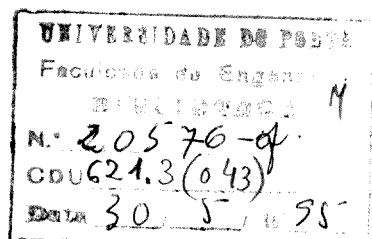


qrs 750
Eler.

PEDRO MANUEL FERREIRA CASTRO BORGES

Seleccção de Sortidos

Caracterização e Soluções



V. N. 34593

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

043 M
B733A
ex. 2

Abril 1994

Tese submetida para satisfação parcial
dos requisitos do programa de mestrado
em
Engenharia Electrotécnica e de Computadores
(Perfil de sistemas)

Tese realizada sob a supervisão do

Prof. Doutor José António Soeiro Ferreira

Professor Associado do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de
Computadores da

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Aos montes

Agradecimentos

Aos meus pais por ainda terem jantar;
ao meu supervisor Prof. Doutor José Soeiro Ferreira pela orientação;
ao José Fernando pelo código emprestado e pelo seu trabalho na área dos cortes, que se vê “prolongado” nos capítulos finais desta dissertação;
à Paula pela paciência;
ao Miguel pelo trabalho pesado;
ao Paulo Tiago pelas referências mais teimosas;
ao Sérgio pela revisão e pela “paralelização” do ASSORT;
ao Tiago;
à Rita e à Ana pela revisão integral do texto;
às opiniões da Helena e da Maria Antónia;
ao José Paulo A., Rui Barros e Fátima Tavares, pela colaboração em aspectos específicos;
aos actuais administradores do *vangogh*, *gui* e *last*, pelas facilidades concedidas;
ao José David e à direcção do C.A.G.E. pela flexibilidade;
às pessoas que faltam.

Ἡ γνῶσις φυσιοῖ, ἡ δὲ ἀγάπη
οἰκοδομεῖ· εἴ τις δοκεῖ ἐγνώκῃ
τι, οὐπω ἔγνω καθὼς δεῖ γινῶναι.

“A ciência exacta incha, mas a caridade
edifica. Se alguém julga saber alguma,
ainda não sabe como deveria saber”

(1 Cor 8, 1b-2)

Trad. da Bíblia de Jerusalém

Resumo

Quando um produto ou material em bruto é produzido em grandes quantidades, devem ser tomadas algumas decisões quanto à escolha das características das unidades a produzir ou armazenar. Apenas um sortido limitado de tipos pode ser produzido ou armazenado e esses tipos devem satisfazer as necessidades do produto minimizando simultaneamente o desperdício, ou maximizando o lucro. Se as necessidades não correspondem exactamente às unidades produzidas, então é necessária satisfazer essa procura com o sortido existente, gerando desperdício ou perda de valor.

O problema de determinar o melhor conjunto de unidades a oferecer ou armazenar é conhecido como problema de selecção do sortido (*assortment problem*) ou problema do catálogo (*catalog problem*). Os problemas de selecção de sortidos podem ter muitas estruturas e estão muitas vezes associados aos problemas dos cortes. Podem também ser associados a problemas de normalização e a outros problemas.

Apresentam-se diversos exemplos, reais e recolhidos da literatura, de diferentes tipos de problemas de selecção de sortidos. Estes exemplos são usados para apresentar uma taxonomia do problema. Finalmente descreve-se o material publicado sobre o assunto.

Quando a selecção de sortidos está associada com problemas de cortes, as duas operações estão fortemente ligadas e o problema do sortido pode ser visto como um alargamento do problema dos cortes e não deve ser estudado independentemente deste. Consideram-se os problemas a uma e a duas dimensões. Estuda-se a relação entre a selecção de sortidos e as operações de corte, recorrendo à representação das funções objectivo, o que permite obter conclusões importantes quanto ao espaço de resultados. Estas conclusões são simples, mas importantes na comparação de métodos de resolução.

Complementa-se a análise utilizando alguns métodos, baseados em heurísticas genéricas de pesquisa para problemas de optimização combinatória, cujos resultados se apresentam. Estuda-se a influência das estruturas de vizinhança no desempenho destes métodos.

Palavras chave: Problema do sortido, Problema do catálogo, Problema dos cortes, Optimização combinatória, Métodos de pesquisa genéricos

Abstract

When a product or raw material is produced in large quantities, some decisions must be made regarding the choice of characteristics of the units to be produced or stocked. Only a limited number of unit types can be produced or stocked and these units must meet some client requirements while minimizing waste or maximizing profit. If the client needs do not exactly match the produced units, then something must be done to satisfy that demand with the existing stock, generating costs or value loss.

The problem of determining the best set of units to offer or stock is generally known as the assortment problem. The assortment problem can have many different structures and is often associated with cutting and stock problems. It can also be related with standardization problems and other problems.

Several examples are shown, both from the literature and the real world, of different kinds of assortment problems. Following these examples, a taxonomy of the problem is discussed and some published material is described.

When the assortment selection problem has an associated cutting and stock operation, the two problems are tightly related and the assortment problem can be seen as a generalization of the cutting and stock problem and should not be studied independently from it. Both one and two dimensional problems are considered. The relation between assortment selection and the cut and stock operations is studied, by the generation and graphical analysis of the objective functions, which allow the drawing of relevant conclusions about the solution space. These conclusions are important when comparing solution procedures. They show the economic importance of assortment selection, and that, in some cases, it might not be too difficult to find a good solution.

The analysis is complemented by use of some methods based on heuristic search procedures to combinatorial problems. The results of the application of such solution procedures are shown. The influence of the neighbour generation operators is also studied.

Keywords: Assortment problem, Combinatorial optimization, Cutting stock, Heuristic search

Índice

1 Introdução	1
1.1 Enquadramento	2
1.2 Quanto ao estilo e forma.....	3
2 Selecção de Sortidos ou Catálogos	5
2.1 Introdução	5
2.2 Exemplos	7
2.2.1 Indústria do aço.....	7
2.2.2 Determinação óptima de tamanhos de calçado	7
2.2.3 Indústria de componentes	7
2.2.4 Problema de normalização (Standardization problem)	8
2.2.5 Perfis metálicos	8
2.2.6 Indústria farmacêutica e embalagem	8
2.2.7 Indústria vidreira.....	9
2.2.8 Indústria de mobiliário	9
2.2.9 Componentes eléctricos e electrónicos	10
2.2.10 Problema do corte gratuito	10
2.2.11 Indústria do papel	10
2.3 Caracterização e Classificação	12
2.3.1 Conjunto de soluções.....	14
2.3.2 Número de qualidades, características ou dimensões relevantes	15
2.3.3 Processo de satisfação de pedidos	15
2.3.4 Comportamento da procura.....	17
2.3.5 Horizonte temporal	17
2.4 Codificação e apresentação.....	18
2.5 Abordagens e modelos	20
2.5.1 Sortido 1D / S / Probabilístico dependente / Contínuo	21
2.5.2 Sortido 2D / 2D	23

3 O Assortment em revista	27
4 O Sortido e o Corte	43
4.1 Vale a pena investir no sortido?	43
4.2 O problema do corte	47
4.3 Escolha aproximada de um sortido	50
5 A Função Objectivo	55
5.1 Como reconhecer um bom sortido? Como comparar métodos?	55
5.2 A função custo para sortidos 1 / 1	57
5.2.1 Validação do algoritmo de corte de Gilmore e Gomory	62
5.3 A função custo para sortidos 2 / 2	67
5.4 Sortidos com vários artigos diferentes	71
5.5 Quando todas as heurísticas são “boas”	74
6 Utilização de Meta-heurísticas	77
6.1 Meta-heurísticas - Métodos genéricos de pesquisa	77
6.2 Método de descida	79
6.3 Pesquisa tabu	80
6.4 Pesquisa tabu com lista de soluções calculadas infinita	81
6.5 Arrefecimento simulado (Simulated annealing)	82
6.6 Resultados	84
6.7 Estruturas de vizinhança	86
7 Conclusões	91
A1 A Abordagem de Gilmore e Gomory	95
A2 A explosão combinatória no problema dos cortes a uma dimensão	99
Referências	101

Indice de Figuras

Figura 2.1 Representação esquemática de um problema do catálogo ou sortido	6
Figura 2.2 Relação típica entre resistência e peso do aço.	7
Figura 2.3 Escolha de apresentações e embalagens para fármacos	8
Figura 2.4 Armazenamento e corte de vidro plano.....	9
Figura 2.5 Corte longitudinal	11
Figura 2.6 Corte transversal.....	11
Figura 2.7 Operação de guilhotinagem	12
Figura 3.1 Selecção de sortidos (1/1) e determinação de lotes económicos	28
Figura 4.1 Exemplo: O pior caso possível.....	45
Figura 4.2 Duas estratégias de corte.....	46
Figura 4.3 Valores médios gerados por 30 problemas para cada valor de TG.....	52
Figura 4.4 Sortidos aproximados	53
Figura 5.1 Função custo total, para o problema AÇOS1	58
Figura 5.2 Função custo total após eliminação de glitches (AÇOS1)	59
Figura 5.3 Função objectivo para o problema GIL63-1	61
Figura 5.4 Tempos de cálculo para o problema GIL63-1.....	62
Figura 5.5 Custo óptimo no problema AÇOS1 relaxado.	64
Figura 5.6 Função limite inferior de optimalidade.....	64
Figura 5.7 Sobreposição de funções limite, e diferenças, para o problema AÇOS1.....	65
Figura 5.8 Função de custo óptimo no problema GIL63-1 relaxado	66
Figura 5.9 Sobreposição de funções limite, e diferenças, para o problema GIL63-1	66
Figura 5.10 Função objectivo para o problema PINHO30.....	69
Figura 5.11 Tempo no planeamento do corte no problema PINHO30.....	70
Figura 5.12 Problema AÇOS1 com sortido de dois tamanhos.....	72
Figura 5.13 Problema EIL60-1 com sortido de dois tamanhos.	73
Figura 6.1 Representação dos resultados obtidos com as 12 heurísticas	85
Figura 6.2 Resultados obtidos utilizando a nova estrutura de vizinhanças	87
Figura A2.1 Número de padrões no modelo inteiro do problema aços1	100
Figura A2.2 Número de padrões no modelo inteiro do problema gil63-1.....	100

1 Introdução

O sucesso de qualquer organização depende das decisões tomadas a diversos níveis. Nas empresas industriais, o funcionamento dos mecanismos de mercado induziu o crescimento de preocupações no planeamento das mais variadas actividades e operações. Neste ambiente, torna-se essencial incluir na classe das prioridades a gestão de encomendas, o planeamento de produção e o desenvolvimento de novos produtos. É particularmente justificado o investimento gerador de ganhos passíveis de ser mantidos ou multiplicados, gerando fenómenos como as economias de escala.

Quando se lida com materiais em bruto ou grandes quantidades, é necessário definir cuidadosamente as características das unidades a produzir ou armazenar. O conjunto de características com que dado produto é apresentado designa-se por catálogo ou sortido e influi no desempenho da organização, tal como uma colecção de moda determina o resultado de um fabricante de vestuário. No entanto, seleccionar o sortido de tipos de unidades a produzir ou armazenar não basta. Nem sempre o catálogo escolhido satisfaz exactamente as necessidades. Nesses casos há que planear uma sequência de operações que permita satisfazer toda a procura do produto, dado um determinado catálogo. Este tipo de decisões é tão geral que admite um número muito elevado de variantes sob a mesma designação: problemas de selecção de sortidos.

O estudo destas operações tem sido classicamente apoiado e aplicado pelas indústrias do aço, vidro, madeira, papel e vestuário. A abordagem utilizada em cada caso é fortemente influenciada pelas características particulares dos processos presentes em cada indústria. Os problemas de sortido que não consideram operações de corte podem ser tratados por abordagens que garantem, em alguns casos, a solução óptima do problema. Nos exemplos que envolvem procedimentos de corte, a determinação de soluções é mais complexa, uma vez que o próprio problema de corte gera situações de optimização combinatória difícil. Os dois problemas estão estreitamente ligados, mas enquanto os problemas dos cortes têm sido estudados por um número alargado de autores [Dyckhoff90] [Dowsland92] [Haessler91] [Hinxman80], o problema da selecção de catálogos não tem recebido a mesma atenção [Hinxman80], sendo a bibliografia publicada sobre o tema muito escassa.

Este trabalho inclui uma introdução aos problemas de selecção de sortidos, apoiada tanto em exemplos reais como em casos surgidos na literatura. No seguimento dos exemplos apontados sugere-se uma tipologia e classificação. A literatura sobre o problema é revista, pois ilustra a multiplicidade de formas que os problemas tomam e as abordagens propostas para os resolver.

A minimização dos custos por desperdício justifica que se analise a relação entre os problemas do corte e de selecção de sortidos. Considerando-se simultaneamente os casos de corte a uma e a duas dimensões, obtêm-se representações das funções objectivo, cuja análise permite conclusões importantes e, de certa forma, surpreendentes, por darem uma visão nova sobre os problemas e apontarem princípios e lacunas nos processos de comparação de soluções. Como resultado lateral, sugere-se e utiliza-se um processo para avaliar a qualidade dos resultados da abordagem de Gilmore e Gomory para os problemas dos cortes.

Como complemento à análise, experimentam-se alguns métodos genéricos de pesquisa relativamente recentes, como a pesquisa tabu e o método de arrefecimento simulado (*simulated annealing*). Apresentam-se resultados computacionais e faz-se uma análise comparativa, incluindo o estudo da diferente importância das estruturas de vizinhança no desempenho das heurísticas.

1.1 Enquadramento

O grupo de Decisão e Optimização do INESC, no âmbito do qual este trabalho foi desenvolvido, dedica grande parte do seu esforço de investigação ao estudo e resolução de problemas de corte e empacotamento. Essa especialização permitiu acumular experiência e conhecimento sobre os problemas envolvidos, o que por sua vez induziu o desenvolvimento de aplicações comerciais utilizadas hoje por algumas empresas. Este trabalho surge assim inserido na estratégia do grupo, como uma extensão natural ao trabalho existente e muito beneficiando com a experiência e colaboração dos elementos do grupo.

A motivação para o arranque deste trabalho foi a existência de solicitações de apoio por parte da indústria em matérias que envolviam a selecção de tamanhos. Espera-se que algumas conclusões surgidas possam ser utilizadas, integrando e complementando o trabalho desenvolvido pelo grupo de Decisão e Optimização.

1.2 Quanto ao estilo e forma

Existe uma tentativa de traduzir para português muitas palavras e expressões utilizadas na literatura internacional. Apesar desse esforço, não foi possível encontrar termos que de forma clara e inequívoca traduzissem todas as palavras e expressões encontradas e internacionalmente reconhecidas; estas palavras surgem italicizadas no texto.

O problema da determinação óptima de catálogo é conhecido internacionalmente por *Assortment Problem*, e em português pode ser designado por Problema do Catálogo ou Problema do Sortido. Estas duas identificações são utilizadas indistintamente ao longo da dissertação.

Uma vez que problemas envolvendo diferentes grandezas, como o peso ou o comprimento dos artigos produzidos, são muitas vezes equivalentes, opta-se frequentemente, ao longo deste trabalho, por falar no tamanho dos artigos onde também se poderia falar do seu peso ou de outras grandezas.

2 Selecção de Sortidos ou Catálogos

2.1 Introdução

O problema do catálogo ou sortido¹ surge associado à produção de materiais em bruto e à fase inicial do ciclo de desenvolvimento de produtos, podendo ser apresentado da seguinte forma geral:

Um produto pode ser fabricado ou adquirido num conjunto de diferentes tipos ou apresentações que variam entre si numa ou mais características, como o tamanho, peso ou outra qualquer medida quantitativa ou qualitativa. Os artigos produzidos ou comprados servirão para satisfazer as encomendas de clientes ou as necessidades da organização. Razões económicas ou de mercado ditam que o número de diferentes tipos de artigos produzidos ou adquiridos não pode ser demasiado grande, isto é, o catálogo de artigos deve ser limitado, respondendo simultaneamente às necessidades por parte de clientes ou à procura interna.

O objectivo do problema do sortido consiste em determinar a composição do subconjunto de tipos a produzir ou comprar, sendo estes seleccionados do conjunto total de artigos que poderiam tecnicamente ser fabricados ou adquiridos. A esse subconjunto escolhido dá-se a designação de catálogo ou sortido, que juntamente com as quantidades de cada tipo a considerar na operação constituem a solução do problema. A limitação imposta pela existência de um catálogo restringe as possibilidades de escolha e implica, geralmente, que não existirão no catálogo todos os tipos que satisfariam exactamente o especificado pelas encomendas em carteira. Por essa razão é necessário algum processo que permita satisfazer a procura a partir do sortido disponível, que implicará normalmente existência de custos adicionais, porque um artigo não deve ser substituído por outro de valor inferior. Esse processo consiste geralmente em operações de substituição ou operações de corte. Por analogia com o problema de cortes, podem designar-se os elementos do catálogo por peças, objectos ou artigos grandes e as encomendas ou pedidos por objectos pequenos.

¹ Designado por *Assortment Problem* na literatura de língua inglesa.

Achar a solução para este problema equivale a encontrar o compromisso óptimo entre o custo associado ao número de artigos no catálogo, por um lado, e os custos decorrentes das operações de substituição ou corte por outro. Ambos os custos são considerados no objectivo do agente de decisão: a maximização dos resultados operacionais da organização. A figura 2.1 representa de forma simplificada os principais componentes que devem ser tomados em conta neste processo de decisão. Nesse esquema os elementos "Sortido" e "Processo de Satisfação da Procura" influenciam a tomada de decisões quer através dos custos referidos anteriormente, quer por restrições práticas de ordem diversa que ambos os componentes impõe ao problema.

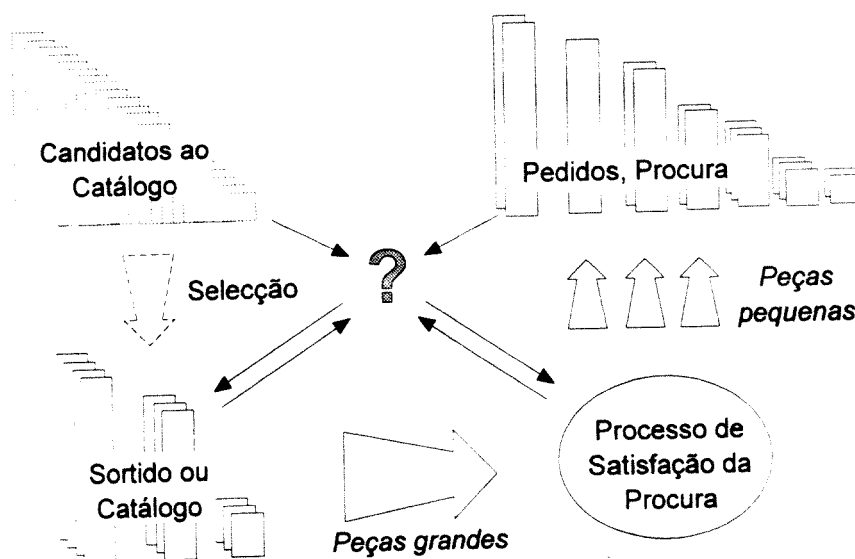


Figura 2.1 Representação esquemática de um problema do catálogo ou sortido

O processo de determinação de um catálogo situa-se na área do planeamento de produção e é influenciado pelos processos produtivos, pela função armazenamento e pelos pedidos de clientes, isto é, da procura, que é transmitida através da função comercial. Obviamente que fundamentais são também os objectivos traçados pela gestão para a organização, tendo em conta todos os factores operacionais presentes e o comportamento da função financeira.

Em diversas áreas surgem problemas que, tomando diferentes formas, estão englobados nesta definição geral. Na secção 2.2 enumeram-se alguns exemplos práticos em que este tipo de decisões é relevante enquanto em 2.3 e 2.4 se propõe uma classificação para os problemas e na secção 2.5 se indicam formulações possíveis para alguns casos.

Os exemplos apresentados na secção seguinte servirão para ilustrar casos reais ou surgidos na literatura em que o problema ou os problemas de determinação de catálogo estão presentes. Neste grupo de exemplos tenta-se mostrar alguma variedade de estruturas e aplicações que cabem sob a classificação de problemas de catálogo.

2.2 Exemplos

2.2.1 Indústria do aço

Na produção de aço é possível calibrar o processo e dosear a composição de modo a fabricar peças com diversos níveis de resistência e logo custos também diferentes, uma vez que o custo do aço aumenta com a sua resistência (figura 2.2). Se não existir em armazém aço com a resistência requerida por uma encomenda, outro mais resistente deve ser utilizado, sempre pelo preço do aço pedido pelo cliente, recaindo assim sobre o produtor o custo associado à diferença de preços. Quantos e quais os tipos de aço a fabricar de modo a otimizar os custos de produção, armazenamento e substituição?

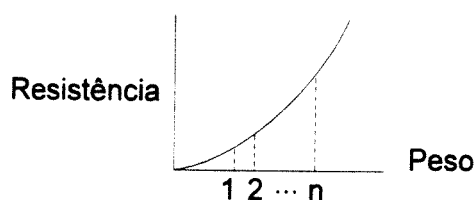


Figura 2.2 Relação típica entre resistência e peso do aço.

[Sadowsky59] [Wolfson65]

2.2.2 Determinação óptima de tamanhos de calçado

Um fabricante de calçado pretende definir o conjunto de diferentes tamanhos que utilizará nos modelos das suas colecções. Deve ter em atenção que os compradores não adquirem artigos com dimensões inferiores à do seu pé, mas aceitam tamanhos ligeiramente maiores se com eles ainda se sentirem confortáveis, isto é, a probabilidade de compra depende dos tamanhos que estejam disponíveis. Quais e quantos tamanhos incluir no catálogo para maximizar os resultados? Que medidas poderão ser normalizadas para aumentar o “conforto geral” da população?

[Tryfos85][Pinho90a][Pinho90b][Vidal93a]

2.2.3 Indústria de componentes

A construção de uma casa pré-fabricada baseia-se em módulos e componentes que o fabricante obtém pelo corte de peças maiores que adquire à indústria da madeira, existindo um limite para o número de tamanhos grandes armazenados. Quais as peças a comprar e quais as operações de corte a efectuar de modo a minimizar o custo total de operação?

2.2.4 Problema de normalização (*Standardization problem*)

Quais os tamanhos que um fabricante e distribuidor de cartolas para a queima das fitas da cidade do Porto² deve ter em catálogo, de modo a maximizar as vendas? Um estudante está disposto a comprar uma cartola de tamanho ligeiramente inferior ou superior à sua medida se o tamanho correcto não estiver disponível. Tradicionalmente o preço por cartola é igual para todos os tamanhos, pelo que importa maximizar as vendas minimizando a matéria prima utilizada.

2.2.5 Perfis metálicos

Uma oficina encomenda e mantém em armazém um número de diferentes tamanhos de perfis de alumínio. Quando é necessária uma peça de tamanho não armazenado, corta-se um perfil do mesmo tipo existente em inventário e comprimento superior ao tamanho em falta. A ponta restante do corte não é aproveitada, sendo-lhe atribuído um valor de desperdício, pelo que é útil a existência de muitos tamanhos em armazém. Por outro lado a gestão do armazém atribui custos à existência de muitos tamanhos.

2.2.6 Indústria farmacêutica e embalagem

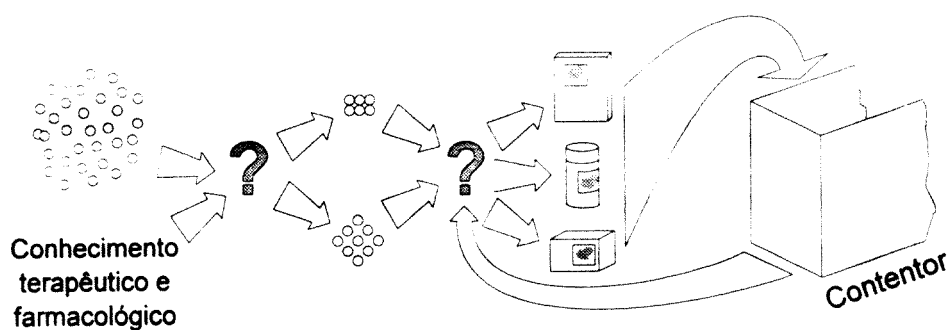


Figura 2.3 Escolha de apresentações e embalagens para fármacos

Um medicamento de grande utilização e curto prazo de validade é utilizado em diferentes estados clínicos, dependendo as dosagens administradas do tratamento em cada caso. Pretende-se determinar quais as apresentações e quantidades do produto em cada embalagem de modo a minimizar o desperdício do fármaco nos tratamentos conhecidos. Outra questão é o desenho das embalagens a utilizar de modo a minimizar o número de contentores farmacêuticos utilizados na distribuição do produto.

² Exemplo académico.

2.2.7 Indústria vidreira

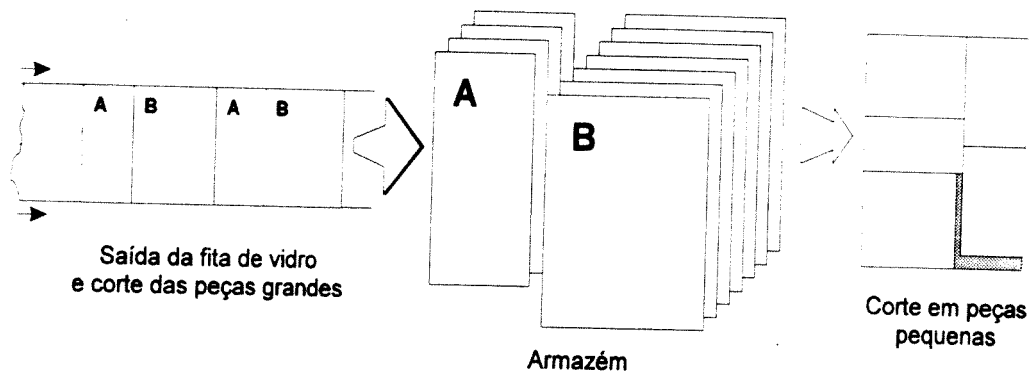


Figura 2.4 Armazenamento e corte de vidro plano

O vidro plano de alta qualidade, utilizado nos espelhos de automóveis e janelas de escritórios, é fabricado em pequenas unidades de alto débito funcionando, em regime de produção contínua. O vidro sai da máquina como uma língua de largura constante que vai sendo cortada transversalmente em placas que são armazenadas. Essas placas são posteriormente guilhotinadas em retângulos mais pequenos que constituem produtos finais como janelas e artigos similares. O processo contínuo apenas pára quando se pretende alterar algum parâmetro como a espessura do vidro produzido. Somente nesta altura se pode regular a largura da fita contínua que sai da unidade, pelo que todas as placas de vidro do mesmo tipo têm igual largura. Ao decisor cabe o papel de escolher quais os tamanhos (largura e comprimentos) das peças a cortar e armazenar, de modo a minimizar os custos de operação, conhecendo à partida quais os rectângulos pequenos que se pretende obter na fase seguinte, isto é, conhecendo quais os produtos finais ou encomendas.

[Chambers76]

2.2.8 Indústria de mobiliário

Uma fábrica de móveis encomenda tradicionalmente placas de madeira de determinada dimensão, de onde corta os componentes rectangulares que utiliza para os seus modelos. Adquirindo um produto que permite otimizar a operação de corte, verifica que em todos os padrões de corte óptimos existe uma faixa das placas grandes que é sistematicamente desperdiçada. Evidentemente que passa a encomendar placas menores,

colocando-se em seguida a questão de determinar quais os tamanhos grandes que conduzem ao mínimo desperdício global³.

2.2.9 Componentes eléctricos e electrónicos

Um condensador eléctrico pode ser substituído por outro do mesmo tipo que tenha uma tensão de ruptura mais elevada, se o modelo especificado não existir em armazém. Isto implica, em princípio, um custo superior. Por outro lado, à manutenção de um elevado número de artigos diferentes em armazém, também são imputados custos.

2.2.10 Problema do corte gratuito

Os industriais madeireiros quando vendem peças de espécies que não cabem num camião podem oferecer ao comprador um corte gratuito, isto é, dividem o tronco em duas partes, que poderão assim ser transportadas. O cliente determina o ponto da peça em que esse corte deve ser efectuado, de acordo com os planos para a madeira. Qual o ponto a escolher? Será óptima a estratégia de dividir o tronco em duas partes iguais?

[Yanasse93]

2.2.11 Indústria do papel

Uma unidade industrial produz um conjunto de diferentes qualidades de papel, que se distinguem pela cor, gramagem e outras características. O produto pode ser vendido em resmas de folhas rectangulares ou em bobinas (rolos de papel), sendo as dimensões especificadas pelos clientes. As encomendas, para os diversos tipos de artigos incluem informação sobre quantidades, prazos de entrega e dimensões das folhas ou bobinas. As dimensões pretendidas, em muitos casos, não correspondem a tamanhos normalizados (ex: A4, B5, ...).

O papel é inicialmente produzido em rolos 'Jumbo' de grandes dimensões que sofrem ao longo do processo várias operações de corte, de modo a obterem-se produtos finais com as dimensões especificadas. O corte do papel é efectuado em três fases: corte longitudinal, corte transversal e guilhotinagem. Todas as operações de corte dão origem a desperdícios que são reciclados mediante custos conhecidos. Uma encomenda pode ser considerada pronta no final de qualquer uma destas operações.

O corte longitudinal, representado na figura 2.5, é efectuado na rebobinadora que idealmente se encontra à saída da linha de produção e consiste no corte do rolo 'Jumbo'

³ Caso real, ocorrido na empresa MOVEIS MACHADO - Francisco José Machado & Filhos, Lda. A utilização do sistema Placorte, desenvolvido pelo INESC, levou à renegociação das encomendas junto dos fornecedores.

em rolos mais pequenos. O número de cortes deste tipo numa bobina 'Jumbo' está limitado ao número de lâminas existentes na rebobinadora.

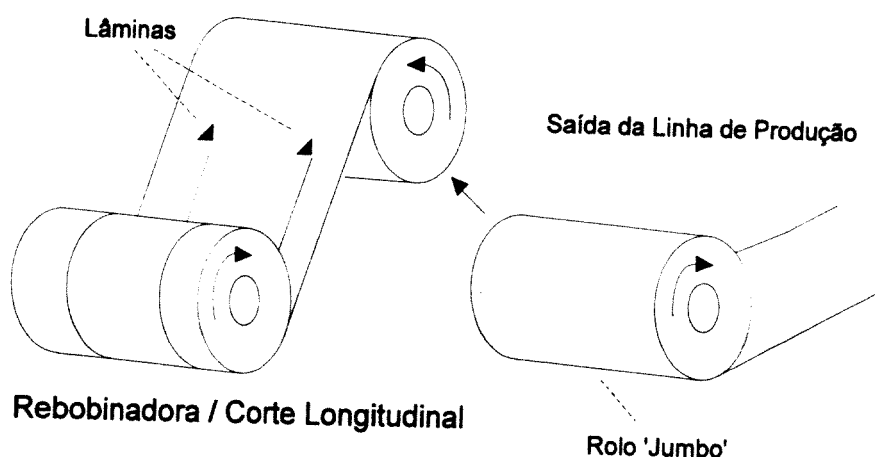


Figura 2.5 Corte longitudinal

O corte transversal permite obter folhas de papel a partir de bobinas, como indica a figura 4.2, e também está sujeito a restrições quanto ao número e tipo de cortes possíveis:

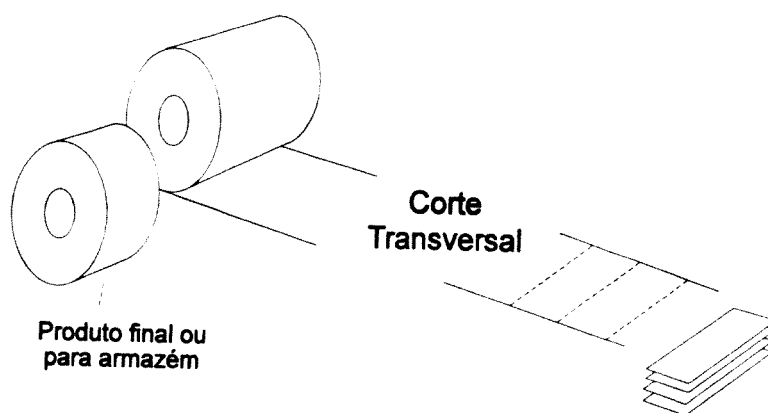


Figura 2.6 Corte transversal

A última operação de corte, se necessária, é feita em guilhotinas e necessita de maior componente manual do que as operações anteriores. O número de operações efectuadas nesta fase deverá ser minimizado, estando habitualmente o número de cortes limitado a dois (cortes guilhotináveis em duas fases) como representado na figura 2.7.

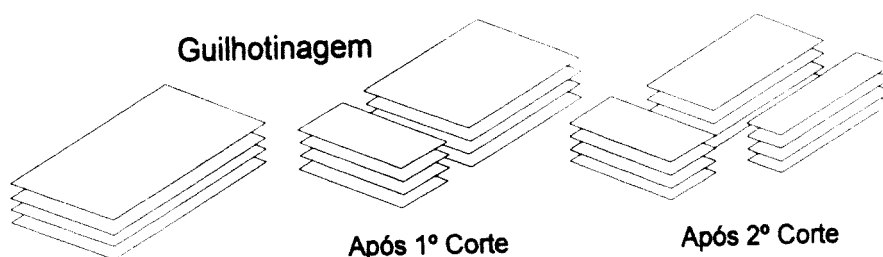


Figura 2.7 Operação de guilhotinagem

Devido a limitações de armazenamento, produção ou custo, associadas à existência de um grande número de rolos de diferentes tamanhos, apenas deverá existir em armazém um número limitado de bobinas de papel de dimensões diferentes. Os planos de produção e armazenamento devem ter ainda em conta que nem sempre é possível saber na data da tomada de decisões quais as encomendas que os produtos armazenados virão a servir, pelo que será necessário recolher dados estatísticos referentes a períodos anteriores para obter informações sobre a distribuição da procura.

A fábrica mantém um regime de produção contínua e as encomendas chegam em instantes diferentes e não apenas no início de períodos bem determinados. O curto prazo de entrega pode ser um forte argumento de concorrência.

2.3 Caracterização e Classificação

A análise dos exemplos apresentados na secção anterior permite tirar algumas conclusões quanto à variedade de formas que os problemas de determinação óptima de tamanhos podem tomar. Numa primeira observação nota-se que a qualidade ou característica que diferencia os elementos de um catálogo é frequentemente o seu tamanho (2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.10, 2.2.11) mas também pode ser o seu peso (2.2.6), número de sub-unidades (2.2.6), tensão (2.2.9), resistência (2.2.1) ou outras [Pentico71]. No entanto, como indicado em referências antigas ([Hansmann57], [Sadowsky59] ou [Pentico71]), as estruturas dos problemas são frequentemente semelhantes.

Por essa razão, e para tentar manter um discurso claro sem sacrifício de generalidade, a característica geralmente apontada como relevante ao longo deste texto é o tamanho dos artigos. De igual modo, os artigos candidatos ao catálogo designar-se-ão frequentemente por artigos grandes ou peças grandes enquanto as encomendas se designarão por pedidos, artigos pequenos ou peças pequenas.

Na secção 2.1 sugeriu-se que os artigos encomendados funcionam, de certo modo, como limites mínimos para os elementos do catálogo que poderão servir para os satisfazer. Em 2.2.1, por exemplo, uma barra de aço fornecida não pode ser mais frágil do que a resistência solicitada. Existem outros problemas que não sendo problemas do catálogo

lhes são semelhantes, como o problema de normalização apresentado em 2.2.4. No problema de normalização um pedido pode ser substituído, mediante certas restrições, por um artigo de valor ou tamanho inferior [Pentico86]. Embora se possam utilizar, em alguns casos, transformações que convertam um problema no outro, para o exemplo 2.2.4 não se utiliza a designação de problema do sortido ou catálogo, à luz da literatura estudada. Esta relação será de novo referida em 2.5.1 a propósito de um exemplo em que os problemas são equivalentes.

No problema de empacotamento referido no exemplo 2.2.6, a tarefa de estudar o tamanho das peças pequenas de modo a maximizar o seu número dentro de um contentor, isto é, a determinação do sortido de peças pequenas em vez do conjunto de peças grandes, pode ser considerada uma questão que cabe na classe dos problemas do sortido. No entanto este problema não é em geral considerado nem dele se encontraram referências.

É natural que alguns autores tenham sugerido designações específicas para casos particulares do problema do sortido, como é o caso do problema do corte gratuito (*free cut problem*) apresentado no exemplo 2.2.10.

Enquanto que o problema de cortes recebeu vários contributos com intuito de classificação ([Dyckhoff90] [Hinxman80]), o problema da determinação do sortido não teve a mesma atenção, apenas surgindo como um apêndice do problema de cortes ([Hinxman80]).

Não é razoável a criação de uma classificação completa que considere todos os factores presentes em todos os problemas e que os identifique univocamente. Essa dificuldade deve-se à existência de restrições de ordem prática próprias a cada caso, que tornam os problemas reais diferentes uns dos outros. No entanto, o carácter genérico dos problemas de catálogo e o número de possíveis aplicações, tornam importante a consideração de uma classificação ou caracterização baseada em aspectos estruturais que distribua os problemas por grandes grupos e faça sentido face às principais técnicas utilizadas.

A classificação de um problema do catálogo poderá ter como chave os seguintes elementos ou características:

- Conjunto de soluções.
- Número de qualidades, características ou dimensões relevantes.
- Processo de satisfação de pedidos.
- Comportamento da procura.
- Horizonte temporal.

Discute-se seguidamente a importância, o papel e os aspectos que cada uma destas características acrescenta ao problema.

2.3.1 Conjunto de soluções

O carácter contínuo ou discreto dos conjuntos de soluções e pedidos, influencia a escolha dos métodos a considerar na determinação de um catálogo.

O problema do sortido designa-se por discreto se os tamanhos possíveis para as peças do catálogo são em número finito ou infinito numerável⁴. Por oposição um problema diz-se contínuo se as peças grandes podem tomar quaisquer valores dentro de intervalos reais. Esta classificação é genérica e comum a muitos problemas, tais como os problemas dos cortes.

No caso discreto o problema dir-se-á contíguo se as soluções possíveis forem consecutivas, adjacentes ou contíguas, isto é, se tomarem valores consecutivos no conjunto de valores fisicamente admissíveis pelos processos produtivos. Se um comprador de pranchas de madeira, por exemplo, puder optar por quaisquer tamanhos entre dois e cinco metros, especificados como múltiplos inteiros do centímetro, está-se perante um exemplo desta classe. No caso oposto encontram-se os problemas em que os candidatos ao catálogo são itens de uma lista de elementos não consecutivos no sentido exposto. Nesta situação o número de candidatos ao sortido é em geral menor, permitindo em exemplos simples obter algumas conclusões por simples inspecção [Diegel84]. Ambos os casos, contíguo e não contíguo, ocorrem na prática.

Em muitos exemplos que seriam contínuos por natureza, as limitações na qualidade das medidas e na precisão da maquinaria, levam naturalmente a uma discretização dos tamanhos possíveis em catálogo e dos pedidos. A indústria trabalha com unidades mínimas que poderão ser de qualquer ordem, como o milímetro na carpintaria ou a metade do micrometro no fabrico de circuitos integrados, o que leva a que abordagens contínuas se devam mais ao método utilizado do que ao tipo dos problemas em si.

No caso discreto com número de soluções finito a solução poderia obviamente ser procurada por enumeração explícita do conjunto admissível. No entanto isso é impossível, excepto em casos muito simples, devido ao grande número de diferentes combinações (a escolha de 5 entre 50 artigos distintos pode originar 2 milhões de sortidos distintos).

O número de tipos a incluir no catálogo pode ser conhecido à partida ou ser uma variável de decisão, sendo portanto instanciada com a solução do problema.

⁴ Um conjunto de soluções infinito numerável não ocorre na prática.

2.3.2 Número de qualidades, características ou dimensões relevantes

A complexidade da escolha de um catálogo cresce com o número de características relevantes para a decisão consideradas simultaneamente, isto é, com o número de dimensões do problema. Por isso a dimensionalidade do sortido é uma característica fundamental.

Um sortido diz-se unidimensional ou de dimensão um (1D) se apenas uma característica dos elementos do catálogo está em jogo, como o comprimento do fio, no caso da seleção de bobinas de arame ou a tensão máxima admissível no exemplo 2.2.9. De igual modo classifica-se um problema como bidimensional ou de dimensão dois (2D) se para a decisão são relevantes duas características ou qualidades dos artigos. É o caso do corte de placas de madeira, apresentado no exemplo 2.2.8, em que estão simultaneamente em jogo o comprimento e largura dos artigos.

Generalizando, diz-se que um problema em que n medidas ou características das peças do catálogo são consideradas tem dimensão n ou é n -dimensional (nD). O caso de empacotamento em que se escolhe, por exemplo, qual a melhor caixa normalizada para armazenar um conjunto de objectos paralelepípedicos é um problema 3D.

No caso específico em que todos os elementos do sortido partilham o mesmo valor numa das dimensões, que também deve ser escolhido, diz-se que o problema ganha meia dimensão. Por isso, o exemplo 2.2.7 diz-se 1 1/2 dimensional.

2.3.3 Processo de satisfação de pedidos

Talvez a característica fundamental, que divide o problema do sortido em dois grandes grupos é a forma como são satisfeitos os pedidos de artigos que não fazem parte do sortido. Identificam-se duas estratégias básicas:

- Políticas de substituição.
- Políticas de corte.

Numa política de substituição cada unidade em armazém satisfaz a encomenda de apenas uma das peças pedidas, quer seja por simples substituição (exemplos 2.2.1, 2.2.2 ou 2.2.9), quer pela transformação de um artigo no outro como no exemplo 2.2.5. Existem naturalmente custos correspondentes à perda de valor ou material e associados à operação de transformação propriamente dita.

Uma política de corte permite obter diversas peças pequenas a partir de cada peça em armazém (exemplos 2.2.3, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.10 ou 2.2.11). O número de diferentes operações de corte em casos práticos é enorme, merecendo sínteses e classificações mais ou menos

complexas e completas [Dyckhoff90] [Hinxman80] [Dowsland92] [Dyckhoff92] [Heassler91]. Um dos factores incluídos em algumas classificações, como na classificação de Dyckhoff [Dyckhoff90], é o tipo de catálogo disponível para a operação de corte, que constitui a solução no problema do sortido. As características dos problemas dos cortes discutidas nessa publicação são as seguintes:

- Dimensionalidade
- Forma das figuras
- Disponibilidade
- Restrições na orientação
- Estado da informação e variabilidade
- Medida de quantidades
- Sortido
- Restrições nos padrões
- Objectivos

Na classificação de uma operação de corte é fundamental a dimensionalidade do problema, isto é, o número de dimensões relevantes para a solução consideradas simultaneamente. Assim, um problema de cortes tem dimensão um (1D) se apenas uma característica for considerada, como o comprimento no corte de cabos eléctricos. Da mesma forma, um problema tem dimensão dois (2D) ou três (3D) se forem relevantes, respectivamente, duas ou três dimensões das peças cortadas, como são os casos do corte de placas na indústria do mobiliário, referido no exemplo 2.2.8, e do empacotamento de contentores, referido no exemplo 2.2.6, respectivamente. Processos de dimensão dois em que todas as peças grandes têm igual medida numa das dimensões, sendo no entanto essa medida relevante para a operação de corte, dizem-se de dimensão um e meio (1,5D).

Muitos outros aspectos podem ser tomados em conta na classificação do processo de corte como o tipo de cortes possíveis e as restrições na orientação das peças pequenas. Sobretudo em operações de corte bidimensional (2D), é comum a distinção entre cortes guilhotináveis, em que o aparelho de corte actua em toda a extensão da peça ou pedaço a cortar como uma guilhotina, e cortes não guilhotináveis. Na maioria dos casos reais para cortes rectangulares a restrição a cortes guilhotináveis é imposta pela tecnologia. Existem distinções importantes entre problemas e técnicas unipadrão e multipadrão. Na secção 4.2 discute-se brevemente os problemas dos cortes e indica-se outra das classificações referidas.

Numa operação de corte as peças originais tomam a designação de objectos ou peças grandes, enquanto as resultantes do corte se designam por objectos ou peças pequenas.

É fundamental a distinção entre a dimensionalidade associada ao catálogo e o número de dimensões na operação de corte propriamente dita. Nem sempre os dois problemas têm igual dimensão, como no exemplo 2.2.7, em que se trata a produção de vidro plano. Nesse exemplo, o problema do sortido tem dimensão um e meio (1,5D) enquanto que a

operação de corte é de dimensão dois (2D). No exemplo do corte gratuito (2.2.10) o catálogo é unidimensional (1D) e a operação de corte pode ter dimensão dois (2D) como apresentado em [Yanasse93].

2.3.4 Comportamento da procura

Na escolha de um catálogo é importante o conhecimento e o modo como pode ser representada a procura, uma vez que existem frequentemente variabilidades associadas aos processos produtivos, ao comportamento dos clientes ou à qualidade da informação disponível. A composição da carteira de pedidos ou encomendas pode ser classificada como determinística ou como probabilística. No primeiro caso os pedidos são conhecidos e dados por listas de artigos ou por funções densidade. No caso não determinístico, probabilístico ou estocástico, as encomendas são descritas por distribuições de probabilidade.

Em algumas instâncias do problema a procura é independente do catálogo escolhido, isto é, não se modifica com o sortido seleccionado desde que este seja admissível. Noutros exemplos a procura é afectada pelo sortido escolhido, como acontece na escolha de calçado referida no exemplo 2.2.2, em que a probabilidade de compra depende dos tamanhos disponíveis. Por analogia com a teoria do controlo, num problema em que a procura seja dependente do catálogo diz-se que existe realimentação.

Das classificações referentes ao comportamento da procura apontadas nesta secção, o caso da procura determinística e dependente do catálogo não é referido na literatura, mas podem imaginar-se situações em que esse comportamento ocorra, como quando o cliente prevê vários planos de compra, em função de diversos cenários possíveis para as ofertas oriundas de diversos fornecedores.

2.3.5 Horizonte temporal

Em muitos casos práticos, como na indústria do papel apresentada no exemplo 2.2.11, as decisões são tomadas sucessivamente em vários períodos ou ciclos de produção. Nessas situações dir-se-á que se está perante uma situação de períodos múltiplos. Na situação oposta estão os casos de período único ou de decisão simples, em que apenas existe uma decisão ou em que um ciclo produtivo não afecta o seguinte, como pode ser o caso da indústria de calçado em que uma colecção corresponde apenas a uma estação.

A generalidade do material publicado estuda casos de decisão simples ou período único, havendo autores que discutem alguns aspectos do período múltiplo [Diegel84] ou que o analisam de forma particular [Pentico71].

2.4 Codificação e apresentação

Das características identificadas como relevantes para a classificação de um problema duas são primordiais:

- Dimensionalidade do sortido.
- Processo de satisfação de pedidos.

As outras características não são, em geral, tão importantes. O tipo do conjunto de soluções, por exemplo, depende mais dos métodos utilizados do que da natureza dos processos reais, que são geralmente discretos. O caso de períodos múltiplos não foi muito estudado e não é habitualmente utilizado, optando-se por considerar problemas de decisão simples em cada período ou agregar vários períodos numa só decisão.

Para a representação das possíveis classes de problemas poderia utilizar-se uma codificação semelhante à utilizada por Dyckhoff [Dyckhoff90] para os problemas de corte e empacotamento. Esta notação considera 4 características fundamentais (dimensionalidade, tipo de afectação e sortidos de peças grandes e pequenas) e permite 96 diferentes tipos de problemas. Nesse código cada característica corresponde a uma posição e cada uma das 4 posições pode ser preenchida por diferentes caracteres que representam tipos ou valores tomados pelas características que classificam os problemas. O problema do corte de peças rectangulares representar-se-ia, nessa notação, por 2/V/I/R [Dyckhoff90].

Apesar da notação de Dyckhoff ser citada por muitos autores, não é de facto utilizada pela generalidade da comunidade que estuda estes problemas. Em geral os autores preferem descrever o problema utilizando algumas palavras chave. A justificação para este facto não residirá em deficiências na estrutura da tipologia de Dyckhoff, mas na dificuldade que se põe aos leitores em instantaneamente associarem um código daquele tipo a uma classe de problemas.

Para tentar evitar as dificuldades referidas, propõe-se a utilização de uma notação menos rígida que alie a representação das características primárias de forma inequívoca, fixa e simples, e que para as outras evite a utilização de um só dígito por característica, recorrendo a palavras ou siglas chave e permitindo, de uma forma natural, extensões aos tipos e características identificados neste texto. A codificação proposta segue as regras descritas nos parágrafos seguintes.

Tal como Dyckhoff utiliza-se o símbolo "/" para separar os elementos referentes a características diferentes. O número de dimensões do sortido é a primeira característica e representa-se por um dígito traduzindo a dimensionalidade do problema, como indicado de seguida:

- 1 ou 1D - Sortido de dimensão um.
- 2 ou 2D - Sortido bidimensional.
- n ou nD - Sortido n -dimensional ou de dimensão n .

O segundo elemento representa o tipo da política de satisfação de pedidos utilizada, sendo os tipos considerados para esta característica os seguintes:

- S ou Sub. - Política de substituição.
- 1 ou 1D - Operação de corte unidimensional.
- 2 ou 2D - Operação de corte bidimensional.
- n ou nD - Operação de corte n -dimensional ou de dimensão n .

Uma vez que um objectivo da codificação é a facilidade de interpretação para o leitor, as restantes características, se relevantes para o problema tratado, devem ser indicadas de seguida utilizando palavras, siglas ou abreviaturas como por exemplo:

- Probabilístico, Prob. ou Estocástico
 - Problema probabilístico ou estocástico.
- Dependente, Realimentado ou Dep.
 - Procura dependente do sortido escolhido.
- Período múltiplo ou Mult.
 - Problema envolvendo múltiplos períodos.
- Contínuo ou Cont.
 - Conjunto de soluções contínuo.

Devem utilizar-se outros termos que se julguem relevantes para cada problema que surja, pois o objectivo desta codificação não é representar uma classificação fechada, comportando um conjunto limitado de códigos, mas definir uma plataforma básica que facilite a identificação dos problemas fixando algumas características fundamentais e permitindo liberdade nas outras. Por defeito, isto é, se nada for indicado quanto a estas características, um problema é determinístico e de período simples.

Na tabela 2.1 indicam-se classificações possíveis para os exemplos apresentados na secção 2.2.

2.2.1 Indústria do aço

1D/S

2.2.2	Determinação óptima de tamanhos de calçado	1D/S/Estocástico/Dep/Cont
2.2.3	Indústria de componentes	1D e 2D / S e 1D e 2D
2.2.5	Perfis metálicos	1D/S
2.2.6	Indústria farmacêutica e embalagem	1/1/Prob 3/3/Peças pequenas
2.2.7	Indústria vidreira	1,5D/2D
2.2.8	Indústria de mobiliário	2/2
2.2.9	Componentes eléctricos e electrónicos	1/S/Estocástico
2.2.10	Problema do corte gratuito	1D/2D
2.2.11	Indústria do papel	1D e 2D / 1D e 2D / Prob / Mult

Tabela 2.1 Classificação dos exemplos

Os exemplos foram enunciados em 2.2 de uma forma muito geral, o que implica que diversas classificações possam ser aplicadas aos enunciados indicados.

De modo semelhante codificações idênticas surgirão em problemas que não são equivalentes, porque esta codificação diz apenas respeito aos aspectos gerais supostos mais relevantes e não à infinita variedade de outros aspectos e restrições que pode distinguir problemas práticos.

2.5 Abordagens e modelos

As abordagens utilizadas nos problemas de seleção de tamanhos dependem da estrutura e restrições práticas dos problemas considerados. Não se pretende nesta secção cobrir em extensão todos os casos, mas apenas descrever alguns modelos, remetendo-se o leitor interessado numa análise bibliográfica para o capítulo 3.

O problema mais antigo é o sortido 1D/S, que foi estudado por Sadowsky, Wolfson, Frank e Pentico ([Sadowsky59], [Wolfson65], [Pentico71]), e cuja solução é geralmente obtida através de programação dinâmica se as funções custo seguirem comportamentos considerados razoáveis.

Nas secções seguintes apresentam-se formulações para os problemas 1/S/Prob.Dep./Cont. e 2D/2D. O primeiro mereceu a atenção de diversos autores ([Tryfos85], [Pentico86], [Pinho90b], [Vidal93a]) e o segundo, não tendo sido tão estudado, tem uma formulação facilmente simplificável para os casos 1/1, 2/1 e 1/1, o que não implica que a dificuldade dos problemas seja semelhante. O número de publicações sobre problemas 2D é pequeno [Hinxman80], existindo exemplos de situações particulares [Chambers76]. Pentico [Pentico88] e Page [Page75] abordam o caso de políticas de substituição 2D/S, enquanto Chen [Chen93] estuda o caso uni-padrão não guilhotinável.

2.5.1 Sortido 1D/S/Probabilístico dependente/Contínuo

Este problema, apresentado por Tryfos [Tryfos85], surge a propósito da determinação de um catálogo de calçado semelhante ao referido em 2.2.2. A formulação como um problema de controlo óptimo em tempo discreto deve-se a Pinho e Ferreira [Pinho90a], e é equivalente à formulação do problema de partição óptima de um intervalo [Ferreira90] que foi solucionada de forma óptima por Vidal [Vidal93a]. Esta classe de problemas é equivalente ao problema de normalização, bastando uma pequena transformação na formulação que conduza ao mesmo problema pela alteração de funções e relaxação de restrições. Esta equivalência não é no entanto extensível à generalidade dos problemas do sortido.

Suponha que no exemplo 2.2.2 (Determinação óptima de tamanhos de calçado) se pretendem escolher os n tamanhos dos artigos a ter em catálogo de modo a maximizar as vendas. A notação utilizada é a seguinte:

- n Número de diferentes tamanhos a fabricar ou ter em catálogo.
- X Variável aleatória que indica o tamanho ou medida de um indivíduo da população.
- $h(x)$ Função densidade de probabilidade de X na população considerada.
- x_i Tamanho do i -ésimo artigo em catálogo, tal que $x_{i-1} < x_i$, $i = 1, \dots, n$.
- N Número de elementos ou indivíduos na população.

Para simplificação vamos supor que a distribuição da população é normal, sem prejuízo de generalidade⁵. Admite-se que x está limitado entre os valores x_0 e x_n e que se um

⁵ Das distribuições conhecidas e matematicamente tratáveis a distribuição normal ajusta-se bem à população em causa [Tryfos85].

indivíduo compra um artigo, este nunca será menor do que o seu tamanho. Assim, deve definir-se uma função indicando a probabilidade de compra:

$\theta(x_i, x)$ Probabilidade de um indivíduo com medida $X = x$, $x_{i-1} < x < x_i$ comprar o artigo i .

É de esperar que esta probabilidade seja tanto maior quanto melhor for o ajuste entre o tamanho do indivíduo e o tamanho em catálogo, isto é, quanto menor for $|x - x_i|$, porque a folga no sapato é uma causa de desconforto. Nas publicações referidas utiliza-se uma função, introduzida por Tryfos, que embora não baseada em conhecimento empírico sobre a população, cumpre o requisito indicado e é de fácil tratamento matemático:

$$\theta(x_i, x) = c \exp\left(\frac{x - x_i}{\sigma}\right)$$

c Probabilidade de compra do indivíduo com medida $x = x_i$, isto é, quando o ajuste é perfeito.

σ variância da distribuição associada a X ($V[X]$).

μ Valor esperado da distribuição associada a X ($E[X]$).

Supondo que cada possível cliente comprará no máximo um artigo e que não existem indivíduos com tamanho superior a x_n , ou que a probabilidade de compra por parte desses indivíduos é nula, pode-se calcular o número esperado de unidades vendidas (F):

$$F = N \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} h(x) \theta(x_i, x) dx$$

Para simplificação é conveniente normalizar as variáveis pela transformação $u = (x - \mu)/\sigma$, obtendo-se a seguinte expressão em que $f(u)$ representa a função densidade de probabilidade normal reduzida:

$$F = N c \sigma \sum_{i=1}^n \exp(-u_i) \int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{1}{\sigma} f(u) \exp(u) du$$

$$F = N c \sigma \sum_{i=1}^n \exp(-u_i) [G(u_i) - G(u_{i-1})] \text{ em que}$$

$$G(u_i) = \int_{u_0}^{u_i} \frac{1}{\sigma} f(u) \exp(u) du$$

O Problema consistirá então na maximização desta função F sujeita às restrições:

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n$$

Para chegar a uma formulação como controlo óptimo devem-se acrescentar as seguintes definições:

$$v_i \text{ tais que } u_{i+1} = u_i + v_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$r_i(u_i, v_i) = \exp(- (u_i + v_i)) [G(u_i) - G(u_{i-1})]$$

O modelo fica da seguinte forma:

$$\max F = N c \sigma \sum_{i=1}^n r_i(u_i, v_i)$$

sujeito a:

$$u_{i+1} = u_i + v_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$u_0 = u_1$$

$$u_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n-1$$

Como descrito no capítulo 3, Vidal [Vidal93a] sugere um processo que prova encontrar o óptimo global utilizando um modelo equivalente a este.

2.5.2 Sortido 2D / 2D

Beasley [Beasley85] apresenta a única formulação linear inteira genérica para o problema de catálogo determinístico bidimensional encontrada na literatura. Chen [Chen93] estuda o caso unipadrão, obtendo um modelo inteiro-misto que se torna linear para casos muito simples, que objectivamente deixam de ser 2D. Neste problema pretende-se escolher um conjunto de placas rectangulares grandes a manter em catálogo, de onde se obterão por operação de corte as peças pequenas que constituem a procura. Um exemplo prático foi enunciado em 2.2.8. O modelo de Beasley é descrito em seguida, indicando-se primeiro a notação utilizada.

Parâmetros referentes aos tamanhos grandes (candidatos ao catálogo):

- n Número de diferentes tipos ou tamanhos grandes disponíveis (n° de candidatos ao catálogo);
- W_i Comprimento de uma peça de tipo i ($i = 1, \dots, n$);
- H_i Largura de um rectângulo de tipo i ($i = 1, \dots, n$);
- f_i Custo fixo por cada peça de tipo i utilizada ($i = 1, \dots, n$);
- k Número máximo de tamanho diferentes que compõem um catálogo;
- c_d Custo por unidade de área desperdiçada (custo unitário da área não aproveitada).

Parâmetros referentes às peças rectangulares pequenas:

- m Número de diferentes tipos ou tamanhos pequenos a cortar;
- w_j Comprimento de uma peça pequena de tipo j ($j = 1, \dots, m$);
- h_j Largura de um rectângulo pequeno de tipo j ($j = 1, \dots, m$);
- v_j Valor associado a uma peça do tipo j ($j = 1, \dots, m$);
- a_j Número mínimo de peças de tipo j a cortar ($a_j \geq 0, j = 1, \dots, m$);
- b_j Limite superior para o número de peças de tipo j obtidas ($b_j \geq a_j \geq 0, j = 1, \dots, m$).

Parâmetros que dizem respeito aos padrões de corte:

- $P(i)$ Conjunto de todos os padrões para um tamanho grande i ($i = 1, \dots, n$);
- d_{jpi} Número de peças de tipo j ($j = 1, \dots, m$) que resultam de utilizar o padrão de corte $p \in P(i)$ ($i = 1, \dots, n$).

Variáveis do modelo:

- x_{pi} Número de vezes que o padrão $p \in P(i)$ é utilizado para cortar um rectângulo grande de tipo i ($i = 1, \dots, n$);
- u_j Número de rectângulos de tipo j ($j = 1, \dots, m$) cortados;
- y_i Variável binária que é 1 se for utilizada alguma peça grande de tipo i ($i = 1, \dots, n$) ou 0 em caso contrário.

A formulação propriamente dita:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{p \in P(i)} (f_i + c_d W_i H_i) x_{pi} - \sum_{j=1}^m (v_j + c_d w_j h_j) u_j$$

sujeito a:

$$a_j \leq u_j \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m;$$

$$u_j \leq \sum_{i=1}^n \sum_{p \in P(i)} d_{jpi} x_{pi}, \quad j = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq k;$$

$$\sum_{p \in P(i)} x_{pi} \leq M y_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$y_i \in (0, 1), \quad i = 1, \dots, n;$$

$$x_{pi} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall p \in P(i);$$

$$u_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m;$$

$$x_{pi} \text{ e } u_j \text{ inteiros.}$$

M é uma constante grande

Evidentemente que surgem dificuldades associadas à utilização dos conjuntos $P(i)$ ($i = 1, \dots, n$), tanto na sua definição e criação, como na sua inclusão no modelo. A geração desses padrões não é trivial, uma vez que o número de diferentes cortes possíveis é muito elevado mesmo em problemas pequenos. A geração de todos os padrões levaria a problemas gigantescos [Beasley85].

Esta formulação é uma generalização da que pode ser utilizada para um problema do corte, como será explicado no capítulo 4, a propósito da relação entre os problemas de catálogo e de corte.

3 O Assortment em revista

Sendo escassa a bibliografia publicada sobre o problema do catálogo, apresenta-se neste capítulo um resumo dos artigos que versam sobre o tema. Incluem-se apenas publicações cuja aplicação é a selecção de sortidos, embora se refira que problemas formalmente equivalentes surgem noutras áreas.

Sadowsky 1959

1 / S

A FEW REMARKS ON THE ASSORTMENT PROBLEM

Uma referência primordial no problema da selecção de sortidos, este artigo é posterior a uma publicação em polaco do mesmo autor (1954) e trata a escolha de um conjunto de barras de aço a produzir, sendo a resistência da barra a característica física relevante. Esta característica está associada, através de uma função não linear crescente, ao seu peso, isto é, à quantidade de aço utilizada e por isso ao custo de matéria prima (figura 2.2).

Sadowsky considera o caso de período único em que a procura é contínua, conhecida e caracterizada por uma função densidade.

Numa primeira abordagem o autor calcula a função custo associada à substituição de barras pedidas por outras mais pesadas, supondo que um pedido pode ser sempre satisfeito pela barra "seguinte" no catálogo, isto é, que não existem limites à capacidade de produção.

Em seguida sugere como resolver iterativamente⁶ o sistema obtido pela diferenciação dessa função em ordem aos tamanhos a incluir no catálogo. Apontando algumas limitações ao processo, estende-o passando a estrutura de custos a incluir o custo da maquinaria associada à produção das barras de diferentes resistências (pesos). A utilização deste método não é trivial nem é garantida a obtenção de um óptimo global.

⁶ É indicado que este processo não tem convergência garantida.

Para obviar as limitações referidas, Sadowsky propõe a utilização de programação dinâmica. Considerando inicialmente que apenas o tipo de aço mais resistente é produzido, incrementa sucessivamente o número de barras no catálogo, calculando a economia resultante da inclusão de cada novo tipo. O processo termina quando a inclusão de uma nova barra não resultar em economia mas em gasto, uma vez que a estrutura de custos é aditiva (nunca é mais barato comprar duas máquinas do que adquirir apenas uma delas).

O autor põe em evidência a equivalência entre este problema e o problema de determinação óptima de lotes económicos⁷ em que as datas de encomenda/produção podem ocorrer em instantes não periódicos⁸ (versão contínua). A escolha para o catálogo dos diferentes tipos a produzir com pesos entre a e b , é equivalente à escolha dos instantes de encomenda/produção entre b e a no problema de *lot sizing* (sem stock inicial em b). As quantidades a produzir/encomendar são as mesmas nos dois problemas. Este resultado permitiu posteriormente aplicar ao problema do sortido algumas conclusões obtidas na investigação de outro problema que viria a ser mais estudado.

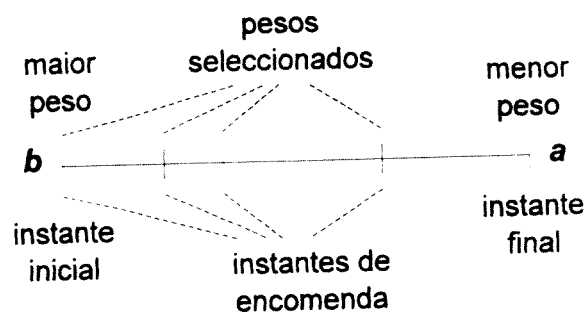


Figura 3.1 Seleção de sortidos (1/1) e determinação de lotes económicos

A inclusão das capacidades das máquinas aumenta a complexidade do problema que, no caso em que a procura é dada por uma função discreta, é ainda resolvido com recurso à programação dinâmica. Neste caso o número de barras a considerar é finito e o problema é semelhante à determinação de um percurso mínimo num grafo acíclico. Mais tarde Pentico [Pentico71] conclui que este resultado será válido se o custo associado à maquinaria variar de forma côncava com a capacidade (baseado em resultados de Zangwill a propósito do problema de *lot sizing*), mas que pode não ser óptimo se isso não se verificar.

⁷ *Dynamic economic lot sizing*

⁸ É interessante verificar que este artigo precede por alguns meses o artigo de Wagner e Within [Wagner58], onde se lê: "We're indebted to Professor W.Sadowsky, Central School of Planning and Statistics, Warsaw University, who suggested this application".

Eilon 1960

1 / S; 1 / 1 / Prob.

OPTIMIZING THE SHEARING OF STEEL BARS

Eilon aborda também situações surgidas na indústria do aço, tendo em conta as variabilidades existentes no processo de fabrico de barras. O autor apoia-se em estudos que permitem concluir que a distribuição dos comprimentos das barras à saída do processo produtivo é normal quando a entrada de matéria prima é constante, e que o desvio padrão desses comprimentos goza de alguma independência em relação ao comprimento médio produzido. Das situações estudadas, quatro estão relacionadas com o problema do sortido e são indicadas de seguida.

Quando a entrada do processo é constante (saída com distribuição normal conhecida) e apenas se pretende ter um tamanho para armazenar/vender, qual deve ser esse tamanho (μ) de modo a minimizar os custos de aparar as barras de comprimento superior a μ , e de vender a preço eventualmente mais baixo barras de comprimento inferior? Neste caso o autor determina a função custo, que estuda e minimiza, apresentando gráficos para o lugar geométrico das soluções óptimas em função dos parâmetros do processo e da relação entre os custos referidos.

Numa situação mais próxima da realidade, o tamanho μ a produzir é fixo e o objectivo é decidir para que comprimento médio se deve regular a produção à saída do processo. A dimensão das barras produzidas pode ser determinada e fixada pelo departamento de venda ou de marketing. O autor considera os casos em que o desvio padrão ou o coeficiente de dispersão se mantêm constantes, apresentando as equações de optimalidade e gráficos representando os lugares geométricos gerados por essas equações.

Quando o tamanho médio produzido é muito superior ao tamanho pretendido μ , tem lugar uma operação de corte em que de uma barra se cortam múltiplas peças de comprimento μ , não existindo reaproveitamento da ponta. O autor estuda, para distribuições simétricas, a influência do ajuste do comprimento médio à saída do processo no custo de desperdício por barra. Apresentam-se exemplos do andamento do custo, tais como o desperdício total percentual para o caso de coeficiente de dispersão constante (evidentemente que quanto maior é o comprimento médio, menores são os picos da função desperdício percentual). Se μ for muito pequeno, no caso da distribuição normal, o desperdício pode considerar-se independente da regulação do processo.

Eilon aponta ainda alguns caminhos para o caso de se pretenderem vários tamanhos diferentes.

1 / S

Frank Jr. 1965

A NOTE ON THE ASSORTMENT PROBLEM

Frank demonstra um teorema que permite diminuir o peso computacional do método proposto por Sadowsky [Sadowsky59], pela redução do número de alternativas a considerar na programação dinâmica.

O caso prático considerado é mais uma vez a determinação de um conjunto de comprimentos de barras de aço, com custos de desperdício aditivos e custos associados a cada tamanho em catálogo.

1 / S

Wolfson 1965

SELECTING THE BEST LENGTHS TO STOCK

Este autor trata ainda um problema semelhante ao problema básico apresentado por Sadowsky [Sadowsky59], também aqui aplicado à indústria do aço, para o caso em que o conjunto de candidatos ao catálogo é finito.

A característica física relevante é o comprimento das barras de aço, obtendo-se um tamanho que não existe no catálogo pelo corte da ponta do tamanho imediatamente superior. A ponta cortada é desperdiçada, pelo que não se trata de um problema de corte propriamente dito.

Wolfson sugere um método muito simples baseado em tabelas e conclui que esse processo corresponde a utilizar sucessivamente a operação de *Minadition* [Wolfson65] sobre a matriz triangular dos custos de substituição entre os tamanhos (apenas considerando a última coluna do resultado em cada iteração).

É imediato verificar que o método equivale à utilização de programação dinâmica. Pentico [Pentico71] explica o processo como a determinação do percurso mais curto num grafo acíclico, referindo que a abordagem pode ser estendida incorporando custos fixos de preparação e de substituição.

Pentico 1971

1 / S / Período múltiplo.; 1 / S / Prob.

EXTENSIONS OF THE ASSORTMENT PROBLEM

Esta publicação contribui com três extensões ao problema do catálogo:

- Custos de substituição mais complexos do que a simples soma dos desperdícios.

- Períodos múltiplos em vez de um só período.
- Procura não conhecida, determinada por distribuições de probabilidade.

O autor considera quatro tipos de custos de substituição, em que o custo de desperdício ou perda se supõe aditivo, isto é, a soma dos custos de desperdício na substituição de uma peça de tamanho i por outra de tamanho j e de uma de tamanho j por outra peça de tamanho k é igual ao custo ou perda em desperdício ao substituir uma peça de tamanho i por outra de tamanho k .

As quatro estruturas de custo de substituição referidas resultam de considerar as combinações possíveis ao incluir ou não custos fixos associados à utilização de um tamanho em substituição de outro e custos pela substituição de cada unidade de um tamanho por outro. Ao incorporar custos fixos, o custo total de substituição deixa de ser aditivo no sentido indicado acima.

Considerando períodos múltiplos e horizonte temporal infinito, com custos e procura fixos, o autor encontra formas e indica algoritmos para achar a política estacionária óptima. No caso mais simples será uma política segmentada⁹ e nos outros, supondo algumas condições, a política óptima será quasi-segmentada¹⁰.

No caso mais complexo, em que o horizonte temporal é finito, o autor obtém resultados mais limitados, mediante alguns pressupostos quanto aos padrões de procura e custos. No final do trabalho volta a este problema com custos fixos de substituição nulos e determina a política óptima quando a maioria dos custos são constantes no tempo.

O autor apresenta formulações lineares inteiras para determinação do padrão óptimo de fornecimento considerando as quatro estruturas de custo de substituição referidas.

O caso da procura não determinística é considerado para políticas estacionárias e segmentadas. Aqui Pentico supõe que os pedidos de peças são efectuados/satisfeitos por ordem decrescente dentro de cada segmento e que um tamanho em armazém apenas fornecerá pedidos até ao tamanho seguinte no catálogo, isto é, nunca fornecerá outros segmentos. Estas restrições podem, segundo o próprio autor, ser irrealistas em alguns casos.

O passo seguinte é encontrar as funções custo esperado (custos de ruptura + substituição + armazenamento) para cada tamanho em função do seu nível de stock, que são

⁹ Uma política diz-se segmentada se qualquer tamanho i utilizado para suprir pedidos de um tamanho menor j também fornece todos os pedidos de tamanhos entre i e j .

¹⁰ Uma política diz-se quasi-segmentada se qualquer tamanho i utilizado para suprir pedidos de um tamanho menor j também fornece todos os pedidos de tamanhos entre i e j , exceptuando pedidos de tamanhos que, estando no catálogo, só fornecem peças do seu próprio tamanho.

convexas, e aplicar resultados da teoria clássica dos stocks¹¹ em conjunção com a técnica de Wagner e Whitin para o problema da definição dinâmica de lotes económicos.

De uma forma geral este autor continua a utilizar programação dinâmica, procurando um percurso mínimo numa rede e aplicando resultados de Wagner e Whitin. Em alguns casos encontra teoremas que permitem diminuir o esforço computacional necessário à obtenção de soluções. Como passos seguintes Pentico propõe a procura de heurísticas que procurem achar “bons” resultados para o problema do catálogo e o estudo da utilização de heurísticas desenvolvidas para tratar outras formas em que este problema se pode transformar. Propõe ainda o estudo do caso multidimensional e do aproveitamento de desperdícios, o que conduz à consideração de um problema de cortes.

Pentico 1974

1 / S / Prob.

THE ASSORTMENT PROBLEM WITH PROBABILISTIC DEMANDS

Pentico 1976

1 / S

THE ASSORTMENT PROBLEM WITH NONLINEAR COST FUNCTIONS

Estes dois artigos assentam nos resultados relatados no trabalho anterior do mesmo autor [Pentico71].

Page 1975

2 / S

A NOTE ON A TWO-DIMENSIONAL DYNAMIC PROGRAMMING PROBLEM

Page trata o problema do Sortido 2D discreto a propósito da escolha de um conjunto de barras de aço de secção rectangular a manter em armazém. Essas peças fornecerão, directamente ou por substituição, um número elevado de pedidos de barras com diferentes secções rectangulares.

O autor relaxa o problema, trabalhando com a área da secção em vez da altura e largura dos perfis rectangulares. Isso conduz a uma formulação resolúvel por programação dinâmica, cuja solução não será geralmente admissível para o problema original, mas será um limite inferior para o valor do desperdício no problema não relaxado. Page modifica depois essa solução para conseguir admissibilidade e chega a um extremo (que

¹¹ *Inventory theory*

será porventura local, uma vez que na relaxação perdeu generalidade) utilizando um método de descida.

O autor estuda, para o caso tratado, o efeito do número de tamanhos em catálogo no custo total de operação.

Chambers e Dyson 1976

1,5 / 2

THE CUTTING STOCK PROBLEM IN THE FLAT GLASS INDUSTRY - SELECTION OF STOCK SIZES

Os autores tratam um caso discreto, apresentando várias situações em que o estudo do sortido dos tamanhos de placas de vidro rectangulares permitiu tomar decisões que levaram à diminuição do desperdício, quer por justificarem mudanças tecnológicas, quer levando à alteração de planos de armazenamento.

No caso abordado (exemplo 2.2.7), restrições produtivas obrigam a que os tamanhos a escolher tenham todos a mesma largura, pelo que os autores seleccionam em primeiro lugar a largura a considerar, reduzindo o problema ao caso unidimensional, sendo o passo seguinte a escolha dos comprimentos a produzir.

A determinação da largura é feita resolvendo, para cada largura possível, um problema do corte sem restrições nos comprimentos a utilizar. Escolhe-se o valor que minimize o desperdício (utiliza-se a técnica de Gilmore e Gomory, com aproveitamento das colunas de um problema para o seguinte, reduzindo o tempo necessário para cada problema de corte).

Para a escolha dos comprimentos são propostos dois métodos: uma heurística e a utilização de programação inteira.

O método heurístico consiste num processo de eliminação por etapas que parte dos comprimentos mais utilizados na solução do problema de corte, quando todos os comprimentos estão disponíveis. Esse conjunto é reduzido em cada etapa retirando o comprimento cuja saída provoca o menor aumento do desperdício. Este processo termina quando o número de tamanhos em armazém for o pretendido ou quando apenas exista um tamanho, obtendo-se assim "bons" sortidos de um, dois, três ... tamanhos. Esta heurística tem a limitação de considerar um número muito pequeno de conjuntos de tamanhos.

Para refinar o resultado da heurística anterior é utilizado um método de *Branch and Bound*, na pesquisa da árvore binária gerada pelo conjunto inicial dessa heurística (os filhos de um nó correspondem à inclusão ou não de um tamanho no sortido). Existe o

cuidado de não explorar ramos dominados, calculando limites inferiores para o desperdício em cada nó e de calcular limites à partida, com base nos resultados obtidos com a heurística.

Diegel e Bocker 1984

2 / 2 / Não contíguo

OPTIMAL DIMENSIONS OF VIRGIN STOCK IN CUTTING GLASS TO ORDER

De uma lista de tamanhos grandes disponíveis pretende-se escolher um conjunto para utilizar no planeamento da operação de corte. O exemplo concreto é o corte de placas de vidro para fabrico de janelas, supondo as duas dimensões como relevantes. Os resultados são facilmente aplicáveis em forma simplificada ao caso unidimensional.

Diegel e Bocker apresentam um exemplo trivial, reproduzido mais adiante neste trabalho (secção 4.1), em que é posta em evidência a importância do tamanho das peças grandes na diminuição do desperdício associado à operação de corte. Se as peças grandes não se adaptarem às peças pequenas, um processo de corte óptimo não evitará desperdícios elevados. Por outro lado, a escolha adequada das peças grandes leva a resultados razoáveis mesmo através de uma fraca heurística para a determinação dos padrões de corte. Ligeiras variações nas dimensões das peças grandes podem reduzir significativamente o desperdício.

Os autores fazem simulações da operação de corte, sem contar o número de placas cortadas. Para a operação de corte final apenas consideram as peças grandes que foram utilizadas na simulação, e assim podem testar todas as possíveis combinações. A ideia é que se a heurística de corte tiver acesso a menos tamanhos, escolhidos por este critério, se gera menor desperdício do que quando se consideram todos os tamanhos disponíveis. Isso só faz sentido se não se dispuser de um algoritmo de corte optimizante.

Beasley 1985

2 / 2

AN ALGORITHM FOR THE TWO-DIMENSIONAL ASSORTMENT PROBLEM

Trata-se a escolha de k de entre n rectângulos grandes para corte de peças rectangulares mais pequenas. O modelo de Beasley foi já apresentado em 2.5.2 e inclui limites máximos e mínimos para o número de peças pequenas resultantes do corte. Tal como a formulação clássica do problema de cortes, este modelo envolve a enumeração de todos os padrões de corte admissíveis, implicando em problemas relativamente pequenos tempos de cálculo demasiado longos para permitir chegar à optimalidade.

Beasley analisa muito brevemente dois trabalhos anteriores ([Page75] e [Chambers76]) identificados por Hinxman [Hinxman80].

Uma vez que o problema se divide naturalmente na escolha de rectângulos para catálogo e na selecção de padrões de corte, o autor aborda estes problemas separadamente e supõe cortes guilhotináveis.

Beasley começa por utilizar técnicas de Gilmore e Gomory para obter padrões de corte para cada peça grande que contenham o máximo número possível de cada peça pequena. Este conjunto de padrões é depois aumentado utilizando um processo guloso. Beasley identifica as peças que não precisam de ser cortadas ($a_j = 0$ no modelo apresentado em 2.5.2) e gera padrões para todas as peças grandes que apenas incluem as peças não obrigatórias se não puderem incluir outras. Escolhe depois a peça grande menos desperdiçada e utiliza-a tantas vezes quanto as necessárias para diminuir o número de peças pequenas a cortar, repetindo o processo para as peças que faltam.

Para a escolha dos rectângulos a incluir no sortido não é obviamente praticável a consideração dos C_k^n conjuntos possíveis. Para examinar apenas um subconjunto resolvem-se os problemas de selecção de padrões de corte quando todos os tamanhos estão disponíveis. Os candidatos ao sortido são depois ordenados por ordem decrescente de utilização. Tomam-se inicialmente os k tamanhos melhor aproveitados e procede-se a trocas de cada um desses tamanhos com outros se isso melhorar a solução. Este processo continua até que não seja possível qualquer melhoria ou se atinja um tempo limite. A solução para um sortido de k tamanhos é obtida, relaxando as condições de integridade do modelo inteiro indicado em 2.5.2 e considerando apenas os k tamanhos no catálogo. O autor indica processos para, numa fase final, obter uma solução inteira admissível.

A qualidade dos resultados apresentados é boa, assim como a da própria escolha de padrões de corte que é comparada com resultados de outros autores.

Tryfos 1985

1 e 2 / S / Prob. Dep.

ON THE OPTIMAL CHOICE OF SIZES

O autor apresenta um processo para determinar a composição de um catálogo de calçado de modo a maximizar as vendas. A probabilidade de um par de sapatos se vender está associada a uma medida de conforto calculada com base na diferença entre a medida do eventual comprador e o comprimento do sapato. Tryfos supõe que um cliente nunca compra um tamanho menor do que o seu, pelo que se trata de um problema de *assortment* e não de standardização [Pentico86].

Tryfos refere que o problema se assemelha ao problema estatístico de agrupamento e trata o caso unidimensional, generalizando no final e dando indicações de como esta abordagem pode ser estendida ao caso de existirem duas grandezas relevantes, que é mais complexo.

Não colocando restrições à distribuição das medidas da população, o autor sugere uma função para a probabilidade de compra dependente da diferença entre a medida do pé do comprador e o tamanho em catálogo. O método é geral e pode ser modificado para considerar outro tipo de função.

Encontrada uma função para a probabilidade de compra em função do catálogo disponível, Tryfos acha condições necessárias de optimalidade para uma versão relaxada do problema, que embora não sendo de resolução analítica simples têm a propriedade de que uma vez definido o tamanho menor do catálogo os outros tamanhos ficam univocamente determinados. Assim no processo proposto calculam-se os sortidos gerados por aquelas condições de estacionariedade quando o menor tamanho toma todos os valores possíveis. Dos resultados eliminam-se os extremos locais (máximos e mínimos), ficando com a solução que conduziu a um máximo. A condição relaxada foi sempre verificada, nos exemplos testados.

Uma vez que a distribuição normal aproxima bem a distribuição da dimensão do corpo humano e é matematicamente bem comportada, o autor encontra sortidos óptimos [Vidal93a] para um exemplo em que a população é caracterizada por esta distribuição. Não é apresentada qualquer prova de optimalidade.

Pentico 1986

COMMENTS ON "ON THE OPTIMAL CHOICE OF SIZES" BY PETER TRYFOS

A propósito da classificação do artigo de Tryfos [Tryfos85] como um problema de catálogo, o autor apresenta uma pequena lista de assuntos e artigos relacionados com o problema da escolha de tamanhos (standardização, sortido ou catálogo) e outros problemas de estrutura semelhante.

Pentico 1988

2 / S

THE DISCRETE TWO-DIMENSIONAL ASSORTMENT PROBLEM

Como o título indica, o autor trata o caso discreto em que se consideram duas características ou medidas do produto considerado e mais uma vez o problema abordado é de substituição, não existindo um problema de cortes associado.

No caso de políticas de armazenamento *nested*¹² o problema pode ser resolvido por programação dinâmica. A suposição deste tipo de política é admissível quando as duas dimensões a considerar estão fortemente correlacionadas. No entanto, obtêm-se melhores resultados com políticas *semi-nested* (como políticas *nested* mas em que uma das dimensões pode ser igual à de tamanhos menores).

Pentico supõe funções custo côncavas, o que lhe permite, mais uma vez, interpretar o problema considerando fluxos numa rede e demonstrar que, se os custos de substituição forem aditivos, a política óptima é rectangularmente segmentada¹³.

O autor apresenta duas regras que reduzem a dimensão dos conjuntos de tamanhos para os quais cada elemento do catálogo é uma fonte potencial.

Com base nestes resultados apresentam-se duas heurísticas, a primeira das quais consiste num processo em duas etapas: determinar os tamanhos a ter em catálogo e determinar as substituições a utilizar. Um outro método permite refinar esta solução e consiste num processo iterativo em que vão entrando sucessivamente no catálogo os tamanhos não armazenados que levem à diminuição dos custos e saindo os tamanhos cuja saída também conduz à diminuição do custo total. Esta segunda heurística foi considerada a melhor de entre os métodos não optimizantes comparados neste artigo (heurísticas e programação dinâmica com políticas *nested* e *semi-nested*).

Pinho e Ferreira 1990

1 / S / Prob. Dep.

A SIZING PROBLEM SOLVED BY THE GENERALIZED MAXIMUM PRINCIPLE

Os autores tratam o problema da determinação de medidas normalizadas com o objectivo de maximizar as vendas esperadas de determinado artigo, em casos em que a característica física relevante na população é caracterizada por uma distribuição normal. Este problema foi introduzido por Tryfos [Tryfos85] mas é neste caso resolvido através do princípio do máximo generalizado.

O problema é formulado como um problema de controlo óptimo em tempo discreto.

Demonstra-se que o problema não pode ser resolvido pelo princípio do máximo discreto em forma forte, porque não existe convexidade direccionada do conjunto dos estados. A

¹² Numa política *nested* todos os tamanhos no sortido são maiores em ambas as dimensões do que os tamanhos menores.

¹³ Uma política diz-se rectangularmente segmentada se qualquer tamanho (i,k) que supra os pedidos de um tamanho não armazenado (j,m) , também substitui todos os tamanhos intermédios (p,r) , onde $i \geq p \geq j$ e $k \geq r \geq m$.

demonstração desse facto é apresentada e baseia-se no estudo das funções fronteira superior (*upper boundary functions*).

Perante a conclusão anterior os autores recorrem a uma técnica mais poderosa: o princípio do máximo generalizado que não requer convexidade direcciona. É apresentado um algoritmo baseado neste princípio necessário de optimalidade, que experimentalmente chegou sempre a soluções óptimas [Vidal93a].

Apresentam-se resultados computacionais e analisa-se o andamento da probabilidade de compra em função do número de tamanhos nos sortidos óptimos.

Pinho e Ferreira 1990

1 / S / Prob. Dep.

DETERMINAÇÃO OPTIMA DE MEDIDAS ESTANDARDIZADAS

De novo se trata o problema referido em [Tryfos85] e abordado pelos mesmos autores em [Pinho90a]. Neste artigo propõe-se um algoritmo baseado no princípio do máximo discreto em forma fraca.

O problema é descrito e, tal como em [Pinho90a], apresenta-se a formulação como controlo óptimo em tempo discreto. Descreve-se um algoritmo iterativo que assenta nas condições necessárias de optimalidade do princípio do máximo em forma fraca (mostrou-se em [Pinho90a] que não se poderia aplicar a forma forte).

Os resultados obtidos confirmam os verificados em [Tryfos85] e [Pinho90a]. Não estando a optimalidade garantida, não se encontraram também soluções de igual ou superior qualidade em alguns testes efectuados. Embora não seja apresentada qualquer prova de optimalidade, os resultados obtidos nos exemplos testados são óptimos [Vidal93a].

Gemmill e Sanders 1991

1 / 1

A COMPARISON OF SOLUTION METHODS FOR THE ASSORTMENT PROBLEM

Os autores aplicam ao problema do catálogo a técnica de *optimization homotopy*, que consiste em transformar progressivamente um qualquer grupo inicial de peças, para as quais o sortido óptimo seja de fácil determinação, no conjunto de peças que realmente se pretende cortar. A cada transformação do conjunto de peças a cortar, pressupõe-se que o novo sortido óptimo vai ser semelhante ao anterior, isto é, estará numa vizinhança do anterior, que por isso servirá como ponto de partida para uma pesquisa em que se procura a melhor solução. Sendo o percurso dependente do conjunto inicial de tamanhos, este método não garante um óptimo global, pelo que os autores sugerem a utilização de

mais do que um ponto de partida para obter uma boa solução. Para o conjunto inicial de tamanhos consideram-se múltiplos do comprimento médio das peças pequenas.

O método de *optimization homotopy* pode ser aplicado directamente ao caso contínuo.

Os autores comparam, para um conjunto de problemas unidimensionais, este método com a heurística de Beasley [Beasley85] e com as duas heurísticas de Chambers e Dyson [Chambers76]. Aí concluem que quando existem poucos tamanhos admissíveis para armazém, as heurísticas de Beasley e de Chambers e Dyson se comportam bem, mas que o aumento deste conjunto e a diminuição das diferenças entre esses tamanhos torna a técnica de *optimization homotopy* mais vantajosa, apesar de ser computacionalmente mais pesada e complexa¹⁴.

Para o planeamento da operação de corte, Gemmill e Sanders utilizaram, para os métodos comparados, um FFDH (*first fit decreasing height*) e um *step algorithm* [Qu89], por uma razão de consistência na comparação. Isto talvez tenha levado os métodos de Chambers e Dyson a comportarem-se pior, uma vez que originalmente utilizavam o método otimizador de Gilmore e Gomory, que permite fiabilidade no cálculo dos limites para o *branch and bound*. Nos resultados apresentados pelos autores conclui-se que em algum dos testes o primeiro método apresentado em [Chambers76] resultou melhor do que o segundo (o que nunca aconteceria se fosse utilizado o método de Gilmore e Gomory como levado a cabo por Chambers e Dyson).

Os autores referem não utilizar os resultados de Diegel e Bocker [Diegel84], por estes só se aplicarem ao caso de cortes guilhotináveis. A uma dimensão todos os cortes são guilhotináveis, no entanto Diegel e Bocker consideram o caso em que existe uma lista de peças grandes.

Chen 1993

2 / 2 / Uni-padrão

A MIXED-INTEGER PROGRAMMING MODEL FOR A CLASS OF ASSORTMENT PROBLEMS

Neste artigo apresenta-se um modelo para o problema 2/2/Uni-padrão cuja função objectivo é não linear (produto das duas dimensões do rectângulo grande) e cujas restrições são lineares. A única restrição quanto ao tipo de cortes possíveis é a ortogonalidade na posição das peças, relativamente ao rectângulo envolvente, o que implica a necessidade de um modelo de grande dimensão - para 8 peças pequenas consideram-se 265 restrições e 212 variáveis, 190 das quais binárias. O número de

¹⁴ Será mais pesada, mas a implementação parece mais simples.

restrições e de variáveis binárias cresce quadraticamente com o número de rectângulos pequenos envolvidos.

Os casos tratados, para levantar a não linearidade da função objectivo, reduzem a dimensão do problema porque consideram uma das dimensões constante ou a razão entre comprimento e largura da placa grande constante. Tratando-se neste caso de problemas 1/2/Uni-padrão.

Vidal 1993

1 / S / Prob. Dep.

ON THE OPTIMAL SIZING PROBLEM

Vidal retoma o problema da composição óptima do catálogo a uma dimensão para maximização do lucro esperado face a determinada população e refere que o problema não foi satisfatoriamente discutido em [Tryfos85], uma vez que não se provou a optimalidade do método aí apresentado. O autor conceptualiza o problema como a determinação da partição óptima de um intervalo [Ferreira90], e utiliza a função probabilidade de compra introduzida por Tryfos e já utilizada por [Pinho90a] e [Pinho90b].

Demonstrando que a função custo associada a um intervalo satisfaz condições de submodularidade e continuidade, Vidal utiliza um resultado de Denardo et al. [Denardo82] para mostrar que partições ou sequências óptimas (sortidos óptimos) com números consecutivos (n e $n+1$) de tamanhos diferentes consecutivos são intercalados¹⁵ e que o custo associado aos sortidos óptimos é uma função convexa e decrescente em n .

Através das condições necessárias de optimalidade o problema apresentado por Tryfos (P1) é reduzido a um problema de optimização a uma variável (x_{n-1}) que pode ser resolvido utilizando processos elementares (um método de bissecção neste caso).

No problema completo (P2) consideram-se também custos de produção $A(n)$ associados ao número de tamanhos a produzir. Vidal apresenta um algoritmo que resolve o problema de forma óptima para o caso comum dessa função custo ser convexa e crescente em n . Se $A(n)$ não verificar esta condição o método pode ser facilmente modificado de modo a resolver o problema.

¹⁵ $\mathbf{x}(n)$ e $\mathbf{x}(n+1)$ são intercalados se $x_i(n) \leq x_{i+1}(n+1) \leq x_{i+1}(n)$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

$x_i(n)$ representa o i -ésimo elemento do sortido óptimo para um catálogo com n tamanhos distintos.

$\mathbf{x}(n)$ representa a sequência de todos os tamanhos do sortido óptimo para um catálogo com n tamanhos distintos.

Este algoritmo é incremental e resolve sucessivamente P1 e P2. O autor supõe inicialmente um sortido de apenas dois tamanhos e utiliza em cada iteração subsequente ($n+2$) a resolução do problema P1 na iteração precedente ($n+1$) e a propriedade de intercalação para reduzir o espaço de procura da solução do problema P1, em que existe mais um tamanho no catálogo. O processo pára quando o incremento do número de tamanhos em catálogo (n) não introduzir melhoria.

Dada a simplicidade do processo o autor apresenta um exemplo com distribuição normal, resolvido interactivamente num programa comercial (MathCAD), e faz a comparação possível com os resultados de Tryfos [Tryfos85].

4 O Sortido e o Corte

Neste, e nos restantes capítulos da dissertação, a atenção recai exclusivamente sobre problemas do catálogo em que a política para satisfação de pedidos pressupõe operações de corte, isto é, em que de uma mesma peça grande existe a possibilidade de se obterem diversas peças pequenas. A opção por esta classe de problemas deve-se a dois factores fundamentais: por um lado, e como foi referido, as políticas de substituição geram problemas mais simples, que podem em alguns casos ser atacados optimamente por programação dinâmica [Pentico71] ou outros processos [Vidal93a]; por outro lado, existe no grupo de investigação, no âmbito do qual este trabalho foi levado a cabo, conhecimento resultante da investigação e desenvolvimento de aplicações na área dos problemas de corte e empacotamento, que surgem como ponto de partida natural para o estudo da selecção de sortidos em operações de corte, e onde este se enquadra como uma extensão.

Esta classe de problemas pode ser vista como um alargamento ou generalização do problema de cortes, uma vez que à solução do problema do sortido estão associados os planos de corte a utilizar. Um problema de cortes em que os tamanhos grandes deixam de ser fixos, sofre, em consequência disso, um aumento da complexidade combinatória criando portanto dificuldades acrescidas.

Neste capítulo refere-se a importância da escolha de um bom catálogo e inicia-se o estudo da relação entre o problema do sortido e a correspondente determinação dos padrões de corte a utilizar. Essa relação será mais especificamente ilustrada no capítulo seguinte, através de resultados obtidos com uma aplicação designada por ASSORT, que foi desenvolvida para o estudo deste problema. Faz-se uma sucinta e natural referência à resolução do problema de cortes em si.

4.1 Vale a pena investir no sortido?

Desde há muito existe a preocupação de otimizar as operações de corte e empacotamento em processos produtivos, através da minimização de desperdícios e da utilização de outros critérios considerados adequados para cada caso concreto. A

consciência da importância económica do problema levou ao desenvolvimento de aplicações que pretendem automatizar a geração de planos de corte para diversos tipos de operações. Estas aplicações muito beneficiam alguns processos em que as soluções anteriores, geralmente manuais, nem sempre conseguiram resultados comparáveis. Esta diferença foi particularmente notória em processos cuja complexidade e variabilidade dos pedidos não permitiu a “cristalização” de alguns bons padrões de corte, que pudessem ser sistematicamente repetidos.

A obtenção de planos de corte óptimos ou simplesmente bons, mostrou a alguns decisores que talvez não estivessem a utilizar um catálogo adequado e desencadeou alterações nos sortidos escolhidos (2.2.8). Em aberto ficou a questão de saber qual seria o **maior ganho marginal**, se o associado ao investimento na geração dos planos de corte, se o decorrente da aposta na escolha dos melhores sortidos.

A comunidade científica tinha já concluído que o catálogo era um factor importante para o problema de cortes e a classificação de Dyckhoff considera explicitamente algumas características do sortido. No entanto, nesses casos, o sortido de peças grandes surge sempre como uma entrada para o problema e nunca integrando a solução, o que constituiria o resultado pretendido no problema do catálogo em simultâneo com a determinação dos planos de corte que guiarão a satisfação dos pedidos. Neste sentido, o problema da determinação do sortido pode ser visto como um alargamento ou generalização do problema de cortes.

Os problemas de corte e empacotamento são normalmente difíceis por si sós, não sendo em muitos casos abordáveis senão por métodos heurísticos. O aumento do espaço de soluções ao permitir que a composição do sortido de peças grandes varie, acarreta um crescimento das dificuldades derivadas do carácter combinatório do problema e uma diminuição da esperança de encontrar óptimos globais em tempo útil.

Antes de prosseguir na tentativa de encontrar soluções para estes problemas, interessa conhecê-los melhor e tentar aferir mais objectivamente a sua importância. Para uma primeira ilustração da relevância do tamanho das peças grandes numa operação de corte, utiliza-se um exemplo muito simples, apresentado por Diegel e Bocker [Diegel84], a propósito do corte ortogonal de rectângulos na indústria vidreira. Nesse exemplo, todas as medidas são em polegadas.

Se se pretender obter muitas placas rectangulares de dimensão 31×16 a partir de peças de tamanho 60×30 , exclusivamente, não é possível realizar a operação sem gerar uma grande quantidade de desperdício. Na figura 4.1 verifica-se que a proporção da peça grande que é desperdiçada se aproxima de 75% (72,4%).

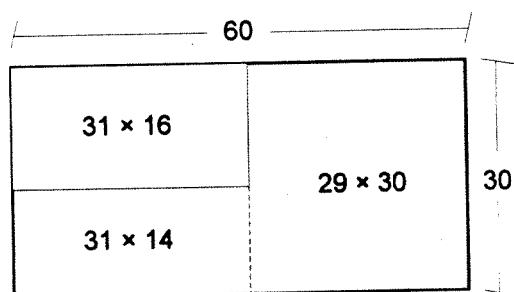


Figura 4.1 Exemplo: O pior caso possível

Diegel e Bocker referem que apesar deste exemplo poder parecer exagerado ao ponto de se tornar ridículo não deixa de ser realista no que diz respeito a certos vidros, como os de grande espessura.

As peças de dimensões 31×14 e 29×30 , resultantes da guilhotinagem, poderiam eventualmente ser reutilizadas para outro fim, mas no que diz respeito a este exemplo são consideradas desperdício, uma vez que nunca substituem um rectângulo de tamanho 31×16 , se só este artigo for requerido. É óbvio que uma peça grande que conduziria a cortes óptimos poderia ser encontrada com base nos múltiplos de 16 e 31, mas supõe-se que desta qualidade de vidro o operador da máquina de corte apenas conserva em armazém peças com dimensões 60×30 e não considerou a hipótese de outros tamanhos.

Enquanto nesta classe de cortes¹⁶ o limite máximo para o desperdício se situa nos 75%, é fácil generalizar e concluir que esse valor é de 50% e 87,5% nos casos de corte a uma dimensão e empacotamento (corte) tridimensional. Esta conclusão parece indicar que a importância da escolha de um bom sortido cresce com o aumento da dimensionalidade do problema. Evidentemente que, na generalidade dos casos práticos, a proporção de desperdício não atinge tais valores, apesar de continuar a ser um factor preponderante, especialmente quando o custo da matéria prima é elevado ou não há possibilidade de reaproveitamento de pontas. Parece claro que o peso relativo do desperdício está inversamente correlacionado com o número de peças pequenas que se consiga extrair duma peça grande, ou de modo semelhante com a razão entre a dimensão das peças grandes e das peças pequenas.

Retomando o exemplo apresentado em [Diegel84], considera-se agora uma peça grande ligeiramente maior, com dimensão 62×32 e registam-se as duas estratégias de corte apresentadas na figura seguinte.

¹⁶ Caso bidimensional, com padrões de corte ortogonais, tipo guilhotina.

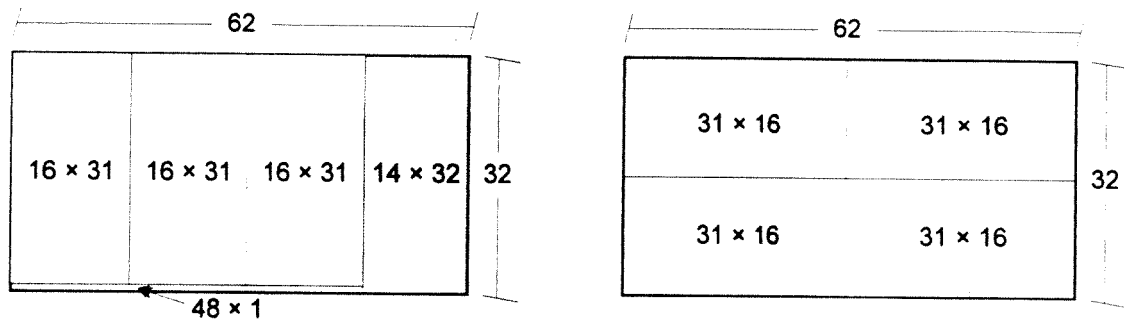


Figura 4.2 Duas estratégias de corte

A segunda estratégia é melhor, uma vez que elimina totalmente os desperdícios. No entanto, muitos processos para gerar padrões de corte, utilizados até hoje na indústria, não são optimizantes; a primeira estratégia representa e simboliza aqui o resultado de um tal método¹⁷. O primeiro padrão de corte pode ter sido gerado por um processo que não suponha a rotação dos rectângulos pequenos, restrição fundamental no corte de muitos materiais, mas não necessária no caso deste exemplo. De qualquer modo, ambos os padrões de corte resultam em perdas por desperdício muito inferiores ao que tinha sido observado na figura 4.1 com o tamanho grande 60×30 , isto é, com um sortido inadequado.

Outra constatação resultante da confrontação dos exemplos é que uma pequena alteração no tamanho das peças grandes, ou de outra maneira, no sortido, pode eventualmente conduzir a uma diminuição considerável do desperdício. Nota-se que se o sortido (o tamanho das peças grandes) for mal escolhido, como no caso ilustrado pela figura 4.1, nem um algoritmo de corte óptimo consegue evitar desperdícios consideráveis. Por oposição, a figura 4.2 serve para ilustrar que se as características do sortido forem favoráveis, até mesmo uma fraca heurística de corte consegue resultados melhores do que o plano ideal de corte perante um mau sortido¹⁸.

Em muitas aplicações, o investimento na geração de planos de corte poderá conduzir a uma diminuição relativamente pequena do desperdício, face ao que se obteria pela cuidadosa escolha do catálogo de peças grandes. Nesses casos, o problema do sortido é mais importante do que o problema de cortes. A validade deste tipo de considerações deve ser analisada em cada exemplo concreto. O princípio que é facilmente aceite, é que mesmo que uma empresa disponha de bons processos para planear o corte, se não tiver um sortido adequado, está a privar-se de poupanças e ganhos eventuais de matéria prima. Este facto é claramente ilustrado no capítulo seguinte, com a representação das funções objectivo.

¹⁷ No artigo de Diegel e Bocker esse padrão é atribuído ao operador do aparelho de corte.

¹⁸ Nos exemplos das figuras 4.1 e 4.2 os desperdícios são de 25% e 72,4%, respectivamente.

4.2 O problema do corte

Se o problema do sortido pode ser visto como uma generalização do problema dos cortes, será talvez interessante estudar a resolução deste segundo problema, cujo número de diferentes formas é enorme e como referido em 2.3.3 mereceu diversos esforços de classificação. Não é no entanto o objectivo deste trabalho o estudo de operações de corte por si sós, pelo que esta secção será relativamente breve.

Com o objectivo de apresentar a família dos problemas dos cortes, reproduz-se um esquema classificativo apresentado em [Oliveira90], que só por si não desobriga o leitor interessado da leitura do texto que o acompanha na publicação original, mas que indica os critérios classificativos e regista casos importantes¹⁹.

“Classificação do problema de cortes:

Problema de cortes...

de dimensão: 1, 1 1/2, 2, 2 1/2, 3.

com objectivo de...

minimizar o desperdício

minimizar a quantidade de matéria prima gasta.

com restrições no(s)...

material de entrada que...

existe em quantidades ilimitadas ou ...

... existe em quantidades limitadas.

tem um só tamanho ou...

... tem vários tamanhos.

inclui reaproveitamento de processos de corte anteriores ou ...

... só inclui medidas normalizadas.

padrões de corte....

onde são permitidas rotações de figuras ou ...

... onde a orientação das figuras é fixa.

que incluem figuras irregulares.

que só têm rectângulos ...

colocados não ortogonalmente.

colocados ortogonalmente ...

cortados arbitrariamente.

cortados em guilhotina ...

com ou sem limitações no número de

¹⁹ Outras publicações que dão uma visão global sobre os problemas de corte e empacotamento são: [Hinxman80], [Dyckhoff90], [Heassler91], [Dyckhoff92] e [Dowsland92].

lâminas e fases do corte.

material de saída que ...

tem que ter exactamente as dimensões pretendidas ou ...

... pode variar as dimensões dentro de uma dada tolerância.

não tem restrições nas quantidades produzidas de cada tipo ou ...

... tem que ser produzido exactamente nas quantidades pedidas.

pode ser produzido com excedentes

pode ser produzido com excedentes ou falhas

dentro de um tolerância dada.”

Esta classificação reúne alguns casos frequentes na prática e não esgota, nem tenta enumerar, todos os problemas possíveis, devendo-se notar que na realidade se acrescentam muitas vezes outras características como, por exemplo, os limites no percurso do aparelho de corte²⁰ ou a obrigatoriedade de utilizar um padrão de corte único em toda a operação. A noção desta multiplicidade de problemas e da diversidade de técnicas a empregar na sua resolução, justificou grande atenção e esforço por parte de um número relativamente grande de investigadores, e a criação de grupos de interesse especializados em problemas de corte e empacotamento²¹.

Quanto às técnicas utilizadas, dependem criticamente do tipo de problema e em muitos casos são apenas heurísticas, dada a inexistência de algoritmos capazes de solucionar os problemas em tempo útil. A este propósito Hinxman escreveu o seguinte [Hinxman80]²²:

“Quem se vir confrontado com um Problema de Cortes terá muito provavelmente que desenvolver o seu próprio método, a menos que a abordagem de Gilmore e Gomory seja viável. Tais métodos terão de ser quase de certeza heurísticos. O estudo de artigos, se algum existir, sobre problemas similares pode ajudar. Contudo, os métodos heurísticos tendem a ser fortemente baseados nos problemas particulares a que são aplicados, e problemas aparentemente semelhantes podem exigir métodos heurísticos radicalmente diferentes”.

Naturalmente que desde 1980 surgiram muitas publicações sobre o tema e os meios disponíveis permitem atacar problemas mais complexos. No entanto o parágrafo de Hinxman continua a ser válido. Felizmente que a técnica de Gilmore e Gomory pode ser utilizada em muitos casos e tem sido estendida por outros autores [Farley88].

²⁰ Relevante no corte de peças irregulares por *laser* ou por jacto de areia.

²¹ Na IFORS (*International Federation of Operations Research Society*) existe um grupo especializado dedicado a problemas de corte e empacotamento, designado por SICUP (*Special Interst Group on Cutting and Packing*).

²² Esta citação foi inicialmente sugerida por [Oliveira90].

O aumento da capacidade de cálculo disponível e os avanços realizados na área da programação inteira permitem hoje resolver alguns problemas de forma óptima, como a maior parte dos problemas de corte a uma dimensão [Wäsher93a].

Um modelo simples para problemas dos cortes, sem restrições no número de padrões, poderia ser o seguinte:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in P} c_p x_p \\ \text{sujeito a:} \quad & \sum_{p \in P} a_{jp} x_p \geq d_j, \quad j = 1, \dots, m; \\ & x_p \geq 0, \quad \forall p \in P; \\ & x_p \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

Notação:

- P Conjunto de todos os padrões de corte possíveis;
- c_p Custo associado à utilização do padrão de corte $p \in P$;
- m Número de tipos de peças pequenas;
- d_j Número de peças pequenas de tipo j pretendidas²³ ($j = 1, \dots, m$);
- a_{jp} Número de peças de tipo j ($j = 1, \dots, m$) geradas pelo padrão p ;
- x_p Número de vezes que o padrão $p \in P$ é utilizado.

A comparação deste modelo com o modelo de Beasley, que foi apresentado na secção 2.5.2, reforça a ideia de que o sortido pode ser visto como um alargamento do problema de cortes²⁴. O modelo deixa em aberto a questão de como gerar o conjunto P .

É necessário escolher um subconjunto das possíveis operações de corte a considerar no resto da dissertação. É natural que se considerem os casos dos cortes a uma e a duas

²³ A primeira restrição do modelo, que diz respeito à satisfação da procura, representando-se aqui como uma desigualdade, é equivalente à igualdade na generalidade dos casos que supõe todos os possíveis padrões de corte.

²⁴ Além da generalização a n tamanhos grandes disponíveis a que se faz referência, o modelo apresentado em 2.4.2 tem especificidades que muitos modelos para o corte incluem, como permitir que o número de peças pequenas geradas esteja dentro de determinados limites e o detalhe do método de atribuição de custos aos padrões de corte.

dimensões e que o objectivo seja a minimização do custo da matéria prima²⁵. No caso bidimensional consideram-se os cortes ortogonais guilhotináveis em 3-fases²⁶. São quatro as razões que levam a esta escolha:

- Interessa estudar os dois casos, unidimensional e bidimensional, pois as características dos problemas que surgem na prática são diferentes, para problemas com diferentes dimensionalidades;
- As classes escolhidas são muito frequentes na indústria, pelo que o âmbito de aplicação é grande;
- Existem técnicas que permitem atacar de forma eficaz e eficiente estes problemas, nomeadamente as já citadas técnicas devidas a Gilmore e Gomory [Gilmore63]²⁷;
- Foi disponibilizado código específico para a resolução destes tipos de problemas²⁸.

O método de Gilmore e Gomory para cortes unidimensionais encontra-se descrito no apêndice A1. A abordagem de Gilmore e Gomory aos problemas de corte é optimizante, o que permite minimizar a incerteza na análise que será feita do problema nos capítulos seguintes.

4.3 Escolha aproximada de um sortido

Nesta secção discutem-se alguns princípios para a escolha de sortidos sem recorrer a grandes esforços computacionais, particularmente sem resolver qualquer problema de cortes.

A escolha do sortido deverá ser feita com base nas dimensões das peças pequenas. Numa primeira abordagem os tamanhos a incluir no catálogo podem ser escolhidos de entre valores múltiplos dos tamanhos pequenos. Neste processo podem-se considerar dominados os tamanhos pequenos que são submúltiplos de outros, deixando de ser

²⁵ De [Oliveira90]: “Normalmente os objectivos são traduzidos em termos da minimização da quantidade de sucata (minimização de desperdícios) ou da quantidade de material usado (minimização de entradas). quando os pedidos são exactamente satisfeitos, então os dois objectivos são equivalentes, no sentido de que a solução que origina desperdício mínimo também origina um gasto mínimo de peças de matéria-prima (entrada do processo de corte) e vice-versa”

²⁶ Ficam assim excluídos os cortes em n-fases, os cortes não guilhotináveis e os cortes não ortogonais.

²⁷ Essa eficácia será avaliada mais à frente, na secção 2.2.1.

²⁸ O módulo nuclear, responsável pela optimização do corte, utilizado no ASSORT, foi cedido pelo Eng. José Fernando Oliveira (FEUP, INESC Porto).

considerados na geração dos tamanhos grandes. No entanto, o número de sortidos diferentes à escolha pode ser muito elevado. Outra regra possível consiste em dar maior importância aos tamanhos que apresentem maior frequência na procura. Como referido em [Diegel84], este princípio torna-se impraticável no caso bidimensional, onde é necessário ajustar não só os comprimentos mas também as larguras das peças, porque duas peças podem ter uma relação numa dimensão e não na outra, e também porque as distribuições de frequências nas duas dimensões serão distintas. Isto leva a que uma análise deste tipo no caso bidimensional possa ser inconclusiva.

Se uns tamanhos podem dominar outros por serem múltiplos destes, isso não querará dizer obrigatoriamente que estes últimos devam ser esquecidos. Isto porque alguns tamanhos se complementam de modo a gerarem conjuntos que conduzam a boas soluções. Cada padrão de corte não irá incluir apenas tamanhos iguais entre si ou tamanhos múltiplos uns dos outros, e talvez que os melhores sortidos sejam constituídos pela combinação de vários tamanhos diferentes. Por exemplo, para as peças de tamanho 50, 70 e 120, um tamanho grande múltiplo de 120 seria adequado porque os dois tamanhos mais pequenos somam 120. No caso de o tamanho maior não ser pretendido, este deveria ser de qualquer modo um candidato importante para dar origem ao tamanho no sortido, apesar de nenhum submúltiplo seu fazer parte da procura.

Em [Diegel84] é apresentada uma discussão deste tipo, exemplificada com um caso real. No entanto a utilização destes princípios para a escolha de sortidos sem recorrer a meios para testar as possíveis alternativas é inviável, excepto em casos trivialmente simples.

Outra abordagem pode ser o recurso a resultados ou simulações de operações de corte anteriores, para a obtenção de relações entre as grandezas em jogo através de ferramentas estatísticas. Uma abordagem deste tipo foi utilizada para o problema de *portfolio*, que corresponde à solução simultânea de problemas de sortido com listas de peças pequenas geradas aleatoriamente [Gemmil90]. Nos parágrafos seguintes apresentam-se alguns resultados e conclusões obtidas por Gemmill e Sanders [Gemmil90].

Geraram-se aleatoriamente listas de peças pequenas (pedidos) com as seguintes características:

- Número total de peças distribuído uniformemente entre 150 e 200 artigos;
- Número de tamanhos diferentes distribuído uniformemente entre 10 e 25;
- Procura de cada tamanho seguindo uma distribuição normal truncada, com média dada pela razão entre o número total de unidades pedidas e o número de diferentes tamanhos e desvio padrão igual a metade da média;
- Medidas dos tamanhos pedidos seguindo uma distribuição normal truncada de média 1 e desvio padrão variando entre 0.00 e 0.35.

Na figura 4.3 esboçam-se, para vários valores do desvio padrão dos tamanhos pequenos, as curvas obtidas por Gemmill e Sanders para a percentagem média de desperdício resultante²⁹.

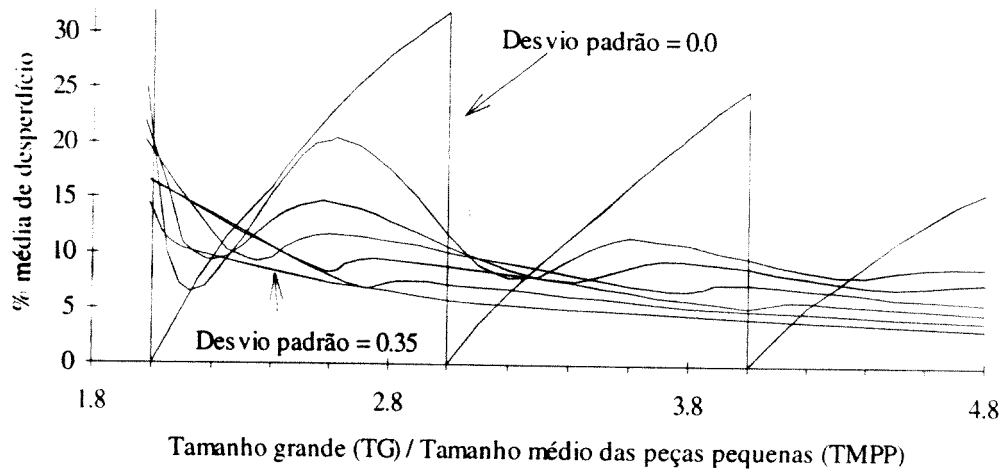


Figura 4.3 Valores médios gerados por 30 problemas para cada valor de TG.

Da observação da figura 4.3 são notados os seguintes aspectos quanto à razão entre a medida do tamanho grande (TG) e o tamanho médio das peças pequenas (TMPP):

- Parece existir uma relação entre a razão TG/TMPP e os mínimos locais das curvas de desperdício médio.
- Com o aumento do desvio padrão dos tamanhos das peças pequenas, os mínimos locais deslocam-se de valores TG/TMPP inteiros (apenas um tamanho pequeno) para valores mais elevados.
- Para um determinado desvio padrão, a distância entre mínimos locais e valores inteiros de $TG/TMPP = n$ (n inteiro) aumenta com o aumento de n .
- Quando o desvio padrão dos tamanhos pequenos ultrapassa valores entre 0,35 TMPP a linha resultante torna-se uma função monótona decrescente.
- Com o aumento da razão TG/TMPP, as curvas aproximam-se a funções monótonas decrescentes.

Conclui-se assim que os pontos em que as curvas de desperdício apresentam mínimos locais parecem depender dos dois factores seguintes: múltiplos inteiros da razão TG/TMPP (n); e do desvio padrão dos tamanhos pedidos (s). A partir destas variáveis

²⁹ Não fica claro qual a heurística que terá sido utilizada para o corte. Depreende-se ter sido empregue trabalho anterior de Qu e Sanders [Qu89].

desenvolvem-se modelos de regressão linear para os casos de distribuições normal, beta e uniforme. Os modelos encontrados são (P_n representa o n -ésimo mínimo local):

$$P_n = n + 0,8 (n . s) \quad \text{Distribuição normal.}$$

$$P_n = n + 0,9 (n . s) \quad \text{Distribuição uniforme.}$$

$$P_n = n + 1,4 (n . s) \quad \text{Distribuição beta.}$$

Finalmente, calculam-se os parâmetros do modelo, combinando os dados obtidos para as três distribuições anteriores:

$$P_n = n + 1,0 (n . s) \quad \text{Dados combinados das três distribuições.}$$

Este tipo de abordagem parece ter interesse; no entanto torna-se evidente que o modelo se altera com a distribuição considerada. Assim, talvez a sua aplicação seja limitada aos caso de sortidos em que a distribuição é bem conhecida.

Para exemplificar os riscos de se aplicar o modelo encontrado sem um esforço prévio de validação, utiliza-se aqui um problema apresentado por Gilmore e Gomory, descrito em [Wäsher93b]. Na figura 4.4 apresenta-se o custo total do corte e os tamanhos estimados pelo modelo $P_n = n + 1,0 (n . s)$, aí representados por traços verticais.

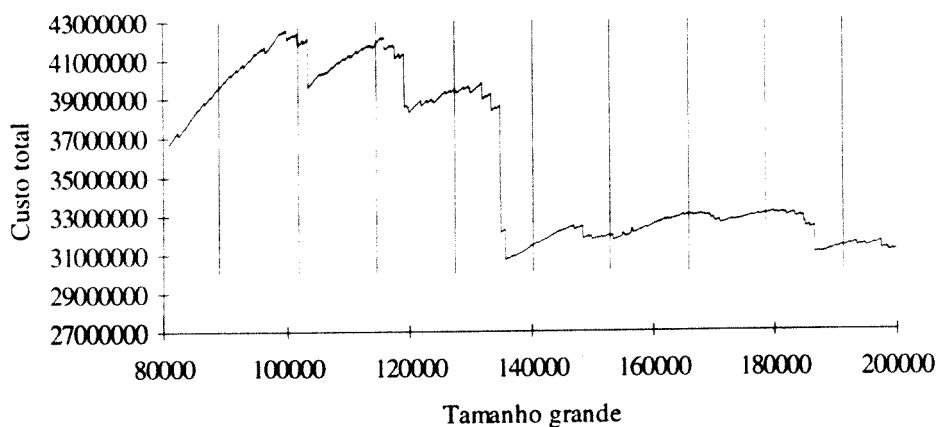


Figura 4.4 Sortidos aproximados

É imediato verificar que os tamanhos sugeridos pelo modelo são inadequados. Os dados do problema não seguem nenhuma das distribuições referidas e a má qualidade dos resultados é por isso, de certa forma, natural.

Como conclusão deste tópico, fica reforçada a noção de que a escolha de um sortido não é simples, e que é necessário algum cuidado na utilização de soluções aproximadas,

sobretudo se encontradas por métodos que tenham sido afinados para outros tipos de conjuntos de dados. As abordagens referidas nesta secção mostram-se insuficientes e quase infantis para resolver os problemas do sortido em geral.

5 A Função Objectivo

Este capítulo completa o anterior na análise da relação entre os problemas de corte e de selecção de sortidos. O estudo dos problemas, independentemente da busca de soluções, é visto como uma condição prévia fundamental para avaliar processos de escolha de sortidos. Os resultados apresentados são obtidos à custa da utilização intensiva da capacidade de cálculo disponível.

5.1 Como reconhecer um bom sortido? Como comparar métodos?

Como descrito no capítulo 3, são possíveis várias abordagens para a selecção dos tamanhos a incluir num catálogo. Quase todas as publicações se preocupam em encontrar soluções para os problemas e não no seu estudo global e independente dos algoritmos ou métodos heurísticos empregues. Nesta perspectiva, existem lacunas quando se procura definir o processo a utilizar para comparar heurísticas e resultados por estas obtidos. Estas dificuldades são comuns a muitos outros problemas de decisão. Parece existir unanimidade em que a determinação de sortidos óptimos é difícil. Essa dificuldade é atribuída ao carácter combinatório do problema.

Quem pretende comparar métodos para a determinação de sortidos, depara com algumas dificuldades básicas, mas fundamentais:

- Os métodos propostos são geralmente concebidos para problemas específicos que se distinguem entre si por restrições à satisfação da procura, tipo de sortido, dimensão e pelos processos de corte envolvidos. Isso leva a que comparações contenham enviezamentos cuja eliminação é complexa (ver comentário a [Gemmil91] no capítulo 3).
- Os métodos para planeamento do corte utilizados em diferentes aplicações, influenciam o funcionamento e a concepção das heurísticas para seleccionar sortidos. As duas decisões (escolha do sortido e planeamento do corte) estão por vezes ligadas de tal modo que há quem se refira a uma relação de dualidade entre elas. Na comparação de métodos para a selecção de sortidos surge um dilema relacionado com as heurísticas de corte a utilizar, ilustrado com os dois argumentos seguintes:

- “Não é justo comparar heurísticas de selecção de sortidos recorrendo a estratégias de corte diferentes das utilizadas na sua concepção, sobretudo quando o processo de escolha de sortido assenta em características particulares do processo de planeamento do corte.”

- *“In order to be consistent, proven nesting and sequencing algorithms from the literature were utilized for each of the assortment methods. [...] These are not the same algorithms utilized by [...]. However it was necessary to be consistent between the assortment algorithms in order to make a fair comparison. In this manner, we demonstrate the effectiveness of these assortment algorithms while using these particular nesting and sequencing algorithms.” [Gemmill91]*

Seguir o primeiro argumento pode ser impraticável, porque implica a implementação integral de vários métodos para o corte e não está definido à partida que custo atribuir a diferentes necessidades de capacidade de cálculo. O segundo argumento corre o risco de desvirtuar o trabalho original e conduzir a comparações erróneas. O facto de ser necessário discutir este ponto, reforça a noção de que o problema de selecção de sortidos está profundamente ligado ao problema de corte.

- Finalmente, que mérito se deve atribuir à solução encontrada por qualquer processo? Tendo acesso a várias soluções³⁰, é fácil ordená-las pelo valor da função objectivo, mas como comparar qualitativamente os resultados? Até que ponto um processo fornece soluções melhores do que outro? A resposta a estas questões exige um conhecimento sobre a estrutura geral dos problemas que, em geral, não existe.

As dificuldades referidas nos dois primeiros pontos acima indicados, juntamente com a experiência relatada por outros autores, levaram a que não se desse prioridade, neste trabalho, à implementação e comparação de heurísticas propostas para selecção de sortidos. Decidiu-se atacar a terceira dificuldade, o que se pode mostrar globalmente útil, talvez permitindo conclusões aplicáveis a um conjunto mais vasto de problemas.

Na análise subsequente, supõe-se como objectivo a minimização do custo de matéria prima utilizada. Esse custo é proporcional ao comprimento ou à área total utilizada, respectivamente nos casos unidimensional e bidimensional. Foi discutido, no capítulo 4, que existem limites máximos e mínimos para o valor desse custo. O valor mínimo corresponde à não existência de desperdício, enquanto o custo máximo corresponderá a desperdícios de 50% (1D) ou 75% (2D). Não está no entanto claro, em que região entre estes valores um sortido é considerado bom. Para um determinado problema, será que um desperdício de 5% corresponde a uma boa solução?

A resposta a estas questões depende de cada problema concreto, e passa pelo conhecimento das funções objectivo. O estudo de qualquer problema de optimização beneficia com a análise do espaço de resultados, que nem sempre é possível representar.

³⁰ Que serão em geral óptimos locais, dada a complexidade do problema.

Felizmente, no caso dos problemas de sortido mais simples, é possível representar graficamente a função custo ou função objectivo. A abordagem utilizada neste trabalho consiste, numa primeira fase, em calcular e representar os valores do custo obtidos para cada sortido possível. Uma abordagem deste tipo requer meios, em termos de capacidade de cálculo, que felizmente foi possível reunir. Tanto quanto é do conhecimento do autor, o tipo de análise relatado neste capítulo é inédito.

Todos os resultados foram obtidos com a aplicação ASSORT, que gera ficheiros directamente executáveis pelo *Mathematica*³¹, e um formato de texto, importável por qualquer folha de cálculo.

Na secção seguinte, inicia-se a análise das funções objectivo para problemas 1/1, supondo a escolha de apenas um tamanho para catálogo.

5.2 A função custo para sortidos 1 / 1

Quando existe apenas um tamanho no sortido, achar a função objectivo corresponde a achar o custo do corte óptimo, para cada valor que o tamanho armazenado possa tomar. Considerando o conjunto de candidatos contíguo (2.3.1), faz-se comprimento do tamanho grande variar entre um valor mínimo e um valor máximo e para cada comprimento resolve-se o problema de corte associado. Embora o domínio das funções objectivo seja discreto, opta-se por ligar os pontos calculados por segmentos de recta ou polígonos, de modo a facilitar a interpretação dos resultados produzidos.

Para o planeamento do corte utiliza-se o método de Gilmore e Gomory com geração atrasada de colunas, cuja descrição breve se apresenta no apêndice 1. A utilização de uma heurística não optimizante, embora mais rápida, poderia acrescentar comportamentos nos resultados não atribuíveis às características do sortido. Os problemas considerados têm origem em casos reais e em problemas publicados [Wäsher93b].

O primeiro problema envolve nove tamanhos pequenos e surgiu numa empresa que corta rolos de aço³². Este problema foi apresentado em [Oliveira89], onde recebeu a designação AÇOS1, que será usada neste trabalho. Na tabela 5.1 descrevem-se os pedidos do problema, expressos em milímetros.

³¹ Versão 2.0 para *Hewlett Packard*.

³² F. Ramada, Aços e indústrias, S.A.

Tamanho pedido	Quantidade	Tamanho pedido	Quantidade
16	2	194	7
67	32	207	5
75	1	220	5
84	1	245	7
182	10		

Tabela 5.1 Lista de pedidos do problema AÇOS1

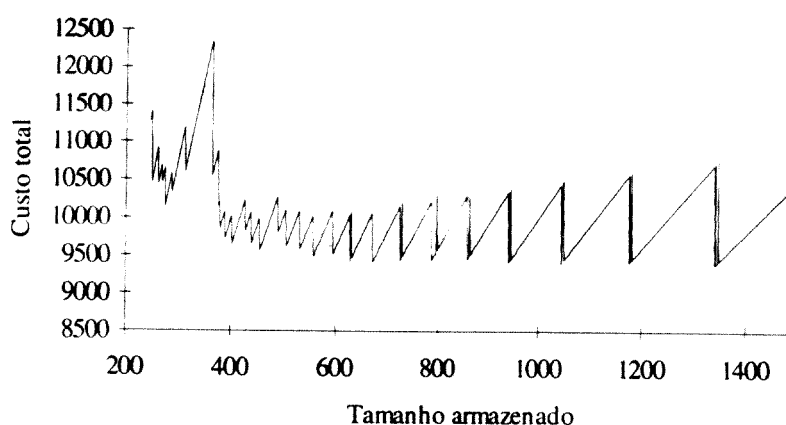


Figura 5.1 Função custo total, para o problema AÇOS1

A função objectivo para o problema AÇOS1 é apresentada na figura 5.1. Nesse gráfico notam-se algumas perturbações ou *glitches*, devidos à utilização da abordagem de Gilmore e Gomory. As perturbações correspondem a zonas em que o método de corte apresenta resultados subóptimos. Existem várias alternativas para diminuir ou eliminar o número de pontos com resultados não óptimos:

- Utilização de programação inteira. Esta alternativa garantiria sempre o óptimo global no problema de corte. Porém, ao decidir utilizar a abordagem de Gilmore e Gomory pretende-se precisamente evitar a necessidade de considerar o modelo inteiro. A resolução por programação inteira prevê a necessidade de considerar um número muito mais elevado de padrões de corte³³ e tempos de resolução consideravelmente mais dilatados, o que tornaria impossível obter alguns dos resultados relatados neste trabalho.

³³ Um estudo ilustrativo do número de padrões de corte requeridos pelos modelos inteiros é apresentado no apêndice A2.

- Melhoria da heurística utilizada na colocação eventual das últimas peças. Uma abordagem deste tipo melhoraria os resultados em alguns problemas³⁴.

- Reaproveitamento de padrões de corte de uns problemas para os outros. Consideraram-se dois processos para integrar este princípio na aplicação:

- Reaproveitamento das colunas geradas por todos os problemas anteriores em chamadas subsequentes da função que planeia o corte.

- Comparação dos padrões gerados por problemas consecutivos.

Embora sobre muitos pontos de vista (convergência, melhoria face ao processo original, etc.) a primeira opção fosse preferível, razões práticas de ordem diversa levaram a que a segunda abordagem fosse escolhida³⁵. Essa opção, equivale a um processo de filtragem e é muito simples de implementar. Para cada problema, compara-se o resultado obtido com o que resultaria de utilizar os padrões de corte calculados quando o tamanho grande era menor, pois esses padrões constituem ainda uma solução admissível se o tamanho grande for maior.

A função objectivo, sem as referidas perturbações, está representada na figura 5.2. Todas as outras funções custo/objectivo apresentadas nesta secção incorporam o processo de comparação com padrões anteriores.

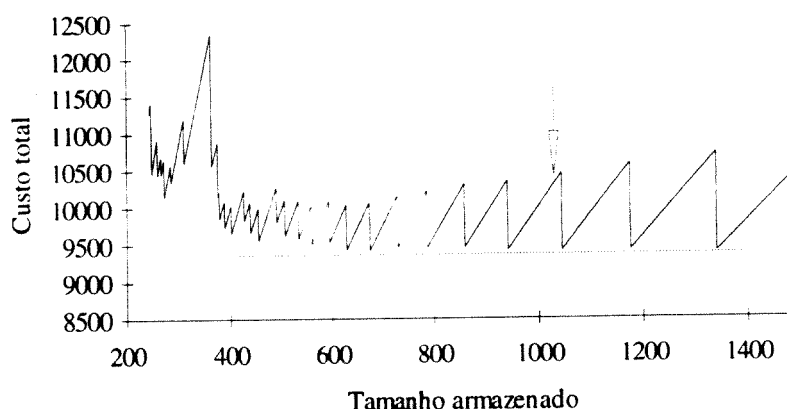


Figura 5.2 Função custo total após eliminação de *glitches* (AÇOS1)

Na figura 5.2 marcaram-se ainda o tamanho grande utilizado originalmente no problema AÇOS1 (1030 mm) e a linha correspondente ao desperdício nulo. A análise da função

³⁴ A aplicação PLACORTE, comercializada pelo INESC para o planeamento de operações de corte, inclui actualmente heurísticas para a eventual colocação final de peças, que produzem resultados melhores do que aquelas utilizadas no ASSORT.

³⁵ A avaliação do risco de sub-optimalidade residual, decorrente da utilização deste processo, será feita mais adiante.

objectivo ou custo, representada nesse gráfico, revela algumas características do comportamento das soluções:

- O gráfico mostra um andamento serrilhado, que pode ser explicado da seguinte forma: Quando o tamanho das peças disponíveis aumenta, cresce também o custo total de matéria prima, a menos que os padrões de corte gerados com esse tamanho permitam reduzir o número total de peças utilizadas. Neste caso, nota-se que a função custo sofre um decréscimo abrupto.
- O andamento da função revela duas zonas distintas de comportamento. Quando o tamanho em catálogo é pequeno, da ordem de grandeza das maiores peças pequenas, o andamento da função é irregular. Com o aumento do comprimento do tamanho armazenado, a função adquire um comportamento mais regular e previsível. Como será visto na secção 5.2.1, estas zonas correspondem a duas regiões distintas da solução do problema relaxado.
- Na zona inicial os mínimos locais tomam valores superiores aos verificados na região final. Nesta última, os valores dos diversos mínimos locais são muito semelhantes uns dos outros, embora não sejam iguais.
- Esses mínimos locais estão muito perto do desperdício nulo, correspondente a um custo de 9363, sem no entanto alcançarem esse limite natural. O valor mais baixo verificado é de 9380. A secção 5.2.1 dará mais informação a respeito da validação deste resultado.
- Na zona final da curva a distância entre mínimos vai aumentando, como seria de esperar. No limite a função seria monótona crescente, quando o tamanho grande fosse enorme e permitisse obter todos os pedidos a partir de uma só peça.
- Após a região inicial, o custo nos máximos locais vai aumentando sucessivamente.
- Torna-se evidente que a largura do rolo utilizado na operação de corte original é desadequada ao conjunto de pedidos. Aliás, o valor utilizado (1030mm) conduz a um valor próximo de um máximo local, pelo que a empresa poderia reduzir o custo da operação em mais de 8%, com a escolha mais cuidada da largura dos rolos a utilizar, isto é, melhorando o sortido.

Gilmore e Gomory utilizaram um problema de cortes de maior dimensão (30 peças pequenas) [Gilmore63], cuja descrição se encontrara reproduzida no conjunto de problemas teste recolhidos por Wäsher e Gau [Wäsher93b], onde recebe a designação de GIL63-1. A lista de pedidos para este problema é apresentada na tabela 5.2.

Tamanho	Quantidade	Tamanho	Quantidade	Tamanho	Quantidade
21500	140	45500	185	60000	390
31500	171	46500	529	63000	133
32000	56	49500	133	63750	141
33000	273	50000	720	64000	263
33500	36	51000	212	66000	691
35000	411	51750	2736	66750	90
38000	95	52000	58	67500	4827
38500	47	52500	766	68250	4765
41250	393	56000	343	70000	291
44500	94	56250	459	81000	4415

Tabela 5.2 Problema GIL63-1 - Lista de pedidos

Uma vez que o problema GIL63-1 é bastante maior do que o AÇOS1, o comportamento da função objectivo deste último poderá ser mais complexo devido a existirem muitas mais relações e combinações possíveis entre os tamanhos pedidos. A função objectivo para este problema foi já apresentada figura 4.4; no entanto há que notar que a parte do domínio apresentada nesse gráfico corresponde à zona inicial identificada no problema AÇOS1. Na figura 5.3 apresenta-se a mesma função objectivo, até tamanhos maiores. Nessa mesma figura está indicado o tamanho grande utilizado em [Gilmore63].

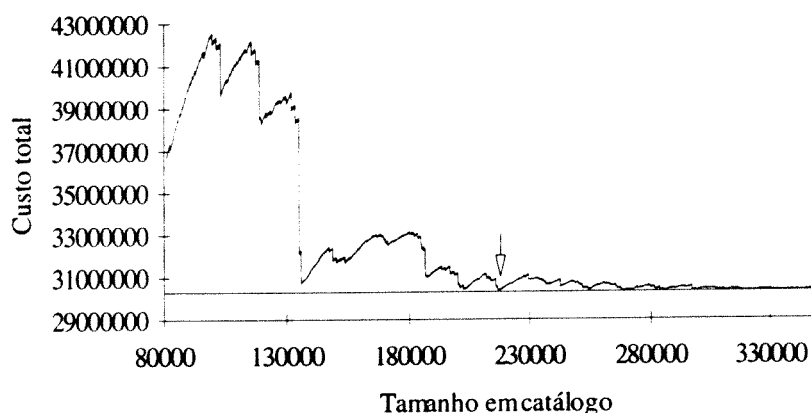


Figura 5.3 Função objectivo para o problema GIL63-1

Registaram-se os tempos de processador dispendidos no planeamento do corte, que estão representados na figura 5.4. Estes tempos foram obtidos numa SUN SPARCCenter 2000³⁶.

³⁶ Os resultados apresentados nesta dissertação foram obtidos em várias máquinas, distintas tanto nos modelos como em capacidade de memória disponível e regimes de carga, pelo que simples comparações entre tempos de processamento obtidos em problemas diferentes podem conduzir a resultados erróneos e não são o objectivo deste trabalho. No entanto, o estudo dos tempos de processamento para um mesmo problema faz sentido. As máquinas utilizadas para

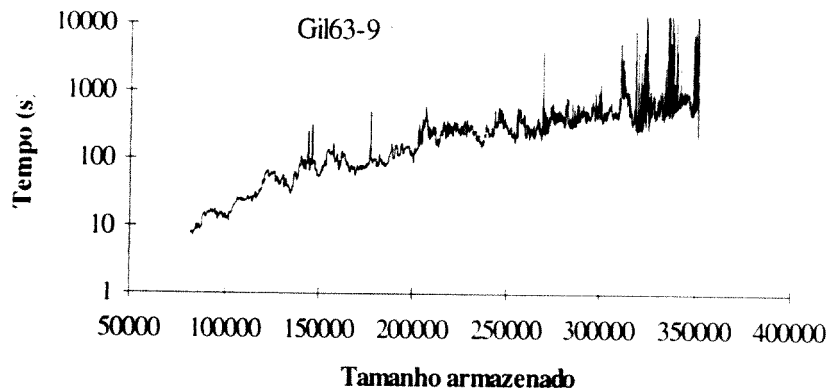


Figura 5.4 Tempos de cálculo para o problema GIL63-1

Este gráfico indica que na abordagem de Gilmore e Gomory, implementada para o caso unidimensional. Note-se que a escala das ordenadas é logarítmica e como o tempo médio de cálculo cresce com o tamanho das peças grandes³⁷. Com reutilização de colunas de uns problemas para os outros, o andamento esperado do gráfico deveria ser diferente, porque embora o problema linear fosse ficando cada vez maior, não seria necessário resolver tantos problemas de mochila em cada iteração.

5.2.1 Validação do algoritmo de corte de Gilmore e Gomory

Até que ponto os gráficos apresentados correspondem aos menores custos possíveis? O facto de não se utilizar programação inteira terá influenciado os resultados de modo a falsear a interpretação? Ou será que, antes pelo contrário, as linhas de custo apresentadas correspondem, como desejado, às funções óptimas? Nesta secção procura-se responder a estas questões e avaliar a proporção de casos em que se consegue optimalidade, com as soluções adoptadas para o planeamento do corte.

Diz-se que um problema inteiro goza da propriedade de arredondamento para cima³⁸ (*Integer round-up property*) se o seu valor óptimo for igual ao menor inteiro maior ou igual do que o valor óptimo da versão relaxada do problema. Sabe-se que algumas classes de problemas de corte gozam desta propriedade [Marcotte85], e que em muitos problemas reais os valores óptimos obtidos por programação inteira correspondem ao

correr o ASSORT foram: SUN SPARCcenter 2000, SUN SPARCstation 2, HP 9000/720 e HP 9000/755.

³⁷ Para uma noção do aumento do "tamanho" dos problemas com o aumento das dimensões das peças grandes, pode-se consultar o apêndice A2, onde o problema GIL63-1 é apresentado como exemplo.

³⁸ Designada por PAC no resto desta secção.

arredondamento para cima das soluções obtidas pelas versões relaxadas. No entanto esta 'propriedade' não se verifica sempre, sendo possível criar contra-exemplos.

A abordagem de Gilmore e Gomory para os problemas de corte opera sobre a versão relaxada do problema, pelo que é possível, empregando a solução do modelo relaxado, gerar a função que corresponderia à função objectivo se a PAC se verificasse sempre. Deste modo consegue-se uma função fronteira inferior para a função objectivo óptima do problema do sortido, que quando comparada com a obtida pelo ASSORT permite obter um limite inferior para a proporção de soluções óptimas obtidas por esta aplicação, num dado problema. Este estudo é importante porque permite avaliar a incerteza introduzida pelo método utilizado para planear o corte. Isto é, permite aferir até que ponto o ASSORT consegue alcançar e gerar os resultados óptimos. Simultaneamente avalia-se a proporção de problemas em que a PAC se verifica.

Utilizando a PAC e a solução relaxada para gerar uma função limite inferior, pode-se utilizar a função gerada pelo ASSORT como um limite superior para a função objectivo. A função objectivo óptima, a que seria obtida por programação inteira, será igual a pelo menos uma das funções limite ou estará entre elas, em cada ponto. Apresentam-se seguidamente dois princípios muito simples, apresentados formalmente sob a forma de um teorema e um corolário:

Teorema: Dado um problema de cortes **P** e um algoritmo **A** para o resolver, a solução encontrada por **A** é óptima se (condição suficiente):

O valor da função objectivo obtido por **A** for igual ao menor inteiro maior ou igual ao arredondamento para cima do valor óptimo do problema **P relaxado**, isto é, igual ao valor óptimo se a PAC se verificasse.

Demonstração: A demonstração é evidente, pela definição da propriedade de arredondamento para cima (PAC) e considerando que:

- A solução inteira conduz sempre à solução óptima de **P** cujo custo é sempre igual ou superior ao valor obtido pelo arredondamento para cima do custo óptimo de **P relaxado**.

- Existe uma discretização do resultado, porque se consome sempre um número inteiro de unidades do sortido. Por isso, mesmo que os padrões de corte gerados por dois processos diferentes sejam distintos, desde que utilizem o mesmo número de placas grandes, são ambos considerados óptimos.

- **A** gera sempre uma solução admissível.

Logo, se o valor gerado pelo arredondamento para cima da solução relaxada for igual ao resultado obtido por **A**, então a solução encontrada por **A** é óptima.

Corolário: Dado um problema de corte P e um algoritmo A , se o valor da função objectivo obtido por A for igual ao valor resultante do arredondamento para cima do valor óptimo do problema P relaxado então o problema verifica a PAC.

Demonstração: Decorre imediatamente da definição da PAC e do teorema anterior.

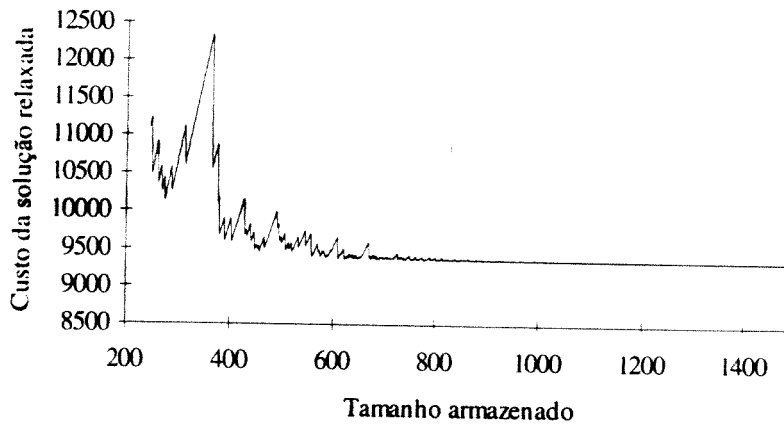


Figura 5.5 Custo óptimo no problema AÇOS1 relaxado.

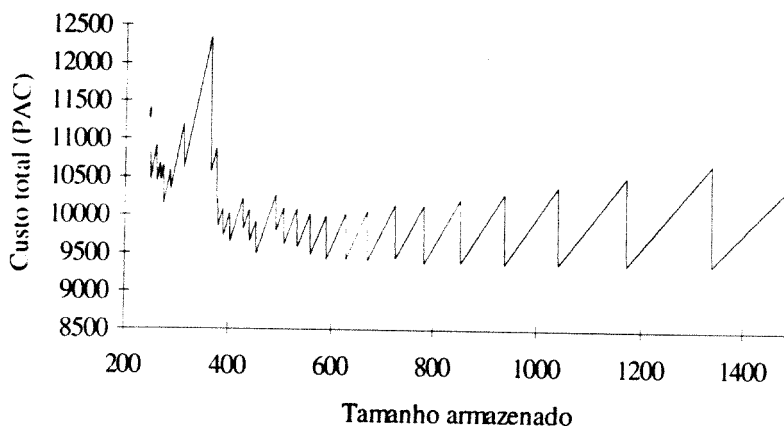


Figura 5.6 Função limite inferior de optimalidade.

Começando pelo problema AÇOS1, mostra-se na figura 5.5 o andamento da solução relaxada. Nesta função observam-se também duas zonas distintas, sendo que a zona final, mais plana, correspondia no caso não relaxado, à região mais “previsível” da função. Com base nesta função, e supondo que a PAC se verificasse sempre, constrói-se a função apresentada na figura 5.6. Este gráfico é muito semelhante ao obtido pelo ASSORT e representado em 5.2, pelo que, para efeitos de comparação, se representa na figura 5.7 a sobreposição das duas funções, juntamente com os valores das diferenças. Apenas numa pequena proporção dos pontos existe discrepância entre as funções (36 em 1256).

A proporção de problemas de corte em que os resultados gerados pelo ASSORT (Relaxação do modelo inteiro com geração atrasada de colunas + heurística para obter solução inteira + comparação de padrões finais) foram iguais aos obtidos pelo arredondamento da função relaxada foi de 97,13% (1220 em 1256 pontos).

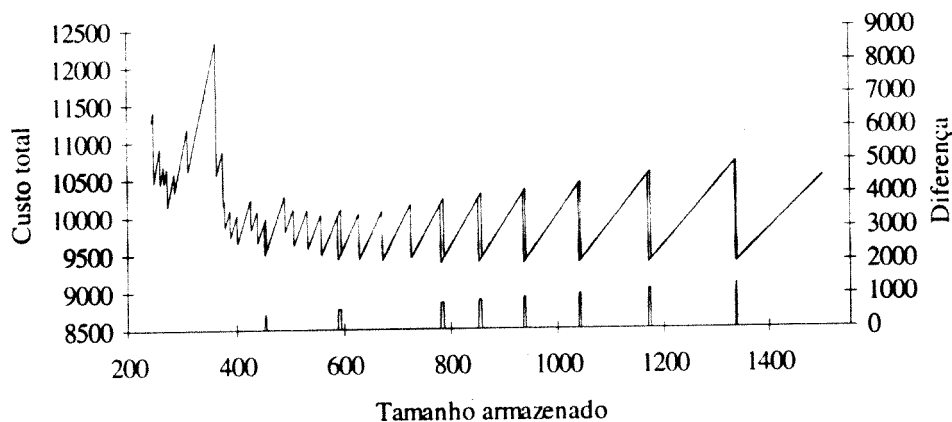


Figura 5.7 Sobreposição de funções limite, e diferenças, para o problema AÇOS1

Algumas conclusões para o problema AÇOS1 são as seguintes:

- A grande maioria (pelo menos 97,1%) dos problemas de corte considerados verificam a propriedade de arredondamento para cima (PAC).
- Nos pontos em que os resultados gerados pelo ASSORT e os decorrentes da presunção da PAC são iguais, o ASSORT encontra as soluções óptimas. Isto significa que em pelo menos 97% dos casos, o recurso à programação inteira não melhoraria a solução.
- Nos restantes 36 pontos, representando ligeiramente menos de 2,9% dos casos, não é certo que as diferenças devam ser atribuídas a não se verificar a PAC, ou aos resultados da aplicação serem subóptimos. Além disso, as zonas em que existem discrepâncias são precisamente aquelas em que qualquer dos dois fenómenos seria esperado ocorrer. Provavelmente a maioria dos pontos em questão corresponde a problemas em que a programação inteira conseguiria resultados melhores, mas para ter a certeza seria necessário comparar.

Para o problema GIL63-1 faz-se o mesmo tipo de análise. Na figura 5.8 apresenta-se o valor da função óptima, tomando o problema de cortes relaxado, enquanto na figura 5.9 se sobrepõe a função gerada pelo ASSORT e a linha calculada a partir da relaxação, supondo que a PAC se verificasse sempre.

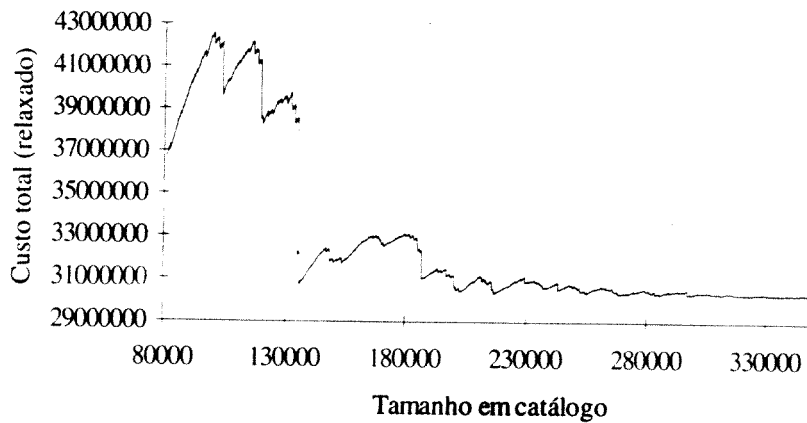


Figura 5.8 Função de custo ótimo no problema GIL63-1 relaxado

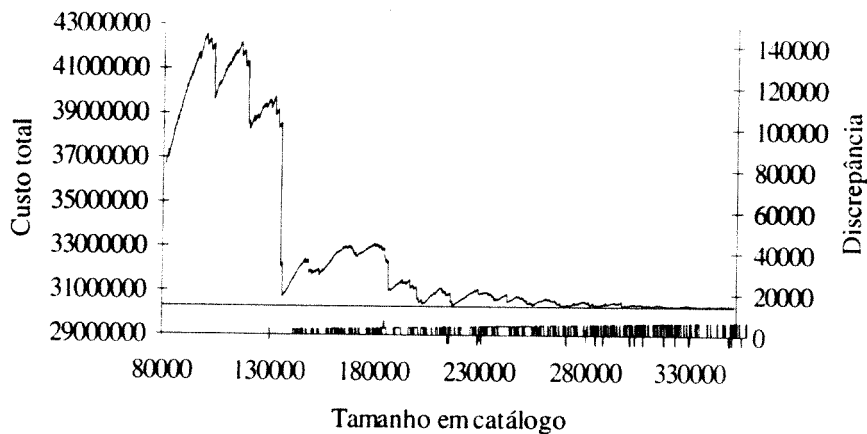


Figura 5.9 Sobreposição de funções limite, e diferenças, para o problema GIL63-1

Neste problema conclui-se que em 3528, de entre 5403 casos, a propriedade de arredondamento para cima (PAC) se verifica, e que, simultaneamente, se obtiveram soluções óptimas com a abordagem utilizada. A proporção de problemas em que subsiste incerteza é de cerca de 35% (1875 problemas)³⁹.

Para uma análise tão simples como a que foi feita, os resultados encontrados surpreenderam, nomeadamente ao justificarem a abordagem de Gilmore e Gomory e a aplicação utilizada. À partida não se esperava que a incerteza pudesse ser reduzida nas proporções observadas. Note-se que para os problemas maiores, razões de ordem

³⁹ Neste problema particular, existem limitações de ordem numérica que levam a que por vezes não se encontre a solução ótima do problema relaxado, devido ao facto de alguns problemas serem demasiado grandes (ver apêndice A2). Por esta razão, a análise deste problema contém algum erro e estes números não devem ser considerados exactos.

numérica implicam que não exista certeza de que se atinge o óptimo do problema relaxado, devendo os resultados ser analisados com alguma reserva.

Deveriam ser feitas análises deste tipo para conjuntos alargados de problemas de corte, como o conjunto de Wäsher e Gau, que verificaram que para todos os problemas descritos em [Wäsher93b] a PAC se verificava. Apesar desses problemas terem procura com características diferentes, apenas se testou um ponto em cada problema, o que parece pouco, face aos resultados obtidos aqui.

5.3 A função custo para sortidos 2 / 2

As superfícies obtidas para problemas da classe 2/2, são representadas em gráficos tridimensionais. O número de problemas de corte a calcular é bastante maior do que no caso 1/1, porque existem duas dimensões a considerar⁴⁰ e o tempo de resolução necessário no caso bidimensional também cresce face aos problemas unidimensionais. Além disso, o número de polígonos que é possível representar é limitado, e dependente das limitações do sistema em que o *Mathematica 2.0* está instalado⁴¹. Essas restrições levam a que só se apresentem funções custo de problemas de pequena ou média dimensão. Procuraram-se ainda problemas em que fosse possível representar partes importantes da função objectivo, e não apenas o detalhe de pequenas zonas.

O próximo exemplo teve origem numa empresa de mobiliário⁴², e é constituído por 6 tamanhos pedidos. Os dados apresentam-se na tabela 6.2 e estão expressos em centímetros. Neste problema, o tipo de madeira e a finalidade das peças cortadas ditam que não se permitam rotações ao planear o corte⁴³.

⁴⁰ Exemplo: Se tanto a largura como o comprimento do tamanho grande puderem tomar 300 valores, o número de problemas de corte a calcular é de 90000.

⁴¹ A máquina em que o *Mathematica* está instalado é uma HP 9000/710, com 32 Mb de RAM, mas com fortes limitações de espaço para *swap*. O número de polígonos numa estrutura gráfica que actualmente se consegue representar anda à volta da meia centena de milhar, sendo que já se conseguiram obter superfícies representando funções objectivo de problemas de sortido com mais de 120 000 polígonos. Simplesmente a utilização da máquina tem crescido, e os recursos disponíveis sofreram com isso.

⁴² MOVEIS MACHADO - Francisco José Machado & Filhos, Lda.

⁴³ Não há permutabilidade entre comprimento e largura das peças, pelo que a função objectivo não será simétrica. O tempo de resolução necessário para planear uma operação de corte que permita rotação é maior do que o caso em que não há essa possibilidade.

Comprimento	Largura	Quantidade
900	380	30
800	510	30
1870	600	60
1340	600	30
920	410	60
900	38	58

Tabela 5.3 Problema PINHO30

O gráfico de superfície da função objectivo⁴⁴ (figura 5.10) revela um comportamento que, de alguma forma, era esperado. Os perfis que se obteriam através de cortes da superfície têm semelhanças com as funções observadas no caso 1/1. Os princípios que explicam o comportamento da função no caso unidimensional são também válidos neste caso. É notória a importância que a escolha de um sortido adequado pode ter, sendo que em algumas zonas, a diferença entre custos, para sortidos “próximos” é de cerca de 30%. Em problemas bidimensionais, o tamanho das peças grandes não costuma ser de ordem de grandeza muito superior à dos tamanhos pequenos; por isso trabalha-se muitas vezes na região inicial do gráfico onde o custo se pode tornar exageradamente elevado, se não se tomarem precauções na escolha do sortido para evitar as “cordilheiras” da função.

Na figura 5.11 representam-se os tempos de cálculo tomados pelo ASSORT. A análise visual da superfície é difícil, quer pela variabilidade ilustrada no gráfico, quer por existir uma discretização temporal no processo de medição do tempo.

⁴⁴ O domínio da função é discreto, o elemento “superfície” apenas surge por facilitar a interpretação.

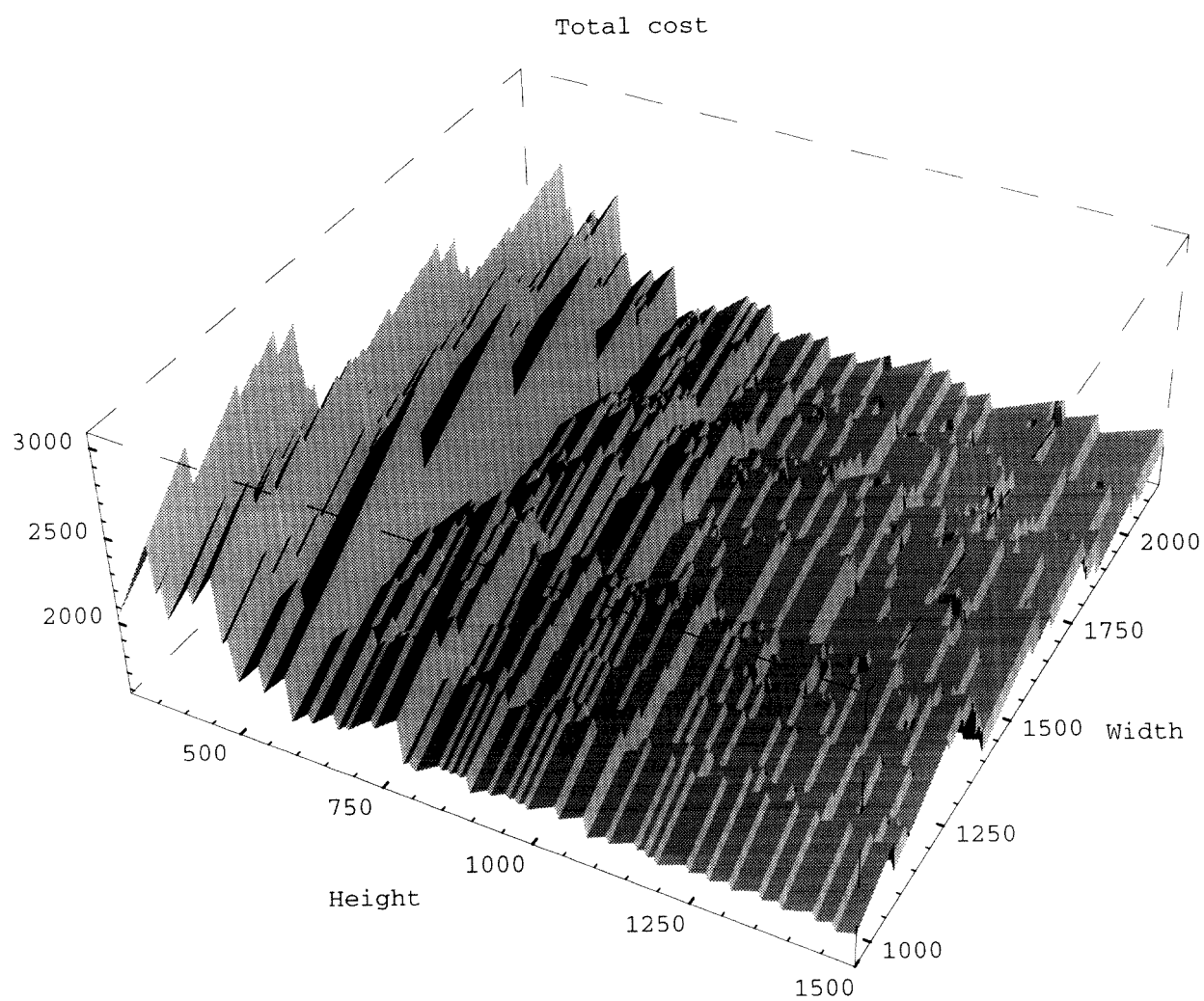


Figura 5.10 Função objectivo para o problema PINHO30

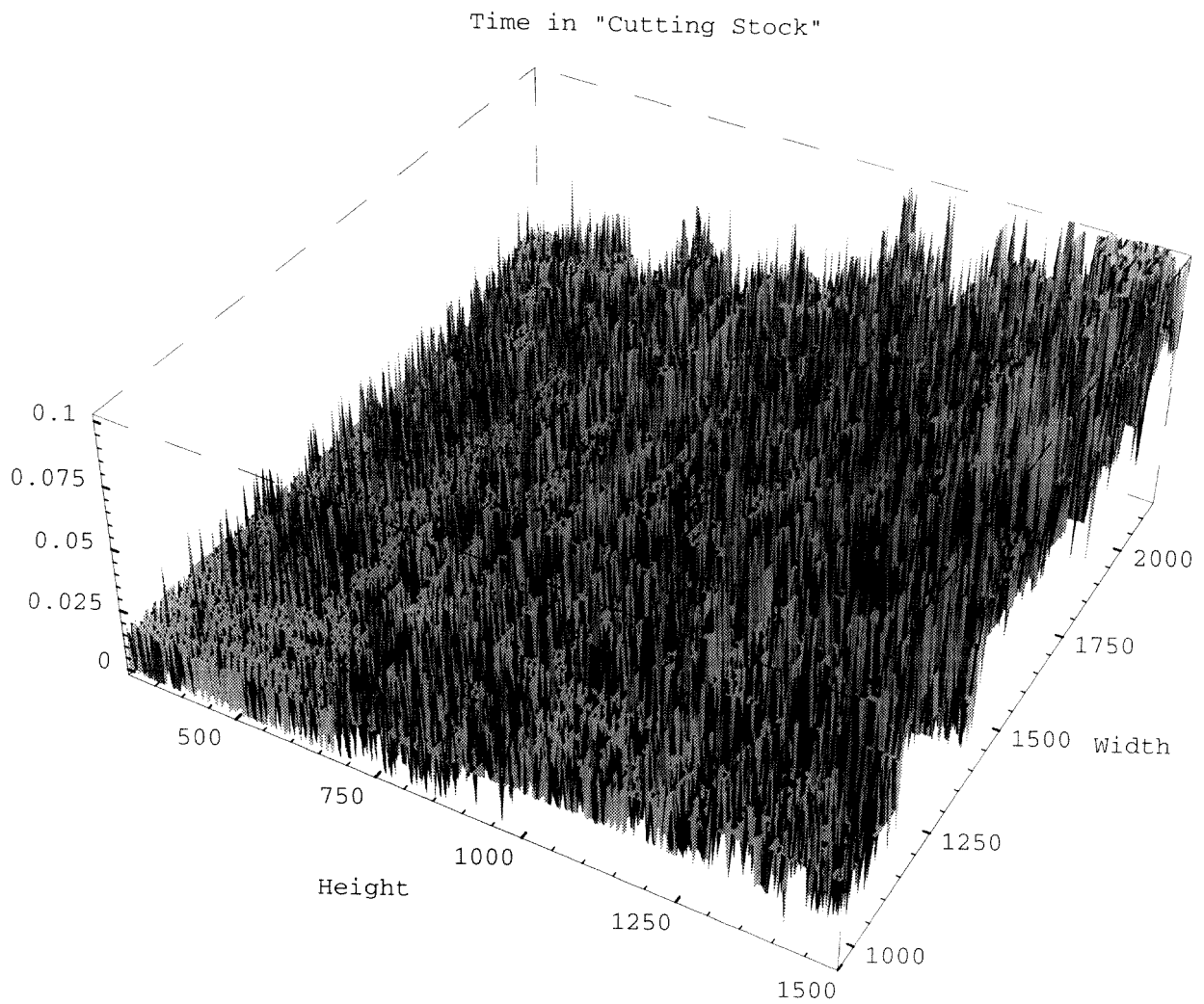


Figura 5.11 Tempo no planeamento do corte no problema PINHO30

5.4 Sortidos com vários artigos diferentes

Os exemplos discutidos em 5.2 e 5.3 supunham apenas um tamanho em catálogo. No entanto, na maioria dos casos reais, o sortido é composto por vários tamanhos⁴⁵. Antes de apresentar algumas funções objectivo, geradas com sortidos compostos por dois tamanhos⁴⁶, sabe-se que se observarão dois fenómenos simples:

Se $O(a)$ for o valor da função objectivo quando o sortido é formado por peças do tipo a ; e $O(a,b)$ representar o valor da função objectivo quando o sortido é formado por peças dos tipos a e b , então:

$$O(a,b) \leq \min[O(a) , O(b)] \quad \forall a, b; \quad \text{e em particular: } O(a) \geq O(a,b) \quad \forall a, b$$

Isto pode generalizar-se, concluindo que a função objectivo para o problema do sortido com n tamanhos é majorante das funções objectivo com mais de n tamanhos⁴⁷.

Espera-se então que as superfícies obtidas nesta secção andem mais próximas do desperdício nulo do que nas secções anteriores. Além disso, os valores mais elevados destas funções correspondem aos pontos em que os tamanhos no sortido são iguais, como se o catálogo fosse composto por um só tamanho, e os valores da função nesses pontos serão os mesmos encontrados nas secções anteriores.

Na figura 5.12 representa-se a superfície obtida para o problema AÇOS1, enquanto em 5.13 se apresenta a função resultante do problema EIL60-1, com 6 tamanhos pequenos pedidos, tal como reproduzido em [Wäsher93b]⁴⁸. Note-se que na parte inicial da figura 5.13 os picos mais elevados foram “cortados”, por opção, enquanto no gráfico referente ao problema AÇOS1 se representa a superfície toda.

Continuam a distinguir-se duas zonas distintas: a inicial, em que as funções tomam valores mais elevados, e a outra em que se obtêm desperdícios menores. Na função objectivo do problema AÇOS1, nota-se uma espécie de “cordilheira” na diagonal, correspondente às zonas em que os dois tamanhos no sortido são iguais ou semelhantes,

⁴⁵ Por exemplo, o problema de cortes PINHO30 original utilizava um sortido de 4 tamanhos grandes.

⁴⁶ Apenas no caso 1D é possível representar as superfícies. No caso bidimensional existiriam quatro variáveis independentes, pelo que não são possíveis representações gráficas, do género até aqui apresentado.

⁴⁷ Minorante quando os n tipos de artigos presentes no sortido menor estão também representados no sortido de maior cardinalidade.

⁴⁸ Pedidos os tamanhos 12000, 10000, 9000, 7000, 6000 e 4000, nas quantidades 1000, 400, 445, 1143, 1000 e 1500, respectivamente.

como foi previsto no início desta secção. A secção seguinte discute um pouco mais estes dois exemplos.

Os gráficos apresentados nesta secção são simétricos porque $O(a,b) = O(a,b) \quad \forall a, b$; utilizando a notação acima apresentada.

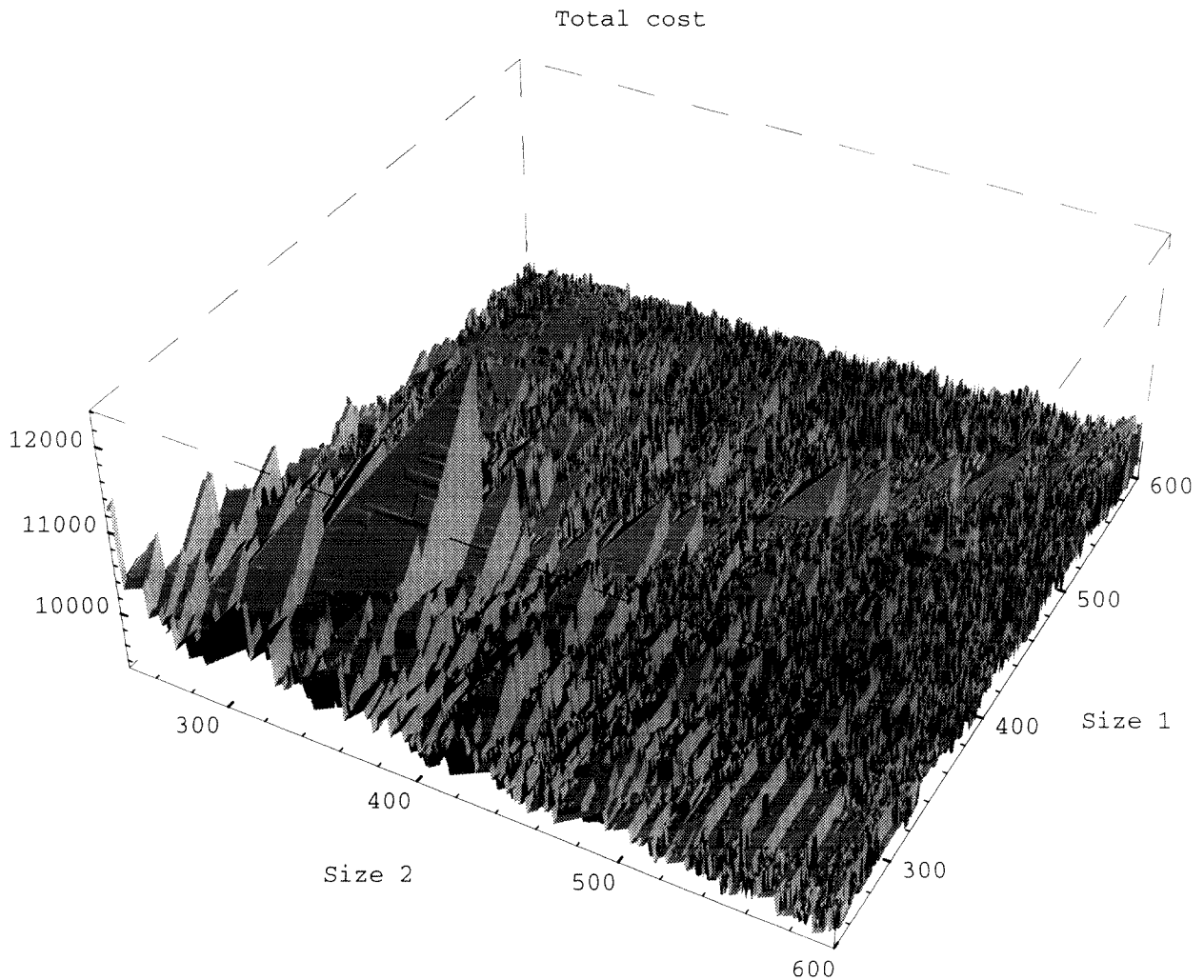


Figura 5.12 Problema AÇOS1 com sortido de dois tamanhos⁴⁹

⁴⁹ Este gráfico é constituído por 126025 polígonos, correspondendo a 126736 problemas de corte, dos quais apenas é necessário resolver 63546, devido à existência de simetria.

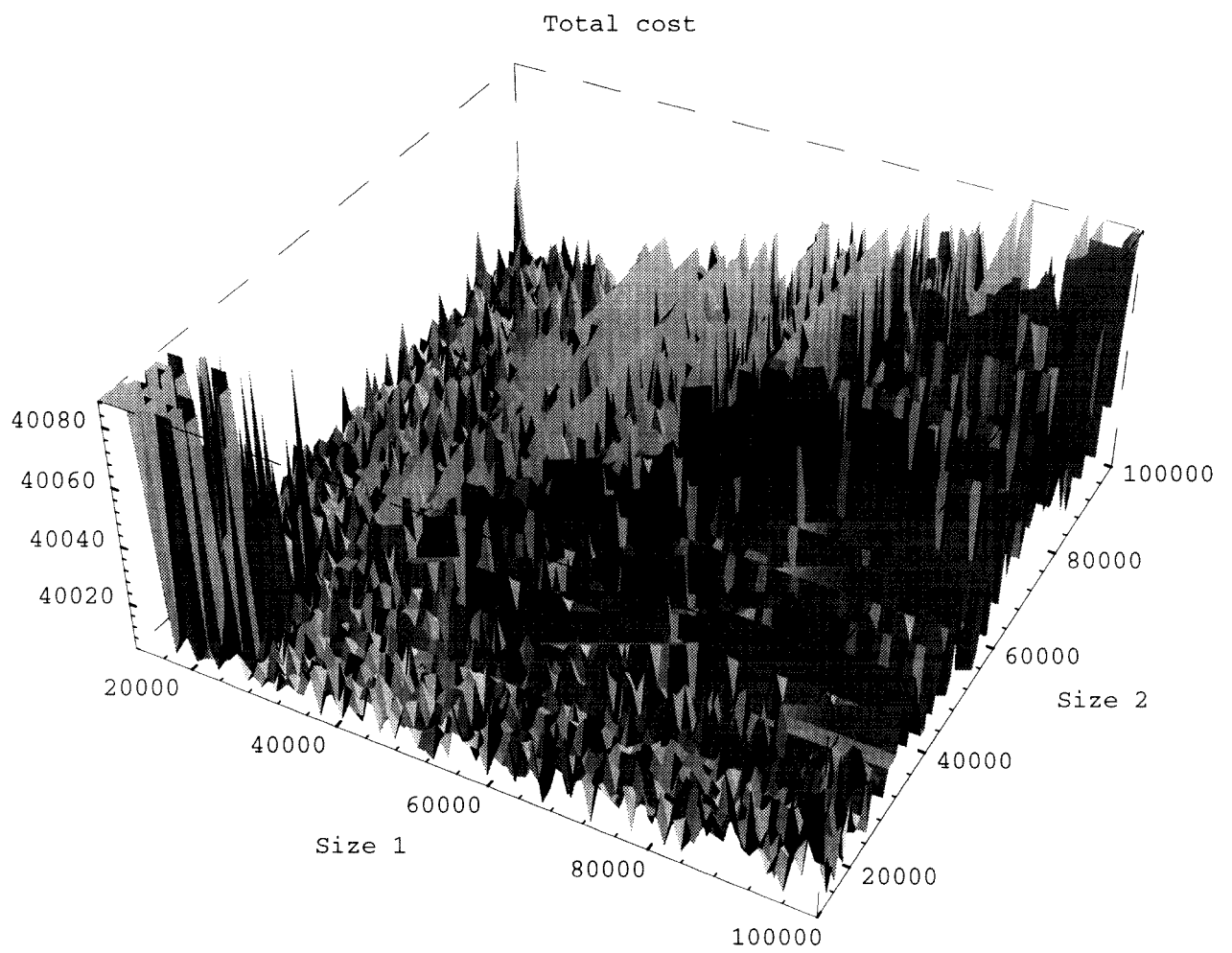


Figura 5.13 Problema EIL60-1 com sortido de dois tamanhos.

5.5 Quando todas as heurísticas são “boas”

Na figura 5.12 distinguem-se zonas mais “planas” e uniformes, onde existe uma densidade elevada de mínimos locais. O valor desses mínimos não varia muito de uns para os outros, o que, de forma menos vincada, já acontecia no mesmo problema só com um tamanho em catálogo.

É lógico pensar que nessa zona “plana”, qualquer processo de pesquisa conseguirá encontrar valores custo relativamente próximos do óptimo. Isto é, será necessário escolher uma má estratégia de pesquisa para ficar longe de uma “boa” solução, ou ficar a mais de 1% do óptimo. No problema EIL60-1 a situação é ainda mais caricata, como se pode concluir da observação da escala para os valores da função objectivo.

Estas observações recompensam o esforço feito neste capítulo, porque significam que uma comparação de heurísticas deve passar a ser mais exigente e incluir conhecimento sobre as zonas da função objectivo em que se trabalha. Deixa de ser aceitável dizer simplesmente que dado método, dez vezes mais rápido que outro, atinge soluções que são apenas 0,1% mais caras do que as geradas pelo outro processo. Senão, todos os processos estariam condenados ao sucesso.

Evidentemente que em muitos casos a decisão deve ser tomada entre pontos da zona inicial das funções, mais “montanhosa”⁵⁰, e que a validade da análise feita neste trabalho é sobretudo válida nos casos em que se dispõe de estratégias de corte óptimas⁵¹. No entanto, em muitos dos problemas com que nos deparamos, o domínio de decisão incluía a região “plana”.

Apesar dos mínimos locais poderem ser todos semelhantes, o óptimo global pode continuar a ser difícil de encontrar. Além disso, um ganho percentual mínimo pode representar muito e conduzir a diferenças notáveis no desempenho das organizações. A este respeito os praticantes da investigação operacional são pródigos em frases do tipo desta, devida a Gemmill e Sanders:

“[...] On a much broader scale, the iron and steel industry in the United States produced about \$22 billion of sheet steel and plate in 1984. If only half of this production went to bill of material's cutting and a one percent savings in material usage could be obtained, then there would be a \$110 million annual savings.”

Tentou-se neste capítulo dar uma ideia qualitativa global sobre os problemas de selecção de catálogos. Em muitos aspectos se poderia ir mais adiante, quer recorrendo ao teste sistemático de problemas, a análises mais específicas e detalhadas ou à utilização de

⁵⁰ Os problemas em que o corte é bidimensional são mais “propensos” a estar nesta região.

⁵¹ O que felizmente acontece no nosso caso e ocorrerá cada vez em mais e maiores problemas.

outras abordagens que o trabalho foi sugerindo. No entanto isso já não caberia nesta dissertação, pelo seu âmbito limitado por definição, e por restrições de ordem temporal.

A realização do trabalho descrito neste capítulo foi particularmente motivadora e gratificante para o autor.

6 Utilização de Meta-heurísticas

Dispondo de um processo para planeamento do corte, é possível calcular o valor do custo resultante da utilização de qualquer sortido. No entanto, não é geralmente viável testar todos os sortidos possíveis. Neste capítulo utilizam-se alguns métodos genéricos de pesquisa, ou meta-heurísticas, razoavelmente conhecidos apesar de recentes, e uma variante de um deles. Não se pretende estudar detalhadamente ou afinar parâmetros utilizados por esses processos de pesquisa, mas simplesmente comparar a aplicação de várias estratégias, com parametrizações pré-estabelecidas e julgadas adequadas, como aconteceria na prática.

6.1 Meta-heurísticas - Métodos genéricos de pesquisa

A métodos ou heurísticas de pesquisa genérica e aplicáveis a grandes conjuntos de problemas de optimização, pode dar-se a designação de meta-heurísticas [Werra89]. Este nome reflecte o facto de serem independentes dos problemas a que se apliquem, embora, naturalmente, os resultados obtidos possam variar de problema para problema. Uma heurística desta classe conterà, geralmente, chamadas a um outro algoritmo ou heurística, essa sim relacionada com o problema concreto que se tenta optimizar. Estes processos de pesquisa, utilizados para problemas de optimização global, designam-se por vezes por algoritmos genéricos.

Esses métodos, alguns dos quais serão utilizados neste trabalho, são aplicáveis a problemas de optimização combinatoria que possam ser descritos como:

Dado um espaço de soluções finito $S = \{ x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \}$, onde m é a dimensão do espaço, e uma função custo $C : S \rightarrow \mathbb{R}$, que atribui um número real a cada solução, pretende-se encontrar uma solução óptima $x^* \in S$, tal que $\forall y \in S, C(x^*) \leq C(y)$.

As estratégias de pesquisa referidas nesta dissertação são, de certa forma, descendentes dos tradicionais métodos de descida, também incluídos na comparação efectuada. Todos eles partem de uma solução J , que tentam “melhorar”, isto é, procuram encontrar melhores soluções, partindo da inicial. De uma solução x podem gerar-se outras soluções

pela utilização de alguns operadores ou modificadores. Essas designam-se por vizinhas de x . O conjunto de vizinhos de uma solução x designa-se por vizinhança dessa solução.

Os métodos de pesquisa implementados foram os seguintes:

- Método de descida
- Pesquisa tabu (*Taboo search*)
- Variante da pesquisa tabu
- *Simulated annealing* (arrefecimento simulado)⁵²

Existem outras abordagens genéricas, como algoritmos genéticos, redes neuronais ou métodos de ruído. No entanto não seria possível implementar todos eles.

A estrutura geral, comum às meta-heurísticas consideradas, pode ser apresentada em notação algorítmica⁵³:

Função Pesquisa genérica:

```
 $x \leftarrow J$  // Solução inicial  
faça  
     $x \leftarrow$  Estratégias de mudança de solução ( vizinhança de  $x$  )  
até se verificar determinado Critério de paragem  
retorna melhor solução encontrada durante o processo
```

O critério de paragem e o tipo de decisão quanto à escolha da solução seguinte, distinguem os vários métodos. O desempenho destas meta-heurísticas é influenciado pelo modo como as vizinhanças são geradas, isto é, pelo conjunto de modificações admissíveis. O objectivo deste trabalho não é o refinamento dos algoritmos genéricos empregues, talvez à excepção de uma variante da pesquisa tabu. Por isso não se procura dar uma introdução profunda nem uma revisão histórica dos métodos, mas antes descrever e justificar as versões utilizadas, para que o leitor possa julgar os resultados obtidos. Indicam-se algumas referências de material introdutório neste domínio.

As estratégias de pesquisa implementadas são descritas nas secções seguintes. Os blocos de pseudo-código aí apresentados não são uma “tradução” do código real. As versões

⁵² Existem outras traduções para português desta designação, como “Simulação da tempera” ou “Cristalização simulada”. O respeito pela língua portuguesa não é impeditivo que se tenha entendido adequado utilizar a designação “internacional”.

⁵³ O ASSORT foi escrito em C++ e, como curiosidade, contém cerca de 7500 linhas de código, das quais, 3000 correspondem ao módulo que implementa as técnicas de Gilmore e Gomory (ver nota de rodapé número 28).

implementadas, por serem gerais e se pretenderem aplicáveis a qualquer problema, incluem outros parâmetros além dos aqui indicados⁵⁴.

Em geral, o desempenho das meta-heurísticas é influenciado por diversos factores, como, por exemplo, o número de vizinhos de cada solução⁵⁵ ou o custo do cálculo do valor da função objectivo.

6.2 Método de descida

O método de descida é a estratégia primária. Em cada iteração, a solução seguinte é escolhida, de entre a vizinhança da corrente, desde que exista melhoria na função objectivo.

No algoritmo, descrito em seguida, introduz-se um parâmetro designado por GULA. Este parâmetro limita o número máximo de vizinhos visitados que conduzam a melhoria da função objectivo, em cada iteração. Se GULA for igual a um, o algoritmo corresponde ao “algoritmo guloso”⁵⁶. No caso de GULA ser instanciado com infinito, o algoritmo comporta-se como um método de máxima descida, testando toda a vizinhança da solução corrente, antes de escolher a seguinte.

```
Função Método de descida:
x ← J                                // Solução inicial
menor_custo_até_agora ← ∞
faça
    número_de_melhorias ← 0
    faça
        t ← vizinho(x)                // Ordem de geração aleatória, sem repetição.
        se valor_função_objectivo(t) < menor_custo_até_agora
            menor_custo_até_agora ← valor_função_objectivo(t)
            número_de_melhorias ← número_de_melhorias + 1
            melhor_t ← t
        enquanto ainda_há_vizinhos(x) e número_de_melhorias < GULA
            x ← melhor_t
    enquanto houve_melhoria_global()
retorna x
```

⁵⁴ Por exemplo, número máximo de vizinhos considerados em cada iteração, número de iterações entre mínimos locais e utilização interativa.

⁵⁵ No caso do assort, a estrutura de vizinhanças é pequena. Noutros problemas poderá ser muito grande e considerado difícil gerar a vizinhança completa de uma solução.

⁵⁶ *Greedy algorithm*.

Quando não há melhoria possível, o algoritmo pára.

O método de descida é muito simples, mas primário, porque termina sempre no primeiro mínimo local que encontra. As outras estratégias de pesquisa sugeridas tentam precisamente evitar esta limitação. Os testes efectuados, cujos resultados se resumem em 6.6, incluíram três parametrizações: algoritmo guloso (GULA igual a 1); máxima descida, testando todos os vizinhos (GULA inicializado com infinito); e ainda um valor de gula intermédio.

6.3 Pesquisa tabu

A pesquisa tabu (*taboo search*) foi sugerida por Glover e introduz mecanismos para evitar que o processo de pesquisa fique preso em mínimos locais e que ocorram ciclos [Werra89] [Glover89]. Para isso, permite-se a escolha de uma solução que piore o valor da função objectivo, se não se encontrou outra solução melhor. Neste caso, é preciso impedir que, nas iterações imediatas, se retorne a um mínimo local. Isso faz-se proibindo que um dos últimos visitados seja de novo escolhido. Isso consegue-se atribuindo uma condição tabu às últimas soluções visitadas, colocando-as numa lista (lista tabu) que é consultada na geração de vizinhanças.

Existem muitas variantes possíveis para este processo, incluindo mecanismos mais complexos de atribuição de condições tabu, tais como condições tabu associadas aos operadores de modificação das soluções.

O algoritmo utilizado é o seguinte:

Função Pesquisa tabu:

```

x ← J                                // Solução inicial
inicializa( lista_tabu , N )          // lista_tabu é criada com N posições
iterações_desde_último_mínimo ← 0
faça
    número_melhorias_na_iteração ← 0
    menor_custo_na_iteração ← ∞
    faça
        t = vizinho_que_não_esteja_na_lista_tabu( x , lista_tabu )
        // Ordem de geração aleatória, sem repetição.
        se valor_função_objectivo( t ) < menor_custo_na_iteração
            menor_custo_na_iteração ← valor_função_objectivo( t )
            número_melhorias_na_iteração ← número_melhorias_na_iteração + 1
            melhor_t ← t
    enquanto ainda_há_vizinhos( x , lista_tabu ) e
        ( GULA == 0 ou melhorias_na_iteração < GULA )
iterações_desde_último_mínimo ← iterações_desde_último_mínimo + 1
x ← melhor_t

```

```

coloca_na_lista_tabu( lista_tabu , x )
se houve_melhoria_global()
    melhor_x ← x
    iterações_desde_último_mínimo ← 0;
enquanto existem_vizinhos( x , lista_tabu ) e
    iterações_desde_último_mínimo < NÚMERO_MÁXIMO_DE_ITERAÇÕES_ENTRE_MÍNIMOS
retorna melhor_x

```

A lista tabu é constituída por N elementos. O critério de paragem, além do esgotamento de vizinhos, é o número de iterações decorridas desde a última melhoria global⁵⁷. Volta-se a incluir um parâmetro de gula, que tem o mesmo significado indicado em 6.3. Na secção seguinte descreve-se uma alteração a este algoritmo.

6.4 Pesquisa tabu com lista de soluções calculadas infinita

Quando se gera toda a vizinhança de uma solução e dessa se escolhe a melhor, pode-se decidir não mais considerar os pontos em que a função objectivo já foi calculada. O princípio subjacente será de que se uma solução foi calculada e não escolhida, então existe uma solução “próxima” que é melhor. Esta estratégia é mais restritiva do que simplesmente utilizar, no algoritmo descrito na secção 6.3, uma lista tabu de comprimento infinito. Além disso, tende a “empurrar” para a frente a pesquisa e evitar voltar a zonas já visitadas. Evidentemente que existirão casos em que este princípio conduz a maus resultados. Esta variante da pesquisa tabu é apresentada em seguida:

Função Pesquisa tabu com lista de configurações infinita:

```

x ← J                                // Solução inicial
inicializa( lista_tabu , ∞ )          // lista_tabu é criada com N posições
iteraões_desde_último_mínimo ← 0
faça
    número_melhorias_na_iteração ← 0
    menor_custo_na_iteração ← ∞
    faça
        t = vizinho_que_não_esteja_na_lista_tabu( x , lista_tabu )
                                // Ordem de geração aleatória, sem repetição.
        coloca_na_lista_tabu( lista_tabu , t )
        se valor_função_objectivo( t ) < menor_custo_na_iteração
            menor_custo_na_iteração ← valor_função_objectivo( t )
            número_melhorias_na_iteração ← número_melhorias_na_iteração + 1
            melhor_t ← t
    enquanto ainda_há_vizinhos( x , lista_tabu ) e melhorias_na_iteração < GULA
    iteraões_desde_último_mínimo ← iteraões_desde_último_mínimo + 1
x ← melhor_t

```

⁵⁷ Determinado pelo parâmetro NÚMERO_MÁXIMO_DE_ITERAÇÕES_ENTRE_MÍNIMOS.

```

se houve_melhoria_global()
    melhor_x ← x
    iterações_desde_último_mínimo ← 0;
enquanto existem_vizinhos( x , lista_tabu) e
    iterações_desde_último_mínimo < NÚMERO_MÁXIMO_DE_ITERAÇÕES_ENTRE_MÍNIMOS
retorna melhor_x
    
```

Este é um exemplo de pequenas alterações estruturais que se podem tentar com qualquer dos métodos.

6.5 Arrefecimento simulado (*Simulated annealing*)

A utilização de analogias entre optimização combinatória e a mecânica estatística levaram a que se desenvolvesse este método de pesquisa⁵⁸ [Kirkpatrick83]. O arrefecimento simulado foi alvo de muita atenção nos últimos anos, existindo um grande número de trabalhos publicados sobre o tema [Vidal93b] e desenvolvimento de arquitecturas especializadas [Abramson91].

O arrefecimento simulado supõe uma temperatura inicial que vai descendo ao longo do processo. Em cada solução, aceita-se escolher um vizinho gerado se este conduzir a um valor melhor da função objectivo. No entanto pode-se aceitar um vizinho pior, com uma probabilidade que é dependente da temperatura. A probabilidade de aceitar um vizinho pior é habitualmente igual a:

$$U\left(\exp\left(\frac{\text{Custo da solução actual} - \text{Custo da solução vizinha}}{\text{Temperatura}}\right)\right)$$

Onde $U()$ representa a função distribuição de uma variável aleatória com distribuição uniforme [0,1]. Assim, inicialmente há maior receptividade a aceitar valores da função objectivo piores, enquanto no final o método "tende" para um método de descida.

Neste método é preponderante o modo como o valor da temperatura é feito descer, isto é, a estratégia de arrefecimento. Se a temperatura desce subitamente, o método fica rapidamente preso em óptimos locais. Por outro lado, se o arrefecimento é muito lento, o tempo necessário para se obter convergência é demasiado longo⁵⁹. Sabe-se que para encontrar as melhores soluções a temperatura inicial deve ser suficientemente alta e o arrefecimento suficientemente lento.

⁵⁸ Alguns autores põem em dúvida a validade da analogia entre os processos físicos e o algoritmo de *simulated annealing*.

⁵⁹ Este factor é sobretudo importante, se o cálculo do valor da função objectivo for lento, como no nosso caso, em que cada solução exige a resolução de um problema de cortes.

Foram propostas muitas estratégias de arrefecimento: exponencial, temperatura crítica, e outros. Em [Andersen93] testaram-se, sem sucesso no problema aí tratado, algumas destas estratégias. Nessa publicação sugere-se uma função convexa quadrática decrescente para o valor da temperatura⁶⁰.

A temperatura C_k a cada iteração K é dada por:

$$C_k = a.K^2 + b.K + c$$

Onde os parâmetros a , b , e c são calculados da seguinte forma:

$$a = \frac{C_0 - C_F}{(\max I)^2} \quad b = \frac{2(C_F - C_0)}{\max I} \quad c = C_0$$

O número total de soluções a percorrer (regra de paragem), é representado por “max I”. Os outros parâmetros C_0 e C_F (temperaturas inicial e final), seriam determinados após uma fase inicial em que se testam algumas soluções⁶¹. O algoritmo é o seguinte:

Função *Simulated annealing*:

```

x ← J                                // Solução inicial
a ← ( C0 - CF ) / ( MAXI ^ 2 )
b ← 2 . ( CF - C0 ) / MAXI
c ← C0
iteração ← 0
faça
    faça
        temperatura ← a . iteração ^ 2 + b . iteração + c
        iteração ← iteração + 1
        t = vizinho( x )                // Ordem de geração aleatória, sem repetição.
        vou_mudar ← 1
        se valor_função_objectivo( t ) > valor_função_objectivo( x ) e aleatório[ 0 , 1 ] >
            exp( diferença_função_objectivo( t , x ) / temperatura )
            vou_mudar ← 0
        enquanto ainda_há_vizinhos( x ) e vou_mudar = 0
            x ← t
            se houve_melhoria_global()
                melhor_x ← x
        enquanto vou_mudar = 1 e iteração < MAXI
retorna melhor_x
    
```

⁶⁰ Esta estratégia foi entretanto utilizada noutros trabalhos, com bons resultados.

⁶¹ No ASSORT estas variáveis são instanciadas no início, porque o problema do sortido permite estimar à partida estes parâmetros, de forma semelhante ao utilizado em [Andersen93].

Na secção seguinte incluem-se resultados obtidos com três temperaturas iniciais distintas, para o problema AÇOS1.

6.6 Resultados

Para cada uma das meta-heurísticas descritas nas secções precedentes experimentaram-se três parametrizações. As doze heurísticas particulares assim criadas recebem designações indicadas em seguida, juntamente com os parâmetros utilizados.

• Método de descida

D1	GULA = 0	Calcula todos os vizinhos
D2	GULA = 1	Algoritmo guloso
D3	GULA = 3	

• Pesquisa tabu

	NÚMERO_MÁXIMO_DE_ITERAÇÕES_ENTRE_MÍNIMOS = 120	N = 7
PT1	GULA = 0	
PT2	GULA = 1	Pesquisa tabu gulosa
PT3	GULA = 3	

• Pesquisa tabu com lista de soluções calculadas infinita

	NÚMERO_MÁXIMO_DE_ITERAÇÕES_ENTRE_MÍNIMOS = 120
PTk1	GULA = 0
PTk2	GULA = 1
PTk3	GULA = 3

• Arrefecimento simulado

	CF = 0	MAXI = 1500
SA1	C0 = 2000	
SA2	C0 = 1000	
SA3	C0 = 300	

O problema que serve de base ao teste comparativo utiliza os dados já apresentados na tabela 5.1, sob a designação de problema AÇOS1. Supõe-se que os sortidos sejam constituídos por dois tamanhos. Assim, sortearam-se 100 soluções iniciais que foram utilizadas em cada uma das 12 heurísticas acima descritas, isto é, para todas as heurísticas utilizou-se exactamente o mesmo conjunto de partida. Este cuidado pretende, naturalmente, evitar que a comparação seja influenciada pela existência de diferenças a esse nível. Os resultados representam-se na figura 6.2, onde se marcam os valores médios

com o símbolo 'x'. Como as observações revelam assimetria em relação à média, e para evitar a influência dos extremos, representam-se diagramas de quartis das distribuições obtidas.

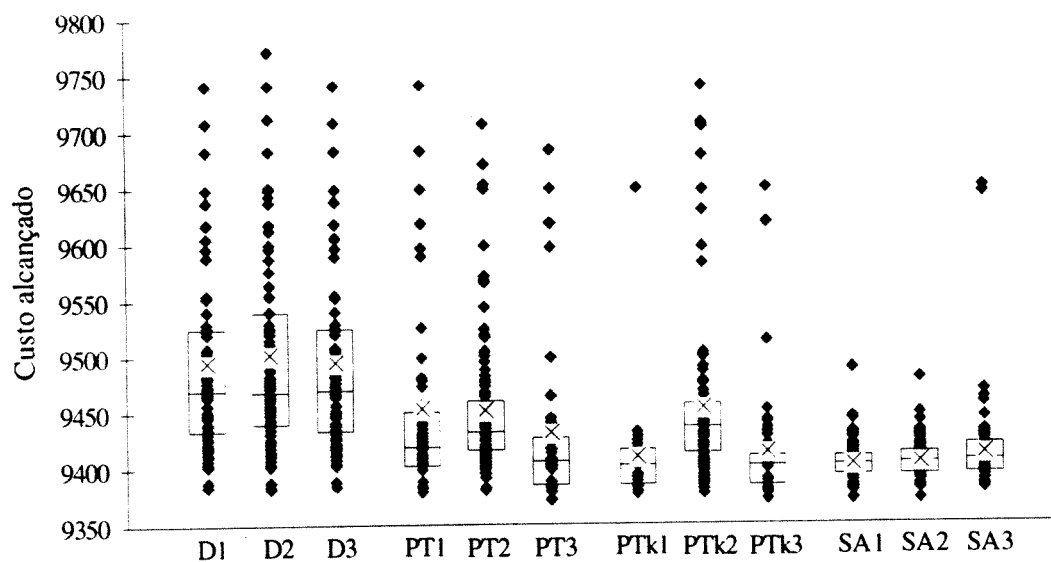


Figura 6.1 Representação dos resultados obtidos com as 12 heurísticas

Heurística	Custo médio	Custo mediano	Iterações	Oper. Corte
D1	9494	9469,5	4	43
D2	9502	9468	6	29
D3	9494	9469,5	5	43
PT1	9452	9419	139	892
PT2	9451	9432	211	212
PT3	9431	9406	207	912
PTk1	9410	9402	207	1198
PTk2	9453	9436	238	239
PTk3	9414	9401,5	213	872
SA1	9403	9402	1123	1342
SA2	9404	9403,5	978	1241
SA3	9412	9405,5	603	896

Tabela 6.1 Custos médios e medianos - Número de mudanças -
- Número de problemas de corte

Na tabela 6.2 registam-se os valores do custos médios obtidos com cada método, juntamente com o número de vezes que a solução corrente mudou e o número de problemas de corte que foi necessário resolver⁶². Registam-se ainda os custos medianos.

A principal observação é que os resultados médios se situam num intervalo com amplitude de cerca de 1%. Face à diferença entre esforços envolvidos, pode-se dizer que os métodos de descida não se comportam muito mal, o que à luz do que foi visto no capítulo anterior, e em particular na secção 5.5, é natural. Em geral, os métodos que resolvem mais problemas de cortes dão melhores resultados. Uma comparação interessante consistiria em afinar os métodos de modo a que o esforço de cálculo fosse idêntico, para obter comparações entre as heurísticas. No caso dos métodos de descida, seria curioso experimentar gerar mais pontos iniciais, e escolher apenas os melhores resultados. Até que ponto isso não seria preferível?

Com excepção da sua versão gulosa, a variante da heurística de pesquisa tabu parece ter-se comportado bem face à heurística “original”.

É evidente que estas comparações são válidas para este problema e para a estrutura de vizinhanças, muito simples, que foi utilizada⁶³. Sabe-se que a estrutura de vizinhança determina o comportamento dos métodos de pesquisa. Em particular, nos casos de pesquisa tabu, existem exemplos em que grandes vantagens sobre o algoritmo de *simulated annealing* surgem graças à qualidade das vizinhanças geradas. A secção 6.7 aborda esta questão, recorrendo ao enriquecimento da estrutura de vizinhança utilizada.

Todos os métodos conseguiram gerar soluções próximas do desperdício nulo.

6.7 Estruturas de vizinhança

Como referido, a estrutura de vizinhança utilizada na secção anterior é muito simples. Um vizinho é gerado pelo aumento ou diminuição, numa das dimensões, do tamanho de qualquer elemento do sortido, de um valor igual ao máximo divisor comum dos tamanhos de todas as peças na dimensão considerada ou do valor mínimo observado, nessa dimensão, na lista de pedidos⁶⁴.

⁶² Em todo o trabalho relatado existem mecanismos transparentes que evitam a repetição do cálculo do planeamento do corte quando o problema é repetido. Todos os pontos calculados são guardados numa estrutura adequada (*linked hash table*) onde a pesquisa é muito rápida.

⁶³ Aumento e diminuição do tamanho de cada peça de um valor igual ao máximo divisor comum dos tamanhos de todas as peças na dimensão considerada. As mesmas operações, mas com as dimensões da peça mais pequena na lista de pedidos.

⁶⁴ No exemplo cujos resultados se apresentam considera-se apenas uma dimensão.

É sabido que a estrutura de vizinhança pode influenciar de modo importante o comportamento destas heurísticas [Vidal93b]. Para uma avaliação qualitativa da importância dessa estrutura para este problema, acrescentaram-se dois tipos de vizinhos gerados de modo algo semelhante aos anteriores: pelo aumento ou diminuição, numa das dimensões, do tamanho de qualquer peça do sortido do valor modal dos tamanhos das peças pequenas, na dimensão considerada; e empregando as mesmas operações com os valores máximos observados, em cada dimensão, na lista de pedidos⁶⁵. Esta estrutura passa assim a permitir “saltos” maiores e a utilização da peça mais frequente pode ser vista como uma tentativa inteligente de explorar a distância porventura mais frequente entre tamanhos óptimos.

Todos os restantes parâmetros se mantêm inalterados. Além disso, utilizaram-se exactamente os mesmos sortidos iniciais de dois tamanhos, que tinham sido sorteados para a comparação efectuada na secção anterior. Os resultados estão representados na figura 6.2 e as mesmas estatísticas apresentadas na secção anterior foram calculadas neste caso e apresentam-se na tabela 6.2.

Como seria de esperar, todos os métodos apresentaram melhores desempenhos com a estrutura de vizinhança melhorada.

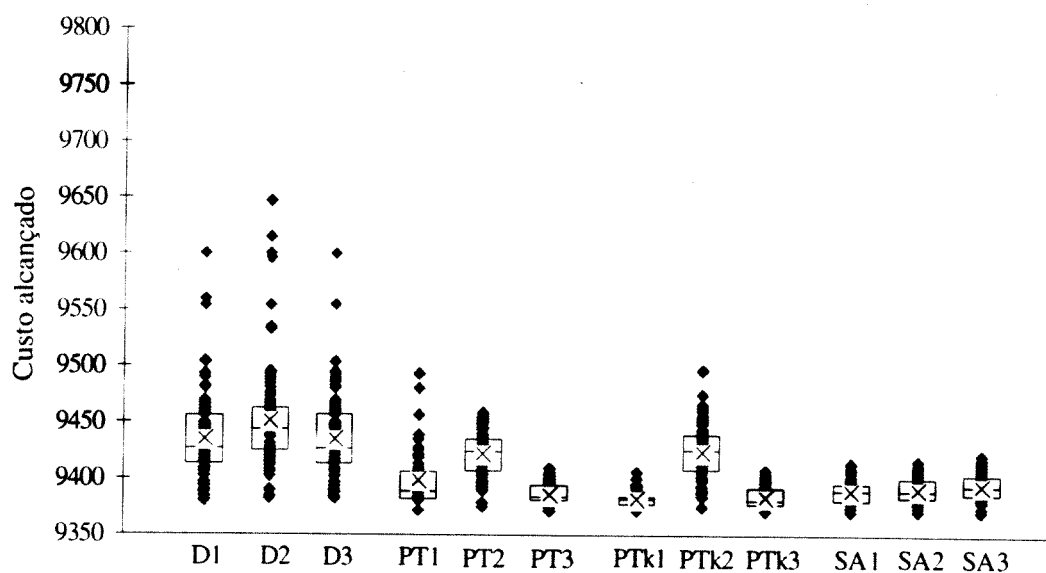


Figura 6.2 Resultados obtidos utilizando a nova estrutura de vizinhanças

⁶⁵ Nota-se, mais uma vez, que no exemplo apresentado apenas existe uma dimensão.

Heurística	Custo mediano	Custo médio	Iterações	Oper. Corte
D1	9426,5	9435	4	60
D2	9443,5	9451	7	43
D3	9426	9435	4	60
PT1	9388,5	9398	144	1543
PT2	9424	9422	215	216
PT3	9384	9386	205	1113
PTk1	9383	9382	219	2160
PTk2	9425,5	9424	207	208
PTk3	9381	9385	233	1225
SA1	9390	9389	1084	1374
SA2	9390	9392	936	1293
SA3	9394,5	9395	602	1050

Tabela 6.2 Resumo dos resultados obtidos utilizando a nova estrutura de vizinhança

Outros aspectos que podem ser extraídos da comparação:

- Na pesquisa tabu clássica, o melhor processo foi o que considera um valor de gula intermédio. Nas heurísticas PTK (pesquisa tabu com lista de soluções calculadas infinita), as melhores soluções foram encontradas com a parametrização conservadora, com um custo de cálculo mais elevado.
- Escolhendo os processos PT3 e PTK3, as diferenças entre eles não permitem concluir que um será efectivamente melhor do que o outro.
- **As meta-heurísticas baseadas em pesquisa tabu atingiram melhores resultados do que as de arrefecimento simulado.**

O resultado mais importante da comparação entre as soluções obtidas com esta estrutura de vizinhança e pela utilizada na secção anterior, é precisamente que as heurísticas de *simulated annealing* foram ultrapassadas pelas heurísticas baseadas em pesquisa tabu. A melhoria na geração de soluções vizinhas, que incorpora mais informação sobre o problema, beneficia mais as abordagens por pesquisa tabu, vistas por alguns autores como métodos mais “inteligentes” do que o método de arrefecimento simulado. Esta última abordagem foi a mais adequada quando a estrutura de vizinhança era mais simples.

A comparação que se apresentou neste capítulo poderia ser beneficiada de muitas maneiras, como pelo emparelhamento das soluções correspondentes a cada solução inicial, pela inclusão de mecanismos para eliminar as disparidades nos esforços computacionais, pela geração de mais pontos iniciais para os métodos de descida e outros.

Também neste caso, todos os métodos conseguiram gerar soluções próximas do desperdício nulo. Os resultados nestas duas secções ilustram as conclusões e considerações referidas na secção 5.5 (Quando todas as heurísticas são “boas”).

7 Conclusões

Nesta dissertação abordam-se os problemas de selecção de sortidos ou catálogos⁶⁶. Uma vez que problemas diversos surgiram na literatura sob esta designação, apresenta-se uma definição geral, ilustrada com um conjunto de exemplos oriundos de casos reais e escolhidos da literatura.

A partir do material publicado e dos exemplos referidos, faz-se uma classificação dos problemas quanto a diferentes características. Destas, as mais relevantes são o número de dimensões a considerar na decisão e o modo como a procura é satisfeita a partir do catálogo existente. Este processo de satisfação da procura pode seguir políticas de substituição ou políticas de corte, o que divide os problemas em dois grandes grupos que **merecem abordagens diferentes**. Propõe-se um **esquema classificativo muito simples para os problemas de selecção de sortidos**.

O material publicado especificamente sobre os problemas do sortido é escasso, se comparado com a literatura sobre os problemas de corte. É, no entanto, diversificado, reflectindo a variedade de problemas que recebem a designação de problemas de selecção de sortidos. Estas circunstâncias justificam que se apresente um resumo da literatura encontrada e que se reproduzam, a título de exemplo, dois modelos completos para lidar com duas classes diferentes de problemas.

A presente dissertação surgiu no âmbito do grupo de Decisão e Optimização do INESC Porto que desenvolve trabalhos e aplicações na área dos problemas dos cortes. Esta foi uma das razões que levaram a dar atenção especial aos problemas de selecção de sortidos que pressupõe operações de corte como políticas de satisfação da procura - uma classe de problemas que é combinatoriamente mais complexa do que a classe das políticas de substituição. Ilustra-se a importância que a selecção de sortidos pode ter e mostra-se que, nestes casos, a escolha de um catálogo pode ser vista como uma generalização dos problemas dos cortes. O planeamento do corte em si é brevemente referido, decidindo-se

⁶⁶ *Assortment problems*

neste trabalho utilizar as técnicas de Gilmore e Gomory para cortes guilhotináveis. Em apêndice estudam-se as dimensões que os modelos de corte inteiros tomariam, para dois dos problemas estudados. Referem-se algumas estratégias sugeridas pela literatura para a escolha aproximada de sortidos.

Escolheu-se uma estratégia que fornece uma visão geral sobre os problemas de selecção de sortidos que envolvem políticas de corte. Para isso foi essencial estudar os casos dos cortes a uma e a duas dimensões. Para evitar as dificuldades que habitualmente surgem na comparação de resultados e métodos de resolução neste tipo de problemas, optou-se por calcular e representar graficamente as funções objectivo, o que envolve grande esforço computacional. Estudaram-se casos de sortidos formados por um só e por dois tipos de artigos diferentes, podendo as conclusões gerais ser estendidas a sortidos com maior número de elementos. Mostra-se que a escolha cuidada de sortidos pode, em muitos casos, evitar grandes desperdícios e que muitas vezes a obtenção de um sortido com pequeno desperdício não é muito difícil, desde que se disponha de um algoritmo de corte optimizante. Identificaram-se diferentes zonas nas funções objectivo propondo-se algumas explicações para os comportamentos observados. Como resultado lateral, encontrou-se um processo para avaliar a frequência com que a propriedade de arredondamento inteiro para cima ocorre nos problemas de corte e, simultaneamente, avaliar a proporção de casos em que a abordagem de Gilmore e Gomory achou soluções óptimas, para os exemplos visitados. O estudo do espaço de resultados conduziu à constatação de que a comparação de métodos propostos para a solução dos problemas **deve ser feita com algum cuidado; pois em certas zonas da função objectivo é fácil** encontrar soluções com custos próximos do óptimo, em termos absolutos. Uma boa solução pode consistir em ganhar apenas uma fracção de 1% face a uma muito má solução. No entanto, noutras zonas da função objectivo, o desleixo na selecção de catálogos pode sair bastante mais caro, como demonstrado com um caso real.

Como complemento às conclusões obtidas, utilizam-se algumas heurísticas genéricas de pesquisa, ou meta-heurísticas, recentemente propostas. Comparam-se os resultados obtidos por três métodos conhecidos: métodos de descida, pesquisa tabu e arrefecimento simulado (*simulated annealing*) e ainda por uma variante da pesquisa tabu que atribua uma condição tabu a todas as soluções calculadas. Cada um destes métodos recebeu três parametrizações diferentes e foi utilizado para resolver um problema de selecção de sortidos a partir de um mesmo conjunto de soluções iniciais. Utilizou-se uma estrutura de vizinhança muito simples, que foi posteriormente melhorada. O alargamento da estrutura de vizinhança teve maior influência nos métodos de pesquisa tabu e de pesquisa tabu modificada, que conseguiram melhores resultados do que o método de *simulated annealing*, que não beneficiou tanto com a alteração introduzida. Um aspecto interessante foi que todos os métodos conseguiram gerar soluções próximas do desperdício nulo pelo que não deverá ser posta de parte a hipótese de utilizar um método

leve, tal como um método de descida, partindo de um número maior de soluções iniciais. Além disso, verificou-se que as versões de pesquisa tabu parametrizadas para poderem mudar de solução sem calcular todos os vizinhos se sobrepuseram tanto às versões conservadora como gulosa das heurísticas.

Paralelamente a esta dissertação, resultou do presente trabalho uma aplicação informática, que serviu de base aos resultados apresentados, e ainda algumas comunicações apresentadas em encontros de âmbito nacional e internacional [Borges94a-c]. Espera-se que as conclusões obtidas venham a ter influência prática no desenvolvimento de aplicações nesta área.

A1 A Abordagem de Gilmore e Gomory

Neste apêndice descreve-se a abordagem básica de Gilmore e Gomory para os problemas dos cortes unidimensionais. Para abordagens a dimensões superiores ou extensões a este método referem-se [Gilmore65], [Farley88] e [Oliveira90].

No modelo aqui apresentado supõe-se a existência de um só tamanho para as peças grandes, podendo no entanto o processo ser generalizado para considerar um número maior de tamanhos disponíveis.

Retoma-se o modelo já apresentado para o problema de cortes:

- P Conjunto de todos os padrões de corte possíveis;
- c_p Custo associado à utilização do padrão de corte $p \in P$;
- m Número de tipos de peças pequenas;
- d_j Número de peças pequenas de tipo j pretendidas⁶⁷ ($j = 1, \dots, m$);
- a_{jp} Número de peças de tipo j ($j = 1, \dots, m$) geradas pelo padrão $p \in P$;
- x_p Número de vezes que o padrão $p \in P$ é utilizado.

⁶⁷ A primeira restrição do modelo, que diz respeito à satisfação da procura, representando-se aqui como uma desigualdade, é equivalente à igualdade na generalidade dos casos que supõe todos os possíveis padrões de corte.

$$\begin{array}{ll}
 \min \sum_{p \in P} c_p x_p & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \sum_{p \in P} a_{jp} x_p \geq d_j, \quad j = 1, \dots, m; & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{d} \\
 x_p \geq 0, \quad \forall p \in P; & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \text{ vector de inteiros.} \\
 x_p \text{ inteiro.} &
 \end{array}$$

Um obstáculo à utilização deste modelo é a necessidade de considerar todos os possíveis padrões de corte que torna impraticável encontrar a solução. Esta situação é agravada pela restrição de integridade das variáveis, uma vez que o número de variáveis é igual ao número de padrões de corte possíveis. Quando existem peças pequenas com tamanhos bastante menores do que a peça grande a explosão combinatória associada ao aumento do número de tipos pedidos é notável.

A resolução de muitos problemas 1D pela utilização do modelo inteiro é já viável, o que não acontecia há alguns anos atrás, no entanto os problemas maiores e com mais dimensões, ainda aguardam a sua oportunidade. No apêndice A2 ilustra-se, para os problemas AÇOS1 e GIL63-1, o aumento do número de padrões de corte, com o aumento do comprimento das peças grandes.

Gilmore e Gomory propuseram um processo que denominaram *geração atrasada de colunas*, em que não utilizam todos os padrões de corte. Inicialmente utilizam um número mínimo de padrões⁶⁸ (colunas da matriz $\mathbf{A}$), que é depois sucessivamente aumentado por um processo cíclico, até se encontrar a solução ótima. Este método iterativo é composto por duas fases.

Na primeira fase resolvem o problema com um número limitado de colunas (padrões de corte), relaxando as restrições de integridade. Obtendo a solução do "pequeno" problema de programação linear (PL) assim formado.

Na segunda etapa do ciclo, utilizam os multiplicadores duais associados à solução ótima obtida na fase anterior, para gerar um novo padrão de corte. Este, quando acrescentado ao problema PL aumenta-o e permite melhorar a solução. Se tal padrão de corte não existir terminam as iterações.

⁶⁸ Os padrões de corte iniciais são habitualmente de geração imediata como, por exemplo, m padrões diferentes, cada um dos quais contendo apenas uma peça pequena.

No final do processo a restrição de integridade poderá não ser satisfeita, pelo que é necessário utilizar algum processo para tornar a solução inteira⁶⁹. Neste caso podemos obter uma solução final diferente da que se obteria pela utilização de programação inteira. Este problema foi estudado por vários autores e concluiu-se que na maioria dos casos os valores da função objectivo obtida pelo recurso à programação inteira e arredondando para cima a solução do problema relaxado são iguais⁷⁰ [Washer93b] [Marcotte85].

A questão pertinente é: como gerar as colunas que vão aumentando o modelo e conduzindo a melhorias na função objectivo? Esses padrões podem ser encontrados resolvendo o problema da mochila associado à solução do problema PL:

π_j Multiplicador dual associado à j -ésima restrição do problema PL ($j = 1, \dots, m$);

W Comprimento das peças grandes;

a_j Número de peças pequenas de tipo j a incluir no novo padrão ($j = 1, \dots, m$);

w_j Comprimento das peças pequenas do tipo j ($j = 1, \dots, m$).

$$\begin{array}{ll} \min \sum_{j=1}^m \pi_j a_j & \max \pi^T \mathbf{a} \\ \sum_{j=1}^m w_j a_j \leq W, \quad j = 1, \dots, m; & \mathbf{w}^T \mathbf{a} \leq W \\ a_j \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad j = 1, \dots, m; & \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \text{ vector de inteiros.} \end{array}$$

A solução deste sub-problema pode ser encontrada por muitos métodos utilizados em problemas da mochila^{71 72}. Um processo, sugerido por Gilmore e Gomory, largamente utilizado é o método de pesquisa lexicográfica.

⁶⁹ É corrente considerar apenas a componente inteira das variáveis e a utilização de uma heurística de corte para gerar padrões para colocar as peças em falta.

⁷⁰ Propriedade de *Integer Round up*.

⁷¹ Para acelerar o processo, Oliveira e Ferreira concluíram pela não necessidade de utilizar sempre a solução óptima para o problema da mochila.

⁷² Os problemas da mochila e de corte e empacotamento estão fortemente ligados, tanto que em muitos exemplos os segundos são vistos e abordados como casos especiais dos primeiros.

A2 A explosão combinatória no problema dos cortes a uma dimensão

Este apêndice apresenta algumas conclusões sobre o tamanho dos modelos inteiros para o problema dos cortes unidimensionais. A determinação do número de restrições e variáveis pode, neste caso, ser considerada de natureza numérica e não de carácter geométrico, como em problemas mais complexos, tais como os cortes bidimensionais ou de figuras irregulares. Este apêndice é quase lateral mas surge como justificação de algumas decisões tomadas ao longo deste trabalho e é uma curiosidade que poderá ser útil para o leitor interessado no estudo dos problemas dos cortes.

O seguinte modelo (M1) para problemas de corte (notação introduzida no apêndice A1),

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{d} \\ \mathbf{x} &\geq 0, \text{ vector de inteiros,} \end{aligned}$$

é geralmente inadequado porque considera também os padrões que geram desperdício superior ao necessário para obter novas peças, de modo a não permitir que a procura seja excedida. Supondo que o custo está associado apenas à quantidade de material utilizado ou ao desperdício, o modelo seguinte (M2) evita considerar esses padrões:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &\geq \mathbf{d} \\ \mathbf{x} &\geq 0, \text{ vector de inteiros.} \end{aligned}$$

É o modelo M2 que normalmente é utilizado, porque mesmo que exista um custo associado a cada corte, este pode ser evitado *a posteriori*. Por uma questão de ilustração, apresentam-se simultaneamente os resultados correspondentes aos dois modelos. A dificuldade na resolução destes modelos está ligada ao número de variáveis inteiras, igual ao número de colunas da matriz $\mathbf{A}$, isto é, ao número de padrões de corte.

Para o problema AÇOS1, que foi apresentado na tabela 5.1, calcularam-se os números de padrões de corte que seriam necessários para construir os modelos acima indicados,

considerando sortidos de apenas um tamanho. Os resultados apresentados na figura A2.2 mostram que o modelo **M1** requer números quatro a quinze vezes maiores de padrões de corte, relativamente ao modelo **M2**.

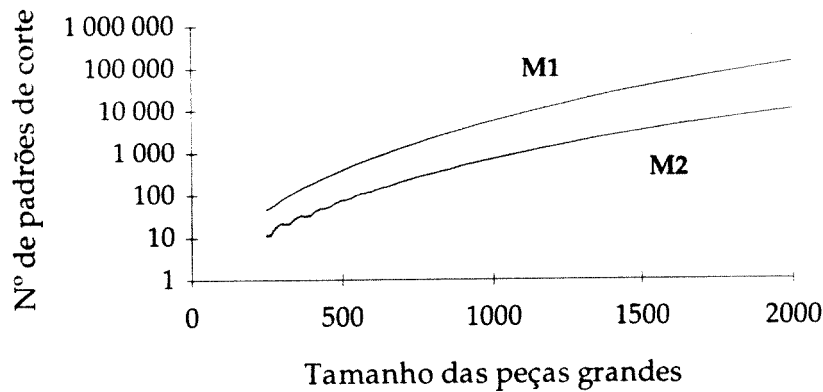


Figura A2.1 Número de padrões no modelo inteiro do problema AÇOS1

O problema AÇOS1 é um problema pequeno. O número de padrões de corte não é muito elevado, em parte porque alguns tamanhos pequenos têm procura unitária, o que permitiu reduzir o número de padrões a considerar.

Um problema de maior dimensão é o problema GIL63-1, cujos dados se descreveram na tabela 5.2. Na figura A2.2 representam-se os números de colunas a incluir em **M1** e **M2**, para cada valor do tamanho grande. Também aqui a explosão combinatória força a utilização de uma escala das abcissas logarítmica. É visível que os modelos podem tomar proporções irresolúveis na prática, por programação inteira.

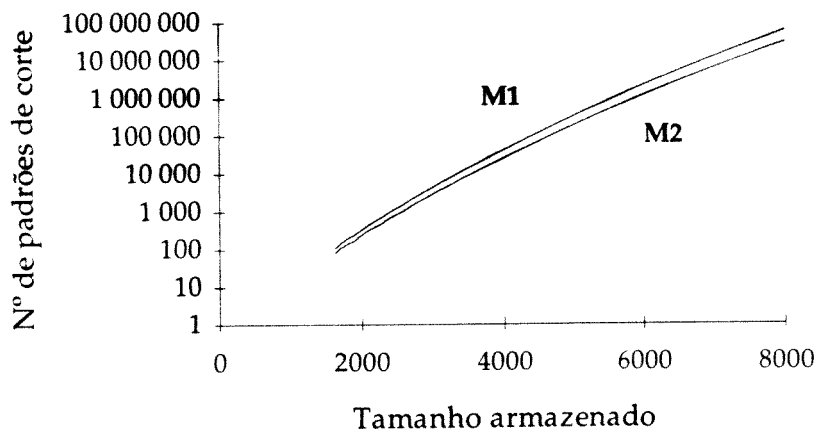


Figura A2.2 Número de padrões no modelo inteiro do problema GIL63-1

Referências

- [Abramson91] ABRAMSON, D., "A Very High Speed Architecture for Simulated Annealing", *Applied Simulated Annealing*. Springer Verlag (1993) 201-215.
- [Andersen93] ANDERSEN, KLAUS; VIDAL, RENÉ VICTOR; IVERSEN, VILLY BÆK, "Design of a communication Network using Simulated Annealing", *Applied Simulated Annealing*, René V.V. Vidal (Ed.), Springer-Verlag, 1993.
- [Beasley85] BEASLEY, J.E., "An Algorithm for the two-dimensional assortment problem", *European Journal of Operational Research* 19 (1985) 253-261.
- [Borges94a] BORGES, P; FERREIRA, J. S., "Overview of assortment problems", a aparecer nos *Proceedings of the third meeting of the nordic section of the mathematical programming society*, Fev. 94, Linköping, Suécia.
- [Borges94b] BORGES, P; FERREIRA, J. S., "Seleção de Sortidos", IO94, Março 94, Braga, Portugal.
- [Borges94c] BORGES, P; FERREIRA, J. S., "Assortment Problems", a ser apresentado na conferência APORS 94, Julho 94, Fukuoka, Japan.
- [Chambers76] CHAMBERS, M.L.; DYSON, R.G., "The Cutting Stock Problem in the Flat Glass Industry - Selection of Stock Sizes", *Operational Research Quartely* (1976), 27(4), 949-957
- [Charon93] CHARON, IRÈNE; HUDRY, OLIVIER, "La Methode du Bruitage: Application au Probleme du Voyageur de Commerce", ECCO VI.
- [Chen93] CHEN, CHIN-SENG; SARIN, SANJIV; RAM, BALASUBRAMANIAN, "A mixed-integer programming model for a class of assortment problems", *European Journal of Operational Research* 63 (1993) 362-367.
- [Correia93] CORREIA, HELENA; GOMES, MIGUEL; OLIVEIRA, J.F.; FERREIRA, "EMPAC - A System for Truck and Container Packing", IFORS 93.

- [Denardo82] DENARDO, E.V.; HUBERMAN, G.; ROTHBLUM, U.G., "Optimal locations on a line are interleaved", *Operations Research*, 1982, 30, 745-759.
- [Diegel84] DIEGEL, ADOLF; BOCKER, HANS J., "Optimal dimensions of virgin stock in cutting glass to order", *Decision Sciences*, 15 (1984) ,260-274.
- [Dowland92] DOWSLAND, KATHRYN A.; DOWSLAND, WILLIAM B., "Packing problems", *European Journal of Operational Research* 56 (1992) 2-14.
- [Dyckhoff90] DYCKHOFF, HARALD, "A typology of cutting and packing problems", *European Journal of Operational Research* 44 (1990) 145-159.
- [Dyckhoff92] DYCKHOFF, HARALD; FINKE, UTE "Cutting and Packing in Production and Distribution - A Typology and Bibliography", Physica Verlag, 1992.
- [Eilon60] EILON, S., "Optimizing the Shearing of Steel Bars", *Journal Mechanical Engineering Science*. Vol 2 N° 2 (1960) 129-142.
- [Farley88] FARLEY, A.A., "Practical Adaptations of the Gilmore-Gomory Approach to Cutting Stock Problems", *OR Spektrum*, (1988) 10: 113-123.
- [Farley90] FARLEY, A.A., "A note on bounding a class of linear programming problems, including cutting stock problems", *Operations Research*, 1990, 38(5) 922-923.
- [Ferreira84] FERREIRA, J.A.S.; VIDAL, R.V.V., "Lot sizing algorithms with applications to engineering and economics", *Internatinal Journal of Production Research*, 1984, 22(4) 575-595.
- [Ferreira87] FERREIRA, J.A.S.; VIDAL, R.V.V., "A new algorithm for the economic lot size problem", *Control and Cybernetics*, 1987, 16, 93-101.
- [Ferreira90] FERREIRA, J.A.S.; VIDAL, R.V.V., "Optimal partition of an interval - a theoretical discussion", *INESC Journal of Research and Development*, 1990, Vol 1, N°2, 15-23.
- [Ferreira92] FERREIRA, J.A.S.; VIDAL, R.V.V., "Optimal partition of an interval - some case studies", *proceedings of APORS 92*, Pequim, China.
- [Frank65] FRANK, CHARLES R., "A Note on the Assortment Problem", *Management Sci.* 11 (1965) 724-726.
- [Gemmil90] GEMMILL, DOUGLAS D.; SANDERS, JERRY L., "Approximate solutions for the cutting stock 'portfolio' problem", *European Journal of Operational Research* 44 (1990) 167-174.

- [Gemmil91] GEMMILL, DOUGLAS D.; SANDERS, JERRY L., "A Comparison of Solution Methods for the assortment problem", *Internatinal Journal of Production Research*, 1991, 29 (12), 2521-2527.
- [Gilmore63] GILMORE, P. C.; GOMERY, R. E., "A Linear Programming Aproach to the Cutting Stock Problem Part II", *Operations Research*, 11 (1963) 863-888.
- [Gilmore65] GILMORE, P. C.; GOMERY, R. E., "Multistage cutting stock problems of two and more dimensions", *Operations Research*, 13 (1965) 94-120.
- [Glover89] GLOVER, FRED; GREENBERG, HARVEY J., "New approaches for heuristic search: A bilateral linkage with artificial inteligence", *European Journal of Operational Research* 39 (1989) 119-130.
- [Haessler91] HAESSLER, ROBERT W.; SWEENEY, PAUL E., "Cutting stock problems and solution procedures", *European Journal of Operational Research* 54 (1991) 141-150.
- [Hinxman80] HINXMAN, A.I., "The Trim-Loss and Assortment Problems: A Survey", *European Journal of Operational Research* 5 (1980) 8-18.
- [Kirkpatrick83] KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P., "Optimization by Simulated Annealing", *Science* Vol 220, Number 4598 (13 May 1983) 671-.
- [Marcotte85] MARCOTTE, O., "The Cutting Stock Problem and Integer Rounding", *Mathematical Programming*, Vol 33, 1985, 82-92.
- [Oliveira89] OLIVEIRA, JOSÉ F., "Aplicação da técnica de Programação Linear ao Problema do Cortes1D", Relatório MEEC-FEUP, 1989.
- [Oliveira90] OLIVEIRA, JOSÉ F., "Optimização em Cortes Rectangulares", Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1990.
- [Page75] PAGE, E., "A Note on a Two-dimensional Dynamic Programming Problem", *Operational Research Quartely* (1975), 26(2), 321-324
- [Pentico71] PENTICO, DAVID WESLEY, "Extensions of the Assortment Problem", Ph.D. Thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, Pa., 1971. UMI Dissertation Services
- [Pentico74] PENTICO, DAVID W., "The Assortment Problem with Probabilistic Demands", *Management Sci.* 21, 826-290 (1974).
- [Pentico76] PENTICO, DAVID W., "The Assortment Problem with Nonlinear Cost Functions", *Operations Research*, Vol. 24, Nº 6, November-December 1976.

- [Pentico86] PENTICO, DAVID W., "Comments on 'On the Optimal Choice of Sizes' by Peter Tryfos", *Operations Research*, Vol. 34, Nº 2, March-April 1986.
- [Pentico88] PENTICO, DAVID W., "The Discrete Two-Dimensional Assortment Problem", *Operations Research*, Vol. 36, Nº 2, March-April 1988.
- [Pinho90a] PINHO, M. ROSÁRIO; FERREIRA, JOSÉ SOEIRO, "A Sizing Problem Solved by the Generalized Maximum Principle", *AR - 49 / 90 INESC* (1990).
- [Pinho90b] PINHO, M. ROSÁRIO; FERREIRA, JOSÉ SOEIRO, "Determinação Óptima de Medidas Estandarizadas", *AR - 50 / 90 INESC* (1990).
- [Qu89] QU, WEISHUANG; SANDERS, JERRY L., "Sequence selection of stock sheets in two-dimensional layout problems", *International Journal of Production Research*, 1989, 27 (9), 1553-1571.
- [Sadowsky59] SADOWSKI, WIESLAW, "A Few Remarks on the Assortment Problem", *Management Sci.* 6 (1959) 13-24.
- [Tryfos85] TRYFOS, PETER, "On the Optimal Choice of Sizes", *Operations Research*, Vol. 33, 678-684 1985.
- [Vidal93a] VIDAL, RENÉ VICTOR VALQUI, "On the Optimal Sizing Problem", a aparecer no *Journal of the Operational Research Society*.
- [Vidal93b] VIDAL, RENÉ VICTOR VALQUI, Editor de "Applied Simulated Annealing", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag 1993.
- [Wäsher93a] WÄSCHER, GERHARD; GAU, THOMAS, "Two Approaches to the Cutting Stock Problem", manuscripto distribuido no IFORS 93, Lisboa, Portugal.
- [Wäsher93b] WÄSCHER, GERHARD; GAU, THOMAS, "Test Data for the One-Dimensional Cutting Stock Problem", *Arbeitsbericht des Instituts für Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Braunschweig* (Okt 93) Nr. 93/9.
- [Wagner58] WAGNER, HARVEY M.; WHITIN, THOMSON M., "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model", *Management Science*, Vol. 5, 89-96 1958.
- [Werra89] DE WERRA, D.; HERTZ, A., "Tabu Search Techniques - A Tutorial and an Application to Neural Networks", *OR Spektrum* (1989) 11:131-141.
- [Wolfson65] WOLFSON, M., "Selecting the Best Lengths to Stock", *Operations Research*, Vol 13, Nº4 (July-August 1965), pp. 570-585.

Referências

- [Yanasse93] YANASSE, H.; ZINOBER, A.; HARRIS, H., "Two-Dimensional Cutting Stock: Position of Free Cut", IFORS 93.
- [ZANAKIS89] ZANAKIS, STELIOS H.; EVANS, JAMES R.; VAZACOPOULOS, ALKIS A., "Heuristic methods and applications: A categorized survey", *European Journal of Operational Research* 43 (1989) 88-100.

