Quando haja simetria elástica em relação a um plano o número de constantes baixa para 13 e quando a simetria for em relação a dois planos, em particular dois planos ortogonais (corpos ortótopos), o número de constantes é apenas de 9.

22. As constantes definidoras da constituição dos corpos elásticos e isótropos

No caso mais simples de simetria elástica em todas as direcções (corpos isótropos) o número de constantes é apenas de duas. Essas duas constantes são, em princípio, as duas constantes de Lamé, definidas pelas equações

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon^v \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (56.1)$$

onde $\varepsilon^v = \varepsilon_{ii}$ é a extensão volumétrica.

O módulo de elasticidade longitudinal E (módulo de Young) e o coeficiente de Poisson ν estão relacionados com λ e μ pelas expressões

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (57.1)$$

que se deduzem facilmente de (56.1) atendendo às suas definições. O módulo de compressibilidade volumétrica K e o módulo de elasticidade transversal ou módulo de Coulomb G estão também relacionados com λ e μ pelas relações

* Correia de Araújo, op. cit. p. 151. O problema da elasticidade foi também tratado com toda a generalidade por Campos e Matos [9], 1950.

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \text{ e } \mu = G \quad (58.1)$$

É claro que de (57.1) e (58.1) se podem obter as seguintes novas relações entre as constantes λ , μ , E , ν e K , mas no conjunto só duas são independentes:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \quad (59.1)$$

O sistema de equações (56.1) pode ser substituído pelo seguinte onde figuram separadas as constantes K e G :

$$\sigma_0 = K\varepsilon_{ii} \quad (60.1)$$

$$\text{e} \quad \tau_{ij} = 2G\gamma_{ij} \quad (61.1)$$

$$\text{com} \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij} \text{ e } \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij} \quad (62.1)$$

$$\text{onde} \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3.$$

γ_{ij} é o tensor das distorções e τ_{ij} é o tensor das tensões de desvio.

No sistema (60.1) temos agora mais uma incógnita (a tensão média σ_0) em relação ao sistema (56.1), mas também temos mais uma equação (60.1).

O corpo cujas equações de constituição são as equações (55.1), que exprimem a lei de Hooke generalizada é chamado corpo de Hooke.

23. Os corpos ideais simples. O corpo rígido de Euclides, o líquido de Pascal e o líquido de Newton

Outro caso particular da equação reológica geral (54.1) seria

$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad (63.1)$$

Tratar-se-ia de um corpo cujas deformações seriam nulas quaisquer que fossem as tensões a que fosse sujeito. Um tal corpo é dito rígido ou euclidiano.

Ainda um outro caso particular da (54.1). Aquele em que a tensão distorcional é nula

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} = 0. \quad (64.1)$$

Seria um corpo incapaz de mobilizar tensões tangenciais quaisquer que fossem as deformações que lhe fossem impostas. O líquido de Pascal que por definição não tem viscosidade, é um corpo que satisfaz a equação (64.1).

Finalmente mais uma particularização de (54.1): o corpo de Newton que satisfaz as equações

$$\tau_{ij} = 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij}^0 \quad (65.1)$$

$$\sigma_0 = K \varepsilon_{ii} + \eta_v \dot{\varepsilon}_{ii} \quad (66.1)$$

onde η e η_v são viscosidades respectivamente distorcional e volumétrica.

Por integração de (66.1) obtém-se [30]*, atendendo a que $(\varepsilon_{ii})_t=0=0$

$$\exp^{**} \left(-\frac{K}{\eta_v} t \right) = \frac{\sigma_0 - K \varepsilon_{ii}}{\sigma_0} \quad (67.1)$$

24. Corpos ideais compostos. O líquido de Maxwell e o sólido de Kelvin. Sua representação por modelos

Com base nos corpos de Hooke e de Newton podem conceber-se corpos complexos que se assemelhariam aos corpos reais e que teriam um comportamento em parte elástico, como o corpo de Hooke, e em parte viscoso como o corpo de Newton. Para facilitar o estudo de tais

* Folque, 1961, p. 23. ** No que se segue empregaremos «exp x» significando exponencial de x, ou seja $\exp x = e^x$.

corpos imaginam-se modelos figurativos designados por modelos reológicos*.

Num modelo reológico a parte elástica ou hookeana do comportamento dum corpo seria representada por molas elásticas e a parte viscosa por amortecedores contendo líquidos viscosos.

O corpo composto mais simples seria o chamado líquido de Maxwell, representado por uma mola em série com um amortecedor (Fig. 4.1).

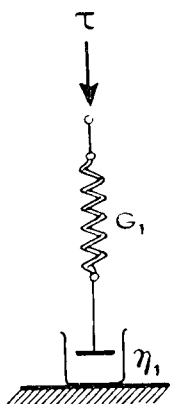


FIG.(4.1)

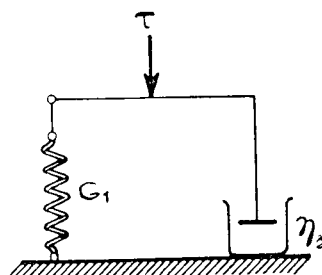


FIG.(5.1)

A tensão seria a mesma para a mola e para o amortecedor; a extensão do sistema seria igual à soma das extensões da mola e do amortecedor. Teríamos então

$$\tau = 2G_1\gamma_1 \quad (68.1)$$

$$\tau = 2\eta_2\dot{\gamma}_2, \quad (69.1)$$

$$\text{com} \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (70.1)$$

onde τ é a tensão (de corte) e γ a deformação do sistema.

* Scott Blair 1944, Reiner 1949 e muitos outros.

Derivando (68.1) e (70.1) em ordem ao tempo e fazendo as convenientes substituições, obtém-se a equação diferencial que rege o modelo

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{2G_1} + \frac{\tau}{2\eta_2} \quad (71.1)$$

onde $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ e $\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt}$.

A equação (71.1) pode ser imediatamente integrada quando seja $\tau = c^{te}$, $\dot{\gamma} = c^{te}$, em particular $\dot{\gamma} = 0$. Neste último caso a que corresponde uma deformação fixa do corpo, verifica-se por integração de (71.1) que a tensão baixa exponencialmente com o tempo, traduzindo o conhecido fenómeno da relaxação das tensões.

Se em vez de associarmos a mola em série, com o amortecedor, fizermos a associação em paralelo (Fig. 5.1) a deformação seria constantemente a mesma para ambos os elementos, mas a tensão seria a soma das tensões. É o que se traduz pela equação seguinte

$$\tau = 2G_1\gamma + 2\eta_2\dot{\gamma}. \quad (72.1)$$

A integração de (72.1) é imediata no caso em que $\tau = c^{te}$. Se em particular for $\tau = 0$, tratar-se-ia do caso em que depois de aplicada uma tensão durante certo tempo, se procede repentinamente à descarga e se aguarda a recuperação da deformação. Ao fim dum tempo teòricamente infinito a deformação voltará a ser nula.

Outro caso particular seria aquele em que $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 = c^{te}$. As tensões seriam proporcionais às deformações, com um valor inicial $\tau_{t=0} = 2\eta_2\dot{\gamma}_0$.

25. Modelos de corpos complexos. Modo de estabelecer a equação diferencial que rege qualquer modelo linear. Aplicação ao corpo de Burgers

Tratámos de modelos reológicos com dois elementos associados em série e em paralelo. Compreende-se que à semelhança das impedâncias eléctricas se poderá fazer uma variedade infinita de associa-

ções. Exactly baseados na noção de «impedância mecânica equivalente» e no uso da transformada de Carson-Laplace apresentámos em 1962 [59]* uma forma de estabelecer imediatamente a equação diferencial que rege qualquer modelo linear.

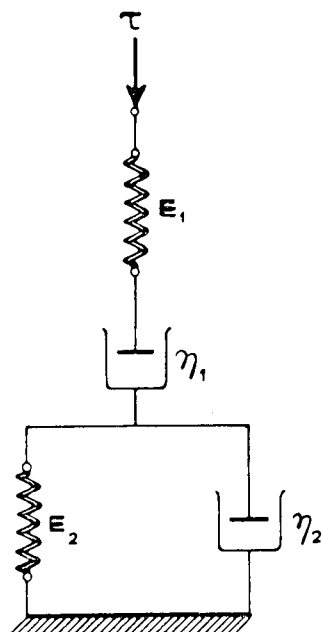


FIG.(6.1)

Assim, a equação do modelo de Burgers (Fig. 6.1) usado no estudo da deformação e fluência dos maciços terrosos [30]** e dos maciços rochosos [53]***, pode facilmente ser deduzida considerando que entre a velocidade de deformação ε e a tensão σ aplicada ao sistema existe a relação

$$\varepsilon = Z\sigma \quad (73.1)$$

* Martins, 1962, p. 92. ** Folque, 1961, p. 63. *** B. Lopes, 1964, V, p. 2

semelhante à lei de Ohm, onde Z desempenharia o papel duma «impedância mecânica equivalente», σ o papel da intensidade da corrente e ε o do potencial. As impedâncias elementares seriam estabelecidas pela forma seguinte: as molas de módulo de elasticidade E teriam a impedância $Z_m = \frac{p}{E}$, onde p representa o operador $\frac{d}{dt}$. Os amortecedores η teriam a impedância $Z_a = \frac{1}{\eta}$.

Portanto a impedância equivalente do modelo da (Fig. 6.1) seria:

$$Z = \frac{p}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{E_2/p + \eta_2}. \quad (74.1)$$

Substituindo (74.1) em (73.1), notando que $\dot{\varepsilon} = p\varepsilon$ e simplificando vem

$$\eta_2 p^2 \varepsilon + E_2 p \varepsilon = \frac{\eta_2}{E_1} p^2 \sigma + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right) p \sigma + \frac{E_2}{\eta_1} \sigma. \quad (75.1)$$

Na forma usual escreve-se:

$$\eta_2 \ddot{\varepsilon} + E_2 \dot{\varepsilon} = \frac{\eta_2}{E_1} \ddot{\sigma} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right) \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_1} \sigma, \quad (76.1)$$

com $\ddot{\varepsilon} = \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$, $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$, $\ddot{\sigma} = \frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ e $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$.

(76.1) coincide com a equação do modelo de Burgers deduzida por via clássica [53]*.

26. A inclusão de elementos de St. Venant. O corpo de Bingham

Um outro corpo complexo de interesse é o de Bingham, cujo modelo se representa na (Fig. 7.1).

* B. Lopes, 1964, V, p. 2.

O amortecedor só entra em funcionamento quando for excedida a resistência de atrito σ^0 do corpo A, dito elemento de St. Venant. Até lá o corpo actua como corpo rígido. A deformação do sistema será então $\sigma - \sigma^0 = 2\gamma \cdot \dot{\epsilon}$. (77.1)

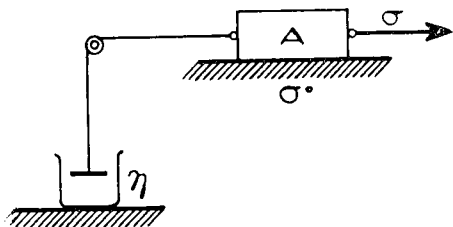


FIG. (7.1)

É evidente que a equação diferencial que rege a deformação unidireccional dum sistema complexo contendo elementos de St. Venant não é tão simples de estabelecer como nos casos anteriores.

27. Interpretação do fenómeno da rotura em termos de modelos reológicos. Insuficiências dessa interpretação

Os modelos acabados de referir aplicam-se a corpos estáveis, isto é, a corpos antes de atingirem a rotura [30]*. Esta só surgiria quando a energia armazenada nos elementos hookeanos do modelo ultrapassasse certo limite. Haveria assim uma interpretação simples para a rotura dos corpos de Hooke, de Maxwell e de Kelvin: o primeiro romperia quando fosse excedida uma certa tensão, a que corresponderia uma extensão bem definida (ou vice-versa); o segundo romperia quando

* Folque, op. cit. p. 36.

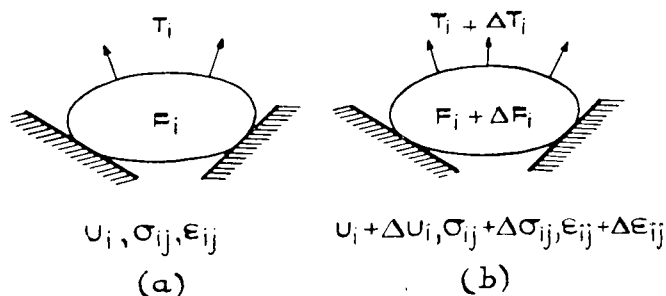
fosse atingida uma certa tensão a que corresponderia a energia limite de deformação da mola (Fig. 4.1), mas a extensão poderia ser qualquer devido à presença do amortecedor em série; o terceiro corpo romperia para certa extensão, dependendo a tensão da «história» da deformação do sistema.

Estas interpretações da rotura, simples nos casos apontados, complicam-se quando no sistema existam molas várias, amortecedores vários e vários elementos de St. Venant, com características diversas e associados de maneira qualquer. Maior complicação surgirá ao pretender-se tratar por essa via problemas bi e tridimensionais.

Além disso sendo grandes as deformações viscosas e plásticas, um estudo rigoroso exigiria a consideração de estados de deformação finita de tratamento muito mais complexo que o anterior.

28. O postulado da estabilidade ou de Drucker

A questão é delicada mas parece-nos que os melhores critérios de encarar a rotura, ou, melhor, a instabilidade dos corpos visco-elasto-plásticos, decorrem da aplicação do postulado da estabilidade ou de Drucker [27]*.



FIG(8.1)

Sejam (Fig. 8.1.a) T_i as tensões na superfície dum corpo inicialmente em equilíbrio e F_i as forças de massa, todas funções do tempo.

* 1959, p. 102.

Os deslocamentos u_i , as tensões σ_{ij} e as extensões ϵ_{ij} são de modo semelhante funções do tempo. Por adição de forças na superfície e de forças de massa devidas a uma causa exterior o corpo passa ao estado representado na (Fig. 8.1.b). Os incrementos ΔT_i e ΔF_i variam com o tempo e bem assim os incrementos nos deslocamentos, tensões e extensões, Δu_i , $\Delta \sigma_{ij}$ e $\Delta \epsilon_{ij}$, os quais resultam da acção da causa externa, sobreposta à série de forças existente. Excepto para o caso muito especial de inteira linearidade, não se verificaria que ΔT_i e ΔF_i , actuando sòzinhos, produzissem Δu_i , $\Delta \sigma_{ij}$, e $\Delta \epsilon_{ij}$. Sòmente $T_i + \Delta T_i$ e $F_i + \Delta F_i$ é que produzirão $u_i + \Delta u_i$, $\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}$ e $\epsilon_{ij} + \Delta \epsilon_{ij}$. Nestas condições é enunciado o postulado seguinte:

«Se um corpo é materialmente estável o trabalho realizado por uma causa externa na variação dos deslocamentos que produz tem de ser positivo ou nulo».

Este postulado applica-se a qualquer intervalo do tempo, mas ainda se restringe a deformações pequenas que não causem fenómenos como os de encurvadura ou enfundamento.

O postulado é traduzido matematicamente pela expressão

$$\int_{t=0}^t \left[\int_S \Delta T_i \Delta u_i dS + \int_V \Delta F_i \Delta u_i dv \right] dt \geq 0 \quad (78.1)$$

29. Derivação do postulado da estabilidade das equações que regem o corpo elasto-plástico

Se nos restringirmos a corpos elasto-plásticos, é possível a partir do postulado de Drucker e das diversas condições de plasticidade, obter as correspondentes leis gerais para esses corpos segundo os vários autores.

As condições de plasticidade exprimem, dum modo geral, que uma certa porção dum corpo elástico e isótropo está plastificada quando se verifique em todos os seus pontos certa relação entre as seis componentes das tensões, expressa pela equação

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (79.1)$$

Quando seja $f < 0$, o corpo ou porção dele estará em regime elástico, quando for $f = 0$ estará em regime plástico e nunca poderá ser $f > 0$.

A superfície definida pela equação $f(\sigma_{ij}) = 0$ designa-se por superfície de cedência.

Por aplicação do postulado da estabilidade ou de Drucker pode deduzir-se uma equação geral para o corpo elasto-plástico da qual se tiram as teorias de cedência ou escoamento plástico de Prandtl-Reuss, de von Mises e as teorias de deformação plástica de Henky e Il'yushin.

Com efeito, o teorema dos trabalhos virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas forças externas é igual ao trabalho interno de deformação e, portanto, em vez de (78.1) podemos escrever

$$\int_{t=0}^{t=t_c} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dt \geq 0 \quad (80.1)$$

Considerando as tensões σ_{ij}^I num dado instante e num certo ponto interior m^I infinitamente vizinho da superfície de cedência $f(\sigma_{ij}) = 0$, e as tensões σ_{ij} no instante seguinte já sobre a superfície de cedência, seria fácil demonstrar [17]* a partir do postulado de Drucker que o vector generalizado $D_k = \epsilon_{ij}$, seria normal à superfície de cedência e então ter-se-ia

$$\dot{\epsilon}_{ij}'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (81.1)$$

onde $\dot{\epsilon}_{ij}''$ é a velocidade de deformação plástica.

O escalar λ , que se demonstra ser sempre positivo, depende do estado inicial de tensão e de deformação da variação de tensão e do tempo; não caracteriza, portanto, qualquer propriedade do corpo e, entrará por isso, dum modo geral, como variável a determinar no problema geral da plasticidade.

* Correia de Araújo, op. cit., p. 291.

30. Aplicação à dedução das equações fundamentais da teoria de Prandtl-Reuss. Extensão à teoria de Von Mises e à das pequenas deformações elasto-plásticas

Se admitirmos como condição de plasticidade

$$f = J_2 - k^2 = 0, \quad (82.1)$$

onde $J_2 = 1/2 \tau_{ij} \tau_{ij}, \quad (83.1)$

quando, como no caso presente, se supõe que não intervêm a parte isotrópica do tensor das tensões ($\tau_{ii} = 0$), nem a do das deformações ($\dot{\gamma}''_{ii} = 0$), vem

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{ij}} = \tau_{ij} \quad (84.1)$$

e de (81.1) se tira para este caso,

$$\dot{\gamma}''_{ij} = \lambda \tau_{ij}, \quad (85.1)$$

onde $\dot{\gamma}''_{ij}$ é a velocidade de distorsão plástica.

Se a (85.1) se juntar a expressão diferencial da lei de Hooke

$$\dot{\tau}_{ij} = 2G\dot{\gamma}'_{ij}, \quad (86.1)$$

onde $\dot{\gamma}'_{ij}$ é a velocidade de distorsão elástica,

vem fazendo $\lambda = \frac{\bar{\lambda}}{2G}$

$$\dot{\tau}_{ij} + \bar{\lambda} \tau_{ij} = 2G\dot{\gamma}_{ij} \quad (87.1)$$

onde $\dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}'_{ij} + \dot{\gamma}''_{ij}$ é a velocidade de distorsão total.

Como em regime plástico se verifica (82.1), vem também

$$\dot{f} = \dot{J}_2 = \tau_{ij} \dot{\tau}_{ij} = 0 \quad (88.1)$$

Multiplicando (87.1) por τ_{ij} e atendendo a (88.1) vem

$$\bar{\lambda} = \frac{G}{k^2} \tau_{ij} \dot{\gamma}_{ij} . \quad (89.1)$$

Sendo a energia potencial elástica dada por

$$\Phi' = 1/2 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (90.1)$$

a velocidade do trabalho das tensões será

$$\dot{\Phi}' = \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} . \quad (91.1)$$

A velocidade do trabalho das tensões decompõe-se na velocidade de trabalho de extensão volumétrica

$$\dot{\Phi}'_v = 3\sigma_0 \dot{\epsilon}_0 , \quad (92.1)$$

onde σ_0 e ϵ_0 são os valores médios das tensões e das extensões respectivamente, e na velocidade de trabalho de distorção

$$\dot{\Phi}'_\gamma = \gamma_{ij} \dot{\tau}_{ij} . \quad (93.1)$$

Substituindo (89.1) em (87.1) e atendendo a (93.1) vem a expressão da teoria de Prandtl-Reuss

$$\dot{\tau}_{ij} = 2G \left(\dot{\gamma}_{ij} - \frac{\dot{\Phi}'_\gamma}{2k^2} \tau_{ij} \right) \quad (94.1)$$

De modo análogo se deduziria a partir da relação geral (81.1) a teoria de plasticidade de Von Mises, cuja diferença essencial da de Prandtl-Reuss é a de que von Mises considera as deformações elásticas desprezíveis perante as deformações plásticas, e portanto as relações características da teoria de von Mises são

$$\tau_{ij} = \frac{k}{\sqrt{I}} \dot{\epsilon}_{ij} , \quad (95.1)$$

com

$$I = 1/2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (96.1)$$

A teoria da plasticidade de St. Venant e Lévi obter-se-ia de (81.1) com a condição de plasticidade de Tresca, que na sua forma geral se exprime por

$$f = [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2] [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2] = 0, \quad (97.1)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais e $k = \sigma_c/2$ é metade da tensão normal do limite de elasticidade em tracção ou compressão simples.

A condição (97.1) no espaço $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ exprime-se por 3 pares de planos paralelos aos 3 bissectores, definindo assim um prisma exagonal regular de cujo eixo é a equissectriz do triedro definido pelos eixos σ_1 , σ_2 e σ_3 . Não permite como a condição de plasticidade (82.1) de von Mises eliminar a variável λ , tornando a solução de problemas plásticos tridimensionais mais complicada.

Ainda na mesma expressão (81.1) se enquadrariam as «teorias de deformação plástica» ou «teorias de pequenas deformações elasto-plásticas» de Henky, Nadai e Il'yushin, que admitem que se mantêm paralelos os tensores das tensões e das extensões o que implica serem as velocidades de deformação constantes.

Partindo por exemplo, da relação (85.1), já deduzida de (81.1), desprezando as deformações elásticas, admitindo $\dot{\gamma}_{ij}$ constante num certo intervalo de tempo Δt , poder-se-ia escrever esse intervalo

$$\tau_{ij} = 2\bar{\mu}\gamma_{ij} \quad (98.1)$$

com

$$2\bar{\mu} = \frac{1}{\lambda \Delta t}.$$

Nas teorias das pequenas deformações elasto-plásticas são as tensões relacionadas com as deformações e não com as velocidades de deformação mas o parâmetro $\bar{\mu}$ é então variável durante a deformação.

31. Problema geral da plasticidade

O problema geral do corpo plástico isotrópico envolve a determinação das seis componentes σ_{ij} do tensor das tensões, as seis componentes ε_{ij} da velocidade de deformação e as três componentes do vector velocidade de deslocamento. Além destas há ainda a terminação da variável λ que figura na equação (81.1) e que nem sempre é possível eliminar *a priori*, como já se viu. São pois 16 as incógnitas, funções das coordenadas do espaço e do tempo.

Para a sua determinação dispõe-se das três equações de equilíbrio (21.1), das seis equações de constituição (81.1), das seis relações

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (\partial_j u_i + \partial_i u_j) , \quad (99.1)$$

$$\text{onde} \quad \partial_j u_i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \partial_i u_j \equiv \frac{\partial u_j}{\partial x_i} , \quad (100.1)$$

com $i, j = 1, 2, 3$ e $x_1 = x, x_2 = y$ e $x_3 = z$,

e da condição de plasticidade $f(\sigma_{ij}) = 0$.

Temos assim 16 equações a 16 incógnitas, as quais adicionadas das condições de fronteira tornariam o problema determinado.

No entanto, como afirma Correia de Araújo [17]* «as dificuldades de índole matemática são no entanto ainda maiores do que no problema elástico e só em muito poucos casos particulares e à custa de hipóteses simplificadoras, de legitimidade algumas vezes discutível, é possível chegar a soluções práticas aceitáveis».

32. A teoria de Mohr e a condição de plasticidade de Mohr-Coulomb generalizada

A teoria de Mohr sob a forma geral [65]**, estabelece que o diâmetro

* Op. cit. p. 296. ** Nadai, 1961, I, p. 216.

máximo do círculo de Mohr é, na rotura, uma função da distância do seu centro à origem (Fig. 9.1).

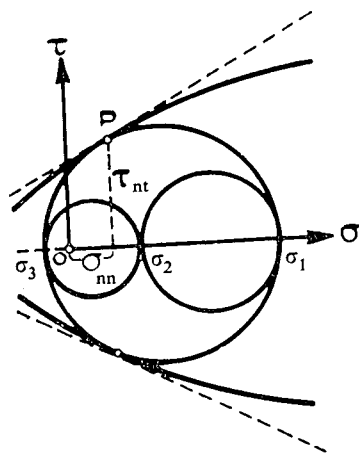


FIG. (9.1)

o que se exprime por

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right). \quad (101.1)$$

A tensão principal intermédia σ_2 não teria, portanto influência na rotura do material, sendo indiferente quanto à rotura que o estado de tensão no ponto considerado seja representado pelos triângulos curvilíneos da (Fig. 9.1) ou pelos casos limites $\sigma_2 = \sigma_3$ ou $\sigma_2 = \sigma_1$ em que um dos círculos interiores se confundiria com o círculo máximo e o outro círculo teria um raio infinitamente pequeno.

Um caso particular de (101.1) é aquele em que o diâmetro do círculo máximo de Mohr na rotura é função linear da distância à origem

$$\sigma_1 - \sigma_3 = c_1 + c_2(\sigma_1 + \sigma_3). \quad (102.1)$$

A envolvente dos círculos de Mohr na rotura é então constituída por um par de rectas simetricamente dispostas em relação ao eixo dos $\sigma\sigma$ (Fig. 9.1).

A relação (102.1) é a condição de plasticidade de Mohr-Coulomb, a qual costuma ser escrita sob a forma

$$\tau_{nt} = c + \sigma_{nn} \operatorname{tg} \varphi, \quad (103.1)$$

c (coesão) e φ (ângulo de atrito) substituem as constantes c_1 e c_2 . τ_{nt} e σ_{nn} são respectivamente a tensão de corte e a tensão normal à faceta de escorregamento (Fig. 9.1).

Quando em vez de tensões totais se consideram tensões efectivas (isto é, se deduzem as tensões neutras), que são as que efectivamente condicionam o comportamento dos solos na rotura (103.1), escreve-se

$$\tau'_{nt} = c' + \sigma'_{nn} \operatorname{tg} \varphi' \quad (104.1)$$

onde τ'_{nt} e σ'_{nn} são tensões efectivas, c' a coesão e φ' o ângulo de atrito efectivos.

Como adiante se verá é fácil exprimir a condição (102.1) quer sob a forma (103.1) quer como uma relação entre as tensões σ_{ij} .

Uma generalização da condição de Mohr-Coulomb foi apresentada por Drucker e Prager [28]* sob a forma

$$f = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - k = 0 \quad (105.1)$$

onde $I_1 = \sigma_{ii}$ é o primeiro invariante do tensor das tensões e

$$J_2 = I_2^{(d)} = 1/2 \tau_{ij} \tau_{ij} \quad (106.1)$$

é o segundo invariante das tensões de desvio, sendo por isso

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - (I_1/3) \delta_{ij}. \quad (107.1)$$

33. Dedução das relações entre velocidades de extensão e tensões no problema geral do equilíbrio limite dos maciços terrosos

Aplicando a (105.1) a equação (81.1) vem

$$\dot{\varepsilon}''_{ij} = \lambda \left[\alpha \delta_{ij} + \tau_{ij} / 2 J_2^{-1/2} \right] \quad (108.1)$$

* 1952.

No caso de deformação plana e tomando $x_2 = z$, $\dot{\epsilon}''_{22} \equiv \dot{\epsilon}''_{zz}$, $\dot{\epsilon}''_{12} \equiv \dot{\epsilon}''_{xz}$, $\dot{\epsilon}_{32} \equiv \dot{\epsilon}''_{yz}$ seriam nulas e portanto de (108.1) se concluiria que τ_{xz} e τ_{yz} seriam também nulas e

$$\tau_{22} \equiv \sigma_{zz} - I_1/3 = -2\alpha J_2^{1/2}. \quad (109.1)$$

Portanto
$$I_1 = 3/2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - 3\alpha J_2^{1/2} \quad (110.1)$$

e
$$J_2 = \left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{yx}^2 \right] / (1 - 3\alpha^2) \quad (111.1)$$

Substituindo (110.1) e (111.1) em (105.1) tira-se

$$\left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} + \frac{3\alpha}{(1 - 3\alpha^2)^{1/2}} \times \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{k}{(1 - 3\alpha^2)^{1/2}} = 0 \quad (112.1)$$

o que, com escolha apropriada das constantes α e k , poderá sempre colocar-se sob a forma

$$f = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 - \sin^2 \varphi \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + H \right)^2 = 0 \quad (113.1)$$

onde $H = c \times \cotg \varphi$ sendo c a coesão e φ o ângulo de atrito interno.

Passando em (113.1) o terceiro termo para o segundo membro, extraindo a raiz quadrada e identificando com (112.1), obter-se-iam as relações entre as duas constantes c e φ e as duas outras α e k .

Calculando de (113.1)

$$\frac{df}{d\sigma_{xx}} = 1/2 (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) - \sin^2 \varphi \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + H \right) \quad (114.1)$$

$$\frac{df}{d\sigma_{yy}} = -1/2 (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) - \sin^2 \varphi \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + H \right) \quad (115.1)$$

$$\frac{df}{d\tau_{xy}} = 2\tau_{xy} \quad (116.1)$$

e substituindo na equação (81.1) vem

$$\dot{\varepsilon}''_{xx} = \lambda \left[\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} - \operatorname{sen}^2 \varphi \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + H \right) \right] \quad (117.1)$$

$$\dot{\varepsilon}''_{yy} = \lambda \left[-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} - \operatorname{sen}^2 \varphi \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + H \right) \right] \quad (118.1)$$

$$\dot{\varepsilon}''_{xy} = 2\lambda\tau_{xy} \quad (119.1)$$

De (117.1) a (119.1) tira-se

$$(\dot{\varepsilon}''_{xx} - \dot{\varepsilon}''_{yy})^2 + \dot{\varepsilon}''^2_{xy} = \lambda^2 [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2] \quad (120.1)$$

Atendendo a (113.1) obtém-se o valor da variável

$$\lambda = \frac{\sqrt{(\dot{\varepsilon}''_{xx} - \dot{\varepsilon}''_{yy})^2 + \dot{\varepsilon}''^2_{xy}}}{\operatorname{sen} \varphi (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + 2H)} \quad (121.1)$$

As relações (117.1) a (119.1) e (121.1), foram apresentadas sem dedução por Tsitovich * [84]** no seu relato geral ao 5.º Congresso Internacional de Mecânica do Solo. Nesse mesmo relato patenteia o autor as dificuldades de ordem matemática de encontrar soluções para o equilíbrio limite dos maciços terrosos que satisfaçam simultaneamente condições de compatibilidade estática e cinemática.

34. O problema do equilíbrio limite dos maciços terrosos como um problema da determinação de estados de tensão estáticamente admissíveis

Nos problemas de equilíbrio limite dos maciços terrosos que vamos tratar são impostas condições de fronteira apenas em termos de tensões.

* A segunda expressão apresentada por Tsitovich tem $(\sigma_{xx} + \sigma_{xy})/2$ em vez de $-(\sigma_{xx} - \sigma_{xy})/2$, supondo nós tratar-se dum erro tipográfico. ** 1961, II, p. 825

As duas equações da estática deduzidas de (21.1) para o plano, aliadas à condição de plasticidade de Mohr-Coulomb (113.1) tornam, em geral, o problema determinado.

Contudo, é evidente que se na fronteira existirem condições cinemáticas, o problema seria mais complexo, envolvendo necessariamente não só as equações da estática e a condição de plasticidade de Mohr-Coulomb, mas também as relações entre velocidades de extensão e as tensões, contidas nas equações (117.1) a (119.1).

CAPÍTULO II

REVISTA DOS CONHECIMENTOS EXISTENTES SOBRE O EQUILÍBRIO LIMITE DOS MACIÇOS TERROSOS E O CÁLCULO DA CAPACIDADE DE CARGA DAS FUNDAÇÕES

35. Resenha histórica e posição actual do problema

O estudo do equilíbrio limite dos maciços terrosos foi iniciado por Coulomb [18]* o qual apresentou à Academia Francesa de Ciências a sua célebre memória cuja principal finalidade foi mostrar que os métodos matemáticos de obtenção de máximos e mínimos podiam ser utilizados na determinação da superfície plana de rotura que define o impulso dum maciço terroso contra o respectivo muro de suporte. Na determinação desse impulso Coulomb diz supor a resistência devida ao atrito proporcional à pressão, «comme Monsieur Amontons à trouvé» (Golder, [39]**), e a coesão total ser proporcional à área da superfície de rotura. Estava assim estabelecida a conhecida lei de Coulomb

$$\tau'_{nt} = c' + \sigma'_{nn} \operatorname{tg} \varphi' \quad (104.1)$$

De então até ao presente tem este tema, talvez pela sua complexidade, atraído por toda a parte a atenção de engenheiros e homens de ciência, mesmo daqueles não directamente ligados a problemas de fundações ou projecto de obras de suporte de maciços terrosos. Os autores franceses foram, pelo menos no início, os que maior número

* 1776. ** 1948, p. 67.

de trabalhos trouxeram à literatura técnica; além dos de Coulomb são notáveis os trabalhos de Français (1820), St. Venant (1870), Boussinesq (1876), Résal (1903, 1910), Frontard (1922 a 1954), Caquot (1934 a 1956), Kérisel (1935 a 1962), Bonneau (1938), Mandel (1942) e Biarez (1961). Na Alemanha e Áustria sobressaem os nomes de Culmann (1866), Rebhann (1871) Kötter (1888 a 1909), Prandtl (1920 a 1927), Reissner (1924), von Karman (1926), Krey (1912 a 1936), Frölich (1934 a 1953), Ohde (1938). Terzaghi de origem húngara, publica o primeiro trabalho na Áustria em 1919 e emigra para os Estados Unidos onde publica a partir de 1934 a maior parte dos seus trabalhos.

Na Holanda há a assinalar Buissman (1940), Josselin de Jong (1959). Na Bélgica De Beer e seus colaboradores (1945 a 1961). Na Dinamarca Brinch Hansen (1946 a 1961), Damgaard (1951), Lundgren e outros (1949 a 1953), e Bent Hansen e outros (1960).

Na Inglaterra e países de língua inglesa depois de Rankine (1857 a 1862), vêm Golder (1941), Skempton e seus colaboradores (1946 a 1953), Meyerhof (1948 a 1962).

Na Húngria há a referir Jaky (1936 a 1948) e Kézdi (1961). Na Rússia os primeiros trabalhos datam de 1909, mas só a partir de 1938 se nota uma verdadeira explosão de artigos ainda só conhecidos no ocidente numa ínfima parte. Destacam-se os nomes de Sokolovsky (1939 a 1961), Berezzantzev e colaboradores (1948 a 1961), Tsytoovich (1951 a 1961), Zaharescu (1961).

Na Península o primeiro estudo sistemático sobre o equilíbrio limite dos maciços terrosos de que temos conhecimento foi o do Prof. Correia de Araújo (1942).

Numa tentativa para seguir o desenvolvimento das ideias sobre este assunto podemos talvez estabelecer duas etapas. Na primeira até St. Venant (1870) e Kötter (1888) a superfície de rotura é apenas obtida por considerações de máximos e mínimos. Com St. Venant e Kötter estabelecem-se equações gerais de equilíbrio estático válidas para toda a massa em estado de equilíbrio limite.

As soluções teóricas «rigorosas» do problema são umas vezes (Prandtl 1920, Reissner 1924, Mizuno 1948) obtidas a partir duma função potencial plástico (função de Airy) outras vezes obtidas pelo método das características (Mandel 1942, Lundgren e Mortensen 1953, Sokolovski 1960 e toda a escola russa) ou ainda arbitrando uma superfície cilíndrica de rotura de directriz em geral composta de um arco central

em espiral logarítmica tangente na extremidade a tramos rectos, e aplicando as equações equilíbrio ao solo sobrejacente à referida superfície por via analítica ou gráfica (Ohde 1938, Caquot 1953 e 1956, Terzaghi 1943, Buissman 1940, Andersen 1946, Meyerhof 1948 a 1961, Båla 1962).

Drucker (1953) mostrou que a aplicação da teoria dos potenciais plásticos ao cálculo da distribuição de tensões nos corpos providos de atrito em equilíbrio limite é susceptível de conduzir a resultados irreais, porquanto uma tal teoria envolve necessariamente a condição de que durante a deformação plástica o solo se mantenha em expansão permanente, o que é contrário à experiência.

Sokolovski (1960) apresenta o tratamento teórico provavelmente mais completo para o problema de equilíbrio limite plano, cingindo-se apenas às distribuições de tensão estáticamente admissíveis.

No 5.º Congresso de Mecânica do Solo (Paris, 1961, III, p. 326) Sokolovski exprimiu a convicção de que o problema da determinação da distribuição das tensões em equilíbrio compatível com as condições cinemáticas de fronteira poderá ser resolvida por métodos matemáticos analógicos.

A par dos métodos de cálculo à rotura apoiados em teorias da plasticidade, têm aparecido outros, em pequeno número apoiados na teoria da elasticidade. Como exemplos cita-se Boussinesq (1876), Hayashi (1921) e Weiskopf (1945). Um tipo misto de elasticidade e plasticidade é o método de Frölich (1936).

O problema do equilíbrio limite dos maciços terrosos, mesmo na sua forma mais simples de equilíbrio no plano, é um problema complexo, como se acaba de ver, para o qual ainda não existe solução «rigorosa» na maioria dos casos de interesse prático. Por este motivo usam-se ainda actualmente variados métodos todos eles com base na condição da plasticidade de Mohr-Coulomb. Porém, mesmo quanto a estes e apesar de todos os autores tomarem como hipótese de partida a lei de Coulomb sob a forma (104.1) ou sob a forma de condição de plasticidade de Mohr-Coulomb

$$\left(\frac{\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = \sin^2 \varphi' \left(\frac{\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}}{2} + c' \cotg \varphi' \right) \quad (113.1)$$

os resultados são por vezes bastante díspares. Assim, por exemplo,

De Beer (1952, p. 373) encontrou para o factor N_γ^* de capacidade de carga duma fundação contínua, devida ao peso próprio do solo deslocado, valores que no cálculo à Caquot são cerca de 1/4 dos valores correspondentes do cálculo à Terzaghi e à Buissman. Ainda sobre a determinação deste mesmo valor, H. Lundgren (1953, III, p. 153) afirma «... it seems that today we know only that the value of N_γ is probably somewhere between 14.8 and 36.0...» Mais adiante Lundgren demonstra que os cálculos de Caquot e Meyerhof são incorrectos**. Quatro anos mais tarde no relatório geral sobre fundações (actas do 4.º Congresso de Mecânica dos Solos, II, p. 442, Londres, 1957) Brinch Hansen afirmava «É um facto deplorável que, logo que as condições $\gamma' \neq 0$ *** e $\phi' \neq 0$ são aplicáveis, ninguém conseguiu ainda indicar a figura de rotura que se possa provar ser estática e cinemáticamente possível».

E pode dizer-se que até ao presente as condições não melhoraram sensivelmente. Assim, por exemplo, recentemente Feda (29) (1963) numa crítica ao trabalho de Båla (1962) publicado nas actas da A. S. C. E. apresenta um gráfico reproduzido na Fig. (1.2), onde se mostra que para um mesmo ângulo de atrito e densidade do solo sobrejacente os valores da capacidade de carga obtidos podem estar na razão de 1:3 conforme os autores. Todavia, as diferenças registadas no gráfico publicado por Feda e noutros publicados por outros autores (De Beer 1952, Ladanyi 1960/61, Skempton e outros, 1953) advêm em parte de se pretender comparar no mesmo gráfico resultados de soluções para problemas com condições de fronteira e outras hipóteses diferentes.

36. Comparação de soluções para o problema do maciço sem peso

Procuremos comparar as soluções dos diferentes autores para o problema mais simples: capacidade de carga duma fundação contínua de base lisa e horizontal apoiada num maciço sem peso, sem coesão

* N_γ (notação de Terzaghi) $\equiv s_1$ (notação de Caquot) $\equiv 2Vg$ (notação de Buissman).

** Adiante se verá este assunto em maior detalhe.

*** Maciço com peso.

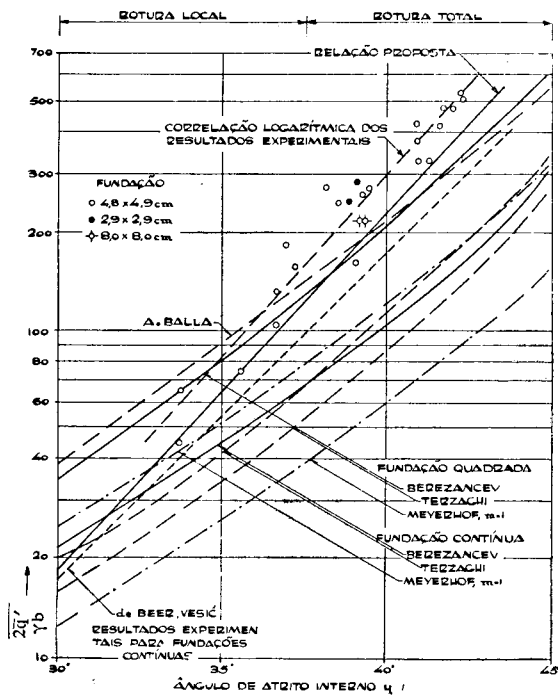


FIG. (1.2)

e de ângulo de atrito interno ϕ' , com a carga lateral uniforme de valor p' (Fig. 2.2.a).

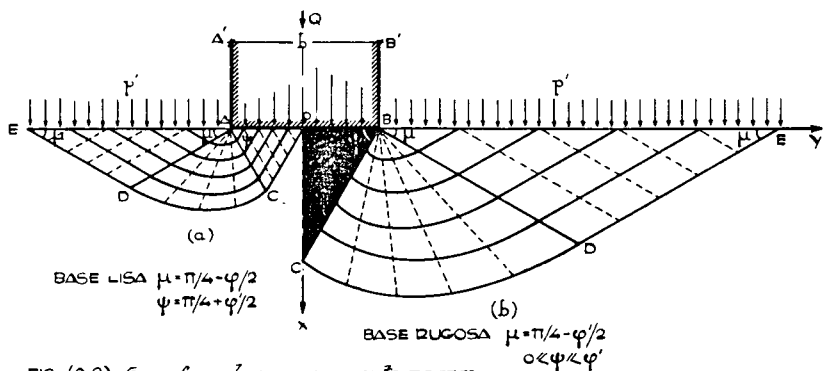


FIG. (2.2) - Superfície de escorregamento no caso do maciço sem peso

Q

O problema foi tratado usando a condição de plasticidade de Coulomb (104.1) entre outros por Rankine (1857), Prandtl (1920), Reissner (1924), Buissman (1940), Terzaghi (1943), Meyerhof (1948 e 1951), Mizuno (1948), Caquot e Kérisel (1956), Sokolovski (1960) e Biarez (1961).

Rankine apresentou a conhecida fórmula

$$\bar{q}' = p' \operatorname{tg}^4 (\pi/4 + \varphi'/2) = p' \cdot K_p^2 \quad (1.2)$$

onde K_p é o coeficiente de impulso passivo das terras, $\bar{q}'$ a tensão limite sob a fundação e p' a pressão lateral.

Esta fórmula foi obtida admitindo que sob a fundação (AB) reina um estado de equilíbrio limite inferior e do lado de fora da fundação um estado limite superior, havendo transição brusca entre os dois [16]*. Rankine tratou implicitamente do caso particular de não existir atrito entre a base da fundação e o maciço terroso, não tendo tomado consciência de que se existisse atrito o resultado poderia vir modificado [15]**.

Os restantes autores cujas soluções têm uma 3.^a zona de corte radial (CAD), apresentam resultados concordantes entre si para o caso de maciços sem peso e atrito nulo na base da fundação, embora a apresentação dos resultados seja por vezes variada §.

É a seguinte a equação comum que exprime a tensão média limite $\bar{q}' = Q/b$ sob a fundação em função do ângulo de atrito φ' e da coesão c' :

$$\begin{aligned} \bar{q}' = c' \times \operatorname{ctg} \varphi' \left[\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi'}{1 - \operatorname{sen} \varphi'} \times \exp (\pi \operatorname{tg} \varphi') - 1 \right] + \\ + p' \times \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi'}{1 - \operatorname{sen} \varphi'} \exp (\pi \operatorname{tg} \varphi') \end{aligned} \quad (2.2)$$

A dedução desta equação sob forma geral será apresentada mais adiante (20.2).

Para o caso da base rugosa (Fig. 2.2.b), apresenta Terzaghi [83] §§

* Correia de Araújo, 1942, p. 360 (ed. da Revista «Engenharia», 1958/9).

** Gilbert Cook, 1951, II, p. 271. § Veja-se Apêndice (I.II). §§ 1943, p. 127.

uma fórmula que com uma pequena transformação trigonométrica toma a forma

$$\bar{q}' = c' \times \cotg \varphi' \left\{ \frac{1}{1 - \sin \varphi'} \times \exp [(3/2\pi - \varphi') \operatorname{tg} \varphi'] - 1 \right\} + \\ + p' \times \frac{1}{1 - \sin \varphi'} \times \exp [(3/2\pi - \varphi') \operatorname{tg} \varphi']. \quad (3.2)$$

Terzaghi apoiado nos trabalhos de Prandtl (1920) e Reissner (1924) supõe que, sendo a base rugosa, existe uma cunha ABC (Fig. 2.2.b) sob a fundação que se mantém em regime elástico funcionando como parte integrante da fundação. Essa cunha é definida pelos ângulos $\Psi = \varphi'$. (Fig. 2.2.b).

Esta hipótese é equivalente a considerar BC (ou AC) como paramento perfeitamente rugoso de um muro que suporta o impulso passivo do maciço $BCDE$.

Como se mostra no Apêndice (2.II), as fórmulas de Meyerhof, Caquot e Kérisel e Sokolovski, quando convenientemente adaptadas à hipótese de Terzaghi dão o mesmo resultado (3.2).

Esta hipótese de existência duma cunha em estado elástico sob a fundação tem apoio experimental mas o ângulo que a fronteira BC da zona elástica faz com a horizontal não é igual a φ' , mas igual a $\pi/4 + \varphi'/2$ como no caso da base lisa. Doutro modo as curvas de escorregamento (características) das duas metades da fundação não teriam a mesma tangente no ponto comum C (Fig. 2.2.b). A única diferença entre a base lisa e a rugosa é a de que no caso da base rugosa o volume de solo que plastifica é muito maior, mas como por hipótese o solo não tem peso esse facto não se traduz por uma maior carga de rotura.

37. Comparação de soluções para o maciço com peso. Fundação superficial

Vejamos agora o outro caso extremo duma fundação contínua num maciço com peso, mas sem carga lateral p' (fundação superficial).

A sua capacidade de carga é, portanto, essencialmente condicionada pelo peso do solo deslocado. Como não se conhecem soluções analí-

ticas rigorosas para o problema do equilíbrio limite dos maciços terrosos com peso, as soluções propostas por vários autores apresentam para este caso as maiores discrepâncias.

O problema foi sucessivamente atacado por Buissman (1940), referido por De Beer e Wallays [23]*, Terzaghi [83]**, Caquot e Kérisel [12]***, Meyerhof [60/2]§, Lundgren, Mortensen [56]§§ e Kopadzi [50]§§§, para citar apenas aqueles que deram a este problema particular tratamento mais profundo.

Sem perda de generalidade pode tratar-se o caso do maciço sem coesão. O valor médio da tensão sob a sapata será então

$$p'' = \gamma' \frac{b}{2} N_{\gamma} \quad (4.2)$$

É para o factor N_{γ} , função do ângulo de atrito φ' , que os vários autores apresentam diferentes soluções, sintetizadas no Quadro (1.II) onde se fizeram figurar os valores de N_{γ} em função de φ' , variando este de 0° a 50° , (5°). Assinalemos as hipóteses fundamentais por cada um deles formuladas.

De Beer e Wallays [23]† apresentam para N_{γ} a fórmula:

$$N_{\gamma} = \frac{1}{4} \left\| \frac{1 + \operatorname{tg}^2 (\pi/4 + \varphi'/2)}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi'} \left\{ \left[3 \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} (4/\pi + \varphi'/2) - 1 \right] \exp (3/2 \pi \operatorname{tg} \varphi') + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \operatorname{tg} \varphi' + \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi'/2) \right\} + 2 \exp (3/2 \pi \operatorname{tg} \varphi') \operatorname{tg}^2 (\pi/4 + \varphi'/2) - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi'/2) \right\| \quad (5.2)$$

* 1948, p. 63.

** 1943, p. 126.

*** 1948, p. 273; 1956, p. 386-388.

§ 1948, p. 242; 1951, p. 308; 1955, p. 231. §§ 1953, I, p. 410. §§§ 1961, p. 650.

† op. cit. p. 63.

Estes autores dizem ter a expressão (5.2) sido obtida por Raes* e ser baseada na hipótese de Buissman, que teria admitido que a forma da superfície de deslissamento de Prandtl (espiral logarítmica) não se altera quando $\gamma' \neq 0$. É, portanto, de admitir que (5.2) foi obtida da equação de equilíbrio de momentos em relação ao ponto *A* suposto centro da espiral (Fig. 3.2). Não se conhecem, porém, que hipóteses teriam sido feitas acerca do ângulo ψ e da rugosidade da base. Os valores dados por (5.2) representam-se na coluna (2) do Quadro (1.II).

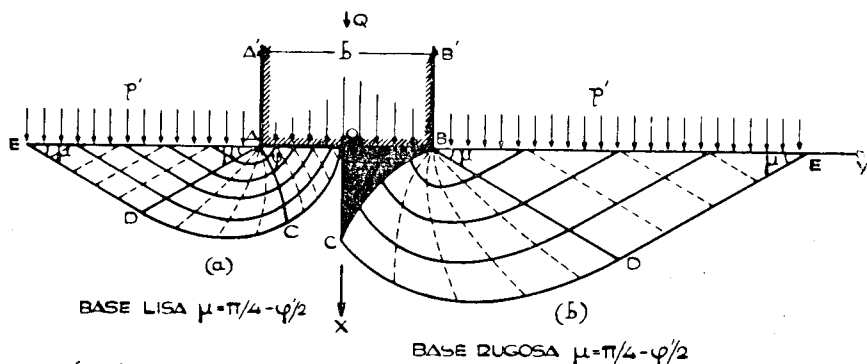


FIG. (3.2) - Superfície de escorregamento no caso do tráfego com peso. Para fundação superficial $\phi = 0$.

Terzaghi [83]** indica os valores de $N_\gamma = f(\phi')$, que se reproduzem na coluna (3) do Quadro (1.II), num gráfico obtido a partir das hipóteses seguintes:

- a) A superfície de deslissamento é uma espiral de centro sobre a recta *BD* (Fig. 3.2);
- b) A base é rugosa de modo que a cunha *ABC*, suposta de lados rectilíneos, faz parte da fundação, sendo ainda $\psi = \phi'$;
- c) Calculam-se os momentos das forças em jogo em relação ao centro da espiral, arbitrado sobre a referida recta *BD*.

* Não se indica o trabalho de Raes onde vem deduzida a expressão (5.2), mas supomos ser um trabalho desse autor de 1941. ** op. cit. p. 125.

QUADRO (1.II)

VALORES DE N_y QUE ENTRAM NA FÓRMULA $q' = \gamma' \frac{b}{2} N_y$ RELATIVA AO PROBLEMA DO MACIÇO COM PESO E FUNDAÇÃO À SUPERFÍCIE

	Buisman (1940) (De Beer e W. 1948) Fórmula (5,2)	Terzaghi (1943) Gráfico p. 125	Meyerhof (1948) Tabela p. 242 s. correc.	Meyerhof (1948) Tabela p. 242 c. correc.	Meyerhof (1951) Gráfico p. 308	Meyerhof (1955) Gráfico p. 231	Meyerhof (1955) Gráfico p. 231	Mizuno (1948) Gráfico p. 48	Caquot e Kérisel (1956) Tabela p. 386	Caquot e Kérisel (1956) Tabela p. 388	Caquot e Kérisel (1956) Tabela p. 389	Kopadzi (1961) Fórmula (6,2)
1	—	Base Rugosa	—	—	Base Rugosa $\psi = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$	Base Rugosa $\psi = 1,2\phi'$	Base Lisa	Base Lisa	Base Lisa	Base Rugosa	Base Rugosa $\psi = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$	Base Rugosa $\psi = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$
ϕ'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0°	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5°	0,5	0,5	0,1	0,1	0,1	—	—	0,5	—	—	—	0,5
10°	1,4	1,0	0,6	0,6	0,6	—	—	1,2	0,3	0,9	1,6	1,4
15°	3,4	2,0	1,8	1,8	1,8	1,1	0,6	2,3	0,8	1,7	3,0	3,3
20°	6,9	4,5	4,9	4,8	4,8	2,8	1,4	4,8	1,7	3,5	5,7	7,0
25°	13,6	10,0	11,1	10,7	11,0	6,5	3,3	9,3	3,5	7,2	11,3	14,3
30°	30,4	21,0	24,0	22,9	23,0	16,0	8,0	18,5	7,4	14,8	22,7	30,4
35°	67,7	42,0	51,8	48,4	51,0	39,0	19,5	38,0	16,4	33,3	49,1	67,7
40°	166,0	138	128	116	115	97,0	48,5	78,0	39,3	78,1	114	164
45°	444,7	(44°) 260	355	305	300	255	128	—	105	(44°) 140	300	443
50°	1413	(48°) 780	1800	1455	830	750	375	—	327	(46°) 205	916	1413

Do equilíbrio de momentos obtém-se o impulso P nas faces AC e BC . O menor desses impulsos, obtido após várias tentativas, considera-se o impulso passivo Pp . Entrando com este equilíbrio da cunha ABC obtém-se $\bar{q}''$ (4.2) e daí N_γ .

Nenhuma das hipóteses de Terzaghi é, em rigor, correcta como mais tarde se verá. Meyerhof [60]* seguindo os passos de Terzaghi produziu uma expressão analítica para N_γ extremamente complicada cujos valores apresentados por ele num quadro são reproduzidos no Quadro (1.II). Tendo em atenção que poderá haver espirais com centros fora da recta BD dando valores menores para o impulso Pp e consequentemente para N_γ , Meyerhof apresenta valores da sua autoria que se reproduzem nas colunas 4 e 5 do Quadro acima indicado. Verifica-se que a partir de $\varphi' = 30^\circ$ os valores de Meyerhof são um pouco inferiores aos de Terzaghi. Mais tarde Meyerhof [61]** apresentou novos valores de N_γ praticamente coincidentes com os anteriores até $\varphi' = 40^\circ$ e mais baixos para ângulos superiores. Para $\varphi' = 50^\circ$ $N_\gamma = 830$ enquanto que anteriormente atingia 1455.

Após as discussões de Lundgren no terceiro Congresso em Zurich (1953) Meyerhof publicou novos valores para N_γ [62]***. Estes valores referidos nas colunas 7 e 8 no quadro (1.II), são substancialmente menores que os publicados pelo mesmo autor anteriormente. Meyerhof depois de declarar que devido a dificuldades matemáticas naquela altura (1955) os valores de N_γ só poderiam ser obtidos por métodos aproximados, faz a hipótese de que a cunha ABC (Fig. 3.2.b), tem faces AC e BC planas e varia o ângulo ψ de modo a que $\bar{q}''$ seja mínimo.

É válida para as soluções de Meyerhof a crítica da solução de Terzaghi.

Mizuno [63]§ apresenta um gráfico (Fig. 1.1.II) donde se construiu a coluna 9 do Quadro (1.II).

Admitindo que a cunha ABC (Fig. 3.2.b) tem forma triangular com faces planas em que $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$ e $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$ e que na zona de corte radial as tensões derivam de um potencial (função de Airy) Mizuno determina, por divisão da zona de corte radial em n

* 1948, p. 248. ** 1951, p. 308. *** 1955, p. 231. § 1948, p. 48.

sectores elementares e resolução de $8n + 2$ equações lineares simultâneas, a directiz da superfície de deslizamento e a distribuição das tensões nos planos radiais. Conhecidas as tensões no plano BC e estabelecendo o equilíbrio da cunha ABC logo se determina $\bar{q}''$ e portanto N_γ .

Também as duas primeiras hipóteses de Mizuno são incorrectas e a terceira discutível.

Caquot e Kérisel [11/2]* apresentam valores de N_γ , para três hipóteses distintas.

Na primeira hipótese admitem que a base da fundação é lisa e que as superfícies de deslizamento partem do centro da base simetricamente nos dois sentidos de refluência do solo. A zona de corte radial estende-se da linha AC à recta AD (Fig. 3.2.a) que faz um ângulo $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$ com a horizontal. Os valores de N_γ são reproduzidos na coluna 10 do Quadro acima referido.

Na segunda hipótese Caquot e Kérisel admitem a base perfeitamente rugosa sendo as tensões nas duas meias sapatas inclinadas de φ' sobre a vertical, mas em sentidos opostos. A última superfície de deslizamento BC (Fig. 3.2.b) coincidiria com a base da fundação. Os valores de N_γ são reproduzidos na coluna 11 do Quadro supra indicado. Nesta solução de Caquot e Kérisel é incorrecta a hipótese de que a última superfície de deslizamento radial coincide em toda a sua extensão com a base da sapata. O ponto C coincidiria com o ponto O no centro da sapata e nele haveria discontinuidade nas tensões tangenciais, o que acarreta impossibilidade de satisfazer as equações da estática. Não se formaria a cunha triangular curva ABC , o que é contra a evidência teórica e experimental.

Na terceira hipótese Caquot e Kérisel admitem que se forma uma cunha ABC de solo em regime elástico que actua como fazendo parte da fundação. O ângulo ψ seria de $\pi/4 + \varphi'/2$ e $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$.

Os valores obtidos por Caquot e Kérisel nesta hipótese são bastante superiores aos das duas outras hipóteses. A razão é a de que na terceira hipótese se supõe interessado na resistência da sapata um volume de solo muito superior ao abrangido nas duas hipóteses anteriores, porquanto nessas hipóteses, por simetria, só meia sapata actua

* 1948, p. 273; 1953, p. 336; 1956, p. 386-388.

de cada lado. A crítica a esta solução de Caquot e Kérisel reside no facto de que as faces da cunha elástica não são planas e ângulos ψ e μ não têm os valores acima indicados.

Uma solução recente para o problema em causa é apresentada por Kopadzi [48]*. Aplicando o cálculo das variações ao problema do impulso passivo dum maciço terroso com peso contra um paramento com uma dada inclinação sobre a vertical, Kopadzi particulariza a solução encontrada para o caso duma fundação contínua superficial. Kopadzi como outros autores (v.g. Buissman, 1940), apesar de usar o cálculo das variações, só conseguiu obter uma solução analítica para N_γ num maciço com peso, admitindo que a superfície de deslissamento na zona de corte radial tem por directriz uma espiral logarítmica e que as faces AC e BC da cunha ABC (Figs. 2.2.a e b) são planas e o ângulo ψ tem o valor $\pi/4 + \varphi'/2$. Porém, como adiante se verá, num maciço com peso as faces AC e BC são curvas e a superfície de deslissamento na zona de corte radial não tem por directriz uma espiral, mas uma curva que só se pode obter por métodos numéricos.

A fórmula apresentada por Kopadzi para N_γ é

$$N_\gamma = 2 \operatorname{sen} \varphi' \frac{(1 + 3\operatorname{sen} \varphi' + 2\operatorname{sen}^2 \varphi') \exp(3/2\pi \operatorname{tg} \varphi') + (1 - 2\operatorname{sen} \varphi') \cos \varphi'}{(1 - \operatorname{sen} \varphi') (1 + 8\operatorname{sen}^2 \varphi')} \quad (6.2)$$

Esta fórmula encontra-se tabelada no Quadro (1.II), juntamente com a de Buissman e os valores referidos pelos outros autores. Embora o aspecto de (6.2) não seja análogo à expressão de Buissman (5.2) nem tenha sido igual a técnica da solução em ambos os casos, verifica-se que os valores são praticamente iguais, o que não admira por serem também iguais as hipóteses de partida.

A fórmula obtida por Kopadzi para N_c é

$$N_c = \operatorname{cotg} \varphi' \left[\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi'}{1 - \operatorname{sen} \varphi'} \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi') - 1 \right] \quad (7.2)$$

* 1961, p. 650.

Esta expressão é identicamente igual ao correspondente valor contido na expressão (2.2).

Biarez recentemente [4]*, usando fundamentalmente as hipóteses do terceiro caso tratado por Caquot e Kérisel [11]** e antes referido, estuda as variações da capacidade de carga duma fundação de base rugosa em função do ângulo das faces AC e BC (Fig. 3.2.b), supostas planas, com a vertical. Tem aqui lugar, portanto, crítica igual à efectuada para a solução de Caquot e Kérisel.

O tratamento mais rigoroso que aparece na literatura para o equilíbrio limite duma fundação à superfície do maciço com peso é o de Lundgren e Mortensen [56]***. Estes autores definem a cunha elástica ABC pela condição de que no ponto C haja continuidade nas tangentes às características das duas metades do maciço. A curva BC é a última característica radial que no ponto C satisfaz a condição acima indicada. São assim satisfeitas as equações da estática e a condição de plasticidade de Mohr-Coulomb em todo o domínio plastificado. Estes autores apresentam, no entanto, a solução só para o caso de $\varphi' = 30^\circ$. Recentemente Biarez [4]§ fez o cálculo para $\varphi' = 26^\circ$ e vários valores da carga lateral.

38. Soluções para o caso do maciço com peso. Caso geral

Os problemas representados na Fig. (3.2.a e b) abrangem como casos particulares limites os problemas relativos à Fig. (2.2). Com efeito, quando a razão $p'/\gamma'b$ é grande (v. g. $p'/\gamma'b > 10$, Mizuno, 1948) as superfícies de deslizamento aproximam-se das representadas na Fig. (2.2), tornando-se rectilíneas as arestas AC e BC , porque nesse caso, por definição, a pressão lateral p' é grande relativamente ao peso próprio do solo multiplicado pela largura b da base da fundação.

Pelo contrário, se b é grande, sendo daí $\gamma'b$ grande em relação a p' , então a razão $p'/\gamma'b$ é pequena e os problemas aproximam-se dos duma fundação superficial.

* 1961, p. 176. ** 1953, p. 336. *** 1953, p. 409-412. § 1961, p. 197.

A capacidade de carga nos casos intermédios, representados pela Fig. (3.2) é obtida pelos diferentes autores com excepção de Lundgren e Mortensen (1953) e Biarez (1961) adicionando as capacidades de carga do problema relativo à Fig. (2.2) e a dada pela fórmula (4.2). Assim

$$\bar{q}' = c'N_c + p'N_p + \frac{b}{2} \gamma'N_\gamma \quad (7.2)$$

onde N_c e N_p são obtidos para $\gamma' = 0$ [eqs. (2.2) e (3.2)] e N_γ é obtido para $p' = c' = 0$ [eq. (4.2)].

É evidente que não sendo a superfície de deslizamento a mesma para os dois casos ($\gamma' = 0$ e $p' = c' = 0$), não é válida a sobreposição indicada pela fórmula (7.2).

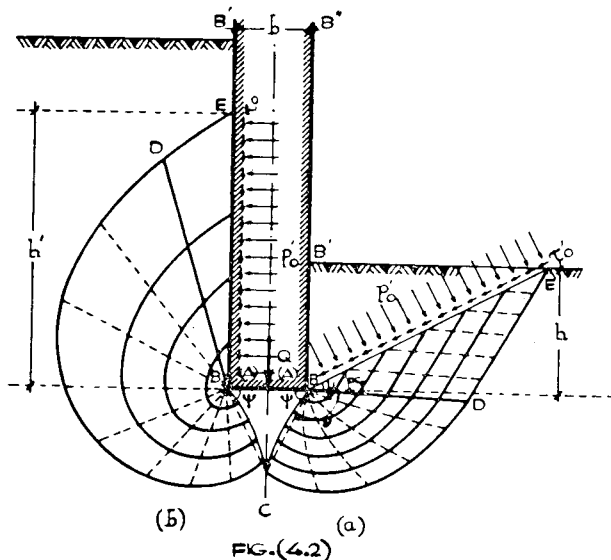
É fácil ver que para cada valor de $p'/\gamma'b > 0$ o valor de N_γ real, será maior que o obtido para $p'/\gamma'b = 0$ [fórmula (7.2)]. Por outro lado para cada valor $p'/\gamma'b < \infty$ o valor de N_p real, será menor que o obtido para $p'/\gamma'b = \infty$ ($\gamma' = 0$), o qual é o usado na citada fórmula. Daqui resulta que (7.2) não se afasta muito do valor real, dando em qualquer os casos intermédios valores do lado da segurança. Para $\varphi' = 30^\circ$, Lundgren e Mortensen [56]* verificaram que o valor real é 17% superior ao dado pela fórmula (7.2) quando $p'/\gamma'b = 0,40$. À direita e à esquerda deste valor as diferenças são menores tornando-se nulas nos casos limites $p'/\gamma'b = 0$ e $p'/\gamma'b = \infty$, como seria de esperar.

Se não se quizer adoptar a fórmula (7.2) com N_c , N_p e N_γ , dados pelas fórmulas e gráficos anteriores, haverá que resolver o problema nos casos intermédios por métodos numéricos rigorosos como os sugeridos por Lundgren e Mortensen, Sokolovski [81]** ou por métodos gráficos «rigorosos» Josselin de Jong [25]***. Nos cálculos que se irão efectuar usar-se-á o método numérico de Sokolovski por ser adaptável ao uso do cálculo automático.

* 1953, p. 411. ** 1960. *** 1959.

39. Contribuição da resistência das camadas superiores para a capacidade de carga duma fundação

Se o solo acima da base da fundação tiver características de resistência semelhante ao solo que fica por debaixo, não há razão para que não seja considerada a sua contribuição para a capacidade de carga da fundação. O problema foi tratado por Meyerhof nas hipóteses representadas na Fig. (4.2).



O caso representado na Fig. (4.2.a), com BC rectilíneo refere-se a um maciço sem peso e fundação a pequena profundidade. Meyerhof substitui a cunha de solos $B'BE$ por uma tensão normal p'_0 e uma tensão tangencial $\tau_0 = \tau'_0$, uniformemente distribuídas na superfície BE e estáticamente equivalentes à resultante do peso próprio da cunha $B'BE$ de solos * e da reacção da parte enterrada do fuste $B'B$.

* Meyerhof admite implicitamente que o maciço só não tem peso abaixo de BE .

Obtidos assim p'_0 e τ_0 ficam definidos dois círculos de Mohr tangentes à recta de Coulomb Fig. (5.2). Desses dois círculos deve tomar-se o que dá tensões de deslizamento mais altas porquanto, como é evidente, na cunha BDE reina um equilíbrio limite superior (estado passivo de tensão).

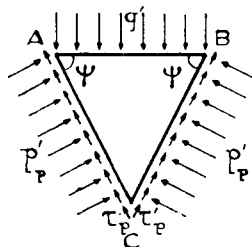
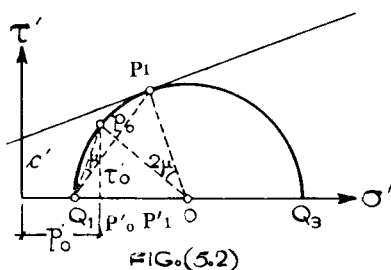


FIG. (6.2)

Definido o círculo de Mohr, poderá facilmente determinar-se as tensões p'_1 e τ_1 na faceta de deslizamento e bem assim o ângulo μ que essa faceta faz com a faceta BE conhecida, em função de τ_0 e φ' também conhecidos.

Com efeito é sabido que o ângulo $\hat{P}_0\hat{Q}_1P_1$ Fig. (5.2) é igual ao ângulo μ de duas facetas cujos pontos representativos no diagrama de Mohr são P_0 e P_1 .

Por outro lado, vê-se nessa figura que $P_0P'_0 = \tau_0$, $P_1P'_1 = \tau_1$ e o ângulo $\hat{P}'_0\hat{P}_0O$ tem o valor $2\mu + \varphi'$.

Portanto,

$$\tau_0 = \overline{OP}_0 \cos (2\mu + \varphi') \quad (8.2)$$

$$e \quad \tau_1 = \overline{OP}_1 \cos \varphi' \quad (9.2)$$

$$\text{mas,} \quad \overline{OP}_0 = \overline{OP}_1$$

$$e \quad \tau_1 = c' + p'_1 \operatorname{tg} \varphi'$$

e daí, por substituição se tem:

$$\cos (2\mu + \varphi') = \frac{\tau_0 \cos \varphi'}{c' + p'_1 \operatorname{tg} \varphi'} \quad (10.2)$$

Nesta fórmula poderemos substituir ainda τ_0 pela expressão

$$\tau_0 = m (c' + p'_0 \operatorname{tg} \varphi') \quad (11.2)$$

m será, assim um parâmetro que define o grau de mobilização da resistência ao corte do solo ao longo de BE .

Virá então

$$\cos (2\mu + \varphi') = \frac{m (c' + p'_0 \operatorname{tg} \varphi') \cos \varphi'}{c' + p'_1 \operatorname{tg} \varphi'} \quad (12.2)$$

Fazendo $m = 0$ em (12.2), isto é, admitindo que é nula a tensão de corte ao longo de BE , conclui-se que $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$.

Quando $m = 1$ a superfície BE é uma superfície de escorregamento e consequentemente confunde-se com BD , será então $\mu = 0$.

Da (Fig. 5.2) tira-se ainda

$$\begin{aligned} \overline{OP}'_0 &= \overline{OP}_0 \sin (2\mu + \varphi') \\ \overline{OP}'_1 &= \overline{OP}_1 \sin \varphi' \end{aligned}$$

Atendendo a que $\overline{OP}_0 = \overline{OP}_1$ e que $\overline{OP}'_0 - \overline{OP}'_1 = p'_1 - p'_0$

$$\text{e ainda a que } \overline{OP}_1 = \frac{c' + p'_1 \operatorname{tg} \varphi'}{\cos \varphi'},$$

teremos

$$p'_1 - p'_0 = \frac{c' + p'_1 \operatorname{tg} \varphi'}{\cos \varphi'} \left[\sin (2\mu + \varphi') - \sin \varphi' \right] \quad (13.2)$$

As equações (12.2) e (13.2) definem a tensão p'_1 e o ângulo μ logo que sejam conhecidos os outros parâmetros p'_0 , m , c' e φ' . Será, portanto, conhecida a posição de BD em relação a BE e a tensão de corte $\tau_1 = c' + p'_1 \operatorname{tg} \varphi'$ na faceta BD .

Se for conhecido o ângulo $\hat{C}BD = 0$, a tensão de corte ao longo de BC será dada por [61]*

$$\tau'_p = (c' + p'_1 \operatorname{tg} \varphi') \exp (2 \theta \operatorname{tg} \varphi') \quad (14.2)$$

Como BC é também uma faceta de deslizamento

$$\text{vem} \quad p'_p = (\tau'_p - c') \operatorname{cotg} \varphi' \quad (15.2)$$

Conhecidas as tensões normal p'_p e tangencial τ'_p ao longo de CB e arbitrado o ângulo $ABC = \psi$, a tensão limite $\bar{q}'$ na base da sapata logo se obtém estabelecendo as equações de equilíbrio da cunha ABC ** (Fig. 6.2).

$$\text{Virá} \quad \bar{q}' = p'_p + \tau'_p \operatorname{tg} \psi \quad (16.2)$$

Atendendo a (15.2) será ainda

$$\bar{q}' = \tau'_p (\operatorname{cotg} \varphi' + \operatorname{tg} \psi) - c' \operatorname{cotg} \varphi' \quad (17.2)$$

E ainda (4.2)

$$\bar{q}' = (c + p'_1 \operatorname{tg} \varphi') \exp (2 \theta \operatorname{tg} \varphi') (\operatorname{cotg} \varphi' + \operatorname{tg} \psi) - c' \operatorname{cotg} \varphi' \quad (18.2)$$

Das equações (12.2) e (13.2) obtém-se após algumas transformações a expressão seguinte:

$$c' + p'_1 \operatorname{tg} \varphi' = \frac{c' \cos^2 \varphi' + p'_0 \cos \varphi' \operatorname{sen} \varphi'}{\cos^2 \varphi' - [\operatorname{sen} (2\mu + \varphi') - \operatorname{sen} \varphi'] \operatorname{sen} \varphi'} \quad (19.2)$$

* Meyerhof, 1951, p. 305.

** Meyerhof considera a cunha ABC como parte integrante da fundação o que só se verificaria sendo a base rugosa.

Introduzindo esta expressão na equação (18.2) simplificando e separando, vem finalmente

$$\begin{aligned} \bar{q}' = c' \cotg \varphi' & \left[\frac{\sen \varphi' \cos \varphi' (\cotg \varphi' + \tg \psi) \exp (2 \theta \tg \varphi')}{1 - \sen \varphi' \sen (2\mu + \varphi')} - 1 \right] + \\ & + p'_0 \left[\frac{\sen \varphi' \cos \varphi' (\cotg \varphi' + \tg \psi) \exp (2 \theta \tg \varphi')}{1 - \sen \varphi' \sen (2\mu + \varphi')} \right]. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Esta expressão é mais geral que a estabelecida por Meyerhof e coincide com ela no caso particular $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$ implícito na dedução de Meyerhof.

Vejamos agora como poderá ser determinado o ângulo θ conhecidas a largura b e a profundidade h da fundação e arbitrado o ângulo ψ .

$$\text{Será} \quad \theta = \pi - \psi + \alpha_0 - \mu. \quad (21.2)$$

Porém, α_0 é função de b, h, θ, ψ e μ como se vai ver.

Deduz-se da (Fig. 4.2.a) que

$$\overline{BC} = \frac{b}{2 \cos \psi}$$

Por outro lado sendo a curva CD uma espiral logarítmica como sempre acontece quando se considera o maciço sem peso, vem por definição:

$$\overline{BD} = \frac{b}{2 \cos \psi} \exp (\theta \tg \varphi'). \quad (22.2)$$

No triângulo $BDEB$ são portanto conhecidos o lado BD e os ângulos $\widehat{BED} = \pi/2 - \varphi' - \mu$ e $\widehat{BDE} = \pi/2 + \varphi'$. Será, pois

$$\frac{\overline{BD}}{\sen (\pi/2 - \varphi' - \mu)} = \frac{\overline{BE}}{\sen (\pi/2 + \varphi')}.$$

Virá, portanto, sucessivamente

$$\overline{BE} = \overline{BD} \frac{\sin(\pi/2 + \varphi')}{\sin(\pi/2 - \varphi' - \mu)} = \frac{-\cos \varphi'}{-\cos \varphi' \cos \mu + \sin \varphi' \sin \mu},$$

$$\overline{BE} = \frac{\overline{BD}}{\cos(\mu + \varphi')} \quad (23.2)$$

Por outro lado $h = \overline{BE} \sin \alpha_0$. (24.2)

Substituindo (22.2) em (23.2) e o resultado em (24.2) obtém-se

$$h = \frac{b \sin \alpha_0 \cos \varphi' \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi')}{2 \cos \psi \cos(\mu + \varphi')}. \quad (25.2)$$

Temos em (25.2) e (21.2) duas equações a duas incógnitas θ e α_0 visto que os restantes parâmetros são conhecidos*.

Se for $h = 0$ (fundação superficial), então $\alpha_0 = 0$ e portanto

$$0 = \pi - \psi - \mu.$$

Supondo $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$ ($m = 0$) e $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$ temos $\theta = \pi/2$. Substituindo estes três valores em (20.2), obtém-se (2.2)** , como seria de esperar.

Por outro lado, tomando $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$ ($m = 0$) e $\psi = \varphi'$ (base rugosa segundo Terzaghi) vem $\theta = 3/4 \pi - \varphi'/2$. Substituindo os três valores em (20.2) obtém-se (3.2).

A certa profundidade a superfície de deslização BE já não atinge a superfície livre $B''E$ (Fig. 4.2.b). Para esse caso (fundação profunda) $\alpha_0 = \pi/2$ e portanto

$$0 = 3/2 \pi - \psi - \mu. \quad (26.2)$$

* h , b e φ' são dados, ψ é arbitrado e μ é deduzido das equações (12.2) e (13.2).

** Meyerhof (1951) calcula a capacidade de carga da fundação a partir das reações do solo nas faces BC e AC da cunha ABC . Admite, portanto, implicitamente que a base da fundação é rugosa. Se a base fosse lisa a cunha de solos ABC também plastificaria, mas neste caso o volume total de solo plastificado (Fig. 2.2 a) seria menor.

Se o fuste for liso e a base rugosa ter-se-á $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$ ($m = 0$ em 12.2) e $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$, e será então $\theta = \pi$. Se o fuste e a base forem rugosos, ter-se-á $\mu = 0$ ($m = 1$) e $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$ e portanto $\theta = 5/4 \pi - \varphi'/2$.

Substituindo estes valores de μ , ψ e θ em (25.2) obtém-se para cada uma destas hipóteses a altura $h' = BE'$ do bolbo em estado plástico acima da base da fundação.

Substituindo esses mesmos valores em (20.2) obtém-se para cada uma das hipóteses citadas a carga limite $\bar{q}'$.

A expressão (20.2) tem a conhecida forma

$$\bar{q}' = c'N_c + p'_oN_p \quad (27.2)$$

onde

$$N_c = \cotg \varphi' \left[\frac{\sen \varphi' \cos \varphi' (\cotg \varphi' + \tg \psi) \exp (2 \theta \tg \varphi')}{1 - \sen \varphi' \sen (2 \mu + \varphi')} - 1 \right] \quad (28.2)$$

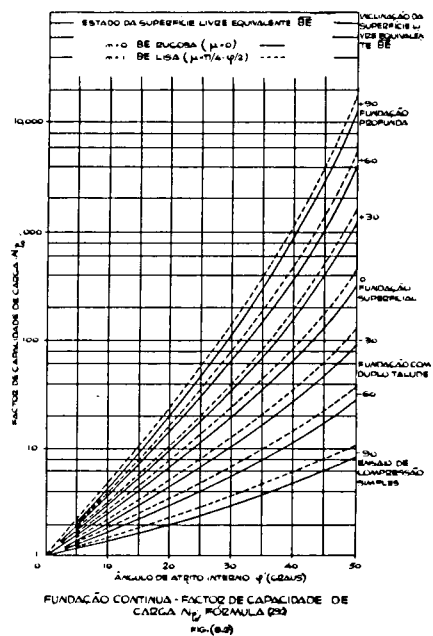
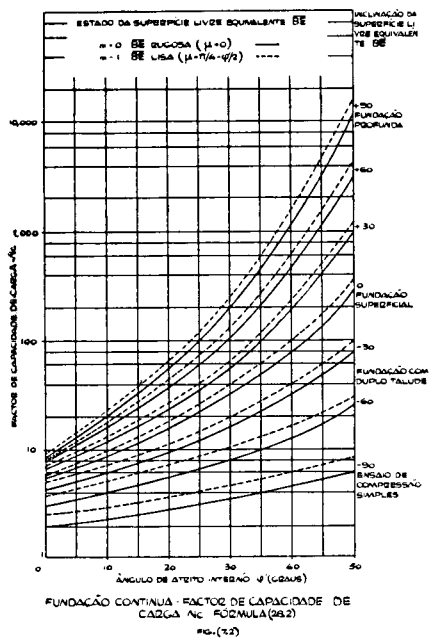
e

$$N_p = \frac{\sen \varphi' \cos \varphi' (\cotg \varphi' + \tg \psi) \exp (2 \theta \tg \varphi')}{1 - \sen \varphi' \sen (2 \mu + \varphi')} \quad (29.2)$$

Tomando $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$ e fazendo sucessivamente $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$ ($m = 0$) e $\mu = 0$ ($m = 1$), obter-se-ão para cada valor de α_o^* compreendido entre 0 (fundação superficial) e $\pi/2$ (fundação profunda) ou entre 0 e $-\pi/2$ (ensaio de compressão simples), os valores de N_c e N_p em função do ângulo de atrito φ' , os quais são apresentados nas Figs. (7.2) e (8.2) [61] **.

* α_o define, através de (25.2), a razão h/b entre a profundidade e a largura da fundação.

** Meyerhof, 1951, p. 306.



À parte as variações que os factores N_c e N_p podem apresentar por virtude das diferentes hipóteses que se podem fazer acerca de μ , o factor mais preponderante na determinação da carga limite $\bar{q}'$, é a pressão lateral p'_0 . Esta pressão depende fundamentalmente do aperto das terras de encontro ao fuste, o qual pode criar um estado de tensão variando entre o estado activo e o estado passivo, fornecendo esses estados valores de p'_0 que para o caso por exemplo de $\varphi' = 30^\circ$, estão entre si na razão de 1:9. Esta grande amplitude de resultados possíveis levou autores como De Beer e Wallays [24]* a afirmações tais como a seguinte:

«Comme malgré tout l'état des contraintes le long du fut n'est pas exactement connu, l'extrême sensibilité de la formule indique la quasi impossibilité de déterminer avec un degré d'exactitude raisonnable la force portante limite d'un pieu à partir d'une formule. Seuls des essais directs, notamment des essais de pénétration, peuvent nous renseigner à ce sujet».

É fácil ver que o valor de p'_0 , no caso de $\alpha_0 = \pi/2$ (fundação profunda), de aderência nula entre o solo e o fuste e sendo $m = 0$, é dado

$$\text{por} \quad p'_0 = K \gamma' (h - h'/2) \quad (30.2)$$

onde

K é o coeficiente de impulso de terras contra o fuste,
 h é a profundidade da base da fundação,
 h' é a altura do bolbo plastificado dada por (25.2),
 γ' a densidade aparente do solo.

Se por exemplo $\varphi' = 30^\circ$ K varia entre $K_a = 1/3$ a $K_p = 3$, como já se frisou. Meyerhof aconselha tomar $K = 0,5$ para solos não compactos e $K = 1,0$ para solos compactos. Estes valores parecem estar do lado da segurança, pois como se acaba de ver, mesmo para ângulos de atrito baixos (fraca compacidade) o máximo valor de K

* 1955, p. 24.

sugerido por Meyerhof é a terça parte do máximo teòricamente possível. Tomando $K = 1,0$ os valores de carga limite numa fundação profunda, calculada à Meyerhof estão em geral bastante acima dos indicados por outros autores, o que não admira por considerar Meyerhof que os solos acima da base da fundação são interessados na capacidade de carga desta. Será, portanto, de interesse verificar qual a ordem de grandeza do encastramento mínimo da fundação na camada resistente para que tenha lugar a hipótese de fundação profunda. Tomando por exemplo $\varphi' = 30^\circ$, supondo $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$ e $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$ (fuste liso) a fórmula (25.2) dá $\frac{h'}{b} = 10,62$. Quer dizer nas con-

dições apontadas para se obter a resistência prevista por Meyerhof a fundação teria de estar encastrada no solo resistente uma distância de cerca de dez vezes a largura da base. Se a camada resistente não tiver bastante espessura a hipótese de Meyerhof de fundação profunda não poderá ser aplicada. Haveria então que tomar o valor de α_0 correspondente à possança de solos resistentes acima da base da fundação e tomar os restantes apenas como peso morto.

Considere-se agora a contribuição do peso próprio dos solos para a capacidade de carga da fundação. Meyerhof, como a maioria dos autores, considera a carga limite da fundação para o caso geral, igual à soma das cargas limites obtidas para as duas condições extremas:

$c' \text{ e } p'_0 \neq 0 \text{ e } \gamma' = 0$ (maciço sem peso) e
 $c' = p'_0 = 0 \text{ e } \gamma' \neq 0$ (maciço não coesivo, sem carga na superfície «livre»).

A carga limite da fundação teria então por expressão

$$\bar{q}' = c'N_c + p'_0N_p + \frac{b}{2}\gamma'N_\gamma \quad (31.2)$$

Os factores N_c e N_p são os dados pelas equações (28.2) e (29.2) respectivamente, em função de μ , ψ , θ e φ' . Fixados μ e ψ , por questões de rugosidade na base e na superfície «livre equivalente», vem θ , função de α_0 , isto é, em função da profundidade relativa da fundação.

Meyerhof considera $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$ e faz sucessivamente $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$ ($m = 0$) e $\mu = 0$ ($m = 1$) quer na obtenção de N_c e N_p quer na de N_γ . Além destas hipóteses e da condição $p'_0 = \tau_0 = 0$ na superfície livre equivalente BE (Fig. 4.2), Meyerhof fez mais as seguintes hipóteses para obter N_γ :

- a) A face BC da cunha $ABCA$ é plana;
- b) A directriz da superfície de escorregamento CD é uma espiral logarítmica de equação $r = r_0 \exp. (0 \operatorname{tg} \varphi')$ com origem no ponto C (conhecido) e fim no ponto D sobre a recta BD (conhecida);
- c) O centro da espiral O é escolhido por tentativas de forma a que o impulso P'_p na face BC seja mínimo;
- d) O triângulo $BEDB$ é isósceles, sendo $D\hat{B}E = B\hat{E}D$.

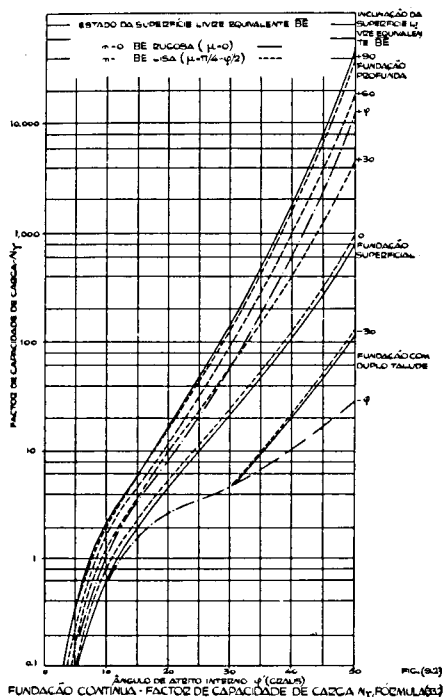
Meyerhof calcula o valor P'_p estabelecendo o equilíbrio de momentos de P'_p e das forças relativas ao peso do volume de solos $BCDEB$, em relação ao centro O da espiral. As forças distribuídas ao longo do arco de espiral CD não produzem momentos porque passam, por definição, pelo centro O .

Conhecido P'_p em BC e por simetria em AC , o valor da carga limite $\bar{q}'$ obtém-se do equilíbrio da cunha $ABCA$, considerando o seu peso próprio

$$\bar{q}' = \gamma' \frac{b}{2} \left[\frac{4 P'_p \operatorname{sen} (\pi/4 + \varphi'/2)}{\gamma' b^2} - 1/2 \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi'/2) \right], \quad (32.2)$$

$$N_\gamma = \frac{4 P'_p \operatorname{sen} (\pi/4 + \varphi'/2)}{\gamma' b^2} - 1/2 \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi'/2) \quad (33.2)$$

N_γ assim calculado é representado na (Fig. 9.2).



As hipóteses de Meyerhof contêm algumas aproximações e inconsistências que convém referir:

a) A face BC da cunha $ABCA$ é curva e não plana. No entanto, esta aproximação introduziria pequeno erro se o ângulo $\psi = \widehat{ABC}$ fosse correcto. Terzaghi [83]* toma $\psi = \varphi'$, Meyerhof [61]** toma $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$. Lundgren e Mortensen [56]*** mostraram que BC é curva e ψ é variável consoante a razão $\gamma'b/p'$, podendo para valores elevados desse cociente haver plastificação total nas vizinhanças dos bordos da fundação e a zona elástica restringir-se a uma pequena cunha nas vizinhanças do centro da base da fundação. Como, no entanto, tanto Terzaghi (que admite a base rugosa) como Lundgren e Mortensen encontraram valores da carga limite

* 1943, p. 125. ** 1951, p. 306. *** 1953, p. 410.

inferiores aos de Meyerhof, esse autor em 1955 reviu a sua teoria para o cálculo de N_γ mantendo BC plana, mas determinando ψ pela condição de ser

$$N_\gamma = \frac{4P'_p \cos(\psi - \varphi')}{\gamma' b^2} - \frac{\text{tg } \psi}{2} \quad (34.2)$$

mínimo a respeito de ψ . (34.2) como (33.2) deduz-se do equilíbrio da cunha $ABCA$ (peso próprio incluído). O autor obteve, então, valores sensivelmente inferiores aos de 1951, sendo aproximadamente $\psi = 1,2\varphi'$.

Meyerhof [62]*, no entanto, sugere a fórmula geral:

$$\psi = \pi/4 + \varphi'/2 - 1/2 \left[\delta + \arcsen \left(\frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \varphi'} \right) \right] \quad (35.2)$$

onde $0 \geq \delta \geq \varphi'$ seria o ângulo de atrito entre a base e o solo. Esta fórmula é inconsistente porquanto quando a base fosse lisa ($\delta = 0$), tomar-se-ia a figura da rotura correspondente ao caso da base rugosa e maciço sem peso.

Note-se, que a correção apresentada por Meyerhof em 1955 se refere apenas ao caso $\alpha_0 = 0$ (fundação superficial). O autor sugere, no entanto, que quando a razão h/b entre a profundidade e a largura da fundação for menor que 1 se usem para N_γ gráficos da Fig. (10.2), que apresenta para fundação superficial, e se admita para N_c e N_p valores calculados «à Terzaghi», isto é, admitindo nula a resistência dos solos acima da fundação ($p'_0 = p' = \gamma'h$) e $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$. Este procedimento leva a novas inconsistências pois se toma $\psi = 1,2\varphi'$ para o cálculo de N_γ (Fig. 10.2) e $\psi = \pi/4 + \varphi'/2$ para o de N_c e N_p quando os três valores teriam de corresponder à mesma superfície de escorregamento;

* 1955, p. 42-43.

b) Como o provaram Lundgren e Mortensen [56]* e Sokolovski [80]** a superfície CD (Fig. 4.2.a) não tem por directriz uma espiral logarítmica no caso $\gamma' \neq 0$. Além disso como Meyerhof determina um centro para a espiral que está fora de

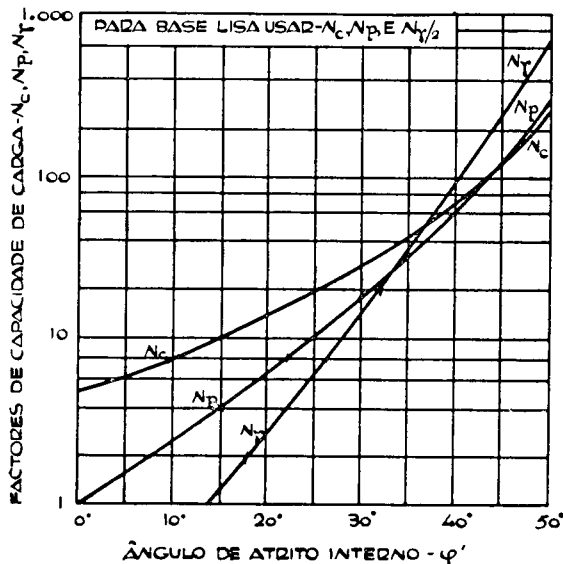


FIG.(10.2)

B , em geral fora da recta BD , AC não é tangente à espiral em C , nem DE em D , resultando daí um trabalho de deformação interna, incompatível com o princípio de trabalho mínimo a que deve obedecer o equilíbrio limite do maciço;

c) De Beer e Wallays [24]*** mostraram como é estáticamente impossível que o triângulo $BEDB$ seja isósceles excepto quando $\alpha_0 = 0$. É também evidente que com as hipóteses postas por Meyerhof para o cálculo de N_γ o ponto E pode não ficar à superfície do terreno, como devia.

* 1953, p. 410. ** 1960. *** 1955, p. 42-43.

Os comentários que se acabam de fazer às hipóteses de Meyerhof para o cálculo de N_γ , no caso da fundação superficial ou a pequena profundidade têm cabimento no caso de fundação profunda, representado na (Fig. 4.2.b). Simplesmente, nesse caso o chamado «termo de superfície» N_γ , tem valores muito pequenos quando comparados com N_c e N_p , e, portanto, as aproximações feitas pouco pesam na carga limite calculada para a fundação.

Apesar das críticas que acabamos de formular a solução de Meyerhof tem o mérito de considerar a resistência própria das camadas de solo acima da base da fundação, as quais os outros autores consideram apenas como peso morto. Além disso como já se viu grande parte dessas inconsistências é, também válida para as teorias de Caquot e Terzaghi.

CAPÍTULO III

O PROBLEMA ESPECÍFICO

40. Particularização das equações gerais

Na (Fig. 1.1) do Capítulo I representámos as tracções como tensões positivas seguindo a regra geral na mecânica dos meios contínuos. Contudo, nos maciços terrosos predominam as compressões sendo por isso natural que se adoptem convenções contrárias às representadas naquela figura.

Para fixar ideias representam-se na (Fig. 1.3) as novas convenções que passamos a discriminar:

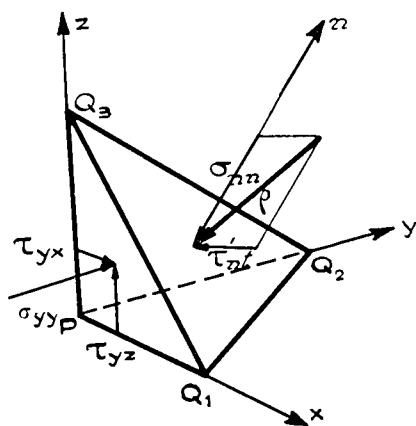


FIG. (1.3)

Seja σ_{ij} uma componente da tensão actuando numa faceta normal ao eixo dos i e tendo a direcção j . Convenciona-se que será $\sigma_{ij} > 0$ quando o sentido de σ_{ij} é o oposto ao sentido positivo do eixo j , apontando a normal exterior à faceta no sentido positivo do eixo i , ou ainda $\sigma_{ij} > 0$ quando o sentido de σ_{ij} é igual ao sentido positivo do eixo j , apontando a normal exterior à faceta no sentido oposto ao sentido positivo do eixo i .

Será $\sigma_{ij} < 0$ nos casos contrários.

Na (Fig. 1.3) representam-se os σ_{ij} positivos. As tensões τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{zx} serão σ_{ij} nos quais $i \neq j$.

O tensor σ_{ij} é um tensor simétrico como já se viu no Capítulo I. Então a equação (16.1) toma para este caso a forma desenvolvida

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (1.3)$$

Definindo equilíbrio plano como o equilíbrio duma massa prismática sob a acção de forças normais às geratrizes do prisma uniformemente distribuídas ao longo do comprimento, será

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (2.3)$$

Se o eixo dos zz se tomar paralelo às geratrizes do prisma, substituindo (2.3) em (1.3) vem

$$(\sigma_{zz} - \sigma) \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

As três raízes da equação (3.3) são as três tensões principais. Resolvendo (3.3) obtém-se para elas as expressões:

$$\sigma_1 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = 1/2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}, \quad (4.3)$$

$$e \quad \sigma_2 = \sigma_{zz}, \quad (5.3)$$

$$\text{com} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (6.3)$$

A componente σ_{nn} da tensão segundo a normal a certa faceta, cuja normal exterior tem por cosenos directores c_1 , c_2 e c_3 , está relacionada com as tensões principais pela expressão

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 c_1^2 + \sigma_2 c_2^2 + \sigma_3 c_3^2 \quad (26.1)$$

como já se viu.

E também se viu que a componente tangencial σ_{nt} se pode tirar de

$$\sigma_{nt}^2 = \tau_{nt}^2 = \sigma_1^2 c_1^2 + \sigma_2^2 c_2^2 + \sigma_3^2 c_3^2 - (\sigma_1 c_1^2 + \sigma_2 c_2^2 + \sigma_3 c_3^2)^2 \quad (27.1)$$

ou seja

$$\tau_{nt}^2 + \sigma_{nn}^2 = \sigma_1^2 c_1^2 + \sigma_2^2 c_2^2 + \sigma_3^2 c_3^2 \quad (7.3)$$

com

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \quad (8.3)$$

Das equações (26.1), (7.3) e (8.3) obtêm-se, resolvendo em ordem a c_1^2 , c_2^2 e c_3^2 , as equações

$$c_1^2 = \frac{(\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3) + \tau_{nt}^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (9.3)$$

$$c_2^2 = \frac{(\sigma_{nn} - \sigma_3)(\sigma_{nn} - \sigma_1) + \tau_{nt}^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (10.3)$$

$$c_3^2 = \frac{(\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2) + \tau_{nt}^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (11.3)$$

Como os segundos membros de (9.3) a (11.3) têm de ser positivos e como por hipótese $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, terão de verificar-se as desigualdades

$$(\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3) + \tau_{nt}^2 \geq 0 \quad (12.3)$$

$$(\sigma_{nn} - \sigma_3)(\sigma_{nn} - \sigma_1) + \tau_{nt}^2 \geq 0 \quad (13.3)$$

$$(\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2) + \tau_{nt}^2 \geq 0 \quad (14.3)$$

ou seja, depois de transformadas,

$$[\sigma_{nn} - 1/2 (\sigma_2 + \sigma_3)]^2 + \tau_{tn}^2 \leq 1/4 (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad (15.3)$$

$$[\sigma_{nn} - 1/2 (\sigma_3 + \sigma_1)]^2 + \tau_{nt}^2 \leq 1/4 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \quad (16.3)$$

$$[\sigma_{nn} - 1/2 (\sigma_1 + \sigma_2)]^2 + \tau_{nt}^2 \leq 1/4 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad (17.3)$$

É evidente que os pontos que satisfazem simultaneamente às três desigualdades (15.3) a (17.3) são os dos triângulos curvilíneos sombreados na (Fig. 2.3).

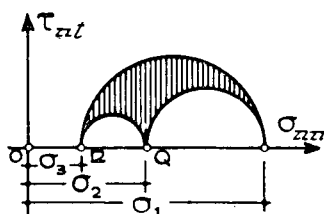


FIG. (2.3)

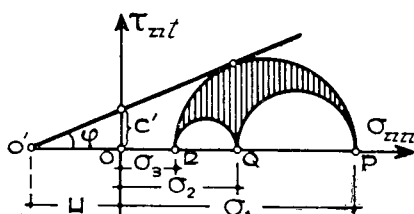


FIG. (3.3)

No caso do equilíbrio limite o maior dos círculos da (Fig. 2.3), círculos de Mohr, será tangente à recta de Coulomb (Fig. 3.3).

41. As equações de equilíbrio no plano xy . Introdução das tensões neutras

Do equilíbrio dum paralelepípedo elementar deduzem-se sob forma geral as equações (21.1), que segundo as novas convenções se escrevem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \gamma'_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \gamma'_y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \gamma'_z \end{aligned} \quad (18.3)$$

onde γ'_x , γ'_y e γ'_z são as componentes do peso específico nas direcções dos eixos dos xx , dos yy e dos zz , respectivamente.

No caso particular do equilíbrio limite no plano as equações (18.3) tomam a forma

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} &= \gamma'_x \\ \frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_{yy}}{dy} &= \gamma'_y \end{aligned} \quad (19.3)$$

Visto que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (19.3) constitui um sistema de duas equações diferenciais a três incógnitas (σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy}). Porém, adicionando a (19.3) a condição de plasticidade de Mohr-Coulomb o problema fica estáticamente determinado como já se tinha visto (pág. 48). A condição de Mohr-Coulomb em termos de σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} obtém-se do modo seguinte:

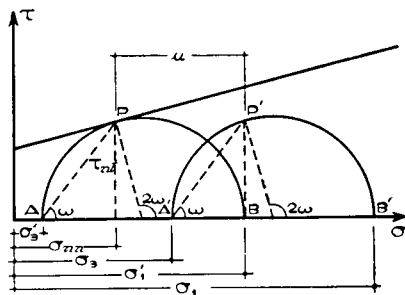


FIG. (4.3)

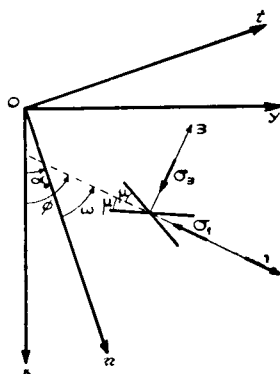


FIG. (5.3)

Seja $A'P'B'$ (Fig. 4.3) o círculo de Mohr em termos de tensões totais a que corresponde o círculo APB em termos de tensões efectivas. Sejam σ_{nn} e τ_{nt} as coordenadas do ponto P' correspondente ao ponto P de contacto de Mohr em termos de tensões efectivas com a recta de Mohr-Coulomb.

Vê-se da (Fig. 4.3) que em termos de tensões totais

$$\sigma_{nn} = 1/2 (\sigma_1 + \sigma_3) + 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\omega \quad (20.3)$$

$$|\tau_{nt}| = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\omega \quad (21.3)$$

Procurando o ω que torna máxima a diferença

$$\begin{aligned} & |\tau_{nt}| - (\sigma_{nn} + \sigma'_0) \operatorname{tg} \varphi' = \\ &= \frac{1}{2 \cos \varphi'} [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin (2\omega - \varphi') - \sin \varphi' (\sigma_1 + \sigma_3 + 2\sigma'_0)], \end{aligned} \quad (22.3)$$

$$\text{encontra-se } 2\omega = \pi - 2\mu, \text{ onde } 2\mu = \pi/2 - \varphi' \quad (23.3)$$

que define a posição da faceta de escorregamento.

$$\text{Na expressão (22.3)} \quad \sigma'_0 = c' \cotg \varphi' - u, \quad (24.3)$$

onde u é a pressão neutra.

Conclui-se de (23.3) que a faceta de escorregamento forma com a faceta onde actua a maior tensão principal σ_1 , um ângulo $\pi/2 - \mu$ ou seja um ângulo μ com o vector representativo da própria tensão. Do círculo de Mohr verifica-se que há dois ângulos que podem verificar essa condição e que podem ser designados por $\pm \mu$.

Substituindo os valores encontrados para ω (23.3) nas equações (20.3) e (21.3) obtém-se

$$(\sigma_{nn})_{\text{rot}} = 1/2 (\sigma_1 + \sigma_3) - 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \varphi' \quad (25.3)$$

$$(\tau_{nt})_{\text{rot}} = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3) \cos \varphi' \quad (26.3)$$

$$(\sigma_{nn})_{\text{rot}} = 1/2 [\sigma_1 (1 - \sin \varphi') + \sigma_3 (1 + \sin \varphi')] \quad (27.3)$$

De (25.3) e (26.3) e da condição de plasticidade de Mohr-Coulomb

$$(\tau_{nt})_{\text{rot}} = (\sigma_{nn} + \sigma'_0) \operatorname{tg} \varphi' \quad (28.3)$$

tira-se a relação

$$1/2 (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\operatorname{sen} \varphi'}{2} (\sigma_1 + \sigma_3 + 2\sigma'_0). \quad (29.3)$$

Substituindo em (29.3) os valores de σ_1 e σ_3 pelos seus valores (4.3) obtém-se a condição de plasticidade de Mohr-Coulomb em termos de σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} :

$$\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy} = \operatorname{sen}^2 \varphi' \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sigma'_0 \right)^2 \quad (30.3)$$

expressão idêntica a (113.1) quando as tensões neutras são nulas.

12. Relações entre as tensões σ_{ij} ($i, j = x, y$), a tensão efectiva média σ' e o ângulo Φ da tensão principal máxima com o eixo dos xx

Seja x, y (Fig. 5.3) um sistema cartesiano de referência. As tensões num ponto qualquer do maciço a respeito deste sistema serão σ_{xx} , σ_{yy} e $\tau_{xy} \equiv \sigma_{yx} \equiv \sigma_{yx}$, com as convenções de sinais antes citadas.

Tome-se um outro sistema também ortogonal n, t em que o eixo dos nn esteja rodado de α_0 [α_0 positivo quando tenha o sentido indicado na Fig. (5.3)] em relação ao eixo dos xx .

O círculo de Mohr dá para fórmulas de transformação

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha_0 \pm \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha_0 \quad (31.3)$$

$$\tau_{nt} = -1/2 (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \operatorname{sen} 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0. \quad (32.3)$$

Sejam 1,3 os eixos principais no ponto de maciço cujo estado de tensão se considera. Seja Φ o ângulo que o eixo na direcção do qual actua a tensão principal máxima σ_1 , faz com o eixo dos xx . Então, por conveniente mudança de notação obtém-se das fórmulas gerais (31.3) e (32.3)

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\Phi \quad (33.3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\Phi . \quad (34.3)$$

Faça-se

$$\sigma' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + c' \cotg \varphi' = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sigma'_0 . \quad (35.3)$$

Introduzindo (29.3) e (35.3) em (33.3) e (34.3), obtém-se

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{matrix} \right\} = \sigma' (1 \pm \sin \varphi' \cos 2\Phi) - \sigma'_0 , \quad (36.3)$$

$$\tau_{xy} = \sigma' \sin \varphi' \sin 2\Phi . \quad (37.3)$$

43. Redução do problema a um sistema de duas equações diferenciais de tipo hiperbólico. O gradiente das tensões neutras como força de massa

Das equações (36.3) e (37.3) tira-se

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = \frac{d\sigma'}{dx} (1 + \sin \varphi' \cos 2\Phi) - 2\sigma' \sin \varphi' \sin 2\Phi \frac{d\Phi}{dx} - \frac{d\sigma'_0}{dx} .$$

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dy} = \frac{d\sigma'}{dy} (1 - \sin \varphi' \cos 2\Phi) + 2\sigma' \sin \varphi' \sin 2\Phi \frac{d\Phi}{dy} - \frac{d\sigma'_0}{dy} .$$

$$\frac{d\tau_{xy}}{dx} = \frac{d\sigma'}{dx} \sin \varphi' \sin 2\Phi + 2\sigma' \cos 2\Phi \frac{d\Phi}{dx} ,$$

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = \frac{d\sigma'}{dy} \sin \varphi' \sin 2\Phi + 2\sigma' \cos 2\Phi \frac{d\Phi}{dy} .$$

Substituindo estes valores nas equações (19.3) e atendendo a que

$$\frac{d\sigma'_0}{dx} = \frac{du}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d\sigma'_0}{dy} = \frac{du}{dy}, \text{ vem}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d\sigma'}{dx} (1 + \sin \varphi' \cos 2\Phi) - 2\sigma' \sin \varphi' \sin 2\Phi \frac{d\Phi}{dx} + \\ & + \frac{d\sigma'}{dy} (\sin \varphi' \sin 2\Phi) + 2\sigma' \cos 2\Phi \frac{d\Phi}{dy} = \gamma'_x - \frac{du}{dx}, \\ & \frac{d\sigma'}{dx} \sin \varphi' \sin 2\Phi + 2\sigma' \cos 2\Phi \frac{d\Phi}{dx} + \\ & + \frac{d\sigma'}{dy} (1 - \sin \varphi' \cos 2\Phi) + 2\sigma' \sin \varphi' \sin 2\Phi \frac{d\Phi}{dy} = \gamma'_y - \frac{du}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (38.3)$$

No sistema de equações (38.3) σ' é uma tensão efectiva e Φ o ângulo que faz o eixo principal de σ_1 com o eixo dos xx . Como a tensão neutra não altera a posição dos eixos principais Φ é também o ângulo que faz o eixo de σ'_1 com o eixo dos xx . Vê-se, portanto, que o efeito das tensões neutras não é mais do que o de deduzir o peso próprio do maciço através do gradiente dessas tensões.

Se nas equações do sistema (19.3) fizermos $\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} + u$; $\sigma_{yy} = \sigma'_{yy} + u$ e $\tau_{xy} = \tau'_{xy}$, o sistema fica escrito em termos de tensões efectivas.

Viria

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma'_{xx}}{dx} + \frac{d\tau'_{yx}}{dy} &= \gamma'_x - \frac{du}{dx} \\ \frac{d\tau'_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma'_{yy}}{dy} &= \gamma'_y - \frac{du}{dy} \end{aligned} \quad (39.3)$$

com

$$\left(\frac{\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}}{2} \right)^2 + \tau'^2_{xy} = \sin^2 \varphi' \left(\frac{\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}}{2} + H' \right), \quad (30.3)$$

$$H' = c' \cotg \varphi'.$$

Se a condição de plasticidade e todas as outras equações se escreverem em termos de tensões efectivas, obter-se-á exactamente o mesmo sistema (38.3) em termos de σ' e Φ o que não nos deve admirar visto que um tensor esférico u adicionado (ou subtraído) ao maciço não altera as direcções das tensões principais.

Fazendo

$$\chi = \frac{\cotg \varphi'}{2} \log_e \frac{\sigma'}{\sigma^0}, \quad (40.3)$$

onde σ^0 é uma constante arbitrária com as dimensões duma tensão. Calculando $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \chi}{\partial y}$, resolvendo em ordem a $\frac{\partial \sigma'}{\partial x}$ e $\frac{\partial \sigma'}{\partial y}$ e substituindo em (38.3) obtém-se

$$\begin{aligned} & (1 + \sin \varphi' \cos 2\Phi) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \sin \varphi' \sin 2\Phi \frac{\partial \chi}{\partial y} - \\ & - \cos \varphi' \left(\sin 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \cos 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{\cotg \varphi'}{2\sigma'} \left(\gamma'_x - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & (\sin \varphi' \sin 2\Phi) \frac{\partial \chi}{\partial x} + (1 - \sin \varphi' \cos 2\Phi) \frac{\partial \chi}{\partial y} + \\ & + \cos \varphi' \left(\cos 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sin 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{\cotg \varphi'}{2\sigma'} \left(\gamma'_y - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (41.3)$$

Supondo as derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ funções de x e y conhecidas, como σ' se exprime em função de χ (41.3) constitui um sistema de duas equações diferenciais a duas funções desconhecidas $\chi(x, y)$ e $\Phi(x, y)$.

O sistema (41.3) pode ainda simplificar-se fazendo

$$\begin{aligned} \xi &= \chi + \Phi \\ \eta &= \chi - \Phi \end{aligned} \quad (43.3)$$

ou seja

$$\begin{aligned} 2\chi &= \xi + \eta \\ 2\Phi &= \xi - \eta \end{aligned} \quad (42.3)$$

Sendo

$$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}, \quad (23.3)$$

multiplicando a primeira das equações (41.3) por $\sin(\Phi - \mu)$ [ou $\sin(\Phi + \mu)$] e a segunda por $-\cos(\Phi - \mu)$ ou $[-\cos(\Phi + \mu)]$ e adicionando vem

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} + \operatorname{tg}(\Phi - \mu) \frac{d\eta}{dy} &= A \\ \frac{d\xi}{dx} + \operatorname{tg}(\Phi + \mu) \frac{d\xi}{dy} &= B \end{aligned} \quad (44.3)$$

com

$$\left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} \pm \frac{\left(\gamma'_x - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin(\Phi \pm \mu) - \left(\gamma'_y - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(\Phi \pm \mu)}{2 \sigma' \sin \varphi' \cos(\Phi \mp \mu)} \quad (45.3)$$

Pode demonstrar-se [79]* que o sistema (44.3) de equações diferenciais é do tipo hiperbólico, isto é, existem duas famílias de curvas reais (características) ao longo das quais o sistema (44.3) e outro constituído pelas diferenciais totais das funções ξ e η , fornecem valores indeterminados para as quatro derivadas $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\xi}{dy}$, $\frac{d\eta}{dx}$ e $\frac{d\eta}{dy}$. Nesse caso ξ e η serão funções das características

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) = k_1 \quad \text{e} \quad \beta(x, y) = k_2 \quad \text{da forma} \\ \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = f[\alpha(x, y)] \pm g[\beta(x, y)]. \end{aligned} \quad (46.3)$$

Isto quer dizer que ao longo das características tanto ξ como de η são funções apenas dos valores pelos quais vai passando outra família de características.

No caso presente uma primeira família de características (β) é determinada pelas equações

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\Phi - \mu), \quad \frac{d\eta}{dx} = A \quad (47.3)$$

* Sokolnikof, 1958, p. 504-521.

A segunda família (α) é determinada por

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\Phi + \mu), \quad \frac{d\xi}{dx} = B \quad (48.3)$$

44. Redução do sistema à forma canónica

O sistema de equações (47.3) e (48.3) é equivalente ao sistema inicial (44.3) e pode ser reduzido à chamada forma canónica. Com efeito, ao longo de cada característica β , η será função apenas de α , bem como das coordenadas x e y .

Então (47.3) toma a forma

$$\frac{dy}{d\alpha} = \operatorname{tg}(\Phi - \mu) \frac{dx}{d\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{d\eta}{d\alpha} = A \frac{dx}{d\alpha} \quad (49.3)$$

Anàlogamente ao longo de cada característica α , ξ será apenas função de β e bem assim as coordenadas x e y .

Então:

$$\frac{dy}{d\beta} = \operatorname{tg}(\Phi + \mu) \frac{dx}{d\beta} \quad \text{e} \quad \frac{d\xi}{d\beta} = B \frac{dx}{d\beta} \quad (50.3)$$

45. Resolução do sistema por métodos numéricos. As fórmulas de recorrência para os três problemas fundamentais

Se A e B não forem ambos nulos o sistema de equações diferenciais (49.3) e (50.3) só poderá resolver-se em geral por métodos numéricos [80]*. Na resolução numérica do sistema determinam-se as incógnitas x , y , ξ e η num dado ponto a partir do conhecimento dos valores das mesmas incógnitas conhecidas em dois pontos vizinhos 1 e 2. As derivadas parciais $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dy}{d\alpha}$, $\frac{d\xi}{d\alpha}$, e $\frac{d\eta}{d\alpha}$ são substituídas pelas diferenças finitas equivalentes

* Sokolovski, op. cit. p. 30.

$$\frac{x - x_1}{\Delta\alpha}, \quad \frac{y - y_1}{\Delta\alpha}, \quad \frac{\xi - \xi_1}{\Delta\alpha}, \quad \frac{\eta - \eta_1}{\Delta\alpha}.$$

O mesmo em relação a β .

O sistema (49.3) e (50.3) toma então a forma

$$\begin{aligned} y - y_1 &= (x - x_1) \operatorname{tg} (\Phi_1 - \mu) & \text{e} & & \eta - \eta_1 &= (x - x_1) A_1 \\ y - y_2 &= (x - x_2) \operatorname{tg} (\Phi_2 + \mu) & \text{e} & & \xi - \xi_2 &= (x - x_2) B_2 \end{aligned}$$

ou seja

$$x = \frac{x_1 \operatorname{tg} (\Phi_1 - \mu) - y_1 - x_2 \operatorname{tg} (\Phi_2 + \mu) + y_2}{\operatorname{tg} (\Phi_1 - \mu) - \operatorname{tg} (\Phi_2 + \mu)} \quad (51.3)$$

$$y = y_2 + (x - x_2) \operatorname{tg} (\Phi_2 - \mu)$$

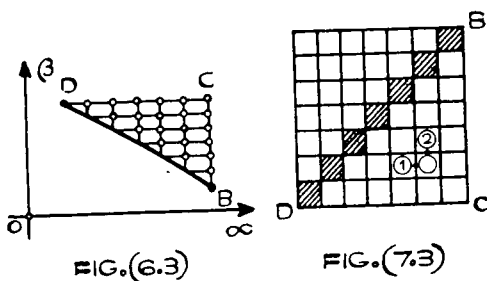
$$\eta = \eta_1 + (x - x_1) A_1 \quad (52.3)$$

$$\xi = \xi_2 + (x - x_2) B_2.$$

Há três tipos de problemas gerais a resolver.

No primeiro são dados os valores de x , y , ξ e η ao longo do arco BD do plano (α, β) . Nessas condições demonstra-se que os valores das ditas incógnitas são determináveis no triângulo BCD .

Divida-se o arco BD em vários segmentos e estabeleça-se a rede indicada na (Fig. 6.3).



As relações de recorrências (51.3) e (52.3) permitir-nos-ão preencher o quadro da (Fig. 7.3).

No segundo problema os valores de x , y , ξ e η são dados ao longo das características AB e AD do plano (α, β) . Os valores das incógnitas são então determinados em todo o rectângulo $(ABCD)$.

Estabeleça-se a rede de pontos da (Fig. 8.3).

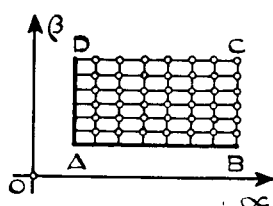


FIG. (8.3)

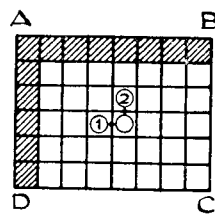


FIG. (9.3)

Também pelas fórmulas de recorrência (51.3) e (52.3) se podem determinar os valores de x , y , ξ e η no interior do rectângulo e assim preencher o quadro da (Fig. 9.3).

No terceiro problema ao longo do segmento de características AB (Fig. 10.3) ou AD (Fig. 12.3) são dados os valores de x , y , ξ e η e ao

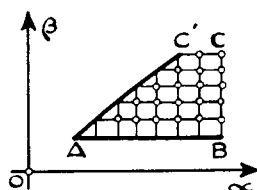


FIG. (10.3)

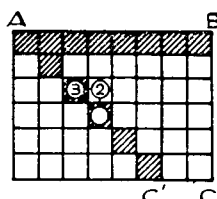


FIG. (11.3)

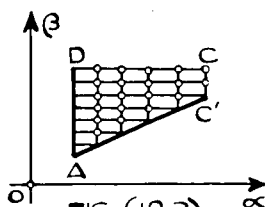


FIG. (12.3)

longo do arco AC' as relações
 $\Phi = \Phi_0 = \text{const.}$

$$y = mx + n \quad \text{ou} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad (53.3)$$

Os valores de x , y , β e η poderão desde logo ser inscritos na banda superior da (Fig. 11.3). Os valores das incógnitas nos pontos nodais do arco AC' serão determinados a partir das seguintes equações

$$y - y_2 = (x - x_2) \operatorname{tg} (\Phi_2 + \mu), \quad \xi - \xi_2 = (x - x_2) B_2 \quad (54.3)$$

com as condições (55.3) ao longo do arco AC' .

Resolvendo (53.3) e (54.3) em ordem a x e y temos

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_2 \operatorname{tg} (\Phi_2 + \mu) + n - y_2}{\operatorname{tg} (\Phi_2 + \mu) - m}, & y &= mx + n \\ y &= y_2 - x_2 \operatorname{tg} (\Phi_2 + \mu), & x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (55.3)$$

e também

$$\xi = \xi_2 + (x - x_2) B_2, \quad \eta = \xi - 2\Phi_0. \quad (56.3)$$

Mutatis mutandis se x , y , ξ e η forem dadas ao longo da característica AD (Fig. 12.3) com as relações (53.3) válidas ao longo do arco AC' , então, será possível determinar x , y , ξ e η nos pontos nodais de AC' pelas relações de recorrência

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 \operatorname{tg} (\Phi_1 - \mu) + n - y_1}{\operatorname{tg} (\Phi_1 - \mu) - m}, & y &= mx + n \\ y &= y_1 - x_1 \operatorname{tg} (\Phi_1 - \mu), & x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (57.3)$$

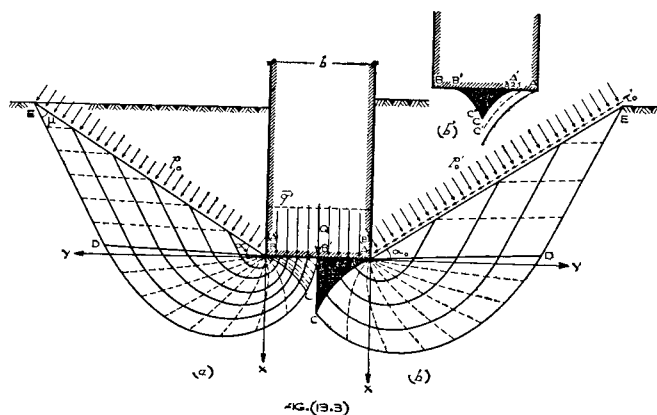
e também

$$\eta = \eta_1 + (x - x_1) A_1, \quad \xi = \eta + 2\Phi_0 \quad (58.3)$$

46. Aplicação ao problema da capacidade de carga das fundações contínuas

Apliquemos o método que acabamos de expôr à determinação da capacidade de carga das fundações contínuas.

Representa-se na (Fig. 13.3) uma fundação contínua apoiada num solo homogêneo e isótropo*.



No sentido de incluir na capacidade de carga da fundação a resistência do terreno acima da base da fundação, admitiremos como Meyerhof [61]** que, dum modo geral, existem duas «superfícies livres equivalentes» à direita e à esquerda da fundação, constituindo dois taludes de inclinação α_0 sobre o horizonte.

O ângulo do talude será função da profundidade da fundação. Para fundações superficiais será $\alpha_0 = 0$. Para fundações profundas será $\alpha_0 = 90^\circ$. Com certas limitações quanto à estabilidade dos taludes, que adiante se estudarão em detalhe, poderá ser $\alpha_0 < 0$, caso duma fundação superficial à beira dum talude.

Supôr-se-á ainda que actua sobre os taludes uma tensão uniformemente distribuída, cuja componente normal é p'_0 . A carga total Q na fundação supõe-se centrada e vertical.

* Veremos oportunamente o efeito da existência dum nível freático e, dum modo geral, o caso das forças de massa e características do solo serem variáveis por camadas ou de ponto para ponto.

** 1951, pp. 305-312. Meyerhof calculou a capacidade de carga da fundação supondo uma superfície de escorregamento única com a forma duma exponencial logarítmica; não determinou as tensões no interior do maciço. Viu-se no Capítulo II, pág. 81 as inconsistências que resultam dessa e outras hipóteses feitas.

47. Determinação de σ' e Φ na superfície livre equivalente

Tratar-se-ão os dois casos seguintes: primeiro a base da fundação é perfeitamente lisa e a carga lateral é normal à superfície livre equivalente (Fig. 13.3.a); segundo a base é completamente rugosa e a tensão lateral tem uma inclinação tal que as suas componentes p'_0 e τ'_0 estão ligadas pela relação

$$\tau'_0 = (p'_0 + H') \operatorname{tg} \delta_1, \quad (59.3)$$

com
$$H' = c' \cotg \varphi'. \quad (60.3)$$

A componente τ'_0 terá o sentido representado na (Fig. 13.3.b) e portanto, de acordo com a convenção estabelecida (pág. 86) $\tau'_0 < 0$ e daí $\delta_1 < 0$. Tomar-se-á $\delta_1 = -\varphi'/2$.

Analise-se em mais detalhe as condições de fronteira. No maciço com peso o problema só é resolúvel por métodos numéricos como já se referiu. Toma-se na primeira fronteira ($y > 0$ Fig. 13.3) um certo número de pontos, e caminha-se para o interior do domínio de integração satisfazendo em cada ponto equações em diferenças finitas do tipo de (51.3) e seguintes. Para isso é necessário, antes de mais, calcular em cada ponto escolhido na fronteira, além das suas coordenadas, os valores de

$$\sigma' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + H' \quad (34.3)$$

e do ângulo Φ que a tensão principal máxima σ'_1 forma com o eixo dos xx .

Em termos de tensões efectivas as equações (31.3) e (32.3) tomam a forma:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{nn} \\ \sigma'_{tt} \end{array} \right\} = \frac{\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}}{2} \pm \frac{\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}}{2} \cos 2\alpha_0 \pm \tau'_{xy} \sin 2\alpha_0 \quad (61.3)$$

e

$$\tau'_{xy} = - \frac{\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau'_{xy} \cos 2\alpha_0 \quad (62.3)$$

De modo análogo vem para (36.3) respectivamente

$$\left. \begin{matrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \end{matrix} \right\} = \sigma' (1 \pm \sin \varphi' \cos 2\Phi) - H' \quad (63.3)$$

$$\tau'_{xy} = \sigma' \sin \varphi' \sin 2\Phi . \quad (64.3)$$

Substituindo (63.3) e (64.3) em (61.3) e (62.3) vem

$$\left. \begin{matrix} \sigma'_{nn} \\ \sigma'_{tt} \end{matrix} \right\} = \sigma' [1 \pm \sin \varphi' \cos 2 (\Phi - \alpha_0)] - H' \quad (65.3)$$

$$\tau'_{nt} = \sigma' \sin \varphi' \sin 2 (\Phi - \alpha_0) . \quad (66.3)$$

Por outro lado a equação (59.3) escreve-se, dum modo geral,

$$\tau'_{nt} = (\sigma'_{nn} + H') \operatorname{tg} \delta_1 , \quad (67.3)$$

com $\left| \delta_1 \right| < \varphi' .$

De (65.3), (66.3) e (67.3) tira-se

$$\sigma' [1 + \sin \varphi' \cos 2 (\Phi + \alpha_0)] \operatorname{tg} \delta_1 = \sigma' \sin \varphi' \sin 2 (\Phi + \alpha_0) .$$

Transpondo e simplificando, obtém-se

$$\sin 2 (\Phi - \alpha_0) \cos \delta_1 - \cos 2 (\Phi - \alpha_0) \sin \delta_1 = \frac{\sin \delta_1}{\sin \varphi'} ,$$

e daqui

$$\sin [2 (\Phi - \alpha_0) - \delta_1] = \frac{\sin \delta_1}{\sin \varphi'} . \quad (68.3)$$

Há dois ângulos entre 0 e π que satisfazem a equação (68.3), a saber:

$$2(\Phi - \alpha_0) - \delta_1 = \arcsen \left(\frac{\text{sen } \delta_1}{\text{sen } \varphi'} \right) \quad (69.3.a)$$

$$2(\Phi - \alpha_0) - \delta_1 = \pi - \arcsen \left(\frac{\text{sen } \delta_1}{\text{sen } \varphi'} \right) \quad (69.3.b)$$

É fácil ver que (69.3.a) corresponde ao maciço no estado activo e (69.3.b) ao maciço no estado passivo de tensão. Como na fronteira em questão o estado de tensão é passivo há que tomar (69.3.b).

Então

$$2\Phi = 2\alpha_0 + \delta_1 + \pi - \arcsen \left(\frac{\text{sen } \delta_1}{\text{sen } \varphi'} \right). \quad (70.3)$$

Introduzindo (69.3.b) em (66.3) e atendendo a (67.3) viria, depois dalgumas transformações*

$$\sigma' = \frac{\sigma'_{nn} + H'}{\cos \delta_1 \cos^2 \varphi'} \left[\cos \delta_1 + (\text{sen}^2 \varphi' - \text{sen}^2 \delta_1)^{1/2} \right]. \quad (71.3)$$

$$\begin{aligned} * \quad (\sigma'_{nn} + H') \frac{\text{sen } \delta_1}{\cos \delta_1} &= \sigma' \text{sen } \varphi' \left[\text{sen } (\delta_1 + \pi) \cos \beta - \right. \\ &\quad \left. - \cos (\pi + \delta_1) \frac{\text{sen } \delta_1}{\text{sen } \varphi'} \right] \end{aligned} \quad (71.3.a)$$

onde $\beta = \arcsen \left(\frac{\text{sen } \delta_1}{\text{sen } \varphi'} \right)$. Mas $\cos \beta = (1 - \text{sen}^2 \beta)^{1/2} = \left(1 - \frac{\text{sen}^2 \delta_1}{\text{sen}^2 \varphi'} \right)^{1/2}$.

Portanto

$$(\sigma'_{nn} + H') \frac{\text{sen } \delta_1}{\cos \delta_1} = \sigma' \text{sen } \varphi' \left[-\text{sen } \delta_1 \left(1 - \frac{\text{sen}^2 \delta_1}{\text{sen}^2 \varphi'} \right)^{1/2} + \frac{\text{sen } \delta_1}{\text{sen } \varphi'} \cos \delta_1 \right],$$

$$\text{ou} \quad \sigma' = \frac{\sigma'_{nn} + H'}{\cos \delta_1} \times \frac{1}{\cos \delta_1 - (\text{sen}^2 \varphi' - \text{sen}^2 \delta_1)^{1/2}},$$

ou seja

$$\sigma' = \frac{\sigma'_{nn} + H'}{\cos \delta_1} \times \frac{\cos \delta_1 + (\text{sen}^2 \varphi' - \text{sen}^2 \delta_1)^{1/2}}{[\cos \delta_1 - (\text{sen}^2 \varphi' - \text{sen}^2 \delta_1)^{1/2}] [\cos \delta_1 + (\text{sen}^2 \varphi' - \text{sen}^2 \delta_1)^{1/2}]},$$

e daqui se obtém (71.3).

No primeiro caso que se pretende tratar não há tensões tangenciais na fronteira ($\delta_1 = 0$) e portanto de (70.3) e (71.3) vem, respectivamente,

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \alpha_0 \quad (72.3)$$

$$\sigma' = \frac{\sigma'_{nn} + H'}{1 - \sin \varphi'} = \frac{p'_0 + H'}{1 - \sin \varphi'}. \quad (73.3)$$

No segundo caso a tratar, os valores de Φ e de σ' obtêm-se de (70.3) e (71.3) fazendo nessas equações $\delta_1 = -\varphi'/2$.

No caso extremo de $\delta_1 = -\varphi'$, viria

$$\Phi = \alpha_0 + 3\pi/4 - \varphi' \quad (74.3)$$

$$\sigma' = \frac{\sigma'_{nn} + H'}{\cos^2 \varphi'}. \quad (75.3)$$

48. Determinação de σ' e Φ na segunda fronteira (sob a base da fundação)

Se a base da fundação for suposta de extensão infinita e limitadas as tensões p'_0 na primeira fronteira, a plastificação atingirá a base da fundação ($x = 0$, $y < 0$) e nesta segunda fronteira reinarão em geral as condições

$$\sigma'_{xx} = q' \quad (76.3)$$

$$\tau'_{xy} = (\sigma'_{xx} + H') \operatorname{tg} \delta_2 \quad (77.3)$$

com

$$|\delta_2| \leq \varphi'.$$

Por raciocínio igual ao anterior e atendendo a que sob a base da fundação há geralmente um estado activo de tensão, haverá que tomar a equação (69.3.a) com δ_2 no lugar de δ_1 .

Será então:

$$2\Phi = \delta_2 + \arcsen \left(\frac{\sin \delta_2}{\sin \varphi'} \right). \quad (78.3)$$

A partir desta equação e por dedução análoga à que foi feita ao fundo da pág. 103, obter-se-ia

$$\sigma' = \frac{\sigma'_{xx} + H'}{\cos \delta_2} \times \frac{1}{\cos \delta_2 + (\sin^2 \varphi' - \sin^2 \delta_2)^{1/2}} \quad (79.3)$$

Não existindo atrito na base da fundação $\delta_2 = 0$ e portanto

$$\Phi = 0 \quad (80.3)$$

$$\sigma' = \frac{\sigma'_{xx} + H'}{1 + \sin \varphi'}. \quad (81.3)$$

No caso extremo da base da fundação completamente rugosa, $\delta_2 = -\varphi'$ e portanto

$$\Phi = -(\pi/4 + \varphi'/2) \quad (82.3)$$

$$\sigma' = \frac{\sigma'_{xx} + H'}{\cos^2 \varphi'}. \quad (83.3)$$

Na dedução que se acaba de fazer supôs-se a base infinitamente larga, mas na prática as fundações têm largura limitada.

Se a base for lisa (primeiro caso a tratar) nenhuma dificuldade surge visto que a plastificação atinge toda a base da fundação*.

Se a base for rugosa (segundo caso a tratar) já assim não acontece. Forma-se então sob a sapata uma cunha ABC de solo em estado elástico, cujas faces AC e BC são as últimas superfícies de deslizamento radial (características) que separam o domínio elástico do domínio plástico.

* Porém, por simetria o cálculo é feito só para meia sapata (Fig. 13.3 a).

De acordo com a discussão realizada no Capítulo II (pág. 68) no vértice C tem de haver continuidade nas tangentes às características que se cruzam nesse ponto e são relativas às duas metades do maciço. Esta condição define a posição das faces AC e BC e portanto a cunha elástica ABC . Por simetria essa condição é equivalente a estabelecer que no ponto C tem de ser

$$\Phi_c = 0 . \quad (84.3)$$

Eis aqui outra condição de fronteira para o caso de base rugosa.

49. Condições de estabilidade na superfície equivalente

Veja-se agora que condições há ainda a estabelecer na primeira fronteira para que o problema fique bem formulado.

Para ângulos $\alpha_0 < \varphi'$ e talude ($y > 0$) é estável ainda que $p'_0 + H' = 0$. Porém se $\alpha_0 > \varphi'$ há então que estabelecer um valor mínimo de $p'_0 + H' > 0$ para conseguir estabilidade.

Considere-se, pois, em separado (Fig. 14.3), a estabilidade dos taludes laterais do maciço.

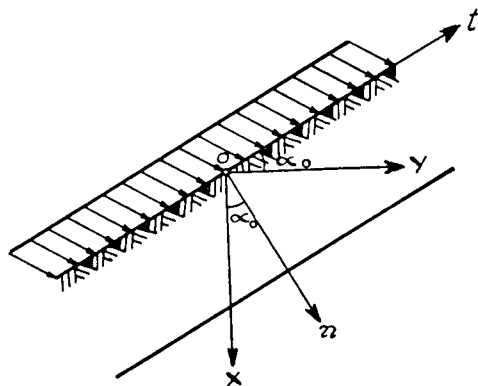


FIG. (14.3)

Suponha-se que as tensões na fronteira têm distribuição uniforme e componentes

$$\sigma'_{nn} = p'_0 \quad (85.3)$$

$$\tau'_{nt} = \tau'_0 = (p'_0 + H') \operatorname{tg} \delta, \quad (86.3)$$

com $|\delta| \leq \varphi'.$

As equações diferenciais de equilíbrio escrevem-se para este caso

$$\frac{d\sigma'_{nn}}{dn} = \gamma' \cos \alpha_0 \quad \text{e} \quad \frac{d\tau'_{nt}}{dn} = -\gamma' \sin \alpha_0, \quad (87.3)$$

onde γ' é o peso específico do solo.

Integrando e atendendo às condições de fronteira (85.3) e a (86.3), vem

$$\sigma'_{nn} = p'_0 + \gamma' n \cos \alpha_0 \quad (88.3)$$

$$\tau'_{nt} = \tau'_0 - \gamma' n \sin \alpha_0. \quad (89.3)$$

Como a condição $|\tau'_{nt}| \leq (\sigma'_{nn} + H') \operatorname{tg} \varphi'$ (90.3)

tem de ser sempre satisfeita, virá

$$|\tau'_0 - \gamma' n \sin \alpha_0| \leq (p'_0 + \gamma' n \cos \alpha_0 + H') \operatorname{tg} \varphi'.$$

Esta desigualdade desdobra-se nas duas seguintes

$$\frac{\tau'_0 - \gamma' n \sin \alpha_0}{p'_0 + \gamma' n \cos \alpha_0 + H'} \leq \operatorname{tg} \varphi' \quad (91.3)$$

$$-\frac{\tau'_0 - \gamma' n \sin \alpha_0}{p'_0 + \gamma' n \cos \alpha_0 + H'} \leq \operatorname{tg} \varphi' \quad (92.3)$$

Como n e γ' são sempre ≥ 0 e tomando $\alpha_0 > 0$ a primeira desigualdade (91.3) é sempre satisfeita. Já o mesmo não acontece com a segunda desigualdade. Existe de facto um valor n_0 limite de n além

do qual a condição fundamental (90.3) deixa de ser satisfeita. O domínio de integração é pois limitado por uma faixa paralela ao talude cuja largura n_0 se deduz de (92.3)*:

$$n_0 = \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \times \frac{\sin(\delta + \varphi')}{\sin(\alpha_0 - \varphi')} . \quad (93.3)$$

Desta equação se vê que para $\alpha_0 \geq \varphi'$, $0 \leq n < \infty$. Mas para $\alpha_0 < \varphi'$ e para um solo de características dadas c' , φ' e γ' a largura da faixa de integração dependerá das tensões normal p'_0 e tangencial τ'_0 aplicadas na primeira fronteira.

No primeiro problema a tratar, $\delta = \delta_1 = 0$ e portanto

$$n_0 = \frac{p'_0 + H'}{\gamma'} \times \frac{\sin \varphi'}{\sin(\alpha_0 - \varphi')} . \quad (94.3)$$

No segundo problema $\delta = \delta_1 = -\varphi'/2$ e então

$$n_0 = \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos(\varphi'/2)} \times \frac{\sin(\varphi'/2)}{\sin(\alpha_0 - \varphi')} . \quad (95.3)$$

Nos problemas em causa, quando for $\alpha_0 > \varphi'$ importa, pois, que para cada comprimento de integração tomado arbitrariamente na primeira fronteira $y > 0$ se estabeleça um valor mínimo de p'_0 por forma a que durante o cálculo nenhum ponto saia da faixa de integração. A forma que julgamos mais prática de satisfazer esta condição é por tanteios, a menos que se utilize uma solução analítica, possível nessa região como vamos ver.

$$\begin{aligned} * \quad & - \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} (p'_0 + H' + \gamma' n_0 \cos \alpha_0) = (p'_0 + H') \frac{\sin \delta}{\cos \delta} - \gamma' n_0 \sin \alpha_0, \\ & \gamma' n_0 (\sin \alpha_0 \cos \varphi' - \sin \varphi' \cos \alpha_0) = \frac{p'_0 + H'}{\cos \delta} (\sin \delta \cos \varphi' + \sin \varphi' \cos \delta), \\ & \gamma' n_0 \sin(\alpha_0 - \varphi') = \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \times \sin(\delta + \varphi'). \end{aligned}$$

Donde (93.3).

50. Cálculo na região ADE (Fig. 13.3). Solução numérica e solução analítica

Satisfeita a condição de que para nenhum dos pontos calculados na região ADE (Fig. 13.3) é $n > n_0$ o que pode verificar-se pelo menos «a posteriori», determinam-se, pelos métodos numéricos expostos a pág. 92 e seguintes (problema do primeiro tipo), os valores de x , y , ξ , η , σ' , A e B sobre AD , última característica radial dessa região.

Veja-se agora uma outra maneira de encarar o problema.

Com efeito, como se demonstra no Apêndice (I.III) existem expressões analíticas que dão, sob forma geral, directamente os valores de σ' e Φ e ainda os das coordenadas n e t (Fig. 14.3) nos nós da rede de características da região ADE. Em particular, podem obter-se directamente os valores de σ' , Φ e as coordenadas n , t sobre AD , última característica radial atrás referida.

Com o conhecimento do ângulo α_0 e das coordenadas n , t imediatamente se passa às coordenadas x e y .

51. Cálculo na região ADC (Fig. 13.3) — região de corte radial

Obtidos por um processo ou por outro os valores das variáveis sobre a última característica radial AD (Fig. 13.3) da região ADEA, veja-se como se efectua o cálculo para a região de corte radial ACDA. Nessa região as características da primeira família todas irradiam do ponto A . Nas vizinhanças de A a influência do peso específico γ'_x e γ'_y é desprezível e, portanto, σ' , ξ e η são definidos tomando $\gamma'_x = \gamma'_y = 0$. Substituindo este valor em (44.3) e supondo nulo o gradiente das tensões neutras obtém-se $B = 0$, e da equação (48.3) se tira $d\xi/dx = 0$ isto é, ao longo das características da segunda família infinitamente vizinhas de A , $\xi = \text{const.}$ Como $2\Phi = \xi - \eta$ vê-se que ao longo dessas características η tem incrementos iguais e de sinal contrário a 2Φ . Ora o ângulo Φ tem valor conhecido Φ_{+A} (dado por 70.3) à direita de A . À esquerda de A o valor de Φ depende da rugosidade da base. No caso de base lisa (primeiro caso a tratar) será $\Phi_{-A} = 0$. É, pois, conhecido o decréscimo de Φ quando se passa da direita

para a esquerda de A . Uma vez que ξ se mantém constante a este decréscimo corresponde um acréscimo

$$\eta_{-A} - \eta_{+A} = 2(\Phi_{A+} - \Phi_{-A}) \quad (96.3)$$

Como η_{+A} era já conhecido obtém-se assim o valor de η_{-A} . Com $\xi_{-A} = \xi_{+A}$ e η_{-A} calcula-se $\sigma'_{-A} = \sigma^0 \exp [(\xi_{-A} + \eta_{-A}) \operatorname{tg} \varphi']$. Visto que $x = y = 0$ têm-se, pois, definidas todas as variáveis à esquerda de A .

Ao longo da característica transversal infinitamente vizinha de A poder-se-á tomar um certo número de pontos a que correspondem outras tantas características irradiando de A . Em cada um desses pontos todas as variáveis são conhecidas: $x_j = y_j = 0$. $\eta_j = \eta_{+A} + \Delta\eta_j = \eta_{+A} - 2\Delta\Phi_j$, $\xi_j = \xi_{+A}$ e consequentemente $\sigma'_j = \sigma^0 \exp[(\xi_j + \eta_j) \operatorname{tg} \varphi']$. Em geral divide-se o incremento total $\Phi_{-A} - \Phi_{+A}$ num certo número de partes iguais $\delta\Phi$ de modo que $\Delta\Phi_j = j \times \delta\Phi$.

Conhecem-se assim os valores das variáveis ao longo da característica transversal $\overline{A+A}$ e da característica longitudinal AD . Está-se, pois, nas condições do segundo problema tratado a pág. 98. Os valores das variáveis em todos os nós da região ACD (Fig. 13.3) são, pois, calculáveis pelas relações de recorrência (51.3) e (52.3).

52. Cálculo na região ABC. Implicações da rugosidade da base

Se a base é lisa (primeiro caso a tratar, $\delta_2 = 0$ Fig. 13.3.a) o «triângulo» $ACB'A$ também plastifica. Sobre AB' conhece-se $\Phi = c^{te} = 0$ e $x = 0$. Como se conhecem x , y , ξ e η ao longo de AC , está-se nas condições do terceiro problema geral (pág. 98). Pelas fórmulas de recorrência (55.3) e (56.3) calculam-se os valores das variáveis em todos os nós de $ACB'A$.

Quando a base da fundação é rugosa (segundo caso a tratar, Fig. 13.3.b) forma-se uma «cunha» elástica $ABCA$ sob a fundação cuja face AC (ou BC) tem por directriz a característica radial calculada. Se a tensão $p'_0 + H'$ na fronteira AE for suficientemente grande, a característica AC emerge de A com inclinação inferior em módulo à que corresponde a $\delta_2 = \varphi'$, isto é, a última característica AC da re-

gião de corte radial não será tangente à base da fundação. A condição que irá definir a característica AC é a de que no ponto C terá de ser $\Phi_c = 0$ como já se discutiu no Capítulo II.

Como anteriormente se referiu no cálculo das variáveis ao longo da característica transversal $\widehat{A_-A_+}$ infinitamente vizinha de A , progride-se de A_+ para A_- por incremento $\delta\Phi$ iguais. O ângulo Φ_c no último ponto de cada característica radial calculada irá decrescendo até que para um certo $(\delta\Phi)_j$ passa de positivo a negativo. Há então que voltar atrás e empregar por tentativas um incremento $(\delta\Phi)_j$ menor, até que $\Phi_c \simeq 0$.

No caso da tensão $p'_0 + H'$ na fronteira AE ser pequena atinge-se a característica de corte radial tangente à base da fundação em A ($\delta_2 = -\varphi'$) sem que Φ_c mude de sinal. Há então que entrar na terceira região sob a sapata, utilizando as fórmulas de recorrência (55.3) e (56.3) (pág. 99) com $x = 0$ e $\Phi = -\pi/2 + \mu = -\pi/4 - \varphi'/2 = c''$, sob a base da fundação. A cunha elástica neste caso restringe-se a um núcleo central $A''B''CA''$ (Fig. 13.3.b'). A característica $A''C$ (ou $B''C$) continua a ser definida pela condição $\Phi_c = 0$.

No cálculo por métodos numéricos quando se passa de certa característica $1C'$ para a característica $3C''$ o ângulo Φ_c passará de positivo a negativo. Haverá então que voltar atrás e, por interpolação obter as coordenadas e variáveis no ponto 2 que fazem $\Phi_c = 0$ na característica $2C$ (Fig. 13.3.b').

53. O problema sob forma adimensional. Exemplo

Estão analisadas as condições de fronteira e como delas e das fórmulas de recorrência (51.3) a (58.3) se calculam os valores das variáveis nos pontos do interior. A marcha do cálculo também já foi definida quando se trataram os problemas sob forma geral (pág. 109).

Para que cada solução a obter convenha a vários problemas práticos importa obter a solução com as variáveis sob forma adimensional. Bastará para isso dividir as coordenadas por uma dimensão padrão l e as tensões por uma tensão padrão σ^0 .

As variáveis sob forma adimensional virão

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x}{1}, \quad y' = \frac{y}{1}, \quad \sigma''_{xx} = \frac{\sigma'_{xx} + H'}{\sigma^0}, \\ \sigma''_{yy} &= \frac{\sigma'_{yy} + H'}{\sigma^0}, \quad \tau''_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma^0} \end{aligned} \right\} \quad (97.3)$$

Substituindo estes valores nas equações (38.3) e (39.3) em termos de tensões efectivas e com $\gamma'_x = \gamma'$, $\gamma'_y = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, vem

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma''_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau''_{yx}}{\partial y'} &= \frac{\gamma' l}{\sigma^0} \\ \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (98.3)$$

com a condição de Mohr-Coulomb

$$\left(\frac{\sigma''_{xx} + \sigma''_{yy}}{2} \right)^2 + \tau''_{xy}{}^2 = \text{sen}^2 \varphi' \left(\frac{\sigma''_{xx} + \sigma''_{yy}}{2} \right)^2. \quad (99.3)$$

É evidente que para todos os problemas com diferentes valores das características do solo c' e γ' , diferentes dimensões e tensões na fronteira, a solução sob a forma adimensional é a mesma desde que se conservem para todos eles os parâmetros adimensionais φ' e $\frac{\gamma' l}{\sigma^0}$ e sejam na fronteira as mesmas coordenadas x' , y' e as tensões σ''_{xx} , σ''_{yy} e τ''_{xy} sob forma adimensional (97.3).

No que vai seguir-se tomar-se-á sempre para dimensão padrão $l = \frac{\sigma^0}{\gamma'}$ o que dará para as variáveis e equações sob forma adimensional as expressões

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x}{\sigma^0 / \gamma'}, \quad y' = \frac{y}{\sigma^0 / \gamma'}, \quad \sigma''_{xx} = \frac{\sigma'_{xx} + H'}{\sigma^0}, \\ \sigma''_{yy} &= \frac{\sigma'_{yy} + H'}{\sigma^0}, \quad \tau''_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma^0} \end{aligned} \right\} \quad (100.3)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma''_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y'} &= 1 \\ \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma''_{yy}}{\partial y'} &= 0\end{aligned}\tag{101.3}$$

com a condição de Mohr-Coulomb (99.3).

Veja-se agora em mais detalhe como se poderá aplicar uma solução sob forma adimensional a um problema real.

Suponha-se que para o ângulo de atrito $\varphi' = 45^\circ$ se faz na primeira fronteira (AE, Fig. 13.3), $\sigma''_{xx} = 15$ e $\tau''_{xy} = 0$. Na segunda fronteira AB obter-se sob forma adimensional tensões (q''_{xx}) em vários pontos de coordenadas $(0, y'_i)$. Suponhamos uma sapata real de semilargura $b/2 = 1,20$ m, apoiada num solo com o mesmo ângulo de atrito, mas com coesão $c' = 2 \text{ tm}^{-2}$ e peso específico $\gamma' = 1 \text{ tm}^{-3}$ tendo na fronteira uma tensão $\sigma'_{yy} = 2,2 \text{ kgcm}^{-2}$.

De acordo com (100.3), ter-se-á

$$15 = \frac{22 \text{ tm}^{-2} + 2 \text{ tm}^{-2} \cdot \cotg 45^\circ}{\sigma^0}; \therefore \sigma^0 = 1,60 \text{ tm}^{-2}.$$

Substituindo σ^0 , $b/2$ e γ' em $y' = \frac{y}{\sigma^0/\gamma'}$, vem

$$y' = \frac{1,20 \text{ m}}{1,60 \text{ tm}^{-2} : 1 \text{ tm}^{-3}} = 0,75.$$

Haveria, pois, que procurar nos valores calculados para a sapata adimensional, o valor q''_{xx} correspondente ao ponto $(0, 0,75)$ e passá-lo à forma real $q'_{xx} = q''_{xx} \sigma^0 - H'$.

Por este exemplo é fácil ver que por um lado convirá que a sapata adimensional a calcular tenha a maior largura possível para que nela caibam todas as sapatas reais correntes depois de reduzidas à forma adimensional. Por outro lado, para sapatas reais a que correspondam sapatas adimensionais muito pequenas quando comparadas com a calculada, poucos pontos de cálculo se aproveitarão, a menos que o espaçamento entre esses pontos se tome muito pequeno, o que também convém à diminuição dos erros no processo de diferenças finitas. Toda-

via, o tempo de cálculo aumenta com o quadrado do número de pontos tomados nas fronteiras. É, pois, necessário estabelecer um compromisso entre estas razões por forma a que o tempo de cálculo seja razoável, mas os erros não sejam grandes e sejam abrangidas as sapatas e solos de uso corrente.

O exemplo dado acima refere-se a sapatas de base lisa. Se a base for rugosa forma-se uma cunha elástica como já se viu, e, para uma carga uniforme de valor constante na fronteira AE (Fig. 13.3.b), a característica AC , que separa a região elástica $ABCA$ da região plástica e na qual se satisfaz a condição $\Phi_c = 0$, emerge de A com uma inclinação que depende do comprimento tomado sobre AE . A característica AC muda, pois, de posição conforme o tamanho da sapata. Para que a um mesmo cálculo para uma sapata adimensional suficientemente larga se possa aplicar a várias sapatas reais, há que pesquisar entre as características emergentes de A segundo várias direcções aquelas para as quais $\Phi_c = 0$.

54. A programação do problema para a calculadora Elliot 803-B

Um programa é um conjunto de instruções que se dão à máquina num determinado código que lhe é «intelegível». No nosso caso usámos o «auto-código», o mais apropriado à Elliot 803-B.

Antes de apresentarmos o programa propriamente dito, convirá rapidamente indicar as convenções fundamentais do auto-código.

No programa podem usar-se dois tipos fundamentais de variáveis: as variáveis inteiras e as variáveis em vírgula «flutuante». As variáveis inteiras são em geral variáveis de contagem de ciclos de cálculo a efectuar. As variáveis em vírgula flutuante são quantidades mistas-decimais quaisquer, escritas com um número de algarismos significativos até ao limite de 9, o que indica a precisão com que a máquina efectua as operações.

No início do programa tem de imediatamente se estabelecer quais as letras que significam variáveis inteiras e quais as que significam variáveis em vírgula flutuante. As letras podem ser afectadas de índices que se escrevem entre parêntesis (). Assim a expressão «SETS IJK» significa que as letras IJK representam em todo o programa quantidades inteiras. «SET A(80), X (20), Z» significam que as letras A_0 ,

$A_1, \dots, A_{80}, X_1, X_2, \dots, X_{20}$ e Z representam no programa quantidades em vírgula flutuante.

Também no início do programa se tem de indicar as operações especiais que a máquina tem de efectuar. «SETF LOG TRIG INT» significa que no programa figurarão além das quatro operações elementares as operações de extrair logarítmos na base e , tomar senos, cosenos e tangentes e extrair inteiros.

Na execução do programa a máquina pode saltar dumas para outras partes do programa que são assinaladas por números de referência. Daqui que também no início do programa se tenha de «declarar» o número máximo a atingir pelos números de referência. SETR 30, significa que nenhum número de referência será maior que 30.

A primeira operação da máquina ao ler o programa é verificar se as variáveis «declaradas», incluídas as necessárias às operações complexas, LOG, TRIG, etc., não excedem a sua capacidade.

A instrução «READ A» implica que a máquina «leia» o valor A que lhe é fornecido à parte como dado numa segunda fita. Pela instrução $A10 = B5$ a máquina elimina o conteúdo da «memória» $A10$ e substitui-o pelo da memória $B5$, ficando a memória $B5$ inalterada. Pela instrução $A = B + C$ a máquina soma o conteúdo da memória B com o da memória C e guarda-o na memória A , destruindo o que lá tinha antes. Compreende-se, assim, que seja possível a instrução $B = B + C$ com $C \neq 0$. De modo análogo para a subtracção ($A = B - C$), para a multiplicação ($A = B \times C$) e para a divisão ($A = B/C$). Por meio da instrução $B = \text{SIN } A$ a máquina calcula o seno do número que tem na memória A , o qual deve estar escrito em π radianos, servindo-se automaticamente duma série apropriada e guarda o resultado na memória B .

Pela instrução

```

→ VARY I = J : K : L
  A I = B + C
    C = EXP D
    .
    .
    .
  REPEAT I

```

ciclo a repetir para diferentes valores de I .

a máquina executa o ciclo de operações contido entre as expressões «VARY» e «REPEAT» num número de vezes indicado por L com $I = J, J + K, J + 2K, \dots, J + (L - 1)K$.

Pela instrução

$\rightarrow$ CYCLE $I = J : K : L$ $B \ I = C I - D$ $E = \text{SIN } E$ $\cdot$ $\cdot$ $\cdot$ $\leftarrow$ REPEAT I	}	ciclo a repetir para diferentes valores de I .
---	---	--

a máquina executa o ciclo de operações compreendidas entre as expressões «CYCLE» e «REPEAT» o número de vezes $(L - J)/K + 1$ com $I = J, J + K, J + 2K, \dots, L$.

Pela instrução «JUMP@ n » a máquina salta para a instrução assinalada com o número de referência n e continua as operações daí em diante. Pela instrução JUMP IF $A = B@n$ (salto condicionado) a máquina verifica se o conteúdo da memória A é igual ao da B e em caso afirmativo salta para a instrução assinalada por n e continua daí em diante; se $A \neq B$, a máquina ignora a instrução de salto e segue o seu curso normal. Há várias outras instruções de salto condicionado como por exemplo «JUMP IF $A > B$ »*, «JUMP IF $A < B$ », «JUMP UNLESS $A = B@n$ ».

Pela instrução «SUBR n » (sub-rotina) a máquina salta para a instrução assinalada pelo número de referência n e continua daí em diante até encontrar a instrução «EXIT» que a obriga a regressar ao ponto de partida, reentrando na instrução imediatamente a seguir a «SUBR n ». Pela instrução «CHECK A_i » a máquina em condições fixadas pelo operador imprime o valor do conteúdo da memória A_i , o que servirá mais tarde como verificação.

* O sinal $<$ era representado pelo de % e o sinal $>$ pelo de \$.

Pela instrução «*LINES n*», a máquina deixa n linhas de intervalo entre o que vai imprimir e o que tinha impresso antes. Pela instrução «*PRINT XI, n/*» a máquina imprime o conteúdo da memória X_i com n algarismos significativos ($n < 9$).

Há ainda várias outras instruções que não são, no entanto, essenciais à compreensão do programa que executámos. Para não sobrecarregar o texto apresentamos esse programa em Apêndice (2, III). Lá se indicam também os dados necessários ao cálculo e modo de os apresentar à máquina.

55. Dificuldades na execução do programa

As dificuldades que podem surgir na execução dum programa são de duas ordens: a primeira diz respeito ao programa propriamente dito, a segunda diz respeito aos métodos matemáticos utilizados.

Sabe-se que a máquina pára ao encontrar uma divisão por zero*, ao encontrar o logaritmo duma quantidade nula ou negativa ou quando o argumento da exponencial for superior a $254 \log. 2$.

A divisão por zero pode advir, entre outras causas, de se tornar nula durante o cálculo qualquer função ou combinação de funções trigonométricas que esteja a ser utilizada. Como se vê nas fórmulas de recorrência (51.3) a (58.3) e nas fracções (45.3), há múltiplas possibilidades de durante o cálculo se tornar nulo alguns dos denominadores das fracções. Faz-se face a esta situação quer provendo o programa de instruções de salto apropriadas, quer evitando valores exactos dos ângulos (30° , 60° e 90°), introduzindo voluntariamente erros de 1°_{000} ou 1°_{00} inferiores aos erros próprios do método das diferenças finitas.

Estas e outras dificuldades surgem em geral em todos os programas e exigem um programador experimentado para que a «afinação» dum programa extenso e complexo como o nosso não se torne excessivamente morosa. Para citar um exemplo doutras dificuldades deste mesmo tipo que podem surgir referiremos o caso de se ter imposto no programa, que a máquina deveria, na pesquisa por aproximações sucessivas da

* Na Elliot 803-B toda a quantidade menor que $4,3 \times 10^{-78}$ é reduzida automaticamente a zero.

característica que faz $\Phi_c = 0$ (base rugosa, pág. 110), continuar o cálculo e imprimir os resultados finais quando fosse $|\Phi_c| < 0,01$ radianos. Porém, num caso as diferenças próprias do método das diferenças finitas e do tipo de interpolação utilizado não permitiam que aquela condição se satisfizesse; $|\Phi_c|$ passava por um mínimo, mas superior a 0,01; daí que a máquina trabalhasse indefinidamente sem fornecer resultados.

Nas dificuldades devidas aos métodos matemáticos utilizados há a referir em primeiro lugar o facto de as soluções dos sistemas hiperbólicos não serem em todos os casos determinadas. Além disso, dum modo geral, os métodos numéricos exigem frequentemente condições de máximo espaçamento entre os pontos de cálculo quer para que as soluções sejam estáveis, quer para que os erros não sejam grandes. Quanto aos sistemas de tipo parabólico, como o caso da equação de Fourier sob a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (102.3)$$

ou sob a forma (49.1) do Capítulo I, verifica-se que o método das «diferenças à frente» dá soluções estáveis qualquer que seja o espaçamento entre os pontos de cálculo, o que já não acontece com o método das «diferenças atrás» [59]*. Quanto aos sistemas de tipo hiperbólico a questão é mais complexa e Forsythe e Wasow [31]**, apresentam o seu método de redução dos erros no cálculo numérico dos sistemas hiperbólicos sem qualquer justificação teórica, dizendo apenas ser o resultado da experiência. Sobre a mesma questão da relação entre os erros e o espaçamento dos pontos na solução numérica de sistemas hiperbólicos Collatz [14]*** apresenta um exemplo em que a redução do espaçamento a metade trouxe leve ganho na precisão dos resultados. Em qualquer dos casos o erro máximo era de cerca de 2,5 % e os erros mais frequentes à volta de 1,5 %.

Por nossa parte experimentámos dois critérios de redução dos erros: o de Forsythe e Wasow e o de Hajal [40]§ que não diferem grande-

* Martins (1962, p. 22).

** 1960, p. 65.

*** 1960, p. 327-328.

§ 1961, p. 5.

mente e dão praticamente os mesmos resultados. O critério é o seguinte: a partir dos valores das variáveis $(x_1, y_1, \xi_1, \eta_1)$ e $(x_2, y_2, \xi_2, \eta_2)$ obtêm-se pelas fórmulas de recorrência (51.3) a (58.3) os valores das mesmas variáveis no ponto vizinho (x, y, ξ, η) . Repete-se depois o cálculo tomando $(x_1 + x)/2$ em vez de x_1 , $(y_1 + y)/2$ em vez de y_1 , $(\xi_1 + \xi_2)/2$ em vez de ξ_1 e $(\eta_1 + \eta_2)/2$ em vez de η_1 e o mesmo para x_2, y_2, ξ_2 e η_2 mantendo-se neste caso os coeficientes $A, B, \operatorname{tg}(\Phi + \mu)$ e $\operatorname{tg}(\Phi - \mu)$ antes usados nas fórmulas de recorrência.

Quanto à estabilidade Hajal diz que o método das diferenças finitas pode falhar quando nas características existam pontos de inflexão, mas não justifica nem concretiza a questão.

Se quanto ao espaçamento entre pontos de cálculo não surgiram dificuldades já o mesmo não sucedeu ao tentarmos distribuições não uniformes de tensões na primeira fronteira ou forças de massa variáveis de ponto para ponto de forma a abranger o caso da existência dum gradiente de tensões neutras no maciço*.

Quanto a este último ponto a experiência mostrou ser mais conveniente elaborar dois programas: o primeiro apenas com duas camadas de pesos específicos diferentes, correspondendo ao caso da existência dum nível freático abaixo da fundação. O segundo programa considerando então a existência de forças de massa variáveis de ponto para ponto. Verificou-se neste caso que quando a distribuição de forças de massa é contínua não há dificuldades de maior. Porém, quando as forças de massa são descontínuas, como no caso de existência no interior do maciço de camadas delgadas drenantes de areia, nas quais o gradiente das tensões neutras toma sentidos opostos dum e doutro lado da camada, surgem dificuldades. A experiência parece mostrar que essas dificuldades podem em parte ser vencidas reduzindo convenientemente o espaçamento entre os pontos de cálculo.

* É o caso dum maciço em consolidação devido às próprias cargas a ele aplicadas (aumento de resistência duma fundação durante a construção). Há ainda outros casos de possível aplicação e de grande interesse: estabilidade das barragens de terra e dos taludes do vale durante o enchimento e esvaziamento da albufera.

A distribuição não uniforme de tensões na fronteira também pode trazer dificuldades*. No fim deste trabalho é sugerido um método de tratamento do assunto e dos casos da existência de várias camadas com ângulos de atrito e coesões diversas. Porém, devido à necessidade de regressar urgentemente à nossa actividade de rotina em Moçambique, o programa não pôde ser adaptado a esses casos.

* De troca de correspondência com o Prof. Kravtchenko soubemos que a questão de forças de massa variáveis foi tratada recentemente numa conferência em Lodz (Polónia), mas até agora não conseguimos obter as actas. A questão da distribuição não uniforme de tensões na fronteira remeteu-a Kravtchenko aos seus colaboradores para estudo. Kravtchenko é Director do Laboratório de Mecânica de Fluidos da Universidade de Grenoble e rege um curso de matemáticas aplicadas à Mecânica do Solo, onde se faz especial referência ao método das características para solução dos problemas de equilíbrio limite dos maciços terrosos. Várias teses (Hajal, Wack, Biarez e outros) sobre este assunto foram elaboradas sob orientação de Kravtchenko.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E SUA APLICAÇÃO

56. Os casos abrangidos pelas tabelas. Fórmulas pela qual se obteve a tensão média sob a sapata

Nas tabelas em apêndice (I, IV) apresentam-se os resultados dos cálculos efectuados.

Nas primeiras páginas são dados os resultados para base lisa, $\delta_2 = 0$ ($\delta_1 = 0$), com valores de $\alpha_0 = 30^\circ$, 60° e 90° para o ângulo de inclinação da superfície livre equivalente (Fig. 13.3), correspondendo a várias profundidades da base da fundação, e para valores do ângulo de atrito $\varphi' = 15^\circ$, 5° , 45° . Os valores de $(p'_0 + H')/\sigma^0$ na fronteira escolheram-se de forma a convirem aos problemas práticos mais correntes, uma vez que, como se viu (págs. 112/3) eles influem nas próprias dimensões das sapatas reais às quais as soluções calculadas são aplicáveis.

Na primeira coluna é dada a abcissa — $y' = \frac{b/2}{\sigma^0/\gamma'}$ (1.4)

onde b é a largura da fundação, γ' é o peso específico do solo, σ^0 uma constante com as dimensões duma tensão; às diferentes abcissas y' correspondem outras tantas ordenadas $x' = 0$ correspondentes a pontos sob a sapata adimensional, cada um fornecendo valores para uma sapata real.

Nas colunas seguintes apresentam-se os valores da tensão média adimensional

$$\sigma'' = \frac{(\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy})/2 + H'}{\sigma^0} \quad (2.4)$$

e os de $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0$, que é o valor médio da tensão adimensional σ''_{xx} calculado pela fórmula

$$\bar{q}'' = \frac{\int_1^i \sigma''_{xx} dy'}{\int_1^i dy'} \simeq \frac{\sum_1^i (\sigma''_{xx})_{i+1/2} \times (y'_i - y'_{i+1})}{\sum_1^i (y'_i - y'_{i+1})} \quad (3.4)$$

onde $(\sigma''_{xx})_{i+1/2}$ é igual ao valor de σ''_{xx} no ponto de coordenadas $\left(\frac{y_{i+1} + y_i}{2}, 0\right)$ isto é,

$$(\sigma''_{xx})_{i+1/2} = \frac{\sigma''_i + \sigma''_{i+1}}{2} (1 + \sin \varphi') \quad (4.4)$$

A fórmula (4.4) obtém-se de (36.3) com $\Phi = 0$, $\sigma'_0 = H'$ e $\sigma''_{i+1/2} = [(\sigma''_i + \sigma''_{i+1})/2]$. Todos os valores que figuram nas tabelas são dados sob forma adimensional.

Nas páginas seguintes das tabelas são dados os resultados para sapatas de base rugosa.

Na primeira coluna indica-se a abcissa $-y' = \frac{b/2}{\sigma^0/\gamma'}$ (1.4)

do ponto de cada característica no qual é satisfeita a condição $\Phi_i = 0$ (Fig. 13.3.b) isto é, na qual a tensão principal máxima σ_1 tem a direcção do eixo dos xx , como se exige (pág. 111).

Na segunda é dada a tensão média σ'' de expressão (2.4).

Os valores da tensão média $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0$ sob a sapata foram obtidos pela fórmula

$$\bar{q}'' = \frac{\int_1^i \sigma''_{xx} dy' + \tau''_{xy} dx'}{\int_1^i dy'} \simeq \frac{\sum_1^i (\sigma''_{xx})_{i+1/2} (y'_i - y'_{i+1}) + (\tau''_{xy})_{i+1} (x_{i+1} - x_i)}{\sum_1^i (y'_i - y'_{i+1})} \quad (5.4)$$

onde

$$(\sigma''_{xx})_{i+1/2} = \frac{\sigma''_i + \sigma''_{i+1}}{2} [1 + \sin \varphi' \cos (\Phi_i + \Phi_{i+1})] \quad (6.4)$$

caso particular de (36.3),

$$(\tau''_{xy})_{i+1} = \sigma''_{i+1} \sin \varphi' \cos 2 \Phi_{i+1} \quad (7.4)$$

caso particular de (37.3).

No caso de base rugosa forma-se uma cunha elástica ABC (Fig. 13.3.b) e só o último dos Φ_i é nulo.

A fórmula (5.4), que abrange como caso particular (3.4), é equivalente a outra apresentada por Biarez [4]*. Embora com aspectos diferentes ambas dão os mesmos resultados.

57. Exemplo. Sapata superficial. Base lisa e base rugosa. Comparação dos resultados com os dos cálculos à Terzaghi, à Meyerhof e à Caquot

Vejam-se alguns exemplos de aplicação e comparem-se os resultados com os obtidos segundo os principais autores.

Seja dada uma sapata contínua ** de largura $b = 1,50$ m fundada à profundidade $h = 1,00$ m num solo de peso específico $\gamma' = 1,80 \text{ tm}^{-3}$, com o ângulo de atrito $\varphi' = 30^\circ$ e coesão $c' = 1,0 \text{ tm}^{-2}$.

Pretende-se a capacidade de carga da fundação.

A fundação pode tomar-se como superficial e portanto $\alpha_0 = 0$ ***.

* 1961, p. 195.

** Quando o comprimento duma sapata for superior a três vezes a largura a sapata pode considerar-se contínua. Por outro lado, o cálculo para uma fundação contínua aplicado a uma fundação que o não seja dá, em geral, resultados do lado da segurança. (L'Herminier et al., Proc. ICSMFE, 1961, I, p. 717).

*** Efectivamente se fosse por exemplo $\alpha_0 = 30^\circ$ a fundação deveria ter a base à profundidade

$$h = \frac{\text{sen } 30^\circ \cos 30^\circ \exp(2\pi/3 \text{ tg } 30^\circ)}{2 \cos 60^\circ \cos(30^\circ + 30^\circ)} \times b = 2,94b = 4,40 \text{ m},$$

segundo a fórmula

(25.2)

$$h = \frac{\text{sen } \alpha_0 \cos \varphi' \exp(0 \text{ tg } \varphi')}{2 \cos \psi \cos(\mu + \varphi')} \times b$$

No entanto esta fórmula só é rigorosamente válida para o maciço sem peso. Se considerarmos o maciço com peso, para uma fundação a dada profundidade h , só por tentativas se poderia, em cada caso particular, obter o valor de α_0 . Todavia, afigura-se que, de ponto de vista prático, (25.2) dará valores para α_0 suficientemente aproximados.

Desprezando, portanto, a resistência das camadas superiores à base da fundação tomar-se-á

$$p'_0 = 1,00 \times 1,80 = 1,80 \text{ tm}^{-2}.$$

Como $H' = 1,0 \times \cotg 30^\circ = 1,73 \text{ tm}^{-2}$

vem $p'_0 + H' = 3,53 \text{ tm}^{-2}.$

No caso da base lisa foram calculadas as capacidades de carga de sapatas adimensionais com valores de $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0$ iguais a 0,45, 1, 2 e 5. Como adiante se verá usando o primeiro e o segundo destes valores a sapata real cabe entre o primeiro e o segundo ponto calculados para a sapata adimensional. Daqui já se vê que com os primeiros dois valores o cálculo tem de fazer-se utilizando apenas dois dos valores calculados adimensionalmente o que se traduz numa evidente perda de precisão. No entanto, verificar-se-á que basta que sejam aproveitados alguns valores dos calculados para a sapata adimensional para que os «erros» cometidos sejam pequenos. Esta verificação dá ao mesmo tempo indicação da ordem de grandeza dos «erros» envolvidos no método de diferenças finitas que se empregou.

Para o primeiro valor vem*

$$(p'_0 + H')/\sigma^0 = 0,45. \quad \text{Donde } \sigma^0 = 3,53/0,45 = 7,85 \text{ tm}^{-2}.$$

Portanto $-y' = (b : 2)/(\sigma^0 : \gamma') = (1,50 : 2)/(7,85 : 1,80) = 0,172.$

Para o ponto origem a tabela dá $\sigma'' = 5,52$, portanto

$$\bar{q}'' = \sigma'' (1 + \sen \varphi') = 5,52 \times 1,5 = 8,28.$$

Para o ponto em que $-y' = 0,951$ a tabela dá $\bar{q}'' = 14,95.$

Ao valor $-y' = 0,172$ corresponderia por isso $\bar{q}'' = 9,48.$

* Todos os valores e interpolações que se seguem foram calculados com régua de cálculo de 15 cm; além disso algumas interpolações foram feitas em gráficos com escalas logarítmicas. Daí que o último algarismo escrito e, eventualmente o penúltimo, não possam ser garantidos.

Como $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0$, vem $\bar{q}' = 9,48 \times 7,85 - 1,73 = 74,3 \text{ tm}^{-2}$.

Para o segundo valor $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0 = 1$. Então $\sigma^0 = 3,53 \text{ tm}^{-2}$ e portanto $-y' = (1,50 : 2)/(3,53 : 1,80) = 0,3825$.

Para a origem temos, da tabela, $\bar{q}'' = 12,27 (1 + \sin \varphi') = 18,41$ e para $-y' = 0,655$, $\bar{q}'' = 24,8$; portanto para $-y' = 0,3825$ temos $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 22,14$, ou seja $\bar{q}' = 22,14 \times 3,53 - 1,73 = 76,4 \text{ tm}^{-2}$.

Para o terceiro valor $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0 = 2$. Daqui $\sigma^0 = 1,765 \text{ tm}^{-2}$, e portanto $-y' = (1,50 : 2)/(1,765 : 1,80) = 0,764$.

Das tabelas, tem-se para $-y' = 0,530$, $q'' = 43,1$ e para $-y' = 1,092$, $q'' = 49,6$.

Portanto para $-y' = 0,764$ vem $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 45,9$ ou seja $\bar{q}' = 45,9 \times 1,765 - 1,73 = 79,3 \text{ tm}^{-2}$.

Para o quarto valor $(p'_0 + H')/\sigma^0 = 5$. $\sigma^0 = 3,53/5 = 0,706$

$$\text{e portanto } -y' = \frac{1,50 : 2}{0,706 : 1,80} = 1,913.$$

Das tabelas tem-se para $-y' = 1,455$, $\bar{q}'' = 111,3$ para $-y' = 2,010$, $\bar{q}'' = 112,1$.

Portanto para $-y' = 1,913$ virá $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 116,9$ ou seja $\bar{q}' = 116,9 \times 0,706 - 1,73 = 80,8 \text{ tm}^{-2}$.

Uma vez que os valores vão crescendo é natural que o valor «exacto» seja superior a $\bar{q}' = 80,8 \text{ tm}^{-2}$. Todavia, como a diferença entre os dois últimos valores o primeiro dos quais envolve apenas dois pontos do cálculo adimensional é apenas de 1,8% em valor relativo é de esperar que, desde que se tomem dois ou mais pontos do cálculo adimensional os «erros» sejam desprezíveis e em geral no sentido da segurança.

Para o caso da base rugosa o cálculo adimensional realizou-se para $p'' = p'_0 + H'/\sigma^0 = 0,45, 5 \text{ e } 7$.

Já se viu que para o primeiro valor vem $\sigma^0 = 7,85 \text{ tm}^{-2}$ e $-y' = 0,172$. Observando a tabela respectiva verifica-se que este valor cai entre a origem e o primeiro ponto.

Na origem tem-se $\bar{q}'' = 6,250 (1 + \sin 30^\circ) = 9,375$.

Ao primeiro ponto $-y' = 0,375$ corresponde $\bar{q}'' = 15,86$. Portanto vem, interpolando linearmente, para $-y' = 0,172$, $\bar{q}'' = \bar{q}' + H'/\sigma^0 = 12,34$.

Daqui, $\bar{q}' = 12,34 \times 7,85 - 1,73 = 94,8 \text{ tm}^{-2}$.

Para $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0 = 5$ vem, como antes, $\sigma^0 = 0,706 \text{ tm}^{-2}$ e $-y' = 1,913$.

Das tabelas tem-se para $-y' = 1,757$, $\bar{q}'' = 150,1$ e para $-y' = 2,097$, $\bar{q}'' = 157,9$.

Interpolando, vem para $-y' = 0,1913$, $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 153,7$ ou seja $\bar{q}' = 153,7 \times 0,706 - 1,73 = 106,6 \text{ tm}^{-2}$.

Para $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0 = 7$ vem $\sigma^0 = 3,53/7 = 0,503 \text{ tm}^{-2}$

e portanto $-y' = \frac{1,50 : 2}{0,503 : 1,80} = 2,68$.

Nas tabelas encontra-se para $-y' = 2,66$, $\bar{q}'' = 215,0$ e para $-y' = 3,00$, $\bar{q}'' = 222,8$.

Interpolando vem para $-y' = 2,68$, $\bar{q}'' = (\bar{q}' \times H')/\sigma^0 = 215,5$, ou seja $\bar{q}' = 215,5 \times 0,503 - 1,73 = 106,6 \text{ tm}^{-2}$.

Como se vê a diferença entre os dois últimos valores obtidos para $\bar{q}'$ é nula embora no cálculo do primeiro se tenham utilizado seis e no cálculo do segundo onze pontos da sapata adimensional. A diferença no cálculo com $p'' = (p'_0 \times H')/\sigma^0 = 0,45$, que aproveita apenas um ponto do cálculo da sapata adimensional não é desprezível, mas não excede muito os 10%.

Comparem-se agora os valores encontrados com os valores segundo outros autores.

Os ábacos de Terzaghi [83]* só se referem a base rugosa.

Os factores de capacidade de carga tirados dos ábacos para o caso de deslizamento geral são: $N_c = 36$, $N_p = 21,5$ e $N_\gamma = 21$.

Como se disse (Capítulo II) Terzaghi e os autores subsequentes admitem que a capacidade de carga da fundação é a soma das capacidades de carga devidas aos três factores considerados separadamente. Portanto

$$\bar{q}' = c'N_c + \frac{b}{2} p'_0 N_p + \gamma' N_\gamma \quad (40.3)$$

No caso presente, tem-se, pois

$$\bar{q}' = 1 \times 36 + 1,80 \times 21,5 + 1,50/2 \times 1,80 \times 21 = 103,0 \text{ tm}^{-2}.$$

Meyerhof (1953) faz o cálculo admitindo a formação duma cunha de faces planas sob a fundação a que corresponde, portanto, uma base rugosa. Considera ainda os casos extremos de na «superfície livre equivalente» mobilizar todo o atrito do solo ($\delta_1 = -\varphi'$) ou não mobilizar atrito algum ($\delta_1 = 0$). Como nas tabelas se toma $\delta_1 = -\varphi'/2$, para a comparação ser mais legítima tomar-se-á para N_c , N_p e N_γ os valores médios entre aqueles casos extremos tirados dos ábacos apresentados pelo autor [Figs. (7.2), (8.2) e (9.2)]. $N_p = 35,5$, $N_\gamma = 22$, $N_c = 25$. Virá portanto $\bar{q}' = 1 \times 35,5 + 1,80 \times 22 + 1,50/2 \times 1,80 \times 23,5 = 106,9 \text{ tm}^{-2}$.

Em 1955 o mesmo autor apresenta novos valores para os factores de capacidade de carga de fundações superficiais, um tanto mais reduzidas especialmente no valor de N_γ . Para uma fundação de base rugosa ter-se-ia pelo ábaco da Fig. (10.2), $N_c = 30$, $N_p = 19$ e $N_\gamma = 16$. Portanto

$$\bar{q}' = 1 \times 30 + 1,80 \times 19 + 1,50/2 \times 1,80 \times 16 = 85,7 \text{ tm}^{-2}$$

* 1943, p. 125.

No caso de base lisa Meyerhof toma $N_\gamma/2$ em vez de N_γ mantendo os outros factores. Para este caso virá então à Meyerhof (1955) $\bar{q}' = 1 \times 30 + 1,80 \times 19 + 1,50/2 \times 1,80 \times 8 = 74,9 \text{ tm}^{-2}$.

Por último vejamos os cálculos à Caquot e Kérisel (1956).

Para o caso de base lisa os autores dão (p. 386), $N_\gamma = 7,39$ e $N_p = 20,4$. O valor de N_c calcula-se pela fórmula

$$N_c = \frac{s_2 - 1}{\text{tg } \varphi'} = \frac{\frac{1 + \text{sen } \varphi'}{1 - \text{sen } \varphi'} \exp(\pi \text{tg } \varphi') - 1}{\text{tg } \varphi'} \quad (8.4)$$

$$\text{Com } \varphi' = 30^\circ \text{ obtém-se } N_c = \frac{3,0 \times 6,14 - 1}{0,511} = 30,1$$

Portanto

$$\bar{q}' = 1 \times 30,1 + 1,80 \times 20,4 + 1,50/2 \times 1,80 \times 7,39 = 76,7 \text{ tm}^{-2}.$$

No caso de base rugosa Caquot e Kérisel admitem para o termo de superfície N_γ duas hipóteses já discutidas (pág. 66).

Na primeira hipótese para $\varphi' = 30^\circ$ tomam $N_\gamma = 14,8$. Como admitem também a sobreposição de estados de equilíbrio limite, virá

$$\bar{q}' = 1 \times 30,1 + 1,80 \times 20,4 + 1,50/2 \times 1,80 \times 14,8 = 86,8 \text{ tm}^{-2}$$

Na segunda hipótese os autores tomam $N_\gamma = 22,7$ e portanto

$$\bar{q}' = 1 \times 30,1 + 1,80 \times 20,4 + 1,50/2 \times 1,80 \times 22,7 = 97,4 \text{ tm}^{-2}$$

No quadro seguinte resumem-se os valores em tm^{-2} obtidos para a carga limite segundo os vários autores:

	Terzaghi (1943)	Meyerhof (1951)	Caquot e Kérisel (1955)	(1) (1956)	(2)	Nossas Tabelas
Base lisa ...	—	—	74,9	76,7	—	80,8
Base rugosa	101,7	106,9	85,7	86,8	97,4	106,6.

Como se vê os valores segundo as tabelas por nós elaboradas concordam razoavelmente com os de Terzaghi e Meyerhof (1951). No caso

de base rugosa os valores de Meyerhof (1955) e Caquot e Kérisel são relativamente baixos, o que é admitido por estes últimos autores. (1956, p. 434).

Como as maiores diferenças são devidas ao termo $N\gamma$ é evidente que para uma sapata mais larga as diferenças seriam maiores.

58. Exemplo. Fundação a profundidade média. Comparação de resultados

Veja-se agora a influência da profundidade. Viu-se antes que para $\alpha_0 = 30^\circ$ a base de fundação deveria estar à profundidade de 4,40 m o que implicaria um maior valor para p'_0 . No entanto, para se observar o efeito devido apenas à profundidade vai-se continuar a tomar $p'_0 = 1,80 \text{ tm}^{-2}$, $\gamma' = 1 \text{ tm}^{-3}$ e $\varphi' = 30^\circ$. Só α_0 toma agora o valor de 30° .

Para base lisa temos nas tabelas $p'' = (p'_0 + H') \sigma^0 = 1,73$, $p'' = 6$ e $p'' = 15$.

Com o primeiro destes valores obtém-se

$$\sigma^0 = \frac{3,53}{1,73} = 2,04 \text{ tm}^{-2} \quad \text{e} \quad -y' = \frac{1,50 : 2}{2,04 : 1,80} = 0,663$$

Nas tabelas tem-se para $-y' = 0,509$, $\bar{q}'' = 72,23$; e para $-y' = 1,073$, $\bar{q}'' = 89,13$.

Interpolando linearmente obtém-se para $-y' = 0,663$, $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 76,92$ ou seja $\bar{q}' = 76,92 \times 2,04 - 1,73 = 155 \text{ tm}^{-2}$.

No segundo caso $\sigma^0 = 3,53/6 = 0,588 \text{ tm}^{-2}$ e $-y' = \frac{1,50 : 2}{0,588 : 1,80} = 2,295$.

Nas tabelas temos para $-y' = 2,216$, $q'' = 285,2$; e para $-y' = 2,784$, $\bar{q}'' = 303,5$.

Interpolando vem para $-y' = 2,295$, $\bar{q}'' = (\bar{q}' \times H')/\sigma^0 = 287,7$, ou seja $\bar{q}' = 287,7 \times 0,588 - 1,73 = 167,5 \text{ tm}^{-2}$.

No terceiro caso $\sigma^0 = 3,53/15 = 0,235 \text{ tm}^{-2}$ e
 $-y' = \frac{1,50 : 2}{0,235 : 1,80} = 5,725$.

Este valor é superior ao maior valor das tabelas, mas por extrapolação poderá obter-se para $-y' = 5,725$, $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 725$ ou seja $\bar{q}' = 0,235 \times 725 - 1,73 = 168 \text{ tm}^{-2}$.

No caso de base rugosa tem-se nas tabelas $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0 = 5$, o que implica $\sigma^0 = 3,53/5 = 0,706 \text{ tm}^{-2}$ e
 $-y' = \frac{1,50 : 2}{0,706 : 1,80} = 1,913$. Das mesmas tabelas se tira para
 $-y' = 1,922$, $\bar{q}'' = 322,6$ e $-y' = 1,582$, $\bar{q}'' = 302,4$.

Interpolando para $-y' = 1,913$ vem $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 322,1$, ou seja $\bar{q}' = 322,1 \times 0,706 - 1,73 = 225 \text{ tm}^{-2}$.

Comparem-se agora os resultados obtidos com outros segundo os diferentes autores. Terzaghi e Caquot não consideram este caso, sendo para eles o acréscimo de resistência em profundidade apenas devido ao aumento de sobrecarga, isto é, devido ao aumento de p'_0 . Meyerhof (1957) só considera, como antes se viu, o caso da base rugosa ($\delta_2 = -\varphi'$) com $\delta_1 = 0$ ou $\delta_1 = -\varphi'$. Para o caso intermédio ($\delta_2 = -\varphi'$ e $\delta_1 = -\varphi'/2$) por nós tratado tira-se por interpolação nos ábacos de Meyerhof os seguintes valores para os factores de capacidade de carga: $N_c = 63$, $N_p = 40$ e $N_\gamma = 57$. Portanto

$$\bar{q}' = 1 \times 63 + 1,80 \times 40 + 1,50/2 \times 1,80 \times 57 = 212 \text{ tm}^{-2}.$$

Este valor é ligeiramente inferior ao que acima obtivemos para o mesmo caso.

* Este último valor é 7 a 8 % superior ao primeiro — o que não admira pois para o primeiro aproveitarem-se apenas dois pontos do cálculo da sapata adimensional — mas muito pouco difere do segundo valor.

Como se vê com $\alpha_0 = 30^\circ$ a capacidade de carga mais do que duplica. No entanto a fundação tem de estar enterrada no terreno resistente quase três vezes a sua menor dimensão. Para $\alpha_0 = 60^\circ$ a capacidade de carga seria ainda muito maior, mas então a fundação teria de estar enterrada no solo resistente 6,8 vezes a sua menor dimensão*.

Pela fórmula (25.2) se vê que a profundidade da fundação necessária para que se estabeleça certo valor para α_0 cresce exponencialmente com $\operatorname{tg} \varphi'$. Daí que, por exemplo, para se poder tomar o valor de $\alpha_0 = 90^\circ$ (fundação profunda) para um solo de $\varphi' = 45^\circ$, a fundação teria de estar enterrada no solo resistente cerca de 50 vezes a sua largura, o que nunca se verificaria na prática.

Como aplicação destas conclusões vejamos ainda uma modificação do exemplo anterior: a sapata de 1,50 m de largura está fundada a 4,40 m de profundidade, estando enterrada 1,00 m no solo resistente de coesão $c' = 1 \text{ tm}^{-2}$ e ângulo de atrito $\varphi' = 30^\circ$ e sendo a primeira camada, de 3,40 m de possança, constituída por um solo cuja resistência por ser baixa se considera desprezível. O nível freático situa-se ao nível da base da fundação; o peso específico da camada superior é de $1,50 \text{ tm}^{-3}$, o do solo resistente acima do nível freático é de $1,80 \text{ tm}^{-3}$ e abaixo do nível freático de $1,00 \text{ tm}^{-3}$.

Neste caso apesar da fundação estar apoiada a profundidade suficiente para se poder fazer $\alpha_0 = 30^\circ$, não seria acertado tomar este valor porquanto o solo superior não é resistente. Tomar-se-á, portanto, $\alpha_0 = 0$. Virá

$$p' = 3,40 \times 1,50 + 1,00 \times 1,80 = 6,90 \text{ tm}^{-2}$$

$$e \quad H' = 1,0 \text{ tm}^{-2} \times \cotg 30^\circ = 1,732 \text{ tm}^{-2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tomando o caso de } p'' &= (p'_0 + H')/\sigma^0 = 5 \quad \text{ter-se-ia } \sigma^0 = \\ &= 8,632/5 = 1,726 \text{ tm}^{-2} \quad e \quad -y' = (1,50 : 2)/(1,726 : 1,00) = \\ &= 0,435. \end{aligned}$$

* Com efeito, de (25.2) tira-se para este caso

$$h = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ \cos 30^\circ \exp (2\pi/3 \operatorname{tg} 30^\circ)}{2 \cos 60^\circ \cos (30^\circ + 30^\circ)} \times b = 6,80 \text{ b.}$$

Nas tabelas para base rugosa encontra-se para

$$-y' = 0,250, \bar{q}'' = 114,4 \quad \text{e} \quad \text{para} \quad -y' = 0,515, \bar{q}'' = 119,4.$$

Interpolando vem para $-y' = 0,435, \quad \bar{q}'' = (\bar{q}'_1 + H')/\sigma^0 = 117,6$ ou seja $\bar{q}' = 117,6 \times 1,726 - 1,73 = 200 \text{ tm}^{-2}.$

Se tentássemos o valor $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0 = 7$ da tabela viria sucessivamente $\sigma^0 = 8,632/7 = 1,233 \text{ tm}^{-2},$
 $y' = (1,50 : 2)/(1,233 : 1,00) = 0,609.$

Para $-y' = 0,499, \quad \bar{q}'' = 160,6.$

Para $-y' = 0,773, \quad \bar{q}'' = 168,3.$

Interpolando para $-y' = 0,609$ vem $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 163,7,$ ou seja $\bar{q}' = 163,7 \times 1,233 - 1,73 = 200 \text{ tm}^{-2},$ valor que confirma o primeiro.

Segundo Terzaghi para $\varphi' = 30^\circ \quad N_c = 36, \quad N_p = 21,5 \quad \text{e} \quad N_\gamma = 21,$ portanto

$$\bar{q}' = 1,00 \times 36 + 6,90 \times 21,5 + 1,50/2 \times 1,00 \times 21 = 201 \text{ tm}^{-2}.$$

Segundo Meyerhof (1951)

$$\bar{q}' = 1,00 \times 35,5 + 6,90 \times 22 + 1,50/2 \times 1,00 \times 23,5 = 205 \text{ tm}^{-2}.$$

Segundo Meyerhof (1955)

$$\bar{q}' = 1,00 \times 30 + 6,90 \times 19 + 1,50/2 \times 1,00 \times 16 = 174 \text{ tm}^{-2}.$$

Segundo Caquot e Kérisel

$$\bar{q}' = 1 \times 30,1 + 6,90 \times 20,4 + 1,50/2 \times 1,00 \times 14,8 = 182 \text{ tm}^{-2}.$$

$$\text{ou } \bar{q}' = 1 \times 30,1 + 6,90 \times 20,4 + 1,50/2 \times 1,00 \times 22,7 = 188 \text{ tm}^{-2}$$

Mais uma vez os valores calculados segundo as tabelas que elaborámos se aproximam bastante dos valores calculados segundo as fórmulas dos outros autores.

59. Exemplo. Fundação enterrada em solo resistente a profundidade média. Influência do aperto das terras contra o fuste.

Veja-se agora o caso em que a fundação está enterrada 4,40 m no solo resistente e o nível freático abaixo da mais profunda superfície de deslizamento (Fig. 1.4), continuando a supor-se $\varphi' = 30^\circ$ e $\gamma' =$

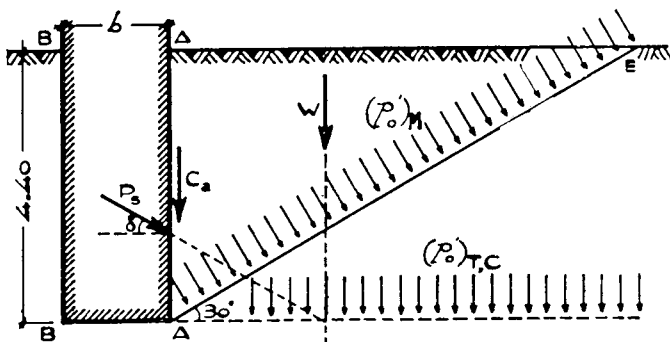


FIG. (1.4)

$= 1,80 \text{ tm}^{-3}$, mas arbitrando $c' = 0$. É então legítimo tomar $\alpha_0 = 30^\circ$. A dificuldade está agora em calcular p'_0 . Terzaghi e Caquot continuam a considerar o solo sobrejacente à base da fundação como sendo apenas um peso morto. Portanto, estes autores tomam

$$(p'_0)_{TC} = 4,40 \times 1,80 = 7,92 \text{ tm}^{-2}.$$

Nós, como Meyerhof (1951) consideramos o solo abaixo de AE interessado na capacidade de carga da fundação e portanto p'_0 será obtido a partir do equilíbrio da cunha $AEA'A$. Nesta cunha estão em equilíbrio o peso próprio W , o impulso do fuste P_s e aderência C_a , e a reacção na superfície livre equivalente F_0 , cuja componente normal a AE é P_0 .

À profundidade z junto ao fuste a tensão horizontal no elemento dz é $\sigma_h = K\gamma'z$ onde K é o coeficiente de impulso de terras cujo valor pode variar entre o coeficiente em estado activo

$K_a = (1 - \sin\varphi')/(1 + \sin\varphi')$ e o coeficiente em estado passivo, $K_p = 1/K_a$, dependendo o valor real de K do aperto das terras contra o fuste.

Temos, portanto,

$$H_s = \int_0^h K\gamma' z dz = K\gamma' \frac{h^2}{2}.$$

Se o ângulo de atrito entre o fuste e o solo for δ será $P_s = H_s : \cos\delta$ ou seja

$$P_s = K\gamma' \frac{h^2}{2\cos\delta}. \quad (9.4)$$

A força de aderência entre o fuste e o solo será

$$C_a = c_a \times h, \quad (10.4)$$

sendo c_a a aderência unitária, uma função da coesão do solo. O peso próprio terá por expressão

$$W = \gamma h^2/2 \cotg \alpha_0. \quad (11.5)$$

A resultante do W , P_s e C_a seria a força F_0 na superfície AE cuja componente normal seria P_0 .

Se admitirmos $C_a = 0$ e $\delta = 0$ e que em condições médias de aperto do solo seja $K = 1$, vem

$$P_s = \gamma' h^2/2 \quad \text{e} \quad W = \gamma' h^2/2 \cotg \alpha_0.$$

Como

$$P_0 = P_s \operatorname{sen} \alpha_0 + W \cos \alpha_0 \quad \text{e} \quad (p'_0)_M = \frac{P_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{h}$$

vem

$$(p'_0)_M = \left(\gamma' \frac{h^2}{2} \operatorname{sen} \alpha_0 + \gamma' \frac{h^2}{2} \cotg \alpha_0 \cos \alpha_0 \right) \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{h} = \frac{\gamma' h}{2} \quad (12.4)$$

Quer dizer, se o fuste for liso e com $K = 1$, o valor a tomar para p'_0 será exactamente metade do valor admitido por Terzaghi e Caquot, e nota-se que esta conclusão é independente de α_0 . Conclui-se então que o que se ganha em considerar a resistência do solo abaixo de AE se perde em parte ou grande parte* por se tomar um menor valor para

* Dependendo de α_0 .

p'_0 . Se se tomar o fuste perfeitamente rugoso ($\delta = \varphi'$) pouco se aumenta o valor de p'_0 ; o aumento substancial provém, como já se disse, do valor de K o qual para $\varphi' = 30^\circ$ teria o valor máximo de 3. Não será, porém, na prática razoável tomar K muito superior a 1, porquanto ainda que de momento se obtivesse um aperto do solo que desse K próximo de 3 é de supor um relaxamento das tensões ao longo do tempo.

Assim, tomaremos $p'_0 = 7,92 \text{ tm}^{-2}$ no cálculo à Terzaghi e à Caquot e $p'_0 = 3,96 \text{ tm}^{-2}$ no cálculo à Meyerhof e no que efectuar-mos a partir das nossas tabelas.

Supondo a base rugosa viria para $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0 = 5$,

$$\sigma^0 = \frac{3,96}{5} = 0,792 \text{ tm}^{-2} \quad \text{e} \quad -y' = \frac{1,50 : 2}{0,792 : 1,80} = 1,705.$$

Nas tabelas encontra-se para $-y' = 1,583$, $\bar{q}'' = 302,4$ e para $-y' = 1,922$, $\bar{q}'' = 322,6$.

Interpolando vem para $-y' = 1,705$, $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 309,7$, ou seja $\bar{q}' = 309,7 \times 0,792 = 245 \text{ tm}^{-2}$.

No cálculo à Meyerhof (1951) teríamos $N_c = 40$ e $N_\gamma = 57$ ou seja $\bar{q}' = 3,96 \times 40 + 1,50/2 \times 1,80 \times 57 = 235 \text{ tm}^{-2}$.

No cálculo à Terzaghi teremos $p'_0 = 7,92 \text{ tm}^{-2}$, $N_p = 21,5$ e $N_\gamma = 21$ e portanto $\bar{q}' = 7,92 \times 21,5 + 1,50/2 \times 1,80 \times 21 = 200 \text{ tm}^{-2}$.

Segundo Caquot e Kérisel há duas hipóteses, uma com $N_\gamma = 14,8$ e outra com $N_\gamma = 22,7$. Teremos assim

- 1) $\bar{q}' = 7,92 \times 20,4 + 1,50/2 \times 1,80 \times 14,8 = 181 \text{ tm}^{-2}$,
- 2) $\bar{q}' = 7,92 \times 20,4 + 1,50/2 \times 1,80 \times 22,7 = 192 \text{ tm}^{-2}$.

Como vemos apesar de se tomar p'_0 duplo nos cálculos à Terzaghi e à Caquot ambos estes dão menores valores que o nosso ou o de Meyerhof. As diferenças não são, contudo, muito apreciáveis.

60. Exemplo. Fundação superficial e ângulo de atrito interno baixo

Vejam agora como varia a capacidade de carga quando o ângulo de atrito passa de 30° para 20° , mantendo-se tudo o mais igual ao do exemplo inicial ($c' = 1,00 \text{ tm}^{-2}$, $\gamma' = 1,80 \text{ tm}^{-3}$, profundidade 1,00 e largura da sapata 1,50).

Continuemos a tratar a fundação como superficial ($\alpha_0 = 0$) e para abreviar restrinjamo-nos ao caso da base rugosa.

$$\text{Será agora } p'_0 + H' = 1,00 \times 1,80 + 1,0 \cotg 20^\circ = 1,80 + 2,74 = 4,54 \text{ tm}^{-2}.$$

Nas tabelas encontram-se os dois valores $p'' = (p' + H')/\sigma^0 = 0,9$ e $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0 = 12$. Pelo primeiro teríamos $\sigma^0 = 4,54/0,9 = 5,03 \text{ tm}^{-2}$ e $-y' = (1,50 : 2)/(5,03 : 1,80) = 0,268$.

Na tabela encontram-se os valores para $-y' = 0,000$, $\bar{q}'' = 4,73 (1 + \sen 20^\circ) = 6,36$; para $-y' = 0,659$, $\bar{q}'' = 9,36$.

Interpolando temos para $-y' = 0,268$, $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 7,58$ ou seja $\bar{q}' = 7,58 \times 5,03 - 2,74 = 35,5 \text{ tm}^{-2}$.

Calculando pelo segundo valor teríamos $\sigma^0 = 4,54/12 = 0,378 \text{ tm}^{-2}$ e $-y' = (1,50 : 2)/(0,378 : 1,80) = 3,57$.

Na tabela encontra-se para $-y' = 3,49$, $\bar{q}'' = 107,31$; para $-y' = 4,06$, $\bar{q}'' = 190,6$.

Interpolando vem para $-y' = 3,57$, $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 107,8 \text{ tm}^{-2}$ ou seja $\bar{q}' = 107,08 \times 0,378 - 2,74 = 37,7 \text{ tm}^{-2}$.

De acordo com Terzaghi (1943, p. 125), $N_c = 17,6$, $N_p = 7,6$ e $N_\gamma = 4,5$.

Portanto

$$\bar{q}' = 1,00 \times 17,6 + 1,80 \times 7,6 + 1/2 \times 1,80 \times 4,5 = 37,3 \text{ tm}^{-2}.$$

À Meyerhof (1951) teríamos $N_c = 17$, $N_p = 7,3$ e $N_\gamma = 4,8$, o que daria

$$\bar{q}' = 1,00 \times 17 + 1,80 \times 7,6 + 1/2 \times 1,50 \times 1,80 \times 4,8 = 36,6 \text{ tm}^{-2}.$$

A Meyerhof (1955) teríamos, $N_c = 14$, $N_p = 6,3$ e $N_\gamma = 2,8$.
Portanto

$$\bar{q}' = 1,00 \times 14 + 1,80 \times 6,3 + 1/2 \times 1,50 \times 1,50 \times 1,80 \times 2,8 = 29,1 \text{ tm}^{-2}.$$

A Caquot e Kérisel (1956, p. 388/9, 398 e 392), teríamos os dois casos

$$1) \quad N_p = 6,67, \quad N_\gamma = 3,5 \quad \text{e} \quad N_c = \frac{\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi'}{1 - \operatorname{sen} \varphi'} \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi') - 1}{\operatorname{tg} \varphi'} = 14,8,$$

o que daria

$$\bar{q}' = 1,00 \text{ tm}^{-2} \times 14,8 + 1,80 \text{ tm}^{-2} \times 6,67 + 1,50/2 \times 1,80 \text{ tm}^{-2} \times 3,51 = 31,5 \text{ tm}^{-2}, \quad \text{e}$$

$$2) \quad N_p = 6,67, \quad N_\gamma = 5,70 \quad \text{e} \quad N_c = 14,8.$$

o que daria

$$\bar{q}' = 1,00 \times 14,8 + 6,67 + 1,50/2 \times 1,80 \times 5,70 = 34,5 \text{ tm}^{-2}.$$

Também para este caso os valores obtidos segundo as nossas tabelas se não afastam dos outros autores.

61. Fundação superficial e ângulo de atrito elevado

Resolvamos ainda o mesmo problema mas para $\varphi' = 40^\circ$. Os valores mais convenientes das tabelas serão os correspondentes a $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0 = 4$, o que daria no nosso caso $(p'_0 + H' = 1,80 + 1,0 \cotg 40^\circ = 1,80 + 1,19 = 2,99 \text{ tm}^{-2})$ $\sigma^0 = 2,99/4 = 0,748$ e $-y' = (1,50 : 2)/(0,748 : 1,80) = 1,805$.

Nas tabelas encontra-se para $-y' = 1,77$, $\bar{q}'' = 528,4$;
para $-y' = 1,96$, $\bar{q}'' = 549,7$.

Interpolando obtém-se para $y' = 1,805$, $\bar{q}'' = (\bar{q}' + H')/\sigma^0 = 532,3$ ou seja

$$\bar{q}' = 532,3 \times 0,748 - 1,19 = 398 \text{ tm}^{-2}.$$

Segundo Terzaghi, $N_c = 93$, $N_p = 77$ e $N_\gamma = 138$, o que dará $\bar{q}' = 1,00 \times 93 + 1,80 \times 77 + 1/2 \times 1,50 \times 1,80 \times 138 = 418 \text{ tm}^{-2}$.

À Meyerhof (1951) teríamos, $N_c = 90$, $N_p = 76$ e $N_\gamma = 115,0$, o que daria

$$\bar{q}' = 1,00 \times 90 + 1,80 \times 76 + 1/2 \times 1,50 \times 1,80 \times 115 = 382 \text{ tm}^{-2}.$$

À Meyerhof (1955), $N_c = 72$, $N_p = 62$ e $N_\gamma = 97$.

Portanto

$$\bar{q}' = 1,00 \times 72 + 1,80 \times 62 + 1,50/2 \times 1,80 \times 97 = 315 \text{ tm}^{-2}.$$

A Caquot e Kérisel, teríamos como anteriormente os dois casos

$$1) \quad N_p = 78,6, \quad N_\gamma = 78,1 \quad \text{e} \quad N_c = \frac{\frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \exp(\pi \tan \varphi') - 1}{\tan \varphi'} = 103,5$$

e daqui

$$q' = 1,00 \times 103,5 + 1,80 \times 78,6 + 1/2 \times 1,50 \times 1,80 \times 78,1 = 351 \text{ tm}^{-2}.$$

2) $N_p = 78,6$, $N_\gamma = 114$ e $N_c = 103,5$. Daqui

$$\bar{q}' = 1,00 \times 103,5 + 1,80 \times 78,6 + 1/2 \times 1,50 \times 1,80 \times 114 = 399 \text{ tm}^{-2}.$$

62. Fundação larga e ângulo de atrito baixo

Tomemos por último uma fundação larga ($b = 8,00 \text{ m}$) num terreno de fracas características de resistência ($\varphi' = 20^\circ$, $c' = 1,0 \text{ tm}^{-2}$, $\gamma' = 1,0 \text{ tm}^{-3}$) e a pequena profundidade ($h = 1,00 \text{ m}$), admitindo-se a base rugosa.

A fundação deve tomar-se como superficial ($\alpha_0 = 0$).

Nas tabelas encontra-se solução para $p'' = (p'_0 + H')/\sigma_0 = 0,9$.

Teremos então

$$\sigma^0 = \frac{1,00 \text{ m} \times 1,0 \text{ tm}^{-3} + 1,0 \text{ tm}^{-2} \times \cotg 20^\circ}{0,9} = \frac{1,00 + 2,74}{0,9} = 4,16 \text{ tm}^{-2}.$$

E ainda

$$-y' = \frac{8,00 : 2}{4,16 : 1,00} = 0,962.$$

Nas tabelas encontra-se para $-y' = 0,659$, $\bar{q}' = 9,36$;
para $-y' = 1,418$, $\bar{q}'' = 12,45$.

Interpolando linearmente viria $q'' = (q' + H')/\sigma^0 = 10,59$, e portanto, $\bar{q}'' = 10,59 \times 4,16 \text{ tm}^{-2} - 2,74 \text{ tm}^{-2} = 41,3 \text{ tm}^{-2}$.

À Terzaghi, teríamos $N_c = 17,6$, $N_p = 7,6$ e $N_\gamma = 4,5$, e daí $\bar{q}' = 1,0 \text{ tm}^{-2} \times 17,6 + 1,00 \text{ tm}^{-2} \times 7,6 + 8,00/2 \times 1,00 \text{ tm}^{-3} = 43,2 \text{ tm}^{-2}$.

À Meyerhof (1955), $N_c = 14$, $N_p = 6,3$, $N_\gamma = 2,8$ e daí $= 1,0 \text{ tm}^{-2} \times 14 + 1,00 \text{ tm}^{-2} \times 6,3 + 8,00/2 \times 1,00 \text{ tm}^{-3} \times 2,8 = 31,5 \text{ tm}^{-2}$.

À Caquot e Kérisel, teríamos como anteriormente

$$1) \quad N_p = 6,67, \quad N_\gamma = 3,51 \quad \text{e} \quad N_c = 14,8 \quad \text{e} \quad \text{daí} \quad \bar{q}' = 1,0 \text{ tm}^{-2} \times 14,8 + 1,00 \text{ tm}^{-2} \times 6,67 + 8,00/2 \times 1,00 \text{ tm}^{-3} \times 3,51 = 35,5 \text{ tm}^{-2}.$$

$$2) \quad N_p = 6,67, \quad N_\gamma = 5,69 \quad \text{e} \quad N_c = 14,8 \quad \text{e} \quad \text{daí} \quad \bar{q}' = 1,0 \text{ tm}^{-2} \times 14,8 + 1,00 \text{ tm}^{-2} \times 6,67 + 8,00/2 \times 1,00 \text{ tm}^{-3} \times 5,69 = 44,2 \text{ tm}^{-2}.$$

Como se vê ainda neste caso os valores das nossas tabelas não se afastam dos valores dos outros autores, embora tenham sido obtidos por método bastante diferente. Os valores das tabelas estão frequentemente entre os mais elevados, o que não admira dado que admitimos os solos sobrejacentes à base da fundação interessados na sua capacidade de carga.

CAPÍTULO V

EXTENSÃO DOS MÉTODOS A OUTROS PROBLEMAS ESPECÍFICOS

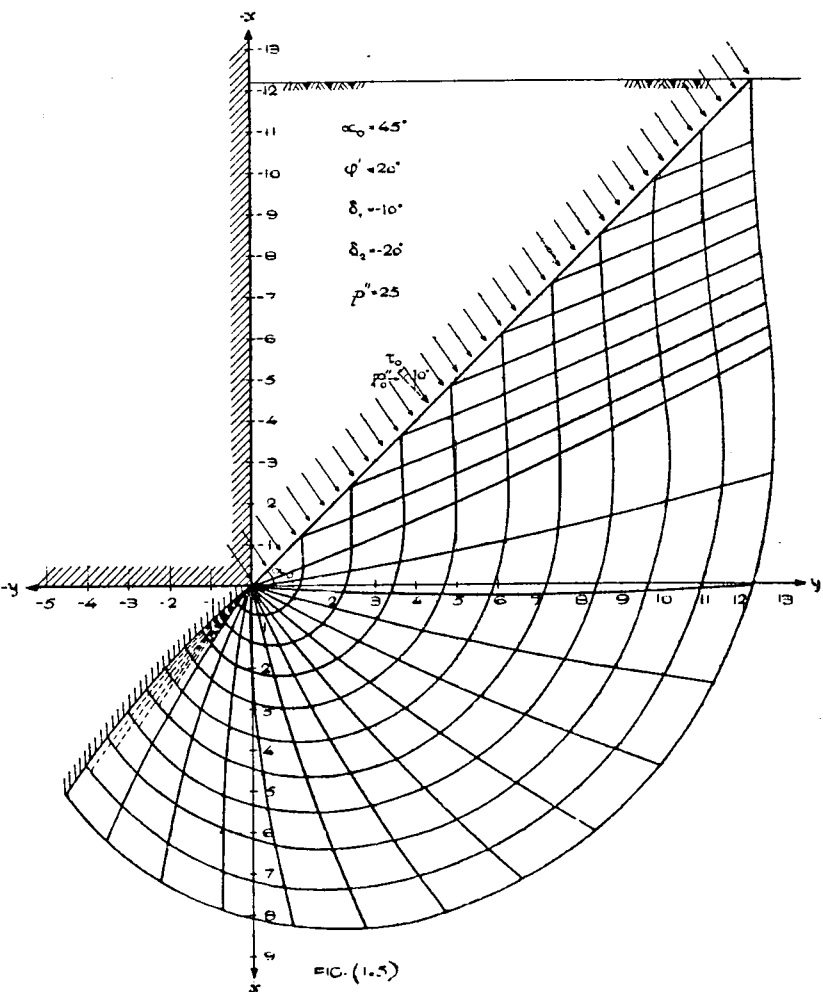
63. Os casos abrangidos pelo programa, mas não incluídos nas tabelas. Alguns resultados

Acabamos de apresentar e fazer aplicação dos cálculos efectuados e de comparar os resultados com outros obtidos a partir das soluções clássicas.

Importa agora dizer que o programa foi preparado para outros casos além dos referidos nas tabelas. Os casos tratados envolvem «superfícies livres equivalentes» com inclinação compreendida entre $\alpha_0 = 0$ (fundação superficial) e $\alpha_0 = 90^\circ$ (fundação profunda), por incrementos $\Delta\alpha_0 = 30^\circ$. Qualquer solução intermédia ($\alpha_0 = 10^\circ$, por exemplo) pode ser obtida ou directamente com o mesmo programa ou por interpolação entre os casos contíguos tratados nas tabelas. Na (Fig. 1.5) apresenta-se a rede de características para o caso de $\alpha_0 = 45^\circ$ ($\varphi' = 20^\circ$, $c' = 0$, $\delta_1 = -\varphi'/2$, $\delta_2 = -\varphi'$ e $p'' = 25 = c^{te}$). Como a inclinação da superfície livre equivalente é superior ao ângulo de atrito a segunda família de características apresenta pontos de inflexão ao entrar na zona de corte radial. Essas curvas têm o aspecto doutras apresentadas por Biarez (1961, p. 132) para um problema de impulso passivo num maciço também com ângulo de inclinação do talude superior ao ângulo de atrito.

Também como exemplo foi estudado o caso duma fundação nas vizinhanças da aresta dum talude ($\alpha_0 < 0$). Dão-se abaixo os valores

de $y', \sigma'', \sigma''_{xx}$ e $\bar{q}''$ obtidos para o caso de $\alpha_0 = -30^\circ$ ($\varphi' = 30^\circ$, $c' = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ e $p'' = 5 = c\Phi^{1e}$).



y'	σ''	σ''_{xx}	$\bar{q}''$
.00000/00	.33528/02	.50292/02	.50292/02
— .55453/00	.35414/02	.53121/02	.51707/02
— .11023/01	.37199/02	.55799/02	.53075/02
— .16513/01	.38902/02	.58352/02	.54405/02
— .21996/01	.40533/02	.60799/02	.55694/02
— .27461/01	.42102/02	.63152/02	.56944/02
— .32901/01	.43616/02	.65424/02	.58158/02
— .38310/01	.45082/02	.67622/02	.59339/02
— .43684/01	.46504/02	.69756/02	.60490/02
— .49024/01	.47887/02	.71830/02	.61612/02
— .54326/01	.49233/02	.73850/02	.62708/02

Estes resultados são todos dados em vírgula flutuante. O número depois do traço / indica o número de algarismos da parte inteira.

Como era de esperar os valores obtidos são substancialmente inferiores ao correspondente caso para $\alpha_0 = 0$, isto é, com a superfície do terreno horizontal de ambos os lados da fundação*.

O programa foi ainda preparado para o caso em que haja uma redução (ou aumento) do peso específico do solo a certa profundidade h' (caso da existência dum nível freático). A título de exemplo recalculou-se o caso incluído nas tabelas, $\varphi' = 30^\circ$, $c' = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\alpha_0 = 0$ e $p'' = 0,45$, admitindo que além da profundidade $h' = 3$ o peso específico seria reduzido de 1,0 para 0,5.

Apresenta-se abaixo os valores de y' , σ'' , σ''_{xx} e $\bar{q}''^{**}$:

y'	σ''	σ''_{xx}	$\bar{q}''$
.00000/00	.55203/01	.82805/01	.82805/01
— .87950/00	.12896/02	.19344/02	.13812/02
— .16183/01	.21600/02	.32400/00	.19318/02
— .24644/01	.30783/02	.46175/02	.26174/02
— .33195/01	.40034/02	.60051/02	.33114/02
— .38339/01	.43377/02	.65065/02	.37064/02
— .45960/01	.48837/02	.73256/02	.42386/02
— .53654/01	.54385/02	.81577/02	.47410/02
— .60477/01	.58842/02	.88263/02	.51642/02
— .67529/01	.63218/02	.94828/02	.55809/02
— .74734/01	.67708/02	.10156/03	.59895/02

* Vejam-se as tabelas (Apêndice I.IV).

** Resultados em vírgula flutuante como acima.

Verifica-se, comparando estes valores com os seus correspondentes das tabelas, que apesar de se tratar dum caso com predominância das forças de massa, por ser $p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0$ muito abaixo, e de se ter fixado o nível freático a menos de um quarto da largura da base da fundação, a redução da resistência média não foi além de 20 %.

Está-se, no entanto, a admitir, é bom lembrá-lo, que a existência dum nível freático não reduz as características de resistência do solo, o que poucas vezes acontece.

A introdução de uma ou mais camadas com variação do ângulo de atrito e da coesão do solo, já envolve um tratamento mais delicado, porque então a tensão média σ' o ângulo Φ de inclinação da maior tensão principal com o eixo dos xx e a inclinação mútua das facetas de escorregamento 2μ ($\mu = \pi/4 + \varphi'/2$) variam bruscamente ao atravessar as camadas. Adiante se verá, no entanto, um método para vencer estas dificuldades.

64. Forças de massa variáveis de ponto para ponto. O caso dos maciços em consolidação

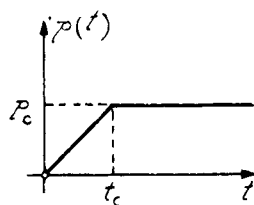
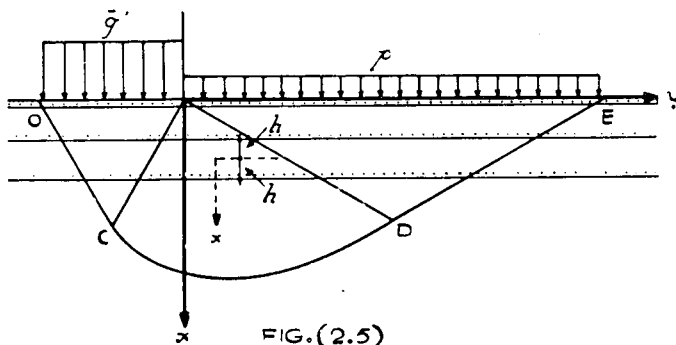
Continuando a referir-nos ao caso de variar apenas o peso específico do solo, ou dum modo geral de variarem de ponto para ponto as forças de massa, tem grande interesse o caso do equilíbrio limite dum maciço em vias de consolidação. Em geral o cálculo da capacidade de carga ou da estabilidade dum maciço terroso, faz-se admitindo uma das duas hipóteses extremas: ou se admite que durante a aplicação das cargas não há dissipação das tensões neutras (análise $\varphi = 0$), admitindo-se então que o solo é apenas provido de coesão, obtida esta em ensaios de compressão não drenados; ou se admite não haver gradiente das pressões neutras no maciço durante a aplicação das cargas e o cálculo efectua-se tomando a coesão c' e ângulo φ' de atrito efectivos do solo, obtidos portanto em ensaios de compressão triaxial com drenagem completa (suficientemente lentos). O cálculo na primeira hipótese dá valores várias vezes inferiores aos obtidos na segunda. A experiência laboratorial* e de campo mostra que durante a aplicação das cargas

* Ensaios realizados no Laboratório de Ensaios de Materiais e Mecânica do Solo em Lourenço Marques, e ainda não publicados, mostram o rápido incremento na resistência dos provetes quando a velocidade de aplicação das cargas diminui e a drenagem é permitida.

a capacidade de carga do maciço pode aumentar substancialmente. Importa encontrar um método para tomar este facto em devida conta. Já a isso nos referimos em trabalho anterior* sugerindo um método semi-empírico. Para tratar um tal problema sob forma mais rigorosa não há, em princípio, mais do que escrever as equações da estática e a condição de plasticidade de Mohr-Coulomb, em termos de tensões efectivas, vindo então, como já demonstrámos (pág. 94) as componentes do peso específico diminuídas das componentes $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ do gradiente das tensões neutras. Se houver um meio de calcular $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ em cada ponto do maciço poderá obter-se a carga limite da fundação em certo instante t , correspondente a certo grau de consolidação média $\bar{U}$.

65. Caso duma fundação contínua num maciço argiloso com camadas drenantes delgadas e horizontais

Seja o caso duma fundação contínua superficial num solo argiloso disposto em camadas horizontais de possança $2h$, com intercalação de lâminas arenosas, permitindo** a dissipação das pressões neutras (Fig. 2.5).



Suponha-se aplicada verticalmente a pressão efectiva uniforme p'_0 correspondente ao peso das terras sobrejacentes e suponha-se ainda

* Martins, 1961, p. 58 (The Primary Consolidation of Fine Grained Soils).

** Há casos (quando não estão ligadas a uma toalha aquífera livre) em que apesar da existência de camadas arenosas não há dissipação de tensões neutras.

que o valor médio $\bar{q}$ do acréscimo de tensão sob a sapata aumenta linearmente com o tempo e que a base da fundação é lisa.

Fazendo-se a hipótese usual de que antes de atingida a fase de escorrimento, o maciço trabalha em regime elástico, a cada valor médio $\bar{q}$ corresponde em primeira aproximação um valor da tensão octaedral normal no ponto genérico P de coordenadas x, y igual a (Frocht, 1948, II, p. 60)

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 = \bar{q} (\alpha_2 - \alpha_1)/\pi = \bar{q} \left\{ \arctg [(b + y)/x] - \arctg y/x \right\} / \pi \quad (1.5)$$

De acordo com Biot (1941)[5], a equação de difusão da água no interior dum solo saturado, admitindo a água incompressível em face da estrutura granular, seria

$$\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u + \frac{\partial \Delta}{\partial t} = 0, \quad (2.5)$$

onde k é o coeficiente de permeabilidade do solo, γ_w o peso específico da água,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

u a pressão neutra e t o tempo. $\Delta = \delta v/v$ é a variação unitária de volume, tomada positiva quando o volume decresce. Skempton e Bishop admitem (Gibson e Henkel, 1954, p. 8)

$$\Delta = B [\delta \sigma'_3 + A (\delta \sigma'_1 - \delta \sigma'_3)] \quad (3.5)$$

onde A e B seriam constantes características do solo.

De forma mais geral e apropriada seria

$$\Delta = \frac{\delta v}{v} = B' \delta \sigma'_{oct.} + A' \delta \tau'_{oct.}, \quad (4.5)$$

$$\text{onde} \quad \delta \sigma'_{oct} = \delta [(\sigma_1 + \sigma_3)/2] - \delta u \quad (5.5)$$

é o incremento de tensão octaedral normal efectiva.

$$\delta \tau'_{\text{oct}} = \delta [(\sigma_1 - \sigma_3)/\sqrt{6}]^* \quad (6.5)$$

é o incremento de tensão octaedral tangencial e δu o incremento da tensão neutra.

Admitindo, em face da disposição dos drenos, que a drenagem se faz apenas verticalmente, a equação (2.5) escreve-se

$$\frac{k}{\gamma_w} \times \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{\partial \Delta}{\partial t} \quad (7.5)$$

Supondo-se que no início as tensões são todas nulas e fazendo $\sigma_{\text{oct}} = \sigma$, $\tau_{\text{oct}} = \tau$, será $\sigma' = \sigma - u$ e $\tau' = \tau$ (8.5) visto que a pressão neutra não afecta a tensão tangencial.

Virá então sucessivamente

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - B' \frac{\partial \sigma'}{\partial t} - A' \frac{\partial \tau'}{\partial t} \quad (9.5)$$

$$\text{ou seja, fazendo } \frac{k}{\gamma_w B'} = c \quad (10.5)$$

onde c é o coeficiente de consolidação, e atendendo a (8.5)

$$c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma + \frac{A'}{B'} \tau \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (11.5)$$

Pondo $r(z,t) = \sigma + (A'/B')\tau$ e $r'(z,t) = r(z,t) - u(z,t)$ em (11.5) vem

$$c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{\partial r'}{\partial t} \quad (12.5)$$

* Com efeito, num estado de deformação plana (Nadai, 1950, p. 528) $\sigma_z = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$ ou seja também $\sigma_z = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Portanto $\sigma_{\text{oct}} = [\sigma_1 + (\sigma_1 + \sigma_3) : 2 + \sigma_3]/3 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. De modo análogo

$$\tau'_{\text{oct}} = 1/3 \sqrt{[\sigma_1 - (\sigma_1 + \sigma_3)/2]^2 + [(\sigma_1 + \sigma_3)/2 - \sigma_3]^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = (\sigma_1 - \sigma_3)/\sqrt{6}.$$

Como σ e τ crescem, por hipótese, linearmente com o tempo e A' e B' são constantes, $r(t)$ tomará a forma da (Fig. 3.5). O valor de r_0 será atingido ao fim dum tempo t_0 para o qual, por hipótese, se atingirá o equilíbrio limite do solo.

Considerando apenas a camada de possança $2h$, as condições de fronteira para a equação (12.5) são

$$\left. \begin{array}{ll} z = h & u = 0 \\ z = 0 & \partial u / \partial z = 0 \end{array} \right\} t > 0 \quad (13.5)$$

Pode demonstrar-se (Carslaw Jaeger, 1959, p. 130) que a solução de (12.5) com as condições (13.5) é

$$u = \frac{r_0}{2T_0} \left\{ 1 - \frac{z^2}{h^2} - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi z}{2h} \right] \exp \left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} T \right] \right\}, \quad (14.5)$$

$$\text{Sendo os factores de tempo } T = \frac{ct}{h^2} \text{ e } T_0 = \frac{ct_0}{h^2}, \quad (15.5)$$

Calculando o valor médio $\bar{u}$ de u por integração de (14.5) no intervalo $z = 0$ a $z = h$ e definindo o grau médio de consolidação por

$$\bar{U} = 1 - \frac{\bar{u}}{r_0}, \quad (16.5)$$

virá para $T \leq T_0$

$$\bar{U} = \frac{1}{T_0} \left\{ T - 1/3 + \frac{32}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \exp \left[-\frac{(2n+1)\pi^2}{4} T \right] \right\} \quad (17.5)$$

e para $T > T_0$

$$\bar{U} = 1 - \frac{32}{T_0 \pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \exp \left[-\frac{(2n+1)\pi^2}{4} T \right] \left\{ \exp \left[-\frac{(2n+1)\pi^2}{4} T_0 \right] - 1 \right\} \quad (18.5)$$

Os valores de $\bar{U}$ em função de T e T_0 são dados no Quadro (1.5) e foram obtidos analiticamente a partir das expressões (17.5) e (18.5) por Lumb (1963) e confirmados por nós numericamente pelo método de relaxação que desenvolvemos noutro local*.

QUADRO (1.5)

VALORES DO GRAU MÉDIO CONSOLIDAÇÃO $\bar{U}$ CALCULADO
A PARTIR DAS EQS. (17.5) E (18.5)

$T \backslash T_0$	0,005	0,02	0,10	0,2	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
0,005	0,056	0,025	0,005	0,002	0,001	0,001	0	0	0
0,01	0,104	0,040	0,008	0,004	0,002	0,001	0,001	0	0
0,02	0,156	0,115	0,021	0,010	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001
0,05	0,248	0,229	0,075	0,038	0,019	0,009	0,006	0,005	0,004
0,10	0,356	0,340	0,245	0,122	0,061	0,031	0,020	0,015	0,012
0,2	0,503	0,493	0,434	0,341	0,168	0,084	0,056	0,042	0,034
0,3	0,612	0,604	0,560	0,496	0,309	0,155	0,103	0,077	0,062
0,4	0,698	0,692	0,658	0,611	0,485	0,236	0,158	0,118	0,094
0,5	0,764	0,758	0,732	0,695	0,597	0,328	0,219	0,164	0,131
0,6	0,816	0,811	0,790	0,762	0,685	0,426	0,284	0,213	0,171
0,8	0,887	0,885	0,872	0,855	0,808	0,647	0,427	0,320	0,256
1,0	0,931	0,930	0,922	0,911	0,883	0,784	0,578	0,434	0,347
1,2	0,958	0,957	0,952	0,946	0,928	0,868	0,740	0,552	0,442
1,4	0,974	0,974	0,971	0,967	0,956	0,919	0,841	0,674	0,539
1,6	0,984	0,984	0,982	0,980	0,973	0,951	0,903	0,802	0,637
1,8	0,990	0,990	0,989	0,988	0,984	0,970	0,941	0,879	0,735
2,0	0,994	0,994	0,994	0,992	0,990	0,982	0,964	0,926	0,837
2,5	0,998	0,998	0,998	0,998	0,997	0,995	0,990	0,979	0,952
3,0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,998	0,997	0,994	0,986

Calculando du/dx e du/dy a partir de (14.5) fazendo $r_0(z, t_0) = \sigma_0 + (A'/B')\tau_0 = \sigma_0^{**}$ e atendendo a (1.5), obtém-se

$$\frac{du}{dx} = \frac{\bar{q}}{2\pi T_0} \left[-\frac{b+y}{x^2 + (b+y)^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right] \left\{ 1 - \frac{z^2}{h^2} - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[\cos(2n+1) \frac{\pi z}{2h} \right] \exp \left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T_0 \right] + \right.$$

* Martins, 1962.

** Verifica-se, de facto, experimentalmente em ensaios em que se deixa consolidar a amostra primeiro sob uma tensão hidrostática e em seguida sob uma tensão de corte pura, que não há praticamente variação de volume nesta última fase, isto é, $A' \simeq 0$, se atendermos à definição de A' dada em (4.5).

$$+ (-1)^{m+1} \frac{\bar{q}}{2\pi h T_0} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) \left\{ -\frac{2z}{h} + \right. \\ \left. + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \left[(2n+1) \frac{\pi z}{2h} \right] \exp \left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T_0 \right] \right\} \quad (19.5)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{\bar{q}}{2\pi T_0} \left[\frac{x}{x^2 + (b+y)^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \left\{ 1 - \frac{z^2}{h^2} - \right. \\ \left. - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi z}{2h} \right] \exp \left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T_0 \right] \right\} \quad (20.5)$$

Em (19.5) e (20.5) $m = \text{inteiro de } x/h$,
 $z = \left| x - h [m + (\cos m \pi/2)^2] \right|$. (21.5)*

As expressões (19.5) e (20.5) apresentam a particularidade de terem valores diferentes na origem (0,0) conforme a direcção ao longo da qual se caminha para esse ponto. Este facto levou à necessidade de introduzir no programa alterações apropriadas**.

* Para verificar a expressão (21.5) o melhor meio é experimentar várias posições dum ponto (várias coordenadas x) para camadas de várias possanças h .

** Com efeito, supunhamos que se caminha para a origem ao longo da recta $y = x \operatorname{tg} \beta$.

Virá então em (19.5)

$$\frac{du}{dx} = \frac{\bar{q}}{2\pi T_0} \left[-\frac{b+x \operatorname{tg} \beta}{x^2 + (b+x \operatorname{tg} \beta)^2} + \frac{x \operatorname{tg} \beta}{x^2 + (x \operatorname{tg} \beta)^2} \right] \left\{ 1 - \frac{z^2}{h^2} - \right. \\ \left. - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi z}{2h} \right] \exp \left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T_0 \right] \right\} + \\ + (-1)^{m+1} \frac{\bar{q}}{2\pi T_0 h} \left[\operatorname{arctg} \frac{b+x \operatorname{tg} \beta}{x} - \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \beta) \right] \left\{ -\frac{2z}{h} + \right. \\ \left. + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \left[(2n+1) \frac{\pi z}{2h} \right] \exp \left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T_0 \right] \right\} \quad (22.5)$$

Nas expressões (19.5) e (20.5) $\bar{q}$ é o valor numérico da tensão limite sob a fundação $\bar{q}'$ diminuído da pressão p'_0 das terras, suposta efectiva antes da aplicação das cargas. Teríamos pois $\bar{q} = \bar{q}' - p'_0$ (25.5)

Como porém $\bar{q}'$ é a carga limite que se procura, a solução tem de ser obtida por aproximações sucessivas, arbitrando inicialmente a sentença um valor para $\bar{q}'$ e no final repetindo os cálculos com o valor encontrado ou com a média entre esse e o valor inicial. O processo será, em geral, convergente, mas devido ao facto de que o gradiente das tensões neutras varia bruscamente nas mudanças de camada e de que no processo passo a passo e por diferenças finitas que utilizamos não é possível fixar «a priori» as coordenadas dos pontos a calcular, não se poderá exigir uma aproximação de valores muito grande, sendo do ponto de vista prático vantajoso que o valor de $\bar{q}'$ arbitrado se mantenha inferior do verdadeiro. Uma outra razão para não se poder exigir muito rigor no resultado é a de que na aplicação da fórmula (1.5) se supõe a distribuição uniforme de $\bar{q}$, o que não se verifica. As consequências deste facto para o cálculo do gradiente das pressões neutras em cada ponto também não são facilmente previsíveis. Talvez uma melhor

Tomando o limite de (22.5) quando $x \rightarrow 0$ e levantando a indeterminação pela regra de l'Hospital, vem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\bar{q}}{2\pi h T_0} \left(\frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \right) - 2 +$$

$$(y = x \operatorname{tg} \beta)$$

$$+ \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} (2n+1) \frac{\pi}{2} \exp \left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T_0 \right] \quad (23.5)$$

Como se vê de (23.5) $\partial u / \partial x$ tem limites diferentes conforme se caminha para a origem, por exemplo ao longo do eixo dos xx ($\beta = 0$) ou do eixo dos yy ($\beta = \pi/2$).

De modo análogo se obterá

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\bar{q}}{2\pi h T_0} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \right) - 2 +$$

$$(y = x \operatorname{tg} \beta)$$

$$+ \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} (2n+1) \frac{\pi}{2} \exp \left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T_0 \right] \quad (24.5)$$

solução fôsse calcular o valor médio da tensão σ_0 , geradora das tensões neutras em regime elástico, admitindo rígida a base da fundação. Todavia, este método tornaria muito mais complicadas as expressões (19.5) e (20.5) que já de si não são simples.

Com as limitações que acabamos de referir calculou-se o seguinte exemplo teórico:

ângulo de atrito interno efectivo	$\varphi' = 30^\circ$
coesão	$c' = 1$
tensão efectiva ao nível da fundação antes da carga	$p'_0 = 50$
semi-possança das camadas	$h = 2,25$
peso específico efectivo do solo	$\gamma' = 1$
largura da base da fundação	$b = 10$

Foram calculados os casos seguintes 1) $T = T_0 = 1000 \simeq \infty$; 2) $T = T_0 = 1,2$; 3) $T_0 = 0,4$; 4) $T = T_0 = 0,1$. Estes casos correspondem respectivamente a consolidação médias de 100 %, 74 %, 48,5 % e 24,5 % segundo os valores contidos no Quadro (1.5). Os valores aproximados da tensão média limite $\bar{q}'$ sob a fundação obtidos foram os seguintes

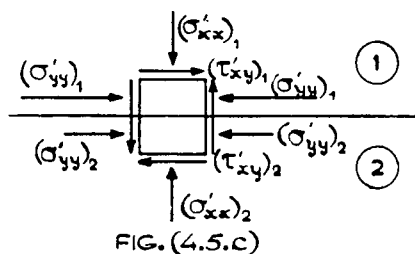
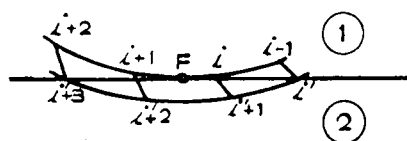
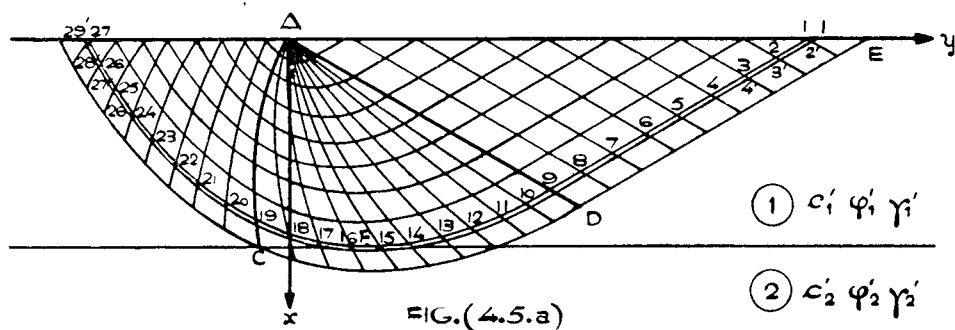
1200 para 100 % de consolidação média,
620 para 74,0 % de consolidação média,
400 para 48,5 % de consolidação média,
250 para 24,5 % de consolidação média,

66. Método de cálculo quando haja várias camadas de solo com ângulos de atrito, coesões e pesos específicos diferentes

Finalmente vejamos como poderia ser tratado o caso em que existam duas* camadas de solos com ângulos de atrito, coesões e pesos específicos diferentes. Suponha-se ainda que existe uma carga uniformemente distribuída dum e doutro lado da fundação correspondente

* A extensão do método proposto a maciços com mais que duas camadas é imediata.

às camadas sobrejacentes (Fig. 4.5). O método sugerido por Sokolovski (1960, p. 104) para o cálculo do impulso num muro de suporte atrás do qual existem duas camadas de solo com características desiguais



não é aplicável aqui, visto não existir um paramento que intercepte a superfície que divide as camadas.

Propomos então o método seguinte:

Por cálculos prévios tanteados obter-se-á a zona plastificada cuja característica inferior é tangente em F à linha de separação das duas camadas.

Conhecem-se então todos os pontos dessa característica os valores das variáveis, x , y , ξ e η e conseqüentemente o valor da tensão média σ' , do ângulo Φ , etc. Calculam-se depois as mesmas variáveis para a característica vizinha $1'$, $2'$, ..., $29'$, por prolongamento das características calculadas anteriormente. Assim os valores das variáveis em $2'$ calculam-se à custa dos valores conhecidos nos pontos 1 e $1'$, pelas fórmulas de recorrência (51.3) e (52.3). Os valores das variáveis no ponto $3'$, calculam-se a partir dos valores conhecidos no ponto 2 e dos

que se acabaram de calcular para o ponto 2'. E assim sucessivamente. Escolhendo convenientemente o intervalo entre os pontos 1 e 1' conseguir-se-á que um certo ponto i' (Fig. 3.5.b) caia sobre a linha de descontinuidade e nele serão obtidos os valores de x , y , ξ e η e a partir destes se obterá σ' e Φ e daí σ'_{xx} , σ'_{yy} e τ'_{xy} pelas fórmulas (36.3) e (37.3). Nesse ponto haverá descontinuidade nas tensões. Porém para satisfazer as equações da estática só a tensão σ'_{yy} pode ser descontínua*. Entrando então com os valores de σ'_{xx} e τ'_{xy} e os de φ'_2 e H'_2 nas fórmulas (36.3) e (37.3), poderá resolver-se o sistema resultante em ordem a $(\sigma'_2)_i$ e $(\Phi'_2)_i$ **. Com estes valores obter-se-á por (40.3) e (43.3) os valores de $(\xi_2)_i$ e $(\eta_2)_i$. Com $(\sigma'_2)_i$, $(\Phi'_2)_i$, φ'_2 e γ'_2 obter-se-á por (23.3) e (45.3) os valores de $(A_2)_i$ e $(B_2)_i$. Tratamento análogo se poderia dar aos valores das variáveis nos pontos i e $i + 1$ da característica anterior que, por serem vizinhos do ponto de tangência F estão necessariamente muito próximos da linha de descontinuidade. Tendo agora os valores das variáveis nos pontos i e i' do meio 2 poderão calcular-se pelas fórmulas de recorrência (51.3) e (52.3) os valores das

* Considere-se, com efeito, um elemento de dimensões $dx \times dy$ (Fig. 4.5.c) que é atravessado pelo traço da superfície de separação dos dois meios 1 e 2 e cuja faceta dy é paralela a essa linha de descontinuidade. É evidente que para satisfazer as equações da estática terá de ser $(\sigma'_{xx})_1 = (\sigma'_{xx})_2$ e $(\tau'_{xy})_1 = (\tau'_{xy})_2$ mas nada obsta a que seja $(\sigma'_{yy})_1 \neq (\sigma'_{yy})_2$.

** Efectivamente dum modo geral a partir de (36.3) e (37.3) poder-se-á obter $(\sigma'_{xx} + H')/\tau'_{xy} = (1 + \sin \varphi' \cos 2\Phi)/\sin \varphi' \sin 2\Phi$ (25.5)

Fazendo $(\sigma'_{xx} + H')/\tau'_{xy} = K$ virá sucessivamente:
 $K \sin \varphi' \sin 2\Phi = 1 + \sin \varphi' \cos 2\Phi$, $(K \sin \varphi' \sin 2\Phi - 1)^2 = \sin^2 \varphi' (1 - \sin^2 2\Phi)$.
 Onde $\sin^2 \varphi' (K^2 + 1) \sin^2 2\Phi - 2K \sin \varphi' \sin 2\Phi + \cos^2 \varphi' = 0$. (26.5)

(26.5) é uma equação do 2.º grau em $\sin 2\Phi$. Para que as suas raízes sejam reais terá de ser $K^2 \geq (K^2 + 1) \cos^2 \varphi'$, ou seja $\cos^2 \varphi' \geq K^2 / (K^2 + 1)$ ou ainda $1 + 1/K^2 \geq 1 + \tan^2 \varphi'$. (27.5)

Como é necessariamente $1/K = \tau'_{xy} / (\sigma'_{xx} + H') \geq \tan \varphi'$ a condição (27.5) é sempre satisfeita e as raízes de (26.5) são sempre reais.

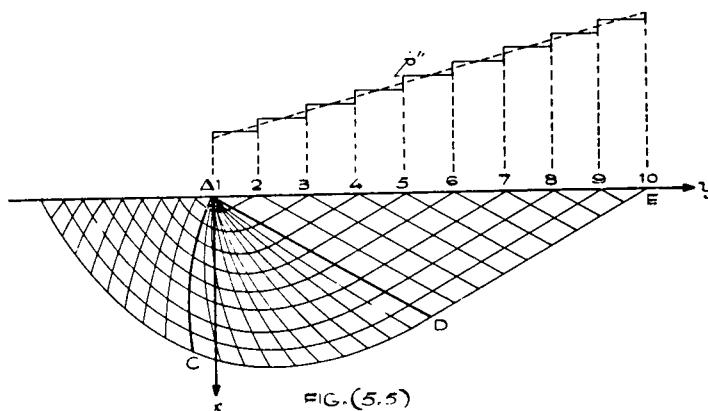
$$\sin 2\Phi = (K \pm \sqrt{K^2 - (K^2 + 1) \cos^2 \varphi'}) / \sin \varphi' (K^2 + 1) \quad (28.5)$$

Das duas raízes de (28.5) deve escolher-se a que mais se aproxima do valor de Φ antes calculado no mesmo ponto mas do outro lado da linha de descontinuidade. Entrando com o valor de Φ assim obtido em qualquer das equações (36.3) ou (37.3) tirar-se-ia o valor de σ' .

variáveis no ponto $i' + 1$ e com estes valores e os do ponto $i + 1$, calcular pelas mesmas fórmulas valores no ponto $i' + 2$. No ponto $i' + 3$ far-se-ia a operação inversa da que se efectuou no ponto i' de entrada no meio 2, isto é, calculavam-se os valores de $(\Phi_1)_{i'+3}$ e $(\sigma'_1)_{i'+3}$ a partir dos valores de $(\sigma'_{xx})_{i'+3}$ e $(\tau'_{xy})_{i'+3}$, que têm de ser iguais para os dois meios. Uma vez de novo no meio 1 seguia-se a aplicação das fórmulas de recorrência até atingir o ponto 29' sob a fundação como anteriormente. Uma nova característica poderia então ser calculada seguindo exactamente o mesmo processo. E assim sucessivamente até se obterem os valores das tensões ao longo de toda a semi-base da fundação.

68. Caso da distribuição não uniforme de tensões na fronteira

No caso da distribuição de tensões na fronteira não ser uniforme, poderia adoptar-se um procedimento semelhante ao da existência de camadas com diferentes características de resistência. Poder-se-ia progredir por degraus como mostra, a Fig. (5.5). Assim, em vez de se cal-



cularem imediatamente os valores das variáveis em todos os pontos da região AED , como sugere Sokolovski, calcular-se-ia em primeiro lugar a característica da segunda família, infinitamente vizinha da origem, que no limite coincide com a própria origem e na qual se não faz

sentir o peso específico do solo. Em seguida calculava-se a outra característica da mesma família que começa no ponto 2 e assim se irá expandindo sucessivamente a rede por secções em forma de casca. O valor a tomar para p'' no cálculo no ponto inicial de cada característica seria a média entre os valores nesse ponto e no anterior.

É natural que este método traga um andamento regular às características e os valores das variáveis variem monòtonamente, o que não acontecia para este caso com o método anteriormente exposto.

APENDICE (1.II)

Formas apresentadas por vários autores para a solução do problema da capacidade de carga duma fundação contínua de base horizontal assente num maciço sem peso no caso de base lisa

A fórmula

$$\begin{aligned} \bar{q}' = c \times \cotg \varphi' \left[\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi'}{1 - \operatorname{sen} \varphi'} \exp (\pi \operatorname{tg} \varphi') - 1 \right] + \\ + p' \times \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi'}{1 - \operatorname{sen} \varphi'} \exp (\pi \operatorname{tg} \varphi') \end{aligned} \quad (2.2)$$

é apresentada por Sokolovski [80]*.

A mesma fórmula tinha sido apresentada por Terzaghi [83]** apenas com $\operatorname{tg}^2 (\pi/4 + \varphi'/2)$ no lugar de $\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi'}{1 - \operatorname{sen} \varphi'}$, que como se sabe são idênticos.

Terzaghi diz ter derivado a referida equação das que foram publicadas por Prandtl (1920) e Reissner (1924). De Beer e Wallays [23]*** citando Buissman (1940) e Prandtl apresentam (2.2) sob a forma

$$\begin{aligned} \bar{q}' = c \left\{ \exp (\pi \operatorname{tg} \varphi') \frac{2 \cos \varphi'}{1 - \operatorname{sen} \varphi'} + \exp [(\pi \operatorname{tg} \varphi') - 1] \cotg \varphi' \right\} + \\ + p' \operatorname{tg}^2 (\pi/4 + \varphi'/2) \exp (\pi \operatorname{tg} \varphi') \end{aligned} \quad (2'.2)$$

Desenvolvendo o colchete de (2'.2) e atendendo ao que se disse para $\operatorname{tg}^2 (\pi/4 + \varphi'/2)$, obtém-se a expressão (2.2).

Meyerhof [61]§ apresenta uma expressão que particularizada coincide com (2.2).

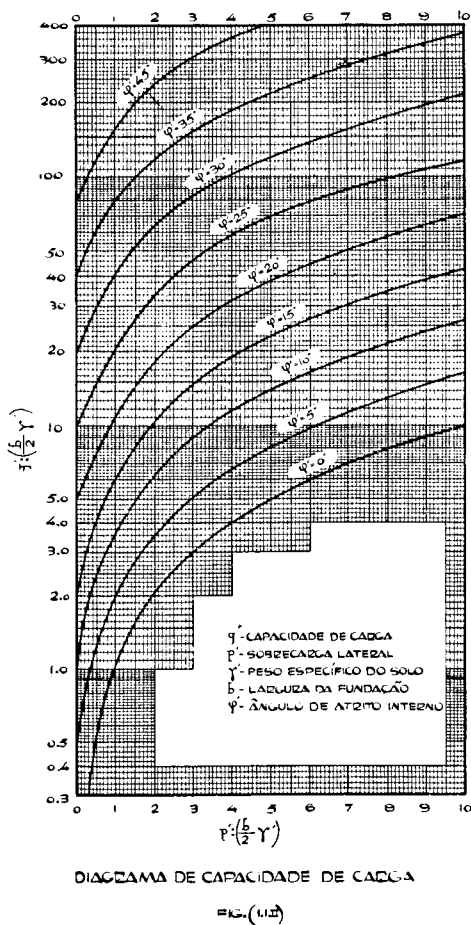
* 1960, p. 59.

** 1943, p. 128.

*** 1948, p. 63.

§ 1951, p. 305.

Mizuno [63]* apresenta um gráfico (Fig. 1.1.II) onde se registam os valores de $2\bar{q}'/b\gamma'$ em função de $2p'/b\gamma'$ para diversos valores de ϕ' entre $\phi' = 0$ e $\phi' = 45^\circ$.



Calculando pelas fórmulas anteriores, com $c' = 0$, o valor de $\frac{2\bar{q}'}{b\gamma'}$ para $\frac{2p'}{b\gamma'} = 10$ (valor máximo do gráfico) que é o caso em que a influência do peso específico γ' é pequena por ser $p' \gg b\gamma'$, verificou-se que os valores coincidem com os do gráfico de Mizuno, para os diferentes ângulos de atrito ϕ' . A introdução de

* 1948, p. 48.

c' far-se-ia pelo teorema dos estados correspondentes, tomando no gráfico $p' + c' \cotg \varphi'$ em vez de p' e correspondentemente $\bar{q}' + c' \cotg \varphi'$ em vez de $\bar{q}'$.

Caquot e Kérisel [12]* apresentam a fórmula

$$r = \frac{p' \cos \varphi'}{\cos \delta_1 - \sin \varphi' \cos \delta'} \exp (\pi \operatorname{tg} \varphi') \quad (1.1.II)$$

onde $\sin \delta' = \frac{\sin \delta_1}{\sin \varphi'}$

que dá a tensão na face BC dum maciço terroso sem peso em estado passivo quando na fronteira actua a carga p' inclinada de δ_1 sobre a superfície livre (Fig. 2.1.II).

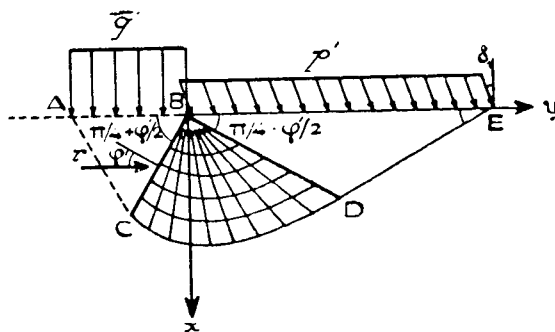


FIG. (2.1.II)

No nosso caso $\delta_1 = 0$ e $\theta = \pi/2$.

Portanto
$$r = \frac{p' \cos \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \exp (\pi \operatorname{tg} \varphi') \quad (2.1.II)$$

Do equilíbrio da cunha ABC deduz-se sucessivamente

$$\bar{q}' \times \overline{AB} = 2 r \cos (\pi/4 + \varphi'/2 - \varphi') \times \overline{AC} = r \frac{\cos (\pi/4 - \varphi'/2)}{\cos (\pi/4 + \varphi'/2)}$$

ou ainda

$$\bar{q}' = p' \times \frac{\cos \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \times \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi'/2) \exp (\pi \operatorname{tg} \varphi') \quad (2''.2)$$

expressão que com pequena transformação trigonométrica se verifica ser idêntica a (2.2) para $c' = 0$. Quando $c' \neq 0$, aplicando a (2''.2) a transformação citada, e em seguida o teorema dos estados correspondentes obtém-se exactamente (2.2).

* 1956, p. 356-358.

APÊNDICE (2.II)

Capacidade de carga das fundações contínuas. Maciço sem peso. Demonstração de que as fórmulas apresentadas por Meyerhof [61]*, Caquot e Kérisel [12]** e Sokolovski [80]*** podem ser adaptadas de forma a coincidirem com a fórmula de Terzaghi

A fórmula de Terzaghi, base rugosa, escreve-se

$$\bar{q}' = c' \cotg \varphi' \left\{ \frac{1}{1 - \operatorname{sen} \varphi'} \times \exp [(3/2 \pi - \varphi') \operatorname{tg} \varphi'] - 1 \right\} + p' \times \frac{1}{1 - \operatorname{sen} \varphi'} \times \exp [(3/2 \pi - \varphi') \operatorname{tg} \varphi'] \quad (3.2)$$

a) Meyerhof apresenta a fórmula §

$$\bar{q}' = c' \left\{ \cotg \varphi' \left[\frac{(1 + \operatorname{sen} \varphi') \exp (2 \theta \operatorname{tg} \varphi')}{1 - \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\mu + \varphi')} - 1 \right] \right\} + p' \left[\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi' \exp (2 \theta \operatorname{tg} \varphi')}{1 - \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\mu + \varphi')} \right] \quad (1.2.II)$$

A fórmula (1.2.II) refere-se a uma fundação num maciço terroso com taludes inclinados lateralmente à fundação dum ângulo

$$\alpha_0 = \theta - \pi + \mu + \psi \quad (2.2.II)$$

sobre a horizontal.

$$\text{Em (2.2.II)} \quad \mu = \pi/4 - \varphi'/2 \quad (3.2.II)$$

$$\text{e} \quad \psi = \pi/4 + \varphi'/2. \quad (4.2.II)$$

No Capítulo II foi deduzida uma outra fórmula para ψ qualquer (20.2).

Na hipótese de Terzaghi $\alpha_0 = 0$ (talude horizontal), $\psi = \varphi'$ e $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$. Portanto, $\theta = 3/4\pi - \varphi'/2$. Substituindo este valor em (2.1.II) obtém-se a expressão (3.2) de Terzaghi.

* 1951, p. 305.

** 1956, p. 355-358.

*** 1960, p. 101.

§ Notação conforme a (Fig. 4.2.), Cap. II.

b) Caquot e Kérisel. A equação (1.1.II) (Apêndice 1.II) escreve-se para este caso ($\delta_1 = 0$ e $\theta = 3/4 \pi - \varphi'/2$),

$$r = \frac{p' \cos \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \exp [(3/2 \pi - \varphi')] \quad (5.2.II)$$

Do equilíbrio da cunha ABC (Fig. 2.1.II), onde agora o ângulo $\widehat{ABC}$ é igual a φ' , tira-se

$$\vec{q}' \overline{AB} = 2r \times \overline{BC}.$$

Portanto $\vec{q}' = r / \cos \varphi'.$ (6.2.II)

Introduzindo o valor de r dado por (5.2.II) em (6.2.II) obtém-se

$$\vec{q}' = p' \times \frac{1}{1 - \sin \varphi'} \times \exp [(3/2 \pi - \varphi') \operatorname{tg} \varphi']. \quad (7.2.II)$$

Aplicado o teorema dos estados correspondentes a (7.2.II), ter-se-á a equação (3.2) de Terzaghi.

c) Sokolovski.

De acordo com a equação (6.2.II) temos

$$\vec{q}' = \frac{\sigma_{nn}}{\cos \varphi'} \times \frac{1}{\cos \varphi'}, \quad (8.2.II)$$

onde σ_{nn} é a componente normal do vector de tensão r .

Substituindo em (8.2.II) o valor de σ_{nn} dado por Sokolovski [80]* para o caso $c' = 0$, temos:

$$\vec{q}' = \frac{p'}{\cos^2 \varphi'} \frac{\cos \delta [\cos \delta + (\sin^2 \varphi' - \sin^2 \delta)^{1/2}]}{1 - \sin \varphi'} \times \exp \left\{ \left[2\beta + \delta + \arcsen \left(\frac{\sin \delta}{\sin \varphi'} \right) \right] \operatorname{tg} \varphi' \right\} \quad (9.2.II)$$

No caso em questão $\delta = \varphi'$ ** e $\beta = \pi/2 - \varphi'$.

Portanto:

$$\vec{q}' = \frac{p'}{\cos^2 \varphi'} \times \frac{\cos^2 \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \exp \left\{ \left[2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi' \right) + \varphi' + \frac{\pi}{2} \right] \operatorname{tg} \varphi' \right\}.$$

Simplificando e aplicando o teorema dos estados correspondentes vem de novo a equação (3.2) de Terzaghi.

* Op. cit. p. 101.

** Conhecida a tensão τ_{nt} , δ obtém-se da equação

$$\tau_{nt} = (\sigma_{nn} + c' \cotg \varphi') \operatorname{tg} \delta.$$

APÊNDICE (1.III)

Equilíbrio limite dum maciço limitado por um plano inclinado de α_0 sobre o horizonte (Fig. 14.3)

Suponha-se como se indicou no Capítulo III que as tensões na fronteira têm distribuição uniforme e componentes

$$\sigma'_{nn} = p'_0 \quad (85.3)$$

$$\tau'_{nt} = \tau'_0 = (p' + H') \operatorname{tg} \delta. \quad (86.3)$$

Já se tinha visto que para este caso as equações diferenciais do equilíbrio se escreviam

$$\frac{d\sigma'_{nn}}{dn} = \gamma' \cos \alpha_0, \quad \frac{d\tau'_{nt}}{dn} = -\gamma' \sin \alpha_0 \quad (87.3)$$

as quais quando integradas e satisfazendo as condições de fronteira (85.3) e (86.3) dão

$$\sigma'_{nn} = p'_0 + \gamma' n \cos \alpha_0 \quad (88.3)$$

$$\tau'_{nt} = \tau'_0 - \gamma' n \sin \alpha_0. \quad (89.3)$$

Também se viu que o domínio de integração é limitado, dum modo geral, pela recta

$$n = n_0 = \frac{p' + H'}{\gamma' \cos \delta} \times \frac{\sin (\delta + \varphi')}{\sin (\alpha_0 - \varphi')} \quad (93.3)$$

que é paralela ao traço da superfície do talude.

Veja-se agora como obter as tensões σ' e o ângulo Φ e, bem assim, as equações das famílias de características no espaço assim definido.

As equações

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{nn} \\ \sigma'_{tt} \end{array} \right\} = \sigma' [1 \pm \sin \varphi' \cos 2(\Phi - \alpha_0)] - H' \quad (65.3)$$

$$e \quad \tau'_{nt} = \sigma' \sin \varphi' \sin 2(\Phi - \alpha_0) \quad (66.3)$$

são gerais e portanto, válidas para este caso.

Igualando estas expressões às respectivas expressões (88.3) e (89.3) e fazendo $\psi = \Phi - \alpha_0$ (1.1.III)

$$\begin{aligned} \text{vem} \quad (1 + \sin \varphi' \cos 2\psi) &= p'_0 + H' + \gamma' n \cos \alpha_0, \\ \sigma' \sin \varphi' \sin 2\psi &= \tau'_0 - \gamma' n \sin \alpha_0 \end{aligned} \quad (2.1.III)$$

Destas duas equações poder-se-ão tirar ou n e σ' em função de ψ ou ψ e σ' em função de n .

Para n em função de ψ ter-se-ia de (2.1.III)

$$\frac{\sin \varphi' \sin 2\psi}{1 + \sin \varphi' \cos 2\psi} = \frac{(p'_0 + H') (\sin \delta / \cos \delta) - \gamma' n \sin \alpha_0}{p'_0 + H' + \gamma' n \cos \alpha_0} \quad (3.1.III)$$

$$\begin{aligned} \text{ou seja} \quad \gamma' \cos \delta (\cos \alpha_0 \sin \varphi' \sin 2\psi + \sin \alpha_0 + \sin \alpha_0 \sin \varphi' \cos 2\psi) &= \\ = (p' + H') (\sin \delta + \sin \delta \sin \varphi' \cos 2\psi - \cos \delta \sin \varphi' \sin 2\psi). \end{aligned} \quad \text{Donde se tira}$$

$$n = \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \times \frac{\sin \delta - \sin \varphi' \sin (2\psi - \delta)}{\sin \alpha_0 + \sin \varphi' \sin (2\psi + \alpha_0)} \quad (4.1.III)$$

Para σ' ter-se-ia

$$\frac{\sigma' (1 + \sin \varphi' \cos 2\psi) - (p'_0 + H')}{\sigma' \sin \varphi' \cos 2\psi - (p'_0 + H') (\sin \delta / \cos \delta)} = \frac{\cos \alpha_0}{\sin \alpha_0}, \quad (5.1.III)$$

e daqui

$$\begin{aligned} \sigma' [\sin \alpha_0 \cos \delta (1 + \sin \varphi' \cos 2\psi) + \cos \alpha_0 \cos \delta \sin \varphi' \sin 2\psi] &= \\ = (p'_0 + H') [\cos \alpha_0 \sin \delta + \sin \alpha_0 \cos \delta], \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \sigma' \cos \delta [\sin \alpha_0 + \sin \varphi' (\sin \alpha_0 \cos 2\psi + \cos \alpha_0 \sin 2\psi)] &= \\ = (p'_0 + H') \sin (\alpha_0 + \delta). \end{aligned} \quad \text{Donde se tira}$$

$$\sigma' = \frac{p'_0 + H'}{\cos \delta} \times \frac{\sin (\alpha_0 + \delta)}{\sin \alpha_0 + \sin \varphi' \sin (2\psi + \alpha_0)} \quad (6.1.III)$$

Procure-se agora exprimir ψ e σ' em função de n . Fazendo o segundo membro de (3.1.III) igual a K , vem sucessivamente $\frac{\sin \varphi' \sin 2\psi}{1 + \sin \varphi' \cos 2\psi} = K$, donde

$$\sin \varphi' \sin 2\psi = K (1 + \sin \varphi' \sqrt{1 - \sin^2 2\psi})$$

$$\text{e ainda} \quad (\sin \varphi' \sin 2\psi - K)^2 = K^2 \sin^2 \varphi' (1 - \sin^2 2\psi),$$

$$\text{ou seja} \quad (1 + K^2) \sin^2 \varphi' \sin^2 2\psi - 2K \sin \varphi' \sin 2\psi - K^2 \cos^2 \varphi' = \delta. \quad (7.1.III)$$

Para que a equação (7.1.III) em $\sin 2\psi$ tenha raízes reais torna-se necessário que $\Delta = K^2 \sin^2 \varphi' - (1 + K^2) \sin^2 \varphi' \cdot K^2 \cos^2 \varphi' = K^2 \sin^2 \varphi' [1 - (1 + K^2) \cos^2 \varphi'] \geq 0$,

$$\text{ou seja} \quad 1 - (1 + K^2) \cos^2 \varphi' \geq 0$$

ou ainda
$$K \geq \operatorname{tg} \varphi'. \quad (8.1.III)$$

Verifiquemos se é satisfeita esta condição.

Sendo

$$K = \frac{(p'_0 + H') \operatorname{tg} \delta - \gamma' n \operatorname{sen} \alpha_0}{p'_0 + H' + \gamma' n \cos \alpha_0} \quad (9.1.III)$$

uma função de α_0 monòtonamente decrescente no intervalo $0 < \alpha_0 < \pi/2$ basta fazer a verificação para $\alpha_0 = 0$. Para este valor de α_0 vem $K = \frac{(p'_0 + H') \operatorname{tg} \delta}{p'_0 + H' + \gamma' n}$.

Com $\delta > \varphi'$ e $\gamma' n \geq 0$ vem necessariamente $K \geq \operatorname{tg} \varphi'$.

A equação (7.1.III) tem, pois, duas raízes reais a saber

$$\operatorname{sen} 2\psi_1 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 2\psi_2 \end{array} \right\} = \frac{K \operatorname{sen} \varphi' \mp \sqrt{K^2 \operatorname{sen}^2 \varphi' [1 - (1 + K^2) \cos^2 \varphi']}}{(1 + K^2) \operatorname{sen}^2 \varphi'},$$

ou seja

$$\operatorname{sen} 2\psi_1 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 2\psi_2 \end{array} \right\} = \frac{K}{(1 + K^2) \operatorname{sen} \varphi'} \left[1 \mp \sqrt{1 - (1 + K^2) \cos^2 \varphi'} \right] \quad (10.1.III)$$

Vê-se ainda de (10.1.III) que as raízes de (7.1.III) são ambas do mesmo sinal que é o sinal de K . A estes dois valores das raízes correspondem os dois estados possíveis do máciço: estado activo ou limite inferior, estado passivo ou limite superior. Aplicando a fórmula a casos particulares vê-se rapidamente que para o caso em questão (estado passivo) deve tomar-se o sinal — para o radical de (10.1.III). Há pois que escolher

$$\operatorname{sen} 2\psi_1 = \frac{K}{(1 + K^2) \operatorname{sen} \varphi'} \times \left(1 - \sqrt{1 - (1 + K^2) \cos^2 \varphi'} \right). \quad (11.1.III)$$

Há ainda dois ângulos $2\psi_1$ que satisfazem (11.1.III). Sabe-se, porém que na fronteira em questão quando $\alpha_0 = \delta = 0$ e portanto $K = 0$, há-de ser $\psi_1 = \pi/2$. Há, pois, que escolher

$$2\psi_1 = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left[\frac{K}{(1 + K^2) \operatorname{sen} \varphi'} \left(1 - \sqrt{1 - (1 + K^2) \cos^2 \varphi'} \right) \right] \quad (12.1.III)$$

Calculado o ângulo $\psi = \psi_1$ pela fórmula (12.1.III) a tensão média σ' obtinha-se de qualquer das equações de (2.1.III), por exemplo da primeira:

$$\sigma' = \frac{p'_0 + H' + \gamma' n \cos \alpha_0}{1 + \operatorname{sen} \varphi' \cos 2\psi}. \quad (13.1.III)$$

Vejamos agora como calcular as coordenadas das características.

Sabe-se que as equações das características poderão sempre obter-se a partir das equações diferenciais $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\Phi \mp \mu)$ ou duas suas equivalentes para o caso presente

$$\frac{dt}{dn} = \operatorname{tg} (\psi \mp \mu) \quad (14.1.III)$$

Por outro lado n é dado em (4.1.III) em função de ψ . Temos pois a relação

$$\frac{dt}{d\psi} = \frac{dn}{d\psi} \operatorname{tg}(\psi + \mu) \quad (15.1.III)$$

onde $dn/d\psi$ é dado pela expressão*

$$\frac{d\psi}{dn} = -2 \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (\alpha_0 + \delta) \times \frac{\cos 2\psi + \operatorname{sen} \varphi'}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2}. \quad (16.1.III)$$

Introduzindo este valor em (15.1.III) e simplificando obtém-se**

$$\frac{dt}{d\psi} = -2 \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (\alpha_0 + \delta) \frac{\operatorname{sen} 2\psi \mp \cos \varphi'}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2} \quad (20.1.III)$$

A função primitiva $t = f(\psi) + C$ do segundo membro de (20.1.III) é facilmente exprimível em funções elementares. Para isso faça-se

$$-2 \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (\alpha_0 + \delta) = C \quad (21.1.III)$$

$$A = \int \frac{\operatorname{sen} 2\psi}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2} d\psi \quad (22.1.III)$$

$$e \quad B = \int \frac{\mp \cos \varphi'}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2} d\psi. \quad (23.1.III)$$

$$\text{Teremos então} \quad t = C(A + B) = C \cdot t_e \quad (24.1.III)$$

* Com efeito derivando (4.1.III) vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\psi} &= \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \left\{ \frac{-2 \operatorname{sen} \varphi' \cos (2\psi - \delta) [\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{-2 \operatorname{sen} \varphi' \cos (2\psi + \alpha_0) [\operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi - \delta)]}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2} \right\} = \\ &= -2 \operatorname{sen} \varphi' \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \left\{ \frac{\operatorname{sen} \alpha_0 \cos (2\psi - \delta) + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0) \cos (2\psi - \delta)}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos (2\psi + \alpha_0) \operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi - \delta) \cos (2\psi + \alpha_0)}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2} \right\} = \\ &= -2 \operatorname{sen} \varphi' \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \frac{\operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (\alpha_0 + \delta) + \operatorname{sen} \alpha_0 \cos 2\psi - \cos \delta + \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} 2\psi \operatorname{sen} \delta}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2} + \\ &\quad + \frac{\operatorname{sen} \delta \cos 2\psi \cos \alpha_0 - \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} 2\psi \operatorname{sen} \alpha_0}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2} \left\{ \right. \end{aligned}$$

Daqui se tira (16.1.III).

** Das fórmulas trigonométricas elementares sabe-se que

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a = 2 \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cos^2 a. \text{ Mas } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

Para calcular A faz-se a mudança $\operatorname{tg} \psi = \lambda$. (25.1.III)

Donde
$$d\psi = \frac{1}{1 + \lambda^2} d\lambda$$
 (26.1.III)

e também

$$\operatorname{sen} 2\psi = 2\operatorname{sen} \psi \cos \psi = 2 \operatorname{tg} \psi \cos^2 \psi = \frac{2 \operatorname{tg} \psi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \quad (27.1.III)$$

$$\cos 2\psi = \cos^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \psi = \cos^2 \psi (1 - \operatorname{tg}^2 \psi) = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}. \quad (28.1.III)$$

Substituindo estes valores em (22.1.III) vem

$$A = \int \frac{2\lambda/(1 + \lambda^2)}{\left[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \left(\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \cos \alpha_0 + \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \operatorname{sen} \alpha_0 \right) \right]^2} \times \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} =$$

$$= \int \frac{2\lambda d\lambda}{\{(1 + \lambda^2) \operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' [2\lambda \cos \alpha_0 + (1 - \lambda^2) \operatorname{sen} \alpha_0]\}^2}.$$

Desenvolvendo e ordenando, tem-se

$$A = \int \frac{2\lambda d\lambda}{[\operatorname{sen} \alpha_0 (1 - \operatorname{sen} \varphi') \lambda^2 + 2\operatorname{sen} \varphi' \cos \alpha_0 \lambda + \operatorname{sen} \alpha_0 (1 + \operatorname{sen} \varphi')]^2} \quad (29.1.III)$$

Se o binómio discriminante do denominador do integrando for $\Delta \geq 0$ esse denominador tem 4 raízes reais iguais duas a duas. Se $\Delta < 0$ há também 4 raízes iguais duas a duas mas são imaginárias. Veja-se o que implica a condição $\Delta \geq 0$. Ter-se-á

$$\Delta = (\operatorname{sen} \varphi' \cos \alpha_0)^2 - \operatorname{sen} \alpha_0 (1 - \operatorname{sen} \varphi') [\operatorname{sen} \alpha_0 (1 + \operatorname{sen} \varphi')] =$$

$$= \operatorname{sen}^2 \varphi' \cos^2 \alpha_0 - \operatorname{sen}^2 \alpha_0 (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi').$$

Portanto $\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a}$ e também $\operatorname{tg} a = \frac{1 - \cos 2a}{\operatorname{sen} 2a}$

Assim
$$\operatorname{tg} (\psi \mp \mu) = \frac{1 - \cos (2\psi \mp 2\mu)}{\operatorname{sen} (2\psi \mp 2\mu)} \quad (17.1.III)$$

Substituindo (16.1.III) e (17.1.III) em (15.1.III) e notando que $\operatorname{sen} \varphi' = \cos 2\mu$ obtém-se

$$\frac{dt}{d\psi} = -2 \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (\alpha_0 + \delta) \times$$

$$\times \frac{(\cos 2\psi + \cos 2\mu) (1 - \cos 2\psi \cos 2\mu \mp \operatorname{sen} 2\psi \operatorname{sen} 2\mu)}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2 \operatorname{sen} (2\psi \pm 2\mu)}. \quad (18.1.III)$$

Desenvolvendo o numerador da fracção, tem-se

$$\begin{aligned} & \cos 2\psi + \cos 2\mu - \cos^2 \psi \cos 2\mu \mp \operatorname{sen} 2\psi \operatorname{sen} 2\mu \cos 2\psi - \cos 2\psi \cos^2 2\mu \mp \\ & \mp \operatorname{sen} 2\psi \operatorname{sen} 2\mu \cos 2\mu = \operatorname{sen}^2 \psi \cos 2\mu \mp \operatorname{sen} 2\psi \operatorname{sen} 2\mu \cos 2\psi + \cos 2\psi \operatorname{sen}^2 2\mu \mp \\ & \mp \operatorname{sen} 2\psi \operatorname{sen} 2\mu \cos 2\mu = \operatorname{sen} 2\psi (\operatorname{sen} 2\psi + \cos 2\mu \mp \cos 2\psi \operatorname{sen} 2\mu) + \operatorname{sen} 2\mu (\operatorname{sen} 2\mu \cos 2\psi \mp \\ & \mp \operatorname{sen} 2\psi \cos 2\mu) = \operatorname{sen} 2\psi [\operatorname{sen} (2\psi \mp 2\mu)] \mp \operatorname{sen} 2\mu [\operatorname{sen} 2\psi \mp 2\mu] = \\ & = (\operatorname{sen} 2\psi \mp \operatorname{sen} 2\mu) [\operatorname{sen} (2\psi \mp 2\mu)] \end{aligned} \quad (19.1.III)$$

Substituindo este valor no numerador de (18.1.III) e atendendo a que $\operatorname{sen} 2\mu = \cos \varphi'$, vem finalmente (20.1.III).

$$\text{Se } \Delta \leq 0 \text{ virá } \quad \text{sen}^2 \varphi' \cos^2 \alpha_0 - \text{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi' \geq 0$$

ou seja

$$\text{tg}^2 \varphi' \leq \text{tg}^2 \alpha_0,$$

o que implica $\varphi' \leq |\alpha_0|$. Isto é, a inclinação α_0 do talude tem de ser em módulo menor ou quando muito igual ao ângulo de atrito do solo. Vejamos em primeiro lugar qual a expressão de A para o caso de $\alpha_0 < \varphi'$.

A expressão entre colchetes de (29.1.III) tem por raízes,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} \frac{-\text{sen } \varphi' \cos \alpha_0 \pm \sqrt{\text{sen}^2 \varphi' \cos^2 \alpha_0 - \text{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi'}}{\text{sen} \alpha_0 (1 - \text{sen } \varphi')} \quad (30.1.III)$$

com $\alpha_0 < \varphi'$ estas raízes serão reais e desiguais.

Então A toma a forma

$$A = \int \left[\frac{C_1}{(\lambda - \lambda_1)^2} + \frac{C_2}{\lambda - \lambda_1} + \frac{C_3}{(\lambda - \lambda_2)^2} + \frac{C_4}{\lambda - \lambda_2} \right] d\lambda \quad (31.1.III)$$

onde as constantes C_i são definidas pela identidade

$$2\lambda \equiv C_1(\lambda - \lambda_2)^2 + C_2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 + C_3(\lambda - \lambda_1)^2 + C_4(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2),$$

que fornece o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -(2\lambda_2 + \lambda_1) & 1 & -(2\lambda_1 + \lambda_2) \\ -2\lambda_2 & (\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2) & -2\lambda_1 & (\lambda_1^2 + 2\lambda_2\lambda_1) \\ \lambda_2^2 & -\lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_1^2 & -\lambda_2\lambda_1^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32.1.III)^*$$

Resolvido este sistema obtém-se as constantes C_i . Atendendo a que por (32.1.III) se verifica $C_3 = -C_2$, viria

$$A = \frac{-C_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{-C_3}{\lambda - \lambda_2} + C_2 \log \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} + Cte. \quad (33.1.III)$$

com

$$\lambda = \text{tg } \psi.$$

Veja-se agora o caso de ser $\alpha_0 > \varphi'$. As raízes (30.1.III) são agora imaginárias. (29.1.III) toma a forma

$$A = \int \frac{2\lambda d\lambda}{[(\lambda - p)^2 + q^2]^2} \quad (34.1.III)$$

* O sistema (32.1.III) pode simplificar-se reduzindo-se apenas a 3 equações visto que $C_4 = -C_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 + (-2\lambda_2 - \lambda_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2) C_2 &= 0 \\ -2\lambda_2 C_1 - 2\lambda_1 C_3 + (\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2 - 2\lambda_2\lambda_1) C_2 &= 2 \\ \lambda_2^2 C_1 + \lambda_1^2 C_3 + (-\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_2\lambda_1^2) C_2 &= 0 \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 - \lambda_2 & 1 \\ -2\lambda_2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & -2\lambda_1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) & \lambda_1^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32.1.III)$$

$$\text{com } p = \frac{-\operatorname{sen} \varphi' \cos \alpha_0}{\operatorname{sen} \alpha_0 (1 - \operatorname{sen} \varphi')} \text{ e } q = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi' - \operatorname{sen}^2 \varphi' \cos^2 \alpha_0}}{\operatorname{sen} \alpha_0 (1 - \operatorname{sen} \varphi')} \quad (35.1.III)$$

O integral (34.1.III) calcula-se pela substituição

$$\lambda - p = q\varepsilon, \quad \text{donde } d\lambda = qd\varepsilon. \quad (36.1.III)$$

Substituindo, vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \int \frac{2\lambda d\lambda}{[(\lambda - p)^2 + q^2]^2} &= \int \frac{2(p + q\varepsilon) q d\varepsilon}{(q^2\varepsilon^2 + q^2)^2} = \int \frac{2p + 2q\varepsilon}{q^4(\varepsilon^2 + 1)^2} q d\varepsilon = \\ &= \frac{2p}{q^3} \int \frac{d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + 1)^2} + \frac{1}{q^2} \int \frac{2\varepsilon d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (37.1.III)$$

$$\int \frac{2\varepsilon d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + 1)^2} = \frac{-1}{\varepsilon^2 + 1}. \quad (38.1.III)$$

O integral $\int \frac{d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + 1)^2}$ calcula-se por partes e dá

$$\int \frac{d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + 1)^2} = \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon^2 + 1)} + \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \varepsilon}{2}. \quad (39.1.III)$$

Substituindo (39.1.III) e (38.1.III) em (37.1.III), vem

$$A = \frac{p}{q^3} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + 1} + \operatorname{arctg} \varepsilon \right) - \frac{1}{q^2} \times \frac{1}{\varepsilon^2 + 1}. \quad (40.1.III)$$

Mas de (36.1.III) tira-se $\varepsilon = (\lambda - p)/q$ com $\lambda = \operatorname{tg} \psi$.

Logo, para este caso ($\alpha_0 > \varphi'$)

$$A = \frac{p}{q^3} \left[\frac{(\operatorname{tg} \psi - p) \times q}{(\operatorname{tg} \psi - p)^2 + q^2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{(\operatorname{tg} \psi - p)}{q} \right) \right] - \frac{1}{(\operatorname{tg} \psi - p)^2 + q^2} \quad (40.1.III).a$$

Veja-se agora que expressões vêm para B nos dois casos tratados.

$$B = \mp \cos \varphi' \int \frac{d\psi}{[\operatorname{sen} \alpha_0 + \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0)]^2}. \quad (23.1.III)$$

$$\text{Faça-se} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{2\psi + \alpha_0}{2} \right) = \lambda' \quad (41.1.III)$$

$$\text{ou seja } 2\psi + \alpha_0 = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda' \quad \text{e, diferenciando,} \quad d\psi = \frac{d\lambda'}{1 + \lambda'^2}.$$

* Também se poderá transformar o integrando de (23.1.III) em fracção racional fazendo $\operatorname{sen} (2\psi + \alpha_0) = (\lambda'^2 - 1)/(\lambda'^2 + 1)$, mas a integração seria, eventualmente, mais longa.

Mas

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\psi + \alpha_0) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{(2\psi + \alpha_0)}{2}\right)\cos\left(\frac{(2\psi + \alpha_0)}{2}\right) = 2\operatorname{tg}\left(\frac{(2\psi + \alpha_0)}{2}\right)\cos^2\left(\frac{(2\psi + \alpha_0)}{2}\right) = \\ &= 2\operatorname{tg}\left(\frac{(2\psi + \alpha_0)}{2}\right) \bigg/ \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{(2\psi + \alpha_0)}{2}\right)\right] = \frac{2\lambda'}{1 + \lambda'^2}\end{aligned}$$

Substituindo em (23.1.III) vem

$$B = \mp \cos \varphi' \int \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen} \varphi' \cdot 2\lambda'/(1 + \lambda'^2)} \times \frac{d\lambda'}{1 + \lambda'^2}.$$

Simplificando, tem-se

$$B = \mp \cos \varphi' \int \frac{(1 + \lambda'^2) d\lambda'}{[(1 + \lambda'^2) \operatorname{sen} \alpha_0 + 2\lambda' \operatorname{sen} \varphi']^2},$$

e ainda

$$B = \mp \cos \varphi' \int \frac{(1 + \lambda'^2) d\lambda'}{[\operatorname{sen} \alpha_0 \cdot \lambda'^2 + 2\operatorname{sen} \varphi' \cdot \lambda' + \operatorname{sen}^2 \alpha_0]^2}. \quad (42.1.III)$$

As raízes do denominador do integrando serão reais quando for $\Delta = \operatorname{sen}^2 \varphi' - \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \geq 0$ ou seja $\operatorname{sen} \varphi' \geq |\operatorname{sen} \alpha_0|$, e ainda $\varphi' \geq |\alpha_0|$.

Considere-se em primeiro lugar o caso $\alpha_0 < \varphi'$.

Então as raízes do denominador de (42.1.III) serão reais e desiguais e dadas pelas expressões

$$\lambda'_{1,2} \left\{ = \frac{-\operatorname{sen} \varphi' \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi' - \operatorname{sen}^2 \alpha_0}}{\operatorname{sen} \alpha_0} \right. \quad (43.1.III)$$

B tomará a forma

$$B = \mp \cos \varphi' \int \left[\frac{C'_1}{(\lambda' - \lambda'_1)^2} + \frac{C'_2}{\lambda' - \lambda'_1} + \frac{C'_3}{(\lambda' - \lambda'_2)^2} + \frac{C'_4}{\lambda' - \lambda'_2} \right] d\lambda' \quad (44.1.III)$$

As constantes C_i calculam-se a partir da identidade

$$1 - \lambda'^2 \equiv (\lambda' - \lambda'_2)^2 C'_1 + (\lambda' - \lambda'_1)(\lambda' - \lambda'_2)^2 C'_2 + (\lambda' - \lambda'_1)^2 C'_3 + (\lambda' - \lambda'_1)^2 (\lambda' - \lambda'_2) C'_4.$$

Esta identidade fornece um sistema de 4 equações lineares semelhantes a (32.1.III), que agora se escreve

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -(2\lambda'_2 + \lambda'_1) & 1 & -(2\lambda'_1 + \lambda'_2) \\ -2\lambda'_2 & (\lambda'^2_2 - 2\lambda'_1\lambda'_2) & -2\lambda_1 & (\lambda'^2_1 + 2\lambda'_2\lambda'_1) \\ \lambda'^2_2 & -\lambda'_1\lambda'^2_2 & \lambda'^2_1 & -\lambda'_2\lambda'^2_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \\ C'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (45.1.III)$$

Visto que $C_4 = -C_2$ (1.^a equação), também este sistema se reduz a um de 3 equações:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda'_1 - \lambda'_2 & 1 \\ -2\lambda'_2 & \lambda'^2_2 - \lambda'^2_1 & -2\lambda'_1 \\ \lambda'^2_2 & \lambda'_1 \lambda'_2 (\lambda'_1 - \lambda'_2) & \lambda'^2_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (45.1.III)$$

O integrando (44.1.III) tem então por expressão

$$B = \mp \cos \varphi' \left[\frac{-C'_1}{\lambda' - \lambda'_1} + \frac{-C'_3}{\lambda' - \lambda'_2} + C_2 \log e \frac{\lambda' - \lambda'_1}{\lambda' - \lambda'_2} + Cte. \right] \quad (46.1.III)$$

Do caso de $\alpha_0 > \varphi'$ as raízes λ'_1 (43.1.III) são imaginárias e então (42.1.III) toma a forma

$$B = \mp \cos \varphi' \int \frac{(1 + \lambda'^2) d\lambda'}{[(\lambda' - p')^2 + q'^2]^2} \quad (47.1.III)$$

Com

$$p' = \frac{-\sin \varphi'}{\sin \alpha_0} \quad e \quad q' = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \varphi'}}{\sin \alpha_0} \quad (48.1.III)$$

Decompondo o integrando de (47.1.III) tem-se ainda

$$B = \mp \cos \varphi' \left\{ \int \frac{[2p'\lambda' + (1 - p'^2 - q'^2)] d\lambda'}{[(\lambda' - p')^2 + q'^2]^2} + \int \frac{d\lambda'}{(\lambda' - p')^2 + q'^2} \right\} \quad (49.1.III)$$

Fazendo $\lambda' - p' = q'\epsilon'$, e daí $d\lambda' = q'd\epsilon'$, a expressão entre colchetes vem

$$\begin{aligned} & \int \frac{[2p'(p' + q'\epsilon') + (1 - p'^2 - q'^2)] q' d\epsilon'}{[(q'\epsilon')^2 + q'^2]^2} + \int \frac{q' d\epsilon'}{(q'\epsilon')^2 + q'^2} = \\ & = \frac{p'^2 + 1 - q'^2}{q'^3} \int \frac{d\epsilon'}{(\epsilon'^2 + 1)^2} + \frac{p'}{q'^2} \int \frac{2\epsilon' d\epsilon'}{(\epsilon'^2 + 1)^2} + \frac{1}{q'} \int \frac{d\epsilon'}{\epsilon'^2 + 1} \end{aligned}$$

O último integral dá $\frac{\arctg \epsilon'}{q'}$, o segundo dá $\frac{p'}{q'^2} \times \frac{-1}{\epsilon'^2 + 1}$ e o primeiro dá*

$$\frac{1 + p'^2 - q'^2}{q'^3} \left[\frac{\epsilon'}{2(\epsilon'^2 + 1)} + \frac{\arctg \epsilon'}{2} \right]$$

Vem, pois

$$\begin{aligned} B = \pm \cos \varphi' \left\{ \frac{1 + p'^2 - q'^2}{q'^3} \left[\frac{\epsilon'}{2(\epsilon'^2 + 1)} + \frac{\arctg \epsilon'}{2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{p'}{q'^2(\epsilon'^2 + 1)} + \frac{\arctg \epsilon'}{q'} \right\} \quad (50.1.III) \end{aligned}$$

* Conforme (39.1.III).

Com

$$\varepsilon' = \frac{\lambda' - p'}{q'} = \frac{\operatorname{tg}(\psi + \alpha_0) - p'}{q'} \quad (51.1.III)$$

O sinal de — nas expressões (46.1.III) e (50.1.III) correspondem às características de equação $dt/dn = \operatorname{tg}(\psi - \mu)$ e o sinal de + às de equação $dt/dn = \operatorname{tg}(\psi + \mu)$. Como às características radiais corresponde o menor ângulo com o eixo dos nn (ou dos xx), há que tomar para elas o sinal —.

Resumindo, dir-se-á que o problema do equilíbrio limite do maciço com peso e em talude com carga uniforme na fronteira tem solução analítica. O valor da tensão média σ' é dado pela expressão (6.1.III) ou (13.1.III).

As características são dadas em forma paramétrica em função de ψ . A sua coordenada n tem por expressão (4.1.III) e a coordenada t têm expressões diferentes conforme $\alpha_0 < \varphi'$ ou $\alpha_0 > \varphi'^*$.

Se $\alpha_0 < \varphi'$ vem

$$t = -2 \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen}(\alpha_0 + \delta) \left\{ \frac{-C_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{-C_3}{\lambda - \lambda_2} + \log_e \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} \mp \right. \\ \left. \mp \cos \varphi' \left[\frac{-C'_1}{\lambda' - \lambda_1} + \frac{-C'_3}{\lambda' - \lambda'_2} + C'_2 \log_e \frac{\lambda' - \lambda'_1}{\lambda' - \lambda'_2} \right] \right\} + Cte. \quad (52.1.III)$$

As constantes C_i e C'_i obtêm-se dos sistemas de equações lineares (32.1.III.a) e (45.1.III.a) respectivamente. λ_i e λ'_i são raízes de equações do 2.º grau dadas por (30.1.III) e (43.1.III) respectivamente. λ e λ' são funções de ψ :

$$\lambda = \operatorname{tg} \psi \quad \text{e} \quad \lambda' = \operatorname{tg}(\psi + \alpha_0/2).$$

Para o caso de ser $\alpha_0 > \varphi'$ vem

$$t = -2 \frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta} \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen}(\alpha_0 + \delta) \left\{ \frac{p}{q_3} \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + 1} + \operatorname{arctg} \varepsilon \right] - \frac{1}{q^2} \times \frac{1}{\varepsilon^2 + 1} \mp \right. \\ \left. \mp \cos \varphi' \left\{ \frac{1 + p'^2 - q'^2}{q'_3} \left[\frac{\varepsilon'}{2(\varepsilon'^2 + 1)} + \frac{\operatorname{arctg} \varepsilon'}{2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{p'}{q'^2(\varepsilon'^2 + 1)} + \frac{\operatorname{arctg} \varepsilon'}{q'} \right] \right\} \right\} + Cte \quad (53.1.III)$$

onde $\varepsilon = \frac{\lambda - p}{q} \quad \text{com} \quad \lambda = \operatorname{tg} \psi$

e $\varepsilon' = \frac{\lambda' - p'}{q'} \quad \text{com} \quad \lambda' = \operatorname{tg}(\psi + \alpha_0/2).$

p , q e p' , q' são dados por (35.1.III) e (48.1.III) respectivamente.

* Para o caso limite $\alpha_0 = \varphi'$ viriam expressões para t diferentes de quaisquer das anteriores, mas facilmente dedutíveis pelo mesmo processo. O interesse, porém, de as deduzir é reduzido, porquanto com pequeno erro se pode sempre tomar $\alpha_0 < \varphi'$, ou $\alpha_0 > \varphi'$.

Já se viu que os sinais de (52.1.III) e (53.1.III) definem os dois tipos de características. A constante que figura nessas equações define a característica particular que se deseja. Assim, se se quer a característica que passa na origem das coordenadas, faz-se $n = 0$ em (12.1.III) e daí tiramos ψ que, substituído em (52.1.III) se $\alpha_0 < \varphi'$, ou em (53.1.III) se $\alpha_0 > \varphi'$, com $t = 0$, dá o valor da constante em cada caso.

APENDICE (2.III)

Capacidade de carga das fundações. Programa em «Auto-código» para a calculadora «Elliot 803-B»

A pág. 114 a 117 do Capítulo III foram apresentadas as convenções fundamentais necessárias à compreensão do programa. Abaixo vamos reproduzir o programa propriamente dito mas, embora ele se explique por si próprio, convém dar algumas indicações complementares.

Começemos pelos dados.

A máquina «lê» sucessivamente na fita de dados* o espaçamento entre os pontos de cálculo ($\Delta s \equiv D34$) medido na primeira fronteira (ao longo da recta AE , Fig. 13.3); a componente do peso específico do solo na direcção, do eixo dos xx ($\gamma'_x \equiv D35$); a profundidade ($h \equiv D37$) à qual se situa o nível freático, ou seja a profundidade à qual as componentes γ'_x e γ'_y tomam o valor $k\gamma'_x$ e $k\gamma'_y$ onde a constante de redução (ou aumento) é $k \equiv D38$. Se não há variações no peso específico do solo basta fazer h grande (1000 por exemplo) e/ou $k \equiv 1$. Em seguida a máquina lê 16 valores (D1 a D16). D1 é o ângulo φ' em graus. D2 é a coesão c' que é expressa na mesma unidade da tensão normal na fronteira p'_0 e em consistência com as unidades tomadas para γ'_x e γ'_y e para a dimensão Δs . Assim se Δs for tomado em metros, γ'_x e γ'_y tomados em tm^{-2} , a coesão c' e a tensão normal p'_0 têm de ser tomadas em tm^{-2} **. D3 é o ângulo δ_1 em graus o qual indica a inclinação do vector tensão na primeira fronteira no caso de $c' = 0$ e é dum modo geral definido a partir da equação (67.3) (Cap. III). D4 é o ângulo δ_2 (em graus) que está relacionado com a rugosidade da base, equação

* A fita de dados é «lida» após a leitura da fita com o programa. Ambas as fitas são de papel e perfuradas em* «linguagem» binária. Têm transversalmente um máximo de 5 furos correspondentes a um número compreendido entre 1 e $2^5 = 32$. A cada um desses números faz-se corresponder uma letra, um algarismo ou um símbolo (+, -, @, *, %, etc.).

** O programa também trabalha sob forma adimensional nas condições referidas no Capítulo III (pág. 111). Nesse caso deve fazer-se $c' \equiv D2 = 0$ mas em contrapartida em vez de p'_0 tomar-se-á $p'' = (p'_0 + H') \sigma^0$ onde $H' = \cotg \varphi'$ e σ^0 é uma constante arbitrária com as dimensões duma tensão.

(77.3). D5 é a inclinação α_0 da «superfície livre equivalente» (Fig. 13.3) sobre o plano horizontal. Os dados D6 a D16, inclusive, são os valores da tensão normal p'_0 na primeira fronteira, nos sucessivos pontos cujas distâncias à origem são 0, Δs , $2 \times \Delta s$, ..., $11 \times \Delta s$. Para ângulos de atrito até $\varphi' = 30^\circ$, não são precisos mais dados que os cinco primeiros (D34 a D38) e os dezasseis últimos (D1 a D16), sendo (D6 a D16) os valores de p'_0 sempre iguais, por se supor a tensão uniforme na primeira fronteira. Se $\varphi' < 30^\circ$ há que juntar mais valores de p'_0 iguais aos anteriores. O número de valores de p'_0 a juntar é dado por

$$M = \text{inteiro de } \frac{\varphi' - 30^\circ}{2} \quad (1.2.III)$$

Assim, para $\varphi' = 35^\circ$ há que incluir na fita de dados 13 valores de p'_0 ($11 + 2$) visto que $M = 2$. No programa não está estabelecido nenhum limite superior de φ' . Porém nos cálculos que efectuámos o maior valor do ângulo de atrito considerado foi $\varphi' = 45^\circ$, a que corresponde $M = 7$. Houve, pois, que incluir nos dados um número de valores de p'_0 variável entre 11 e 18, conforme o valor de φ' ; esse número é igual ao número de pontos de cálculo tomados na primeira fronteira (AE, Fig. 13.3). Como se vê o comprimento total tomado sobre essa fronteira varia entre $11 \times \Delta s$ e $(11 + M) \times \Delta s$. Portanto, quanto maior for o valor de Δs arbitrado, maior será o comprimento total tomado sobre a primeira fronteira e consequentemente maior o valor da abscissa $-y$ do último ponto calculado sob a base da fundação. Esse valor de $-y$ deveria coincidir com a semi-largura $b/2$ da base da fundação mas só por acaso isso acontecerá no primeiro cálculo efectuado. Para o maciço sem peso pode calcular-se o comprimento a a tomar sobre a primeira fronteira* e consequentemente o valor de Δs a incluir nos dados de forma a que a abscissa $-y$ seja igual a $b/2$, como convém. Porém, nos maciços com peso, o valor de a (ou de Δs) que faz $-y = b/2$, não é conhecido «a priori», mas pode obter-se por tanteios. Uma primeira boa aproximação será a de supor o maciço sem peso e calcular a pela fórmula (2.2.III) abaixo indicada. Os valores de a assim calculados são, em geral, em excesso em relação aos correspondentes valores para os maciços com peso. É claro que se o valor de $-y$ calculado for maior que $b/2$ haverá apenas que tomar nos resultados finais o valor de $\bar{q}'$ correspondente ao ponto de abscissa $-y = b/2$, obtido se necessário por interpolação.

Vejamos agora os resultados.

Quanto à apresentação de resultados foram elaborados dois programas:

No primeiro a máquina perfura ou imprime uma primeira série de 5 colunas de valores, das variáveis independentes x, y e correspondentes valores das variáveis

* Nos maciços sem peso por serem exponenciais logarítmicas as características da segunda família, seria possível demonstrar que para satisfazer a condição $-y = b/2$ sob a fundação no caso de base lisa se teria de tomar sobre a primeira fronteira um comprimento

$$a = b/2 \cotg \mu \exp [\pi/2 + \alpha_0 \operatorname{tg} \varphi'] \quad (2.2.III)$$

onde $\mu = \pi/4 - \varphi'/2$.

Para base rugosa haveria que tomar para a o dobro do valor calculado segundo (2.2.III).

dependentes ξ e η^* e da tensão média σ' . Esta primeira série de 10 a 10 + M linhas, conforme o ângulo de atrito φ' serve só de verificação e refere-se aos pontos da característica infinitamente vizinha da origem, pontos esses que no limite se acumulam na própria origem (0,0).

No caso da base lisa a máquina além desses só imprime mais os valores finais em duas séries: a primeira com os valores de x , y , ξ , η e σ' respectivamente na 1.^a, 2.^a, 3.^a, 4.^a e 5.^a colunas, para os pontos da base da fundação; na segunda série imprime os valores da tensão média sob a fundação $\bar{q}'$, da tensão tangencial τ'_{xy} , tensão normal σ'_{xx} e coordenadas x e y respectivamente na 1.^a, 2.^a, 3.^a, 4.^a e 5.^a colunas, para os mesmos pontos da base da fundação. É claro que neste caso será para todos os pontos $x = \tau'_{xy} = 0$. Também será necessariamente para todos eles $y < 0$.

No caso de base rugosa a máquina imprime séries múltiplas dos valores x , y , ξ , η , σ' e $\bar{q}'$, τ'_{xy} , σ'_{xz} , x e y , mas para várias características satisfazendo a condição $\Phi_c = 0$ (pág. 111) no seu último ponto (Fig. 13.3.b).

É claro que só nos interessa os valores da característica cuja abscissa — y do último ponto coincide com o valor $b/2$ da semi-largura da fundação.

O segundo programa, que é o que apresentamos, é em tudo igual ao primeiro. Apenas tem a mais instruções para a máquina imprimir com duas colunas os valores das coordenadas** x (1.^a coluna) e y (2.^a coluna) dos nós das redes de características, permitindo assim o seu traçado.

Apresentam-se abaixo as folhas do programa, a dos dados e a dos resultados.

PROGRAMA

SETS IJ(10)K(10)LMN	29) C = C/5.0
SETV A(80)B(80)CD(80)	C = 2.5*C
EFG(80)HPQ(80)R(80)S(80)	K = INT C
T(80)U(80)V(80)X(80)	JUMP IF K = 0@27
Y(80)W(80)Z(80)	VARY I = 1:1:K
SETF LOG EXP TRIG INT	READ D (16 + 1)
ARCTAN SQRT	REPEAT I
SETR 50	27) LINES 20
1) READ D34	VARY I = 1:1:80
READ D35	OUTPUT 0
READ D36	REPEAT I
READ D37	D29 = D1/180
READ D38	D30 = TAN D29
VARY I = 1:1:16	D31 = SIN D29
READ DI	D = D29/2
REPEAT I	D32 = 0.25 — D
C = DI — 30.0	D3 = D3/180
JUMP IF C%0@29	D4 = D4/180
C = 0	D5 = D5/180

* Para a definição de ξ e η veja-se (43.3), Cap. III.

** Esses valores, precisamente por estarem apenas em duas colunas, distinguem-se dos restantes que estão em cinco colunas.

```

C = D34
R = - C
M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
R = R + C
D = COS D5
YI = R*D
CHECK YI
D = SIN D5
XI = - R*D
CHECK XI
REPEAT I
T = 2*D5
T = D3 + T
T = 1 + T
C = SIN D3
C = C/D31
D = C*C
D = 1 - D
D = SQRT D
C = C/D
C = ARCTAN C
CHECK C
T = T - C
T = T/2
CHECK T
T = T*3.14159265
M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
C = D2/D30
S = D(I + 5) + C
C = COS D3
S = S/C
D = COS D29
D = D*D
S = S/D
D = SIN D3
D = D*D
E = D31*D31
E = E - D
E = SQRT E
C = C + E
SI = S*C
U = LOG SI
U = U/2
U = U/D30
UI = U + T
VI = U - T
U = UI
V = VI
S = SI
SUBR 7
WI = W
QI = Q
AI = A
BI = B

```

```

REPEAT I
J = 11 + K
X(52 - J) = X1
Y(52 - J) = Y1
U(52 - J) = U1
V(52 - J) = V1
S(52 - J) = S1
W(52 - J) = W1
Q(52 - J) = Q1
A(52 - J) = A1
B(52 - J) = B1
VARY I = 1:1:J
LINE
PRINT XI, 5/
PRINT YI
REPEAT I
J = 10 + K
10)VARY I = 1:1:J
X21 = X1
X22 = X(I + 1)
Y21 = Y1
Y22 = Y(I + 1)
Q21 = Q1
W22 = W(I + 1)
A21 = A1
B22 = B(I + 1)
V21 = V1
U22 = U(I + 1)
L = 1
8)SUBR 2
JUMP IF L = 0@9
X21 = X21 + X
X21 = X21/2
X22 = X22 + X
X22 = X22/2
Y21 = Y21 + Y
Y21 = Y21/2
Y22 = Y22 + Y
Y22 = Y22/2
W22 = W
Q21 = Q
A21 = A
B22 = B
V21 = V21 + V
V21 = V21/2
U22 = U22 + U
U22 = U22/2
L = 0
JUMP@8
9)X1 = X
Y1 = Y
UI = V
WI = W
QI = Q
SI = S
AI = A

```

```

BI = B
REPEAT I
X(52 — J) = X1
Y(52 — J) = Y1
U(52 — J) = U1
V(52 — J) = V1
W(52 — J) = W1
Q(52 — J) = Q1
S(52 — J) = S1
A(52 — J) = A1
B(52 — J) = B1
VARY I = 1:1:J
LINE
PRINT XI
PRINT YI
REPEAT I
J = J — 1
JUMP IF J%0@10
J = 40 — K
M11 + K
VARY I = 1:1:M
XI = X(J + I)
UI = U(J + I)
VI = V(J + I)
WI = W(J + I)
QI = Q(J + I)
SI = S(J + I)
AI = A(J + I)
BI = B(J + I)
CHECK XI
CHECK YI
CHECK UI
CHECK VI
CHECK SI
CHECK BI
REPEAT I
C = D5 — D4
C = 18 3*C
C = C + 10
J = INT C
C = SIN D4
C = C/D31
D = C*C
D = 1 — D
D = SQRT D
JUMP IF D = 0@21
JUMP @23
21) JUMP IF C$0@22
D = 0.5
JUMP @24
22) D = — 0.5
JUMP @24
23) D = C/D
CHECK D
D = ARCTAN D
24) D = D4 + D
CHECK T

```

```

P = D/2
CHECK P
P = P*3.14159265
D = P — T
C = STAND J
C = D/C
D28 = — 2*C
CHECK D28
N = 1
K2 = 1
14) JUMP IF D4 = 0@30
M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
X(30 + I) = XI
Y(30 + I) = YI
U(30 + I) = UI
V(30 + I) = VI
W(30 + I) = WI
Q(30 + I) = QI
S(30 + I) = SI
A(30 + I) = AI
B(30 + I) = BI
G(30 + I) = UI — VI
REPEAT I
30) U = UI
V1 = V1 + D28
V = V1
38) SUBR 6
W1 = W
Q1 = Q
S1 = S
A1 = A
B1 = B
CHECK W
JUMP IF N%1@44
LINE
PRINT X1, 5/
PRINT Y1
PRINT U
PRINT V
PRINT S
44) M = 10 + K
VARY I = 1:1:M
X21 = XI
X22 = X(I + 1)
Y21 = YI
Y22 = Y(I + 1)
Q21 = QI
W22 = W(I + 1)
A21 = AI
B22 = B(I + 1)
V21 = VI
U22 = U(I + 1)
L = 1
11) SUBR 2
JUMP IF L = 0@13
X21 = X21 + X

```

```

X21 = X21/2
X22 = X22 + X
X22 = X22/2
Y21 = Y21 + Y
Y21 = Y21/2
Y22 = Y22 + Y
Y22 = Y22/2
W22 = W
Q21 = Q
A21 = A
B22 = B
V21 = V21 + V
V21 = V21/2
U22 = U22 + U
U22 = U22/2
L = 0
JUMP @11
13) X(I + 1) = X
Y(I + 1) = Y
U(I + 1) = U
V(I + 1) = V
W(I + 1) = W
Q(I + 1) = Q
S(I + 1) = S
A(I + 1) = A
B(I + 1) = B
REPEAT I
VARY I = 1:1:M
LINE
PRINT X(I + 1)
PRINT Y(I + 1)
REPEAT I
JUMP IF D4 = 0@25
JUMP UNLESS K2 = 1@37
M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
X(55 + I) = XI
Y(55 + I) = YI
U(55 + I) = UI
V(55 + I) = VI
W(55 + I) = WI
Q(55 + I) = QI
S(55 + I) = SI
A(55 + I) = AI
B(55 + I) = BI
REPEAT I
K2 = 0
39) M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
UI = U(55 + I)
VI = V(55 + I)
XI = X(55 + I)
YI = Y(55 + I)
SI = S(55 + I)
WI = W(55 + I)
QI = Q(55 + I)
AI = A(55 + I)

```

```

BI = B(55 + I)
REPEAT I
37) G80 = GN
GN = UN - VN
JUMP UNLESS GNS - 0.02@26
JUMP IF G80% - 0.02@48
G79 = GN - G80
JUMP IF G79$0@26
48) C = G(30 + N) - GN
C = G(30 + N)/C
CHECK C
D33 = D28*C
35) M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
XI = X(30 + I)
YI = Y(30 + I)
UI = U(30 + I)
VI = V(30 + I)
WI = W(30 + I)
QI = Q(30 + I)
SI = S(30 + I)
AI = A(30 + I)
BI = B(30 + I)
REPEAT I
U = UI
V = VI + N33
V1 = V
JUMP @38
26) H = 1
JUMP IF GN$0.02@20
K2 = 1
M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
XI = X(55 + I)
YI = Y(55 + I)
UI = U(55 + I)
VI = V(55 + I)
WI = W(55 + I)
QI = Q(55 + I)
SI = S(55 + I)
AI = A(55 + I)
BI = B(55 + I)
REPEAT I
25) J = J - 1
JUMP IF J%0@14
Z1 = SI
R1 = Y1
K3 = 3
J = 2
18) JUMP IF D4 = 0@33
M = 11 + K
CYCLE I = J:1:M
X(30 + I) = XI
Y(30 + I) = YI
U(30 + I) = UI
V(30 + I) = VI
W(30 + I) = WI

```

```

Q(30 + I) = QI
S(30 + I) = SI
A(30 + I) = AI
B(30 + I) = BI
G(30 + I) = UI — VI
REPEAT I
33) D = TAN WJ
D = XJ*BJ
UJ = YJ — D
D = XJ*BJ
UJ = UJ — D
C = 2*P
CHECK C
VJ = UJ — C
U = UJ
V = VJ
XJ = 0
SUBR 6
SJ = S
WJ = W
QJ = Q
CHECK Q
ZJ = SJ
RJ = YJ
AJ = A
BJ = B
M = 10 + K
H = 0
JUMP IF J%M@20
CYCLE I = J:1:M
X21 = XI
X22 = X(I + 1)
Y21 = YI
Y22 = Y(I + 1)
Q21 = QI
Q22 = Q(I + 1)
W22 = W(I + 1)
A21 = AI
B22 = B(I + 1)
V21 = VI
U22 = U(I + 1)
L = 1
15)SUBR 2
JUMP IF L = 0@17
X21 = X21 + X
X21 = X21/2
X22 = X22 + X
X22 = X22/2
Y21 = Y21 + Y
Y21 = Y21/2
Y22 = Y22 + Y
Y22 = Y22/2
W22 = W
Q21 = Q
A21 = A
B22 = B
V21 = V21 + V

V21 = V21/2
U22 = U22 + U
U22 = U22/2
L = 0
JUMP @15
17)X(I + 1) = X
Y(I + 1) = Y
U(I + 1) = U
V(I + 1) = V
W(I + 1) = W
Q(I + 1) = Q
S(I + 1) = S
A(I + 1) = A
B(I + 1) = B
REPEAT I
M = 11 + K
CYCLE I = J:1:M
LINE
PRINT XI
PRINT YI
REPEAT I
JUMP IF D4 = 0@31
JUMP UNLESS K2 = 1@36
M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
X(55 + I) = XI
Y(55 + I) = YI
U(55 + I) = UI
V(55 + I) = VI
W(55 + I) = XI
Q(55 + I) = QI
S(55 + I) = SI
A(55 + I) = AI
B(55 + I) = BI
REPEAT I
K2 = 0
40) M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
UI = U(55 + I)
VI = V(55 + I)
XI = X(55 + I)
YI = Y(55 + I)
SI = S(55 + I)
WI = W(55 + I)
QI = Q(55 + I)
AI = A(55 + I)
BI = B(55 + I)
REPEAT I
36)G80 = GN
GN = UN — VN
JUMP UNLESS GNS — 0.02@32
G79 = GN — G80
JUMP IF G79$0@32
C = G(30 + N) — GN
C = G(30 + D)/C
CHECK C
34)M = 11 + K

```

```

CYCLE I = J:1:M
XI = X(30 + I)
YI = Y(30 + I)
UI = U(30 + I)
VI = V(30 + I)
WI = W(30 + I)
QI = Q(30 + I)
SI = S(30 + I)
AI = A(30 + I)
BI = B(30 + I)
REPEAT I
D = XJ - X(J - I)
D = D*C
XJ = X(J - 1) + D
D = YJ - Y(J - 1)
D = D*C
YJ = Y(J - 1) + D
D = VJ - V(J - 1)
D = D*C
V = V(J - 1) + D
D = UJ - U(J - 1)
D = D*C
U = U(J - 1) + D
SUBR 6
UJ = U
VJ = V
SJ = S
WJ = W
QJ = Q
AJ = A
BJ = B
JUMP @33
32)H = 2
JUMP IF GD$0.02@20
K2 = 1
M = 11 + K
VARY I = 1:1:M
XI = X(55 + I)
YI = Y(55 + I)
UI = U(55 + I)
VI = V(55 + I)
WI = W(55 + I)
QI = Q(55 + I)
SI = S(55 + I)
AI = A(55 + I)
BI = B(55 + I)
REPEAT I
31)J = J + 1
JUMP @18
20)LINES 2
M = 11 + K
JUMP IF D4 = 0@41
M = N
41)VARY I = 1:1:M
LINE
PRINT XI

```

```

PRINT YI
PRINT UI
PRINT VI
PRINT SI
REPEAT I
45)M = 10 + K
R = U1 - V1
R = R/3.14159265
Z = SIN R
Z = D31*Z
Z = S1*Z
C = COS R
C = D31*C
C = 1 + C
R = S1*C
C = D2/D30
R = R - C
D = Y2 + .0000001
D = X2/D
D = D*Z
T = R - D
LINES 2
PRINT T
PRINT Z
PRINT R
PRINT XI
PRINT YI
JUMP IF D4 = 0@42
M = N - 1
JUMP IF M = 0@43
42)R = 0
F = 0
VARY I = 1:1:M
E = COS D29
C = COS W1
D = SIN QI
C = E*C
F = C/D
F = F*SI
C = COS W(I + 1)
D = SIN Q(I + 1)
C = E*C
C = C/D
C = C* S(I + 1)
C = F + C
C = C/2
D = Y(I + 1) - YI
C = C*D
R = R + C
T = -R/Y(I + 1)
RI = U(I + 1) - V(I + 1)
RI = RI/3.14159265
ZI = SIN RI
ZI = D31*ZI
ZI = S(I + 1)*ZI
CHECK ZI
C = COS RI

```



```

C = D31*C
C = 1 + C
RI = S(I + 1)*C
C = D2/D30
RI = RI - C
LINE
PRINT T
PRINT ZI
PRINT RI
PRINT X(I + 1)
PRINT Y(I + 1)
REPEAT I
43)JUMP IF H = 0@1
N = N + 1
GN = 10
M = 11 + K
JUMP IF N%M@1
JUMP IF H = 1@39
JUMP IF H = 2@40
2)D = TAN Q21
X = X21*D
X = X - Y21
E = TAN W22
CHECK E
D = D - E
C = X22*E
X = X - C
X = X + Y22
X = X/D
CHECK X
Y = X - X21
E = TAN Q21
Y = Y*E
Y = Y21 + Y
CHECK Y
V = X - X21
V = V*A21
V = V21 + V
CHECK V
U = X - X22
U = U*B22
U = U22 + U
CHECK U
6)S = U + V
S = S*D30
S = EXP S
7)C = U - V
C = C/3.14159265
C = C/2
W = C + D32
CHECK W
Q = C - D32
CHECK Q

```

```

JUMP IF D38 = 1@46
JUMP IF X$D37@46
A = SIN W
A = A*D35
A = A*D38
D = COS W
D = D*D36
D = D*D38
A = A - D
A = A/2
A = A/S
A = A/D31
C = COS Q
A = A/C
CHECK A
B = SIN Q
B = B*D35
B = B*D38
D = COS Q
D = D*D36
D = D*D38
B = B - D
B = - B/2
B = B/D31
C = COS W
B = B/C
CHECK B
JUMP @47
46)A = SIN W
A = A*D35
D = COS W
D = D*D36
A = A - D
A = A/2
A = A/S
A = A/D31
C = COS Q
A = A/C
CHECK A
B = SIN Q
B = B*D35
D = COS Q
D = D*D36
B = B - D
B = B/2
B = - B/S
B = B/D31
C = COS W
B = B/C
CHECK B
47)EXIT
28)STOP
START 1

```

DADOS

$\Delta s = 1.73205$	$\delta_1 = 0$	$p''_5 = 5$
$\gamma'_x = 1$	$\delta_2 = 0$	$p''_6 = 5$
$\gamma'_y = 0$	$\alpha_0 = 0$	$p''_7 = 5$
$h = 100$	$p''_1 = 5^*$	$p''_8 = 5$
$k = 1$	$p''_2 = 5$	$p''_9 = 5$
$\varphi' = 30$	$p''_3 = 5$	$p''_{10} = 5$
$c' = 0$	$p''_4 = 5$	$p''_{11} = 5$

RESULTADOS

x'	y'	ξ	η	σ''
**.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.73746/ 00	.11989/ 02
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.10516/ 01	.14373/ 02
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.13658/ 01	.17231/ 02
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.16799/ 01	.20658/ 02
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.19941/ 01	.24766/ 02
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.23083/ 01	.29692/ 02
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.26224/ 01	.35596/ 02
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.29366/ 01	.42675/ 02
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.32507/ 01	.51162/ 02
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.35649/ 01	.61337/ 02

x'	y'	ξ	η	σ''
.00000/ 00	.00000/ 00	.35649/ 01	.35649/ 01	.61337/ 02
.00000/ 00	— .45305/ 00	.36744/ 01	.36744/ 01	.69607/ 02
.00000/ 00	— .93323/ 00	.37724/ 01	.37724/ 01	.77942/ 02
.00000/ 00	— .14548/ 01	.38612/ 01	.38612/ 01	.86364/ 02
.00000/ 00	— .20102/ 01	.39425/ 01	.39425/ 01	.94859/ 02
.00000/ 00	— .25943/ 01	.40173/ 01	.40173/ 01	.10342/ 03
.00000/ 00	— .32028/ 01	.40866/ 01	.40866/ 01	.11203/ 03
.00000/ 00	— .38327/ 01	.41510/ 01	.41510/ 01	.12069/ 03
.00000/ 00	— .44811/ 01	.42113/ 01	.42113/ 01	.12939/ 03
.00000/ 00	— .51459/ 01	.42679/ 01	.42679/ 01	.13813/ 03
.00000/ 00	— .58253/ 01	.43213/ 01	.43213/ 01	.14690/ 03

$\bar{q}''$	τ''_{xy}	σ''_{xx}	x'	y'
.92006/ 02	.45700/ -06	.92006/ 02	.00000/ 00	.00000/ 00
.98208/ 02	.00000/ 00	.10441/ 03	.00000/ 00	— .45305/ 00
.10462/ 03	.00000/ 00	.11691/ 03	.00000/ 00	— .93323/ 00
.11129/ 03	.00000/ 00	.12955/ 03	.00000/ 00	— .14548/ 01
.11809/ 03	.00000/ 00	.14229/ 03	.00000/ 00	— .20102/ 01
.12499/ 03	.00000/ 00	.15512/ 03	.00000/ 00	— .25943/ 01
.13194/ 03	.00000/ 00	.16804/ 03	.00000/ 00	— .32028/ 01
.13894/ 03	.00000/ 00	.18103/ 03	.00000/ 00	— .38327/ 01
.14598/ 03	.00000/ 00	.19409/ 03	.00000/ 00	— .44811/ 01
.15304/ 03	.00000/ 00	.20720/ 03	.00000/ 00	— .51459/ 01
.16012/ 03	.00000/ 00	.22036/ 03	.00000/ 00	— .58253/ 01

* Se for $\varphi' > 30^\circ$, o número de valores p''_0 a incluir nos dados é dado por $M = 11 + \text{inteiro de } (\varphi' - 30/2)$.

** Os valores entre $\left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right\}$ servem apenas de verificação do funcionamento do programa.

APÊNDICE (1.IV)

Tabelas para o cálculo da capacidade de carga das fundações *

- δ_1 inclinação do vector de tensão em relação à normal à superfície livre equivalente
- δ_2 inclinação do vector de tensão sob a fundação em relação à normal à base.
[Base lisa, $\delta_2 = 0$, ($\delta_1 = 0$). Base rugosa $\delta_2 = -\varphi'$, ($\delta_1 = -\varphi'/2$)];
- α_0 inclinação da superfície livre equivalente em relação ao plano horizontal ($\alpha_0 = 0$, fundação superficial, $\alpha_0 = 90^\circ$, fundação profunda),
- φ' ângulo de atrito interno;
- p'' tensão normal adimensional uniforme na superfície livre equivalente,
- $\sigma'' = \frac{\sigma''_{xx} + \sigma''_{yy}}{2}$ tensão média adimensional,
- $\bar{q}''$ média das tensões verticais sob a fundação entre o ponto de abscissa 0 (aresta da fundação) e o ponto de abscissa $-y'$.

* Consultar dum modo geral os Cap. III e IV e ver em particular a Fig. (13.3), o N.º 53 do Cap. III e os exemplos de aplicação do Cap. IV.

$$\delta_1 = \delta_2 = 0$$

$$\alpha_0 = 0$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 1,4$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 2$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 3$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	y'	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	4,383	—	0,000	6,262	—	0,000	9,393	—
1,794	6,926	7,119	1,482	8,717	9,428	1,261	11,79	13,33
3,539	9,542	8,720	3,035	11,24	11,03	2,632	14,23	14,92
5,617	12,33	10,59	4,871	13,89	12,84	4,232	16,78	16,66
7,833	15,19	12,49	6,868	16,64	14,69	5,991	19,40	18,45
10,17	18,13	14,44	8,994	19,45	16,59	7,880	22,09	20,29
12,59	21,12	16,42	11,22	22,32	18,51	9,875	24,83	22,15
15,09	24,15	18,41	13,53	25,23	20,46	11,96	27,61	24,05
17,64	27,21	20,42	15,91	28,19	22,43	14,12	30,44	25,96
20,23	30,29	22,44	18,34	31,17	24,41	16,34	33,31	27,89
22,86	33,40	24,48	20,82	34,19	26,40	18,62	36,20	29,83

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 15$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 100$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 0,9$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	46,96	—	0,000	313,1	—	0,000	4,292	—
0,943	49,26	60,57	0,881	315,4	395,6	1,524	8,204	8,38
1,931	51,58	62,05	1,769	317,7	397,0	2,832	12,18	10,83
2,991	53,92	63,59	2,670	319,9	398,4	4,383	16,35	13,77
4,116	56,28	65,17	3,582	322,2	399,9	5,994	20,60	16,73
5,302	58,66	66,78	4,506	324,5	401,4	7,665	24,90	19,74
6,547	61,07	68,41	5,441	326,8	402,9	9,376	29,25	22,77
7,846	63,50	70,06	6,388	329,1	404,3	11,12	33,63	25,81
9,195	65,94	71,74	7,347	331,4	405,8	12,88	38,03	28,86
10,59	68,41	73,43	8,316	333,7	407,3	14,67	42,45	31,92
12,04	70,89	75,14	9,297	336,1	408,8	16,47	46,88	34,99

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 2$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 10$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 100$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	9,537	—	0,000	47,69	—	0,000	476,9	—
1,037	13,20	15,28	0,750	51,25	66,38	0,688	480,4	642,3
2,124	17,01	17,84	1,539	54,84	68,84	1,382	483,9	644,7
3,376	20,91	20,66	2,391	58,46	71,40	2,083	487,4	647,1
4,727	24,89	23,54	3,298	62,13	74,02	2,791	491,0	649,5
6,155	28,95	26,46	4,255	65,82	76,68	3,506	494,5	651,9
7,643	33,06	29,41	5,257	69,55	79,38	4,229	498,1	654,3
9,178	37,22	32,38	6,300	73,30	82,11	4,959	501,6	656,7
10,75	41,41	35,36	7,382	77,08	84,86	5,697	505,2	659,2
12,36	45,63	38,36	8,498	80,89	87,64	6,441	508,8	661,6
13,99	49,88	41,36	9,646	84,72	90,44	7,192	512,3	664,1

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 0,65$$

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 1,5$$

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 2$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	4,872	—	0,000	11,24	—	0,000	14,99	—
1,195	10,71	11,09	0,812	16,82	19,96	0,740	20,51	25,25
2,139	16,60	14,77	1,640	22,49	24,00	1,520	26,13	29,32
3,264	22,70	19,31	2,582	28,31	28,42	2,402	31,87	33,70
4,417	28,88	23,85	3,585	34,23	32,92	3,347	37,71	38,16
5,605	35,11	28,44	4,635	40,22	37,46	4,342	43,61	42,67
6,814	41,38	33,05	5,720	46,26	42,02	5,374	49,58	47,21
8,039	47,67	37,67	6,832	52,34	46,60	6,437	55,58	51,76
9,276	53,99	42,29	7,966	58,47	51,18	7,525	61,63	56,33
10,52	60,32	46,91	9,118	64,62	55,78	8,633	67,71	60,91
11,78	66,66	51,54	10,29	70,79	60,38	9,758	73,81	65,49

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 100$$

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 0,45$$

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 1$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	749,5	—	0,000	5,520	—	0,000	12,27	—
0,531	754,8	1 070	0,951	14,41	14,95	0,655	20,79	24,80
1,066	760,2	1 074	1,626	23,29	20,48	1,290	29,44	31,13
1,605	765,5	1 078	2,446	32,40	27,62	2,008	38,28	38,16
2,149	770,9	1 082	3,279	41,60	34,70	2,764	47,23	45,26
2,698	776,3	1 085	4,131	50,84	41,84	3,547	56,26	52,41
3,251	781,6	1 089	4,995	60,12	49,00	4,350	65,34	59,57
3,809	787,0	1 093	5,867	69,42	56,16	5,168	74,46	66,74
4,371	792,4	1 097	6,747	78,74	63,32	5,998	83,62	73,90
4,938	797,8	1 101	7,630	88,07	70,48	6,837	92,80	81,07
5,509	803,2	1 105	8,518	97,42	77,63	7,684	102,0	88,24

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 2$$

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 5$$

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 100$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	24,54	—	0,000	61,34	—	0,000	1 227	—
0,530	32,91	43,09	0,453	69,61	98,21	0,403	1 235	1 846
1,092	41,40	49,59	0,933	77,94	104,6	0,808	1 243	1 852
1,718	50,04	56,52	1,455	86,36	111,3	1,216	1 251	1 859
2,387	58,78	63,55	2,010	94,86	118,1	1,627	1 260	1 865
3,089	67,60	70,65	2,594	103,4	125,0	2,041	1 268	1 871
3,815	76,49	77,77	3,203	112,0	131,9	2,458	1 276	1 877
4,562	85,42	84,92	3,833	120,7	138,9	2,877	1 284	1 884
5,325	94,40	92,08	4,481	129,4	146,0	3,300	1 292	1 890
6,102	103,4	99,24	5,146	138,1	153,0	3,726	1 301	1 896
6,890	112,4	106,4	5,825	146,9	160,1	4,154	1 309	1 902

$\varphi' = 35^\circ$ $p'' = 0,4$			$\varphi' = 35^\circ$ $p'' = 1$			$\varphi' = 35^\circ$ $p'' = 2$		
$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	8,464	—	0,000	21,16	—	0,000	42,32	—
0,653	22,24	24,15	0,450	34,48	43,77	0,376	55,48	76,94
1,134	35,99	33,34	0,900	47,96	54,30	0,776	68,78	87,67
1,707	50,03	44,87	1,402	61,68	65,75	1,218	82,26	98,98
2,292	64,17	56,35	1,930	75,54	77,32	1,689	95,87	110,5
2,890	78,38	67,90	2,478	89,49	88,92	2,182	109,6	122,0
3,496	92,64	79,45	3,039	103,5	100,6	2,691	123,4	133,6
4,107	106,9	91,00	3,611	117,6	112,2	3,215	137,2	145,3
4,723	121,2	102,5	4,191	131,7	123,8	3,750	151,1	156,9
5,342	135,6	114,1	4,777	145,8	135,4	4,294	165,1	168,5
5,964	149,9	125,6	5,369	160,0	147,0	4,846	179,0	180,2
6,588	164,2	137,1	5,965	174,2	158,6	5,404	193,0	191,8
7,214	178,6	148,6	6,565	188,4	170,2	5,969	207,1	203,4

$\varphi' = 35^\circ$ $p'' = 5$			$\varphi' = 35^\circ$ $p'' = 100$			$\varphi' = 40^\circ$ $p'' = 0,35$		
$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	105,8	—	0,000	2 116	—	0,000	13,68	—
0,329	118,8	176,7	0,298	2 129	3 340	0,448	36,33	41,08
0,676	131,9	187,3	0,598	2 142	3 350	0,786	58,94	57,08
1,050	145,2	198,2	0,899	2 155	3 360	1,184	81,94	76,80
1,446	158,5	209,4	1,203	2 168	3 371	1,590	105,1	96,45
1,861	171,9	220,6	1,508	2 181	3 381	2,006	128,3	116,2
2,292	185,3	232,0	1,815	2 194	3 391	2,426	151,6	135,9
2,737	198,8	243,4	2,124	2 207	3 401	2,850	175,0	155,6
3,194	212,4	254,9	2,434	2 220	3 412	3,278	198,4	175,3
3,663	226,0	266,4	2,747	2 233	3 422	3,707	221,7	195,0
4,141	239,7	277,9	3,061	2 246	3 433	4,138	245,2	214,6
4,628	253,4	289,5	3,377	2 259	3 443	4,571	268,6	234,2
5,123	267,1	301,1	3,695	2 272	3 453	5,004	292,0	253,8
						5,439	315,5	273,4
						5,875	338,9	293,0
						6,311	362,4	312,6

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 0,75$$

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 2$$

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 4$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	29,31	—	0,000	78,15	—	0,000	156,3	—
0,333	51,42	66,31	0,261	99,97	146,3	0,237	178,0	274,6
0,657	73,77	84,33	0,539	122,0	164,9	0,488	199,8	293,0
1,019	96,46	104,0	0,844	144,2	184,3	0,759	221,8	312,0
1,397	119,3	123,9	1,169	166,7	204,1	1,045	243,9	331,3
1,787	142,4	143,8	1,509	189,2	223,9	1,345	266,1	350,8
2,186	165,4	163,7	1,861	211,9	243,9	1,656	288,4	370,5
2,591	188,6	183,5	2,221	234,6	263,8	1,976	310,8	390,2
3,001	211,8	203,4	2,590	257,4	283,8	2,305	333,3	410,1
3,415	235,0	223,2	2,965	280,3	303,8	2,642	355,9	429,9
3,831	258,3	243,0	3,346	303,3	323,8	2,985	378,4	449,8
4,251	281,5	262,8	3,731	326,2	343,7	3,334	401,1	469,8
4,672	304,8	282,5	4,120	349,2	363,7	3,688	423,8	489,7
5,096	328,2	302,2	4,513	372,3	383,6	4,047	446,5	509,7
5,521	351,5	321,9	4,909	395,4	403,5	4,410	469,3	529,7
5,947	374,9	341,6	5,308	418,4	423,4	4,777	492,1	549,6

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 100$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 0,25$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 0,5$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	3 908	—	0,000	19,75	—	0,000	39,50	—
0,214	3 929	6 437	0,327	60,79	68,74	0,247	79,22	101,3
0,428	3 951	6 455	0,554	101,1	97,20	0,474	119,3	134,0
0,644	3 972	6 473	0,828	142,1	133,7	0,729	159,9	170,5
0,860	3 994	6 491	1,106	183,3	170,0	0,994	200,9	207,1
1,078	4 015	6 508	1,389	224,7	206,3	1,266	241,9	243,8
1,298	4 037	6 526	1,676	266,1	242,7	1,543	283,1	280,4
1,518	4 059	6 544	1,964	307,5	279,0	1,823	324,4	317,0
1,739	4 080	6 562	2,255	349,1	315,2	2,105	365,8	353,6
1,962	4 102	6 580	2,546	390,6	351,4	2,390	407,1	390,1
2,185	4 123	6 598	2,839	432,2	387,6	2,677	448,6	426,5
2,410	4 145	6 616	3,132	473,7	423,7	3,964	490,0	462,8
2,636	4 167	6 634	3,426	515,3	459,8	2,253	531,5	499,2
2,863	4 188	6 652	3,721	556,9	495,8	3,543	573,0	535,5
3,091	4 210	6 670	4,016	598,5	531,9	3,834	614,4	571,7
3,320	4 231	6 689	4,311	640,2	567,9	4,126	656,0	608,0
			4,607	681,8	603,9	4,418	697,5	644,1
			4,903	723,4	639,8	4,710	739,0	680,3

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 2$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 3$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 100$$

$-y'$	σ''	q''	$-y'$	σ''	q''	$-y'$	σ''	q''
0,000	158,0	—	0,000	237,0	—	0,000	7 901	—
0,174	197,1	303,1	0,165	276,0	437,9	0,146	7 939	13 520
0,360	236,5	337,7	0,340	315,2	472,3	0,293	7 978	13 553
0,564	276,2	373,8	0,530	354,7	507,9	0,441	8 017	13 587
0,781	316,2	410,4	0,732	394,4	544,1	0,589	8 056	13 620
1,007	356,4	447,2	0,942	434,3	580,6	0,738	8 094	13 653
1,241	396,8	484,1	1,161	474,3	617,2	0,887	8 133	13 686
1,482	437,3	521,1	1,386	514,5	654,1	1,038	8 172	13 720
1,728	477,9	558,1	1,616	554,8	691,0	1,189	8 211	13 753
1,979	518,6	595,1	1,852	595,2	728,0	1,340	8 249	13 787
2,233	559,3	632,2	2,092	635,7	765,0	1,493	8 288	13 820
2,491	600,2	669,1	2,335	676,3	802,0	1,646	8 327	13 854
2,751	641,1	706,1	2,582	716,9	839,0	1,799	8 366	13 888
3,014	682,0	743,0	2,832	757,6	876,0	1,954	8 404	13 921
3,280	723,0	780,0	3,084	798,3	913,0	2,109	8 443	13 955
3,547	764,1	816,8	3,340	839,1	950,0	2,264	8 482	13 989
3,816	805,2	853,7	3,597	880,0	987,0	2,420	8 521	14 023
4,087	846,3	890,5	3,856	920,8	1 024	2,577	8 560	14 057

$$\delta_1 = \delta_2 = 0$$

$$\alpha_0 = 30^\circ$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 15$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 100$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 6$$

$-y'$	σ''	q''	$-y'$	σ''	q''	$-y'$	σ''	q''
0,000	62,16	—	0,000	414,4	—	0,000	41,87	—
0,912	67,33	81,50	0,777	419,4	524,8	0,773	49,96	61,62
1,951	72,68	85,03	1,574	424,5	528,0	1,683	58,46	67,64
3,168	78,24	88,86	2,398	429,6	531,3	2,784	67,40	74,29
4,557	84,00	92,90	3,249	434,8	534,6	4,049	76,71	81,29
6,114	89,94	97,12	4,128	439,9	538,0	5,462	86,37	88,57
7,833	96,07	101,5	5,033	445,1	541,4	7,008	96,33	96,08
9,709	102,4	106,0	5,966	450,4	544,9	8,674	106,6	103,8
11,74	108,8	110,7	6,925	455,6	548,4	10,45	117,1	111,6
13,92	115,5	115,4	7,911	460,9	552,0	12,32	127,8	119,6
16,24	122,3	120,3	8,924	466,3	555,6	14,29	138,7	127,8

$\varphi' = 20^\circ$
 $p'' = 15$
 $\varphi' = 20^\circ$
 $p'' = 100$
 $\varphi' = 25^\circ$
 $p'' = 6$

— y'	σ''	q''	— y'	σ''	q''	— y'	σ''	q''
0,000	104,7	—	0,000	697,8	—	0,000	73,24	—
0,642	112,5	145,8	0,574	705,6	941,7	0,521	85,67	113,0
1,346	120,6	151,4	1,158	713,3	946,9	1,113	98,52	122,6
2,138	128,9	157,3	1,756	721,2	952,3	1,804	111,8	133,0
3,012	137,3	163,5	2,368	729,0	957,6	2,579	125,6	143,7
3,965	145,9	169,9	2,994	736,9	963,1	3,428	139,6	154,9
4,994	154,7	176,4	3,634	744,8	968,5	4,343	154,0	166,2
6,093	163,7	183,1	4,287	752,7	974,1	5,318	168,7	177,8
7,261	172,8	190,0	4,954	760,7	979,7	6,346	183,6	189,6
8,495	182,1	197,0	5,635	768,7	985,3	7,423	198,8	201,6
9,791	191,5	204,1	6,329	776,7	990,9	8,543	214,1	213,7

 $\varphi' = 25^\circ$
 $p'' = 15$
 $\varphi' = 25^\circ$
 $p'' = 100$
 $\varphi' = 30^\circ$
 $p'' = 1,73205$

— y'	σ''	q''	— y'	σ''	q''	— y'	σ''	q''
0,000	183,1	—	0,000	1 221	—	0,000	38,88	—
0,454	195,3	269,2	0,418	1 233	1 745	0,509	59,74	72,23
0,942	207,7	278,2	0,842	1 245	1 754	1,073	81,74	89,13
1,476	220,3	287,7	1,273	1 257	1 763	1,743	104,8	108,0
2,053	233,1	297,5	1,712	1 269	1 771	2,481	128,6	127,4
2,671	246,1	307,5	2,158	1 281	1 780	3,271	153,0	147,3
3,328	259,3	317,8	2,612	1 294	1 789	4,104	177,8	167,4
4,021	272,6	328,2	3,073	1 306	1 798	4,971	203,0	187,7
4,750	286,2	338,9	3 541	1 318	1 807	5,865	228,5	208,2
5,512	299,8	349,6	4,017	1 331	1 816	6,783	254,3	228,8
6,305	313,7	360,6	4 499	1 343	1 825	7,721	280,3	249,5

 $\varphi' = 30^\circ$
 $p'' = 6$
 $\varphi' = 30^\circ$
 $p'' = 15$
 $\varphi' = 30^\circ$
 $p'' = 100$

— y'	σ''	q''	— y'	σ''	q''	— y'	σ''	q''
0,000	134,7	—	0,000	336,6	—	0,000	2 244	—
0,353	154,5	216,9	0,318	356,2	519,7	0,298	2 264	3 381
0,746	174,9	232,8	0,654	376,1	534,9	0,600	2 283	3 396
1,192	195,8	249,7	1,016	396,2	550,6	0,905	2 303	3 410
1,684	217,1	267,2	1,401	416,5	566,8	1,215	2 322	3 425
2,216	238,9	285,2	1,808	437,0	583,3	1,529	2 342	3 440
2,784	261,0	303,5	2,237	457,7	600,1	1,846	2 362	3 455
3,384	283,5	322,1	2,686	478,7	617,2	2,168	2 381	3 470
4,013	306,2	340,9	3,154	499,8	634,5	2,494	2 401	3 486
4,668	329,3	360,0	3,639	521,1	652,0	2,824	2 421	3 501
5,347	352,5	379,2	4,142	542,6	669,7	3,158	2 441	3 516

$\varphi' = 35^\circ$
 $p'' = 5$
 $\varphi' = 35^\circ$
 $p'' = 15$
 $\varphi' = 35^\circ$
 $p'' = 100$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	220,1	—	0,000	660,3	—	0,000	4 402	—
0,242	253,9	372,9	0,217	693,6	1 065	0,207	4 435	6 953
0,510	288,4	401,1	0,444	727,3	1 092	0,415	4 468	6 979
0,812	323,6	430,9	0,686	761,2	1 120	0,625	4 502	7 005
1,141	359,5	461,7	0,940	794,5	1 148	0,838	4 535	7 032
1,496	396,0	493,2	1,207	829,9	1 177	1,053	4 568	7 058
1,872	432,9	525,1	1,486	864,7	1 206	1,270	4 602	7 085
2,267	470,4	557,5	1,775	899,7	1 236	1,490	4 635	7 112
2,679	508,2	590,1	2,076	935,0	1 266	1,712	4 669	7 139
3,107	546,4	623,1	2,386	970,4	1 296	1,935	4 702	7 166
3,548	584,9	656,3	2,706	1 006	1 327	2,162	4 736	7 193
4,001	623,7	689,7	3,034	1 042	1 358	2,390	4 769	7 220
4,466	662,7	723,2	3,372	1 078	1 389	2,620	4 803	7 248

 $\varphi' = 40^\circ$
 $p'' = 4$
 $\varphi' = 40^\circ$
 $p'' = 15$
 $\varphi' = 40^\circ$
 $p'' = 100$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	376,0	—	0,000	1 410	—	0,000	9 401	—
0,161	438,1	668,7	0,143	1 471	2 367	0,137	9 462	15 493
0,339	501,3	722,7	0,291	1 533	2 418	0,275	9 523	15 544
0,539	565,8	779,7	0,447	1 595	2 471	0,415	9 584	15 594
0,756	631,3	838,2	0,611	1 658	2 525	0,555	9 645	15 645
0,989	697,7	897,9	0,781	1 721	2 579	0,697	9 707	15 696
1,235	764,9	958,3	0,957	1 784	2 634	0,840	9 768	15 747
1,492	832,8	1 019	1,140	1 847	2 690	0,984	9 829	15 798
1,760	901,2	1 081	1,329	1 911	2 747	1,130	9 891	15 850
2,036	970,2	1 143	1,523	1 976	2 803	1,276	9 952	15 901
2,321	1 040	1 205	1,723	2 040	2 861	1,424	10 014	15 953
2,613	1 110	1 268	1,927	2 105	2 919	1,573	10 076	16 005
2,911	1 180	1 331	2,137	2 170	2 977	1,723	10 138	16 057
3,215	1 251	1 394	2,351	2 235	3 035	1,875	10 199	16 106
3,525	1 322	1 457	2,569	2 301	3 094	2,027	10 261	16 162
3,839	1 393	1 520	2,792	2 367	3 153	2,181	10 323	16 214

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 4$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 15$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 100$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	899,6	—	0,000	3 374	—	0,000	22 491	—
0,098	1 026	1 644	0,089	3 499	5 866	0,086	22 616	38 501
0,206	1 154	1 757	0,181	3 625	5 975	0,173	22 741	38 608
0,325	1 284	1 876	0,277	3 751	6 086	0,260	22 866	38 715
0,455	1 416	1 998	0,377	3 878	6 199	0,348	22 991	38 823
0,592	1 549	2 122	0,480	4 006	6 313	0,436	23 116	38 931
0,737	1 684	2 247	0,587	4 134	6 429	0,525	23 241	39 039
0,889	1 819	2 374	0,698	4 263	6 545	0,615	23 367	39 147
1,046	1 956	2 502	0,811	4 392	6 663	0,706	23 492	39 256
1,209	2 093	2 630	0,928	4 522	6 782	0,797	23 618	39 365
1,376	2 232	2 759	1,047	4 652	6 901	0,888	23 744	39 475
1,548	2 371	2 888	1,169	4 783	7 022	0,981	23 870	39 585
1,723	2 510	3 018	1,294	4 914	7 143	1,073	23 996	39 695
1,901	2 650	3 149	1,421	5 045	7 264	1,167	24 122	39 805
2,083	2 791	3 279	1,551	5 177	7 387	1,261	24 248	39 915
2,268	2 933	3 410	1,683	5 310	7 510	1,356	24 374	40 026
2,455	3 074	3 541	1,818	5 442	7 633	1,451	24 500	40 137
2,645	3 217	3 672	1,954	5 575	7 757	1,547	24 627	40 248

$$\delta_1 = \delta_2 = 0$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 35$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 100$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 35$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	192,0	—	0,000	548,4	—	0,000	357,4	—
0,735	199,7	246,5	0,683	556,1	695,2	0,500	369,6	487,9
1,543	207,5	251,6	1,391	563,8	700,1	1,034	382,0	496,4
2,451	215,6	257,1	2,133	571,6	705,2	1,612	394,5	505,2
3,460	223,8	262,8	2,910	579,4	710,3	2,235	407,1	514,3
4,571	232,1	268,6	3,721	587,2	715,5	2,903	420,0	523,7
5,783	240,6	274,7	4,568	595,2	720,8	3,614	432,9	533,2
7,099	249,3	280,9	5,449	603,2	726,3	4,368	446,1	543,0
8,517	258,2	287,4	6,365	611,2	731,7	5,165	459,4	553,0
10,04	267,1	293,9	7,317	619,3	737,3	6,005	472,8	563,1
11,66	276,3	300,6	8,304	627,5	742,9	6,887	486,4	573,4

$\varphi' = 20^\circ$
 $p'' = 100$
 $\varphi' = 25^\circ$
 $p'' = 20$
 $\varphi' = 25^\circ$
 $p'' = 100$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	1 021	—	0,000	397,7	—	0,000	1 988	—
0,477	1 033	1 379	0,353	417,7	580,0	0,328	2 008	2 843
0,965	1 046	1 387	0,733	438,0	594,8	0,662	2 028	2 857
1,469	1 058	1 395	1,151	458,6	610,4	1,003	2 048	2 871
1,989	1 070	1 404	1,604	479,4	626,4	1,352	2 068	2 886
2,525	1 082	1 412	2,092	500,6	642,9	1,709	2 088	2 901
3,076	1 095	1 421	2,615	522,0	659,8	2,073	2 108	2 916
3,644	1 107	1 430	3,170	543,7	677,0	2,445	2 129	2 930
4,227	1 120	1 439	3,758	565,6	694,5	2,825	2 149	2 946
4,825	1 132	1 448	4,377	587,8	712,3	3 212	2 169	2 961
5,439	1 145	1 457	5,027	610,2	730,4	3,606	2 190	2 976

 $\varphi' = 30^\circ$
 $p'' = 10$
 $\varphi' = 30^\circ$
 $p'' = 21,732$
 $\varphi' = 30^\circ$
 $p'' = 100$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	410,6	—	0,000	891,5	—	0,000	4 106	—
0,248	445,2	641,8	0,231	925,9	1 361	0,220	4 140	6 184
0,522	480,5	669,4	0,475	960,6	1 388	0,443	4 174	6 210
0,830	516,4	698,5	0,736	995,6	1 415	0,670	4 209	6 236
1,171	553,0	728,6	1,013	1 031	1 444	0,901	4 243	6 262
1,541	590,1	759,6	1,306	1 067	1 472	1,135	4 278	6 289
1,940	627,8	791,3	1,614	1 102	1 501	1,374	4 312	6 315
2,367	666,0	823,5	1,937	1 139	1 531	1,616	4 347	6 342
2,819	704,6	856,3	2,275	1 175	1 561	1,861	4 382	6 369
3,296	743,7	889,6	2,628	1 212	1 592	2,111	4 416	6 396
3,796	783,2	923,2	2,994	1 249	1 623	2,364	4 451	6 424

$$\varphi' = 35^\circ$$

$$p'' = 10$$

$$\varphi' = 35^\circ$$

$$p'' = 100$$

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 5$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	915,7	—	0,000	9 157	—	0,000	1 131	—
0,156	979,8	1 491	0,143	9 221	14 460	0,101	1 262	1 966
0,325	1 045	1 544	0,287	9 284	14 510	0,215	1 396	2 080
0,511	1 110	1 599	0,433	9 348	14 560	0,343	1 532	2 202
0,713	1 177	1 656	0,581	9 412	14 611	0,484	1 670	2 327
0,930	1 244	1 714	0,730	9 476	14 662	0,637	1 810	2 454
1,161	1 312	1 773	0,882	9 540	14 714	0,801	1 952	2 585
1,405	1 381	1 833	1,035	9 604	14 765	0,975	2 095	2 717
1,663	1 450	1 894	1,190	9 668	14 817	1,159	2 240	2 850
1,932	1 520	1 956	1,348	9 732	14 869	1,351	2 386	2 985
2,213	1 591	2 019	1,506	9 797	14 921	1,551	2 533	3 121
2,505	1 662	2 082	1,667	9 861	14 974	1,758	2 681	3 258
2,808	1 734	2 145	1,829	9 926	15 027	1,972	2 831	3 396
						2,193	2 982	3 535
						2,420	3 133	3 674
						2,653	3 286	3 814

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 100$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 5$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 100$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	q''
0,000	22 615	—	0,000	3 201	—	0,000	64 024	—
0,088	22 744	37 258	0,057	3 506	5 725	0,051	64 326	109 550
0,177	22 874	37 365	0,119	3 815	5 999	0,101	64 628	109 810
0,266	23 004	37 472	0,188	4 128	6 286	0,153	64 931	110 070
0,356	23 135	37 580	0,264	4 444	6 581	0,204	65 234	110 330
0,448	23 265	37 689	0,345	4 764	6 883	0,257	65 537	110 590
0,540	23 395	37 798	0,432	5 087	7 189	0,309	65 840	110 860
0,633	23 526	37 907	0,523	5 413	7 499	0,362	66 144	111 120
0,727	23 657	38 017	0,619	5 742	7 813	0,415	66 448	111 380
0,822	23 788	38 127	0,719	6 073	8 130	0,469	66 752	111 650
0,918	23 919	38 237	0,823	6 407	8 449	0,523	67 056	111 910
1,014	24 050	38 348	0,931	6 743	8 770	0,578	67 360	112 180
1,112	24 181	38 459	1,043	7 080	9 093	0,633	67 665	112 450
1,210	24 313	38 571	1,157	7 420	9 419	0,688	67 970	112 710
1,309	24 444	38 683	1,275	7 762	9 745	0,744	68 275	112 980
1,404	24 576	38 795	1,395	8 105	10 073	0,800	68 581	113 250
			1,519	8 450	10 402	0,857	68 886	113 520
			1,644	8 797	10 733	0,914	69 192	113 790

$$\delta_1 = \delta_2 = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 40$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 100$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 40$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	290,4	—	0,000	725,9	—	0,000	597,8	—
0,630	299,2	371,1	0,593	734,6	919,3	0,408	612,0	811,8
1,318	308,1	376,9	1,209	743,4	924,9	0,839	626,3	821,6
2,087	317,1	383,0	1,856	752,3	930,7	1,303	640,7	831,8
2,935	326,2	389,3	2,535	761,2	936,5	1,799	655,3	842,2
3,865	335,5	395,9	3,245	770,1	942,5	2,327	669,9	852,9
4,878	344,9	402,6	3,986	779,1	948,5	2,887	684,6	863,7
5,973	354,4	409,5	4,760	788,1	954,7	3,479	699,4	874,8
7,152	364,0	416,5	5,565	797,2	960,9	4,102	714,3	886,0
8,415	373,6	423,7	6,403	806,3	967,3	4,757	729,2	897,4
9,763	383,4	431,0	7,273	815,5	973,7	5,443	744,2	908,9

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 100$$

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 30$$

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 100$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	1 494	—	0,000	971,5	—	0,000	3 239	—
0,393	1 509	2 015	0,266	995,6	1 399	0,256	3 263	4 624
0,795	1 523	2 025	0,546	1 020	1 417	0,516	3 287	4 641
1,210	1 537	2 034	0,844	1 044	1 435	0,782	3 311	4 659
1,639	1 551	2 044	1,160	1 069	1 454	1,053	3 335	4 676
2,079	1 566	2 054	1,495	1 093	1 472	1,330	3 359	4 694
2,533	1 580	2 065	1,847	1 118	1 491	1,612	3 383	4 712
3,000	1 595	2 075	2,217	1 142	1 511	1,900	3 407	4 730
3,479	1 609	2 085	2,604	1 167	1 530	2,193	3 432	4 748
3,971	1 624	2 096	3,008	1 192	1 550	2,492	3 456	4 766
4,476	1 638	2 106	3,430	1 217	1 570	2,796	3 480	4 784

$\varphi' = 30^\circ$
 $p'' = 20$
 $\varphi' = 30^\circ$
 $p'' = 100$
 $\varphi' = 35^\circ$
 $p'' = 15$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	1 502	—	0,000	7 511	—	0,000	2 858	—
0,169	1 546	2 286	0,162	7 554	11 299	0,103	2 943	4 564
0,348	1 589	2 319	0,326	7 598	11 332	0,211	3 029	4 633
0,539	1 633	2 354	0,492	7 641	11 364	0,326	3 114	4 703
0,741	1 677	2 389	0,661	7 685	11 398	0,448	3 200	4 775
0,955	1 721	2 425	0,832	7 728	11 431	0,576	3 286	4 848
1,180	1 765	2 461	1,005	7 772	11 464	0,711	3 372	4 922
1,416	1 809	2 498	1,181	7 815	11 498	0,852	3 458	4 997
1,663	1 853	2 534	1,360	7 859	11 532	0,999	3 543	5 072
1,921	1 898	2 572	1,541	7 903	11 566	1,152	3 629	5 148
2,190	1 942	2 610	1,724	7 946	11 600	1,311	3 715	5 224
						1,475	3 801	5 301
						1,645	3 886	5 378

 $\varphi' = 35^\circ$
 $p'' = 100$
 $\varphi' = 40^\circ$
 $p'' = 10$
 $\varphi' = 40^\circ$
 $p'' = 100$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	19 050	—	0,000	5 440	—	0,000	54 403	—
0,098	19 135	30 044	0,059	5 628	9 091	0,056	54 591	89 527
0,197	19 221	30 111	0,122	5 816	9 250	0,113	54 778	89 681
0,297	19 306	30 179	0,189	6 003	9 412	0,170	54 966	89 836
0,399	19 391	30 247	0,260	6 191	9 578	0,227	55 153	89 992
0,501	19 477	30 315	0,335	6 379	9 745	0,285	55 341	90 147
0,604	19 562	30 384	0,413	6 566	9 914	0,343	55 528	90 304
0,709	19 648	30 452	0,496	6 753	10 085	0,402	55 716	90 460
0,814	19 733	30 521	0,582	6 940	10 257	0,461	55 903	90 617
0,920	19 819	30 590	0,672	7 126	10 431	0,521	56 091	90 774
1,028	19 904	30 660	0,765	7 312	10 605	0,581	56 278	90 932
1,137	19 990	30 729	0,862	7 497	10 779	0,642	56 466	91 090
1,246	20 075	30 799	0,962	7 680	10 954	0,703	56 654	91 249
			1,064	7 863	11 129	0,764	56 841	91 408
			1,170	8 045	11 304	0,826	57 029	91 567
			1,279	8 225	11 479	0,888	57 217	91 726

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 5$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 10$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 100$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	q''	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	9 113	—	0,000	18 219	—	0,000	182 250	—
0,032	9 591	15 965	0,031	18 697	31 510	0,030	182 730	311 540
0,067	10 069	16 389	0,063	19 176	31 927	0,059	183 210	311 950
0,105	10 546	16 826	0,097	19 654	32 352	0,089	183 690	312 360
0,146	11 022	17 271	0,132	20 131	32 783	0,119	184 170	312 770
0,190	11 495	17 722	0,169	20 608	33 219	0,150	184 650	313 180
0,236	11 966	18 177	0,208	21 085	33 659	0,180	185 120	313 590
0,286	12 434	18 634	0,248	21 561	34 103	0,211	185 600	314 000
0,337	12 898	19 092	0,290	22 036	34 550	0,242	186 080	314 420
0,391	13 356	19 550	0,333	22 510	35 000	0,273	186 560	314 830
0,447	13 809	20 006	0,378	22 984	35 452	0,304	187 040	315 250
0,506	14 255	20 460				0,335	187 510	315 660
0,565	14 691	20 910				0,367	187 990	316 080
0,627	15 117	21 355				0,398	188 470	316 500
0,690	15 529	21 792				0,430	188 950	316 920
0,753	15 924	22 219				0,462	189 430	317 340
0,817	16 298	22 633				0,494	189 910	317 760
0,881	16 644	23 030				0,527	190 380	318 180

$$\delta_1 = -\varphi' / 2$$

$$\delta_2 = -\varphi'$$

$$\alpha_0 = 0$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 1,4$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 15$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 0,9$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	5,193	—	0,000	50,86	—	0,000	4,733	—
0,981	8,851	8,466	0,541	54,12	66,07	0,659	9,389	9,356
2,052	11,95	10,42	1,121	57,37	68,17	1,418	13,99	12,45
3,609	16,59	13,04	1,743	60,63	70,29	2,259	18,60	15,64
5,120	21,28	15,60	2,400	63,91	72,43	3,162	23,07	18,51
7,004	24,54	18,37	3,094	67,17	74,59	4,064	27,69	21,81
8,400	27,90	20,46	3,821	70,44	76,75	4,998	32,38	25,16
10,60	33,14	23,42	4,580	73,72	78,93	5,946	36,99	28,48
12,68	38,01	26,65	5,369	77,00	81,12	6,844	41,79	31,32
			6,187	80,30	83,31	7,796	46,44	34,51
			7,049	83,69	85,54	8,764	51,12	37,72

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 12$$

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 0,65$$

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 9$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	63,11	—	0,000	5,452	—	0,000	75,49	—
0,417	67,61	87,76	0,495	12,01	12,12	0,320	82,08	112,1
0,863	72,29	90,92	1,039	18,54	16,80	0,659	88,30	116,9
1,338	76,88	94,13	1,628	25,10	21,63	1,025	95,24	121,8
1,840	81,48	97,38	2,247	31,64	26,50	1,409	101,8	126,7
2,366	86,09	100,7	2,889	38,07	30,81	1,810	108,4	131,7
2,915	90,71	104,0	3,523	44,57	35,71	2,227	115,0	136,8
3,494	95,56	107,3	4,164	51,08	40,61	2,657	121,6	141,8
4,064	99,96	110,6	4,815	57,63	45,52	3,100	128,2	146,9
4,665	104,6	113,9	5,474	64,22	50,45	3,568	135,4	152,1
5,283	109,2	117,2	6,143	70,86	55,41	4,011	141,4	156,9

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 0,45$$

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 5$$

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 7$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	6,250	—	0,000	69,45	—	0,000	97,22	—
0,375	15,73	15,86	0,247	79,19	111,4	0,241	107,0	153,1
0,776	25,43	23,12	0,515	88,89	119,0	0,499	116,7	160,6
1,192	34,79	30,47	0,804	98,60	126,7	0,773	126,4	168,3
1,623	44,36	37,87	1,104	107,7	134,4	1,062	136,1	176,0
2,066	53,88	45,29	1,426	118,0	142,3	1,363	145,9	183,8
2,517	63,43	52,73	1,757	127,7	150,1	1,671	155,4	191,5
2,971	72,84	59,32	2,097	137,4	157,9	1,992	165,1	199,3
3,423	82,32	66,74	2,446	147,1	165,8	2,321	174,8	207,2
3,877	91,80	74,16	2,803	156,7	173,6	2,657	184,5	215,0
4,333	101,3	81,56	3,167	166,4	181,4	3,001	194,3	222,8

$$\varphi' = 35^\circ$$

$$p'' = 0,4$$

$$\varphi' = 35^\circ$$

$$p'' = 5$$

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 0,35$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	9,756	—	0,000	122,0	—	0,000	15,71	—
0,264	24,17	25,49	0,178	135,8	201,8	0,185	39,35	43,19
0,540	38,74	37,12	0,370	150,8	214,0	0,376	63,08	63,06
0,836	53,40	49,25	0,574	165,7	226,4	0,584	87,97	84,12
1,134	67,96	61,13	0,790	180,6	238,9	0,787	110,7	104,0
1,442	85,27	73,11	1,014	195,6	251,5	0,999	134,4	124,4
1,754	97,22	85,09	1,246	210,5	264,2	1,214	158,2	144,7
2,060	111,7	96,71	1,483	225,0	276,7	1,425	182,0	164,6
2,374	126,3	108,5	1,726	240,3	289,3	1,641	205,7	184,7
2,690	140,9	120,3	1,975	255,1	301,9	1,859	229,3	204,7
3,007	155,5	132,1	2,228	269,9	314,4	2,077	253,0	224,7
3,327	170,1	143,9	2,485	284,8	327,0	2,296	276,7	244,7
3,647	184,7	155,7	2,746	299,6	339,6	2,516	300,5	264,8
						2,735	324,2	284,7
						2,938	343,6	303,1
						3,166	371,5	323,7

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 4$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 0,25$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 3$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	179,5	—	0,000	22,75	—	0,000	273,0	—
0,127	204,1	314,8	0,129	64,23	69,70	0,087	316,5	502,6
0,264	228,5	335,7	0,259	105,9	105,7	0,181	359,8	541,2
0,410	252,9	356,9	0,398	147,8	143,4	0,283	403,0	580,4
0,563	277,3	378,2	0,540	189,8	181,0	0,389	446,2	619,9
0,723	301,6	399,7	0,682	231,7	217,6	0,503	494,9	660,9
0,889	325,9	421,1	0,826	273,6	254,7	0,613	532,3	698,8
1,058	350,2	442,6	0,972	315,5	291,6	0,730	575,2	738,3
1,232	374,5	464,1	1,119	357,4	328,5	0,850	618,0	777,7
1,409	398,7	485,5	1,265	399,3	365,4	0,972	660,9	817,1
1,588	422,9	507,0	1,413	441,2	402,2	1,096	703,6	856,4
1,771	447,1	528,4	1,549	475,2	436,3	1,222	746,4	895,6
1,955	471,3	549,7	1,702	524,9	474,1	1,349	789,1	934,7
2,142	595,4	571,1	1,850	566,7	510,4	1,477	831,7	973,8
2,332	520,4	592,7	1,998	608,5	546,8	1,606	874,4	1 013
2,515	543,7	613,1	2,146	650,4	583,2	1,737	917,0	1 052
			2,295	692,2	619,6	1,868	959,6	1 091
			2,443	734,1	655,9	2,000	1 002	1 129

$$\delta_1 = -\varphi'/2 \quad \delta_2 = -\varphi'$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 15$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 12$$

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 9$$

$-y'$	σ''	q''	$-y'$	σ''	q''	$-y'$	σ''	q''
0,000	67,31	—	0,000	92,35	—	0,000	123,0	—
0,512	73,51	88,64	0,369	101,4	130,0	0,265	136,7	184,7
1,110	79,89	92,86	0,788	110,7	136,6	0,565	150,8	195,2
1,798	86,23	97,31	1,265	120,3	143,4	0,901	165,2	206,1
2,597	93,33	102,1	1,795	130,0	150,6	1,271	179,8	217,5
3,483	100,4	106,9	2,376	140,0	158,0	1,672	194,7	229,1
4,462	107,6	112,0	2,999	150,2	165,5	2,101	209,9	241,0
5,517	115,0	117,1	3,670	160,6	173,2	2,556	225,2	253,2
6,665	122,5	122,4	4,384	171,1	181,1	3,029	240,8	265,3
7,900	130,3	127,9	5,138	181,8	189,1	3,528	256,5	277,7
9,223	138,2	133,4	5,932	192,7	197,3	4,048	272,4	290,2

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 5$$

$$\varphi' = 35^\circ$$

$$p'' = 5$$

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 4$$

$-y'$	σ''	q''	$-y'$	σ''	q''	$-y'$	σ''	q''
0,000	128,0	—	0,000	251,3	—	0,000	431,8	—
0,195	149,1	206,9	0,129	285,8	424,1	0,086	499,4	764,1
0,421	171,6	224,8	0,275	325,8	455,3	0,182	567,7	823,2
0,677	194,6	243,5	0,438	364,0	487,6	0,288	637,0	884,5
0,957	218,1	262,7	0,615	402,6	520,7	0,400	698,1	945,6
1,260	241,9	282,4	0,804	441,7	554,4	0,526	777,8	1 010
1,583	266,0	302,4	1,003	481,3	588,6	0,655	849,1	1 075
1,922	290,5	322,6	1,210	521,1	622,8	0,789	920,9	1 139
2,277	315,2	343,1	1,427	561,3	657,5	0,929	993,1	1 204
2,623	336,4	362,6	1,651	601,7	692,4	1,073	1 066	1 270
3,018	365,3	384,1	1,882	642,4	727,5	1,220	1 139	1 335
			2,120	683,3	762,7	1,371	1 212	1 401
			2,362	724,4	798,1	1,539	1 306	1 473
						1,671	1 343	1 528
						1,838	1 433	1 598
						2,000	1 507	1 664

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 3$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	777,1	—
0,054	914,4	1 442
0,114	1 053	1 567
0,182	1 194	1 696
0,254	1 335	1 829
0,332	1 478	1 962
0,409	1 594	2 091
0,496	1 766	2 231
0 583	1 912	2 366
0,673	2 057	2 502
0,765	2 204	2 639
0,859	2 350	2 775
0,954	2 498	2 912
1,051	2 645	3 048
1,150	2,793	3 185
1,249	2 941	3 322
1,350	3 090	3 460
1,452	3 238	3 597

$$\delta_1 = -\varphi'/2 \quad \delta_2 = -\varphi'$$

$$\alpha_0 = 60^\circ$$

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 40$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$p'' = 40$$

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$p'' = 30$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	237,6	—	0,000	450,5	—	0,000	667,7	—
0,415	246,2	304,5	0,282	463,7	613,4	0,192	688,8	964,8
0,870	254,9	310,2	0,582	477,0	622,6	0,396	710,3	980,4
1,373	263,8	316,1	0,903	490,4	632,0	0,613	731,9	996,4
1,924	272,8	322,2	1,245	504,0	641,7	0,842	753,7	1 013
2,522	282,0	328,6	1,607	517,8	651,6	1,084	775,7	1 030
3,170	291,4	335,1	1,983	530,4	661,5	1,338	797,9	1 047
3,867	300,9	341,8	2,390	545,7	671,9	1,604	820,2	1 064
4,616	310,7	348,7	2,812	559,8	682,3	1,882	842,8	1 082
5,399	320,4	355,6	3,254	574,1	692,9	2,189	872,4	1 100
6,240	330,4	362,8	3,716	588,5	703,7	2,459	884,0	1 117

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 20$$

$$\varphi' = 35^\circ$$

$$p'' = 15$$

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$p'' = 10$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	929,7	—	0,000	1 569	—	0,000	2 597	—
0,129	966,1	1 422	0,083	1 636	2 521	0,051	2 734	4 379
0,265	999,6	1 450	0,171	1 703	2 576	0,106	2 872	4 496
0,412	1 040	1 479	0,265	1 772	2 632	0,165	3 012	4 616
0,567	1 077	1 509	0,364	1 840	2 689	0,227	3 152	4 739
0,731	1 115	1 539	0,467	1 901	2 747	0,293	3 293	4 864
0,903	1 153	1 570	0,578	1 979	2 807	0,363	3 436	4 991
1,083	1 191	1 601	0,693	2 049	2 867	0,436	3 579	5 120
1,272	1 229	1 633	0,813	2 120	2 928	0,512	3 723	5 251
1,467	1 268	1 665	0,937	2 191	2 989	0,591	3 868	5 382
1,671	1 307	1 697	1,066	2 262	3 051	0,673	4 014	5 516
			1,199	2 334	3 114	0,757	4 160	5 650
			1,337	2 406	3 177	0,848	4,336	5 791
						0,928	4 410	5 912
						1,025	4 604	6 056
						1,119	4 753	6 193

$$\delta_1 = -\varphi'/2 \quad \delta_2 = -\varphi'$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 10$$

$$\alpha_0 = 90^\circ$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	7 353	—
0,029	7 692	12 858
0,059	8 012	13 138
0,091	8 334	13 425
0,125	8 658	13 717
0,161	8 983	14 014
0,198	9 311	14 315
0,237	9 640	14 620
0,277	9 970	14 928
0,319	10 302	15 238
0,362	10 635	15 552
0,406	10 970	15 867
0,452	11 306	16 185
0,499	11 644	16 505
0,547	11 982	16 827
0,596	12 322	17 151
0,646	12 663	17 476
0,697	13 005	17 802

$$\varphi' = 15^\circ$$

$$p'' = 70$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	550,3	—
0,348	559,5	698,5
0,717	568,8	704,5
1,112	579,2	710,7
1,524	587,7	717,0
1,963	597,2	723,4
2,426	606,8	729,9
2,913	616,5	736,6
3,425	626,2	743,4
3,961	636,0	750,2
4,521	645,9	757,2

$$\delta_1 = -\varphi'/_2 \quad \delta_2 = -\varphi'$$

$$\alpha_0 = 90^\circ$$

$$\varphi' = 20^\circ$$

$$\varphi' = 25^\circ$$

$$\varphi' = 30^\circ$$

$$p'' = 50$$

$$p'' = 40$$

$$p'' = 30$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	824,1	—	0,000	1 450	—	0,000	2 551	—
0,230	838,6	1 116	0,148	1 474	2 080	0,093	2 594	3 859
0,471	853,1	1 126	0,302	1 498	2 097	0,189	2 637	3 892
0,725	867,8	1 136	0,463	1 522	2 115	0,289	2 680	3 925
0,992	882,5	1 146	0,630	1 546	2 133	0,393	2 723	3 959
1,272	897,3	1 157	0,804	1 571	2 151	0,501	2 766	3 993
1,565	912,1	1 168	0,985	1 595	2 170	0,616	2 826	4 028
1,871	927,0	1 178	1,172	1 619	2 188	0,727	2 847	4 061
2,189	941,9	1 189	1,366	1 644	2 207	0,839	2 869	4 094
2,520	956,8	1 201	1,567	1 668	2 226	0,968	2 937	4 131
2,864	971,9	1 212	1,773	1 692	2 245	1,094	2 980	4 166

$$\varphi' = 35^\circ$$

$$\varphi' = 40^\circ$$

$$\varphi' = 45^\circ$$

$$p'' = 25$$

$$p'' = 20$$

$$p'' = 15$$

$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$	$-y'$	σ''	$\bar{q}''$
0,000	5 438	—	0,000	12 496	—	0,000	31 486	—
0,056	5 522	8 624	0,032	12 678	20 677	0,016	31 950	54 145
0,113	5 606	8 690	0,064	12 861	20 829	0,034	32 927	54 564
0,172	5 689	8 758	0,097	13 043	20 983	0,051	33 161	54 962
0,234	5 772	8 826	0,132	13 225	21 138	0,069	33 392	55 362
0,297	5 856	8 895	0,167	13 406	21 294	0,087	33 622	55 765
0,362	5 939	8 964	0,204	13 587	21 451	0,105	33 850	56 171
0,429	6 022	9 034	0,241	13 768	21 609	0,124	34 075	56 580
0,498	6 105	9 104	0,279	13 948	21 767	0,145	35 171	57 018
0,568	6 187	9 174	0,318	14 128	21 927	0,165	35 626	57 437
0,640	6 270	9 245	0,359	14 308	22 087	0,186	36 079	57 858
0,715	6 352	9 316	0,400	14 486	22 248	0,208	36 531	58 280
0,790	6 434	9 388	0,441	14 665	22 409	0,229	36 981	58 703
			0,484	14 842	22 570	0,251	37 429	59 126
			0,528	15 019	22 732	0,274	37 874	59 550
			0,572	15 195	22 894	0,297	38 318	59 975
						0,320	38 759	60 399
						0,344	39 197	60 824

AGRADECIMENTO

O presente trabalho é um dos resultados do elevado espírito de colaboração que actualmente reina no domínio da Engenharia Civil Portuguesa.

Na Província foram-nos dadas as facilidades possíveis dentro e fora do Laboratório de Ensaios de Materiais e Mecânica do Solo. O Sr. Eng. Nuno Maria Vaz Pinto, digno Secretário Provincial de Obras Públicas, deu-nos autorização para a deslocação a Lisboa. No LEMMS contámos sempre com a melhor boa vontade do Director, Eng. Virgílio Furtado, e com o trabalho perseverante de alguns subordinados: o Sr. Silva Gaio Esteves nos cálculos, a Sra. D. Amália Sequeira Braga e o Sr. Teixeira da Silva nos ensaios preliminares e o Sr. Fernando Costa nas figuras.

Na utilização do cálculo automático encontrámos a maior compreensão por parte de várias entidades entre elas o Laboratório Nacional de Engenharia Civil, a quem se formulou o primeiro pedido concreto. Há, pois, que agradecer ao seu Director, Eng. Manuel Mendes da Rocha e ao Eng. Júlio Ferry Borges, Chefe do Serviço de Edifícios e Pontes as facilidades que prontamente nos deram para a resolução do nosso problema no Centro de Cálculo Automático do LNEC. Frequentámos ali um Curso de programação em Auto-Código para a calculadora Elliot 803-B. Em seguida elaborámos o programa sob a orientação do Dr. Palma Fernandes, que tinha regido o referido Curso. Na correcção, afinação e execução do programa várias foram as dificuldades encontradas e para as ajudar a vencer encontrámos sempre à nossa disposição os matemáticos Dr. Palma Fernandes, Dra. D. Madalena Quirino e Dra. D. Maria Odete. Na utilização das máquinas contámos com o amável auxílio de todas as operadoras. O Eng. Arantes e Oliveira desde o início muito se interessou pelo nosso trabalho e com ele trocámos impressões, muito úteis pela prática que tem da utilização da Elliot 803-B. O Dr. Gustavo de Castro também acompanhou o nosso trabalho e dele aprendemos em vários colóquios noções fundamentais à compreensão do cálculo automático. A todos os nossos agradecimentos.

Por fim um último agradecimento, mas não menor, ao Sr. Eng. Manuel Pimentel Pereira dos Santos, digno Director Geral das Obras Públicas do Ultramar, pelo encorajamento que neste e noutros trabalhos nos tem dado, e bem assim aos Eng.^{os} Úlpio do Nascimento e José Folque, respectivamente Chefe do Serviço de Geotecnia e Chefe da Divisão de Fundações do LNEC, que cederam os meios para nos instalarmos e que, com muito interesse, seguiram o nosso trabalho.

BIBLIOGRAFIA *

1. ANDERSEN — «Calculation of Bearing Capacities of Footings by Circular Arcs», *Engineering News-Record* (1946).
2. BÁLA, ÁRPÁD — «Bearing Capacity of Foundations», *Proc. A. S. C. E.*, Vol. 88, N.º SM5, Oct., pp. 13-34 (1962).
3. BEREZANTZEV, V. G. e outros — «Axial Symmetrical Problem of the Limite Equilibrium Theory of Earthy Medium» (em russo).
4. BIAREZ, J., — «Contribution a l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents», Univ. Grenoble, 1961, Lab. de Mécanique des Fluides, Imprimerie Louis Jean, Gap.
5. BIOT, M. A. — «General Theory of Three-Dimensional Consolidation», *J. App. Phys.*, 12.2, 155 (1941).
6. BONNEAU, M., — «Étude de la fondation rectiligne et de la fondation circulaire», *Annales des Ponts et Chaussées*, Avril (1938), p. 497.
7. BOUSSINESQ, J. — «Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents et sur la poussée des terres sans cohésion», *Mémoires couronnées et mémoires des savants étrangers. L'Académie Roy. des Sciences de Belgique*, Vol. 40, pp. 157-173 (1876).
8. BUISSMAN, K. — «Grond mechanica», Delft, Waltman (1940).
9. CAMPOS E MATOS, A. de — «Propriedades intrínsecas dos meios elásticos», dissertação para doutoramento, Porto, 1950.
10. CAQUOT, A. — «Équilibre des massifs à frottement interne», Gauthier-Villars, Paris (1934).
11. CAQUOT, A. e KÉRISEL — «Sur le terme de surface dans de calcul des fondations en milieu pulvérulent», *Proc. 3rd ICSMFE*, Zurich (1953).
12. CAQUOT, A. e KÉRISEL — «Traité de mécanique des sols», 3.ª ed. Gauthier, Villars, Paris (1956), 1.ª ed., 1949.
13. CARSLAW, H. S. e JAEGER, J. C. — «Conduction of Heat in Soils», Clarendon Press, Oxford (1959).
14. COLLATZ, LOTHAR — «The Numerical Treatment of Differential Equations», 3rd ed. Springer-Verlag, Göttingen (1960).
15. COOK, G. — «Rankine and the Theory of Earth Pressure», *Geotechnique*, II, p. 271, London (1951).
16. CORREIA DE ARAÚJO, F. S. — «Elasticidade e plasticidade», Ed. do Autor, Univ. do Porto (1961).

* Indicam-se apenas as obras mencionadas no texto. Muitas outras foram consultadas, mas não foram referidas por não apresentarem interesse particular para os problemas tratados. Preferiu-se mencionar bibliografia em língua portuguesa em assuntos que nela têm sido tratados com actualidade e desenvolvimento.

17. CORREIA DE ARAÚJO, F. S. — «Estudo dos maciços terrosos e dos seus suportes», 1.^a Ed. 1942 (Lopes da Silva, Porto). 2.^a Ed. da Revista *Engenharia*, Porto, 1958-59.
18. COULOMB, C. A. — «Éssai sur une application des règles des maximes et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture», *Mem. Acad. Roy. près. divers Savants*, Vol. 7, Paris (1776).
19. CULMANN, C. — «Graphische Statik» (1866), Zürich.
20. DAMGAARD, J. — «The Bearing Capacity of Sand», Master's Thesis, Technic, University of Denmark (1951).
21. DE BEER, E. E. — «L'équilibre limite du sol sous des fondations directes», Conf. 4/3/952 em Bruxelas na «Association Belge pour l'Étude, l'Éssai et l'Emploi des Matériaux», Public. da dita Ass. Belga.
22. DE BEER, E. E. e VESIC, A. B. — «Étude expérimentale de la capacité portante du sable sous des fondations directes établies en surface», *Ann. Trav. Pub. Belgique*, n.º 3, Bruxeles (1958).
23. DE BEER, E. E. e WALLAYS, M. — «Limitation of the Validity of Application of the Formulae from Prandtl-Buissamn and Andersen for the Ultimate Bearing Capacity of the Soil Underneath Footings», *Proc. 2nd ICSMFE*, Rotterdam, I, (1948), pp. 63-68.
24. DE BEER, E. E. e WALLAYS, M. — «Examen critique de trois theories recentes sur l'équilibre limite du sol sous les fondations directes», *Ann. Trab. Pub. Belgique*, Vol. 108, N.º 3, pp. 5-50, 1955.
25. DE JOSSELIN DE JONG — «Statics and Kinematics the Failable Zone of a Granular Material», Doctor Thesis, Uitgeverij Waltman, Delft (1959).
26. DRUCKER, D. C. — «Limite Analisis of Two and Three Dimensional Soil Mechanics Problems», *Journ. Appl. Mech. and Phys. of Solids*, Vol. I, pp. 217-226, (1953).
27. DRUCKER, D. C. — «A Difinition of Stable Inelastic Material», *Journal of Appl. Mech.*, March 1959, pp. 101-106, *Trans. of the A. S. M. E.*, N. Y.
28. DRUCKER, D. C., PRAGER, W. — «Soil Mechanics and Plastic Analisis or Limit Design», *Quart. Appl. Math.*, X, n.º 2, pp. 157-165 (1952).
29. FEDA, J. — *Proc. A. S. C. E.*, Vol. 89, SM3, May, pp. 171/2, 1963. Crítica ao trabalho de Båla (1962) «Bearing Capacity of Foundations», *Proc. A. S. C. E.*, Vol. 88, n.º SM5, Oct. 1962, pp. 13-34.
30. FOLQUE, J. — «Reologia dos solos não saturados», Dissertação para investigador do LNEC, Lisboa, 1961.
31. FORSYTHE, G. E. e WASOW, W. R. — «Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations», John Wiley & Sons, Inc., N. Y. (1960).
32. FRANÇAIS — «Recherches sur la poussée des terres, sur la forme et les dimensions des murs revêtements et sur les talus d'excavations», *Mem. de l'Officier du Génie*, N.º 4, p. 157 (1820).
33. FROCHT, M. M. — «Photoelasticity», I e II, John Wiley & Sons, N. Y. (1948).
34. FROLICHR, O. K. — «Druck Verteilung im Baugrunde», Vienne, Julius, Springer 1934.
35. FRONTARD, M. — «Études mathématiques sur la stabilité des masses des sols», *Compt. Rendues hebd. Acad. Sc.*, Paris, Vol. 174 (1922), 20 Fév. p. 526, 13 Mars, p. 740, 3 Avril, p. 930, 11 June 1928, p. 1597. Cong. des G. Barrages. Stockholm (1933), Washington (1936).
36. FRONTARD, M. — «Sliding Surfaces and Stability Calculations for Soil Masses of Curvilinear Profile», *Proc. 2nd ICSMFE*, V, pp. 20-22 (1948).
37. GIBSON, R. E. e HENKEL, D. J. — «Influence of Duration of Tests at Constant Rate of Strain on Measured Strength», *Céot.*, IV, pp. 6-15, London (1954).
38. GOLDER, H. Q. — «The Ultimate Bearing Pressure of Rectangular Footings», *Journ. Instn. C. Eng.*, Vol. 17, p. 161, London (1941).
39. GOLDER, H. Q. — «Biography of Charles Augustin Coulomb», *Géotechnique*, Vol. I, 1, pp. 66-71, London (1948).

40. HAJAL, M. — «Étude général de la butée d'un écran plan contre un massif cohérent par la théorie des caractéristiques», Thèse U. Grenoble, 1961, Lab. Méc. Fluides, 44, Av. Felix-Viallet.
41. HANSEN, J. B., *General Rep. 4th ICSMFE*, div. 3a, London (1957).
42. HANSEN, J. B. — «A General Formula for Bearing Capacity», *Bulletin N.º 11, Danish Geot. Inst.*, Copenhagen (1961).
43. JAKY, J. — «Sur la stabilité des masses de terre complètement plastiques», I, II, *Muegyctemi Kiozlemenyck*, Budapest, (1947, 1948).
44. KÁRMÁN, I. — «Über elastischer Grenzzustände», *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech.*, Zürich (1926).
45. KÉRISEL, J. — «Contribution à l'étude du frottement dans les milieux pulvérulents et application à l'étude des fondations» (Thèse de Doct. en Sorbonne), Gauthier-Villars, Paris (1935).
46. KÉRISEL, J. e ADAM, M. — «Fondations profondes», *Ann. de l'Inst. Bât. Trav. Publ.*, N.º 179, Nov. (1962).
47. KÉZDI, A. — «The Effect of Inclined Loads on Stability of a Foundations», *Proc. ICSMFE*, Paris, I, pp. 699-703, (1961).
48. KOPÁCSY, F. — «Distribution des contraintes à la rupture, forme de la surface de glissement et hauteur théorique des talus», *Proc. 5th ICSMFE*, II, 641-650, Paris (1961).
49. KÖTTER, F. — «Über das Problem der Erddruckbestimmung», *Verhandl Physik. Ges. Berlin* (1888), Vol. 7, pp. 1-8.
50. KÖTTER, F. — «Über den Druck von Sand», Berl. Ber. 1909.
51. KREY, H. — «Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes», 5.ª Ed., Berlin (1936), (W. Ernst Sohn), 1.ª Ed., 1912.
52. LADANYI, B. — «Étude théorique et expérimentale de expansion dans un sol pulvérulent d'une cavité présentant une symétrie sphérique ou cylindrique», *Ann. Trav. Publ., Belgique*, fasc. 2, p. 105, fasc. 4, p. 365-404 (1961).
53. LOPES, B. — «Dissertação para especialista do LNEC, Lisboa, 1964.
54. LEVY — «Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des solides ductiles au delà des limites ou l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état», *Comptes Rend. Ac. Sc. (Paris)* 70, p. 1323-1325 (1870).
55. LUMB, P. — «Rate of Settlement of a Clay Layer Due to a Gradually Applied Load», *Civil Eng. Publ. Works Review*, London, March 1963, pp. 315-317.
56. LUNDGREN E MORTENSEN — «Determinations by the Theory of Plasticity of the Bearing Capacity of Continuous Footing on Sand», *Proc. 3rd ICO SMFE*, I, p. 409-412, (1953).
57. MANDEL, J. — «Équilibres par tranches planes des solides à la limite d'écoulement», thèse, Lyon (1942).
58. MANDEL, J. — «Interférence plastique de fondations superficielles», *Proc. Int. Conf. S. Mech. Fond. Eng.*, pp. 268-279, Budapest, Sept. 24-27 (1963), Ed. Akadémiai Kiadó, Budapest.
59. MARTINS, J. B. — «Somme Factors Controlling the Consolidation of Saturated Soils», M. Sc. Thesis, London University, June 1962.
60. MEYERHOF, G. G. — «An Investigation of the Bearing Capacity of Shallow Footings on Dry Sand», *Proc. 2nd ICSMFE*, I, p. 237-243, Rotterdam (1948).
61. MEYERHOF, G. G. — «The Ultimate Bearing Capacity of Foundations», *Géot.*, II, (1951), pp. 301-332.
62. MEYERHOF, G. G. — «Influence of Roughness of Base and Ground-Water Conditions on the Ultimate Bearing Capacity of Foundations», *Géot.*, V, p. 227, London (1955).
63. MIZUNO, T. — «On the Bearing Power of Soil in a Two Dimensional Problem» *Proc. 2nd ICSMFE*, III, Rotterdam (1948).
64. NADAI, A. — «Theory of Flow and Fracture of Solids», 2nd Ed. Mc-Graw Hill Book Co., N. Y. (1950).

65. NADAI, A. — «Theory of Flow and Fracture of Solids», Mc-Graw Hill Co., Vol. I e II, N. Y. (1963).
66. OHDE, J. — «Zur Theorie des Erddruckes unter besonderer Berücksichtigung der Erddruck Verteilung», *Die Bautechnik*, 16, pp. 150-159, 176-180, 241-245, 331-335, 480-487, 570-571, 753-761 (1938).
67. PRAGER, W. — «Introduction to Continuum Mechanics», N. Y. (1960).
68. PRANDTL, L. — «Über die Härte plastischer Körper *Nachs. Kgl., Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse.*, (1920), p. 74.
69. RAES, P. E. — «Het oppersingsvraagstuk bij een Strookvorming Fundament», *Techn. Wetensch. Tijdschr.*, 1941, N.º 10, p. 1.
70. RANKINE, W. J. M. — «On Stability of Loose Earth», *Proc. Phil. [Trans. Roy. Soc.]*, London, Vol. 147, 1857, Trad. francesa 1874.
71. REBHANN, G. — «Theorie des Erddruckes und der Fultermauern», Wien (1871).
72. REINER, M. — «Deformation and Flow». An elementary introduction to Theoretical Rheology, Ed. H. K. Lewis & Co., Ltd., London, (1949).
73. REISSNER, H. — «Zum Erddruck Problem», *Proc. 1st Intern. Congr. Applied Mechan.* Delft (Holand), (1924).
74. RÉSAL, J. — «La poussée des terres, deuxième partie», *Théorie des Terres Cohérents*, Paris, Béranger (1903) e (1910).
75. SAINT VENANT, B. de. — «Recherche dans le calcul de la poussée exercée contre un mur», *Louville's Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2nd. Series. 15, p. 279 (1870).
76. SCOTT BLAIR, G. W. — «A Survey of General and Applied Rheology», Isaac Pitman & Sons, London 1944.
77. SKEMPTON, A. W. — «Earth Pressure and the Stability of Slopes», *Instn. of Civil Engs.*, London (1946).
78. SKEMPTON, A. W., YASSIN, A. A. e GIBSON, R. E. — «Théorie de la force portante des pieux dans le sable», *Ann. Inst. T. Bât. Trav. Publ.*, N.º 63-64, p. 285, Paris (1953).
79. SOKOLNIKOF, I. S. e REDHAFFER, R. N. — «Mathematics of Physics and Modern Engineering», McGraw-Hill Book Co., N. Y., (1958).
80. SOKOLOVSKI, V. V. — «Statics of Soil Media», Butterworths Scientific Publ., London (1960).
81. SOKOLOVSKI, V. V., Disc. on the «Bearing Capacity of Foundations», *Proc. 5th ICSMFE*, III, pp. 326, (1961).
82. TERZAGHI, K. «Die Erddruckerscheinungen», *Osterr. Wochenschr. Offentl. Baudienst.* Ig. p. 17-19 (1919).
83. TERZAGHI, K. — «Theoretical Soil Mechanics», John Wiley, Sons, N. Y. (1943).
84. TSYTOVICH, N. A. — General Rep. Div. 3/A, *Proc. 5th ICSMFE*, II, 824-835, Paris (1961).
85. WACK, B. — «Étude de la butée d'un écran plan contre un massif cohérent par la théorie des caractéristiques», Thèse Un. Grenoble, Lab. Méc. Fluides, 44-Av. Felix-Viallet, Juillet (1960).
86. WEISKOPF, W. H. — «Stresses in Soils Under a Foundation», *J. Franklin Institute*, Vol. 239, June, 1945.
87. ZAHARESCU, E. — «Sur la stabilité des fondations rigides», *Proc. 6th ICSMFE*, Paris, I, 867-871 (1961).

ÍNDICE

	Pág.
Preâmbulo.....	7
I. INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS	
1. Modos de encarar o comportamento mecânico dos corpos reais	13
2. Os maciços terrosos como meios contínuos	13
3. Noções fundamentais de cálculo tensorial	14
4. Decomposição dum tensor de 2. ^a ordem na soma dum tensor simétrico com outro hemi-simétrico	17
5. Direcções principais dum tensor simétrico.....	17
6. Invariantes de um tensor	18
7. O estado de tensão é representado por um tensor simétrico	18
8. Parte isotrópica e parte distorcional do tensor das tensões.....	20
9. Tensões principais. Os valores máximos das tensões tangenciais	20
10. Tensões octaedrais normais e tangenciais	22
11. Deformações em termos de coordenadas de Lagrange e em termos de coordenadas de Euler	22
12. Deformações finitas e deformações infinitesimais.....	23
13. Estado de deformação homogénea	24
14. O tensor das deformações infinitesimais homogéneas. Sua decomposição	25
15. Significado da parte simétrica e da hemi-simétrica do tensor das deformações. Deformação pura e rotação	25
16. Exemplos. Corte simples a corte puro. Extensão volumétrica a extensão distorcional	26
17. Homologia de propriedades entre os tensores das tensões, das extensões e das velocidades de extensão	29
18. Aspectos energéticos associados às tensões, às extensões e velocidades de extensão	29
19. Transformações adiabáticas e transformações isotérmicas. Dois exemplos de efeitos termo-elásticos	31
20. O problema geral da mecânica dos meios contínuos. As equações reológicas de estado	32
21. O problema da elasticidade caso particular do problema geral da mecânica dos meios contínuos	33
22. As constantes de finidoras da constituição dos corpos elásticos e isótropos	34
23. Os corpos ideais simples. O corpo rígido de Euclides, o líquido de Pascal e o líquido de Newton	35
24. Os corpos ideais compostos. O líquido de Maxwell e o sólido de Kelvin. Sua representação por modelos	36
25. Modelos de corpos complexos. Modo de estabelecer a equação diferencial que rege qualquer modelo linear. A aplicação ao corpo de Burgers ...	38

	Pág.
26. A inclusão de elementos de St. Venant. O corpo de Bingham	40
27. Interpretação do fenómeno da rotura em termos de modelos recilógicos. Insuficiências dessa interpretação	41
23. O postulado da estabilidade ou de Drucker.....	42
29. Derivação do postulado da estabilidade das equações que regem o corpo elasto-plástico	43
30. Aplicação à dedução das equações fundamentais da teoria de Prandtl-Reuss. Extensão à teoria de von Mises e às das pequenas deformações elasto-plásticas	45
31. Problema geral da plasticidade.....	48
32. A teoria de Mohr e a condição de plasticidade de Mohr-Coulomb generalizada.....	48
33. Dedução das relações entre velocidades de extensão e tensões no problema geral do equilíbrio limite dos maciços terrosos	50
34. O problema do equilíbrio limite dos maciços terrosos como um problema da determinação de estados de tensão estáticamente admissíveis	52

II. REVISÃO DOS CONHECIMENTOS EXISTENTES SOBRE O EQUILÍBRIO LIMITE DOS MACIÇOS TERROSOS E O CÁLCULO DA CAPACIDADE DE CARGA DAS FUNDAÇÕES

35. Resenha histórica e posição actual do problema	55
36. Comparação de soluções para o problema do maciço sem peso	58
37. Comparação de soluções para o maciço com peso. Fundação superficial	61
38. Soluções para o caso do maciço com peso. Caso geral	68
39. Contribuição da resistência das camadas superiores para a capacidade de carga duma fundação	70

III. O PROBLEMA ESPECÍFICO

40. Particularização das equações gerais	85
41. As equações de equilíbrio no plano xy . Introdução das tensões neutras	88
42. Relações entre as tensões σ_{ij} ($i, j = x, y$) a tensão efectiva média σ' e o ângulo da tensão principal máxima com o eixo dos xx	91
43. Redução do problema a um sistema de duas equações diferenciais de tipo hiperbólico. O gradiente das tensões neutras como força de massa	92
44. Redução do sistema à forma canónica	96
45. Resolução do sistema por métodos numéricos. As fórmulas de recorrência para os três problemas fundamentais	96
46. Aplicação ao problema da capacidade de carga das fundações contínuas	99
47. Determinação de σ' e Φ na superfície livre equivalente	101
48. Determinação de σ' e Φ na segunda fronteira (sob a base da fundação)	104
49. Condições de estabilidade na superfície equivalente	106
50. Cálculo na região ADE (Fig. 13.3). Solução numérica e solução analítica	109
51. Cálculo na região ADC (Fig. 13.3) — Região de corte radial	109
52. Cálculo na região ABC. Implicação da rugosidade da base	110
53. O problema sob forma adimensional. Exemplo	111
54. A programação do problema para a calculadora Elliot 803-B	114
55. Dificuldades na execução do programa.....	117

IV. RESULTADOS E SUA APLICAÇÃO

56. Os casos abrangidos pelas tabelas. Fórmulas pelas quais se obteve a a tensão média sob a sapata	121
---	-----

	Pág.
57. Exemplo. Sapata superficial. Base lisa e base rugosa. Comparação dos resultados com os dos cálculos à Terzaghi, à Meyerhof e à Caquot	123
58. Exemplo. Fundação a profundidade média. Comparação de resultados	129
59. Exemplo. Fundação enterrada em solo resistente a profundidade média. Influência do aperto das terras contra o fuste	133
60. Exemplo. Fundação superficial e ângulo de atrito interno baixo	136
61. Fundação superficial e ângulo de atrito elevado.	137
62. Fundação larga e ângulo de atrito baixo	138

V. EXTENSÃO DO MÉTODO A OUTROS PROBLEMAS ESPECÍFICOS

63. Os casos abrangidos pelo programa mas não incluídos nas tabelas. Alguns resultados	141
64. Forças de massa variáveis de ponto para ponto. O caso dos maciços em consolidação	144
65. Caso duma fundação contínua num maciço argiloso com camadas drenantes delgadas e horizontais	145
66. Método de cálculo quando haja várias camadas de solo com ângulos de atrito, coesões e pesos específicos diferentes	152
67. Caso da distribuição não uniforme de tensões na fronteira	155

APÊNDICES

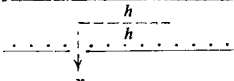
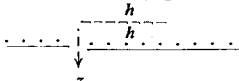
1.II Formas apresentadas por vários autores para a solução do problema da capacidade de carga duma fundação contínua de base horizontal assente num maciço sem peso no caso de base lisa	157
2.II Capacidade de carga das fundações contínuas. Maciço sem peso. Demonstração de que as fórmulas apresentadas por Meyerhof, Caquot e Kérisel e Sokolovski podem ser adaptadas de forma a coincidirem com a fórmula de Terzaghi	161
1.III Equilíbrio limite dum maciço limitado por um plano inclinado de α_0 sobre o horizonte (Fig. 14.3)	163
2.III Capacidade de carga das fundações. Programa em «Auto-Código» para a calculadora Elliot 803-B	175
1.IV Tabelas para o cálculo da capacidade de carga das fundações	185
Agradecimento	207
Bibliografia	209

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS OFICINAS GRÁFICAS
DA MINERVA CENTRAL
LOURENÇO MARQUES

ERRATA

Pág.	Linha	onde se lê	deve ler-se
14	21	passá-los	passá-las
17	18 e 19	v_i	v_j
19	última	1962	1960
20	1	G_i	G_j
27	12 a 14	$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ e_{ij} = c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
27	22	$E^{(v)}$	$\varepsilon^{(v)}$
28	última	$u_y = u_z = \frac{1}{\sqrt{1+c}} - 1.$	$u_y = \left(\frac{1}{\sqrt{1+c}} - 1 \right) y,$ $n_z = \left(\frac{1}{\sqrt{1+c}} - 1 \right) z.$
29	4 a 6	$\begin{pmatrix} c/3 & 0 & 0 \\ 0 & c/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c/3 & 0 & 0 \\ 0 & c/3 & 0 \\ 0 & 0 & c/3 \end{pmatrix}$
32	30	de mecânica	da mecânica
36	1	deformações	extensões
36	14, (66.1)	$\sigma_0 = K \varepsilon_{ii} + \eta_v \varepsilon_{ii}$	$\sigma_0 = K \varepsilon_{ii} + \eta_v \varepsilon_{ii}$
37	12, (69.1)	$\tau = 2 \eta_2 \dot{\gamma}_2$	$\tau = 2 \eta_2 \dot{\gamma}_2$
39	8 e 10, (73.1)	ε	$\dot{\varepsilon}$
40	3	ε	$\dot{\varepsilon}$
41	9	Insuficiências	Insuficiências
46	7, (91.1)	$\dot{\Phi}' = \tau_{ij} \varepsilon_{ij}$	$\dot{\Phi}' = \tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$
46	10, (92.1)	$\dot{a}_0$	$\dot{\varepsilon}_0$
47	22	essee	nesse
51	8 e 9, (112.1)	$* \dots + \tau_{xy}$	$\dots + \tau_{xy}^2$
52	12, (121.1)	$\dot{\varepsilon}''$	$\dot{\varepsilon}''_{yy}$
56	8	origem húngara	origem austríaca
56	27	soreb	sobre
59	Fig. (1.2), ordenadas	$\frac{2q'}{\gamma b}$	$2\bar{q}'/\gamma'b$
62	11, (4.2)	p''	$\bar{q}''$
64	Quadro (I.II)	q'	$\bar{q}''$
65	3	com este	com este no
65	13	30°	40°
67	2	e ângulos	e os ângulos
69	16	os casos	dos casos
75	4 e 5	$\overline{BE} = \frac{BD}{\cos(\mu + \varphi')}$	$\overline{BE} = \frac{\cos \varphi'}{\cos(\mu + \varphi')} \overline{BD}$
75	21	superfície livre $B'E$	superfície livre
77	Fig. (8.2)	Np'_0 fórmula (29.2)	Np fórmula (29.2)
91	8, (30.3)	$\dots + \tau_{xy}$	$\dots + \tau_{xy}^2$
93	2 e 3	$= \frac{\partial u}{\partial x} e = \frac{\partial u}{\partial y}$	$= - \frac{\partial u}{\partial x} e = - \frac{\partial u}{\partial y}$
97	10	$\text{tg}(\Phi_2 - \mu)$	$\text{tg}(\Phi_2 + \mu)$

* No que se segue onde haja impossibilidade de escrever por inteiro as expressões matemáticas por demasiado longas, colocar-se-ão reticências (...) nas partes suprimidas, reproduzindo-se apenas a parte dessas expressões onde há a fazer correcções.

Pág.	Linha	onde se lê	deve ler-se
99	5	(55.3)	(53.3)
101	20	(34.3)	(35.3)
102	11	... $2(\Phi + \alpha_0)$...*	... $2(\Phi - \alpha_0)$...
108	penúltima	... $\frac{p'_0 + H'}{\gamma' \cos \delta}$...	... $\frac{p'_0 + H'}{\cos \delta}$...
109	6	pág. 92	pág. 97
109	24	(44.3)	(45.3)
113	6	detalhe	pormenor
113	10	obter-se	obter-se-à
121	11	$(p'_0 + H')/\sigma^0$	$p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0$
127	10, (40.3)	$\bar{q}' = c'N_c + \frac{b}{2} p'_0 N_p + \gamma' N_\gamma$	$\bar{q}' = c'N_c + p'_0 N_p + \frac{b}{2} \gamma' N_\gamma$
127	20 e 21	$N_p = 35,5, N_\gamma = 22, N_\gamma = 25.$	$N_c = 35,5, N_p = 22, N_\gamma = 23,5$
129	14	$p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0$	$p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0$
132	2	$-y' = 0,250, \bar{q}'' = 114,4, \bar{q}' = 119,4$	$-y' = 0,247, \bar{q}'' = 111,4, \bar{q}' = 119,0$
134	22	nota-se	note-se
135	16	$N_c = 40$	$N_p = 40$
136	20	$\bar{q}'' = 190,6$	$\bar{q}'' = 110,6$
139	19	$14,8 \times 1,00\text{tm}^{-2} \times 6,67$	$14,8 + 1,00\text{tm}^{-2} \times 6,67$
139	21	$8,00/2 \times 1,00\text{tm}^{-2} \times 5,69$	$8,00/2 \times 1,00\text{tm}^{-2} \times 5,69$
141	2	DOS METODOS	DO METODO
145	Fig. (2.5)		
145	Fig. (3.5)	$p(t)$ e p_0	$r(t)$ e r_0
148	22, (17.5) e 25, (18.5)	... $-\frac{(2n+1)\pi^2}{4}$...	... $-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}$...
149	última do texto	... $\exp \left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T_0 \right] + \dots$	... $\exp \left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T_0 \right] + \dots$
153	7	tanteados	tenteados
154	3	(Fig. 3.5.b)	(Fig. 4.5.b)
157	17, (2'.2)	... $+ \exp [(\pi \text{tg} \varphi') - 1] \cot \varphi' \left\{ + \dots \right.$	... $+ [\exp (\pi \text{tg} \varphi') - 1] \cot \varphi' \left\{ + \dots \right.$
159	4 e 5, (1.1.II)	... $\exp (\pi \text{tg} \varphi')$	... $\exp (20 \text{tg} \varphi')$

159 A Fig. (2.1.II) deve ser substituída pela seguinte

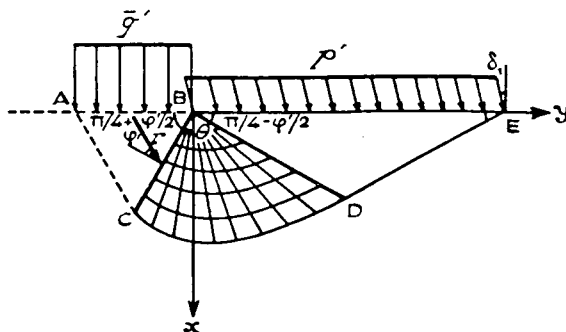


FIG. (2.1.II)

Pág.	Linha	Onde se lê	Deve ler-se
159	14 e 15	$\dots = r \frac{\cos(\pi/4 - \varphi'/2)}{\cos(\pi/4 + \varphi'/2)}$	$\dots = r \frac{(\cos \pi/4 - \varphi'/2)}{\cos(\pi/4 + \varphi'/2)} \frac{AB}{AB}$
164	5	$(1 + \sin \varphi' \cos 2\psi) = \dots$	$\sigma' (1 + \sin \varphi' \cos 2\psi) = \dots$
164	12	$\gamma' \cos \delta (\cos \alpha_0 \sin \varphi' \sin 2\psi + \dots)$	$n\gamma' \cos \delta (\cos \alpha_0 \sin \varphi' \sin 2\psi + \dots)$
164	12	$(\dots \sin \alpha_0 + \sin \alpha_0 \sin \varphi' \cos 2\psi) =$	$(\dots + \sin \alpha_0 \sin \varphi' \cos 2\psi) =$
164	18, (5.1.III)	$\frac{\sigma' \sin \varphi' \cos 2\psi - \dots}{\dots} = \dots$	$\frac{\sigma' \sin \varphi' \sin 2\psi - \dots}{\dots} = \dots$
164	32 (7.1.III)	$\dots - K^2 \cos^2 \varphi' = \delta.$	$\dots - K^2 \cos^2 \varphi' = 0$
166	2 (15.1.III)	$\frac{dt}{d\psi} = \frac{dn}{d\psi} \operatorname{tg}(\psi + \mu)$	$\frac{dt}{d\psi} = \frac{dn}{d\psi} \operatorname{tg}(\psi \mp \mu)$
166	5 (16.1.III)	$\frac{d\psi}{dn} = \dots$	$\frac{dn}{d\psi} = \dots$
166	18 (24.1.III)	$t = C(A + B) = C.t_e$	$t = C(A + B) + C.t_e$
166	28	$+ \sin \alpha_0 \cos 2\psi - \cos \delta + \dots$	$\dots + \sin \alpha_0 \cos 2\psi \cos \delta + \dots$
167	32 (18.1.III)	$\dots \sin(2\mu \pm 2\mu)$	$\dots \sin(2\psi \mp 2\mu)$
167	36	$\dots = \sin 2\psi (\sin 2\psi + \cos 2\mu \mp \dots)$	$\dots = \sin 2\psi (\sin 2\psi \cos 2\mu \mp \dots)$
167	37	$\dots \mp \sin 2\mu [\sin 2\psi \mp 2\mu] =$	$\dots \mp \sin 2\mu [\sin(2\psi \mp 2\mu)] =$
168	21	$C_3 = -C_2,$	$C_4 = -C_2$
168	36	(32.1.III)	(32.1.III.a)
170	7 e 8	$\dots \int \frac{1}{\sin \varphi' + \sin \varphi'_0 2\lambda'} \dots$	$\dots \int \frac{1}{[\sin \alpha_0 + \sin \varphi'_0 2\lambda']} \dots$
170	26	$1 - \lambda'^2 \equiv \dots$	$1 + \lambda'^2 \equiv \dots$
171	4	(45.1.III)	(45.1.III.a)
171	29	$B = \pm \cos \varphi' \left\{ \dots \right.$	$B = \mp \cos \varphi' \left\{ \dots \right.$
175	Penúltima	$p'' = (p'_0 + H') \sigma^0$ onde $H' = \cotg \varphi'$	$p'' = (p'_0 + H')/\sigma^0$ onde $H' = \cotg \varphi'$
176	27	tenteios	tenteios
181	8 (1. ^a col.)	$D = XJ \cdot BJ$	$D = XJ \cdot D$
181	9 (1. ^a col.)	$UJ = YJ - D$	$YJ = YJ - D$
182	34 (1. ^a col.)	$GD\$0.02@20$	$GN = 0.02@20$
182	35 (2. ^a col.)	$C = \cos W1$	$C = \cos W1$
183	15 (1. ^a col.)	$GN = 10$	$GN = -10$
183	Entre as linhas 23 e 24	(2. ^a col.) intercalar	$B = B/S$
184	Antepenúltima	$(\varphi' - 30/2)$	$(\varphi' - 30)/2$
187	4	y'	$-y'$
191	19 $\left\{ \begin{array}{l} p'' = 100 \\ \text{coluna } -y' \end{array} \right.$	8,264	2,264
193	15 $\left\{ \begin{array}{l} p'' = 100 \\ \text{coluna } -y' \end{array} \right.$	2,390	2,390
193	33 $\left\{ \begin{array}{l} p'' = 100 \\ \text{coluna } \bar{q}'' \end{array} \right.$	16 106	16 109
194	—	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha_0 = 60^\circ$
197	—	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha_0 = 90^\circ$
197	8 $\left\{ \begin{array}{l} p'' = 100 \\ \text{coluna } \sigma'' \end{array} \right.$	952,3	752,3

Pág.	Linha	onde se lê	deve ler-se
201	9 $\left\{ \begin{array}{l} p'' = 0,4 \\ \text{coluna } \sigma'' \end{array} \right.$	85,27	82,57
201	33 $\left\{ \begin{array}{l} p'' = 4 \\ \text{coluna } \sigma'' \end{array} \right.$	595,4	495,4
202	—	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha_0 = 30^\circ$
204	16 $\left\{ \begin{array}{l} p'' = 10 \\ \text{coluna } \sigma'' \end{array} \right.$	4,336	4 336
207	—	Eng.	Eng.º
214	43	Implicação	Implicações