

MODELAÇÃO E ANÁLISE DE
TRATAMENTOS VISCOELÁSTICOS
MULTI-CAMADA PARA CONTROLO PASSIVO
DE VIBRAÇÕES

Faculdade Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

MODELAÇÃO E ANÁLISE DE
TRATAMENTOS VISCOELÁSTICOS
MULTI-CAMADA PARA CONTROLO PASSIVO
DE VIBRAÇÕES

Rui António da Silva Moreira

Mestre em Engenharia Mecânica
pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Dissertação de Doutoramento apresentada à
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica

Dissertação realizada sob a supervisão
do Professor Doutor José Fernando Dias Rodrigues (Prof. Assoc. FEUP)
e do Professor Doutor José António de Oliveira Simões (Prof. Assoc. DEM-UA)

Porto e FEUP, Novembro de 2004

Resumo

A aplicação de tratamentos viscoelásticos sob a forma de camadas em estruturas, em especial nas configurações superficial com restrição e integrada, constitui um meio de controlo passivo da vibração de elevada eficiência, de reduzida modificação estrutural e com um vasto campo de aplicação. A modelação espacial de estruturas dotadas com estes tratamentos requer a representação conveniente do campo de deformações desenvolvido nas camadas dissipativas e das propriedades dos materiais viscoelásticos, dependentes da frequência e da temperatura, e a simulação do seu comportamento dinâmico requer a utilização de técnicas específicas de análise. Nesta dissertação é desenvolvido um elemento finito multi-camada generalizado baseado num modelo *layerwise*, utilizando a teoria de *Reissner-Mindlin* para representar cada camada individual e recorrendo a técnicas numéricas de melhoria do desempenho usualmente aplicadas em elementos de placa e de casca. O elemento finito desenvolvido é verificado numericamente através de problemas padrão de teste de elementos finitos e validado experimentalmente em termos das funções de resposta em frequência medidas num conjunto de provetes representativos das configurações de tratamento superficial e integrada. A validação experimental é baseada num conjunto de indicadores de correlação. O elemento finito proposto assenta numa formulação generalizada que permite a sua aplicação eficiente na modelação de tratamentos viscoelásticos multi-camada e multi-material. Na perspectiva de atenuar a modificação estrutural, devida ao efeito de desacoplamento proporcionado pelo núcleo viscoelástico numa configuração de tratamento integrado, e alargar a gama eficiente pela aplicação de materiais com diferente comportamento em função da temperatura, é desenvolvido um estudo numérico e experimental sobre a aplicação e o desempenho de tratamentos constituídos por várias camadas de material viscoelástico intercaladas por camadas de restrição. A análise é realizada por comparação das frequências naturais e respectivos factores de perda determinados através de um método desenvolvido para o efeito e assente no conceito de energia de deformação modal. Para a caracterização dos materiais viscoelásticos aplicados neste estudo, é idealizada, desenvolvida e verificada uma metodologia experimental de identificação do módulo complexo de materiais viscoelásticos.

Abstract

The application of viscoelastic treatments on structures, specially the constrained and integrated layer configurations, represents an effective passive damping control mechanism, which can be easily applied and avoids major structural modifications on the base structure. However, the numerical simulation of such damping treatments demands the meeting of some particular requirements and the application of specific techniques in order to accurately represent the deformation pattern developed in the dissipative layers and to properly model the viscoelastic material properties. In this work, a generalized *layerwise* finite element is developed by using the *Reissner-Mindlin* theory to model each individual layer as well as some numerical techniques to improve its performance and accuracy. The proposed finite element is numerically verified through a set of benchmark tests, usually applied on membrane, plate and facet-shell finite elements, and it is also experimentally validated by a set of frequency response functions measured on several specimens representing the surface and integrated treatment configurations analyzed. A set of correlation indicators for frequency response functions is used in the experimental validation. The proposed finite element proved to have a generalized formulation which can be universally applied to the viscoelastic damping treatments modelling, regardless of the treatment configuration and the number of layers. Using this modelling tool, it is developed a numerical analysis on the effects of the application of several viscoelastic and constraining layers in an integrated layer damping treatment. The aim of this technique is to reduce the structural flexural stiffness modification induced by the decoupling effect produced by the soft viscoelastic core, to increase the damping effectiveness and to expand the efficient temperature range applying several materials with different temperature behavior. The analysis of different multi-layer configurations is assessed by the comparison of the first mode natural frequency and corresponding loss factor evaluated through a proposed analysis method based on the Modal Strain Energy method. To identify the complex modulus of the viscoelastic materials used in this study, it is designed, developed and verified a new experimental methodology for viscoelastic material characterization.

Palavras-chave

Controlo passivo de vibrações

Tratamentos viscoelásticos

Módulo complexo

Modelação de tratamentos viscoelásticos

Teoria *layerwise*

Tratamentos viscoelásticos multi-camada

Energia de deformação modal

Keywords

Passive damping control

Viscoelastic damping treatments

Complex modulus

Viscoelastic treatments modelling

Layerwise theory

Multi-layer viscoelastic treatments

Modal strain energy

À Graça e Íris

Agradecimentos

Ao longo da elaboração deste trabalho fui galardoado com a imprescindível e estimulante ajuda e o apoio de um conjunto de pessoas e entidades, às quais quero desde já deixar o meu reconhecimento.

Em primeiro lugar agradeço ao Professor José Dias Rodrigues, cuja interminável paciência e esforço de motivação permitiram atingir o objectivo desejado. O tempo dispendido em inúmeras discussões e o sempre presente rigor científico permitiram, não apenas levar a bom porto esta dissertação, mas, principalmente, continuar este longo e ininterrupto processo de aprendizagem.

Agradeço também ao Professor José Simões a co-orientação deste trabalho, cujo apoio e motivação foram sempre um estímulo durante o desenvolvimento desta dissertação.

Ao CETRIB deixo um reconhecimento especial pelas condições de trabalho que permitiram a realização do estudo experimental e numérico desenvolvido.

Agradeço ainda a Jeff McCutcheon (3M), a Tom Lewis (Dynamic Technologies Inc.) e ao Eng. Alexandre Andrade (Embal, Lda) a disponibilização de alguns dos materiais utilizados neste trabalho.

Pela ajuda e apoio prestado, não posso também de apresentar o meu reconhecimento ao Professor Etienne Balmès (SDTools) pela valiosa ajuda na implementação do modelo numérico desenvolvido no software SDT®.

O meu reconhecimento aos colegas do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro pelo apoio prestado.

Agradeço à Graça todo o apoio, carinho e compreensão sem os quais nunca teria conseguido atingir esta meta. À minha filha Íris agradeço também os valiosos momentos de descontração.

“ There are many wonderful things in the world which we never think about until they disappear or something goes wrong with them - things like air, health, love and money. Damping is like that as well.

Imagine for a minute what world would be like without damping. The noises of Egyptian chariots would still be heard in such world, if they were not drowned out by the terrible thunder of Hiroshima. No machines would be operating, because the resonance of their work frequencies - in harmony with the natural vibration frequencies of their components - would shatter them. But the worst feature would simply be the lack of any static state, the absence of any rest, in a world of perpetual vibrations, oscillations and noise. One can easily imagine the discomfort of such a world. *Thank God it is only a fantasy.* ”

in “Energy Dissipation in Composite Materials”, Zinoviev and Ermakov, 1994.

Índice

Notação e lista de símbolos	xxxix
1 Introdução	1
1.1 Tratamentos viscoelásticos	2
1.2 Configurações de tratamento viscoelástico	4
1.2.1 Tratamentos superficiais sem restrição	4
1.2.2 Tratamentos superficiais com restrição	5
1.2.3 Tratamentos integrados	6
1.3 Optimização de tratamentos viscoelásticos	8
1.3.1 Tratamentos parciais localizados	8
1.3.2 Tratamentos multi-camada e multi-material	9
1.3.3 Camadas de espaçamento e mecanismos amplificadores	9
1.3.4 Tratamentos orientados	10
1.3.5 Tratamentos híbridos	10
1.3.6 Materiais de espectro largo	12
1.4 Aplicabilidade dos tratamentos viscoelásticos	12
1.5 Caracterização e modelação de materiais viscoelásticos	13
1.6 Análise de tratamentos viscoelásticos	15
1.7 Motivação e objectivo da dissertação	20
1.8 Organização da dissertação	21

2	Caracterização dos materiais viscoelásticos	25
2.1	Introdução	26
2.2	Caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos	26
2.2.1	Efeito da temperatura	27
2.2.2	Efeito da frequência	29
2.2.3	Caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos com a frequência	29
2.2.4	Módulo complexo	31
2.3	Medição do módulo complexo dos materiais viscoelásticos	33
2.3.1	Sistema discreto com um grau de liberdade	34
2.3.2	Sistema discreto com dois graus de liberdade	40
2.3.3	Considerações sobre os sistema discretos	43
2.3.4	Vigas com tratamento	46
2.3.5	Considerações sobre as vigas com tratamento	55
2.3.6	Outros processos de medição	58
2.4	Validação da caracterização experimental e análise de resultados	60
2.4.1	Representação <i>Wicket Plot</i>	61
2.4.2	Princípio da correspondência frequência-temperatura	62
2.5	Representação do módulo complexo	66
2.5.1	Nomograma de frequência reduzida	66
2.5.2	Modelos viscoelásticos	68
2.6	Conclusões	68

3	Modelação de tratamentos viscoelásticos pelo método dos elementos finitos	71
3.1	Introdução	72
3.2	Modelação espacial	73
3.2.1	Modelos combinados	74
3.2.2	Modelos de camada discreta	78
3.3	Modelação dos materiais viscoelásticos	80
3.3.1	Módulo complexo	82
3.3.2	Modelo de <i>Golla-Hughes-McTavish</i> - <i>GHM</i>	84
3.3.3	Modelo do campo de deslocamentos inelásticos - <i>ADF</i>	88
3.3.4	Derivadas fraccionárias	92
3.4	Métodos de análise	95
3.4.1	Análise directa em frequência	96
3.4.2	Integração numérica no domínio do tempo	98
3.4.3	Método dos modos complexos	99
3.4.4	Método da energia de deformação modal - <i>MSE</i>	102
3.4.5	Método da projecção em base modal modificada	104
3.4.6	Método da perturbação ou modificação estrutural	108
3.5	Conclusões	111
4	Formulação do elemento finito <i>layerwise</i>	113
4.1	Introdução	114
4.2	Teoria de placa espessa	115
4.2.1	Hipóteses de <i>Reissner-Mindlin</i>	116
4.2.2	Relação deslocamento-deformação	117

4.2.3	Relação deformação-tensão	118
4.3	Teoria de deformação por camadas - Modelo <i>layerwise</i>	118
4.4	Campo de deslocamentos	120
4.5	Campo de deformações	121
4.5.1	Matriz de deformação	123
4.6	Campo de tensões	125
4.6.1	Matriz de elasticidade	125
4.7	Energia potencial	126
4.8	Campo de velocidades	128
4.9	Energia cinética	128
4.10	Formulação de elementos finitos	130
4.10.1	Elemento finito de placa <i>layerwise</i>	131
4.10.2	Interpolação geométrica e do campo de deslocamentos	132
4.10.3	Matriz de deformação	135
4.10.4	Matriz de elasticidade	136
4.10.5	Matriz de inércia	137
4.10.6	Matriz de rigidez	137
4.10.7	Matriz de massa	138
4.10.8	Jacobiano de transformação	139
4.10.9	Integração das matrizes de rigidez e de massa	141
4.10.10	Interpolação não-conforme da componente de membrana	142
4.10.11	Grau de liberdade de rotação no plano	145
4.10.12	Protecção ao bloqueio de corte transversal	154
4.11	Conclusões	159

5	Validação numérica do elemento finito <i>layerwise</i>	163
5.1	Introdução	164
5.2	Característica da matriz de rigidez	165
5.3	<i>Patch-test</i> 's	165
5.3.1	<i>Patch-test</i> de membrana	166
5.3.2	<i>Patch-test</i> de flexão de placa fina	167
5.3.3	<i>Patch-test</i> de rotação no plano	169
5.4	Análise da formulação de membrana	170
5.4.1	Viga encastrada	170
5.4.2	Viga de <i>Cook</i>	172
5.5	Análise da formulação de membrana/flexão	174
5.5.1	Placa enviesada de <i>Morley</i>	174
5.5.2	Casca cilíndrica (<i>Scordelis-Lo roof</i>)	177
5.5.3	Cilindro com cargas opostas (<i>Pinched cylinder</i>)	180
5.5.4	Hemisfério com carregamento pontual oposto (<i>Pinched hemisphere</i>) .	183
5.5.5	Hemisfério com furo no topo e carregamento pontual oposto (<i>Pinched hemisphere</i>)	187
5.5.6	Casca cilíndrica (<i>Scordelis-Lo roof</i>) - Malha irregular	190
5.5.7	Cilindro com cargas opostas (<i>Pinched cylinder</i>) - Malha irregular . .	192
5.6	Análise dinâmica	194
5.6.1	Placa simplesmente apoiada	194
5.6.2	Casca cilíndrica simplesmente apoiada	201
5.7	Conclusões	207

6	Aplicabilidade do elemento finito <i>layerwise</i> na modelação de tratamentos viscoelásticos	209
6.1	Introdução	210
6.2	Comparação dos modelos de elementos finitos	210
6.2.1	Robustez da formulação	211
6.2.2	Custo computacional	216
6.2.3	Representatividade do modelo	217
6.2.4	Aplicabilidade e acessibilidade dos modelos	218
6.3	Análise de convergência dos modelos de elementos finitos	220
6.3.1	Placa plana com tratamento integrado - Análise de convergência e comparação dos modelos	221
6.3.2	Placa plana com tratamento superficial - Análise de convergência e comparação dos modelos	225
6.4	Comparação do modelo proposto com o modelo 2	228
6.4.1	Análise do efeito das propriedades do material viscoelástico	230
6.4.2	Análise do efeito da espessura da camada viscoelástica	235
6.5	Conclusões	240
7	Caracterização experimental de materiais viscoelásticos	243
7.1	Introdução	244
7.2	Desenvolvimento de um sistema discreto com um grau de liberdade	244
7.3	Montagem experimental proposta	251
7.4	Caracterização experimental do sistema proposto	253
7.5	Seleccção das condições de fronteira da montagem experimental	258
7.6	Seleccção do bloco de apoio e respectiva suspensão	259
7.7	Provetes de ensaio	261

7.8	Metodologia experimental de caracterização	262
7.9	Resultados obtidos	265
7.10	Tratamento de resultados	268
7.11	Conclusões	273
8	Validação experimental dos modelos numéricos em tratamentos mono-camada	277
8.1	Introdução	278
8.2	Provetes do estudo experimental	278
8.3	Metodologia experimental	280
8.4	Efeito da temperatura	282
8.5	Resultados numéricos	283
8.6	Comparação gráfica dos resultados	284
8.7	Comparação dos resultados através de indicadores de correlação	291
8.7.1	Indicadores de correlação de funções de resposta em frequência . . .	291
8.7.2	Resultados obtidos pelos indicadores de correlação	294
8.8	Conclusões	306
9	Validação experimental do elemento finito em tratamentos multi-camada e multi-material	309
9.1	Introdução	310
9.2	Provetes experimentais	310
9.2.1	Provetes mono-camada	311
9.2.2	Provetes multi-camada	311
9.2.3	Provetes multi-material	311
9.3	Metodologia experimental	313

9.4	Geração de funções de resposta em frequência numéricas	315
9.5	Comparação gráfica das funções de resposta em frequência	316
9.6	Aplicação dos indicadores de correlação	320
9.7	Conclusões	327
10	Análise de tratamentos multi-camada e multi-material	329
10.1	Introdução	330
10.2	Análise comparativa das configurações de tratamento	330
10.3	Estudo numérico sobre tratamentos multi-camada e multi-material	337
10.3.1	Comparação e selecção dos métodos de análise	338
10.3.2	Análise numérica das configurações de tratamento	345
10.4	Conclusões	350
11	Conclusão	353
11.1	Conclusões	353
11.1.1	Elemento finito <i>layerwise</i>	354
11.1.2	Caracterização do módulo complexo de materiais viscoelásticos . . .	357
11.1.3	Tratamentos multi-camada e multi-material	359
11.2	Contribuição desta dissertação	361
11.3	Sugestão de trabalhos futuros	362
A	Viga compósita: equações <i>RKU</i>	365
A.1	Equação da viga compósita	365
A.1.1	Posição do eixo neutro da viga compósita	366
A.1.2	Rigidez de flexão da viga compósita	367
A.1.3	Relação entre a curvatura e a deformação de corte da camada viscoelástica	368

A.1.4	Equações <i>RKU</i> (<i>Ross-Kerwin-Ungar</i>)	370
A.2	Viga de <i>Oberst</i>	370
A.3	Viga de <i>Van Oort</i>	371
A.4	Viga <i>sandwich</i> simétrica	372
A.5	Viga <i>sandwich</i> dupla simétrica	373
B	Viga com camada viscoelástica: caracterização do módulo complexo	375
C	Expressão analítica do jacobiano	379
D	Integração analítica da matriz de massa do elemento quadrilátero	383
D.1	Funções de forma bilineares	384
D.2	Funções de forma bi-harmónicas	385
E	Tabelas dos resultados dos testes numéricos	387
E.1	Placa enviesada de <i>Morley</i>	387
E.2	Casca cilíndrica (<i>Scordelis-Lo roof</i>)	388
E.3	Cilindro com cargas opostas (<i>Pinched cylinder</i>)	388
E.4	Hemisfério com carregamento pontual oposto (<i>Pinched hemisphere</i>)	389
E.5	Hemisfério com furo no topo e carregamento pontual oposto (<i>Pinched hemisphere</i>)	389
E.6	Casca cilíndrica (<i>Scordelis-Lo Roof</i>) - Malha irregular	390
E.7	Cilindro com cargas opostas - Malha irregular	390
F	Nomogramas dos materiais viscoelásticos	391
G	Equipamento experimental: especificações técnicas	395

H	Calibração do equipamento experimental	401
H.1	Calibração do transdutor de proximidade	401
H.1.1	Determinação da sensibilidade do transdutor de proximidade em regime estático	401
H.1.2	Determinação da sensibilidade do transdutor de proximidade em regime dinâmico	403
H.2	Calibração da célula de carga miniatura	405
H.3	Calibração do par acelerómetro BK4371-430 e célula de carga BK8200-312	406
H.4	Calibração do par vibrómetro laser e célula de carga BK8200-312	408
H.5	Calibração do par vibrómetro laser e célula de carga BK8203-118	409
I	Caracterização experimental e modelação das hastes de ligação	413
J	Formas modais dos provetes experimentais	419
	Referências	422

Lista de Figuras

1.1	Tratamento superficial sem restrição	5
1.2	Tratamento superficial com restrição	6
1.3	Tratamento integrado	7
1.4	Distribuição da densidade de energia de deformação da camada viscoelástica	7
2.1	Variação do módulo de ganho (G') e do factor de perda (η) de um material viscoelástico com a frequência e a temperatura	28
2.2	Excitação e resposta harmónica de um material viscoelástico	30
2.3	Ciclo histerético de um material viscoelástico	30
2.4	Sistema com um grau de liberdade	35
2.5	Sistema com um grau de liberdade - Medição da resposta	37
2.6	Sistema com um grau de liberdade - Medição da transmissibilidade	39
2.7	Sistema com dois graus de liberdade	41
2.8	Montagem experimental do sistema de medição com viga compósita	47
2.9	Viga de <i>Oberst</i>	50
2.10	Viga de <i>Van Oort</i>	51
2.11	Viga <i>sandwich</i>	52
2.12	Viga <i>sandwich</i> dupla	54
2.13	Representação hipotética do <i>Wicket Plot</i>	62

2.14	Princípio da correspondência frequência-temperatura	63
2.15	Modelos de representação dos factores de translação	65
2.16	Nomograma de frequência reduzida	67
3.1	Representação de um elemento dos tratamentos viscoelásticos	73
3.2	Modelo combinado de elementos de placa e elementos de viga	75
3.3	Modelo combinado de elementos de placa e elemento hexaédrico com ligações rígidas	75
3.4	Modelo combinado de elementos de placa e elemento hexaédrico	76
3.5	Modelo combinado de elementos hexaédricos	77
3.6	Modelo de camada discreta	79
3.7	Processo de cálculo cíclico do método de análise directa em frequência . . .	98
4.1	Modelo cinemático da teoria da placa espessa	116
4.2	Teoria de deformação por camadas - Modelo <i>layerwise</i>	119
4.3	Modelo cinemático do modelo <i>layerwise</i>	120
4.4	Elemento quadrilátero de 4 nós - Sistema de coordenadas local e natural . .	131
4.5	Comparação entre um interpolador bi-harmónico e o homólogo bilinear . . .	135
4.6	Efeito de bloqueio de membrana	147
4.7	Conceito de <i>Allman</i>	149
4.8	Elemento de membrana com rotação no plano	150
4.9	Elemento <i>MITC4</i>	156
5.1	Malha de elementos finitos e parâmetros do <i>patch-test</i> de membrana	166
5.2	Malha de elementos finitos e parâmetros do <i>patch-test</i> de rotação no plano .	169
5.3	Viga encastrada	171
5.4	Viga de <i>Cook</i>	172

5.5	Placa enviesada de <i>Morley</i>	174
5.6	Resultados do problema da placa de <i>Morley</i>	176
5.7	Casca cilíndrica (<i>Scordelis-Lo roof</i>)	177
5.8	Resultados da casca cilíndrica	179
5.9	Cilindro com cargas pontuais opostas (<i>Pinched cylinder</i>)	181
5.10	Resultados do cilindro com cargas pontuais opostas	182
5.11	Hemisfério com carregamento pontual oposto (<i>Pinched hemisphere</i>)	184
5.12	Resultados do hemisfério com cargas pontuais opostas (<i>Pinched hemisphere</i>)(1)	185
5.13	Resultados do hemisfério com cargas pontuais opostas (<i>Pinched hemisphere</i>)(2)	185
5.14	Hemisfério com furo no topo	187
5.15	Resultados do hemisfério com furo no topo (1)	188
5.16	Resultados do hemisfério com furo no topo (2)	188
5.17	Malha irregular (8x8) aplicada ao problema <i>Scordelis-Lo roof</i>	190
5.18	Casca cilíndrica (malha irregular)	191
5.19	Malha irregular (8x8) aplicada ao problema do cilindro com cargas opostas	192
5.20	Cilindro com cargas opostas (malha irregular)	193
5.21	Formas modais da placa rectangular simplesmente apoiada	198
5.22	Convergência das frequências naturais da placa rectangular - 1 camada	200
5.23	Formas modais da casca cilíndrica simplesmente apoiada	204
5.24	Convergência das frequências naturais da casca cilíndrica - 1 camada	206
6.1	Convergência das frequências naturais com o modelo 2: $E_2=3.2E6Pa$	214
6.2	Convergência das frequências naturais com o modelo 2: $E_2=3.2E9Pa$	214
6.3	Convergência das frequências naturais com o modelo 2: $E_2=72E9Pa$	215

6.4	Convergência dos modelos para a placa com tratamento integrado	223
6.5	Tratamento integrado - Função de resposta em frequência gerada para cada um dos modelos (malha 30x20)	224
6.6	Tratamento integrado - Funções de resposta em frequência geradas para o modelo 4 em Matlab ®	225
6.7	Convergência dos modelos para a placa com tratamento superficial com restrição	227
6.8	Tratamento superficial com restrição - Função de resposta em frequência gerada para cada um dos modelos (malha 30x20)	228
6.9	Tratamento superficial com restrição - Funções de resposta em frequência geradas para o modelo 4 em Matlab ®	229
6.10	Placa com tratamento integrado - 10°C	231
6.11	Placa com tratamento integrado - 15°C	231
6.12	Placa com tratamento integrado - 20°C	232
6.13	Placa com tratamento integrado - 25°C	232
6.14	Placa com tratamento integrado - 30°C	232
6.15	Placa com tratamento superficial com restrição - 10°C	233
6.16	Placa com tratamento superficial com restrição - 15°C	234
6.17	Placa com tratamento superficial com restrição - 20°C	234
6.18	Placa com tratamento superficial com restrição - 25°C	234
6.19	Placa com tratamento superficial com restrição - 30°C	235
6.20	Placa com tratamento integrado - $h_2 = 0.2$ mm	236
6.21	Placa com tratamento integrado - $h_2 = 0.4$ mm	236
6.22	Placa com tratamento integrado - $h_2 = 0.6$ mm	237
6.23	Placa com tratamento integrado - $h_2 = 0.8$ mm	237
6.24	Placa com tratamento integrado - $h_2 = 1.0$ mm	237

6.25	Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 0.2$ mm	238
6.26	Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 0.4$ mm	239
6.27	Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 0.6$ mm	239
6.28	Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 0.8$ mm	239
6.29	Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 1.0$ mm	240
7.1	Montagem experimental com um grau de liberdade para ensaio em corte do proвете viscoelástico	245
7.2	Função transmissibilidade do sistema com uma grau de liberdade	246
7.3	Módulo de corte complexo da espuma analisada	247
7.4	Montagem alternativa com provetes dispostos em X	248
7.5	Função transmissibilidade medida no sistema experimental para 25°C . . .	249
7.6	Nomograma do material DTI1 - Caracterização experimental para 25° C . .	250
7.7	Montagem experimental proposta	251
7.8	Conjunto do provete, porta-provetes e blocos de suporte	252
7.9	Transdutor de proximidade e respectivo suporte de montagem	253
7.10	Montagem experimental para determinação da rigidez equivalente das lâminas de guiamento	255
7.11	Curva carga-deslocamento para as lâminas de guiamento - Método 1	255
7.12	Curva carga-deslocamento para as lâminas de guiamento - Método 2	256
7.13	Função aceleração medida no sistema em vazio	257
7.14	Condições de fronteira do sistema de caracterização	258
7.15	Suportes de apoio da montagem experimental: mesa de montagens, placa de mármore, bloco de betão e bloco de granito	260
7.16	Apoios cilíndricos em silicone	261
7.17	Porta-provetes em alumínio	261

7.18	Sensibilidade dos transdutores aos efeitos das ressonâncias da base do excitador	263
7.19	Montagem experimental na arca com temperatura regulada	264
7.20	Termopares de medição da temperatura nos suportes do porta-provetes . .	265
7.21	Diagrama de <i>Nyquist</i> das funções de resposta em frequência medidas com os dois transdutores	266
7.22	Função aceleração medida para diferentes temperaturas	267
7.23	Função receptância medida para diferentes temperaturas	268
7.24	Representação <i>Wicket Plot</i> dos dados não filtrados: Módulo de ganho / Módulo de perda	269
7.25	Representação <i>Wicket Plot</i> dos dados não filtrados: Módulo de ganho / Factor de perda	269
7.26	Representação <i>Wicket Plot</i> após filtragem espectral das funções de resposta em frequência medidas: Módulo de ganho / Módulo de perda	270
7.27	Representação <i>Wicket Plot</i> após filtragem espectral das funções de resposta em frequência medidas: Módulo de ganho / Factor de perda	271
7.28	Nomograma de frequência reduzida do material caracterizado : Provete A .	272
7.29	Nomograma de frequência reduzida do material caracterizado : Provete B .	273
8.1	Provetes com tratamento mono-camada utilizados no estudo de validação .	279
8.2	Malha de pontos de medição e suspensão do provete	281
8.3	Excitação do provete - Haste de ligação e célula de carga	281
8.4	Efeito da temperatura na resposta dinâmica do provete I2	283
8.5	Provete C1 - Funções de resposta em frequência directas a 11.5°C	285
8.6	Provete C1 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C	285
8.7	Provete C2 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C	287
8.8	Provete I1 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C	288

8.9	Provete I2 - Funções de resposta em frequência directas a 11.5°C	289
8.10	Provete I2 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C	289
8.11	Provete I3 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C	290
8.12	Provete C1 - Indicador FDAC (11.5°C)	295
8.13	Provete C1 - Indicador FDAC (17.5°C)	296
8.14	Provete C1 - Indicadores FRAC e FAAC (11.5°C)	297
8.15	Provete C1 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)	297
8.16	Provete C1 - Indicadores GSC e GAC (11.5°C)	298
8.17	Provete C1 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)	298
8.18	Provete C2 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)	299
8.19	Provete C2 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)	300
8.20	Provete I1 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)	301
8.21	Provete I1 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)	301
8.22	Provete I2 - Indicadores FRAC e FAAC (11.5°C)	302
8.23	Provete I2 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)	303
8.24	Provete I2 - Indicadores GSC e GAC (11.5°C)	303
8.25	Provete I2 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)	304
8.26	Provete I3 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)	305
8.27	Provete I3 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)	305
9.1	Provetes com tratamento mono-camada, multi-camada e multi-material utilizados no estudo de validação	312
9.2	Configurações de tratamento dos provetes	312
9.3	Malha de pontos de medição dos provetes multi-camada e multi-material . .	313
9.4	Montagem experimental dos ensaios de validação em provetes multi-camada	314

9.5	Provete S1 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C	316
9.6	Provete S2 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C	317
9.7	Provete M1 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C	317
9.8	Provete M2 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C	318
9.9	Provete M3 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C	318
9.10	Provete M4 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C	319
9.11	Provete S1 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)	321
9.12	Provete S1 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)	321
9.13	Provete S2 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)	322
9.14	Provete S2 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)	322
9.15	Provete M1 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)	323
9.16	Provete M1 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)	323
9.17	Provete M2 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)	324
9.18	Provete M2 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)	324
9.19	Provete M3 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)	325
9.20	Provete M3 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)	325
9.21	Provete M4 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)	326
9.22	Provete M4 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)	326
10.1	Provete S1 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético	331
10.2	Provete S2 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético	332
10.3	Provete M1 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético	332
10.4	Provete M2 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético	333
10.5	Provete M3 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético	333
10.6	Provete M4 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético	334

10.7	Indicadores de eficiência das configurações de tratamento	337
10.8	Configurações de tratamento M4 e M4*	342
10.9	Erro relativo entre as frequências naturais fundamentais calculadas pelo método <i>CESM</i> e pelo método <i>MSE</i> modificado	344
10.10	Erro relativo entre os factores de perda modais para o primeiro modo natural de vibração calculados pelo método <i>CESM</i> e pelo método <i>MSE</i> modificado	344
10.11	Distribuição do factor de perda modal do primeiro modo natural de vibração para o provete S2 calculado pelo método <i>CESM</i> e pelo método <i>MSE</i> modificado	345
10.12	Variação da frequência do primeiro modo natural f_1 com a temperatura . .	346
10.13	Variação do factor de perda modal η_1 com a temperatura	349
A.1	Geometria da viga compósita	365
A.2	Cinemática da viga compósita	367
C.1	Elemento de 4 nós de geometria irregular	380
F.1	Nomograma do material 3M ISD110 [226]	392
F.2	Nomograma do material 3M ISD112 [226]	393
H.1	Montagem experimental para calibração do transdutor de proximidade . .	402
H.2	Curva de calibração e determinação da sensibilidade do transdutor de proximidade	403
H.3	Função de resposta em frequência obtida entre o acelerómetro e o transdutor de proximidade	404
H.4	Montagem experimental para calibração da célula de carga miniatura . . .	405
H.5	Curva de calibração e determinação da sensibilidade da célula de carga estática miniatura	406

H.6	Montagem experimental para calibração do par BK4371-430 e BK8200-312	407
H.7	Função massa aparente obtida com o par BK4371-430 e BK8200-312	408
H.8	Função massa aparente obtida com o par vibrómetro laser e BK8200-312 . .	409
H.9	Montagem experimental para calibração do par vibrómetro laser e BK8203-118	410
H.10	Função massa aparente obtida com o par vibrómetro laser e BK8203-118 . .	411
I.1	Hastes analisadas	414
I.2	Montagem experimental para medição da resposta da haste de ligação . . .	415
I.3	Modelo teórico da montagem experimental	415
I.4	Haste nº1 - Resposta experimental e analítica	417
I.5	Haste nº2 - Resposta experimental e analítica	417
J.1	Formas modais dos provetes 298x198 [mm]	420
J.2	Formas modais dos provetes 200x100 [mm]	421

Lista de Tabelas

2.1	Parâmetro p para a viga encastrada	54
4.1	Parâmetros nodais das funções de forma do elemento quadrilátero de 4 nós	134
4.2	Posição e pesos dos pontos de integração numérica pela quadratura de <i>Gauss-Legendre</i> [168]	142
5.1	Resultados do <i>patch-test</i> de membrana	167
5.2	Resultados do <i>patch-test</i> de placa fina	168
5.3	Resultados do <i>patch-test</i> de placa fina (cont.)	169
5.4	Deslocamento vertical do ponto central da extremidade livre: valor absoluto (valor absoluto/valor de referência)	172
5.5	Deslocamento vertical do ponto central da extremidade livre: valor absoluto (valor absoluto/valor de referência)	173
5.6	Placa de <i>Morley</i> – Razão entre o deslocamento vertical do ponto E e o valor de referência (4.640)	175
5.7	Resultados de referência para o teste da placa enviezada – Valores normalizados	176
5.8	Casca cilíndrica – Razão entre o deslocamento vertical do ponto B e o valor de referência (0.3024)	178
5.9	Resultados de referência para o teste da casca cilíndrica – Valores normalizados	180

5.10	Cilindro com cargas pontuais opostas – Razão entre o deslocamento vertical no ponto A e o valor de referência ($1.8248E - 7$)	181
5.11	Resultados de referência para o teste do cilindro com cargas pontuais opostas – Valores normalizados	183
5.12	Hemisfério com carregamento pontual oposto – Razão entre o deslocamento horizontal (u_x) do ponto A e o valor de referência (0.0924)	184
5.13	Resultados de referência para o teste do hemisfério com cargas pontuais opostas – Valores normalizados	186
5.14	Hemisfério com furo no topo – Razão entre o deslocamento horizontal (u_x) do ponto A e o valor de referência (0.094)	189
5.15	Resultados de referência para o teste do hemisfério com furo e cargas pontuais opostas – Valores normalizados	189
5.16	Casca cilíndrica (malha irregular) – Razão entre o deslocamento vertical do ponto B calculado e o valor de referência	191
5.17	Cilindro com cargas opostas (malha irregular) – Razão entre o deslocamento vertical do ponto A calculado e o valor de referência	193
5.18	Placa simplesmente apoiada	195
5.19	Placa rectangular simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz] (BLC)	196
5.20	Placa rectangular simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz] (BHC)	196
5.21	Placa rectangular simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz] (BLL)	197
5.22	Placa rectangular simplesmente apoiada – Erro relativo das frequências naturais [%]	197
5.23	Placa rectangular simplesmente apoiada – Erro relativo das frequências naturais [%]	199
5.24	Casca cilíndrica simplesmente apoiada nos extremos	201
5.25	Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz](BLC)	202
5.26	Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz](BHC)	202

5.27	Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz](BLL) . .	203
5.28	Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Erro relativo das frequências naturais [%]	203
5.29	Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Erro relativo das frequências naturais [%]	205
6.1	Características do objecto de estudo da análise de robustez da formulação .	213
6.2	Distribuição da análise de elementos finitos	221
6.3	Características do modelo da placa com tratamento integrado	222
6.4	Malhas de elementos finitos	223
6.5	Características do modelo da placa com tratamento superficial com restrição	226
7.1	Características dos porta-provetes	262
7.2	Características dos provetes	262
8.1	Características dos provetes experimentais do estudo de validação	279
8.2	Propriedades dos materiais aplicados nos provetes	280
9.1	Propriedades dos materiais aplicados nos provetes	315
10.1	Frequência natural e factor de perda modal para o primeiro modo natural de vibração	334
10.2	Variação de massa do provete devido ao tratamento	335
10.3	Custo computacional dos métodos numéricos <i>MSE</i> modificado e <i>CESM</i> (Base de cálculo: Intel® Pentium4—3GHz/1Gb)	342
E.1	Placa de <i>Morley</i> – Deslocamento vertical do ponto E	387
E.2	Casca cilíndrica – Deslocamento vertical do ponto B	388
E.3	Cilindro com cargas pontuais opostas – Deslocamento vertical do ponto A .	388

E.4	Hemisfério com carregamento pontual oposto – Deslocamento horizontal (u_x) do ponto A	389
E.5	Hemisfério com furo no topo – Deslocamento horizontal (u_x) do ponto A .	389
E.6	Casca cilíndrica (malha irregular) – Deslocamento vertical do ponto B . . .	390
E.7	Cilindro com cargas opostas (malha irregular) – Deslocamento vertical do ponto A	390
I.1	Resultados da análise das hastes de ligação	416

Notação e lista de símbolos

Índices

i	contador geral
j	contador geral ou grau de liberdade
k	índice de camada material
ℓ	índice modal auxiliar ou grau de liberdade
r	índice modal

Identificadores

$()^M$	referente à componente de membrana do elemento finito
$()^F$	referente à componente de flexão do elemento finito
$()^C$	referente à componente de corte transversal do elemento finito
$()^A$	referente à componente de acoplamento do elemento finito
$()^e$	referente ao elemento finito
$()_k$	referente à camada k do domínio do laminado
$()_k^e$	referente à camada k do elemento finito

Siglas

<i>GHM</i>	<i>Golla-Hughes-McTavish</i>
<i>ATF</i>	<i>Augmenting Thermodynamic Fields</i> (campo termodinâmico aumentado)
<i>ADF</i>	<i>Anelastic Displacement Fields</i> (campo de deslocamentos inelásticos)
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> (Transformada rápida de <i>Fourier</i>)
GDL	Grau de liberdade

Operadores

$[]^T$	transposta da matriz
$[]^*$	complexa conjugada da matriz
$[]^H$	transposta da complexa conjugada da matriz
$\tilde{[]}$	aproximação ou modificação da matriz
$\tilde{\{ \}}$	aproximação ou modificação do vector
$(\tilde{\bullet})$	aproximação ou modificação da variável
$\mathfrak{F}(\bullet)$	transformada de <i>Fourier</i>
$\mathfrak{L}(\bullet)$	transformada de <i>Laplace</i>
$\mathfrak{D}^\alpha(\bullet)$	derivada fraccionária de ordem α ($0 < \alpha < 1$)
$(\dot{\bullet})$	derivada em ordem ao tempo
$(\ddot{\bullet})$	segunda derivada em ordem ao tempo
$\text{RE}(\bullet)$	componente real
$\text{IM}(\bullet)$	componente imaginária

Variáveis escalares (●)

a	comprimento [m]	$\in \mathbb{R}$
a, a_j	parâmetro do modelo de derivadas fraccionárias	$\in \mathbb{R}$
A	área [m ²]	$\in \mathbb{R}^2$
A_C	área da secção de corte [m ²]	$\in \mathbb{R}^2$
A_E	área da secção transversal [m ²]	$\in \mathbb{R}^2$
A^e	área do elemento finito [m ²]	$\in \mathbb{R}^2$
$\mathcal{A}(\omega)$	função aceleração [ms ⁻² /N]	$\in \mathbb{C}$
b	largura [m]	$\in \mathbb{R}$
b, b_i	parâmetro do modelo de derivadas fraccionárias	$\in \mathbb{R}$
C_i	razão módulo escalar inelástico/módulo escalar elástico (ADF)	$\in \mathbb{R}$
d	distância entre os eixos neutros da viga compósita e da viga base	$\in \mathbb{R}$
e	constante de <i>Napier</i>	$\in \mathbb{R}$
e_i	razão de módulos : $e_i = E_i/E_1$	$\in \mathbb{R}$
E	módulo de <i>Young</i> ou módulo extensional [Pa]	$\in \mathbb{R}$
$\bar{E}$	módulo extensional complexo [Pa]	$\in \mathbb{C}$
E'	módulo extensional de ganho [Pa]	$\in \mathbb{R}$
E''	módulo extensional de perda [Pa]	$\in \mathbb{R}$
E_0	módulo extensional elástico [Pa]	$\in \mathbb{R}$
E^∞	módulo extensional não-relaxado [Pa]	$\in \mathbb{R}$
f	frequência [Hz] $f = \omega/(2\pi)$	$\in \mathbb{R}$
f_R	frequência reduzida [Hz]	$\in \mathbb{R}$
f_r	frequência de ressonância de ordem r [Hz]	$\in \mathbb{R}$
F	Força [N]	$\in \mathbb{R}$
g	parâmetro de corte	$\in \mathbb{C}$
G	módulo de corte [Pa]	$\in \mathbb{R}$
$\bar{G}$	módulo de corte complexo [Pa]	$\in \mathbb{C}$
G'	módulo de corte de ganho [Pa]	$\in \mathbb{R}$
G''	módulo de corte de perda [Pa]	$\in \mathbb{R}$
G^0	módulo de corte relaxado $G^0 = G(t \rightarrow \infty)$ [Pa]	$\in \mathbb{R}$
h_i	razão de espessuras : $h_i = H_i/H_1$	$\in \mathbb{R}$
H	espessura [m]	$\in \mathbb{R}$

$H(\omega)$	função de transferência	$\in \mathbb{C}$
$\mathcal{I}(\omega)$	função impedância mecânica $\mathcal{I}(\omega) = Y(\omega)^{-1}$ [N/ms ⁻¹]	$\in \mathbb{C}$
j	operador complexo $j = \sqrt{-1}$	$\in \mathbb{C}$
K	rigidez equivalente do sistema [N/m]	$\in \mathbb{R}$
$\bar{K}$	rigidez complexa equivalente do sistema [N/m]	$\in \mathbb{C}$
L	comprimento [m]	$\in \mathbb{R}$
m	massa por unidade de comprimento da viga compósita	$\in \mathbb{R}$
M	massa de um corpo [Kg]	$\in \mathbb{R}$
$\mathcal{M}(\omega)$	função massa aparente $\mathcal{M}(\omega) = \mathcal{A}(\omega)^{-1}$ [Kg]	$\in \mathbb{C}$
$\mathfrak{M}$	momento de flexão da viga compósita	$\in \mathbb{R}$
n	número de camadas do laminado	$\in \mathbb{N}$
n_{GHM}	número de termos do modelo <i>GHM</i>	$\in \mathbb{N}$
n_{ADF}	número de termos do modelo <i>ADF</i>	$\in \mathbb{N}$
q	carga distribuída [N/m ²]	$\in \mathbb{R}$
R	raio de círculo [m]	$\in \mathbb{R}$
$\bar{\mathcal{R}}$	razão de rigidez de flexão da viga compósita	$\in \mathbb{C}$
s	variável de <i>Laplace</i>	$\in \mathbb{C}$
t	variável tempo [s]	$\in \mathbb{R}$
T	temperatura [°C]	$\in \mathbb{R}$
$T(\omega)$	função transmissibilidade	$\in \mathbb{C}$
u	translação segundo o eixo x ou translação no plano	$\in \mathbb{R}$
v	translação segundo o eixo y ou translação no plano	$\in \mathbb{R}$
w	translação segundo o eixo z ou translação normal ao plano	$\in \mathbb{R}$
x	coordenada do referencial cartesiano local	$\in \mathbb{R}$
X	coordenada do referencial cartesiano global	$\in \mathbb{R}$
y	coordenada do referencial cartesiano local	$\in \mathbb{R}$
Y	coordenada do referencial cartesiano global	$\in \mathbb{R}$
$Y(\omega)$	função mobilidade [ms ⁻¹ /N]	$\in \mathbb{C}$
z	coordenada do referencial cartesiano local	$\in \mathbb{R}$
Z	coordenada do referencial cartesiano global	$\in \mathbb{R}$
$\mathcal{Z}(\omega)$	função rigidez dinâmica $\mathcal{Z}(\omega) = \alpha(\omega)^{-1}$ [N/m]	$\in \mathbb{C}$
$\alpha(\omega)$	função receptância [m/N]	$\in \mathbb{C}$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$	parâmetros do modelo de derivadas fraccionárias	$\in \mathbb{R}$
$\hat{\alpha}_i, \hat{\zeta}_i$ e $\hat{\omega}_i$	parâmetros de ajuste do modelo <i>GHM</i>	$\in \mathbb{R}$
β^x	rotação local em torno do eixo y ($\beta^x = \theta^y$)	$\in \mathbb{R}$
β^y	rotação local em torno do eixo x ($\beta^y = -\theta^x$)	$\in \mathbb{R}$
δ	desfasamento	$\in \mathbb{R}$
Δ_i, Ω_i	parâmetros de ajuste do modelo <i>ADF</i>	$\in \mathbb{R}$
η	factor de perda	$\in \mathbb{R}$
η_E	factor de perda extensional	$\in \mathbb{R}$
η_G	factor de perda de corte	$\in \mathbb{R}$
η_r	factor de perda modal de ordem r	$\in \mathbb{R}$
$\lambda/\bar{\lambda}$	valor próprio/valor próprio complexo	$\in \mathbb{C}$
ν	coeficiente de <i>Poisson</i>	$\in \mathbb{R}$
ω	frequência circular [rad/s]	$\in \mathbb{R}$
ω_r	frequência de ressonância de ordem r [rad/s]	$\in \mathbb{R}$
ω_{0r}	frequência de ressonância de ordem r da viga base [rad/s]	$\in \mathbb{R}$
Ω	domínio volúmico [m ³]	$\in \mathbb{R}^3$
Ω^e	domínio volúmico do elemento finito [m ³]	$\in \mathbb{R}^3$
Π	energia de deformação	$\in \mathbb{R}$
Π^C	energia cinética	$\in \mathbb{R}$
Π^P	energia potencial	$\in \mathbb{R}$
ρ	massa volúmica do material [Kg/m ³]	$\in \mathbb{R}$
θ^x	rotação segundo o eixo x	$\in \mathbb{R}$
θ^y	rotação segundo o eixo y	$\in \mathbb{R}$
θ^z	rotação segundo o eixo z ou rotação no plano	$\in \mathbb{R}$

Variáveis vectoriais { }

$\{d\}$	campo de deslocamentos generalizados	$\in \mathbb{R}$
$\{d\}^e$	campo de deslocamentos generalizados do elemento finito	$\in \mathbb{R}$
$\{d_i\}^e$	vector de graus de liberdade do elemento finito	$\in \mathbb{R}$
$\{f(t)\}$	vector de solicitação dinâmica	$\in \mathbb{R}$

$\{F(w)\}/\{F(s)\}$	transformada de <i>Fourier</i> / de <i>Laplace</i> do vector de solicitação	$\in \mathbb{C}$
$\{\mathbf{u}\}$	campo de deslocamentos do elemento finito	$\in \mathbb{R}$
$\{x(t)\}$	vector de resposta dinâmica	$\in \mathbb{R}$
$\{X(w)\}/\{X(s)\}$	transformada de <i>Fourier</i> / de <i>Laplace</i> do vector de resposta	$\in \mathbb{C}$
$\{z_i(t)\}$	vector da variável dissipativa	$\in \mathbb{R}$
$\{Z_i(s)\}$	transformada de <i>Laplace</i> do vector da variável dissipativa	$\in \mathbb{C}$
$\{\phi\}$	vector próprio	$\in \mathbb{R}$
$\{\bar{\phi}\}$	vector próprio complexo $\{\bar{\phi}\} = \{\phi_R\} + j\{\phi_I\}$	$\in \mathbb{C}$
$\varepsilon/\{\varepsilon\}$	campo/vector de deformações	$\in \mathbb{C}$
$\gamma/\{\gamma\}$	campo/vector de deformações de corte	$\in \mathbb{C}$
$\sigma/\{\sigma\}$	campo/vector de tensões	$\in \mathbb{C}$
$\tau/\{\tau\}$	campo/vector de tensões de corte	$\in \mathbb{C}$

Variáveis matriciais []

$[\mathcal{B}]$	matriz de deformação	$\in \mathbb{R}$
$[B]^e$	matriz de deformação do elemento finito	$\in \mathbb{R}$
$[\bar{B}]$	matriz de deformação de corte transversal substituta	$\in \mathbb{R}$
$[C]$	matriz de amortecimento viscoso	$\in \mathbb{R}$
$[\mathcal{D}]$	matriz constitutiva	$\in \mathbb{R}$
$[D]$	matriz de elasticidade no plano	$\in \mathbb{R}$
$[G]$	matriz de elasticidade de corte transversal	$\in \mathbb{R}$
$[I]$	matriz de identidade	$\in \mathbb{R}$
$[\mathcal{J}]$	matriz de inércia	$\in \mathbb{R}$
$[\hat{J}]$	matriz de inércia modificada	$\in \mathbb{R}$
$[\mathbf{J}]$	matriz do jacobiano da transformação	$\in \mathbb{R}$
$[K]$	matriz de rigidez	$\in \mathbb{R}$
$[\bar{K}]$	matriz de rigidez complexa	$\in \mathbb{C}$
$[K]^e$	matriz de rigidez do elemento finito	$\in \mathbb{R}$
$[K_R]$	componente real da matriz de rigidez	$\in \mathbb{R}$

$[K_I]$	componente imaginária da matriz de rigidez	$\in \mathbb{R}$
$[K_e]$	componente elástica da matriz de rigidez	$\in \mathbb{R}$
$[\bar{K}_v]$	componente viscoelástica da matriz de rigidez	$\in \mathbb{C}$
$[K_v]$	componente viscoelástica da matriz de rigidez (factorizada)	$\in \mathbb{R}$
$[K_v^0]$	matriz de rigidez viscoelástica de baixa frequência	$\in \mathbb{R}$
$[K_v^\infty]$	matriz de rigidez viscoelástica de alta frequência	$\in \mathbb{R}$
$[K^{\theta_z}]$	matriz de rigidez da rotação no plano	$\in \mathbb{R}$
$[\mathcal{L}]$	matriz de operadores diferenciais	$\in \mathbb{R}$
$[M]$	matriz de massa	$\in \mathbb{R}$
$[M]^e$	matriz de massa do elemento finito	$\in \mathbb{R}$
$[\mathcal{N}]$	matriz de distribuição do campo de deslocamentos	$\in \mathbb{R}$
$[N]$	matriz de interpolação	$\in \mathbb{R}$
$[P]$	matriz de projecção	$\in \mathbb{C}$
$[\Lambda]$	matriz de valores próprios	$\in \mathbb{R}$
$[\bar{\Lambda}]$	matriz de valores próprios complexos	$\in \mathbb{C}$
$[\Phi]$	matriz de vectores próprios	$\in \mathbb{R}$
$[\bar{\Phi}]$	matriz de vectores próprios complexos	$\in \mathbb{C}$
$[\Phi^\Gamma]$	matriz modal truncada	$\in \mathbb{C}$

Referenciais

x, y, z	sistema local de coordenadas cartesianas
X, Y, Z	sistema global de coordenadas cartesianas
ξ, η, ζ	sistema natural do elemento finito

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento da engenharia estrutural ao longo das últimas décadas tem conduzido à construção de estruturas cada vez mais eficientes do ponto de vista estrutural, permitindo concretizar desafios outrora impossíveis de realizar. Esta evolução tem sido acompanhada e dirigida pela introdução de novas formas estruturais, pela aplicação de processos de produção e de montagem mais eficientes e versáteis e, em especial, pelo desenvolvimento e utilização de novos materiais mais leves e resistentes.

No entanto, as modificações estruturais introduzidas ao longo deste processo de evolução têm levado à remoção gradual dos mecanismos dissipativos inerentes aos materiais e aos processos de fabrico e de montagem outrora utilizados. De facto, a capacidade de amortecimento inerente às antigas e pesadas estruturas de ferro fundido e os mecanismos dissipativos presentes nas ligações aparafusadas e rebitadas foram gradualmente desaparecendo com a introdução dos novos materiais e dos novos processos de fabrico.

Devido ao reduzido nível de amortecimento presente nos novos materiais estruturais, algumas dessas estruturas sofrem danos irreversíveis devido principalmente à acção contínua de fontes exteriores e interiores de excitação dinâmica. A energia da vibração, dos componentes mecânicos e estruturais presentes na estrutura, induzida pelo tráfego,

pela acção sísmica, pela acção dos ventos e das marés e ainda, em alguns casos, pelo ruído ambiente, não sendo eficientemente dissipada, causa fadiga da estrutura e, em casos extremos, pode mesmo conduzir à falha prematura da mesma.

É principalmente nas grandes estruturas que estes efeitos são mais evidentes. As grandes amplitudes de vibração e as baixas frequências de ressonância dessas estruturas permitem a observação dos efeitos da vibração excessiva e descontrolada. É o caso da ponte de Tacoma Narrows (EUA), da ponte de Great Belt (Dinamarca) e da ponte Millennium (Inglaterra). No entanto, mesmo não sendo tão evidentes, os mesmo efeitos ocorrem em qualquer estrutura com reduzida capacidade de amortecimento, desde um simples braço de leitura de um disco rígido a um painel da fuselagem de avião.

Infelizmente, muitos dos acidentes ocorridos em estruturas (pontes, edifícios, aeronaves e outros veículos) estão relacionados com falhas por fadiga da estrutura, induzidas por carregamentos cíclicos, impacto ou mesmo ruído. Se a capacidade de amortecimento presente na estrutura não for capaz de dissipar a energia de vibração introduzida, a vibração contínua provocará danos irreversíveis à estrutura, reduzirá a sua vida útil e diminuirá significativamente o nível de segurança da mesma.

Mesmo em condições de operação sustentada, a presença de elevados níveis de vibração, embora não afectando a integridade estrutural, pode reduzir drasticamente a eficiência da estrutura. É caso de estruturas de suporte de mecanismos sensíveis, tais como sistemas de posicionamento, braços de leitura de discos rígidos e mecanismos de guiamento de satélites.

De forma a compensar a reduzida capacidade de amortecimento da estrutura, é necessário desenvolver mecanismos dissipativos adicionais. Estes mecanismos podem ser introduzidos das mais diversas formas, desde a aplicação de simples elementos viscoelásticos discretos colocados em pontos de ligação da estrutura, a mecanismos activos auto-controlados embebidos na mesma.

1.1 Tratamentos viscoelásticos

De entre os mecanismos passivos de amortecimento, os tratamentos distribuídos e os amortecedores localizados baseados em materiais viscoelásticos [1] assumem uma posição

de relevo devida à sua elevada eficiência, à simplicidade na aplicação, ao reduzido custo e à reduzida alteração estrutural introduzida pelos mesmos.

Os materiais viscoelásticos, embora estruturalmente pouco eficientes, exibem uma capacidade dissipativa de grande eficiência resultante da estrutura molecular particular que possuem. De facto, estes materiais dissipam grandes quantidades de energia de deformação para o exterior sob a forma de calor, em resultado da interacção das suas longas e reticuladas cadeias moleculares, quando deformados de forma cíclica e contínua. Esta capacidade tem sido amplamente aproveitada em mecanismos discretos de amortecimento passivo, sob a forma de isoladores ou bases anti-vibração, usualmente aplicadas em pontos de ligação da estrutura a isolar. Os apoios de pontes e os pontos de ligação dos cabos de sustentação, os apoios anti-vibração de máquinas de produção e os apoios de lages estruturais de edifícios são apenas alguns exemplos actuais da aplicação eficiente destes mecanismos.

Não obstante a sua elevada capacidade de amortecimento, estes materiais não são materiais estruturalmente eficientes, ou seja, apresentam uma massa elevada e uma reduzida resistência mecânica. Assim, o aproveitamento eficiente da capacidade de amortecimento dos materiais viscoelásticos resulta da sua integração na estrutura, construída a partir de materiais estruturalmente eficientes (ligas de alumínio, ligas de aço e compósitos de carbono), sob a forma de tratamentos dissipativos.

Os tratamentos superficiais e integrados viscoelásticos, resultantes da aplicação distribuída de uma camada de material na estrutura, constituem uma forma eficaz de realizar esta simbiose de propriedades dos dois tipos de materiais. Esta forma de tratamento é amplamente aplicada desde os anos 50, altura em que o emergente desenvolvimento aeroespacial desencadeou o interesse no estudo e projecto de tratamentos passivos simultaneamente eficientes e com uma massa adicional reduzida. A elevada eficiência destes tratamentos e, sobretudo, a facilidade de aplicação e reduzido custo associado permitiram a sua expansão para outros campos da engenharia estrutural, nomeadamente a indústria aeronáutica e a indústria automóvel, onde a aplicação de camadas viscoelásticas sob a forma de tratamentos superficiais permite reduzir os níveis de vibração de painéis estruturais e atenuar a sua emissão e transmissão acústica [2–4].

Nakra [5] apresenta uma análise geral sobre os tratamentos viscoelásticos, as suas configurações e a análise dos efeitos introduzidos e do comportamento da estrutura tratada.

Jones [6] faz uma apresentação cronológica da evolução do estado-da-arte dos tratamentos viscoelásticos, suas origens e perspectivas futuras. Johnson [7] apresenta uma análise comparativa das principais formas de tratamento passivo, evidenciando as vantagens e os inconvenientes dos tratamentos viscoelásticos. No conjunto das publicações existentes sobre este assunto, destacam-se as obras publicadas por Nashif, Jones e Henderson [8] e por Jones [9], sendo a última inteiramente dedicada a este assunto.

1.2 Configurações de tratamento viscoelástico

A aplicação de camadas de material viscoelástico na estrutura pode ser realizada essencialmente segundo três configurações: superficial sem restrição ou livre (FLD - *free layer damping*), superficial com restrição (CLD - *constrained layer damping*) e integrada (ILD - *integrated layer damping*). Cada uma destas formas de aplicação da camada dissipativa na estrutura apresenta um conjunto de características que as distingue e orienta a selecção da melhor configuração de tratamento para a aplicação em vista.

1.2.1 Tratamentos superficiais sem restrição

Os tratamentos superficiais sem restrição ou livres (Figura 1.1) são obtidos pela deposição de uma camada de material viscoelástico sobre a superfície da estrutura a tratar. Apresentam um custo de aplicação reduzido e a sua simulação numérica ou analítica é relativamente simples. Todavia, uma vez que a camada viscoelástica é maioritariamente deformada em extensão-compressão, a deformação imposta pela estrutura em vibração não é muito significativa, exigindo a aplicação de camadas viscoelásticas consideravelmente espessas de forma a justificar o tratamento.

De facto, a eficiência destes tratamentos aumenta significativamente com o aumento da espessura da camada viscoelástica até esta atingir entre uma a duas vezes a espessura da placa base; acima deste valor, a eficiência mantém-se sensivelmente constante, não justificando a aplicação de tratamentos mais espessos [9].

Para além do efeito da razão de espessuras, a eficiência destes tratamentos varia directamente com a razão entre o módulo de ganho do material viscoelástico e o módulo extensional do material da estrutura, sendo, por isso, usualmente utilizados

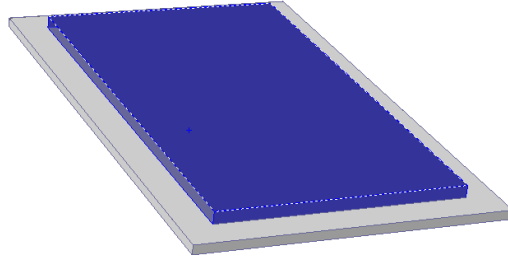


Figura 1.1: Tratamento superficial sem restrição

materiais viscoelásticos com um elevado módulo de ganho, como, por exemplo, o PVC plasticizado [8].

Em geral, estes tratamentos são pouco eficientes e introduzem grandes alterações de massa e de rigidez na estrutura tratada, devido às elevadas espessuras das camadas dissipativas normalmente empregues e à rigidez significativa do material viscoelástico normalmente utilizado. Porém, constituem uma forma de controlo dinâmico pouco onerosa e de fácil aplicação.

Adicionalmente ao efeito dissipativo introduzido e em virtude da espessura considerável da camada viscoelástica, esta configuração de tratamento pode também constituir uma forma eficiente de isolamento térmico e acústico.

1.2.2 Tratamentos superficiais com restrição

A aplicação de uma camada de restrição sobre a camada viscoelástica (Figura 1.2) induz nesta uma deformação de corte significativa, permitindo o desenvolvimento de tratamentos muito eficientes e simultaneamente pouco espessos, sendo normalmente aplicadas camadas de material viscoelástico com espessuras inferiores a 0.5mm.

A camada de restrição tem por efeito fundamental restringir a face superior da camada de material viscoelástico, podendo utilizar-se qualquer material que apresente um elevado módulo de *Young*. Esta camada apresenta ainda a função adicional de protecção da camada viscoelástica.

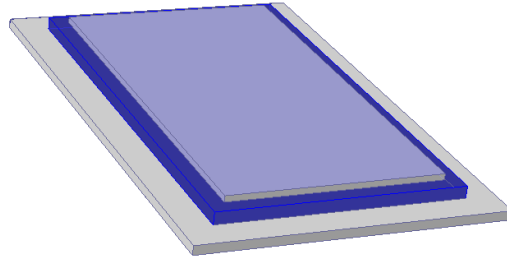


Figura 1.2: Tratamento superficial com restrição

Apesar da elevada eficiência apresentada, a modelação desta configuração de tratamento não é simples e requer um cuidado especial na representação da elevada deformação de corte que é desenvolvida na camada dissipativa, em resultado do efeito da camada de restrição. Os materiais viscoelásticos normalmente utilizados apresentam um módulo de ganho relativamente baixo, de forma a promover a sua deformação de corte, razão pela qual a alteração estrutural devido à adição de massa e de rigidez, embora seja normalmente muito reduzida, é sobretudo devida à camada de restrição e não à camada dissipativa.

Os tratamentos com esta configuração são igualmente de fácil aplicação, sendo possível encontrar no mercado soluções prontas a aplicar constituídas pelo filme de polímero dissipativo e por uma camada de restrição, usualmente de alumínio ou aço inoxidável.

1.2.3 Tratamentos integrados

A aplicação da camada dissipativa no núcleo de uma placa *sandwich* (Figura 1.3) permite maximizar a eficiência do tratamento viscoelástico. De facto, a deformação de corte que é imposta na camada de material viscoelástico é, neste caso, muito elevada em resultado da posição particular sobre o plano neutro do conjunto.

Esta configuração permite aplicar tratamentos muito eficientes. Todavia, enquanto que as configurações anteriores são indicadas para aplicações de tratamento correctivo, sendo usualmente aplicadas após fabrico da estrutura, esta configuração é usualmente aplicada numa fase pré-produtiva, ou seja, na própria matéria-prima.

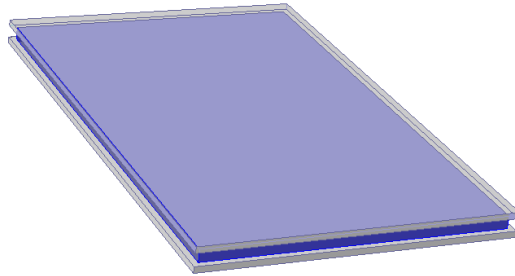


Figura 1.3: Tratamento integrado

O campo de deformações da camada viscoelástica é dependente do tipo de configuração do tratamento viscoelástico aplicado na estrutura. A Figura 1.4 representa a distribuição da densidade da energia de deformação total para o primeiro modo natural de vibração desenvolvida na camada viscoelástica das três configurações de tratamento aplicadas sobre uma viga.

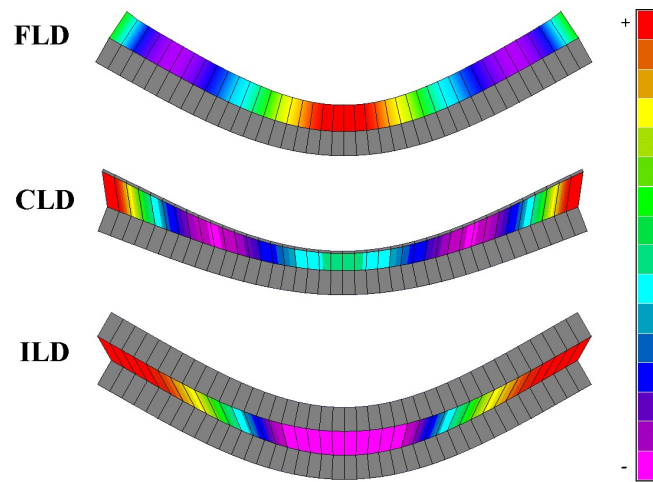


Figura 1.4: Distribuição da densidade de energia de deformação da camada viscoelástica

1.3 Optimização de tratamentos viscoelásticos

Os tratamentos passivos recorrendo a camadas de material viscoelástico apresentam uma elevada eficiência, um reduzido custo e, não menos importante, permitem desenvolver um mecanismo dissipativo auto-suficiente. Apesar da elevada eficiência que é possível obter com estes tratamentos, em especial nas configurações superficial com restrição e integrada, é possível introduzir um conjunto de técnicas de optimização que permitem reduzir a alteração estrutural imposta pelo tratamento, aumentar a sua eficiência, reduzir o custo de material e de aplicação, introduzir a capacidade de amortecimento modal selectivo e aumentar a sua gama eficiente.

1.3.1 Tratamentos parciais localizados

A aplicação de tratamentos totais, abrangendo a totalidade da superfície da estrutura a tratar, pode apresentar uma relação custo/benefício elevada, sendo possível reduzir a área de tratamento sem, contudo, reduzir drasticamente a sua eficiência. De facto, resultados experimentais e numéricos demonstram que a aplicação de tratamentos parciais criteriosamente colocados pode conduzir a soluções de controlo dinâmico passivo muito eficientes e simultaneamente com um menor custo de material e menor modificação estrutural, em especial no que concerne à massa adicionada com o tratamento. Esta metodologia é particularmente indicada na optimização de tratamentos superficiais sem restrição, devido à elevada espessura das camadas viscoelásticas normalmente aplicadas nesta configuração, podendo ser desenvolvida por simples colocação de várias camadas de material viscoelástico com a mesma espessura [10] ou com espessuras diferentes [11].

Usualmente, a aplicação de tratamentos parciais é realizada através da colocação estratégica de camadas de material viscoelástico, normalmente de forma regular, sobre a superfície a tratar. Todavia, uma outra solução é proposta por Akanda *et al.* [12], onde esta forma de optimização é desenvolvida pela aplicação de tratamentos viscoelásticos livres perfurados, correspondentes a 50 a 60% da área total da superfície a tratar, mantendo contudo a eficiência do tratamento e reduzindo significativamente a massa adicionada.

A aplicação de tratamentos parciais localizados pode também ser desenvolvida na configuração superficial com restrição, sendo a maioria das publicações sobre este assunto

relacionadas com o tratamento de vigas [13, 14]. Desconhecem-se soluções de tratamento parcial em tratamentos integrados.

1.3.2 Tratamentos multi-camada e multi-material

A configuração multi-camada, obtida pela sobreposição de várias camadas de material viscoelástico, constitui também uma forma eficiente de optimização de tratamentos viscoelásticos. Uma vez que os materiais viscoelásticos possuem uma elevada capacidade de amortecimento numa gama restrita de temperaturas, condicionada pela sua temperatura de transição, a eficiência do tratamento mono-camada é limitada à gama eficiente de temperaturas do material. Uma forma de alargamento da gama eficiente consiste na aplicação simultânea de várias camadas de materiais viscoelásticos com diferentes temperaturas de transição [15, 16]. Desta forma, a eficiência do tratamento é obtida a partir da combinação das eficiências relativas de cada um dos materiais aplicados.

Para além desta vantagem, a aplicação de várias camadas viscoelásticas intercaladas com camadas interlaminares de restrição permite maximizar a deformação de corte em cada uma das camadas viscoelásticas, aplicar tratamentos globalmente mais espessos e atenuar o efeito de desacoplamento produzido pela camada viscoelástica que se verifica nos tratamentos integrados.

1.3.3 Camadas de espaçamento e mecanismos amplificadores

Uma outra forma de optimização dos tratamentos viscoelásticos é desenvolvida recorrendo a uma camada de espaçamento introduzida entre a estrutura base e a camada dissipativa [17, 18]. Este elemento tem por único objectivo ampliar a deformação na face inferior da camada viscoelástica, devendo possuir um módulo de corte muito elevado e simultaneamente um peso muito reduzido. Usualmente, são aplicadas placas *sandwich* com núcleo em ninho de abelha ou placas de espuma polimérica rígida para este propósito.

Esta metodologia de optimização pode ser implementada sob a forma de elementos discretos, como, por exemplo, os tratamentos SPADD[®] [19] desenvolvidos pela empresa ARTEC Aerospace (FR). Estes elementos, que são aplicados localmente sobre a estrutura a tratar, recorrem a um par de braços metálicos para ampliar a deformação da estrutura

sobre a qual são colados. Na extremidade oposta, os braços são ligados por uma camada de material viscoelástico, normalmente sujeita a uma deformação de corte, que permite a dissipação eficiente da energia de vibração da estrutura base. Estes elementos, embora baseados num mecanismo dissipativo discreto, são normalmente aplicados em grande número numa forma distribuída e orientada sobre áreas definidas da estrutura a tratar, razão pela qual se podem considerar como tratamentos superficiais.

1.3.4 Tratamentos orientados

A maioria dos materiais viscoelásticos utilizados em tratamentos passivos apresentam um comportamento isotrópico. No entanto, algumas aplicações seriam beneficiadas pela capacidade de o tratamento apresentar uma rigidez e um factor de perda dependentes da direcção. Esta capacidade permite, por exemplo, aplicar uma forma de tratamento selectivo, apresentando maior ou menor atenuação em cada um dos modos naturais de vibração da estrutura.

Alberts e Xia [20] introduzem fibras no interior do material viscoelástico aplicado sob a forma de um tratamento sem restrição. As fibras colocadas dentro do material induzem-lhe uma deformação de corte considerável, obtendo-se desta forma a eficiência dos tratamentos com restrição e mantendo as vantagens associadas à aplicação dos tratamentos sem restrição, nomeadamente a simplicidade da aplicação. Biggerstaff e Kosmatka [21] aplicam este procedimento de forma a obter um material viscoelástico ortotrópico, que é integrado num material compósito, com o intuito de o tornar selectivo em relação aos modos naturais a atenuar.

1.3.5 Tratamentos híbridos

Os tratamentos viscoelásticos, nomeadamente nas suas configurações integrada e superficial com restrição, permitem introduzir uma capacidade de amortecimento muito elevada e, acima de tudo, inerente ao próprio material e, como tal, independente de mecanismos de controlo e de alimentação externos. De facto, a auto-suficiência deste mecanismo dissipativo constitui uma das suas principais vantagens, se compararmos as diversas formas de controlo dinâmico estrutural numa perspectiva de segurança, conforto e fiabilidade da estrutura. Todavia, os tratamentos viscoelásticos, para

além de apresentarem uma dependência em relação às condições de temperatura e à frequência de vibração, não constituem uma solução eficiente para baixas frequências de excitação ($f < 10\text{-}20\text{Hz}$). Em contrapartida, os mecanismos de controlo activo são particularmente eficientes nesta gama de frequências, apresentando algumas limitações nas altas frequências.

Nos últimos anos assistiu-se a um crescente interesse no desenvolvimento de mecanismos de controlo activo baseados em princípios piezoeléctricos, magnetostrictivos, electroreológicos e de memória de forma. Paralelamente a esta linha de investigação tem-se assistido ao desenvolvimento de mecanismos híbridos, combinando a eficiência inerente dos materiais viscoelásticos com a possibilidade de controlo, poder de acção e elevada eficiência a baixas frequências dos meios de controlo activo, usando cristais piezoeléctricos [22, 23] e fitas magnéticas [24], entre outros.

A constituição de mecanismos de tratamento híbridos permite, por um lado, juntar duas formas de controlo dinâmico com diferentes gamas de eficiência e meios de acção dissipativa e, por outro, aumentar a eficiência individual de cada um dos mecanismos introduzidos. De facto, uma das principais formas de mecanismos híbridos é obtida pela aplicação de cristais piezoeléctricos em substituição da camada de restrição (ou eventualmente actuando directamente sobre a camada de restrição), permitindo desta forma maximizar ou controlar a deformação de corte imposta à camada de material viscoelástico. Em contrapartida, a elevada capacidade de amortecimento presente nos materiais viscoelásticos, principalmente na gama das médias e altas frequências, permite atenuar o efeito da instabilidade de controlo, usualmente designado na literatura anglo-saxónica por efeito de *spillover*, dos mecanismos activos com elementos piezoeléctricos [25].

Na extensa lista de publicações actualmente existente sobre este assunto, destaca-se o trabalho publicado por Liao e Wang [26], no qual é apresentada uma análise sobre os efeitos das propriedades dos materiais viscoelásticos e da espessura da camada dissipativa na eficiência do tratamento híbrido, tanto na sua forma passiva como na forma activa. Estes autores verificam ainda que a necessidade de transferência da acção de controlo do mecanismo activo para a estrutura base restringe a gama eficiente do material viscoelástico, exigindo que o módulo de ganho do material seja suficientemente elevado de forma a proporcionar esse efeito.

1.3.6 Materiais de espectro largo

Uma vez que a limitação da gama eficiente de um tratamento viscoelástico é definida pelas limitações do próprio material, uma forma de expansão da gama eficiente do tratamento pode ser obtida pela aplicação de materiais viscoelásticos que apresentem um elevado factor de perda e um módulo de ganho aproximadamente constante e relativamente baixo ao longo de uma gama larga de temperaturas. Pritz [27] verificou que é possível desenvolver materiais que apresentem um elevado factor de perda ao longo de uma gama de temperaturas ou de frequências relativamente larga. Allen *et al.* [28] desenvolveram um conjunto de materiais viscoelásticos que cumprem este requisito. A eficiência destes materiais está directamente relacionada com a sua elevada condutibilidade térmica.

1.4 Aplicabilidade dos tratamentos viscoelásticos

Os tratamentos viscoelásticos superficiais podem ser aplicados sobre qualquer tipo de substrato, desde os mais diversos materiais metálicos até aos compósitos de matriz polimérica. Apenas é necessário garantir a adesão do material viscoelástico à superfície da estrutura a tratar e que as condições de operação cumpram as limitações impostas pelo material, nomeadamente a limitada gama de temperaturas, a ausência de solventes e outros produtos químicos não tolerados pelo material e as condições limitadas de humidade e vapor.

Todavia, a aplicação da configuração integrada reveste-se de algumas considerações adicionais em resultado da introdução do material viscoelástico na própria matéria-prima numa fase pré-produtiva. De facto, uma vez que os materiais viscoelásticos usualmente aplicados nestes tratamentos não suportam temperaturas extremas, sendo a gama de temperaturas de aplicação muito restrita, os processos de produção devem ser criteriosamente seleccionados, substituindo as ligações por processos térmicos por uniões com adesivos e ligações mecânicas. Até à data desconhece-se qualquer publicação sobre este assunto.

Mesmo a aplicação dos tratamentos integrados em materiais compósitos, não mostrando aparentemente qualquer tipo de restrição, requer alguns cuidados adicionais durante o processo de fabrico. Para além das limitações em termos da temperatura e da pressão,

tendo sempre presente que o processo de cura das resinas dos compósitos pode conduzir a elevados gradientes de temperatura, é também importante ter em consideração os fenómenos de aumento do módulo de ganho e de redução do factor de perda verificado nos materiais viscoelásticos embebidos, em resultado da penetração da resina na estrutura molecular do material durante o processo produtivo. Biggerstaff e Kosmatka [29, 30] verificam experimentalmente este efeito e propõem como solução a aplicação de filmes de barreira entre as camadas viscoelásticas e as camadas de material compósito.

1.5 Caracterização e modelação de materiais viscoelásticos

O desenvolvimento de modelos representativos do comportamento dos materiais viscoelásticos e a caracterização das suas propriedades constitui um dos pontos fulcrais no projecto e na optimização destes tratamentos passivos.

A dificuldade na caracterização experimental das propriedades mecânicas, dada a sua elevada sensibilidade com a temperatura e a frequência de excitação, representa uma das tarefas mais complexas e críticas durante o desenvolvimento de tratamentos viscoelásticos eficientes. A representação das propriedades materiais através de um modelo é também uma das principais dificuldades encontradas na análise e projecto de tratamentos viscoelásticos.

Durante os anos cinquenta verificou-se um crescente interesse e desenvolvimento na avaliação e descrição do comportamento dinâmico dos materiais poliméricos. Os inúmeros trabalhos desenvolvidos e publicados por J.D. Ferry [31, 32] e o famoso e ainda actual livro intitulado “Viscoelastic Properties of Polymers” [33], por B. Maxwell [34] e por H. Oberst [35], entre outros, são um exemplo do esforço de compreensão e de caracterização do comportamento dos materiais poliméricos e do mecanismo dissipativo associado.

As metodologias de caracterização experimental das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos mantiveram-se praticamente inalteradas desde essa altura, recorrendo-se actualmente às mesmas metodologias utilizadas pelos autores referidos, tendo apenas evoluído os métodos de tratamento e de verificação dos resultados obtidos recorrendo a ferramentas e recursos numéricos cada vez mais poderosos e disponíveis.

É também nos anos cinquenta que Myklestad [36] apresenta pela primeira vez o conceito do módulo complexo na representação do comportamento de um material viscoelástico.

Nessa altura, para representar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos, era normalmente utilizado um conjunto de modelos reológicos simples obtidos por combinação de elementos elásticos e elementos viscosos. Os elementos de *Maxwell* e de *Voigt* são os elementos mais simples e mais conhecidos, aparecendo usualmente combinados em modelos múltiplos de forma a obter uma melhor aproximação ao comportamento real do material representado. Todavia, para representar convenientemente o módulo complexo de um material ao longo de uma gama larga de frequências é necessário recorrer a um número elevado de parâmetros de ajuste.

Nos anos oitenta, Bagley e Torvik [37,38] utilizam o conceito das derivadas fraccionárias na representação do comportamento dos materiais viscoelásticos. Através deste modelo é possível descrever o comportamento do material viscoelástico ao longo de uma gama larga de frequências com um único termo derivativo. Este modelo é, hoje em dia, muito utilizado na análise de tratamentos passivos.

Mais recentemente, no início dos anos noventa, com vista à análise transiente de sistemas com amortecimento viscoelástico, foram propostos modelos alternativos cuja formulação assenta na inclusão de um conjunto de variáveis adicionais que representam a variação das propriedades dos materiais ao longo da frequência. O modelo do campo de deslocamentos inelásticos (*Anelastic Displacement Field* - *ADF*), proposto por Lesieutre *et al.* [39, 40], introduz o efeito da variação através de um conjunto de variáveis adicionais inelásticas. Por seu lado, o modelo de *Golla-Hughes-McTavish* (*GHM*) [41] recorre a um conjunto de osciladores adicionais para representar o mesmo efeito. Ambos os modelos são definidos por um conjunto de parâmetros determinados por ajuste de cada um dos modelos à distribuição do módulo complexo ao longo da gama de frequências considerada, sendo usualmente requerido um conjunto de 3 a 5 termos osciladores ou termos inelásticos para representar convenientemente as propriedades dos materiais normalmente aplicados em tratamentos viscoelásticos. De referir que o modelo *GHM* é o modelo usualmente empregue na representação das propriedades dos materiais viscoelásticos de tratamentos híbridos [42–45]. Wagner e Adhikari [46] apresentam uma análise comparativa entre os modelos descritos e os modelos por eles propostos, bem como o formalismo no espaço de estados associado à aplicação dos mesmos.

1.6 Análise de tratamentos viscoelásticos

A equipa de Hermann Oberst na Alemanha é referida como um dos primeiros grupos de investigação a analisar e aplicar tratamentos viscoelásticos superficiais sem restrição. As equações de *Oberst* [47], baseadas na hipótese de que as secções planas da viga tratada permanecem planas, constituem ainda hoje uma ferramenta de análise muito útil na determinação do efeito de tratamentos superficiais sem restrição e na caracterização de materiais viscoelásticos a partir dos ensaios de viga ressonante com a mesma configuração de tratamento.

Kerwin [48] desenvolveu um modelo analítico para determinação da eficiência de tratamentos com restrição aplicados sobre vigas. Este modelo, baseado na propagação de ondas de flexão, é restrito aos tratamentos cuja camada de restrição apresenta uma espessura muito menor relativamente à espessura da viga base. É proposto um parâmetro adimensional, designado por parâmetro de corte, que permite relacionar as principais variáveis do tratamento e o comprimento de onda de vibração com a sua eficiência.

Ross *et al.* [49] analisaram o comportamento de vigas com tratamento superficial com restrição e propõem uma equação de movimento diferencial de quarta ordem, que constitui ainda hoje uma referência no estudo de tratamentos viscoelásticos com restrição e tratamentos integrados. As equações propostas, usualmente designadas por equações *Ross-Kerwin-Ungar* (*RKU*), foram desenvolvidas sobre um conjunto de hipóteses restritivas, nomeadamente a imposição de formas modais de forma sinusoidal e o facto de se desprezar a deformação extensional da camada central viscoelástica. Apesar destas hipóteses restritivas, este conjunto de equações é ainda utilizado na análise de vigas e placas com tratamento viscoelástico com restrição, constituindo a base da metodologia de extracção do módulo complexo dos materiais viscoelásticos em ensaios de caracterização sobre vigas ressonantes.

Yamaguchi e Adhikari [50] estenderam as equações *RKU* à análise de tratamentos viscoelásticos com restrição aplicados sobre cabos estruturais. Bhimaraddi [51] fez uma comparação numérica entre as equações *RKU* e um modelo analítico que, ao contrário do modelo *RKU*, não despreza a deformação extensional da camada viscoelástica e a deformação de corte transversal das vigas externas metálicas. Este autor verificou que o modelo *RKU* subestima o valor do factor de perda da viga para materiais viscoelásticos

com módulo de ganho elevado. Esta análise é restrita às vigas simplesmente apoiadas. Teng e Hu [52] desenvolveram uma análise sobre os efeitos dos parâmetros de tratamentos com restrição aplicados em vigas recorrendo às equações RKU .

Di Taranto [53] propôs uma equação de movimento diferencial de sexta ordem em termos do deslocamento transversal para uma viga de 3 camadas e núcleo viscoelástico. Mead e Markus [54] refinaram a teoria de Di Taranto e generalizaram-na às vigas duplamente encastradas [55]. Rao [56] recorreu a uma formulação energética para reformular a teoria de sexta ordem e obter a solução exacta para vigas com várias condições de fronteira.

Embora a maior parte dos modelos analíticos seja restrita às vigas com três camadas, em especial às vigas simplesmente apoiadas, em virtude da simplicidade associada à representação das respectivas formas modais, existem algumas publicações, embora em menor número, sobre a aplicação de um modelo analítico às placas com tratamentos viscoelásticos com e sem restrição. Yan e Dowell [57] deduziram uma equação de movimento diferencial de quarta ordem para descrever o comportamento dinâmico de placas e de vigas *sandwich*, assumindo uma distribuição uniforme da deformação de corte transversal ao longo das camadas. Rao e Nakra [58] analisaram placas e vigas *sandwich* assimétricas considerando na equação de movimento o efeito da inércia de rotação e de translação longitudinal.

Face ao interesse no desenvolvimento de tratamentos parciais, possibilitando desta forma a redução do custo de material e a atenuação da modificação estrutural imposta à estrutura base sem sacrificar a eficiência do tratamento, alguns autores desenvolveram modelos analíticos aproximados, sendo a maioria deles baseados numa análise de energias de deformação, recorrendo normalmente às formas modais da viga ou da placa não amortecida.

Stevens e Hsu [59] analisaram a eficiência de tratamentos parciais regulares usando uma configuração superficial com restrição e determinaram o factor de perda modal através da razão de energias de deformação associadas às formas modais da placa base, como proposto por Ungar e Kerwin [60]. Posteriormente, esta mesma metodologia é utilizada por Stevens *et al.* [61] para determinar a eficiência de tratamentos parciais sem restrição aplicados sobre veios cilíndricos encastrados, e por Stevens e Shomstein [61] para analisar a influência da localização de tratamentos parciais sem restrição aplicados sobre placas circulares simplesmente apoiadas. Pei e Li [62] recorreram também à razão de energias

para otimizar a colocação de tratamentos superficiais com restrição sobre placas. Dechang e Zuguang [13] recorreram ao método de *Galerkin*, usando como funções de aproximação as formas modais da viga não amortecida, para analisar o efeito e otimizar tratamentos parciais com restrição aplicados sobre vigas simplesmente apoiadas.

Levy e Chen [14] analisaram tratamentos parciais com restrição simétricos aplicados sobre vigas encastradas, tendo desenvolvido um conjunto de equações diferenciais de movimento recorrendo ao princípio de *Hamilton*, as quais são comparadas com as equações propostas por Rao [56].

Apesar dos métodos de cálculo através de modelos analíticos exactos ou aproximados permitirem uma análise de estruturas de geometria simples e com condições de fronteira bem definidas, tais como vigas e placas simplesmente apoiadas ou encastradas, o campo de aplicação dos tratamentos viscoelásticos é, usualmente, constituído por estruturas de geometria tridimensional complexa. Assim, têm sido desenvolvidas técnicas baseadas em métodos numéricos de análise que permitem a determinação dos efeitos dinâmicos de tratamentos viscoelásticos, o cálculo da eficiência desses tratamentos e o desenvolvimento de metodologias de optimização.

De entre os métodos numéricos disponíveis, o método dos elementos finitos assume uma posição preponderante em virtude da sua grande aplicabilidade no campo da engenharia estrutural. Por este motivo, tem existido uma forte motivação no desenvolvimento de modelos numéricos baseados neste método capazes de simular eficientemente o comportamento de estruturas tratadas com camadas de material viscoelástico. Lee e Kim [63] contrariam esta tendência aplicando o método das diferenças finitas na análise de placas quadradas encastradas com tratamento integrado.

Após aplicação do método dos elementos finitos para calcular as matrizes de massa e de rigidez que representam o modelo espacial da estrutura e do tratamento aplicado, é necessário desenvolver um processo específico de análise, de forma a determinar os efeitos do tratamento sobre o comportamento dinâmico da estrutura tratada.

Considerando a vibração estacionária harmónica, é possível recorrer directamente ao módulo complexo do material para desenvolver uma análise directa em frequência, actualizando as propriedades do material viscoelástico para cada valor de frequência considerado na análise. O resultado obtido consiste na determinação do modelo de resposta

em frequência. Este método de análise apresenta um elevado custo computacional, exigindo a resolução de um sistema de equações de natureza complexa para cada valor de frequência. Lumsdaine e Scott [11] recorreram ao método de elementos finitos, usando um método de análise directa em frequência e o método do módulo complexo, para otimizar tratamentos parciais sem restrição aplicados sobre placas com várias condições de fronteira.

De forma a obter o modelo modal, que permite avaliar quantitativamente o efeito do tratamento sobre as frequências naturais e os factores de perda modais correspondentes, é necessário resolver um problema generalizado de valores e vectores próprios complexos que, devido ao facto de as propriedades dos materiais viscoelásticos dependerem da frequência, exige um processo de cálculo iterativo.

Qualquer um dos métodos de análise anteriores é computacionalmente dispendioso, principalmente por envolverem cálculo no domínio complexo. Johnson e Kienholz [64] propuseram um método de análise alternativo baseado em cálculo unicamente de natureza real, que permite uma grande economia computacional. Este método, designado por método de energia de deformação modal (*Modal Strain Energy - MSE*), baseia-se na razão de energias proposta por Ungar e Kerwin [60] e recorre às frequências naturais e correspondentes formas modais da estrutura não amortecida para determinar o factor de perda modal da estrutura tratada, através da razão entre a energia de deformação da camada viscoelástica e a energia de deformação total.

O método *MSE* assume que os modos naturais reais da estrutura não amortecida são representativos dos modos complexos da estrutura amortecida em análise. Quando o tratamento aplicado altera significativamente o modelo de resposta modal da estrutura base, o que acontece por exemplo na aplicação de tratamentos integrados, é necessário considerar esse efeito recorrendo-se a um processo de extracção modal iterativo.

Shin e Maurer [65] compararam os resultados obtidos pelo método *MSE* e pelo método de análise directa em frequência na análise de placas com tratamento superficial com restrição. Estes métodos de análise e os resultados obtidos foram validados experimentalmente recorrendo a provetes representativos do tratamento analisado. Verificaram que o método *MSE* permite obter uma boa aproximação aos resultados fornecidos pela análise directa em frequência, com um custo computacional significativamente inferior.

Para além do método *MSE* foram propostos por diversos autores outros métodos aproximados de análise, como, por exemplo, os métodos de perturbação ou modificação [66, 67] que determinam os efeitos e a eficiência do tratamento aplicado através de um processo incremental de perturbação do modelo de resposta modal do sistema não amortecido.

Independentemente do método de análise e da forma de representação das propriedades dos materiais viscoelásticos, é necessário aplicar uma forma de representação espacial da estrutura e tratamento aplicado representativa do mesmo. Este aspecto é particularmente importante nas configurações de tratamento superficial com restrição e de tratamento integrado em virtude da elevada deformação de corte que é imposta na camada viscoelástica, da qual resulta a elevada capacidade de amortecimento que os caracteriza.

Uma das formas de garantir a representatividade do modelo de elementos finitos na modelação de tratamentos viscoelásticos com restrição ou integrados consiste na aplicação estratificada de elementos finitos convencionais, representando individualmente cada uma das camadas e recorrendo a elementos sólidos para obter uma representação tridimensional da camada viscoelástica [64, 68, 69]. Embora estes modelos permitam representar convenientemente o padrão de deformações que ocorre nos tratamentos viscoelásticos, a sua aplicação exige uma etapa de modelação espacial morosa e computacionalmente dispendiosa, em especial nos tratamentos sobre geometrias complexas e nas configurações de tratamento multi-camada.

Em resposta às dificuldades referidas, recorre-se usualmente a modelos de elementos finitos baseados na teoria de camada discreta, que permitem simplificar o processo de modelação espacial e a definição dos parâmetros do tratamento aplicado. Estes modelos baseiam-se numa representação de camada espessa de cada uma das camadas constituintes, garantindo a continuidade entre elas directamente na definição do campo de deslocamentos do elemento finito. Usualmente, a aplicabilidade dos elementos finitos propostos segundo esta teoria é restrita a geometrias particulares de tratamento, sendo a maioria limitada a vigas com tratamento mono-camada e baseadas em hipóteses simplificativas do campo de deslocamentos que, embora reduzam a dimensão do problema, restringem a generalidade do modelo. A imposição das hipóteses de *Bernoulli* ou de *Kirchoff-Love*, respectivamente para as vigas e as placas, nas camadas exteriores, constitui a principal simplificação aplicada.

1.7 Motivação e objectivo da dissertação

A elevada eficiência demonstrada pelos tratamentos viscoelásticos, em especial numa configuração integrada, justifica a aplicação das mais diversas formas de optimização no sentido de alargar a gama eficiente dos mesmos. A aplicação de configurações híbridas, multi-camada e multi-material tem demonstrado um enorme potencial para concretizar este objectivo. No entanto, o desenvolvimento e a aplicação eficiente destas configurações de tratamento exige, entre outros aspectos, a disponibilidade de modelos de representação espacial generalizados e numericamente robustos.

O objectivo principal desta dissertação é desenvolver e validar um elemento finito multi-camada generalizado, capaz de representar convenientemente o padrão de deformação que ocorre nas camadas de material viscoelástico de tratamentos passivos constituídos por múltiplas camadas de material viscoelástico e camadas interlaminares de restrição, e ultrapassar as limitações dos modelos numéricos actualmente aplicados.

O elemento finito de placa e de casca de faceta será formulado através da teoria de camada discreta generalizada, recorrendo a um conjunto de técnicas numéricas usualmente aplicadas a elementos finitos de placa e de casca para melhoramento do seu desempenho e protecção a problemas de bloqueio numérico. O modelo desenvolvido será comparado com os modelos numéricos actualmente utilizados neste tipo de aplicações e validado experimentalmente para configurações de tratamento superficial com restrição, de tratamento integrado mono-camada e de tratamento integrado multi-camada e multi-material.

Adicionalmente a este objectivo principal, pretende-se desenvolver e validar uma metodologia experimental de identificação do módulo complexo de materiais viscoelásticos, com o intuito de caracterizar os materiais aplicados no processo de validação do elemento finito e na simulação dos tratamentos viscoelásticos analisados nesta dissertação. Desta forma, evitam-se os possíveis erros de caracterização provenientes da amostragem e dos procedimentos aproximados de identificação das propriedades a que o fabricante normalmente recorre para produzir o nomograma publicado do material.

Uma vez desenvolvido um elemento finito eficiente, que permita simplificar a representação de tratamentos constituídos por várias camadas de material viscoelástico e camadas de restrição, pretende-se desenvolver um estudo numérico com o objectivo de

verificar a aplicabilidade das configurações multi-camada e multi-material na optimização de tratamentos viscoelásticos integrados. Com estas configurações pretende-se, essencialmente, atenuar a redução de rigidez de flexão da estrutura *sandwich* resultante do efeito de desacoplamento introduzido pelo núcleo viscoelástico, aumentar a eficiência do tratamento pela colocação de camadas de restrição interlaminares e pela redução da espessura de cada camada viscoelástica, e alargar a sua gama eficiente pela aplicação de materiais com diferentes temperaturas de transição.

1.8 Organização da dissertação

Esta dissertação divide-se em 11 capítulos, incluindo este capítulo de introdução e justificação do tema de desenvolvimento proposto, ao longo dos quais é documentado o conjunto de fases de desenvolvimento teórico e experimental que conduziu à meta pretendida no início deste trabalho.

No segundo capítulo é analisado o problema associado à caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos e respectiva revisão bibliográfica, dando especial relevo às metodologias de caracterização experimental, à análise de dados e à representação do módulo complexo. São apresentadas as metodologias de caracterização usualmente aplicadas na determinação do módulo complexo de materiais viscoelásticos com aplicação em tratamentos passivos, bem como os procedimentos normalmente aplicados na análise, modelação e representação dos resultados recolhidos no processo de caracterização experimental.

O terceiro capítulo apresenta a problemática e o estado-da-arte associados à aplicação do método dos elementos finitos na simulação de tratamentos viscoelásticos superficiais com restrição e integrados, analisando separadamente os métodos de representação das propriedades dos materiais viscoelásticos, os modelos de representação espacial dos tratamentos e os métodos de cálculo dos efeitos do tratamento sobre o comportamento dinâmico da estrutura tratada.

No quarto capítulo é desenvolvido o elemento finito proposto baseado na teoria *layerwise*. Adicionalmente à apresentação da formulação teórica base do elemento, é analisado e adaptado um conjunto de técnicas numéricas aplicáveis a elementos finitos de placa e de

casca com o objectivo de melhorar o seu desempenho e atenuar os efeitos de bloqueios numéricos do elemento, nomeadamente o bloqueio de corte transversal e o bloqueio de corte no plano.

O quinto capítulo é dedicado à validação numérica do elemento finito formulado, recorrendo a um conjunto de testes-padrão usualmente utilizado na avaliação do desempenho de elementos finitos de placa e de casca. Este capítulo tem por objectivo avaliar o desempenho do elemento finito e verificar a sua implementação, bem como testar as técnicas numéricas correctivas introduzidas na formulação base do elemento finito.

No sexto capítulo é desenvolvida uma comparação do desempenho do elemento finito proposto na modelação de tratamentos passivos, confrontando-o com um conjunto de modelos numéricos baseados na combinação de elementos finitos convencionais, usualmente utilizados na simulação de tratamentos viscoelásticos.

O sétimo capítulo apresenta o desenvolvimento de uma montagem experimental e da metodologia associada para a caracterização experimental do módulo complexo de materiais viscoelásticos. É descrito de uma forma resumida o percurso que levou ao desenvolvimento da montagem experimental proposta, é apresentada a sua caracterização e a análise das suas limitações, sendo finalmente ilustrada a metodologia adoptada através da caracterização de um dos materiais viscoelásticos usados na componente de validação experimental deste trabalho.

O oitavo capítulo documenta o estudo experimental desenvolvido sobre provetes com tratamentos superficiais com restrição e tratamentos integrados mono-camada, com o objectivo de validar experimentalmente o elemento finito proposto (bem como os modelos combinados apresentados e analisados no terceiro capítulo).

No seguimento do capítulo anterior, é documentado no nono capítulo o estudo experimental desenvolvido com o intuito de validar o elemento finito na simulação de tratamentos integrados multi-camada e multi-material.

No décimo capítulo é apresentada uma análise comparativa da eficiência obtida pelas configurações multi-camada e multi-material aplicadas nos provetes experimentais utilizados no nono capítulo. Esta comparação é realizada experimentalmente através da frequência natural e do respectivo factor de perda modal correspondentes ao primeiro modo natural de vibração dos provetes. De forma a analisar o efeito associado à configuração

multi-material, é desenvolvido um estudo numérico recorrendo ao elemento finito proposto e a métodos de análise de resposta modal, nomeadamente uma versão modificada do método *MSE* e um método de perturbação.

A dissertação termina com um capítulo dedicado à apresentação das conclusões retiradas do trabalho desenvolvido e a enumeração de um conjunto de sugestões de trabalho futuro.

Capítulo 2

Caracterização dos materiais viscoelásticos

Neste capítulo é analisado o problema associado à caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos, dando especial relevo às metodologias de caracterização experimental, à análise de dados e à representação do módulo complexo. É discutida a dependência observada do módulo complexo dos materiais viscoelásticos com a frequência de excitação e a temperatura, variáveis estas que restringem a aplicabilidade e a eficiência dos tratamentos passivos de amortecimento baseados em materiais viscoelásticos. São apresentados de uma forma detalhada os procedimentos de caracterização usualmente aplicados na determinação do módulo complexo de materiais viscoelásticos com aplicação em tratamentos passivos, indicando as vantagens e limitações inerentes a cada um desses processos de medição experimental. Finalmente, são apresentadas de uma forma sucinta as metodologias normalmente utilizadas na análise dos resultados recolhidos no processo de caracterização experimental, na sua verificação e na representação gráfica do módulo complexo identificado.

2.1 Introdução

Os materiais viscoelásticos empregues em tratamentos de amortecimento são normalmente materiais de base polimérica. Contrariamente aos materiais metálicos, estes materiais exibem um factor de perda considerável, responsável pela curva elíptica do ciclo de histerese, que lhes incute uma capacidade importante de amortecimento que depende essencialmente da temperatura e da frequência de deformação. São materiais constituídos por longas cadeias moleculares reticuladas cujo movimento relativo, desenvolvido durante a deformação cíclica do material, induz uma dissipação de energia de deformação sob a forma de calor que, sendo eficientemente dissipada para o exterior, permite uma forma de amortecimento eficiente.

Embora os materiais viscoelásticos de base polimérica, em que os mais utilizados são formulados com base num elastómero acrílico, apresentem as condições necessárias à sua aplicação em tratamentos viscoelásticos, as suas propriedades, nomeadamente o seu módulo de ganho e o seu factor de perda, são fortemente dependentes da frequência e da temperatura. Para além disso, a aplicação eficiente destes materiais está limitada a uma gama bem definida de frequência e de temperatura, existindo uma relação bem definida entre a distribuição do módulo de ganho, que traduz a capacidade de armazenamento de energia de deformação do material, e do factor de perda, que representa a sua capacidade de dissipação [70].

A caracterização da dependência das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos com a frequência e com a temperatura, a sua determinação experimental e forma de representação, constitui, assim, um dos pontos chave no processo de projecto e de optimização de tratamentos passivos com materiais viscoelásticos.

2.2 Caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos

A maioria dos materiais viscoelásticos aplicados em tratamentos de amortecimento podem ser considerados homogéneos, uma vez que as suas propriedades são idênticas em todo o volume da amostra de material, e isotrópicos, ou seja, as suas propriedades são idênticas em qualquer direcção. No entanto, alguns materiais especialmente formulados,

contendo fibras direccionais [20] ou obtidos por laminagem de camadas de materiais diferentes, não apresentam estas propriedades que, tanto no processo de caracterização das propriedades como no processo de simulação, permitem um tratamento analítico mais simples.

O conjunto de materiais viscoelásticos com interesse em aplicações de amortecimento é muito vasto, desde plásticos de elevada rigidez, utilizados sobretudo em tratamentos superficiais sem restrição, a adesivos de baixo valor de módulo de ganho, usualmente empregues em tratamentos superficiais com restrição e em tratamentos integrados.

Embora estes materiais possuam uma constituição homogénea e isotrópica, e, principalmente, apresentem um comportamento linear (dentro de certos limites de amplitude de deformação), as suas propriedades dependem fortemente da temperatura e da frequência de deformação (Figura 2.1). De facto, o comportamento mecânico de um material viscoelástico depende sobretudo do comportamento das suas longas cadeias moleculares, as quais interagem entre si conforme a temperatura do material e a frequência da perturbação causada na configuração molecular inicial.

Para além destes dois parâmetros, os materiais viscoelásticos dependem também da amplitude de deformação. Embora certos materiais, como, por exemplo, as borrachas vulcanizadas aplicadas em apoios anti-vibração e suspensões pneumáticas [71], apresentem uma elevada sensibilidade à amplitude de deformação, os materiais poliméricos de base acrílica, usualmente aplicados em tratamentos integrados e tratamentos superficiais com restrição, apresentam um comportamento linear dentro de uma gama relativamente larga de amplitudes de deformação [9].

2.2.1 Efeito da temperatura

A temperatura de funcionamento de mecanismos de amortecimento baseados em materiais viscoelásticos pode, consoante a aplicação a que se destinam, atingir valores extremos, desde -40°C (ou até menos) até 150°C [9].

Uma vez que a capacidade de amortecimento e a rigidez de um material viscoelástico está sobretudo relacionada com a sua temperatura de transição, temperatura à qual se dá a passagem do seu estado vítreo (material com elevada rigidez) para o seu estado amorfo (material com baixo valor de rigidez) e na qual o material apresenta o seu valor máximo

de amortecimento, a eficiência do tratamento de amortecimento depende fortemente da relação entre a temperatura de funcionamento e essa temperatura de transição do material.

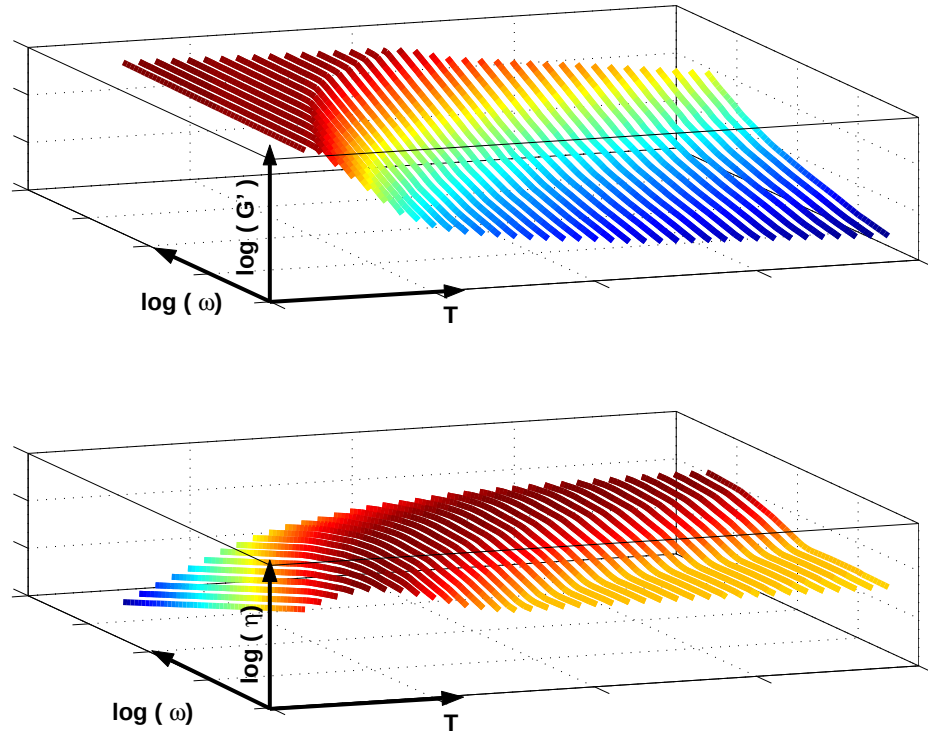


Figura 2.1: Variação do módulo de ganho (G') e do factor de perda (η) de um material viscoelástico com a frequência e a temperatura

Em aplicações de tratamentos viscoelásticos sobre componentes sujeitos a elevados gradientes de temperatura é necessário desenvolver e aplicar técnicas construtivas adequadas, sendo os tratamentos multi-camada e multi-material [15, 16] um exemplo destas técnicas, que permitem alargar a gama de temperaturas eficiente do tratamento viscoelástico.

2.2.2 Efeito da frequência

Quando um material viscoelástico é deformado, as longas cadeias moleculares que constituem o material sofrem uma perturbação da sua posição inicial de equilíbrio, interagindo entre si como forma de reacção à deformação imposta. Em resposta a esta perturbação dá-se um rearranjo das cadeias moleculares de forma a atingir uma nova posição de equilíbrio.

Se a deformação imposta for cíclica do tipo harmónico, as cadeias moleculares atingem um novo estado de equilíbrio dinâmico, respondendo em sintonia com a excitação. Desta forma, quando um material viscoelástico é solicitado ciclicamente com uma frequência elevada, este apresenta uma elevada rigidez, possuindo uma rigidez mais reduzida quando a solicitação tem uma frequência mais baixa.

2.2.3 Caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos com a frequência

Experimentalmente verifica-se que, quando um material viscoelástico é sujeito a um carregamento harmónico, a deformação resultante é também harmónica, apresentando a mesma frequência do carregamento. No entanto, e ao contrário do que acontece nos materiais elásticos, existe um desfaseamento relativo δ entre a deformação $\varepsilon(t)$ obtida e a tensão $\sigma(t)$ imposta pelo carregamento (Figura 2.2).

A representação da tensão medida em função da deformação medida (Figura 2.3), usualmente denominada por ciclo de histerese, apresenta a forma de uma elipse cujo ângulo formado pelo seu eixo maior e o eixo das abcissas é proporcional à rigidez do material, e a razão entre o eixo menor e o eixo maior é um indicador da sua capacidade de amortecimento. Se o amortecimento for nulo, ou seja, se o material apresentar um comportamento elástico, o ciclo de histerese toma a forma de uma recta, cuja inclinação determina a sua rigidez.

Como ilustrado na Figura 2.2, a imposição de uma carregamento harmónico sinusoidal num provete viscoelástico induz um campo de tensões da forma:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t) \tag{2.1}$$

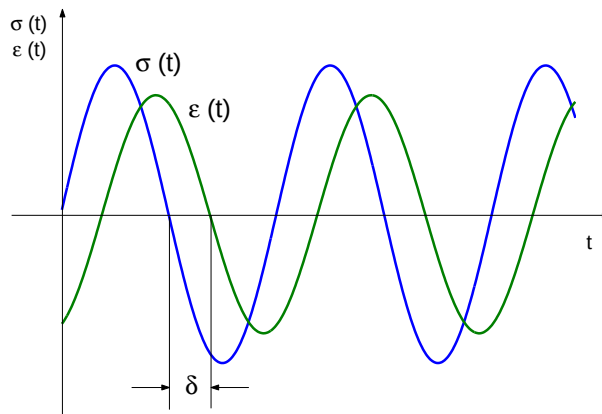


Figura 2.2: Excitação e resposta harmónica de um material viscoelástico

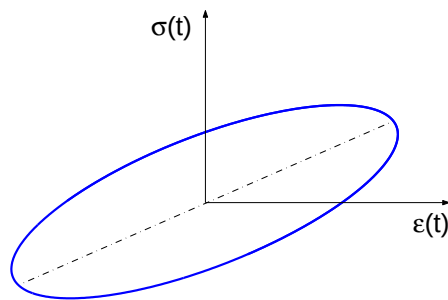


Figura 2.3: Ciclo histerético de um material viscoelástico

e o material viscoelástico responde com uma deformação também do tipo sinusoidal da forma:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta) \quad (2.2)$$

onde δ representa o desfaseamento entre a tensão e a deformação, sendo um indicador do amortecimento viscoelástico do material.

A Equação (2.1) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma_0 \sin(\omega t - \delta + \delta) \\ &= \sigma_0 \sin(\omega t - \delta) \cos(\delta) + \sigma_0 \cos(\omega t - \delta) \sin(\delta)\end{aligned}\tag{2.3}$$

a qual, substituindo os termos $\sin(\omega t - \delta)$ e $\cos(\omega t - \delta)$ pela equação (2.2) e sua derivada, e assumindo que a frequência ω é uma variável sempre positiva, pode ser escrita como:

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \varepsilon(t) \cos(\delta) + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \sin(\delta)\tag{2.4}$$

Substituindo o termo $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta)$ pelo módulo de ganho extensional E' , obtemos a relação constitutiva do material viscoelástico na forma:

$$\sigma(t) = E' \varepsilon(t) + \frac{E'}{\omega} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \operatorname{tg}(\delta)\tag{2.5}$$

que, considerando uma deformação de corte $\gamma(t)$, pode ser escrita na forma homóloga:

$$\tau(t) = G' \gamma(t) + \frac{G'}{\omega} \frac{d\gamma(t)}{dt} \operatorname{tg}(\delta)\tag{2.6}$$

onde $\tau(t)$ representa a tensão de corte e G' o módulo de ganho de corte. O termo $\operatorname{tg}(\delta)$, usualmente designado por tangente de delta, é equivalente ao factor de perda¹ do material, correntemente representado por η [72].

2.2.4 Módulo complexo

Se generalizarmos a função da deformação harmónica, representando-a por uma função exponencial complexa do tipo:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{j\omega t}\tag{2.7}$$

a Equação (2.5) pode ser escrita no domínio da frequência na forma:

$$\sigma(\omega) = E'(\omega) \varepsilon(\omega) + jE'(\omega) \eta(\omega) \varepsilon(\omega) = \bar{E}(\omega) \varepsilon(\omega)\tag{2.8}$$

¹O termo tangente de delta é usualmente empregue na Engenharia de Polímeros sendo a designação factor de perda utilizada na Engenharia Estrutural, nomeadamente na área da Dinâmica de Estruturas.

sendo a variável $\bar{E}(\omega)$ designada por módulo extensional complexo [72].

A componente real do módulo complexo, E' , designa-se por módulo de ganho [72] e representa a capacidade de armazenamento de energia de deformação do material. A componente imaginária, que define a capacidade de dissipação do material viscoelástico, é obtida pela multiplicação do módulo de ganho pelo factor de perda do material e designa-se por módulo de perda, sendo representada pelo símbolo E'' [72]. O factor de perda, definido como a razão entre o módulo de perda e o módulo de ganho do material, pode, em regime harmónico estacionário, relacionar-se com a razão de amortecimento viscoso ξ pela relação: $\eta = 2\xi$.

A Equação (2.8) pode então ser escrita na forma:

$$\sigma(\omega) = [E'(\omega) + jE''(\omega)]\varepsilon(\omega) = \bar{E}(\omega)\varepsilon(\omega) \quad (2.9)$$

ou, na forma homóloga para a deformação em corte, como:

$$\tau(\omega) = [G'(\omega) + jG''(\omega)]\gamma(\omega) = \bar{G}(\omega)\gamma(\omega) \quad (2.10)$$

A expressão do módulo complexo, (2.9) ou (2.10), pode também ser obtida a partir da teoria da viscoelasticidade linear [73]. Segundo esta teoria, a relação constitutiva de um material viscoelástico inicialmente em repouso no instante $t = 0$ é descrita pela equação:

$$\sigma(t) = \mathfrak{E}(t)\varepsilon(0) + \int_0^t \mathfrak{E}(t-\varsigma) \frac{\partial \varepsilon(\varsigma)}{\partial \varsigma} d\varsigma \quad (2.11)$$

onde $\varepsilon(0)$ é a deformação inicial no instante $t = 0$ e $\mathfrak{E}(t)$ representa a função de relaxação do material, que corresponde à resposta em tensão devido a uma deformação em forma de degrau unitário.

Assumindo que a deformação inicial é nula, verifica-se que a Equação (2.11), aplicando o teorema da convolução [74], corresponde à transformada inversa de *Laplace* da multiplicação das transformadas de *Laplace* da função de relaxação, $\mathfrak{E}(s)$, e da função velocidade de deformação, $s\varepsilon(s)$. Assim, a Equação (2.11) pode ser escrita, no domínio de *Laplace*, na forma:

$$\sigma(s) = s \mathfrak{E}(s) \varepsilon(s) \quad (2.12)$$

Se a função módulo do material, $s \mathfrak{E}(s)$, for avaliada ao longo do eixo imaginário do plano de Laplace ($s = j\omega$), ou seja, se considerarmos o regime harmónico, a função obtida designa-se por módulo complexo, $\bar{E}(\omega)$, sendo representado por:

$$\bar{E}(\omega) = j\omega \mathfrak{E}(j\omega) = E'(\omega) + jE''(\omega) \quad (2.13)$$

O módulo complexo permite representar, de uma forma simples, o amortecimento viscoelástico e o efeito viscoelástico em regime estacionário harmónico.

Doravante, e com o objectivo de simplificar a exposição do formalismo, o módulo complexo, função da frequência, será representado simplesmente por $\bar{E}$.

2.3 Medição do módulo complexo dos materiais viscoelásticos

A caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos constitui um dos aspectos essenciais na simulação numérica do comportamento dinâmico de tratamentos passivos viscoelásticos.

O processo de medição do módulo complexo de um material viscoelástico reveste-se de um conjunto de características e requisitos que o tornam numa tarefa difícil, requerendo um procedimento de medição rigoroso e metódico. De facto, o elevado amortecimento proporcionado pelos materiais viscoelásticos, a heterogeneidade do material e a dificuldade na obtenção de uma montagem experimental, idêntica ao modelo teórico hipoteticamente considerado, constituem as principais dificuldades na obtenção de um sistema capaz de caracterizar convenientemente as propriedades de materiais viscoelásticos com elevado amortecimento material.

Todavia, dispor de um sistema de medição do módulo complexo do material é crucial, uma vez que as propriedades normalmente disponibilizadas pelo fabricante, para além de serem obtidas numa amostragem esporádica de toda a produção, são muitas das vezes obtidas por um processo de medição aproximado. Assim, possuir a capacidade de medir as propriedades do material aplicado e conhecer o processo de medição aplicado, suas variáveis e respectiva sensibilidade, torna-se essencial num procedimento de simulação e projecto de tratamentos viscoelásticos.

O módulo complexo é, normalmente, medido através de um ensaio dinâmico em que um provete viscoelástico é deformado ciclicamente através de um carregamento do tipo harmónico, sendo medidos simultaneamente a carga aplicada e a deformação imposta ao provete. Assim, quando é aplicado ao provete um carregamento harmónico, $f(t) = Fe^{j\omega t}$, a resposta em regime estacionário será também do tipo harmónico, $x(t) = Xe^{(j\omega - \delta)t}$, com a mesma frequência da excitação ω , apresentando no entanto um desfasamento relativo δ .

A configuração do provete e a forma de carregamento poderão ser escolhidos de modo a impor no material viscoelástico uma deformação extensional ou uma deformação de corte, conseguindo-se assim determinar directamente o módulo extensional ou o módulo de corte complexos, respectivamente.

O provete de ensaio pode assumir diversas configurações, desde um simples bloco de material viscoelástico associado a um bloco rígido de massa conhecida, constituindo um hipotético sistema com um grau de liberdade, até sistemas mais complexos, como, por exemplo, as vigas e placas com tratamento, onde a camada de material viscoelástico é caracterizada através da perturbação causada no sistema original.

Os ensaios são realizados em ambiente de temperatura controlada, dada a elevada dependência das propriedades dos materiais viscoelásticos com a mesma. Normalmente, a temperatura da câmara de ensaio pode variar dentro de uma gama relativamente larga, permitindo desta forma recorrer ao princípio da correspondência frequência-temperatura (2.4.2) para, por um lado, correlacionar e validar medições efectuadas a diferentes temperaturas e, por outro, maximizar as gamas de frequência e de temperatura da medição.

2.3.1 Sistema discreto com um grau de liberdade

O sistema com um grau de liberdade, onde o bloco ou camadas de material viscoelástico representam a rigidez do sistema, é caracterizado, por um lado, pela simplicidade associada ao tratamento matemático do modelo analítico e dos dados medidos e, por outro, pela dificuldade inerente à obtenção de uma montagem experimental capaz de representar convenientemente o modelo teórico considerado.

Configuração do sistema de medição

No sistema com um grau de liberdade, o material viscoelástico assume a função de mola enquanto que um bloco rígido de massa conhecida M constitui a massa concentrada. O sistema pode ser configurado de forma a deformar o material viscoelástico em corte (Figura 2.4.a) ou em compressão-extensão (Figura 2.4.b).

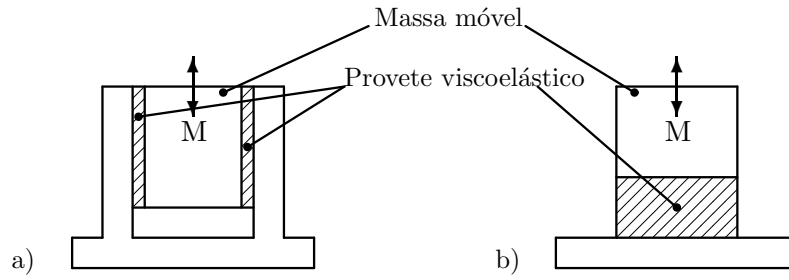


Figura 2.4: Sistema com um grau de liberdade

A rigidez complexa equivalente é calculada em função dos parâmetros dimensionais do provete de material viscoelástico e do seu módulo complexo, na forma:

- provete em corte:

$$\bar{K} = \bar{G} \frac{A_C}{h} \quad (2.14)$$

- $\bar{G}$: módulo complexo de corte do material viscoelástico
- A_C : área transversal do provete
- h : espessura do provete

- provete em extensão-compressão:

$$\bar{K} = \bar{E} \frac{A_E}{L} \quad (2.15)$$

- $\bar{E}$: módulo complexo extensional do material viscoelástico
- A_E : área transversal do provete
- L : comprimento do provete em extensão

Como referido, embora esta configuração permita representar hipoteticamente um sistema teórico que permite um tratamento matemático simples e directo na caracterização do módulo complexo do material viscoelástico, é, contudo, muito difícil impor restrições na montagem experimental de forma a que esta possua unicamente o grau de liberdade considerado. Com efeito, a concretização do sistema simples ilustrado na Figura 2.4 apresenta, para além do modo de vibração correspondente à translação vertical, um modo de rotação (segundo o eixo transversal do conjunto), cuja frequência é inferior mas muito próxima do modo pretendido. Torna-se assim importante restringir este movimento.

A aplicação de um guiamento físico, como, por exemplo, um guiamento pressurizado [75], deve ser criteriosamente analisada dada a possibilidade de introduzir no sistema fontes de erro desconhecidas (amortecimento viscoso e rigidez de um guiamento lubrificado, rigidez de um guiamento elástico, etc).

Allen [76] utiliza um sistema com um grau de liberdade, teoricamente representado pela Figura 2.4.a, onde o guiamento é proporcionado pela suspensão do núcleo móvel do próprio excitador. Trata-se de um excitador electromagnético propositadamente construído para o efeito que possui um guiamento do seu eixo móvel. A ligação entre a massa móvel do sistema e o eixo móvel do excitador é realizada por um bloco rígido de material cerâmico, de forma a evitar a condução térmica.

Kergourlay e Balmès [77] impõem o guiamento através da adopção de provetes *sandwich* com uma geometria específica que permitem restringir os movimentos extra da massa móvel. Todavia, esta solução apresenta alguns inconvenientes, nomeadamente a presença de um modo natural espúrio cuja frequência se situa na gama de análise, a necessidade de utilização de provetes específicos que necessitam de ser propositadamente maquinados e a grande dimensão da montagem experimental. Por outro lado, utiliza um excitador electromagnético e equipamento de medição convencionais. Este sistema foi posteriormente modificado [78] de forma a restringir o grau de liberdade espúrio, através da introdução de uma rigidez adicional, e adoptando um sistema analítico com dois graus de liberdade.

Medição da resposta do sistema

Neste método de caracterização, também designado na literatura por método de impedância, a caracterização do material viscoelástico é realizada através da rigidez complexa da mola, $\bar{K}$, do sistema teórico com um grau de liberdade (Figura 2.5), determinada a partir da sua resposta.

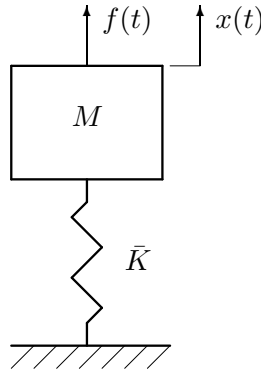


Figura 2.5: Sistema com um grau de liberdade - Medição da resposta

A equação de movimento do sistema com um grau de liberdade e massa M é definida como:

$$M\ddot{x}(t) + \bar{K}x(t) = f(t) \quad (2.16)$$

Considerando que o carregamento imposto é harmónico, $f(t) = Fe^{j\omega t}$, a resposta do sistema será também harmónica do tipo $x(t) = \bar{X}e^{j\omega t}$, sendo possível reescrever a equação de movimento do sistema na forma:

$$[-\omega^2 M + \bar{K}]\bar{X} = \bar{F} \quad (2.17)$$

A função de resposta em frequência e respectiva inversa podem, então, ser determinadas na forma:

• Receptância, α	• Rigidez dinâmica, $\mathcal{Z}$
$\alpha(\omega) = \frac{\bar{X}}{\bar{F}} = \frac{1}{-\omega^2 M + \bar{K}}$	$\mathcal{Z}(\omega) = \frac{\bar{F}}{\bar{X}} = -\omega^2 M + \bar{K}$

(2.18a)

- Mobilidade, Y
- Impedância mecânica, $\mathcal{I}$

$$Y(\omega) = \frac{j\omega\bar{X}}{F} = \frac{j\omega}{-\omega^2 M + \bar{K}} \quad \mathcal{I}(\omega) = \frac{F}{j\omega\bar{X}} = \frac{-\omega^2 M + \bar{K}}{j\omega} \quad (2.18b)$$

- Aceleração, A
- Massa aparente, $\mathcal{M}$

$$A(\omega) = \frac{-\omega^2\bar{X}}{F} = \frac{\omega^2}{\omega^2 M - \bar{K}} \quad \mathcal{M}(\omega) = \frac{F}{-\omega^2\bar{X}} = \frac{\omega^2 M - \bar{K}}{\omega^2} \quad (2.18c)$$

A determinação da componente real da rigidez complexa, $K = \text{RE}(\bar{K})$, que permite caracterizar o módulo de ganho do material viscoelástico, e do factor de perda, $\eta = \frac{\text{IM}(\bar{K})}{\text{RE}(\bar{K})}$, torna-se relativamente mais simples utilizando directamente as inversas das funções de resposta em frequência (rigidez dinâmica, impedância mecânica e massa aparente). Desta forma, é possível determinar a rigidez complexa em função das inversas das funções de resposta em frequência através das seguintes expressões:

- Rigidez dinâmica, $(K, \eta) = f(\mathcal{Z})$

$$\bar{K} = \omega^2 M + \mathcal{Z} \quad (2.19a)$$

$$K(\omega) = \omega^2 M + \text{RE}(\mathcal{Z}) \quad \eta(\omega) = \frac{\text{IM}(\mathcal{Z})}{\omega^2 M + \text{RE}(\mathcal{Z})}$$

- Impedância mecânica, $(K, \eta) = f(\mathcal{I})$

$$\bar{K} = \omega^2 M + j\omega\mathcal{I} \quad (2.19b)$$

$$K(\omega) = \omega[\omega M - \text{IM}(\mathcal{I})] \quad \eta(\omega) = \frac{\text{RE}(\mathcal{I})}{\omega M - \text{IM}(\mathcal{I})}$$

- Massa aparente, $(K, \eta) = f(\mathcal{M})$

$$\bar{K} = \omega^2 M - \omega^2 \mathcal{M} \quad (2.19c)$$

$$K(\omega) = \omega^2[M - \text{RE}(\mathcal{M})] \quad \eta(\omega) = -\frac{\text{IM}(\mathcal{M})}{M - \text{RE}(\mathcal{M})}$$

Medição da transmissibilidade do sistema

O sistema com um grau de liberdade pode ser modificado para a configuração de base móvel (Figura 2.6), a qual descreve um movimento harmónico, $x_0(t) = X_0 e^{j\omega t}$, sendo a caracterização do material viscoelástico realizada através da medição da função transmissibilidade absoluta entre a base e a massa concentrada M .

O movimento do sistema com um grau de liberdade excitado pela base móvel é descrito pela equação do movimento:

$$M\ddot{x}(t) + \bar{K}(x(t) - x_0(t)) = 0 \quad (2.20)$$

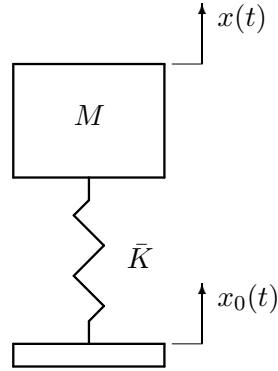


Figura 2.6: Sistema com um grau de liberdade - Medição da transmissibilidade

Como o movimento da base móvel é do tipo harmónico, a massa concentrada M descreve um movimento igualmente harmónico com a mesma frequência, todavia desfasado da oscilação da base em resultado do amortecimento viscoelástico, do tipo $x(t) = \bar{X}e^{j\omega t}$. Assim, a equação de movimento do sistema pode ser reescrita na forma:

$$[-\omega^2 M + \bar{K}] \bar{X} = \bar{K} X_0 \quad (2.21)$$

A função transmissibilidade absoluta do sistema pode então ser calculada pela equação:

$$T = \frac{\bar{X}}{X_0} = \frac{\bar{K}}{-\omega^2 M + \bar{K}} \quad (2.22)$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a $\bar{K}$ obtemos a seguinte relação:

$$\bar{K}(\omega) = \omega^2 M \left[\frac{T}{T - 1} \right] \quad (2.23)$$

Separando a rigidez complexa na sua componente real, K , e no respectivo factor de perda, η , obtemos:

$$K(\omega) = \omega^2 M \left[\frac{\text{RE}(T)(\text{RE}(T) - 1) + (\text{IM}(T))^2}{(\text{RE}(T) - 1)^2 + (\text{IM}(T))^2} \right] \quad (2.24a)$$

$$\eta(\omega) = \frac{-\text{IM}(T)}{\text{RE}(T)(\text{RE}(T) - 1) + (\text{IM}(T))^2} \quad (2.24b)$$

Tal como na caracterização baseada na medição da resposta do sistema, a determinação da rigidez complexa a partir da inversa da função transmissibilidade absoluta apresenta uma formulação mais simples. Assim, a inversa da função transmissibilidade é definida por:

$$T^{-1} = \frac{\bar{K} - \omega^2 M}{\bar{K}} \quad (2.25)$$

que pode ser reescrita de forma a determinar a rigidez complexa como:

$$\bar{K}(\omega) = \frac{\omega^2 M}{1 - T^{-1}} \quad (2.26)$$

ou, nas suas componentes, como:

$$K(\omega) = \omega^2 M \left[\frac{\text{RE}(T^{-1}) - 1}{(\text{RE}(T^{-1}) - 1)^2 + (\text{IM}(T^{-1}))^2} \right] \quad (2.27a)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\text{IM}(T^{-1})}{\text{RE}(T^{-1}) - 1} \quad (2.27b)$$

2.3.2 Sistema discreto com dois graus de liberdade

Quando o sistema com um grau de liberdade (Figura 2.5) é usado para caracterizar o material viscoelástico através da medição da sua resposta, torna-se particularmente importante a imposição da condição de fronteira de encastramento na montagem experimental. No entanto, a imposição física dessa condição de fronteira é normalmente muito difícil. Assim, face ao elevado amortecimento presente nos materiais viscoelásticos testados, qualquer perturbação da resposta resultante do encastramento da montagem, por muito insignificante que seja, poderá invalidar a caracterização do material a partir da resposta do sistema.

Em alternativa, é usual constituir um sistema com dois graus de liberdade (Figura 2.7) formado por duas massas concentradas, uma das quais, m , que representa a base do sistema, é suspensa na montagem experimental de forma a obter a condição de fronteira livre. O sistema tem obviamente modos de corpo rígido que são facilmente controlados na montagem experimental, não constituindo qualquer tipo de problema na medição da resposta do sistema.

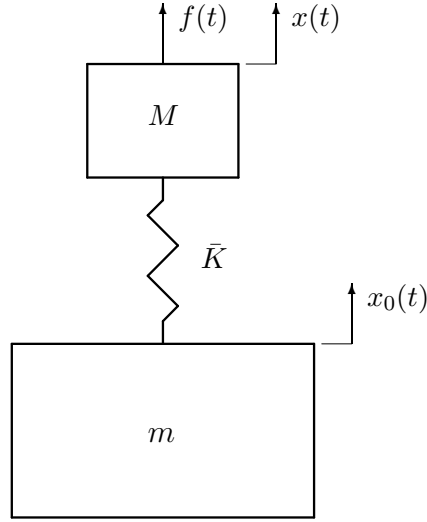


Figura 2.7: Sistema com dois graus de liberdade

A equação do movimento do sistema é definida pelo sistema de equações da forma:

$$\begin{cases} M\ddot{x}(t) + \bar{K}(x(t) - x_0(t)) = f(t) \\ m\ddot{x}_0(t) + \bar{K}(x_0(t) - x(t)) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Considerando que o carregamento $f(t)$ é harmónico, $f(t) = Fe^{j\omega t}$, podemos reescrever a equação do movimento na forma:

$$\begin{cases} (-\omega^2 M + \bar{K})\bar{X} - \bar{K}\bar{X}_0 = F \\ (-\omega^2 m + \bar{K})\bar{X}_0 - \bar{K}\bar{X} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Após resolução do sistema de equações, definem-se as seguintes inversas das funções de resposta em frequência:

- Rigidez dinâmica, $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z} = \frac{F}{\bar{X}} = \frac{(-\omega^2 M + \bar{K})(-\omega^2 m + \bar{K}) - \bar{K}^2}{-\omega^2 m + \bar{K}} \quad (2.30a)$$

- Impedância mecânica , $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} = \frac{F}{j\omega\bar{X}} = \frac{(-\omega^2 M + \bar{K})(-\omega^2 m + \bar{K}) - \bar{K}^2}{j\omega(-\omega^2 m + \bar{K})} \quad (2.30b)$$

- Massa aparente, $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \frac{F}{-\omega^2\bar{X}} = \frac{(-\omega^2 M + \bar{K})(-\omega^2 m + \bar{K}) - \bar{K}^2}{-\omega^2(-\omega^2 m + \bar{K})} \quad (2.30c)$$

Explicitando as expressões anteriores para a rigidez complexa, obtém-se, respectivamente:

- Rigidez dinâmica, $(\bar{K}) = f(\mathcal{Z})$

$$\bar{K} = \omega^2 m \frac{M\omega^2 + \mathcal{Z}}{(M + m)\omega^2 + \mathcal{Z}} \quad (2.31a)$$

- Impedância mecânica, $(\bar{K}) = f(\mathcal{I})$

$$\bar{K} = \omega^2 m \frac{M\omega^2 + j\omega\mathcal{I}}{(M + m)\omega^2 + j\omega\mathcal{I}} \quad (2.31b)$$

- Massa aparente, $(\bar{K}) = f(\mathcal{M})$

$$\bar{K} = \omega^2 m \frac{M\omega^2 - \omega^2\mathcal{M}}{(M + m)\omega^2 - \omega^2\mathcal{M}} \quad (2.31c)$$

Em alternativa, medindo o deslocamento, a velocidade ou a aceleração relativas entre as duas massas, podemos obter as inversas das funções de resposta em frequência relativas na forma:

- Rigidez dinâmica relativa , $\mathcal{Z}_R$

$$\mathcal{Z}_R = \frac{F}{\bar{X} - \bar{X}_0} = -\omega^2 M + \frac{M + m}{m} \bar{K} \quad (2.32a)$$

- Impedância mecânica relativa, $\mathcal{I}_R$

$$\mathcal{I}_R = \frac{F}{j\omega(\bar{X} - \bar{X}_0)} = \frac{-\omega^2 M + \frac{M + m}{m} \bar{K}}{j\omega} \quad (2.32b)$$

- Massa aparente relativa, $\mathcal{M}_R$

$$\mathcal{M}_R = \frac{F}{-\omega^2(\bar{X} - \bar{X}_0)} = \frac{\omega^2 M - \frac{M + m}{m} \bar{K}}{\omega^2} \quad (2.32c)$$

as quais permitem determinar a rigidez complexa equivalente:

- Rigidez dinâmica relativa, $(K, \eta) = f(\mathcal{Z}_R)$

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{m}{M + m} [\omega^2 M + \mathcal{Z}_R] \\ K(\omega) &= \frac{m}{M + m} [\omega^2 M + \text{RE}(\mathcal{Z}_R)] \quad \eta(\omega) = \frac{\text{IM}(\mathcal{Z}_R)}{\omega^2 M + \text{RE}(\mathcal{Z}_R)} \end{aligned} \quad (2.33a)$$

- Impedância mecânica relativa, $(K, \eta) = f(\mathcal{I}_R)$

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \frac{m}{M+m} [\omega^2 M + j\omega \mathcal{I}_R] \\ K(\omega) &= \frac{m\omega}{M+m} [\omega M - \text{IM}(\mathcal{I}_R)]\end{aligned}\quad \eta(\omega) = \frac{\text{RE}(\mathcal{I}_R)}{\omega M - \text{IM}(\mathcal{I}_R)} \quad (2.33b)$$

- Massa aparente relativa, $(K, \eta) = f(\mathcal{M}_R)$

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \frac{m}{M+m} [\omega^2 M - \omega^2 \mathcal{M}_R] \\ K(\omega) &= \frac{m\omega^2}{M+m} [M - \text{RE}(\mathcal{M}_R)]\end{aligned}\quad \eta(\omega) = -\frac{\text{IM}(\mathcal{M}_R)}{M - \text{RE}(\mathcal{M}_R)} \quad (2.33c)$$

2.3.3 Considerações sobre os sistema discretos

Como referido, os sistemas discretos com um ou dois graus de liberdade permitem utilizar uma descrição muito simples do modelo teórico, o que facilita a identificação dos valores do módulo complexo do material a partir das medições efectuadas. No entanto, a obtenção do modelo teórico na montagem experimental não é simples, sendo necessário recorrer a artifícios, como sistemas de guiamento ou condições de fronteira livre, para obter uma aproximação razoável ao modelo teórico.

Apesar da dificuldade inerente à montagem experimental, este método de caracterização, recorrendo quer à medição da resposta do sistema quer à medição da sua transmissibilidade, é amplamente aplicado na determinação experimental de um vasto conjunto de materiais viscoelásticos, desde fibras finas viscoelásticas [75] a espumas poliméricas rígidas [79].

Dependendo do tipo de material, nomeadamente do seu módulo de ganho, dever-se-á optar entre a configuração em corte ou a configuração em extensão-compressão. Esta última, embora mais fácil de implementar experimentalmente, requer um maior cuidado no tratamento e validação dos resultados. De facto, nesta configuração utilizam-se, normalmente, provetes cilíndricos e espessos [80], o que, por uma lado, invalida o modelo teórico com um único grau de liberdade e, por outro, introduz no cálculo do módulo complexo a partir da rigidez complexa medida um erro associado à expansão radial do provete, sendo necessário aplicar um factor de correcção [81]. Agee e Mitchell [81] utilizam um modelo com três graus de liberdade, considerando três massas concentradas representativas da base oscilante do sistema (incluindo a massa da célula de carga ou acelerómetro de referência), da massa do material viscoelástico e da massa móvel, que

inclui, para além do bloco rígido móvel, a massa do acelerómetro de medição da sua resposta. Ramorino *et al.* [82] propõem uma montagem alternativa, aplicando um conjunto de provetes dispostos circunferencialmente, apresentando bons resultados.

Na configuração em corte, a reduzida espessura da camada viscoelástica permite atenuar os efeitos da deformação espúria do provete, sendo no entanto necessário ter em consideração a dimensão mínima deste, de forma a evitar o efeito de bordo [21]. Nesta configuração é também necessário ter em consideração a amplitude de deformação de forma a manter a linearidade da resposta.

Embora a configuração habitual esteja associada a um movimento de translação, tanto na configuração em corte como na configuração extensional, é também possível configurar a montagem experimental de forma a impor ao sistema um movimento de rotação, medindo a resposta do sistema em torção [83]. No entanto, a instrumentação e adaptação associada à medição da resposta do sistema em termos de rotações e binário é mais complicada e sujeita a mais fontes de erro (desequilíbrio das massas em rotação e sensibilidade aos parâmetros dimensionais na conversão da resposta em translação medida para resposta em rotação).

A determinação da resposta do sistema pode ser realizada através de um ensaio ressonante, caracterizando-se o sistema e o material viscoelástico com base nas propriedades modais do sistema experimental, ou de um ensaio não-ressonante, que permite obter uma caracterização do material ao longo de uma gama larga de frequências. Enquanto que no primeiro tipo de ensaio a excitação é usualmente sinusoidal, ajustando-se o valor da frequência para determinar a frequência de ressonância e a amplitude de resposta, no ensaio não ressonante recorre-se normalmente a uma excitação de varrimento sinusoidal ou uma excitação aleatória com ruído branco de forma a obter a resposta do sistema na gama de frequências considerada.

O ensaio ressonante é caracterizado pela simplicidade na determinação da rigidez complexa do sistema, mas requer a aplicação de blocos de massa diferente para caracterizar a rigidez complexa para outros valores de frequência. Normalmente, utiliza-se o princípio da correspondência frequência-temperatura, para, utilizando o mesmo sistema a diferentes temperaturas, caracterizar o material viscoelástico num conjunto mais vasto de valores de frequência. Para além disso, a sua aplicação é restrita a materiais viscoelásticos com um factor de perda de valor relativamente baixo.

O ensaio não ressonante, embora permita obter numa só medição a caracterização do módulo complexo do material viscoelástico para toda a gama de frequências analisada, requer alguns cuidados suplementares, nomeadamente no tipo de excitação aplicada e na linearidade da resposta, sendo usualmente aplicado na caracterização de materiais com elevado amortecimento [8].

A aplicação de um varrimento sinusoidal não permite obter as condições isotérmicas ideais já que a dissipação de energia que ocorre dentro do provete de material viscoelástico depende fortemente da frequência de excitação. Assim, a variação de temperatura dentro do provete torna-se uma incógnita impossível de determinar [84]. A excitação aleatória permite minimizar os efeitos da variação de temperatura, introduzindo no entanto erros de medição e de processamento que dificultam a caracterização do material viscoelástico.

Uma vez que a rigidez do sistema é exclusivamente devida ao elemento viscoelástico a caracterizar, exceptuando as montagens experimentais que recorrem a elementos de rigidez adicional para guiar a massa móvel, a resposta do sistema apresenta um elevado amortecimento que dificulta a sua análise e a determinação dos efeitos devidos aos erros da cadeia de medição, montagem experimental e outros erros associados. Se, por um lado, e de forma a reduzir o efeito desses erros, é necessário impor ao provete viscoelástico uma deformação considerável, maximizando assim a sua resposta, por outro, tem de se evitar a zona de comportamento não linear do material [79].

O processo de caracterização dos materiais viscoelásticos através da determinação da resposta de sistemas discretos apresenta um elevada sensibilidade ao sistema de medição, nomeadamente ao acelerómetro que mede a resposta da massa móvel [84]. Agee e Mitchell [81] referem a importância da selecção de um acelerómetro com uma elevada frequência de ressonância e uma massa reduzida, e correctamente avaliada, de forma a maximizar a gama de frequências da análise e minimizar o carregamento estático do provete viscoelástico em resultado da massa móvel. No método de medição da resposta do sistema, a selecção do transdutor de força não é tão crítica, já que a construção destes transdutores confere-lhes uma elevada rigidez e uma elevada frequência de ressonância, sendo contudo extremamente importante uma determinação correcta da sua massa activa [9, 81]. Neste método é ainda usual a aplicação de uma cabeça de impedância para medir simultaneamente e na mesma localização a força e a aceleração da massa móvel [85].

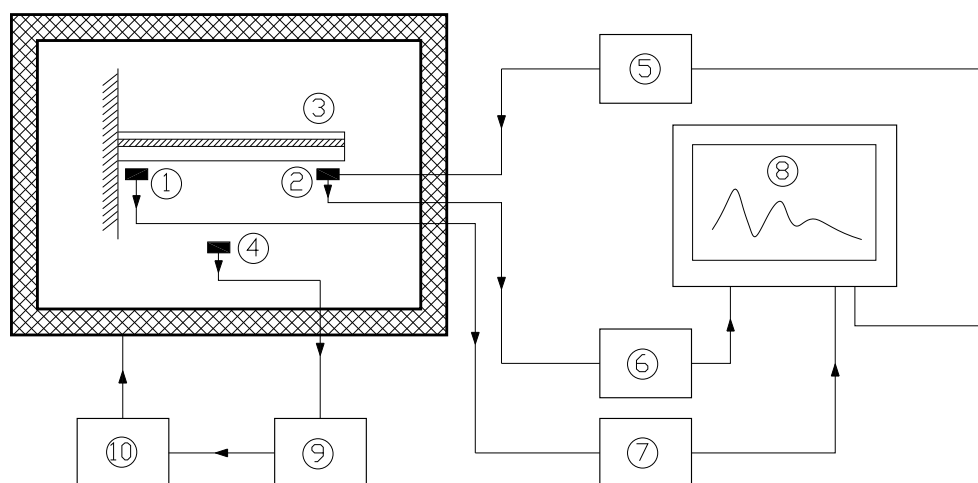
Em suma, os métodos de caracterização baseados em sistemas discretos com um grau de liberdade (ou eventualmente com dois ou três graus de liberdade) permitem uma identificação directa do módulo complexo do material em função da frequência a partir da medição efectuada. Por outro lado, a aplicação deste método na caracterização de materiais com elevado amortecimento deve revestir-se de alguns cuidados especiais, pois apresenta uma elevada sensibilidade ao ruído inerente à cadeia de medição, aos efeitos colaterais devidos à montagem experimental e aos parâmetros dimensionais do sistema, nomeadamente aos valores das massas móveis.

2.3.4 Vigas com tratamento

A caracterização de camadas de material viscoelástico aplicadas em vigas constitui o processo de determinação do módulo complexo vulgarmente aplicado pelos fabricantes e utilizadores de materiais viscoelásticos para aplicações de amortecimento passivo. Este método de caracterização constitui a principal forma de determinação do módulo complexo de materiais viscoelásticos, apresentando, no entanto, um conjunto de limitações que condicionam a validade dos resultados obtidos. Por esta razão é aqui realizada uma análise detalhada deste método de identificação do módulo complexo, dando especial relevo às suas condicionantes e às hipóteses simplificativas usualmente consideradas.

Neste método é utilizada uma viga, usualmente encastrada-livre, sobre a qual é aplicado um tratamento viscoelástico com ou sem restrição. O material viscoelástico é caracterizado a partir da modificação introduzida pelo tratamento nas frequências naturais e no factor de perda modal para um conjunto restrito de modos naturais de baixa ordem, normalmente os três primeiros modos naturais da viga. O conjunto é colocado dentro de uma câmara termostática (Figura 2.8), permitindo caracterizar o material ao longo de uma larga gama de temperaturas, utilizando o princípio da correspondência frequência-temperatura para determinar o módulo complexo do material para uma vasta gama de pares de frequência e de temperatura.

Este método de determinação do módulo complexo de tratamentos viscoelásticos é regido pela norma ASTM “*E756-98 Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials*” [86] que estabelece, principalmente, indicações para o ensaio, configurações da viga, dimensões dos provetes e formulário para determinação do módulo complexo a partir dos parâmetros modais da viga.



1 - sensor electromagnético	6 - condicionador do sensor de carga
2 - actuador electromagnético	7 - condicionador do sensor de vibração
3 - viga compósita	8 - analisador espectral
4 - sensor de temperatura	9 - transdutor de temperatura
5 - amplificador da excitação	10 - controlador de temperatura

Figura 2.8: Montagem experimental do sistema de medição com viga compósita

O conjunto viga e tratamento viscoelástico pode assumir diferentes configurações, permitindo caracterizar o módulo extensional ou o módulo de corte consoante o tipo de deformação imposto à camada viscoelástica.

A forma mais simples resulta da aplicação de uma camada viscoelástica sem restrição sobre uma viga metálica, constituindo a configuração usualmente designada por viga de *Oberst* (ou mais correctamente por viga de *Oberst* modificada). A viga de *Van Oort* é obtida pela aplicação simétrica de duas camadas em ambas as faces da viga, permitindo desta forma simplificar a expressão que define a rigidez de flexão da viga compósita. Nestas duas configurações, o material viscoelástico é deformado em extensão, permitindo a caracterização do seu módulo extensional complexo. Por outro lado, utilizando uma configuração de viga *sandwich* ou dupla *sandwich*, a camada de material viscoelástico é colocada entre duas vigas metálicas que promovem a sua deformação de corte. Desta forma, é possível caracterizar directamente o módulo de corte complexo do material.

A escolha da configuração depende principalmente da aplicação final do tratamento e do módulo de ganho do material viscoelástico, sendo normalmente utilizada a configuração de camada sem restrição (*Oberst* ou *Van Oort*) para a caracterização de materiais rígidos, com um módulo de ganho superior a 100 MPa [86].

Na montagem original do método de *Oberst* [47], a viga é encastrada numa das extremidades, sendo excitada na extremidade oposta por um transdutor magnético que induz um carregamento harmónico sobre um pequeno disco magnético colado na extremidade da viga. A medição da resposta da viga é realizada através de um transdutor electromagnético colocado junto ao encastramento, de forma a reduzir a interferência produzida pelo excitador (Figura 2.8). Esta configuração é aplicada por Collot [87], que utiliza a montagem experimental Brüel & Kjær 3920, a qual recorre a um transdutor electromagnético actuando junto ao encastramento para excitar a viga e a um transdutor capacitivo para medir a resposta da viga junto à sua extremidade livre.

Alternativamente, pode utilizar-se um excitador electromagnético ligado à viga por uma haste fina e por uma célula de carga, ou um martelo instrumentado [9], o que, se por um lado permite evitar o efeito da massa concentrada do disco magnético ou da célula de carga, por outro não constitui uma solução a aplicar em ensaios isotérmicos nos quais a viga é colocada dentro de uma câmara com temperatura controlada. A excitação pode também ser aplicada através de um elemento piezoeléctrico colado na zona próxima do

encastramento da viga. Por seu lado, a medição da resposta da viga pode ser realizada por um acelerómetro piezoeléctrico de pequenas dimensões ou por um transdutor sem contacto, como por exemplo um vibrómetro laser ou um transdutor de posição electromagnético.

Qualquer que seja o método utilizado para excitar e medir a resposta da viga, o procedimento de caracterização do material viscoelástico é desenvolvido em duas fases. Em primeiro lugar é medida a resposta da viga base de forma a determinar as frequências naturais da viga não amortecida² na gama de temperaturas considerada. A resposta da viga com tratamento é, em seguida, medida para as mesmas temperaturas aplicadas na caracterização da viga base, determinando-se as frequências naturais da viga amortecida e os factores de perda modais associados utilizando um processo de identificação modal, aplicando, por exemplo, o método de ajustamento circular (*circle-fitting*) ou o método da largura de banda.

Refira-se, ainda, que é necessário um especial cuidado na aplicação da excitação, de forma a evitar os modos de torção da viga. No entanto, para a viga amortecida com o tratamento viscoelástico, é possível verificar a validade da medição, comparando as razões entre as frequências naturais experimentais e as razões das frequências teóricas da viga base. No processo de caracterização usando uma câmara termostática, é também necessário garantir a perfeita homogeneização da temperatura, não só no interior da câmara mas principalmente na própria viga, razão pela qual o alumínio é usualmente empregue no fabrico das vigas base deste método de caracterização de materiais viscoelásticos.

Viga de *Oberst*

Como referido, a viga de *Oberst* modificada é obtida pela colocação de uma camada sem restrição do material viscoelástico a caracterizar, como ilustrado na Figura 2.9.

A viga base, preferencialmente metálica (alumínio ou aço inoxidável), é inicialmente caracterizada de forma a identificar as suas primeiras frequências naturais ω_{r0} para a gama de temperaturas considerada. Em seguida, é aplicada a camada de material viscoelástico

²Normalmente considera-se que o amortecimento material da viga base é muito reduzido e, assim, desprezável. Obviamente esta simplificação só é válida para vigas base metálicas, usualmente alumínio e aço inoxidável, não o sendo para vigas base compósitas de matriz polimérica.

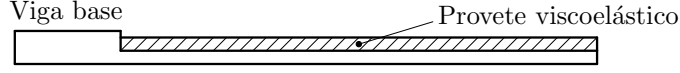


Figura 2.9: Viga de *Oberst*

sobre a viga, utilizando para o efeito um adesivo usualmente de base epóxida, a qual é ensaiada de forma a obter as novas frequências naturais, ω_r , e correspondentes factores de perda modais, η_r .

A razão entre a rigidez de flexão da viga amortecida e não amortecida é calculada recorrendo à expressão (Apêndice B):

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2\right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}}\right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (2.34)$$

onde ρ_1 e ρ_2 representam as massas volúmicas dos materiais constituintes da viga base e da camada viscoelástica, respectivamente, E_1 o módulo de elasticidade do material da viga base e I e I_1 os momentos de segunda ordem da secção recta da camada viscoelástica e da viga base. O parâmetro adimensional h_2 traduz a razão entre a espessura da camada viscoelástica H_2 e a espessura da viga base H_1 .

A razão de rigidez $\bar{\mathcal{R}}$ é aplicada no cálculo do módulo extensional complexo do material viscoelástico através da expressão (Apêndice A):

$$\bar{E}_2 = E_1 \frac{-\hat{h} + \sqrt{\hat{h}^2 + 4h_2^2(\bar{\mathcal{R}} - 1)}}{2h_2^2} \quad (2.35)$$

onde o parâmetro auxiliar $\hat{h}$ é definido por:

$$\hat{h} = (4 - \bar{\mathcal{R}} + 4h_2^2 + 6h_2) \quad (2.36)$$

Para cada temperatura de ensaio são obtidos os valores do módulo extensional complexo para os valores de frequência correspondentes às frequências naturais da viga amortecida, recorrendo-se ao princípio da correspondência frequência-temperatura para juntar as medições obtidas para os vários pares de frequência-temperatura sob a forma de uma curva única (2.4.2).

Viga de *Van Oort*

Na viga de *Van Oort* são coladas duas camadas idênticas de material viscoelástico, uma em cada lado da viga, como ilustrado na Figura 2.10.



Figura 2.10: Viga de *Van Oort*

Esta configuração permite evitar o problema associado à elevada diferença entre os coeficientes de dilatação térmica dos materiais constituintes da viga de *Oberst*, que induz a flexão da viga quando submetida a temperaturas extremas relativamente à temperatura de montagem. Por outro lado, dado que a posição do eixo neutro da viga compósita permanece inalterada relativamente à posição inicial da viga não amortecida, esta configuração permite uma simplificação significativa na expressão que define a rigidez de flexão da viga compósita (Apêndice A).

O processo de caracterização é realizado de forma idêntica à descrita na viga de *Oberst*, utilizando as frequências naturais da viga base e da viga tratada, bem como os factores de perda modais da viga tratada, para calcular a razão de rigidez de flexão através da expressão (Apêndice B):

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(1 + 2\frac{\rho_2}{\rho_1} h_2\right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}}\right)^2 (1 + \eta \eta_r) \quad (2.37)$$

A razão de rigidez de flexão é utilizada para determinar o módulo extensional complexo do material viscoelástico através da expressão (Apêndice A):

$$\bar{E}_2 = E_1 \frac{\bar{\mathcal{R}} - 1}{(1 + 2h_2)^3 - 1} \quad (2.38)$$

que é significativamente mais simples comparativamente à expressão homóloga referente à viga de *Oberst*.

Viga *sandwich*

Quando o material viscoelástico a caracterizar apresenta um reduzido módulo de ganho e/ou se pretende caracterizar directamente o seu módulo de corte complexo, é utilizada uma configuração de tratamento integrado sob a forma de uma viga *sandwich*. Esta configuração, ilustrada na Figura 2.11, é obtida através da colocação de uma camada fina de material viscoelástico entre duas vigas metálicas idênticas, obtendo-se uma viga *sandwich* simétrica. A simetria da viga permite simplificar a expressão da rigidez de flexão da viga compósita.

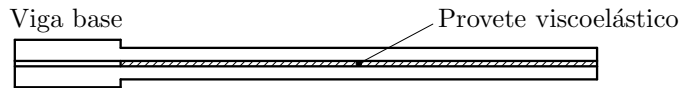


Figura 2.11: Viga *sandwich*

Para determinar a equação da rigidez de flexão da viga *sandwich* utilizam-se as equações de *Ross-Kerwin-Ungar* [49], doravante designadas por equações *RKU* e apresentadas no Apêndice A, que são obtidas com base num conjunto restritivo de hipóteses simplificativas.

Em primeiro lugar, as equações são desenvolvidas considerando as condições de fronteira da viga simplesmente apoiada, em virtude da simplicidade associada às suas formas naturais e respectivas derivadas (Apêndice A). No entanto, uma montagem experimental que permita obter as condições de fronteira de viga simplesmente apoiada não é fácil de realizar na prática. A montagem com vigas encastradas-livres é mais simples de obter, permite simplificar a montagem do equipamento de excitação e de medida e evita os problemas de dilatação térmica associados às vigas duplamente encastradas. Assim, torna-se necessário aplicar um processo de correcção aos valores obtidos na caracterização do material viscoelástico usando esta configuração da montagem experimental.

As equações *RKU* para o caso da viga *sandwich* simétrica podem ainda ser simplificadas desprezando o efeito da rigidez de flexão do núcleo viscoelástico, ou seja, considerando que o seu módulo extensional é nulo. O erro associado a esta simplificação é, normalmente, insignificante devido ao reduzido módulo de ganho exibido por este tipo de materiais,

conseguindo-se com esta hipótese simplificativa inverter facilmente a equação da viga *sandwich* de forma a caracterizar directamente o módulo de corte complexo do material viscoelástico.

Na etapa inicial do processo de caracterização são determinadas as frequências naturais de uma das vigas metálicas, ω_{0r} . Em seguida, e usando uma metodologia idêntica à descrita nas configurações anteriores, são obtidas as frequências naturais ω_r e correspondentes factores de perda modais η_r da viga *sandwich*. Este processo é repetido para todos os valores de temperatura considerados.

A razão de rigidez de flexão da viga compósita é obtida a partir dos valores medidos aplicando a expressão (Apêndice B):

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2\right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}}\right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (2.39)$$

As razões de rigidez calculadas são aplicadas na determinação do parâmetro de corte $\bar{g}$ através da expressão (Apêndice A):

$$\bar{g} = \frac{\bar{\mathcal{R}} - 2}{12(1 + h_2)^2 - 2\bar{\mathcal{R}} + 4} \quad (2.40)$$

que permite calcular o módulo de corte complexo do material viscoelástico pela relação:

$$\bar{G}_2 = \bar{g} p^2 E_1 H_1 H_2 \quad (2.41)$$

onde o parâmetro p depende da forma modal correspondente à frequência natural em análise (Tabela 2.1). Os parâmetros E_1 , H_1 e H_2 representam o módulo extensional do material constituinte das vigas externas, a espessura de cada uma das vigas externas e a espessura da camada viscoelástica, respectivamente.

Com base no trabalho publicado por Rao [56], é possível determinar um factor correctivo adicional [9] a aplicar ao parâmetro de corte de forma a obter os valores correctos do módulo complexo para os modos naturais de ordem mais baixa.

Tabela 2.1: Parâmetro p para a viga encastrada

r	p^2
1	3.516 $/L^2$
2	22.035 $/L^2$
3	61.697 $/L^2$
4	120.90 $/L^2$
5	199.86 $/L^2$
6	298.56 $/L^2$
$\vdots$	$\vdots$
m	$(2m - 1)^2 \pi^2 / 4L^2$
L : comprimento da viga exposta	

Viga *sandwich* dupla

A determinação do módulo de corte complexo de materiais viscoelásticos pouco rígidos pode também ser realizada através de uma viga tratada com duas camadas viscoelásticas com restrição, formando um viga *sandwich* dupla, como ilustrado na Figura 2.12.



Figura 2.12: Viga *sandwich* dupla

Esta configuração permite uma simplificação considerável das equações *RKU*, dado que a posição do eixo neutro do conjunto não é alterada com a aplicação do tratamento. Assim, considerando esta simplificação, a equação que permite obter a razão de rigidez a partir das frequências naturais da viga base e da viga compósita, bem como dos factores de perda modais, é escrita na forma (Apêndice B):

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(1 + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 + 2 \frac{\rho_3}{\rho_1} h_3 \right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}} \right)^2 (1 + \mathcal{M}_r) \quad (2.42)$$

onde h_3 representa a razão entre a espessura da viga base e a espessura de cada uma das camadas de restrição.

O parâmetro de corte associado a cada uma das razões de rigidez calculadas é obtido por recurso à equação (Apêndice A):

$$\bar{g} = \frac{\bar{\mathcal{R}} - 1 - 2e_3h_3^3}{1 + 2e_3h_3^3 + 6e_3h_3(1 + 2h_2 + h_3)^2 - \bar{\mathcal{R}}} \quad (2.43)$$

onde e_3 representa a razão entre o módulo extensional da viga base e o módulo extensional das camadas de restrição.

O cálculo do módulo de corte complexo, bem como o procedimento de correcção devido às condições de fronteira, desenvolvem-se de forma idêntica à descrita na configuração da viga *sandwich*.

2.3.5 Considerações sobre as vigas com tratamento

A determinação do módulo complexo do material viscoelástico através do método das vigas com tratamento é baseada na caracterização da perturbação causada pela aplicação do tratamento sobre as propriedades modais da viga. Assim, a correcta determinação das frequências naturais da viga base assume uma elevada importância no processo de medição do módulo complexo.

Embora a variação das propriedades do material da viga base com a temperatura seja muito reduzida, é importante determinar as frequências naturais da viga base para as mesmas temperaturas consideradas na caracterização da viga tratada [88]. Para além disso, deve aplicar-se, quer na viga com tratamento quer na viga base sem tratamento, as mesmas condições de fronteira, utilizando a mesma forma de encastramento em ambos os casos.

Na viga *sandwich* apenas é caracterizada uma das vigas base, sendo no entanto muito importante garantir que as duas vigas que formam a viga *sandwich* sejam dinamicamente idênticas. É também importante que o material utilizado na viga base apresente um amortecimento material muito reduzido, sendo usualmente aplicado o alumínio e o aço inoxidável em detrimento de materiais compósitos, que apresentam um factor de perda não desprezável [86].

Na colagem da camada viscoelástica sobre a viga base deve utilizar-se uma camada fina de adesivo rígido, normalmente de base epóxida, de forma a evitar a criação de uma

segunda camada viscoelástica, o que invalidaria a caracterização do material viscoelástico em análise [86,88].

A viga é encastrada numa base que deve ter uma elevada rigidez, sendo usual utilizar uma base de encastramento muito rígida e muito pesada que é apoiada numa suspensão elástica (sobre uma camada de espuma ou apoios pneumáticos), de forma a reduzir os efeitos da resposta dinâmica da estrutura de montagem [89].

De forma a caracterizar as suas frequências naturais e os respectivos factores de perda modais, é aplicada uma excitação harmónica à viga através de um excitador, de preferência do tipo não intrusivo, usando, por exemplo, um transdutor electromagnético, podendo, no entanto, utilizar-se outras formas de excitação (excitador electromagnético, martelo instrumentado e cristal piezoeléctrico). A medição da resposta deve também ser realizada com um transdutor sem contacto, como, por exemplo, um transdutor capacitivo, um vibrómetro laser ou um transdutor electromagnético. Todavia, em virtude da reduzida sensibilidade dos transdutores capacitivos e magnéticos nas altas frequências, é necessário utilizar acelerómetros piezoeléctricos que devem ser muito pequenos e apresentar uma massa muito reduzida [9,86]. Neste caso, mesmo que a massa do transdutor seja muito pequena, é necessário considerar a sua influência na determinação do módulo complexo a partir da resposta da viga [9] recorrendo, por exemplo, a um processo de cancelamento de massa. Quando a excitação é aplicada através de um transdutor electromagnético, também é necessário considerar o efeito da massa do magneto que é normalmente colado à viga.

A excitação aplicada pode ser do tipo sinusoidal, usando-se um varrimento em frequência para obter os valores das frequências naturais da viga e a largura da banda de frequência necessária de forma a calcular os factores de perda modais associados [9].

A disponibilidade actual de analisadores espectrais e de técnicas de análise baseadas na Transformada Rápida de *Fourier* (FFT) permitem a aplicação de uma excitação aleatória usando ruído branco. Obtendo-se a função de resposta em frequência para uma banda larga de frequências, é possível caracterizar simultaneamente vários modos naturais da viga numa só medição. No entanto, é referido por diversos autores [9,87,88] que a utilização de bandas estreitas de frequência centradas em cada um dos modos naturais permite, por um lado, reduzir a contribuição dos outros modos naturais e, por outro, melhorar a resolução espectral e assim reduzir o erro associado à amostragem.

A determinação dos parâmetros modais (frequências naturais e factores de perda modais) é realizada através de técnicas de identificação modal [8, 90], sendo usualmente aplicado o método da largura de banda ou o método de ajustamento circular. Os valores obtidos são utilizados na caracterização do módulo complexo do material recorrendo às equações da viga compósita apresentadas anteriormente.

De referir que as equações correspondentes às vigas *sandwich*, equações devidas a Ross, Kerwin e Ungar [48, 49] são desenvolvidas com base em algumas hipóteses simplificativas que podem restringir a sua aplicabilidade [6]. De facto, as equações (2.40) e (2.43) representam uma viga compósita na qual se despreza a rigidez extensional das camadas viscoelásticas e a rigidez de corte das camadas elásticas. Para além disso, o modelo cinemático da viga compósita é baseado numa representação sinusoidal das suas formas naturais, o que só é verdade para a viga simplesmente apoiada, constituindo um aproximação muito grosseira na viga encastrada-livre, especialmente para os modos de ordem mais baixa. Assim, dependendo da aplicabilidade das hipóteses consideradas à camada de material viscoelástico em análise e aos parâmetros do ensaio, a caracterização efectuada recorrendo às equações *RKU* pode apresentar um erro de aproximação considerável.

De forma a evitar esse erro de aproximação, utiliza-se actualmente o método dos elementos finitos ou outros métodos aproximados, nomeadamente o método de *Rayleigh-Ritz* [89], para calcular os valores do módulo complexo. Contrariamente aos métodos com modelos discretos, o amortecimento presente na resposta da viga não é muito elevado, permitindo identificar os modos naturais da viga tratada e, por outro lado, este tipo de montagem apresenta uma menor sensibilidade ao ruído da cadeia de medição e aos efeitos das condições de fronteira. Todavia, uma vez que o processo de caracterização do módulo complexo do material é baseado na diferença, em geral de valor reduzido, entre a resposta da viga não amortecida e a resposta da viga amortecida, qualquer pequeno erro na medição da resposta é amplificado pelo cálculo da diferença e pode originar erros consideráveis na identificação do módulo complexo. Por essa razão, a norma ASTM *E756-98* [86] indica que o valor da razão de rigidez experimental (equações (2.34), (2.37), (2.39) e (2.42)) deve ser igual ou superior a 1.1. Por outro lado, a espessura da camada viscoelástica a aplicar nas vigas deve ser criteriosamente seleccionada de forma a obter-se uma resposta que, por um lado, indique claramente uma alteração relativamente

à viga não amortecida, permitindo uma caracterização efectiva do tratamento e, por outro, não seja demasiado amortecida, reduzindo assim a relação sinal/ruído.

As dimensões da viga base podem ser seleccionadas dentro de certos limites, sendo normalmente utilizadas vigas com 150 a 250mm de comprimento exposto, uma largura de 10mm e uma espessura entre 1 a 3mm [86]. A profundidade de encastramento deve ser igual ou superior a 25mm.

Uma vez que as propriedades do material viscoelástico são unicamente avaliadas para algumas das frequências naturais da viga, é usual aplicar o princípio da correspondência frequência-temperatura para relacionar medições efectuadas em vários níveis de temperatura para obter uma descrição do módulo complexo do material para uma gama de frequências mais abrangente. Assim, este teste pode ser realizado dentro de uma câmara termostática com controlo de temperatura, utilizando-se normalmente incrementos de temperatura de 5 ou 10°C [86]. Neste caso, é necessário respeitar um tempo mínimo de 30 minutos de estágio em cada nível de temperatura, antes de realizar a medição, de forma a promover, não só a perfeita homogeneidade da temperatura no corpo do provete, mas também a atingir o novo equilíbrio dinâmico da cadeia molecular do material [8, 9, 88].

2.3.6 Outros processos de medição

Para além dos métodos de caracterização anteriormente descritos, existe um conjunto de técnicas, na sua maioria aplicadas em equipamentos disponíveis comercialmente, que permitem a caracterização das propriedades dinâmicas de materiais viscoelásticos. Embora a sua aplicação seja sobretudo orientada para outros materiais viscoelásticos que não os usualmente aplicados em tratamentos de amortecimento viscoelásticos, é possível a sua utilização na caracterização dos materiais de interesse.

Reómetros de disco oscilante

Os reómetros de disco oscilante permitem caracterizar materiais viscoelásticos através da deformação de corte imposta à amostra de material colocada entre um disco fixo e um disco móvel que oscila de forma harmónica, num determinado conjunto de frequências,

em torno do eixo comum do conjunto. O sistema mede continuamente o binário imposto ao disco móvel e a sua rotação, permitindo determinar o módulo complexo do material testado para a frequência da excitação.

O conjunto constituído pelos pratos e pela amostra é submetido a um ambiente de temperatura controlada, sendo normalmente possível atingir elevados níveis de temperatura (150-180°C) de forma a analisar polímeros fundidos e asfaltos.

Estes sistemas são vulgarmente aplicados na caracterização de materiais betuminosos, asfaltos e polímeros em fusão.

Ensaio termo-dinâmico - DMTA

Nos ensaios *DMTA* (*Dynamic Mechanical Thermal Analysis*) é aplicado um carregamento sinusoidal sobre um provete, configurado de forma a ser deformado em flexão, extensão ou corte, sendo continuamente medida a força e deformação aplicadas no provete. Estes ensaios são usualmente aplicados na determinação de materiais poliméricos rígidos e materiais compósitos, sendo contudo possível a sua aplicação na caracterização de materiais elastómeros e filmes poliméricos. O ensaio é desenvolvido dentro de uma câmara com temperatura controlada (-150 a 600°C). A frequência da excitação é normalmente limitada ao valor máximo de 200Hz, sendo tipicamente utilizado um valor entre 3 e 30 Hz.

Sistemas baseados na propagação de onda

Este método permite caracterizar o material viscoelástico a partir da medição das deformações induzidas pela propagação da onda de impacto numa barra desse material quando esta é sujeita a um impacto numa das suas extremidades. Normalmente, é utilizado um martelo instrumentado ou um pêndulo de massa conhecida para provocar o impacto na barra, utilizando-se extensómetros colados ao longo da mesma para medir a deformação induzida pela propagação da onda [91, 92] ou acelerómetros colocados nas extremidades da barra para medir a sua transmissibilidade [93]. Este método permite caracterizar o módulo complexo de materiais viscoelásticos para a gama das altas frequências (100Hz a 10kHz). No entanto, a sua aplicação restringe-se aos materiais viscoelásticos rígidos.

Lemerle [94] generaliza este método à caracterização de materiais viscoelásticos com baixo valor de módulo de ganho utilizando uma barra de referência conhecida de material rígido (PVC), colando na sua extremidade livre um pequeno provete do material viscoelástico em estudo. A caracterização do material viscoelástico é realizada através da análise da perturbação causada pelo provete de material não conhecido na propagação da onda na barra de referência.

2.4 Validação da caracterização experimental e análise de resultados

Através do processo de caracterização de um material viscoelástico é disponibilizado um conjunto de valores de módulo de ganho e de factor de perda do material para diferentes pares de frequência e de temperatura. Independentemente da quantidade de dados experimentais e da qualidade do sistema de caracterização, é conveniente verificar a qualidade dos resultados obtidos, identificar os erros sistemáticos e os erros aleatórios associados e filtrar um conjunto de resultados coerentes e representativos do material em análise.

Enquanto que os erros aleatórios, sendo devidos a causas esporádicas que perturbam a montagem experimental ou a cadeia de medição, são facilmente identificados na globalidade do conjunto de resultados, a detecção dos erros sistemáticos requer alguma experiência e uma análise cuidada dos dados medidos. As causas deste tipo de erros encontram-se normalmente associadas a falhas no processo de caracterização, nomeadamente na falta de garantia do equilíbrio termodinâmico do material, na falta de representatividade da montagem experimental relativamente ao modelo teórico assumido e à aplicação de uma deformação inadequada ao material viscoelástico em análise. Para evitar este tipo de erros é necessário garantir um conjunto de condições durante a realização do processo de caracterização, das quais se destacam as seguintes:

- garantir o equilíbrio térmico e molecular do provete de material viscoelástico em análise, ou seja, não é suficiente que se atinjam as condições isotérmicas no provete viscoelástico, sendo contudo necessário que o processo de relaxação da cadeia molecular atinja uma situação de equilíbrio antes de cada medição;

- a deformação imposta ao provete viscoelástico deve estar contida no regime linear do material de forma a evitar o erro associado ao seu comportamento não linear;
- o nível das grandezas medidas, relativas ao carregamento e à deformação imposta, deve permitir obter uma relação sinal/ruído elevada de forma a evitar este tipo de perturbação;
- a representatividade da montagem experimental deve ser garantida em toda a gama de frequências e de temperaturas considerada, garantindo as condições de fronteira e os graus de liberdade previamente estabelecidos e considerados no modelo teórico;
- a montagem experimental deve evitar a contaminação da medida devida às ressonâncias do sistema e à vibração externa transmitida ao sistema.

2.4.1 Representação *Wicket Plot*

A representação gráfica designada por *Wicket Plot* constitui uma das formas mais simples de verificar a qualidade dos resultados medidos e identificar os valores afectados por erros sistemáticos e aleatórios. Neste gráfico, são representados numa escala logarítmica os valores do factor de perda ou do módulo de perda em função dos respectivos valores de módulo de ganho, como representado na Figura 2.13.

Uma vez que para a maioria dos materiais viscoelásticos o módulo de ganho e o factor de perda são descritos por funções únicas em relação ao par frequência-temperatura, é óbvio que estas duas entidades sejam também elas relacionadas por uma única função. Assim, os pontos representados neste gráfico devem descrever uma curva única e contínua, independentemente da frequência e da temperatura a que cada um dos pontos foi obtido. A tendência global dos pontos descreverá a curva principal e todos os pontos que se desviarem desta curva serão considerados contaminados, quer por erros aleatórios, quer por erros sistemáticos. O conjunto de dados representativos do módulo complexo do material pode então ser filtrado a partir do conjunto de dados medidos retirando todos os pontos que se desviem significativamente da curva principal.

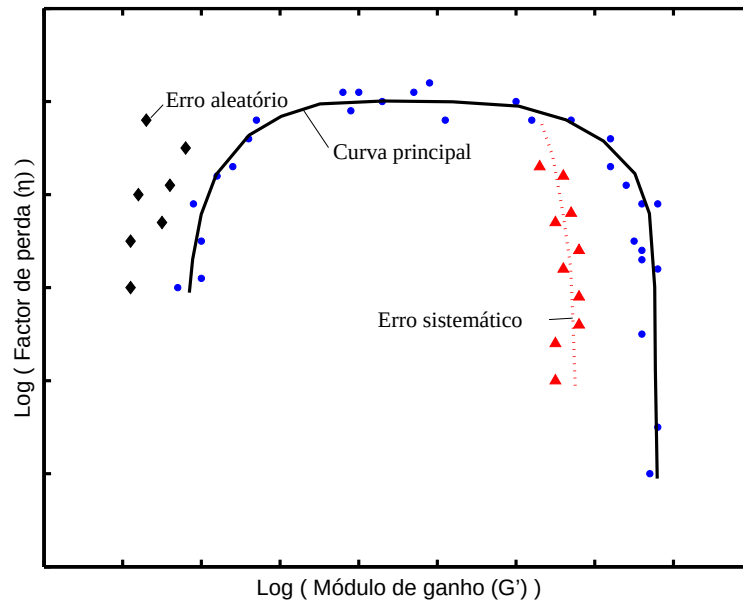


Figura 2.13: Representação hipotética do *Wicket Plot*

2.4.2 Princípio da correspondência frequência-temperatura

O processo de caracterização do material viscoelástico pode ser efectuado de uma forma discreta, medindo o módulo complexo para valores discretos de frequência e de temperatura, recorrendo, por exemplo, ao método da viga vibrante, ou de uma forma contínua na frequência, aplicando os métodos de caracterização baseados na medição da resposta ou da transmissibilidade de um sistema discreto.

Independentemente da metodologia adoptada, é constituído um conjunto de valores do módulo complexo para diferentes pares de frequência-temperatura. Verifica-se, contudo, que é possível combinar os efeitos da frequência e da temperatura numa única variável, usualmente designada por frequência reduzida (f_R), baseando-se este processo no designado princípio da correspondência frequência-temperatura.

Este princípio decorre da observação de que diferentes pares de frequência e de temperatura podem apresentar o mesmo módulo complexo, existindo entre esses pares uma relação bem definida. Assim, existindo dois pares de frequência-temperatura, (f_1, T_1)

e (f_2, T_2) , para os quais se verifique a relação:

$$\bar{G}(f_1, T_1) = \bar{G}(f_2, T_2) \quad (2.44)$$

então esses dois pares definem o mesmo valor de frequência reduzida, da forma:

$$f_R = f_1 \alpha_T(T_1) = f_2 \alpha_T(T_2) \quad (2.45)$$

onde $\alpha_T[T]$ designa-se por factor de translação, sendo única e exclusivamente uma função da temperatura.

A determinação do factor de translação baseia-se na observação de que é possível construir uma única curva de módulo de ganho e de factor de perda por simples translação horizontal dos conjuntos de pontos medidos a diferentes temperaturas, como ilustrado na Figura 2.14.

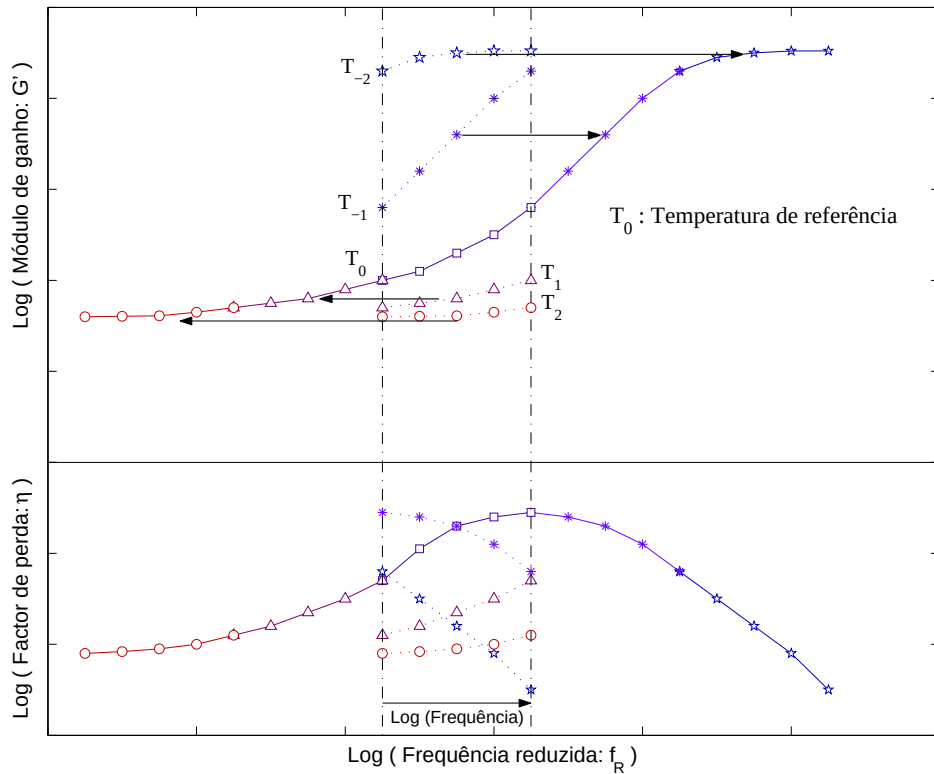


Figura 2.14: Princípio da correspondência frequência-temperatura

Considerando um conjunto hipotético de pontos experimentais obtidos para temperaturas diferentes (T_{-2} , T_{-1} , T_0 , T_1 , T_2) e para diferentes frequências, representados na Figura 2.14 pelos pontos ligados por linhas interrompidas, verifica-se que a translação dos conjuntos de pontos isotérmicos em relação à temperatura de referência permite definir uma única curva principal. A curva gerada, que é única para uma dada temperatura de referência T_0 , é função da frequência reduzida e permite determinar o valor do módulo complexo do material viscoelástico para diferentes pares de frequência e de temperatura, mesmo que estes não tenham sido considerados na caracterização experimental. Neste procedimento é necessário recorrer à relação que define o valor do factor de translação em função da temperatura, de forma a determinar o valor de frequência reduzida correspondente.

Como referido, os valores do factor de translação são determinados em função da amplitude da translação necessária à construção da curva contínua representada na Figura 2.14. Desta forma, são determinados unicamente os valores para o factor de translação para as temperaturas medidas, sendo contudo possível determinar o valor desta variável para outros valores de temperatura por interpolação dos pontos discretos disponíveis.

A forma mais eficaz de descrever a relação entre os factores de translação e a temperatura, e de identificar e corrigir alguma discrepância nos valores determinados, consiste em representar os valores do factor de translação numa escala logarítmica ($\log[\alpha_T]$) em função dos valores inversos das respectivas temperaturas absolutas ($1/T[^\circ\text{K}]$), como ilustrado na Figura 2.15. Verifica-se que os pontos experimentais assim representados apresentam uma distribuição aproximadamente linear, sendo possível expressar essa relação através de modelos analíticos simples.

Equação *Williams-Landel-Ferry*

A relação entre o factor de translação e a temperatura representada no gráfico da Figura 2.15 pode ser expressa através do modelo não-linear de *Williams-Landel-Ferry* (*WLF*) [9] definido na forma:

$$\log[\alpha_T(T)] = -C_1 \frac{T - T_0}{B_1 + T - T_0} \quad (2.46)$$

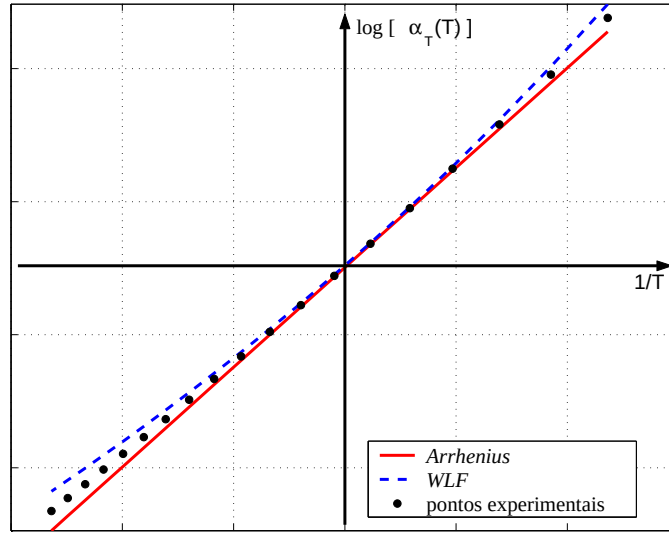


Figura 2.15: Modelos de representação dos factores de translação

onde T_0 corresponde à temperatura de referência e C_1 e B_1 representam duas constantes reais determinadas por ajuste do modelo aos pontos experimentais medidos.

O valor da temperatura de referência é seleccionado arbitrariamente dentro da gama de temperaturas consideradas no processo de caracterização experimental, sendo os restantes parâmetros de ajuste dependentes desse valor.

Equação de *Arrhenius*

Em geral, os pontos experimentais do factor de translação descrevem aproximadamente uma linha recta, sendo assim possível aplicar um modelo linear mais simples, o modelo de *Arrhenius*, que é descrito pela relação:

$$\log[\alpha_T(T)] = T_A \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (2.47)$$

onde T_A representa o declive da recta representada na Figura 2.15.

Na maioria dos casos, a linearidade apresentada pela distribuição dos pontos experimentais não justifica a aplicação do modelo não-linear *WLF*, sendo a aplicação

do modelo de *Arrhenius* muito mais simples. A independência entre o parâmetro T_A e a temperatura de referência T_0 é também uma vantagem deste último modelo.

Apenas em situações em que os dados experimentais se desviam significativamente da recta do modelo linear de *Arrhenius* se deverá recorrer ao modelo *WLF* ou a um modelo generalizado descrito como uma série de modelos de *Arrhenius* da forma:

$$\log[\alpha_T(T)] = \sum_{n=1}^N T_n \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)^n \quad (2.48)$$

Uma vez determinada a distribuição do factor de translação ao longo da temperatura, é possível aplicar o princípio da correspondência da frequência-temperatura para determinar a frequência reduzida correspondente a um qualquer par de temperatura e de frequência. O valor do módulo complexo é então determinado através do gráfico da Figura 2.14 recorrendo ao valor de frequência reduzida calculado pelo factor de translação.

2.5 Representação do módulo complexo

Embora a representação do módulo de ganho e do factor de perda em função da frequência reduzida, conjuntamente com a distribuição do factor de translação ao longo da temperatura, permita descrever eficazmente a variação do módulo complexo com a frequência e com a temperatura, esta metodologia exige a análise simultânea de dois gráficos e a determinação do factor de translação e, consecutivamente, do valor da frequência reduzida correspondente ao par de frequência-temperatura pretendido.

Alternativamente, é possível desenvolver modelos analíticos de representação recorrendo ao modelo de *Arrhenius* ou modelo *WLF* para calcular a frequência reduzida e a modelos viscoelásticos para representar a relação entre o módulo complexo e a frequência reduzida [95].

2.5.1 Nomograma de frequência reduzida

Uma forma expedita de representar num único gráfico a distribuição do módulo de ganho e do factor de perda em função da frequência, conjuntamente com o factor de translação, foi proposta por Jones [96], sendo esta representação designada por nomograma

de frequência-temperatura ou nomograma de frequência reduzida (Figura 2.16). Neste gráfico, é possível determinar o valor da frequência reduzida correspondente ao par de temperatura-frequência pretendido, através da intersecção entre a linha horizontal definida pela escala logarítmica de frequência e a linha isotérmica correspondente à temperatura desejada. A intersecção entre a linha vertical que passa pelo ponto de intersecção e as curvas do módulo de ganho e do factor de perda permite determinar directamente o valor dos mesmos.

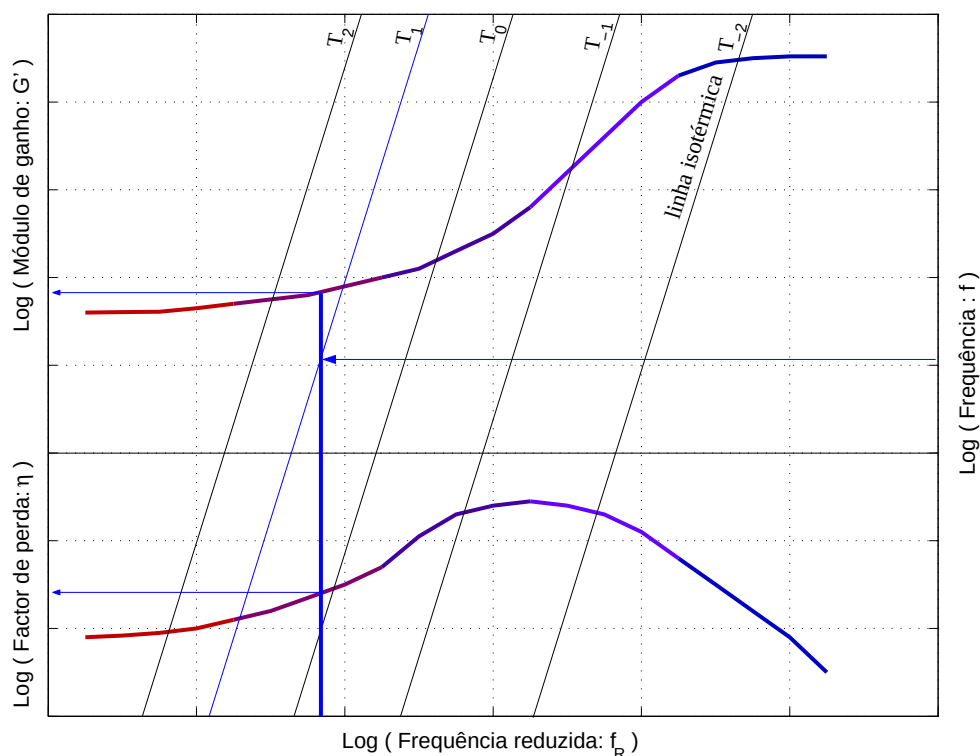


Figura 2.16: Nomograma de frequência reduzida

O nomograma de frequência-temperatura constitui a forma de representação usualmente aplicada na caracterização do módulo complexo de materiais viscoelásticos, permitindo comparar facilmente o factor de perda e o módulo de ganho para uma determinada gama de temperaturas e de frequências. É normalmente através desta representação gráfica que os fabricantes de materiais viscoelásticos para aplicações de amortecimento passivo apresentam e distribuem as propriedades dos seus materiais.

2.5.2 Modelos viscoelásticos

Embora o nomograma de frequência reduzida constitua uma forma eficaz e amplamente utilizada na descrição do módulo complexo de materiais viscoelásticos, é também usual recorrer a modelos analíticos paramétricos [46,97] definidos por ajuste dos seus parâmetros aos pontos experimentais obtidos no processo de caracterização do material em análise. De entre esses modelos destacam-se, pela sua representatividade e ampla aplicação, o modelo de derivadas fraccionárias [37,38], o modelo de *Golla-Hughes-McTavish* (*GHM*) [26,41] e o modelo do campo de deslocamento inelásticos (*Anelastic Displacement Fields - ADF*) [39,40,98,99], os quais serão abordados e analisados no Capítulo 3.

Outros modelos, com significado meramente gráfico, são também aplicados no ajuste dos pontos experimentais representados no nomograma de forma a filtrar os mesmos e definir a curva principal [8,9].

2.6 Conclusões

No desenvolvimento de tratamentos passivos por amortecimento viscoelástico, as propriedades dos materiais viscoelásticos assumem um especial relevo no comportamento do tratamento e da estrutura tratada.

Muito embora os materiais usualmente aplicados neste tipo de tratamentos sejam homogêneos e isotrópicos, a elevada dependência do seu módulo complexo com a variação da frequência de excitação e com a temperatura condiciona a sua aplicação e dificulta a sua caracterização. No entanto, o desenvolvimento de um projecto de tratamento viscoelástico e a sua optimização exigem uma correcta descrição das propriedades do material constituinte, nomeadamente do seu módulo complexo.

De forma a caracterizar convenientemente o módulo complexo de um material viscoelástico, é usual recorrer a metodologias experimentais nas quais este parâmetro é determinado por medição directa da rigidez complexa do material ou através da perturbação causada pela aplicação do mesmo sobre uma estrutura base não amortecida. Através deste procedimento, é obtido um conjunto de valores para o módulo de ganho e para o factor de perda do material para um número limitado de pares de frequência e de temperatura, os quais, por recurso ao princípio da correspondência da

frequência-temperatura, são relacionados e reduzidos a um par de curvas que descrevem a variação do módulo de ganho e do factor de perda em função da frequência reduzida, que é calculada através da relação descrita pelo factor de translação para cada par de frequência-temperatura. Estas relações podem ser descritas pelo nomograma de frequência reduzida, que constitui a principal forma de representação e de divulgação do módulo complexo de materiais viscoelásticos, ou através de modelo analíticos paramétricos ajustados aos resultados experimentais.

As metodologias de determinação experimental do módulo complexo, baseadas em sistemas discretos, apresentam a vantagem de permitirem uma caracterização directa do módulo complexo do material viscoelástico através da determinação da rigidez complexa que o provete de material viscoelástico representa, exigindo todavia uma montagem experimental representativa do modelo teórico assumido. Adicionalmente, estes métodos permitem uma caracterização do módulo complexo ao longo de uma gama de frequências, a qual é unicamente limitada pela resposta da montagem experimental, nomeadamente pelas suas condições de fronteira e resposta de graus de liberdade espúrios não considerados no modelo teórico.

Em alternativa, os métodos baseados nas vigas com tratamento viscoelástico permitem determinar a variação do módulo complexo do material viscoelástico através da análise da perturbação causada pela aplicação do tratamento nas frequências naturais e nos factores de perda modais correspondentes de vigas metálicas encastradas. Embora esta metodologia permita reduzir a sensibilidade do processo de caracterização às condições da montagem experimental, depende especialmente da caracterização precisa da estrutura base, permitindo apenas a determinação do módulo complexo do material para as frequências naturais da viga; esta restrição é, contudo, aliviada pela aplicação do princípio da correspondência frequência-temperatura.

Para tratar e filtrar os resultados obtidos no procedimento de caracterização experimental e obter uma curva de distribuição ou modelo analítico ajustado que represente a variação do módulo de ganho e do factor de perda do material com a temperatura e a frequência, dispõe-se de um conjunto de metodologias de análise e de representação adequadas.

Capítulo 3

Modelação de tratamentos viscoelásticos pelo método dos elementos finitos

Neste capítulo é analisada a problemática associada à aplicação do método dos elementos finitos na modelação de tratamentos viscoelásticos superficiais e integrados. As dificuldades associadas à correcta discretização espacial destes tratamentos são analisadas, sendo apresentadas as soluções normalmente usadas, limitações e vantagens associadas. A modelação das propriedades dos materiais viscoelásticos, que constitui também uma dificuldade à aplicação deste método numérico, é igualmente analisada, sendo indicados e comparados os modelos de representação das propriedades dos materiais viscoelásticos com maior relevo no conjunto de estudos publicados sobre este assunto, ilustrando a forma de aplicação de cada um ao método dos elementos finitos; é ainda realizada uma comparação de aplicabilidade, representatividade e custo computacional associado. São também indicados os principais métodos de análise numérica utilizados na simulação de tratamentos viscoelásticos.

3.1 Introdução

O método dos elementos finitos é certamente o método mais popular de resolução de problemas de comportamento estático e dinâmico de estruturas. Neste método assume-se um conjunto de funções de interpolação simples definidas num subdomínio regular do domínio total em análise. O método dos resíduos pesados ou princípios variacionais são aplicados para obter as matrizes de cada um dos elementos individuais, as quais são posteriormente inseridas em matrizes globais representativas do domínio total em estudo. O resultado da aplicação deste método de análise é um modelo espacial descrito com base num conjunto de graus de liberdade, que é resolvido numericamente, obtendo-se desta forma a solução pretendida.

A aplicação do método dos elementos finitos a sistemas contínuos com amortecimento viscoelástico requer, no entanto, algumas considerações específicas. Em primeiro lugar, dado que os tratamentos de amortecimento viscoelástico em estruturas contínuas são realizados através de elementos discretos e distribuídos na estrutura, sob a forma de camadas discretas totais ou parciais, é necessário ter em consideração a forma como esses elementos são espacialmente discretizados. Em segundo lugar, é necessário considerar a variação das propriedades dos materiais viscoelásticos com a frequência e com a temperatura no processo de simulação, quer este seja realizado no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Por último, é necessário seleccionar o método de análise conveniente, sendo essa selecção condicionada, por um lado, pelo método de modelação do material viscoelástico aplicado e, por outro, pelo objectivo da simulação e tipo de solução pretendida.

Embora na literatura existente sobre este assunto os métodos de modelação do material viscoelástico e os métodos de resolução do problema numérico apareçam quase sempre associados, nem sempre havendo uma distinção clara e bem definida entre eles, essa distinção será todavia aqui realizada. Existe sempre uma associação necessária e inerente entre os processos de modelação do material viscoelástico e os métodos de análise, razão pela qual estes dois aspectos se encontram quase sempre associados, sendo usualmente confundidos.

3.2 Modelação espacial

A discretização espacial da estrutura em subdomínios regulares e uniformes, denominados por elementos finitos, constitui a base do presente método numérico de análise. Assim, a correcta discretização ou modelação espacial de estruturas do tipo viga ou placa com tratamentos viscoelásticos assume um papel fundamental na qualidade e validade dos resultados obtidos na simulação numérica do comportamento dinâmico das mesmas. A abordagem do problema de discretização depende obviamente da configuração do tratamento.

A modelação espacial dos tratamentos superficiais sem restrição é relativamente simples, já que o mecanismo dissipativo desenvolvido nesta configuração assenta no armazenamento e dissipação de energia de deformação extensional que ocorre na camada viscoelástica, em resultado da sua contínua e cíclica deformação de extensão/flexão. Neste caso, a aplicação de elementos de placa ou viga assentes sobre a teoria clássica dos laminados permite a correcta descrição do campo de deformações desenvolvido nesta configuração de tratamento.

Por outro lado, a discretização espacial dos tratamentos superficiais com restrição e dos tratamentos integrados requer uma correcta representação da elevada deformação de corte desenvolvida no núcleo viscoelástico, em resultado da acção restritiva das camadas elásticas adjacentes (Figura 3.1), que é directamente responsável pelo mecanismo de amortecimento desenvolvido nessas configurações de tratamento.

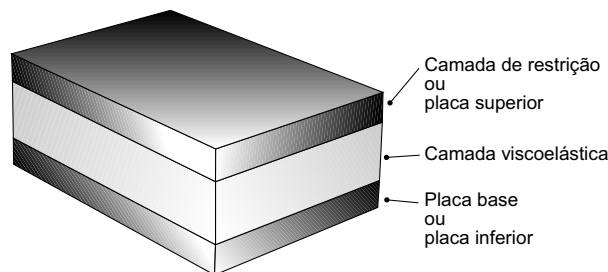


Figura 3.1: Representação de um elemento dos tratamentos viscoelásticos

A teoria clássica dos laminados é claramente inadequada para representar a deformação de corte das camadas viscoelásticas [100], sendo, assim, necessário utilizar uma forma de discretização espacial diferente. Em resposta a esta necessidade, são usualmente aplicadas formas alternativas de modelação que têm por base uma correcta representação do campo de deformações que se desenvolve na estrutura tratada, nomeadamente o campo de deformações de corte do núcleo viscoelástico. Estas formas alternativas de modelação podem ser classificadas segundo a metodologia construtiva do modelo espacial, podendo ser divididas em modelos combinados e em modelos de camada discreta, que são seguidamente analisadas e comparadas.

De referir, ainda, que alguns estudos sobre placas e vigas *sandwich* com núcleo viscoelástico recorrem a teorias de placa com deformação de corte de ordem superior, nas quais o campo de deslocamentos é expandido através de um conjunto de termos polinomiais de ordem superior, sendo normalmente aplicados polinómios cúbicos [101–104]. Esta forma de modelação é usualmente bem sucedida na análise de laminados formados por camadas de materiais com módulos extensionais da mesma ordem de grandeza, o que não é obviamente a situação que ocorre nos tratamentos viscoelásticos.

3.2.1 Modelos combinados

Os modelos combinados, usualmente utilizados na simulação de tratamentos viscoelásticos, associam numa forma estratificada elementos finitos sólidos, de placa e de viga [64, 68], modelando individualmente cada uma das camadas e permitindo obter bons resultados devido à correcta descrição da deformação de corte desenvolvida na camada dissipativa.

O modelo estratificado mais simples, proposto por Killian e Lu [69], recorre a uma combinação de dois elementos de placa, representativos das duas camadas externas, e a quatro elementos de viga, cuja rigidez de flexão está relacionada com a rigidez da camada viscoelástica que os mesmos representam (Figura 3.2). Os graus de liberdade dos elementos de viga coincidem com os graus de liberdade do elemento de placa adjacente. Este modelo não é muito utilizado dada a necessidade de um processo de modelação moroso e difícil e exigir a definição de propriedades equivalentes para os elementos de viga, de forma a representar a rigidez de corte e a rigidez extensional da camada viscoelástica. Dada a sua reduzida aplicabilidade e interesse, este modelo não será analisado no presente estudo.

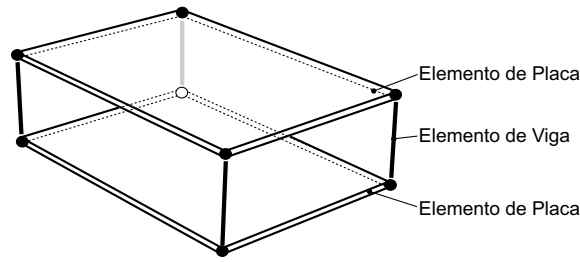


Figura 3.2: Modelo combinado de elementos de placa e elementos de viga

Um outro modelo [68, 69] utiliza dois elementos finitos de placa e um elemento finito hexaédrico para representar, respectivamente, as camadas externas e o núcleo viscoelástico (Figura 3.3).

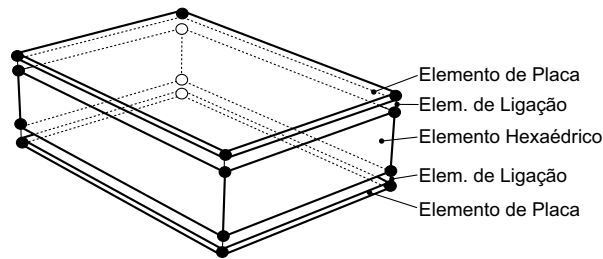


Figura 3.3: Modelo combinado de elementos de placa e elemento hexaédrico com ligações rígidas

Este modelo, embora represente correctamente a localização espacial dos camadas constituintes do tratamento viscoelástico, exige a modelação das três camadas de elementos em separado, bem como das quatro camadas de nós, e a criação de elementos de ligação rígida entre os nós do elemento sólido e os nós do elemento de placa adjacente. Apesar de ser o modelo mais dispendioso em termos do processo de modelação espacial, permite representar correctamente estruturas curvas, possibilitando ainda a representação de estruturas multi-camada. Para além disso, é o único modelo disponível que permite simular descolamentos no tratamento através da simples manipulação dos elementos de ligação rígida. Este modelo é referenciado neste trabalho como modelo 1.

No modelo proposto por Johnson e Kienholz [64, 105] e neste texto designado por modelo 2, os elementos finitos de placa partilham as localizações nodais do elemento sólido que representa a camada viscoelástica (Figura 3.4). Desta forma, é evitado o

dispendioso processo de geração dos elementos de ligação rígida necessários no modelo 1. Em contrapartida, para compensar a falsa localização nodal do elemento de placa, é introduzida na sua formulação um ajuste de localização nodal (*offset*) correspondente a metade da espessura da camada que o mesmo representa.

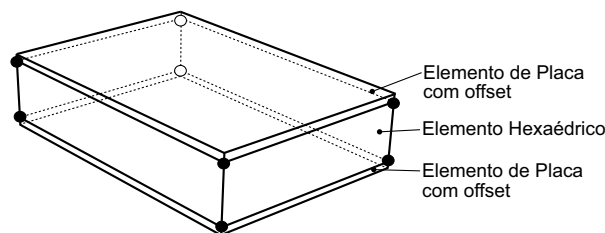


Figura 3.4: Modelo combinado de elementos de placa e elemento hexaédrico

Este modelo, embora não seja recomendado para aplicação a estruturas curvas e tratamentos multi-camada, exige um menor trabalho de modelação e conduz a matrizes menos esparsas [64]. Para além disso, quando a espessura das camadas externas é reduzida, o erro associado à incorrecta localização dos elementos de placa em geometrias curvas é também diminuto, podendo obter-se resultados satisfatórios com este modelo nessas condições [106–109].

De referir, ainda, que a dimensão do problema obtido pela aplicação do modelo 1 é idêntica à dimensão do problema obtido através do modelo 2. Na realidade, e embora o número de graus de liberdade inicial do modelo 1 seja superior, durante a montagem da matriz global, os elementos rígidos são usualmente tidos em consideração através da substituição dos graus de liberdade dependentes pelos correspondentes graus de liberdade independentes, obtendo-se, assim, a mesma dimensão final.

O último modelo combinado considerado, doravante designado por modelo 3 [110], utiliza três elementos finitos hexaédricos para representar as três camadas da estrutura *sandwich* com tratamento viscoelástico (Figura 3.5). Este modelo apresenta como vantagem principal a simplicidade e rapidez associada à modelação espacial.

Moreira e Rodrigues [110] apresentam uma comparação entre os três modelos combinados considerados, modelo 1, modelo 2 e modelo 3, utilizando os elementos finitos disponíveis no software comercial **MSC.Nastran**[™] [111], onde é avaliado o desempenho de

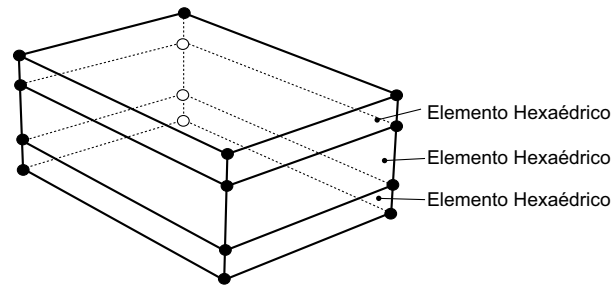


Figura 3.5: Modelo combinado de elementos hexaédricos

cada um dos modelos referidos através de uma análise de convergência de resultados. Este estudo revela que o modelo 3 permite obter uma convergência mais rápida que os restantes modelos. Embora as conclusões retiradas do estudo referido sejam restritas à aplicação dos elementos finitos disponibilizados pelo software utilizado, estas permitem verificar, por um lado, a importância da protecção ao bloqueio de corte transversal (*shear locking*) presente na formulação do elemento finito e, por outro, a representatividade da deformação de corte transversal obtida em cada uma das formas de modelação consideradas. De facto, a aplicação do modelo 3 requer um cuidado especial no que respeita ao problema do bloqueio de corte transversal, resultante da elevada razão de aspecto¹ dos elementos sólidos, sendo imperativo recorrer-se a elementos finitos com protecção a este problema numérico.

De acordo com Liguore e Kosmatka [112], o problema de bloqueio de corte nas camadas externas ocorre para elementos com razão de aspecto superior a 100:1 utilizando elementos finitos com integração reduzida, sendo este limite somente 5:1 para elementos sólidos com integração uniforme. Nos elementos sólidos representativos da camada viscoelástica, esse limite aumenta para 5000:1 [64], tendo-se verificado que, mesmo para camadas viscoelásticas muito espessas e independentemente da formulação do elemento sólido, os efeitos do bloqueio de corte que ocorre na camada viscoelástica não se repercutem na matriz de rigidez global da estrutura [110]. De facto, os resultados numéricos obtidos demonstram que a reduzida rigidez do material viscoelástico, quando comparada com a rigidez do material das camadas externas, atenua os efeitos do bloqueio de corte da camada viscoelástica na matriz global da estrutura. Para além disso, devido ao reduzido módulo extensional do material viscoelástico, a energia de deformação desenvolvida na camada

¹ Considera-se razão de aspecto a razão entre a maior e a menor dimensão do elemento finito.

viscoelástica é essencialmente devida à deformação de corte que aí ocorre [106].

A aplicação de elementos sólidos com protecção ao bloqueio de corte na modelação da camada viscoelástica deve ser criteriosamente aplicada, dado que os mecanismos de protecção que recorrem a técnicas de integração reduzida introduzem modos espúrios de energia nula e subestimam a energia de deformação de corte, podendo conduzir a resultados erróneos. No entanto, o estudo publicado em [110] demonstra que este efeito secundário, em parte devido à reduzida contribuição da energia de deformação da camada viscoelástica para a energia global do sistema, não se revela nos resultados, obtendo-se exactamente os mesmos resultados utilizando quer elementos sólidos com integração uniforme quer elementos sólidos com integração reduzida/selectiva. Os elementos finitos hexaédricos nas camadas externas devem forçosamente possuir protecção ao bloqueio de corte, já que, neste caso, a contribuição energética destas camadas no sistema global é preponderante.

Independentemente da razão de aspecto dos elementos finitos e da formulação aplicada, a malha de elementos finitos deve possuir o nível de refinamento necessário à correcta representação dos modos naturais de vibração da estrutura presentes na gama de frequências em análise.

3.2.2 Modelos de camada discreta

Em alternativa aos modelos combinados apresentados na secção anterior, têm sido publicados elementos finitos de camada discreta, baseados na teoria *layerwise* [113,114], que permitem essencialmente reduzir o custo associado ao processo de modelação espacial.

A formulação destes elementos finitos assenta sobre uma geometria plana (Figura 3.6), sendo a estratificação e a espessura das camadas constituintes, as suas propriedades materiais e os parâmetros da formulação do elemento finito definidos sob a forma de uma tabela numérica que é introduzida directamente no processo de cálculo. Desta forma, a malha de elementos finitos é facilmente construída utilizando um gerador de malha bidimensional convencional, aplicando elementos finitos de placa ou de casca, sendo a constituição do laminado descrita numa tabela numérica. Assim, torna-se possível alterar as características dimensionais e as propriedades materiais do tratamento de uma forma expedita, sem ser necessário modificar as localizações nodais da malha de elementos

finitos. A interdependência cinemática entre as diversas camadas constituintes é imposta directamente na descrição do campo de deslocamentos do elemento do laminado.

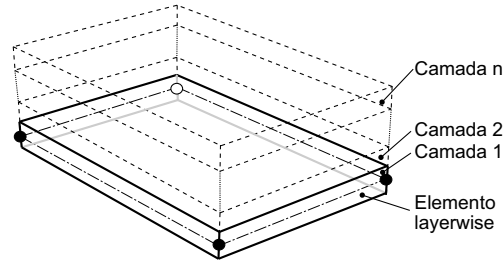


Figura 3.6: Modelo de camada discreta

Cada camada do laminado é descrita individualmente recorrendo, em geral, a uma teoria de placa espessa assente num modelo de corte transversal de primeira ordem (*First-order shear theory* - *FOST*) e suas formas melhoradas [115] ou num modelo de ordem superior (*High-order shear theory* - *HOST*) aplicando ao campo de deslocamentos uma distribuição polinomial cúbica ao longo da espessura [116–119].

Embora a maioria das publicações sobre a aplicação de teorias *layerwise* na descrição de tratamentos viscoelásticos seja restrita a vigas com tratamentos passivos e activos [51, 120–122], existe um número considerável de publicações sobre a aplicação desta metodologia de modelação espacial ao caso de placas planas. No entanto, a maioria dos modelos publicados restringe-se a placas *sandwich* com uma única camada dissipativa e é baseada em hipóteses simplificativas introduzidas no respectivo campo cinemático que, embora permitam representar convenientemente a configuração do tratamento analisado, restringem a sua aplicação a outras configurações de tratamento como, por exemplo, tratamentos multi-camada.

Garrison *et al.* [17] e Cupial e Niziol [123] consideram que a deformação extensional do núcleo viscoelástico pode ser desprezável, e assim apenas consideram a energia respeitante à componente de corte nesta camada, e que as camadas elásticas exteriores, correspondentes à placa base e à camada de restrição, se comportam segundo a teoria de *Kirchhoff-Love*, omitindo assim a componente de corte transversal destas camadas. Esta simplificação é usualmente aplicada neste tipo de tratamentos, permitindo a redução do número de variáveis do problema.

Saravanos [124] e Saravanos e Pereira [125] apresentam um elemento generalizado, baseado na teoria de camada discreta generalizada proposta por Robbins e Reddy [126], que permite a análise de tratamentos multi-camada e não restringe a sua aplicabilidade a configurações pré-definidas de tratamento. Um dos modelos propostos permite ainda considerar a deformação transversal de cada camada individual.

Embora a maioria dos estudos publicados, aplicando teorias de camada discreta na análise de tratamentos viscoelásticos, seja orientada para geometrias planas, existem alguns trabalhos publicados que versam sobre a aplicação desta forma de modelação a superfícies de revolução, tais como cascas cilíndricas [23, 127–134], cascas cónicas [132, 135, 136] e cascas esféricas [132, 137].

Os modelos de camada discreta, quando comparados com os modelos combinados, apresentam inúmeras vantagens que justificam a sua escolha. De facto, uma vez que a sua geometria é ditada por um elemento plano, pode recorrer-se a um gerador de malha bidimensional convencional para gerar a malha de elementos finitos necessária ou utilizar a própria malha da superfície do componente onde se pretende aplicar o tratamento. Uma vez que a configuração do tratamento, as propriedades dos materiais e os parâmetros dimensionais das camadas são introduzidos directamente no processo de análise através de uma tabela numérica, é possível alterar a configuração e materiais do tratamento sem necessidade de remodelar a malha de elementos finitos. Este aspecto assume uma importância evidente em análises de projecto e optimização de tratamentos, evitando o custo computacional associado à modificação da malha de elementos finitos da estrutura tratada, a qual é necessária nos modelos combinados.

3.3 Modelação dos materiais viscoelásticos

Outro dos aspectos a considerar na análise dos tratamentos viscoelásticos pelo método dos elementos finitos refere-se à dificuldade associada à introdução das propriedades dos materiais viscoelásticos no processo de cálculo e à caracterização do amortecimento desenvolvido pelos mesmos. De facto, os materiais viscoelásticos, para além de exibirem um factor de perda elevado que não se pode desprezar, apresentam também propriedades que dependem fortemente da temperatura e da frequência de excitação a que estão sujeitos. Assim, a tarefa de modelação dos materiais viscoelásticos deve ser orientada de forma a

permitir uma caracterização correcta do amortecimento viscoelástico e de considerar a dependência das propriedades do material viscoelástico (módulo de ganho e factor de perda) com a frequência e com a temperatura.

Os modelos de amortecimento disponíveis na maioria dos programas comerciais de elementos finitos (amortecimento viscoso, amortecimento histerético ou estrutural, amortecimento proporcional e amortecimento modal) não permitem uma caracterização correcta das propriedades reais apresentadas pelos materiais viscoelásticos utilizados em tratamentos passivos. Para além disso, as propriedades viscoelásticas do material variam significativamente com a frequência e com a temperatura, sendo necessário que essa dependência seja considerada no processo de simulação.

Embora constitua um parâmetro importante nas propriedades dos materiais viscoelásticos, o factor temperatura poderá ser removido do processo de cálculo se forem consideradas condições isotérmicas. Assim, mesmo que a temperatura das aplicações dos tratamentos viscoelásticos possa variar numa larga escala, correspondendo a comportamentos diferentes para o mesmo material, considera-se que essas aplicações operam em níveis discretos de temperatura constante, definidos em concordância com a aplicação em vista. Como exemplo, considerando uma aplicação aeroespacial, onde a temperatura de serviço pode variar entre -50°C e $+60^{\circ}\text{C}$, pode simular-se o comportamento do tratamento em análise para diversos níveis de temperatura definidos dentro da gama referida.

Todavia, a análise em níveis de temperatura constante está longe de ser a ideal e a mais realista. De facto, o mecanismo de amortecimento associado aos tratamentos viscoelásticos não se baseia meramente num processo dinâmico mas sim num processo termodinâmico, como constata Lesieutre [98] que desenvolveu o modelo *Augmenting Thermodynamic Fields* (ATF) com base no equilíbrio termodinâmico do material viscoelástico. Assim, relembrando que o tratamento viscoelástico proporciona um mecanismo de amortecimento em resultado da sua capacidade de transformar parte da energia mecânica de vibração em energia térmica, facilmente podemos constatar que esse processo cíclico de transformação proporcionará um incremento da temperatura do material viscoelástico caso esse acréscimo de energia térmica não seja compensado por um mecanismo de dissipação eficiente, o que acontece, por exemplo, nos tratamentos aplicados em placas metálicas. Em contrapartida, a aplicação de materiais viscoelásticos em estruturas que apresentem baixa condutibilidade

térmica, como, por exemplo, as estruturas compósitas de matriz polimérica, poderá invalidar a hipótese de condição isotérmica, pelo que, nestes casos, torna-se essencial a introdução da variável temperatura no processo numérico de simulação. Também as aplicações que apresentem fortes gradientes e variações de temperatura, como é o caso de aplicações aeroespaciais onde um equipamento pode ser submetido a temperaturas muito elevadas na face virada ao Sol e a temperaturas muito baixas na face oposta, requerem a consideração simultânea dos parâmetros frequência e temperatura no processo de simulação.

Lesieutre e Govindswamy [40] introduziram a variável temperatura num modelo *ADF* através de um processo de cálculo iterativo recorrendo ao princípio da correspondência frequência-temperatura. Rogers [138] desenvolveu um modelo de derivadas fraccionárias com base no conceito da frequência reduzida, tendo em consideração o factor de translação frequência-temperatura, para introduzir a variável temperatura no modelo do material. Apesar dos bons resultados obtidos, a metodologia apresentada nestas publicações carece da generalização a casos práticos mais gerais que os utilizados nas demonstrações numéricas apresentadas.

Assim, remetendo a inclusão do factor temperatura no processo de cálculo para a lista de trabalhos futuros e tendo por base a hipótese de condição isotérmica, continua a ser imprescindível considerar no processo de simulação numérica o efeito da frequência nas propriedades do material viscoelástico. Esta dependência pode ser descrita através de modelos reológicos simples, como, por exemplo, os elementos de *Voigt-Kelvin* ou as cadeias de *Maxwell* [139,140]. Todavia, estes modelos são pouco representativos e exigem um elevado número de termos para obter uma aproximação razoável ao comportamento do material viscoelástico [141]. No contexto deste trabalho, a análise dos modelos da lei constitutiva dos materiais viscoelásticos será restrita àqueles que, em virtude da sua representatividade e aplicabilidade, são usualmente aplicados no método de elementos finitos.

3.3.1 Módulo complexo

Considerando um sistema dinâmico generalizado com n graus de liberdade constituído por elementos elásticos e elementos viscoelásticos, a equação do movimento é escrita na

forma:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [\bar{K}] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.1)$$

onde as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[\bar{K}]$ e os vectores $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ representam, respectivamente, a matriz de massa, a matriz de amortecimento viscoso, a matriz de rigidez complexa, o vector da resposta e o vector de excitação do sistema. A matriz de rigidez global contém termos complexos e dependentes da frequência, podendo ser dividida numa componente elástica $[K_e]$ e numa componente viscoelástica $[\bar{K}_v(\omega)]$:

$$[\bar{K}] = [K_e] + [\bar{K}_v(\omega)] \quad (3.2)$$

Enquanto que a matriz de rigidez elástica $[K_e]$, representativa da rigidez dos elementos puramente elásticos do sistema, é real e constante, a matriz de rigidez viscoelástica $[\bar{K}_v(\omega)]$, para além de ser complexa, é dependente da frequência, sendo ainda dependente da temperatura se não forem consideradas as condições isotérmicas. No caso mais geral, a matriz de rigidez complexa é formada por termos associados à rigidez extensional, que depende do módulo extensional complexo $\bar{E}(\omega)$, e por termos de corte, proporcionais ao módulo de corte complexo $\bar{G}(\omega)$ do material. Embora estes dois módulos não sejam na realidade directamente proporcionais entre si, dado que o coeficiente de *Poisson* ν é também ele dependente da frequência e que os factores de perda extensional e de corte não são na realidade exactamente idênticos [70, 142], assume-se, porém, a existência de uma relação proporcional entre ambos, regida pela equação:

$$G'(\omega) = \frac{E'(\omega)}{2(1 + \nu)} \quad (3.3)$$

Assim, é possível decompor a matriz de rigidez viscoelástica na forma:

$$[\bar{K}_v(\omega)] = \bar{G}(\omega)[K_v] \quad (3.4)$$

onde $\bar{G}(\omega)$ representa o módulo de corte complexo do material que depende da frequência e $[K_v]$ representa a matriz de rigidez viscoelástica factorizada, definida por termos reais e constantes, calculada para um módulo de corte unitário.

Considerando o regime harmónico estacionário, assumindo que a excitação do sistema é harmónica do tipo:

$$\{f(t)\} = \{F(\omega)\} e^{j\omega t} \quad (3.5)$$

e que a resposta do sistema em regime estacionário é da forma:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}(\omega)\} e^{j\omega t} \quad (3.6)$$

podemos reescrever a equação de movimento (3.1) no domínio da frequência na forma:

$$(-\omega^2[M] + j\omega[C] + ([K_e] + \bar{G}(\omega)[K_v])) \{\bar{X}(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (3.7)$$

O modelo do módulo complexo está normalmente associado ao método de análise directa em frequência, no qual o sistema de equações (3.7) é resolvido para vários valores discretos da frequência, ou ao método iterativo de extracção de modos complexos, no qual o problema de valores e vectores próprios é resolvido iterativamente, actualizando o valor das propriedades do material viscoelástico em cada iteração.

A aplicabilidade deste método é restrita a sistemas com excitação harmónica, sendo normalmente utilizado em problemas de reduzida e média dimensão dado o elevado custo computacional requerido pelos métodos de análise associados. Não obstante, este é um método simples e amplamente utilizado, quer em aplicações de natureza científica, quer em aplicações industriais.

3.3.2 Modelo de *Golla-Hughes-McTavish* - *GHM*

O modelo de *Golla-Hughes-McTavish* (*GHM*) [41] representa a variação do módulo do material viscoelástico com a frequência através de uma série de osciladores. Assim, o módulo de corte de um material viscoelástico, quando definido no domínio de *Laplace*, pode ser representado pelo modelo da forma:

$$\bar{G}(s) = G^0 \left(1 + \sum_i^{n_{GHM}} \hat{\alpha}_i \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2} \right) \quad (3.8)$$

onde G^0 representa o valor final da função de relaxação do material ($G^0 = G(t \rightarrow \infty)$) e denomina-se por módulo relaxado ou módulo de baixa frequência.

Cada oscilador é definido por três constantes reais e positivas ($\hat{\alpha}_i$, $\hat{\zeta}_i$ e $\hat{\omega}_i$), determinadas por ajuste do modelo definido em (3.8) aos pontos experimentais do módulo de corte complexo obtidos em ensaios de caracterização do material viscoelástico [43].

Reescrevendo a equação de movimento estacionário harmónico de um sistema com amortecimento viscoelástico no domínio de *Laplace*, obtém-se o sistema de equações definido por:

$$\left[s^2[M] + s[C] + [K_e] + [\bar{K}_v(s)] \right] \{\bar{X}(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.9)$$

onde os vectores $\{\bar{X}(s)\}$ e $\{F(s)\}$ representam as transformadas de *Laplace* dos vectores de resposta e de excitação do sistema, respectivamente. Por seu lado, a matriz de rigidez viscoelástica, $[\bar{K}_v(s)]$, pode ser substituída pela multiplicação da matriz de rigidez viscoelástica factorizada $[K_v]$ pelo módulo complexo do material $\bar{G}(s)$:

$$[\bar{K}_v(s)] = \bar{G}(s)[K_v] \quad (3.10)$$

Substituindo o termo $\bar{G}(s)$ pelo modelo proposto, pode reescrever-se a equação do movimento na forma:

$$\left[s^2[M] + s[C] + [K_e] + G^0[K_v] \left(1 + \sum_i^{n_{GHM}} \hat{\alpha}_i \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2} \right) \right] \{\bar{X}(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.11)$$

onde $G^0[K_v]$ representa a matriz de rigidez relaxada dos elementos de material viscoelástico.

Introduzindo um conjunto de variáveis adicionais $\{Z_i(s)\}$, designadas por variáveis dissipativas e relacionadas com as variáveis elásticas $\{\bar{X}(s)\}$ na forma:

$$\{Z_i(s)\} = \frac{\hat{\omega}_i^2}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2} \{\bar{X}(s)\} \quad (3.12)$$

então a Equação (3.11) pode ser reescrita como um sistema de duas equações matriciais de segunda ordem definido por:

$$\begin{cases} \left[s^2[M] + s[C] + [K_e] + [K_v^0] \left(1 + \sum_i \hat{\alpha}_i \right) \right] \{\bar{X}(s)\} - [K_v^0] \sum_i \hat{\alpha}_i \{Z_i(s)\} = \{F(s)\} \\ \left(\frac{1}{\hat{\omega}_i^2} s^2 + 2 \frac{\hat{\zeta}_i}{\hat{\omega}_i} s + 1 \right) \{Z_i(s)\} - \{\bar{X}(s)\} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

onde $[K_v^0]$, para simplificação na exposição do formalismo, representa $G^0[K_v]$.

Multiplicando o conjunto de equações correspondente à relação entre as variáveis iniciais e as variáveis dissipativas, introduzidas pelo modelo *GHM*, pelo produto $\hat{\alpha}_i[K_v^0]$, pode escrever-se o sistema de equações (3.13) no domínio do tempo (dado que todas as matrizes constituintes do sistema de equações são independentes da coordenada de *Laplace s*) na forma:

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + \left[[K_e] + [K_v^0] \left(1 + \sum_i \hat{\alpha}_i \right) \right] \{x(t)\} - [K_v^0] \sum_i \hat{\alpha}_i \{z_i(t)\} = \{f(t)\} \\ \frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\omega}_i^2} [K_v^0] \{\ddot{z}_i(t)\} + 2 \frac{\hat{\alpha}_i \hat{\zeta}_i}{\hat{\omega}_i} [K_v^0] \{\dot{z}_i(t)\} + \hat{\alpha}_i [K_v^0] \{z_i(t)\} - \hat{\alpha}_i [K_v^0] \{x(t)\} = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

o qual pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}(t)\} \\ \{\ddot{z}_i(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{\dot{z}_i(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K_{qd}] \\ [K_{qd}]^T & [K_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{z_i(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

onde as sub-matrizes constituintes $[M_{dd}]$, $[C_{dd}]$, $[K_{dd}]$, diagonais por blocos, $[K]$ e $[K_{qd}]$ são definidas como:

$$[M_{dd}] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\omega}_i^2} [K_v^0] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.16a) \quad [K] = \left[[K_e] + [K_v^0] \left(1 + \sum_i \hat{\alpha}_i \right) \right] \quad (3.16c)$$

$$[K_{qd}] = \begin{bmatrix} \dots & -\hat{\alpha}_i [K_v^0] & \dots \end{bmatrix} \quad (3.16d)$$

$$[C_{dd}] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2 \frac{\hat{\alpha}_i \hat{\zeta}_i}{\hat{\omega}_i} [K_v^0] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.16b) \quad [K_{dd}] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \hat{\alpha}_i [K_v^0] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.16e)$$

De notar que, mesmo que o problema original não contemple termos de amortecimento viscoso ($[C] = [0]$), o modelo *GHM* gera necessariamente uma componente dissipativa proporcional à velocidade.

Como facilmente se pode constatar na representação matricial do sistema de equações do movimento (3.15)-(3.16), em resultado da inclusão das variáveis dissipativas, a dimensão do problema final é superior à dimensão original. De facto, a dimensão do problema formulado com recurso ao modelo *GHM* é, no mínimo, dupla da dimensão original, correspondendo à aplicação de apenas um oscilador na descrição do comportamento do material viscoelástico. Diversos autores [42,43] referem a necessidade de aplicação de, pelo menos, três osciladores para representar correctamente o comportamento de um material viscoelástico, quadruplicando assim a dimensão original do problema.

O sistema final de equações pode ser reduzido por aplicação de técnicas de condensação dinâmica. *Lam* [42] e *Park et al.* [97] aplicam o método de condensação de *Guyan* no domínio do tempo, seguido de uma condensação pelo método de balanceamento do sistema de equações descrito no espaço de estados, com o objectivo de reduzir a dimensão final do problema usando o modelo *GHM*. *Shi et al.* [44] usam um processo idêntico, em que a condensação pelo método de *Guyan* da equação de movimento no domínio do tempo é seguida de uma redução da sua dimensão no espaço de estados baseada na decomposição de *Schur*.

Para além dos problemas associados ao aumento da dimensão do sistema de equações do movimento, a aplicação deste modelo modifica as características das matrizes constituintes. De facto, embora a matriz de massa original $[M]$ seja definida positiva, a matriz de massa global em (3.15) pode não manter essa característica [41]. A matriz $[K_v^0]$, para além da possibilidade de ser constituída por várias linhas e colunas nulas, o que acontece por exemplo em tratamentos parciais, é também semi-definida positiva, pelo que a matriz de massa global em (3.15) é semi-definida positiva. Este problema pode ser contornado recorrendo a duas soluções diferentes. A primeira solução recorre à substituição da matriz $[K_v^0]$ da segunda equação de (3.14) por uma matriz identidade com a mesma dimensão [42], permitindo, assim, obter uma matriz de massa global definida positiva e não singular. Em contrapartida, perde-se a simetria da matriz de rigidez global, problema que pode ser ultrapassado através da resolução do sistema de equações descrito no espaço

de estados [42, 97]. A segunda soluão [41] aplica uma projecão da forma:

$$\{\tilde{z}_i\} = [P]^T \{z_i\} \quad \text{e} \quad [\Lambda] = [P]^T [K_v^0] [P] \quad (3.17)$$

onde $[\Lambda]$  a matriz diagonal constituída pelos valores pr3prios n3o nulos da matriz $[K_v^0]$ e $[P]$  a matriz normalizada ($[P]^T [P] = [I]$) dos vectores pr3prios correspondentes. Desta forma, garantem-se as caracter3sticas da matriz de massa, preservando a simetria das matrizes e reduzindo a dimens3o do problema global.

O modelo *GHM*  facilmente integrado no m3todo de elementos finitos j3 que as vari3veis dissipativas s3o internas a cada elemento. Para al3m dos inconvenientes associados, tais como a elevada dimens3o do problema e a gerao de uma matriz de amortecimento viscoso na equao de movimento, a introduo das vari3veis dissipativas originar3 o aparecimento de modos adicionais sobre-amortecidos, designados por modos de relaxao, correspondentes 3 relaxao das tens3es internas do elemento viscoel3stico. No entanto, estes modos n3o t3m qualquer repercuss3o sobre os modos estruturais de vibrao. Este modelo  particularmente 3til na an3lise de tratamentos h3bridos, envolvendo camadas de materiais viscoel3sticos e elementos de controlo activo, normalmente elementos piezoel3ctricos, permitindo a resoluo do problema descrito no espao de estados [26, 44, 45].

3.3.3 Modelo do campo de deslocamentos inel3sticos - *ADF*

O modelo do campo de deslocamentos inel3sticos (*Anelastic Displacement Fields - ADF*), proposto por Lesieutre *et al.* [39, 40] e baseado no modelo antecessor *ATF* (*Augmenting Thermodynamic Fields*) [98, 99], representa o m3dulo complexo do material viscoel3stico atrav3s de uma s3rie de termos da forma:

$$G(\omega) = G^0 \left[1 + \sum_{i=1}^{n_{ADF}} \Delta_i \frac{\omega^2 + j\omega\Omega_i}{\omega^2 + \Omega_i^2} \right] \quad (3.18)$$

onde G^0 representa, tal como no modelo *GHM*, o m3dulo de corte do material relaxado (ou m3dulo a baixa frequ3ncia). Os termos Δ_i e Ω_i representam, respectivamente, a resist3ncia 3 relaxao e a inversa do tempo caracter3stico de relaxao em deformao constante. Estes par3metros escalares caracterizam o comportamento do material viscoel3stico com

a frequência e são obtidos por ajuste do modelo (3.18) aos pontos experimentais do módulo de corte complexo do material.

O modelo *ADF* considera que o campo de deslocamentos total pode ser subdividido em duas componentes, uma elástica, $\{x(t)\}^E$, que é instantaneamente proporcional ao carregamento imposto, e uma inelástica, $\{x(t)\}^A$, que representa a componente de deformação proporcional não instantânea ao campo de tensões:

$$\{x(t)\} = \{x(t)\}^E + \{x(t)\}^A \quad (3.19)$$

A componente inelástica pode ser constituída por vários campos inelásticos individuais, $\{x_i(t)\}^A$, correspondentes a processos de relaxação diferentes.

O campo de deformações total é constituído, de igual forma, por duas componentes, a componente elástica e a componente inelástica:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^E(t) + \varepsilon^A(t) = \varepsilon^E(t) + \sum_i \varepsilon_i^A(t) \quad (3.20)$$

O campo de tensões é então definido através da relação [39, 98]:

$$\sigma(t) = E^\infty(\varepsilon(t) - \varepsilon^A(t)) \quad (3.21)$$

em que E^∞ representa a matriz constitutiva do material a alta frequência (não relaxado), sendo o campo de tensões da componente inelástica definido por [39]:

$$\sigma_i^A(t) = E^\infty(\varepsilon(t) - C_i \varepsilon^A(t)) \quad (3.22)$$

onde o parâmetro C_i representa a razão entre o módulo escalar inelástico e o correspondente módulo elástico, e permite descrever o acoplamento do processo físico de relaxação ao deslocamento total. Este parâmetro pode ser obtido a partir da resistência à relaxação do material, Δ_i , através da relação:

$$C_i = \frac{1 + \sum \Delta_i}{\Delta_i} \quad (3.23)$$

Para introduzir o campo de deslocamentos inelásticos, representante dos processos de relaxação intrínsecos ao material viscoelástico, é considerado um conjunto de variáveis adicionais ou graus de liberdade dissipativos, $\{z_i(t)\}$, sendo os graus de liberdade do

sistema original substituídos pelos graus de liberdade elásticos, $\{x(t)\}^E$, descritos pela relação:

$$\{x(t)\}^E = \{x(t)\} - \sum_i \{z_i(t)\} \quad (3.24)$$

que nos permite reescrever a equação de movimento na forma [43]:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + \left[[K_e] + [K_v^\infty] \right] \{x(t)\} - [K_v^\infty] \sum_i \{z_i(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.25)$$

onde $[K_v^\infty] = [K_v^0] (1 + \sum_i \Delta_i)$ representa a matriz de rigidez de alta frequência da camada viscoelástica.

Para além deste sistema de equações do movimento do sistema com amortecimento viscoelástico, é necessário definir a equação que descreve a evolução do campo de deslocamentos inelásticos. Esta equação, designada por equação de relaxação e desenvolvida a partir da equação de movimento que governa a dinâmica da partícula num provete elastomérico unidimensional [40], é definida por:

$$\frac{\mathcal{C}_i}{\Omega_i} [K_v^\infty] \{\dot{z}_i(t)\} + \mathcal{C}_i [K_v^\infty] \{z_i(t)\} - [K_v^\infty] \{x(t)\} = 0 \quad (3.26)$$

De notar que a equação diferencial (3.26) que rege o processo de relaxação do material obtida pelo modelo *ADF*, ao contrário do modelo *GHM*, é uma equação de primeira ordem.

O conjunto dos dois sistemas de equações pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}(t)\} \\ \{\ddot{z}_i(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{\dot{z}_i(t)\} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} [K] & [K_{qd}] \\ [K_{qd}]^T & [K_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{z_i(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.27) \end{aligned}$$

sendo as sub-matrizes constituintes $[C_{dd}]$, $[K_{qq}]$, $[K_{qd}]$ e $[K_{dd}]$ definidas por:

$$[C_{dd}] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{C_i}{\Omega_i} [K_v^\infty] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.28a)$$

$$[K] = [K_e] + [K_v^\infty] \quad (3.28b)$$

$$[K_{qd}] = \begin{bmatrix} \cdots & -[K_v^\infty] & \cdots \end{bmatrix} \quad (3.28c)$$

$$[K_{dd}] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & C_i [K_v^\infty] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.28d)$$

Embora ambos os modelos recorram a variáveis adicionais dissipativas como forma de caracterizar a variação das propriedades do material viscoelástico com a frequência, o modelo *ADF* distingue-se principalmente do modelo *GHM* por ser baseado numa formulação descrita directamente no domínio do tempo, enquanto que a formulação que descreve o modelo *GHM* é definida no domínio da frequência, obtendo-se o sistema de equações do movimento no domínio do tempo após transformação do espaço de *Laplace* para o domínio do tempo. Para além disso, enquanto as variáveis dissipativas utilizadas no modelo *GHM* são internas ao elemento finito, as variáveis adicionais aplicadas no modelo *ADF* são contínuas entre elementos finitos contíguos [41, 98]. A terceira grande diferença entre estes modelos advém do facto de que, enquanto que o modelo *GHM* é baseado numa equação de segunda ordem, a equação que descreve a relaxação do material aplicando o modelo *ADF* é de primeira ordem, o que, se por um lado permite maior eficiência como modelo geral do comportamento material, por outro apresenta um problema adicional que dificulta a resolução do sistema de equações do movimento pelos processos habituais. Com efeito, no sistema de equações do movimento (3.27), contrariamente ao que acontece no modelo *GHM*, a aplicação das variáveis adicionais do modelo *ADF* não introduz termos de inércia na equação de movimento. Assim, a matriz de massa resultante, sendo singular, perde a característica de definida positiva, introduzindo desta forma uma dificuldade na resolução do sistema de equações do movimento, sendo necessário recorrer à sua formulação e resolução no espaço de estados [43].

Tal como no modelo *GHM*, a projecção baseada nos vectores próprios correspondentes aos valores próprios não nulos da matriz $[K_v^\infty]$ reduz a dimensão do problema, em particular o número de variáveis dissipativas, principalmente no caso de aplicações com tratamentos parciais [43]. De igual forma, e tal como referido na descrição do modelo *GHM*, também o modelo *ADF* necessita de um número considerável de

variáveis adicionais (correspondentes a diferentes processos de relaxação) para descrever correctamente os materiais viscoelásticos comumente aplicados em tratamentos passivos. Enelund e Lesieutre [143], por aplicação do conceito de derivadas fraccionárias ao modelo *ADF*, reduzem consideravelmente o número de variáveis adicionais, diminuindo, em consequência, a dimensão do problema final.

3.3.4 Derivadas fraccionárias

Bagley e Torvik [37, 38] propõem um modelo viscoelástico, designado por modelo de derivadas fraccionárias, que permite relacionar os campos de tensões e de deformações presentes num sólido com comportamento viscoelástico através de uma série de derivadas fraccionárias da forma:

$$\sigma(t) + \sum_{i=1}^I b_i \mathfrak{D}^{\beta_i}(\sigma(t)) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{j=1}^J a_j \mathfrak{D}^{\alpha_j}(\varepsilon(t)) \quad (3.29)$$

onde a_j , b_i , α_j e β_i representam os parâmetros de ajuste do modelo e o operador $\mathfrak{D}^\alpha$ representa a derivada fraccionária de ordem α definida por [37, 144]:

$$\mathfrak{D}^\alpha(x(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\varsigma)}{(t-\varsigma)^\alpha} d\varsigma \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.30)$$

sendo Γ a função *Gama* de *Euler*.

O número de termos da série na representação do módulo do material viscoelástico é determinante do grau de representatividade deste modelo. No entanto, este modelo permite representar convenientemente o módulo complexo, quer a sua componente real quer a sua componente imaginária, aplicando um único termo da série, sendo esta a principal motivação na sua aplicação, tanto na representação do modelo constitutivo de materiais viscoelásticos em processos de simulação, como no ajuste dos valores obtidos por processos de caracterização experimental do módulo complexo.

Rossikhim e Shitikova [141] descrevem e comparam diversos modelos baseados em (3.29) considerando um único termo na série, entre os quais o modelo de 5 parâmetros proposto por Bagley e Torvik [38], descrito por:

$$\sigma(t) + b \mathfrak{D}^\beta(\sigma(t)) = E_0 \varepsilon(t) + a \mathfrak{D}^\alpha(\varepsilon(t)) \quad (3.31)$$

que constitui o modelo de derivadas fraccionárias mais utilizado, e os modelos de 4 e de 7 parâmetros aplicados por Schmidt e Gaul [145–147].

O operador da derivada fraccional, descrito em (3.30), pode ser definido no espaço de *Laplace* através da sua transformada, da forma:

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{D}^\alpha(x(t))) = s^\alpha \mathfrak{L}(x(t)) \quad (3.32)$$

sendo definido no domínio de *Fourier* como:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{D}^\alpha(x(t))) = (j\omega)^\alpha \mathfrak{F}(x(t)) \quad (3.33)$$

Recorrendo a (3.33), podemos reescrever a expressão (3.29), expressa no domínio de *Fourier*, na forma:

$$\sigma(j\omega) = \frac{E_0 + a (j\omega)^\alpha}{1 + b (j\omega)^\beta} \varepsilon(j\omega) \quad (3.34)$$

que pode ser directamente aplicada no ajuste dos parâmetros do modelo aos valores do módulo complexo obtidos em procedimentos de caracterização experimental de materiais viscoelásticos.

De forma a ilustrar a aplicação do modelo viscoelástico de derivadas fraccionárias no método dos elementos finitos, será considerado o modelo de 5 parâmetros expresso em (3.31). Assim, podemos relacionar o campo de tensões com o campo de deformações associado através de um parâmetro constitutivo, $G(s)$, que representa o módulo de corte complexo do material viscoelástico, na forma:

$$\tau(s) = \bar{G}(s) \gamma(s) \quad (3.35)$$

Aplicando o modelo de derivadas fraccionárias de 5 parâmetros, podemos definir a variável constitutiva através da expressão:

$$\bar{G}(s) = \frac{G_0 + a (j\omega)^\alpha}{1 + b (j\omega)^\beta} \quad (3.36)$$

Assim, e aplicando a relação expressa em (3.10), podemos escrever a matriz de rigidez da componente viscoelástica como:

$$[\bar{K}_v(s)] = \bar{G}(s) [K_v] \quad (3.37)$$

que permite reescrever a equação de movimento do sistema na forma²:

$$\left[s^2[M] + [K_e] + \frac{G_0 + a (j\omega)^\alpha}{1 + b (j\omega)^\beta} [K_v] \right] \{ \bar{X}(s) \} = \{ F(s) \} \quad (3.38)$$

A equação anterior pode, assim, ser reescrita na forma equivalente:

$$\left[b s^{2+\beta} [M] + s^2[M] + [K_e] + b s^\beta [K_e] + G_0 [K_v] + a s^\alpha [K_v] \right] \{ \bar{X}(s) \} = (1 + b s^\beta) \{ F(s) \} \quad (3.39)$$

Determinando o mínimo denominador comum l entre as razões que definem os expoentes fraccionários α e β , pode escrever-se a expressão anterior sob a forma de um somatório de termos como:

$$\sum_{j=0}^J [A_j] [s^{j/l} \bar{X}(s)] = (1 + b s^\beta) \{ F(s) \} \quad (3.40)$$

A forma expressa em (3.40) permite escrever a equação do movimento no espaço de estados na forma:

$$s^{1/l} [\tilde{M}] \{ \tilde{X}(s) \} + [\tilde{K}] \{ \tilde{X}(s) \} = \{ \tilde{F}(s) \} \quad (3.41)$$

onde as matrizes equivalentes $[\tilde{M}]$ e $[\tilde{K}]$ são construídas com base na relação expressa em (3.40), sendo definidas da seguinte forma:

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [0] & [A_j] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [0] & \vdots & [A_3] & [A_2] \\ [A_j] & \vdots & [A_2] & [A_1] \end{bmatrix} \quad (3.42a)$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [0] & [-A_j] & [0] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [0] & \vdots & [-A_4] & [-A_3] & [0] \\ [A_j] & \vdots & [-A_3] & [-A_2] & [0] \\ [0] & \vdots & [0] & [0] & [A_0] \end{bmatrix} \quad (3.42b)$$

²De forma a simplificar o formalismo associado à equação de movimento, omite-se a componente de amortecimento viscoso.

e os vectores de variáveis de estado e de solicitação são determinados na forma:

$$\{\tilde{X}(s)\} = \begin{pmatrix} s^{(J-1)/l}\{\bar{X}(s)\} \\ \vdots \\ s^{2/l}\{\bar{X}(s)\} \\ s^{1/l}\{\bar{X}(s)\} \\ \{\bar{X}(s)\} \end{pmatrix} \quad (3.43a)$$

$$\{\tilde{F}(s)\} = \begin{pmatrix} \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \\ \{0\} \\ (1 - bs^\beta)\{F(s)\} \end{pmatrix} \quad (3.43b)$$

Sendo o novo sistema de equações definido por matrizes quadradas, reais e constantes, é possível desacoplar o conjunto de equações que o define através de um procedimento de projecção num espaço próprio cuja base se relaciona com os modos naturais amortecidos do sistema e com modos associados ao comportamento não oscilatório da estrutura amortecida [37].

Em alternativa, é possível recorrer à definição de *Grünwald* [148] para introduzir o modelo de derivadas fraccionárias num processo de integração numérica do sistema de equações descrito no domínio do tempo [145–147, 149, 150].

3.4 Métodos de análise

Como referido anteriormente, a distinção entre a metodologia de análise adoptada para resolver o problema em estudo e o modelo utilizado para descrever as propriedades do material viscoelástico não é, normalmente, muito clara e bem definida. Assim, e considerando as formas de modelação das propriedades do material viscoelástico descritas na secção anterior, irão ser seguidamente apresentados nesta secção os métodos de análise que podem ser aplicados na resolução do problema.

3.4.1 Análise directa em frequência

O sistema de equações do movimento que caracteriza um sistema com amortecimento puramente viscoelástico pode ser escrito na forma:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [\bar{K}(\omega, T)] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.44)$$

onde $[M]$ e $[\bar{K}(\omega, T)]$ representam, respectivamente, a matriz de massa e a matriz de rigidez complexa do sistema. Os vectores $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ representam a resposta e a excitação do sistema, respectivamente.

Assumindo que a excitação do sistema é harmónica, podendo ser caracterizada por um vector de amplitudes $\{F(\omega)\}$ e por uma frequência de excitação ω na forma:

$$\{f(t)\} = \{F(\omega)\} e^{j\omega t} \quad (3.45)$$

a resposta do sistema em regime estacionário é também da forma harmónica, apresenta amplitudes $\{X(\omega)\}$, possui a mesma frequência ω da excitação, mas apresenta um desfasamento relativo δ resultante do amortecimento introduzido. Essa resposta pode ser caracterizada por um vector complexo $\{\bar{X}(\omega)\}$ e pela frequência ω :

$$\{x(t)\} = \{X(\omega)\} e^{(j\omega - \delta)t} = \{\bar{X}(\omega)\} e^{j\omega t} \quad (3.46)$$

Substituindo a expressão (3.45) e a expressão (3.46) e respectiva derivada, no sistema de equações do movimento (3.44), pode definir-se um sistema de equações algébricas da forma:

$$\left[[\bar{K}(\omega, T)] - \omega^2 [M] \right] \{\bar{X}(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (3.47)$$

que, considerando condições isotérmicas, pode ser escrito como:

$$\left[[\bar{K}(\omega)] - \omega^2 [M] \right] \{\bar{X}(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (3.48)$$

Pela resolução deste sistema de equações algébricas é possível determinar o vector $\{\bar{X}(\omega)\}$, que depende da frequência ω e dos parâmetros do sistema. O sistema de equações (3.48) pode ser reescrito na forma:

$$[\mathcal{Z}(\omega)] \{\bar{X}(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (3.49)$$

onde $[\mathcal{Z}(\omega)]$ representa a matriz de rigidez dinâmica do sistema.

As funções de resposta em frequência de uma coluna ℓ da matriz de receptância $[\alpha(\omega)]$, que corresponde à inversa da matriz de rigidez dinâmica, podem ser determinadas pela expressão:

$$\alpha_{j\ell}(\omega) = \left(\frac{\bar{X}_j(\omega)}{F_\ell} \right)_{F_i=0, \left\{ \begin{smallmatrix} i=1, \dots, n \\ i \neq \ell \end{smallmatrix} \right\}} \quad (3.50)$$

onde $\bar{X}_j(\omega)$ representa a amplitude e o desfasamento da resposta do sistema segundo o grau de liberdade j resultante da excitação $F_\ell(\omega)$ aplicada no grau de liberdade correspondente à referência ℓ . Estas funções podem ser directamente determinadas pela resolução do sistema de equações lineares (3.48) para diferentes valores da frequência ω :

$$\left[[\bar{K}(\omega)] - \omega^2 [M] \right] \{ \bar{X}(\omega) \}_\ell = \{ F_\ell(\omega) \} \quad (3.51)$$

sendo o vector excitação $\{F_\ell(\omega)\}$ um vector com uma única componente não nula, correspondente ao grau de liberdade da referência ℓ .

O modelo de resposta em frequência do sistema pode ser integralmente determinado através de um ciclo de cálculo (Figura 3.7) ao longo da gama de frequências de interesse. Tendo por base a hipótese de excitação harmónica, as propriedades dos materiais viscoelásticos podem ser introduzidas no modelo através do método do módulo complexo. Assim, é possível, para cada uma das frequências do ciclo, actualizar as propriedades dos materiais viscoelásticos de forma a introduzir no modelo numérico a dependência destes materiais com a frequência [121]. As propriedades dos materiais viscoelásticos podem ser inseridas no processo de cálculo sob a forma de uma tabela ou de uma função representativa do nomograma do material, ou ainda sob a forma de modelos reológicos (modelo de derivadas fraccionárias, *GHM* e *ADF*, entre outros).

A principal desvantagem deste método de cálculo reside no elevado custo computacional e tempo de análise envolvidos. Com efeito, é necessário resolver um sistema de equações lineares complexas, com a dimensão global do modelo espacial, para cada uma das frequências do ciclo.

Para além desta desvantagem, o modelo de resposta em frequência, resultado deste processo de análise, embora permita uma comparação directa com os resultados obtidos

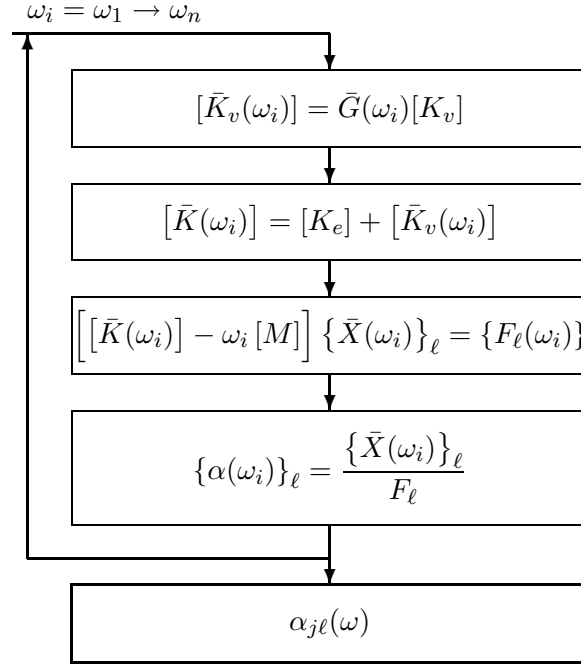


Figura 3.7: Processo de cálculo cíclico do método de análise directa em frequência

por via experimental, não fornece directamente os parâmetros descritivos do sistema amortecido, ou seja, os factores de perda e as frequências naturais. De forma a obter esses parâmetros é necessário obter o modelo modal (ou apenas as frequências naturais e factores de perda modais) a partir do modelo de resposta através de técnicas de identificação modal. No entanto, este método de análise, por permitir a determinação directa do modelo de resposta em frequência, é, normalmente, o método escolhido para a validação de modelos numéricos com base em resultados experimentais, evitando assim as fontes de erro e simplificações introduzidas pelos processos de identificação modal. Apesar de este método de análise ter por base a hipótese de excitação e resposta harmónicas, é possível, através da aplicação da transformada inversa de *Fourier*, obter a resposta de um sistema sujeito a um carregamento não harmónico [151].

3.4.2 Integração numérica no domínio do tempo

Uma vez definido o sistema de equações do movimento no domínio do tempo, aplicando um modelo de caracterização das propriedades viscoelásticas (*GHM*, *ADF* ou derivadas

fraccionárias), é possível recorrer a um método de integração numérica para obter a resposta no domínio do tempo.

O método da integração numérica directa é baseado nos seguintes pressupostos:

1. assume-se que a equação é verificada apenas para instantes de tempo discretos separados por intervalos de tempo Δt ;
2. admite-se uma lei de variação para a aceleração, velocidade ou deslocamento, nos intervalos de tempo Δt .

Considerando a equação do movimento do sistema escrita na forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.52)$$

podemos subdividir o intervalo de tempo de análise em intervalos iguais Δt , para os quais se assume uma função temporal para a aceleração, velocidade ou deslocamento, e garantir a verificação da equação do movimento nos instantes discretos.

A solução do problema, que depende obviamente das suas condições iniciais, $\{\dot{x}(0)\}$ e $\{x(0)\}$, é obtida de forma recursiva em cada um dos instantes discretos de tempo. A forma como o processo recursivo é definido depende do algoritmo escolhido, como, por exemplo, os algoritmos de *Newmark* e de *Wilson- θ* .

Uma vez definida a equação do movimento na forma descrita em (3.52), aplicando, por exemplo, o método *GHM* ou *ADF*, é possível aplicar directamente um dos algoritmos de integração numérica disponíveis e publicados [152]. Aplicando a definição de *Grünwald* [148], é possível ainda introduzir directamente o modelo de derivadas fraccionárias num processo de integração numérica do sistema de equações do movimento. Esta metodologia é aplicada por Schmidt e Gaul [145–147] e por Enelund [149].

3.4.3 Método dos modos complexos

Considerando um sistema em regime livre com amortecimento viscoelástico e assumindo uma solução homogénea do tipo $\{x(t)\} = \{\bar{X}\}e^{j\bar{\lambda}t}$, pode definir-se o problema de valores e vectores próprios complexos associado, na forma:

$$[\bar{K}(\omega)] \{\bar{\phi}\}_r = \bar{\lambda}^2 [M] \{\bar{\phi}\}_r \quad (3.53)$$

onde $[\bar{K}(\omega)]$ e $[M]$ representam, respectivamente, a matriz de rigidez complexa e a matriz de massa do sistema.

Se se assumir propriedades constantes ao longo da gama de frequências de análise, então a solução do problema (3.53) é descrita por uma matriz complexa de vectores próprios $[\bar{\Phi}]$ e por uma matriz diagonal de valores próprios complexos $[\bar{\Lambda}]$:

$$[\bar{\Phi}] = [\{\bar{\phi}\}_1, \dots, \{\bar{\phi}\}_m] \quad (3.54a) \quad [\bar{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_m^2 \end{bmatrix} \quad (3.54b)$$

Cada um dos vectores próprios $\{\bar{\phi}\}_r$ é definido por uma componente real, $\{\phi_R\}_r$, e uma componente imaginária, $\{\phi_I\}_r$. Os valores próprios $\bar{\lambda}_r^2$ são também definidos por uma componente real, que representa o quadrado da frequência natural do sistema amortecido ω_r , e por uma componente imaginária que contém a informação relativa ao factor de perda modal η_r :

$$\bar{\lambda}_r^2 = \omega_r^2(1 + j\eta_r) \quad (3.55)$$

Pré-multiplicando ambos os termos da Equação (3.53) pelo vector transposto do complexo conjugado de cada um dos vectores próprios, obtém-se a relação:

$$\bar{\lambda}_r = \frac{\{\bar{\phi}\}_r^H [\bar{K}] \{\bar{\phi}\}_r}{\{\bar{\phi}\}_r^H [M] \{\bar{\phi}\}_r} \quad (3.56)$$

que é formalmente idêntica ao quociente de *Rayleigh* aplicado a um sistema não amortecido.

Considerando que a matriz de rigidez é simétrica, podemos obter o factor de perda modal η_r através da equação:

$$\eta_r = \frac{\{\bar{\phi}\}_r^H [K_I] \{\bar{\phi}\}_r}{\{\bar{\phi}\}_r^H [K_R] \{\bar{\phi}\}_r} \quad (3.57)$$

que representa fisicamente a razão entre a energia dissipada, que é proporcional à componente imaginária da matriz de rigidez complexa, e a energia de deformação armazenada, proporcional à componente real da mesma matriz.

O método dos modos complexos pode ser directamente aplicado a sistemas amortecidos cuja equação de movimento seja descrita por uma matriz de rigidez complexa, resultante da caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos através da técnica do módulo complexo. No entanto, este método assume que tanto o módulo de ganho como o factor de perda são constantes dentro da gama de frequências em análise [123], o que não corresponde ao comportamento real de um material viscoelástico. Todavia, Mitsuma *et al.* [153] aplicam este procedimento na caracterização de painéis com tratamento viscoelástico com restrição, obtendo valores para as frequências naturais muito próximos dos obtidos pela via experimental.

Em alternativa, podemos considerar propriedades constantes na vizinhança de cada um dos modos naturais, resolvendo um problema de valores e vectores próprios complexos para cada um dos modos em análise [89]. Esta metodologia pode ser desenvolvida segundo um processo iterativo, corrigindo a matriz de rigidez complexa em função da frequência natural de cada um dos modos calculados [67]. Na maioria das aplicações, este procedimento permite obter valores dos factores de perda modais mais realistas, sendo, no entanto, um processo mais moroso.

Outra alternativa consiste em representar a componente associada ao amortecimento do material viscoelástico através de uma matriz de amortecimento viscoso não-proporcional [105] para a qual, assumindo uma resposta natural do tipo $\{x(t)\} = \{\bar{X}\}e^{\bar{\lambda}t}$, conduz ao seguinte problema generalizado de valores e vectores próprios:

$$\left[\bar{\lambda}^2[M] + j\bar{\lambda}[K_I] + [K_R] \right] \{\bar{\phi}\} = \{0\} \quad (3.58)$$

Desta forma, assume-se que o módulo de ganho é constante mas o factor de perda é directamente proporcional à frequência.

Se, por outro lado, a variação das propriedades do material viscoelástico for representada pelo método *GHM* ou *ADF*, o sistema de equações do movimento resultante, embora seja definido por matrizes simétricas e reais, contém uma matriz de amortecimento viscoso. Assim, o problema de valores e vectores próprios é semelhante ao problema homólogo associado a um sistema com amortecimento viscoso não proporcional. De referir que, neste caso, a dimensão do problema final resultante é superior à dimensão original. Com efeito, para além do conjunto adicional de variáveis dissipativas introduzido pelos métodos

GHM e *ADF*, o problema de valores e vectores próprios associado duplica a dimensão do sistema definido pelo conjunto das coordenadas generalizadas e variáveis dissipativas.

3.4.4 Método da energia de deformação modal - *MSE*

Assumindo que os modos normais correspondentes ao sistema não amortecido, determinados pela resolução do problema de valores e vectores próprios da forma:

$$[K_R(\omega_r)] \{\phi\}_r = \omega_r^2 [M] \{\phi\}_r \quad (3.59)$$

são representativos do sistema amortecido, então, de acordo com (3.57), pode calcular-se uma aproximação ao factor de perda modal através da equação definida por:

$$\tilde{\eta}_r = \frac{\{\phi\}_r^T [K_I] \{\phi\}_r}{\{\phi\}_r^T [K_R] \{\phi\}_r} \quad (3.60)$$

Baseado nesta hipótese, o método da Energia de Deformação Modal (*Modal Strain Energy - MSE*), proposto por Johnson e Kienholz [64], permite obter uma aproximação ao factor de perda modal do sistema amortecido para cada um dos modos naturais, através da relação entre a energia dissipada e a energia de deformação do sistema não amortecido, descrita pela equação:

$$\tilde{\eta}_r = \frac{\sum_{k=1}^n \eta_{kr} \Pi_{kr}}{\sum_{k=1}^n \Pi_{kr}} \quad (3.61)$$

onde η_{kr} e Π_{kr} representam, respectivamente, o factor de perda de cada um dos materiais (ou camadas de materiais) constituintes k e a respectiva energia de deformação para o modo de vibração de ordem r .

A Equação (3.61) corresponde à expressão (3.60) reescrita directamente numa forma energética. É sob esta forma que este método é usualmente aplicado em conjunto com o método dos elementos finitos, onde o somatório das fracções energéticas é realizado sobre todos os elementos finitos do modelo em análise. É um método muito simples para avaliar o nível de amortecimento atingido numa estrutura tratada e, muito embora apenas permita obter um valor aproximado do factor de perda modal, é uma forma eficaz,

expedita e de reduzido custo computacional para realizar um estudo comparativo entre diversas configurações do tratamento em estudo ou analisar os efeitos dos parâmetros de projecto do tratamento.

No entanto, devemos ter sempre em consideração as hipóteses basilares deste método e limitações associadas. De facto, este método apenas é válido para níveis de amortecimento reduzidos [7, 20, 112], sendo ainda referido por alguns autores [112, 154] que o acoplamento entre modos naturais sucessivos, que de certa forma está associado ao nível de amortecimento, aumenta consideravelmente o erro da aproximação. A introdução de amortecimento viscoelástico reduzido, como ocorre nos tratamentos superficiais, não altera significativamente as frequências naturais da estrutura base [59], sendo possível aplicar o presente método utilizando propriedades constantes para os materiais viscoelásticos, propriedades essas avaliadas nas frequências naturais do sistema não amortecido [61].

A introdução das camadas dissipativas está sempre associada a alterações de rigidez e de massa mais ou menos importantes [59]. Enquanto que nos tratamentos superficiais essas alterações são maioritariamente relativas à massa do sistema, alterações essas pouco importantes devido à reduzida espessura e à baixa densidade do tratamento, nos tratamentos integrados a introdução de um núcleo viscoelástico de baixa rigidez tende a baixar, de forma significativa, as frequências naturais da estrutura global em resultado do reduzido acoplamento entre as camadas externas resistentes [155]. Assim, antes da aplicação deste método para calcular a razão de amortecimento para cada um dos modos naturais, é importante avaliar previamente os efeitos do tratamento sobre as características de massa e de rigidez da estrutura, de forma a definir correctamente as propriedades do material viscoelástico [156].

Hu *et al.* [154] propõem uma modificação ao método *MSE* de forma a introduzir uma contribuição da componente imaginária da rigidez no problema de valores e vectores próprios real. Assim, o factor de perda da estrutura amortecida é calculado pela relação:

$$\tilde{\eta}_r = \frac{\left\{ \tilde{\phi} \right\}_r^T [K_I] \left\{ \tilde{\phi} \right\}_r}{\left\{ \tilde{\phi} \right\}_r^T [K_R] \left\{ \tilde{\phi} \right\}_r} \quad (3.62)$$

onde $\left\{ \tilde{\phi} \right\}_r$ é um vector próprio real que satisfaz a seguinte condição:

$$\left([K_R] + \Psi [K_I] \right) \left\{ \tilde{\phi} \right\}_r = \tilde{\omega}_r^2 (1 + \Psi \tilde{\eta}_r) [M] \left\{ \tilde{\phi} \right\}_r \quad (3.63)$$

sendo o parâmetro Ψ uma constante real definida empiricamente pela relação :

$$\Psi = \frac{\sum_{i=1}^n K_I(i, i)}{\sum_{i=1}^n K_R(i, i)} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_I(i)}{\sum_{i=1}^n \lambda_R(i)} \quad (3.64)$$

onde $\lambda_R(i)$ e $\lambda_I(i)$ representam, respectivamente, os valores próprios da componente real e da componente imaginária da matriz de rigidez.

Em sistemas com amortecimento reduzido, a aproximação ao factor de perda modal, obtida quer pelo método *MSE* quer pela modificação proposta, apresenta um erro inferior a 1% em relação ao valor real [154]. No entanto, quando o sistema apresenta um amortecimento elevado, associado a frequências naturais muito próximas, o erro observado entre o factor de perda aproximado e o seu valor real torna-se importante. Nestes casos, embora esteja sempre associado um erro significativo, o método *MSE* com a modificação proposta permite obter uma melhor aproximação ao valor real do factor de perda.

Apesar das limitações indicadas, o método *MSE* constitui uma forma expedita de cálculo aproximado do nível de amortecimento atingido numa estrutura com amortecimento, sem necessidade de recorrer à resolução do problema de valores e vectores próprios complexos. Shin e Maurer [65] apresentam um estudo comparativo entre o método *MSE* e o método de resposta directa em frequência, aplicados a tratamentos com restrição, onde concluem que o método *MSE* permite, para além da economia no cálculo, obter resultados muito próximos dos obtidos com o método directo.

Encontram-se publicados diversos estudos baseados na aplicação do método *MSE*, o que atesta a importância deste método entre os restantes métodos de análise de estruturas com amortecimento viscoelástico, sendo a maioria deles dedicada à comparação entre configurações de tratamento [105, 112], à análise dos efeitos da localização e extensão de tratamentos parciais [61], ao estudo dos efeitos dos parâmetros dos tratamentos e à validação de modelos numéricos [65, 105, 156].

3.4.5 Método da projecção em base modal modificada

Neste método, a variação das propriedades dos materiais viscoelásticos com a frequência é introduzida na análise pelo método de elementos finitos através da projecção do sistema

de equações do movimento numa base modal truncada e modificada. A projecção da equação de movimento de um dado sistema dinâmico numa base modal $[P]$ permite reduzir a dimensão do sistema inicial à dimensão da base de projecção. Este procedimento assenta na hipótese de que a solução do problema original está necessariamente contida no sub-espaco gerado pela base de projecção:

$$\{x\} = [P]\{x_R\} \quad (3.65)$$

onde $\{x_R\}$ representa a solução do problema reduzido.

A equação do movimento de um sistema com rigidez constante pode ser reescrita, no domínio da frequência, na forma:

$$\left[[M]\omega^2 + [K] \right] \{X(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (3.66)$$

Definida uma base de projecção $[P]$, que satisfaz à partida a hipótese de gerar um sub-espaco que contém a solução do problema (3.66), pode obter-se o sistema reduzido de equações pela aplicação dessa matriz de projecção na forma:

$$\left[[P]^T [M] [P] \omega^2 + [P]^T [K] [P] \right] \{X(\omega)\} = [P]^T \{F(\omega)\} \quad (3.67)$$

A solução do problema original pode, então, ser obtida a partir da solução do problema reduzido aplicando a relação descrita por (3.65).

Como sub-espaco de projecção, pode utilizar-se uma base modal truncada, na qual a matriz de projecção $[P]$ é constituída por um conjunto de modos naturais do sistema cujas frequências naturais se enquadram dentro da gama de frequências em análise, omitindo os restantes modos naturais de mais alta frequência. Assim, assume-se que a resposta do sistema pode ser representada pelo conjunto de vectores próprios independentes que constituem a base de projecção. O processo de reconstituição da resposta do sistema a partir da base de projecção modal é usualmente designado por método da sobreposição modal [90].

No entanto, apesar de o conjunto retido de modos naturais, normalmente de baixa frequência, ser representativo da gama de frequências em análise, é necessário introduzir na base de projecção um termo de correcção que represente o efeito dos modos naturais

omitidos. Este termo é normalmente designado por termo de correcção estática e está relacionado com a rigidez do sistema.

Este método de redução, embora permita obter um problema reduzido cuja solução é representativa da solução do problema original, é restrito a sistemas definidos por matrizes de massa e de rigidez constantes. No entanto, podemos considerar a dependência da matriz de rigidez em relação à frequência se utilizarmos no processo de redução uma base de projecção modal modificada representativa dos efeitos da variação da rigidez dentro da gama de frequências em análise.

Balmès [157, 158] aplica uma base de projecção modal constante, combinando diversas bases modais truncadas representativas da solução do problema dentro da gama de frequências considerada. Este método, designado por aproximação de modelo múltiplo (*multi-model approach*), utiliza uma base de projecção constituída pelas bases modais truncadas $[P(\omega_A)]$ definidas a partir das soluções dos problemas de valores e vectores próprios da forma:

$$[K_R(\omega_A)]\{\phi\}_r = \lambda_r^2[M]\{\phi\}_r \quad (3.68)$$

onde ω_A representa diferentes valores de frequência escolhidos dentro da gama de frequências em análise, e $[K_R(\omega_A)]$ é a componente real da matriz de rigidez do sistema calculada para cada uma dessas frequências seleccionadas. Assim, a base de projecção $[P]$ é constituída pelas bases modais truncadas definidas para os valores de frequência seleccionadas, da forma:

$$[P] = \begin{bmatrix} [\Phi^\Gamma(\omega_{A_1})] & \cdots & [\Phi^\Gamma(\omega_{A_i})] & \cdots & [\Phi^\Gamma(\omega_{A_n})] \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

onde $[\Phi^\Gamma(\omega_{A_i})]$ representa a matriz truncada de vectores próprios calculada para a frequência considerada ω_{A_i} . O conjunto de valores de frequência, representativo do sistema, pode ser simplesmente constituído por dois valores extremos da gama de frequências considerada, de forma a caracterizar os valores extremos do módulo de ganho do material viscoelástico, formando assim a base modificada definida por:

$$[P] = \begin{bmatrix} [\Phi^\Gamma(\omega_{min})] & [\Phi^\Gamma(\omega_{max})] \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Tal como nas bases modais truncadas aplicadas a sistemas constantes, é necessário introduzir na base de projecção modificada um termo de correcção que permita considerar

o efeito dos modos naturais omitidos na constituição da referida base. Assim, é proposta a introdução de um termo de correcção estática, $[P_c]$, baseado na inversa da componente real da matriz de rigidez avaliada em ω_{max} [106].

Para além do termo de correcção correspondente aos modos truncados, é também importante introduzir na base de projecção um conjunto de termos que representem o efeito do amortecimento, ou seja, da componente imaginária da rigidez dinâmica do sistema. Assim, introduz-se um termo adicional correspondente à resposta estática associada ao carregamento gerado pela componente imaginária da matriz de rigidez quando é excitado cada um dos modos normais $\{\phi\}_r$ das bases modais truncadas consideradas [106]:

$$[P_d] = [K_R(\omega_{max})]^{-1}[K_v] \begin{bmatrix} [\Phi^\Gamma(\omega_{min})] & [\Phi^\Gamma(\omega_{max})] \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

onde a matriz $[K_v]$, definida pela Equação (3.4), é uma matriz constante.

Juntando a base modal, constituída pelos vectores próprios definidos para os limites de frequência, às bases de correcção $[P_c]$ e $[P_d]$ obtém-se a base de projecção alargada definida por:

$$[P] = \begin{bmatrix} [\Phi^\Gamma(\omega_{min})] & [\Phi^\Gamma(\omega_{max})] & [P_c] & [P_d] \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Outra metodologia é adoptada por Plouin *et al.* [100, 159] que forma uma base modal modificada com os modos “pseudo-normais” [159] obtidos da solução do problema real generalizado de valores e vectores próprios da forma:

$$[K_R(\tilde{\omega}_r)]\{\tilde{\phi}\}_r = \tilde{\omega}_r^2[M]\{\tilde{\phi}\}_r \quad (3.73)$$

À base formada pelos modos “pseudo-normais”, que pode ser escrita na forma:

$$[P] = [\tilde{\Phi}]^\Gamma = [\{\tilde{\phi}_1\}^\Gamma, \dots, \{\tilde{\phi}_m\}^\Gamma] \quad (3.74)$$

onde $[\tilde{\Phi}]^\Gamma$ representa a base modal truncada, é adicionado o termo de correcção $[P_c]$ que introduz os efeitos dos modos truncados. Esta base é ainda corrigida pela introdução do termo representativo dos efeitos do amortecimento, da forma [106]:

$$[P_d]_r = [K_R(\tilde{\omega}_r)]^{-1}[K_v]\{\tilde{\phi}_r\}^\Gamma \quad (3.75)$$

que corresponde à resposta estática do carregamento gerado pela componente imaginária da matriz de rigidez quando é excitado cada um dos modos “pseudo-normais” da base considerada.

A base de projecção assim definida é formada pela combinação da base modal modificada e bases de correcção na forma:

$$[P] = \begin{bmatrix} [\tilde{\Phi}]^\Gamma & [P_c] & [P_d]_{r=1 \rightarrow m} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

A vantagem deste método baseia-se sobretudo na redução do custo computacional associado ao cálculo da resposta do sistema viscoelástico. Esta economia computacional é conseguida, por um lado, pela redução da dimensão do problema obtido pela projecção do sistema de equações do movimento na base modal modificada e, por outro, por não envolver cálculo algébrico complexo. Este método assenta no princípio de que a base de projecção utilizada é capaz de gerar um sub-espço que contém a solução do sistema inicial, solução essa que é obtida pelo processo de sobreposição modal.

3.4.6 Método da perturbação ou modificação estrutural

As técnicas de perturbação baseiam-se na hipótese de que as alterações dos parâmetros modais, em resultado de uma modificação estrutural, podem ser descritas através dos valores e dos vectores próprios do sistema não amortecido e das alterações impostas em termos de rigidez e massa do sistema. Esta técnica, quando aplicada aos tratamentos viscoelásticos, permite obter uma solução aproximada do problema de valores e vectores próprios complexos associado a um sistema com amortecimento viscoelástico, através de um processo de correcção da solução do problema não amortecido, evitando desta forma o custo computacional associado à resolução do problema complexo.

Considerando o problema de valores e vectores próprios associado a um sistema amortecido hysterético, na forma:

$$[K] \{\bar{\phi}\}_r = \bar{\lambda}_r^2 [M] \{\bar{\phi}\}_r \quad (3.77)$$

pode escrever-se a equação correspondente à perturbação de primeira ordem do problema de valores e vectores próprios (3.77) na forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Upsilon} [\bar{B}_r] \right) \{\bar{\phi}\}_r = - [\bar{B}_r] \frac{\partial}{\partial \Upsilon} \{\bar{\phi}\}_r \quad (3.78)$$

onde Υ é o parâmetro que define a modificação ao sistema inicial e a matriz $[\bar{B}_r]$ é definida na forma:

$$[\bar{B}_r] = [\bar{K}] - \bar{\lambda}_r^2 [M] \quad (3.79)$$

A derivada do vector próprio generalizado $\{\bar{\phi}\}_r$ pode ser expressa pela combinação linear dos restantes vectores próprios do sistema, de acordo com:

$$\frac{\partial}{\partial b} \{\bar{\phi}\}_r = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^m \vartheta_{r\ell} \{\bar{\phi}\}_\ell \quad (3.80)$$

Considerando as propriedades de ortogonalidade dos vectores próprios que podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \{\bar{\phi}\}_r^T [M] \{\bar{\phi}\}_\ell &= \delta_{r\ell} m_\ell \\ \{\bar{\phi}\}_r^T [\bar{K}] \{\bar{\phi}\}_\ell &= \delta_{r\ell} m_\ell \bar{\lambda}_\ell^2 \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde m_ℓ representa a matriz de massa modal e $\delta_{r\ell}$ é definido por:

$$\delta_{r\ell} = \begin{cases} 1 & r = \ell \\ 0 & r \neq \ell \end{cases}$$

Substituindo a Equação (3.80) na Equação (3.78), pré-multiplicando a equação resultante pelo vector $\{\bar{\phi}\}_\ell^T$, obtém-se um sistema de equações da forma:

$$\frac{\partial \bar{\lambda}_r}{\partial \Upsilon} = \frac{1}{m_r} \{\bar{\phi}\}_r^T \left[\frac{\partial}{\partial \Upsilon} [\bar{K}] - \bar{\lambda}_r^2 \frac{\partial}{\partial \Upsilon} [M] \right] \{\bar{\phi}\}_r \quad \text{para } r = \ell \quad (3.82a)$$

$$\vartheta_{r\ell} = \frac{1}{m_\ell (\bar{\lambda}_r^2 - \bar{\lambda}_\ell^2)} \{\bar{\phi}\}_\ell^T \left[\frac{\partial}{\partial \Upsilon} [\bar{K}] - \bar{\lambda}_r^2 \frac{\partial}{\partial \Upsilon} [M] \right] \{\bar{\phi}\}_r \quad \text{para } r \neq \ell \quad (3.82b)$$

Considerando as modificações de primeira ordem:

$$\Delta \bar{\lambda}_r^2 = \frac{\partial \bar{\lambda}_r^2}{\partial \Upsilon} \Delta \Upsilon \quad (3.83a)$$

$$[\Delta \bar{K}] = \frac{\partial [\bar{K}]}{\partial \Upsilon} \Delta \Upsilon \quad (3.83b)$$

$$[\Delta M] = \frac{\partial[M]}{\partial\Upsilon} \Delta\Upsilon \quad (3.83c)$$

e substituindo (3.83) em (3.82a) e (3.82b), obtém-se o sistema de equações que define a alteração dos valores e vectores próprios do sistema modificado em resultado da perturbação de primeira ordem aplicada:

$$\Delta\bar{\lambda}_r^2 = \frac{1}{m_r} \{\bar{\phi}\}_r^T \left[[\Delta\bar{K}] - \bar{\lambda}_r^2 [\Delta M] \right] \{\bar{\phi}\}_r \quad (3.84)$$

e

$$\Delta \{\bar{\phi}\}_r = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^m \vartheta_{r\ell} \{\bar{\phi}\}_\ell \quad (3.85)$$

onde a constante $\vartheta_{r\ell}$ é definida por:

$$\vartheta_{r\ell} = \frac{1}{m_\ell(\bar{\lambda}_r^2 - \bar{\lambda}_\ell^2)} \{\bar{\phi}\}_\ell^T \left[[\Delta\bar{K}] - \bar{\lambda}_r^2 [\Delta M] \right] \{\bar{\phi}\}_r \quad (3.86)$$

Da resolução do sistema de equações (3.84)–(3.86) determinam-se os factores de correcção a aplicar no processo de modificação dos parâmetros modais através da aplicação de um conjunto de equações de actualização definido por:

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}_r^2)^{p+1} &= (\bar{\lambda}_r^2)^p + (\Delta\bar{\lambda}_r^2)^p \\ \{\bar{\phi}\}_r^{p+1} &= \{\bar{\phi}\}_r^p + \Delta \{\bar{\phi}\}_r^p \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$m_r^{p+1} = m_r^p + \Delta m_r^p$$

onde $\Delta m_r = \{\bar{\phi}\}_r^T [\Delta M] \{\bar{\phi}\}_r$.

A modificação imposta é definida através da perturbação aplicada à matriz de rigidez $[\Delta\bar{K}]$ e de massa $[\Delta M]$ do sistema. Ou seja, a introdução do amortecimento no sistema, inicialmente não amortecido, é realizada por modificação da matriz de rigidez e da matriz de massa iniciais através da componente adicional correspondente ao tratamento. Esta técnica é particularmente aplicada a tratamentos superficiais viscoelásticos sem

restrição [66], em virtude de as alterações estruturais impostas pela modificação, quer a nível de massa e de rigidez, quer a nível de amortecimento introduzido, serem relativamente reduzidas. Lin e Lim [67] apresentam um método de perturbação idêntico, no qual apenas é considerada a variação da matriz de rigidez.

De forma a evitar o custo computacional associado ao processo de actualização dos vectores próprios do sistema (3.85), é possível utilizar, ao longo do processo de modificação, os modos normais correspondentes à estrutura não amortecida. Neste caso, iremos obter uma solução semelhante à obtida pelo método *MSE* [66], embora o custo computacional associado seja superior.

3.5 Conclusões

Neste capítulo é apresentada uma análise sucinta sobre as três principais dificuldades associadas à aplicação do método dos elementos finitos na simulação de tratamentos viscoelásticos, em particular nas formas integradas e superficiais com restrição.

A primeira dificuldade analisada refere-se à forma de discretização espacial da estrutura com tratamento, apresentando e catalogando os principais modelos espaciais aplicados. É desenvolvida uma análise sucinta e comparativa sobre as principais diferenças entre os modelos analisados, sua forma de aplicação, suas vantagens e dificuldades inerentes.

A forma de modelação ou representação das propriedades dos materiais viscoelásticos constitui também uma dificuldade no processo de simulação numérica dos tratamentos viscoelásticos. De facto, para além da forte dependência das propriedades dos materiais viscoelásticos com a frequência e a temperatura, e em menor escala com a amplitude de deformação, estes materiais exibem uma capacidade de amortecimento material considerável, que se traduz num factor de perda significativo, que é também dependente das variáveis enumeradas.

O processo de análise ou de solução que permite obter o resultado pretendido, seja ele uma resposta no domínio do tempo, um modelo modal truncado ou, eventualmente, um modelo parcial de resposta em frequência, depende sobretudo do tipo de carregamento imposto à estrutura e resultado pretendido, muito embora seja também dependente da forma de modelação das propriedades do material viscoelástico, razão pela qual estes dois

aspectos sejam usualmente confundidos e analisados conjuntamente. Neste trabalho é realizada essa distinção, embora seja sempre estabelecida a interdependência existente entre estes dois aspectos.

O desenvolvimento deste trabalho centra-se, sobretudo, na componente associada à modelação espacial dos tratamentos. Assim, tendo por base o modelo espacial assente na teoria de camada discreta, será desenvolvido no próximo capítulo um modelo generalizado de elementos finitos capaz de representar correctamente tratamentos viscoelásticos multi-camada, dando especial relevo à formulação numérica do elemento.

De forma a validar o elemento finito proposto torna-se necessário seleccionar um método de representação das propriedades e um método de resolução do problema de entre os métodos descritos neste capítulo. Assim, e considerando que a validação do elemento finito será baseada numa análise experimental sobre placas com tratamento mono e multi-camada, será aplicado o método da análise directa em frequência, associado ao método do módulo complexo, para obter o modelo de resposta em frequência do provete. As funções de resposta em frequência geradas numericamente podem, assim, ser directamente comparadas com as funções de resposta em frequência experimentais medidas nas placas tratadas. A aplicação desta metodologia permite, ainda, evitar os erros de aproximação associados ao método de representação das propriedades do material viscoelástico, recorrendo directamente aos valores de módulo complexo medidos ou retirados do nomograma do material, e os erros inerentes ao método de análise.

Para caracterizar e comparar o desempenho de diferentes configurações de tratamento viscoelástico, nomeadamente as configurações multi-camada, será desenvolvido um método de análise baseado no método *MSE* para a determinação das frequências naturais e respectivos factores de perda.

Capítulo 4

Formulação do elemento finito *layerwise*

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos do modelo de deformação por camadas, designado na literatura anglo-saxónica por modelo *layerwise*, no qual assenta o elemento finito desenvolvido. O elemento finito generalizado *layerwise* é baseado na teoria das placas espessas para cada uma das camadas do laminado. Após a formulação do elemento finito *layerwise* são apresentados os mecanismos de melhoramento da formulação base. Estes mecanismos têm por objectivo melhorar o desempenho do elemento em situações de bloqueio numérico de rigidez e permitir a sua aplicação na análise de geometrias tridimensionais. É ainda proposta uma forma alternativa de interpolação do campo de velocidades para o cálculo da matriz de massa, sendo essa interpolação baseada num conjunto de funções harmónicas.

4.1 Introdução

Os tratamentos viscoelásticos, aplicados numa configuração integrada sob a forma de estrutura *sandwich* ou numa configuração de tratamento superficial com restrição, devem a sua eficiência à elevada deformação de corte que é imposta à camada viscoelástica. Assim, a simulação do comportamento dinâmico da estrutura tratada depende sobretudo da correcta representação da deformação de corte que ocorre na camada viscoelástica dissipativa e da energia de deformação associada.

No capítulo anterior foram analisadas as diversas formas de modelação espacial que permitem descrever correctamente a deformação de corte, evidenciando claramente que, embora permitam satisfazer esse requisito, os modelos combinados apresentam alguns inconvenientes, nomeadamente na aplicação a estruturas de geometria complexa e a tratamentos multi-camada, exigindo um trabalho de modelação moroso e difícil.

Em alternativa, têm sido propostos elementos finitos baseados em teorias *layerwise* que permitem substituir eficazmente os modelos combinados, pelo menos no que respeita aos tratamentos de amortecimento com camadas viscoelásticas de reduzida espessura usualmente aplicados no controlo dinâmico de estruturas leves. No entanto, a maioria dos modelos propostos é desenvolvida sobre hipóteses simplificativas que, embora constituam uma aproximação razoável ao problema para o qual os elementos finitos são desenvolvidos, restringem a aplicabilidade dos mesmos noutras aplicações. Para além disso, a aplicação dos elementos finitos publicados a placas com tratamento viscoelástico multi-camada e/ou superfícies não planas não é normalmente considerada.

Assim, com base na análise realizada sobre as restrições e aplicabilidade dos elementos finitos *layerwise* publicados para simulação de tratamentos viscoelásticos, considera-se importante desenvolver e validar um elemento finito baseado na teoria *layerwise* seguindo os seguintes requisitos:

- omitir qualquer hipótese simplificativa tendo por base uma definição prévia da estrutura e distribuição de materiais no laminado;
- considerar todo o tipo de deformação em cada uma das camadas;
- dotar o elemento de mecanismos de protecção de bloqueios numéricos, nomeadamente o bloqueio de corte transversal e o bloqueio de corte no plano;

- permitir a aplicação do elemento numa configuração de casca de faceta;
- incluir um termo de rigidez segundo o grau de liberdade de rotação no plano.

Seguindo este conjunto de directivas, é apresentada nas secções seguintes deste capítulo a formulação e implementação numérica do elemento finito de casca de faceta proposto. Tendo-se optado por formular a matriz de rigidez e de massa, de cada uma das camadas individuais que constitui o laminado, com base no elemento de placa espessa, é iniciada a apresentação da formulação do elemento por uma exposição sumária da teoria da placa espessa e da formulação do elemento finito associado. Seguidamente é desenvolvido e apresentado o elemento finito proposto que será aplicado ao longo deste trabalho.

4.2 Teoria de placa espessa

As placas e as cascas são formas particulares do sólido tridimensional, nas quais a sua espessura, h , assume valores muito inferiores às outras duas dimensões. A aplicação de modelos tridimensionais na caracterização de placas, para além de pouco eficiente, degenera normalmente em problemas mal condicionados devido à razão elevada entre as três dimensões do elemento.

A teoria das placas finas, baseada nas hipóteses de *Kirchoff-Love*¹ permite caracterizar convenientemente a cinemática das placas de espessura fina em flexão, exigindo no entanto funções interpoladoras com continuidade $\mathbf{C}^1$. Por outro lado, as hipóteses assumidas por *Mindlin* e *Reissner*², nas quais se baseia a teoria das placas espessas, permitem a aplicação de funções interpoladoras com continuidade $\mathbf{C}^0$, ou seja, apenas é necessário garantir a continuidade, entre os elementos, das variáveis que definem a cinemática do elemento, não sendo necessária a garantia de continuidade das suas derivadas.

Na teoria das placas espessas, o estado de deformação da placa é caracterizado por três variáveis: o deslocamento normal à placa (w) e as rotações das secções rectas segundo duas direcções ortogonais definidas no plano da placa (β^x e β^y). A Figura 4.1 representa

¹As hipóteses de *Kirchoff-Love* assumem que as secções rectas da placa permanecem rectas e normais ao plano médio da placa.

²As hipóteses de *Reissner-Mindlin* assumem que as secções rectas da placa permanecem rectas mas não necessariamente normais ao plano médio da placa.

a cinemática de uma placa segundo a teoria da placa espessa. Por convenção, assume-se que o plano médio da placa não deformada é coincidente com o plano cartesiano xy , sendo o vector da variável deslocamento normal (w) paralelo ao eixo z .

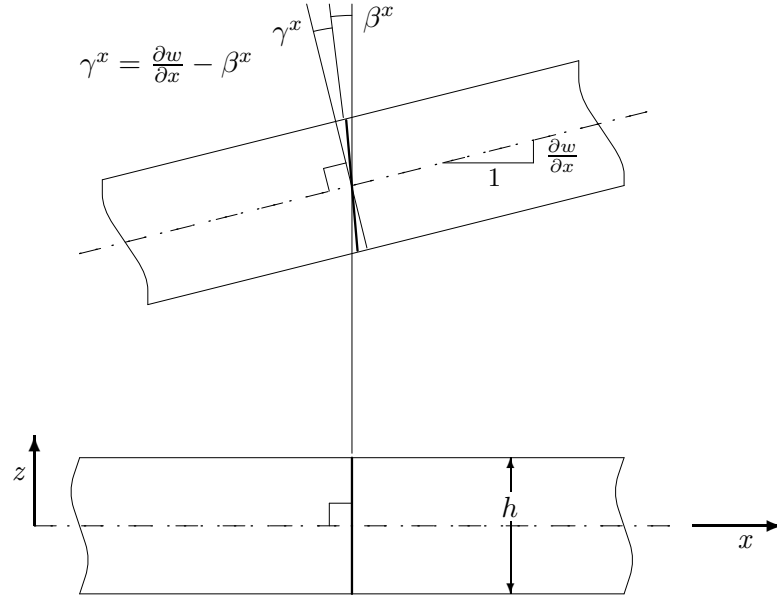


Figura 4.1: Modelo cinemático da teoria da placa espessa

As teorias das placas finas e das placas espessas, baseadas, respectivamente, nas hipóteses de *Kirchoff-Love* e nas hipóteses de *Reissner-Mindlin*, estão extensivamente documentadas na maioria das obras que versam sobre a aplicação do métodos dos elementos finitos a problemas estruturais, das quais podemos destacar as referências [152, 160–162], pelo que iremos apenas apresentar resumidamente a teoria das placas espessas, de forma a introduzir a sua aplicação ao modelo *layerwise*.

4.2.1 Hipóteses de *Reissner-Mindlin*

A teoria da placa espessa assenta sobre um conjunto de hipóteses que se podem resumir a:

1. $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}], (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2\}$
sendo Ω o domínio do elemento de placa

2. $\sigma_{zz} = 0,$
3. $u(x, y, z) = z\beta^x(x, y)$
4. $v(x, y, z) = z\beta^y(x, y)$
5. $w(x, y, z) = w(x, y)$

O volume do elemento, representado por Ω , é definido pela sua área A e pela sua espessura h . As hipóteses 3 e 4 obrigam a que as secções rectas da placa permaneçam planas. A hipótese 5 indica que o deslocamento transversal da placa é necessariamente uniforme ao longo da sua espessura, ou seja, não é contemplado o esmagamento da placa.

4.2.2 Relação deslocamento-deformação

A aplicação das hipóteses 3, 4 e 5 nas relações deslocamento-deformação de uma placa em regime elástico permite reformulá-las da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta^x}{\partial x} \\
\varepsilon^{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \beta^y}{\partial y} \\
\gamma^{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \beta^x}{\partial y} + \frac{\partial \beta^y}{\partial x} \right) \\
\gamma^{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \beta^x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\gamma^{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \beta^y + \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

De acordo com as relações descritas por (4.1), a rotação da secção recta da placa $(\beta^{x,y})$ não é necessariamente igual à rotação do seu plano médio $(\partial w / \partial x, y)$. Esta hipótese permite considerar as deformações de corte transversal.

4.2.3 Relação deformação-tensão

Considerando a hipótese 2 (estado plano de tensão) na lei constitutiva de um sólido tridimensional isotrópico e homogêneo, o estado de tensão na placa é relacionado com o campo de deformações através da matriz de elasticidade, que depende unicamente das propriedades do material, pela relação:

- Componente de flexão no plano:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$
$$\begin{Bmatrix} \sigma^{xx} \\ \sigma^{yy} \\ \tau^{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{xx} \\ \varepsilon^{yy} \\ \gamma^{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

- Componente de corte transversal:

$$\{\tau\} = [G] \{\gamma\}$$
$$\begin{Bmatrix} \tau^{xz} \\ \tau^{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{Bmatrix} \gamma^{xz} \\ \gamma^{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

onde E e ν representam, respectivamente, o módulo de *Young* e o coeficiente de *Poisson* do material, considerado isotrópico e homogêneo.

É com base na teoria das placas espessas, aqui apresentada de uma forma resumida, que se desenvolverá a teoria da deformação por camadas, associada ao modelo *layerwise*, nas próximas secções deste capítulo.

4.3 Teoria de deformação por camadas - Modelo *layerwise*

A teoria da deformação por camadas [114], que constitui a base do modelo *layerwise* aqui desenvolvido, associa um campo independente de rotações a cada uma das camadas individuais.

Considerando uma placa laminada constituída por n camadas (Figura 4.2), podemos associar a cada camada genérica k uma rotação β_k^x e uma rotação β_k^y ³, particulares para essa camada e independentes das restantes. A continuidade entre camadas é assegurada na descrição do seu campo de deslocamentos. Desta forma, é possível descrever com maior rigor o comportamento de placas laminadas constituídas por camadas de materiais diferentes. Os tratamentos viscoelásticos são um exemplo destes laminados.

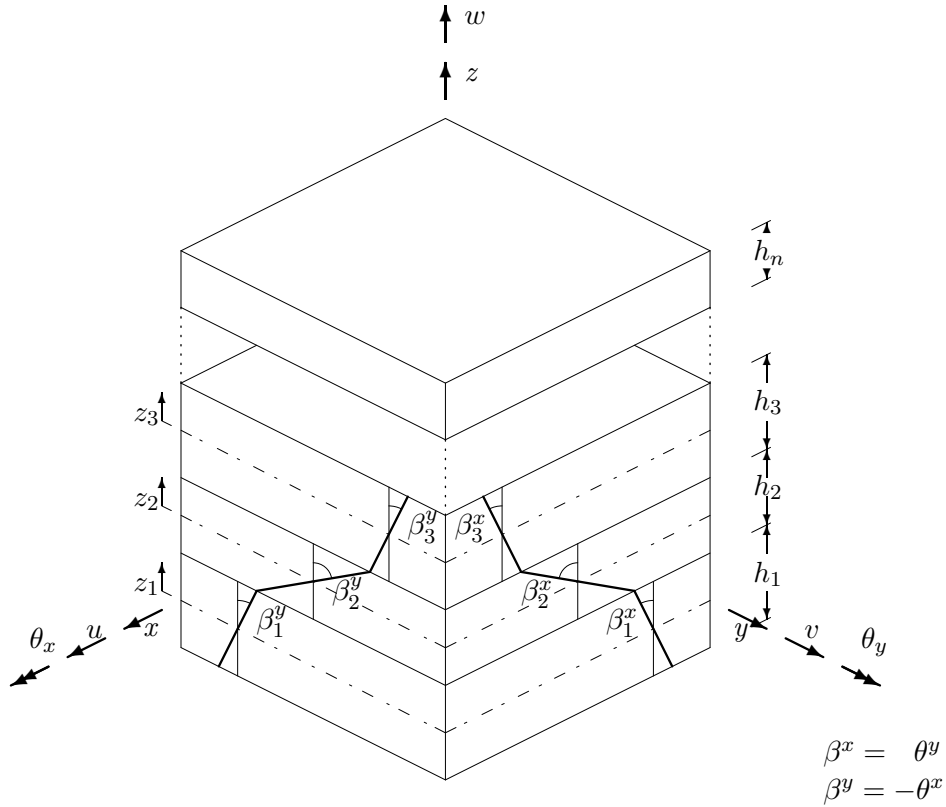


Figura 4.2: Teoria de deformação por camadas - Modelo *layerwise*

Cada camada individual é descrita por uma teoria de 1^a ordem, embora teorias de ordem superior, recorrendo a polinómios de 3^o grau [163,164] ou funções trigonométricas [165–167], possam ser aplicadas aos modelos *layerwise*. As hipóteses de *Reissner-Mindlin* são aplicadas individualmente a cada uma das camadas, ou seja, as secções rectas de cada

³Neste trabalho, por forma a facilitar a leitura e aplicação do formalismo associado ao desenvolvimento do modelo de elementos finitos aqui apresentado, designou-se por β_k^x e β_k^y a rotação da secção recta da camada k segundo, respectivamente os eixos yy e xx , tendo-se adoptado, por convenção, $\beta_k^x = \theta_k^y$ e $\beta_k^y = -\theta_k^x$.

camada permanecem rectas mas não necessariamente normais ao plano médio da camada. Esta hipótese, permitida pela independência das rotações, considera as deformações de corte transversal em cada uma das camadas.

4.4 Campo de deslocamentos

Considerando o modelo de placa por camadas (Figura 4.3), usualmente designado por modelo *layerwise* ou, mais especificamente, por modelo *zig-zag*, podemos definir o campo de deslocamentos de uma camada genérica k como sendo:

$$\{\mathbf{u}\}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + \frac{h_1}{2}\beta_1^x + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \beta_j^x + \frac{h_k}{2}\beta_k^x + z_k \beta_k^x \\ v + \frac{h_1}{2}\beta_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \beta_j^y + \frac{h_k}{2}\beta_k^y + z_k \beta_k^y \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

A condição $w_k = w$ representa a hipótese de inexistência de esmagamento da placa.

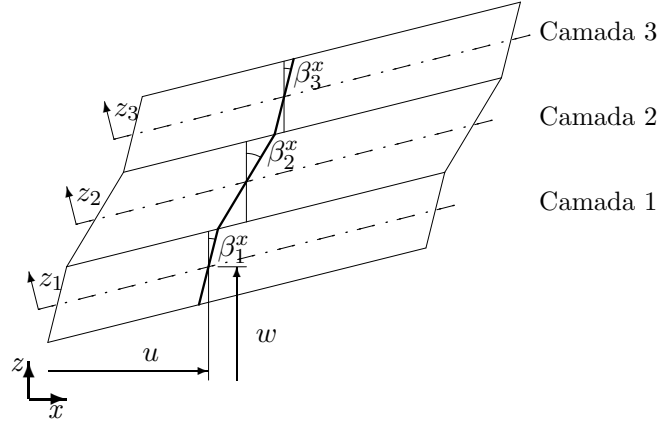


Figura 4.3: Modelo cinemático do modelo *layerwise*

De notar que as condições de continuidade entre camadas são estabelecidas directamente na formulação do seu campo de deslocamentos. Assim, o modelo cinemático da camada genérica k considera, para além do modelo cinemático individual desenvolvido com base

na teoria das placas espessas, o campo de deslocamentos na interface ($z_{k-1} = \frac{1}{2} h_{k-1}$) com a camada anterior, e assim sucessivamente.

O campo de deslocamentos (4.4) pode ser definido a partir da operação matricial:

$$\{\mathbf{u}\}_k = [\mathcal{N}]_k \{d\} \quad (4.5)$$

onde o vector $\{d\}$, definido por:

$$\{d\} = \{u, v, w, \beta_1^x, \beta_1^y, \dots, \beta_j^x, \beta_j^y, \dots, \beta_k^x, \beta_k^y, \dots, \beta_n^x, \beta_n^y\}^T \quad (4.6)$$

representa o vector de deslocamentos generalizados, e a matriz $[\mathcal{N}]_k$, da forma:

$$[\mathcal{N}]_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & \dots & h_j & 0 & \dots & \frac{h_k}{2} + z_k & 0 & \vdots & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & \dots & 0 & h_j & \dots & 0 & \frac{h_k}{2} + z_k & \vdots & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

permite definir o campo de deslocamentos da camada genérica k a partir do vector de deslocamentos generalizados do laminado.

4.5 Campo de deformações

Com base no campo de deslocamentos descrito pela equação (4.4), o campo de deformações da camada k , definido pelo vector de deformações $\{\varepsilon\}_k$:

$$\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon_k^{xx} \quad \varepsilon_k^{yy} \quad \gamma_k^{xy} \quad \gamma_k^{xz} \quad \gamma_k^{yz}\}^T \quad (4.8)$$

pode ser escrito na forma:

$$\varepsilon_k^{xx} = \frac{\partial u_k}{\partial x} \quad (4.9a)$$

$$\varepsilon_k^{yy} = \frac{\partial v_k}{\partial y} \quad (4.9b)$$

$$\gamma_k^{xy} = \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \quad (4.9c)$$

$$\gamma_k^{xz} = \frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial x} \quad (4.9d)$$

$$\gamma_k^{yz} = \frac{\partial v_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial y} \quad (4.9e)$$

Assim, aplicando os operadores diferenciais definidos nas equações (4.9) ao campo de deslocamentos descrito pela equação (4.4), obtemos o campo de deformações $\{\varepsilon\}_k$ definido por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + && \text{(componente de membrana)} \\ &+ \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^x}{\partial x} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^x}{\partial x} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^x}{\partial x} + && \text{(componente de acoplamento)} \\ &+ z_k \frac{\partial \beta_k^x}{\partial x} && \text{(componente de flexão)} \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + && \text{(componente de membrana)} \\ &+ \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial y} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^y}{\partial y} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^y}{\partial y} + && \text{(componente de acoplamento)} \\ &+ z_k \frac{\partial \beta_k^y}{\partial y} && \text{(componente de flexão)} \end{aligned} \quad (4.10b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k^{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} && \text{(componente de membrana)} \\ &+ \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^x}{\partial y} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^x}{\partial y} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^x}{\partial y} + && \\ &+ \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial x} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^y}{\partial x} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^y}{\partial x} + && \text{(componente de acoplamento)} \\ &+ z_k \frac{\partial \beta_k^y}{\partial x} + z_k \frac{\partial \beta_k^x}{\partial y} && \text{(componente de flexão)} \end{aligned} \quad (4.10c)$$

$$\gamma_k^{xz} = \beta_k^x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{(componente de corte transversal)} \quad (4.10d)$$

$$\gamma_k^{yz} = \beta_k^y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{componente de corte transversal}) \quad (4.10e)$$

De acordo com as expressões (4.10a)-(4.10e), as componentes de membrana, flexão e corte transversal correspondem à aplicação directa da teoria das placas espessas e de membrana em cada camada individual k . A continuidade do campo de deslocamentos entre as camadas é garantida pela componente designada ao longo deste texto por componente de acoplamento.

4.5.1 Matriz de deformação

De acordo com a Equação (4.9), o vector de deformações $\{\varepsilon\}_k$ é obtido a partir do campo de deslocamentos $\{\mathbf{u}\}_k$ através da aplicação de uma matriz de operadores diferenciais $[\mathcal{L}]$, na forma:

$$\{\varepsilon\}_k = [\mathcal{L}]\{\mathbf{u}\}_k \quad (4.11)$$

onde a matriz $[\mathcal{L}]$ é definida como:

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Segundo (4.5), o campo de deslocamentos de uma camada genérica k é definido através das componentes de um vector de deslocamentos generalizados $\{d\}$ que representam os graus de liberdade da placa. Assim, podemos relacionar o campo de deformações directamente a partir do vector de deslocamentos generalizados, através de uma matriz de deformação $[\mathcal{B}]_k$:

$$\{\varepsilon\}_k = [\mathcal{B}]_k\{d\} \quad (4.13)$$

sendo o vector de deslocamentos generalizados $\{d\}$ definido em (4.6).

A matriz de deformação $[\mathcal{B}]_k$ pode, então, ser obtida pela multiplicação matricial da forma:

$$[\mathcal{B}]_k = [\mathcal{L}][\mathcal{N}]_k \quad (4.14)$$

Utilizando a divisão imposta em (4.10a)-(4.10e), e combinando as componentes de membrana e de acoplamento, podemos dividir o campo de deformações em três componentes individuais, na forma:

$$\{\varepsilon\}_k = \left\{ \begin{matrix} \{\varepsilon\}_k^M + \{\varepsilon\}_k^A; & \{\varepsilon\}_k^F; & \{\gamma\}_k^C \end{matrix} \right\}^T \quad (4.15)$$

onde os índices M, A, F e C identificam, respectivamente, as componentes de membrana, de acoplamento, de flexão e de corte transversal.

Assim, os termos da matriz de deformação $[\mathcal{B}]$, determinada pela Equação (4.14), devem ser distribuídos por três sub-matrizes independentes, na forma:

$$[\mathcal{B}]_k = \left[\begin{array}{cccccccccccc|c} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \cdots & h_j \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \cdots & 0 & h_j \frac{\partial}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \cdots & h_j \frac{\partial}{\partial y} & h_j \frac{\partial}{\partial x} & \cdots & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & z_k \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_k \frac{\partial}{\partial y} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & z_k \frac{\partial}{\partial y} & z_k \frac{\partial}{\partial x} & \\ \hline 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \end{array} \right] [0] \quad (4.16)$$

onde a primeira sub-matriz, $[\mathcal{B}]_k^{MA}$, corresponde à componente de membrana e de acoplamento, a segunda sub-matriz, $[\mathcal{B}]_k^F$, é a matriz de deformação da componente de flexão e a terceira sub-matriz, $[\mathcal{B}]_k^C$, é devida à componente de corte transversal.

4.6 Campo de tensões

O campo de tensões a que a camada genérica k da placa está sujeita é determinado pelo respectivo campo de deformações, sendo essa relação definida pela lei constitutiva do material. Assim, e considerando uma camada genérica k , o campo de tensões é definido pelo vector:

$$\{\sigma\}_k = \{\sigma_k^{xx} \quad \sigma_k^{yy} \quad \tau_k^{xy} \quad \tau_k^{xz} \quad \tau_k^{yz}\}^T \quad (4.17)$$

cujas componentes, seguindo a metodologia aplicada ao campo de deformações, podem ser agrupadas nas componentes de tensão de membrana, de acoplamento, de flexão e de corte transversal:

$$\{\sigma\}_k = \left\{ \{\sigma\}_k^M + \{\sigma\}_k^A; \quad \{\sigma\}_k^F; \quad \{\tau\}_k^C \right\}^T \quad (4.18)$$

4.6.1 Matriz de elasticidade

A relação entre o campo de deformações e o campo de tensões é obtida através da lei constitutiva do material, a qual, considerando que a deformação da placa ocorre no regime elástico e que o material é isotrópico, é descrita pela matriz de elasticidade $[\mathcal{D}]_k$:

$$\{\sigma\}_k = [\mathcal{D}]_k \{\varepsilon\}_k \quad (4.19)$$

Considerando a divisão imposta aos campos de deformação e de tensão, podemos definir a matriz de elasticidade $[\mathcal{D}]_k$ na forma:

$$[\mathcal{D}]_k = \begin{bmatrix} [D]_k^{MA} & [0] & [0] \\ & [D]_k^F & [0] \\ sim. & & [G]_k^C \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

onde as sub-matrizes $[D]_k^{MA}$, $[D]_k^F$ e $[G]_k^C$ representam, respectivamente, as matrizes de elasticidade de membrana (e acoplamento), de flexão e de corte transversal, definidas por:

$$[D]_k^{MA} = [D]_k^F = [D]_k \quad (4.21)$$

$$[G]_k^C = [G]_k$$

sendo as matrizes $[D]_k$ e $[G]_k$ as matrizes de elasticidade no plano e de corte transversal da placa espessa, definidas em (4.2) e (4.3), respectivamente.

4.7 Energia potencial

A energia potencial interna de deformação do laminado é definida através do integral sobre o volume total do conjunto de camadas, na forma:

$$\Pi^P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \, d\Omega \quad (4.22)$$

No entanto, a energia potencial total do sistema constituído por n camadas pode ser ainda obtida pelo somatório da contribuição energética de cada uma das camadas, como:

$$\Pi^P = \sum_{k=1}^n \Pi_k^P \quad (4.23)$$

Assim, a energia potencial de deformação interna do laminado pode ser obtida através da expressão:

$$\Pi^P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \{\varepsilon\}_k^T \{\sigma\}_k \, d\Omega_k \quad (4.24)$$

a qual, substituindo o vector de tensões por (4.19), pode ser escrita como:

$$\Pi^P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \{\varepsilon\}_k^T [\mathcal{D}]_k \{\varepsilon\}_k \, d\Omega_k \quad (4.25)$$

De forma a reduzir o esforço computacional associado ao cálculo da energia potencial de deformação, separando o integral em ordem ao volume Ω_k num integral duplo estendido à área da placa A e num integral simples na espessura h_k , pode calcular-se este último integral de forma analítica. Desta forma, a expressão da energia potencial (4.25) pode ser substituída por uma soma de produtos de integrais duplos em ordem à área e de integrais simples na espessura da placa:

$$\Pi^P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_A \int_{z_k} \{\varepsilon\}_k^T [\mathcal{D}]_k \{\varepsilon\}_k \, dz_k \, dA \quad (4.26)$$

onde A é o espaço bidimensional definido pelas coordenadas x, y ($A \subset \mathbb{R}$) e $z_k \in \left[-\frac{h_k}{2}, \frac{h_k}{2}\right]$. Este procedimento é possível dado termos considerado que a espessura da camada é constante. No entanto, esta restrição pode ser aliviada na aplicação da formulação ao método de elementos finitos considerando para tal uma espessura média constante dentro do elemento, mas não necessariamente igual aos elementos circundantes.

Substituindo a relação expressa em (4.13), sendo $[\mathcal{B}]_k$ definida na forma (4.16), pode reescrever-se a expressão da energia potencial (4.26) na forma:

$$\Pi^P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_A \int_{z_k} \{d\}^T [\mathcal{B}]_k^T [\mathcal{D}]_k [\mathcal{B}]_k \{d\} \, dz_k \, dA \quad (4.27)$$

A determinação explícita do integral ao longo da espessura da camada genérica k permite reescrever a expressão anterior na forma:

$$\Pi^P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_A \{d\}^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k \{d\} \, dA \quad (4.28)$$

onde $[\hat{\mathcal{D}}]_k$ representa a matriz de elasticidade modificada pela inclusão do resultado da integração analítica, definida por:

$$[\hat{\mathcal{D}}]_k = \begin{bmatrix} h_k [D]_k & [0] & [0] \\ & \frac{h_k^3}{12} [D]_k & [0] \\ sim. & & h_k [G]_k \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

A matriz $[\hat{\mathcal{B}}]_k$, que corresponde à matriz de deformação modificada, é obtida a partir da matriz de deformação definida em (4.16), e toma a forma:

$$[\hat{\mathcal{B}}]_k = \begin{bmatrix} [\mathcal{B}]_k^{\text{MA}} \\ \frac{1}{z_k} [\mathcal{B}]_k^{\text{F}} \\ [\mathcal{B}]_k^{\text{C}} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

4.8 Campo de velocidades

O campo de velocidades de uma camada genérica k pode ser obtido a partir do respectivo campo de deslocamentos (4.4) por derivação em ordem ao tempo, sendo definido por:

$$\{\dot{\mathbf{u}}\}_k = \begin{Bmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \\ \dot{w}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + \frac{h_1}{2}\dot{\beta}_1^x + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \dot{\beta}_j^x + \frac{h_k}{2}\dot{\beta}_k^x + z_k \dot{\beta}_k^x \\ \dot{u} + \frac{h_1}{2}\dot{\beta}_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \dot{\beta}_j^y + \frac{h_k}{2}\dot{\beta}_k^y + z_k \dot{\beta}_k^y \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Recorrendo à matriz $[\mathcal{N}]$, que relaciona o campo de deslocamentos com o vector de deslocamentos generalizados $\{d\}$, pode obter-se o campo de velocidades através da multiplicação matricial da forma:

$$\{\dot{\mathbf{u}}\}_k = [\mathcal{N}]_k \{\dot{d}\} \quad (4.32)$$

onde $\{\dot{d}\} = \{\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dots\}$ representa a derivada no tempo do vector de deslocamentos generalizados $\{d\}$.

4.9 Energia cinética

A energia cinética total do sistema é obtida pelo integral estendido ao seu domínio, na forma:

$$\Pi^C = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\dot{\mathbf{u}}\}^T [\mathcal{J}] \{\dot{\mathbf{u}}\} \, d\Omega \quad (4.33)$$

onde $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ e $[\mathcal{J}]$ representam, respectivamente, o campo de velocidades e a matriz de inércia do sistema.

Com base na contribuição energética de cada camada genérica k , a energia cinética do sistema pode ser definida na forma:

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \Pi_k^C \quad (4.34)$$

sendo Π_k^C a componente de energia cinética correspondente a uma camada genérica k calculada como:

$$\Pi_k^C = \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \{\dot{\mathbf{u}}\}_k^T [\mathcal{J}]_k \{\dot{\mathbf{u}}\}_k \, d\Omega_k \quad (4.35)$$

De forma idêntica à aplicada no cálculo do integral da energia potencial, pode separar-se o integral estendido ao domínio da camada Ω_k num integral duplo em ordem à área da camada A e num integral simples na espessura h_k . Assim, pode reescrever-se a expressão (4.35) na forma:

$$\Pi_k^C = \frac{1}{2} \int_A \int_{z_k} \{\dot{\mathbf{u}}\}_k^T [\mathcal{J}]_k \{\dot{\mathbf{u}}\}_k \, dz_k \, dA \quad (4.36)$$

onde o campo de velocidades $\{\dot{\mathbf{u}}\}_k$ da camada k é definido por (4.31) e a matriz $[\mathcal{J}]$ representa a matriz de inércia da camada k , sendo definida por:

$$[\mathcal{J}]_k = \begin{bmatrix} \rho_k & 0 & 0 \\ 0 & \rho_k & 0 \\ 0 & 0 & \rho_k \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

e ρ_k representa a massa volúmica do material da camada k .

Substituindo o campo de velocidades pela relação (4.32), pode reescrever-se a expressão da energia cinética da camada k na forma:

$$\Pi_k^C = \frac{1}{2} \int_A \int_{z_k} \{\dot{d}\}^T [\mathcal{N}]_k^T [\mathcal{J}]_k [\mathcal{N}]_k \{\dot{d}\} \, dz_k \, dA \quad (4.38)$$

que também pode ser escrita como:

$$\Pi_k^C = \frac{1}{2} \int_A \int_{z_k} \{\dot{d}\}^T [J]_k \{\dot{d}\} \, dz_k \, dA \quad (4.39)$$

sendo a matriz $[J]_k$ definida por:

$$[J]_k = [\mathcal{N}]_k^T [\mathcal{J}]_k [\mathcal{N}]_k \quad (4.40)$$

Calculando explicitamente o integral em ordem à espessura da camada, pode reescrever-se a expressão que define a energia cinética do laminado na forma:

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_A \{\dot{d}\}^T [\hat{J}]_k \{\dot{d}\} dA \quad (4.41)$$

onde a matriz de inércia modificada $[\hat{J}]_k$, resultante da inclusão do resultado da integração analítica, é definida por:

$$[\hat{J}]_k = \rho_k h_k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & \cdots & h_j & 0 & \cdots & \frac{h_k}{2} & 0 & \vdots \\ & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & \cdots & 0 & h_j & \cdots & 0 & \frac{h_k}{2} & \vdots \\ & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots \\ & & & \frac{h_1^2}{4} & 0 & \cdots & \frac{h_1}{2} h_j & 0 & \cdots & \frac{h_1}{2} \frac{h_k}{2} & 0 & \vdots \\ & & & & \frac{h_1^2}{4} & \cdots & 0 & \frac{h_1}{2} h_j & \cdots & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{h_k}{2} & \vdots \\ & & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & h_j^2 & 0 & \cdots & h_j \frac{h_k}{2} & 0 & \vdots \\ & & & & & & & h_j^2 & \cdots & 0 & h_j \frac{h_k}{2} & \vdots \\ & & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & & & & \frac{h_k^2}{3} & 0 & \vdots \\ & & & & & & & & & & \frac{h_k^2}{3} & \vdots \\ \hline & & & & & & & & & & & [0] \\ & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & [0] \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

4.10 Formulação de elementos finitos

O método dos elementos finitos é uma técnica numérica de resolução de problemas associados ao comportamento de sistemas físicos. É um método especialmente indicado para problemas definidos em domínios complexos e irregulares devido à discretização em

subdomínios simples e regulares, designados por elementos finitos, nos quais a resolução do problema se torna mais simples.

A formulação de elementos finitos mais utilizada em problemas de mecânica dos sólidos opera directamente sobre o campo de deslocamentos. Este é definido dentro do elemento finito através da interpolação, usando funções interpoladoras simples, dos valores da variável dependente, neste caso dos valores das componentes do vector de deslocamentos generalizados $\{d\}^e$, nos nós do elemento. Assim, o problema é resolvido pela resolução de um sistema de equações, no qual as incógnitas são as componentes do campo de deslocamentos generalizados presentes em cada um dos nós do domínio em análise.

Nesta secção é apresentada a aplicação da formulação da teoria *layerwise* ao método dos elementos finitos, desenvolvendo e apresentando a formulação do elemento finito de placas *layerwise*.

4.10.1 Elemento finito de placa *layerwise*

A formulação anteriormente estabelecida e descrita é aplicada, recorrendo ao elemento quadrilátero de 4 nós, no desenvolvimento de um elemento de casca de faceta e de placa. O elemento de casca de faceta tridimensional é descrito num referencial global cartesiano (X,Y,Z) sendo as suas matrizes de rigidez e de massa calculadas num referencial local cartesiano (x,y,z) cujo plano $x-y$ é coplanar com a face do elemento (Figura 4.4). Este elemento, quando descrito no espaço de coordenadas naturais (ξ, η, ζ) (Figura 4.4), assume a configuração de um quadrado de lado igual a duas vezes a unidade. Assume-se ainda que os nós são numerados por ordem crescente no sentido directo.

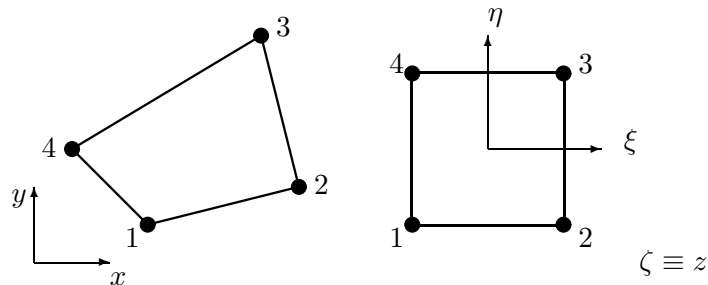


Figura 4.4: Elemento quadrilátero de 4 nós - Sistema de coordenadas local e natural

A redefinição do elemento no espaço de coordenadas naturais permite simplificar a construção das funções interpoladoras e a aplicação dos processos de integração numérica, como, por exemplo, o método de quadratura de *Gauss-Legendre*.

Antes da montagem das matrizes de rigidez e de massa globais, as respectivas matrizes individuais do elemento são transformadas geometricamente para o referencial global da estrutura. Essa transformação de referencial é realizada através de uma matriz de projecção $[P]$, definida a partir dos cossenos directores entre os dois referenciais:

$$[P]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

permitindo transformar as matrizes de massa e de rigidez para o referencial global, operando sobre sub-matrizes 3x3 correspondentes aos graus de liberdade de translação ou rotação segundo x , y e z , da forma:

$$\begin{aligned} [K]_{XYZ}^e &= [P]^T [K]_{xyz}^e [P] \\ [M]_{XYZ}^e &= [P]^T [M]_{xyz}^e [P] \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.10.2 Interpolação geométrica e do campo de deslocamentos

A representação do elemento no espaço de coordenadas naturais (ξ, η, ζ) permite um tratamento matemático mais simples. No entanto, torna-se necessário definir um processo de transformação da geometria do elemento finito entre o sistema local de coordenadas cartesianas (x, y, z) e o sistema local de coordenadas naturais (ξ, η, ζ) . Esta transformação pode ser definida com base numa aproximação geométrica, aplicando funções de interpolação, que permite calcular as coordenadas cartesianas (x, y) de um qualquer ponto pertencente ao domínio do elemento a partir das suas coordenadas naturais (ξ, η) e das coordenadas cartesianas dos nós do elemento (note-se que os eixos ζ e z são

coincidentes):

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde x_i e y_i representam as coordenadas cartesianas dos nós do elemento e $N_i(\xi, \eta)$ são as funções de interpolação geométrica do elemento finito, usualmente designadas por funções de forma.

Para além da geometria do elemento é também necessária a aplicação de uma interpolação às variáveis do problema. Essa interpolação da variável pode ser realizada através do mesmo conjunto de funções de forma aplicado na interpolação geométrica, constituindo assim um elemento finito isoparamétrico. Assim, sendo cada nó descrito pelas suas coordenadas nodais (x_i, y_i) e respectivo vector de graus de liberdade $\{d_i\}^e = \{u_i, v_i, w_i, \beta_{1_i}^x, \beta_{1_i}^y, \dots, \beta_{n_i}^x, \beta_{n_i}^y\}^T$, pode calcular-se o vector de deslocamentos generalizados do elemento:

$$\{d\}^e = \{u, v, w, \beta_1^x, \beta_1^y, \dots, \beta_n^x, \beta_n^y\}^T \quad (4.46)$$

a partir do vector de graus de liberdade nodais pela aplicação de relações interpoladoras idênticas às aplicadas em (4.45), da forma:

$$\{d\}^e = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \{d_i\}^e \quad (4.47)$$

onde o vector $\{d_i\}^e$, descrito por:

$$\{d_i\}^e = \left\{ \begin{matrix} \{d_1\}^e & \{d_2\}^e & \{d_3\}^e & \{d_4\}^e \end{matrix} \right\}^T \quad (4.48)$$

representa o conjunto dos vectores dos graus de liberdades nodais do elemento.

Funções de forma bilineares

As funções de forma são normalmente funções polinomiais simples, que devem satisfazer as condições de continuidade dentro do elemento e permitir a correcta aproximação da variável interpolada com base nos valores que a mesma apresenta nos respectivos nós. Usualmente, para o elemento de 4 nós, são aplicadas funções de forma bilineares [162, 168, 169] da forma :

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (4.49)$$

cujas derivadas no espaço (ξ, η) são definidas por:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta_i \eta) \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi_i \xi) \quad (4.50)$$

Os parâmetros nodais ξ_i, η_i definem as funções de forma e suas derivadas para cada um dos quatro nós do elemento. Estes parâmetros são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros nodais das funções de forma do elemento quadrilátero de 4 nós

Nó	1	2	3	4
ξ_i	-1	1	1	-1
η_i	-1	-1	1	1

Funções de forma bi-harmónicas

No desenvolvimento deste trabalho, e para a interpolação do campo de velocidades do elemento finito, propõe-se também a aplicação de um conjunto de funções de interpolação do tipo harmónico, da forma:

$$N_i^{BH} = \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{4 - \pi} \left[\frac{\pi}{4} \xi_i \xi - \cos \left(\frac{\pi}{4} (1 - \xi_i \xi) \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} (1 - \xi_i \xi) \right) \right] \right] \times \quad (4.51)$$

$$\times \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{4 - \pi} \left[\frac{\pi}{4} \eta_i \eta - \cos \left(\frac{\pi}{4} (1 - \eta_i \eta) \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} (1 - \eta_i \eta) \right) \right] \right]$$

Este conjunto de funções interpoladoras, doravante designadas por funções de forma bi-harmônicas, tem a particularidade de as suas derivadas serem nulas na fronteira do elemento.

A Figura 4.5 representa graficamente a comparação entre a função de forma bilinear e a correspondente função de forma bi-harmônica, permitindo evidenciar, por um lado, a distribuição do peso de cada uma das funções interpoladoras dentro do elemento e, por outro, a continuidade do interpolador e da sua derivada entre elementos contíguos.

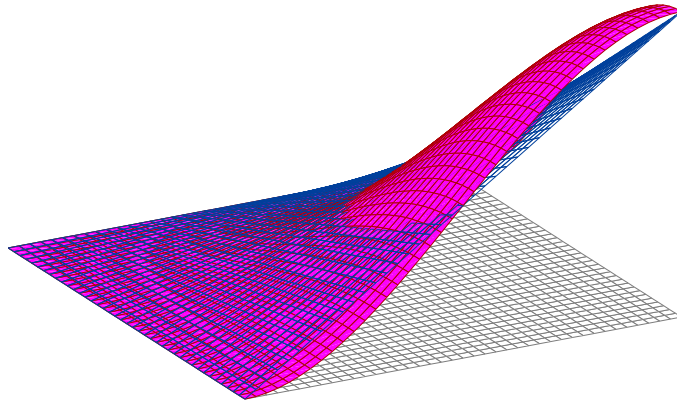


Figura 4.5: Comparação entre um interpolador bi-harmónico e o homólogo bilinear

4.10.3 Matriz de deformação

A formulação da placa *layerwise* descrita assenta sobre a divisão do emparelhamento de camadas, analisando cada camada individual em separado. Este procedimento é possível através da inclusão dos termos de acoplamento entre camadas na descrição do campo de deslocamentos, garantindo assim as condições de continuidade entre camadas. Desta forma, é possível particularizar a discretização pelo método dos elementos finitos ao nível de cada camada individual que constitui cada elemento de placa.

De acordo com (4.11), o campo de deformações $\{\varepsilon\}_k$ da camada k é relacionado com o campo de deslocamentos correspondente $\{\mathbf{u}\}_k$ através de uma matriz de operadores diferenciais $[\mathcal{L}]_k$. Representando o campo de deslocamentos através das componentes do vector de deslocamentos generalizados $\{d\}$, pode substituir-se essa matriz de operadores diferenciais por uma matriz de deformação $[\mathcal{B}]_k$, que permite obter o campo de deformações directamente do vector de deslocamentos generalizados, como indicado em (4.13).

Aproximando o campo de deslocamentos dentro do elemento da camada k pela aplicação das funções interpoladoras (4.47), obtém-se o campo de deformações através da relação:

$$\{\varepsilon\}_k^e = [\mathcal{B}]_k \{d\}^e \quad (4.52)$$

que pode ser reescrita na forma:

$$\{\varepsilon\}_k^e = [\mathcal{B}]_k [N] \{d_i\}^e \quad (4.53)$$

onde a matriz $[N]$, normalmente designada por matriz das funções de forma, é definida como:

$$[N] = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & N_1 & & & & & & \\ & & \vdots & & & & & \\ & & & N_2 & & & & \\ & & & & \vdots & & & \\ & & & & & N_3 & & \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & N_4 \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

A substituição da variável dependente pela sua aproximação através da interpolação dos valores nodais permite assim transpor a aplicação do conjunto de operadores diferenciais descritos pela matriz de deformação $[\mathcal{B}]$ da variável para as próprias funções de interpolação.

4.10.4 Matriz de elasticidade

Segundo (4.19), o campo de tensões dentro do elemento finito pode ser obtido através do respectivo campo de deformações. Assim, o campo de tensões do elemento, ou particularmente em cada uma das suas camadas individuais, pode ser definido, a partir do respectivo campo de deformações, pela aplicação de uma matriz constitutiva do material, que, neste caso, por consideração de regime elástico, se denomina por matriz de elasticidade. Esta matriz é independente da geometria do elemento, dependendo única e exclusivamente das propriedades do material constituinte.

O elemento *layerwise* proposto permite a análise de laminados constituídos por camadas com diferente espessura média e diferente material. Assim, torna-se indispensável a definição da matriz de elasticidade, segundo (4.29), para cada uma das camadas individuais do elemento.

4.10.5 Matriz de inércia

A matriz de inércia permite calcular a energia cinética e, conseqüentemente, a matriz de massa do elemento, sendo definida, para cada uma das camadas k do elemento, por (4.42). Esta matriz é dependente da massa volúmica do material (ρ_k) e das espessuras da respectiva camada (h_k) e das camadas inferiores.

4.10.6 Matriz de rigidez

A matriz de rigidez global do sistema $[K]$ é obtida pela montagem das sub-matrizes de rigidez $[K]^e$, calculadas em cada um dos elementos resultantes da discretização pelo método dos elementos finitos. Dado que cada elemento é constituído por n camadas, a matriz de rigidez do elemento resulta da soma das contribuições das matrizes de rigidez de cada uma das camadas constituintes:

$$[K]^e = \sum_{k=1}^n [K]_k^e \quad (4.55)$$

Recorrendo ao princípio da minimização da energia potencial interna (4.27), obtém-se a matriz de rigidez da camada genérica k através da relação:

$$[K]_k^e = \int_{A^e} \int_k [N]^T [\mathcal{B}]_k^{eT} [\mathcal{D}]_k [\mathcal{B}]_k^e [N] \, dA^e \, dh_k \quad (4.56)$$

onde o domínio de integração, correspondente ao volume da camada k do elemento finito, é definido pela sua área A^e , considerada constante ao longo da espessura, e pela espessura da camada no elemento finito considerado h_k^e .

Calculando explicitamente o integral ao longo da espessura da camada, pode reescrever-se (4.56) na forma:

$$[K]_k^e = \int_{A^e} [N]^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^{eT} [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k^e [N] \, dA^e \quad (4.57)$$

onde a matriz de elasticidade modificada $[\hat{\mathcal{D}}]$ e a matriz de deformação modificada $[\hat{\mathcal{B}}]$ são definidas nas expressões (4.29) e (4.30), respectivamente.

Definindo a matriz de deformação do elemento finito $[B]_k$ pela relação:

$$[B]_k = [\hat{\mathcal{B}}]_k [N] \quad (4.58)$$

pode reescrever-se a expressão da matriz de rigidez de uma camada genérica k do elemento finito na forma:

$$[K]_k^e = \int_{A^e} [B]_k^{eT} [\hat{D}]_k [B]_k^e \, dA^e \quad (4.59)$$

4.10.7 Matriz de massa

O cálculo da matriz de massa da estrutura processa-se de forma idêntica à aplicada no cálculo da matriz de rigidez. Desta forma, a matriz de massa global $[M]$ é obtida a partir das matrizes de massa elementares $[M]^e$.

Sendo cada elemento constituído por n camadas, a matriz de massa do elemento pode ser definida pela soma das matrizes de massa individuais de cada camada k :

$$[M]^e = \sum_{k=1}^n [M]_k^e \quad (4.60)$$

Com base na definição da energia cinética de uma camada genérica k do elemento finito (4.42) e invocando o princípio de *Hamilton*, a matriz de massa consistente correspondente escreve-se na forma:

$$[M]_k^e = \int_{A^e} [N]^T [\hat{J}]_k [N] \, dA^e \quad (4.61)$$

Em alternativa à matriz de massa consistente, pode calcular-se a matriz de massa diagonal ou de massas concentradas. Esta forma de matriz de massa é particularmente interessante na análise dinâmica de estruturas, por um lado devido à economia computacional associada à sua forma diagonal e, por outro, devido à sua rápida convergência para malhas de menor resolução espacial.

A aplicação da quadratura nodal de *Lobatto* [162], usualmente empregue para obter uma matriz diagonal a partir da formulação consistente, não pode neste caso ser aplicada com sucesso, já que a matriz de inércia só é diagonal para a primeira camada, não o sendo para as restantes. Assim, a aplicação deste método de integração numérica não permite obter uma matriz diagonal para laminados constituídos por mais do que uma camada.

A técnica da soma das linhas (*row-sum*) [162], que permite obter os elementos da diagonal através da soma de todos os elementos da respectiva linha da matriz de massa

consistente, também não pode ser aplicada ao elemento finito proposto devido à associação dos graus de liberdade de rotação e de translação produzida pelos termos de acoplamento.

Assim, é aplicada a técnica de diagonalização da matriz de massa proposta por Hinton *et al.* [170], usualmente denominada por técnica de *HRZ*, que obtém os termos da diagonal da matriz de massas concentradas aplicando um factor de escala p_k aos respectivos termos diagonais da matriz de massa consistente:

$$M(i, i)_k^{\text{Diagonal}} = p_k M(i, i)_k^{\text{Consistente}} \quad (4.62)$$

O factor de escala é definido pela razão entre a massa de translação total do elemento e a soma dos termos de massa de translação pertencentes à diagonal.

4.10.8 Jacobiano de transformação

A resolução do problema elastodinâmico pelo método dos elementos finitos conduz ao cálculo das matrizes de rigidez e de massa do objecto em estudo. Estas matrizes são definidas a partir do cálculo de um integral sobre o volume do elemento em que a componente a integrar contém funções interpoladoras e/ou as suas derivadas descritas no sistema global de coordenadas cartesianas (x, y) . Assim, é necessário aplicar dois processos de transformação de coordenadas.

Como as funções de interpolação e respectivas derivadas são definidas em coordenadas naturais (ξ, η) , é necessário obter um processo de transformação que permita obter as derivadas das funções de forma em coordenadas cartesianas a partir das suas homólogas descritas no sistema local de coordenadas naturais. Essa transformação pode ser descrita com base na transformação geométrica do elemento quando descrito em coordenadas cartesianas locais e em coordenadas naturais (4.45). Assim, pode definir-se a matriz do jacobiano da transformação $[\mathbf{J}]$ como:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

a qual, usando as funções de forma para interpolar a geometria do elemento, pode ser

reescrita na forma:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Alternativamente, pode calcular-se analiticamente a função do jacobiano da transformação através da geometria do elemento, permitindo obter uma expressão analítica unicamente dependente das coordenadas nodais do elemento descritas no referencial cartesiano local. A dedução da expressão analítica da função do jacobiano pode ser encontrada no Apêndice C.

Usando as regras da derivação parcial, definem-se as derivadas das funções de forma descritas no espaço de coordenadas cartesianas a partir das derivadas das funções definidas em (4.50) no sistema de coordenadas naturais:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

onde $[\mathbf{J}]^{-1}$ corresponde à inversa da matriz do jacobiano da transformação. Desta forma, utilizando as relações expressas em (4.65), é possível definir a matriz de deformação, que está associada a um conjunto de operadores diferenciais, no espaço de coordenadas cartesianas.

No elemento *layerwise* o jacobiano da transformação é independente da camada k , dependendo apenas da geometria do elemento.

O domínio da integração, que corresponde ao volume do elemento, deve também ser definido em termos das coordenadas naturais. Esta transformação requer a redefinição dos limites de integração e do elemento infinitesimal de volume. Assim, o elemento infinitesimal de volume da camada k genérica de cada elemento é então definido por:

$$d\Omega_k^e = dx \, dy \, h_k = \det[\mathbf{J}] \, d\xi \, d\eta \, h_k \quad (4.66)$$

Na formulação desenvolvida, a integração ao longo da espessura da camada (z_k) é calculada analiticamente, sendo os termos resultantes dessa integração incluídos na matriz de elasticidade e na matriz de inércia no cálculo da matriz de rigidez e de massa, respectivamente. Desta forma, os integrais que permitem avaliar cada uma dessas matrizes terão a forma final:

$$\int_{\Omega_k^e} \mathfrak{f}(x, y, z_k) \, d\Omega_k^e = \int_{A^e} \tilde{\mathfrak{f}}(x, y) \, dA^e \quad (4.67)$$

onde $\hat{\mathfrak{f}}(x, y)$ inclui os termos resultantes da integração analítica na espessura da camada.

Quando descrito no espaço de coordenadas naturais, o elemento de placa de 4 nós adoptado assume a forma de um quadrado onde $\xi \in [-1, 1]$ e $\eta \in [-1, 1]$. Assim, os integrais que permitem o cálculo das matrizes necessárias à resolução numérica do problema elastodinâmico são redefinidos na forma:

$$\int_{A^e} \tilde{\mathfrak{f}}(x, y) \, dA^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\mathfrak{f}}(\xi, \eta) \, \det[\mathbf{J}] \, d\xi \, d\eta \quad (4.68)$$

4.10.9 Integração das matrizes de rigidez e de massa

No cálculo do integral descrito na expressão (4.67), recorre-se normalmente a técnicas de integração numérica, sendo usualmente aplicado o método da quadratura de *Gauss-Legendre*. Este método permite calcular o integral de uma função num dado domínio (neste caso concreto num domínio bidimensional) através da soma ponderada do valor dessa função em vários pontos de amostragem, normalmente designados por pontos de integração, na forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\mathfrak{f}}(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = \sum_{g=1}^{n_g} H_g \, \hat{\mathfrak{f}}(\xi_g, \eta_g) \quad (4.69)$$

onde n_g representa o número de pontos de integração. Os parâmetros H_g e ξ_g, η_g representam, respectivamente, os pesos e coordenadas dos pontos de integração (Tabela 4.2). O número de pontos de integração é definido de acordo com o grau do polinómio a integrar. Assim, com n_g pontos de integração integra-se de forma exacta um polinómio de grau $2n_g - 1$. Considerando as funções de forma bilineares anteriormente descritas, tem-se então de aplicar 2x2 pontos de integração no domínio 2D do elemento *layerwise* para obter uma integração exacta das matrizes de rigidez e de massa [168].

Tabela 4.2: Posição e pesos dos pontos de integração numérica pela quadratura de *Gauss-Legendre* [168]

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{g=1}^{n_g} H_g f(a_g)$$

n_g	a_g	H_g
1	0.000 000	2.000 000
2	$\pm 0.577\ 350$	1.000 000
3	$\pm 0.774\ 597$	0.555 556
	0.000 000	0.888 889
4	$\pm 0.861\ 136$	0.347 854
	$\pm 0.339\ 981$	0.652 145

Por outro lado, e uma vez definida analiticamente a função do jacobiano da transformação, é possível evitar o processo de integração numérica no cálculo da matriz de massa. Assim, com base na função do jacobiano da transformação (Apêndice C), é possível calcular analiticamente a matriz de massa de uma camada genérica k do elemento, quer recorrendo à interpolação bilinear quer à interpolação bi-harmónica, sendo a expressão resultante apresentada no Apêndice D.

4.10.10 Interpolação não-conforme da componente de membrana

Quando o elemento quadrilátero de 4 nós é sujeito a um estado puro de flexão no plano, o campo de deslocamentos representado pela interpolação bilinear conforme, anteriormente apresentada, introduz uma deformação de corte espúria [171, 172]. Este fenómeno é usualmente designado por bloqueio de corte no plano. Segundo MacNeal [172, 173], este problema deve-se à impossibilidade de o conjunto de funções interpoladoras e respectivos pontos de amostragem conseguirem representar convenientemente outras funções para além dos próprios interpoladores e combinações lineares dos mesmos. Outro fenómeno associado a esta restrição é o problema designado por bloqueio de dilatação ou volumétrico que está relacionado com a análise de materiais quasi-incompressíveis, ou seja, materiais com um coeficiente de *Poisson* próximo do valor 0.5 [173].

Uma solução a este conjunto de problemas foi proposta por Wilson *et al.* [174], e consiste na introdução de um conjunto de modos incompatíveis na função interpoladora

do elemento. Assim, a variável em análise pode ser interpolada dentro do elemento através de uma função interpoladora constituída por um interpolador conforme e um interpolador não-conforme, da forma:

$$\{d^M\}^e = [N]\{d_i^M\}^e + [N_\alpha]\{\alpha\} \quad (4.70)$$

onde $[N]$ são as funções interpoladoras bilineares, $\{d_i^M\}^e = \{u_1, v_1, \dots, u_4, v_4\}^T$ representa os graus de liberdade da membrana, $\{\alpha\}$ é um conjunto de graus de liberdade adicionais e $[N_\alpha]$ é o conjunto de funções interpoladoras não-conformes definido por:

$$[N_\alpha] = \begin{bmatrix} N_\alpha^1 & 0 & \vdots & N_\alpha^2 & 0 \\ 0 & N_\alpha^1 & \vdots & 0 & N_\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Utilizando modos quadráticos de deformação incompatíveis, as funções interpoladoras são da forma:

$$N_\alpha^1 = 1 - \xi^2 \quad N_\alpha^2 = 1 - \eta^2 \quad (4.72)$$

Com base na matriz de funções de forma não-conformes (4.71), pode obter-se a correspondente matriz de deformação não-conforme, utilizando um operador diferencial definido de acordo com (4.12), da forma:

$$[B_\alpha] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\alpha^1}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_\alpha^2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_\alpha^1}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_\alpha^2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_\alpha^1}{\partial y} & \frac{\partial N_\alpha^1}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_\alpha^2}{\partial y} & \frac{\partial N_\alpha^2}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

A matriz de rigidez completa $[K^\alpha]_k^e$, obtida pela introdução da matriz de deformação não-conforme, pode ser subdividida em duas componentes: uma associada somente aos graus de liberdade reais do problema $\{d_i^M\}^e$ e outra associada aos parâmetros adicionais $\{\alpha\}$ e respectivos termos cruzados. Assim, a matriz de rigidez de uma camada genérica k pode escrever-se como sendo:

$$[K^\alpha]_k^e = \begin{bmatrix} [K]_k^e & \vdots & [K_{\tilde{\alpha}}]^T \\ \vdots & [K_{\tilde{\alpha}}] & [K_\alpha] \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

onde $[K]_k^e$ é a matriz de rigidez correspondente à formulação conforme, definida em (4.59).

As sub-matrizes de rigidez associadas aos termos não-conformes são obtidas por:

$$[K_\alpha] = \int_{A^e} [B_\alpha]^T [\hat{D}]_k^{\text{MA}} [B_\alpha] dA^e \quad [K_{\hat{\alpha}}] = \int_{A^e} [B_\alpha]^T [\hat{D}]_k^{\text{MA}} [B]_k^{\text{MA}} dA^e \quad (4.75)$$

onde $[B_\alpha]$ é a matriz de deformação não conforme, definida por (4.73), $[B]_k^{\text{MA}}$ é a matriz de deformação dos termos de membrana e acoplamento da camada e $[\hat{D}]_k^{\text{MA}}$ é a matriz de elasticidade de membrana da camada genérica k .

As variáveis adicionais $\{\alpha\}$ podem ser eliminadas internamente ao nível do elemento finito por aplicação de uma técnica de condensação estática da matriz completa $[K^\alpha]_k^e$ da forma:

$$[\hat{K}]_k^e = [K^\alpha]_k^e - [K_{\hat{\alpha}}]^T [K_\alpha]^{-1} [K_{\hat{\alpha}}] \quad (4.76)$$

onde $[\hat{K}]_k^e$ é a matriz de rigidez final e condensada.

De acordo com diversos autores [168, 172, 175], e como será verificado no capítulo seguinte, o elemento finito de membrana baseado na interpolação não-conforme apresentada não passa o *patch-test* de deformação constante para elementos de geometria irregular. Para ultrapassar este problema é proposta por Taylor *et al.* [176] uma correcção à formulação original que altera a forma de cálculo das derivadas dos interpoladores não-conformes, da forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\det[\mathbf{J}_{(0,0)}]}{\det[\mathbf{J}_{(\xi,\eta)}]} \mathbf{J}_{(0,0)}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

onde $\mathbf{J}_{(0,0)}$ e $\mathbf{J}_{(\xi,\eta)}$ representam, respectivamente, o jacobiano da transformação avaliado no centro do elemento e no ponto de integração.

Em alternativa à aplicação da interpolação não-conforme sobre um conjunto de variáveis adicionais, a formulação de membrana pode ser enriquecida com a introdução de um termo de deformação associado aos graus de liberdade de rotação no plano (vulgarmente designados na literatura anglo-saxónica por *drilling degrees-of-freedom*). Segundo Zhu e Zacharia [177] e MacNeal [172], a formulação de membrana com graus de liberdade de

translação e de rotação beneficia de uma melhoria significativa do seu comportamento, especialmente no que respeita ao fenómeno de bloqueio de corte no plano.

4.10.11 Grau de liberdade de rotação no plano

Quando o elemento de placa é usado numa configuração de casca de faceta, ou seja, quando uma casca curva é discretizada espacialmente em elementos quadrangulares ou triangulares planos, é necessário recorrer a uma operação de transformação, descrita pela Equação (4.44), do referencial local de cada um dos elementos para o referencial global comum (X,Y,Z) , de forma a permitir a correcta montagem das matrizes globais de rigidez e de massa da estrutura. Assim, as matrizes representativas de cada elemento e definidas no seu próprio referencial local (x,y,z) , devem ser transformadas para o referencial global (X,Y,Z) antes da montagem final das matrizes globais e sucessiva definição do sistema de equações do movimento.

Analisando a formulação de elementos finitos da placa *layerwise*, constata-se que não existem termos de rigidez ou de massa associados ao grau de liberdade de rotação no plano θ^z . Assim, quando elementos adjacentes de uma casca de faceta são coplanares, a matriz de rigidez global torna-se mal condicionada e singular [178–180].

Clough e Wilson [178] referem o problema do mau condicionamento da matriz de rigidez associado à falta do sexto grau de liberdade na formulação do elemento de placa, apresentando duas soluções expeditas. A primeira solução, vulgarmente aplicada nos códigos de elementos finitos como procedimento de segurança, opta por restringir os graus de liberdade de rotação no plano durante o processo de montagem global das matrizes. Desta forma, as linhas e colunas de termos nulos da matriz associadas aos graus de liberdade de rotação normal são eliminadas, evitando assim o seu mau condicionamento e subsequentes problemas na resolução do sistema de equações. Em alternativa, a segunda solução evita os termos de rigidez nula associados a este grau de liberdade de rotação através da inclusão de uma rigidez fictícia não nula associada aos graus de liberdade de rotação normal.

Rigidez fictícia da componente de rotação no plano

Seguindo a metodologia descrita por Zienkiewicz e Taylor [168] e por Cook [181, 182], é construída uma matriz de rigidez fictícia associada aos graus de liberdade θ_k^z .

Cook [181] aplica este conceito de rigidez fictícia a um elemento triangular através da introdução de um termo de restrição elástica entre cada um dos graus de liberdade de rotação no plano e a média dos três graus de liberdade de rotação do elemento de membrana. Desta forma, a rotação relativa no nó genérico i é definida por:

$$\tilde{\theta}_i^z = \theta_i^z - \frac{1}{3}[\theta_1^z + \theta_2^z + \theta_3^z] \quad (4.78)$$

Esta equação pode ser escrita na forma:

$$\tilde{\theta}_i^z = \frac{1}{3}[F_i] \{\theta_1^z \ \theta_2^z \ \theta_3^z\}^T \quad (4.79)$$

onde as matrizes $[F_1]$, $[F_2]$ e $[F_3]$ são determinadas por:

$$[F_1] = [2, -1, -1] \quad [F_2] = [-1, 2, -1] \quad [F_3] = [-1, -1, 2] \quad (4.80)$$

Assim, é possível construir uma matriz de estabilização, ou matriz de rigidez fictícia, da forma:

$$\begin{aligned} [K^{\theta^z}]^e &= \frac{1}{3} \Upsilon_1 \ E \ A^e \ h \left([F_1]^T [F_1] + [F_2]^T [F_2] + [F_3]^T [F_3] \right) \\ &= \Upsilon_1 \ E \ A^e \ h \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde o parâmetro Υ_1 é uma constante que define a grandeza relativa dos termos de rigidez fictícia em relação aos restantes termos da matriz de rigidez de membrana do elemento.

Esta matriz é semelhante à matriz proposta por Zienkiewicz e Taylor [160], que generalizam a ordem do expoente da espessura da camada. Assim, e substituindo em (4.81) o termo h por h^3 consegue-se, através do parâmetro adimensional Υ_1 , obter uma relação directa entre os termos de rigidez fictícia e os termos de rigidez de flexão. Desta

forma é mais fácil contornar o problema do bloqueio de membrana dos elementos finitos bilineares. Aplicando este conceito directamente ao elemento quadrilátero, obtém-se uma matriz de rigidez fictícia para a camada genérica k , da forma:

$$[K^{\theta^z}]_k^e = \Upsilon_1 E_k A^e h_k^3 \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Como referido, o parâmetro Υ_1 , que permite definir a grandeza relativa dos termos de rigidez artificial associados aos graus de liberdade de rotação no plano, assume normalmente um valor muito baixo ($10^{-6} \div 10^{-3}$). Pretende-se desta forma evitar a interferência destes termos artificiais de rigidez de membrana sobre os termos de rigidez de flexão quando o elemento de placa é usado numa configuração de faceta. Este fenómeno é normalmente designado por bloqueio de membrana [173,183]. De facto, quando o elemento de placa bilinear é usado numa configuração de faceta, a rigidez de membrana, associada ao grau de liberdade θ^z , e a rigidez de flexão, associada aos graus de liberdade $\theta^{x/y}$ (Figura 4.6), são somente acopladas nas fronteiras entre elementos [177].

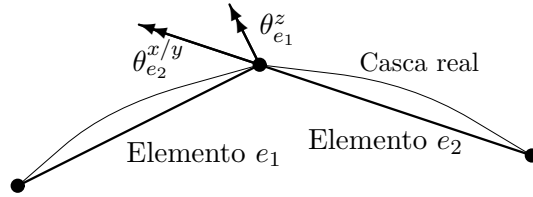


Figura 4.6: Efeito de bloqueio de membrana

Dado que a rigidez de membrana é superior à rigidez de flexão numa situação de casca fina, este acoplamento tende a bloquear os graus de liberdade de rotação fora do plano, associados à deformação de flexão [182]. Assim, em resultado deste efeito, mesmo que no problema em análise a maior parte da energia do elemento seja desenvolvida por deformação de flexão, a rigidez associada à componente de membrana dos elementos vizinhos, sendo relativamente superior, origina um cálculo incorrecto das deformações

de flexão. Este efeito de bloqueio é atenuado à medida que os elementos se aproximam de uma situação coplanar, quer esta aproximação seja devida à geometria plana do objecto em análise, quer seja devida ao aumento do grau de refinamento da malha de discretização de uma geometria curva.

A aplicação do expoente cúbico em (4.82), como proposto em [160], e a aplicação de um parâmetro de escala Υ_1 de valor relativamente baixo diminuem o efeito deste bloqueio numérico.

Formulação de membrana com graus de liberdade de rotação

Em alternativa às soluções expeditas anteriormente descritas, a aplicação de um elemento de membrana cuja formulação inclua graus de liberdade de rotação no plano é, obviamente, a solução mais correcta para a introdução destes graus de liberdade na formulação do elemento. Na realidade, os termos de rigidez fictícios associados aos graus de liberdade de rotação no plano não intervêm na deformação de membrana, ou seja, estes graus de liberdade e rigidez associada não possuem qualquer significado físico na deformação do elemento [177].

Embora os primeiros trabalhos sobre elementos de membrana com graus de liberdade de rotação no plano remontem a 1965, só em 1984/85, com os elementos triangulares de membrana de Allman [184] e de Bergan e Felippa [185], é que se conseguiu a aplicação prática e bem sucedida deste conceito, pelo menos para o caso dos elementos triangulares.

O método proposto por Allman é ainda hoje a base da formulação de muitos elementos finitos de membrana e casca de faceta triangulares [186] e quadrangulares [182] com graus de liberdade de rotação no plano. Basicamente, o método permite formular o elemento linear com graus de liberdade de rotação através de um elemento quadrático equivalente cujos graus de liberdade, unicamente de translação, são relacionados com os graus de liberdade de rotação do elemento linear original (Figura 4.7).

Cook [187] generaliza o conceito de Allman ao elemento de quatro nós, apresentando numa forma expedita, através de uma matriz de projecção, o processo de transformação entre o elemento linear original e o elemento quadrático equivalente. Particularizando para o elemento quadrangular, os graus de liberdade do elemento original de quatro nós podem

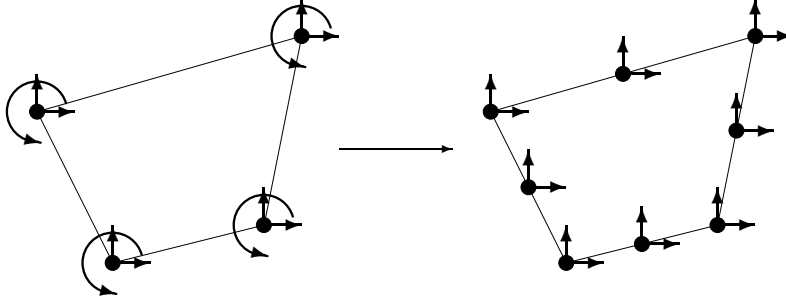


Figura 4.7: Conceito de *Allman*

ser relacionados com os graus de liberdade do elemento quadrático equivalente através de uma matriz de transformação $[P^D]$ pela relação:

$$\{u_1, v_1, \dots, u_8, v_8\}^T = [P^D] \{u_1, v_1, \theta_{z1}, \dots, u_4, v_4, \theta_{z4}\}^T \quad (4.83)$$

A matriz de rigidez do elemento bilinear original $[K]^{(4)}$ é obtida a partir da matriz de rigidez do elemento de ordem superior equivalente $[K]^{(8)}$, recorrendo à matriz de transformação $[P^D]$, pela relação:

$$[K]^{(4)} = [P^D]^T [K]^{(8)} [P^D] \quad (4.84)$$

MacNeal e Harder [173] utilizam a metodologia de Cook, apresentando uma forma alternativa de obtenção da matriz de rigidez do elemento através da modificação da matriz de deformação do elemento isoparamétrico de 4 nós. A metodologia é aplicada a um elemento híbrido quadrilátero obtendo bons resultados numéricos. Em alternativa, Allman [188] obtém a formulação de um elemento quadrilátero através da sua decomposição em 4 triângulos, aplicando o conceito na formulação de membrana de cada um deles.

Apesar do bom desempenho demonstrado, os elementos formulados recorrendo aos conceitos atrás referidos são baseados numa forma de "formulação livre", onde apenas se aplica uma modificação à forma de interpolação do campo de deslocamentos.

Hughes e Brezzi [180] apresentam uma formulação variacional em que o campo de rotações é interpolado de forma independente. Ibrahimbegovic *et al.* [189] aplicam a

formulação variacional proposta por Hughes e Brezzi e formulam um elemento quadrilátero baseado no conceito de Allman, ao qual é adicionada uma função de interpolação quadrática (*bubble function*). É um elemento muito robusto, com um bom desempenho, mas computacionalmente pouco económico devido à aplicação de integração numérica com 3x3 pontos de *Gauss* (o elemento é internamente formulado como um elemento de 8 nós, com um grau de liberdade extra condensado a nível interno do elemento).

Kouhia [190] baseia-se na mesma formulação variacional para desenvolver um elemento mais simples, embora pouco convencional. Segundo este autor, o desenvolvimento de um elemento de membrana com graus de liberdade de rotação no plano pode ser conseguido através da modificação da interpolação do campo de deslocamentos do elemento pela inclusão de uma interpolação não conforme e independente dos referidos graus de liberdade de rotação:

$$\{u^M\}^e = \sum_{i=1}^4 N_i \{d_i^M\}^e + N_5 \frac{L_{86}}{8} (\theta_8^z - \theta_6^z) + N_6 \frac{L_{57}}{8} (\theta_7^z - \theta_5^z) \quad (4.85)$$

onde $\{d_i^M\}^e = \{u, v\}$ são os graus de liberdade de translação no plano do elemento finito e N_i são as funções de forma bilineares conformes. Os parâmetros L_{86} e L_{57} correspondem às distâncias entre os nós 8 e 6, e 5 e 7, respectivamente, e os versores $\hat{n}_{57}$ e $\hat{n}_{86}$ representam as normais às linhas que unem esses mesmos nós (Figura 4.8).

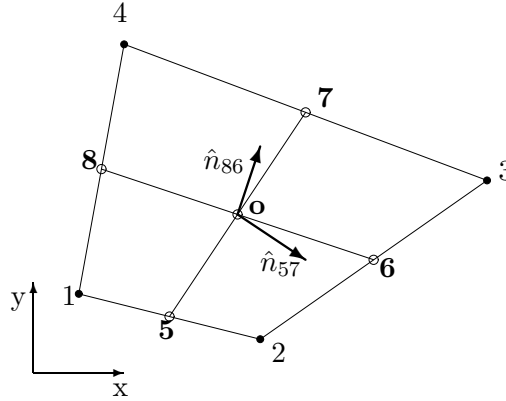


Figura 4.8: Elemento de membrana com rotação no plano

As funções de forma N_5 e N_6 aplicadas são baseadas em modos incompatíveis da forma:

$$N_5 = 1 - \xi^2 \quad \text{e} \quad N_6 = 1 - \eta^2 \quad (4.86)$$

Segundo Yuan *et al.* [191], a aplicação de interpoladores não-conformes no campo rotacional da componente de membrana permite melhorar o desempenho do elemento finito e evitar os fenómenos de bloqueio devidos à falta de representatividade dos interpoladores conformes de ordem reduzida, neste caso do interpolador bilinear utilizado.

Neste trabalho é utilizada a formulação proposta por Kouhia [190] introduzindo, no entanto, uma projecção que permite aplicar o conceito num elemento de quatro nós, como o utilizado no elemento finito proposto neste trabalho.

Enquanto que no elemento proposto em [190] os graus de liberdade de rotação no plano são definidos directamente nos nós centrais do elemento (5, 6, 7 e 8), no presente elemento finito esses graus de liberdade pertencem aos nós dos cantos do elemento (1, 2, 3 e 4). Assim, propõe-se a aplicação da interpolação conforme, através das funções de forma bilineares convencionais, para calcular as rotações nos nós fictícios (5,6,7 e 8) a partir das rotações nodais:

$$\theta_{(5 \dots 8)}^z = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_i^z \quad (4.87)$$

Desta forma, as rotações nos nós fictícios podem ser calculadas recorrendo a uma matriz de projecção da forma:

$$\begin{Bmatrix} \theta_5^z \\ \theta_6^z \\ \theta_7^z \\ \theta_8^z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^z \\ \theta_2^z \\ \theta_3^z \\ \theta_4^z \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

As rotações relativas são então calculadas através da operação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \theta_8^z - \theta_6^z \\ \theta_7^z - \theta_5^z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^z \\ \theta_2^z \\ \theta_3^z \\ \theta_4^z \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

De notar que a matriz de projecção definida na Equação (4.89) pode ser obtida a partir da matriz de índices nodais (Tabela 4.1).

A construção da matriz de deformação para este elemento é obtida a partir da aplicação do operador diferencial descrito em (4.12) sobre o campo de deslocamentos definido em (4.85). Assim, as componentes dessa matriz de deformação são da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{16} \left[-L_{86} \hat{n}_{86}^x \frac{\partial N_5}{\partial x} \xi_i + L_{57} \hat{n}_{57}^x \frac{\partial N_6}{\partial x} \eta_i \right] \theta_i^z \quad (4.90a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{16} \left[-L_{86} \hat{n}_{86}^y \frac{\partial N_5}{\partial y} \xi_i + L_{57} \hat{n}_{57}^y \frac{\partial N_6}{\partial y} \eta_i \right] \theta_i^z \quad (4.90b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{16} \left[-L_{86} \hat{n}_{86}^y \frac{\partial N_5}{\partial x} \xi_i + L_{57} \hat{n}_{57}^y \frac{\partial N_6}{\partial x} \eta_i \right] \theta_i^z \quad (4.90c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{16} \left[-L_{86} \hat{n}_{86}^x \frac{\partial N_5}{\partial y} \xi_i + L_{57} \hat{n}_{57}^x \frac{\partial N_6}{\partial y} \eta_i \right] \theta_i^z \quad (4.90d)$$

onde ξ_i e η_i são os índices nodais definidos na Tabela 4.1. Os parâmetros L_{86} , L_{57} , $\hat{n}_{57}$ e $\hat{n}_{86}$ são calculados através do vector de posições nodais.

Estabilização dos modos espúrios da formulação de rotação no plano

A introdução dos graus de liberdade de rotação no plano na formulação de membrana da placa conduz ao aparecimento de um modo espúrio de deformação associado à condição descrita por [173, 187, 192]:

$$\theta_1^z = \theta_2^z = \theta_3^z = \theta_4^z \quad (4.91)$$

Este modo de energia nula é inicialmente suprimido por Allman [184] e Cook [179, 187] através da restrição do grau de liberdade de rotação no plano num nó da malha de elementos finitos.

Embora seja uma solução válida e eficaz, a restrição do grau de liberdade não constitui uma forma de estabilização inerente à formulação do elemento finito associado, requerendo a intervenção, bem como a base de conhecimento necessária, do utilizador final. Assim, Allman [188] propõe uma forma de estabilização do modo espúrio no elemento quadrilátero com graus de liberdade de rotação no plano através da restrição interna do nó central

adicional do elemento⁴, forçando a igualdade entre este grau de liberdade central e a média das rotações nodais.

Cook [181] aplica um mecanismo de estabilização no elemento triangular baseado na inclusão de um termo energético associado à restrição elástica entre a média das rotações nodais e a média das rotações dos lados do triângulo, calculadas pelas translações nodais correspondentes. Este processo de estabilização pode ser estendido ao elemento quadrilátero através da sobreposição de quatro triângulos [182].

MacNeal e Harder [173] propõem uma solução semelhante para a estabilização, que permite, por um lado, relacionar as rotações nodais com a rotação no plano do elemento, e, por outro, evitar o modo espúrio em análise. Assim, é adicionado um termo energético de estabilização da forma:

$$\Pi_k^{D1} = \frac{1}{2} A^e h_k G_k [2\Upsilon_2] \left[\theta_0^z - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i^z \right]^2 \quad (4.92)$$

que permite aplicar uma restrição elástica entre a média das rotações nodais, θ_i^z , com a rotação real no centro do elemento, definida por:

$$\theta_0^z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \quad (4.93)$$

O parâmetro Υ_2 é uma constante adimensional de valor normalmente reduzido (10^{-6}) [173, 175, 192].

Na prática, a inclusão do termo energético descrito em (4.92) é realizada através da correcção da matriz de rigidez de membrana do elemento pela adição de uma matriz associada, da forma:

$$[K^{D1}] = 2\Upsilon_2 A^e h_k G_k [Q]^T [Q] \quad (4.94)$$

onde a matriz $[Q]$ é definida pela equação:

$$[Q]\{d^{M\theta^z}\} = \left[\theta_0^z - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i^z \right] \quad (4.95)$$

⁴O elemento quadrilátero é formulado com base em 4 triângulos, sendo criado um nó central no elemento, cujos graus de liberdade são condensados a nível do elemento.

sendo $\{d^{M\theta^z}\} = \{u, v, \theta_1^z, \dots, \theta_k^z\}^T$ o vector dos graus de liberdade da componente de membrana com rotação no plano.

Pela sua generalidade e aplicação directa ao elemento quadrilátero, este mecanismo de estabilização é aplicado no elemento finito proposto.

De referir que a matriz de estabilização proposta por Ibrahimbegovic *et al.* [189] é, no caso do elemento finito com rotação no plano formulado, equivalente à apresentada por MacNeal e Harder [173]. Estes últimos propõem ainda um mecanismo de estabilização para um segundo modo espúrio associado à introdução dos graus de liberdade de rotação no plano. Todavia, este modo espúrio encontra-se associado à utilização da integração reduzida no elemento quadrático que é obtido pela aplicação do conceito de Allman ao elemento linear com rotações no plano.

Inércia associada ao graus de liberdade de rotação

De acordo com MacNeal e Harder [173] e Clough e Wilson [178], não deverá ser introduzida na formulação da matriz de massa uma inércia associada ao graus de liberdade de rotação no plano. Desta forma evita-se a excitação dos modos espúrios associados [173].

4.10.12 Protecção ao bloqueio de corte transversal

A aplicação do elemento de placa espessa bilinear de 4 nós na modelação de cascas finas é dificultada por um problema numérico denominado por bloqueio de corte transversal. Este fenómeno, derivado da omissão das condições de *Kirchoff-Love* na descrição do campo de deslocamentos, deve-se ao facto de as deformações de corte interpoladas de forma consistente pela formulação de placa espessa não serem nulas em todo o domínio do elemento quando este é sujeito a um estado de flexão pura [193]. Assim, quando a formulação de placa espessa é aplicada a cascas finas, a energia resultante da componente de corte transversal assume uma posição preponderante em relação às componentes de deformação no plano.

Tal como nas outras formas de bloqueio numérico, nomeadamente o bloqueio de corte no plano, este problema deve-se à limitação da representatividade do conjunto de interpoladores utilizado [172, 194].

Existem diversas formas de contornar este efeito, nomeadamente a aplicação de integração reduzida ou selectiva [172, 195], na qual a componente de corte é integrada numericamente em $n_g - 1$ pontos de *Gauss*, onde n_g é o número de pontos de integração correspondente à integração exacta. No entanto, apesar de constituir uma solução eficaz, a aplicação da integração reduzida dos termos de corte transversal origina modos extra de energia nula (*hourglass modes*), para além dos modos de corpo rígido.

A aplicação da integração reduzida uniforme, em que ambos os termos de deformação no plano e de corte transversal são integrados de forma reduzida, implica o aparecimento de 4 modos de *hourglass*, enquanto que a integração reduzida selectiva, na qual apenas o termo de corte transversal é integrado de forma reduzida, origina unicamente 2 modos espúrios. Estes modos devem ser eliminados por processos de estabilização por perturbação [196–198], onde são introduzidos coeficientes correctivos artificiais de estabilização, normalmente de valor reduzido e definidos à priori pelo utilizador, ou por processos de estabilização física [197].

O desenvolvimento de elementos finitos de placa e de casca com integração completa insensíveis ao bloqueio de corte transversal constitui uma das principais áreas de interesse de investigação. Entre as soluções usualmente aplicadas para proteger os elementos finitos de placa ou de casca podemos considerar [199]:

- **Métodos de matriz de deformação substituta:** são baseados na substituição da componente da matriz de deformação correspondente ao corte transversal por uma matriz substituta que represente correctamente as deformações de corte;
- **Enriquecimento do campo interpolador de deslocamentos:** permite, através da introdução de termos de ordem superior nos interpoladores, enriquecer a base de representação do campo de deslocamentos;
- **Métodos baseados no ”*Enhanced Assumed Strain*”:** com base no princípio de *Hu-Washizu*, adicionam um campo melhorado de deformações ao campo de deformações compatível, estabilizando desta forma a deformação de corte espúria;
- **Métodos mistos:** baseiam-se em modelos híbridos derivados do princípio de *Hellinger-Reissner*;

- **Métodos de correcção de energia:** anulam o efeito de bloqueio através da adição de termos energéticos adicionais de correcção.

Embora os métodos baseados no *EAS* (*Enhanced Assumed Strain*) [200, 201] e os métodos baseados numa formulação mista [202] sejam actualmente um alvo de particular interesse, nomeadamente nos elementos de casca curva, as soluções baseadas na matriz de deformação substituta, nomeadamente as soluções assentes sobre uma formulação *ANS* (*Assumed Natural Strain*) têm sido bem sucedidas e amplamente aplicadas em elementos finitos de casca de faceta em programas comerciais [203, 204].

No elemento desenvolvido neste trabalho optou-se por adaptar o conceito do campo de deformações naturais assumidas aplicado no elemento *Mixed interpolation of tensorial components* (*MITC*) [152, 205] e no elemento $Q4\gamma$ [161] às camadas individuais do modelo *layerwise*, pelo que se apresenta em seguida, e de uma forma resumida, a formulação associada à aplicação do conceito adoptado ao elemento finito desenvolvido.

O método *MITC* baseia-se na observação de que as deformações de corte transversal são correctamente avaliadas nos pontos centrais das quatro fronteiras rectilíneas do elemento (pontos **A**, **B**, **C** e **D** da Figura 4.9). Assim, o método pressupõe a correcção da matriz de deformação de corte transversal $[\mathcal{B}]_k^C$ de forma a calcular as deformações de corte transversal nesses mesmos pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), designados na literatura por pontos de ligação (*tying points*), em lugar dos pontos de amostragem da integração numérica (pontos de *Gauss*). Este campo de deformações corrigido é então interpolado dentro do elemento, através de um novo conjunto de funções de interpolação construídas com base nas coordenadas dos pontos de ligação, fornecendo o campo de deformações assumidas.

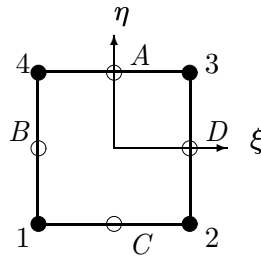


Figura 4.9: Elemento *MITC4*

Considerando um elemento quadrilátero de placa em coordenadas naturais (ξ, η) , pode avaliar-se a deformação de corte transversal num ponto qualquer do domínio do elemento através da interpolação linear entre os pontos **A**, **B**, **C** e **D**, na forma:

$$\gamma_{\xi\zeta_k}^{AS} = N_i^A \gamma_{\xi\zeta_k}^A + N_i^C \gamma_{\xi\zeta_k}^C \quad (4.96a)$$

$$\gamma_{\eta\zeta_k}^{AS} = N_i^D \gamma_{\eta\zeta_k}^D + N_i^B \gamma_{\eta\zeta_k}^B \quad (4.96b)$$

onde os interpoladores adicionais são definidos como:

$$\begin{aligned} N_i^A &= \frac{1+\eta}{2} & N_i^B &= \frac{1-\xi}{2} \\ N_i^C &= \frac{1-\eta}{2} & N_i^D &= \frac{1+\xi}{2} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Os vectores da deformação de corte transversal em **A**, **B**, **C** e **D** são calculados com base nas funções de forma N_i do elemento (4.49). Assim, pode calcular-se a deformação de corte transversal $\gamma_{\xi\zeta_k}$ por:

$$\gamma_{\xi\zeta_k} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} w_i + \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{ki}^\xi \quad (4.98)$$

Para o ponto **A** ($\xi = 0, \eta = -1$), o vector da deformação de corte transversal é definido por:

$$\gamma_{\xi\zeta_k}^A = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta_i) w_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \eta_i) \beta_{ki}^\xi \quad (4.99)$$

e para o ponto **C** ($\xi = 0, \eta = 1$), o vector da deformação de corte transversal é da forma:

$$\gamma_{\xi\zeta_k}^C = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \xi_i (1 - \eta_i) w_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 - \eta_i) \beta_{ki}^\xi \quad (4.100)$$

De forma semelhante, pode calcular-se a deformação de corte transversal $\gamma_{\eta\zeta_k}^B$ e $\gamma_{\eta\zeta_k}^D$. Assim, sendo a deformação de corte transversal $\gamma_{\eta\zeta_k}$ definida por:

$$\gamma_{\eta\zeta_k} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} w_i + \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{ki}^\eta \quad (4.101)$$

calculam-se os vectores de deformação de corte transversal nos pontos **B** e **D** da forma:

$$\gamma_{\eta\zeta_k}^B = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \eta_i (1 - \xi_i) w_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 - \xi_i) \beta_{ki}^\eta \quad (4.102a)$$

$$\gamma_{\eta\zeta_k}^D = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi_i) w_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi_i) \beta_{ki}^\eta \quad (4.102b)$$

Vector de deformação assumida no espaço de coordenadas naturais

Substituindo (4.99) e (4.100) em (4.96a) obtém-se a componente $\gamma_{\xi\zeta_k}^{AS}$ do vector de deformação assumida de corte transversal:

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\zeta_k}^{AS} &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta_i \eta) w_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \eta_i \eta) \beta_{ki}^\xi \\ &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} w_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \beta_{ki}^\xi \end{aligned} \quad (4.103)$$

De igual forma, substituindo (4.102a) e (4.102b) em (4.96b), obtém-se a componente $\gamma_{\eta\zeta_k}^{AS}$ do vector de deformação assumida de corte transversal:

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta\zeta_k}^{AS} &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi_i \xi) w_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) \beta_{ki}^\eta \\ &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} w_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\eta_i} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \beta_{ki}^\eta \end{aligned} \quad (4.104)$$

Vector de deformação assumida no espaço de coordenadas cartesianas

De notar que a formulação *MITC* até aqui apresentada foi desenvolvida no domínio geométrico e dimensional simples que representa o elemento finito projectado no espaço de coordenadas naturais. Assim, é necessário transpor a formulação desenvolvida para o espaço global de coordenadas cartesianas. Esta transformação é realizada através da matriz do jacobiano sendo, no entanto, necessário relacionar as rotações da camada descritas no espaço cartesiano $(\beta_{ki}^x, \beta_{ki}^y)$ com as rotações descritas no espaço local de

coordenadas naturais $(\beta_{ki}^\xi, \beta_{ki}^\eta)$. Essa relação é definida pela matriz do jacobiano de transformação avaliado em cada um dos nós do elemento:

$$\begin{Bmatrix} \beta_{ki}^\xi \\ \beta_{ki}^\eta \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^i] \begin{Bmatrix} \beta_{ki}^x \\ \beta_{ki}^y \end{Bmatrix} \quad (4.105)$$

Pode então definir-se a matriz de deformação, descrita no espaço de coordenadas naturais, como sendo:

$$[\bar{B}^{\xi\eta}]_k = \left[\dots \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \mathbf{J}_{11}^i & \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \mathbf{J}_{12}^i \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\eta_i} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \mathbf{J}_{21}^i & \frac{1}{\eta_i} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \mathbf{J}_{22}^i \end{vmatrix} \dots \right]_{i=1,\dots,4} \quad (4.106)$$

A matriz de deformação assumida em coordenadas globais cartesianas é, finalmente, obtida pela multiplicação da matriz (4.106) pela inversa da matriz do jacobiano:

$$[\bar{B}^{xy}]_k = [\mathbf{J}]^{-1} [\bar{B}^{\xi\eta}]_k \quad (4.107)$$

Matriz de deformação substituta

A matriz de deformação de corte transversal $[\mathcal{B}]_k^c$ é então substituída pela matriz definida em (4.107). A integração da matriz de rigidez resultante, no domínio definido pela área do elemento, é realizada numericamente utilizando integração uniforme, recorrendo a 2x2 pontos de *Gauss*, evitando-se simultaneamente o fenómeno de bloqueio de corte e o aparecimento de modos espúrios de energia nula.

4.11 Conclusões

O elemento finito desenvolvido neste capítulo permite evitar a complexidade e o custo de modelação associado à discretização espacial das estruturas com tratamento viscoelástico utilizando os modelos combinados. Para além disso, a introdução das propriedades dos materiais, dos parâmetros associados à formulação e, acima de tudo, das espessuras das camadas que formam a estrutura laminada, permite simplificar a sua modificação,

evitando desta forma a remodelação da discretização espacial que é necessária nos modelos combinados.

O elemento finito de placa de faceta do laminado é formulado recorrendo à teoria da camada discreta, a qual aplica a teoria da placa espessa, invocando as hipóteses de *Reissner-Mindlin*, a cada uma das camadas constituintes. A continuidade dos deslocamentos na placa laminada é garantida directamente na descrição do campo de deslocamentos e de velocidades de cada uma das camadas através de um conjunto de termos que são agrupados numa componente de acoplamento.

O elemento finito formulado é melhorado através da introdução de algumas técnicas numéricas, nomeadamente o enriquecimento do campo de interpoladores da componente de membrana com um interpolador não-conforme, a aplicação de um campo de deformações assumido na componente de corte transversal e a inclusão de termos de rigidez fictícios associados aos graus de liberdade de rotação no plano. Este conjunto de técnicas permite melhorar o desempenho do elemento, bem como evitar os bloqueios numéricos no cálculo da matriz de rigidez e os problemas associados ao seu condicionamento. São ainda analisadas as metodologias associadas à formação de uma matriz de massa diagonal, tendo sido verificado que a maioria delas não é aplicável a elementos finitos do tipo aqui desenvolvido.

De forma a melhorar a componente de membrana do elemento finito é ainda proposta uma formulação com rigidez segundo os graus de liberdade de rotação no plano. No entanto, para aplicar este conceito ao elemento finito laminado, é necessário introduzir na formulação uma forma de imposição da continuidade das rotações ao longo das várias camadas que constituem o laminado. Assim, baseado nessa formulação da componente de membrana, é desenvolvido um elemento de placa, o qual é incluído em alguns testes numéricos apresentados no próximo capítulo, com o objectivo único de validar o elemento e avaliar o seu desempenho. Como trabalho futuro propõe-se o desenvolvimento de uma metodologia de compatibilização das rotações entre camadas aplicando esta formulação ao elemento finito *layerwise* desenvolvido neste capítulo.

Como referido, a hipótese de deslocamento transversal constante ao longo de cada camada, e igualmente constante ao longo do laminado, é perfeitamente aceitável na modelação de estruturas com tratamento viscoelástico integrado ou com restrição. De facto, devido à reduzida espessura usualmente aplicada neste tipo de tratamentos e à incompressibilidade do material normalmente empregue, é aceitável que se omita a

deformação transversal ou esmagamento das camadas. No entanto, esta simplificação torna-se restritiva na análise de estruturas *sandwich* com núcleos espessos constituídos por espumas poliméricas macias.

Capítulo 5

Validação numérica do elemento finito *layerwise*

Neste capítulo apresenta-se a validação numérica do elemento finito proposto e desenvolvido no capítulo anterior. O desempenho e a convergência da formulação de base da matriz de rigidez e das suas variantes melhoradas são verificados através de um conjunto de *patch-test's* que permitiu avaliar de forma independente a formulação da componente de membrana, a protecção ao bloqueio de corte transversal e a componente de rigidez associada aos graus de liberdade de rotação no plano. Com o objectivo principal de validar a formulação da matriz de rigidez do elemento, analisa-se um conjunto de problemas estáticos, usualmente aplicados na avaliação do desempenho de elementos finitos de placa, casca de faceta e casca curva, cujas soluções numéricas ou analíticas se encontram disponíveis em várias referências bibliográficas. A validação da matriz de massa é obtida através de um conjunto de problemas de teste associados à análise modal de duas estruturas simples, para os quais se encontram disponíveis as respectivas soluções analíticas.

5.1 Introdução

De acordo com as diferentes formulações desenvolvidas e apresentadas no capítulo anterior, foram implementadas quatro versões diferentes do elemento *layerwise* proposto:

- a primeira variante, doravante identificada pelo acrónimo **layw4c**, utiliza a formulação isoparamétrica conforme da componente de membrana e recorre à formulação de rigidez fictícia de rotação no plano (4.10.11);
- a segunda variante, **layw4q**, aplica a interpolação não conforme na componente de membrana (4.10.10) e, tal como a variante conforme, recorre à matriz de rigidez fictícia de rotação no plano para introduzir estes graus de liberdade na formulação do elemento finito;
- a terceira variante, identificada pelo acrónimo **layw4m**, é idêntica à versão **layw4q**, sendo-lhe introduzida a correcção da interpolação não-conforme, como indicado na Equação (4.77);
- a quarta variante, **layw4d**, é idêntica à versão conforme (**layw4c**), utilizando, no entanto, a formulação de membrana com graus de liberdade de rotação no plano (4.10.11). Contudo, no seu estado de desenvolvimento actual, a aplicação desta variante é limitada a placas com uma única camada, pelo que é incluída no processo de validação numérica apenas com o objectivo de verificar e qualificar o seu desempenho como elemento finito de placa (e obviamente como elemento finito de membrana), comparando os resultados obtidos com as variantes que recorrem à matriz de rigidez fictícia associada aos graus de liberdade de rotação no plano e os resultados publicados recorrendo a elementos finitos de membrana semelhantes.

A formulação do elemento finito referente à componente de flexão é idêntica para todas as variantes, adoptando a metodologia apresentada na Secção 4.10.12 para proteger o elemento finito do bloqueio numérico de corte transversal associado ao limite de casca fina, evitando-se deste modo o procedimento de integração reduzida e, em consequência, mantendo-se a característica da matriz de rigidez do elemento finito.

O elemento finito proposto e as suas variantes foram implementados em ambiente Matlab[®] recorrendo ao software Structural Dynamics Toolbox[®] (SDT) [206].

5.2 Característica da matriz de rigidez

Como facilmente se pode constatar pela formulação desenvolvida e apresentada no capítulo anterior, os termos de energia de deformação de todas as componentes tensoriais do elemento finito proposto são obtidos por integração numérica completa, ou seja, não são utilizados processos de integração reduzida ou selectiva para contornar problemas de bloqueio de corte ou de membrana. Deste modo, não existirão modos espúrios de energia nula para além dos modos de corpo rígido associados às condições de fronteira do modelo em análise.

De forma a comprovar esta propriedade, foram calculados os valores próprios da matriz de rigidez para elementos regulares e irregulares e para pequenas malhas de elementos, também elas regulares e irregulares. Em qualquer um dos diversos casos considerados não apareceram modos de energia nula, para além dos modos de corpo rígido associados às condições de fronteira consideradas. Desta forma, comprova-se e verifica-se que o elemento proposto, nas suas variantes *layw4c/4q/4m*, apresenta uma característica completa.

A variante *layw4d* é susceptível de apresentar uma característica incompleta (*rank deficient*), apresentando um modo espúrio de energia nula quando os graus de liberdade de rotação no plano do elemento possuem o mesmo valor. No entanto, a variante implementada contém um mecanismo de estabilização deste modo espúrio (4.10.11), que permite eficazmente evitar este problema numérico.

5.3 *Patch-test's*

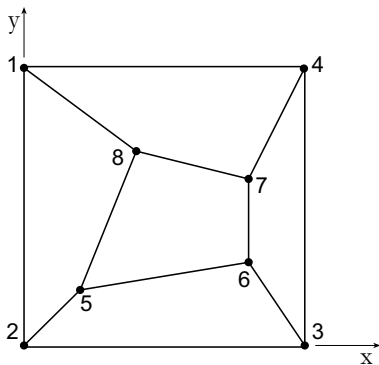
Os *patch-test's* [207] constituem uma etapa muito importante no desenvolvimento de um elemento finito, pois permitem validá-lo teoricamente e verificar a sua implementação numérica. O facto de o elemento finito passar um *patch-test* indica que, à medida que o número de divisões da malha for aumentando, os resultados convergirão para o resultado correcto. Se o elemento não passar o *patch-test*, então a velocidade de convergência será menor e poderá originar resultados errados para malhas irregulares [177].

De forma a verificar a convergência de resultados e a representatividade do elemento finito proposto, foram realizados três testes: um sobre o termo de deformação de

membrana, com o intuito de comparar as três variantes da formulação associada a este termo, outro sobre os termos de flexão, acoplamento e corte transversal, permitindo avaliar o comportamento do elemento na situação limite de placa fina e protecção numérica associada, e ainda um terceiro teste, usualmente aplicado na validação de elementos finitos de membrana com graus de liberdade de rotação no plano.

5.3.1 Patch-test de membrana

Dado que as quatro variantes do elemento proposto assentam sobre diferentes formulações do termo de membrana, este teste tem por objectivo analisar e comparar o seu desempenho, permitindo desde já obter algumas conclusões sobre a convergência e a representatividade das respectivas formulações.



Nó	x	y	Nó	x	y
1	0.0	10.0	5	2.0	2.0
2	0.0	0.0	6	8.0	3.0
3	10.0	0.0	7	8.0	6.0
4	10.0	10.0	8	4.0	7.0

Módulo de <i>Young</i> (E)	1000
Coefficiente de <i>Poisson</i> (ν)	0.30
Espessura (h)	0.01

Figura 5.1: Malha de elementos finitos e parâmetros do *patch-test* de membrana

O teste é desenvolvido com o objectivo de verificar a representatividade numérica de um campo arbitrário de deslocamentos previamente estabelecido. Assim, e tendo como base uma malha irregular formada por um conjunto restrito de elementos finitos, como representado na Figura 5.1, é definido um campo de deslocamentos associado ao termo de membrana (u e v), representado por uma função polinomial arbitrária da forma:

$$\begin{cases} u(x, y) = 0.02x + 0.01y + 0.02 \\ v(x, y) = 0.01y - 0.02x - 0.01 \end{cases} \quad (5.1)$$

Utilizando a função polinomial descrita, calculam-se os deslocamentos dos nós externos 1–4, cujas coordenadas são indicadas na tabela da Figura 5.1. Os valores assim calculados são, então, prescritos no problema numérico de elementos finitos, cujo objectivo é calcular os deslocamentos dos nós internos, do nó 5 ao nó 8, e verificar a representatividade do campo analítico descrito pela Equação (5.1).

A Tabela 5.1 apresenta os resultados obtidos para este teste, confrontando os valores descritivos do campo de deslocamentos nos nós internos obtidos por via numérica com os valores calculados pelo campo analítico previamente estabelecido pela Equação (5.1).

Tabela 5.1: Resultados do *patch-test* de membrana

Nó	Analítico		layw4c/m/d		layw4q	
	u	v	u	v	u	v
5	0.080	-0.030	0.080	-0.030	0.085	-0.033
6	0.210	-0.140	0.210	-0.140	0.183	-0.152
7	0.240	-0.110	0.240	-0.110	0.191	-0.099
8	0.170	-0.020	0.170	-0.020	0.171	-0.021

De acordo com os resultados obtidos, as variantes **layw4c**, **layw4m** e **layw4d** (usando apenas uma camada na última variante) passam este teste. De facto, Zienkiewicz e Taylor [168] alertam para este problema do elemento de placa com interpolação não-conforme do termo de membrana utilizando modos quadráticos incompatíveis e propõem a correcção aplicada na formulação **layw4m**, a qual se verificou passar o presente teste.

5.3.2 *Patch-test* de flexão de placa fina

Este teste pretende avaliar o desempenho do elemento numa situação limite de placa fina, verificando a capacidade de protecção do bloqueio de corte transversal da sua formulação [177].

Tal como no teste anterior, é considerado um campo analítico e arbitrário de deslocamentos transversais w determinados por uma função polinomial, cujos termos são definidos arbitrariamente, da forma:

$$w(x, y) = 0.003x^2 + 0.002y^2 + 0.001xy + 0.02x + 0.01y + 0.02 \quad (5.2)$$

Assumindo a situação limite de placa fina e recorrendo às hipóteses *Kirchoff-Love*, podemos definir o campo de rotações da placa como sendo:

$$\begin{cases} \theta_x(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = 0.004y + 0.001x + 0.01 \\ \theta_y(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = -0.006x - 0.001y - 0.02 \end{cases} \quad (5.3)$$

Tendo por base a malha de elementos finitos utilizada no teste anterior e prescrevendo o deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y para os nós externos (1–4), usando os valores calculados pelo campo analítico assumido e descrito pelas equações (5.2) e (5.3), calculam-se numericamente os deslocamentos e as rotações dos nós internos. O elemento finito passa este *patch-test* se os valores numéricos dos deslocamentos e das rotações dos nós internos forem rigorosamente idênticos aos valores calculados pelo campo analítico.

O teste foi também realizado para placas multi-camada, com 3 e 5 camadas, assumindo que as rotações de todas as camadas em cada um dos nós externos são idênticas.

Tabela 5.2: Resultados do *patch-test* de placa fina

Nó	Analítico			layw4c/m/d			layw4q
	w	θ_x	θ_y	w	θ_x	θ_y	
5	0.104	0.020	-0.034	0.104	0.020	-0.034	Tabela 5.3
6	0.444	0.030	-0.071	0.444	0.030	-0.071	
7	0.552	0.042	-0.074	0.552	0.042	-0.074	
8	0.344	0.042	-0.051	0.344	0.042	-0.051	

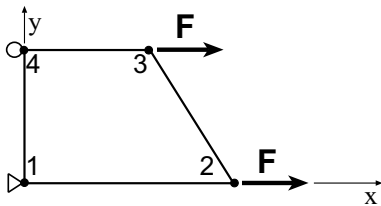
As tabelas 5.2 e 5.3 apresentam os resultados deste *patch-test*, podendo concluir-se que as variantes (layw4c/m/d) passam o teste para os diferentes números de camadas considerados. De referir que, embora todas as variantes do elemento partilhem da mesma formulação das componentes de flexão e de corte transversal, os termos de acoplamento entre camadas são dependentes da formulação de membrana adoptada. Assim, a variante layw4q só passa o teste considerando apenas uma só camada, já que neste caso os termos de acoplamento não existem.

Tabela 5.3: Resultados do *patch-test* de placa fina (cont.)

Nó	layw4q								
	1 camada			3 camadas			5 camadas		
	w	θ_x	θ_y	w	θ_x	θ_y	w	θ_x	θ_y
5	0.104	0.020	-0.034	0.108	0.021	-0.037	0.108	0.021	-0.037
6	0.444	0.030	-0.071	0.445	0.028	-0.068	0.445	0.028	-0.067
7	0.552	0.042	-0.074	0.554	0.045	-0.066	0.554	0.045	-0.065
8	0.344	0.042	-0.051	0.354	0.041	-0.055	0.355	0.041	-0.056

5.3.3 *Patch-test* de rotação no plano

De forma a avaliar o desempenho das metodologias adoptadas para introduzir os graus de liberdade de rotação no plano na formulação da componente de membrana, recorreu-se ao teste proposto por Ibrahimbegovic *et al.* [189] e por Zhu e Zacharia [177], que constitui uma adaptação do *patch-test* original de Taylor *et al.* [207]. Este teste utiliza um elemento irregular (Figura 5.2), ao qual são impostas as condições de fronteira mínimas para o tornar isostático ($u_1, v_1, u_4 = 0$). Aos nós livres (nós 2 e 3) são aplicadas duas cargas horizontais idênticas (F). Assim, é criado um campo de tensões uniforme dentro do domínio do elemento, de tal forma que $u_2 = \frac{10}{3h}$ e $u_3 = \frac{2}{h}$.



Nó	x	y
1	0.0	0.0
2	5.0	0.0
3	3.0	3.0
4	0.0	3.0

Módulo de <i>Young</i> (E)	1000
Coef. <i>Poisson</i> (ν)	0.25
Carga pontual (F)	1000
Espessura (h)	0.01/0.1/1.0

Figura 5.2: Malha de elementos finitos e parâmetros do *patch-test* de rotação no plano

Este teste é usualmente empregue na detecção de modos espúrios de elementos finitos.

Zhu e Zacharia [177] referem, ainda, que alguns elementos finitos com graus de liberdade de rotação no plano baseados na formulação livre de Allman [188] não verificam este teste, pelo que este se torna particularmente indicado para validar a formulação de membrana da variante `layw4d` e o mecanismo de estabilização do modo espúrio associado.

Enquanto que as três primeiras variantes verificam a solução deste *patch-test*, a variante `layw4d` apenas passa o teste se for aplicado o mecanismo de estabilização do modo espúrio. Verifica-se ainda que, restringindo a rotação no plano no primeiro nó, evita-se o referido modo de energia nula, uma metodologia que era inicialmente aplicada por Cook [179,187] como forma de estabilização.

5.4 Análise da formulação de membrana

Uma vez que a principal diferença entre as quatro variantes seleccionadas reside na formulação da componente de membrana, e tendo todas elas verificado os *patch-test*'s associados, utilizou-se um conjunto de problemas usualmente aplicado na avaliação do desempenho de elementos finitos de membrana, nomeadamente aqueles que possuem graus de liberdade de rotação no plano, para comparar e validar as variantes em análise.

Para manter a coerência com os problemas originais de referência aqui apresentados, não são indicadas as unidades utilizadas, sendo contudo imperativo que os valores sejam coerentes.

5.4.1 Viga encastrada

O problema da viga encastrada (Figura 5.3) que é sujeita a um carregamento transversal (F) na sua extremidade livre foi inicialmente utilizado por Allman [184] e por Bergan e Felippa [185]. A extremidade encastrada é restringida unicamente pelos seus graus de liberdade de translação (u e v), não sendo imposta qualquer restrição aos graus de liberdade de rotação no plano [185]. O deslocamento vertical de referência do ponto A, determinado analiticamente [185,189], vale 0.35533.

Este problema é também referenciado como um bom teste para verificar o desempenho do elemento finito ao bloqueio numérico da componente de corte no plano [177],

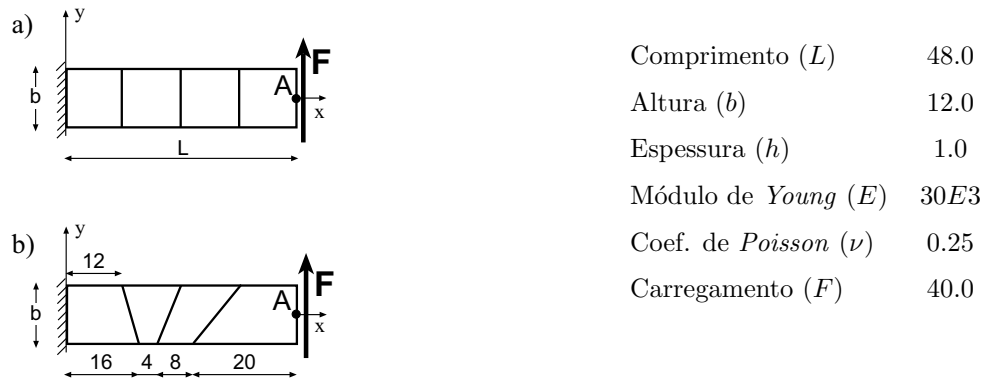


Figura 5.3: Viga encastrada

permitindo, assim, verificar se a interpolação não-conforme, presente nas variantes `layw4q/m`, constitui efectivamente uma melhoria significativa relativamente à variante conforme do elemento finito (`layw4c`).

A Tabela 5.4 apresenta os resultados obtidos com as quatro variantes para três malhas regulares, constituídas por 4×1 , 8×2 e 16×4 elementos quadriláteros, e para uma malha irregular com 4 elementos, como representado na Figura 5.3.b. Na mesma tabela, e apenas para comparação e verificação do desempenho do modelo proposto, são indicados os resultados obtidos com outros elementos finitos quadriláteros ($\square$:casca de faceta, $\square$ S:casca curva) baseados numa formulação de membrana com graus de liberdade de rotação.

Tal como referido por diversos autores [172, 173, 179, 184], verifica-se que o elemento com graus de liberdade de rotação no plano (`layw4d`) apresenta um desempenho significativamente melhor que a sua versão base sem rotação no plano (`layw4c`).

Os resultados obtidos neste problema permitem ainda concluir que as variantes não-conformes, `layw4q/m`, e a variante com graus de liberdade de rotação no plano, `layw4d`, apresentam um bom desempenho, comparável ao de outros elementos finitos que constituem uma referência entre os elementos finitos de placa com seis graus de liberdade e que apresentam um bom desempenho para o caso da malha irregular.

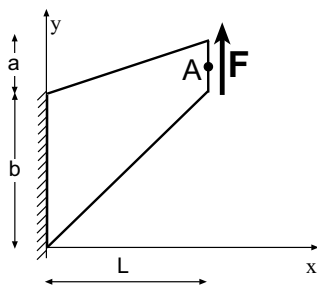
Tabela 5.4: Deslocamento vertical do ponto central da extremidade livre: valor absoluto
(valor absoluto/valor de referência)

Referência		4x1 a)	8x2 a)	16x4 a)	4x1 b)
Cook [187]	□	0.3283 (0.924)			0.3379 (0.951)
Allman [188]	□	0.3026 (0.852)	0.3394 (0.955)	0.3512 (0.988)	
MacNeal e Harder [173]	□	0.3409 (0.959)			0.2978 (0.838)
Ibrahimbegovic <i>et al.</i> [189]	□	0.3445 (0.970)	0.3504 (0.997)	0.3543 (0.986)	0.3065 (0.863)
Kouhia [190]	□	0.3295 (0.927)	0.3479 (0.979)	0.3550 (0.999)	0.2735 (0.770)
Zhu e Zacharia [177]	□S	0.3284 (0.924)	0.3504 (0.986)	0.3552 (1.000)	0.3583 (1.008)
layw4c		0.2421 (0.681)	0.3160 (0.889)	0.3445 (0.970)	0.2125 (0.598)
layw4q		0.3486 (0.981)	0.3514 (0.989)	0.3543 (0.997)	0.3393 (0.955)
layw4m		0.3486 (0.981)	0.3514 (0.989)	0.3543 (0.997)	0.3300 (0.929)
layw4d		0.3214 (0.905)	0.3454 (0.972)	0.3529 (0.993)	0.3165 (0.891)

□: elemento de casca de faceta □S: elemento de casca curva

5.4.2 Viga de Cook

A viga curta irregular representada na Figura 5.4 e proposta por Cook [208] constitui um excelente problema para verificar a sensibilidade da formulação de membrana à distorção da malha de elementos finitos.



Comprimento (L)	48.0
Altura da base (b)	44.0
Altura do topo (a)	16.0
Espessura (h)	1.0
Módulo de Young (E)	1.0
Coef. de Poisson (ν)	1/3
Carregamento (F)	1.0

Figura 5.4: Viga de Cook

A viga é encastrada numa das suas extremidades, restringindo unicamente as translações dos nós pertencentes a essa fronteira. A outra extremidade é sujeita a uma carga vertical.

Devido à indisponibilidade de uma solução analítica para este problema, é usual utilizar para o deslocamento na extremidade livre o valor 23.91 proposto por Bergan e Felippa [185], que foi obtido através do resultado numérico convergente para uma malha de elementos finitos refinada (32x32 elementos).

A Tabela 5.5 apresenta os resultados numéricos obtidos com as quatro variantes do elemento finito proposto, bem como os resultados obtidos com elementos de placa triangulares e quadriláteros publicados em diversas referências bibliográficas. Também neste caso se pode verificar o bom desempenho das formulações de membrana não-conformes e da formulação de membrana proposta com graus de liberdade de rotação. De facto, mesmo a variante **layw4d** permite obter resultados comparáveis aos obtidos por elementos finitos de referência.

Tabela 5.5: Deslocamento vertical do ponto central da extremidade livre: valor absoluto (valor absoluto/valor de referência)

Referência		2x2	4x4	8x8
Allman [184]	$\triangle$	20.08 (0.840)	22.71 (0.950)	
Bergan e Felippa [185]	$\triangle$	20.36 (0.852)	22.42 (0.938)	23.41 (0.979)
Cook [179] _($\lambda = 0.4$)	$\triangle$	21.25 (0.889)	23.09 (0.966)	
Felippa [209]	$\triangle$	20.56 (0.860)	22.45 (0.939)	23.43 (0.980)
Allman [188]	$\square$	20.27 (0.848)	22.78 (0.953)	23.56 (0.985)
Ibrahimbegovic <i>et al.</i> [189]	$\square$	20.682 (0.865)	22.984 (0.961)	23.626 (0.988)
layw4c		11.764 (0.492)	18.250 (0.763)	22.045 (0.922)
layw4q		22.739 (0.951)	23.422 (0.980)	23.768 (0.994)
layw4m		20.863 (0.873)	22.964 (0.960)	23.651 (0.989)
layw4d		21.960 (0.918)	22.901 (0.958)	23.613 (0.988)

Como se pode verificar pelos resultados dos problemas anteriores, a inclusão da interpolação não-conforme, usando modos incompatíveis na formulação de membrana das variantes **layw4q/m**, permite melhorar significativamente o desempenho da formulação relativamente à variante base com interpolação conforme (**layw4c**). Verifica-se, também, que a aplicação da formulação de membrana com graus de liberdade de rotação no plano permite melhorar o desempenho da variante conforme.

5.5 Análise da formulação de membrana/flexão

De forma a validar e verificar a convergência do elemento finito de placa e de casca de faceta proposto, recorreu-se a problemas usualmente utilizados como testes obstáculo a tais elementos.

Conforme os resultados dos exemplos de teste anteriores, a variante `layw4d`, que possui uma formulação de membrana com graus de liberdade de rotação no plano, apresenta um bom desempenho. No entanto, esta variante, sendo restrita à modelação de placas com uma única camada, é excluída do conjunto de variantes nos testes subsequentes.

5.5.1 Placa enviesada de Morley

A placa enviesada a 30° , originalmente proposta por Morley [210], é utilizada na avaliação da sensibilidade do elemento finito proposto à distorção da malha, nomeadamente junto ao ângulo obtuso [211–215]. A placa, representada na Figura 5.5, é simplesmente apoiada ao longo do seu perímetro, sendo sujeita a uma carga vertical q uniformemente distribuída.

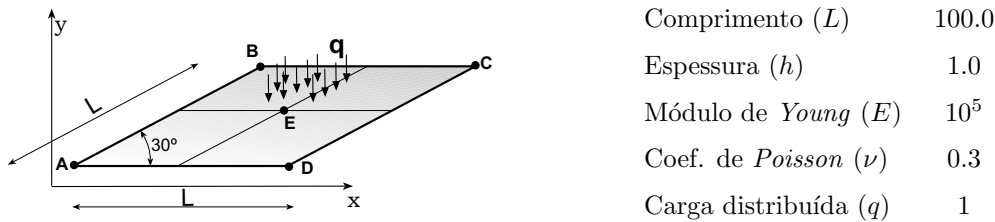


Figura 5.5: Placa enviesada de Morley

O valor analítico de referência originalmente proposto para o deslocamento vertical do ponto central da placa (ponto E) é 4.455 [161, 210]. No entanto, a razão entre o comprimento da placa e a sua espessura não enquadra claramente este exemplo na teoria das placas finas, pelo que é proposto o valor alternativo de 4.640 [160, 211], obtido pela aplicação de formulações de placa espessa e pela utilização de elementos finitos tridimensionais.

A Tabela 5.6 apresenta os valores obtidos numericamente para cada uma das variantes do elemento finito, para 1, 3 e 5 camadas, em função da resolução da malha de elementos finitos. De forma a evidenciar a proximidade dos resultados obtidos ao valor de referência, é apresentada a razão entre o valor numérico obtido para o deslocamento vertical do ponto E e o valor de referência adoptado (4.640), sendo apresentados no Apêndice E os valores absolutos calculados.

Tabela 5.6: Placa de *Morley* – Razão entre o deslocamento vertical do ponto E e o valor de referência (4.640)

Malha	layw4c			layw4q/m		
	1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
2x2	0.599	0.599	0.599	0.599	0.608	0.609
4x4	0.844	0.844	0.844	0.844	0.899	0.905
8x8	0.836	0.838	0.839	0.836	0.893	0.903
16x16	0.896	0.899	0.900	0.896	0.929	0.936
32x32	0.946	0.948	0.949	0.946	0.962	0.965

O gráfico da Figura 5.6 representa os valores obtidos para as três formulações em função da resolução da malha. Estes resultados indicam um desempenho claramente superior das formulações com correcção de membrana através dos modos quadráticos incompatíveis, em especial para as placas multi-camada.

A Tabela 5.7 confronta os resultados obtidos pelo elemento finito proposto, considerando apenas uma camada, com os resultados publicados de outros elementos finitos de placa espessa triangulares ($\triangle$) e quadriláteros ($\square$), e de casca curva ($\square$ S). De referir que, no caso do elemento finito proposto por Zienkiewicz e Lefebvre [216], o qual é um elemento triangular, o efeito da irregularidade da malha é intrinsecamente mais reduzido do que nos elementos quadriláteros.

De acordo com os resultados obtidos, verifica-se que a introdução da interpolação não-conforme na formulação de membrana do elemento permite melhorar o seu comportamento quando a placa é representada por várias camadas. Pensa-se que este facto se deve à alteração da posição da superfície de referência da placa relativamente à sua superfície neutra, originada pela subdivisão em várias camadas. De facto, enquanto

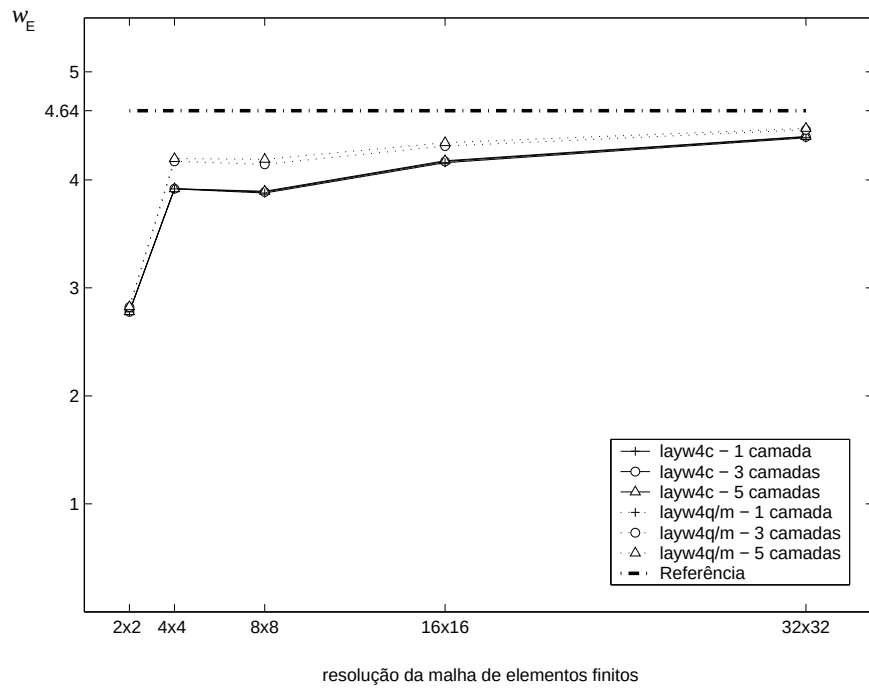


Figura 5.6: Resultados do problema da placa de *Morley*

Tabela 5.7: Resultados de referência para o teste da placa enviezada – Valores normalizados

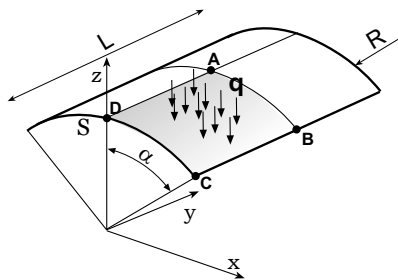
Referência		2x2	4x4	8x8	16x16	32x32
Zienkiewicz e Lefebvre [216]	$\triangle$		1.044	1.049	1.042	
Wang e Belytschko [212]	$\square$			0.954		
Sze <i>et al.</i> [192]	$\square$ S		0.951	0.931	0.944	0.992
layw4c/q/m	1c.	0.599	0.844	0.836	0.896	0.946

que para a placa espessa com uma camada a maior parte da energia de deformação é devida à deformação de flexão, a alteração da posição da superfície de referência em relação à superfície média, o que ocorre para várias camadas, aumenta significativamente a contribuição da energia de deformação devida ao esforço de membrana.

5.5.2 Casca cilíndrica (*Scordelis-Lo roof*)

Este problema, proposto por Scordelis e Lo [217], constitui um teste vulgarmente aplicado na análise de cascas de faceta [164, 181, 182, 186, 218] e de cascas curvas [192, 198, 219].

O objecto deste teste é uma casca de forma cilíndrica, sujeita ao seu peso próprio e suportada em ambos os extremos por condições de fronteira de diafragma. Dada a existência de condições de simetria na geometria e no carregamento imposto, o problema é analisado com base num quarto da casca, como representado pela área sombreada da Figura 5.7.



Comprimento (L)	50.0
Raio (R)	25.0
Ângulo (α)	40°
Espessura (h)	0.25
Módulo de <i>Young</i> (E)	4.32×10^8
Coef. de <i>Poisson</i> (ν)	0.0
Carregamento (q)	90.0

Figura 5.7: Casca cilíndrica (*Scordelis-Lo roof*)

Este problema de teste permite, essencialmente, avaliar a capacidade do elemento finito em representar convenientemente estados complexos de deformação de membrana [198]. De facto, dado que a maior parte da deformação desenvolvida é deformação de membrana, a capacidade do elemento representar estados de deformação inextensional ou a sua sensibilidade ao bloqueio de membrana não afectam severamente a convergência dos resultados, sendo no entanto muito importante que ele seja capaz de representar

correctamente o campo de deformações de membrana criado [186, 220]. A deformação de corte transversal é, também, muito reduzida face à deformação de membrana [221].

O valor de referência para o deslocamento vertical no ponto central do lado livre, o ponto B, é 0.3024 [164], sendo este valor utilizado para efeitos de verificação da qualidade e convergência dos resultados obtidos. A razão entre o valor calculado e o valor de referência é apresentada na Tabela 5.8, permitindo analisar mais facilmente a proximidade do resultado obtido em relação ao valor de referência.

Tabela 5.8: Casca cilíndrica – Razão entre o deslocamento vertical do ponto B e o valor de referência (0.3024)

Malha	layw4c			layw4q/m		
	1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
2x2	1.181	1.188	1.190	1.375	1.392	1.394
3x3	0.952	0.961	0.962	1.102	1.113	1.115
4x4	0.942	0.950	0.952	1.046	1.056	1.058
6x6	0.961	0.969	0.971	1.016	1.025	1.027
8x8	0.976	0.983	0.989	1.008	1.017	1.018
12x12	0.992	0.998	1.004	1.008	1.014	1.015

A convergência da solução é evidenciada através do gráfico da Figura 5.8 que representa o valor numérico calculado em função da resolução da malha de elementos finitos.

De acordo com os resultados obtidos, verifica-se o bom desempenho global do elemento finito proposto, não sendo contudo evidente um desempenho significativamente melhor das variantes não-conformes relativamente à variante conforme. No entanto, verifica-se que o comportamento das variantes é diferente, nomeadamente o tipo de convergência demonstrado. Este comportamento diferente pode dever-se ao facto de, sendo este problema dominado pela componente de deformação de membrana [218], cada uma das variantes apresentar uma resposta fortemente dependente do tipo de formulação empregue para essa componente.

A Tabela 5.9 confronta os resultados numéricos obtidos com as variantes propostas, considerando apenas uma camada, com os resultados publicados e obtidos com outros elementos de casca de faceta triangulares ($\triangle$) e quadrangulares ($\square$) e elementos de casca

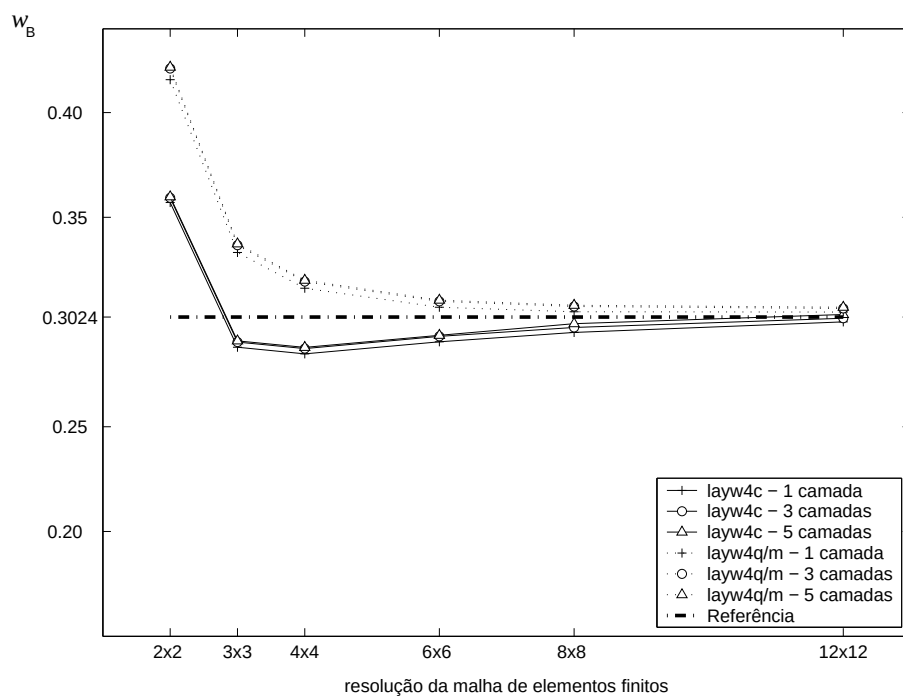


Figura 5.8: Resultados da casca cilíndrica

curva ($\square$ S). Os valores apresentados estão normalizados relativamente à solução teórica adoptada (0.3024).

Tabela 5.9: Resultados de referência para o teste da casca cilíndrica – Valores normalizados

Referência		2x2	4x4	6x6	8x8
MacNeal e Harder [220]	$\square$	1.376	1.050	1.018	1.008
Cook [181]	$\triangle$	1.399	0.919		0.953
Cook [182]	$\square$	1.541	1.085		1.014
Allman [186]	$\triangle$		0.911		0.967
Kant e Khare [164]	$\square$	1.196	1.101		0.989 ¹
Nukulchai [219]	$\square$ S	1.245	0.957	0.967	0.977
Dvorkin e Bathe [205]	$\square$ S				0.981
Sze <i>et al.</i> [192]	$\square$ S	1.209	1.014	1.000	0.997
1ayw4c	1c.	1.181	0.942	0.961	0.976
1ayw4q/m	1c.	1.375	1.046	1.016	1.008

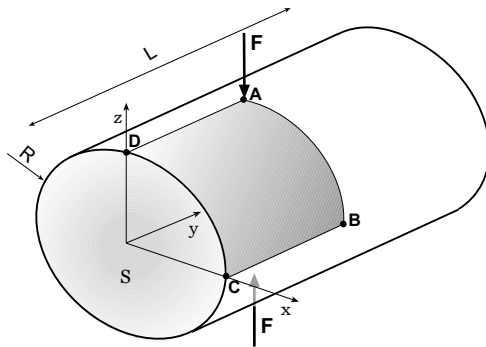
¹_(8x4)

5.5.3 Cilindro com cargas opostas (*Pinched cylinder*)

O cilindro com extremidades suportadas por condições de fronteira de diafragma e sujeito a cargas pontuais opostas constitui um exemplo de teste estático linear de elementos de casca amplamente utilizado e referenciado [164, 181–183, 186, 198].

A casca cilíndrica é sujeita a duas cargas pontuais opostas que actuam a meio do seu comprimento, originando um esmagamento central da casca. Dadas as condições de simetria intrínsecas ao exemplo, apenas é analisado um oitavo do cilindro, correspondente à área sombreada representada na Figura 5.9.

O valor de referência para o deslocamento vertical do ponto A é de 1.8248×10^{-7} [221], valor que serve de base comparativa ao elemento proposto. A razão entre os resultados numéricos obtidos e o valor de referência é apresentada na Tabela 5.10 em função da resolução da malha, da formulação do elemento e do número de camadas considerado.



Comprimento (L)	6.0
Raio (R)	3.0
Espessura (h)	0.03
Módulo de <i>Young</i> (E)	3.0×10^{10}
Coef. de <i>Poisson</i> (ν)	0.3
Carregamento (F)	1.0

Figura 5.9: Cilindro com cargas pontuais opostas (*Pinched cylinder*)

Tabela 5.10: Cilindro com cargas pontuais opostas – Razão entre o deslocamento vertical no ponto A e o valor de referência ($1.8248E - 7$)

Malha	layw4c			layw4q/m		
	1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
4x4	0.371	0.371	0.371	0.387	0.390	0.390
8x8	0.743	0.742	0.743	0.753	0.758	0.758
12x12	0.873	0.873	0.873	0.879	0.883	0.884
16x16	0.928	0.928	0.929	0.931	0.935	0.936
24x24	0.972	0.973	0.975	0.974	0.976	0.979
32x32	0.990	0.991	0.995	0.991	0.994	0.997

O gráfico da Figura 5.10 representa os resultados numéricos obtidos com os elementos finitos propostos em função da resolução da malha, evidenciando a convergência da solução.

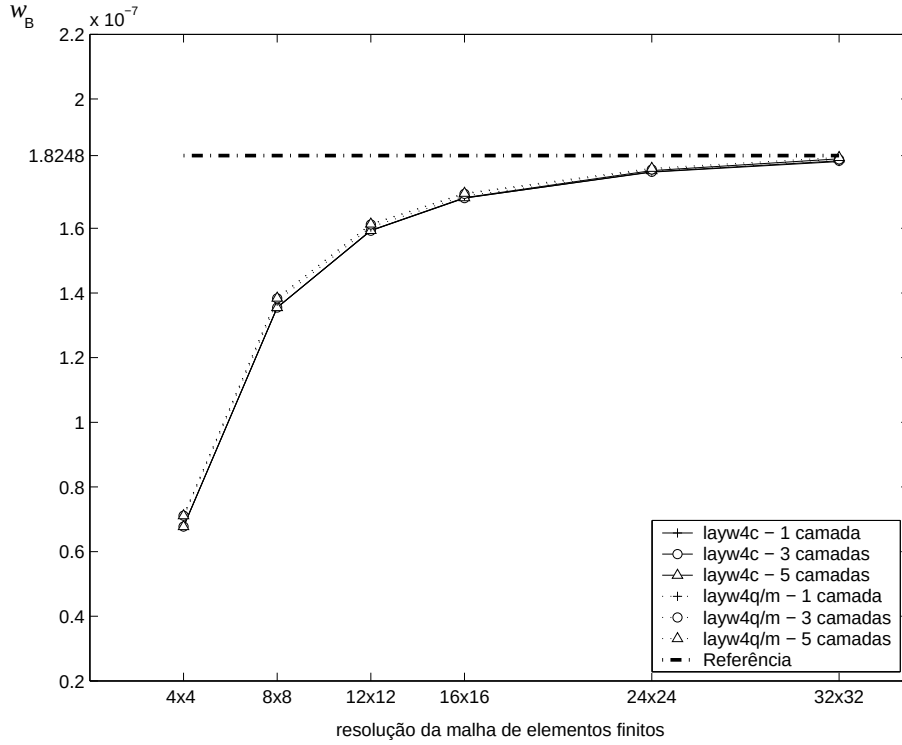


Figura 5.10: Resultados do cilindro com cargas pontuais opostas

Este problema é usualmente aplicado na verificação da capacidade do elemento finito em representar correctamente modos inextensionais de deformação de flexão [183, 186, 198]. Belytschko *et al.* [198] referem, ainda, que este é um dos testes mais severos e completos aplicados a elementos de casca, já que, para além de exigir uma correcta representação dos modos inextensionais de deformação, permite verificar a capacidade de o elemento representar correctamente estados complexos de deformação de membrana.

Como se pode verificar no gráfico da Figura 5.10, os resultados numéricos convergem para o valor de referência adoptado, sendo também possível verificar que as variantes laywq/m possuem um desempenho superior relativamente à variante conforme.

Comparando o desempenho do elemento proposto com outros elementos de casca de

faceta publicados (Tabela 5.11), verifica-se que, globalmente, a velocidade de convergência deste é menor relativamente à dos outros elementos. No entanto, a convergência para o valor correcto utilizando o elemento finito proposto é evidente, ao contrário de alguns dos elementos referenciados.

Tabela 5.11: Resultados de referência para o teste do cilindro com cargas pontuais opostas – Valores normalizados

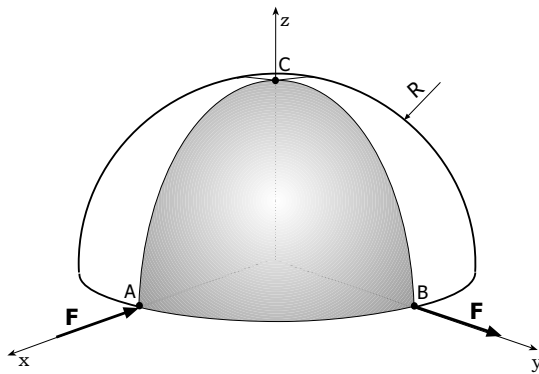
Referência		4x4	8x8	12x12	16x16	24x24	32x32
Cook [181]	$\triangle$	0.552	0.902				
Cook [182]	$\square$	0.630	0.938				
Allman [186]	$\triangle$	0.599	0.909		0.973		
Kouhia [190]	$\square$	1.100	1.500		1.357		1.298
Kant e Khare [164]	$\square$	0.670	0.953 ¹		1.005 ²		
Kouhia [222]	$\square$	1.177	0.991		1.005		1.011
Choi e Lee [183]	$\square$	0.386	0.757		0.936		
layw4c	1c.	0.371	0.743	0.873	0.928	0.972	0.990
layw4q/m	1c.	0.387	0.753	0.879	0.931	0.974	0.991
		¹ _(8x4)			² _(16x4)		

5.5.4 Hemisfério com carregamento pontual oposto (*Pinched hemisphere*)

O problema do hemisfério carregado localmente por dois pares de forças opostas foi inicialmente proposto por Morley e Morris [223] e constitui um teste muito popular na avaliação da imunidade ao bloqueio de membrana de elementos de casca e da sua capacidade de representar modos de deformação inextensionais com movimento de corpo rígido.

A geometria deste problema, representada na Figura 5.11, é descrita com base na simplificação de Cook [181,182], que assume a existência de um furo de reduzido diâmetro (0.02 unidades de comprimento [164]), evitando, desta forma, a utilização de elementos triangulares ou de elementos não planares.

Dadas as condições de simetria geométrica e de carregamento, apenas é analisado um quarto da casca. O bordo inferior do hemisfério é considerado livre.



Raio (R)	10.0
Espessura (h)	0.04
Módulo de <i>Young</i> (E)	6.825×10^7
Coef. <i>Poisson</i> (ν)	0.3
Carregamento (F)	2.0

Figura 5.11: Hemisfério com carregamento pontual oposto (*Pinched hemisphere*)

O valor de referência para o deslocamento horizontal dos pontos A e B, segundo a direção do carregamento local, é 0.0924 [220], sendo este valor utilizado na análise de convergência e desempenho do elemento proposto. A Tabela 5.12 apresenta a razão entre os valores calculados, aplicando as três variantes do elemento finito, e o valor de referência para o deslocamento horizontal do ponto A. Os resultados obtidos são representados graficamente nas figuras 5.12 e 5.13, que evidenciam a convergência e precisão da solução numérica obtida pelos elementos finitos propostos.

Tabela 5.12: Hemisfério com carregamento pontual oposto – Razão entre o deslocamento horizontal (u_x) do ponto A e o valor de referência (0.0924)

Malha	layw4c			layw4q			layw4m		
	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.
2x2	0.856	0.851	0.851	0.856	0.891	0.896	0.857	0.851	0.847
3x3	0.978	0.973	0.975	0.978	0.995	0.998	0.978	0.978	0.977
4x4	0.998	0.994	0.995	0.998	1.013	1.016	0.998	0.998	0.998
8x8	0.992	0.989	0.991	0.993	0.996	0.998	0.993	0.989	0.987
16x16	0.992	0.990	0.992	0.994	0.993	0.996	0.994	0.988	0.983
24x24	0.995	0.993	0.995	0.997	0.995	0.998	0.996	0.990	0.986
32x32	0.997	0.995	0.997	0.998	0.997	0.999	0.998	0.992	0.988

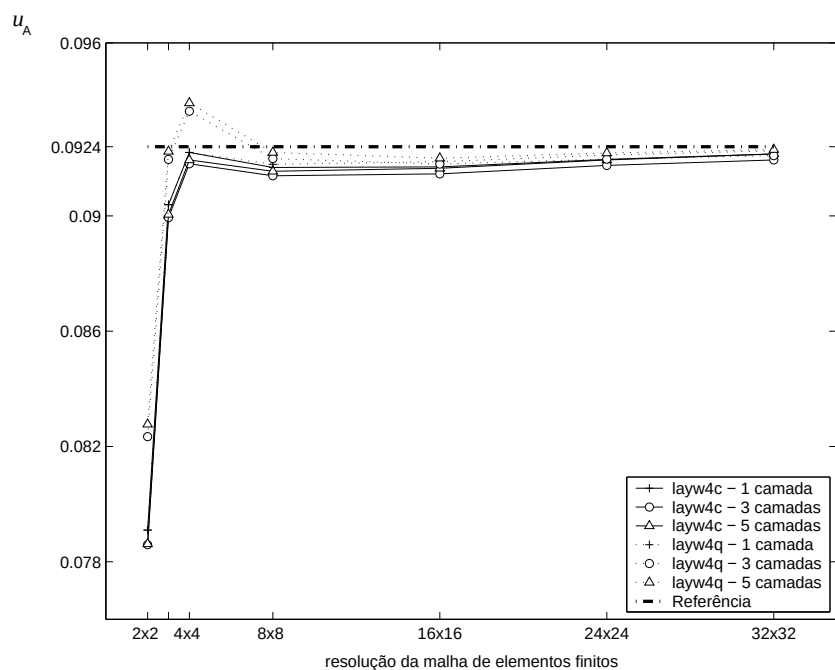


Figura 5.12: Resultados do hemisfério com cargas pontuais opostas (*Pinched hemisphere*)(1)

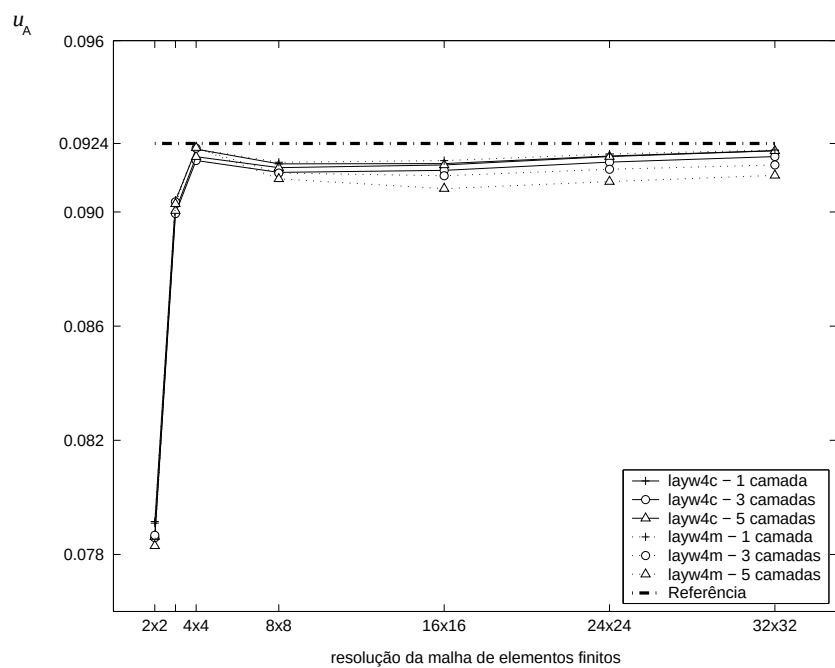


Figura 5.13: Resultados do hemisfério com cargas pontuais opostas (*Pinched hemisphere*)(2)

A maior parte da energia de deformação desenvolvida neste problema é devida à deformação inextensional de flexão, constituindo, assim, um teste à imunidade da formulação ao efeito do bloqueio de membrana [181, 182, 198]. Para além disso, este teste permite avaliar a capacidade do elemento finito em representar o seu movimento de rotação de corpo rígido sem deformação [183, 198] e verificar o desempenho de elementos com empenamento [183].

Tabela 5.13: Resultados de referência para o teste do hemisfério com cargas pontuais opostas – Valores normalizados

Referência		2x2	4x4	8x8	16x16	24x24	32x32
Cook [181]	$\triangle$	0.350	0.932	1.005			
Cook [182]	$\square$	0.852	1.002	1.001			
Choi e Lee [183]	$\square$		0.986	0.997	0.996		
1ayw4c	1c.	0.856	0.998	0.992	0.992	0.995	0.997
1ayw4q	1c.	0.856	0.998	0.993	0.994	0.997	0.998
1ayw4m	1c.	0.857	0.998	0.993	0.994	0.996	0.998

A Tabela 5.13 compara os resultados obtidos com o elemento proposto e os resultados de outros elementos de faceta publicados. De acordo com esta comparação, o elemento finito proposto apresenta um desempenho comparável ao de outros elementos finitos de casca de faceta publicados. Desta forma, verifica-se que a metodologia adoptada na formulação da matriz de rigidez associada aos graus de liberdade de rotação é eficaz e que o elemento finito apresenta uma razoável imunidade ao bloqueio de membrana.

Da Figura 5.13 verifica-se uma gradual redução da velocidade de convergência na variante 1ayw4m à medida que o número de camadas aumenta. No entanto, esta tendência não se verifica no exemplo do hemisfério com furo (analisado na secção seguinte), pelo que se supõe que este problema é devido à elevada razão de aspecto e irregularidade dos elementos situados na zona superior da casca, junto ao furo de diâmetro reduzido.

5.5.5 Hemisfério com furo no topo e carregamento pontual oposto (*Pinched hemisphere*)

Este problema, proposto por MacNeal e Harder [220], é semelhante ao exemplo anterior, diferenciando-se apenas pela existência de um furo com uma abertura de 18° situado no topo do hemisfério, como representado na Figura 5.14.

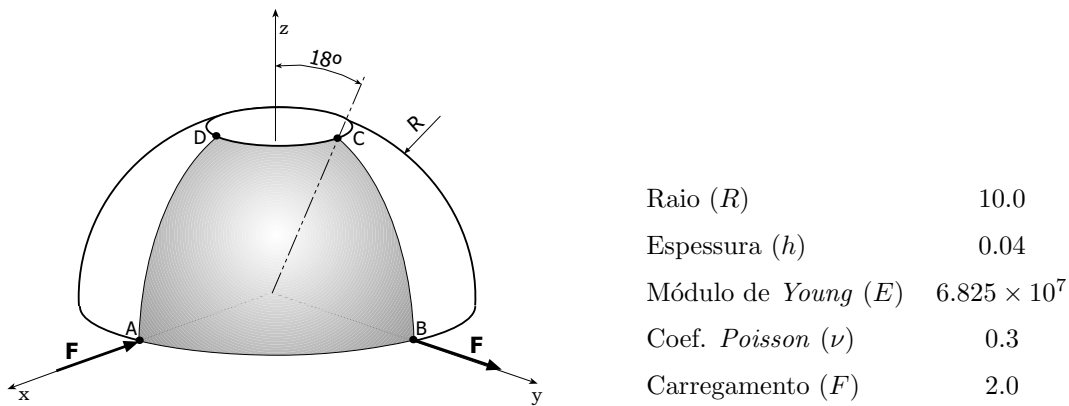


Figura 5.14: Hemisfério com furo no topo

Apesar da sua semelhança com o exemplo anterior, o comportamento dos elementos finitos nesta geometria é significativamente diferente, pelo que são aqui apresentados os resultados obtidos para este caso. De facto, a existência do furo de pequeno diâmetro no topo do hemisfério do exemplo anterior obriga a uma grande irregularidade dos elementos nessa zona, enquanto que o presente exemplo evita este problema.

O valor de referência para o deslocamento horizontal dos pontos de carregamento, pontos A e B, é de 0.094 [220]. Os resultados obtidos para este exemplo com o elemento finito proposto são apresentados na Tabela 5.14 pela razão entre os valores calculados e o valor de referência. Os gráficos das figuras 5.15 e 5.16 representam os resultados obtidos para as três formulações em função da resolução da malha de elementos finitos considerada.

Tal como no exemplo anterior, este problema permite verificar o desempenho do elemento finito quando sujeito a grandes movimentos de rotação de corpo rígido [177, 183], a sua capacidade de representar modos de deformação inextensional de flexão [173] e a sua imunidade ao bloqueio de membrana [183, 186]. De acordo com os resultados

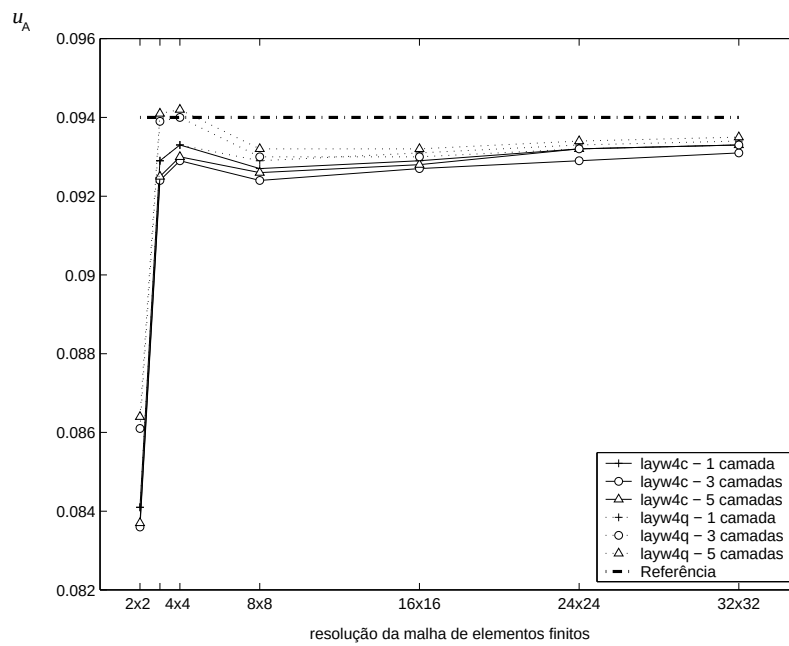


Figura 5.15: Resultados do hemisfério com furo no topo (1)

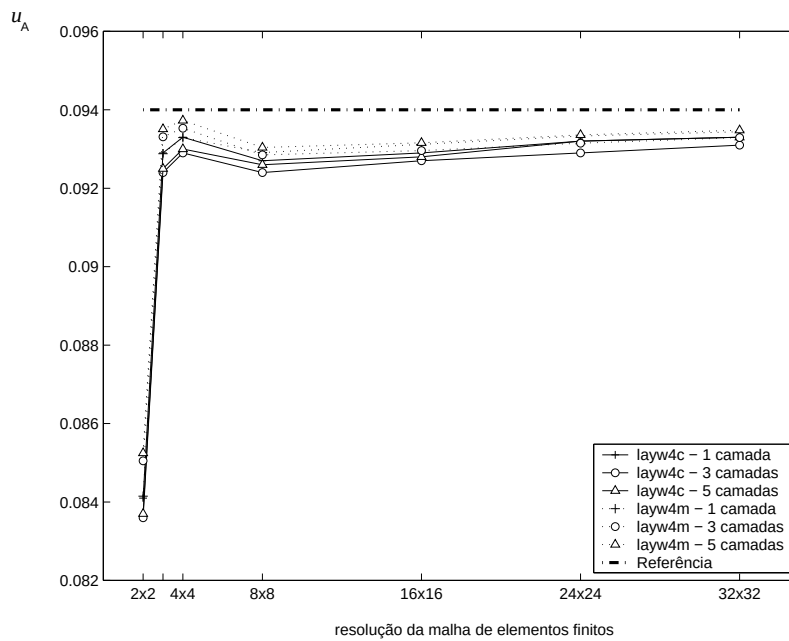


Figura 5.16: Resultados do hemisfério com furo no topo (2)

Tabela 5.14: Hemisfério com furo no topo – Razão entre o deslocamento horizontal (u_x) do ponto A e o valor de referência (0.094)

Malha	layw4c			layw4q			layw4m		
	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.
2x2	0.895	0.890	0.890	0.895	0.916	0.919	0.895	0.905	0.907
3x3	0.988	0.983	0.985	0.988	0.999	1.002	0.988	0.993	0.995
4x4	0.992	0.988	0.990	0.992	1.000	1.002	0.992	0.995	0.997
8x8	0.986	0.983	0.985	0.988	0.989	0.991	0.988	0.988	0.990
16x16	0.988	0.986	0.988	0.991	0.989	0.991	0.991	0.989	0.991
24x24	0.991	0.989	0.991	0.993	0.991	0.993	0.993	0.991	0.993
32x32	0.993	0.991	0.993	0.994	0.992	0.995	0.994	0.992	0.994

obtidos, verifica-se uma rápida convergência para o valor de referência, nomeadamente nos resultados calculados recorrendo às variantes não-conformes.

A Tabela 5.15 compara o desempenho do elemento finito proposto com outros elementos finitos de casca de faceta publicados, cuja análise evidencia o bom desempenho do elemento finito proposto.

Tabela 5.15: Resultados de referência para o teste do hemisfério com furo e cargas pontuais opostas – Valores normalizados

Referência		2x2	4x4	8x8	16x16	24x24	32x32
MacNeal e Harder [220]	□	0.972	1.024	1.005	1.001 ¹		
Ibrahimbegovic <i>et al.</i> [189]	□		0.931	0.997	0.995		
Allman [186]	△	0.054	0.143	0.616	0.948		
Choi e Lee [183]	□		0.989	0.991	0.991		
layw4c	1c.	0.895	0.992	0.986	0.988	0.991	0.993
layw4q/m	1c.	0.895	0.992	0.988	0.991	0.993	0.994

¹_{12x12}

5.5.6 Casca cilíndrica (*Scordelis-Lo roof*) - Malha irregular

De acordo com os resultados obtidos nos exemplos anteriores, as formulações do elemento finito proposto com correcção da componente de membrana através de modos incompatíveis (**layw4q/m**) apresentam-se relativamente mais eficientes que a formulação sem essa correcção (**layw4c**). Todavia, não se verificaram diferenças significativas entre os resultados numéricos obtidos para as duas formulações não-conformes propostas, **layw4q** e **layw4m**.

Dado que os efeitos da correcção introduzida na formulação da variante **layw4m** só são efectivamente evidentes na análise de malhas irregulares (formadas por elementos com lados não paralelos), desenvolve-se aqui uma análise numérica nessas condições. Assim, recorrendo ao teste da casca cilíndrica (*Scordelis-Lo roof*) e mantendo as condições do exemplo original, aplicou-se uma malha de elementos finitos irregular como ilustrado na Figura 5.17.

A Tabela 5.16 apresenta os resultados numéricos normalizados relativamente ao valor de referência do problema original. A Figura 5.18 representa graficamente os resultados obtidos para as três variantes do elemento finito proposto, para 1, 3 e 5 camadas, em função da resolução da malha de elementos finitos. Os resultados comprovam o fraco desempenho, associado à não convergência, da variante **layw4q**, permitindo ainda evidenciar a superioridade da formulação não-conforme da componente de membrana da variante **layw4m** relativamente à formulação conforme da variante **layw4c**.

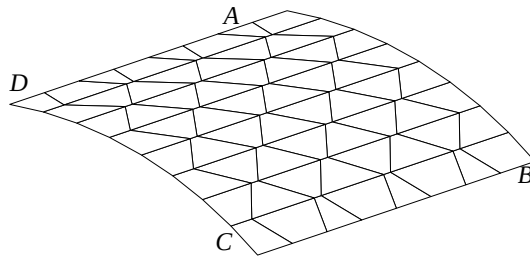


Figura 5.17: Malha irregular (8x8) aplicada ao problema *Scordelis-Lo roof*

Tabela 5.16: Casca cilíndrica (malha irregular) – Razão entre o deslocamento vertical do ponto B calculado e o valor de referência

Malha	layw4c			layw4q			layw4m		
	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.
2x2	1.141	1.149	1.150	1.411	1.473	1.479	1.404	1.456	1.462
3x3	0.851	0.837	0.838	1.045	1.095	1.101	0.994	1.001	1.003
4x4	0.824	0.833	0.835	1.008	1.190	1.213	0.970	0.988	0.990
6x6	0.853	0.863	0.865	0.979	1.226	1.259	0.931	0.946	0.949
8x8	0.884	0.893	0.895	0.979	1.266	1.306	0.930	0.942	0.945
12x12	0.928	0.935	0.936	0.989	1.330	1.378	0.948	0.957	0.957

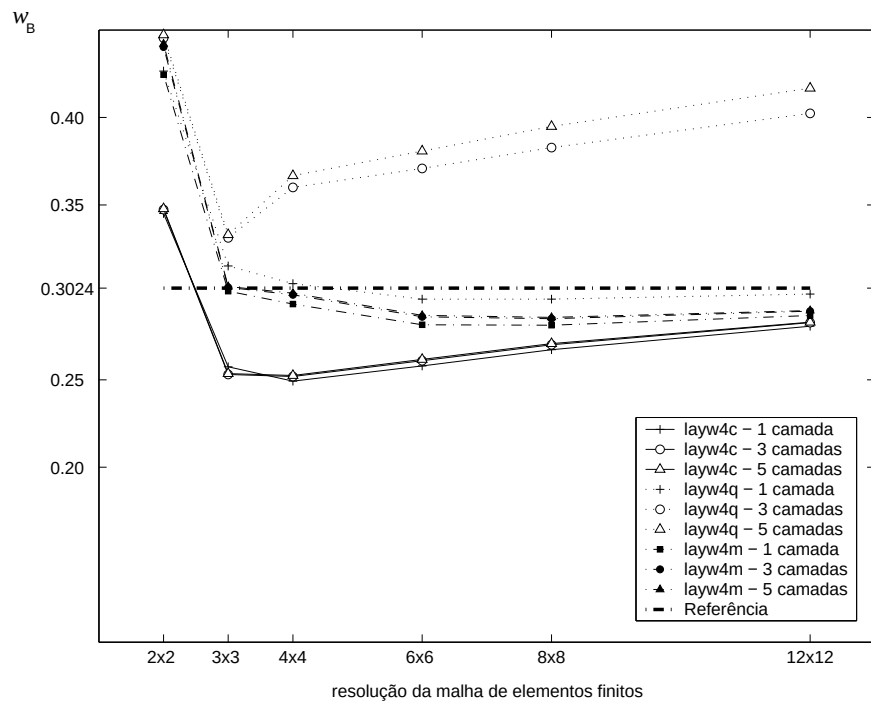


Figura 5.18: Casca cilíndrica (malha irregular)

5.5.7 Cilindro com cargas opostas (*Pinched cylinder*) - Malha irregular

Seguindo o propósito do exemplo anterior, recorreu-se ao problema do cilindro sujeito a duas cargas pontuais e opostas apresentado na Secção 5.5.3, ao qual se aplicou uma malha irregular da forma ilustrada na Figura 5.19.

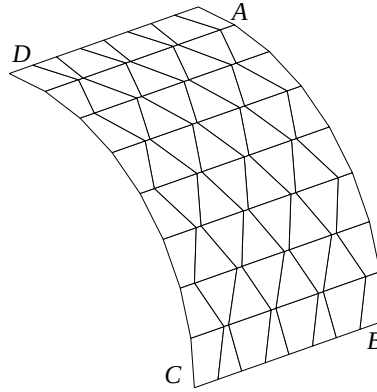


Figura 5.19: Malha irregular (8x8) aplicada ao problema do cilindro com cargas opostas

Mantendo as condições do exemplo original, foi calculado o deslocamento vertical do ponto A para as três formulações consideradas e para 1, 3 e 5 camadas, em função da resolução da malha de elementos finitos.

A Tabela 5.17 apresenta a razão entre os valores calculados e o valor de referência, evidenciando a proximidade e convergência da solução obtida. Os resultados apontam para um desempenho inferior do modelo `layw4q`, o qual utiliza a correcção da componente de membrana sem a correcção proposta por Taylor *et al.* [176]. Esta conclusão é também evidente na representação gráfica dos resultados obtidos na Figura 5.20.

Da análise efectuada, tendo por principal objectivo a verificação da formulação da matriz de rigidez do elemento proposto e a comparação das três variantes seleccionadas (`layw4c/q/m`), conclui-se que o desempenho do elemento é bastante satisfatório, apresentando imunidade ao bloqueio de corte e ao bloqueio de membrana. A introdução da interpolação não conforme na componente de membrana (`layw4q`) reduz de forma significativa a sensibilidade à distorção da malha, sendo todavia importante a aplicação da correcção introduzida na variante `layw4m` para a análise de geometrias tridimensionais com malha irregular.

Tabela 5.17: Cilindro com cargas opostas (malha irregular) – Razão entre o deslocamento vertical do ponto A calculado e o valor de referência

Malha	layw4c			layw4q			layw4m		
	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.
4x4	0.376	0.376	0.376	0.394	0.409	0.410	0.390	0.392	0.392
8x8	0.743	0.744	0.744	0.773	0.809	0.813	0.752	0.759	0.760
12x12	0.869	0.870	0.870	0.902	0.946	0.950	0.874	0.881	0.882
16x16	0.923	0.923	0.924	0.958	1.007	1.012	0.926	0.931	0.933
24x24	0.967	0.968	0.969	1.005	1.066	1.073	0.969	0.972	0.973
32x32	0.986	0.986	0.988	1.026	1.096	1.105	0.987	0.989	0.991

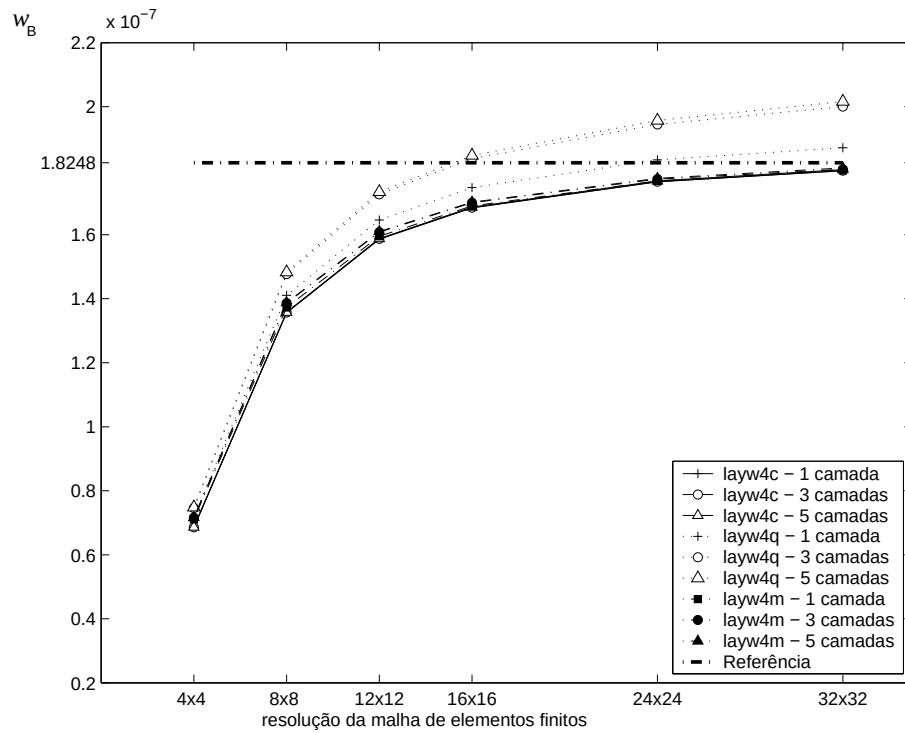


Figura 5.20: Cilindro com cargas opostas (malha irregular)

Os resultados obtidos para os diversos problemas de teste foram, de uma forma geral, bastante satisfatórios, sendo o elemento finito proposto capaz de reproduzir convenientemente os estados de deformação complexos dos exemplos tridimensionais considerados, nomeadamente o hemisfério com cargas radialmente opostas e a casca cilíndrica.

Da análise global dos resultados obtidos conclui-se que a introdução dos modos incompatíveis na formulação de membrana constitui, de facto, um melhoramento à formulação básica do elemento de deformação no plano, pelo que o elemento finito aqui proposto adopta a formulação da variante **layw4m**.

5.6 Análise dinâmica

Na análise apresentada na secção anterior, utilizando problemas de teste usualmente empregues na validação e comparação de elementos finitos de placa e de casca, apenas foi possível avaliar o desempenho e implementação numérica da formulação da matriz de rigidez do elemento finito proposto, tendo sido seleccionada a variante com melhor desempenho (**layw4m**). De forma a validar e verificar a formulação referente à matriz de massa do elemento, recorreu-se à comparação dos valores das frequências naturais para duas estruturas diferentes: uma placa rectangular e um tubo cilíndrico.

O elemento finito foi implementado segundo três variantes no que respeita à formulação da matriz de massa, as quais são identificadas pelas siglas **BLC**, **BHC** e **BLL**. As duas primeiras possuem uma formulação de massa consistente recorrendo, respectivamente, a uma interpolação bilinear e a uma interpolação bi-harmónica, enquanto que a última variante é baseada numa formulação de massa diagonal.

5.6.1 Placa simplesmente apoiada

O primeiro problema de análise dinâmica linear utiliza uma placa rectangular simplesmente apoiada na sua periferia, caracterizada pelos parâmetros apresentados na Tabela 5.18.

A solução analítica disponível para as condições impostas neste problema [224] é utilizada como referência de comparação e de análise de convergência do elemento finito

proposto. A validade da solução analítica é, no entanto, restrita a placas finas, condição que é respeitada pelo modelo em análise.

Tabela 5.18: Placa simplesmente apoiada

Geometria	
Comprimento (a)	300 mm
Largura (b)	200 mm
Espessura (h)	1.0 mm
Propriedades do material	
Módulo de <i>Young</i> (E)	72×10^9 Pa
Coefficiente de <i>Poisson</i> (ν)	0.3
Massa volúmica (ρ)	2700 Kg/m ³
Condições de fronteira	deslocamento vertical= 0 para $x = 0, a$ e $y = 0, b$

As 12 primeiras frequências naturais da placa simplesmente apoiada foram calculadas numericamente recorrendo ao elemento proposto (1ayw4m), utilizando as três formulações da matriz de massa implementadas no mesmo. As tabelas 5.19, 5.20 e 5.21 comparam os valores de referência, correspondentes à solução analítica disponível, com os valores numéricos obtidos aplicando as três formulações da matriz de massa, para duas malhas de elementos finitos de diferente resolução espacial, com 12x8 e 60x40 elementos, considerando 1, 3 e 5 camadas.

De forma a facilitar a comparação entre as três formulações, calculou-se o erro relativo entre os valores numéricos obtidos e o respectivo valor de referência. As tabelas 5.22 e 5.23 apresentam os valores desse erro para as malhas de elementos finitos com 12x8 e 60x40 elementos, respectivamente. A Figura 5.21 representa as formas modais correspondentes às frequências naturais determinadas.

Da análise dos resultados obtidos, verifica-se que os valores das frequências naturais calculados com o elemento finito proposto convergem para os valores de referência obtidos por via analítica. Essa convergência dos resultados é evidente no gráfico da Figura 5.22 que representa os valores das frequências naturais obtidos para diferentes resoluções da malha de elementos finitos, considerando uma única camada na representação numérica

Tabela 5.19: Placa rectangular simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz] (BLC)

Modo (m,n)	Analítico	Malha 12x8			Malha 60x40		
		1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
1 1	89.251	90.568	90.492	90.484	89.274	89.265	89.261
2 1	171.637	176.196	175.888	175.857	171.746	171.716	171.705
1 2	274.618	294.574	294.228	294.133	275.292	275.240	275.220
3 1	308.946	329.217	328.477	328.397	309.589	309.511	309.483
2 2	357.004	378.990	377.685	377.552	357.662	357.546	357.507
3 2	494.313	529.858	526.839	526.541	495.353	495.117	495.043
4 1	501.179	567.471	566.009	565.828	503.335	503.159	503.094
1 3	583.564	693.743	692.737	692.561	587.152	586.954	586.871
2 3	665.950	775.903	772.524	772.133	669.400	669.067	668.349
4 2	686.546	764.844	759.124	758.546	688.914	688.483	688.349
5 1	748.335	921.668	915.140	914.369	753.741	753.385	753.246
3 3	803.258	922.707	919.010	918.622	806.875	806.307	806.129

Tabela 5.20: Placa rectangular simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz] (BHC)

Modo (m,n)	Analítico	Malha 12x8			Malha 60x40		
		1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
1 1	89.251	90.173	90.097	90.090	89.258	89.249	89.246
2 1	171.637	174.712	174.407	174.376	171.689	171.658	171.648
1 2	274.618	290.534	290.193	290.149	275.145	275.093	275.073
3 1	308.946	324.153	323.425	323.345	309.403	309.325	309.297
2 2	357.004	372.267	370.985	370.855	357.414	357.294	357.259
3 2	494.313	516.806	513.861	513.571	494.877	494.641	494.567
4 1	501.179	552.993	551.568	551.392	502.844	502.669	502.604
1 3	583.564	672.769	671.794	671.622	586.484	586.286	586.204
2 3	665.950	749.376	746.113	745.735	668.532	668.200	668.084
4 2	686.546	738.326	732.804	732.249	687.994	687.563	687.429
5 1	748.335	885.589	883.037	882.667	752.642	752.286	752.148
3 3	803.258	884.905	877.649	876.904	805.613	805.047	804.868

Tabela 5.21: Placa rectangular simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz] (BLL)

Modo (m,n)	Analítico	Malha 12x8			Malha 60x40		
		1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
1 1	89.251	88.902	88.830	88.823	89.208	89.200	89.198
2 1	171.637	170.018	169.727	169.701	171.501	171.477	171.470
1 2	274.618	278.232	277.923	277.892	274.664	274.629	274.619
3 1	308.946	308.740	308.069	308.007	308.794	308.738	308.722
2 2	357.004	351.883	350.702	350.597	356.602	356.514	356.492
3 2	494.313	478.128	475.461	475.227	493.320	493.139	493.098
4 1	501.179	511.413	510.163	510.040	501.241	501.122	501.090
1 3	583.564	614.737	613.948	613.851	584.308	584.187	584.150
2 3	665.950	675.864	673.044	672.776	665.701	665.470	665.412
4 2	686.546	663.245	658.403	657.973	684.991	684.666	684.594
5 1	748.335	789.539	787.438	787.211	749.063	748.834	748.770
3 3	803.258	781.139	774.904	774.345	801.501	801.080	800.987

Tabela 5.22: Placa rectangular simplesmente apoiada – Erro relativo das frequências naturais [%]

Modo (m,n)	Malha 12x8								
	1 camada			3 camadas			5 camadas		
	BLC	BHC	BLL	BLC	BHC	BLL	BLC	BHC	BLL
1 1	1.476	1.033	-0.391	1.391	0.948	-0.472	1.382	0.940	-0.480
2 1	2.656	1.792	-0.943	2.477	1.614	-1.113	2.459	1.596	-1.128
1 2	7.267	5.796	1.316	7.141	5.672	1.204	7.106	5.656	1.192
3 1	6.561	4.922	-0.067	6.322	4.687	-0.284	6.296	4.661	-0.304
2 2	6.158	4.275	-1.434	5.793	3.916	-1.765	5.756	3.880	-1.795
3 2	7.191	4.550	-3.274	6.580	3.955	-3.814	6.520	3.896	-3.861
4 1	13.227	10.338	2.042	12.935	10.054	1.793	12.899	10.019	1.768
1 3	18.880	15.286	5.342	18.708	15.119	5.207	18.678	15.090	5.190
2 3	16.511	12.527	1.489	16.003	12.037	1.065	15.945	11.981	1.025
4 2	11.405	7.542	-3.394	10.571	6.738	-4.099	10.487	6.657	-4.162
5 1	23.162	18.341	5.506	22.290	18.000	5.225	22.187	17.951	5.195
3 3	14.871	10.164	-2.754	14.410	9.261	-3.530	14.362	9.168	-3.600

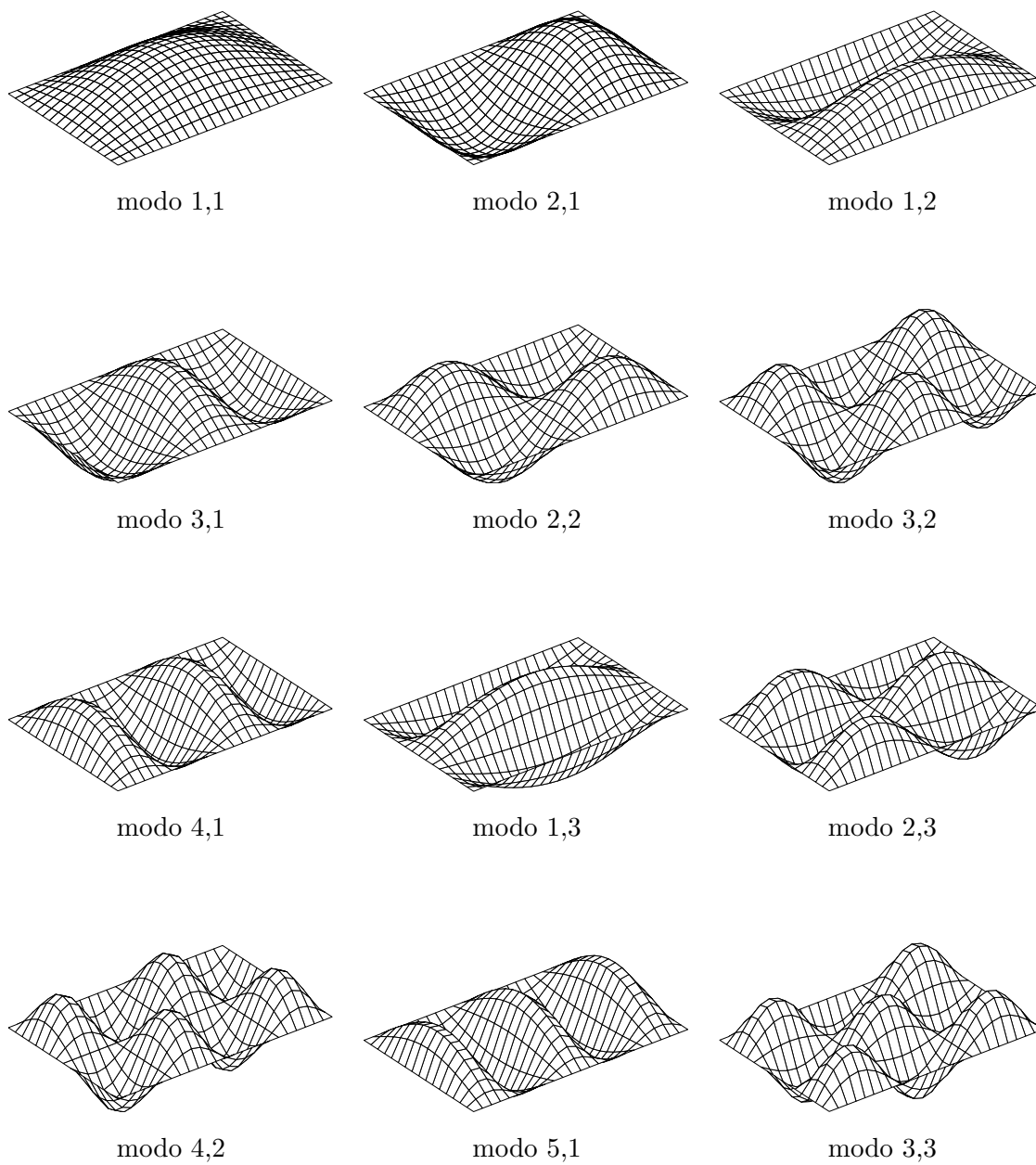


Figura 5.21: Formas modais da placa rectangular simplesmente apoiada

Tabela 5.23: Placa rectangular simplesmente apoiada – Erro relativo das frequências naturais [%]

Modo (m,n)	Malha 60x40								
	1 camada			3 camadas			5 camadas		
	BLC	BHC	BLL	BLC	BHC	BLL	BLC	BHC	BLL
1 1	0.026	0.008	-0.048	0.016	-0.002	-0.057	0.011	-0.006	-0.059
2 1	0.064	0.030	-0.079	0.046	0.012	-0.093	0.040	0.006	-0.097
1 2	0.245	0.192	0.017	0.227	0.173	0.004	0.219	0.166	0.000
3 1	0.208	0.148	-0.049	0.183	0.123	-0.067	0.174	0.114	-0.073
2 2	0.184	0.115	-0.113	0.152	0.081	-0.137	0.141	0.071	-0.143
3 2	0.210	0.114	-0.201	0.163	0.066	-0.238	0.148	0.051	-0.246
4 1	0.430	0.332	0.012	0.395	0.297	-0.011	0.382	0.284	-0.018
1 3	0.615	0.500	0.127	0.581	0.466	0.107	0.567	0.452	0.100
2 3	0.518	0.388	-0.037	0.468	0.338	-0.072	0.360	0.320	-0.081
4 2	0.345	0.211	-0.227	0.282	0.148	-0.274	0.263	0.129	-0.284
5 1	0.722	0.576	0.097	0.675	0.528	0.067	0.656	0.510	0.058
3 3	0.450	0.293	-0.219	0.380	0.223	-0.271	0.357	0.200	-0.283

da placa.

Verifica-se, também, que a convergência dos resultados obtidos utilizando a formulação de massa diagonal, embora não sendo monotónica, é mais rápida que a convergência obtida pela aplicação da formulação de massa consistente. No entanto, é natural que o erro relativo entre os valores assintóticos obtidos pela variante com formulação da matriz de massa diagonal e o resultado analítico seja superior relativamente aos resultados determinados através da formulação consistente. Os resultados obtidos indicam, também, que o procedimento de interpolação da matriz de massa recorrendo às funções de forma bi-harmónicas propostas conduz a uma convergência monotónica mais rápida que a obtida por recurso à interpolação bilinear.

Apesar de se tratar de uma placa fina, é notório um aumento gradual da qualidade dos resultados à medida que aumenta o número de camadas em que a placa é dividida. No entanto, e como seria de esperar, a qualidade dos resultados depende sobretudo da resolução da malha de elementos finitos.

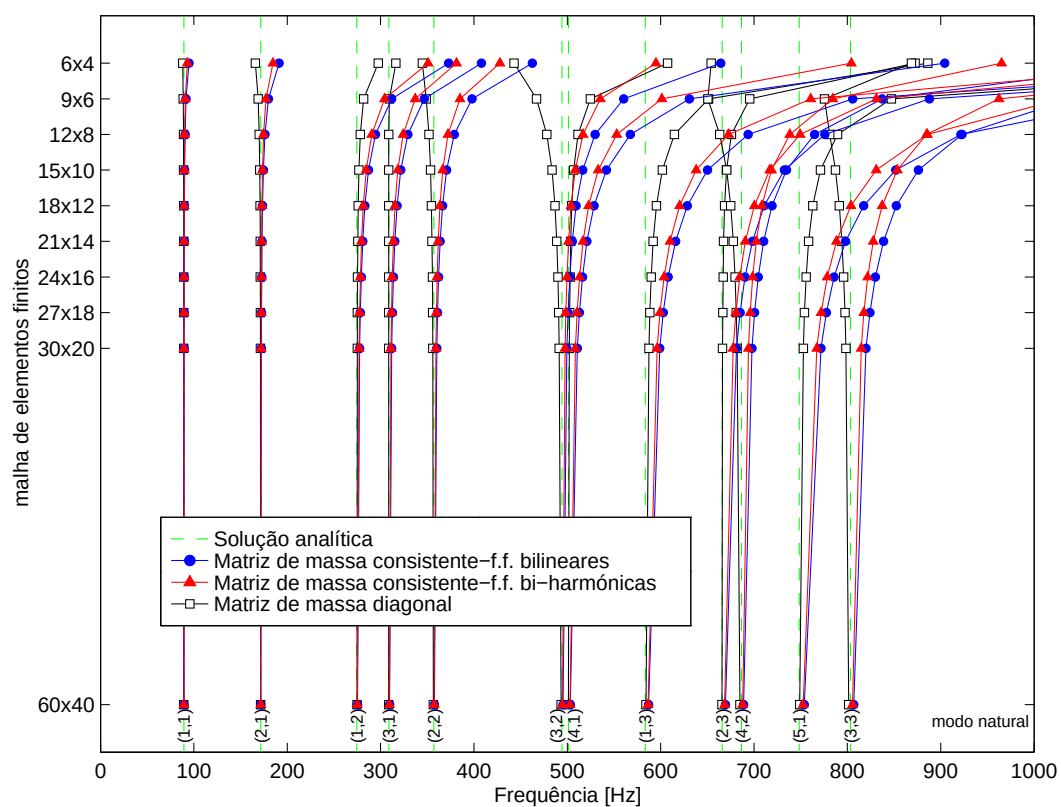


Figura 5.22: Convergência das frequências naturais da placa rectangular - 1 camada

5.6.2 Casca cilíndrica simplesmente apoiada

De forma validar a formulação de massa do elemento finito proposto numa aplicação de casca de faceta, foram calculados os modos naturais de um tubo com os extremos simplesmente apoiados, servindo como referência ao estudo a solução analítica exacta disponível [225]. O objecto deste exemplo é caracterizado na Tabela 5.24.

Tabela 5.24: Casca cilíndrica simplesmente apoiada nos extremos

Geometria	
Comprimento (L)	2.0 m
Radio (R)	0.25 m
Espessura (h)	0.003 m
Propriedades do material	
Módulo de <i>Young</i> (E)	$210 \times 10^9 \text{ Pa}$
Coefficiente de <i>Poisson</i> (ν)	0.3
Massa volúmica (ρ)	7800 Kg/m^3
Condições de fronteira	deslocamento radial =0 para $x = 0, L$

As tabelas 5.25 a 5.27 apresentam os resultados obtidos, para cada uma das formulações da matriz de massa consideradas, recorrendo ao elemento finito proposto e utilizando duas malhas de elementos finitos com diferente resolução espacial. A primeira malha discretiza a casca cilíndrica em 12 elementos longitudinais por 24 elementos circunferenciais, enquanto que a segunda malha, mais refinada, divide a casca em 32 elementos ao longo do comprimento do tubo e 64 elementos circunferenciais.

As tabelas 5.28 e 5.29 apresentam o erro relativo entre os valores das frequências naturais calculados numericamente através das malhas de elementos finitos com 12x24 e 32x64 elementos, respectivamente, e o valor analítico correspondente.

A Figura 5.23 representa as formas modais correspondentes às frequências naturais calculadas e apresentadas nas tabelas anteriores.

Seguindo o procedimento aplicado no exemplo anterior, e com o objectivo de evidenciar a convergência dos resultado obtidos para comparar as três formulações da matriz de

Tabela 5.25: Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz](BLC)

Modo (m,n)	Analítico	Malha 12x24			Malha 32x64		
		1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
1 3	106.538	113.928	113.794	113.769	107.432	107.406	107.394
1 2	114.063	116.188	115.956	115.905	114.369	114.110	114.021
1 4	178.763	204.980	204.643	204.571	182.078	182.062	182.049
2 4	216.599	245.931	245.117	244.971	220.227	220.020	219.950
2 3	222.352	238.674	237.957	237.806	224.627	224.043	223.819
1 5	284.434	355.675	354.627	354.388	293.081	292.947	292.851
1 1	297.032	303.526	303.788	303.793	302.836	302.284	301.851
2 5	299.261	371.308	369.743	369.448	307.897	307.668	307.593
3 4	317.524	366.982	365.336	365.029	323.956	323.233	322.937

Tabela 5.26: Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz](BHC)

Modo (m,n)	Analítico	Malha 12x24			Malha 32x64		
		1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
1 3	106.538	112.784	112.667	112.644	107.283	107.258	107.247
1 2	114.063	115.752	115.525	115.476	114.309	114.050	113.962
1 4	178.763	200.927	200.661	200.603	181.589	181.581	181.569
2 4	216.599	240.092	239.374	239.246	219.513	219.315	219.246
2 3	222.352	235.319	234.644	234.501	224.189	223.610	223.388
1 5	284.434	343.919	343.118	342.928	291.795	291.681	291.630
1 1	297.032	303.103	303.365	303.370	302.777	302.225	301.792
2 5	299.261	357.580	356.292	356.050	306.400	306.166	306.095
3 4	317.524	355.763	354.280	354.005	322.602	321.894	321.601

Tabela 5.27: Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Frequências naturais [Hz](BLL)

Modo (m,n)	Analítico	Malha 12x24			Malha 32x64		
		1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
1 3	106.538	109.223	109.160	109.151	106.797	106.783	106.777
1 2	114.063	114.347	114.136	114.090	114.113	113.857	113.771
1 4	178.763	189.022	188.967	188.960	180.009	180.042	180.046
2 4	216.599	222.955	222.519	222.457	217.204	217.059	217.011
2 3	222.352	224.952	224.412	224.302	222.764	222.213	222.001
1 5	284.434	311.902	311.743	311.711	287.683	287.683	287.675
1 1	297.032	301.727	301.989	301.994	302.583	302.032	301.600
2 5	299.261	320.106	319.537	319.465	301.502	301.421	301.393
3 4	317.524	323.374	322.362	322.195	318.233	317.612	317.353

Tabela 5.28: Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Erro relativo das frequências naturais [%]

Modo (m,n)	Malha 12x24								
	1 camada			3 camadas			5 camadas		
	BLC	BHC	BLL	BLC	BHC	BLL	BLC	BHC	BLL
1 3	6.936	5.863	2.520	6.811	5.753	2.461	6.788	5.731	2.453
1 2	1.863	1.481	0.249	1.657	1.282	0.064	1.615	1.239	0.024
1 4	14.666	12.399	5.739	14.477	12.250	5.708	14.437	12.217	5.704
2 4	13.542	10.846	2.934	13.166	10.515	2.733	13.099	10.456	2.705
2 3	7.341	5.832	1.169	7.018	5.528	0.926	6.950	5.464	0.877
1 5	25.047	20.913	9.657	24.678	20.632	9.601	24.594	20.565	9.590
1 1	2.186	2.044	1.581	2.275	2.132	1.669	2.276	2.134	1.671
2 5	24.075	19.488	6.965	23.552	19.057	6.775	23.453	18.976	6.751
3 4	15.576	12.043	1.842	15.058	11.576	1.524	14.961	11.489	1.471

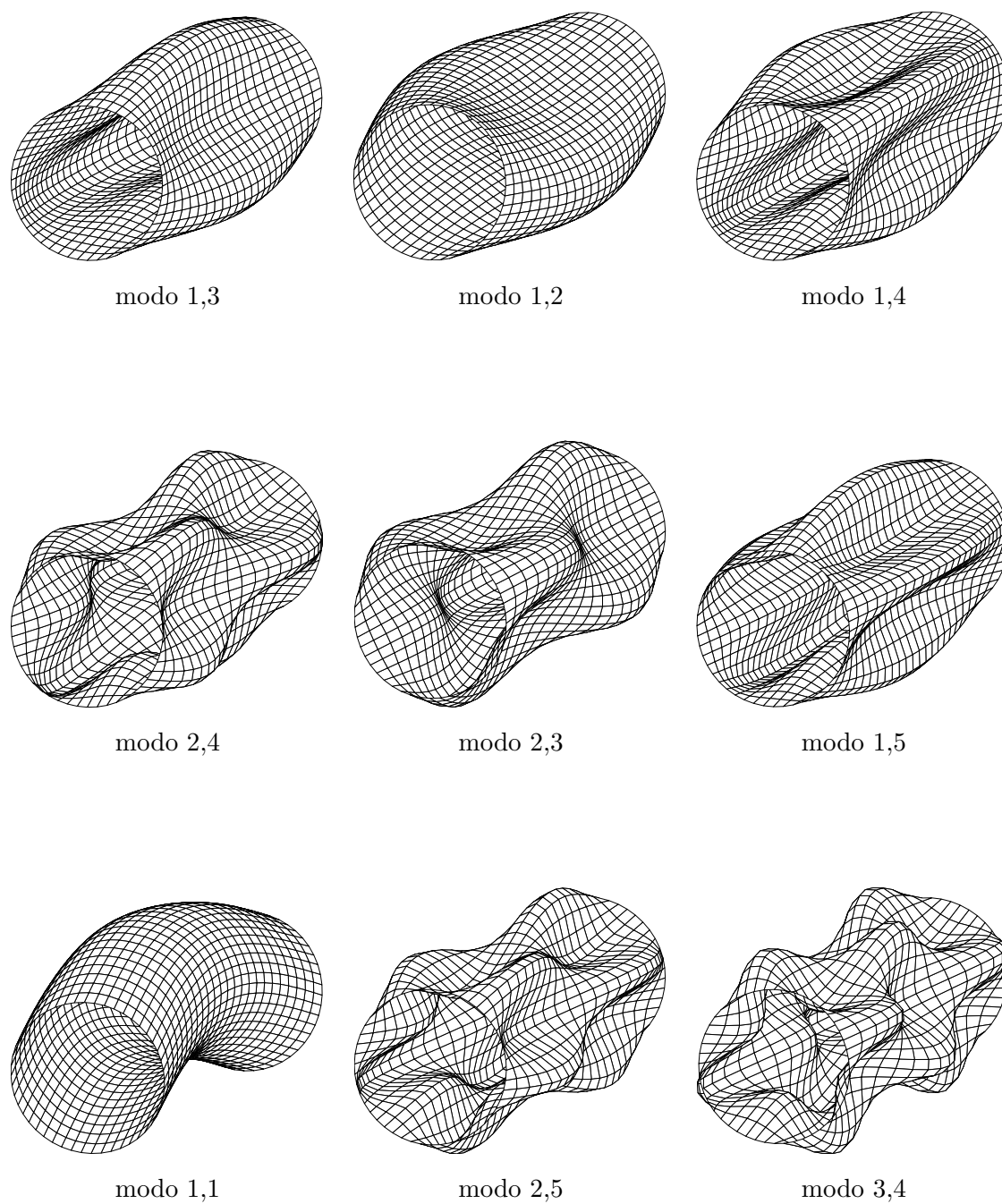


Figura 5.23: Formas modais da casca cilíndrica simplesmente apoiada

Tabela 5.29: Casca cilíndrica simplesmente apoiada – Erro relativo das frequências naturais [%]

Modo (m,n)	Malha 32x64								
	1 camada			3 camadas			5 camadas		
	BLC	BHC	BLL	BLC	BHC	BLL	BLC	BHC	BLL
1 3	0.839	0.699	0.243	0.815	0.676	0.230	0.803	0.665	0.224
1 2	0.268	0.216	0.044	0.041	-0.011	-0.181	-0.037	-0.088	-0.256
1 4	1.854	1.581	0.697	1.845	1.576	0.715	1.838	1.570	0.718
2 4	1.675	1.345	0.279	1.579	1.254	0.212	1.547	1.222	0.190
2 3	1.023	0.826	0.185	0.761	0.566	-0.063	0.660	0.466	-0.158
1 5	3.040	2.588	1.142	2.993	2.548	1.142	2.959	2.530	1.139
1 1	1.954	1.934	1.869	1.768	1.748	1.683	1.622	1.603	1.538
2 5	2.886	2.386	0.749	2.809	2.307	0.722	2.784	2.284	0.712
3 4	2.026	1.599	0.223	1.798	1.376	0.028	1.705	1.284	-0.054

massa em análise, representa-se na Figura 5.24 os valores das frequências naturais obtidas numericamente recorrendo ao modelo proposto para cada uma das malhas de elementos finitos consideradas.

As conclusões retiradas da análise do exemplo anterior são também verificadas neste exemplo. Assim, constata-se que a formulação de massa diagonal conduz a uma convergência mais rápida dos resultados, sendo, neste exemplo, e para os modos naturais considerados, uma convergência monotónica. Verifica-se, ainda, que a aplicação das funções de forma bi-harmónicas propostas, usando uma formulação da matriz de massa consistente, permite atingir resultados idênticos aos obtidos com a interpolação convencional utilizando funções de forma bilineares, apresentando, no entanto, uma convergência nitidamente mais rápida.

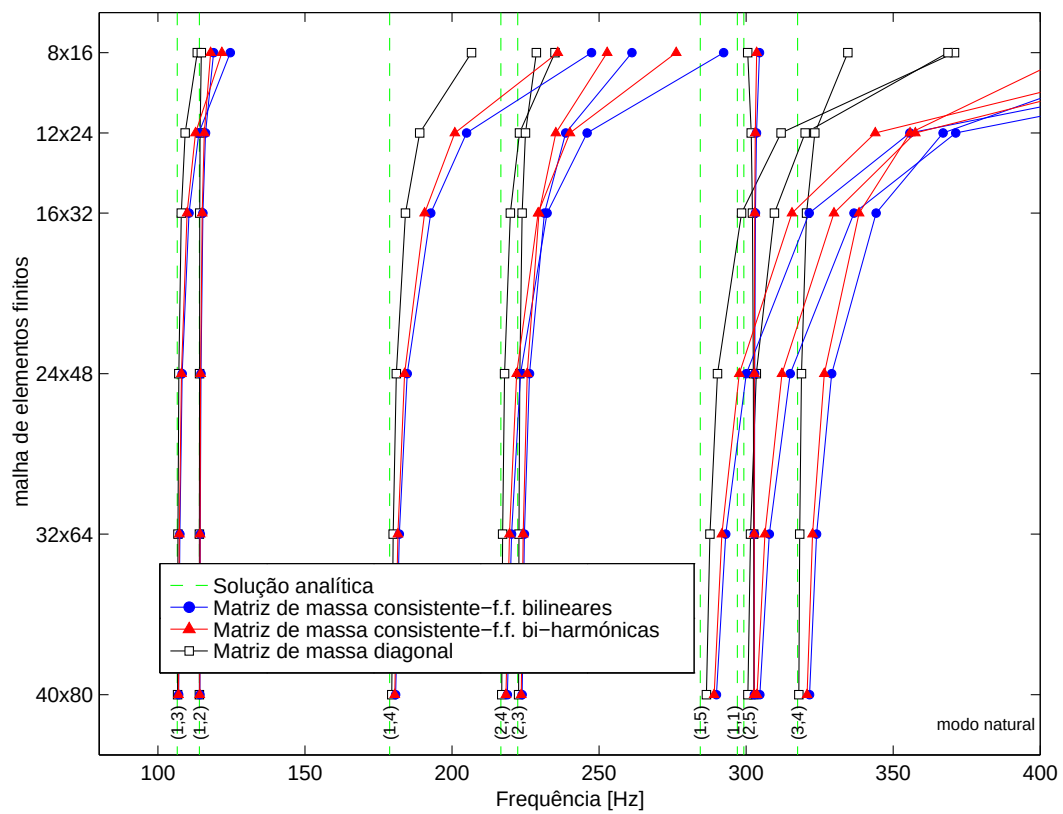


Figura 5.24: Convergência das frequências naturais da casca cilíndrica - 1 camada

5.7 Conclusões

Da análise numérica efectuada neste capítulo, conclui-se que o elemento finito proposto permite a sua aplicação como elemento de placa e elemento de casca de faceta, apresentando um bom desempenho, quer na análise de geometrias planas, podendo mesmo ser utilizado como elemento finito plano bidimensional, quer na análise de geometrias tridimensionais com curvatura.

Dentro das variantes do elemento finito seleccionadas, verificou-se um desempenho claramente superior e estável da variante construída com a formulação de membrana não-conforme, utilizando modos incompatíveis e a correcção proposta para elementos irregulares, e a formulação de flexão enriquecida com o mecanismo de estabilização do bloqueio de corte transversal proposto. Verificou-se, ainda, que a introdução dos graus de liberdade de rotação no plano na formulação de membrana, através da matriz de rigidez fictícia, permite solucionar o problema associado ao mau condicionamento da matriz de rigidez.

O bom desempenho demonstrado pela variante `layw4d` recomenda um trabalho futuro de adaptação da formulação actual, a qual é restrita ao elemento finito de placa, à formulação *layerwise*. Esta adaptação requer uma forma de compatibilização e de continuidade do campo independente de rotações no plano ao longo das camadas.

Os resultados obtidos nos dois problemas de determinação dos modos naturais de vibração permitem validar as formulações da matriz de massa propostas, verificando-se uma evidente superioridade da formulação de massa diagonal relativamente à velocidade de convergência dos resultados. Por outro lado, as formulações consistentes, nomeadamente a baseada no interpolador bi-harmónico proposto, permitem também uma convergência rápida, apresentando, para além disso, uma convergência monotónica por excesso para a solução analítica.

Tendo por base os resultados obtidos no conjunto de testes estáticos e *patch-test's*, seleccionou-se a variante `layw4m` por permitir uma maior velocidade de convergência, menor sensibilidade à irregularidade da geometria do elemento finito e, principalmente, por verificar todos os *patch-test's* analisados.

Capítulo 6

Aplicabilidade do elemento finito *layerwise* na modelação de tratamentos viscoelásticos

De forma a verificar a aplicabilidade do elemento finito proposto à simulação dos tratamentos viscoelásticos, bem como comparar o seu desempenho relativamente aos modelos combinados apresentados no Capítulo 3, dedica-se este capítulo à comparação numérica dos modelos combinados e do elemento finito proposto. Em primeiro lugar são analisadas as vantagens e os inconvenientes associados a cada um dos modelos, invocando o custo computacional requerido por cada um, a dificuldade associada ao processo de discretização espacial e a sua representatividade na análise de tratamentos viscoelásticos. De forma a comparar o desempenho do elemento finito proposto, bem como dos modelos combinados, é realizado um estudo numérico sobre as duas configurações de tratamento viscoelástico: integrado e superficial com restrição. Finalmente, é desenvolvida uma análise detalhada sobre a representatividade do elemento finito proposto, tendo como referência o modelo combinado mais utilizado, o modelo 2 apresentado no Capítulo 3. Neste estudo, desenvolvido sobre uma geometria simples e regular, são comparados os resultados obtidos com o modelo proposto e o modelo combinado seleccionado para diversas condições de tratamento.

6.1 Introdução

No capítulo anterior foi realizada uma análise numérica sobre o desempenho do elemento finito proposto como elemento de placa e de casca de faceta. No entanto, é necessário verificar a sua aplicabilidade ao fim proposto, a simulação de tratamentos viscoelásticos com restrição e integrados, e confrontá-lo com os modelos de elementos finitos usualmente empregues, nomeadamente os modelos combinados.

Neste capítulo é desenvolvido um estudo numérico com o objectivo de comparar o modelo *layerwise* proposto, referenciado por modelo 4¹, com os três modelos combinados descritos no Capítulo 3. Essa comparação não é restrita unicamente ao desempenho dos elementos finitos, pois pretende também estabelecer uma relação entre os modelos sobre os aspectos de implementação e de aplicação, tais como: custo computacional, facilidade de geração da malha de elementos finitos, acessibilidade dos elementos finitos, capacidade de representação e robustez da formulação.

6.2 Comparação dos modelos de elementos finitos

Os modelos combinados, designados neste texto por modelo 1, modelo 2 e modelo 3 (Capítulo 3), são obtidos por associação de elementos finitos convencionais disponíveis em qualquer software de elementos finitos comercial, residindo neste facto a sua principal vantagem em relação ao modelo *layerwise* proposto. Este último exige a sua implementação num software próprio ou num software de elementos finitos aberto a novas formulações. Todavia, as diferenças entre os modelos envolvidos neste estudo não dizem apenas respeito à acessibilidade e desempenho dos mesmos. De facto, outros aspectos, tais como: o custo associado à geração da malha, o custo computacional associado à sua aplicação e a robustez da formulação, são também aspectos relevantes no processo de selecção do modelo mais adequado para uma dada aplicação. Assim, os modelos combinados e o elemento finito proposto serão comparados com base na robustez da sua formulação, analisando a sua maior ou menor susceptibilidade a problemas numéricos, no custo computacional envolvido na abordagem de um dado problema por recurso a

¹O modelo 4 corresponde à variante **layw4m** com uma formulação de massa consistente com interpolação bilinear (BLC).

cada um dos modelos, na representatividade do fenómeno físico e na sua maior ou menor acessibilidade na utilização, tentando avaliar o custo de modelação envolvido.

6.2.1 Robustez da formulação

Qualquer um dos modelos em análise é formulado com base em elementos finitos de placa ou elementos sólidos. De facto, para além dos modelos combinados que são obtidos por associação destes elementos finitos, o modelo *layerwise* proposto é desenvolvido através da aplicação discreta da teoria de placa espessa em cada uma das camadas em que o laminado é dividido. Desta forma, é possível afirmar que a robustez numérica de cada modelo depende sobretudo da formulação de cada um dos elementos finitos constituintes.

Se, por um lado, a formulação tridimensional dos elementos finitos sólidos permite uma descrição mais fidedigna do campo de deformações de um corpo elástico, nomeadamente no que diz respeito à deformação de corte transversal e à deformação na direcção transversal, a sua aplicação a estruturas do tipo placa, ou seja, estruturas em que uma das dimensões é relativamente inferior às duas dimensões restantes, apresenta restrições devidas a problemas numéricos associados, na sua maioria, à falta de representatividade do campo de interpoladores. Normalmente, neste tipo de estruturas opta-se pela aplicação de elementos finitos de placa espessa seguindo as hipóteses de *Reissner-Mindlin* [162], que impõem uma distribuição linear do campo de deformações ao longo da espessura.

Qualquer um dos modelos atrás enumerados está sujeito a problemas numéricos, nomeadamente ao bloqueio de corte transversal devido à reduzida espessura das placas e ao bloqueio volumétrico originado pela utilização de um coeficiente de *Poisson* próximo de 0.5 para o material viscoelástico. Obviamente, este tipo de problemas é mais evidente e restritivo nos elementos sólidos, permitindo desde já prever a necessidade de utilizar malhas muito refinadas nos modelos com este tipo de elementos, ou seja, os modelos combinados, em especial o modelo 3. Por outro lado, os elementos de placa utilizados, seguindo uma formulação de placa espessa de forma a permitir a descrição da deformação de corte transversal, também sofrem dos mesmos problemas de bloqueio, nomeadamente o bloqueio de corte transversal. Assim, tendo em conta a reduzida espessura das camadas dos tratamentos e da placa base e a aplicação de materiais viscoelásticos quasi-incompressíveis ($\nu \approx 0.5$), torna-se necessário dotar os elementos finitos adoptados na modelação espacial de formulações robustas que permitam evitar os problemas de bloqueio descritos.

Dentro dos modelos combinados, e embora todos utilizem elementos sólidos para descrever a camada viscoelástica, o modelo 3 apresenta sérias limitações se os elementos sólidos não possuírem uma formulação que evite o problema do bloqueio de corte. Embora este problema esteja também presente nos outros dois modelos, resultados numéricos [110] indicam que o facto de o material viscoelástico possuir um módulo de ganho muito inferior ao módulo de *Young* do material das camadas exteriores atenua os efeitos do bloqueio de corte na matriz de rigidez global do sistema. Para além disso, e considerando o reduzido módulo de ganho exibido pelos materiais viscoelásticos, a energia de deformação desenvolvida dentro da camada viscoelástica é essencialmente devida à deformação de corte [106].

Segundo Liguore e Kosmatka [112], o problema de bloqueio de corte começa a ser evidente para elementos sólidos com uma razão de aspecto de 5000:1 quando estes são aplicados na modelação da camada viscoelástica. No entanto, essa mesma fonte indica que essa relação desce para 100:1 no caso da aplicação de elementos sólidos com integração selectiva na modelação das camadas elásticas adjacentes, as quais são constituídas por materiais com um módulo de elasticidade muito superior.

De forma a verificar este fenómeno, foi desenvolvido um estudo numérico em **Matlab**[®] utilizando os elementos finitos disponíveis no software **Structural Dynamics Toolbox**[®] (SDT) [206]. De referir que, enquanto que o elemento de placa espessa disponível nesse software possui uma formulação com protecção ao bloqueio de corte transversal, recorrendo à formulação *MITC* apresentada no Capítulo 4, o elemento sólido hexaédrico de 8 nós implementado na versão **SDT**[®] utilizada não possui qualquer tipo de protecção a este problema (trata-se de um elemento sólido convencional com integração numérica uniforme com 8 pontos de amostragem). O objecto deste estudo consiste numa placa *sandwich* com núcleo viscoelástico, cujas características e propriedades materiais são as descritas na Tabela 6.1, sendo modelada segundo o modelo 2.

Para avaliar a influência do módulo de ganho do material viscoelástico no desempenho do elemento, tentando verificar as conclusões acima referidas, calcularam-se as frequências naturais da placa *sandwich* para diferentes valores do módulo de ganho do material que constitui o núcleo da placa *sandwich*.

De forma a simplificar o problema, e não restringindo a validade das conclusões a retirar do estudo, considera-se que o material do núcleo é caracterizado por um módulo extensional

Tabela 6.1: Características do objecto de estudo da análise de robustez da formulação

Dimensões:	
Comprimento $[a]$	300 mm
Largura $[b]$	200 mm
Espessura da placa inferior $[h_1]$	1.0 mm
Espessura do núcleo viscoelástico $[h_2]$	0.1 mm
Espessura da placa superior $[h_3]$	1.0 mm
Propriedades materiais:	
Módulo de <i>Young</i> das placas externas $[E_{1/3}]$	72E9 Pa
Coefficiente de <i>Poisson</i> das placas externas $[\nu_{1/3}]$	0.30
Massa volúmica das placas externas $[\rho_{1/3}]$	2700 Kg/m ³
Módulo de ganho extensional do núcleo $[E_2]$	3.2E6/3.2E9/7.2E10 Pa
Coefficiente de <i>Poisson</i> do núcleo $[\nu_2]$	0.49
Massa volúmica do núcleo $[\rho_2]$	1140 Kg/m ³
Condições de fronteira:	bordo livre

real. Desta forma, é possível obter as frequências naturais da placa através da extracção dos valores próprios reais do sistema.

As figuras 6.1 a 6.3 representam as curvas de convergência das frequências naturais da placa para três valores distintos do módulo de ganho do material viscoelástico, respectivamente, 3.2 MPa, 3.2 GPa e 72 GPa. O primeiro valor corresponde ao valor exibido pelo material viscoelástico 3M ISD112 a 100Hz/20°C (Apêndice F) e o último é o valor do módulo de *Young* do material das placas externas, neste caso o alumínio. Em abcissas é indicado o valor da razão de aspecto do elemento sólido utilizado na modelação da camada do núcleo, que é calculado como a razão entre a dimensão maior do elemento e a sua espessura.

Os resultados obtidos permitem verificar as indicações anteriormente apontadas. De facto, no gráfico da Figura 6.1 não é evidente qualquer efeito do bloqueio de corte que ocorre no elemento sólido, sendo a convergência do modelo apenas determinada pela resolução da malha de elementos finitos e da correspondente representatividade de cada forma natural de vibração. Por outro lado, as curvas de convergência das frequências

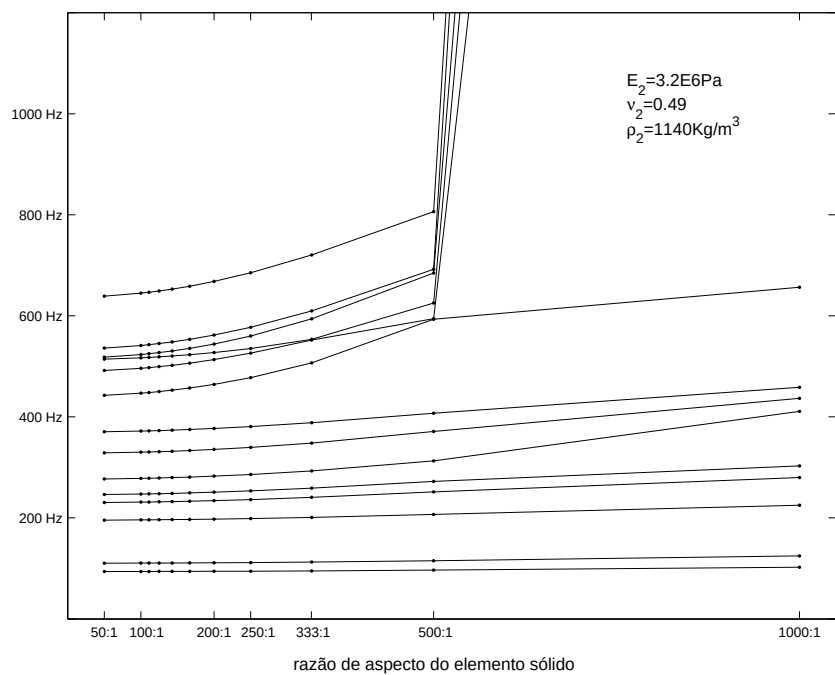


Figura 6.1: Convergência das frequências naturais com o modelo 2: $E_2=3.2E6Pa$

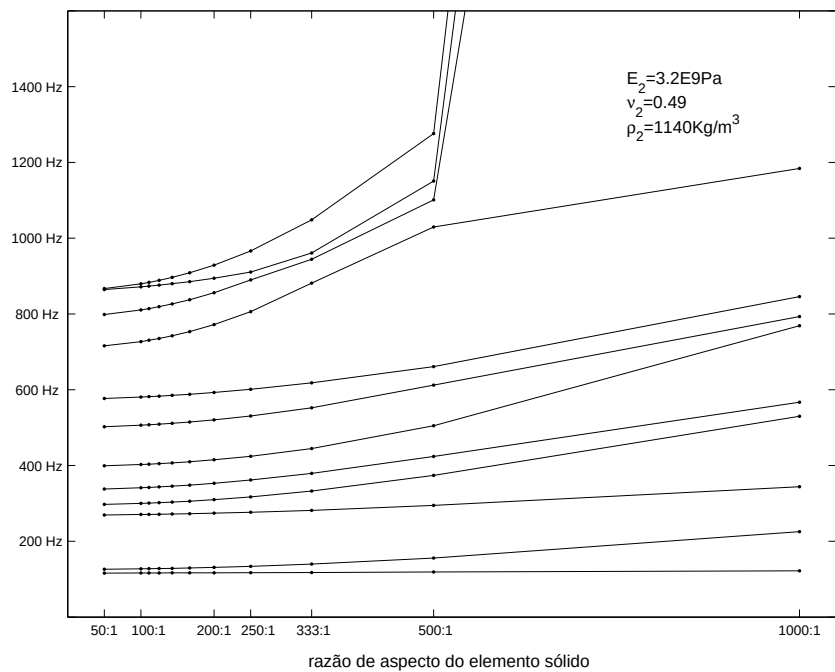


Figura 6.2: Convergência das frequências naturais com o modelo 2: $E_2=3.2E9Pa$

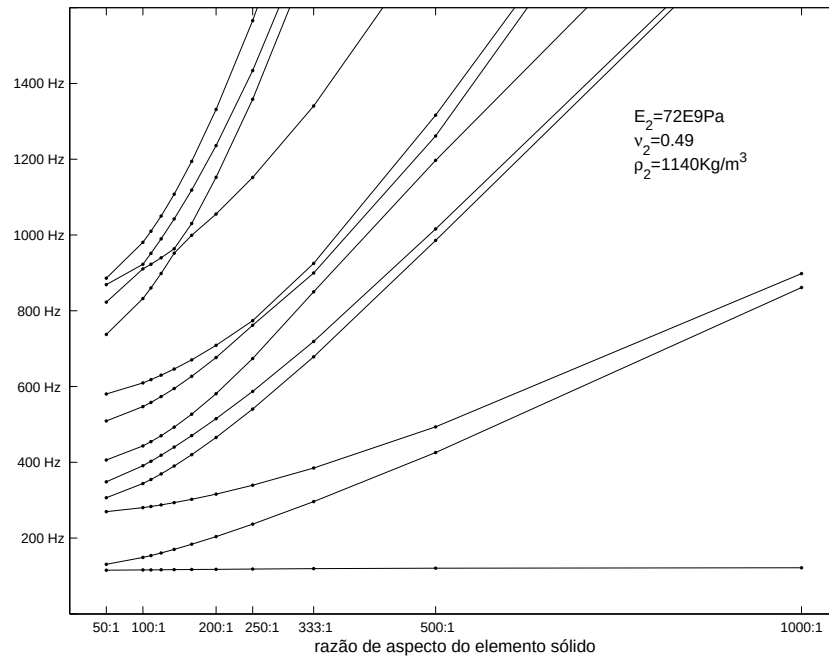


Figura 6.3: Convergência das frequências naturais com o modelo 2: $E_2=72E9Pa$

naturais apresentadas no gráfico da Figura 6.3 revelam o efeito do bloqueio de corte que aí ocorre devido à rigidez mais elevada do material do núcleo (neste caso idêntica à das camadas adjacentes).

Como facilmente se constata nos resultados representados no gráfico da Figura 6.3, a modelação da placa *sandwich* através do modelo 3, utilizando para o efeito os elementos sólidos sem protecção de bloqueio de corte transversal, será também susceptível do problema de bloqueio de corte para razões de aspecto elevadas.

Paralelamente a este estudo foi desenvolvida uma análise em MSC.Nastran™ [111] utilizando o mesmo objecto de análise, as mesmas condições de fronteira e as mesmas propriedades materiais [110]. Neste caso, ambos os elementos finitos utilizados, tanto o elemento finito sólido hexaédrico como o elemento finito de placa quadrilátero, possuem formulações robustas que atenuam os problemas numéricos derivados da elevada razão de aspecto, nomeadamente o problema de bloqueio de corte transversal. Desta análise, conjuntamente com os resultados obtidos no estudo anterior, retiram-se duas conclusões fundamentais:

- os resultados obtidos por aplicação do modelo 2 são idênticos para os dois estudos realizados, ou seja, o bloqueio de corte que naturalmente ocorre nos elementos sólidos que modelam a camada viscoelástica do núcleo não altera de forma significativa a matriz global de rigidez do sistema;
- a utilização dos elementos sólidos com protecção de bloqueio de corte transversal, disponíveis no MSC.Nastran™, permite a aplicação satisfatória do modelo 3, obtendo-se resultados idênticos aos calculados pelos modelos 1 e 2, apresentando mesmo uma convergência mais rápida.

6.2.2 Custo computacional

Embora os modelos em análise possuam uma estrutura ligeiramente diferente, a dimensão do problema originado é na realidade independente do modelo escolhido. De facto, para qualquer modelo, incluindo o modelo *layerwise*, o número de graus de liberdade de cada elemento finito ou conjunto de elementos dos modelos combinados é igual a $12(n + 1)$, onde n representa o número de camadas consideradas.

Embora o modelo 1 possua mais oito nós por elemento que o modelo 2, o estudo numérico desenvolvido permitiu concluir que ambos os modelos, sendo baseados na mesma formulação, originam problemas de elementos finitos idênticos. De facto, durante o processo de montagem das matrizes globais e resolução numérica do sistema de equações, os elementos de ligação rígida, utilizados no modelo 1 para ligar os nós dos elementos de placa ao elemento sólido, são interpretados pela substituição dos graus de liberdade dependentes pelos respectivos graus de liberdade principais. Desta forma, o sistema de equações final é idêntico ao resultante da aplicação do modelo 2, possuindo assim a mesma dimensão. Todavia, esta conclusão só é válida se todos os nós das placas se encontrarem ligados aos nós dos elementos sólidos, representando um tratamento viscoelástico sem qualquer tipo de descolamento.

Embora a dimensão global do sistema seja idêntica para os quatro modelos envolvidos neste estudo comparativo, a largura de banda das matrizes depende da disposição dos seus termos. Dada a limitação associada à implementação do elemento finito proposto no software SDT® em ambiente Matlab®, relativamente à optimização por renumeração nodal, não é possível comparar nas mesmas condições os modelos analisados neste estudo.

Todavia, é natural que a dispersão dos termos das matrizes de rigidez e de massa globais seja superior para os modelos combinados baseados em elementos finitos sólidos.

6.2.3 Representatividade do modelo

No contexto deste estudo, entende-se por representatividade do modelo a capacidade deste em reproduzir os campos de deformação que ocorrem nas camadas da estrutura com tratamento, nomeadamente as elevadas deformações de corte que se desenvolvem na camada viscoelástica.

Como referenciado em diversas fontes bibliográficas, nomeadamente o estudo publicado por Plouin e Balmès [100], a teoria clássica dos laminados não pode ser utilizada na análise deste tipo de problemas, já que não permite considerar a deformação de corte transversal que ocorre na camada viscoelástica. No entanto, poderá ser possível utilizar elementos de placa fina, baseados nas hipóteses de *Kirchoff-Love*, para modelar a placa base e a camada de restrição (ou placas externas dos tratamentos integrados), já que nestes componentes a deformação de corte transversal é insignificante. Por outro lado, os elementos sólidos tridimensionais permitem uma melhor descrição desta componente de deformação, estando no entanto sujeitos aos problemas apontados anteriormente sobre a robustez da formulação.

O modelo *layerwise* proposto, baseado na aplicação da teoria da placa espessa a cada uma das camadas individuais, permite descrever a deformação de corte que ocorre nas camadas viscoelásticas finas usualmente empregues neste tipo de tratamentos (esta verificação será apresentada na parte final deste capítulo). De facto, quando a espessura da camada viscoelástica é muito reduzida, a deformação de corte é ainda muito significativa e requer a aplicação da teoria de *Reissner-Mindlin* ou teorias de ordem superior. A formulação do elemento finito proposto possibilita a aplicação de teorias de ordem superior que permitem descrever o campo de deslocamentos ao longo da espessura por um polinómio cúbico, obtendo-se assim uma descrição mais correcta da deformação de corte que ocorre numa camada viscoelástica mais espessa. Uma alternativa mais expedita de melhorar a descrição da deformação de corte transversal consiste na discretização da camada viscoelástica em mais do que uma camada, de forma a obter uma aproximação ao polinómio de 3ª ordem das teorias de ordem superior.

Quando a espessura da camada viscoelástica for muito elevada, pode recorrer-se aos modelos combinados que, por um lado, permitem uma melhor descrição da deformação do núcleo pela aplicação da teoria de deformação tridimensional e, por outro, apresentam uma menor susceptibilidade aos problemas de bloqueio originadas pelas elevadas razões de aspecto. Em alternativa, podem também aplicar-se modelos *layerwise* que contemplem deformação transversal ao longo da espessura, o que constitui uma solução mais interessante na modelação de placas *sandwich* espessas multi-camada.

6.2.4 Aplicabilidade e acessibilidade dos modelos

O conceito subjacente à aplicabilidade e acessibilidade do modelo pretende traduzir a facilidade inerente à aplicação do modelo em análise, nomeadamente na modelação espacial, na manipulação do modelo de elementos finitos, na introdução e modificação das propriedades dos materiais e parâmetros dimensionais e na aplicação das condições de fronteira e dos carregamentos nodais. É neste contexto que reside a principal vantagem dos modelos *layerwise* em geral, e do modelo proposto em particular, baseados na teoria da camada discreta. De facto, o tempo dispendido e o custo computacional, associados à geração da malha de elementos finitos e à atribuição de propriedades materiais durante a modelação da estrutura com tratamento viscoelástico, constituem as principais restrições à aplicação dos modelos combinados.

A construção da malha de elementos finitos recorrendo aos modelos combinados exige, não só a discretização espacial da estrutura base, mas também a construção de uma estrutura auxiliar que constitui a base geométrica das restantes camadas do tratamento. Ou seja, é necessário todo um trabalho intenso e laborioso de modelação geométrica e de discretização de elementos finitos do conjunto formado pela estrutura e pelo tratamento associado. Para além do trabalho associado à construção do modelo espacial baseado nestes modelos, é necessário definir previamente as espessuras das camadas da estrutura, sendo imperativo reformular toda a malha de elementos finitos para alterar a espessura de qualquer uma das camadas do tratamento, em particular a camada viscoelástica. Além disso, o custo de modelação exigido na aplicação dos modelos combinados torna-os inadequados à modelação de tratamentos multi-camada.

O modelo *layerwise* proposto permite ultrapassar os problemas apontados, já que a descrição das camadas de tratamento é efectuada ao nível do elemento, evitando a

discretização espacial das várias camadas que o constituem. Assim, a placa base é simplesmente discretizada com elementos planos de quatro nós, utilizando ferramentas de geração de malha convencionais, sendo as espessuras e as propriedades dos materiais das várias camadas introduzidas directamente no cálculo das matrizes de rigidez e de massa de cada elemento. Para além de permitir uma fácil alteração dos parâmetros dimensionais e das propriedades materiais dos tratamentos, sem necessidade de alterar a discretização de elementos finitos inicial, permite também manipular essas características de forma independente em cada elemento, simplificando, assim, a análise de tratamentos parciais ou a análise de tratamentos com espessura e/ou constituição diferente em cada um dos elementos. A introdução das condições de fronteira e dos carregamentos nodais é também, neste caso, mais simples e expedita que no caso dos modelos combinados. Ainda com base na descrição das camadas de tratamento efectuada ao nível do elemento, o modelo *layerwise* proposto revela-se particularmente adequado para a análise de tratamentos multi-camada e multi-material.

Resta ainda referir que, no conjunto dos modelos em análise, o modelo 1, embora seja o modelo que exija maior esforço na modelação, possui uma vantagem relativamente aos restantes, incluindo o modelo *layerwise*. De facto, este modelo permite simular problemas de descolamento dos tratamentos através da manipulação dos elementos de ligação rígida intrínsecos ao mesmo, ou seja, é possível simular descontinuidades locais na ligação entre as camadas adjacentes actuando sobre alguns graus de liberdade dos elementos de ligação.

Face à similaridade entre o modelo 1 e o modelo 2, e tendo em consideração o custo de geração da malha de elementos finitos, é recomendável optar pelo segundo modelo, exceptuando os problemas que envolvam geometrias não planares e/ou tratamentos multi-camada. De facto, a aplicação dos termos de *offset* no primeiro caso introduz um erro de representação geométrica que é directamente proporcional à espessura das placas externas, sendo mesmo impraticável a aplicação do modelo 2 a estruturas com mais de três camadas.

6.3 Análise de convergência dos modelos de elementos finitos

Todos os modelos de elementos finitos em análise no presente estudo foram implementados em ambiente **Matlab**[®], utilizando o **SDT**[®] para suporte na geração, manipulação e representação do modelo de elementos finitos e no processo de resolução do sistema de equações associado ao problema. Os modelos combinados descritos no Capítulo 3, sendo obtidos por associação de elementos finitos convencionais de placa e sólidos hexaédricos, foram igualmente utilizados num software comercial de análise de elementos finitos, o **MSC.Nastran**[™], servindo de base de comparação e validação dos modelos implementados em **Matlab**[®]. Por seu lado, o modelo proposto, designado neste estudo por modelo 4, foi implementado e utilizado em ambiente **Matlab**[®].

Embora todos os modelos obtidos por associação de elementos finitos convencionais possam ser implementados em **Matlab**[®], é necessário tomar algumas precauções na sua aplicação dado que, e como referido anteriormente, os elementos sólidos disponíveis na ferramenta **SDT**[®] não possuem uma formulação com protecção ao bloqueio de corte. Assim, é necessário avaliar previamente a geometria dos elementos sólidos, nomeadamente a sua razão de aspecto, de forma a evitar resultados erróneos derivados de problemas numéricos, nomeadamente o bloqueio de corte transversal. Este efeito é mais problemático no modelo 3 dado que, e como referido na secção anterior, neste modelo os elementos sólidos são utilizados na modelação das placas externas que possuem uma rigidez elevada, tornando mais evidente os efeitos do bloqueio de corte. Por outro lado, o bloqueio de corte que ocorre nos elementos sólidos que representam a camada viscoelástica nos modelos 1 e 2 não representa uma restrição da aplicabilidade destes modelos em **Matlab**[®], dada a reduzida rigidez associada à camada viscoelástica e, consequentemente, a reduzida interferência do seu efeito na rigidez global da estrutura [110].

A Tabela 6.2 apresenta a distribuição da aplicação dos modelos de elementos finitos, indicando o software em que foram utilizados. O símbolo '✓' utilizado na tabela indica a possibilidade de utilização do modelo em questão no software referido enquanto que o símbolo '☑' representa os pares modelo/software efectivamente utilizados neste estudo.

Tabela 6.2: Distribuição da análise de elementos finitos

	Matlab [®] /SDT [®]	MSC.Nastran [™]
Modelo 1	✓	✓
Modelo 2	✓	✓
Modelo 3	✓	✓
Modelo 4	✓	

Como indicado na tabela, o modelo 1 foi apenas utilizado em MSC.Nastran[™] devido ao elevado custo de modelação associado, tendo-se concluído que, embora a construção do modelo seja ligeiramente diferente do modelo 2, ambos conduzem ao mesmo sistema de equações final associado ao problema de elementos finitos. Consequentemente, os resultados deste modelo aparecem sempre sobrepostos aos resultados do modelo 2, razão pela qual são omitidos na análise comparativa dos modelos.

6.3.1 Placa plana com tratamento integrado - Análise de convergência e comparação dos modelos

Nesta análise utilizou-se um modelo de uma placa *sandwich* rectangular constituída por duas placas de alumínio intercaladas por uma camada viscoelástica muito fina (0.1mm) de forma a promover uma razão de aspecto muito elevada nos elementos finitos que modelam a camada viscoelástica. A Tabela 6.3 resume as características e as propriedades dos materiais utilizados.

O objectivo deste estudo consiste na avaliação do desempenho individual dos modelos considerados, nomeadamente o seu grau de convergência assintótica para a solução, e na comparação da representatividade dos modelos verificando se convergem para a mesma solução. Para este efeito foram considerados vários graus de refinamento da malha de elementos finitos, conforme se ilustra na Tabela 6.4, utilizando os modelos 2, 3 e 4 em ambiente Matlab[®] e os modelos 1, 2 e 3 no software de elementos finitos MSC.Nastran[™].

De referir que o modelo 3 implementado em Matlab[®] apenas é utilizado neste estudo com o propósito de verificar e evidenciar os problemas numéricos de bloqueio de rigidez

Tabela 6.3: Características do modelo da placa com tratamento integrado

Dimensões:	
Comprimento $[a]$	300 mm
Largura $[b]$	200 mm
Espessura da placa inferior $[h_1]$	1.0 mm
Espessura do núcleo viscoelástico $[h_2]$	0.1 mm
Espessura da placa superior $[h_3]$	1.0 mm
Propriedades materiais:	
- Alumínio: Placas externas (1 e 3)	
Módulo de <i>Young</i> $[E_{1/3}]$	72E9 Pa
Coeficiente de <i>Poisson</i> $[\nu_{1/3}]$	0.3
Massa volúmica $[\rho_{1/3}]$	2700 Kg/m ³
- Material viscoelástico: Camada viscoelástica (2)	
Módulo de corte complexo $[\bar{G}_2]$	3M ISD112 @ 20°C (Apêndice F)
Coeficiente de <i>Poisson</i> $[\nu_2]$	0.49
Massa volúmica $[\rho_2]$	1140 Kg/m ³
Condições de fronteira:	bordo livre

que se lhe encontram associados.

O estudo numérico de comparação é baseado na análise da função aceleração directa calculada num dos cantos da placa base segundo a direcção normal à sua superfície. Para futura referência, designaremos este grau de liberdade por $1w$.

A função de resposta em frequência de tipo aceleração, $A(\omega)_{1w/1w}$, é obtida através de uma análise directa em frequência, utilizando para o efeito o algoritmo apresentado no Capítulo 3. Este método permite a inclusão das propriedades do material viscoelástico dependentes da frequência, nomeadamente o seu módulo de ganho e o seu factor de perda que são definidos pelo respectivo nomograma [226], através do método do módulo complexo. Esta metodologia foi adoptada para todos os modelos e em ambos os ambientes de análise (Matlab[®] e MSC.Nastran[™]).

A Figura 6.4 representa a convergência obtida com os pares modelo/software em análise

Tabela 6.4: Malhas de elementos finitos

malha	3x2	6x4	9x6	12x8	15x10	18x12	21x14	24x16	27x18	30x20
Matlab®	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
MSC.Nastran™	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓

utilizando como indicador de convergência a correlação entre a função de resposta em frequência $A(\omega)_{1w/1w}$, calculada para cada uma das malhas e cada um dos modelos, e uma função de referência. A medida de correlação entre as funções de resposta em frequência é obtida com base no indicador *Frequency Response Assurance Criterium* (FRAC) [227] utilizando como função de resposta de referência a gerada pelo modelo 2 para a malha mais refinada (30x20).

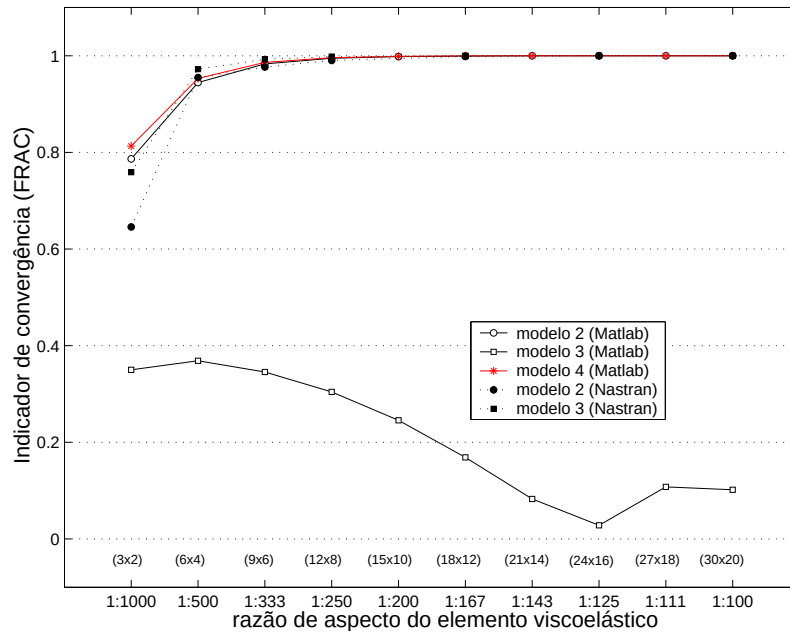


Figura 6.4: Convergência dos modelos para a placa com tratamento integrado

De acordo com o gráfico representado na Figura 6.4, a convergência dos modelos, exceptuando o modelo 3 em Matlab®, é, em geral, rápida, convergindo para a mesma solução, conforme se ilustra na Figura 6.5. O fraco desempenho do modelo 3, quando

aplicado no ambiente **Matlab**[®], resulta da formulação sem protecção de bloqueio dos elementos sólidos disponíveis no **SDT**[®]. Por outro lado, verifica-se que os modelos 2 e 4 apresentam globalmente um bom desempenho, destacando-se do conjunto o modelo 4 que representa o elemento finito desenvolvido neste trabalho. De referir ainda que, embora não representado, o modelo 1 apresenta resultados coincidentes com o modelo 2.

Analisando os resultados obtidos no programa de elementos finitos **MSC.Nastran**[™], verifica-se que, tanto o elemento de placa como o elemento hexaédrico possuem uma formulação robusta, possibilitando a aplicação de qualquer um dos modelos combinados baseados na associação dos elementos finitos convencionais referidos (modelos 1, 2 e 3).

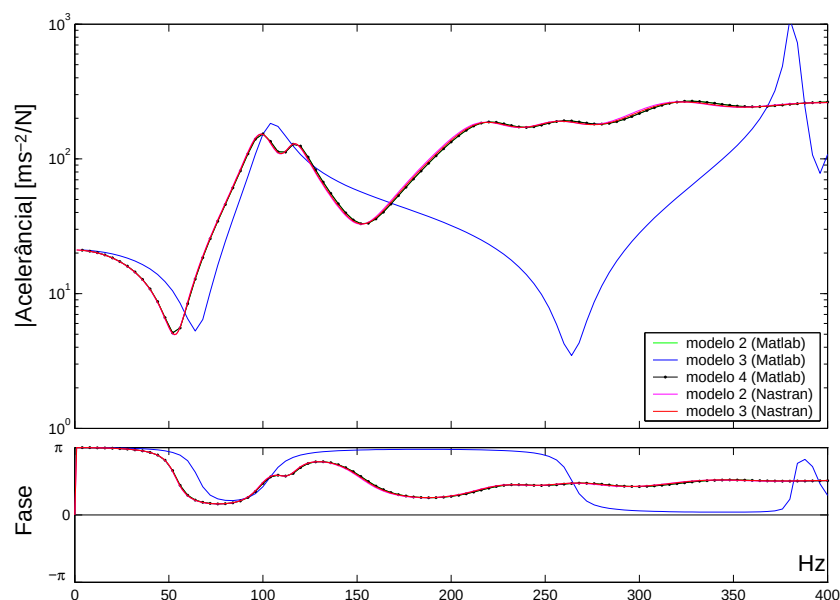


Figura 6.5: Tratamento integrado - Função de resposta em frequência gerada para cada um dos modelos (malha 30x20)

A Figura 6.6 representa a sobreposição das curvas das funções de resposta em frequência calculadas com o modelo 4, aplicado em **Matlab**[®], para os diferentes níveis de refinamento da malha de elementos finitos, sendo assim possível mostrar a convergência dos resultados obtidos de uma forma mais clara e perceptível que a representada na Figura 6.4 através do indicador de correlação adoptado.

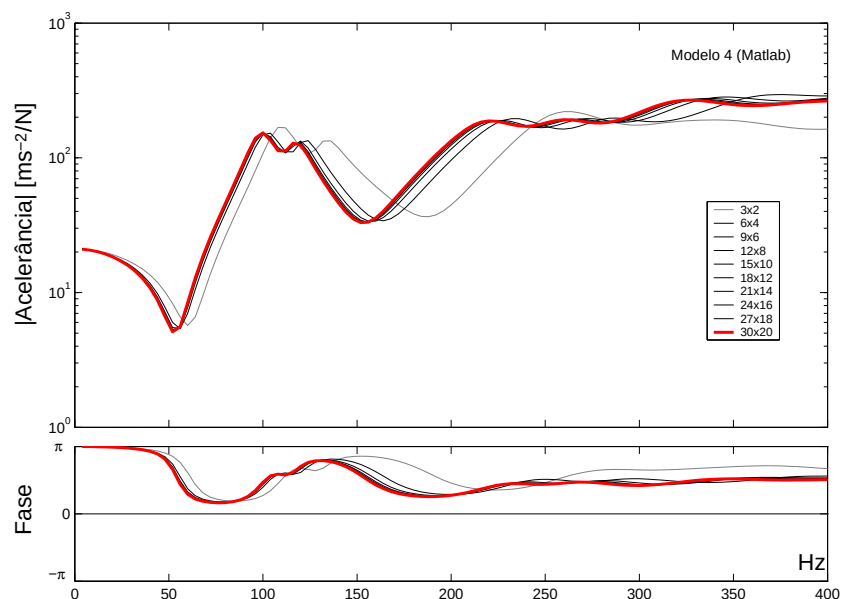


Figura 6.6: Tratamento integrado - Funções de resposta em frequência geradas para o modelo 4 em Matlab®

6.3.2 Placa plana com tratamento superficial - Análise de convergência e comparação dos modelos

No seguimento do estudo anterior, desenvolveu-se uma análise semelhante sobre uma placa com tratamento superficial com restrição, na qual a placa base possui uma espessura de 2mm enquanto que a camada de restrição tem apenas 0.2mm de espessura. Para além das diferentes espessuras da placa base e da camada de restrição, todos os restantes parâmetros são mantidos nesta análise, conforme indicado na Tabela 6.5.

O objectivo desta análise consiste na comparação do desempenho dos modelos numéricos numa situação agravada do problema de bloqueio de corte transversal. De facto, numa configuração de tratamento superficial, a espessura da camada de restrição é normalmente muito reduzida, originando problemas numéricos de bloqueio da matriz de rigidez, não só nos elementos finitos que representam a camada viscoelástica, mas também nos elementos finitos da camada de restrição. Assim, o efeito do bloqueio de rigidez que ocorre na camada de restrição repercute-se de forma gravosa na matriz de rigidez global da estrutura, não existindo neste caso uma atenuação desse efeito devido à reduzida rigidez do material, como acontece na camada viscoelástica.

Tabela 6.5: Características do modelo da placa com tratamento superficial com restrição

Dimensões:	
Comprimento $[a]$	300 mm
Largura $[b]$	200 mm
Espessura da placa inferior $[h_1]$	2.0 mm
Espessura do núcleo viscoelástico $[h_2]$	0.1 mm
Espessura da placa superior $[h_3]$	0.2 mm
Propriedades materiais:	
- Alumínio: Placas externas (1 e 3)	
Módulo de <i>Young</i> $[E_{1/3}]$	72E9 Pa
Coeficiente de <i>Poisson</i> $[\nu_{1/3}]$	0.3
Massa volúmica $[\rho_{1/3}]$	2700 Kg/m ³
- Material viscoelástico: Camada viscoelástica (2)	
Módulo de corte complexo $[\bar{G}_2]$	3M ISD112 @ 20°C (Apêndice F)
Coeficiente de <i>Poisson</i> $[\nu_2]$	0.49
Massa volúmica $[\rho_2]$	1140 Kg/m ³
Condições de fronteira:	bordo livre

Usando a metodologia aplicada na placa com tratamento integrado, assim como os mesmos pares modelo/programa de análise, obteve-se uma relação entre o grau de proximidade da solução obtida para cada um dos modelos e o refinamento da malha de elementos finitos utilizada. Assim, e utilizando o indicador de correlação **FRAC**, considerando como referência a função de resposta em frequência calculada com o modelo 2 para a malha de elementos finitos mais refinada, obtiveram-se os resultados relativos à convergência de cada modelo indicados no gráfico da Figura 6.7. Como se pode verificar pelos resultados representados, o grau de refinamento da malha apresenta nesta configuração um efeito mais significativo na convergência da solução. Para além disso, o bloqueio de corte que ocorre na camada de restrição é também nesta configuração mais importante, sendo possível, neste caso, verificar que os elementos finitos de placa implementados na ferramenta **SDT**[®] possuem um desempenho superior ao dos disponíveis no programa **MSC.Nastran**[™]. Embora nesta configuração apenas se consiga obter uma

solução próxima da solução assintótica para uma malha mais refinada (24x16), todos os modelos aplicados, excepto o modelo 3 em Matlab®, convergem para a mesma solução, conforme representa o gráfico de convergência da Figura 6.7 e as funções de resposta em frequência da Figura 6.8.

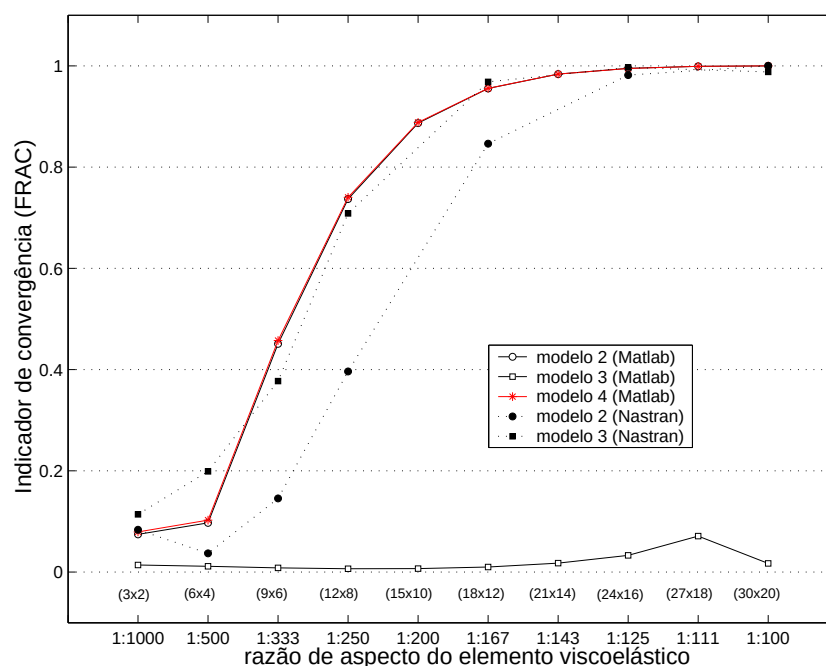


Figura 6.7: Convergência dos modelos para a placa com tratamento superficial com restrição

Tal como na configuração anterior, os resultados obtidos recorrendo ao modelo 3 aplicado em Matlab® são única e exclusivamente representados para evidenciar o efeito do bloqueio de corte que ocorre nas camadas constituintes, em especial na camada viscoelástica e na camada de restrição.

Nesta configuração, é ainda possível verificar que, embora muito parecidas, as funções de resposta em frequência geradas nos dois ambientes de cálculo não são exactamente iguais, resultado da diferente formulação intrínseca aos elementos finitos implementados em cada um deles. Não obstante, os resultados obtidos para os modelos em análise, em particular o modelo proposto neste trabalho (modelo 4), conduzem ao mesmo resultado e apresentam uma boa representatividade da elevada deformação de corte que ocorre na camada viscoelástica.

A convergência dos resultados obtidos pode também ser verificada através da

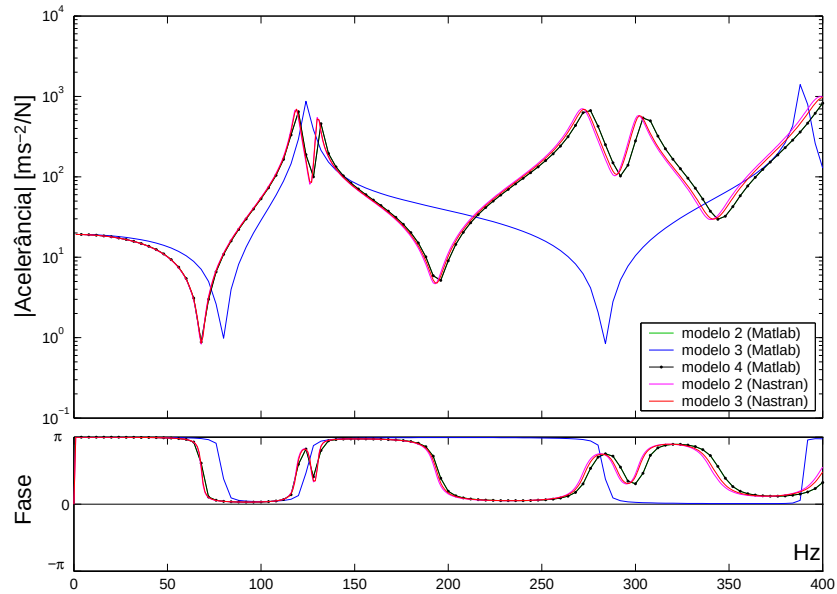


Figura 6.8: Tratamento superficial com restrição - Função de resposta em frequência gerada para cada um dos modelos (malha 30x20)

sobreposição das funções de resposta em frequência calculadas para cada uma das malhas de elementos finitos. O gráfico da Figura 6.9 apresenta as funções de resposta em frequência obtidas para o modelo 4 em **Matlab**[®] para cada nível de resolução da malha de elementos finitos considerado.

Como se pode verificar nos gráficos das figuras anteriores, figuras 6.7 a 6.9, os resultados obtidos, que são fortemente dependentes do grau de refinamento da malha, tendem para uma solução convergente, sendo, no entanto, essa convergência significativamente mais lenta que na configuração de tratamento integrado.

6.4 Comparação do modelo proposto com o modelo 2

Na secção anterior demonstrou-se que a aplicação de qualquer um dos modelos elegíveis para a modelação de tratamentos viscoelásticos, quer numa configuração integrada quer na configuração superficial com restrição, conduz a uma solução convergente idêntica e apresenta uma velocidade de convergência sensivelmente uniforme para todos os modelos.

Dado que a principal dificuldade na modelação dos tratamentos pelo método dos

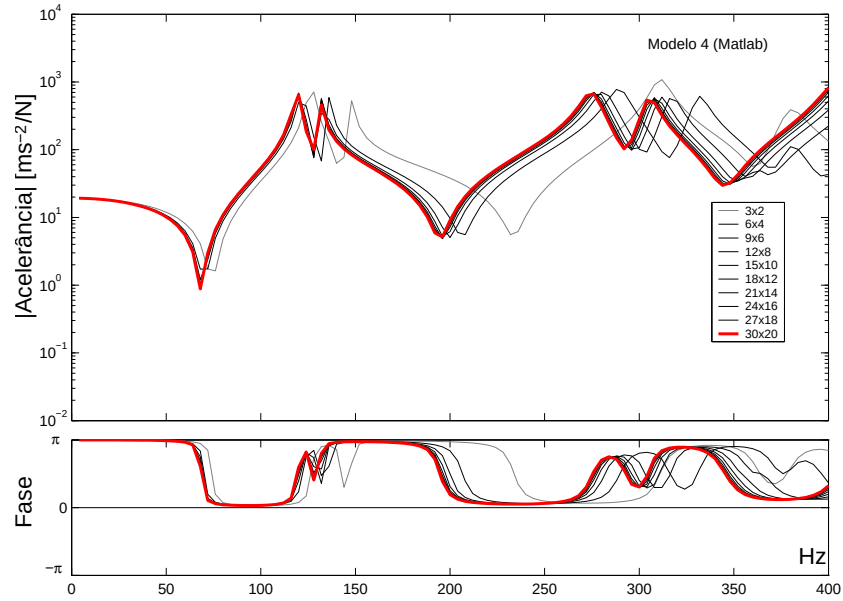


Figura 6.9: Tratamento superficial com restrição - Funções de resposta em frequência geradas para o modelo 4 em Matlab®

elementos finitos reside na capacidade de representação da elevada deformação de corte que se desenvolve na camada viscoelástica, sendo esta a principal razão da utilização de elementos finitos sólidos na sua modelação, será necessário comparar os modelos em situações em que essa deformação seja significativamente diferente da obtida nos estudos de convergência realizados e apresentados nas secções anteriores. Assim, foi realizado um estudo mais abrangente, no qual se variam o padrão de deformação desenvolvido na camada viscoelástica, recorrendo à variação da sua espessura, e o módulo de ganho do material viscoelástico através da alteração das condições de temperatura na análise.

Uma vez que o objectivo deste estudo consiste na verificação da representatividade do campo de deformações desenvolvido na camada viscoelástica do tratamento pelo modelo proposto (modelo 4), tendo por referência a representação tridimensional obtida pelos modelos combinados, utilizou-se como modelo de referência o modelo 2. Esta escolha deve-se a três factores de relevo:

- dentro dos modelos combinados, o modelo 2 é o modelo usualmente seleccionado para modelar tratamentos viscoelásticos superficiais com restrição e tratamentos integrados;

- os resultados numéricos obtidos na comparação dos modelos combinados [110] mostram que todos os modelos deste grupo convergem para a mesma solução;
- a aplicação de elementos finitos de placa nas camadas externas permite uma maior proximidade deste modelo combinado ao modelo 4 e apresenta também um menor custo de modelação relativamente ao modelo 1.

6.4.1 Análise do efeito das propriedades do material viscoelástico

Na primeira parte deste estudo procedeu-se à comparação dos resultados obtidos para os dois modelos envolvidos, modelo 2 e modelo 4, para cinco temperaturas diferentes (10, 15, 20, 25 e 30°C) seleccionadas dentro da gama de temperaturas de aplicação do material 3M ISD112. Na gama de frequências considerada, este conjunto de valores de temperatura permite obter uma variação do módulo de ganho do material viscoelástico entre 0.1 e 5 MPa.

Aplicando o procedimento de análise usado no estudo numérico anterior, foram calculadas as funções de aceleração directas para um nó de um dos cantos da placa rectangular com tratamento, utilizando o indicador de correlação FRAC para determinar a relação entre o grau de convergência do resultado e a definição espacial da malha de elementos finitos.

Placa com tratamento integrado

Através do nomograma do material viscoelástico utilizado neste estudo, 3M ISD112, obteve-se a distribuição do seu módulo complexo na gama de frequências em análise, [0-400]Hz, para as cinco temperaturas consideradas.

Utilizando o modelo da placa rectangular com tratamento integrado, caracterizado pela Tabela 6.3, procedeu-se ao cálculo da função de resposta em frequência directa, neste caso a função aceleração, para o mesmo grau de liberdade utilizado no estudo anterior, $A(\omega)_{1w/1w}$.

As figuras 6.10 a 6.14 representam a sobreposição das funções aceleração, representadas pela sua magnitude e respectiva fase, obtidas com os dois modelos em análise utilizando uma malha de 30x20 elementos finitos. O gráfico à direita das funções de resposta em

frequência representa a curva de convergência para a solução final, que foi determinada recorrendo ao indicador de correlação indicado (FRAC) e considerando como referência o resultado obtido com o modelo 2 para a malha de elementos finitos mais refinada.

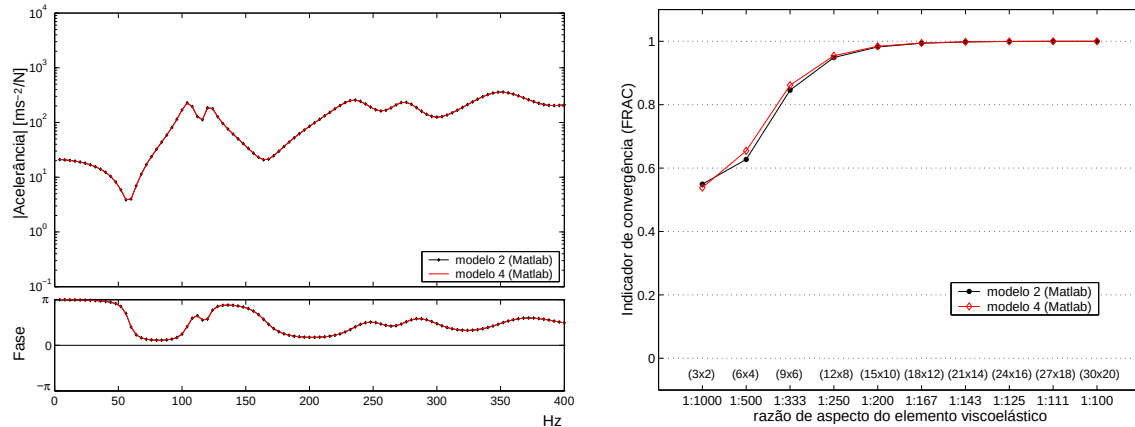


Figura 6.10: Placa com tratamento integrado - 10°C

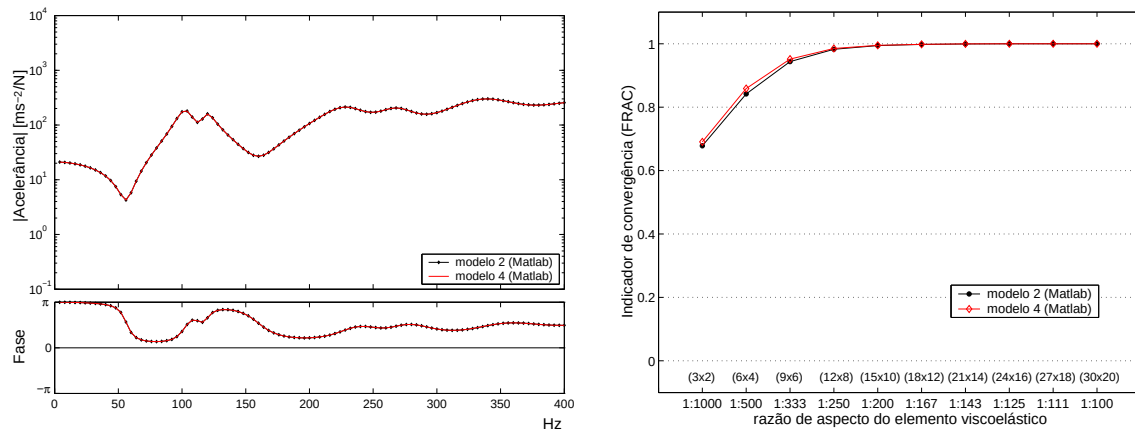


Figura 6.11: Placa com tratamento integrado - 15°C

De acordo com os gráficos das figuras 6.10 a 6.14, os resultados obtidos recorrendo a ambos os modelos são idênticos, verificando-se um desempenho ligeiramente superior do modelo 4 nas malhas de elementos finitos mais grosseiras.

De referir que a malha com 3x2 elementos é inadequada para representar convenientemente as cinco formas modais presentes na gama de frequências considerada, pelo que esta limitação é a principal responsável no baixo nível de correlação para esta malha.

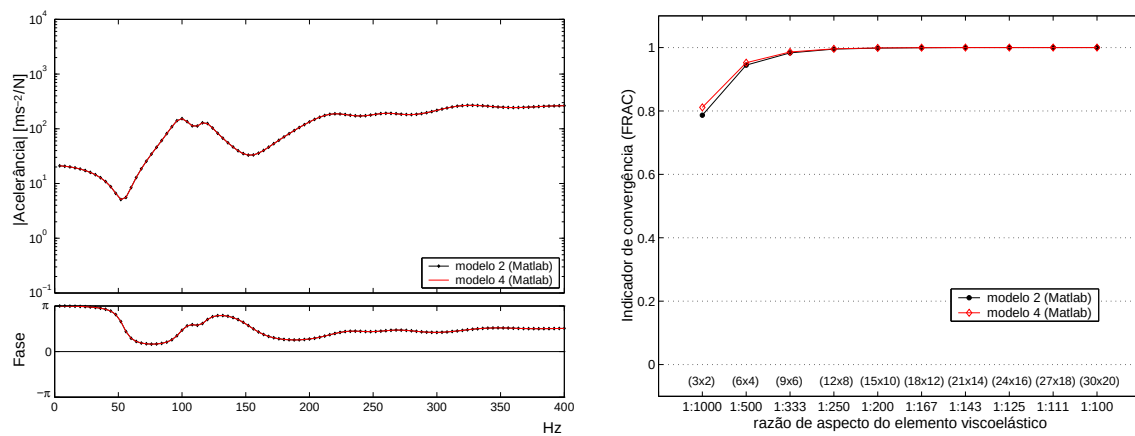


Figura 6.12: Placa com tratamento integrado - 20°C

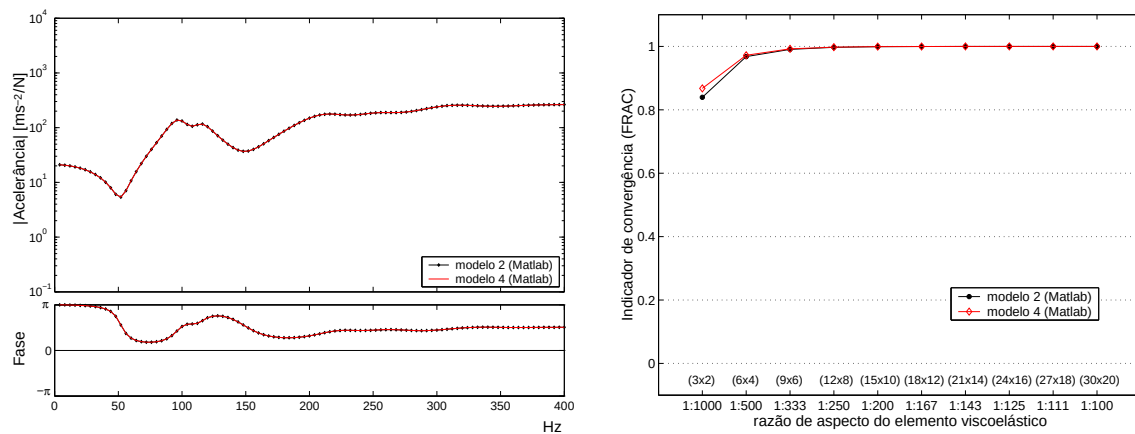


Figura 6.13: Placa com tratamento integrado - 25°C

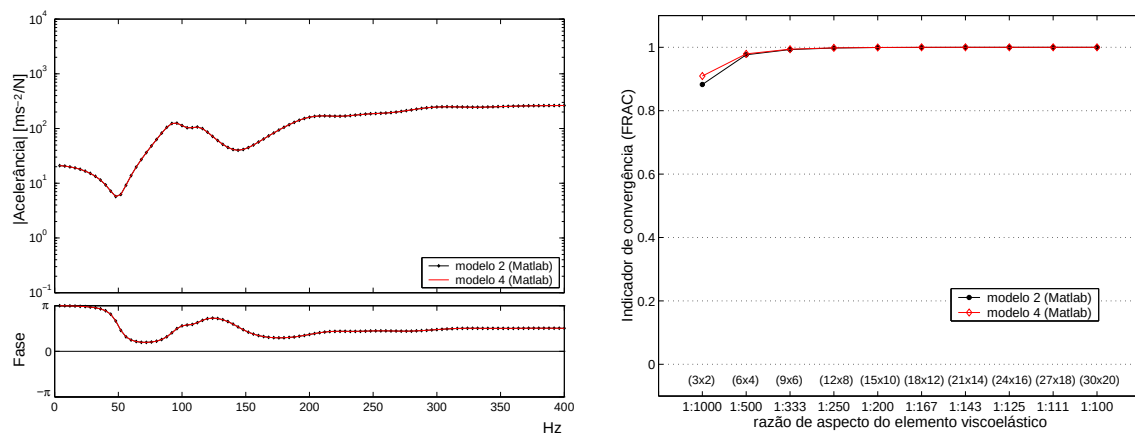


Figura 6.14: Placa com tratamento integrado - 30°C

Placa com tratamento superficial com restrição

Seguindo a metodologia adoptada na placa com tratamento integrado, desenvolveu-se um estudo semelhante na configuração de tratamento superficial com restrição utilizando o modelo descrito na Tabela 6.5. Tal como no estudo anterior, aplicando o método do módulo complexo numa análise directa em frequência, foi calculada a função acelerância para um dos cantos da placa e para as diferentes temperaturas indicadas.

As figuras 6.15 a 6.19 representam as funções acelerância, representadas pela sua magnitude e respectiva fase, obtidas com os modelos 2 e 4 para uma malha de 30x20 elementos finitos. Os gráficos à direita das funções acelerância representam as curvas de convergência respectivas. O indicador de convergência, seguindo o procedimento aplicado nos exemplos anteriores, é determinado através da correlação entre as funções de resposta em frequência calculadas para cada um dos modelos e a função de resposta em frequência obtida com o modelo 2 para a malha de elementos finitos mais refinada.

De acordo com os resultados obtidos, verifica-se que ambos os modelos convergem para a mesma solução, apresentando um desempenho sensivelmente idêntico para cada uma das resoluções de malha e temperaturas consideradas. Tal como no exemplo do tratamento integrado, o desempenho do modelo 4 é ligeiramente melhor que o do modelo 2, embora essa diferença de desempenho seja pouco significativa.

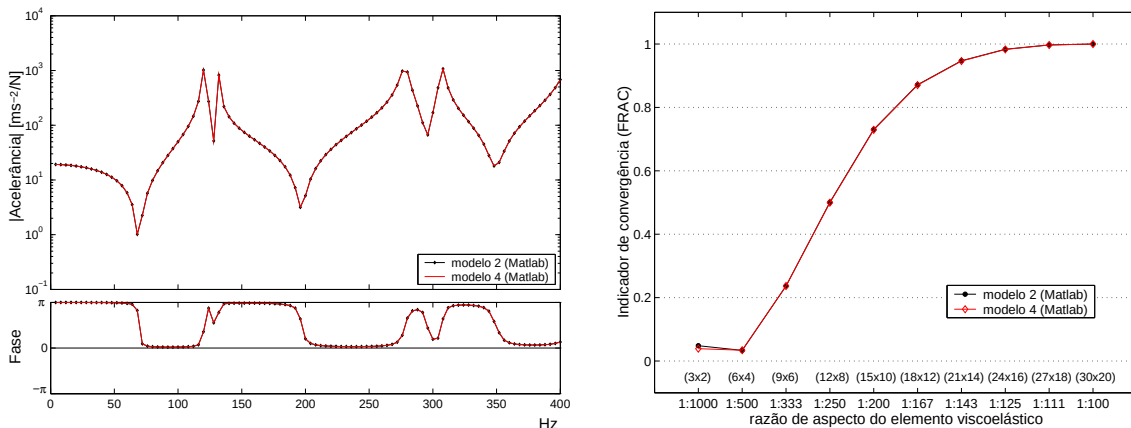


Figura 6.15: Placa com tratamento superficial com restrição - 10°C

Verifica-se, ainda, que a velocidade de convergência para a solução final, aplicando qualquer um dos modelos, é significativamente menor que no exemplo anterior. Este

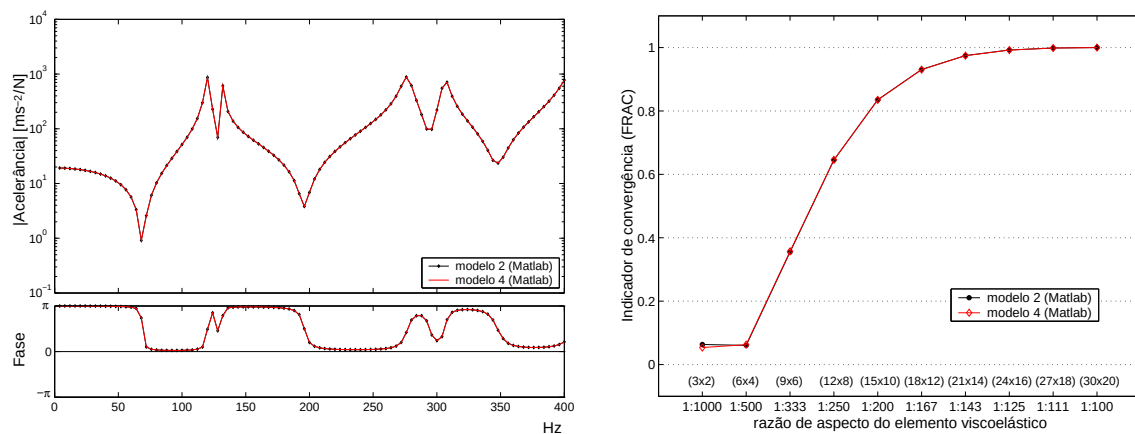


Figura 6.16: Placa com tratamento superficial com restrição - 15°C

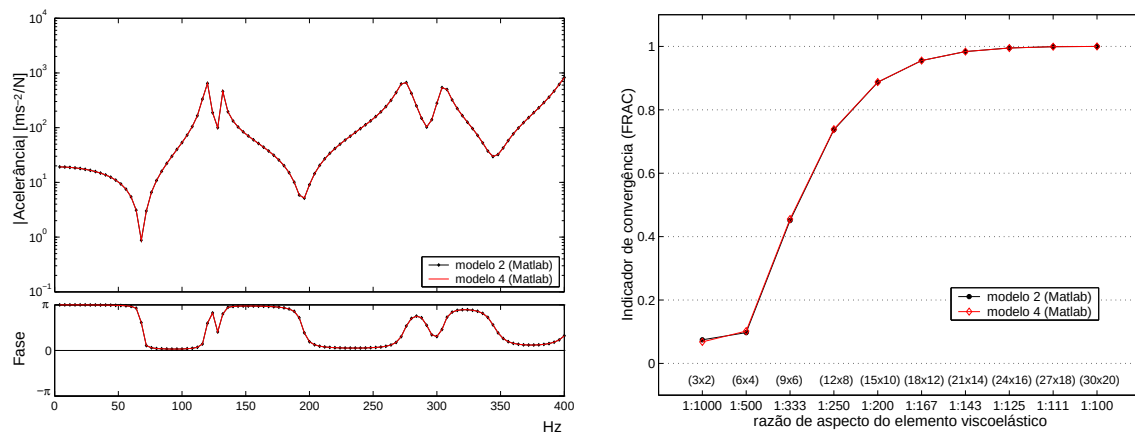


Figura 6.17: Placa com tratamento superficial com restrição - 20°C

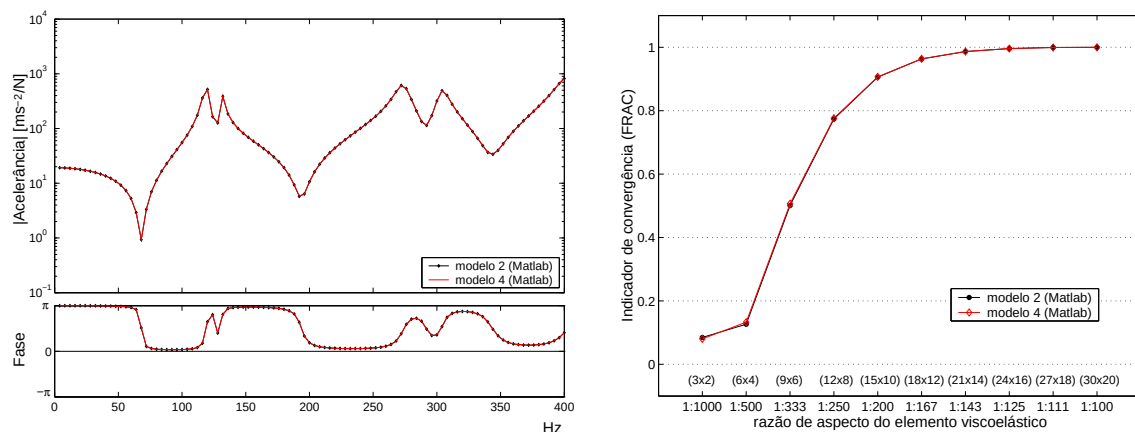


Figura 6.18: Placa com tratamento superficial com restrição - 25°C

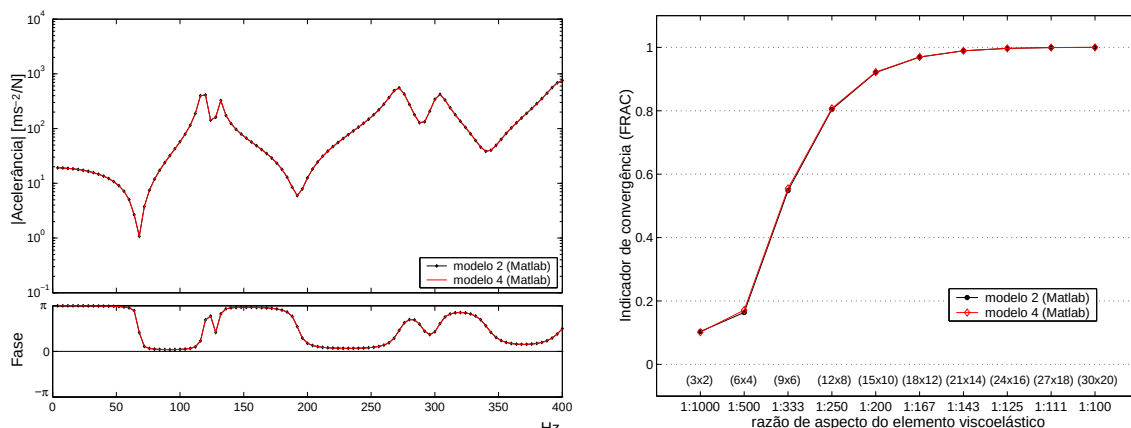


Figura 6.19: Placa com tratamento superficial com restrição - 30°C

facto deve-se, essencialmente, ao elevado nível de amortecimento e ao acoplamento modal presentes nas funções de resposta em frequência da placa com tratamento integrado, os quais atenuam as diferenças entre as curvas obtidas para diferentes níveis de resolução espacial da malha de elementos finitos.

6.4.2 Análise do efeito da espessura da camada viscoelástica

Na secção anterior foi verificada a representatividade do modelo proposto para diferentes comportamentos do material viscoelástico, abrangendo diferentes valores de módulo de ganho do material viscoelástico aplicado no tratamento, através da variação do parâmetro temperatura. No entanto, como a principal vantagem dos modelos combinados reside na sua capacidade em representar convenientemente estados de deformação tridimensionais pela aplicação de elementos sólidos na camada viscoelástica, nesta secção é analisado o efeito da espessura da camada viscoelástica no comportamento do elemento finito proposto.

Foram utilizados os mesmos objectos de estudo das análises anteriores, considerando uma temperatura constante de 20°C. A espessura da camada viscoelástica varia entre 0.2 e 1.0 mm, representando desta forma uma gama de espessuras mais abrangente que a geralmente aplicada neste tipo de tratamentos passivos.

Placa com tratamento integrado

As figuras 6.20 a 6.24 representam as funções aceleração geradas numericamente recorrendo aos dois modelos em análise, modelo 2 e modelo 4, sendo ainda representado no gráfico à direita a curva de convergência para as diferentes espessuras da camada viscoelástica.

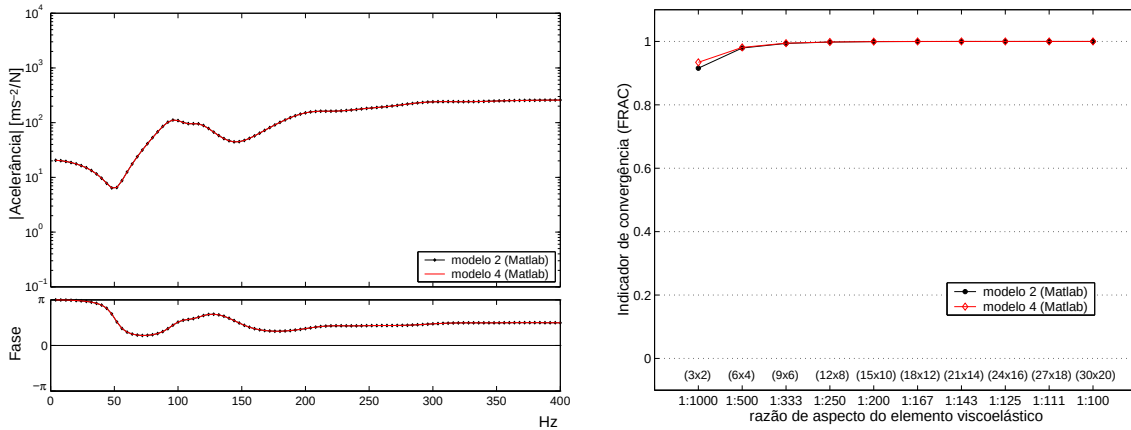


Figura 6.20: Placa com tratamento integrado - $h_2 = 0.2$ mm

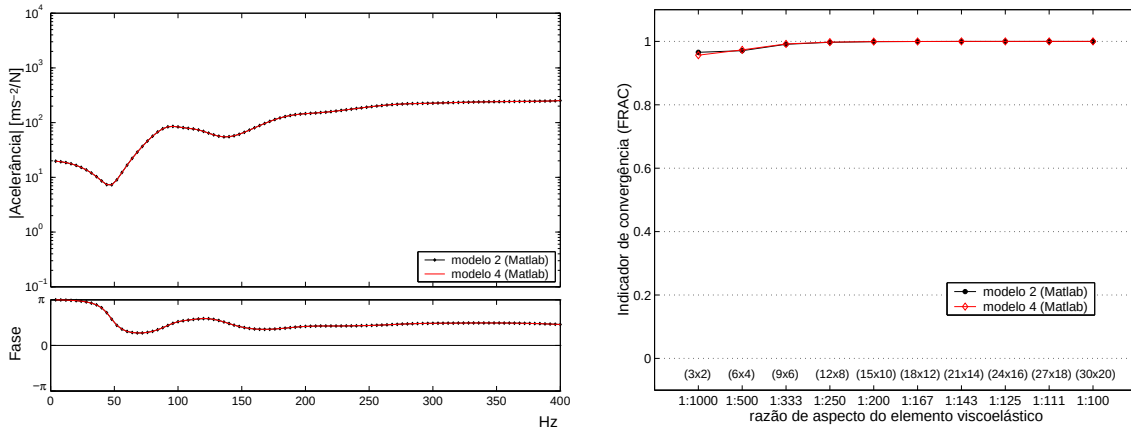


Figura 6.21: Placa com tratamento integrado - $h_2 = 0.4$ mm

Como se pode verificar nos resultados obtidos, independentemente da espessura da camada viscoelástica, ambos os modelos convergem para a mesma solução.

Verifica-se, ainda, existir uma relação directa entre o nível de convergência e a espessura da camada viscoelástica. Contudo, pensa-se que essa relação é devida ao amortecimento mais elevado do tratamento mais espesso e não somente ao efeito da razão de aspecto do

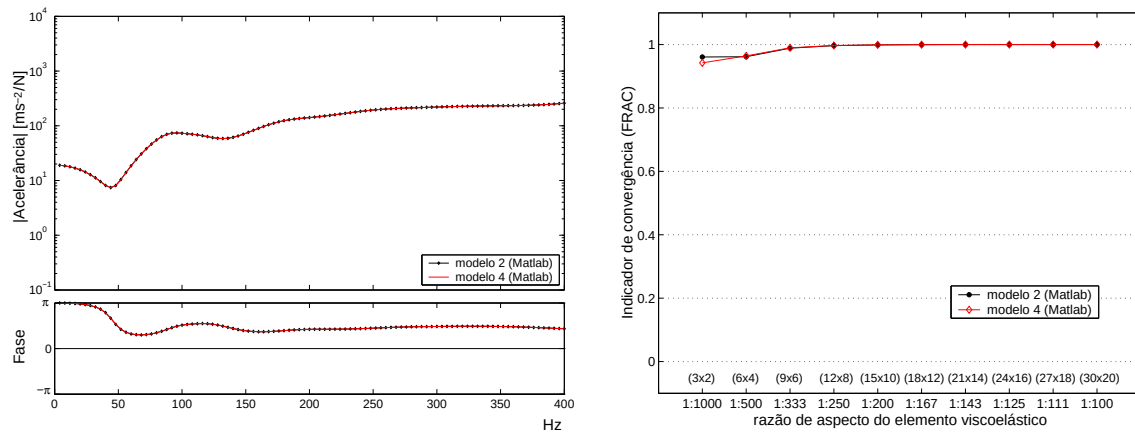


Figura 6.22: Placa com tratamento integrado - $h_2 = 0.6$ mm

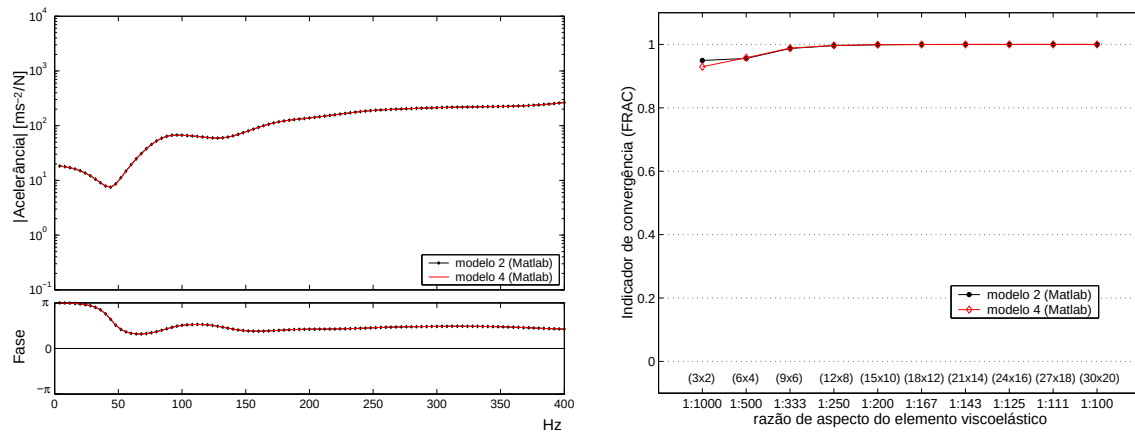


Figura 6.23: Placa com tratamento integrado - $h_2 = 0.8$ mm

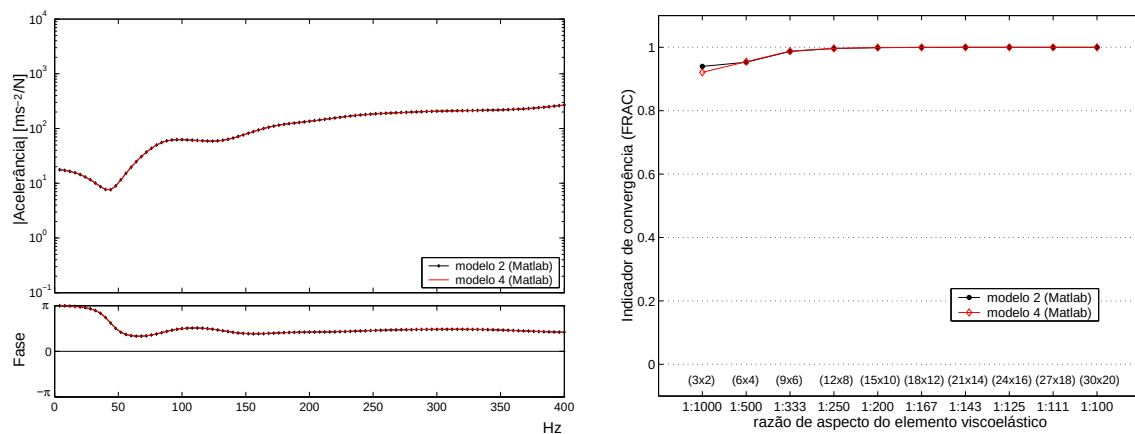


Figura 6.24: Placa com tratamento integrado - $h_2 = 1.0$ mm

elemento finito que representa a camada viscoelástica. De facto, uma vez que o elemento sólido aplicado no modelo 2 não possui qualquer forma de protecção ao bloqueio de corte transversal resultante da elevada razão de aspecto do elemento, sendo esse problema atenuado pela reduzida contribuição energética da camada viscoelástica, o melhoramento do desempenho do modelo para espessuras mais elevadas não pode ser explicado apenas por este fenómeno, uma vez que o modelo 4 possui essa protecção.

Placa com tratamento superficial com restrição

As figuras 6.25 a 6.29 representam as funções aceleração calculadas com o modelo 2 e o modelo 4 para as diferentes espessuras consideradas para a camada viscoelástica. Seguindo a mesma forma de representação aplicada no tratamento integrado, é também representada a curva de convergência associada a cada um dos modelos analisados.

De acordo com os resultados obtidos, o modelo proposto é capaz de representar convenientemente o campo de deformações que se desenvolve no tratamento superficial para a gama de espessuras da camada viscoelástica considerada.

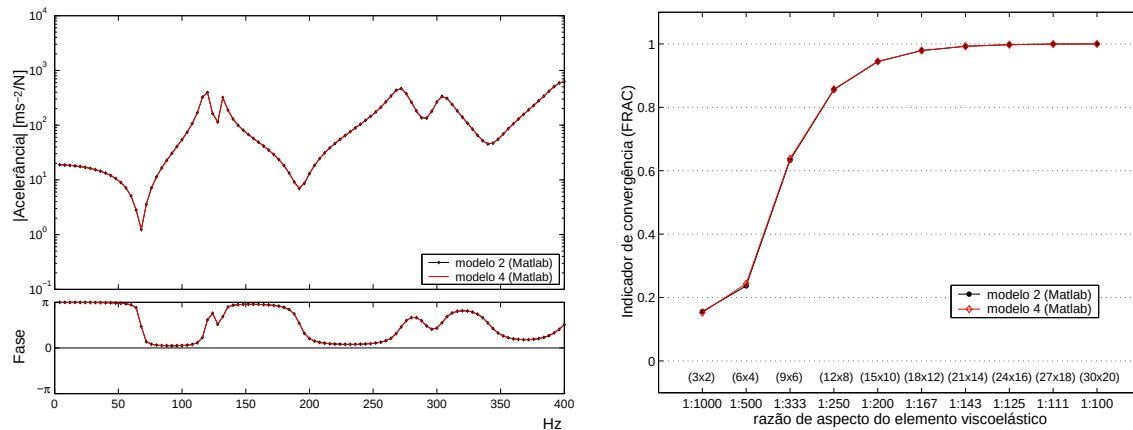


Figura 6.25: Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 0.2$ mm

A relação entre a espessura e a forma de convergência que se verifica para o tratamento superficial é idêntica à do tratamento integrado, sendo a sua justificação a apresentada para este caso.

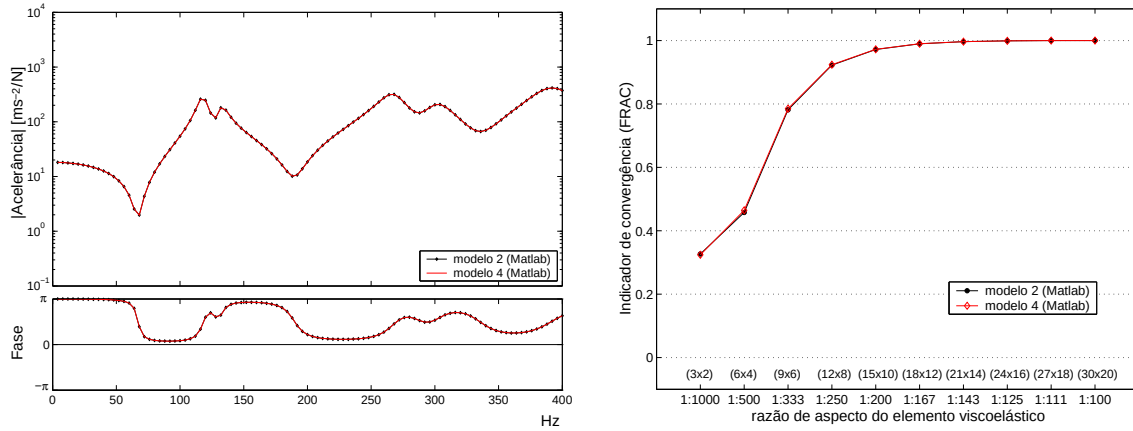


Figura 6.26: Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 0.4$ mm

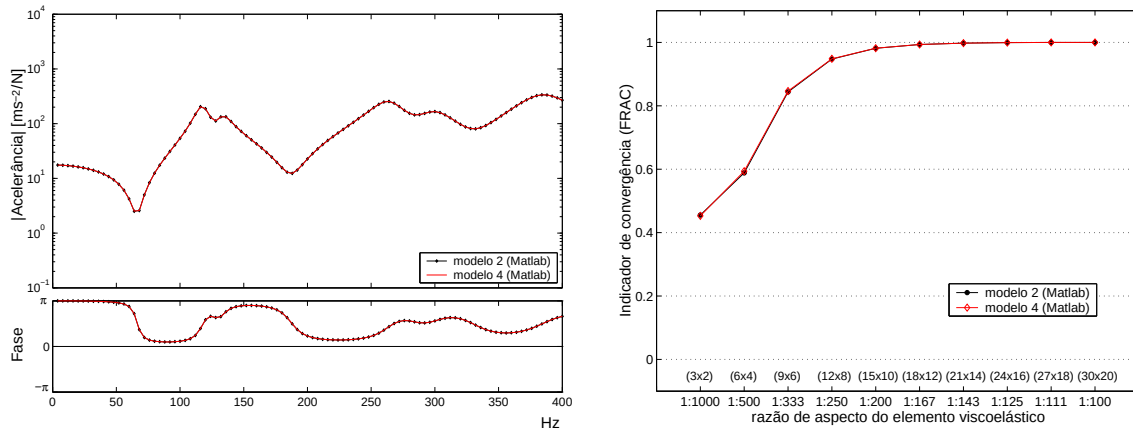


Figura 6.27: Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 0.6$ mm

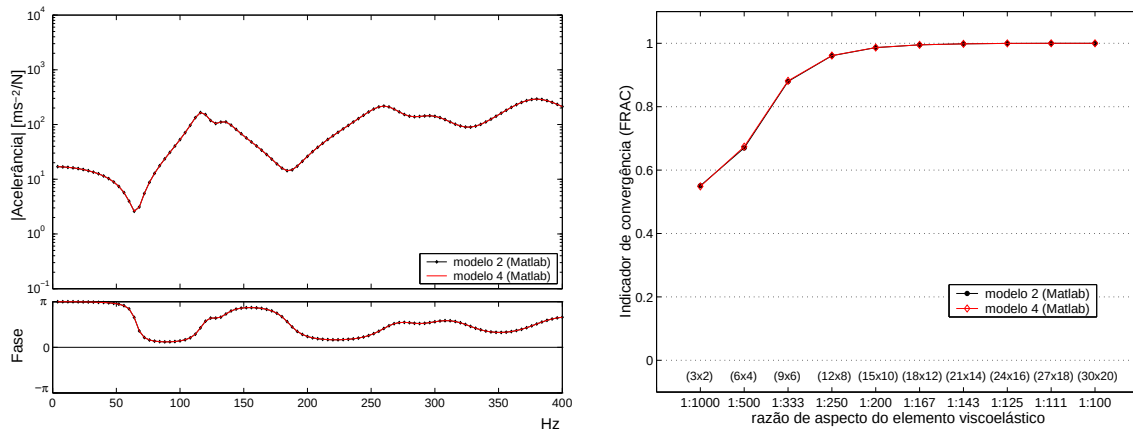


Figura 6.28: Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 0.8$ mm

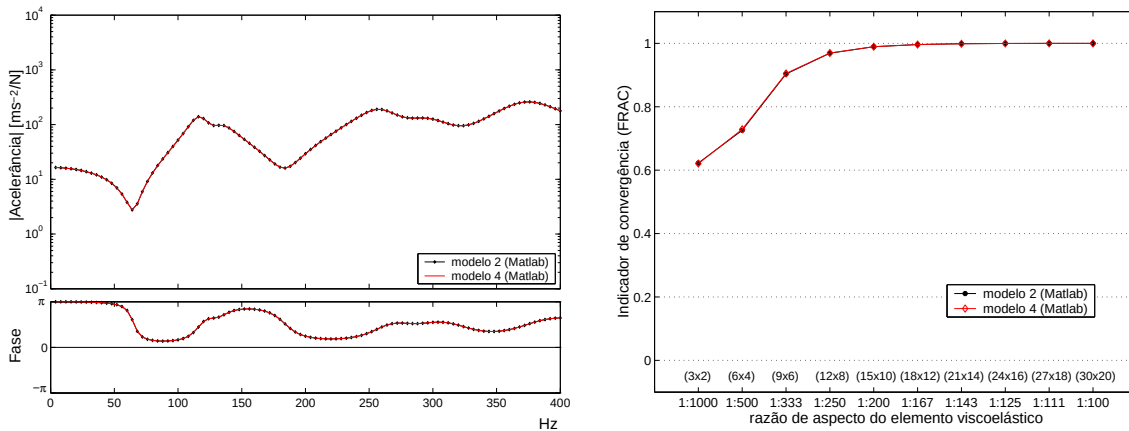


Figura 6.29: Placa com tratamento superficial com restrição - $h_2 = 1.0$ mm

6.5 Conclusões

Neste estudo numérico de comparação dos modelos procurou-se, essencialmente, confrontar o modelo proposto com os modelos combinados usualmente aplicados na modelação de tratamentos viscoelásticos. A análise comparativa foi conduzida de forma a estabelecer algumas ilações sobre a representatividade, o custo computacional, a aplicabilidade e o desempenho numérico de cada um dos modelos.

De forma a verificar a aplicabilidade do modelo proposto, identificado neste texto por modelo 4, à simulação de tratamentos viscoelásticos com restrição e tratamentos integrados, foi desenvolvida uma análise exaustiva, abrangendo várias condições de tratamento (variação de espessura da camada viscoelástica e variação do módulo de ganho do material constituinte), tendo por referência os resultados obtidos pelo modelo 2.

Na globalidade, verificou-se que qualquer um dos modelos analisados é capaz de representar correctamente o campo de deformações de corte que ocorre na camada dissipativa. Esta conclusão foi obtida com base nos resultados numéricos obtidos pela aplicação dos modelos analisados em dois ambientes de cálculo diferentes: em **Matlab**[®], usando a ferramenta **SDT**[®], e em **MSC.Nastran**[™], utilizando os elementos finitos disponíveis neste software comercial.

Dos resultados obtidos desta análise comparativa retirou-se um conjunto de conclusões sobre o desempenho e a aplicabilidade de cada um dos modelos envolvidos, das quais se destacam as seguintes:

- os modelos considerados apresentam um desempenho semelhante, representando convenientemente a elevada deformação de corte que ocorre na camada viscoelástica;
- a representatividade estende-se aos tratamentos superficiais com restrição e aos tratamentos de camada integrada;
- a dimensão do problema obtido pela aplicação de cada um dos modelos é idêntica, mas admite-se que o custo computacional associado ao processo de factorização e resolução do sistema de equações dos modelos combinados seja superior, devido à maior dispersão matricial e consequente largura de banda originada pela utilização de elementos finitos sólidos;
- possuindo uma formulação muito semelhante, os modelos 1 e 2 apresentam vantagens e limitações relativas que tornam o primeiro adequado à modelação de tratamentos multi-camada e tratamentos em superfícies não planares, enquanto que o segundo apresenta um custo de modelação significativamente inferior;
- o efeito do bloqueio de corte, não sendo restritivo nos elementos finitos que representam a camada viscoelástica, em resultado da sua reduzida contribuição para a energia de deformação, é, contudo, muito importante nas camadas exteriores, razão pela qual o modelo 3 sem mecanismos de protecção ao bloqueio de corte apresenta um fraco desempenho;
- o custo associado à discretização espacial da estrutura tratada através da geração da malha de elementos finitos é significativamente inferior para o modelo 4, residindo neste aspecto a principal vantagem na sua aplicação;
- para as condições de tratamento consideradas no estudo, o modelo proposto reproduz fielmente o desempenho dos modelos combinados, apresentando uma boa robustez numérica, principalmente no que respeita à protecção do bloqueio de corte transversal para elevadas razões de aspecto do elemento finito.

Relativamente à comparação do modelo 4 com o modelo 2 para um conjunto alargado de condições de tratamento, verificou-se que o desempenho dos dois modelos é idêntico, independentemente da espessura da camada viscoelástica do tratamento, do módulo de ganho do material viscoelástico e da configuração de tratamento. No entanto, esta

observação poderá ser invalidada por condições mais extremas, nomeadamente para camadas viscoelásticas mais espessas e constituídas por materiais com um módulo de ganho muito inferior ao considerado nesta análise. Estas condições invalidariam a hipótese de não-existência de deformação transversal da camada, a qual só pode ser convenientemente representada por um campo de deformações tridimensional. Todavia, essas condições não reflectem as propriedades materiais, em especial a quasi-incompressibilidade dos materiais viscoelásticos, e os parâmetros geométricos usualmente aplicados neste tipo de tratamentos passivos.

No final deste estudo e com base nos resultados obtidos, pode concluir-se que o elemento finito proposto apresenta um desempenho semelhante aos modelos combinados para as condições de tratamento usuais. Este elemento finito apresenta um conjunto importante de vantagens, nomeadamente:

1. simplifica a modelação espacial do tratamento, em particular em superfícies complexas tridimensionais;
2. evita a alteração da malha de elementos finitos para introduzir variações ao tratamento (espessura, localização e número de camadas);
3. é facilmente aplicado a tratamentos multi-camada, sendo relativamente fácil e expedito modificar o número de camadas, sua constituição e parâmetros dimensionais;
4. pode utilizar a malha de elementos finitos original gerada na superfície da estrutura a tratar;
5. simplifica a definição de tratamentos parciais por simples modificação do número de camadas e material num conjunto de elemento finitos da malha.

Estas vantagens justificam claramente a sua aplicação em detrimento dos modelos combinados, principalmente para tratamentos multi-camada e tratamentos parciais.

Este estudo deve ser, porém, complementado com uma análise experimental de validação, a qual é desenvolvida nos capítulos seguintes.

Capítulo 7

Caracterização experimental de materiais viscoelásticos

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento, implementação experimental e validação de uma metodologia de caracterização do módulo complexo de materiais viscoelásticos. Tendo por requisito fundamental o desenvolvimento de uma montagem experimental representativa de um modelo teórico discreto com um ou dois graus de liberdade, são apresentadas algumas etapas do estudo experimental e numérico que levou à definição e implementação prática de um sistema eficiente de caracterização de materiais viscoelásticos. São analisadas as dificuldades associadas à restrição dos graus de liberdade espúrios, as soluções possíveis e suas limitações. É implementada a solução proposta, com a qual é desenvolvido um estudo experimental no sentido de avaliar a sua representatividade e a validade dos resultados obtidos. É analisado o efeito dos parâmetros, condições e variáveis da montagem experimental e da metodologia de caracterização sobre a eficiência da solução proposta. Os resultados obtidos são confrontados com o nomograma de frequência reduzida publicado pelo fabricante do material testado, permitindo retirar algumas conclusões sobre a metodologia e a montagem experimental propostas, e analisar as suas limitações.

7.1 Introdução

Para desenvolver e otimizar os tratamentos passivos com materiais viscoelásticos é imperativo dispor de uma correcta caracterização dos materiais viscoelásticos a considerar. De entre as propriedades dos materiais, a distribuição do módulo de corte complexo ao longo da frequência e da temperatura assume uma posição preponderante em virtude da sua importância no comportamento do tratamento e da dificuldade inerente à sua caracterização.

Apesar dos fabricantes deste tipo de materiais disponibilizarem o nomograma de frequência reduzida correspondente, esta informação possui apenas um carácter qualitativo devido ao facto de a mesma ter sido obtida para uma amostra do material, seguindo metodologias e procedimentos de caracterização não controlados pelo utilizador final do produto. Desta forma, é de extrema importância dispor de uma metodologia de determinação do módulo complexo do material em estudo, ainda que esta tenha por único objectivo verificar o nomograma fornecido, como pretendido neste trabalho.

Com este intuito, será desenvolvida uma metodologia de caracterização baseada num modelo discreto, a qual será validada através da comparação dos resultados obtidos com o nomograma original do material 3M ISD112. A opção por um modelo discreto justifica-se pelo facto de se evitarem as hipóteses simplificativas subjacentes aos modelos contínuos de vigas tratadas, conforme referido no Capítulo 2.

De referir que, para simplificar a sua caracterização, o equipamento experimental utilizado neste estudo é referenciado ao longo do texto através de um identificador, sendo a sua caracterização apresentada no Apêndice G.

7.2 Desenvolvimento de um sistema discreto com um grau de liberdade

Seguindo o modelo teórico apresentado no Capítulo 2 (Figura 2.4.a) e as indicações apresentadas por Jones [9], foi desenvolvida uma montagem experimental muito simples, ilustrada na Figura 7.1, que consiste numa base móvel montada sobre o excitador electrodinâmico LDS401 e numa massa móvel com a forma de paralelepípedo, colocando

entre elas duas camadas finas de material viscoelástico. As duas camadas viscoelásticas representam, desta forma, a rigidez do sistema com um grau de liberdade, enquanto que o bloco móvel de alumínio (20x40x40mm) representa a massa concentrada do sistema.

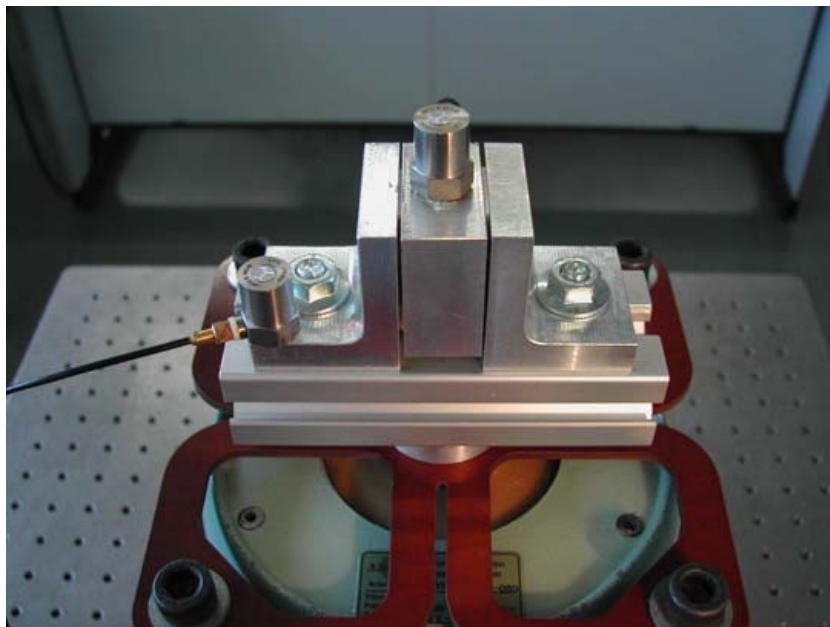


Figura 7.1: Montagem experimental com um grau de liberdade para ensaio em corte do provete viscoelástico

Através de dois acelerómetros, o BK4371-430 colocado na base móvel e o BK4371-687 colocado sobre o bloco móvel, mediu-se a função transmissibilidade do sistema, com a qual é possível determinar a rigidez complexa das camadas viscoelásticas. Todavia, em resultado da liberdade de rotação segundo o eixo transversal do sistema, torna-se muito difícil conseguir na prática o sistema discreto teórico pretendido.

Para analisar o desempenho desta montagem experimental, foi usada uma fita esponjosa adesiva de dupla-face como material viscoelástico, usando 2 provetes com 3mm de espessura, 19mm de largura e 40mm de comprimento.

Embora a resposta do sistema (Figura 7.2) mostre claramente que esta não é unicamente devida ao grau de liberdade de translação vertical, verifica-se que este assume uma posição preponderante. Assim, aplicando a metodologia e as equações descritas na Secção 2.3.1, calculou-se o módulo de ganho de corte e o respectivo factor de perda, recorrendo a duas

medições independentes da função transmissibilidade, que se representam no gráfico da Figura 7.3.

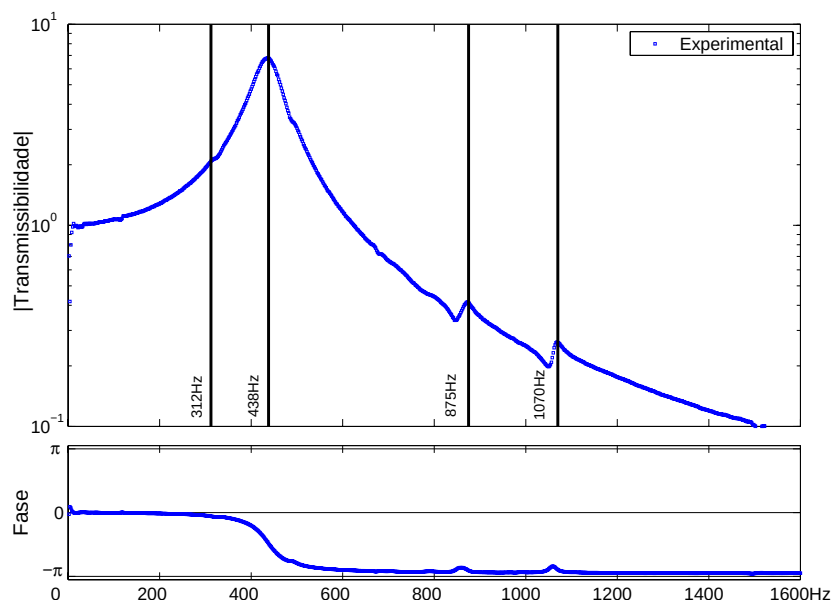


Figura 7.2: Função transmissibilidade do sistema com uma grau de liberdade

Com o intuito de verificar quais os graus de liberdade existentes na montagem e determinar as respectivas frequências de ressonância, foi criado um modelo numérico da montagem através do método dos elementos finitos recorrendo ao software **MSC.Nastran™**. O modelo foi criado com elementos finitos sólidos de 8 nós¹, utilizando as propriedades materiais da liga de alumínio 1050 na representação dos componentes metálicos do sistema. O material viscoelástico foi considerado como um material elástico representado por um módulo de corte de 1.5MPa, que corresponde à média do módulo de ganho identificado para a fita de espuma adesiva analisada (Figura 7.3). Os acelerómetros presentes na montagem experimental foram representados no modelo numérico através de elementos de massa concentrada.

Os resultados numéricos indicam que o sistema possui um modo natural com uma frequência de 311 Hz correspondente à rotação do bloco segundo o eixo transversal do conjunto e um segundo modo natural a 446Hz correspondente à translação vertical do

¹Elemento finito HEXA8 com integração selectiva.

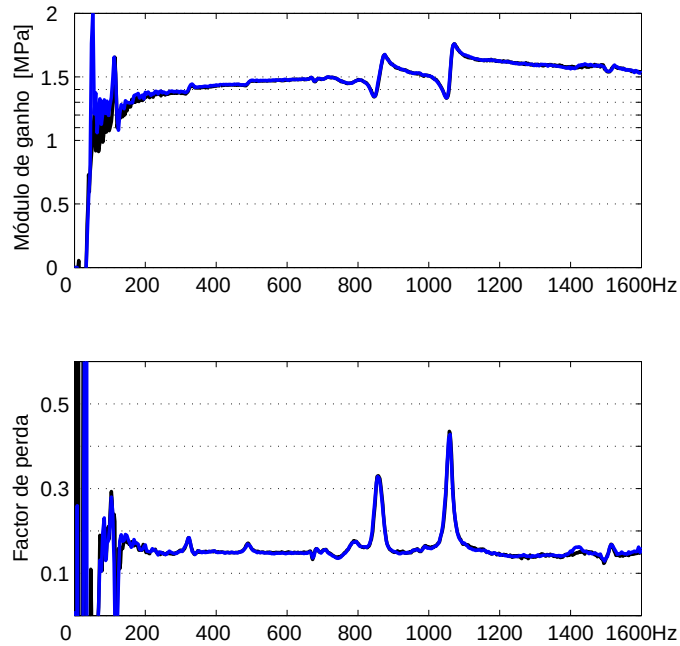


Figura 7.3: Módulo de corte complexo da espuma analisada

bloco central, ou seja, segundo o grau de liberdade considerado no modelo teórico de caracterização das propriedades. O terceiro modo natural, correspondente à translação horizontal do bloco móvel, ocorre para uma frequência de 458Hz e o modo natural associado à rotação do bloco segundo o eixo vertical é caracterizado por uma frequência natural de 728Hz.

A nível experimental, as tentativas efectuadas para evitar a excitação do primeiro modo natural, correspondente à rotação do bloco, resultaram infrutíferas. De facto, apesar das tentativas de melhorar a montagem experimental, alinhando o eixo do excitador com o centro de massa do bloco móvel e utilizando um acelerómetro significativamente mais pequeno (BK4393-189) colocado sobre essa linha de eixo, não se conseguiu anular o efeito deste modo natural de rotação sobre a resposta do sistema, sendo, por isso, necessário restringir este grau de liberdade através de um mecanismo de guiamento físico.

Uma forma de restrição destes graus de liberdade espúrios poderia resultar do guiamento da própria haste móvel do excitador, como realizado por Allen [76], sendo, para isso, necessário utilizar um procedimento de caracterização baseado na medição da resposta do

sistema. Assim, a base da montagem seria rigidamente ligada a um suporte rígido no qual seria também montado o excitador que aplicaria uma excitação sobre o bloco móvel.

A introdução de uma forma de guiamento na própria massa móvel poderia invalidar o modelo teórico assumido, devido aos efeitos de rigidez e de amortecimento que seriam introduzidos pelo guiamento. Como indicado no Capítulo 2, diversos autores referem este problema, indicando diversas tentativas de guiamento, desde um simples casquilho lubrificado a guiamentos pressurizados, sem, contudo, ser apresentada uma solução eficiente.

Em alternativa à montagem simples anterior foi experimentada a configuração ilustrada na Figura 7.4, na qual é proporcionada uma forma de guiamento através da combinação de quatro provetes viscoelásticos dispostos em X.

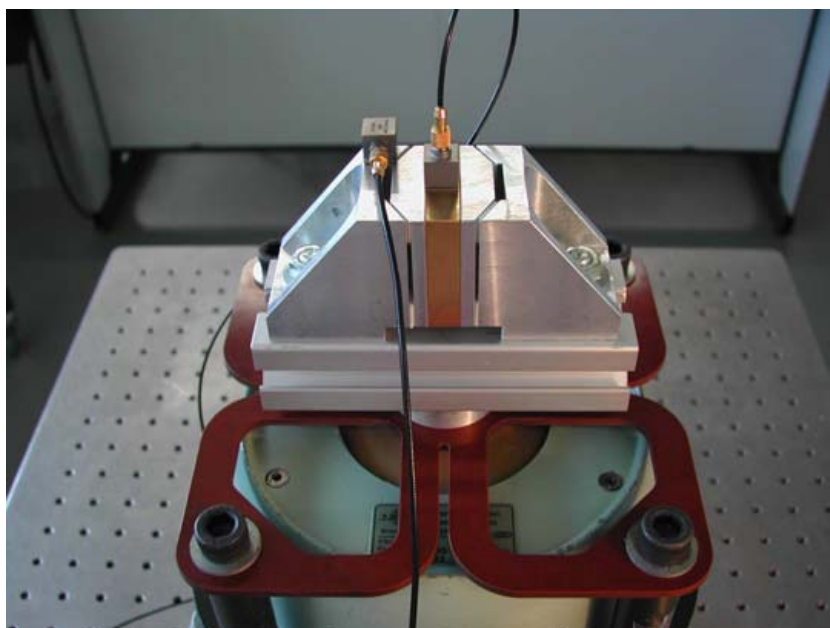


Figura 7.4: Montagem alternativa com provetes dispostos em X

Embora esta configuração permita efectivamente uma forma de guiamento, o facto de se utilizar quatro provetes viscoelásticos, sendo particularmente difícil garantir que os mesmos sejam rigorosamente iguais, pode invalidar a representação da montagem experimental pelo modelo teórico com um grau de liberdade.

Para avaliar o desempenho desta montagem foram utilizados 4 provetes obtidos a partir de um material viscoelástico fornecido pela Damping Technologies, Inc. (DTI), doravante designado por DTI1. Cada um dos provetes (35x10x1.126mm) foi obtido a partir de uma amostra de material com $50.8\mu\text{m}$ de espessura, colando sucessivas camadas sobre o substrato metálico até atingir a espessura pretendida.

Seguindo a metodologia adoptada na montagem experimental anterior, utilizou-se o excitador electrodinâmico LDS401 para excitar a base do sistema com um sinal aleatório na gama de frequências compreendida entre 0 e 1.6KHz. Para obter a função transmissibilidade do sistema dinâmico, recorre-se a dois acelerómetros piezoeléctricos miniatura (BK4507-473 e BK4508-279). De forma a medir a temperatura do ensaio, utilizou-se um sensor de temperatura ambiente.

O gráfico da Figura 7.5 representa a função transmissibilidade medida para uma temperatura ambiente de 25°C sobreposta à função analítica da função transmissibilidade do modelo teórico com um grau de liberdade gerada através do nomograma do material fornecido pelo fabricante.

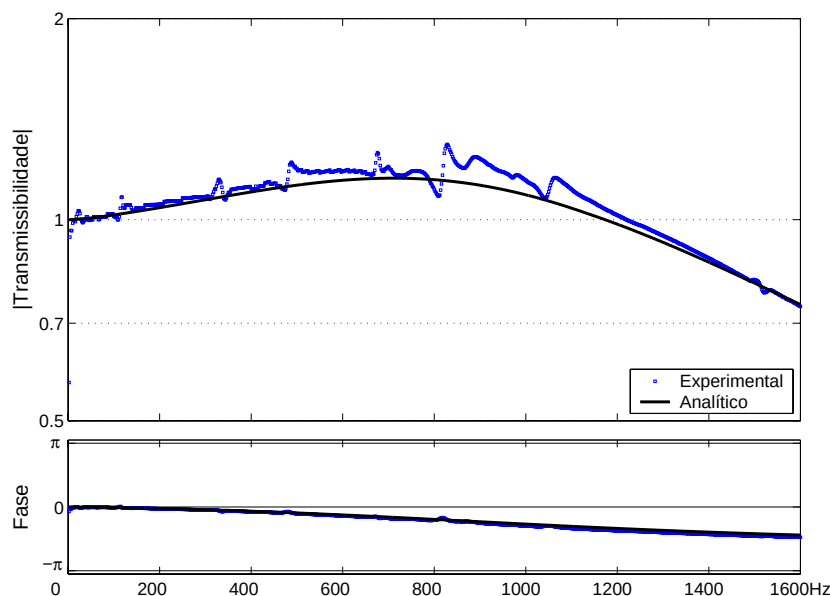


Figura 7.5: Função transmissibilidade medida no sistema experimental para 25°C

Como se pode constatar pelo razoável ajuste das duas curvas representadas, a montagem

experimental desenvolvida permite uma representação razoável do modelo teórico com um grau de liberdade. No entanto, a função medida experimentalmente possui muito ruído, que se julga ser devido à própria montagem (possivelmente resultante das ligações aparafusadas) e, essencialmente, ao facto de não ter sido garantida a homogeneidade entre os quatro provetes viscoelásticos necessários à montagem.

Embora a relação sinal/ruído presente na função transmissibilidade medida seja razoavelmente aceitável, os efeitos do ruído no cálculo do módulo de corte complexo são muito ampliados, como se ilustra no gráfico da Figura 7.6. Este gráfico representa o nomograma fornecido pelo fabricante do material sobre o qual são representados os pontos de módulo complexo identificado através da função transmissibilidade determinada experimentalmente e representada na Figura 7.5.

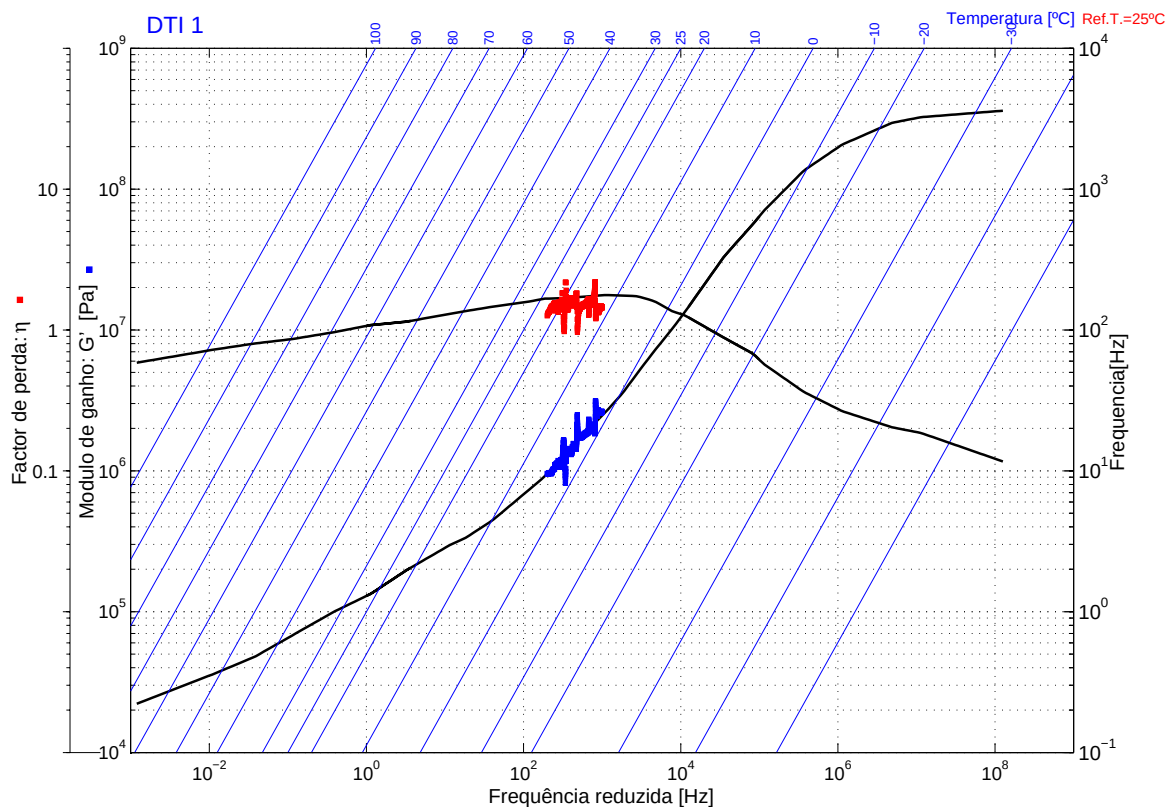


Figura 7.6: Nomograma do material DTI1 - Caracterização experimental para 25° C

Não obstante a possibilidade de reduzir o ruído do sinal medido através de

técnicas numéricas de filtragem e de ajuste, a dificuldade em garantir-se uma perfeita homogeneidade entre os provetes viscoelásticos conduziu a uma redefinição da orientação a tomar no desenvolvimento de uma montagem experimental eficiente. De facto, de acordo com os resultados obtidos através das montagens experimentais anteriores, pode concluir-se que a aplicação de um único provete viscoelástico minimizará a heterogeneidade associada ao elemento de rigidez equivalente.

7.3 Montagem experimental proposta

Tendo por base o requisito principal de aplicar um único provete viscoelástico no sistema de caracterização, é proposta uma montagem experimental que permite satisfazer esta condição.

A montagem experimental proposta, ilustrada na Figura 7.7, é constituída por uma placa base (1) e por uma placa móvel (2), ligadas através de duas lâminas (3) muito finas de aço de mola, entre as quais é introduzido o provete de material viscoelástico (4) a caracterizar.

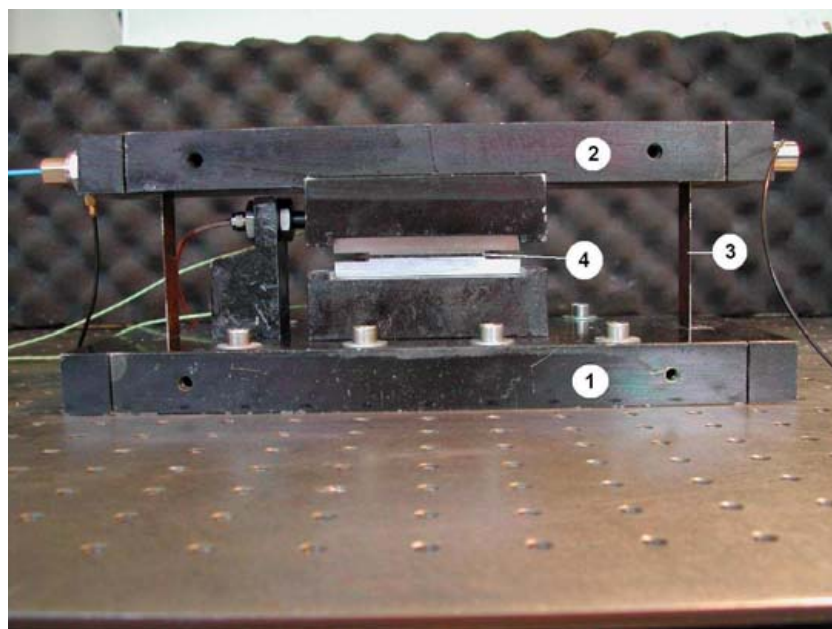


Figura 7.7: Montagem experimental proposta

O provete de material é introduzido entre duas placas porta-provetes de alumínio (Figura 7.8) que permitem a sua fácil e rápida substituição. O conjunto formado pelos porta-provetes e pelo provete de material viscoelástico é ligado através de parafusos a dois blocos de suporte que ligam de uma forma rígida cada um dos porta-provetes à respectiva placa.

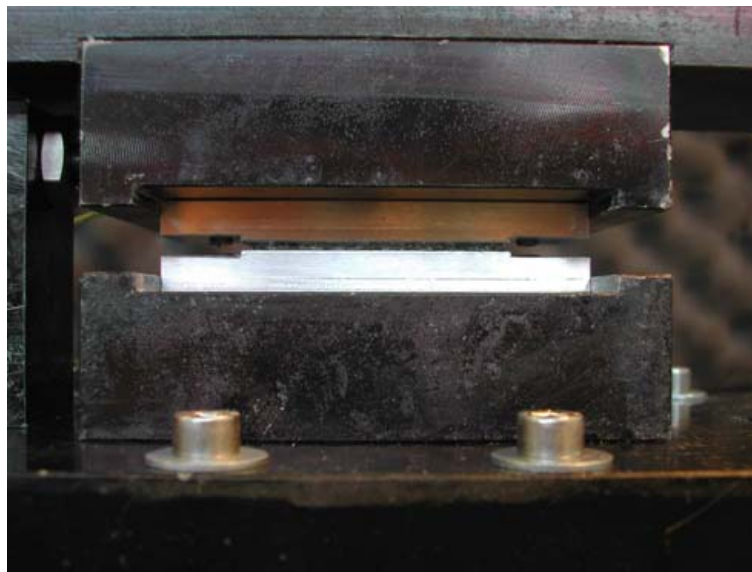


Figura 7.8: Conjunto do provete, porta-provetes e blocos de suporte

As lâminas de aço permitem uma forma de guiamento eficiente e, embora introduzam uma rigidez adicional no sistema, essa rigidez é muito reduzida relativamente à rigidez equivalente do provete de material viscoelástico, sendo facilmente determinada experimentalmente. Estas lâminas são ligadas a cada uma das placas através de um par de mordentes aparafusados nos topos das mesmas.

Dependendo das condições de fronteira e da posição do ponto de excitação, a montagem experimental pode ser representada através de um modelo com um grau ou dois graus de liberdade. A placa de base possui um conjunto de furos passantes que permitem a sua ligação a uma mesa de montagem ou a um bloco rígido de forma a obter condições de fronteira próximas do encastramento ou para ligar uma massa extra para aumentar a massa da base do sistema.

A força da excitação imposta é medida através de uma célula de carga piezoelétrica

(BK8200-312) e as acelerações da placa da base e da placa móvel são medidas através dos dois acelerómetros piezoelétricos BK4371-687 e BK4371-430, respectivamente.

Para além do conjunto de transdutores enumerado, que podem ser montados no sistema consoante o tipo de função de resposta em frequência pretendida e as condições de fronteira impostas, é ainda possível aplicar o transdutor de proximidade Philips PR6423 para medir o deslocamento relativo entre as duas placas. Esse transdutor é rigidamente ligado à placa de base através de um suporte rígido e ajustável (Figura 7.9), usando a face lateral do suporte superior do porta-provetes como alvo na determinação do deslocamento relativo entre as duas placas.

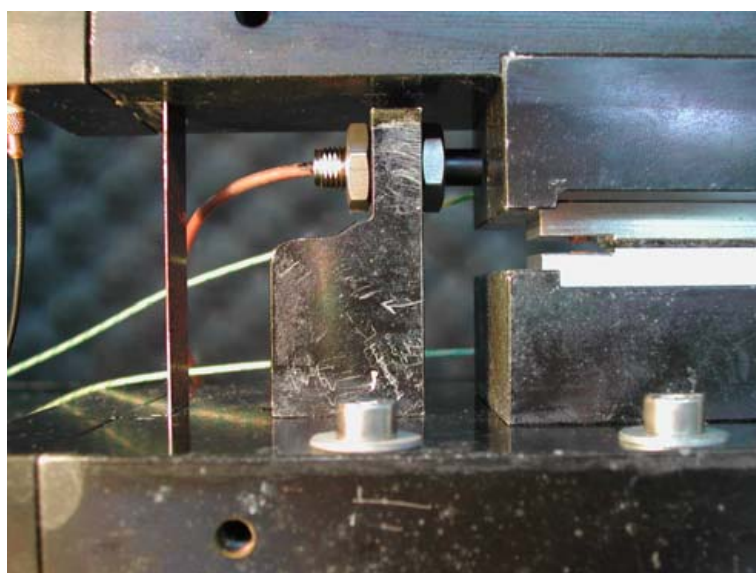


Figura 7.9: Transdutor de proximidade e respectivo suporte de montagem

7.4 Caracterização experimental do sistema proposto

A caracterização da montagem proposta é relativamente simples, uma vez que os elementos mecânicos que a constituem podem ser divididos em elementos rígidos de massa em translação e em elementos de rigidez. Os primeiros, nos quais qualquer ponto do seu domínio possui a mesma aceleração, velocidade e deslocamento, possuem uma elevada rigidez e uma massa bem definida, enquanto que os últimos são caracterizados por uma

rigidez bem definida dentro do seu regime linear e por uma massa que pode ser considerada desprezável relativamente aos primeiros elementos.

Para determinar a massa de cada um dos elementos constituintes do sistema recorreu-se a uma balança de precisão, tendo-se obtido o valor de 7.865Kg para o conjunto de elementos que constitui a parte inferior do sistema, nomeadamente a placa de base, o bloco de suporte inferior, os mordentes laterais de fixação da parte inferior das lâminas metálicas e os parafusos de ligação do conjunto, e 4.349Kg para o conjunto superior formado pela placa móvel e respectivos mordentes de fixação, pelo suporte superior e parafusos do conjunto. O suporte de fixação do transdutor de proximidade possui uma massa de 319g.

Para determinar a constante de rigidez equivalente do par de lâminas metálicas de guiamento, recorreu-se a três metodologias diferentes, sendo as duas primeiras desenvolvidas em regime estático, determinando a relação força-deslocamento do sistema, e a terceira baseada na determinação da rigidez equivalente do sistema através da sua frequência natural fundamental.

No primeiro método determinou-se a rigidez do sistema pela medição dos deslocamentos impostos pela aplicação de vários incrementos sucessivos de carga estática. Para isso recorreu-se à montagem ilustrada na Figura 7.10 e utilizou-se um parafuso micrométrico para actuar sobre a célula de carga miniatura que se encontra colada num dos topos da barra móvel, impondo desta forma vários incrementos de carga no sistema. Medindo simultaneamente o valor da tensão fornecida pela célula de carga e o valor do deslocamento relativo medido pelo transdutor de proximidade, ambos previamente calibrados em regime estático (Apêndice H), determinou-se a rigidez equivalente do sistema através do ajuste da equação de uma recta aos pontos medidos na gama de deslocamentos compreendidos entre 0 e 0.6 mm, como ilustrado na Figura 7.11.

O valor determinado, 2778.2N/m, corresponde ao valor da rigidez equivalente das lâminas para uma distância entre porta-provetes de 0.57mm. O ensaio foi realizado a uma temperatura ambiente de 19.0°C e a célula de carga foi alimentada por uma tensão de 10.01V DC.

No segundo método, e alternativamente à utilização da célula de carga estática, foram utilizados pesos calibrados para impor vários níveis de carga numa das extremidades da barra móvel usando um fio de nylon e uma pequena roldana com rolamento de esferas.

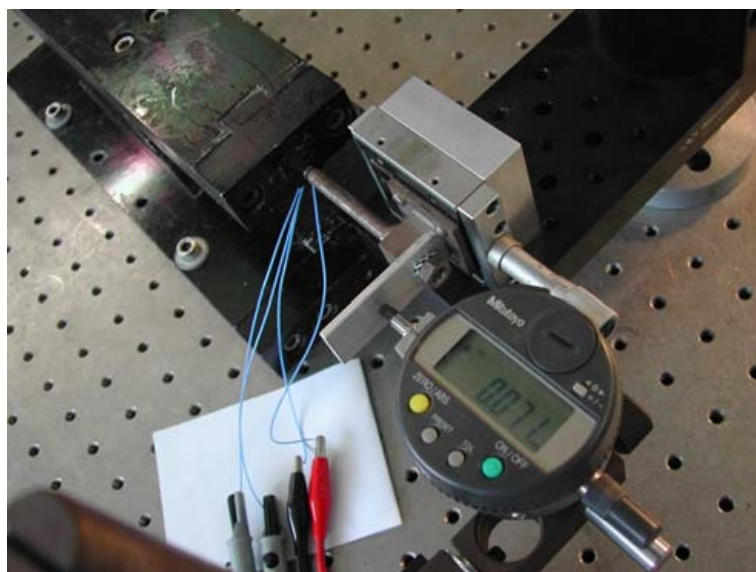


Figura 7.10: Montagem experimental para determinação da rigidez equivalente das lâminas de guiamento

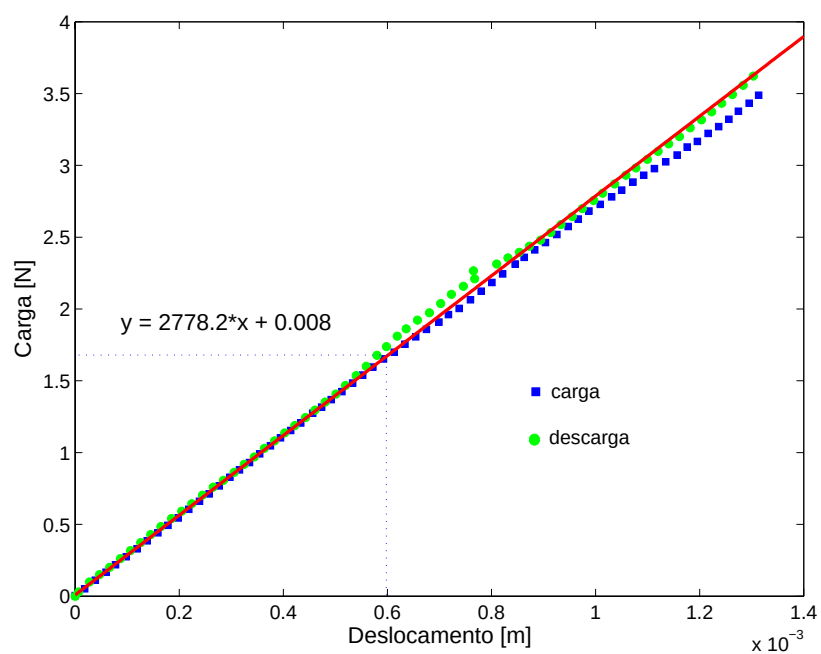


Figura 7.11: Curva carga-deslocamento para as lâminas de guiamento - Método 1

Recorrendo aos pesos calibrados disponíveis no laboratório, foi determinada a recta de ajuste aos pontos experimentais, definidos pela carga imposta e pelo deslocamento correspondente medido através do transdutor de proximidade, representados no gráfico da Figura 7.12.

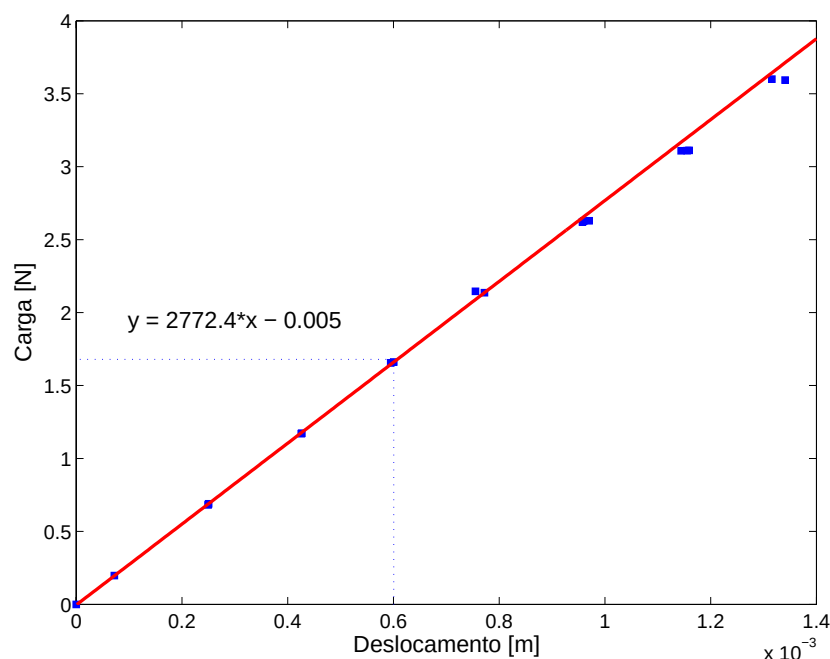


Figura 7.12: Curva carga-deslocamento para as lâminas de guiamento - Método 2

O ajuste da equação de uma recta aos pontos experimentais obtidos permite determinar o valor da rigidez equivalente de 2772.4 N/m.

Finalmente, recorrendo à terceira metodologia indicada, foi determinado o valor da frequência natural do modo segundo o grau de liberdade de translação da barra móvel. As condições de fronteira da montagem experimental são idênticas às adoptadas nas metodologias anteriores, ou seja, a placa de base é aparafusada à mesa de montagem e é aplicada uma excitação aleatória através do excitador electrodinâmico LDS201, usando uma fonte de ruído branco na gama de frequências compreendida entre 1.875 e 8.125 Hz. A força aplicada num dos topos da barra móvel é medida através da célula de carga BK8200-312 e a resposta é medida através do acelerómetro BK4371-430, montado na extremidade oposta da barra móvel por meio de uma ligação roscada, e do sensor de proximidade PR6423.

O gráfico da Figura 7.13 representa as funções aceleração e receptância determinadas através do analisador espectral BK2035 a partir dos sinais obtidos pelos transdutores referidos.

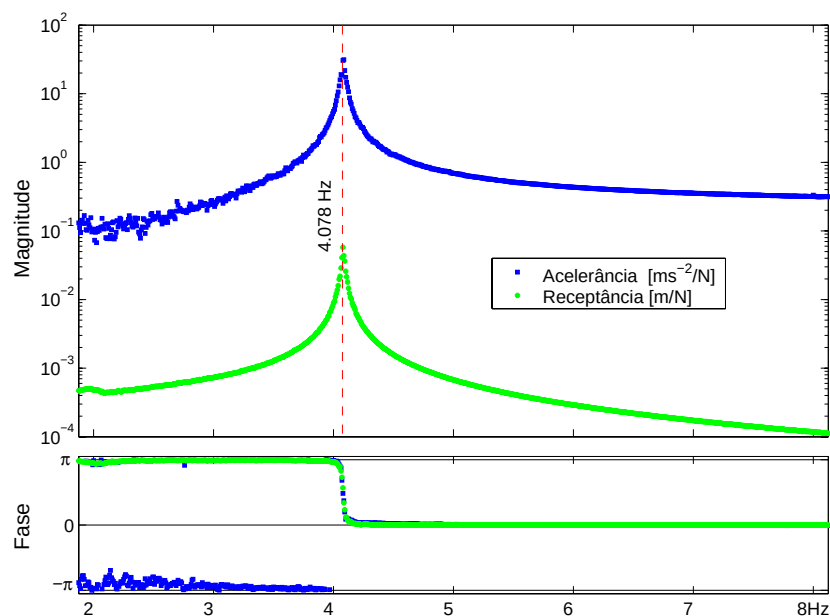


Figura 7.13: Função aceleração medida no sistema em vazio

Através do valor da frequência natural do sistema, 4.078 Hz, e recorrendo ao valor da sua massa móvel previamente determinada, 4362.2 Kg (barra móvel, acelerómetro e massa activa da célula de carga), é possível calcular a rigidez equivalente, obtendo-se o valor de 2863.9 N/m, ligeiramente superior ao determinado pelos métodos estáticos descritos anteriormente.

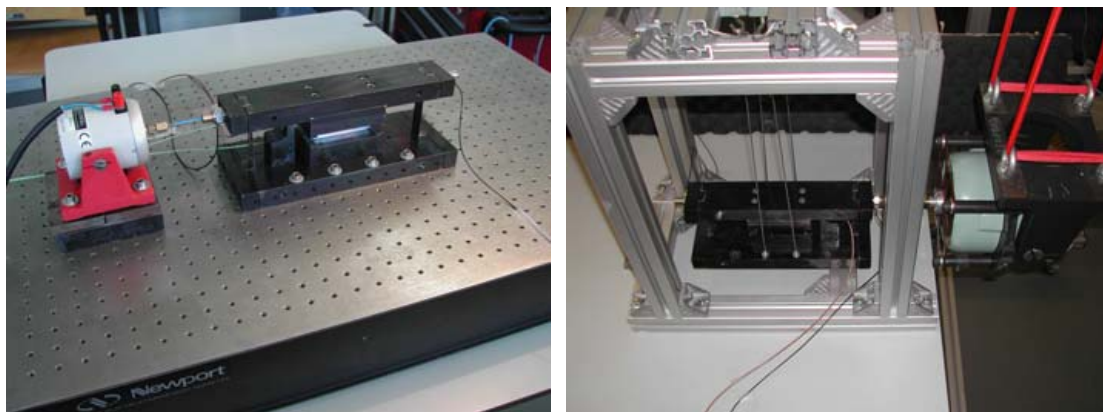
Independentemente do valor correcto, verifica-se que a rigidez devida às lâminas de guiamento é muito reduzida em comparação com a rigidez equivalente do provete viscoelástico ($>1\text{E}5$ N/m), podendo a mesma ser desprezada. No entanto, para efeitos de cálculo do módulo de corte complexo é considerado um valor aproximado de 2800 N/m, que corresponde à média dos valores determinados para a constante de rigidez do sistema de caracterização.

7.5 Selecção das condições de fronteira da montagem experimental

Como atrás referido, o sistema dinâmico proposto pode ser montado segundo diversas configurações através da imposição das condições de fronteira apropriadas. De entre as possibilidades de montagem podem destacar-se duas delas que foram ensaiadas de forma a seleccionar a que melhor representasse o modelo teórico associado.

O encastramento da placa de base num maciço rígido e a aplicação da excitação no topo da placa superior (Figura 7.14.a) a partir de um excitador montado no mesmo maciço permite representar um sistema discreto com um grau de liberdade, onde a placa móvel representa o elemento de massa e o elemento de rigidez é representado pela rigidez equivalente do provete viscoelástico e pela rigidez das lâminas de guiamento.

A segunda configuração é obtida através da suspensão do sistema pela placa de base (Figura 7.14.b), podendo representar um sistema discreto com dois graus de liberdade se a excitação for aplicada na placa superior ou um sistema com um grau de liberdade e base móvel (para medição da função transmissibilidade) se o excitador for ligado na placa de base suspensa.



a) conjunto montado num suporte rígido

b) conjunto suspenso

Figura 7.14: Condições de fronteira do sistema de caracterização

De acordo com os resultados obtidos numa análise preliminar, verifica-se que, embora ambas as configurações permitam uma aproximação satisfatória ao modelo teórico

associado, a primeira configuração apresenta um conjunto de vantagens que justificam a sua selecção como configuração a adoptar no desenvolvimento deste trabalho de caracterização. De facto, na configuração de base fixa é mais fácil controlar as frequências dos modos de corpo rígido, minimizar o efeito da resposta do sistema segundo os graus de liberdade não considerados no modelo teórico e permitir a utilização de uma haste de ligação mais flexível, com o intuito de maximizar a excitação unidireccional segundo o grau de liberdade pretendido e minimizar os efeitos da ligação na resposta da placa móvel.

7.6 Selecção do bloco de apoio e respectiva suspensão

Para realizar a montagem pretendida, é necessário utilizar uma base de montagem que apresente simultaneamente uma elevada rigidez e uma massa considerável, de forma a baixar significativamente as frequências naturais de corpo rígido do conjunto.

Na primeira solução adoptada, Figura 7.15, recorreu-se a uma mesa de montagens ópticas, usualmente designada por *breadboard*, Newport CS-23-4. Embora esta mesa permita uma grande versatilidade na montagem e possua uma elevada rigidez de flexão, verificou-se que existem duas frequências de ressonância associadas ao núcleo da mesa dentro da gama de frequências [0-800]Hz definida para a caracterização do material.

De forma a evitar os efeitos das ressonâncias do núcleo da mesa de montagem, foi analisado um conjunto de suportes maciços (Figura 7.15), nomeadamente uma placa de mármore (0.35x1.20x0.03 m), um bloco de betão (0.15x0.20x0.55 m) e um bloco de granito (0.15x0.30x0.60 m). Para isso, determinou-se experimentalmente a frequência natural fundamental dos blocos suportados por dois apoios pneumáticos, que corresponde ao primeiro modo natural de flexão, através da medição da função de resposta em frequência usando um acelerómetro (BK4371-430) colado sobre o bloco em análise para medir a sua resposta e utilizando um martelo de impacto instrumentado (BK8202-289) para o excitar.

Do conjunto de suportes maciços ensaiados, apenas o bloco de betão e o bloco de granito, ambos numa posição ao alto, apresentam frequências naturais acima de 1.2KHz e uma resposta linear na gama de frequências compreendida entre 0 e 800Hz. Dentre estes dois optou-se pelo bloco de granito em virtude da sua maior massa, minimizando desta forma o limite superior do conjunto de frequências naturais associadas aos modos de corpo rígido do conjunto elasticamente apoiado.



Figura 7.15: Suportes de apoio da montagem experimental: mesa de montagens, placa de mármore, bloco de betão e bloco de granito

Com efeito, para além da massa do bloco de suporte, a forma e a rigidez do apoio de todo o conjunto constitui também um factor importante no controlo das frequências dos modos de corpo rígido. Assim, foram consideradas diversas alternativas, desde placas de espuma de poliuretano a pequenos apoios cilíndricos de silicone (Figura 7.16), que constituem a solução final adoptada em virtude da sua elevada flexibilidade e capacidade de suporte da massa do bloco. Com esta solução, colocando os apoios junto da zona central do bloco de forma a reduzir a rigidez associada à rotação do conjunto, conseguiu-se reduzir o limite superior da gama de frequências dos modos de corpo rígido para um valor inferior a 1Hz, sendo este limite de 8Hz para o bloco de betão apoiado por duas placas de espuma de poliuretano.

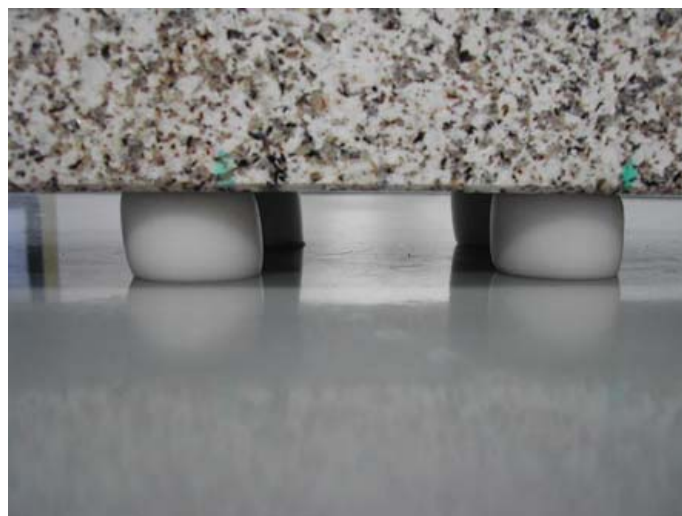


Figura 7.16: Apoios cilíndricos em silicone

7.7 Provete de ensaio

De forma a permitir simplicidade e rapidez na montagem dos provetes de material viscoelástico a caracterizar, foi maquinado um conjunto de porta-provetes em alumínio que foram sujeitos a uma operação de polimento na superfície de colagem do provete viscoelástico (Figura 7.17.a), após a qual foram pesados numa balança de precisão e medidos através de um micrómetro.



a) Porta-provetes



b) Bloco-provete

Figura 7.17: Porta-provetes em alumínio

A Tabela 7.1 apresenta as espessuras de cada um dos porta-provetes e respectivas massas.

Tabela 7.1: Características dos porta-provetes

	Espessura [mm]	Massa [Kg]
Porta-provete A1	7.96	33.10E-3
Porta-provete A2	7.96	33.12E-3
Porta-provete B1	7.96	33.15E-3
Porta-provete B2	7.97	33.15E-3

Recorrendo a uma amostra de material viscoelástico 3M ISD112 com 0.127mm de espessura, foram construídos dois provetes de ensaio (Figura 7.17.b), caracterizados na Tabela 7.2.

Tabela 7.2: Características dos provetes

Provete	Material	Espessura [mm]	Área do provete [mm ²]	Par porta-provete
A	3M ISD112	0.57	480	A1/A2
B	3M ISD112	0.65	970	B1/B2

7.8 Metodologia experimental de caracterização

O sistema de caracterização, ilustrado na Figura 7.7, é montado sobre o bloco de granito através de uma ligação aparafusada, sendo de igual forma montado o excitador electrodinâmico LDS201 pela sua base.

Os transdutores necessários à determinação da função de resposta em frequência da barra móvel, nomeadamente o acelerómetro BK4371-430 e a célula de carga BK8200-312, são montados nas extremidades opostas da mesma barra através de pernos roscados. Para além deste par de transdutores é também utilizado o transdutor de proximidade PR6423. Os pares de transdutores referidos foram previamente calibrados, conforme documentado no Apêndice H.

A ligação do excitador à célula de carga é realizada através de uma haste flexível (haste nº1 ou haste nº2, caracterizadas no Apêndice I), sendo muito importante garantir o alinhamento entre os três elementos (excitador, haste e barra móvel) de forma a minimizar o efeito dos graus de liberdade espúrios da montagem.

A excitação proporcionada pelo excitador é do tipo aleatório aplicando ruído branco na gama de frequências [0-400]Hz gerado através do analisador espectral BK2035. Esta gama de frequências foi definida considerando os efeitos da resposta do suporte do excitador que ocorrem acima de 400Hz (Figura 7.18).

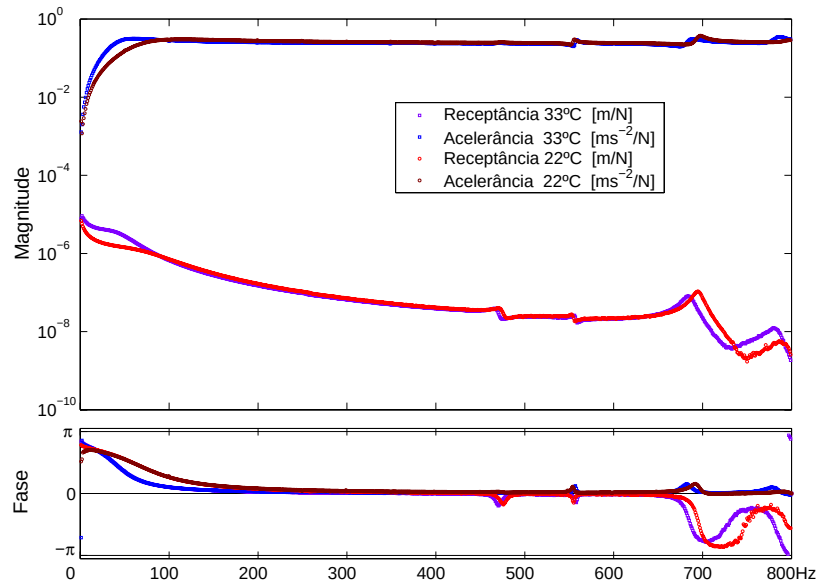


Figura 7.18: Sensibilidade dos transdutores aos efeitos das ressonâncias da base do excitador

De forma a realizar o ensaio a diversos níveis de temperatura constante, recorrendo ao princípio da correspondência frequência-temperatura para aumentar a gama de frequências e de temperaturas da caracterização, o conjunto deve ser integralmente inserido numa câmara termostática. Na indisponibilidade de uma câmara termostática no laboratório, foi adquirida uma arca frigorífica horizontal convencional (Figura 7.19), recorrendo ao seu circuito de refrigeração e a uma fonte de ar quente adicional e controlada para variar a temperatura do ensaio entre 0 e 35°C. Estes limites de temperatura são impostos pela

capacidade de refrigeração e de manutenção da temperatura da arca e pela temperatura máxima de utilização do excitador electrodinâmico.

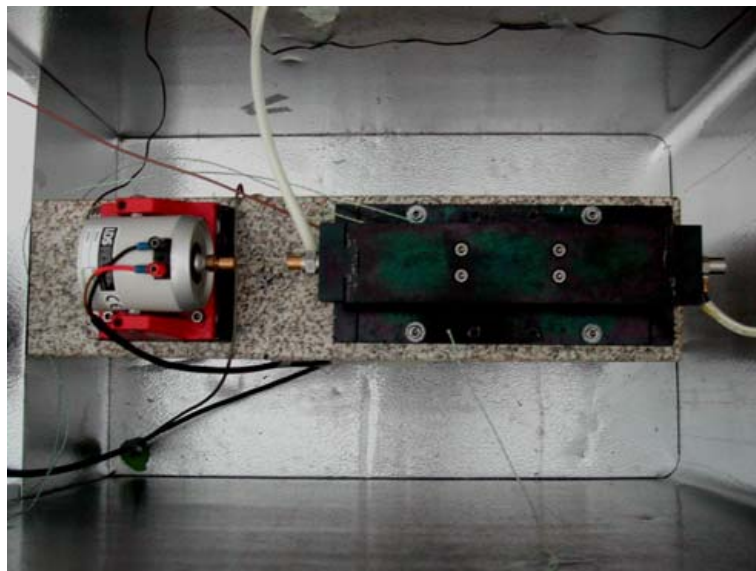


Figura 7.19: Montagem experimental na arca com temperatura regulada

A temperatura do provete viscoelástico é avaliada através de dois termopares, colados em cada um dos blocos de suporte do porta-provetes (Figura 7.20), utilizando-se ainda um terceiro termopar na medição da temperatura ambiente dentro da câmara. Este posicionamento dos termopares deve-se à elevada inércia térmica do bloco de granito, sendo garantida a estabilidade da temperatura no provete viscoelástico quando a diferença entre os dois termopares colados for inferior a 0.5°C . O terceiro termopar é utilizado para avaliar e monitorizar a variação da temperatura do ar dentro da câmara, servindo de indicador das suas perdas térmicas para o exterior.

Para cada nível de temperatura previamente definido, e após estabilização da mesma no provete viscoelástico, são medidas as funções acelerância e receptância através dos sinais obtidos pelos respectivos transdutores.

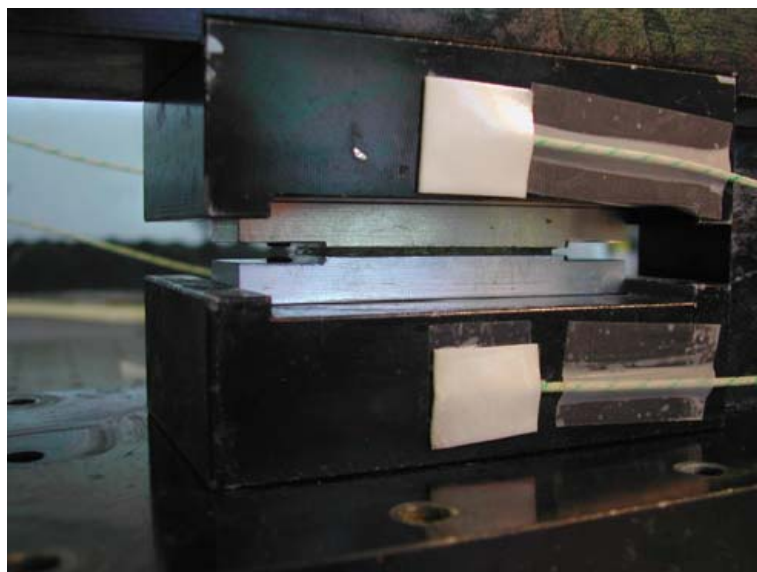


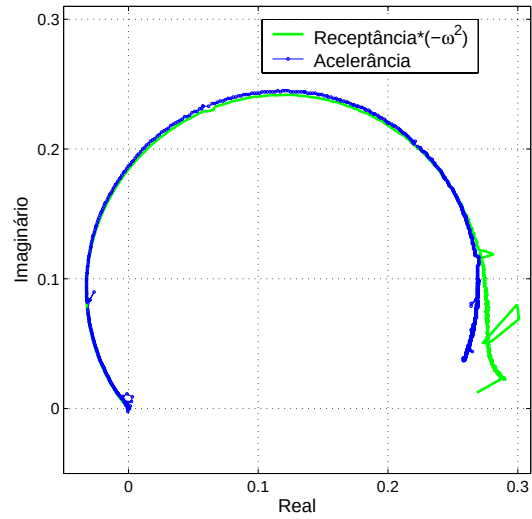
Figura 7.20: Termopares de medição da temperatura nos suportes do porta-provetes

7.9 Resultados obtidos

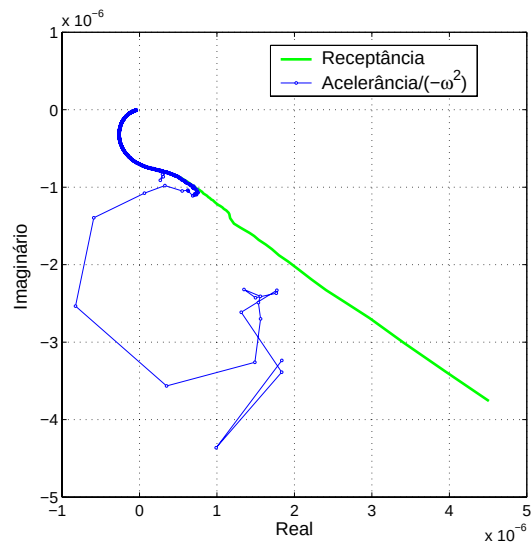
Teoricamente, as funções de resposta em frequência medidas através do acelerómetro e do transdutor de proximidade são equivalentes e redundantes. No entanto, verifica-se na prática que as funções medidas pelos dois transdutores apresentam algumas diferenças. De facto, enquanto que a resposta relativa medida pelo transdutor de proximidade não contém os modos de corpo rígido do conjunto, o acelerómetro é menos sensível às ressonâncias de alta frequência devidas à base do excitador, como se pode verificar no gráfico da Figura 7.18.

Para ilustrar estas observações e de forma a mostrar o efeito dos modos de corpo rígido, considerem-se as funções de resposta em frequência representadas num diagrama de *Nyquist* na Figura 7.21, obtidas pelos dois transdutores utilizando o bloco de betão sobre placas de poliuretano, evidenciando-se, desta forma, o efeito dos modos de corpo rígido.

Na Figura 7.21.a são representadas ambas as funções de resposta em frequência medidas, convertendo a função receptância, calculada a partir do sinal medido pelo transdutor de proximidade, em função aceleração através da derivação numérica da mesma. Nesta



a) Função aceleração [ms^{-2}/N]



b) Função receptância [m/N]

Figura 7.21: Diagrama de *Nyquist* das funções de resposta em frequência medidas com os dois transdutores

representação, é possível evidenciar a sensibilidade do transdutor de proximidade aos efeitos da base do excitador.

De forma idêntica, no gráfico da Figura 7.21.b são representadas as mesmas funções sob a forma de função receptância, sendo possível evidenciar os efeitos dos modos de corpo rígido sobre a resposta do acelerómetro e a não detecção dos mesmos pelo transdutor de proximidade. De referir que estes efeitos são minimizados na montagem com recurso ao bloco de granito sobre os apoios de silicone, em virtude de o conjunto de modos de corpo rígido para esta configuração ocorrer para uma gama de frequências inferior a 1Hz.

A Figura 7.22 representa as funções aceleração medidas no bloco-provete A para diferentes temperaturas de ensaio, sendo possível verificar o efeito deste parâmetro nas propriedades do material viscoelástico e, conseqüentemente, na resposta do sistema. Na Figura 7.23 representam-se as funções receptância medidas a partir do sinal obtido pelo transdutor de proximidade e da célula de carga para os diferentes níveis de temperatura considerados.

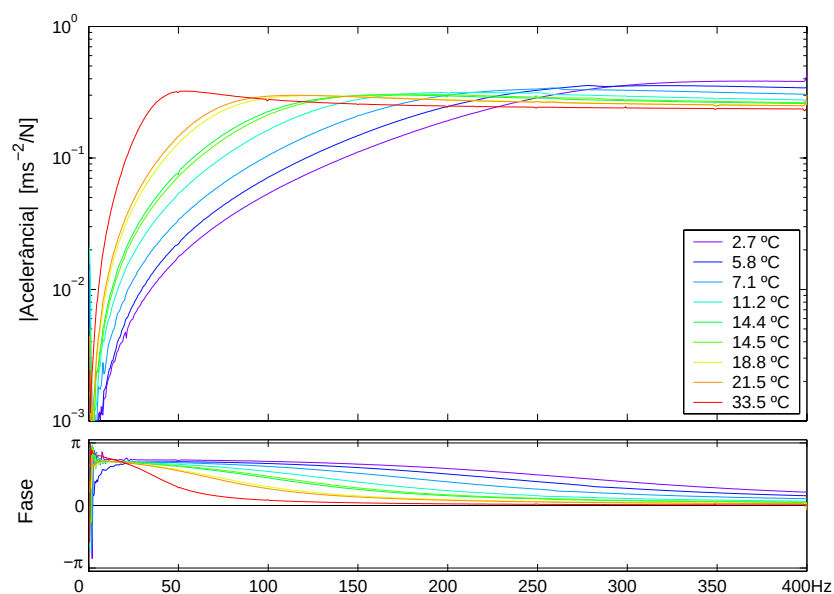


Figura 7.22: Função aceleração medida para diferentes temperaturas

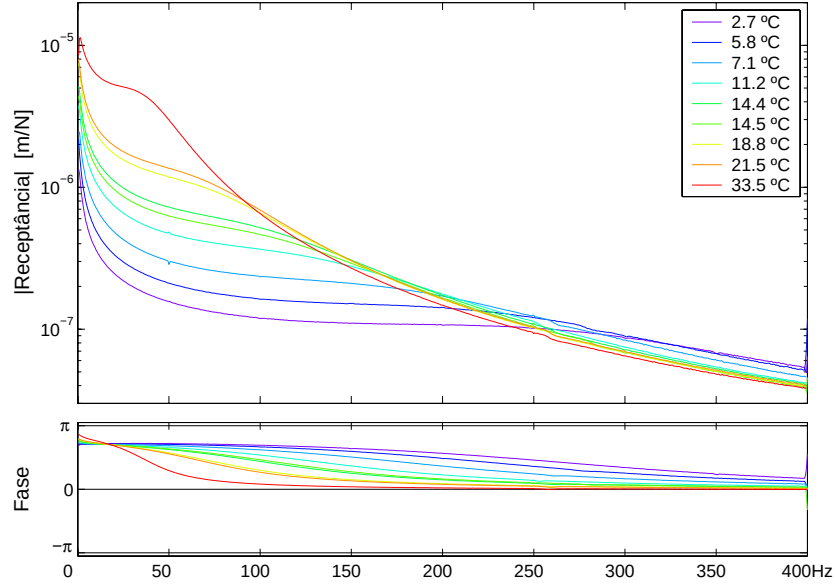


Figura 7.23: Função receptância medida para diferentes temperaturas

7.10 Tratamento de resultados

De forma a permitir o tratamento das funções de resposta em frequência medidas e a calcular a função do módulo complexo recorrendo ao formulário apresentado no Capítulo 2, foi desenvolvido e implementado em ambiente **Matlab**[®] um conjunto de rotinas que são integradas num módulo principal que permite realizar a importação, o arquivo, a representação e o tratamento dos dados experimentais, dispondo ainda de um conjunto de rotinas de cálculo e representação do módulo complexo do material caracterizado.

Numa primeira fase, é analisada de forma individual cada uma das medições efectuadas, verificando a sua qualidade, nomeadamente a relação sinal/ruído obtida. Esta fase tem por objectivo retirar do conjunto de funções de resposta em frequência a usar no processo de identificação do módulo complexo as funções medidas que apresentam sintomas de contaminação por erros aleatórios devidos ao processo de medição, entre os quais problemas associados ao equilíbrio térmico e não linearidade da resposta.

Nas figuras 7.24 e 7.25 apresentam-se, através de uma representação *Wicket Plot*, as funções módulo de corte complexo identificadas para o provete B. Os resultados

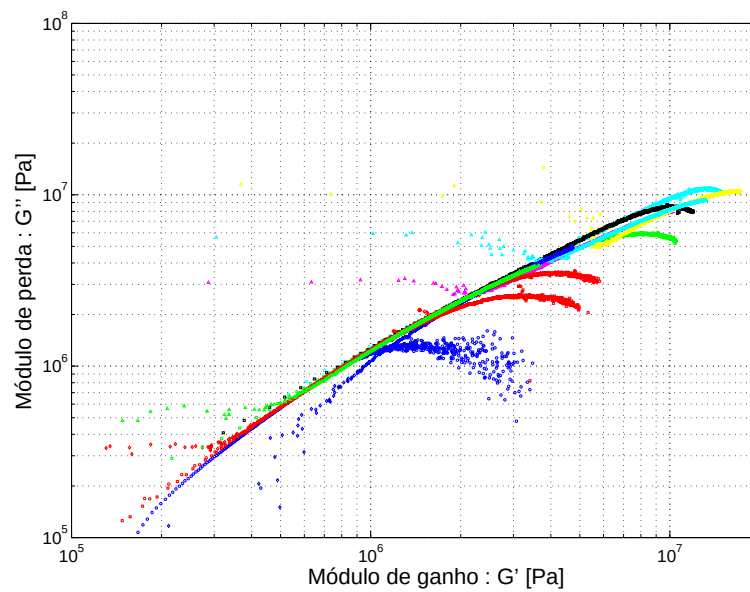


Figura 7.24: Representação *Wicket Plot* dos dados não filtrados: Módulo de ganho / Módulo de perda

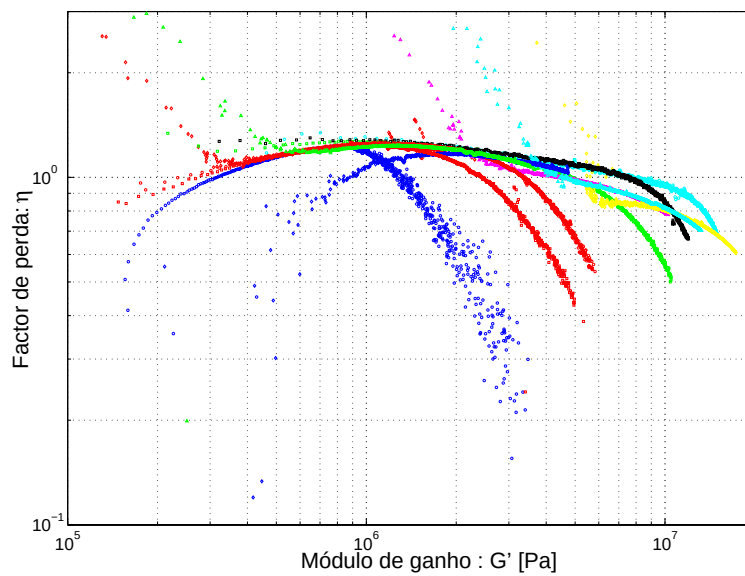


Figura 7.25: Representação *Wicket Plot* dos dados não filtrados: Módulo de ganho / Factor de perda

representados foram obtidos a partir das funções de resposta em frequência medidas, tanto das funções aceleração como das funções receptância, para as temperaturas de ensaio consideradas. Nesta representação, é possível verificar a tendência dos dados medidos e identificar a curva principal, sendo ainda possível identificar os pontos contaminados com os efeitos introduzidos pelos modos de corpo rígido e pela resposta da base do excitador nas funções de resposta medidas.

Para retirar esses erros do processo de caracterização, é limitada individualmente no domínio da frequência cada uma das funções de resposta em frequência medidas, de forma a obter uma curva única e contínua na representação *Wicket Plot*, como ilustrado nas figuras 7.26 e 7.27. Após esta operação de filtragem espectral, é aplicado o princípio da correspondência da frequência-temperatura para determinar a distribuição do factor de translação, $\alpha_T(T)$, através do qual é possível construir o nomograma de frequência reduzida do material caracterizado.

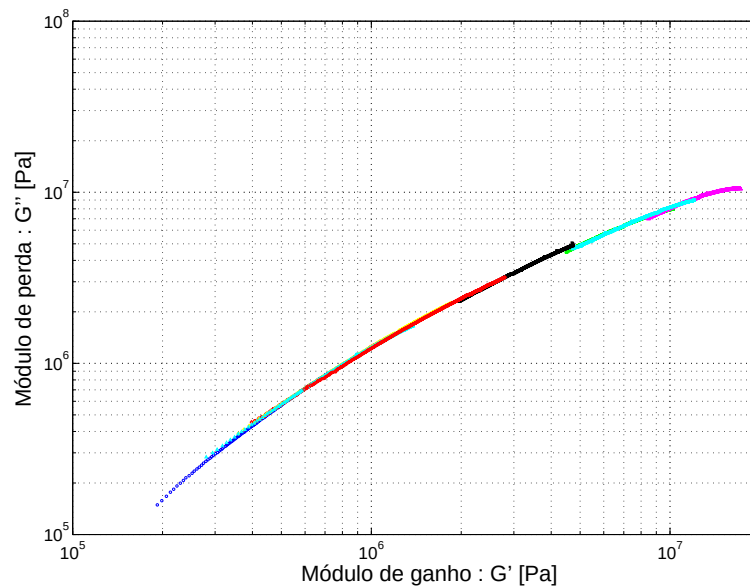


Figura 7.26: Representação *Wicket Plot* após filtragem espectral das funções de resposta em frequência medidas: Módulo de ganho / Módulo de perda

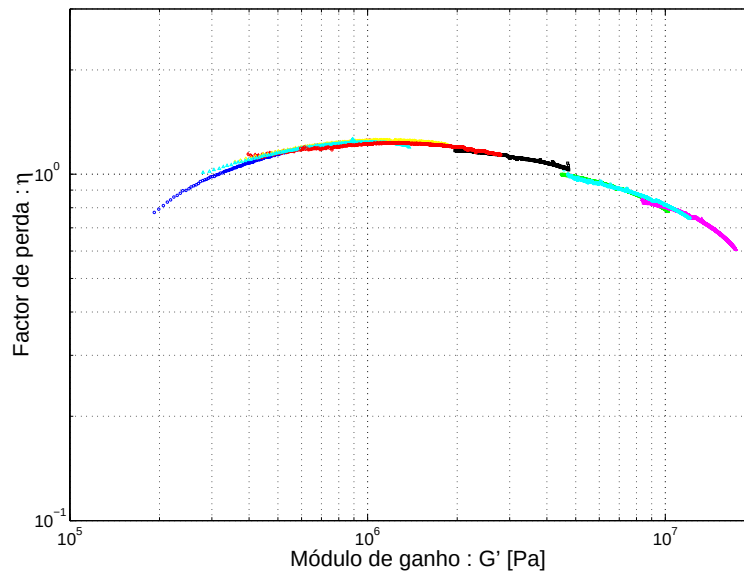


Figura 7.27: Representação *Wicket Plot* após filtragem espectral das funções de resposta em frequência medidas: Módulo de ganho / Factor de perda

As figuras 7.28 e 7.29 representam o nomograma do material 3M ISD112 determinado experimentalmente através dos provetes A e B, respectivamente, nos quais o conjunto de pontos coloridos representa o módulo complexo determinado pelo processo de caracterização experimental desenvolvido e a curva a preto representa o nomograma original fornecido pelo fabricante.

Como se pode verificar, existe uma boa concordância entre o nomograma determinado experimentalmente aplicando a metodologia apresentada neste capítulo e o nomograma original publicado pelo fabricante do material. No entanto, observa-se um afastamento gradual entre as duas curvas para valores de frequência reduzida superiores a 100Hz, tanto no módulo de ganho como no factor de perda. Esta diferença, considerando que o nomograma publicado pelo fabricante em 1990 é válido e representativo do material testado, pode ser devida à presença de um erro sistemático da própria montagem experimental ou da falta de representatividade da mesma ao modelo teórico considerado. Contudo, será necessário aplicar a metodologia e a montagem experimental propostas a outros materiais viscoelásticos para se poder verificar de uma forma fundamentada a sua representatividade e a sua validade.

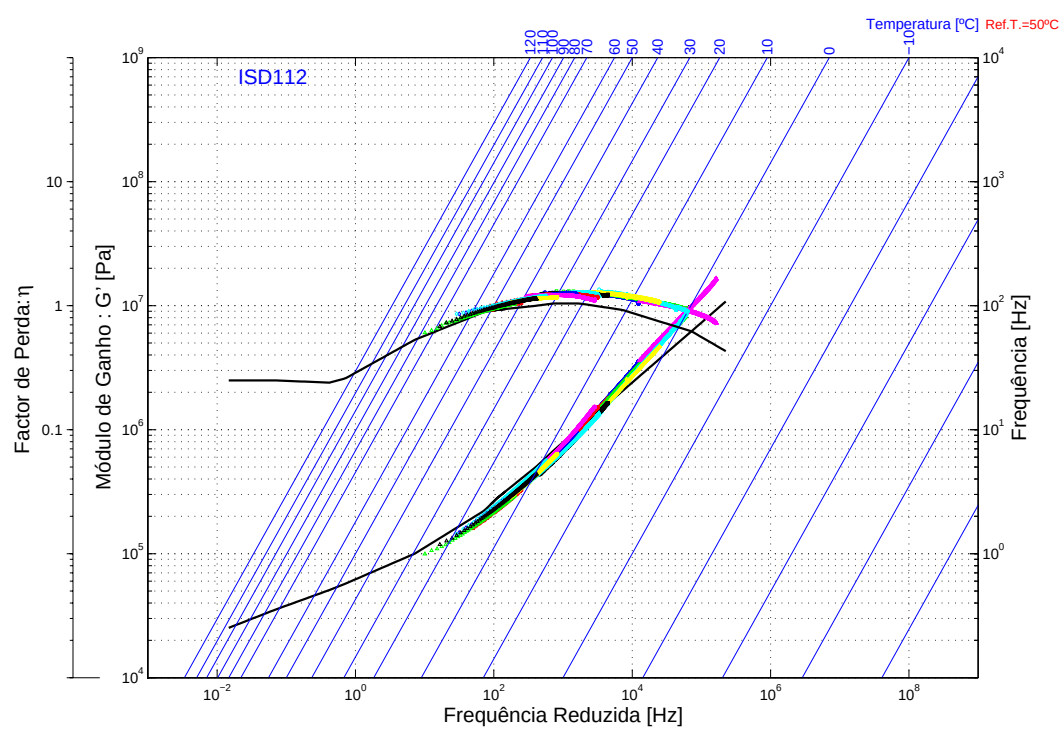


Figura 7.28: Nomograma de frequência reduzida do material caracterizado : Provete A

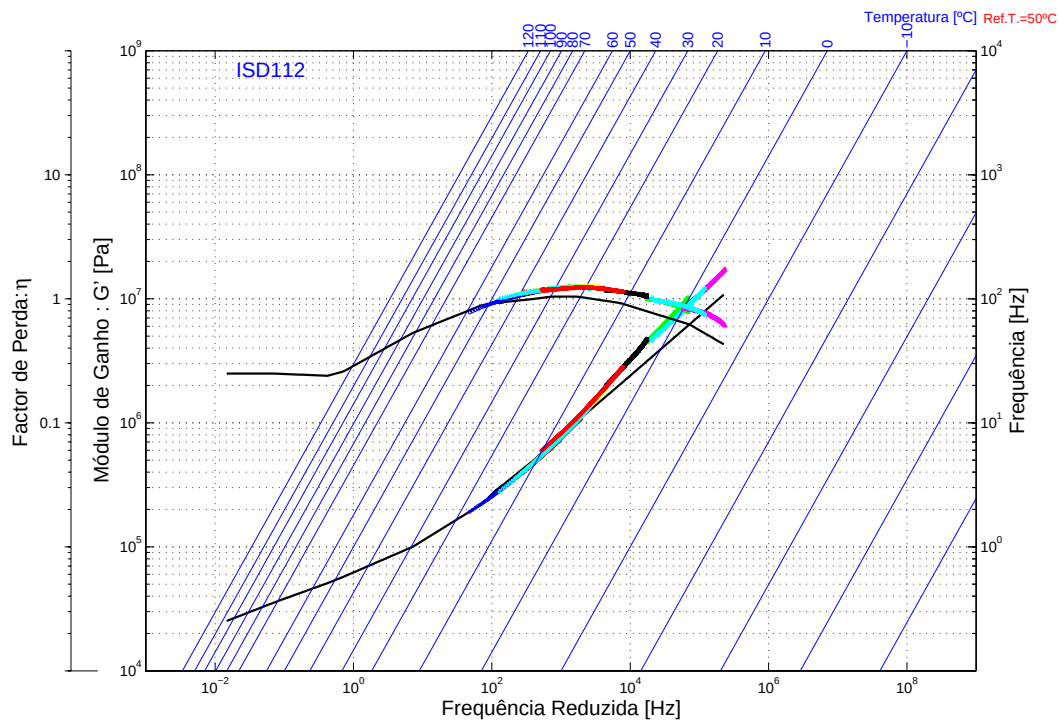


Figura 7.29: Nomograma de frequência reduzida do material caracterizado : Provete B

7.11 Conclusões

Neste capítulo foi desenvolvido um sistema de caracterização experimental do módulo complexo de materiais viscoelásticos, tendo como requisito principal o desenvolvimento da montagem experimental com base num modelo discreto com um ou dois graus de liberdade.

Embora as metodologias de caracterização baseadas na análise da perturbação de vigas tratadas seja a principal forma de determinação do módulo complexo de materiais viscoelásticos, um sistema de caracterização baseado num modelo discreto permite evitar a maior parte das limitações da metodologia das vigas. De facto, a medição directa da rigidez equivalente de um provete de material viscoelástico, para além de caracterizar o comportamento do próprio material e não a perturbação por ele causada, permite um maior controlo das variáveis envolvidas e evita as aproximações devidas às hipóteses simplificativas das equações das vigas compósitas.

Todavia, obter na prática uma montagem experimental que represente convenientemente

o modelo teórico estabelecido não é fácil, tendo sido neste trabalho verificada essa dificuldade. O elevado amortecimento do material, o seu reduzido módulo de ganho, o difícil controlo dos graus de liberdade espúrios e a reduzida relação sinal/ruído das medições possíveis nas montagens experimentais desenvolvidas são responsáveis pelo insucesso dos primeiros sistemas desenvolvidos.

A montagem experimental proposta permite, por um lado, evitar algumas dessas dificuldades, nomeadamente a remoção do efeito dos graus de liberdade não considerados no modelo teórico através de uma forma de guiamento, e, por outro, simplificar a metodologia de caracterização, desde o fabrico dos provetes ao procedimento de medição da resposta dinâmica do sistema experimental. O elevado valor da massa móvel da montagem permite baixar consideravelmente a frequência do modo natural segundo o grau de liberdade considerado, enquadrando a gama de frequências representativa da resposta do sistema na zona das baixas frequências.

A montagem da base do sistema no bloco de granito apoiado em quatro blocos cilíndricos de silicone, para além de baixar significativamente as frequências naturais dos modos de corpo rígido do conjunto, permite atenuar consideravelmente a transmissão de vibração do exterior para o sistema experimental em análise. Todavia, a elevada massa e a grande dimensão do bloco de suporte dificultam o manuseamento do conjunto e a sua inserção num ambiente com temperatura controlada. Para além disso, a elevada inércia térmica do bloco de granito dificulta o equilíbrio térmico dentro do provete de material viscoelástico, exigindo um tempo de estágio considerável (2-3 horas) para homogeneização da temperatura.

Recorrendo à montagem experimental proposta, foram realizados ensaios numa gama de temperaturas entre 1 e 35°C utilizando dois provetes com espessuras semelhantes e áreas distintas. A distribuição do módulo de corte complexo obtida é muito aproximada do nomograma fornecido pelo fabricante do material, nomeadamente na gama de frequências e de temperaturas consideradas na análise experimental de validação do elemento finito documentada nos capítulos seguintes.

Apesar dos promissores resultados obtidos, entende-se por necessário um trabalho complementar de análise sobre a representatividade da montagem e validade dos resultados obtidos com a mesma, caracterizando vários materiais viscoelásticos para os quais se possua uma caracterização válida que possa ser usada como referência. A utilização de uma

câmara termostática com elevada precisão de temperatura e capacidade de desumidificação torna-se essencial na aplicação da metodologia e montagem experimental propostas.

Capítulo 8

Validação experimental dos modelos numéricos em tratamentos mono-camada

Neste capítulo é apresentada uma metodologia experimental de validação dos modelos de elementos finitos propostos para a simulação de tratamentos mono-camada. É inicialmente apresentada a metodologia experimental aplicada e as características dos provetes experimentais utilizados no estudo. O processo de validação dos resultados numéricos com base nos dados experimentais é realizado através da comparação dos modelos de resposta em frequência directamente obtidos no estudo experimental e na análise numérica pelo método de elementos finitos por aplicação de um método de análise directa em frequência. A comparação é realizada quer por via gráfica, sobrepondo as funções de resposta em frequência obtidas experimental e numericamente em cada um dos provetes, quer pela aplicação de indicadores de correlação de modelos de resposta em frequência, com o objectivo de quantificar o nível de correlação entre os modelos e analisar a contribuição individual de cada uma das funções de resposta em frequência no nível de correlação global.

8.1 Introdução

De forma a validar os elementos finitos utilizados neste estudo, em especial o modelo proposto, foi desenvolvido um trabalho experimental em provetes com tratamentos viscoelásticos mono-camada, superficiais com restrição e integrados, com o intuito de obter funções de resposta em frequência experimentais para comparar com o modelo de resposta em frequência gerado numericamente pelo método dos elementos finitos.

O modelo de resposta em frequência numérico é obtido através de uma análise directa em frequência (Capítulo 3) recorrendo ao método do módulo complexo (Capítulo 3) para introduzir as propriedades do material viscoelástico utilizado nos tratamentos de amortecimento. O módulo complexo é retirado directamente do nomograma de frequência reduzida do material usando o princípio da correspondência da frequência-temperatura.

8.2 Provetes do estudo experimental

De forma a validar os modelos de elementos finitos propostos para condições reais de tratamento, recorreu-se a um conjunto de provetes com tratamento viscoelástico desenvolvidos e analisados por Moreira [155]. Estes provetes foram produzidos a partir de placas de alumínio, sobre as quais foram aplicados tratamentos superficiais e integrados usando camadas finas de material viscoelástico.

Para desenvolver a análise de validação experimental dos modelos numéricos, foram utilizados cinco provetes diferentes, ilustrados na Figura 8.1 e cujas características estão resumidas na Tabela 8.1, sendo dois deles provetes de tratamento superficial com restrição (provetes C1 e C2) e os restantes três de tratamento integrado (provetes I1, I2 e I3). Todos os provetes utilizam uma camada viscoelástica de 3M ISD112 que é um material comercial de aplicação específica em tratamentos de amortecimento viscoelástico numa gama de temperaturas compreendida entre 0 e 60°C.

As placas base foram obtidas a partir de chapa de liga de alumínio 1050, cujas propriedades são apresentadas na Tabela 8.2. O tratamento viscoelástico com restrição presente nos provetes foi obtido por aplicação de um filme de tratamento da 3M (3M SJ 2052), cuja camada viscoelástica é constituída pelo polímero de base acrílica



Figura 8.1: Provetes com tratamento mono-camada utilizados no estudo de validação

Tabela 8.1: Características dos provetes experimentais do estudo de validação

Proвете	Dimensões $a \times b$ [mm]	H_1 [mm]	H_2 [mm]	H_3 [mm]
C1	298x197	2.0	0.127	0.254
C2	297x197	2.0	0.127	0.203
I1	298x198	1.0	0.127	1.0
I2	298x198	1.0	0.254	1.0
I3	298x198	1.0	0.381	1.0

ISD112 (Apêndice F) e a camada de restrição é formada por uma fina placa de alumínio. Os provetes com tratamento integrado, provetes I1, I2 e I3, são constituídos por duas placas de alumínio intercaladas por um filme de tratamento da 3M (3M SJ 2015) baseado no mesmo polímero dos tratamentos anteriores.

Tabela 8.2: Propriedades dos materiais aplicados nos provetes

Material	Módulo de <i>Young</i> [Pa]	Massa volúmica [Kg/m ³]	Coefficiente de <i>Poisson</i>
Alumínio	70E9	2710	0.32
3M ISD112	ref. [226]	1140	0.49

8.3 Metodologia experimental

Os provetes foram suspensos num pórtico rígido através de elásticos (Figura 8.2) com o intuito de obter condições de fronteira próximas das condições de corpo livre consideradas no modelo numérico. Os elásticos foram colados à placa, utilizando para o efeito uma cola de cianoacrilato, na proximidade das linhas nodais do 4º modo natural de vibração (modo de flexão com duas linhas nodais verticais; Apêndice J).

A placa foi discretizada espacialmente através de uma malha de medição com 25 pontos, conforme ilustrado na Figura 8.2.

Para introduzir uma excitação pontual aleatória no ponto 17, recorreu-se ao excitador electromagnético LDS201¹ e usou-se um sinal de ruído branco na gama de frequências compreendidas entre 0 e 400Hz gerado pelo analisador espectral BK2035. A ligação do excitador à placa foi realizada através de um haste de arame de aço com dimensões e características semelhantes à haste nº1 (Apêndice I). A ligação entre o terminal da haste e o ponto de excitação foi realizada por intermédio da célula de carga BK8200-312 (Figura 8.3), utilizando um adesivo de cianoacrilato na ligação à superfície da placa. De forma a minimizar a interferência da ligação da célula de carga e a minimizar a massa activa da mesma, colou-se directamente a extremidade roscada do transdutor à placa suspensa.

¹As especificações do equipamento experimental são apresentadas no Apêndice G.

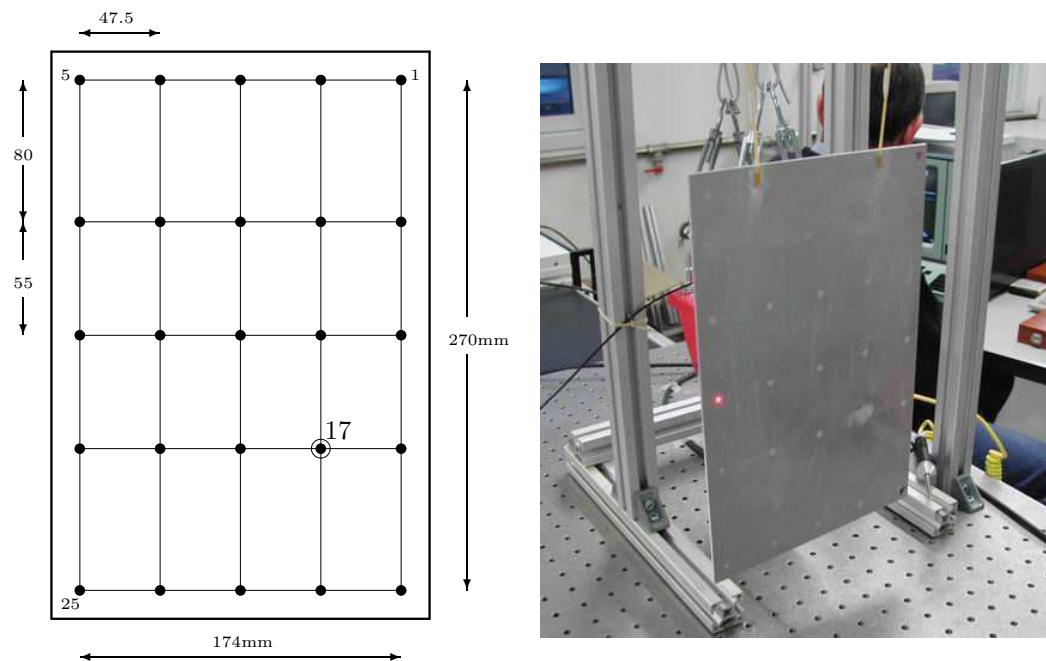


Figura 8.2: Malha de pontos de medição e suspensão do provete

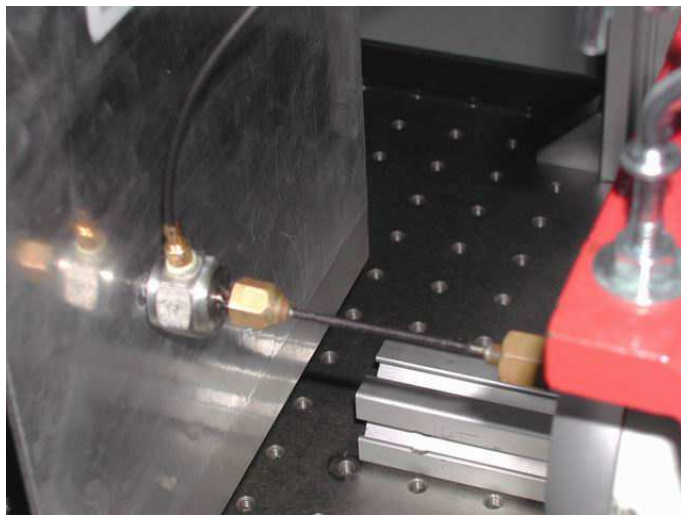


Figura 8.3: Excitação do provete - Haste de ligação e célula de carga

A resposta da placa, avaliada sob a forma da velocidade segundo a normal à sua superfície, foi medida em cada um dos 25 pontos da malha através do vibrômetro laser, evitando desta forma os efeitos localizados da massa de um acelerômetro.

A aquisição e tratamento dos sinais dos dois transdutores, célula de carga e vibrômetro laser, foi realizada através do analisador espectral BK2035, permitindo calcular as 25 funções de resposta em frequência correspondentes à excitação pontual do ponto 17 e medição em todos os 25 pontos da malha definida. O par de transdutores de medição foi previamente calibrado, conforme documentado no Apêndice H.

8.4 Efeito da temperatura

Um estudo numérico prévio permitiu evidenciar a extrema importância da caracterização das condições ambientais do ensaio, nomeadamente a temperatura a que este decorre. Assim, utilizou-se um termopar para medir a temperatura durante cada medição, tentando sempre manter condições isotérmicas durante a análise de cada um dos provetes.

Não existindo na altura do ensaio uma câmara ambiental para controlar a temperatura durante o estudo experimental, apenas foi possível obter resultados experimentais às temperaturas de 11.5°C e 17.5°C para os provetes C1 e I2 e apenas à temperatura de 17.5°C para os restantes provetes.

A Figura 8.4 representa as funções de resposta em frequência directas, medidas no ponto 17, obtidas experimentalmente para o provete I2 às duas temperaturas consideradas. Como se pode constatar pela diferença existente entre as duas funções de resposta em frequência medidas, a temperatura assume um papel preponderante no desempenho dos tratamentos viscoelásticos.

No decorrer do estudo apresentado neste capítulo, a única preocupação em relação a este parâmetro é restrita à necessidade de caracterizar convenientemente o seu valor e providenciar que este não se altere significativamente durante a análise completa de cada provete, ou seja, é necessário que a temperatura a que se desenrola cada uma das análises seja conhecida e mantida dentro de um pequeno intervalo de variação ($<0.5^{\circ}\text{C}$).

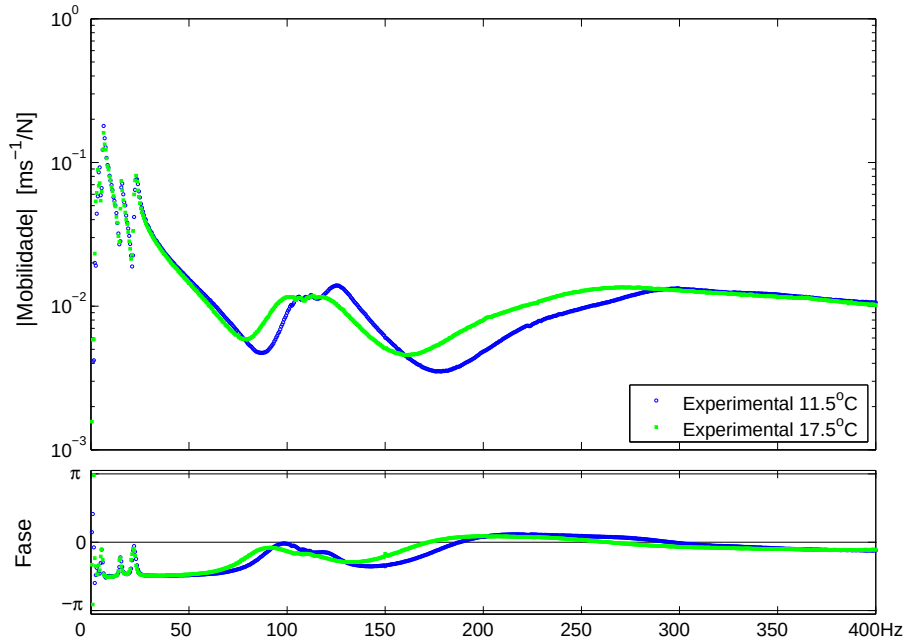


Figura 8.4: Efeito da temperatura na resposta dinâmica do provete I2

8.5 Resultados numéricos

Para validar os modelos de elementos finitos em análise, incluindo o modelo *layerwise* proposto, é necessário comparar os modelos de resposta em frequência obtidos pelas duas vias, a experimental que serve de base à validação e a numérica obtida pela aplicação do método de elementos finitos recorrendo aos modelos combinados descritos no Capítulo 3 e ao elemento finito proposto. Assim, a análise numérica dos provetes envolvidos no estudo foi realizada utilizando todos os modelos de elementos finitos em análise, incluindo os modelos combinados (modelo 1, modelo 2 e modelo 3) e o modelo 4 que utiliza o elemento finito proposto baseado na teoria *layerwise*. Dentro das variantes propostas para este elemento, aplicou-se a variante **layw4m** no cálculo da matriz de rigidez e uma formulação de massa consistente com interpolação bilinear do campo de velocidades (BLC).

O estudo numérico, utilizando os modelos descritos, foi desenvolvido, não só em ambiente **Matlab**[®], recorrendo à ferramenta **SDT**[®], mas também utilizando o software comercial de elementos finitos **MSC.Nastran**[™]. Em ambos os ambientes de análise numérica foi utilizada a mesma malha de elementos finitos, constituída por 792 elementos e 851 nós, a qual foi

gerada no pré-processador do MSC.Nastran™ e importada para ambiente Matlab® usando rotinas de importação do SDT®.

Todos os modelos combinados baseados na associação de elementos finitos convencionais foram analisados em MSC.Nastran™, recorrendo aos elementos finitos que integram este software e utilizando integração selectiva nos elementos finitos das camadas externas. Por outro lado, o modelo proposto apenas foi utilizado em Matlab®. O modelo 2 foi também utilizado em ambiente Matlab® recorrendo aos elementos finitos implementados na ferramenta SDT®.

Da análise efectuada, verifica-se que os resultados numéricos obtidos pelas duas vias são idênticos, independentemente do modelo e software aplicados. Assim, ao longo deste capítulo os resultados numéricos obtidos pelos vários modelos e ambientes de cálculo considerados serão apresentados numa forma genérica designados simplesmente por resultados numéricos.

8.6 Comparação gráfica dos resultados

Comparando directamente os modelos de resposta em frequência obtidos por via experimental e numérica, em vez de outros parâmetros como, por exemplo, os parâmetros modais, obtém-se uma comparação e validação mais fidedigna, já que se evitam possíveis erros derivados dos procedimentos de identificação modal. Para além disso, a aplicação da análise directa em frequência permite utilizar o método do módulo complexo, constituindo assim uma forma simples e directa de representar convenientemente o material viscoelástico integrado nos provetes.

Sobrepondo as curvas das funções de resposta em frequência, obtidas pelas duas vias em comparação, é possível avaliar a representatividade fornecida pelos modelos numéricos à caracterização do comportamento dinâmico das placas analisadas experimentalmente.

Provete C1 - Tratamento superficial com restrição [2.0/0.127/0.254]

As figuras 8.5 e 8.6 apresentam as funções de resposta em frequência directas, obtidas experimentalmente e pelos modelos numéricos em análise, para 11.5°C e 17.5°C, respectivamente.

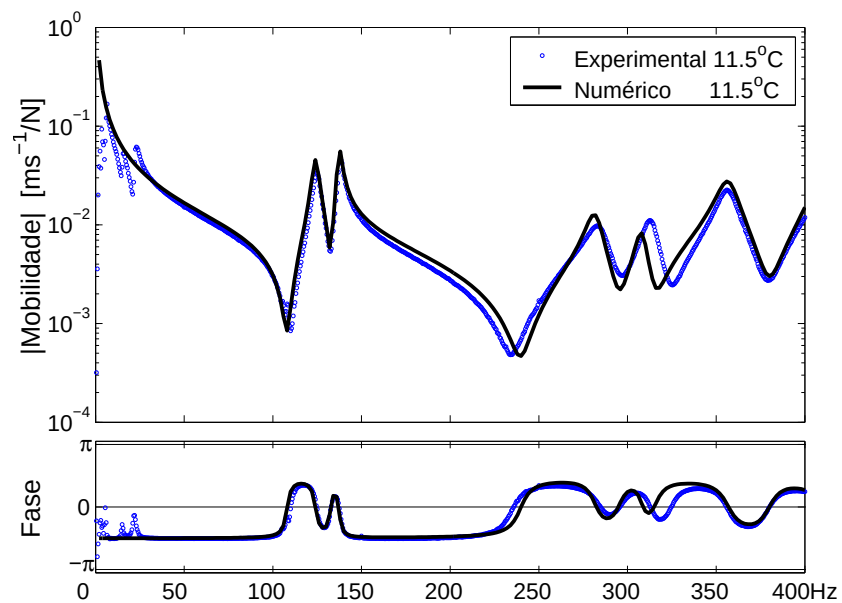


Figura 8.5: Provete C1 - Funções de resposta em frequência directas a 11.5°C

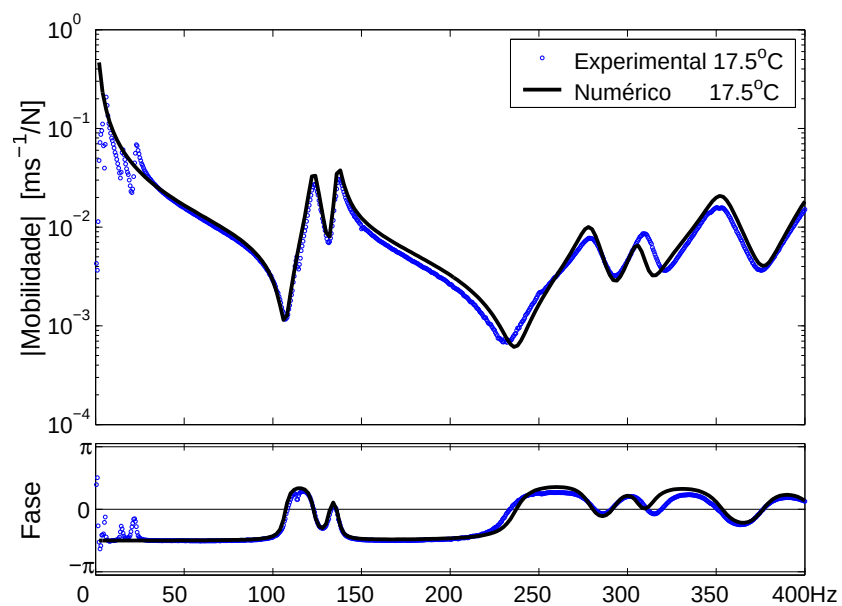


Figura 8.6: Provete C1 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C

Como se pode constatar pelos gráficos apresentados, os resultados obtidos numericamente são representativos das funções de resposta em frequência experimentais. De facto, verifica-se que os resultados numéricos, não somente nas curvas representadas mas também para as restantes funções de resposta em frequência, se ajustam razoavelmente aos pontos experimentais.

Como esperado, existe uma fraca correlação na zona das baixas frequências resultante do efeito dos modos de corpo rígido do modelo experimental. Este efeito deve-se à impossibilidade de se obter experimentalmente as condições de fronteira de corpo livre teóricas consideradas no modelo numérico, existindo sempre o efeito da suspensão das placas que aumenta ligeiramente as frequências naturais de vibração (numericamente nulas) dos seis modos de corpo rígido da montagem. No entanto, a frequência natural experimental de corpo rígido mais elevada encontra-se bem separada da primeira frequência natural estrutural do provete, não introduzindo qualquer influência na função de resposta em frequência na gama em análise.

De referir que, não tendo sido possível caracterizar de forma isolada o material que constitui a camada de restrição destes tratamentos nem obter essa informação do fabricante do tratamento, foram consideradas as mesmas propriedades do alumínio que constitui a placa base. Uma vez que neste tipo de tratamentos a restrição é a principal responsável pela deformação imposta na camada viscoelástica, uma caracterização errada das suas propriedades introduz um erro significativo no cálculo da energia dissipada. Este facto pode justificar o gradual afastamento entre as duas curvas na vizinhança das frequências naturais dos modos de mais elevada ordem, para os quais o efeito da restrição é mais significativo.

Para além deste factor de incerteza, verifica-se que as funções de resposta em frequência em comparação apresentam uma discrepância mais significativa na vizinhança do 4º modo natural de vibração, que pode resultar do efeito da suspensão adoptada e da ligação ao excitador.

Provete C2 - Tratamento superficial com restrição [2.0/0.127/0.203]

O gráfico da Figura 8.7 representa, de forma idêntica à apresentada nas figuras anteriores, os resultados obtidos para o provete C2.

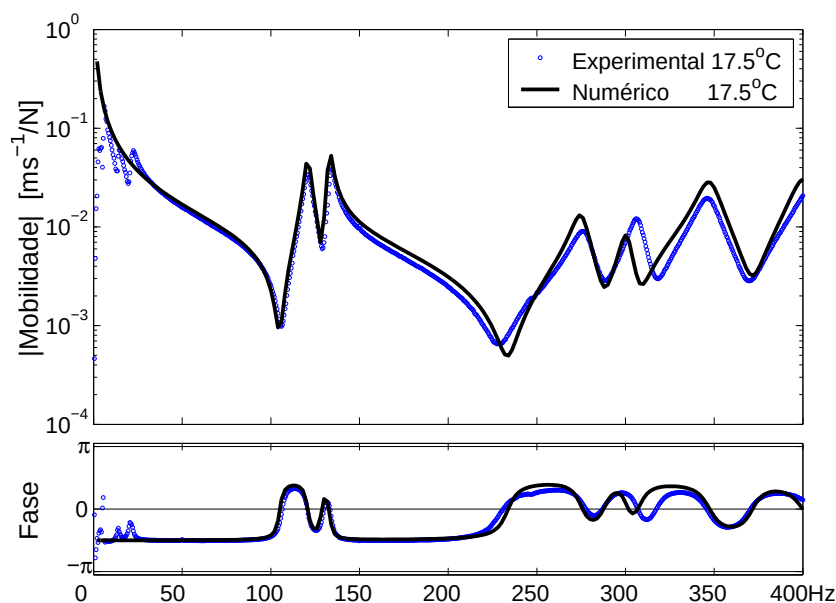


Figura 8.7: Provete C2 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C

Tal como no provete anterior, a influência da suspensão do modelo experimental é evidente na zona das baixas frequências. Na restante gama de frequências verifica-se existir uma correlação satisfatória entre os dados experimentais e os resultados da simulação numérica obtida pela aplicação dos modelos de elementos finitos propostos e pelo processo de análise adoptado.

Provete I1 - Tratamento integrado [1.0/0.127/1.0]

Este provete, formado por uma estrutura *sandwich* com núcleo viscoelástico, representa uma forma muito eficaz de tratamento viscoelástico. Dada a posição central da camada dissipativa, esta é fortemente deformada em corte, permitindo dissipar grandes quantidades de energia de vibração, e assim introduzir uma capacidade considerável de amortecimento.

O gráfico da Figura 8.8 evidencia a elevada eficiência deste tipo de tratamento, bem como a capacidade de os modelos de elementos finitos em análise representarem correctamente a elevada deformação de corte que ocorre na camada central da estrutura *sandwich*.

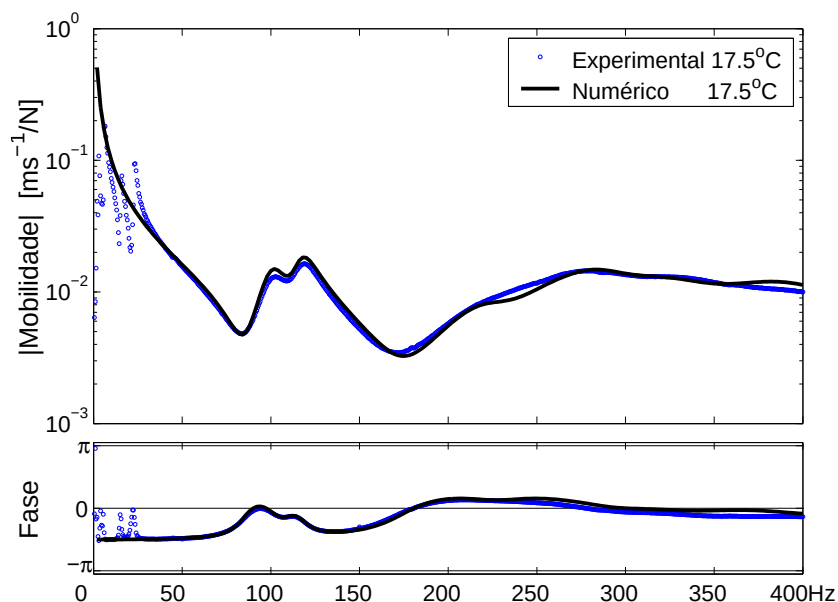


Figura 8.8: Provete I1 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C

Provete I2 - Tratamento integrado [1.0/0.254/1.0]

As funções de resposta em frequência medidas experimentalmente para as duas temperaturas consideradas, 11.5°C e 17.5°C, e geradas numericamente pelo método de elementos finitos encontram-se representadas nos gráficos das figuras 8.9 e 8.10, respectivamente.

Para ambas as temperaturas, verifica-se existir uma boa concordância entre as funções mobilidade obtidas experimentalmente e calculadas numericamente recorrendo aos modelos numéricos em análise.

Tal como o anterior, este provete apresenta uma elevada capacidade de amortecimento em resultado da posição particular e vantajosa da camada viscoelástica.

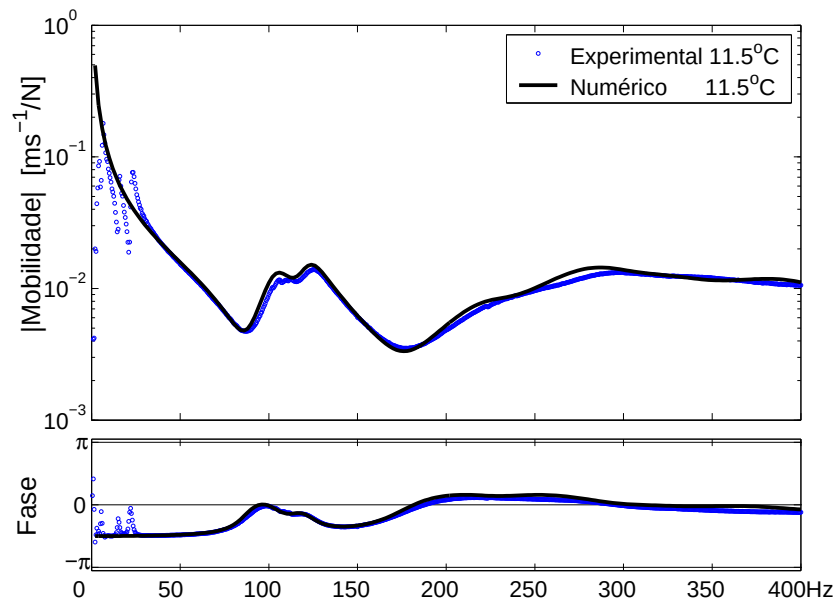


Figura 8.9: Provete I2 - Funções de resposta em frequência directas a 11.5°C

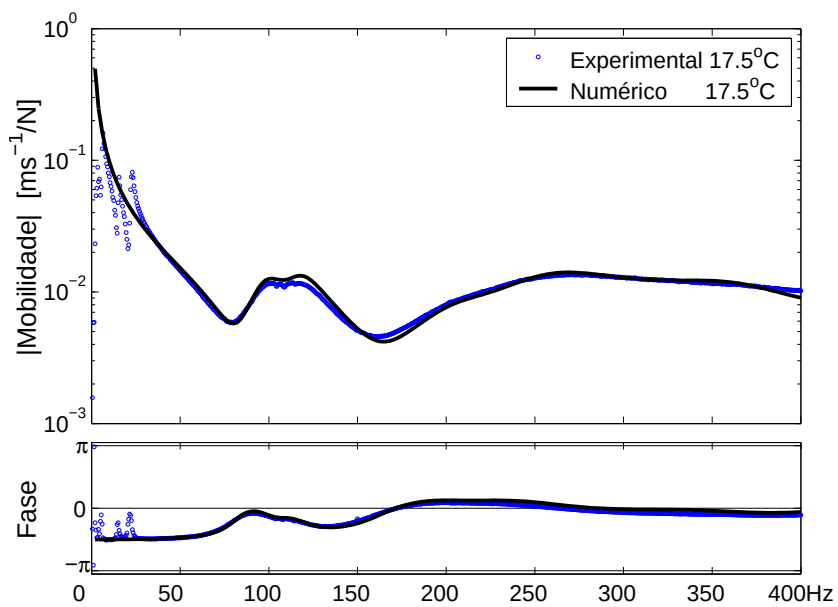


Figura 8.10: Provete I2 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C

Provete I3 - Tratamento integrado [1.0/0.381/1.0]

A Figura 8.11 representa a função de resposta em frequência medida experimentalmente e gerada numericamente para o provete I3 à temperatura de 17.5°C.

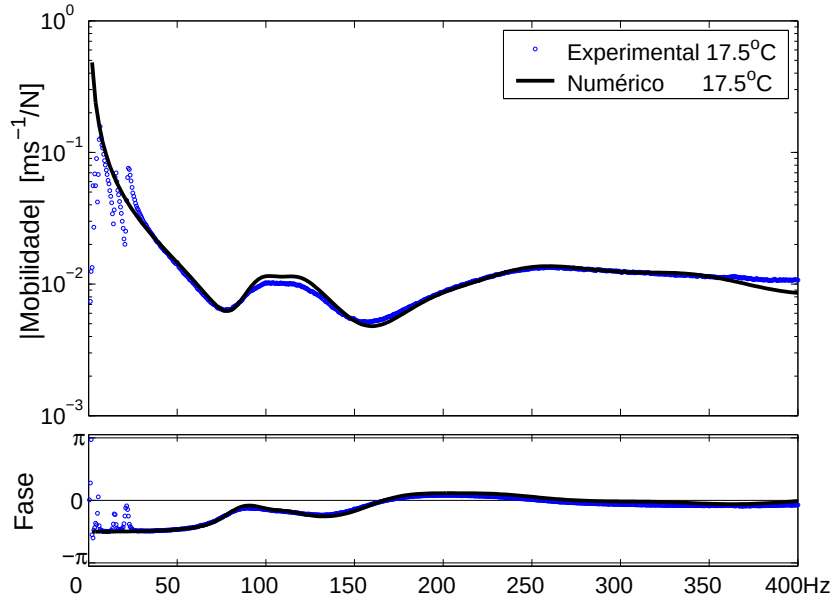


Figura 8.11: Provete I3 - Funções de resposta em frequência directas a 17.5°C

Este provete apresenta um amortecimento muito elevado, constatando-se que a capacidade de amortecimento dos provetes com tratamento integrado aumenta com o aumento da espessura da sua camada viscoelástica. No entanto, não se pode concluir desta observação que o amortecimento obtido pela camada viscoelástica varia directamente com a sua espessura.

Na realidade, a eficiência dos tratamentos viscoelásticos com restrição ou integrados depende não só do volume da camada viscoelástica, mas principalmente da deformação de corte que lhe é imposta. A eficiência destas configurações é, assim, determinada pelo efeito combinado das espessuras da camada viscoelástica e da camada de restrição, do módulo extensional do material da restrição e do módulo de corte do material viscoelástico, como definido pelo parâmetro de corte (Apêndice A).

Pela análise conjunta dos resultados deste grupo de provetes, dos quais apenas se apresentam as funções de resposta em frequência directas relativas ao ponto 17, e com

base na simples comparação gráfica por inspecção visual, é possível validar os modelos numéricos analisados no Capítulo 3 e o modelo numérico proposto e formulado com base na teoria *layerwise*. Esta concordância verifica-se também para as restantes 24 funções de resposta em frequência obtidas, como se poderá constatar através dos indicadores de correlação apresentados na secção seguinte.

8.7 Comparação dos resultados através de indicadores de correlação

Apesar da representação das curvas sobrepostas, como realizado na secção anterior, permitir comparar os resultados obtidos pela aplicação do modelo numérico com os dados medidos experimentalmente, esta forma de comparação e consequente validação dos modelos numéricos apresenta um carácter subjectivo e meramente qualitativo. Assim, torna-se necessário recorrer a procedimentos de comparação quantitativa e objectiva, usando indicadores de correlação de modelos de resposta em frequência.

8.7.1 Indicadores de correlação de funções de resposta em frequência

Os indicadores de correlação de funções de resposta em frequência, muitos deles baseados nos indicadores de correlação de modelos modais (MAC e COMAC), são relativamente recentes, sendo a maioria das publicações sobre o assunto inseridas num contexto de ajuste experimental de modelos numéricos (*updating*). Por este motivo, julga-se conveniente apresentar uma descrição resumida dos indicadores aplicados na validação dos modelos numéricos.

Frequency Domain Assurance Criterion (FDAC)

O indicador *Frequency Domain Assurance Criterion* (FDAC), apresentado por Pascual *et al.* [228], é equivalente ao indicador MAC aplicado sobre o modelo modal [90], sendo definido por [227, 228]:

$$\text{FDAC}(\omega_A, \omega_X) = \frac{\left| \{H^X(\omega_X)\}^H \{H^A(\omega_A)\} \right|^2}{\left(\{H^X(\omega_X)\}^H \{H^X(\omega_X)\} \right) \left(\{H^A(\omega_A)\}^H \{H^A(\omega_A)\} \right)} \quad (8.1)$$

onde $\{H^X(\omega_X)\}$ e $\{H^A(\omega_A)\}$ representam, respectivamente, o vector de funções de resposta em frequência medidas para a frequência ω_X e o vector de funções de resposta em frequência obtidas numericamente para a frequência ω_A .

O resultado deste indicador é um valor real compreendido entre 0 (nenhuma correlação) e 1 (correlação perfeita), sendo insensível à diferença de fase existente entre as funções de resposta em frequência em análise. Para resolver esta restrição, é proposta uma versão modificada deste indicador [227–231] que permite verificar se ambas as funções de resposta em frequência estão em fase ($0 < \text{FDAC} < 1$) ou não ($-1 < \text{FDAC} < 0$). Todavia, uma análise preliminar da representação da fase das funções de resposta em frequência em comparação, como a efectuada na secção anterior, permite também ultrapassar a limitação da forma original (8.1) deste indicador.

Este indicador de correlação fornece informação sobre a forma das funções de resposta em frequência no domínio da frequência, ou seja, permite essencialmente identificar variações nos valores das frequências naturais, variações de rigidez e de massa [227].

Frequency Response Assurance Criterion (FRAC)

O indicador *Frequency Response Assurance Criterion* (FRAC) [227, 231, 232] é definido pela expressão:

$$\text{FRAC}_{j\ell} = \frac{\left| \left\{ H_{j\ell}^X(\omega) \right\}^H \left\{ H_{j\ell}^A(\omega) \right\} \right|^2}{\left(\left\{ H_{j\ell}^X(\omega) \right\}^H \left\{ H_{j\ell}^X(\omega) \right\} \right) \left(\left\{ H_{j\ell}^A(\omega) \right\}^H \left\{ H_{j\ell}^A(\omega) \right\} \right)} \quad (8.2)$$

onde os vectores $\{H_{j\ell}^X(\omega)\}$ e $\{H_{j\ell}^A(\omega)\}$ contêm, respectivamente, a função de resposta em frequência experimental e numérica entre os graus de liberdade j e ℓ .

O critério FRAC é um indicador de correlação espacial, sensível às diferenças de amplitude, similar ao COMAC [90], mas calculado de uma forma semelhante ao MAC [231]. Este indicador permite identificar a contribuição de cada grau de liberdade na qualidade da correlação global entre os modelos de resposta em frequência a comparar, apresentando um valor real compreendido entre 0 (nenhuma correlação) e 1 (correlação perfeita).

Frequency Amplitude Assurance Criterion (FAAC)

O indicador *Frequency Amplitude Assurance Criterion* (FAAC) [232] é, tal como o anterior, um critério baseado no COMAC, sendo definido pela expressão:

$$\text{FAAC}_{j\ell} = \frac{2 \left| \left\{ H_{j\ell}^X(\omega) \right\}^H \left\{ H_{j\ell}^A(\omega) \right\} \right|}{\left(\left\{ H_{j\ell}^X(\omega) \right\}^H \left\{ H_{j\ell}^X(\omega) \right\} \right) + \left(\left\{ H_{j\ell}^A(\omega) \right\}^H \left\{ H_{j\ell}^A(\omega) \right\} \right)} \quad (8.3)$$

Tal como a FRAC, permite identificar a contribuição de cada função de resposta em frequência individual no nível de correlação global, fornecendo informação sobre a variação de amplitude entre os modelos de resposta em análise.

Global Shape Criterion (GSC)

O indicador *Global Shape Criterion* (GSC), recentemente proposto por Grafe [232] e Zang *et al.* [227], constitui uma função no domínio da frequência representativa da correlação entre os dois modelos de resposta considerando todos os graus de liberdade medidos. Sendo um indicador baseado no MAC, é insensível aos erros de escala, permitindo apenas identificar variações na forma da função de resposta [227, 233]. Este indicador é definido através da expressão:

$$\text{GSC}(\omega) = \frac{\left| \left\{ H^X(\omega) \right\}^H \left\{ H^A(\omega) \right\} \right|^2}{\left(\left\{ H^X(\omega) \right\}^H \left\{ H^X(\omega) \right\} \right) \left(\left\{ H^A(\omega) \right\}^H \left\{ H^A(\omega) \right\} \right)} \quad (8.4)$$

onde os vectores $\{H^X(\omega)\}$ e $\{H^A(\omega)\}$ representam, respectivamente, uma coluna da matriz das funções de resposta em frequência experimentais e numéricas.

Global Amplitude Criterion (GAC)

De forma a identificar as variações de amplitude é proposto o indicador *Global Amplitude Criterion* (GAC) [227, 232], definido por:

$$\text{GAC}(\omega) = \frac{2 \left| \left\{ H^X(\omega) \right\}^H \left\{ H^A(\omega) \right\} \right|}{\left(\left\{ H^X(\omega) \right\}^H \left\{ H^X(\omega) \right\} \right) + \left(\left\{ H^A(\omega) \right\}^H \left\{ H^A(\omega) \right\} \right)} \quad (8.5)$$

Este indicador apenas será unitário se as funções de resposta em frequência em comparação forem idênticas tanto na fase como na amplitude [232], permitindo identificar variações de amortecimento entre os modelos em análise [233].

Local Amplitude Criterion (LAC)

Tanto o GSC como o GAC constituem duas ferramentas de comparação de funções de resposta em frequência bastante úteis, na medida em que permitem identificar o nível de correlação global em função da frequência entre os modelos de resposta em comparação, evidenciando gamas de frequência com boa ou com má correlação.

Uma vez definida a função global, é possível definir o indicador local, designado por *Local Amplitude Criterion (LAC)* [227], da forma:

$$\text{LAC}_{j\ell}(\omega) = \frac{2 \left| \left\{ H_{j\ell}^X(\omega) \right\}^H \left\{ H_{j\ell}^A(\omega) \right\} \right|}{\left(\left\{ H_{j\ell}^X(\omega) \right\}^H \left\{ H_{j\ell}^X(\omega) \right\} \right) + \left(\left\{ H_{j\ell}^A(\omega) \right\}^H \left\{ H_{j\ell}^A(\omega) \right\} \right)} \quad (8.6)$$

Este indicador permite quantificar o nível de correlação entre duas funções de resposta em frequência individuais em função da frequência. Desta forma, é possível determinar as gamas de frequência com má correlação para cada um dos graus de liberdade e verificar se essas gamas são coincidentes para todos os graus de liberdade considerados.

8.7.2 Resultados obtidos pelos indicadores de correlação

Recorrendo aos indicadores de correlação entre modelos de resposta em frequência, são comparadas de uma forma quantitativa as funções de resposta em frequência geradas numericamente através dos modelos de elementos finitos em análise com as funções homólogas obtidas experimentalmente.

Provete C1 - Tratamento superficial com restrição [2.0/0.127/0.254]

As figuras 8.12 e 8.13 representam, sob a forma de um mapa colorido, a distribuição do indicador FDAC para o provete C1 medido e simulado para 11.5°C e 17.5°C, respectivamente. Através desta representação é possível identificar a discrepância que

existe na zona das baixas frequências, devida ao efeito dos modos de corpo rígido da montagem experimental, e verificar o nível de correlação ao longo da gama de frequências comparando a posição do valor máximo (zona vermelho escuro) com a diagonal da representação (linha a branco).

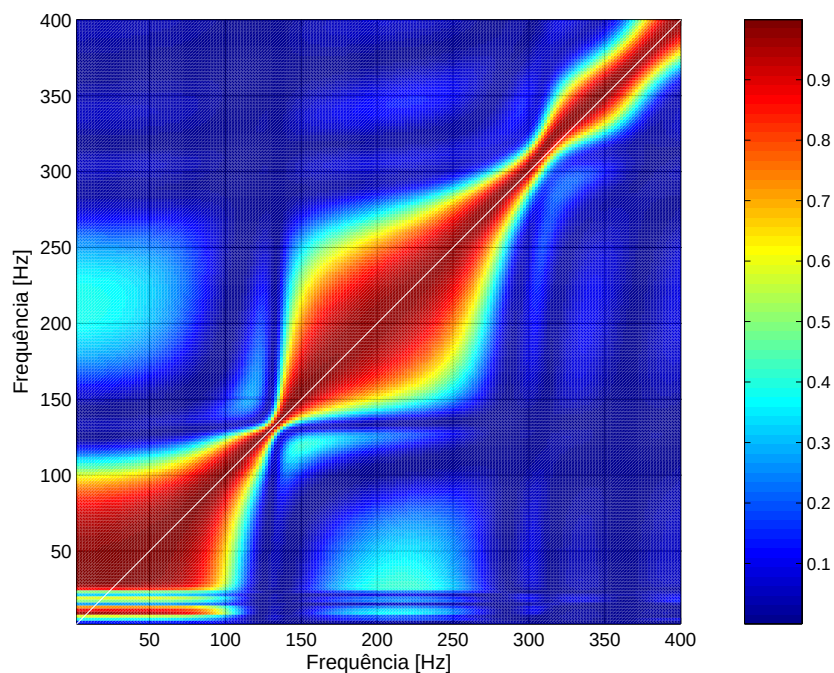


Figura 8.12: Provete C1 - Indicador FDAC (11.5°C)

Embora esta representação permita evidenciar de uma forma clara as gamas de frequências com má correlação, é possível obter a mesma informação através do indicador GSC, uma vez que este corresponde à distribuição do FDAC ao longo da sua diagonal [232], apresentando um custo computacional menor, tanto no cálculo como no armazenamento do resultado. Por este motivo, e embora este indicador tenha sido determinado e analisado para todos os provetes, omitir-se-á a representação do indicador FDAC para os restantes.

As figuras 8.14 e 8.15 representam os indicadores FRAC e FAAC calculados para este provete para as duas temperaturas consideradas, permitindo evidenciar qual a contribuição de cada um dos graus de liberdade no nível de correlação global dos dois modelos de resposta em análise. Através destes indicadores, é possível identificar eventuais falhas de representatividade dos modelos ou discrepância na localização entre as posições nodais do

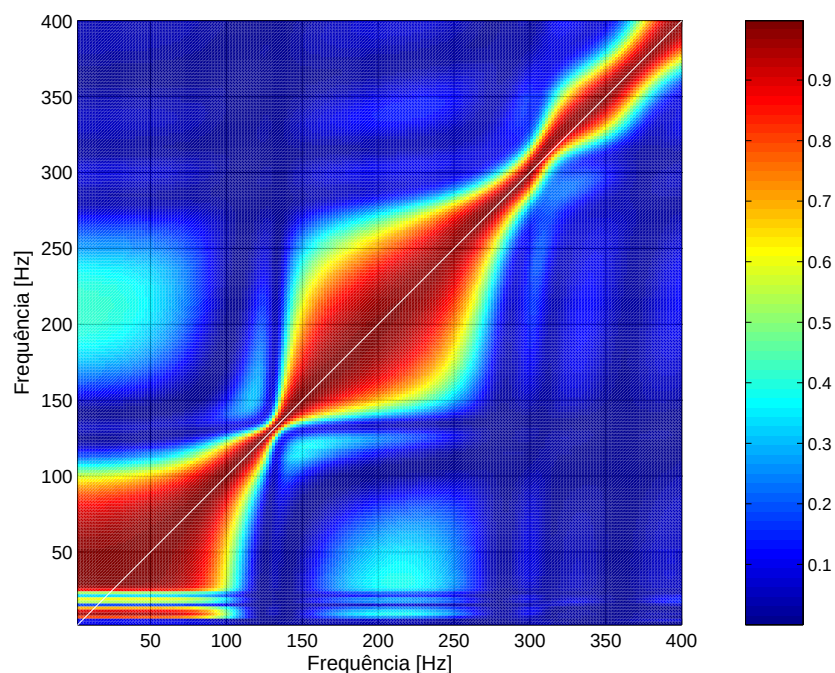


Figura 8.13: Provete C1 - Indicador FDAC (17.5°C)

modelo numérico e do modelo experimental. De forma a retirar o efeito dos modos de corpo rígido da montagem experimental, foi omitida a gama de frequências de 0 a 50Hz das funções de resposta em frequência utilizadas no cálculo destes indicadores.

As figuras 8.16 e 8.17 representam os indicadores GSC e GAC para o mesmo provete e para as temperaturas de 11.5°C e 17.5°C, sendo possível observar a fraca correlação verificada na zona das baixas frequências, resultante do já referido efeito dos modos de corpo rígido da montagem experimental.

Com base nos resultados obtidos, verifica-se existir uma boa concordância entre as funções de resposta em frequência calculadas numericamente com recurso aos modelos de elementos finitos analisados e as funções de resposta em frequência medidas nos provetes experimentais com tratamento viscoelástico.

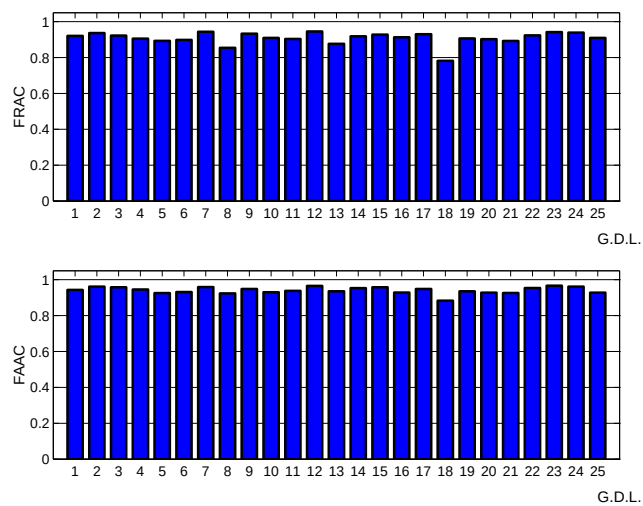


Figura 8.14: Provetes C1 - Indicadores FRAC e FAAC (11.5°C)

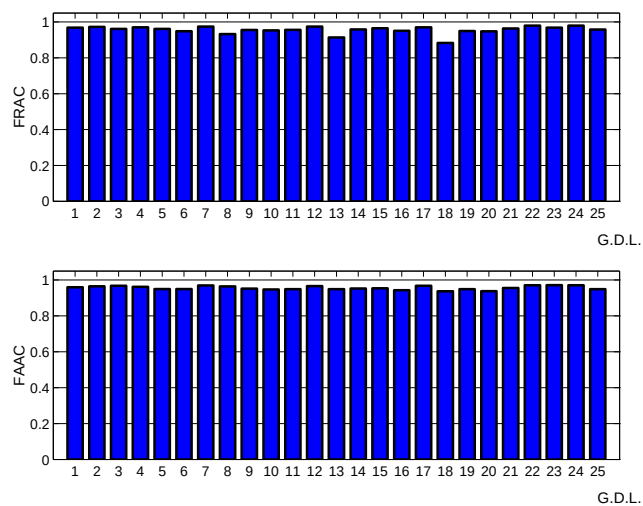


Figura 8.15: Provetes C1 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)

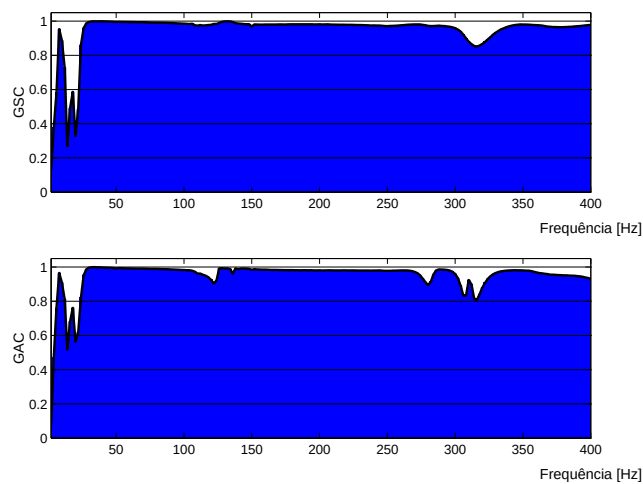


Figura 8.16: Provet C1 - Indicadores GSC e GAC (11.5°C)

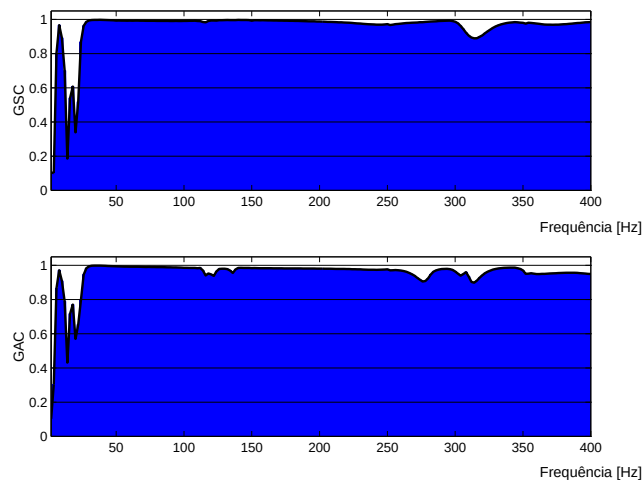


Figura 8.17: Provet C1 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)

Provete C2 - Tratamento superficial com restrição [2.0/0.127/0.203]

Seguindo a metodologia adoptada para o provete C1, representa-se na Figura 8.18 os indicadores FRAC e FAAC calculados para o provete C2 a uma temperatura de 17.5°C. De igual forma, o gráfico da Figura 8.19 representa os indicadores GSC e GAC para este provete.

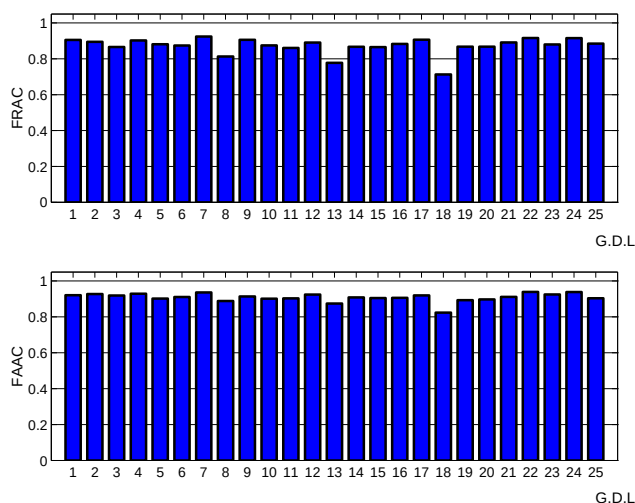


Figura 8.18: Provete C2 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)

Tal como no provete C1, verifica-se existir uma boa correlação entre as funções de resposta em frequência em comparação, verificando-se no entanto que, tal como no provete anterior, o grau de liberdade 18 apresenta um nível de correlação inferior. De forma a verificar as causas desta discrepância, recorreu-se ao indicador LAC para verificar a variação do nível de correlação para este grau de liberdade ao longo da frequência. Através da comparação da distribuição do indicador LAC determinado para este grau de liberdade com as distribuições do mesmo indicador para os restantes graus de liberdade, verificou-se que na gama de frequências compreendida entre 150 e 250Hz, este indicador apresenta valores muito baixos em ambos os provetes e para os graus de liberdade 8, 13 e 18. Este problema está certamente relacionado com a localização destes pontos sobre as linhas nodais do 1º e do 3º modo natural de vibração. Na gama referida, [150-250]Hz, o efeito é mais pronunciado devido ao elevado afastamento espectral entre o segundo e o terceiro modo natural de vibração, verificando-se que entre as funções de resposta em frequência

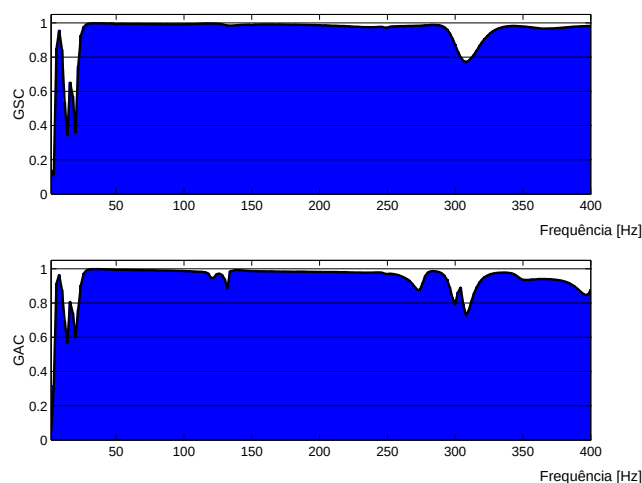


Figura 8.19: Provete C2 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)

numérica e experimental existe uma grande discrepância na posição da antirressonância entre as duas frequências naturais, o que altera significativamente a forma das curvas na sua vizinhança.

Provete I1 - Tratamento integrado [1.0/0.127/1.0]

A Figura 8.20 representa os indicadores FRAC e FAAC para o provete com tratamento integrado I1, verificando-se que estes indicadores são superiores a 90% para todos os graus de liberdade analisados, apresentando valores superiores a 98% para a maioria deles. Em relação aos indicadores GSC e GAC, representados na Figura 8.21, estes apresentam valores superiores a 90%, com excepção da banda estreita de baixas frequências que contém os modos de corpo rígido.

Verifica-se, ainda, que os indicadores de correlação obtidos para este provete apresentam valores superiores aos obtidos nos provetes com tratamento superficial. Este facto pode ser explicado pela correcta caracterização das propriedades dos materiais constituintes, sendo também de considerar que o elevado amortecimento presente neste tipo de provetes atenua as diferenças entre as funções de resposta em frequência, nomeadamente a sua forma.

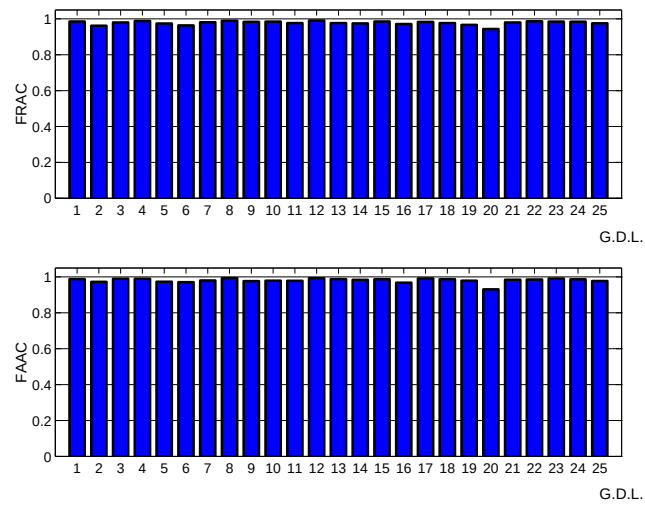


Figura 8.20: Provete I1 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)

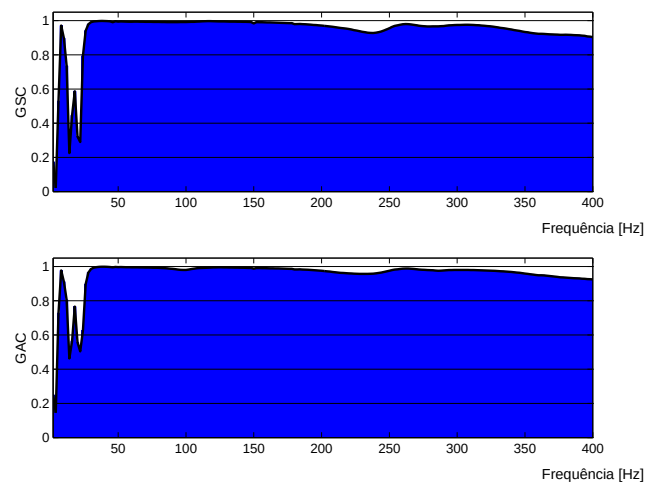


Figura 8.21: Provete I1 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)

Provete I2 - Tratamento integrado [1.0/0.254/1.0]

As figuras 8.22 e 8.23 representam os indicadores FRAC e FAAC calculados para o provete I2 para ambas as temperaturas consideradas, respectivamente 11.5°C e 17.5°C. Tal como no provete I1, verifica-se existir uma boa concordância global entre as funções de resposta em frequência medidas experimentalmente e as suas homólogas geradas numericamente. Na globalidade, estes indicadores apresentam valores superiores a 90%, sendo possível destacar o grau de liberdade 20 por apresentar o valor mais baixo em ambos os indicadores, o mesmo acontecendo para o provete anterior.

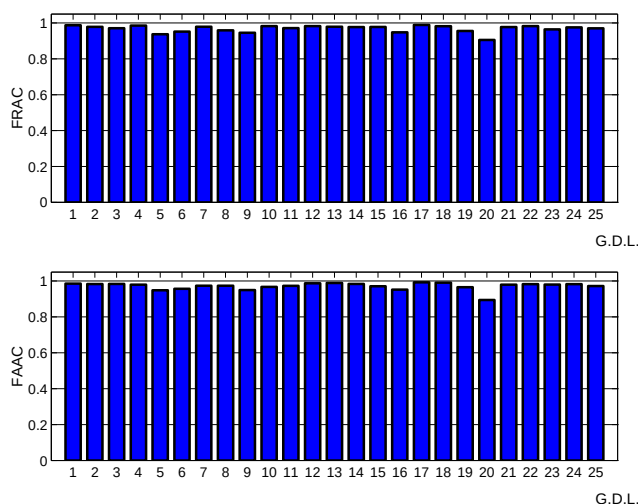


Figura 8.22: Provete I2 - Indicadores FRAC e FAAC (11.5°C)

Recorrendo novamente ao indicador LAC, verificou-se existir duas bandas de frequência com um baixo nível de correlação. A primeira gama de frequências, compreendida entre 125 e 200Hz, corresponde à vizinhança da antirressonância entre o segundo e o terceiro modo natural de vibração, enquanto que na segunda, abrangendo a zona das altas frequências, a partir dos 270Hz, as funções de resposta em frequência apresentam uma diferença considerável de magnitude, apesar de possuírem a mesma forma.

Os gráficos das figuras 8.24 e 8.25 representam os indicadores GSC e GAC calculados para este provete para as temperaturas de 11.5°C e 17.5°C, respectivamente. De acordo com a distribuição destes indicadores ao longo da frequência, constata-se que existe uma gradual

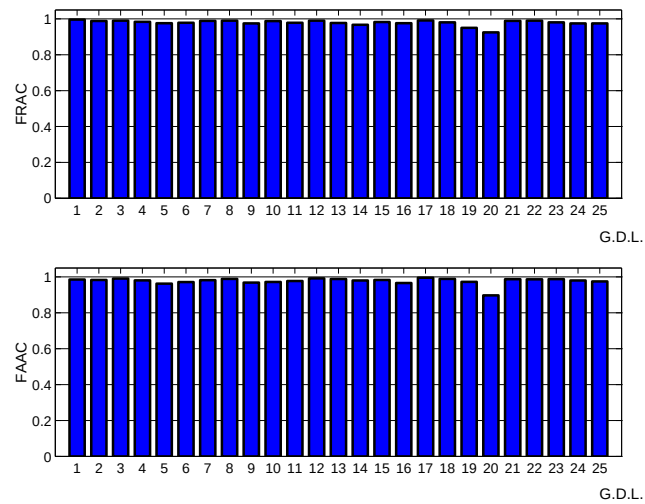


Figura 8.23: Provete I2 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)

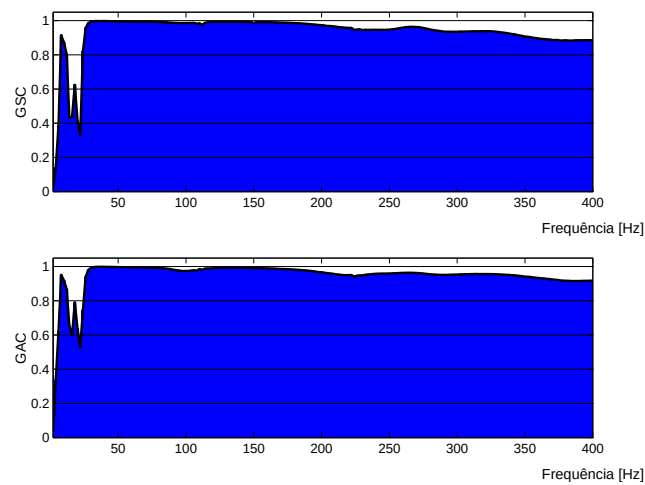


Figura 8.24: Provete I2 - Indicadores GSC e GAC (11.5°C)

redução do nível de correlação para as frequências mais elevadas, o mesmo acontecendo para o provete anterior.

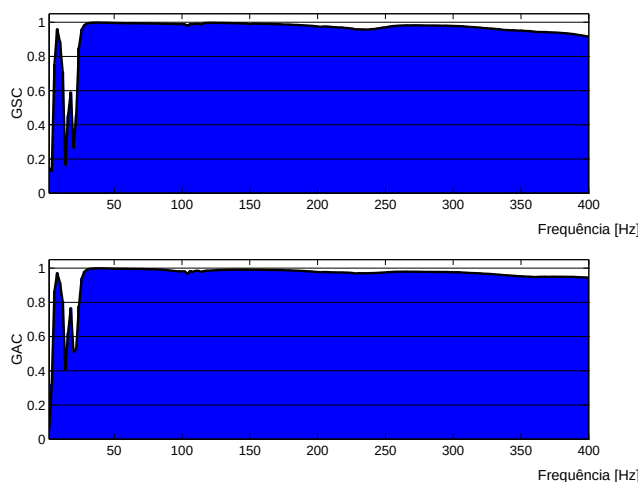


Figura 8.25: Provete I2 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)

Provete I3 - Tratamento integrado [1.0/0.381/1.0]

O último provete analisado, um provete com tratamento integrado usando a camada viscoelástica mais espessa, apresenta um elevado amortecimento que é, em parte, responsável pelo excelente ajuste verificado entre as duas funções de resposta em frequência directas ilustradas na Figura 8.11. Neste caso, a aplicação dos indicadores de correlação é fundamental na identificação das discrepâncias existentes entre as funções de resposta em frequência, evidenciando a contribuição de cada uma das funções medidas e geradas numericamente no nível de correlação global, bem como obter a distribuição do mesmo ao longo da gama de frequências. Para isso, são representados na Figura 8.26 os resultados obtidos recorrendo aos indicadores FRAC e FAAC a partir das funções mobilidade do provete I3 para 17.5°C.

Tal como nos anteriores provetes com tratamento integrado, os valores dos indicadores obtidos para o grau de liberdade 20 destacam-se dos valores obtidos para os restantes graus de liberdade. Não tendo sido possível detectar com objectividade a causa efectiva desta discrepância, através do indicador LAC e da análise das funções de resposta em frequência

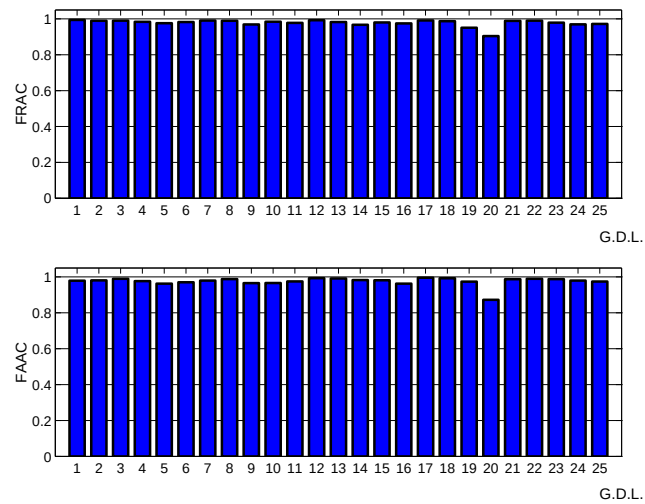


Figura 8.26: Provete I3 - Indicadores FRAC e FAAC (17.5°C)

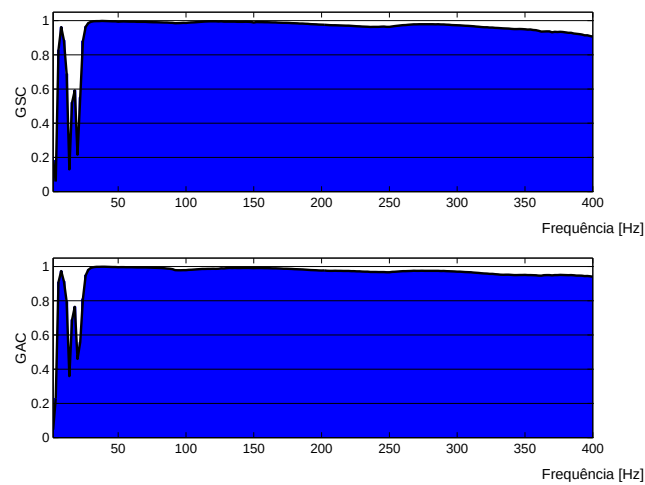


Figura 8.27: Provete I3 - Indicadores GSC e GAC (17.5°C)

obtidas para este grau de liberdade verificou-se que estas apresentam um afastamento considerável na zona das altas frequências ($f > 300\text{Hz}$).

A Figura 8.27 representa a distribuição dos indicadores **GSC** e **GAC** ao longo da gama de frequências analisada, evidenciando o decréscimo do nível de correlação global na zona das altas frequências. Este decréscimo foi analisado através do indicador **LAC**, verificando-se que esta discrepância é devida de uma forma mais ou menos homogênea a todos os graus de liberdade analisados, sendo também evidente que o grau de liberdade 20 contribui de forma preponderante para o nível de correlação global.

8.8 Conclusões

Neste trabalho de validação experimental dos modelos numéricos analisados, bem como da metodologia numérica adoptada na geração do modelo de resposta em frequência, utilizou-se um conjunto de provetes, com tratamento superficial com restrição e com tratamento integrado, tendo sido medidas várias funções de resposta em frequência que serviram de referência no procedimento de validação experimental dos modelos numéricos.

Através da sobreposição das funções de resposta em frequência obtidas experimentalmente com as funções homólogas geradas numericamente, é possível constatar que existe uma boa correlação entre ambos os modelos de resposta em frequência, tanto ao nível das frequências naturais como em relação ao amortecimento obtido em cada uma das configurações de tratamento.

A aplicação de indicadores de correlação de modelos de resposta em frequência permitiu retirar conclusões importantes sobre o ajuste do modelo de resposta em frequência gerado numericamente e as funções de resposta em frequência obtidas experimentalmente. Desta forma, foi possível isolar o efeito dos modos de corpo rígido da montagem experimental e verificar que alguns graus de liberdade medidos apresentam um nível de correlação individual ligeiramente inferior aos restantes. Esta observação permite constatar que essa discrepância local será devida a problemas na medição experimental (localização do ponto de medição sobre linhas nodais, erro na localização do ponto de medição, reduzida relação sinal/ruído) e não à falta de representatividade do modelo numérico.

Por outro lado, a gradual diminuição do nível de correlação para a zona das altas frequências, que se verifica para todos os provetes analisados, pode indicar uma falha na

representatividade da malha de elementos finitos ou uma imperfeita caracterização das propriedades dos materiais constituintes.

De uma forma geral, verificou-se que os provetes analisados apresentam, na sua maioria, níveis de correlação superiores a 95%, permitindo desta forma validar os modelos numéricos analisados, nomeadamente o elemento finito proposto neste trabalho.

Os bons resultados obtidos permitem ainda verificar que, uma vez que os provetes analisados foram produzidos em 1996, os tratamentos utilizados conseguiram manter a sua eficiência e as suas propriedades materiais após 6 anos de armazenamento não-condicionado.

Capítulo 9

Validação experimental do elemento finito em tratamentos multi-camada e multi-material

De acordo com os objectivos deste trabalho, o desenvolvimento do modelo de elementos finitos proposto é, em parte, justificado pela necessidade de dispor de um modelo numérico capaz de representar tratamentos integrados constituídos por várias camadas de material viscoelástico, possibilitando a aplicação de materiais viscoelásticos diferentes. Assim, na continuidade do procedimento de validação experimental apresentado no capítulo anterior, é desenvolvido um trabalho de validação de tratamentos multi-camada e multi-material, utilizando para o efeito um conjunto de provetes com estas configurações de tratamento. A metodologia de validação é idêntica à adoptada no capítulo anterior, avaliando a correlação existente entre as funções de resposta em frequência medidas experimentalmente e numéricas através da análise gráfica das curvas sobrepostas e recorrendo a um conjunto de critérios de correlação de modelos de resposta em frequência. Os resultados obtidos permitem validar a aplicação do elemento finito proposto na simulação de tratamentos viscoelásticos multi-camada e multi-material.

9.1 Introdução

Uma vez que uma das características do elemento finito proposto é a capacidade de modelação de tratamentos multi-camada, neste capítulo é desenvolvido um trabalho de validação experimental recorrendo a provetes com esta configuração de tratamento e seguindo a metodologia adoptada no capítulo anterior.

9.2 Provetes experimentais

Para desenvolver o procedimento de validação experimental na configuração de tratamento multi-camada foram produzidos provetes com tratamento integrado multi-camada e multi-material, utilizando os materiais viscoelásticos 3M ISD112 e 3M ISD110 (Apêndice F). O material 3M ISD110 é baseado no mesmo polímero do 3M ISD112, apresentando, no entanto, uma temperatura de transição mais elevada. Este material é indicado para aplicações numa gama de temperaturas compreendida entre 40°C e 100°C.

Para constituir uma referência para a eficiência do tratamento na configuração multi-camada, produziram-se adicionalmente dois provetes mono-camada, um deles com uma camada de material viscoelástico 3M ISD112 e o outro com uma camada de material viscoelástico 3M ISD110.

A Figura 9.1 ilustra os provetes utilizados neste trabalho de validação experimental e a Figura 9.2 representa a distribuição e constituição dos tratamentos aplicados em cada um dos provetes.

Os provetes foram produzidos recorrendo a placas de liga de alumínio 1050A H24 com 1mm de espessura, 200mm de comprimento e 100mm de largura. Estas dimensões foram condicionadas pelo tamanho das amostras de material viscoelástico disponíveis.

Os tratamentos viscoelásticos foram aplicados nos provetes seguindo as indicações do fabricante. O material 3M ISD112 apresenta uma boa aderência ao substrato metálico à temperatura ambiente, exigindo apenas a limpeza cuidada das superfícies das chapas de alumínio e a aplicação de uma ligeira pressão para garantir a adesão do filme viscoelástico. Por outro lado, o material 3M ISD110 exige a aplicação simultânea de pressão (6.9 a

10.3×10^4 Pa) e de temperatura ($93-107^\circ\text{C}$) durante 5 minutos para promover a adesão do material às placas de alumínio. Para este efeito recorreu-se a uma prensa de pratos quentes, colando em primeiro lugar as camadas de material 3M ISD110, usando uma pressão de 10×10^4 Pa e uma temperatura de 90°C durante um estágio de 5 minutos, e, em seguida, as camadas de material 3M ISD112. O conjunto foi finalmente sujeito a um estágio de 5 minutos a 60°C e a uma pressão reduzida (correspondente à pressão de fecho da prensa de pratos quentes) com o objectivo de homogeneizar a espessura do provete e garantir a adesão do material 3M ISD112.

9.2.1 Provete mono-camada

De forma a verificar o efeito da aplicação de tratamentos multi-camada, foram produzidos dois provetes mono-camada de referência, aplicando uma camada de 0.127mm de 3M ISD112 no provete designado por S1 e uma camada com a mesma espessura de 3M ISD110 no provete S2.

9.2.2 Provete multi-camada

Foram também produzidos dois provetes multi-camada, M1 e M2, recorrendo a camadas de material viscoelástico 3M ISD112 com 0.0508mm de espessura e a camadas de restrição constituídas por chapa fina (0.05mm) de liga de alumínio 8050 H24 (chapa usualmente aplicada em embalagens alimentares). O núcleo do provete M1 é constituído por duas camadas do material viscoelástico referido, entre as quais se introduziu uma camada de restrição. O provete M1 é, assim, constituído por um total de cinco camadas. O provete M2, apresentando um total de sete camadas, incluindo as placas externas, apresenta um núcleo constituído por três camadas de material viscoelástico, idênticas às aplicadas no provete M1, intercaladas por duas camadas de restrição.

9.2.3 Provete multi-material

Nos provetes multi-material, M3 e M4, foi introduzido o segundo material viscoelástico, 3M ISD110. O provete M3 apresenta uma configuração idêntica à do provete M1, tendo-se substituído uma das camadas 3M ISD112 por uma camada de 3M ISD110 com a mesma

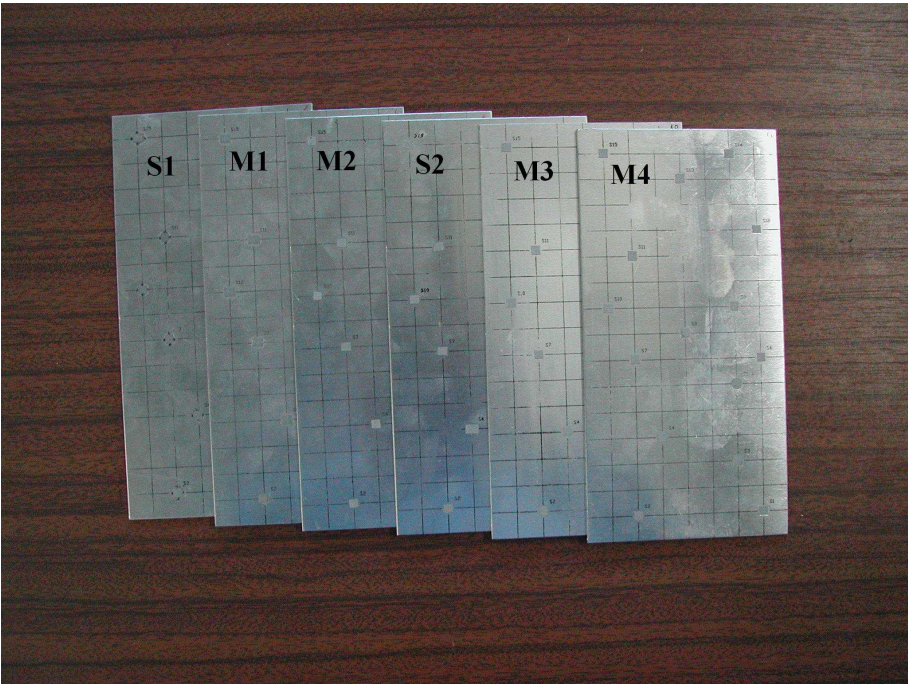


Figura 9.1: Provates com tratamento mono-camada, multi-camada e multi-material utilizados no estudo de validação

S1 <table><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD112</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr></table>	Alumínio	3M ISD112	Alumínio	M1 <table><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD112</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD112</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr></table>	Alumínio	3M ISD112	Alumínio	3M ISD112	Alumínio	M2 <table><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD112</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD112</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD112</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr></table>	Alumínio	3M ISD112	Alumínio	3M ISD112	Alumínio	3M ISD112	Alumínio
Alumínio																	
3M ISD112																	
Alumínio																	
Alumínio																	
3M ISD112																	
Alumínio																	
3M ISD112																	
Alumínio																	
Alumínio																	
3M ISD112																	
Alumínio																	
3M ISD112																	
Alumínio																	
3M ISD112																	
Alumínio																	
S2 <table><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD110</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr></table>	Alumínio	3M ISD110	Alumínio	M3 <table><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD112</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD110</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr></table>	Alumínio	3M ISD112	Alumínio	3M ISD110	Alumínio	M4 <table><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD110</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD112</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr><tr><td>3M ISD110</td></tr><tr><td>Alumínio</td></tr></table>	Alumínio	3M ISD110	Alumínio	3M ISD112	Alumínio	3M ISD110	Alumínio
Alumínio																	
3M ISD110																	
Alumínio																	
Alumínio																	
3M ISD112																	
Alumínio																	
3M ISD110																	
Alumínio																	
Alumínio																	
3M ISD110																	
Alumínio																	
3M ISD112																	
Alumínio																	
3M ISD110																	
Alumínio																	

Figura 9.2: Configurações de tratamento dos provates

espessura e dimensão. Por seu lado, o provete M4 é baseado na configuração do provete M2, tendo sido aplicada uma camada de 3M ISD112 na camada central e 2 camadas de 3M ISD110 nas camadas viscoelásticas externas do núcleo. Refira-se que, em termos de material, o provete M3 apresenta uma distribuição não simétrica e o M4 uma distribuição simétrica.

9.3 Metodologia experimental

De forma a obter condições de fronteira de corpo livre, suspenderam-se os provetes num pórtico rígido, utilizando-se para o efeito fio de nylon muito fino que foi colado ao provete através de cola de cianoacrilato. Em cada um dos provetes foi definida uma malha de 15 pontos de medição, como ilustrado na Figura 9.3.

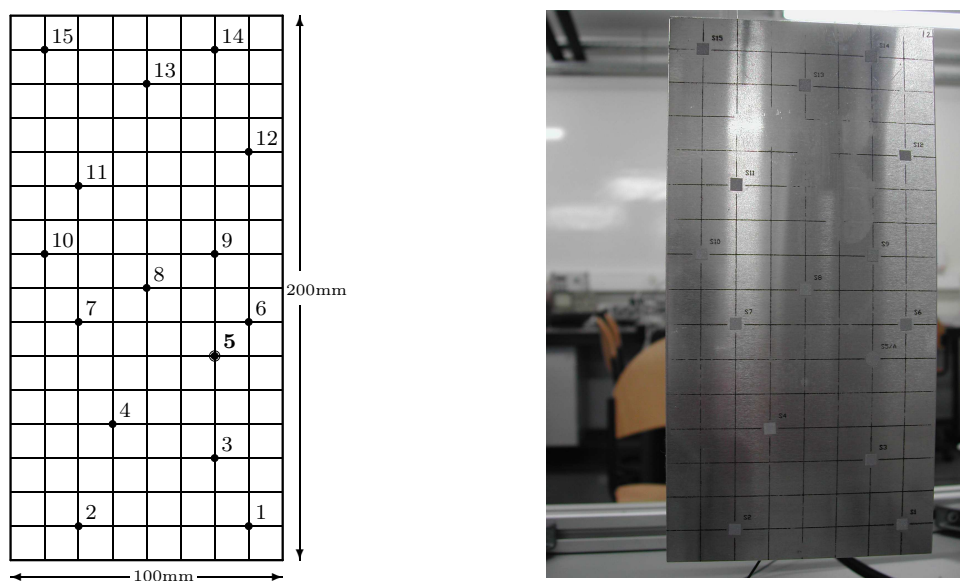
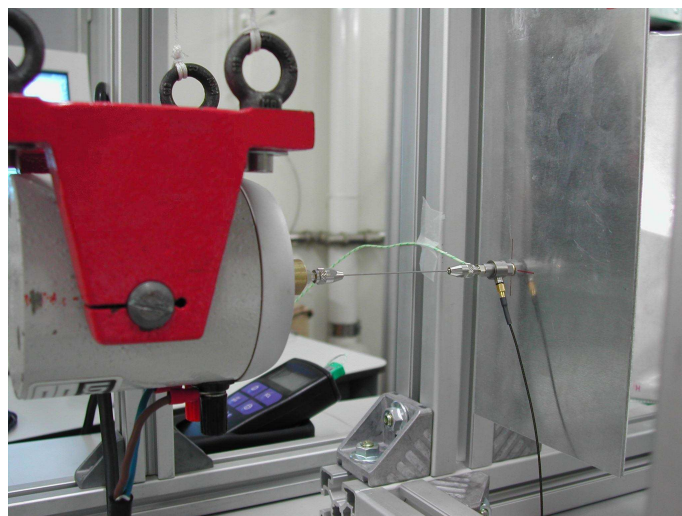
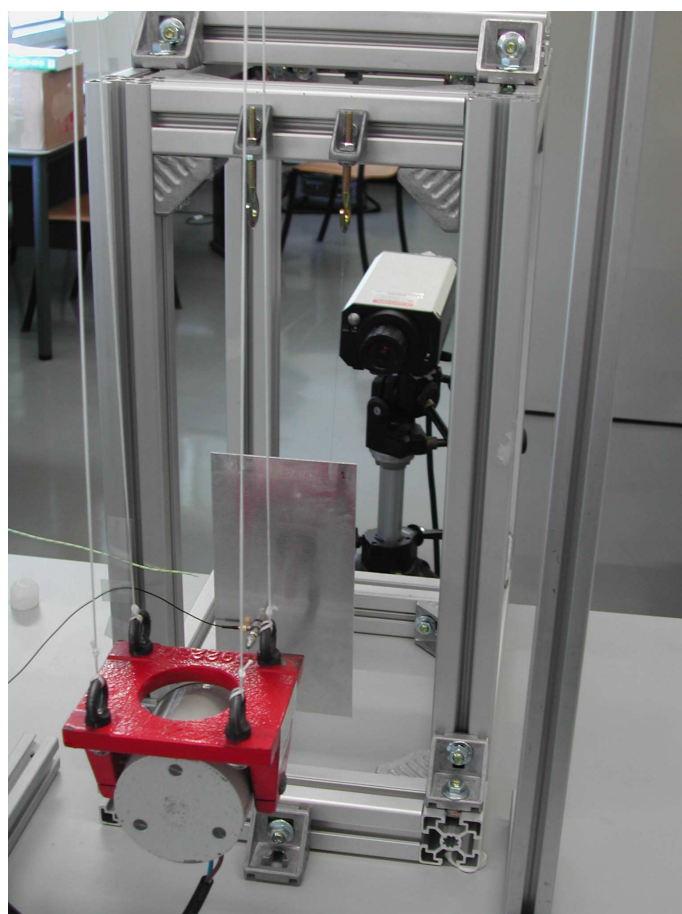


Figura 9.3: Malha de pontos de medição dos provetes multi-camada e multi-material

Recorreu-se ao excitador LDS201, o qual foi igualmente suspenso num pórtico independente, para aplicar uma excitação aleatória na gama de frequências [0-800]Hz sobre o provete suspenso. Essa excitação foi aplicada no ponto 5 (Figura 9.3), utilizando a haste nº3 na ligação do excitador à célula de carga BK8203-118 (Figura 9.4.a). A medição da resposta do provete em cada um dos pontos considerados foi realizada com recurso



a) Excitação da placa



b) Medição da resposta

Figura 9.4: Montagem experimental dos ensaios de validação em provetes multi-camada

ao vibrómetro laser (Figura 9.4.b). A cadeia de medição utilizada na determinação das funções de resposta em frequência, constituída pelo vibrómetro laser e pela célula de carga, foi previamente calibrada através de um bloco rígido de massa conhecida (Apêndice H).

A temperatura ambiente durante o ensaio, que se manteve no valor de 27.1°C para todos os provetes, foi medida através de um termopar colocado junto da placa suspensa.

9.4 Geração de funções de resposta em frequência numéricas

Seguindo a metodologia adoptada no capítulo anterior, foram calculadas as funções de resposta em frequência para cada um dos provetes através do elemento finito proposto.

As propriedades dos materiais utilizados nas placas externas e nas camadas de restrição foram obtidas a partir das fichas de produto fornecidas pelos respectivos fabricantes, recorrendo-se a ensaios de tracção para determinar o módulo de *Young* do alumínio aplicado nas placas externas e à pesagem das mesmas para calcular a massa volúmica correspondente. As propriedades dos materiais viscoelásticos foram retiradas directamente dos respectivos nomogramas de frequência reduzida (Apêndice F). As propriedades consideradas no modelo numérico desenvolvido são apresentadas na Tabela 9.1.

Tabela 9.1: Propriedades dos materiais aplicados nos provetes

Material	Módulo de <i>Young</i> [Pa]	Massa volúmica [Kg/m ³]	Coefficiente de <i>Poisson</i>
Alumínio 1050A H24	70E9	2708	0.32
Alumínio 8050 H24	70E9	2708	0.32
3M ISD112	ref. [226]	1140	0.49
3M ISD110	ref. [226]	1140	0.49

Utilizando um modelo espacial descrito por uma malha de elementos finitos com 32x16 elementos, recorreu-se a uma análise directa em frequência, usando o método do módulo complexo, para gerar o modelo de resposta em frequência dos provetes analisados e anteriormente descritos.

9.5 Comparação gráfica das funções de resposta em frequência

As funções mobilidade geradas numericamente foram comparadas individualmente com as respectivas funções obtidas experimentalmente para cada um dos provetes a uma temperatura ambiente de 27.1°C. As figuras 9.5 a 9.10 representam as funções de resposta em frequência directas, obtidas numericamente e por via experimental, para os seis provetes analisados.

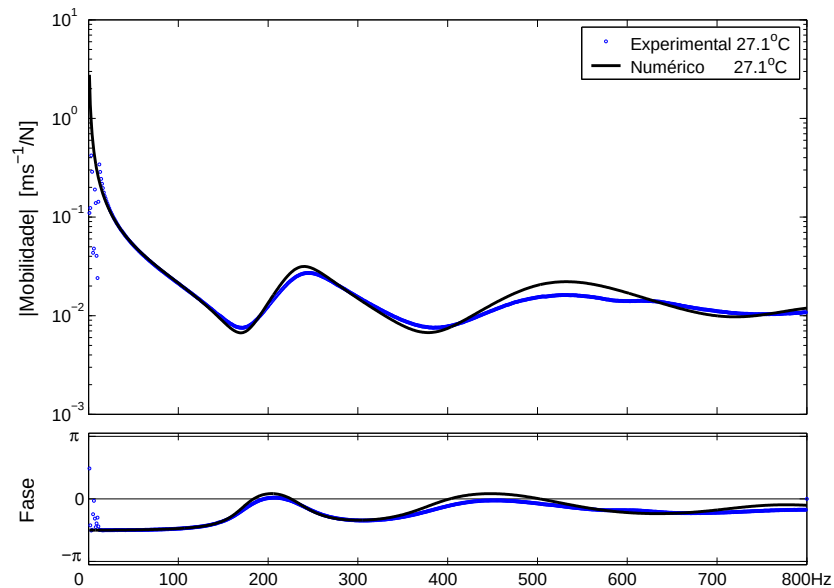


Figura 9.5: Provede S1 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C

Da análise das funções de resposta em frequência sobrepostas observa-se que existe, em geral, uma boa concordância entre elas, evidenciando-se que, tanto a nível das frequências naturais como em termos dos factores de perda modais, o modelo numérico apresenta uma boa representatividade. No entanto, esta boa concordância não é verificada para o provede S2, existindo uma discrepância significativa entre os factores de perda modais evidenciados pelas duas curvas, embora exista uma boa concordância relativamente aos valores das frequências naturais. Este problema deve-se ao facto do nomograma do material 3M ISD110 fornecido pelo fabricante (Apêndice F) não ser definido para a temperatura de 27°C na gama de frequências analisada. De facto, uma vez que o processo

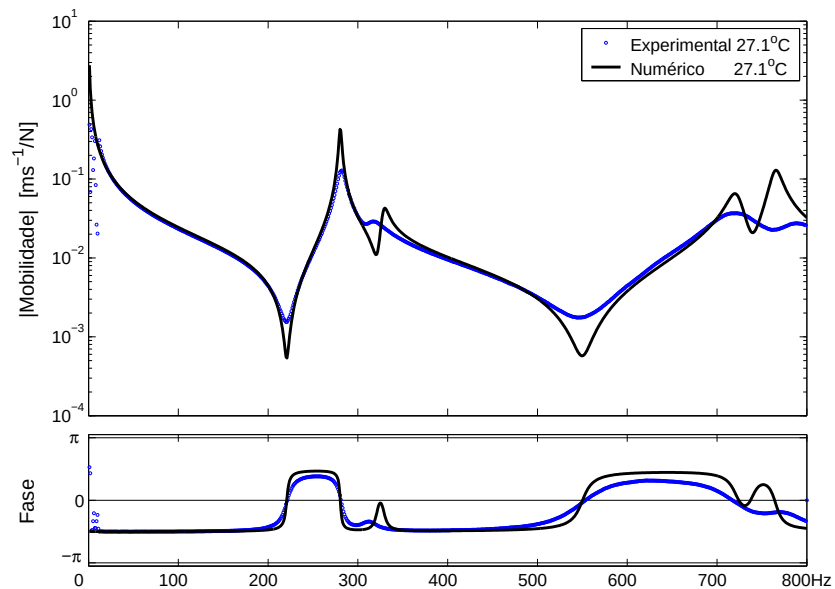


Figura 9.6: Provet S2 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C

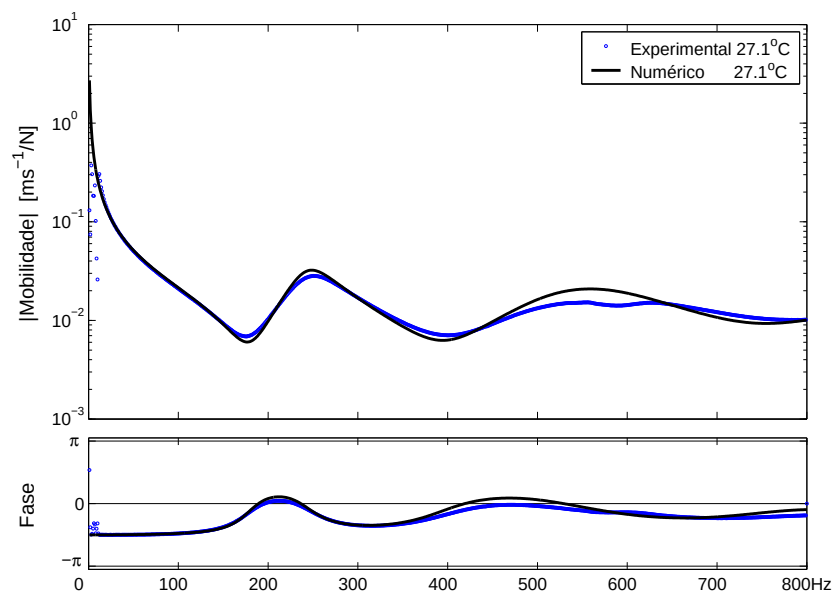


Figura 9.7: Provet M1 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C

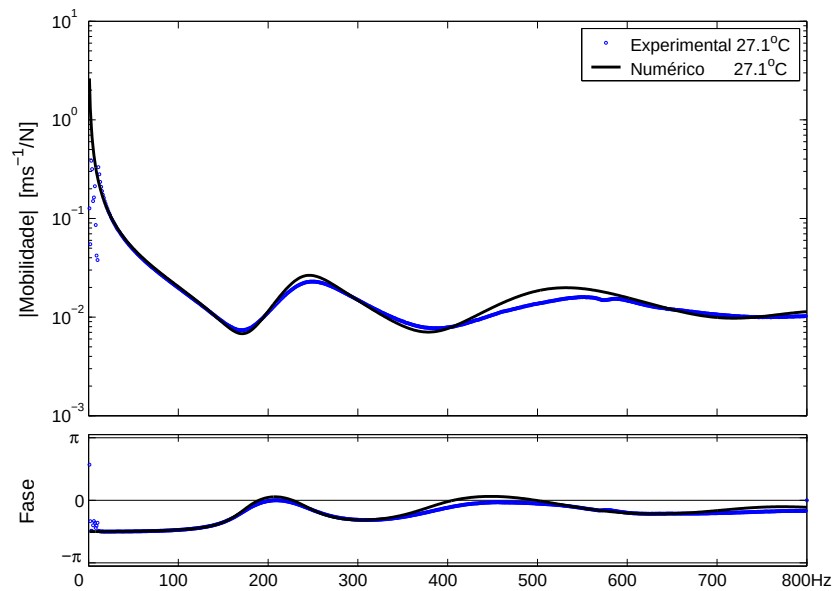


Figura 9.8: Provete M2 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C

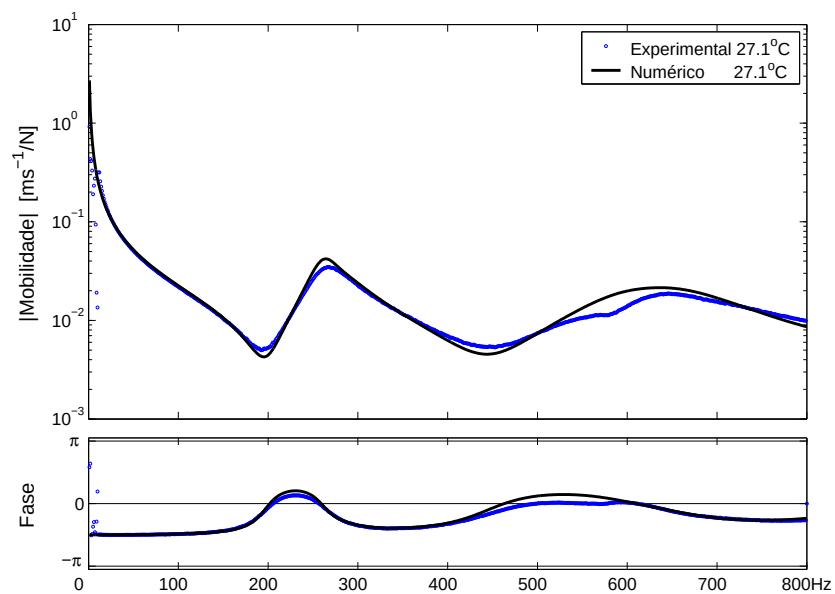


Figura 9.9: Provete M3 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C

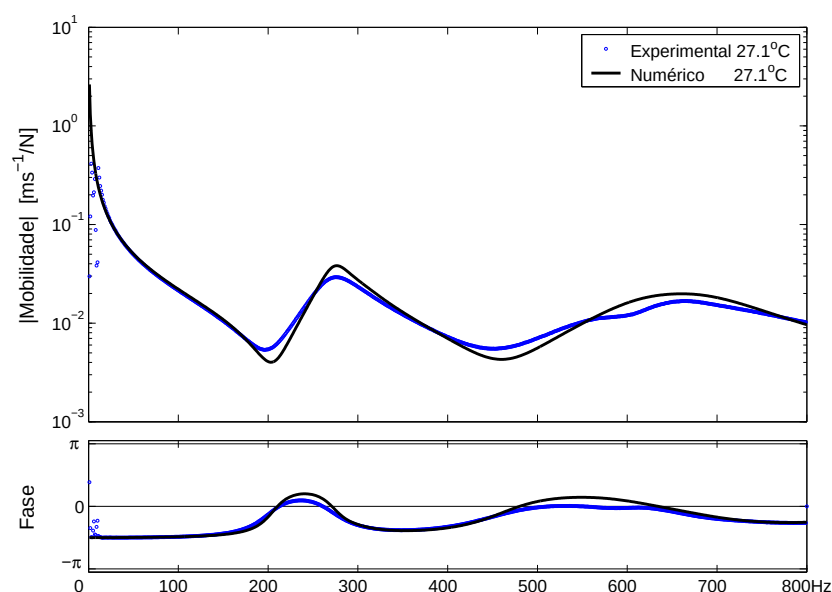


Figura 9.10: Provete M4 - Funções de resposta em frequência directas a 27.1°C

de extracção e de interpolação dos valores do módulo de ganho e do factor de perda a partir do nomograma do material aplica um procedimento de extrapolação nestas situações, os valores calculados são fortemente dependentes da tendência das curvas nos limites do nomograma. Observando o nomograma do material 3M ISD110 , facilmente se constata que a curva do factor de perda termina com um declive muito acentuado, explicando a subavaliação do valor do factor de perda do material na simulação numérica. Por outro lado, o módulo de ganho apresenta nessa zona uma distribuição linear com um declive constante, minimizando, assim, o erro associado à extrapolação de valores e justificando-se a boa concordância das frequências naturais.

Nos provetes multi-material, que combinam os dois materiais usados neste estudo, o efeito associado ao erro na determinação do módulo complexo do 3M ISD110 é dissimulado pelo amortecimento introduzido pelo material 3M ISD112, embora seja possível observar a existência de uma ligeira discrepância entre os factores de perda modais das funções de resposta em frequência.

De referir que, na gama de frequências da análise, 0 a 800Hz, todos os provetes analisados possuem quatro modos naturais acoplados dois a dois. Este aspecto só é revelado no provete S2, sendo nos restantes dissimulado pelo elevado amortecimento introduzido pelas

camadas de material viscoelástico.

9.6 Aplicação dos indicadores de correlação

Embora permita retirar algumas conclusões sobre o nível de correlação existente entre o modelo de resposta gerado numericamente e as funções de resposta em frequência medidas experimentalmente, a comparação gráfica das funções de resposta em frequência sobrepostas carece da objectividade necessária e de uma expressão quantitativa que permita estabelecer uma forma coerente de comparação e de validação do modelo numérico. Assim, recorreu-se aos indicadores de correlação descritos e aplicados no capítulo anterior para avaliar em cada um dos provetes o nível de correlação existente entre os resultados obtidos através do modelo numérico proposto e as medições efectuadas sobre cada um dos provetes experimentais.

Nas figuras 9.11 a 9.22 apresentam-se os resultados obtidos pela aplicação dos indicadores de correlação **FRAC** e **FAAC**, que permitem determinar a responsabilidade de cada um dos graus de liberdade no nível de correlação global, e pela aplicação dos indicadores de correlação **GSC** e **GAC**, que permitem descrever a variação do nível de correlação ao longo da gama de frequências da análise. No cálculo dos indicadores **FRAC** e **FAAC** omitiu-se a banda de baixas frequências ([0-25]Hz) de forma a retirar o efeito dos modos de corpo rígido da montagem experimental.

De acordo com os resultados obtidos referentes aos indicadores de correlação, verifica-se que todos os provetes, com excepção do provete S2, apresentam níveis de correlação bastante satisfatórios e homogéneos, quer para os graus de liberdade (**FRAC** $\geq$ 0.9 e **FAAC** $\geq$ 0.9) quer para a gama de frequências (**GSC** $\geq$ 0.9 e **GAC** $\geq$ 0.9) considerados no processo de validação experimental. Mesmo os provetes multi-material usando o 3M ISD110, provetes M3 e M4, apresentam níveis de correlação elevados (**FRAC** $\geq$ 0.9, **FAAC** $\geq$ 0.9, **GSC** $\geq$ 0.9 e **GAC** $\geq$ 0.9), evidenciando o efeito dissimulador do elevado amortecimento produzido pelo material 3M ISD112. No entanto, o provete S2 apresenta um nível de correlação não satisfatório, em resultado da incorrecta caracterização do material viscoelástico constituinte, pelas causas descritas anteriormente.

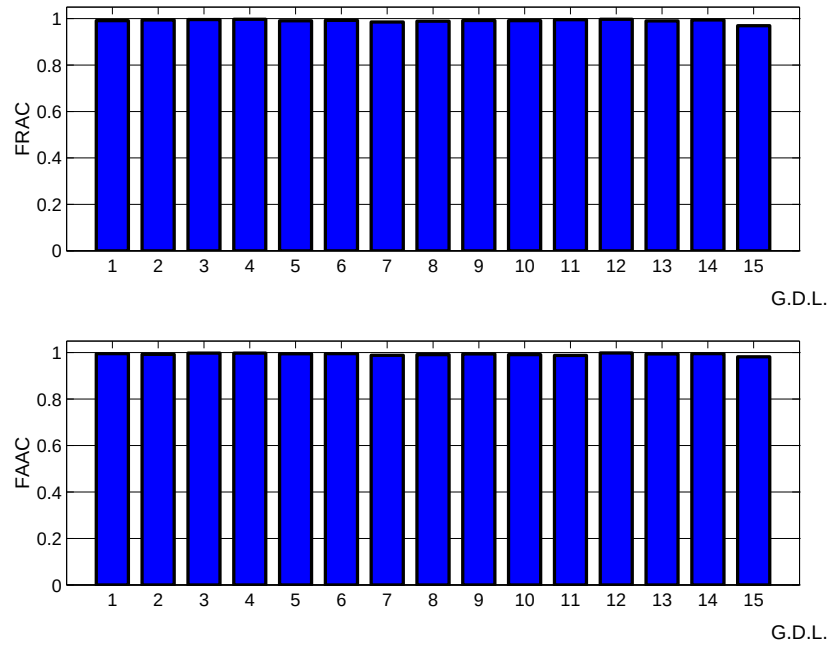


Figura 9.11: Provete S1 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)

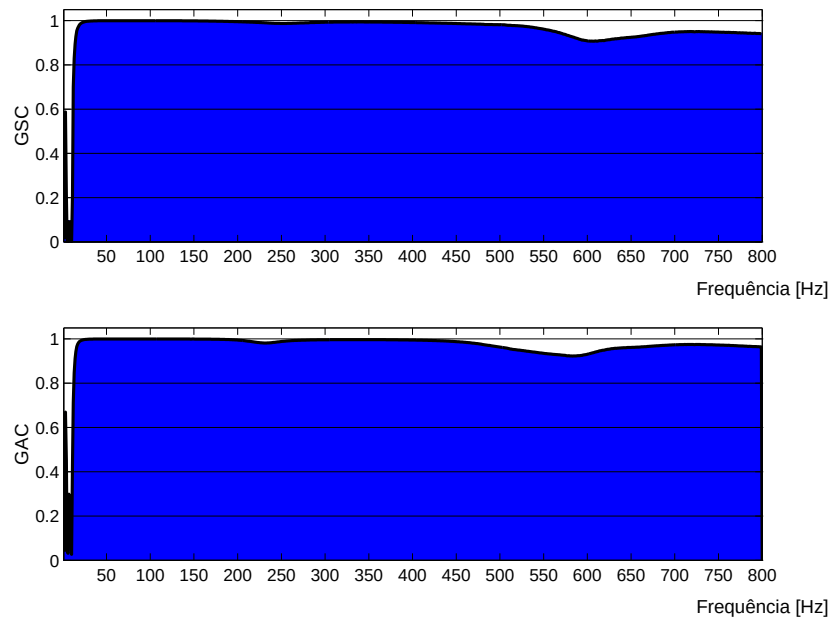


Figura 9.12: Provete S1 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)

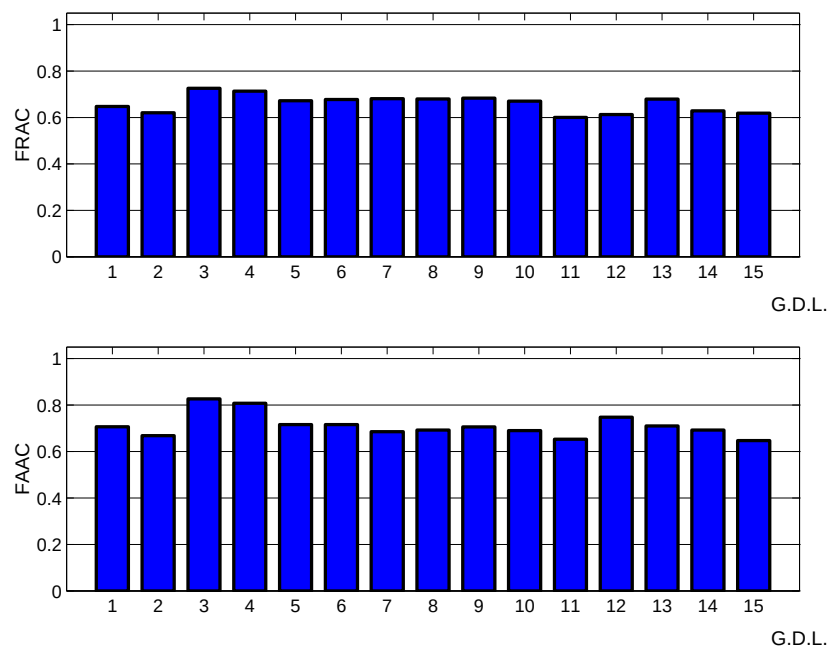


Figura 9.13: Provete S2 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)

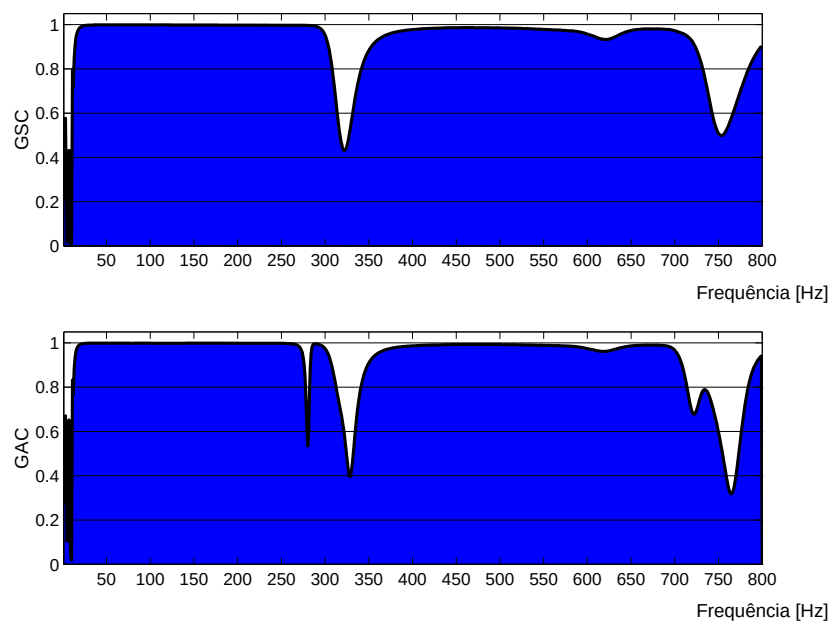


Figura 9.14: Provete S2 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)

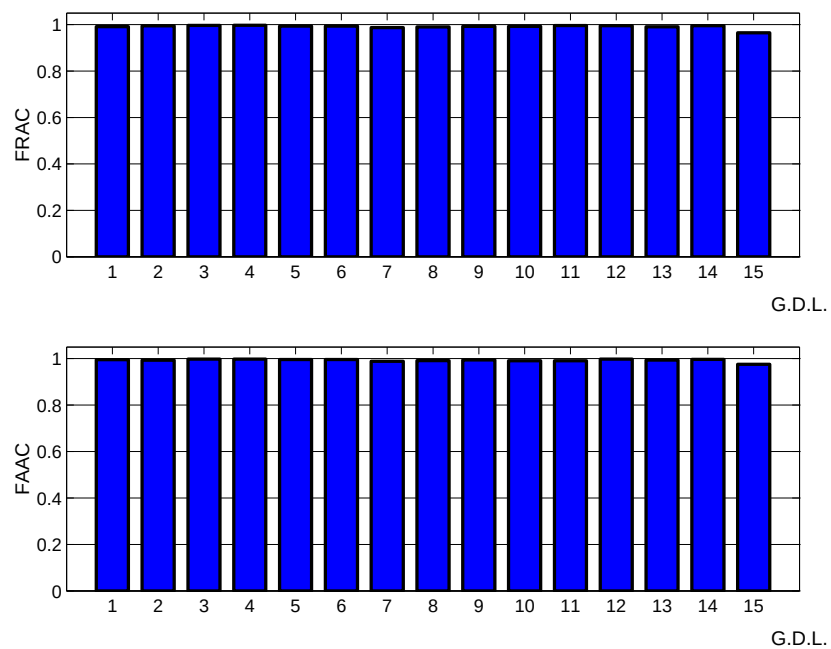


Figura 9.15: Provete M1 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)

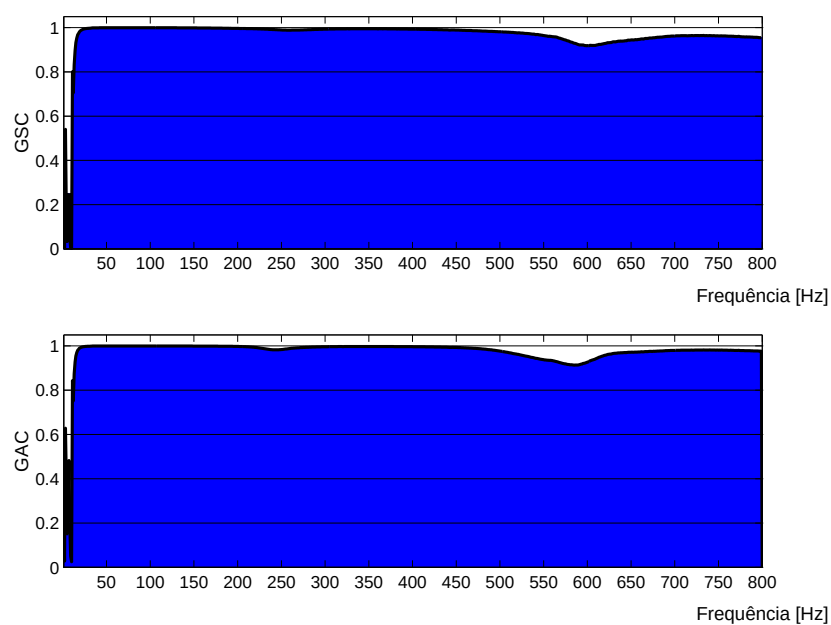


Figura 9.16: Provete M1 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)

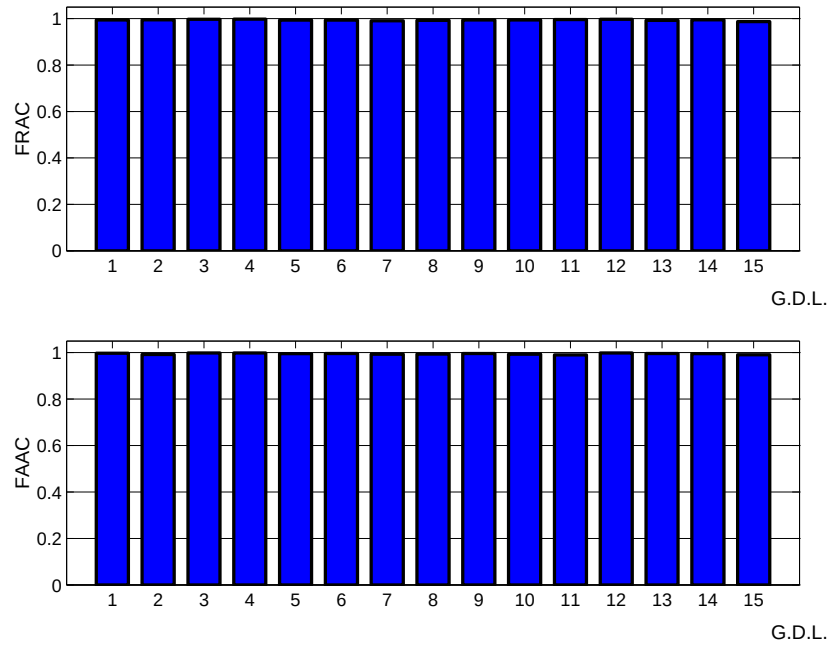


Figura 9.17: Provete M2 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)

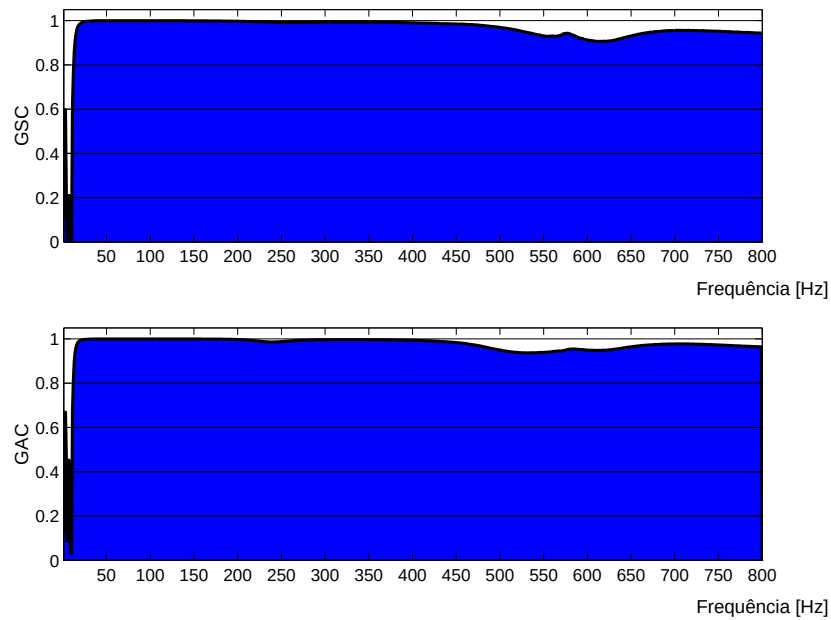


Figura 9.18: Provete M2 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)

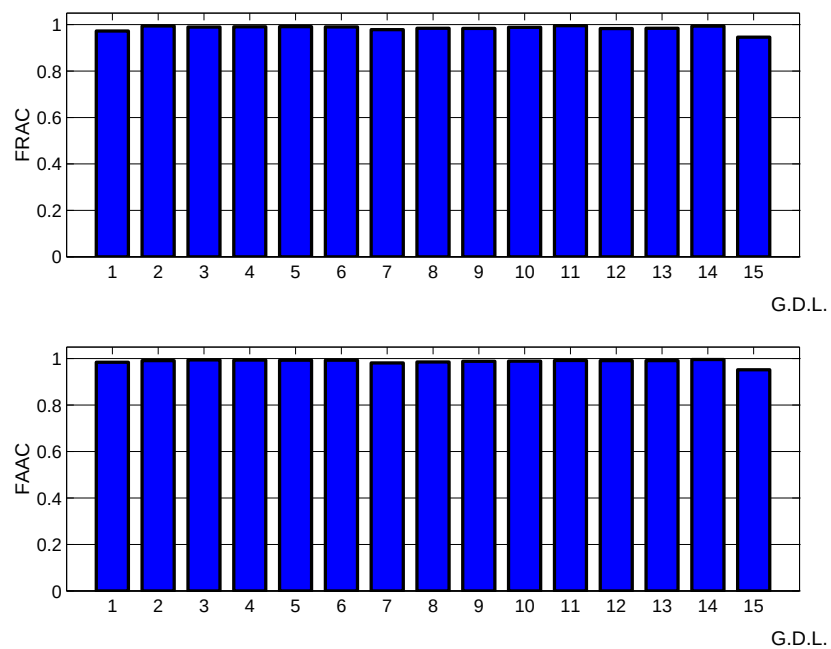


Figura 9.19: Provete M3 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)

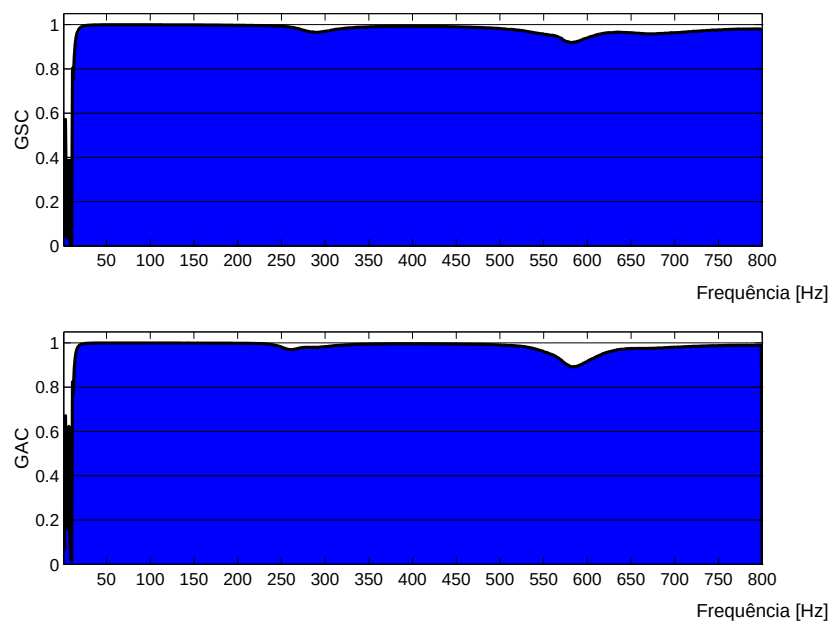


Figura 9.20: Provete M3 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)

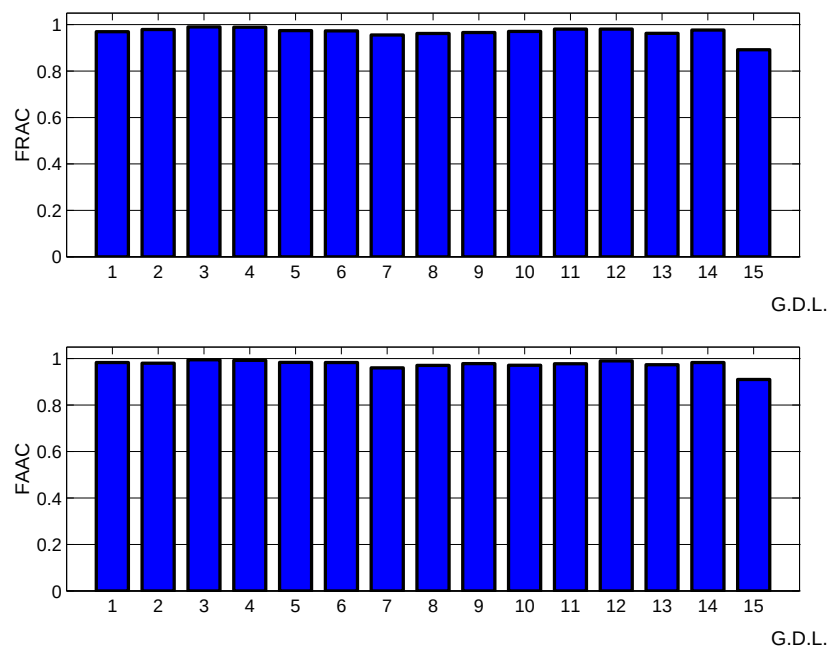


Figura 9.21: Provete M4 - Indicadores FRAC e FAAC (27.1°C)

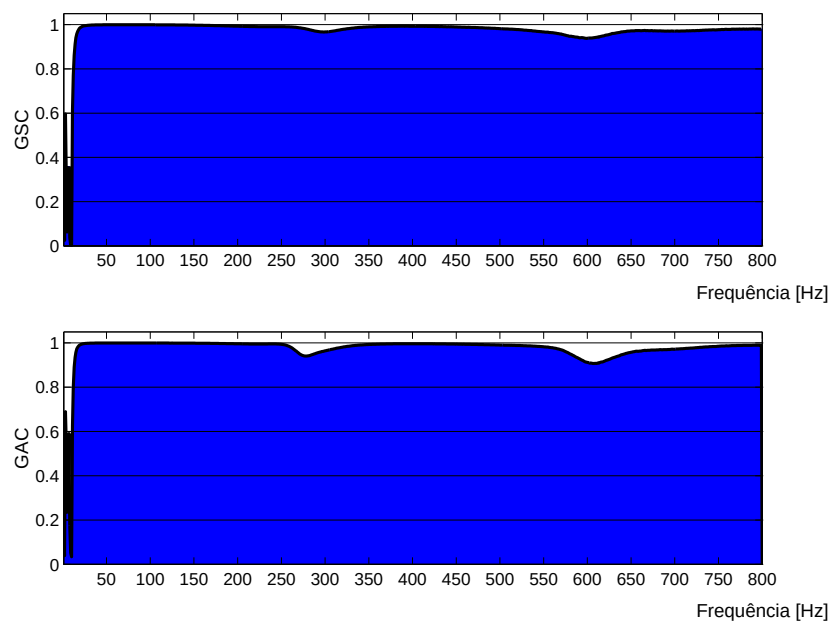


Figura 9.22: Provete M4 - Indicadores GSC e GAC (27.1°C)

Nos provetes multi-material, provetes M3 e M4, é possível verificar, embora não de forma tão evidente como no provete S2, que a incorrecta definição do factor de perda do material 3M ISD110 subavalia de forma pouco significativa o factor de perda global da placa *sandwich*. O indicador GAC permite evidenciar este efeito, figuras 9.20 e 9.22, nomeadamente no conjunto dos dois primeiros modos naturais, em virtude da sua sensibilidade às diferenças de magnitude entre duas funções de resposta em frequência.

9.7 Conclusões

De forma a validar o elemento finito proposto na simulação de tratamentos constituídos por várias camadas de material viscoelástico, foi desenvolvido neste capítulo um trabalho de validação experimental recorrendo para o efeito a um conjunto de provetes com tratamento integrado multi-camada e multi-material. Devido à diferente geometria destes provetes relativamente aos aplicados no estudo de validação do elemento finito na configuração mono-camada documentado no capítulo anterior, foram ainda considerados dois provetes mono-camada que serviram de referência no estudo.

De acordo com a informação retirada da comparação gráfica das funções de resposta em frequência sobrepostas e dos indicadores de correlação, verifica-se uma boa correlação entre o modelo de resposta gerado numericamente através do elemento finito proposto e as funções de resposta em frequência medidas em provetes experimentais representativos das configurações de tratamento aqui analisadas. Os resultados obtidos permitem, assim, validar o elemento finito proposto em aplicações de tratamento viscoelástico multi-camada e multi-material.

Embora a reduzida dimensão dos provetes experimentais pudesse representar algumas dificuldades na obtenção de uma montagem experimental representativa do modelo numérico, a utilização de uma célula de carga miniatura e de uma haste de ligação muito flexível revelou-se eficaz neste propósito. Esta conclusão é baseada na homogeneidade apresentada pelos indicadores FRAC e FAAC e na estreita gama de frequências que contém o conjunto de modos de corpo rígido da montagem experimental.

De referir ainda que, devido ao facto de a temperatura considerada neste estudo de validação não se enquadrar na gama eficiente do material 3M ISD110, os resultados obtidos

no provete S2 são condicionados pela limitação da sua caracterização. Para ultrapassar este problema é necessário proceder à identificação do seu módulo complexo, utilizando, por exemplo, a montagem experimental e a metodologia descritos no Capítulo 7.

Capítulo 10

Análise de tratamentos multi-camada e multi-material

Neste capítulo é desenvolvida uma análise comparativa sobre as configurações de tratamento aplicadas no estudo de validação experimental apresentado no capítulo anterior (Capítulo 9). Recorrendo às medições efectuadas, utilizou-se um processo de identificação modal com o intuito de comparar as configurações de tratamento consideradas através das respectivas frequências naturais fundamentais e dos factores de perda modais associados. Com o objectivo de analisar a aplicabilidade e as vantagens associadas aos tratamentos multi-camada e multi-material, é desenvolvida uma análise numérica recorrendo a métodos aproximados, nomeadamente uma forma modificada do método *MSE* e um método de perturbação do modelo modal, para calcular uma aproximação do modelo modal das placas *sandwich* com tratamento integrado, em particular a frequência natural e o correspondente factor de perda do modo natural de vibração fundamental. Com base nos resultados obtidos são discutidas as vantagens e os inconvenientes associados a cada configuração de tratamento, confrontando a forma de emparelhamento do núcleo e os materiais viscoelásticos utilizados com a eficiência do tratamento e a modificação estrutural provocada.

10.1 Introdução

Os tratamentos viscoelásticos aplicados segundo a configuração de camada integrada numa estrutura *sandwich* apresentam uma elevada eficiência devido à colocação da camada dissipativa sobre o plano neutro da estrutura. Para além disso, a camada viscoelástica é protegida pelas placas externas e permite a introdução do tratamento na própria matéria-prima numa etapa anterior à produção da estrutura final, evitando desta forma operações de tratamento posteriores. No entanto, a introdução da camada viscoelástica no interior da estrutura *sandwich* reduz o acoplamento das duas placas externas, reduzindo desta forma a rigidez de flexão da estrutura. Essa redução é tanto maior quanto maior for a espessura do núcleo viscoelástico.

Para resolver este problema e maximizar a capacidade dissipativa do tratamento integrado, propõe-se a substituição da camada viscoelástica do núcleo da estrutura *sandwich* por um conjunto estratificado constituído por várias camadas finas de material viscoelástico intercaladas por camadas de restrição interlaminares, formando assim uma tratamento multi-camada.

Para além desta vantagem, esta configuração permite alargar a gama útil de temperaturas de um tratamento viscoelástico pela utilização de camadas de materiais viscoelásticos com diferentes temperaturas de transição. Jones [15, 16] aplica este procedimento em tratamentos superficiais com restrição, tendo verificado que o tratamento com dois materiais diferentes é eficiente ao longo de uma gama de temperaturas mais larga que a obtida individualmente com cada um dos materiais em separado, a qual depende das temperaturas de transição de cada um dos materiais constituintes.

10.2 Análise comparativa das configurações de tratamento

Com o objectivo de comparar a eficiência do tratamento segundo as configurações multi-camada e multi-material, recorreu-se ao conjunto de provetes experimentais utilizados no estudo de validação apresentado no Capítulo 9 para determinar os factores de perda modais correspondentes ao primeiro modo natural de vibração das placas *sandwich*. Paralelamente, de forma a avaliar o efeito dos tratamentos sobre a rigidez de flexão da

estrutura tratada, determinou-se igualmente o valor da frequência natural do mesmo modo natural de vibração.

Para determinar estes parâmetros modais recorreu-se a uma técnica de identificação modal baseada no método de ajustamento circular [90,234], usando um modelo de resposta com um grau de liberdade e amortecimento hysterético. O procedimento de identificação modal foi desenvolvido com recurso a um conjunto de rotinas de cálculo e de representação propositadamente desenvolvidas em ambiente **Matlab**®.

Devido ao acoplamento existente entre os dois primeiros modos naturais de vibração dos provetes *sandwich*, seleccionou-se a função de resposta em frequência medida no ponto 8 (Figura 9.3), dada a localização particular deste ponto sobre a intersecção das linhas nodais do segundo modo natural de vibração (Apêndice J), minimizando assim a presença deste modo na função de resposta em frequência.

As figuras 10.1 a 10.6 representam os resultados do procedimento de ajuste para cada um dos provetes caracterizados usando as funções de resposta em frequência medidas no ponto 8. Devido à aplicação de um modelo com amortecimento hysterético, as funções mobilidade medidas são convertidas para funções receptância antes da aplicação da técnica de identificação modal.

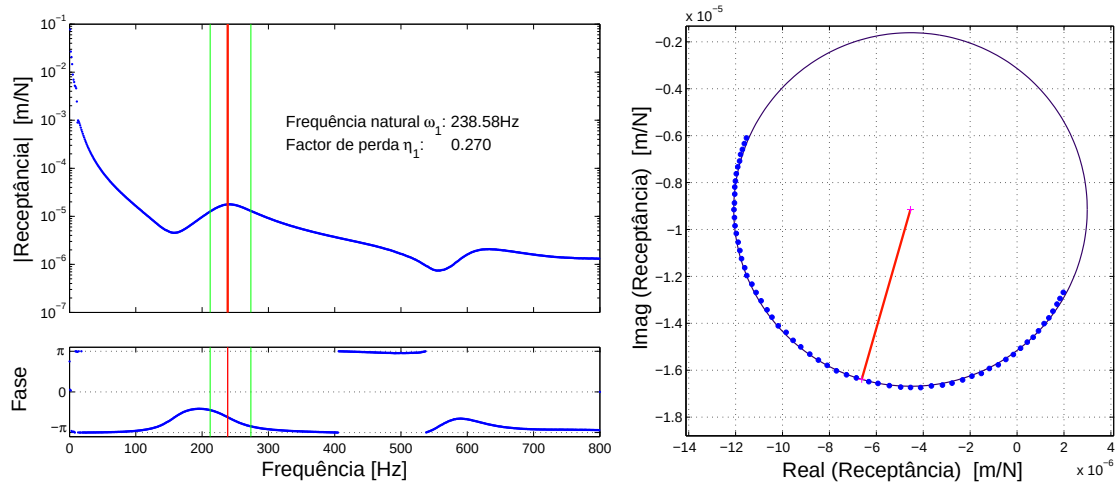


Figura 10.1: Provete S1 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo hysterético

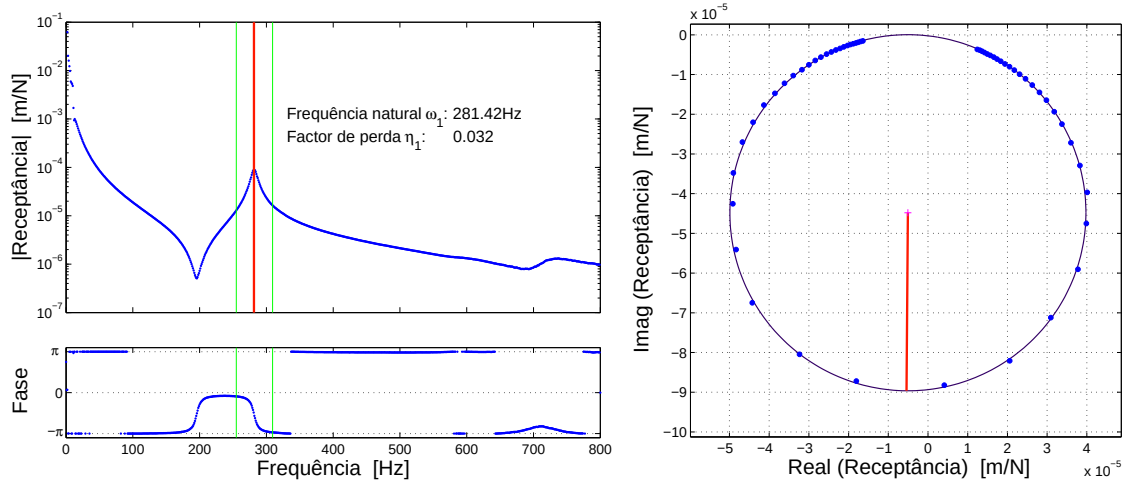


Figura 10.2: Provete S2 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético

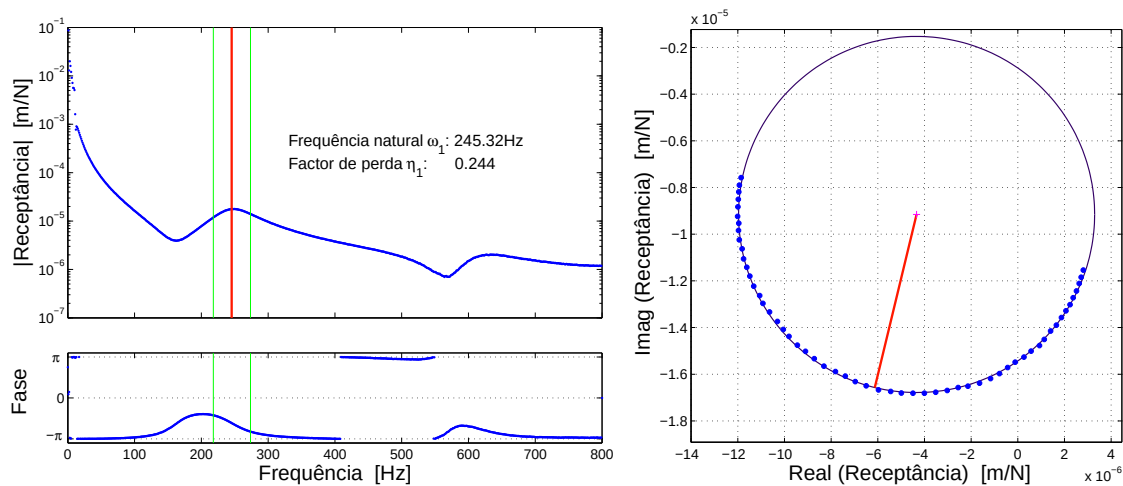


Figura 10.3: Provete M1 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético

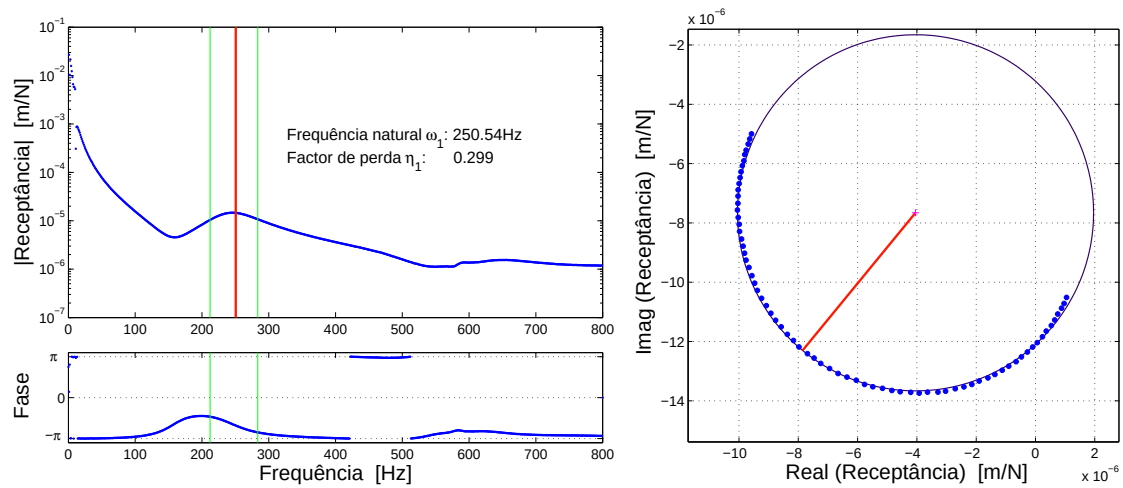


Figura 10.4: Provete M2 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético

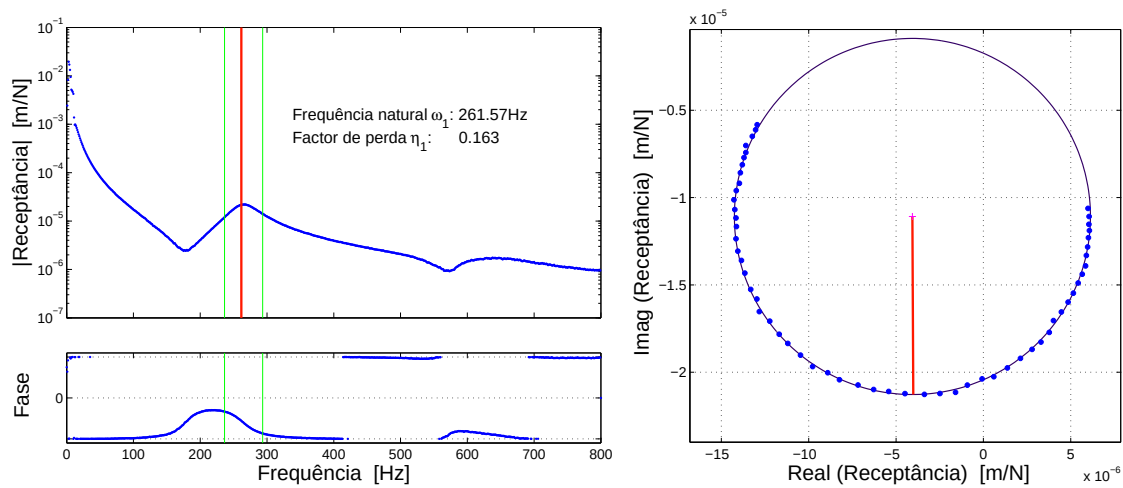


Figura 10.5: Provete M3 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético

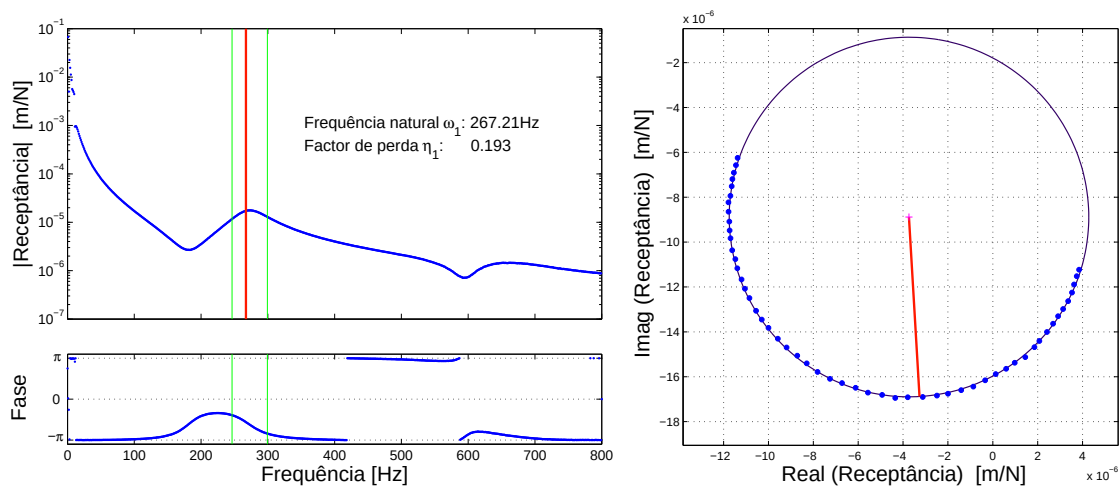


Figura 10.6: Provete M4 - Ajuste dos pontos experimentais ao modelo histerético

A Tabela 10.1 apresenta os resultados obtidos no processo de identificação modal, nomeadamente a frequência natural e o factor de perda modal correspondentes ao primeiro modo natural de vibração. Os valores das frequências naturais obtidas para os seis provetes analisados, em particular para os provetes S1, M1 e M2, permitem avaliar o efeito da configuração do tratamento sobre a rigidez de flexão da placa *sandwich*. O factor de perda modal permite comparar as configurações de tratamento consideradas relativamente à capacidade de amortecimento introduzida.

Tabela 10.1: Frequência natural e factor de perda modal para o primeiro modo natural de vibração

	Frequência natural [Hz]	Factor de perda modal
Provete S1	238.58	0.270
Provete S2	281.42	0.032
Provete M1	245.32	0.244
Provete M2	250.54	0.299
Provete M3	261.57	0.163
Provete M4	267.21	0.193

Pela análise dos valores apresentados na Tabela 10.1, e em particular pelos resultados obtidos nos provetes S1, M1 e M2, verifica-se que a configuração multi-camada com

camadas intercalares de restrição permite aplicar tratamentos espessos muito eficientes, sem contudo reduzir drasticamente a rigidez de flexão da estrutura tratada. De facto, constata-se que a aplicação de camadas de material viscoelástico mais finas com camadas de restrição interlaminares conduz à atenuação do efeito de desacoplamento das placas externas induzido pela presença de núcleos viscoelásticos relativamente espessos.

Os resultados obtidos nos provetes multi-material (M3 e M4) permitem verificar que a camada de material viscoelástico 3M ISD110 atenua o amortecimento global da estrutura em relação aos tratamentos homólogos integralmente constituídos pelo material 3M ISD112, M1 *versus* M3 e M2 *versus* M4. No entanto, o amortecimento introduzido é ainda bastante significativo. Com efeito, o material com uma temperatura de transição mais elevada apresenta, à temperatura do ensaio (27.1°C), um factor de perda muito reduzido, como se pode constatar através dos resultados obtidos para o provete S2. No entanto, verifica-se que as camadas de material 3M ISD110 no provete M3 e no provete M4 permitem a transmissão eficiente da deformação de corte induzida pelas placas externas à camada de material viscoelástico 3M ISD112.

Apesar das vantagens associadas às configurações multi-camada e multi-material aplicadas nos provetes analisados, a massa adicionada com o tratamento pode constituir uma desvantagem destas mesmas configurações. A Tabela 10.2 apresenta os valores das massas iniciais dos provetes (massa das placas externas), das massas dos provetes completos e da correspondente massa adicionada pela aplicação do tratamento.

Tabela 10.2: Variação de massa do provete devido ao tratamento

	Massa inicial [g]	Massa final [g]	Massa adicional [g] (viscoelástico/restrrição)
Proвете S1	108.084	110.683	2.599
Proвете S2	108.222	110.870	2.648
Proвете M1	108.283	113.109	4.826 (2.086/2.740)
Proвете M2	108.256	116.831	8.575 (3.095/5.480)
Proвете M3	108.550	113.338	4.788 (2.048/2.740)
Proвете M4	108.602	117.141	8.539 (3.059/5.480)

Como facilmente se pode verificar da análise da Tabela 10.2, a massa das camadas de

restrição de alumínio colocadas no núcleo das configurações multi-camada e multi-material é preponderante no valor da massa adicional. Com base nesta observação, conclui-se que, uma vez que estas camadas interlaminares têm por única função a restrição da deformação extensional da superfície da camada viscoelástica adjacente, de forma a promover a sua deformação de corte, a optimização dos tratamentos multi-camada requer a aplicação de camadas finas de materiais com um elevado módulo de *Young* e, simultaneamente, uma reduzida massa volúmica. Os materiais compósitos e os materiais poliméricos constituem, assim, possíveis substitutos das lâminas finas de alumínio utilizadas nos provetes *sandwich* deste estudo.

Com o intuito de analisar a eficiência estrutural das configurações analisadas, são determinados dois indicadores baseados na relação entre a capacidade de amortecimento introduzida com o tratamento aplicado e a massa adicionada pelo mesmo. O primeiro indicador, definido pela razão entre o factor de perda modal e a massa do tratamento, permite estabelecer uma comparação entre as configurações analisadas através da relação entre o efeito principal do tratamento, isto é, o aumento de amortecimento, e o efeito colateral associado, ou seja, o aumento de massa global da estrutura tratada. Omitindo o efeito da massa das camadas interlaminares de restrição, propõe-se um segundo indicador de eficiência determinado pela razão entre o factor de perda modal identificado em cada um dos provetes e a massa do material viscoelástico introduzido no tratamento. Este indicador permite relacionar a eficiência do tratamento com a quantidade de material dissipativo introduzida no mesmo.

A Figura 10.7 representa os resultados obtidos com os indicadores propostos, utilizando os valores dos factores de perda modais identificados a partir das funções de resposta em frequência medidas, apresentados na Tabela 10.1, e aos valores da massa de tratamento apresentados na Tabela 10.2.

De acordo com o primeiro indicador proposto, os tratamentos multi-camada apresentam uma eficiência inferior ao tratamento mono-camada. De facto, a massa adicionada pelas lâminas interlaminares de alumínio aumenta significativamente a massa total do tratamento. Assim, do ponto de vista da massa total da estrutura, a configuração multi-camada pode ser menos eficiente que a configuração mono-camada, se as camadas interlaminares forem constituídas por materiais mais densos que o material viscoelástico utilizado. Contudo, a grande vantagem da configuração multi-camada reside na atenuação

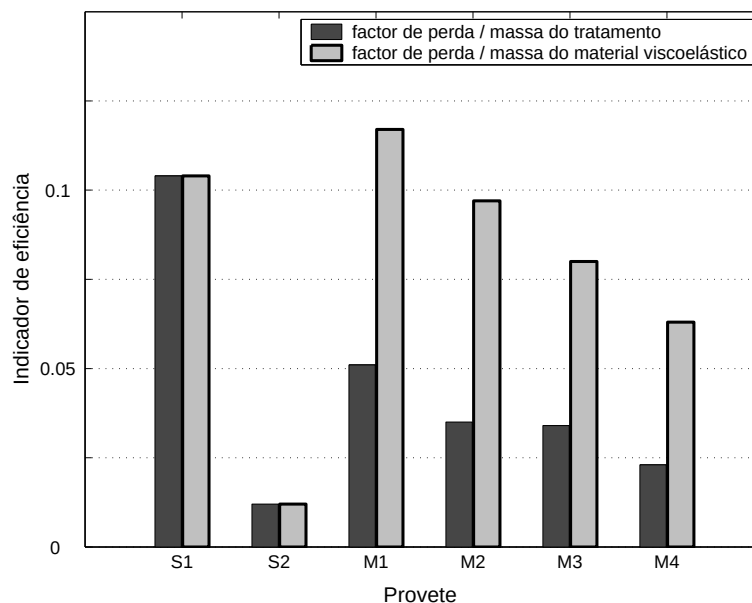


Figura 10.7: Indicadores de eficiência das configurações de tratamento

do efeito de desacoplamento na placa *sandwich*, que poderá ou não justificar este eventual acréscimo de massa.

Os resultados obtidos com recurso ao segundo indicador mostram que o provete multi-camada M2 apresenta uma eficiência inferior aos provetes M1 e S1, apesar de apresentar um factor de perda superior. Esta relação verifica-se também entre os provetes multi-material M3 e M4. Todavia, nada invalida que a aplicação da configuração do provete M2 com camadas viscoelásticas mais finas não permita inverter esta relação de eficiência. Tudo depende da deformação de corte que é imposta à camada dissipativa em cada uma das configurações, que depende essencialmente da espessura de cada camada viscoelástica, da sua posição no núcleo estratificado, das suas propriedades e da deformação que lhe é imposta.

10.3 Estudo numérico sobre tratamentos multi-camada e multi-material

De forma a comparar o desempenho das configurações de tratamento analisadas numa aplicação com uma gama larga de temperaturas, foi desenvolvido um estudo numérico com

o objectivo de determinar o factor de perda modal correspondente ao modo fundamental dos provetes no intervalo de temperatura compreendido entre 0 e 100°C. Para isso, recorreu-se ao elemento finito proposto e desenvolvido neste trabalho, utilizando o ambiente de cálculo do **Matlab**[®] para desenvolver o estudo numérico e realizar a análise e a representação dos resultados obtidos.

Para evitar o custo computacional da análise directa em frequência e tendo como único objectivo uma comparação qualitativa das configurações de tratamento analisadas, optou-se pelo recurso a métodos de análise aproximados que permitem a determinação directa do modelo modal da estrutura com tratamento.

Nesta perspectiva, foi desenvolvido um método específico que consiste numa versão modificada do método *MSE* descrito no Capítulo 3 e utilizou-se igualmente o método *CESM* proposto por Lin e Lim [67], que é um método de cálculo baseado numa metodologia de perturbação do modelo modal da estrutura não amortecida. Pela aplicação destes métodos de análise são determinados os valores das frequências naturais e dos factores de perda modais correspondentes ao primeiro modo natural de vibração de cada uma das configurações analisadas, os quais servem de base comparativa dos efeitos de cada configuração de tratamento na modificação estrutural introduzida e na sua eficiência de amortecimento numa gama larga de temperaturas.

10.3.1 Comparação e selecção dos métodos de análise

De modo a verificar a relação custo/benefício dos métodos de análise aproximados e a avaliar o desempenho da desenvolvida versão modificada do método *MSE*, é realizado um estudo numérico sobre as configurações de tratamento consideradas, usando uma malha de elementos finitos com 20x10 elementos (máximo permitido pelo ambiente **Matlab**[®] utilizando o método *CESM* para as configurações com 7 camadas), e utilizando as propriedades materiais descritas na Tabela 9.1.

Refira-se, desde já, que embora o método de perturbação *CESM* apresente um maior custo computacional em relação ao *MSE* modificado, considera, no entanto, a componente imaginária da matriz de rigidez viscoelástica na análise do comportamento dinâmico das estruturas com tratamento viscoelástico.

Método *MSE* modificado

O método *MSE* baseia-se no princípio de que os modos naturais de vibração da estrutura não amortecida são representativos do modelo modal da estrutura amortecida. No entanto, e apesar de esta aproximação ser válida no caso dos tratamentos superficiais com amortecimento moderado, a aplicação de uma camada viscoelástica (ou várias camadas no caso de tratamentos multi-camada) entre as duas placas externas modifica a rigidez de flexão do conjunto, em resultado do efeito de desacoplamento de rigidez proporcionado pelo núcleo viscoelástico. Assim, propõe-se a modificação do algoritmo original do método *MSE* de forma a introduzir o efeito da camada viscoelástica que introduz alterações de massa e de rigidez na estrutura base, recorrendo a um processo iterativo de cálculo para considerar a variação do módulo de ganho do material viscoelástico. Em consequência, aplica-se um ciclo iterativo de cálculo no qual é resolvido o problema de valores e de vectores próprios definido pela matriz de massa total do sistema e pela parte real da matriz de rigidez, cuja componente viscoelástica é continuamente actualizada recorrendo ao valor da frequência natural determinada na iteração precedente. Uma vez verificada a convergência do valor da frequência natural do modo natural de vibração em análise, é calculado o factor de perda correspondente pela razão de energias de deformação descrita no método *MSE* original. Quando assim pretendido, este processo tem de ser integralmente repetido para cada um dos modos naturais de vibração para determinar os correspondentes factores de perda modais e frequências naturais.

Algoritmo do método *MSE* modificado

1. Condição de arranque:

$$\omega_r^i = \omega_0$$

2. Ciclo iterativo de cálculo da frequência natural do sistema não amortecido:
 - resolução do problema de valores e vectores próprios da componente real

$$[K_R(\omega_r^i)]\{\phi_r\}^i = (\lambda^2)^i[M]\{\phi_r\}^i$$

- cálculo da frequência natural iterada

$$\omega_r^{i+1} = \lambda_r^i$$

- verificação de convergência

$$\Delta_\omega = |\omega_r^{i+1} - \omega_r^i| / \omega_r^{i+1} \leq \Delta_{\max}$$

3. Cálculo do factor de perda modal:

$$\eta_r = \frac{\{\phi_r\}^T [K_I(\omega_r^{i+1})] \{\phi_r\}}{\{\phi_r\}^T [K_R(\omega_r^{i+1})] \{\phi_r\}}$$

Método de perturbação *CESM*

O método de perturbação *CESM* [67] recorre ao modelo modal real determinado através do problema de valores e de vectores próprios definido pela matriz de massa total e pela parte real da matriz de rigidez, cuja componente viscoelástica é calculada considerando o módulo de ganho do material viscoelástico para um valor de referência da frequência.

O processo iterativo de perturbação opera sobre este modelo real, introduzindo a variação da componente viscoelástica da matriz de rigidez, tanto na parte real como na parte imaginária, e actualizando os valores e os vectores próprios complexos a cada iteração. A convergência do processo é verificada através do valor da frequência natural determinado pela raiz quadrada da parte real do valor próprio calculado em cada iteração.

De referir que este método envolve cálculo de natureza complexa, razão pela qual apresenta um custo computacional elevado, embora evite o custo proibitivo associado ao cálculo iterativo de valores e de vectores próprios complexos, como requerido na determinação de modos complexos. Para além disso, opera sobre um modelo modal truncado que deve ser, contudo, representativo da resposta do sistema na vizinhança da frequência do modo natural de vibração considerado.

Uma vez verificada a convergência, é calculado o factor de perda modal através da componente imaginária do valor próprio iterado.

Algoritmo de perturbação *CESM*

1. Condição inicial de arranque:

$$\omega_r^i = \omega_0$$

2. Resolução do problema de valores e de vectores próprios da componente real inicial:

$$[K_R(\omega_r^0)]\{\phi_r\}^0 = (\lambda^2)^0[M]\{\phi_r\}^0$$

3. Ciclo iterativo de perturbação:

- cálculo da modificação da matriz de rigidez

$$[\Delta\bar{K}(\omega_r^i)] = [\bar{K}(\omega_r^i)] - [K_R(\omega_r^0)]$$

- actualização do vector próprio

$$\{\bar{\phi}_r\}^{i+1} = \{\phi_r^0\} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^N \frac{\{\phi_j^0\} \{\phi_j^0\}^T}{(\lambda_j^2)^0 - (\bar{\lambda}_r^2)^i} [\Delta\bar{K}(\omega_r^i)]\{\bar{\phi}_r\}^i$$

- actualização do valor próprio

$$(\bar{\lambda}_r^2)^{i+1} = (\lambda_r^2)^0 + \{\bar{\phi}_r\}^{i+1T} [\Delta\bar{K}(\omega_r^i)]\{\bar{\phi}_r\}^{i+1}$$

- cálculo do valor iterado da frequência natural

$$\omega_r^{i+1} = \sqrt{\text{RE}(\bar{\lambda}_r^2)^{i+1}}$$

- verificação de convergência

$$\Delta_\omega = |\omega_r^{i+1} - \omega_r^i|/\omega_r^{i+1} \leq \Delta_{\max}$$

4. Determinação do factor de perda modal:

$$\eta_r = \frac{\text{IM}(\bar{\lambda}_r^2)^{i+1}}{\text{RE}(\bar{\lambda}_r^2)^{i+1}}$$

Comparação dos métodos de cálculo

Aplicando os dois métodos de análise descritos, foram determinadas as frequências naturais e os respectivos factores de perda modais, correspondentes ao primeiro modo natural de vibração, para as configurações de tratamento consideradas e para vários níveis de temperatura (0,5,10,...,100°C). Para além das configurações atrás definidas, foi ainda considerada uma configuração adicional designada por M4*, baseada na configuração M4,

M4	M4*
Alumínio	Alumínio
3M ISD110	3M ISD112
Alumínio	Alumínio
3M ISD112	3M ISD110
Alumínio	Alumínio
3M ISD110	3M ISD112
Alumínio	Alumínio

Figura 10.8: Configurações de tratamento M4 e M4*

usando o material 3M ISD112 nas camadas viscoelásticas externas e o material 3M ISD110 na camada central (Figura 10.8).

De forma a avaliar o custo computacional e a velocidade de convergência dos dois métodos, foram determinados os tempos totais de cálculo, correspondentes ao tempo decorrido durante o processo de cálculo descrito nos respectivos algoritmos, para os vinte e um níveis de temperatura, e o número médio de iterações necessárias à convergência do processo iterativo. A Tabela 10.3 apresenta os valores para cada um dos métodos de cálculo na análise das sete configurações de tratamento consideradas.

Tabela 10.3: Custo computacional dos métodos numéricos *MSE* modificado e *CESM* (Base de cálculo: Intel® Pentium4—3GHz/1Gb)

	Tempo cálculo [s]		Nº médio de iterações		Dimensão do problema
	<i>MSE</i>	<i>CESM</i>	<i>MSE</i>	<i>CESM</i>	
Provete S1	2.80	34.22	3.00	3.05	2079
Provete S2	2.57	32.23	2.81	2.89	2079
Provete M1	14.56	98.47	3.00	3.00	3003
Provete M2	37.95	221.45	3.05	3.09	3927
Provete M3	13.57	96.97	2.95	2.95	3003
Provete M4	32.62	216.31	2.90	3.05	3927
Provete M4*	35.12	216.87	3.00	3.05	3927

De acordo com os valores apresentados na tabela, o método *CESM* apresenta um custo relativamente mais elevado, sobretudo devido ao cálculo de natureza complexa sobre o qual

é desenvolvido o processo iterativo de modificação do modelo modal complexo. Para além disso, verifica-se que o custo computacional aumenta consideravelmente com o aumento do número de camadas considerado e o correspondente aumento da dimensão do problema.

Uma vez evidenciada a vantagem económica do método de cálculo *MSE* modificado, é necessário verificar a sua representatividade, comparando os resultados obtidos com este método com os resultados determinados com o método *CESM*.

As figuras 10.9 e 10.10 representam, respectivamente, os erros relativos entre as frequências naturais e os factores de perda modais calculados pelos dois métodos de análise, considerando como referência os resultados obtidos pelo método de perturbação *CESM*. Na Figura 10.9 verifica-se que o erro relativo entre as frequências naturais do primeiro modo natural de vibração calculadas pelos dois métodos de análise é reduzido, apresentando um valor máximo inferior a 0.3%. Por outro lado, na Figura 10.10 constata-se que o erro relativo entre os factores de perda modal é significativamente superior, principalmente na zona das baixas temperaturas, atenuando-se à medida que a temperatura aumenta. Este efeito deve-se, principalmente, ao facto de o material viscoelástico apresentar um módulo de ganho relativamente elevado na zona das baixas temperaturas, nomeadamente o material 3M ISD110, evidenciando a contribuição da componente imaginária da matriz de rigidez no método de perturbação modal *CESM* e a limitação do método *MSE* para problemas com amortecimento moderado.

Apesar do erro relativo entre os factores de perda modais apresentar um valor máximo significativo, verifica-se que a diferença em termos de valor absoluto é pouco significativa, principalmente na gama de baixas temperaturas, como se pode observar no gráfico da Figura 10.11, onde é representada a distribuição do factor de perda modal calculado pelos dois métodos de análise para o provete S2.

Considerando o custo computacional associado, a limitação na resolução espacial imposta pelo método *CESM* para o meio de cálculo disponível e o carácter qualitativo do estudo de comparação pretendido, optou-se por aplicar o método *MSE* modificado na análise da eficiência das configurações de tratamento.

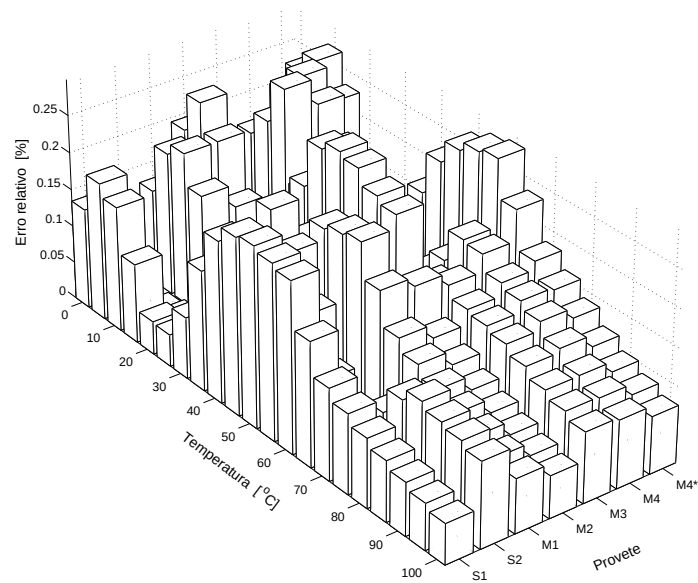


Figura 10.9: Erro relativo entre as frequências naturais fundamentais calculadas pelo método *CESM* e pelo método *MSE* modificado

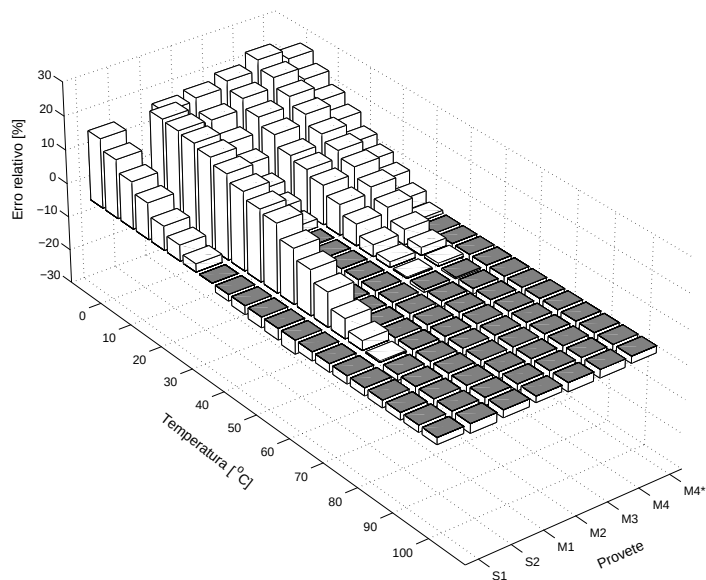


Figura 10.10: Erro relativo entre os factores de perda modais para o primeiro modo natural de vibração calculados pelo método *CESM* e pelo método *MSE* modificado

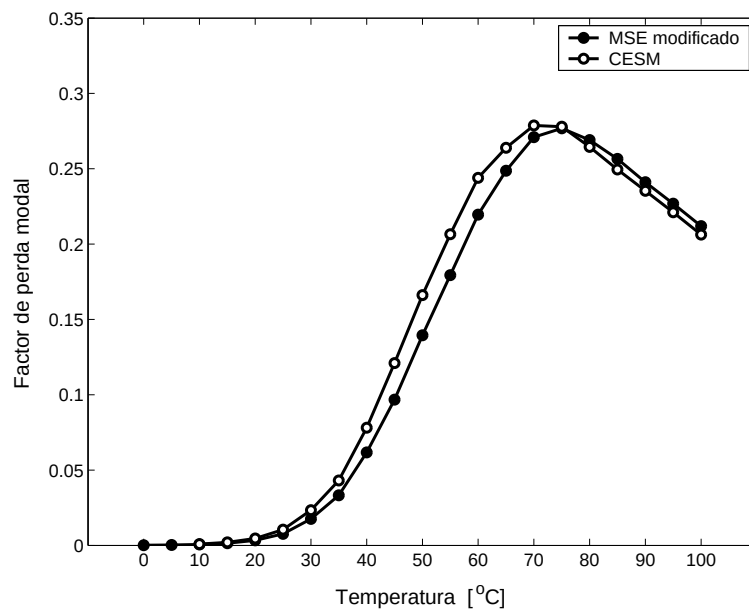


Figura 10.11: Distribuição do factor de perda modal do primeiro modo natural de vibração para o provete S2 calculado pelo método *CESH* e pelo método *MSE* modificado

10.3.2 Análise numérica das configurações de tratamento

Recorrendo-se ao método *MSE* modificado, a uma malha de elementos finitos com 32x16 elementos e às propriedades materiais aplicadas no processo de validação descrito no capítulo anterior, foi determinado o valor da frequência natural e do factor de perda modal correspondentes ao primeiro modo natural de vibração para as configurações de tratamento consideradas, incluindo a configuração modificada M4*.

A Figura 10.12 representa a variação da frequência do primeiro modo natural com a temperatura para cada uma das configurações de tratamento, permitindo estabelecer uma comparação entre elas relativamente à alteração da rigidez de flexão da placa *sandwich* devida ao efeito de desacoplamento produzido pelo núcleo viscoelástico. Os valores determinados por identificação modal sobre as funções de resposta em frequência medidas experimentalmente à temperatura de 27.1°C, apresentados na Tabela 10.1, são igualmente representados no mesmo gráfico.

Nos tratamentos integrados, a aplicação de um núcleo mais espesso aumenta, por um lado, o momento de inércia do conjunto mas, por outro lado, reduz o acoplamento

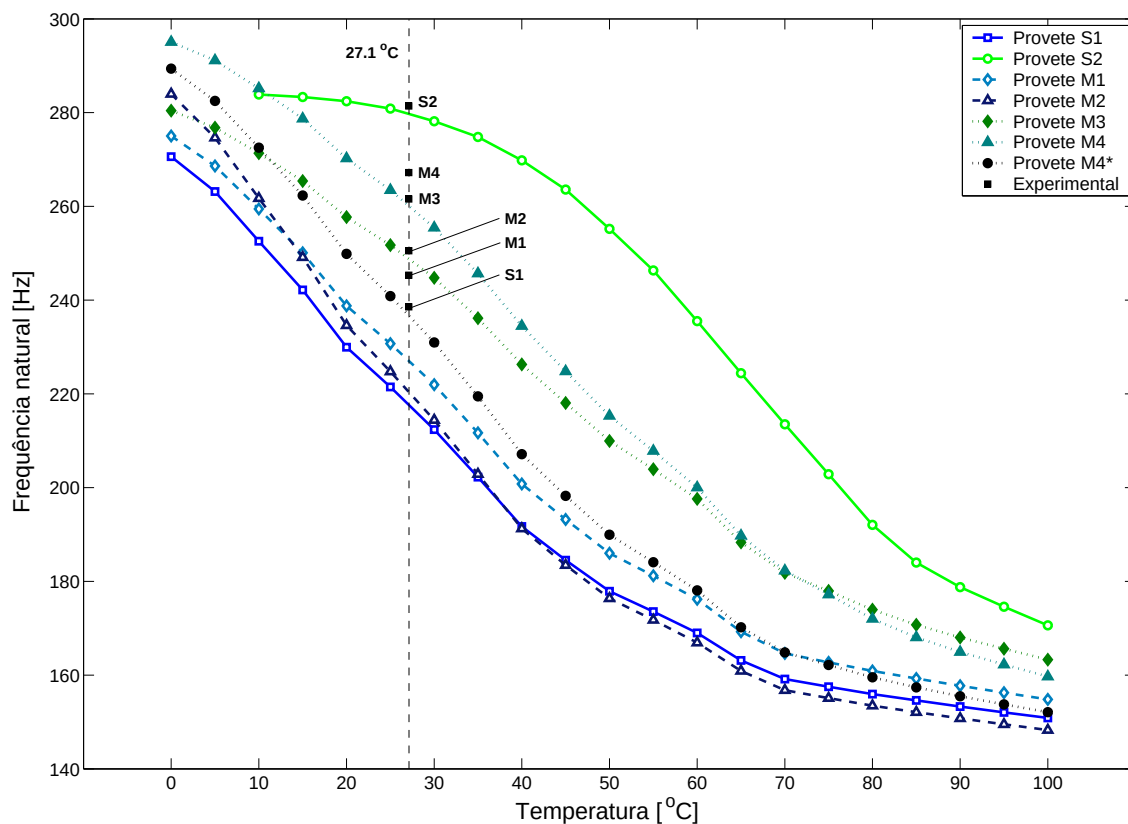


Figura 10.12: Variação da frequência do primeiro modo natural f_1 com a temperatura

entre as placas externas quando o módulo de ganho do material viscoelástico se torna relativamente reduzido, o que acontece à medida que a temperatura aumenta e ultrapassa a sua temperatura de transição. Para além disso, nas configurações multi-camada e multi-material, a aplicação de camadas de restrição interlaminares utilizando materiais relativamente densos, como é o caso das configurações analisadas, introduz uma massa adicional significativa na placa *sandwich* que pode conduzir à diminuição das frequências naturais de vibração.

Comparando os resultados obtidos com as configurações de tratamento S1, M1 e M2, constata-se que os efeitos descritos são evidentes entre S1 e M2, verificando-se que na configuração M1 a colocação da camada de restrição sobre o plano neutro do conjunto atenua o efeito de desacoplamento desenvolvido pelas camadas viscoelásticas, justificando desta forma o facto desta configuração conduzir a um valor da frequência natural fundamental significativamente superior em relação às configurações S1 e M2, em

particular na gama de temperaturas mais elevadas.

Relativamente às configurações multi-material, verifica-se que todas elas apresentam valores para a frequência natural fundamental mais elevados em relação aos obtidos nos tratamentos constituídos unicamente por material 3M ISD112 (S1, M1 e M2). De facto, ao apresentar uma temperatura de transição mais elevada ($\approx 70^{\circ}\text{C}$), o material 3M ISD110 contribui significativamente para o aumento relativo da rigidez de flexão das placas *sandwich*. Por este motivo, e como seria de esperar, a configuração de tratamento S2 apresenta uma elevada rigidez de flexão, responsável pela distribuição da frequência natural fundamental da placa *sandwich* representada na Figura 10.12. No entanto, verifica-se que as configurações multi-material M3, M4 e M4* apresentam, para a gama de baixas temperaturas, valores de frequência natural superiores aos indicados pela assíntota dos valores obtidos pela configuração S2.

Considerando o valor significativo da massa adicional introduzida nas configurações multi-material M3, M4 e M4*, justifica-se o referido comportamento pelo aumento do momento de inércia do conjunto, em resultado da aplicação de um núcleo mais espesso, associado ao efeito de acoplamento de rigidez das camadas externas e das camadas de restrição interlaminares proporcionado pelas camadas de material viscoelástico, que apresenta nesta gama de temperaturas um módulo de ganho mais elevado. Este efeito é particularmente evidente na configuração M4*, na qual a camada central do núcleo assume, nas baixas temperaturas, a função de um espaçador, ampliando a deformação nas camadas dissipativas colocadas junto às placas externas, devido ao elevado módulo de ganho do material viscoelástico 3M ISD110. Na configuração M4, as camadas externas de material viscoelástico 3M ISD110 possuem uma rigidez extensional elevada na zona das baixas temperaturas, aumentando desta forma a rigidez de flexão global do conjunto. A reduzida espessura da camada do núcleo de 3M ISD112 atenua o efeito de desacoplamento. Todavia, quando a temperatura aumenta e atinge a temperatura de transição do material 3M ISD110 ($\approx 70^{\circ}\text{C}$), o seu módulo de ganho reduz-se drasticamente, diminuindo a rigidez de flexão global do conjunto. Nesta gama de altas temperaturas verifica-se entre as configurações M3 e M4 o mesmo efeito que ocorre entre as configurações M1 e M2, proporcionado pela posição central da camada de restrição nas configurações com cinco camadas (M1 e M3).

De uma forma geral e na gama de temperaturas analisada, verifica-se que as

configurações que recorrem a camadas de material 3M ISD110 apresentam uma rigidez de flexão mais elevada relativamente às configurações constituídas unicamente por camadas de material 3M ISD112. Constatase ainda que, nas configurações M1 e M3, que apresentam uma camada de restrição interlaminar sobre o plano neutro da placa *sandwich*, o efeito de desacoplamento de rigidez é atenuado quando, na zona das altas temperaturas, o módulo de ganho do material viscoelástico se torna relativamente reduzido.

Para comparar as configurações de tratamento no que respeita à sua eficiência em termos de amortecimento introduzido, na Figura 10.13 representa-se a distribuição do factor de perda modal do modo natural fundamental das placas *sandwich* com núcleo viscoelástico em função da temperatura. Da análise dos resultados obtidos verifica-se que os dois materiais viscoelásticos utilizados neste estudo apresentam gamas de temperatura eficientes distintas, como seria de prever. Para além deste aspecto, constata-se também que o factor de perda máximo obtido no provete S1 é superior em relação ao obtido na configuração S2. De facto, pela análise dos nomogramas dos dois materiais viscoelásticos (Apêndice F), verifica-se que o valor máximo do factor de perda do material 3M ISD110 é ligeiramente inferior ao apresentado pelo 3M ISD112, enquanto que o módulo de ganho nessas condições de factor de perda máximo é claramente mais elevado no primeiro, justificando-se assim a distribuição do factor de perda ao longo da temperatura das duas configurações.

Comparando o comportamento das configurações S1, M1 e M2, verifica-se que a primeira e a última apresentam um comportamento ao longo da temperatura semelhante, possuindo um máximo de eficiência em redor dos 35°C e apresentando a configuração multi-camada M2 uma eficiência de tratamento mais elevada. Não obstante a menor espessura do conjunto das camadas viscoelásticas, a configuração M1 apresenta uma distribuição do factor de perda modal semelhante à apresentada pela configuração S1, mas transladada sensivelmente 5°C na direcção das altas temperaturas. Este efeito deve-se ao valor relativamente mais elevado da frequência natural desta configuração, que, devido ao princípio da correspondência da frequência-temperatura, translada a gama eficiente na direcção das temperaturas mais elevadas.

Analisando os resultados obtidos nas configurações multi-material M3 e M4, verifica-se que ambas apresentam uma distribuição semelhante do factor de perda ao longo da temperatura, possuindo um máximo na zona dos 55°C. A configuração M4 apresenta um

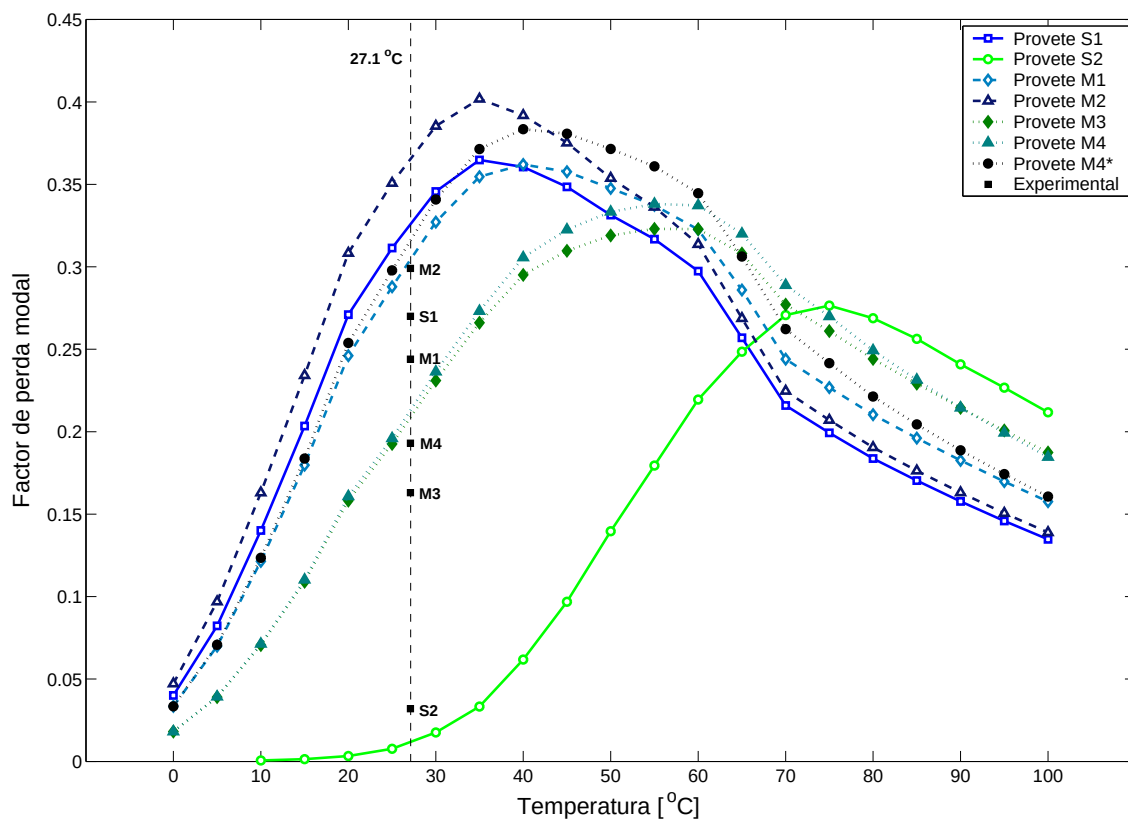


Figura 10.13: Variação do factor de perda modal η_1 com a temperatura

valor máximo para o factor de perda ligeiramente superior ao obtido na configuração M3 em virtude de possuir uma camada viscoelástica adicional de material 3M ISD110. Para além disso, constata-se ainda que a eficiência destas duas configurações é aproximadamente igual na zona das baixas temperaturas, aumentando gradualmente a diferença entre as duas à medida que a temperatura tende para a temperatura de transição do 3M ISD110, evidenciando-se assim o efeito da camada viscoelástica adicional deste material na configuração M4.

Nas configurações M3 e M4, em relação a M1 e M2 respectivamente, uma e duas camadas de material 3M ISD112 são substituídas por camadas dimensionalmente idênticas de 3M ISD110, conseguindo-se aumentar a eficiência do tratamento na gama de temperaturas compreendida entre as temperaturas de transição dos dois materiais, sacrificando todavia alguma eficiência na zona das baixas temperaturas. Se o material viscoelástico com maior temperatura de transição for aplicado numa camada adicional, como realizado entre as

configurações M1 e M4*, consegue manter-se a eficiência do tratamento na zona das baixas temperaturas, aumentando simultaneamente a eficiência do tratamento na zona das altas temperaturas. Todavia, na configuração M4*, a deformação imposta à camada de 3M ISD110 é reduzida nas altas temperaturas em virtude do reduzido módulo de ganho do material 3M ISD112 que impede a transmissão da deformação das placas externas para a camada dissipativa, justificando-se, assim, o decréscimo de eficiência verificado nesta gama de temperaturas.

A configuração M4* representa um tratamento de transição entre as configurações multi-camada e as configurações multi-material. Esta configuração apresenta uma eficiência superior e mais abrangente em termos de gama de temperaturas que a obtida pela configuração M1 e, simultaneamente, uma rigidez de flexão mais elevada. Para temperaturas superiores a 30°C, esta configuração é mais vantajosa que a configuração M2, apresentando uma eficiência mais elevada e mais abrangente, e um efeito de desacoplamento inferior.

Os valores dos factores de perda e das frequências naturais dos diversos provetes, determinados por identificação modal a partir das medições efectuadas no capítulo anterior, embora sejam valores aproximados devido às limitações de representatividade da técnica de identificação modal aplicada, apresentam uma razoável concordância com os resultados numéricos, também eles aproximados, para além de apresentarem a mesma sequência.

10.4 Conclusões

A aplicação do conceito de tratamentos multi-camada e multi-material na configuração de tratamento integrado constitui uma potencial solução aos efeitos de desacoplamento induzido nas estruturas *sandwich* com núcleos de material viscoelástico relativamente espessos e permite, recorrendo a materiais com diferentes temperaturas de transição, alargar a gama eficiente de temperaturas. Com efeito, em resultado da acção das camadas de restrição interlaminares, a eficiência do tratamento pode ser melhorada aplicando uma configuração multi-camada. Todavia, a utilização desta configuração de tratamento requer uma especial atenção no que concerne ao material aplicado nas camadas de restrição

interlaminares, sob pena de aumentar significativamente a massa da estrutura, o que constitui um efeito colateral restritivo desta forma de controlo passivo.

Para a avaliação das configurações multi-material com materiais viscoelásticos com diferentes temperaturas de transição, o método aproximado proposto, *MSE* modificado, revelou-se uma ferramenta eficiente na determinação da distribuição da frequência natural fundamental e do respectivo factor de perda modal de placas *sandwich* em função da temperatura. O método foi validado perante o mais dispendioso método numérico de perturbação *CESM* e por análise modal experimental. Não obstante a limitação da técnica de identificação experimental aplicada, restrita a sistemas com amortecimento moderado, os parâmetros identificados (frequência natural e factor de perda modal) permitem avaliar os efeitos das diversas configurações de tratamento.

De acordo com os resultados obtidos neste estudo, as configurações multi-camada permitem efectivamente atenuar o efeito do desacoplamento de rigidez devido à presença do núcleo viscoelástico, em especial a configuração M1 com uma camada de restrição posicionada sobre o plano neutro da placa *sandwich*. Esta configuração multi-camada apresenta uma frequência natural fundamental relativamente mais elevada, não obstante a massa adicional introduzida, demonstrando a vantagem da aplicação de camadas de restrição interlaminares no núcleo do tratamento integrado. No entanto, a configuração M2 permite obter uma capacidade de amortecimento ainda mais elevada. Todavia, verifica-se que o aumento da eficiência desta configuração se deve, sobretudo, ao aumento do volume de material viscoelástico e não ao aumento da deformação introduzida nas camadas viscoelásticas. Nesta configuração, a aplicação de camadas interlaminares de restrição revela, de forma ainda mais evidente, a atenuação efectiva do efeito de desacoplamento de rigidez produzido por núcleos viscoelásticos espessos.

A aplicação de materiais viscoelásticos com diferentes temperaturas de transição, formando uma configuração multi-material, permite alargar a gama eficiente de temperaturas do tratamento. Com efeito, numa configuração com um dado número de camadas, a introdução de camadas adicionais de um material viscoelástico com diferente temperatura de transição permite alargar a gama eficiente de temperaturas, aumentando, no entanto, quer a espessura quer a massa do tratamento. Todavia, introduzindo um segundo material viscoelástico com diferente temperatura de transição e mantendo o número de camadas, alarga-se igualmente a banda eficiente de temperaturas, embora de

uma forma mais restrita, sacrificando-se alguma da eficiência da configuração inicial.

A forma de emparelhamento e a localização das camadas de restrição interlaminares assumem, no caso dos tratamentos integrados multi-camada e multi-material, uma posição determinante na eficiência do tratamento e no comportamento dinâmico da estrutura tratada. Esta dependência é menor nos tratamentos superficiais multi-camada e multi-material, já que nessa configuração de tratamento a forma como as camadas são colocadas e o efeito desenvolvido pelas camadas de restrição apenas interfere na deformação e na transmissão de deformação entre as camadas dissipativas, não interferindo na rigidez e no acoplamento estrutural da própria base. Assim, o desenvolvimento e a optimização de tratamentos integrados multi-camada e multi-material requer uma análise sustentada, recorrendo, por exemplo, ao elemento finito proposto e a um método de análise aproximado e de reduzido custo computacional, como o método *MSE* modificado proposto neste estudo, para determinar a melhor forma de colocação das camadas viscoelásticas, seleccionar os materiais constituintes e definir as espessuras das camadas.

Neste desenvolvimento, a substituição das camadas de restrição em alumínio por outros materiais menos densos e, eventualmente, por placas de espuma polimérica, actuando simultaneamente como espaçadores, pode constituir uma forma de optimização, tanto no aumento da eficiência do tratamento como na redução da modificação estrutural introduzida.

Capítulo 11

Conclusão

11.1 Conclusões

De acordo com os objectivos definidos para esta dissertação, foi conduzido um estudo orientado para a modelação, a caracterização, a aplicação e o desenvolvimento de tratamentos viscoelásticos multi-camada e multi-material.

A principal vertente do estudo realizado incide na modelação espacial, pelo método dos elementos finitos, e na simulação do comportamento dinâmico de estruturas com tratamentos viscoelásticos. Com este propósito, são analisadas e comparadas as metodologias de descrição das propriedades dos materiais viscoelásticos, as técnicas de modelação espacial e os métodos de análise usualmente utilizados na simulação numérica de tratamentos viscoelásticos pelo método dos elementos finitos. Devido às limitações das estratégias de modelação usualmente aplicadas, baseadas na combinação de elementos finitos estruturais convencionais, é proposto, formulado e implementado um elemento finito generalizado baseado na teoria *layerwise*, que permite simplificar a construção e a definição da malha de elementos finitos, possibilitando uma forma eficaz de modelar estruturas com tratamentos viscoelásticos constituídos por múltiplas camadas de material viscoelástico.

Em virtude da elevada eficiência associada à configuração de tratamento integrado, e devido ao facto de esta forma de tratamento constituir uma solução interessante em estruturas laminadas, é dado especial relevo a esta configuração de tratamento, nomeadamente na adaptação do conceito dos tratamentos multi-camada e multi-material.

No contexto deste trabalho é, também, desenvolvida uma análise sobre as metodologias de caracterização experimental das propriedades dos materiais viscoelásticos, sendo proposta, implementada e aplicada uma metodologia de caracterização e uma montagem experimental para este efeito.

11.1.1 Elemento finito *layerwise*

Face às limitações encontradas nas soluções de modelação espacial existentes e à complexidade na aplicação das mesmas à representação de tratamentos multi-camada, é proposto um elemento finito baseado num modelo *layerwise*. O elemento finito é formulado recorrendo à teoria da camada discreta, impondo directamente a continuidade entre as camadas constituintes na descrição do respectivo campo de deslocamentos e do campo de velocidades. Contrariamente aos elementos finitos *layerwise* publicados, o elemento finito proposto apresenta uma formulação generalizada, na qual não são impostas quaisquer hipóteses simplificativas, para além da hipótese de deslocamento transversal constante ao longo das camadas, já que esta condição é, normalmente, verificada nos tratamentos passivos com camadas viscoelásticas finas. A teoria da camada discreta, sobre a qual se desenvolve o elemento finito, é baseada na cinemática do elemento de placa de *Reissner-Mindlin*, recorrendo a um conjunto de técnicas numéricas para melhorar o desempenho do elemento finito. Essas técnicas, usualmente aplicadas a elementos finitos de membrana, de placa e de casca, foram adaptadas para aplicação no elemento finito *layerwise* proposto.

Com o desenvolvimento da formulação do elemento finito é adicionalmente proposto e desenvolvido um interpolador do campo de velocidades baseado em funções polinomiais de primeiro grau e em funções harmónicas simples. Recorrendo a um conjunto de problemas padrão de teste da formulação da matriz de massa do elemento finito, verificou-se que a variante baseada no interpolador bi-harmónico proposto apresenta uma velocidade de convergência superior à da variante com um interpolador bilinear convencional, convergindo ambas para a mesma solução final.

Adicionalmente, é também proposta uma formulação de um elemento de membrana com graus de liberdade de rotação no plano, o qual, recorrendo a um conjunto de problemas padrão planos, demonstrou um bom desempenho relativamente a elementos

finitos semelhantes. No entanto, a implementação desta formulação da componente de membrana ao elemento *layerwise* proposto requer uma forma de imposição da continuidade do respectivo campo independente de rotações ao longo das camadas, tarefa essa que não foi desenvolvida neste estudo por não constituir uma mais-valia significativa na aplicabilidade do elemento finito à análise de tratamentos viscoelásticos multi-camada.

O elemento finito, nas várias variantes desenvolvidas, foi inicialmente validado numericamente através de um conjunto de problemas padrão, que permitiu verificar o seu bom desempenho e o efeito benéfico das técnicas numéricas adaptadas, em especial a correcção do bloqueio de corte no plano e do bloqueio de corte transversal. Os resultados deste estudo permitiram ainda verificar que o elemento finito desenvolvido apresenta uma matriz de rigidez de característica completa, verifica os *patch-test's* de membrana e de placa fina, e constitui um elemento finito de placa e de casca de faceta multi-camada robusto e preciso.

A aplicabilidade do elemento finito proposto à análise de tratamentos viscoelásticos, tanto na configuração superficial com restrição como na configuração integrada, foi verificada através de um estudo exaustivo utilizando os modelos espaciais combinados como referência na análise comparativa de desempenho e de representatividade. Com este estudo verificou-se que, independentemente do elemento finito ou modelo espacial combinado utilizado, ambas as estratégias de modelação espacial permitem representar eficientemente o padrão de deformação que é desenvolvido nas camadas viscoelásticas. Todavia, verificou-se também que a aplicação do elemento finito proposto é mais simples e expedita, permitindo facilmente modelar tratamentos multi-camada e multi-material. Para além disso, esta forma de modelação permite uma maior flexibilidade na alteração dos parâmetros do tratamento, incluindo o número de camadas, materiais constituintes, espessuras e localização de tratamento, alterações essas que nos modelos combinados exigem a remodelação da malha de elementos finitos.

De forma a validar experimentalmente o elemento finito proposto e os modelos combinados utilizados como referência neste estudo, foi desenvolvido um trabalho experimental sobre tratamentos superficiais com restrição e tratamentos integrados mono-camada. Aplicando um procedimento de análise directa em frequência e recorrendo ao método do módulo complexo, calcularam-se as funções de resposta em frequência para cada um dos provetes, as quais foram comparadas graficamente com as funções de resposta

em frequência homólogas medidas experimentalmente. Um conjunto de indicadores de correlação de funções de resposta em frequência foi igualmente aplicado para avaliar o nível de correlação existente entre o modelo de resposta numérico e as funções de resposta em frequência medidas, bem como identificar possíveis erros derivados do processo de medição, efeitos dos modos de corpo rígido da montagem experimental e representatividade da malha de elementos finitos utilizada. Os resultados obtidos nesta análise revelaram um bom desempenho dos modelos combinados e do elemento finito proposto na simulação do comportamento dinâmico de tratamentos viscoelásticos superficiais com restrição e integrados mono-camada, permitindo verificar as vantagens inerentes à aplicação do elemento finito proposto, nomeadamente a simplicidade associada à geração da malha de elementos finitos, a definição da constituição do laminado e a afectação das propriedades dos materiais.

Para aplicação na modelação de tratamentos integrados multi-camada e multi-material, o elemento finito é validado experimentalmente recorrendo a um conjunto de provetes com estas configurações de tratamento. De acordo com os resultados obtidos, o elemento finito permite representar de forma eficiente tratamentos viscoelásticos integrados com múltiplas camadas de material viscoelástico intercaladas com camadas interlaminares de restrição.

Com base nos resultados obtidos conclui-se que o elemento finito desenvolvido permite, efectivamente, uma forma de modelação eficiente e simples de tratamentos viscoelásticos constituídos por uma ou várias camadas viscoelásticas e camadas de restrição. Com efeito, o elemento finito proposto possui as características principais seguintes:

- é desenvolvido sobre uma formulação robusta e generalizada, permitindo a sua aplicação a qualquer configuração de tratamento viscoelástico ou estrutura laminada;
- apresenta um bom desempenho como elemento de placa e de casca de faceta, incorporando um conjunto de técnicas numéricas responsáveis pela sua robustez numérica;
- facilita o processo de geração da malha de elementos finitos, nomeadamente em geometrias complexas tridimensionais e em tratamentos com múltiplas camadas viscoelásticas;
- permite representar eficientemente tratamentos mono e multi-camada, bem como tratamentos multi-material;

- simplifica a modificação da constituição e dos parâmetros do tratamento viscoelástico ou do laminado, bem como das propriedades dos materiais constituintes;
- simplifica, ainda, a análise e optimização de tratamentos parciais localizados devido à facilidade associada à redefinição da constituição do tratamento;
- pode também ser aplicado na análise dinâmica ou estática linear de estruturas finas homogéneas ou laminadas, planas ou geometricamente complexas.

Este elemento finito constitui, assim, uma ferramenta de modelação eficaz, que permite sobretudo evitar as dificuldades inerentes aos modelos combinados, em especial na modelação de tratamentos viscoelásticos mono ou multi-camada aplicados sobre geometrias tridimensionais, facilitando, desta forma, a realização de análises numéricas de projecto e de optimização de tratamentos viscoelásticos.

11.1.2 Caracterização do módulo complexo de materiais viscoelásticos

Face ao interesse na determinação das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos, nomeadamente o seu módulo complexo, e após uma análise das metodologias usualmente aplicadas com este propósito, incluindo a técnica das vigas vibrantes amplamente aplicada pela maioria dos produtores e utilizadores deste tipo de materiais, foi realizado um estudo no sentido de desenvolver uma montagem experimental e uma metodologia de caracterização que permitissem, por um lado, um perfeito conhecimento das suas características e limitações e, por outro, evitar as inúmeras aproximações inerentes às metodologias usuais. Após um trabalho de análise de diversas configurações de montagens experimentais e metodologias de caracterização, foi definida uma montagem eficiente, baseada num modelo analítico com um grau de liberdade e utilizando apenas um provete de material viscoelástico, que cumpre na íntegra os requisitos previamente estabelecidos. De facto, a montagem experimental adoptada permite:

- reproduzir eficientemente um modelo com um grau de liberdade, simplificando desta forma o procedimento de identificação das propriedades do material e reduzindo o número de variáveis do mesmo;

- evitar os graus de liberdade espúrios através de um sistema de guiamento elástico orientado;
- atenuar os efeitos das condições de fronteira da montagem, bem como reduzir a perturbação de fontes de vibração externas, optando pelo encastramento da montagem e dos sistemas de excitação e de medição num bloco maciço montado sobre uma suspensão elástica eficiente;
- isolar a resposta do sistema dinâmico considerado das ressonâncias da própria montagem, em especial das ressonâncias da base do excitador, numa banda relativamente larga de frequências;
- a introdução de todo o sistema num ambiente de temperatura controlada, recorrendo ao princípio da correspondência da frequência-temperatura para correlacionar medições e alargar a gama efectiva de caracterização.

Com efeito, a montagem experimental é muito simples e deve a sua eficiência à rigidez dos elementos móveis e à acção orientada de lâminas elásticas que restringem os graus de liberdade espúrios e, simultaneamente, libertam e guiam o grau de liberdade considerado no modelo teórico assumido. A elevada rigidez dos elementos móveis e, em especial, a rigidez e a elevada massa do bloco base, conjuntamente com a eficiente forma de suspensão elástica, permitem maximizar a gama de frequências útil no processo de identificação do módulo complexo, que na configuração actual está compreendida entre 0 e 400Hz. Os modos de corpo rígido do conjunto abrangem uma gama de frequências com um limite superior muito reduzido, sendo na montagem actual o valor desse limite inferior a 1Hz. A montagem é relativamente compacta, permitindo a sua introdução num ambiente de temperatura controlada.

A montagem proposta e a metodologia de caracterização adoptada foram validadas através da caracterização de dois provetes diferentes de material 3M ISD112, obtendo-se uma razoável concordância entre a distribuição do módulo complexo determinado e o nomograma de frequência reduzida fornecido pelo fabricante do material. As funções do módulo de ganho e do factor de perda obtidas pela metodologia de caracterização proposta apresentam uma distribuição uniforme com uma reduzida dispersão, características invulgaes noutros métodos de caracterização correntes, como, por exemplo, o método das vigas vibrantes.

Todavia, e apesar das inúmeras correcções e melhoramentos introduzidos na montagem experimental durante o seu desenvolvimento, de forma a atingir a eficiência actualmente disponível no sistema de caracterização desenvolvido, ainda persiste um conjunto de modificações que foram sendo identificadas durante a aplicação da montagem proposta. Com efeito, é possível aumentar a gama útil de frequências deslocando as frequências de ressonância da base do excitador pela construção de uma base mais rígida, ou substituindo o excitador electromagnético por um excitador piezoeléctrico. Esta última solução permitiria, adicionalmente, a aplicação de temperaturas mais elevadas no procedimento de caracterização, actualmente restritas a uma gama inferior a 35°C por limitação do excitador utilizado.

11.1.3 Tratamentos multi-camada e multi-material

Uma vez que os tratamentos viscoelásticos apresentam uma gama eficiente que é limitada tanto em termos da frequência como da temperatura, qualquer mecanismo que permita a expansão dessa gama útil constitui uma forma de optimização muito importante nesta forma de controlo passivo. Assim, tendo por base os tratamentos multi-camada e multi-material aplicados nos tratamentos superficiais, desenvolveu-se nesta dissertação uma análise sobre a aplicabilidade deste conceito de optimização à configuração de tratamento viscoelástico integrado.

Todavia, a aplicação de múltiplas camadas de material ou de materiais viscoelásticos com diferentes temperaturas de transição num tratamento integrado apresenta uma dificuldade acrescida relativamente aos tratamentos superficiais multi-camada. De facto, a sequência do emparelhamento das camadas, o número de camadas introduzidas, a presença e o efeito das camadas de restrição interlaminares e as propriedades dos materiais que constituem o núcleo do tratamento integrado interferem consideravelmente na rigidez de flexão global da estrutura e na transmissão da deformação das camadas externas para cada camada dissipativa individual. A avaliação do efeito global de todos estes parâmetros exige uma análise exaustiva e computacionalmente dispendiosa. No âmbito deste trabalho, pretendeu-se unicamente avaliar o impacto da aplicação de configurações de tratamento multi-camada e multi-material aplicando um segundo material, 3M ISD110, nos tratamentos utilizados e analisados com o material 3M ISD112. Para isso, foi desenvolvido um método de cálculo específico e eficiente, embora aproximado, baseado

no método *MSE* para a determinação das frequências naturais e respectivos factores de perda de estruturas com tratamentos viscoelásticos.

Com base nos resultados obtidos no estudo experimental e na análise numérica, retiram-se as seguintes conclusões sobre as configurações multi-camada e multi-material analisadas:

- a substituição de uma configuração mono-camada por uma multi-camada equivalente, recorrendo a um conjunto de camadas interlaminares de restrição, permite efectivamente reduzir o efeito de desacoplamento entre as placas externas induzido pelo núcleo viscoelástico, atenuando a diminuição da rigidez de flexão associada aos tratamento integrados;
- a eficiência do tratamento é melhorada com a adopção de uma configuração multi-camada em resultado do efeito de restrição e de transmissão de deformação proporcionado pelas camadas interlaminares de restrição;
- a massa adicionada pelas camadas de restrição usando materiais metálicos pode aumentar significativamente a massa do tratamento, sendo preferível recorrer a materiais menos densos, como, por exemplo, filmes poliméricos, com o intuito de atenuar este efeito secundário;
- a substituição de algumas camadas de material viscoelástico por camadas de outro material viscoelástico com uma temperatura de transição diferente permite alargar a gama eficiente de temperaturas do tratamento na direcção da temperatura de transição do novo material, sacrificando todavia alguma eficiência do tratamento original na sua gama eficiente de temperaturas;
- a adição de novas camadas constituídas pelo novo material viscoelástico permite manter a zona eficiente do tratamento original, desde que a nova configuração garanta a transmissão de deformação para as camadas originalmente existentes;
- a sequência de emparelhamento assume uma posição preponderante na eficiência do tratamento e no comportamento dinâmico da estrutura tratada, em virtude do efeito combinado entre a deformação imposta a cada camada e a transmissão de deformação para as camadas restantes.

11.2 Contribuição desta dissertação

A principal contribuição deste trabalho consiste no desenvolvimento e verificação numérica e experimental do desempenho de um elemento finito por camadas, baseado na teoria *layerwise*, capaz de representar a cinemática e o campo de deformações de tratamentos viscoelásticos multi-camada. O elemento finito desenvolvido assume uma formulação generalizada de forma a permitir a sua aplicação universal na simulação de tratamentos viscoelásticos com um determinado número de camadas viscoelásticas e de camadas de restrição, independentemente da configuração e sequência de emparelhamento. O elemento finito proposto pode ser aplicado como um elemento de placa ou como um elemento de casca de faceta e permite, acima de tudo, simplificar a tarefa de geração da malha de elementos finitos utilizando um gerador de malha convencional, o que constitui uma vantagem considerável na análise de estruturas tridimensionais de geometria complexa.

É, também, proposta e implementada uma metodologia, e respectivo equipamento experimental, de caracterização de materiais viscoelásticos que permite a identificação directa da distribuição do módulo complexo do material em função da frequência, a qual apresenta uma boa uniformidade, uma reduzida dispersão e verifica eficientemente o princípio da correspondência da frequência-temperatura.

Recorrendo ao elemento finito desenvolvido neste estudo realizou-se uma análise sobre a aplicação das configurações multi-camada e multi-material em tratamentos integrados com o intuito de reduzir as alterações estruturais induzidas por estes tratamentos e aumentar a sua eficiência, nomeadamente o alargamento da sua gama útil de temperaturas.

O estudo numérico e experimental realizado sobre a aplicação das configurações com múltiplas camadas e múltiplos materiais em tratamentos integrados permitiu verificar que tal procedimento constitui, de facto, uma forma de optimização dos tratamentos viscoelásticos, atenuando a sua principal limitação, isto é, a redução da rigidez de flexão da estrutura devida à acção de desacoplamento induzido pelo núcleo viscoelástico, e, simultaneamente, aumentar a sua eficiência e a gama eficiente de temperaturas. É ainda verificada a complexidade associada à aplicação eficiente da configuração multi-material,

nomeadamente o efeito significativo da sequência do emparelhamento das camadas viscoelásticas e da posição relativa das camadas de restrição interlaminares.

É, ainda, proposta uma metodologia de análise numérica, baseada no método da energia de deformação modal (MSE), que, por considerar os efeitos da rigidez e da massa do tratamento no modelo modal real da estrutura tratada, permite uma melhor aproximação na determinação das frequências naturais e respectivos factores de perda relativamente ao método MSE original, que apenas considera o modelo modal da estrutura base.

11.3 Sugestão de trabalhos futuros

Ao longo da realização deste trabalho foram surgindo diversas ideias sobre trabalhos futuros, nomeadamente na generalização e melhoramento do elemento finito e na análise exaustiva e aprofundada dos efeitos combinados nos tratamentos viscoelásticos multi-camada e multi-material.

Em relação ao elemento finito proposto, e no sentido de ampliar a sua aplicabilidade a estruturas *sandwich* com núcleos compressíveis e espessos, é necessário aliviar a hipótese assumida de deslocamento transversal constante ao longo das camadas que constituem a estrutura. Embora existam formas de introduzir esta generalização adoptando elementos de placa com esmagamento, usando 6 ou 7 graus de liberdade por nó [235], a adaptação da teoria *layerwise* recorrendo a elementos sólidos para representar cada camada individual constitui, possivelmente, a melhor solução. Com efeito, a disponibilidade actual de elementos sólidos eficientes e robustos, possuindo uma protecção ao bloqueio numérico associado às elevadas razões de aspecto do elemento e ao bloqueio de volume associado à incompressibilidade do material viscoelástico, permite facilmente implementar esta forma de generalização do elemento finito proposto.

A imposição de uma forma de continuidade e de compatibilização dos graus de liberdade de rotação no plano das várias camadas constituintes permitiria a generalização do elemento de casca de faceta com rotação no plano proposto neste estudo. Para além de introduzir o grau de liberdade em falta, facilitando a operação de montagem da matriz de rigidez global e evitando o seu mau condicionamento, e facilitar a ligação com outros elementos finitos estruturais, permitiria melhorar o desempenho do elemento finito proposto, conforme indiciado nos testes numéricos realizados.

No sentido de estender a aplicação do elemento finito proposto à análise de tratamentos activos e tratamentos híbridos, sugere-se a generalização da relação constitutiva da formulação do elemento e a introdução dos graus de liberdade eléctricos.

Quanto à aplicação dos conceitos multi-camada e multi-material na optimização de tratamentos integrados, em consequência dos resultados promissores obtidos, sugere-se uma análise exaustiva sobre a acção dos parâmetros intervenientes na eficiência do tratamento e na redução da modificação estrutural imposta, no sentido de definir linhas orientadoras de projecto e de optimização destas configurações de tratamento.

Apêndice A

Viga compósita: equações *RKU*

A.1 Equação da viga compósita

Ross *et al.* [49] consideram uma viga compósita formada por três camadas (Figura A.1) das quais apenas a camada central apresenta deformação de corte. Assume-se que as camadas externas se comportam de acordo com as hipóteses de *Kirchoff-Love*.

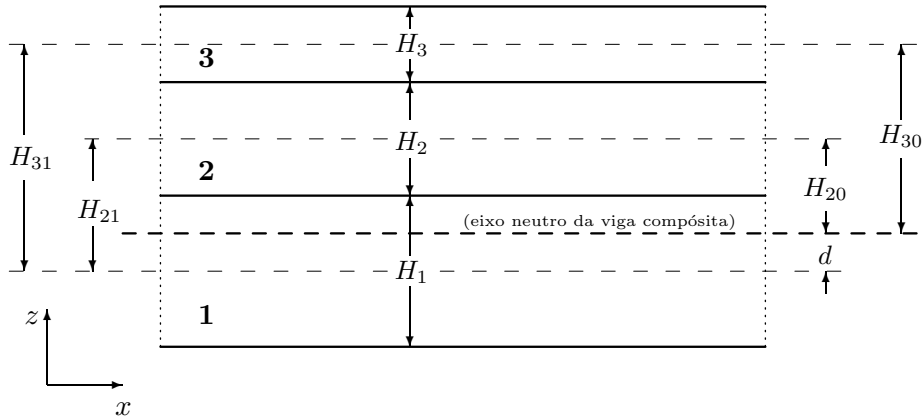


Figura A.1: Geometria da viga compósita

A equação da viga compósita é descrita por:

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \mathfrak{m} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (\text{A.1})$$

onde o produto EI representa a rigidez de flexão do conjunto e $\mathfrak{m}$ a massa por unidade de comprimento.

O momento de flexão total da viga compósita é definido por:

$$\mathfrak{M} = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 (\mathfrak{M}_{ii} + F_i H_{i0}) \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathfrak{M}_{ii}$ representa o momento exercido pelas forças na camada i em torno do seu eixo neutro, sendo definido por:

$$\mathfrak{M}_{11} = K_1 \frac{H_1^2}{12} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathfrak{M}_{22} = K_2 \frac{H_2^2}{12} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\mathfrak{M}_{33} = K_3 \frac{H_3^2}{12} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

onde $K_i = E_i H_i$ representa a rigidez de flexão da camada i .

O parâmetro H_{i0} representa a distância do eixo neutro de cada uma das camadas i ao eixo neutro da viga compósita [48]:

$$H_{i0} = H_{i1} - d \quad (\text{A.6})$$

A força extensional que actua em cada uma das camadas, F_i , é definida por:

$$F_1 = K_1 H_{10} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{A.7})$$

$$F_2 = K_2 \left[H_{20} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{H_2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$F_3 = K_3 \left[H_{30} \frac{\partial \phi}{\partial x} - H_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \quad (\text{A.9})$$

A.1.1 Posição do eixo neutro da viga compósita

A posição do eixo neutro da viga compósita, d , é determinada de forma a satisfazer a condição:

$$\sum_{i=1}^3 F_i = 0 \quad (\text{A.10})$$

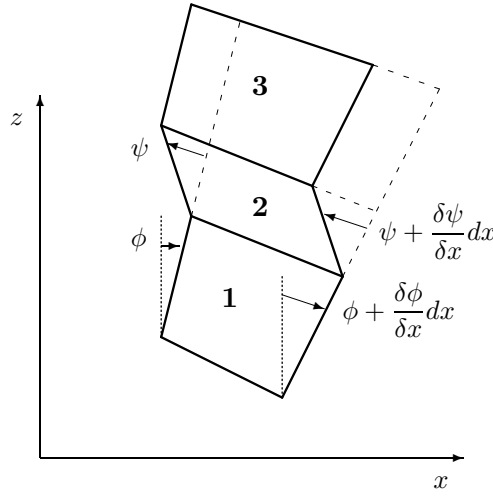


Figura A.2: Cinemática da viga compósita

Assim, substituindo (A.7)-(A.9) em (A.10), obtém-se a equação:

$$F_1 + F_2 + F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x} \left[(K_2 H_{21} + K_3 H_{31}) - d(K_1 + K_2 + K_3) \right] - \frac{\partial \psi}{\partial x} H_2 \left[\frac{K_2}{2} + K_3 \right] = 0 \quad (\text{A.11})$$

que permite determinar a posição do eixo neutro da viga compósita:

$$d = \frac{1}{K_1 + K_2 + K_3} \left[(K_2 H_{21} + K_3 H_{31}) - \left(K_2 \frac{H_2}{2} + K_3 H_2 \right) \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right] \quad (\text{A.12})$$

onde $\frac{\partial \psi}{\partial \phi}$ representa a razão $\frac{\partial \psi}{\partial x} / \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

A.1.2 Rigidez de flexão da viga compósita

Substituindo as equações (A.3)-(A.9) em (A.2), determina-se a expressão que define a rigidez de flexão da viga compósita, da forma:

$$EI = K_1 \frac{H_1^2}{12} + K_2 \frac{H_2^2}{12} + K_3 \frac{H_3^2}{12} + K_1 d^2 + K_2 (H_{21} - d)^2 + K_3 (H_{31} - d)^2 - H_2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \left[K_2 \frac{H_2}{12} + \frac{K_2}{2} (H_{21} - d) + K_3 (H_{31} - d) \right] \quad (\text{A.13})$$

A.1.3 Relação entre a curvatura e a deformação de corte da camada viscoelástica

Para calcular a posição do eixo neutro da viga compósita é necessário determinar a relação entre a curvatura da viga base (camada 1) e a deformação de corte da camada 2.

De acordo com a Figura A.2, a deformação de corte na camada 2 pode ser relacionada com a força extensional que actua na camada adjacente através da expressão:

$$G_2\psi = \tau_2 = \left(\frac{-\partial F_3}{\partial x} \right) \quad (\text{A.14})$$

que pode ser reescrita na forma:

$$\psi = -\frac{1}{G_2} \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad (\text{A.15})$$

Assumindo que a viga está simplesmente apoiada em ambos os extremos, condição responsável pela simplicidade associada às equações *RKU*, podemos relacionar a rotação de corte com a sua segunda derivada através da expressão:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -p^2 \psi \quad (\text{A.16})$$

onde p define o número de ondas da vibração da viga ($p = (\frac{m}{EI}\omega^2)^{\frac{1}{4}}$), podendo ser reescrita na forma:

$$\psi = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo a Equação (A.9) em (A.15) obtém-se:

$$\psi = -\frac{1}{G_2} K_3 \left(H_{30} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - H_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \quad (\text{A.18})$$

Igualando as equações (A.17) e (A.18) determina-se a relação entre a deformação de

corte da camada 2 e a curvatura da viga base:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{1}{G_2} K_3 \left(H_{30} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - H_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}} &= \frac{1}{G_2} K_3 H_{30} \left[\frac{p^2 G_2}{G_2 + p^2 K_3 H_2} \right] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}} &= \frac{K_3 H_{30} p^2}{G_2 + p^2 K_3 H_2}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Pré-multiplicando ambos os membros da equação anterior por H_2 obtemos a expressão:

$$H_2 \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}} = H_2 \frac{K_3 H_{30} p^2}{G_2 + p^2 K_3 H_2} = \frac{H_{30}}{1 + \frac{G_2}{p^2 K_3 H_2}} \tag{A.20}$$

Devido às condições de fronteira adoptadas, a relação $H_2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$ pode ser obtida a partir da equação anterior:

$$H_2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = H_2 \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = H_2 \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}} = \frac{H_{31} - d}{1 + g} \tag{A.21}$$

onde o parâmetro g , designado por parâmetro de corte [49], é definido por:

$$g = \frac{G_2}{p^2 K_3 H_2} \tag{A.22}$$

A.1.4 Equações *RKU* (*Ross-Kerwin-Ungar*)

Posição do eixo neutro da viga compósita

Substituindo a relação $H_2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$ na Equação (A.12) pela Equação (A.21) podemos determinar a posição do eixo neutro da viga compósita através da expressão:

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{1}{K_1 + K_2 + K_3} \left[(K_2 H_{21} + K_3 H_{31}) - \left(\frac{K_2}{2} + K_3 \right) \frac{(H_{31} - d)}{1 + g} \right] \\
 &= \frac{1}{(1 + g)(K_1 + K_2 + K_3)} \left[K_2 \left(H_{21} - \frac{H_{31}}{2} \right) + d \left(\frac{K_2}{2} + K_3 \right) + g(K_2 H_{21} + K_3 H_{31}) \right] \\
 &= \frac{K_2 \left(H_{21} - \frac{H_{31}}{2} \right) + g(K_2 H_{21} + K_3 H_{31})}{K_1 + \frac{K_2}{2} + g(K_1 + K_2 + K_3)}
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

Rigidez de flexão da viga compósita de 3 camadas

De forma idêntica e recorrendo à mesma relação é possível definir a rigidez de flexão da viga como sendo:

$$\begin{aligned}
 EI &= K_1 \frac{H_1^2}{12} + K_2 \frac{H_2^2}{12} + K_3 \frac{H_3^2}{12} + K_1 d^2 + K_2 (H_{21} - d)^2 + K_3 (H_{31} - d)^2 \\
 &\quad - \frac{(H_{31} - d)}{1 + g} \left[K_2 \frac{H_2}{12} + \frac{K_2}{2} (H_{21} - d) + K_3 (H_{31} - d) \right]
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

As distâncias H_{21} e H_{31} são na generalidade definidas como:

$$H_{21} = \frac{H_1 + H_2}{2} \qquad H_{31} = \frac{H_1 + 2H_2 + H_3}{2} \tag{A.25}$$

A.2 Viga de *Oberst*

Na viga de *Oberst* a camada 2 é sujeita a deformação puramente extensional dada a inexistência da camada de restrição (camada 3).

As equações *RKU* genéricas (A.23) e (A.24) podem ser aplicadas neste caso, bastando para isso considerar as seguintes condições:

$$H_3 = 0 ; \quad E_3 = 0 ; \quad K_3 = 0 \quad (\text{A.26})$$

De acordo com a Equação (A.22), quando a espessura da camada de restrição H_3 tende para zero, o parâmetro de corte tenderá para infinito. Assim, o parâmetro d pode ser determinado através do cálculo do limite definido por:

$$\begin{aligned} d &= \lim_{\substack{H_3 \rightarrow 0 \\ g \rightarrow \infty}} \left[\frac{K_2 \left(H_{21} - \frac{H_{31}}{2} \right) + g (K_2 H_{21} + K_3 H_{31})}{K_1 + \frac{K_2}{2} + g(K_1 + K_2 + K_3)} \right] \\ &= \frac{K_2}{K_1 + K_2} \left[\frac{H_1 + H_2}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Substituindo (A.27) na Equação (A.24) e considerando as condições postuladas em (A.26), obtemos a expressão que define a rigidez de flexão da viga de *Oberst* na forma:

$$EI = K_1 \frac{H_1^2}{12} + K_2 \frac{H_2^2}{12} + \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \left[\frac{H_1 + H_2}{2} \right]^2 \quad (\text{A.28})$$

Introduzindo dois novos parâmetros adimensionais, $e_2 = \frac{E_2}{E_1}$ e $h_2 = \frac{H_2}{H_1}$, podemos reescrever a expressão A.28 na forma equivalente:

$$\frac{EI}{E_1 I_1} = 1 + e_2 h_2^3 + 3(1 + h_2)^2 \left[\frac{e_2 h_2}{1 + e_2 h_2} \right] \quad (\text{A.29})$$

sendo esta a forma usualmente apresentada na literatura [8,9].

A.3 Viga de *Van Oort*

Para obter a rigidez de flexão da viga de *Van Oort* podemos recorrer à expressão da viga compósita dupla:

$$\begin{aligned} EI &= K_1 \frac{H_1^2}{12} + K_3 \frac{H_3^2}{6} + 2K_3 H_{31}^2 \frac{g}{1+g} + \\ &+ 2K_2 \left[\frac{H_2^2}{12} + H_{21}^2 - \frac{H_2}{12} \frac{H_{31}}{(1+g)} - \frac{H_{21}}{2} \frac{H_{31}}{(1+g)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

a qual é obtida com base na condição adicional:

$$d = 0 \quad (\text{A.31})$$

Aplicando as condições (A.26) da viga de *Oberst* na expressão da viga dupla, obtemos:

$$\begin{aligned} EI &= K_1 \frac{H_1^2}{12} + K_2 \frac{H_2^2}{6} + 2K_2 H_{21}^2 \\ &= K_1 \frac{H_1^2}{12} + K_2 \frac{H_2^2}{6} + \frac{K_2}{2} (H_1 + H_2)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Utilizando os parâmetros adimensionais e_2 e h_2 podemos expressar a rigidez da viga de *Van Oort* na forma equivalente:

$$\frac{EI}{E_1 I_1} = 1 + e_2 \left[(1 + 2h_2)^3 - 1 \right] \quad (\text{A.33})$$

A.4 Viga *sandwich* simétrica

Na viga *sandwich* simétrica são verificadas as seguintes condições:

$$H_3 = H_1 ; \quad E_3 = E_1 ; \quad K_3 = K_1 \quad (\text{A.34})$$

que permitem obter a relação:

$$H_{21} = \frac{H_{31}}{2} \quad (\text{A.35})$$

Aplicando as condições anteriores podemos definir a posição do eixo neutro como:

$$d = H_{21} \frac{g}{g + \frac{1}{2}} = (H_1 + H_2) \frac{g}{1 + 2g} \quad (\text{A.36})$$

De notar que no caso da viga simétrica a posição do eixo neutro seria hipoteticamente :

$$d = \frac{(H_1 + H_2)}{2} \quad (\text{A.37})$$

No entanto, esta situação só se verificará quando a camada 2 possuir uma elevada rigidez ($g \rightarrow \infty$). No caso de uma camada pouco rígida, a distância d tenderá para zero

$(g \rightarrow 0)$ [8].

Assim, a rigidez de flexão da viga *sandwich* simétrica é definida por:

$$\begin{aligned}
EI &= K_1 \frac{H_1^2}{6} + K_2 \frac{H_2^2}{12} + K_1 (H_1 + H_2)^2 \left(\frac{g}{1+2g} \right)^2 + \\
&+ K_2 (H_1 + H_2)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{g}{1+2g} \right)^2 + K_1 (H_1 + H_2)^2 \left(\frac{1+g}{1+2g} \right)^2 \\
&- K_2 \frac{H_2}{12} \frac{H_1 + H_2}{1+2g} - \frac{K_2}{4} \frac{(H_1 + H_2)^2}{(1+2g)^2} - K_3 \frac{(H_1 + H_2)^2 (1+g)}{(1+2g)^2} \\
&= K_1 \frac{H_1^2}{6} + K_1 (H_1 + H_2)^2 \left(\frac{g}{1+2g} \right) + K_2 \left[\frac{H_2^2}{12} - \frac{H_2}{12(1+2g)} \right]
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Desprezando a rigidez extensional da camada 2 ($E_2 = 0$), a expressão anterior pode ser simplificada na forma:

$$EI = K_1 \frac{H_1^2}{6} + K_1 (H_1 + H_2)^2 \left(\frac{g}{1+2g} \right) \tag{A.39}$$

que pode ser reescrita na forma equivalente:

$$\frac{EI}{E_1 I_1} = 2 + 12(1 + h_2)^2 \frac{g}{1+2g} \tag{A.40}$$

A.5 Viga *sandwich* dupla simétrica

Tal como na viga de *Van Oort*, também neste caso a posição do eixo neutro da viga compósita coincide com o eixo neutro da viga base (camada 1), verificando-se assim a condição:

$$d = 0 \tag{A.41}$$

Desta forma, a rigidez de flexão da viga *sandwich* dupla é descrita por:

$$\begin{aligned}
EI &= K_1 \frac{H_1^2}{12} + 2K_2 \frac{H_2^2}{12} + 2K_3 \frac{H_3^2}{12} + 2K_2 H_{21}^2 + 2K_3 H_{31}^2 \\
&\quad - 2K_2 \frac{H_2}{12} \frac{H_{31}}{1+g} - K_2 H_{21} \frac{H_{31}}{1+g} - 2K_3 \frac{H_{31}^2}{1+g} = \\
&= K_1 \frac{H_1^2}{12} + K_3 \frac{H_3^2}{6} + 2K_3 H_{31}^2 \frac{g}{1+g} + \\
&\quad + 2K_2 \left[\frac{H_2^2}{12} + H_{21}^2 - \frac{H_2 H_{31}}{12(1+g)} - \frac{H_{21} H_{31}}{2(1+g)} \right]
\end{aligned} \tag{A.42}$$

que, desprezando a rigidez extensional da camada 2 ($E_2 = 0$), pode ser simplificada como:

$$EI = K_1 \frac{H_1^2}{12} + K_3 \frac{H_3^2}{6} + 2K_3 H_{31}^2 \frac{g}{1+g} \tag{A.43}$$

ou, na forma equivalente:

$$\frac{EI}{E_1 I_1} = 1 + 2e_3 h_3^3 + 6e_3 h_3 (1 + 2h_2 + h_3)^2 \frac{g}{1+g} \tag{A.44}$$

Particularizando para as condições adicionais:

$$H_3 = H_1 ; \quad E_3 = E_1 ; \quad K_3 = K_1 ; \quad H_{21} = \frac{H_{31}}{2} \tag{A.45}$$

a expressão (A.42) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
EI &= K_1 \frac{H_1^2}{4} + 2K_1 (H_1 + H_2)^2 \frac{g}{1+g} + \\
&\quad + 2K_2 \left[\frac{H_2^2}{12} + H_{21}^2 \frac{g}{1+g} - \frac{H_2 H_{31}}{12(1+g)} \right]
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Apêndice B

Viga com camada viscoelástica: caracterização do módulo complexo

A caracterização das propriedades do material viscoelástico requer a determinação experimental da razão de rigidez da viga compósita, através da qual é possível determinar o módulo extensional da camada viscoelástica para as vigas de *Oberst* e de *Van Oort*, bem como o parâmetro de corte, e consequentemente o módulo de corte, para as vigas *sandwich*.

Assume-se que nas vigas com tratamento viscoelástico a camada 2 pode ser caracterizada por um módulo extensional ou de corte complexo da forma:

$$\bar{E}_2 = E_2(1 + j\eta_2) \quad (\text{B.1})$$

$$\bar{G}_2 = G_2(1 + j\eta_2)$$

onde η_2 representa o factor de perda do material viscoelástico. Desta forma, as razões de rigidez $\bar{\mathcal{R}}$ expressas em (A.29), (A.33), (A.40) e (A.44) são entidades de natureza complexa definidas por:

- Viga de *Oberst*

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1I_1} = 1 + \bar{e}_2h_2^3 + 3(1 + h_2)^2 \left[\frac{\bar{e}_2h_2}{1 + \bar{e}_2h_2} \right] \quad (\text{B.2})$$

- Viga de *Van Oort*

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = 1 + \bar{e}_2 \left[(1 + 2h_2)^3 - 1 \right] \quad (\text{B.3})$$

- Viga *sandwich* simétrica

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = 2 + 12(1 + h_2)^2 \frac{\bar{g}}{1 + 2\bar{g}} \quad (\text{B.4})$$

- Viga *sandwich* dupla

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = 1 + 2e_3 h_3^3 + 6e_3 h_3 (1 + 2h_2 + h_3)^2 \frac{\bar{g}}{1 + \bar{g}} \quad (\text{B.5})$$

Estas razões de rigidez podem ser determinadas com base na relação entre as frequências naturais e os respectivos factores de perda modais da viga base e da viga compósita.

Uma vez que as frequências naturais da viga podem ser relacionadas com a sua rigidez de flexão (EI) e a sua massa por unidade de comprimento ($\mathfrak{m}$) através da equação:

$$\omega_r = p^2 \sqrt{\frac{EI}{\mathfrak{m}}} \quad (\text{B.6})$$

a razão de frequências entre uma viga compósita e uma viga base pode ser expressa como:

$$\frac{\omega_r}{\omega_{0r}} = \frac{\sqrt{\frac{EI}{\mathfrak{m}}}}{\sqrt{\frac{E_0 I_0}{\mathfrak{m}_0}}} \quad (\text{B.7})$$

onde $E_0 I_0$ e $\mathfrak{m}_0$ representam, respectivamente, a rigidez de flexão e a massa por unidade de comprimento da viga base.

A Equação (B.7) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{EI}{E_0 I_0} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}_0} \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}} \right)^2 \quad (\text{B.8})$$

que permite relacionar directamente a razão de rigidez com as frequências naturais da viga compósita e da viga base.

Considerando que o amortecimento da viga base é muito reduzido, o que acontece para as vigas metálicas usualmente empregues, podemos desprezar o factor de perda da viga inicial, sendo possível reescrever (B.8) na forma:

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_0 I_0} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}_0} \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}} \right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (\text{B.9})$$

onde η_r representa o factor de perda modal da viga compósita.

Aplicando a Equação (B.9) às quatro configurações da viga consideradas obtemos:

- Viga de *Oberst*

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}} \right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (\text{B.10})$$

- Viga de *Van Oort*

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(1 + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}} \right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (\text{B.11})$$

- Viga *sandwich* simétrica

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}} \right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (\text{B.12})$$

- Viga *sandwich* dupla

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(1 + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 + 2 \frac{\rho_3}{\rho_1} h_3 \right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}} \right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (\text{B.13})$$

Manipulando algebricamente as equações (B.2), (B.3), (B.4) e (B.5) obtemos as seguintes expressões:

- Viga de *Oberst*

$$\frac{\bar{E}_2}{E_1} = e_2 = \frac{-\hat{\mathfrak{h}} + \sqrt{\hat{\mathfrak{h}}^2 + 4h_2^2(\bar{\mathcal{R}} - 1)}}{2h_2^2} \quad (\text{B.14})$$

$$\hat{\mathfrak{h}} = (4 - \bar{\mathcal{R}} + 4h_2^2 + 6h_2)$$

- Viga de *Van Oort*

$$\frac{\bar{E}_2}{E_1} = e_2 = \frac{\bar{\mathcal{R}} - 1}{(1 + 2h_2)^3 - 1} \quad (\text{B.15})$$

- Viga *sandwich* simétrica

$$\bar{g} = \frac{\bar{\mathcal{R}} - 2}{12(1 + h_2)^2 - 2\bar{\mathcal{R}} + 4} \quad (\text{B.16})$$

- Viga *sandwich* dupla

$$\bar{g} = \frac{\bar{\mathcal{R}} - 1 - 2e_3h_3^3}{1 + 2e_3h_3^3 + 6e_3h_3(1 + 2h_2 + h_3)^2 - \bar{\mathcal{R}}} \quad (\text{B.17})$$

As expressões anteriores permitem determinar as propriedades da camada viscoelástica a partir das razões de rigidez $\bar{\mathcal{R}}$ obtidas experimentalmente, dos parâmetros geométricos (H_1, H_2, H_3) e das propriedades conhecidas das camadas da viga compósita $(E_1, E_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$.

Apêndice C

Expressão analítica do jacobiano

A transformação geométrica de um elemento quadrilátero plano, descrito no sistema local de coordenadas cartesianas (x, y) , para o sistema de coordenadas naturais (ξ, η) permite simplificar a construção e a aplicação das funções de interpolação das variáveis, construir a matriz de deformação e aplicar os métodos de integração numérica no cálculo das matrizes de massa e de rigidez. Desta forma, as matrizes de massa e de rigidez são obtidas através de um integral duplo (considerando que a integração na espessura é obtida de forma analítica) definido na geometria regular do elemento descrito no sistema de coordenadas naturais. No entanto, essa transformação de coordenadas requer a correcção do elemento de área infinitesimal utilizando o determinante do jacobiano da transformação.

Dado que as funções de interpolação são perfeitamente definidas no espaço de coordenadas naturais, é possível calcular explicitamente o integral duplo sem recorrer aos métodos de integração numérica. Todavia, para atingir esse objectivo é necessário obter analiticamente a expressão que define o jacobiano da transformação, assim como o seu determinante.

A Figura C.1 representa um elemento irregular definido no sistema local de coordenadas cartesianas (x, y) pelos nós 1, 2, 3 e 4 e pelos contornos lineares l_1 , l_2 , l_3 e l_4 .

Podemos representar cada um dos contornos do elemento l_j ($j = 1 \rightarrow 4$), definido pelos vértices $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, através da equação de uma recta da forma:

$$l_j(e_i) = (x_i, y_i) + (1 + e_i) \frac{(x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)}{2} \quad (\text{C.1})$$

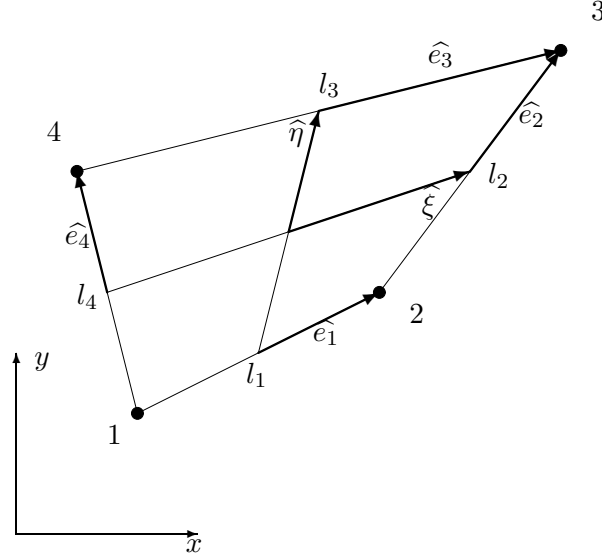


Figura C.1: Elemento de 4 nós de geometria irregular

onde e_i representa o módulo do vetor que define a orientação do contorno l_j .

Desta forma, qualquer ponto do segmento de recta definido pelos nós 1 e 2 pode ser representado pela equação:

$$l_1(e_1) = (x_1, y_1) + (1 + e_1) \frac{(x_2 - x_1, y_2 - y_1)}{2} \quad (\text{C.2})$$

Da mesma forma, o segmento de recta delimitado pelos nós 4 e 3 pode ser representado pela equação:

$$l_3(e_3) = (x_4, y_4) + (1 + e_3) \frac{(x_3 - x_4, y_3 - y_4)}{2} \quad (\text{C.3})$$

Projectando o quadrilátero, representado na figura, no espaço de coordenadas naturais podemos facilmente verificar a seguinte relação:

$$\hat{e}_1(\xi, \eta) = \hat{e}_3(\xi, \eta) = \hat{\xi}(\xi, \eta) \quad (\text{C.4})$$

Assim, o vector $\hat{\eta}$, quando descrito no sistema local de coordenadas cartesianas, pode ser determinado através do segmento de recta definido pelos pontos $l_1(\xi)$ e $l_3(\xi)$ da forma:

$$\hat{\eta}(\xi) = \frac{1}{2}(l_3(\xi) - l_1(\xi)) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} (x_4 - x_1) \left(\frac{1 - \xi}{2} \right) + (x_3 - x_2) \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) \\ (y_4 - y_1) \left(\frac{1 - \xi}{2} \right) + (y_3 - y_2) \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (C.5)$$

A Equação (C.5) permite, assim, representar o versor $\hat{\eta}(\xi)$ no sistema de coordenadas local através das coordenadas nodais do elemento.

De forma idêntica, podemos exprimir os segmentos de recta definidos pelos nós 2-3 e 1-4 como:

$$l_2(e_2) = (x_2, y_2) + (1 + e_2) \frac{(x_3 - x_2, y_3 - y_2)}{2} \quad (C.6)$$

e

$$l_4(e_4) = (x_1, y_1) + (1 + e_4) \frac{(x_4 - x_1, y_4 - y_1)}{2} \quad (C.7)$$

permitindo representar o versor $\hat{\xi}(\eta)$ no sistema de coordenadas locais na forma:

$$\hat{\xi}(\eta) = \frac{1}{2}(l_2(e_2) - l_4(e_4)) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_1) \left(\frac{1 - \eta}{2} \right) + (x_3 - x_4) \left(\frac{1 + \eta}{2} \right) \\ (y_2 - y_1) \left(\frac{1 - \eta}{2} \right) + (y_3 - y_4) \left(\frac{1 + \eta}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (C.8)$$

Sendo o jacobiano da transformação representado pela matriz:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\xi}(\eta)}{\partial x} & \frac{\partial \hat{\xi}(\eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{\eta}(\xi)}{\partial x} & \frac{\partial \hat{\eta}(\xi)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (C.9)$$

é possível, recorrendo à definição dos versores $\hat{\xi}$ (C.5) e $\hat{\eta}$ (C.8) no sistema de coordenadas locais, representar a matriz do jacobiano da transformação através das coordenadas nodais

como:

$$[\mathbf{J}] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} (x_2 - x_1) \left(\frac{1 - \eta}{2} \right) + (x_3 - x_4) \left(\frac{1 + \eta}{2} \right) & (y_2 - y_1) \left(\frac{1 - \eta}{2} \right) + (y_3 - y_4) \left(\frac{1 + \eta}{2} \right) \\ \hline (x_4 - x_1) \left(\frac{1 - \xi}{2} \right) + (x_3 - x_2) \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) & (y_4 - y_1) \left(\frac{1 - \xi}{2} \right) + (y_3 - y_2) \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) \end{array} \right] \quad (\text{C.10})$$

O determinante do jacobiano é então definido pela expressão da forma:

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}| &= \frac{1}{16} \left[\left[(x_2 - x_1) (1 - \eta) + (x_3 - x_4) (1 + \eta) \right] \left[(y_4 - y_1) (1 - \xi) + (y_3 - y_2) (1 + \xi) \right] - \right. \\ &\quad \left. \left[(x_4 - x_1) (1 - \xi) + (x_3 - x_2) (1 + \xi) \right] \left[(y_2 - y_1) (1 - \eta) + (y_3 - y_4) (1 + \eta) \right] \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[(1 - \xi)(1 - \eta) \left[(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1) \right] + \right. \\ &\quad (1 + \xi)(1 - \eta) \left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) \right] + \\ &\quad (1 + \xi)(1 + \eta) \left[(x_3 - x_4)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_4) \right] + \\ &\quad \left. (1 - \xi)(1 + \eta) \left[(x_3 - x_4)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_3 - y_4) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Apêndice D

Integração analítica da matriz de massa do elemento quadrilátero

A matriz de massa consistente de cada uma das camadas do elemento finito proposto é obtida através de um integral duplo da forma:

$$[M]_k^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta)]^T [J]_k^e [N(\xi, \eta)] |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta \quad (\text{D.1})$$

onde $[N(\xi, \eta)]$, $[J]_k^e$ e $|\mathbf{J}|$ representam, respectivamente, a matriz dos interpoladores do campo de velocidades, a matriz de inércia da camada k do elemento finito e o determinante do jacobiano da transformação.

Desenvolvendo a multiplicação matricial expressa em (D.1) podemos reescrever a matriz de massa para o elemento finito de quatro nós na forma:

$$[M]_k^e = \begin{bmatrix} A_{11} [J]_k^e & A_{12} [J]_k^e & A_{13} [J]_k^e & A_{14} [J]_k^e \\ A_{21} [J]_k^e & A_{22} [J]_k^e & A_{23} [J]_k^e & A_{24} [J]_k^e \\ A_{31} [J]_k^e & A_{32} [J]_k^e & A_{33} [J]_k^e & A_{34} [J]_k^e \\ A_{41} [J]_k^e & A_{42} [J]_k^e & A_{43} [J]_k^e & A_{44} [J]_k^e \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

onde os escalares A_{ij} , que representam a solução do integral duplo, são definidos por:

$$A_{ij} = A_{ji} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i N_j |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta \quad (\text{D.3})$$

Substituindo o determinante do jacobiano pela expressão (C.11), podemos exprimir o termo genérico A_{ij} como:

$$\begin{aligned}
A_{ij} = A_{ji} = & \frac{1}{16} P_1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i N_j (1 - \xi)(1 - \eta) \, d\xi \, d\eta + \\
& \frac{1}{16} P_2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i N_j (1 + \xi)(1 - \eta) \, d\xi \, d\eta + \\
& \frac{1}{16} P_3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i N_j (1 + \xi)(1 + \eta) \, d\xi \, d\eta + \\
& \frac{1}{16} P_4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i N_j (1 - \xi)(1 + \eta) \, d\xi \, d\eta
\end{aligned} \tag{D.4}$$

onde os termos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , que representam a transformação geométrica, resultam da definição do determinante do jacobiano, sendo definidos por:

$$P_1 = (x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1) \tag{D.5}$$

$$P_2 = (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) \tag{D.6}$$

$$P_3 = (x_3 - x_4)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_4) \tag{D.7}$$

$$P_4 = (x_3 - x_4)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_3 - y_4) \tag{D.8}$$

De acordo com a sua definição (D.4), os termos A_{ij} são dependentes das funções interpoladoras do campo de velocidades dentro do elemento finito. Assim, a sua determinação requer a definição do interpolador seleccionado a aplicar no campo de velocidades.

D.1 Funções de forma bilineares

Empregando funções de forma bilineares na interpolação do campo de velocidades e substituindo o determinante do jacobiano pela sua definição, (C.11), podemos resolver

analiticamente o integral duplo que define cada um dos termos A_{ij} , obtendo-se:

$$A_{11} = \frac{1}{16} \left[P_1 + \frac{P_2}{3} + \frac{P_3}{9} + \frac{P_4}{3} \right] \quad (\text{D.9})$$

$$A_{12} = \frac{1}{16} \left[\frac{P_1}{3} + \frac{P_2}{3} + \frac{P_3}{9} + \frac{P_4}{9} \right] \quad (\text{D.10})$$

$$A_{13} = \frac{1}{16} \left[\frac{P_1}{9} + \frac{P_2}{9} + \frac{P_3}{9} + \frac{P_4}{9} \right] \quad (\text{D.11})$$

$$A_{14} = \frac{1}{16} \left[\frac{P_1}{3} + \frac{P_2}{9} + \frac{P_3}{9} + \frac{P_4}{3} \right] \quad (\text{D.12})$$

$$A_{22} = \frac{1}{16} \left[\frac{P_1}{3} + P_2 + \frac{P_3}{3} + \frac{P_4}{9} \right] \quad (\text{D.13})$$

$$A_{23} = \frac{1}{16} \left[\frac{P_1}{9} + \frac{P_2}{3} + \frac{P_3}{3} + \frac{P_4}{9} \right] \quad (\text{D.14})$$

$$A_{24} = \frac{1}{16} \left[\frac{P_1}{9} + \frac{P_2}{9} + \frac{P_3}{9} + \frac{P_4}{9} \right] \quad (\text{D.15})$$

$$A_{33} = \frac{1}{16} \left[\frac{P_1}{9} + \frac{P_2}{3} + P_3 + \frac{P_4}{3} \right] \quad (\text{D.16})$$

$$A_{34} = \frac{1}{16} \left[\frac{P_1}{9} + \frac{P_2}{9} + \frac{P_3}{3} + \frac{P_4}{3} \right] \quad (\text{D.17})$$

$$A_{44} = \frac{1}{16} \left[\frac{P_1}{3} + \frac{P_2}{9} + \frac{P_3}{3} + P_4 \right] \quad (\text{D.18})$$

D.2 Funções de forma bi-harmônicas

Aplicando as funções de forma bi-harmônicas propostas (N_i^{BH}) e utilizando mais uma vez a função do determinante do jacobiano definida em (C.11) podemos obter analiticamente os termos A_{ij} da forma:

$$A_{11} = A \left[P_1 B^2 + P_2 BC + P_3 C^2 + P_4 BC \right] \quad (\text{D.19})$$

$$A_{12} = -A \left[P_1 CD + P_2 BD + P_3 BD + P_4 CD \right] \quad (\text{D.20})$$

$$A_{13} = A \left[P_1 D^2 + P_2 D^2 + P_3 D^2 + P_4 D^2 \right] \quad (\text{D.21})$$

$$A_{14} = -A \left[P_1 BD + P_2 CD + P_3 CD + P_4 BD \right] \quad (\text{D.22})$$

$$A_{22} = A \left[P_1 BC + P_2 B^2 + P_3 BC + P_4 C^2 \right] \quad (\text{D.23})$$

$$A_{23} = -A \left[P_1 CD + P_2 BD + P_3 BD + P_4 CD \right] \quad (\text{D.24})$$

$$A_{24} = A \left[P_1 D^2 + P_2 D^2 + P_3 D^2 + P_4 D^2 \right] \quad (\text{D.25})$$

$$A_{33} = A \left[P_1 C^2 + P_2 BC + P_3 B^2 + P_4 BC \right] \quad (\text{D.26})$$

$$A_{34} = -A \left[P_1 CD + P_2 CD + P_3 BD + P_4 BD \right] \quad (\text{D.27})$$

$$A_{44} = A \left[P_1 BC + P_2 C^2 + P_3 BC + P_4 B^2 \right] \quad (\text{D.28})$$

onde as constantes A , B , C e D são definidas como:

$$A = \frac{10^{-8}}{\pi^4} \quad (\text{D.29})$$

$$B = 30926\pi^2 + 69667\pi - 495824 \quad (\text{D.30})$$

$$C = 37026\pi^2 + 162867\pi - 868624 \quad (\text{D.31})$$

$$D = 31476\pi^2 + 116267\pi - 682224 \quad (\text{D.32})$$

A determinação analítica da matriz de massa do elemento finito permite, por um lado, reduzir o custo computacional associado e, por outro, evitar o erro associado à integração numérica de interpoladores não-polinomiais, como por exemplo os interpoladores bi-harmônicos propostos.

Apêndice E

Tabelas dos resultados dos testes numéricos

E.1 Placa enviesada de *Morley*

Tabela E.1: Placa de *Morley* – Deslocamento vertical do ponto E

Malha	layw4c			layw4q/m		
	1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
2x2	2.7781	2.7781	2.7793	2.7781	2.8212	2.8251
4x4	3.9162	3.9172	3.9178	3.9162	4.1716	4.1973
8x8	3.8782	3.8880	3.8942	3.8782	4.1446	4.1906
16x16	4.1585	4.1697	4.1772	4.1585	4.3128	4.3449
32x32	4.3895	4.3971	4.4022	4.3895	4.4630	4.4771

E.2 Casca cilíndrica (*Scordelis-Lo roof*)

Tabela E.2: Casca cilíndrica – Deslocamento vertical do ponto B

Malha	layw4c			layw4q/m		
	1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
2x2	0.35704	0.35931	0.35978	0.41571	0.42099	0.42168
3x3	0.28797	0.29046	0.29098	0.33319	0.33670	0.33731
4x4	0.28479	0.28736	0.28791	0.31616	0.31934	0.31995
6x6	0.29060	0.29313	0.29370	0.30709	0.30989	0.31048
8x8	0.29502	0.29738	0.29920	0.30492	0.30741	0.30799
12x12	0.30008	0.30180	0.30360	0.30473	0.30651	0.30705

E.3 Cilindro com cargas opostas (*Pinched cylinder*)

Tabela E.3: Cilindro com cargas pontuais opostas – Deslocamento vertical do ponto A

Malha	layw4c			layw4q/m		
	1 camada	3 camadas	5 camadas	1 camada	3 camadas	5 camadas
4x4	0.67682	0.67723	0.67734	0.70701	0.71082	0.71121
8x8	1.35540	1.35480	1.35500	1.37450	1.38310	1.38410
12x12	1.59320	1.59250	1.59340	1.60360	1.61160	1.61320
16x16	1.69350	1.69330	1.69480	1.69970	1.70630	1.70840
24x24	1.77390	1.77490	1.77840	1.77680	1.78190	1.78570
32x32	1.80620	1.80870	1.81480	1.80780	1.81310	1.81940

E.4 Hemisfério com carregamento pontual oposto (*Pinched hemisphere*)

Tabela E.4: Hemisfério com carregamento pontual oposto – Deslocamento horizontal (u_x) do ponto A

Malha	layw4c			layw4q			layw4m		
	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.
2x2	0.0791	0.0786	0.0786	0.0791	0.0823	0.0828	0.0792	0.0787	0.0783
3x3	0.0904	0.0899	0.0901	0.0904	0.0920	0.0922	0.0904	0.0904	0.0903
4x4	0.0922	0.0918	0.0919	0.0922	0.0936	0.0939	0.0922	0.0922	0.0923
8x8	0.0917	0.0914	0.0916	0.0918	0.0920	0.0922	0.0917	0.0914	0.0912
16x16	0.0917	0.0915	0.0917	0.0919	0.0918	0.0920	0.0918	0.0913	0.0908
24x24	0.0920	0.0918	0.0919	0.0921	0.0920	0.0922	0.0920	0.0915	0.0911
32x32	0.0922	0.0919	0.0922	0.0923	0.0921	0.0923	0.0922	0.0917	0.0913

E.5 Hemisfério com furo no topo e carregamento pontual oposto (*Pinched hemisphere*)

Tabela E.5: Hemisfério com furo no topo – Deslocamento horizontal (u_x) do ponto A

Malha	layw4c			layw4q			layw4m		
	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.
2x2	0.0842	0.0836	0.0837	0.0842	0.0861	0.0864	0.0842	0.0851	0.0853
3x3	0.0929	0.0924	0.0926	0.0929	0.0939	0.0941	0.0929	0.0933	0.0935
4x4	0.0933	0.0929	0.0930	0.0933	0.0940	0.0942	0.0933	0.0935	0.0937
8x8	0.0927	0.0924	0.0926	0.0929	0.0930	0.0932	0.0929	0.0929	0.0930
16x16	0.0929	0.0927	0.0929	0.0931	0.0930	0.0932	0.0931	0.0930	0.0932
24x24	0.0932	0.0930	0.0932	0.0933	0.0932	0.0934	0.0933	0.0932	0.0934
32x32	0.0933	0.0931	0.0933	0.0934	0.0933	0.0935	0.0934	0.0933	0.0935

E.6 Casca cilíndrica (*Scordelis-Lo Roof*) - Malha irregular

Tabela E.6: Casca cilíndrica (malha irregular) – Deslocamento vertical do ponto B

Malha	layw4c			layw4q			layw4m		
	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.
2x2	0.3451	0.3474	0.3478	0.4266	0.4454	0.4472	0.4244	0.4403	0.4420
3x3	0.2574	0.2531	0.2536	0.3151	0.3312	0.3330	0.3007	0.3028	0.3033
4x4	0.2492	0.2519	0.2525	0.3050	0.3600	0.3667	0.2933	0.2987	0.2995
6x6	0.2580	0.2609	0.2616	0.2962	0.3709	0.3808	0.2815	0.2860	0.2868
8x8	0.2672	0.2701	0.2707	0.2961	0.3828	0.3948	0.2812	0.2850	0.2857
12x12	0.2806	0.2827	0.2829	0.2991	0.4023	0.4167	0.2868	0.2893	0.2895

E.7 Cilindro com cargas opostas - Malha irregular

Tabela E.7: Cilindro com cargas opostas (malha irregular) – Deslocamento vertical do ponto A

Malha	layw4c			layw4q			layw4m		
	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.	1 cam.	3 cam.	5 cam.
4x4	0.6857	0.6860	0.6862	0.7194	0.7460	0.7485	0.7109	0.7156	0.7161
8x8	1.3562	1.3573	1.3578	1.4105	1.4767	1.4830	1.3727	1.3859	1.3875
12x12	1.5857	1.5870	1.5879	1.6461	1.7262	1.7341	1.5954	1.6082	1.6100
16x16	1.6838	1.6848	1.6860	1.7474	1.8383	1.8476	1.6898	1.6997	1.7017
24x24	1.7653	1.7658	1.7680	1.8340	1.9446	1.9571	1.7680	1.7736	1.7763
32x32	1.7996	1.8001	1.8037	1.8719	2.0003	2.0162	1.8011	1.8047	1.8086

Apêndice F

Nomogramas dos materiais viscoelásticos

- 3M ISD110
- 3M ISD112

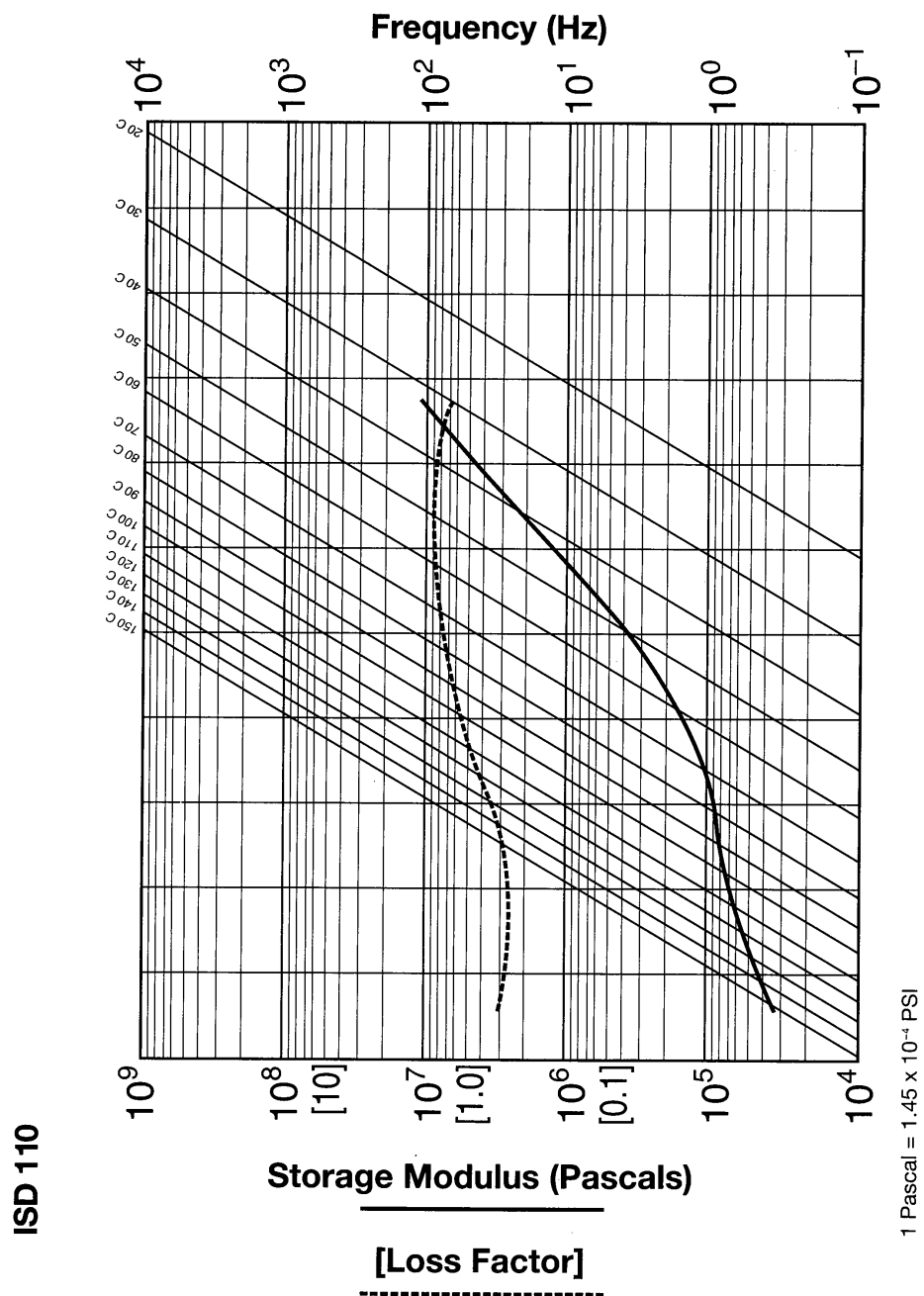


Figura F.1: Nomograma do material 3M ISD110 [226]

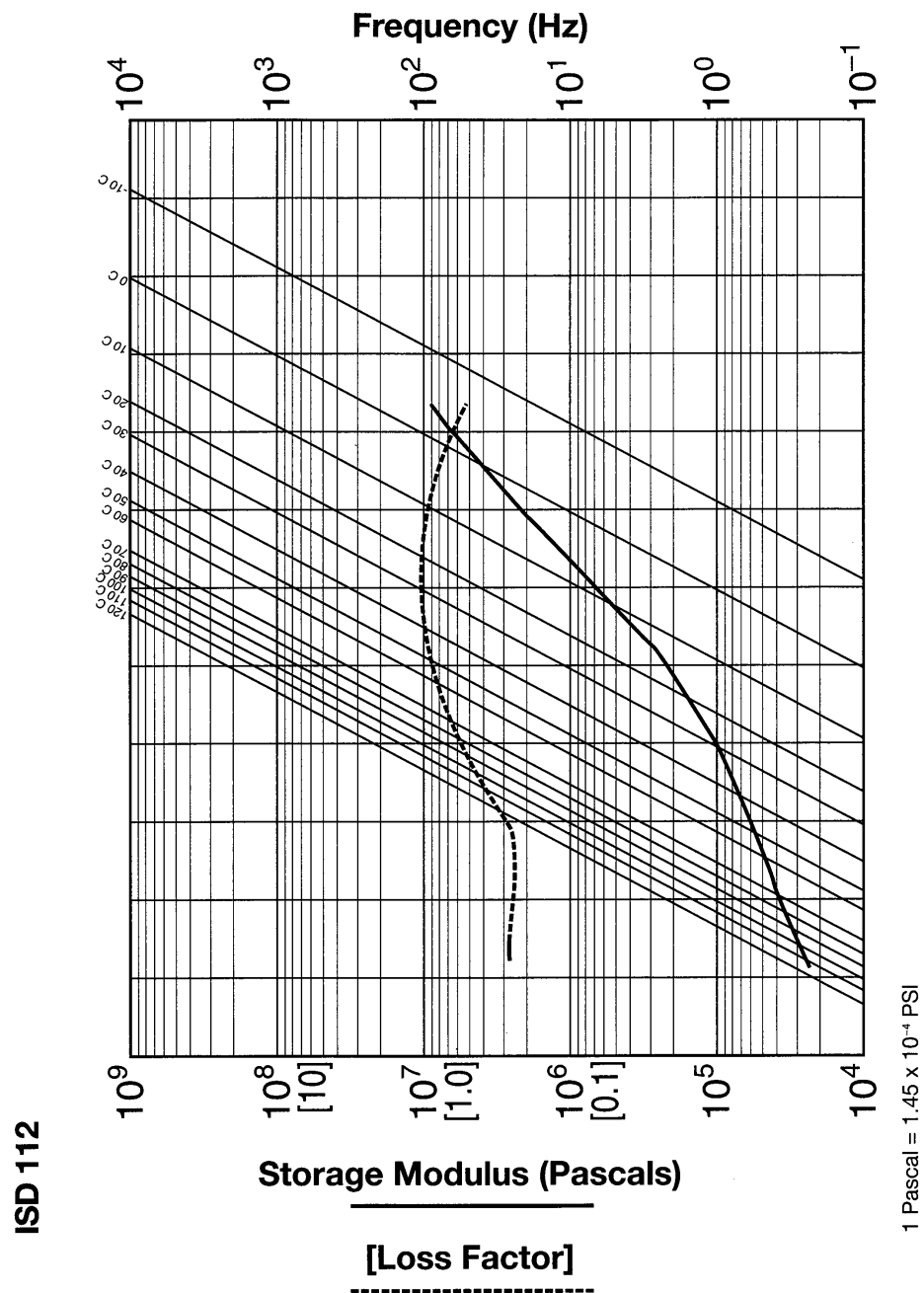


Figura F.2: Nomograma do material 3M ISD112 [226]

Apêndice G

Equipamento experimental: especificações técnicas

Acelerómetro BK4371-430

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 4371 / 1720430
Sensibilidade :	1.008 pC/m.s ⁻²
Massa sísmica :	2.6 g
Massa total :	11.269 g

Acelerómetro BK4371-687

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 4371 / 1781687
Sensibilidade :	1.013 pC/m.s ⁻²
Massa sísmica :	2.6 g
Massa total :	11.311 g

Acelerómetro BK4393-189

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 4393 / 1714189
Sensibilidade :	0.311 pC/m.s ⁻²
Massa sísmica :	0.67g
Massa total :	2.308 g

Acelerómetro BK4393-187

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 4393 / 1714187
Sensibilidade :	0.313 pC/m.s ⁻²
Massa sísmica :	0.67g
Massa total :	2.330 g

Acelerómetro BK4507-473

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 4507 / 2054473
Sensibilidade :	9.76E-3 V/m.s ⁻²
Massa total (c/clip) :	4.752 g (+0.428g)

Acelerómetro BK4508-279

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 4508 / 2031279
Sensibilidade :	10.00E-3 V/m.s ⁻²
Massa total (c/clip) :	4.787 g (+0.435g)

Célula de carga BK8200-312

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 8200 / 1777312
Sensibilidade :	3.88 pC/N
Massa activa :	2.2 g
Massa total :	21.611 g

Célula de carga BK8203-118

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 8203 / 10118
Sensibilidade :	3.3 pC/N
Massa activa :	1.1 g (0.4 g sem porca de pré-carga)
Massa total :	3.186 g

Cabeça de impedância BK8001-295

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 8001 / 1695295
<i>Célula de carga:</i>	
Sensibilidade :	343 pC/N
Massa activa :	2.2 g
<i>Acelerómetro:</i>	
Sensibilidade :	3.40 pC/ms ⁻²
Massa sísmica :	1.1 g
Massa total :	30.977 g

Martelo de impacto BK8202-289

Marca/modelo/Nº Série :	Brüel&Kjær / 8202 / 1777289
Sensibilidade :	1.01 pC/N
Massa total :	280 g

Célula de carga estática Honeywell FS

Marca/modelo :	Honeywell / FS
Sensibilidade :	0.2284 mV/gf

Vibrómetro laser

Marca/modelo :	Polytec / OFV303
Sensibilidade :	0.025 ms ⁻¹ /V

Controlador do vibrómetro

Marca/modelo :	Polytec / OFV 3001

Transdutor de proximidade

Marca/modelo :	Philips / PR 6423/10
Sensibilidade :	8V/mm (42CrMo4)

Amplificador de transdutor de proximidade

Marca/modelo :	Philips / CON020

Analizador espectral

Marca/modelo :	Brüel&Kjær / 2035
Módulos de entrada :	2 x 3019 (25KHz)
Módulos de saída :	1 x 3106 (25KHz)

Excitador electrodinâmico LDS201

Marca/modelo :	Ling Dynamic Systems (LDS)/ V201
Gama :	17.8 N @ 5-13000Hz
Massa total (c/ trunnion) :	1.81Kg (3.17Kg)

Amplificador de potência LDS PA25E

Marca/modelo :	Ling Dynamic Systems (LDS)/ PA25E

Excitador electrodinâmico LDS401

Marca/modelo :	Ling Dynamic Systems (LDS) / V401
Gama :	98 N @ 5-9000Hz
Massa total (c/ trunnion) :	14.1Kg (22.7Kg)

Amplificador de potência LSD PA100E

Marca/modelo :	Ling Dynamic Systems (LDS) / PA100E

Medidor de termopar TME2020

Marca/modelo :	TME / 2020
Termopar :	tipo K
Nº canais :	2 simultâneos / diferencial

Haste de ligação Nº1

Tipo de construção :	arame de aço
Diâmetro da haste :	1.4 mm
Comprimento exposto :	56 mm
Rigidez axial :	4.281E6 N/m
Massa total :	18.835g

Haste de ligação Nº2

Tipo de construção :	cordão de aço
Diâmetro da haste :	1.5 mm
Comprimento exposto :	42 mm
Rigidez axial :	3.416E6 N/m
Massa total :	18.883g

Haste de ligação Nº3

Tipo de construção :	arame de aço
Diâmetro da haste :	0.5 mm
Comprimento exposto :	ajustável (Max 80 mm)
Rigidez axial :	variável
Massa total :	6.455 g

Apêndice H

Calibração do equipamento experimental

H.1 Calibração do transdutor de proximidade

Segundo as indicações do manual de utilização, o transdutor de proximidade sem contacto utilizado (Philips PR 6423) deve ser inicialmente calibrado para o material que constitui o alvo de medição. De facto, uma vez que este transdutor se baseia no princípio das correntes de *Eddy*, a sua sensibilidade depende da permeabilidade magnética e da condutibilidade eléctrica do material. Assim, dado que o alvo de medição é, neste caso, o bloco de suporte superior do porta-provete (Figura H.1), é imperativo aplicar um procedimento de calibração já que, para além do bloco ser construído em aço de construção (AISI 1045), para o qual se desconhece a constante de calibração, o mesmo foi posteriormente submetido a um tratamento de zincagem a negro.

H.1.1 Determinação da sensibilidade do transdutor de proximidade em regime estático

A calibração do transdutor em regime estático foi desenvolvida com base na comparação do sinal eléctrico fornecido pelo transdutor com a medição do deslocamento relativo através

de um comparador digital, que constitui a referência da calibração.

A Figura H.1 ilustra a montagem experimental desenvolvida para o efeito, onde é possível identificar o transdutor de proximidade, o comparador de referência e um parafuso micrométrico utilizado para impor deslocamentos relativos conhecidos ao bloco móvel do sistema.

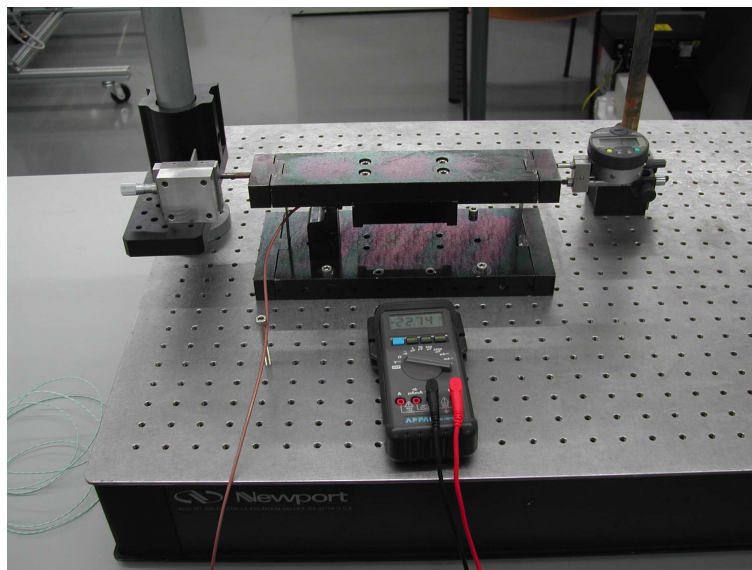


Figura H.1: Montagem experimental para calibração do transdutor de proximidade

O transdutor de proximidade é alimentado por um amplificador Philips CON020, o qual apresenta na sua saída um sinal em tensão entre 0 e -24V proporcional à distância relativa entre o transdutor e o alvo de medição.

O procedimento de calibração consistiu na imposição sucessiva de pequenos deslocamentos relativos ($20\mu\text{m}$), sendo simultaneamente medida a tensão do sinal fornecido pelo amplificador do transdutor de proximidade através de um voltímetro digital e verificado o deslocamento indicado pelo comparador.

O gráfico da Figura H.2 representa a distribuição dos pontos medidos, sendo possível verificar a razoável linearidade do transdutor.

Por ajuste dos pontos medidos à equação de uma recta, restringindo o ajuste à gama compreendida entre -0.4 e 0.4 mm, obtém-se o valor de $8.7402\text{E}3 \text{ V/m}$ para a sensibilidade

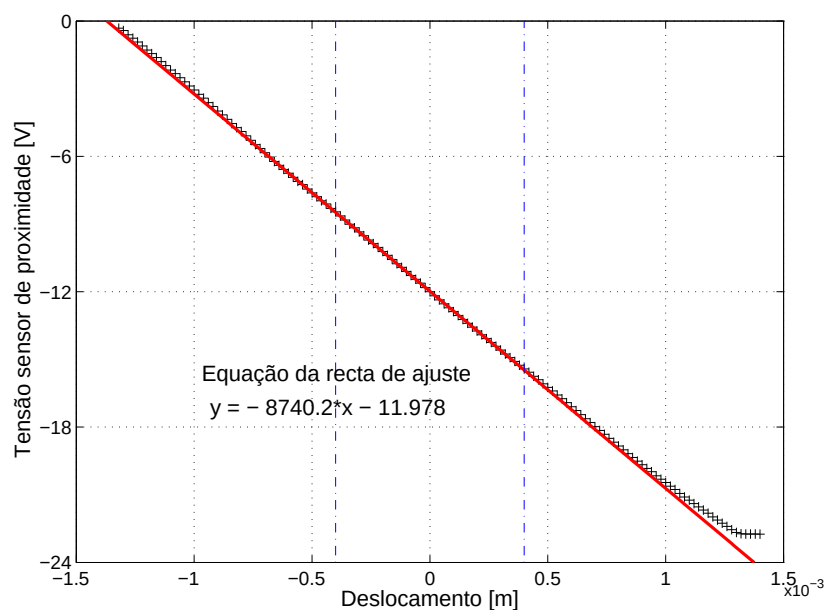


Figura H.2: Curva de calibração e determinação da sensibilidade do transdutor de proximidade

do transdutor de proximidade utilizado. O valor -12V DC corresponde ao centro da gama de medição, que foi inicialmente ajustado para a posição inicial do alvo.

O procedimento de calibração do transdutor foi realizado a uma temperatura ambiente de 19.6°C.

H.1.2 Determinação da sensibilidade do transdutor de proximidade em regime dinâmico

Utilizando directamente a montagem desenvolvida no Capítulo 7, foi realizado um procedimento de calibração do transdutor de proximidade usando como referência o acelerómetro BK4371-430. Para isso aplicou-se uma excitação aleatória usando ruído branco na gama de frequências de 0 a 400Hz. O sinal obtido pelo transdutor de proximidade foi derivado duas vezes para converter o sinal em deslocamento para aceleração e mediu-se a função de resposta em frequência entre a resposta do acelerómetro, para o qual se considerou a sensibilidade de 1.008pC/ms^{-2} , e a resposta do transdutor de proximidade, que se considerou ter uma sensibilidade unitária. O sistema experimental foi montado sobre um bloco de granito apoiado sobre quatro blocos cilíndricos de silicone.

A Figura H.3 representa a função de resposta em frequência medida, à qual é sobreposta a linha horizontal correspondente à média da função na gama de frequências compreendida entre 50 e 350Hz.

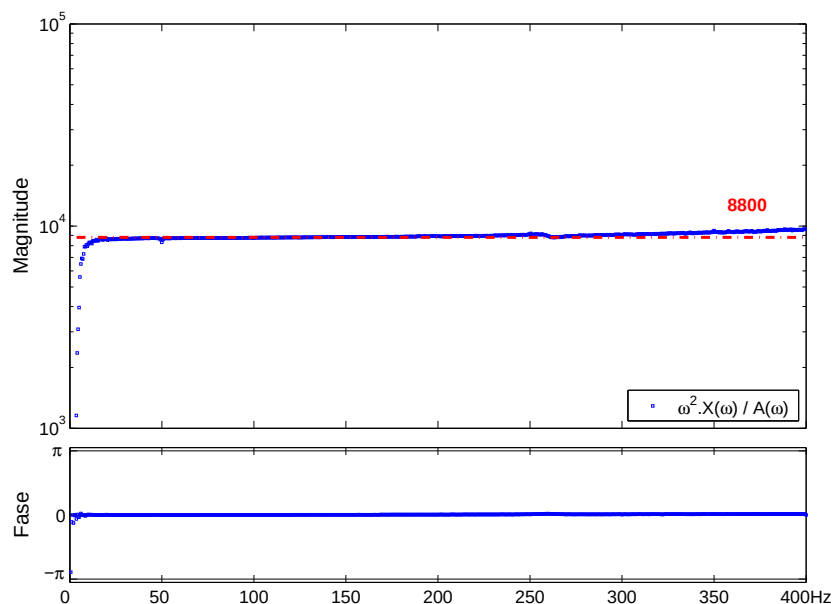


Figura H.3: Função de resposta em frequência obtida entre o acelerómetro e o transdutor de proximidade

Como seria de prever, a gama de frequências abaixo dos 50 Hz apresenta os efeitos dos modos de corpo rígido da montagem experimental, aos quais o acelerómetro não é imune, sendo ainda visível a existência de algumas discrepâncias na função nas linhas espectrais correspondentes à frequência de 50 Hz (frequência da rede eléctrica) e seus harmónicos devidas à reduzida relação sinal/ruído do transdutor de proximidade. A zona das altas frequências evidencia o efeito da resposta do suporte do excitador, que é mais pronunciado na resposta do transdutor de proximidade.

O valor determinado, aproximadamente 8800, corresponde ao valor da sensibilidade do transdutor de proximidade em regime dinâmico, sendo muito próximo do valor obtido através do ensaio em regime estático. Assim, considerar-se-á a sensibilidade do transdutor de proximidade de $8.80\text{E}3$ V/m para o material que constitui a montagem experimental utilizada neste estudo.

O procedimento de calibração foi realizado a uma temperatura ambiente de 19.6°C.

H.2 Calibração da célula de carga miniatura

A célula de carga miniatura Honeywell FS utilizada no procedimento de determinação experimental da rigidez equivalente das lâminas de guiamento do sistema de caracterização de materiais viscoelásticos, é baseada num elemento piezoresistivo de silício, fornecendo um sinal em tensão proporcional à carga imposta, restrita à gama compreendida entre 0 e 15N.

Para calibrar a célula de carga utilizou-se um parafuso micrométrico para aplicar vários incrementos de carga sobre o transdutor propositadamente colocado sobre uma balança de precisão, como ilustrado na Figura H.4.

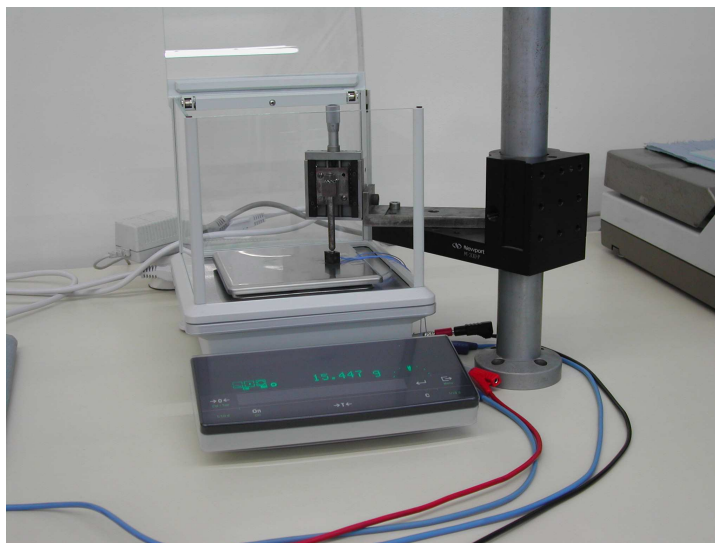


Figura H.4: Montagem experimental para calibração da célula de carga miniatura

O gráfico da Figura H.5 representa os valores em tensão fornecidos pela célula de carga, alimentada por uma tensão de 10.01V DC, em função do carregamento aplicado pelo parafuso sobre a célula de carga e avaliado através da leitura da balança. O ensaio foi realizado com uma temperatura ambiente de 19.0°C.

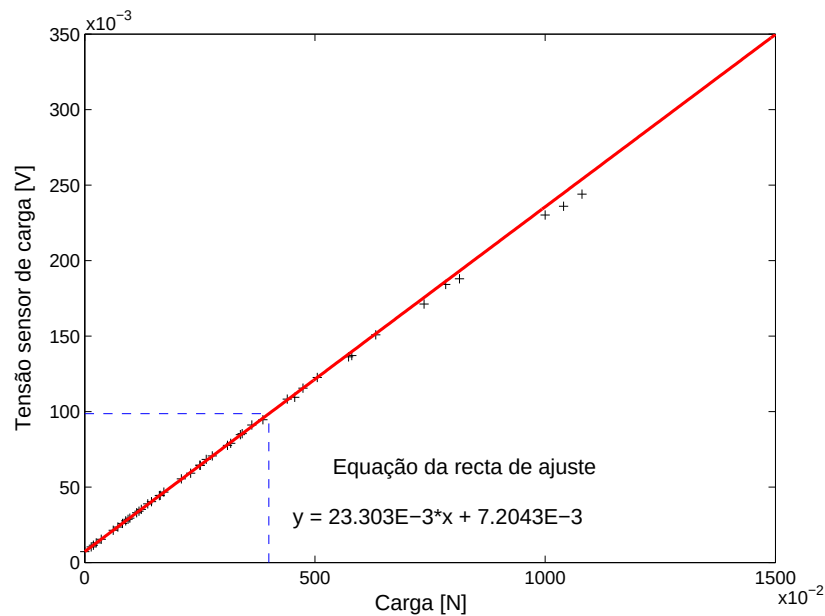


Figura H.5: Curva de calibração e determinação da sensibilidade da célula de carga estática miniatura

A sensibilidade da célula de carga foi determinada por ajuste da equação de uma recta aos pontos medidos na gama compreendida entre 0 e 4N. O valor da sensibilidade calculado é 23.303 mV/N, sendo o valor genérico da sensibilidade referido pelo fabricante de 24.5 mV/N. O valor de 7.2mV corresponde efectivamente ao valor fornecido pela célula de carga em vazio.

H.3 Calibração do par acelerómetro BK4371-430 e célula de carga BK8200-312

Para calibrar a cadeia de medição usada nos ensaios de caracterização experimental do módulo complexo de materiais viscoelásticos foi realizado um procedimento de calibração sobre cada par de transdutores recorrendo à resposta de um bloco rígido de massa conhecida [90, 234]. Para isso utilizou-se um bloco de aço de forma cilíndrica, suspenso por um pórtico rígido, o qual foi ligado ao excitador electrodinâmico LDS401 através de uma haste de arame de aço (haste N°1) e da célula de carga BK8200-312 (Figura H.6).

Na extremidade oposta foi montado o acelerómetro BK4371-430.

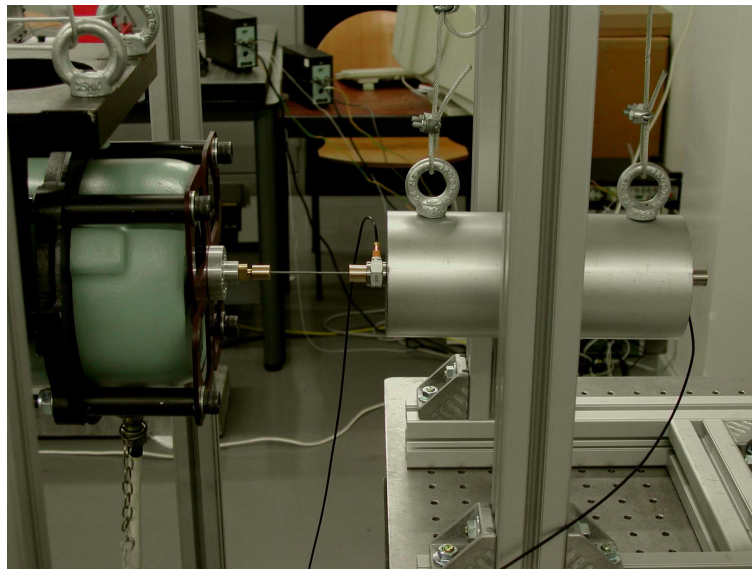


Figura H.6: Montagem experimental para calibração do par BK4371-430 e BK8200-312

A massa efectiva do sistema é constituída pela massa do bloco cilíndrico (9.780Kg), a massa do acelerómetro (11.269g) e a massa activa da célula de carga (2.2g), perfazendo um total de 9.7932Kg.

Foi aplicada uma excitação do tipo aleatório utilizando uma fonte de ruído branco (módulo gerador de sinal 3106 do analisador espectral BK2035) na gama de frequências compreendidas entre 0 e 1.6KHz.

Utilizando as sensibilidades indicadas pelo fabricante do equipamento, respectivamente 1.008pC/ms^{-2} e 3.88pC/N para o acelerómetro e a célula de carga, mediu-se a função massa aparente que se representa na Figura H.7.

De acordo com o gráfico representado na figura, a resposta é linear e constante na gama de frequências considerada, verificando-se, contudo, existir algum ruído devido à resposta da estrutura do pórtico na zona das baixas frequências e à resposta conjunta do pórtico e da haste de ligação na zonas das altas frequências.

Determinou-se o valor médio da função massa aparente na gama de frequências compreendida entre 64Hz e 1.6KHz, sendo o valor calculado de 9.7932Kg.

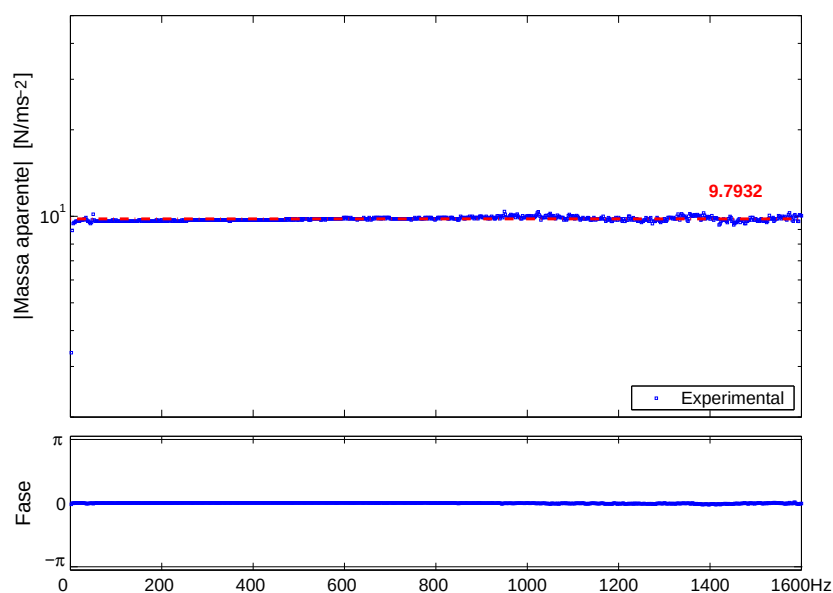


Figura H.7: Função massa aparente obtida com o par BK4371-430 e BK8200-312

Assim, verifica-se que as sensibilidades especificadas dos transdutores estão correctas, podendo utilizar-se a razão $1.008/3.88 \text{ N/ms}^{-2}$ na determinação da função aceleração.

H.4 Calibração do par vibrómetro laser e célula de carga BK8200-312

Recorrendo à montagem usada no procedimento de calibração anterior, mediu-se a velocidade da massa de calibração segundo a sua direcção longitudinal. Para o efeito utilizou-se uma fita reflectora colada sobre a superfície do acelerómetro que se manteve na montagem para servir de referência da cadeia de medição.

Utilizando as sensibilidades indicadas pelo relatório de calibração que acompanha o equipamento, nomeadamente $0.025 \text{ ms}^{-1}/\text{V}$ para o vibrómetro laser e 3.88 pC/N para a célula de carga, foi medida a função massa aparente do sistema em ensaio, a qual é representada na Figura H.8, após derivação do sinal do vibrómetro laser para conversão em aceleração.

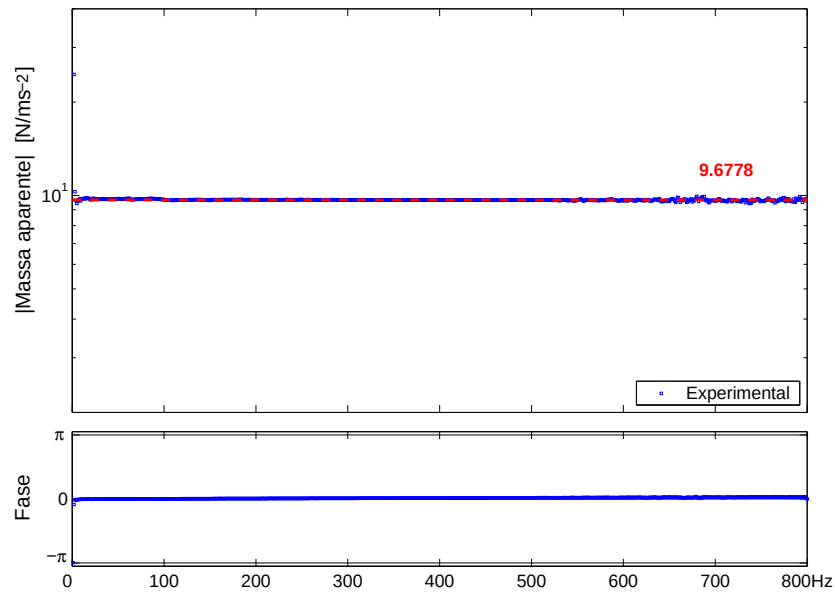


Figura H.8: Função massa aparente obtida com o par vibrômetro laser e BK8200-312

O valor médio da massa aparente na gama de frequências compreendidas entre 50 e 800Hz determinado experimentalmente é igual a 9.6778Kg, apresentando um erro relativo à massa real (9.7932Kg) de 1.2%.

H.5 Calibração do par vibrômetro laser e célula de carga BK8203-118

Seguindo a mesma metodologia aplicada nos procedimentos de calibração anteriores, utilizou-se uma massa suspensa de 2.147Kg, na qual foi montada a célula de carga BK8203-118. O conjunto é excitado recorrendo a um excitador electrodinâmico LDS201, sendo a ligação deste à célula de carga efectuada através da haste de ligação (haste nº3) que é fornecida juntamente com a célula de carga, utilizando um comprimento exposto de 10mm, conforme ilustrado na Figura H.9. Na extremidade oposta é medida a velocidade da massa cilíndrica pelo vibrômetro laser utilizando uma fita reflectora.

Tal como na metodologia adoptada no processo de calibração anterior, o sinal obtido pelo transdutor laser é derivado de forma a, juntamente com o sinal obtido pelo transdutor de



Figura H.9: Montagem experimental para calibração do par vibrómetro laser e BK8203-118

carga, determinar a função massa aparente para uma gama de frequências compreendida entre 100 e 900 Hz. Esta gama de frequências foi seleccionada considerando a gama de frequências utilizada no estudo experimental dos provetes com tratamento multi-camada. A zona das baixas frequências foi retirada da análise devido aos efeitos dos modos de corpo rígido do sistema sobre a estrutura do pórtico de apoio e aos efeitos da reduzida relação entre a inércia do excitador e do bloco de calibração, que se tornam mais evidentes na zona das baixas frequências [236].

O bloco de calibração, que é constituído por um bloco cilíndrico de latão (2147.0g), pelo perno de ligação e respectivo adaptador (1.8g) e pela massa activa da célula de carga (1.1g), possui uma massa total de aproximadamente 2150g.

Foram efectuadas seis medidas independentes, aplicando diferentes níveis de carga (Figura H.10), obtendo-se um valor médio para a massa aparente experimental de 2133g e um desvio padrão máximo de 0.7%. Assim, relativamente à massa real de 2150g obteve-se um erro relativo de 0.8%.

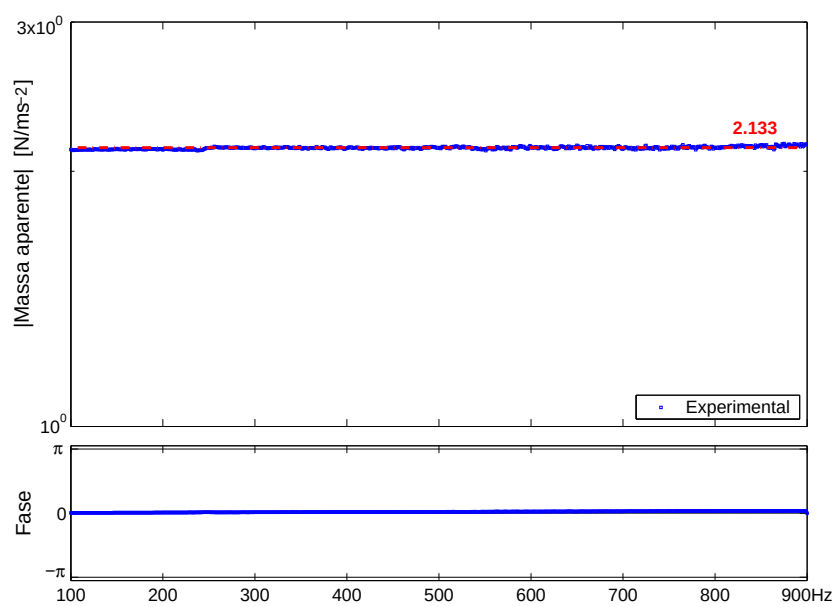


Figura H.10: Função massa aparente obtida com o par vibrômetro laser e BK8203-118

Apêndice I

Caracterização experimental e modelação das hastes de ligação

De forma a promover a transmissão de carga unidireccional à estrutura que se pretende excitar, é usual utilizar uma haste de ligação fina e flexível. Este componente deve possuir uma elevada rigidez axial e, simultaneamente, uma elevada flexibilidade transversal, de forma a transmitir a carga imposta à estrutura segundo a direcção pretendida, garantindo total liberdade nas restantes direcções, incluindo as rotações no ponto de excitação. Essa transmissão de carga deve manter a sua direcção independentemente do alinhamento relativo do excitador e da estrutura a excitar, devendo, contudo, minimizar os efeitos devidos à flexão da haste [237].

Seguindo as orientações propostas por Mitchell e Elliot [238], foram construídas duas hastes diferentes. Uma, designada por haste nº1 (Figura I.1), utiliza um arame de aço de mola como elemento de ligação, enquanto que a outra haste desenvolvida, a haste nº2 (Figura I.1), utiliza um cordão de aço revestido. A terceira haste, haste nº3, é fornecida juntamente com a célula de carga BK8203-118 e possui a possibilidade de ajustar o comprimento do elemento flexível.

Enquanto que a haste nº1 apresenta uma elevada rigidez axial, a haste nº2 permite uma elevada flexibilidade transversal. Desta forma, dispõe-se de um conjunto de hastes de ligação que permite abranger um leque bastante largo de níveis de carga e de tipos de estruturas.

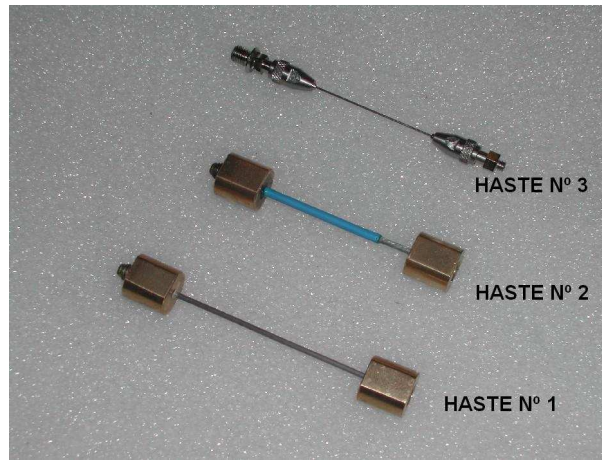


Figura I.1: Hastes analisadas

A rigidez axial da haste de ligação constitui uma das suas principais características, estando directamente relacionada com a frequência de ressonância axial, a qual limita a sua gama útil de frequências.

Seguindo a metodologia adoptada por Anderson [239], foi desenvolvida uma montagem experimental ilustrada na Figura I.2, com o objectivo de avaliar a rigidez axial do elemento de ligação. A haste é intercalada entre o acelerómetro BK4371-430 e a cabeça de impedância BK8001-295, a qual é rigidamente ligada ao excitador electrodinâmico LDS201. Todo o conjunto é suspenso através de um pórtico rígido.

Para modelar analiticamente a montagem realizada, considerou-se o modelo teórico ilustrado na Figura I.3. A massa M_1 é constituída pela massa activa da cabeça de impedância, pela massa dos adaptadores de montagem, pela massa da porca de aperto da haste e por metade da massa da haste propriamente dita. A massa M_2 é constituída pela massa do acelerómetro BK4371-430, pela massa da fêmea de aperto da haste e pela restante massa do elemento flexível.

Utilizando os transdutores indicados, foi medida a função de resposta directa na massa M_1 ($A_1(\omega)/F(\omega)$), a função de resposta em frequência cruzada ($A_2(\omega)/F(\omega)$) e a função transmissibilidade ($A_2(\omega)/A_1(\omega)$).

Aplicando um procedimento de identificação modal, recorrendo à técnica de ajustamento circular [90, 234] e à Função de Resposta Característica (FRC) [240, 241], foram

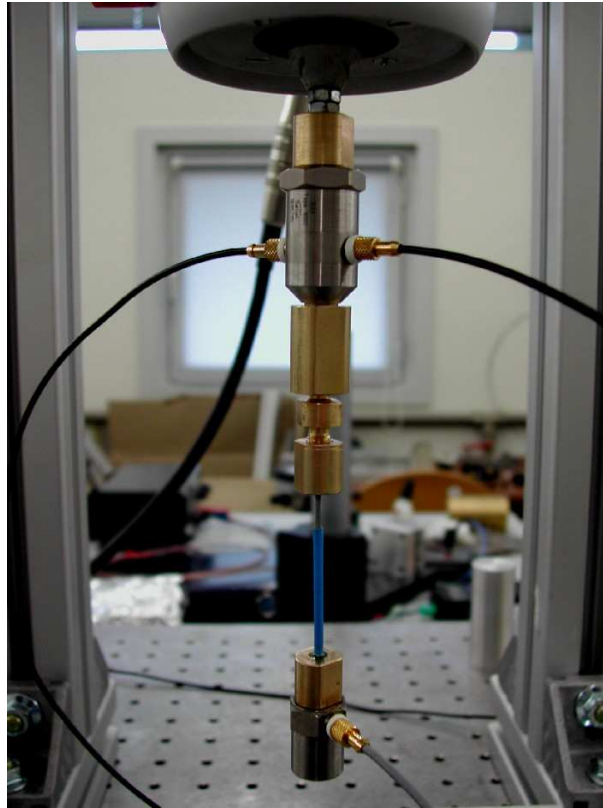


Figura I.2: Montagem experimental para medição da resposta da haste de ligação

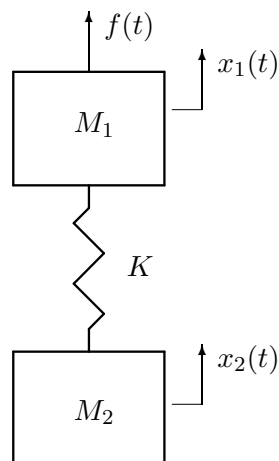


Figura I.3: Modelo teórico da montagem experimental

identificadas as duas frequências naturais (f_{r1} e f_{r2}) do sistema considerado, para as hastes nº1 e nº2. A Tabela I.1 apresenta os valores das frequências naturais e dos factores de perda modal identificados, os valores das massas M_1 e M_2 presentes em cada uma das montagens e o valor da rigidez axial calculada através do ajuste do modelo teórico considerado à resposta experimental das montagens desenvolvidas.

Tabela I.1: Resultados da análise das hastes de ligação

	Haste nº1	Haste nº2	
f_{r1}	2890	2555	[Hz]
f_{r2}	2269	2029	[Hz]
η_r	0.8	3.4	[%]
M_1	33.840	35.900	[g]
M_2	21.061	21.026	[g]
K	4.281E6	3.416E6	[N/m]

A Figura I.4 representa a função transmissibilidade (A_2/A_1), a função aceleração directa (A_1/F) e a função aceleração cruzada (A_2/F), medidas experimentalmente na haste nº1, sobrepostas às curvas geradas analiticamente recorrendo ao modelo teórico representado na Figura I.3 e aos parâmetros apresentados na Tabela I.1. De igual forma, a Figura I.5 representa as funções de resposta em frequência experimentais e analíticas para a haste nº2.

De referir que, embora apresentem uma rigidez axial muito semelhante, as duas hastes analisadas possuem uma flexibilidade transversal muito diferente. De facto, a elevada flexibilidade apresentada pela haste nº2 (cordão de aço) permite otimizar a transferência da carga de excitação para a estrutura. No entanto, a utilização desta haste de ligação exige uma montagem cuidada de forma a garantir o alinhamento do elemento flexível. Por outro lado, a haste nº1 permite uma montagem mais simples mas apresenta uma rigidez transversal significativa capaz de introduzir momentos e cargas transversais na estrutura a excitar. Para além das diferenças de rigidez transversal e longitudinal, a haste nº2 apresenta um amortecimento superior à haste nº1.

A haste nº3, dado possuir a possibilidade de ajustar o seu comprimento, permite modificar a sua rigidez axial e a sua rigidez transversal e, conseqüentemente, as frequências de ressonância associadas.

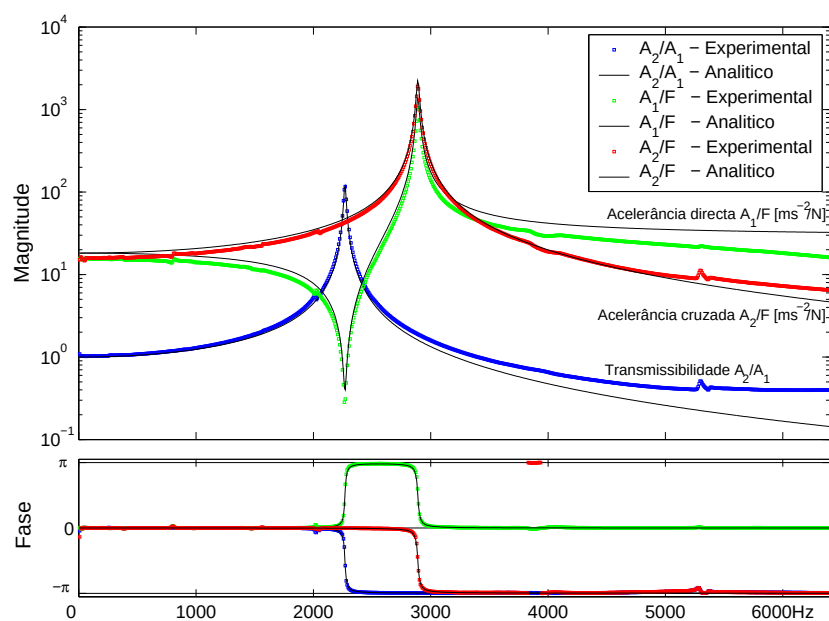


Figura I.4: Haste nº1 - Resposta experimental e analítica

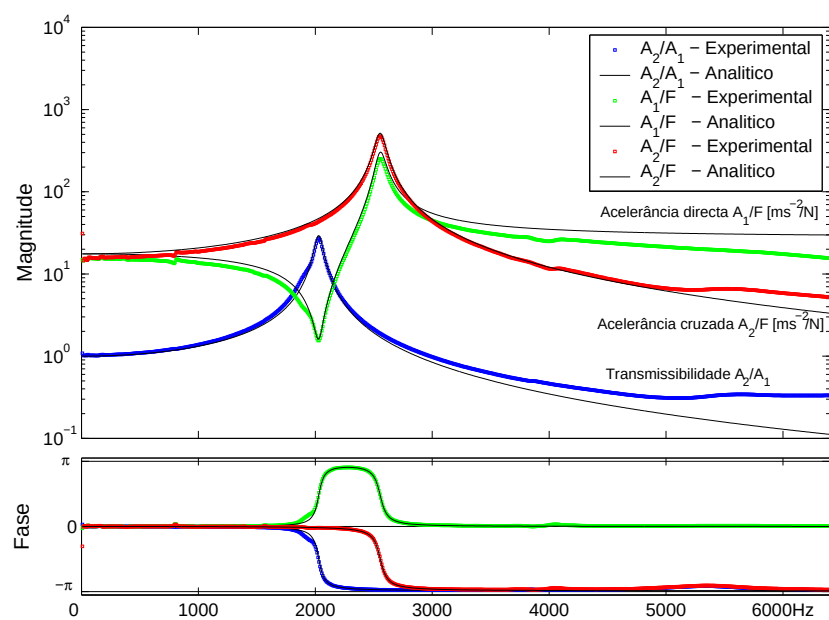
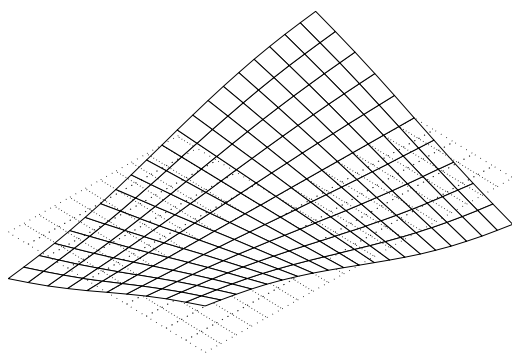


Figura I.5: Haste nº2 - Resposta experimental e analítica

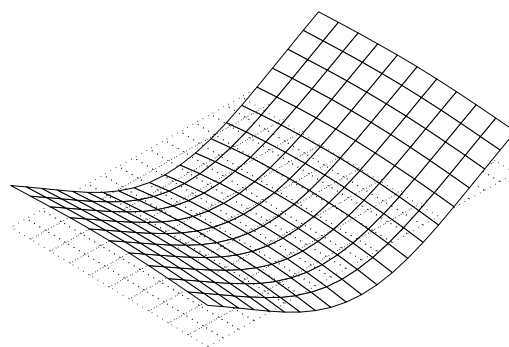
Apêndice J

Formas modais dos provetes experimentais

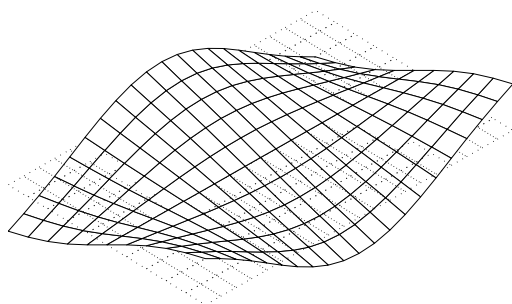
Provete 298x198 [mm]



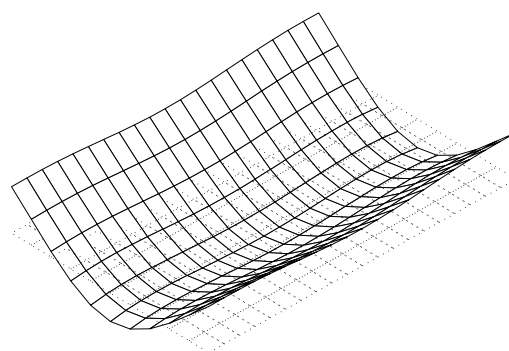
modo 1



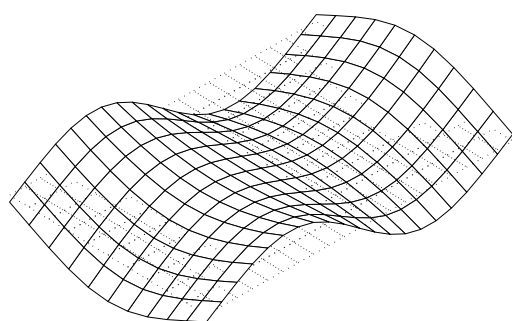
modo 2



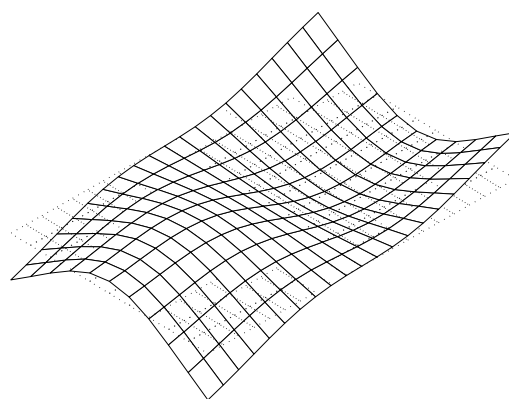
modo 3



modo 4



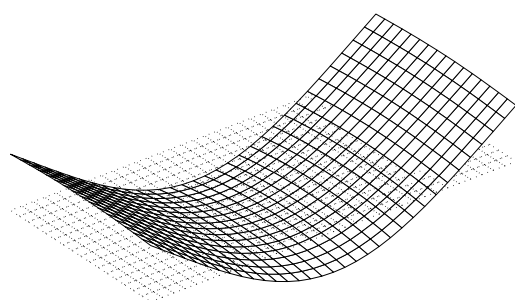
modo 5



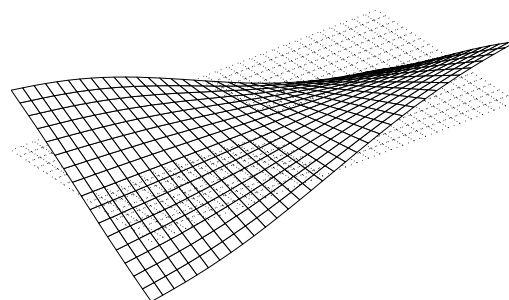
modo 6

Figura J.1: Formas modais dos provetes 298x198 [mm]

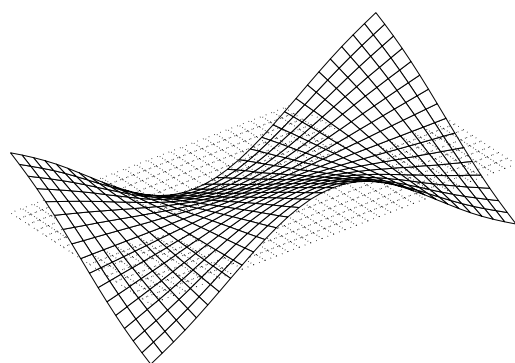
Provete 200x100 [mm]



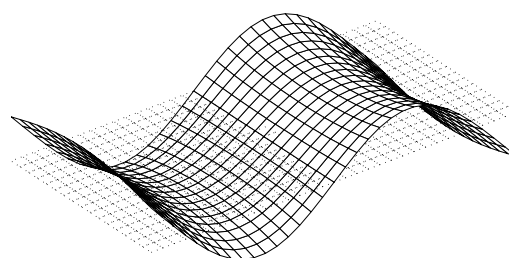
modo 1



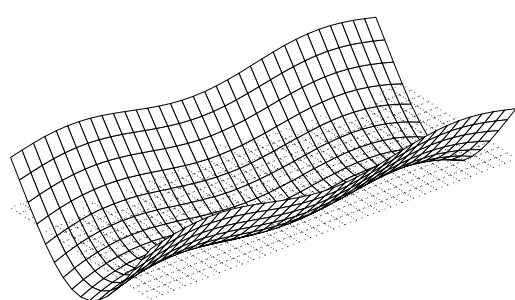
modo 2



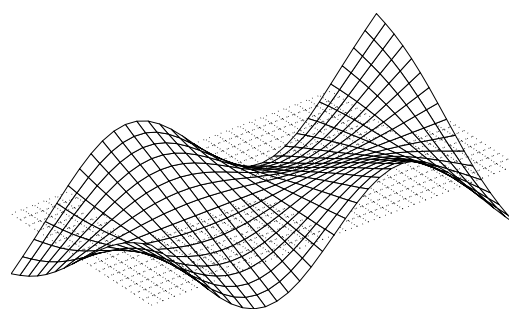
modo 3



modo 4



modo 5



modo 6

Figura J.2: Formas modais dos provetes 200x100 [mm]

Referências

- [1] K.K. Denoyer and C.D. Johnson. Recent achievements in vibration isolation systems for space launch and on-orbit applications. *Proceedings of 52nd International Astronautical Congress (AIAA), Toulouse, France*, 1-5 October 2001.
- [2] Z.A. Momin; D.J. Nefske and S.H. Sung. Evaluation of vibration damping treatments using a vehicle structural-acoustic analysis. *Proceedings of 5th International Modal Analysis Conference (IMAC V), London, UK*, pp. 330–335, 1987.
- [3] D.Battazzo and O. McDaniel. Prediction of acoustical power using modal analysis: A case study on a plate treated with constrained layer damping. *Proceedings of 8th International Modal Analysis Conference (IMAC VIII), Kissimmee, FL, USA*, pp.263–269, 1990.
- [4] L. Garibaldi; L. G. Liang and B. Piombo. Acoustical emission control of metal plates using modal analysis to distribute visco-elastic materials. *Proceedings of 8th International Modal Analysis Conference (IMAC VIII), Kissimmee, FL, USA*, pp.275–278, 1990.
- [5] B.C. Nakra. Vibration control in machines and structures using viscoelastic damping. *Journal of Sound and Vibration*, 211(3):449–465, 1998.
- [6] D.I.G. Jones. Reflections on damping technology at the end of the twentieth century. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3):449–462, 1996.
- [7] C.D. Johnson. Design of passive damping systems. *Journal of Vibration and Acoustics (Special 50th Anniversary Design Issue)*, 117:171–176, June 1995.
- [8] A.D. Nashif; D.I.G. Jones and J.P. Henderson. *Vibration Damping*. John Wiley & Sons, 1st edition, 1985.

- [9] D.I.G. Jones. *Handbook of Viscoelastic Vibration Damping*. John Wiley & Sons, 1st edition, 2001.
- [10] K.K. Stevens and S. Shostein. Influence of partial viscoelastic damping treatments on the modal parameters of circular plates. *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference (IMAC VII), Kissimmee, FL, USA*, pp. 1616–1622, 1988.
- [11] A. Lumsdaine and R.A. Scott. Shape optimization of unconstrained viscoelastic layers using continuum finite elements. *Journal of Sound and Vibration*, 216(1):29–52, 1998.
- [12] A. Akanda; T. Onsay and G. M. Goetchius. Perforated damping treatment: A novel approach to reduction of weight. *SAE Noise & Vibration Conference (99NV-152)*. SAE, 1999.
- [13] X. Dechang and Y. Zuguang. Forced vibration of sandwich beam with segmented elastic-viscoelastic layers. *Proceedings of 5th International Modal Analysis Conference (IMAC V), London, UK*, pp. 1033–1040, 1987.
- [14] C. Levy and Q. Chen. Vibration analysis of a partially covered, double sandwich-type, cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 177(1):15–29, 1994.
- [15] D.I.G. Jones. Design of constrained layer treatments for broad temperature damping. *Shock & Vibration Bulletin*, 5(44):1–12, 1974.
- [16] D.I.G. Jones. Damping of stiffened plates by multiple layer treatments. *Journal of Sound and Vibration*, 35(3):417–427, 1974.
- [17] M.R. Garrison; R.N. Miles; J.Q. Sun and W. Bao. Random response of a plate partially covered by a constrained layer damper. *Journal of Sound and Vibration*, 172(2):231–245, 1994.
- [18] A.W. Van Vuure; I. Verpoest and F.K. Ko. Sandwich-fabric panels as spacers in a constrained layer structural damping application. *Composites: Part B*, 32:11–19, 2001.

- [19] E. Balmès. Incorporating damping predictions in the vibroacoustic design process. *Proceedings of International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium*, September 2004.
- [20] T.E. Alberts and H. Xia. Design and analysis of fiber enhanced viscoelastic damping polymers. *Journal of Vibration and Acoustics (Special 50th Anniversary Design Issue)*, 117:398–404, October 1995.
- [21] J.M. Biggerstaff and J.B. Kosmatka. Shear measurements of viscoelastic damping materials embedded in composite plates. *Proceedings of 6th Smart Structures and Materials Conference (SPIE), Newport Beach, CA, USA, Vol. 3672*, pp. 82–92, March 1999.
- [22] A. Baz and J. Ro. Optimum design and control of active constrained layer damping. *Journal of Vibration and Acoustics (Special 50th Anniversary Design Issue)*, 117:135–144, June 1995.
- [23] M.C. Ray; J. Oh and A. Baz. Active constrained layer damping of thin cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 240(5):921–935, 2001.
- [24] J. Oh; M. Ruzzene and A. Baz. Control of the dynamic characteristics of passive magnetic composites. *Composites Part B: engineering*, 30:739–751, 1999.
- [25] C. Chantalakhana and R. Stanway. Active constrained layer damping of clamped-clamped plate vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 241(5):755–777, 2001.
- [26] W.H. Liao and K.W. Wang. On the analysis of viscoelastic materials for active constrained layer damping treatments. *Journal of Sound and Vibration*, 207(3):319–334, 1997.
- [27] T. Pritz. Loss factor peak of viscoelastic materials: magnitude to width relations. *Journal of Sound and Vibration*, 246(2):265–280, 2001.
- [28] B. R. Allen; E. Ruhl; B. L. Fowler and D.Sciulli. Advanced isolation design for avionics on launch vehicles. *Proceedings of 7th Smart Structures and Materials Conference (SPIE), San Diego, CA*, Mar 2000.

- [29] J.M. Biggerstaff and J.B. Kosmatka. Directional damping materials for integrally damped composite plates. *Proceedings of 6th Smart Structures and Materials Conference (SPIE)*. Newport Beach, CA, USA, March 1999.
- [30] J.M. Biggerstaff and J.B. Kosmatka. Damping performance of cocured composite laminates with embedded viscoelastic layers. *Journal of Composite Materials*, 32(21), 1998.
- [31] J.D. Ferry; E.R. Fitzgerald; L.D. Grandine and M.L. Williams. Temperature dependence of dynamic properties of elastomers, relaxation distributions. *Industrial & Engineering Chemistry*, 44(4):703–706, 1952.
- [32] J.D. Ferry; L.D. Grandine and E.R. Fitzgerald. The relaxation distribution function of Polyisobutylene in the transition from rubber-like to glass-like behavior. *Journal of Applied Physics*, 24(7):911–916, 1953.
- [33] J.D. Ferry. *Viscoelastic Properties of Polymers*. Wiley, New York, 1st edition, 1961.
- [34] B. Maxwell. An investigation of the dynamic mechanical properties of polymethyl methacrylate. *Journal of Polymer Science*, 20(96):551–566, 1956.
- [35] H. Oberst. Material of high inner damping. *Acustica : Journal international d’acoustique*, 6(1):144–153, 1956.
- [36] N.O. Myklestad. The concept of complex damping. *Journal of Applied Mechanics*, 19(3):284–286, 1952.
- [37] R.L. Bagley and P.J. Torvik. Fractional calculus - A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 21(5):741–748, May 1983.
- [38] R.L. Bagley and P.J. Torvik. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 23(6):918–925, June 1985.
- [39] G.A. Lesieutre and E. Bianchini. Time domain modeling of linear viscoelastic using anelastic displacement fields. *Journal of Vibration and Acoustics - Transactions of the ASME*, 117:424–430, October 1995.

- [40] G.A. Lesieutre and K. Govindswamy. Finite element modeling of frequency-dependent and temperature-dependent dynamic behavior of viscoelastic materials in simple shear. *International Journal of Solids and Structures*, 33(3):419–432, 1996.
- [41] D.J. McTavish and P.C. Hughes. Modeling of linear viscoelastic space structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115:103–110, 1993.
- [42] M.J. Lam. *Hybrid Active/Passive Models with Frequency Dependent Damping*. PhD Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, 1997.
- [43] M. A. Trindade. *Contrôle Hybride Actif-Passif des Vibrations de Structures par des Matériaux Piézoélectriques et Viscoélastiques: Poutres Sandwich/Multichouches Intelligents*. Thèse de Doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, France, 2000.
- [44] Y.M. Shi; Z.F. Li; H.X. Hua and Z.F. Fu. The modelling and vibration control of beams with active constrained layer damping. *Journal of Sound and Vibration*, 245(5):785–800, 2001.
- [45] V. Balamurugan and S. Narayanan. Finite element formulation and active vibration control study on beams using smart constrained layer damping (SCLD) treatment. *Journal of Sound and Vibration*, 249(2):227–250, 2002.
- [46] N.Wagner and S. Adhikari. Symmetric state-space method for a class of nonviscously damped systems. *AIAA Journal*, 41(5):951–956, May 2003.
- [47] H. Oberst and K. Frankenfeld. Über die dämpfung biegeschwingungen dünner blech durch fest haftende belage. *Acustica*, 4:181–194, 1952.
- [48] E. M. Kerwin Jr. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *Journal of Acoustical Society of America*, (31):952–962, 1959.
- [49] D. Ross; E.E. Ungar and E.M. Kerwin Jr. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae. *Structural Damping - Asme Publication, New York, USA*, pp. 49–88, 1959.

- [50] H. Yamaguchi and R. Adhikari. Loss factors of damping treated structural cables. *Journal of Sound and Vibration*, 176(4):487–495, 1994.
- [51] A. Bhimaraddi. Sandwich beam theory and the analysis of constrained layer damping. *Journal of Sound and Vibration*, 179(4):591–602, 1995.
- [52] T.-L. Teng and N.-K. Hu. Analysis of damping characteristics for viscoelastic laminated beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:3881–3892, 2001.
- [53] R.A. Di Taranto. Theory of vibratory bending of elastic and viscoelastic layered finite-length-beams. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 32:881–886, 1965.
- [54] D.J. Mead and S. Markus. The forced vibrations of a three-layer damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 10:163–175, 1969.
- [55] D.J. Mead and S. Markus. Loss factors and resonant frequencies of encastred damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 12:99–112, 1970.
- [56] D.K. Rao. Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions. *Journal Mechanical Engineering Science IMechE*, 20(5):271–282, 1978.
- [57] M.J. Yan and E.H. Dowell. Governing equations for vibrating constrained-layer damping of sandwich beams and plates. *Journal of Applied Mechanics*, 94:1041–1047, 1972.
- [58] Y.V.K.S. Rao and B.C. Nakra. Vibrations of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic cores. *Journal of Sound and Vibration*, 34(3):309–326, 1974.
- [59] K.K. Stevens and H.-Y. Hsu. Modal damping and sound power reduction of plates with partial constrained layer damping treatments. *Proceedings of 3rd International Modal Analysis Conference (IMAC III), Orlando, FL, USA*, pp. 160–166, 1985.
- [60] E.E. Ungar and E.M. Kerwin Jr. Loss factors of viscoelastic systems in terms of energy concepts. *Journal of Acoustical Society of America*, 34:954–958, 1962.

- [61] K.K. Stevens; M.E. Martinez and W.J. Kelly. A comparison of exact and approximate methods of analysis for added viscoelastic damping treatments. *Proceedings of IMAC VI, Kissimmee, FL, USA*, pp. 1602–1608. SEM, 1988.
- [62] D.D. Pei and H.X. Li. Dynamic performance analysis and optimization of damping treatments on printed circuit board. *Proceedings of 4th International Modal Analysis Conference (IMAC IV), Los Angeles, CA, USA*, pp. 1494–1501, 1986.
- [63] B.-C. Lee and K.-J. Kim. Shear and normal strain effects of core layers in vibration of square sandwich plates under clamped boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 228(4):845–856, 1999.
- [64] C.D. Johnson and D.A. Kienholz. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *AIAA Journal*, 20(9):1284–1290, 1982.
- [65] Y.S. Shin and G.J. Maurer. Vibration response of constrained viscoelastically damped plates: Analyses and experiments. *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference (IMAC VII), Las Vegas, NV, USA*, pp. 1516–1520, 1989.
- [66] W.J. Kelly and K.K. Stevens. Application of perturbation techniques to the modal analysis of a shaft with added viscoelastic damping. *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference (IMAC VII), Las Vegas, NV, USA*, pp. 45–51, 1989.
- [67] R.M. Lin and M.K. Lim. Complex eigensensitivity-based characterization of structures with viscoelastic damping. *Journal of Acoustical Society of America*, 100(5):3182–3191, 1996.
- [68] Y.P. Lu; J.W. Killian and G.C. Evertine. Vibrations of three layered damped sandwich plate composites. *Journal of Sound and Vibration*, 64(1):63–71, 1979.
- [69] J.W. Killian and Y.P. Lu. A finite element modeling approximation for damping material used in constrained damped structures. *Journal of Sound and Vibration*, 97(2):352–354, 1984.
- [70] T. Pritz. Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson’s ratio of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 214(1):83–104, 1998.

- [71] T. Ricco and A. Pegoretti. Nonlinear dynamic behavior of rubber compounds: construction of dynamic moduli generalized master curves. *Polymer Engineering and Science*, 40(10):2227–2231, 2000.
- [72] ASTM. D4092-90 standard terminology relating to dynamic mechanical measurements on plastics. *Annual Book of ASTM Standards, V. 08.02*, pp. 345–347. ASTM, 1990.
- [73] R.M. Christensen. *Theory of viscoelasticity*. Dover Pub., 2nd edition, 2003.
- [74] E. Kreyszig. *Advanced engineering mathematics*. John Wiley & Sons, 6th edition, 1988.
- [75] B. Stisen and H.J. Bress. Mesure du module complexe d’élasticité de fibres et feuilles minces. *Brüel & Kjaer Technical Review No.2*, pp. 3–18. 1970.
- [76] B.R. Allen. A direct complex stiffness test system for viscoelastic material properties. *Proceedings of 3th Smart Structures and Materials (SPIE), San Diego, CA, USA*, February 1996.
- [77] G. Kergourlay and E. Balmès. Conception d’un banc de mesure des propriétés de films viscoélastiques. *IME 2002, Besançon, France*, July 2002.
- [78] G. Kergourlay and E. Balmès. Caractérisation de films viscoélastiques en fréquence, température et précontrainte. *GIENS 2003, Giens, France*, May 2003.
- [79] T. Pritz. Dynamic Young’s modulus and loss factor of plastic foams for impact sound isolation. *Journal of Sound and Vibration*, 178(3):315–322, 1994.
- [80] L.F. Nielsen and N.J. Wismer. Improved method for complex modulus estimation. Application Note BO 0427-11, Brüel Kjaer, 1996.
- [81] B. L. Agee and L.D. Mitchell. Frequency-dependent viscoelastic property measurement via modal analysis techniques. *Proceedings of 9th International Conference on Experimental Mechanics, Vol.5*, pp. 1978–1988, 1990.
- [82] G. Ramorino; D. Vetturi; D. Cambiaghi; A. Pegoretti and T. Ricco. Developments in dynamic testing of rubber compounds: assessment of non-linear effects. *Polymer testing*, 22:681–687, 2003.

- [83] M. Soula; T. Vinh; Y. Chevalier; T. Beda and C. Esteoule. Measurements of isothermal complex moduli of viscoelastic materials over a large range of frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 205(2):167–184, 1997.
- [84] T.-K. Ahn and K.-J. Kim. Sensitivity analysis for estimation of complex modulus of viscoelastic materials by non-resonance method. *Journal of Sound and Vibration*, 176(4):543–561, 1994.
- [85] Z. Qinghui. Identification of complex structures with frequency-dependent stiffness and damping. *Proceedings of 5th International Modal Analysis Conference (IMAC V), London, UK*, pp. 762–765, 1987.
- [86] ASTM. E756-98 standard test method for measuring vibration-damping properties of materials. *Annual Book of ASTM Standards, V. 04.06*. ASTM, 1998.
- [87] G. Collot. A new method for loss factor measurements, using the Hilbert transform, implementation in a software to automatize the 'Oberst' method. *Proceedings of 5th International Modal Analysis Conference (IMAC V), London, UK*, pp. 389–393, 1987.
- [88] R. G. Smiley; M.L. Drake and D.M. Hopkins. An up-to-date approach to complex modulus testing. *5th International Modal Analysis Conference, London, England*, pp. 1633–1638. SEM, 1987.
- [89] S.-W. Kung and R. Singh. Complex eigensolutions of rectangular plates with damping patches. *Journal of Sound and Vibration*, 216(1):1–28, 1998.
- [90] D. J. Ewins. *Modal Testing: Theory and Practice*. Research Studies Press, 2nd edition, September 2000.
- [91] B. Lundberg and S. Ödden. In situ determination of the complex modulus from strain measurements on an impacted structure. *Journal of Sound and Vibration*, 167(3):413–419, 1993.
- [92] M. Mossberg; L. Hillström and T. Södeström. Non-parametric identification of viscoelastic materials from wave propagation experiments. *Automatica*, 37(4):511–521, April 2001.

- [93] S. Ödeen and B. Lundberg. Determination of complex modulus from measured end-point accelerations of an impacted rod specimen. *Journal of Sound and Vibration*, 165(1):1–8, 1993.
- [94] P. Lemerle. Measurement of the viscoelastic properties of damping materials: adaptation of the wave propagation method to test samples of short length. *Journal of Sound and Vibration*, 250(2):181–196, 2002.
- [95] Y. Ketema. A viscoelastic dynamic vibration absorber with adaptable suppression band: a feasibility study. *Journal of Sound and Vibration*, 216(1):133–145, 1998.
- [96] D.I.G. Jones. A reduced-temperature nomogram for characterization of damping material behavior. *Shock and Vibration Bulletin*, 48(2):13–22, 1978.
- [97] C.H. Park; D.J. Inman and M.J. Lam. Model reduction of viscoelastic finite element models. *Journal of Sound and Vibration*, 219(4):619–637, 1999.
- [98] G.A. Lesieutre and D.L. Mingori. Finite element modelling of frequency-dependent material damping using augmenting thermodynamic fields. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 13(6):1040–1050, 1990.
- [99] G.A. Lesieutre. Finite elements for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency-dependent material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 29(12):1567–1579, 1992.
- [100] A.-S. Plouin and E. Balmès. A test validated model of plates with constrained viscoelastic materials. *Proceedings of 17th International Modal Analysis Conference (IMAC XVII), Kissimmee, FL, USA*, pp. 194–200, 1999.
- [101] Y. Frostig and M. Baruch. Free vibrations of sandwich beams with a transversely flexible core: a high order approach. *Journal of Sound and Vibration*, 176(2):195–208, 1994.
- [102] M.R. Chitnis; Y.M. Desai and T. Kant. Edge vibrations in composite laminated sandwich plates by using a higher order displacement based theory. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5):791–807, 2000.

- [103] H. Matsunaga. Vibration and buckling of multilayered composite beams according to higher order deformation theories. *Journal of Sound and Vibration*, 246(1):47–62, 2001.
- [104] A.R. Johnson and A. Tessler. A viscoelastic higher-order beam finite element - report nr: Tm-110260. Technical report, NASA Langley Research Center, Hampton, VA 23681-0001, June 1996.
- [105] C.D. Johnson; D.A. Kienholz; E.M. Austin and M.E. Schneider. Design and analysis of damped structures using finite element techniques. *Proceedings of Conference on Mechanical Vibration and Noise (ASME)*, pp. paper No. 85–DET–131. ASME, 10-13 September 1985.
- [106] A.-S. Plouin and E. Balmès. Steel/viscoelastic/steel sandwich shells computational methods and experimental validations. *Proceedings of 18th International Modal Analysis Conference (IMAC XVIII), San Antonio, TX, USA*, pp. 384–390, 2000.
- [107] E. Balmès and A. Bobillot. Analysis and design tools for structures damped by viscoelastic materials. *Proceedings of 20th International Modal Analysis Conference (IMAC XX), Los Angeles, CA, USA*, 2002.
- [108] E. Balmès and S. Germès. Tools for viscoelastic damping treatment design. application to an automotive floor panel. *Proceedings of International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium*, 2002.
- [109] E. Balmès and S. Germès. Design strategies for viscoelastic damping treatment applied to automotive components. *Proceedings of 22nd International Modal Analysis Conference (IMAC XXII), Dearborn, MI, USA*, January 2004.
- [110] R. Moreira and J.D. Rodrigues. Constrained damping layer treatments: Finite element modeling. *Journal of Vibration and Control*, 10(4):575–595, 2004.
- [111] MacNeal-Schwendler. *MSC.Nastran for Windows v4.5 Reference Manual*. MacNeal-Schwendler, 2000.
- [112] S.L. Liguore and J.B. Kosmatka. Evaluation of analytical methods to predict constrained layer damping behaviour. *Proceedings of 6th International Modal Analysis Conference (IMAC VI), Kissimmee, FL, USA*, pp. 421–427, 1988.

- [113] D.R.J. Owen and Z.H. Li. A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods-I.fundamentals and static analysis. *Computers and Structures*, 26(6):907–914, 1987.
- [114] D. Liu and X. Li. An overall view of laminate theories based on displacement hypothesis. *Journal of Composite Materials*, 30(14):1539–1561, 1996.
- [115] J.-F. He and B.-A. Ma. Vibration analysis of laminated plates using a refined shear deformation theory. *Journal of Sound and Vibration*, 175(5):577–591, 1994.
- [116] K.H. Lo; R.M. Christensen and E.M. Wu. A high-order theory of plate deformation, part 1: Homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44:663–676, December 1977.
- [117] J.N. Reddy. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 20(9/10):881–896, 1984.
- [118] N.F. Hanna and A.W. Leissa. A higher order shear deformation theory for the vibration of thick plates. *Journal of Sound and Vibration*, 170(4):545–555, 1994.
- [119] T. Kant and K. Swaminathan. Free vibration of isotropic, orthotropic and multilayer plates based on higher order refined theories. *Journal of Sound and Vibration*, 241(2):319–327, 2001.
- [120] R. Rikards; A. Chate and E.Barkanov. Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites. *Computers and Structures*, 47(6):1005–1015, 1993.
- [121] M. Macé. Damping of beam vibrations by means of a thin constrained viscoelastic layer: evaluation of a new theory. *Journal of Sound and Vibration*, 172(5):577–591, 1994.
- [122] H.-H. Lee. Non-linear vibration of a multilayer sandwich beam with viscoelastic layers. *Journal of Sound and Vibration*, 216(4):601–621, 1998.
- [123] P. Cupial and J. Niziol. Vibration and damping analyis of a three-layered composite plate with a viscoelastic mid-layer. *Journal of Sound and Vibration*, 183(1):99–114, 1995.

- [124] D.A. Saravanos. Integrated damping mechanics for thick composite laminates and plates. *Journal of Applied Mechanics*, 61:375–383, June 1994.
- [125] D.A. Saravanos; J.M. Pereira. Dynamic characteristics of specialty composite structures with embedded damping layers. *Journal of Vibration and Acoustics (Special 50th Anniversary Design Issue)*, 117:62–69, 1995.
- [126] D.H. Robbins Jr and J.N. Reddy. Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:655–677, 1993.
- [127] T.C. Ramesh and N. Ganesan. Influence of constrained damping layer on the resonant response of orthotropic cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 185(3):483–500, 1995.
- [128] T.C. Ramesh and N. Ganesan. Vibration and damping analysis of cylindrical shells with constrained damping treatment - A comparison of three theories. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117:213–219, 1995.
- [129] K.R. Sivadas and N. Ganesan. Dynamic analysis of circular cylindrical shells with material damping. *Journal of Sound and Vibration*, 166(1):103–116, 1993.
- [130] K.H. Huang and A. Dasgupta. A layer-wise analysis for free vibration of thick composite cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 186(2):207–222, 1995.
- [131] T.C. Ramesh and N. Ganesan. The harmonic response of cylindrical shells with constrained damping treatment. *Journal of Sound and Vibration*, 180(5):745–756, 1995.
- [132] A. Korjakin; R. Rikards; H. Altenbach and A. Chate. Free damped vibrations of sandwich shells of revolution. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 3:171–196, 2001.
- [133] H. Zhou and M.D. Rao. Damping of composite tubes with embedded viscoelastic layers. *Journal of Vibration and Acoustics. Transactions of the ASME*, 118:384–389, July 1996.

- [134] L.-H. Chen and S.-C. Huang. Vibration attenuation of a cylindrical shell with constrained layer damping strips treatment. *Computers and Structures*, 79:1355–1362, 2001.
- [135] T.C. Ramesh and N. Ganesan. A finite element based on a discrete layer theory for the free vibrations analysis of conical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 166(3):531–538, 1993.
- [136] T.C. Ramesh and N. Ganesan. Finite element analysis of conical shells with a constrained viscoelastic layer. *Journal of Sound and Vibration*, 171(5):577–601, 1994.
- [137] B.P. Gautham and N. Ganesan. Vibration and damping characteristics of spherical shells with a viscoelastic core. *Journal of Sound and Vibration*, 170(3):289–301, 1994.
- [138] L. Rogers. Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations. *Journal of Rheology*, 27(4):351–372, 1983.
- [139] L. Gaul. Structural damping in frequency and time domain. *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference (IMAC VII), Las Vegas, NV, USA*, pp.177–185, 1989.
- [140] W.A. Driscoll. Linear viscoelasticity. Technical report, ScotchDamp Vibration Control Systems, 3M Industrial Specialties Division, St Paul, MN, 1994.
- [141] Y.A. Rossikhin and M.V. Shitikova. Analysis of the viscoelastic rod dynamics via models involving fractional derivatives or operators of two different orders. *The shock and vibration digest*, 36(1):3–26, 2004.
- [142] A. Muravyov. Forced vibration responses of a viscoelastic structure. *Journal of Sound and Vibration*, 218(5):892–907, 1998.
- [143] M. Enelund and G. A. Lesieutre. Time domain modeling of damping using anelastic displacement fields and fractional calculus. *International Journal of Solids and Structures*, 36:4447–4472, 1999.
- [144] B. Stankovic and T.M. Atanackovic. On a model of a viscoelastic rod. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 4(4):501–522, 2001.

- [145] A. Schmidt and L. Gaul. FE implementation of viscoelastic constitutive stress-strain relations involving fractional time derivatives. *Proceedings of the 2nd European Conference on Constitutive Models for Rubber (ECCMR), Hannover*, pp. 79–89, 10-12 September 2001.
- [146] A. Schmidt and L. Gaul. Application of fractional calculus to viscoelastically damped structures in the finite element method. *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamics Modelling (SDM), Madeira, Portugal*, pp. 297–306, 3-5 June 2002.
- [147] A. Schmidt and L. Gaul. Parameter identification and FE implementation of a viscoelastic constitutive equation using fractional derivatives. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 1(1):153–154, 2002.
- [148] K.B. Oldham and J.Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, 1974.
- [149] M. Enelund. *Fractional calculus and linear viscoelasticity in structural dynamics*. PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1996.
- [150] A.C. Galucio; J.-F. Deü and R. Ohayon. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics*, 33:282–291, 2004.
- [151] E. Barkanov. Transient response analysis of structures made from viscoelastic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(3):393–403, 1999.
- [152] K.-J Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 2nd edition, 1996.
- [153] A.T.H. Mitsuma and F.K.S. Sekimoto. Experimental and theoretical study on damped joints in truss structure. *Proceedings of 8th International Modal Analysis Conference (IMAC VIII), Kissimmee, FL, USA*, pp. 8–14. SEM, 1990.
- [154] B-G. Hu; M.A. Dokainish and W.M. Mansour. A modified mse method for viscoelastic systems: A weighted stiffness matrix approach. *Journal of Vibration and Acoustics. Transactions of the ASME*, 117:226–231, April 1995.

- [155] R. Moreira. Análise do comportamento dinâmico de placas com tratamento passivo por amortecimento viscoelástico. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.
- [156] J.C. Harrison; W. Imaino and F.E. Talke. Tuned constrained layer damping of a cantilevered plate. *Journal of Sound and Vibration*, 174(3):413–427, 1994.
- [157] E. Balmès. Super-element representation of a model with frequency dependent properties. *Proceedings of International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium, Vol.3*, pp. 1767–1778, September 1996.
- [158] E. Balmès. Model reduction for systems with frequency dependent damping properties. *Proceedings of 15th International Modal Analysis Conference (IMAC XV), Orlando, FL, USA*, pp. 223–229, 1997.
- [159] A.-S. Plouin and E. Balmès. Pseudo-modal representations of large models with viscoelastic behavior. *Proceedings of 16th International Modal Analysis Conference (IMAC XVI), Santa Barbara, CA, USA*, pp. 1440–1446, 1998.
- [160] O.C. Zienkiewicz and R.L.Taylor. *The Finite Element Method*, Volume 2- Solid Mechanics. Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.
- [161] J.-L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des Structures par Éléments Finis*, Volume 2 - Poutres et Plaques. Hermès, 1990.
- [162] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc, 2nd edition, 2000.
- [163] A. Tessler; E. Saether and T. Tsui. Vibration of thick laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, 179(3):475–498, 1995.
- [164] T. Kant and R.K. Khare. A higher-order facet quadrilateral composite shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(24):4477–4499, 1997.
- [165] H. Hassis. A "Warping" theory of plate deformation. *European Journal of Mechanics, A:Solids*, 17:843–853, 1998.

- [166] H. Hassis. A "Warping-Kirchhoff" and a "Warping-Mindlin" theory of shell deformation. *Journal of Sound and Vibration*, 225(4):633–653, 1999.
- [167] H. Hassis. A finite element formulation for plates with Warping. *Journal of Sound and Vibration*, 234(1):171–176, 2000.
- [168] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, Volume 1-The Basis. Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.
- [169] Y.K. Cheung; S.H. Lo and A.Y.T. Leung. *Finite Element Implementation*. Blackwell Science, 1st edition, 1996.
- [170] E. Hinton; T. Rock and O.C. Zienkiewicz. A note on mass lumping and related processes in the finite element method. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 4(3):245–249, 1976.
- [171] J.-L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des Structures par Éléments Finis*, Volume 1- Solides Élastiques. Hermès, 1995.
- [172] R.H. MacNeal. *Finite Elements: Their Design and Performance*, Volume 89 of *Mechanical Engineering*. Marcel Dekker, 1st edition, 1989.
- [173] R.H. MacNeal and R.L. Harder. A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom. *Computers and Structures*, 28(1):75–84, 1988.
- [174] E.L. Wilson; R.L. Taylor; W.P. Doherty and J. Ghaboussi. Incompatible displacement models. *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, S. Fenves, et al. (eds), pp. 43–57, 1973.
- [175] R.D. Cook; D.S. Malkus and M.E. Plesha. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 3rd edition, 1989.
- [176] R.L. Taylor; P.J. Beresford and E.L. Wilson. A nonconforming element for stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:1211–1219, 1976.
- [177] Y. Zhu and T. Zacharia. A new one-point quadrature quadrilateral shell element with drilling degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136:165–203, 1996.

- [178] R. W. Clough and E. L. Wilson. Dynamic finite element analysis of arbitrary thin shells. *Computers and Structures*, 1:33–56, 1971.
- [179] R. D. Cook. A plane hybrid element with rotational d.o.f. and adjustable stiffness. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:1499–1508, 1987.
- [180] T.J.R. Hughes and F. Brezzi. On drilling degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72:105–121, 1989.
- [181] R. D. Cook. Further development of a three-node triangular shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:1413–1425, 1993.
- [182] R. D. Cook. Four-node "flat" shell element: Drilling degrees of freedom, membrane-bending coupling, warped geometry and behavior. *Computers and Structures*, 50(4):549–555, 1994.
- [183] C.-K. Choi and T.-Y. Lee. Efficient remedy for membrane locking of 4-node flat shell elements by non-conforming modes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:1961–1971, 2003.
- [184] D.J. Allman. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Computers and Structures*, 19(1):1–8, 1984.
- [185] P.G. Bergan and C.A. Felippa. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50:25–69, 1985.
- [186] D.J. Allman. A basic flat facet finite element for the analysis of general shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:19–35, 1994.
- [187] R. D. Cook. On the Allman triangle and a related quadrilateral element. *Computers and Structures*, 22(6):1065–1067, 1986.
- [188] D.J. Allman. A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:717–730, 1988.
- [189] A. Ibrahimbegovic; R.L. Taylor and E.L. Wilson. A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:445–457, 1990.

- [190] R. Kouhia. A novel membrane finite element with drilling rotations. *Numerical Meth. Eng.*, Hirsh et al (eds), pp. 415–420. ECCOMAS, John Wiley & Sons, Ltd, 1996.
- [191] M. Yuan; S. Sun and P. Chen. Applications of drilling degrees of freedom for 2D and 3D structural analysis. *Computational Mechanics: New Trends and Applications*, E. Oñate S.R. Idelsohn and E. Dvorkin (eds). CIMNE, Barcelona, 1998.
- [192] K.Y. Sze; Y.S. Sim and A.K. Soh. A hybrid stress quadrilateral shell element with full rotational d.o.f.s. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(10):1785–1800, 1997.
- [193] T. Belytschko and I. Leviathan. Physical stabilization of the 4-node shell element with one point quadrature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113:321–350, 1994.
- [194] A. Côté and F. Charron. On the selection of p-version shape functions for plate vibration problems. *Computers and Structures*, 79:119–130, 2001.
- [195] T.J.R. Hughes; R.L. Taylor and W. Kanak-nukulchai. A simple and efficient finite element for plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11:1529–1543, 1977.
- [196] T. Belytschko and C.-S. Tsay. A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:405–419, 1983.
- [197] T. Belytschko; J.-S. Ong; W.K. Liu and J.M. Kennedy. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 43:251–276, 1984.
- [198] T. Belytschko; H.Stolarski; W.K. Liu; N.Carpenter and J.S.-J. Ong. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:221–258, 1985.
- [199] R.J.Marczak and A.M. Awruch. A locking-free three-node shell finite element formulation. *Computational Mechanics - New Trends and Applications*. International Association of Computational Mechanics, Barcelona, Spain, 1998.

- [200] D. Braess. Enhanced assumed strain elements and locking in membrane problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 165:155–174, 1998.
- [201] R. Piltner and D.S. Joseph. A mixed finite element for plate bending with eight enhanced strain modes. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17:443–454, 2001.
- [202] F. Auricchio and Elio Sacco. A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(10):1481–1504, 1999.
- [203] N. Stander; A. Matzenmiller and E. Ramm. An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis. *Engineering Computations*, 6:58–66, March 1989.
- [204] K.-J. Bathe; A. Iosilevitc and D. Chapelle. An evaluation of the MITC shell elements. *Computers and Structures*, 70:1–30, 2000.
- [205] E.N. Dvorkin and K.J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations*, 1:77–88, 1984.
- [206] E. Balmès. *Structural Dynamics Toolbox V5.0*. SDTools, 2001.
- [207] R.L. Taylor; J.C. Simo; O.C. Zienkiewicz and A.C.H. Chan. The patch test - a condition for assessing FEM convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:39–62, 1986.
- [208] R. D. Cook. Improved two-dimensional finite element. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, 100:1851–1865, 1974.
- [209] C. A. Felippa. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2125–2168, 2003.
- [210] L. S. D. Morley. *Skew Plates and Structures*. Pergamon, Oxford, 1963.
- [211] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. Error estimates and adaptive refinements for plate bending problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:2839–2853, 1989.

- [212] X.-J. Wang and T. Belytschko. A study of stabilization and projection in the 4-node Mindlin plate element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:2223–2238, 1989.
- [213] A. F. Saleeb and T. Y. Chang. An efficient quadrilateral element for plate bending analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:1123–1155, 1987.
- [214] A. Tessler and T. J. R. Hughes. A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50:71–101, 1985.
- [215] H. V. Lakshminarayana and S. S. Murthy. A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:591–623, 1984.
- [216] O. C. Zienkiewicz and D. Lefebvre. A robust triangular plate bending element of the Reissner-Mindlin type. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1169–1184, 1988.
- [217] A.C. Scordelis and K.S. Lo. Computer analysis of cylindrical shells. *American Concrete Institute Journal*, 61:539–562, 1964.
- [218] A. F. Saleeb; T. Y. Chang and S. Yingyeunyong. A mixed formulation of C0-linear triangular plate/shell element - The role of edge shear constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1101–1128, 1988.
- [219] W. Kanok-Nukulchai. A simple and efficient finite element for general shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:179–200, 1979.
- [220] R.H. MacNeal and R.L. Harder. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design* 1, 11:3–20, 1985.
- [221] J.-L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des Structures par Éléments Finis*, Volume 3 - Coques. Hermès, 1992.
- [222] R. Kouhia and R. Stenberg. A simple linear nonconforming shell element. *IASS-IACM 2000 Fourth International Colloquium on Computation of Shells & Spatial Structures*, June 2000.

- [223] L.S.D. Morley and A.J. Morris. Conflict between finite elements and shell theory. Royal aircraft establishment report, Royal Aircraft Establishment, London, 1978.
- [224] L. Meirovitch. *Analytical Methods in Vibrations*. MacMillan Publishing, 1967.
- [225] W. Soedel. *Vibrations of Shells and Plates*. Marcel Dekker, 2nd edition, 1993.
- [226] 3M. *ScotchDamp TM Vibration Control Systems*. 3M Industrial Specialties Division, St.Paul, MN, USA., 1993.
- [227] C. Zang; H. Grafe and M. Imregun. Frequency-domain criteria for correlating and updating dynamic finite element models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(1):139–155, 2001.
- [228] R. Pascual; J.C. Golinval and M. Razeto. A frequency domain correlation technique. *Proceedings of 15th International Modal Analysis Conference (IMAC XV), Orlando, FL, USA*, pp. 587–592, 1997.
- [229] R. Pascual; M. Razeto; J.C. Golinval and R. Schälchli. A robust FRF-based technique for model updating. *Proceedings of International Conference on Noise & Vibration Engineering, ISMA 27, Leuven, Belgium*, pp. 1037–1045, 2002.
- [230] R. Pascual; R. Schälchli and M. Razeto. Damping identification using a robust FRF-based model updating technique. *Proceedings of 21st International Modal Analysis Conference (IMAC XXI), Orlando, FL, USA*, Paper N°338, 2003.
- [231] S. G. Braun; D.J. Ewins and S.S. Rao. *Encyclopedia of Vibration*. Academic Press, 1st edition, 2001.
- [232] H. Grafe. *Model updating of large structural dynamics models using measured response functions*. PhD Thesis, Imperial College of Science. Technology and Medicine, University of London, UK, October 1998.
- [233] E. Dascotte and J. Strobbe. Updating finite element models using FRF correlation functions. *Proceedings of 17th International Modal Analysis Conference (IMAC XVII), Kissimmee, FL, USA*, pp. 1169–1174, 8-11 February 1999.
- [234] N.M.M.Maia and J.M.M.Silva. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Engineering Dynamic Series. Research Studies Press, UK, 1st edition, 1997.

- [235] N. El-Abbasi and S.A. Meguid. A new shell element accounting for through-thickness deformation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189:841–862, 2000.
- [236] E.L. Peterson and W.M. Rusen. Factors to consider when selecting a modal excitation energy source. Technical report, MB Dynamics Inc., 1989.
- [237] K.G. McConnell; J. Dong; E. Zander and S. Thekentattil. Effect of stinger stiffness on measured accelerance. *Proceedings of 15th International Modal Analysis Conference (IMAC XV), Orlando, FL, USA*, pp. 672–678, 1997.
- [238] L.D. Mitchell and K.B. Elliot. A method for designing stingers for use in mobility testing. *Proceedings of 2nd International Modal Analysis Conference (IMAC II), Orlando, FL, USA*, pp. 872–876, 1984.
- [239] I.A. Anderson. Avoiding stinger rod resonance effects on small structures. *Proceedings of 8th International Modal Analysis Conference (IMAC VIII), Kissimmee, FL, USA*, pp. 673–678, 1990.
- [240] N.M.M. Maia; J.M.M. Silva and A.M.R. Ribeiro. A new concept in modal analysis: the characteristic response function (CRF). *Modal Analysis: the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 9(3):191–202, 1994.
- [241] A. M. R. Ribeiro. *Desenvolvimento de técnicas de análise dinâmica aplicáveis à modificação estrutural*. Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, 1999.

