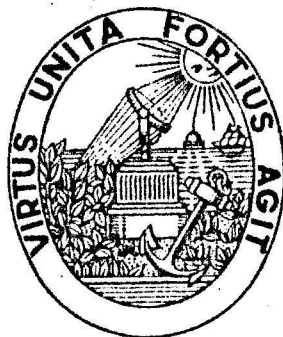


MANUEL MALAFAYA BAPTISTA

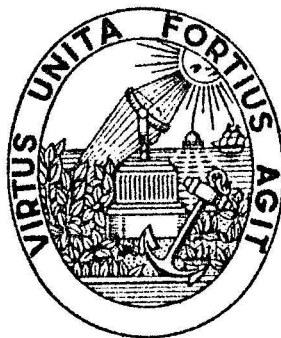
**CRITÉRIOS DE EXPLICITAÇÃO DA  
EXPRESSÃO DE COLEBROOK-WHITE.  
NOVAS PERSPECTIVAS.**



**LABORATÓRIO DE HIDRÁULICA  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO**

MANUEL MALAFAYA BAPTISTA

# CRITÉRIOS DE EXPLICITAÇÃO DA EXPRESSÃO DE COLEBROOK-WHITE NOVAS PERSPECTIVAS.



DEC  
FEUP

626(47) BAP<sub>cc</sub>/CAT cat

UNIV	DO PORTO
Faculdade	de Engenharia
DEPARTAMENTO	
N.º 5805-07	
Data 31 12 1980	

T/62-B

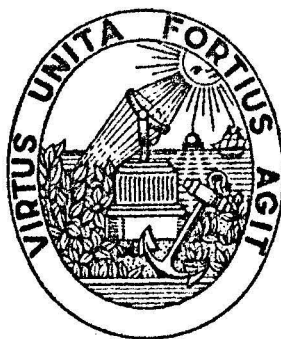
LABORATÓRIO DE HIDRÁULICA  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO

MANUEL MALAFAYA BAPTISTA

( ENGENHEIRO CIVIL - U.P. )

# CRITÉRIOS DE EXPLICITAÇÃO DA EXPRESSÃO DE COLEBROOK-WHITE. NOVAS PERSPECTIVAS.

Prova complementar para doutoramento em Engenharia Civil -  
- Hidráulica (Mecânica dos Fluidos) na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto {Alínea b) do nº3 do Artº 8º do Decreto-Lei nº 388/70}.



043 D

B 124 c

ex. 2

LABORATÓRIO DE HIDRÁULICA  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO

INDICE.

1. INTRODUÇÃO.
2. DETERMINAÇÃO DA PERDA DE CARGA UNITÁRIA.
  - 2.1. FÓRMULAS ANTIGAS.
  - 2.2. FÓRMULAS MODERNAS.
    - 2.2.1. ESCOAMENTO TURBULENTO LISO.
    - 2.2.2. ESCOAMENTO TURBULENTO RUGOSO.
      - 2.2.2.1. NOÇÃO DE RUGOSIDADE. SUAS CARACTERÍSTICAS.
      - 2.2.2.2. EXPERIÊNCIAS DE NIKURADSE.
    - 2.3. ESCOAMENTO EM REGIME TURBULENTO TRANSITÓRIO.
    - 2.4. RUGOSIDADE DE UM TUBO COMERCIAL.
    - 2.5. DIAGRAMA UNIVERSAL.
  3. EXPLICITAÇÃO DA FUNÇÃO DEFINIDORA DE  $\lambda$ .
    - 3.1. INTRODUÇÃO.
    - 3.2. EXPRESSÕES DE MOODY E DE WOOD.
      - 3.2.1. EXPRESSÃO DE MOODY (1947).
      - 3.2.2. EXPRESSÃO DE WOOD (1966).
    - 3.3. EXPRESSÃO DE BARR (1975).
    - 3.4. COMENTÁRIO.
  4. EXPRESSÃO PROPOSTA (EXPRESSÃO DE MALAFAYA-BAPTISTA).
  5. UMA NOVA PERSPECTIVA DE EXPLICITAÇÃO.
    - 5.1. EXPRESSÃO DE MOODY - IT.

5.2. EXPRESSÃO DE WOOD - IT.

5.3. EXPRESSÃO DE BARR - IT.

5.4. EXPRESSÃO DE MALAFAYA-BAPTISTA - IT.

5.5. COMENTÁRIO.

6. CONCLUSÕES.

7. AGRADECIMENTO.

8. ANEXO.

SIMBOLOGIA.

BIBLIOGRAFIA.

FIGURAS.

Figura nº1 - Rugosidade artificial das experiências de NIKURADSE.

Figura nº2 - Diagrama universal -  $\lambda$  (Re,  $\epsilon/D$ ).

QUADROS.

Quadro nº1 - Valores de  $\lambda_{CW}$  ( $\epsilon\lambda \bar{\epsilon} 10^{-6}$ ).

Quadro nº2 - Valores de  $\lambda_{MOODY}$  e de  $\epsilon\lambda_{MOODY}$ .

Quadro nº3 - Valores de  $\lambda_{WOOD}$  e de  $\epsilon\lambda_{WOOD}$ .

Quadro nº4 - Valores de  $\lambda_{BARR}$  e de  $\epsilon\lambda_{BARR}$ .

Quadro nº5 - Valores de  $\lambda_{MB}$  e de  $\epsilon\lambda_{MB}$ .

Quadro nº6 - Valores de  $\lambda_{\text{MOODY}} - \text{IT.}$  e de  $\epsilon^{\lambda_{\text{MOODY}}} - \text{IT.}$

Quadro nº7 - Valores de  $\lambda_{\text{WOOD}} - \text{IT.}$  e de  $\epsilon^{\lambda_{\text{WOOD}}} - \text{IT.}$

Quadro nº8 - Valores de  $\lambda_{\text{BARR}} - \text{IT.}$  e de  $\epsilon^{\lambda_{\text{BARR}}} - \text{IT.}$

Quadro nº9 - Valores de  $\lambda_{\text{MB}} - \text{IT.}$  e de  $\epsilon^{\lambda_{\text{MB}}} - \text{IT.}$

CRITÉRIOS DE EXPLICITAÇÃO DA EXPRESSÃO DE COLEBROOK-WHITE.  
NOVAS PERSPECTIVAS.

1. INTRODUÇÃO.

Uma das questões "clássicas" que se deparam ao Engenheiro quando trabalha em problemas de Mecânica dos Fluidos é a da determinação da dissipação de energia ao longo de todo o comprimento de uma conduta.

Conforme a sua configuração (existência no circuito hidráulico de válvulas, estreitamentos ou alargamentos bruscos, etc.) podemos de um modo geral decompor a perda de energia ou perda de carga em duas parcelas

$$\Delta H^- = \Delta H_c^- + \Sigma \Delta H_q^- \quad (1)$$

A segunda parcela representará a perda de energia devida às singularidades existentes no circuito hidráulico (em troços de comprimento relativamente pequeno).

A primeira parcela, por seu turno, representativa da energia dissipada ao longo de todo o comprimento (L) da conduta, admite-se que (em regime permanente uniforme) é uma função linear desse mesmo comprimento, isto é,

$$\Delta H_c^- = J.L \quad (2)$$

J quantifica pois a perda de carga contínua na unidade de comprimento.

Conforme dizíamos, para a resolução de muitos problemas de Mecânica dos Fluidos (e em particular de Hidráulica Aplicada) haverá necessidade de quantificar o valor de  $J$ .

O trabalho que agora se apresenta analisa com particular detalhe o estudo de perda de carga contínua correspondente a escoamentos turbulentos sob pressão, em condutas de secção circular, de fluidos incompressíveis.

## 2. DETERMINAÇÃO DA PERDA DE CARGA UNITÁRIA.

### 2.1. FÓRMULAS ANTIGAS.

Durante muito tempo, foram tidos como únicos parâmetros determinantes do valor da perda de carga unitária o diâmetro da conduta ( $D$ ) e o caudal volumétrico ( $Q$ ).

A experiência posterior mostrou que a natureza das paredes da conduta (função do material de que ela é constituída) tinha também uma influência importante no estudo do problema. Assim se procurou caracterizar este novo parâmetro, mas ainda de uma forma incipiente, indicando o material e o modo de fabrico das condutas.

Com base neste novo dado e com apelo no método experimental, foram aparecendo fórmulas empíricas que resolviam pontualmente os problemas a resolver. Como maiores limitações, as expressões propostas por diferentes autores eram apenas aplicáveis para a gama de diâmetros e caudais por eles estudados (não

permitindo a sua extrapolação) e além disso continham coeficientes não adimensionais, o que implicava o conhecimento prévio do sistema de unidades baseado no qual elas tinham sido obtidas. Em contrapartida, apresentavam a seu favor o facto de serem de aplicação relativamente rápida e cómoda.

## 2.2. FÓRMULAS MODERNAS.

As fórmulas modernas apresentam-se com a configuração

$$J = \lambda \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} \quad (2)$$

sendo

J = perda de carga unitária.

$\lambda$  = factor de resistência.

D = diâmetro da conduta.

U = velocidade média do escoamento.

g = aceleração da gravidade.

Por considerações de Análise Dimensional constata-se que será, no caso mais geral

$$\lambda = \lambda (Re, \ell_1/\ell, \epsilon_j/\ell) \quad (3)$$

Será pois  $\lambda$  função de um conjunto de parâmetros adimensionais que permitem traduzir a acção da viscosidade ( $Re = \frac{U\ell}{\nu}$ ), a acção da geometria da secção transversal ( $\ell_1/\ell$ ) e a geometria

e distribuição das Irregularidades ao longo da parede do tubo ( $\epsilon_j/\ell$ ), tanto transversal como longitudinalmente.

O sistema de unidades fundamentais considerado é o tradicionalmente utilizado em Mecânica dos Fluidos:

$\rho$  - massa específica do fluido.

$U$  - velocidade média do escoamento.

$\ell$  - comprimento característico tomado como referência (variável de secção para secção).

No nosso caso de condutas circulares e para rugosidades homogêneas que possam ser definidas por um só parâmetro (caso das experiências realizadas por NIKURADSE), a expressão (3) simplifica-se e toma o aspecto, mais frequentemente citado por diversos autores,

$$\lambda = \lambda (Re, \epsilon/D) \quad (4)$$

Neste caso,  $Re$  é geralmente definido como sendo  $\frac{U \cdot D}{\nu}$ .

O parâmetro  $\epsilon$  (com as dimensões de um comprimento) designa-se rugosidade absoluta e o parâmetro adimensional  $\epsilon/D$ , rugosidade relativa.

### 2.2.1. ESCOAMENTO TURBULENTO LISO.

Nos escoamentos turbulentos em tubos lisos, como  $\epsilon \approx 0$ ,  
será

$$\lambda = \lambda (Re) \quad (5)$$

VON KARMAN e PRANDTL, recorrendo complementarmente a considerações de índole teórica e ao método experimental, apresentaram a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left( \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} \right) \quad (6)$$

Anteriormente BLASIUS chegara, por métodos empíricos, à expressão

$$\lambda = 0,3164 \cdot Re^{-0,25} \quad (7)$$

Esta expressão, segundo o seu autor, é válida para valores de  $Re < 10^5$ .

Dentro desta gama de valores de  $Re$ , os resultados a que se chega recorrendo às expressões (6) e (7) são praticamente coincidentes.

## 2.2.2. ESCOAMENTO TURBULENTO RUGOSO.

### 2.2.2.1. NOÇÃO DE RUGOSIDADE. SUAS CARACTERÍSTICAS.

A constatação de que a configuração da parede interna dos tubos tinha influência sobre a dissipação de energia no escoamento levou à necessidade de estudar o parâmetro "rugosidade".

A definição mais racional e mais precisa da noção de rugosidade envolve fundamentalmente quatro pontos:

1) Considerar a superfície rugosa como uma série de protuberâncias definidas pela sua dimensão segundo a direcção axial do tubo (designada por  $\epsilon$  ou por  $k$ ).

2) Comparar o valor de  $\epsilon$  com um comprimento de referência significativo. No caso de condutas circulares surgir-nos-á, como anteriormente foi dito, o parâmetro adimensional  $\epsilon/D$  (rugosidade relativa).

3) Definir a forma das protuberâncias. Poderemos ter protuberâncias que, tendo o mesmo valor de  $\epsilon$ , apresentem uma configuração mais ou menos angulosa.

4) Definir a repartição das protuberâncias no sentido longitudinal da tubagem.

Do que anteriormente se disse, decorre naturalmente a dificuldade de que se reveste a definição "rigorosa" da rugosidade de uma tubagem de um dado material, dada a natureza heterogênea dos parâmetros mencionados em (1), (2), (3) e (4).

#### 2.2.2.2. EXPERIÊNCIAS DE NIKURADSE.

A fim de se poder avançar na resolução do problema, houve que eliminar este carácter de heterogeneidade da estrutura da superfície das tubagens.

NIKURADSE deu um passo importante nesse sentido, realizando uma série exhaustiva de ensaios, mas utilizando tubos onde criou artificialmente (por meio de colagem, numa superfície lisa,

de grãos de areia calibrados) uma rugosidade cuja configuração se apresenta na Fig.1.

(FIG.1)

Recorrendo a um raciocínio semelhante ao seguido por VON KARMAN e PRANDTL chega-se à expressão

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \frac{\epsilon/D}{3,7} \quad (8)$$

resultado este confirmado experimentalmente por NIKURADSE.

Este tipo de escoamento corresponde ao regime turbulento rugoso em que

$$\lambda = \lambda (\epsilon/D) \quad (9)$$

### 2.3. ESCOAMENTO EM REGIME TURBULENTO TRANSITÓRIO.

Entre os dois casos limites referidos ( $\lambda$  dependente só de  $Re$  ou só de  $\epsilon/D$ ), era previsível que surgissem (como surgem) escoamentos turbulentos em que  $Re$  e  $\epsilon/D$  intervêm ambos de modo significativo no mecanismo da dissipação de energia.

Essa gama de escoamentos, definindo uma zona de transição, tinha sido já detectada por NIKURADSE durante as suas experiências.

COLEBROOK, em colaboração com WHITE, apresenta uma expressão que concilia os modelos matemáticos representativos do escoamento turbulento liso e do escoamento turbulento rugoso e que cobre também a zona de transição

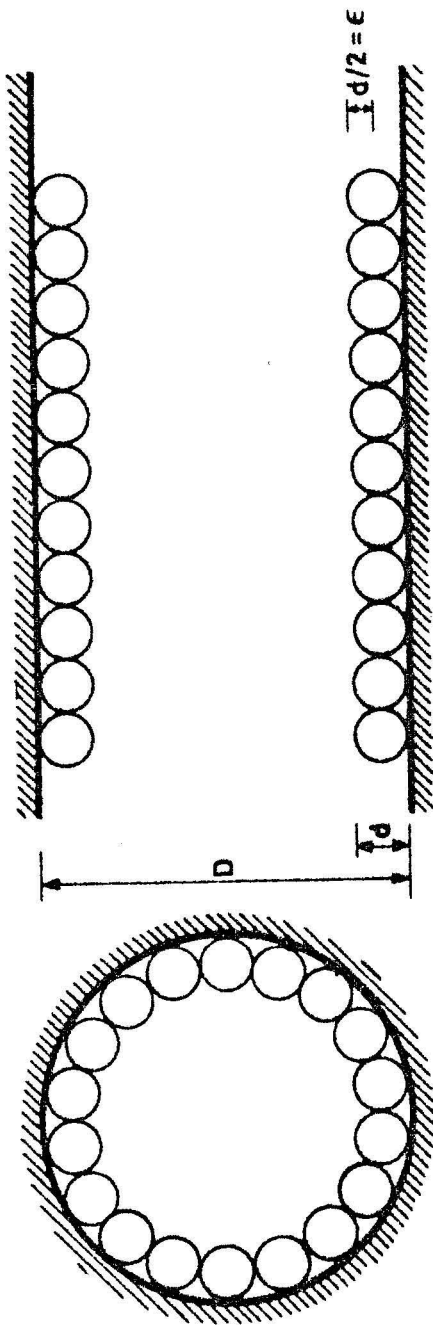


FIG. 1 - RUGOSIDADE ARTIFICIAL DAS EXPERIENCIAS DE NIKURADSE.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} \right) \quad (10)$$

Na zona de transição os valores obtidos por COLEBROOK e WHITE afastam-se dos obtidos por NIKURADSE. Tal facto deve-se a que aqueles autores se apoiaram em resultados experimentais obtidos utilizando tubos comerciais (com rugosidade natural e heterogénea) e não recorrendo a tubos preparados para criarem uma rugosidade artificial e homogénea.

#### 2.4. RUGOSIDADE DE UM TUBO COMERCIAL.

A necessidade de quantificação de valores da rugosidade para efeitos de cálculo levou à definição, para tubos comerciais, da rugosidade equivalente à rugosidade do tipo "grão de areia" utilizada por NIKURADSE nas suas experiências. Ela será a rugosidade uniforme que, para o mesmo diâmetro do tubo, conduz ao mesmo valor do factor de resistência  $\lambda$ .

#### 2.5. DIAGRAMA UNIVERSAL.

Apresenta-se na Fig.2 o diagrama universal  $\lambda (Re, \epsilon/D)$ , representação clássica e amplamente divulgada, utilizando escalas logarítmicas para o eixo das abcissas ( $Re$ ) e para o eixo das ordenadas ( $\lambda$ ).

(FIG.2)

A Fig.2 mostra de maneira sugestiva, todas as configurações de escoamentos possíveis e resume, clara e sucintamente, tudo o que se disse nos parágrafos anteriores.

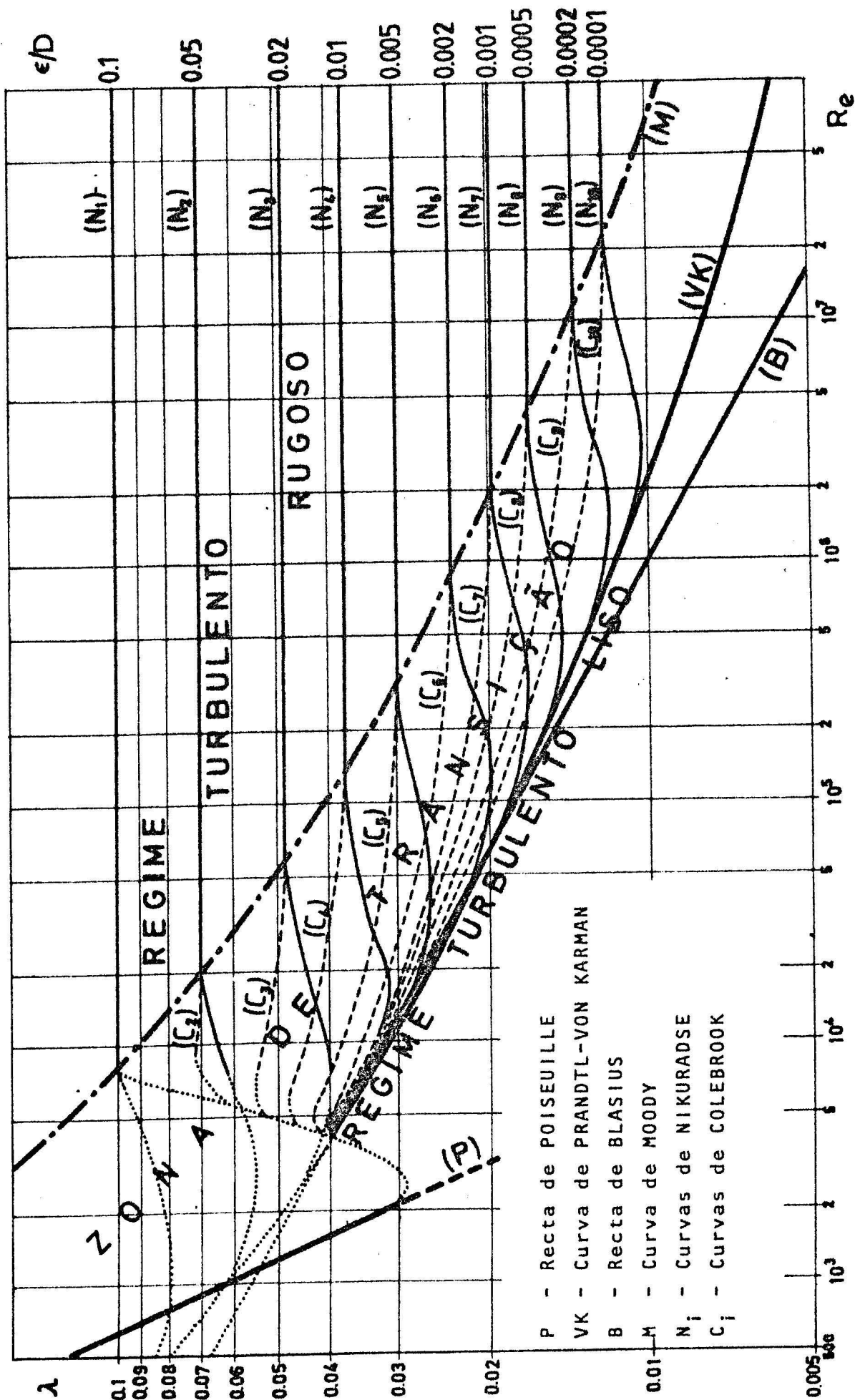


FIG. 2 - DIAGRAMA UNIVERSAL -  $\lambda$  ( $Re, \epsilon/D$ ).

### 3. EXPLICITAÇÃO DA FUNÇÃO DEFINIDORA DE $\lambda$ .

#### 3.1. INTRODUÇÃO.

Apesar de todas as críticas e reservas postas por diferentes autores (ACKERS, MORRIS, LEVIN, WILLIAMSON) à validade da expressão de COLEBROOK-WHITE, bem como a reconhecida necessidade de um conhecimento mais profundo do mecanismo dos escoamentos Interiores turbulentos para se poder avançar no estudo da determinação das perdas de carga, a referida expressão é, actualmente, aquela que com maior precisão permite quantificar as perdas de carga contínuas em tubos comerciais para um vasto domínio de variação do número de REYNOLDS.

Sendo geralmente aceite como o modelo matemático mais rigoroso de cálculo de  $\lambda$ , a expressão de COLEBROOK-WHITE apresenta como grande desvantagem o facto de a variável dependente  $\lambda$  não surgir como uma função explícita das variáveis independentes  $Re$  e  $e/D$ .

Daqui decorre que a sua resolução implica o recurso a métodos iterativos mais ou menos morosos e, principalmente, de utilização incômoda.

No Quadro que a seguir se apresenta, surgem-nos tabelados os valores de  $\lambda$  ( $\lambda_{CW}$ ) correspondentes a gamas de valores de  $Re$   $\{3,5 \times 10^3$  a  $10^8\}$  e de  $e/D$   $\{5 \times 10^{-2}$  a  $0\}$ .

(Quadro nº1)

O seu cálculo foi feito recorrendo a um algoritmo baseado no método de NEWTON com uma adaptação engenhosa para a determinação da derivada da função

# EXPRESSÃO DE COLEBROOK - WHITE

Re	ε/D						
	5E-02	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	0
3. 5E+03	. 07771	. 05031	. 04247	. 04162	. 04153	. 04153	. 04152
5. 0E+03	. 07595	. 04726	. 03849	. 03750	. 03740	. 03739	. 03739
1. 0E+04	. 07380	. 04312	. 03238	. 03103	. 03089	. 03088	. 03088
2. 0E+04	. 07269	. 04070	. 02794	. 02610	. 02590	. 02588	. 02588
5. 0E+04	. 07201	. 03908	. 02402	. 02124	. 02092	. 02089	. 02089
1. 0E+05	. 07178	. 03850	. 02217	. 01851	. 01804	. 01799	. 01799
2. 0E+05	. 07166	. 03820	. 02103	. 01641	. 01571	. 01564	. 01563
5. 0E+05	. 07159	. 03802	. 02023	. 01443	. 01330	. 01317	. 01315
1. 0E+06	. 07157	. 03796	. 01994	. 01344	. 01107	. 01166	. 01164
2. 0E+06	. 07156	. 03793	. 01979	. 01280	. 01072	. 01041	. 01037
5. 0E+06	. 07155	. 03791	. 01969	. 01234	. 00958	. 00904	. 00898
1. 0E+07	. 07155	. 03791	. 01966	. 01216	. 00899	. 00821	. 00810
2. 0E+07	. 07155	. 03790	. 01965	. 01207	. 00859	. 00752	. 00734
5. 0E+07	. 07155	. 03790	. 01964	. 01201	. 00830	. 00681	. 00649
1. 0E+08	. 07155	. 03790	. 01963	. 01199	. 00818	. 00643	. 00594

QUADRO Nº 1 - VALORES DE  $\lambda_{CW}$

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 2 \cdot \text{Log} \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} \right) \quad (11)$$

Os valores calculados foram determinados impondo a condição de que o erro absoluto cometido na determinação do factor de resistência fosse menor ou igual a  $10^{-6}$ .

$$E\lambda_{CW} \leq 10^{-6} \quad (12)$$

Como consequência da natureza implícita da função  $G(\lambda, \text{Re}, \epsilon/D)$ , diversos autores têm vindo a apresentar expressões analíticas (explícitas relativamente a  $\lambda$ ) que duma maneira mais cômoda e menos trabalhosa conduzam a valores suficientemente próximos dos que se apresentam no Quadro nº1.

### 3.2. EXPRESSÕES DE MOODY E DE WOOD.

As expressões propostas por MOODY e por WOOD, resolvendo o problema da explicitação de  $\lambda$ , são estruturalmente diferentes da de COLEBROOK-WHITE.

#### 3.2.1. EXPRESSÃO DE MOODY (1947).

$$\lambda = 0,0055 \cdot \left\{ 1 + \left[ 20000 \times (\epsilon/D) + \frac{10^6}{\text{Re}} \right]^{1/3} \right\} \quad (13)$$

#### 3.2.2. EXPRESSÃO DE WOOD (1966).

$$\lambda = a + b \cdot \text{Re}^{-c} \quad (14)$$

sendo

$$a = 0,094 \cdot (\epsilon/D)^{0,2225} + 0,53 \cdot (\epsilon/D) \quad (15)$$

$$b = 88 \cdot (\epsilon/D)^{0,44} \quad (16)$$

$$c = 1,62 \cdot (\epsilon/D)^{0,134} \quad (17)$$

Esta expressão apresenta como limitação o facto de não ser aplicável para o valor  $\epsilon/D=0$ . No estudo que se faz a seguir, superou-se esta limitação (para efeitos de cálculo) entrando com o valor  $\epsilon/D = 10^{-50} \cong 0$ .

### 3.3. EXPRESSÃO DE BARR (1975).

Procurando manter a estrutura da fórmula de COLEBROOK-WHITE, BARR propôs a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{5,1286}{\text{Re}^{0,89}} \right) \quad (18)$$

### 3.4. COMENTÁRIO.

Os Quadros nº2,3 e 4 apresentam os valores de  $\lambda$  obtidos recorrendo às expressões de MOODY ( $\lambda_{\text{MOODY}}$ ), de WOOD ( $\lambda_{\text{WOOD}}$ ) e de BARR ( $\lambda_{\text{BARR}}$ ).

(Quadro nº2)

(Quadro nº3)

(Quadro nº4)

Por baixo de cada um dos valores de  $\lambda$  encontrados indica-se (entre parêntesis) o valor do erro relativo cometido

$$\epsilon\lambda (\%) = \frac{\lambda_* - \lambda_{\text{CW}}}{\lambda_{\text{CW}}} \times 100 \quad (19)$$

EXPRESSÃO DE MOODY

Re	ε/D						
	5E-02	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	0
3. 5E+03	.06530 (-#. #)	.04873 (-3. 1)	.04255 ( 0. 1)	.04180 ( 0. 4)	.04173 ( 0. 4)	.04172 ( 0. 4)	.04172 ( 0. 4)
5. 0E+03	.06394 (-#. #)	.04602 (-2. 6)	.03870 ( 0. 5)	.03777 ( 0. 7)	.03767 ( 0. 7)	.03766 ( 0. 7)	.03766 ( 0. 7)
1. 0E+04	.06227 (-#. #)	.04231 (-1. 8)	.03262 ( 0. 7)	.03119 ( 0. 5)	.03104 ( 0. 4)	.03103 ( 0. 4)	.03102 ( 0. 4)
2. 0E+04	.06140 (-#. #)	.04014 (-1. 3)	.02816 ( 0. 7)	.02602 (-0. 2)	.02578 (-0. 4)	.02576 (-0. 4)	.02576 (-0. 4)
5. 0E+04	.06066 (-#. #)	.03870 (-0. 9)	.02430 ( 1. 1)	.02091 (-1. 5)	.02047 (-2. 1)	.02043 (-2. 2)	.02042 (-2. 2)
1. 0E+05	.06068 (-#. #)	.03819 (-0. 8)	.02258 ( 1. 8)	.01809 (-2. 2)	.01742 (-3. 4)	.01735 (-3. 5)	.01734 (-3. 5)
2. 0E+05	.06059 (-#. #)	.03793 (-0. 7)	.02158 ( 2. 6)	.01602 (-2. 3)	.01502 (-4. 3)	.01491 (-4. 6)	.01490 (-4. 6)
5. 0E+05	.06053 (-#. #)	.03777 (-0. 6)	.02091 ( 3. 3)	.01423 (-1. 3)	.01265 (-4. 8)	.01245 (-5. 4)	.01242 (-5. 5)
1. 0E+06	.06051 (-#. #)	.03771 (-0. 6)	.02067 ( 3. 6)	.01343 (-0. 8)	.01134 (-4. 4)	.01103 (-5. 4)	.01100 (-5. 5)
2. 0E+06	.06050 (-#. #)	.03769 (-0. 6)	.02055 ( 3. 8)	.01296 ( 1. 2)	.01038 (-3. 1)	.00992 (-4. 6)	.00986 (-4. 8)
5. 0E+06	.06050 (-#. #)	.03767 (-0. 6)	.02047 ( 3. 9)	.01265 ( 2. 5)	.00955 (-0. 3)	.00882 (-2. 5)	.00871 (-2. 9)
1. 0E+07	.06050 (-#. #)	.03766 (-0. 6)	.02045 ( 3. 9)	.01254 ( 3. 8)	.00918 ( 2. 8)	.00821 (-0. 8)	.00805 (-0. 6)
2. 0E+07	.06050 (-#. #)	.03766 (-0. 6)	.02044 ( 4. 0)	.01248 ( 3. 4)	.00896 ( 4. 2)	.00776 ( 3. 2)	.00752 ( 2. 4)
5. 0E+07	.06050 (-#. #)	.03766 (-0. 6)	.02043 ( 4. 0)	.01245 ( 3. 6)	.00882 ( 6. 2)	.00738 ( 8. 2)	.00699 ( 7. 7)
1. 0E+08	.06050 (-#. #)	.03766 (-0. 6)	.02043 ( 4. 0)	.01244 ( 3. 6)	.00876 ( 7. 0)	.00720 (-#. #)	.00668 (-#. #)

# EXPRESSÃO DE WOOD

Re	E/D						
	5E-02	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	0
3. 5E+03	.07778 ( 0. 0)	.04791 (-4. 7)	.04274 ( 0. 6)	.04449 ( 6. 8)	.03993 (-3. 8)	.02948 (-#. #)	.00000 (-#. #)
5. 0E+03	.07670 ( 0. 9)	.04543 (-3. 8)	.03817 (-0. 8)	.03944 ( 5. 1)	.03611 (-3. 4)	.02729 (-#. #)	.00000 (-#. #)
1. 0E+04	.07548 ( 2. 2)	.04235 (-1. 7)	.03178 (-1. 8)	.03176 ( 2. 3)	.02991 (-3. 1)	.02355 (-#. #)	.00000 (-#. #)
2. 0E+04	.07491 ( 3. 0)	.04067 (-0. 0)	.02769 (-0. 8)	.02622 ( 0. 4)	.02503 (-3. 3)	.02042 (-#. #)	.00000 (-#. #)
5. 0E+04	.07459 ( 3. 5)	.03955 ( 1. 2)	.02445 ( 1. 7)	.02119 (-0. 2)	.02014 (-3. 7)	.01705 (-#. #)	.00000 (-#. #)
1. 0E+05	.07449 ( 3. 7)	.03914 ( 1. 6)	.02299 ( 3. 6)	.01859 ( 0. 4)	.01735 (-3. 0)	.01497 (-#. #)	.00000 (-#. #)
2. 0E+05	.07444 ( 3. 8)	.03892 ( 1. 8)	.02206 ( 4. 8)	.01672 ( 1. 9)	.01515 (-3. 5)	.01323 (-#. #)	.00000 (-#. #)
5. 0E+05	.07442 ( 3. 9)	.03877 ( 1. 9)	.02132 ( 5. 3)	.01502 ( 4. 1)	.01295 (-2. 6)	.01135 (-#. #)	.00000 (-#. #)
1. 0E+06	.07441 ( 3. 9)	.03871 ( 1. 9)	.02098 ( 5. 2)	.01415 ( 5. 2)	.01169 (-1. 4)	.01019 (-#. #)	.00000 (-#. #)
2. 0E+06	.07441 ( 3. 9)	.03868 ( 1. 9)	.02077 ( 4. 9)	.01352 ( 5. 6)	.01070 (-0. 1)	.00922 (-#. #)	.00000 (-#. #)
5. 0E+06	.07440 ( 3. 9)	.03866 ( 1. 9)	.02060 ( 4. 6)	.01294 ( 4. 9)	.00971 ( 1. 2)	.00818 (-9. 5)	.00000 (-#. #)
1. 0E+07	.07440 ( 3. 9)	.03866 ( 1. 9)	.02053 ( 4. 3)	.01265 ( 3. 9)	.00914 ( 1. 6)	.00753 (-8. 2)	.00000 (-#. #)
2. 0E+07	.07440 ( 3. 9)	.03865 ( 1. 9)	.02048 ( 4. 2)	.01243 ( 3. 0)	.00869 ( 1. 1)	.00699 (-6. 9)	.00000 (-#. #)
5. 0E+07	.07440 ( 3. 9)	.03865 ( 1. 9)	.02044 ( 4. 0)	.01224 ( 1. 8)	.00825 (-0. 6)	.00641 (-5. 8)	.00000 (-#. #)
1. 0E+08	.07440 ( 3. 9)	.03865 ( 1. 9)	.02042 ( 4. 0)	.01214 ( 1. 2)	.00799 (-2. 3)	.00605 (-5. 8)	.00000 (-#. #)

EXPRESSÃO DE BARR

Re	ε/D						
	5E-02	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	0
3. 5E+03	.08009 ( 3. 0)	.05161 ( 2. 5)	.04294 ( 1. 0)	.04195 ( 0. 8)	.04185 ( 0. 7)	.04184 ( 0. 7)	.04184 ( 0. 7)
5. 0E+03	.07782 ( 2. 4)	.04834 ( 2. 2)	.03876 ( 0. 7)	.03762 ( 0. 3)	.03751 ( 0. 2)	.03749 ( 0. 2)	.03749 ( 0. 2)
1. 0E+04	.07497 ( 1. 5)	.04392 ( 1. 8)	.03248 ( 0. 3)	.03095 (-0. 2)	.03079 (-0. 3)	.03078 (-0. 3)	.03077 (-0. 3)
2. 0E+04	.07341 ( 0. 9)	.04130 ( 1. 4)	.02803 ( 0. 3)	.02596 (-0. 5)	.02574 (-0. 6)	.02571 (-0. 6)	.02571 (-0. 6)
5. 0E+04	.07237 ( 0. 5)	.03945 ( 0. 9)	.02416 ( 0. 5)	.02114 (-0. 4)	.02077 (-0. 7)	.02074 (-0. 7)	.02073 (-0. 7)
1. 0E+05	.07199 ( 0. 2)	.03875 ( 0. 6)	.02234 ( 0. 7)	.01846 (-0. 2)	.01793 (-0. 6)	.01787 (-0. 6)	.01787 (-0. 6)
2. 0E+05	.07179 ( 0. 1)	.03836 ( 0. 4)	.02120 ( 0. 8)	.01641 ( 0. 0)	.01565 (-0. 4)	.01557 (-0. 4)	.01556 (-0. 4)
5. 0E+05	.07165 ( 0. 0)	.03810 ( 0. 2)	.02036 ( 0. 6)	.01450 ( 0. 4)	.01329 (-0. 0)	.01315 (-0. 1)	.01313 (-0. 1)
1. 0E+06	.07160 ( 0. 0)	.03801 ( 0. 1)	.02003 ( 0. 4)	.01354 ( 0. 7)	.01190 ( 0. 2)	.01168 ( 0. 1)	.01166 ( 0. 1)
2. 0E+06	.07158 ( 0. 0)	.03796 ( 0. 0)	.01985 ( 0. 3)	.01290 ( 0. 7)	.01078 ( 0. 6)	.01046 ( 0. 4)	.01042 ( 0. 4)
5. 0E+06	.07156 ( 0. 0)	.03793 ( 0. 0)	.01973 ( 0. 1)	.01242 ( 0. 6)	.00968 ( 0. 9)	.00913 ( 0. 9)	.00906 ( 0. 9)
1. 0E+07	.07155 ( 0. 0)	.03791 ( 0. 0)	.01968 ( 0. 1)	.01222 ( 0. 4)	.00909 ( 1. 1)	.00831 ( 1. 2)	.00820 ( 1. 2)
2. 0E+07	.07155 ( 0. 0)	.03791 ( 0. 0)	.01966 ( 0. 0)	.01211 ( 0. 3)	.00869 ( 1. 0)	.00763 ( 1. 5)	.00746 ( 1. 6)
5. 0E+07	.07155 (-0. 0)	.03790 ( 0. 0)	.01964 ( 0. 0)	.01204 ( 0. 1)	.00836 ( 0. 8)	.00693 ( 1. 7)	.00662 ( 2. 0)
1. 0E+08	.07155 (-0. 0)	.03790 ( 0. 0)	.01964 ( 0. 0)	.01201 ( 0. 1)	.00823 ( 0. 5)	.00654 ( 1. 7)	.00608 ( 2. 4)

QUADRO Nº 4 - VALORES DE λ<sub>BARR</sub> E DE ελ<sub>BARR</sub>.

em que  $\lambda_*$  representará, em cada caso, o valor de  $\lambda_{\text{MOODY}}$ ,  $\lambda_{\text{WOOD}}$  ou  $\lambda_{\text{BARR}}$ .

O símbolo (#.#) indica que o erro relativo é superior a 10% ou então que o cálculo não é possível (caso da expressão de WOOD para  $\epsilon/D=0$ ).

A comparação dos valores de  $\lambda_{\text{CW}}$  com os valores de  $\lambda_{\text{MOODY}}$ , de  $\lambda_{\text{WOOD}}$  e de  $\lambda_{\text{BARR}}$  mostra o facto incontroverso de que as sucessivas novas soluções preconizadas conduzem a soluções cada vez mais próximas da expressão de COLEBROOK-WHITE.

Como ponto mais avançado que é, a expressão de BARR conduz a resultados bastante satisfatórios, excepção feita para os casos de escoamentos " $Re \in \{3,5 \times 10^3 \text{ a } 10^5\} - \epsilon/D > 10^{-3}$ " e de escoamentos " $Re > 2 \times 10^7 - \epsilon/D < 10^{-6}$ ".

#### 4. EXPRESSÃO PROPOSTA. (EXPRESSÃO DE MALAFAYA-BAPTISTA).

Com base na comparação dos valores de  $\lambda_{\text{CW}}$  e de  $\lambda_{\text{BARR}}$  e no facto de  $\lambda$  ser função de  $Re$  e  $\epsilon/D$ , procurou-se afinar a solução proposta por BARR (a qual já era uma melhoria da expressão apresentada por WHITE,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left\{ \frac{5,614}{Re^{0,9}} \right\} \quad ).$$

O recurso a sucessivos ajustes conduziu à expressão que agora se propõe

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re} \cdot \{ 0,4894 \times \text{Re}^{-0,11} + 0,18 \times \text{Re}^{0,095} \times (\epsilon/D)^{0,6} \}} \right\} \quad (20)$$

No denominador da segunda parcela do segundo membro da expressão, o termo  $0,4894 \times \text{Re}^{-0,11}$  representa a contribuição dada por BARR, que por si só conduz à fórmula (18). O termo adicional resultou da pesquisa de um ajuste potencial do tipo  $A \cdot \text{Re}^B$  ponderado por um termo  $(\epsilon/D)^C$  que conduzisse a uma boa definição matemática da diferença

$$\lambda_{\text{CW}} - \lambda_{\text{BARR}} = \phi (\text{Re}, \epsilon/D) \quad (21)$$

Com a adição do termo  $0,18 \times \text{Re}^{0,095} \times (\epsilon/D)^{0,6}$  conseguiu-se uma melhoria sensível relativamente aos valores obtidos via expressão de BARR na região correspondente a  $3,5 \times 10^3 < \text{Re} < 10^5$  e  $\epsilon/D > 10^{-3}$ .

O Quadro nº5 apresenta os valores de  $\lambda$  obtidos a partir da expressão (20), ( $\lambda_{\text{MB}}$ )

(Quadro nº5)

## 5. UMA NOVA PERSPECTIVA DE EXPLICITAÇÃO.

A análise dos valores que se apresentam nos Quadros nº2, 3,4 e 5 e a sua comparação com os valores dados pela expressão de COLEBROOK-WHITE (Quadro nº1) mostram que qualquer tentativa de explicitação de  $\lambda = \lambda(\text{Re}, \epsilon/D)$  em moldes semelhantes aos sugeridos pe-

# EXPRESSÃO DE MALAFAYA - BAPTISTA

Re	E/D						
	5E-02	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	0
3. 5E+03	.07804 ( 0.4)	.05032 ( 0.0)	.04251 ( 0.0)	.04184 ( 0.5)	.04182 ( 0.6)	.04184 ( 0.7)	.04184 ( 0.7)
5. 0E+03	.07622 ( 0.3)	.04726 ( 0.0)	.03837 (-0.3)	.03752 ( 0.0)	.03748 ( 0.2)	.03749 ( 0.2)	.03749 ( 0.2)
1. 0E+04	.07400 ( 0.2)	.04319 ( 0.1)	.03217 (-0.6)	.03086 (-0.5)	.03077 (-0.4)	.03077 (-0.3)	.03077 (-0.3)
2. 0E+04	.07282 ( 0.1)	.04081 ( 0.2)	.02777 (-0.5)	.02589 (-0.8)	.02572 (-0.7)	.02571 (-0.6)	.02571 (-0.6)
5. 0E+04	.07208 ( 0.0)	.03919 ( 0.2)	.02397 (-0.1)	.02107 (-0.8)	.02076 (-0.7)	.02073 (-0.7)	.02073 (-0.7)
1. 0E+05	.07182 ( 0.0)	.03858 ( 0.2)	.02221 ( 0.1)	.01840 (-0.5)	.01791 (-0.6)	.01787 (-0.6)	.01787 (-0.6)
2. 0E+05	.07169 ( 0.0)	.03826 ( 0.1)	.02111 ( 0.3)	.01636 (-0.2)	.01564 (-0.4)	.01556 (-0.4)	.01556 (-0.4)
5. 0E+05	.07160 ( 0.0)	.03805 ( 0.0)	.02031 ( 0.3)	.01446 ( 0.2)	.01328 (-0.1)	.01315 (-0.1)	.01313 (-0.1)
1. 0E+06	.07158 ( 0.0)	.03798 ( 0.0)	.02000 ( 0.2)	.01350 ( 0.5)	.01189 ( 0.1)	.01168 ( 0.1)	.01166 ( 0.1)
2. 0E+06	.07156 ( 0.0)	.03794 ( 0.0)	.01983 ( 0.2)	.01288 ( 0.6)	.01077 ( 0.5)	.01045 ( 0.4)	.01042 ( 0.4)
5. 0E+06	.07155 (-0.0)	.03792 ( 0.0)	.01972 ( 0.1)	.01240 ( 0.5)	.00967 ( 0.8)	.00913 ( 0.9)	.00906 ( 0.9)
1. 0E+07	.07155 (-0.0)	.03791 ( 0.0)	.01968 ( 0.0)	.01221 ( 0.4)	.00908 ( 1.0)	.00831 ( 1.2)	.00820 ( 1.2)
2. 0E+07	.07155 (-0.0)	.03790 ( 0.0)	.01966 ( 0.0)	.01210 ( 0.2)	.00868 ( 0.9)	.00763 ( 1.5)	.00746 ( 1.6)
5. 0E+07	.07155 (-0.0)	.03790 (-0.0)	.01964 ( 0.0)	.01203 ( 0.1)	.00836 ( 0.7)	.00693 ( 1.7)	.00662 ( 2.0)
1. 0E+08	.07155 (-0.0)	.03790 (-0.0)	.01964 ( 0.0)	.01201 ( 0.0)	.00823 ( 0.5)	.00654 ( 1.6)	.00608 ( 2.4)

los diferentes autores não trará melhorias significativas na precisão conseguida.

A busca de um critério de explicitação que conduza a resultados mais rigorosos deverá apoiar-se numa filosofia diferente de resolução do problema.

A solução que se preconiza dentro desta perspectiva é a da conciliação de qualquer uma das expressões até agora referidas e estudadas (MOODY, WOOD, BARR, MALAFAYA-BAPTISTA) com o método iterativo.

O procedimento a adoptar será o de calcular o factor de resistência mediante uma função tornada explícita pela substituição de  $\sqrt{\lambda}$  no segundo membro da expressão de COLEBROOK-WHITE por qualquer das expressões anteriormente mencionadas.

Será então

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}_*} \right) \quad (22)$$

representando  $\lambda_*$  os valores  $\lambda_{\text{MOODY}}$ ,  $\lambda_{\text{WOOD}}$ ,  $\lambda_{\text{BARR}}$  ou  $\lambda_{\text{MB}}$ , consoante a função explícita utilizada na segunda parcela do segundo membro da expressão (22).

O processo de cálculo seguido equivale a recorrer ao método iterativo, efectuando apenas uma iteração, sendo o valor inicial de  $\lambda$  não arbitrado a sentimento mas sim calculado recorrendo às expressões (13), (14), (18) ou (20).



As expressões analíticas a seguir apresentadas serão identificadas pelo nome do autor com o sufixo (- IT.)

5.1. EXPRESSÃO DE MOODY - IT.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\sqrt{0,0055 \times \left[ 1 + \left[ 20000 \times (\epsilon/D) + \frac{10^6}{\text{Re}} \right]^{1/4} \right]}} \right\} \quad (23)$$

5.2. EXPRESSÃO DE WOOD - IT.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a + b \cdot \text{Re}^{-c}}} \right\} \quad (24)$$

Os valores de a, b e c são definidos pelas expressões (15), (16) e (17).

5.3. EXPRESSÃO DE BARR - IT.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3,7} - \frac{2,51}{\text{Re}} \times 2 \cdot \text{Log} \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{5,1286}{\text{Re}^{0,89}} \right) \right\} \quad (25)$$

5.4. EXPRESSÃO DE MALAFAYA-BAPTISTA - IT.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3,7} - \frac{2,51}{\text{Re}} \times 2 \cdot \text{Log} \left[ \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\left\{ 0,4894 \cdot \text{Re}^{-0,11} + 0,18 \cdot \text{Re}^{0,095} \times (\epsilon/D)^{0,6} \right\}} \right] \right\} \quad (26)$$

### 5.5. COMENTÁRIO.

Apresentam-se seguidamente (Quadros nº6,7,8 e 9) os valores de  $\lambda$  obtidos mediante a utilização das expressões (23), (24), (25) e (26).

(Quadro nº6)

(Quadro nº7)

(Quadro nº8)

(Quadro nº9)

Tal como nos Quadros anteriormente apresentados, igualmente se dá, para cada caso, a indicação do erro relativo cometido.

A comparação destes valores com os obtidos recorrendo à expressão de COLEBROOK-WHITE e com os valores tabelados nos Quadros nº2,3,4 e 5 mostra:

a) Expressão de MOODY - IT.

Melhoria de resultados em todo o domínio de  $Re$  e de  $e/D$ , com erros relativos máximos de  $\pm 0,7\%$ .

b) Expressão de WOOD - IT.

Sensível melhoria dos resultados obtidos, à excepção de valores de  $\lambda$  correspondentes a tubos lisos ( $e/D \lesssim 10^{-6}$ ).

c) Expressão de BARR - IT.

Maior precisão dos resultados obtidos, mantendo-se contudo uma área "indesejável" para pequenos valores do número de REYNOLDS e valores de  $e/D \lesssim 10^{-3}$ .

d) Expressão de MALAFAYA-BAPTISTA - IT.

Optimização quasi completa dos resultados em todo o do-

EXPRESSÃO DE MOODY - IT.

$Re$	$\epsilon/D$						
	5E-02	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	0
3. 5E+03	.07826 ( 0.7)	.05048 ( 0.3)	.04246 (-0.0)	.04159 (-0.0)	.04150 (-0.0)	.04149 (-0.0)	.04149 (-0.0)
5. 0E+03	.07633 ( 0.5)	.04736 ( 0.2)	.03846 (-0.0)	.03746 (-0.1)	.03735 (-0.1)	.03734 (-0.1)	.03734 (-0.1)
1. 0E+04	.07400 ( 0.2)	.04317 ( 0.1)	.03235 (-0.1)	.03101 (-0.0)	.03087 (-0.0)	.03086 (-0.0)	.03086 (-0.0)
2. 0E+04	.07279 ( 0.1)	.04072 ( 0.0)	.02792 (-0.0)	.02611 ( 0.0)	.02592 ( 0.0)	.02590 ( 0.0)	.02590 ( 0.0)
5. 0E+04	.07205 ( 0.0)	.03908 ( 0.0)	.02400 (-0.0)	.02128 ( 0.1)	.02098 ( 0.2)	.02095 ( 0.2)	.02095 ( 0.2)
1. 0E+05	.07180 ( 0.0)	.03850 ( 0.0)	.02215 (-0.0)	.01855 ( 0.2)	.01811 ( 0.3)	.01807 ( 0.4)	.01806 ( 0.4)
2. 0E+05	.07167 ( 0.0)	.03820 ( 0.0)	.02101 (-0.0)	.01644 ( 0.2)	.01579 ( 0.4)	.01572 ( 0.5)	.01571 ( 0.5)
5. 0E+05	.07160 ( 0.0)	.03802 (-0.0)	.02022 (-0.0)	.01444 ( 0.0)	.01336 ( 0.4)	.01324 ( 0.5)	.01323 ( 0.5)
1. 0E+06	.07157 ( 0.0)	.03796 (-0.0)	.01993 (-0.0)	.01344 ( 0.0)	.01191 ( 0.3)	.01172 ( 0.5)	.01170 ( 0.5)
2. 0E+06	.07156 (-0.0)	.03793 (-0.0)	.01978 (-0.0)	.01279 (-0.0)	.01074 ( 0.2)	.01045 ( 0.4)	.01041 ( 0.4)
5. 0E+06	.07155 (-0.0)	.03791 (-0.0)	.01969 (-0.0)	.01233 (-0.0)	.00959 ( 0.0)	.00906 ( 0.2)	.00900 ( 0.2)
1. 0E+07	.07155 (-0.0)	.03791 (-0.0)	.01966 (-0.0)	.01216 (-0.0)	.00898 (-0.0)	.00821 (-0.0)	.00810 ( 0.0)
2. 0E+07	.07155 (-0.0)	.03790 (-0.0)	.01965 (-0.0)	.01207 (-0.0)	.00858 (-0.1)	.00750 (-0.2)	.00733 (-0.1)
5. 0E+07	.07155 (-0.0)	.03790 (-0.0)	.01964 (-0.0)	.01201 (-0.0)	.00829 (-0.0)	.00678 (-0.3)	.00645 (-0.5)
1. 0E+08	.07155 (-0.0)	.03790 (-0.0)	.01963 (-0.0)	.01199 (-0.0)	.00818 (-0.0)	.00640 (-0.4)	.00589 (-0.7)

EXPRESSÃO DE WOOD-IT.

Re	E/D						
	5E-02	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	0
3. 5E+03	.07771 (-0.0)	.05057 (0.5)	.04243 (-0.1)	.04114 (-1.1)	.04102 (0.6)	.04416 (6.3)	.02788 (-#. #)
5. 0E+03	.07592 (-0.0)	.04742 (0.3)	.03854 (0.1)	.03719 (-0.8)	.03762 (0.5)	.03945 (5.5)	.03101 (-#. #)
1. 0E+04	.07377 (-0.0)	.04317 (0.0)	.03246 (0.2)	.03093 (-0.3)	.03105 (0.4)	.03220 (4.2)	.03880 (-#. #)
2. 0E+04	.07267 (-0.0)	.04070 (0.0)	.02797 (0.0)	.02608 (-0.0)	.02602 (0.4)	.02676 (3.3)	.04995 (-#. #)
5. 0E+04	.07200 (-0.0)	.03907 (-0.0)	.02399 (-0.1)	.02125 (0.0)	.02102 (0.4)	.02143 (2.5)	.07391 (-#. #)
1. 0E+05	.07177 (-0.0)	.03849 (-0.0)	.02213 (-0.1)	.01850 (-0.0)	.01812 (0.4)	.01838 (2.1)	.10567 (-#. #)
2. 0E+05	.07166 (-0.0)	.03820 (-0.0)	.02100 (-0.1)	.01638 (-0.1)	.01578 (0.3)	.01593 (1.8)	.16336 (-#. #)
5. 0E+05	.07159 (-0.0)	.03802 (-0.0)	.02022 (-0.0)	.01439 (-0.2)	.01333 (0.2)	.01336 (1.4)	.35504 (-#. #)
1. 0E+06	.07157 (-0.0)	.03796 (-0.0)	.01993 (-0.0)	.01341 (-0.2)	.01188 (0.1)	.01181 (1.2)	.86339 (-#. #)
2. 0E+06	.07156 (-0.0)	.03793 (-0.0)	.01978 (-0.0)	.01278 (-0.1)	.01072 (0.0)	.01051 (1.0)	##### (-#. #)
5. 0E+06	.07155 (-0.0)	.03791 (-0.0)	.01969 (-0.0)	.01233 (-0.0)	.00958 (-0.0)	.00912 (0.7)	##### (-#. #)
1. 0E+07	.07155 (-0.0)	.03791 (-0.0)	.01966 (-0.0)	.01216 (-0.0)	.00898 (-0.0)	.00826 (0.6)	##### (-#. #)
2. 0E+07	.07155 (-0.0)	.03790 (-0.0)	.01965 (-0.0)	.01207 (-0.0)	.00859 (-0.0)	.00755 (0.4)	.42952 (-#. #)
5. 0E+07	.07155 (-0.0)	.03790 (-0.0)	.01964 (-0.0)	.01201 (-0.0)	.00830 (0.0)	.00683 (0.2)	.18551 (-#. #)
1. 0E+08	.07155 (-0.0)	.03790 (-0.0)	.01963 (-0.0)	.01199 (-0.0)	.00818 (0.0)	.00644 (0.2)	.11698 (-#. #)

EXPRESSÃO DE BARR-IT.

Re	ε/D						
	5E-02	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	0
3. 5E+03	. 07942 ( 2. 1)	. 05117 ( 1. 7)	. 04256 ( 0. 2)	. 04158 (-0. 1)	. 04148 (-0. 1)	. 04147 (-0. 1)	. 04147 (-0. 1)
5. 0E+03	. 07733 ( 1. 0)	. 04810 ( 1. 7)	. 03863 ( 0. 3)	. 03750 (-0. 0)	. 03738 (-0. 0)	. 03737 (-0. 0)	. 03737 (-0. 0)
1. 0E+04	. 07466 ( 1. 1)	. 04385 ( 1. 6)	. 03257 ( 0. 5)	. 03107 ( 0. 1)	. 03091 ( 0. 0)	. 03090 ( 0. 0)	. 03089 ( 0. 0)
2. 0E+04	. 07319 ( 0. 6)	. 04124 ( 1. 3)	. 02816 ( 0. 7)	. 02615 ( 0. 1)	. 02593 ( 0. 0)	. 02590 ( 0. 0)	. 02590 ( 0. 0)
5. 0E+04	. 07223 ( 0. 3)	. 03939 ( 0. 7)	. 02425 ( 0. 9)	. 02130 ( 0. 2)	. 02095 ( 0. 1)	. 02091 ( 0. 0)	. 02091 ( 0. 0)
1. 0E+05	. 07189 ( 0. 1)	. 03868 ( 0. 4)	. 02238 ( 0. 9)	. 01857 ( 0. 3)	. 01806 ( 0. 1)	. 01800 ( 0. 0)	. 01800 ( 0. 0)
2. 0E+05	. 07172 ( 0. 0)	. 03831 ( 0. 2)	. 02120 ( 0. 7)	. 01647 ( 0. 4)	. 01573 ( 0. 1)	. 01565 ( 0. 0)	. 01564 ( 0. 0)
5. 0E+05	. 07162 ( 0. 0)	. 03807 ( 0. 1)	. 02033 ( 0. 5)	. 01450 ( 0. 5)	. 01331 ( 0. 1)	. 01317 ( 0. 0)	. 01316 ( 0. 0)
1. 0E+06	. 07158 ( 0. 0)	. 03798 ( 0. 0)	. 02000 ( 0. 3)	. 01351 ( 0. 5)	. 01188 ( 0. 1)	. 01165 ( 0. 0)	. 01164 (-0. 0)
2. 0E+06	. 07156 ( 0. 0)	. 03794 ( 0. 0)	. 01982 ( 0. 1)	. 01286 ( 0. 5)	. 01074 ( 0. 1)	. 01040 (-0. 0)	. 01036 (-0. 0)
5. 0E+06	. 07155 ( 0. 0)	. 03792 ( 0. 0)	. 01971 ( 0. 0)	. 01238 ( 0. 3)	. 00961 ( 0. 2)	. 00904 (-0. 0)	. 00897 (-0. 0)
1. 0E+07	. 07155 (-0. 0)	. 03791 ( 0. 0)	. 01967 ( 0. 0)	. 01219 ( 0. 2)	. 00902 ( 0. 3)	. 00821 (-0. 0)	. 00809 (-0. 0)
2. 0E+07	. 07155 (-0. 0)	. 03790 ( 0. 0)	. 01965 ( 0. 0)	. 01209 ( 0. 1)	. 00862 ( 0. 3)	. 00752 ( 0. 0)	. 00733 (-0. 1)
5. 0E+07	. 07155 (-0. 0)	. 03790 (-0. 0)	. 01964 ( 0. 0)	. 01202 ( 0. 0)	. 00832 ( 0. 2)	. 00682 ( 0. 1)	. 00648 (-0. 1)
1. 0E+08	. 07155 (-0. 0)	. 03790 (-0. 0)	. 01963 ( 0. 0)	. 01200 ( 0. 0)	. 00820 ( 0. 1)	. 00644 ( 0. 1)	. 00593 (-0. 1)

QUADRO Nº 8 - VALORES DE λ BARR-IT. E DE ελ BARR-IT.

EXPRESSÃO DE MALAFAYA - BAPTISTA - IT.

Re	E/D						
	5E-02	1E-02	1E-03	1E-04	1E-05	1E-06	0
3. 5E+03	. 07770 (-0. 0)	. 05031 (-0. 0)	. 04247 (-0. 0)	. 04158 (-0. 0)	. 04148 (-0. 1)	. 04147 (-0. 1)	. 04147 (-0. 1)
5. 0E+03	. 07594 (-0. 0)	. 04725 (-0. 0)	. 03851 ( 0. 0)	. 03750 (-0. 0)	. 03739 (-0. 0)	. 03737 (-0. 0)	. 03737 (-0. 0)
1. 0E+04	. 07379 (-0. 0)	. 04312 (-0. 0)	. 03241 ( 0. 0)	. 03106 ( 0. 0)	. 03091 ( 0. 0)	. 03090 ( 0. 0)	. 03089 ( 0. 0)
2. 0E+04	. 07269 (-0. 0)	. 04070 (-0. 0)	. 02796 ( 0. 0)	. 02613 ( 0. 1)	. 02593 ( 0. 0)	. 02590 ( 0. 0)	. 02590 ( 0. 0)
5. 0E+04	. 07201 (-0. 0)	. 03900 (-0. 0)	. 02402 ( 0. 0)	. 02126 ( 0. 0)	. 02094 ( 0. 0)	. 02091 ( 0. 0)	. 02091 ( 0. 0)
1. 0E+05	. 07178 (-0. 0)	. 03850 (-0. 0)	. 02217 (-0. 0)	. 01852 ( 0. 0)	. 01805 ( 0. 0)	. 01800 ( 0. 0)	. 01800 ( 0. 0)
2. 0E+05	. 07166 (-0. 0)	. 03820 (-0. 0)	. 02103 (-0. 0)	. 01641 ( 0. 0)	. 01572 ( 0. 0)	. 01565 ( 0. 0)	. 01564 ( 0. 0)
5. 0E+05	. 07159 (-0. 0)	. 03802 (-0. 0)	. 02023 (-0. 0)	. 01442 (-0. 0)	. 01330 ( 0. 0)	. 01317 ( 0. 0)	. 01316 ( 0. 0)
1. 0E+06	. 07157 (-0. 0)	. 03796 (-0. 0)	. 01994 (-0. 0)	. 01343 (-0. 0)	. 01106 (-0. 0)	. 01166 (-0. 0)	. 01164 (-0. 0)
2. 0E+06	. 07156 (-0. 0)	. 03793 (-0. 0)	. 01979 (-0. 0)	. 01280 (-0. 0)	. 01071 (-0. 0)	. 01040 (-0. 0)	. 01036 (-0. 0)
5. 0E+06	. 07155 (-0. 0)	. 03791 (-0. 0)	. 01969 (-0. 0)	. 01233 (-0. 0)	. 00958 (-0. 0)	. 00904 (-0. 0)	. 00897 (-0. 0)
1. 0E+07	. 07155 (-0. 0)	. 03791 (-0. 0)	. 01966 (-0. 0)	. 01216 (-0. 0)	. 00899 (-0. 0)	. 00820 (-0. 0)	. 00809 (-0. 0)
2. 0E+07	. 07155 (-0. 0)	. 03790 (-0. 0)	. 01965 (-0. 0)	. 01207 (-0. 0)	. 00859 (-0. 0)	. 00751 (-0. 0)	. 00733 (-0. 1)
5. 0E+07	. 07155 (-0. 0)	. 03790 (-0. 0)	. 01964 (-0. 0)	. 01201 (-0. 0)	. 00830 (-0. 0)	. 00681 (-0. 0)	. 00648 (-0. 1)
1. 0E+08	. 07155 (-0. 0)	. 03790 (-0. 0)	. 01963 (-0. 0)	. 01199 (-0. 0)	. 00818 (-0. 0)	. 00642 (-0. 0)	. 00593 (-0. 1)

mfnio de  $Re$  e  $e/D$ . O erro relativo máximo encontrado é de  $\pm 0,1\%$ .

A coincidência entre os valores obtidos pela expressão explícita de MALAFAYA-BAPTISTA - IT. e os valores obtidos pela fórmula de COLEBROOK-WHITE é praticamente total.

## 6. CONCLUSÕES.

6.1. O estudo das expressões apresentadas mostra que as sucessivas tentativas de explicitação de  $\lambda = \lambda(Re, e/D)$  têm efectivamente conduzido a soluções que cada vez mais se aproximam dos valores determinados por meio da função de COLEBROOK-WHITE (de natureza implícita), no domínio dos escoamentos turbulento liso, turbulento rugoso e turbulento de transição.

6.2. Melhoría sensível da precisão da solução encontrada através de funções de natureza explícita terá de ser procurada recorrendo a outros processos que não sejam um modelo matemático correspondente a um ajuste cada vez mais sofisticado dos conjuntos de valores " $\lambda_{ij} - Re_i - (e/D)_j$ ".

6.3. O procedimento que se sugere e que exhaustivamente se comprovou que conduz a essa melhoria é o de, aproveitando as expressões já existentes, recorrer ao método iterativo, limitando o ciclo a uma só iteração e iniciando o ciclo não com um valor arbitrado para  $\lambda$  mas sim com o valor de  $\lambda$  determinado (em função de  $Re$  e  $e/D$ ) por uma das expressões explícitas anteriormente apresentadas (MOODY, WOOD, BARR, MALAFAYA-BAPTISTA).

6.4. A análise dos valores obtidos para o factor de resistência  $\lambda$ , bem como dos erros relativos correspondentes, mostra claramente que a expressão (26), obtida recorrendo ao procedimento referido em (6.3), conduz a resultados praticamente coincidentes com os da expressão de COLEBROOK-WHITE ( $\epsilon\lambda \lesssim \pm 0,1\%$ ;  $E\lambda_{CW} \lesssim 10^{-6}$ ).

6.5. Sugere-se que, na prática, o cálculo da perda de carga contínua em escoamentos turbulentos seja feito não por meio da expressão de COLEBROOK-WHITE mas sim pela expressão (26), de natureza explícita, que novamente se refere.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left| \frac{\epsilon/D}{3,7} - \frac{2,51}{\text{Re}} \times 2 \cdot \text{Log} \left| \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\{0,4894 \cdot \text{Re}^{-0,11} + 0,18 \cdot \text{Re}^{0,095} \times (\epsilon/D)^{0,6}\}} \right| \right|$$

## 7. AGRADECIMENTO.

O autor agradece a HIDURBE-Consultores de Hidráulica, Lda. as facilidades concedidas para utilização do seu Centro de Cálculo Automático.

## 8. ANEXO.

Apresenta-se, em anexo, a listagem do programa utilizado para a elaboração dos Quadros apresentados neste trabalho (Linguagem BASIC).

ANEXO - Listagem do programa utilizado na elaboração dos Quadros.

(Linguagem BASIC).

```
10 PRINT HEX(0A0A0A0A)
20 COM C(15,7),X(15,7)
30 DIM R(15),E(7),A(15,7),L(15,7)
40 DIM F(15,7),G(15,7)
50 R(1)=3.5E3
60 R(2)=5E3
70 R(3)=1E4
80 R(4)=2E4
90 R(5)=5E4
100 R(6)=1E5
110 R(7)=2E5
120 R(8)=5E5
130 R(9)=1E6
140 R(10)=2E6
150 R(11)=5E6
160 R(12)=1E7
170 R(13)=2E7
180 R(14)=5E7
190 R(15)=1E8
200 E(1)=5E-2
210 E(2)=1E-2
220 E(3)=1E-3
230 E(4)=1E-4
240 E(5)=1E-5
250 E(6)=1E-6
260 E(7)=0
270 PRINT USING 280, E(1), E(2), E(3), E(4), E(5), E(6), E
(7)
280# # # # #
# # # # #
290 PRINT HEX(0A0A0A0A)
300 INPUT "QUER C-W(1), MD(2), WOOD(3), BARR(4), M-B(5
), MDIT(6), WOODIT(7), BARRIT(8), M-BIT(9)", Z
310 IF Z=1 THEN 320:GOSUB 550:GOTO 690
320 FOR I=1 TO 15:FOR J=1 TO 7:E=1E-6
330 C(I, J)=.01
340 L(I, J)=C(I, J)
350 F(I, J)=1/SQR(C(I, J))+2*.43429*LOG(E(J)/3.7+2.5
1/(R(I)*SQR(C(I, J))))
360 IF F(I, J)=0 THEN 460
370 D=C(I, J)*1E-5
380 C(I, J)=C(I, J)+D
390 L(I, J)=C(I, J)
400 G(I, J)=1/SQR(C(I, J))+2*.43429*LOG(E(J)/3.7+2.5
1/(R(I)*SQR(C(I, J))))
```

```
410 M=D*(G(I, J)/F(I, J)-1)^(-1)
420 IF ABS(M)<=E THEN 460
430 C(I, J)=C(I, J)-M
440 L(I, J)=C(I, J)
450 GOTO 350
460 NEXT J
470 NEXT I:GOSUB 700:GOTO 800
480 A(I, J)=1/SQR(.0055*(1+(20000*E(J)+1E6/R(I))^(1/3))):RETURN
490 A(I, J)=1/SQR(.094*E(J)^.225+.53*E(J)+88*E(J)^.44*R(I)^(-1.62*E(J)^.134)):RETURN
500 A(I, J)=-2*.43429*LOG(E(J)/3.7+2.51/R(I)*(C.4894*R(I)^(-.11)+.18*R(I)^.095*E(J)^.6)):RETURN
510 A(I, J)=-2*.43429*LOG(E(J)/3.7+2.51/R(I)*SQR(.0055*(1+(20000*E(J)+1E6/R(I))^(1/3)))):RETURN
520 A(I, J)=-2*.43429*LOG(E(J)/3.7+2.51/R(I)*SQR(.094*E(J)^.225+.53*E(J)+88*E(J)^.44*R(I)^(-1.62*E(J)^.134))):RETURN
530 A(I, J)=-2*.43429*LOG(E(J)/3.7-2.51/R(I)*2*.43429*LOG(E(J)/3.7+5.1286/R(I)^.89)):RETURN
540 A(I, J)=-2*.43429*LOG(E(J)/3.7-2.51/R(I)*2*.43429*LOG(E(J)/3.7+2.51/R(I)*(C.4894*R(I)^(-.11)+.18*R(I)^.095*E(J)^.6))):RETURN
550 FOR I=1 TO 15
560 FOR J=1 TO 7:IF Z=4 THEN 640
570 IF Z<>2 THEN 580:GOSUB 480:GOTO 650
580 IF Z<>3 THEN 590:GOSUB 490:GOTO 650
590 IF Z<>5 THEN 600:GOSUB 500:GOTO 650
600 IF Z<>6 THEN 610:GOSUB 510:GOTO 650
610 IF Z<>7 THEN 620:GOSUB 520:GOTO 650
620 IF Z<>8 THEN 630:GOSUB 530:GOTO 650
630 GOSUB 540:GOTO 650
640 A(I, J)=-2*.43429*LOG(E(J)/3.7+5.1286/R(I)^.89)

650 L(I, J)=1/A(I, J)^2
660 NEXT J
670 NEXT I
680 RETURN
690 GOSUB 700:GOTO 800
700 FOR I=1 TO 15
710 PRINTUSING 720, R(I), L(I, 1), L(I, 2), L(I, 3), L(I, 4), L(I, 5), L(I, 6), L(I, 7)
720%          #.#       .##### .##### .#####
.##### .##### .##### .#####
730 IF Z<>1 THEN 740:PRINT HEX(0A0A):NEXT I:RETURN

740 FOR J=1 TO 7:X(I, J)=(L(I, J)-C(I, J))/C(I, J)*100

750 NEXT J
760 PRINTUSING 770, X(I, 1), X(I, 2), X(I, 3), X(I, 4), X(I, 5), X(I, 6), X(I, 7)
770%          (-#. #) (-#. #) (-#. #)
(-#. #) (-#. #) (-#. #) (-#. #)
780 PRINT HEX(0A)
790 NEXT I:RETURN
800 END
```

SIMBOLOGIA.

1. LETRAS MINÚSCULAS.

- a        Coeficiente da expressão de WOOD.
- b        Coeficiente da expressão de WOOD.
- c        Coeficiente da expressão de WOOD.
- d        Diâmetro da rugosidade tipo "grão de areia" de NIKURADSE.
- g        Aceleração da gravidade.
- i        Índice de notação tensorial.
- j        Índice de notação tensorial.
- k        Rugosidade absoluta.
- ℓ        Comprimento de referência utilizado no sistema de unidades fundamentais.
- ℓ<sub>1</sub>      Parâmetros (com a dimensão de um comprimento) definidores das características da secção transversal definidora do escoamento interior.

2. LETRAS MAIÚSCULAS.

A	Coefficiente de ajuste do tipo potencial.
B	Coefficiente de ajuste do tipo potencial.
C	Coefficiente de ajuste do tipo potencial.
D	Diâmetro da conduta.
E $\lambda$	Erro absoluto máximo na determinação do factor de resistência.
F	Função.
G	Função.
J	Perda de carga unitária.
L	Comprimento da conduta.
Log	Logaritmo (Base 10).
Q	Caudal volumétrico.
Re	Número de REYNOLDS.
U	Velocidade média do escoamento.

### 3. LETRAS GREGAS.

$\epsilon$	Rugosidade absoluta.
$\epsilon_j$	Parâmetros (com a dimensão de um comprimento) definidores das características da rugosidade, quer transversal quer longitudinalmente.
$\epsilon\lambda$	Erro relativo cometido na determinação do factor de resistência.
$\lambda$	Factor de resistência.
$\lambda_{CW}$	Factor de resistência determinado pela expressão de COLEBROOK-WHITE.
$\lambda_*$	Factor de resistência determinado pelas diferentes expressões apresentadas (MOODY, WOOD, BARR, MALAFAYA-BAPTISTA, MOODY - IT., WOOD - IT., BARR - IT., MALAFAYA-BAPTISTA - IT.).
$\nu$	Viscosidade cinemática.
$\rho$	Massa específica.
$\Delta H^-$	Perda de carga total.
$\Delta H_c^-$	Perda de carga contínua.
$\Delta H_l^-$	Perda de carga localizada.
$\Sigma$	Somatório.

4. OUTROS SÍMBOLOS.

+	Adição.
-	Subtração.
x	Multiplicação.
/	Divisão.
$\sqrt{\quad}$	Raiz quadrada.
=	Igual a.
<	Menor que.
$\leq$	Menor ou igual a.
>	Maior que.
$\geq$	Maior ou igual a.
$\approx$	Aproximadamente igual a.
%	Porcentagem.
$\in$	Pertencente a.

BIBLIOGRAFIA.

BARR, D.I.H.

"Two additional methods of direct solution of the COLEBROOK-  
-WHITE function".

P.I.C.E.

Dezembro. 1975.

CARLIER, M.

"Hydraulique générale et appliquée".

Ed. Eyrolles.

1972.

COMOLET, R.

"Mécanique expérimentale des Fluides".

Ed. Masson et Cie.

Paris, 1963.

IDEL'CIK, I.-E.

"Mémento des portes de charge".

Ed. Eyrolles.

1969

LANDAU, L. e LIFCHITZ, E.

"Mécanique des Fluides".

Ed. MIR.

Moscovo, 1971.

LENCASTRE, A.

"Manual de Hidráulica Geral".

Ed. Técnica, A.E.I.S.T.

Lisboa, 1969.

QUINTELA, A.

"Perdas de carga unitárias no escoamento de fluidos incompressíveis".

Lisboa, 1973.

ROUSE, H.

"Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers".

Ed. Mc Graw-Hill.

Nova Iorque, 1938.

ROUSE, H.

"Engineering Hydraulics".

Ed. John Wiley and Sons.

Nova Iorque, 1950.

