

EUSÉBIO MANUEL PINTO NUNES

**FIABILIDADE DE SISTEMAS COM PROCESSOS
NÃO-MARKOVIANOS E COM PARÂMETROS
INCERTOS**

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia da Universidade do
Porto para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica
e de Computadores

PORTO 2005

Aos meus filhos

Bárbara e Gonçalo

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero exprimir o meu profundo reconhecimento aos Professores Manuel Matos e José Faria, meus orientadores, pela capacidade científica manifestada, pela forma esclarecida e objectiva como conduziram o meu trabalho e pela disponibilidade e compreensão tantas vezes expressa ao longo destes anos. Para eles o meu muito obrigado.

O meu agradecimento à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto por me ter acolhido para realizar este projecto e ao Departamento de Produção e Sistemas da Universidade do Minho pelos recursos logísticos e financeiros disponibilizados para a sua concretização.

Uma palavra de agradecimento para todos os colegas do sub-grupo de Optimização e Investigação Operacional do Departamento de Produção e Sistemas da Universidade do Minho que sempre se disponibilizaram para aliviar as minhas tarefas lectivas, em especial neste último ano. Tenho também uma dívida de gratidão para com o colega e amigo José Telhada, pelo auxílio e incentivo sempre manifestados ao longo de todo o projecto.

Por fim o meu agradecimento a todos os amigos e colegas da Feup pelas excelentes relações de amizade e camaradagem e pelo bom ambiente de trabalho que sempre existiu entre nós. Para todos eles uma palavra de incentivo e de confiança.

RESUMO

Esta dissertação enquadra-se no domínio da fiabilidade de sistemas e centra-se na análise e avaliação de medidas de desempenho de sistemas com processos não-markovianos, podendo os parâmetros dos modelos serem valores determinísticos ou valores difusos. Neste trabalho merecem uma especial atenção os sistemas industriais de produção, embora os desenvolvimentos aqui apresentados sejam válidos para outros domínios da engenharia.

A análise e avaliação da fiabilidade de sistemas industriais de produção é uma tarefa complexa devido à natureza estocástica dos processos do comportamento, ao desconhecimento de muitas das relações de causa-efeito entre estes processos e à frequente falta de dados. A presença de mecanismos de tolerância a falhas, provocando atrasos na propagação de erros, introduz um elemento de complexidade adicional, contribuindo para conferir a estes sistemas um comportamento não-markoviano.

Da pesquisa bibliográfica efectuada constatou-se que são escassas as metodologias analíticas para tratar sistemas não-markovianos, sendo comum considerá-los como se de sistemas markovianos se tratasse. O estudo apresentado nesta dissertação mostra que a adopção da hipótese markoviana nestas circunstâncias pode introduzir erros elevados. Neste sentido, propõem-se algumas heurísticas que permitem prever as situações em que tal acontece.

Acresce que os parâmetros usados nos modelos de fiabilidade (markovianos ou não-markovianos), embora muitas vezes obtidos por amostras de tamanho reduzido, são tidos como valores determinísticos ou rígidos. Assim, a componente de incerteza associada aos parâmetros não é contemplada nos modelos e, por conseguinte, não interfere nos resultados finais nem nas conclusões daí extraídas. Nesta dissertação, esta componente de incerteza é tratada e modelada por conjuntos difusos e incluída nos modelos de fiabilidade. Foi necessário, no entanto, desenvolver novas abordagens para propagar de forma adequada a incerteza dos parâmetros aos resultados. Esta necessidade foi particularmente sentida com os sistemas não-markovianos, uma vez que os modelos analíticos dos índices de fiabilidade são bastante mais complexos.

Constatando-se as poucas possibilidades de tratamento analítico de muitos sistemas reais não-markovianos, desenvolveu-se e testou-se no âmbito deste projecto um quadro de modelação hierárquico para a construção de modelos baseado no conceito de *modelo canónico*, que permite decompor sistemas complexos e representá-los segundo dois níveis de modelação: global (sistema) e local (subsistema). Tal aplica-se a muitos sistemas de engenharia, de que são exemplos os sistemas industriais de produção, os sistemas logísticos de distribuição, os sistemas eléctricos de distribuição de energia e os sistemas de informação distribuídos. Como resultado desta abordagem, obtêm-se índices de fiabilidade que são elementos fundamentais no estabelecimento de medidas de desempenho relevantes para a tomada de decisões relativas ao projecto/exploração de sistemas industriais de produção. Nesta perspectiva o estudo prossegue com o desenvolvimento de modelos analíticos para essas medidas de desempenho.

Por fim mostra-se, através de dois casos de estudo, a aplicabilidade e utilidade prática dos conceitos, modelos e abordagens apresentadas ao longo da dissertação, destacando-se as suas potencialidades e limitações, a actualidade do trabalho realizado, ao mesmo tempo que são propostas sugestões para desenvolvimentos futuros.

ABSTRACT

The subject of this thesis fits in the domain of the reliability of systems. The work is focused on the analysis and evaluation of performance measures of systems with non-markovian processes. The parameters of the models are allowed to be deterministic or diffuse values. The thesis deserves a special attention to industrial systems of production, but the developments presented here are still valid for many other engineering domains.

The analysis and evaluation of the reliability of industrial production systems are a complex task mainly due to the inherent stochastic nature of their behaviour processes, to the unfamiliarity of most cause-effect relations between those processes and to the lack of historical reliability data. The presence of fault mechanisms that introduce delays in the propagation of errors, are an additional element of complexity that further reinforces the non-markovian behaviour of these systems.

The literature review has shown that the existing analytical methodologies to the evaluation of non-markovian systems are scarce and that they generally treat such systems as markovian systems, an unacceptable simplifying approach in most cases. In fact, the present work shows that the adoption of the markovian hypothesis in these circumstances may introduce significant errors. In an attempt to overcome this shortcoming, it proposes some heuristic models that allow foreseeing the circumstances where such situations may occur.

The parameters used in the reliability (markovian and non-markovian) models are treated as deterministic or rigid values. Thus, the uncertainty component associated with the parameters of the component is not presented in the models and, therefore, it is not taken into account in the evaluation results and in the conclusions drawn from them. In this thesis, the uncertainty is treated and shaped by fuzzy sets and incorporated in the reliability models. It was necessary, however, to develop new approaches to adequately transmit the effects of the uncertainty of the parameters to the results. This necessity was particularly felt with non-markovian systems, where the analytical models of the reliability indices are significantly more complex.

The thesis develops and tests a hierarchic modelling framework for the construction of models that based in the concept of “canonical model”. This approach allows to decompose complex systems and to represent them according to two modelling levels: a global system level and a local subsystem level. It applies to many engineering systems, including industrial systems of production, logistic systems of distribution, electrical systems of energy distribution and distributed systems of information. The approach allows the computation of reliability indices that are basic elements in the establishment of good performance measures for the decision-taken process in projects in the area of industrial systems of production. In this respect, the study goes further by developing analytical models for these performance measures.

Finally, the thesis demonstrates the applicability and practical usefulness concepts, models and approaches that has been developed, showing their strengths and limitations. Also, several suggestions for further work are proposed.

RÉSUMÉ

Cette dissertation s'inscrit dans le cadre de la fiabilité des systèmes, et vise essentiellement l'analyse et l'évaluation de mesures de performance des systèmes non-markoviens, dans les cas où les paramètres des modèles sont des valeurs déterministiques ou des valeurs floues. Dans ce travail, une attention particulière a été donnée aux systèmes industriels de production. Cependant, les développements que nous apportons sont valables pour beaucoup d'autres systèmes.

L'analyse et l'évaluation de la fiabilité des systèmes industrielles de production est une tâche complexe étant donné la nature stochastique des processus de comportement, la méconnaissance de beaucoup de relations cause-effet entre les processus et au manque de données de fiabilité. La présence de mécanismes de tolérance aux fautes, qui entraîne des retards dans la propagation des erreurs, introduit un élément additionnel de complexité, ce qui contribue à donner à ces systèmes un comportement non-markovien.

La recherche bibliographique qui a été menée révèle qu'il existe très peu de méthodologies analytiques pour traiter les systèmes non-markoviens, qui sont communément traités comme des systèmes markoviens. L'étude qui est présentée dans cette dissertation montre que l'adoption de l'hypothèse markovienne dans ces circonstances peut induire d'importantes erreurs. Dans ce sens, des heuristiques sont proposées qui permettent de prévoir ce genre de situations.

Les paramètres utilisés dans les modèles de fiabilité (markoviens ou non-markoviens), même si ils sont souvent obtenus à partir d'échantillon de taille réduite, sont considérés comme étant des valeurs déterministiques ou rigides. La part d'incertitude associée aux paramètres n'est pas contemplée dans les modèles et, par conséquent, elle n'interfère pas dans les résultats finals, ni dans les conclusions que l'on en tire. Dans cette dissertation, cette part d'incertitude est traitée et modélisée avec des ensembles flous et elle est additionnée aux modèles de fiabilité. Cependant, de nouvelles approches ont dû être développées pour propager l'incertitude des paramètres aux résultats. Cette nécessité a été particulièrement ressentie avec les systèmes non-

markoviens, étant donné que les modèles analytiques des indices de fiabilité sont bien plus complexes.

Étant donné les faibles possibilités de traitement analytique de beaucoup de systèmes réelles non markoviens, nous avons développé et testé dans le cadre de ce projet un tableau de modélisation hiérarchique pour la construction de modèles basés sur le concept de *modèle canonique*, qui permet de décomposer les systèmes complexes et de les représenter selon deux niveaux de modélisation : global (système) et local (sous-système). Le même principe s'applique à beaucoup d'autres systèmes d'ingénierie, comme par exemple les systèmes industriels de production, les systèmes logistiques de distribution, les systèmes électriques de distribution d'énergie et les systèmes d'information distribués. Comme résultat de cette approche, nous avons obtenu des indices de fiabilité qui sont des éléments fondamentaux dans l'établissement de mesures de performance utiles à la prise de décision relative au projet/exploration des systèmes industriels de production. Dans cette perspective, l'étude se poursuit avec le développement de ces mesures de performance.

Pour finir, nous montrons à travers de deux cas l'applicabilité et l'utilité pratique des concepts, modèles et approches présentés au long de la dissertation, en mettant en évidence ses potentialités et limitations, ainsi que l'actualité des travaux réalisés. Sont aussi proposées des directions de travail pour le futur.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Estrutura global da dissertação	14
Figura 1.2: Tipos de processos produtivos	16
Figura 1.3: Perdas nos sistemas de produção	17
Figura 1.4: Modelação de sistemas	26
Figura 1.5: Funções distribuição de probabilidade $F(t)$ e respectivas funções densidade probabilidade $f(t)$	27
Figura 1.6: Funções de pertença	28
Figura 1.7: Resultados de experimentações – tempos de falha	32
Figura 1.8: Modelos de especificação de sistemas com processos estocásticos	32
Figura 1.9: Sistema de produção, ambiente, requisitos e restrições	36
Figura 2.1: Diagrama de estados	43
Figura 2.2: Método dos estados fictícios - combinações série e paralelo	58
Figura 2.3: Combinação série com $k-1$ estados idênticos e um diferente	60
Figura 2.4: Transformação de processos concorrentes não-exponenciais	63
Figura 2.5: Transformação gráfico base gráfico expandido	66
Figura 2.6: Obtenção dos tempos de permanência nos estados de um sistema	76
Figura 2.7: Sorteio da transição de estado de um sistema	78
Figura 2.8: Fluxograma de simulação relativo ao caso de estudo	85
Figura 2.9: Gráfico de erros	91
Figura 2.10: Gráfico dos erros obtidos pelo método dos estados fictícios	92
Figura 2.11: Função de Erlang para vários valores de k	93
Figura 2.12: Dois processos concorrentes	94
Figura 2.13: Gráfico de erros Exponencial/Dirac	96

Figura 2.14: Gráfico de erros Exponencial/Erlang ₂	96
Figura 3.1: Enquadramento do capítulo 3 no âmbito da dissertação	104
Figura 3.2: Representação da função de pertença do conjunto difuso A	106
Figura 3.3: Representação gráfica de um número difuso triangular	108
Figura 3.4: Ilustração do princípio da extensão com f contínuo	111
Figura 3.5: Procedimento para obtenção de <i>outputs</i> rígidos com <i>inputs</i> difusos/rígidos [Saade, 1996]	113
Figura 3.6: Diagrama de estados do sistema	115
Figura 3.7: Função de pertença de $\tilde{\lambda}$	115
Figura.3.8: Função de pertença de $\tilde{\gamma}$	115
Figura.3.9: Função de pertença de $\tilde{\theta}$	116
Figura.3.10: Função de pertença de $\tilde{\mu}$	116
Figura 3.11 Diagrama de estados de um componente	117
Figura 3.12: Amplitude máxima da distribuição de possibilidades do estado de sucesso	119
Figura 3.13: Intervalo correspondente a um cortes- α no conjunto difuso $\tilde{A}$	119
Figura 3.14: Distribuição de possibilidades de P_s com 3 cortes- α	121
Figura 3.15: Intervalos de incerteza	125
Figura 3.16: Distribuições de possibilidade das probabilidades de estado	129
Figura 3.17: Diagrama de estados com as <i>f.d.p.</i> dos processos	131
Figura 3.18: Superfície definida pela discretização da probabilidade de P_s	134
Figura 3.19: Esquema <i>input-output</i> difusos	135
Figura 3.20: Conjuntos difusos $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$	136
Figura 3.21: Resultado de $\tilde{A} \times \tilde{B}$ em função do nível de discretização $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$	136
Figura 3.22: Resultado de $\tilde{A} \times \tilde{B}$ obtidos pela aritmética intervalar e pela discretização de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$	137
Figura 3.23: Partição do intervalo de suporte das variáveis difusas $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\theta}$ em intervalos	138
Figura 3.24: Representação gráfica dos conjuntos difusos discretos $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Gamma}$ e $\tilde{\Theta}$	140

Figura 3.25: Distribuições de possibilidades das probabilidades dos estados através da discretização das variáveis de <i>input</i>	142
Figura 3.26: Distribuição de possibilidades da probabilidade do estado 1	143
Figura 3.27: Probabilidades difusas dos estados obtidas através da discretização das variáveis de <i>input</i> por geração aleatória de valores	144
Figura 3.28: Discretização de uma variável difusa através de cortes- α	145
Figura 3.29: Função pertença de P_2	149
Figura 3.30: Distribuições de possibilidades das probabilidades dos estados do sistema	149
Figura 3.31: Efeito do número de cortes- α na distribuição de possibilidades de P_4	150
Figura 3.32: Distribuições de possibilidades dos estados obtidas por otimização não-linear	155
Figura 3.33: Probabilidades difusas dos estados para diferentes intervalos de incerteza de μ	160
Figura 4.1: Sistema de produção	168
Figura 4.2: Fluxo entre duas células e um <i>buffer</i> intermédio	169
Figura 4.3: Falhas de produção	170
Figura 4.4: Estrutura de modelação com dois níveis	171
Figura 4.5: Modelo canónico	173
Figura 4.6: Modelos canónicos internos e externos	174
Figura 4.7: Modelos canónicos de uma célula com duas máquinas não redundantes	176
Figura 4.8: Redundância passiva – duas máquinas	178
Figura 4.9: Modelo de estados sistema com redundância passiva	179
Figura 4.10: Modelo de estados da célula c'	181
Figura 4.11: Histograma de tempos de reposição	182
Figura 4.12: Representação dos tempos de falha da célula c'	183
Figura 4.13: Histogramas dos tempos de falha da célula c'	184
Figura 4.14: Função densidade de probabilidade de Weibull para $\alpha=1.8946$ e $\beta=2.759$	186
Figura 4.15: Função distribuição teórica vs histograma dos tempos de falha	186
Figura 4.16: Indisponibilidade endógena e exógena	187

Figura 5.1: Etapas do estudo	193
Figura 5.2: Sistema de produção	197
Figura 5.3: Relação directa fiabilidade – custos	199
Figura 5.4: Relação entre fiabilidade e custos	199
Figura 5.5: Relação da fiabilidade com a qualidade de serviço	203
Figura 5.6: Frequência de falhas no fornecimento <i>versus</i> fiabilidade do sistema	203
Figura 5.7: Custos e qualidade de serviço <i>versus</i> fiabilidade	204
Figura 5.8: Evolução do conteúdo do <i>buffer</i> em três períodos diferentes	206
Figura 5.9: Representação gráfica da expressão de custos ΔC	208
Figura 5.10: Penalização pela indisponibilidade do sistema	209
Figura 5.11: Modelo para a determinação de $P(i)$	217
Figura 5.12: Diagrama de ocupação da célula 3 para o sequenciamento A/B	223
Figura 5.13: Diagrama de ocupação da célula 3 para o Mix de produção 1A2B	224
Figura 5.14: Diagrama de ocupação da célula 3 para o sequenciamento A-B	224
Figura 5.15: Procedimento para o cálculo do custo da fiabilidade	228
Figura 6.1: Sistema de produção – Caso 1	237
Figura 6.2: Gráfico das distribuições dos processos de reparação	238
Figura 6.3: Gráfico da função distribuição do tempo de reposição do subsistema M3-M3'	239
Figura 6.4: Dois níveis de simplificação do sistema de produção	240
Figura 6.5: Gráfico da função distribuição do tempo de reposição do sistema, $f_p(t)$	240
Figura 6.6: Probabilidades i de falhas no período T	241
Figura 6.7: Distribuição do tempo de paragem do sistema durante um período T	242
Figura 6.8: Custos <i>versus stock</i> de segurança	242
Figura 6.9: Probabilidade diária de falha <i>versus stock</i> de segurança	243
Figura 6.10: Probabilidade anual de n falhas em função do <i>stock</i> de segurança	244
Figura 6.11: Linhas de valores médios e com 95% de confiança	244

Figura 6.12: Custos <i>versus</i> falhas anuais	246
Figura 6.13: Impacto no custo da fiabilidade de alterações nos tempos médios de reparação	248
Figura 6.14: Influência no custo da fiabilidade de alterações nos valores das componentes de custos	249
Figura 6.15: Função pertença de $\tilde{\Lambda}$	253
Figura 6.16: Tempo de reposição difuso	253
Figura 6.17: Curvas do tempo de reposição para $\alpha=0$ e $\alpha=1$	253
Figura 6.18: Probabilidade difusa de ocorrerem uma falha ou duas falhas no período T	254
Figura 6.19: Função difusa do tempo diário de paragem do sistema de produção	255
Figura 6.20: Custos difusos da fiabilidade	255
Figura 6.21: Distribuições de possibilidades de CR para $\Delta=\{100, 130, 170\}$ minutos	257
Figura 6.22: Curvas de frequência média de falhas/ano e curvas a 95% de confiança	260
Figura 6.23: Distribuição de possibilidades de para $\Delta=180$ minutos	261
Figura 6.24: Robustez da solução $\Delta=180$ minutos	262
Figura 6.25: Distribuições difusas de F_f^a para $\Delta=180$ minutos com os novos valores parâmetros difusos	262
Figura 6.26: Custo diário da fiabilidade ($\Delta=180$ minutos)	263
Figura 6.27: Sistema de produção multi-célula multi-produto	267
Figura 6.28: Estrutura dos produtos	268
Figura 6.29: Evolução dos produtos A e B no armazém de produto acabado (vários ciclos diários)	269
Figura 6.30: Sequenciamento A-B na linha de produção	271
Figura 6.31: Nodos de análise nas células 1, 2 e 3	280
Figura 6.32: Representação dos modelos canónicos na linha de produção	280
Figura 6.33: Funções dos tempos de indisponibilidade de fluxo no nodo 3 para $\Delta 1=0$ horas e $\Delta 1=2$ horas	281
Figura 6.34: Frequência de falhas nos nodos 3, 4 e 6	281
Figura 6.35: Diagrama de estados	283

Figura 6.36: Disponibilidade nos nodos 7 e 8 <i>versus</i> configuração do sistema	285
Figura 6.37: Funções dos tempos de reposição nos nodos 7 e 8	286
Figura 6.38: Funções dos tempos diários de indisponibilidade do sistema de produção	287
Figura 6.39: Custos no nodo 7 (com $\Delta 1 = \Delta 2 = \Delta 3 = 0$)	288
Figura 6.40: Custos no nodo 8 (com $\Delta 1 = \Delta 2 = \Delta 3 = 0$)	288
Figura 6.41: Custos da fiabilidade para os desenhos do sistema analisados	289
Figura 6.42: Frequência anual de falhas de fornecimento os produtos tipo A e tipo B para a configuração DS ₄	293
Figura 6.43: Custos da fiabilidade nos nodos 7 e 8 com uma máquina M2 redundante	294

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1: Sistemas com tolerância a falhas	24
Tabela 1.2: Exemplos de variáveis aleatórias	27
Tabela 1.3: Exemplos de variáveis difusas	28
Tabela 2.1: Caracterização dos processos	43
Tabela 2.2: Funções densidade de probabilidade e tempos médios dos processos	45
Tabela 2.3: Metodologias de análise da fiabilidade de sistemas	47
Tabela 2.4: Índices de fiabilidade – Cadeias de Markov	52
Tabela 2.5: Índices de fiabilidade – Cadeias de Markov Embebida	56
Tabela 2.6: Índices de fiabilidade – Método dos estados fictícios	67
Tabela 2.7: Índices de fiabilidade – Metodologia <i>DepCim</i>	70
Tabela 2.8: Resultados de 10 runs de simulação	88
Tabela 2.9: Índices de fiabilidade – Simulação de Monte Carlo	89
Tabela 2.10: Resultados de replicações adicionais da simulação	89
Tabela 2.11: Probabilidades dos estados e erros obtidos pela hipótese markoviana	91
Tabela 2.12: Funções densidade de probabilidade	95
Tabela 2.13: Probabilidades de transição e erros introduzidos pela hipótese markoviana para dois processos concorrentes Exponencial/Dirac	95
Tabela 2.14: Probabilidade de transição e erros introduzidos pela hipótese markoviana para dois processos concorrentes Exponencial/Erlang	96
Tabela 3.1: Processos e taxas de transição	115
Tabela 3.2: Distribuições de possibilidades das probabilidades dos estados	126
Tabela 3.3: Valores das probabilidades dos estados	127
Tabela 3.4: Valores dos parâmetros das probabilidades limite do sistema	130
Tabela 3.5: Intervalos I_α das variáveis $\tilde{\lambda}$, $\tilde{A}_1$ e $\tilde{\mu}_{\text{Ed}}$	148

Tabela 3.6: Mapeamento de P1 com otimização não linear	154
Tabela 3.7: Incerteza máxima dos parâmetros avaliada em percentagem dos respectivos valores modais	158
Tabela 3.8: Incerteza máxima dos resultados avaliada em percentagem dos respectivos valores modais	158
Tabela 3.9: Intervalos de incerteza das probabilidades difusas dos estados para diferentes intervalos de incerteza de μ	159
Tabela 4.1: Caracterização dos processos da célula c'	182
Tabela 4.2: Resultados de 7 corridas de simulação	184
Tabela 4.3: Resultados do ajustamento da função de Weibull ao histograma	185
Tabela 5.1: Dados do sistema do exemplo	222
Tabela 5.2: Variáveis e parâmetros do modelo de custos	222
Tabela 6.1: Caracterização dos processos do sistema de produção	237
Tabela 6.2: Penalizações – Sistema mono-célula mono-produto	236
Tabela 6.3: Custos - Sistema mono-célula mono-produto	237
Tabela 6.4: Probabilidades do número de falhas	239
Tabela 6.5: Valores anuais de falhas de fornecimentos em função de Δ	245
Tabela 6.6: Custo da fiabilidade <i>versus stock</i> de produto final	249
Tabela 6.7: Valores das componentes de custos	249
Tabela 6.8: Custo da fiabilidade para diferentes cenários	250
Tabela 6.9: Tabela de diferenças ou de arrependimento	251
Tabela 6.10: Custos da fiabilidade <i>versus</i> dimensão do <i>buffer</i> de produto final	256
Tabela 6.11: Tabela de ordenação dos <i>outputs</i> em função de δ	258
Tabela 6.12: Frequência anual de falhas (valores médios e valores com 95% de confiança) <i>versus stock</i> de segurança	260
Tabela 6.13: Caracterização dos processos do sistema de produção	276
Tabela 6.14: Penalizações - Sistema multi-célula multi-produto	275
Tabela 6.15: Custos - Sistema multi-célula multi-produto	275

Tabela 6.16: Disponibilidade nos nodos 3, 4 e 6 em função da dimensão dos <i>buffers</i> B1, B2 e B3	283
Tabela 6.17: Combinações de valores dos <i>buffers</i> e disponibilidade à saída do sistema	284
Tabela 6.18: Custos diários da fiabilidade do sistema para diferentes combinações de valores dos <i>buffers</i> intermédios	289
Tabela 6.19: Frequência anual de falhas do produto A (valores médios e com 95% de confiança)	291
Tabela 6.20: Frequência anual de falhas do produto B (valores médios e com 95% de conf.)	292
Tabela 6.21: Custo diário da fiabilidade do sistema com a configuração DS ₄ e após a introdução de uma máquina redundante com M2	295

ÍNDICE GERAL

CAPÍTULO 1.....	1
1.1 MOTIVAÇÃO E CONTEXTO	3
1.2 OBJECTIVOS.....	10
1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	11
1.4 SISTEMAS DE PRODUÇÃO INDUSTRIAL.....	15
1.4.1 Introdução.....	15
1.4.2 Eficiência em sistemas de produção.....	16
1.4.3 Complexidade	17
1.4.4 Novas estratégias de produção.....	18
1.5 FIABILIDADE DE SISTEMAS	21
1.5.1 Introdução.....	21
1.5.2 Sistemas com tolerância a falhas	22
1.5.3 Incerteza no estudo da fiabilidade de sistemas	25
1.5.4 Probabilidades <i>versus</i> possibilidades	28
1.5.5 Modelação e avaliação da fiabilidade.....	31
1.6 DESEMPENHO DE SISTEMAS DE PRODUÇÃO	35
1.6.1 Avaliação do desempenho	35
1.6.2 Medidas de desempenho.....	36
CAPÍTULO 2.....	39
2.1 INTRODUÇÃO	41
2.2 CASO DE ESTUDO.....	43
2.3 METODOLOGIAS	46
2.3.1 Introdução.....	46
2.3.2 Sistemas markovianos	47
2.3.3 Sistemas semi-markovianos	52
2.3.4 Sistemas não-markovianos.....	56
2.4 ANÁLISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS OBTIDOS POR VÁRIAS METODOLOGIAS...	90
2.5 ANÁLISE DE ERROS DE PROCESSOS CONCORRENTES	94
2.5.1 Análise dos resultados	97
2.5.2 Heurísticas.....	97
2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
CAPÍTULO 3.....	99
3.1 INTRODUÇÃO	101
3.1.1 Organização do capítulo	104

3.1.2	Sistemas difusos	105
3.1.3	Operações com números difusos	108
3.1.4	Métodos de colapsar resultados difusos	112
3.1.5	Caso de estudo	115
3.2	METODOLOGIAS DE PROPAGAÇÃO DA INCERTEZA DIFUSA	117
3.2.1	Procedimento apresentado por Miranda	117
3.2.2	Algoritmo DSW	119
3.3	NOVAS ABORDAGENS	131
3.3.1	Princípio da extensão com discretização das variáveis por intervalos	133
3.3.2	Princípio da extensão com discretização aleatória das variáveis de input	143
3.3.3	Princípio da extensão com cortes- α	144
3.3.4	Optimização não linear com cortes- α	151
3.4	COMPARAÇÃO DAS ABORDAGENS	156
3.5	INFLUÊNCIA DA INCERTEZA DOS DADOS NA INCERTEZA DOS RESULTADOS	158
CAPÍTULO 4.....		161
4.1	INTRODUÇÃO	163
4.1.1	Considerações gerais.....	164
4.1.2	Modelação e avaliação de sistemas com mecanismos de tolerância a falhas.....	166
4.1.3	Abordagem hierárquica proposta	167
4.2	ANÁLISE DE SISTEMAS DE PRODUÇÃO	168
4.2.1	Perdas de produção	169
4.3	ESTRUTURA DE MODELAÇÃO	171
4.3.1	Modelo canónico.....	173
4.4	ALGORITMOS DE AVALIAÇÃO	175
4.4.1	Determinação do modelo canónico interno	175
4.4.2	Avaliação das perdas de produtividade.....	188
4.4.3	Considerações finais	189
CAPÍTULO 5.....		191
5.1	INTRODUÇÃO	193
5.1.1	Perdas em sistemas JIT	194
5.1.2	Processo de tomada de decisão.....	204
5.2	SISTEMA MONO-CÉLULA MONO-PRODUTO	206
5.2.1	Minimização do valor esperado do custo da fiabilidade	206
5.2.2	Qualidade de serviço	210
5.3	MODELO DE FIABILIDADE	215
5.4	SISTEMA MULTI-CÉLULA MULTI-PRODUTO.....	219
5.4.1	Breve descrição do sistema.....	219
5.4.2	Modelo geral de custos.....	219
5.4.3	Cálculo previsional do custo da fiabilidade.....	225
5.5	DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE INDISPONIBILIDADE	228
5.6	COMENTÁRIOS FINAIS	231

CAPÍTULO 6.....	233
6.1 INTRODUÇÃO	235
6.2 SISTEMA DE PRODUÇÃO – CASO 1	237
6.2.1 Apresentação	237
6.2.2 Resolução do caso base.....	239
6.2.3 Incerteza nos parâmetros	247
6.2.4 Comentários finais	264
6.3 SISTEMA DE PRODUÇÃO - CASO 2.....	266
6.3.1 Introdução.....	266
6.3.2 Apresentação do caso de estudo.....	267
6.3.3 Modelo de custo da fiabilidade	270
6.3.4 Aplicação numérica.....	276
6.3.5 Análise e dimensionamento do sistema de produção	286
CAPÍTULO 7.....	297
7.1 ACTUALIDADE DA DISSERTAÇÃO	299
7.2 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO	302
7.3 PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	304
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	305

ANEXOS

ANEXO A

A.1 SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES ANTES DA INTEGRAÇÃO SIMBÓLICA.....	A-1

ANEXO B

B.1 INTRODUÇÃO	B-1
B.2 NATUREZA ALEATÓRIA DOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO	B-2
B.3 COMPORTAMENTOS TRANSITÓRIO/ESTAC. DE UM PROCESSO ESTOCÁSTICO	B-3
B.4 SIMULAÇÕES TERMINADAS E NÃO TERMINADAS	B-4
B.5 TÉCNICAS DE ACELERAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DA SIMULAÇÃO	B-13

ANEXO C

C.1. INTRODUÇÃO	C-1
C.2. MODELOS CANÓNICOS INTERNOS	C-1
C.3. MODELOS CANÓNICOS À SAÍDA DAS CÉLULAS MONTANTE	C-4
C.4. MODELOS CANÓNICOS À SAÍDA DOS BUFFERS INTERMÉDIOS.....	C-4
C.5. MODELO CANÓNICO À SAÍDA DO SISTEMA DE PRODUÇÃO	C-6

Capítulo 1

Introdução

No primeiro capítulo desta dissertação são apresentadas as principais motivações que estiveram na sua origem, o seu contexto, os objectivos a atingir e o modo como está organizada. Segue-se uma introdução geral aos sistemas de produção abordando, fundamentalmente, aspectos directos ou indirectamente relacionados com a sua fiabilidade. Fazem-se ainda algumas considerações gerais sobre: o ambiente em que operam; as metodologias de análise e avaliação, referindo as principais dificuldades e limitações e as principais medidas de desempenho consideradas. Pretende-se, deste modo, dar uma perspectiva geral sobre os assuntos tratados ao longo da dissertação e sobre os principais contributos deste projecto para a comunidade científica.

1.1 Motivação e contexto

A crescente dependência das organizações e dos indivíduos relativamente a serviços proporcionados por dispositivos e sistemas tecnológicos - como é o caso dos sistemas de transporte de pessoas e bens, dos sistemas de informação e de comunicação, dos sistemas de produção, ou dos sistemas de distribuição de energia eléctrica - leva a que seja dedicada uma atenção crescente aos estudos de fiabilidade destes sistemas, dado que a indisponibilidade dos serviços que proporcionam afecta directamente o desempenho das organizações e dos indivíduos, podendo provocar graves prejuízos económicos. Neste contexto, a engenharia da fiabilidade tem vindo a ocupar um papel relevante, pelos seus contributos na concepção de produtos e sistemas mais fiáveis, numa perspectiva de melhoria da eficiência global.

Embora o âmbito de aplicação de muitos conceitos e metodologias desenvolvidos e apresentados ao longo desta dissertação sejam abrangentes, eles são sobretudo dirigidos a sistemas de produção. Para evitar ambiguidades saliente-se desde já que os sistemas de produção referidos e analisados ao longo de toda a dissertação correspondem a sistemas industriais de produção (SIP) de produtos ou artigos.

Para apoiar a tomada de decisões relativas à concepção destes sistemas (tipologia, estratégia de produção, buffers, meios logísticos de apoio, etc.) e às políticas de intervenção (redundâncias de equipamentos, manutenção, etc.) é fundamental proceder a estudos de análise de fiabilidade que avaliem correctamente o impacto das falhas dos sistemas nos índices de desempenho internos (produtividade, disponibilidade, custos, etc.) e externos – junto dos clientes do sistema (indisponibilidade, qualidade de serviço, prazos de entrega, etc.).

Nestes estudos, os analistas e engenheiros da fiabilidade deparam-se frequentemente com falta de informação a respeito dos componentes dos sistemas, manifestando-se desde logo, na dificuldade em determinar os modelos probabilísticos que caracterizam o comportamento desses componentes. Em muitos casos, esta falta de informação resulta da pouca importância que ainda é atribuída pelos responsáveis aos aspectos relacionados com a fiabilidade e a manutenção. Consequentemente, não são efectuadas recolhas sistemáticas e organizadas de dados relativos aos sistemas em operação, ficando comprometida a determinação das distribuições estatísticas que melhor modelam os processos do comportamento de tais sistemas.

Com frequência, utilizam-se estimativas médias para parâmetros dos modelos probabilísticos, baseadas em amostras de tamanho reduzido, o que aumenta o risco na tomada de decisões apoiadas em resultados obtidos deste modo. Este risco aumenta nos casos em que erros nas estimativas dos parâmetros conduzam a uma sub-avaliação da ocorrência de um evento pouco provável, como por exemplo a ocorrência de uma falha catastrófica.

Este quadro de incertezas, associado à grande complexidade dos sistemas, motiva em muitos dos estudos de fiabilidade a adopção da hipótese markoviana, que consiste em admitir que os processos estocásticos que regem o comportamento dos sistemas apresentam taxas de ocorrência constantes e, por conseguinte, que as suas distribuições são exponenciais. Muitas vezes, esta hipótese é adoptada mais por conveniência, dado que introduz uma grande simplificação de cálculo, do que por uma verdadeira convicção de que se trata de um representação válida da realidade.

Na verdade, muitos dos sistemas actuais possuem mecanismos de tolerância a falhas, mecanismos de reconfiguração, bem como a possibilidade dos seus equipamentos operarem a diferentes velocidades ou ritmos, o que origina diferentes níveis de *stress* de funcionamento nesses equipamentos. Tipicamente, as distribuições que caracterizam estes processos são hiperexponenciais, i.e., são menos dispersas que a distribuição exponencial e, não raramente, próximas da função Dirac. Acresce que, em determinados estados, estes processos concorrem com outros (reparação, falha,...), modelados por distribuições bastante mais dispersas, mas com tempos médios da mesma ordem de grandeza. Nestes casos, como se mostrará no Capítulo 2, o erro introduzido no cálculo dos índices de fiabilidade pela adopção da hipótese markoviana pode ser muito significativo. Mais, este erro pode ser por defeito ou por excesso, dependendo das distribuições dos processos estocásticos em jogo. A avaliar pela bibliografia existente sobre este tema, parece que raramente existe uma ideia clara acerca da dimensão de tais erros.

Para clarificar esta situação, desenvolveu-se no âmbito deste projecto de investigação um levantamento das diferentes metodologias existentes para avaliação de sistemas não-markovianos e uma análise sistemática dos erros introduzidos pela adopção da hipótese markoviana. Os resultados desse estudo são apresentados no Capítulo 2.

Se em muitos casos, a falta de dados é uma realidade, noutros casos, os dados existem mas a constante evolução tecnológica ou as diferentes condições ambientais e de funcionamento condicionam as probabilidades de falha dos equipamentos e de erro humano, não permitindo

extrapolar os dados recolhidos no passado para os novos sistemas. É comum nestas situações utilizar-se “factores de conversão” ditados por julgamentos de especialistas, que tomam em consideração estes aspectos, adaptando os dados existentes a novas realidades.

A utilização de parâmetros resultantes de valores típicos (retirados de bases de dados), ou resultantes da sua “adaptação” por um factor de conversão, gera uma incerteza nos valores dos parâmetros de natureza não probabilística que não deve ser ignorada ou modelada pela abordagem clássica. Acresce a esta incerteza a que advém do conhecimento imperfeito relativo às relações de interdependência estrutural e funcional dos componentes ao nível do sistema, influenciadas, naturalmente, pelo ambiente em que o sistema opera e que raramente são consideradas nos estudos de fiabilidade.

Durante muito tempo, a incerteza foi entendida simplesmente como a impossibilidade de prever a ocorrência de eventos; as probabilidades eram então a única forma de a representar. Com o aparecimento de novas ferramentas de modelação, constatou-se que a incerteza também está associada a formulações imprecisas, tais como: “existe uma forte possibilidade de retoma económica no próximo trimestre” ou “este equipamento tem uma elevada taxa de falhas”. Isto é uma outra forma de incerteza, que não pode ser representada por probabilidades.

A teoria difusa apresentada pela primeira vez por Zadeh [1965] oferece uma ferramenta interessante para representar matematicamente este tipo de formulações imprecisas - os conjuntos difusos. São reconhecidas as potencialidades desta teoria para modelar incerteza em situações de grande complexidade ou de escassez de dados, como acontece frequentemente em estudos de fiabilidade onde os parâmetros (taxas de avaria, tempos de recuperação, etc.) não são conhecidos com exactidão.

Sobressai do referido acima que os parâmetros de fiabilidade são, em larga medida, grandezas em relação às quais se tem bastante incerteza. A esta incerteza junta-se a que advém da variabilidade da procura dos produtos ou serviços oferecidos pelos sistemas em geral, tornando complexa a tarefa de prever as consequências das falhas destes sistemas, nomeadamente em termos de custos e de qualidade de serviço. Devido à natureza difusa da incerteza associada a vários destes parâmetros será conceptualmente mais adequado representá-los através de números difusos resultantes da combinação de muitos factores, alguns deles de carácter subjectivo.

Apesar disso, os estudos de fiabilidade de sistemas com parâmetros difusos, mantendo as características probabilísticas dos processos do comportamento (processos de falha, processos de reparação, processos de reconfiguração, etc.), são ainda em número reduzido. Também por isso, são escassas as abordagens que permitem de uma forma adequada propagar a incerteza dos parâmetros ou variáveis de *input*, expressa através de funções de pertença, ao *output*. Esta propagação faz-se através das funções de transferência ou modelo i.e., das expressões analíticas pelas quais *inputs* rígidos dão como *outputs* valores rígidos. As abordagens estudadas para a propagação de incerteza do(s) *input*(s) de um modelo ao(s) *output*(s) apresentavam algumas limitações importantes quando implementadas com expressões analíticas de índices de fiabilidade de sistemas markovianos. Saliente-se neste campo o estudo efectuado por Miranda [1998] com sistemas markovianos com parâmetros incertos, usando as expressões analíticas das probabilidades dos estados em regime estacionário. Uma das limitações do procedimento apresentado neste estudo reside no facto de apenas se aplicar a sistemas de pequena dimensão.

No caso dos sistemas não-markovianos, a falta de metodologias adequadas para obtenção das expressões analíticas dos índices de fiabilidade constituiu porventura um obstáculo para que parâmetros difusos fossem considerados em estudos de fiabilidade de sistemas desta natureza. Os estudos realizados recentemente [Faria, 1996; Quintas e Faria, 1998; Faria e Matos, 2001] permitiram desenvolver uma metodologia para obtenção das expressões analíticas dos índices de fiabilidade de sistema com processos não-markovianos – metodologia *DepCim*. Tornou-se deste modo viável incorporar a incerteza dos parâmetros na avaliação analítica de índices de fiabilidade de sistemas não-markovianos.

O estudo levado ao cabo no âmbito desta dissertação serve-se das expressões obtidas pela metodologia *DepCim* como “meio” para a propagação da incerteza dos parâmetros (modelada por conjuntos difusos) aos resultados. Acontece que as abordagens difusas analisadas mostraram-se inadequadas com as referidas expressões devido à complexidade destas. Deu-se então início neste projecto ao desenvolvimento de novas abordagens que permitem ultrapassar as limitações manifestadas pelas abordagens analisadas. Três destas abordagens baseiam-se no princípio da extensão (ver Secção 3.1.4) e na discretização das variáveis de *input* do modelo, diferindo entre elas, na forma como esta discretização é efectuada: (i) pela partição do universo de discurso das variáveis de *input* em intervalos de pequena amplitude, (ii) tomando valores do universo de discurso das variáveis de *input* de uma forma aleatória e (iii) através de cortes- α das funções de pertença das variáveis de *input*. Uma quarta abordagem baseia-se em cortes- α e

recorre a métodos de optimização não linear com restrições para a obtenção da distribuição de possibilidades do *output*.

Saliente-se ainda a respeito destas abordagens que embora tenham sido desenvolvidas e implementadas no âmbito de estudos de fiabilidade são completamente genéricas. O modelo é uma expressão analítica do tipo $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, as variáveis de *input* $x_1, x_2, \dots, x_n$ podem ser valores rígidos e/ou números difusos e o *output* é a distribuição de possibilidades de y .

Um outro factor de complexidade na análise e avaliação de índices de fiabilidade ou de medidas de desempenho em geral tem a ver com a dimensão dos sistemas reais. Este factor, associado ao carácter não-markoviano de muitos dos processos do comportamento e à incerteza presente nos parâmetros, conferem a estes sistemas uma grande dificuldade de análise e avaliação da fiabilidade e desempenho. Para lidar com este tipo de sistemas desenvolveu-se e testou-se um quadro de modelação hierárquico para a construção de modelos que permitem decompor sistemas complexos e representá-los segundo dois níveis de modelação: global e local.

No nível de modelação local é representado o comportamento interno de cada unidade através de uma máquina de estados. A este nível foi desenvolvido e testado um novo algoritmo baseado no conceito de *modelo canónico*, que corresponde à representação equivalente do comportamento de uma unidade ou subsistema tal como essa unidade/subsistema é vista pelas outras unidades do sistema a jusante.

Ao nível global é representada a estrutura geral do sistema e os fluxos de materiais e de informação entre as unidades. Para cada nível de modelação define-se um modelo conceptual que, através de uma notação formal caracteriza as entidades que constituem os modelos e os seus atributos e relações. Os sistemas são entendidos como conjuntos de unidades organizados em rede, que interactivam através de relações do tipo produtor/consumidor. Tal aplica-se a um vasto conjunto de sistemas de engenharia de que são exemplos os sistemas de produção, os sistemas logísticos de distribuição, os sistemas eléctricos de energia e os sistemas de informação distribuídos.

Relativamente ao algoritmo de avaliação dos indicadores de fiabilidade do *modelo canónico*, foram exploradas duas vias alternativas: uma baseada na obtenção de expressões analíticas, aplicável quando os modelos dos subsistemas são suficientemente simples e o permitem, outra baseada

na Simulação Monte Carlo (SMC), para os casos em que os modelos são de maior dimensão ou apresentam padrões de comportamento complexos.

A natureza não-markoviana de muitos dos processos que caracterizam os sistemas de produção, a complexidade resultante da interacção de pessoas e equipamentos, a presença de mecanismos de tolerância a falhas e a incerteza dos parâmetros são aspectos fundamentais que conferem a estes características próprias.

O papel cimeiro que os sistemas de produção desempenham nas economias mais desenvolvidas e a constante dinâmica de mudança motivada por novas exigências dos mercados e pelo aparecimento de novas estratégias de produção, criam a necessidade de novos indicadores de avaliação do desempenho e de metodologias de análise e avaliação adequadas. Com a crescente presença destes sistemas em cadeias logísticas JIT (*Just in Time*), as medidas de desempenho *frequência de falhas nos fornecimentos* e *custo da fiabilidade* constituem elementos indispensáveis no apoio à tomada de melhores e mais fundamentadas decisões, nomeadamente sobre as que se prendem com investimentos na melhoria do projecto dos sistemas. Ambas as medidas de desempenho referidas são influenciadas decisivamente pela disponibilidade dos sistemas (índice de fiabilidade mais relevante em sistemas de produção).

A *frequência de falhas nos fornecimentos* é uma medida da qualidade de serviço ao cliente que mede o número de falhas de fornecimento i.e., o número de incumprimentos na satisfação integral das encomendas por unidade de tempo (por exemplo um ano). Relativamente ao *custo da fiabilidade*, trata-se de um indicador que avalia, em termos económicos, a indisponibilidade de um sistema durante um período de tempo, relacionando as penalizações por incumprimento de compromissos comerciais e os custos com acções de melhoria da disponibilidade do sistema.

Apesar destas medidas serem frequentemente referidas na bibliografia, os trabalhos publicados sobre os modelos analíticos que permitem o seu cálculo em sistemas de produção são escassos, havendo neste campo muito caminho a percorrer. Com os desenvolvimentos efectuados no âmbito desta dissertação e apresentados sobretudo nos Capítulos 4 e 5, acreditamos ter dado um pequeno contributo para encurtar este caminho.

A utilidade e aplicação numérica dos modelos e metodologias desenvolvidos nesta dissertação é demonstrada com a análise e avaliação dos dois casos de estudo apresentados no Capítulo 6. Qualquer destes casos é representativo de sistemas de produção reais. No seu estudo são tidos

em consideração aspectos da organização e dimensionamento de sistemas de produção, nomeadamente, o *layout* fabril, o dimensionamento dos *buffers* intermédios e/ou de produto acabado, as políticas de manutenção, a redundância de equipamentos, os compromissos comerciais assumidos com os clientes e os custos motivados por indisponibilidade dos equipamentos/sistema (custos de posse de inventários, custos de trabalhos extra, custos de indemnizações/compensações aos clientes por quebra de compromissos etc.). Cada uma das soluções encontradas é avaliada por um conjunto de medidas de desempenho financeiras (custos) e não financeiras (disponibilidade, nível de serviço ao cliente, etc.).

Depois destas considerações breves sobre a motivação e o contexto deste estudo apresenta-se de seguida os seus principais objectivos e a forma como esta dissertação está estruturada e organizada. Por fim, dedicam-se as últimas três secções deste capítulo a aspectos relacionados com a fiabilidade de SIP e importantes para uma melhor compreensão dos capítulos seguintes.

1.2 Objectivos

Os grandes objectivos e linhas de orientação deste projecto de investigação sintetizam-se em três pontos:

1. Estudo comparativo das metodologias de análise e avaliação da fiabilidade de sistemas markovianos e não-markovianos, avaliação de uma estimativa do erro cometido quando se adopta indevidamente a hipótese markoviana e apresentação de heurísticas que permitam avaliar qualitativamente esse erro a partir do conhecimento do modelo de estados do sistema e das distribuições dos processos;
2. Desenvolvimento de fundamentos teóricos e metodológicos relativos à análise de fiabilidade de sistemas com processos não-markovianos e com parâmetros incertos modelados com base na teoria dos conjuntos difusos. As metodologias e algoritmos devem permitir abordar de forma sistemática e eficaz a avaliação de fiabilidade de sistemas complexos descritos por processos estocásticos, não-markovianos e com parâmetros incertos;
3. Desenvolvimento de metodologias de avaliação de medidas de desempenho para apoio ao projecto de sistemas de produção;
4. Aplicação da base conceptual e das ferramentas desenvolvidas à análise e avaliação de sistemas de produção complexos na óptica do apoio a decisões de concepção/projecto e definição de políticas de intervenção.

1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada em 7 capítulos, sendo o primeiro capítulo constituído por esta introdução, em que se apresenta nesta primeira parte as motivações que estiveram na origem deste projecto e o contexto em que se desenvolve, os objectivos gerais que se pretendem atingir e a forma como a dissertação está organizada. Na segunda parte deste capítulo apresenta-se uma introdução aos sistemas de produção, abordando fundamentalmente aspectos directa ou indirectamente relacionados com a fiabilidade e relevantes para o estudo apresentado nos capítulos seguintes. Fazem-se ainda algumas considerações gerais sobre o ambiente em que estes sistemas operam e sobre as metodologias de análise e avaliação, referindo as suas principais dificuldades e limitações. Termina-se com uma abordagem ao desempenho dos sistemas de produção, referindo então as principais medidas consideradas para a sua avaliação.

O Capítulo 2 começa com uma descrição sucinta dos sistemas de produção e das metodologias mais utilizadas para a análise e avaliação do desempenho destes sistemas. Segue-se uma breve caracterização das três classes de sistemas: markovianos, semi-markovianos e não-markovianos, e uma apresentação das principais metodologias de análise e avaliação da fiabilidade. A ênfase será dada às metodologias adequadas a sistemas semi-markovianos e não-markovianos. Relativamente aos sistemas markovianos e às metodologias de avaliação existe um número elevado de publicações no âmbito da fiabilidade de sistemas, razão pela qual lhes é dada, neste capítulo, uma menor importância.

Ainda neste capítulo, é apresentado um estudo de análise aos erros introduzidos pela adopção da hipótese markoviana quando os sistemas em estudo contêm processos não exponenciais, mostrando-se em que situações a adopção desta hipótese poderá ser aceitável. Por fim, são propostas algumas heurísticas que permitem prever se os erros introduzidos pela adopção da hipótese markoviana são ou não significativos, a partir do diagrama de estados de um sistema e das distribuições dos respectivos processos.

O Capítulo 3 pode ser visto como uma extensão do estudo apresentado no Capítulo 2. Neste capítulo os sistemas são analisados numa perspectiva mais abrangente que considera a incerteza dos parâmetros nos modelos de fiabilidade. Esta incerteza é modelada por conjuntos difusos, mantendo-se a componente estocástica dos processos do comportamento a ser modelada por distribuições de probabilidades. Como consequência da utilização de parâmetros difusos os

índices de fiabilidade obtidos são também difusos. Por razões que se prendem principalmente com a simplicidade de representação serão utilizados números difusos triangulares para modelar a incerteza dos parâmetros, sem que daí resulte qualquer perda de generalidade para as abordagens apresentadas. A questão que então se coloca é de como transmitir de forma adequada a incerteza contida nos parâmetros (dados) aos índices de fiabilidade (resultados). Neste sentido são apresentadas algumas abordagens com aspectos inovadores que dão um importante contributo para a resposta a esta questão. Todas estas abordagens requerem para a sua implementação: (i) o conhecimento das funções de pertença dos parâmetros que fazem parte das expressões analíticas dos índices de fiabilidade pretendidos; (ii) o conhecimento destas expressões (com parâmetros rígidos). As expressões analíticas dos índices de fiabilidade podem ser obtidas por diferentes metodologias conforme a natureza markoviana ou não-markoviana dos sistemas em análise.

O Capítulo 4 é dedicado à análise e avaliação de índices de fiabilidade de sistemas de produção. Estes sistemas são constituídos por vários subsistemas (células de produção) independentes sob determinados aspectos e vistos e analisados na perspectiva de sistemas reparáveis com mecanismos de tolerância a falhas.

Para a análise e avaliação destes sistemas, complexos por natureza, é apresentada uma nova abordagem hierárquica, especialmente desenvolvida para esta classe de sistemas. As duas principais componentes da abordagem são: (i) a estrutura de modelação e (ii) os algoritmos de avaliação. A estrutura de modelação proposta baseia-se no conceito de *modelo canónico*, e os algoritmos de avaliação desenvolvidos ao nível dos subsistemas podem ser analíticos ou de simulação, dependendo fundamentalmente da configuração estrutural dos subsistemas. Contudo, o algoritmo de avaliação do modelo global do sistema será analítico. O método pode ser empregue para estudar vários aspectos relacionados com o projecto e a operação dos sistemas de produção, tais como: a redundância de equipamentos, o desenho do sistema, a localização de dimensionamento de *buffers* intermédios e de produto acabado ou as políticas de manutenção.

No Capítulo 5 fazem-se algumas considerações e desenvolvimentos sobre as perdas de produção relacionadas com a fiabilidade de sistemas de produção JIT. Estas perdas são analisadas e avaliadas segundo duas perspectivas diferentes: na perspectiva dos custos da fiabilidade e na perspectiva da qualidade de serviço oferecida aos clientes do sistema. As

medidas de desempenho utilizadas nesta avaliação são apresentadas na Secção 1.6.2 e os correspondentes modelos analíticos são desenvolvidos e apresentados neste capítulo.

No Capítulo 6 são apresentados dois casos de estudo com o objectivo de demonstrar a validade dos conceitos introduzidos, a aplicabilidade e utilidade prática das metodologias desenvolvidas, assim como, o seu potencial no apoio à tomada de decisões na concepção e projecto de sistemas de produção JIT.

O primeiro caso de estudo refere-se a um sistema de produção constituído por uma linha de produção que produz um tipo de produto. Com este caso de estudo pretende-se, numa primeira fase, mostrar a aplicação prática dos modelos de fiabilidade apresentados no Capítulo 4 e dos modelos de avaliação de medidas de desempenho desenvolvidos no Capítulo 5. Numa segunda fase procede-se a um estudo em que a incerteza associada a alguns parâmetros do sistema é analisada por duas vias:

- (i) através de um estudo de análise de sensibilidade clássica - nos casos em que existem dados suficientes para obter estimativas confiáveis para novos valores dos parâmetros;
- (ii) através de uma análise difuso-probabilística, utilizando parâmetros difusos - no caso em que a incerteza dos parâmetros é modelada por conjuntos difusos, recorrendo neste ponto aos desenvolvimentos apresentados no Capítulo 3.

O segundo caso de estudo consiste num sistema de produção multi-célula (*layout* constituído por várias células de produção) e multi-produto (a operar vários tipos de produtos no mesmo período de trabalho T) como se descreve em termos gerais no Capítulo 5. O estudo deste caso começa por desenvolver os modelos de custos relacionados com as falhas do sistema, completando os estudos a este respeito apresentados no Capítulo 5. Segue-se a obtenção de índices de fiabilidade do sistema através da aplicação da abordagem hierárquica apresentada no Capítulo 4. Estes índices são necessários no cálculo de medidas de desempenho com as quais se faz a avaliação das várias soluções alternativas analisadas. O estudo deste caso termina com a determinação do melhor desenho do sistema de entre um conjunto de vários analisados.

Finalmente no Capítulo 7 são apresentadas as principais conclusões deste projecto e perspectivas futuras de trabalho de investigação.

Na Figura 1.1 pode ver-se uma perspectiva geral do modo como esta dissertação está estruturada, estando assinalado a verde as principais contribuições.

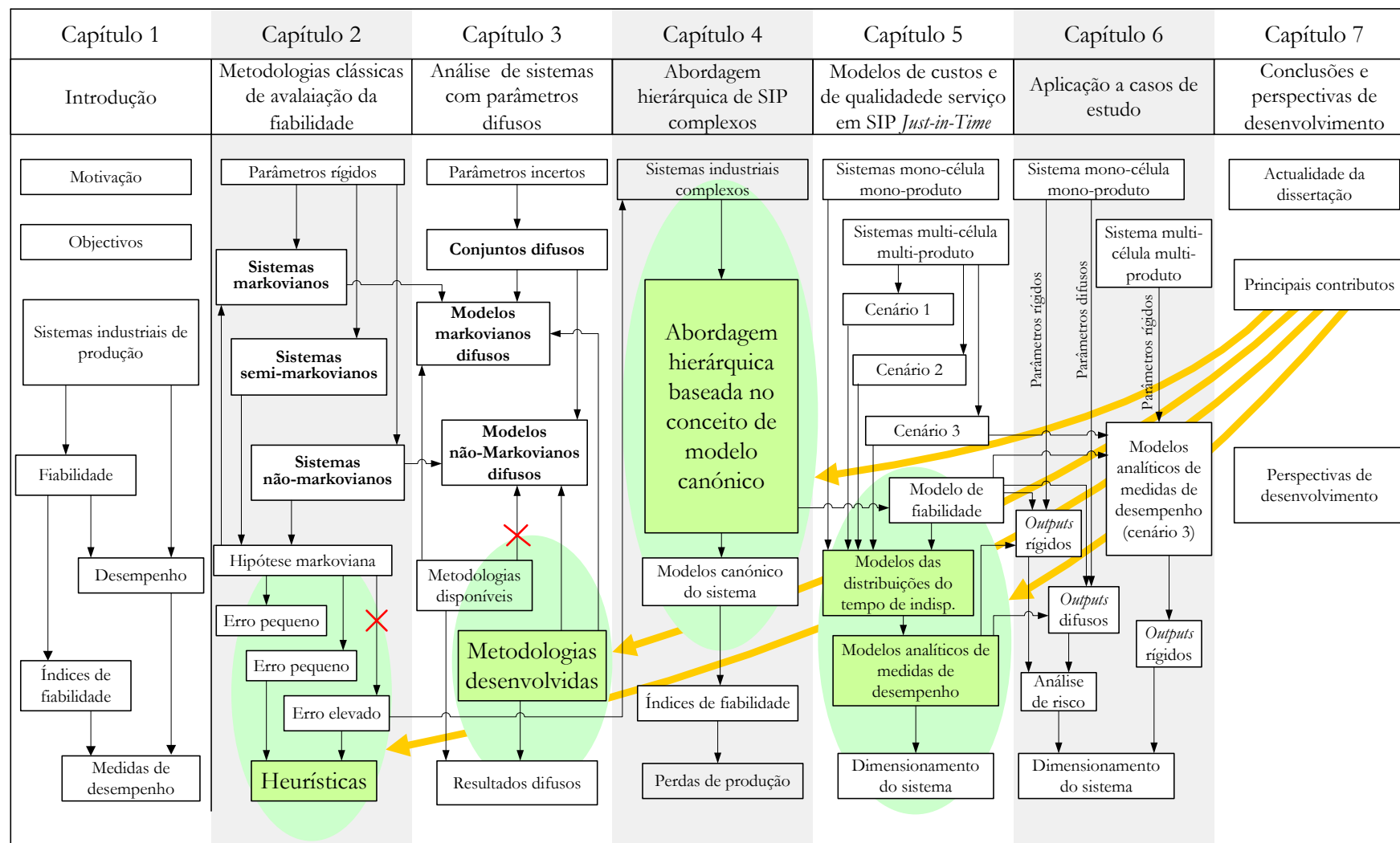


Figura 1.1: Estrutura global da dissertação

1.4 Sistemas de produção

1.4.1 Introdução

Os sistemas de produção podem ter várias configurações de acordo com a natureza e complexidade dos produtos que fabrica, organização da produção e do trabalho, cultura da empresa, etc. Duas configurações muito utilizadas em sistemas de produção são as linhas de produção e as células de produção. Uma linha de produção consiste numa sequência de várias máquinas, cada uma delas realizando uma operação. Quando uma máquina da linha não recebe *input* não pode realizar a respectiva operação e, por conseguinte, não produz *output*. A linha de produção falha se uma qualquer máquina falhar (entende-se por falha da linha de produção a não obtenção de *output*).

Por outro lado, as células de produção estão ligadas ao modo como as máquinas e equipamentos são dispostos no processo produtivo de forma a melhorar o fluxo da produção. Segundo Manoochchri [1988], o conceito de célula de produção passa por agrupar as peças a serem produzidas por “famílias” de peças com base na similaridade das operações. Porque frequentemente existem diferentes componentes ou subprodutos a serem processados numa célula de produção, existe também polivalência das máquinas, pelo que a falha de uma determinada máquina não provoca, normalmente, a falha da célula de produção.

Acontece que muitos sistemas de produção apresentam uma configuração mista no que diz respeito ao *layout* e ao modo como as operações são organizadas e realizadas. De facto, deparamo-nos em variados sectores da actividade industrial (têxtil, calçado, metalomecânica, electromecânica, electrónica) com sistemas de produção constituídos por células de fabrico de peças/componente e linhas de produção/montagem de produtos acabados ou semi-acabados.

Embora os sistemas de produção constituídos por células de produção de componentes ou subprodutos e por linhas de produção/montagem do produto final sejam sistemas mistos, do ponto de vista do fluxo de materiais estão próximos dum sistema de produção em linha. Esta aproximação torna-se mais evidente se considerarmos o *output* de uma célula de fabrico como se do *output* de uma máquina se tratasse, que por sua vez, serve de *input* a uma máquina da linha de produção/montagem propriamente dita.

Quanto ao fluxo de materiais, os sistemas de produção podem caracterizar-se, de uma forma geral, em duas grandes categorias: discretos e contínuos (Figura 1.2). Nos sistemas discretos cada item é produzido por sucessivos estágios ao longo do sistema; nos sistemas contínuos os itens individuais não podem ser identificados como acontece, por exemplo, numa indústria de processos (refinaria, fiação, tinturaria, etc.).

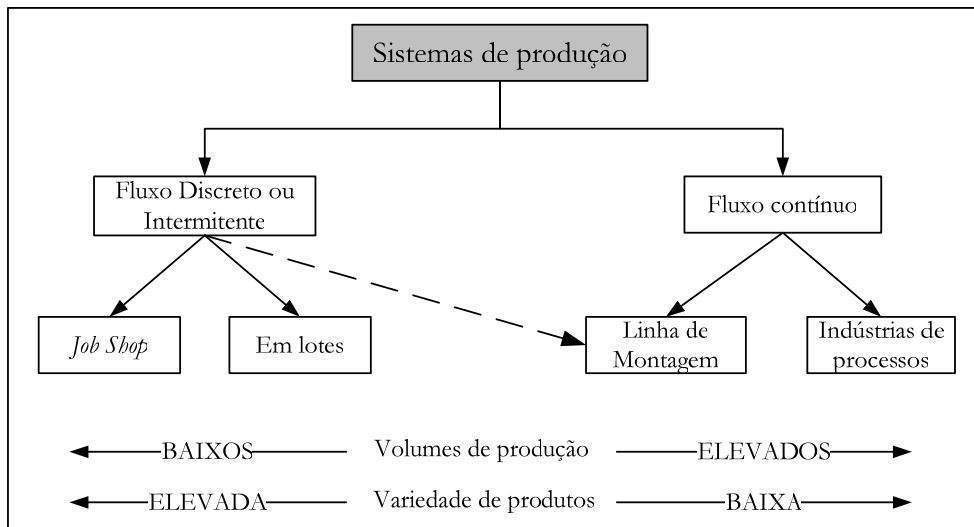


Figura 1.2: Tipos de processos produtivos

1.4.2 Eficiência em sistemas de produção

Vários casos de estudo mostram que de uma forma geral, a eficiência nos sistemas de produção é baixa. Como referem Jostes e Helms [1995], são frequentes valores do desempenho dos sistemas de produção entre 50 a 60%. Um estudo a 10 sistemas de produção diferentes em 6 empresas, apresentado por Ericsson [1998], refere que o tempo médio de utilização durante o tempo planeado de produção é de 59% e que o desempenho total médio do sistema é de 50%, para 9 sistemas de produção em 5 empresas diferentes (ver Figura 1.3). Este estudo exclui os dados de perturbações da produção devidas a mudanças técnicas significativas ou a mudanças de organização do trabalho.

Para estes resultados contribuem perturbações do sistema de produção de natureza diversa. Estas perturbações podem ser estudadas de diferentes pontos de vista. Várias áreas e disciplinas têm sido desenvolvidas para estudar diferentes aspectos dos sistemas industriais tais como: falhas de máquinas/equipamentos, erros humanos, risco, aspectos ergonómicos, manutenção, segurança, etc. [Torbjorn Ylipaa, 2000].

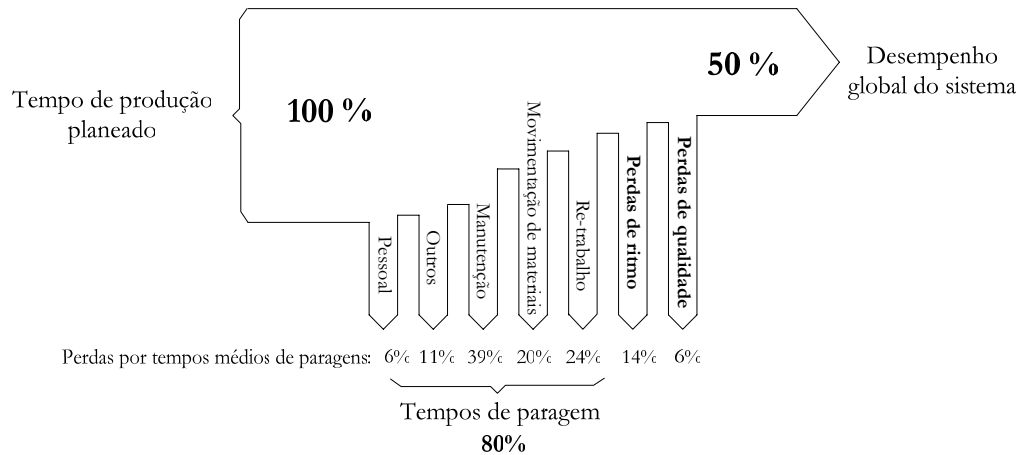


Figura 1.3: Perdas nos sistemas de produção adaptado de [Torbjorn Ylipaa, 2000]

Os tempos de paragem devidos a estas perturbações afectam negativamente a produtividade, qualidade, segurança e ambiente [Barroso e Wilson, 1999; Arts, Knapp et al., 1998].

1.4.3 Complexidade

A crescente competitividade dos mercados têm forçado as empresas a reduzirem continuamente os tempos de ciclo de desenvolvimento dos produtos. Paralelamente a tecnologia dos produtos e dos processos está a tornar-se cada vez mais complexa para ir de encontro (e por vezes influenciar) às necessidades dos consumidores. A incorporação da automação associada às novas tecnologias conjuntamente com as condições dinâmicas do negócio têm tornado estes sistemas muito complexos, aumentando a sua vulnerabilidade a perturbações e interrupções de vários tipos [Albino, Garavelli et al., 1998].

Anil Khurana [1999], classifica a complexidade de sistemas industriais em 4 categorias:

- Tecnológica – está relacionada a complexidade inerente ao sistema e suas tecnologias (para produtos e processo);
- Logística – é o resultado do elevado volume de transacções ou tarefas e/ou proliferação de produtos,
- Organizacional – refere-se à estrutura organizacional, diversidade de procedimentos e interdependências que fazem as organizações complexas;

- Ambiental – resulta de características ou eventos fora do sistema ou organização, como por exemplo, a turbulência tecnológica nas indústrias de computadores e de software, as pressões que tipicamente as empresas multinacionais enfrentam para a sua localização ou ainda, alterações das leis do trabalho, etc.

No âmbito dos sistemas de produção, as dimensões tecnológica e logística da complexidade assumem naturalmente preponderância. Uma característica importante dos sistemas e processos complexos é o frequente distanciamento entre a teoria e a prática [Khurana, 1999]. O que é especificado pelos engenheiros e o que acontece na produção pode diferir consideravelmente. Especificações e parâmetros que funcionam em teoria não funcionam na prática. Os processos complexos são imprevisíveis e existem limites técnicos para o que pode ser modelado com precisão num estudo teórico. Pequenas alterações nos procedimentos do dia-a-dia podem ter uma interferência no projecto superior à esperada.

A gestão de processos complexos passa também por evitar complexidades adicionais resultantes de procedimentos ou especificações inapropriados. O estabelecimento de rotinas é muito importante nestes casos. Dada a complexidade dos processos de produção, a introdução de novas tecnologias e de novos equipamentos devem ser implementados com cuidado e parcimónia.

Drucker [1990] advogava que, de um modo geral, complexidade, incerteza e ambiguidade serão provavelmente as características distintivas dos sistemas industriais e comerciais do amanhã. Neste momento esse amanhã é o presente. Além disso, complexidade e incerteza são aspectos relevantes não apenas para a produção mas também para I&D.

1.4.4 Novas estratégias de produção

Em muitas indústrias a produção estável de produtos para *stock* tende a desaparecer com a introdução rápida de novos produtos. Por exemplo, são introduzidos novos modelos de telemóveis com apenas meses de intervalo entre eles; na indústria automóvel novos modelos serão lançados todos os anos. A mudança de produtos cada vez mais frequente obriga a adaptações internas por parte das empresas. Segundo Taskinen e Smeds [1999], a capacidade das empresas se adaptarem à mudança será a chave para o sucesso a longo prazo. Esta capacidade de adaptação depende, até certo ponto, da “estratégia” de produção adoptada (JIT,

TQM, TPM, etc), estratégia esta que determina o modo como toda a empresa ou organização orienta a sua missão.

Estratégia de produção JIT

Uma das estratégias de produção mais divulgadas em todo o mundo é a estratégia de produção JIT. A definição de produção JIT não foi consensual desde a sua introdução, tendo sofrido diversas definições. A que melhor descreve este conceito parece ser a que consta do dicionário da APICS – *American Production and Inventory Control Society* – que define JIT como uma filosofia de produção baseada na eliminação planeada de todas as perdas e na contínua melhoria da produtividade. O termo filosofia sugere uma abordagem de certa medida utópica. Como filosofia de gestão tem causado grande interesse internacional desde o início dos anos 80 [Upton, 1998]. Frequentemente esta filosofia é usada pelas empresas japonesas para descobrir perturbações, enquanto que no mundo ocidental é usada para redução de inventários.

Muitos estudos têm sido publicados sobre a implementação das técnicas JIT. Por exemplo, Ramarapu, Mehra et al. [1995] referem cinco factores para a implementação da filosofia JIT: eliminação de perdas; estratégia de produção; qualidade e melhorias; compromisso da administração; e fornecedores. Profeta [2003] apresenta um estudo sobre os factores críticos para a implementação das técnicas JIT, referindo nesse estudo que esta implementação é muito particularizada, i.e., cada empresa assume uma postura própria adequada às suas necessidades e possibilidades. No entanto, nem por isso se torna uma tarefa simples. A mudança de paradigma [Vokurka e Davis, 1996] só por si constitui um motivo para o aparecimento de dificuldades de implementação, ao qual se juntam, por vezes, outros problemas como: a falta de apoio da administração [Yasin e Wafa, 1996], a adaptação dos recursos humanos [Deshpande e Golhar, 1995] e a adaptação dos fornecedores [Romero, 1991; Yasin e Wafa, 1998].

Por tudo isto, muitas empresas implementam apenas parte das técnicas JIT, destacando-se a utilização de sistemas de produção constituídas por *células de produção*, a *redução dos lotes de fabricação*, a *estabilização do plano de produção*, e o *relacionamento de colaboração e parceria* com fornecedores e clientes. A coordenação entre todos os processos é indispensável e segundo Crawford e Cox [1991] conseguido com uma procura estável e o uso do *Kanban*. Para tal é necessário um sistema de manutenção eficiente, um *layout* inteligente integrando células de produção e trabalhadores polivalentes trabalhando num espaço físico bem organizado (5 S ou *housekeeping*).

A utilização de células de produção proporciona a redução dos lotes de fabricação, contribuindo para a diminuição dos *stocks* e simultaneamente para o aumento da diversidade de produtos. Necessariamente os tempos de *setup* deverão ser reduzidos para que o funcionamento das células seja eficiente. A fiabilidade dos equipamentos que constituem as células de produção é indispensável, dado que num ambiente JIT os *stocks* querem-se reduzidos e a resposta da produção às solicitações da procura deve ser imediata. Daí que a manutenção preventiva seja um dos requisitos da produção JIT.

Por outro lado, a estabilização do plano de produção passa em boa medida por um novo relacionamento entre fornecedores e clientes. Este relacionamento é um aspecto chave na implementação das técnicas JIT. Com a redução dos inventários ganha importância a confiabilidade dos fornecimentos. Segundo vários autores [Karlsson e Norr, 1994; Epps, 1995], num ambiente JIT o relacionamento entre fornecedores e clientes deve mudar de competição para colaboração responsável. O número de fornecedores deve ser restrito e os contratos entre fornecedores e clientes devem ter em vista um compromisso mútuo de longo prazo, com integração total entre as partes, na forma inclusive de colaboração técnica e financeira, se for caso disso. Assim, a redução dos prazos de entrega e dos lotes de compra tornar-se-á possível, aumentando a frequência de entregas que, nalguns casos, poderá ser de uma ou mais vezes ao dia.

Nos Capítulos 4 e 5 serão analisados sistemas de produção integrados em cadeias logísticas complexas a operarem segundo os princípios da filosofia JIT e desenvolvidos modelos de avaliação de índices de fiabilidade e de medidas de desempenho importantes para a tomada de decisões relativas ao projectos destes sistemas.

1.5 Fiabilidade de sistemas

1.5.1 Introdução

O termo fiabilidade refere-se ao funcionamento próprio de um componente, equipamento ou sistema e por isso engloba hardware, software, o ser humano e os factores ambientais. Uma definição corrente de fiabilidade é apresentada como sendo, a capacidade de um produto (dispositivo, sistema ou serviço) cumprir com sucesso uma dada missão, sob determinadas condições, durante um certo período de tempo. A fiabilidade é expressa normalmente por uma probabilidade. Neste campo a estatística tem um papel relevante nas áreas da recolha de dados e sua análise.

Âmbito de interesse da fiabilidade

Historicamente, a estatística e a engenharia da fiabilidade têm focado o interesse nos eventos adversos ou falhas, os quais provocam consequências indesejáveis, podendo ser prevenidos ou evitados. As consequências de tais eventos podem ir de perfeitamente triviais (normalmente o caso), por exemplo, a falha de uma lâmpada, a muito catastróficas, como foi o caso da explosão do reactor da central nuclear de Chernobil (Ucrânia). São obviamente, dois exemplos extremos: eventos de pequeno impacto com ocorrências frequentes num grande número de sistemas e, eventos muito raros que tem consequências catastróficas. Por razões óbvias, apenas para os primeiros existe disponível uma substancial quantidade de dados de falha.

À medida que a capacidade para prevenir as falhas aumenta, as falhas observadas diminuem. Nestas circunstâncias torna-se necessário medir outros parâmetros relacionados com a falha física, nomeadamente, variações nas condições dos componentes ou dos sistemas ao longo do tempo. Estas condições referem-se a factores associados ao desempenho dos sistemas ou à possibilidade de falhar, como por exemplo, o grau de degradação física ou funcional de uma bateria integrada num circuito ou o grau de desgaste de uma ferramenta de corte. Falha também pode ser definida em termos da degradação atingir um determinado nível [Meeker e Escobar, 1998] .

Por detrás das preocupações com aspectos ligados à fiabilidade estão normalmente considerações de natureza económica. Em sistemas de serviços de comunicações a falha de ligação de um cliente com um servidor pode ter um efeito negativo na fidelidade do cliente.

Nos sistemas de produção as paragens reduzem a produtividade, podendo também ser a principal causa de um mau serviço prestado aos clientes. As falhas em sistemas de distribuição de energia podem provocar interrupções no fornecimento, dando lugar ao pagamento de compensações aos consumidores lesados, por incumprimento de padrões de qualidade estabelecidos por entidades reguladoras do sector.

Muitos SIP apresentam problemas crónicos: falhas frequentes de equipamentos, rejeições de produtos, desperdícios, atrasos na produção, etc. Uma parte da capacidade efectiva dos sistemas é perdida – aumento do investimento em capital; os custos são acrescidos – perda de competitividade, e os lucros são reduzidos – perda de viabilidade económica. Tipicamente uma empresa tem centenas ou mesmo milhares de componentes e equipamentos que podem criar problemas de inúmeras formas. Por vezes os gestores não percebem as razões que estão por detrás destes problemas perdendo assim uma das maiores oportunidades estratégicas para aumentar a capacidade produtiva, a produtividade e os lucros.

Recentemente tem sido bastante referido que o principal problema na área dos sistemas de produção está relacionado com a manutenção e que as tarefas mais difíceis para os operadores são as tarefas de manutenção e de detecção de erros, sobretudo nos sistemas automáticos de produção [Halin e Stahre, 1998; Johansson, 1999].

1.5.2 Sistemas com tolerância a falhas

A crescente procura por sistemas mais fiáveis e a consciência generalizada pelas questões da segurança têm vindo a orientar muito do trabalho de investigação sobre fiabilidade de sistemas para o desenvolvimento e análise de sistemas com tolerância a falhas. Uma das características destes sistemas é a possibilidade de continuarem a operar regularmente na presença de falhas de certos componentes ou sub-sistemas. Todavia, quando um componente ou sub-sistema falha o desempenho do sistema normalmente degrada-se.

Parte do trabalho de investigação com estes sistemas centra-se no projecto de incorporação de redundâncias e sistemas de *backup* [Brenner, 1996; Campelo, 1997; Avizienis, 1998; Fletcher e Deen, 2001; Kim, Inaba et al., 2003]. Obviamente que os componentes extra necessários para o projecto de um sistema com redundâncias faz aumentar os custos e as possibilidades de falha dos componentes, no entanto, ganha-se em termos de fiabilidade global do sistema. Ferramentas de análise e avaliação da fiabilidade tais como árvores de falhas [Verbitsky e

Lucent, 2001; Khoo, Tor et al., 2001; Hu, Starr et al., 2003], redes Petri [German, Kelling et al., 1995; Fricks, Puliafito et al., 1998; Simeu-Abazi e Sassine, 1999; Adamyan e He, 2002] e modelos de Markov [Zakarian, 1997; Ching, 2001; Rupe e Kuo, 2003; Bowles e Dobbins, 2004] permitem a obtenção de valores precisos para os índices de fiabilidade, mostrando que os benefícios de um plano de tolerância a falhas são tangíveis. Porém, para sistemas reparáveis, destacam-se em particular, os modelos de Markov pela sua capacidade para modelar este tipo de sistemas.

A existência de planos de reconfiguração para a eventualidade de um equipamento ou subsistema falhar deverá ser considerado um “mecanismo” de tolerância a falha. Muitos destes planos de reconfiguração passam por compensar em parte ou na totalidade as perdas causadas pela falha de um equipamento, alterando o regime de funcionamento de outros equipamentos que executam idênticas operações. Neste caso, altera-se o nível de *stress* de funcionamento destes equipamentos, tendo implicação directa nas respectivas taxas de falha. Mesmo em condições normais, os sistemas de produção funcionam a diferentes níveis de *stress* durante a sua missão. As máquinas estão sujeitas a diferentes níveis de *stress* durante o funcionamento, a paragem e o processamento de matérias-primas. Contudo, na maioria das vezes os estudos de fiabilidade são efectuados assumindo que os sistemas estão sujeitos a um único nível de *stress* durante todo o tempo de operação.

Para além dos “mecanismos” de tolerância a falhas acima referidos é muito comum em sistemas de produção, a utilização de *buffers* quer de componentes/produtos semi-acabados, quer de produto acabado, com o mesmo objectivo - o de impedir que um dado cliente interno (máquinas, secções, ou linhas de montagem) que ou externo, seja afectado por uma falha ou perturbação do sistema a montante.

Uma grande parte dos sistemas em geral possuem um ou vários mecanismos de tolerância a falhas podendo por isso classificar-se como sistemas com tolerância a falhas. Na Tabela 1.1 apresentam-se alguns sistemas com tolerância a falhas e alguns mecanismos de tolerância. De realçar que o conceito de falha tem um significado amplo. Consequentemente, para cada circunstância, terá de se definir o que se entende por falha.

Tabela 1.1: Sistemas com tolerância a falhas

Sistema	Falha	Mecanismo de tolerância	Desempenho do sistema
Linha de montagem	Avaria duma máquina da linha	<i>buffer</i> a jusante da máquina avariada	$\cong$
Sistema de informação para a produção	Atraso na programação da produção para a próxima hora	Manter o actual plano de produção	$\cong$ <
Transportes ferroviários	Falta dum maquinista	Maquinista de reserva	=
Fornecimento de energia eléctrica a uma empresa	Falha no abastecimento	Grupo Diesel-eléctrico	<
Célula de fabrico por lotes	Avaria duma máquina	Reconfiguração da célula	<

Os *buffers* em sistemas de produção

Apesar dos intensos esforços feitos nas últimas duas décadas para reduzir ou eliminar quer os *buffers* de produtos semi-acabados, quer o de produtos acabados, como aliás preconiza a filosofia JIT, em muitas situações terão de ser mantidas quantidades significativas de produtos nestes *buffers* para garantir as entregas (quantidades requeridas e prazos de entrega) necessárias ao normal funcionamento da toda uma cadeia logística.

Os *buffers* permitem desacoplar os sistemas de produção atenuando os desequilíbrios entre células com diferentes taxas de produção e impedem a propagação de perturbações ou instabilidades causadas por falhas de equipamentos ou células de fabrico a montante, constituindo um “mecanismo” de tolerância a falhas. Concomitantemente obtém-se um aumento da disponibilidade do sistema, que depende não apenas da dimensão total dos *buffers* mas também da dimensão e localização dos *buffers* ao longo de diferentes nodos do sistema. Por exemplo, se o *buffer* instalado entre duas máquinas for reduzido poderá não haver tempo para reparar a máquina a montante do *buffer* sem que ocorra a paragem da máquina a jusante.

No entanto os *buffers* apresentam uma grande desvantagem – os custos de posse de inventários – pelo que a localização e dimensão dos *buffers* terá que resultar fundamentalmente de uma análise económica [Mahadevan e Narendran, 1993] que tenha em consideração os seguinte aspectos:

- os custos de posse resultantes da existência dos *buffers*;
- o nível de serviço fornecido aos clientes [Berg, Posner et al., 1994], com reflexo directo em toda a cadeia logística a jusante e;

- o aumento da produtividade resultante de melhorias no fluxo do sistema de produção, uma vez que se torna menos sensível às falhas de equipamentos individuais.

Nos Capítulos 6 e 7 mostrar-se-á de forma mais concreta a importância dos *buffers* como mecanismos de tolerância a falhas em sistemas de produção.

1.5.3 Incerteza no estudo da fiabilidade de sistemas

O termo incerteza reflecte a falta de conhecimento acerca de algo ou a falta de capacidade para prever o resultado de um processo. Infelizmente, não existe uma interpretação universal de incerteza.

De um modo geral a informação disponível relacionada com a fiabilidade dos componentes que integram os é reduzida, o que constitui uma importante fonte de incerteza que se manifesta desde logo na dificuldade em determinar os modelos probabilísticos que caracterizam o comportamento desses componentes. Acresce a esta incerteza a que advém do conhecimento imperfeito relativo às relações de interdependência dos componentes ao nível do sistema, influenciadas pelo ambiente em que o sistema opera. Trata-se, neste caso, de incerteza ligada à complexidade dos sistemas.

A este respeito, o princípio da incompatibilidade apresentado por Zadeh [1973] refere no essencial que, à medida que o grau de complexidade de um sistema aumenta, a capacidade para formular juízos significantes e precisos diminui. Contudo, intensificando a aprendizagem acerca desse sistema aumenta-se o conhecimento a seu respeito e a complexidade diminui. Com esta diminuição da complexidade facilita-se a modelação dos sistemas e os resultados obtidos pelos métodos computacionais tornam-se mais precisos e mais úteis porque mais reais [Klir e Yuan, 1995].

Num estudo de fiabilidade de um sistema de produção são várias as fontes de incerteza presentes. Neste momento, ao referir-se incerteza sem mais detalhe está-se a fazê-lo em sentido lato, incluindo neste conceito informação contraditória ou insuficiente, arbitrariedade, ambiguidade, risco, etc. Para se analisar devidamente estes sistemas terá de se incorporar a incerteza nos modelos modelando-a de forma explícita. Existem duas vias principais para o fazer: as distribuições de probabilidade e os conjuntos difusos, devendo escolher-se para cada caso concreto a melhor via. Segundo alguns autores [Dubois e Prade, 1994; Hadjali, Dubois et

al., 2004], probabilidades e conjuntos difusos são duas formas conceptuais e computacionais distintas direccionadas para a representação e tratamento da incerteza (ver Figura 1.4). Ainda de acordo com estes autores, a incerteza não está directamente associada com qualquer sistema real mas sim relacionada com a selecção prudente dos processos de descrição de um sistema, uma vez que o modo como estes se manifestam e o método pelo qual podem ser captados correctamente dependem do analista. Subsequentemente, não existe nenhuma forma universal simples para enfrentar com êxito a incerteza. Neste sentido, as probabilidades e os conjuntos difusos parecem ser teorias, mais complementares que antagónicas. De facto, podem mesmo construir-se modelos híbridos, comportando probabilidades e conjuntos difusos, como mostraremos nesta dissertação.

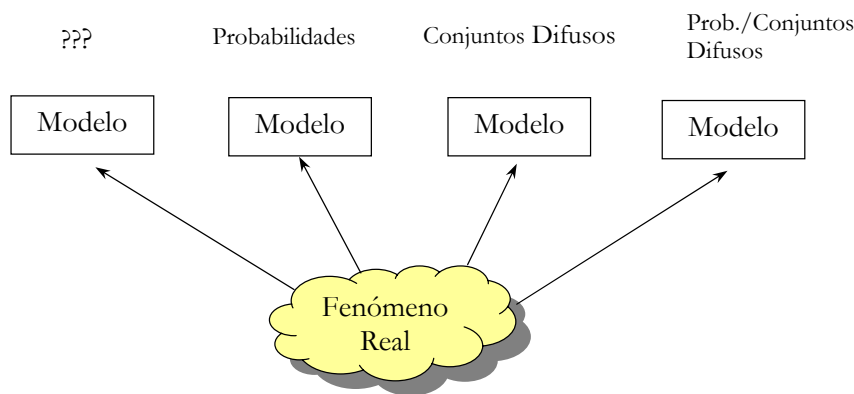


Figura 1.4: Modelação de sistemas

1.5.3.1 Distribuições de probabilidade

As distribuições mais frequentemente utilizadas em estudos de fiabilidade são a distribuição Exponencial, a distribuição de Weibull, e a distribuição Gama (ou a distribuição de Erlang – um caso particular desta). A distribuição Exponencial desempenha um papel importante na modelação de falhas; é a única distribuição contínua com uma taxa de falhas constante. (ver Figura 1.5). Revela-se por isso apropriada para modelar tempos de falha de um produto, admitindo que quando em funcionamento e na sua fase de vida útil pode considerar-se tão bom como se estivesse novo (*memoryless property*). Embora esta hipótese (hipótese markoviana) seja normalmente aceite para processo de falha é muitas vezes generalizada a outros processos para se tirar proveito das vantagens da utilização da distribuição exponencial. Estas vantagens provêm das simplificações que introduz, mantendo tratável a fiabilidade de sistemas que de outro modo poderia tornar-se bastante complexa.

Na Figura 1.5 apresentam-se algumas das distribuições de probabilidade mais utilizadas em estudos de fiabilidade, que podem modelar a incerteza associada a variáveis aleatórias.

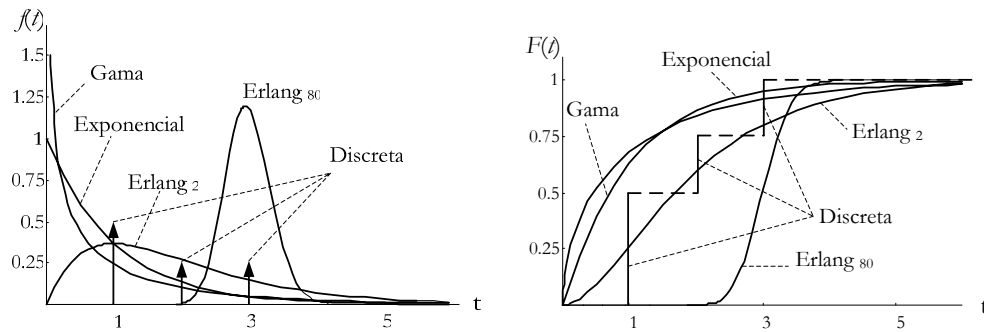


Figura 1.5: Funções de distribuição de probabilidades $F(t)$ e correspondentes funções de densidade probabilidades $f(t)$

Na Tabela 1.2 mostram-se alguns exemplos de variáveis/parâmetros relacionados com os sistemas de produção que poderão ser representados por variáveis aleatórias contínuas ou discretas. O conjunto de todos os valores possíveis (estados) que uma variável aleatória pode tomar constitui o seu espaço de estados, E .

Tabela 1.2: Exemplos de variáveis aleatórias

<i>Variáveis aleatórias contínuas</i>	<i>Variáveis aleatórias discretas</i>
- Tempo de falha de um equipamento	- Número de peças num <i>buffer</i>
- Tempo de reparação de um equipamento	- Número de encomendas não satisfeitas por ano
- Duração das actividades	- Número de paragens de um sistema de produção num dado período T
- Tempo de paragem do sistema de produção num período T	- Procura diária de um produto

1.5.3.2 Conjuntos difusos

Existe incerteza associada a determinadas variáveis/parâmetros dos sistemas industriais de produção que não pode ser captada por variáveis aleatórias (clássicas), porque não existem resultados de experiências ou observações. Informações qualitativas fornecidas nomeadamente por peritos podem ser sintetizadas no sentido de captar esta incerteza, caracterizando deste

modo esta variáveis/parâmetros através de conjuntos difusos. Na Tabela 1.3 mostram-se exemplos de variáveis/parâmetros presentes em estudos de sistemas industriais de produção, que poderão ser modelados por conjuntos difusos representados por funções de pertença. As mais utilizadas em estudos de fiabilidade são as funções de pertença rectangulares, triangulares e trapezoidais (ver Figura 1.6).

Tabela 1.3: Exemplos de variáveis difusas

<i>Variáveis difusas</i>
- Taxas de falha de novos equipamentos
- Taxas de reparação
- Custos unitários
- Procura de novos produtos

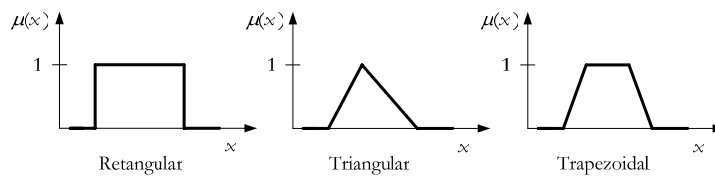


Figura 1.6: Funções de pertença

Para os leitores menos familiarizados com os conjuntos difusos e toda a teoria subjacente sugere-se, a título meramente indicativo, a consulta da seguinte bibliografia: [Klir e Yuan, 1995; Ross, 1995; Dubois, 1998; Pedrycz, 1993; Yuan, 1995; Dadone, 2001].

1.5.4 Probabilidades *versus* possibilidades

As abordagens clássicas da engenharia da fiabilidade confiam inteiramente nos modelos de probabilidades. Tais modelos poderão não ser os mais apropriados para os casos onde a incerteza é elevada, como foi referido anteriormente. As análises de probabilidade em que se baseiam exigem mais informação acerca do sistema (taxas médias de falhas, e distribuições) que a que é normalmente conhecida. Como consequência, a utilização de um qualquer simples valor ou distribuição que caracterize insuficientemente uma variável ou parâmetro pode dar um resultado que conduza a conclusões erradas.

De um modo geral, os modelos probabilísticos utilizados em estudos de fiabilidade são distribuições de probabilidades definidas por valores médios de parâmetros estimados a partir das amostras de dados disponíveis. Acredita-se que estes parâmetros sejam bons estimadores dos verdadeiros parâmetros (desconhecidos) da população. Sabe-se da estatística que, quanto mais informação houver (amostras de maior dimensão) mais precisos serão os parâmetros estimados e portanto, maior será a confiança do analista no modelo criado. Apenas num cenário (irreal) de informação perfeita (tamanho da amostra, $n \rightarrow \infty$) é que os verdadeiros parâmetros das distribuições são conhecidos. Na prática (cenário reais) trabalha-se sempre com informação imperfeita. Há medida que a complexidade dum sistema cresce, cresce proporcionalmente mais a dificuldade em compreender o seu funcionamento e a informação disponível torna-se “mais imperfeita”.

Por exemplo, a avaliação das taxas de falha de muitos componentes ou equipamentos que funcionam em ambiente industrial é feita a partir de dados retirados de bases de dados. Estas bases de dados possuem informação referente a componentes ou equipamentos que poderão não ser rigorosamente semelhantes aos que estão em análise, porque não foram instalados sob as mesmas condições de funcionamento, ou porque sofreram alterações com a introdução de novos elementos. Noutros casos, as bases de dados não existem ou estão obsoletas pelo que os dados necessários dependem, em boa medida, de julgamentos de especialistas.

Normalmente a subjectividade destes julgamentos é introduzida nos parâmetros através de um factor que depende da avaliação de condições ambientais, de funcionamento, etc. Por vezes podem ser obtidos intervalos de possíveis valores dos parâmetros e, nestes casos, deverão ser usados métodos que tomem em consideração estes intervalos. Mais recentemente dispõem-se de uma ferramenta adequada para modelar julgamentos subjectivos dos parâmetros – os conjuntos difusos. Em qualquer dos casos, a presença de parâmetros subjectivos nos modelos impedem a obtenção de resultados precisos e objectivos.

Também na fase de projecto pode ser muito difícil obter com precisão taxas de falhas de componentes, equipamentos ou sistemas visto que os factores ambientais e as interacções entre componentes não são fáceis de determinar sem a construção de protótipos. Isto pode conduzir à utilização de métodos baseados em probabilidades com parâmetros determinísticos dados por estimativas de ordem de grandeza.

Há sistemas cujos processos devem ser modelados uns por modelos probabilísticos e outros por modelos difusos. Nestes casos está-se na presença de uma dupla dimensão da incerteza: incerteza estocástica e difusa. Estocástica porque se lida regularmente com ciclos de falha-reparação e difusa porque não se pode de forma exacta descrever todas as condições de experimentação que poderiam conduzir a um modelo probabilístico puro.

Como combinar então probabilidades e possibilidades? Existem várias alternativas possíveis:

1. Aproximar cada função de distribuição de possibilidades por uma função densidade de probabilidade, seguindo determinados métodos [Dubois, 1988]. Assim, todas os processos de um sistema são descritas num contexto probabilístico e naturalmente o problema deixa de existir. No entanto, este procedimento é incorrecto uma vez que se viola deste modo a principal premissa das probabilidades - a repetição probabilística dos dados recolhidos e a existência de uma grande quantidade de dados. Por outras palavras, utiliza-se informação de que não se dispõe.
2. Reduzir todas as funções de distribuição de probabilidades a funções de distribuição de possibilidades. Neste caso, perde-se uma parte essencial da informação probabilística disponível.
3. Encontrar uma terceira via que tenha em conta as singularidades das teorias probabilística e possibilística. Como resultado da análise de fiabilidade de um sistema seguindo esta via, obtêm-se medidas difusas, como por exemplo, probabilidades de estado difusas.

Finalmente refira-se em síntese que os conjuntos difusos revelam grandes capacidades na modelação da incerteza associada a parâmetros de fiabilidade. Este facto associado às características estocásticas dos processos e às metodologias probabilísticas disponíveis, levou-nos a acreditar nas potencialidades de uma abordagem híbrida difuso-probabilística para avaliar índices de fiabilidade de sistemas em contextos de elevada incerteza. Consequentemente, uma parte substancial do estudo apresentado nesta dissertação prende-se com a análise e avaliação da fiabilidade de sistemas cujos processos do comportamento são modelados por distribuições de probabilidades e os parâmetros são conjuntos difusos.

1.5.5 Modelação e avaliação da fiabilidade

Um sistema funciona convenientemente se os elementos (componentes, equipamentos, máquinas, etc.) que o constituem funcionarem correctamente. Geralmente, a realização de um estudo de análise e avaliação da fiabilidade de um sistema tem por objectivo o cálculo de índices de fiabilidade que expressem o seu comportamento devido à natureza falível dos seus elementos e às relações de interdependência (funcional e outras) que o caracterizam [Saraiva, 1992].

Para prever a fiabilidade de um sistema é necessário modelar as relações entre os vários elementos admitindo que a fiabilidade individual de cada um é conhecida. Os diagramas blocos de fiabilidade (DBF) são, frequentemente, utilizados para prever a fiabilidade de sistemas. Os elementos podem ser ligados de diferentes modos nomeadamente: em série, em paralelo, em série-paralelo, em paralelo-série, em ponte, etc. Admite-se em qualquer destes casos que os elementos no sistema funcionam ou falham de modo independente, ou seja, a falha ou o funcionamento de um elemento não afecta a falha ou o funcionamento de qualquer outro. Para muitos sistemas de produção esta hipótese é insustentável. Os elementos que constituem estes sistemas são normalmente elementos reparáveis que partilham recursos e cujo comportamento é modelado por processos estocásticos.

1.5.5.1 Modelação estocástica

Por razões técnicas e económicas, muitos dos recursos envolvidos nos processos produtivos são partilhados. Por exemplo, numa célula de produção diferentes produtos aguardam operação numa mesma máquina ou as várias máquinas partilham os mesmos recursos de manutenção. Variações nos tempos de operação de uma máquina ou a falha de um equipamento provocam congestionamentos no processo produtivo. A complexidade das situações, interdependências e condicionamentos, conferem aos sistemas um comportamento dinâmico, tornando impossível descrever tais fenómenos através de modelos determinísticos. Inter-relações complicadas e falta de informação detalhada fazem com que alguns processos se mostrem aleatórios.

Embora muitos comportamentos individuais e eventos sejam imprevisíveis, podem observar-se muitas regularidades estatísticas e modelá-las por processos estocásticos. Por exemplo na Figura 1.7 mostram-se os resultados reais de uma experimentação feita a um equipamento e a previsão do desempenho usando modelos estocásticos (distribuição de Weibull).

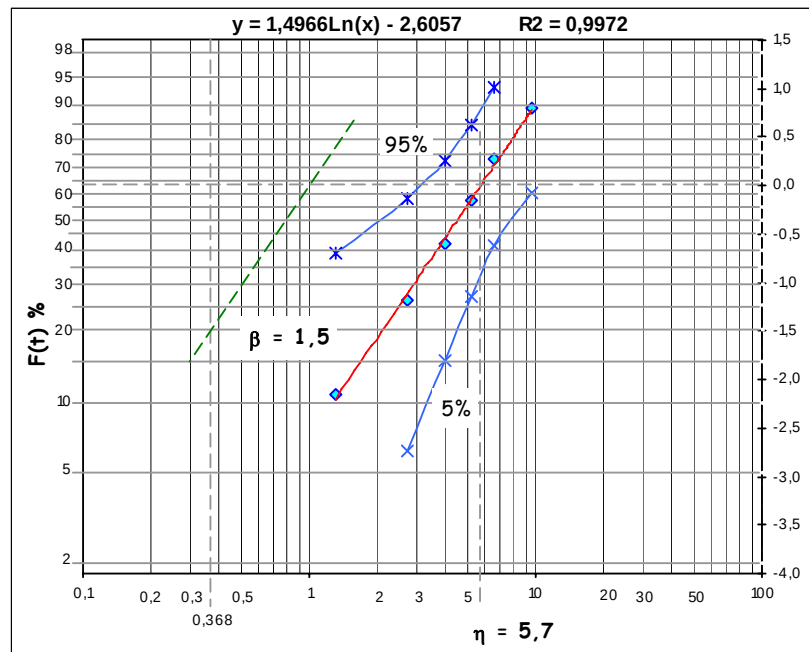


Figura 1.7: Resultados de experimentações a um equipamento – tempos de falha

Para descrever a evolução de sistemas com processos estocásticos não há apenas uma única forma de representação ou modelo de especificação. São vários os modelos de representação e especificação dos sistemas, cada um com características próprias que os tornam ou não adequados aos sistemas que pretendem modelar. Destes salientam-se os modelos tipo Gráficos de Estados [Singh e Billinton, 1977; Billinton e Allan, 1988; Tang, 1997], as *Queueing Networks* [Schmidt-V, 1991; Heindl, 2003; Caramanis, Anli et al., 2003] e as Redes Petri [Dutuit, Châtelet et al., 1997; Trivedi-KS, 1998; Adamyan e He, 2004] (ver Figura 1.8).

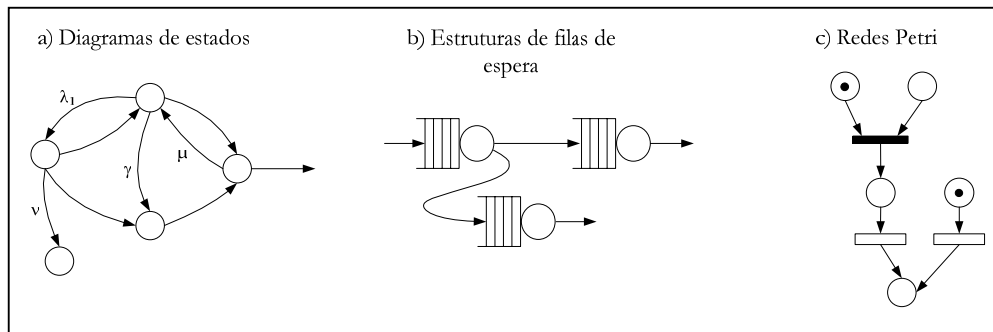


Figura 1.8: Modelos de especificação de sistemas com processos estocásticos

Todavia, os modelos estocásticos tipo Gráficos de Estados são, em nosso entender, os mais adequados para estudos de fiabilidade de sistemas de produção, pela simplicidade e versatilidade de modelação que apresentam. Estas características justificam o recurso frequente a este tipo de modelo de representação ao longo da dissertação. A partir de um modelo destes podem obter-se medidas de desempenho, quer por métodos analíticos, quer por simulação.

1.5.5.2 Modelação hierárquica

A modelação de sistemas complexos como são os sistemas de distribuição de energia ou os sistemas de produção torna-se uma tarefa difícil quando se pretende representar estes sistemas com um único modelo. Quando assim é, ou o modelo não representa a estrutura detalhada do sistema e todos os processos dinâmicos do comportamento, ou é intratável do ponto de vista da avaliação do desempenho e validação dos resultados.

De um modo geral, a modelação e a avaliação de medidas de desempenho de um sistema complexo processa-se recorrendo a uma abordagem hierárquica. A ideia básica deste tipo de abordagem consiste num refinamento passo a passo dos modelos complexos. O modelo a um nível superior é detalhado em modelos de nível intermédio que, por sua vez, podem ser decompostos em modelos de nível mais baixo e assim sucessivamente. São exemplos deste tipo de abordagem, os diagramas bloco de fiabilidade e as árvores de falha. Tratam-se, no entanto, de abordagens especialmente adequadas para sistemas não reparáveis.

Dificuldades de análise e avaliação

Complexidade e dimensão são dois aspectos relacionados que dificultam os estudos de análise e avaliação da fiabilidade de sistemas reais. Estes estudos podem tornar-se bastante mais fácil de realizar se se pretender avaliar os ganhos incrementais de fiabilidade, por exemplo, de uma célula de produção ou subsistema uma vez que, apenas um número reduzido de componentes/equipamentos é envolvido no estudo.

Acontece que, quer do ponto de vista do projecto de sistemas de produção, quer do ponto de vista da sua exploração, os índices de fiabilidade, embora sejam importantes medidas de desempenho, terão que ser complementados com estimativas de perdas de produtividade, avaliadas com os índices de fiabilidade globais do sistema. A existência a vários níveis de mecanismos de tolerância a falhas, caracterizados por processos tipicamente não exponenciais, dificultam a avaliação dos índices de fiabilidade e, além disso, provocam atrasos na propagação

de erros. Estes atrasos conduzem a perdas de produtividade não constantes durante os tempos de avaria ou indisponibilidade dos equipamentos ou células de produção.

Para lidar com sistemas de produção com estas características propõe-se no Capítulo 4 uma abordagem hierárquica especialmente desenvolvida para este tipo de sistemas, que permite a modelação e avaliação de índices de fiabilidade globais. Esta abordagem afasta-se da ideia básica da modelação hierárquica. Assenta antes em preocupações de decomposição, simplificação e agregação dos modelos e no conceito de *modelo canónico*, introduzido no âmbito deste estudo.

1.6 Desempenho de sistemas de produção

1.6.1 Avaliação do desempenho

A avaliação do desempenho consiste na medição e comparação de níveis de realização de objectivos específicos. Isto significa a representação da realidade complexa numa sequência limitada de símbolos que podem ser comunicados e reportados em circunstâncias similares [Lebas, 1995]. Para Sinclair e Zairi [1995], a avaliação do desempenho é uma ferramenta vital de gestão. Pode também servir como uma potente ferramenta de motivação, conduzindo e orientando as decisões e acções consistentes com a estratégia definida [Tsang, 1999].

A avaliação do desempenho tem uma longa tradição no dimensionamento e operacionalidade dos sistemas de produção. Inclui a avaliação e a modelação do comportamento real dos sistemas, a definição e determinação de medidas de desempenho características e o desenvolvimento de regras de projecto que garantam uma adequada qualidade.

Na Figura 1.9 mostra-se um cenário geral de um sistema de produção. O ambiente gera pedidos, que constituem aquilo a que se chama carga de trabalho do sistema, ou seja, o somatório de todas as necessárias e desejadas actividades e serviços. O sistema consiste num ou mais componentes tentando satisfazer esses pedidos. Se o sistema satisfaz completamente todos os requisitos relativos à qualidade dos produtos e dos serviços, bem como, todas as restrições técnicas e económicas, considera-se encontrada a configuração óptima do sistema e o modo operacional.

Tradicionalmente, as empresas são avaliadas por índices ou indicadores económico-financeiros. A crença neste indicadores, como os únicos adequados para o diagnóstico da situação de uma empresa, pode provocar uma obsessão pela sua optimização, conduzindo a um distanciamento dos seus reais objectivos e ao seu enfraquecimento em termos competitivos.

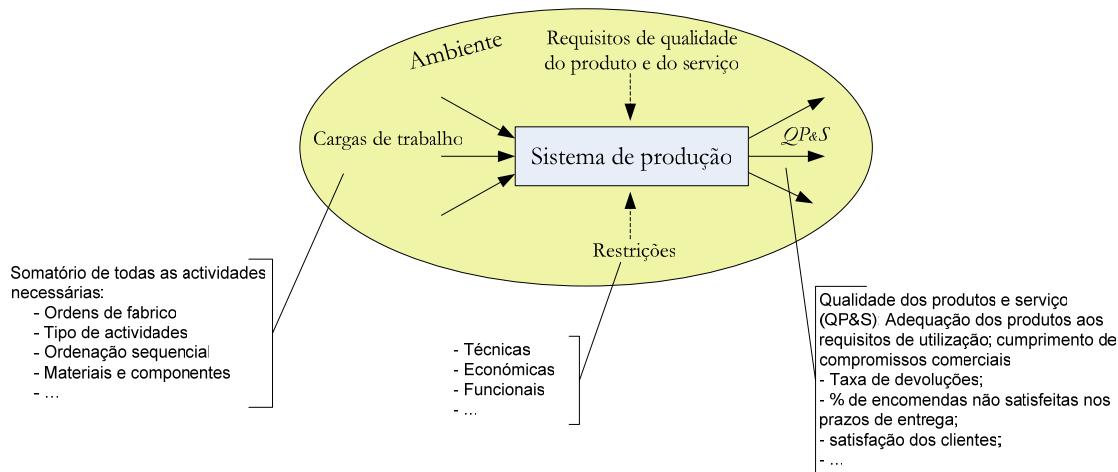


Figura 1.9: Sistema de produção, ambiente, requisitos e restrições

A forte concorrência e crescente introdução das técnicas JIT nos sistemas de produção têm evidenciado aspectos de natureza não-financeira tais como: a fiabilidade dos equipamentos e sistemas, a fiabilidade dos fornecimentos de matérias-primas, componentes, sub-produtos e serviços, a flexibilidade e a frequência dos fornecimentos. Deste modo, a avaliação do desempenho também deverá incluir medidas relevantes de natureza não-financeira e intangíveis [Félix, 2003].

1.6.2 Medidas de desempenho

As medidas de desempenho podem fornecer informação de *feedback* importante para possibilitar aos gestores monitorar o desempenho, divulgar os progressos, aumentar a motivação e a comunicação, e diagnosticar problemas [Rolstandas, 1995; Wagnor, 1999]. Também são usadas para comparar o desempenho de diferentes organizações, empresas, departamentos, serviços, equipas e indivíduos. Citando Sink [1996], “*You cannot manage what you cannot measure*”.

Desde os anos 80 que a substituição gradual da mão-de-obra intensiva por investimentos intensivos em sistemas de produção flexíveis com uma forte componente de automação, a introdução do computador em todas as fases do processo desde a concepção e desenvolvimento dos produtos até ao serviço pós-venda, a globalização da produção e dos mercados (matérias primas, produtos acabados), o aparecimento/implementação de novas estratégias de produção (JIT, TQM, TPM, etc.), mais adequadas às novas realidades do

mercado, introduziram alterações radicais nas condições do negócio e nos factores de competitividade das empresas.

Emergem, então, como factores incontornáveis da competitividade: a disponibilidade dos sistemas, e a fiabilidade de equipamentos, produtos e processos que garantam uma elevada produtividade e qualidade de produtos e serviços. Relacionado com estes factores é necessário avaliar um conjunto de medidas de desempenho que auxiliem os gestores na implementação e monitorização de estratégias que conduzem à obtenção dos objectivos fixados.

Tais medidas de desempenho podem ser classificadas de diferentes modos conforme a perspectiva, nomeadamente em: medidas financeiras e não financeiras, medidas de resultados, medidas internas e medidas externas. Uma outra classificação sugerida por Kaplan e Norton [1996] prende-se com o âmbito das medidas podendo agrupar-se em:

- medidas de diagnóstico – usadas para monitorar e controlar as operações dia a dia;
- medidas estratégicas – seleccionadas para informar os accionistas dos objectivos estratégicos da empresa ou organização e dos progressos que têm sido feitos para os atingir.

Tendo em conta as considerações feitas relativamente à avaliação do desempenho e às medidas utilizadas nessa avaliação, conjuntamente com o domínio científico deste projecto – fiabilidade de sistemas, e com o âmbito de aplicação - sistemas de produção JIT, consideraram-se como principais medidas de desempenho as seguintes:

- Disponibilidade operacional (medida não financeira interna);
- Custo da fiabilidade (medida financeira interna);
- Frequência anual de falhas nas entregas (medida não financeira externa);
- Quantidade anual de produtos não fornecidos (medida não financeira externa).

Ao longo desta dissertação e muito em particular nos Capítulos 5 e 6, será dada uma particular atenção a cada uma destas medidas, apresentando os conceitos e desenvolvendo os correspondentes modelos analíticos.

Capítulo 2

Metodologias clássicas de avaliação da fiabilidade

Inicia-se este capítulo com uma breve introdução aos sistemas markovianos, semi-markovianos e não-markovianos. Segue-se uma apresentação das principais metodologias de análise e avaliação da fiabilidade, dando especial ênfase às metodologias adequadas a sistemas semi-markovianos e não-markovianos. Para os primeiros, apresenta-se o método da *Cadeia de Markov Embebida*, e para os segundos, são abordadas três metodologias: o *Método dos Estados Fictícios*, o *Método DepCim* e a *Técnica de Simulação de Monte Carlo*. Procede-se também a uma análise aos erros introduzidos pela hipótese markoviana quando os sistemas em estudo contêm processos não exponenciais, e mostram-se as situações em que a adopção desta hipótese pode ser razoável. Por fim, são propostas algumas heurísticas que permitem, a partir do diagrama de estados e das distribuições dos processos do comportamento de um sistema, prever se os erros introduzidos pela hipótese markoviana são ou não significativos.

2.1 Introdução

De um modo geral, o comportamento de um sistema é determinado pela acção simultânea de múltiplos mecanismos físicos elementares, vulgarmente designados por processos do comportamento, tais como: processos de falha, processos de reparação, processos de desgaste, processos de *stress* de funcionamento, e processos de propagação de erros, que actuam sobre o estado interno dos componentes ou equipamentos. No paradigma de modelação adoptado, cada processo actua sobre o estado de apenas um componente ou equipamento do sistema em estudo. No entanto, a mudança de estado, motivada pela execução de um processo, activa, normalmente, processos noutros componentes constituindo este mecanismo a base da propagação de erros.

Estes processos que, embora actuando sobre o estado de um único componente, modelam a evolução do sistema no tempo, podem ser de natureza aleatória (processos estocásticos) ou de natureza determinística (processos determinísticos). Os primeiros, são processos em que o tempo entre os instantes de activação e de execução, designado por tempo de execução, é normalmente modelado por leis ou distribuições de probabilidades, $F_X(t)$. Os segundos, são processos em que o tempo de execução é um valor determinístico, Δ . A natureza dos processos do comportamento condiciona a “classe” a que o sistema pertence. Na perspectiva dos estudos de fiabilidade tem-se, basicamente, três classes de sistemas: markovianos, semi-markovianos e não-markovianos.

Os sistemas markovianos caracterizam-se pelo facto de todos os seus processos apresentarem taxas de transição constantes entre estados, independentes do tempo despendido pelo sistema em cada estado, e de como se tenha chegado a um particular estado actual. Consequentemente, os tempos de permanência nos estados são exponencialmente distribuídos.

Quando a transição do estado i para o estado j , $\forall i, j \in E$ (sendo E o espaço de estados do sistema), está em conformidade com uma cadeia de Markov. Contudo, se o tempo de permanência no estado i antes de ocorrer uma transição para um estado j é aleatório, determinado por uma qualquer distribuição não exponencial, o sistema diz-se semi-Markoviano. Por outras palavras, sistemas com estas características possuem a propriedade de Markov apenas nos instantes de mudança de estado (chamados pontos de

regeneração). Se tomarmos estes como um conjunto de índices do sistema, eles configuram uma Cadeia de Markov discreta chamada *Cadeia Embebida*.

Por fim, os sistemas não-markovianos são sistemas que comportam processos cujas taxas de transição são função do tempo de permanência nos estados. Além disso, os instantes de mudança de estado não são pontos de regeneração, como acontece com os sistemas semi-markovianos. Frequentemente, possuem processos que se mantêm activos em diferentes estados, sendo o tempo de permanência nesses estados função do tempo despendido no(s) estado(s) anterior(es) em que esteve activo. O estudo deste tipo de sistemas apresenta-se, normalmente, complexo e as metodologias existentes são limitadas.

Como foi referido no Capítulo 1, normalmente nos estudos de fiabilidade é adoptada a hipótese markoviana. Constituem fortes motivações para a sua adopção: (i) a grande simplificação de cálculo que introduz - aspecto muito relevante principalmente em sistemas de grande dimensão e; (ii) a presunção de que o erro introduzido nos cálculos por esta via não é muito significativo.

Há situações onde, embora os sistemas comportem processos não-markovianos, os resultados dos índices de fiabilidade em regime estacionário são apenas sensíveis à média das distribuições que caracterizam esses processos e não à forma destas distribuições [Noyes, 1987]. Nesses casos, podemos analisar o sistema como se de um sistema markoviano se tratasse. Noutros casos, os sistemas terão de ser abordados com metodologias adequadas a sistemas não-markovianos, sob risco de se incorrer em erros muito elevados, conforme se mostrará na Secção 2.4. São sistemas deste tipo, os sistemas com mecanismos de tolerância a falhas, caracterizados por processos hiperexponenciais (processos com distribuições menos dispersas que a exponencial) mais apertada que, concorrentes em determinados estados com processos de reparação, reconfiguração ou outros, modelados por distribuições bastante mais dispersas, mas com tempos médios da mesma ordem de grandeza.

Depois desta breve discussão sobre sistemas markovianos, semi-markovianos e não-markovianos, passamos de seguida a apresentar as principais metodologias disponíveis para a respectiva análise e avaliação. A apresentação será conduzida com base no caso de estudo especificado na Secção 2.2, para que no final se possa efectuar uma análise comparativa destas metodologias.

2.2 Caso de estudo

O diagrama de estados da Figura 2.1 representa o comportamento de um sistema reparável com mecanismos de tolerância a falhas. Este sistema é constituído, essencialmente, por um equipamento base, reparável e, por dois outros equipamentos que asseguram, em parte, a missão do sistema nas situações de indisponibilidade do equipamento base, por períodos de tempo mais ou menos curtos. Os valores médios e as distribuições dos processos do comportamento constam na Tabela 2.1.

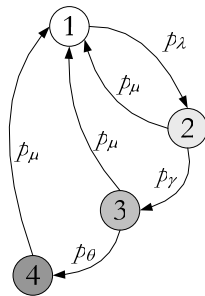


Tabela 2.1 Caracterização dos processos

<i>Processos</i>	<i>Médias</i>	<i>Distribuições</i>
p_λ	m_λ	Exponencial
p_γ	m_γ	Dirac
p_θ	m_θ	Dirac
p_μ	m_μ	Erlang ₂

Figura 2.1: Diagrama de estados

O funcionamento normal do sistema é representado no diagrama pelo estado 1. O processo p_λ , representativo da falha do equipamento base, é activado no estado 1 e a sua conclusão provoca a transição do sistema para o estado 2. Dado que este equipamento está na fase de vida útil, admite-se como constante a taxa de transição (λ) do estado 1 para o estado 2.

O estado 2 representa um primeiro nível de funcionamento do sistema em modo degradado: o sistema cumpre a sua missão apenas em parte. A chegada a este estado, desencadeia uma reconfiguração instantânea do sistema, com a activação do primeiro nível de tolerância a falhas, (p_γ) e do processo de reparação do equipamento base, (p_μ). Estes dois processos são concorrentes, com tempos médios da mesma ordem de grandeza ($m_\gamma \approx m_\mu$). A conclusão de p_μ antes da conclusão de p_γ motiva o retorno do sistema ao estado 1 e, simultaneamente, p_γ é desactivado. Neste caso, o tempo de permanência no estado 2 é determinado pela duração do processo p_μ . Em contrapartida, caso a conclusão de p_γ ocorra antes da conclusão de p_μ , o

sistema transita para o estado 3, e o tempo de permanência no estado 2 é determinado pela duração do processo p_γ .

O estado 3 representa um segundo nível de funcionamento, onde o sistema tem um comportamento semelhante ao do estado 2. Neste estado estão envolvidos o processo de reparação (p_μ) e o processo que modela um segundo nível de tolerância a falhas (p_θ). A conclusão de p_μ antes de p_θ provoca a transição do sistema para o estado 1 e a desactivação imediata de p_θ . Por outro lado, o sistema transita para o estado 4 se ocorrer previamente a conclusão de p_θ .

Finalmente, o estado 4 representa a falha (completa) do sistema. A saída do sistema deste estado e o retorno ao estado de funcionamento normal (estado 1) dá-se com a conclusão de p_μ . Admite-se ainda que, após a conclusão de um processo de reparação, o sistema é considerado como novo.

Dadas as distribuições dos processos do comportamento que constam na Tabela 2.1, o sistema apresentado pelo diagrama de estados da Figura 2.1 é não-markoviano. Porém, todas as metodologias apresentadas neste capítulo serão aplicadas a este caso de estudo. Assim, para implementar algumas destas metodologias (Cadeia de Markov e Cadeia de Markov Embebida) terão de se admitir algumas hipóteses simplificativas, aliás como se faz frequentemente em estudos de fiabilidade, o que possibilitará fazer uma avaliação do erro introduzido pela adopção de tais hipóteses. Isto será mostrado na Secção 2.4.

Tais hipóteses simplificativas passam por admitir outras distribuições para determinados processos do comportamento. Assim, se se considerar que o processo p_μ é exponencialmente distribuído (mantendo as distribuições dos restantes processos), com o mesmo tempo médio do processo real (Erlang de 2ª ordem), as taxas de transição entre quaisquer dois estados i e j poderão ser função do tempo de permanência no estado i (como acontece com $i=2, 3$). No entanto, uma vez em j o tempo de permanência nesse estado ou em estados seguintes jamais dependerá do tempo dispendido pelo sistema em estados anteriores. Deste modo, todos os instantes de mudança de estado do sistema são pontos de regeneração, e por conseguinte, o sistema é tido como semi-markoviano.

Uma outra situação, esta mais frequente pelas razões já apontadas anteriormente, consiste em admitir que todos estes processos são exponencialmente distribuídos; nestas circunstâncias o sistema é markoviano.

Como corolário daquilo que acabou de se referir, pode afirmar-se que a natureza dos sistemas (markoviano, semi-markoviano ou não-markoviano) deriva da ligação estrutural dos processos, vulgarmente representada pelo diagrama de estados, e da forma das suas distribuições. Mais, diferentes comportamentos dum sistema podem ser representados pelo mesmo diagrama de estados, alterando apenas a forma das distribuições de determinado(s) processo(s) mesmo que se mantenham inclusivamente as durações médias dos processos.

Na Tabela 2.2 caracterizam-se as funções densidade de probabilidade dos processos do comportamento do sistema real (sistema não-markoviano), bem como as funções densidade de probabilidade dos processos para as duas situações (sistema semi-markoviano e sistema markoviano) criadas pelas hipóteses simplificativas admitidas anteriormente.

Tabela 2.2: Funções densidade de probabilidade e tempos médios dos processos

Processos	Tempo médio (horas)	Distribuições ($f.d.p.$)		
		Sistema markoviano	Sistema semi-markoviano	Sistema são-markoviano
p_λ	$m_\lambda=100$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$
p_γ	$m_\gamma=1$	$\gamma e^{-\gamma t}$	$\delta(t - \Delta_1)$	$\delta(t - \Delta_1)$
p_θ	$m_\theta=1.5$	$\theta e^{-\theta t}$	$\delta(t - \Delta_2)$	$\delta(t - \Delta_2)$
p_μ	$m_\mu=2$	$\mu e^{-\mu t}$	$\mu e^{-\mu t}$	$\mu_{\text{Erl}}^2 e^{-\mu_{\text{Erl}} t}$

Na secção seguinte recorrer-se-á a este caso de estudo para ilustrar como se obtêm os índices de fiabilidade apresentados seguidamente, utilizando diferentes metodologias conforme o tipo ou classe de sistemas em análise (markoviano, semi-markoviano ou não-markoviano).

Os índices de fiabilidade que irão ser considerados são:

- Probabilidade do estado i , $\pi_i(\infty)$, com $i=1, \dots, 4$;
- Frequência do estado i , $f_i(\infty)$, com $i=1, \dots, 4$;
- Tempos médios de permanência no estado i , $d_i(\infty)$, com $i=1, \dots, 4$;
- Disponibilidade $A(\infty)$ e indisponibilidade $\bar{A}(\infty)$ do sistema.

2.3 Metodologias

2.3.1 Introdução

A avaliação da fiabilidade consiste na estimação de índices de fiabilidade que possibilitem directa ou indirectamente prever os prejuízos provocados pelas falhas dos equipamentos dos sistemas, que genericamente designamos por perdas da não fiabilidade.

Como resultado do intenso trabalho de investigação neste domínio e da evolução e divulgação dos computadores verificada nas últimas décadas, surgiu um elevado número de ferramentas de análise e avaliação da fiabilidade [Beounes, Aguera et al., 1993; Reis, Kalbarczyk et al., 1996; Goswami, Iyer et al., 1997; German, Kelling et al., 1995; Ciardo e Miner, 1996]. Estas ferramentas têm sido suportadas por diversas metodologias desenvolvidas [Singh, Billinton et al., 1977; Dutuit, Châtelet et al., 1997], que possibilitam actualmente a análise e avaliação do desempenho de sistemas de natureza markoviana, de considerável dimensão e complexidade, com relativa facilidade.

Contrariamente, no que se refere aos sistemas de natureza não-markoviana, as ferramentas existentes são relativamente limitadas. Tem-se, no entanto, assistido nos anos recentes a intensos esforços de pesquisa e desenvolvimento de metodologias e de ferramentas de avaliação da fiabilidade para sistemas desta natureza [Dubí, Gandini et al., 1991; William, Sanders et al., 1993; Faria 1996; Faria e Matos, 2001]. Estas metodologias podem ser agrupadas em duas grandes classes:

1. Metodologias analíticas - baseadas em modelos matemáticos, as quais permitem o cálculo analítico dos índices de fiabilidade dos sistemas e estimativas para os respectivos erros;
2. Metodologias de simulação - baseadas na simulação de Monte Carlo.

Na Tabela 2.3 listam-se as metodologias mais utilizadas na análise e avaliação da fiabilidade de sistemas markovianos, semi-markovianos e não-markovianos. Nas secções seguintes vamos fazer incidir o estudo, fundamentalmente, sobre as metodologias destacadas a **negrito** por considerarmos que estas são as mais importantes no âmbito deste projecto.

Tabela 2.3: Metodologias de análise e avaliação da fiabilidade de sistemas

Natureza do sistema	Metodologias
Markoviano	- Cadeia de Markov - Simulação de Monte Carlo - <i>DepCim</i>
Semi-markoviano	- Cadeia de Markov Embebida - Simulação de Monte Carlo - <i>DepCim</i>
Não-markoviano	- Estados Fictícios - Simulação de Monte Carlo - <i>DepCim</i>

2.3.2 Sistemas markovianos

Os sistemas (processos) markovianos podem ser classificados não só pelo seu parâmetro, contínuo ou discreto, mas também pelo espaço dos estados (conjunto dos possíveis valores de X_n ou de X_t), que também pode ser contínuo ou discreto. Os processos de Markov com parâmetro contínuo (normalmente o tempo) e espaço de estados discreto, chamam-se Cadeias de Markov de tempo contínuo. Na maioria das aplicações no âmbito da fiabilidade o tempo é contínuo, dado que os eventos podem ocorrer a qualquer instante e o espaço de estados é discreto.

Existem várias metodologias que podem ser usadas na análise e avaliação da fiabilidade de sistemas markovianos. Algumas são mais genéricas uma vez que são aplicáveis quer a sistemas markovianos quer a sistemas não-markovianos como por exemplo, a simulação de Monte Carlo [Goyal, Shahabuddin et al., 1992; Saraiva, Miranda et al., 1996; Yeh, 2003] ou metodologia *DepCim* [Faria, 1996]; outras são específicas dos sistemas markovianos, como é o caso do Método das Cadeias de Markov [Simeu-Abazi, 1997; Buchholz, 1998; Cox e Kluppelberg, 2001].

2.3.2.1 Cadeias de Markov

A noção de cadeia de Markov engloba o conceito de sistema dinâmico que evolui ao longo do tempo. As cadeias de Markov podem agrupar-se quanto ao parâmetro tempo, t , em dois grandes grupos: as de parâmetro contínuo e as de parâmetro discreto. Em estudo de fiabilidade o parâmetro tempo t é tido como contínuo, uma vez que uma falha, por exemplo, pode ocorrer a qualquer instante de tempo. Relativamente ao espaço de estados trabalha-se, normalmente, com espaços de estados discretos e finitos.

Relacionado com a variável tempo surge o chamado comportamento do sistema em regime estacionário. Existem sistemas que no decurso da sua evolução têm uma fase (ou estágio), a partir da qual o seu comportamento é estável e independente do estado de partida ou estado inicial. Dizemos, nestes casos, que o sistema atingiu o seu estado estacionário. O tempo necessário (ou o número de estágios) para atingir este regime depende das características do sistema. Os estudos de fiabilidade são, na sua maioria, efectuados com sistemas em regime estacionário.

A experiência tem mostrado [Madu, 1998] que o uso de cadeias de Markov é uma abordagem válida na obtenção rápida de expressões que permitem o cálculo de índices de fiabilidade de sistemas, assumindo que os processos de falha e de reparação são processos estocásticos com taxas constantes.

Seja $Z(t)$ um processo estocástico com estados discretos e $P[Z(t_n)] = j$ a probabilidade do processo se encontrar no estado j no instante t_n . O processo $Z(t)$ é uma cadeia de Markov de parâmetro contínuo se, para qualquer instante de tempo $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, a probabilidade condicional do processo se encontrar no estado j é tal que:

$$P[Z(t_n) = j | Z(t_{n-1}) = i, Z(t_{n-2}) = k, \dots, Z(t_0) = l] = P[Z(t_n) = j | Z(t_{n-1}) = i] \quad (2.1)$$

Esta condição mostra que o estado duma cadeia de Markov após uma transição depende do estado imediatamente anterior mas não dos restantes estados precedentes. Por outras palavras, aquando duma mudança de estado toda a “história” passada do sistema é resumida pelo estado presente.

A análise duma cadeia de Markov proporciona a obtenção das probabilidades de estado $\pi_j(t) = P[Z(t) = j]$ quer para valores finitos de t , quer quando $t \rightarrow \infty$. O vector das probabilidades dos estados é $\pi(t) = [\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \dots]$.

Pela equação diferencial de Kolmogorov podemos escrever:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t) \mathbf{Q} \quad (2.2)$$

sendo $\mathbf{Q}$ a matriz geradora da cadeia de Markov com tempos contínuos.

Nos processos ditos homogéneos, $\frac{d\pi(t)}{dt}$ tende para zero, podendo nestes casos utilizar-se o seguinte sistema de equações para a obtenção das probabilidades limite dos estados (representação do estado estacionário):

$$\begin{cases} \pi^T \cdot \mathbf{Q} = 0^T \\ \pi^T \cdot \mathbf{U} = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Deste modo, $\mathbf{Q}$ é uma matriz quadrada de dimensão n ; o elemento q_{ij} é a taxa com que o sistema passa do estado i para o estado j , normalmente referenciada em estudos de fiabilidade por λ_{ij} (taxa de falhas) ou por μ_{ij} (taxa de reparação) e $-q_{ii}$ é a taxa com que o sistema abandona o estado i .

Como $\sum_j q_{ij} = 0$, o mesmo é dizer que o somatório de todos os elementos de qualquer linha da matriz $\mathbf{Q}$ é zero (matriz estocástica) deduz-se que os elementos ao longo da diagonal de $\mathbf{Q}$ têm que ser não positivos.

Em regime estacionário, a taxa de entrada no estado i é igual à taxa de saída do mesmo estado. Isto permite escrever a seguinte equação, conhecida como equação de equilíbrio do estado i em regime estacionário:

$$\pi_i q_i = \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} \quad (2.4)$$

sendo,

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij} \text{ e } q_i = -q_{ii}, \text{ a taxa de saída ou de abandono do estado } i.$$

Finalmente, a probabilidade em regime estacionário do estado i , $\pi_i(\infty)$, é dada pela seguinte expressão:

$$\pi_i(\infty) = -\frac{\sum_{j \neq i}^n \pi_j(\infty) q_{ji}}{q_{ii}} \quad (2.5)$$

O conhecimento das probabilidades $\pi_i(t)$ permite deduzir a disponibilidade do sistema $A(t)$:

$$A(t) = P[\text{do sistema estar num dos estados de funcionamento}]$$

$$A(t) = \sum_{i=1}^k \pi_i(t) \quad (2.6)$$

em que os estados de 1 a k representam os estados de funcionamento do sistema; os estados de $k+1$ a n são os estados de falha do sistema.

Em estado estacionário, a disponibilidade e a indisponibilidade (assimptóticas i.e., quando $t \rightarrow \infty$) podem ser calculadas simplesmente por:

$$A(\infty) = \sum_{i=1}^k \pi_i(\infty) \quad (2.7)$$

$$\bar{A}(\infty) = \sum_{i=k+1}^n \pi_i(\infty) = 1 - A(\infty) \quad (2.8)$$

Dado que a bibliografia disponível sobre Cadeias de Markov é muito extensa, limitamo-nos a apresentar esta curta introdução sobre o assunto, passando de seguida à aplicação prática ao caso de estudo. Para os leitores menos familiarizados com processos estocásticos e Cadeias de Markov sugerimos, como introdução, a leitura dos trabalhos de [Clymer, 1990; Davis, 1993; Masaaki, 1997]

Aplicação ao caso de estudo

Neste momento admite-se que todos os processos de mudança de estado representados no diagrama da Figura 2.1 apresentam taxas de transição constantes. Sendo assim são óbvias as razões que motivam o uso do método das Cadeias de Markov de parâmetro contínuo e espaço de estados discreto na análise do caso estudo. Tem-se, deste modo, a seguinte matriz Q (geradora da cadeia de Markov):

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\mu-\gamma & \gamma & 0 \\ \mu & 0 & -\mu-\theta & \theta \\ \mu & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de Equações (2.3) obtêm-se as seguintes probabilidades limites:

$$\pi_i(\infty) = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

$$\pi_2(\infty) = \frac{\lambda\mu}{(\gamma + \mu)(\lambda + \mu)}$$

$$\pi_3(\infty) = \frac{\lambda\gamma\mu}{(\lambda + \mu)(\theta + \mu)(\lambda + \mu)}$$

$$\pi_4(\infty) = \frac{\lambda\gamma\theta}{(\lambda + \mu)(\theta + \mu)(\lambda + \mu)}$$

Quanto ao tempo médio de ocupação do estado i , $\forall_i \in E$, este é obtido pelo recíproco do somatório das taxas de saída de i . Assim, para este caso de estudo temos:

$$d_1 = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad d_2 = \frac{1}{(\mu + \gamma)} \quad ; \quad d_3 = \frac{1}{(\mu + \theta)} \quad ; \quad d_4 = \frac{1}{\mu}$$

Conhecidas as probabilidades e os tempos médios de ocupação dos estados, podem calcular-se as frequências de passagem pelos estados através de:

$$f_i = \frac{\pi_i(\infty)}{d_i} \quad , \text{ com } i = \{1, 2, \dots, 4\}$$

Finalmente, pelas Equações (2.7) e (2.8) determinam-se a disponibilidade e a indisponibilidade do sistema, respectivamente. Se considerarmos, para este caso, que o sistema cumpre minimamente a sua missão nos estados 1, 2 e 3, temos:

$$A(\infty) = \sum_{i=1}^3 \pi_i(\infty)$$

$$\bar{A}(\infty) = \pi_4(\infty) .$$

Para os valores dos tempos médios dos processos apresentados na Tabela 2.2 temos as seguintes taxas de transição entre estados:

$$\lambda = 10^{-2} \text{ h}^{-1} ; \gamma = 1 \text{ h}^{-1} ; \theta = 2/3 \text{ h}^{-1} \text{ e } \mu = 0.5 \text{ h}^{-1} .$$

Com estes valores das taxas de transição obtêm-se para os índices de fiabilidade, os valores apresentados na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Índices de fiabilidade – Cadeias de Markov

Índices de Fiabilidade	Estado i			
	1	2	3	4
Probabilidade	9.8039×10^{-1}	6.5359×10^{-3}	5.6022×10^{-3}	7.4696×10^{-3}
Tempo médio no estado (h)	100	0.667	0.857	2
Frequência (h^{-1})	9.8039×10^{-3}	9.8039×10^{-3}	6.5359×10^{-3}	3.7348×10^{-3}
Disponibilidade	9.9253×10^{-1}			
Indisponibilidade	7.4696×10^{-3}			

2.3.3 Sistemas semi-markovianos

Se levantarmos a restrição de que tempo de permanência em qualquer estado é exponencialmente distribuído e permitirmos que o tempo de permanência tenha uma outra função de distribuição, o sistema torna-se semi-markoviano. Num sistema (processo) semi-markoviano a taxa de transição dum estado i para um estado j , pode depender do tempo que o sistema permanece no estado i mas não depende certamente do que tenha acontecido antes do sistema chegar ao estado i . O sistema considerado é markoviano apenas nos instantes de transição ou mudança de estado.

A determinação de grandezas características da fiabilidade dum sistema cuja evolução é descrita por um processo semi-markoviano comporta duas etapas preliminares:

- Definição dos estados que o sistema pode tomar;
- Determinação das probabilidades de transição directa entre os estados.

A definição dos estados assume aqui uma importância acrescida. A entrada dos estados devem constituir os pontos ou instantes de regeneração. Tomando estes instantes como um conjunto de índices do processo pode definir-se uma cadeia de Markov discreta, designada por *Cadeia de Markov Embebida* [Sahner, Trivedi et al., 1996; Limnios, 1997; Limnios e Oprisan, 2001]. Esta noção de início de estado não aparece nos processos markovianos homogéneos, dado que, todos os instantes são pontos de regeneração. Cadeias de Markov com tempos discretos e cadeias de Markov com tempos contínuos são casos especiais de processos semi-Markovianos.

Seja X_{ij} o tempo de permanência no estado i dado que a próxima transição será para o estado j e $F_{ij}(t)$ a função distribuição de X_{ij} . Para uma cadeia de Markov com tempos discretos temos:

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < c \\ 1 & \text{para } t \geq c \end{cases} \quad (2.9)$$

onde c é uma constante.

Uma cadeia de Markov de tempos discretos é um processo semi-markoviano no qual o tempo de permanência em i , X_{ji} , é constante. No caso duma cadeia de Markov com tempos contínuos:

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda_i t} & \text{para } t > 0, \lambda_i > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

onde λ_i é o inverso da média de X_{ji} .

Tal como nos sistemas markovianos, o método da cadeia de Markov apresenta vantagens em relação a metodologias como a simulação de Monte Carlo ou a metodologia *DepCim*, também nos sistemas semi-markovianos, o método da *Cadeia de Markov Embebida* se mostra vantajoso relativamente às outras metodologias referidas na Tabela 2.3 para este tipo de sistemas. Como método analítico que é, permite a obtenção de valores exactos dos índices de fiabilidade, o que não acontece com a simulação de Monte Carlo. Por outro lado, permitindo a análise e avaliação de sistemas de dimensão considerável, ganha vantagem em relação à metodologia *DepCim*.

De seguida faremos uma abordagem ao método da *Cadeia de Markov Embebida* e apresentaremos a sua aplicação ao caso de estudo, feitas as devidas simplificações relativamente às condições reais. Quanto às outras duas metodologias, como são comuns aos sistemas não-markovianos, optamos por apresentá-las na Secção 2.3.4 onde se abordam esta classe de sistemas.

2.3.3.1 Método da Cadeia de Markov Embebida

Para obtermos a *Cadeia de Markov Embebida* de um sistema semi-markoviano teremos de abordar, separadamente, todos os processos do sistema, avaliando o tempo de permanência em cada estado i até transitar para um estado j (com $i \neq j$), inibindo todos os processos p_{ik} (com $k \neq j$). Ajustando à amostra de tempos referentes ao processo p_{ij} a função cumulativa $F_{ij}(t)$, estabelecemos a função de probabilidade do sistema abandonar o estado i no intervalo $[0, t]$ e passar para o estado j , admitindo que todas as outras transições de saída do estado i estão inibidas e que no instante inicial o sistema se encontra no estado i . O conjunto de todas as funções $F_{ij}(t)$ para todos os i 's e j 's configuram uma cadeia semi-markoviana.

Refira-se que por definição:

$$F_{ij}(t) = \int_0^{\infty} f_{ij}(t) dt \quad (2.11)$$

sendo $f_{ij}(t)$, a função densidade de probabilidade do processo p_{ij} .

Se $F_{ij}(t)$ for conhecida é possível calcular: (i) a distribuição do tempo de permanência no estado i , $H_i(t)$; (ii) a probabilidade de transição do estado i para o estado j , p_{ij} e; (iii) o tempo médio de permanência no estado i , m_i , pelas seguintes expressões [Sahner, Trivedi et al., 1996]:

$$H_i(t) = 1 - \prod_{j \neq i} (1 - F_{ij}(t)) \quad (2.12)$$

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} dF_{ij}(t) \cdot \prod_{k \neq j} (1 - F_{ik}(t)) dt \quad (2.13)$$

$$m_i = \int_0^{\infty} (1 - H_i(t)) dt \quad (2.14)$$

Resolvendo o sistema de Equações (2.5), obtém-se o vector $\Pi = [\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \dots]$ das probabilidades em regime estacionário da Cadeia de Markov Embebida,

$$\begin{cases} \Pi = \Pi \times \mathbf{P} \\ \Pi \times \mathbf{U} = 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

sendo:

$\mathbf{P}$, uma matriz quadrada cujos elementos p_{ij} são calculados pela Equação (2.13);

$\mathbf{U}$, uma matriz coluna unitária com tantas linhas quantas a matriz $\mathbf{P}$.

Finalmente, pode calcular-se o vector das probabilidades dos estados em regime estacionário, $[\pi_1(\infty), \pi_2(\infty), \pi_3(\infty), \dots]$ por:

$$\pi_i(\infty) = \frac{\pi'_i m_i}{\sum_{j \neq i} \pi'_j m_j} \quad \text{com } i, j \in E \quad (2.16)$$

Aplicação ao caso de estudo

Neste caso são conhecidas as funções densidade de probabilidade dos processos, $f_{ij}(t)$. Tomando o conjunto destas funções correspondentes ao comportamento semi-markoviano do sistema, apresentadas na Tabela 2.2, facilmente se obtêm as respectivas funções de probabilidade $F_{ij}(t)$ pela Equação (2.11).

Tem-se deste modo:

$$F_{12}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F_{21}(t) = F_{31}(t) = F_{41}(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

$$F_{23}(t) = Y(t - \Delta_1) \text{ onde } Y(t - \Delta_1) \text{ é uma função de Heaviside, i.e.:}$$

$$F_{23}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \Delta_1 \\ 1 & \text{para } t \geq \Delta_1 \end{cases}$$

$$F_{34}(t) = Y(t - \Delta_2) \text{ onde } Y(t - \Delta_2) \text{ é uma função de Heaviside}$$

Conhecidas as funções $F_{ij}(t)$, obtêm-se, a partir de (2.12), as seguintes distribuições dos tempos de permanência nos estados do sistema:

$$H_1(t) = 1 - (1 - F_{12}(t)) = 1 - e^{-t/100}$$

$$H_2(t) = 1 - [(1 - F_{21}(t))(1 - F_{23}(t))] = 1 + e^{-t/2} [-1 + Y(t - 1)]$$

$$H_3(t) = 1 - [(1 - F_{31}(t))(1 - F_{34}(t))] = 1 + e^{-t/2} [-1 + Y(2t - 3)]$$

$$H_4(t) = 1 - (1 - F_{41}(t)) = 1 - e^{-t/2}$$

Pela Equação (2.14) calculam-se os tempos médios de permanência nos estados. Por exemplo para o estado 2 temos:

$$m_2 = \int_0^{\infty} (1 - H_2(t)) dt = 0.786939 \text{ horas}$$

De igual modo se calculam os tempos médios de permanência nos restantes estados do sistema, cujos valores se apresentam na Tabela 2.5. Pela Equação (2.13) determinam-se as probabilidades de transição directa entre estados, p_{ij} . Por exemplo:

$$p_{12} = \int_0^{\infty} dF_{12}(t) dt = \int_0^{\infty} f_{12}(t) dt = 1$$

$$p_{23} = \int_0^{\infty} dF_{23}(t) \cdot (1 - F_{21}(t)) dt = \int_0^{\infty} f_{23}(t) \cdot (1 - F_{21}(t)) dt = 0.606531$$

Calculando deste modo todas as probabilidades de transição obtemos a matriz **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.393469 & 0 & 0.606531 & 0 \\ 0.527633 & 0 & 0 & 0.472367 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste momento podemos, para este caso, expressar o sistema de Equações (2.15) do seguinte modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \pi'_1 & \pi'_2 & \pi'_3 & \pi'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi'_1 & \pi'_2 & \pi'_3 & \pi'_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.393469 & 0 & 0.606531 & 0 \\ 0.527633 & 0 & 0 & 0.472367 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \pi'_1 & \pi'_2 & \pi'_3 & \pi'_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = 1 \end{array} \right.$$

Da resolução deste sistema, obtêm-se os seguintes valores para as probabilidades em regime estacionário da Cadeia de Markov Embebida:

$$\begin{bmatrix} \pi'_1 & \pi'_2 & \pi'_3 & \pi'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.345658 & 0.345658 & 0.209652 & 0.0990326 \end{bmatrix}$$

Finalmente, conhecidos os valores π'_i e m_i (com $i=1,\dots,4$), calculam-se as probabilidades dos estados em regime estacionário, $\pi_i(\infty)$ através da Equação (2.16). Na Tabela 2.5 apresentam-se os valores dos índices de fiabilidade pretendidos neste estudo.

Tabela 2.5: Índices de fiabilidade - Cadeia de Markov Embebida

Índices de Fiabilidade	Estado i			
	1	2	3	4
Probabilidade	9.8039×10^{-1}	7.7151×10^{-3}	6.2750×10^{-3}	5.6177×10^{-3}
Tempo médio no estado (h)	100	0.786939	1.05527	2
Frequência	9.804×10^{-3}	9.804×10^{-3}	5.946×10^{-3}	2.809×10^{-3}
Disponibilidade	0.99438			
Indisponibilidade	5.6177×10^{-3}			

2.3.4 Sistemas não-markovianos

O Método dos Estados Fictícios (MEF), o Método das Variáveis Suplementares (MVS) [Cox, 1965] e mais recentemente, o Método *DepCim* são os principais métodos analíticos disponíveis para a análise de processos não-markovianos. Todos estes métodos têm limitações e não são igualmente aplicáveis a todos estes tipos de sistemas. A estes métodos analíticos junta-se o método de Simulação de Monte Carlo, muito utilizado actualmente [Averill e Kelton, 1991;

Buchholz, 1998; Banks, 1998; Yeh, 2003] devido, em boa medida, ao crescimento acelerado da capacidade de cálculo dos computadores. Todos estes métodos, com excepção do Método das Variáveis Suplementares (por não se adequar a um tratamento automático), serão abordados no estudo apresentado de seguida. Ilustraremos, também, a aplicação numérica destas metodologias ao caso de estudo que tem vindo a ser analisado.

2.3.4.1 Método dos Estados Fictícios

O Método dos Estados Fictícios, apresentado pela primeira vez por Cox [1965] foi aplicado na análise da fiabilidade dum sistema de fornecimento de energia eléctrica por Singh e Billinton [1977]. É talvez o método mais utilizado para análise de processos não-markovianos. Cada processo não-markoviano é aproximado por um conjunto de sub-processos markovianos, através da introdução de estados adicionais (fictícios) no gráfico de estado base que representa o processo. Dado ser muito flexível, permite modelar um grande número de funções densidade de probabilidade e a sua aplicação pode ser completamente automatizada.

Seja X_s uma variável aleatória que representa o tempo de permanência no estado s , e $F_{X_s}(t)$ a função distribuição de X_s não exponencial. Segundo este método, o estado s é substituído por um conjunto de estados I , com $I = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_k\}$, de modo que:

- a função de distribuição do tempo de ocupação do estado s_i , com $s_i \in I$, é exponencial;
- a função de distribuição do tempo total de permanência no conjunto I aproxima-se de $F_{X_s}(t)$.

As combinações mais relevantes do conjunto dos estados I , correspondem às combinações em série e paralelo, como se mostra na Figura 2.2.

De seguida apresenta-se a formulação matemática do método segundo Laprie [1975], discute-se as técnicas que permitem aproximar uma função distribuição qualquer por uma combinação adequada de estados adicionais (fictícios) e, discute-se as suas limitações quando aplicada a funções distribuição pouco dispersas.

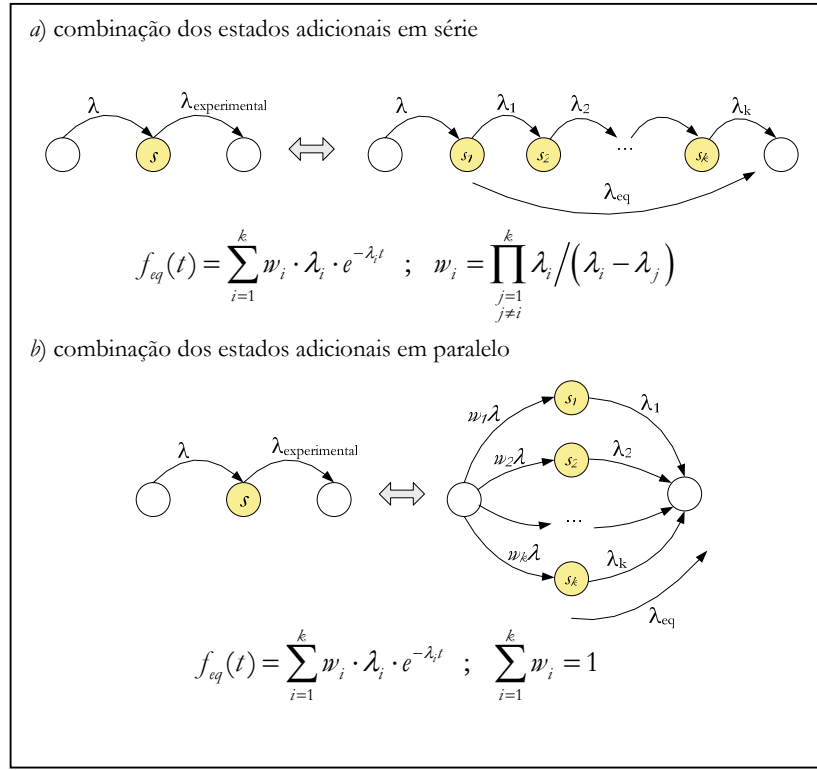


Figura 2.2: Método dos estados fictícios - combinações em série e em paralelo

Combinação dos estados adicionais em série

Quando o conjunto de estados, I , que aproxima o estado não-markoviano, s , têm uma combinação em série, como se representa no diagrama da Figura 2.2-a, a variável aleatória X_s é igual à soma das variáveis aleatórias independentes X_{s_i} , correspondentes aos tempos de ocupação dos estados markovianos s_i (com $i = \{1, 2, \dots, k\}$). A função densidade de probabilidade equivalente, $f_{eq}(t)$, resulta da convolução, representada pelo sinal $\otimes$, das funções densidade de probabilidade de cada um dos estados adicionais:

$$f_{eq}(t) = f_{s_1}(t) \otimes f_{s_2}(t) \otimes \dots \otimes f_{s_k}(t) \quad (2.17)$$

A expressão de $f_{eq}(t)$ pode obter-se através da sua transformada de Laplace, $f_{Leq}(s)$, definido como:

$$f_{Leq}(s) = \prod_{i=1}^k f_{Ls_i}(s) \quad (2.18)$$

Uma vez que os estados s_i são markovianos:

$$f_{s_i}(t) = \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i t} \quad (2.19)$$

a que correspondente a equação:

$$f_{L_{s_i}}(s) = \lambda_i / (s + \lambda_i) \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.18), vem:

$$f_{L_{eq}}(s) = \prod_{i=1}^k \lambda_i / (s + \lambda_i) \quad (2.21)$$

que pode expressar-se equivalentemente por:

$$f_{L_{eq}}(s) = \sum_{i=1}^k w_i \lambda_i / (s + \lambda_i) \quad (2.22)$$

com:

$$w_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \lambda_j / (\lambda_j - \lambda_i) \quad (2.23)$$

Pela transformada inversa de Laplace, obtém-se:

$$f_{eq}(t) = \sum_{i=1}^k w_i \cdot \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i t} \quad (2.24)$$

Se todas as funções densidade de probabilidade, $f_{s_i}(t)$, forem iguais, com $\lambda_i = \lambda$ para $i = \{1, 2, \dots, k\}$, $f_{eq}(t)$ toma a forma da distribuição de *Erlang* de ordem k :

$$f_{eq}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \quad (2.25)$$

Esta distribuição é, deste modo, uma convolução de k distribuições exponenciais, em que k é um parâmetro inteiro (o parâmetro de “forma”).

Sendo os estados s_i markovianos, as variáveis X_{s_i} (com $i = \{1, 2, \dots, k\}$) são independentes.

Assim, o valor médio e a variância de $f_{eq}(t)$, respectivamente m e σ^2 , são obtidos pelas seguintes equações:

$$m = \sum_{i=1}^k 1 / \lambda_i \quad (2.26)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^k 1 / \lambda_i^2 \quad (2.27)$$

Fazendo agora o quociente entre σ e m tem-se o coeficiente de variação, (CV):

$$CV = \sigma/m = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^k 1/\lambda_i^2}}{\sum_{i=1}^k 1/\lambda_i} \quad (2.28)$$

Desta expressão tira-se que:

- σ/m está contido no intervalo $\left[\frac{1}{\sqrt{k}}, 1 \right]$;
- o valor $\frac{1}{\sqrt{k}}$ obtém-se para $\lambda_i = \lambda$, com $i = \{1, 2, \dots, k\}$;
- o valor 1 obtém-se para $k=1$;

A combinação dos estados s_i em série com tempos de permanência semelhantes em todos eles, simplifica o cálculo dos parâmetros mas restringe a gama de funções que podem ser adequadamente aproximadas. No outro extremo, se se admitirem tempos de permanência diferentes em todos os estados, alarga-se a gama de funções que podem ser aproximadas mas o número de parâmetros independentes torna-se elevado e o seu cálculo complexo. Uma solução de compromisso passa por considerar uma série de $k-1$ estados com idênticos tempos de permanência e um estado distinto, como se mostra na Figura 2.3.

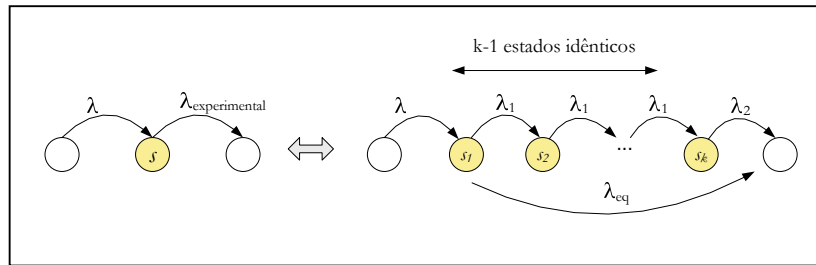


Figura 2.3: Combinação em série com $k-1$ estados idênticos e um diferente

Considerando que a função de distribuição do tempo de permanência associado à série dos $k-1$ estados têm valor médio m_{k-1} e desvio padrão σ_{k-1} e que relativamente à função distribuição do estado k (último estado), o valor médio é m_k , e o desvio padrão é σ_k , tem-se:

$$m_{k-1} = k - 1/\lambda_1 \quad (2.29)$$

$$m_k = 1/\lambda_2 \quad (2.30)$$

$$\sigma_{k-1} = \sqrt{(k-1)}/\lambda_1 \quad (2.31)$$

$$\sigma_k = 1/\lambda_2 \quad (2.32)$$

Admitindo a independência das funções de distribuição dos tempos de permanência nos estados s_i (com $i = \{1, 2, \dots, k\}$), o valor médio e o desvio padrão equivalentes à série dos k estados são dados por:

$$m_{eq} = (k-1)/\lambda_1 + 1/\lambda_2 \quad (2.33)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(k-1)/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2} \quad (2.34)$$

Limitações

A combinação de estados em série (Figura 2.2-a) permite apenas aproximar funções menos dispersas do que a função exponencial, i.e., funções hiperexponenciais para as quais o coeficiente de variação é inferior a 1. Estas são as funções mais comuns em sistemas de produção. Em relação a estes, exceptuando os processos de falha que tipicamente apresentam taxas de falha constantes, todos os outros processos do comportamento são normalmente caracterizados por funções hiperexponenciais. Frequentemente, alguns destes processos apresentam dispersões muito pequenas, podendo mesmo admitir-se como determinísticos (função Dirac) em várias situações.

O número k de processos exponenciais requerido para representar um processo não exponencial p cuja função densidade de probabilidade, $f(t)$, tem valor médio m_p e desvio padrão σ_p , é estimado por:

$$k \geq \left(\frac{m_p}{\sigma_p} \right)^2 - 1 \quad (2.35)$$

Assim, k aumenta exponencialmente à medida que a dispersão de $f(t)$ diminui, tendendo para um valor infinito quando $f(t)$ tende para uma função Dirac ($\sigma_p \rightarrow 0$). Este aspecto constitui uma importante limitação do MEF quando aplicado a sistemas com mecanismos de tolerância a falhas, durante intervalos de tempo mais ou menos curtos e com distribuições

quasi-determinísticas, devido ao elevado número de estados adicionais necessários para aproximar uma função desta natureza.

De acordo com Billinton e Allan [1983] existem muitas outras combinações de estados que aproximam qualquer distribuição de probabilidade. Tais distribuições, não são no entanto importantes no âmbito do estudo da fiabilidade de sistemas de produção onde, como já referimos, os processos não-markovianos são normalmente caracterizados por distribuições menos dispersas do que a distribuição exponencial, e por isso, aproximadas por estados adicionais em série.

Processos concorrentes não-markovianos

No MEF apresentado atrás, considerou-se um único processo activo em cada estado não markoviano. No entanto, nos diagramas de perdas de sistemas reparáveis com mecanismos de tolerância a falhas, são frequentes as situações em que num mesmo estado estão simultaneamente activos vários processos não exponenciais. Por isso, apresenta-se de seguida a transformação destes diagramas em gráficos de estado markovianos equivalentes. Recorre-se para o efeito à combinação em série dos estados adicionais, embora o procedimento seja idêntico para a combinação em paralelo.

De acordo com o princípio do MEF, um processo hiperexponencial, p , activo no estado s , é substituído por um conjunto de estados em série ligados entre si por processos exponenciais, de tal modo que a convolução das funções densidade de probabilidade destes processos se aproxima da função densidade de probabilidade de p . Cada um destes processos é expandido numa série de processos no caso de vários processos não exponenciais estarem simultaneamente activos num mesmo estado.

No gráfico da Figura 2.4-a apresenta-se um estado s_0 com dois processos activos: p_1 e p_2 . Admitindo que são necessários três sub-processos exponenciais para aproximar a função de distribuição de p_1 e quatro sub-processos exponenciais para aproximar a função de distribuição de p_2 , o gráfico base é transformado no gráfico expandido equivalente (markoviano), onde s_0 é representado por doze estados. Cada um destes estados corresponde a uma combinação particular de sub-processos de p_1 e de p_2 conforme mostrado no gráfico da Figura 2.4-b.

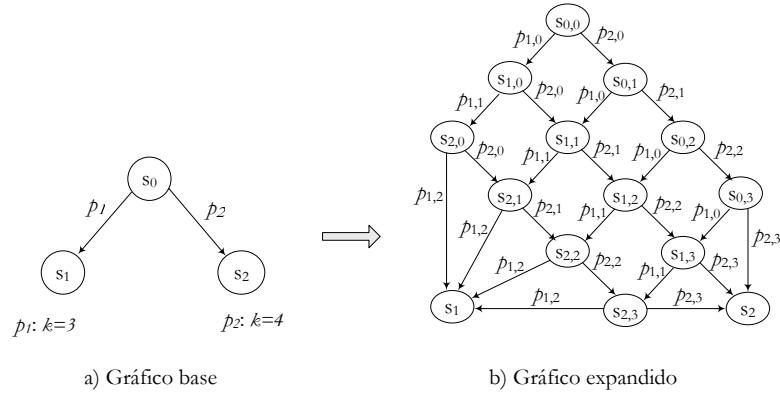


Figura 2.4: Transformação de processos concorrentes não exponenciais

Síntese das funções densidade

De uma forma sintética, o procedimento para obter a função densidade de probabilidade teórica equivalente, $f_{eq}(t)$, que aproxime a função densidade de probabilidade experimental, $f(t)$ (não exponencial), passa por determinar:

- o tipo de combinação de estados a utilizar;
- o número de estados utilizados na combinação, k ;
- os parâmetros λ_i e w_i de $f_{eq}(t)$.

Quanto à combinação dos estados, de acordo com o referido anteriormente, as funções experimentais do tipo hiperexponencial devem ser aproximadas por estados adicionais em série e as funções do tipo hipoeexponenciais, por estados adicionais em paralelo. Relativamente ao número de estados utilizados na combinação, este pode ser genericamente aproximado pelo valor da expressão (2.35). Finalmente, para a determinação dos parâmetros λ_i e w_i existem diferentes métodos mais ou menos complexos. Laprie [1975] e Billinton [1983] propõem dois destes métodos, o primeiro baseado na aproximação dos momentos centrais das funções $f(t)$ e $f_{eq}(t)$ através do método dos mínimos quadrados; o segundo pela resolução de um sistema de equações não lineares que igualam os primeiros n momentos das duas funções. A utilização destes métodos justifica-se quando se conhece os momentos das funções experimentais e se pretende obter aproximações rigorosas.

Na avaliação dos sistemas de produção industriais, normalmente são conhecidos apenas o valor médio m e o desvio padrão σ das funções experimentais, o que não justifica a utilização dos referidos métodos. Para estes casos, um método alternativo proposto por Desrochers [1995]

parece ser mais adequado. Este método recorre à série de $k-1$ estados idênticos e de um estado distinto para aproximação de funções hiperexponenciais (ver Figura 2.3). Tem como ponto de partida, os valores m e σ da função experimental e as expressões de m_{eq} e σ_{eq} da função teórica equivalente dadas pelas Equações (2.33) e (2.34), sendo que os respectivos podem ser obtidos pela resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} m = m_{eq} \\ \sigma = \sigma_{eq} \end{cases} \quad (2.36)$$

Podem então considerar-se três situações distintas para as distribuições hiperexponenciais, as quais passamos a descrever.

Situação 1: $m=\sigma$

Neste caso, a função experimental é exponencial, sendo necessário um único estado para o qual:

$$\lambda = 1/m \quad (2.37)$$

Situação 2: m/σ é inteiro

A função experimental é aproximada por uma série de k estados idênticos e os parâmetros são calculados pelas seguintes equações:

$$k = m^2/\sigma^2 \quad (2.38)$$

$$\lambda = m/\sigma^2 \quad (2.39)$$

Situação 3: $m/\sigma > 0$, mas não é inteiro

Neste caso, a função experimental é aproximada pela combinação em série de $k-1$ estados idênticos e um estado distinto (como na

Figura 2.3). Recorrendo às Equações (2.33), (2.34) e (2.36), obtém-se:

$$m = (k-1)/\lambda_1 + 1/\lambda_2 \quad (2.40)$$

$$\sigma = \sqrt{(k-1)/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2} \quad (2.41)$$

Resolvendo o sistema de equações representado por estas duas últimas equações, em ordem a λ_1 e λ_2 , tem-se que:

$$\lambda_1 = k / \left((k-1)m \pm \sqrt{k(k-1)\sigma^2 - (k-1)m^2} \right) \quad (2.42)$$

$$\lambda_2 = k / \left(m \pm \sqrt{k(k-1)\sigma^2 - (k-1)m^2} \right) \quad (2.43)$$

Os valores de λ_1 e λ_2 são obtidos destas duas expressões considerando, em ambos os casos, os sinais superiores (+) ou, alternativamente, os inferiores (-). Dado que λ_1 e λ_2 são parâmetros reais, k satisfaz a condição:

$$k \geq (m / \sigma)^2 \quad (2.44)$$

Por último, o número de estados da combinação é dado pelo único inteiro que satisfaz as condições:

$$(m / \sigma)^2 \leq k < (m / \sigma)^2 + 1 \quad (2.45)$$

Aplicação ao caso de estudo

Considere-se de novo o caso de estudo apresentado na Secção 2.2. Uma vez que os processos não-markovianos p_μ , p_γ e p_θ têm distribuições experimentais hiperexponenciais, recorre-se à combinação em série dos estados adicionais para transformar o gráfico de estados da Figura 2.1 num gráfico de estados markoviano equivalente.

Começamos então pelo processo de reparação p_μ , com distribuição experimental *Erlang* de 2ª ordem, com valor médio $m=2$ horas e desvio padrão, $\sigma = m / \sqrt{k} = 2 / \sqrt{2} = 1.41421$ horas. Dado que $m/\sigma > 0$ (mas não inteiro), tem-se uma situação idêntica à *situação 3* descrita acima. Assim, a distribuição experimental do processo de reparação deverá ser aproximada por uma combinação em série de $k-1$ estados idênticos e um estado distinto. O procedimento a seguir consiste em:

- Determinar o número de estados a combinar em série, k ;
- Estimar os valores dos parâmetros, μ_1 e μ_2 dos $k-1$ sub-processos exponenciais, p_{μ_1} e do k sub-processo exponencial, p_{μ_2} , respectivamente.

Neste caso, a obtenção do valor $k=2$ é imediata. Sabe-se que a distribuição de *Erlang* de ordem k é uma convolução de k distribuições exponenciais em série. Logo o processo de reparação, p_μ , deverá ser aproximado por dois sub-processos exponenciais p_{μ_1} e p_{μ_2} . Para qualquer outra

distribuição experimental o valor de k determina-se pela Equação (2.45) (também válida para a distribuição de *Erlang*).

Quanto aos parâmetros μ_1 e μ_2 , estes são obtidos como se indica na *situação 3*, pelas expressões (2.42) e (2.43), respectivamente. Tem-se neste caso para $k=2$, $m=2$ e $\sigma=1.41421$: $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Relativamente aos processos determinísticos p_γ e p_θ , seria necessário um número elevado de sub-processos exponenciais para obter um bom ajustamento às funções experimentais destes processos. Teoricamente esse número tende para infinito, como determina a Equação (2.35). No entanto, para facilitar a implementação do método e tornar possível a apresentação do gráfico de estados markoviano equivalente, admitiu-se que cada um dos processos determinísticos p_γ e p_θ é aproximado por três sub-processos exponenciais $p_{\gamma 1}, p_{\gamma 2}, p_{\gamma 3}$ e $p_{\theta 1}, p_{\theta 2}, p_{\theta 3}$, respectivamente (ver Figura 2.5), sacrificando naturalmente a qualidade do ajustamento das funções equivalentes às funções experimentais. Ao gráfico de estados markoviano equivalente podem agora ser aplicadas as metodologias adequadas ao tratamento de sistemas markovianos.

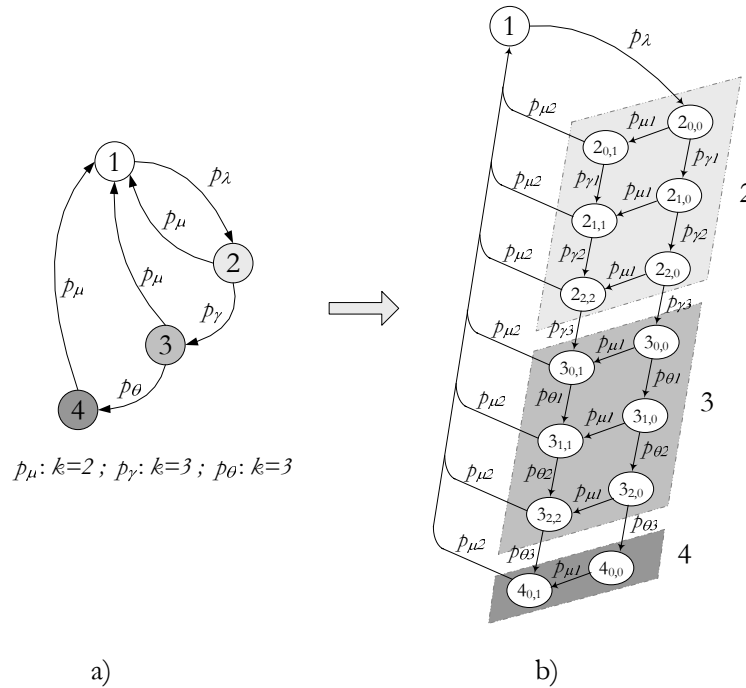


Figura 2.5: Transformação gráfico base/gráfico expandido

Dado que todos os processos do gráfico de estados da Figura 2.5-b têm taxas de transição constantes, tem-se a seguinte matriz Q:

Estado 1	Estado 2						Estado 3						Estado 4	
1	(2 _{0,0})	(2 _{0,1})	(2 _{1,0})	(2 _{1,1})	(2 _{2,0})	(2 _{2,2})	(3 _{0,0})	(3 _{0,1})	(3 _{1,0})	(3 _{1,1})	(3 _{2,0})	(3 _{2,2})	(4 _{0,0})	(4 _{0,1})
1	$-\lambda$	λ												
(2 _{0,0})	$-\mu_1 - \gamma_1$	μ_1	γ_1											
(2 _{0,1})	μ_2	$-\mu_2 - \gamma_1$	γ_1											
(2 _{1,0})			$-\mu_1 - \gamma_2$	μ_1	γ_2									
(2 _{1,1})	μ_2		$-\mu_2 - \gamma_2$	γ_2										
(2 _{2,0})				$-\mu_1 - \gamma_3$	μ_1	γ_3								
(2 _{2,2})	μ_2			$-\mu_2 - \gamma_3$										
(3 _{0,0})							$-\mu_1 - \theta_1$	μ_1	θ_1					
(3 _{0,1})							$-\mu_2 - \theta_1$			θ_1				
(3 _{1,0})								$-\mu_1 - \theta_2$	μ_1	θ_2				
(3 _{1,1})								$-\mu_2 - \theta_2$			θ_2			
(3 _{2,0})									$-\mu_1 - \theta_3$	μ_1	θ_3			
(3 _{2,2})									$-\mu_2 - \theta_3$			θ_3		
(4 _{0,0})													$-\mu_1$	μ_1
(4 _{0,1})													$-\mu_2$	

A partir daqui todo o procedimento para obter os índices de fiabilidade pretendidos é idêntico ao apresentado na Secção 2.3.2.

Considerando os valores médios dos processos utilizados anteriormente, tem-se para as taxas de transição entre estados: $\lambda=10^{-3}$; $\mu_1=1$; $\mu_2=1$; $\gamma_1=3$; $\gamma_2=3$; $\gamma_3=3$; $\theta_1=2$; $\theta_2=2$; $\theta_3=2$

Com estas taxas obtêm-se os índices de fiabilidade apresentados na Tabela 2.6.

Tabela 2.6: Índices de fiabilidade – Método dos estados fictícios

Índices de Fiabilidade	Estado i			
	1	2	3	4
Probabilidade	9.8039×10^{-1}	8.2338×10^{-3}	6.7785×10^{-3}	4.5956×10^{-3}
Tempo médio no estado (h)	100	1.5	2	2
Frequência	9.8039×10^{-3}	5.4892×10^{-3}	3.3893×10^{-3}	2.2978×10^{-3}
Disponibilidade	0.9954			
Indisponibilidade	4.5956×10^{-3}			

De realçar que o valor da probabilidade de estado 2 é obtida pela soma dos estados fictícios que o constituem, i.e., $\pi_2(\infty) = \pi_{2_{0,0}}(\infty) + \pi_{2_{0,1}}(\infty) + \pi_{2_{1,0}}(\infty) + \pi_{2_{1,1}}(\infty) + \pi_{2_{2,0}}(\infty) + \pi_{2_{2,2}}(\infty)$. As probabilidades dos estados 3 e 4 obtêm-se de forma análoga. Também o tempo médio de permanência em cada estado do sistema resulta da soma dos tempos médios de permanência nos estados fictícios que o compõem.

A aplicação do método dos estados fictícios ao caso de estudo presente evidencia a sua maior fraqueza. De facto, quando um sistema tem processos com distribuições quasi-determinísticas, o número de estados fictícios necessários para aproximar as distribuições dos processos não exponenciais é muito elevado. Cria-se deste modo uma dimensão artificial muito grande para o gráfico de estados e, por conseguinte, sérias dificuldades e limitações de análise de problemas práticos a partir duma determinada dimensão. Para estes casos, a metodologia *DepCim* apresenta-se como uma alternativa possivelmente mais eficaz.

2.3.4.2 Metodologia DepCim

A metodologia *DepCim* serve-se de expressões completamente genéricas que possibilitam a obtenção de índices de fiabilidade de sistemas. Os processos que caracterizam estes sistemas podem ser modelados por quaisquer funções densidade de probabilidade, o que torna esta metodologia capaz de lidar com sistemas markovianos, semi-markovianos e não-markovianos.

A obtenção das expressões que permitem o cálculo das probabilidades dos estados assenta na noção de trajectória, definida como uma sequência possível de estados ocupados pelo sistema após a ocorrência de falha, de tal modo que:

- O estado de avaria alcançado imediatamente após a ocorrência da falha é o primeiro estado da trajectória;
- O estado de funcionamento normal ou não pertence à trajectória ou é o seu último estado.

Esta última característica, juntamente com o carácter acíclico do conjunto de estados de falha, assegura a não ocorrência de cada estado do diagrama de perdas, mais do que uma vez numa mesma trajectória. Considerando um diagrama de perdas (DP) tal que:

- s é um dos seus estados;
- η é a taxa de chegada ao estado inicial de avarias;
- Ψ_s é o conjunto das trajectórias de DP tais que s é o seu penúltimo estado,

tem-se para a probabilidade do sistema ocupar o estado s :

$$\pi_s = \eta \sum_{\psi \in \Psi_s} t_{\psi s} \quad (2.46)$$

onde $t_{\psi s}$ representa o tempo médio durante o qual o sistema ocupa s dentro da trajectória Ψ .

Dado que as trajectórias são mutuamente exclusivas, o tempo médio de permanência em s , após a ocorrência de uma falha, será dado pelo somatório dos tempos médios de ocupação desse estado para cada uma das trajectórias de Ψ_s . Sendo λ a taxa do processo de falha e $\mu(t)$ a função densidade de probabilidade do processo de reparação, o valor de η vem dado por:

$$\eta = \frac{\lambda}{1 + \lambda \int_0^{\infty} t \cdot \mu(t) dt} \quad (2.47)$$

Para derivar a expressão para t_{ψ} , considere-se a seguinte notação:

- $t_k \rightarrow$ instante de chegada ao estado k com a trajectória ψ ;
- $f_{k-1,k}(t) \rightarrow$ função densidade de probabilidade de t_k ;
- $P_k \rightarrow$ conjunto dos processos activos no estado k ;
- $p_k \rightarrow$ processo cuja execução provoca a transição de s_{k-1} para s_k ;
- $f_{p_k}(t) \rightarrow$ função densidade de probabilidade de p_k ;
- $t_{0p_k} \rightarrow$ instante de activação do processo p_k ;

Com esta notação a expressão de t_{ψ} toma a seguinte forma:

$$t_{\psi} = \int_0^{\infty} f_{0,1}(t_1) \dots \int_{t_{n-1}}^{\infty} f_{n-1,n}(t_n) \int_{t_n}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) f_{n,n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1} dt_n \dots dt_1 \quad (2.48)$$

Aplicação ao caso de estudo

Através das Equações (2.31), (2.32) e (2.33) obtemos as expressões das probabilidades de estado, π_1, π_2, π_3 e π_4 . Por exemplo, para avaliar a probabilidade do estado 3 (π_3) temos duas trajectórias possíveis: $\Psi_3 = \{(234), (321)\}$. Assim:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\lambda}{1 + \lambda \int_0^{\infty} t \cdot f_4(t) dt} \\ t_{\psi_{3234}} &= \int_0^{\infty} f_2(t_1) \left(\int_{t_1}^{\infty} f_3(t_2 - t_1)(t_2 - t_1) \left(\int_{t_2}^{\infty} f_4(t) dt \right) dt_2 \right) dt_1 \\ t_{\psi_{3231}} &= \int_0^{\infty} f_2(t_1) \left(\int_{t_1}^{\infty} f_4(t_2)(t_2 - t_1) \left(\int_{t_2}^{\infty} f_3(t - t_1) dt \right) dt_2 \right) dt_1 \\ t_3 &= t_{\psi_{3234}} + t_{\psi_{3231}} \\ \pi_3 &= \eta \cdot t_3 \end{aligned}$$

Os valores das probabilidades de estado obtidos por esta metodologia constam da Tabela 2.7.

Tabela 2.7: Índices de fiabilidade – Metodologia DepCim

Índices de Fiabilidade	Estado i			
	1	2	3	4
Probabilidade	9.8039×10^{-1}	8.7879×10^{-3}	7.1986×10^{-3}	3.6214×10^{-3}
Tempo médio no estado (horas)	100	0.896362	0.734266	0.36938
Disponibilidade	0.996379			
Indisponibilidade	3.6214×10^{-3}			

2.3.4.3 Simulação

Entende-se por simulação a “imitação” do funcionamento de um sistema real recorrendo a uma representação adequada (aos fins em vista) desse sistema, habitualmente designada por modelo. O conceito de modelo, enquanto representação de um sistema real, é o elemento central da simulação. Esta técnica poderosa tem aplicação num vasto conjunto de domínios tais como: a indústria, a defesa, o comércio, os serviços, etc. A característica distinta da simulação consiste na criação de um modelo do sistema que incorpora a medida de factores como valores de probabilidade com que se pretende prever e comparar alternativas para apoio à tomada de decisão [Rodrigues 1988].

Durante a simulação vão-se compilando as estatísticas de funcionamento relevantes para a avaliação do desempenho da solução adoptada. Deste modo, a simulação corresponde a uma perspectiva experimentalista de abordagem de problemas. Em cada experiência de simulação é ensaiada uma dada solução, servindo o modelo de “banco de ensaios” (ou laboratório de experiências) de soluções alternativas. Sendo uma técnica experimental, realizada em computador, pode dizer-se que se trata de uma experimentação numérica.

Frequentemente, nos modelos de simulação não se conhece a relação analítica directa entre as variáveis decisórias e a(s) medida(s) de desempenho. Através do modelo de simulação, representa-se a evolução do sistema ao longo do tempo, i.e., a sua trajectória. Em contrapartida, nos modelos analíticos existe uma relação matemática directa entre as variáveis de decisão (que configuram uma solução) e a função objectivo (ou a(s) medida(s) de desempenho do sistema), de modo que é possível avaliar, por processos analíticos directos, a utilidade associada a cada solução alternativa.

Vantagens e desvantagens da simulação

A simulação permite ultrapassar muitas das limitações dos modelos analíticos. Em primeiro lugar, permite modelar o comportamento de sistemas com qualquer grau de complexidade, com um nível de pormenorização que se considere como o mais adequado a cada caso. Não se torna necessário, portanto, impor hipóteses simplificativas comuns nos modelos analíticos, que pelo seu desajustamento em relação à realidade, podem pôr em causa a validade desses modelos. Em segundo lugar, a influência de factores aleatórios no funcionamento dos sistemas dificulta, e por vezes inviabiliza, a modelação analítica. A simulação permite lidar com facilidade com a aleatoriedade, incluindo-a aliás como outro dos seus elementos fundamentais.

Finalmente, a simulação permite frequentemente ultrapassar muitas das barreiras de desconfiança dos decisores relativamente às abordagens analíticas devidas fundamentalmente à dificuldade de compreensão das relações causa-efeito destes processos. A simulação pela via experimental é mais facilmente aceite e compreendida pelos decisores [Oliveira, 1996] principalmente se esta for acompanhada de animação gráfica.

Esta técnica apresenta, contudo, algumas desvantagens em relação às metodologias analíticas. A primeira refere-se ao esforço significativo, necessário quer nas fases de concepção e implementação do modelo, quer na obtenção e tratamento dos resultados. Por outro lado, eventos de baixa probabilidade (raros), bem como a obtenção de resultados suficientemente fiáveis (amostras suficientemente grandes), obrigam, frequentemente, a tempos de simulação muito longos. Deste modo, podem surgir alguns problemas relacionados com a avaliação estatística das amostras e com a confiança nos resultados obtidos e cálculo de erros. Existe ainda o perigo de transmitir ao utilizador uma injustificada sensação de confiança, suportada por um grande volume de informação que é rapidamente gerada quando se utiliza um suporte informático.

De acordo com Oliveira [1996], a simulação deve ser pesando as suas potencialidades e limitações, o último recurso a utilizar pelo analista quando, por qualquer das razões acima apontadas, a via analítica se revelar inviável ou indesejável.

Simulação de Monte Carlo

Com o desenvolvimento dos computadores, a simulação de Monte Carlo tem assumido uma importância crescente como método de avaliação do desempenho de sistemas, pois permite

modelar virtualmente qualquer função de probabilidade. Tem sido usada com sucesso para simulação do desempenho de uma variedade de sistemas, nomeadamente, de sistemas de distribuição de energia eléctrica [Mazumdar e Kapoor, 1997; Saraiva, Miranda et al., 1996; Lobo, 2000], de sistemas de comunicações [Jeruchim, Balaban et al., 1992] e de sistemas de produção [Accumolli, 1996; Yeh, 2003]

A grande divulgação dos métodos de Monte Carlo deve-se ao facto de serem facilmente aplicados a classes de problemas para os quais não se pode obter uma solução analítica exacta ou que são intratáveis por essa via. Contudo, esta propriedade básica dos métodos de Monte Carlo tem uma série de desvantagens. A estimação do desempenho de um sistema pode ser muito ineficiente e nalguns casos extremos mesmo proibitiva em termos de tempo necessário para a simulação. Por exemplo, a probabilidade de falha de um dado equipamento que dá origem a uma falha catastrófica terá que ser inevitavelmente muito baixa, o que implica ter que se considerar um tempo de simulação muito grande para se obter uma estimativa fiável.

Noutros casos, o número de componentes do sistema é muito elevado, como acontece normalmente com as redes de distribuição de energia eléctrica, as redes de comunicação ou os sistemas de produção industriais, dando origem a um espaço de estados do sistema com uma grande cardinalidade. A análise do sistema com todos os seus estados pode inviabilizar a obtenção de resultados num tempo aceitável. Esta é a principal razão pela qual se toma nestes casos uma amostra de estados do sistema com a qual se estima a característica pretendida, em vez de considerar o sistema com todos os seus estados.

Seja n o número de componentes de um sistema e k o número de estados possíveis de cada componente. A cardinalidade do espaço de estados do sistema, $\#E$, é dada por $\#E=k^n$. Por exemplo, um sistema com apenas 100 componentes, onde cada componente pode residir num de dois estados possíveis (funcionamento e falha), dá origem a um espaço de estados 2^{100} ou seja, $\#E=1.27 \times 10^{30}$ estados.

Métodos de simulação

Os métodos de simulação classificam-se consoante o sorteio é de natureza aleatória (não cronológica) ou de natureza sequencial (cronológica). Dos métodos descritos seguidamente o primeiro é aleatório, e os três seguintes são sequenciais.

i) Amostragem aleatória de estados do sistema

Como acabamos de referir, a análise de sistemas com um número de estados muito elevado pode inviabilizar a obtenção de resultados. Com o método de mostragem aleatória de estados do sistema a análise do sistema é efectuada através de uma amostra de estados A , retirada aleatoriamente do espaço de estados do sistema, E , daí a sua designação. A partir desta amostra estima-se o valor médio da característica ou medida de desempenho, $F(s)$, pretendida. O vector do estado do sistema é determinado pelo sorteio do estado de cada componente. Normalmente, cada componente do sistema tem um comportamento binário, i.e., pode residir em apenas um de dois estados possíveis: falha ou funcionamento.

Além disso, admite-se que as falhas nos componentes são independentes; a falha de um componente não influencia a falha dos restantes componentes. Esta hipótese simplificativa, frequentemente aceite no estudo da fiabilidade, não deve ser aceite na avaliação do desempenho dos sistemas com mecanismos de tolerância a falhas, como por exemplo em sistemas de produção industriais com *buffers* intermédios e/ou de produto acabado. Nestes sistemas acontece, frequentemente, que a falha de um elemento desencadeia, com um determinado atraso, a paragem do equipamento a jusante. Refira-se, mais uma vez, que o conceito de falha é um conceito lato, sendo necessário em cada contexto particular expressá-lo com clareza. No contexto do presente estudo, considera-se que um equipamento está em falha ou indisponível se não cumpre a sua missão. Assim, um equipamento pode estar indisponível por falta de *input* (falha exógena), ou por falha interna (falha endógena).

Seja s o vector que expressa o estado do sistema: $s = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_i \ \dots \ s_n]$. Este vector é obtido sorteando o estado de cada componente do sistema. Cada s_i , com $i=(1, 2, \dots, n)$, representa o estado do $i^{\text{ésimo}}$ componente do sistema tal que:

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{se } u_i \geq P_{\text{falha}}(i) \\ 1 & \text{se } 0 \leq u_i < P_{\text{falha}}(i) \end{cases} \quad (2.49)$$

sendo:

- $P_{\text{falha}}(i)$, a probabilidade de falha do $i^{\text{ésimo}}$ componente do sistema;
- u_i um número aleatório, uniformemente distribuído i.e., $u_i \sim U[0, 1]$

Admita-se que se pretende estudar uma determinada característica de um sistema, $F(s)$ que é função do estado actual e cujo valor quantifica a característica pretendida. A melhor estimativa para $F(s)$ é dada pelo valor esperado $E[F(s)]$ obtido por:

$$E[F(s)] = E(F) = \sum_{s \in E} F(s) \cdot P(s) \quad (2.50)$$

onde $P(s)$ é a probabilidade do estado s .

Devido à elevada cardinalidade do espaço de estados dos sistemas reais, torna-se muitas vezes impossível utilizar a Equação (2.50) com todos os estados do sistema. Nestes casos, o valor esperado da função $F(s)$, com domínio no espaço de estados E , pode ser estimada a partir de uma amostra de N_A estados (retirada aleatoriamente do espaço de estados E) Tem-se deste modo que:

$$\hat{E}(F) = \sum_{s \in E_A} F(s) \frac{n_s}{N_A} \quad (2.51)$$

onde:

- $\hat{E}(F)$ é um estimador de $E(F)$;
- E_A é o conjunto de estados da amostra;
- n_s é o número de ocorrências do estado s na amostra;
- N_A é a dimensão da amostra.

Este método apresenta como principais vantagens:

- Sorteio relativamente simples – Basta gerar números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1]$;
- Necessidade de poucos dados de fiabilidade – Apenas são necessários os dados referentes às probabilidades de estado de cada componente.

Contudo, também tem limitações importantes, tais como:

- Impossibilidade de calcular índices de frequência;
- Inadequado para o cálculo de índices de desempenho de sistemas com tolerância a falhas onde muitos acontecimentos não são independentes, como acontece por exemplo nos sistemas de produção complexos com *buffers* intermédios e *buffers* de produto acabado.

ii) Sorteio das durações dos estados dos componentes

Este método baseia-se no sorteio das durações dos estados dos componentes de acordo com as respectivas distribuições de probabilidades. A sequência de duração dos estados do sistema é

obtida pela combinação das sequências previamente sorteadas da duração dos estados dos componentes. Este procedimento é repetido por vários períodos de tempo de igual duração, T , possibilitando assim obter estimativas dos índices de fiabilidade referentes ao período de tempo T . Na Figura 2.6 mostra-se como se pode obter, para um determinado período T , a sequência da duração dos estados de um sistema composto por apenas dois componentes, cada um deles com dois estados possíveis (1-funcionamento e 0-falha). Considera-se que o sistema falha quando ambos os componentes falham.

A implementação deste método faz-se, de uma forma sintética, nos seguintes passos:

- Especificar o estado de cada componente do sistema no instante inicial. Geralmente admite-se que neste instante todos os componentes se encontram em funcionamento;
- Sortear para cada componente o tempo de permanência no estado actual. Este tempo é uma variável aleatória com uma dada função distribuição e determina-se pelo método da transformada inversa. No caso do estado s_i ser markoviano, o tempo de permanência nesse estado será dado pela equação:

$$T_i = -1/\lambda_i \ln(u_i) \quad (2.52)$$

- Repetir o passo anterior tantas as vezes quantas as necessárias de modo a simular um período de tempo longo (por exemplo um ano) e registar os valores sorteados de duração de cada estado para todos os componentes de acordo com o ilustrado na Figura 2.6;
- Obter a evolução cronológica dos estados do sistema a partir das evoluções cronológicas dos estados de todos os componentes;
- Estimar os índices de desempenho pretendidos para cada estado do sistema, utilizando vários períodos de tempo de duração T .

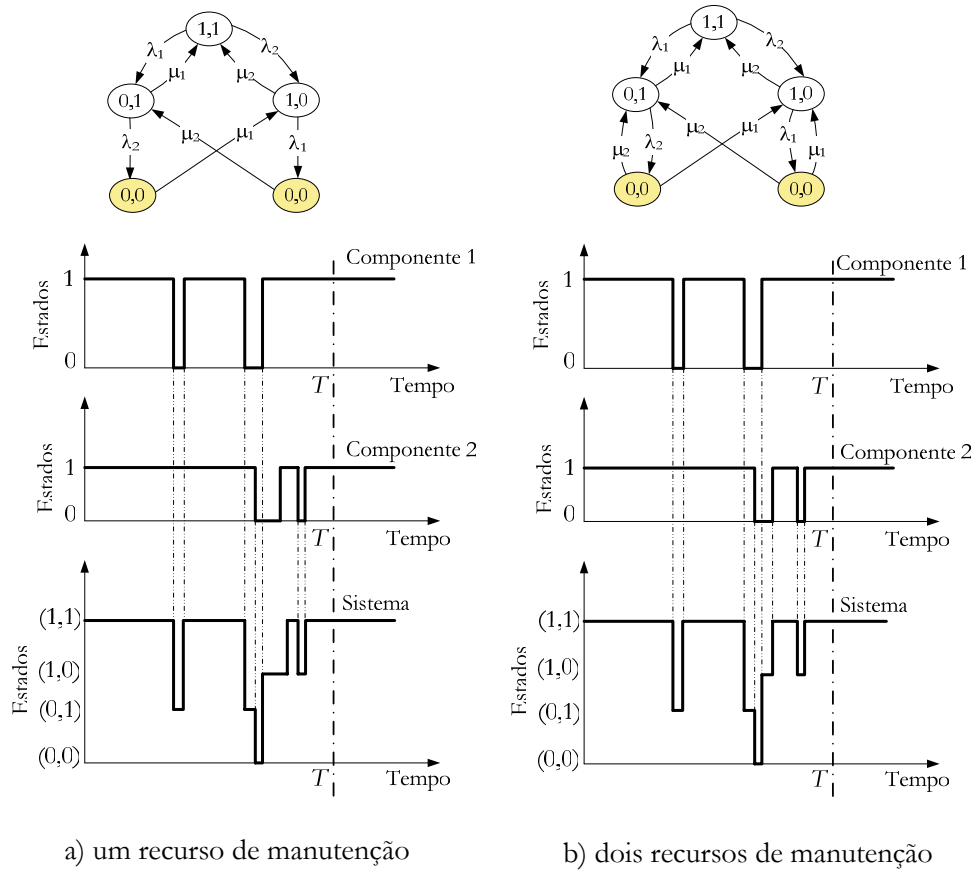


Figura 2.6: Obtenção dos tempos de permanência nos estados de um sistema

Para este método destacam-se as seguintes vantagens:

- Permite admitir qualquer função distribuição para o tempo de permanência nos estados;
- Ao contrário do método anterior, pode ser facilmente usado para obter índices de frequência;
- Permite obter estimativas dos valores esperados e distribuições de probabilidade para os índices de fiabilidade.

Como desvantagens, podemos referir que:

- Comparado com o método anterior, este método requer mais tempo de processamento e mais memória, uma vez que as sequências de transição sorteadas entre estados de todos os componentes terão de ser guardadas durante um período de tempo longo;

- São necessárias as distribuições dos tempos de permanência nos estados, para todos os componentes;
- Acontece por vezes que determinados componentes possuem mais do que dois estados, facto este que constitui um factor adicional de dificuldade na análise quer na obtenção dos dados necessários quer na dimensão do problema.

iii) Sorteio da transição de estados do sistema

Ao contrário do método anterior, com o qual se pretendia obter uma sequência de estados dos componentes, este método baseia-se no sorteio das transições entre estados do sistema, admitindo que todos os estados do sistema são markovianos. Seja n o número de componentes de um sistema, s o seu estado actual e γ_i com $(i=1, 2, \dots, n)$, as taxas de transição de estado de cada componente. Os tempos de duração dos estados actuais dos componentes (T_i) são obtidos de acordo com a Equação (2.35). A partir destes tempos, determina-se o instante da próxima transição ou mudança de estado por:

$$T_k = \min \{T_i\} ; \text{ com } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.53)$$

Deste modo, o sistema permanece no estado actual, s durante o tempo T_k , e muda para o estado s' devido à mudança de estado do componente k . No estado s' , são novamente sorteados os tempos de permanência em cada estado dos componentes, embora apenas o componente k tenha mudado de estado. Isto deve-se ao facto de se admitir neste método que todos os estados são markovianos.

Como se viu anteriormente, basta que um componente mude de estado para que se dê uma transição do sistema do estado s para o estado s' , o que significa que a taxa de saída do sistema do estado s é obtida pelo somatório das taxas de saída dos estados actuais dos componentes, ou seja:

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i \quad (2.54)$$

Assim, o tempo de permanência do sistema no estado s também é exponencialmente distribuído com uma função densidade de probabilidade definida por $f(t) = \gamma \cdot e^{-\gamma t}$. Por outro lado, a probabilidade da mudança de estado do sistema ser causada pela mudança de estado do componente k é dada por:

$$P_k = \frac{\gamma_k}{\sum_{i=1}^n \gamma_i} \quad (2.55)$$

Admitindo que o sistema tem n componentes, existem n alternativas para do sistema mudar de estado. A probabilidade de cada uma dessas alternativas é calculada pela Equação (2.55). O somatório de todas essas probabilidades terá que dar o valor 1, i.e.:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (2.56)$$

A determinação do próximo estado de ocupação do sistema pode então ser determinado pelo seguinte procedimento:

- Passo 1:* Colocar sequencialmente no intervalo $[0, 1]$, as n probabilidades de saída do estado actual do sistema, obtidas pela Equação (2.55);
- Passo 2:* Gerar um número aleatório u , uniformemente distribuído no intervalo $[0, 1]$;
- Passo 3:* Determinar a que sub-intervalo, do conjunto de sub-intervalos delimitados pelas probabilidades calculadas no Passo, pertence o número aleatório u (ver Figura 2.7);
- Passo 4:* Definir o novo estado do sistema pela mudança de estado do componente k .

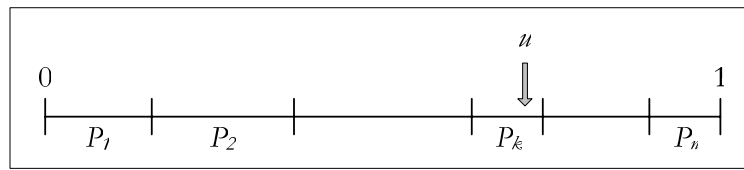


Figura 2.7: Sorteio da transição de estado de um sistema

Com este procedimento pode gerar-se uma sucessão de estados do sistema e para cada um deles calcular-se os índices de fiabilidade pretendidos. Este método apresenta como principais vantagens, as seguintes:

- A possibilidade de poder ser usado para calcular índices de frequência sem a necessidade de sortear funções de distribuição e guardar informação cronológica (como acontece no método anterior);

- Ao contrário do método de amostragem aleatória de estados, em que são necessários n números aleatórios para obter um estado do sistema com n componentes, este método necessita apenas de um número aleatório para gerar um estado do sistema.

A principal desvantagem deste método reside no facto de só poder ser aplicado a sistemas com tempos de permanência nos estados distribuídos exponencialmente (sistemas markovianos). Não serão por isso adequados para a avaliação de sistemas de produção com mecanismos de tolerância a falhas.

Constata-se deste modo que nenhum dos métodos de simulação apresentados é adequado para a simulação de sistemas com processos não exponenciais. Consequentemente, não deverão ser aplicados ao caso de estudo que temos vindo a analisar (sem que sejam adoptadas hipóteses simplificativas) dada a natureza não-markoviana de alguns dos seus processos. Construiu-se, então, um algoritmo baseado na simulação por acontecimentos discretos, que toma em consideração a natureza não-markoviana destes processos. Este algoritmo incorpora, no entanto, alguns dos procedimentos que fazem parte dos métodos de simulação acima apresentados.

iv) Simulação por acontecimentos discretos

A simulação por acontecimentos discretos envolve a modelação de sistemas dinâmicos nos quais as mudanças de estado ocorrem em pontos discretos ao longo do tempo, mais precisamente, no exacto momento da ocorrência dos eventos ou acontecimentos definidos no modelo. O processo de simulação produz uma sequência de “imagens” do sistema que representam a sua trajectória ou evolução temporal. O conjunto de todas as imagens dispostas cronologicamente constitui um “filme” dos eventos ocorridos, bem como as suas implicações no sistema.

Os algoritmos para a programação de acontecimentos discretos utilizam normalmente estruturas de dados do tipo listas ligadas. O elemento central do método da simulação por acontecimentos discretos é o *ficheiro de acontecimentos futuros* (FAF) o qual não é mais do que uma lista ordenada com todos os acontecimentos programados para ocorrerem num momento posterior ao tempo actual do relógio da simulação.

A dinâmica dos acontecimentos processa-se do seguinte modo:

- O relógio da simulação é actualizado pelo valor programado para o instante de ocorrência do próximo acontecimento, i.e., o que está no topo da lista FAF;
- Após a ocorrência do evento, este é retirado da lista FAF;
- Cada vez que um elemento é programado, é incluído na lista FAF, obrigando a uma reordenação desta lista por ordem crescente do tempo de ocorrência. Deste modo, o evento com menor tempo de ocorrência ocupa o topo da lista FAF e o mais distante, a última posição.

Tendo em conta o comportamento dos sistemas não-markovianos em geral, e dos sistemas com processos de atraso na propagação de erros não exponenciais, em particular, a simulação de acontecimentos discretos é, provavelmente, o método de simulação mais adequado para a modelação deste tipo de sistemas. A sua aplicação na avaliação de índices de fiabilidade de sistemas com mecanismos de tolerância a falhas, obriga a que cada “imagem” do sistema, num dado momento t , inclua os seguintes elementos:

- O estado do sistema no instante t ;
- Uma lista dos processos activos, com os respectivos instantes de finalização;
- Os valores actualizados das estatísticas acumuladas e de contadores, que serão utilizados na produção dos índices de fiabilidade no final da simulação.

As mudanças de estado do sistema ocorrem devido à conclusão de um determinado acontecimento. No âmbito deste estudo, este acontecimento pode ser de quatro tipos diferentes:

- Falha de um elemento (processo de falha);
- Fim de reparação de um elemento (processo de reparação);
- Propagação de falha (processo de propagação de erro);
- Fim de simulação.

Falha de um elemento

Mediante o acontecimento *falha do elemento* c_p , com $c_i \in C$ (C – conjunto de todos os elementos do sistema) o programa de simulação deve realizar as seguintes acções:

- Guardar o instante de tempo de ocorrência do evento e um atributo que designa o estado do elemento. Este instante de tempo permitirá, no momento em que ocorra o acontecimento *fim de reparação* do elemento c_p , calcular o tempo de permanência do elemento c_i no estado de falha;
- Verificar se no estado actual existe um processo de tolerância à falha de c_i . Se sim, o processo activa-se de imediato e programa-se o acontecimento *propagação de falha de c_i* para o instante de tempo dado pelo somatório do tempo actual do relógio da simulação, com o tempo de tolerância a falha gerado a partir da respectiva função distribuição;
- Verificar se os recursos de manutenção para levar a cabo a reparação de c_i estão disponíveis. Se estiverem, a reparação de c_i inicia-se de imediato, troca-se o atributo dos recursos de manutenção de disponível para ocupado e programa-se o acontecimento *fim de reparação* do elemento c_i para o instante de tempo dado pelo somatório do tempo actual do relógio da simulação, com o tempo de reparação gerado a partir da função distribuição do processo de reparação de c_i ;
- Se os recursos de manutenção estiverem ocupados, c_i deve ser colocado no final da fila de espera dos recursos de manutenção. A variável tamanho da fila deve ser incrementada em uma unidade;
- Incrementar o contador do número de acontecimentos *falha de um elemento*, em uma unidade;

Fim de reparação de um elemento

No momento em que os recursos de manutenção dão por concluída a reparação de c_p , dá-se o acontecimento *fim de reparação de c_i* . O programa de simulação deverá então executar as seguintes acções:

- Guardar o tempo de permanência de c_i no estado de falha, obtido pelo tempo do relógio de simulação subtraído do atributo tempo de chegada de c_i ao estado de falha;
- Se houver algum elemento c_j na fila de espera dos recursos de manutenção dever-se-á então retirar c_j da fila, reduzindo o tamanho desta em uma unidade, iniciar a reparação de c_j e programar no FAF o acontecimento *fim de reparação de c_j* para o instante de tempo obtido pelo somatório do tempo de relógio com o tempo gerado para o processo de reparação de c_j ;

- Se não houver nenhum elemento na fila de espera dos recursos de reparação, colocar os recursos de reparação na condição de “disponível”;
- Verificar se existe no FAF o acontecimento propagação de falha de c_r . Se sim, alterar o instante de ocorrência deste acontecimento para o instante actual (valor do relógio de simulação);
- Gerar um novo tempo de falha de c_p (τ_{c_i}) a partir da função de distribuição respectiva;
- Programar a próxima falha de c_i no FAF para o instante de tempo dado pelo somatório do tempo actual do relógio da simulação com o valor de τ_{c_i} ;
- Incrementar o contador do número de acontecimentos *fim de reparação* de um elemento, em uma unidade.

Propagação de falha de c_i

No momento em que se dá o acontecimento *propagação da falha de c_p* , o mecanismo de tolerância desta falha deixa de cumprir a sua missão, e o efeito da falha propaga-se aos equipamentos/componentes a jusante de c_r . O programa de simulação deverá então executar as seguintes acções:

- Guardar o tempo de actuação do mecanismo de tolerância à falha de c_p , calculado pelo tempo do relógio de simulação subtraído do atributo tempo de chegada de c_i ao estado de falha;
- Incrementar contador do número de acontecimentos Propagação de falha de c_p , em uma unidade.

Fim de simulação

Quando finalmente ocorre o evento que determina o fim da simulação devem executar-se as seguintes acções:

- Calcular as estatísticas idealizadas para o fim da simulação;
- Elaborar o relatório final.

Deve notar-se que certos elementos têm por vezes mais que um mecanismo de tolerância a falhas. Por exemplo, admita-se que o equipamento $c_k \in C$ tem n mecanismos de tolerância a falhas. Neste caso, os acontecimentos *propagação de falha de c_k* são acontecimentos activados; a

ocorrência do $i^{\text{ésimo}}$ acontecimento deste tipo activa de imediato o início do $(i+1)^{\text{ésimo}}$ acontecimento, com $i=1, \dots, n$. Assim, nesse mesmo instante pode programar-se no FAF o $(i+1)^{\text{ésimo}}$ acontecimento *propagação de falha de c_k* para o instante de tempo dado pelo somatório do tempo actual do relógio da simulação com o tempo de tolerância a falha do $(i+1)^{\text{ésimo}}$ mecanismo, gerado a partir da respectiva função de distribuição.

Considerações práticas sobre a implementação do método

Seja s_0 o estado inicial de um sistema e t_0 o instante de início de simulação. Considere-se que neste estado estão activos m processos. Os processos activos em s_0 podem ser divididos em dois conjuntos: o conjunto M_0 dos processos exponenciais p_{0e} e o conjunto nM_0 dos processos não exponenciais p_{0ne} . A conclusão de qualquer destes processos provoca a mudança de estado do sistema. Para determinar qual o instante de mudança de estado do sistema, são gerados os tempos de ocorrência de cada processo activo em s_0 , de acordo com as respectivas distribuições. Cria-se, deste modo, um *array* com os tempos $[T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0k}, \dots, T_{0m}]$ referentes a cada processo activo em s_0 . O menor valor deste *array* estabelece o tempo que o sistema permanece no estado s_0 antes de mudar de estado: $T_0 = \min[T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0k}, \dots, T_{0m}]$.

Admita-se que $T_0 = T_{0k}$, ou seja que o tempo de permanência no estado s_0 corresponde ao tempo de execução do processo $p_{0k} \in M_0$, responsável pela transição do sistema para o estado s_k . Assim, no instante $t_1 = t_0 + T_{0k}$ o sistema muda do estado s_0 para o estado s_k por acção do processo p_{0k} . Neste novo estado considere-se n processos concorrentes. Tal como no estado anterior, os processos activos em s_k pertencem ou ao conjunto dos processos exponenciais M_1 ou ao conjunto dos não exponenciais nM_1 .

Admita-se ainda que $p_{0i} \in M_0$ e $p_{0i} \in M_1$, bem como $p_{0r} \in nM_0$ e $p_{0r} \in nM_1$. Dado que o processo p_{0i} é exponencial, o tempo de permanência no estado s_k por acção deste processo não depende do tempo de permanência no estado s_0 . Por isso o tempo de ocorrência deste processo é gerado novamente a partir da respectiva distribuição. Relativamente ao processo p_{0r} , a situação é diferente. Este processo é não exponencial e por conseguinte o tempo decorrido no estado s_0 terá de ser contabilizado para efeito do cálculo do tempo de permanência do sistema no estado s_k (T_k) devido à acção deste processo. Tem-se então o seguinte *array* para os tempos de ocorrência de cada processo activo em s_k : $[T_{k1}, \dots, T_{ki}, \dots, T_{kr}, \dots, T_{kn}]$, com, $T_{kr} = t_0 + T_{0r} - T_{0k}$.

Novamente aqui, o menor valor deste *array* estabelece o tempo que o sistema permanece no estado s_k antes de mudar de estado. O tempo de permanência em s_k é dado então por: $T_k = \min[T_{k1}, \dots, T_{ki}, \dots, T_{kr}, \dots, T_{kn}]$.

Supondo que $T_k = T_{kr}$, o sistema transitará para o estado s_r no instante $t_2 = t_1 + T_k$. Neste estado repetir-se-á o procedimento do estado s_k . Finalmente, a simulação terminará ao fim de um tempo de simulação t_{simul} , estabelecido no início da simulação.

Aplicação ao caso de estudo

De um modo geral, o gráfico de estados constitui uma representação bastante completa de um sistema. Quando se dispõe do gráfico de estados, o trabalho de modelação necessário para implementar a simulação por acontecimentos discretos fica facilitado, como sucede neste caso de estudo. De facto, a partir do gráfico de estados da Figura 2.1 dispõe-se do espaço de estados e dos acontecimentos que provocam as mudanças de estado do sistema. Acrescentado a este conhecimento as funções de distribuição de probabilidades que condicionam os tempos de ocupação dos estados, constrói-se o modelo de simulação representado pelo fluxograma da Figura 2.8. A implementação deste fluxograma num programa de computador permite obter os valores dos índices de fiabilidade para o caso em estudo.

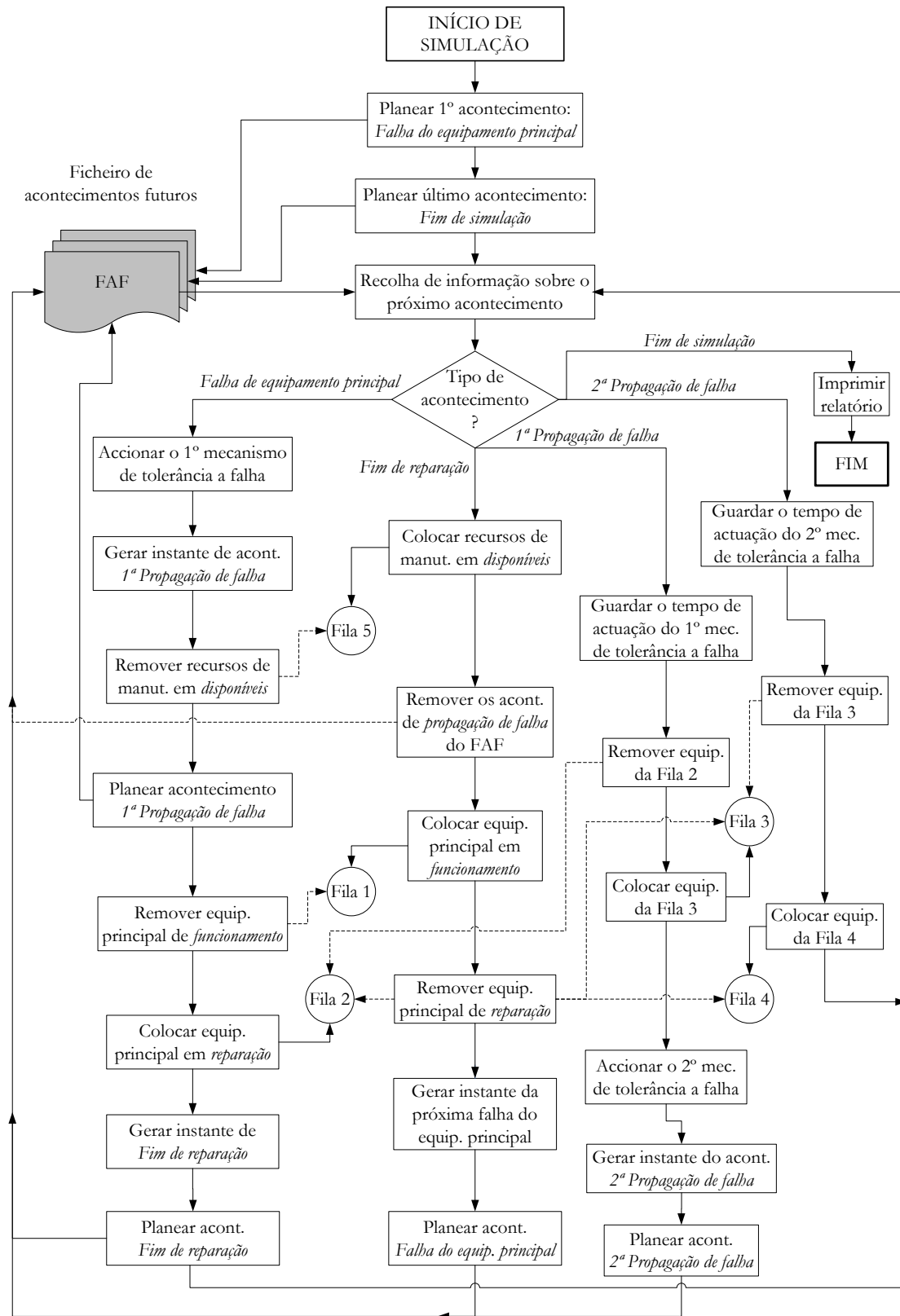


Figura 2.8: Fluxograma da simulação relativa ao caso de estudo

Resultados da simulação

Antes de mostrarmos e discutirmos os resultados da simulação obtidos para o caso de estudo, apresentamos de seguida algumas considerações gerais sobre o tratamento estatístico dos resultados da simulação, incluindo o modo como se estabelece o instante de fim de simulação que garante um erro nos resultados menor ou igual a um valor pré-estabelecido, β . Estas e outras questões relacionadas com a análise dos resultados da simulação são tratadas em detalhe no Anexo A.

Sendo a simulação uma técnica experimental, os resultados obtidos para as variáveis de decisão, a partir das quais se avalia o desempenho do sistema em análise, devem ser tomados com algum cuidado, principalmente quando estes são obtidos através de médias calculadas sobre poucas replicações independentes [Averill e Kelton, 1991; Rodrigues, 1988]. Normalmente, em cada corrida de simulação obtém-se um valor possível para cada uma dessas variáveis. O valor duma variável de decisão X pode, assim, ser estimado pela média de uma amostra de R realizações individuais x_i de X .

$$X \approx \bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.57)$$

Para aferir da “qualidade” da estimativa calculada, é importante dispor de uma medida de confiança, expressa, frequentemente, na forma de intervalos de confiança, ou através do coeficiente de variação. O intervalo de confiança para uma estimativa da média para um grau de confiança α de $100(1-\alpha)$ % ($0 < \alpha < 1$) será dado por:

$$\bar{X} \pm t_{R-1, 1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{R}} \quad (2.58)$$

onde $t_{R-1, 1-\alpha/2}$ representa o valor da distribuição *t-Student* com $R-1$ graus de liberdade e S^2 a variância da amostra (Equação A.2).

Por vezes pretende-se determinar que dimensão deve ter a amostra de modo a obter-se uma estimativa com uma precisão relativa pré-especificada. A partir de um número reduzido de replicações n , pode calcular-se uma estimativa da variância, $S^2(n)$, para uma determinada grandeza. Se admitirmos que esta estimativa não se altera significativamente com o número de replicações, podemos determinar qual a dimensão que a amostra deveria ter para se obter uma estimativa com a precisão pretendida. Apresenta-se de seguida o procedimento para o cálculo

do número de replicações necessárias para se obter uma estimativa da média $\mu = E(X)$ com um erro especificado.

Comecemos por definir o modo de medir o erro da estimativa X (suspende-se a dependência de n dado que o número de replicações pode ser uma variável aleatória). Se $\bar{X}$ (valor médio de X) estimado é tal que $|\bar{X} - \mu| = \beta$, então dizemos que $\bar{X}$ tem um erro absoluto de β .

Considere-se, agora, que se pretende construir um intervalo de confiança para μ a partir de um número reduzido de replicações n . Se se assumir que $S^2(n)$ estimada não se altera (significativamente) com o aumento do número de replicações, então o número total de replicações, $N_\alpha^*(\beta)$, necessário para obter um erro absoluto de β , é calculado de forma aproximada pela seguinte equação:

$$N_\alpha^*(\beta) = \min \left\{ r \geq n : t_{r-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{r}} \leq \beta \right\} \quad (2.59)$$

O valor de $N_\alpha^*(\beta)$ pode ser calculado iterativamente, aumentando r até um valor para o qual

$$t_{r-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{r}} \leq \beta \quad (2.60)$$

Em alternativa, $N_\alpha^*(\beta)$ pode ser aproximado pelo menor inteiro r que satisfaz,

$$r \geq S^2(n) \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{\beta} \right)^2 \quad (2.61)$$

onde z é a variável normal reduzida.

A utilização de uma amostra reduzida para estimar $S^2(n)$ pode resultar numa sobre-estimativa. Um processo de reduzir esse factor consiste em rever a estimativa após a realização de cada simulação adicional, até se obter a precisão pretendida.

Se $N_\alpha^*(\beta) > n$ e se se efectuarem $N_\alpha^*(\beta) - n$ replicações adicionais da simulação, então o estimador $\bar{X}$ baseado no número de replicações iniciais $N_\alpha^*(\beta)$ deverá ter um erro absoluto de aproximadamente β . A precisão da Equação (2.59) depende de quanto a variância estimada $S^2(n)$ se aproxima da $Var(X)$.

Como se referiu acima, pode estabelecer-se *a priori* um limite do erro e determinar o número de replicações necessárias para que os resultados da simulação apresentem um erro não superior a β . Deste modo, é possível obter por Simulação de Monte Carlo resultados comparáveis com os obtidos através de qualquer outro método, sendo mesmo utilizado frequentemente como método de referência para validar outros métodos.

Feita esta breve introdução, passemos agora à apresentação e análise dos resultados da simulação. Na Tabela 2.8 mostram-se os valores dos índices de fiabilidade do caso de estudo, obtidos em 10 corridas (*runs*) de simulação, utilizando o modelo simulação representado pelo fluxograma da Figura 2.8.

Tabela 2.8: Resultados de 10 runs de simulação

runs	Probabilidades dos estados				Tempos médios de ocupação dos estados				frequências de passagem nos estados			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0,98055	0,008574	0,007132	0,003743	100,148	0,8963	0,991844	1,28302	0,009791	0,00979	0,007191	0,002763
2	0,980623	0,008453	0,007138	0,003786	101,904	0,899336	0,998821	1,27389	0,009623	0,009622	0,007146	0,002815
3	0,980258	0,008495	0,007128	0,004119	98,9161	0,898121	0,993133	1,28659	0,00991	0,009909	0,007278	0,002809
4	0,980192	0,008479	0,007298	0,004031	99,3606	0,90011	0,995149	1,27805	0,009865	0,009864	0,007334	0,002841
5	0,98064	0,00832	0,007069	0,003971	100,26	0,891651	0,988209	1,28551	0,009781	0,00978	0,007153	0,002778
6	0,980252	0,008479	0,007169	0,004099	98,8756	0,895734	0,991609	1,31818	0,009914	0,009913	0,00723	0,002806
7	0,980207	0,00848	0,007282	0,004031	99,0308	0,897243	0,998023	1,26217	0,009898	0,009897	0,007296	0,002877
8	0,980553	0,008515	0,00711	0,003822	99,8323	0,897605	0,979074	1,30436	0,009822	0,009821	0,007262	0,0027
9	0,980197	0,008402	0,007016	0,004385	98,5122	0,894735	1,00418	1,24878	0,00995	0,009949	0,007286	0,002871
10	0,980158	0,008372	0,007197	0,004273	99,1762	0,897794	0,997912	1,29157	0,009883	0,009882	0,007312	0,002844
Média	0,98036	0,00846	0,00715	0,00403	99,602	0,89686	0,99380	1,28321	0,00984	0,00984	0,00725	0,00281
D.Padrão	0,00020	0,00007	0,00009	0,00021	0,99079	0,00243	0,00689	0,01972	0,00010	0,00010	0,00007	0,00005

Cada índice de fiabilidade é estimado pelo valor médio de uma amostra de 10 elementos. Os resultados apresentam-se na penúltima linha da Tabela 2.8. Conhecendo o desvio padrão de cada amostra e fixando um nível de confiança ($1-\alpha$), estabelece-se um intervalo de confiança para cada estimativa média. Na Tabela 2.9 mostram-se os intervalos de confiança para as estimativas dos índices de fiabilidade do caso de estudo, considerando $\alpha=0.05$.

Tabela 2.9: Índices de fiabilidade – Simulação de Monte Carlo

Índices de Fiabilidade	Estado i			
	1	2	3	4
Probabilidade	[0.9802; 0.9805]	[0.00842; 0.00850]	[0.00709; 0.00721]	[0.00390; 0.00416]
Tempo médio no estado (h)	[98.99; 100.22]	[0.895; 0.8984]	[0.9895; 0.9981]	[1.271; 1.2954]
Frequência	[0.00978; 0.0099]	[0.00978; 0.0099]	[0.00721; 0.007293]	[0.00278; 0.00284]
Disponibilidade	[0.995827; 0.996113]			
Indisponibilidade	[0.00390; 0.00416]			

Por outro lado, se pretendermos, por exemplo, o valor da probabilidade do estado 1 com uma precisão ou erro inferior a 10^{-4} , teríamos de efectuar um número de replicações da simulação, $N_{\alpha}^*(\beta)$ dado pela Equação (2.59). Na Tabela 2.10 mostram-se os cálculos efectuados para esse valor.

Tabela 2.10: Resultados de replicações adicionais da simulação

r	$r-1$	$1-\alpha/2$	$S^2(n)$	$t_{r-1,1-\alpha/2}$	$t_{r-1,1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{r}}$
10	9	0,975	0,00000004	2,262	0,000143061
11	10	0,975	0,00000004	2,228	0,000134353
12	11	0,975	0,00000004	2,201	0,000127075
13	12	0,975	0,00000004	2,179	0,000120869
14	13	0,975	0,00000004	2,16	0,000115457
15	14	0,975	0,00000004	2,145	0,000110767
16	15	0,975	0,00000004	2,131	0,00010655
17	16	0,975	0,00000004	2,12	0,000102835
18	17	0,975	0,00000004	2,11	9,94664E-05
19	18	0,975	0,00000004	2,101	9,64005E-05
20	19	0,975	0,00000004	2,093	9,36018E-05

Verifica-se então que com 18 replicações da simulação teríamos um erro absoluto inferior a 10^{-4} na estimativa de probabilidade do estado 1. Dispondo-se já dos resultados de 10 *runs*, obter-se-ia o objectivo pretendido com 8 replicações adicionais.

2.4 Análise comparativa dos resultados obtidos por várias metodologias

Nas secções anteriores foram apresentadas várias metodologias de análise e avaliação da fiabilidade de sistemas markovianos, semi-markovianos e não-markovianos. Deu-se no entanto, especial atenção às metodologias adequadas para sistemas não-markovianos, dado que os sistemas com processos de atraso na propagação de erros pertencem a esta classe de sistemas. Nesta classe inclui-se a maioria dos sistemas de produção industriais.

Todas as metodologias apresentadas foram aplicadas numericamente ao mesmo caso de estudo. Assim, comparando os resultados obtidos pelas várias metodologias, pode avaliar-se as alterações provocadas nos valores dos índices de fiabilidade pelas formas das distribuições dos processos.

Considerem-se os resultados relativos às probabilidades dos estados do caso de estudo avaliadas nos três cenários distintos: markoviano, semi-markoviano e não-markoviano. Para este último cenário foram apresentadas três metodologias. Embora apenas a metodologia *DepCim* produza resultados exactos, mostrámos também que se podem obter resultados com a precisão pretendida através da simulação. Além disso, esta técnica é a mais utilizada nesta classe de sistemas devido à sua complexidade. Assim, na comparação das probabilidades dos estados tomaram-se os resultados obtidos pelas seguintes metodologias:

- Cadeia de Markov (sistema markoviano);
- Cadeia de Markov Embebida (sistema semi-markoviano);
- Simulação (sistema não-markoviano).

Como se usaram valores médios dos processos do comportamento idênticos em todas as metodologias, as diferenças nos valores das probabilidades (e nos outros índices de fiabilidade) devem-se, unicamente, à forma das distribuições dos referidos processos. Estas diferenças permitem quantificar o erro introduzido pela hipótese markoviana nos valores das probabilidades dos estados, admitindo que de facto o sistema em análise apresenta um comportamento não-markoviano. De igual modo se pode avaliar o erro introduzido por esta hipótese para o caso do sistema ser semi-markoviano.

Os erros obtidos, bem como os valores das probabilidades dos estados, a partir dos quais são calculados estes erros, apresentam-se na Tabela 2.11. Saliente-se que as probabilidades dos estados 1 a 4 para o caso não-markoviano foram calculadas por valores médios de 18 corridas de simulação cada uma delas de duração equivalente a 10^5 horas de funcionamento do sistema real.

Tabela 2.11: Probabilidades dos estados e erros obtidos pela hipótese markoviana

Estado i	Markov	Semi-Markov		Não-Markov	
	CTMC	Cadeia de Markov Embutida	Erro (%)	Simulação	Erro (%)
1	9.804×10^{-1}	9.804×10^{-1}	0	9.8041×10^{-1}	0
2	6.536×10^{-3}	7.715×10^{-3}	-15.3	8.461×10^{-3}	-22.8
3	5.602×10^{-3}	6.275×10^{-3}	-10.7	7.064×10^{-3}	-20.7
4	7.469×10^{-3}	5.618×10^{-3}	32.9	4.066×10^{-3}	83.7

Destes resultados há a salientar os elevados valores dos erros e o facto de, nuns casos estes apresentarem valores positivos, e noutros casos apresentarem valores negativos como se salienta na Figura 2.9. Estes aspectos serão objecto duma análise detalhada na secção seguinte.

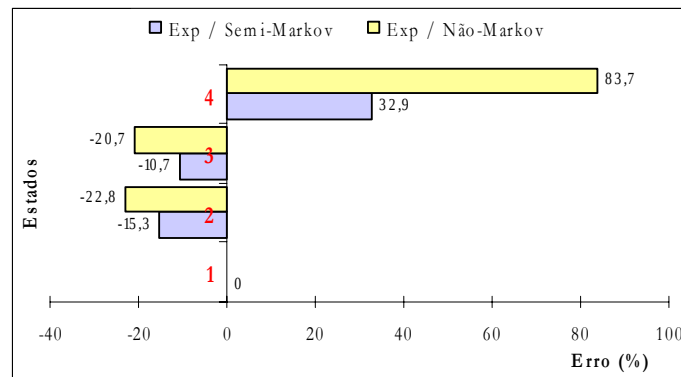


Figura 2.9: Gráfico de erros

No ponto 2.3.4.1 enumeraram-se algumas desvantagens da utilização do método dos estados fictícios em processos com funções densidade de probabilidade muito estreitas, próximas da função Dirac, Estas desvantagens prendem-se com o facto de o número necessário de estados adicionais crescer rapidamente à medida que as distribuições que pretendemos simular se tornam muito estreitas. No estudo que se apresenta seguidamente mostra-se uma estimativa do erro cometido quando aproximamos processos determinísticos (Dirac) por processos exponenciais em série.

Os valores (aproximados) que se obtém pelo método dos estados fictícios podem, também, ser obtidos pela metodologia *DepCim*. Para isso, as funções densidade de probabilidade dos processos hiperexponenciais serão substituídas por distribuições de *Erlang* de ordem k ($Erlang_k$) e parâmetro $\mu_{En}=k/mp_j$, em que mp_j representa a média do processo hiperexponencial p_j , e k o números de sub-processos exponenciais em série utilizados para aproximar p_j .

Por exemplo, considerem-se três situações distintas para aproximar o processo Dirac, p_{23} , do diagrama de estados da Figura 2.1: (i) dois sub-processos exponenciais em série; (ii) três sub-processos exponenciais em série; e (iii) dez sub-processos exponenciais em série. Pela metodologia *DepCim* podemos calcular as probabilidades dos estados para estas três situações, substituindo os sub-processos exponenciais em série por distribuições de Erlang de ordem k , com $k=2, 3$ e 10 , respectivamente.

No gráfico da Figura 2.10 mostram-se os erros cometidos nos valores das probabilidades dos estados 1, 2 e 3 quando se aproxima o processo Dirac p_{23} por 2, 3 e 10 sub-processos exponenciais em série. Verifica-se assim que, à medida que o número de estados fictícios aumenta, os erros em valor absoluto vão diminuindo.

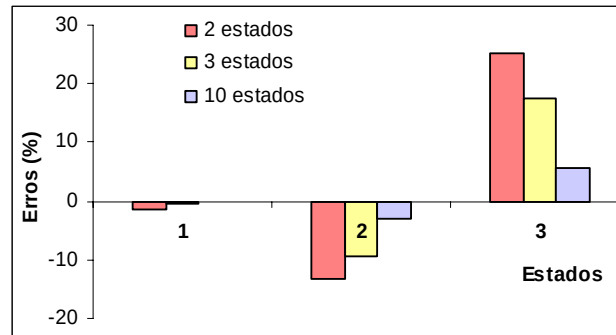


Figura 2.10: Gráfico dos erros obtidos pelo método dos estados fictícios

A Figura 2.11 ilustra a forma da distribuição de $Erlang_k$ para $k=\{1, 2, 3, 10, 50\}$. É notório que a dispersão da distribuição diminui à medida que o valor de k aumenta, tornando-se mais “próxima” da função Dirac. É esta “aproximação” que justifica a diminuição dos erros com o aumento de k .

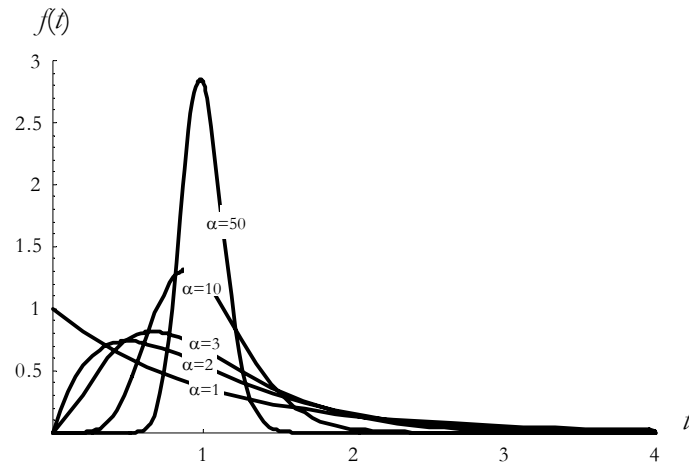


Figura 2.11: Função de Erlang para vários valores de k

2.5 Análise de erros de processos concorrentes

Depois de se ter mostrado que o erro introduzido pela adopção da hipótese markoviana pode ser considerável, embora haja situações em que esta hipótese não introduza erros significativos, importa ser-se capaz de prever, a partir da estrutura do modelo e das distribuições dos processos, as situações em que esse erro será mais elevado (inviabilizando a adopção da hipótese markoviana) e as situações em que os processos não sendo exponenciais, introduzem erros negligenciáveis (sendo portanto aceitável adoptar esta hipótese).

Esta questão coloca-se, principalmente, em sistemas reparáveis com mecanismos de tolerância a falhas. Normalmente, os diagramas de perdas destes sistemas comportam estados com processos concorrentes, simultaneamente activos: os processos de reparação e os processos de atraso da propagação do erro. Na Figura 2.12, ilustra-se parte do diagrama de perdas de um sistema deste tipo, designando p_{ij} o processo de reparação e p_{ik} o processo de propagação do erro.

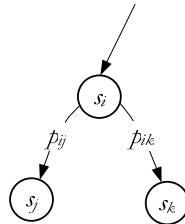


Figura 2.12: Dois processos concorrentes

Através deste diagrama podemos:

- (i) mostrar de que modo a forma das distribuições de processos concorrentes influencia os valores das probabilidades de transição de estado;
- (ii) avaliar o erro resultante da utilização de uma distribuição exponencial no processo p_{ik} ;
- (iii) estabelecer em que circunstâncias os erros assumem valores elevados, e por conseguinte, a hipótese markoviana não deve ser adoptada;
- (iv) analisar o sinal dos erros.

Começamos por avaliar as probabilidades de mudança de estado de s_i para s_j e alternativamente para s_k , para as três situações seguintes, mantendo constantes os tempos médios de execução dos processos p_{ij} e p_{jk} (respectivamente, m_{ij} e m_{ik}):

- os processos p_{ij} e p_{jk} são exponencialmente distribuídos;
- os processos p_{ij} e p_{ik} são modelados pelas distribuições exponenciais e Dirac, respectivamente;
- Os processos p_{ij} e p_{ik} são modelados pelas distribuições exponenciais e Erlang de ordem 2, respectivamente.

Na Tabela 2.12 caracterizam-se as funções densidade de probabilidade utilizadas neste estudo e apresentam-se as relações entre os parâmetros destas distribuições e os valores médios dos dois processos.

Tabela 2.12: Funções densidade de probabilidade

Distribuição	f.d.p.	média	Parâmetros
Exponencial	$\lambda_{\text{exp}} e^{-\lambda_{\text{exp}} t}$	m_{exp}	$\lambda_{\text{exp}} = 1 / m_{\text{exp}}$
Erlang ₂	$t \lambda_{\text{erl}}^2 e^{-\lambda_{\text{erl}} t}$	m_{erl}	$\lambda_{\text{erl}} = 2 / m_{\text{erl}}$
Dirac	$\delta(t - t_{\text{dir}})$	m_{dir}	$t_{\text{dir}} = m_{\text{dir}}$

Nas Tabelas 2.12 e 2.13 apresentamos, para vários valores de ρ (com $\rho = m_{ij} / m_{ik}$), as probabilidades de transição de estado para as três situações acima descritas, e os erros introduzidos ao considerarmos ambos os processos exponenciais, quando na realidade um deles é determinístico numa situação, e Erlang₂, na outra.

Tabela 2.13: Probabilidades de transição e erros introduzidos pela hipótese markoviana para dois processos concorrentes Exponencial/Dirac

$\log \rho$	p_{ij} Exp.	p_{ik} Exp.	p_{ij} Exp.	p_{ik} Dirac	Erro _{ij} (%)	Erro _{ik} (%)
	P_{ij}	P_{ik}	P_{ij}	P_{ik}		
1	0.50000	0.50000	0.632121	0.367879	-20.90	35.91
2	0.09091	0.90909	0.0951626	0.904837	-4.47	0.47
3	0.00990	0.99010	0.0099501	0.99005	-0.49	0.005
4	0.00100	0.99900	0.0009995	0.99900	-0.05	0.00

Tabela 2.14: Probabilidade de transição e erros introduzidos pela hipótese markoviana para dois processos concorrentes Exponencial/Erlang

$\log \rho$	$\hat{p}_{ij}$ Exp.	$\hat{p}_{ik}$ Erlang ₂	$Erro_{ij}$ (%)	$Erro_{ik}$ (%)
	P_{ij}	P_{ik}		
1	0.555556	0.444444	-10	12.5
2	0.0929705	0.907029	-2.22	0.23
3	0.0099255	0.990075	-0.25	0.0025
4	0.0009992	0.999001	-0.025	0.00

As Figuras 2.14 e 2.15 mostram os gráficos dos erros apresentados nas Tabelas 2.12 e 2.13, respectivamente, e uma possível curva de ajustamento dos valores. Para facilitar a representação gráfica, considerou-se que para o eixo das abcissas a escala seria logarítmica.

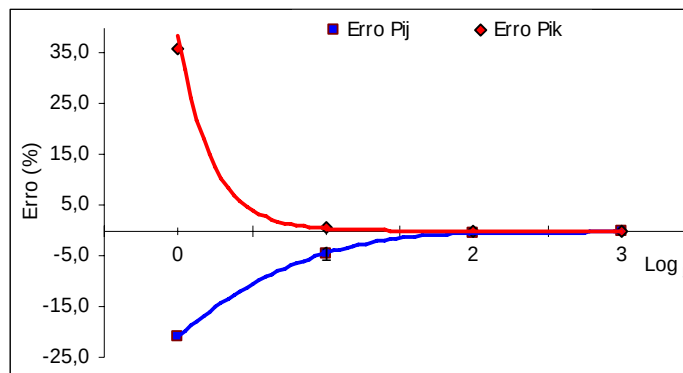


Figura 2.13: Gráfico de erros Exponencial/Dirac

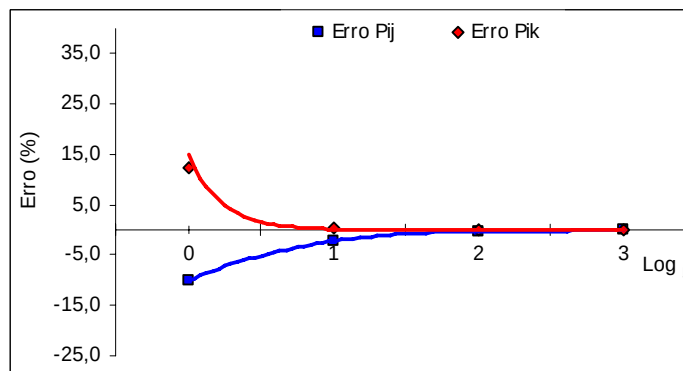


Figura 2.14: Gráfico de erros Exponencial/Erlang₂

2.5.1 Análise dos resultados

Pela análise dos resultados verifica-se que, independentemente da distribuição do processo p_{ik} , os erros introduzidos pela hipótese markoviana apresentam o maior valor para $\rho=1$; à medida que o valor de ρ aumenta, os erros tendem a tornar-se negligenciáveis. Em termos de sinal, os erros apresentam idêntico comportamento, quer quando p_{ik} é representado por uma distribuição Dirac, quer quando essa distribuição seja Erlang₂. Verifica-se ainda que, para qualquer dos estados e , independentemente do valor de ρ , os erros introduzidos pela hipótese markoviana são menores na situação em que a distribuição real do processo p_{ik} é Erlang₂, comparativamente com os erros obtidos quando a distribuição real de p_{ik} é Dirac.

2.5.2 Heurísticas

A análise dos resultados obtidos na Secção 2.5, corroborados pelos resultados obtidos na Secção 2.4, permitem estabelecer as seguintes heurísticas:

1. Em sistemas com processos não concorrentes as probabilidades de transição não dependem da forma das distribuições dos processos mas, apenas, dos seus valores médios. Nestas condições a hipótese markoviana pode ser adoptada mesmo que os processos sejam não exponenciais;
2. Em sistemas com processos concorrentes, com tempos médios da mesma ordem de grandeza, os erros introduzidos pela hipótese markoviana nos valores das probabilidades de estado são normalmente consideráveis, e tanto mais elevados em valor absoluto quanto maior for o “afastamento” entre a forma da distribuição exponencial e a forma da distribuição real.
3. Estes erros tem sinal positivo ou negativo consoante a distribuição (teórica) utilizada é mais ou menos dispersa do que a distribuição real, respectivamente. Consequentemente os processos concorrentes apresentam erros de sinal contrário. Acresce que os erros não dependem dos valores absolutos das médias dos processos concorrentes.
4. Para sistemas com processos concorrentes não exponenciais e tempos médios muito diferentes (valores de $\rho > 10$) a adopção da hipótese markoviana parece ser razoável, dada as simplificações que resultam em termos de cálculo, por um lado, e os reduzidos erros que introduz nos valores das probabilidades de estado, por outro.

2.6 Considerações finais

Frequentemente, em estudos de fiabilidade, a hipótese markoviana é adoptada mais por conveniência (dado que introduz uma grande simplificação de cálculo) do que por uma verdadeira convicção de que se trata de uma representação válida da realidade.

Esta hipótese, ainda que válida ou aceitável em inúmeras situações, não deve ser generalizada. A sua adopção facilita a obtenção do valor das variáveis e das medidas de desempenho dos sistemas, todavia, poderá também constituir uma importante fonte de erros.

As heurísticas apresentadas na Secção 2.5.2 poderão permitir, a partir da estrutura dos modelos e das distribuições dos processos, indicar em que circunstâncias a hipótese markoviana poderá ser adoptada em sistemas não markovianos, sem que o erro cometido seja significativo, e em que circunstâncias esse erro é elevado, obrigando nesses casos, a tratar os sistemas como não-markovianos.

Capítulo 3

Análise de sistemas com parâmetros difusos

No capítulo anterior foram abordadas algumas metodologias clássicas de análise e avaliação da fiabilidade, que tomam os parâmetros dos modelos como valores rígidos ou determinísticos. Acontece que em muitos sistemas industriais a incerteza associada aos parâmetros é elevada, no entanto, a maioria dos estudos de fiabilidade ignora-a. Neste capítulo aborda-se a análise da fiabilidade destes sistemas numa outra perspectiva, que passa pela introdução da incerteza dos parâmetros nos estudos de fiabilidade. Esta incerteza é modelada utilizando conjuntos difusos, o que introduz um factor adicional de complexidade de cálculo. De seguida apresentam-se as ferramentas básicas (aritmética intervalar e o princípio da extensão) nas quais se baseiam as metodologias disponíveis que permitem propagar de forma adequada a incerteza dos parâmetros (dados) aos índices de fiabilidade (resultados), através dos respectivos modelos. Estas metodologias mostraram-se, no entanto, inadequadas com modelos complexos como os que se têm em sistemas não-markovianos. São então apresentadas várias metodologias com aspectos inovadores (baseadas nas mesmas ferramentas básicas acima referidas), que permitem ultrapassar as limitações das metodologias existentes, possibilitando uma adequada propagação da incerteza dos parâmetros aos resultados através de funções complexas. Por fim apresenta-se uma análise comparativa destas metodologias, destacando as suas vantagens e desvantagens.

3.1 Introdução

Os estudos clássicos da fiabilidade recorrem a representações ou modelos baseados em duas hipóteses: a hipótese probabilística de que os estados do comportamento dum sistema são completamente conhecidos e as transições entre estados são descritas por probabilidades, e a hipótese binária de que qualquer componente ou equipamento apenas pode estar num de dois estados: no estado de falha, ou no estado de funcionamento. Destes estudos são obtidos índices de fiabilidade a partir de relações (implícitas ou explícitas) estabelecidas com os parâmetros de fiabilidade dos sistemas. Estes parâmetros são valores rígidos, independentemente da informação disponível para os estimar com a precisão necessária. Ignora-se deste modo a incerteza dos parâmetros de fiabilidade, tantas vezes presente em estudos desta natureza.

Nos estudos de sistemas reais surgem com frequência situações em que a incerteza associada às estimativas dos parâmetros de fiabilidade é elevada. Um estudo de fiabilidade nestas circunstâncias deverá ter em conta a incerteza dos parâmetros, incluindo-a nos cálculos efectuados (o que habitualmente não acontece nos estudos de fiabilidade) para a obtenção de resultados. A representação desta incerteza é possível através da utilização de conjuntos difusos dado tratar-se essencialmente de incerteza de natureza não probabilística. Em particular, nos estudos de fiabilidade de sistemas de produção industriais a incerteza nos parâmetros surge fundamentalmente com:

- A dificuldade de transposição de dados de fiabilidade de elementos (peças, componentes) idênticos instalados em equipamentos muito diferentes, ou em equipamentos semelhantes a funcionar em condições distintas, ou ainda, manobrados por operadores com diferentes pontos de vista acerca da manutenção.
- Quando se projecta um sistema industrial podemos apenas utilizar para os equipamentos que farão parte desse sistema taxas de falhas estimadas por analogia com equipamentos existentes, a funcionar certamente em condições diferentes e manobrados por outros operadores.
- As taxas de falhas sofrem alterações ao longo do tempo devido à idade dos equipamentos e a acções de *up-grade*.

Estas considerações motivaram o desenvolvimento do estudo apresentado neste capítulo, que representa uma extensão aos modelos de fiabilidade apresentados no capítulo anterior. Trata-se, da introdução de uma nova dimensão nos modelos clássicos de fiabilidade, através da modelação da incerteza dos parâmetros de fiabilidade com conjuntos difusos e a consequente propagação desta incerteza aos resultados (índices de fiabilidade). Deste modo, os modelos de fiabilidade mantêm uma componente probabilística, uma vez que o comportamento dos sistemas continua a ser descrito por processos estocásticos (markovianos ou não-markovianos) e ganham uma componente difusa que advém da utilização de parâmetros difusos. Para muitas situações estes modelos serão uma representação mais adequada dos sistemas que pretendem modelar.

Geralmente a utilização de parâmetros difusos em estudos de fiabilidade cria dificuldades de cálculo acrescidas, relativamente aos estudos com parâmetros rígidos, como se mostrará mais adiante. O resultado difuso para um determinado índice de fiabilidade não se faz, regra geral, calculando os seus valores extremos a partir dos valores extremos dos parâmetros e da respectiva expressão analítica [Miranda, 1998]. A questão que então se coloca é de como transmitir de forma adequada a incerteza contida nos parâmetros (*inputs*) aos índices de fiabilidade (*outputs*).

A aritmética intervalar e o princípio da extensão são dois métodos básicos fundamentais para a propagação da incerteza dos parâmetros ou variáveis de *input* de um modelo ao seu *output*. O modelo é a expressão analítica pela qual *inputs* rígidos dão como *output* um valor rígido. No âmbito deste trabalho, as expressões analíticas utilizadas serão as expressões dos índices de fiabilidade (probabilidades de estado, frequências, tempos médios, ...), obtidas pelos métodos analíticos apresentados no capítulo anterior (Cadeias de Markov, no caso dos sistemas markoviano, ou metodologia *DepCim*, no caso dos sistemas não-markoviano).

Com base na aritmética intervalar desenvolveram-se metodologias como o algoritmo DSW [Wei-min e Wong, 1985; Dong e Shah, 1987; Dubois, Fargier et al., 2004] ou o procedimento proposto por Miranda [1998] para domínios de aplicação mais específicos. Na secção seguinte mostra-se que estas metodologias apresentam limitações importantes quando implementadas a expressões analíticas de índices fiabilidade de sistemas markovianos, e inadequadas para sistemas não-markovianos devido à maior complexidade das expressões analíticas dos índices de fiabilidade.

Desenvolveram-se então quatro abordagens diferentes que permitem ultrapassar as limitações das abordagens estudadas, fundamentalmente com sistemas não-markovianos. Quando aplicadas ao mesmo caso de estudo e nas mesmas circunstâncias, umas mostraram-se mais adequadas que outras. Três destas abordagens baseiam-se no princípio da extensão e na discretização das variáveis de *input* do modelo, diferindo entre elas na forma como esta discretização é efectuada: (i) fazendo uma partição do universo de discurso das variáveis de *input* em intervalos de pequena amplitude, (ii) tomando valores do universo de discurso das variáveis de *input* de uma forma aleatória e (iii) através de cortes- α das funções de pertença das variáveis de *input*. A quarta abordagem baseia-se nos cortes- α das funções de pertença das variáveis de *input* e recorre a métodos de optimização não linear com restrições para a obtenção da distribuição de possibilidades do *output*.

Por fim, saliente-se que embora estas abordagens tenham sido desenvolvidas e implementadas no âmbito de estudos de fiabilidade, são à semelhança das abordagens estudadas, completamente genéricas. O modelo é uma expressão analítica do tipo $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, as variáveis de *input* $x_1, x_2, \dots, x_n$ podem ser valores rígidos e/ou números difusos e o *output* é a distribuição de possibilidades de y .

Por razões que se prendem, principalmente, com a simplicidade de representação, serão utilizados números difusos triangulares para modelar a incerteza dos parâmetros, sem que daí resulte qualquer perda de generalidade para as abordagens apresentadas.

No diagrama da Figura 3.1, mostra-se em linha gerais, a estrutura do trabalho apresentado neste capítulo e o seu enquadramento no âmbito do projecto de doutoramento.

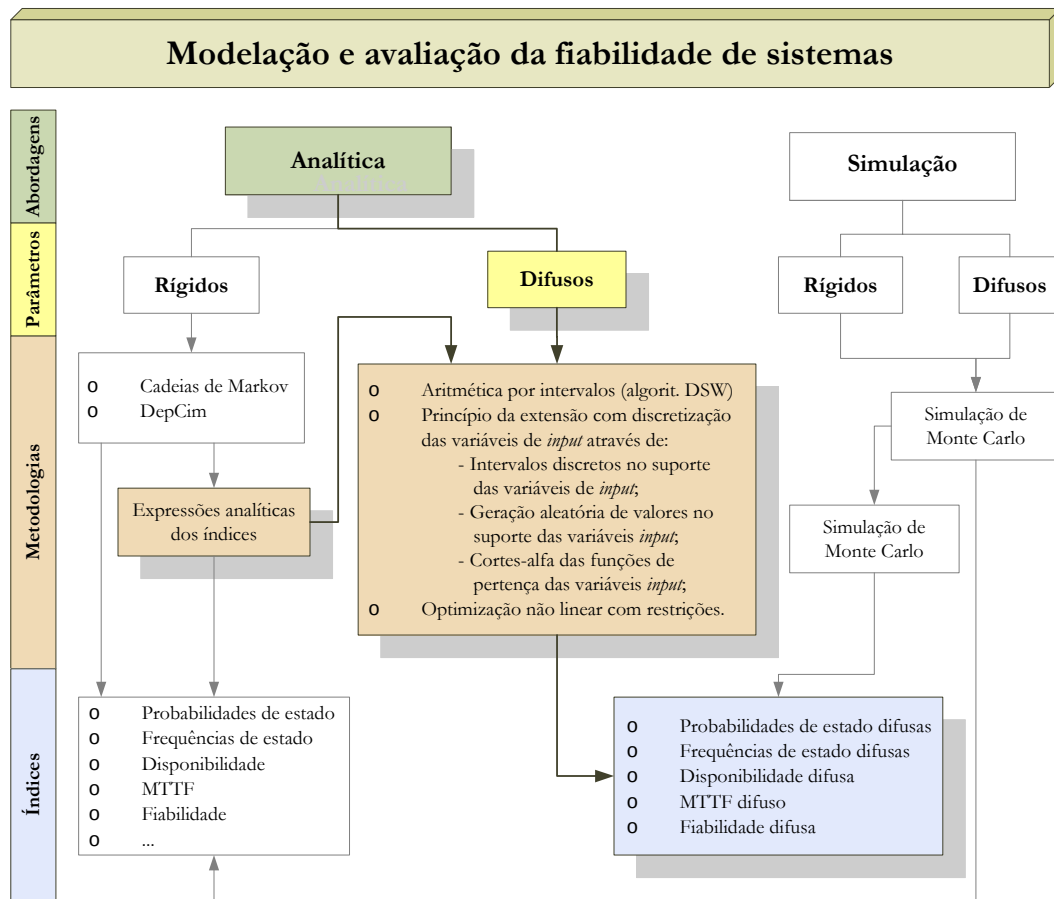


Figura 3.1: Enquadramento do Capítulo 3 no âmbito da dissertação

3.1.1 Organização do capítulo

Nos próximos pontos apresenta-se uma introdução dos conceitos base relativos à modelação difusa da fiabilidade, uma exposição das ferramentas base da aritmética difusa: a (i) aritmética intervalar com cortes- α e; (ii) princípio da extensão, e uma breve introdução aos métodos que permitem colapsar um resultados difuso, expresso por um função pertença, num resultado rígido. Na Secção 3.1.6 apresenta-se o caso de estudo que servirá de “laboratório de ensaio” para todos os desenvolvimentos apresentados posteriormente. É representado através do diagrama de estados conjuntamente com as funções de pertença que caracterizam os parâmetros de fiabilidade.

Na Secção 3.2 apresentam-se o algoritmo DSW e o procedimento apresentado por Miranda [1998] com implementação ao caso de estudo, tomando os processos do comportamento por

markovianos. Discute-se os problemas e limitações destas abordagens e mostra-se ainda como se obtêm as combinações de valores dos parâmetros com as quais se determinam os valores de maior amplitude dos resultados (no caso presente as probabilidades difusas dos estados).

Na secção seguinte introduzem-se as metodologias desenvolvidas no âmbito deste projecto que permitem a propagação da incerteza dos *inputs* aos *outputs* através de expressões analíticas complexas. Mostra-se também a implementação destas metodologias ao caso de estudo, admitindo o comportamento não-markoviano dos processos.

Na Secção 3.4 são discutidas as várias metodologias apresentadas na secção anterior destacando as vantagens e desvantagens de cada uma com base nos resultados obtidos.

Finalmente na Secção 3.5 mostra-se um estudo de análise de sensibilidade efectuado à dispersão dos parâmetros, evidenciando a influência de alterações da incerteza dos dados na incerteza dos resultados.

3.1.2 Sistemas difusos

A análise e avaliação da fiabilidade de sistemas faz-se recorrendo com frequência a ferramentas baseadas em cadeias de Markov, admitindo nestas circunstâncias que o sistema é markoviano. Neste tipo de sistemas assume-se que a transição entre estados se faz com probabilidades conhecidas. No modelo de Markov mais utilizado estas probabilidades são constantes permitindo uma complexidade mínima. Ora, em contextos de grande incerteza, haverá dificuldades no estabelecimento das probabilidades de transição entre estados e, eventualmente, na determinação inequívoca dos estados do sistema. Acontece por vezes, não ser possível a obtenção do conjunto exaustivo de estados do sistema. Teremos, deste modo, segundo [Bhattacharyya, 1998] um sistema markoviano difuso.

Uma situação semelhante poderá ocorrer com os sistemas não-markovianos em ambientes de grande incerteza. Por analogia falaríamos, então, de sistemas não-markovianos difusos. A solução dos modelos difusos (markovianos ou não-markovianos) não é tão fácil de obter como a solução dos modelos clássicos. Os modelos difusos requerem a avaliação da possibilidade de eventos difusos, pelo facto de usarem probabilidades difusas onde os modelos clássicos usam probabilidades rígidas, o que adiciona um elemento extra de complexidade aos modelos difusos.

A adopção de taxas de transição difusas entre estados (parâmetros), como pretendemos introduzir no estudo apresentado neste capítulo, conduz-nos a probabilidades de estado também difusas. Tem-se deste modo, modelos markovianos difusos ou modelos não-markovianos difusos, com estados bem definidos mas onde a probabilidade de um estado operacional ou de um estado de falha é representada por um número difuso com uma função de pertença contínua [Tanaka, 1983; Misra, 1990]. Como consequência da utilização de parâmetros difusos, qualquer outro índice de fiabilidade é, também, um número difuso. Infelizmente, os índices de fiabilidade não poderão ser obtidos substituindo nas expressões analíticas, as taxas crispadas por taxas difusas. Nestas circunstâncias a incerteza nos resultados seria maior que a necessária como se mostra mais à frente. Refira-se ainda que estes modelos cabem no quadro alargado de modelos de fiabilidade definido por [Tanaka, 1983; Cai, Wen et al., 1991; Utkin, 1995].

Funções de pertença

Na teoria clássica de conjuntos cada conjunto A tem associada um função característica $\epsilon(x)$, definida no conjunto universal X , do seguinte modo:

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases} \quad (3.1)$$

Na teoria dos conjuntos difusos esta função característica é generalizada dando origem à *função de pertença* de um elemento x do conjunto universal X a um conjunto A , $\mu_A(x)$, permitindo associar a cada elemento do conjunto X graus de pertença a A . Deste modo o conjunto A constituído pelos pares $(x, \mu_A(x))$ e caracterizado pela função de pertença que lhe está associado é denominado conjunto difuso [Klir e Yuan, 1995]. A representação de um conjunto difuso A por uma função de pertença é feita como se mostra na Figura 3.2.

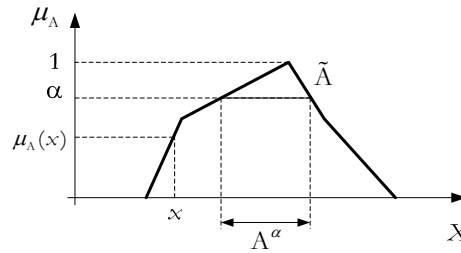


Figura 3.2: Representação da função de pertença do conjunto difuso A

O contradomínio da função de pertença pode ser qualquer, mas normalmente por simplicidade e convenção considera-se o intervalo $[0, 1]$, e portanto:

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]. \quad (3.2)$$

Um conceito importante nos conjuntos difusos é o conceito de corte- α [Klir e Yuan, 1995]. Para um conjunto difuso A e um número $\alpha \in [0, 1]$, o corte- α determina um intervalo cujos elementos têm um grau de pertença a A maior ou igual a α , i.e.,

$$A^\alpha = \{x: \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (3.3)$$

Os corte- α também permitem representar números difusos. É a chamada representação horizontal e corresponde aos conjuntos $\{A^\alpha: \alpha \in (0, 1]\}$, i.e., o conjunto de todos os cortes- α do conjunto difuso. A partir dos cortes- α pode determinar-se o valor de pertença de qualquer elemento x a A do seguinte modo [Dubois, Ostasiewick et al., 2000a]:

$$\mu_A(x) = \sup \{\alpha \in (0, 1]: x \in A^\alpha\} \quad (3.4)$$

Números difusos

Designa-se por quantidade difusa qualquer conjunto difuso normal (um conjunto difuso diz-se *normal* quando existe pelo menos um valor de x tal que $\mu_A(x) = 1$) definido numa recta real [Dubois e Prade, 2000b]. Os intervalos difusos e os números difusos são casos particulares de quantidades difusas.

Pelas razões acima apontadas serão utilizados no presente trabalho números difusos triangulares. Um número difuso triangular, $\tilde{A}$, pode ser definido por um terno $[a_1, a_2, a_3]$. Ao parâmetro central do terno, a_2 , é atribuído o grau de pertença máximo, i.e., $\mu_A(a_2) = 1$, representando a_1 e a_3 os limites inferior e superior do conjunto de todos os elementos de X que têm um grau de pertença a $\tilde{A}$ positivo. Um número difuso triangular pode considerar-se um caso particular de um número trapezoidal definido por $[a_1, a_2, a_3, a_4]$, em que $a_2 = a_3$. Em estudos de fiabilidade os números triangulares e os números trapezoidais são os mais utilizados, devido, essencialmente, à sua simplicidade e ao facto de serem uma representação adequada para descrever imprecisão, incerteza, e subjectividade dos dados inerentes relativos a falhas de equipamentos ou a falhas humanas. São também de fácil representação e de interpretação quase que intuitiva.

Um número triangular A (ver Figura 3.3) definido por $[a_1, a_2, a_3]$ com cortes- α , A^α , representa-se do seguinte modo: $A^\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha]$.

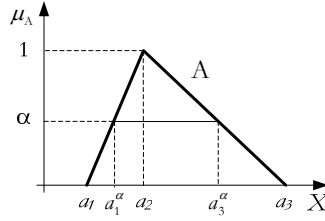


Figura 3.3: Representação gráfica de um número difuso triangular

Pela análise da Figura 3.3 estabelecem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} a_1^\alpha &= (a_2 - a_1)\alpha + a_1 \\ a_3^\alpha &= a_3 - (a_3 - a_2)\alpha \end{aligned} \quad (3.5)$$

O corte- α define um intervalo de confiança do número difuso triangular A que pode ser representado por:

$$A^\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha] \quad (3.6)$$

Saliente-se que neste contexto a designação de intervalo de confiança não se relaciona com conceitos estatísticos clássicos mas com o discurso de um conjunto difuso. Neste sentido, um intervalo de confiança α corresponde ao conjunto de corte de nível α definido em relação à função pertença de um conjunto difuso. Se $\alpha=0$, o intervalo de confiança define a dispersão máxima da função de pertença ou o suporte do conjunto difuso. A aritmética dos números difusos deriva da aritmética dos intervalos de confiança.

3.1.3 Operações com números difusos

A noção de número difuso favoreceu o desenvolvimento de uma ferramenta fundamental para muitas aplicações, designada por aritmética difusa, que consiste na execução de operações aritméticas com números difusos [Klir e Yuan, 1995; Ross, 1995]. Para efectuar estas operações pode recorrer-se a dois métodos: a aritmética intervalar ou o princípio da extensão.

3.1.3.1 Aritmética intervalar

A utilização da aritmética intervalar para efectuar operações aritméticas com números difusos assenta em duas propriedades dos números difusos:

1. um conjunto difuso, e por conseguinte um número difuso pode ser representado de uma forma única pelos seus cortes- α ;
2. os cortes- α de um número difuso são intervalos fechados de números reais para todo o $\alpha \in [0,1]$.

Estas propriedades permitem definir operações aritméticas com números difusos utilizando aritméticas intervalar (i.e., operações aritméticas com intervalos fechados) com todos os cortes- α dos números difusos envolvidos. Estas operações estão bem estabelecidas pelas matemáticas clássicas pelo que procedemos de seguida apenas a uma exposição geral destas operações para facilitar a apresentação da aritmética difusa no cálculo dos índices de fiabilidade.

Sejam A e B dois números difusos e $*$ um qualquer dos quatro operadores aritméticos básicos em intervalos fechados (adição, subacção, multiplicação e divisão). O número difuso $A*B$ é definido em através dos seus cortes- α por:

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}^{\alpha} (A * B) \quad (3.7)$$

Para um dado valor de α ,

$${}^{\alpha} (A * B) = {}^{\alpha} A * {}^{\alpha} B \quad (3.8)$$

As quatro operações aritméticas básicas com intervalos fechados são definidas do seguinte modo:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \ominus [c, d] = [a - c, b - d]$$

$$[a, b] \mid [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \text{ desde que } 0 \notin [c, d]$$

$$\begin{aligned} [a, b] / [c, d] &= [a, b] \mid [1/d, 1/c] \\ &= [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]. \end{aligned}$$

Quando $*$ representa a operação de divisão, é necessário que $0 \notin {}^{\alpha}B$ para todo o $\alpha \in (0,1]$. A utilização do princípio da extensão para executar operações aritméticas com números difusos permite obter o resultado das operações aritméticas através de:

$$\forall z \in R, (A * B)(z) = \sup_{z=x*y} \min [\mu_A(x), \mu_B(y)] \quad (3.9)$$

3.1.3.2 Princípio da extensão

O princípio da extensão desempenha um papel fundamental na transferência de conceitos dum conjunto base para conjuntos difusos. Pode ser entendido como uma metodologia geral para estender conceitos matemáticos determinísticos ao domínio dos conjuntos difusos. Este princípio formulado por Zadeh [1978] constitui uma das contribuições fundamentais no domínio da teoria dos conjuntos difusos.

Considere-se uma função $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(x)=y$, para $x \in X$ e $y \in Y$. A extensão de f à família de todos os subconjuntos de X e Y denotados por $\mathfrak{S}(X)$ e $\mathfrak{S}(Y)$, respectivamente, designa-se também por f e define-se por:

$$f: \mathfrak{S}(X) \rightarrow \mathfrak{S}(Y)$$

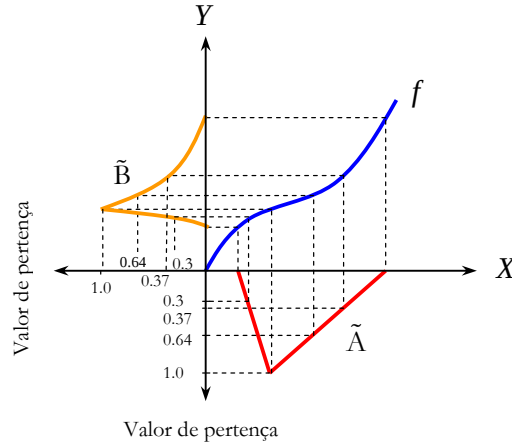
$$A \mapsto f(A) = \{y : y = f(x), x \in A\} \quad (3.10)$$

Pode ainda considerar-se a extensão de f aos subconjuntos difusos de X e Y . Esta extensão é conhecida como o princípio da extensão.

Seja $\tilde{A}$ um conjunto difuso em X . O princípio da extensão diz que a imagem de $\tilde{A}$ determinada pelo mapeamento $f: X \rightarrow Y$ é um conjunto difuso $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ em Y tal que o grau de pertença de cada valor $y \in Y$ a $\tilde{B}$ é dada por:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x: y=f(x)} [\mu_{\tilde{A}}(x)] & \text{se } \exists x: y = f(x) \\ 0 & \text{se não existe } x: y = f(x) \end{cases}, \quad (3.11)$$

como se ilustra na Figura 3.4.


 Figura 3.4: Ilustração do princípio da extensão com f contínuo

O princípio da extensão é facilmente generalizado quando a função f é definida num produto cartesiano. Sejam $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e Y universos de discurso e $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ n conjuntos difusos definidos em $X_1, X_2, \dots, X_n$. O produto cartesiano de $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ é definido pelo conjunto difuso $\tilde{A}$ de tal modo que:

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n \quad (3.12)$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)) \quad (3.13)$$

Sendo a função f definida de X sobre Y do seguinte modo: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com $x \in X$ e sendo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variáveis não interactivas (conceito equivalente ao conceitos de variáveis independentes na teoria das probabilidades, i.e., a atribuição de um valor a uma variável não influencia o valor atribuído a outra), o princípio da extensão permite então estabelecer o conjunto difuso $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ em Y do seguinte modo:

$$\tilde{B} = \{y, \mu_{\tilde{B}}(y) : y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ com } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X\} \quad (3.14)$$

O grau de pertença de cada valor $y \in Y$ a $\tilde{B}$ é dado por:

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \\ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)}} \min [\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)] & \text{se } \exists (x_1, \dots, x_n) : y = f(x_1, \dots, x_n) \\ \mu_{\tilde{B}}(y) = 0 & \text{se não existe } (x_1, \dots, x_n) : y = f(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3.15)$$

Quando os conjuntos X e Y são finitos podemos substituir *sup* por *max*. Na Equação (3.15) o operador *min* é apenas uma escolha dentro da família dos operadores referidos por normas triangulares.

O resultado da aplicação do princípio da extensão a funções de variáveis difusas é um número difuso. Em processos de tomada de decisão e na teoria de controlo torna-se por vezes necessário converter um resultado difuso num valor rígido. Este valor será, sob determinado ponto de vista, o mais representativo do resultado difuso. Naturalmente que a informação dada por numa função pertença é mais rica que a dada pelo valor rígido resultante do colapso desta função, pelo que esta operação só é levada a cabo nos casos estritamente necessários. Existem vários métodos disponíveis para efectuar o colapso de funções de pertença. Alguns destes métodos, porventura os mais utilizados, são referidos a seguir.

3.1.4 Métodos de colapsar resultados difusos

3.1.4.1 Introdução

O principal objectivo dos métodos de colapso é converter cada resultado difuso num número real (valor rígido). Esta necessidade de conversão encontra-se com mais frequência em controlo difuso, onde o *output* de um controlador necessita de ser expresso como um resultado rígido [Yi e Heng, 2002; Wu e Lin, 2002; Huang e Liu, 2002]. Por outro lado, a comparação ou ordenamento de conjuntos difusos ao longo de uma recta real [Buckley e Eslami, 2004; Zang, Wei et al., 2003; Detyniecki e Yager, 2000] surge em problemas difusos de tomada de decisão [Moon e Kang, 2001; Iwamoto, 2001; Lee-Kwang e Lee, 1999].

Como tem sido normalmente interpretado, o colapso de um *output* dado por um conjunto difuso consiste em determinar o valor rígido que, em sentido absoluto, é visto como o mais representativo desse conjunto. A comparação de dois conjuntos difusos ao longo de uma recta real consiste na determinação do conjunto de ordenação. O mesmo princípio aplica-se quando se considera a ordenação de mais que dois conjuntos difusos. Uma vez que o valor rígido resultante do colapso de um conjunto difuso deve ser o mais representativo desse conjunto, será razoável argumentar o seguinte: se os valores mais representativos de vários conjuntos difusos podem ser determinados, então, estes valores podem ser usados com o propósito da ordenação [Saade, 1996; Saade e Diab, 2000]. Na Figura 3.5 apresenta-se em termos esquemáticos o procedimento completo de obtenção de *outputs* rígidos a partir de *inputs* difusos/rígidos.

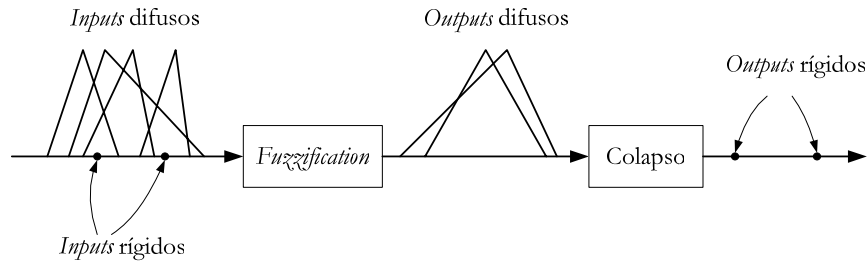


Figura 3.5: Procedimento para obtenção de *outputs* rígidos com *inputs* difusos/rígidos
[Saade, 1996]

É importante referir que o desenvolvimento do problema da comparação de conjuntos difusos confunde-se, em larga medida, com o problema relacionado com o colapso de resultados difusos. Saade e Schuwarzlander [1994] propõem uma solução para o problema da ordenação de conjuntos difusos onde o critério de decisão *standard* para a ordenação de intervalos rígidos é reformulado e generalizado para o tornar aplicável a conjuntos difusos. Os critérios, optimista de maximax, pessimista de maximin e o critério de Hurwicz [Arrow, Block et al., 1958; Baygun, 1995] para um parâmetro de $\frac{1}{2}$, normalmente aplicados na tomada de decisão sob incerteza não probabilística, i.e., quando não estão disponíveis distribuições de probabilidades, foram reformulados e generalizados para conjuntos difusos.

3.1.4.2 Métodos mais utilizados

Existem vários métodos disponíveis para colapsar conjuntos difusos. Todos eles apresentam vantagens e desvantagens quando são aplicados a um caso em concreto. Por serem os mais utilizados destacamos os seguintes:

1. Método do centro de gravidade
2. Método dos máximos das funções de pertença
3. Método da média dos máximos

Dada a vasta bibliografia existente sobre estes métodos, donde salientamos a título de exemplo: [Chu e Tsao, 2002; Klir, 1995; Ross, 1995; Pedrycz, 1993], não apresentaremos, nesta dissertação qualquer desenvolvimento sobre nenhum deles. Será, no entanto, apresentado no Capítulo 6 uma aplicação do método dos máximos das funções de pertença e do método do centro de gravidade.

3.1.4.3 Método de Saade

O método apresentado por Saade [1996] foi estabelecido com base nos problemas relacionados com a ordenação dos *outputs* difusos de controladores, cada um dos quais é colapsado dando como resultado de um particular valor rígido. Saade advoga que o colapso de resultados difusos deve ser feito do ponto de vista da sua ordenação, em vez de se olhar para a representação rígida de um *output* tomando-o como uma quantidade isolada. Sendo assim, procede à generalização do critério de Hurwicz (que é normalmente aplicado na ordenação de intervalos e que engloba os critérios maximin e o maximax) a conjuntos difusos resultando na aplicação de uma função de colapso não probabilística, que mapeia um conjunto difuso $C(z)$ num número rígido, do seguinte modo:

$$F_{\delta}[C(z)] = \int_0^1 [\delta c_1(\alpha) + (1 - \delta)c_2(\alpha)] d\alpha \quad (3.16)$$

onde $[c_1(\alpha), c_2(\alpha)]$ é o intervalo de corte de nível α de $C(z)$ e δ um parâmetro que toma valores no intervalo $[0, 1]$. A aplicação de (3.16) requer que o *output* seja um conjunto normalizado. A normalização de um conjunto difuso sub-normal é uma operação fácil de realizar [Bai, 2002; Wang, 2002].

O índice para a ordenação de conjuntos difusos, F_{δ} , pode ser ajustado para produzir uma ordenação de intervalos desde o critério mais optimista até ao critério mais pessimista. Valores de δ próximos de 0 correspondem a um pensamento optimista por parte do decisor, obtendo-se no caso extremo de $\delta=0$,

$$F_0(A) = \int_0^1 a_2(\alpha) d\alpha \quad (3.17)$$

correspondendo à aplicação do critério maximax.

Valores de δ próximos de 1 correspondem a um pensamento pessimista por parte do decisor, obtendo-se no caso extremo de $\delta=1$,

$$F_1(A) = \int_0^1 a_1(\alpha) d\alpha \quad (3.18)$$

Para $\delta=0.5$ o índice F_{δ} do método de ordenação de Saade corresponde ao critério da distância total (TDC) [Guo-Hong, Shi-Yi et al., 1998; Baygun, 1995].

3.1.5 Caso de estudo

O sistema apresentado na Figura 3.6 (adaptado de [Nunes, Faria et al., 2002], foi já utilizado como caso de estudo no Capítulo 2 e servirá também de caso de estudo para implementação de todas as metodologias ou abordagens apresentadas daqui em diante, e que constam do diagrama da Figura 3.1. Para este caso, dispomos já das expressões analíticas dos índices de fiabilidade e dos respectivos valores obtidos com parâmetros rígidos.

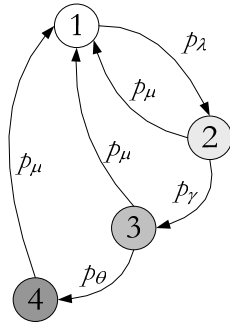
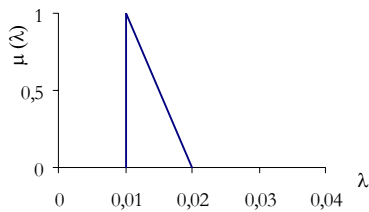


Tabela 3.1: Processos e taxas de transição

Processo	Taxa de transição
p_λ	λ
p_γ	γ
p_θ	θ
p_μ	μ

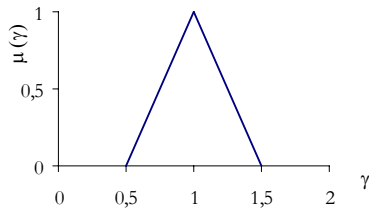
Figura 3.6: Diagrama de estados do sistema

Nas figuras seguintes caracterizam-se os parâmetros difusos do modelo utilizados neste estudo, através da representação gráfica e analítica das correspondentes funções de pertença.



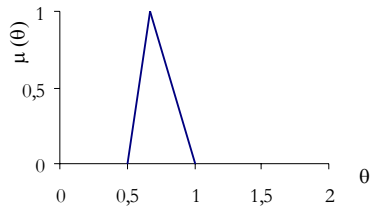
$$\tilde{\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0.01 \text{ e } x \geq 0.02 \\ 1 & \text{para } x = 0.01 \\ (0.02-x)/0.01 & \text{para } 0.01 < x < 0.02 \end{cases}$$

Figura 3.7: Função de pertença de $\tilde{\lambda}$



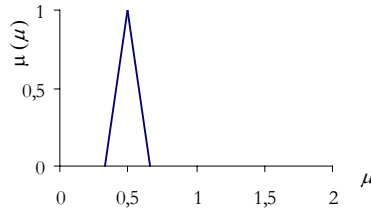
$$\tilde{\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0.5 \text{ e } x > 1.5 \\ (x - 0.5) / 0.5 & \text{para } 0.5 < x \leq 1 \\ (1.5-x) / 0.5 & \text{para } 1 < x \leq 1.5 \end{cases}$$

Figura 3.8: Função de pertença de $\tilde{\gamma}$



$$\tilde{\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0,5 \text{ e } x > 1 \\ (x - 0,5) / (1/6) & \text{para } 0,5 < x \leq 2/3 \\ (1-x) / (1/3) & \text{para } 2/3 < x \leq 1 \end{cases}$$

Figura 3.9: Função de pertinência de $\tilde{\theta}$



$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 1/3 \text{ e } x > 2/3 \\ (x - 1/3) / (1/6) & \text{para } 1/3 < x \leq 1/2 \\ (2/3 - x) / (1/6) & \text{para } 1/2 < x \leq 2/3 \end{cases}$$

Figura 3.10: Função de pertinência de $\tilde{\mu}$

Estes parâmetros serão utilizados quer na situação em que as distribuições de probabilidade dos tempos de permanência nos estados são tidas como exponenciais - sistema markoviano difuso, quer quando estas distribuições são não exponenciais - sistema não-markoviano difuso.

3.2 Metodologias de propagação da incerteza difusa

Na Secção 3.1.3 apresentaram-se as ferramentas básicas para o cálculo do *output* difuso de uma função f de variáveis difusas (variáveis de *input*). O problema que se coloca num estudo deste tipo é de como transmitir a incerteza dos parâmetros (variáveis de *input*), modelada por conjuntos difusos, aos resultados, conhecendo as expressões analíticas (genericamente representadas por $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$), que fazem o mapeamento do espaço dos *inputs* no espaço dos *outputs*.

Para situações concretas como as que se apresentam nesta secção, as características da função f obrigam a utilizar certos procedimentos ou metodologias baseados nas ferramentas básicas, para que a propagação da incerteza dos *inputs* ao *output* se faça de forma adequada. De seguida apresentam-se o PM, o algoritmo DSW e implementações às expressões analíticas das probabilidades dos estados do caso de estudo, admitindo a hipótese markoviana dos processos.

3.2.1 Procedimento apresentado por Miranda

Este procedimento consiste no re-arranjo duma função $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de tal modo que cada variável difusa não interactiva $x_1, x_2, \dots, x_n$ não apareça dividida por ela mesmo. A utilização da aritmética intervalar sobre a função obtida por este procedimento permite calcular o resultado difuso de $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Uma forma simples de garantir o re-arranjo pretendido passa por ter cada variável representada apenas uma vez na função f . Em sistemas muito simples, como no caso do exemplo apresentado a seguir, poderá resolver-se este problema dividindo a função f pela variável ou variáveis que se repetem, no entanto, para a maioria dos casos, este procedimento não resolve o problema.

Exemplo 3.1

Considere-se um modelo de Markov de um componente com dois estados: um estado de falha, f e um estado de funcionamento, s conforme se ilustra na Figura 3.11.

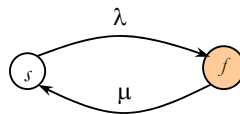


Figura 3.11: Diagrama de estados de um componente

As probabilidades de estado, P_s e P_f são dadas pelas seguintes expressões:

$$P_s = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \quad (3.19)$$

$$P_f = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \quad (3.20)$$

Considere-se, ainda, que a taxa de falha λ e o tempo médio de reparação r , são parâmetros incertos representados por números difusos triangulares definidos do seguinte modo:

$$\lambda \rightarrow \text{“mais ou menos 0.1 falhas/ano”} \rightarrow [0.08; 0.1; 0.12]$$

$$r \rightarrow \text{“cerca de 48 h”} \rightarrow [40; 48; 56]$$

Admitindo que o componente em análise trabalha 24 horas por dia e 365 dias por ano podemos representar a taxa de falhas por $\lambda \rightarrow [0.08/(24 \times 365); 0.1/(24 \times 365); 0.12/(24 \times 365)]$.

Para valores rígidos a taxa de reparação é o inverso do tempo médio de reparação, $\mu = \frac{1}{r}$. Esta relação também é válida para valores difusos de μ e r , uma vez que estes parâmetros são definidos apenas em R^+ . Temos, neste caso, uma taxa de reparação difusa:

$$\mu \rightarrow [1/56; 1/48; 1/40]$$

Calculando os valores mínimo e máximo da distribuição de possibilidades do estado s utilizando a Equação (3.2) obtêm-se os valores 0.7139 e 1.3993 respectivamente (Figura 3.12-a).

Se fizermos um re-arranjo das Equações (3.19) e (3.20), dividindo-as respectivamente, por μ e λ obtém-se:

$$P_s = \frac{1}{1 + (1/\mu)\lambda} \quad (3.21)$$

$$P_f = \frac{1}{1 + (1/\lambda)\mu} \quad (3.22)$$

Calculando de novo os valores mínimo e máximo da distribuição de possibilidades do estado s utilizando agora a Equação (3.4) obtêm-se os valores 0.9992 e 0.9996, respectivamente (Figura 3.12-b), que correspondem aos valores correctos.

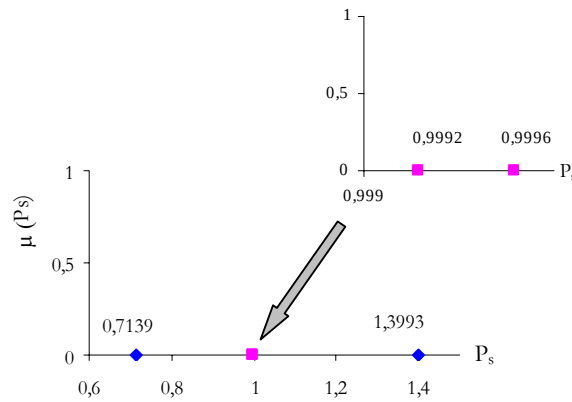


Figura 3.12: Amplitude máxima da distribuição de possibilidades do estado de sucesso

Comparando os valores obtidos por (3.2) com os obtidos por (3.5) verifica-se uma diferença muito grande entre eles. Esta incerteza adicional nos resultados obtidos por (3.2) deve-se ao facto de nesta expressão o parâmetro μ aparecer, simultaneamente, em numerador e em denominador.

3.2.2 Algoritmo DSW

O procedimento conhecido como algoritmo DSW é um método que permite o mapeamento do espaço dos *inputs* difusos no espaço dos *outputs* difusos. Este algoritmo combina o conceito de corte- α com as regras das operações binárias com intervalos. Baseia-se no princípio de que qualquer função de pertença pode ser representada por um varrimento contínuo de intervalos obtidos por cortes- α , com $\alpha=0^+$ até 1. A Figura 3.13 mostra uma função pertença típica com um intervalo associado a um valor específico de α .

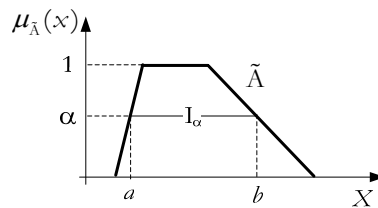


Figura 3.13: Intervalo correspondente a um cortes- α no conjunto difuso $\tilde{A}$

Suponhamos que temos um mapeamento de um *input* simples dado por $y = f(x)$ que pretendemos estender a conjuntos difusos $\tilde{B} = f(\tilde{A})$, decompondo $\tilde{A}$ numa série de

intervalos de cortes- α designados por I_α . Quando a função $f(x)$ é contínua e monótona em $I_\alpha=[a, b]$, o intervalo de $\tilde{B}$ para um particular valor de α , dito B_α pode ser obtido por:

$$B_\alpha = f(I_\alpha) = [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))] \quad (3.23)$$

Esta equação reduz o problema de análise intervalar para o mapeamento de uma função a um simples procedimento apenas com os pontos limites do intervalo.

Quando o mapeamento é dado por n *inputs* i.e., $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o espaço dos *inputs* pode ser representado por uma região Cartesiana n -dimensional. Sempre que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é não monótona, a Equação (3.23) torna-se inválida.

A implementação deste algoritmo faz-se percorrendo os seguintes passos:

1. Seleccionar um valor de $\alpha \in (0, 1]$;
2. Para esse valor de α , determinar o intervalo I_α na função de pertença de cada variável de *input*;
3. Utilizar a função $f(x)$ e as operações binárias com intervalos e calcular o intervalo da função de pertença do *output* para o nível α seleccionado;
4. Repetir os passos 1-3 para diferentes valores de α até se obter uma representação da solução a partir dos respectivos cortes- α .

Para ilustrar a implementação deste algoritmo, vamos considerar novamente o modelo de Markov de um componente com dois estados apresentado acima. Decompondo as funções de pertença das variáveis de *input* λ e μ , em três cortes- α , com $\alpha = 0^+, 0.5$ e 1 , temos os seguintes intervalos:

$$I_{0^+_\lambda} = [0.08/8760, 0.12/8760]$$

$$I_{0.5_\lambda} = [0.09/8760, 0.11/8760]$$

$$I_{1_\lambda} = [0.1/8760, 0.1/8760]$$

$$I_{0^+_\mu} = [1/56, 1/40]$$

$$I_{0.5_\mu} = [0.019345, 0.022917]$$

$$I_{1_\mu} = [1/48, 1/48]$$

Avaliando a distribuição de possibilidades da probabilidade (DPP) do estado s utilizando a Equação (3.19) e operações binárias com intervalos obtêm-se com (3.4) os seguintes intervalos para a probabilidade P_s :

$$B_{0^+} = \frac{[1/56, 1/40]}{[1/56, 1/40] + [0.08/8760, 0.12/8760]} = [0.713895, 1.39928]$$

$$B_{0.5} = [0.84367, 1.1840]$$

$$B_1 = [0.999452, 0.999452] = 0.999452$$

Na Figura 3.14-a mostra-se a curva da DPP do estado s obtida a partir destes intervalos. Por outro lado, a implementação do algoritmo DSW com a Equação (3.5) para os mesmos intervalos de corte das variáveis de *input*, produz a distribuição de possibilidade apresentada na Figura 3.14-b, cujo intervalo de maior dispersão coincide com o representado na Figura 3.12-b. Assim, a verdadeira DPP do estado s foi determinada pela utilização do algoritmo DSW conjuntamente com o procedimento apresentado na Secção 3.2.1.

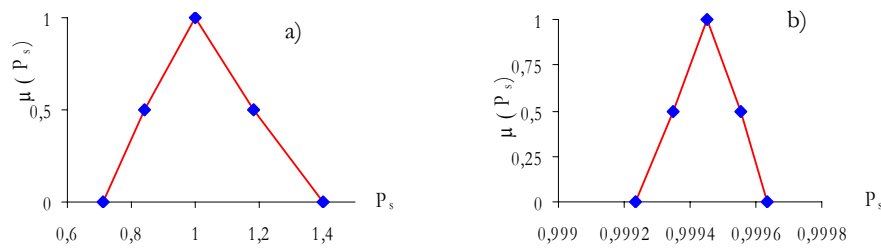


Figura 3.14: Distribuição de possibilidades de P_s com 3 cortes- α

Naturalmente, aumentando o número de cortes- α , melhora-se a “qualidade” da curva que representa a distribuição de possibilidades de um *output*, tornando-a cada vez mais próxima da verdadeira distribuição (quando o número de cortes- $\alpha \rightarrow \infty$). Contudo, a aproximação é, normalmente, boa com um pequeno número de cortes- α .

Uma das condições de um modelo de Markov difuso estabelece, como principal exigência, nunca termos uma possibilidade maior que zero para probabilidades fora do intervalo $[0,1]$. Ora, para o resultado apresentado na Figura 3.14-a, não só se verificam probabilidades fora do intervalo $[0,1]$, como essas probabilidades apresentam possibilidades maiores que zero, desrespeitando-se, assim, esta condição.

Aplicação do algoritmo DSW ao caso de estudo

Neste ponto pretendemos ilustrar a aplicação do algoritmo DSW ao cálculo das probabilidades difusas dos estados do sistema apresentado em 3.1.5, admitindo neste cálculo que os processos do comportamento são markovianos. Deste modo, as expressões analíticas das probabilidades dos estados, obtidas pelo método das Cadeias de Markov, são as seguintes:

$$P_1 = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \quad (3.24)$$

$$P_2 = \frac{\lambda\mu}{\gamma\lambda + \gamma\mu + \lambda\mu + \mu^2} \quad (3.25)$$

$$P_3 = \frac{\lambda\mu\gamma}{(\gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\mu + \theta)} \quad (3.26)$$

$$P_4 = \frac{\lambda\theta\gamma}{(\gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\mu + \theta)} \quad (3.27)$$

Qualquer destas expressões é função de parâmetros que constam, simultaneamente, em numerador e denominador. Operando uma transformação nas Equações (3.24) a (3.27), dividindo-as pelos respectivos numeradores, tal como fizemos com as Equações (3.19) e (3.20), obtêm-se as seguintes expressões:

$$P_1 = \frac{1}{1 + (1/\mu)\lambda} \quad (3.28)$$

$$P_2 = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\mu} + \frac{\gamma + \mu}{\lambda}} \quad (3.29)$$

$$P_3 = \frac{1}{1 + \frac{\theta + \mu}{\lambda} + \frac{\theta}{\mu} + \frac{\theta + \mu}{\gamma} + \frac{\mu(\theta + \mu)}{\gamma\lambda}} \quad (3.30)$$

$$P_4 = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\theta} + \frac{\mu^2}{\theta\lambda} + \frac{\mu}{\gamma} + \frac{\mu^2}{\gamma\lambda} + \frac{\mu^2}{\gamma\theta} + \frac{\mu^3}{\gamma\theta\lambda}} \quad (3.31)$$

No entanto, esta transformação não permite a obtenção das distribuições de possibilidades correctas para as probabilidades de todos os estados do sistema, aplicando o algoritmo DSW. Tal sucede, nomeadamente, com os estados 2 e 3. De facto, as transformação operadas nas Equações (3.12) e (3.13) não impediram que qualquer variável seja manipulada mais que uma vez na mesma expressão, ou tão pouco, não apareça a dividir directa ou indirectamente por ela própria. Vejamos mais detalhadamente, através do seguinte exemplo, o que motiva os resultados incorrectos para as probabilidades dos estados 2 e 3.

Sejam $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ números difusos definidos em R , e A^α , B^α e C^α cortes- α destes mesmos números difusos. Cada corte- α pode ser representado por um intervalo fechado de números reais do seguinte modo:

$$A^\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha]; \quad B^\alpha = [b_1^\alpha, b_3^\alpha] \quad \text{e} \quad C^\alpha = [c_1^\alpha, c_3^\alpha]$$

Considere-se agora que pretendemos determinar o valor de $\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} + \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}}$ pelas regras básicas das operações binárias com intervalos (neste caso divisão e adição). Por simplicidade de representação considere-se que para um valor concreto de α , $A^\alpha = A = [a_1, a_3]$, $B^\alpha = B = [b_1, b_3]$ e $C^\alpha = C = [c_1, c_3]$. Teríamos então:

$$\frac{A}{B} = \left[\min \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_3}, \frac{a_3}{b_1}, \frac{a_3}{b_3} \right), \max \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_3}, \frac{a_3}{b_1}, \frac{a_3}{b_3} \right) \right] \quad (3.32)$$

$$\frac{C}{A} = \left[\min \left(\frac{c_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_3}, \frac{c_3}{a_1}, \frac{c_3}{a_3} \right), \max \left(\frac{c_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_3}, \frac{c_3}{a_1}, \frac{c_3}{a_3} \right) \right] \quad (3.33)$$

e finalmente,

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{A} = \left[\min \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_3}, \frac{a_3}{b_1}, \frac{a_3}{b_3} \right) + \min \left(\frac{c_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_3}, \frac{c_3}{a_1}, \frac{c_3}{a_3} \right), \right. \\ \left. \max \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_3}, \frac{a_3}{b_1}, \frac{a_3}{b_3} \right) + \max \left(\frac{c_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_3}, \frac{c_3}{a_1}, \frac{c_3}{a_3} \right) \right] \quad (3.34)$$

Para valores de A, B e C definidos em R^+ facilmente se obtém:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{A} = \left[\frac{a_1}{b_3} + \frac{c_1}{a_3}, \frac{a_3}{b_1} + \frac{c_3}{a_1} \right] \quad (3.35)$$

Este resultado é enganador uma vez que o intervalo obtido apresenta uma amplitude superior à que efectivamente deveria apresentar. Tal deve-se ao facto de A aparecer em numerador da primeira fracção e em denominador da segunda. Sendo assim, os valores extremos do intervalo de maior amplitude do resultado não são obtidos pela soma dos mínimos e dos máximos das respectivas parcelas, mas sim, do seguinte modo:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{A} = \left[\min \left(\frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{a_1}}{\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{a_1}}, \frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_3}{a_1}}{\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{a_1}}, \frac{\frac{a_1}{b_3} + \frac{c_1}{a_1}}{\frac{a_1}{b_3} + \frac{c_1}{a_1}}, \frac{\frac{a_1}{b_3} + \frac{c_3}{a_1}}{\frac{a_1}{b_3} + \frac{c_1}{a_1}}, \right. \right. \\ \left. \min \left(\frac{\frac{a_3}{b_1} + \frac{c_1}{a_3}}{\frac{a_3}{b_1} + \frac{c_3}{a_3}}, \frac{\frac{a_3}{b_1} + \frac{c_3}{a_3}}{\frac{a_3}{b_1} + \frac{c_1}{a_3}}, \frac{\frac{a_3}{b_3} + \frac{c_1}{a_3}}{\frac{a_3}{b_3} + \frac{c_1}{a_3}}, \frac{\frac{a_3}{b_3} + \frac{c_3}{a_3}}{\frac{a_3}{b_3} + \frac{c_1}{a_3}}, \right) \right. \\ \left. \max \left(\frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{a_1}}{\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_3}{a_1}}, \frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_3}{a_1}}{\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{a_1}}, \frac{\frac{a_1}{b_3} + \frac{c_1}{a_1}}{\frac{a_1}{b_3} + \frac{c_3}{a_1}}, \frac{\frac{a_1}{b_3} + \frac{c_3}{a_1}}{\frac{a_1}{b_3} + \frac{c_1}{a_1}}, \right. \right. \\ \left. \max \left(\frac{\frac{a_3}{b_1} + \frac{c_1}{a_3}}{\frac{a_3}{b_1} + \frac{c_3}{a_3}}, \frac{\frac{a_3}{b_1} + \frac{c_3}{a_3}}{\frac{a_3}{b_1} + \frac{c_1}{a_3}}, \frac{\frac{a_3}{b_3} + \frac{c_1}{a_3}}{\frac{a_3}{b_3} + \frac{c_3}{a_3}}, \frac{\frac{a_3}{b_3} + \frac{c_3}{a_3}}{\frac{a_3}{b_3} + \frac{c_1}{a_3}}, \right) \right] \quad (3.36)$$

A Equação (3.36) não pode ser simplificada (ao contrário do que acontece na Equação (3.34)) uma vez que não sabemos quais são as combinações de valores dos parâmetros que fornecem os limites do intervalo para o resultado.

Aplicação numérica

Considere-se que A, B e C são números reais definidos nos seguintes intervalos:

$$A = [1, 4], B = [2, 3] \text{ e } C = [3, 6]$$

Pela Equação (3.35) obtém-se:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{A} = \left[\frac{13}{12}, 8 \right]$$

Calculando o verdadeiro resultado através da Equação (3.36) vem:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{A} = \left[\frac{25}{12}, \frac{13}{2} \right]$$

Através da Figura 3.15, torna-se bem visível a diferença de amplitude destes dois resultados.

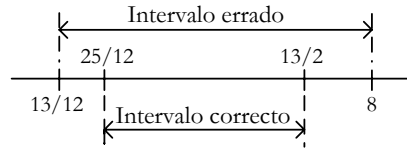


Figura 3.15: Intervalos de incerteza

Este exemplo demonstra que a simples aplicação das regras básicas da aritmética por intervalos às Equações (3.29) e (3.30) não produz os resultados correctos para as probabilidades dos estados 2 e 3.

Voltemos novamente à aplicação numérica do algoritmo DSW ao caso de estudo apresentado em 3.1.6. Constata-se então que as Equações (3.12) e (3.13) apresentam características idênticas à que acabamos de expor no exemplo acima. Por esse motivo, para estes casos teremos de utilizar nas operações binárias básicas com intervalos o procedimento aritmético adequado como se ilustra na Equação (3.36).

Os resultados numéricos da aplicação do algoritmo DSW ao caso de estudo, tomando como variáveis de *input* os números difusos triangulares estabelecidos para as taxas de transição do sistema, são apresentados na Tabela 3.2. Os valores da segunda coluna desta tabela são os intervalos de confiança das probabilidades de cada estado, obtidos para os respectivos valores de α .

Estes valores definem a distribuição de possibilidade das probabilidades dos estados, representadas pela curva 1 (a azul) em cada um dos gráficos. A soma dos valores modais das probabilidades difusas dos estados dá como resultado o valor 1, como seria de esperar. Para os restantes valores das probabilidades esta relação não é óbvia.

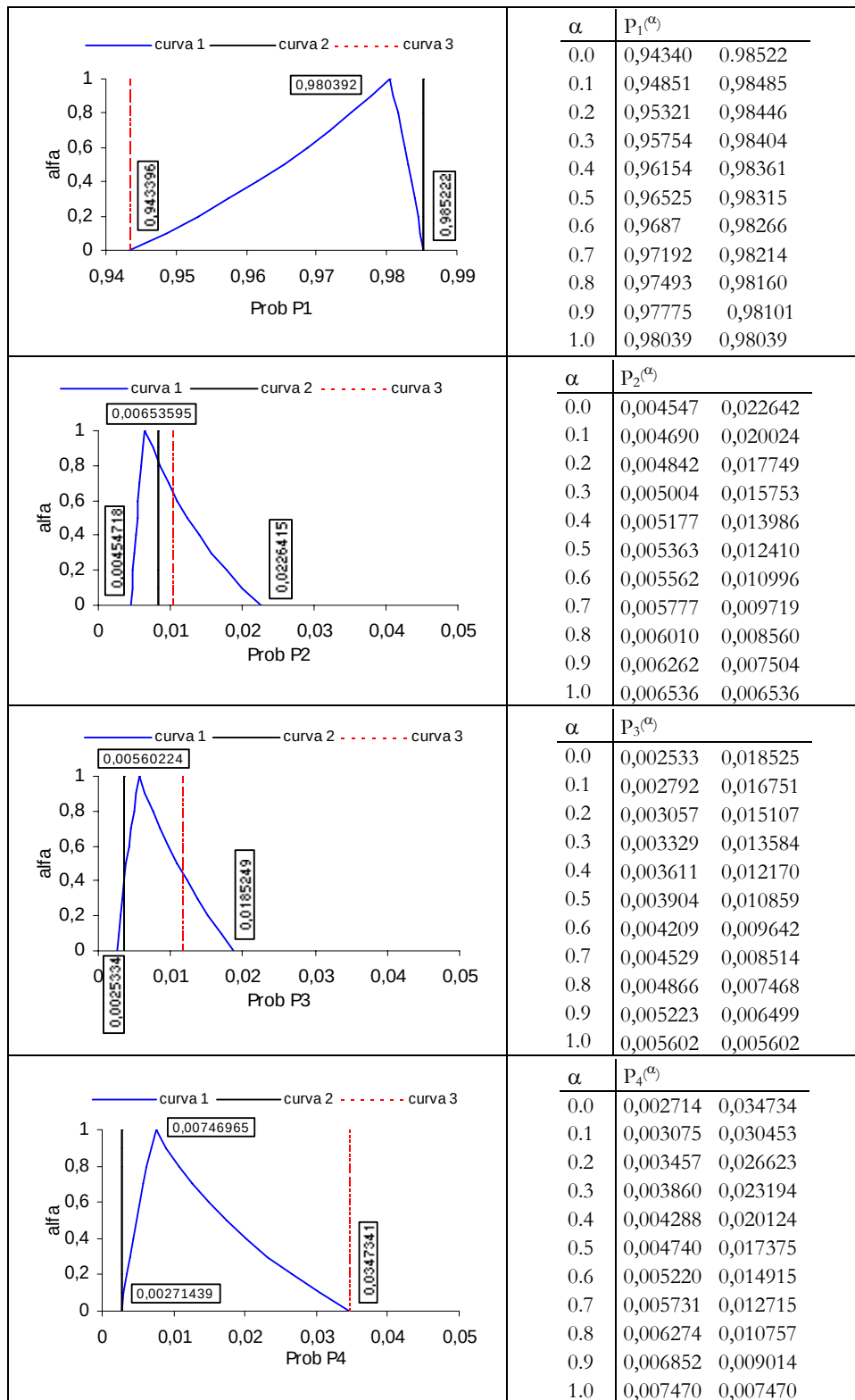


Tabela 3.2: Distribuições de possibilidades das probabilidades dos estados

Num estudo desta natureza será, também, importante conhecer-se os valores dos parâmetros que determinam valores extremos para as distribuições de possibilidade das probabilidades dos estados do sistema. Nem sempre estes valores extremos são obtidos por combinações de valores extremos dos parâmetros (ou variáveis de *input*). O facto das expressões das probabilidades serem não monótonas pode conduzir a que os valores extremos das probabilidades dos estados, para um determinado nível α , sejam obtidos com combinações de valores não extremos dos intervalos de confiança α dos parâmetros.

Devido à simplicidade da Equação (3.28) facilmente se tiram as combinações de valores dos parâmetros (valores de μ e λ) que permitem calcular os valores extremos da probabilidade do estado 1 (intervalo de confiança de maior amplitude). Pela estrutura do diagrama de estados vemos que os valores dos parâmetros que estabelecem o máximo (mínimo) valor para a probabilidade do estado 1, farão parte da combinação de valores dos parâmetros que determinam o mínimo (máximo) valor para a probabilidade do estado 4. Os restantes valores desta combinação (valores de γ e θ) também se obtêm através de uma análise cuidada do diagrama de estados.

Deste modo, determinam-se as duas combinações de valores dos parâmetros:

$$(\lambda, \mu, \gamma, \theta) = (0.01, 2/3, 0.5, 0.5) \text{ e}$$

$$(\lambda, \mu, \gamma, \theta) = (0.02, 1/3, 1.5, 1),$$

com as quais se obtêm os seguintes resultados:

Tabela 3.3: Valores das probabilidades dos estados

Combinação de valores dos parâmetros ($\lambda, \mu, \gamma, \theta$)	Probabilidades			
	<i>Estado 1</i>	<i>Estado 2</i>	<i>Estado 3</i>	<i>Estado 4</i>
(0.01, 2/3, 0.5, 0.5)	0.98522 (<i>Max</i>)	0.0084445	0.0036192	0.002714 (<i>Max</i>)
(0.02, 1/3, 1.5, 1)	0.94340 (<i>Min</i>)	0.0102916	0.011578	0.034734 (<i>Min</i>)

Estas duas combinações de parâmetros estabelecem, respectivamente, os valores “mais favoráveis” (curvas 2) e “mais desfavoráveis” (curva 3) para as probabilidades dos estados do sistema (ver gráficos da Tabela 3.2), mas não caracterizam correctamente algumas das probabilidades.

Pela análise da distribuição de possibilidade da probabilidade do estado 2 vê-se que nem a curva 2 nem a curva 3 passam pelos valores extremos, nem tão pouco, o valor modal da distribuição se encontra no intervalo estabelecido por estas curvas. Para o estado 3 verifica-se uma situação idêntica.

Na Figura 3.16-a mostram-se os gráficos das distribuições de possibilidades das probabilidades dos estados atravessados por uma linha representada a traço ponto. Esta linha cruza o eixo das abcissas de cada um dos gráficos nos valores das probabilidades (Tabela 3.3) obtidos pela combinação de parâmetros:

$$(\lambda, \mu, \gamma, \theta) = (0.01, 2/3, 0.5, 0.5).$$

Por outro lado, a linha a traço ponto da Figura 3.14-b cruza o eixo das abcissas de cada um dos gráficos nos valores das probabilidades (Tabela 3.3) obtidos pela combinação de parâmetros:

$$(\lambda, \mu, \gamma, \theta) = (0.02, 1/3, 1.5, 1)$$

Para os estados 2 e 3 poderemos também estabelecer as combinações dos parâmetros com as quais se obtêm os valores extremos para as probabilidades, avaliando as diferentes combinações possíveis de valores extremos dos parâmetros (uma vez que os valores extremos das probabilidades resultam de combinações de valores extremos dos parâmetros). Uma análise visual ao diagrama de estados permite reduzir drasticamente as combinações a avaliar. Em casos mais complexos pode ser necessário recorrer à formulação de um problema de optimização não linear e à sua resolução usando por exemplo as condições de Kuhn Tucker [Aucamp, 1984; Hanson, 1994; Primbs e Giannelli, 2001].

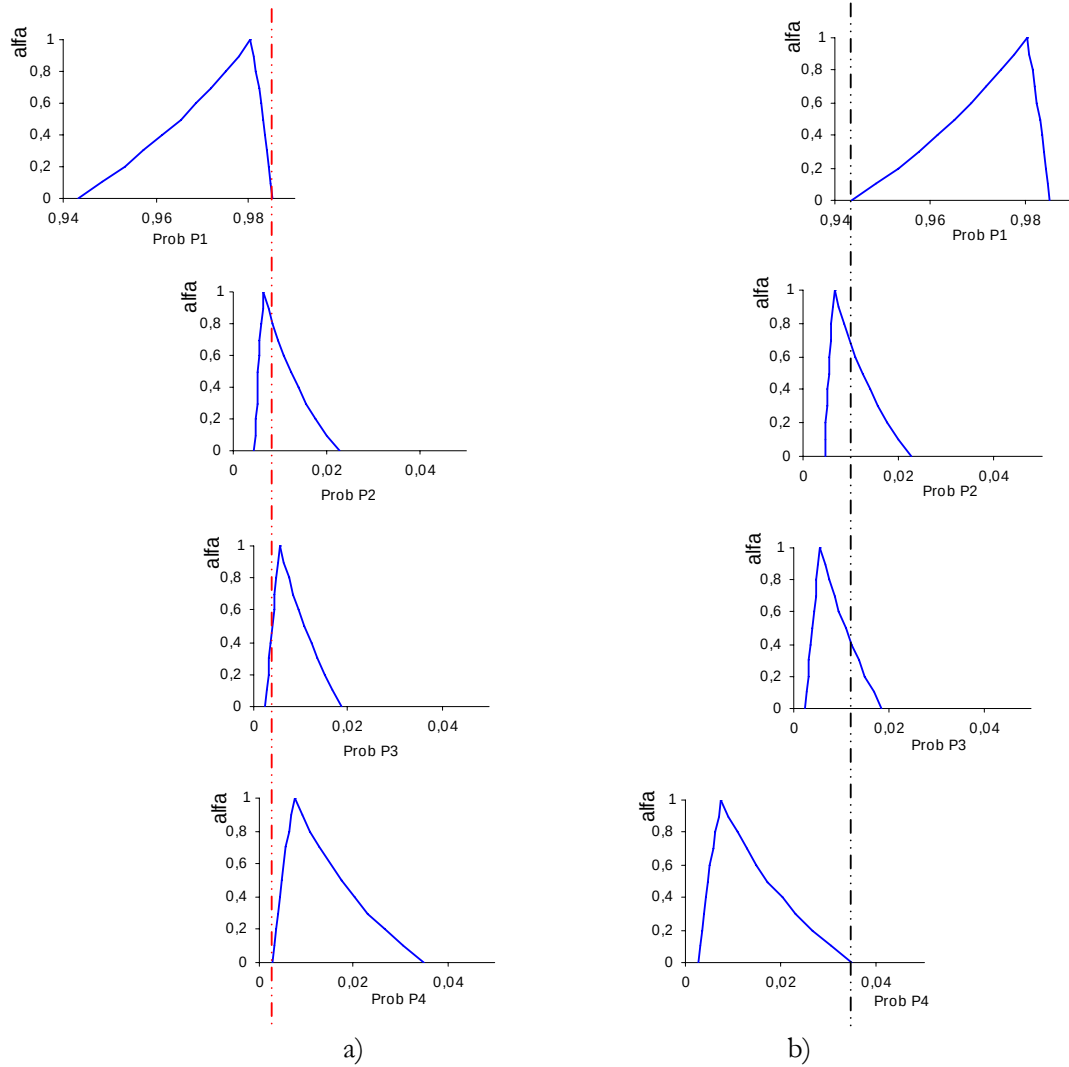


Figura 3.16: Distribuições de possibilidade das probabilidades de estado

Na Tabela 3.4 constam as combinações de valores dos parâmetros que determinam os valores extremos das probabilidades de todos os estados do sistema. Designamos por P_i^- e por P_i^+ , os valores mais baixo e mais elevado da probabilidade do estado i , respectivamente.

Tabela 3.4: Valores dos parâmetros das probabilidades limite do sistema

<i>Estado i</i>	P_i^-	P_i^+	λ	μ	γ	θ
1	0.943396		0.02	1/3		
		0.985222	0.01	2/3		
2	0.00454718		0.01	2/3	1.5	
		0.0226415	0.02	1/3	0.5	
3	0.00253343		0.01	2/3	0.5	1
		0.0185249	0.02	1/3	1.5	0.5
4	0.00271439		0.01	2/3	0.5	0.5
		0.0347341	0.02	1/3	1.5	1

As duas abordagens que acabamos de apresentar permitem obter resultados difusos de expressões analíticas relativamente simples. Contudo, quando são aplicadas a expressões um pouco mais complexas evidenciam limitações importantes. Podem mesmo apresentarem-se inadequadas, como de resto se constatou quando se pretendeu calcular as probabilidades difusas dos estados do caso de estudo, admitindo alguns dos processos do comportamento como não markovianos. Estas circunstâncias motivaram o estudo de outras abordagens, apresentadas na secção seguinte, que possibilitam lidar com expressões complexas sem as restrições ou limitações das abordagens apresentadas.

3.3 Novas abordagens

Nesta secção, apresentaremos quatro novas abordagens baseadas nos dois métodos fundamentais para o desenvolvimento de aritmética difusa: a aritmética por intervalos e o princípio da extensão. Estas abordagens serão especialmente desenvolvidas para a obtenção de resultados difusos de expressões analíticas complexas obtidas por Cadeias de Markov, tratando-se de sistemas markovianos, ou pela metodologia *DepCim*, no caso dos sistemas não-markovianos. Mostraremos também os resultados da sua implementação ao cálculo das probabilidades difusas dos estados do caso de estudo, admitindo que nem todos os processos responsáveis pelo comportamento do sistema são exponencialmente distribuídos, mantendo, no entanto, as suas durações médias.

Na Figura 3.17 apresentamos as distribuições que caracterizam todos estes processos. Neste caso, pelas razões apontadas no Capítulo 2, a hipótese markoviana não deverá ser adoptada, pelo que recorreremos à metodologia *DepCim* para obter as expressões analíticas das probabilidades dos estados.

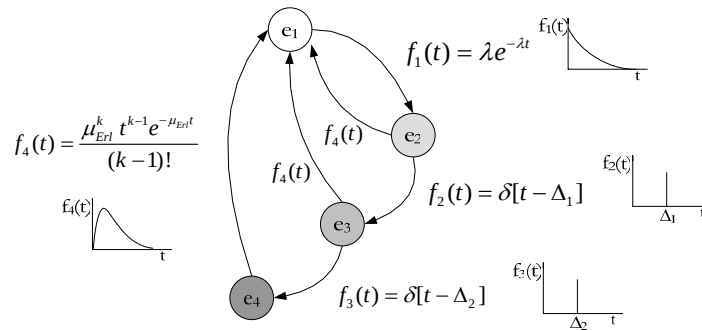


Figura 3.17: Diagrama de estados com as *f.d.p.* dos processos

Na Secção 2.3.4.2 foram apresentadas as expressões analíticas das probabilidades de estado para este modelo, considerando distribuições genéricas $f_i(t)$, para os processos. Estas expressões são transcritas abaixo.

$$\eta = \frac{\lambda}{1 + \lambda \int_0^{\infty} t f_4(t) dt} \quad (3.37)$$

$$P_1 = \eta \int_0^{\infty} t f_1(t) dt \quad (3.38)$$

$$P_2 = \eta \left[\int_0^{\infty} t \left(f_2(t) \left(\int_t^{\infty} f_4(\tau) d\tau \right) + f_4(t) \left(\int_t^{\infty} f_2(\tau) d\tau \right) \right) dt \right] \quad (3.39)$$

$$P_3 = \eta \left[\int_0^{\infty} f_2(t) \left(\int_{t_1}^{\infty} f_4(t_2) (t_2 - t_1) \left(\int_{t_2}^{\infty} f_3(t - t_1) dt \right) dt_2 \right) dt_1 + \right. \\ \left. \int_0^{\infty} f_2(t_1) \left(\int_{t_1}^{\infty} f_3(t_2 - t_1) (t_2 - t_1) \left(\int_{t_2}^{\infty} f_4(t) dt \right) dt_2 \right) dt_1 \right] \quad (3.40)$$

$$P_4 = \eta \left[\int_0^{\infty} f_2(t_1) \left(\int_{t_1}^{\infty} f_3(t_2 - t_1) \left(\int_{t_2}^{\infty} (t_3 - t_2) f_4(t_3) dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1 \right] \quad (3.41)$$

Substituindo nas expressões anteriores $f_i(t)$ pelas respectivas funções distribuição de probabilidades dos processos apresentadas na Figura 3.17, obtêm-se as expressões para as probabilidades dos estados. Por exemplo, para a probabilidade do estado 2 tem-se:

$$P_2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda \int_0^{\infty} t \frac{\mu_{Erl}^k t^{k-1} e^{-\mu_{Erl} t}}{(k-1)!}} \left[\int_0^{\infty} t \left(\delta[t - \Delta_1] \left(\int_t^{\infty} \frac{\mu_{Erl}^k \tau^{k-1} e^{-\mu_{Erl} \tau}}{(k-1)!} d\tau \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{\mu_{Erl}^k t^{k-1} e^{-\mu_{Erl} t}}{(k-1)!} \left(\int_t^{\infty} \delta[\tau - \Delta_1] d\tau \right) dt \right]$$

As expressões das probabilidades dos estados na sua forma mais simples são obtidas através da integração simbólica das Equações (3.37) a (3.41). Esta operação de integração é uma operação difícil. O procedimento apresentado por Faria [1996] permite a simplificação das expressões analíticas dos índices de fiabilidade antes de se proceder à sua integração simbólica. No Anexo A ilustra-se este procedimento com o presente caso de estudo.

Nos casos em que a integração simbólica se mostre impraticável resta a integração numérica. Inviabiliza-se, no entanto, a apresentação de resultados difusos utilizando a aritmética por intervalos. Para o problema em análise foi possível a integração analítica das expressões das probabilidades de estado, obtendo-se:

$$P_1 = \frac{\mu}{2\lambda + \mu} \quad (3.42)$$

$$P_2 = \frac{e^{-\mu\Delta_1} \lambda (-2 + 2e^{\mu\Delta_1} - \mu\Delta_1)}{2\lambda + \mu} \quad (3.43)$$

$$P_3 = \frac{e^{-(\Delta_1+\Delta_2)\mu} \lambda (-2 - (\Delta_1 + \Delta_2)\mu + e^{\Delta_1\mu} (2 + \Delta_1\mu))}{2\lambda + \mu} \quad (3.44)$$

$$P_4 = \frac{e^{-(\Delta_1+\Delta_2)\mu} \lambda (2 + (\Delta_1 + \Delta_2)\mu)}{2\lambda + \mu} \quad (3.45)$$

Por uma questão de simplicidade de representação, o μ das expressões anteriores corresponde a μ_{Erl} do processo de reparação (Figura 3.17). De notar ainda que, no caso particular de todos os processos do comportamento serem exponenciais, o sistema é markoviano obtendo-se, deste modo, resultados idênticos aos que se obteriam pelo método das Cadeias de Markov.

Conhecidas as Equações (3.42) a (3.45) deparamo-nos com a dificuldade em implementar um procedimento idêntico ao utilizado no caso markoviano, devido à complexidade das equações. As metodologias que a seguir se apresentam permitem ultrapassar algumas destas limitações como se mostrará nas secções seguintes.

3.3.1 Princípio da extensão com discretização das variáveis por intervalos

Uma curva, uma superfície, um espaço é uma representação de uma função que sendo contínua, como por exemplo a função $P_s = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, poderá ser discretizada e avaliada por um conjunto de pontos como se ilustra na Figura 3.18. A superfície representada nesta figura foi definida por 100 pontos, tomando 10 valores de $\mu \in [1/3, 2/3]$ e 10 valores de $\lambda \in [0.01, 0.02]$.

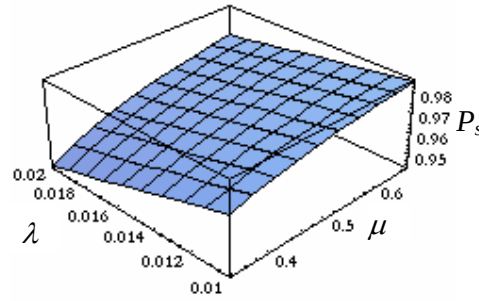
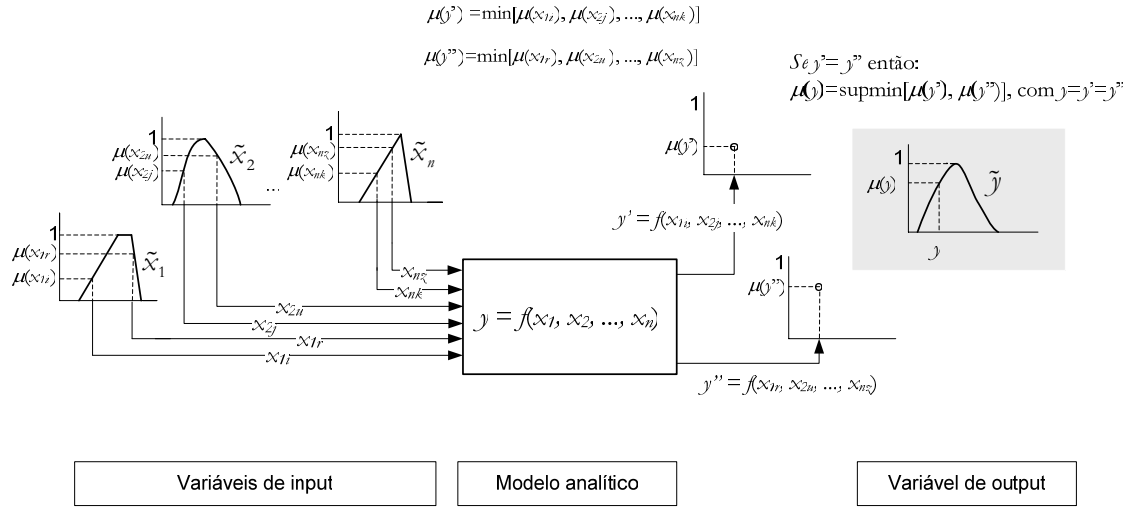


Figura 3.18: Superfície definida pela discretização da probabilidade de P_s

A abordagem que a seguir apresentamos baseia-se no princípio da extensão [Klir e Yuan, 1995; Ross, 1995] para determinar a distribuição difusa dos *outputs*, conhecendo os conjuntos difusos que modelam os *inputs* e a função transferência pela qual são obtidos valores rígidos de *output* atribuindo valores rígidos aos *inputs*, e recorrendo. Em concreto, faz-se a partição do universo de discurso das variáveis de *input* em intervalos de pequena amplitude e, para cada combinação de valores rígidos destas variáveis de *input* calcula-se um valor no universo de discurso do *output* (probabilidade de estado) com base na função de transferência (expressão analítica). O respectivo valor de pertença deste *output* é determinado pelo mínimo dos valores de pertença dos *inputs*.

Na Figura 3.19 mostra-se este procedimento de uma forma esquemática. A combinação de valores de *input* representada por $x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{np}$ ($i=1, 2, \dots, m_1+1; j=1, 2, \dots, m_2+1; k=1, 2, \dots, m_n+1$) é uma de $(m_1+1) \times (m_2+1) \times \dots \times (m_n+1)$ combinações, onde $m_1, m_2, \dots, m_n$ representam o número de partições do universo de discurso das variáveis de *input* difusas, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$.

Se duas ou mais combinações diferentes de valores de *input* dão o mesmo valor no universo de discurso do *output*, então, o valor de pertença do *output* é determinado pelo máximo dos valores de pertença do *output* de cada destas combinações.


 Figura 3.19: Esquema *input-output* difusos

Seja $\tilde{x}_i$ uma variável difusa contínua e $C_{\tilde{x}_i}$ um conjunto de pontos (valores) devidamente seleccionados, pertencentes ao universo de discurso $\tilde{x}_i$. Se a cada valor de $C_{\tilde{x}_i}$, aqui designados por $\tilde{x}_{ij}$ atribuirmos o correspondente valor de pertinência, $\mu(\tilde{x}_{ij})$, discretizamos a variável $\tilde{x}_i$, que passa a ser representada por um conjunto difuso discreto, $\tilde{X}_i$. Em termos gerais, quanto maior o número de pontos considerados na discretização (cardinalidade de $C_{\tilde{x}_i}$) melhor será esta representação. A distribuição dos pontos retirados do universo de discurso das variáveis difusas também pode condicionar a “qualidade” da discretização.

Exemplo 3.2

Considere-se dois conjuntos difusos $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ com as funções de pertinência representadas na Figura 3.20. A discretização de cada um destes conjuntos difusos em 5 pontos pode representar-se do seguinte modo:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0}{5} \right\} \text{ e } \tilde{B} = \left\{ \frac{0}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0}{6} \right\}$$

Refira-se que o numerador de cada fracção dos conjuntos $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ representa o grau de pertinência do valor apresentado no denominador ao respectivo conjunto. Por exemplo, a fracção $\frac{0.5}{2}$ indica que o valor 2 pertence ao conjunto $\tilde{A}$ com um grau de pertinência de 0.5.

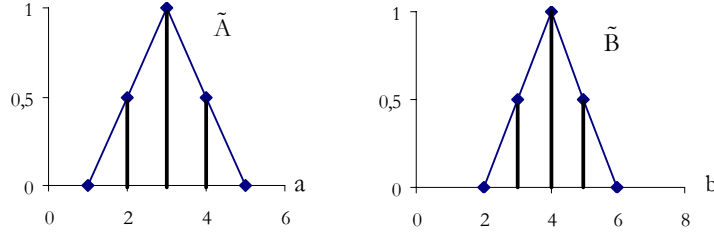


Figura 3.20: Conjuntos difusos $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$

Se se pretender obter o produto $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ ter-se-á:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \left\{ \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{8} + \frac{0.5}{9} + \frac{0.5}{10} + \frac{1}{12} + \frac{0.5}{15} + \frac{0.5}{16} + \frac{0}{18} + \frac{0.5}{20} + \frac{0}{24} + \frac{0}{25} + \frac{0}{30} \right\}$$

O resultado gráfico desta operação está representado na Figura 3.21-a. Os gráficos b, c e d mostram os resultados de $\tilde{A} \times \tilde{B}$ para maiores níveis de discretização de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$. Ambos os conjuntos difusos são discretizados com o mesmo número de pontos.

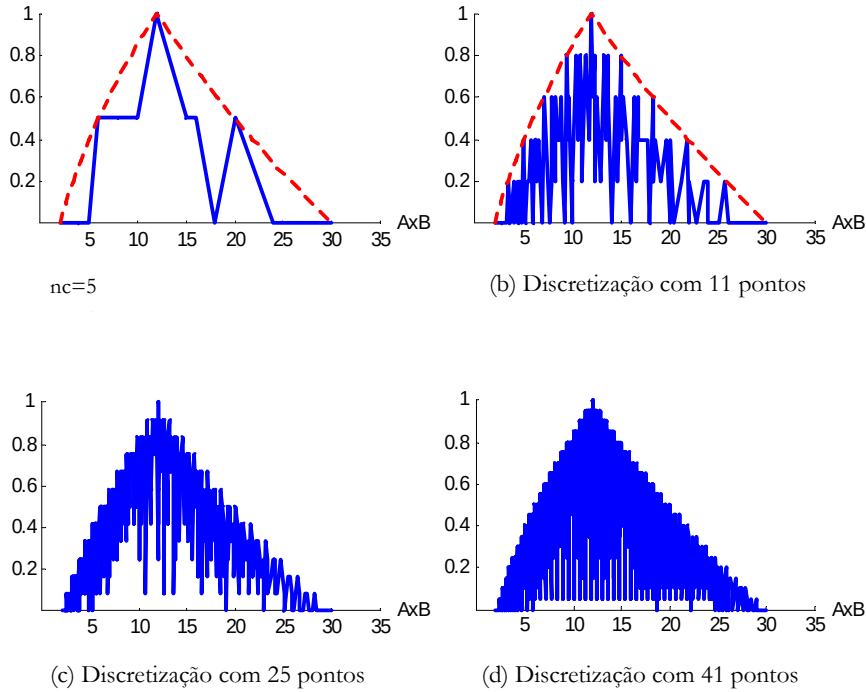


Figura 3.21: Resultado de $\tilde{A} \times \tilde{B}$ em função do nível de discretização de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$

Na Figura 3.22-a mostra-se o resultado de $\tilde{A} \times \tilde{B}$ obtido pela aritmética por intervalos. Sobrepondo este gráfico com o gráfico da Figura 3.21-d obtém-se o gráfico representado na Figura 3.22-b. Verifica-se que a distribuição de possibilidades obtida pela aritmética por intervalos constitui uma envolvente para os valores obtidos utilizando o princípio da extensão. O ajustamento será tanto melhor quanto maior o nível de discretização de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$.

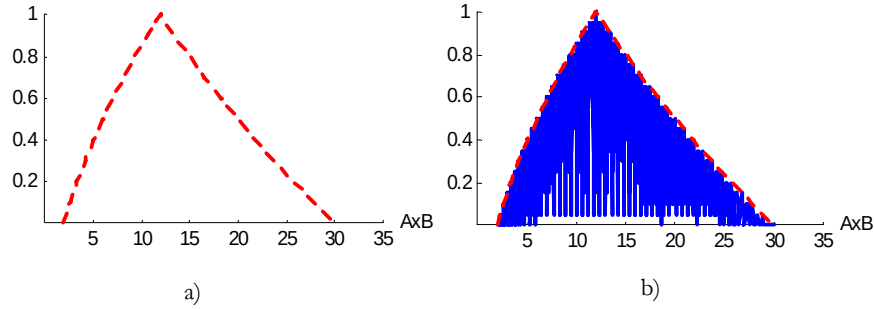


Figura 3.22: Resultado de $\tilde{A} \times \tilde{B}$ obtidos pela aritmética intervalar e pela discretização de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$

De um modo geral, nos casos em que as variáveis difusas $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ são representados por números triangulares difusos o valor modal da distribuição de possibilidades de $y = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ é determinado pela combinação de valores modais das variáveis de *input*. Deste modo, é importante na discretização de qualquer variável difusa de *input*, $\tilde{x}_i$ (com $i=1, 2, \dots, n$), incluir o valor modal no conjunto dos valores discretos, $C_{\tilde{x}_i}$. Será também importante para a “qualidade” do resultado que a discretização das variáveis $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ se faça de forma a proporcionar as combinações de valores com as quais se obtêm os valores extremos do intervalo de confiança de maior amplitude de $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$.

Frequentemente, estas combinações são formadas por valores extremos das respectivas variáveis difusas de *input* difusas, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$. Nestes casos, qualquer que seja o número de pontos considerados na discretização das variáveis de *input*, estas combinações estarão presentes no cálculo do *output*. Por vezes os valores extremos da distribuição de possibilidades do *output* são obtidos por combinações de valores das variáveis de *input*, que incluem valores interiores do universo de discurso destas variáveis. Deste modo, os valores extremos da distribuição de possibilidades do *output* obtidos por esta abordagem podem comportar um erro significativo, principalmente se o número de pontos considerados na discretização das variáveis

de *input* for reduzido. À medida que este número aumenta, o erro reduz-se dada a maior probabilidade dos valores internos das variáveis de *input* (ou de valores muito próximos) fazerem parte da discretização.

Exemplo 3.3

Considere-se as variáveis difusas $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\theta}$ representados nas Figuras 3.8, 3.9 e 3.10. A discretização destas variáveis pode ser implementada fazendo uma partição dos respectivos intervalos de suporte em pequenos intervalos com a mesma amplitude ou amplitudes diferentes. Por exemplo, como se mostra na Figura 3.23-a, a discretização de $\tilde{\lambda}$ foi efectuada em 5 intervalos ($m_{\tilde{\lambda}}=5$) com igual amplitude. No caso de $\tilde{\theta}$, adoptou-se uma partição em intervalos de amplitudes diferentes (Figura 3.23-c), para incluir o valor modal de $\tilde{\theta}$ no conjunto $C_{\tilde{\theta}}$.

Para uma qualquer variável difusa $\tilde{x}_i$, o conjunto $C_{\tilde{x}_i}$ é constituído por $m_{\tilde{x}_i}+1$ pontos ($\#C_{\tilde{x}_i} = m_{\tilde{x}_i} + 1$). Embora a partição em intervalos de igual amplitude simplifique um pouco a implementação da abordagem, deverá evitar-se situações como a que se mostra na Figura 3.22-b, onde o valor de $\gamma=1.0$ a que corresponde o valor de pertença 1 não pertence ao conjunto $C_{\tilde{\gamma}} = \{0.5; 0.7; 0.9; 1.1; 1.3; 1.5\}$.

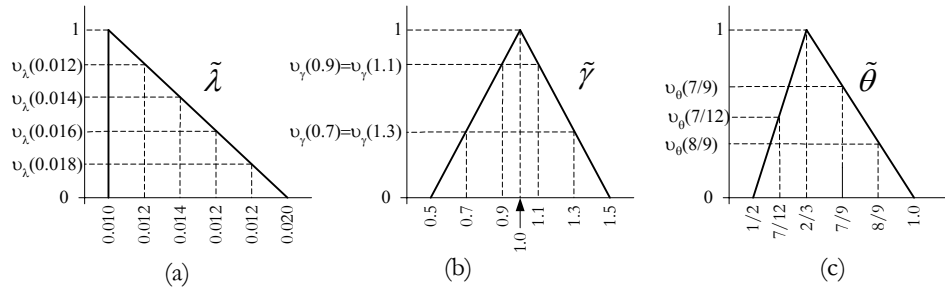


Figura 3.23: Partição do intervalo de suporte das variáveis difusas $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\theta}$ em intervalos

Admitindo-se as seguintes partições para as variáveis difusas, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\theta}$:

$\tilde{\lambda}$: 5 intervalos de igual amplitude, $m_{\tilde{\lambda}} = 5$;

$\tilde{\gamma}$: 8 intervalos de igual amplitude, $m_{\tilde{\gamma}} = 8$;

$\tilde{\theta}$: 9 intervalos de igual amplitude, $m_{\tilde{\theta}} = 9$;

obtêm-se os conjuntos:

$$C_{\tilde{\lambda}} = \{0.01; 0.012; 0.014; 0.016; 0.018; 0.02\}.$$

$$C_{\tilde{\gamma}} = \{0.5; 0.625; 0.75; 0.875; 1; 1.125; 1.25; 1.375; 1.5\}.$$

$$C_{\tilde{\theta}} = \{0.5; 0.556; 0.611; 0.667; 0.722; 0.778; 0.833; 0.889; 0.944; 1\}.$$

Para discretizar as funções de pertença destas variáveis é necessário calcular o grau de pertença de cada elemento dos conjuntos $C_{\tilde{\lambda}}$, $C_{\tilde{\gamma}}$, $C_{\tilde{\theta}}$. Se designarmos por $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Gamma}$ e $\tilde{\Theta}$, os conjuntos difusos discretos resultantes da discretização das variáveis $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\theta}$, respectivamente, obtemos:

$$\tilde{\Lambda} = \left\{ \frac{0}{0.01} + \frac{0.8}{0.012} + \frac{0.6}{0.014} + \frac{0.4}{0.016} + \frac{0.2}{0.018} + \frac{0}{0.02} \right\}$$

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ \frac{0}{0.5} + \frac{0.25}{0.625} + \frac{0.5}{0.75} + \frac{0.75}{0.875} + \frac{1}{1} + \frac{0.75}{1.125} + \frac{0.5}{1.25} + \frac{0.25}{1.375} + \frac{0}{1.5} \right\}$$

$$\tilde{\Theta} = \left\{ \frac{0}{0.5} + \frac{0.333}{0.556} + \frac{0.667}{0.611} + \frac{1}{0.667} + \frac{0.833}{0.722} + \frac{0.667}{0.778} + \frac{0.5}{0.833} + \frac{0.333}{0.889} + \frac{0.167}{0.944} + \frac{0}{1} \right\}$$

Na Figura 3.24 podemos ver a representação gráfica de $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Gamma}$ e $\tilde{\Theta}$.

Procedimento para obtenção de *outputs* difusos

A obtenção de resultados difusos a partir da discretização das variáveis difusas de *input*, tal como se descreve acima, e recorrendo ao princípio da extensão pode sintetizar-se nos seguintes passos:

Passo 1: Discretizar todas as variáveis de *input* do modelo, através do procedimento apresentado acima;

Passo 2: Calcular o valor no espaço do *output* para cada combinação de valores das variáveis de *input* retirada dos respectivos conjuntos difusos discretos;

Passo 3: O valor de pertença do *output* obtido no passo 2 é determinado pelo mínimo dos valores de pertença dos *inputs* envolvidos no seu cálculo;

Passo 4: Quando duas (ou mais) combinações diferentes de *inputs* produzem o mesmo *output*, atribui-se a este *output* um valor de pertença determinado pelo maior dos valores de pertença dos *outputs* de cada uma das combinações, obtidos como se indica no passo 3;

O Algoritmo 1 apresentado a seguir é numa sistematização de todos os passos desta abordagem. Este algoritmo foi implementado no programa MATHEMATCA [Wickham-Jones, 1994] para se obterem resultados numéricos.

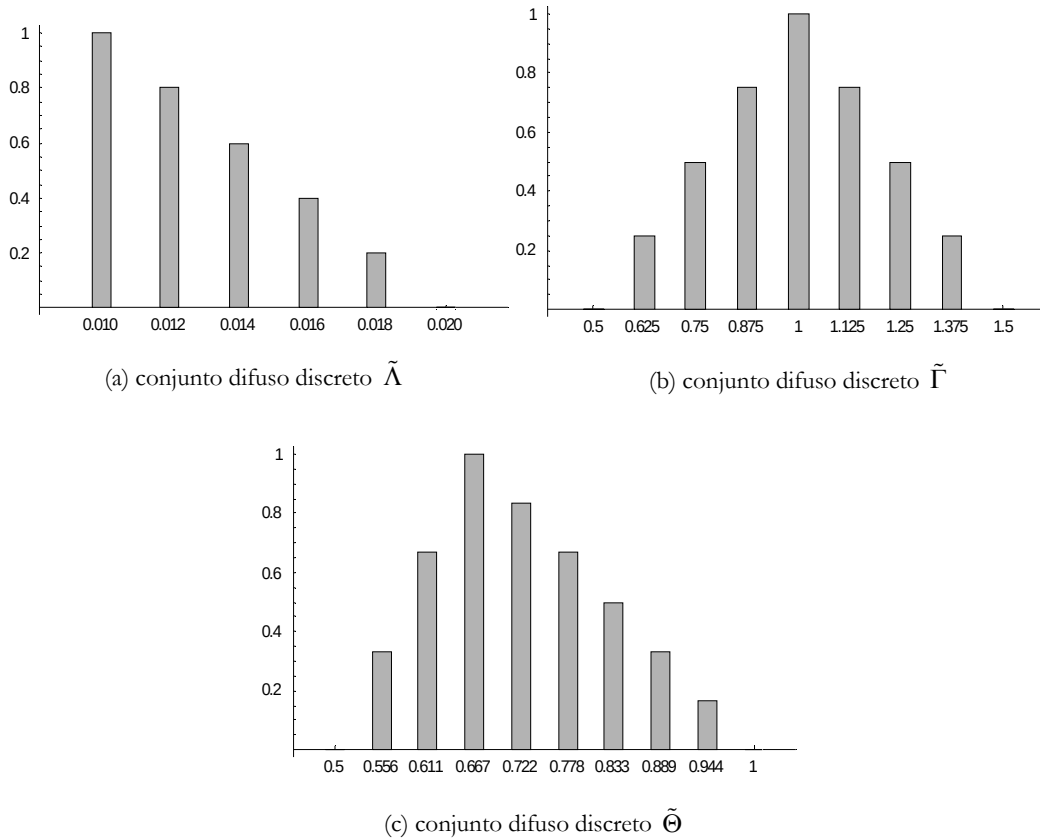


Figura 3.24: Representação gráfica dos conjuntos difusos discretos $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Gamma}$ e $\tilde{\Theta}$

Algoritmo 1:

input: expressão analítica da grandeza pretendida $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
input: funções de pertença das variáveis de *input*, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$
input: número de divisões do domínio de discurso de $\tilde{x}_i$, m_i , $i=1, 2, \dots, n$
output: distribuição de possibilidades de y .

begin
 /* discretização das variáveis de *input* */
 for $i = 1, n$, **do**
 begin
 for $j:=1, m_i+1$, **do**
 begin
 obter x_{ij} ;
 calcular $\mu(x_{ij})$;
 /* guardar x_{ij} e $\mu(x_{ij})$ */
 $V_i[j,1] = x_{ij}$; $V_i[j,2] = \mu(x_{ij})$
 end;
 end;
 end;
 $k=0$; $\text{num} = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$
 for $j_1 := 1, m_1+1$, **do**
 begin
 $x_1 := V_1[j_1,1]$; $\mu(x_1) := V_1[j_1,2]$;
 for $j_2 := 1, m_2+1$, **do**
 begin
 $x_2 := V_2[j_2,1]$; $\mu(x_2) := V_2[j_2,2]$;
 ...
 for $j_n := 1, m_n+1$, **do**
 begin
 $x_n := V_n[j_n,1]$; $\mu(x_n) := V_n[j_n,2]$;
 $y := f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
 $\mu(y) := \text{Min}[\mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_n)]$;
 $A[k,1] = y$; $A[k,2] = \mu(y)$; $k := k+1$;
 end;
 ...
 end;
 end;
 end;
 ordenar o *array* A por ordem crescente da 1ª coluna;

Aplicação numérica

Tendo em consideração as distribuições dos processos do comportamento para o caso de estudo apresentadas na Figura 3.17 e os valores dos tempos médios, determinamos os parâmetros difusos dos modelos representados pelos seguintes números difusos triangulares:

$$\tilde{\lambda} \rightarrow [0.01; 0.01; 0.02] \quad \tilde{\Delta}_1 \rightarrow [2/3; 1; 2] \quad \tilde{\Delta}_2 \rightarrow [1; 1.5; 2] \quad \tilde{\mu} \rightarrow [2/3; 1; 4/3]$$

Com estes valores dos parâmetros, e as Equações (3.32) a (3.35) obtemos através do Algoritmo 1, as distribuições de possibilidades das probabilidades dos estados que constam da figura abaixo. Refira-se que cada parâmetro difuso foi discretizado fazendo uma partição do intervalo de suporte em pequenos intervalos de igual amplitude. O número de partições considerado para cada parâmetro foi o seguinte: $m_{\lambda}=5$, $m_{\Delta_1}=8$, $m_{\Delta_2}=8$ e $m_{\mu}=8$

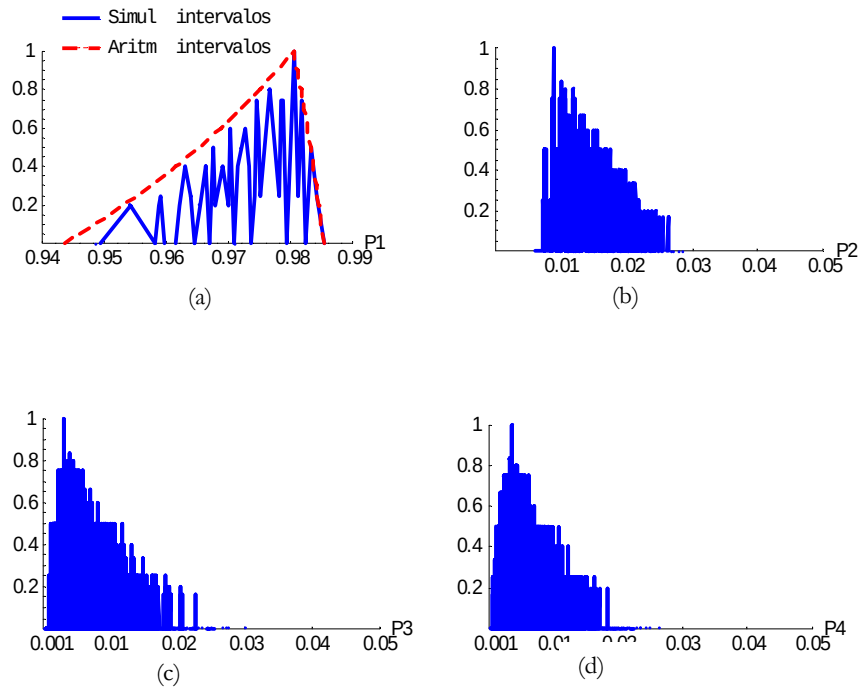


Figura 3.25: Distribuições de possibilidades das probabilidades dos estados através da discretização das variáveis de *input*

Na Figura 3.25-a, mostra-se também a distribuição de possibilidades da probabilidade do estado 1, obtida pela abordagem apresentada na Secção 3.3.1 (linha a traço interrompido).

Comparando as duas distribuições verifica-se que a precisão ou “qualidade” da distribuição de possibilidades obtida por esta última abordagem, com a discretização adoptada é baixa. Aumentando o nível de discretização dos parâmetros $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\mu}$, obtém-se uma distribuição de possibilidades para P_1 , com maior precisão, como se pode ver pela Figura 3.26-a. Se se agrupar os valores apresentados neste gráfico por classes, representar cada classe pelo valor médio dessa classe e atribuir-lhe como valor de pertença o maior valor de pertença de todos os pontos da classe, obtém-se o gráfico da Figura 3.26-b.

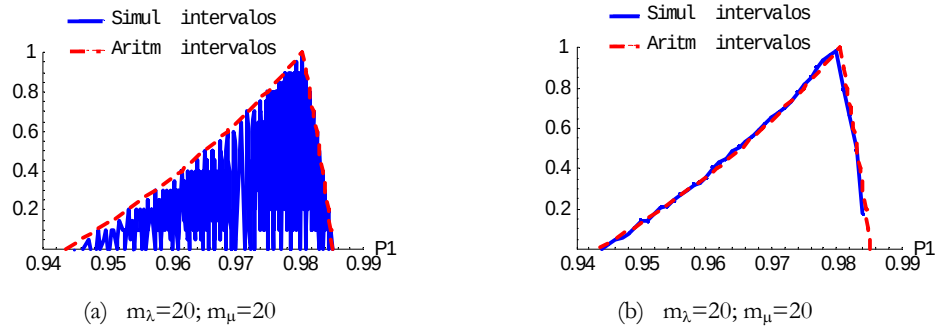


Figura 3.26: Distribuição de possibilidades da probabilidade do estado 1

Deste modo, não podemos aferir da qualidade das DPP dos outros estados do sistema representadas pelos gráficos (b) (c) e (d) da Figura 3.26, dadas as dificuldades em calcular estas distribuições pela abordagem - Princípio da extensão com discretização das variáveis de *input* por intervalos, apresentada na Secção 3.3.1. No entanto, tal será possível através da abordagem – Optimização não linear com cortes- α que apresentaremos na Secção 3.3.4.

3.3.2 Princípio da extensão com discretização aleatória das variáveis de *input*

Esta abordagem difere da abordagem apresentada Secção 3.3.1 apenas no modo como se efectua a discretização das variáveis difusas de *input*. Neste caso, o conjunto de valores discretos, $C_{\tilde{x}_i}$, da variável difusa $\tilde{x}_i$, é obtido gerando aleatoriamente valores no universo de discurso de $\tilde{x}_i$. Deste modo, a distância entre dois valores adjacentes do conjunto $C_{\tilde{x}_i}$ também é igualmente aleatória. Na Figura 3.27 apresentam-se as distribuições de possibilidades das probabilidades dos estados do sistema em análise. Para a discretização das variáveis de *input*, utilizou-se o mesmo número de partições que foi usado na abordagem anterior.

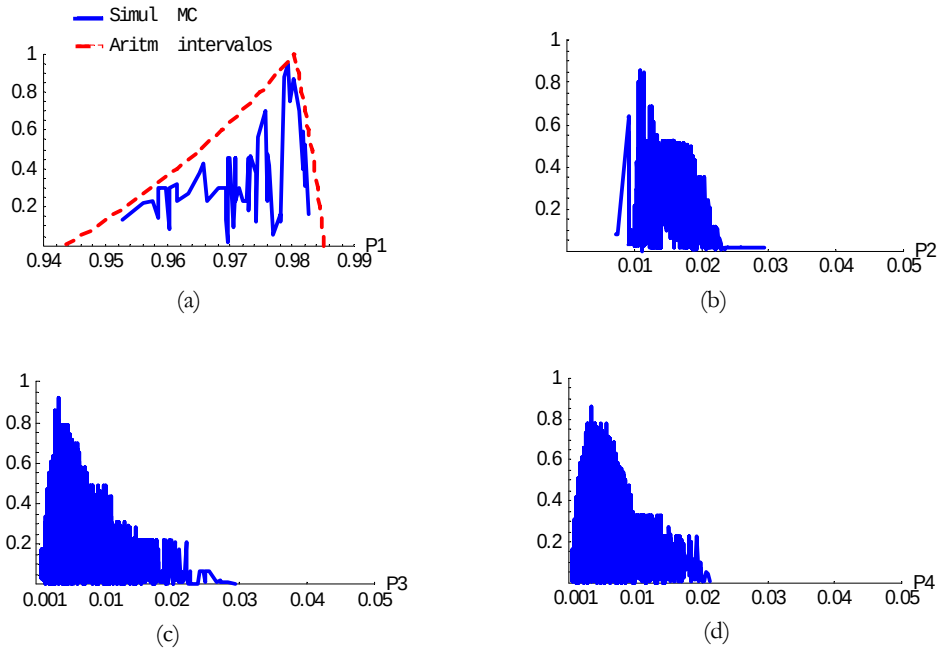
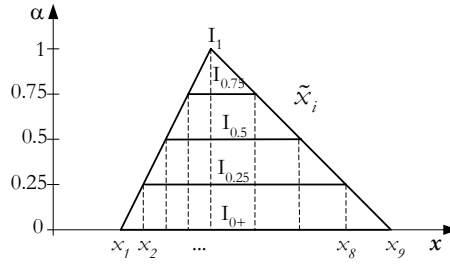


Figura 3.27: Probabilidades difusas dos estados obtidas através da discretização das variáveis de *input* por geração aleatória de valores

Os comentários e comparações que se possam fazer relativamente às várias abordagens serão feitos na Secção 3.5.

3.3.3 Princípio da extensão com cortes- α

Esta abordagem baseia-se também na discretização das variáveis difusas de *input* e no princípio da extensão. A discretização de uma variável difusa, $\tilde{x}_i$, é efectuada a partir da decomposição da respectiva função de pertença numa série de intervalos de corte- α , designados por I_α . Cada um destes intervalos determina dois pontos no conjunto $C_{\tilde{x}_i}$, como se mostra na Figura 3.28.


 Figura 3.28: Discretização de uma variável difusa através de cortes- α

De uma forma sucinta esta abordagem consiste nos seguintes passos:

Passo 1: Obter o conjunto $C_{\tilde{x}_i}$ através da introdução de cortes- α nas variáveis de *input* do modelo tal como se mostra na figura anterior;

Passo 2: Calcular um valor no espaço do *output* para cada combinação de valores retirados dos respectivos conjuntos difusos discretos das variáveis de *input* que fazem parte do modelo;

Passo 3: Determinar o valor de pertença do *output* obtido no passo 2 pelo mínimo dos valores de pertença dos *inputs* envolvidos no seu cálculo;

Passo 4: Quando duas (ou mais) combinações diferentes de *inputs* produzem o mesmo valor de *output*, atribui-se a este *output* um valor de pertença que é determinado pelo maior dos valores de pertença dos *outputs* de cada uma das combinações, obtidos como se indica no passo 3;

Passo 5: De todos os valores do *output* com o mesmo valor de pertença α consideram-se apenas os valores mínimo e máximo para efeitos de determinação da correspondente função de pertença.

Sejam $I \rightarrow (x_{ir}, x_{js}, \dots, x_{nt})$ e $G \rightarrow (x_{iu}, x_{ju}, \dots, x_{nu})$, duas combinações diferentes de valores das variáveis de *input* $\tilde{x}_i$ e $\tilde{x}_j$ com $\tilde{x}_{ir}, \tilde{x}_{iu} \in C_{\tilde{x}_i}$, $\tilde{x}_{js}, \tilde{x}_{ju} \in C_{\tilde{x}_j}$ e $\tilde{x}_{nt}, \tilde{x}_{nu} \in C_{\tilde{x}_n}$. Os valores de *output* resultantes de cada uma das combinações (passo 2) são: $y_I = f(x_{ir}, x_{js}, \dots, x_{nt})$ e $y_G = f(x_{iu}, x_{ju}, \dots, x_{nu})$, com valores de pertença $\mu(y_I)$ e $\mu(y_G)$ dados por (passo 3): $\min(\mu(x_{ir}), \mu(x_{js}), \dots, \mu(x_{nt}))$ e $\min(\mu(x_{iu}), \mu(x_{ju}), \dots, \mu(x_{nu}))$, respectivamente.

Se $y_I = y_g$, então (passo 4):

$$\begin{aligned}\mu(y_I) = \mu(y_g) &= \max \left[\min \left(\mu(x_{ir}), \mu(x_{ji}), \dots, \mu(x_{ni}) \right); \min \left(\mu(x_{iu}), \mu(x_{jr}), \dots, \mu(x_{nz}) \right) \right] \\ &= \max [\mu(y_I); \mu(y_g)]\end{aligned}$$

Finalmente, se considerarmos O_α o conjunto de todos os valores de *output* com valor de pertença α , o menor e o maior valores de O_α definem dois pontos da distribuição de pertença do *output*. Fazendo isto para todos os valores de α , considerados na discretização das variáveis de *input*, obtém-se um conjunto de pares de pontos do *output* com o qual se traça a respectiva função de pertença. A sistematização completa desta abordagem é descrita pelo Algoritmo 2.

Algoritmo 2

```

input:  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; /* expressão analítica do índice em análise */
input:  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ ; /* funções de pertença das variáveis difusas de input */
input: número de cortes- $\alpha$ ,  $nc$ 
output: distribuição de possibilidades de  $y$ 
begin /* calcular o incremento de  $\alpha$  */
   $\alpha = 0$ ;  $j = 1$ ;  $k = 2$ ;  $step = 1/(nc-1)$ ;
  While  $\alpha \leq 1$ , do /* Discretização das variáveis  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  */
    begin
      for  $i = 1, n$ , do /* calcular para cada variável os limites do intervalo do corte- $\alpha$  */
        begin
          calcular  $x_{im}^{(\alpha)}$ ; /* valor mínimo de  $x_i$  pelo corte- $\alpha$  */
          calcular  $x_{iM}^{(\alpha)}$ ; /* valor máximo de  $x_i$  pelo corte- $\alpha$  */
           $V_i[j,1] = x_{im}^{(\alpha)}$ ;  $V_i[k,1] = x_{iM}^{(\alpha)}$ ;  $V_i[j,2] = V_i[k,2] = \alpha$ ;
        end;
         $j = j + 2$ ;  $k = j + 1$ ;  $\alpha = \alpha + step$ ;
      end;
     $N = 2 * nc - 1$ ; /* número de valores admitidos na discretização de  $\tilde{x}_i$  por  $nc$  cortes */
     $k = 0$ ;
    for  $j_1 = 1, N$ , do
      begin
         $x_1 = V_1[j_1,1]$ ;  $\mu(x_1) = V_1[j_1,2]$ ;
        for  $j_2 = 1, N$ , do
          begin
             $x_2 = V_2[j_2,1]$ ;  $\mu(x_2) = V_2[j_2,2]$ ;
            ...
            for  $j_n = 1, N$ , do
              begin
                 $x_n = V_n[j_n,1]$ ;  $\mu(x_n) = V_n[j_n,2]$ ;
                 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
                 $\mu(y) = \text{Min}[\mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_n)]$ ;
                 $\Lambda[k,1] = y$ ;  $\Lambda[k,2] = \mu(y)$ ;  $k = k + 1$ ;
              end;
            ...
          end;
        end;
      end;
    ordenar o array  $\Lambda$  por ordem crescente do valor de  $\alpha$ ;
    seleccionar o maior e o menor valores de  $y$  para o mesmo valor de  $\alpha$ ;
    While  $\alpha \leq 1$ , do
      begin
         $maximo = 0$ ;  $minimo = 1$ ;
        for  $i = 1, t$ , do
          begin
             $alfa = \Lambda[i, 2]$ ;
            if  $alfa == \alpha$  then
              begin
                 $valor_y = \Lambda[i, 1]$ ;  $maximo = \text{Max}[valor_y, maximo]$ ;  $minimo = \text{Min}[valor_y, minimo]$ ;
              end;
            end;
          end;
         $B[w,1] = maximo$ ;  $B[w,2] = minimo$ ;  $B[w,3] = alfa$ ;  $\alpha := \alpha + step$ ;
      end;
    desenhar gráfico de distribuição de possibilidades de  $y$ 
  end.

```

Aplicação numérica

Retomemos novamente o caso de estudo representado pelo diagrama de estados da Figura 3.6. Pretende-se, através da abordagem exposta em 3.3.3 estabelecer as DPP dos estados do sistema, considerando os mesmos dados (valores dos parâmetros e expressões analíticas) utilizados na abordagem - Princípio da extensão com discretização aleatória das variáveis de *input*.

Sejam $\alpha=0^+$, $\alpha=0.25$, $\alpha=0.5$, $\alpha=0.75$ e $\alpha=1$ os cortes- α utilizados para discretizar as variáveis difusas $\tilde{\lambda}$, $\tilde{A}_1$ e $\tilde{\mu}_{Ed}$, para efeito de cálculo da DPP do estado 2. Em termos genéricos cada valor de α determina um intervalo $I_\alpha(\tilde{x}_i)$ para a variável difusa $\tilde{x}_i$. Por exemplo, para a variável difusa $\tilde{\lambda}$ e $\alpha=0^+$, temos $I_{0^+}(\tilde{\lambda})=[0.01, 0.02]$. Na Tabela 3.5 apresentam-se os intervalos I_α das variáveis difusas $\tilde{\lambda}$, $\tilde{A}_1$ e $\tilde{\mu}_{Ed}$ para os cortes- α considerados.

Tabela 3.5: Intervalos I_α das variáveis $\tilde{\lambda}$, $\tilde{A}_1$ e $\tilde{\mu}_{Ed}$

α	$I_\alpha(\tilde{\lambda})$	$I_\alpha(\tilde{A}_1)$	$I_\alpha(\tilde{\mu}_{Ed})$
0^+	[0.01, 0.02]	[0.667, 2]	[0.667, 1.333]
0.25	[0.01, 0.0175]	[0.75, 1.75]	[0.75, 1.25]
0.5	[0.01, 0.015]	[0.833, 1.5]	[0.833, 1.167]
0.75	[0.01, 0.0125]	[0.9167, 1.25]	[0.9167, 1.0833]
1	[0.01, 0.01]	[1, 1]	[1, 1]

Os resultados apresentados nesta tabela permitem uma discretização das variáveis difusas $\tilde{\lambda}$, $\tilde{A}_1$ e $\tilde{\mu}_{Ed}$. Assim, por exemplo, o conjunto difuso:

$$\tilde{\Delta}_1 = \left\{ \frac{0}{0.667} + \frac{0.25}{0.75} + \frac{0.5}{0.833} + \frac{0.75}{0.9167} + \frac{1}{1} + \frac{0.75}{1.25} + \frac{0.5}{1.5} + \frac{0.25}{1.75} + \frac{0}{2} \right\}$$

é uma representação discreta da variável difusa $\tilde{\Delta}_1$. Deste modo pode obter-se os conjuntos difusos discretos $\tilde{\Lambda}$ e $\tilde{M}$ para as variáveis difusas $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\mu}_{Ed}$, respectivamente. Cada terno de valores, constituído por um elemento de $\tilde{\Lambda}$, um elemento de $\tilde{\Delta}_1$ e um elemento de $\tilde{M}$, forma uma combinação de valores de *input* do modelo definido pela Equação (3.43). Cada uma destas combinações produz um valor no universo de discurso de P_2 . Por exemplo, a combinação de valores, $(\lambda, A_1, \mu_{Ed}) = (0.0125, 1.75, 1.25)$ produz o valor $P_2=0.015$. O respectivo valor de pertença é obtido pelo $\min(0.75, 0.25, 0.25)=0.25$.

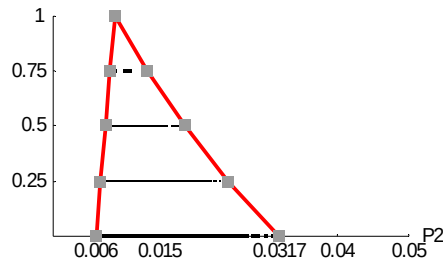


Figura 3.29: Função pertença de P_2

Na Figura 3.29 apresenta-se o mapeamento para P_2 de todas as combinações de valores dos conjuntos difusos discretos $\tilde{A}$, $\tilde{A}_1$ e $\tilde{M}$. A curva que define a distribuição de possibilidades de P_2 é traçada tomando para cada nível α , os pontos extremos deste mapeamento. Na Figura 3.30 apresentam-se as distribuições de possibilidades das probabilidades dos 4 estados do sistema. As distribuições dos dois primeiros estados (gráficos a e b) foram obtidas, efectuando uma discretização das variáveis de *input* com 5 cortes- α (Tabela 3.5). As distribuições dos estados 3 e 4 (gráficos c e d) foram obtidas considerando, apenas, 3 cortes- α na discretização da variáveis de *input*, $\alpha=0^+$, $\alpha=0.5$ e $\alpha=1$.

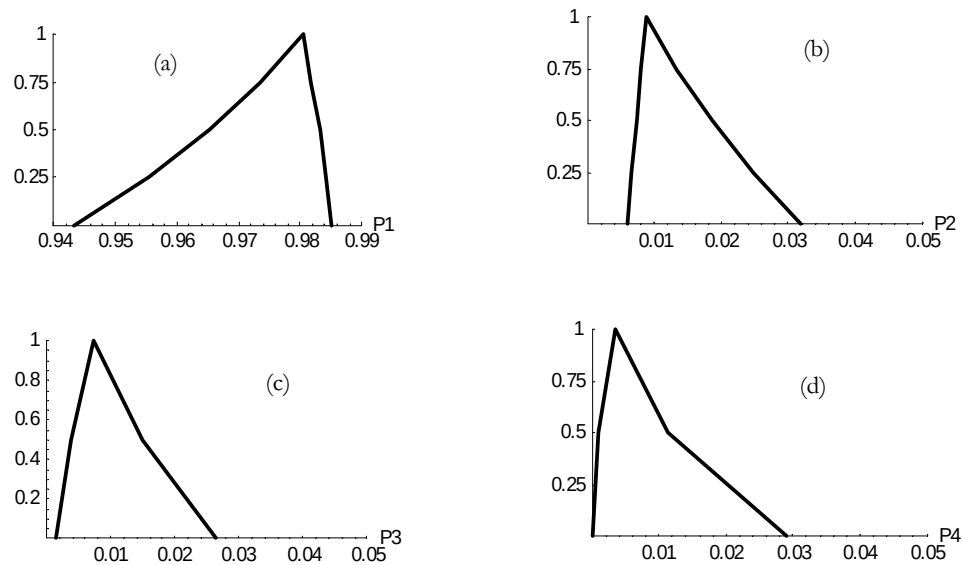


Figura 3.30: Distribuições de possibilidades das probabilidades dos estados do sistema

Evidentemente que, à medida que o número de cortes- α das variáveis de *input* aumenta, obtém-se uma discretização mais *fina* destas variáveis e, por conseguinte, o número de combinações de valores de *input* N , obtido pela expressão abaixo, aumenta também.

$$N = \prod_{i=1}^n (2nc_{x_i} - 1)$$

onde,

$n \rightarrow$ número de variáveis de *input*;

$x_i \rightarrow$ variável de *input* com $i = \{1, 2, \dots, n\}$

$nc_{x_i} \rightarrow$ número de cortes- α para a variável de *input* x_i

Valores de N mais elevados requerem maior volume de cálculo. Em contrapartida obtêm-se distribuições de possibilidades com contornos mais suavizados, e mais próximas das distribuição correctas (que seriam obtidas com $nc_{x_i} \rightarrow \infty$). A Figura 3.31 pretende exemplificar o que acabamos de referir, com duas distribuições de possibilidades de P_4 obtidas: (i) considerando 3 cortes- α com $\alpha=0^+$, $\alpha=0.5$ e $\alpha=1$; (ii) considerando 5 cortes- α com $\alpha=0^+$, $\alpha=0.25$, $\alpha=0.5$, $\alpha=0.75$ e $\alpha=1$. Por razões já referidas nesta dissertação, qualquer que seja o número de cortes- α considerado deve incluir-se sempre os cortes $\alpha=0^+$ e $\alpha=1$.

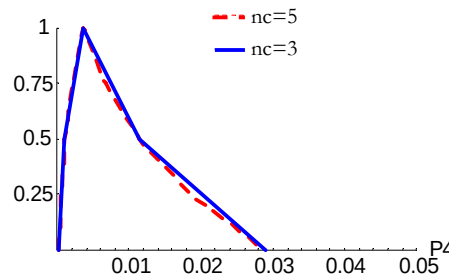


Figura 3.31. Efeito do número de cortes- α na distribuição de possibilidades de P_4

Dos cálculos que efectuados com vários casos obtiveram-se resultados (distribuições de possibilidades) muito satisfatórios com um reduzido número de cortes- α ($nc=5$ ou 6).

3.3.4 Optimização não linear com cortes- α

Um conjunto difuso $\tilde{A}$ pode ser representado por intervalos encaixados $A_\alpha = [a^{(\alpha)} \ b^{(\alpha)}]$ obtidos por corte- α com $\alpha \in (0,1]$. Seja $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função de variáveis $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$; $I_\alpha(\tilde{x}_i) = [a_i^{(\alpha)} \ b_i^{(\alpha)}]$ o intervalo de corte de nível α efectuado na variável difusa $\tilde{x}_i$ com $i = \{1, 2, \dots, n\}$; e S o conjunto dos valores de α considerados para determinação dos cortes- α . Para cada valor de S podemos determinar dois pontos (máximo e mínimo) da distribuição de possibilidades do *output*, por modelação e resolução de dois problemas de optimização não linear idênticos, sujeitos a um conjunto de restrições de desigualdade com a seguinte formulação geral:

$$\begin{aligned} & \text{Max (ou Min)} \ y_\alpha = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \text{sujeito a:} \\ & \quad a_i^{(\alpha)} \leq x_i \leq b_i^{(\alpha)} \quad i = \{1, 2, \dots, n\} \\ & \quad x_i \geq 0 \\ & \quad \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

onde y_α , representa o valor do *output* para o nível α . Com a formulação de *Maximização* obtém-se, o máximo valor do *output* para o nível α , y_α^+ , enquanto que o mínimo valor do *output* para o mesmo nível α , y_α^- , é obtido pela formulação de *Minimização*.

As restrições $x_i \geq 0$ indicam que os universos de discurso das variáveis difusas não comportam valores negativos, i.e., todas as variáveis são definidas em R_0^+ , como acontece, de facto, em estudos de fiabilidade.

Quando as funções de pertença das variáveis de *input* são representadas por números difusos triangulares, como acontece no caso que temos vindo a analisar, os limites dos intervalos de corte- α com $\alpha \in (0,1]$ são obtidos facilmente. Por exemplo, sejam as variáveis difusas $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ representadas por funções de pertença triangulares. Temos para o problema de optimização acima referido as seguintes formulações:

Formulação 1

$$\text{Max } y_\alpha = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} (c_i - a_i)\alpha + a_i &\leq x_i & i = \{1, 2, \dots, n\} \\ b_i - (b_i - c_i)\alpha &\geq x_i \\ x_i &\geq 0 \\ \alpha &\in (0, 1] \end{aligned}$$

Formulação 2

$$\text{Min } y_\alpha = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} (c_i - a_i)\alpha + a_i &\leq x_i & i = \{1, 2, \dots, n\} \\ b_i - (b_i - c_i)\alpha &\geq x_i \\ x_i &\geq 0 \\ \alpha &\in (0, 1] \end{aligned}$$

onde c_i representa o valor modal da variável difusa $\tilde{x}_i$.

Estes dois problemas podem ser resolvidos recorrendo a um dos vários métodos disponíveis, como por exemplo, o método do gradiente [Stapleton, 1997; Scheurich, 2001] ou as condições de Kuhn Tucker [Aucamp, 1984; Hanson, 1994; Primbs e Giannelli, 2001]. Como resultados obtêm-se dois pontos (um de cada formulação) da distribuição de possibilidades do *output* para cada valor de α considerado. Repetindo esta resolução para todos os valores do conjunto S , determina-se a distribuição de possibilidades pretendida. A forma desta distribuição é tanto mais precisa quanto maior for o número de valores de α considerados (cardinalidade de S). Por razões óbvias, os valores 0 e 1 deverão pertencer ao conjunto S .

O Algoritmo 3 apresentado a seguir (em pseudo-código) mostra de uma forma sistematizada o que acabamos de expor. Embora esteja escrito para formulações de maximização, podemos utilizá-lo para formulações de minimização, uma vez que:

$$\max(y) = -\min(-y)$$

Algoritmo 3

```

input:  $\tilde{x}_i = \{a_i, c_i, b_i\}$  com  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ .
input:  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 
input: Número de cortes- $\alpha$ ,  $nc$ 
input: Matriz dos coeficientes técnicos: A
output: Função distribuição possibilidades de  $y$ 
begin
    /* iniciar optimização */
     $\alpha = 0; y = 0; k = 1;$ 
     $step = 1 / (nc - 1);$ 
    while  $\alpha \leq 1$  do
        begin
            Maximizar  $y_\alpha = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 
            suj a:
                 $x_i \leq b_i - (b_i - c_i)\alpha$ 
                 $x_i \geq (c_i - a_i)\alpha + a_i$ 
                 $x_i \geq 0, \quad i = \{1, 2, \dots, n\}$ 

            /* Guardar valores de  $\alpha$  e valores de  $y_\alpha$  */
             $B[k, 1] = y_\alpha;$ 
             $B[k, 2] = \alpha;$ 
            /* incrementar  $\alpha$  e  $k$  */
             $\alpha = \alpha + step;$ 
             $k = k + 1;$ 
        end;
    /* Representação gráfica do array B */

```

No Algoritmo 3 consideraram-se funções de pertença triangulares para as variáveis de *input*, no entanto, as alterações a introduzir neste algoritmo serão reduzidas se as funções de pertença forem outras. Basicamente ter-se-á de se redefinir o vector dos termos independentes.

Aplicação numérica

Vamos pela última vez recorrer ao exemplo utilizado em todas as abordagens apresentadas anteriormente para mostrar a aplicação numérica desta abordagem e determinar as distribuições de possibilidades das probabilidades de estado do sistema.

Estabeleceu-se 5 cortes- α ($n=5$) das funções de pertença das variáveis de *input* com espaçamentos iguais entre eles, pelo que: $S = \{0; 0.25; 0.5; 0.75; 1\}$. Aplicando o Algoritmo 3, por exemplo, ao estado 1 obtemos as seguintes formulações de Maximização e de Minimização:

Valor máximo de $P_1^{(\alpha)}$	Valor mínimo de $P_1^{(\alpha)}$
$\text{Maximizar } P_1^{(\alpha)} = \frac{\mu}{2\lambda + \mu}$ Suj. a: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.02 - 0.01\alpha \\ -0.01 - 0.01\alpha \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\alpha \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\alpha \end{bmatrix}$	$\text{Minimizar } P_1^{(\alpha)} = \frac{\mu}{2\lambda + \mu}$ Suj. a: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.02 - 0.01\alpha \\ -0.01 - 0.01\alpha \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\alpha \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\alpha \end{bmatrix}$

A resolução destes dois problemas através da implementação do Algoritmo 3 em MATLAB (Optimization Toolbox) permitiu obter os resultados apresentados na Tabela 3.6. Nesta resolução o MATLAB utilizou o método do gradiente.

Tabela 3.6: Mapeamento de P_1 com optimização não linear

α	P_1^-	P_1^+
0	0.9434	0.9852
0.25	0.9554	0.9843
0.5	0.9653	0.9831
0.75	0.9735	0.9819
1	0.9804	0.9804

Procedendo de modo idêntico em relação às probabilidades dos restantes estados e fazendo a representação gráfica dos resultados obtêm-se as distribuições representadas na Figura 3.32.

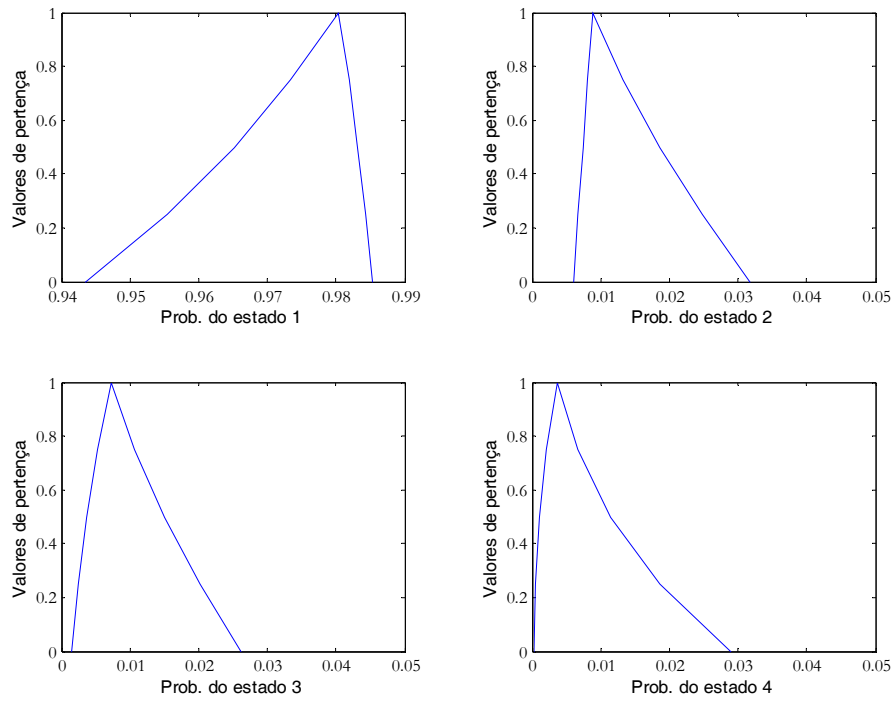


Figura 3.32: Distribuições de possibilidades dos estados obtidas por otimização não-linear

3.4 Comparação das abordagens

1. Transformação das expressões analíticas

O procedimento apresentado por Miranda [1998] consiste na transformação de uma função antes ser utilizada como função de transferência para a incerteza das variáveis de *input* ao *output*. Nesta operação usa as regras binárias da aritmética por intervalos. É um procedimento muito fácil de implementar mas apenas aplicável a funções muito simples como as que se mostram no Exemplo 3.1.

2. Algoritmo DSW

Este algoritmo baseia-se nos cortes- α e nas operações binárias com intervalos. É um algoritmo de implementação simples, especialmente quando o espaço das variáveis de *input* é a uma ou a duas dimensões e as expressões analíticas são simples. À medida que o número de variáveis de *input* aumenta, as expressões analíticas tendem a aumentar a complexidade, e a implementação prática do algoritmo torna-se mais difícil. Nestes casos, as operações binárias básicas com intervalos podem não ser suficientes para a determinação de resultados correctos. Isto mesmo é mostrado com a aplicação numérica do algoritmo ao caso de estudo, admitindo hipótese markoviana dos processos do comportamento.

Uma grande vantagem da abordagem baseada na aritmética por intervalos reside na precisão dos resultados que se obtém com um pequeno número de cortes- α das variáveis de *input*.

3. Princípio da extensão com discretização das variáveis de *input* por intervalos

Esta abordagem permite ultrapassar as limitações das abordagens anteriores que se manifestam, principalmente, quando as expressões analíticas são complexas. Apresenta como principais desvantagens:

- Elevados tempos de computação para a obtenção de resultados, devido ao número de combinações de valores das variáveis de *input* necessário para se conseguir um resultado aceitável. Muitos dos pontos obtidos no espaço do *output* são pontos interiores da distribuição de possibilidades do *output* e, por isso, não contribuem para a sua definição;

- Os resultados obtidos são menos precisos que os obtidos pela algoritmo DSW. O mapeamento de pontos no espaço do *output* tem como envolvente a distribuição de possibilidades definida por qualquer das abordagens anteriores.

4. Princípio da extensão com discretização aleatória das variáveis de *input*

Trata-se de uma abordagem semelhante à abordagem 3 (Princípio da extensão com discretização das variáveis de *input* por intervalos) relativamente ao algoritmo de implementação. Apresenta, no entanto, algumas desvantagens, nomeadamente no que se refere à “qualidade” dos resultados que são, regra geral, piores. Não garante a obtenção do valor modal do *output* (valor com grau de pertença 1) nem os valores extremos do intervalo de maior amplitude do *output* devido à geração aleatória das combinações de valores das variáveis de *input*.

Pode apresentar-se como vantagem desta abordagem relativamente à abordagem 3, a maior simplicidade de implementação em ferramentas com funções automáticas para geração de valores aleatórios (como é o caso do MATHEMATICA).

5. Princípio da extensão com cortes- α

Das três abordagens apresentadas baseadas na discretização das variáveis de *input* e no princípio da extensão (abordagens 3, 4 e 5), esta mostrou-se a mais adequada para expressões complexas. No caso dos sistemas não-markovianos, possibilita a obtenção das distribuições de possibilidade dos índices de fiabilidade a partir das expressões obtidas pela metodologia *DepCim*, sem que seja necessário efectuar a integração simbólica destas expressões. Este aspecto é importante, principalmente nos casos em que a integração simbólica se mostre difícil ou impossível de implementar. Nos outros casos, esta abordagem apresenta desvantagens em relação à optimização não linear com cortes- α .

6. Optimização não linear com cortes- α

Esta última abordagem encara o problema da obtenção da distribuição de possibilidades do *output* de uma função analítica com *inputs* difusos, como um problema de optimização não linear com restrições de desigualdades. Das abordagens aplicadas ao caso de estudo nas condições descritas na Figura 3.17, esta é a que apresenta o melhor desempenho em termos de tempo de computação. No entanto, caso a integração simbólica acima referida se mostre impraticável fica-se impossibilitado de utilizar esta abordagem.

3.5 Influência da incerteza dos dados na incerteza dos resultados

Nesta secção pretendemos mostrar o modo como a incerteza dos parâmetros pode afectar a incerteza dos resultados finais. Para isso, iremos recorrer ao caso de estudo que temos vindo a analisar, admitindo a hipótese markoviana para todos os processos do comportamento. Tomemos como exemplo o parâmetro μ . Este parâmetro, caracterizado na Secção 3.1.5 pelo número triangular difuso $\tilde{\mu} \rightarrow [1/3; 1/2; 2/3]$ tem como valores extremos para o corte- $\alpha=0$, $1/3$ e $2/3$. Assim, o intervalo máximo de incerteza (medido em relação ao valor modal de $1/2$) é de $\pm 33.3\%$. Efectuando um cálculo idêntico para os outros parâmetros do sistema, obtêm-se os valores apresentados na Tabela 3.7. Estes valores representam a incerteza máxima dos parâmetros, que designamos neste estudo por incerteza inicial.

Tabela 3.7: Incerteza máxima dos parâmetros avaliada em percentagem dos respectivos valores modais

λ	μ	γ	θ
0	- 33.3%	- 50%	- 25%
+ 100%	+ 33.3%	+ 50%	+ 50%

Na Tabela 3.8, mostram-se do mesmo modo os intervalos de maior incerteza dos resultados finais - probabilidades difusas dos estados.

Tabela 3.8: Incerteza máxima dos resultados avaliada em percentagem dos respectivos valores modais

P_1	P_2	P_3	P_4
- 3.77%	- 30.43%	- 54.79%	- 63.67%
+ 0.49%	+ 246.4%	+ 230.7%	+ 365%

Na análise de sensibilidade que apresentamos de seguida é feita uma avaliação das alterações esperadas nos intervalos de incerteza das probabilidades difusas dos estados, perante reduções na incerteza dos parâmetros. Considere-se, por exemplo, que a incerteza máxima do parâmetro μ diminua, por hipótese, para $\pm 20\%$ o que equivaleria a caracterizar este parâmetro por um

número triangular difuso representado por $\tilde{\mu} \rightarrow [2/5; 1/2; 3/5]$. Nestas circunstâncias (mantendo todos os outros parâmetros), os resultados em termos de intervalos de incerteza seriam os apresentados na Tabela 3.9. Na mesma tabela constam, também, os resultados de mais dois cenários: num a incerteza do parâmetro μ é reduzida para $\pm 5\%$ (o que equivale a representar $\tilde{\mu} \rightarrow [9/20; 1/2; 11/20]$) e no outro, μ é tido como um parâmetro sem incerteza (valor rígido).

Tabela 3.9: Intervalos de incerteza das probabilidades difusas dos estados para diferentes intervalos de incerteza de μ

Intervalos de Incerteza de μ	Intervalos de incerteza nas probabilidades			
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
$\pm 33.3 \%$	-3.77%	-30.43%	-54.79%	-63.67%
	+0.49%	+246.4%	+230.7%	+365%
$\pm 20 \%$	-2.86 %	-28.75%	-50.1%	-54.66%
	+0.328 %	+226.7%	+198.2%	+259.5%
$\pm 5 \%$	-2.34%	-26.9%	-46.1%	-45.8%
	+0.179%	+209.7%	+176.8%	+202.2%
$\pm 0 \%$	-1.92%	-25.0%	-41.67%	-34.37%
	0%	+192.2%	+157.5%	+157.5%

Os gráficos da Figura 3.33 representam as probabilidades difusas dos estados 1 a 4 do caso de estudo. As curvas a traço contínuo mostram as distribuições das probabilidades difusas dos estados com a incerteza inicial do parâmetro μ ($\pm 33.3\%$); as curvas a traço interrompido curto e a traço interrompido longo, mostram as distribuições das probabilidades difusas dos estados, quando se reduz a incerteza do parâmetro μ para $\pm 20\%$ e $\pm 5\%$, respectivamente.

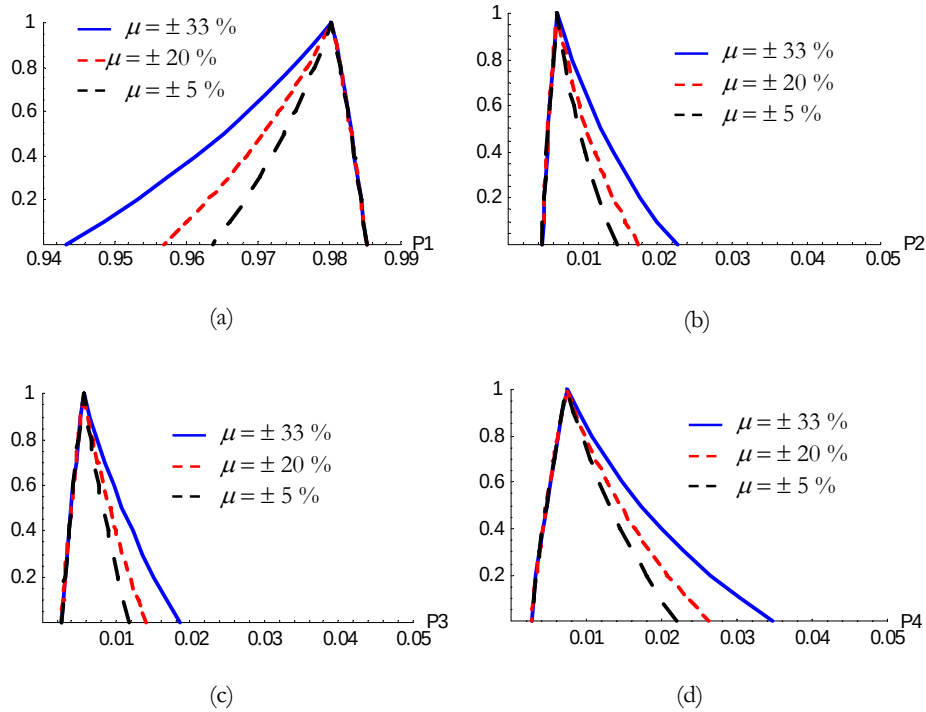


Figura 3.33: Probabilidades difusas dos estados para diferentes intervalos de incerteza de μ

Pela análise destes resultados verificamos que:

- Uma redução na incerteza do parâmetro μ produz, em termos absolutos, reduções mais visíveis nas incertezas das probabilidades dos estados 1 e 4 (gráficos a e d da Figura 3.33);
- Para dois sub-intervalos de incerteza da igual amplitude do parâmetro μ , um à esquerda e outro à direita do valor modal, os correspondentes sub-intervalos de incerteza nos resultados são bastante diferentes à direita e à esquerda dos respectivos valores modais. Por exemplo, para dois sub-intervalos de incerteza medidos no suporte de μ , de $\pm 20\%$, o sub-intervalo de incerteza de P_i à esquerda do respectivo valor modal (medido em % do respectivo valor modal) é bastante menor que o sub-intervalo à direita do mesmo valor modal.

Neste estudo de análise de sensibilidade avaliamos, apenas, as implicações na incerteza dos resultados devido a alterações na incerteza do parâmetro μ . Do mesmo modo poderemos avaliar as implicações na incerteza dos resultados devido a alterações na incerteza de qualquer um dos outros parâmetros do modelo.

Capítulo 4

Abordagem hierárquica a sistemas industriais de produção

De um modo geral os sistemas de produção industriais são constituídos por elementos (máquinas/equipamentos) reparáveis. Além disso, normalmente incorporam redundâncias e outros mecanismos de tolerância a falhas, como por exemplo, *buffers* de componentes e de produtos acabados, sendo por natureza, sistemas não-markovianos. Das metodologias apresentadas no capítulo anterior adequadas ao estudo deste tipo de sistemas, apenas a Simulação permite uma análise e avaliação de sistemas de produção industriais de dimensão e complexidade consideráveis. Em alternativa, para tratar estes sistemas de uma forma analítica adopta-se, frequentemente, a hipótese markoviana para os processos do comportamento, incorrendo em erros, por vezes muito elevados, como vimos anteriormente.

Atendendo às dificuldades inerentes à utilização de simulação para a obtenção de resultados precisos em tempo útil, e às limitações das metodologias analíticas no tratamento de sistemas de produção complexos, propomos neste capítulo uma nova abordagem hierárquica híbrida, especialmente concebida para análise e avaliação deste tipo de sistemas. As duas principais componentes desta abordagem são: (i) o quadro de modelação e (ii) os algoritmos de avaliação. O quadro de modelação proposto baseia-se no conceito de *modelo canónico*. Os algoritmos de avaliação, desenvolvidos ao nível dos subsistemas, podem ser analíticos ou de simulação, dependendo dos modelos dos subsistemas. Refira-se que os sistemas são vistos como o resultado da agregação de vários subsistemas que se relacionam entre si numa lógica fornecedor/cliente.

4.1 Introdução

Na sua maioria, os sistemas de produção industriais são sistemas de dimensão e complexidade elevadas. Estes sistemas podem comportar muitas centenas de elementos (componentes, máquinas, equipamentos) com inter-relações de dependência múltiplas que dificultam a avaliação dos índices de fiabilidade. Esta avaliação torna-se bastante mais simples quando se pretende estimar ganhos incrementais nos índices de fiabilidade obtidos por uma determinada acção de melhoria da fiabilidade, implementada ao nível de uma secção ou subsistema. Contudo, pelas razões apresentadas na Secção 1.5.5.2, o cálculo de outras medidas de desempenho relacionadas com estes índices, como as perdas de produtividade, obrigam ao cálculo de índices de fiabilidade globais.

A abordagem hierárquica proposta neste capítulo foi especialmente desenvolvida para a modelação e avaliação de índices de fiabilidade de sistemas de produção complexos. Porém, o seu campo de aplicação é mais amplo, nomeadamente, em sistemas de comunicações ou em sistemas de distribuição de energia eléctrica [Nunes, Faria et al., 2004].

Nas próximas Secções apresentam-se algumas considerações gerais sobre o ambiente em que os sistemas de produção operam hoje em dia, destaca-se a importância dos *buffers* como mecanismos de tolerância a falhas, e referem-se as principais dificuldades e limitações das metodologias existentes na análise e avaliação dos índices de fiabilidade. Procede-se ainda à apresentação geral da abordagem hierárquica proposta.

Na Secção 4.2 faz-se uma análise dos sistemas de produção industriais, do ponto de vista do estudo da fiabilidade. Discute-se o modo como se processa o fluxo de materiais ao longo do sistema e os fenómenos que desencadeiam a interrupção do fluxo. Introduce-se o conceito de perda de produção, explicando a sua relação com o tempo e com a frequência de indisponibilidade do sistema. Por fim, apresentam-se os princípios orientadores subjacentes à abordagem hierárquica apresentada nas secções seguintes.

As Secções 4.3 e 4.4 complementam-se na apresentação da abordagem hierárquica proposta. Na Secção 4.3 apresenta-se a estrutura de modelação, descrevem-se sucintamente os passos para a implementação da abordagem, e introduz formalmente o conceito de modelo canónico.

Finalmente, a Secção 4.4 é dedicada aos algoritmos de avaliação dos modelos canónicos a dois níveis (subsistemas e sistema global). A avaliação destes modelos pode efectuar-se por duas vias, ambas percorridas nesta secção: a via analítica e a simulação.

4.1.1 Considerações gerais

Num mercado tão competitivo à escala mundial, as empresas industriais têm de oferecer aos seus clientes produtos de alta qualidade, baixo custo e tempos de entrega curtos. Estes requisitos obrigam as empresas a estabelecerem acordos e parcerias num quadro alargado de cooperação, responsabilização e criação de valor acrescentado, ganhando deste modo vantagens competitivas em relação à concorrência. Nesta estrutura complexa e distribuída, tendo como filosofia operacional integradora de funcionamento a filosofia JIT (*just-in-time*), onde os sistemas de produção ocupam um lugar de destaque, a falha de uma unidade de produção (equipamento, célula ou empresa) pode ter uma consequência nefasta na eficiência de toda a estrutura, i.e., no seu desempenho global. A avaliação deste desempenho faz-se através de um conjunto de medidas cobrindo diferentes vertentes de actividade das empresas [Kaplan e Norton, 1996].

Apesar de as preocupações com a avaliação do desempenho dos sistemas industriais de produção existirem desde que surgiu a actividade industrial, nunca como hoje adquiriram tanto destaque, particularmente a medida de desempenho produtividade. Há várias décadas que a importância da produtividade na competitividade das empresas é consensual. Durante grande parte deste período, os ganhos de produtividade foram conseguidos principalmente à custa de:

- uma melhor organização do trabalho;
- especialização dos trabalhadores;
- produção de grandes séries com economias de escala;
- mão-de-obra intensiva com baixos salários;
- incentivos aos trabalhadores em função da produção obtida.

Actualmente, os sistemas industriais de produção incorporam muito mais tecnologia associada a potentes sistemas de informação e são cada vez menos mão-de-obra intensiva. Neste contexto, a disponibilidade (definida como a percentagem de tempo que um sistema de produção está a produzir *output*) é uma medida amplamente usada por gestores e engenheiros de produção preocupados com o desempenho dos sistemas. Nos sistemas de produção em linha ou mistos

(constituídos por células de fabrico de componentes e linhas de produção/montagem de produtos finais), a disponibilidade pode ser avaliada pela percentagem de tempo de produção em que existe fluxo de produtos à saída da última máquina do sistema. Deste modo, torna-se evidente a relação entre disponibilidade e produtividade.

A disponibilidade de um sistema industrial de produção também pode e deve ser avaliada do ponto de vista dos clientes. Para estes, o sistema é tanto mais disponível quanto menor for o índice que mede a *percentagem de encomendas não satisfeitas no prazo de entrega*. Nesta perspectiva, este índice é um indicador indirecto de disponibilidade, estando também relacionado com qualquer medida que avalie a satisfação dos clientes.

As razões apresentadas justificam a constante preocupação dos responsáveis da produção/manutenção pelas questões relacionadas com a disponibilidade dos sistemas industriais de produção. Neste sentido, tem-se explorado basicamente três alternativas:

- (i) Instalar equipamentos redundantes (*standby*) com os equipamentos principais do sistema de produção.
- (ii) Criar *buffers* entre estágios sucessivos do sistema de produção e *buffers* de produto acabado, de modo a garantir a continuidade da produção enquanto as máquinas são reparadas.
- (iii) Gerir melhor e, se necessário, aumentar os recursos de manutenção.

Qualquer destas alternativas constitui um mecanismo de tolerância a falhas, apresentando vantagens e desvantagens. No que se refere às principais desvantagens salientam-se: os custos de aquisição das máquinas/equipamentos, os custos de posse de *stock*, e os custos de novos recursos de manutenção. A presença destes mecanismos num sistema (ver Secção 1.5.2) cria atrasos na propagação de erros com tempos não exponenciais, introduzindo dificuldades acrescidas de análise e avaliação. Para estes casos, os métodos e ferramentas de análise e avaliação do desempenho impõem restrições na dimensão dos sistemas (sistemas relativamente simples) ou nas distribuições que modelam os processos do comportamento (hipótese markoviana). Por exemplo Giordano e Martinelli [2002] abordam a optimização do *stock* de segurança de um sistema de produção de máquina única, a produzir um tipo de produto; Ryzin, Lou et al. [1993] apresentam um estudo sobre o controlo óptimo da produção de duas máquinas e Moinzadeh [1997] analisa a indisponibilidade de um ponto de estrangulamentos,

assumindo taxas de produção e de procura constantes, e tempos de reparação e tempos de falha exponenciais.

4.1.2 Modelação e avaliação de sistemas com mecanismos de tolerância a falhas

Como referimos no Capítulo 1, não há uma única representação ou modelo de especificação, para descrever a evolução dos sistemas com mecanismos de tolerância a falhas. Contudo, os modelos estocásticos tipo gráficos de estado (também designados por diagramas de perdas [Faria, 1996]) parecem ser os mais adequados para modelar sistemas desta natureza. Estes modelos podem ser analisados por métodos analíticos ou por simulação.

Resultados analíticos têm sido conseguidos apenas para casos simples com condições muito restritivas. Malathronas, Perkins et al. [1983] apresentaram uma expressão analítica para a disponibilidade de um sistema constituído por duas máquinas e um *buffer* intermédio, admitindo tempos de falha e tempos de reparação exponencialmente distribuídos. Mais recentemente Kenneth, Sörensen et al. [2001] servindo-se destes resultados apresentaram um modelo aproximado para o cálculo da disponibilidade de um sistema de produção em linha, com n máquinas e $n-1$ *buffers* intermédios

Para sistemas mais complexos, a dimensão/complexidade dos modelos, conjuntamente com a natureza não markoviana de muitos dos seus processos, introduzem dificuldades acrescidas na avaliação por métodos analíticos. Para ultrapassar estas dificuldades, alguns autores propõem modelos aproximados [Ching, 2001; Bowles e Dobbins, 2004] e metodologias de modelação hierárquica [Ayag, 2002; Zuberek, 2000; Kim, Inaba et al., 2003; Gokbayrak e Cassandras, 2000] para várias classes de modelos de avaliação do desempenho. Os modelos aproximados podem ser divididos em modelos de agregação e modelos de decomposição. Nos modelos de agregação vários subsistemas simples são juntos para formarem uma aproximação do modelo global. Nos modelos de decomposição, os sistemas são decompostos em vários subsistemas que depois são examinados independentemente. Em ambos casos, a validade das considerações tem de ser devidamente examinada.

Outros autores [Chen e Ren, 2004; Hecht, Hecht et al., 2002] propõem, também, o uso combinado de diferentes modelos para descreverem sub-modelos de um dado sistema. Acontece que nenhuma destas abordagens se mostra satisfatoriamente adequada para sistemas de produção complexos, tornando frequente o recurso à simulação.

4.1.3 Abordagem hierárquica proposta

Ao contrário do que acontece com muitas ferramentas de fiabilidade, a abordagem apresentada nas Secções 4.3 e 4.4 relaxa pressupostos básicos, não impondo restrições quanto ao tipo de distribuições que caracterizam os processos do comportamento (permite lidar com processos caracterizados por qualquer distribuição), e alarga o campo de aplicação. A utilização de uma estrutura de modelação hierárquica assente na decomposição, simplificação e agregação dos modelos e no conceito de *modelo canónico standard*, introduzido no âmbito deste estudo, possibilita a representação da estrutura global do sistema e do comportamento interno de cada unidade de produção (célula de produção) a diferentes níveis de modelação. Esta estrutura comporta o uso de modelos híbridos para a solução de sub-modelos, i.e., a aplicação de técnicas analíticas e de simulação para a caracterização dos modelos canónicos standard (Secção 4.3.1) dos subsistemas. A um nível mais elevado, o comportamento do sistema é também representado por um modelo canónico standard, obtido por agregação dos modelos canónicos dos vários subsistemas que o compõe, permitindo a avaliação dos índices de fiabilidade globais do sistema.

Ao nível das células de produção, a evolução/comportamento de cada uma destas unidade de produção (ou subsistema) é descrita recorrendo a um modelo - gráfico de estado, cujas transições entre estados são determinadas por processos estocásticos. Este modelo é então reduzido a um gráfico de estados com apenas dois estados (modelo canónico standard): um estado operacional equivalente que agrega todos os estados nos quais se obtêm o *output* planeado para a unidade de produção, e um estado de falha equivalente que agrega todos os estados em que tal não se verifica. A caracterização deste modelo passa por determinar a frequência de transição para o estado de falha equivalente e a função de distribuição do tempo de permanência nesse estado (tempo de reposição).

4.2 Análise de sistemas de produção

Neste estudo, um sistema de produção é visto como um arranjo estrutural de células ou unidades de fabrico que interactivam entre si numa lógica fornecedor/cliente. Como se mostra na Figura 4.1, o *output* de uma unidade de fabrico, c_i (máquina/equipamento ou célula de fabrico) pode estar directamente ligado ao *input* de uma ou mais unidades de fabrico a jusante. Entre duas unidades de fabrico c_i e c_j (com $c_i \rightarrow c_j$) pode existir um *buffer* de componentes ou subprodutos e, no final do sistema de produção, um *buffer* de produto acabado.

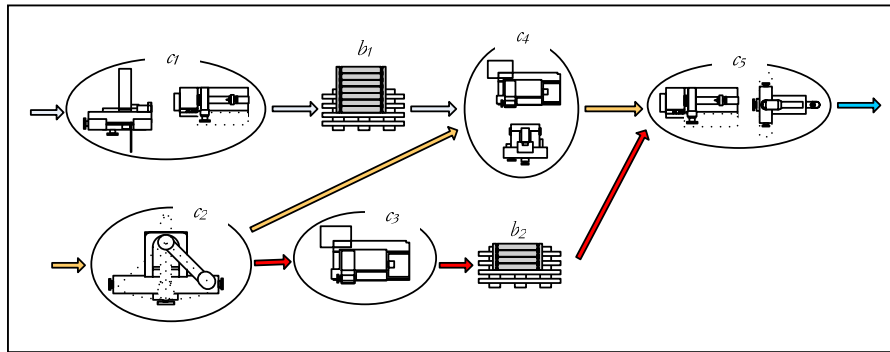


Figura 4.1: Sistema de produção

Sempre que o fluxo de materiais num sistema de produção se processa de forma regular, obtém-se o *output* de produção planeado. A ocorrência de perturbações no fluxo de materiais, originando cortes ou interrupções de fluxo, pode afectar o *output* quer das unidades de fabrico, quer do sistema de produção, provocando uma falha de produção. A falha de *output* de uma unidade c_i pode dar-se por duas vias: (i) alterações operacionais/reconfigurações internas devido a uma *falha endógena*, i.e., falha num dos equipamentos de c_i ou; (ii) *falha exógena*, ou seja, falha de um equipamento externo, provocando uma interrupção de fluxo de materiais no *input* de c_i .

Considere-se, por exemplo, que c_i é uma célula de fabrico cujo o *output* constitui o *input* da célula c_j , existindo ainda um *buffer* b_p entre as duas células, como se mostra na Figura 4.2.

A ocorrência de uma falha de produção em c_i (interrupção de fluxo no nodo n_i) não se propaga imediatamente para jusante dada a existência do *buffer* b_p . Nestas situações, a falha de produção de c_i propagar-se-á para c_j e restante sistema a jusante com um determinado tempo de atraso

(em relação ao instante de ocorrência), que é função da dimensão (quantidade de material) do *buffer* b_i e da taxa de produção de c_j . Tipicamente este tempo é uma variável aleatória com uma distribuição não exponencial, apresentando frequentemente uma função densidade de probabilidade próxima da função Dirac (processo determinístico).

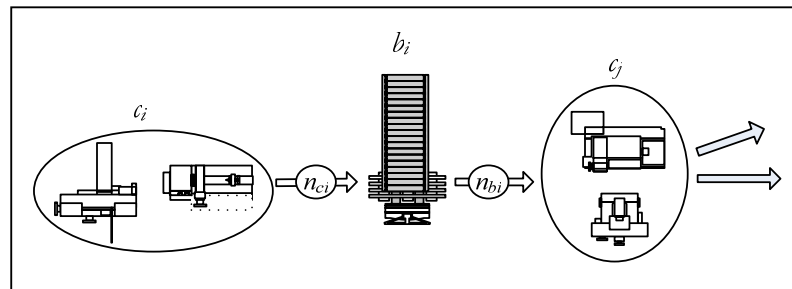


Figura 4.2: Fluxo entre duas células e um *buffer* intermédio

4.2.1 Perdas de produção

Um objectivo importante do estudo da fiabilidade de um sistema de produção consiste na estimação de índices de fiabilidade, dada a sua importância como elementos essenciais para a tomada de decisões. Contudo, o objectivo final de um estudo desta natureza deverá ser a avaliação previsional das perdas de produção, provocadas pelas falhas de elementos do sistema (máquinas/equipamentos). Assim, a estimação de índices de fiabilidade, para além de ser um objectivo é também um passo crucial e imprescindível no processo de avaliação das perdas de produção.

A cada ocorrência de falha de produção corresponderá uma perda económica, designada doravante por perda de produção. Este conceito fará parte de um conceito mais amplo que será introduzido no Capítulo 5 e que designaremos por *custos da não fiabilidade*. A perda de produção pode ser essencialmente função da duração das falhas ou da taxa de ocorrência das falhas. Estas duas componentes da perda são designadas neste capítulo por perda α e perda β , respectivamente. A primeira componente corresponde às situações onde um problema numa unidade de produção tem custos equivalentes à quebra de produtividade. Nestes casos, a perda de produção será proporcional à duração da falha. A outra componente da perda é particularmente relevante nas situações onde uma perturbação momentânea de um processo de fabrico pode causar a perda ou deterioração de uma grande quantidade de materiais em curso no processo produtivo (indústrias de processos contínuos). Nestas situações, o número de

falhas é determinante na obtenção das perdas. De acordo com estes conceitos, os princípios orientadores subjacentes ao método apresentado nas secções seguintes são:

- Uma perda de produção corresponde a uma perda económica causada por uma interrupção do fluxo de materiais (*output*) à saída de uma unidade de fabrico;
- As perdas de produção são causadas por falhas nos equipamentos de produção, que se propagam pelo fluxo de materiais dentro do sistema de produção, e os seus valores são função da duração e/ou da frequência de interrupções do fluxo;
- Os *buffers* podem desempenhar um papel importante nos sistemas de produção introduzindo atrasos na propagação de falhas dos equipamentos para jusante;
- As dimensões e localizações dos *buffes* deverão resultar de uma análise económica, ponderando os custos de implementação e as perdas de produção;
- Existem recursos de manutenção dedicados a cada célula de fabrico.

A Figura 4.3 sintetiza estas ideias através do fluxo dos materiais e consequências das falhas (Figura 4.3-a), e do fluxo lógico do processo de análise da fiabilidade (Figura 4.3-b).

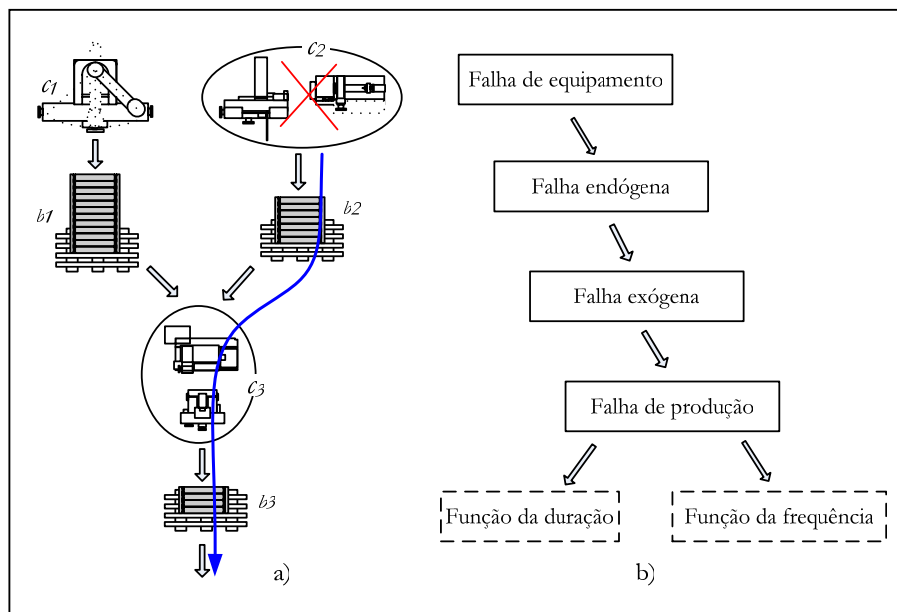


Figura 4.3: Falhas de produção

4.3 Estrutura de modelação

Um estudo de análise da fiabilidade de um sistema de produção requer o conhecimento quer do comportamento interno de cada unidade de fabrico, quer da estrutura global do sistema. A captação, estruturação e manipulação dos dados e informação acerca do sistema é feita a dois níveis de modelação:

1. A um nível global – a este nível o modelo representa a estrutura geral do sistema de produção com as unidades de fabrico que o constituem e o fluxo físico de materiais entre estas unidades;
2. A um nível local – a este nível tem-se um conjunto de modelos que representam o comportamento interno de cada unidade de fabrico.

Como exemplo, apresenta-se na Figura 4.4, o modelo global de um sistema de produção constituído por três células (c_1 , c_2 e c_3) e dois *buffers* (b_1 e b_2), juntamente com o modelo local de cada célula. Ao nível das células os modelos descrevem apenas o comportamento que depende dos processos internos dessas células. As dependências comportamentais induzidas pelo fluxo de materiais entre as células de fabrico do sistema de produção são implicitamente representadas pela estrutura do modelo global.

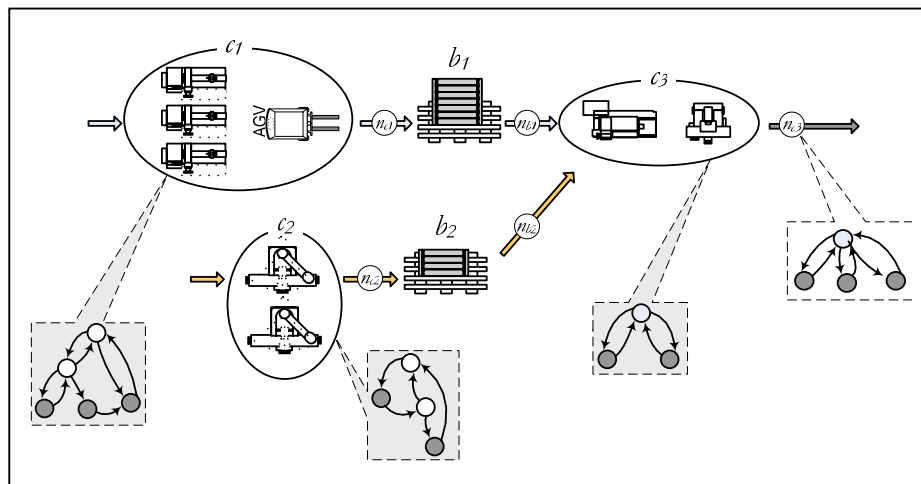


Figura 4.4: Estrutura de modelação com dois níveis

A respeito das células de fabrico pode, ainda, dizer-se que possuem:

- i. uma disponibilidade própria - função da fiabilidade dos equipamentos, da qualidade do projecto, do nível de redundância, dos recursos de manutenção, etc., e;
- ii. uma disponibilidade induzida – função dos mecanismos de tolerância a falhas externos às células (por exemplo, *buffers*).

Considera-se que uma célula é um subsistema independente se a sua disponibilidade própria não for afectada pelo comportamento de outras células. Este conceito é importante para a abordagem hierárquica apresentada neste capítulo, que de uma forma sucinta se pode descrever nos seguintes passos:

1. *Análise funcional do sistema* – análise das dependências entre as várias unidades de fabrico do sistema de produção, induzidas pelo fluxo de materiais e pela partilha de recursos de manutenção, e decomposição do sistema em subsistemas. Esta decomposição tem como linhas orientadoras a obtenção de subsistemas com as seguintes características: (i) independentes do ponto de vista da fiabilidade, i.e., subsistemas cujos processos do comportamento (processos de falhas, reparação, reconfiguração...) não são condicionados pelos estados dos outros subsistemas; (ii) com afinidades internas em termos de fiabilidade, nomeadamente, no que se refere à dependência entre equipamentos e/ou partilha de recursos de reparação ou outros.
2. *Obtenção do diagrama de estados de cada subsistema* - Modelo que representa todos os estados relevantes de um subsistema e os processos responsáveis pela transição entre estes estados.
3. *Obtenção do modelo reduzido de cada subsistema* - agregação de estados com idêntico comportamento em termos operacionais (falha ou funcionamento) do diagrama de estados obtido em 2. A redução destes modelos pode ser implementada pela via analítica ou por simulação. Essencialmente é a complexidade do diagrama de estados do subsistema que determina qual a via a seguir para a sua redução.
4. *Construção do modelo global do sistema* - a partir dos modelos reduzidos dos subsistemas, constrói-se o modelo global do sistema. Este modelo pode também ser objecto de redução/simplificação, do mesmo modo que os modelos obtidos no Passo 2.

4.3.1 Modelo canónico

Do ponto de vista do sistema a jusante, o comportamento de uma célula de fabrico, c , pode ser descrito por um modelo com dois estados (Figura 4.5) um estado operacional, (*oper*) que corresponde às situações em que a célula produz o seu *output* de acordo com o planeado, e um estado de falha, (*falha*) representando as situações em que perturbações internas ou no fluxo de *input* da célula motivam uma interrupção no fluxo normal dos materiais.

Quando os equipamentos estão na fase de vida útil, é comum admitir-se taxas de falha constantes, i.e., processos de falha modelados por distribuições exponenciais. Relativamente aos processos de reposição, não deverão ser modelados por estas distribuições, embora sejam frequentemente utilizadas em estudos de fiabilidade, dada a simplificação que introduzem nos cálculos. De facto, as crescentes preocupações com a manutibilidade na fase de projecto têm condizido a uma concepção modular de máquinas e equipamentos, resultando em reduções quer nos tempos de reparação, quer na sua variabilidade. Consequentemente, os processos de reposição tornam-se hiperexponenciais, não poucas as vezes quasi-determinísticos, com funções densidade de probabilidades próximas da função Dirac.

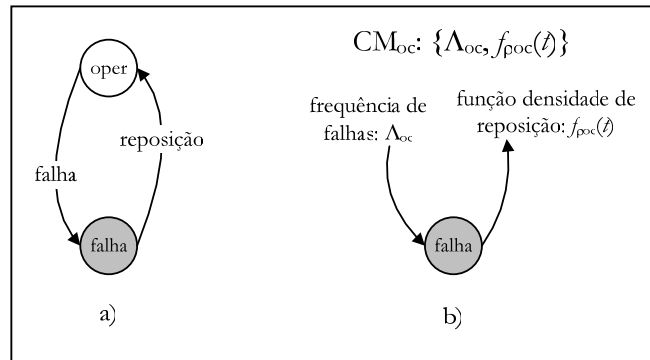


Figura 4.5: Modelo canónico

O comportamento do sistema a montante do nodo à saída da célula c , será completamente caracterizado pelo par $\{\Lambda_{oc}, f_{poc}(t)\}$ que daqui em diante será designado como *modelo canónico à saída da célula c* , e representado por M_{oc} .

Conforme foi referido anteriormente, a indisponibilidade de *output* de uma célula tem duas causas ou componentes, uma endógena à própria célula e outra induzida pelas células a montante. O conceito de *modelo canónico* pode, da forma como foi definido, ser usado para

modelar estas duas componentes. Em concreto, ocorrem desde já três situações em que o modelo canónico pode ser utilizado (ver Figura 4.6):

1. modelação do comportamento interno da célula c – o estado de falha do modelo canónico representará as situações em que a célula c é incapaz de produzir o *output* pretendido, devido a uma falha interna;
2. modelação do *output* da célula c – o estado de falha representará as situações em que a célula c não cumpre a sua missão devido a uma falha interna ou a uma falha de *input* provocada pela falha de uma unidade de produção a montante;
3. modelação do comportamento do *output* a jusante do *buffer* b – o estado de falha corresponderá às situações em que o *buffer* b fica impossibilitado de abastecer as células a jusante.

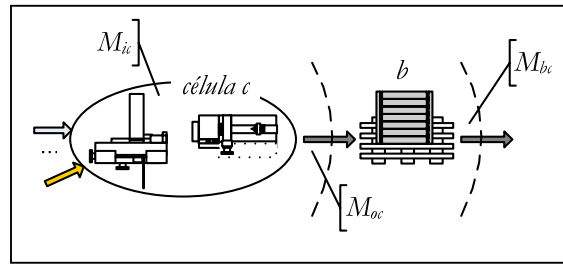


Figura 4.6: Modelos canónicos internos e externos

De acordo com a representação da Figura 4.6, os três modelos canónicos da célula c serão designados respectivamente, por M_{ic} , M_{oc} , M_{bc} . Um aspecto importante relacionado com os modelos canónicos prende-se com o facto do modelo à saída da célula c , M_{oc} poder ser obtido por combinação do modelo interno desta célula, M_{ic} com o modelo do *output* do *buffer* a montante, M_{bc-1} . Na secção seguinte mostra-se que este procedimento permite obter o modelo canónico equivalente de um conjunto S de células de produção, combinando sucessivamente os modelos canónicos das células pertencentes a S .

4.4 Algoritmos de avaliação

O algoritmo de avaliação permite a obtenção de índices de fiabilidade tais como a indisponibilidade dos materiais e a frequência de ocorrência de interrupções num qualquer nodo ou ponto do sistema de produção. Está directamente relacionado com o conceito de modelo canónico e envolve os seguintes passos que serão discutidos nas Secções seguintes:

1. Determinação do canónico interno, M_{ic} , para cada célula de fabrico do sistema de produção;
2. Obtenção do modelo canónico do subsistema a montante de cada nodo do modelo global;
3. Avaliação das perdas de produção α e β em cada nodo do modelo global.

4.4.1 Determinação do modelo canónico interno

O primeiro passo do algoritmo de avaliação consiste na determinação do modelo canónico interno, M_{ic} para cada célula do sistema de produção. Pode ser obtido analiticamente ou por simulação dependendo fundamentalmente da complexidade do modelo da célula em estudo. Nesta secção apresentaremos o procedimento para a obtenção das expressões da frequência de falhas, Λ_{ic} e da função densidade de probabilidade, $f_{pic}(t)$ de M_{ic} para três situações: (i) uma célula constituída por k elementos (máquinas/equipamentos) não redundantes; (ii) uma célula com elementos em redundância passiva; e (iii) um célula constituída por uma estrutura operacional mais complexa.

As situações (i) e (ii) cobrem a maioria dos casos que encontramos em sistemas de produção industriais. As expressões que caracterizam os respectivos modelo canónicos serão obtidas pela via analítica, como se mostra de seguida. A situação (iii) configura um modelo mais complexo, de difícil tratamento analítico, razão pela qual se recorrerá à simulação para determinação do correspondente modelo canónico. Todo este procedimento será apresentado na Secção 4.4.1.3. Deste modo, será sempre possível determinar o modelo canónico interno de uma célula, qualquer que seja a sua complexidade.

4.4.1.1 Elementos não redundantes

Considere-se uma célula montante, c (célula cujo *input* provém directamente do armazém de matérias-primas), formada por duas máquinas não redundantes (M1 e M2), cujo comportamento interno é representado pelo modelo de estados da Figura 4.7-a. As expressões que caracterizam o respectivo modelo canónico interno, M_{ic} (Figura 4.7-b) podem ser facilmente obtidas por:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \lambda_1 m_{\mu_1} + \lambda_2 m_{\mu_2}} \quad (4.1)$$

$$\Lambda_{ic} = P_0 (\lambda_1 + \lambda_2) \quad (4.2)$$

$$f_{pic}(t) = \frac{\lambda_1}{\Lambda_{ic}} f_{\mu_1}(t) + \frac{\lambda_2}{\Lambda_{ic}} f_{\mu_2}(t) \quad (4.3)$$

sendo:

- P_0 , a probabilidade do estado de funcionamento;
- λ_1 e λ_2 , as taxas de falhas de M1 e M2, respectivamente;
- m_{μ_1} e m_{μ_2} os tempos médios de reparação de M1 e M2, respectivamente;
- $f_{\mu_1}(t)$ e $f_{\mu_2}(t)$, as funções de distribuição de probabilidades dos processo de reparação de M1 e M2, respectivamente;
- Λ_{ic} , a frequência de transição para o estado de falha;
- $f_{pic}(t)$, a função de distribuição do tempo de reposição.

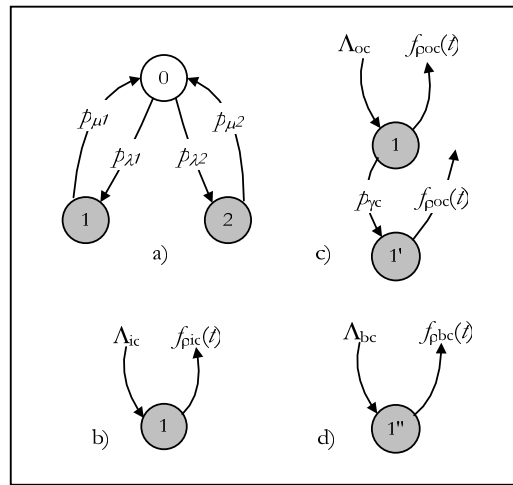


Figura 4.7: Modelos canónicos de uma célula com duas máquinas não redundantes

Para o caso geral de uma célula constituída por k máquinas não redundantes, tem-se:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^k \lambda_j m_{\mu_j}} \quad (4.4)$$

$$\Lambda_{ic} = P_0 \sum_{j=1}^k \lambda_j \quad (4.5)$$

$$f_{\rho ic}(t) = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{\Lambda_{ic}} f_{\mu_j}(t) \quad (4.6)$$

onde λ_j é a taxa de falhas da máquina j , e $f_{\mu_j}(t)$ é a função densidade de probabilidade do processo de reparação p_{μ_j} , cujo tempo médio é m_{μ_j} .

Como se admitiu que a célula c é uma célula montante, o modelo canónico à saída M_{oc} será idêntico ao modelo canónico interno M_{ic} (considera-se que uma célula montante nunca pára por falta de *input*). Quando existe um *buffer* intermédio b , o modelo canónico à sua saída M_{bc} será representado pelo par $\{\Lambda_{bc}, f_{\rho bc}(t)\}$ como se mostra nos gráficos c e d da Figura 4.7. A frequência de falhas Λ_{bc} obtém-se pelo produto da frequência de chegada ao estado 1 com a probabilidade de transição do estado 1 para o estado 1'. Se $f_{\gamma c}(t)$ fôr a função densidade de probabilidade do processo referente ao tempo de indisponibilidade tolerado pelo *buffer* b vem:

$$\Lambda_{bc} = \Lambda_{ic} \int_0^{\infty} f_{\gamma c}(t_1) \int_{t_1}^{\infty} f_{\rho ic}(t_2) dt_2 dt_1 \quad (4.7)$$

A função densidade de probabilidade do processo de reposição resulta do rácio entre a função densidade de probabilidade do tempo de permanência no estado 1' dado que o sistema acaba de chegar ao estado 1:

$$\int_0^{\infty} f_{\gamma c}(t_1) f_{\rho ic}(t + t_1) dt_1 \quad (4.8)$$

e a probabilidade de transição do estado 1 para o estado 1'.

Tem-se deste modo:

$$f_{\rho bc}(t) = \frac{\int_0^{\infty} f_{\gamma c}(t_1) f_{\rho ic}(t + t_1) dt_1}{\int_0^{\infty} f_{\gamma c}(t_1) \int_{t_1}^{\infty} f_{\rho ic}(t_2) dt_2 dt_1} \quad (4.9)$$

ou

$$f_{\rho bc}(t) = \frac{\int_0^{\infty} f_{\gamma c}(t_1) f_{\rho ic}(t + t_1) dt_1}{\Lambda_{bc} / \Lambda_{ic}} \quad (4.10)$$

4.4.1.2 Redundância passiva

Tem-se uma redundância passiva em sistemas de produção industriais quando, para uma dada máquina/equipamento, existe uma segunda máquina/equipamento de reserva (*standby*) para desempenhar as funções da primeira, na eventualidade desta falhar. A entrada em funcionamento da máquina/equipamento de reserva dá-se, normalmente, após a execução de alguns procedimentos de verificação, comutação de dispositivos, encaminhamento de fluxo de materiais, etc., que globalmente se designa por processo de reconfiguração.

Embora em estudos de fiabilidade se considere frequentemente estes processos como instantâneos (não sendo como tal incluídos no modelo) trata-se, de facto, de uma simplificação do modelo. Em sistemas de produção industriais estes processos têm normalmente durações não negligenciáveis, pelo que a sua não inclusão nos modelos de fiabilidade pode introduzir alterações significativas nos resultados obtidos.

No caso que se analisa de seguida o processo de reconfiguração faz parte do modelo. Trata-se de um célula de fabrico com duas máquinas (M e M'), uma das quais em *standby* (Figura 4.8-a). Assim que a máquina M falha (Figura 4.8-b), inicia-se um processo de reconfiguração p_{ξ} no sentido de colocar em funcionamento a máquina em *standby* M', o que vem a acontecer com a conclusão deste processo (Figura 4.8-c). Então, poderá ocorrer a falha de M' (Figura 4.9-d) ou a conclusão da reparação de M (Figura 4.8-a).

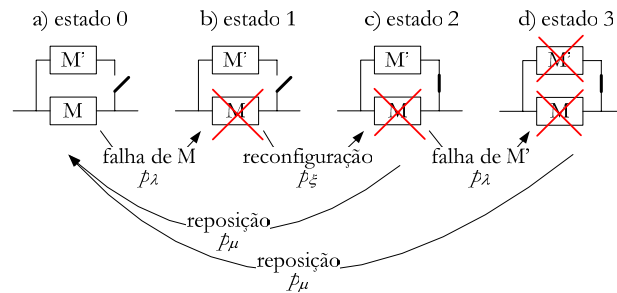


Figura 4.8: Redundância passiva – duas máquinas

Na Figura 4.9 mostra-se o diagrama de estados desta célula de fabrico onde o comportamento descrito é modelado pelos processos estocásticos p_λ (processo de falha de uma máquina/equipamento), p_ξ (processo de reconfiguração) e p_μ (processo de reparação de M ou M').

O procedimento para obtenção do modelo canónico desta célula é um pouco mais complexo que o apresentado na Secção 4.4.1.1 (componentes não redundantes). A sua implementação processa-se em dois passos:

Passo 1: Calcular para cada estado de falha do modelo original (estados 1 e 3 da Figura 4.9-a), as expressões da frequência de chegada e da distribuição do processo de reposição. Deste modo caracteriza-se o modelo de estado da Figura 4.9-b;

Passo 2: Calcular a frequência de chegada ao estado de falha equivalente e a distribuição do processo de reposição. Estas expressões definem o modelo canónico interno da célula de fabrico (Figura 4.9-c).

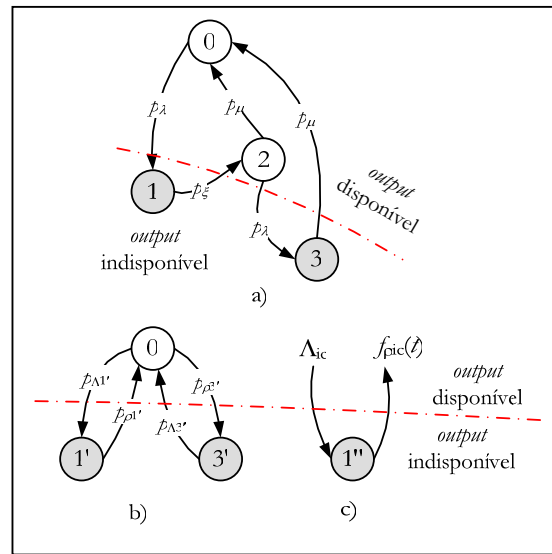


Figura 4.9: Modelo de estados do sistema com redundância passiva

Da implementação do Passo 1 obtêm-se as expressões relevantes para o primeiro estado de falha (estado 1) e para o segundo estado de falha (estado 3). Tem-se então para o primeiro estado de falha:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \lambda(m_\xi + m_\mu)} \quad (4.11)$$

$$\Lambda_{1'} = \lambda P_0 \quad (4.12)$$

$$f_{\rho 1'}(t) = f_\xi(t) \quad (4.13)$$

O segundo estado de falha tem as seguintes expressões para a frequência de falhas e para a função de distribuição do processo de reposição:

$$\Lambda_{3'} = \Lambda_{1'} \int_0^\infty f_\lambda(t_1) \int_{t_1}^\infty f_\mu(t_2) dt_2 dt_1 \quad (4.14)$$

$$f_{\rho 3'}(t) = \frac{\int_0^\infty f_\lambda(t_1) f_\mu(t + t_1) dt_1}{\int_0^\infty f_\lambda(t_1) \int_{t_1}^\infty f_\mu(t_2) dt_2 dt_1} \quad (4.15)$$

Uma vez estabelecidas as Equações (4.11) a (4.15), a implementação do Passo 2 é simples. O modelo de estados da Figura 4.9-b é semelhante ao modelo de estados de duas máquinas não redundantes (ver Secção 4.4.1.1). Deste modo, as expressões que caracterizam o modelo canónico interno são similares às Equações (4.5) e (4.6), obtendo-se para este caso:

$$\Lambda_{ic} = \Lambda_{1'} + \Lambda_{3'} \quad (4.16)$$

$$f_{\rho ic}(t) = \frac{\Lambda_{1'}}{\Lambda_{ic}} f_{\rho 1'}(t) + \frac{\Lambda_{3'}}{\Lambda_{ic}} f_{\rho 3'}(t) \quad (4.17)$$

Se a célula c tiver um *buffer* à saída, o correspondente modelo canónico pode ser obtido com base nas Equações (4.7) e (4.10).

4.4.1.3 Estruturas mais complexas

Nem sempre as expressões que caracterizam o modelo canónico interno de uma célula podem obter-se tal como se acabou de apresentar. Em muitos casos, a determinação analítica destas expressões pode revelar-se muito difícil. O recurso à simulação torna-se nestes casos incontornável. De seguida apresenta-se o procedimento através do qual se caracteriza o modelo canónico de uma célula de fabrico recorrendo à simulação.

Considere-se uma célula montante c' formada por três máquinas idênticas e um transportador automático (AGV), responsável por estabelecer o fluxo de materiais entre c' e a célula a jusante desta (não existe neste caso nenhum *buffer* intermédio). Para se obter o *output* planeado para c'

são necessários em condições operacionais: o transportador automático e pelo menos duas máquinas (paralelo 2/3). Dados os recursos de manutenção disponíveis, apenas um equipamento de c' pode estar em reparação em cada momento.

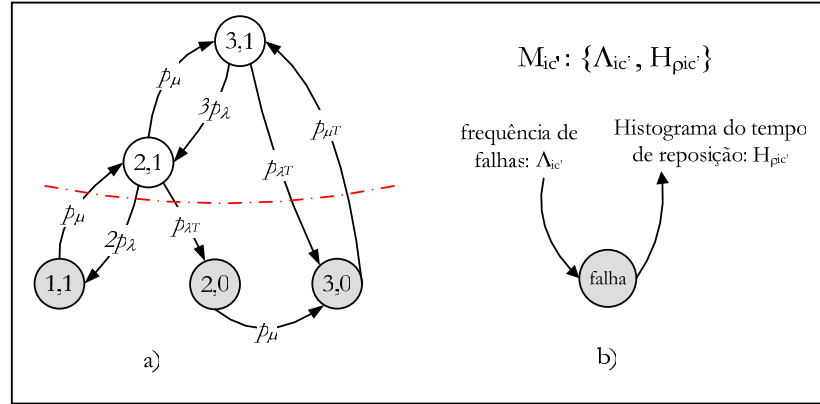


Figura 4.10: Modelo de estados da célula c'

Na Figura 4.10-a mostra-se o modelo de estados interno da célula c' . Cada estado é representado pelo par (x_1, x_2) em que x_1 representa o número de máquinas operacionais e x_2 , o estado do AGV (1 - operacional; 0 - falha). Os estados não sombreados e sombreados representam os estados operacionais e os estados de falha da célula c' , respectivamente.

Conhecendo as funções que caracterizam os processos de falha p_λ e de reparação p_μ , dos equipamentos da célula c' pode calcular-se os tempos de permanência nos estados de falha, através do método de simulação por acontecimentos discretos apresentado na Secção 2.3.4.3. Agrupando por classes os resultados obtidos em várias corridas de simulação, constrói-se um histograma de frequências relativas $H_{pic'}$ como se ilustra na Figura 4.11. Deste modo, modela-se de uma forma discreta o tempo de permanência no conjunto dos estados de falha e, por conseguinte, o tempo do processo de reposição do modelo canónico $M_{ic'}$ (Figura 4.10-b). Acontece que este tempo é uma variável aleatória contínua, e como tal, deverá ser modelado por uma função distribuição e não por um histograma. Se $H_{pic'}$ for adequadamente aproximado por uma função distribuição de probabilidades essa função será a função $F_{pic'}(t)$ representada na Figura 4.11, cuja função densidade de probabilidade será $f_{pic'}(t)$.

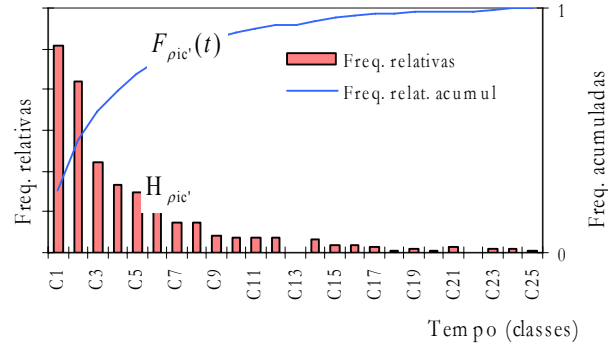


Figura 4.11: Histograma de tempos de reposição

Finalmente para caracterizar $M_{ic'}$ através do par $\{\Lambda_{ic'}, f_{pic'}(t)\}$ será necessário calcular $\Lambda_{ic'}$. Numa corrida de simulação de duração T_{simul} obtém-se um valor para $\Lambda_{ic'}$ por:

$$\Lambda_{ic'} = \frac{N_{trans}}{T_{simul}}$$

sendo N_{trans} o número de transições do sistema de um estado operacional para um estado de falha, facilmente obtido por um contador. Uma estimativa para $\Lambda_{ic'}$ será dada pela média dos valores de $\Lambda_{ic'}$ obtidos em cada corrida de simulação efectuada. Se existisse um *buffer* à saída da célula c' , a caracterização de $M_{bc'}$ pelo par $\{\Lambda_{bc'}, f_{pbc'}(t)\}$ seria feita do modo como se apresentou em 4.4.1.1.

Exemplo numérico

Considere-se que os processos do comportamento da célula c' representados no modelo de estado da Figura 4.10-a são caracterizados, em termos de distribuições e respectivos parâmetros, pelos dados da Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Caracterização dos processos da célula c'

Processo	Descrição	f.d.p.	Duração (h)	Parâmetros
p_λ	Falha de uma máquina	Exponencial	$m_\lambda = 20$	$\lambda = 1/20$
p_{λ_T}	Falha do AGV	Exponencial	$m_{\lambda_T} = 80$	$\lambda_T = 1/80$
p_μ	Reparação de uma máquina	Erlang ₆	$m_\mu = 1.5$	$\mu = 6/1.5$
p_{μ_T}	Reparação do AGV	Erlang ₂₀	$m_{\mu_T} = 2$	$\mu_T = 20/2$

Os tempos de permanência nos estados de falha e a frequência com que c' transita para um estado de falha foram determinados através de um programa de simulação implementado no programa MATHEMATICA, tendo por base o diagrama de estados da Figura 4.11-a, e a informação da Tabela 4.1.

Um parâmetro importante num estudo de simulação é a duração da simulação T_{simul} (ver anexo A), principalmente nos casos em que as durações dos processos são longas. No exemplo em estudo considerou-se $T_{simul}=10^5$ horas, um valor suficientemente grande para que os acontecimentos de menor probabilidade ocorram diversas vezes e os resultados não sejam influenciados pelas condições iniciais da simulação.

Na Figura 4.12 mostra-se uma representação gráfica dos tempos de permanências (em horas) nos estados de falhas $((1,1), (2,0), (3,0))$ obtidos numa corrida de simulação com $T_{simul}=10^5$ horas.

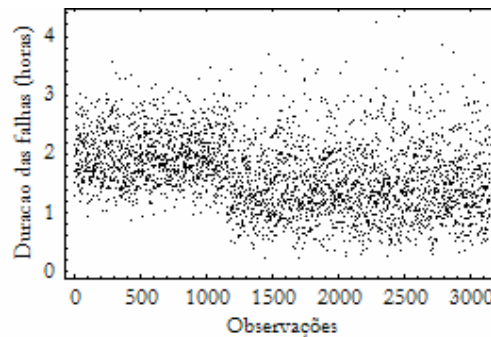


Figura 4.12: Representação dos tempos de falha da célula c'

Agrupando estes tempos por classes de amplitude Am , obtém-se para cada corrida de simulação, frequências absolutas e frequências relativas para cada classe. Na Tabela 4.2 mostram-se os resultados obtidos em 7 corridas de simulação, considerando classes de amplitude $Am=1$ hora. Apresentam-se também o valor médio e o desvio padrão da amostra de valores (frequências relativas) representativa de cada classe, o coeficiente de variação, e o intervalo de confiança para cada valor médio, calculado com um grau de confiança de 95%. Na última linha desta tabela constam as frequências de transição do sistema do estado operacional para o estado de falha (Freq.trans).

Pelos valores de dispersão apresentados (coeficientes de variação - CV) constata-se que a amostra de valores representativa da classe de tempo $]5 - 6]$ apresenta uma variabilidade

significativamente maior que a verificada para as restantes classes. A precisão do valor médio da amostra, usado como estimador da média desta classe, é inferior à precisão dos valores médios das restantes classes. Entendeu-se no entanto, ser suficiente para os fins em vista, caso contrário, ter-se-ia de aumentar o tamanho da amostra efectuando mais corridas (*runs*).

Tabela 4.2: Resultados de 7 corridas de simulação

Classe	Frequências relativas dos tempos de falha							Média	DP	Intervalos de confiança		CV (%)
	<i>run 1</i>	<i>run 2</i>	<i>run 3</i>	<i>run 4</i>	<i>run 5</i>	<i>run 6</i>	<i>run 7</i>					
[0 - 1]	0,129376	0,142200	0,132797	0,135890	0,139252	0,129830	0,132832	0,13460	0,004787	0,130169	0,1390242	3,56
[1 - 2]	0,563775	0,569108	0,575241	0,571779	0,569782	0,567543	0,573622	0,5701213	0,0038575	0,566554	0,5736891	0,68
[2 - 3]	0,288584	0,271223	0,268489	0,269939	0,269159	0,282226	0,272870	0,2746413	0,0077113	0,267509	0,2817733	2,81
[3 - 4]	0,017047	0,016549	0,022186	0,021166	0,020249	0,019474	0,019424	0,0194423	0,0020518	0,017545	0,0213399	10,55
[4 - 5]	0,000913	0,000919	0,000965	0,000920	0,001246	0,000927	0,000940	0,0009758	0,0001204	0,000864	0,0010872	12,34
[5 - 6]	0,000304	0,000306	0,000322	0,000307	0,000312	0,000000	0,000313	0,0002663	0,0001176	0	0,000375	44,15
[6 - 7]	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0	0			
[7 - 8]	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0	0			
Freq. trans	0,03061	0,03035	0,02891	0,03036	0,02981	0,03011	0,02972	0,0299814	0,0005681	0	0,0005254	1,89

Estabelecidas as frequências relativas médias para cada classe de tempo de falha, constrói-se o histograma de frequências relativas como se apresenta na Figura 4.13-b. Embora não se apresentem as frequências absolutas das classes, foi necessário calculá-las para a partir daí se obterem as frequências relativas. Na Figura 4.13-a mostra-se o histograma de frequências absolutas construído com base nesses valores.

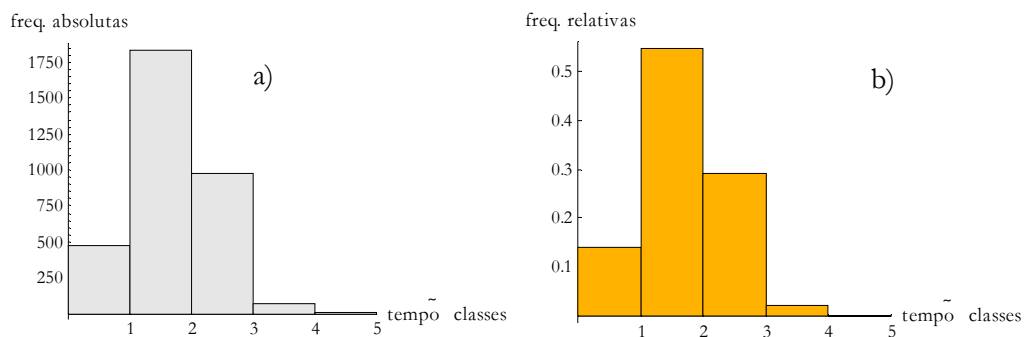


Figura 4.13: Histogramas dos tempos de falha da célula c'

Neste momento tem-se caracterizado o tempo de permanência no estado de falha da célula c' (Figura 4.10-b) pelo histograma da Figura 4.13-b. Contudo, para dar continuidade à abordagem hierárquica que tem vindo a ser apresentada é necessário que o tempo de reposição da célula c'

seja aproximado por uma função distribuição de probabilidades. O passo seguinte será então aproximar o histograma obtido por uma função de distribuição contínua.

Aproximação de uma função de distribuição ao histograma

O formato do histograma que se pretende aproximar é um factor importante na escolha da função distribuição teórica que aproxima o histograma. A flexibilidade desta função – possibilidade de adquirir diferentes formas consoante os valores dos parâmetros – é um outro aspecto a considerar nesta escolha. Assim, tendo em conta estes aspectos, considerou-se a função de distribuição de Weibull como função de distribuição teórica para aproximar o histograma dos tempos de falha da célula c' . Esta função tem três parâmetros: o parâmetro de escala α , o parâmetro de forma β e o parâmetro de posição γ . Normalmente, utiliza-se apenas com dois parâmetros α e β (considera-se $\gamma=0$). Neste caso, a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} \quad (4.18)$$

Para caracterizar a função distribuição teórica falta ainda determinar os valores dos respectivos parâmetros. Por regressão não linear (utilizando o programa MATHEMATICA) obtiveram-se os resultados da Tabela 4.3, onde constam os valores dos parâmetros $\alpha=1.8946$ e $\beta=2.759$ e também indicadores da qualidade do ajustamento.

{BestFitParameters → {β → 2.759, α → 1.8946},			
	Estimate	Asymptotic SE	CI
ParameterCITable → β	2.759	0.00647173	{2.74317, 2.77484},
α	1.8946	0.00196719	{1.88979, 1.89941}
EstimatedVariance → 1.5336 × 10 ⁻⁶ ,			
	Model	DF	SumOfSq
		2	0.418953
ANOVATable → Error		6	9.20158 × 10 ⁻⁶
	Uncorrected Total	8	0.418962
	Corrected Total	7	0.293951
AsymptoticCorrelationMatrix → $\begin{pmatrix} 1. & 0.24765 \\ 0.24765 & 1. \end{pmatrix}$,			
			Curvature
FitCurvatureTable → Max Intrinsic			0.00547462}
	Max Parameter-Effects		0.0104866 }
	95. % Confidence Region		0.440942

Tabela 4.3: Resultados do ajustamento da função de Weibull ao histograma

A Figura 4.14 mostra o gráfico da função densidade de probabilidade de Weibull para $\alpha=1.8946$ e $\beta=2.759$. Sobrepondo este gráfico ao histograma dos tempos de falha (Figura 13-b) pode avaliar-se a qualidade do ajustamento obtido (Figura 4.15) de uma forma qualitativa.

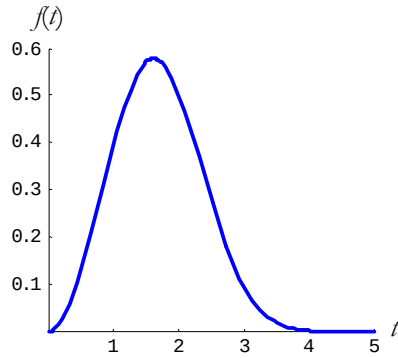


Figura 4.14: Função densidade de probabilidade de Weibull para $\alpha=1.8946$ e $\beta=2.759$

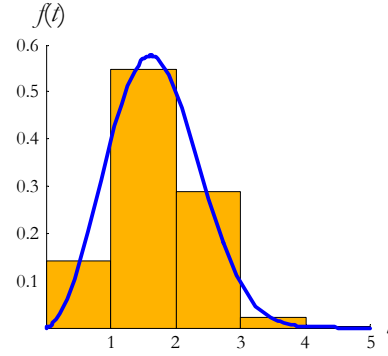


Figura 4.15: Função distribuição teórica vs histograma dos tempos de falha

Neste momento tem-se caracterizado o modelo canónico interno da célula c' , pelo par $\{0.0299814, 0.473239e^{-0.171525t^{2.759}}t^{1.759}\}$.

4.4.1.4 Determinação do modelo canónico a montante

O segundo passo no procedimento de avaliação consiste na determinação do modelo canónico a montante de cada nodo do sistema de produção. Este modelo pode ser obtido a partir de sucessivas agregações dos modelos canónicos correspondentes às células individuais.

Considere-se que se pretende determinar o modelo canónico à saída da célula 3, M_{o3} , do sistema de produção representado na Figura 4.4. Admita-se ainda que os modelos M_{b1} , M_{b2} e M_{i3} foram já determinados através de um procedimento idêntico ao apresentado na Secção 4.4.1. A indisponibilidade de materiais à saída da célula 3 ($c3$) tem uma componente endógena devido às falhas internas dos equipamentos da célula, (M_{i3}), e uma componente exógena que se prende com as interrupções de fluxo de materiais (*inputs*) que abastecem a célula (M_{b2} e M_{i3}). O modelo que descreve a indisponibilidade à saída da célula 3, M_{o3} , pode obter-se por combinação dos modelos canónicos M_{b1} , M_{b2} e M_{i3} , como se apresenta esquematizado na Figura 4.16.

Dado que a estrutura deste modelo está de acordo com a Figura 4.7-a, M_{o3} pode ser obtido por uma abordagem semelhante. A taxa de falhas do *output* à saída de c3 resulta do somatório das taxas de falhas endógenas e exógenas verificadas a montante, isto é:

$$\Lambda_{o3} = \Lambda_{b1} + \Lambda_{b2} + \Lambda_{i3} \quad (4.19)$$

Relativamente à distribuição do processo de reposição do serviço à saída da célula c3, esta resulta de uma média ponderada dos três processo de reposição envolvidos:

$$f_{\rho o3}(t) = \frac{\Lambda_{i3}}{\Lambda_{o3}} f_{\rho i3}(t) + \frac{\Lambda_{b1}}{\Lambda_{o3}} f_{\rho b1}(t) + \frac{\Lambda_{b2}}{\Lambda_{o3}} f_{\rho b2}(t) \quad (4.20)$$

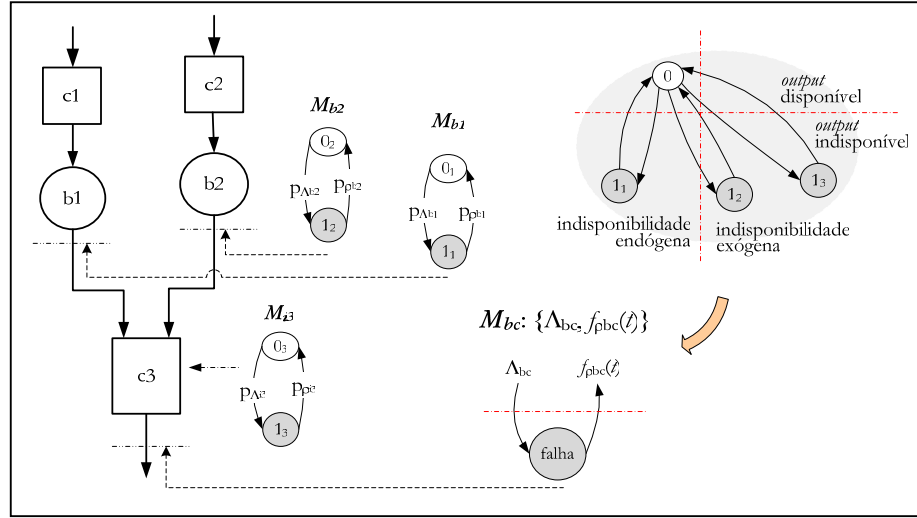


Figura 4.16: Indisponibilidade endógena e exógena

Caso existisse um *buffer* (b3) à saída de c3, o modelo canónico da indisponibilidade do serviço a jusante de b3, M_{b3} , seria caracterizado por uma frequência de falhas Λ_{b3} , e por uma distribuição do tempo de reposição $f_{\rho b3}(t)$, dados pelas Equações (4.7) e (4.10), respectivamente.

O uso repetido deste procedimento, começando nas células montantes, permitirá obter o modelo canónico equivalente para qualquer nodo de um sistema de produção. Por exemplo, o procedimento completo para obter o modelo canónico M_{b3} , à saída do *buffer* b3 do sistema de produção representado na Figura 4.3 envolve os seguintes passos:

1. determinação de M_{i1} , M_{i2} e M_{i3} ;
2. determinação de M_{o1} e M_{o2} , (neste caso são idênticos a M_{i1} e M_{i2} , respectivamente);

3. determinação de M_{b1} e M_{b2} (agregação do processo b1 e b2 a M_{o1} e a M_{o2} , respectivamente);
4. determinação de M_{o3} (agregação de M_{b1} , M_{b2} e M_{i3});
5. determinação de M_{b3} (agregação do processo b3 a M_{o3}).

4.4.2 Avaliação das perdas de produtividade

O terceiro passo do algoritmo de avaliação consiste na avaliação das perdas de produção. Conforme foi referido na Secção 4.2.1, as perdas de produção à saída de cada célula têm duas componentes, uma proporcional à indisponibilidade de materiais, outra proporcional à frequência de falhas. Assim, as perdas totais de produção do sistema L , serão obtidas por:

$$L = H_y \sum_{j=1}^k [\alpha_j \bar{A}_j + \beta_j \Phi_j] \quad (4.21)$$

onde:

- H_y é o número de horas de trabalho por ano;
- k é o número de nodos do sistema de produção;
- $\bar{A}_j$ é a indisponibilidade dos materiais no nodo j ;
- Φ_j é a taxa de interrupções de fluxo de materiais no nodo j ;
- α_j e β_j são as perdas no nodo j referentes às perdas α e β , respectivamente.

Seja M_j o modelo canónico equivalente do sistema a montante do nodo j , com parâmetros Λ e $f_p(t)$. Os índices de fiabilidade $\bar{A}_j$ e Φ_j necessários para o cálculo das perdas no nodo j podem ser facilmente calculadas pelas seguintes expressões:

$$\bar{A}_j = \frac{\int_0^{\infty} t f_p(t) dt}{1 + \Lambda \int_0^{\infty} t f_p(t) dt} \quad (4.22)$$

$$\Phi_j = \frac{\Lambda}{1 + \int_0^{\infty} t f_p(t) dt} \quad (4.23)$$

4.4.3 Considerações finais

Neste capítulo apresenta-se uma abordagem hierárquica desenvolvida no âmbito deste projecto que conduz às expressões dos índices de fiabilidade relevantes para um sistema de produção industrial. Esta abordagem apresenta-se muito eficiente quando o estudo requer uma análise de sensibilidade como acontece por exemplo quando existem *buffers* intermédios em sistemas de produção complexos. No entanto, a aplicação da abordagem a sistemas complexos pode produzir expressões também complexas e de difícil tratamento analítico.

O recurso à simulação permite a obtenção dos modelos canónicos internos de células de fabrico para as quais a abordagem analítica se torna de difícil implementação. Trata-se, nestes casos, de obter por esta técnica a frequência de transição para o estado de falha equivalente (estado que agrega todos os estados de falha do sistema) e o histograma dos tempos de permanência nesse estado. A aproximação dos histogramas por funções analíticas possibilita a utilização da estrutura de modelação baseada no conceito de modelo canónico, estendendo o campo de aplicação da abordagem hierárquica apresentada a sistemas de produção industriais, independentemente da sua complexidade.

No capítulo seguinte daremos continuidade a este estudo, desenvolvendo modelos de avaliação de medidas de desempenho relacionadas com os índices de fiabilidade tratados no presente capítulo. Tais medidas constituem elementos indispensáveis para a tomada de decisões sobre o projecto dos sistemas industriais de produção.

Capítulo 5

Modelos de custos e de qualidade de serviço em sistemas de produção JIT

Neste capítulo são desenvolvidos modelos analíticos para medidas de desempenho relacionadas com a indisponibilidade de sistemas de produção *Just in Time* (JIT). Estas medidas permitem avaliar as consequências das paragens do sistema segundo duas perspectivas diferentes: na perspectiva dos custos da fiabilidade e na perspectiva da qualidade de serviço proporcionada aos clientes do sistema. Constituem, também, importantes elementos de apoio à tomada de decisões sobre a concepção de sistemas de produção.

5.1 Introdução

No capítulo anterior apresentou-se uma nova abordagem hierárquica para avaliação de índices de fiabilidade de sistemas de produção complexos, baseada no conceito de modelo canónico. Os índices de fiabilidade (disponibilidade, MTBF, MTTR, frequência de falhas, tempos de reposição, fiabilidade,...) são elementos muito importantes, quer do ponto de vista do projecto dos sistemas de produção, quer do ponto de vista da exploração destes sistemas. Todavia, um estudo de fiabilidade deve ir mais além, e complementar os índices de fiabilidade com estimativas de outras medidas de desempenho, quer internas (perdas de produtividade, custos, etc.), quer externas (medidas de qualidade de serviço: frequência de falhas de fornecimento por unidade de tempo, quantidades não fornecidas, etc.). Neste capítulo, são desenvolvidos modelos analíticos para as seguintes medidas de desempenho relacionadas com a fiabilidade imperfeita dos sistemas de produção JIT:

- Custo da fiabilidade;
- Frequência anual de falhas nas entregas;
- Quantidade anual de produtos não fornecidos.

Os desenvolvimentos apresentados no capítulo anterior ganham neste capítulo uma maior importância. De facto, a determinação do modelo canónico de um sistema de produção é um passo fundamental para a caracterização da distribuição do tempo de indisponibilidade do sistema durante o período de análise, T , que por sua vez constitui um elemento chave no cálculo das medidas de desempenho.

A obtenção dos modelos analíticos para as medidas de desempenho acima apresentadas passa por várias etapas, conforme se mostra na Figura 5.1. As etapas 1 e 2 foram estudadas no Capítulo 4 e as etapas 3 e 4 serão estudadas no presente capítulo.

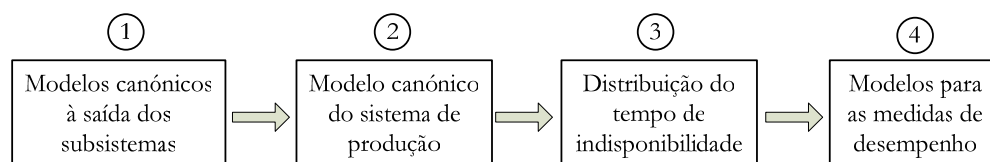


Figura 5.1: Etapas do estudo

Após desta breve introdução apresentaremos de seguida algumas considerações gerais sobre as perdas em sistemas de produção JIT, e sobre os modelos e ferramentas para avaliação das medidas de desempenho consideradas neste estudo. Estes modelos são condicionados pela estrutura do sistema de produção, pela variedade de produtos processados e pelo seu sequenciamento no período T . Deste modo, classificamos os sistemas de produção em duas classes: (i) os sistemas de produção mono-célula mono-produto; e (ii) os sistemas de produção multi-célula multi-produto. Os primeiros serão abordados na Secção 5.2 e os segundos na Secção 5.4. Para estes últimos são ainda considerados vários cenários, correspondentes a diferentes sequenciamentos dos produtos em produção no período T . As Secções 5.3 e 5.5 serão dedicadas aos modelos de fiabilidade dos sistemas mono-célula mono-produto e multi-célula multi-produto, respectivamente.

5.1.1 Perdas em sistemas JIT

A eliminação de perdas e a melhoria contínua da produtividade estão na génese da filosofia de produção JIT. Neste domínio cabem conceitos de redução de custos, redução de *stocks*, redução de ineficiência, redução de prazo de entrega, uso de células de fabrico, manutenção preventiva, reposta rápida ao consumidor, fiabilidade das entregas, etc. Inúmeras causas poderão estar na origem das perdas em sistemas JIT: umas prendem-se com aspectos ligados ao projecto de concepção dos produtos; outras com o planeamento da produção; outras ainda, com a fiabilidade (disponibilidade) dos sistemas de produção, onde aspectos como a fiabilidade dos equipamentos, os recursos de manutenção e o projecto dos sistemas, são elementos importantes a considerar.

Estas perdas podem influenciar várias medidas de desempenho ao nível do sistema como um todo e ao nível das células de fabrico, em particular. A sua redução (ou eliminação) poderá passar por implementar medidas tais como:

- substituir de equipamentos por outros mais fiáveis;
- adicionar redundâncias a determinados equipamentos;
- redimensionar os recursos de manutenção;
- constituir *buffers* entre secções de fabrico ou de produto acabado;
- estabelecer de planos de reconfiguração;

- dar formação profissional aos trabalhadores nas áreas da qualidade e da manutenção dos equipamentos.

A implementação de qualquer uma destas medidas acarretará custos que designaremos por *custos de melhoria da fiabilidade*, C_{mR} . Em contrapartida, esperam-se obter melhorias nos índices de fiabilidade que induzirão ganhos noutras medidas de desempenho (redução das perdas) directamente relacionadas, como se mostrará adiante. Assim, o “valor” associado a cada medida ou solução implementada passa por efectuar um balanceamento do custo da implementação face aos ganhos relacionados com a melhoria nos índices de fiabilidade. Acontece que as melhorias nestes índices de fiabilidade são difíceis de estimar, em sistemas de produção complexos, o que constitui desde logo um grande obstáculo à estimação dos ganhos resultantes da sua implementação. Tem-se assim, em muitos casos, um conflito entre os aspectos de natureza económica, relacionados com os custos de implementação de uma dada medida, e as estimativas (vagas) para os índices de fiabilidade. Este tipo de conflito dificulta a tomada de decisão, favorecendo normalmente os aspectos de natureza económica.

5.1.1.1 Métodos e ferramentas de avaliação

Os métodos e ferramentas convencionais de avaliação dos sistemas industriais de produção não oferecem uma efectiva orientação para a tomada deste tipo de decisões. Esses métodos são muitas vezes orientados para a obtenção de índices financeiros a um nível elevado ou para índices de desempenho ao nível das células de fabrico, tais como: a disponibilidade, a frequência de falhas ou a produtividade. No primeiro caso, os índices fornecem uma avaliação geral da competitividade do sistema mas pouco indicam acerca dos factores físicos que conduzem a esse desempenho. Pelo contrário, os índices de desempenho das células de produção fornecem essa indicação, no entanto, é difícil relacioná-los com o desempenho global do sistema.

Para os responsáveis pelos sistemas de produção, o ponto mais importante não reside na avaliação dos índices de desempenho internos mas na avaliação do seu impacto na competitividade e eficácia do negócio i.e., nos custos operacionais e nos índices de satisfação dos clientes/consumidores. Deste modo, as medidas de desempenho (custo da fiabilidade e qualidade de serviço aos clientes em termos de fiabilidade das entregas) são elementos muito importantes para a determinação do melhor projecto para um sistema industrial de produção. Como veremos adiante, o projecto de um sistema (ou configuração) que permite a optimização

do custo da fiabilidade não será, de todo, aquele que oferece os melhores indicadores para a qualidade de serviço.

Nas Secções seguintes apresentam-se os conceitos referentes a estas medidas de desempenho e desenvolvem-se os respectivos modelos. No caso da qualidade de serviço nas entregas, serão utilizados dois indicadores, a frequência de falhas e a quantidade não fornecida, ambos referentes a um período de tempo longo (tipicamente um ano).

Estes modelos são desenvolvidos para sistemas de produção com características idênticas aos apresentados no capítulo anterior, a operar segundo a estratégia JIT. Contudo, para a prossecução deste estudo torna-se necessário estabelecer, neste contexto, mais alguns pressupostos ou considerações relacionadas com aspectos operacionais e com os acordos comerciais estabelecidos entre fornecedor e cliente.

5.1.1.2 Pressupostos operacionais/comerciais

Apresentemos agora os pressupostos básicos para os sistemas de produção admitidos neste estudo:

- O sistema de produção opera diariamente durante um período de trabalho T , fazendo parte de uma cadeia logística gerida pelo paradigma JIT, onde a jusante se encontram as empresas que fazem a montagem do produto final (Figura 5.2). Assim, os *outputs* do sistema industrial de produção são componentes ou partes do produto final;
- O contrato de fornecimento com os clientes estabelece, entre outros aspectos, a quantidade D_N a fornecer diariamente no final do período T e as penalizações sempre que a quantidade fornecida é inferior a D_N . Estas penalizações prendem-se com o facto de as falhas de fornecimento provocarem perturbações significativas nas empresas constituintes da cadeia logística situadas a jusante (sistemas de montagem do produto final);
- Admite-se a possibilidade de existência de *buffers* (*stocks* de segurança) à saída do sistema de produção, numa tentativa de confinar internamente as consequências das falhas dos elementos (máquinas, equipamentos, ...) do sistema industrial de produção, evitando assim a sua propagação para jusante. Com uma finalidade idêntica, também poderão existir *buffers* intermédios à saída das células de fabrico;

- A produção nominal diária P_N , obtida em condições de pleno funcionamento do sistema (tempo de paragens, $Tp=0$) e a procura diária, D_N , são equivalentes;
- Garante-se que no início de cada período de trabalho T , o nível do *stock* de segurança estabelecido para cada *buffer*, recorrendo se necessário a trabalho extra efectuado na continuação do período de trabalho T ;
- Todos os elementos do sistema são reparáveis e apresentam falhas aleatórias, i.e., taxas de falhas constantes;
- Se devido às falhas das máquinas/equipamentos do sistema de produção, a quantidade produzida, P , durante o período de trabalho T for menor que P_N , mas ainda assim $D_N \leq P + q_s$ (sendo q_s o *stock* de segurança no *buffer* à saída do sistema de produção), então não haverá falha de fornecimento nesse período. No entanto se isto acontecer, então terá de se recorrer a trabalho em período extra para repor os *stocks* de segurança nos *buffers* existentes, para o período seguinte;
- Caso $P + q_s < D_N$, a procura diária não será integralmente satisfeita, incorrendo-se numa penalização fixa pela não satisfação integral da procura, e numa penalização proporcional à quantidade não fornecida, $Q_{nfo} = D_N - (P + q_s)$. Dado não ser possível satisfazer, em dias subsequentes, a procura não satisfeita no(s) dia(s) anterior(es), a quantidade não fornecida, Q_{nfo} , representa o volume de vendas perdidas. Neste caso deve ainda ser considerado um custo de oportunidade equivalente ao lucro esperado pelas vendas não efectuadas, para além dos custos com o trabalho extra necessário à reposição do *stock* de segurança nos *buffers*.

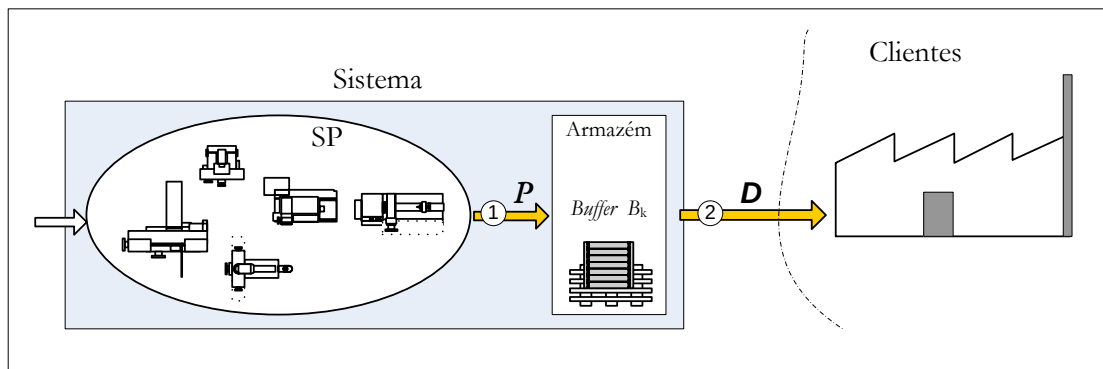


Figura 5.2: Sistema de produção

5.1.1.3 Custos da fiabilidade

Num ambiente de produção JIT, os inventários são reduzidos e, por conseguinte, as paragens não programadas (avarias) de um sistema de produção podem provocar falhas na satisfação das encomendas, criando perturbações na cadeia logística. Frequentemente, estas perturbações motivam o estabelecimento de *penalizações* que recaem sobre o elo da cadeia em falha. Relacionado com as paragens não programadas do sistema de produção poderão ocorrer outros custos, nomeadamente: um *custo de oportunidade* por perdas de vendas e um *custo de produção em período extra*. Designamos o somatório destas três parcelas de custos por *custo da não fiabilidade*, C_{nR} , uma vez que se relacionam com a fiabilidade imperfeita do sistema industrial de produção ($R_i(T) < 1$).

Em síntese, o modelo analítico de C_{nR} deverá permitir avaliar o acréscimo nos custos operacionais provocados pelos tempos de paragem dos sistemas de produção. Para tal terá que se relacionar índices internos de fiabilidade com o conjunto de índices de custos que se prendem com, *penalizações*, *perdas de vendas* e *tempo de produção extra*.

Relativamente aos índices internos de fiabilidade, estes são obtidos a partir de um modelo de fiabilidade estabelecido com base nos desenvolvimentos apresentados no Capítulo 4. Este modelo oferece ainda parâmetros relevantes para a obtenção de índices externos de avaliação da qualidade de serviço aos clientes.

Na Figura 5.3 destaca-se a relação directa existente entre o modelo de fiabilidade e o modelo de *custo da não fiabilidade*, num contexto relacional mais amplo onde surgem a configuração do sistema e o modelo da qualidade de serviço. Se, por um lado, a configuração do sistema de produção influi directamente no modelo de fiabilidade (que por sua vez afecta directamente o modelo de custo da não fiabilidade), por outro lado uma melhor configuração do sistema pode ser determinada pelo modelo de custos.

Nesta estrutura relacional podemos melhorar os índices de fiabilidade de um sistema de produção e, consequentemente, reduzir o *custo da não fiabilidade*, C_{nR} , através da implementação das medidas ou acções apresentadas na Secção 5.1.1.

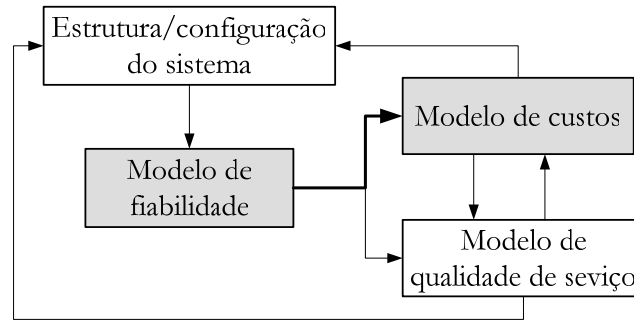


Figura 5.3: Relação directa fiabilidade – custos

Ao somatório do *custo de melhoria da fiabilidade*, C_{mR} com o *custo da não fiabilidade*, C_{nR} chamamos *custo da fiabilidade*, C_R . Tem-se deste modo que:

$$C_R = C_{mR} + C_{nR} \quad (5.1)$$

A Figura 5.4 mostra esquematicamente a representação gráfica da expressão de C_R em função da fiabilidade. Sabe-se que associado ao aumento da fiabilidade de um sistema está, normalmente, um aumento de C_{mR} , por um lado, e uma redução de C_{nR} , por outro. Deste modo, o melhor projecto ou configuração do sistema segundo, a medida de desempenho C_R será aquele que corresponde à fiabilidade R_s^* , i.e., à abcissa do ponto mínimo da curva de custos da fiabilidade.

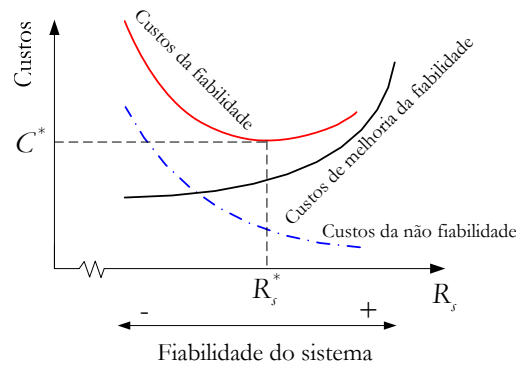


Figura 5.4: Relação entre fiabilidade e custos

A facilidade com que, do ponto de vista qualitativo, se lida com as curvas do custo da fiabilidade e das suas componentes (custo de melhoria da fiabilidade e custos da não fiabilidade) contrasta com a dificuldade que surge quando se pretende quantificar estas grandezas. No processo de desenvolvimento do modelo para o *custo da fiabilidade* estabelecemos duas fases. Na primeira fase abordamos o *custo de melhoria da fiabilidade* e estabelecemos o(s) respectivo(s) modelo(s). Na

segunda, tratamos do *custo da não fiabilidade*. Nos parágrafos seguintes apresentaremos os resultados do estudo efectuado. Todos os custos considerados neste estudo estão referidos a um período de tempo T , que em termos práticos poderá corresponder ao período de um dia de trabalho.

Custo de melhoria da fiabilidade

De um modo geral, o modelo do custo de melhoria da fiabilidade é relativamente simples de obter, qualquer que seja a solução ou soluções adoptadas. Por exemplo, admitindo que as soluções de melhoria da fiabilidade para um dado sistema passam por constituir k *buffers* em pontos específicos do sistema, então C_{mR} será obtido pelos custos de posse de *stock* dos k *buffers*, ou seja:

$$C_{mR} = \sum_{i=1}^k c_{li} q_{si} \quad (5.2)$$

onde c_{li} representa o custo de posse por artigo no *buffer* i e q_{si} o *stock* de segurança no *buffer* i .

Custo da não fiabilidade

Tendo em conta as condições estabelecidas para os sistemas industrial de produção, a expressão geral do *custo da não fiabilidade* será dada por:

$$C_{nR} = C_{te} + C_F + C_V + C_{np} \quad (5.3)$$

onde:

- $C_{te} \rightarrow$ custo por trabalhos em período extra;
- $C_F \rightarrow$ penalização fixa por ocorrência de ruptura nas entregas;
- $C_V \rightarrow$ penalização variável, função dos artigos não fornecidos;
- $C_{np} \rightarrow$ custo de oportunidade das vendas perdidas.

Teremos agora de desenvolver o modelo para cada uma destas componentes do *custo da não fiabilidade*. Começando pelo C_{te} , temos que:

$$C_{te} = \sum_{i=1}^n ce_i te_i \quad (5.4)$$

onde:

- $ce_i \rightarrow$ custo de trabalho extra na célula i por unidade de tempo;
- $te_i \rightarrow$ tempo de trabalho extra na célula i ;
- $n \rightarrow$ número de células do sistema de produção.

Relativamente à penalização fixa por ocorrência de ruptura nas entregas esta será determinada por:

$$C_F = c_F P_f \quad (5.5)$$

sendo P_f a probabilidade de ocorrência de falha ou ruptura no fornecimento a clientes e c_F , a penalização fixa por ocorrência de ruptura.

Quanto à penalização variável, C_V , obtém-se pelo produto da quantidade não fornecida, Q_{nfo} , pela penalização por artigo não fornecido c_{nfo} , isto é:

$$C_V = Q_{nfo} c_{nfo} \quad (5.6)$$

Por último, o custo de oportunidade pelas vendas perdidas, C_{vp} será contabilizado por:

$$C_{vp} = Q_{nfo} v \quad (5.7)$$

sendo v o lucro unitário por artigo vendido.

Neste momento pode reescrever-se a Equação (5.3) do seguinte modo:

$$C_{nR} = \sum_{i=1}^n (c_{li} t_{li}) + c_F P_f + Q_{nfo} (c_{nfo} + v) \quad (5.8)$$

No caso particular de C_{mR} ser calculado por (5.2), o custo da fiabilidade será dado por:

$$C_R = \sum_{i=1}^k (c_{li} q_{si}) + \sum_{i=1}^n (c_{li} t_{li}) + c_F P_f + Q_{nfo} (c_{nfo} + v) \quad (5.9)$$

Para uma taxa de produção constante, r , tem-se ainda:

$$C_R = \sum_{i=1}^k (c_{li} \Delta_i) + \sum_{i=1}^n (c_{li} t_{li}) + c_F P_f + (Tp - \Delta_k) (c'_{nfo} + v') \quad (5.10)$$

onde:

Δ_i – tempo de indisponibilidade (em unidades de tempo, ut) tolerado pelo *buffer* i , com $i=1,2,\dots,k$;

Δ_k – tempo de indisponibilidade tolerado pelo *buffer* a jusante do sistema de produção, B_k (ver Figura 5.2);

Tp – tempo diário de interrupção de fluxo de materiais à saída do sistema;

v' – lucro pela venda dos produtos produzidos numa unidade de tempo, ut ;

c_{li} – custo de posse no *buffer* i por um número de artigos equivalente à produção de uma unidade de tempo ut ;

c'_{nfo} – penalização pela quantidade de artigos não fornecidos equivalente a uma unidade de tempo de produção ut .

Como se sugere na Figura 5.4, a solução óptima, em termos de *custo da fiabilidade* passa por um balanço entre o *custo de melhoria da fiabilidade* e o *custo da não fiabilidade*. No caso particular dos ganhos de fiabilidade (na satisfação das encomendas) de um sistema de produção mono-célula mono-produto resultarem do *buffer* de produto final, o valor de Δ_k que minimiza (5.10) pode obter-se pela seguinte equação:

$$\frac{\partial C_R}{\partial q_s} = 0 \quad (5.11)$$

Geralmente, em sistemas complexos a Equação (5.10) é, de uma forma geral, uma função implícita de várias variáveis, o que obriga à obtenção de qualquer solução por cálculo numérico. A optimização desta função torna-se um problema de optimização condicionada, com uma dificuldade de análise acrescida se entrarmos em consideração com restrições relacionadas com a qualidade de serviço, tais como “a frequência anual de falhas nas entregas deverá ser inferior a um determinado valor pré-estabelecido”.

5.1.1.4 Qualidade de serviço em termos de fiabilidade das entregas

Já nos referimos anteriormente à importância que o cumprimento dos prazos de entrega tem para as empresas num mercado global cada vez mais competitivo. Neste ambiente, muitas empresas tentam estabelecer contratos de fornecimento de produtos e serviços numa lógica de parceria e de responsabilidade. Segundo Profeta [Profeta, 2003], à medida que a relação entre fornecedor e cliente se acentua no sentido de celebrarem contratos mais duradouros, incluindo partilha de risco do negócio e maior transparência nas negociações, tanto maior se torna a oportunidade de obtenção de resultados positivos para ambas as partes. Nesta perspectiva, os contratos devem especificar claramente níveis para: (i) a qualidade do produto fornecido e (ii) a qualidade do serviço em termos de prazo e fiabilidade das entregas.

Sobre o primeiro ponto anterior não nos pronunciaremos, dado que este não faz parte do âmbito desta dissertação. Relativamente ao segundo ponto, vamos considerar dois índices ou medidas de desempenho para avaliar a qualidade de serviço: (i) a frequência de falhas no fornecimento por ano, F_f^a ; e (ii) a quantidade total de artigos não fornecida por ano, Q_{nfo}^a . Como limites (máximos) para estes índices temos NLf e Q_{na} , respectivamente.

Tal como as medidas de custo, também as medidas de qualidade de serviço dependem de índices internos de fiabilidade do sistema de produção obtidos pelos modelos de fiabilidade que serão apresentados nas Secções 5.3 e 5.5 para os sistemas de produção mono-célula mono-produto e multi-célula multi-produto, respectivamente.

Na Figura 5.5 enfatiza-se esta dependência através da relação directa estabelecida entre os modelos de fiabilidade e os de qualidade de serviço. Esta relação apresenta-se enquadrada num contexto mais amplo onde se mostram outras relações destes modelos, quer com a configuração do sistema, quer com o modelo de custos da fiabilidade anteriormente estabelecido.

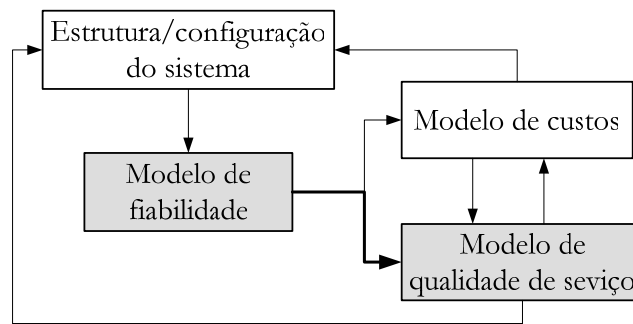


Figura 5.5: Relação da fiabilidade com a qualidade de serviço

A Figura 5.6 ilustra a curva característica da evolução da frequência de falhas nas entregas em função da fiabilidade do sistema de produção.

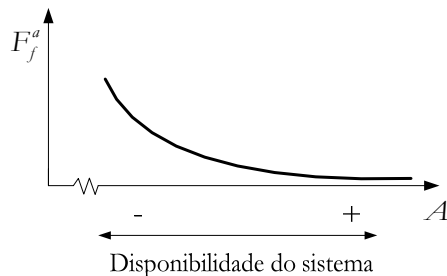


Figura 5.6: Frequência de falhas nas entregas *versus* fiabilidade do sistema

Dado que os modelos analíticos relativos aos dois índices de qualidade de serviço apresentados acima são muito condicionados pela configuração do sistema de produção, ficamos neste momento por estas considerações gerais. Mais adiante, na Secção 5.2.2, apresentaremos estes modelos para sistemas de produção mono-célula mono-produto.

5.1.2 Processo de tomada de decisão

Quando se pretende obter o “melhor” projecto de um sistema industrial de produção, tendo em conta diferentes medidas de desempenho ou critérios, pode acontecer (e frequentemente acontece) que não exista uma solução que satisfaça este requisito. A Figura 5.7 pretende ilustrar esta situação com duas medidas de desempenho: o custo da fiabilidade e a probabilidade de falhas nas entregas. Considera-se que o custo da fiabilidade corresponde ao critério de avaliação K1, e a qualidade de serviço QdS (expressa pela probabilidade de falha nas entregas), corresponde ao critério de avaliação K2. Segundo K1, o melhor projecto do sistema é, de entre os representados na figura aquele que apresenta a fiabilidade $R_{C_R}^*$, ou seja, o projecto dS_3 . Por outro lado, o melhor projecto para K2 é o que tem maior fiabilidade, sendo por isso seleccionado o projecto dS_2 . Obtêm-se assim duas soluções alternativas, o que configura um problema de decisão. Problemas desta natureza resolvem-se frequentemente recorrendo a metodologias de análise multi-critério. Estas metodologias não serão abordadas neste estudo, dado saírem do âmbito desta dissertação.

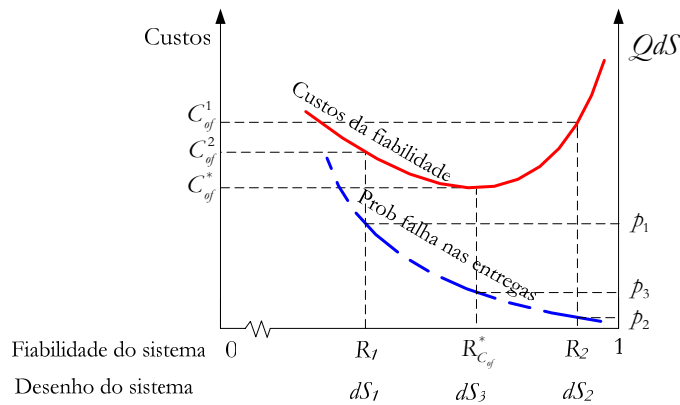


Figura 5.7: Custos e qualidade de serviço *versus* fiabilidade

Por vezes pretende-se obter o melhor projecto para um sistema de produção segundo um dado critério K_i (com $i=1, 2, \dots$), que garanta, com um nível de confiança especificado, determinados valores para os critérios K_j , com $j \neq i$. Nestas circunstâncias, tem-se um problema de optimização condicionada, constituindo os critérios K_j as restrições do problema. Por exemplo, se se pretender estabelecer o melhor projecto do sistema de produção segundo K1 que satisfaça a restrição $K2 \leq p_2$, o melhor projecto será dS_2 . Esta solução não corresponde à que seria obtida para o problema não condicionado da optimização do custo da fiabilidade.

Em síntese, nesta fase introdutória introduzimos novos conceitos e modelos de carácter genérico. Na fase seguinte deste estudo trataremos estes conceitos e modelos de uma forma mais aprofundada. A dependência dos modelos analíticos para as medidas de desempenho em estudo face à configuração dos sistemas de produção e respectiva programação da produção, obriga a uma adaptação dos modelos genéricos tendo em conta estes aspectos. Assim, na secção seguinte serão desenvolvidos modelos que permitirão estimar os custos da fiabilidade e índices de qualidade de serviço de sistemas industriais de produção, constituídos por uma célula de produção operando um único tipo de produto final (configuração mono-célula mono-produto). Estes modelos dependem de índices de fiabilidade que serão calculados na Secção 5.3. Na a secção 5.4 será apresentado um estudo idêntico para sistemas de produção multi-célula e multi-produto, com várias alternativas (cenários) de programação da produção durante o período de trabalho T . Os índices de fiabilidade para estes sistemas serão obtidos na Secção 5.5.

5.2 Sistema mono-célula mono-produto

5.2.1 Minimização do valor esperado do custo da fiabilidade

Considere-se o sistema representado na Figura 5.2, constituído por uma célula de fabrico a produzir apenas um tipo de artigo e um *buffer* de produto final. Na Figura 5.8, mostra-se a evolução do conteúdo deste *buffer* em três situações diferentes. Mais concretamente, o gráfico a) representa um período normal de trabalho sem paragens. Em situações como esta, a quantidade produzida P no período T é igual a D_N , sendo, deste modo, a procura satisfeita integralmente. Depois de satisfeita a procura no final do período T , o nível de *stock* no *buffer* será igual a q_s . Neste caso, o *custo da fiabilidade* é simplesmente o custo de posse do *stock* de segurança q_s .

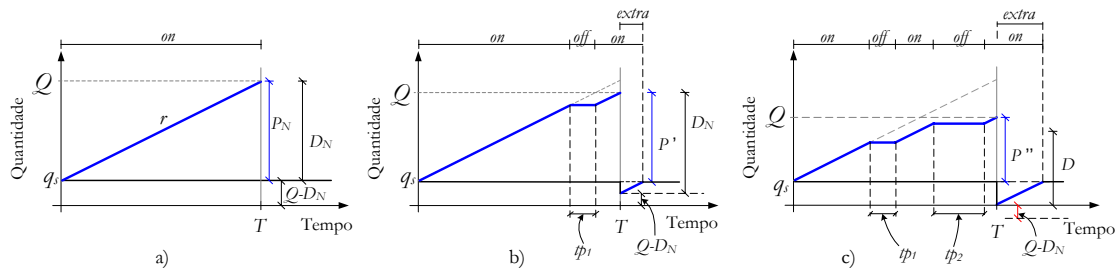


Figura 5.8: Evolução do conteúdo do *buffer* em três períodos diferentes

O gráfico b) mostra uma situação em que a perda de produção devido à indisponibilidade do sistema durante $Tp=tp_1$ é inferior ao *stock* de segurança, q_s . Como a quantidade $Q=P+q_s$ é superior a D_N , a procura deste período será satisfeita integralmente. No entanto, ter-se-á de recorrer a trabalho extra por um período equivalente à duração da indisponibilidade, Tp , no sentido de repor a quantidade q_s no *buffer* para o período seguinte. Deste modo, deverá incluir-se no cálculo do *custo da fiabilidade*:

- o custo de posse do *stock*;
- o custo de trabalho em período extra.

Finalmente, o gráfico c) mostra a situação em que a quantidade de peças não produzidas devido a paragens não programadas no período T , com a duração $Tp=tp_1+tp_2$, é superior ao *stock* de

segurança. Nesta situação, a quantidade Q disponível no final do período T é insuficiente para satisfazer a procura ($Q < D_N$). A indisponibilidade do sistema durante Tp , causará:

- o esvaziamento do *buffer* e, por conseguinte, a necessidade de recorrer a trabalho extra para repor o *stock* de segurança para o período seguinte;
- a não satisfação integral da procura desse período; e
- a perda de venda de $Q - D_N$ unidades de produto.

Em termos de custo, deveremos considerar então:

- o custo de posse do *stock* q ;
- o custo por trabalho em período extra para produzir a quantidade q ;
- a penalização fixa pela não satisfação integral da procura;
- a penalização proporcional à quantidade não fornecida;
- o custo de oportunidade equivalente ao lucro que se obteria pelas vendas perdidas.

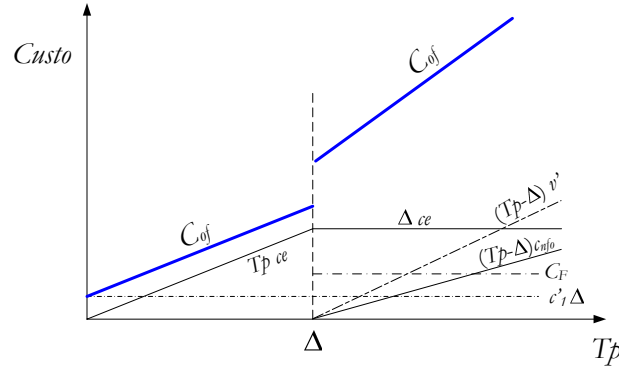
Modelo de custos

Partindo do modelo de custo representado pela Equação (5.10) pode, para este caso, representar-se o custo da fiabilidade por uma função com dois ramos, um para $Tp \leq \Delta$ e outro para $Tp > \Delta$. Assim temos que:

$$C_R = \begin{cases} ceTp + c'_1 \Delta, & Tp \leq \Delta \\ (ce + c'_1) \Delta + (Tp - \Delta)(c'_{nfo} + v') + c_F, & Tp > \Delta \end{cases} \quad (5.12)$$

sendo Δ o tempo de indisponibilidade tolerado pelo *buffer* de produto final.

Na Figura 5.9 mostra-se uma representação gráfica das várias componentes do modelo de custo da fiabilidade, destacando-se os dois ramos da expressão de C_R .


 Figura 5.9: Representação gráfica da expressão de custos ΔC

Devido à natureza estocástica dos processos do comportamento do sistema (processos de falha e de reposição), o tempo de indisponibilidade no período T , Tp , é uma variável aleatória com uma distribuição de probabilidade $f_{Tp}(t)$ e valor médio $\bar{T}p$. Deste modo, o *custo da fiabilidade* é também uma variável aleatória, cujo valor terá de ser estimado. A repetição dos períodos de trabalho T , e o comportamento estocástico do sistema nesses períodos permitem estimar C_R pelo seu valor esperado $E[C_R]$. Este valor resulta do somatório do valor esperado de cada uma das parcelas de custo já identificadas ou seja:

$$E[C_R] = E[C_{mR}] + E[C_F] + E[C_V] + E[C_{\eta p}] + E[C_{te}] \quad (5.13)$$

Várias das componentes de custo da Equação 5.13 são função de Tp . De um modo geral os métodos tradicionais de avaliação da fiabilidade como o método da frequência-duração [Billinton e Allan, 1983], permitem obter valores médios para os índices de fiabilidade. Deste modo, a variável aleatória Tp é estimada pelo seu valor médio, $\bar{T}p$. Contudo, a utilização de $\bar{T}p$ no cálculo das parcelas de custo relacionadas com penalizações aos clientes pode conduzir a elevados erros de avaliação. A existência de um *buffer* de produto final, tolerando a indisponibilidade do sistema durante um período Δ , cria um deslocamento relativamente à origem do tempo de indisponibilidade nas funções de custo, tal como se mostra nos gráficos a) e b) da Figura 5.10. Deste modo, essas parcelas de custo terão um valor nulo para valores de $\Delta \geq \bar{T}p$. Porém, como se ilustra no gráfico c), mesmo para $\Delta \geq \bar{T}p$ pode existir uma probabilidade de falha p não nula nas entregas e, por conseguinte, os valores esperados para as parcelas de custo em questão não serão nulos, ao contrário do que acontece para os valores que se obtêm com $\bar{T}p$ [Nunes, Faria et al., 2005]. Esta discrepância nunca ocorre quando $\Delta=0$.

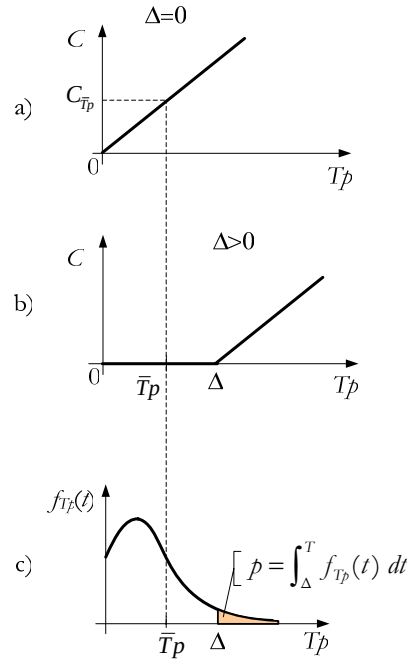


Figura 5.10: Penalização pela indisponibilidade do sistema

Voltemos agora de novo ao sistema em análise, tendo em conta estes aspectos importantes para o cálculo do valor esperados de $E[C_R]$. O valor esperado do *custo de melhoria da fiabilidade*, $E[C_{mR}]$, corresponde ao valor esperado do custo de posse do *stock* de segurança no *buffer*, pelo que:

$$E[C_{mR}] = c'_1 \Delta \quad (5.14)$$

Quanto ao valor esperado da penalização fixa por ocorrência de falha nas entregas no período T , $E[C_F]$, é obtido através da multiplicação do custo fixo por falha, c_F , pela probabilidade de falha no período T , i.e., a probabilidade de $Tp > \Delta$. Tem-se então que:

$$E[C_F] = c_F \int_{\Delta}^T f_{Tp}(t) dt \quad (5.15)$$

onde $f_{Tp}(t)$ representa a função densidade de probabilidade da variável aleatória Tp para $Tp > 0$.

Analogamente, o valor esperado correspondente à penalização pela quantidade não fornecida, $E[C_V]$, e o valor esperado do custo de oportunidade pelas vendas perdidas, $E[C_p]$, são obtidos, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$E[C_v] = c_{\text{mfo}} \int_{\Delta}^T f_{Tp}(t)(Tp - \Delta) dt \quad (5.16)$$

$$E[C_{vp}] = v \int_{\Delta}^T f_{Tp}(t)(Tp - \Delta) dt \quad (5.17)$$

Por último, o valor esperado do custo com trabalho extra, $E[C_e]$, obtém-se por:

$$E[C_e] = c_e \int_0^{\Delta} Tp f_{Tp}(t) dt \quad (5.18)$$

Normalmente, a contabilização do custo com trabalhos extra é feita tendo em conta tempos de trabalho extra múltiplos de uma unidade de tempo, ut (tipicamente uma hora). Neste sentido, o período de trabalho T é dividido em m intervalos de igual duração ($]0, t_1], \dots,]t_{m-1}, t_m]$ com $m=T/ut$). Para Tp tal que:

$$\frac{(x-1)T}{m} < Tp < \frac{xT}{m}, \text{ com } x=1, 2, \dots, m \quad (5.19)$$

o número de unidades de tempo de trabalho extra será x . Nestas circunstâncias, $E[C_e]$ será obtido por:

$$E[C_e] = c_e \sum_{x=1}^m \int_{\frac{(x-1)T}{m}}^{\frac{xT}{m}} x f_{Tp}(t) dt \quad (5.20)$$

5.2.2 Qualidade de serviço

Embora os modelos de avaliação da qualidade de serviço apresentados seguidamente sejam desenvolvidos com base no sistema de produção mono-célula mono-produto, eles são em grande medida válidos para sistemas de produção com outras configurações bem diferentes das que foram definidas anteriormente. No entanto, sempre que seja necessário proceder a alterações nos modelos para os adequar a sistemas multi-célula multi-produto, estas alterações serão explicitamente indicadas.

Tomemos de novo o sistema de produção representado na Figura 5.2. Para uma situação estável, em termos de disponibilidade avaliada à saída do sistema de produção (nodo 1 Figura 5.2), a disponibilidade de fluxo de materiais à saída do *buffer* de produto final (nodo 2 Figura 5.2) é função do *stock* de segurança neste *buffer*. Deste modo, os índices de qualidade de serviço: frequência de falhas de fornecimento por ano, F_f^a , e quantidade total de artigos não

fornecidos por ano, $Q_{\eta f_0}^a$ são função do *stock* de segurança, Δ . A análise que a seguir se apresenta consiste na determinação de modelos que permitem determinar o *stock* de segurança mínimo que é necessário para assegurar os níveis de qualidade de serviço NLf ou Q_a fixados com um nível de confiança $\eta=100(1-\alpha)$ por cento.

5.2.2.1 Frequência de falhas no fornecimento

Considere-se a situação muito comum em sistemas industriais de produção JIT, nos quais se tem diariamente que satisfazer uma procura constante, D_N . Nestas circunstâncias, o período de trabalho T deverá coincidir com um período diário de trabalho. A probabilidade diária de falhas no fornecimento i.e., a probabilidade de não satisfação integral da procura D_N , será dada por:

$$p = P(Tp > \Delta) = \int_{\Delta}^T f_{Tp}(t) dt \quad (5.21)$$

Conhecendo a probabilidade p , poderemos estimar a frequência (número) de falhas de fornecimento por ano, F_f^a . Este índice é uma variável aleatória que segue uma distribuição binomial de parâmetro p . De acordo com esta distribuição, a probabilidade de ocorrerem n falhas durante um ano será obtida por:

$$P(F_f^a = n) = \binom{d_a}{n} p^n (1-p)^{d_a-n} \quad (5.22)$$

onde d_a representa o número de dias de trabalho por ano.

Por outro lado, a probabilidade do número de falhas por ano permanecer abaixo de um determinado limite, NLf , poderá calcular-se por:

$$P(F_f^a \leq NLf) = \sum_{n=1}^{NLf} P(F_f^a = n) \quad (5.23)$$

Para assegurar um nível de qualidade de serviço pré-especificado em termos de frequência de falhas por ano, com um nível de confiança η , será necessário cumprir a seguinte relação:

$$\sum_{n=1}^{NLf} \binom{d_a}{n} p^n (1-p)^{d_a-n} > \eta \quad (5.24)$$

De acordo com a Equação (5.22), a probabilidade $P(F_f^a = n)$ depende da probabilidade p , que por sua vez depende do *stock* de segurança, Δ . O *stock* mínimo que assegura NLf pode ser determinado atribuindo valores crescentes a Δ até que a relação (5.24) se torne verdadeira.

Procedimento alternativo

Quando o número médio de falhas por ano ($\bar{F}_f^a$) é tal que F_f^a tem uma distribuição simétrica o que acontece tipicamente para $\bar{F}_f^a > 7$, pode utilizar-se um procedimento mais simples para determinar a dimensão do *stock* de segurança no *buffer* de produto final. Neste caso, a distribuição de F_f^a (binomial) pode ser aproximada por uma distribuição normal com média $\mu_{F_f^a}$ e desvio padrão, $\sigma_{F_f^a}$. Estes dois parâmetros são calculados pelas seguintes equações:

$$\mu_{F_f^a} = p d_a \quad (5.25)$$

$$\sigma_{F_f^a} = \sqrt{p(1-p)d_a} \quad (5.26)$$

Para um nível de confiança η , o número limite de falhas por ano, NLf , pertencerá ao intervalo de confiança: $F_f^a \in \left[0, \mu_{F_f^a} + \chi \sigma_{F_f^a} \right)$, onde χ é um valor da distribuição *t-Student* que depende do nível de confiança η (ex., $\chi=1.64$ para $\eta=95\%$). Deste modo, o nível de qualidade de serviço mínimo, NLf , será garantido com um nível de confiança η se se verificar a seguinte relação:

$$NLf < d_a p + \chi \sqrt{p(1-p)d_a} \quad (5.27)$$

5.2.2.2 Quantidade não fornecida

A quantidade não fornecida por unidade de tempo é um dos índices que consideramos neste estudo para avaliar a qualidade de serviço em termos de fiabilidade nas entregas. Este índice depende também do *stock* de produto final e será tanto melhor quanto maior for este *stock*. Admita-se como unidade de tempo o ano e a possibilidade de neste período se tolerar a não entrega de uma quantidade acumulada de produtos Q_a . Nestas condições poderemos dimensionar o *buffer* de produto final de modo a assegurar, com um determinado nível de

confiança η , que a quantidade não fornecida durante um ano, Q_{nf}^a permanece abaixo de Q_a , i.e., $Q_{nf}^a \leq Q_a$.

Seja Q_{nf} uma variável aleatória que representa a quantidade não fornecida em cada período de trabalho T e t_{nf} o número equivalente de unidades de tempo de produção (tempo necessário para produzir a quantidade Q_{nf}). Admita-se ainda que a distribuição da variável aleatória t_{nf} tem uma média $\mu_{t_{nf}}$ e um desvio padrão $\sigma_{t_{nf}}$. De acordo com o Teorema do Limite Central, T_{nf}^a (com $T_{nf}^a = Q_{nf}^a / r$, sendo r a taxa de produção) é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com média $\mu_{T_{nf}^a}$ e desvio padrão $\sigma_{T_{nf}^a}$ dados, respectivamente, por:

$$\mu_{T_{nf}^a} = d_a \mu_{t_{nf}} \quad (5.28)$$

$$\sigma_{T_{nf}^a} = \sigma_{t_{nf}} \sqrt{d_a} \quad (5.29)$$

Para um nível de confiança $\eta=95\%$, o intervalo $\left[0, \mu_{T_{nf}^a} + \chi \sigma_{T_{nf}^a}\right]$ deverá conter T_{nf}^a . Para se garantir que $Q_{nf}^a \leq Q_a$ com um nível de confiança $\eta=95\%$, terá de se verificar a seguinte relação:

$$Y_a < d_a \mu_{t_{nf}} + 1.64 \sigma_{t_{nf}} \sqrt{d_a} \quad (5.30)$$

sendo $Y_a = Q_a / r$.

Quer $\mu_{t_{nf}}$ quer $\sigma_{t_{nf}}$ dependem do *stock* de segurança no *buffer* de produto final. A função densidade de probabilidade de t_{nf} será dada por:

$$f_{t_{nf}}(t) = \begin{cases} \delta(0) = \int_0^\Delta f_{Tp}(t) dt, & \text{para } t = 0 \\ (\Delta + t) dt, & \text{para } 0 < t < T - \Delta \\ 0, & \text{para } t \geq T - \Delta \end{cases} \quad (5.31)$$

Deste modo, a média e o desvio padrão de t_{nf} podem ser obtidos, respectivamente, por:

$$\mu_{t_{nf}} = \int_0^{T-\Delta} t f_{Tp}(\Delta + t) dt \quad (5.32)$$

$$\sigma_{t_{nj}} = \sqrt{\mu_{t_{nj}}^2 \int_0^\Delta f_{Tp}(t) dt + \int_\Delta^T f_{Tp}(t) (t - \Delta - \mu_{t_{nj}})^2 dt} \quad (5.33)$$

Neste momento é possível avaliar para cada valor de Δ , os valores de $\mu_{t_{nj}}$ e $\sigma_{t_{nj}}$ a partir das Equações (5.32) e (5.33), possibilitando de seguida avaliar $\mu_{t_{nj}^a}$ e $\sigma_{t_{nj}^a}$ através das Equações (5.28) e (5.29), respectivamente. Por fim, pela Equação (5.30) pode estimar-se um limite superior para Y_a . Saliente-se que, em termos de quantidade, este limite obtém-se através da inequação:

$$Q_a < (d_a \mu_{t_{nj}} + 1.64 \sigma_{t_{nj}} \sqrt{d_a}) r \quad (5.34)$$

Tal como para o caso da relação (5.24), o *stock* de segurança mínimo pode ser obtido atribuindo valores crescentes ao *stock* de segurança (partindo de zero) ou, alternativamente, decrescendo os valores de p até que a relação (5.34) se torne verdadeira.

A relação (5.34) continua válida se, em cada instante do período T , o sistema de produção operar um *mix* de produtos diferentes e a probabilidade de falha no fornecimento for referente a esse mesmo *mix* de produtos. Entende-se por *mix* de produtos, um conjunto de diferentes produtos quer no tipo quer, eventualmente, na quantidade. Por exemplo o *mix* 1A2B, significa que à produção de um produto tipo A segue-se a produção de 2 produtos tipo B.

Pode acontecer que diariamente se fabrique mais do que um tipo de produto diferente, de acordo com um determinado sequenciamento dos produtos em produção no período T , e a frequência de falhas no fornecimento por ano seja especificada para cada tipo de produto, j . Nestas condições, a probabilidade diária de falha no fornecimento de cada tipo de produto, j , p_j , dependerá do sequenciamento utilizado, pelo que a Equação (5.21) terá de ser adaptada para cada situação particular. Este assunto será tratado no caso de estudo 2 apresentado no Capítulo 6.

5.3 Modelo de fiabilidade

No Capítulo 4 mostrámos que o comportamento de um sistema de produção pode ser descrito por um *modelo canónico* designado por CM , de tal modo que:

$$CM = \{\Lambda_{oc}, f_p(t)\}$$

Apresentámos também, um procedimento sistemático que permite obter CM a partir da estrutura do sistema de produção (células de fabrico e fluxo dos materiais) e do comportamento interno de cada célula (processo de falha, reparação e reconfiguração). O conhecimento de CM é um aspecto fundamental para a estimação dos índices de fiabilidade, necessário nomeadamente na avaliação das perdas da não fiabilidade no caso dos sistemas industriais de produção mono-célula mono-produto.

Considere-se uma vez mais o sistema geral representado na Figura 5.2, constituído por uma única célula de produção a operar apenas um tipo de produto, podendo existir um *buffer* de produto final. Admita-se que se conhece o modelo canónico do sistema de produção (frequência de falhas Λ_{oc} e distribuição do tempo de reposição $f_e(t)$ no nodo 1). Refira-se ainda que, de um modo geral, os sistemas produção apresentam taxas de falhas consideráveis e tempo médios de reposição (m_p) curtos, quando comparados com a duração do período normal de trabalho T ($m_p < T$). Tal conduz-nos a probabilidades significativas de ocorrência de mais do que uma falha no período de trabalho T . Sendo n o número de falhas neste período, o tempo total de indisponibilidade será dado por:

$$Tp = \sum_{i=1}^n tp_i \quad (5.35)$$

onde tp_i é uma variável aleatória representando a duração de $i^{ésima}$ falha. A função densidade de probabilidade de tp_i corresponde à função distribuição do processo de reposição do modelo canónico, $f_p(t)$.

Depois destas considerações podemos estabelecer a expressão de $f_{Tp}(t)$, elemento chave na determinação das perdas da não fiabilidade. Esta expressão será dada pela equação:

$$f_{Tp}(t) = P(1)f_p(t) + P(2)\int_0^t f_p(t_1)f_p(t-t_1)dt_1 + \\ + P(3)\int_0^t f_p(t_1)\int_{t_1}^{t-t_1} f_p(t_2)f_p(t-t_1-t_2)dt_2dt_1 + \dots \quad (5.36)$$

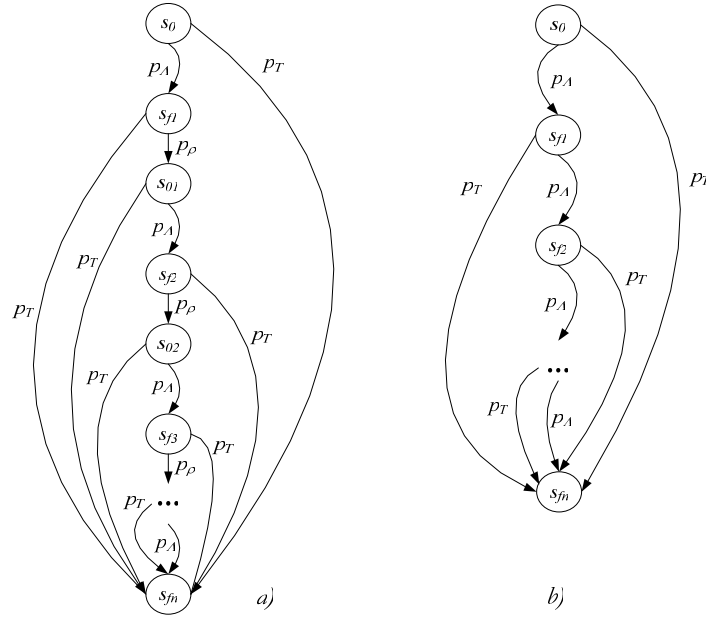
ou, reescrevendo de outra forma:

$$f_{Tp}(t) = \sum_n P(n)\int_0^t f_p(t_1)\int_0^{t-t_1} f_p(t_2) \dots \\ \dots \int_0^{t-t_1-\dots-t_{n-2}} f_p(t_{n-1}) f_p(t-t_1-t_2-\dots-t_{n-1})dt_{n-1}\dots dt_2dt_1 \quad (5.37)$$

onde $P(i)$, com $i=1,2,\dots$, é uma representação sintética de $P(\eta=i)$, sendo η uma variável aleatória que representa o número de falhas do sistema de produção no período de trabalho T . Como $P(i)$ decresce rapidamente à medida que i aumenta, serão poucos os termos a considerar como significativos no somatório da expressão de $f_{Tp}(t)$. De qualquer modo, a determinação de $f_{Tp}(t)$ requer que se calcule $P(i)$, para $i=1,2, \dots, n$, tal que $P(n)$ seja negligenciável, i.e. $P(n)\approx 0$.

Na Figura 5.11-a mostra-se o modelo de estados a partir do qual se obtêm as probabilidades $P(i)$. O estado s_0 representa o estado de funcionamento normal do sistema e, simultaneamente, o início do período T ; o estado s_{fi} corresponde ao estado de falha do sistema após a ocorrência da $i^{\text{ésima}}$ falha; e o estado de falha s_{0p} , o estado após o $i^{\text{ésimo}}$ processo de reposição. No estado s_0 estão activos o processo de falha do sistema, p_A , e o processo referente a um período normal de trabalho, p_T . Se p_T terminar antes de p_A , o período T termina sem que tenha ocorrido qualquer falha do sistema. Pelo contrário, se a conclusão de p_A ocorre antes da conclusão de p_T , verifica-se uma falha do sistema, representada pelo estado s_{fi} do modelo.

De um modo geral, assim que o sistema chega a um estado s_{fi} (com $i=1,2,\dots,n$) inicia-se o $i^{\text{ésimo}}$ processo de reposição, p_p mantendo-se activo o processo p_T . Por outro lado, se o sistema transita para um estado s_{0p} , desencadeia-se de imediato o início do $i^{\text{ésimo}+1}$ processo de falha continuando activo o processo p_T . Nos casos em que o valor médio do processo de reposição é muito menor que o valor médio do processo de falha, como acontece neste caso, pode utilizar-se o modelo simplificado da Figura 5.11-b em substituição do modelo da Figura 5.11-a.


 Figura 5.11: Modelo para a determinação de $P(i)$

Não poderemos no entanto adoptar a hipótese markoviana no cálculo das probabilidade $P(i)$, dado que os processos p_A e p_T têm distribuições muito diferentes em termos de dispersão. Note-se que p_T é um processo determinístico (Dirac) e p_A é tido como exponencial, com valores médios da mesma ordem de grandeza. Sendo assim, estabeleceu-se, num primeiro passo, a seguinte equação para a probabilidade de ocorrerem i ou mais falhas ($i=1,2,\dots$) no período de trabalho T :

$$P(nf \geq i) = \int_0^T f_\Lambda(t_1) \int_{t_1}^T f_\Lambda(t_2 - t_1) \cdots \int_{t_{i-1}}^T f_\Lambda(t_i - t_{i-1}) dt_i \cdots dt_2 dt_1 \quad (5.38)$$

onde $f_\Lambda(t) = \Lambda e^{-\Lambda t}$ representa a função densidade de probabilidade de falha do sistema, cuja taxa (Λ) é um dos parâmetros do modelo canónico. O cálculo de $P(nf \geq i)$ deverá terminar num valor de $i=n$ tal que $P(nf \geq n) \approx 0$.

Num segundo passo, determina-se $P(i)$, com $i = \{n, n-1, \dots, 2, 1$, do seguinte modo:

$$P(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = n \\ P(nf \geq i) - \sum_{j=i+1}^n P(j), & \text{se } i < n \end{cases} \quad (5.39)$$

Por exemplo, se $P(nf \geq 1) = 0.4$, $P(nf \geq 2) = 0.15$, $P(nf \geq 3) = 0.02$ e $P(nf \geq 4) \approx 0$, tem-se que:

$$P(4) = 0;$$

$$P(3) = P(nf \geq 3) - P(4) = 0.02$$

$$P(2) = P(nf \geq 2) - \sum_{j=3}^4 P(j) = 0.15 - 0.02 = 0.148$$

$$P(1) = P(nf \geq 1) - \sum_{j=2}^4 P(j) = 0.4 - (0.15 + 0.02) = 0.252$$

Pelas Equações (5.37), (5.38) e (5.39) pode obter-se a função $f_{Tp}(t)$ desde que sejam conhecidas a frequência de falhas e a função densidade de probabilidade do processo de reposição, as duas grandezas que caracterizam o modelo canônico do sistema de produção.

Finalmente, refira-se que caso os processos p_A e p_T do modelo da Figura 5.11-b sejam markovianos, a probabilidade $P(i)$ de ocorrerem i falhas durante um período de trabalho T será obtida pela seguinte equação:

$$P(X = i) = P(i) = \left(\frac{\tau}{\Lambda + \tau} \right) \times \left(\frac{\Lambda}{\Lambda + \tau} \right)^i \quad (5.40)$$

sendo Λ e τ as taxas de transição dos processos p_A e p_T , respectivamente.

5.4 Sistema multi-célula e multi-produto

5.4.1 Breve descrição do sistema

Considere-se um sistema de produção tal qual se apresenta, em traços gerais, na Secção 4.2. Este está integrado numa estratégia JIT em condições idênticas às apresentadas na Secção 5.1.1.2, excepto no que se refere às quantidades não satisfeitas no final do período T que, neste caso, poderão ser entregues no(s) período(s) seguinte(s). Admite-se ainda a existência de um *buffer* a jusante de cada célula do sistema de produção. Os primeiros $n-1$ *buffers* são *buffers* de componentes/sub-produtos e o $n^{\text{ésimo}}$ *buffer* é um *buffer* de produto final. Em termos operacionais, considera-se que quando o *output* da célula i constitui o *input* da célula j , a paragem desta última célula devido a uma falha endógena não impõe a paragem da célula i . Esta continua a produzir para o *buffer* a jusante cuja dimensão se admite como ilimitada.

Cada célula i , com $i=1,2,\dots, n-1$, pode produzir como *output* um ou mais tipos diferentes de componentes no período T . Quanto à $n^{\text{ésima}}$ célula de produção, esta tem como *output* mais do que um tipo de artigo. Consequentemente, em cada *buffer* b_i , com $i=1, 2,\dots, n-1$, poderá existir *stock* de diferentes tipos de componente.

5.4.2 Modelo geral de custos

O modelo geral do custo da fiabilidade de um sistema de produção multi-célula e multi-produto tem por base o modelo representado pela Equação (5.10). Há a realçar no entanto, uma pequena alteração relativamente ao sistema de produção mono-célula mono-produto: neste caso considera-se que as quantidades não fornecidas no final do período T não constituem vendas perdidas.

Custo de melhoria da fiabilidade

Vimos anteriormente que os custos de melhoria da fiabilidade, como o próprio nome indica, são os custos devidos às acções levadas a cabo para aumentar a fiabilidade de um sistema de produção. Uma das acções possíveis, conducente a este fim, consiste na constituição de *buffers* quer de componentes quer de produto final que poderão funcionar como “mecanismos” de tolerância a falhas e deste modo melhorar a fiabilidade do sistema, no sentido de reduzirem a probabilidade de não satisfação integral das encomendas. Nesta perspectiva, o somatório dos

custos de posse dos *stocks* é visto como um *custo de melhoria de fiabilidade*, o qual é contabilizado por:

$$C_{mR} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in O_i} c_{ti}^j \Delta_i^j \quad (5.41)$$

onde:

O_i – conjunto dos diferentes artigos (referências) que constituem o *output* da célula i , com $i=1,2,\dots,n$

c_{ti}^j – custo de posse do *buffer* i no período T , relativo a um lote de peças do tipo j equivalente à produção de uma unidade de tempo;

Δ_i^j – tempo de indisponibilidade (em unidades de tempo) tolerado pelo *stock* do artigo tipo j no *buffer* i .

Para outras acções de melhoria da fiabilidade, C_{mR} obter-se-ia de outro modo. Por exemplo, caso a melhoria da fiabilidade passasse pela adição de redundância a uma máquina, C_{mR} seria dado pelo somatório de todos os custos associados a este novo equipamento (custos de aquisição, instalação, manutenção, espaço, etc.) durante o período de vida útil.

Custo da não fiabilidade

A Equação (5.3) corresponde, em termos gerais, ao modelo de *custo da não fiabilidade*. Terá no entanto de se adequar e desenvolver cada uma das componentes de custo desta equação ao tipo de sistema de produção em análise. Neste sentido, admita-se que o custo por unidade de tempo de trabalho extra na célula i , com $i=1,2,\dots,n-1$, é independente do tipo de componente e que na $n^{\text{ésima}}$ célula (linha de montagem do produto final) esse custo pode ser diferenciado conforme o tipo de artigo final. Nestas condições, o custo diário do trabalho em período extra será dado por:

$$C_{te} = \sum_{i=1}^{n-1} ce_i te_i + \sum_{j \in O_n} ce_n^j te_n^j \quad (5.42)$$

onde:

O_n – conjunto dos diferentes de artigos que constituem o *output* da $n^{\text{ésima}}$ célula;

ce_n^j – custo por unidade de tempo de trabalho extra gasto para produzir o produto tipo j na $n^{\text{ésima}}$ célula;

te_n^j – tempo diário de trabalho extra dispendido na produção do produto tipo j na $n^{\text{ésima}}$ célula.

Considerando um custo fixo, c_F^j , por cada situação de não satisfação integral da procura do produto tipo j (com $j \in O_n$), tem-se para a penalização fixa devido a falhas nas entregas:

$$C_F = \begin{cases} \sum_{j \in O_n} c_F^j, & \text{se } te_n^j > \Delta_n^j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.43)$$

Por outro lado, o custo variável pela não satisfação integral da procura diária será dado por:

$$C_V = \begin{cases} \sum_{j \in O_n} (te_n^j - \Delta_n^j) c_{nf}^j, & \text{se } te_n^j > \Delta_n^j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.44)$$

sendo c_{nf}^j o custo por quantidade não fornecida do produto j , equivalente à produção de uma unidade de tempo, ut .

Finalmente, C_R será dado pelo somatório das várias componentes de custos anteriores, ou seja:

$$C_R = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in O_i} (c_{ti}^j \Delta_i^j) + \sum_{i=1}^{n-1} (ce_i te_i) + \sum_{j \in O_n} (ce_n^j te_n^j) + \sum_{j \in O_n} [c_F^j + (te_n^j - \Delta_n^j) c_{nf}^j] y^j \quad (5.45)$$

onde y^j representa uma variável binária definida do seguinte modo:

$$y^j = \begin{cases} 1, & \text{se } te_n^j > \Delta_n^j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{com } j \in O_n$$

Exemplo numérico

Considere-se um sistema de produção constituído por três células. Na célula 1 produzem-se os componentes 1 e 2; na célula 2, os componentes 3 e 4; e na célula 3, os produtos A e B a partir de alguns dos componentes anteriores. Em particular, cada produto tipo A é formado por um componente tipo 1 e um componente tipo 3, enquanto que cada produto tipo B incorpora um componente tipo 2 e um tipo 4. A jusante da célula 2 existe um *buffer* que acumula componentes tipo 3 e tipo 4 e a jusante da célula 3 existe um outro *buffer* destinado aos produtos finais A e B. Esta informação está sintetizada na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Dados do sistema do exemplo

Células	buffer a jusante	sub-produtos	produtos
1		1, 2	
2	b1	3, 4	
3	b2		A, B

Estabelecendo agora os conjuntos O_i com $i=1, 2, \dots, n$, das referências associadas a cada componente/produto diferente em cada *buffer*, tem-se:

$$O_1 = \{ \}; \quad O_2 = \{3, 4\}; \quad e \quad O_3 = \{A, B\}$$

Aplicando o modelo de custos representado na Equação (5.45) vem, neste caso:

$$C_R = \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in O_i} (c_{li}^j \Delta_i^j) + \sum_{i=1}^2 (ce_i te_i) + \sum_{j \in O_3} (ce_n^j te_n^j) + \sum_{j \in O_3} [c_F^j + (te_n^j - \Delta_n^j) c_{nf}^j] y^j \quad (5.46)$$

Todas as variáveis e parâmetros deste modelo de custos são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Variáveis e parâmetros do modelo de custos

i	j	c_{li}^j	Δ_i^j	ce_i	te_i	ce_n^j	te_n^j	c_F^j	Δ_n^j	c_{nf}^j
1	1	0	0							
	2	0	0	ce_1	te_1	-	-	-	-	-
2	3	c_{12}^3	Δ_2^3							
	4	c_{12}^4	Δ_2^4	ce_2	te_2	-	-	-	-	-
3	A	c_{13}^A	Δ_3^A			ce_3^A	te_3^A	c_F^A	Δ_3^A	c_{nf}^A
	B	c_{13}^B	Δ_3^B	-	-	ce_3^B	te_3^B	c_F^B	Δ_3^B	c_{nf}^B

À semelhança do modelo de custos apresentado para o sistema de produção mono-célula mono-produto, também para este caso, o modelo de custos depende de índices internos de fiabilidade do sistema de produção. Estes índices são obtidos por modelos de fiabilidade de natureza estocástica, cujos processos do comportamento modelam fenómenos aleatórios como taxas de falhas ou tempos de reparação das máquinas/equipamentos. Por outro lado, o facto de o sistema de produção produzir, no período diário de trabalho T , mais do que um tipo de produto, isso acrescenta complexidade ao modelo. Neste caso, a previsão dos tempos de trabalho extra com a produção de cada tipo de produto dependerá também do modo como for feita a programação diária da produção para a $n^{ésima}$ célula. A este respeito, podem considerar-se

muitos cenários alternativos. Contudo, os três cenários que a seguir se apresentam são os mais utilizados na prática.

Cenário 1

Admita-se que cada tipo de produto j , com $j \in O_n$, tem uma janela temporal, T_j , para a sua produção no período T . A paragem da $n^{\text{ésima}}$ célula do sistema durante a produção do produto tipo j , por um período de tempo de paragem Tp^j , provoca uma perda de produção deste tipo de produto que só será reposta recorrendo a tempo de trabalho extra no final do período T . Nestas condições, a ordem atribuída à produção dos vários tipos de produtos não terá relevância nos resultados finais.

Exemplo:

Retomemos a análise do sistema de produção apresentado acima no qual $O_n = O_3 = \{A, B\}$. Na Figura 5.12 representa-se a ocupação da célula 3 com os dois produtos finais, A e B, em três períodos diários de trabalho: j , k e l .

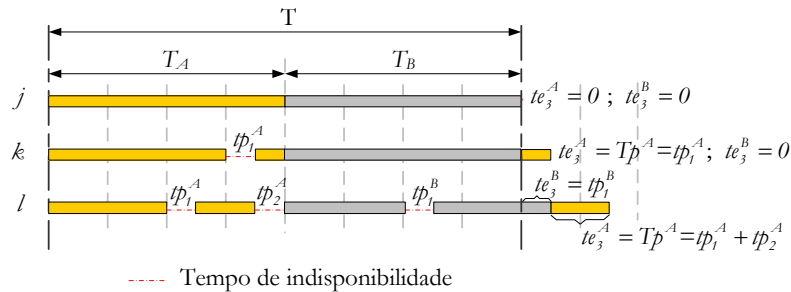


Figura 5.12: Diagrama de ocupação da célula 3 para o sequenciamento A/B

Cenário 2

Neste cenário descreve-se outra forma muito utilizada de processamento dos vários tipos de produtos na mesma célula. Esta consiste na produção, durante todo o período diário de trabalho, de um *mix* dos vários tipos de produtos, estabelecido de acordo com as quantidades diárias de entrega. Este procedimento deverá repetir-se durante todo o período de trabalho, incluindo o período de trabalho extra, caso este seja necessário. A Figura 5.13 mostra para o exemplo anterior, três possíveis períodos de trabalho T com o *mix* 1A2B.

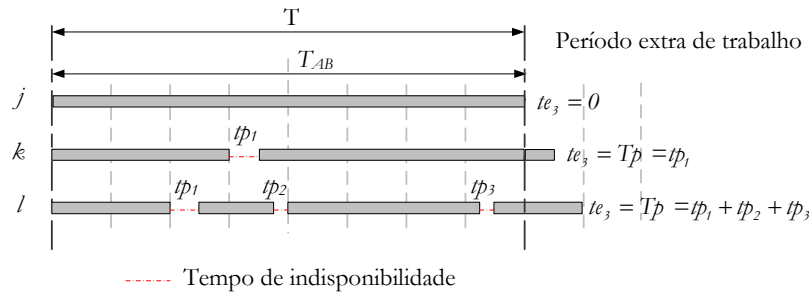


Figura 5.13: Diagrama de ocupação da célula 3 para o mix de produção 1A2B

Cenário 3

Neste último cenário, o sequenciamento estabelecido para a produção dos vários tipos de produtos no período T é respeitado em quaisquer circunstâncias, só se iniciando a produção do próximo tipo de produto quando toda a produção do produto em curso estiver concluída. Recorrendo de novo ao exemplo que temos vindo a utilizar, mostra-se na Figura 5.14 a ocupação da célula 3 em três períodos de trabalho. No período de trabalho k , a paragem da célula 3 enquanto produzia o produto tipo A obrigou ao prolongamento da sua produção para além do tempo inicialmente planeado, T_A . Em consequência, o início da produção do produto tipo B deu-se mais tarde que o previsto, sendo assim necessário recorrer a trabalho extra para concluir a produção deste produto planeada para o período k .

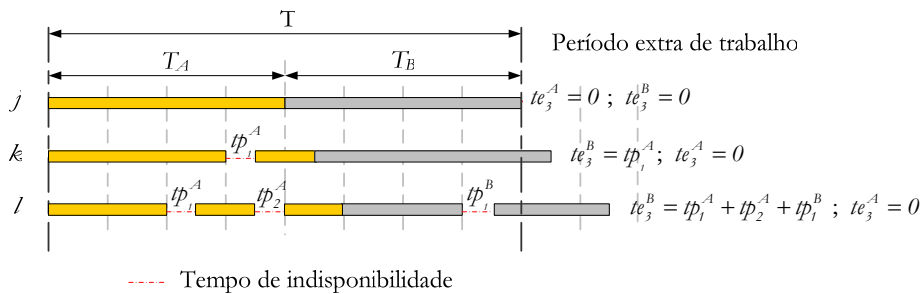


Figura 5.14: Diagrama de ocupação da célula 3 para o sequenciamento A-B

Conclusões referentes aos três cenários

Facilmente se conclui que, em geral, se os custos do trabalho em período extra ou as penalizações por falha nas entregas forem distintos para cada tipo de produto, a ordem com que os diferentes produtos são produzidos tem interferência no custo da fiabilidade.

O cálculo previsional deste custos, $E[C_R]$, tendo em consideração cada um destes cenários, passa por obter as expressões do valor esperado para as varias parcelas de custo. De seguida, apresenta-se o estudo efectuado para os cenários 1 e 2. Para o cenário 3 não se apresenta neste capítulo qualquer desenvolvimento, uma vez que os modelos de custos dependem da ordem com que os diferentes produtos entram em produção. Esse estudo será apresentado no Capítulo 6, com base num caso de estudo.

5.4.3 Cálculo previsional do custo da fiabilidade

Independentemente do cenário considerado, o cálculo do valor esperado do custo da fiabilidade, $E[C_R]$, é, em termos gerais, dado pelo somatório dos valores esperados de um conjunto de parcelas de custos já identificadas anteriormente. Todavia, as condições de cada cenário introduzem alterações nos modelos de custos tal como se mostra de seguida para os cenários 1 e 2.

5.4.3.1 Cenário 1

Vejamos, para este cenário, quais são as expressões do valor esperado de cada uma das parcelas de custo do modelo geral dado pela Equação 5.13. Começemos pelo custo de melhoria da fiabilidade, $E[C_{mR}]$. Este custo não depende de variáveis aleatórias e, por conseguinte, o seu cálculo será efectuado tal como se apresenta na Secção 5.4.2.

Relativamente ao valor esperado do custo com trabalhos em período extra, $E[C_{te}]$, este obtém-se calculando o valor esperado da Equação (5.42). Tem-se então que:

$$E[C_{te}] = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \sum_{x_i=1}^m \int_{x_i-1}^{x_i} x_i f_{Tp_i}(t) dTp_i + \sum_{j \in O_n} c_n^j \sum_{x^j=1}^{m^j} \int_{x^j-1}^{x^j} x^j f_{Tp^j}(t) dTp^j \quad (5.47)$$

sendo:

$f_{Tp_i}(t)$, a função distribuição do tempo de paragem da célula i no período T ;

x_i , o número diário de unidades de tempo de trabalho extra na célula i obtido pela Equação (5.19);

x^j , o número diário de unidades de tempo de trabalho extra com o produto j na $n^{ésima}$ célula;

Tp^j , o tempo diário de paragem do sistema com a produção do produto tipo j ;

$f_{Tp^j}(t)$, a função distribuição de Tp^j .

O valor de x^j será o valor que satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{(x^j - 1)T^j}{m^j} < Tp^j < \frac{x^j T^j}{m^j}, \text{ com } x^j = 1, 2, \dots, m^j \quad (5.48)$$

sendo o período diário de tempo atribuído à produção do produto tipo j , T^j , dividido em m^j intervalos tal que $m^j = T^j / ut$.

O valor esperado da penalização fixa devido a falhas nas entregas, $E[C_F]$, será dado por:

$$E[C_F] = \sum_{j \in O_n} c_F^j \int_{\Delta_n^j}^{T^j} f_{Tp^j}(t) dTp^j \quad (5.49)$$

Finalmente, o valor esperado da penalização variável por não satisfação integral da procura diária, $E[C_V]$, é uma extensão da Equação (5.16), dada por:

$$E[C_V] = \sum_{j \in O_n} c_{vf}^j \int_{\Delta_n^j}^{T^j} f_{Tp^j}(t) (Tp^j - \Delta_n^j) dTp^j \quad (5.50)$$

5.4.3.2 Cenário 2

De acordo com este cenário, os vários tipos de produtos finais são processados na última célula do processo de fabrico, durante todo o período diário, segundo um *mix* estabelecido com todos estes produtos. Deste modo, o custo por unidade de tempo de trabalho extra não deverá ser discriminado por tipo de produto. Outras considerações serão feitas à medida que se apresenta as expressões do valor esperado de cada parcela de custos.

Pelas razões apresentadas acima (cenário 1), também neste caso, o custo de melhoria da fiabilidade, $E[C_{mR}]$, será calculado do mesmo modo que se apresenta na Secção 5.4.2.

Quanto ao valor esperado do custo com trabalhos em período extra, a expressão simplifica-se um pouco em relação ao cenário anterior. Tem-se neste caso:

$$C_{te} = \sum_{i=1}^n c_{te}^i \sum_{x=1}^m \int_{x-1}^x f_{Tp_i}(t) dTp_i + c_{te}^n \sum_{x=1}^m \int_{x-1}^x f_{Tp}(t) dTp \quad (5.51)$$

sendo x o número diário de unidades de tempo de trabalho extra dado pela Equação (5.19).

Para o valor esperado da penalização fixa devido a falhas nas entregas, $E[C_F]$, tem-se que:

$$E[C_F] = \sum_{j \in O_n} c_F^j \omega^j \int_{\Delta_\Sigma}^T f_{Tp}(t) dTp \quad (5.52)$$

sendo:

ω_j uma constante de proporcionalidade do tempo de produção do produto tipo j na $n^{\text{ésima}}$

célula, durante o período diário, T , tal que: $\omega_j = T_j/T$ e $\sum_{j \in O_n} \omega^j = 1$;

$\Delta_\Sigma = \sum_{j \in O_n} \Delta_n^j$, admitindo que Δ_n^j é proporcional a T_j .

No caso de não existir *stock* de segurança para o produto final tipo j , então Δ_n^j é nulo.

Inclusivamente, se $\Delta_n^j = 0, \forall j \in O_n$, então $\Delta_\Sigma = 0$, continuando no entanto válida a Equação (5.52).

Por último, o valor esperado da penalização variável pela não satisfação integral da procura diária, $E[C_V]$ obtém-se através da seguinte equação:

$$E[C_V] = \sum_{j \in O_n} c_{vf}^j \omega^j \int_{\Delta_\Sigma}^T f_{Tp}(t) (Tp - \Delta_\Sigma) dTp \quad (5.53)$$

Também esta equação se mantém válida para $\Delta_n^j = 0, \forall j \in O_n$.

Os modelos de custos apresentados relacionam parâmetros de custos com índices de fiabilidade internos, quer ao nível do sistema de produção, quer ao nível das células de produção. Um destes índices é a distribuição do tempo de indisponibilidade do sistema num período T , cujo procedimento para o seu cálculo foi apresentado na Secção 5.3. Tal procedimento serve de base para um estudo idêntico que será apresentado na secção seguinte para um sistema multi-célula multi-produto.

5.5 Distribuição do tempo de indisponibilidade

Nesta secção apresenta-se um estudo conducente à obtenção das distribuições dos tempos de indisponibilidade associadas a cada tipo de produto j produzido num sistema de produção multi-célula multi-produto. Admite-se neste estudo que o sequenciamento da produção dos vários tipos de produtos num período T é efectuado de acordo com o estabelecido nos cenários 1 ou 2 apresentados na Secção 5.4.2. Quanto ao estudo das distribuições dos tempos de indisponibilidade para o cenário 3, será apresentado no próximo capítulo com a análise do caso de estudo 2, à semelhança do que acontece com o modelo de custos. Na Figura 5.15 mostra-se, de uma forma esquemática, o procedimento geral para o cálculo das distribuições dos tempos de indisponibilidade.

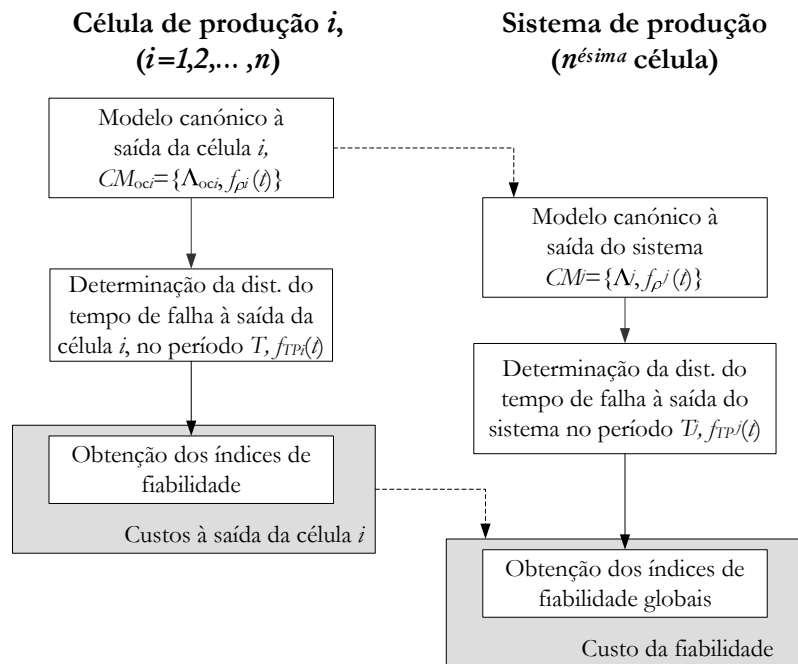


Figura 5.15: Procedimento para o cálculo do custo da fiabilidade

Para o sequenciamento da produção de acordo com o estabelecido pelo cenário 1, a distribuição do tempo de indisponibilidade da célula i no período T ($f_{TPi}^i(t)$) com $i=1, 2, \dots, n-1$, é independente do tipo de produto final j . O cálculo desta distribuição baseia-se no conhecimento do modelo canónico à saída da célula i , CM_{oci} .

Em contrapartida terá de se calcular a distribuição do tempo de falha de fluxo de materiais para cada tipo de produto final j ($f_{Tp^j}(t)$) à saída da $n^{ésima}$ célula de produção (linha de produção). Esta distribuição obtém-se a partir do modelo canónico do fluxo do produto tipo j à saída da linha de produção (CM^j), definido do seguinte modo:

$$CM^j = \{\Lambda^j, f_{\rho^j}(t)\} \quad (5.54)$$

sendo:

Λ^j , a frequência de interrupções do fluxo de produtos tipo j à saída da $n^{ésima}$ célula do sistema de produção;

$f_{\rho^j}(t)$, a função densidade de probabilidade do tempo de reposição do fluxo de produtos tipo j à saída da $n^{ésima}$ célula do sistema de produção.

A partir do modelo canónico CM^j pode obter-se a distribuição $f_{Tp^j}(t)$ de modo idêntico ao apresentado na Secção 5.3 para o caso mono-produto. Deste modo, adaptando a Equação (5.37) vem:

$$\begin{aligned} f_{Tp^j}(t) = & P^j(1)f_{\rho^j}(t) + P^j(2)\int_0^t f_{\rho^j}(t_1)f_{\rho^j}(t-t_1)dt_1 + \\ & + P^j(3)\int_0^t f_{\rho^j}(t_1)\int_{t_1}^{t-t_1} f_{\rho^j}(t_2)f_{\rho^j}(t-t_1-t_2)dt_2dt_1 + \dots \end{aligned} \quad (5.55)$$

sendo $P^j(i)$, com $i=1,2,\dots$, uma representação equivalente a $P(nf^j = i)$, i.e., a probabilidade de se obterem i falhas do sistema no período T^j . O cálculo de $P^j(i)$ faz-se de modo idêntico ao utilizado com o cálculo de $P(i)$ na Secção 5.3. Deste modo, o primeiro passo consiste no cálculo da probabilidade de ocorrerem i ou mais falhas do produto tipo j no período T , ou seja:

$$P(nf^j \geq i) = \int_0^{T^j} f_{\Lambda^j}(t_1)\int_{t_1}^{T^j} f_{\Lambda^j}(t_2-t_1)\cdots\int_{t_{i-1}}^{T^j} f_{\Lambda^j}(t_i-t_{i-1}) dt_i\cdots dt_2dt_1 \quad (5.56)$$

onde:

$P(nf^j \geq i)$ representa a probabilidade de ocorrerem i ou mais falhas do produto tipo j no período T^j ;

T^j , o período de tempo durante o qual se produz o produto tipo j , com $T = \sum_{j \in O_s} T^j$;

$f_{\Lambda^j}(t) = \Lambda^j e^{-\Lambda^j t}$, a função de probabilidade do processo de reposição do sistema de produção durante a produção do produto tipo j e;

Λ^j , a taxa de falhas do sistema de produção enquanto produz o produto tipo j .

O cálculo de $P(\eta^{f^j} \geq i)$ é efectuado até um valor de $i=n$ tal que, $P(\eta^{f^j} \geq n) \approx 0$. Finalmente, obtém-se a probabilidade de ocorrerem i falhas do sistema no período T^j com $i=\{n, n-1, \dots, 2, 1\}$ por:

$$P^j(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = n \\ P(\eta^{f^j} \geq i) - \sum_{k=i+1}^n P^j(k), & \text{se } i < n \end{cases} \quad (5.57)$$

5.6 Comentários finais

As metodologias existentes para análise e avaliação da fiabilidade de sistemas de produção adoptam frequentemente a hipótese markoviana, podendo introduzir erros significativos nos cálculos e conduzir a decisões erróneas relativamente ao projecto do sistema. Além disso, estas metodologias estão orientadas sobretudo para a avaliação de índices de desempenho internos.

A abordagem apresentada neste capítulo é bastante diferente, fundamentalmente nos seguintes aspectos:

- Trata-se de uma abordagem orientada para a avaliação de índices de desempenho relacionados com dois factores críticos de satisfação dos clientes a longo prazo e, consequentemente, essenciais para o sucesso e a continuidade das empresas em cadeias logísticas JIT: os custos de produção e a fiabilidade das entregas.
- A abordagem não impõe qualquer hipótese simplificativa relativa às distribuições dos processos estocásticos, sendo flexível ao ponto de poder lidar com qualquer tipo de distribuição.

Os modelos de custos permitem avaliar o acréscimo nos custos operacionais que se prendem, directa ou indirectamente, com tempos de paragem dos sistemas de produção. Estes modelos relacionam os índices internos de fiabilidade com um conjunto de índices de custos como sejam: penalizações por falhas nos fornecimentos; custos de oportunidade por perdas de vendas; custos extra por tempo de produção extra necessário para compensar a falha de máquinas/equipamentos do sistema de produção. Os índices internos de fiabilidade são obtidos a partir de modelos de fiabilidade estabelecidos com base nos desenvolvimentos apresentados no Capítulo 4. Estes modelos permitem ainda determinar os parâmetros relevantes para a obtenção de índices externos de avaliação da qualidade de serviço aos clientes, quer em termos de frequência de falhas de fornecimento por unidade de tempo, quer em termos de quantidade de artigos não fornecidos por unidade de tempo. No capítulo seguinte ilustrar-se-á a aplicação prática e a utilidade desta metodologia através de dois casos de estudo distintos.

Capítulo 6

Aplicação a casos de estudo

Neste Capítulo apresentamos dois casos de estudo aos quais são aplicados os conceitos e as metodologias introduzidos e desenvolvidas ao longo da dissertação, tendo como principal objectivo demonstrar a sua validade, aplicabilidade e utilidade prática.

O primeiro caso de estudo refere-se a um sistema de produção constituído por uma linha de produção que produz um tipo de produto. O segundo caso de estudo consiste num sistema de produção multi-célula multi-produto como se descreve em termos gerais no Capítulo 5.

6.1 Introdução

Os conceitos e metodologias desenvolvidos ao longo desta dissertação são direccionados sobretudo para a avaliação de índices de desempenho de sistemas de produção. Todavia muitos destes conceitos e metodologias têm um âmbito de aplicação bastante mais amplo, podendo aplicar-se nomeadamente na avaliação de índices de desempenho de sistemas de distribuição de energia eléctrica [Nunes, Faria et al., 2004], sistemas comunicações, ou sistemas de transportes.

Vários exemplos foram já apresentados para ilustrar a aplicação destes conceitos e metodologias, no entanto, ainda não se mostrou de uma forma integrada a sua aplicabilidade e utilidade prática a sistemas de produção. Pretendemos fazê-lo neste capítulo recorrendo a dois casos de estudo (caso 1 e caso 2), que representam sistemas de produção típicos que conhecemos da nossa experiência profissional. Estes casos de estudo reproduzem sistemas de produção integrados em cadeias logísticas complexas geridas segundo princípios da filosofia JIT. Cadeias como estas podem encontrar-se na indústria automóvel, em alguns sectores da indústria têxtil e vestuário, na indústria de componentes electrónicos, etc.

O primeiro caso de estudo analisado neste capítulo refere-se a um sistema de produção constituído por uma linha de produção que produz um tipo de produto (sistema mono-célula mono-produto), descrito em termos gerais no Capítulo 5. Trata-se de um sistema de produção simples, constituído por um conjunto de equipamentos dispostos em linha, no final da qual existe um *buffer* de produto final. Na Secção 6.2.1 apresenta-se um conjunto de dados que permitem caracterizar melhor este sistema, podendo ainda ser visto como um subsistema de um sistema de produção mais complexo à semelhança do representado pelo do caso de estudo 2.

O segundo caso de estudo consiste num sistema de produção multi-célula multi-produto (também descrito em traços gerais no Capítulo 5). Este sistema produz dois tipos de produtos diferentes em cada período diário de trabalho T , processados de acordo com o sequenciamento descrito no cenário 3, Capítulo 5.

O estudo de análise e avaliação efectuado a estes dois casos de estudo prende-se com o dimensionamento ou projecto dos sistemas de produção segundo duas perspectivas normalmente antagónicas: a redução dos custos; e a garantia de um nível mínimo de qualidade

de serviço em termos de satisfação de encomendas nos prazos de entrega. Apesar do âmbito do estudo ser idêntico para os dois casos propostos, os modelos e procedimentos requeridos são bem distintos, possibilitando mostrar a amplitude e a flexibilidade das metodologias apresentadas nos capítulos anteriores.

O estudo efectuado ao caso de estudo 1 descreve-se em duas fases. Na primeira fase mostra-se a aplicação numérica dos modelos de fiabilidade apresentados no Capítulo 4 e dos modelos de avaliação das medidas de desempenho desenvolvidos no Capítulo 5. Na segunda fase do estudo serão criados vários cenários para a análise do sistema por alterações nos valores de alguns parâmetros. Proceda-se então a um estudo de análise de sensibilidade caso sejam conhecidos os novos valores dos parâmetros, ou existam dados suficientes para obter estimativas confiáveis para esses valores. Apresenta-se ainda uma análise difuso-probabilística, para os casos em que a incerteza dos parâmetros é modelada por conjuntos difusos, recorrendo neste ponto aos conhecimentos sobre este assunto apresentados no Capítulo 3.

A análise do caso 2 realiza-se também em duas fases. Numa primeira fase servimo-nos deste caso para desenvolver os modelos de custo da fiabilidade de sistemas de produção multi-célula processando dois tipos de produtos diferentes no período diário T de acordo com as condições descritas no cenário 3 do capítulo anterior. Numa segunda fase procede-se a uma aplicação prática da abordagem hierárquica apresentada no Capítulo 4, determinando os modelos canónicos nos vários nodos de interesse para a continuação do estudo. Obtêm-se deste modo os índices de fiabilidade relevantes para o cálculo das medidas de desempenho: custo da fiabilidade e frequência anual de falhas nas entregas das encomendas. Finalmente, avaliam-se as várias soluções alternativas analisadas com base nestas medidas.

6.2 Sistema de produção – Caso 1

6.2.1 Apresentação

Este caso de estudo consiste num sistema que produz um tipo de componente, por exemplo, um dada peça para a indústria automóvel. O processo de fabrico é constituído por cinco operações (op_i) realizadas nas máquinas M_i , respectivamente ($i=1, 2, \dots, 5$). Na Figura 6.1 apresenta-se em termos gerais o fluxo de materiais no sistema de produção. Trata-se, efectivamente, de um sistema de produção tipo mono-célula mono-produto com um fluxo de peças unitário e balanceado (postos de trabalho com idênticos tempos de operação).

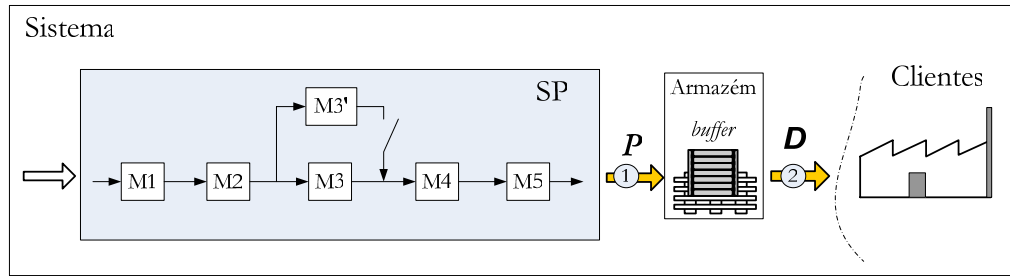


Figura 6.1: Sistema de produção – Caso 1

As máquinas $M3$ e $M3'$ são idênticas, sendo $M3'$ uma redundância passiva a $M3$ (não funcionam em simultâneo). Quando $M3$ está em funcionamento, $M3'$ está em *standby* e só entrará em funcionamento se $M3$ entrar no estado de falha e após a conclusão de um processo de reconfiguração. Os processos de falha e de reparação de cada máquina, assim como, o processo de reconfiguração das máquinas $M3$ $M3'$ estão caracterizados, (valor médio e de distribuição de probabilidades) na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Caracterização dos processos do sistema de produção

Máquina	Taxa de falhas (falhas/hora)	Processo de reparação		Processo de reconfiguração	
		Tempo médio (h)	Distribuição (Erlang)	Tempo médio (h)	Distribuição (Erlang)
M1	$\lambda_1=1/120$	1	$f_1(t) = 4 t e^{-2t}$		
M2	$\lambda_2=1/110$	1.2	$f_2(t) = 0.833 e^{-0.8333t}$		
M3, M3'	$\lambda_3 = \lambda_{3'}=1/60$	1	$f_3(t) = f_{3'}(t) = e^{-t}$	0.2	$f_6(t) = 26667 e^{-20t} t^3$
M4	$\lambda_4=1/120$	1	$f_4(t) = 4 t e^{-2t}$		
M5	$\lambda_5=1/80$	1.5	$f_5(t) = 0.667 e^{-0.667t}$		

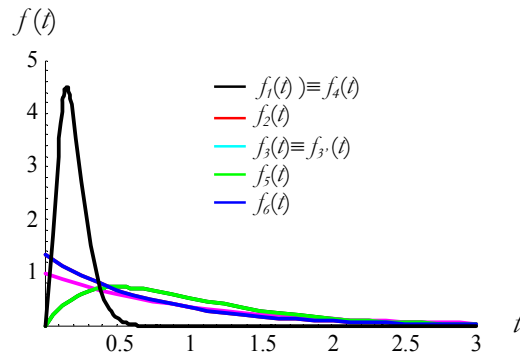


Figura 6.2: Gráfico das distribuições dos processos de reparação

A produção nominal diária do sistema de produção (P_N) é equivalente à quantidade diária necessária para satisfazer as encomendas (D_N), cuja entrega ao(s) cliente(s) se processa no final de cada período diário de trabalho T . O não cumprimento integral da satisfação das encomendas dá lugar a penalizações previstas no acordo estabelecido entre as partes. Os valores destas penalizações constam da Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Penalizações – Sistema mono-célula mono-produto

Designação	Abrev.	Valor (U.M.)*
penalização fixa por cada encomenda não entregue integralmente	c_F	25
penalização por cada artigo não fornecido	c_{nfo}	-
custo de oportunidade por artigos não vendidos equivalente a uma hora de produção	v'	8

* Unidades monetárias

No sentido de reduzir a probabilidade diária de falha no fornecimento (p) e, consequentemente, o valor das penalizações, dispõe-se da possibilidade de manter diariamente um *stock* de produto final. Este *stock* será utilizado sempre que devido a falhas do sistema de produção, a quantidade produzida seja menor que P_N . A manutenção do *stock* de produto final tem um custo (custo de posse) e a reposição deste *stock* no nível estabelecido é feita recorrendo a horas extras, o que acarreta um custo adicional (Tabela 6.3).

Tabela 6.3: Custos – Sistema mono-célula mono-produto

<i>Designação</i>	<i>Abrev.</i>	<i>Valor (U.M.)*</i>
custo de posse do <i>stock</i> por uma quantidade de artigos equivalente a uma hora de produção	c_1	0.8
custo por hora de trabalho em período extra	ce	6

6.2.2 Resolução do caso base

6.2.2.1 Modelo canónico do sistema de produção

O primeiro passo deste estudo consiste na obtenção do modelo canónico do fluxo de materiais no nodo à saída do sistema de produção (nodo 1, Figura 6.1). Segundo a metodologia apresentada no Capítulo 4, deverá em primeiro lugar obter-se o modelo canónico do subsistema M3-M3'. No ponto 4.4.1.2 desenvolveu-se o modelo canónico para um subsistema constituído por duas máquinas em redundância passiva. Sendo assim, as Equações (4.16) e (4.17) estabelecem o seguinte modelo canónico para o subsistema M3-M3':

$$CM_3 = \{\Lambda_3, f_{p3}(t)\} = \{0.01661, 0.01613 e^{-t} + 26237 e^{-20t} t^3\}$$

Na Figura 6.3 mostra-se graficamente a função distribuição do tempo de reposição, $f_{p3}(t)$, do subsistema M3-M3'.

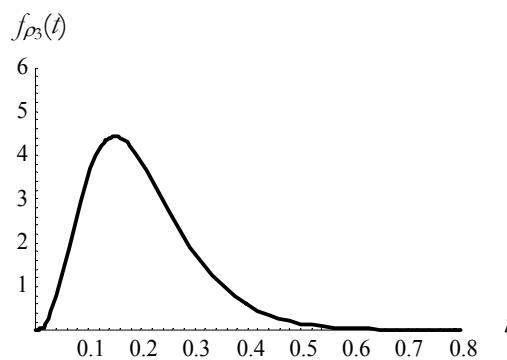


Figura 6.3: Gráfico da função distribuição do tempo de reposição do subsistema M3-M3'

Obtido CM_3 pode, em termos de fiabilidade, apresentar-se o sistema de produção como se mostra na Figura 6.4-a. Trata-se de um modelo sem redundâncias (série) que, de acordo com o estudo também desenvolvido no Capítulo 4, pode ser representado pelo modelo canónico da Figura 6.4-b.

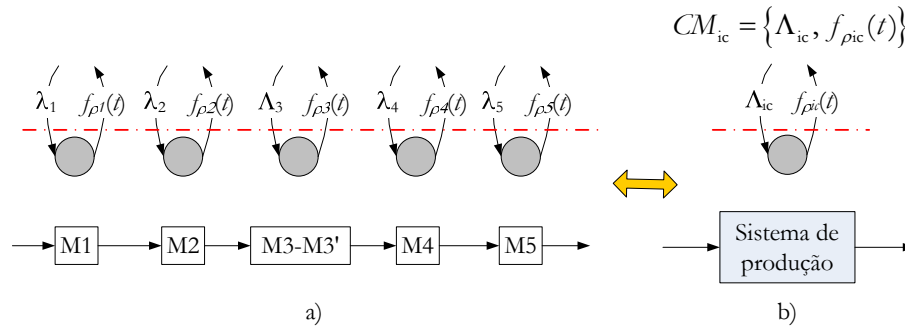


Figura 6.4: Dois níveis de simplificação do sistema de produção

Neste modelo, a frequência com que o sistema transita para o estado de falha, Λ_{ic} e a distribuição do tempo de reposição do sistema, $f_{\rho_{ic}}(t)$, são obtidas pelas Equações (4.5) e (4.6), respectivamente. Deste modo, o modelo canônico do sistema de produção será dado por:

$$CM = \{\Lambda_{ic}, f_{\rho_{ic}}(t)\}$$

sendo:

$$\Lambda_{ic} = 0.05486 \text{ h}^{-1}$$

$$f_{\rho_{ic}}(t) = 0.004883 e^{-t} + 0.1381 e^{-0.833t} + 0.1519 e^{-0.667t} + 1.215 e^{-2t} t + 7942 e^{-20t} t^3$$

Na Figura seguinte mostra-se a representação gráfica da função $f_{\rho_{ic}}(t)$.

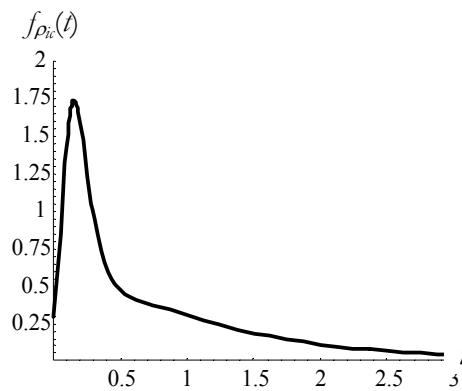


Figura 6.5: Gráfico da função distribuição do tempo de reposição do sistema, $f_{\rho_{ic}}(t)$

Depois de estabelecido o modelo canônico do sistema de produção, a etapa seguinte consiste na determinação da distribuição do tempo de paragem do sistema no período $T, f_{Tp}(t)$.

6.2.2.2 Distribuição do tempo de paragem do sistema no período T

A determinação da distribuição do tempo de paragem do sistema no período de trabalho T assenta no conhecimento do modelo canónico do sistema e no modelo de fiabilidade apresentado na Secção 5.3. Sendo assim deveremos começar por calcular $P(nf \geq i)$ e $P(i)$. As Equações (5.39) e (5.40) permitem-nos efectuar esses cálculos, obtendo-se para este caso:

$$P(nf \geq i) = \int_0^T 0.05486 e^{-0.05486t} \int_t^T 0.05486 e^{-0.05486(t_1-t)} \dots \int_{t_{i-1}}^T 0.05486 e^{-0.05486(t_i-t_{i-1})} dt_i \dots dt_1 dt$$

$$P(i) = P(nf \geq i) - P(nf \geq i+1)$$

Na Tabela 6.4 mostram-se os resultados obtidos para $P(nf \geq i)$ e $P(i)$. Estes resultados indicam que a probabilidade de ocorrerem 3 ou mais falhas durante um período de trabalho T pode ser negligenciável (ver Figura 6.6) e por isso, apenas os termos $P(i)$ para $i \leq 2$ deverão ser considerados relevantes na determinação de $f_{Tp}(t)$.

Tabela 6.4: Probabilidades do número de falhas

i	$P(nf \geq i)$	$P(nf = i)$
0	1	0.645
1	0.3553	0.283
2	0.0723	0.062
3	0.0101	0.009
4	0.00109	0.001

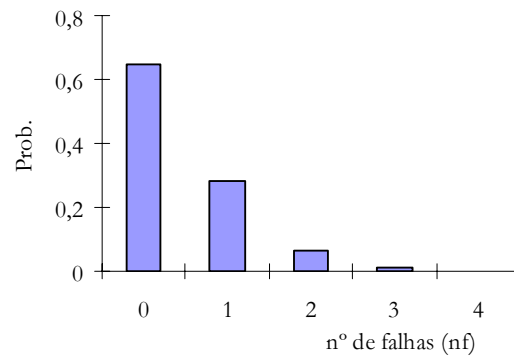


Figura 6.6: Probabilidades i de falhas no período T

Finalmente, a partir da Equação (5.36) determina-se a função do tempo de paragem do sistema de produção no período T , $f_{Tp}(t)$. Esta função, representada graficamente na Figura 6.7, é um elemento chave para estimar o valor das medidas de desempenho do sistema cujo cálculo se apresenta a seguir.

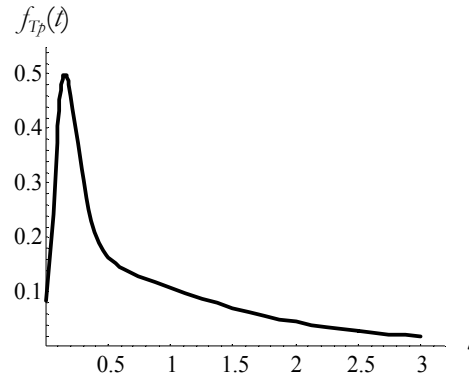
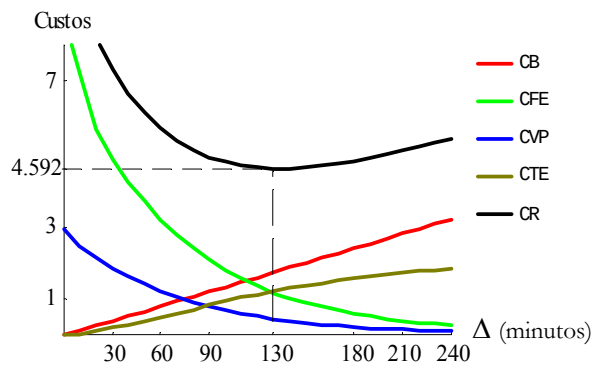


Figura 6.7: Distribuição do tempo de paragem do sistema durante um período T

6.2.2.3 Custo da fiabilidade *versus stock* de produto final

Na Secção 5.2 apresenta-se o modelo de custo da fiabilidade, $E[C_R]$ em função do *stock* de produto final, Δ . A aplicação deste modelo ao caso de estudo produz os resultados apresentados na Figura 6.8. No gráfico desta figura mostram-se o custo da fiabilidade, $E[C_R]$ e as várias parcelas de custos que o compõem em função de Δ .

$\Delta(\text{min})$	CR	$\Delta(\text{min})$	CR
0	11,512	130	4,592
10	9,911	140	4,596
20	8,203	150	4,623
30	7,300	160	4,669
40	6,659	170	4,730
50	6,138	180	4,803
60	5,713	190	4,888
70	5,372	200	4,981
80	5,107	210	5,081
90	4,908	220	5,187
100	4,765	230	5,298
110	4,670	240	5,414
120	4,614		



(CB: Custo do *buffer*; CFE: Penalização por falhas nas entregas; CVP: Custo de oportunidade das vendas perdidas; CTE: Custo com horas extras; CR: Custo da fiabilidade)

Figura 6.8: Custos *versus stock* de segurança

A análise destes resultados mostra que o mínimo valor do custo diário da fiabilidade é 4.592 U.M., obtido para um *stock* final equivalente a 130 minutos de produção ($\Delta^* = 130$ minutos).

6.2.2.4 Qualidade de serviço nas entregas *versus stock* de produto final

Frequentemente, os contratos que estabelecem as condições do negócio especificam um nível mínimo de qualidade de serviço na satisfação das encomendas avaliado pela frequência anual de falhas nas entregas ou pela quantidade anual de produtos não fornecidos. Estas medidas dependem da probabilidade diária de falha nas entregas, p , ou seja, a probabilidade de não satisfação integral da procura, D_N , que será dada pela Equação (5.21). No gráfico da Figura 6.9 representa-se a evolução dos valores de p com os valores de Δ .

De seguida mostra-se como se determinam se a partir destes valores, a frequência anual de falhas, F_f^a , o risco associado a uma dada solução e, a relação entre o custo da fiabilidade e a frequência anual de falhas.

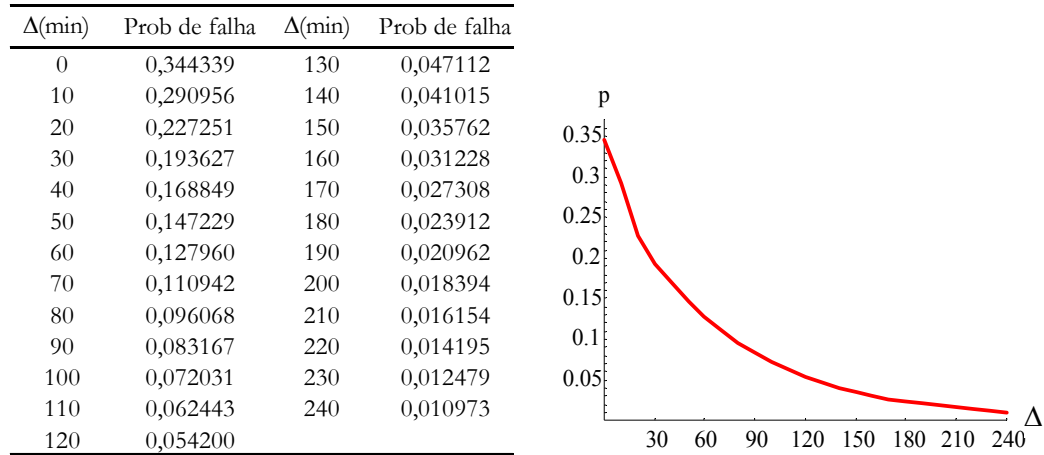


Figura 6.9: Probabilidade diária de falha *versus stock* de segurança

Frequência anual de falhas

De acordo com o estudo apresentado na Secção 5.2.2, a probabilidade de ocorrerem n falhas durante um ano é dada pela Equação (5.22). Esta equação mostra que a probabilidade $P(F_f^a = n)$ depende do valor de p que, por sua vez, é função do *stock* de segurança Δ . Na Figura 6.10 mostra-se a evolução de $P(F_f^a = n)$ em função do valor de Δ , admitindo que um ano de trabalho tem 250 dias úteis ($da=250$).

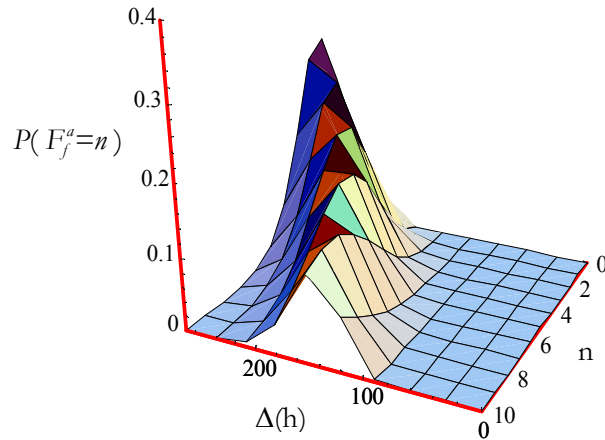


Figura 6.10: Probabilidade anual de n falhas em função do stock Δ

Verifica-se então que a probabilidade de se obter zero falhas num ano, $P(F_f^a = 0)$ é muito baixa quando $\Delta=0$ e à medida que Δ aumenta, esta probabilidade sobe. Também se verifica que probabilidade máxima tende a aumentar com os seguintes efeitos em simultâneo: aumento de Δ e diminuição de n .

Na Figura 6.11 mostram-se os resultados obtidos para o caso em análise, considerando $\eta=95\%$. O gráfico a desta figura representa a linha média e a linha dos 95% do número anual de falhas de fornecimento em função de Δ (ver Tabela 6.5).

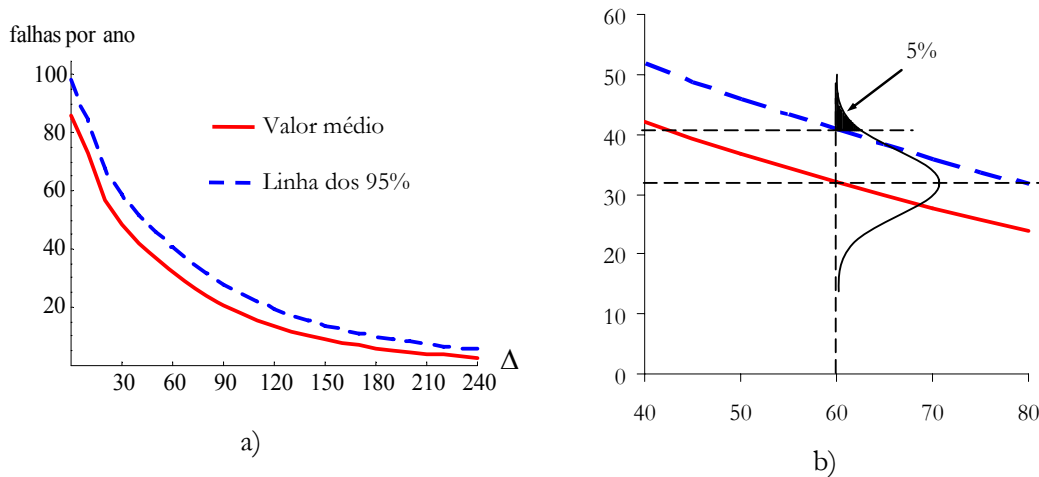


Figura 6.11: Linhas de valores médios e de 95% de confiança

Deste gráfico tira-se, por exemplo, para $\Delta=60$ minutos (a que corresponde uma probabilidade diária de falhas $p=0.127960$), o número esperado de falhas por ano, $F_f^a = 32$ e ainda que o valor de F_f^a não ultrapassará 40.7 falhas (Figura 6.11-b) com um nível de confiança de 95%.

Tabela 6.5: Valores anuais de falhas de fornecimentos em função de Δ

$\Delta(\text{min})$	Média	95%	$\Delta(\text{min})$	Média	95%
0	86,1	98,4	130	11,8	17,3
10	72,7	84,5	140	10,3	15,4
20	56,8	67,7	150	8,9	13,8
30	48,4	58,7	160	7,8	12,3
40	42,2	51,9	170	6,8	11,1
50	36,8	46,0	180	6,0	9,9
60	32,0	40,7	190	5,2	9,0
70	27,7	35,9	200	4,6	8,1
80	24,0	31,7	210	4,0	7,3
90	20,8	28,0	220	3,5	6,6
100	18,0	24,7	230	3,1	6,0
110	15,6	21,9	240	2,7	5,5
120	13,5	19,4			

Por outro lado pode estabelecer-se os valores de p ou de Δ que garante $F_f^a \leq NLf$ com 95% de confiança. Por exemplo para $NLf=10$ e $\Delta=180$ minutos, o custo desta solução não coincide, naturalmente, com o custo óptimo encontrado acima. Para cumprir esta restrição em termos de número anual de falhas nas entregas, agrava-se o custo em relação ao custo óptimo em cerca de 4.6%. Refira-se que outras soluções que passem por diminuir ou eliminar o *buffer* à saída do sistema mantendo o valor de p à custa, por exemplo, de redução das taxas de falhas ou dos tempos de reparação dos equipamentos, ou ainda, do aumento de redundâncias de equipamentos (maior disponibilidade), cumprem igualmente a restrição imposta.

Finalmente mostra-se como se calcula o risco de falha no fornecimento anual, i.e., $P(F_f^a > NLf)$, associado a valores fixos de NLf e Δ . Considere-se, por exemplo, $NLf=15$ e $\Delta=130$ minutos. Para este valor de Δ obtém-se da Figura 6.9, $p=0.047112$, a que corresponde um número médio de falhas por ano de 11.778 e um desvio padrão de 3.3501 calculados pelas Equações (5.25) e (5.26), respectivamente. O risco de falha de fornecimento pode então ser calculado do seguinte modo:

$$P(F_f^a > 15) = P\left(z > \frac{15 - 11.778}{3.3501}\right) = P(z > 0.961762)$$

Da tabela da distribuição Normal (0, 1) obtém-se $P(F_f^a > 15) = 0.169$.

Relação custo da fiabilidade versus frequência anual de falhas de fornecimento

Relacionando os resultados da Figura 6.8 com os resultados da Tabela 6.5 constrói-se o gráfico da Figura 6.12, onde se mostra a relação entre o custo da fiabilidade e o número anual de falhas de fornecimento (com 95% de confiança), para diferentes valores de Δ . Pela análise deste gráfico verifica-se que as soluções $\Delta < \Delta^*$ (traço a preto) são dominadas pelas soluções $\Delta > \Delta^*$ (traço a vermelho). Deste modo, apenas interessa a parte do gráfico que contém as soluções $\Delta > \Delta^*$. Por aqui torna-se evidente a impossibilidade de impor simultaneamente uma limitação em termos de custo da fiabilidade e número máximo de falhas. Por exemplo, se pretendermos que o custo diário da fiabilidade não ultrapasse 5 U.M. teremos que aceitar cerca de 8 falhas anuais (valor com 95% de confiança); valores esperados para $\Delta=200$ minutos. Também se verifica que qualquer redução no custo da fiabilidade tem como consequência um aumento na frequência anual de falhas na satisfação das encomendas.

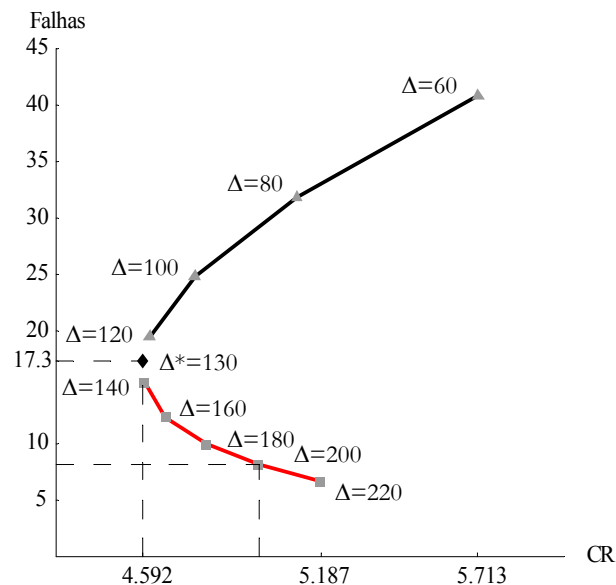


Figura 6.12: Custos *versus* falhas anuais

6.2.3 Incerteza nos parâmetros

Os sistemas de produção, sendo sistemas dinâmicos, estão sujeitos a intervenções e a decisões de vária ordem. Por vezes é possível estimar os novos valores dos parâmetros de fiabilidade e de custos dos sistemas quando se tomam decisões que introduzem alterações significativas nos equipamentos, nas políticas de manutenção na configuração dos sistemas ou nos contratos de fornecimento. Outras vezes, as decisões tomadas não permitem estimar os novos valores dos parâmetros com a precisão pretendida. Tal acontece frequentemente com os parâmetros de fiabilidade (taxa de falhas e distribuição do tempo de reparação) devido à escassez de dados. Quer nuns casos, quer noutros, as decisões são muitas vezes tomadas sem se avaliar em rigor o seu impacto no desempenho global dos sistemas.

O estudo apresentado a partir daqui, para o caso de estudo 1, consiste numa análise que possibilita prever o impacto de diferentes decisões em duas medidas de desempenho já introduzidas no Capítulo 1: o *custo da fiabilidade* e a *frequência de falhas de fornecimento*. Numa primeira análise considera-se que os novos valores dos parâmetros são conhecidos ou estimáveis por valores rígidos. Efectua-se então um estudo de análise de sensibilidade, para avaliar o impacto dos novos valores dos parâmetros na solução do problema e comparar diferentes soluções alternativas. Termina-se com uma avaliação do “risco” associado a cada decisão.

Numa segunda fase admite-se que a incerteza associada aos novos valores dos parâmetros é elevada, pelo que se recorre a conjuntos difusos para modelar esta incerteza. A presença de parâmetros difusos na avaliação das medidas de desempenho associadas a cada solução introduz um acréscimo substancial na dificuldade de análise do caso de estudo e na complexidade dos cálculos. No ponto 6.2.3.2 mostraremos como se obtêm as medidas de desempenho difusas (custo da fiabilidade e frequência de falhas de fornecimento), através de uma abordagem difuso-probabilística cujos fundamentos metodológicos se apresentam distribuídos pelos Capítulos 3, 4 e 5. O estudo deste caso termina com uma análise de risco de soluções adoptadas.

6.2.3.1 Análise de sensibilidade

Considere-se que o resultado directo de um conjunto de intervenções no campo da manutenção se traduz numa redução dos tempos de reparação das máquinas 2 e 5 de 1.2 h e 1.5 h, respectivamente, para 0.75 h em cada uma destas máquinas, e na alteração da taxa de falhas

da máquina 5 para $\lambda_5=1/150$ falhas/hora. Toda a restante informação constante da Tabela 6.1 mantém-se inalterada.

Como consequência das alterações apresentadas antevê-se desde já uma redução no custo da fiabilidade do sistema. Na Figura 6.13, mostram-se as duas curvas de custos: a curva CR que corresponde a curva do *custo da fiabilidade* nas condições iniciais e a curva CR1, que representa o *custo da fiabilidade* com os novos valores dos parâmetros acima introduzidos. Comparando os custos óptimos de ambas as curvas, verifica-se uma redução muito significativa (cerca de 26%) no custo óptimo de CR1 relativamente ao custo óptimo de CR, associado a uma diminuição do *stock* óptimo de produto final de 130 minutos para 110 minutos.

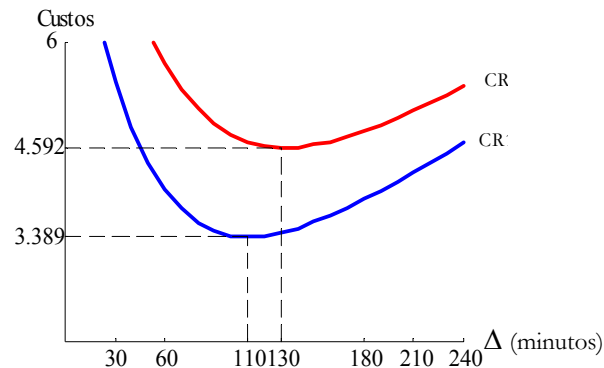


Figura 6.13: Impacto no custo da fiabilidade de alterações nos tempos médios de reparação

Embora se tenha, normalmente, a percepção de que a implementação de determinadas acções introduz alterações nos parâmetros do sistema, acontece com frequência, desconhecer-se em termos quantitativos o impacto que provoca nos valores destes parâmetros. Tal, a verificar-se na situação acima conduziria à manutenção do *stock* de produto final no seu valor base ($\Delta=130$ minutos) o que, em termos de custos não teria um efeito muito significativo, como se mostra na Tabela 6.6. Nesta tabela temos os custos da fiabilidade quando se considera $\Delta=130$ minutos e $\Delta=110$ minutos para as duas situações em análise: (i) os valores dos parâmetros são os apresentado para o caso base (CB); (ii) os valores dos parâmetros são os previstos acima após as intervenções no campo da manutenção (NC). Na última linha desta tabela mostra-se a redução percentual do custo da fiabilidade (ganho) quando se adopta o melhor valor de Δ para cada uma das situações, em detrimento do valor alternativo. Deste modo o “risco” pela não adopção da melhor solução do sistema em qualquer das situações será reduzido.

Tabela 6.6: Custo da fiabilidade *versus stock* de produto final

Decisão Δ (min)	Custos	
	CB	NC
110	4.670	3.389
130	4.592	3.447
Ganhos (%)	1.7	1.71

As alterações nos parâmetros do modelo de custos podem ocorrer quer nos parâmetros de fiabilidade do sistema, como acabamos de mostrar, quer nos parâmetros referentes às componentes de custo como mostraremos de seguida. Num caso como no outro haverá reflexos no custo da fiabilidade.

Na Figura 6.14 mostra-se a representação de várias curvas de custos da fiabilidade obtidas para diferentes cenários caracterizados por diferentes conjuntos de valores das componentes de custo (ver Tabela 6.7), tomando para todos eles os valores dos parâmetros da fiabilidade referentes ao caso base, apresentados na Tabela 6.1.

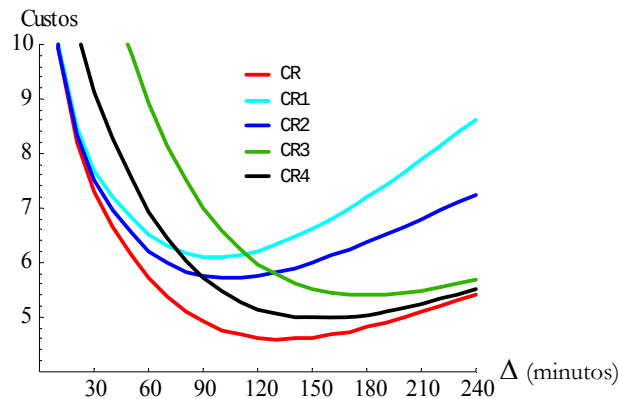


Figura 6.14: Influência no custo da fiabilidade de alterações nos valores das componentes de custos

Tabela 6.7: Valores das componentes de custos

Cenário	c'_1	ce	c_F	c'_{nfo}	p'	Δ (minutos)	CR^* (U.M.)
CR	0.8	6	25	0	8	130	4.592
CR1	1.6	6	25	0	8	100	6.099
CR2	0.8	12	25	0	8	100	5.700
CR3	0.8	6	50	0	8	180	5.401
CR4	0.8	6	25	0	16	150	4.975

Pela análise dos resultados verifica-se que as alterações nas componentes de custos introduzem alterações no custo da fiabilidade e também na dimensão (avaliada em tempo) do *stock* de segurança óptimo do produto final que passa de 130 minutos no cenário base, CR, para: 100 minutos, nos cenários CR1 e CR2; 180 minutos no cenário CR3 e; 150 minutos no cenário CR4). Estes resultados serão, certamente, elementos importantes para os gestores dos sistemas de produção tomarem decisões, quer sobre aspectos relacionados com o projecto do sistema de produção, quer sobre as políticas e os recursos de manutenção quer ainda, como valores de referência na negociação dos contratos com os clientes.

Risco na tomada de decisão

No ambiente competitivo e de elevada incerteza em que actualmente as empresas laboram torna muito importante prever o efeito nas medidas de desempenho da tomada de determinadas decisões, admitindo diferentes cenários. Através deste efeito pode de algum modo avaliar-se o risco associado a cada decisão. A seguir apresentamos uma análise desta natureza aplicada ao caso de estudo, tomando os cenários da Tabela 6.7.

Na Tabela 6.8 apresentam-se os custos da fiabilidade para cada um destes cenários, considerando os vários valores de Δ representados na primeira coluna da tabela (decisões alternativas), destacando (a negrito) os valores mais baixos obtidos. Por exemplo, para o cenário CR3, o melhor valor para o custo da fiabilidade seria 5.401 U.M./dia, obtido tomando a decisão de constituir um stock de segurança equivalente a 180 minutos de produção. Mas, se fosse tomada essa decisão e depois ocorresse CR2, a decisão revelar-se-ia a pior de todas consideradas. Por outro lado, a solução $\Delta=100$ minutos é a melhor solução para CR2 e CR3 mas a pior solução para CR3 e CR4. Procurando limitar o custo nas piores situações, a solução mais robusta é $\Delta=130$ minutos, para a qual o custo nunca ultrapassa 6.463 U.M./dia (solução MINIMAX).

Tabela 6.8: Custo da fiabilidade para diferentes cenários

Decisão Δ (minutos)	Cenários				
	CR	CR1	CR2	CR3	CR4
130	4.592	6.463	5.897	5.622	4.999
100	4.765	6.099	5.700	6.566	5.462
180	4.804	7.203	6.375	5.401	5.038
150	4.623	6.623	6.000	5.517	4.975

Numa outra perspectiva, se a cada coluna de custos da Tabela 6.8 descontarmos o menor valor da coluna, construímos a Tabela 6.9. Esta tabela apresenta para cada cenário o acréscimo de custo de cada solução relativamente à melhor solução. Por exemplo, para o cenário base, CR, a solução $\Delta=180$ minutos (pior solução para este cenário) tem um acréscimo de custo relativamente à melhor solução ($\Delta=130$ minutos) de 0.212 U.M./dia. De todas as soluções consideradas neste caso de estudo, a solução $\Delta=130$ minutos é a que apresenta a mais baixa das piores diferenças e, neste sentido, pode considerar-se a solução mais robusta corroborando o que foi acima referido a respeito desta solução.

Tabela 6.9: Tabela de diferenças ou de arrependimento

Decisão	Cenários				
Δ (minutos)	CR	CR1	CR2	CR3	CR4
130	0	0.364	0.197	0.221	0.024
100	0.173	0	0	1.165	0.487
180	0.212	1.104	0.675	0	0.063
150	0.031	0.524	0.300	0.116	0

Relativamente à solução $\Delta=100$ minutos, a Tabela 6.9 evidencia quão é má esta solução caso ocorra o cenário 3 ou o cenário 4, embora seja a melhor solução para os cenários 2 e 3. No pressuposto considerado neste estudo de que todos os cenários têm idênticas probabilidades de ocorrência, esta solução é das que comporta maior risco.

6.2.3.2 Modelação com parâmetros difusos

De um modo geral, a incerteza associada aos parâmetros de fiabilidade dos equipamentos de um sistema de produção industrial é grande. Esta incerteza é maior para novos equipamentos que se introduzam no sistema. Admita-se então que por motivos vários a máquina M5 do sistema de produção do caso de estudo é substituída por uma nova máquina para a qual dispomos de alguns dados de fiabilidade fornecidos pelo fabricante, e de alguma informação qualitativa recolhida de outras empresas onde equipamentos idênticos se encontram a funcionar. Conjugando esta informação com as condições de funcionamento existentes na empresa estabelecem-se os seguintes conjuntos difusos triangulares para a taxa de falhas e para o tempo médio de reparação da nova máquina:

$$\tilde{\lambda}_5 = [1/140; 1/80; 1/40] \text{ e } \tilde{m}_5 = [1; 1.5; 2]$$

Toda a restante informação constante da Tabela 6.1 relativa às outras máquinas mantém-se inalterável. Saliente-se que os valores modais de $\tilde{\lambda}_5$ $\tilde{m}_5$ correspondem aos valores (rígidos) destes parâmetros nas condições base.

Para um determinado intervalo de confiança, α , que corresponde a um corte ao nível α definido em relação à função pertença de cada conjunto difuso tem-se para a taxa de falhas e tempo médio de reparação:

$${}^{\alpha}\lambda_5 = [0.007143 + 0.005371\alpha; 0.025 - 0.0125\alpha]$$

$${}^{\alpha}m_5 = [1 + 0.5\alpha; 2 - 0.5\alpha]$$

O cálculo das medidas de desempenho do sistema: custo da fiabilidade e frequência anual de falhas, nas condições apresentadas, requer uma abordagem difuso-probabilística que segue, em traços gerais, os mesmos passos do estudo apresentado para o problema base. Sendo assim, comecemos pelo cálculo do modelo canónico do sistema de produção, que designaremos daqui em diante por modelo canónico difuso.

Modelo canónico difuso

O uso de parâmetros de fiabilidade definidos por números difusos conduz a que o modelo canónico do sistema de produção seja difuso. Este modelo, à semelhança do modelo canónico desenvolvido para parâmetros rígidos, é composto pelo par:

$$CM = \{\tilde{\Lambda}, \tilde{f}_\rho(t)\} \quad (6.1)$$

sendo:

$\tilde{\Lambda}$ - a taxa de falhas difusa do sistema de produção (nodo 1)

$\tilde{f}_\rho(t)$ - a função densidade do tempo de reposição do sistema (nodo 1)

Pode considerar-se $\tilde{\Lambda}$ e $\tilde{f}_\rho(t)$ uma extensão de Λ e $f_\rho(t)$ obtidos por (5.5) e (5.6), respectivamente. Para um dado valor de α fixo, ${}^{\alpha}\Lambda$ define o intervalo de confiança, ${}^{\alpha}\Lambda = [{}^{\alpha}\Lambda^-; {}^{\alpha}\Lambda^+]$ e ${}^{\alpha}f_\rho(t)$, as curvas inferior e superior do tempo de reposição do sistema para qualquer valor de t , ou seja, ${}^{\alpha}f_\rho(t) = [{}^{\alpha}f_\rho^-(t); {}^{\alpha}f_\rho^+(t)]$. A consideração de todos os níveis α , conduz-nos à obtenção da taxa de falhas difusa, $\tilde{\Lambda}$ e do tempo de reposição difuso,

$\tilde{f}_\rho(t)$, utilizando a aritmética intervalar (ver Capítulo 3). Na Figura 6.15 mostra-se a função de pertinência da taxa de falhas e na Figura 6.16, o tempo de reposição difuso do sistema de produção.

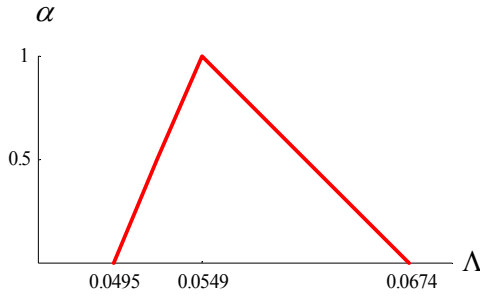


Figura 6.15: Função pertinência de $\tilde{\Lambda}$

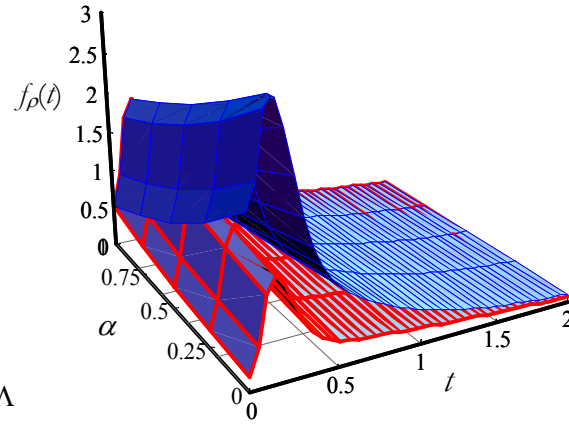


Figura 6.16: Tempo de reposição difuso

As curvas do tempo de reposição ${}^\alpha f_\rho^-(t)$ e ${}^\alpha f_\rho^+(t)$ para um dado valor de $\alpha = \alpha'$, correspondem às linhas limite da superfície resultante do corte da Figura 6.16 pelo plano $\alpha = \alpha'$. Tomando os valores $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, obtêm-se as curvas para o tempo de reposição representadas na Figura 6.17. Obviamente a curva representada para $\alpha = 1$ corresponde à curva obtida considerando todos os parâmetros como valores rígidos (Figura 6.5).

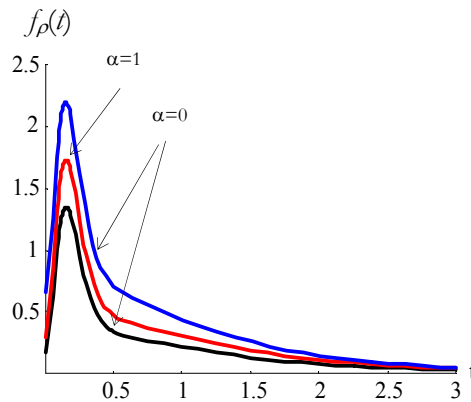


Figura 6.17: Curvas do tempo de reposição para $\alpha=0$ e $\alpha=1$

Distribuição difusa do tempo diário de paragem

Neste momento temos caracterizado o modelo canónico difuso do sistema de produção. O passo seguinte consiste na determinação da função difusa do tempo de paragem do sistema no período de trabalho T , $\tilde{f}_{Tp}(t)$. Para o efeito é necessário calcular as probabilidades de ocorrerem i falhas no período T , $\tilde{P}(i)$. Procedendo à *fuzzification* das Equações (5.39) e (5.40) obtêm as funções de pertença para $\tilde{P}(i)$. Tal como aquando da utilização de parâmetros rígidos e, elas mesmas razões, consideramos apenas como não negligenciáveis as probabilidades difusas $\tilde{P}(1)$ e $\tilde{P}(2)$, cujas funções de pertença se apresentam na Figura 6.18.

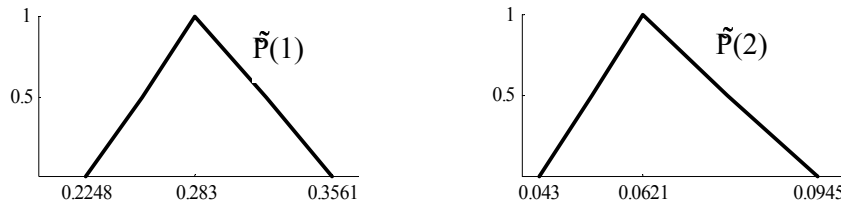


Figura 6.18: Probabilidade difusa de ocorrerem uma falha ou duas falhas no período T

Por fim, com base na Equação (5.36) podemos expressar $\tilde{f}_{Tp}(t)$ da seguinte forma:

$$\tilde{f}_{Tp}(t) = \tilde{P}(1)\tilde{f}_p(t) + \tilde{P}(2)\int_0^t \tilde{f}_p(t_1)\tilde{f}_p(t-t_1)dt_1 \quad (6.2)$$

Para um dado valor de α fixo, ${}^\alpha f_{Tp}(t)$ define as curvas inferior e superior do tempo de paragem do sistema no período T , para diferentes valores de $\Delta=t$:

$${}^\alpha f_{Tp}(t) = \left[{}^\alpha f_{Tp}^-(t) ; {}^\alpha f_{Tp}^+(t) \right] \quad (6.3)$$

Tal como vimos para ${}^\alpha f_p(t)$, a consideração de todos os níveis, α , conduz-nos à obtenção de ${}^\alpha f_{Tp}(t)$. Na Figura 6.19 representa-se ${}^\alpha f_{Tp}(t)$ para os valores de $\alpha=0$ e $\alpha=1$. Também se pode ver nesta figura as funções pertença de $f_{Tp}(t)$ para os cortes, $t=0.5$ horas e $t=1$ hora.

Mostrámos no Capítulo 5, que a função do tempo de paragem do sistema durante o período T , $f_{Tp}(t)$ é um elemento determinante para a estimação do custo da fiabilidade. De modo análogo, num contexto difuso $\tilde{f}_{Tp}(t)$ tem idêntica importância na estimação do custo difuso da

fiabilidade, $\tilde{C}\tilde{R}$. Uma vez obtida $\tilde{f}_{Tp}(t)$ podemos calcular o custo da fiabilidade para diferentes valores de Δ , como se mostra de seguida.

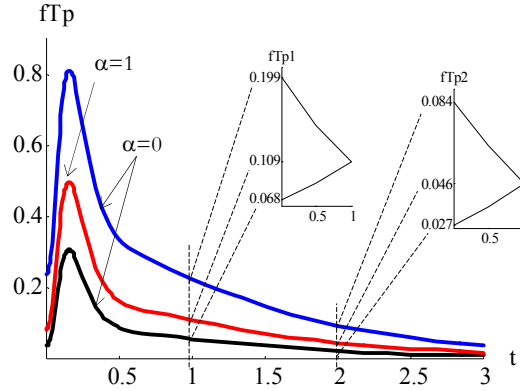


Figura 6.19: Função difusa do tempo diário de paragem do sistema de produção

Modelo difuso do custo da fiabilidade

De novo, para um valor fixo de α , ${}^{\alpha}CR(t)$ define as curvas inferior e superior do custo da fiabilidade no período T , para qualquer valor de $\Delta=t$:

$${}^{\alpha}CR(t) = [{}^{\alpha}CR^{-}(t) ; {}^{\alpha}CR^{+}(t)] \quad (6.4)$$

A consideração de todos os níveis α permite-nos obter $\tilde{C}\tilde{R}$. Na Figura 6.20 apresentam-se os resultados obtidos tomando $\alpha=0$ e $\alpha=1$.

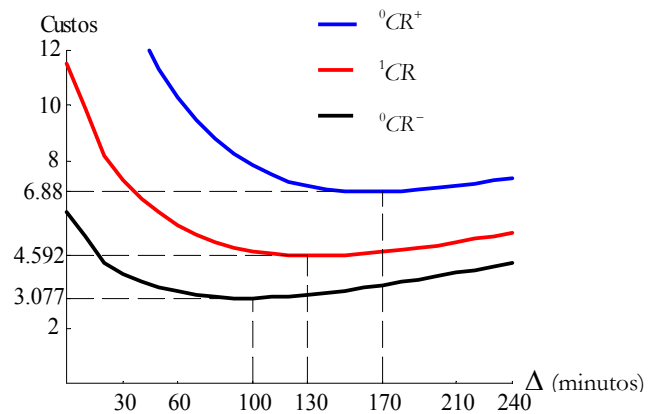


Figura 6.20: Custos difusos da fiabilidade

Custo ótimo difuso

Neste caso, o custo da fiabilidade ótimo pode ser obtido com diferentes valores de Δ , conforme o valor de α considerado, como se mostra pelo gráfico da figura anterior, assim como pelos resultados apresentados na Tabela 6.10.

Tabela 6.10: Custos da fiabilidade *versus* dimensão do *buffer* de produto final

$\Delta(\text{min})$	${}^0CR^+$	${}^{0.5}CR^+$	${}^1CR$	${}^{0.5}CR^+$	${}^0CR^+$
0	6,1885	8,4881	11,5118	16,1923	22,0035
10	5,3093	7,2970	9,9113	14,0081	19,0209
20	4,3656	6,0220	8,2033	11,7006	15,9118
30	3,9380	5,3929	7,2999	10,3706	13,9896
40	3,6645	4,9647	6,6590	9,3857	12,5303
50	3,4561	4,6245	6,1385	8,5723	11,3215
60	3,2989	4,3537	5,7127	7,8951	10,3128
70	3,1878	4,1453	5,3720	7,3396	9,4811
80	3,1177	3,9923	5,1071	6,8927	8,8058
90	3,0827	3,8875	4,9081	6,5403	8,2663
100	3,0775	3,8234	4,7654	6,2692	7,8429
110	3,0970	3,7936	4,6701	6,0668	7,5177
120	3,1369	3,7923	4,6144	5,9223	7,2747
130	3,1936	3,8144	4,5916	5,8262	7,1004
140	3,2639	3,8559	4,5961	5,7703	6,9829
150	3,3453	3,9134	4,6231	5,7479	6,9123
160	3,4359	3,9839	4,6688	5,7532	6,8804
170	3,5339	4,0653	4,7298	5,7815	6,8802
180	3,6380	4,1556	4,8035	5,8288	6,9060
190	3,7471	4,2533	4,8878	5,8919	6,9530
200	3,8603	4,3571	4,9807	5,9680	7,0174
210	3,9770	4,4660	5,0810	6,0549	7,0959
220	4,0965	4,5791	5,1872	6,1506	7,1858
230	4,2184	4,6958	5,2985	6,2538	7,2850
240	4,3424	4,8155	5,4139	6,3630	7,3918

Na Figura 6.21 apresentam-se as funções de pertença do custos diário da fiabilidade, $\tilde{CR}$, para os valores de Δ com os quais se obtêm os melhores resultados. Como as diferenças nestes resultados não parecem muito significativas, poderíamos concluir, numa primeira análise, que a solução ótima encontrada para o caso base ($\Delta=130$ minutos) é uma solução robusta, uma vez que sofre pequenas variações para qualquer valor de $\alpha \in (0,1]$. Contudo, deveremos atentar um pouco mais na análise destes resultados. Em rigor, para obtermos a solução de menor custo para os diferentes valores de α considerados teremos que ordenar as funções pertença representadas na Figura 6.21, usando um método de ordenação (Capítulo 3). A ordenação dos conjuntos difusos passa regra geral por colapsar cada conjunto difuso e representá-lo sobre um

recta real. A ordenação obtida pode diferir consoante o método utilizado. Por isso deve tentar-se identificar para cada caso o método mais adequado.

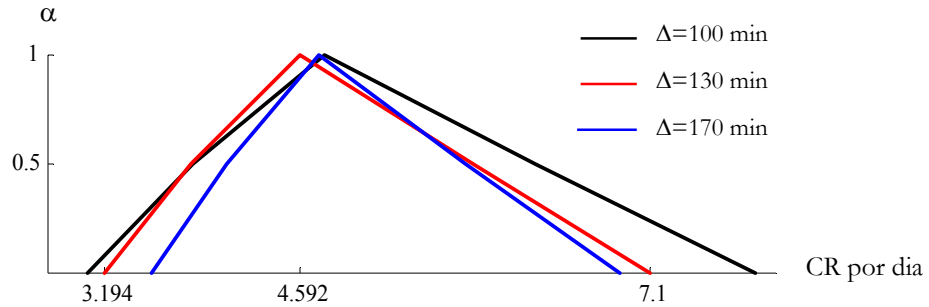


Figura 6.21: Distribuições de possibilidades de $\tilde{CR}$ para $\Delta = \{100, 130, 170\}$ minutos

Note-se que o que se pretende com a ordenação destes custos difusos é determinar a solução (valor de Δ) de menor custo.

Ordenação dos custos difusos

Existem vários métodos disponíveis para ordenação de conjuntos difusos sobre uma recta real, como se mostra no Capítulo 3. Para ordenar os custos difusos representados na Figura 6.21 vamos utilizar o método proposto por Saade (1996) dada a parametrização permitida pelo valor de δ (factor de Hurwicz). Começemos por representar analiticamente cada um dos custos. Seja $\tilde{CR}_\Delta$, o custo da fiabilidade para um *stock* de produto final igual a Δ , com $\Delta = \{100, 130, 170\}$. Tem-se então:

$$\mu_{\tilde{CR}_{100}}(x) = \begin{cases} 0.5925x - 1.8233, & \text{se } 3.0775 \leq x \leq 4.7654 \\ -0.3249x + 2.5485, & \text{se } 4.7654 < x \leq 7.8429 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{CR}_{130}}(x) = \begin{cases} 0.7153x - 2.2844, & \text{se } 3.1936 \leq x \leq 4.5916 \\ -0.3986x + 2.8302, & \text{se } 4.5916 < x \leq 7.1004 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{CR}_{170}}(x) = \begin{cases} 0.8362x - 2.9550, & \text{se } 3.5339 \leq x \leq 4.7298 \\ -0.4650x + 3.1995, & \text{se } 4.7298 < x \leq 6.8802 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

Os conjuntos de nível α de $\tilde{C\tilde{R}}_{100}$, $\tilde{C\tilde{R}}_{130}$ e $\tilde{C\tilde{R}}_{170}$ são expressos por:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}C\tilde{R}_{100} &= [\epsilon_{11}(\alpha), \epsilon_{12}(\alpha)] \\ &= [1.6879\alpha + 3.0775, -3.0775\alpha + 7.8429] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}C\tilde{R}_{130} &= [\epsilon_{21}(\alpha), \epsilon_{22}(\alpha)] \\ &= [1.398\alpha + 3.1936, -2.5088\alpha + 7.1004] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}C\tilde{R}_{170} &= [\epsilon_{31}(\alpha), \epsilon_{32}(\alpha)] \\ &= [1.1959\alpha + 3.5339, -2.1504\alpha + 6.8802] \end{aligned}$$

Por exemplo, aplicando a Equação (3.16) ao conjunto difuso $\tilde{C\tilde{R}}_{100}$ tem-se:

$$\begin{aligned} F_{\delta}(\tilde{C\tilde{R}}_{100}) &= \int_0^1 \delta \epsilon_{11}(\alpha) + (1-\delta) \epsilon_{12}(\alpha) d\delta \\ &= \int_0^1 \delta (1.6879\alpha + 3.0775) + (1-\delta)(-3.0775\alpha + 7.8429) d\delta \\ &= -2.3827 \delta + 6.3042 \end{aligned}$$

Por idêntico procedimento, tem-se para os restantes conjuntos difusos:

$$F_{\delta}(\tilde{C\tilde{R}}_{130}) = -1.9534\delta + 5.846 \text{ e } F_{\delta}(\tilde{C\tilde{R}}_{170}) = -1.6732\delta + 5.805$$

Utilizando estes resultados podemos ordenar os *outputs* difusos representados na Figura 6.21, atribuindo valores a δ , como se apresenta na Tabela 6.11.

Tabela 6.11: Tabela de ordenação dos *outputs* em função de δ

δ	Ordenação (ascendente)		
0	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$
0.1	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$
0.2	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$
0.3	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$
0.4	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$
0.5	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$
0.6	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$
0.7	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$
0.8	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$
0.9	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$
1	$\tilde{C\tilde{R}}_{130}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{100}$	$\tilde{C\tilde{R}}_{170}$

Com este método de ordenação pode obter-se, como se verifica neste caso, diferentes ordenações conforme o valor de δ . Isto é um resultado razoável uma vez que a alteração do valor de δ corresponde à mudança de estratégia adoptada no processo de tomada de decisão.

Finalmente, com base na ordenação apresentada na Tabela 6.11 podemos apresentar a seguinte solução óptima (de acordo com o valor de δ) para a situação difusa em estudo:

δ	Δ^* (min)	CR* (U.M./dia)
$0 \leq \delta \leq 0.1$	170	5.721
$0.2 \leq \delta \leq 1$	130	4.674

Refira-se que para um dado intervalo de δ , CR* resulta da média simples dos valores de CR obtidos com todos os valores de δ desse intervalo. Por exemplo o valor 5.721 é o valor médio dos custos obtidos para $\delta=0$ e $\delta=0.1$.

Frequência difusa de falhas por ano

A frequência difusa de falhas para um dado valor de α define-se por ${}^{\alpha}F_f(t) = [{}^{\alpha}F_f^{-}(t); {}^{\alpha}F_f^{+}(t)]$; considerando todos os valores de α obtém-se $\tilde{F}_f^a$. Na Tabela 6.12 constam os valores da frequência anual de falhas nos fornecimentos e os valores com 95% de confiança, para diferentes valores de Δ e para os cortes- α com $\alpha = \{0, 0.5, 1\}$. O gráfico da Figura 6.22 é construído a partir destes valores. Nele representamos as curvas da frequência média de falhas por ano em função de Δ e as curvas com 95% de confiança, para $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

Tabela 6.12: Frequência anual de falhas (valores médios e valores com 95% de confiança) *versus* Δ

$\Delta(\text{min})$	${}^0F_f^-$	95%	${}^{0.5}F_f^-$	95%	${}^1F_f^a$	95%	${}^{0.5}F_f^+$	95%	${}^0F_f^+$	95%
0	46,93	57,08	63,73	75,06	86,08	98,44	120,37	133,36	164,77	177,09
10	38,95	48,38	53,42	64,08	72,74	84,55	102,82	115,61	141,34	154,23
20	29,42	37,80	41,11	50,75	56,81	67,71	82,09	94,29	114,07	127,02
30	24,79	32,56	34,89	43,90	48,41	58,68	70,34	82,03	97,50	110,18
40	21,50	28,79	30,38	38,87	42,21	51,95	61,42	72,61	84,62	96,92
50	18,64	25,46	26,45	34,45	36,81	46,02	53,61	64,28	73,39	85,23
60	16,10	22,48	22,96	30,47	31,99	40,67	46,65	56,77	63,43	74,74
70	13,88	19,83	19,89	26,92	27,74	35,90	40,48	50,05	54,64	65,38
80	11,95	17,50	17,21	23,79	24,02	31,68	35,06	44,09	46,95	57,11
90	10,30	15,47	14,90	21,05	20,79	27,97	30,35	38,84	40,28	49,84
100	8,89	13,70	12,91	18,66	18,01	24,73	26,26	34,23	34,52	43,49
110	7,69	12,18	11,21	16,58	15,61	21,90	22,72	30,19	29,56	37,95
120	6,67	10,86	9,75	14,78	13,55	19,44	19,67	26,67	25,30	33,14
130	5,80	9,71	8,49	13,20	11,78	17,29	17,03	23,58	21,65	28,96
140	5,06	8,72	7,42	11,83	10,25	15,41	14,76	20,89	18,52	25,33
150	4,43	7,85	6,50	10,63	8,94	13,77	12,81	18,54	15,85	22,18
160	3,88	7,10	5,70	9,58	7,81	12,33	11,11	16,47	13,56	19,45
170	3,42	6,43	5,01	8,65	6,83	11,06	9,65	14,66	11,61	17,07
180	3,01	5,85	4,41	7,84	5,98	9,95	8,39	13,07	9,93	15,01
190	2,66	5,33	3,89	7,11	5,24	8,96	7,30	11,67	8,51	13,22
200	2,36	4,87	3,44	6,47	4,60	8,09	6,35	10,44	7,28	11,65
210	2,09	4,46	3,04	5,89	4,04	7,32	5,52	9,34	6,24	10,29
220	1,86	4,09	2,70	5,38	3,55	6,62	4,81	8,38	5,34	9,10
230	1,65	3,76	2,39	4,92	3,12	6,01	4,19	7,52	4,57	8,06
240	1,47	3,46	2,12	4,50	2,74	5,45	3,64	6,76	3,92	7,14

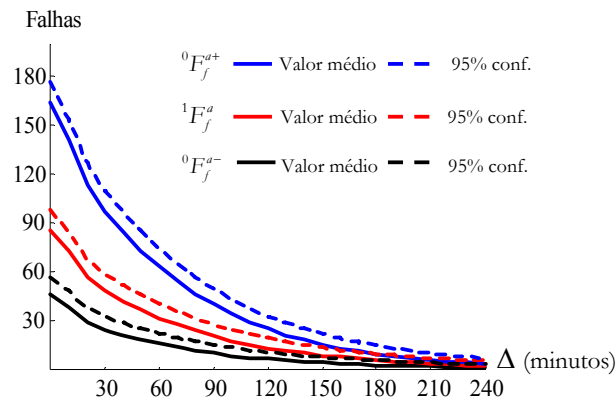


Figura 6.22: Curvas de frequência média de falhas/ano e curvas com 95% de confiança

Ao contrário do que acontece com o custo da fiabilidade, em que se verifica a situação óptima para determinados valores do par (Δ, α) , no caso da frequência anual de falhas apresenta para cada valor de α , uma curva contínua e monótona decrescente tendendo para zero com o aumento de Δ (Figura 6.22). Nestas circunstâncias, não se tem um ponto óptimo (finito) onde a

curva atinge o seu mínimo, nem esse é um problema que se coloque neste contexto. O que se pretende de facto é saber qual a melhor solução (solução de menor custo) que garante com um nível de confiança especificado, um número anual de falhas não superior a um dado valor.

Considere-se, por exemplo, que se pretende estabelecer o valor do stock de produto final que minimiza o custo diário da fiabilidade e garanta $F_f^a \leq 10$ com 95% de confiança. Em idêntica situação analisada anteriormente para o caso base obteve-se $\Delta^{*c}=180$ minutos. Tomando este valor de Δ nas actuais circunstâncias, obtêm-se os resultados difusos referentes ao número anual médio de falhas e ao valor limite com 95% de confiança apresentados na Figura 6.23. Neste caso, a incerteza dos parâmetros de fiabilidade introduz uma elevada incerteza nos resultados, reduzindo a robustez da solução em análise tal como se mostra no estudo a seguir apresentado.

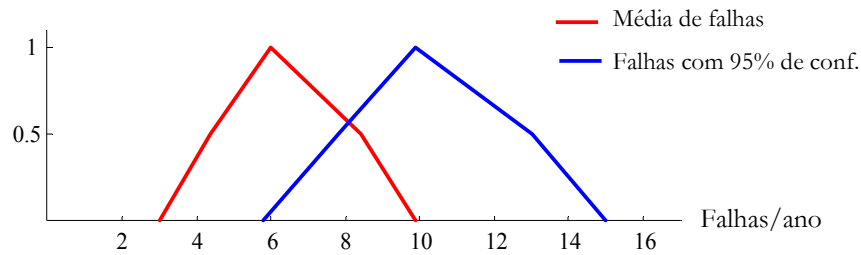


Figura 6.23: Distribuições difusas de F_f^a (valor médio e valor limite com 95% de confiança) para $\Delta=180$ minutos

6.2.3.3 Análise de risco

Quem tem a responsabilidade de tomar decisões corre certamente menos riscos se as soluções adoptadas forem robustas relativamente à incerteza dos parâmetros dos modelos que as determinam. A robustez associada a uma dada solução pode ser avaliada através do *índice de robustez*. Este índice é quantificado pelo valor $1-\alpha$, onde α é o corte- α mais baixo para o qual o sistema mantém acomodada a incerteza dos dados nesse nível. Um outro índice – *índice de exposição*, associado a pelo menos um elemento que causa um estrangulamento na flexibilidade do sistema para acomodar incertezas nos dados, pode ser calculado tomando o valor α .

Para exemplificar o cálculo dos índices de robustez e de exposição, considere-se que foi adoptada a solução anterior ($\Delta=180$ minutos) com o objectivo de garantir com 95% de

confiança que o número de falhas anual não seja superior a 12, i.e., $F_f^a \leq 12$. Pela Figura 6.24 obtém-se o valor $\alpha=0.671$ para o índice de exposição, pela intersecção da recta $F_f^a = 12$ com função pertença do número anual de falhas limite com 95% de confiança. A este índice de exposição corresponde um índice de robustez, $1-\alpha=0.329$. Estes dois índices podem ser melhorados obtendo-se mais informação de modo a reduzir a incerteza nos dados.

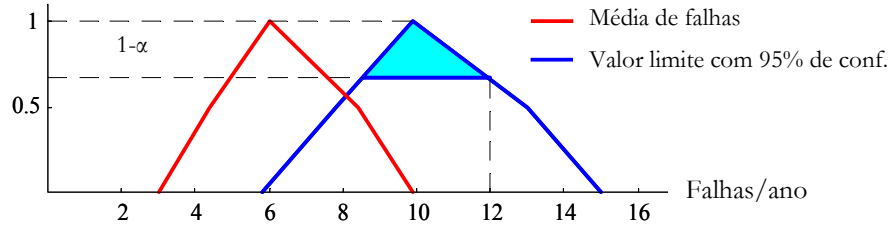


Figura 6.24: Robustez da solução $\Delta=180$ minutos

Admita-se que por esta via se reduz a incerteza dos parâmetros $\tilde{\lambda}_5$ e $\tilde{m}_5$, passando a ser caracterizados pelos seguintes números triangulares difusos:

$$\tilde{\lambda}_5 = [1/100; 1/80; 1/50]$$

$$\tilde{m}_5 = [1.2; 1.5; 1.8]$$

Com estes novos valores dos parâmetros obtém-se os resultados da Figura 6.25 para a frequência anual de falhas.

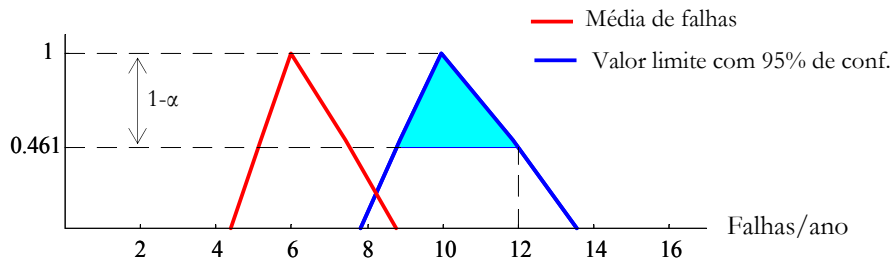


Figura 6.25: Distribuições difusas de F_f^a para $\Delta=180$ minutos com os novos valores parâmetros difusos

Verifica-se deste modo que mantendo o mesmo objectivo (garantir com 95% de confiança que o número de falhas anual não seja superior a 12), o índice de exposição sofre uma redução,

passando de 0.671 para 0.461. Em contrapartida, o índice de robustez regista um aumento de 0.329 para 0.539.

A menor incerteza nos parâmetros difusos produz também uma menor incerteza no custo diário da fiabilidade estimado, tal como se mostra na Figura 6.26. A distribuição CR representa o custo difuso da fiabilidade com os valores iniciais dos parâmetros e a distribuição CRn, o custo da fiabilidade considerando os novos valores para os parâmetros difusos e mantendo todos os outros valores iniciais.

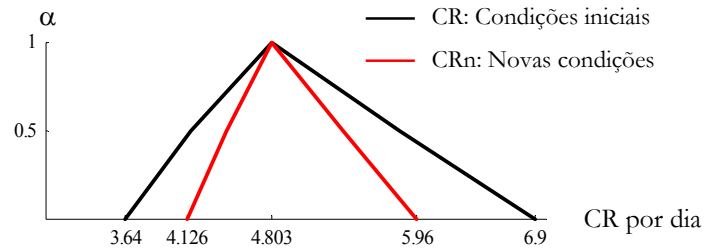


Figura 6.26: Custo diário da fiabilidade ($\Delta=180$ minutos)

Pode também pretender-se quantificar a alteração na estimativa do custo devida à redução da incerteza dos parâmetros de fiabilidade. Para isso dever-se-á ordenar os resultados da Figura 6.26, colapsando os respectivos conjuntos difusos. As ordenações obtidas podem, no entanto, diferir consoante o método utilizado. Sendo assim, deverá haver algum cuidado na selecção do método a utilizar.

De seguida apresenta-se a ordenação dos resultados apresentados na Figura 6.26 utilizando os seguintes métodos

- Método proposto por Saade (ver Secção 3.1.4);
- Método dos máximos das funções de pertença;
- Método do centro de gravidade.

Pelo método proposto por Saade (1996) obtém-se para $\delta=0.5$ (critério intermédio entre o optimista e o pessimista):

$$F_{0.5}(CR) = \int_0^1 0.5(1.6554\alpha + 3.63796) + (1-0.5)(-2.1025\alpha + 6.906) d\alpha$$

$$= 5.0377 \text{ U.M./dia}$$

$$\begin{aligned} F_{0.5}(CRn) &= \int_0^1 0.5(0.677\alpha + 4.126) + (1-0.5)(-1.15545\alpha + 4.126) d\alpha \\ &= 4.923 \text{ U.M./dia} \end{aligned}$$

Com efeito, a redução da incerteza dos parâmetros produz uma melhor estimativa do custo da fiabilidade (CRn=4.923 U.M./dia) alterando em baixa a estimativa obtida com as condições iniciais (CR=5.0377 U.M./dia).

Se em vez deste método utilizássemos o método dos máximos das funções de pertença obteríamos o mesmo resultado para ambos os custos ($x^*=4.8035$ U.M./dia).

Finalmente, pelo método do centro de gravidade teríamos para CR:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{\int_{3.64}^{4.803} (0.85797x - 3.1213)x \, dx + \int_{4.803}^{6.9} (-475624x + 3.28466)x \, dx}{\int_{3.64}^{4.803} (0.85797x - 3.1213) \, dx + \int_{4.803}^{6.9} (-475624x + 3.28466) \, dx} \\ &= 5.116 \text{ U.M./dia} \end{aligned}$$

e para CRn:

$$\begin{aligned} x_2^* &= \frac{\int_{4.126}^{4.803} (1.4760x - 6.0900)x \, dx + \int_{4.803}^{5.96} (-0.8655x + 5.1573)x \, dx}{\int_{4.126}^{4.803} (1.4760x - 6.0900) \, dx + \int_{4.803}^{5.96} (-0.8655x + 5.1573) \, dx} \\ &= 4.963 \text{ U.M./dia} \end{aligned}$$

Por estes últimos resultados a ordenação é idêntica à estabelecida pelo método de Saade. Regista-se também uma redução na estimativa do custo diário da fiabilidade de cerca de 3% devido à menor incerteza dos parâmetros difusos.

6.2.4 Comentários finais

Com a análise deste caso de estudo simples ilustramos a aplicação prática das metodologias desenvolvidas no âmbito desta dissertação para apoio à tomada de decisões sobre o projecto de sistemas de produção. Através do estudo de análise de sensibilidade apresentado avaliamos o efeito de possíveis variações nos parâmetros de fiabilidade e de custos (relativamente aos valores base considerados inicialmente), nas medidas de desempenho do sistema. Com estas variações dos parâmetros foram estabelecidos vários cenários expectáveis de análise do caso de estudo e, para cada cenário, determinou-se a melhor decisão a tomar sobre o dimensionamento

do *buffer* de produto final. Por fim apresenta-se um estudo que permite avaliar para cada cenário considerado, o “risco” associado a cada uma das possíveis soluções.

Numa segunda fase do estudo, considera-se que a incerteza associada a determinados parâmetros de fiabilidade tem, para além de uma componente probabilística, uma componente de natureza não probabilística, modelada por conjuntos difusos. Como consequência, os dados do problema tornam-se difuso-probabilísticos: difusos porque alguns dos parâmetros são representado por conjuntos difusos, e probabilísticos porque continuamos com as distribuições de probabilidades consideradas inicialmente para os parâmetros rígidos. Nestas condições, recorre-se a uma abordagem difuso-probabilística para calcular as medidas de desempenho do sistema. Esta abordagem segue os mesmos passos da abordagem probabilística apresentada para o problema base. Os resultados deste estudo são conjuntos difusos que reflectem de forma adequada a incerteza (difusa e probabilística) presente nos dados do problema.

Analisando estes resultados (difusos) verifica-se que as decisões a tomar relativamente ao desenho do sistema são pouco sensíveis a variações nos valores dos parâmetros difusos dentro dos respectivos universos de discurso. Tal deve-se, em grande medida, ao facto destes resultados corresponderem a valores óptimos obtidos numa zona relativamente plana das respectivas curvas. No entanto, os valores das medidas de desempenho obtidos para cada decisão variam consideravelmente com as variações dos parâmetros.

6.3 Sistema de produção - Caso 2

6.3.1 Introdução

Quer na fase de projecto de um sistema de produção multi-célula multi-produto quer posteriormente na fase de exploração existem várias soluções alternativas (já referidas anteriormente) que podem ser consideradas para que o sistema cumpra a sua missão. Uma das soluções mais utilizadas passa pela manutenção de *buffers* intermédios em determinados pontos do sistema e de *buffers* de produto final. Nesta secção apresenta-se um estudo para o dimensionamento dos *buffers* (intermédios de produto final) do sistema de produção descrito na secção seguinte, tendo em conta o nível de qualidade de serviço na satisfação das encomendas acordado com o(s) cliente(s) e, naturalmente, aspectos de ordem económica. Este estudo consiste na avaliação de várias combinações possíveis de valores dos *buffers* através das medidas de desempenho que a seguir de apresentam, obtendo-se deste modo a melhor solução (de entre as avaliadas) para os objectivos em vista.

1. Disponibilidade do sistema de produção (avaliada à saída da linha de produção) e disponibilidade da empresa (avaliada à saída do armazém de produtos acabados);
2. Custos da fiabilidade - custos motivados pela ocorrências de falhas das máquinas/equipamentos;
3. Nível de serviço ao cliente medido em termos de encomendas não satisfeitas integralmente em cada período de trabalho.

O estudo realizado será apresentado em três em 3 fases: na primeira fase (Secção 6.3.3) serão desenvolvidos os modelos de avaliação do *custo da fiabilidade* do sistema para as condições estabelecidas pelo cenário 3 apresentado no Capítulo 5); na segunda fase (Secção 6.3.4), procederemos a uma aplicação numérica da abordagem hierárquica apresentada no Capítulo 4, obtendo deste modo a disponibilidade e o modelo canónico do sistema para cada tipo de produto. A partir destes modelos serão obtidas as funções dos tempos diários de paragem do sistema para os diferentes produtos produzidos diariamente. Finalmente, na terceira fase (Secção 6.3.5) efectuar-se-á uma análise e dimensionamento do sistema de produção, através do cálculo do *custo da fiabilidade* e da frequência anual de falhas no fornecimento para cada tipo de produto.

6.3.2 Apresentação do caso de estudo

O caso de estudo 2 consiste num sistema multi-célula multi-produto constituído por três células de fabrico de componentes/subprodutos e uma linha de produção (ver Figura 6.27). A célula 1 (CL1), a célula 2 (CL2) e a células 3 (CL3) produzem os componentes 1, 2 e 3 respectivamente. A linha de produção (LP) é alimentada por estas células e realiza as operações conducentes à obtenção dos produtos finais.

Diariamente são produzidos por este sistema de produção dois tipos de produtos diferentes (o produto tipo A e o produto tipo B). As estruturas destes produtos encontram-se representadas na Figura 6.28. Verifica-se então que CL1 e CL2 produzem componentes para os dois tipos de produtos, enquanto que o *output* de CL3 destina-se apenas ao fabrico do produto tipo A.

Entre as células de fabrico e a linha de produção podem existir *buffers* de componentes (B_1 , B_2 e B_3). Estes *buffers* têm como principal objectivo desacoplar o sistema de produção de modo a possibilitar o funcionamento da linha de produção por períodos mais ou menos longos (dependendo da dimensão dos *buffers*), independentemente do estado (operacional ou falha) das células de fabrico.

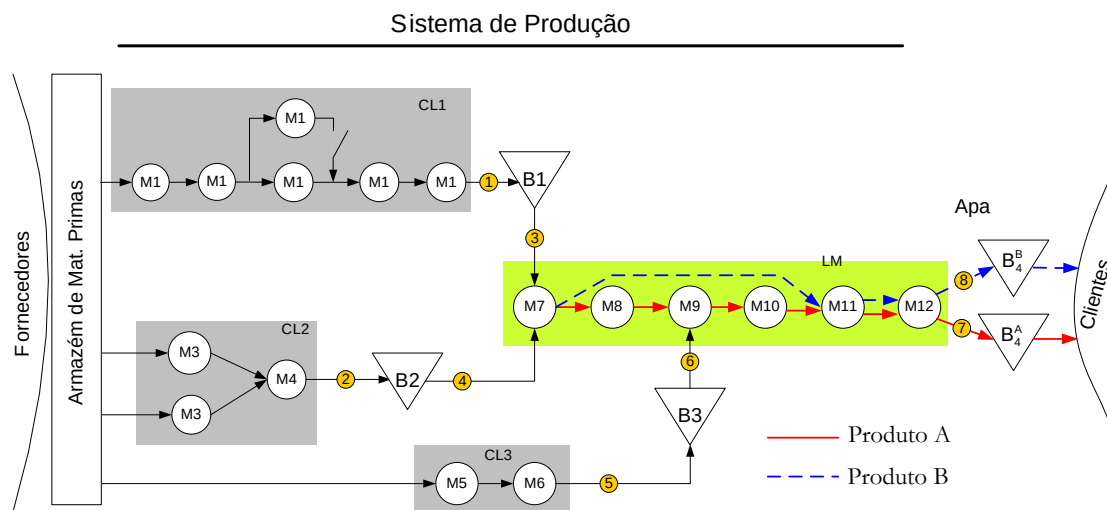


Figura 6.27: Sistema de produção multi-célula multi-produto

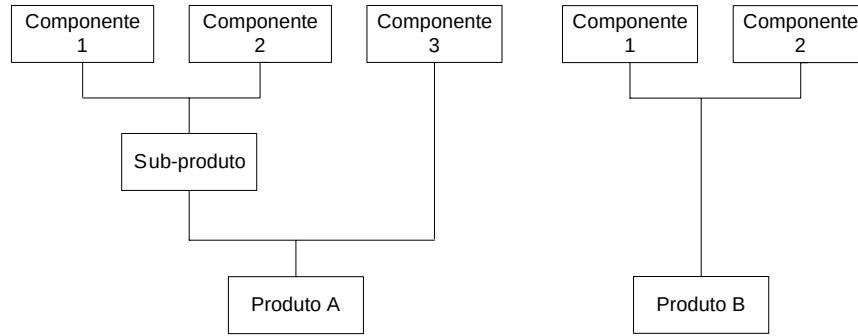


Figura 6.28: Estrutura dos produtos

O *output* da linha de produção é enviado para o armazém de produto acabado (A_{pa}) onde existe regularmente um *stock* de produto A (*buffer* B_4^A) e um *stock* de produto B (*buffer* B_4^B). É a partir deste armazém que são satisfeitas as encomendas diárias dos dois tipos de produtos. No ambiente de produção JIT em que o sistema de produção opera, os *buffers* B_4^A e B_4^B têm por objectivo reduzir a probabilidade dos clientes serem afectados por falhas ou disfunções do sistema produtivo durante o período normal de trabalho (dia de trabalho).

Neste caso de estudo considera-se que o sequenciamento dos dois produtos em produção no período T é o estabelecido pelo cenário 3 (Capítulo 5) ou seja: o início da produção do produto tipo B coincide com o fim da produção do produto tipo A (sequenciamento A-B). Assim, a ocorrência de uma falha durante a produção do produto tipo A prolonga a conclusão deste tipo de produto para depois do instante previsto. Consequentemente, a produção do produto tipo B inicia-se com um atraso equivalente ao tempo de paragem do sistema durante a produção do anterior. Deste modo ter-se-á no final do período T um défice de produção do produto tipo B proporcional ao tempo de paragem do sistema durante esse período. Quanto à produção do produto tipo A, apenas será afectada por falhas do sistema se $Tp^A > T_b$. Na Figura 6.29 mostrar-se, para o sequenciamento A-B, o modo como evoluem as quantidades dos produtos A e B no armazém de produto acabado em vários ciclos diários de trabalho consecutivos.

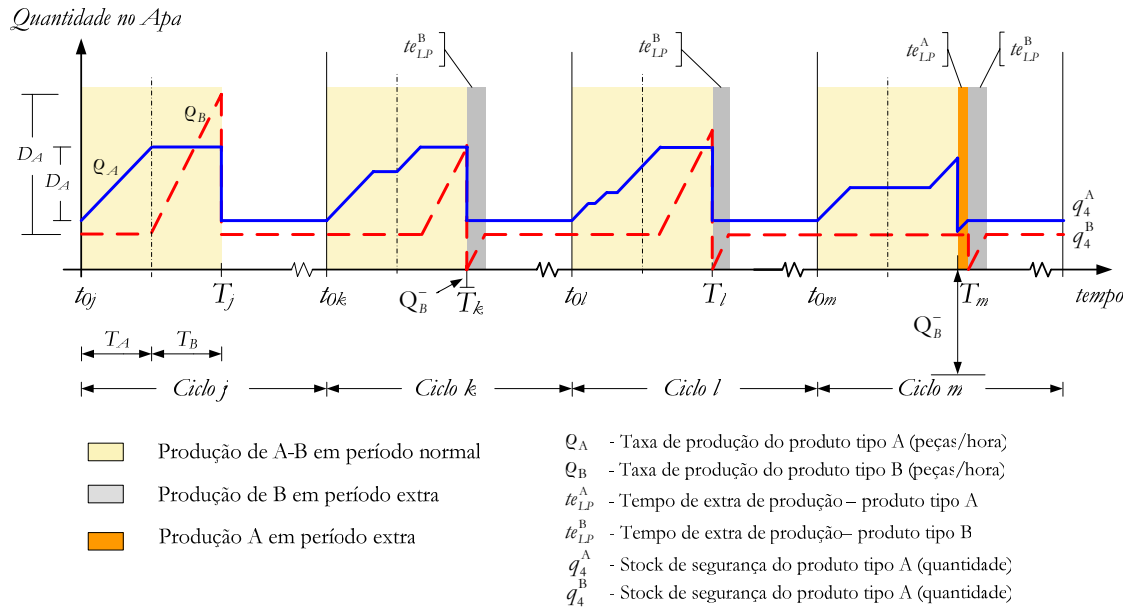


Figura 6.29: Evolução dos produtos A e B no armazém de produto acabado (vários ciclos diários)

6.3.2.1 Pressupostos do caso de estudo

O estudo deste caso foi realizado tendo em conta os seguintes pressupostos técnico-comerciais e de gestão:

- O sistema de produção labora um turno de T horas diárias;
- No início de cada período de trabalho T os equipamentos são considerados operacionais e os *buffers* repostos nos níveis estabelecidos;
- Existe a possibilidade de recurso a horas de trabalho extra para compensar eventuais paragens do sistema (ou subsistemas) ao longo do dia, repondo deste modo os *buffers* para o período seguinte;
- Todos os equipamentos se encontram na fase de vida útil apresentando falhas aleatórias;
- Considera-se nula a probabilidade de falha de qualquer máquina que não se encontre em funcionamento;
- A interrupção de fluxo de materiais à saída de B_1 ou de B_2 provoca a paragem da linha de produção independentemente do tipo de produto em curso;
- Sempre que ocorre a falta de fluxo à saída de B_3 dá-se a interrupção da produção do produto B na LP;

- Existem recursos de manutenção específicos para a LP e para cada célula i (com $i=\{1,2,3\}$). Estes recursos não permitem a reparação de mais que uma máquina em simultâneo;
- As taxas de falhas e os tempos de reparação da LP não são afectados pelo tipo de produto em processamento;
- A paragem das células 1, 2 ou 3 só ocorre devido a falhas internas às próprias células;
- A taxa de produção da célula i (ρ_i = componentes i /unidade de tempo, com $i=\{1,2,3\}$) é equivalente à taxa média da LP;
- A taxa de produção da célula i (ρ_i = partes i /unidade de tempo, com $i=\{1,2,3\}$) é equivalente à taxa média da linha de produção;
- A capacidade máxima do *buffer* B_i (com $i=\{1,2,3\}$) é equivalente à produção da célula i durante um período de trabalho T .

Compromissos comerciais e penalizações

A empresa estabelece com os seus clientes as quantidades de produto tipo A, (D_A) e de produto tipo B, (D_B) a fornecer no final de cada período de trabalho diário T (tendo em conta a capacidade nominal do sistema de produção nesse período), bem como as penalizações em que incorre pelo incumprimento destes compromisso. Estas penalizações têm uma componente fixa por ocorrência de falha (neste caso entende-se por falha a não satisfação integral das encomenda) e uma componente variável proporcional às quantidades de produtos não entregues. Nuns casos estas quantidades podem ser entregues no período seguinte; noutros casos, representam vendas perdidas. Neste estudo considera-se que as quantidades não fornecidas no final do período T constituem vendas perdidas.

6.3.3 Modelo de custo da fiabilidade

O modelo de *custo da fiabilidade* para este caso de estudo tem por base, o modelo geral de custos apresentado na Secção 5.4.2. As diferenças residem apenas na $n^{\text{ésima}}$ célula do sistema de produção – linha de produção. Sendo assim, o estudo a seguir apresentado centra-se na obtenção do modelo de *custo da não fiabilidade* para a linha de produção.

Dado que os produtos tipo A e tipo B requerem diferentes recursos (materiais, equipamentos, humanos, ...) na linha de produção, os custos em período de trabalho extra serão diferentes para os dois tipos de produtos. Deste modo torna-se necessário avaliar os tempos em período

extra despendidos na produção do produto tipo A, te_{LP}^A , e na produção do produto tipo B, te_{LP}^B .

Na Figura 6.30 mostra-se um diagrama com o comportamento da LP, em diferentes períodos (dias). No estágio j não existem paragens da LP durante o período T , razão pela qual não há necessidade de recurso a trabalho extra. No estágio k , a paragem da LP durante a produção do produto tipo A (por um período de tempo tp_1^A), obriga a recorrer a trabalho extra para produzir o produto B, sendo $te_{LP}^B = tp_1^A$. Neste caso, não haverá ruptura no fornecimento do produto A. Também não ocorrerá ruptura no fornecimento do produto B se $\Delta_4^B \geq te_{LP}^B$ (sendo Δ_4^B , o tempo de tolerância a falhas para a linha de produção suportado pelo *buffer* B_4^B).

No estágio m , o período de paragem da LP durante a produção do produto tipo A é de tal modo prolongado que a conclusão da produção deste produto e toda a produção do produto tipo B é feita em período extra. Assim, só não haverá ruptura no fornecimento do produto tipo A se $\Delta_4^A \geq te_{LP}^A$; quanto ao produto tipo B, será apenas fornecida a quantidade q_4^B (*stock* de segurança no *buffer* B_4^B).

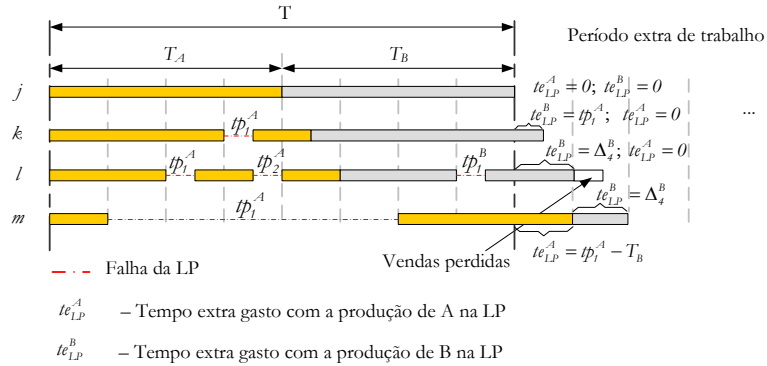


Figura 6.30: Sequenciamento A-B na linha de produção

As expressões relativas às diferentes parcelas do modelo de *custo da não fiabilidade* da LP são a seguir apresentadas por tipo de produto, para facilitar a obtenção do referido modelo. Estas parcelas, analisadas em detalhe no modelo geral de custos apresentado na Secção 5.4.2, correspondem a custos directa ou indirectamente relacionados com as paragens da LP durante um período de trabalho T .

6.3.3.1 Modelos de custos para o produto tipo A

a) Custo de trabalho extra

O valor esperado do custo de trabalho extra para a produção do produto A na linha de produção é obtido por:

$$E[C_{te}^A]_{LP} = \begin{cases} c_{LP}^A \cdot \int_{T_B}^{\infty} f_{Tp^A}(t) \cdot (t - T_B) dt, & \text{se } \int_{T_B}^{\infty} f_{Tp^A}(t) \cdot (t - T_B) dt < \Delta_4^A \\ c_{LP}^A \cdot \Delta_4^A, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.5)$$

$f_{Tp^A}(t)$ - função do tempo de paragem da LP durante a produção do produto A;

c_{LP}^A - custo de trabalho extra por unidade de tempo com a produção do produto A na LP;

T_B - Tempo planeado para a produção o produto tipo B.

b) Custos por quebra de compromissos comerciais

De acordo com os compromissos comerciais assumidos, a empresa incorre num custo fixo, c_F^A , por cada situação de quebra no fornecimento integral de D_A , e num custo variável, c_V^A , por cada artigo A não fornecido. A quebra no fornecimento integral de D_A dá-se sempre que o tempo de paragem da LP durante a produção do produto A, Tp^A , é superior ao somatório do tempo de produção do produto B, T_B com o tempo de indisponibilidade Δ_4^A tolerado pelo *buffer* B_4^A , i.e., $Tp^A > T_B + \Delta_4^A$.

Nestas situações, a quantidade de produto A não fornecida é proporcional a $Tp^A - (T_B + \Delta_4^A)$.

O valor esperado da penalização fixa diária por falhas nas entregas do produto A, $E[C_F^A]$, será dado pela seguinte expressão:

$$E[C_F^A] = \int_{T_B + \Delta_4^A}^{\infty} f_{Tp^A}(t) \cdot c_F^A dt \quad (6.6)$$

sendo:

c_F^A - penalização fixa por ocorrência de falha nas entregas do produto A (U.M.);

Δ_4^A - tempo de indisponibilidade da LP tolerado pelo *buffer* B_4^A (unid. tempo).

Relativamente ao valor esperado da penalização variável tem-se:

$$E[C_V^A] = \int_{T_B + \Delta_4^A}^{\infty} f_{T_P^A}(t) \cdot (t - T_B - \Delta_4^A) \cdot \varrho_A \cdot c_V^A dt \quad (6.7)$$

com

c_V^A - penalização pela quantidade de produto A em falta na satisfação das encomendas diárias, equivalente a uma unidade de tempo de indisponibilidade do sistema (U.M./unidade de tempo);

ϱ_A - taxa de produção do produto A na LP (artigos/unidade de tempo).

c) Custos de oportunidade por vendas perdidas

Este custo é equivalente ao valor que a empresa deixa de ganhar pelas vendas perdidas do produto tipo A, sendo proporcional ao tempo de paragem da produção do produto A na LP para além de $T_B + \Delta_4^A$, ou seja:

$$E[C_{vp}^A] = c_{vp}^A \cdot \max\left[Te_{LP}^A - \Delta_4^A, 0\right] \quad (6.8)$$

sendo:

$$Te_{LP}^A = \int_{T_B}^{\infty} f_{T_P^A}(t) \cdot (t - T_B) dt \text{ e}$$

c_{vp}^A - o lucro unitário do produto tipo A equivalente à produção de uma unidade de tempo.

6.3.3.2 Modelos de custos para o produto tipo B

a) Custo de trabalho extra

Vimos acima que só no caso de $T_P^A > T_B$ é que a conclusão da produção de A ocorre em período extra. Para o produto B a situação é bastante diferente. Qualquer período de indisponibilidade da LP durante a produção de A e/ou de B, “desloca” a conclusão da produção de B para o período extra. Deste modo, para efeitos de cálculo do tempo de trabalho extra na produção do produto tipo B, teremos de obter a função, $f_{T_P^{AB}}(t)$, que representa a convolução de $f_{T_P^A}(t)$ e de $f_{T_P^B}(t)$. Esta função será dada por:

$$f_{T_P^{AB}}(t) = \int_0^t f_{T_P^A}(t_1) f_{T_P^B}(t - t_1) dt_1$$

Como se mostra no diagrama da Figura 6.30, a conclusão da produção diária do produto B em período extra só não ocorre no ciclo j , onde $Tp^A + Tp^B = 0$. Em todos os restantes ciclos representados (k , l e m), a conclusão da produção de B ocorre em período de trabalho extra.

Assim, o valor esperado do custo de trabalhos em período extra para a produção do produto B será obtido por:

$$E[C_{te}^B]_{LP} = c_{LP}^B \int_0^T t \cdot f_{Tp^{AB}}(t) dt \quad (6.9)$$

onde:

$f_{Tp^{AB}}(t)$ - é função do tempo de paragem da LP durante o período T e;

c_{LP}^B - o custo de trabalho extra por unidade de tempo com a produção do produto B na LP.

b) Custos por quebra de compromissos comerciais

Tal como acontece com o produto A, também com o produto B, há uma penalização fixa, c_F^B , sempre que se verifica uma situação de quebra no fornecimento integral de D_B , e um custo, c_V^B por cada artigo não fornecido.

Neste caso, sempre que $Tp^A + Tp^B > \Delta_4^B$, ocorre uma situação de quebra no fornecimento integral do produto B, sendo a quantidade em falta no final do período T , Q_B^- , dada por:

$$Q_B^- = \begin{cases} 0, & Tp \leq \Delta_4^B \\ (Tp - \Delta_4^B) \cdot Q_B, & Tp > \Delta_4^B \end{cases}$$

com

$$Tp = Tp^A + Tp^B$$

Δ_4^B - Tempo de indisponibilidade da LP tolerado pelo *buffer* B_4^B (unid. tempo);

O valor esperado da penalização fixa diário por falhas nas entregas do produto B, $E[C_F^B]$, será obtido por:

$$E[C_F^B] = c_F^B \int_{\Delta_4^B}^{\infty} f_{Tp^{AB}}(t) dt \quad (6.10)$$

c_F^B - penalização fixa por ocorrência de falha nas entregas do produto B (U.M.);

Para o valor esperado da penalização variável vem:

$$E[C_V^B] = \varrho_B \cdot c_V^B \cdot \int_{\Delta_4^B}^{\infty} f_{Tp^{AB}}(t) \cdot (t - \Delta_4^B) dt \quad (6.11)$$

com

c_V^B - penalização pela quantidade de produto B em falta na satisfação das encomendas diárias, equivalente a uma unidade de tempo de indisponibilidade do sistema (U.M./unidade de tempo).

c) Custos de oportunidade por vendas perdidas

Este custo é obtido de modo idêntico ao custo de oportunidade do produto A. Neste caso o tempo correspondente às vendas perdidas é contabilizado pelo tempo de paragem da linha de produção durante o período T que vai além de Δ_4^B . Isto é:

$$E[C_{vp}^B] = c_{vp}^B \cdot \max[(Te_{LP} - \Delta_4^B), 0] \quad (6.12)$$

sendo:

$$Te_{LP} = \int_0^T t \cdot f_{Tp^{AB}}(t) dt$$

c_{vp}^B - lucro unitário do produto tipo B equivalente à produção de uma unidade de tempo.

6.3.3.3 Modelo de custo da não fiabilidade da LP

Por fim, estabelece-se ao modelo do *custo da não fiabilidade* da linha de produção, $E[C_{nf}]_{LP}$, pela seguinte expressão:

$$E[C_{nf}]_{LP} = E[C_{te}^A]_{LP} + E[C_F^A] + E[C_V^A] + E[C_{vp}^A] + E[C_{te}^B]_{LP} + E[C_F^B] + E[C_V^B] + E[C_{vp}^B] \quad (6.13)$$

Com a obtenção do modelo do *custo da não fiabilidade* da LP conclui-se a primeira fase do estudo deste caso. Seguidamente apresenta-se a segunda fase do estudo que consiste na aplicação dos modelos desenvolvidos nos Capítulos 4 e 5 para a determinação de índices de fiabilidade em diferentes nodos do sistema de produção.

6.3.4 Aplicação numérica

6.3.4.1 Dados do sistema

Na Tabela 6.13 apresenta-se os dados (valores médios e distribuições de probabilidades) que caracterizam os processos de falha, os processos de reparação e os processos de reconfiguração dos elementos que constituem o sistema de produção apresentado na Secção 6.3.2. Os processos de tolerância a falhas correspondentes aos *buffers* são tidos como determinísticos e todos os processos de falha apresentam taxas constantes (exponenciais). Assume-se ainda relativamente à célula 1 que são conhecidas a frequência de falhas e a distribuição do tempo de indisponibilidade no nodo 1, dadas respectivamente por:

$$\Lambda_1 = 0.08 \text{ falhas/hora} \text{ e } f_{p1}(t) \rightarrow \text{Distribuição Gama}[\alpha, \beta]$$

sendo:

$\alpha = 2.1$ (parâmetro de forma) e;

$\beta = 0.4$ (parâmetros de escala).

Tabela 6.13: Caracterização dos processos do sistema de produção

Equipamento(s)	Taxa de falhas (falhas/h)	Processos de reparação		Processo de reconfiguração	
		Tempo médio (h)	Distribuição	Tempo médio (h)	Distribuição
M3	$\lambda_3=60$	0.75	$f_3(t) \rightarrow \text{Erlang}_{10}$	0.2	$f_{rec}(t) \rightarrow \text{Erlang}_2$
M3'	$\lambda_{3'}=50$	1	$f_{3'}(t) \rightarrow \text{Erlang}_2$		
M4	$\lambda_4=70$	0.75	$f_4(t) \rightarrow \text{Exponencial}$		
M5	$\lambda_5=60$	0.75	$f_5(t) \rightarrow \text{Erlang}_4$		
M6	$\lambda_6=50$	0.6	$f_6(t) \rightarrow \text{Erlang}_2$		
M7	$\lambda_7=150$	0.5	$f_7(t) \rightarrow \text{Erlang}_2$		
M8	$\lambda_8=140$	0.7	$f_8(t) \rightarrow \text{Exponencial}$		
M9	$\lambda_9=150$	0.6	$f_9(t) \rightarrow \text{Exponencial}$		
M10	$\lambda_{10}=200$	0.6	$f_{10}(t) \rightarrow \text{Erlang}_2$		
M11	$\lambda_{11}=160$	0.75	$f_{11}(t) \rightarrow \text{Exponencial}$		
M12	$\lambda_{12}=180$	0.6	$f_{12}(t) \rightarrow \text{Erlang}_3$		

Os valores das penalizações por incumprimento dos compromissos comerciais estabelecidos com o(s) cliente(s) e os valores dos custos de oportunidade por vendas perdidas constam da Tabela 6.14.

Tabela 6.14: Penalizações – Sistema multi-célula multi-produto

Abreviatura	c_F^A (U.M./falha de A)	c_F^B (U.M./falha de B)	c_V^A (U.M./h)	c_V^B (U.M./h)	c_{rp}^A (U.M./h)	c_{rp}^B (U.M./h)
Valor	50	30	3	2.5	4	2

Por outro lado, na Tabela 6.15 apresentam-se os custos de posse com a manutenção de *buffers* de componentes e dos *buffers* de produtos finais e os custos com trabalhos em período extra para a reposição destes *buffers* nos valores estabelecidos.

Tabela 6.15: Custos - Sistema multi-célula multi-produto

Linha de produção				Célula 1		Célula 2		Célula 3	
ce_{LP}^A	ce_{LP}^B	c_1^A	c_1^B	ce	c_1	ce	c_1	ce	c_1
5	3	0.7	0.5	1.5	0.21	1	0.11	1	0.12

Nota: Os custos diários de posse de *stock* num dado *buffer* são considerados em unidades monetárias por hora de tolerância do respectivo *buffer* e os custos com trabalhos extra, em unidades monetárias por hora de trabalho extra.

6.3.4.2 Modelos canónicos do sistema de produção

A aplicação sistemática da abordagem hierárquica apresentada no Capítulo 4 permitirá obter o modelo canónico equivalente para qualquer nodo de um sistema de produção, caracterizando-o do ponto de vista da fiabilidade. O procedimento completo para a obtenção dos modelos canónicos para os produtos tipo A e tipo B do sistema de produção comporta os seguintes passos:

1. determinar CM_{i1} , CM_{i2} , CM_{i3} , CM_{iLP}^A e CM_{iLP}^B ;
2. determinar CM_{o1} , CM_{o2} e CM_{o3} , (idênticos a CM_{i1} , CM_{i2} , CM_{i3} , respectivamente);
3. determinar CM_{b1} , CM_{b2} e CM_{b3} (agregação do processo b1, b2 e b3 a, CM_{o1} , CM_{o2} e CM_{o3} , respectivamente);
4. determinar CM_{oLP}^A (agregação de CM_{b1} , CM_{b2} , CM_{b3} e CM_{iLP}^A);
5. determinar CM_{oLP}^B (agregação de CM_{b1} , CM_{b2} e CM_{iLP}^B).

De seguida apresentam-se os principais cálculos efectuados para a determinação dos modelos canónicos CM_{oLP}^A e CM_{oLP}^B correspondentes aos nodos 7 e 8, respectivamente. Remete-se para o Anexo C os cálculos intermédios que suportam os resultados aqui apresentados.

Modelos canónicos internos

Células montantes:

A frequência de falhas e a distribuição do tempo de reposição da célula 1 são conhecidas. Deste modo o modelo canónico interno da célula 1, CM_{i1} é caracterizado por:

$$CM_{i1} = \{\Lambda_1, f_{\rho1}(t)\}$$

sendo:

$$\Lambda_1 = 0.08 \text{ falhas h}^{-1}$$

$$f_{\rho1}(t) = 2.7935 e^{-1.667t} t^{1.1}$$

Relativamente às células 2 e 3 conhecem-se as distribuições dos tempos de falha, as distribuições dos tempos de reparação e as distribuições dos tempos de reconfiguração das máquinas que constituem as referidas células (Tabela 6.13). Por um procedimento idêntico ao utilizado no caso de estudo 1, estabelecem-se os modelos canónicos internos para cada célula. Tem-se assim para a célula 2:

$$CM_{i2} = \{\Lambda_2, f_{\rho2}(t)\}$$

com

$$\Lambda_2 = 0.0308 \text{ falhas h}^{-1}$$

$$f_{\rho2}(t) = 1.5934 e^{-3.03t} + 0.6185 e^{-1.333t} + e^{-2t} (0.01031 + 0.0208 t)$$

e para a célula 3:

$$CM_{i3} = \{\Lambda_3, f_{\rho3}(t)\}$$

sendo:

$$\Lambda_3 = 0.03667 \text{ falhas h}^{-1}$$

$$f_{\rho3}(t) = 6.06 e^{-3.333t} t + 61.29 e^{-5.33t} t^3$$

Linha de produção

Cada tipo de produto tem um percurso próprio na linha de produção (ver Figura 6.27) envolvendo um conjunto diferente de máquinas. Consequentemente, os modelos canónicos internos da LP para os dois tipos de produto, CM_{ilp}^A e CM_{ilp}^B são diferentes, podendo calcular-se através das Equações (4.5) e (4.6). Obtém-se deste modo:

$$CM_{ilp}^A = \{\Lambda_{LP}^A, f_{\rho LP}^A(t)\}$$

com

$$\Lambda_{LP}^A = 0.0373 \text{ falhas/hora}$$

$$f_{\rho LP}^A(t) = 0.298 \times 2.72^{-1.67t} + 0.274 \times 2.72^{-1.43t} + 0.224 \times 2.72^{-1.33t} + 2.861 \times 2.718^{-4t} t + 1.49 \times 2.72^{-3.33t} t + 9.313 \times 2.72^{-5t} t^2$$

e

$$CM_{ilp}^B = \{\Lambda_{LP}^B, f_{\rho LP}^B(t)\}$$

sendo:

$$\Lambda_{LP}^B = 0.01847 \text{ falhas/hora} \quad \text{falhas h}^{-1}$$

$$f_{\rho LP}^B(t) = 0.451 e^{-1.33t} + 5.774 e^{-4t} t + 18.8 e^{-5t} t^2$$

Modelos canónicos à saída das células e da linha de produção

As células 1, 2 e 3 são células montantes (os seus *inputs* não correspondem a *outputs* de outras células) e por isso, $CM_{ij} \equiv CM_{oj}$, com ($j=1, 2, 3$), tal como se ilustra na Figura 6.31.

Por outro lado, sendo a linha de produção alimentada por outras células a montante, os modelos canónicos internos CM_{ilp}^A e CM_{ilp}^B e os correspondentes modelos canónicos, CM_{olp}^A e CM_{olp}^B à saída linha de produção (nodos 7 e 8) são diferentes (ver Figura 6.32).

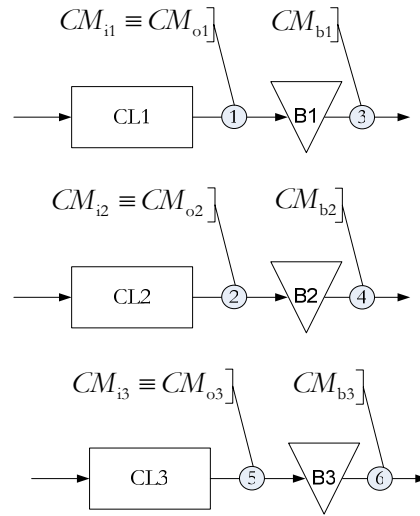


Figura 6.31: Nodos de análise nas células 1, 2 e 3

Mais, estes últimos modelos correspondem também aos modelos canónicos do sistema de produção, uma vez que os nodos 7 e 8 são nodos terminais do sistema. O seu cálculo requer que se conheçam os modelos canónicos à saída dos *buffers* intermédios (nodos 3, 4 e 6).

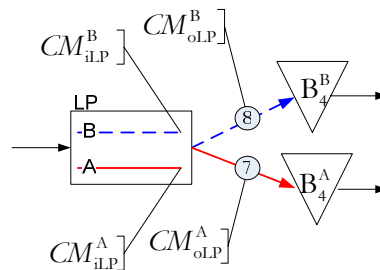


Figura 6.32: Representação dos modelos canónicos na linha de produção

Modelos canónicos à saída dos buffers intermédios

Os modelos canónicos CM_{b1} , CM_{b2} e CM_{b3} à saída dos *buffers* intermédios B1, B2 e B3 (nodos 3, 4 e 6, Figura 6.31) são obtidos por agregação dos processos b1, b2 e b3 (processo que caracterizam os tempos de tolerância dos referidos *buffers* intermédios) aos modelos canónicos, CM_{o1} , CM_{o2} e CM_{o3} , respectivamente, como se mostra na Secção 4.4. Neste estudo consideram-se os processos b1, b2 e b3 como determinísticos, com durações $\Delta 1$, $\Delta 2$ e $\Delta 3$, respectivamente. Diferentes dimensões dos *buffers* produzem diferentes distribuições dos tempos de indisponibilidade do fluxo de materiais nos nodos a jusante. Por exemplo, na

Figura 6.33 mostra-se a representação gráfica das funções densidade de probabilidade dos tempos de indisponibilidade de fluxo no nodo 3 para $\Delta 1=0$ horas e $\Delta 1=2$ horas. No Anexo C apresentam-se os modelos canónicos CM_{b1} , CM_{b2} e CM_{b3} para vários valores dos *buffers* $\Delta 1$, $\Delta 2$ e $\Delta 3$.

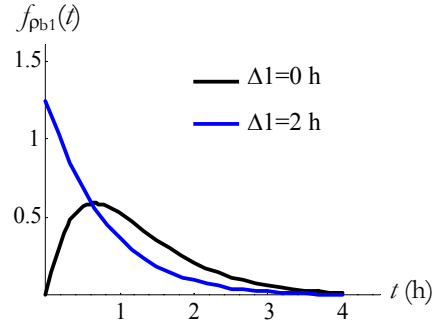


Figura 6.33: Funções dos tempos de indisponibilidade de fluxo no nodo 3 para $\Delta 1=0$ horas e $\Delta 1=2$ horas

Diferentes combinações de valores de $\Delta 1$, $\Delta 2$ e $\Delta 3$ produzem também frequências de transição para os estados de falha diferentes tal como de ilustra na Figura 6.34 com os resultados obtidos para os nodos 3, 4 e 6. Verifica-se em qualquer destes nodos, uma redução considerável na frequência de falhas à medida que se aumenta a dimensão do respectivo *buffer* a montante. No entanto, a redução marginal dos valores destas frequências perde importância com o aumento da dimensão dos *buffers*.

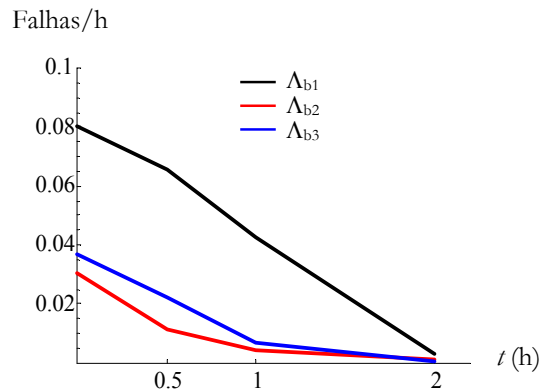


Figura 6.34: Frequência de falhas nos nodos 3, 4 e 6

Modelo canónico à saída do sistema de produção

Para que haja fluxo de produtos tipo A à saída da linha de produção (nodo 7) terá de haver fluxo de materiais nos nodos 3, 4, e 6 e, simultaneamente, a linha de produção deverá estar operacional. Estes requisitos sugerem desde logo um arranjo funcional do sistema de produção em série. De modo idêntico, a existência de fluxo de produtos tipo B à saída da linha de produção (nodo 8) requer a existência de fluxo de materiais nos nodos 3 e 5 e a operacionalidade da linha de produção, sugerindo igualmente um arranjo funcional do sistema em série. Deste modo, os modelos canónicos, CM_{oLP}^A e CM_{oLP}^B podem ser obtidos recorrendo novamente às Equações (4.5) e (4.6).

Na Figura 6.35 ilustra-se a dependência de CM_{oLP}^A dos modelos canónicos CM_{b1} , CM_{b2} , CM_{b3} e CM_{iLP}^A e também a dependência de CM_{oLP}^B dos modelos canónicos CM_{b1} , CM_{b2} e CM_{iLP}^B . Sabe-se que a dimensão dos *buffers* intermédios condicionam CM_{b1} , CM_{b2} , CM_{b3} e como tal, também introduzem alterações em CM_{oLP}^A e CM_{oLP}^B . Estas alterações reflectem-se na frequência de transição do sistema para o estado de falha e na distribuição do tempo de reposição.

Embora possa ser possível obter expressões analíticas genéricas que caracterizem os modelos canónicos do sistema de produção, CM_{oLP}^A e CM_{oLP}^B em função de Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 , elas serão sem dúvida muito complexas, razão pela qual instanciaremos estas expressões para valores discretos de Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 .

Certamente são inúmeras as combinações que podem ser consideradas com os valores discretos de Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 , no entanto, apenas as combinações com maior potencial para melhorar a disponibilidade do sistema (nodos 7 e 8) são efectivamente interessantes para este estudo. Para se obter este conjunto restrito de combinações estabeleceram-se limites de intervalos de valores para Δ_i (com $i=1, 2, 3$), com base na disponibilidade marginal avaliada nos nodos à saída dos *buffers* (nodos 3, 4 e 6). Cada combinação de valores discretos de Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 considerada corresponde a uma configuração particular do sistema de produção. Finalmente, serão caracterizados os modelos canónicos para cada uma destas configurações.

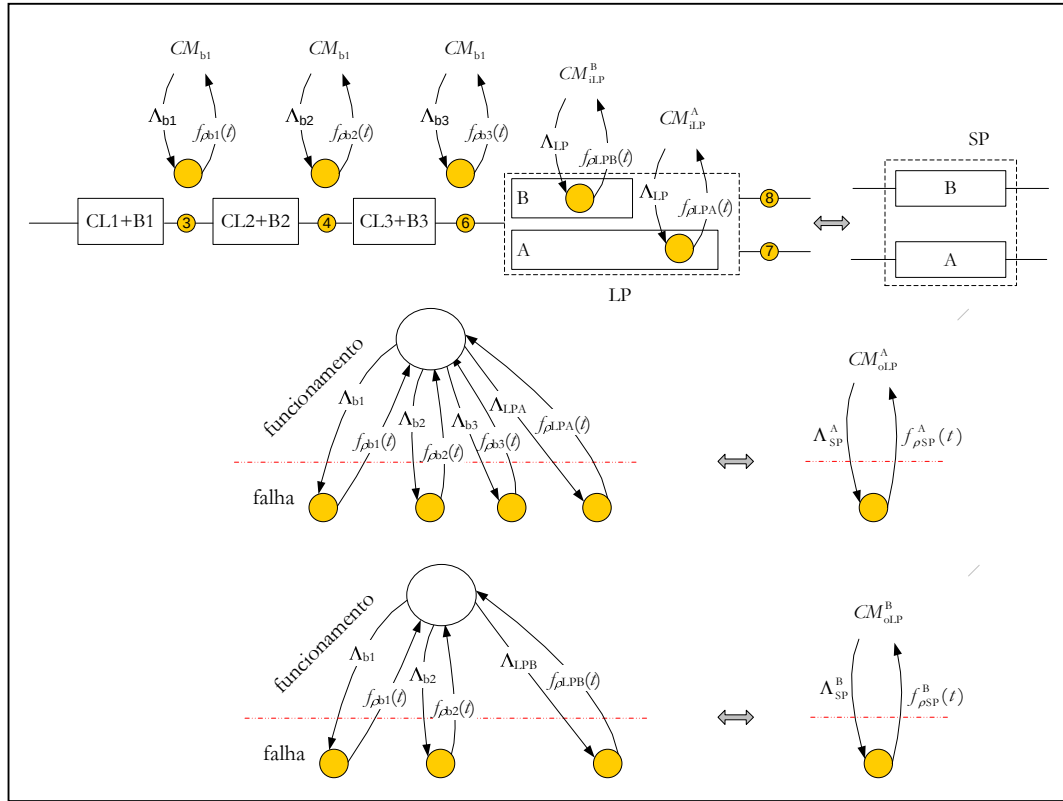


Figura 6.35: Diagrama de estados

Cálculo dos intervalos de valores para os buffers intermédios

O estudo efectuado para determinar a influência da dimensão dos *buffers* B1, B2 e B3 no valor da disponibilidade de fluxo de materiais nos nodos 3, 4 e 6 produziu os resultados que constam da Tabela 6.16. Nesta tabela apresentam-se também os ganhos marginais de disponibilidade, gmA_{Bi} , que se podem obter com o aumento da dimensão dos *buffers*. Por exemplo, o ganho marginal de disponibilidade à saída do *buffer* B1 que será conseguido passando Δ_1 de 1 hora para 2 horas, é de 2,6 %, calculado do seguinte modo:

$$gmA_{B1}(\%) = \frac{0,9898 - 0,9648}{0,9648} \times 100 = 2,6$$

 Tabela 6.16: Disponibilidade nos nodos 3, 4 e 6 em função da dimensão dos *buffers* B1, B2 e B3

$\Delta_1(h)$	Disp. nodo 3	$gmA_{B1}(\%)$	$\Delta_2(h)$	Disp. nodo 4	$gmA_{B2}(\%)$	$\Delta_3(h)$	Disp. nodo 6	$gmA_{B3}(\%)$
0	0,9084		0	0,9841		0	0,9761	
1	0,9648	6,21	1	0,9968	1,29	1	0,9977	2,21
2	0,9898	2,58	2	0,9991	0,23	2	0,9999	0,22
3	0,9974	0,77	3	0,9997	0,06	3	1,0000	0,01
4	0,9994	0,20	4	0,9998	0,01	4	1,0000	0,00

Pela análise dos valores da Tabela 6.16 verifica-se que os ganhos de disponibilidade nos nodos 3, 4 e 6 são marginalmente baixos para valores de $\Delta_1 > 3$, $\Delta_2 > 1$ e $\Delta_3 > 1$, respectivamente. Estabelece-se deste modo os intervalos:

$$\Delta_1 \in [0, 3]; \Delta_2 \in [0, 1]; \Delta_3 \in [0, 1]$$

para os valores admissíveis dos *buffers* intermédios, para efeito de cálculo dos modelos canónicos CM_{oLP}^A e CM_{oLP}^B .

Disponibilidade do sistema

No âmbito deste estudo, a disponibilidade do sistema é um índice de fiabilidade que expressa a probabilidade do sistema estar operacional em qualquer instante, mas também pode ser vista como a percentagem de tempo operacional do sistema. Neste caso diz-se que o sistema está operacional se existir *output* à saída do sistema, mesmo que as células do sistema se encontrem não operacionais.

Com os intervalos estabelecidos para os *buffers* intermédios são possíveis bastantes combinações K_j , de valores discretos de Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 . Cada K_j define uma configuração DS_j , para o sistema de produção. Os cálculos efectuados apenas com ternos de valores inteiros de Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 evidenciaram as configurações do sistema que constam da Tabela 6.17 (exceptuando DS_1 que corresponde à configuração base, com $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$), como sendo as de maior potencial para melhorar o desempenho do sistema. Os valores da disponibilidade nos nodos 7 e 8 apresentados na referida tabela foram obtidos com o pressuposto do sistema de produção produzir o produto tipo A ou o produto tipo B durante um longo período. Avalia-se assim a disponibilidade do sistema para cada tipo de produto. Na Figura 6.36 mostra-se graficamente este índice de fiabilidade para os produtos tipo A e tipo B.

Tabela 6.17: Combinações de valores dos *buffers* e disponibilidade à saída do sistema

Configuração do sistema	<i>buffers</i> intermédios			Disponibilidade	
	Δ_1 (h)	Δ_2 (h)	Δ_3 (h)	nodo 7	nodo 8
DS_1	0	0	0	0,8585	0,8863
DS_2	2	0	0	0,9308	0,9635
DS_3	2	1	0	0,9421	0,9757
DS_4	2	1	1	0,9623	0,9757
DS_5	3	1	0	0,9490	0,9831
DS_6	3	1	1	0,9695	0,9831

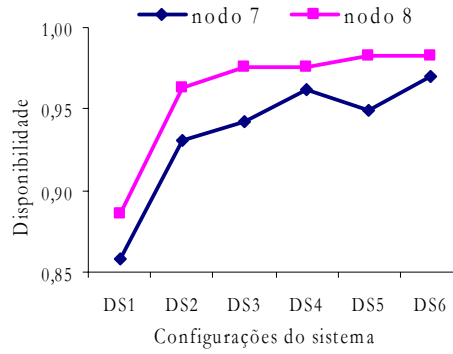


Figura 6.36: Disponibilidade nos nodos 7 e 8 *versus* configurações do sistema

Acontece o pressuposto admitido acima não se verifica no período diário de trabalho, T . A disponibilidade do sistema na produção do produto tipo B é condicionada pela disponibilidade do sistema de produção na produção do produto A. Todavia, os valores da disponibilidade apresentados podem ser utilizados como indicadores aproximados do efeito dos *buffers* intermédios no desempenho do sistema.

Modelos canónicos

Finalmente, cada DS_j , com $j=1, 2, \dots, 6$, obtido por uma dada combinação de valores de Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 , produz um modelo canónico específico à saída da LP, tanto para o produto tipo A como para o para o produto tipo B. Estes modelos, representados de forma sintética por:

$$CM_{oLP}^A = \{\Lambda_{SP}^A, f_{\rho SP}^A(t)\} \text{ e } CM_{oLP}^B = \{\Lambda_{LP}^B, f_{\rho LP}^B(t)\}$$

encontram-se caracterizados na Tabela C.2 (Anexo C). Note-se que as funções $f_{\rho SP}^A(t)$ e $f_{\rho SP}^B(t)$ são apenas apresentadas graficamente uma vez que as suas expressões analíticas são muito complexas. A título de exemplo tem-se para a configuração DS_2 os seguintes resultados:

$$\Lambda_{SP}^A = 11.847 \times 10^{-2} \text{ falhas/hora};$$

$$\Lambda_{SP}^B = 6.299 \times 10^{-2} \text{ falhas/horas e}$$

as funções $f_{\rho SP}^A(t)$ e $f_{\rho SP}^B(t)$ são caracterizadas pelas seguinte curvas:

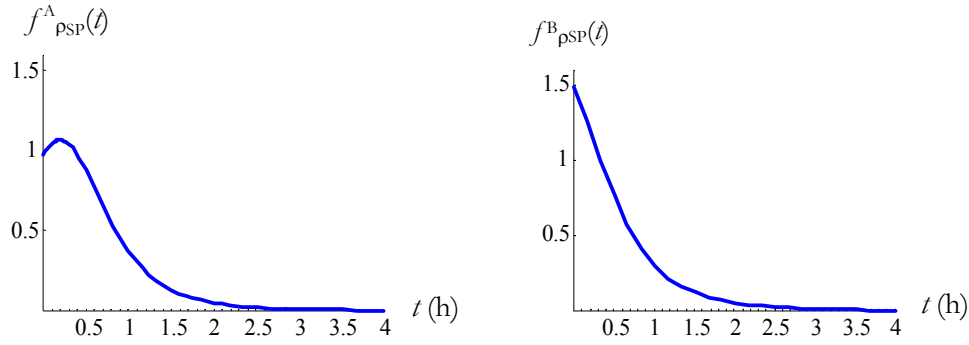


Figura 6.37: Funções dos tempos de reposição nos nodos 7 e 8

6.3.5 Análise e dimensionamento do sistema de produção

Para o caso em estudo, a análise e dimensionamento do sistema consiste na obtenção da dimensão dos *buffers* (intermédios e de produtos finais) através da avaliação de diferentes configurações alternativas do sistema de produção, feita pelas medidas de desempenho: *custo da fiabilidade* e *frequência anual de falhas na satisfação das encomendas*. Torna-se então necessário calcular as distribuições dos tempos de indisponibilidade do sistema nos nodos 7 e 8 durante um período T , pelo que se procede de seguida a esse cálculo.

6.3.5.1 Distribuição do tempo diário de paragem do sistema

A determinação das distribuições dos tempos diários de paragem do sistema nos nodos 7 e 8, respectivamente $f_{Tp^A}(t)$ e $f_{Tp^B}(t)$, faz-se recorrendo às Equações (5.55) e (5.57). Diferentes combinações de valores de Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 produziram distribuições distintas, quer para o nodo 7, quer para o nodo 8. Devido à complexidade das expressões analíticas das distribuições $f_{Tp^A}(t)$ e $f_{Tp^B}(t)$ optou-se, também neste caso, apenas pela representação gráfica. Na Figura 6.38 mostram-se as distribuições $f_{Tp^A}(t)$ e $f_{Tp^B}(t)$ obtidas com as configurações DS_1 e DS_6 . Os resultados completos encontram-se na Figura C.6 (Anexo C).

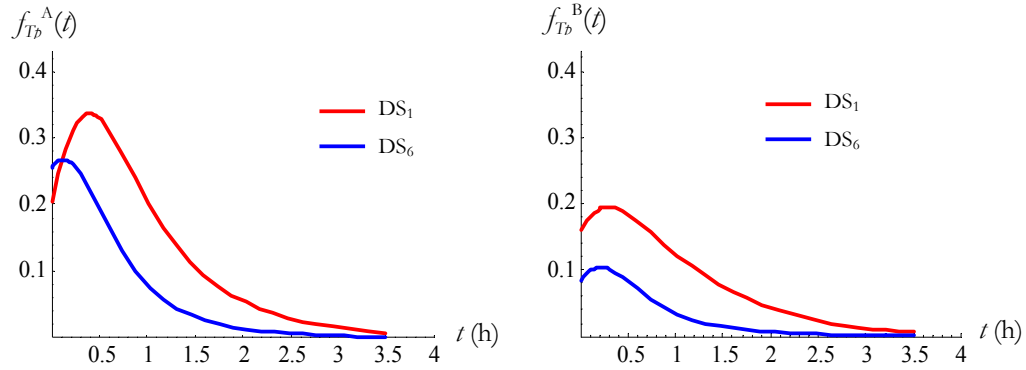


Figura 6.38: Funções dos tempos diários de indisponibilidade do sistema de produção

Pela análise dos gráficos das funções $f_{Tp^A}(t)$ e $f_{Tp^B}(t)$ verifica-se que os seus valores médios decrescem à medida que os *buffers* intermédios aumentam. Por outro lado, viu-se anteriormente (Figura 6.34) que a frequência de falhas à saída do sistema também varia inversamente com a dimensão destes *buffers*. Estes aspectos são importantes, no entanto, a avaliação das diferentes alternativas de configuração do sistema de produção (DS_j com $j=1, 2, \dots, 6$) é feita pelas duas medidas de desempenho consideradas para este estudo.

6.3.5.2 Custo de fiabilidade

O estudo apresentado no Capítulo 5 juntamente com os desenvolvimentos apresentados na Secção 6.3.3 permitem calcular o valor esperado do custo da fiabilidade, $E[C_R]$ para o presente caso de estudo. Alterações na configuração do sistema produzem alterações nos custos da fiabilidade. Como se mostra na Secção 6.3.3, este custo é calculado pela Equação (6.13). As parcelas desta equação referentes ao produto A são: (i) o custo de posse do *stock* de segurança em B_4^A (C_bA); (ii) a penalização fixa por ocorrência de falha nas entregas diárias do produto A (C_fA); a penalização variável proporcional à quantidade diária do produto A não entregue (C_vA); o custo diário com o trabalho extra na produção do produto A, ($C_{te}A$) e o custo diário de oportunidade por vendas perdidas do produto A, ($C_{vp}A$). Os valores esperados para estas parcelas de custo são obtidos pelas Equações (6.5), (6.6), (6.7) e (6.8), respectivamente.

Na Figura 6.39 representa-se o *custo da fiabilidade* para o produto A, (C_RA) e as várias parcelas de custos que o compõem em função do *stock* de segurança B_4^A e admitindo a configuração (base) DS_1 .

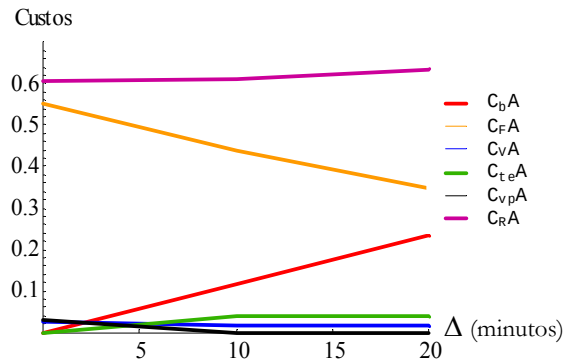


Figura 6.39: Custos no nodo 7 (com $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$)

Verifica-se neste caso que o menor custo da fiabilidade ocorre para $\Delta_4^A = 0$. Tal justifica-se pelo facto de só ocorrerem falhas nas entregas do produto A se durante a sua produção o tempo de paragem for superior a 3 horas (tempo diário planeado para a produção do produto B).

Por idêntico procedimento, utilizando agora as Equações (6.9), (6.10), (6.11) e (6.12) calculam-se as parcelas do custo da fiabilidade para o produto B (C_R^B), cujas curvas se apresentam na Figura 6.40. Neste caso, a produção do produto B é afectada quer pelas paragens do sistema durante a sua produção quer pelas paragens do sistema durante a produção do produto A. Por esta razão a probabilidade de falha de fluxo no nodo 8 deverá ser bastante superior à probabilidade de falha de fluxo no nodo 7. Este facto, associado aos custos por incumprimento das entregas conduzem a um *stock* de segurança do produto B tendencialmente elevado, verificando-se o menor valor do custo da fiabilidade para $\Delta_4^B = 180$ minutos.

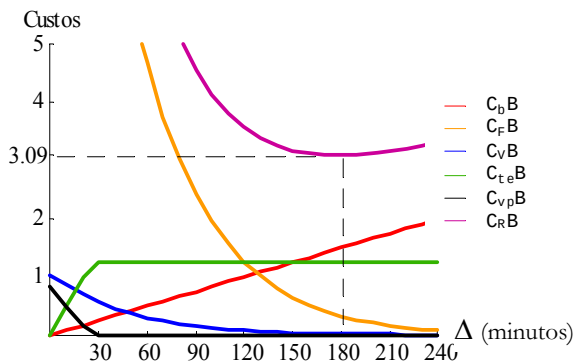


Figura 6.40: Custos no nodo 8 (com $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$)

Finalmente, pode calcular-se o *custo da fiabilidade* diário para o sistema de produção, pelo somatório dos seguintes custos: (i) custos de posse dos *buffers* B1, B2, e B3; (ii) custos de trabalho extra nas células 1, 2 e 3; e (iii) custos mínimos da fiabilidade para os produtos tipo A e tipo B avaliados à saída do sistema. Obtém-se deste modo, $E[CR]=4.999$ U.M./dia. Os custos da fiabilidade para as outras configurações consideradas neste estudo calculam-se de forma idêntica. Na Tabela 6.18 apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 6.18: Custos diários da fiabilidade do sistema para diferentes combinações de valores dos *buffers* intermédios

Configuração sistema	Buffers inter. (horas)			Célula 1		Célula 2		Célula 3		$\Delta_{(min.)}^A$	C_{SP}^A	$\Delta_{(min.)}^B$	C_{SP}^B	CR (U.M./dia)
	Δ_1	Δ_2	Δ_3	C_I	C_{te}	C_I	C_{te}	C_I	C_{te}					
DS1	0	0	0	0	1,044	0	0,141	0	0,121	0	0,605	180	3,088	4,999
DS2	2	0	0	0,42	1,044	0	0,141	0	0,121	0	0,139	130	2,071	3,937
DS3	2	1	0	0,42	1,044	0,11	0,141	0	0,121	0	0,117	120	1,999	3,952
DS4	2	1	1	0,42	1,044	0,11	0,141	0,12	0,121	0	0,114	110	1,718	3,789
DS5	3	1	0	0,63	1,044	0,11	0,141	0	0,121	0	0,085	120	1,851	3,982
DS6	3	1	1	0,63	1,044	0,11	0,141	0,12	0,121	0	0,083	100	1,552	3,801

A Figura 6.41 mostra graficamente os custos da fiabilidade representados na última coluna da Tabela 6.18. Destacam-se então as reduções nos custos da fiabilidade obtidas pela introdução de *buffers* intermédios e também uma certa regularidade nos resultados. Mesmo assim, identifica-se a configuração DS₄ como a melhor de entre as analisadas. Note-se que os resultados obtidos para os custos da fiabilidade não são alheios ao facto das combinações de valores de Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 analisadas, derivarem do estudo realizado na Secção 6.3.4.2, no sentido seleccionar combinações com um bom potencial de melhoria da disponibilidade do sistema de produção.

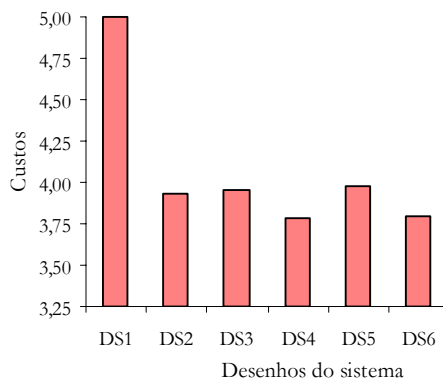


Figura 6.41: Custos da fiabilidade para os desenhos do sistema analisados

A melhor configuração do sistema (de entre os estudados) passa por estabelecer os seguintes *stocks* de segurança para os *buffers* intermédios e de produto acabado:

$$\Delta_1 = 120 \text{ minutos}$$

$$\Delta_2 = 60 \text{ minutos}$$

$$\Delta_3 = 60 \text{ minutos}$$

$$\Delta_4^A = 0 \text{ minutos}$$

$$\Delta_4^B = 110 \text{ minutos}$$

A esta configuração corresponderia um custo da fiabilidade $E[C_R]=3,789$ U.M./dia.

6.3.5.3 Frequência de falhas de fornecimento

O procedimento para o cálculo da frequência anual de falhas na satisfação integral das encomendas diárias foi desenvolvido na Secção 5.2.2 e aplicado ao caso de estudo 1 apresentado no presente capítulo. A produção de mais do que um tipo de produto não introduz alterações a este procedimento, tendo no entanto, de ser aplicado a cada tipo de produto separadamente. Como resultados dessa aplicação obtêm-se para os produtos tipo A e tipo B, os valores da frequência anual de falhas (valores médios e valores com 95% de confiança) que constam nas Tabelas 6.19 e 6.20, respectivamente, considerando que o ano tem 250 dias úteis.

Adoptando a solução acima apresentada para o desenho do sistema de produção, tida como a melhor solução encontrada do ponto de vista económico, teríamos como valores médios da frequência anual de falhas de fornecimento, 0.52 falhas para o produto A e, 1.28 falhas para o produto B. Poderá ainda afirmar-se, com um nível de confiança de 95%, que não haverá mais do que 1.7 falhas de fornecimento por ano para o produto A e 3.14 falhas de fornecimento por ano para o produto B. Note-se que se considera uma falha de fornecimento sempre que as entregas no final de um período T não são satisfeitas integralmente.

Tabela 6.19: Frequência anual de falhas fornecimento do produto A (valores médios e valores com 95% de confiança)

Δ_4^A (min)	DS1		DS2		DS3		DS4		DS5		DS6	
	Média	95%	Média	95%	Média	95%	Média	95%	Média	95%	Média	95%
0	2,75	5,46	0,63	1,94	0,54	1,74	0,52	1,70	0,39	1,41	0,38	1,39
10	2,19	4,61	0,50	1,66	0,42	1,48	0,41	1,46	0,30	1,21	0,30	1,19
20	1,74	3,89	0,39	1,42	0,33	1,27	0,32	1,25	0,24	1,04	0,23	1,03
30	1,38	3,30	0,31	1,22	0,26	1,09	0,25	1,08	0,19	0,90	0,19	0,89
40	1,09	2,80	0,24	1,05	0,20	0,94	0,20	0,93	0,15	0,78	0,15	0,77
50	0,86	2,38	0,19	0,91	0,16	0,81	0,16	0,81	0,12	0,67	0,12	0,67
60	0,68	2,03	0,15	0,79	0,12	0,70	0,12	0,70	0,09	0,59	0,09	0,59
70	0,53	1,73	0,12	0,69	0,10	0,61	0,10	0,61	0,07	0,51	0,07	0,51
80	0,42	1,49	0,09	0,60	0,08	0,53	0,08	0,53	0,06	0,45	0,06	0,45
90	0,33	1,28	0,07	0,52	0,06	0,46	0,06	0,46	0,04	0,39	0,04	0,39
100	0,26	1,10	0,06	0,46	0,05	0,41	0,05	0,40	0,04	0,34	0,04	0,34
110	0,20	0,94	0,05	0,40	0,04	0,35	0,04	0,35	0,03	0,30	0,03	0,30
120	0,16	0,81	0,04	0,35	0,03	0,31	0,03	0,31	0,02	0,26	0,02	0,27
130	0,12	0,70	0,03	0,31	0,02	0,27	0,02	0,27	0,02	0,23	0,02	0,23
140	0,10	0,61	0,02	0,27	0,02	0,24	0,02	0,24	0,01	0,20	0,01	0,21
150	0,08	0,53	0,02	0,24	0,01	0,21	0,01	0,21	0,01	0,18	0,01	0,18
160	0,06	0,46	0,01	0,21	0,01	0,18	0,01	0,18	0,01	0,16	0,01	0,16
170	0,05	0,40	0,01	0,18	0,01	0,16	0,01	0,16	0,01	0,14	0,01	0,14
180	0,04	0,34	0,01	0,16	0,01	0,14	0,01	0,14	0,01	0,12	0,01	0,12
190	0,03	0,30	0,01	0,14	0,01	0,12	0,01	0,12	0,00	0,11	0,00	0,11
200	0,02	0,26	0,01	0,12	0,00	0,11	0,00	0,11	0,00	0,09	0,00	0,09
210	0,02	0,22	0,00	0,11	0,00	0,09	0,00	0,09	0,00	0,08	0,00	0,08
220	0,01	0,19	0,00	0,09	0,00	0,08	0,00	0,08	0,00	0,07	0,00	0,07
230	0,01	0,16	0,00	0,08	0,00	0,07	0,00	0,07	0,00	0,06	0,00	0,06
240	0,01	0,14	0,00	0,07	0,00	0,06	0,00	0,06	0,00	0,05	0,00	0,05

Tabela 6.20: Frequência anual de falhas de fornecimento do produto B (valores médios e valores com 95% de confiança)

Δ_4^B (min)	DS1		DS2		DS3		DS4		DS5		DS6	
	Média	95%	Média	95%	Média	95%	Média	95%	Média	95%	Média	95%
0	70,84	82,56	39,06	48,50	23,18	30,71	22,04	29,41	16,90	23,42	16,05	22,42
10	63,53	74,85	30,38	38,87	19,36	26,30	18,41	25,20	14,22	20,23	13,50	19,37
20	55,45	66,25	23,06	30,58	15,28	21,50	14,53	20,61	11,08	16,43	10,53	15,75
30	47,49	57,69	17,24	23,82	11,65	17,12	11,08	16,43	8,25	12,89	7,83	12,36
40	40,17	49,72	12,82	18,56	8,74	13,52	8,32	12,98	6,00	9,97	5,70	9,58
50	33,70	42,58	9,57	14,56	6,55	10,70	6,23	10,28	4,34	7,73	4,12	7,43
60	28,09	36,30	7,20	11,55	4,93	8,54	4,69	8,21	3,15	6,06	3,00	5,83
70	23,28	30,84	5,47	9,27	3,74	6,89	3,56	6,64	2,32	4,82	2,21	4,64
80	19,21	26,13	4,20	7,54	2,87	5,63	2,73	5,43	1,74	3,89	1,65	3,75
90	15,78	22,10	3,25	6,19	2,21	4,65	2,11	4,48	1,32	3,20	1,25	3,08
100	12,90	18,65	2,53	5,13	1,72	3,87	1,64	3,74	1,01	2,66	0,96	2,57
110	10,51	15,73	1,98	4,29	1,35	3,25	1,28	3,14	0,78	2,24	0,74	2,16
120	8,53	13,25	1,56	3,60	1,06	2,75	1,01	2,66	0,61	1,90	0,58	1,83
130	6,90	11,16	1,23	3,05	0,83	2,33	0,79	2,26	0,48	1,62	0,46	1,57
140	5,56	9,40	0,97	2,59	0,66	1,99	0,63	1,92	0,38	1,39	0,36	1,35
150	4,47	7,92	0,77	2,21	0,52	1,70	0,49	1,65	0,30	1,20	0,29	1,16
160	3,58	6,67	0,61	1,89	0,41	1,46	0,39	1,42	0,24	1,04	0,23	1,01
170	2,87	5,63	0,48	1,62	0,32	1,26	0,31	1,22	0,19	0,90	0,18	0,88
180	2,29	4,76	0,38	1,40	0,26	1,09	0,24	1,05	0,15	0,79	0,14	0,76
190	1,82	4,03	0,30	1,21	0,20	0,94	0,19	0,91	0,12	0,69	0,11	0,67
200	1,45	3,42	0,24	1,05	0,16	0,82	0,15	0,79	0,09	0,60	0,09	0,58
210	1,15	2,91	0,19	0,91	0,13	0,71	0,12	0,69	0,08	0,53	0,07	0,51
220	0,91	2,47	0,15	0,79	0,10	0,62	0,09	0,60	0,06	0,46	0,06	0,45
230	0,72	2,11	0,12	0,69	0,08	0,54	0,07	0,52	0,05	0,41	0,05	0,39
240	0,57	1,80	0,09	0,60	0,06	0,47	0,06	0,46	0,04	0,36	0,04	0,35

Nos gráficos da Figura 6.42 apresentam-se as curvas (traçadas com os valores médios e os valores com 95% de confiança) das frequências de falha de fornecimento por ano dos produtos tipo A e tipo B adoptando a configuração DS₄. Verifica-se que a frequências de falha de fornecimento por ano tende assintoticamente para zero à medida que os *stocks* de segurança de produto acabado aumentam. Esta tendência está presente de modo idêntico em qualquer das outras configurações analisadas.

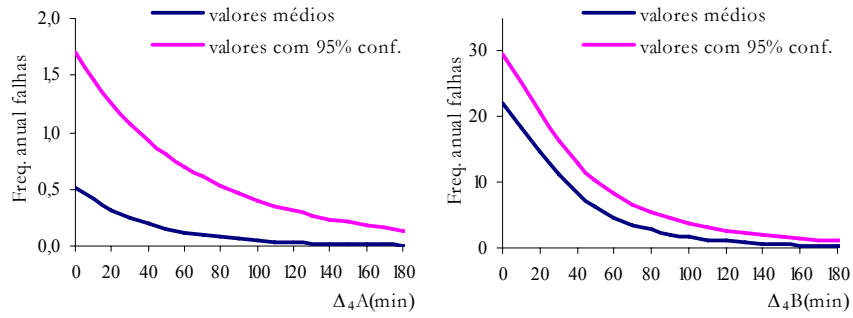


Figura 6.42: Frequência anual de falhas de fornecimento os produtos tipo A e tipo B para a configuração DS_4

Por vezes são fixados valores limites para o número anual de falhas de fornecimento dos produtos, NLf^A e NLf^B , respectivamente. Através das Tabelas 6.19 e 6.20 pode estabelecer-se para qualquer das configurações analisadas, qual o *stock* de segurança para cada tipo de produto que garante com 95% de confiança que os valores limite, NLf^A e NLf^B não são ultrapassados. Por exemplo, para $NLf^A=1$ e $NLf^B=3$ obtêm-se para a configuração DS_4 , os *stocks* de segurança $\Delta_4^A=40$ minutos e $\Delta_4^B=120$ minutos. Finalmente, a partir destes valores e conhecidas que são as taxas de produção, q_A e q_B (peças/hora) para os produtos tipo A e tipo B, respectivamente, determinam-se os *stocks* de segurança (em número de peças), q_4^A e q_4^B , que devem ser constituídos para cada tipo de produto, do seguinte modo:

$$q_4^A = \frac{\Delta_4^A \times q_A}{60} \text{ e } q_4^B = \frac{\Delta_4^B \times q_B}{60}$$

Para terminar pode calcular-se o custo desta solução que, obviamente, não corresponde ao custo da melhor solução anteriormente apresentada. O valor obtido para esta solução é $E[C_R]=4,192$ U.M./dia.

Os dois casos de estudo apresentados neste capítulo demonstram as potencialidades dos *buffers* (intermédios e/ou produto acabado) para reduzirem ou eliminar os tempos de indisponibilidade de um sistema de produção perceptíveis pelos clientes. Contudo, existem outras alternativas referidas ao longo desta dissertação para perseguirem este o mesmo objectivo. Uma destas alternativas passa pela introdução de equipamentos redundantes com outros equipamentos existentes no sistema de produção.

6.3.5.4 Introdução de redundâncias no sistema de produção

Considere-se então que se coloca a hipótese de introduzir um equipamento redundante (nova máquina) com a máquina M2 do sistema de produção em estudo. A concretização desta hipótese tem como consequências directas, uma melhoria na disponibilidade da célula 1, e um custo associado à aquisição e instalação do novo equipamento. No presente contexto designamos este custo por *custo de melhoria da fiabilidade*.

Admita-se agora que se pretende estimar o valor limite (máximo) deste custo que tornaria a aquisição de uma nova máquina M2 interessante do ponto de vista económico, sabendo que o modelo canónico interno da célula 1 após a introdução de uma nova máquina M2 seria:

$$CM'_{il} = \{\Lambda'_1, f'_{p1}(t)\}$$

sendo:

$$\Lambda'_1 = 0.05 \text{ falhas h}^{-1}$$

$$f'_{p1}(t) = 7.259 e^{-2.5t} t^{1.4}$$

Note-se que a introdução desta nova máquina introduz alterações na disponibilidade da célula 1 e, consequentemente, na disponibilidade do sistema de produção. Deste modo o *custo da não fiabilidade* também regista alterações.

O cálculo do valor do custo de melhoria da fiabilidade exige a realização de um estudo idêntico ao efectuado para a situação anterior. Sendo assim, apresentam-se de seguida apenas os resultados finais. Os custos representado nos gráficos da Figura 6.43 referentes os nodos 7 e 8 foram obtidos considerando a configuração (melhor solução apresentada na Tabela 6.18).

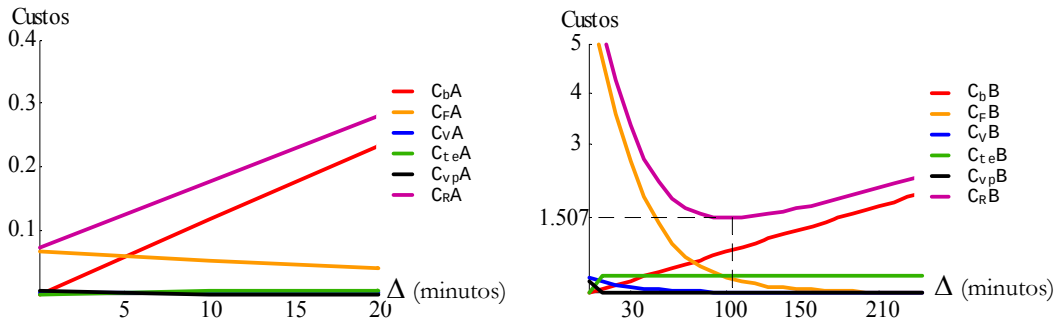


Figura 6.43: Custos da fiabilidade nos nodos 7 e 8 com uma máquina M2 redundante

No cálculo destes custos não entraram os custos de aquisição e instalação da nova máquina M2. Obteve-se deste modo um *custo da fiabilidade*, $E[C_R]=3,032$ U.M./dia (ver Tabela 6.21).

Tabela 6.21: Custo diário da fiabilidade do sistema com a configuração DS₄ após a introdução de uma máquina redundante com M2

Configuração sistema	Buffers inter. (horas)			Célula 1		Célula 2		Célula 3		Δ_4^A (min.)	C_{SP}^A	Δ_4^B (min.)	C_{SP}^B	CR (U.M./dia)
	Δ_1	Δ_2	Δ_3	C_I	C_{fe}	C_I	C_{fe}	C_I	C_{fe}					
DS4	2	1	1	0,42	0,540	0,11	0,141	0,12	0,121	0	0,0735	100	1,507	3,032

Conclui-se então que a introdução de uma nova máquina M2 permitiria baixar o custo diário da fiabilidade em cerca de 20% (de 3.789 U.M./dia para 3.032 U.M./dia). Nesta perspectiva, a hipótese de adquirir uma nova máquina M2 será uma hipótese viável se o custo diário da sua aquisição/instalação for inferior a 0.76 U.M (redução obtida no custo da fiabilidade).

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas de desenvolvimento

7.1 Actualidade da dissertação

Os sistemas em geral e os sistemas industriais de produção em particular têm registado nas últimas décadas um aumento acentuado da sua complexidade. Para esta complexidade concorrem vários factores podendo destacar-se:

- A integração de diferentes tecnologias (mecânica, eléctrica, electrónica) no mesmo sistema;
- A introdução da robótica com a consequente substituição do trabalho humano por sofisticados equipamentos robotizados;
- A crescente exigência dos consumidores por produtos cada vez mais sofisticados, de elevada qualidade e baixo preço, o que requer sistemas de tecnologia intensiva;
- A grande explosão na variedade de produtos produzidos na mesma planta fabril que envolvem muitas centenas e por vezes milhares de componentes e sub-produtos. Nestas circunstâncias os fluxos internos de materiais são complexos e a gestão de inventários torna-se mais difícil;
- A concorrência global que suporta a “ditadura do cliente/consumidor”, obrigando as empresas a produzirem os produtos no momento certo nas quantidades pretendidas e ao menor custo. São para isso necessários sistemas de produção flexíveis com elevada disponibilidade, e baixos custos operacionais.

A complexidade dos sistemas associada à necessidade de obtenção de índices de desempenho globais motivam com frequência a adopção da hipótese markoviana em estudos de fiabilidade. A presença de processos hiperexponenciais, comuns em sistemas industriais de produção, tornam a adopção desta hipótese discutível. Por outro lado, são muito limitadas e escassas as ferramentas existentes para tratar sistemas complexos contendo processos quasi-determinísticos. Acresce que normalmente a componente de incerteza associada aos parâmetros não é contemplada nos modelos de fiabilidade, mesmo que estes parâmetros sejam obtidos por amostras de tamanho reduzido, como frequentemente acontece.

Actualmente, sectores industriais de capital intensivo manifestam grandes preocupações com a disponibilidade dos sistemas, elemento fundamental da produtividade e da qualidade de serviço.

Para ir de encontro a estas preocupações é indispensável incluir na fase de projecto dos sistemas uma série de aspectos relacionados com a fiabilidade e a manutibilidade dos equipamentos, para que se obtenham sistemas com elevada disponibilidade e com baixos custos da fiabilidade.

Muitas destas empresas fazem parte de cadeias logísticas que usam a filosofia JIT (a diferentes níveis) como estratégia integradora. Normalmente os contratos estabelecidos entre elos destas cadeias fixam níveis mínimos de qualidade de serviço na satisfação das encomendas e penalizações avultadas por falhas ou incumprimentos nos fornecimentos. Assim, estas penalizações devem também ser consideradas quer na fase de projecto quer na fase de exploração dos sistemas industriais de produção.

A avaliação da “qualidade do projecto” de um sistema de produção faz-se recorrendo a medidas de desempenho adequadas. Há situações em que as penalizações têm lugar apenas quando se ultrapassam valores limites estabelecidos para certas grandezas. Nestas circunstâncias as medidas de desempenho não deverão ser calculadas a partir de valores médios de índices de fiabilidade (como os que resultam da utilização de Cadeias de Markov). A forma das distribuições de probabilidades destes índices, em particular a do tempo de indisponibilidade do sistema num período de tempo T é fundamental para uma correcta estimação dos valores das medidas de desempenho.

Apesar da reconhecida importância que os aspectos relacionados com a fiabilidade adquiriram nos sistemas industriais de produção, estes mantêm-se ainda em segundo plano quando comparados, por exemplo, com os custos de implantação ou com a produtividade. Tal deve-se em boa medida à dificuldade de avaliação de índices de fiabilidade e ao relacionamento destes índices com medidas de custo. A dificuldade em modelar a incerteza presente em muitos dados de fiabilidade da forma mais adequada e a dificuldade em transmitir esta incerteza aos resultados constituem mais um obstáculo neste processo.

Os conceitos e os métodos apresentados nesta dissertação apresentam potencialidades podendo também manifestar eventuais fraquezas ou debilidades quando aplicadas a novos casos de estudo, evidenciando aspectos que careçam de mais estudo e de novos desenvolvimentos. Apesar disso, a apresentação de uma abordagem conceptual que permite lidar com sistemas de produção complexos sem necessidade de introduzir hipóteses simplificativas como a hipótese

markoviana, por exemplo, desvirtuando os resultados é, só por si, um avanço importante no campo da fiabilidade de sistemas.

Havendo muito a fazer para se criar uma estrutura de modelação sólida e abrangente, apoiada em métodos e técnicas eficazes que permitam avaliar a fiabilidade de sistemas industriais de produção e as suas implicações em medidas de desempenho relevantes para a tomada de decisões, estamos convictos ter dado com este trabalho um contributo importante nesse sentido.

7.2 Principais contribuições da dissertação

Ao longo desta dissertação foram apresentados conceitos, metodologias, algoritmos e resultados conceptuais no domínio da fiabilidade, que constituem importantes contributos no âmbito do projecto e avaliação do desempenho de sistemas e que vão de encontro aos objectivos estabelecidos no capítulo introdutório.

Os novos conceitos e metodologias apresentados foram essencialmente dirigidos para sistemas com comportamento não-markoviano e dentro desta classe deu-se especial importância aos sistemas industriais de produção a operar em ambiente JIT. Saliente-se, no entanto, que muitos destes conceitos e metodologias têm um campo de aplicação muito mais amplo. De facto, poderão ser úteis para avaliação de índices de fiabilidade e medidas de desempenho de sistemas de distribuição de energia eléctrica, de sistemas comunicações, ou de sistemas de transportes.

A hipótese markoviana, diversas vezes referida nesta dissertação, ainda que válida ou aceitável em inúmeras situações, não deve ser generalizada. A sua adopção em sistemas com mecanismos de atraso na propagação de erros, como são normalmente os sistemas de produção, pode constituir uma importante fonte de erros, tal como se mostra no Capítulo 2, conduzindo a más decisões relativamente ao projecto dos sistemas. As heurísticas apresentadas nesse capítulo permitem, a partir da estrutura dos modelos e das distribuições dos processos, indicar em que circunstâncias a hipótese markoviana poderá ser adoptada sem que o erro seja significativo e, também, em que circunstâncias esse erro é elevado, obrigando a tratá-los como sistemas não-markovianos.

Actualmente acresce à complexidade dos sistemas de produção industriais a incerteza associada a determinados parâmetros, aumentando assim a dificuldade de análise. A teoria dos conjuntos difusos constitui uma ferramenta importante para modelar estes parâmetros em condições de grande incerteza. No Capítulo 3 foram apresentados alguns contributos inovadores que possibilitam propagar de forma adequada a incerteza presente nos parâmetros do modelo aos resultados, mantendo o carácter probabilístico do mesmo. Para isso foram desenvolvidas várias abordagens, todas elas partindo do conhecimento da expressão analítica pela qual se obtém um *output* rígido a partir de *inputs* rígidos. Estas são, deste modo, abordagens difuso-probabilísticas de avaliação de sistemas.

No Capítulo 4 apresenta-se um quadro conceptual de modelação hierárquica baseado no conceito de modelo canónico que possibilita decompor sistemas complexos e representá-los segundo dois níveis de modelação: global (sistema) e local (subsistema). Esta abordagem não impõe qualquer restrições relativamente às distribuições que modelem os processos do comportamento. Apesar de desenvolvida para sistemas industriais de produção complexos, pode aplicar-se a muitos outros sistemas de engenharia.

No âmbito de aplicação desta abordagem a sistemas industriais de produção foram desenvolvidos algoritmos que caracterizam os modelos canónicos internos das células de produção e os modelos canónicos nos nodos a jusante dos *buffers* intermédios. Estes algoritmos aplicados de uma forma recorrente, permitem estabelecer o modelo canónico global do sistema. Deste modo obtêm-se índices de fiabilidade fundamentais para o cálculo de medidas de desempenho importante na tomada de decisões relativas ao projecto/exploração de sistemas industriais de produção.

No Capítulo 5 apresenta-se um estudo orientado para avaliação de medidas de desempenho, umas internas e outras relacionadas com factores de satisfação dos clientes a longo prazo. Para essas medidas foram desenvolvidos modelos analíticos que, directa ou indirectamente, relacionam os índices de fiabilidade fornecidos pelos modelos canónicos (quer ao nível do sistema que ao nível das células de produção) com índices de custos. Neste processo foi necessário desenvolver um modelo para obtenção das distribuições de probabilidades dos tempos de paragem dos sistemas e subsistemas num dado período de tempo, quaisquer que sejam as distribuições de probabilidades dos processo do comportamento.

Os casos de estudo apresentados no Capítulo 6 têm por objectivo demonstrarem a aplicabilidade e as potencialidades dos conceitos e metodologias desenvolvidos e apresentados ao longo da dissertação como ferramentas de apoio à concepção e projecto de sistemas industriais de produção. Naturalmente, não se pretendeu com estes dois casos de estudo que representassem todos os sistemas industriais de produção existentes, dada a sua grande diversidade, mas tão só que reproduzissem realisticamente sistemas frequentemente encontrados na prática.

7.3 Perspectivas de desenvolvimentos futuros

O desenvolvimento do quadro conceptual de modelação de sistemas industriais de produção baseado no conceito de modelo canónico mostrou grandes potencialidades de modelação na sua aplicação aos casos de estudo.

Embora se tenha aplicado este quadro de modelação a um caso de estudo de um sistema de distribuição de energia eléctrica, afigura-se como prioritário promover a validação extensiva dos conceitos e metodologias desenvolvidas a outros sistemas de engenharia.

As singularidades de muitos sistemas industriais de produção a nível estrutural e funcional impossibilita o desenvolvimento de algoritmos genéricos de avaliação dos modelos canónicos. Será necessário prosseguir e consolidar o trabalho já realizado, que conduza à obtenção de algoritmos de avaliação de modelos canónicos internos de novas estruturas ou arranjos funcionais ao nível dos subsistemas ou, no caso dos sistemas de produção, ao nível das células de produção. Deste modo reduzir-se-á a necessidade de recorrer à simulação para se avaliar modelos canónicos.

No que se refere às medidas de desempenho de sistemas industriais de produção multi-células multi-produtos, é importante dar continuidade ao trabalho realizado no sentido de desenvolver modelos analíticos para cenários de incerteza da procura. O recurso a conjuntos difusos para modelar essa incerteza será certamente uma via a prosseguir e explorar.

Quando se calculam índices de fiabilidade, trabalha-se normalmente com valores em regime estacionário. Contudo, são frequentes as situações em que se pretende obter índices de fiabilidade para pequenos intervalos de tempo (como por exemplo nos casos de estudo do Capítulo 6, em que se calcula a distribuição do tempo de indisponibilidade para um dia de trabalho), registando-se alterações nas condições dos sistemas. Nestes casos, trabalha-se em regime transitório, sendo particularmente importante o estabelecimento de intervalos de confiança para os índices de fiabilidade. Também neste domínio se dará continuidade ao trabalho apresentado nesta dissertação.

Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

- A. Desrochers and R. Al-Jaar (1995). Application of Petri nets in Manufacturing Systems, IEEE Press.
- Accumolli, A. (1996). "Manufacturing process problem analysis using Monte Carlo simulation." Quality and Reliability Engineering International 12(1): 39-41.
- Adamyman, A. and D. He (2002). "Analysis of sequential failures for assessment of reliability and safety of manufacturing systems." Reliability Engineering and System Safety 76(3): 227-236.
- Adamyman, A. and D. He (2004). "System failure analysis through counters of Petri net models." Quality and Reliability Engineering International 20(4): 317-35.
- Albino, V., A. C. Garavelli, et al. (1998). "Vulnerability of production systems with multi-supplier network: a case study." International Journal of Production Research 36(11): 3055-3066.
- Ayag, Z. (2002). "An analytic-hierarchy-process based simulation model for implementation and analysis of computer-aided systems." International Journal of Production Research 40(13): 3053-3073.
- Arrow, K. J., H. D. Block, et al. (1958). "On the stability of the competitive equilibrium I." Econometrica 26: 522-552.
- Arts, R. H. P. M., G. M. Knapp, et al. (1998). "Some aspects of measuring maintenance performance in the process industry." Journal of Quality in Maintenance Engineering 4(1): 6-11.
- Aucamp, D. C. (1984). "GRAPHICAL ANALYSIS OF DUALITY AND THE KUHN-TUCKER CONDITIONS IN LINEAR PROGRAMMING." Applied Mathematical Modelling 8(4): 238-242.
- Averill M. Law and W. D. Kelton (1991). Simulation Modeling and Analysis. Singapore, McGraw-Hill.
- Avizienis, A. (1998). Infrastructure-based design of fault-tolerant systems. IFIP International Workshop on Dependable Computing and its Applications, Johannesburg, South Africa.
- Bhattacharyya, M. (1998). "Fuzzy Markovian decision process." Fuzzy Sets and Systems: 273-282.
- Bai, M. q. (2002). "Note on Fuzzy Regular Languages." Journal- Sichuan Normal University Natural Science Edition 25(2): 111-114.

- Banks, J. (1998). Handbook of Simulation, John Wiley & Sons, Inc.
- Baygun, B. (1995). Signal parameter estimation when the parameters are fuzzy variables. Proceedings of the 3rd International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis and Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, (ISUMA - NAFIPS'95), Sep 17-20 1995, College Park, MD, USA, IEEE.
- Barroso, M. P. and J. R. Wilson (1999). "HEDOMS - Human Error and Disturbance Occurrence in Manufacturing Systems: Toward the development of an analytical framework." Human Factors and Ergonomics In Manufacturing 9(1): 87-104.
- Beounes, C., M. Aguera, et al. (1993). SURF-2: A Program for Dependability Evaluation of Complex Hardware and Software Systems. 23rd IEEE International Symposium on Fault Tolerant Computing Systems, Toulouse, France.
- Berg M., Posner M., et al. (1994). "Production-inventory systems with unreliable machines." Operations Research 42(1): 111-118.
- Billinton, R. and R. N. Allan (1983). Reliability Evaluation of Engineering Systems, Plenum.
- Bowles, J. B. and J. G. Dobbins (2004). "Approximate reliability and availability models for high availability and fault-tolerant systems with repair." Quality and Reliability Engineering International 20(7): 679-697.
- Brenner, A. (1996). "Performance and dependability analysis of fault-tolerant networks." Microelectronics and Reliability v 36 n 3 Mar 1996. p 307-321.
- Buchholz, P. (1998). "A New Approach Combining Simulation and Randomization for the Analysis of Large Continuous Time Markov Chains." ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation 8(2): 194-222.
- Buckley, J. J. and E. Eslami (2004). "Fuzzy ordering of fuzzy numbers." International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12(1): 105-114.
- Cabellero, A. A., J. D. Mitrani, et al. (2000). The use of fuzzy logic in decision making. Conference internationale sur l'aide a la decision dans le domaine genie civil et urbain; Decision making in urban and civil engineering, Lyon, France, Insa.
- Cai, K. Y., Wen, C.Y. and Zhang, M.L. (1991). "Fuzzy variables as a basis for a theory of fuzzy reliability in the possibility context." Fuzzy Sets and Systems 42: 145-172.
- Cai, K. Y., Wen, C.Y. and Zhang, M.L. (1995). "Posbist reliability behaviour of fault-tolerant systems." Microelectron. Reliab., 35: 49-56.
- Campelo, J. C. R., F.; Serrano, J.J.; Gil, P.J. (1997). Dependability evaluation of fault tolerant architectures in distributed industrial control systems. Proceedings of the 1997 IEEE International Workshop on Factory Communication Systems, WFCS, Barcelona, Spain, IEEE International Workshop on Factory Communication Systems, WPCS, Proceedings, 1997. IEEE, Piscataway, NJ, USA, 97TH8313. p 193-200.

- Caramanis, M. C., O. M. Anli, et al. (2003). Supply Chain (SC) Production Planning with Dynamic Lead Time and Quality of Service Constraints. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Dec 9-12 2003, Maui, HI, United States, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Chan, F. T. S. and H. J. Qi (2003). "Feasibility of performance measurement system for supply chain: A process-based approach and measures." *Integrated Manufacturing Systems* 14(3): 179-190.
- Chen, Y.-J. and Z. Ren (2004). "Models combination and its application in reliability evaluation for HVDC systems." *Power System Technology* 28(13): 18-22.
- Ching, W. K. (2001). "Markovian Approximation for Manufacturing Systems of Unreliable Machines in Tandem." *Naval Research Logistics* 48: 65-78.
- Chu, T.-C. and C.-T. Tsao (2002). "Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point." *Computers and Mathematics with Applications* 43(1-2): 111-117.
- Ciardo, G. and A. S. Miner (1996). SMART: simulation and Markovian analyzer for reliability and timing. Proceedings of the 1996 IEEE International Computer Performance & Dependability Symposium, Urbana-Champaign, IL, USA, Proceedings -IEEE International Computer Performance and Dependability Symposium, IPDS 1996. IEEE, Los Alamitos, CA, USA, 96TB100031. p 60.
- Clymer, J. R. (1990). Systems analysis using simulation and Markov models. NJ, Prentice-Hall International.
- Crawford, K. M. and J. F. Cox (1991). "Addressing manufacturing problems through the implementation of Just-in-Time." *Production and Inventory Management Journal* First Quarter: 33-36.
- Dadone, P. (2001). Design Optimization of Fuzzy Logic Systems. Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia.
- David R. Cox and C. Kluppelberg (2001). Complex Stochastic Systems, Chapman & Hall/CRC.
- David Sinclair and M. Zairi (1995). "Effective process management through performance measurement Part I - application of total quality-based performance measurement." *Business Process Re-engineering & Management Journal* 1(1): 75-88.
- Davis, M. H. A. (1993). Markov Models and Optimization. London, Chapman & Hall.
- Deshpande, S. P. and D. Y. Golhar (1995). "HRM practices in unionized and nonunionized canadian JIT manufacturing firms." *Production and Inventory Management Journal* First Quarter: 15-19.

- Detyniecki, M. and R. R. Yager (2000). "Ranking fuzzy numbers using α -weighted valuations." *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 8: 573-591.
- Dong, W. and H. C. Shah (1987). "VERTEX METHOD FOR COMPUTING FUNCTIONS OF FUZZY VARIABLES." *Fuzzy Sets and Systems* 24(1): 65-78.
- Dubois, D., Prade, H. (1988). *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. New York, Plenum Press.
- Dubois, D., Ostasiewicz, W., et al., (2000a). *Fuzzy Sets: History and Basic Notions*. In *Fundamentals of Fuzzy Sets* (ed. Dubois, D., Prade, H.). The Handbook of Fuzzy Sets Series, Kluwer Acad. Publ., 21-124.
- Dubois, D., Prade, H., (2000b). *Fuzzy interval analysis*. In *Fundamentals of Fuzzy Sets* (ed. Dubois, D., Prade, H.). The Handbook of Fuzzy Sets Series, Kluwer Acad. Publ., 483-581.
- Dubois, D., H. Fargier, et al. (2004). *A generalized vertex method for computing with fuzzy intervals*. 2004 IEEE International Conference on Fuzzy Systems - Proceedings, Jul 25-29 2004, Budapest, Hungary, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., Piscataway, NJ 08855-1331, United States.
- Dubi, A., A. Gandini, et al. (1991). "Analysis of non-Markovian systems by a Monte-Carlo method." *Annals-of-Nuclear-Energy*. vol.18, no.3; 1991; p.125-30(Ben Gurion Univ., Beer Sheva, Israel).
- Dutuit, Y., E. Châtelet, et al. (1997). "Dependability Modelling and Evaluation Using Stochastic Petri Nets: Application to Two Test Cases." *Reliability Engineering and Systems Safety* 55: 117-124.
- Epps, R. W. (1995). "Just-in-Time Inventory Management: Implementation of a Successful Program." *Review of Business Fall*: 40-44.
- Ericsson, J. (1998). *Disturbance Analysis of Manufacturing System - An important method within learn production*. Department of Mechanical Engineering, Lund University.
- Faria, J. and M. Matos (2001). "An analytical methodology for the dependability evaluation of non-Markovian systems with multiple components." *Journal of Reliability Engineering and System Safety* 74: 193-210.
- Faria, J. A. (1996). *Modelação, análise e avaliação da confiabilidade de sistemas de informação industriais*. Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores. Porto, Universidade do Porto.
- Fletcher, M. and S. M. Deen (2001). "Fault-tolerant holonic manufacturing systems." *Concurrency Computation Practice and Experience* 13(1): 43-70.
- Fricks-RM, Puliafito-A, et al. (1998). "Applications of non-Markovian stochastic Petri nets." *Performance-Evaluation-Review* 26(2): 15-27.

- German, R., C. Kelling, et al. (1995). "TimeNET - a Toolkit for Evaluating non-Markovian Stochastic Petri Nets." *Performance Evaluation* 24: 69-87.
- Giordano M. and M. F. (2002). Optimal safety stock for unreliable finite buffer single machine manufacturing systems. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Washington.
- Goyal-A, Shahabuddin-P, et al. (1992). "A unified framework for simulating Markovian models of highly dependable systems." *IEEE-Transactions-on-Computers* 41(1): 36-51.
- Gokbayrak, K. and C. G. Cassandras (2000). A hierarchical decomposition method for optimal control of hybrid systems. 39th IEEE Conference on Decision and Control, Dec 12-15 2000, Sydney, NSW, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Goswami, K. K., R. K. Iyer, et al. (1997). "DEPEND: A simulation-based environment for system level dependability analysis." *IEEE Transactions on Computers* v 1 1997. p 60-74(OnLive; Technologies, Cupertino, CA, USA).
- Guo-Hong, W., M. Shi-Yi, et al. (1998). Optimal decision fusion with fuzzy priori probabilities. *Proceedings of ICSP'98 Fourth International Conference on Signal Processing*, 12-16 Oct. 1998, Beijing, China, IEEE.
- Hadjali, A., D. Dubois, et al. (2004). A possibility theory-based approach to the handling of uncertain relations between temporal points. *Proceedings - 11th International Symposium on Temporal Representation and Reasoning (TIME 2004)*, Jul 1-3 2004, Tatiou, France, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., Piscataway, NJ 08855-1331, United States.
- Hanson, M. A. (1994). "Generalization of the Kuhn-Tucker sufficiency conditions." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* L2-<http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1994.1190> 184(1): 146.
- Harlin, U. and J. Stahre (1998). *Human-Machine Analysis based on Disturbances in Automated Manufacturing Systems. Manufacturing Agility and Hybrid Automation II*. Santa Monica, US, IEA Press.
- Hecht, M., H. Hecht, et al. (2002). "Use of combined system dependability and software reliability growth models." *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 9(4): 289-303.
- Huang, M. c. and K. Liu (2002). "Fuzzy Control in Changing Conditions for Staged Combustion Cycle Engine." *Journal- National University of Defense Technology* 24(1): 5-8.
- Hyun Moon, J. and C. Sun Kang (2001). "Application of fuzzy decision making method to the evaluation of spent fuel storage options." *Progress in Nuclear Energy* 39(3-4): 345-351.
- Heindl, A. (2003). "Decomposition of general queueing networks with MMPP inputs and customer losses." *Performance Evaluation* 51: 117-136.

- Hu, W., A. G. Starr, et al. (2003). "Operational fault diagnosis of manufacturing systems." *Journal of Materials Processing Technology*. 7th International Scientific Conference Achievements in Mechanical and Materials Engineering, 29 Nov.-2 Dec. 1998 133: 108-17.
- Iwamoto, S. (2001). "Fuzzy Decision-Making Through Three Dynamic Programming Approaches." *International Journal of Fuzzy Systems* 3(4): 520-526.
- Johansson, A. (1999). *On Optimizing Manufacturing Systems - A User Perspective*. Dept. of Production Engineering. Goteborg, Chalmers University of Technology, Sweden.
- Jostes, T. and M. M. Helms (1995). "The use of buffer inventory as an asset-management tool in a quick-response environment." *Production and Inventory Management Journal* 36(3): 17-22.
- Laprie, J. C. (1975). *Prévision de la sûreté de fonctionnement et architecture des structures numériques temps réel réparables*, Universidade Paul Sabatier, Toulouse.
- Lebas, M. J. (1995). "Performance measurement and performance management." *International Journal of Production Economics*. Proceedings of the 1995 12th International Conference on Production Research 41(1-3): 23.
- Lee-Kwang, H. and J.-H. Lee (1999). "Method for ranking fuzzy numbers and its application to decision-making." *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 7(6): 677-685.
- Leuschen, M. (1997). *Robot Reliability Through Fuzzy Markov Models*. Houston, Rice University.
- Leuschen, M. L., I. D. Walker, et al. (2001). "Evaluating the reliability of prototype degradable systems." *Reliability Engineering & System Safety* 72: 9-20.
- Lev V. Utkin, S. V. G. a. I. B. S. (1997). "Reliability of Systems by Mixture forms of Uncertainty." *Microelectron. Reliab.*, 37(5): 779-783.
- Limnios, N. (1997). "Dependability analysis of semi-Markov systems." *Reliability Engineering & System Safety* 55(3): 203-207.
- Limnios, N. and G. Oprisan (2001). *Semi-Markov Processes and Reliability*. Boston, Birkhauser.
- Lobo, L. M. M. V. (2000). *Determinação de Índices de Fiabilidade em Sistemas Eléctricos Utilizando o Método de Monte Carlo*. Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores. Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Mahadevan B. and N. T. (1993). "Buffer levels and choice of material handling device in Flexible Manufacturing Systems." *European Journal of Operational Research*: 166-176.
- Malathronas, J. P., J. D. Perkins, et al. (1983). "AVAILABILITY OF A SYSTEM OF TWO UNRELIABLE MACHINES CONNECTED BY AN INTERMEDIATE STORAGE TANK." *IIE Transactions* 15(3): 195-201.

- Manoochehri, S. and A. A. Seireg (1988). Computer-aided form synthesis and optimal design of robot manipulators. Trends and Developments in Mechanisms, Machines, and Robotics - 1988, Sep 25-28 1988, Kissimmee, FL, USA, Publ by American Soc of Mechanical Engineers (ASME), New York, NY, USA.
- Masaaki, K. (1997). Markov processes for stochastic modeling. London, Chapman & Hall.
- Mazumdar, M. and A. Kapoor (1997). "Variance reduction in Monte Carlo simulation of electric power production costs." American Journal of Mathematical and Management Sciences 17(3-4): 239-262.
- Meeker, W. Q., and L. A. Escobar (1998). Statistical Methods for Reliability Data. New York, Wiley.
- Miranda, V. (1998). A Fuzzy Perspective of Power System Reliability. Electric Power Applications of Fuzzy Systems. M. E. El-Hawary, IEEE Press: 223-279.
- Misra, K. B., Weber, G.G. (1990). "Use of fuzzy set theory for level-1 studies in probabilistic risk assessment." Fuzzy Sets and Systems 37: 267-288.
- Moinzadeh, K. and P. Aggarwal (1997). "Analysis of a production/inventory system subject to random disruptions." Management Science 43(11): 1577-1588.
- Morgan, B. J. T. (1984). Elements of Simulation. London, Chapman & Hill.
- Nelson, B. L. (1986). "Decomposition of Some Well-Known Variance Reduction Techniques." J. Statist. Computer Simulation 23: 183-209.
- Noyes (1987). Approches méthodologiques pour l'aide à la conception et à la conduite des systèmes de production. Toulouse, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- Nunes, E., Faria, J. A., Matos, M. A. (2002). A comparative analysis of dependability assessment methodologies. Proceedings of Im13 – ESREL Conference, 18-21 March, Lyon.
- Nunes, E., Faria, J. A., Matos, M. A. (2004). "Abordagem hierárquica para avaliação da fiabilidade de sistemas de produção complexos com comportamento não-markoviano." Investigação Operacional, 24: 159-186
- Nunes, E., Faria, J. A., Matos, et al. (2004). Non-markovian estimation of reliability costs of a distribution system, 8th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power System, Iowa, USA, 12 a 17 de Setembro de 2004.
- Nunes, E., Faria, J. A., Matos, M. A. (2005). Análise e avaliação difuso-probabilística de sistemas de produção industriais, Proceedings do 1º Encontro Nacional de Riscos, Segurança e Fiabilidade, Instituto Superior Técnico, Lisboa 11-14 de Maio, p 307-321.
- Oliveira, R. (1996). Simulação. Investigação Operacional, McGraw-Hill.
- Pedrycz, W. (1993). Fuzzy Control and Fuzzy Systems. New York, John Wiley & Sons Inc.

- Pidd, M. (1990). *Computer Simulation in Management Science*. New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Primbs, J. A. and M. Giannelli (2001). "Kuhn-Tucker-based stability conditions for systems with saturation." *IEEE Transactions on Automatic Control* 46(10): 1643-1647.
- Profeta, R. A. (2003). *JIT: Um estudo de casos de factores críticos para a implementação*. Departamento de Administração. São Paulo, Universidade de São Paulo.
- Quintas, A. R. and J. Faria (1998). "On the Dependability Design of Manufacturing Information Systems." *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems* 10: 267-300.
- Kaplan, R. S. and D. P. Norton (1996). "Using the balanced scorecard as a strategic management system." *Harvard Business Review* 74(1): 75.
- Karlsson, C. and C. Norr (1994). "Total Effectiveness in a Just-in-Time System." *International Journal of Operations & Production Management* 14(3): 46-65.
- Kelton, W. D., R. P. Sadowski, et al. (1998). *Simulation with Arena*. New York, McGraw-Hill.
- Khoo, L. P., S. B. Tor, et al. (2001). "A rough set approach to the ordering of basic events in a fault tree for fault diagnosis." *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 17(10): 769-774.
- Khurana, A. (1999). "Managing Complex Production Processes." *MitSloan Management Review* 40(2): 85-97.
- Kim, Y., A. Inaba, et al. (2003). Realization of fault tolerant manufacturing system and its scheduling based on hierarchical Petri net modeling. *IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE ICRA 2003 Conference Proceedings*, 14-19 Sept. 2003, Taipei, Taiwan, IEEE.
- Kleijnen, J. P. C. (1974). *Statistical Techniques in Simulation*, Pt. I. New York, Marcel Dekker.
- Klir, G. L. and B. Yuan (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*. New Jersey, Prentice Hall PRT.
- Ramarapu, N. K., S. Mehra, et al. (1995). "A comparative analysis and review of JIT "implementation" research." *International Journal of Operations & Production Management* 15(1): 38.
- Ries, G., Z. Kalbarczyk, et al. (1996). *DEPEND: a simulation environment for system dependability modeling and evaluation*. *Proceedings of the 1996 IEEE International Computer Performance & Dependability Symposium*, Urbana-Champaign, IL, USA, *Proceedings -IEEE International Computer Performance and Dependability Symposium, IPDS 1996*. IEEE, Los Alamitos, CA, USA, 96TB100031. p 54.
- Rodrigues, A. G. (1988). *Simulação*. Braga, Universidade do Minho.

- Rolstandas, A. (1995). Performance Measurement: A Business Process Benchmarking Approach. New York, Chapman & Hall.
- Romero, B. P. (1991). "The other side of JIT in Supply Management." Production and Inventory Management Journal Fourth Quarter: 1-3.
- Ross, T. J. (1995). Fuzzy Logic With Engineering Applications, McGraw_Hill, Inc.
- Roy Billinton and R. N. Allan (1988). Reliability Assessment of Large Electric Power Systems. Norwell, Massachusetts, Kluwer Academic Publishers.
- Rupe, J. and W. Kuo (2003). "An assessment framework for optimal FMS effectiveness." International Journal of Flexible Manufacturing Systems 15(2): 151-65.
- R. Billinton and R. Allan (1983). Reliability Evaluation of Engineering Systems: Concepts and Techniques, Longman Scientific and Technical.
- Saade, J. J. and H. Schwarzlander (1994). "Application of fuzzy hypothesis testing to signal detection under uncertainty." Fuzzy Sets and Systems 62(1): 9-19.
- Saade, J. J. (1996). "A Unifying Approach to Defuzzification and Comparison of the Outputs of Fuzzy Controllers." IEEE Transactions on Fuzzy Systems 4(3): 227-237.
- Saade, J. J. and H. B. Diab (2000). "Defuzzification techniques for fuzzy controllers." IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics 30(1): 223-229.
- Sahner, R. A., K. S. Trivedi, et al. (1996). Performance and Reliability Analysis of Computer Systems. Norwell, Massachusetts, USA, Kluwer Academic Publishers.
- Saraiva, J. P. T. (1992). Aplicação de Conjuntos Imprecisos na Modelização e Planeamento de Sistemas Eléctricos. Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Saraiva, J., V. Miranda, et al. (1996). "Generation/transmission power system reliability evaluation by Monte-Carlo simulation assuming a fuzzy load description." IEEE Transactions on Power Systems 11(2): 690-5.
- Scheurich, J. J. (2001). Research method in the postmodern. London.
- Schmidt-V, K.-D. (1991). On the arrival theorem for stationary non-Markovian queueing networks with point processes. Proceedings of the Thirteenth International Teletraffic Congress, North-Holland, Amsterdam, Netherlands, Queueing, Performance and Control in ATM. ITC-13 Workshops xiv+265 pp.
- Simeu-Abazi, Z. D., Olivier; Descotes-Genon, Bernard (1997). "Analytical method to evaluate the dependability of manufacturing systems." Reliability Engineering & System Safety v 55 n 2 Feb 1997. p 125-130(Lab d'Automatique de Grenoble ENSIEG, Saint-Martin-d'Heres, Fr).

- Simeu-Abazi, Z. and C. Sassine (1999). "Maintenance integration in manufacturing systems by using stochastic Petri nets." *International Journal of Production Research* 37(17): 3927-40.
- Singh, C. and R. Billinton (1977). *System Reliability Modelling and Evaluation*. London, Hutchinson Educational Publishers.
- Singh, C., R. Billinton, et al. (1977). "The method of stages for non-Markov models." *IEEE Transactions on Reliability* R-26(2): 135-7.
- Sink, D. S. (1996). By what method? The industrial and systems engineer becoming a change master. *Proceedings of the 1996 47th International Industrial Engineering Conference and Exposition*, May 19-22 1996, Minneapolis, NM, USA, IIE, Norcross, GA, USA.
- Sorensen, K. and G. K. Janssens (2001). "Buffer allocation and required availability in a transfer line with unreliable machines." *International Journal of Production Economics* 74: 163-173.
- Stapleton, J. (1997). *Dynamic systems development method: the method in practice*. Harlow.
- Tanaka, H., Fan, L.T., Lai, F.S. and Toguchai, K (1983). "Fault tree analysis by fuzzy probability." *IEEE Trans. Reliab.* R-32: 453-457.
- Tang, D. H., M.; Agron, J.; Miller, J.; Hecht, H. (1997). Engineering oriented dependability evaluation: MEADep and its applications. *Proceedings of the 1997 Pacific Rim International Symposium on Fault-Tolerant Systems, PRFTS, Taipei, Taiwan, Proceedings of the Pacific Rim International Symposium on Fault Tolerant Systems, PRFTS 1997*. IEEE Comp Soc, Los Alamitos, CA, USA, 97TB100202. p 85-90.
- Taskinen, T. and R. Smeds (1999). "Measuring change project management in manufacturing." *International Journal of Operations & Production Management* 19(11): 1168-1187.
- Trivedi-KS, F.-R. P.-A. T.-M. (1998). "Applications of non-Markovian stochastic Petri nets." *Performance-Evaluation-Review*. vol.26, no.2; Aug. 1998; p.15-27 (Univ. Católica do Paraná, Curitiba, Brazil).
- Tsang, A. H. C., A. K. S. Jardine, et al. (1999). "Measuring maintenance performance: a holistic approach." *International Journal of Operations & Production Management* 19(7): 691-715.
- Upton, D. (1998). "Just-in-time and performance measurement systems." *International Journal of Operations & Production Management* 18(11): 1101-10.
- Utkin, L. V. (1994). "Fuzzy reliability of repairable systems in the possibility context." *Microelectron. Reliab.*, 34: 1865-1876.
- Van Ryzin G., Lou S., et al. (1993). "Production control for tandem two-machines system." *Transactions of the Institute of Electrical Engineers* 25(5): 5-20.

- Verbitsky, D. E. and P. F. Lucent (2001). FTA technique addressing fault criticality and interactions in complex consumer communications. Annual Reliability and Maintainability Symposium. 2001 Proceedings, 22-25 Jan. 2001, Philadelphia, PA, USA, IEEE.
- Vokurka, R. J. and R. A. Davis (1996). "Just-in-time: The evolution of a philosophy." *Production and Inventory Management Journal* 37(2): 56-59.
- Wafa, M. A. and M. M. Yasin (1998). "A conceptual framework for effective implementation of JIT. An empirical investigation." *International Journal of Operations & Production Management* 18(11): 1111-1124.
- Waggnor, D. B., A. D. Neely, et al. (1999). "The forces that shape organizational performance measurement systems: an interdisciplinary review." *International Journal of Production Economics* 60: 53-60.
- Wang, L. (2002). "The Regularity of Fuzzy Number Valued Measure." *Journal- Sichuan Normal University Natural Science Edition* 25(2): 164-167.
- Wang, X. (2001). "Variance reduction techniques and quasi-Monte Carlo methods." *Journal of Computational and Applied Mathematics* 132(2): 309-318.
- Welch, P. D. (1983). *The Statistical Analysis of Simulation Results. The Computer Performance Modeling Handbook*. S. S. Lavenberg. New York, Academic Press: 268-328.
- Wei-min, D. and F. S. Wong (1985). VERTEX METHOD AND ITS USE IN EARTHQUAKE ENGINEERING. *Proceedings of Workshop on Civil Engineering Applications of Fuzzy Sets.*, W Lafayette, IN, USA, Purdue Univ, West Lafayette, IN, USA.
- Wickham-Jones, T. (1994). *Mathematica Graphics*, Springer-Verlag New York, Inc.
- William, H., Sanders, et al. (1993). "Efficient simulation of hierarchical stochastic activity network models." *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications* 3(2/3): 271-300.
- Wilson, J. R. (1984). "Variance Reduction Techniques for Digital Simulation." *American Journal of Mathematical and Management Sciences* 4: 277-312.
- Wu, S. J. and C. T. Lin (2002). "Discrete-Time Optimal Fuzzy Controller Design: Global Concept Approach." *Ieee Transactions on Fuzzy Systems* 10(1): 21-38.
- Yamada, K. T. a. S. (2000). "Markovian availability modeling for software-intensive systems." *International Journal of Quality & Reliability Management* Vol. 17(No. 2): 200-212.
- Yasin, M. M. and M. A. Wafa (1996). "An empirical examination of factors influencing JIT success." *International Journal of Operations & Production Management* 16(1): 19-26.
- Yeh, W.-C. (2003). "A MCS-RSM approach for network reliability to minimise the total cost." *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 22(9-10): 681-688.

- Yeung, D. S., X. Z. Wang, et al. (1999). Learning weighted fuzzy rules from examples with mixed attributes by fuzzy decision trees. 1999 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics 'Human Communication and Cybernetics', Oct 12-Oct 15 1999, Tokyo, Jpn, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., USA.
- Yi, Z. and P. A. Heng (2002). "Stability of Fuzzy Control Systems With Bounded Uncertain Delays." *Ieee Transactions on Fuzzy Systems* 10(1): 91-96.
- Ylipaa, T. (2000). High-Reliability Manufacturing Systems. Department of Human Factors Engineering. Gothenburg, Chalmers University of Technology.
- Yuan, G. J. K. a. B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Prentice-Hall.
- Zadeh, L. A. (1965). "Fuzzy Sets." *Information and Control* 8: 338-352.
- Zadeh, L. A. (1973). "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes." *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v SMC-3, n 1, Jan, 1973, p 28-44.
- Zadeh, L. A. (1975). "The concept of a linguistic variable, and its applications to approximate reasoning." *Information Sciences* 8: 199-249, 301-357.
- Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 3-38. Reprinted in *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers* (Zadeh L. A., Yager R. R., Ovchinnikov S., Tong R. M. and Nguyen H. T., Eds.), Wiley, New York, 1987, 193-218.
- Zakarian, A. K., Andrew (1997). "Modeling manufacturing dependability." *IEEE Transactions on Robotics and Automation* v 13 n 2 Apr 1997. p 161-168(Univ of Iowa, Iowa City, IA, USA).
- Zhaohong, B. and W. Xifan (2002). "Studies on variance reduction technique of Monte Carlo simulation in composite system reliability evaluation." *Electric Power Systems Research* 63(1): 59-64.
- Zhang, J.-M., X.-P. Wei, et al. (2003). Evaluating design concepts by ranking fuzzy numbers. 2003 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Nov 2-5 2003, Xi'an, China, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Zuberek, W. M. (2000). Hierarchical analysis of manufacturing systems using Petri nets. 2000 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Oct 8-Oct 11 2000, Nashville, TN, USA, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., Piscataway, NJ, USA.

Anexos

Anexo A

Simplificações para integração de expressões analíticas

A.1 Simplificação de expressões antes da integração simbólica

Neste anexo pretende ilustrar-se, com o caso de estudo tratado na secção 3.3, o procedimento apresentado por Faria [1996] para simplificação das expressões dos índices de fiabilidade obtidas pela metodologia *DepCim* antes de se proceder à integração simbólica propriamente dita. Este procedimento consiste, basicamente, em eliminar os processos Dirac e Heaviside por modificação dos limites de integração. Requer, no entanto, que as funções densidade de probabilidades dos processos sejam Exponenciais, Heaviside ou Dirac.

Acontece que no caso em análise temos funções Exponenciais, Erlang de 2ª ordem e Dirac como se representam no diagrama de estados base (diagrama de estados (a) da Figura A-1). Sendo a distribuição de Erlang de 2ª ordem uma convulsão de duas exponenciais, podemos substituir o processo de reparação (Erlang₂) por dois sub-processos exponenciais em série. Constrói-se assim um diagrama de estados expandido (diagrama de estados (b) da Figura A-1) equivalente ao diagrama base para efeito de estudos de fiabilidade, apenas com distribuições Exponenciais e Dirac. O procedimento de simplificação acima referenciado pode, então, ser implementado às expressões dos índices de fiabilidade deste modelo, obtidas pela metodologia *DepCim*.

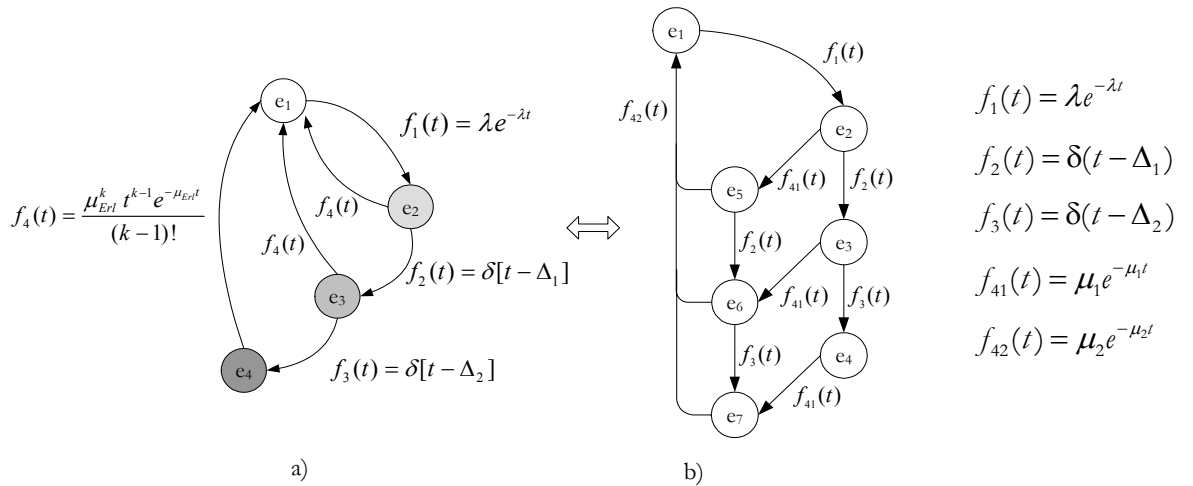


Figura A.1: Diagrama de estados expandido

Para exemplificar este procedimento considere-se que se pretende determinar as expressões das probabilidades dos estados e_2 e e_5 . Considerando m_μ a duração média do processo de reparação e m_{μ_1} e m_{μ_2} as durações médias dos sub-processos exponenciais, tem-se as seguintes relações:

$$\mu_{\text{Erl}} = \frac{2}{m_\mu}, m_{\mu_1} = m_{\mu_2} = \frac{m_\mu}{2}, \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{m_{\mu_1}}$$

ou seja:

$$\mu_{\text{Erl}} = \mu_1 = \mu_2$$

Calculemos então as expressões para as probabilidades de estado do gráfico da Figura A.1-b, cuja expressão geral é dada por:

$$P_s = \eta \sum_{\psi \in \Psi_s} t_{\psi_s} \quad (\text{A.1})$$

com,

$$\eta = \frac{\lambda}{(1 + \lambda \int_0^\infty t \cdot \mu(t) dt)} \quad (\text{A.2})$$

O cálculo das probabilidades dos estados passa por calcular para cada estado o conjunto Ψ_{e_i} constituído pelas trajectórias de modo que e_i seja o seu penúltimo estado. Considere-se por exemplo o estado e_2 .

Tem-se assim:

$$\Psi_{e_2} = \{\psi_{23}, \psi_{25}\} = \{(2, 3), (2, 5)\} \quad (\text{A.3})$$

$$t_{\psi_{23}} = \int_0^\infty t_1 f_2(t_1) \int_{t_1}^\infty f_{41}(\tau) d\tau dt_1 \quad (\text{A.4})$$

$$t_{\psi_{25}} = \int_0^\infty t_1 f_{41}(t_1) \int_{t_1}^\infty f_2(\tau) d\tau dt_1 \quad (\text{A.5})$$

Substituindo $f_2(t)$ e $f_{41}(t)$ pelas respectivas funções densidade de probabilidade, temos:

$$t_{\psi_{23}} = \int_0^\infty t_1 \delta(t_1 - \Delta_1) \int_{t_1}^\infty \mu_1 e^{-\mu_1 \tau} d\tau dt_1 \quad (\text{A.6})$$

$$t_{\psi_{25}} = \int_0^\infty t_1 \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} \int_{t_1}^\infty \delta(\tau - \Delta_1) d\tau dt_1 \quad (\text{A.7})$$

Eliminando o processo Dirac temos:

$$t_{\psi_{23}} = \Delta_1 \int_{\Delta_1}^{\infty} \mu_1 e^{-\mu_1 \tau} d\tau \quad (\text{A.8})$$

$$t_{\psi_{25}} = \int_0^{\Delta_1} t_1 \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} dt_1 \quad (\text{A.9})$$

Assim, o tempo de permanência em e_2 é,

$$t_2 = \Delta_1 \int_{\Delta_1}^{\infty} \mu_1 e^{-\mu_1 \tau} d\tau + \int_0^{\Delta_1} t_1 \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} dt_1 \quad (\text{A.10})$$

Por um procedimento idêntico efectuado para o estado e_5 tem-se:

$$\Psi_{e_5} = \{\psi_{251}, \psi_{256}\} = \{(2, 5, 1), (2, 5, 6)\} \quad (\text{A.11})$$

$$t_{\psi_{251}} = \int_0^{\infty} f_{41}(t_1) \int_{t_1}^{\infty} (t_2 - t_1) f_{42}(t_2 - t_1) \int_{t_2}^{\infty} f_2(\tau) d\tau dt_2 dt_1 \quad (\text{A.12})$$

$$t_{\psi_{256}} = \int_0^{\infty} f_{41}(t_1) \int_{t_1}^{\infty} f_2(t_2) \int_{t_2}^{\infty} (t_3 - t_2) f_{42}(t_3 - t_2) dt_3 dt_2 dt_1 \quad (\text{A.13})$$

Substituindo $f_2(t), f_{41}(t)$ e $f_{42}(t)$ pelas respectivas funções densidade de probabilidade, vem:

$$t_{\psi_{251}} = \int_0^{\infty} \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} \int_{t_1}^{\infty} (t_2 - t_1) \mu_2 e^{-\mu_2 (t_2 - t_1)} \int_{t_2}^{\infty} d(\tau - \Delta_1) d\tau dt_2 dt_1 \quad (\text{A.14})$$

$$t_{\psi_{256}} = \int_0^{\infty} \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} \int_{t_1}^{\infty} \delta(t_2 - \Delta_1) \int_{t_2}^{\infty} (t_3 - t_2) \mu_2 e^{-\mu_2 (t_3 - t_2)} dt_3 dt_2 dt_1 \quad (\text{A.15})$$

Eliminando os processos Dirac temos:

$$t_{\psi_{251}} = \int_0^{\Delta_1} \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} \int_{\Delta_1}^{\infty} (\Delta_1 - t_1) \mu_2 e^{-\mu_2 (t_2 - t_1)} dt_2 dt_1 \quad (\text{A.16})$$

$$t_{\psi_{256}} = \int_0^{\Delta_1} \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} \int_{t_1}^{\Delta_1} (t_2 - t_1) \mu_2 e^{-\mu_2 (t_2 - t_1)} dt_2 dt_1 \quad (\text{A.17})$$

O tempo de permanência em e_5 é, assim,

$$t_5 = \int_0^{\Delta_1} \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} \int_{\Delta_1}^{\infty} (\Delta_1 - t_1) \mu_2 e^{-\mu_2 (t_2 - t_1)} dt_2 dt_1 + \int_0^{\Delta_1} \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} \int_{t_1}^{\Delta_1} (t_2 - t_1) \mu_2 e^{-\mu_2 (t_2 - t_1)} dt_2 dt_1 \quad (\text{A.18})$$

Pode, agora, obter-se as expressões das probabilidades dos estados e_2 e e_5 . Para o estado e_2 :

$$P_2 = \eta \times t_2$$

Substituindo o η e t_2 pelas expressões (A.2) e (A.10), respectivamente, vem:

$$P_2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda \int_0^\infty t \mu_{\text{Err}}^2 t e^{-\mu_{\text{Err}} t} dt} \times \left(\Delta_1 \int_{\Delta_1}^\infty \mu_1 e^{-\mu_1 \tau} d\tau + \int_0^{\Delta_1} t_1 \mu_1 e^{-\mu_1 t_1} dt_1 \right) \quad (\text{A.19})$$

Como neste caso os parâmetros, μ_{Err} , μ_1 e μ_2 são iguais, representando-os por μ obtém-se:

$$P_2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda \int_0^\infty t \mu^2 t e^{-\mu t} dt} \times \left(\Delta_1 \int_{\Delta_1}^\infty \mu e^{-\mu \tau} d\tau + \int_0^{\Delta_1} t_1 \mu e^{-\mu t_1} dt_1 \right) \quad (\text{A.20})$$

Fazendo a integração analítica desta expressão temos:

$$P_2 = \frac{\lambda (1 - e^{-\Delta_1 \mu})}{2\lambda + \mu} \quad (\text{A.21})$$

Por idêntico procedimento temos para P_5 ,

$$P_5 = \eta \times t_5$$

De igual modo, substituindo na expressão anterior η e t_5 por (A.2) e (A.18), respectivamente, e integrando obtém-se a seguinte expressão para P_5 :

$$P_5 = \frac{e^{-\Delta_1 \mu} \lambda (-1 + e^{\Delta_1 \mu} - \Delta_1 \mu)}{2\lambda + \mu} \quad (\text{A.22})$$

Como os estádios e_2 e e_5 do diagrama de estados expandido representam o estado e_2 do diagrama de estados base, a probabilidade do estado e_2 do diagrama de estados base será equivalente à probabilidade conjunta dos estados e_2 e e_5 , P_{25} , do diagrama de estados expandido.

$$\begin{aligned} P_{25} = P_2 + P_5 &= \frac{\lambda (1 - e^{-\Delta_1 \mu})}{2\lambda + \mu} + \frac{e^{-\Delta_1 \mu} \lambda (-1 + e^{\Delta_1 \mu} - \Delta_1 \mu)}{2\lambda + \mu} \\ &= \frac{e^{-\Delta_1 \mu} \lambda (-2 + 2e^{\Delta_1 \mu} - \Delta_1 \mu)}{2\lambda + \mu} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Deste modo, pode obter-se as expressões das probabilidades para todos os restantes estados do sistema.

Anexo B

Análise de resultados de simulação

B.1 Introdução

Em muitos estudos de simulação gasta-se muito tempo e dinheiro no desenvolvimento do modelo e na sua programação, sendo dada pouca atenção à análise adequada dos resultados da simulação. De facto, é muito comum fazer-se uma simples corrida de simulação (*run*) de comprimento (duração) um pouco aleatória e, então, considerar-se as estimativas resultantes deste *run* como verdadeiras características do modelo. Tipicamente para conduzir o modelo de simulação ao longo do tempo são usadas amostras aleatórias obtidas de distribuições de probabilidades. Estas estimativas são, apenas, realizações particulares de variáveis aleatórias e, por isso, podem ter uma grande variância. Como consequência, estas estimativas poderão numa particular corrida de simulação deferir muito das correspondentes características correctas do modelo. O efeito cruzado destas situações é, evidentemente, poder haver uma probabilidade significativa de se fazerem inferências erróneas acerca do sistema em estudo.

Historicamente, há várias razões pelas quais a análise dos resultados de simulações não tem sido conduzida de uma forma apropriada. Primeiro, os utilizadores têm, infelizmente, a impressão que a simulação é apenas um exercício em programação de computadores, embora complicado. Consequentemente, muitos estudos de simulação começam com a construção de modelos heurísticos e sua codificação, e terminam com uma simples corrida do programa para produzir os resultados. De facto, segundo Averill e Kelton [1991] simulação é *computer-based statistical sampling experiment*. Assim, se os resultados de um estudo de simulação são para terem um significado, tem de se utilizar técnicas estatísticas apropriadas para desenhar e analisar as experiências de simulação.

Uma segunda razão para as análises estatísticas inadequadas é que, virtualmente, todos os processos de *output* de simulações são não estacionários e auto-correlacionados [Kelton, Sadowski et al., 1998]. Por isso, técnicas estatísticas clássicas baseadas em observações independentes e identicamente distribuídas (IID) não são directamente aplicáveis. Existem presentemente, vários problemas de análise de resultados para os quais não há uma solução completamente aceitável, e os métodos disponíveis são bastante complicados de aplicar.

Um outro impedimento para obtenção de estimativas precisas dos verdadeiros parâmetros ou características dos modelos é o custo do tempo de computação necessário para colher a quantidade de resultados da simulação. De facto, há situações onde temos um procedimento

estatístico adequado, mas o custo para recolher a quantidade de dados ditado pelo procedimento é proibitivo. Esta última dificuldade está, no entanto, a perder importância com o desenvolvimento e massificação dos computadores pessoais. Estes computadores são relativamente baratos de adquirir e podem trabalhar durante a noite ou aos fins-de-semana para produzirem grandes quantidades de dados de simulação, a um custo marginal praticamente nulo.

O principal objecto deste anexo é discutir e apresentar métodos para análise estatística dos resultados de simulação.

B.2 Natureza aleatória dos resultados da simulação

Podemos descrever de forma mais precisa a natureza aleatória dos resultados da simulação. Seja $Y_1, Y_2, \dots$ um resultado estocástico de uma simples corrida de simulação. Por exemplo, Y_i pode ser a produção de $i^{\text{ésima}}$ hora de um sistema de produtivo. Os Y 's são variáveis aleatórias que, em geral, não são independentes nem identicamente distribuídas (IID). Assim, muitas das fórmulas que assumem a independência das variáveis não podem ser directamente aplicadas.

Sejam $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}$ uma realização das variáveis $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ resultantes de uma corrida de simulação em que são efectuadas m observações (no caso do exemplo do sistema de produção acima, cada corrida de simulação teria uma duração de m horas), usando os números aleatórios $u_{11}, u_{12}, \dots$. Se fizermos uma nova corrida de simulação com um conjunto diferente de números aleatórios, $u_{21}, u_{22}, \dots$, obteremos uma realização diferente $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m}$ das variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$. Em geral, se se admitir fazer n replicações independentes (*runs*) da simulação (i.e., usar um conjunto diferente números aleatórios para cada replicação, reiniciar os contadores estatísticos no início de cada replicação, e em cada replicação usar as mesmas condições iniciais) tem-se como resultado as observações:

$$\begin{array}{c} y_{11}, \dots, y_{1i}, \dots, y_{1m} \\ y_{21}, \dots, y_{2i}, \dots, y_{2m} \\ \vdots \\ y_{n1}, \dots, y_{ni}, \dots, y_{nm} \end{array}$$

As observações de uma particular replicação (linha) não são, claramente, independentes nem identicamente distribuídas, o que não acontece com as observações por coluna. Refira-se que $y_{1i}, \dots, y_{2i}, \dots, y_{ni}$ ($i^{\text{ésima}}$ coluna) são observações IID da variável aleatória Y_i , para $i=1, 2, \dots, m$. Esta

independência ao longo dos *runs* é a chave para os métodos relativamente simples de análise de dados (resultados da simulação) descritos mais adiante.

Assim, falando de um modo geral, a análise dos resultados da simulação tem por objectivo usar as observações y_{ij} ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$) para inferir acerca das variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$. Por exemplo, $\bar{y}_i(n) = \sum_{j=1}^n \frac{y_{ji}}{n}$ é um estimador não enviesado de $E(Y_i)$.

B.3 Comportamentos transitório/estacionário de um processo estocástico

Considere-se um processo estocástico $Y_1, Y_2, \dots$ e seja $F_i(y|I) = P(Y_i \leq y|I)$ para $i=1, 2, \dots$, onde y é um número real e I representa as condições iniciais usadas no arranque da simulação no instante de tempo 0. (A probabilidade condicional $P(Y_i \leq y|I)$ é a probabilidade do evento $\{Y_i \leq y\}$ ocorrer dadas as condições iniciais I). Por exemplo, para um sistema de produção, I poderá especificar o número de operações presentes e as máquinas ocupadas e livres no instante de tempo 0. Chama-se a $F_i(y|I)$ a distribuição transitória do processo estocástico no instante de tempo (discreto) i para as condições iniciais I . Note-se que $F_i(y|I)$ será em geral diferente para cada valor de i e cada conjunto de condições iniciais I . As funções densidade para as distribuições transitórias correspondentes às variáveis aleatórias $Y_{i_1}, Y_{i_2}, Y_{i_3}$ e Y_{i_4} são mostradas na figura B.1 para um particular conjunto de condições iniciais I e incrementando os índices de tempo i_1, i_2, i_3 e i_4 , onde é assumido que a variável aleatória Y_{i_j} tem função densidade $f_{Y_{i_j}}$. Esta função especifica como a variável aleatória Y_{i_j} pode variar de uma replicação para outra.

Para y e I fixos as probabilidades $F_1(y|I), F_2(y|I), \dots$ são apenas uma sequência de números. Se $F_i(y|I) \rightarrow F(y)$ quando $i \rightarrow \infty$ para todo o y e para quaisquer condições iniciais I , então $F(y)$ é chamada de distribuição estacionária do processo estocástico de resultados: $Y_1, Y_2, \dots$. Estritamente falando, a distribuição estacionária $F(y)$ é obtida apenas no limite quando $i \rightarrow \infty$. Contudo, na prática, há frequentemente um índice temporal, $k+1$, tal que as distribuições a partir desse ponto serão idênticas para qualquer instante; diz-se que o estado estacionário começa no instante $k+1$ (ver figura B.1). De realçar que quando se atinge o estado estacionário ou estável não significa que as variáveis aleatórias de *output*, $Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots$ tomarão todas o

mesmo valor numa particular corrida de simulação; mas antes, que poderão ter aproximadamente a mesma distribuição. Mais, a probabilidade do sistema se encontrar num determinado estado será sempre a mesma. Deste modo, as variáveis Y_{k+1} , Y_{k+2} , ... não serão independentes mas constituirão aproximadamente um processo estocástico de covariância estacionária [Welch, 1983].

A distribuição estacionária $F(y)$ não depende das condições iniciais I , no entanto estas interferem na taxa de convergência das distribuições $F_i(y|I)$ para $F(y)$.

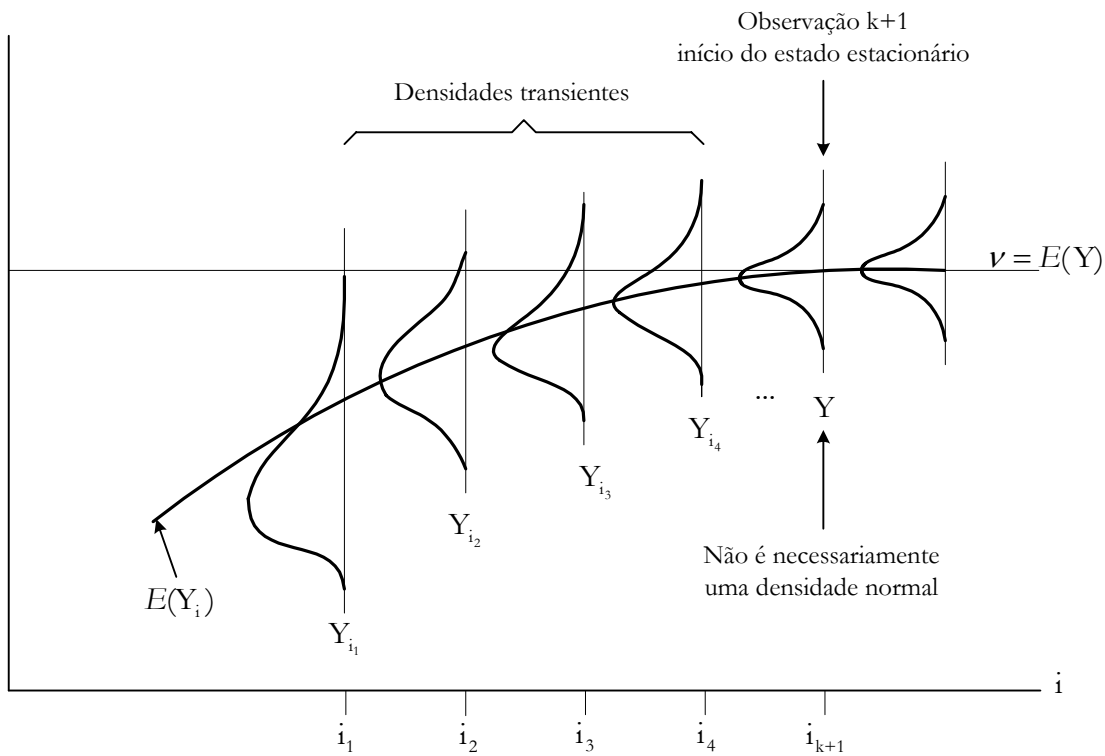


Figura B.1: Comportamento transitório/estacionário de um processo estocástico Y_1, Y_2 , com condições iniciais I

B.4 Simulações terminadas e não terminadas

As opções disponíveis no planeamento e análise de experiências de simulação dependem do tipo de simulação em jogo. As simulações podem ser terminadas ou não terminadas, dependendo de existir ou não um evento E que determine o fim da simulação.

Numa simulação terminada há um evento E que especifica o comprimento de cada replicação. Este evento poderá ser:

- um evento natural que determina a duração de cada replicação,
- uma limitação temporal que impõe o fim da simulação;
- um número de produtos produzidos no caso da simulação de um sistema de produção;
- um horizonte temporal finito.

Dado que replicações diferentes usam números aleatórios diferentes e a mesma regra de inicialização, tal implica que as variáveis aleatórias de diferentes replicações são independentes e identicamente distribuídas.

Para uma particular corrida de simulação o instante de ocorrência de E é especificado antes de se fazer a simulação (condição inicial), podendo E ser uma variável aleatória. Acontece por vezes que o evento E ocorre antes de se obter informação útil sobre o modelo. Assim, as condições iniciais de uma simulação temporizada afectam, geralmente, as medidas de desempenho pretendidas.

Simulações não terminadas ou sem fim previsto são aquelas em que não há um evento natural E que especifica o comprimento de um *run*. As medidas de desempenho ou parâmetros para simulações não terminadas podem ser de vários tipos como se mostra na figura B.2. Diz-se que uma medida de performance para uma destas simulações é um parâmetro estacionário se é uma característica da distribuição em estado estacionário do processo estocástico $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$. Acontece que a simulação não atinge o estado estacionário de imediato. Existe um período inicial no qual os estimadores são enviesados.

Uma forma de reduzir os efeitos devido ao período inicial consiste em iniciar a simulação num estado mais representativo de um estado estável. Este procedimento exige, no entanto, algum conhecimento acerca dos estados possíveis do sistema. O recurso a um modelo analítico poderá dar um contributo neste sentido.

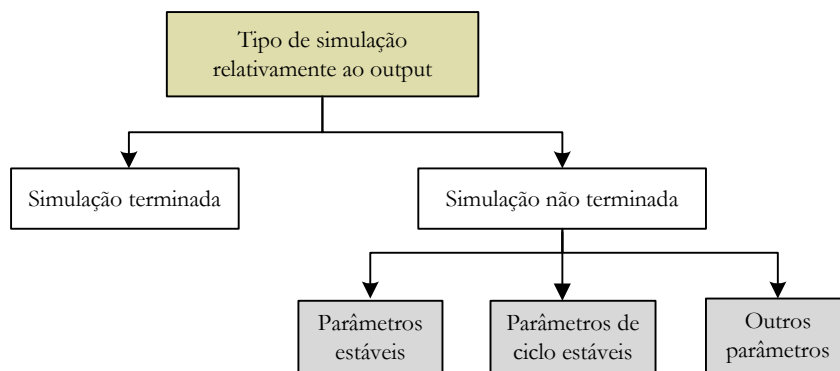


Figura B.2: Tipos de simulação relativamente ao *output*

Uma outra forma passa por considerar a simulação dividida em duas fases: (i) a fase inicial e (ii) a fase estável ou estacionária. A recolha de dados da simulação deverá efectuar-se apenas na segunda fase. A principal dificuldade reside na definição da duração de fase inicial.

Uma forma simples e eficaz de detecção do estado estacionário e, assim, estabelecer para um dado parâmetro, a duração da fase inicial consiste na observação gráfica do comportamento desse parâmetro ao longo da simulação. Deste modo poder-se-á detectar o instante em que a respectiva média convergirá para o valor final.

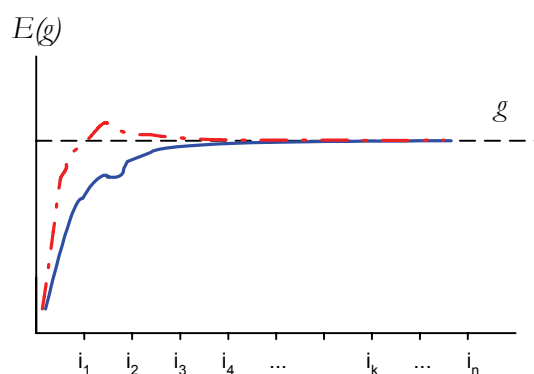


Figura B.3: Duração da fase de inicial para dois parâmetros

Para muitos sistemas reais os processos estocásticos não têm distribuições em regime estacionário dado que as características do sistema variam ao longo tempo. Por exemplo, num sistema de produção as regras de sequenciamento da produção, a disponibilidade dos recursos, e o número e a localização das máquinas podem mudar de um instante para o outro. Por outro lado, um modelo de simulação (que é uma abstracção da realidade) pode ter distribuições estacionárias uma vez que se admite, frequentemente, que as características do modelo não

mudarem ao longo do tempo. Para um particular sistema, uma simulação pode ser terminada ou não terminada, dependendo dos objectivos do estudo da simulação.

B.4.1 Análise estatística para simulações terminadas

Considere-se que são efectuadas n replicações independentes de uma simulação terminada, onde cada replicação é iniciada com as mesmas condições iniciais de todas as outras e o seu *terminus* é determinado pela ocorrência do evento E . A utilização de diferentes números aleatórios em cada replicação permite aperfeiçoar a independência das replicações.

B.4.1.1 Estimativas médias

Média amostral

Admita-se que se pretende obter uma estimativa pontual e um intervalo de confiança para a média $\mu = E(X)$, onde X é uma variável aleatória definida numa replicação da simulação do modo descrito acima. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_r$ valores obtidos de R replicações independentes do modelo de simulação. Por substituição dos X_j 's na Equação (B.1) tem-se $\bar{X}$ como um estimador pontual não enviesado de μ .

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^R X_j}{R} \quad (\text{B.1})$$

Variância amostral

A variância da amostra é um indicador da variabilidade dos valores da amostra relativamente à sua média sendo obtido por,

$$S^2 = \frac{\sum_{j=1}^R (X_j - \bar{X})^2}{(R - 1)} \quad (\text{B.2})$$

Exemplo

Uma das secções de uma empresa é constituída por N equipamentos idênticos. Devido à especificidade destes equipamentos existe um serviço de manutenção afecto a esta secção que dispõe de K equipas para responder às solicitações dos operadores. Todos os pedidos são encaminhados para o serviço de manutenção, e a resposta a estes pedidos é feita segundo uma

política FIFO. São conhecidos os tempos médio entre avarias dos equipamentos (MTBF), assim como, os tempos médios de reparação.

O modelo de simulação deste sistema é constituído por uma única fila de espera com K servidores (equipas de manutenção). Ao fim de 8 replicações independentes do modelo de simulação foram obtidos os seguintes dados:

Tabela B.1: Resultados da simulação de 8 replicações

Replicações (r)	Número de Pedidos (N_p)	Tempo de espera (X_p)
1	7	8.5
2	10	10
3	6	7
4	12	15
5	3	12
6	9	19
7	8	10
8	12	11,5

Pela expressão (B.1) obtém-se a média amostral do número de pedidos, $\bar{N}_p$ ou do tempo de espera, $\bar{X}$ cujos valores são, para este caso,

$$\bar{N}_p = 8.4 \text{ e } \bar{X} = 10.9$$

Relativamente aos valores das variâncias são:

$$Var(\bar{N}_p) = 9.41 \text{ e } Var(\bar{X}) = 6.17$$

B.4.1.2 Intervalos de confiança

Sendo os resultados obtidos por simulação, valores experimentais, não devem ser tomados como informação absoluta, mesmo que sejam obtidos através de médias calculadas sobre várias replicações independentes [Rodrigues, 1998]. É importante dispor de uma medida de confiança sobre as estimativas calculadas, expressas, por exemplo, na forma de intervalos de confiança. O intervalo de confiança para uma estimativa da média, para um grau de confiança α de $100(1 - \alpha) \%$ ($0 < \alpha < 1$) será dado por:

$$\bar{X} \pm t_{R-1, 1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{R}} \quad (\text{B.3})$$

onde $t_{R-1, 1-\alpha/2}$ representa o valor da distribuição *t-Student* com $R-1$ graus de liberdade e S^2 a variância da amostra, dada pela Equação (B.2).

Uma das desvantagem da simulação com um número fixo de replicações é que o analista não tem controlo sobre a amplitude do intervalo de confiança (ou sobre a precisão de $\bar{X}$)

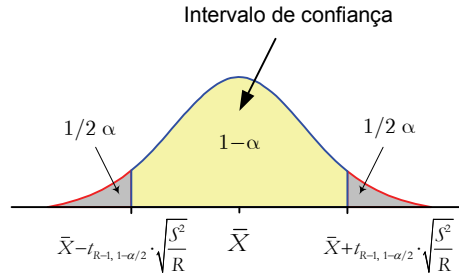


Figura B.4: Representação gráfica do intervalo de confiança

Considere-se agora, que se pretende calcular o intervalo para o tempo médio de espera de um operador pela manutenção considerando o exemplo apresentado acima. Para um nível de confiança de 5% obtém-se pela Expressão (B.3):

$$10.9 \pm t_{7,0.975} \sqrt{\frac{6.17}{8}} = [8.82, 12.98]$$

B.4.1.3 Dimensão da amostra para uma precisão pretendida

Por vezes não se pretende obter um intervalo de confiança calculado com base numa amostra extraída de varias replicações independentes (*runs*), mas sim, determinar que dimensão deve ter a amostra de modo a que se possa obter uma estimativa com uma precisão relativa pré-especificada.

A partir de um número reduzido de replicações n , pode calcular-se uma estimativa da variância, $S^2(n)$, para uma determinada grandeza G . Se admitirmos que esta estimativa não se altera significativamente com o número de replicações, podemos determinar qual a dimensão que a amostra deveria ter para se obter uma estimativa de G com a precisão pretendida. Apresenta-se

a seguir o procedimento para determinação do número de replicações requeridas para estimar a média $\mu = E(X)$ com um erro especificado ou precisão.

Começemos por definir o modo de medir o erro na estimativa $\bar{X}$ (suspende-se a dependência de n dado que o número de replicações pode ser uma variável aleatória). Se o $\bar{X}$ estimado é tal que $|\bar{X} - \mu| = \beta$ então dizemos que $\bar{X}$ tem um erro absoluto de β .

Considere-se, agora, que pretendemos construir um intervalo de confiança para μ a partir de num número reduzido de replicações n . Se assumirmos que $S^2(n)$ estimada não se altera (apreciavelmente) com o aumento do número de replicações, então, o número total de replicações, $N_\alpha^*(\beta)$, necessário para obter um erro absoluto de β é calculado de forma aproximada pela expressão,

$$N_\alpha^*(\beta) = \min \left\{ r \geq n : t_{r-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{r}} \leq \beta \right\} \quad (\text{B.4})$$

Podemos determinar $N_\alpha^*(\beta)$ iterativamente aumentando r até um valor para o qual

$$t_{r-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{r}} \leq \beta \quad (\text{B.5})$$

Em alternativa $N_\alpha^*(\beta)$ pode ser aproximado pelo menor inteiro r que satisfaz,

$$r \geq S^2(n) \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{\beta} \right)^2 \quad (\text{B.6})$$

onde z é a variável normal reduzida.

A utilização de uma amostra reduzida para estimar $S^2(n)$ pode resultar numa sobre-estimativa. Um processo de reduzir esse factor consiste em rever a estimativa após a realização de cada simulação adicional, até se obter a precisão pretendida.

Se $N_\alpha^*(\beta) > n$ e se fizermos $N_\alpha^*(\beta) - n$ replicações adicionais da simulação, então os estimador $\bar{X}$ baseado nas $N_\alpha^*(\beta)$ deverá ter um erro absoluto de aproximadamente β . A precisão da Equação (B.4) depende de quanto a variância estimada $S^2(n)$ se aproxima da $\text{Var}(X)$.

Considere-se de novo o modelo de simulação anterior. Pretende-se um erro não superior a 1.4, para o mesmo nível de confiança de 5%. Na tabela B.2 apresentam-se os erros obtidos com 7 replicações adicionais. Verifica-se, com seria de esperar, a diminuição do erro (4ª coluna da tabela B.2) à medida que o número de replicações aumenta.

Com 15 replicações ($r=15$) obtém-se um erro para $\bar{X}$ inferior a 1.4, com 95% de confiança. Em alternativa, poder-se-ia calcular o número de replicações independentes, para o mesmo nível de confiança, β , pela Expressão (B.6).

Tabela B.2: Resultados de 7 simulações adicionais

r	$t_{r-1,0.975}$	$\sqrt{\frac{6.17}{r}}$	$t_{r-1,0.975} \sqrt{\frac{6.17}{r}}$
9	2,306	0,8280	1,9093
10	2,262	0,7855	1,7768
11	2,228	0,7489	1,6686
12	2,201	0,7171	1,5782
13	2,179	0,6889	1,5012
14	2,160	0,6639	1,4339
15	2,145	0,6414	1,3757

Vejamos agora, uma nova forma de medir o erro de $\bar{X}$. Se a estimativa $\bar{X}$ é tal que $\frac{|\bar{X} - \mu|}{|\mu|} = \gamma$, então dizemos que $\bar{X}$ tem um erro relativo de γ , ou que o erro em percentagem é 100γ %.

Suponhamos mais uma vez que temos construído um intervalo de confiança para μ baseado num número fixo de replicações n . Se assumirmos que os nossos estimadores da média da população e da variância não se alteram com o aumento do número de replicações, então, número de replicações $N_r^*(\gamma)$ necessário para se obter um erro relativo de γ , pode ser calculado de forma aproximada pela expressão,

$$N_r^*(\gamma) = \min \left\{ r \geq n : \frac{t_{r-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{r}}}{|\bar{X}|} \leq \gamma' \right\} \quad (\text{B.7})$$

onde $\gamma' = \gamma / (1 + \gamma)$ é o erro relativo “ajustado” necessário para conseguir um erro relativo de γ [Averill e Kelton, 1991].

B.4.2 Análise estatística para simulações não terminadas

Existem fundamentalmente seis abordagens que se referem à análise estatística do *output* de simulações terminadas. Iremos contudo concentrar a nossa atenção na abordagem: Replicação/Eliminação, pelas seguintes razões:

- Esta abordagem se devidamente aplicada dará resultados estatísticos razoavelmente bons;
- É a abordagem mais fácil de compreender e de implementar. Isto é muito importante do ponto de vista prático devido às restrições de tempo de muitos projectos de simulação e porque muitos analistas não têm conhecimentos de estatística suficientes para usar algumas das abordagens mais complicadas;
- Esta abordagem aplica-se a todos os tipos de parâmetros de *output*;
- Pode ser facilmente utilizada para estimar vários parâmetros diferentes do mesmo modelo de simulação;
- Pode usar-se esta abordagem para comparar diferentes configurações dum sistema.

Apresentemos agora a abordagem Replicação/Eliminação para obtenção de uma estimativa pontual e de um intervalo de confiança para $\nu = E(Y)$, sendo ν a média em regime estacionário do processo $Y_1, Y_2, \dots$.

A análise é idêntica à que foi apresentada para simulações terminadas, exceptuando que agora apenas são consideradas para a obtenção de estimativas as observações após o período inicial. Em concreto, considera-se que são efectuadas n' replicações da simulação cada uma de comprimento m' observações, onde m' é muito maior que o período inicial l , determinado pelo método gráfico de Welch. Seja Y_{ji} a i ésimas observação da j ésimas replicação ($j=1, 2, \dots, n$; $i=1, 2, \dots, m$) e X_j dado por

$$X_j = \frac{\sum_{i=l+1}^{m'} Y_{ji}}{m'-l} \text{ para } j = 1, 2, \dots, n' \quad (\text{B.8})$$

Note-se que X_j usa apenas as observações da j ésimia replicação correspondente ao estado estacionário, nomeadamente $Y_{j,l+1}, Y_{j,l+2}, \dots, Y_{j,m'}$. Assim, os X_j 's são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas sendo $E(X_j) \approx \nu$ um estimador pontual não enviesado de ν . Um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)$ por cento para ν é dado por

$$\bar{X}(n') \pm t_{n'-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n')}{n'}} \quad (\text{B.9})$$

onde $\bar{X}(n')$ e $S^2(n')$ são calculados pelas Equações (B.1) e (B.2), respectivamente.

B.5 Técnicas de aceleração da convergência da simulação

Sabemos que simulações com *inputs* aleatórios produzem um *output* aleatório. Assim, se os resultados duma simulação são para ser analisados, interpretados e utilizados terão de se aplicar técnicas estatísticas adequadas à análise dos resultados da simulação.

Uma análise estatística adequada pode tornar-se bastante dispendiosa dado que as simulações em larga escala podem requerem muito tempo de computação. Por outro lado, o custo de uma análise estatística modesta do *output* também pode ser muito elevado devido à pouca precisão dos resultados (medida possivelmente por intervalos de confiança demasiado largos), poder ser inaceitável. O analista deverá assim tentar usar qualquer meio possível para aumentar a eficiência da simulação.

Evidentemente, esta eficiência obriga a programar com cuidado para que se obtenha uma execução expedita e minimize os custos dos recursos envolvidos. Porém, neste momento, o enfoque é dado à eficiência estatística, medida pela variância das variáveis aleatórias do *output* duma simulação.

Se de algum modo se poder reduzir a variância das variáveis aleatórias do *output* sem perturbar as expectativas, pode obter-se maior precisão nos resultados, i.e., intervalos de confiança para *output* mais apertados com o mesmo esforço de simulação ou, em alternativa, obter uma precisão pretendida com menos simulações.

Por vezes, a aplicação adequada de técnicas de redução de variância (TRV) pode fazer a diferença entre uma simulação dispendiosa e uma simulação eficiente e económica. Geralmente é impossível saber de antemão quão uma grande variância pode ser reduzida ou se será reduzida em todas as comparações com a simulação directa.

Finalmente algumas técnicas de redução de variância poderão elas próprias aumentarem os custos de computação. De facto, o potencial ganho na eficiência estatística pode não compensar uma eventual diminuição da eficiência computacional. Acresce que praticamente todas as TRVs requerem algum esforço extra por parte do analista, e este, como sempre, deve ser considerado.

As primeiras TRVs tiveram a sua origem com o início dos computadores e destinavam-se a serem aplicadas nas simulações de Monte Carlo ou em distribuições por amostragem [Morgan, 1984]. Contudo, segundo Averill e Kelton [1991], muitas destas TRVs não têm sido aplicadas directamente a simulações de sistemas dinâmicos complexos.

Quando se consideram as técnicas de redução de variância abordadas por [Kleijnen, 1974] entre outros, tem-se na mente o propósito da simulação. Algumas destas técnicas são utilizadas para aumentar a precisão das variáveis aleatórias de *output*. Outras, têm como finalidade facilitar a comparação de alternativas. Kleijnen [1974] lista as seguintes técnicas de redução de variância:

1. amostragem estratificada;
2. amostragem por importância;
- 3. amostragem antitética;**
4. variável de controlo;
- 5. amostragem selectiva;**
- 6. números aleatórios simultâneos.**

Destas, apenas as técnicas 3, 4 e 6 são muito utilizadas em simulação discreta [Pidd, 1990] e, talvez por isso, as que têm uma maior aplicação numa grande variedade de simulações. Diversos investigadores têm dada atenção às TRVs, existindo por isso uma extensa bibliografia sobre este tema, referindo apenas a título de exemplo [Wilson, 1984; Nelson, 1986; Wang, 2001; Zhaohong e Xifan, 2002].

Nos pontos seguintes apresenta-se uma análise mais detalhada destas duas últimas técnicas referidas.

B.5.1 Números aleatórios simultâneos

A primeira TRV considerada neste texto é a técnica dos números aleatórios simultâneos (NAS). É a técnica de redução de variância mais simples e é usada quando se pretende comparar duas ou mais políticas ou configurações alternativas dum sistema. Nestes casos é evidente que a variação amostral deve, tanto quanto possível, ser mantida constante durante a comparação de todas as políticas em estudo. Esta técnica, apesar da sua simplicidade é provavelmente a mais útil e a mais conhecida de todas as TRVs.

O método assegura que cada fonte de variação implicada com o modelo tem a sua própria *stream* de números aleatórios, definida por uma semente diferente. A ideia base consiste em poder comparar configurações alternativas com condições experimentais similares e assim poder estar mais seguro de que as diferenças observadas no desempenho do modelo são devidas a diferenças nas configurações e não a flutuações das condições experimentais. Em simulação estas “condições experimentais” referem-se às variáveis aleatórias geradas, utilizadas para conduzirem os modelos durante o desenrolar da simulação. Por exemplo, na simulação de filas de espera as “condições experimentais” poderão incluir tempos entre chegadas, serviços requeridos pelos clientes, ...; em simulação de inventários poderá falar-se de tempos entre encomendas, tamanho das encomendas (quantidade a encomendar), ..., em fiabilidade pode referir-se os tempos de reparação, intervalos entre avarias, etc. Na terminologia clássica de planeamento de experiências, esta técnica é também chamada de amostragem correlacionada, *matched streams* ou, *matched pairs* nalguns contextos de simulação.

Para expor os fundamentos do NAS de um modo mais claro considere-se o caso de duas configurações alternativas de um modelo. Pretende-se estimar $\xi = \mu_1 - \mu_2 = E(X_{1j}) - E(X_{2j})$, sendo X_{1j} e X_{2j} , observações da 1ª e da 2ª configurações na $j^{\text{ésima}}$ replicação independente. Se forem feitas n replicações de cada configuração, $E(Z_j) = \xi$, considerando $Z_j = X_{1j} - X_{2j}$ para $j=1, 2, \dots, n$. Deste modo:

$$\bar{Z}(n) = \frac{\sum_{j=1}^n Z_j}{n} \quad (\text{B.10})$$

é um estimador não enviesado de ξ . Os Z_j são por conseguinte, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Para amostras correlacionadas das duas configurações

$$Var[\bar{Z}(n)] = \frac{Var(Z_j)}{n} = \frac{Var(X_{1j}) + Var(X_{2j}) - 2Cov(X_{1j}, X_{2j})}{n} \quad (B.11)$$

Se as amostras são completamente aleatórias ou seja, se as simulações das duas configurações diferentes são feitas independentemente (i.e., com diferentes números aleatórios), então X_{1j} e X_{2j} são independentes, pelo que a $Cov(X_{1j}, X_{2j})=0$

Por outro lado, pela expressão (B.11) verifica-se que a variância do estimador $\bar{Z}(n)$ é reduzida se de algum modo for possível fazer simulações das configurações 1 e 2 de forma a que X_{1j} e X_{2j} apresentem uma correlação positiva i.e., $Cov(X_{1j}, X_{2j}) > 0$. Na técnica NAS tenta-se induzir esta correlação positiva através da utilização dos mesmos números aleatórios em todas as configurações. Tal é possível dada a natureza determinística dos geradores de números aleatórios (o mesmo gerador com a mesma semente produz a mesma sequência de números aleatórios).

Para a implementação desta técnica tem que se sincronizar os números aleatórios para cada replicação particular ao longo da simulação das diferentes configurações do sistema. Idealmente um número aleatório específico usado para um determinado propósito numa configuração deve ser usado para o mesmo propósito em todas as outras configurações. Em particular não é normalmente suficiente apenas iniciar as simulações de todas as configurações com a mesma semente de números aleatórios.

Infelizmente não está completamente provado que o NAS permite sempre uma redução da variância. Mesmo que tal aconteça, normalmente não se sabe de antemão qual a redução da variância que se poderá ter. A eficácia desta técnica depende inteiramente dos modelos particulares em comparação e de pressupostos do analista acreditando que diferentes modelos responderão de forma similar para grandes e pequenos valores das variáveis aleatórias que controlam os modelos ao longo das simulações.

Por exemplo, pode esperar-se para diferentes configurações de um servidor que menores intervalos de tempo entre chegadas poderá resultar em longos atrasos e filas para cada sistema.

B.5.2 Amostragem Antitética

Esta técnica de redução da variância baseia-se na utilização de dois estimadores $F_1(x)$ e $F_2(x)$ que podem ser agregados de acordo com a Equação (B.12) dando origem a um terceiro

estimador $F_3(x)$. A variância de $F_3(x)$ pode expressar-se através da Equação (B.13) em função das variâncias de $F_1(x)$ e $F_2(x)$ e da covariância respectiva. Se os dois estimadores iniciais estiverem negativamente correlacionados, isto é, se a sua covariância respectiva for negativa, verifica-se que a variância de $F_3(x)$ é inferior à que seria obtida se as variáveis aleatórias associadas a $F_1(x)$ e a $F_2(x)$ fossem independentes.

$$F_3(x) = \frac{F_1(x) + F_2(x)}{2} \quad (B.12)$$

$$Var[F_3(x)] = \frac{Var[F_1(x)] + Var[F_2(x)] - 2Cov[F_1(x), F_2(x)]}{4} \quad (B.13)$$

Esta técnica de redução da variância pode ser implementada de acordo com os seguintes passos:

Passo 1: sortear um vector x associado a um estado do sistema através da obtenção de uma sequência de números pseudo-aleatórios dada por:

$$u_1; u_2; \dots; u_n \quad (B.14)$$

Passo 2: A partir da sequência anterior são obtidos os números pseudo-aleatórios complementares para 1. Deste modo, dispõe-se de uma nova sequência de números (B.15) designada por sequência antitética da inicial. Esta nova sequência define o estado antitético do estado inicial.

$$1 - u_1; 1 - u_2; \dots; 1 - u_n \quad (B.15)$$

Considere-se que foram obtidos N pares de sequências de números pseudo-aleatórios de acordo com (B.14) e (B.15). Após a avaliação de $F(x)$ para as $2N$ sequências obtidas é possível construir uma nova amostra de $F(x)$ constituída pela semi-soma de cada um dos pares de valores de $F(x)$. Existindo uma correlação negativa entre o valor de $F(x)$ associado ao primeiro estado e o associado ao segundo estado de cada um desses pares é possível obter uma estimativa para a variância de uma amostra inferior à que seria calculada se esta técnica não fosse utilizada.

B.5.3 Variável de controlo

O método da variável de controlo (VC) tenta tirar vantagem da correlação entre certas variáveis aleatórias para por essa via obter uma redução da variância das variáveis de *output*. Esta

correlação pode surgir naturalmente durante o curso da simulação ou advir do facto do modelo de simulação não ser propriamente um caixa negra, sendo percebido pelo analista que conduz as experiências de simulação. Esta correlação pode também ser induzida usando a técnica dos números aleatórios simultâneos com uma simulação auxiliar.

Como exemplo considere-se um sistema simples de filas de espera constituído por um único servidor. Se o tempo de serviço aumenta, é de esperar um aumento do comprimento da fila de espera admitindo que o intervalo entre chegadas não se altera.

Considerando a seguinte nomenclatura:

$Q \rightarrow$ variável aleatória do comprimento da fila de espera que toma valores q_i ,
com $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\mu_Q \rightarrow$ verdadeira média da distribuição do comprimento da fila de espera

$\bar{q} \rightarrow$ comprimento médio da fila de espera obtido da simulação

$\mu_s \rightarrow$ verdadeira média da distribuição do tempo de serviço

$\bar{s} \rightarrow$ tempo médio de serviço obtido da simulação

pode escrever-se,

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{n} \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{n} \quad (\text{B.17})$$

Tem-se então a tentação de usar $\bar{q}$ como um estimador de μ_Q uma vez que $E(\bar{q}) = \mu_Q$ i.e., $\bar{q}$ é um estimador não enviesado de μ_Q . Acontece, contudo, que este estimador pode ser melhorado.

É legítimo pensar-se que tempos de serviço maiores que a média (i.e., $\bar{s} > \mu_s$) conduzam a comprimentos da fila de espera maiores que a média e vice-versa i.e., $\bar{q}$ e $\bar{s}$ são correlacionados, neste caso, positivamente. Assim, se correndo a simulação se verificar que $\bar{s} > \mu_s$ (o que pode dizer-se pelo seguro uma vez que se conhece μ_s) deve suspeitar-se de que $\bar{q}$ está acima de μ_Q (embora não se saiba pela certa, a não ser que a correlação entre $\bar{q}$ e $\bar{s}$ seja perfeita). Em consequência deve ajusta-se $\bar{q}$ para baixo. Por outro lado, se $\bar{s} < \mu_s$ deve esperar-

se que $\bar{q} < \mu_Q$ e, também por isso, ajusta-lo para cima. Deste modo, tira-se proveito do conhecimento de $\bar{s}$ para ajustar $\bar{q}$ para próximo de μ_Q , reduzindo assim a variabilidade de $\bar{s}$ em volta de μ_Q . Chama-se a $\bar{s}$ variável de controlo de $\bar{q}$ uma vez que é usada para ajustar $\bar{q}$ ou de algum modo a controlar.

Se $\bar{s} < \mu_s$, pode obter-se para μ_Q um estimador melhor do que $\bar{q}$. Esse novo estimador é:

$$\hat{q} = \bar{q} - \alpha(\bar{s} - \mu_s)$$

onde α é um número real.

De salientar que $E(\hat{q}) = E(\bar{q}) - \alpha E(\bar{s} - \mu_s)$. Como $E(\bar{q}) = \mu_Q$ e $E(\bar{s}) = \mu_s$, pode escrever-se:

$$E(\hat{q}) = \mu_Q - \alpha(\mu_s - \mu_s)$$

donde resulta que para qualquer número real α , $E(\hat{q}) = \mu_Q$, ou seja, $\hat{q}$ é um estimador não enviesado de μ_Q devendo ter menor variância que $\bar{q}$.

Considerando as variâncias tem-se,

$$\begin{aligned} Var(\hat{q}) &= Var(\bar{q} - \alpha\bar{s}) \\ &= Var(\bar{q}) + \alpha^2 Var(\bar{s}) - 2\alpha Cov(\bar{q}, \bar{s}) \end{aligned}$$

donde,

$$Var(\hat{q}) - Var(\bar{q}) = \alpha^2 Var(\bar{s}) - 2\alpha Cov(\bar{q}, \bar{s})$$

A variância de $\hat{q}$ é menor que a variância de $\bar{q}$ se e só se, $\alpha^2 Var(\bar{s}) - 2\alpha Cov(\bar{q}, \bar{s}) < 0$, isto é se,

$$2\alpha Cov(\bar{q}, \bar{s}) > \alpha^2 Var(\bar{s}) \tag{B.18}$$

A relação (B.18) pode ou não verificar-se, dependendo da escolha de $\bar{s}$ e de α . Através de uma selecção adequada do valor de α de modo a satisfazer a desigualdade (B.18) pode reduzir-se a variância.

Seja $Z(x)$ uma função que permite obter, por via analítica, uma estimativa de $F(x)$ para cada estado do sistema e cujo valor médio, calculado pela mesma via, é $E(Z)$. A função $Z(x)$ será considerada uma função de regressão e deverá permitir obter uma estimativa para o valor de

$F(x)$. Sendo $\delta(x)$ a diferença existente entre $F(x)$ e $Z(x)$, pode ser definido um novo estimador $F^*(x)$ através da Equação (B.19).

$$F^*(x) = \delta(x) + E(Z) = F(x) - Z(x) + E(Z) \quad (\text{B.19})$$

$$V(F^*) = V(\delta) \quad (\text{B.20})$$

Os valores médios de $F(x)$ e de $F^*(x)$ são iguais e a variância de $F^*(x)$ é dada pela Equação (B.20). Deste modo, se o coeficiente de correlação entre $Z(x)$ e $F(x)$ for positivo e elevado, isto é, se $Z(x)$ constituir uma boa aproximação de $F(x)$, o valor de $V(\delta)$ será pequeno pelo que a variância de $F^*(x)$ será inferior à de $F(x)$.

A implementação desta técnica exige o cálculo de $Z(x)$ para cada estado analisado e a obtenção por via analítica do valor esperado de $Z(x)$. A estimativa do valor esperado de $F(x)$ pode ser, então, obtida através de:

$$\hat{E}(F) = E(Z) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F(x_i) - Z(x_i)] \quad (\text{B.21})$$

Anexo C

Resultados intermédios do caso de estudo 2

C.1. Introdução

Neste anexo apresentamos os principais cálculos que suportam alguns dos resultados referentes ao caso de estudo 2, apresentados na Secção 6.3. O procedimento adoptado para a obtenção dos modelos canónicos nos diferentes nodos de interesse apresenta-se descrito em termos gerais no capítulo 4.

C.2. Modelos canónicos internos

O sistema de produção é constituído por quatro subsistemas: três células de fabrico e uma linha de produção. As células de fabrico 1, 2 e 3 são células montante, uma vez que a montante destas não existem outras células/equipamentos de produção. São por isso alimentadas, em termos de materiais, directamente a partir do armazém de matérias-primas/componentes. De acordo com os dados apresentados para este caso de estudo, conhecemos já para a célula 1, a frequência de falhas e a distribuição do tempo de reposição. Relativamente às outras células dispõe-se das taxas de falhas (constantes) e das distribuições dos tempos de reparação dos equipamentos. Com estes dados e conhecendo a forma como as máquinas/equipamentos de cada subsistema se relacionam em termos funcionais, podemos determinar os modelos canónicos internos de cada um destes subsistemas.

C.2.1. Células montante

O modelo canónico interno da célula 1, CM_{i1} , pode ser estabelecido sem efectuar qualquer cálculo, uma vez que, são dados do problema a frequência de falhas e a distribuição do tempo de reposição. Deste modo temos:

$$CM_{i1} = \{\Lambda_1, f_{\rho 1}(t)\}$$

sendo:

$$L_1 = 0.08 \text{ falhas h}^{-1}$$

$$f_{\rho 1}(t) = 2.7935 e^{-1.667t} t^{1.1}$$

Para as células 2 e 3 conhecem-se as distribuições dos tempos de reparação e de reconfiguração das máquinas que constituem cada uma das referidas células. Os gráficos *a* e *b* da figura abaixo

representam graficamente estas funções. Também se mostra nesta figura (gráfico c) as distribuições dos tempos de reparação das máquinas que fazem parte da linha de produção.

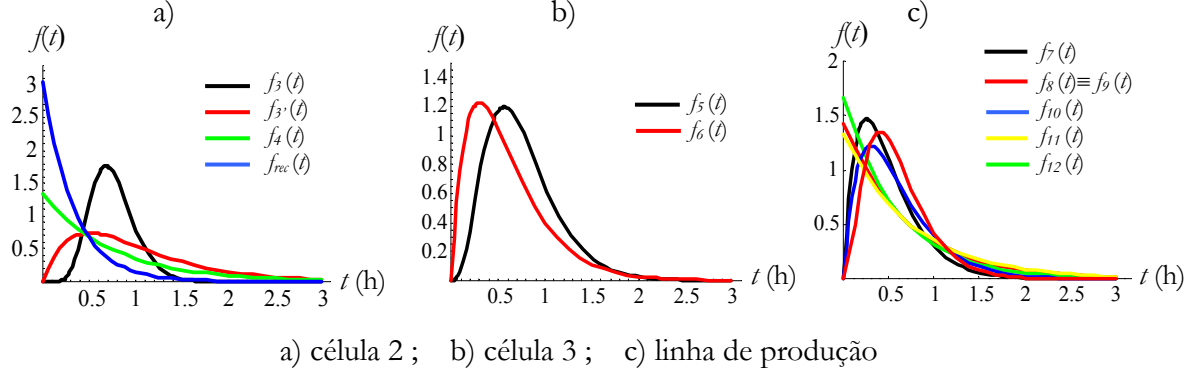


Figura C.1: Distribuições dos processos de reparação e de reconfiguração

Os modelos canónicos internos das células 2 e 3 são obtidos de acordo com o procedimento descrito no capítulo 4. Tem-se assim para a célula 2:

$$CM_{i2} = \{\Lambda_2, f_{\rho 2}(t)\}$$

com

$$L_2 = 0.0308 \text{ falhas h}^{-1}$$

$$f_{\rho 2}(t) = 1.5934 e^{-3.03t} + 0.6185 e^{-1.333t} + e^{-2t} (0.01031 + 0.0208 t)$$

e para a célula 3:

$$CM_{i3} = \{\Lambda_3, f_{\rho 3}(t)\}$$

sendo:

$$L_3 = 0.03667 \text{ falhas h}^{-1}$$

$$f_{\rho 3}(t) = 6.06 e^{-3.333t} t + 61.29 e^{-5.33t} t^3$$

Na Figura C.2 mostra-se uma representação gráfica das funções dos tempos de reposição, $f_{\rho i}(t)$ (com $i=1, 2, 3$) para cada uma das células montante.

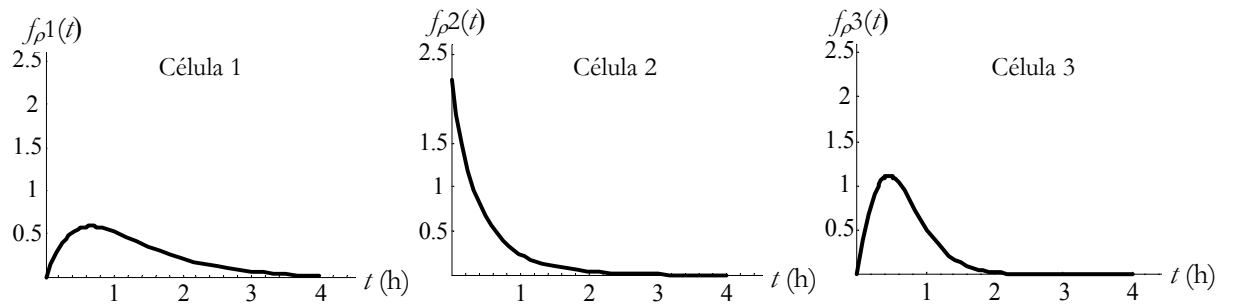


Figura C.2: Gráfico da distribuição do tempo de reposição nas células 1, 2 e 3

C.2.2. Linha de produção

A linha de produção produz dois tipos de produto diferentes, tendo cada tipo de produto, um percurso próprio na linha de produção, conduzindo a que o conjunto de máquinas envolvido na produção do produto tipo A é diferente do conjunto de máquinas envolvido na produção do produto tipo B. Temos, assim, um modelo canónico interno da LP para cada tipo de produto:

CM_{ilp}^A para o produto tipo A e, CM_{ilp}^B para o produto tipo B.

Com as distribuições dos tempos de falha e de reparação das máquinas da LP (Tabela 6.13), o percurso de cada tipo de produto na LP e a ligação funcional das máquinas, calculam-se os modelos canónicos, CM_{ilp}^A e CM_{ilp}^B a partir das expressões (4.5) e (4.6), obtendo-se:

$$CM_{ilp}^A = \{\Lambda_{LP}^A, f_{\rho LP}^A(t)\}$$

com:

$$\Lambda_{LP}^A = 0.0373 \text{ falhas/hora}$$

$$f_{\rho LP}^A(t) = 0.298 \times 2.72^{-1.67t} + 0.274 \times 2.72^{-1.43t} + 0.224 \times 2.72^{-1.33t} + 2.861 \times 2.718^{-4t} t + 1.49 \times 2.72^{-3.33t} t + 9.313 \times 2.72^{-5t} t^2$$

e

$$CM_{ilp}^B = \{\Lambda_{LP}^B, f_{\rho LP}^B(t)\}$$

sendo:

$$\Lambda_{LP}^B = 0.01847 \text{ falhas/hora} \quad \text{falhas } h^{-1}$$

$$f_{\rho LP}^B(t) = 0.451 e^{-1.33t} + 5.774 e^{-4t} t + 18.8 e^{-5t} t^2$$

Na figura abaixo pode ver-se a forma das distribuições dos tempos de reposição da LP devido a falhas endógenas (internas), quando produz os produtos tipo A e tipo B, respectivamente.

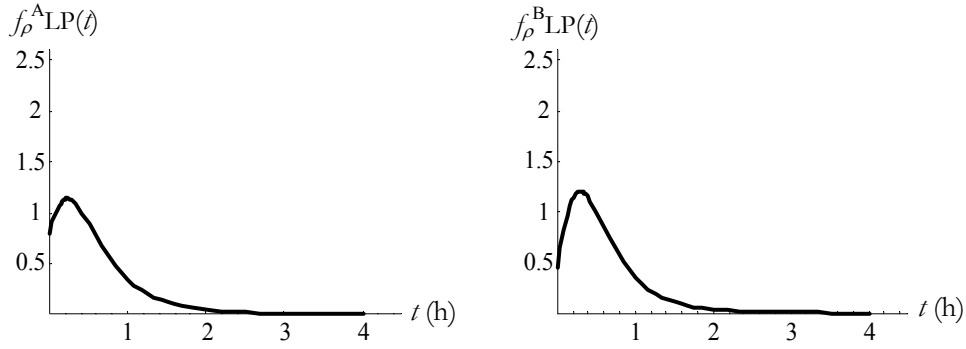


Figura C.3: Gráficos das distribuições do tempo de reposição da LP devido a falhas endógenas

C.3. Modelos canónicos à saída das células montante

As células 1, 2 e 3 são células montantes, e por isso, $CM_{ij} \equiv CM_{oj}$, com ($j=1, 2, 3$) como se mostra na Figura 6.31. Por outro lado, os modelos canónicos CM_{olP}^A e CM_{olP}^B à saída linha de produção (nodos 7 e 8), não coincidem com os modelos internos respectivos (ver Figura 6.32), como acontece com as células 1, 2 e 3. De facto, a LP é alimentada em termos de materiais pelas células montante, pelo que a falha de fluxo num ou mais dos nodos 3, 4 ou 6, provoca a paragem da linha de montagem por falha exógena.

C.4. Modelos canónicos à saída dos *buffers* intermédios

Os modelos canónicos CM_{b1} , CM_{b2} e CM_{b3} caracterizam o fluxo de materiais à saída dos *buffers* B1, B2 e B3, respectivamente (nodos 3, 4 e 6). Estes modelos são obtidos por agregação dos processos b1, b2 e b3 (processos que modelam os tempos de tolerância dos referidos *buffers*) aos modelos canónicos, CM_{o1} , CM_{o2} e CM_{o3} , respectivamente, como se mostra na Secção 4.4. Obviamente que, quer os valores médios quer a forma das distribuições de probabilidades destes processos, condicionam os modelos à saída dos *buffers*. Para o caso de estudo 2, consideramos os processos b1, b2 e b3 como sendo determinísticos, com valores $\Delta 1$, $\Delta 2$ e $\Delta 3$, respectivamente. Assim, tomando as diferentes combinações de valores dos *buffers* apresentadas na Tabela 6.16, e utilizando as expressões (4.7) e (4.9) obtém-se os modelos canónicos CM_{b1} , CM_{b2} e CM_{b3} , descritos na tabela abaixo.

Tabela C.1: Modelos canónicos à saída dos *buffers* intermédios

nodo	Modelo canónico	Δ_i (h)	Freq. de interrupção de fluxo (falhas/h)	<i>f.d.p.</i> do tempo de indisponibilidade de fluxo
3	$CM_{b1} = \{\Lambda_{b1}, f_{\rho b1}(t)\}$	$\Delta_1=0$	$\Lambda_{b1} = 8 \times 10^{-2}$	$f_{\rho b1}(t) = 2.793 e^{-1.667t} t^{1.1}$
		$\Delta_1=0.5$	$\Lambda_{b1} = 6.56 \times 10^{-2}$	$f_{\rho b1}(t) = 1.48 e^{-1.667t} (0.5 + t)^{1.1}$
		$\Delta_1=1$	$\Lambda_{b1} = 4.276 \times 10^{-2}$	$f_{\rho b1}(t) = 0.9872 e^{-1.667t} (1 + t)^{1.1}$
		$\Delta_1=2$	$\Lambda_{b1} = 1.372 \times 10^{-2}$	$f_{\rho b1}(t) = 0.581 e^{-1.667t} (2 + t)^{1.1}$
4	$CM_{b2} = \{\Lambda_{b2}, f_{\rho b2}(t)\}$	$\Delta_2=0$	$\Lambda_{b2} = 1.497 \times 10^2$	$f_{\rho b2}(t) = 1.593 e^{-3.03t} + 0.6185 e^{-1.33t} + e^{-2t} (0.0052 + 0.0105t)$
		$\Delta_2=0.5$	$\Lambda_{b2} = 1.1 \times 10^{-2}$	$f_{\rho b2}(t) = 2.78 (0.35 e^{-3.03t} + 0.3175 e^{-1.33t} + e^{-2t} (0.0052 + 0.0105t))$
		$\Delta_2=1$	$\Lambda_{b2} = 4.63 \times 10^{-3}$	$f_{\rho b2}(t) = 6.65 (0.077 e^{-3.03t} + 0.163 e^{-1.33t} + e^{-2t} (0.0052 + 0.0105t))$
		$\Delta_2=2$	$\Lambda_{b2} = 1.048 \times 10^{-3}$	$f_{\rho b2}(t) = 29.39 (0.00372 e^{-3.03t} + 0.043 e^{-1.33t} + e^{-2t} (0.0052 + 0.0105t))$
6	$CM_{b3} = \{\Lambda_{b3}, f_{\rho b3}(t)\}$	$\Delta_3=0$	$\Lambda_{b3} = 3.67 \times 10^{-2}$	$f_{\rho b3}(t) = 6.06 e^{-3.33t} t + 61.29 e^{-5.33t} t^3$
		$\Delta_3=0.5$	$\Lambda_{b3} = 2.21 \times 10^{-2}$	$f_{\rho b3}(t) = 1.66 (0.5 + t) (1.145 e^{-3.33t} + 4.26 e^{-5.33t} (0.5 + t)^2)$
		$\Delta_3=1$	$\Lambda_{b3} = 6.78 \times 10^{-3}$	$f_{\rho b3}(t) = 5.41 (1 + t) (0.216 e^{-3.33t} + 0.296 e^{-5.33t} (1 + t)^3)$
		$\Delta_3=2$	$\Lambda_{b3} = 3 \times 10^{-4}$	$f_{\rho b3}(t) = 122.1 (2 + t) (0.0077 e^{-3.33t} + 0.00143 e^{-5.33t} (2 + t)^2)$

Na Figura C.4 mostra-se uma representação gráfica das funções dos tempos de indisponibilidade de fluxo nos nodos 3, 4 e 6. Alterações nos tempos de tolerância dos *buffers* provocam alterações na frequência de transição para o estado de falha em qualquer um dos nodos 3, 4 ou 6. Na verdade, esta redução é acentuada, em qualquer dos nodos, quando os *buffers* intermédios toleram a indisponibilidade dos subsistemas a montante durante períodos até cerca de uma hora. À medida que se aumenta os *buffers* a redução marginal nos valores das frequências de falha perde importância (Figura C.5). Verifica-se ainda, para o nodo 4, que os diferentes valores de D2 considerados, não introduzem alterações significativas na forma das distribuições do tempo de indisponibilidade de fluxo de materiais, ao contrário do que acontece nos nodos 3 e 6.

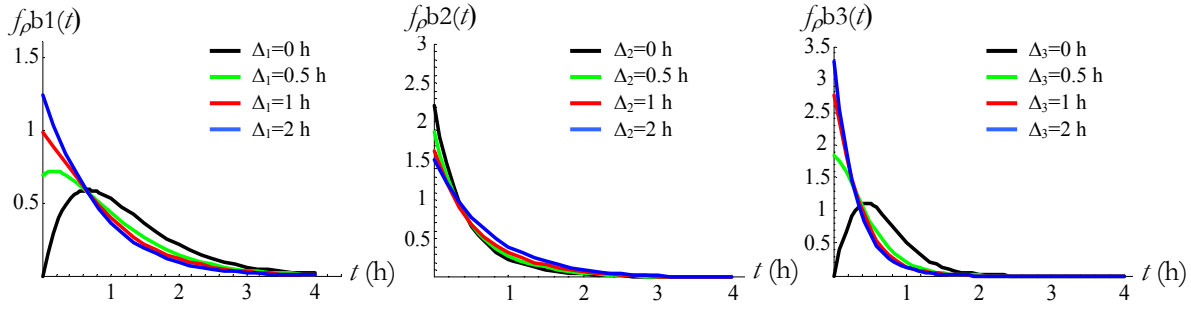


Figura C.4: Representação gráfica das distribuições dos tempos de indisponibilidade de fluxo nos nodos 3, 4, e 6 *vs* dimensão dos *buffers* B1, B2 e B3

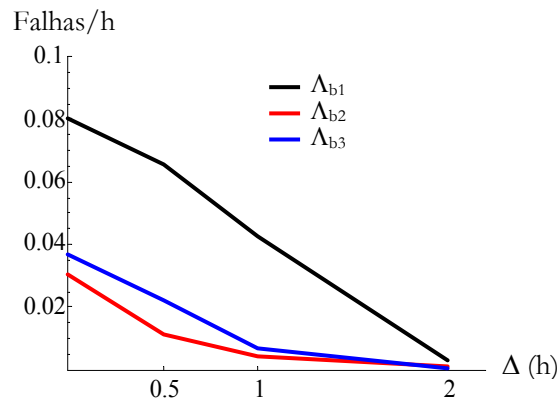


Figura C.5: Representação gráfica das frequências de falha nos nodos 3, 4 e 6 *vs* dimensão dos *buffers* B1, B2 e B3

C.5. Modelo canónico à saída do sistema de produção

Neste momento conhecem-se os modelos canónicos CM_{b1} , CM_{b2} , CM_{b3} , CM_{ilp}^A e CM_{ilp}^B . Sabe-se, também, que para haver fluxo do produto A à saída da linha de produção (nodo 7) terá que haver fluxo de materiais (sub-componentes, componentes, ...) nos nodos 3, 4 e 6, e a linha de produção terá que estar operacional, o que desde logo sugere um arranjo funcional em série. De modo idêntico, para que haja fluxo de produtos tipo B à saída da linha de produção (nodo 8) terá de se verificar, simultaneamente: fluxo de materiais nos nodos 3 e 5 e a linha de produção estar operacional, indicando de igual modo um arranjo série. Podemos, então, obter os modelos canónicos, CM_{olp}^A e CM_{olp}^B recorrendo, mais uma vez, às expressões (4.5) e (4.6). Os resultados deste cálculo são apresentados na Tabela C.2. Considerou-se para o efeito, as combinações de valores dos *buffers* intermédios apresentadas na Tabela 6.17.

Tabela C.2: Modelos canónicos à saída do sistema de produção

nodo	Modelo canónico	Ki: ($\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$)	-Freq. de interrupção de fluxo (falhas/h)	<i>f.d.p.</i> do tempo de indisponibilidade de fluxo
7	$CM_{olp}^A = \{\Lambda_{SP}^A, f_{\rho SP}^A(t)\}$	K1: (0; 0; 0) K2: (2; 0; 0) K3: (2; 1; 0) K4: (2; 1; 1) K5: (3; 1; 0) K6: (3; 1; 1)	$\Lambda_{SP}^A = 7.9196 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^A = 5.6227 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^A = 4.0316 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^A = 3.292 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^A = 5.1105 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^A = 6.0151 \times 10^{-2}$	
8	$CM_{olp}^B = \{\Lambda_{LP}^B, f_{\rho LP}^B(t)\}$	K1: (0; 0; 0) K2: (2; 0; 0) K3: (2; 1; 0) K4: 2; 1; 1) K5: (3; 1; 0) K6: (3; 1; 1)	$\Lambda_{SP}^B = 5.297 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^B = 3.393 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^B = 2.1996 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^B = 1.6494 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^B = 2.4883 \times 10^{-2}$ $\Lambda_{SP}^B = 3.393 \times 10^{-2}$	

Por uma questão de facilidade de apresentação optamos por apresentar de uma forma gráfica, apenas, as funções dos tempos de indisponibilidade nos nodos 7 e 8, dada a complexidade das expressões analíticas. Como seria de esperar, verifica-se pelos valores da tabela acima, que as frequências de falha de fluxo (falhas de *output*) nos nodos 7 e 8 reduzem-se à medida que se aumentam os *buffers* intermédios.

C.5.1. Distribuição do tempo diário de indisponibilidade do sistema

Finalmente, podemos determinar para um determinado período T , a distribuição do tempo de indisponibilidade do sistema de produção nos nodos 7 e 8, (ver procedimento descrito na Secção 5.5), uma vez que dispomos, neste momento, dos modelos canónicos para estes nodos. A expressão analítica desta distribuição para cada produto (ou para cada nodo) é fornecida pela expressão (5.55).

Na Figura C.6 mostram-se os resultados obtidos, para os modelos canónicos nos nodos 7 e 8, descritos na Tabela C.2.

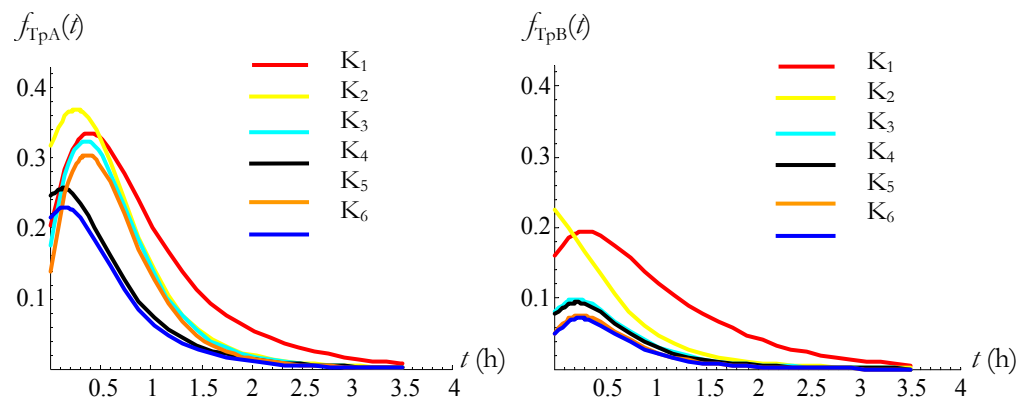


Figura C.6: Distribuições dos tempos diários de paragem do sistema para as várias combinações de valores dos *buffers* intermédios