



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**



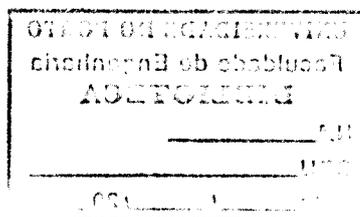
INÁCIO ARNALDO LHATE

# OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS BASEADA EM MODELOS DE PESQUISA EVOLUCIONÁRIA

**OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS BASEADA  
EM MODELOS DE PESQUISA EVOLUCIONÁRIA**

**INÁCIO ARNALDO LHATE**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para a  
obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica



FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Março, 2002

621(043)/LHAii/0PT

<b>UNIVERSIDADE DO PORTO</b>
Faculdade de Engenharia
<b>BIBLIOTECA H</b>
N.º <u>60299</u>
CDU <u>621(043)</u>
Data <u>15 1 7 20 02</u>

*À minha família*

## Agradecimentos

Em primeiro lugar quero exprimir ao Prof. Carlos Conceição António, meu orientador, a minha profunda gratidão e reconhecimento pelo excelente apoio científico, disponibilidade e incentivo que sempre manifestou.

Agradeço ao IDMEC-Instituto de Engenharia Mecânica (Pólo FEUP) e em particular, à Unidade de Métodos Numéricos em Mecânica e Engenharia Estrutural (CENUME), por ter tornado possível a frequência do Curso de Mestrado através da atribuição de bolsa de investigação. Neste contexto, desejo ainda exprimir a minha gratidão aos coordenadores científico e executivo da unidade CENUME respectivamente Prof. Rogério Augusto Martins e Prof. Carlos Conceição António.

Agradeço à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto todo o apoio prestado durante a frequência do Curso de Mestrado e posteriormente na execução desta dissertação.

Agradeço igualmente a todos os docentes do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do perfil de Construções Mecânicas.

Agradeço também a todos os colegas de do Curso de Mestrado pelo bom ambiente de trabalho que sempre me souberam proporcionar.

Agradeço a todos aqueles directa ou indirectamente contribuíram de algum modo para a efectivação deste trabalho.

Finalmente, quero agradecer à minha família que sempre soube superar os condicionalismos que a frequência deste Mestrado sempre significou.

# OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS BASEADA EM MODELOS DE PESQUISA EVOLUCIONÁRIA

por

**Inácio Arnaldo Lhate**

Tese submetida para satisfação dos requisitos do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, e realizada sob orientação do

**Prof. Doutor Carlos Alberto da Conceição António**

## RESUMO

Esta dissertação tem como objectivo a formulação e o desenvolvimento de modelos de pesquisa evolucionária para a optimização de estruturas compósitas.

Na primeira parte do trabalho desenvolveu-se um modelo numérico visando a optimização de estruturas compósitas híbridas (multimateriais) reforçadas com vigas considerando comportamento não linear geométrico. Para além do peso/custo da estrutura como função a minimizar, considera-se também a energia de deformação como função regularizadora. A análise estrutural baseia-se numa formulação de deslocamentos do Método dos Elementos Finitos e usa-se o Método do comprimento do arco para se obter a curva de equilíbrio não linear. Usa-se um modelo unificado de análise dos fenómenos da encurvadura e de rotura da primeira camada no diagnóstico da integridade estrutural.

O modelo de optimização proposto baseia-se num *Algoritmo Genético Hierárquico* e numa estratégia evolucionária *elitista*. Adoptou-se uma topologia hierárquica para a pesquisa evolucionária, com períodos de isolamento e de migração entre sub-populações.

Foram desenvolvidos alguns operadores como a *Eliminação/Substituição* de soluções e a *Mutação Implícita*. Desenvolveu-se um modelo de *Crossover Híbrido* baseado numa técnica mista onde para além da permuta estocástica estruturada de material genético dos progenitores efectua-se um processo de optimização das características genéticas do descendente.

Na segunda parte deste trabalho apresenta-se um modelo de optimização de estruturas compósitas laminadas sob carregamento dinâmico, considerando a resposta em amplitude. O modelo de optimização proposto baseou-se num Algoritmo Genético suportado por operadores apropriados de *Seleccção*, *Crossover*, *Eliminação/Substituição* e *Mutação* clássica.

Palavras chave: optimização estrutural, Algoritmos Genéticos, hierárquico, elitista, *Crossover* híbrido, resposta dinâmica.

# OPTIMISATION OF COMPOSITE STRUCTURES BASED ON . EVOLUTIONARY SEARCH MODELS

by

**Inácio Arnaldo Lhate**

Thesis submitted for fulfilment of the requirements for the Master Degree in Mechanical Engineering of Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, developed under the supervision of

**Prof. Doutor Carlos Alberto da Conceição António**

## ABSTRACT

The goal of this Thesis is the formulation and development of evolutionary search models for the optimisation of composite structures.

In the first part of this work a numerical model aiming the optimisation of hybrid (multi-material) composite structures reinforced with beams and considering non-linear geometric behaviour was developed. Besides the minimisation of the weight/cost of the structure, the strain energy is also considered as regularisation function. The structural analysis is based on a displacement formulation of the Finite Element Method and the Arc-length Method is used to obtain the non-linear equilibrium path. Considering an unified approach for the buckling and first ply failure analysis, the structural integrity is checked.

The proposed optimisation model is based on a *Hierarchical Genetic Algorithm* and an *elitist* evolutionary strategy. A hierarchical topology for the evolutionary search was adopted with isolation and migration stages between sub-populations.

Some genetic operators as *Elimination/Replacement* of solutions and *Implicit Mutation* were developed. A *Hybrid Crossover* model based on a mixed technique considering the structured stochastic exchange of the progenitors genetic material together with a local optimisation of offspring genetic characteristics was developed.

A optimisation model of composite structures under dynamic loading considering amplitude response was developed during the second part of this work. The proposed optimisation model is based on a Genetic Algorithm supported by appropriate operators of *Selection*, *Crossover*, *Elimination/Replacement* and classic *Mutation*.

Key words: structural optimisation, Genetic Algorithms, hierarchical, elitist, *Hybrid Crossover*, dynamic response.

# *Índice Geral*

Página

## *Capítulo 1*

### **INTRODUÇÃO**

1.1 Objectivos e enquadramento	1
1.2 Apresentação do trabalho	2

## *Capítulo 2*

### **RESENHA BIBLIOGRÁFICA**

2.1 Optimização de estruturas em compósitos	6
2.2 Métodos de pesquisa evolucionária	12
Referências	16

## *Capítulo 3*

### **ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS**

3.1 Introdução	27
3.2 Descrição do movimento	29
3.3 Descrição Lagrangeana Total	30
3.4 Discretização pelo método dos elementos finitos	37
3.5 Algoritmo de solução não linear	42
3.5.1 Introdução	42
3.5.2 Método do comprimento do arco	43
Referências	48

## **Capítulo 4**

### **ANÁLISE ESTRUTURAL**

#### **Elemento de placa ou casca reforçado com viga**

4.1	Introdução	49
4.2	Caracterização do elemento de placa	50
4.2.1	Campo de deslocamentos	50
4.2.2	Representação isoparamétrica	55
4.2.3	Campo de deformações	56
4.2.4	Matriz de Rigidez	59
4.2.5	Forças nodais equivalentes ao estado de tensão	62
4.2.6	Relações Constitutivas	65
4.3	Caracterização do elemento de viga	68
4.3.1	Campo de Deslocamentos	68
4.3.2	Representação isoparamétrica	73
4.3.3	Campo de deformações	73
4.3.4	Matriz de Rigidez	76
4.3.5	Forças nodais equivalentes ao estado de tensão	79
4.3.6	Relações Constitutivas	81
	Referências	82

## **Capítulo 5**

### **PROJECTO ÓPTIMO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS HÍBRIDAS**

5.1	Introdução	84
5.2	Variáveis de projecto nos compósitos híbridos	85
5.3	Restrições do problema	86
5.4	Formulação do problema	90
	Referências	92

## Capítulo 6

### MODELO HIERÁRQUICO DE PESQUISA EVOLUCIONÁRIA

6.1	Introdução	94
6.2	Topologia hierárquica	95
6.3	Função de mérito	97
6.4	Composição e codificação das sub-populações	98
6.5	Algoritmo Genético Hierárquico	100
6.5.1	Ciclo externo da topologia hierárquica: Algoritmo 1	100
6.5.2	Ciclo interno de pesquisa evolucionária: Algoritmo 2	103
6.6	Caracterização dos operadores genéticos	103
6.7	Hibridização do operador genético de <i>crossover</i>	107
6.7.1	Algoritmo de <i>Crossover Híbrido</i>	107
6.7.2	Heurísticas para o cálculo do mérito local	109
6.7.3	Aproximações para a energia e as sensibilidades	111
6.8	Critério de paragem do Algoritmo Genético Hierárquico	113
	Referências	114

## Capítulo 7

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS (AGH)

7.1	Introdução	116
7.2	Casca esférica	116
7.3	Casca cilíndrica	124
7.4	Teste numérico ao operador de <i>Crossover Híbrido</i>	129

## ***Capítulo 8***

### **OPTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS**

8.1	Introdução	134
8.2	Análise dinâmica	135
8.3	Análise da integridade estrutural	139
8.4	Formulação do problema de otimização	141
8.5	Optimização baseada em pesquisa evolucionária	142
8.5.1	Formato da codificação e função de mérito	142
8.5.2	Operadores Genéticos	143
8.5.3	Análise do Algoritmo Genético com função de teste	144
8.6	Exemplo numérico: otimização da resposta dinâmica em amplitude	148
8.7	Conclusões	151
	Referências	152

## ***Capítulo 9***

### **CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO**

9.1	Conclusões	154
9.2	Perspectivas de trabalho futuro	155

# *Índice de Figuras*

Página

## *Capítulo 3*

### **ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS**

Figura 3.1	Descrições Lagrangeana Total (LT) e Lagrangeana Actualizada (LA).	29
Figura 3.2	Curva de equilíbrio associada a comportamento não linear.	42
Figura 3.3	Método do comprimento de arco, com superfície esférica de constrangimento.	45

## *Capítulo 4*

### **ANÁLISE ESTRUTURAL**

#### **Elemento de placa ou casca reforçado com viga**

Figura 4.1	Elemento de placa com reforço de viga.	49
Figura 4.2	Deslocamentos e aproximação por camadas.	51
Figura 4.3	Campo de deslocamentos para o elemento de placa de Mindlin.	52
Figura 4.4	Esforços generalizados no elemento de placa.	64
Figura 4.5	Referencial material (1, 2, 3) e referencial global (x, y, z):	66
Figura 4.6	Campo de deslocamentos para o elemento de viga de Timonshenko.	69
Figura 4.7	Mudança de referencial no elemento de viga.	71
Figura 4.8	Esforços na secção do elemento da viga.	80

## Capítulo 5

### PROJECTO ÓPTIMO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS HÍBRIDAS

Figura 5.1	Compósitos híbridos.	85
------------	----------------------	----

## Capítulo 6

### MODELO HIERÁRQUICO DE PESQUISA EVOLUCIONÁRIA

Figura 6.1	Topologia hierárquica.	96
Figura 6.2	Formato de codificação das variáveis de projecto.	98
Figura 6.3	Segmentos do cromossoma activos em cada sub-população.	99
Figura 6.4	Algoritmo 2: Algoritmo Genético, período de isolamento.	102
Figura 6.5	Principais operadores genéticos usados no algoritmo de optimização.	104
Figura 6.6	Cruzamento multiponto do tipo <i>Parametrized Uniform Crossover</i> considerado na representação binária e inteira do cromossoma.	105

## Capítulo 7

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS (AGH)

Figura 7.1	Definição da geometria e dos laminados da casca esférica reforçada com vigas.	116
Figura 7.2	História do processo evolutivo, considerando três materiais (Tabela 7.3).	120
Figura 7.3	História do processo evolutivo, considerando dois materiais (Tabela 7.2).	120
Figura 7.4	Evolução do mérito global e do mérito médio da elite da sub-população POP1, caso de estudo com três materiais.	121
Figura 7.5	Variação do mérito médio da elite das sub-populações nos	

	períodos de isolamento, caso de estudo com três materiais.	122
Figura 7.6	Curva de equilíbrio para a solução ótima, caso de estudo com 3 materiais.	123
Figura 7.7	Curva de equilíbrio para a solução ótima, caso de estudo com 2 materiais.	123
Figura 7.8	Geometria e substruturação da casca cilíndrica.	125
Figura 7.9	História do processo evolutivo para a casca cilíndrica, considerando dois materiais (Tabela 7.2).	126
Figura 7.10	Evolução do mérito global e do mérito médio da elite da sub-população POP1, exemplo da casca cilíndrica.	126
Figura 7.11	Curva de equilíbrio para a solução ótima, exemplo da casca cilíndrica.	128
Figura 7.12	Evolução do melhor mérito, comparação dos dois tipos de <i>crossover</i> .	130
Figura 7.13	Evolução do peso da melhor solução, comparação dos dois tipos de <i>crossover</i> .	130
Figura 7.14	Comparação da melhor solução obtida por <i>crossover</i> com a pior solução da elite progenitora; AG com <i>crossover híbrido</i> .	132

## Capítulo 8

### OPTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS

Figura 8.1	Parâmetros nodais do elemento de casca degenerada.	136
Figura 8.2	Principais operadores genéticos.	143
Figura 8.3	Variação das distâncias $\Delta_f$ e $\delta_x$ , representação binária com 8 dígitos.	146
Figura 8.4	Variação das distâncias $\Delta_f$ e $\delta_x$ , representação binária com 10 dígitos.	147
Figura 8.5	Pormenor da variação da distância $\Delta_f$ , para diferentes tipo de representação binária.	147

Figura 8.6	Definição geométrica e discretização em elementos finitos da casca fina esférica de pequena curvatura sob pressão uniforme.	148
Figure 8.7	História do mérito da melhor solução ao longo do processo evolutivo.	149
Figure 8.8	Volume da casca esférica correspondente à melhor solução ao longo do processo evolutivo.	149
Figura 8.9	Deslocamento vertical do ponto central da casca em função do tempo, para solução óptima.	150
Figure 8.10	Distribuição óptima das espessuras da casca esférica.	150

# Índice de Tabelas

Página

## Capítulo 7

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS (AGH)

Tabela 7.1	Propriedades macromecânicas dos materiais das camadas dos laminados.	117
Tabela 7.2	Domínio da variável material / sequência de empilhamento, 2 materiais.	118
Tabela 7.3	Domínio da variável material / sequência de empilhamento, 3 materiais.	118
Tabela 7.4	Parâmetros do Algoritmo Genético (AG).	119
Tabela 7.5	Soluções ótimas para três materiais e 2 materiais ( $\bar{t}_i, h_i, w_i$ [mm] e $\theta_i$ [graus]).	123
Tabela 7.6	Solução ótima para a casca cilíndrica ( $\bar{t}_i, h_i, w_i$ [mm] e $\theta_i$ [graus]).	127
Tabela 7.7	Soluções ótimas: (1) <i>Crossover Híbrido</i> ; (2) <i>Crossover Uniforme</i> ( $\bar{t}_i, h_i, w_i$ [mm] e $\theta_i$ [graus]).	131

# ***CAPÍTULO 1***

## ***INTRODUÇÃO***

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Objectivos e enquadramento

O projecto óptimo de estruturas tem sido impulsionado nos últimos anos fundamentalmente por dois factores. Em primeiro lugar, o crescimento do nível de competência no âmbito do projecto e a imposição de critérios de qualidade, tem suscitado a necessidade de otimizar todo o tipo de recursos disponíveis. Em segundo lugar, o avanço da tecnologia dos computadores permitiu o aumento considerável da capacidade de armazenagem e da velocidade processamento da informação.

Neste contexto, tem-se assistido no últimos cinco anos a um aumento explosivo de novas técnicas de optimização de estruturas, acompanhada de uma grande quantidade de aplicações nos domínios mais diversos. Entre os novos métodos de optimização propostos, os *Métodos de Pesquisa Evolucionária* constituem uma classe emergente de métodos baseados numa filosofia similar à evolução das espécies. Em particular, saliente-se os Algoritmos Genéticos cuja robustez e eficiência são conferidas por um conjunto de operadores que permitem a troca estocástica e estruturada da informação.

O crescimento da investigação dos Algoritmos Genéticos deve-se a quatro vectores principais:

- introdução de novas concepções na arquitectura dos modelos de pesquisa,
- novos operadores genéticos,
- hibridização ao nível dos operadores genéticos,
- hibridização dos Algoritmos Genéticos com outros métodos de optimização clássicos.

Nas aplicações em optimização de estruturas os Métodos de Pesquisa Evolucionária em geral e os Algoritmos Genéticos em particular, têm demonstrado todas as suas potencialidades em áreas tão diversas como o dimensionamento, a topologia, a forma, distribuição e selecção dos materiais, a fiabilidade estrutural, etc. Têm também permitido a racionalização dos próprios métodos de pesquisa com a decomposição dos domínios de projecto e a resolução de problemas multicritério, em cenários onde a natureza dos objectivos e das restrições dos problemas de optimização é tão diversa que as técnicas tradicionais têm uma capacidade de resposta limitada.

Um campo por inerência excelente para a aplicação dos *Métodos de Pesquisa Evolucionária* é sem dúvida a optimização de estruturas fabricadas em materiais compósitos. A utilização das técnicas clássicas de optimização baseadas no cálculo de gradientes pôs inúmeros problemas como a existência de variáveis discretas, a descontinuidade das funções e

suas derivadas, a não convexidade dos problemas, a necessidade de decomposição dos domínios de projecto e a coexistência de objectivos e restrições de natureza diversa.

Uma das grandes vantagens dos compósitos é o aumento da capacidade de carga aliado à uma redução de massa das estruturas. Este aspecto é muito importante nos meios de transporte porque por um lado permite reduzir a emissão de gases nocivos ao meio ambiente e por outro lado permite reduzir o chamado peso morto e a inércia durante as acelerações e travagens. Devido às facilidades de produção os compósitos permitem obter peças com formas complexas que não é possível obter com outros materiais. Este aspecto permite reduzir substancialmente o número de ligações nas peças de materiais compósitos. Outra vantagem dos materiais compósitos é a resistência ao meio ambiente. A resistência ao meio ambiente permite reduzir os custos de exploração das estruturas.

O objectivo principal do presente trabalho é contribuir para o desenvolvimento de Algoritmos Genéticos visando o projecto óptimo de estruturas. A investigação efectuada permitiu a concretização de inovações ao nível da arquitectura dos Algoritmos Genéticos desenvolvidos, bem como a criação e hibridização de novos operadores. Neste contexto, são apresentados dois modelos de optimização que reflectem a aplicação das técnicas no campo das estruturas compósitas laminadas.

O primeiro modelo é especialmente dirigido para a resolução do problema de optimização de estruturas compósitas laminadas com comportamento geometricamente não-linear e carregamento estático. Neste modelo, explora-se a flexibilidade dos Algoritmos Genéticos, para se obter uma arquitectura do modelo de optimização que considera de forma eficaz a decomposição do domínio de projecto. O modelo baseia-se no conceito de *Algoritmo Genético Hierárquico*.

Para além duma topologia hierárquica, o modelo desenvolvido baseia-se numa *estratégia elitista* e apresenta uma hibridização ao nível do operador *crossover* baseada em heurísticas e aproximações associadas ao comportamento estrutural.

No segundo modelo trata-se o problema de optimização da resposta em amplitude de estruturas compósitas laminadas sob cargas dinâmicas. Apresenta-se um Algoritmo Genético cuja concepção difere do anterior embora seja também utilizada uma *estratégia elitista*.

## 1.2 Apresentação do trabalho

Apesar de a optimização ser uma área de investigação que só nos últimos 25 anos mereceu a atenção dos investigadores, já foi produzido imenso trabalho científico, tendo em conta o número de artigos publicados. No Capítulo 2 descreve-se o que tem sido feito na área de

otimização de estruturas envolvendo materiais compósitos. A primeira parte descreve a otimização baseada em métodos convencionais. Como os problemas práticos de engenharia podem implicar domínios não convexos, variáveis de projecto inteiras e outras dificuldades que conduzem ao encarecimento computacional dos algoritmos, a ideia geral foi sempre a de investigar e desenvolver modelos que pudessem superar ou minorar estas dificuldades. Os algoritmos de pesquisa evolucionária são o instrumento de otimização que pode ser empregue onde os algoritmos convencionais são pouco eficientes. Neste contexto, a segunda parte da pesquisa bibliográfica descreve otimização envolvendo *Métodos de Pesquisa Evolucionária*.

No Capítulo 3 refere-se a necessidade de efectuar uma análise não linear das estruturas. Faz-se uma descrição da formulação Lagrangeana total do movimento. Esta formulação considera como configuração de referência a configuração inicial não deformada da estrutura. Neste capítulo apresenta-se também uma formulação de deslocamentos do Método dos Elementos Finitos e a descrição do Método do Comprimento do Arco usado no processo incremental e iterativo associado à resolução das equações não lineares de equilíbrio.

No Capítulo 4 faz-se a análise estrutural de placas e cascas laminadas com reforço de viga considerando o comportamento não linear geométrico abordado no capítulo anterior. Usa-se o elemento placa de 9 nós de Mindlín e o elemento de três nós de Timonshenko e garante-se compatibilidade do campo de deslocamentos. A utilização da Teoria de Marguerre permitiu também a modelação de cascas de pequena curvatura. Na definição do campo de deslocamentos, a componente vertical do vector de deslocamento contém uma parcela que representa a configuração inicial da placa antes da ocorrência da deformação segundo a Teoria de Marguerre.

No Capítulo 5 descreve-se formulação do problema de otimização de estruturas compósitas com comportamento não linear geométrico.

Neste trabalho, o vector das variáveis de projecto é composto pela orientação das fibras e pela espessura de cada camada no laminado de placa ou casca e pela altura e largura das secções transversais dos laminados de viga. Para além das variáveis referidas, considera-se ainda como variável de projecto o par material/sequência de empilhamento nos laminados de placa ou casca. Esta variável desempenha um papel muito importante durante o processo de otimização pois permite a utilização de compósitos híbridos ou multimateriais de forma eficiente.

A função objectivo é constituída pelo peso/custo da estrutura e pela energia interna de deformação. A formulação do problema de otimização envolve restrições de deslocamento,

de tensão, de encurvadura e restrições ao valor das variáveis de projecto. Neste trabalho é proposto um modelo unificado de análise dos fenómenos da encurvadura e de rotura da primeira camada (FPF), aplicado às cascas laminadas compósitas reforçadas com vigas.

O Capítulo 6 descreve o modelo hierárquico de pesquisa evolucionária e a hibridização do operador genético *crossover*. O *Algoritmo Genético Hierárquico* desenvolvido trabalha com três sub-populações que evoluem de forma independente durante um período de tempo ou época denominado *Estágio de Isolamento*. Os períodos de isolamento de cada sub-população sucedem-se de forma sequencial segundo a topologia hierárquica adoptada. A evolução em cada *Estágio de Isolamento* faz-se segundo uma estratégia *elitista*. Após cada período de isolamento ocorre um período de permuta de informação denominado *Estágio de Migração*, durante o qual o material genético é transferido entre as diferentes sub-populações.

O cromossoma representativo de cada indivíduo ou solução da população é dividido em segmentos correspondentes às variáveis do projecto. Os vários segmentos do cromossoma não são activos em todas as sub-populações. Utiliza-se uma codificação mista, em binário e em código inteiro.

Desenvolveram-se operadores genéticos como a *Mutação Implícita* e *Eliminação/Substituição*. O operador de *Crossover* uniforme multiponto é usado na evolução da primeira e da terceira sub-populações. Para a segunda sub-população desenvolveu-se um operador de *Crossover Híbrido* baseado em heurísticas e aproximações associadas ao comportamento da estrutura. A descendência é criada usando o conceito de ponto intermédio definido no espaço Hamming interpretado no sentido genético do termo, e após um processo de optimização local.

O Capítulo 7 apresentam-se exemplos numéricos com objectivo de validar o *Algoritmo Genético Hierárquico* e faz-se a análise dos resultados obtidos com o modelo proposto. Os exemplos numéricos incidem sobre estruturas fabricadas com laminados compósitos híbridos exibindo um comportamento não linear evidente.

Apresentam-se dois exemplos de casca reforçada com vigas e consideram-se diferentes domínios de projecto para obter as soluções óptimas. Estuda-se o comportamento evolutivo durante a sequência de *Estágios de Isolamento e de Migração* denominado ciclo externo, para diferentes domínios de projecto. Analisam-se o comportamento da elite de cada sub-população e os ganhos obtidos em cada *Estágio de Isolamento*.

Propõe-se um exemplo numérico com o objectivo de avaliar as capacidades do operador de *Crossover Híbrido* proposto. Para o efeito, efectua-se a pesquisa da solução dum problema de optimização estrutural baseada num Algoritmo Genético similar ao usado nos períodos de

isolamento. Comparam-se os resultados obtidos usando o *Crossover Híbrido* e o *Crossover Uniforme*. Conclui-se que o operador *de Crossover Híbrido* desenvolvido tem característica de convergência e estabilidade superiores às do *Crossover* uniforme.

No Capítulo 8 descreve-se a otimização de estruturas com cargas dinâmicas. Neste caso pretende-se uma minimização do peso/custo da estrutura, admitindo um comportamento elasto-plástico do material. A análise estrutural é feita pelo método de elementos finitos usando o elemento de casca degenerado de nove nós Ahmad.

A análise dinâmica é feita pelo método de Newmark e considera-se a resposta em amplitude da estrutura. Partindo de uma geometria previamente definida da superfície média da placa ou casca otimizam-se as espessuras nodais resultantes da discretização em elementos finitos. As restrições do problema de otimização estão relacionadas com o deslocamento do ponto crítico e a amplitude da região plastificada da estrutura.

Para otimizar as espessuras nodais desenvolveu-se um Algoritmo Genético cuja arquitectura difere da apresentada no modelo anterior. Neste caso o operador *Mutação* é idêntico ao clássico e o processo de eliminação segue um esquema apropriado. A codificação da informação é feita em código binário. Analisa-se a eficiência do Algoritmo Genético usando para o efeito uma função de teste.

Apresenta-se um exemplo numérico onde se otimiza a resposta em amplitude numa estrutura de casca sob carregamento dinâmico.

No Capítulo 9 apresentam-se as conclusões e as perspectivas de novos desenvolvimentos. Partindo dos aspectos inovadores do trabalho sugerem-se os principais tópicos de investigação futura.

## ***CAPÍTULO 2***

### ***RESENHA BIBLIOGRÁFICA***

## 2. RESENHA BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Optimização de estruturas em compósitos

O uso de materiais compósitos para fins estruturais teve início nos anos 50 do século XX. Devido à facilidade de processamento, alta resistência específica e coeficiente de amortecimento maior do que a generalidade dos materiais, o emprego dos materiais compósitos para fins estruturais tem vindo a aumentar. Para aprofundar o conhecimento sobre a sua utilização em aplicações estruturais muitos investigadores têm desenvolvido modelos visando a optimização estrutural.

Na optimização de estruturas fabricadas em material compósito, tem-se em geral como variáveis do projecto as espessuras e a orientação das camadas. A orientação das camadas introduz uma dificuldade adicional já que não entra na composição da função objectivo que representa o peso da estrutura, mas tem influência nas restrições. Pode ser constatado das relações constitutivas que a orientação como variável de projecto introduz um mínimo local neste tipo de problema de optimização. A consideração da sequência de empilhamento como parte da optimização conduz à aspectos de análise combinatória difíceis de controlar. Do exposto pode-se concluir que a optimização de materiais compósitos é uma tarefa difícil.

A optimização de estruturas compósitas começou em 1968 e 1969 sendo os autores dos primeiros trabalhos Foye, Chao e Waddoups [1] que considerando a resistência e rigidez de membrana dos laminados efectuaram o dimensionamento para o peso mínimo, assumindo como variáveis de projecto as orientações das fibras e o número de camadas. Chao [2] efectua a minimização do peso de cascas cilíndricas com rigidificadores, fabricadas em compósitos. Como variáveis de projecto, considera as dimensões dos rigidificadores e o respectivo espaçamento, o teor volúmico de fibra e as orientações das camadas. O modelo considerava o carregamento múltiplo e restrições de resistência e de encurvadura. Por outro lado, Waddoups [3] obteve o dimensionamento para o peso óptimo, considerando restrições de resistência. O método de optimização utilizado era empírico (*try them all*). Seguem-se os trabalhos de Kicher [4], Verrete [5], Morz [6], Bryzgalin [7] e Love [8].

Entre os pioneiros na adaptação e aplicação das técnicas de optimização a estruturas em materiais compósitos estão Khot *et al.* [9], Schmit e Farshi [10]. Os seus trabalhos revelam duas facetas importantes na optimização dos materiais compósitos. Khot descreve métodos aplicáveis a grandes estruturas utilizando como método de análise o método dos elementos

finitos e o trabalho de Schmit é dirigido no sentido do dimensionamento óptimo de painéis estruturais.

Em 1975, Chao *et al.* [11] apresentaram um modelo de otimização para compósitos laminados com restrições de encurvadura e de resistência. Mc Keown [12] apresenta um método de otimização em níveis múltiplos em que as variáveis são os deslocamentos nodais obtidos a partir do modelo de elementos finitos. O método revelou-se complexo e ineficiente para alguns tipos de restrições.

Stroud *et al.* [13,14] em 1976, efectuaram o dimensionamento visando o peso mínimo de painéis em compósitos com rigidificadores construídos uniaxialmente, sujeitos a cargas combinadas no plano. As variáveis de projecto são as espessuras e as respectivas orientações, o espaçamento entre os rigidificadores, a largura e a espessura respectivas.

Schmit e Farshi [15] em 1977, utilizaram o método da Programação Linear Sequencial para otimizar um painel em estratificado, considerando somente cargas no plano e restrições de encurvadura, resistência e rigidez. As variáveis de projecto são as espessuras das camadas, permanecendo as orientações fixas durante o processo de otimização. Bert [16,17] estudou o problema de painéis usados na indústria aeronáutica com base na maximização da frequência natural. Mc Keown [18,19] determinou o número óptimo de camadas considerando a resistência.

Starnes e Haftka [20] desenvolveram um programa de otimização estrutural adaptado a materiais compósitos (WIDOMAC) em que as variáveis de projecto são consideradas as espessuras das camadas (orientações fixas), sendo a técnica de otimização utilizada a das funções de penalidade. As restrições admitidas consideram as tensões, os deslocamentos, a torção e a encurvadura.

Em 1979 Sobieski [21] apresentou um método de otimização utilizado no dimensionamento de estruturas aeroespaciais baseado na análise por elementos finitos, na decomposição ao nível do elemento e na Programação Matemática. As variáveis de projecto são as espessuras das camadas e as respectivas orientações, satisfazendo restrições de tensão e de deslocamento. Hirano [22] tratou o problema de placas em compósito sujeitas a compressão.

Em 1982, Park [23] considerou como variáveis de projecto as espessuras das camadas e os respectivos ângulos, para dimensionar painéis visando obter o peso mínimo quando sujeitos a cargas no plano e incluiu restrições de tensão e rigidez. Usando técnicas de otimização multinível, Schmit e Mehrinfar [24], efectuaram trabalho na área do dimensionamento de estruturas aeronáuticas considerando restrições de tensão, deslocamento e encurvadura. As

variáveis de projecto são as espessuras das camadas. Stroud [25], aborda os aspectos relacionados com a influência de condições secundárias não consideradas no âmbito do projecto otimizado, e das imperfeições de fabrico, sugerindo técnicas que contemplem nesta fase os problemas potenciais decorrentes. Fleury e Braibant [26], abordaram alguns aspectos relevantes na optimização de estruturas em materiais compósitos, tais como: o problema das variáveis discretas (número de camadas em estratificados), o tratamento das variáveis mistas, o problema da pesquisa de uma solução inicial admissível, etc.

Em 1983, Flanagan [27] apresentou um método que utiliza uma variante da técnica do gradiente para dimensionar um laminado sujeito a cargas no plano variando o número de camadas com determinada orientação ou variando as orientações para um determinado número de camadas. Bergman [28] apresentou os resultados da optimização de tubos fabricados por enrolamento filamental, usados em aplicações aeroespaciais. O objectivo era a maximização da carga de encurvadura tendo como variáveis do projecto o ângulo de enrolamento e o número de camadas. Adali desenvolveu técnicas de análise de sensibilidades [29] e métodos de optimização multiobjectivo (minimizando a flecha máxima com solicitação dinâmica e maximizando as frequências naturais) para laminados antisimétricos [30].

Em 1984 e 1985, Massard [31] descreveu um método que inclui restrições baseadas em critérios de resistência, considerando esforços de membrana e de flexão, sendo as variáveis de projecto o número de camadas e as orientações das camadas. Tauchert e Adihatla investigaram, utilizando uma variante do Método quasi-Newton, diferentes tipos de painéis optimizados e deduziram métodos tendo como objectivo o dimensionamento de placas laminadas simétricas visando o máximo de rigidez [32] e de resistência à flexão [33], variando as espessuras das camadas e as respectivas orientações. O peso do painel não é considerado mais limita-se no entanto a espessura total. Adali [34] maximiza a frequência fundamental de laminados do tipo *angle-ply* antisimétricos. Onoda [35] estudou o problema da encurvadura de cascas cilíndricas fabricadas em compósitos.

Em 1986, Liao *et al.* [36], efectuaram o dimensionamento óptimo de vigas em laminados simétricos considerando a rigidez e o amortecimento. As variáveis de projecto são as orientações das camadas, a sequência de empilhamento e as espessuras das camadas que constituem o laminado. É utilizado um algoritmo de optimização baseado em Programação Quadrática Sequencial. Adali [37] optimizou laminados simétricos sujeitos a cargas cíclicas no plano, carga de rotura sob fadiga, considerando como variáveis de projecto as espessuras das camadas e o teor de fibras do laminado. Vinson [38], minimizou o peso de painéis de compósitos do tipo sanduíche sujeitos a cargas compressivas no plano. Maksimovic [39]

obteve o peso mínimo de grandes estruturas sujeito a restrições de rigidez, resistência e encurvadura, usando Programação Matemática e aproximações.

Em 1987, Watkins [40] desenvolveu um processo de otimização em vários níveis de grandes estruturas em materiais compósitos considerando como variáveis de projecto as espessuras das camadas e respectivas orientações. As restrições consideradas são de deformação, de encurvadura, de deslocamentos e de grandeza das variáveis. Utilizou a Programação Linear Sequencial combinada com a estratégia dos limites móveis.

Considerando laminados simétricos orientados segundo três direcções, Park [41] obteve o dimensionamento óptimo de painéis sujeitos a cargas no plano. Para além das orientações considerou como variáveis de projecto as espessuras das camadas. Miki e Tonomura [42], trataram o problema de otimização de placas em estratificados do tipo sanduíche (híbridos), sujeitas a compressão axial. O objectivo do problema é a minimização do custo o que, segundo o autor, corresponde a maximizar as dimensões relativas do núcleo do laminado, fixando a espessura total. As variáveis de projecto são as orientações (*angle-ply*) das camadas que constituem a pele da sanduíche e a restrição considerada é a resistência à encurvadura.

Reiss e Ramachandran [43], consideraram o problema da otimização de placas simétricas ortotrópicas baseado na maximização da frequência fundamental. As variáveis de projecto são as orientações das camadas que constituem o laminado. Weiji e Baohua [44], desenvolveram um método de otimização em dois níveis para a obtenção do peso mínimo de estruturas em compósitos. As variáveis de projecto a nível do sistema, são as espessuras dos estratificados. A nível do componente, assumindo uma espessura constante do estratificado e deslocamentos nodais invariantes, as espessuras das camadas são ajustadas de acordo com um critério energético. Pedersen [45] tratou o problema da análise de sensibilidades em otimização de placas laminadas. Vinson [46] retomou o problema da minimização do peso de painéis fabricados em compósitos do tipo sanduíche considerando restrições de corte no plano.

Em 1988, Eschenauer [47] tratou o problema do dimensionamento óptimo de cascas esféricas construídas em materiais compósitos. Utiliza para o efeito uma função multiobjectivo considerando simultaneamente, a minimização do deslocamento máximo e do peso ou a minimização da tensão máxima e do peso. As variáveis de projecto são as espessuras das camadas, as respectivas orientações e o teor volúmico de fibras. Sadr *et al.* [48], desenvolveram e implementaram um programa de otimização de estruturas em materiais compósitos considerando como variáveis de projecto as espessuras e as orientações das camadas. Utilizaram um algoritmo com diversos níveis de otimização. A função objectivo ao nível do sistema é o peso da estrutura sendo a mesma ao nível do elemento. As

restrições são definidas por um critério de rotura. As variáveis ao nível do sistema, são apenas as espessuras das camadas enquanto que ao nível do elemento englobam também as respectivas orientações. As técnicas de optimização utilizadas são a da função penalidade associada ao Método de Davidon-Fletcher-Powell, e a Programação Linear Sequencial.

Fukunaga e Chou [49] abordaram o problema da optimização dos reservatórios de pressão com restrições de rigidez e resistência. Muc [50] trata o problema de placas simplesmente apoiadas sujeitas a compressão biaxial, fabricadas em laminados do tipo *angle-ply* e considerando as orientações como variáveis de projecto.

Em 1989, Vanderplataats e Weisshaar [51] descreveram alguns aspectos importantes dos modelos de dimensionamento óptimo de estruturas e componentes da industria aeronáutica, nomeadamente no que concerne à adequada escolha das funções objectivo e das restrições, em particular para problemas de aeroelasticidade.

Soares *et al.* [52], abordaram o problema da análise de sensibilidades de estruturas do tipo placa constituídas por materiais compósitos. O método utilizado é um método semianalítico. As variáveis de projecto são as orientações das camadas e são consideradas restrições de deslocamentos, de tensões efectivas e de frequências naturais.

Em 1990, Fukunaga e Vanderplaats [53] trataram o problema de optimização de placas em compósitos, sujeitas a cargas no plano, restrições de rigidez e tendo como variáveis de projecto o número de camadas. Adali e Duffy [54,55], optimizaram laminados híbridos antisimétricos maximizando a carga de encurvadura, considerando como variáveis de projecto as orientações e as espessuras das camadas. Miravete [56], usa a Programação Matemática e o Método dos Elementos Finitos para obter o projecto óptimo de estruturas em compósitos considerando a resistência.

Em 1991, Landriani e Rovati [57] usaram uma formulação variacional do problema de optimização baseado na minimização da flexibilidade para uma custo fixo da estrutura. Rao *et al.* [58], optimizaram a resistência de placas laminadas. Morton e Weber [59] usam métodos heurísticos para optimizar placas relativamente à sua resistência. Adali *et al.* [60] minimizaram uma função de custo para optimizar cascas laminadas cilíndricas em compósitos híbridos, sujeitas a pressão interna e externa.

Eschenauer e Kobelev [61] em 1992, estudaram as condições de fractura dos compósitos reforçados com tecidos balanceados e formularam o problema de optimização com base na maximização da resistência fixando o peso específico do material. As variáveis de projecto relacionam-se com a textura do tecido de reforço.

Em 1993, Fang e Springer [62] usaram o método de Monte Carlo para otimizar os laminados simétricos para peso mínimo obedecendo as restrições relacionadas com a respectiva resistência. Os materiais podem ser híbridos ou do tipo sanduíche. As variáveis de projecto são o número de camadas, as orientações respectivas e o material de cada camada. No caso dos materiais do tipo sanduíche consideraram ainda como variáveis a espessura e o material do núcleo. Fukunaga *et al.* [63] trataram o problema da otimização de estruturas sujeitas a cargas no plano, minimizando a energia de deformação, decompondo o problema em níveis e tendo como variáveis de projecto as orientações e as espessuras das camadas. Lingard [64] desenvolveu um modelo para otimizar compósitos do tipo sanduíche para peso mínimo sujeito a restrições de rigidez e resistência, tendo como variáveis de projecto as espessuras do núcleo e das peles. Belsare [65] demonstrou as capacidades do programa STROPT na otimização de estruturas em compósitos, com o objectivo de obter o peso mínimo sujeito a restrições relacionadas com a resistência, considerando como variáveis as orientações e as espessuras das camadas. Eschenauer [66] usou uma função multicritério baseada no peso mínimo e na máxima deformação para otimizar estruturas do tipo cascas laminadas finas e espessas, tendo como variáveis de projecto as espessuras e as orientações das camadas. Kim *et al.* [67] estudaram o problema da maximização da resistência de reservatórios fabricados em laminados compósitos sujeitos a pressão interna e reforços axiais, em função do ângulo de enrolamento filamentar. Kam e Chu [68] estudaram o problema da maximização da carga de encurvadura de placas laminadas, usando técnicas de otimização multinível e multiobjectivo e tendo como variáveis de projecto as orientações e as espessuras das camadas.

Em 1999 Conceição António [69] estudou o problema de otimização de estruturas em compósitos com comportamento não linear geométrico, baseado no controlo de carga-deslocamento. Neste trabalho é proposto um modelo de otimização de estruturas do tipo placa ou casca em materiais compósitos reforçadas com vigas. A otimização é feita em vários níveis considerando a distribuição das melhores orientações para o deslocamento mínimo crítico. Além disso a minimização do peso deveria permitir a aplicação da carga de encurvadura prescrita e não violar as restrições referentes de tensão baseadas na rotura da primeira camada.

Em 2000, Bruyneel *et al.* [70] usaram a método conhecido por *Sequential Unconstrained Minimisation Technique* (SUMT), para otimizar a carga de encurvadura de uma estrutura em materiais compósitos. Neste trabalho o problema de otimização estrutural é resolvido através dos métodos de aproximação. Martini *et al.* [71] usaram o método das desigualdades

matriciais lineares para otimizar os valores próprios de um laminado. Walker *et al.* [72] otimizaram a carga de encurvadura de uma estrutura em materiais compósitos tendo em conta a influência do posicionamento dos rigidificadores em forma de tubo quadrado.

O processo de produção de materiais compósitos conduz as tensões residuais térmicas devido a diferença entre os coeficientes de dilatação linear longitudinal e transversal das fibras de reforço. Foldager *et al.* [73] otimizaram a carga de encurvadura de estruturas compósitas tendo em conta as tensões residuais que surgem depois do arrefecimento do laminado até a temperatura ambiente. Na solução do problema de encurvadura foi usada uma formulação não-linear para considerar a interacção dos estados térmico, de pré-encurvadura e de encurvadura. Neste trabalho demonstra-se que a carga de encurvadura otimizada tendo em conta as tensões residuais térmicas é maior que a otimizada excluindo as tensões residuais. A diferença entre as soluções experimentais e analíticas no caso da casca é justificada pela influência dos desvios de forma geométrica.

## 2.2 Métodos de pesquisa evolucionária

Os métodos clássicos de optimização requerem o cálculo de derivadas da função objectivo e a sua continuidade. Assim, se as derivadas da função objectivo não são contínuas o processo de optimização não poderá ser executado. Para superar estas dificuldades podem ser usadas técnicas de programação e métodos de aproximação que conduzem ao encarecimento da solução em termos computacionais. Os algoritmos genéticos surgem como uma alternativa para superar as dificuldades supracitadas.

Os algoritmos genéticos são um subconjunto dos algoritmos de pesquisa evolucionária que imitam os processos biológicos para otimizar funções objectivo de grande complexidade. Um algoritmo genético permite que uma população composta por vários indivíduos evolua dentro de regras de selecção específicas até um nível que maximiza o mérito (isto é minimiza o valor da função objectivo). O método foi desenvolvido por John Holland e popularizado por um dos seus estudantes, David Golberg [74].

Para aplicar este algoritmo no domínio de referência começa-se com um grupo de soluções (população) do problema em questão, criado de forma aleatória. Cada solução representa um indivíduo que é caracterizado por um cromossoma. O cromossoma contém a informação necessária para se calcular o mérito de cada indivíduo. A informação necessária para o cálculo do mérito é codificada através de símbolos (por exemplo o código binário, 0 e 1). Cada símbolo representa um gene. Todos os indivíduos da mesma população possuem o mesmo

número de genes dentro do cromossoma. O mérito por sua vez caracteriza a aptidão do indivíduo de se adaptar ao meio ambiente onde vive (habitat). Quanto maior for o número de indivíduos na população, maior é a eficiência na procura do ótimo, já que o domínio será explorado de forma exaustiva, contudo a dimensão da população é condicionada pelo tempo disponível para o cálculo e pela capacidade do meio informático utilizado.

Após a 1ª geração o algoritmo genético usa como operadores principais Seleção, Cruzamento (*Crossover*) e Mutação para criar as populações seguintes até se atingir a convergência.

Existem vários métodos para seleccionar os indivíduos que transitam para a geração seguinte. No método WRW (*Weighed Roulette Wheel*) [75], os indivíduos com mérito acima da média são reproduzidos de modo a existirem múltiplas cópias (usualmente duas), indivíduos com mérito médio são copiados apenas uma única vez e indivíduos com mérito inferior ao médio são eliminados. No método SR (*Stochastic Remainder Selection*) [75] a parte inteira e fraccionária da relação mérito/valor médio do mérito, são tratadas separadamente. A primeira parte (inteira) é guardada para cada indivíduo segundo o cálculo e a segunda é atribuída de forma probabilística. O método estocástico permite manter a diversidade da população ao permitir a transição tanto de indivíduos com o melhor mérito como os de mérito baixo para a geração seguinte.

No *Crossover* podem ser usados vários esquemas para se efectuar o cruzamento. Fundamentalmente o cruzamento pode ser efectuado através de um conjunto de genes ou por um gene individual. Existem esquemas nos quais de dois cromossomas (dois progenitores) se obtêm um cromossoma (*offspring*) após o cruzamento e outros nos quais se obtêm dois cromossomas. Neste caso é de salientar que um cromossoma pode ser de tipo vectorial ou matricial, dependendo do uso de cada tipo de cromossoma, do tipo de representação que se pretende. A mutação consiste na mudança de valor do gene num cromossoma de forma aleatória. O número de mutações numa população controla-se através da probabilidade de mutação. Uma elevada probabilidade de mutações conduz a uma degeneração do algoritmo em pesquisa aleatória e a eliminação do operador faz diminuir o espaço de pesquisa.

O mérito é o critério de selecção dos indivíduos que transitam para as gerações seguintes durante a execução do algoritmo genético. O mérito é composto pelo valor da função objectivo e pelos valores das penalizações referentes às violações das restrições impostas. Podem-se prever dois níveis de violação das restrições. Estes dois níveis estão relacionados com o grau de violação das restrições. As violações mais graves tem penalizações mais

severas de modo a evitar que os indivíduos que as possuem possam transitar para a geração seguinte. Os indivíduos com penalizações amenas são atraídos para as gerações seguintes.

Em 1993, Jenkins *et al* [75] apresentou um estudo sobre a otimização de estruturas com domínio das variáveis de projecto descontínuo. Ele define dois níveis de violação das restrições. As soluções que violam o primeiro nível podem passar para a geração seguinte, enquanto que as soluções que violam o segundo são eliminadas.

Em 1996, Galante *et al.* [76] apresenta um estudo sobre a otimização de estruturas reticuladas usando algoritmos genéticos. Hajela e Lee [77] desenvolveram um algoritmo genético baseado na similaridade com o sistema imunológico. Estupiñán *et al.* [78] aplicaram os algoritmos genéticos na otimização de forma de placas. Neste trabalho pretende-se obter uma distribuição de material dentro de um domínio específico com condições estabelecidas.

Em 1997, Kallasy *et al.* [79] usaram um algoritmo genético para otimizar placa reforçada. Neste trabalho o algoritmo genético é usado para encontrar a posição óptima dos reforços. Hajela [80] apresentou um estudo sobre os métodos de pesquisa estocástica em problemas de otimização com domínio das variáveis de projecto discreto.

Em 1998, Arriaga e Shenoï [81] usaram um algoritmo genético para otimizar uma placa em materiais compósitos. Neste trabalho pretende-se minimizar o peso e o custo da estrutura.

Em 1999, Rodriguez [82] apresentou um novo algoritmo genético que não necessita do operador cruzamento, para otimizar estruturas reticuladas planas. Smith e Vavak [83] apresenta um estudo sobre o efeito dos operadores como a eliminação e a substituição em ambientes estáticos.

Em 2000, Fan *et al.* [84] fizeram um estudo comparativo da velocidade de convergência (eficiência) dos algoritmos genéticos. Para o efeito usam três funções de teste. Raich e Ghaboussi [85] fizeram a síntese da geometria e da topologia óptimas de estruturas reticulares, usando um algoritmo genético redundante implícito. Giannakoglou *et al.* [86] usou uma hibridização para efectuar a otimização de formas aerodinâmicas. O algoritmo genético é usado para localizar o óptimo inicial do método da variável adjunta. Liu *et al.* [87] usa um modelo multinível para otimizar a asa de um avião. As restrições do problema de otimização estão relacionadas com o campo de tensões e a carga de encurvadura. O primeiro nível de otimização relaciona-se com a armação e o segundo com a superfície exterior da asa.

Em 2001, Conceição António [88] estudou o problema de fiabilidade baseado no comportamento não linear de estruturas em compósitos. Para superar as dificuldades que surgem quando se efectua a interligação entre o projecto óptimo e a fiabilidade, relacionadas

com a descontinuidade das derivadas da função de estado limite usou um Algoritmo Genético Hierárquico.

A otimização de estruturas nas quais existe um domínio discreto das variáveis de projecto (Discrete Structural Optimization, DSO) tem despertado grande interesse devido a sua importância na tecnologia moderna. O uso da pesquisa evolucionária é dificultada pelo elevado número de combinações das variáveis de projecto que surgem durante a pesquisa. Gutkowski *et al.* [89], para superar algumas dificuldades relacionadas com o carácter aleatório dos principais operadores genéticos (selecção, cruzamento e mutação) e principalmente a mutação propõe uma *mutação controlada*. Neste trabalho Gutkowski propõe uma mutação que se baseia numa das variáveis de estado, a tensão. Neste caso a mutação é feita apenas se houver violação das restrições relacionadas com o estado de tensão. No trabalho referido, o gene constitui uma posição da *string* binária ligada ao valor da secção transversal do membro da estrutura. Durante a mutação, são alterados os genes da *string* binária.

Plasman e Sobieski [90] tendo em conta o facto de a análise estrutural de cada solução ser feita de forma independente implementou o processamento paralelo dum algoritmo genético com 1080 variáveis de projecto. O uso simultâneo de 128 processadores confirmou a expectativa de redução do tempo de processamento comparativamente ao uso convencional de um processador.

Li *et al.* [91] desenvolveram um algoritmo de pesquisa evolucionária para a supressão de material em problemas de optimização de topologia.

Harasaki e Arora [92] propoem uma novo método de pesquisa evolucionária conjugado com o conceito de transferência de forças. Neste método as forças aplicadas numa região da fronteira são transferidas para os apoios. Woon *et al.* [93] movendo os nós da fronteira efectuaram optimização de forma usando algoritmos genéticos. Hayalioglu [94] minimizou o peso de uma estrutura reticulada tridimensional usando um algoritmo genético com base nas normas AISC (American Institute of Steel Construction) e LRFD (Load and Resistance Factor Design).

## REFERÊNCIAS

- [1] Foye, R., “Advanced design concepts for advanced composite frames”, *Report, Air Force Materials Laboratory*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, USA, AFML-TR-68-91, Vol.I-II, 1968.
- [2] Chao, T. L., “Minimum Weight design of stiffened fibre composite cylinders”, *Report, Air Force Materials Laboratory*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, USA, AFML-TR-69-251, 1969.
- [3] Waddoups, L. A., “Structural airframe application of advanced composite materials-analytical methods”, *REPORT, Air Force Materials Laboratory*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, USA, AFML-TR-69-101, Vol. IV, 1969
- [4] Kicher, T. P., Chao, T. L., “Minimum weight design of stiffened fiber composite cylinders”, *Journal of Aircraft*, Vol. 8, Nº 7, pp. 562-568, 1971.
- [5] Vereue, R. M., “Stiffness, strenght and stability optimization of laminated composite”, *Report NOR-70-138*, Northrop Aircraft Corp., Hawthone, California, 1970.
- [6] Morz, Z., “Optimal design of structures of composites materials”, *Int. J. Solids & Struct.*, Vol.6, pp. 559, 1970.
- [7] Bryzgalin, G. J., “on some design criteria of inhomogeneous anisotropic bodies”, *J. Appl. Maths & Mech.*, Vol.36, pp. 716, 1972.
- [8] Love, P. G., Melchers, R. E., “On the theory of optimal constant thickness fiber reinforced plates”, *Internacional Journal of Mechanic Science*, Vol. 19, pp.311, 1972.
- [9] Khot, N. S. , Venkyya, V. B., Jonhson, C. D., Tischler, V. A., “Optimization of fibre reinforced composite structures”, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 9, pp. 1225-1236, 1973.

- 
- [10] **Schmit, L. A., Farshi, B.**, “Optimum laminate design for strength and stiffness”, *Inter. Journ. Num. Methods in Engineering*, Vol. 7, pp. 519-536, 1973.
- [11] **Chao, C. C., Koh, S. L., Sun, C. T.**, “Optimization of buckling and yield strength of laminated composites”, *AIAA Journal*, Vol.13, pp.1131-1132, 1975.
- [12] **Mc Keown, J. J.**, “A quasi-linear programming algorithm for optimizing fibre reinforced structures of fixed stiffness”, *Comp. Methods in applied Mech. And Engineering*, Vol.6, pp.123-154, 1975.
- [13] **Stroud, W. J., Agranoff, N.**, “Minimum-mass design of filamentary composite panels under combined loads: Design procedure based on simplified buckling analysis”, *Nasa TND – 8257*, 1976.
- [14] **Stroud, W. J., Agranoff, N.**, “Minimum-mass design of filamentary composite panels under combined loads: Design procedure based on rigorous buckling analysis”, *Nasa TND – 8257*, 1976.
- [15] **Schmit, L. A., Farshi, B.**, “Optimum design of laminated fibre composite plates”, *Inter. Journ. Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 623-640, 1977.
- [16] **Bert, C. W.**, “Optimal design of composite panels for business aircraft”, *Society of Automotive Engineers*, Paper N° 770453, 1977.
- [17] **Bert, C. W.**, “Optimal design of composite-material plate to maximize its fundamental frequency”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 2, pp. 229-237, 1977.
- [18] **Mc Keown, J. J.**, “Optimal composite structure by deflection variable programming”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineers*, Vol. 14, pp.155-179, 1978.
- [19] **Mc Keown, J. J.**, “A fixed upper bound on the number of layers in optimal composite sheets”, *Inter.Journ. Solids and structures*, Vol.14, pp. 113-119, 1978.
-

- 
- [20] Starnes, J. H., Haftka, R. T., "Preliminary design of composite wings for buckling, strength and displacement constraints", *Proceedings of 19<sup>th</sup> AIAA/ASME structures, Structural Dynamics and materials conference*, Bethesda, Md, USA, 1978.
- [21] Sobieski, J., "An integrated computer procedure for sizing composite airframe structures", *NASA TP 1300*, 1979.
- [22] Hirano, Y., "Optimum design of laminated plates under axial compression", *Journal AIAA*, Vol. 17, pp.1017, 1979.
- [23] Park, W. J., "An optimal design of simple Symetric laminates under first ply failure criterion", *Journal of composite Materials*, Vol. 16, pp. 341-345, 1982.
- [24] Schmit, L. A. Mehrinfar, M., "Multilevel optimum design of structures with fibre-composite stiffened-panel components", *AIAA Journal*, Vol.20, pp. 138-147, 1982.
- [25] Stroud, W. J., "Optimization of composite structures", *Proceedings of the IUTAM Symposium on Mechanics of Composite Materials*, Blacksburg, Virginia, USA, 1982.
- [26] Feury, C., Braibant, V., "Dimensionnement optimal en variables discretas", *Laboratoire d'Aéronautique de l'Université de Liege, rapport SF-104*, 1982.
- [27] Flanagan, G. N., "Development and application of optimization techniques for composite laminates", *M. S. Thesis, AFIT/GAE/AA/83.S-4*, AIR Force Institute of Technology, Wright Patterson AFB, USA, 1993.
- [28] Bergman, H. W., "Design preparations for large space structures", *Proceedings of International Conference on Carbon Fibre Applications*, Salvador, Brasil, 1993.
- [29] Adali, S., "Design sensitivity analysis of an antisymmetric angle-ply laminate", *Engineering Optimization*, Vol 7, pp.69-83, 1983.
-

- [30] **Adali, S.**, “Multiobjective design of na antisymmetric angle-ply laminate by non-linear programming”, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol.105(2), pp.214-219, 1983.
- [31] **Massard, T. N.**, “Computer sizing of composite laminates for strength”, *Journal of reinforced Plastics and Composites Materials*, Vol. 3,pp. 330-345, 1984.
- [32] **Tauchert, T. R., Adibhatla, S.**, “Design of laminate plates for maximum stiffness”, *Journal of Composite materials*, Vol.18 (1), pp. 58-69, 1984.
- [33] **Tauchert, T. R., Adibhatla, S.**, “Design of Shear-deformable antisymmetric angle-ply laminates to maximum beding strength”, *Engineering Optimization*, Vol.8(4), pp.253-263, 1985.
- [34] **Adali, S.**, “Design of shear-deformable antisymmetric angle-ply to maximize the fundamental frequency and frequency separation”, *Composite Structures, Elsevier. Applied Science Publishers*, Vol.14, pp.49-60, 1984.
- [35] **Onoda, J.**, “Optimal laminate configurations of cylindrical shells for axial buckling”. *AIAA Journal*, Vol. 23, pp. 1093-1098, 1985.
- [36] **Liao, D. X., Sung, C. K., Thompson, B. S.**, “The optimal design of symmetric laminated beams considering damping”, *Journal of Composite Materials*, Vol.20 pp.485-501, 1986.
- [37] **Adali, S.**, “Optimization of fibre reinforced composite laminates subject to fatigue loading”, *Composite Structures, Proceedings of 3<sup>rd</sup> Internacional Conference on Composite Structures*, I.H. Marshall,ed., Elsvier Applied Science Publishers, New York, pp.43-55, 1986.
- [38] **Vison, J. R.**, “Minimum weight web-core composite sandwich panels subjected to in-plane compressive loads”, *Proceedings of Internacional Symposium on Composite Materials and Structures*, Lancaster, PA: Technomic Publishing Co., pp.376-380, 1986.

- [39] Maksimovic, S., "Optimum design of composite structures", *Composite Structures, Proceedings of 3<sup>rd</sup> Internacional Conference on Composite Structures*, I.H. Marshall, ed., Elsevier Applied Science Publishers, New York, pp.148-158, 1986.
- [40] Watkins, R. I., "Multilevel optimization of composite structures", *Composite Structures, Proceedings of 4<sup>th</sup> Internacional Conference on Composite Structures*, I.H. Marshall, ed., Elsevier Applied Science Publishers, New York, pp.1.393-1.403, 1987.
- [41] Park, W. J., "Symmetric three-directional optimal laminate design", *Journal of Composite Materials*, Vol.21, pp.532-535, 1987.
- [42] Miki, M., Tonomura, K., "Optimum design of hybrid fibrous laminated composite plates subject to axial compression", *Composite Structures, Proceedings of 4<sup>th</sup> Internacional conference on Composite Structures*, I.H. Marshall, ed., Elsevier Applied Science Publishers, New York, pp.1.476-1.487, 1987.
- [43] Reiss, R., Ramachandan, S., "Maximum frequency design of symmetric angle-ply laminates", *Composite Structures, Proceedings of 4<sup>th</sup> Internacional Conference on Composite Structures*, I.H. Marshall, ed., Elsevier Applied science Publishers, New York, pp.1.357-1.367, 1987.
- [44] Wieji, L., Boohua, S., "Multilevel optimization procedure of composite structure", *Composite Structures, Proceedings of 4<sup>th</sup> Internacional Conference on Composite Sructures*, I.H. Marshall,ed., Elsevier Applied Science Publishers, New York, pp.1.357-1.367, 1987.
- [45] Pedersen, P., "On sensitivity analysis and optimal design of special orthotropic laminates", *Engineering Optimization*, 11:305-316, 1987.
- [46] Vinson, J. R., "Minimum wight solid core composite sandwich panels subjected to in plane shear loads", *American Society for Composite, 2<sup>nd</sup> Technical Conference*, Lancaster, PA: Technomic Publishing Co., Inc., pp.329-337, 1987.

- [47] Eschenauer, H. A., "Some aspects on optimization of composite structures", *Composite Structures. Preprints COMPOSITES-88 World Conference*, Nice, France, 13-27, 1988.
- [48] Sadr, H., Afzali, M., Sabzervari, H., "Calcul et optimization des structures composites stratifiees", *rapport CETIM Senlis*, France, 1988.
- [49] Fukunaga, H., Chou, T. W., "Simplified design technique for laminated cylindrical pressure vessels under stiffness and strength constraints", *Journal of Composite Materials*, Vol.22, pp.1156-1169, 1988.
- [50] Muc, A., "Optimal fibre orientation for simple supported, angle-ply plates under biaxial compression", *Composite Structures*, Vol.9, pp.161-172, 1988.
- [51] Vanderplaats, G. N., Weisshaar, T. A., "Optimum design of composite structures", *Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.27, pp.437-448, 1989.
- [52] Correia, V. M. F., Soares, C. M. M., "Análise de sensibilidades de estruturas construídas de materiais compósitos", *MECOM 89, X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, Vol. 1, A 365-A376, 1989.
- [53] Fukunaga, H., Vanderplaats, G. N., "Optimum design of laminated composite structures", *Composite Materials Design and Analysis*, W.P. de Wilde and W. R. Blain (eds), Springer Verlag, New York, pp. 493-507, 1990.
- [54] Adali, S., Duffy, K.J., "Design of antisymmetric hybrid laminates for maximum buckling load: I, Optimum fibre orientation", *Composite Structures*, Vol.14, pp.49-60, 1990.
- [55] Adali, S., Duffy, K.J. "Design of antisymmetric hybrid laminates for maximum buckling load: II, Optimum layer Thickness", *Composite Structures*, Vol.14, pp.49-60, 1990.

- [56] **Miravete, A.**, “Analysis and optimization of simple composite structures”, *Composite Materials Design and Analysis*, W.P. de Wilde and W. R. Blain (eds), Springer Verlag; New York, pp.529-547, 1990.
- [57] **Landriani, G. S., Rovati, M.**, “Optimal design for two-dimensional structures made of composite materials”, Transactions of the ASME, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol.113, pp.88-92, 1991.
- [58] **Rao, K. P., Issac, J. C., Viswanath, S., Murthy, S. S.**, “Optimum design of composite laminates for strength by ranking”, *Journal of Reinforced Plastics and Composite*, Vol.10, pp.477-494, 1991.
- [59] **Morton, S. K. , Webber, J. P. H.**, “Heuristic methods in the design of composite laminate plates”, *Composite Structures*, Vol.19, pp.207-265, 1991.
- [60] **Adali, S., Yakar, B.**, “Minimum cost design of laminated cylinders under internal and external pressure by hybrid construction”, *Composite, Design, manufacture and applications, Proceedings of the Eighth International Conference on Composite Materials*, ICCM/8, S Tsai & G.S. Springer (eds), Society for Advancement of Materials and Process Engineering, Vol.5 pp.C1-10, 1991.
- [61] **Eschanauer, H. A., Kobelev, V. V.**, “Structural analysis and optimization modelling including fracture conditions”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, pp. 873-88, 1992.
- [62] **Fang, C. Springer, G. S.**, “Design of composite laminates by Monte Carlo method”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 27, Nº 7, pp.721-753, 1993.
- [63] **Fukunaga, H., Skine, H.**, “Optimum design of composite structures for shape, layer angle and layer thickness distributions”, *Journal of Composite materials*, Vol.27, Nº 7, pp.721-753, 1993.

- [64] **Lingard, J. R.**, “Development of a theory for optimising sandwich composites”, *Advanced Compositess 93, Internacional Conference on Advanced Composite Materials*, T. Chandra and A. K. Dhindra (eds), The Minerals, Metal & Materials Society, 1993.
- [65] **Belsare**, “Optimum design of composite laminates with STROPT”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., Vol.9, pp.863-871, 1993.
- [66] **Eschenauer, H. A.**, “Aspects on finding optimal layouts of structures made of composite materials”, *Proceedings of Ninth Internacional Conference on Composite Materials (ICCM/9)*, University of Zaragoza and Woodhead Publishing Ltd., Madrid, Vol. IV, pp.661-668, 1993
- [67] **Kim, C. W., Wang, W., Park, H. C. Han, K. S.**, “Optimal stacking sequence design of laminated composite Cylinders”, *Proceedings of Ninth Internacional Conference on Composite Materials (ICCM/9)*, University of Zaragoza and Woodhead Publishing Ltd., Madrid, Vol. IV, pp.661-668, 1993.
- [68] **Kam, T, Y., Chu, K. H.**, “Optimal stacking sequence of composite laminate for maximum axial buckling load”, *Proceedings of Ninth Internacional Conference on Composite Materials (ICCM/9)*, University of Zaragoza and Woodhead Publishing Ltd., Madrid, Vol. IV, pp.661-668, 1993.
- [69] **António, C. A. C.**, “Optimization of geometrically non-linear composite structures based on load-displacement control”, *Composite Structures* Vol.46, pp.345-356, 2000.
- [70] **Bruyneel, M., Fleury,C.**, “Composite structures optimization using sequential convex programming”, *Computational Techniques for materials, Composites and Composites Structures*, Civil-Comp Press, Edinburgh, pp.243-254, 2000.
- [71] **Mariani, C., Ragnedda, F., Serra, M.**, “Optimizing uncertain layered composites via a linear matrix inequalities approachs”, *Computational Techniques for materials, Composites and Composites Structure*, Civil-Comp Press, Edinburgh, 291-295, 2000.

- [72] Walker, M., "The effect of stiffeners on the optimal design of laminated plates subject to buckling loads: a comparative study", *Computational Techniques for materials, Composites and Composites Structures*, Civil-Comp Press, Edinburgh, pp.349-358, 2000.
- [73] Foldager, J. L., Hansen, J. S., Olhoff, N., "Optimization of buckling load for composite structures taking thermal effects into account". *Struct Multidisc Optimization*, Vol.21, pp.141-31, 2001.
- [74] Haulpt, R. L., Haulpt, S. E., "Practical Genetic Algorithms", *John Wiley & Sons*, 1998.
- [75] Jenkins, W. M., "An enhanced Genetic algorithm for structural design optimization", Department of Civil Engineering, *University of Leeds*, Leeds, England, 1993.
- [76] Galante, M., "Genetic Algorithms as an approach to optimize real world trusses", *Internacional Journal for Numerical methods in Engineering*, Vol.39, pp.361-382, 1996.
- [77] Hajela, P., Lee, J., "Constrained genetic algorithm search via schema adaptation: an immune network solution", *Structural Optimization*, Vol.12, pp.11-15, 1996.
- [78] Estupiñan, J. , Oñate, E., Suárez, B., "Una primera aproximación a la optimización de forma de placas mediante algoritmos genéticos", E.S.T. de Ing. De Caminos, Canales y Puertos. *Universidad Politecnica de Cataluña*, Barcelona, España, 1996.
- [79] Kallassy, A., Marcelin, J. L., "Optimization of stiffened plates by genetic search", *Structural Optimization*, Vol.13, pp.134-141, 1997.
- [80] Hajela, P., "Stochastic search in discrete structural optimization simulated annealing, genetic algorithms and neural network". *Discrete Structural Optimization, CISM* N°373, pp.56-133, 1997.

- [81] **Arriaga A., Shenoï R. A.**, “Optimum design of FRP plates using Genetic Algorithms”, Department of ship science, *University of Southampton*, UK, 1998.
- [82] **Rodrigues, C. G.**, “Una nueva formulación del algoritmo genético aplicado al diseño optimo de estructuras”, Métodos Numéricos en Ingeniería, R. Abascal, J.Dominguez y Bugada (Eds), *SEMNI*, España, 1999.
- [83] **Smith, J., Vavak F.**, “Replacement Stragies in Steady State Genetic Algorithms”, Static Enviroment, Intelligent Computer System Centre, *University of the West of England*, Bristol BS16 1QY, 1999.
- [84] **Fan, H., Lu. Jane W., Xu. Z.**, “An emperical comparison of three novel genetic algoritms”, *Engineering Computations*, Vol.17 N° 8, pp.981-1001, 2000.
- [85] **Raich, A.M., Ghaboussi**, “Evolving structural design solutions using an implicit redundant Genetic Algorithm”, *Struct Multidisc Optimization*. Vol.20, pp.222-231, 2000.
- [86] **Giannakoglou, K. C., Pappou, Giotis, Th. I, A.P., Koubogianni, D.G. S.**, “A Parallel Inverse-Design Algorithm in Aeronautics based on Genetic Algorithms and the Adjoint Method”, *ECCOMAS 2000*, Barcelona, 2000.
- [87] **Liu, B., Haftka, R.T., Akgun, M. A.**, “Two-level composite wing structural optimization using response surface”, *Struct Multidisc Optimization*, Vol.20, pp.87-96, 2000.
- [88] **Antônio, C. A. C.**, “A hierarchical genetic algorithm for reliability based design of geometrically non-linear composite structures”, *Composite Structures*, Vol.54, pp.37-47, 2001.
- [89] **Gutkowski, W., Iwanow Z., Bauer J.**, “Controlled mutation in evolutionary Structural Optimization”, *Struct Multidisc Optimization*, Vol.21, pp.355-360, 2001.

- 
- [90] **Plassman, G.E., Sobieszczanski-Sobieski, J.**, “Experience with a genetic algorithm implemented on a multiprocessor computer”, *Struct Multidisc Optimization*, Vol.22, pp.102-115, 2001.
- [91] **Li, Q., Steven, G. P., Xie, Y. M.**, “A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization”, *Struct Multidisc Optimization*, Vol.22, pp.230-239, 2001.
- [92] **Harasaki, H., Arora, J. S.**, “A new class of evolutionary methods based on the concept of transferred force for structural design”, *Struct Multidisc Optimization*, Vol.22, pp.102-115, 2001.
- [93] **Woon, S. Y., Querin, O. M., Steven G. P.**, “Structural application of a shape optimization method based on a genetic algorithm”, *Struct Multidisc Optimization*, Vol.22, pp.102-115, 2001.
- [94] **Hayalioglu, M. S.**, “Optimum load and resistance factor design of steel space frames using genetic algorithm”, *Struct Multidisc Optimization*, Vol.21, pp.292-299, 2001.

## ***CAPÍTULO 3***

# ***ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS***

## 3. ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

### 3.1 Introdução

A análise estrutural pelo método dos elementos finitos esteve limitada durante bastante tempo à consideração de um comportamento linear elástico e pequenos deslocamentos. As vantagens da análise linear elástica são óbvias: as soluções dos problemas são obtidas sem a necessidade de recorrer a algoritmos incrementais e iterativos que são computacionalmente dispendiosos, as soluções para os vários tipos de carregamento podem ser obtidas usando o princípio da sobreposição e o número de constantes que descrevem as relações constitutivas do material é mínimo.

Uma boa análise estrutural requer uma aproximação fiável e em muitos casos uma análise linear conduz à uma idealização razoável do comportamento estrutural. Contudo, existem casos em que é necessário introduzir efeitos de comportamento não-linear para se aceder à resposta estrutural de forma mais realista.

Pode-se identificar várias áreas onde a análise não linear pode ser necessária:

- A utilização directa no projecto sob condições de estado limite último de rotura ou de estado limite de serviço. O aumento significativo dos requisitos de projecto nos últimos anos para garantir elevada eficiência e fiabilidade dos componentes na indústria moderna de alta tecnologia (como nas indústrias aeroespacial e nuclear), tornaram a análise sofisticada uma necessidade. Para além da elevada performance, a integridade estrutural das componentes de máquinas e estruturas tornou-se no objectivo primário dos projectistas e público em geral;
- Na acessibilidade de estruturas existentes cuja integridade pode ser posta em dúvida devido a (a) dano visível (fendas, etc.), (b) cargas adicionais não previstas durante o projecto e, (c) considerações sobre a corrosão ou envelhecimento. Os casos acima citados estarão relacionados com o estado limite último de rotura porque, em muitos casos, o estado limite de serviço estará já ultrapassado e importantes questões podem ser colocadas como: A estrutura é segura? Poderá ser reparada ou não, e, caso a resposta seja positiva, como se poderá reforçar? A estrutura pode ou não continuar em serviço por algum tempo;
- Na definição das causas de rotura da estrutura;
- Na investigação: (a) para facilitar a criação de programas para projectos e análise; (b) para facilitar a compreensão do comportamento do material; (c) para testar a validade dos “modelos de comportamento material” concebidos.

Podem ser reconhecidas as seguintes consequências resultantes da análise não-linear:

- (i) O princípio da sobre posição não pode ser aplicado. Portanto, por exemplo o resultado dos vários casos de carga não pode ser combinado, factorizado ou escalonado.
- (ii) Apenas um tipo de carregamento pode ser usado por análise;
- (iii) O historial do carregamento deve ser considerado;
- (iv) A resposta da estrutura pode ser marcadamente não proporcional à carga aplicada;
- (v) As tensões residuais podem ser importantes.

Com o custo e capacidade da última geração de computadores, o custo das soluções deixou de ser o maior obstáculo para uma análise não-linear como vinha sendo até há bem pouco tempo. Contudo, a complexidade da análise não-linear continua a ser de elevada dificuldade tanto para os especialistas como para os principiantes.

As características não lineares a considerar na análise do comportamento estrutural podem ser o resultado da acção individual de dois tipos de não linearidade com origens distintas: geométrica e material. Os efeitos não lineares geométricos estão relacionados com a estabilidade das configurações de equilíbrio da estrutura e ocorrem quando a deformação e/ou rotações sofridas pelo meio contínuo são consideráveis, podendo traduzir-se na ocorrência de grandes deslocamentos e/ou no desenvolvimento de grandes deformações no material. Por outro lado os efeitos não lineares do material verificam-se quando este abandona o seu comportamento elástico [1].

### 3.2 Descrição do movimento

Nesta análise considera-se o movimento (deformação) de um corpo num sistema de coordenadas cartesiano fixo, assume-se que o corpo pode sofrer grandes deslocamentos e grandes deformações e que a sua resposta constitutiva é não linear. Na Figura 3.1 mostram-se três configurações diferentes do corpo em equilíbrio. O objectivo é determinar as posições de equilíbrio do corpo em instantes de tempo discretos. O termo instante de tempo é aqui usado também no sentido de nível de carga.

Para desenvolver uma estratégia de resolução do problema admite-se que se conhece a solução para todos os instantes que decorrem de  $t=0$  até  $t$  e que se pretende determinar a solução para o instante  $t + \Delta t$ . Adoptando uma formulação material ou Lagrangeana, existem duas possibilidades quanto à escolha da configuração de referência em relação à qual as grandezas são medidas. Na formulação Lagrangeana Total todos os integrais são calculados relativamente à configuração inicial não deformada do corpo no instante  $t=0$ . Alternativamente, uma configuração deformada conhecida pode ser tomada como estado inicial de referência sendo actualizada à medida que o processo de cálculo decorre. Esta última formulação é designada por Lagrangeana Actualizada. A Figura 3.1 mostra as diferenças entre as duas descrições.

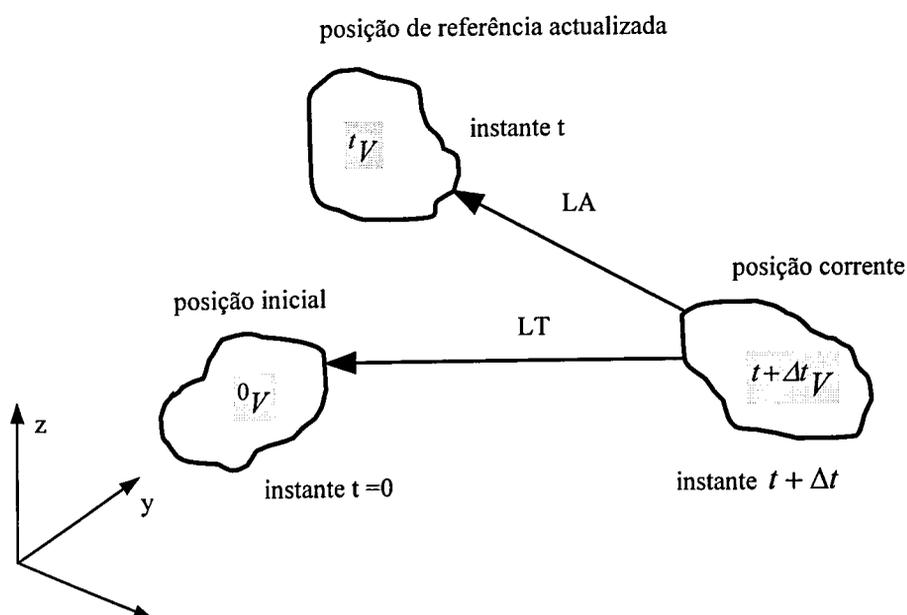


Figura 3.1 Descrições Lagrangeana Total (LT) e Lagrangeana Actualizada (LA).

Considerando as seguintes igualdades

${}^0\mathbf{x} = \{0_x \ 0_y \ 0_z\}^T$  - vector das coordenadas de um ponto genérico  $\mathbf{P}$  no instante inicial,

${}^t\mathbf{x} = \{t_x \ t_y \ t_z\}^T$  - vector das coordenadas de  $\mathbf{P}$  no instante  $t$ ,

${}^t\mathbf{u} = \{t_{u_x} \ t_{u_y} \ t_{u_z}\}^T$  - vector de deslocamentos de  $\mathbf{P}$  no instante  $t$ ,

$\mathbf{u} = \{u_x \ u_y \ u_z\}^T$  - vector do incremento dos deslocamentos de  $\mathbf{P}$  do instante  $t$   
para o instante  $t + \Delta t$ .

as coordenadas de um ponto genérico  $\mathbf{P}$  nos instantes (carga)  $t$  e  $t + \Delta t$  são dadas por

$${}^t\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + {}^t\mathbf{u} \quad (3.1)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \quad (3.2)$$

Tendo em conta os incrementos de tempo (carga) pode-se definir o incremento dos deslocamentos de  $t$  para  $t + \Delta t$  como

$$\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u} \quad (3.3)$$

Durante o movimento do corpo, o seu volume, a superfície, a massa específica, as tensões e as deformações variam continuamente. Designa-se por  ${}^0\rho$ ,  ${}^t\rho$ ,  ${}^{t+\Delta t}\rho$ ;  ${}^0\Gamma$ ,  ${}^t\Gamma$ ,  ${}^{t+\Delta t}\Gamma$ ;  ${}^0V$ ,  ${}^tV$ ,  ${}^{t+\Delta t}V$ ; respectivamente a massa específica, a superfície e o volume do corpo nos instantes  $0$ ,  $t$  e  $t + \Delta t$ .

### 3.3 Descrição Lagrangeana Total

O problema principal na análise não linear é encontrar o estado de equilíbrio do corpo correspondente às cargas aplicadas. Em geral é necessário utilizar uma formulação incremental e a variável tempo para descrever convenientemente o carregamento e o movimento do corpo. Neste trabalho a descrição do movimento utilizada é a *Lagrangeana Total* onde a configuração de referência, isto é, a configuração do corpo em relação à qual são referidas as grandezas, é a configuração inicial, ou seja a configuração no instante  $t=0$ .

O princípio dos trabalhos virtuais no instante (nível de carga)  $t + \Delta t$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{S} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}_0 \boldsymbol{\varepsilon} d^0V = \int {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{f} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} d^0V + \int {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{T}^0 \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} d^0\Gamma_T \quad (3.4)$$

onde  ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{S}$  é o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff,  ${}^{t+\Delta t}_0 \boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor das deformações de Green-Lagrange,  ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{f}$  é o vector das forças volúmicas,  ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{T}$  é o vector das tracções de superfície prescritas,  ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X}$  é o tensor gradiente da deformação. Todas estas entidades são calculadas no instante  $t + \Delta t$  e estão referidas à configuração inicial do corpo ou estrutura. Na igualdade (3.4)  ${}^0\Gamma_T$  representa a região da superfície inicial onde são prescritas as tracções de superfície.

Considere-se o corpo representado na Figura 3.1. Uma medida fundamental da deformação do corpo é dada pelo *gradiente da deformação* definido como

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{t+\Delta t} x}{\partial^0 x} & \frac{\partial^{t+\Delta t} x}{\partial^0 y} & \frac{\partial^{t+\Delta t} x}{\partial^0 z} \\ \frac{\partial^{t+\Delta t} y}{\partial^0 x} & \frac{\partial^{t+\Delta t} y}{\partial^0 y} & \frac{\partial^{t+\Delta t} y}{\partial^0 z} \\ \frac{\partial^{t+\Delta t} z}{\partial^0 x} & \frac{\partial^{t+\Delta t} z}{\partial^0 y} & \frac{\partial^{t+\Delta t} z}{\partial^0 z} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff  ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{S}$  é obtido através da transformação do tensor das tensões de Cauchy  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$  da seguinte forma

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{S} = \left| {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} \right| \left( {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} \right)^{-1} \left( {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} \right) \left( {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} \right)^{-T} \quad (3.6)$$

sendo  $\left| {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} \right|$  o determinante do tensor gradiente da deformação,  $\left( {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} \right)^{-1}$  o seu inverso e onde o índice superior T significa transposição. O determinante do tensor gradiente da deformação é dado por

$$\left| {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} \right| = \frac{{}^0 \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} \quad (3.7)$$

O tensor das deformações de Green–Lagrange no instante  $t + \Delta t$  pode ser definido como

$${}^{t+\Delta t}{}_{0}\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \left( {}_{0}\nabla {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^T \right) + \left( {}_{0}\nabla {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^T \right)^T + \left( {}_{0}\nabla {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^T \right) \left( {}_{0}\nabla {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^T \right)^T \right] \quad (3.8)$$

onde todas as derivadas são obtidas relativamente às coordenadas iniciais do corpo não deformado e o operador gradiente é definido por

$${}_{0}\nabla = \left[ \partial/\partial^0x \quad \partial/\partial^0y \quad \partial/\partial^0z \right]^T \quad (3.9)$$

A variação arbitrária do tensor das deformações de Green–Lagrange é dada por

$${}^{t+\Delta t}{}_{0}\varepsilon = {}_{0}\alpha \left( \delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^T \right) \quad (3.10)$$

com

$${}_{0}\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \left[ {}_{0}\nabla ( \ ) \right] + \left[ {}_{0}\nabla ( \ ) \right]^T + \left[ {}_{0}\nabla ( \ ) \right] \left[ {}_{0}\nabla ( {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} ) \right]^T + \left[ {}_{0}\nabla ( {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} ) \right] \left[ {}_{0}\nabla ( \ ) \right]^T \right\} \quad (3.11)$$

As tensões e as deformações são relacionadas através de uma lei constitutiva que, de uma forma geral, pode ser representada por,

$${}^{t+\Delta t}{}_{0}\mathbf{S} = \Phi \left( {}^{t+\Delta t}{}_{0}\varepsilon \right) \quad (3.12)$$

Se o carregamento for independente da deformação, o termo  $\int {}^{t+\Delta t}{}_{0}\mathbf{X} \cdot {}^{t+\Delta t}{}_{0}\mathbf{T}^0 \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \, d^0\Gamma_T$  na equação (3.4) pode ser aproximado [1] por  $\int {}^{t+\Delta t}{}_{0}\mathbf{T}^0 \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \, d^0\Gamma_T$ .

Utilizando a notação matricial, o produto tensorial  ${}^{t+\Delta t}{}_{0}\mathbf{S} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}{}_{0}\varepsilon$  da equação (3.4) pode ser escrito como  ${}^{t+\Delta t}{}_{0}\hat{\mathbf{S}} \delta {}^{t+\Delta t}{}_{0}\hat{\varepsilon}$  em que o segundo vector das tensões de Piola- Kirchhoff é definido como

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{S}} = \left\{ {}^{t+\Delta t} S_{xx} \quad {}^{t+\Delta t} S_{yy} \quad {}^{t+\Delta t} S_{zz} \quad {}^{t+\Delta t} S_{xy} \quad {}^{t+\Delta t} S_{xz} \quad {}^{t+\Delta t} S_{yz} \right\}^T \quad (3.13)$$

e o vector das deformações de Green–Lagrange é dado por

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \left\{ {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{xx} \quad {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{yy} \quad {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{zz} \quad {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{xy} \quad {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{xz} \quad {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{yz} \right\}^T \\ &= {}_0 \partial^{t+\Delta t} \mathbf{u} + \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t} \mathbf{A} \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}' \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que

$$\mathbf{u}' = \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,x}^T \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,y}^T \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,z}^T \right\} \quad (3.15)$$

onde  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,r} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{\partial {}^0 r}$ ;  ${}^0 r = {}^0 x$ ,  ${}^0 y$  ou  ${}^0 z$  e  ${}_0 \partial^T$  e  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{A}$ , são operadores linear e

bilinear, definidos respectivamente por

$${}_0 \partial^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^0 x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial {}^0 y} & \frac{\partial}{\partial {}^0 z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial {}^0 y} & 0 & \frac{\partial}{\partial {}^0 x} & 0 & \frac{\partial}{\partial {}^0 z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial {}^0 z} & 0 & \frac{\partial}{\partial {}^0 x} & \frac{\partial}{\partial {}^0 y} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,y} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,y} & \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,x} & \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,z} & \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,x} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{,y} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A variação da deformação será então dada por

$$\delta {}^{t+\Delta t} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}_0 \partial \left( \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \right) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{A} \quad \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}' \quad (3.18)$$

As equações apresentadas anteriormente são equações não-lineares no campo de deslocamentos  ${}^t\mathbf{u}$ , e são resolvidas utilizando um procedimento incremental/iterativo no qual se considera que todas as grandezas são conhecidas em  $t$ , e que se pretende determinar o seu valor em  $t + \Delta t$ . As decomposições incrementais das diferentes grandezas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} &= {}^t\mathbf{u} + \mathbf{u} \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{S} = {}^t{}_0\mathbf{S} + {}_0\mathbf{S} \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon = {}^t{}_0\varepsilon + {}_0\varepsilon \\ {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{f} &= {}^t{}_0\mathbf{f} + {}_0\mathbf{f} \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{T}^0 = {}^t{}_0\mathbf{T}^0 + {}_0\mathbf{T}^0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{u}$ ,  ${}_0\mathbf{S}$ ,  ${}_0\varepsilon$ ,  ${}_0\mathbf{f}$  e  ${}_0\mathbf{T}^0$  são respectivamente, os incrementos de deslocamento, de tensão, de deformação, das forças volúmicas e das tracções de superfície. O incremento do tensor das deformações é

$${}_0\varepsilon = {}_0\mathbf{e} + {}_0\eta \quad (3.20)$$

em que  ${}_0\mathbf{e}$  e  ${}_0\eta$  são respectivamente, os termos linear e não-linear, dados por

$${}_0\mathbf{e} = {}_0\alpha(\mathbf{u}^T) \quad ; \quad {}_0\eta = \frac{1}{2} \left\{ [{}_0\nabla(\mathbf{u}^T)] [{}_0\nabla(\mathbf{u}^T)]^T \right\} \quad (3.21)$$

Substituindo as equações (3.19) na equação (3.4) e notando que

$$\delta {}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon = \delta {}_0\varepsilon \quad (3.22)$$

o princípio dos trabalhos virtuais pode ser expresso na forma incremental por

$$\int ({}^t{}_0\mathbf{S} + {}_0\mathbf{S}) \cdot \delta {}_0\varepsilon \, d^0V = \int {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d^0V + \int {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{T}^0 \cdot \delta \mathbf{u} \, d^0\Gamma_T \quad (3.23)$$

onde

$$\delta {}_0\varepsilon = \delta {}_0\mathbf{e} + \delta {}_0\eta \quad (3.24)$$

com

$$\delta_0 \mathbf{e} = {}_0 \alpha (\delta \mathbf{u}^T) \quad (3.25)$$

e

$$\delta_0 \eta = {}_0 \beta (\mathbf{u}^T, \delta \mathbf{u}^T) \quad (3.26)$$

em que  ${}_0 \alpha$  é o operador definido na equação (3.11) e  ${}_0 \beta$  é um operador dado por

$${}_0 \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \left\{ [{}_0 \nabla(\mathbf{a})][{}_0 \nabla(\mathbf{b})]^T + [{}_0 \nabla(\mathbf{b})][{}_0 \nabla(\mathbf{a})]^T \right\} \quad (3.27)$$

Os incrementos do segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff e do tensor das deformações de Green-Lagrange são relacionadas através de uma lei constitutiva incremental que pode ser representada por

$${}_0 \mathbf{S} = \Phi_{,\varepsilon} \cdot {}_0 \varepsilon \quad (3.28)$$

onde  $\Phi_{,\varepsilon}$  é o tensor constitutivo tangente ou instantâneo.

A equação (3.23) é uma equação não-linear no incremento do deslocamento que pode ser linearizada considerando as aproximações

$${}_0 \mathbf{S} \cdot \delta_0 \varepsilon = {}_0 \mathbf{S} \cdot \delta_0 \mathbf{e} \quad ; \quad {}_0 \mathbf{S} = \Phi_{,\varepsilon} \cdot {}_0 \mathbf{e} \quad (3.29)$$

Assim, a equação de equilíbrio na forma incremental depois de linearizada é

$$\int_0 \mathbf{S} \cdot \delta_0 \mathbf{e} \, d^0 V + \int_0^t \mathbf{S} \cdot \delta_0 \eta \, d^0 V = \int^{t+\Delta t} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d^0 V + \int^{t+\Delta t} \mathbf{T}^0 \cdot \delta \mathbf{u} \, d^0 \Gamma_T - \int_0^t \mathbf{S} \cdot \delta_0 \mathbf{e} \, d^0 V \quad (3.30)$$

ou considerando satisfeito o equilíbrio no instante  $t$ ,

$$\int ({}_0 \mathbf{S} \cdot \delta_0 \mathbf{e} + {}_0^t \mathbf{S} \cdot \delta_0 \eta) d^0 V = \int_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d^0 V + \int_0 \mathbf{T}^0 \cdot \delta \mathbf{u} \, d^0 \Gamma_T \quad (3.31)$$

Utilizando a notação matricial em vez da notação tensorial tem-se

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}{}_0\hat{\mathbf{e}} &= {}^t{}_0\hat{\mathbf{e}} + {}_0\hat{\mathbf{e}} \\
 {}_0\hat{\mathbf{e}} &= {}_0\hat{\mathbf{e}} + {}_0\hat{\boldsymbol{\eta}} \\
 {}_0\hat{\mathbf{e}} &= {}_0\partial\mathbf{u} + {}^t{}_0\mathbf{A} {}_0\mathbf{u}' \\
 {}_0\hat{\boldsymbol{\eta}} &= \frac{1}{2} {}_0\mathbf{A} {}_0\mathbf{u}'
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

em que  ${}_0\mathbf{A}$  e  ${}_0\mathbf{u}'$  são, respectivamente, os incrementos de  ${}^t{}_0\mathbf{A}$  e  ${}^t{}_0\mathbf{u}'$  e também

$$\begin{aligned}
 {}_0\mathbf{S} \cdot \delta_0\mathbf{e} &= {}_0\hat{\mathbf{S}}^T \delta_0\hat{\mathbf{e}} \\
 {}^t{}_0\mathbf{S} \cdot \delta_0\boldsymbol{\eta} &= {}^t{}_0\hat{\mathbf{S}}^T \delta_0\hat{\boldsymbol{\eta}}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

onde  ${}^t{}_0\hat{\mathbf{S}}$  é definido de forma similar à da equação (3.13).

### 3.4 Discretização pelo método dos elementos finitos

No presente trabalho é adoptada uma formulação do Método dos Elementos Finitos baseada nos deslocamentos com o objectivo de se obter a discretização das equações apresentadas na secção anterior. No desenvolvimento por elementos finitos da equação de equilíbrio incremental (3.30) é aplicada a formulação Lagrangeana Total.

O vector dos deslocamentos em qualquer ponto de um elemento finito genérico,

${}^t\mathbf{u} = \left\{ {}^t u_x \quad {}^t u_y \quad {}^t u_z \right\}^T$ , pode ser aproximado por

$${}^t\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \quad {}^t\mathbf{d}_i = \mathbf{N} \quad {}^t\mathbf{d} \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de forma adoptadas na referida aproximação,  ${}^t\mathbf{d}$  é o vector dos deslocamentos nodais e  $n$  o número de nós do elemento. Sendo o elemento finito considerado isoparamétrico as coordenadas de um ponto no interior são definidas como

$${}^t\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \quad {}^t\mathbf{x}_i \quad (3.35)$$

em que  ${}^t\mathbf{x}_i$  representa o vector das coordenadas de cada um dos nós que constitui o elemento.

O campo de deslocamentos incrementais num ponto pertencente ao elemento é função dos deslocamentos nodais incrementais  $\mathbf{d}$  e pode-se escrever

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (3.36)$$

Considerando a aproximação dada em (3.36), o vector dos incrementos das deformações de Green-Lagrange, definido em (3.32) pode ser dado por

$${}_0\hat{\mathbf{e}} = {}_0\hat{\mathbf{e}} + {}_0\hat{\boldsymbol{\eta}} = \left( {}^t_0\mathbf{B}_L + {}^t_0\mathbf{A} \quad {}^t_0\mathbf{G} \right) \mathbf{d} + \frac{1}{2} \quad {}_0\mathbf{A} \quad {}^t_0\mathbf{G} \mathbf{d} \quad (3.37)$$

onde a matriz  ${}^t_0\mathbf{B}_L$  contém as derivadas cartesianas das funções de forma e pode ser escrita para um nó genérico  $j$  do elemento da seguinte forma

$${}^t_0\mathbf{B}_{Lj} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

e a matriz  ${}^t_0\mathbf{A}$  é uma matriz que depende do campo de deslocamentos sendo definida de forma similar à da equação (3.17). Por outro lado,  ${}^t_0\mathbf{G}$  é uma matriz constituída pelas derivadas cartesianas das funções de forma apresentando para o nó  $j$  a seguinte configuração

$${}^t_0\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \partial N_j / \partial x & 0 & 0 \\ \partial N_j / \partial y & 0 & 0 \\ \partial N_j / \partial z & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial y & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_j / \partial x \\ 0 & 0 & \partial N_j / \partial y \\ 0 & 0 & \partial N_j / \partial z \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Na equação (3.37),  ${}_0\mathbf{A}$  é o incremento de  ${}^t_0\mathbf{A}$  e é uma matriz obtida pela substituição das derivadas cartesianas dos deslocamentos pelas derivadas cartesianas dos respectivos incrementos.

Designando por

$${}^t_0\mathbf{B}_{NL} = {}^t_0\mathbf{A} {}^t_0\mathbf{G} \quad (3.40)$$

a variação arbitrária das componentes do vector dos incrementos das deformações definido na equação (3.36), é dada por

$$\delta {}_0\hat{\mathbf{e}} = ({}^t_0\mathbf{B}_L + {}^t_0\mathbf{B}_{NL}) \delta \mathbf{d} = {}^t_0\mathbf{B} \delta \mathbf{d} \quad (3.41)$$

$$\delta {}_0\hat{\boldsymbol{\eta}} = \delta {}_0\mathbf{A} {}^t_0\mathbf{G} \mathbf{d} = {}_0\mathbf{A} {}^t_0\mathbf{G} \delta \mathbf{d} \quad (3.42)$$

em que  $\delta {}^t_0\mathbf{A}$  é uma matriz semelhante a  ${}^t_0\mathbf{A}$ , sendo constituída pelas derivadas cartesianas dos deslocamentos virtuais.

O vector dos incrementos das componentes do tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff pode ser obtido de forma aproximada a partir de

$${}_0\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{D}^* {}_0\hat{\mathbf{e}} \quad (3.43)$$

onde  $\mathbf{D}^*$  é uma matriz que é formada a partir das propriedades mecânicas do material e depende do tipo de comportamento considerado. Adoptando a aproximação

$${}_0\hat{\mathbf{e}} \cong ({}^t_0\mathbf{B}_L + {}^t_0\mathbf{B}_{NL}) \mathbf{d} = {}^t_0\mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.44)$$

de forma a obter uma matriz de rigidez simétrica para o elemento, vem

$${}_0\hat{\mathbf{S}} \cong \mathbf{D}^* {}^t_0\mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.45)$$

Usando (3.33) e (3.41) pode-se escrever

$${}_0\hat{\mathbf{S}}^T \delta {}_0\hat{\mathbf{e}} = (\delta {}_0\hat{\mathbf{e}})^T {}_0\hat{\mathbf{S}} \cong ({}^t_0\mathbf{B} \delta \mathbf{d})^T \mathbf{D}^* {}^t_0\mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.46)$$

ou

$${}_0\hat{\mathbf{S}}^T \delta {}_0\hat{\mathbf{e}} \cong (\delta \mathbf{d})^T {}^t_0\mathbf{B}^T \mathbf{D}^* {}^t_0\mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.47)$$

Por outro lado usando (3.33) e (3.42) obtém-se

$${}^t_0\hat{\mathbf{S}}^T \delta {}_0\hat{\boldsymbol{\eta}} = {}^t_0\hat{\mathbf{S}}^T \delta {}_0\mathbf{A} {}^t_0\mathbf{G} \mathbf{d} \quad (3.48)$$

Assim as equações de equilíbrio incrementais (3.31) discretizadas podem ser escritas da forma seguinte

$$\left[ \int_{0V} (\delta \mathbf{d})^T {}^t_0 \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* {}^t_0 \mathbf{B} d^0V + \int_{0V} {}^t_0 \hat{\mathbf{S}}^T \delta_0 \mathbf{A} {}^t_0 \mathbf{G} d^0V \right] \mathbf{d} = (\delta \mathbf{d})^T \left[ \int_{0V} \mathbf{N}^T {}_0 \mathbf{f} d^0V + \int_{0\Gamma_T} \mathbf{N}^T {}_0 \mathbf{T}^0 d^0\Gamma_T \right] \quad (3.49)$$

Considerando a seguinte relação

$$(\delta_0 \mathbf{A})^T {}^t_0 \hat{\mathbf{S}} = \tau {}^t_0 \mathbf{G} \delta \mathbf{d} \quad (3.50)$$

onde  $\tau$  é uma matriz quadrada definida por

$$\tau = \begin{bmatrix} S_{xx} I_3 & S_{xy} I_3 & S_{xz} I_3 \\ S_{xy} I_3 & S_{yy} I_3 & S_{yz} I_3 \\ S_{xz} I_3 & S_{yz} I_3 & S_{zz} I_3 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

sendo  $\mathbf{I}_3$  a matriz identidade de dimensões (3x3), e supondo que a equação (3.49) é válida para qualquer variação arbitrária  $\delta \mathbf{a}$ , obtém-se então para um elemento genérico "e"

$$\mathbf{K}_T^e \mathbf{d}^e = {}_0 \mathbf{F}^e \quad (3.52)$$

onde o incremento do vector das forças actuando sobre o elemento é dado por

$${}_0 \mathbf{F}^e = \int_{0V} (\mathbf{N}^e)^T {}_0 \mathbf{f}^e d^0V + \int_{0\Gamma_T} (\mathbf{N}^e)^T {}_0 \mathbf{T}^{0e} d^0\Gamma_T \quad (3.53)$$

e  $\mathbf{K}_T^e$  é a matriz de rigidez tangencial do elemento, a qual pode ser considerada como a soma de três matrizes, isto é,

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{K}_L^e + \mathbf{K}_{NL}^e + \mathbf{K}_\sigma^e \quad (3.54)$$

em que a componente linear da matriz de rigidez do elemento é dada por

$$\mathbf{K}_L^e = \int_V (\mathbf{B}_L^e)^T (\mathbf{D}^*)^e \mathbf{B}_L^e dV \quad (3.55)$$

sendo a componente das grandes deslocamentos definida por

$$\mathbf{K}_{NL}^e = \int_V \left[ (\mathbf{B}_{NL}^e)^T (\mathbf{D}^*)^e \mathbf{B}^e + (\mathbf{B}_{NL}^e)^T (\mathbf{D}^*)^e \mathbf{B}_{NL}^e \right] dV \quad (3.56)$$

e

$$\mathbf{K}_\sigma^e = \int_V (\mathbf{G}^e)^T \tau^e \mathbf{G}^e dV \quad (3.57)$$

designa a matriz das tensões iniciais ou geométrica do elemento que depende do estado de tensão instalado. Usando as matrizes de rigidez tangentes  $\mathbf{K}_T^e$ , e os vectores de incremento do carregamento  ${}_0\mathbf{F}^e$ , para todos os elementos finitos considerados na discretização do meio contínuo, obtém-se, por associação, as equações de equilíbrio incrementais para toda a estrutura,

$$\mathbf{K}_T \mathbf{d} = {}_0\mathbf{F} \quad (3.58)$$

## 3.5 Algoritmo de solução não linear

### 3.5.1 Introdução

Para a resolução da equação de equilíbrio (3.58) são normalmente utilizados métodos incrementais/iterativos baseados em três passos principais: (1) determinação do incremento dos deslocamentos nodais globais da estrutura; (2) cálculo do incremento das forças internas em cada elemento; (3) verificação do equilíbrio da estrutura na sua nova configuração deformada. O vector das forças internas da estrutura é obtido por composição dos vectores das forças internas totais em cada elemento. Este vector é comparado com o vector das forças externas, obtendo-se o vector das forças não balanceadas ou residuais. O primeiro e o segundo passos são repetidos até que se verifique um valor desprezável para as forças não balanceadas.

Os métodos normalmente utilizados são essencialmente o método de controlo da força, o método de controlo de deslocamento, o método do comprimento do arco e o método de controlo de deslocamento generalizado [2,3].

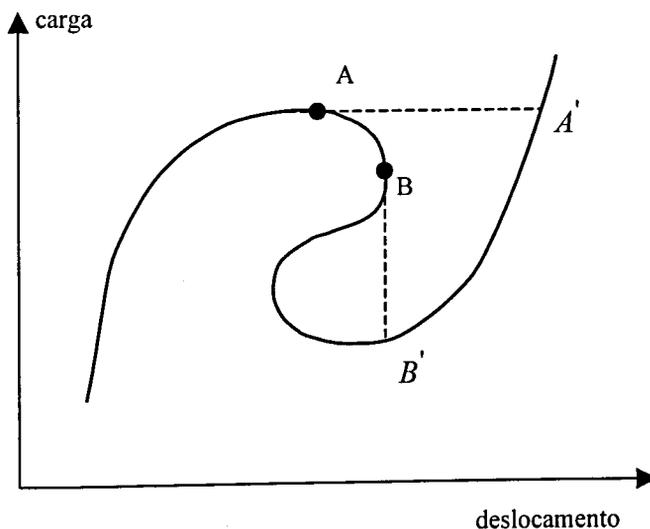


Figura 3.2 Curva de equilíbrio associada a comportamento não linear.

O método de controlo da força, cuja variante mais conhecida é a de Newton-Raphson, é caracterizado por um incremento constante do carregamento aplicado. No método de controlo do deslocamento é seleccionada uma determinada componente do deslocamento num ponto da estrutura, que é utilizada como parâmetro de controlo. Estes dois métodos falham em circunstâncias diferentes associadas à natureza dos pontos limite. Conforme se observa na

Figura 3.2, no ramo ascendente da curva de equilíbrio, o controlo da força é geralmente o método mais eficiente. Quando a resposta da estrutura alcança o ponto crítico A a seguir a solução "salta" para o ponto A', tornando impossível o conhecimento do comportamento do sistema relativamente ao traçado da curva de equilíbrio que vai de A a A'. Este fenómeno é designado por *snap-through* e corresponde a um "salto" dinâmico da solução para um novo estado de deslocamentos em regime de carga constante.

Se é adoptado o método de controlo do deslocamento, então quando se atinge o ponto B surgem novamente dificuldades de convergência pois verifica-se um "salto" dinâmico da solução para o ponto B'. Este fenómeno de variação de nível de carga em regime de estado de deslocamento constante é conhecido por *snap-back* e torna inacessível o conhecimento do comportamento da estrutura no traçado da curva de equilíbrio desde B a B'.

Os métodos do comprimento do arco e de controlo do deslocamento generalizado permitem resolver quer os pontos limite de força (*snap-through*), quer os pontos limite de deslocamento (*snap-back*).

O método do controlo de deslocamento generalizado foi proposto por Yang e Shieh [4] e nele é introduzido um parâmetro de rigidez generalizado associada à não linearidade da rigidez da estrutura. A mudança de sinal deste parâmetro funciona como indicador para a inversão do sentido de carregamento.

O método do comprimento do arco foi inicialmente proposto por Wempner [5] e Riks [6], tendo mais tarde Ramn [7] e Crisfield [8,9], introduzido alterações importantes no método inicial. Este método é usado no desenvolvimento deste trabalho sendo objecto de estudo pormenorizado na secção seguinte.

### 3.5.2 Método do comprimento do arco

O sistema estrutural está no estado de equilíbrio se as forças internas são iguais às cargas aplicadas. No processo numérico de solução não é possível alcançar uma situação de equilíbrio exacto e consequentemente o objectivo é obter um estado após convergência com um erro pequeno e aceitável. Uma medida do erro no equilíbrio de forças é dado pelo vector do *resíduo* ou das *forças não balanceadas*  $\Psi(\mathbf{d}, \lambda)$  definido como

$$\Psi(\mathbf{d}, \lambda) = \mathbf{r}(\mathbf{d}) - \lambda \bar{\mathbf{F}} \quad (3.59)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vector das forças nodais equivalente associado ao estado de tensão na estrutura e  $\bar{\mathbf{F}}$  é o vector das forças nodais equivalentes devido às cargas externas aplicadas e  $\lambda$  é um factor de escala relacionado com o nível de carregamento.

Como já foi referido anteriormente, um procedimento comum para obter a solução de problemas estruturais não lineares consiste em considerar um carregamento incremental passo a passo combinado com um processo iterativo. No sentido de permitir a análise do comportamento estrutural além dos pontos limite, Wempner [5] e Riks [6] propuseram a adição às equações de equilíbrio de uma equação de constrangimento que, para o incremento de carga corrente  $n$  e para a iteração  $i$ , apresenta a forma

$$\left(\Delta \mathbf{d}_i^n\right)^T \Delta \mathbf{d}_i^n + b \left(\Delta \lambda_i^n\right)^2 \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} = \left(l^n\right)^2 \quad (3.60)$$

onde  $\Delta \mathbf{d}_i^n$  e  $\Delta \lambda_i^n$  são respectivamente, o vector total dos incrementos dos deslocamentos e o factor total dos incrementos de carga na iteração  $i$ ,  $l^n$  é o valor prescrito do comprimento de arco para o incremento de carga corrente e  $b$  é um factor de escala.

A aplicação directa da equação de constrangimento (3.60) destrói a simetria e a forma em banda das equações de equilíbrio. Esta dificuldade foi ultrapassada por Crisfield [8] e Ramm [7] ao adoptarem uma técnica análoga ao método do controlo do deslocamento proposto por Batoz e Dhatt [10]. Neste modelo, os deslocamentos obtidos iterativamente são definidos a partir de

$$\delta \mathbf{d}_i^n = \tilde{\delta} \mathbf{d}_i^n + \delta \lambda_i^n (\delta \mathbf{d}_i^n)_L \quad (3.61)$$

onde  $\tilde{\delta} \mathbf{d}_i^n$  são os deslocamentos iterativos associados às forças residuais  $\Psi_i^n$  através da relação

$$\tilde{\delta} \mathbf{d}_i^n = \left[\mathbf{K}_{Ti}^n\right]^{-1} \Psi_i^n \quad (3.62)$$

e  $(\delta \mathbf{d}_i^n)_L$  são as variações lineares dos deslocamentos obtidas considerando a carga total de referência  $\bar{\mathbf{F}}$ ,

$$(\delta \mathbf{d}_i^n)_L = [\mathbf{K}_{Ti}^n]^{-1} \bar{\mathbf{F}} \quad (3.62)$$

A equação (3.61) exprime a variação iterativa do nível de carga  $\delta \lambda_i^n$  como uma função da variação dos deslocamentos correspondentes  $\delta \mathbf{d}_i^n$ . Esta é a equação fundamental dos métodos do controlo do comprimento de arco, métodos estes que apenas diferem entre si na definição do parâmetro  $\delta \lambda_i^n$  que depende da natureza da superfície restritiva adoptada.

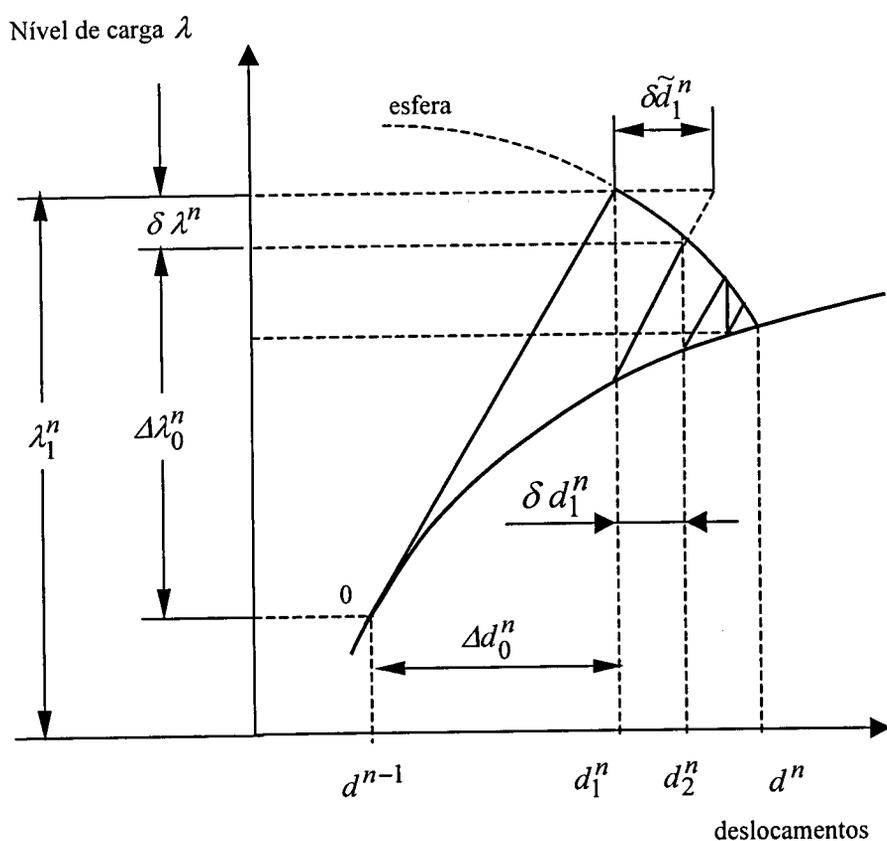


Figura 3.3 Método do comprimento de arco, com superfície esférica de constrangimento.

Neste trabalho adoptou-se uma superfície esférica como sugere Crisfield [2] que considera  $b=0$  na equação (3.60). Como se mostra na Figura 3.3 o processo iterativo segue um *caminho esférico* centrado no ponto 0 com raio  $l^n$ . A equação restritiva (3.60) toma então a seguinte forma

$$\left(\Delta \mathbf{d}_i^n\right)^T \Delta \mathbf{d}_i^n = \left(l^n\right)^2 \quad (3.63)$$

onde  $\Delta \mathbf{d}_i^n$  é o vector total dos incrementos dos deslocamentos na iteração  $i$  dado pela equação

$$\Delta \mathbf{d}_{i+1}^n = \Delta \mathbf{d}_i^n + \delta \mathbf{d}_i^n \quad (3.64)$$

Substituindo as equações (3.64) e (3.61) na equação (3.63) obtém-se a seguinte equação quadrática em  $\delta \lambda_i^n$ :

$$a_1 (\delta \lambda_i^n)^2 + a_2 \delta \lambda_i^n + a_3 = 0 \quad (3.65)$$

onde

$$a_1 = (\delta \mathbf{d}_i^n)_L^T (\delta \mathbf{d}_i^n)_L \quad (3.66)$$

$$a_2 = 2 \left( \Delta \mathbf{d}_{i-1}^n + \tilde{\delta} \mathbf{d}_i^n \right)^T (\delta \mathbf{d}_i^n)_L \quad (3.67)$$

$$a_3 = \left( \Delta \mathbf{d}_{i-1}^n + \tilde{\delta} \mathbf{d}_i^n \right)^T \left( \Delta \mathbf{d}_{i-1}^n + \tilde{\delta} \mathbf{d}_i^n \right) - \left(l^n\right)^2 \quad (3.68)$$

Em geral a equação (3.65) tem duas raízes  $\delta \lambda_{i,1}^n$  e  $\delta \lambda_{i,2}^n$  o que implica duas soluções alternativas para a actualização do vector dos deslocamentos incrementais,  $\Delta \mathbf{d}_{i,1}^n$  e  $\Delta \mathbf{d}_{i,2}^n$ . Estas duas soluções correspondem a dois pontos onde a superfície esférica de constrangimento e a curva de equilíbrio se intersectam.

Para evitar o fenómeno conhecido como *doubling back* na curva de equilíbrio, é escolhida de forma apropriada uma das raízes com o objectivo de manter positivo o ângulo entre os vectores dos deslocamentos incrementais, o original e o actualizado [2]. Os dois ângulos são dados pelas expressões

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \left( \Delta \mathbf{d}_{i,1}^n \right)^T \Delta \mathbf{d}_{i-1}^n \\ \theta_2 &= \left( \Delta \mathbf{d}_{i,2}^n \right)^T \Delta \mathbf{d}_{i-1}^n \end{aligned} \quad (3.69)$$

Se os dois ângulos são positivos, a raiz apropriada é a mais próxima da solução linear da equação (3.65) dada por

$$\delta\lambda_L = -\frac{a_3}{a_2} \quad (3.70)$$

Uma vez calculado o valor de  $\delta\lambda_i^n$ , obtém-se  $\delta\mathbf{d}_i^n$  a partir da equação (3.61) e os deslocamentos incrementais são actualizados usando a equação (3.64).

## REFERÊNCIAS

- [1] **Bathe, K.J.**, “*Finite element procedures in engineering analysis*”, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1996.
- [2] **Crisfield, M. A.**, “*Non-linear finite element of solids and structures*”, Vol.1, John Wiley & Sons, 1997.
- [3] **Yang, Y. B., Kuo, S. R.**, “*Theory & analysis of nonlinear framed structures*”, Prentice Hall, Singapore, 1994.
- [4] **Yang, Y. B., Shieh, M.S.**, “Solution method for no-linear problems with multiple critical points”, *AIAA Journal*, Vol.28, N° 12, pp.2110-2116, 1990.
- [5] **Wemper, G. A.**, “Discrete approximations related to nonlinear theories of solids”, *Int. J. Solids and Structures*, Vol.7, pp.1581-1599, 1971.
- [6] **Riks, E.**, “An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems”, *Int. J. Solids and structures*, Vol.15, pp.524-551, 1979.
- [7] **Ramm, E.**, “Strategies for tracing non-linear responses near limit points”, *Non-linear Finite element Analysis in Structural Mechanics*, (Eds. W. Wunderlich, E. Stein and K.J. Bathe), Springer-Verlag, New York, 1981.
- [8] **Crisfield, M. A.**, “A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through”, *Comp. and Struct.*, Vol.13, pp.55-62, 1981.
- [9] **Crisfield, M. A.**, “An arc-length method including line shearches and accelerations”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.19, pp.1269, 1983.
- [10] **Batoz, J.L., Dhatt, G.**, “Incremental displacement algorithms for non-linear problems”. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.14, pp.1292-1267, 1979.

## ***CAPÍTULO 4***

### ***ANÁLISE ESTRUTURAL***

***Elemento de placa ou casca reforçado com viga***

## 4. ANÁLISE ESTRUTURAL

### Elemento de placa ou casca reforçado com viga

#### 4.1 Introdução

O estudo do comportamento da placa reforçada é feito tendo em conta a acção combinada da placa e das vigas de reforço. Na discretização da estrutura a estudar, a placa é dividida num número determinado de quadriláteros, constituindo cada um deles um elemento de placa, enquanto que os reforços são representados por elementos lineares de viga.

Neste modelo admite-se que os reforços estão rigidamente ligados à placa e que esta ligação se verifica ao longo da fronteira dos elementos de placa considerados, tornando-se por isso necessário garantir a compatibilidade do campo de deslocamentos ao longo da linha de ligação placa-viga Figura 4.1. Esta condição é atingida adoptando os elementos de oito e nove nós de Mindlín [2-4] para a modelação do comportamento da placa e o elemento de três nós de Timoshenko para representar o comportamento da viga [4-7].

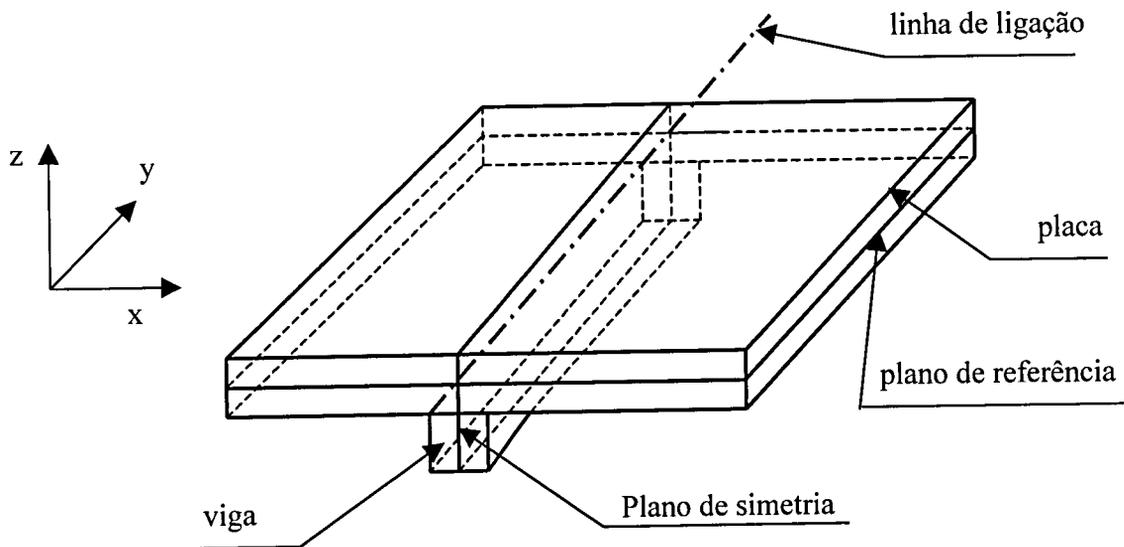


Figura 4.1 Elemento de placa com reforço de viga.

A determinação da resposta do conjunto placa-viga é feita em relação a um plano comum de referência, o qual pode ser considerado coincidente com a superfície média da placa se os reforços forem relativamente pouco profundos.

Ambos os elementos apresentam estratificação em camadas. Em cada camada admite-se que as propriedades mecânicas, o estado de tensão e o estado de deformação são constantes através da espessura, tomando os valores correspondentes à respectiva superfície média.

Ao modelo descrito aplica-se a teoria de Marguerre no sentido de poder ser utilizado na análise de cascas reforçadas de pequena curvatura [1,8,9].

## 4.2 Caracterização do elemento de placa

A aplicação da teoria de Mindlin ao estudo das placas baseia-se nas seguintes hipóteses, as quais permanecem válidas no presente contexto:

- 1) Os deslocamentos de qualquer ponto da placa são pequenos quando comparados com a sua espessura;
- 2) As tensões normais à superfície média da placa são desprezíveis qualquer que seja o carregamento existente;
- 3) As normais à superfície média antes da deformação mantêm-se rectas, mas não necessariamente normais aquela superfície após a deformação.

Para além das premissas acima referidas, recorre-se à teoria de Marguerre [1,8,9] segundo a qual a geometria das cascas de pequena curvatura pode ser modelada a partir de um elemento de referência do tipo placa, impondo um deslocamento fictício inicial segundo a normal.

### 4.2.1 Campo de deslocamentos

Tendo em conta o que foi anteriormente exposto, o vector deslocamento em qualquer ponto de coordenadas  $(x, y, z)$  pode ser expresso em função das translações  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  e  $\hat{w}_1$  da superfície média ( $z=0$ ) e das rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  da normal aquela superfície nos planos  $xz$  e  $yz$  respectivamente, conforme se observa da Figura 4.2 . Tem-se então:

$${}^t \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ \hat{v}(x, y) - z\theta_y(x, y) \\ \hat{w}_1(x, y) + \hat{w}_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

O termo  $\hat{w}_0$  define, de acordo com a teoria de Marguerre, a configuração inicial da placa antes da ocorrência da deformação resultante das cargas aplicadas.

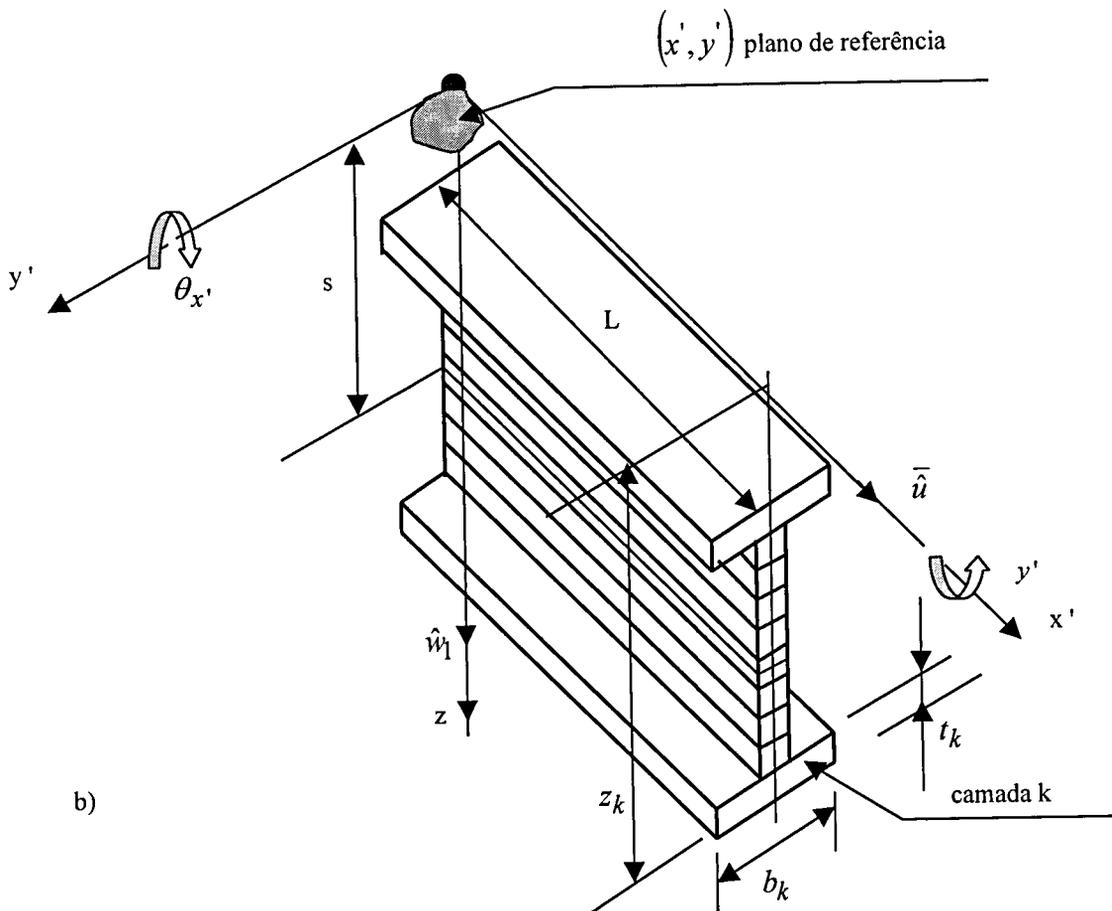
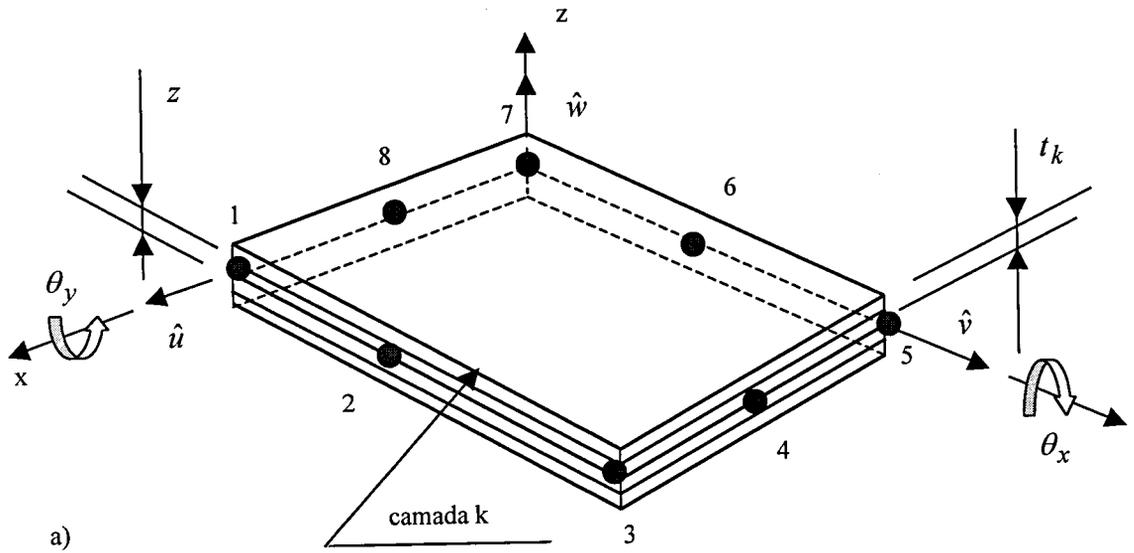


Figura 4.2. Deslocamentos e aproximação por camadas.

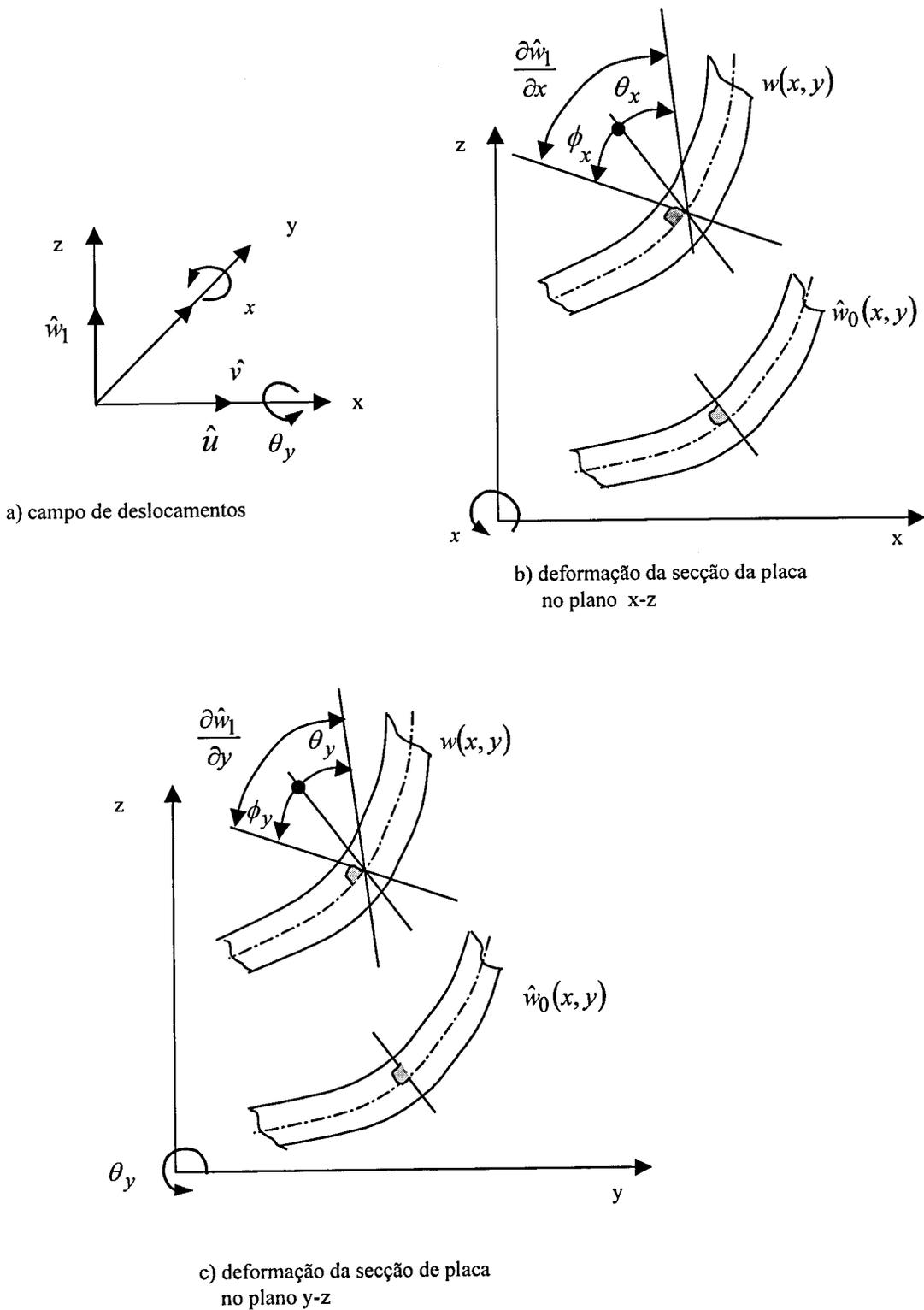


Figura 4.3 Campo de deslocamentos para o elemento de placa de Mindlin.

Dado que as normais à superfície média antes da deformação deixam de o ser após esta ter ocorrido, as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são iguais à soma algébrica das inclinações do eixo neutro com as rotações devidas às deformações de corte transversais, ou seja, atendendo a Figura 4.3

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} - \phi_x \\ \theta_y &= \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} - \phi_y \end{aligned} \tag{4.2}$$

O anulamento das correcções  $\phi_x$  e  $\phi_y$  reduziria a teoria em questão à formulação clássica de Kirchhoff. Os deslocamentos generalizados  ${}^t\hat{\mathbf{u}}$  em qualquer ponto da superfície média, considerada como superfície de referência, de um elemento finito com  $n$  nós, podem ser definidos a partir dos deslocamentos generalizados dos respectivos pontos nodais como

$${}^t\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w}_1 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{v}_i \\ \hat{w}_{1i} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

ou ainda

$${}^t\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n N_i {}^t\hat{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{I}_5 {}^t\hat{\mathbf{u}}_i \tag{4.4}$$

onde

$${}^t\hat{\mathbf{u}}_i = \{\hat{u}_i, \hat{v}_i, \hat{w}_{1i}, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^T \tag{4.5}$$

é o vector dos deslocamentos generalizados do nó  $i$ ,  $\mathbf{I}_5$  é a matriz identidade de dimensões (5x5) e  $N_i$  são as funções de forma. A equação (4.4) pode ser condensada na forma seguinte

$${}^t\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} {}^t\mathbf{d} \tag{4.6}$$

com

$$\mathbf{N} = [N_1 \dots N_k \dots N_n] \tag{4.7}$$

onde

$${}^t\mathbf{d} = \{{}^t\hat{\mathbf{u}}_1, {}^t\hat{\mathbf{u}}_2, \dots, {}^t\hat{\mathbf{u}}_n\}^T \tag{4.8}$$

é o vector de todas as variáveis nodais associadas ao elemento finito.

Pode-se definir os incrementos dos deslocamentos generalizados em qualquer ponto do elemento,  $\hat{\mathbf{u}}$ , em função dos seus valores nodais,

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n N_i \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (4.9)$$

onde

$$\mathbf{d} = \{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_n\}^T \quad (4.10)$$

Uma vez que se considera uma formulação isoparamétrica do método dos elementos Finitos, as funções de forma podem ser utilizadas para definir a geometria da estrutura; assim

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

onde  $(x, y)$  são as coordenadas cartesianas de qualquer ponto no elemento e  $(x_i, y_i)$  são as respectivas coordenadas do nó  $i$ . O deslocamento vertical inicial em qualquer ponto da superfície de referência,  $\hat{w}_0$ , pode ser interpolado a partir dos respectivos valores nodais como

$$\hat{w}_0 = \sum_{i=1}^n N_i \hat{w}_{0i} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{w}}_0 \quad (4.12)$$

em que  $\hat{\mathbf{w}}_0 = \{\hat{w}_{01}, \hat{w}_{02}, \dots, \hat{w}_{0n}\}^T$  é o vector dos deslocamentos verticais iniciais de cada um dos nós do elemento. A equação (4.11) permite definir a respectiva matriz Jacobiana que poderá ser apresentada na seguinte forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

sendo um elemento de volume discretizado definido por

$$dV = dx \, dy \, dz = (\det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta) \, dz \quad (4.14)$$

onde  $\det \mathbf{J}$  é o determinante da matriz Jacobiana.

### 4.2.2 Representação isoparamétrica

As funções de forma do elemento finito de placa apresentado apresentam como características principais a sua continuidade no interior dos elementos e a observância da seguinte condição

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) = 1 \quad (4.15)$$

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.16)$$

sendo  $\xi$  e  $\eta$  as coordenadas naturais do elemento finito [4,5].

As funções de forma assim definidas garantem a continuidade do campo de deslocamentos no interior do elemento e a continuidade do tipo  $C_0$  entre elementos.

O elemento adoptado neste trabalho foi o elemento de nove nós de Lagrange cujas funções de forma definem-se como

Nós de canto:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (\xi^2 + \xi \xi_i) (\eta^2 + \eta \eta_i) \quad (4.17)$$

Nós centrais dos lados:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[ \eta_i^2 (1 - \xi^2) (\eta^2 - \eta \eta_i) + \xi_i^2 (1 - \eta^2) (\xi^2 - \xi \xi_i) \right] \quad (4.18)$$

Nós central do elemento:

$$N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \quad (4.19)$$

### 4.2.3 Campo de deformações

O cálculo das deformações é feito a partir do vector das deformações de Green, o qual, escrito em forma vectorial, é definido [1] por

$${}^t\varepsilon = \left\{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz} \right\}^T$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

onde se eliminou a componente  $\varepsilon_z$ . No entanto, a aplicação da teoria de Marguerre só é possível se

$$\left( \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial x} \right)^2 \ll 1 \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial y} \right)^2 \ll 1 \quad (4.21)$$

O vector das deformações apresentado pode ser simplificado tomando em consideração as hipóteses de von Karman [10], que admitem serem as derivadas de  $u$  e  $v$  em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$  pequenas. Observando que  $w$  pode ser considerado independente da variável  $z$ , o vector das deformações pode ser escrito em função dos deslocamentos  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  e  $\hat{w}_1$  da superfície média e das rotações da normal  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , como

$${}^t\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} {}^t\varepsilon_p \\ {}^t\varepsilon_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} {}^t\varepsilon_m + z {}^t\varepsilon_f + {}^t\varepsilon_I + {}^t\varepsilon_{NL} \\ {}^t\varepsilon_c \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

onde  ${}^t\varepsilon_p$  representa as deformações na superfície média,  ${}^t\varepsilon_m$  as deformações de membrana,  ${}^t\varepsilon_f$  as deformações de flexão,  ${}^t\varepsilon_I$  as deformações iniciais,  ${}^t\varepsilon_{NL}$  as deformações não lineares e  ${}^t\varepsilon_c$  as deformações de corte transversais.

As componentes do vector  $\varepsilon$  são dadas por

$${}^t\varepsilon_m = \left\{ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right\} \quad (4.23)$$

$${}^t\varepsilon_f = \left\{ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right\}^T \quad (4.24)$$

$${}^t\varepsilon_I = \left\{ \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial x}, \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial y}, \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial x} \right\}^T \quad (4.25)$$

$${}^t\varepsilon_{NL} = \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} \right\}^T \quad (4.26)$$

$${}^t\varepsilon_c = \left\{ \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} - \theta_x, \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} - \theta_y \right\}^T \quad (4.27)$$

A utilização das hipóteses simplificativas de von Kármán no contexto da formulação Lagrangeana Total só poderá ser admitida como válida se as rotações sofridas pela estrutura, em relação à sua configuração inicial, forem consideradas moderadas.

Tendo em conta as equações (4.6) e (4.12), o vector das deformações de Green, definido pelas equações (4.22) a (4.27), pode ser escrito em termos do vector dos deslocamentos generalizados nodais do seguinte modo

$$\begin{aligned} {}^t\varepsilon &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} {}^t\hat{\mathbf{u}}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z\mathbf{B}_f + \mathbf{B}_I + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{NL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} {}^t\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B} {}^t\mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde  $\mathbf{B}_m$ ,  $\mathbf{B}_f$  e  $\mathbf{B}_c$  são as submatrizes associadas às deformações lineares de membrana  $\varepsilon_m$ , de flexão  $\varepsilon_f$ , e de corte  $\varepsilon_c$ , respectivamente;  $\mathbf{B}_I$  é a submatriz associada à deformação inicial  $\varepsilon_I$ , e  $\mathbf{B}_{NL}$  é a submatriz associada à componente não linear do vector das deformações  $\varepsilon_{NL}$ . A matriz  $\mathbf{B}$  é correntemente designada por matriz das deformações do elemento. Tem-se então para um nó genérico  $i$

$$\mathbf{B}_{mi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{B}_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{B}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

e

$$\mathbf{B}_{ki} = \mathbf{A}_{ki} \mathbf{G}_i \quad (4.32)$$

com

$$\mathbf{A}_{ki} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{w}_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \hat{w}_k}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{w}_k}{\partial y} & \frac{\partial \hat{w}_k}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad k = 0 \text{ ou } 1 \quad (4.33)$$

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

onde a submatriz  $\mathbf{B}_{ki}$  é igual à submatriz  $\mathbf{B}_{Ii}$  para  $k=0$  e igual à submatriz  $\mathbf{B}_{NLi}$  para  $k=1$ .

Pode-se exprimir o vector dos incrementos das deformações  $\varepsilon$  em função do vector dos incrementos de deslocamentos  $\mathbf{d}$ . Considerando a equação (4.28) pode-se então escrever

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_p \\ \Delta\varepsilon_c \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z\mathbf{B}_f + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{NL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix}_i \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Nas expressões anteriormente apresentadas  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$  e  $\frac{\partial N_i}{\partial y}$  representam as derivadas cartesianas das funções de forma associadas a um nó  $i$  do elemento finito. Uma vez que as funções de forma estão definidas em coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ , os valores daquelas derivadas podem ser calculados recorrendo à diferenciação em cadeia, o que pode ser traduzido, em notação matricial, por

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

onde  $\mathbf{J}^{-1}$  representa a matriz inversa da matriz Jacobiana do elemento.

#### 4.2.4 Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez tangencial  $\mathbf{K}_T$  definida na equação (3.54) e resultante das condições de equilíbrio (3.49) pode se escrita [11] como

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_A + \mathbf{K}_\sigma \quad (4.37)$$

As duas matrizes componentes em (4.37) podem ser definidas do seguinte modo:

a) Matriz  $\mathbf{K}_A$

Usando a definição da matriz  $\mathbf{B}$  estabelecida em (4.35) obtém-se

$$\mathbf{K}_A = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z\mathbf{B}_f + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{NL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix}^T \mathbf{D}^* \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z\mathbf{B}_f + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{NL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} dV \quad (4.38)$$

ou

$$\mathbf{K}_A = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z\mathbf{B}_f + \mathbf{B}_{INL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix}^T \mathbf{D}^* \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z\mathbf{B}_f + \mathbf{B}_{INL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} dV \quad (4.39)$$

considerando

$$\mathbf{B}_{INL} = \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{NL} \quad (4.40)$$

e a matriz constitutiva do material na forma

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{D}_{pc} \\ \mathbf{D}_{pc} & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

sendo  $\mathbf{D}_p$  e  $\mathbf{D}_c$  as submatrizes relacionadas com as deformações no plano da camada  ${}^t\varepsilon_p$  e as deformações de corte  ${}^t\varepsilon_c$ , e  $\mathbf{D}_{pc}$  é a submatriz de interação entre  ${}^t\varepsilon_p$  e  ${}^t\varepsilon_c$ .

A contribuição genérica para a matriz  $\mathbf{K}_A$  dada pelo agrupamento de dois quaisquer nós  $i$  e  $j$  do elemento possui o seguinte aspecto

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_A)_{ij} = & (\mathbf{K}_{mm} + \mathbf{K}_{mL} + \mathbf{K}_{mf} + \mathbf{K}_{mc})_{ij} + \\ & (\mathbf{K}_{LL} + \mathbf{K}_{Lf} + \mathbf{K}_{ff} + \mathbf{K}_{Lc} + \mathbf{K}_{fc} + \mathbf{K}_{cc})_{ij} + \\ & (\mathbf{K}_{mL} + \mathbf{K}_{mf} + \mathbf{K}_{mc} + \mathbf{K}_{Lf} + \mathbf{K}_{Lc} + \mathbf{K}_{fc})_{ij}^T \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde, após integração na espessura da placa, as diferentes submatrizes são definidas como

$$(\mathbf{K}_{mm})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_m)_i^T \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_m)_j dV = \int_A (\mathbf{B}_m)_i^T \bar{\mathbf{D}}_1 (\mathbf{B}_m)_j dA \quad (4.43)$$

$$(\mathbf{K}_{mL})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_m)_i^T \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_{INL})_j dV = \int_A (\mathbf{B}_m)_i^T \bar{\mathbf{D}}_1 (\mathbf{B}_{INL})_j dA \quad (4.44)$$

$$(\mathbf{K}_{mf})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_m)_i^T z \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_f)_j dV = \int_A (\mathbf{B}_m)_i^T \bar{\mathbf{D}}_2 (\mathbf{B}_f)_j dA \quad (4.45)$$

$$(\mathbf{K}_{mc})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_m)_i^T \mathbf{D}_{pc} (\mathbf{B}_c)_j dV = \int_A (\mathbf{B}_m)_i^T \bar{\mathbf{D}}_4 (\mathbf{B}_c)_j dA \quad (4.46)$$

$$(\mathbf{K}_{LL})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_{INL})_i^T \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_{INL})_j dV = \int_A (\mathbf{B}_{INL})_i^T \bar{\mathbf{D}}_1 (\mathbf{B}_{INL})_j dA \quad (4.47)$$

$$(\mathbf{K}_{Lf})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_{INL})_i^T z \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_f)_j dV = \int_A (\mathbf{B}_{INL})_i^T \bar{\mathbf{D}}_2 (\mathbf{B}_f)_j dA \quad (4.48)$$

$$(\mathbf{K}_{ff})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_f)_i^T z^2 \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_f)_j dV = \int_A (\mathbf{B}_f)_i^T \bar{\mathbf{D}}_3 (\mathbf{B}_f)_j dA \quad (4.49)$$

$$(\mathbf{K}_{Lc})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_{INL})_i^T \mathbf{D}_{pc} (\mathbf{B}_c)_j dV = \int_A (\mathbf{B}_{INL})_i^T \bar{\mathbf{D}}_4 (\mathbf{B}_c)_j dA \quad (4.50)$$

$$(\mathbf{K}_{fc})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_f)_i^T z \mathbf{D}_{pc} (\mathbf{B}_c)_j dV = \int_A (\mathbf{B}_f)_i^T \bar{\mathbf{D}}_5 (\mathbf{B}_c)_j dA \quad (4.51)$$

$$(\mathbf{K}_{cc})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_c)_i^T \mathbf{D}_c (\mathbf{B}_c)_j dV = \int_A (\mathbf{B}_c)_i^T \bar{\mathbf{D}}_6 (\mathbf{B}_c)_j dA \quad (4.52)$$

As matrizes constitutivas  $\bar{\mathbf{D}}_k$ ,  $k=1, \dots, 6$  referidas nas expressões (4.43) a (4.52) são obtidas integrando através da espessura da placa, adoptando a regra da meia ordenada na contribuição das várias camadas consideradas, ou seja,

$$\bar{\mathbf{D}}_1 = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{D}_p dz = \sum_{k=1}^{mp} t_k (\mathbf{D}_p)_k \quad (4.53)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_2 = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \mathbf{D}_p dz = \sum_{k=1}^{mp} t_k z_k (\mathbf{D}_p)_k \quad (4.54)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_3 = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \mathbf{D}_p dz = \sum_{k=1}^{mp} t_k (z_k^2 + t_k^2/12) (\mathbf{D}_p)_k \quad (4.55)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_4 = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{D}_{pc} dz = \sum_{k=1}^{mp} t_k (\mathbf{D}_{pc})_k \quad (4.56)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_5 = \int_{-t/2}^{t/2} z \mathbf{D}_{pc} dz = \sum_{k=1}^{mp} t_k z_k (\mathbf{D}_{pc})_k \quad (4.57)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_6 = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{D}_c dz = \sum_{k=1}^{mp} t_k (\mathbf{D}_c)_k \quad (4.58)$$

onde  $mp$  designa o número de camadas para o laminado da placa, enquanto que para uma camada genérica  $k$ ,  $t_k$  é a sua espessura e  $z_k$  é a distância, em valor relativo, da sua superfície média ao plano de referência da placa (excentricidade).

## 2) Matriz $\mathbf{K}_\sigma$

Para a matriz das tensões iniciais ou geométrica a contribuição relativa à interação dos nós  $i$  e  $j$  é dada por

$$(\mathbf{K}_\sigma)_{ij} = \int_V \mathbf{G}_i^T \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \mathbf{G}_j dV \quad (4.59)$$

ou considerando o integral de área aplicado à superfície média da placa

$$(\mathbf{K}_\sigma)_{ij} = \int_V \mathbf{G}_i^T \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{bmatrix} \mathbf{G}_j dV \quad (4.60)$$

### 4.2.5 Forças nodais equivalentes ao estado de tensão

Para obter o vector das forças não balanceadas definido na equação (3.59) é necessário calcular vector das forças nodais equivalentes associado ao estado de tensão na estrutura  $\mathbf{r}(\mathbf{d})$  [13] cuja definição é dada por

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}) = \int_V \mathbf{B}^T {}^t\sigma dV \quad (4.61)$$

Substituindo na equação (4.61) a matriz  $\mathbf{B}$  definida na equação (4.35) e integrando ao longo da espessura da placa usando a regra da meia ordenada, o vector das forças nodais equivalentes associado ao nó  $i$  é dado por

$$\mathbf{r}_i = \int_A [\mathbf{B}_m + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{NL}]_i^T \bar{\mathbf{N}} dA + \int_A [\mathbf{B}_f]_i^T \bar{\mathbf{M}} dA + \int_A [\mathbf{B}_c]_i^T \mathbf{Q} dA \quad (4.62)$$

onde os esforços generalizados na secção da placa  $\bar{\mathbf{N}}$ ,  $\bar{\mathbf{M}}$  e  $\mathbf{Q}$ , definidos na Figura 4.4, podem ser calculados integrando o vector das tensões,  $\mathbf{S}$ , explicitamente através da espessura  $t$  da placa. Desta forma o vector dos esforços de membrana é dado por

$$\bar{\mathbf{N}} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T = \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} (S_x, S_y, S_{xy}) dz \right\}^T \quad (4.63)$$

o vector dos esforços de flexão por

$$\bar{\mathbf{M}} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T = \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} (S_x, S_y, S_{xy}) z dz \right\}^T \quad (4.64)$$

e o vector dos esforços de corte transversais por

$$\mathbf{Q} = \{Q_x, Q_y\}^T = \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} (S_{xy}, S_{yz}) dz \right\}^T \quad (4.65)$$

Em virtude do tipo de distribuição considerado para o estado de tensão, é adoptada a regra da meia ordenada nos processos de integração acima indicados. Assim, considerando a estrutura em camadas, os esforços generalizados podem ser determinados por,

$$\bar{\mathbf{N}} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T = \left\{ \sum_{k=1}^{mp} (S_x, S_y, S_{xy})_k t_k \right\}^T \quad (4.66)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T = \left\{ \sum_{k=1}^{mp} (S_x, S_y, S_{xy})_k t_k z_k \right\}^T + \mathbf{M}^c \quad (4.67)$$

$$\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y)^T = \left\{ \sum_{k=1}^{mp} (S_{xz}, S_{yz})_k t_k \right\}^T \quad (4.68)$$

onde  $mp$  é o número de camadas consideradas para o laminado de placa,  $t_k$  e  $z_k$  a espessura e a excentricidade, respectivamente, de cada camada e  $\mathbf{M}^c$  um vector de correcção que tem como objectivo corrigir a contribuição, para o vector  $\bar{\mathbf{M}}$ , das tensões instaladas nas camadas sem plastificação do material.

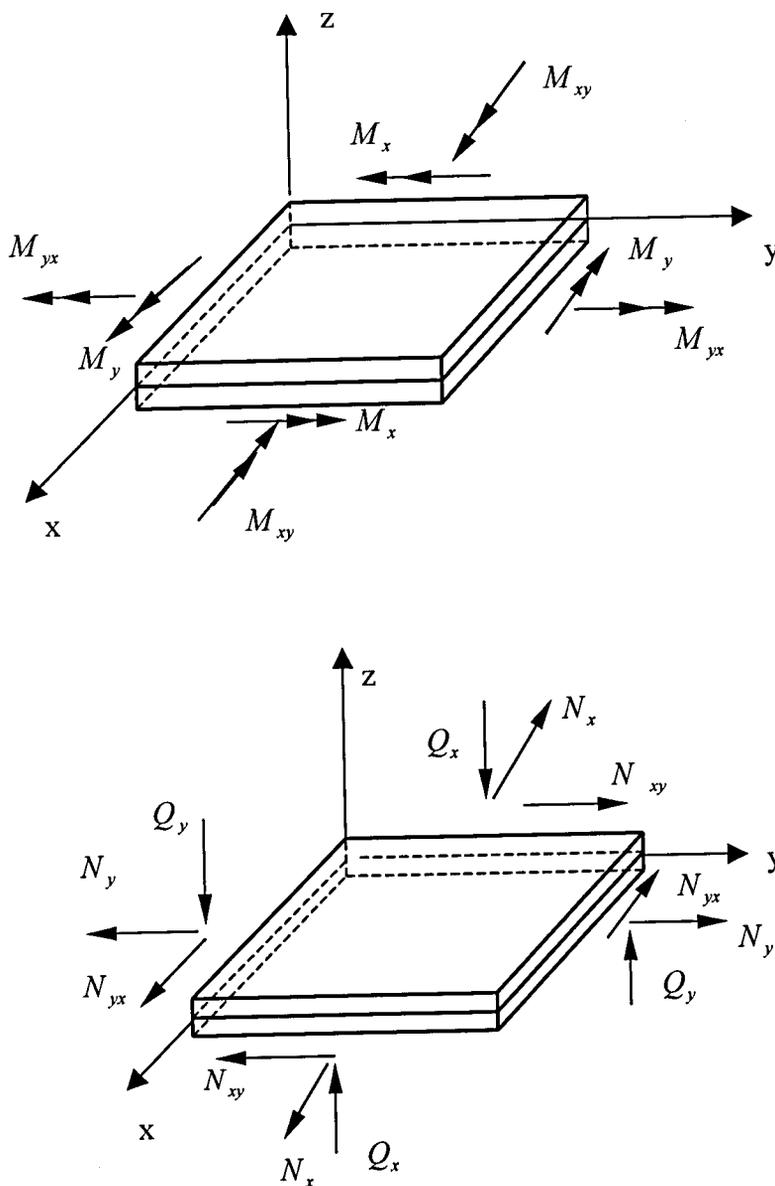


Figura 4.4 esforços generalizados no elemento de placa.

Com efeito, quando o material de uma camada se comporta elasticamente, a distribuição de tensões nessa camada assume uma forma trapezoidal e nunca a rectangular resultante da simples aplicação da regra da meia ordenada. A eliminação de tal desvio pode traduzir-se pela introdução de uma componente de correcção  $\mathbf{M}^c$  sempre que seja necessário. Assim, para uma camada  $j$  o vector de correcção pode ser definido por

$$\mathbf{M}_j^c = \left\{ M_x^c, M_y^c, M_{xy}^c \right\}_j^T = \frac{t_j^3}{12 z_j} \left\{ S_x^f, S_y^f, S_{xy}^f \right\}_j^T \quad (4.69)$$

onde

$$\left( \mathbf{S}_f \right)_j = \left\{ S_x^f, S_y^f, S_{xy}^f \right\}_j^T \quad (4.70)$$

é o vector das tensões no plano da camada devidas às deformações de flexão  $\varepsilon_f$ , definidas na expressão (4.24), ou seja:

$$\left( \mathbf{S}_f \right)_j = z_j \left( \mathbf{D}_p \right)_j \quad \varepsilon_f = z_j \left( \mathbf{D}_p \right)_j \mathbf{B}_f^T \mathbf{d} \quad (4.71)$$

e  $\mathbf{D}_p$  é a submatriz de elasticidade relativa às deformações de flexão para a camada em análise.

### 4.2.6 Relações Constitutivas

O vector das segundas tensões de Piola-Kirchhoff associado ao vector das deformações de Green, apresentado nas expressões (4.22) a (4.27), é dado por

$${}^t\mathbf{S} = \left\{ S_x, S_y, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} \right\}^T \quad (4.72)$$

A consideração da existência de camadas através da espessura da placa, exige a definição dos vectores das tensões e das deformações em cada uma delas, os quais deverão estar referidos ao respectivo referencial material da camada (1,2,3), conforme a Figura 4.5. Assim admite-se que o estado de tensão e o estado de deformação são constantes através da espessura de cada camada, tomando os valores correspondentes á respectiva superfície média, de acordo com a Figura 4.2.

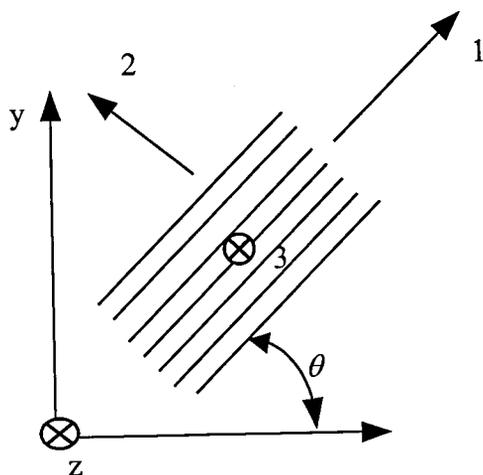


Figura 4.5 Referencial material (1, 2, 3) e referencial global (x, y, z)

Em cada camada do laminado da placa assume-se um estado de tensão, no qual se despreza a contribuição da tensão normal  $S_z$ , tendo por base as hipóteses conhecidas da Teoria da Elasticidade [12]. As relações constitutivas (tensão- deformação) elásticas para uma camada típica, referidas aos seus eixos materiais (1,2,3) são dadas por:

$${}^t\sigma_{1,2,3} = \bar{\mathbf{D}} {}^t\varepsilon_{1,2,3} \quad (4.73)$$

em que o vector das tensões  $\mathbf{S}$  é definido por :

$${}^t\mathbf{S}_{1,2,3} = \{S_1, S_2, S_{12}, S_{13}, S_{23}\}^T \quad (4.74)$$

e o correspondente vector das deformações expresso por:

$${}^t\varepsilon_{1,2,3} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T \quad (4.75)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{D}}$  representa a matriz de elasticidade do material constituinte da camada típica, referida ao sistema de eixos materiais, sendo obtida pela seguinte equação:

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}}_c \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

em que  $\mathbf{0}$  é matriz nula, e as submatrizes  $\bar{\mathbf{D}}_p$  e  $\bar{\mathbf{D}}_c$  compreendem os termos de membrana e de flexão ( $\bar{\mathbf{D}}_p$ ), e os termos de corte ( $\bar{\mathbf{D}}_c$ ), respectivamente, sendo definidos pelas expressões

$$\bar{\mathbf{D}}_p = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_c = \begin{bmatrix} K_1 G_{13} & 0 \\ 0 & K_2 G_{23} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Refira-se que, geralmente, para um material ortotrópico  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$  são características independentes a determinar e os termos  $K_1$  e  $K_2$  são factores correctivos do corte, destinados a corrigir a hipótese simplificativa em que se consideram as deformações de corte transversais constantes através da espessura.

A definição do vector das tensões, em cada camada do laminado, no referencial global (x, y, z) é feita recorrendo à transformação da equação (4.73), ou seja,

$${}^t\mathbf{S} = \mathbf{D} {}^t\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.79)$$

onde  ${}^t\mathbf{S}$  é o vector das tensões definido pela equação (4.72),  ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}$  o vector das deformações definido em (4.28) e

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

em que  $\mathbf{T}$  representa a matriz de transformação que relaciona os sistemas de eixos materiais (1,2,3) e global (x, y, z), definida por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

onde  $\mathbf{T}_1$  é utilizada para a transformação dos termos de membrana e flexão

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

e  $\mathbf{T}_2$  para a transformação dos termos de corte

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

### 4.3 Caracterização do elemento de viga

As hipóteses de base da teoria de Timonshenko são semelhantes às que foram indicadas para a teoria de Mindlin, ou seja:

- 1) Os deslocamentos verticais de qualquer ponto da viga são pequenos quando comparados com a sua altura;
- 2) As tensões normais ao eixo neutro são desprezáveis;
- 3) As normais ao eixo neutro antes da deformação mantêm rectas, mas não necessariamente normais aquele eixo, após a deformação.

Para além das hipóteses acima referidas impõem-se ainda as seguinte condições simplificativas:

- 4) A viga é simétrica em relação ao plano  $x'z$ , Figura 4.6;
- 5) A torção de empenamento da secção da viga é desprezável em relação à torção de St.Venant;
- 6) A rigidez à flexão no plano  $x'y'$ , paralelo ao plano da placa, é considerada nula.

#### 4.3.1 Campo de Deslocamentos

O campo de deslocamentos a definir deve ter em conta duas situações: ser semelhante ao que foi definido para o elemento de placa e representar o tipo de ligação viga-placa que se deseja.

Assim o deslocamento axial  ${}^t\bar{u}$  em qualquer ponto de coordenadas  $(x', y', z')$  pode ser expresso em função do deslocamento axial do eixo neutro,  $\bar{u}$ , e da rotação da normal  $\theta_{x'}$  como

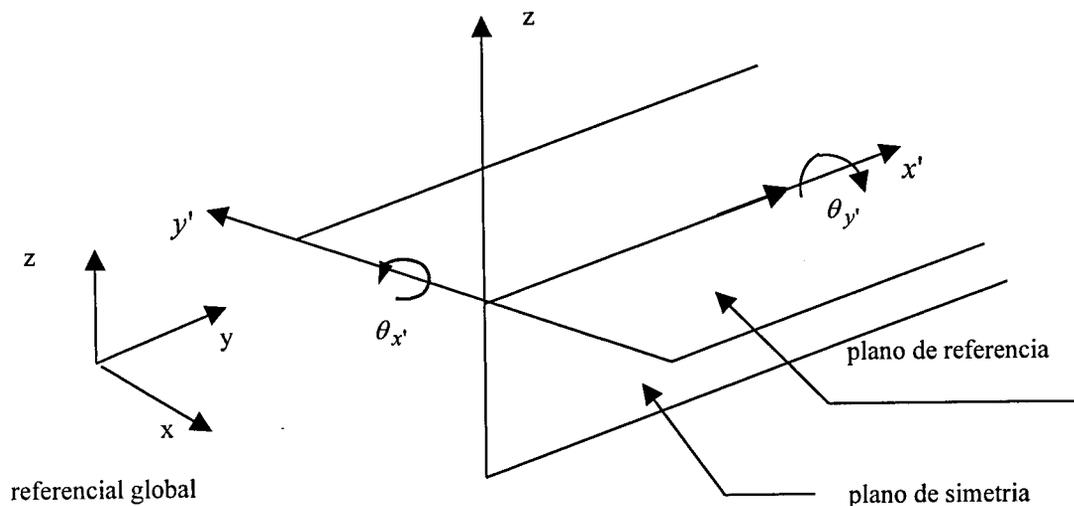
$${}^t\bar{\mathbf{u}}(x', y', z') = \bar{\mathbf{u}}(x') - z \theta_{x'}(x') \tag{4.84}$$

conforme as Figuras 4.2 e 4.6.

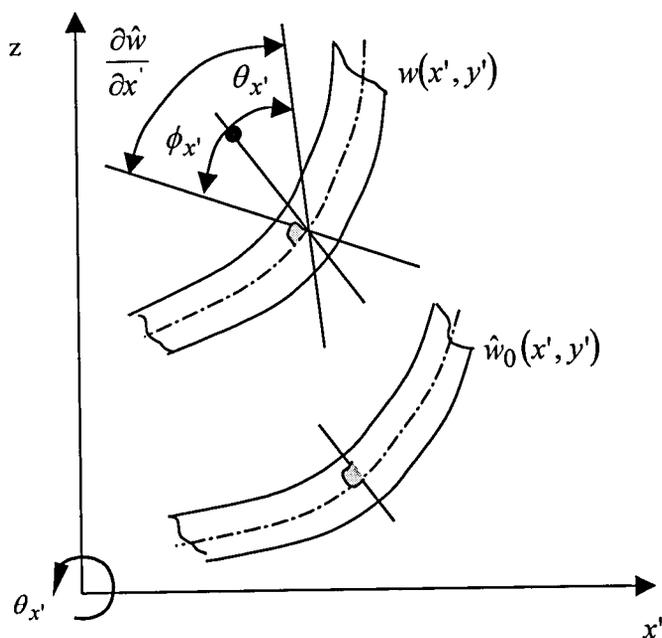
O deslocamento  ${}^t\bar{\mathbf{w}} = {}^t\mathbf{w}$  é dado por

$${}^t\mathbf{w}(x', y', z') = \hat{\mathbf{w}}_1(x') + \hat{\mathbf{w}}_0(x') \tag{4.85}$$

onde  $\hat{\mathbf{w}}_0$  define a configuração inicial da viga antes de ocorrer a deformação.



a) campo de deslocamentos; referenciais local e global



b) deformação da seção da viga no plano  $x' - z$

Figura 4.6 Campo de deslocamentos para o elemento de viga de Timonshenko.

À semelhança do que se verificava para a placa a rotação da normal  $\theta_{x'}$  é dada por

$$\theta_{x'}(x') = \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x'} - \phi_{x'} \quad (4.86)$$

ou seja, é igual à soma algébrica da inclinação do eixo neutro com a rotação devida à deformação de corte transversal, Figura 4.6.

Os deslocamentos generalizados  $\bar{\mathbf{u}}$  em qualquer ponto de coordenadas  $(x', y', z')$  de um elemento finito de viga com três nós podem ser obtidos em função dos respectivos valores nodais, a partir de

$${}^t \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \hat{w}_1 \\ \theta_{x'} \\ \theta_{y'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \hat{w}_{1i} \\ \theta_{x'i} \\ \theta_{y'i} \end{Bmatrix} \quad (4.87)$$

ou

$${}^t \bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^3 N_i {}^t \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{I}_4 {}^t \bar{\mathbf{u}}_i \quad (4.88)$$

onde

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \{\bar{u}_i, \bar{w}_{1i}, \theta_{x'i}, \theta_{y'i}\}^T \quad (4.89)$$

é o vector dos deslocamentos no nó  $i$ ,  $\mathbf{I}_4$  é a matriz identidade de dimensões (4x4) e  $N_i$  são as funções de forma. O vector  ${}^t \bar{\mathbf{u}}$ , definido no referencial local, pode ser relacionado com o respectivo vector,  $\hat{\mathbf{u}}_i$ , referido ao sistema de eixos global  $(x, y, z)$  e definido na Figura 4.6, através de uma matriz de transformação  $\bar{\mathbf{A}}$ . Considerando a Figura 4.7 pode-se escrever

$${}^t \bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{A}} {}^t \hat{\mathbf{u}}_i \quad (4.90)$$

sendo  $\bar{\mathbf{A}}$  dada por

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo que o semieixo positivo  $x'$  do referencial local forma com o semieixo positivo  $x$  do referencial global.

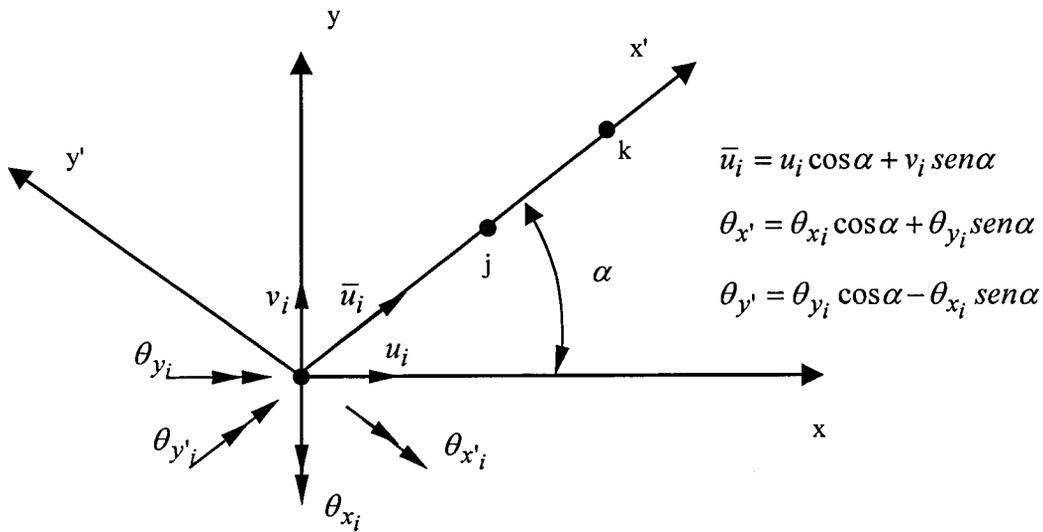


Figura 4.7 Mudança de referencial no elemento de viga.

A equação (4.88) pode então ser escrita como

$${}^t \bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^3 N_i \bar{\mathbf{A}} {}^t \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N} \mathbf{A}^* {}^t \mathbf{d} \tag{4.92}$$

com

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \tag{4.93}$$

sendo  $\mathbf{A}^*$  a matriz de transformação definida por

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \tag{4.94}$$

onde  $\mathbf{0}$  é a matriz nula de dimensões(4x5), e

$${}^t \mathbf{d} = \{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3\}^T \tag{4.95}$$

é o vector das variáveis nodais associadas ao elemento finito de três nós.

O valor da coordenada  $x'$  em qualquer ponto da secção transversal do elemento de viga pode ser dado pela expressão

$$x' = \sum_{i=1}^3 N_i x'_i \quad (4.96)$$

a qual pode ser apresentada em função das coordenadas globais  $x_i$  e  $y_i$ , dos nós do elemento considerando a relação

$$x'_i = x_i \cos \alpha + y_i \operatorname{sen} \alpha \quad (4.97)$$

conforme se observa na Figura 4.7, obtendo-se

$$x' = \sum_{i=1}^3 N_i (x_i \cos \alpha + y_i \operatorname{sen} \alpha) \quad (4.98)$$

pelo que a matriz Jacobiana passará a escrever-se na forma

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} (x_i \cos \alpha + y_i \operatorname{sen} \alpha) \quad (4.99)$$

O elemento de volume discretizado toma então o valor

$$\begin{aligned} dV &= dx' dy' dz' \\ &= dx' dA = dL dA = (\det \mathbf{J} d\xi) dA \end{aligned} \quad (4.100)$$

onde o determinante da matriz Jacobiana,  $\det \mathbf{J}$ , é sempre positivo.

O deslocamento vertical inicial em qualquer ponto do eixo  $x'$  pode ser interpolada a partir dos respectivos valores nodais, ou seja,

$$\hat{w}_0 = \sum_{i=1}^3 N_i \hat{w}_{0i} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{w}}_0 \quad (4.101)$$

com

$$\hat{\mathbf{w}}_0 = \{\hat{w}_{01}, \hat{w}_{02}, \hat{w}_{03}\}^T \quad (4.102)$$

### 4.3.2 Representação isoparamétrica

As funções de forma adoptadas para o elemento finito de viga e três nós satisfazem as seguintes condições

$$\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) = 1 \quad (4.103)$$

$$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.104)$$

sendo  $\xi$  a coordenada natural do elemento finito [5].

As funções de forma associadas a cada um dos nós do elemento finito são

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \quad (4.105)$$

$$N_2(\xi) = (1-\xi)(1+\xi) \quad (4.106)$$

$$N_3(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad (4.105)$$

onde o nó 2 é o nó intermédio.

### 4.3.3 Campo de deformações

Tal como acontece com o elemento de placa, a aplicação das hipóteses simplificativas de von Kármán e de Timonshenko ao vector das deformações de Green da equação (4.20) permite escrever o vector das deformações na seguinte forma

$${}^t \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{x'z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m + z\varepsilon_f + \varepsilon_I + \varepsilon_{NL} \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} \quad (4.106)$$

com a deformação de corte transversal,  $\gamma_{x'z}$  dada por

$$\varepsilon_{x'z} = \varepsilon_c = \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x'} - \theta_{x'} \quad (4.107)$$

as componentes da deformação,  $\varepsilon_{x'}$ , definidas por

$$\varepsilon_m = \frac{\partial \bar{\hat{u}}_1}{\partial x'} \quad (4.108)$$

$$\varepsilon_f = -\frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'} \quad (4.109)$$

$$\varepsilon_I = \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x'} \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial x'} \quad (4.110)$$

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x'} \right)^2 \quad (4.111)$$

e tendo o mesmo significado do que foi apontado na secção 4.2.

Seguindo ainda um processo semelhante ao adoptado para o elemento de placa o vector das deformações de Green, pode ser apresentado em função do vector  $\mathbf{a}$  da seguinte forma

$${}^t \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{x'z} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_p \\ \bar{\mathbf{B}}_c \end{bmatrix}_i {}^t \bar{\hat{\mathbf{u}}}_i = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_m + z \bar{\mathbf{B}}_f + \bar{\mathbf{B}}_I + 1/2 \bar{\mathbf{B}}_{NL} \\ \bar{\mathbf{B}}_c \end{bmatrix}_i {}^t \bar{\hat{\mathbf{u}}}_i \quad (4.112)$$

ou seja atendendo à equação (4.90).

$$\begin{aligned} {}^t \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{x'z} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} {}^t \hat{\mathbf{u}}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_I + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix}_i {}^t \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B} {}^t \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.113)$$

onde, neste caso, a submatriz  $\mathbf{B}_i$  associada ao nó genérico  $i$  do elemento é definida a partir das submatrizes

$$\mathbf{B}_{mi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x'} \cos \alpha, & \frac{\partial N_i}{\partial x'} \sin \alpha, & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

$$\mathbf{B}_{fi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3, & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} \cos \alpha, & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$\mathbf{B}_{ci} = \left[ \mathbf{0}_2, \quad \frac{\partial N_i}{\partial x'} \quad -N_i \cos \alpha \quad -N_i \operatorname{sen} \alpha \right] \quad (4.116)$$

e

$$\mathbf{B}_{ki} = \mathbf{A}_{ki} \mathbf{G}_i \quad (4.117)$$

com

$$A_{ki} = \frac{\partial \hat{w}_k}{\partial x'} \quad , \quad k = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad (4.118)$$

$$\mathbf{G}_i = \left[ \mathbf{0}_2 \quad \frac{\partial N_i}{\partial x'} \quad \mathbf{0}_2 \right] \quad (4.119)$$

e onde  $\mathbf{0}_r$  é matriz nula de dimensões (1xr) e a submatriz  $\mathbf{B}_{ki}$  é igual a  $\mathbf{B}_{Ii}$  para  $k=0$  e igual a  $\mathbf{B}_{NLi}$  para  $k=1$ .

Para além das componentes  $\varepsilon_{x'}$  e  $\varepsilon_{x'z}$  do vector das deformações há ainda a considerar a deformação torcional  $\varepsilon_t$ , cujo valor pode ser determinado por

$$\varepsilon_t = \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_{ti} {}^t \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B}_t {}^t \mathbf{d} \quad (4.120)$$

sendo

$$\mathbf{B}_{ti} = \left[ \mathbf{0}_3, \quad -\frac{\partial N_i}{\partial x} \operatorname{sen} \alpha, \quad \frac{\partial N_i}{\partial x} \cos \alpha \right] \quad (4.121)$$

Pode-se exprimir o vector dos incrementos das deformações  $\varepsilon$  em função do vector dos incrementos de deslocamentos  $\mathbf{d}$ . Considerando a equação (4.113) pode-se então escrever

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_p \\ \Delta \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{NL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.122)$$

As derivadas cartesianas  $\frac{\partial N_i}{\partial x'}$ , utilizadas nas expressões acima apresentadas podem ser calculadas a partir da expressão

$$\frac{\partial N_i}{\partial x'} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x'} \quad (4.123)$$

uma vez que as funções de forma estão definidas [1] na coordenada natural  $\xi$ , ou ainda, considerando a matriz Jacobiana do elemento

$$\frac{\partial N_i}{\partial x'} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad (4.124)$$

#### 4.3.4 Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez tangencial do elemento de viga toma a forma

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_A + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_t \quad (4.125)$$

As três matrizes componentes em (4.125) podem ser definidas do seguinte modo:

a) Matriz  $\mathbf{K}_A$

Usando a definição da matriz  $\mathbf{B}$  estabelecida em (4.122) obtém-se

$$\mathbf{K}_A = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z\mathbf{B}_f + \mathbf{B}_{INL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{D}_{pc} \\ \mathbf{D}_{pc} & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + z\mathbf{B}_f + \mathbf{B}_{INL} \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} dV \quad (4.126)$$

considerando

$$\mathbf{B}_{INL} = \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{NL} \quad (4.127)$$

A contribuição genérica para a matriz  $\mathbf{K}_A$  dada pelo agrupamento de dois quaisquer nós  $i$  e  $j$  do elemento é definida como

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_A)_{ij} = & \left( \mathbf{K}_{mm} + \mathbf{K}_{mL} + \mathbf{K}_{mf} + \mathbf{K}_{mc} \right)_{ij} + \\ & \left( \mathbf{K}_{LL} + \mathbf{K}_{Lf} + \mathbf{K}_{ff} + \mathbf{K}_{Lc} + \mathbf{K}_{fc} + \mathbf{K}_{cc} \right)_{ij} + \\ & \left( \mathbf{K}_{mL} + \mathbf{K}_{mf} + \mathbf{K}_{mc} + \mathbf{K}_{Lf} + \mathbf{K}_{Lc} + \mathbf{K}_{fc} \right)_{ij}^T \end{aligned} \quad (4.128)$$

onde, considerando a integração em toda a secção da viga, as diferentes submatrizes são definidas como

$$(\mathbf{K}_{mm})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_m)_i^T \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_m)_j dV = \int_L (\mathbf{B}_m)_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_1 (\mathbf{B}_m)_j dL \quad (4.129)$$

$$(\mathbf{K}_{mL})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_m)_i^T \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_{INL})_j dV = \int_L (\mathbf{B}_m)_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_1 (\mathbf{B}_{INL})_j dL \quad (4.130)$$

$$(\mathbf{K}_{mf})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_m)_i^T z \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_f)_j dV = \int_L (\mathbf{B}_m)_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_2 (\mathbf{B}_f)_j dL \quad (4.131)$$

$$(\mathbf{K}_{mc})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_m)_i^T \mathbf{D}_{pc} (\mathbf{B}_c)_j dV = \int_L (\mathbf{B}_m)_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_4 (\mathbf{B}_c)_j dL \quad (4.132)$$

$$(\mathbf{K}_{LL})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_{INL})_i^T \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_{INL})_j dV = \int_L (\mathbf{B}_{INL})_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_1 (\mathbf{B}_{INL})_j dL \quad (4.133)$$

$$(\mathbf{K}_{Lf})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_{INL})_i^T z \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_f)_j dV = \int_L (\mathbf{B}_{INL})_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_2 (\mathbf{B}_f)_j dL \quad (4.134)$$

$$(\mathbf{K}_{ff})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_f)_i^T z^2 \mathbf{D}_p (\mathbf{B}_f)_j dV = \int_L (\mathbf{B}_f)_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_3 (\mathbf{B}_f)_j dL \quad (4.135)$$

$$(\mathbf{K}_{Lc})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_{INL})_i^T \mathbf{D}_{pc} (\mathbf{B}_c)_j dV = \int_L (\mathbf{B}_{INL})_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_4 (\mathbf{B}_c)_j dL \quad (4.136)$$

$$(\mathbf{K}_{fc})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_f)_i^T z \mathbf{D}_{pc} (\mathbf{B}_c)_j dV = \int_L (\mathbf{B}_f)_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_5 (\mathbf{B}_c)_j dL \quad (4.137)$$

$$(\mathbf{K}_{cc})_{ij} = \int_V (\mathbf{B}_c)_i^T \mathbf{D}_c (\mathbf{B}_c)_j dV = \int_L (\mathbf{B}_c)_i^T \bar{\bar{\mathbf{D}}}_6 (\mathbf{B}_c)_j dL \quad (4.138)$$

As matrizes constitutivas  $\bar{\bar{\mathbf{D}}}_k$ ,  $k = 1, \dots, 6$  são obtidas da seguinte forma

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}}_1 = \int \int \mathbf{D}_p dy' dz = \sum_{k=1}^{mv} A_k (\mathbf{D}_p)_k \quad (4.139)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}_2 = \int \int z \mathbf{D}_p dy' dz = \sum_{k=1}^{mv} A_k z_k (\mathbf{D}_p)_k \quad (4.140)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}_3 = \int \int z^2 \mathbf{D}_p dy' dz = \sum_{k=1}^{mv} A_k (z_k^2 + t_k^2/12) (\mathbf{D}_p)_k \quad (4.141)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}_4 = \int \int \mathbf{D}_{pc} dy' dz = \sum_{k=1}^{mv} A_k (\mathbf{D}_{pc})_k \quad (4.142)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}_5 = \int \int z \mathbf{D}_{pc} dy' dz = \sum_{k=1}^{mv} A_k z_k (\mathbf{D}_{pc})_k \quad (4.143)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}_6 = \int \int \mathbf{D}_c dy' dz = \sum_{k=1}^{mv} A_k (\mathbf{D}_c)_k \quad (4.144)$$

onde se recorreu à regra da meia ordenada nos processos de integração aplicados à área da secção da viga. Nas equações anteriores,  $mv$  designa o número de camadas da viga, enquanto que para uma camada genérica  $k$ ,  $A_k$  é a sua área e  $z_k$  é a distância, em valor relativo, da sua superfície média ao plano de referência da placa.

## 2) Matriz $\mathbf{K}_\sigma$

No caso do elemento de viga a contribuição relativa à interacção dos nós  $i$  e  $j$  é dada por

$$(\mathbf{K}_\sigma)_{ij} = \int_V \mathbf{G}_i^T S_x' \mathbf{G}_j dV \quad (4.145)$$

ou considerando o integral de linha ao longo do comprimento do elemento

$$(\mathbf{K}_\sigma)_{ij} = \int_L \mathbf{G}_i^T N_x' \mathbf{G}_j dL \quad (4.146)$$

## 3) Matriz $\mathbf{K}_t$

A rigidez torcional devido a interacção dos nós  $i$  e  $j$  é dada por

$$(\mathbf{K}_t)_{ij} = \int_L (\mathbf{B}_t)_i^T GJ (\mathbf{B}_t)_j dL \quad (4.147)$$

onde GJ representa a rigidez torcional da secção.

### 4.3.5 Forças nodais equivalentes ao estado de tensão

Para obter o vector das forças não balanceadas definido na equação (3.59) e adaptando a análise efectuada na secção 4.2.5, o vector das forças nodais equivalentes associado ao nó  $i$  pode ser obtido através da relação

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i = & \int_L [\mathbf{B}_m + \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{NL}]_i^T \mathbf{N}_{x'} dL + \int_L [\mathbf{B}_f]_i^T \mathbf{M}_{x'} dL \\ & + \int_L [\mathbf{B}_c]_i^T \mathbf{Q}_{x'} dL + \int_L [\mathbf{B}_t]_i^T \mathbf{M}_{y'} dL \end{aligned} \quad (4.147)$$

onde  $\mathbf{N}_{x'}$ ,  $\mathbf{M}_{x'}$  e  $\mathbf{Q}_{x'}$  são o esforço axial, o momento flector e o esforço de corte respectivamente, e  $\mathbf{M}_{y'}$  é o momento torsor que pode ser obtido considerando a equação (4.120) e a relação

$$M_{y'} = GJ \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \quad (4.148)$$

tendo-se desprezado a torção de empenamento da secção.

Os esforços actuantes na secção da viga, Figura 4.8, podem ser determinados considerando a estrutura em camadas do compósito. Assim os esforços  $N_{x'}$ ,  $M_{x'}$  e  $Q_x$  podem ser calculados recorrendo aos seguintes somatórios

$$N_{x'} = \sum_{k=1}^{mv} (S_{x'})_k A_k \quad (4.149)$$

$$M_{x'} = \sum_{k=1}^{mv} [(S_{x'})_k A_k z_k] + M^c_{x'} \quad (4.150)$$

$$Q_{x'} = \sum_{k=1}^{mv} (S_{x'z})_k A_k \quad (4.151)$$

onde  $mv$  é o número de camadas consideradas para a viga,  $z_k$  e  $A_k$  a excentricidade e a área da secção de cada camada, respectivamente, e  $M^c_{x'}$  o momento de correcção destinado a corrigir a variação em degrau que a regra da meia ordenada introduz na distribuição de  $M_{x'}$  ao longo da altura da viga.

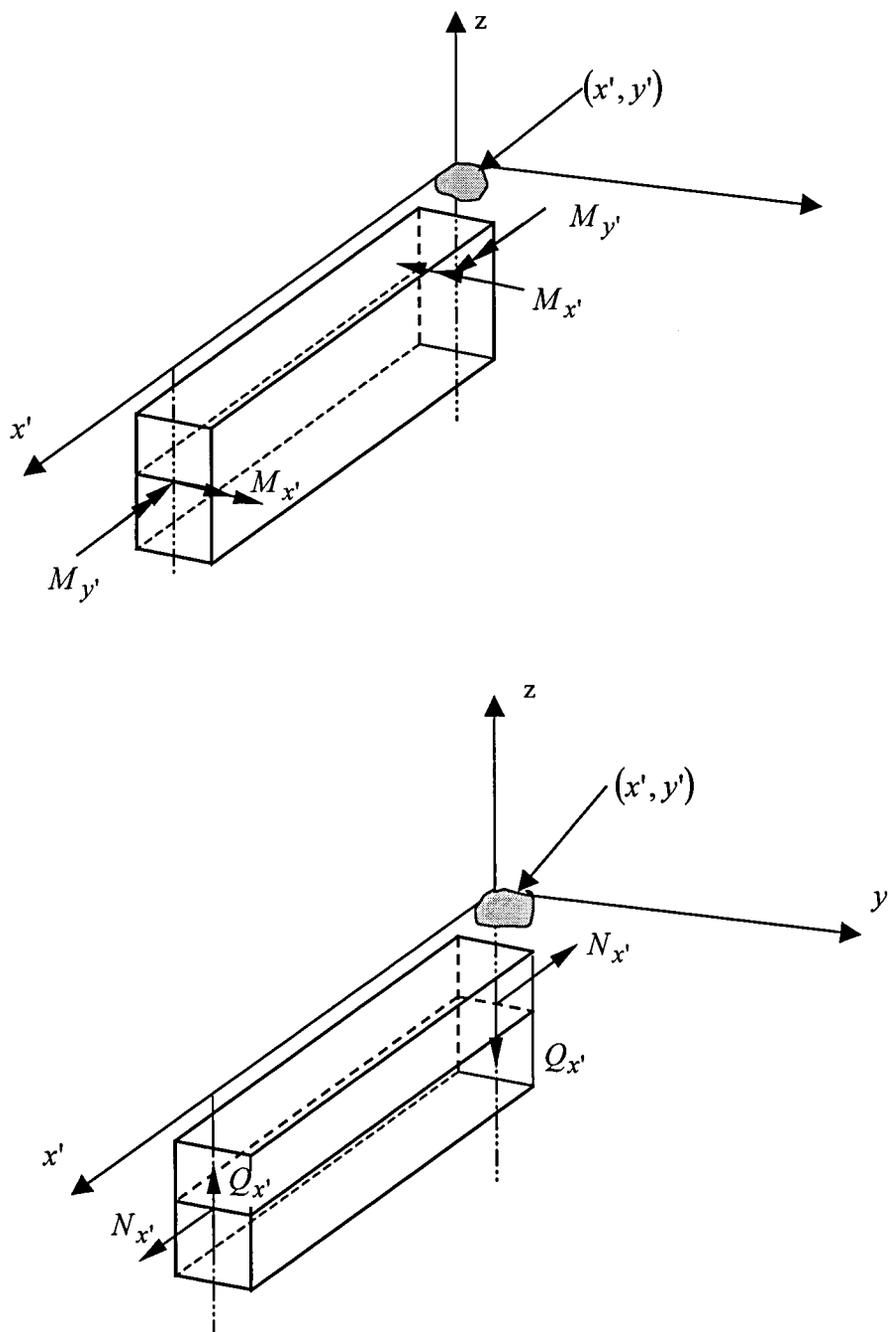


Figura 4.8 Esforços na secção do elemento da viga.

O valor de  $M^c_{x'}$  pode ser calculado a partir de

$$M^c_{x'} = \sum_{k=1}^{mv} (M^c_{x'})_k = \sum_{k=1}^{mv} (S^f_{x'})_k \frac{A_k t_k^2}{12 z_k} \quad (4.152)$$

designando  $mv$  o número de camadas do laminado do elemento de viga,  $t_k$  a espessura de cada uma dessas camadas e  $(S^f_{x'})_k$  a tensão de tracção ou compressão devida à deformação de flexão  $\varepsilon_f$ , ou seja,

$$(S^f_{x'})_k = z_k (D_p)_k \varepsilon_f = z_k (D_p)_k \mathbf{B}_f {}^t \mathbf{d} \quad (4.153)$$

sendo  $D_p$  a constante elástica, definida para a camada em questão.

### 4.3.6 Relações Constitutivas

Tendo em conta as hipóteses de base da teoria de Timonshenko e que o plano de simetria da viga coincide com o seu plano de solitação, o vector das tensões,  ${}^t \mathbf{S}$ , é

$${}^t \mathbf{S} = \{S_{x'}, S_{x'z}\}^T \quad (4.154)$$

Designando por  $\theta$  o ângulo que o semieixo positivo 1 forma com o semieixo positivo  $x'$  do referencial local do elemento, conforme as Figuras 4.5 e 4.7. Tal como se verificava com o elemento de placa, a condição  $S_z = S_3 = 0$  permite estabelecer uma igualdade que é formalmente idêntica à apresentada em (4.79) e (4.80), mas onde os vectores  $\mathbf{S}$  e  $\varepsilon$  estão definidos no referencial local  $(x', y', z)$ :

$${}^t \mathbf{S} = \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{x'z} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} {}^t \varepsilon \quad (4.155)$$

sendo  $D_p$  e  $D_c$  obtidos por uma transformação de eixos idêntica à apresentada nas equações (4.80) a (4.83).

## REFERÊNCIAS

- [1] **Barbosa, J.T.A.**, “*Análise não linear por elementos finitos de placas e cascas reforçadas*”, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, 1992.
- [2] **Huang, H. C.**, “*Defect-Free Shell Elements*”, Ph.D. Thesis, C/Ph/89/86, Univ. of Wales, Swansea, U.K., 1986.
- [3] **Huang, H. C.**, “*Static and Dynamic Analysis of plate and shells: Theory, Software and Applications*”, Springer- Verlag, London, U.K., 1989.
- [4] **Rahman, H. H. A.**, “*Computational Models for Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Flexural Slab Systems*”, Ph.D. Thesis C/Ph/66/82, Univ. of Wales, Swansea, U.K., 1982.
- [5] **Hinton, E. e Owen, D.R. J.**, “*Finite Element Programming*”, Academic Press Ltd., London, U.K., 1977.
- [6] **Hinton, E. e Owen, D.R. J.**, “*An Introduction to Finite Element Computations*”, Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K., 1979.
- [7] **Jirousek, J.**, “A Family of Variable Section Curved Beam and Thick-Shell or Membrane- Stiffening Isoparametric Elements”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp.171-186, 1981.
- [8] **Carpenter, N., Stolarski, H. e Belytschko, T.**, “Improvements in 3-Node Triangular Shell Elements”, *Int. J. Num Meth. Engng.*, Vol. 23, pp.1643-1667, 1986.
- [9] **Idelsohn, S.**, “On the use of Deep, Shallow or Flat Shelll Finite Elements for the Analysis of Thin Shell Structures”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 26, pp.321-330, 1981.

- 
- [10] **Fung, Y. C.**, “*Foundations of Solid Mechanics*”, Prentice-Hall, Engllwood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1965.
- [11] **Zienkiewicz, O. C., e Taylor, R. L.**, “*The Finite Element Method*”, Vol. 1, Fifth Edition, Butterworth Heinemann, 2000.
- [12] **Timonshenko, S.P. e Gere, J.M.**, “*Theory of Elastic Stability*”, Int. Stud. Edition, Second, Edition, McGraw-Hill Book Kogakusha Ltd., Tokyo, Japan, 1961.
- [13] **Crisfield, M. A.**, “A combined Rayligh-Ritz / Finite Element Method for the Nonlinear Analysis of Stiffned Plated Structures”, *Computers & Structures*, Vol. 8, pp.679-689, 1978.
- [14] **Huang, H. C. e Hinton, E.**, “A Nine Node Lagrangian Mindlin Plate Element With Enhaced Memrane and Shear Interpolation”, *Eng.Comp.*, Vol. 1, pp.369-379, 1984.
- [15] **Huang, H. C. e Hinton, E.**, “A Nine Node Degenerated Shell Element With Enhaced Membrane and Shear Interpolation”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 22, pp.73-92, 1986.
- [16] **Huang, H. C.**, “Further Discussion of the New Lagrangian and Serendipity Degenerated Shell Elements”, *Proc. Conf. ICC86, I197-I202*, Tokyo, Japan, 1986.
- [17] **Hinton, E. e Huang, H.C.**, “A family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements With Substitute Shear Strain Fields”, *Computers & Structures*, Vol. 23, pp.409-431, 1986.

## ***CAPÍTULO 5***

# ***PROJECTO ÓPTIMO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS HÍBRIDAS***

## 5. PROJECTO ÓPTIMO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS HÍBRIDAS

### 5.1 Introdução

As estruturas do tipo placa ou casca com reforço de viga são vulgares nas aplicações com materiais compósitos. Neste contexto, o projecto óptimo deste tipo de estruturas é de grande interesse tendo como objectivo a utilização racional dos materiais de fabrico.

Os compósitos híbridos oferecem uma possibilidade muito importante de escolha de propriedades sob medida. A ideia é criar a partir duma mistura de fibras diferentes, um material novo que combina as características mecânicas dos diferentes constituintes e reduz igualmente o custo relativamente às fibras de alta performance: o reforço híbrido.

O interesse da utilização dos híbridos reside fundamentalmente nos aspectos económicos e/ou na melhoria global das propriedades mecânicas do compósito. Com os materiais compósitos é possível adaptar o material à função a exercer, pondo em jogo os diferentes factores de composição: natureza da fibra, estrutura do reforço, alternância e orientação das camadas, etc. A utilização dos híbridos multiplica as combinações possíveis a alarga o domínio das propriedades que se podem obter.

Em comparação com um material tradicional o projectista é confrontado com a necessidade de escolher entre um compósito homogéneo e um compósito híbrido. A vantagem dos híbridos é que se pode obter um conjunto de propriedades superior à que se obtém com um compósito homogéneo que apresenta sempre alguma lacuna que não se pode suprimir sem o preço de um sobredimensionamento: o carbono tem uma má resistência ao impacto, a aramida suporta mal a compressão, o vidro é pesado e tem um módulo desfavorável, etc. A hibridização permite compensar estas lacunas de forma eficaz.

Os compósitos híbridos têm sido objecto de estudo na última década [1-4]. Correctamente dimensionado um híbrido pode apresentar uma relação qualidade/preço que dificilmente pode ser alcançada com as fibras de reforço actualmente utilizadas. Os dois vectores fundamentais para o seu desenvolvimento são por um lado uma caracterização adequada das suas propriedades mecânicas e por outro a implementação de ferramentas de projecto poderosas.

Apresenta-se neste trabalho um modelo numérico visando o projecto óptimo de estruturas fabricadas com compósitos híbridos reforçadas com vigas. Pretende-se com este modelo, efectuar uma hibridização eficiente e racional das estruturas fabricadas com estes materiais considerando simultaneamente o comportamento não linear geométrico das estruturas. Para além do peso da estrutura considera-se também o custo dos materiais de reforço das camadas

como funções a minimizar. As variáveis de projecto são os ângulos e as espessuras das camadas dos laminados, as dimensões das secções transversais das vigas de reforço, a sequência de empilhamento e os materiais utilizados no processo de hibridização. A formulação do problema de optimização envolve restrições de deslocamento, tensão, encurvadura e restrições ao valor das variáveis de projecto.

## 5.2 Variáveis de projecto nos compósitos híbridos

É possível diferenciar dois tipos principais de híbridos onde a estrutura e o modelo matemático de caracterização mecânica são diferentes: os híbridos interlaminares e os híbridos intralaminares, conforme se observa na Figura 5.1. Neste trabalho consideram-se apenas os híbridos interlaminares que consistem no empilhamento de camadas cada uma das quais com reforço de natureza diferente, oferecendo numerosas possibilidades de escolha de tecidos unidireccionais.

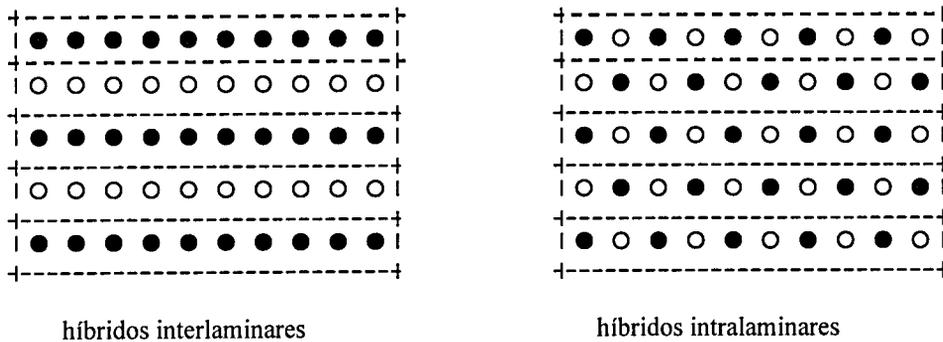


Figura 5.1 Compósitos híbridos.

No modelo desenvolvido, as estruturas compósitas são constituídas por laminados que podem ser do tipo placa ou casca e do tipo viga. As variáveis de projecto agrupadas no vector  $\mathbf{x}$ , estão relacionadas com o tipo de laminado e são definidas da seguinte forma:

- a orientação  $\theta_{i,j}$  e a espessura  $\bar{t}_{i,j}$  da camada  $i$  do laminado  $j$  do tipo placa ou casca, agrupadas respectivamente nos vectores  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$ ;
- a altura  $h_j$  e a largura  $w_j$  da secção do laminado do tipo viga, agrupadas respectivamente nos vectores  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{w}$ .

As propriedades mecânicas dos laminados dependem não só das variáveis acima definidas como também das propriedades mecânicas dos materiais utilizados e da sequência de empilhamento das camadas. Para definir o par Material / Sequência de empilhamento,

considera-se uma nova variável  $\pi_j$  associada ao laminado  $j$  do tipo placa ou casca. Esta variável é particularmente interessante no projecto óptimo de estruturas laminadas com multimateriais também conhecidas como estruturas com compósitos híbridos. Todas as variáveis deste tipo estão agrupadas no vector  $\pi$ .

### 5.3 Restrições do problema

O problema de optimização contempla três tipos de restrições. Os primeiros dois tipos estão relacionados com o problema da encurvadura e da rotura da primeira camada (FPF). O terceiro tipo de restrição está relacionado com o campo de deslocamentos imposto para determinadas condições de serviço.

A análise do campo de deslocamentos e da encurvadura é efectuada usando um modelo não-local, enquanto que a análise da tensão da rotura na primeira camada é feita usando um modelo local para compósitos laminados. A discretização em elementos finitos permite conjugar os dois modelos para formar um modelo não local-local. Assim a integridade estrutural é verificada usando um modelo baseado nos conceitos de *factor de carga crítico* e *deslocamento crítico*.

Neste trabalho é proposto um modelo unificado de análise dos fenómenos da encurvadura e de rotura da primeira camada (FPF), aplicado às cascas laminadas compósitas reforçadas com vigas. Para melhor definir este modelo unificado, a análise dos dois fenómenos é feita em separado.

Depois de definir a curva de equilíbrio estrutural, através da equação (3.59)

$$\Psi({}^t \mathbf{d}, {}^t \lambda) = \mathbf{r}({}^t \mathbf{d}) - {}^t \lambda \bar{\mathbf{F}}$$

os pontos críticos associados a fenómenos de instabilidade geométrica podem ser identificados com base no modelo proposto por Bundiasky [5] que considera o equilíbrio no ponto crítico  $(\mathbf{d}_b, \lambda_b)$  dado por

$$\Psi(\mathbf{d}_b, \lambda_b) \delta \mathbf{d} = 0 \quad (5.1)$$

Usando uma aproximação de primeira ordem da equação (5.1), pode-se estabelecer a condição seguinte para o ponto crítico,

$$\nabla_d \Psi(\mathbf{d}_b, \lambda_b) \Delta \mathbf{d} \delta \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

ou

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}_b, \lambda_b) \phi = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

sendo  $\phi$  o modo de encurvadura e  $\mathbf{K}_T$  a matriz de rigidez tangente. Como a equação (5.3) corresponde à singularidade da matriz de rigidez tangente, ela pode ser substituída pela seguinte,

$$\det(\mathbf{K}_T(\mathbf{d}_b, \lambda_b)) = 0 \quad (5.4)$$

Considerando a análise linearizada da encurvadura apresentada na equação (5.4) e supondo que o ponto crítico está localizado no incremento de carga  $t$ , pode-se considerar que,

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}_b, \lambda_b) = \mathbf{K}_T({}^{t-1}\mathbf{d}, {}^{t-1}\lambda) + \xi \left[ \mathbf{K}_T({}^t\mathbf{d}, {}^t\lambda) - \mathbf{K}_T({}^{t-1}\mathbf{d}, {}^{t-1}\lambda) \right] \quad (5.5)$$

sendo  $\xi$  uma grandeza escalar. Usando esta relação, o valor aproximado do factor de carga de encurvadura  $\lambda_b$  pode ser definida como,

$$\lambda_b = {}^{t-1}\lambda + \xi \left( {}^t\lambda - {}^{t-1}\lambda \right) \quad (5.6)$$

Nas equações (5.5) e (5.6) supõe-se que a rigidez varia proporcionalmente ao aumento de carga o que pode conduzir a um valor sobrestimado da carga de encurvadura. Contudo o problema de valores próprios definido em (5.3) pode ser usado para calcular o factor de carga crítica e o vector de carga máxima em (5.6) obtido a partir do respectivo valor próprio mais baixo e do vector próprio associado.

O conceito de rotura da primeira camada (*FPF, first ply failure*) baseado no *parâmetro de resistência*  $R$  também conhecido como *número de Tsai* [6,7], habitualmente usado na análise da integridade de estruturas compósitas com comportamento linear, não pode ser usado directamente na análise não-linear. Este facto é uma consequência da relação não proporcional entre cargas e deslocamentos. Para ultrapassar este problema é proposto um

novo modelo de análise usando o *factor de carga de rotura da primeira camada*, baseado no cálculo do factor de carga  $\lambda_{FPF}$  correspondente à rotura da primeira camada na estrutura [8]. Este factor de carga é obtido a partir da equação (5.7) usando um processo similar ao proposto para o cálculo do factor de carga de encurvadura. Assim, supondo que o ponto crítico  $(\mathbf{d}_{FPF}, \lambda_{FPF})$  está localizado no nível de carga  $t$ , pode-se usar a seguinte aproximação,

$$\lambda_{FPF} = t^{-1} \lambda + \gamma \left( t \lambda - t^{-1} \lambda \right) \quad (5.7)$$

sendo  $\gamma$  um escalar apropriado, para identificar na curva de equilíbrio o *factor de carga de rotura da primeira camada*  $\lambda_{FPF}$  e o correspondente deslocamento mais crítico  $\mathbf{d}_{FPF}$ .

O critério de rotura adoptado para os materiais anisotrópicos é uma forma generalizada da lei de Huber–Mises [9] e pode ser escrita como

$$\frac{f(\sigma)_k}{Y} - 1, \quad k=1, \dots, N_s \quad (5.8)$$

onde  $N_s$  é o número de pontos nos quais é calculado o vector das tensões,  $Y$  é tensão admissível e  $f(\sigma)_k$  é uma função de rotura calculada no ponto  $k$  considerando as tensões definidas em relação ao sistema de coordenadas materiais (1,2,3). A função de rotura definida a partir da equação,

$$\begin{aligned} (f(\sigma)_k)^2 &= a_1 \sigma_1^2 + 2a_{12} \sigma_1 \sigma_2 + a_2 \sigma_2^2 + a_3 \tau_{12}^2 + a_4 \tau_{13}^2 + a_5 \tau_{23}^2 \\ &= \sigma_{1,2,3}^T \mathbf{A} \sigma_{1,2,3} \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz dos parâmetros de resistência anisotrópicos determinados por seis testes independentes de rotura. Se os eixos 1 e 2 do sistema de coordenadas materiais tiverem rodado um ângulo  $\theta$  em relação aos eixos  $x$  e  $y$  do referencial global, então é necessário efectuar a transformação da matriz  $\mathbf{A}$  e das tensões para o sistema global de coordenadas [10]. Neste caso o critério de rotura é dado pela equação,

$$(f(\sigma)_k)^2 = \sigma^T \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \sigma = \sigma^T \bar{\mathbf{A}} \sigma \quad (5.10)$$

sendo  $\mathbf{T}$  a matriz de transformação das tensões. Ela relaciona o sistemas de coordenadas material (1,2,3) e global (x,y,z). A rotura na primeira camada (FPF) ocorre quando,

$$g_{FPF} = MAX\left(\frac{f(\sigma)_k}{Y} - 1, k=1, \dots, N_s\right) = 0 \quad (5.11)$$

A análise efectuada acima para o problemas da encurvadura e da rotura da primeira camada da estrutura, permite estabelecer um modelo unificado considerando o conceito de factor de carga crítica  $\lambda_{crit}$  definido como

$$\lambda_{crit}(\mathbf{x}) = MIN[\lambda_b(\mathbf{x}), \lambda_{FPF}(\mathbf{x})] \quad (5.12)$$

e a respectiva restrição,

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\lambda_{crit}(\mathbf{x})}{\bar{\lambda}_a} \leq 0 \quad (5.13)$$

onde  $\bar{\lambda}_a$  é o factor de carga admissível prescrito para o factor de carga crítico.

Neste modelo o deslocamento mais crítico  $d_{crit}$  tanto pode ser o deslocamento crítico associado à encurvadura na curva de equilíbrio como o associado ao factor de carga de rotura da primeira camada,

$$d_{crit}(\mathbf{x}) = MAX[d_b(\mathbf{x}), d_{FPF}(\mathbf{x})] \quad (5.14)$$

A restrição correspondente a esta análise unificada pode ser escrita como,

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \frac{d_{crit}(\mathbf{x})}{\bar{d}_a} - 1 \leq 0 \quad (5.15)$$

onde  $\bar{d}_a$  é o valor máximo prescrito para o deslocamento crítico.

Poderão ser consideradas outras condições de serviço associadas ao campo de deslocamentos da estrutura. A restrição de deslocamentos nestas condições escreve-se

$$g_k(\mathbf{x}) = \frac{d_k(\mathbf{x})}{d_{0,k}} - 1 \leq 0 \quad , \quad k = 1, \dots, N_d \quad (5.16)$$

onde  $d_{0,k}$  é o deslocamento máximo admissível no ponto  $k$  da estrutura. Adopta-se uma estratégia baseada no deslocamento mais crítico, usando a relação

$$\varphi_3(\mathbf{x}) = MAX[g_k(\mathbf{x}), k=1, \dots, N_d] \quad (5.17)$$

## 5.4 Formulação do problema

O problema de optimização de placas ou cascas de compósitos laminados reforçadas com vigas com carregadas estaticamente pode ser formulado do seguinte modo:

$$\text{Minimizar } OBJ(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \pi) = \beta_1 W(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \pi) + \beta_2 U(\theta, \bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \pi) \quad (5.18)$$

sujeito às restrições de integridade estrutural,

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\lambda_{crit}(\mathbf{x})}{\lambda_a} \leq 0 \quad (5.19)$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \frac{d_{crit}(\mathbf{x})}{d_a} - 1 \leq 0 \quad (5.20)$$

$$\varphi_3(\mathbf{x}) = MAX \left[ \left( \frac{d_k(\mathbf{x})}{d_{0,k}} - 1 \right), k=1, \dots, N_d \right] \leq 0 \quad (5.21)$$

a restrições nas variáveis de projecto,

$$x_j^l \leq x_j \leq x_j^u, j=1, \dots, \bar{N}_v \quad (5.22)$$

à equação (3.59) de estado de equilíbrio,

$$\Psi({}^t \mathbf{d}, {}^t \lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{r}({}^t \mathbf{d}, \mathbf{x}) - {}^t \lambda \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

e à equação (3.65) imposta pelo método do comprimento do arco,

$$Q({}^t \mathbf{d}, {}^t \lambda, \mathbf{x}) = a_1 (\delta \lambda_i^n)^2 + a_2 \delta \lambda_i^n + a_3 = 0 \quad (5.24)$$

com  $a_k$  definido nas equações (3.66) a (3.68).

A parcela  $W(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \pi)$  da função objectivo, é o peso da estrutura afectado pelo custo dos materiais usados nos laminados que compoem a estrutura, e é definida por

$$W(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \pi) = \sum_{i=1}^{NLam} \sum_{j=1}^{nc(i)} \rho_{ij}(\pi) V_{ij}(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}) C_{ij}(\pi) \quad (5.25)$$

onde  $\rho_{ij}(\pi)$  é a massa específica do material,  $V_{ij}(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w})$  é o volume,  $C_{ij}(\pi)$  o custo do material da camada  $j$  do laminado  $i$ ,  $Nlam$  é o número de laminados da estrutura e  $nc(i)$  é o número de camadas do laminado  $i$ .

O termo  $U(\theta, \bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \pi)$  representa a energia do sistema estrutural correspondente à configuração deformada da estrutura que pode ser calculada de forma aproximada como

$$U(\theta, \bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \pi) = \mathbf{f}_{int}^T Ninc \mathbf{d} \approx \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{Ninc} \mathbf{K}_T^i \left( {}^{i-1} \mathbf{d} - {}^i \mathbf{d} \right) \right]^T Ninc \mathbf{d} \quad (5.26)$$

sendo  $\mathbf{f}_{int}$  o vector das forças internas e  $Ninc$  o número de incrementos de carga.

As variáveis de projecto estão limitadas pelas restrições (5.22) onde os símbolos  $x_j^u$  e  $x_j^l$  representam os limites superior e inferior respectivamente.

Deve-se notar que a equação de estado (5.23) representa a relação entre o projecto e as variáveis de estado. Esta relação é justificada pelo facto das restrições dadas pelas equações (5.19) a (5.21) não puderem ser expressas apenas como função explícita das variáveis de projecto.

As constantes  $\beta_i$  na equação (5.18) desempenham o papel de coeficientes de ponderação de cada um dos critérios envolvidos na definição do objectivo.

## REFERÊNCIAS

- [1] Miki, M. e Tonomura, K., “Optimum design of hybrid fibrous laminated composite plates subject to axial compression”, *6<sup>th</sup> International Conference on Composite Structures*, I.H. Marshall ed., Elsevier Applied Science Publishers, New York, pp.1368-1377, 1987.
- [2] Adali, S. e Duffyeier, K.J., “Design of antisymmetric hybrid laminates for maximum buckling load: II, Optimum layer thickness”, *Composite Structures*, Vol.14, pp.49-60, 1990.
- [3] Triantafillou, T.C., Kim, P. e Meier, U., “Optimization of hybrid aluminium/CFRP box beams”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.33, No.9, pp.729-739, 1991.
- [4] Falzon, P.J. e Janardhana, M.N., “Design of a hybrid composite roof bar”, *Advanced Composite Materials '93*, T Chandra and A.K. Dhingra eds., The Minerals, Metals & Materials Society, pp.115-121, 1993.
- [5] Budiansky B., “Theory of buckling and post-buckling of elastic structures”, *Adv. Appl. Mech.*, Vol.14, pp.2-63, 1974.
- [6] Tsai, S. W. e Hahn, H.T., “*Introduction to Composite materials*”, Technomic Publishing Co., Inc., Westport, Connecticut, USA, 1980.
- [7] Tsai, S.W., “*Composites design*”, Third Edition, Think Composites, Dayton, USA, 1987.
- [8] Conceição António, C.A., “Optimisation of geometrically non-linear composite structures based on load-displacement control”, *Composite Structures*, Vol.46, pp.345-356, 1999.
- [9] Owen, D.R.J. e Figueiras, J.A., “Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells”, *Int. Journal Numer. Meth. Engng.*, Vol.19, pp.541-566, 1983.

- [10] **Huang, H.-C.**, “*Static and dynamic analyses of plates and shells*”, Springer-Verlag, London, UK, 1989.
- [11] **Arora, J.S.**, “*Introduction to optimum design*”, Macgraw-Hill Book Company, Singapore, 1989.
- [12] **Kirsch, U.**, “*Optimum Structural design*”, MacGraw-Hill Book Company, Singapore, 1982.

## ***CAPÍTULO 6***

# ***MODELO HIERÁRQUICO DE PESQUISA EVOLUCIONÁRIA***

## 6. MODELO HIERÁRQUICO DE PESQUISA EVOLUCIONÁRIA

### 6.1 Introdução

Os métodos de pesquisa evolucionária tem cativado nas últimas duas décadas a atenção dos investigadores como método de optimização [1-3]. Em geral, são métodos de optimização estocásticos que imitam a evolução natural das espécies: uma população inicial de indivíduos criados de forma aleatória (conjunto de pontos do domínio) evoluem seguindo o *princípio de Darwin* de sobrevivência dos mais dotados. Novos indivíduos da população são gerados usando alguns operadores genéticos (por exemplo, mutação e *crossover*). A probabilidade de sobrevivência dos indivíduos recentemente gerados depende do valor do seu mérito, ou seja, do seu desempenho em relação ao problema de optimização em causa: os melhores são conservados com alta probabilidade e os piores são rapidamente eliminados da população.

Do ponto de vista de optimização uma das grandes vantagens dos métodos de pesquisa evolucionária é que eles não requerem uma formulação matemática exigente relativamente ao problema de optimização: (i) são métodos de ordem zero, isto é, necessitam apenas da avaliação da função objectivo; (ii) podem operar em problemas não-lineares; (iii) são aplicáveis a problemas definidos em domínios discretos, contínuos ou domínios de pesquisa mistos; (iv) são usados em problemas com restrições ou sem restrições.

Muitas aplicações em engenharia envolvem problemas não estruturados, problemas relacionados com a realidade que são difíceis de modelar devido à necessidade de incluir factores pouco comuns, desde factores de risco de acidente a factores estéticos. Em tais situações os métodos de pesquisa evolucionária apresentam um forte potencial de resolução dos problemas em causa. A sua habilidade para proporcionar muitas soluções próximas do óptimo no final do processo de optimização, permite a selecção da melhor solução de acordo com critérios estabelecidos, mesmo em situações onde a formulação do modelo não é a mais adequada. Os algoritmos de pesquisa evolucionária podem ser idealizados de forma eficiente porque são de concepção flexível e relativamente fáceis de hibridizar usando heurísticas dependentes do domínio de projecto [4-8]

A maior parte dos problemas de optimização em engenharia possuem restrições. A presença de restrições afecta significativamente a eficiência de qualquer algoritmo de optimização, incluindo os algoritmos de pesquisa evolucionária. A melhor forma de lidar com as restrições é a penalização das soluções do domínio que não as satisfazem. Existem outras formas de lidar com as restrições dependendo do tipo de problema, por exemplo, uma

restrição linear pode ser incorporada num operador específico [9] ou pode-se incluir um operador de *reparação* que transforma soluções inadmissíveis em soluções admissíveis [10]. Neste contexto, por exemplo, a *mutação controlada* do código genético baseada no campo de tensões instaladas numa estrutura, pode converter uma solução inadmissível noutra que não viola as restrições [11].

Neste trabalho explora-se a flexibilidade dos *Métodos de Pesquisa Evolucionária* em geral e dos Algoritmos Genéticos em particular, para se obter uma arquitectura do modelo de optimização que considera de forma eficaz a decomposição do domínio de projecto. O modelo desenvolvido baseia-se no conceito de *Algoritmo Genético Hierárquico* e é especialmente dirigido para a resolução do problema de optimização de estruturas compósitas com comportamento geometricamente não-linear formulado no Capítulo 5. Para além duma topologia hierárquica, o modelo desenvolvido baseia-se numa *estratégia elitista* e apresenta uma hibridização ao nível do operador *crossover*.

## 6.2 Topologia hierárquica

O conceito de *Algoritmo Genético Hierárquico* (HGA, Hierarchical Genetic Algorithm) provém dos *Algoritmos Genéticos Paralelos* (PGA, Parallel Genetic Algorithm) [12,13] que são um caso particular dos *Algoritmos Genéticos* (GAs).

Os PGAs, em vez de actuarem sobre uma população de dimensão elevada, usam uma rede de sub-populações de menores dimensões interligadas entre si, definidas na literatura como "*Island model*". Cada uma destas sub-populações tem uma *evolução independente* durante um período de tempo ou *época*, denominado *Estágio de Isolamento*.

Após cada época de isolamento ocorre um período de migração e de permuta de informação, durante o qual, o material genético é transferido entre as diferentes sub-populações.

As regras gerais de funcionamento deste *Estágio de Migração* dependem da topologia da rede. Quando o *Estágio de Migração* está concluído, o isolamento é reiniciado para uma nova época de evolução da sub-população.

Este modelo pode operar com diferentes regiões do domínio das variáveis de projecto durante o *Estágio de Isolamento*. Assim, as soluções mais promissoras de uma sub-população podem ser partilhadas por todo o sistema uma vez que são enviadas para as sub-populações vizinhas. Uma das grandes vantagens deste modelo é a sua robustez, em particular evitando óptimos locais.

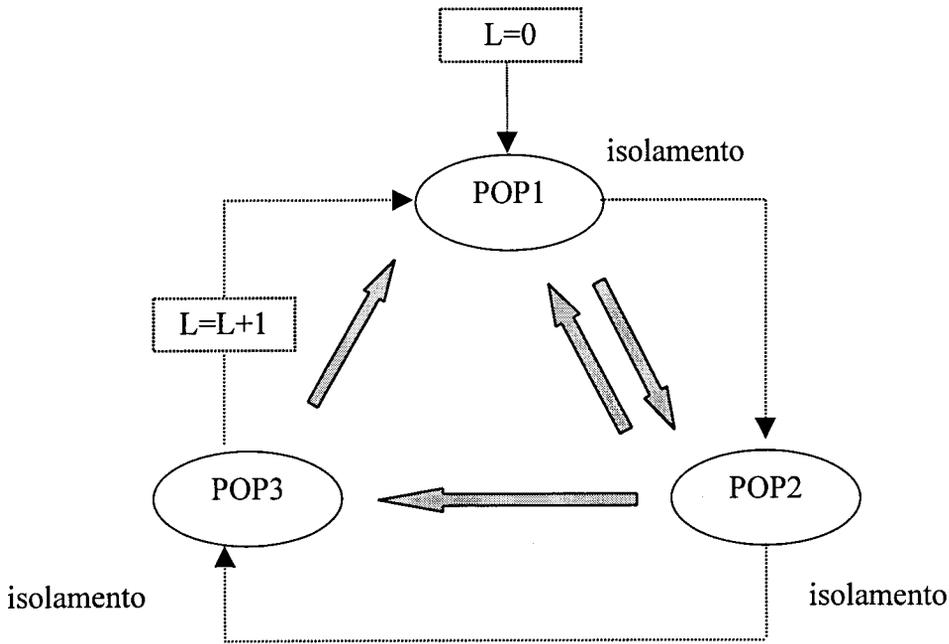


Figura 6.1 Topologia hierárquica.

Neste trabalho usa-se o conceito de *Algoritmo Genético Hierárquico* baseado numa topologia hierárquica aplicada à constituição das sub-populações. O Algoritmo Genético proposto executa uma sequência de períodos de isolamento de três sub-populações diferentes, identificadas por POP1, POP2 e POP3 como se ilustra na Figura 6.1. Depois do período de isolamento de cada sub-população, as melhores soluções migram para as sub-populações seguintes da rede. Assim, é efectuada uma sequência de períodos de isolamento e de migração das sub-populações POP1, POP2 e POP3 até se verificar um critério de paragem específico.

A circulação das melhores soluções torna-se particularmente interessante uma vez que a evolução do mérito para cada sub-população é efectuada com base em Algoritmos Genéticos independentes. Embora a função objectivo seja única para qualquer nível de optimização, as diferentes sub-populações representam *espécies* da população global. De facto, estas *espécies* são geradas através da manipulação de diferentes segmentos da *string binária* correspondente ao cromossoma de cada indivíduo.

### 6.3 Função de mérito

Um dos aspectos mais importantes na pesquisa evolucionária é a definição do mérito das soluções que permitirá a sua classificação qualitativa dentro da população. A função de mérito relaciona-se com a função objectivo e com as restrições do problema de optimização.

Neste trabalho é adoptado um método baseado na penalização gradual das soluções de acordo com a violação das restrições. O Algoritmo Genético tem como objectivo obter a melhoria do mérito das soluções que constituem a população à medida que opera sobre o domínio das variáveis de projecto. Para se obter uma medida do mérito de cada solução é necessário transformar o problema de optimização estabelecido nas equações (5.18) a (5.24). Assim a função de mérito pode ser escrita como

$$FIT = \bar{C}_1 - OBJ(\mathbf{x}) - [\Gamma_1(\varphi_1) + \Gamma_2(\varphi_2) + \Gamma_3(\varphi_3)] \quad (6.1)$$

onde os termos restritivos são calculados a partir da seguinte relação

$$\Gamma_i[\varphi_i(\mathbf{x})] = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \bar{K}_i [\varphi_i(\mathbf{x})]^{q_i} & \text{se } \varphi_i(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.2)$$

onde  $\varphi_i(\mathbf{x})$  foram definidos pelas equações (5.19) a (5.21), a constante  $\bar{C}_1$ , é imposta de modo a evitar que o mérito assuma valores negativos.

As soluções com o melhor mérito e satisfazendo as restrições serão candidatas preferenciais para permanecerem na população nas gerações seguintes da pesquisa evolucionária. As soluções que violam as restrições são penalizadas de forma gradual, de acordo com a diferença entre os valores calculado e o admissível.

Os valores das constantes  $q_i$  e  $\bar{K}_i$  são calculados considerando dois níveis de violação das restrições. Uma penalidade fraca  $p_{0,i}$  é aplicada a uma violação da restrição  $\varphi_{i,0}$  que pode ser tolerada. A valores elevados de violação da restrição  $\varphi_{i,1}$  é aplicada uma penalidade forte  $p_{1,i}$ . Usando as penalidades, os valores das constantes são obtidos pelas fórmulas,

$$q_i = \frac{\ln(p_{0,i} / p_{1,i})}{\ln(\varphi_{i,0} / \varphi_{i,1})} \quad (6.3)$$

$$\bar{K}_i = \frac{P_{0,i}}{(\varphi_{i,0})^{g_i}} \tag{6.4}$$

A técnica usada neste trabalho visando incorporar as restrições na função de mérito considera dois níveis de gravidade na violação das restrições, cada um com a respectiva penalização. Para além desta metodologia, têm sido propostos ao longo dos últimos anos vários métodos de tratamento das restrições [14]. Estes métodos podem ser agrupados em cinco categorias: (1) métodos baseados na preservação da admissibilidade das soluções, (2) métodos baseados em funções de penalidade, (3) métodos que fazem uma distinção clara entre soluções admissíveis e não inadmissíveis, (4) métodos baseados em descodificadores, e (5) outros métodos híbridos.

### 6.4 Composição e codificação das sub-populações

Na implementação de algoritmos genéticos a codificação da informação desempenha um papel importante devido à manipulação estocástica estruturada que ocorre durante o processo evolutivo.

As variáveis de projecto são codificadas considerando a independência e a natureza diferenciada do domínio de cada variável. Para codificar as variáveis de projecto é usado um código em formato binário para os vectores das variáveis de projecto  $\bar{\mathbf{t}}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{w}$  e  $\theta$  e um código com formato inteiro para o vector da variável de projecto  $\pi$ .

Considerando uma codificação cromossómica  $\mathbf{c}$  das variáveis de projecto, conforme se mostra na Figura 6.2, e supondo que o espaço de pesquisa de cada variável é independente, o número de combinações possíveis é  $N = l_1 l_2 l_3 \dots l_n$ .

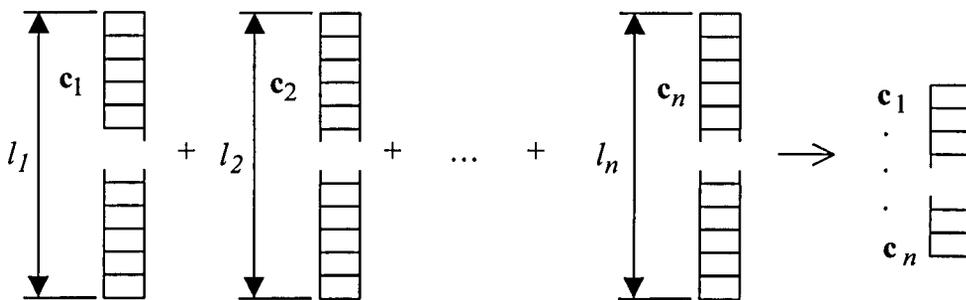


Figura 6.2 Formato de codificação das variáveis de projecto.

A dimensão do domínio do projecto mesmo para estruturas com um cromossoma pequeno pode ser relativamente grande. Os operadores genéticos têm como objectivo a redução progressiva do espaço de projecto, direccionado a pesquisa para regiões mais promissoras do domínio à medida que o algoritmo genético progride.

A redução do domínio do projecto pode também ser alcançada através duma estratégia baseada numa topologia hierárquica, devido ao menor número de variáveis intervenientes em simultâneo no processo de optimização. Além disso, o número de *bits* considerado em cada *string* binária pode ser modificado em cada sub-população, dependendo do tipo de variáveis activas intervenientes num dado instante no processo de optimização.

Neste trabalho são considerados diferentes segmentos activos do cromossoma dependendo da sub-população em evolução. A estrutura adoptada é apresentada na Figura 6.3.

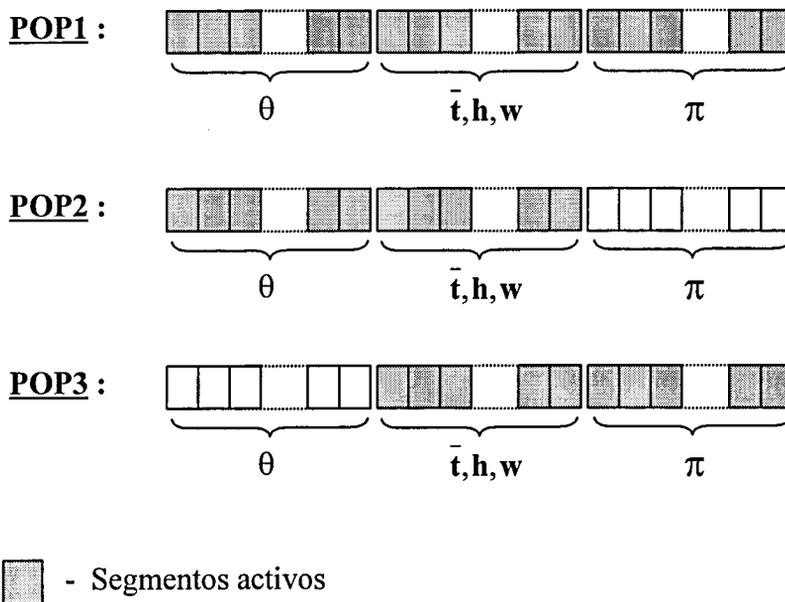


Figura 6.3 Segmentos do cromossoma activos em cada sub-população.

Os segmentos do cromossoma activos durante a evolução duma sub-população são os únicos que são objecto da actuação dos operadores genéticos, nomeadamente dos operadores *crossover* e *mutação*. Os segmentos não activos são atribuídos segundo regras bem definidas.

A segmentação adoptada obedeceu às seguintes heurísticas:

- (i) na sub-população POP1 a pesquisa faz-se usando todos os genes do cromossoma, permitindo assim a combinação das soluções migradas das restantes sub-populações com soluções provenientes de todo o domínio;

- (ii) na sub-população POP2 minimiza-se o peso/custo da estrutura usando as características anisotrópicas dos compósitos e considerando regiões do domínio de projecto bem definidas em termos de material/sequência de empilhamento;
- (iii) na sub-população POP3 é efectuada a pesquisa num nicho do domínio associado a propriedades anisotrópicas constantes;
- (iv) o segmento central do cromossoma é um elo longitudinal de ligação entre as três sub-populações, pois está sempre activo ao longo funcionamento sequencial do *Algoritmo Genético Hierárquico*.

## 6.5 Algoritmo Genético Hierárquico

O *Algoritmo Genético Hierárquico* apresenta um ciclo externo constituído pela sequência de Estágios de Isolamento e de Migração e três ciclos internos correspondentes à evolução de cada sub-população nos respectivos Estágios de Isolamento. A topologia hierárquica apresentada na Figura 6.1 é descrita em pormenor no Algoritmo 1 e os passos do Algoritmo Genético desenvolvido para obter a evolução das sub-populações no Estágio de Isolamento são apresentados no Algoritmo 2.

### 6.5.1 Ciclo externo da topologia hierárquica: Algoritmo 1

Os passos do modelo de optimização do ciclo externo estão apresentados no Algoritmo 1. A circulação de soluções entre sub-populações é considerada fundamental. Na realidade cada sub-população evolui de forma absolutamente independente usando um Algoritmo Genético cujos parâmetros podem ser ajustados. Além disso, no contexto da topologia hierárquica, cada sub-população evolui segundo um objectivo definido pelas variáveis intervenientes na respectiva pesquisa evolucionária.

A fase de migração representa a troca de material genético entre sub-populações, o que é essencial para a eficiência do processo de optimização. Em particular a migração de soluções de POP2 e POP3 para POP1 e a eliminação das piores soluções nesta última sub-população é uma estratégia baseada no refinamento de soluções.

As soluções que migram de POP2 e POP3 para POP1 são sujeitas a controlo para evitar a similaridade genética com os cromossomas de POP1 que permanecem nesta sub-população vindas da época anterior. Assim, todas as soluções incorporadas em POP1 durante os fluxos migratórios são portadoras de material genético novo contribuindo para a diversidade da sub-população destinatária.

---

**Algoritmo 1** AG Hierárquico
 

---

*Época(1)* representa a duração do período de isolamento para a sub-população POP1.

**para** POP1 **faça**

Iniciação: geração aleatória da sub-população.

**fim**

**Repetir**

---

**para**  $i=1$  até *Época(1)* **faça** (período de isolamento)

Evolução genética de POP1.

**fim**

*Época(2)* representa a duração do período de isolamento para a sub-população POP2.

**para** POP2 **faça**

Início da migração: transferência de  $N_{A,2}$  soluções com o melhor mérito da elite de POP1, sem repetição de soluções.

Iniciação: geração aleatória da restante parte da sub-população.

**fim**

**para**  $i=1$  até *Época(2)* **faça** (período de isolamento)

Evolução genética de POP2.

**fim**

*Época(3)* representa a duração do período de isolamento para POP3.

**para** POP3 **faça**

Início da migração: transferência de  $N_{A,3}$  soluções com o melhor mérito da elite de POP2, sem repetição de soluções.

Iniciação: geração aleatória da restante parte da sub-população.

**fim**

**para**  $i=1$  to *Época (3)* **faça** (período de isolamento)

Evolução genética de POP3

**fim**

**para** POP1 **faça**

Eliminação de soluções.

Início da migração: transferência das duas soluções com o melhor mérito de POP2 e das duas soluções com o melhor mérito de POP3; sem repetição de soluções.

**fim**

**Até que** O critério de paragem é satisfeito

---



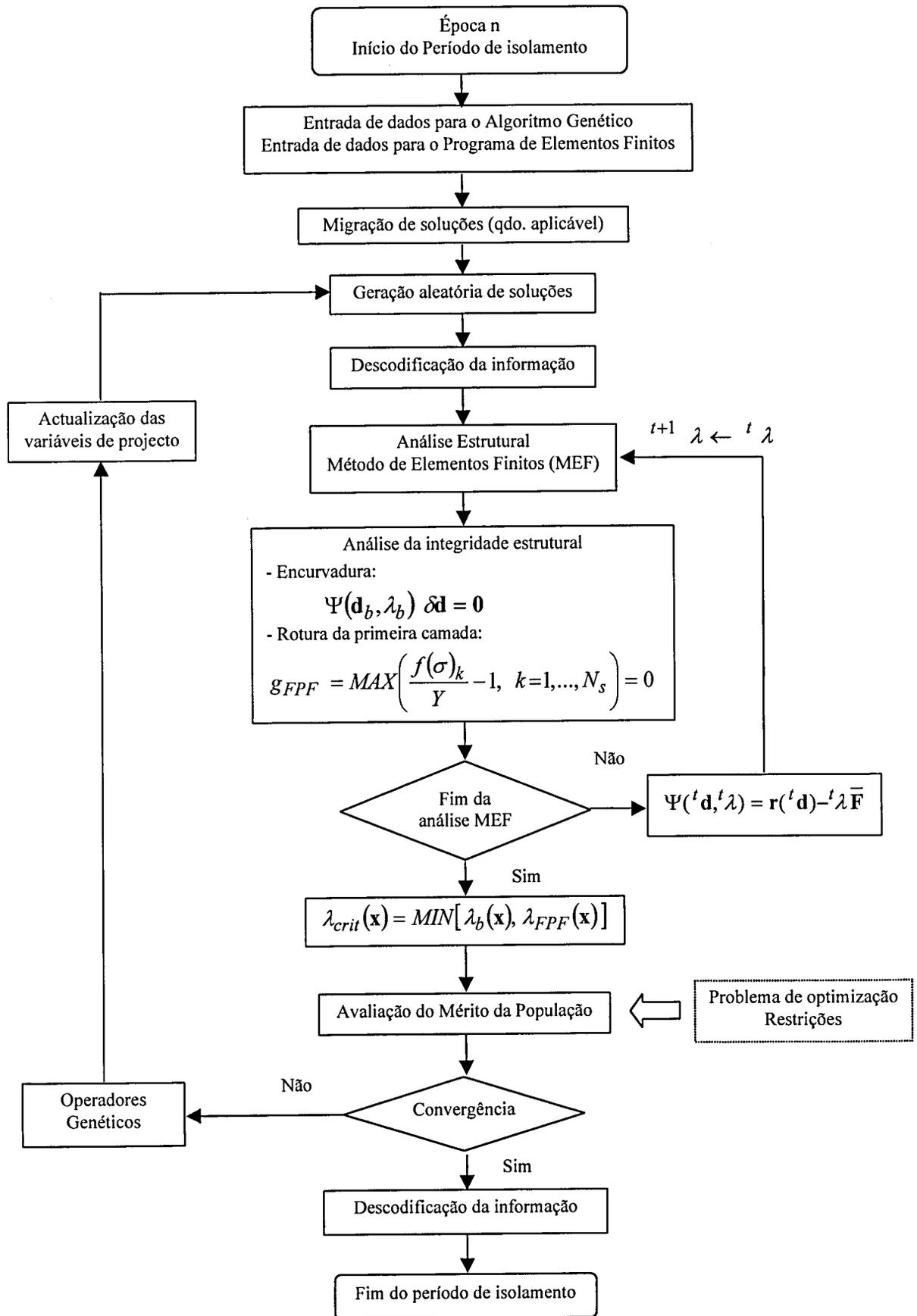


Figura 6.4 Algoritmo 2 Algoritmo Genético, período de isolamento.

O problema de repetição de soluções não se põe nos fluxos migratórios de POP1 para POP2 e de POP2 para POP3 porque o controlo de similaridade genética é feito durante os respectivos períodos de isolamento.

### 6.5.2 Ciclo interno de pesquisa evolucionária: Algoritmo 2

O ciclo interno correspondente ao Estágio de Isolamento de cada sub-população processa-se de acordo com o Algoritmo 2 apresentado da Figura 6.4.

No primeiro período de isolamento (primeira época) de POP1, toda a população é gerada aleatoriamente. Nas épocas seguintes o processo evolucionário da sub-população POP1 é reiniciado com as soluções da época anterior às quais se juntam os grupos migrados de POP2 e POP3 e ainda o grupo de soluções geradas aleatoriamente afectas à mutação implícita.

Para as restantes sub-populações POP2 e POP3 a iniciação do processo evolucionário é feita com os grupos migrados e complementada com soluções geradas aleatoriamente.

A geração de indivíduos de toda a população ou parte dela é seguida de descodificação do código genético para a formação do ficheiro de entrada da análise estrutural. A análise pelo método dos elementos finitos está interligada à análise de integridade estrutural. Neste caso pretende-se detectar o factor de carga de encurvadura e o factor de carga associado à rotura na 1ª camada. Depois da análise estrutural e de integridade segue-se a avaliação do mérito, como pode ser observado da Figura 6.4. A avaliação do mérito compreende o cálculo da função objectivo sem restrições e posterior introdução de restrições para avaliar o desempenho do indivíduo no *habitat*. Os indivíduos que violam as restrições são penalizados no valor do mérito e podem não pertencer a geração seguinte.

A evolução de toda a sub-população tendo como objectivo último a resolução do problema de optimização, é conseguida através dum conjunto de operadores genéticos que são responsáveis pela troca estruturada de informação.

## 6.6 Caracterização dos operadores genéticos

O algoritmo genético (Algoritmo 2) concebido e descrito na Figura 6.4, baseia-se na actuação de quatro operadores (O): Selecção, *Crossover*, Eliminação/Substituição e Mutação Implícita, aliados a uma *estratégia elitista* que preserve sempre um grupo dos melhores dotados (grupo A) da população [15] como ilustrado na Figura 6.5.

Selecção(O): Este operador escolhe a parte da população que será transferida para a geração seguinte após o ordenamento baseado no mérito da população actual. Foi adoptada

uma estratégia elitista onde apenas as melhores  $N_A$  soluções da população actual  $P^t$  passam para a população seguinte  $P^{t+1}$ . Através deste método garante-se a melhoria do mérito nas gerações subsequentes.

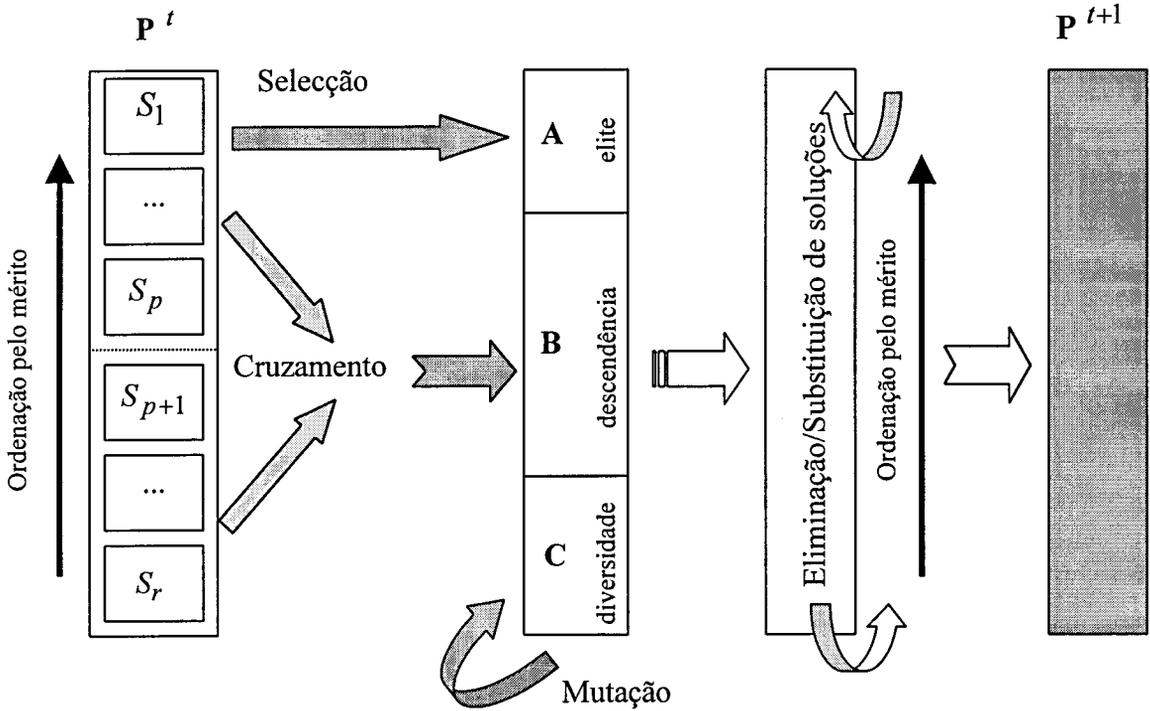


Figura 6.5 Principais operadores genéticos usados no algoritmo de otimização.

*Crossover(O)*: Este operador transforma dois cromossomas (progenitores) num novo cromossoma (filho ou descendente), cujos genes são provenientes de ambos os progenitores. Após o ordenamento da população baseado no mérito individual, os dois progenitores são escolhidos como ilustra a Figura 6.5: um pertence ao grupo dos melhor dotados (elite) definido como

$$U = \{S_1^t, S_2^t, \dots, S_p^t\} \tag{6.5}$$

e o segundo é seleccionado entre os indivíduos com mérito inferior,

$$L = \{S_{p+1}^t, S_{p+2}^t, \dots, S_{N_{pop}}^t\} \tag{6.6}$$

onde  $N_{pop}$  é a dimensão da população. Uma função de distribuição de probabilidade uniforme  $Unif(0,1)$  é usada para cada uma das duas seleções aleatórias independentes dos progenitores.

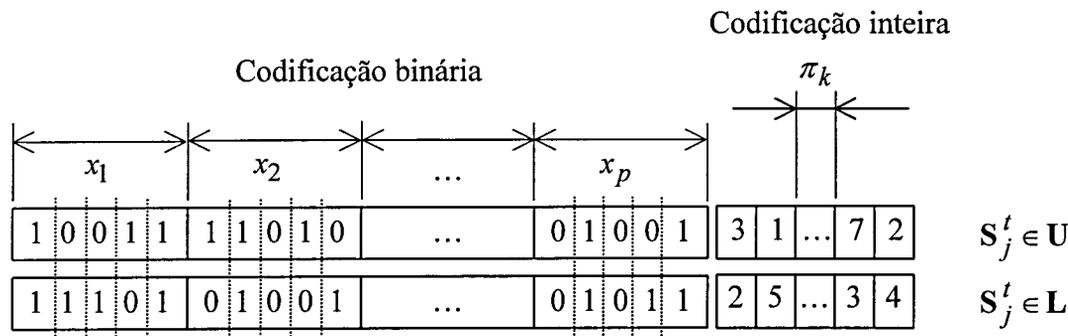


Figura 6.6 Cruzamento multiponto do tipo *Parametrized Uniform Crossover* considerado na representação binária e inteira do cromossoma.

O material genético do descendente (*offspring*) é obtido usando a técnica do “*Parametrized Uniform Crossover*” proposto por Spears e De Jong [16]. Esta técnica consiste na combinação multiponto dos *bits* das *strings* binária e inteira dos cromossomas seleccionados, como se observa na Figura 6.6. Assim, a permuta de material genético é feita do seguinte modo:

- (1) Nos segmentos activos do cromossoma, o gene (*bit*) do descendente (*offspring*)  $z_i$  é seleccionado de forma enviesada com a probabilidade  $P_i^{cros}$  de escolha do gene  $s_i$  do cromossoma da elite  $S_j$ . Esta operação pode ser representada do seguinte modo:

$$z_i = \begin{cases} s_i \leftarrow S_j \in U & \text{se } Unif(0,1) \leq P_i^{cros} \\ t_i \leftarrow S_j \in L & \text{se } Unif(0,1) > P_i^{cros} \end{cases} \quad (6.7)$$

- (2) Os genes dos segmentos não activos do cromossoma do descendente são iguais aos segmentos correspondentes do cromossoma de um dos progenitores escolhido aleatoriamente.

O grupo **B**, formado a partir do operador *Crossover* descrito aqui e ilustrado na Figura 6.5, transitará para a geração seguinte da sub-população.

Este tipo de *Crossover* é usado na evolução das sub-populações POP1 e POP3. Na sub-

população POP2 é usado um tipo diferente de crossover, denominado *Crossover Híbrido*, que será apresentado mais adiante.

*Mutação implícita(O)*: Para evitar o aparecimento de mínimos locais introduz-se na população o grupo de cromossomas  $C$ , cujos genes são gerados de forma aleatória. Esta operação denomina-se mutação implícita e é diferente das técnicas clássicas de mutação onde se efectua a mudança de um número reduzido de genes do cromossoma. O operador *Mutação Implícita* assegura a diversidade na população em cada geração. A diversidade da população depende da dimensão do grupo da elite  $N_A$  e da dimensão do grupo gerado aleatoriamente  $N_C$ . Além disso, a *Mutação Implícita* pode afectar todos os genes do cromossoma.

*Eliminação/Substituição(O)*: Para evitar posteriormente, problemas de *incesto* ou de *saturação genética* é controlada a *similaridade genética* das soluções dentro de cada sub-população. As soluções que se considerem *cópias* de outras serão eliminadas e substituídas por novas soluções geradas aleatoriamente. Após a aplicação deste operador é efectuada nova ordenação das soluções baseada no mérito.

A nova população de soluções  $P^{t+1}$  é gerada a partir da anterior  $P^t$ , usando os operadores genéticos (O) acima descritos e tendo como objectivo a melhoria da solução com melhor mérito. De acordo com a Figura 6.6, os operadores são aplicados com a seguinte sequência:

Passo 1: Iniciação

Geração aleatória da população inicial.

Passo 2: Selecção(O)

Ordenação das soluções ou indivíduos da população baseada no respectivo mérito.

Escolha da parte da população a ser transferida para a geração seguinte.

Escolha dos progenitores que vão dar origem à descendência.

Passo 3: Crossover(O)

O grupo formado a partir do operador *crossover* transitará para a geração seguinte da população.

Passo 4 Mutação Implícita(O)

Para evitar o aparecimento de mínimos locais introduz-se na população um grupo de cromossomas cujos genes são gerados de forma aleatória.

**Passo 5: Eliminação/Substituição(O)**

Este operador desempenha um papel importante na medida em que elimina as soluções com características genéticas similares deixando apenas um exemplar na população. As soluções eliminadas são substituídas por outras geradas aleatoriamente.

**Passo 6: Verificação das condições de paragem**

Enquanto o número máximo de gerações prescrito não for alcançado a população evoluirá para a geração seguinte retornando ao Passo 2. No período de isolamento não se pretende alcançar o óptimo global mas apenas a maturação da população.

Na geração aleatória de soluções que ocorre na fase de iniciação, na Substituição/Eliminação de soluções ou na *Mutação Implícita*, os segmentos não activos de cada cromossoma gerado são iguais aos segmentos correspondentes de uma das soluções migrada seleccionada de forma aleatória.

**6.7 Hibridização do operador genético de *crossover***

O operador de *crossover híbrido* é usado na evolução da sub-população POP2. Este operador baseia-se numa técnica mista onde para além da permuta estocástica estruturada de material genético dos progenitores é efectuado um processo de optimização das características genéticas do descendente. No processo de optimização usa-se o conceito de *distância de Hamming* para definir uma trajectória de pesquisa e define-se uma função de mérito local para classificar a qualidade do material genético do possível descendente.

**6.7.1 Algoritmo de *Crossover Híbrido***

Considerando o *crossover* de cromossomas ou *strings* definidas em  $Z_2^l$ , qualquer descendente criado por dois progenitores situa-se, do ponto de vista genético, sobre uma linha que vai de um progenitor ao outro. Para o efeito, introduz-se o conceito de *vector intermédio* definido da seguinte forma:

*Proposição:* As seguintes definições são equivalentes

1. O vector  $\mathbf{z}$  do conjunto  $Z_2^l$  é intermédio aos vectores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{y}$ , e escreve-se  $\mathbf{v} \diamond \mathbf{z} \diamond \mathbf{y}$ , se e somente se

$$z_i = v_i \text{ ou } z_i = y_i \quad , \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (6.8)$$

2. Usando a distância de Hamming como a distância medida entre dois vectores em  $\mathbf{Z}_2^l$ , dada por

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n |v_i - z_i|, \quad (6.9)$$

$\mathbf{z}$  é intermédio e está entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{y}$  se e somente se

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad (6.10)$$

A proposição acima estabelece de forma clara que toda a descendência criada por *crossover* é intermédia aos progenitores, não apenas no sentido *genético*, mas também no sentido de ponto intermédio num espaço associado, neste caso o espaço de Hamming.

Adoptando um processo de escolha dos dois progenitores idêntico ao seguido no *crossover* uniforme apresentado anteriormente, o algoritmo associado ao *crossover híbrido* é definido pelos seguinte passos:

1. Sejam  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  os progenitores seleccionados de forma independente e aleatória, sendo  $\mathbf{p}_1$  proveniente da elite,  $\mathbf{U}$ , definida em (6.5) e  $\mathbf{p}_2$  proveniente do grupo com menor mérito,  $\mathbf{L}$ , definido em (6.6).
2. Defina-se o cromossoma/solução  $\mathbf{z}_k$  intermédio a  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$ , cujos genes dos segmentos activos são obtidos a partir de

$$z_{k,i} = \begin{cases} p_{1,i} \Leftarrow \mathbf{p}_1 \in \mathbf{U} & \text{se } \text{Unif}(0,1) \leq P_i^{\text{cros}} \\ p_{2,i} \Leftarrow \mathbf{p}_2 \in \mathbf{L} & \text{se } \text{Unif}(0,1) > P_i^{\text{cros}} \end{cases} \quad (6.11)$$

onde  $z_{k,i}$  designa a *string*  $i$  de  $\mathbf{z}_k$ .

3. Determine-se as distâncias de Hamming definidas por

$$d_1 = d(\mathbf{p}_1, \mathbf{z}_k) \quad \text{e} \quad d_2 = d(\mathbf{p}_2, \mathbf{z}_k), \quad (6.12)$$

considerando apenas os segmentos activos dos cromossomas codificados em formato binário, isto é, excluindo os genes não activos associados ao vector da variável de projecto  $\pi$ .

4. Os genes do segmento não activo do cromossoma/solução  $\mathbf{z}_k$  são iguais ao do segmento correspondente do progenitor mais próximo, de acordo com as distâncias de Hamming  $d_1$  e  $d_2$  calculadas no passo anterior.
5. Calcular a função de mérito local  $\Phi(\mathbf{z}_k)$  para o cromossoma/solução  $\mathbf{z}_k$ .
6. Repetir os passos 2 a 5 até se obter um número  $N_z$  predefinido de cromossomas/soluções.
7. Calcular a solução local com melhor mérito,  $\bar{\mathbf{z}}$ ,

$$\Phi_{\max}(\bar{\mathbf{z}}) = \text{Max}[\Phi(\mathbf{z}_k) \quad , \quad k = 1, \dots, N_z] \quad (6.13)$$

8. Adoptar o cromossoma/solução  $\bar{\mathbf{z}}$  como descendente dos progenitores  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$ .

O aspecto mais importante do *Crossover Híbrido* é a permuta de material genético dos progenitores baseada numa pesquisa local das melhores características genéticas para o descendente. Esta pesquisa local é feita na vizinhança de  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  considerando o espaço de Hamming associado.

### 6.7.2 Heurísticas para o cálculo do mérito local

No algoritmo de Crossover Híbrido apresentado acima é necessário definir a função de mérito local  $\Phi(\mathbf{z}_k)$ . Os algoritmos genéticos clássicos apenas usam informação de ordem zero o que, no caso concreto do modelo proposto, tem como consequência a necessidade de efectuar a análise estrutural de forma exaustiva. No entanto, a utilização de aproximações tornam o processo de cálculo mais económico do ponto de vista computacional. Assim define-se a função de mérito local como

$$\Phi(\mathbf{z}_k) = \beta_1 W(\mathbf{z}_k) + \beta_2 \tilde{U}(\mathbf{z}_k) + \Psi(\bar{\Delta}_s) \quad (6.14)$$

onde  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são constantes de regularização,  $W(\mathbf{z}_k)$  é a peso/custo da estrutura,  $\tilde{U}(\mathbf{z}_k)$  é uma aproximação da energia de deformação do sistema estrutural e  $\Psi(\bar{\Delta}_s)$  é o termo restritivo relacionado com valor estimado da violação das restrições para a solução candidata a descendente  $\mathbf{z}_k$ .

A função que define o peso/custo da estrutura é calculada de forma directa usando apenas o valor descodificado das variáveis. O mesmo não acontece com a energia de deformação e a violação das restrições que dependem em geral das variáveis de estado do sistema estrutural. Assim para as duas últimas parcelas da equação (6.14) são usadas aproximações e heurísticas.

A energia de deformação do sistema estrutural pode ser calculada de forma aproximada a partir de,

$$\tilde{U}(\hat{\mathbf{z}}_k) = \tilde{U}(\hat{\mathbf{x}}_0) + \sum_{j=1}^{N_{\text{var}}} \frac{\partial \tilde{U}(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial x_j} (\hat{z}_{k,j} - \hat{x}_{0,j}) \quad (6.15)$$

Na equação (6.15)  $N_{\text{var}}$  é o número de variáveis correspondentes aos segmentos activos do cromossoma do candidato a descendente,  $\hat{\mathbf{z}}_k$  é o vector cujas componentes  $\hat{z}_{k,j}$  são obtidas por descodificação do cromossoma  $\mathbf{z}_k$ , e  $\hat{\mathbf{x}}_0$  é o vector cujas componentes  $\hat{x}_{0,j}$  são obtidas por descodificação do cromossoma  $\bar{\mathbf{p}}$  definido por

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{cases} \mathbf{p}_1 & \text{se } d_1 \leq d_2 \\ \mathbf{p}_2 & \text{se } d_1 > d_2 \end{cases} \quad (6.16)$$

A estimativa da violação das restrições  $\bar{\Delta}_s$  baseia-se na similaridade genética entre o candidato a descendente e os seus progenitores, e é definida como

$$\bar{\Delta}_s = \left(1 - \frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \Delta_{\mathbf{p}_1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \Delta_{\mathbf{p}_2} \quad (6.17)$$

onde  $\Delta_{p_1}$  e  $\Delta_{p_2}$  são as violações das restrições associadas respectivamente às soluções progenitoras  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  e as distâncias de Hamming  $d_1$  e  $d_2$  foram definidas pelas equações (6.12). O termo restritivo  $\Psi(\bar{\Delta}_s)$  pode então ser obtido a partir de

$$\Psi(\bar{\Delta}_s) = \begin{cases} 0 & \text{se } \bar{\Delta}_s \leq 0 \\ K_s (\bar{\Delta}_s)^{q_s} & \text{se } \bar{\Delta}_s > 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

sendo os valores das constantes  $q_s$  e  $K_s$  calculados considerando dois níveis de violação das restrições e penalidades de acordo com o valor da violação [17].

### 6.7.3 Aproximações para a energia e as sensibilidades

Para calcular o valor aproximado da energia  $\tilde{U}(\mathbf{z}_k)$  através da equação (6.15) é necessário calcular gradientes usando o método da variável adjunta ou o método da diferenciação directa, especialmente indicados para problemas de projecto óptimo de estruturas. Em ambos os métodos é necessária a resolução de um ou mais sistemas de equações o que tornaria o processo de pesquisa local bastante oneroso. O uso de aproximações no cálculo dos gradientes viabilizaria a inclusão desta informação complementar no algoritmo de pesquisa local.

Considere-se então a equação não linear de equilíbrio duma estrutura, correspondente ao factor de carga  ${}^{n+1}\lambda$ , definida como

$$\mathbf{K}_S {}^{(n+1)}\mathbf{d} = {}^{(n+1)}\lambda \bar{\mathbf{F}} \quad (6.19)$$

onde  $\mathbf{K}_S$  é a matriz de rigidez secante da estrutura e  ${}^{(n+1)}\mathbf{d}$  é o vector dos deslocamentos. A energia de deformação pode ser calculada através da aproximação

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} {}^{n+1}\mathbf{d}^T \mathbf{K}_S {}^{n+1}\mathbf{d} \quad (6.20)$$

A derivada da energia elástica relativamente à variável de projecto  $x_i$  pode escrever-se de acordo com a expressão:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial^{n+1} \mathbf{d}}{\partial x_i} \right)^T \mathbf{K}_S \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d} + \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_i} \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d} + \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d}^T \mathbf{K}_S \frac{\partial^{n+1} \mathbf{d}}{\partial x_i} \right) \quad (6.21)$$

Supondo que a matriz rigidez secante é simétrica, vem

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^{n+1} \mathbf{d}}{\partial x_i} \right)^T \left( \mathbf{K}_S \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d} \right) &= \left( \mathbf{K}_S \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d} \right)^T \frac{\partial^{n+1} \mathbf{d}}{\partial x_i} \\ &= \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d}^T \mathbf{K}_S^T \frac{\partial^{n+1} \mathbf{d}}{\partial x_i} = \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d}^T \mathbf{K}_S \frac{\partial^{n+1} \mathbf{d}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (6.22)$$

A equação (6.21) é então escrita como

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_i} \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d} + \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d}^T \mathbf{K}_S \frac{\partial^{n+1} \mathbf{d}}{\partial x_i} \quad (6.23)$$

Esta expressão pode-se simplificar ainda mais a partir da derivação da equação de equilíbrio (6.19). Assumindo que o vector de cargas nodais não depende das variáveis de projecto, vem

$$\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_i} \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d} + \mathbf{K}_S \frac{\partial^{n+1} \mathbf{d}}{\partial x_i} = \frac{\partial \left( \mathbf{}^{n+1} \lambda \bar{\mathbf{F}} \right)}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{K}_S \frac{\partial^{n+1} \mathbf{d}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_i} \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d} \quad (6.25)$$

e a derivada da energia elástica de deformação pode ser definida de forma simplificada como

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i} = - \frac{1}{2} \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_i} \mathbf{}^{n+1} \mathbf{d} \quad (6.26)$$

Na expressão acima a principal dificuldade prende-se com a definição da matriz de rigidez secante e a respectiva derivada. No entanto, pode-se recorrer à seguinte aproximação

$$\frac{\partial \mathbf{K}_S}{\partial x_i} \mathbf{d}^{n+1} \approx \sum_{k=1}^{n+1} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial x_i} \right)_k \Delta \mathbf{d}_k \quad (6.27)$$

onde  $\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial x_i}$  é a derivada da matriz rigidez tangente e  $(n+1)$  é o número de incrementos de carga considerados na equação de equilíbrio (6.19). A matriz de rigidez tangente resulta do processo incremental e iterativo associado à resolução desta equação.

Considerando a aproximação (6.27) na equação (6.26) obtém-se finalmente,

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i} \approx -\frac{1}{2} \mathbf{d}^{n+1 T} \left[ \sum_{k=1}^{n+1} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial x_i} \right)_k \Delta \mathbf{d}_k \right] \quad (6.28)$$

## 6.8 Critério de paragem do Algoritmo Genético Hierárquico

As condições de paragem do Algoritmo Genético Hierárquico baseiam-se no conceito de ganhos obtidos no mérito médio de um grupo de referência após a evolução das três sub-populações durante uma época completa. Assim, como o último Estágio de Isolamento ocorrido numa dada época é o da sub-população POP3 e como o processo hierárquico é sequencial, o grupo de referência adoptado é a elite desta sub-população. Nestas condições o critério de paragem é definido da seguinte forma:

1. Defina-se o mérito médio do grupo da elite da sub-população POP3 na época  $n$  como

$$FIT_{med}^n = \frac{\sum_{i=1}^{N_A} FIT_i^n}{N_A} \quad (6.29)$$

onde a elite é constituída pelo grupo  $U$  definido na equação (6.5) com  $p=N_A$  e  $FIT_i^n$  designa o mérito da solução  $i$ .

2. Seja

$$G^n = FIT_{med}^n - FIT_{med}^{n-1} \quad (6.30)$$

o ganho médio da elite obtido na época  $n$ .

3. Se durante duas épocas consecutivas se verificar a condição

$$G^n \leq \zeta \quad (6.31)$$

sendo  $\zeta$  um valor prescrito, então o processo evolutivo considera-se terminado.

## REFERÊNCIAS

- [1] **Bäck, T.**, “*Evolutionary algorithms in theory and practice*“, Oxford University Press, New York, 1995.
- [2] **Bäck, T, Fogel, D.B., Michalewicz, Z.**, “*Handbook of evolutionary computation*“, University Oxford Press, New York, 1996.
- [3] **Fogel, D.B.**, “*Evolutionary computation. Toward a new philosophy of machine intelligence*“, IEEE Press, 1995.
- [4] **Dasgupta, D., Michalewicz, Z.**, “*Evolutionary algorithms in engineering applications*“, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] **Goldberg, D. E.**, “*Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*“, Addison-Wesley, Reading, M.A., 1989.
- [6] **Powell, D. e Skolnik, M.M.**, “Using genetic algorithms in engineering design optimization with non-linear constraints”, *Proceedings of 5<sup>th</sup> International Conference on Evolutionary Programming*, S. Forrest (ed.), Morgan Kaufmann, pp.424-430, 1993.
- [7] **Surry, P., Radcliffe, N., e Boyd, I.**, “A multi-objective approach to constrained optimization of gas supply networks”, *Proceedings of the AISB-95 Workshop on Evolutionary Computing*, T.Fogarty (ed.), Springer Verlag, Vol.993, pp.166-180, 1995.
- [8] **Dulikravich, G.S., Martin, T.J., Dennis, B.H. e Foster, N.F.**, “Multidisciplinary Hybrid Constrained GA Optimization”, *Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science*, K. Miettinen, M.M. Makela, P. Neittaanmaki, J. Périaux, (eds.), John Wiley & Sons,Ltd, Chichester, UK, pp.233-259, 1999.
- [9] **Michalewicz, Z. e Janikow, C. Z.**, “Handling constraints in genetic algorithms”, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> Internacional Conference on Genetic Algorithms*, R.K. Belew e L.B. Booker (eds.), Morgan Kaufmann, pp.151-157, 1991.

- [10] Orvosh, D. e Davis, L., “Shall we repair? Genetic algorithms, combinatorial optimization, and feasibility constraints”, *Proceedings of 5<sup>th</sup> International Conference on Genetic Algorithms*, S. Forrest (ed.), Morgan Kaufmann, pp.650, 1993.
- [11] Gutkowski, W., Iwanow, Z. e Bauer, J., “Controlled mutation in evolutionary structural optimization”, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.21, pp.355-360, 2001.
- [12] Stender, J., “*Parallel Genetic Algorithms: Theory and Applications, Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*”, IOS Press, Amsterdam, 1992.
- [13] Tomassini, M., “Parallel and Distributed Evolutionary Algorithms: A Review”, *Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science*, K. Miettinen, M.M. Makela, P. Neittaanmaki, J. Périaux (eds.), John Wiley & Sons,Ltd, Chichester, UK, pp.113-133, 1999.
- [14] Michalewicz, Z., Deb, K., Schmidt, M. e Stidsen, Th., “Evolutionary Algorithms for Engineering Applications”, *Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science*, K. Miettinen, M.M. Makela, P. Neittaanmaki, J. Périaux (eds.), John Wiley & Sons,Ltd, Chichester, UK, pp.73-94, 1999.
- [15] Bean, J.C., “Genetic Algorithms and Random Keys for Sequencing and Optimization”, *ORSA Journal on Computing*, Vol.6(2), pp.154-160, 1994.
- [16] Spears, W.M. e De Jong, S.K., “On the Virtues of Parametrized Uniform Crossover”, *Proceedings of Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, R.K. Belew and L.B. Booker (eds.), Morgan Kaufmann, pp.230-236, 1991.
- [17] Conceição António, C.A. , “A hierarchical genetic algorithm for reliability based design of geometrically non-linear composite structures based”, *Composite Structures*, Vol.54, pp.37-47, 2001.

## ***CAPÍTULO 7***

### ***APLICAÇÕES NUMÉRICAS (AGH)***

## 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS (AGH)

### 7.1 Introdução

A formulação do modelo de optimização apresentado e o *Algoritmo Genético Hierárquico* (AGH) desenvolvido para a optimização de estruturas compósitas com comportamento não linear geométrico são testados usando diversos exemplos. Por um lado pretende-se demonstrar a exequibilidade do modelo de pesquisa evolucionária proposto e por outro lado evidenciar as suas principais características.

Os exemplos numéricos incidem sobre estruturas fabricadas com laminados compósitos híbridos exibindo um comportamento marcadamente não linear. Apresentam-se dois exemplos de casca reforçada com vigas e consideram-se diferentes domínios de projecto para obter as soluções óptimas.

### 7.2 Casca esférica

Neste exemplo considera-se uma casca esférica de pequena curvatura, reforçada com vigas conforme se ilustra na Figura 7.1. A casca está apoiada em todo o seu perímetro, sendo permitidas apenas rotações. A estrutura é solicitada por uma carga pontual aplicada no centro geométrico da casca, de amplitude  $F_{\max}/4 = 50$  KN.

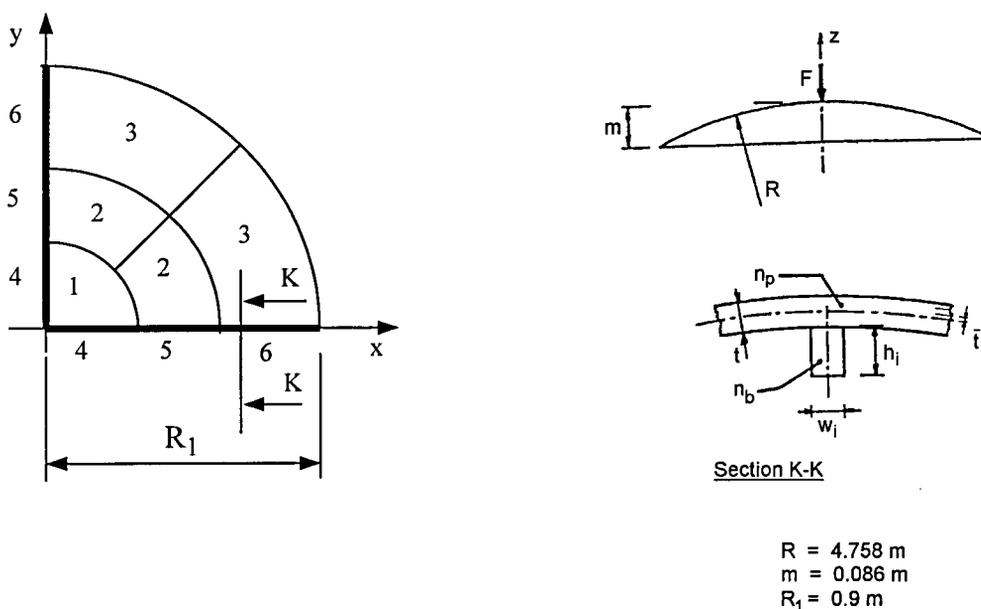


Figura 7.1 Definição da geometria e dos laminados da casca esférica reforçada com vigas.

Na simulação numérica apenas se considera um quarto da estrutura. Esta foi dividida em seis macroelementos, três macroelementos (1 a 3) agrupando os elementos de casca e os restantes (4 a 6) agrupando os elementos de viga, como está definido na Figura 7.1.

Cada macroelemento é constituído por um laminado simétrico com seis camadas. O laminado de casca é definido pelo ângulo e pela espessura da camada, respectivamente  $\theta_{i,j}$ ,  $\bar{t}_{i,j}$ . Para cada laminado de viga consideram-se as variáveis geométricas que definem a respectiva secção, ou seja, a largura  $w_j$  e a altura  $h_j$  da viga.

Nos laminados de casca considera-se o par material / sequência de empilhamento, através da variável  $\pi_j$  associada ao laminado  $j$ . Consideram-se compósitos híbridos, isto é, cada laminado é formado pelo menos por dois materiais diferentes. Assim a cada camada do laminado é atribuído um material cujas propriedades mecânicas estão definidas na Tabela 7.1. As propriedades mecânicas da camada são consideradas do ponto de vista macromecânico. Considera-se ortotropia no plano da camada.

Tabela 7.1 Propriedades macromecânicas dos materiais das camadas dos laminados.

Material nº	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu$
1	181.0 GPa	10.3 GPa	7.17 GPa	0.28
2	38.6 GPa	8.27 GPa	4.14 GPa	0.26
3	43.0 GPa	8.90 GPa	4.50 GPa	0.27
	X	Y	S	$\rho$
1	15.0 GPa	0.40 GPa	0.68 GPa	1600 kg/m <sup>3</sup>
2	10.62 GPa	0.31 GPa	0.72 GPa	1800 kg/m <sup>3</sup>
3	12.80 GPa	0.49 GPa	0.69 GPa	2000 kg/m <sup>3</sup>

O segmento do cromossoma correspondente à variável  $\pi_j$  que representa o par material / sequência de empilhamento do laminado  $j$  tem um número de genes igual ao número de laminados da estrutura. A representação é inteira e indica a posição seleccionada no domínio. Nas Tabelas 7.2 e 7.3 mostra-se o domínio desta variável para dois e três materiais, considerando laminados simétricos.

Esta forma de representar a variável Material / Sequência de empilhamento é importante pois permite a pré-selecção dos materiais e sequências que interessam ao projectista.

Os laminados de viga são fabricados com o material número 2 apresentado na Tabela 7.1. As propriedades dos laminados de viga não variam durante o processo de optimização.

Tabela 7.2 Domínio da variável material / sequência de empilhamento, 2 materiais.

Posição	Material / Sequência de empilhamento, $\pi_j$	Posição	Material / Sequência de empilhamento $\pi_j$
1	$[1 / 2 / 1]_s$	4	$[2 / 2 / 1]_s$
2	$[2 / 1 / 2]_s$	5	$[1 / 2 / 2]_s$
3	$[1 / 1 / 2]_s$	6	$[2 / 1 / 1]_s$

Tabela 7.3 Domínio da variável material / sequência de empilhamento, 3 materiais.

Posição	Material / Sequência de empilhamento $\pi_j$	Posição	Material / Sequência de empilhamento $\pi_j$
1	$[1 / 1 / 2]_s$	13	$[2 / 2 / 3]_s$
2	$[1 / 1 / 3]_s$	14	$[2 / 3 / 1]_s$
3	$[1 / 2 / 1]_s$	15	$[2 / 3 / 2]_s$
4	$[1 / 2 / 2]_s$	16	$[2 / 3 / 3]_s$
5	$[1 / 2 / 3]_s$	17	$[3 / 1 / 1]_s$
6	$[1 / 3 / 1]_s$	18	$[3 / 1 / 2]_s$
7	$[1 / 3 / 2]_s$	19	$[3 / 1 / 3]_s$
8	$[1 / 3 / 3]_s$	20	$[3 / 2 / 1]_s$
9	$[2 / 1 / 1]_s$	21	$[3 / 2 / 2]_s$
10	$[2 / 1 / 2]_s$	22	$[3 / 2 / 3]_s$
11	$[2 / 1 / 3]_s$	23	$[3 / 3 / 1]_s$
12	$[2 / 2 / 1]_s$	24	$[3 / 3 / 2]_s$

Os parâmetros do algoritmo genético (AG) são apresentados na Tabela 7.4. Para cada variável de projecto associada à parte do cromossoma com representação binária, considera-se um número diferente de dígitos. Assim,  $l_i^j$ ,  $j = 1, 2, 3$  designa o número de dígitos da variável  $i$  associada a cada um dos três segmentos do cromossoma, conforme se define na Figura 6.3 do Capítulo 6.

Para além do parâmetro acima referido, na Tabela 7.4 são definidos outros parâmetros como a dimensão de cada população,  $N_{pop}$ , a dimensão da elite de cada população,  $N_A$ , a dimensão do grupo de indivíduos gerados aleatoriamente em cada geração,  $N_C$ , a

probabilidade de crossover  $P_i^{cros}$  e o número de gerações  $Epoch(i)$  em cada período ou época de isolamento para as três sub-populações.

Tabela 7.4 Parâmetros do Algoritmo Genético (AG).

Parâmetros AG	POP1	POP2	POP3
$N_{pop}$	15	9	9
$N_A$	5	3	3
$N_C$	5	3	3
$l_i^1/l_i^2/l_i^3$	4/3/1	4/3/1	4/3/1
$P_i^{cros}$	0.5	0.5	0.5
$Epoch(i)$	12	8	10

Na desigualdade (5.19) que define a restrição associada ao factor de carga crítica, o valor admissível é de  $\bar{\lambda}_a = 0.45$ .

É prescrito um deslocamento crítico máximo de  $\bar{d}_a = 9.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ , conforme se define em (5.20). Por outro lado, o deslocamento máximo admissível em qualquer ponto  $k$  da estrutura é de  $d_{0,k} = 9.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $k = 1, \dots, N_d$ .

São impostas restrições ao domínio das variáveis de projecto do primeiro e segundo segmentos do cromossoma:

$$\begin{aligned}
 1.2 \times 10^{-3} \text{ m} \leq \bar{t}_i \leq 2.4 \times 10^{-3} \text{ m} \quad , \quad 2.0 \times 10^{-2} \text{ m} \leq h_i \leq 4.0 \times 10^{-2} \text{ m} , \\
 5.0 \times 10^{-3} \text{ m} \leq w_i \leq 1.5 \times 10^{-2} \text{ m} .
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Na função de mérito definida em (6.1),

$$FIT = \bar{C}_1 - OBJ(\mathbf{x}) - [\Gamma_1(\varphi_1) + \Gamma_2(\varphi_2) + \Gamma_3(\varphi_3)]$$

com

$$\Gamma_i[\varphi_i(\mathbf{x})] = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \bar{K}_i [\varphi_i(\mathbf{x})]^q & \text{se } \varphi_i(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

onde as constantes consideradas em (6.1) e (5.18) tomam os valores  $\bar{C}_1 = 10000$ ,  $\beta_1 = 100$  e  $\beta_2 = 1$ .

Os termos restritivos da função de mérito definidos em (6.2) são calculados considerando uma penalidade fraca  $p_{0,i} = 100$  aplicada a uma violação da restrição  $\varphi_{i,0} = 1 \times 10^{-3}$  que pode ser tolerada. A valores elevados de violação da restrição  $\varphi_{i,1} = 5 \times 10^{-3}$  é aplicada uma penalidade forte  $p_{1,i} = 500$ .

O *Algoritmo Genético Hierárquico* é aplicado a dois domínios de projecto de dimensões diferentes, conforme se consideram dois ou três materiais para os laminados que constituem a estrutura. Observa-se pelas Tabelas 7.2 e 7.3 que a dimensão do domínio de projecto no caso de três materiais é quatro vezes superior à dimensão do domínio no caso de dois materiais.

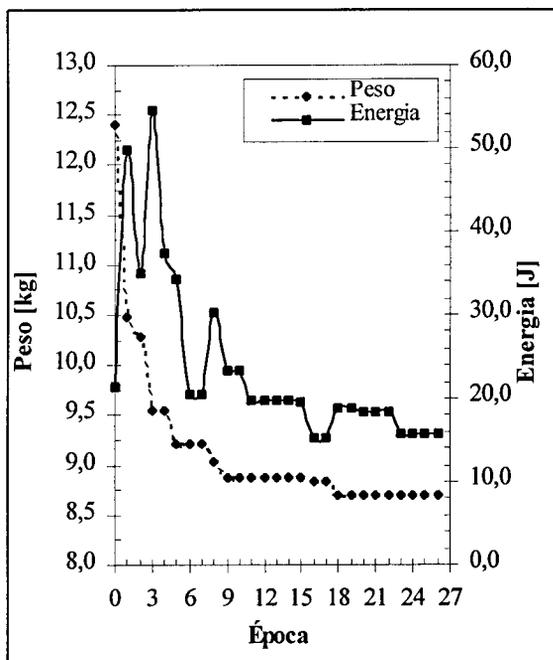


Figura 7.2 História do processo evolutivo, considerando três materiais (Tabela 7.3).

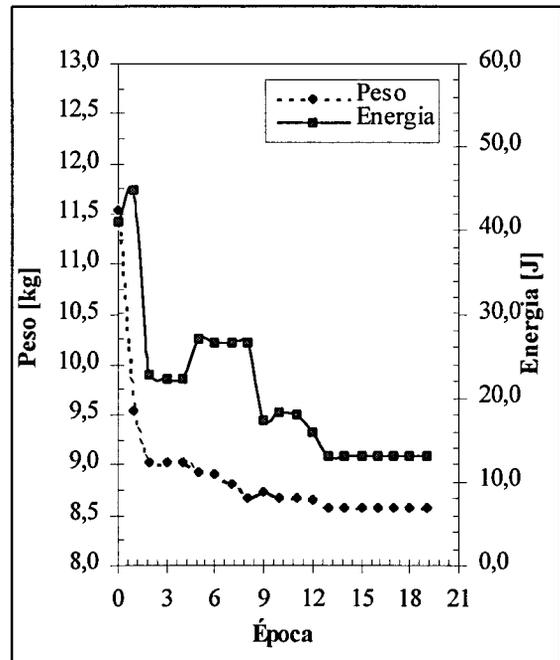


Figura 7.3 História do processo evolutivo, considerando dois materiais (Tabela 7.2).

A história da pesquisa genética evoluiu ao longo de 26 épocas no caso de três materiais e de 19 épocas no caso de dois materiais. Esta diferença entre os processos evolutivos justifica-se pelo facto de no primeiro caso a dimensão do domínio ser substancialmente maior. Os dois processos evolutivos são apresentados nas Figuras 7.2 e 7.3 onde se mostra o comportamento das duas parcelas da função objectivo definida na equação (5.18), respectivamente o peso da

estrutura  $W(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \pi)$  afectado pelo custo dos materiais e a energia de deformação  $U(\theta, \bar{\mathbf{t}}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \pi)$  introduzida como termo regularizador. Os valores apresentados referem-se à melhor solução.

Um dos aspectos importantes deste trabalho é a obtenção de uma solução que minimise simultaneamente o custo (ou o peso) e a energia de deformação dos sistema estrutural o que é realmente conseguido com este modelo. Apesar da pesquisa genética incidir sobre dois domínios de projecto diferentes os valores finais das duas parcelas da função objectivo são bastante similares.

Outro aspecto importante prende-se com as diferenças de peso e energia obtidas para a melhor solução no início dos dois processos evolutivos. Recorde-se que inicialmente todas as soluções da sub-população POP1 são geradas aleatoriamente e que a diferentes domínios corresponderão naturalmente soluções diferentes.

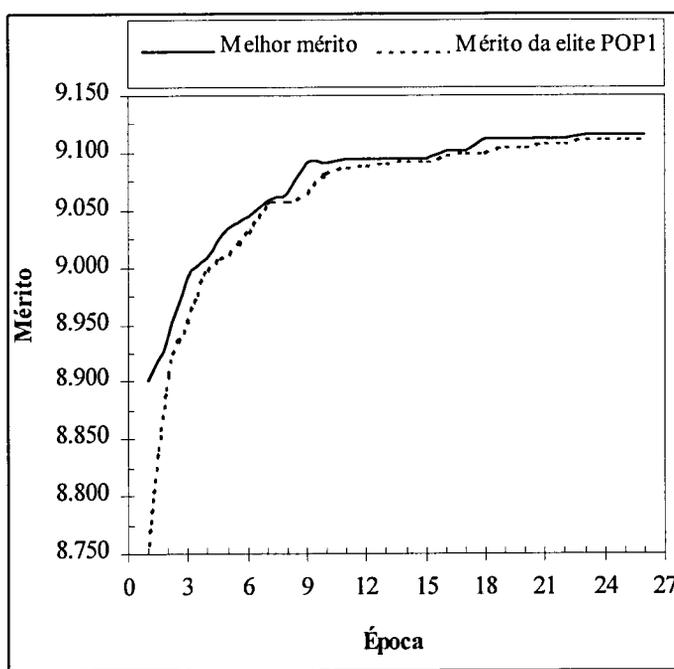


Figura 7.4 Evolução do mérito global e do mérito médio da elite da sub-população POP1, caso de estudo com três materiais.

O comportamento do melhor mérito da população no final de cada época e do mérito médio da elite (grupo A) da sub-população POP1 é descrito na Figura 7.4. Salienta-se a contínua aproximação de valores que é sinónimo de amadurecimento da sub-população POP1 cuja evolução afecta todas as variáveis de projecto do problema de optimização. Este facto é

importante tendo em conta a implementação da estratégia elitista baseada numa topologia hierárquica, pois as sub-populações POP2 e POP3 têm uma contribuição subsidiária por migração de soluções para a sub-população POP1.

Os resultados numéricos indiciam uma grande variação do mérito médio da elite da sub-população POP1 nos períodos de isolamento, conforme se observa na Figura 7.5 para o caso de estudo com três materiais. A grande variação no primeiro período de isolamento, onde ainda não houve qualquer movimento migratório, deve-se exclusivamente ao amadurecimento da sub-população POP1. Com os movimentos migratórios subsequentes a partir de POP2 e POP3, as variações do mérito médio da elite de POP1 permanecem importantes até se anularem na fase final de convergência do processo evolutivo.

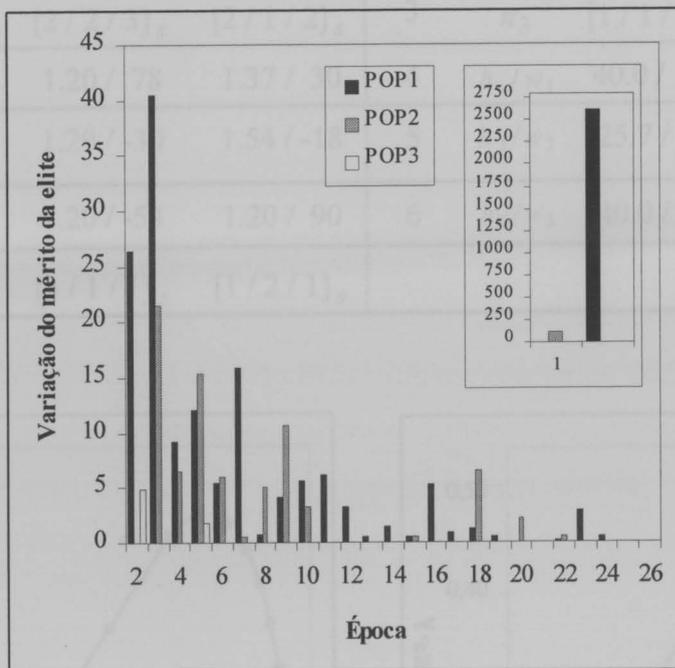


Figura 7.5 Variação do mérito médio da elite das sub-populações nos períodos de isolamento, caso de estudo com três materiais.

A sub-população POP2 apresenta também variações assinaláveis nos períodos de isolamento o que se reflecte de forma qualitativa na evolução de POP1 devido ao posterior fluxo migratório.

O comportamento da sub-população POP3 é completamente distinto, pois não havendo evolução significativa do mérito médio da elite a sua importância no processo evolutivo faz-se sentir através da migração de soluções para POP1. No entanto, pensa-se que o período de

isolamento de POP3 é importante para explorar regiões específicas do domínio associadas ao par material / sequência de empilhamento.

Tabela 7.5 Soluções ótimas para 3 materiais e 2 materiais ( $\bar{t}_i, h_i, w_i$  [mm] e  $\theta_i$  [graus]).

Macro	Variável	3 materiais	2 materiais	Macro	Variável	3 materiais	2 materiais
1	$\bar{t}_1/\theta_1$	1.20 / -30	1.20 / -54	3	$\bar{t}_7/\theta_7$	1.20 / -30	1.20 / 42
1	$\bar{t}_2/\theta_2$	1.20 / -6	1.20 / -6	3	$\bar{t}_8/\theta_8$	1.20 / -42	1.20 / 66
1	$\bar{t}_3/\theta_3$	1.20 / 66	1.20 / -6	3	$\bar{t}_9/\theta_9$	1.20 / -42	1.20 / 54
1	$\pi_1$	[2 / 2 / 3] <sub>s</sub>	[2 / 1 / 2] <sub>s</sub>	3	$\pi_3$	[1 / 1 / 3] <sub>s</sub>	[1 / 2 / 1] <sub>s</sub>
2	$\bar{t}_4/\theta_4$	1.20 / 78	1.37 / 30	4	$h_1/w_1$	40.0 / 5.0	34.3 / 6.2
2	$\bar{t}_5/\theta_5$	1.20 / -30	1.54 / -18	5	$h_2/w_2$	25.7 / 5.0	20.0 / 5.0
2	$\bar{t}_6/\theta_6$	1.20 / -54	1.20 / 90	6	$h_3/w_3$	40.0 / 7.9	40.0 / 5.0
2	$\pi_2$	[3 / 1 / 1] <sub>s</sub>	[1 / 2 / 1] <sub>s</sub>				

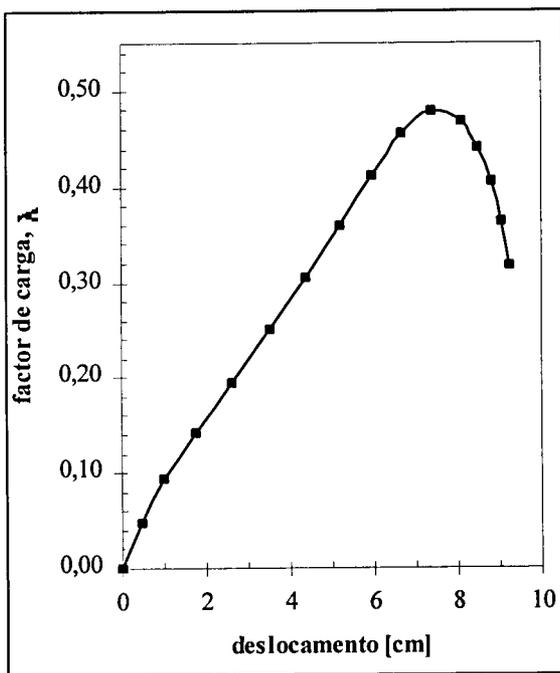


Figura 7.6 Curva de equilíbrio para a solução ótima, caso de estudo com 3 materiais.

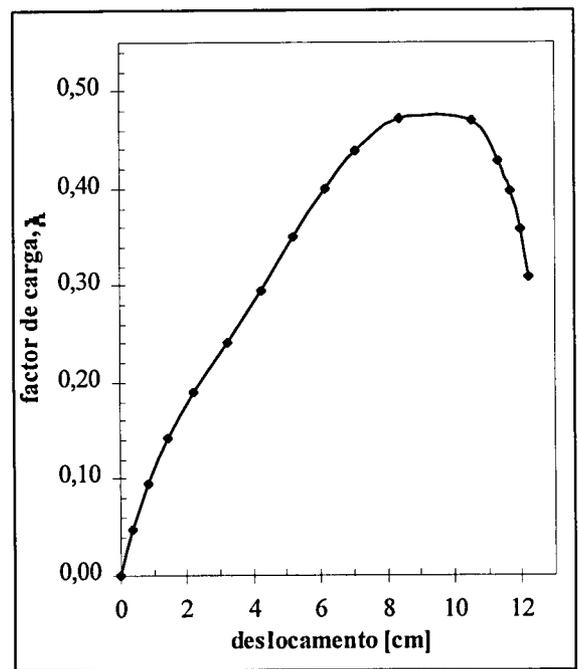


Figura 7.7 Curva de equilíbrio para a solução ótima, caso de estudo com 2 materiais.

Na Tabela 7.5 apresentam-se as soluções óptimas obtidas para os dois casos em estudo cujos domínios de projecto para a variável  $\pi_j$  foram apresentados nas Tabelas 7.2 e 7.3.

Constata-se que no caso de três materiais, as espessuras das camadas dos laminados de casca tomam um valor igual ao limite inferior do domínio de projecto. No caso de dois materiais a solução é similar excepto no laminado do macroelemento número 2. Este aspecto indica claramente um aproveitamento óptimo das propriedades anisotrópicas através da variável  $\theta_i$ , e o conseqüente decréscimo do peso da estrutura. Recorde-se que ambas as soluções em termos de peso/custo e energia são similares.

As soluções para a largura dos laminados de viga indiciam a menor importância desta variável relativamente à variável altura. A variável largura das vigas toma valores próximos do limite inferior do respectivo domínio.

As Figuras 7.6 e 7.7 mostram as relações deslocamento-carga associadas ao ponto de aplicação da carga para as soluções óptimas dos dois casos em estudo, considerando dois ou três materiais para os compósitos laminados híbridos. A casca tem um comportamento acentuadamente não-linear geométrico e as figuras mostram os pontos de encurvadura. Em ambas as situações a rotura da primeira camada não ocorre antes dos pontos de encurvadura.

Uma importante conclusão que se pode extrair das curvas de equilíbrio acima apresentadas relaciona-se com a verificação das restrições impostas à carga crítica e ao deslocamento crítico. Com efeito, ambas as soluções satisfazem as restrições impostas, embora no caso de estudo com três materiais a solução correspondente seja qualitativamente melhor pois o deslocamento crítico apresenta valores muito menores do que o valor prescrito,  $\bar{d}_a = 9.0 \times 10^{-2}$  m.

### 7.3 Casca cilíndrica

No exemplo que se segue propõe-se a análise de uma casca cilíndrica usando o modelo desenvolvido. A geometria do problema é definida na Figura 7.8. A casca está apoiada pelos cantos rectos e livre nos cantos curvos. De forma similar ao caso anterior, apenas um quarto da estrutura será analisada usando uma carga pontual de  $F_{\max}/4 = 10$  KN.

Prescreveu-se um valor máximo de  $\bar{d}_a = 1.3 \times 10^{-1}$  m para o deslocamento crítico correspondente à encurvadura ou à rotura da primeira camada da estrutura compósita. Por outro lado o deslocamento máximo admissível em qualquer ponto  $k$  da estrutura é de  $d_{0,k} = 1.3 \times 10^{-1}$  m,  $k = 1, \dots, N_d$ . O limite inferior para o factor de carga crítica é de

$\bar{\lambda}_a = 0.45$ . Os limites superior e inferior das variáveis projecto,  $\bar{t}$ ,  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{w}$  são os mesmos do exemplo anterior definidos em (7.1).

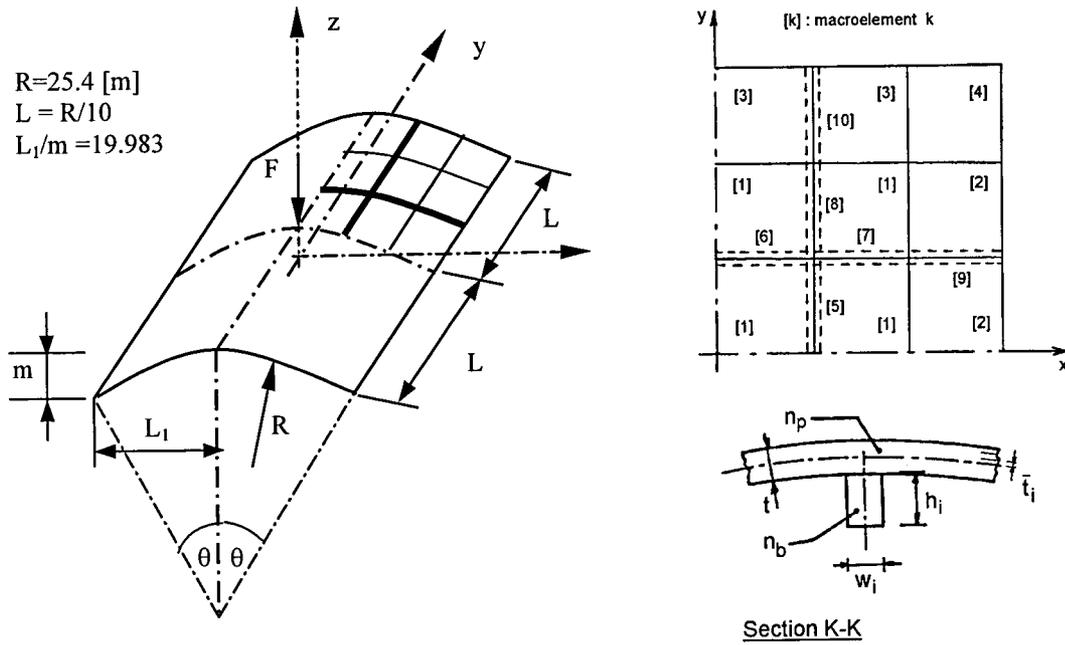


Figura 7.8 Geometria e subestruturação da casca cilíndrica.

Esta estrutura foi dividida dez macroelementos, quatro agrupando os elementos de casca (de 1 até 4) os outros seis (de 5 até 10) para o elementos de viga como ilustra a Figura 7.8.

Cada macroelemento do tipo casca é composto por um laminado híbrido simétrico com seis camadas, cujas propriedades mecânicas são seleccionadas a partir da Tabela 7.1. Neste caso considerou-se apenas dois materiais e o domínio da variável  $\pi_j$  que representa o par material / sequência de empilhamento do laminado está definido na Tabela 7.2.

Os laminados de viga são fabricados com o material número 2 apresentado na Tabela 7.1 e as propriedades não variam durante o processo de optimização.

Os parâmetros do algoritmo genético (AG) usado na evolução das sub-populações nos períodos de isolamento são os referidos na Tabela 7.4.

As constantes consideradas em (6.1) e (5.18) tomam os valores  $\bar{C}_1 = 10000$ ,  $\beta_1 = 10$  e  $\beta_2 = 1000$ . As constantes foram escolhidas de acordo com a ordem de grandeza dos termos peso/custo e energia que são diferentes dos valores envolvidos no exemplo anterior.

Os termos restritivos da função de mérito definidos em (6.2) são calculados usando os mesmos parâmetros definidos para o exemplo anterior.

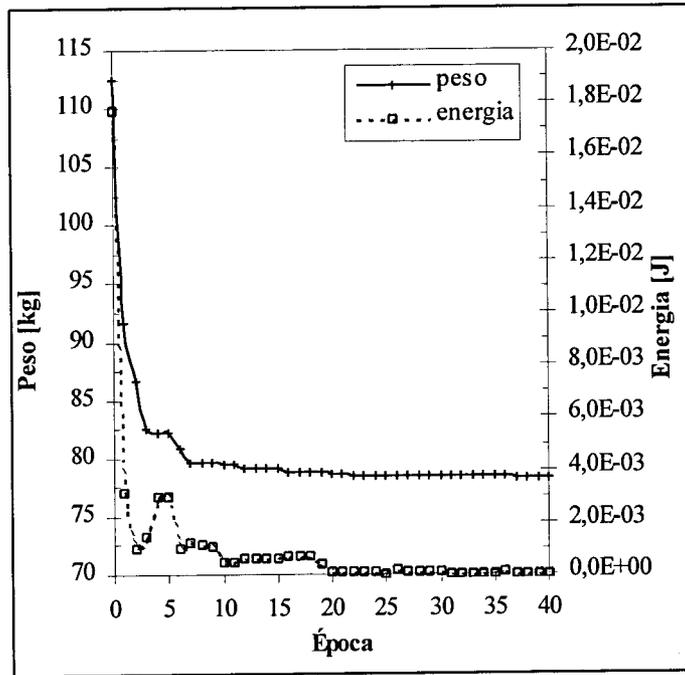


Figura 7.9 História do processo evolutivo para a casca cilíndrica, considerando dois materiais (Tabela 7.2).

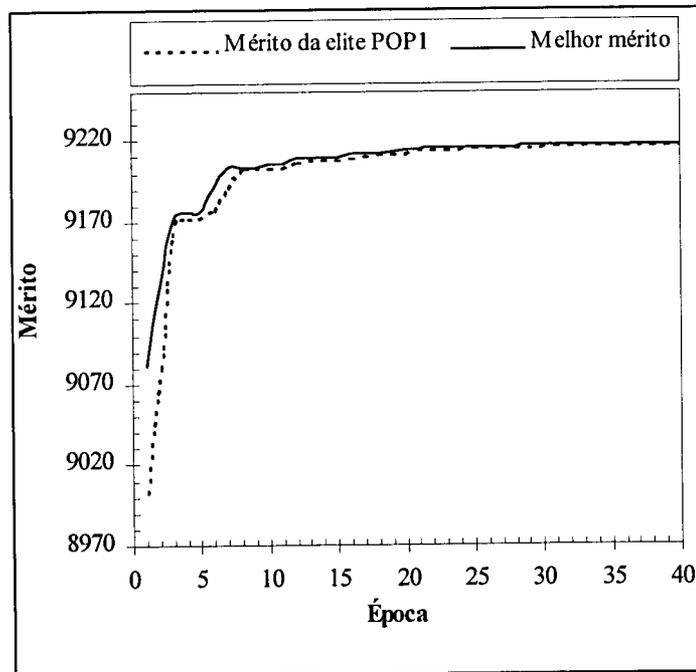


Figura 7.10 Evolução do mérito global e do mérito médio da elite da sub-população POP1, exemplo da casca cilíndrica.

A pesquisa da solução óptima foi efectuada durante 40 épocas conforme se observa através da Figura 7.9. Pode-se afirmar que as condições de convergência deste processo evolutivo são bastante restritivas ( $\zeta = 10^{-2}$ ). Com efeito, o decréscimo da parcela peso/custo é significativo nas primeiras 10 épocas e praticamente não existem alterações a partir da 22ª época. Por outro lado as alterações na parcela da energia são irrelevantes a partir da 20ª época.

Comparando peso/custo da melhor solução obtida após a geração aleatória correspondente à iniciação do processo evolutivo com o resultado final, constata-se que houve uma redução superior a 30% relativamente ao valor inicial. Por outro lado, verificou-se que as soluções correspondentes à elite de qualquer das sub-populações não violam as restrições durante todo o processo evolutivo.

Na Figura 7.10 compara-se o comportamento do melhor mérito da população no final de cada época com o mérito médio da elite da sub-população POP1. Salienta-se o rápido amadurecimento da sub-população POP1 que é consequência da transferência de material genético por migração de soluções das sub-populações POP2 e POP3.

Tabela 7.6 Solução óptima para a casca cilíndrica ( $\bar{t}_i$ ,  $h_i$ ,  $w_i$  [mm] e  $\theta_i$  [graus]).

Macro	Variável	Solução	Macro	Variável	Solução
1	$\bar{t}_1/\theta_1$	1.20 / -54	3	$\bar{t}_7/\theta_7$	1.20 / -18
1	$\bar{t}_2/\theta_2$	1.20 / 6	3	$\bar{t}_8/\theta_8$	1.20 / -6
1	$\bar{t}_3/\theta_3$	1.20 / -6	3	$\bar{t}_9/\theta_9$	1.20 / -90
1	$\pi_1$	[2 / 1 / 1] <sub>s</sub>	3	$\pi_3$	[1 / 2 / 1] <sub>s</sub>
2	$\bar{t}_4/\theta_4$	1.20 / 42	4	$\bar{t}_{10}/\theta_{10}$	1.20 / -42
2	$\bar{t}_5/\theta_5$	1.20 / -18	4	$\bar{t}_{11}/\theta_{11}$	1.20 / 30
2	$\bar{t}_6/\theta_6$	1.20 / -78	4	$\bar{t}_{12}/\theta_{12}$	1.20 / 66
2	$\pi_2$	[1 / 1 / 2] <sub>s</sub>	4	$\pi_4$	[2 / 1 / 1] <sub>s</sub>
5	$h_1/w_1$	20.0 / 5.0	8	$h_4/w_4$	20.0 / 5.0
6	$h_2/w_2$	20.0 / 5.0	9	$h_5/w_5$	22.9 / 5.0
7	$h_3/w_3$	31.4 / 5.0	10	$h_6/w_6$	20.0 / 5.0

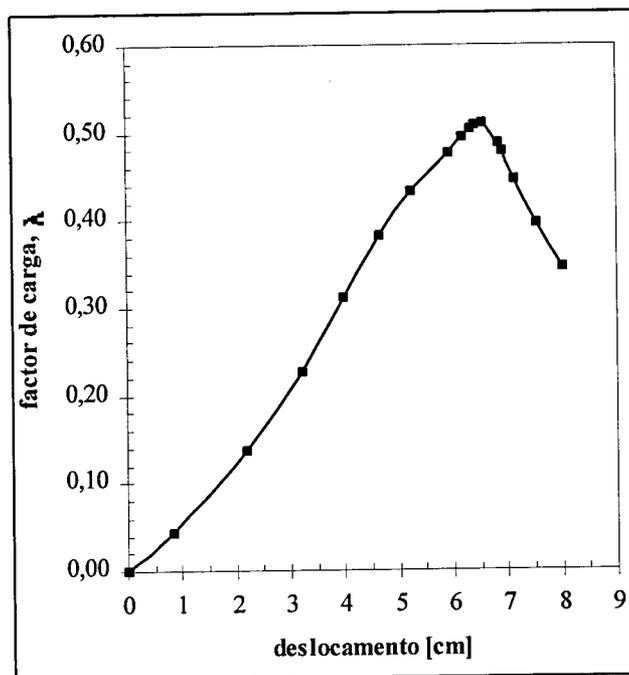


Figura 7.11 Curva de equilíbrio para a solução ótima, exemplo da casca cilíndrica.

A solução ótima para este exemplo é apresentada na Tabela 7.6. Da análise desta tabela observa-se que as espessuras das camadas dos laminados de casca tomam o valor correspondente ao limite inferior dos respectivos domínios de projecto. Este facto evidencia o amadurecimento da solução com o aproveitamento integral das propriedades anisotrópicas dos materiais compósitos híbridos usados.

As vigas de reforço paralelas ao eixo longitudinal da casca cilíndrica associadas aos laminados 5, 8 e 10, conforme se mostra na Figura 7.8, apresentam um dimensionamento ótimo peculiar. As variáveis  $h_i$  e  $w_i$  que definem a geometria das respectivas secções transversais, tomam como solução ótima os valores mínimos dos respectivos domínios de projecto. Esta solução é coerente com a influência estrutural reduzida destas vigas no comportamento global da estrutura pois estão posicionadas paralelamente aos bordos rectos apoiados da casca e perpendicularmente aos bordos curvos e livres.

Na Figura 7.11 apresenta-se a curva de equilíbrio deslocamento-carga correspondente à solução ótima, onde se observa o comportamento não-linear geométrico da estrutura. Em termos de carga e deslocamento críticos os valores estão bastante longe dos prescritos, concluindo-se assim que a solução ótima foi condicionada pelos domínios prescritos para as variáveis de projecto.

## 7.4 Teste numérico ao operador de *Crossover Híbrido*

Propõe-se um exemplo numérico com o objectivo de avaliar as capacidades do operador de *crossover híbrido* proposto. Para o efeito, efectua-se a pesquisa da solução dum problema de optimização estrutural usando o Algoritmo Genético (Algoritmo 2) descrito anteriormente no Capítulo 6 nas Secções 6.6 e 6.7.

Comparam-se os resultados obtidos usando o *Crossover Híbrido* e o *Crossover Uniforme* descritos respectivamente nas Secções 6.6 e 6.7. Nos dois casos em estudo os operadores de *crossover* são inseridos no mesmo Algoritmo Genético. Uma vez que se trata de um exemplo de teste a pesquisa evolucionária é iniciada com uma geração aleatória de todas as soluções não se considerando o fluxo migratório.

A estrutura escolhida para o teste numérico é a casca cilíndrica do exemplo anterior apresentado na secção 7.3. As restrições do problema de optimização e os valores prescritos para as cargas e deslocamentos correspondentes à encurvadura ou à rotura da primeira camada são os mesmos definidos anteriormente.

Dado que o *Crossover Híbrido* é usado no processo evolutivo da sub-população POP2 consideram-se como variáveis de projecto apenas as variáveis associadas aos respectivos segmentos activos do cromossoma, de acordo com a Figura 6.3. Assim, no laminado de casca definem-se como variáveis de projecto o ângulo das fibras de reforço do compósito e a espessura da camada, respectivamente  $\theta_{i,j}$ ,  $\bar{t}_{i,j}$ . Para cada laminado de viga consideram-se as variáveis geométricas que definem a respectiva secção, ou seja, a largura  $w_j$  e a altura  $h_j$  da viga.

Consideram-se compósitos híbridos, isto é, cada laminado é formado pelo menos por dois materiais diferentes. A cada camada do laminado de casca é atribuído um material cujas propriedades mecânicas estão definidas na Tabela 7.1. Neste caso considerou-se apenas dois materiais e o par material/sequência de empilhamento do laminado é definido por  $[2 / 1 / 2]_s$ . Os laminados de viga têm também seis camadas, são fabricados com o material número 2 apresentado na Tabela 7.1 e as propriedades não variam durante o processo de optimização.

Os parâmetros do Algoritmo Genético são os mesmos que foram considerados para a sub-população POP2 anteriormente definidos na Tabela 7.4.

Os processos evolutivos decorreram durante 325 gerações no caso do Algoritmo Genético baseado no *Crossover Híbrido* (Figura 7.12) e durante 190 gerações no caso da utilização do *Crossover Uniforme* (Figura 7.13). A diferença do tempo de evolução está relacionada com o facto de serem duas histórias de evolução genética completamente diferentes.

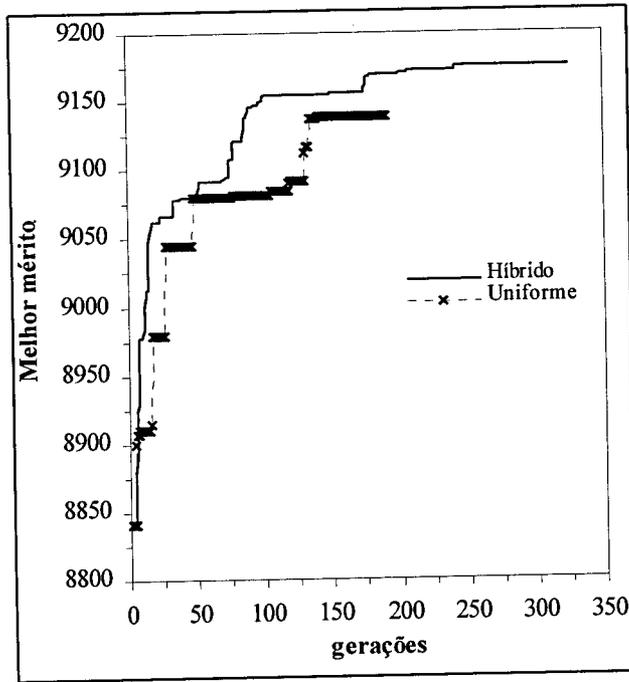


Figura 7.12 Evolução do melhor mérito, comparação dos dois tipos de *crossover*.

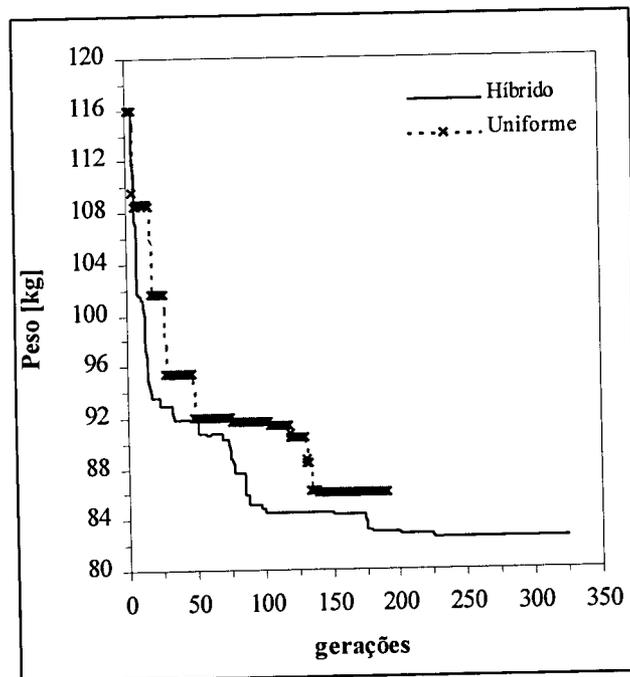


Figura 7.13 Evolução do peso da melhor solução, comparação dos dois tipos de *crossover*.

O critério de paragem em ambos os casos em análise baseou-se na não evolução do melhor mérito durante um período previamente definido (50 gerações). Assim, se um processo evolutivo tiver períodos de maturação longos pode ocorrer a sua paragem prematura.

Os dois processos evolutivos em análise apresentam comportamentos substancialmente diferentes, conforme se observa nas Figuras 7.12 e 7.13. O Algoritmo Genético com *Crossover Híbrido* apresenta, em cada geração, variações regulares do melhor mérito e da parcela correspondente ao peso/custo da estrutura. O Algoritmo Genético com *Crossover Uniforme* exhibe variações em degrau bastante acentuadas. Este aspecto é importante pois mostra que os mecanismos de evolução responsáveis pelo salto qualitativo na melhor solução são efectivamente diferentes.

A Figura 7.13 mostra que os ganhos na parcela peso/custo da estrutura no Algoritmo Genético com *Crossover Híbrido* foi da ordem de 30% relativamente ao valor da primeira geração. Em ambos os processos evolutivos não há violação das restrições para a melhor solução em todas as gerações.

Tabela 7.7 Soluções óptimas: (1) *Crossover Híbrido*; (2) *Crossover Uniforme* ( $\bar{t}_i$ ,  $h_i$ ,  $w_i$  [mm] e  $\theta_i$  [graus]).

Macro	Variável	Solução (1)	Solução (2)	Macro	Variável	Solução (1)	Solução (2)
1	$\bar{t}_1/\theta_1$	1.20 / -90	1.20 / -30	3	$\bar{t}_7/\theta_7$	1.20 / 6	1.20 / 54
1	$\bar{t}_2/\theta_2$	1.20 / 18	1.20 / -30	3	$\bar{t}_8/\theta_8$	1.20 / 42	1.20 / -6
1	$\bar{t}_3/\theta_3$	1.20 / -30	1.37 / 30	3	$\bar{t}_9/\theta_9$	1.20 / 6	1.20 / -78
2	$\bar{t}_4/\theta_4$	1.20 / -78	1.54 / -66	4	$\bar{t}_{10}/\theta_{10}$	1.20 / 54	1.20 / 66
2	$\bar{t}_5/\theta_5$	1.20 / -6	1.20 / -30	4	$\bar{t}_{11}/\theta_{11}$	1.20 / 54	1.20 / 66
2	$\bar{t}_6/\theta_6$	1.20 / 6	1.20 / -18	4	$\bar{t}_{12}/\theta_{12}$	1.20 / 30	1.20 / 66
5	$h_1/w_1$	20.0 / 5.0	20.0 / 6.4	8	$h_4/w_4$	20.0 / 6.4	22.9 / 5.0
6	$h_2/w_2$	22.9 / 10.7	31.4 / 5.0	9	$h_5/w_5$	37.1 / 12.1	31.4 / 10.7
7	$h_3/w_3$	40.0 / 7.9	40.0 / 12.1	10	$h_6/w_6$	20.0 / 5.0	40.0 / 5.0

Na Tabela 7.7 apresentam-se as soluções óptimas obtidas para os dois casos em estudo. Verifica-se que as variáveis de espessura das camadas  $\bar{t}_{i,j}$ , tomam em geral o valor mínimo

do respectivo domínio. No entanto, no caso do *Crossover* uniforme a solução não estava ainda suficientemente amadurecida. Idêntica observação pode-se fazer para os resultados obtidos para as secções das vigas de reforço paralelas ao eixo longitudinal da casca, cujos valores finais correspondem à solução obtida com o *Crossover Híbrido*. Daqui se infere que o *Crossover* Uniforme devido às suas características é mais sensível ao critério de paragem adoptado.

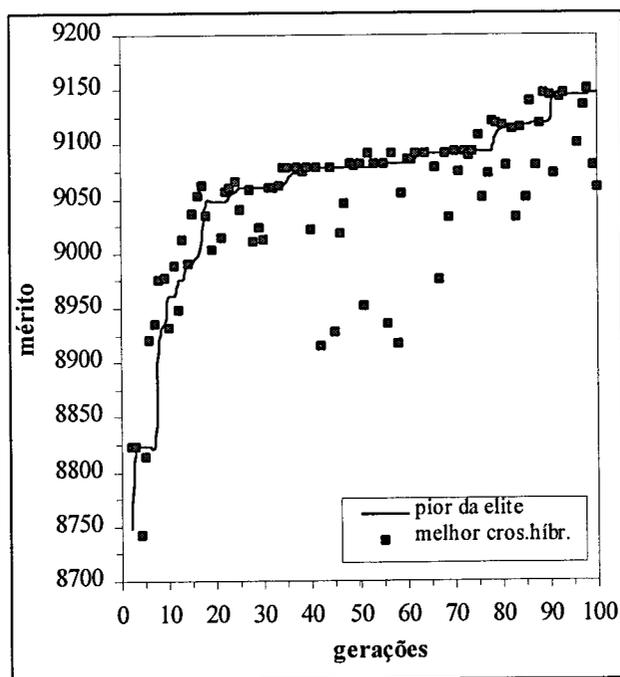


Figura 7.14 Comparação da melhor solução obtida por *crossover* com a pior solução da elite progenitora; AG com *crossover híbrido*.

Na Figura 7.14 faz-se um estudo da eficiência do operador de *Crossover Híbrido* para as primeiras 100 gerações. A comparação é feita com a pior solução do grupo da elite progenitora uma vez que esta é a solução candidata em melhor posição para ser eliminada na geração seguinte. Verifica-se que em 45% das gerações a melhor solução do *Crossover Híbrido* é superior em termos de mérito.

Pode-se concluir que, em cada duas gerações o operador de *Crossover Híbrido* é responsável pela eliminação de soluções da elite, provocando por este meio um salto qualitativo. Além disso, observa-se ainda através da Figura 7.14 que em geral para as restantes gerações o mérito da melhor solução obtida por *Crossover Híbrido* é bastante elevado quando comparado com o mérito da pior solução da elite o que confere qualidade ao material genético do segundo grupo progenitor definido em (6.6).

O operador de *Crossover Híbrido* proposto baseou-se numa técnica mista onde para além da permuta estocástica estruturada de material genético dos progenitores é efectuado um processo de optimização das características genéticas do descendente.

O domínio de pesquisa local foi restringido aos candidatos situados geneticamente na vizinhança dos dois progenitores. Esta estratégia teve como objectivo aumentar a probabilidade de sucesso associada à melhoria do mérito da descendência. O operador de *Crossover Híbrido* foi inserido num Algoritmo Genético onde o processo de selecção é suportado por uma *estratégia elitista* e o operador de mutação segue um esquema não convencional.

Compararam-se os resultados deste novo operador com os obtidos com o *Crossover Uniforme* usando o mesmo Algoritmo Genético. Conclui-se que o operador *de Crossover Híbrido* desenvolvido tem característica de convergência e estabilidade superiores às do *Crossover* uniforme. No entanto, é necessário efectuar uma análise mais aprofundada dos mecanismos de evolução do novo operador e refinar o processo de pesquisa local.

## ***CAPÍTULO 8***

# ***OPTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS***

## 8. OPTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS

### 8.1 Introdução

Em 1970 surgiu uma das primeiras tentativas de optimização de estruturas com cargas dinâmicas da autoria de Fox e Kapoor [1], que formularam o problema de optimização de uma estrutura reticulada tendo como objectivo a minimização do peso a considerando restrições de tensões e deslocamentos dinâmicos. Em 1976 foi apresentado por Cassis e Schmit [2] um trabalho de optimização (minimização do peso) de estruturas reticuladas planas, sujeitas a cargas dinâmicas. Neste trabalho usaram-se métodos de aproximação e foi discutida a natureza descontínua da região que satisfaz as restrições.

De acordo com a bibliografia existente sobre optimização de estruturas em compósitos sob condições de carregamento dinâmico, encontram-se três classes de problemas. Na primeira classe de problemas de optimização considera-se a maximização do valor próprio mais baixo e pode-se referir os trabalhos de Reiss e Ramachandran [3], Shin et al. [4] e Bendsoe et al. [5]. Outros autores como por exemplo Liao et al. [6], Sung e Shyl [7] tratam a segunda classe de problemas considerando o amortecimento dos componentes estruturais em compósitos. Em geral propõe-se uma pesquisa da solução óptima baseada no compromisso entre rigidez e amortecimento. Abrahamsson [8] define a terceira classe de problemas, com a minimização dirigida à resposta em amplitude da estrutura, em especial no caso das vibrações harmónicas forçadas. Em 1994 Chahande e Arora [9] aplicaram o método do Lagrangeano Aumentado para lidar com sistemas mecânicos e estruturais de grandes dimensões. Mais tarde Kim e Choi [10] apresentaram novos desenvolvimentos do mesmo método aplicado à resposta em amplitude de estruturas suportando cargas dinâmicas.

O modelo desenvolvido neste trabalho enquadra-se nesta última classe de problemas de optimização de estruturas e o principal aspecto inovador é a utilização de técnicas de pesquisa evolucionária. Apresenta-se um modelo de optimização de estruturas do tipo placa ou casca em materiais compósitos laminados sob condições de carregamento dinâmico. O comportamento dos materiais da estrutura segue um modelo elasto-plástico. Na análise estrutural usa-se o Método dos Elementos Finitos em particular o elemento de casca degenerado de Ahmad [11,12]. A análise dinâmica é feita pelo Método de Newmark e

considera-se a resposta em amplitude da estrutura. Partindo de uma geometria previamente definida da superfície média da casca ou da placa optimizam-se as espessuras nodais  $\bar{\pi}$  resultantes da discretização em elementos finitos, visando a minimização do peso da estrutura. São impostas restrições ao deslocamento máximo e à amplitude da região plastificada na estrutura considerando um intervalo de tempo predefinido na análise dinâmica da estrutura.

O modelo de optimização baseia-se em métodos de pesquisa evolucionária, em particular os algoritmos genéticos, agindo sobre populações de dimensão fixa. Para além dos operadores clássicos de Seleção, Crossover e Mutação no modelo são aplicadas algumas estratégias de evolução inovadoras.

## 8.2 Análise dinâmica

Usando o princípio dos trabalhos virtuais a equação de equilíbrio dinâmico é escrita da seguinte forma:

$$\int_{V(\bar{\pi})} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\pi}))^T \boldsymbol{\sigma}(\bar{\pi}) dV = \int_{S_f(\bar{\pi})} (\delta \mathbf{v}(\bar{\pi}))^T \mathbf{t} dS + \int_{V(\bar{\pi})} (\delta \mathbf{v}(\bar{\pi}))^T (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{v}}(\bar{\pi}) - c \dot{\mathbf{v}}(\bar{\pi})) dV \quad (8.1)$$

onde  $\delta \mathbf{v}$  é o vector de deslocamento virtual,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  é o vector associado a deformação virtual,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vector das tensões referenciado em relação ao sistema de coordenadas locais. Do lado direito da equação (8.1), encontram-se,  $\mathbf{t}$  que é o vector das forças de superfície que actuam numa parte da fronteira  $S$ , e os vectores  $\mathbf{b}$ ,  $\rho \ddot{\mathbf{v}}$  e  $c \dot{\mathbf{v}}$  que são as forças de massa, forças de inércia e as forças de amortecimento respectivamente. O símbolo  $(\cdot)$  significa diferenciação em relação ao tempo,  $\rho$  é a densidade e  $c$  é o parâmetro de amortecimento.

A discretização da equação (8.1) é baseada numa formulação de deslocamentos do Método dos Elementos Finitos. O elemento finito escolhido para modelação das estruturas do tipo placa ou casca foi o elemento isoparamétrico de casca degenerado com nove nós, também conhecido como elemento de Ahmad [11,12].

O elemento de Ahmad baseia-se na interpolação de três deslocamentos e duas rotações em cada nó. Neste elemento é usada a teoria de Mindlin. A normal à superfície média do elemento tridimensional considera-se recta depois das deformações por forma a superar as dificuldades numéricas relacionadas com elevada rigidez na direcção da espessura do elemento. Desprezam-se também as energias de deformação relacionadas com as tensões

perpendiculares aos eixos locais  $x'-y'$ . A componente da tensão normal a superfície é considerada nula, isto simplifica as equações constitutivas.

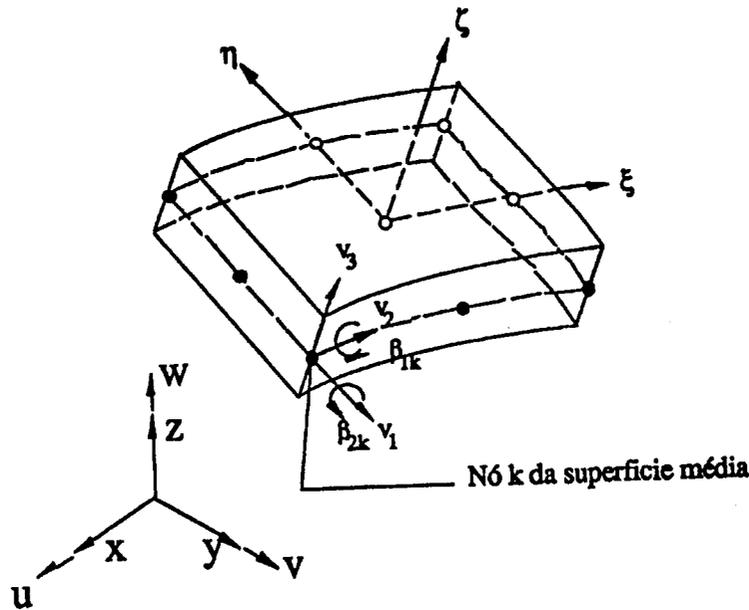


Figura 8.1 Parâmetros nodais do elemento de casca degenerada.

O elemento degenerado de casca usa 4 sistemas de coordenadas: o sistema de coordenadas cartesianas globais, o sistema de coordenadas nodais, o sistema de coordenadas curvilíneas e o sistema de coordenadas locais. No caso dos materiais compósitos laminados considera-se a estratificação da estrutura em camadas e define-se ainda um quinto sistema de eixos designado por sistema de coordenadas materiais associado a cada camada.

No elemento degenerado de casca cada nó possui 5 graus de liberdade, isto é, três translações nas direcções dos eixos do sistema global de coordenadas e duas rotações em redor de dois eixos que estão na superfície média da casca. A geometria da placa ou casca é definida usando o conceito de coordenadas nodais de espessura definidas no sistema de coordenadas cartesianas globais [11].

Usando a discretização acima referida, os deslocamentos, as velocidades e acelerações  $v$ ,  $\dot{v}$  e  $\ddot{v}$  podem ser definidos em termos de variáveis nodais  $d$ ,  $\dot{d}$  e  $\ddot{d}$  respectivamente. Então a equação (8.1) é substituída por

$$\delta \mathbf{d}(\bar{\pi})^T \left[ \mathbf{M}(\bar{\pi}) \ddot{\mathbf{d}}(\bar{\pi}) + \mathbf{C}(\bar{\pi}) \dot{\mathbf{d}}(\bar{\pi}) + \mathbf{p}(\mathbf{d}(\bar{\pi}), \bar{\pi}) \right] = \delta \mathbf{d}(\bar{\pi})^T \mathbf{f} \quad (8.2)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento,  $\mathbf{p}(\mathbf{d})$  são as forças internas e  $\mathbf{f}$  é a força aplicada. Estas matrizes e vectores podem ser definidos para cada elemento da estrutura da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_e(\bar{\pi}) = \int_{V_e(\bar{\pi})} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$$

$$\mathbf{C}_e(\bar{\pi}) = \int_{V_e(\bar{\pi})} c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$$

$$\mathbf{p}_e(\bar{\pi}) = \int_{V_e(\bar{\pi})} \mathbf{B}(\bar{\pi})^T \boldsymbol{\sigma}(\bar{\pi}) dV$$

$$\mathbf{f}_e = \int_{S_e(\bar{\pi})} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_e(\bar{\pi})} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \quad (8.3)$$

sendo  $S_e$  e  $V_e$  a área e o volume de cada elemento em consideração,  $\mathbf{B}$  é a matriz das deformações  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de forma. A matriz de massa  $\mathbf{M}$  é apresentada na sua forma consistente.

Uma vez que o deslocamento virtual pode ser arbitrário a equação (8.2) pode ser escrita de seguinte modo:

$$\mathbf{M}(\bar{\pi}) \ddot{\mathbf{d}}(\bar{\pi}) + \mathbf{C}(\bar{\pi}) \dot{\mathbf{d}}(\bar{\pi}) + \mathbf{p}(\mathbf{d}(\bar{\pi}), \bar{\pi}) = \mathbf{f} \quad (8.4)$$

Para o problema linear-elástico, a tensão está relacionada com as deformações pela equação:

$$\boldsymbol{\sigma}(\bar{\pi}) = \mathbf{D}(\bar{\pi}) \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\pi}) = \mathbf{D}(\bar{\pi}) \mathbf{B}(\bar{\pi}) \mathbf{d}(\bar{\pi}) \quad (8.5)$$

e as forças internas podem ser calculadas por:

$$\mathbf{p}(\mathbf{d}(\bar{\pi}), \bar{\pi}) = \mathbf{K}(\bar{\pi}) \mathbf{d}(\bar{\pi}) \quad (8.6)$$

onde a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  resulta da contribuição da rigidez de cada elemento, como ilustra a fórmula a seguir

$$\mathbf{K}_e(\bar{\pi}) = \int_{V_e(\bar{\pi})} \mathbf{B}(\bar{\pi})^T \mathbf{D}(\bar{\pi}) \mathbf{B}(\bar{\pi}) dV \quad (8.7)$$

Para resolver a equação (8.4), neste trabalho é usada a matriz de massa consistente e é adoptado o algoritmo de Newmark juntamente com o esquema de Hughes e Liu [13] conforme é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1. Algoritmo de Newmark com o esquema *predictor-corrector* de Hughes e Liu [13].

(1) Para o incremento de tempo  $n+1$ , inicializar,  $i=0$ ;

(2) Calculam-se os valores prognosticados

$$\mathbf{d}_{n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t^2 (1-2\beta) \ddot{\mathbf{d}}_n / 2$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i)} = \bar{\dot{\mathbf{d}}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t (1-\gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} = [\mathbf{d}_{n+1}^{(i)} - \bar{\mathbf{d}}_{n+1}] / (\Delta t^2 \beta) = 0$$

(3) Cálculo das forças residuais

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}) = \mathbf{r}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{p}(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)})$$

(4) Cálculo da correcção dos deslocamentos

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} = (\mathbf{K}^*)^{-1} \mathbf{r}_{n+1}^{(i)}$$

onde

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{M} / (\Delta t^2 \beta) + \gamma \mathbf{C}_\tau / (\Delta t \beta) + \mathbf{K}_\tau(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)})$$

(5) Correcção dos deslocamentos, das velocidades e das acelerações

$$\mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i+1)} = \bar{\dot{\mathbf{d}}}_{n+1} + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i+1)}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i+1)} = (\mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} - \bar{\mathbf{d}}_{n+1}) / (\Delta t^2 \beta)$$

(6) Verificação da condição de convergência da solução. Se

$$\|\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)}\| < \varepsilon \|\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}\|$$

então

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} \quad , \quad \dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i+1)} \quad , \quad \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i+1)}$$

faz  $n \leftarrow n+1$  e prossegue para o incremento de tempo seguinte, i.e. vai para o passo (1),

caso contrário faz  $i \leftarrow i+1$  e prossegue o processo iterativo, i.e. vai para o passo (3).

Os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  são usados para controlar a estabilidade e a precisão da solução. Neste trabalho são adoptados os valores  $\gamma = 0.5$  e  $\beta = 0.25$ .

### 8.3 Análise da integridade estrutural

Neste modelo são impostas restrições aos deslocamentos da estrutura. A estratégia adoptada passa pela consideração do ponto mais crítico associado aos deslocamentos nodais  $d_i(t)$  dentro de um intervalo de tempo especificado, i.e.  $t \in [0, t_m]$ :

$$\bar{d}(\bar{\pi}, 0 \leq t \leq t_m) = \text{MAX} \left[ |d_i(\bar{\pi}, t_j)| \quad ; \quad i = 1, \dots, N_d \quad , \quad j = 1, \dots, t_m \right] \quad (8.8)$$

$$\varphi_1(\bar{\pi}, 0 < t < t_m) = \frac{\bar{d}(\bar{\pi}, 0 < t < t_m)}{d_a} - 1 \leq 0 \quad (8.9)$$

onde  $N_d$  representa o número de deslocamentos nodais prescritos e  $d_a$  é deslocamento máximo admissível.

O segundo tipo de restrições impostas está associado ao estado de tensão existente ao nível da camada. O critério de cedência usado para materiais anisotrópicos é uma generalização do critério de Huber-Mises e pode ser escrito como

$$1 - \frac{f_k(\sigma, t_j)}{Y} = 0 \quad (8.10)$$

onde  $Y$  é a tensão de cedência do material,  $N_s$  é o número de pontos onde o vector das tensões é calculado e  $f_k(\sigma, t_j)$  é a função de cedência plástica calculada no ponto  $k$  e no instante de tempo  $t_j$ , definida a partir das tensões referidas ao referencial material 1,2,3 da seguinte forma

$$\begin{aligned} f_k^2(\sigma, t_j) &= a_1 \sigma_1^2 + 2 a_{12} \sigma_1 \sigma_2 + a_2 \sigma_2^2 + a_3 \tau_{12}^2 + a_4 \tau_{13}^2 + a_5 \tau_{23}^2 \\ &= \sigma_{1,2,3}^T \mathbf{A} \sigma_{1,2,3} \end{aligned} \quad (8.11)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz dos parâmetros de resistência anisotrópicos. Se os eixos do referencial material 1,2 rodarem de um ângulo  $\theta$  relativamente aos eixos de referência x,y, então é necessário efectuar a transformação quer das tensões quer da matriz  $\mathbf{A}$  para o referencial global. Então, o critério de cedência pode ser escrito como

$$f_k^2(\sigma, t_j) = \sigma^T \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \sigma = \sigma^T \bar{\mathbf{A}} \sigma \quad (8.12)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação que relaciona o referencial material (1,2,3) com o referencial global (x,y,z). O início da cedência plástica no ponto  $k$  da estrutura no instante  $t_j$  ocorre para

$$h_k(t_j) = 1 - \frac{f_k(\sigma, t_j)}{Y} = 0 \quad (8.13)$$

Definindo

$$\phi_k(t_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } h_k(t_j) \geq 0 \\ 0 & \text{se } h_k(t_j) < 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

a região plastificada da estrutura no instante  $t_j$  pode ser quantificada por

$$\Gamma_Y(t_j) = \frac{1}{V_T} \sum_{k=1}^{N_s} [\phi_k(t_j) V_k(\bar{\pi})] \quad (8.15)$$

onde  $V_T$  é volume total da estrutura e  $V_k(\bar{\pi})$  é o volume da região de influência do ponto  $k$ .

Adoptando novamente uma estratégia baseada na identificação do valor mais crítico pode-se escrever

$$\bar{\Gamma}_Y(\bar{\pi}, 0 \leq t \leq t_m) = \text{MAX}[\Gamma_Y(t_j), j = 1, \dots, t_m] \quad (8.16)$$

e a restrição estabelecida sobre o valor relativo da região não plastificada é

$$\varphi_2(\bar{\pi}, 0 \leq t \leq t_m) = 1 - \frac{1 - \bar{\Gamma}_Y(\bar{\pi}, 0 \leq t \leq t_m)}{\Gamma_a} \leq 0 \quad (8.17)$$

onde  $\Gamma_a$  é o valor admissível para a região não plastificada.

### 8.4 Formulação do problema de optimização

A formulação do problema de optimização é então descrita da seguinte forma:

Minimizar  $W(\bar{\pi})$

sujeito a

$$\varphi_1(\bar{\pi}, 0 < t < t_m) = \frac{\bar{d}(\bar{\pi}, 0 < t < t_m)}{d_a} - 1 \leq 0$$

$$\varphi_2(\bar{\pi}, 0 \leq t \leq t_m) = 1 - \frac{1 - \bar{\Gamma}_Y(\bar{\pi}, 0 \leq t \leq t_m)}{\Gamma_a} \leq 0 \quad (8.18)$$

às restrições nas variáveis de projecto,

$$\bar{\pi}_i^l \leq \bar{\pi}_i \leq \bar{\pi}_i^u, \quad i=1, \dots, N$$

e às equações de estado (4)

$$\mathbf{M}(\bar{\pi}) \ddot{\mathbf{d}}(\bar{\pi}) + \mathbf{C}(\bar{\pi}) \dot{\mathbf{d}}(\bar{\pi}) + \mathbf{p}(\mathbf{d}(\bar{\pi}), \bar{\pi}) = \mathbf{f}$$

Na formulação acima,  $W(\bar{\pi})$  representa o peso da estrutura do tipo placa ou casca,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são as restrições de deslocamento crítico e de extensão da região plastificada definidas nas equações (8.9) e (8.17) respectivamente. Nas restrições às variáveis de projecto,  $\bar{\pi}_i^l$  e  $\bar{\pi}_i^u$  são os limites inferior e superior ao valor das variáveis.

## 8.5 Optimização baseada em pesquisa evolucionária

A técnica de pesquisa evolucionária adoptada neste trabalho baseia-se num Algoritmo Genético (GA). Esta técnica combina a conhecida Teoria de Darwin da sobrevivência dos indivíduos mais dotados com informação estruturada de forma estocástica [14]. Por analogia com a referida teoria as soluções de projecto estrutural mais eficientes resultantes da melhor combinação das variáveis de projecto têm uma probabilidade mais elevada de pertencer à população que gerará novas soluções visando a obtenção do óptimo global.

### 8.5.1 Formato da codificação e função de mérito

Após identificação das variáveis de projecto e do domínio de pesquisa que representa o fenotipo da população, as diferentes soluções são representadas por um formato de codificação apropriado designado por genotipo. Neste trabalho adoptou-se um formato em código binário, admitindo-se um número de *bits* diferente para cada variável de projecto.

Um dos passos mais importantes no desenvolvimento do Algoritmo Genético é a definição do *Mérito* de cada solução o qual está relacionado com a função objectivo e as restrições do problema estabelecido em (8.18). O objectivo da pesquisa evolucionária é obter em cada geração o incremento do melhor mérito da população. Assim o problema de optimização original pode ser reescrito

$$\text{Maximizar } F(\bar{\pi}) = \bar{F} - W(\bar{\pi}) - [\Psi_1(\bar{\pi}) + \Psi_2(\bar{\pi})] \quad (8.19)$$

com

$$\Psi_j(\bar{\pi}) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \varphi_j(\bar{\pi}) \leq 0 \\ \xi [\varphi_j(\bar{\pi})]^\eta & , \text{ se } \varphi_j(\bar{\pi}) > 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

onde  $\xi$  e  $\eta$  são constantes calculadas considerando dois graus de violação das restrições e  $\bar{F}$  é uma constante arbitrária. A técnica utilizada para incorporar as restrições baseia-se na sua penalização. É aplicada uma penalidade fraca  $p_0$  à violação da restrição  $\varphi_0$  cujo valor pode ser tolerado. Em contrapartida se a violação da restrição assume um valor elevado  $\varphi_1$  então é penalizada fortemente com uma penalidade  $p_1$ . Por outro lado as restrições na equação (8.20) implicam a satisfação das equações de equilíbrio dinâmico (8.4).

As restrições impostas nas variáveis de projecto são consideradas quando o domínio é discretizado e se procede codificação binária dos cromossomas das soluções.

### 8.5.2 Operadores Genéticos

O algoritmo genético desenvolvido baseia-se em quatro operadores principais suportados por uma estratégia elitista onde se preserva um núcleo A da população composto pelos melhores indivíduos cujo material genético é transferido para as gerações seguintes, conforme se apresenta na Figura 8.2.

A nova população de soluções  $P^{t+1}$  é gerada a partir da anterior  $P^t$  usando os operadores genéticos *Seleção*, *Crossover*, *Eliminação/Substituição* e *Mutação* tendo como objectivo a melhoria do melhor Mérito da população. Os operadores são aplicados com a seguinte sequência: Passo 1: *Seleção*; Passo 2: *Crossover*; Passo 3: *Eliminação/Substituição*; Passo 4: *Mutação*.

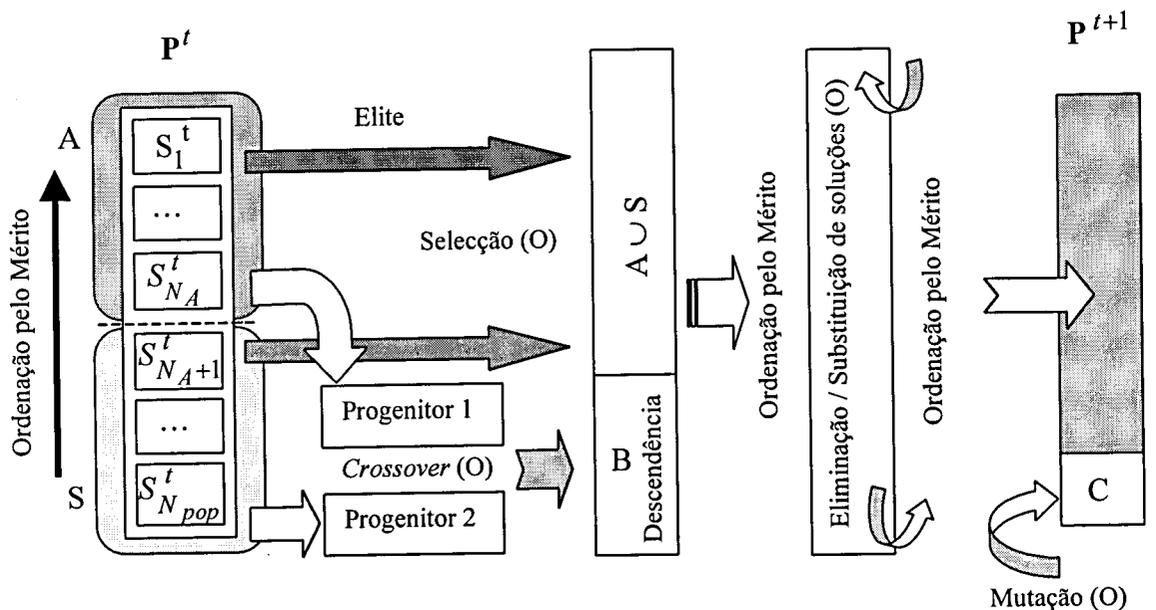


Figura 8.2 Principais operadores genéticos.

O operador *Seleção* tem como função a ordenação das soluções ou indivíduos da população baseada no respectivo Mérito, seguida da escolha dos progenitores que vão dar origem à descendência (grupo B). Paralelamente este operador é responsável pela

transferência da população inicial para uma fase intermédia onde é reunida à descendência criada pelo operador *Crossover*.

Cada progenitor é seleccionado de forma aleatória e equiprovável: um pertence ao grupo A da população com melhor Mérito (elite) e o outro é seleccionado do grupo com Mérito inferior. O segundo passo consiste na operação de *Crossover* uniforme baseada numa técnica de cruzamento multi-ponto aplicada às *string* binárias dos cromossomas seleccionados [15]. Este *Crossover* é aplicado com uma probabilidade de escolha  $P(c)$  do material genético do cromossoma com melhor Mérito. A descendência criada pelo operador *Crossover* é agrupada no conjunto B e posteriormente reunida à população original conforme se observa na Figura 8.2.

No passo seguinte procede-se a nova ordenação da população alargada e é aplicado o operador *Eliminação/Substituição*. Este operador desempenha um papel importante na medida em que elimina as soluções com características genéticas similares deixando apenas um exemplar na população. Este aspecto é crucial afim de se evitar o *incesto* nas gerações seguintes, isto é, o cruzamento de indivíduos (progenitores) com elevado grau de parentesco. As soluções eliminadas são substituídas por outras geradas aleatoriamente.

Após a aplicação dos operadores *Seleção* e *Crossover*, existe a possibilidade de algumas das soluções geradas possuírem uma elevada percentagem de material genético semelhante. O operador genético *Mutação* é usado para ultrapassar este problema e é caracterizado pela mudança do código binário do segmento do cromossoma correspondente a uma variável de projecto seleccionada aleatoriamente. A mudança é operada sobre um cromossoma de uma solução seleccionada de forma aleatória no grupo A que constitui a elite da população. As novas soluções obtidas com este operador formam o grupo C. O operador *Mutação* torna possível a exploração de regiões do domínio de projecto não mapeadas anteriormente e ao mesmo tempo garante a diversidade da população gerada.

### 8.5.3 Análise do Algoritmo Genético com função de teste

Para testar a eficiência do algoritmo genético usou-se a seguinte função

$$f(x_1, x_2) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (8.21)$$

com

$$-1.5 \leq x_i \leq 1.5 \quad , \quad i = 1, 2 \quad (8.22)$$

A função apresenta um mínimo no ponto (1,1) do respectivo domínio. Efectivamente verifica-se a condição necessária:

$$\nabla f(1,1) = \mathbf{0} \quad (8.23)$$

Por outro lado, a matriz Hessiana calculada no ponto (1,1) é definida como

$$\mathbf{H}_f(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

Assim, são satisfeitas as condições suficientes para a existência de um mínimo:

$$\det \mathbf{H}_f(1,1) = 400 > 0 \quad (8.25)$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(1,1) = 802 > 0 \quad (8.26)$$

O estudo efectuado incide apenas sobre a influência da dimensão do domínio sobre a *performance* do Algoritmo Genético desenvolvido. Uma vez que são considerados valores discretos do domínio original das variáveis e sabendo que o refinamento depende do número de *bits* considerado, conclui-se que a dimensão do novo domínio discretizado é função do comprimento da *string* binária do cromossoma. Assim, o parâmetro de controlo adoptado nesta análise é o número de *bits* ou genes de cada variável e supõe-se que as duas variáveis do problema são representadas pelo mesmo número de *bits*.

Definem-se dois parâmetros de análise do comportamento. O primeiro é a distância entre valor da função no óptimo global (valor conhecido) e o valor da função correspondente à solução corrente, definido como:

$$\Delta f = f(x_{1OG}, x_{2OG}) - f(x_{1OC_i}, x_{2OC_i}) \quad (8.27)$$

onde  $x_{OG}^T = \{x_{1OG}, x_{2OG}\}$  é o vector correspondente ao ponto de óptimo global e  $x_i^T = \{x_{1OC_i}, x_{2OC_i}\}$  é o vector correspondente à solução corrente.

O segundo parâmetro de análise é a distância entre os pontos correspondentes ao óptimo corrente e ao óptimo global, dado por

$$\delta_x = \sqrt{(x_{1OG} - x_{1OC_i})^2 + (x_{2OG} - x_{2OC_i})^2} \tag{8.28}$$

A pesquisa evolucionária é efectuada sobre uma população de 10 soluções, a dimensão da elite é de  $N_A = 3$  e do grupo obtido por mutação é  $N_C = 3$ .

Os resultados apresentados nas Figuras 8.3 e 8.4 mostram que existe uma evolução (ou convergência) rápida da melhor solução para o valor da função, constatando-se que as grandes variações de  $\Delta_f$  registam-se nas primeiras 50 gerações. Verifica-se ainda que o parâmetro  $\delta_x$  pode variar ao longo do processo evolucionário o que é justificado pela irregularidade da superfície  $z = f(x_1, x_2)$ . No entanto as variações não afectam significativamente o valor da função.

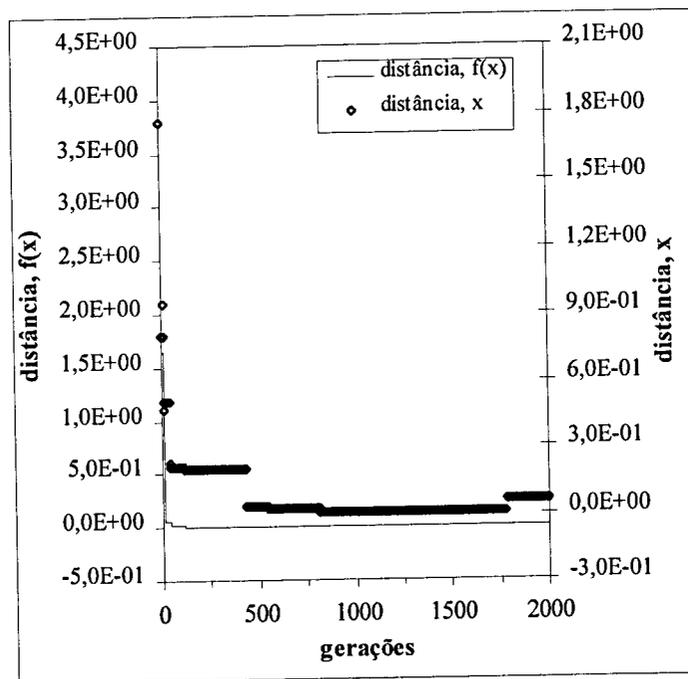


Figura 8.3 Variação das distâncias  $\Delta_f$  e  $\delta_x$ , representação binária com 8 dígitos.

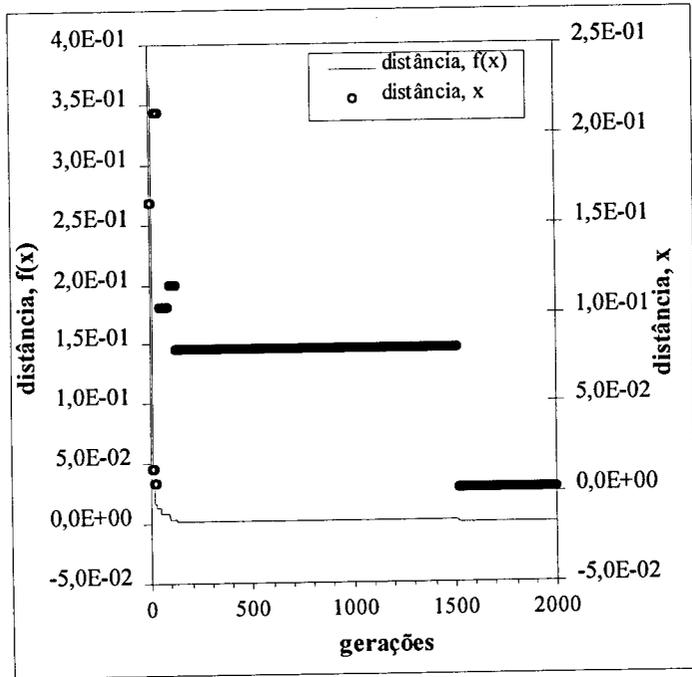


Figura 8.4 Variação das distâncias  $\Delta_f$  e  $\delta_x$ , representação binária com 10 dígitos.

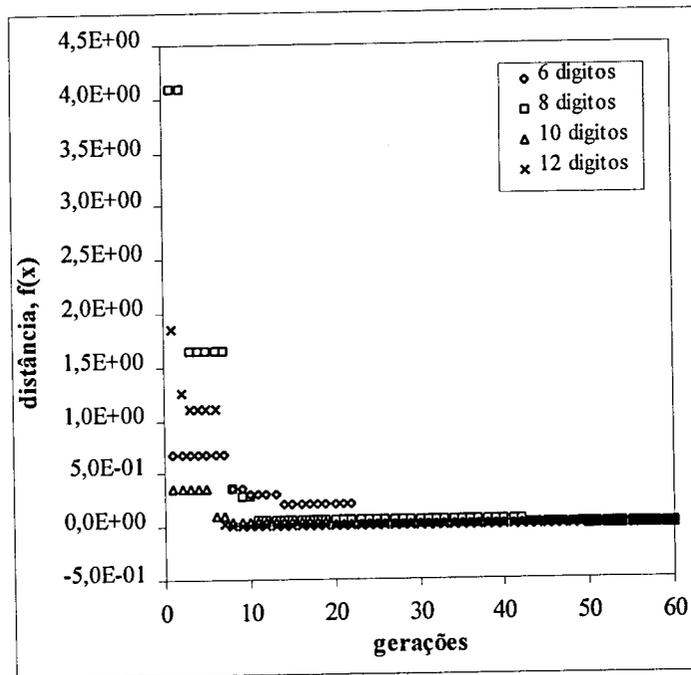


Figura 8.5 Pormenor da variação da distância  $\Delta_f$ , para diferentes tipos de representação binária.

Na Figura 8.5 apresentam-se em pormenor as evoluções do parâmetro  $\Delta_f$  para as primeiras 60 gerações, considerando diferentes tipos de representação. Comparando os resultados conclui-se que existe uma fase de maturação das soluções que compõem a população. Após esta fase as melhores soluções encontram-se na vizinhança do ponto de correspondente ao óptimo global. A fase posterior está associada ao refinamento das melhores soluções.

### 8.6 Exemplo numérico: otimização da resposta dinâmica em amplitude

Apresenta-se como exemplo uma casca fina esférica. A calote esférica é definida pelo ângulo  $\alpha=120^\circ$ , pelo raio  $R=0.508\text{ m}$  e impede-se a translacção nas três direcções ortogonais em todo o perímetro da casca. A casca está sujeita a uma pressão uniforme de  $4.138\text{ MPa}$  que é aplicada segundo o perfil da função de Heaviside  $f(t)=1$  durante  $6 \times 10^{-3}\text{ s}$ .

Na discretização da casca em elementos finitos apenas é considerado um quarto da casca devido à simetria da geometria e do carregamento, conforme se apresenta na Figura 8.6. A casca é discretizada em 12 elementos com um total de 61 nós.

A casca é constituída por laminado simétrico com 2 camadas com a mesma espessura. A massa específica é de  $3.26 \times 10^3\text{ kg m}^{-3}$  e as propriedades macromecânicas do material das camadas são as seguintes:

$$\begin{aligned} E_x = E_y = 206.9\text{ GPa}, \quad \nu = 0.3, \quad G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 106.2\text{ GPa} \\ Y = \sigma_{ox} = \sigma_{oy} = \sigma_{o45} = 689.7\text{ MPa} \\ \tau_{o12} = \tau_{o13} = \tau_{o23} = 397.9\text{ MPa} \end{aligned} \quad (8.29)$$

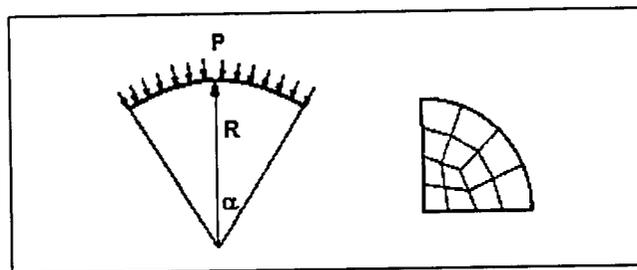


Figura 8.6 Definição geométrica e discretização em elementos finitos da casca fina esférica de pequena curvatura sob pressão uniforme.

As condições de serviço impostas são baseadas no valor absoluto do deslocamento vertical máximo admissível  $d_a = 3.5 \times 10^{-2}$  m dentro do intervalo de tempo  $0 \leq t \leq t_m = 2.0 \times 10^{-3}$  s, de acordo com a desigualdade (8.9). Para além da restrição atrás referida considera-se que a estrutura não apresentará qualquer plastificação, isto é  $\Gamma_a = 1$  de acordo com (8.17).

Consideram-se como variáveis de projecto as espessuras nodais cujo domínio é definido por:  $3 \times 10^{-2} \leq \bar{\pi}_i \leq 6 \times 10^{-2}$  [m]. Adoptou-se um formato com quatro dígitos para a codificação binária do segmento do cromossoma correspondente a cada variável. Assim o cromossoma de cada solução (ou indivíduo) possui um comprimento de  $l = 4 \times 61$  genes.

O processo evolutivo teve como base uma população fixa de 30 soluções. O grupo A que constitui a elite da população é constituído por 9 soluções. O grupo C que está associado ao operador Mutação é formado por 3 soluções.

As Figura 8.7 e 8.8 mostram a história do Mérito da melhor solução e do volume da respectiva estrutura ao longo do processo evolutivo. A condição de paragem baseia-se na ausência de incremento da média aritmética do mérito de 70% das melhores soluções da população durante 50 gerações. As alterações significativas no melhor mérito da população foram produzidas nas primeiras 100 gerações.

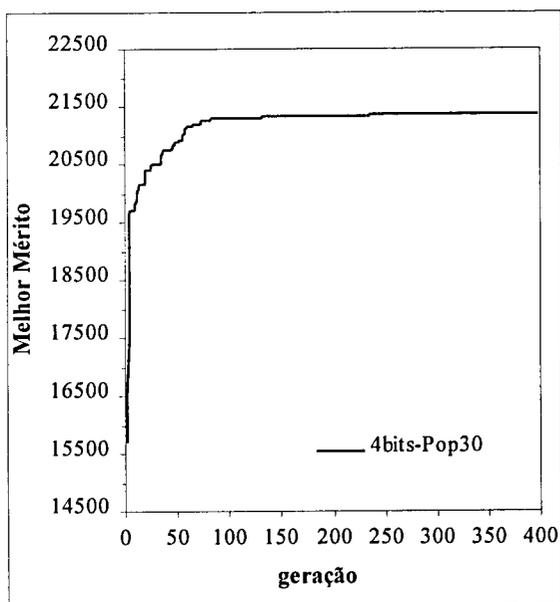


Figure 8.7 História do mérito da melhor solução ao longo do processo evolutivo.

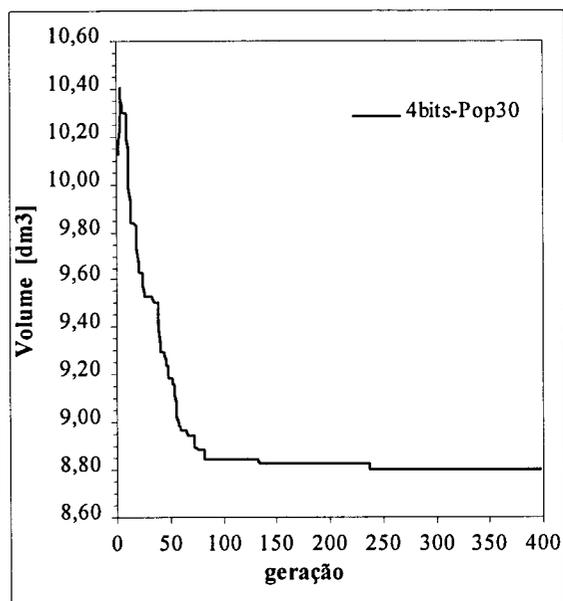


Figure 8.8 Volume da casca esférica correspondente à melhor solução ao longo do processo evolutivo.

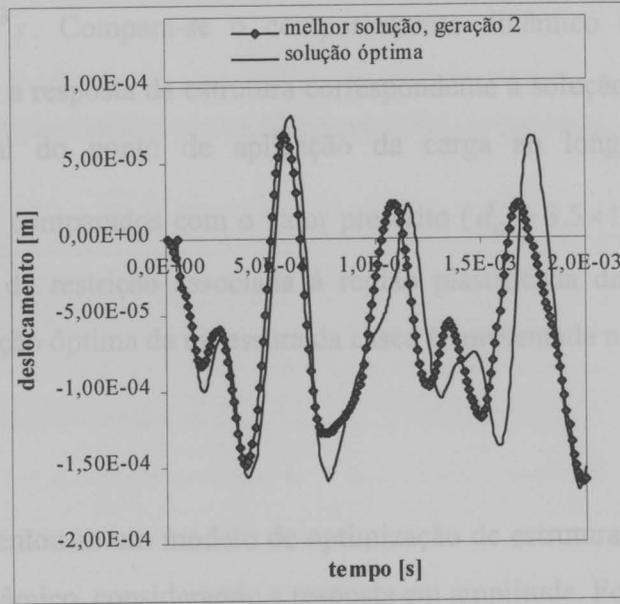


Figura 8.9 Deslocamento vertical do ponto central da casca em função do tempo, para solução ótima.

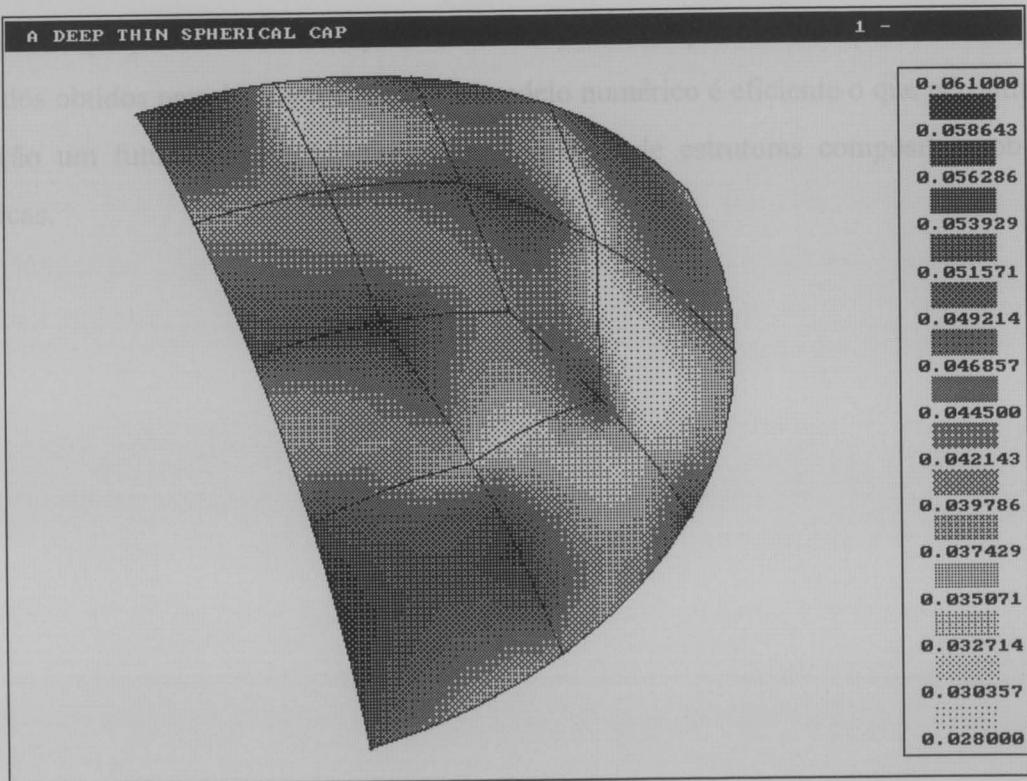


Figure 8.10 Distribuição ótima das espessuras da casca esférica.

Na Figura 8.9 mostra-se a resposta transitória da estrutura para o intervalo prescrito  $0 \leq t \leq t_m = 2.0 \times 10^{-3} s$ . Compara-se o comportamento dinâmico da melhor solução na segunda geração com a resposta da estrutura correspondente à solução óptima. Os valores do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga ao longo do tempo não são significativos quando comparados com o valor prescrito ( $d_a = 3.5 \times 10^{-2} m$ ), o que revela o papel preponderante da restrição associada à região plastificada da estrutura no processo evolutivo. A distribuição óptima da espessura da casca é apresentada na Figura 8.10.

## 8.7 Conclusões

Neste Capítulo apresentou-se um modelo de optimização de estruturas compósitas laminadas sob carregamento dinâmico, considerando a resposta em amplitude. Foram impostas restrições ao deslocamento máximo e à amplitude da região plastificada na estrutura considerando um intervalo de tempo predefinido na análise dinâmica da estrutura. Foram consideradas como variáveis de projecto as espessuras nos nós resultantes da discretização em elementos finitos. O modelo de optimização desenvolvido baseou-se num algoritmo genético suportado por operadores apropriados de Selecção, *Crossover*, Eliminação/Substituição e Mutação. Os resultados obtidos permitem concluir que o modelo numérico é eficiente o que permitirá a sua utilização em futuras aplicações no projecto óptimo de estruturas compósitas sob cargas dinâmicas.

## REFERÊNCIAS

- [1] **Fox, R.L. e Kapoor, M.P.**, “Structural optimization in the dynamic regime: a computational approach”, *AIAAJ*, Vol.8, pp.1798-1804, 1970.
- [2] **Cassis, J.H. e Schmit** , “Optimum design with dynamic constraints”, *J.Struct Div ASCE*, Vol.102, pp.2053-2071, 1976.
- [3] **Reiss, R. e Ramachandran**, “Maximum frequency design of symmetric angle-ply laminates”, *Composite Structures 4*, Vol.1, I. H. Marshall (ed.), Elsevier Applied Science Publishers, pp.1.476-1.487, 1987.
- [4] **Shin, Y.S., Haftka, R.T., Watson, L.T. e Plaut, R.H.**, “Design of laminated plates for maximum buckling load”, *Journal of Composite Materials*, Vol.23, pp.348-369, 1989.
- [5] **Bendsøe, M.P. e Diaz, A.R.**, “Optimization of material properties for improved frequency response”, *Structural Optimization*, Vol.7 (1/2), pp.138-140, 1994.
- [6] **Liao, D.X., Sung, C.K. e Thompson, B.S.**, “The optimal design of symmetric laminated beams considering damping”, *Journal of Composite Materials*, Vol.20, pp.485-501, 1986.
- [7] **Sung, C.K. e Shyl, S.S.**, “A composite laminated box-section beam design for obtaining optimal elastodynamic responses of flexible robot manipulator”, *International Journal of Mechanical Science*, Vol.32, N°5, pp.391-403, 1990.
- [8] **Abrahamsson, T.J.S.**, “Constrained minimization of vibrational magnitudes using a modal reduction method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.31, pp.1585-1604, 1991.

- 
- [9] **Chahande, A.I. e Arora, J.S.**, “Optimization of large structures subjected to dynamic loads with the multiplier method”, *International Journal for Numerical Methods*, Vol.37, pp.413-430, 1994.
- [10] **Kim, M-S. e Choi, D-H.**, “Min-Max dynamic response optimization of mechanical systems using approximate augmented lagrangian”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.43, pp.549-564, 1998.
- [11] **Ahmad, S.**, “Curved finite elements in the analysis of solid, shell and plate”, PhD Thesis, University College of Swansea, C/PH/7/69, 1969.
- [12] **Huang, H-C.**, “*Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells*”, Springer-Verlag, London, 1989.
- [13] **Hughes, T.J.R. e Liu, W.K.**, “Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory”, *J. Appl. Mech.*, Vol.45, pp.371-374, 1978.
- [14] **DeJong, K.**, “Evolutionary computation: Recent developments and open issues”, In: *Evolutionary Algorithms in Engineering Computer Science (EUROGEN99 held at the University of Jyväskylä, Finland, 1999)*, K. Miettinen, M. Mäkelä, P. Neittaanmaki, J. Périaux (ed.s), John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, pp.43-54, 1999.
- [15] **Spears, W.M. e DeJong S.K.**, “On the virtues of parametrized uniform crossover”, *Proceedings of Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, R.K. Belew and L.B. Booker (eds), Morgan Kaufmann, pp.230-236, 1991.

## ***CAPÍTULO 9***

# ***CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO***

## 9. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO

### 9.1 Conclusões

Na primeira parte deste trabalho foi apresentado um modelo numérico visando a otimização de estruturas compósitas híbridas reforçadas com vigas. Pretendeu-se efectuar uma hibridização óptima do material das estruturas compósitas considerando comportamento não linear geométrico. Para além do peso/custo da estrutura como função a minimizar, considerou-se também a energia de deformação como função regularizadora. Neste trabalho foi utilizado um modelo unificado de análise dos fenómenos da encurvadura e de rotura da primeira camada (FPF).

O modelo de optimização baseou-se num *Algoritmo Genético Hierárquico* e numa estratégia evolucionária *elitista*. A topologia hierárquica adoptada para a pesquisa evolucionária, com períodos de isolamento e de migração entre sub-populações, provou ser adequada para se obter uma rápida convergência do processo evolutivo.

Os exemplos numéricos apresentados e a discussão dos resultados efectuada, mostraram que o modelo numérico é robusto na obtenção do projecto óptimo das estruturas compósitas, explorando convenientemente as características anisotrópicas destes materiais. Em particular, o modelo constitui uma ferramenta eficiente na optimização da distribuição Material/Sequência de empilhamento dos laminados híbridos usados em estruturas compósitas.

O Algoritmo Genético desenvolvido para os períodos de isolamento basearam-se num conjunto de operadores que permitem a evolução independente de cada sub-população. Foram desenvolvidos alguns operadores como a *Eliminação/Substituição* de soluções e a *Mutação Implícita*. No processo evolutivo o operador de *Crossover* desempenha um papel preponderante. Para além do *Crossover* uniforme usado em duas sub-populações, desenvolveu-se um novo operador resultante da hibridização do processo de cruzamento: o *Crossover Híbrido*.

O modelo de *Crossover Híbrido* desenvolvido neste trabalho baseou-se numa técnica mista onde para além da permuta estocástica estruturada de material genético dos progenitores efectuou-se um processo de optimização das características genéticas do descendente.

O domínio de pesquisa local foi restringido aos candidatos situados geneticamente na vizinhança dos dois progenitores. Esta estratégia teve como objectivo aumentar a probabilidade de sucesso associada à melhoria do mérito da descendência. O operador de *Crossover Híbrido* foi inserido num Algoritmo Genético onde o processo de *Seleção* é

suportado por uma *estratégia elitista* e o operador de *Mutação* segue um esquema não convencional.

Compararam-se os resultados deste novo operador com os obtidos com o *Crossover* uniforme usando o mesmo Algoritmo Genético. Conclui-se que o operador *de Crossover Híbrido* desenvolvido tem característica de convergência e estabilidade superiores às do *Crossover* uniforme. No entanto, é necessário efectuar uma análise mais profunda dos mecanismos de evolução do novo operador e refinar o processo de pesquisa local.

Na segunda parte deste trabalho apresentou-se um modelo de optimização de estruturas compósitas laminadas sob carregamento dinâmico, considerando a resposta em amplitude.

O modelo de optimização desenvolvido baseou-se num Algoritmo Genético suportado por operadores apropriados de Selecção, *Crossover*, Eliminação/Substituição e *Mutação* clássica. Para testar a eficiência dos operadores genéticos desenvolvidos foi usada uma função de teste. O teste mostrou que o Algoritmo Genético desenvolvido é pouco sensível à dimensão do domínio durante o processo evolutivo, para uma população de dimensão previamente definida.

Os resultados obtidos para estruturas sob solicitações dinâmicas permitem concluir que o modelo numérico é eficiente o que permitirá a sua utilização em futuras aplicações no projecto óptimo de estruturas compósitas sob cargas dinâmicas.

Em termos gerais pode-se afirmar que o presente trabalho representa um contributo importante para os *Métodos de Pesquisa Evolucionária* com a adopção de novas concepções e estratégias para os Algoritmos Genéticos por um lado e com a criação e hibridização de novos operadores genéticos por outro. Para além destes aspectos, salienta-se a importante contribuição para a racionalização do uso de estruturas compósitas híbridas sob cargas estáticas ou dinâmicas.

## 9.2 Perspectivas de trabalho futuro

A investigação em Algoritmos Genéticos para a optimização de estruturas continuará a fazer-se segundo quatro vectores principais:

- introdução de novas concepções na arquitectura dos modelos de pesquisa,
- novos operadores genéticos,
- hibridização ao nível dos operadores genéticos,
- hibridização dos Algoritmos Genéticos com outros métodos de optimização clássicos.

O primeiro aspecto reveste-se de particular importância principalmente se a sua implementação for baseada na especificidade dos problemas de optimização a tratar. A

decomposição do domínio de pesquisa e a exploração de nichos reduzindo o número de variáveis de projecto intervenientes simultaneamente, parecem constituir boas alternativas.

A idealização de novos operadores deverá obedecer fundamentalmente a dois aspectos pertinentes: a ligação com as variáveis de estado do problema estrutural (por exemplo a *mutação controlada*) e a similaridade de comportamento com aspectos peculiares da evolução das espécies.

A hibridização dos operadores genéticos poderá ser a chave do sucesso para a melhoria da eficiência dos Algoritmos Genéticos sobretudo em aplicações estruturais envolvendo um grande número de graus de liberdade e não linearidade geométrica e material.

A hibridização dos Algoritmos Genéticos com outras técnicas de optimização clássicas será sobretudo dirigida para o refinamento final de soluções.





FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000060299