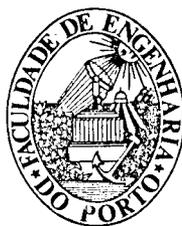


ANTÓNIO JOAQUIM MENDES FERREIRA

MODELOS NUMÉRICOS PARA A ANÁLISE DE
ESTRUTURAS LAMINADAS COMPÓSITAS E SANDWICH



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

1996

ANTÓNIO JOAQUIM MENDES FERREIRA

**MODELOS NUMÉRICOS PARA A ANÁLISE DE
ESTRUTURAS LAMINADAS COMPÓSITAS E SANDWICH**

FACULDADE DE ENGENHARIA

UNIVERSIDADE DO PORTO

1996

ANTÓNIO JOAQUIM MENDES FERREIRA

**MODELOS NUMÉRICOS PARA A ANÁLISE DE
ESTRUTURAS LAMINADAS COMPÓSITAS E SANDWICH**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica

0433
621(043) (FERa) 1100
13153 n
31 07 97

FACULDADE DE ENGENHARIA

UNIVERSIDADE DO PORTO

1996

À minha família

RESUMO

Neste trabalho de investigação desenvolvem-se várias teorias de deformação de corte na análise por elementos finitos de cascas laminadas compósitas ou sandwich.

Compara-se o seu desempenho em diversas situações não lineares estáticas. Em particular compara-se o comportamento destas teorias na análise de estruturas compostas de materiais compósitos de matriz polimérica, estruturas sandwich com núcleos poliméricos ou ninhos de abelha, laminados de borracha reforçada e laminados sandwich borracha-compósito.

Analisa-se, com base nas hipóteses cinemáticas de 1ª e 3ª ordens a resistência de resinas reforçadas com fibras, com base em modelos materiais independentes para a matriz e para os reforços.

É ainda avaliado o desempenho relativo das teorias de deformação propostas na análise de estruturas de betão reforçadas com laminados compósitos.

Realiza-se neste trabalho a análise linear de estruturas tipo casca laminada compósita ou sandwich através da discretização por elementos finitos de casca espessa. Aplicam-se as teorias de deformação de corte mencionadas e é realizada a comparação da sua resposta em alguns exemplos de laminados compósitos e sandwich.

Realiza-se também a análise não linear geométrica destas estruturas com base numa formulação lagrangiana total e em suposições de Von Kármán.

Realiza-se ainda a análise inelástica de laminados compósitos e sandwich, tendo em conta a aplicação de diversas teorias de deformação de corte e a aplicação de uma regra de fluxo associativa.

Estuda-se o comportamento de estruturas sandwich, através da utilização de elementos finitos tridimensionais. É apresentado um estudo de estruturas sandwich com ninhos de abelha.

Analisa-se também o comportamento de cascas laminadas sandwich, cujo núcleo é composto de borracha e cujas peles são genericamente elásticas ou elasto-plásticas ortotrópicas.

São ainda formulados os elementos de placa e viga laminada compósita e sandwich, através das teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens e layerwise. Estes elementos são variações simples dos elementos de casca implementados anteriormente.

Realiza-se a análise à rotura de cascas laminadas aplicando critérios de rotura e modelos degradativos das características elásticas do material dessa camada. Realiza-se ainda uma análise não linear pós-rotura de laminados resina-fibra, considerando o comportamento de cada fase material em separado. Na resina são distinguidos os comportamentos à tracção e à compressão, enquanto que nas fibras se considera genericamente um comportamento elástico até à rotura ou um comportamento elasto-plástico (fibras termoplásticas). Para as resinas termoplásticas considera-se um comportamento elasto-plástico em tracção e compressão.

Estudam-se, finalmente, os laminados de betão reforçados com camadas de compósito nas faces sujeitas predominantemente à tracção. Pretende-se averiguar do efeito reforçador dos materiais compósitos.

RESUMÉ

Dans ce travail on a développé des théories de déformation de cisaillement pour l'analyse des éléments finis de coques stratifiés composites ou sandwich.

On compare sa performance dans plusieurs situations non linéaires statiques. Particulièrement on compare la performance de ces théories dans l'analyse de structures de matériaux composites polymériques, structures sandwich avec âmes polymériques ou nid-d'abeilles, stratifiés de caoutchouc renforcés et finalement sandwich caoutchouc-composites.

Il est aussi analysé la résistance des résines renforcées avec fibres, avec les hypothèses cinématiques de 1^{er} et 3^{eme} ordre, et des modèles biphasé.

C'est aussi discuté la performance des trois théories de déformation proposées pour l'analyse de structures de béton renforcées avec stratifiés composites.

Dans ce travail on a essayé l'analyse linéaire de structures type coque stratifié composite ou sandwich. Sont appliqués les théories de déformation de cisaillement et c'est réalisé la comparaison de sa réponse en quelques exemples.

L'analyse géométrique non linéaire c'est aussi discuté, bien aussi comme l'analyse inélastique de stratifiés composites et sandwich. Dans cette analyse on a considéré plusieurs théories de déformation de cisaillement et l'application d'une règle de flux associative.

On a étudié le comportement mécanique et structurel des structures sandwich, avec éléments finis tridimensionnels. Cette analyse c'est dirigé aux structures sandwich avec nid-d'abeilles.

On a aussi étudié coques stratifiés sandwich caoutchouc-composite ou simplement coques stratifiés caoutchouc-composites.

Les éléments de plaque et poutre stratifié composite et sandwich sont formulés, avec les déformations de 1^{er} et 3^{eme} ordre, et layerwise.

On a fait l'analyse à la rupture des coques stratifiés avec l'utilisation des critères de rupture et des modèles de dégradation des caractéristiques du matériel des couches. On a analysé le comportement non-linéaire après rupture des structures résine-fibre avec un modèle biphasé. Dans ce modèle, sont distingués le comportement en traction et compression de la résine thermodurcissable. Les fibres sont considérées linéaires jusqu'à

rupture. Les résines thermoplastiques sont considérées elasto-parfaitement-plastiques en traction et en compression.

Finalment on a étudié des stratifiés de béton renforcés avec couches composites dans les faces en traction. On veut évaluer l'effet renforçant des composites.

ABSTRACT

In this work several shear deformation theories were developed and discussed for the analysis of sandwich and composite laminated shells by finite elements.

Their performance is compared in the analysis of polymer-matrix composite structures, sandwich structures with polymeric or honeycomb cores, fiber-reinforced rubber and rubber core-composite skin sandwich structures.

It is also analysed the strength of fiber-reinforced resins, based on the 1st and 3rd order kinematic approaches, and on a bi-phase material approach.

It is as well analysed the performance of such theories on concrete structures reinforced with composite materials. In this work, the linear, geometric and material non-linear analysis are performed, through the discretization on thick shell finite elements. Tridimensional finite elements are also used on the analysis of thick sandwich structures, particularly with honeycomb cores.

The finite element formulation of composite and sandwich laminated plates and beams is performed, based on the 1st and 3rd order and layerwise theories. The strength analysis of composite material structures is performed, based on failure criteria and properties degradation.

The analysis of fiber-reinforced resins is performed with a bi-phase material model, where the resin has different traction and compression behaviour (elastic and elasto-plastic). The thermoplastic resins are supposed to behave elasto-perfectly plastic both in traction and in compression.

The concrete structures are reinforced in the traction side with unidirectional composites. It is investigated the reinforcing effect of composites in these structures.

PALAVRAS-CHAVE

materiais compósitos

estruturas sandwich

elementos finitos

análise não linear

placas e cascas

KEY-WORDS

composite materials

sandwich structures

finite elements

non-linear analysis

plates and shells

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer em primeiro lugar aos meus supervisores de tese, os Professores António Torres Marques e José César de Sá, pelo seu constante apoio e pela orientação deste trabalho.

Agradeço aos Professores Joaquim Azevedo Figueiras, Eugénio Onate, Fernando Martins de Brito, José Trigo Barbosa, Lúcia Dinis, Carlos Magalhães Oliveira e Rogério Martins pelas discussões travadas em torno de assuntos da tese.

Agradeço ainda ao INEGI, pelas facilidades concedidas e aos meus colegas do INEGI-CEMACOM pelo apoio amigo.

Dedico esta tese à minha família, em particular à Rosa Maria e à Joana, pelo amor e carinho.

Gostaria, por último, de dedicar também esta tese à memória de um amigo e brilhante colega, o Eng^o Vitor Branco, cuja contribuição e esforço para o desenvolvimento dos materiais compósitos deverá ser um estímulo e um exemplo a seguir pelos jovens investigadores deste sector.

SIMBOLOGIA

\underline{X}	vector, matriz
$\underline{S}, \underline{\sigma}$	vector de tensões de Piola-Kirchhoff
\underline{x}	vector de coordenadas cartesianas
σ	componente de tensão normal
τ	componente de tensão de corte
θ	rotação genérica
β	rotação da normal para os elementos de casca
\underline{K}	matriz de rigidez
\underline{D}	matriz constitutiva elástica
\underline{D}^{ep}	matriz constitutiva elasto-plástica
$\underline{\varepsilon}$	vector de deformação de Green-Lagrange
ε	componente de deformação normal
γ	componente de deformação de corte
\underline{u}	vector de deslocamentos
ξ, η, ζ	coordenadas naturais do elemento
h	espessura
\underline{B}	matriz de deformações-deslocamento
E_1, E_2	módulos elásticos longitudinal e transversal da camada de material ortotrópico
G_{12}	módulos de corte do plano, referido aos eixos materiais
G_{13}, G_{23}	módulos de corte transversal, referido aos eixos materiais
ν_{12}, ν_{21}	coeficientes de Poisson

\underline{T}	matriz de transformação de coordenadas
f	vector de forças exteriores aplicadas
J	matriz jacobiana
$[\underline{\sigma}]$	matriz de tensões
$\underline{\psi}$	vector de residuos
$\bar{\sigma}$	tensão efectiva
a_{ij}	parâmetros de anisotropia
\underline{A}	matriz de parâmetros de anisotropia
Q	potencial plástico
W	energia de deformação
I, J	invariantes de deformação
X, Y, Z, S	tensões limite à tracção de uma camada de material compósito
X', Y', Z', S	tensões limite à compressão de uma camada de material compósito
F_i, F_{ij}	parâmetros interactivos do critério de rotura

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO AO TRABALHO DE TESE

0.1 - INTRODUÇÃO	0.1
0.2 - OBJECTIVOS E ÂMBITO.....	0.3
0.3 - APRESENTAÇÃO RESUMIDA DO TRABALHO	0.4

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO AOS MATERIAIS COMPÓSITOS E ÀS ESTRUTURAS SANDWICH

1.1 - INTRODUÇÃO AOS MATERIAIS COMPÓSITOS	1.1
1.2 - INTRODUÇÃO ÀS ESTRUTURAS SANDWICH	1.8
1.2.1 - Materiais de estruturas sandwich.....	1.10
1.2.1.1 - Materiais das peles	1.10
1.2.1.2 - Materiais para núcleo de sandwich	1.11
1.2.1.2.1 - Ninhos de abelha.....	1.11
1.2.1.2.2 - Espumas	1.13
1.2.2 - Interface núcleo-pele.....	1.15
1.2.3 - Aplicações das estruturas sandwich	1.15
REFERÊNCIAS	1.16

CAPÍTULO 2

ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR DE CASCAS LAMINADAS SANDWICH E COMPÓSITAS

2.1 - INTRODUÇÃO.....	2.1
2.2 - ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS E CASCAS	2.2
2.3 - TEORIAS DE DEFORMAÇÃO DE CASCAS LAMINADAS.....	2.6
2.3.1 - Introdução.....	2.6
2.3.2 - Equações genéricas	2.7
2.3.2.1 - Relações tensão-deformação	2.7
2.3.2.2 - Relações deformação-deslocamento.....	2.7
2.3.2.3 - Relações de equilíbrio.....	2.7
2.3.2.4 - Condições fronteira.....	2.8
2.3.2.5 - Energia de deformação.....	2.8
2.3.3 - Teoria clássica das placas e cascas laminadas.....	2.8
2.3.4 - Teoria de deformação de 1ª ordem	2.9
2.3.5 - Teorias de deformação de ordem superior	2.11
2.3.6 - Teorias de deformação por camadas (layerwise)	2.14
2.4 - O ELEMENTO DE CASCA DEGENERADO	2.15
2.4.1 - Generalidades.....	2.15
2.4.2 Sistemas coordenados.....	2.17
2.4.3 - Definição geométrica.....	2.18
2.4.4 - Campo de deslocamentos	2.18
2.4.4.1 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de 1ª ordem	2.19
2.4.4.2 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de ordem superior.....	2.19
2.4.4.3 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de aproximação por camadas.....	2.20
2.4.5 - Determinação das deformações.....	2.21
2.4.6 - Relações constitutivas elásticas.....	2.23
2.4.7 - Matriz de rigidez e vector de forças nodais equivalentes	2.25
2.4.8 - Esforços.....	2.26
2.4.9 - Uma formulação alternativa de 1ª ordem	2.26

2.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	2.29
2.5.1 Placa sandwich com três camadas, simplesmente apoiada, sob pressão uniforme	2.29
2.5.2 - Placa compósita em flexão cilíndrica	2.40
2.5.3 - Placa quadrada encastrada em flexão	2.60
2.5.4 - Casca cilíndrica laminada simplesmente apoiada sujeita a pressão uniforme	2.91
REFERÊNCIAS	2.105

CAPÍTULO 3

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE CASCAS LAMINADAS SANDWICH E COMPÓSITAS

3.1 - INTRODUÇÃO	3.1
3.2 - FORMULAÇÃO GEOMÉTRICAMENTE NÃO LINEAR	3.2
3.2.1 - Formulação lagrangeana total e actualizada	3.2
3.2.2 - Equações incrementais de equilíbrio e sua solução pelo método dos elementos finitos	3.3
3.3 - TÉCNICAS DE SOLUÇÃO	3.7
3.3.1 - O método de Newton-Raphson	3.8
3.3.2 - Os métodos de Newton-Raphson modificados.....	3.10
3.3.2.1 - O método da rigidez inicial	3.10
3.3.2.2 - Os métodos KT1 e KT2	3.11
3.3.3 - Métodos de controlo do comprimento do arco	3.13
3.3.3.1 - Formulação genérica	3.14
3.3.3.2 - Método da formulação esférica	3.15
3.3.3.3 - Método do plano normal.....	3.17
3.3.3.4 - Método de controlo do deslocamento	3.19
3.4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	3.19
3.4.1 - Placa quadrada encastrada sob carga uniformemente distribuída.....	3.19
3.4.2 - Casca cilíndrica sujeita a carga central pontual	3.32
3.4.3 - Casca cilíndrica sujeita a carga central pontual-análise da resposta inelástica até à instabilidade e pós-instabilidade	3.35
3.5 - CONCLUSÕES	3.41
REFERÊNCIAS	3.42

CAPÍTULO 4

ANÁLISE INELÁSTICA DE PLACAS E CASCAS LAMINADAS ANISOTRÓPICAS

4.1 - INTRODUÇÃO	4.1
4.2 - COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE MATERIAIS COMPÓSITOS	4.2
4.3 - COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE ESTRUTURAS SANDWICH	4.7
4.4 - TEORIA DE FLUXO DA PLASTICIDADE	4.8
4.4.1 - O critério de cedência de Huber-Mises	4.9
4.4.2 - Parâmetros de anisotropia	4.10
4.4.3 - Relações elasto-plásticas tensão-deformação	4.11
4.4.4 - O critério de Sun/Chen	4.12
4.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS	4.13
4.5.1- Ensaio de tracção de compósitos termoplásticos	4.13
4.5.2- Ensaio de flexão em viga isotrópica	4.15
4.5.3- Ensaio de flexão em viga sandwich	4.16
4.5.4 Placas anisotrópicas não laminadas	4.17
4.5.5 Placas anisotrópicas laminadas	4.19
4.5.6 Cascas anisotrópicas não laminadas	4.22
4.6 - CONCLUSÕES	4.30
REFERÊNCIAS	4.31

CAPÍTULO 5

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS SANDWICH COM NÚCLEOS DE NINHO DE ABELHA

5.1 - INTRODUÇÃO AOS NINHOS DE ABELHA.....	5.1
5.2 - MECANISMOS DE DEFORMAÇÃO DE NINHOS DE ABELHA	5.3
5.2.1 - Deformação do plano.....	5.4
5.2.2 - Deformação transversal	5.5
5.3 - CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DOS NINHOS DE ABELHA	5.6
5.3.1 - Deformação do plano.....	5.6
5.3.1.1 - Deformação linear elástica.....	5.6
5.3.1.2 - Deformação elástica não linear.....	5.7
5.3.1.3 - Colapso plástico	5.7
5.3.2 - Deformações transversais no ninho de abelha.....	5.8
5.3.2.1 - Deformações elásticas.....	5.8
5.3.2.2 - Deformações elásticas não lineares.....	5.10
5.3.2.3 - Cedência.....	5.10
5.4 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CÁLCULO DE CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS.....	5.13
5.4.1 - Modelo multicelular.....	5.13
5.4.2 - Modelo unicelular.....	5.19
5.5 - MODELO TRIDIMENSIONAL (3D) PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS LAMINADAS SANDWICH.....	5.21
5.5.1. INTRODUÇÃO.....	5.21
5.5.2 - TEORIA.....	5.22
5.5.2.1 - Campo de deslocamentos.....	5.22
5.5.2.2 - Campo de deformações.....	5.22
5.5.2.3 - Campo de tensões	5.23
5.5.2.4 - Relações tensão-deformação	5.23
5.5.2.5 - Princípio dos trabalhos virtuais.....	5.25
5.5.3 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS	5.25
5.5.3.1 - Discretização do campo de deslocamentos	5.25
5.5.3.2 - Matriz de deformações.....	5.26
5.5.3.3 - Matriz de rigidez do elemento.....	5.27
5.7 - MODELOS DE CASCA VERSUS MODELOS 3D.....	5.28
5.8 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS.....	5.32
5.9 - CONCLUSÕES	5.34
REFERÊNCIAS	5.34

CAPÍTULO 6

ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS E CASCAS DE BORRACHA REFORÇADA COM FIBRAS

6.1 - INTRODUÇÃO	6.1
6.2 - ANÁLISE DE GRANDES DEFORMAÇÕES.....	6.2
6.2.1 - Definição de deformações e tensões	6.2
6.2.2 - Equações incrementais de equilíbrio.....	6.3
6.3 - TEORIA DE BORRACHAS	6.4
6.3.1 - Características da borracha.....	6.4
6.3.2 - Teorias de elasticidade das borrachas.....	6.4
6.3.3 - Determinação das tensões.....	6.6
6.3.4 - Tensões numa casca.....	6.6
6.4 - BORRACHA REFORÇADA	6.8
6.4.1 - Características e aplicações	6.8
6.5 - SOLUÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE DE GRANDES DEFORMAÇÕES.....	6.9
6.5.1 - Formulação Lagrangiana Total	6.10
6.5.1.1 - Discretização por elementos finitos e equações básicas.....	6.10
6.5.1.2 - Cálculo de deformações e tensões.....	6.13
6.6 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE GERAL DE CASCAS.....	6.14
6.7 - MODELO BI-FÁSICO BORRACHA-FIBRAS DE REFORÇO	6.15
6.8 - EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	6.16
6.8.1 - Viga em flexão	6.16
6.7.2 - Flexão e insuflamento de uma placa circular de borracha	6.19
6.9 - CONCLUSÕES	6.20
REFERÊNCIAS	6.23

CAPÍTULO 7

ANÁLISE DE PLACAS E VIGAS LAMINADAS COMPÓSITAS E SANDWICH ATRAVÉS DE TEORIAS DE DEFORMAÇÃO DE CORTE DE 1ª ORDEM, 3ª ORDEM E LAYERWISE

7.1 - INTRODUÇÃO.....	7.1
7.2 - PLACA.....	7.2
7.2.1 - Formulação de 1ª ordem.....	7.2
7.2.2 - Formulação de 3ª ordem.....	7.7
7.2.3 - Formulação layerwise.....	7.8
7.3 - VIGA.....	7.10
7.3.1 - Teoria de 1ª ordem.....	7.10
7.3.2 - Teoria de 3ª ordem.....	7.13
7.3.3 - Teoria de viga layerwise.....	7.14
7.4 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO LINEARES.....	7.16
7.4.1 - Placa.....	7.16
7.4.2 - Viga.....	7.16
7.5 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS.....	7.17
7.5.1 - Introdução.....	7.17
7.5.2 - Elemento de placa de 1ª ordem.....	7.17
7.5.3 - Elemento de placa com teoria de 3ª ordem.....	7.22
7.5.4 - Elemento de placa com teoria layerwise.....	7.25
7.5.5 - Elemento de viga de 1ª ordem (Timoshenko).....	7.28
7.5.6 - Elemento de viga de 3ª ordem.....	7.31
7.5.7 - Elemento de viga layerwise.....	7.34
7.6 - EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	7.36
7.6.1 - Placa sandwich.....	7.36
7.6.2 - Viga sandwich.....	7.40
REFERÊNCIAS.....	7.43

CAPÍTULO 8

ANÁLISE DO INÍCIO E PROGRESSÃO DA ROTURA EM ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS

8.1 - INTRODUÇÃO	8.1
8.2 - CRITÉRIOS DE ROTURA	8.2
8.2.1 - Critérios de rotura isotrópicos.....	8.2
8.2.2 - Critérios de rotura anisotrópicos.....	8.4
8.3 - DEGRADAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS	8.7
8.3.1 - Exemplo numérico de degradação das características elásticas	8.8
8.4 - MODELO CONSTITUTIVO BI-FÁSICO FIBRA-RESINA.....	8.10
8.4.1 - Introdução	8.10
8.4.2 - Modelo material à compressão para as resinas termoendurecíveis.....	8.14
8.4.2.1 - A condição de cedência	8.14
8.4.2.2 - A regra de fluxo	8.16
8.4.2.3 - A regra de endurecimento	8.17
8.4.2.4 - A condição de esmagamento	8.18
8.4.2.5 - Comportamento à compressão de resina com fendas	8.18
8.4.3 - Comportamento à tracção da resina.....	8.20
8.4.4 - Modelo de fractura distribuido	8.21
8.4.5 - Módulo de corte da resina fracturada.....	8.23
8.4.6 - Modelo para matrizes termoplásticas	8.24
8.4.7 - Modelo material para as fibras em tracção e compressão.....	8.26
8.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	8.26
8.5.1 - Viga em flexão-matrizes termoendurecíveis	8.26
8.5.2 - Placa simplesmente apoiada sob carga uniforme-matrizes termoendurecíveis.....	8.29
8.5.3 - Placa simplesmente apoiada-matrizes termoplásticas	8.30
8.6 - CONCLUSÕES	8.32
REFERÊNCIAS	8.33

CAPÍTULO 9

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS TIPO CASCA EM BETÃO REFORÇADO COM COMPÓSITOS - AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DAS TEORIAS DE DEFORMAÇÃO DE 1ª E 3ª ORDENS E LAYERWISE

9.1 - INTRODUÇÃO	9.1
9.2 - FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CASCA DEGENERADA CURVA PARA A ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE BETÃO REFORÇADO.....	9.2
9.3 - SOLUÇÃO NÃO LINEAR POR ELEMENTOS FINITOS.....	9.2
9.4 - MODELO MATERIAL PARA O BETÃO.....	9.4
9.4.1 - Comportamento à compressão	9.4
9.4.2 - Comportamento elasto-plástico-frágil	9.8
9.5 - MODELO MATERIAL PARA O MATERIAL COMPÓSITO UNIDIRECCIONAL.....	9.10
9.6 - EXEMPLO NUMÉRICO	9.10
9.7 - CONCLUSÕES	9.19
REFERÊNCIAS	9.21

CAPÍTULO 10

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

10.1 - CONCLUSÕES.....	10.1
10.2 - SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	10.3

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO AO TRABALHO DE TESE

0.1 - INTRODUÇÃO

0.2 - OBJECTIVOS E ÂMBITO

0.3 - APRESENTAÇÃO RESUMIDA DO TRABALHO

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO AO TRABALHO DE TESE

0.1 - INTRODUÇÃO

As estruturas de materiais compósitos mais frequentes aparecem na forma de placas e cascas laminadas, compostas por camadas de resinas reforçadas com fibras. As fibras de reforço são frequentemente orientadas de forma otimizada, tendo em vista a obtenção de rácios resistência/peso e rigidez/peso máximos.

A utilização destes materiais em diversos sectores industriais conduziu a economias sensíveis em peso relativamente às estruturas metálicas convencionais. Em muitos casos estes materiais são os únicos capazes de sustentar simultaneamente os requisitos estruturais, de corrosão e de funcionamento. No entanto, os modos de rotura típicos destes laminados, em particular a delaminação, tornaram-se um problema significativo para os projectistas. O início e a progressão de roturas deve-se, em muitos casos, às tensões interlaminares através da espessura. Torna-se necessário a consideração de teorias que possam prever o comportamento complexo destas estruturas, em particular para os mecanismos de rotura e resistência. Esta análise reveste-se de grande dificuldade, dada a multiplicidade de tipos de rotura e da sua interactividade.

O projecto de estruturas com estes materiais é complexo e de grande espectro, dada a grande variedade de materiais candidatos e as numerosas opções de orientações de fibras e de sequências de empilhamento. No âmbito do cálculo estrutural de materiais compósitos, os métodos numéricos são os mais capazes (senão os únicos) de resolver as diversas complexidades de carga, geometria, apoios e materiais. Neste trabalho utiliza-se o método dos elementos finitos para a discretização da estrutura e para a resolução das equações de equilíbrio da estrutura.

São consideradas na maioria deste trabalho as placas e cascas laminadas compósitas ou sandwich. Em termos de modelação matemática, cada camada individual é considerada homogénea e ortotrópica, enquanto que o laminado é heterogéneo através da espessura e genericamente anisotrópico. A análise de vigas é também considerada, embora o seu

campo de aplicação seja mais reduzido. Esta análise tem particular interesse para as estruturas pultrudidas.

Na maior parte dos laminados compósitos, a grande diferença entre os módulos elásticos das fibras e das matrizes conduz a rácios elevados do módulo de elasticidade do plano e do módulo de corte transversal. Nos laminados sandwich as características mecânicas do núcleo são muito inferiores às das peles, o que inviabiliza o uso da teoria clássica dos laminados, que despreza o efeito das deformações transversas. Tendo em vista um projecto capaz e seguro destas estruturas, torna-se necessário utilizar teorias em que as deformações de corte sejam consideradas. Neste contexto, foi anteriormente realizada considerável investigação dos efeitos da deformação de corte e dos efeitos da inércia de rotação, conduzindo à chamada teoria de deformação de corte de 1ª ordem. Estas teorias assumem uma rotação de corte constante através da espessura do laminado, requerendo, por isso, o uso de factores correctivos do corte. Estes factores correctivos de corte são muitas vezes determinados sob condições que não representam a realidade do seu funcionamento. Neste contexto são de considerar as teorias de deformação de corte de ordem superior onde os factores de correcção de corte não existem. Neste trabalho foram desenvolvidos elementos de casca degenerada de elementos tridimensionais para a análise não linear de laminados compósitos e sandwich. Estes elementos foram formulados com base em três teorias: uma teoria de deformação de corte de 1ª ordem, uma teoria de deformação de corte de 3ª ordem e uma teoria de aproximação por camadas, em que os campos rotacionais são definidos por camadas. Nas teorias de ordem superior, ao invés da teoria de deformação de 1ª ordem, os factores correctivos de corte são desprezados, e é obtida directamente da formulação uma distribuição bastante coerente das tensões de corte transversal. Nos elementos finitos escolhidos é utilizada uma formulação que representa fielmente, pensa-se, a maioria das cascas laminadas, quer compósitas, quer sandwich. A teoria de deformação de primeira ordem é desenvolvida numa versão que conduz a uma redução de custos computacionais habitualmente presentes nestas formulações. Esta abordagem é essencial em análise não linear de laminados com um número de camadas materiais superior a 10, o que é muito frequente em laminados compósitos avançados (com a utilização de pré-impregnados, por exemplo)*.

* Um pré-impregnado UD de carbono pode ter espessuras da ordem dos 0.1-0.2 mm, o que torna necessário um número elevado de camadas para a realização de peças.

A teoria de deformação de 3ª ordem utilizada pretende ser aplicada sobretudo em laminados monolíticos espessos, em que o fenómeno da deformação de corte transversa seja pronunciado. Nesta teoria, tal como na teoria de deformação de 1ª ordem, considera-se que o deslocamento transversa é constante. A teoria de 3ª ordem proposta tem a particularidade de produzir directamente deformações de corte parabólicas, o que é uma vantagem relativamente à teoria de deformação de 1ª ordem, em que as deformações de corte são constantes através da espessura do laminado. A teoria de aproximação por camadas, denominada neste trabalho como *layerwise*, é uma teoria em que se afectam campos rotacionais a cada camada, embora considerando apenas três componentes translacionais para o laminado. Esta constrição de deslocamentos generalizados permite também considerar esta teoria como uma extensão da teoria de deformação de 1ª ordem a cada camada do laminado. Esta teoria tem o seu principal campo de aplicação nos laminados sandwich, em que a diferença de características mecânicas das camadas exteriores (peles) e interior (núcleo) é muito acentuada. Ao contrário dos laminados compósitos, em que é frequente a utilização do mesmo material, embora orientado de forma arbitrária, conduzindo a características elásticas próximas de camada para camada em eixos do laminado, nos laminados sandwich o núcleo é habitualmente constituído por um material muito leve e fraco mecânicamente. As funções do núcleo são a transferência de esforços entre peles, estas muito rígidas e resistentes, que absorvem os principais esforços de membrana, e a absorção de esforços de corte transversa. A teoria *layerwise* pode, no entanto, ser aplicada, com sucesso, a laminados constituídos por sub-laminados*. Nesta teoria, as deformações de corte transversa são constantes em cada camada, mas com uma evolução coerente através das camadas do laminado.

0.2 - OBJECTIVOS E ÂMBITO

Um dos principais objectivos deste trabalho é o de desenvolver estas teorias de deformação de corte na análise por elementos finitos de cascas laminadas compósitas ou sandwich.

Um outro objectivo é o de comparar o seu desempenho na análise linear elástica, geométrica e materialmente não linear.

As estruturas consideradas são os laminados compósitos e sandwich, onde os núcleos poderão ser constituídos por espumas poliméricas, borrachas ou ninhos de abelha.

* Sub-laminado: sub-conjunto de camadas adjacentes do laminado com as mesmas características de orientação, espessura e material

Pretende-se ainda estabelecer um novo modelo bi-fásico, tendo em conta o comportamento à rotura de materiais compósitos de matriz polimérica.

Pretende-se avaliar, também, do desempenho dos materiais compósitos, enquanto elementos reforçadores de estruturas de betão ou betão armado.

Na maioria dos casos, são utilizados os elementos de casca degenerada. Em algumas estruturas, pretende-se comparar a resposta estrutural obtida por simulação com elementos tridimensionais. É o caso das estruturas sandwich espessas, onde a comparação dos elementos de casca com elementos tridimensionais tem relevância.

Um outro objectivo deste trabalho é o de obter a formulação e a sua implementação em códigos de elementos finitos, de elementos de placa e viga laminada, baseados em teorias de deformação de corte de 1ª e 3ª ordens e na teoria layerwise. Dado que nestes casos a formulação matricial pode ser explicitada, são detalhadamente apresentadas as matrizes elementares.

0.3 - APRESENTAÇÃO RESUMIDA DO TRABALHO

A investigação levada a efeito, tendo em conta os objectivos genéricos mencionados, está planeada da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentam-se resumidamente os materiais compósitos e as estruturas sandwich, tendo em vista o seu enquadramento no trabalho de investigação.

No capítulo 2 realiza-se a análise linear de estruturas tipo casca laminada compósita ou sandwich. Aplicam-se as teorias de deformação de corte mencionadas e é realizada a comparação da sua resposta em alguns exemplos de laminados compósitos e sandwich. Descreve-se o elemento de casca utilizado, apresentando a sua formulação básica. Este elemento é utilizado em quase todos os capítulos, daí a necessidade da apresentação da sua formulação.

No capítulo 3 realiza-se a análise não linear geométrica destas estruturas. Utiliza-se o elemento de casca espessa degenerada e aplicam-se as teorias propostas. Apresentam-se os principais métodos de solução dos problemas não-lineares.

No capítulo 4 realiza-se a análise inelástica de laminados compósitos e sandwich, tendo em conta a aplicação de diversas teorias de deformação de corte e a aplicação de uma regra de fluxo elasto-plástica associativa. Esta abordagem é relevante para os materiais compósitos de última geração como são os compósitos de matriz termoplástica e ainda

para as sandwich com núcleos de matriz polimérica. É utilizado o elemento de casca degenerada.

No capítulo 5 estuda-se o comportamento de estruturas sandwich, através da utilização de elementos finitos tridimensionais. Esta análise é particularmente dirigida à análise de estruturas sandwich. O objectivo deste capítulo é o de comparar a solução por elementos sólidos com os elementos de casca apresentados. É apresentado um estudo de estruturas sandwich com ninhos de abelha.

No capítulo 6, analisa-se o comportamento de cascas laminadas sandwich, cujo núcleo é composto de borracha e cujas peles são genericamente elásticas ortotrópicas, como sejam os materiais compósitos. Tem-se em conta o comportamento hiperelástico da borracha. É adoptada a lei de comportamento de Mooney-Rivlin, e descreve-se a deformação através duma formulação Lagrangiana Total. A condição de incompressibilidade é introduzida via um procedimento que evita a utilização de mais graus de liberdade, em particular da pressão. Verifica-se a qualidade da solução das teorias de deformação várias, na análise do comportamento das cascas. São ainda consideradas as estruturas laminadas de borracha reforçada com fibras, através do estudo em separado das duas fases materiais. Considera-se uma teoria de deformação de corte de 1ª e 3ª ordens, e o elemento de casca degenerado.

No capítulo 7 formulam-se os elementos de placa e viga laminada compósita e sandwich, através das teorias de 1ª e 3ª ordens e layerwise.

No capítulo 8 realiza-se o estudo da rotura de cascas laminadas. Tem-se em conta que cada camada é um material homogéneo anisotrópico cujo comportamento é genericamente elástico ou elasto-plástico. Ao atingir a superfície de cedência (ou rotura), aplica-se uma degradação das características elásticas do material dessa camada. Considera-se, dado o número elevado de camadas habitualmente presentes, apenas as teorias de 1ª e 3ª ordens. Estas teorias e esta abordagem são implementadas no elemento de casca degenerada. Realiza-se, ainda, uma análise não linear até à rotura de laminados resina-fibra, considerando o comportamento de cada fase material em separado. Na resina são distinguidos os comportamentos à tracção e à compressão, enquanto que nas fibras se considera genericamente um comportamento elástico até à rotura ou um comportamento elasto-plástico (fibras termoplásticas). Consideram-se, também devido ao número elevado de camadas presentes, as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens. Para as resinas termoplásticas considera-se um comportamento elasto-plástico em tracção e compressão.

No capítulo 9 estudam-se cascas laminadas de betão reforçado com camadas de compósito nas faces sujeitas à tracção. Pretende-se averiguar do efeito reforçador dos materiais compósitos. Estas estruturas podem ser consideradas como casos particulares de estruturas sandwich, com algumas expectativas industriais futuras. Pretende-se comparar, neste contexto, as três teorias de deformação apresentadas no capítulo 2.

No capítulo 10 apresentam-se as principais conclusões e sugestões para investigação futura.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO AOS MATERIAIS COMPÓSITOS E ÀS ESTRUTURAS SANDWICH

1.1 - INTRODUÇÃO AOS MATERIAIS COMPÓSITOS

1.2 - INTRODUÇÃO ÀS ESTRUTURAS SANDWICH

1.2.1 - Materiais de estruturas sandwich

1.2.1.1 - Materiais das peles

1.2.1.2 - Materiais para núcleo de sandwich

1.2.1.2.1 - Ninhos de abelha

1.2.1.2.2 - Espumas

1.2.2 - Interface núcleo-pele

1.2.3 - Aplicações das estruturas sandwich

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO AOS MATERIAIS COMPÓSITOS E ÀS ESTRUTURAS SANDWICH

1.1 - INTRODUÇÃO AOS MATERIAIS COMPÓSITOS

Um material compósito pode ser definido como uma combinação macroscópica de dois ou mais materiais distintos, com uma interface definida entre eles. Uma boa parte dos materiais compósitos são utilizados para aplicações estruturais. Assim, esta definição pode ser limitada aos materiais que contêm um reforço (fibras ou partículas) suportadas por uma matriz.

Os materiais compósitos têm tipicamente um reforço contínuo ou descontínuo, que é mais rígido e mais resistente que a matriz, esta continua. Para a função de reforço ser efectiva, as fibras têm de possuir uma fracção volúmica substancial (superior a 10%).

Os compósitos podem ser divididos em compósitos reforçados com partículas ou reforçados com fibras. Neste trabalho concentramo-nos no segundo caso. Assim, os compósitos reforçados com fibras contêm reforços com comprimentos muito superiores à dimensão da sua secção transversal. Podem ser reforçados com fibras descontínuas ou contínuas. Muitas peças em compósitos contêm fibras cujo comprimento é da ordem da dimensão da peça.

Algumas referências [1-3] costumam designar os compósitos laminados como uma classe à parte, para além dos compósitos de partículas ou fibras. Esta distinção não nos parece correcta, porque de facto, são compósitos reforçados com fibras, mas empilhados uns sobre os outros, não havendo modificação do tipo de material. Neste trabalho serão tratados estes laminados em particular nos compósitos de fibras longas, habitualmente com matrizes poliméricas e fibras de alta resistência como as fibras de vidro e as fibras de carbono.

Os materiais compósitos foram desenvolvidos, tendo em conta a dificuldade de encontrar um material homogéneo que pudesse satisfazer, simultaneamente, um conjunto alargado de características mecânicas e químicas para uma dada aplicação. Na indústria

aeronáutica, os alumínio e suas ligas foram utilizados como materiais de alta resistência e boa rigidez com baixo peso, constituindo os materiais de eleição das estruturas de aeronaves por muitos anos. A resistência à corrosão e à fadiga são alguns dos problemas que estes materiais enfrentam. A Segunda Guerra Mundial suscitou a necessidade de evolução para novos materiais, surgindo, entre outros, os materiais compósitos de matriz polimérica, habitualmente designados por plásticos reforçados com fibras. Foram comercialmente utilizados a partir dos anos 50, sendo ainda hoje considerados como uma boa escolha em termos de custos e comportamento mecânico e químico.

É possível encontrar um número muito alargado de materiais compósitos no mercado, dado que um material deste tipo resulta, por definição, da combinação de uma matriz com fibras. Na esmagadora maioria, são habitualmente comercializados três tipos de fibras (vidro E, carbono e aramida), em pelo menos três tipos de configurações (mantas, tecidos e rovings), para além dum número enorme de resinas. Pode dizer-se, então, que existem no mercado um conjunto muito alargado de materiais compósitos. Na realidade, podem ser definidos comercialmente os compósitos de grande consumo (baixo custo) que são constituídos por fibra de vidro e resina poliéster ou viniléster, e os compósitos avançados tipicamente de fibras de carbono ou aramidas com resinas de epóxico. Os compósitos de grande consumo têm menores propriedades mecânicas que os compósitos avançados, menor custo e em geral maior peso. No entanto, representam cerca de 90% em massa das aplicações actuais. Pode também considerar-se que a indústria tecnologicamente mais avançada consumirá mais compósitos avançados e que a restante consumirá mais compósitos de menores prestações.

Os compósitos têm boas características mecânicas, devido a um conjunto variado de factores. Um deles é a capacidade das fibras de resistir a fendas, dado que as fibras têm menos riscos nesta área que um material sob forma volúmica. Para além disso, uma fenda numa fibra não é necessariamente conduzida para outras fibras, como acontece nos materiais tradicionais com continuidade do material. Outro factor de grande relevância é a possibilidade de orientar as fibras de acordo com as necessidades previstas em termos das solicitações externas sobre a peça. É possível, em casos bem definidos, conseguir módulos elásticos e particularmente resistências à rotura, muito superiores às dos materiais isotrópicos, em direcções escolhidas ou preferenciais. Outra possibilidade é a de empilhar sucessivamente camadas finas de compósito, combinando-as para que a rigidez de flexão e corte seja adequada, dado que a componente de membrana é habitualmente bem estabelecida.

A combinação de elevadas propriedades mecânicas com baixo peso evidencia um grande potencial para estes materiais, com vantagens nas relações rigidez/peso e resistência/peso sobre os materiais convencionais. Na figura 1.1 apresentam-se as resistências específicas, bem como os módulos específicos destes materiais reforçados a 65% em volume com uma matriz de epóxico, e são comparados com as respectivas características do aço macio e do alumínio 2024 [1].

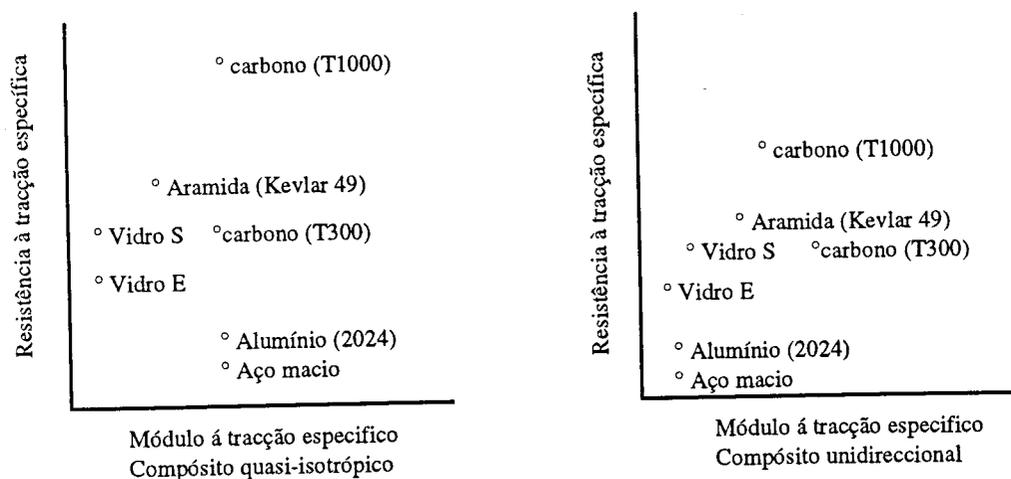


Figura 1.1 - Resistência específica e módulo específico de compósitos de matriz de epóxico reforçados a 65% em volume. Comparação com materiais metálicos correntes.[1]

Os compósitos de matriz orgânica reforçados com fibras de vidro são os mais populares e mais utilizados e existem extensas aplicações nos mercados industrial, de consumo, militar e espacial.

Os compósitos de fibra de carbono são de longe os mais utilizados como compósitos avançados, dado que oferecem elevadas propriedades específicas e são facilmente encontrados no actual mercado internacional. Outros compósitos, baseados em fibras de aramida e boro, são também utilizados.

Existem disponíveis um conjunto de formas materiais para os reforços, quer com resinas líquidas, quer sob a forma de pré-impregnados. Genéricamente, os reforços são usados sob a forma de filamentos contínuos longos (rovings), filamentos curtos dispersos (mantas) e filamentos contínuos longos entrelaçados (tecidos). A escolha de compósitos

com resinas líquidas ou pré-impregnados depende em larga medida do processo a usar e do tipo de peça a realizar. Os pré-impregnados permitem uma melhor colocação das fibras, são mais rápidos a laminar, mas exigem habitualmente temperaturas de processamento mais elevadas e são mais caros. São habitualmente usadas em aplicações mecânicamente avançadas. Nas formas descontínuas, realçam-se os compostos de moldação (SMC, BMC) e as pré-formas para uso em processos de injeção, como o RTM (Resin Transfer Molding).

Sob o ponto de vista mecânico, os compósitos com rovings são claramente materiais ortotrópicos, com elevada rigidez e resistência à tracção na direcção das fibras e rigidez e resistência à tracção muito baixa na direcção transversal às fibras (da ordem da resistência da resina). As mantas podem ser consideradas materiais isotrópicos, enquanto que os tecidos têm um comportamento quasi-isotrópico, com características de corte independentes das de membrana. Os tecidos são conjuntos de rovings cruzados, possuindo características biaxiais.

Os compósitos com reforços descontínuos têm características mecânicas inferiores às dos compósitos com reforços contínuos, dado que naqueles, as cargas são sustentadas em parte pela matriz na transferência de esforços em corte dum as fibras para as outras. Para além deste facto, a fracção volúmica de fibras nos compósitos de fibras descontínuas é bem menor do que nos compósitos com fibras longas. É, no entanto, um factor de preferência por muitos projectistas, pelo facto do projecto de materiais isotrópicos ser próximo do projecto com materiais tradicionais.

Uma das características dos materiais compósitos é a sua flexibilidade de fabrico. Existe um número alargado de possibilidades de fabrico de compósitos, todos eles conduzindo à aplicação de pressão e temperatura. Assim, distinguem-se pela sua maior utilização os processos de moldação manual, moldação por projecção simultânea, prensagem (habitualmente a quente), enrolamento filamentar, moldação por vácuo e forno, moldação por autoclave, RTM (“Resin Transfer Molding”-Transferência de resina) e pultrusão.

A escolha do processo de fabrico está ligada à série e ao tipo de peças a fabricar. Assim, enquanto que a moldação manual e a projecção simultânea estão vocacionadas para pequenas séries ou peças de grande dimensão, o enrolamento filamentar está ligado à produção de peças de revolução, como tubagens ou reservatórios. A pultrusão permite produzir perfis de secção constante em contínuo, quer apenas com rovings, quer com rovings e mantas, com comportamentos tipo viga. A prensagem a quente está intimamente ligada a grandes séries, quer com SMC, BMC, termoplásticos reforçados,

ou ainda pré-impregnados. A moldação por vácuo, o RTM ou a moldação por autoclave estão associadas a peças híbridas ou seja peças de alta ou média qualidade e séries médias. A escolha de um ou outro processo reside fundamentalmente na economia do processo face à série em causa ou relativamente ao tipo de qualidade exigida.

Uma camada de material compósito resulta da associação de uma matriz a um reforço. Dado que as fibras utilizadas comercialmente possuem pequena espessura, pode considerar-se que a camada de material compósito é o elemento básico, para efeitos de definição do seu comportamento mecânico. A camada é habitualmente considerada um material equivalente homogéneo, ortotrópico no plano, não se fazendo distinção, para efeitos de cálculo, da matriz e do reforço. Num dos capítulos da tese, far-se-á uma abordagem em sentido oposto, ou seja, analisa-se o compósito nas suas fases distintas.

Dado que as camadas típicas de material compósito, nomeadamente as de resinas termoendurecíveis, têm espessuras da ordem dos 0.1 mm até 0.5 mm, torna-se evidente que as peças reais têm de ser realizadas por empilhamento de diferentes camadas até se atingir a devida espessura. A este empilhamento ordenado de camadas do mesmo ou de diferentes materiais chama-se laminado. Este novo material poderá ter um número indeterminado de camadas materiais, que por sua vez poderão ter os seus eixos principais materiais orientados à escolha do projectista.

O empilhamento das camadas é um processo de projecto e concepção do material, em que os responsáveis pelo projecto estrutural escolhem não somente as secções a utilizar, mas também o próprio material que será concebido à medida e não será, assim, escolhido por catálogo ou tabela. Apenas os materiais básicos, as resinas e as fibras, são escolhidas desta forma.

Os laminados são assim constituídos por n camadas, formadas por diferentes materiais e orientadas de forma qualquer. Por orientação de camada entende-se o sistema de eixos local material, correspondente aos eixos principais materiais de ortotropia, habitualmente ligados à disposição das fibras unidireccionais (fig.1.2).

Da necessidade de empilhamento de camadas resulta um "material" que é homogéneo e ortotrópico por camadas, mas heterogéneo ao longo da espessura do laminado (fig.1.3).

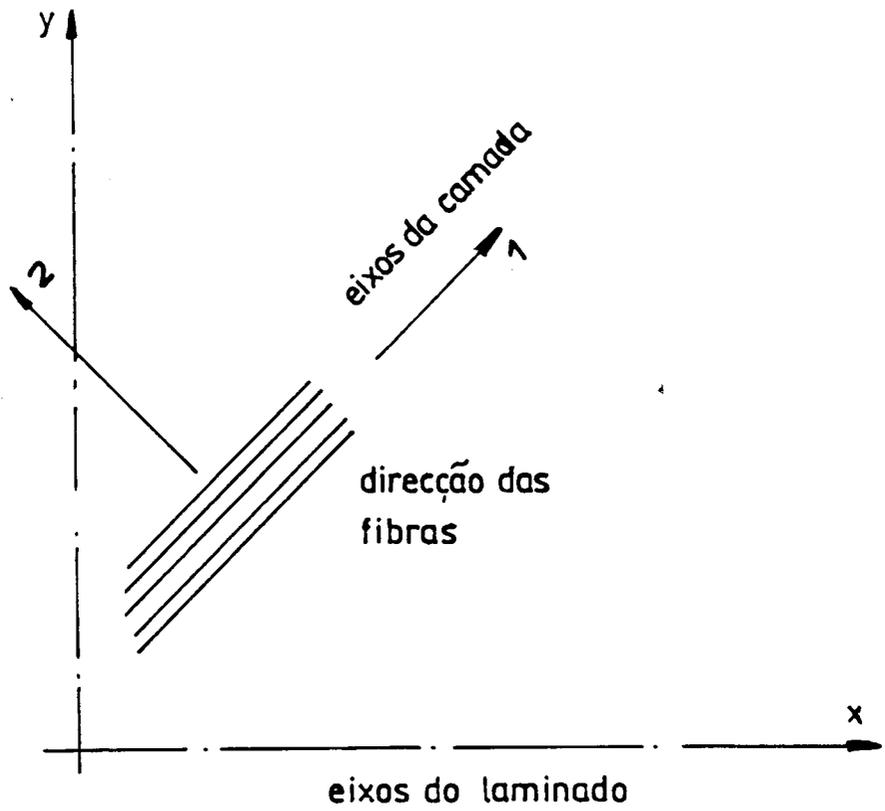


Figura 1.2 - Orientação de uma camada relativamente a um laminado

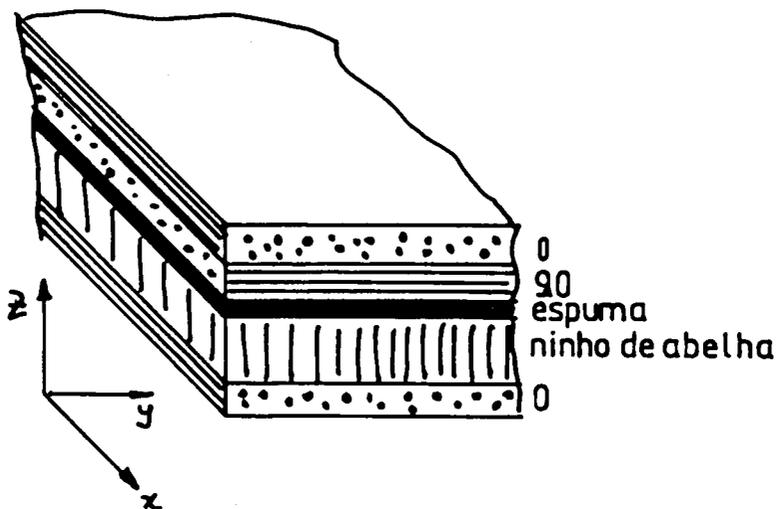


Figura 1.3 - Construção de um laminado por empilhamento de camadas

Uma consequência directa do processo de fabrico dos laminados é a existência de interfaces inter-camadas, que por efeito de Poisson, quando solicitadas, enfrentam tensões de corte elevadas nessas interfaces e podem descolar umas das outras (delaminar). Este efeito é agravado junto a descontinuidades e não é visível em materiais homogéneos como os metais. Podem ainda construir-se laminados simétricos ou não simétricos (fig.1.4). Nos laminados não simétricos (material ou de orientação), são habitualmente verificados efeitos de ligação, interação ou acoplamento entre os esforços de membrana e flexão, que podem mesmo existir logo no processo de fabrico, por efeito térmico, o que pode constituir um conjunto de tensões residuais iniciais ou uma modificação geométrica inicial não prevista no projecto. Este facto é relevante, quando se projecta, pois muitas formas indesejáveis e imprevistas poderão ser evitadas por construção adequada dos laminados. Este efeito de acoplamento não se verifica em laminados simétricos ou materiais homogéneos.

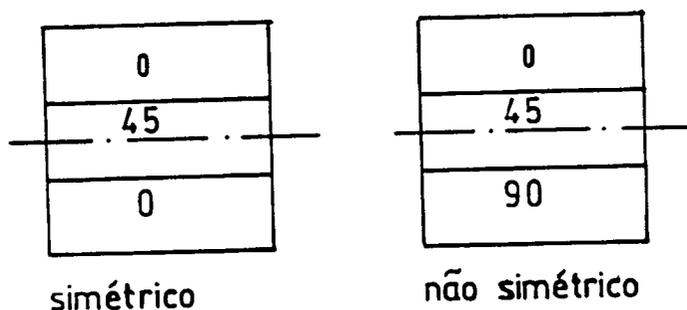


Figura 1.4 - Laminados simétricos e não simétricos

Genéricamente, os laminados mais usados são finos, ou seja, uma das dimensões da peças é muito inferior às outras duas (normalmente considerada a direcção da espessura). Este facto conduziu desde o primeiro momento à utilização de métodos de cálculo considerando que o laminado tinha um comportamento tipo placa ou casca. A menos das vigas obtidas por pultrusão, ou de peças de geometria particular, esta opção estrutural pode ser considerada realista no âmbito do actual panorama dos compósitos. Nesse contexto, este trabalho de investigação incide particularmente na simulação numérica do comportamento de placas e cascas de laminados compósitos e sandwich, cuja caracterização é seguidamente exposta.

1.2 - INTRODUÇÃO ÀS ESTRUTURAS SANDWICH

Uma das principais tarefas do projectista é o de substituir os elementos mecânicos ou estruturais clássicos, por elementos novos, nos quais se pode tirar partido das elevadas propriedades mecânicas.

Nas duas últimas décadas fizeram-se grandes esforços no sentido de aproveitar as características dos materiais avançados, tal como os materiais compósitos e as estruturas sandwich. Estes materiais permitiram a introdução de novos produtos e processos, que dependem largamente de propriedades como a elevada rigidez específica ou a elevada resistência específica, sem prejuízo de viabilidade económica.

O conceito de estrutura sandwich é relativamente antigo. O seu uso em larga escala industrial só se tornou relevante com o surgimento de novos materiais ou processos. As construções sandwich são utilizadas na construção aeroespacial há cerca de 40 anos. Praticamente todas as aeronaves actuais dependem da integridade e da fiabilidade estrutural das estruturas sandwich. Este conceito estrutural está amplamente verificado. Como resultado deste sucesso, foi desenvolvido um interesse crescente no uso de estruturas sandwich de núcleo de ninho de abelha ou espumas poliméricas. Uma estrutura sandwich típica é composta por três camadas: duas faces finas de alta rigidez e resistência, separadas por um núcleo espesso de baixa densidade (fig.1.5). Registe-se que esta configuração sandwich não é única, podendo encontrar-se entre outras, sandwich multi-núcleo e sandwich abertas (uma única pele).

A separação das camadas faciais pela espessura do núcleo aumenta substancialmente o momento de inércia à flexão. Simultaneamente, o peso da estrutura é aumentado de forma irrelevante pelo núcleo. Como consequência directa deste facto, é possível combinar uma elevada rigidez à flexão (consideravelmente superior à dos elementos isolados), com um ligeiro aumento de peso. Por analogia com as vigas tipo I, as faces da sandwich são os banzos da viga I, enquanto que o núcleo da sandwich é comparável com a alma da viga (fig.1.6).

Uma vantagem das estruturas sandwich relativamente às vigas tipo I é a estabilização mais uniforme das peles ou faces. Esta estabilização não invalida, no entanto, que para sandwich com núcleos de baixa densidade se verifique elevada sensibilidade às cargas de compressão (instabilidade global ou local) e à deformação de corte.

Construção de "sandwich" em ninho de abelha

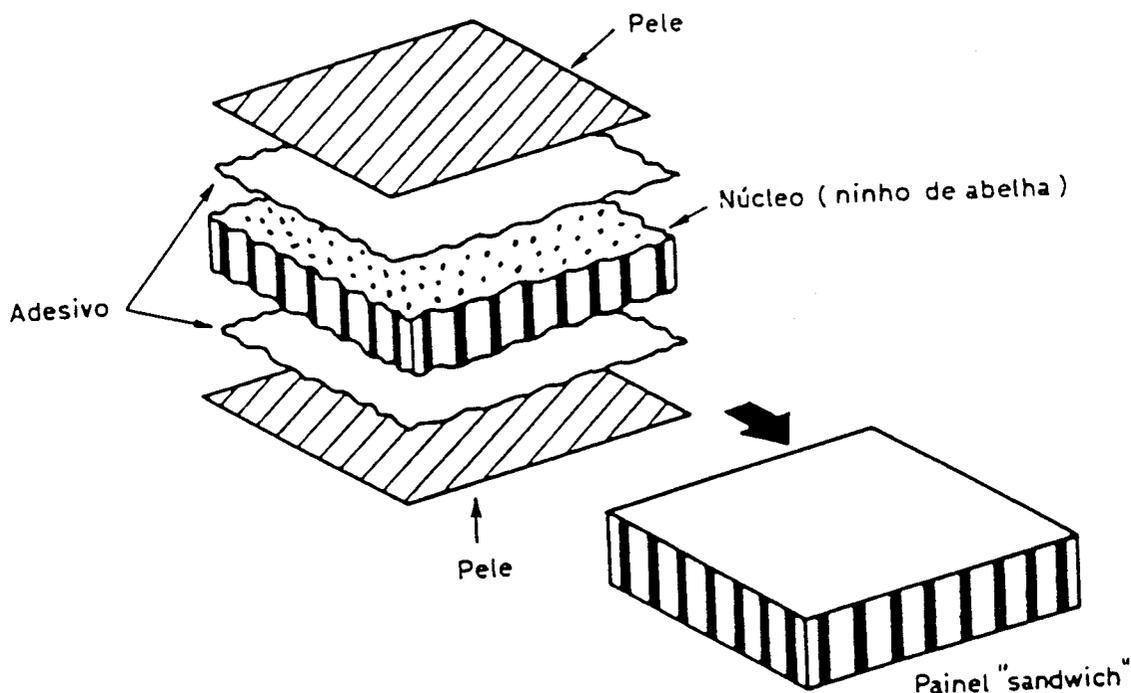


Figura 1.5 - Estrutura sandwich típica

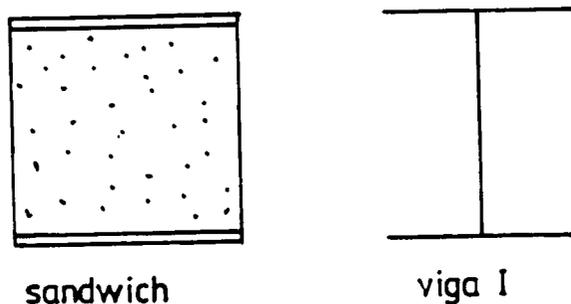


Figura 1.6 - Comparação entre uma estrutura sandwich e uma viga tipo I

No seguimento de métodos clássicos analíticos, derivados para vigas, placas e cascas sob cargas e apoios específicos, é desejável desenvolver novos métodos de cálculo de tensões, deformações e cargas críticas sob condições de carga e apoios genéricos ou arbitrários. Através do correcto conhecimento do comportamento em deformação e estabilidade da estrutura é possível optimizá-la tendo em vista uma redução de peso.

Dado que esta redução de peso implica a diminuição de espessuras e consequentemente o surgimento de estruturas finas, que estão sujeitas a grandes deformações, a análise geométrica não linear é essencial para determinar os limites de projecto. Um meio apropriado de cálculo destas estruturas é o método dos elementos finitos (MEF)[4] que pode ter em conta não linearidades geométricas e materiais. No presente trabalho serão desenvolvidas formulações de elementos finitos, que permitem uma melhor análise de cascas sandwich sob grandes deformações e instabilidades globais.

Admite-se, de uma forma geral, que as faces das camadas são bastante menos espessas que o núcleo e que as interfaces faces/núcleo são perfeitas, ou seja que a colagem entre as peles e o núcleo é suficientemente rígida para prevenir delaminagens.

1.2.1 - Materiais de estruturas sandwich

Neste trabalho despreza-se o efeito do material de ligação entre o núcleo e as faces, pelas seguintes razões:

- a) o material de ligação, ou adesivo, é habitualmente muito fino, não contribuindo praticamente para a rigidez em flexão e, dada a sua espessura, torna-se difícil a sua correcta modelação;
- b) estes materiais são habitualmente a própria pele, em particular quando a pele é de material compósito de matriz polimérica, tipo poliéster ou de epóxico;
- c) quando se utilizam núcleos de ninho de abelha, a modelação do adesivo é difícil, porque o filme de adesivo penetra nos alvéolos, constituindo uma camada de geometria mal definida;
- d) nas teorias layerwise, a consideração da camada de adesivo implicava um acréscimo de graus de liberdade.

Importa, no entanto, referir que o comportamento das sandwich é dependente do bom funcionamento do adesivo. Em seguida, apresentam-se os principais materiais das peles e do núcleo.

1.2.1.1 - Materiais das peles

As camadas finas das peles terão de suportar os esforços de membrana da estrutura. Por esta razão, os materiais das peles apresentam elevadas características mecânicas (módulos elásticos, tensões de rotura ou de cedência). Presentemente, utilizam-se duas grandes famílias de materiais.

- a) metais-ligas de alumínio, aço ao carbono, aço inoxidável, ligas de titânio;
- b) materiais compósitos-compósitos termoendurecíveis e termoplásticos.

As ligas de alumínio são os metais mais utilizados como peles de sandwich, dado que combinam baixo peso com boas características mecânicas. O seu custo é moderado e a sua presença no mercado é constante. As suas propriedades à corrosão são médias. Os aços só são utilizados quando o peso não é um factor fundamental e quando as características mecânicas são muito relevantes. Outros metais, como as ligas de titânio, só são encontradas em indústrias ou aplicações muito particulares (defesa ou aeroespacial). Estes materiais apresentam um comportamento elasto-plástico, na maioria dos casos.

Os materiais compósitos são muito utilizados em estruturas sandwich, porque combinam elevada rigidez e resistência com baixo peso. As características mecânicas são direccionais e a resistência à corrosão é habitualmente elevada. Têm sensibilidade à temperatura e à humidade e as resinas têm de ser modificadas para resistir ao fogo e reduzir a toxicidade. Este factor é relevante para painéis no interior de edifícios ou de veículos.

1.2.1.2 - Materiais para núcleo de sandwich

Devido ao conceito fundamental das estruturas sandwich, os materiais do núcleo devem possuir baixo peso. Habitualmente, são utilizados como núcleos de estruturas sandwich os seguintes tipos de materiais:

- a) ninhos de abelha;
- b) espumas;
- c) madeira de balsa;
- d) metais enrugados ou ondulados.

1.2.1.2.1 - Ninhos de abelha

A forma hexagonal do ninho de abelha mais comum representa uma estrutura otimizada, em termos estruturais, porque combina uma pequena quantidade de material num elevado volume estrutural, suficiente para resistir a esforços de compressão ou de flexão. Nos ninhos de abelha, combina-se uma elevada rigidez transversal (quando em funcionamento) com baixo peso. Por forma a atingir a estrutura óptima, foram desenvolvidos vários métodos para a produção de ninhos de abelha técnicos [5]:

- a) perfis enrugados - obtidos por prensagem de folhas finas num perfil hexagonal, em que as folhas enrugadas são coladas umas às outras;

- b) expansão de tiras coladas- neste processo aplica-se cola em tiras paralelas de folhas planas, as tiras são empilhadas numa forma adequada e os ninhos de abelha obtidos por expansão das folhas;
- c) vazamento de borracha num molde;
- d) extrusão de ninho de abelha cerâmico.

Devido ao processo de fabrico, o comportamento da célula de ninho de abelha é ortotrópico. De qualquer forma existem características vantajosas que são baseadas na forma hexagonal da célula de ninho de abelha:

- os rácios resistência-peso e rigidez-peso actualmente mais elevados;
- rácio área de material-volume variável;
- resistência uniforme ao esmagamento.

Devido ao excelente peso específico, os núcleos de ninho de abelha permitem o projecto de estruturas de elevada rigidez com peso mínimo.

Por estas razões, os ninhos de abelha foram aplicados com sucesso nos seguintes campos:

- cargas térmicas-em particular alumínio ou aço para ambientes de alta temperatura;
- propriedades eléctricas-os ninhos de abelha de plástico reforçado com fibras são habitualmente utilizados em radares devido à baixa distorção de transmissão;
- resistência à fadiga-as estruturas de ninho de abelha aumentam o tempo de vida;
- estabilidade estrutural-camadas de revestimento proporcionam o aumento de resistência química;
- absorção de energia-os ninhos de abelha de alumínio e aço podem ser usados eficazmente em sistemas de segurança, dado que as cargas de compressão na fase pós-crítica são mantidas constantes relativamente ao valor da carga crítica inicial.

A forma prismática das células de ninho de abelha origina problemas quando são coladas às camadas das faces, dado que as áreas de colagem são muito pequenas. Por esta razão, em aplicações de alguma responsabilidade, é necessário colar em autoclave a alta temperatura, por forma a obter boas interfaces entre o núcleo de ninho de abelha e as camadas das faces. Este processo tem como inconveniente principal o custo de produção. Para a análise do comportamento em flexão e compressão das estruturas sandwich de ninho de abelha, é necessário conhecer as propriedades mecânicas do núcleo. Devido ao processo de fabrico, a espessura das paredes pode variar e o seu comportamento global

será aproximadamente ortotrópico. As propriedades materiais duma célula de ninho de abelha são utilizadas para obter propriedades materiais globais.

1.2.1.2.2 - Espumas

O desenvolvimento de materiais tipo espuma com rigidez melhorada e boa resistência a cargas térmicas dão origem a uma vasta gama de aplicações destas espumas no projecto de estruturas sandwich. Comparativamente aos ninhos de abelha, podem enumerar-se as seguintes vantagens e inconvenientes:

- Vantagens:

- baixo custo
- estruturas 3D facilmente moldáveis
- boa capacidade de absorção de energia
- boa insulação
- razoável capacidade de amortecimento

- Inconvenientes

- maior peso específico
- variação das características mecânicas
- comportamento material não linear, em particular para grandes deformações
- sensibilidade à temperatura
- baixa resistência térmica
- flamabilidade
- libertação de gases em espumas de célula aberta

O fabrico de espumas pode ser levado a cabo de várias formas:

- a) introdução de bolhas de gás num polímero quente;
- b) mistura de agentes químicos (no caso dos poliuretanos-isocianato e polioli).

As espumas são habitualmente polímeros, podendo ser divididas em três grandes grupos [6]:

- termoplásticos lineares-polietileno, poliestireno, polimetilmetacrilato, cloreto de vinil, cujas densidades rondam 1;
- termoendurecíveis: de epóxidos, poliésteres insaturados, fenólicas, cujas densidades variam entre 1.2 e 1.5;

- elastómeros: borracha natural ou polibutadieno, que podem atingir grandes deformações elásticas, e cujas densidades rondam 1.

As espumas poliméricas têm baixa densidade e baixa condutividade térmica. As propriedades elásticas dos polímeros dependem fortemente da temperatura. À medida que esta aumenta, o módulo de Young diminui e aumenta a possibilidade de fluência. A qualidade do adesivo em estruturas sandwich não pode ser melhorada pelo aumento de temperatura por muito tempo. Recentemente, o aparecimento de novos polímeros e novas técnicas de criação de espumas, possibilitou o aumento de temperatura e o aumento consequente da qualidade do adesivo.

Há pouca informação relativamente às propriedades microscópicas das espumas. Os parâmetros materiais habitualmente utilizados são os fornecidos pelos fabricantes. Estes são obtidos por ponderação sob certas condições de carregamento e podem ser assumidas como isotrópicas.

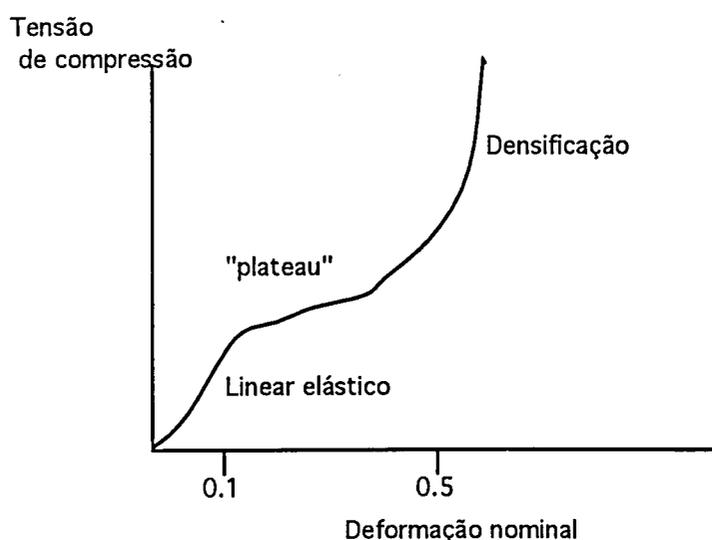


Figura 1.7 - Comportamento material elasto-plástico duma espuma polimérica sob compressão[6]

Na figura 1.7 apresenta-se simplificada um esquema de comportamento típico de uma espuma sujeita a cargas compressivas. Como se pode verificar, o comportamento é linear elástico apenas nos primeiros 10% de deformação, seguidas de um longo patamar e de um endurecimento por densificação da espuma. Muitas das espumas correntemente usadas têm, na maior parte do espectro de deformação, um comportamento tipicamente elasto-plástico, o que será tido em conta no capítulo 4.

Existem outros núcleos com interesse, já mencionados, a balsa e os núcleos enrugados. Os primeiros foram utilizados na construção de aeronaves após a 2ª Guerra Mundial. Actualmente, a balsa não é muito utilizada devido ao facto da sua densidade e das suas características mecânicas variarem consideravelmente. Devido à estrutura celular da madeira, as propriedades materiais são anisotrópicas. Dado que estas dependem fortemente do conteúdo aquoso, deve ser evitado um ambiente húmido. Devido a estas características, a balsa não será considerada neste trabalho. Registe-se, no entanto, algum interesse recente por parte de alguns industriais neste domínio.

Os núcleos enrugados são sobretudo utilizados como materiais de embalagem. As suas propriedades mecânicas são fortemente ortotrópicas, sendo unicamente utilizadas se a estrutura for otimizada para cargas especiais. Os núcleos enrugados não serão igualmente considerados neste trabalho.

1.2.2 - Interface núcleo-pele

Os requisitos de qualidade das estruturas sandwich só se tornaram possíveis com o desenvolvimento de novos adesivos e novos processos de colagem. A resistência da interface influencia a capacidade resistente da estrutura sandwich. As tensões limites desta interface representam um importante critério de projecto. Se houver separação física entre o núcleo e as peles, as fendas podem propagar-se pela interface e reduzir substancialmente a rigidez da estrutura sandwich. Neste trabalho supõe-se que a interface é perfeita, ou seja, assume-se que a resistência da interface é igual ou superior à dos materiais do núcleo e das faces. Importa, no entanto, reconhecer a importância da interface no comportamento global e local da estrutura. Têm sido realizados esforços de análise nesse contexto [8-10].

1.2.3 - Aplicações das estruturas sandwich

As aplicações técnicas das estruturas sandwich tiveram algum significado a partir da 1ª Guerra Mundial onde painéis sandwich foram utilizados na construção de aeronaves. Estas estruturas tendiam a empenar para cargas relativamente pequenas, originando a necessidade de rigidificadores caros. Nessa altura as estruturas sandwich só eram utilizadas em construção de baixo peso e eram muito caras.

Durante a 2ª Guerra Mundial, o aparecimento de melhores núcleos e adesivos permitiu a construção de aeronaves para maiores velocidades com componentes sandwich. O desenvolvimento de novos materiais para as faces, bem como de melhores técnicas de fabrico, aumentaram a importância das estruturas sandwich.

À medida que os métodos de análise do comportamento em flexão e estabilidade evoluíram, estabeleceu-se suficiente confiança nos componentes sandwich não somente como estruturas secundárias, mas também como estruturas primárias. Como consequência, as estruturas sandwich são actualmente aplicadas na engenharia aeroespacial, mas também em muitos outros campos do projecto mecânico ou estrutural [6,7].

Os seguintes exemplos evidenciam algumas características do projecto com sandwich:

- estruturas aeroespaciais-asas, fuselagem, componentes de satélite, suporte de radares;
- construção de navios-iatas, barcos de corrida, aplicações militares, como os caçadores de minas;
- indústria dos transportes-paredes de vagões, chão de comboios;
- indústria de embalagens-insulação, amortecimento;
- indústria da construção-paredes, portas;
- indústria automóvel-estruturas de segurança, amortecimento, absorção de energia;
- equipamento desportivo-esquis, pranchas de surf, rodas de bicicleta.

Neste trabalho será tido em conta o estudo de placas e cascas sandwich, um pouco por todos os capítulos.

REFERÊNCIAS

1. Engineered Materials Handbook, Composites, Vol.1, ASM International, 1991
2. R. M. Jones, Introduction to composite materials, McGraw-Hill Book Company, U.S.A., 1975
3. S.Tsai, Theory of Composites Design, Think Composites, 1992
4. O. C. Zienkiewicz, R. Taylor, The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1991
5. HEXCEL Guide on Sandwich Structures, 1991
6. L.J.Gibson, M.F.Ashby, Cellular Solids-Structure and Properties, Pergamon Press, Oxford, 1988
7. A.Ferreira, A.T.Marques, A.Vautrin, G.Verchery, Y.Surrel (Eds.) Análise e Concepção de Estruturas em Materiais Compósitos, Editions Pluralis, 1992

8. J.L.Esteves, Joint Design, Programme d'Aide a la Conception des Assemblages Collés Utilisant les Eléments Finis Mixtes d'Interface, Tese de Doutoramento, Univ. de Bourgogne, Dijon, França, 1995

9. P Hamelin, Projecto de Juntas, versão portuguesa, A.Ferreira, A.T.Marques, A.Vautrin, G.Verchery, Y.Surrel (Eds.) Análise e Concepção de Estruturas em Materiais Compósitos, Editions Pluralis, 1992

10. S. Aivazzadeh, Análise de Juntas Adesivas Estruturais, Parte 1 e 2, versão portuguesa, A.Ferreira, A.T.Marques, A.Vautrin, G.Verchery, Y.Surrel (Eds.) Análise e Concepção de Estruturas em Materiais Compósitos, Editions Pluralis, 1992

CAPÍTULO 2

ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR DE CASCAS LAMINADAS SANDWICH E COMPÓSITAS

2.1 - INTRODUÇÃO

2.2 - ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS E CASCAS

2.3 - TEORIAS DE DEFORMAÇÃO DE CASCAS LAMINADAS

2.3.1 - Introdução

2.3.2 - Equações genéricas

2.3.2.1 - Relações tensão-deformação

2.3.2.2 - Relações deformação-deslocamento

2.3.2.3 - Relações de equilíbrio

2.3.2.4 - Condições fronteira

2.3.2.5 - Energia de deformação

2.3.3 - Teoria clássica das placas e cascas laminadas

2.3.4 - Teoria de deformação de 1ª ordem

2.3.5 - Teorias de deformação de ordem superior

2.3.6 - Teorias de deformação por camadas (layerwise)

2.4 - O ELEMENTO DE CASCA DEGENERADO

2.4.1 - Generalidades

2.4.2 Sistemas coordenados

2.4.3 - Definição geométrica

2.4.4 - Campo de deslocamentos

2.4.4.1 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de 1ª ordem

2.4.4.2 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de ordem superior

2.4.4.3 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de aproximação por camadas

2.4.5 - Determinação das deformações

2.4.6 - Relações constitutivas elásticas

2.4.7 - Matriz de rigidez e vector de forças nodais equivalentes

2.4.8 - Esforços

2.4.9 - Uma formulação alternativa de 1ª ordem

2.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

2.5.1 Placa sandwich com três camadas, simplesmente apoiada, sob pressão uniforme

2.5.2 - Placa compósita em flexão cilíndrica

2.5.3 - Placa quadrada encastrada em flexão

2.5.4 - Casca cilíndrica laminada simplesmente apoiada sujeita a pressão uniforme

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 2

ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR DE CASCAS LAMINADAS SANDWICH E COMPÓSITAS

2.1 - INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de teorias de cascas e métodos numéricos para a resolução de problemas de cascas tem sido objecto de longa e interessante investigação, sendo ambos os campos sujeitos a dificuldades várias e apresentando numerosos desafios aos projectistas e engenheiros.

Ao contrário das placas, as cascas são curvas por definição, sendo necessário descrever a sua geometria em coordenadas curvilíneas, elevando a complexidade matemática da sua definição. As equações de derivadas parciais daí resultantes são de difícil resolução, mesmo em casos simples como as cascas axissimétricas.

A resposta estrutural das cascas divide-se entre uma parte de membrana e uma parte de flexão. A captura deste balanço físico é um problema complexo, em particular quando a modelação é aproximada como, por exemplo, quando se utiliza a técnica dos elementos finitos. Esta resposta pode ainda ser mais complexa em laminados não simétricos, onde ocorrem acoplamentos de membrana e flexão.

Embora as teorias de casca estejam já estabelecidas há bastantes anos, as soluções analíticas existentes só permitem resolver alguns casos simples em geometria e carregamento. Nas últimas décadas, os métodos baseados em elementos finitos tornaram-se os mais usados para a resolução de problemas de cascas. Apesar dos primeiros elementos se desenvolverem em torno das teorias clássicas de cascas, estas tentativas resultaram inadequadas, devido à necessidade de usarem elementos com continuidade C^1 [1]. A incorporação dos movimentos de corpo rígido tornava-se complexa, quando aqueles eram formulados em termos das coordenadas de referência da casca.

No sentido de evitar estas dificuldades, foi desenvolvido por Ahmad, Irons e Zienkiewicz [1] um elemento de casca a partir dum elemento contínuo tridimensional. A importância deste desenvolvimento (ainda no contexto linear) resulta da capacidade de

evitar as complexidades inerentes às teorias das cascas, dado que a formulação cinemática da casca pode ser obtida através das equações do meio contínuo, com continuidade C^0 [1]. As dificuldades intrínsecas deste elemento estão ligadas à inclusão da deformação de corte, dado que, por um lado as interpolações são de menor ordem e por outro, em aplicações de casca fina, é introduzido um modo de deformação rígido adicional, ou "modo de corte", que pode estar presente mesmo em placas. Existe ainda a possibilidade de retenção de membrana, devido aos modos extensionais.

Na análise de laminados multicamada e sandwich, estes elementos foram sobretudo utilizados através do uso de teorias de 1ª ordem, ou seja, com funções de 1º ordem relativamente à coordenada da espessura. Devido às características particulares dos laminados, nomeadamente à possibilidade de serem constituídas por materiais muito diferentes em rigidez e resistência, surgiram, há alguns anos, diversas aplicações de teorias de ordem superior e "layerwise" em placas e cascas.

A formulação de elementos tendo em conta a solução destes dois problemas é ainda objecto de longa discussão, tendo sido apresentadas numerosas alternativas. Neste capítulo far-se-á uma revisão dos desenvolvimentos em elementos finitos de placa e casca. Far-se-á também referência à teoria de degeneração de sólidos. São desenvolvidas as teorias de deformação de corte de 1º ordem, ordem superior e layerwise e comparada a sua performance no contexto da análise linear de cascas laminadas compósitas e sandwich. Neste trabalho estas teorias são desenvolvidas no contexto do elemento de casca degenerado.

2.2 - ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS E CASCAS

O comportamento complexo das cascas e a dificuldade de resolver as equações definidoras conduziram a uma variedade de métodos de solução. Os métodos analíticos só conseguiram resolver alguns problemas simples, enquanto que o método dos elementos finitos é mais genérico e versátil. No entanto, muitas das dificuldades encontradas nos elementos de casca têm de ser resolvidas num único elemento ou em poucos elementos. Espera-se, portanto, que o mesmo elemento de casca, independentemente do tipo de problema em análise, ou independentemente da sua posição na malha, possa representar estados de membrana pura, ou estados de flexão pura, bem como representar adequadamente a região da fronteira. O desafio é complexo, dado que para além destes argumentos, há uma tendência actual de simplificar o mais possível os elementos, particularmente para a análise não-linear dinâmica explícita. Por outro lado, seria desejável que o elemento finito pudesse ter suficiente qualidade de solução sem

malhas excessivamente finas. As principais abordagens de elementos finitos de casca podem ser divididas em duas grandes categorias:

- formulações directas, baseadas em teorias de casca;
- formulações baseadas em elementos degenerados, iniciados por Ahmad et al [1].

Investigações recentes [2] mostraram a proximidade entre as teorias de casca e os elementos de casca degenerados. Mostraram ainda que é igualmente difícil produzir bons elementos finitos quando se compara com a dificuldade de implementação da teoria de cascas. Uma das principais dificuldades é a de incorporar flexão inextensível num único elemento quando é usado na análise de casca onde a flexão inextensível é possível. Na maior parte dos elementos esta questão é aproximadamente resolvida na formulação ou na interconectividade dos elementos. É o caso dos elementos de casca plana, cujos modos de flexão são inextensíveis. No entanto, quando se usam estes elementos para analisar cascas em que as acções de membrana dominam, conseguem-se resultados satisfatórios. Estes elementos têm alguns problemas, nomeadamente a ocorrência de momentos espúreos junto das fronteiras (com descontinuidade das tangentes) ou a inexistência de acoplamento membrana-flexão num único elemento. Assim, em geral, são preferíveis elementos curvos correctamente formulados. A maior parte dos elementos de casca mais recente inclui as deformações de corte. Por um lado, estas possibilitam a análise de cascas finas ou moderadamente espessas e, por outro lado, impõe-se uma simplificação da descrição cinemática na compatibilidade interelementar, dado que só é exigida continuidade C^0 , enquanto que nos elementos formulados com base nas suposições de Love-Kirchhoff é necessária a continuidade C^1 . A presença das deformações de corte origina um modo rígido de corte, que se junta ao modo rígido de membrana, naturalmente presente nas cascas. Mesmo em elementos de placa, estes modos rígidos de corte poluem a solução, produzindo erros mais ou menos graves. Várias alternativas foram propostas para a resolução deste problema.

As principais linhas de investigação propostas na literatura para obviar ao problema da retenção de membrana e de corte podem ser classificadas de acordo com a seguinte descrição:

1. **Métodos de sub-integração** iniciadas por Zienkiewicz et al [3], e continuadas por Hughes et al [4] para a integração selectiva. Nestes métodos utiliza-se uma ordem de integração uniforme ou selectivamente reduzida para o cálculo da rigidez. Baseiam-se no facto de que as deformações de corte se anulam nos chamados pontos de Barlow [5]. Por exemplo, num elemento de viga de 2 nós, a deformação de corte anula-se em $\xi=0$,

evitando-se a retenção de corte se o campo de corte for unicamente interpolado nesse ponto.

2. Elementos baseados na imposição das condições de Kirchhoff, de forma discreta ou integral. Nestes métodos, a ideia básica é a de impor em pontos discretos ou linhas, a condição de que a normal indeformada permanece normal à superfície média após deformação. Inicialmente introduzida por Oden[6], teve o seu maior sucesso nos elementos triangulares de Batoz [7] e Dhatt [8]. Estes elementos utilizam campos de rotações e deslocamento transversal independentes. No triângulo, iniciam com 2 campos θ quadráticos e um campo w cúbico definido ao longo dos lados. As relações de Kirchhoff são impostas nos nós de canto e nos pontos médios em direcções tangenciais. O elemento passa a ter 9 graus de liberdade e a sua performance em situações de placa fina é considerada excelente [8]. Estes elementos só são usados em placa fina, dado que não consideram deformações de corte. Mais tarde, Batoz e Lardeur [9] combinaram a formulação discreta com flexibilidade de corte, conduzindo a um elemento que possibilita a análise de cascas finas e espessas. Refira-se também, na mesma linha de investigação, os elementos de casca e placa semi-loof [10-13], em que novamente se introduz as suposições de Kirchhoff em elementos de casca curva quadrática. Estes elementos aplicam-se, com ótimos resultados, a cascas finas mas a sua formulação é considerada complexa, tendo em conta as actuais tendências de simplificação para análise dinâmica. Refira-se, no entanto, que Oliveira [13] desenvolveu elementos mais simples baseados nos mesmos princípios. Esta é uma linha de investigação promissora, na mesma linha de [9], e que poderia ser objecto de posterior investigação, conduzindo a elementos com deformação de corte, alargando assim o seu campo de intervenção a laminados espessos.

3. Elementos baseados em métodos de estabilização da matriz de rigidez. A abordagem de estabilização consiste em adicionar a um elemento sub-integrado, uma rigidez adicional, tal que os modos de rigidez espúreos sejam suprimidos. As duas motivações originais [14] foram :

- desenvolver elementos rápidos para programas de integração explícita;
- tirar partido da ausência de tensões parasitas de membrana e corte nos pontos de Barlow e atingir assim a rápida convergência do elemento sub-integrado, sem as desvantagens inerentes.

Os métodos de estabilização foram propostos inicialmente por Belytschko et al [14] na estabilização de elementos de placa, por supressão dos modos w no elemento de placa de

4 nós, baseado em integração selectiva [4], através da perturbação da rigidez de corte, na forma

$$\underline{K} = \underline{K}^{SRI} + \alpha(\underline{K}_s^{2 \times 2} - \underline{K}_s^{1 \times 1}) \quad (2.1)$$

Onde α é um parâmetro de estabilização, SRI refere-se a integração selectiva-reduzida e os índices referem-se à ordem de integração. Belytschko et al [15,16] e Liu et al [17] estenderam o método aos elementos de casca de 4 e 9 nós de Hughes e Liu [18], para problemas lineares e não lineares. Mais tarde, Belytschko e Tsay [19] desenvolveram uma estabilização baseada em Flanagan e Belytschko [20] para o elemento tridimensional. A matriz estabilizadora $\underline{\gamma}$ é ortogonal a qualquer campo linear, ou seja, $\underline{\gamma}^T \underline{d} = 0$ para qualquer conjunto de deslocamentos lineares \underline{d} , correspondentes a um campo linear. Este elemento passou a ser utilizado em programas explícitos como o DYNA3D [21];

4. Elementos baseados em deformações assumidas (assumed-strain methods)

Nos métodos baseados em deformações assumidas, a matriz de deformações-deslocamentos é construída através do ajuste de uma interpolação das deformações desenvolvidas a partir do campo de deslocamentos em pontos especiais. Estes pontos e as interpolações são escolhidos de forma a que as partes que causam a retenção sejam omitidas. A matriz de deformações-deslocamentos assim obtida, denominada substituta, vai ocupar o lugar da matriz original. A matriz de rigidez é calculada de forma habitual, o que confere ao método vantagens computacionais. Entre os trabalhos mais significativos, refira-se os de Hughes e Tezduyar [22], Macneal [23], Wempner[24], Dvorkin e Bathe [25], Huang e Hinton[26] e Onate et al [27]. Ao desenvolverem em [25] um elemento de 4 nós, interpolaram as componentes covariantes da deformação de corte transversal usando as deformações de corte calculadas nos pontos médios dos lados do elemento. Huang e Hinton [26] desenvolveram elementos de placa e casca de 9 nós baseados nos mesmos conceitos de [25]. Onate et al [27] desenvolveram o conceito das deformações assumidas, com base numa metodologia genérica, sendo aplicada em elementos de placa e casca em [28].

Simo e Hughes [29] evidenciaram que o principio de Hu-Washizu de três campos pode ser considerado como a base de todos os métodos de deformações assumidas se a tensão interpoladora for ortogonal à diferença entre a deformação interpolada e àquela que é derivada dos deslocamentos, ou seja, se $\underline{\sigma}^T(\underline{\epsilon} - \nabla_s \underline{u})$ for nula na equação de Hu-Washizu

$$\delta W^{\text{int}}(\underline{u}, \underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}) = \int \left[\delta \underline{\varepsilon} : \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon}) - \delta \{ \underline{\sigma} : (\underline{\varepsilon} - \nabla_s \underline{u}) \} \right] d\Omega \quad (2.2)$$

A grande vantagem desta abordagem é a de que as equações de elementos finitos daí resultantes têm a mesma forma das baseadas em deslocamentos assumidos (método dos deslocamentos).

Neste trabalho estamos particularmente interessados na análise de cascas laminadas compósitas e/ou sandwich. Estas cascas caracterizam-se pela existência de um laminado, composto física e matematicamente por camadas com materiais eventualmente distintos e com orientações eventualmente diferentes. Os laminados compósitos são, na sua grande maioria, finos, enquanto que os laminados sandwich são geralmente espessos. Em ambos os casos, a consideração da deformação de corte é fundamental. Neste capítulo abordamos as diferentes teorias utilizadas para a simulação de tais cascas, bem como a sua representação por elementos finitos de casca. Utiliza-se o controlo de retenção de corte por sub-integração uniforme ou selectiva. São utilizados elementos de interpolação Serendípita, Lagrangiana e Heterosis.

2.3 - TEORIAS DE DEFORMAÇÃO DE CASCAS LAMINADAS

2.3.1 - Introdução

As teorias aplicadas na análise de placas e cascas laminadas podem ser classificadas genericamente em quatro classes:

- teorias clássicas de placas laminadas (baseadas nas suposições de Kirchhoff);
- teorias de deformação de 1ª ordem (baseadas nas suposições de Mindlin-Reissner);
- teorias de ordem superior;
- soluções exactas baseadas na teoria tridimensional.

Devido à sua inerente complexidade, são dificilmente encontradas soluções analíticas para estruturas arbitrárias. Em muitos casos, a teoria tridimensional foi abandonada em detrimento da teoria das placas laminadas. Nesta teoria são assumidas uma variação linear do deslocamento através da espessura do laminado, bem como a anulação da deformação de corte transversal [30-32]. Esta teoria é razoavelmente correcta para a análise de laminados monolíticos finos, em que os efeitos da deformação de corte são praticamente desprezáveis. Esta condição é relaxada nas teorias de deformação de corte, em que estes

efeitos não são desprezados. As teorias de deformação de corte são divididas em teorias de 1º ordem, tipo Mindlin[33]-Reissner[34], em que se assume um campo rotacional único para todo o laminado, e em teorias de ordem superior, em que os campos rotacionais variam em função da espessura, com formas diferentes, conforme a teoria. Neste trabalho são consideradas as teorias de deformação de 2ª e 3ª ordem e uma teoria de deformação por camadas, denominada layerwise, cujos graus de liberdade rotacionais estão afectos a cada camada. Nesta última teoria, é possível analisar um laminado com n camadas, embora nos limitemos a laminados com 2, 3 4 ou 5 camadas, por motivos de capacidade de memória e CPU. Como se verá mais adiante, devido à fraca prestação da teoria de 2ª ordem, apenas se aplicarão na maioria dos exemplos numéricos deste trabalho, a teoria de 1ª ordem, de 3ª ordem e layerwise.

2.3.2 - Equações genéricas

Apresentam-se algumas das principais equações resultantes da elasticidade linear sob condições materiais homogêneas.

2.3.2.1 - Relações tensão-deformação

As relações genéricas tensão-deformação de uma camada de material anisotrópico são expressas por

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

em que σ_{ij} e ε_{kl} são respectivamente, os tensores lineares de tensão e deformação e D_{ijkl} é o tensor de 4ª ordem dos módulos elásticos, ou tensor de elasticidade.

2.3.2.2 - Relações deformação-deslocamento

O tensor de deformação infinitesimal é definido em termos dos deslocamentos como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

em que a vírgula representa a derivada parcial relativamente à coordenada do índice a seguir à virgula.

2.3.2.3 - Relações de equilíbrio

As equações de balanço da quantidade de movimento podem ser escritas como

$$\sigma_{ij,j}(x_k, t) + F_i(x_k, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(x_k, t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

em que ρ é a massa volúmica e F_i as componentes do vector das forças de corpo.

2.3.2.4 - Condições fronteira

O cálculo das equações governantes necessita da adequada definição das condições fronteira. Estas são habitualmente prescritas da seguinte forma:

.1 tracções prescritas na fronteira

$$T_{ni} = \sigma_{ij} n_j \quad (2.6)$$

.2 deslocamentos prescritos na fronteira

$$u_i = \bar{u}_i \quad (2.7)$$

Estas condições são aplicadas, tendo em conta as particularidades de cada caso.

2.3.2.5 - Energia de deformação

Apesar da definição das equações governantes e das condições fronteira, torna-se difícil em casos práticos a obtenção da solução sob a forma analítica. O princípio dos trabalhos virtuais e abordagens de energia potencial são habitualmente introduzidos. A energia potencial num volume Ω e numa fronteira Γ pode ser expressa por

$$\pi = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,j} - f_i u_i) d\Omega - \int_{\Gamma} T_{ni} u_i ds \quad (2.8)$$

Minimizando π para um campo de deslocamentos assumido, e para um conjunto de condições fronteira, pode ser encontrada uma solução aproximada.

2.3.3 - Teoria clássica das placas e cascas laminadas

Na teoria das placas laminadas, são impostas as hipóteses de Love-Kirchhoff. Estas hipóteses sugerem que as secções planas indeformadas permanecem planas após deformação, e que as normais indeformadas permanecem normais após deformação. Baseiam-se na teoria de pequenos deslocamentos, usam equações constitutivas lineares, desprezam a tensão normal à superfície média da placa e supõem que a espessura das camadas é uniforme e que as características elásticas não variam com a posição na superfície de referência. Esta teoria despreza a deformação de corte, impondo directamente nas relações deformação-deslocamento as suposições de Love-Kirchhoff.

Embora apresente resultados satisfatórios em rigidez para placas e cascas finas, os níveis de tensão apresentados apresentam alguns desvios (ver [35] na aplicação desta teoria ao elemento de casca Semi-Loof). Esta teoria é manifestamente incorrecta para laminados espessos, em particular em laminados sandwich, onde os efeitos de corte são mais pronunciados. As principais referências são por estas razões já relativamente antigas, sendo de referir os trabalhos de [36-38]. Na figura 2.1 apresenta-se uma ilustração desta teoria para um laminado multicamada.

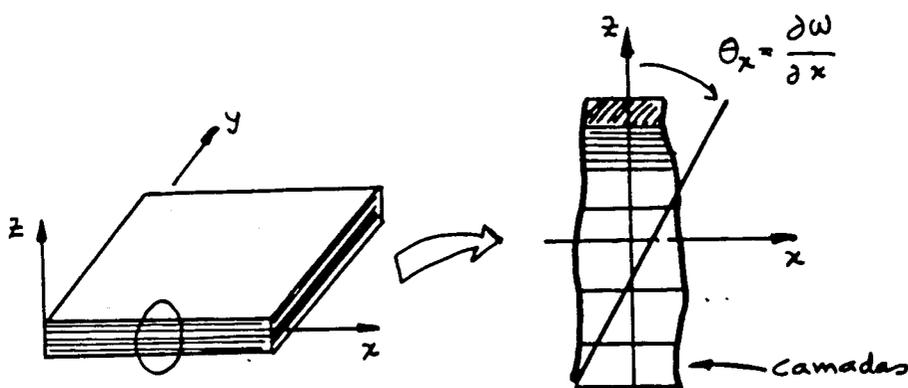


Figura 2.1 - Teoria de deformação clássica. Ilustração da deformação típica para um laminado multi-camada, caso 1-D.

2.3.4 - Teoria de deformação de 1ª ordem

Os laminados compósitos ou sandwich, em particular estes últimos, apresentam materiais cujos módulos elásticos transversos são relativamente baixos comparativamente ao módulos elásticos do plano. Os efeitos das deformações de corte são então mais pronunciados nestes laminados espessos que em placas ou cascas espessas isotrópicas, em que os módulos de corte são função directa dos módulos elásticos. Foi desenvolvida por Yang, Norris e Stavsky [39] uma teoria de deformação para placas laminadas anisotrópicas, através da extensão do conceitos de Mindlin [33] e Reissner[34] para placas isotrópicas homogéneas. Esta teoria relaxa a condição de anulamento das deformações de corte transverso, e utiliza as mesmas hipóteses da teoria clássica das placas laminadas, a menos da hipótese da normal indeformada permanecer normal após deformação.

Considere-se uma placa de espessura uniforme h constituída por um número arbitrário de camadas anisotrópicas com diferentes orientações. O sistema coordenado é escolhido por

forma que a superfície média da placa coincida com o plano x-y, sendo z o eixo normal ao plano médio.

O campo de deslocamentos baseado na teoria de deformação de 1ª ordem [35,39], é dado por

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que u, v, e w são os deslocamentos segundo as direcções x, y e z, respectivamente. As variáveis u_0 e v_0 são os deslocamentos do plano médio nas direcções x e y, respectivamente e θ_x e θ_y são as rotações da normal. As relações deformação-deslocamento são dadas por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\varepsilon}^0 + z\underline{\kappa} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= u_{0,x} \quad , \quad \varepsilon_y^0 = v_{0,y} \quad , \quad \gamma_{xy}^0 = v_{0,x} + u_{0,y} \\ \kappa_x &= \theta_{x,x} \quad , \quad \kappa_y = \theta_{y,y} \quad , \quad \kappa_{xy} = \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{aligned} \quad (2.12)$$

são, respectivamente, as deformações do plano (membrana) e as curvaturas do plano.

Em cada camada k do laminado, as relações tensão-deformação são expressas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_k \\ \begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} c_{44} & c_{45} \\ c_{45} & c_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}_k \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde os componentes elásticos c_{ij} serão definidos mais adiante e onde {1,2,3} representam as direcções principais do material da camada k. Note-se que devido à relaxação da hipótese da normal deformada se introduzem as deformações de corte nas

relações (2.13). Estas teorias são habitualmente as mais usadas pelos investigadores na discretização por elementos finitos na análise linear ou não linear, estática ou dinâmica de estruturas laminadas. As principais razões da intensa utilização desta teoria são a simplicidade de aplicação e a economia resultante da formulação, dado que esta teoria implica a utilização de 5 graus de liberdade por nó, num elemento de placa ou casca. Estas teorias não representam correctamente a energia de corte e por isso é necessário corrigir os termos de corte da matriz de elasticidade[35,52,54], como se verá mais adiante. Esta situação é indesejável sob o ponto de vista prático e representa uma das desvantagens desta teoria. Na figura 2.2 apresenta-se a ilustração desta teoria.

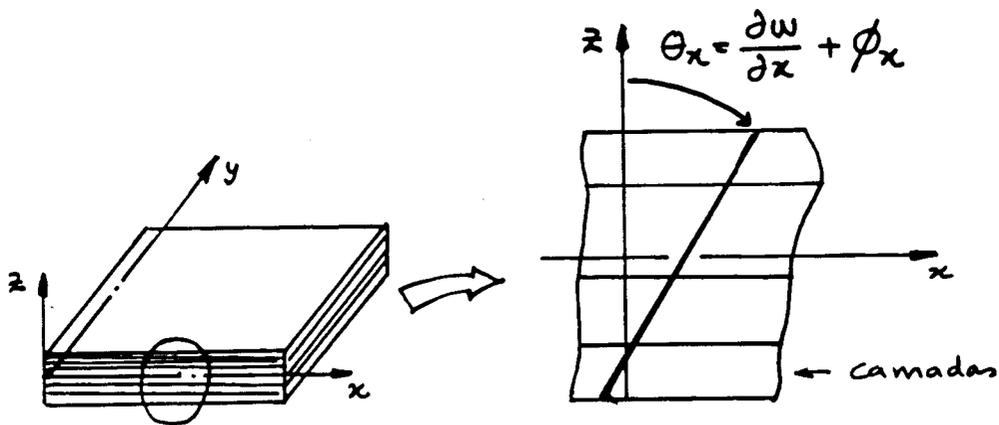


Figura 2.2 - Teoria de deformação de corte de 1ª ordem. Ilustração da deformação típica para um laminado multi-camada, caso 1-D.

2.3.5 - Teorias de deformação de ordem superior

As teorias de deformação de ordem superior evitam a utilização de termos correctivos de corte, através do desenvolvimento do campo de deslocamentos com termos de ordem superior relativamente à coordenada da espessura. Existem diversas teorias para placas isotrópicas homogéneas. A teoria de Lo et al [40] de placas isotrópicas homogéneas foi aplicada pelos mesmos autores para placas laminadas [41]. Neste modelo assume-se o seguinte campo de deslocamentos

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2\phi_x(x, y) + z^3\psi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2\phi_y(x, y) + z^3\psi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\theta_z(x, y) + z^2\phi_z(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Outra teoria de interesse foi desenvolvida por Whitney [42]. Os deslocamentos são obtidos pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_o(x, y) + z\theta_x(x, y) + \frac{z^2}{2}\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_o(x, y) + z\theta_y(x, y) + \frac{z^2}{2}\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y) + z\theta_z(x, y) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Esta teoria representa uma teoria de ordem imediatamente inferior à de Lo et al.

Reddy [43] apresentou mais recentemente uma teoria próxima de (2.14), mas reduzindo-a a um estado plano de tensão, na forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_o(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2\varphi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_o(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2\varphi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Reddy impõe a condição de anulamento das deformações de corte transversal γ_{xz} e γ_{yz} nas superfícies superior e inferior do laminado, para determinar as funções de ordem superior. O campo de deslocamentos fica então expresso na forma

$$\begin{aligned} u &= u_o + z\left[\theta_x - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2(\theta_x + w_{,x})\right] \\ v &= v_o + z\left[\theta_y - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2(\theta_y + w_{,y})\right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esta abordagem tem a particularidade de incluir no campo de deslocamentos primeiras derivadas do deslocamento transversal, reduzindo o número de graus de liberdade nodais a 5. Assim, há que utilizar elementos finitos com continuidade C^1 o que implica uma complexidade processual importante. Reddy e Putchá resolveram a questão utilizando uma formulação mista[44-46]. No entanto, a formulação mista implica cálculos mais pesados na formulação da matriz de rigidez, sendo habitualmente preterida em favor das formulações de deslocamentos ou deformações assumidas.

Outra abordagem dentro deste segmento de teorias foi protagonizado por Kant, Owen e Zienkiewicz [47] para placas espessas isotrópicas. Mais tarde Kant et al. [48] desenvolveram esta teoria para placas e cascas laminadas. O campo de deslocamentos utilizado é semelhante ao desenvolvido em (2.16), mas relaxam as condições de anulamento das deformações de corte nas superfícies superior e inferior do laminado.

Assim, estas teorias necessitam de um número superior de graus de liberdade na sua representação por elementos finitos, mas apresentam a vantagem de não necessitarem de factores correctivos de corte. Na figura 2.3 apresenta-se uma ilustração desta teoria. Note-se, no entanto, que tal como nas teorias de deformação de 1ª ordem, quer as rotações de 1ª ordem, quer as rotações de ordem superior estão afectadas ao laminado e não às camadas, ou seja, todas as camadas possuem os mesmos graus rotacionais, o que poderá ser uma desvantagem em laminados cujo "empenamento" da normal seja muito diferente de camada para camada, devido às características elásticas (suas e das camadas adjacentes).

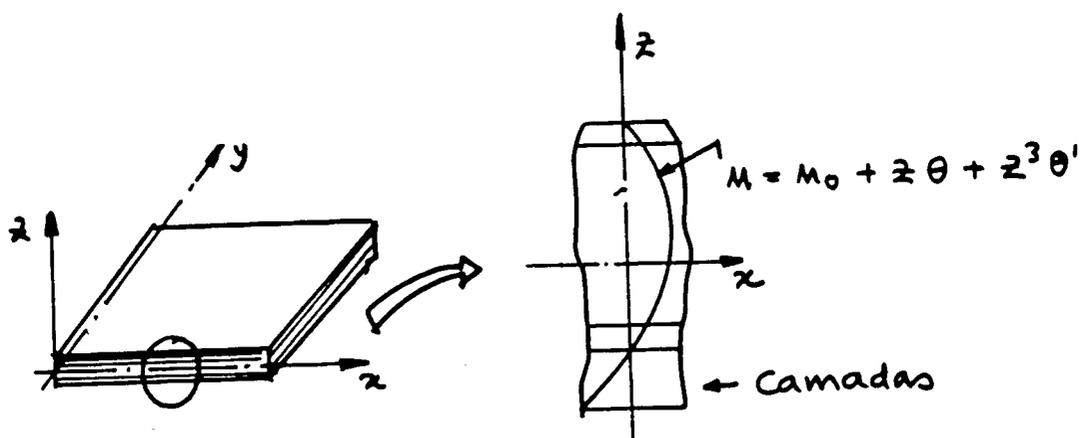


Figura 2.3 - Teorias de deformação de corte de ordem superior. Ilustração da deformação típica para um laminado multi-camada, caso 1-D.

Neste trabalho são consideradas duas teorias de ordem superior baseadas na filosofia de Kant, uma de 2ª ordem e uma de 3ª ordem. Na teoria de 2ª ordem, e para um elemento de placa, o vector de deslocamentos para um ponto genérico do laminado é representado por

$$\underline{u} = \underline{u}^0 + z\underline{\theta} + z^2\underline{\theta}^* \quad (2.18)$$

em que \underline{u}^0 e $\underline{\theta}$ têm um significado semelhante à teoria de 1ª ordem e $\underline{\theta}^*$ representa o vector das rotações de ordem superior. A teoria de 3ª ordem utilizada tem uma expressão semelhante

$$\underline{u} = \underline{u}^0 + z\underline{\theta} + z^3\underline{\theta}^* \quad (2.19)$$

O termo de 2ª ordem não é incluído em muitas das teorias, dado o maior número de graus de liberdade que essa abordagem produziria.

Note-se que em ambas as teorias se considera que o deslocamento transversal da placa é constante através da espessura.

Em estruturas sandwich, ou em laminados em que as características elásticas de camada para camada sejam muito diferentes, esta abordagem revela dificuldades no cálculo das tensões. No sentido de obviar estas questões, foram introduzidas as teorias de deformação por camadas (na literatura inglesa-layerwise theories).

2.3.6 - Teorias de deformação por camadas (layerwise)

As teorias de deformação por camadas são caracterizadas pela associação de um campo rotacional a cada camada ou sub-laminado. Uma das abordagens mais simples nesta teoria é a de impor campos de deslocamentos de 1ª ordem a cada camada ou sub-laminado. A continuidade dos deslocamentos tem de ser assegurada em cada interface do laminado. Neste trabalho utilizam-se os conceitos inicialmente propostos por Manewya e Davies [49] para placas laminadas. Este conceito foi posteriormente explorado por Al-Quarra [50] e reconduzido pelo autor e seus supervisores para placas sandwich [35] e cascas sandwich [51]. Registe-se que esta abordagem pode ser utilizada para laminados compósitos, embora a sua principal utilização seja as cascas sandwich. Estas teorias são bastante genéricas, podendo ser exploradas conjuntamente com o conceito de sub-laminado (conjunto de camadas adjacentes, com características semelhantes). Nesta abordagem considera-se um laminado sandwich com n camadas, figura 2.4. De acordo com o número de camadas, n , o campo de deslocamentos para uma camada genérica apresenta-se na seguinte forma:

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= u^{(n-1)} + z\theta_x^{(n)} \\ v^{(n)} &= v^{(n-1)} + z\theta_y^{(n)} \\ w^{(n)} &= w_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

O campo de deformações associado com a camada n é obtido pela expressão

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}^n &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}^{n-1} + z \begin{vmatrix} k_x \\ k_x \\ k_{xy} \end{vmatrix}^n \\ \begin{vmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{vmatrix}^n &= \begin{vmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x^{(n)} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y^{(n)} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

As relações constitutivas da camada n são semelhantes às apresentadas na expressão (2.9), com a particularidade de não ser necessário corrigir o corte transversal.

Relativamente a esta questão refira-se que esta suposição se baseia no facto da aproximação sugerida nesta abordagem poder simular com bastante correcção o empenamento da normal.

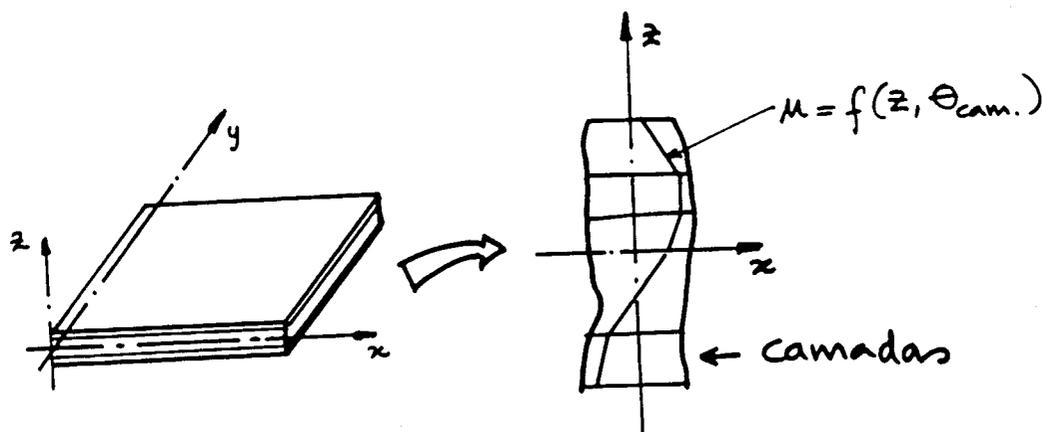


Figura 2.4 - Teoria de deformação de corte por camadas. Ilustração da deformação típica para um laminado multi-camada, caso 1-D.

2.4 - O ELEMENTO DE CASCA DEGENERADO

2.4.1 - Generalidades

Ao longo de praticamente todo o trabalho desenvolvido, utiliza-se o elemento de casca degenerado de elementos sólidos. Nesta secção pretende-se apresentar o seu desenvolvimento e formulação, tendo em vista as alterações produzidas no elemento original para ter em conta as teorias de deformação de corte estudadas. A descrição de [52] é adoptada, neste trabalho, para o elemento de casca degenerada. as principais alterações produzidas têm que ver com a teoria de 1ª ordem, onde se introduz uma simplificação do cálculo da matriz \underline{B} . É ainda introduzida neste trabalho a teoria de deformação de 3ª ordem neste elemento, bem como a teoria layerwise. Do conhecimento do autor, nenhuma destas abordagens foi alguma vez implementada, neste contexto.

O elemento é obtido por "degeneração" de um elemento tridimensional, baseado num campo de deslocamentos quadrático (Fig. 2.5). Se se assumir que as normais à superfície média da casca permanecem rectas, mas não necessariamente normais à superfície média deformada, então o campo de deslocamentos do elemento pode ser definido a partir dos deslocamentos da superfície média e das componentes do vector rotação associado com a rotação da normal nos nós.

As tensões normais à superfície média são supostas nulas e o facto de que as "normais" não permanecem necessariamente normais, permitida pela independência das rotações,

torna possível a consideração de deformações de corte transverso. Esta abordagem é equivalente às hipóteses de Reissner [33] e Mindlin [34] para placas.

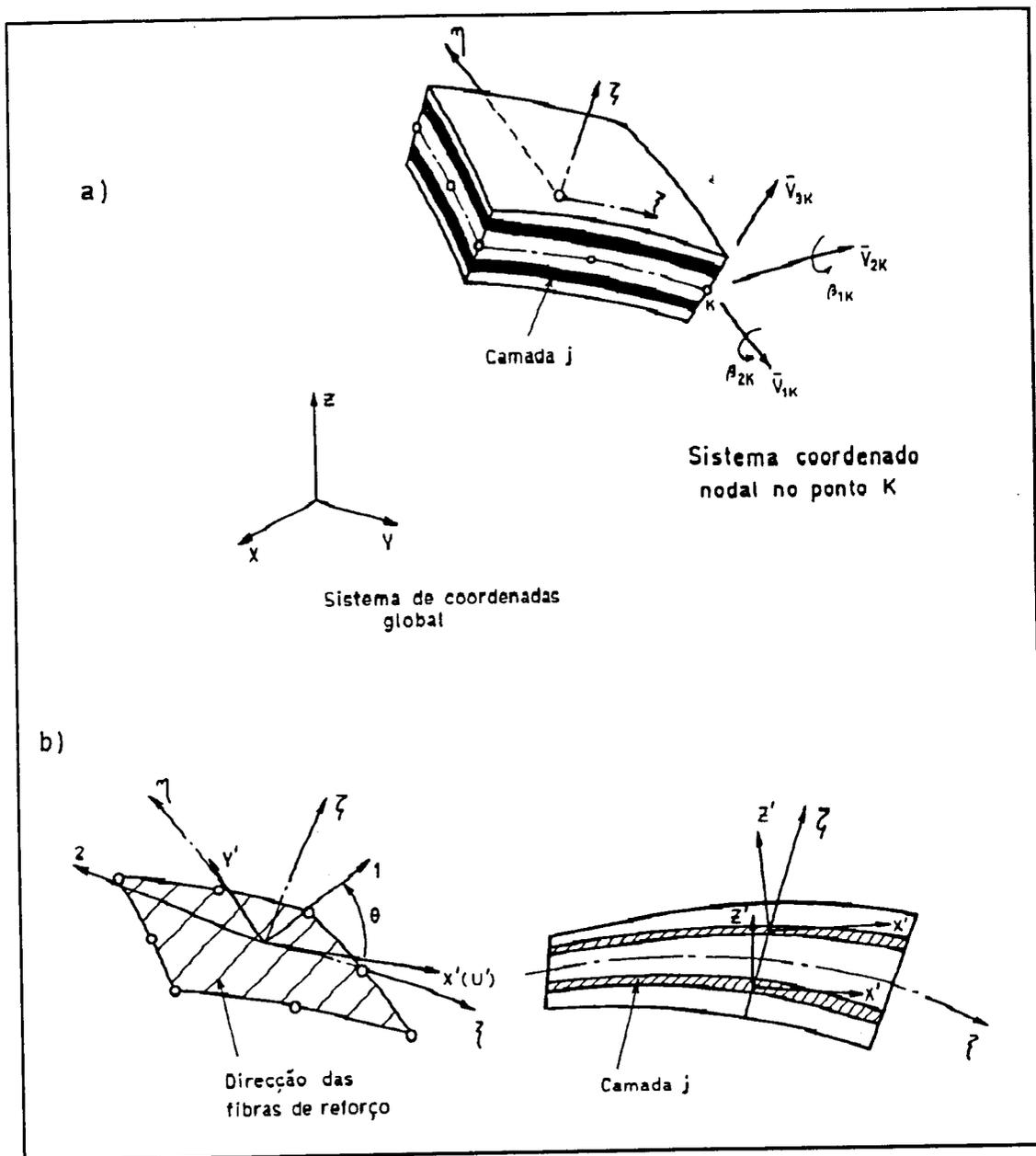


Figura 2.5 - Elemento finito de casca degenerado de Ahmad-Sistemas coordenados

2.4.2 Sistemas coordenados

Consideram-se quatro sistemas coordenados na formulação deste elemento:

a) Sistema de coordenadas globais - X_i

Este é um sistema cartesiano usado para definir a geometria da estrutura no espaço. As coordenadas nodais, a rigidez global e em geral as forças e deslocamentos estão referidos a este sistema. Se se usarem fronteiras inclinadas, as forças e deslocamentos ligados aos nós são referidos aos sistemas de fronteiras locais.

b) Sistema de coordenadas nodais - V_{jk}

Este sistema é definido em cada nó K. A origem está localizada na superfície média (Fig.2.5). A definição dos vectores básicos é feita da seguinte forma:

$$\underline{V}_{3k} = \frac{\underline{x}^{\text{top}} - \underline{x}^{\text{bot}}}{\|\underline{x}^{\text{top}} - \underline{x}^{\text{bot}}\|} \quad (2.22)$$

ou seja, este vector é obtido pela diferença entre os vectores positivos das projecções da "normal" superiores e inferiores no nó K. É assim assegurado que não existirão falhas ou sobreposições ao longo das fronteiras dos elementos.

O vector \underline{V}_{1k} é normal a \underline{V}_{3k} e definido como

$$\underline{V}_{1k} = (V_{1k}^1, V_{1k}^2, V_{1k}^3) = \frac{(V_{3k}^3, 0, -V_{3k}^1)}{\sqrt{(V_{3k}^3)^2 + (V_{3k}^1)^2}} \quad (2.23)$$

ou se \underline{V}_{3k} está na direcção X_2

$$\underline{V}_{1k} = (V_{3k}^2, 0, 0) \quad (2.24)$$

(Note-se que os superscritos se referem às componentes no sistema X_i)

Finalmente \underline{V}_{2k} é obtido a partir do produto vectorial de \underline{V}_{3k} e \underline{V}_{1k} como

$$\underline{V}_{2k} = \underline{V}_{3k} \times \underline{V}_{1k} \quad (2.25)$$

As componentes do vector rotação associado com a rotação 'normal' em cada camada, β_{1k} e β_{2k} são definidos neste sistema coordenado como ilustrado na figura 2.5.

c) Sistema coordenado curvilíneo - ξ, η, ζ

Este é o sistema coordenado no qual as integrações numéricas são realizadas. As coordenadas ξ e η são curvilíneas e estão ligadas à superfície média $\zeta = 0$. A coordenada ζ é linear e normal à superfície média.

d) Sistema coordenado local- \underline{X}'_i

Este sistema coordenado é definido localmente nos pontos de integração onde as deformações e tensões são calculadas. Os vectores da base \underline{X}'_1 e \underline{X}'_2 são respectivamente tangentes às direcções ξ e η nos pontos de integração, ou seja,

$$\underline{X}'_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X_3}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \underline{X}'_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

e \underline{X}'_3 é obtido pelo produto vectorial de \underline{X}'_1 e \underline{X}'_2 como

$$\underline{X}'_3 = \underline{X}'_1 \times \underline{X}'_2 \quad (2.27)$$

Este sistema é usado como referência para a consideração de direcções materiais.

2.4.3 - Definição geométrica

As coordenadas globais dum ponto do elemento são obtidas a partir das coordenadas globais nodais como

$$\underline{X}_i = \sum_{k=1}^n N_k \underline{X}_{ik} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{h_k}{2} \zeta \underline{V}_{3k}^i \quad (2.28)$$

em que n é o número de nós, N_k são as funções de forma em termos de ξ e η para $\zeta =$ constante e h_k é a espessura da casca no nó K .

2.4.4 - Campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos do elemento de casca é definido a partir dos deslocamentos nodais da superfície média e dos componentes do vector rotação da 'normal' nos nós em cada camada. A forma como este campo de deslocamentos é definido depende da teoria utilizada. Assim apresentam-se neste trabalho as formulações utilizadas, todas elas

derivadas da formulação básica de Ahmad, através das suposições apresentadas nos parágrafos 2.3.4 a 2.3.6.

2.4.4.1 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de 1ª ordem

O campo de deslocamentos do elemento de casca para a teoria de deformação de 1ª ordem é obtido por 5 graus de liberdade, correspondentes a três deslocamentos do ponto na superfície média e duas rotações do laminado (ver fig.2.5). O campo de deslocamentos pode assim ser expresso por

$$\underline{u} = \sum_{k=1}^n \underline{N}_k \underline{u}_k^{\text{med}} + \sum_{k=1}^n \underline{N}_k \zeta \frac{h_k}{2} [V_{1k}, -V_{2k}] \begin{Bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Este campo de deslocamentos corresponde à aplicação dos conceitos de Mindlin-Reissner para cascas, e corresponde essencialmente ao trabalho de [1]. Embora se apresentem modificações na obtenção de algumas matrizes do elemento (2.4.9), faz-se uma abordagem próxima de [52] e [55]. Na secção 2.4.9 ilustram-se as principais modificações à formulação de [52] e [55].

2.4.4.2 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de ordem superior

O campo de deslocamentos do elemento de casca para a teoria de deformação de ordem superior é descrito por 7 graus de liberdade, correspondentes a três deslocamentos do ponto na superfície média, duas rotações de primeira ordem e duas rotações de ordem superior do laminado (ver fig.2.6). O campo de deslocamentos pode assim ser expresso por

$$\underline{u} = \sum_{k=1}^n \underline{N}_k \underline{u}_k^{\text{med}} + \sum_{k=1}^n \underline{N}_k \zeta \frac{h_k}{2} [V_{1k}, -V_{2k}] \begin{Bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n \underline{N}_k \left(\zeta \frac{h_k}{2} \right)^2 [V_{1k}, -V_{2k}] \begin{Bmatrix} \beta_{1k}^* \\ \beta_{2k}^* \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

para a teoria de deformação de 2ª ordem, e

$$\underline{u} = \sum_{k=1}^n \underline{N}_k \underline{u}_k^{\text{med}} + \sum_{k=1}^n \underline{N}_k \zeta \frac{h_k}{2} [V_{1k}, -V_{2k}] \begin{Bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n \underline{N}_k \left(\zeta \frac{h_k}{2} \right)^3 [V_{1k}, -V_{2k}] \begin{Bmatrix} \beta_{1k}^* \\ \beta_{2k}^* \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

para a teoria de deformação de 3ª ordem.

Este campo de deslocamentos corresponde à aplicação dos conceitos de Kant [47,48] para placas, implementados aqui em elementos de casca degenerada. Esta formulação, tal como é aqui descrita, não foi encontrada em nenhuma referência.

2.4.4.3 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de aproximação por camadas

O campo de deslocamentos do elemento de casca layerwise [51] é definido a partir dos deslocamentos nodais da superfície média e dos componentes do vector rotação da 'normal' nos nós em cada camada, fig.2.7. A definição é realizada para n-camadas, apresentando-se aqui o caso de três camadas, correspondente a uma sandwich uní-núcleo. Assim, para a primeira camada, o campo de deslocamentos é expresso por

$$\underline{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^{(1)} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^{\text{méd}} + \sum_{k=1}^n N_k \zeta \frac{h_k^{(1)}}{2} [V_{1k}, -V_{2k}] \begin{Bmatrix} \beta_{1k}^{(1)} \\ \beta_{2k}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

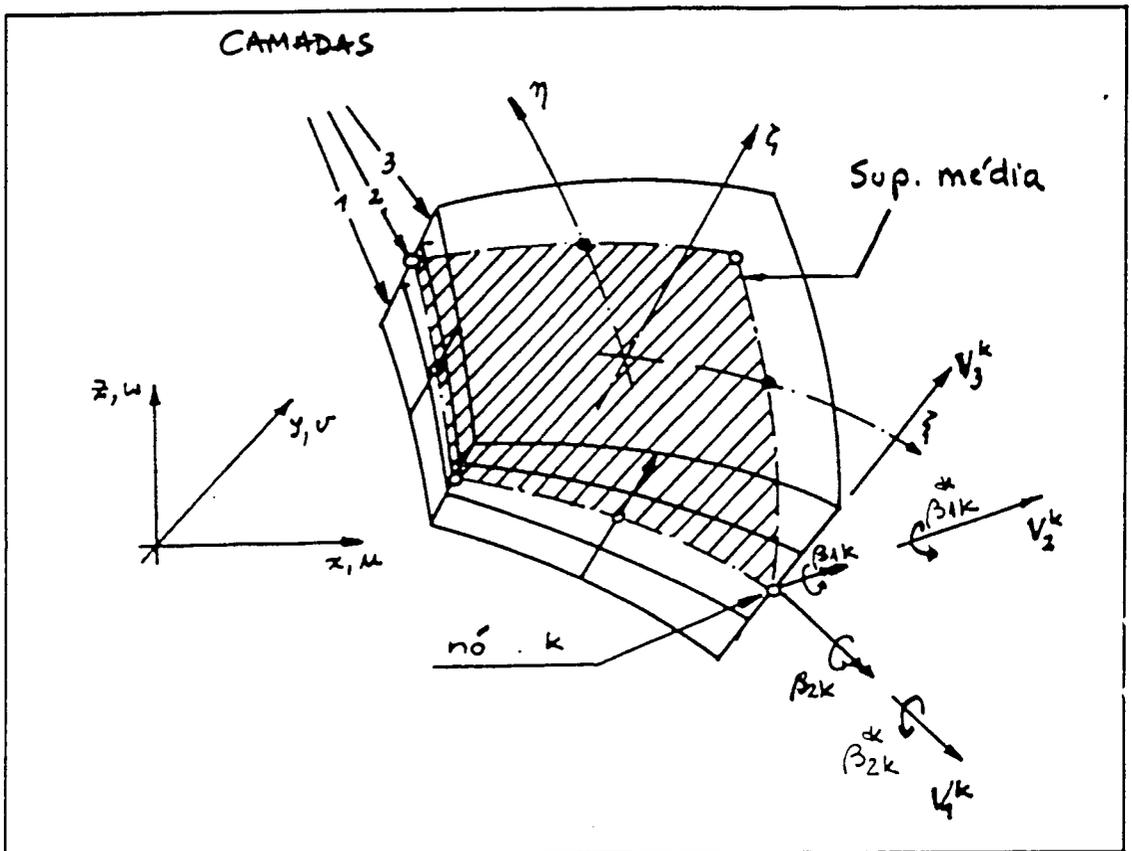


Figura 2.6 - Elemento de Ahmad-Geometria e graus de liberdade para a teoria de deformação de ordem superior

enquanto que para a camada n, esse campo pode ser expresso em função das n-1 camadas, da seguinte forma:

$$\underline{u}^{(n)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^{(n)} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^{\text{med}(n)} + \sum_{k=1}^n N_k \zeta \frac{h_k^{(n)}}{2} [\underline{V}_{1k}, -\underline{V}_{2k}] \begin{Bmatrix} \beta_{1k}^{(n)} \\ \beta_{2k}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

em que

$$\begin{aligned} \underline{u}^{\text{med}(n)} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^{\text{med}(n)} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^{\text{med}(n-1)} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{h_k^{(n-1)}}{2} [\underline{V}_{1k}, -\underline{V}_{2k}] \begin{Bmatrix} \beta_{1k}^{(n-1)} \\ \beta_{2k}^{(n-1)} \end{Bmatrix} + \\ &+ \sum_{k=1}^n N_k \frac{h_k^{(n)}}{2} [\underline{V}_{1k}, -\underline{V}_{2k}] \begin{Bmatrix} \beta_{1k}^{(n)} \\ \beta_{2k}^{(n)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Esta configuração de deslocamentos é a implementação da teoria apresentada em 2.3.6 para o elemento de casca de n-camadas, com n-campos rotacionais. Estas expressões são obtidas por imposição de continuidade dos deslocamentos nas interfaces do laminado. Esta imposição representa a sugestão de que não há escorregamento entre as diferentes camadas. Outros autores [53] relaxam esta condição, mas acredita-se que esta relaxação não corresponde fisicamente à realidade, dado que, na maioria dos casos, a camada adesiva transfere completamente os esforços, sem escorregamento. O escorregamento pressupõe uma situação de rotura da interface, o que implicaria outro tipo de análise bastante mais complexa. Note-se que outros autores [59] apresentaram uma formulação próxima desta, mas em que os campos rotacionais são abandonados, em detrimento de deslocamentos translacionais nas interfaces das camadas. Em [59] aplicou-se a técnica da substruturação através da espessura como forma de reduzir o número de graus de liberdade por nó, que é função do número de camadas nas teorias layerwise. Na abordagem que defendemos, o problema não se coloca, dado considerarmos apenas 3 camadas com 9 graus de liberdade por nó.

2.4.5 - Determinação das deformações

As componentes de deformação são definidas no sistema de eixos local $\{x'\}$ (figura 2.5), assumindo as suposições de casca habituais $\sigma_z = 0$. Esta hipótese permite a eliminação da deformação local ε_z da equação constitutiva, expressa em eixos locais. Assim, o vector das deformações locais é obtido por

$$\underline{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

em que u', v' e w' são as componentes de deslocamento no sistema coordenado local $\{x'\}$. Essas derivadas locais são relacionadas com as derivadas globais através de

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} [\theta] \quad (2.36)$$

onde $[\theta]$ é a matriz de transformação de eixos locais e globais. As derivadas dos deslocamentos com respeito às coordenadas globais são dadas por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

em que $[J]$ é a matriz Jacobiana da transformação $\underline{x} \rightarrow \underline{\xi}$.

A matriz de deformações \underline{B}' , relacionando as componentes de deformação no sistema coordenado local com as variáveis nodais elementares, é obtida através da relação

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{B}' \underline{d} \quad (2.38)$$

A matriz \underline{B}' para cada uma das teorias é calculada tendo em conta a derivação apropriada dos termos dos campos de deslocamento das equações (2.29) a (2.34).

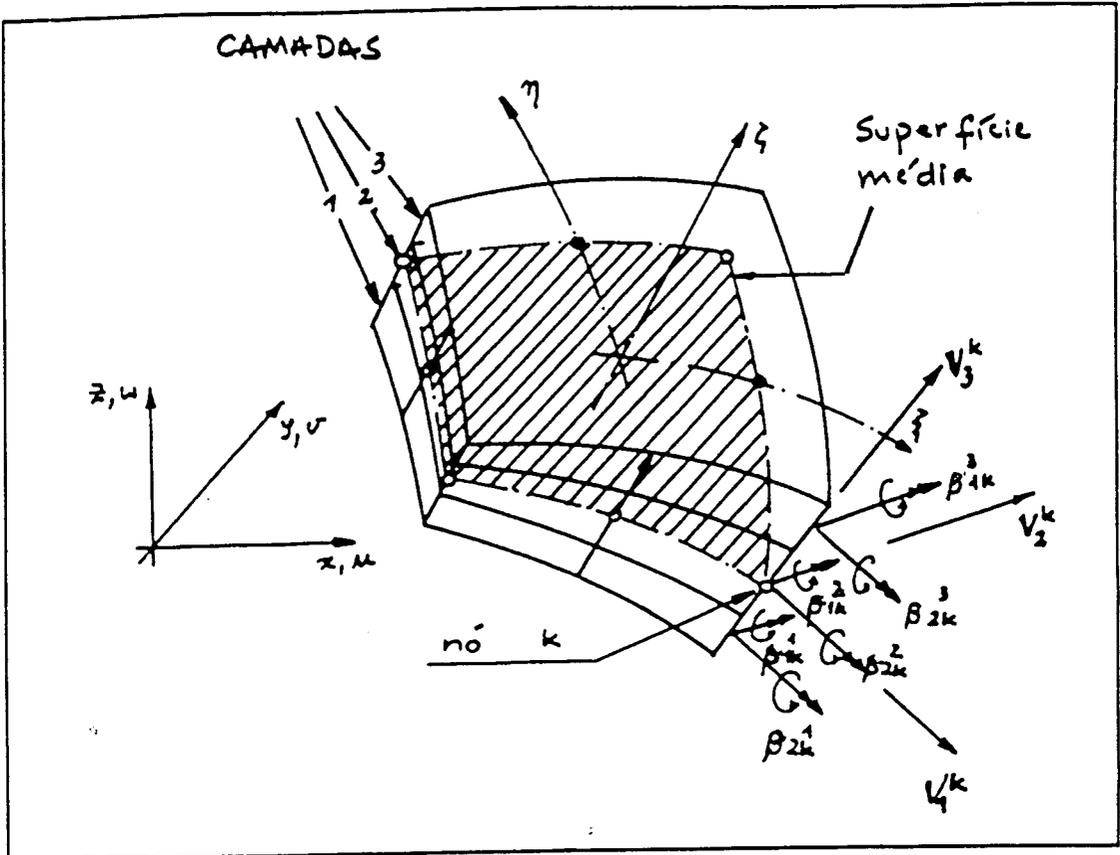


Figura 2.7 - Elemento de Ahmad-Geometria e graus de liberdade para a teoria de deformação por camadas aplicado a um laminado com três camadas

2.4.6 - Relações constitutivas elásticas

Considerando que o deslocamento transversal w' é constante através da espessura e tendo em conta a suposição habitual das cascas de que a tensão $\sigma_z' = 0$, são consideradas como componentes de tensão no sistema coordenado local

$$\underline{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}_p' \\ \underline{\sigma}_c' \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

onde $\underline{\sigma}_p'$ e $\underline{\sigma}_c'$ são os vectores de tensão de plano e de corte, respectivamente. A relação entre tensões e deformações pode escrever-se, no sistema coordenado local, na forma

$$\underline{\sigma}' = \underline{D}' \underline{\epsilon}' \tag{2.40}$$

Para a obtenção da matriz constitutiva local, supõe-se que o material da camada tem um comportamento ortotrópico. Esta é a situação mais frequente em materiais compósitos,

sobretudo os de matriz polimérica. Se o sistema coordenado local for paralelo ao dos eixos principais materiais x_1, x_2, x_3 , podemos escrever [52], para cada camada k ,

$$\{\sigma_{1,2,3}\}_k = \bar{D}_k \{\varepsilon_{1,2,3}\}_k \quad (2.41)$$

onde

$$\{\sigma_{1,2,3}\}_k = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}\}_k^T \quad (2.42)$$

$$\{\varepsilon_{1,2,3}\}_k = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}\}_k^T \quad (2.43)$$

$$\bar{D}_k = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 & \bar{D}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{D}_{12} & \bar{D}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_5 \end{bmatrix}_k \quad (2.44)$$

Para a teoria de deformação de 1ª ordem, as constantes elásticas são obtidas da seguinte forma

$$\bar{D}_{1k} = \frac{E_{1k}}{1 - \nu_{12k} \nu_{21k}}, \bar{D}_{2k} = \frac{E_{2k}}{1 - \nu_{12k} \nu_{21k}}, \bar{D}_{12k} = \frac{\nu_{21k} E_{1k}}{1 - \nu_{12k} \nu_{21k}} \quad (2.45)$$

$$\bar{D}_{3k} = G_{12k}, \bar{D}_{4k} = K_1 G_{13k}, \bar{D}_{5k} = K_2 G_{23k}$$

em que E_{1k} , E_{2k} , ν_{12k} , G_{12k} , G_{13k} e G_{23k} , são, em relação à camada k , respectivamente, os módulos elásticos longitudinal e transversal, o coeficiente de Poisson, o módulo de corte do plano e os módulos de corte transversais. Os factores K_1 e K_2 são factores de correcção de corte transversal, associados à formulação de deformação de corte de 1ª ordem [52].

Nas teorias de deformação de ordem superior ou com aproximação por camadas, as constantes elásticas são obtidas por

$$\bar{D}_{1k} = \frac{E_{1k}}{1 - \nu_{12k} \nu_{21k}}, \bar{D}_{2k} = \frac{E_{2k}}{1 - \nu_{12k} \nu_{21k}}, \bar{D}_{12k} = \frac{\nu_{21k} E_{1k}}{1 - \nu_{12k} \nu_{21k}} \quad (2.46)$$

$$\bar{D}_{3k} = G_{12k}, \bar{D}_{4k} = G_{13k}, \bar{D}_{5k} = G_{23k}$$

Note-se que os termos de corte transversal não são corrigidos. Em qualquer das teorias aplicadas, se os eixos principais do material 1,2 não coincidem com os eixos locais x' ,

y' , antes estão desfasados de um ângulo θ , a nova matriz de elasticidade D'_k é determinada a partir da seguinte transformação

$$\underline{D}'_k = \underline{T}_k^T \underline{\bar{D}}_k \underline{T}_k \quad (2.47)$$

em que a matriz de transformação é definida por

$$\underline{T}_k = \begin{bmatrix} \underline{T}_{1k} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_{2k} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\underline{T}_{1k} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\underline{T}_{2k} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

As componentes de tensão para uma camada particular k pode ser escrita em termos das deformações locais $\underline{\epsilon}'_k$ e da matriz de elasticidade \underline{D}'_k como

$$\underline{\sigma}'_k = \underline{D}'_k \underline{\epsilon}'_k \quad (2.51)$$

2.4.7 - Matriz de rigidez e vector de forças nodais equivalentes

Pode escrever-se, para um elemento de casca, a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), como [55]:

$$\int_{V^{(e)}} \delta \underline{\epsilon}'^T \underline{\sigma}' \, dv = \int_{V^{(e)}} \delta \underline{u}^T \underline{b} \, dv + \int_{S^{(e)}} \delta \underline{u}^T \underline{t} \, ds + \sum_{i=1}^n [\delta \underline{a}_i^{(e)}]^T \underline{q}^{(e)} \quad (2.52)$$

onde o primeiro membro da equação representa o trabalho virtual interno, em função das deformações e tensões locais, e em que

$$\underline{b} = [b_x, b_y, b_z]^T, \quad \underline{t} = [t_x, t_y, t_z]^T, \quad \underline{q}_i^{(e)} = [X_i, Y_i, Z_i, M_{1i}, M_{2i}]^T \quad (2.53)$$

são respectivamente os vectores de força mássicos, de superfície e pontuais de equilíbrio e onde V_e e S_e são o volume e a área do elemento.

De acordo com a forma habitual [52,56], encontra-se a equação matricial de equilíbrio do elemento

$$\underline{K}^{(e)} \underline{a}^{(e)} - \underline{f}^{(e)} = \underline{q}^{(e)} \quad (2.54)$$

onde a matriz de rigidez \underline{K}_e , e o vector de forças nodais equivalentes \underline{f}_e são expressos por

$$\underline{K}_{ij}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \underline{B}_i'^T \underline{D}' \underline{B}_j' \, dv \quad (2.55)$$

$$\underline{f}_i^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \underline{N}_i^T \underline{b} \, dv + \int_{S^{(e)}} \underline{N}_i^T \underline{t} \, ds \quad (2.56)$$

O cálculo dos integrais do elemento efectua-se sob forma numérica, habitualmente através da quadratura de Gauss-Legendre

$$\underline{K}_{ij}^{(e)} = \sum_{p=1}^{n_\xi} \sum_{q=1}^{n_\eta} \sum_{r=1}^{n_\zeta} (\underline{B}_i'^T \underline{D}' \underline{B}_j') \left| \underline{J}^{(e)} \right|_{p,q,r} W_p W_q W_r \quad (2.57)$$

$$\underline{f}_i^{(e)} = \sum_{p=1}^{n_\xi} \sum_{q=1}^{n_\eta} \sum_{r=1}^{n_\zeta} (\underline{N}_i^T \underline{b}') \left| \underline{J}^{(e)} \right|_{p,q,r} W_p W_q W_r \quad (2.58)$$

onde n_ξ e n_η são o número de pontos de quadratura Gaussiana bidimensional sobre a superfície ξ - η e n_ζ o número de pontos da quadratura unidimensional na direcção da espessura ζ . A integração na espessura é habitualmente resolvida pela regra de integração da ordenada média [51,52,54-56], ou pela regra de Simpson.

2.4.8 - Esforços

Uma vez obtidos os deslocamentos nodais, podem calcular-se as deformações e tensões locais. A partir dessas tensões, podem calcular-se os esforços locais em cada ponto da superfície de referência, por integração das tensões ao longo da espessura do laminado.

2.4.9 - Uma formulação alternativa de 1ª ordem

A formulação utilizada por Ahmad [1] e Figueiras [52] é essencialmente tridimensional. Devido à presença da coordenada de espessura "pseudo-normal" z , nas equações linearizadas do processo não-linear, não foi ainda conseguida completamente a redução a duas dimensões dos problemas de cascas. Pretende-se reduzir neste capítulo essa dependência, tendo como objectivo a economia computacional.

Na análise de estruturas laminadas, como aquelas que são constituídas por materiais compósitos ou em estruturas sandwich, dada a variação das características materiais

através da espessura, há necessidade de utilizar um número elevado de pontos de integração, tipicamente 1 ou 2 por camada. Mesmo em estruturas não laminadas, sobretudo em processos não-lineares, é também habitual [51,52,54-56] utilizar um conjunto de camadas matemáticas ou um conjunto de pontos de integração na direcção da espessura, para capturar o comportamento não-linear da cedência.

Se tomarmos em consideração que a espessura duma camada de compósito epóxico-carbono pré-impregnado é tipicamente da ordem dos 0.125-0.2 mm, e supondo que a espessura da casca será superior a 2mm, teremos necessidade de utilizar cerca de 16 camadas. Na maior parte dos casos práticos, em particular na indústria aeronáutica, o número de camadas é bastante superior a 16. Assim, o número de pontos de integração será pelo menos igual ao número de camadas, tornando a integração numérica bastante pesada. Neste capítulo apresenta-se uma formulação de 1ª ordem, modificada de [52], que pretende diminuir esse custo computacional, através duma simplificação das suposições cinemáticas. A presente formulação tem custos aproximadamente constantes e independentes do número de camadas. As simplificações cinemáticas assumidas neste trabalho são as seguintes:

- a) supõe-se que a variação da matriz jacobiana e da sua inversa através da espessura é linear;
- b) supõe-se que há uma evolução linear do sistema coordenado local através da espessura, num dado ponto de integração

Como consequência destas suposições, a deformação $\underline{\epsilon}_k$ no sistema local, para uma dada camada k , pode ser linearmente interpolada através das componentes de deformação em duas superfícies escolhidas (em particular, através das superfícies média e superior).

As consequências matemáticas destas suposições são as seguintes:

A matriz jacobiana para uma superfície (camada) k , é obtida na formulação original como

$$\underline{J}_k = \frac{\partial \underline{x}_k}{\partial \underline{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial \xi} & \frac{\partial x_k}{\partial \eta} & \frac{\partial x_k}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y_k}{\partial \xi} & \frac{\partial y_k}{\partial \eta} & \frac{\partial y_k}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z_k}{\partial \xi} & \frac{\partial z_k}{\partial \eta} & \frac{\partial z_k}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Note-se que esta matriz é utilizada para o cálculo das derivadas nas camadas e para o cálculo dos integrais.

As derivadas relativamente às coordenadas globais são obtidas por

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \underline{x}_k} = \underline{J}_k^{-1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \underline{\xi}} \quad (2.60)$$

$$e \quad dx_k \quad dy_k \quad dz_k = |J_k| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (2.61)$$

onde (\cdot) representa uma função genérica de $\underline{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$.

Note-se que a matriz jacobiana \underline{J}_k varia linearmente através da espessura, tendo em conta a suposição empregue por Ahmad[1] de normais rectas

$$\underline{x}(\xi, \eta, \zeta) = \underline{x}_0(\xi, \eta) + \zeta_k \frac{h_k}{2} \underline{V}_3 \quad (2.62)$$

onde \underline{V}_3 é o vector definidor da "pseudo-normal" à superfície média da casca.

A inversa da matriz jacobiana \underline{J}_k^{-1} varia não-linearmente através da espessura [56]. A variação dos deslocamentos relativamente ao referencial global, conduz a uma dependência não linear com ζ , impedindo a pré-integração na espessura.

No presente trabalho utilizou-se uma simplificação no cálculo das matrizes de deformação-deslocamento, supondo-se que a matriz de deformação-deslocamentos \underline{B}' varia linearmente através da espessura. Esta suposição é tanto mais correcta, quanto menor for a variação da espessura no elemento e quanto menor for a curvatura da casca, ou seja quanto mais constante for o comprimento das fibras.

A matriz \underline{B}' para a camada k é assim obtida através da interpolação linear das correspondentes $\underline{B}'^{\text{sup}}$ e $\underline{B}'^{\text{inf}}$, que são respectivamente a matriz de deformações-deslocamentos nas superfícies superior ($\zeta = +1$) e inferior ($\zeta = -1$), pela seguinte expressão, em que intervêm as sub-matrizes de plano \underline{B}'_p e corte \underline{B}'_c

$$\underline{B}'_{pk} = \underline{B}'_m + \zeta_k \underline{B}'_f \quad (2.63)$$

$$\underline{B}'_{ck} = \underline{B}'_c + \zeta_k \underline{B}'_c \quad (2.64)$$

em que

$$\underline{B}'_m = \frac{\underline{B}'^{\text{sup}} + \underline{B}'^{\text{inf}}}{2} \quad \text{e} \quad \underline{B}'_f = \frac{\underline{B}'^{\text{sup}} - \underline{B}'^{\text{inf}}}{2}$$

representam, respectivamente, as matrizes de deformação de membrana e flexão. De igual forma se explicitam \underline{B}'_c e $\underline{\bar{B}}'_c$.

Onate [55] refere que se pode considerar $\underline{B}'_{c_k} \equiv \underline{B}'_c$ tendo em conta estas suposições, podemos obter a matriz de rigidez linear como

$$\underline{K}_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[2\underline{B}'_m{}^T \underline{D}'_m \underline{B}'_m + 2\underline{B}'_c{}^T \underline{D}'_c \underline{B}'_c + \frac{2}{3} \underline{B}'_f{}^T \underline{D}'_f \underline{B}'_f \right] |J| \, d\xi \, d\eta \quad (2.65)$$

Neste trabalho, não é considerada a hipótese (2.65), dado que com o processo indicado não há alteração significativa do código original. Esta nova formulação é de simples implementação, representa um ganho significativo em custos computacionais, e apresenta resultados muito próximos a [52].

Este tipo de abordagem foi implementado por Stanley [58] nos elementos finitos de casca de Hughes et al. [4,18], conduzindo ao que foi designado por “Continuum-Based Resultant Shell Elements”. Esta abordagem pode ser considerada semelhante à que foi aqui utilizada, embora se creia que a filosofia implementada é mais simples de programar.

2.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentam-se um conjunto de exemplos numéricos, por forma a verificar a qualidade da solução obtida com as diferentes formulações e para a sua representação por elementos finitos. Estes exemplos referem-se, neste capítulo, apenas à análise linear elástica.

2.5.1 Placa sandwich com três camadas, simplesmente apoiada, sob pressão uniforme

Neste exemplo comparam-se as formulações apresentadas com os resultados de Srinivas[57] (solução analítica considerada como solução exacta). Uma placa quadrada, simplesmente apoiada, é analisada para diferentes configurações materiais e espessuras. A placa é carregada transversalmente sob pressão uniforme ($q=1.0$). Utiliza-se, em todas as formulações, o elemento de 8 nós, calculando-se o deslocamento transversal máximo no centro da placa e as máximas tensões nos pontos de gauss. O comprimento adimensional da placa é $a=10.0$, a espessura adimensional é $h=1.0$, sendo a placa modelada com uma malha 2×2 num quadrante, devido à simetria. As espessuras das três camadas são respectivamente h_1, h_2, h_3 . As características adimensionais do núcleo são

$$D'_{\text{núcleo}} = \begin{bmatrix} 3.802 & 0.879 & 0 & 0 & 0 \\ 0.879 & 1.996 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.608 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.015 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

As características das peles (camadas superior e inferior) são proporcionais às do núcleo, sendo calculadas através dos factores c_{sup} e c_{inf} , sendo definidas como

$$c_{\text{sup}} = \frac{D'_{\text{face sup}}}{D'_{\text{núcleo}}}, \quad c_{\text{inf}} = \frac{D'_{\text{face inf}}}{D'_{\text{núcleo}}} \quad (2.67)$$

Estudaram-se 5 casos diferentes, tendo em vista a simulação de vários tipos de sandwich, tais como um laminado homogêneo isotrópico (caso 1), sandwich simétricas (casos 2 e 3) e sandwich não-simétricas (casos 4 e 5). Apresentam-se nas tabelas 1 os resultados obtidos, relativamente ao deslocamento transversal. Na figura 2.8, apresenta-se a geometria da placa e a malha utilizada, e ilustram-se para o caso 5 as tensões normais e de corte transversal.

Devido à fraca resposta estrutural da teoria de 2ª ordem, quer em deslocamentos, quer em tensões, decidiu-se não continuar a investigar nem a apresentar resultados neste capítulo,

conforme se poderá também verificar no capítulo 3, na análise geométrica não linear. Os resultados estão, naturalmente, à disposição dos interessados.

Tabela 1 - Deslocamento transversal, para diferentes casos e teorias

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
Srinivas	181.05	41.906	16.753	28.297	34.549
1ª ordem	186.3	42.97	17.09	28.93	35.42
2ª ordem	198.3	51.15	22.26	33.34	35.66
3ª ordem	186.9	41.46	14.31	26.38	31.06
Layerwise	185.4	42.81	17.10	28.59	35.24

	$h1/h$	$h2/h$	$h3/h$	C1	C3
Caso 1	0.1	0.8	0.1	1	1
Caso 2	0.1	0.8	0.1	10	10
Caso 3	0.1	0.8	0.1	50	50
Caso 4	0.1	0.8	0.1	10	50
Caso 5	0.3	0.6	0.1	10	10

Note-se que a teoria de 2ª ordem apresenta valores bastante diferentes das outras teorias e será abandonada neste trabalho. A teoria de 3ª ordem começa a afastar-se dos valores exactos à medida que os factores c_{sup} e c_{inf} (2.67) aumentam.

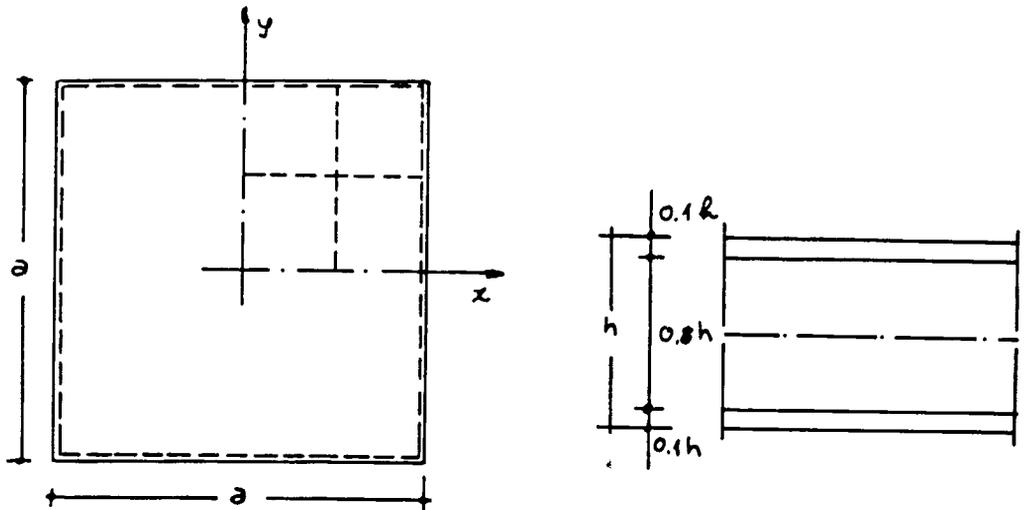


Figura 2.8 - Placa laminada sandwich - características geométricas e malha

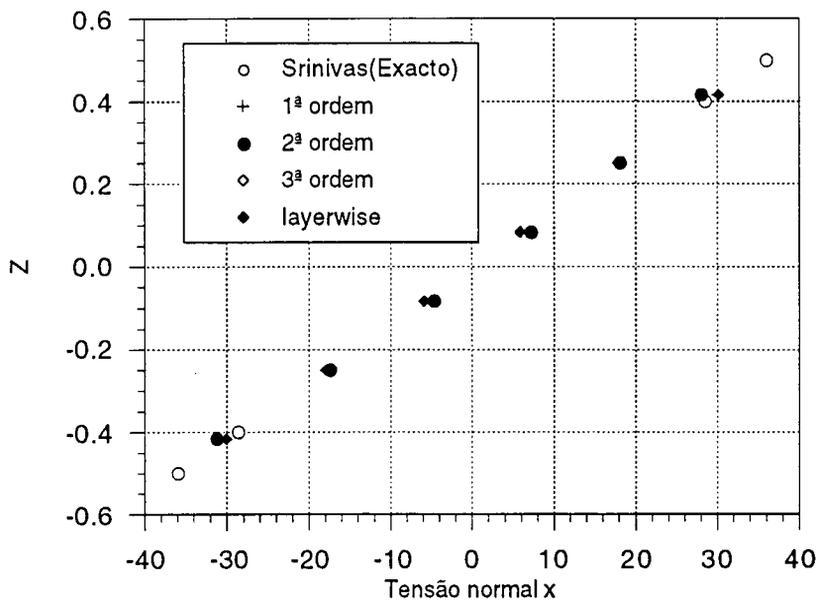


Figura 2.9 - Caso 1 - tensões normais x

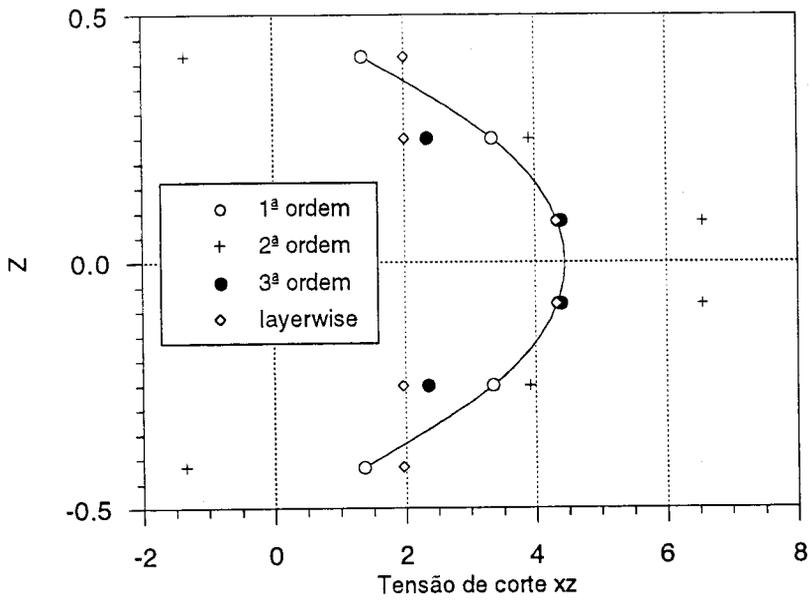


Figura 2.10 - Caso 1 - tensões de corte xz

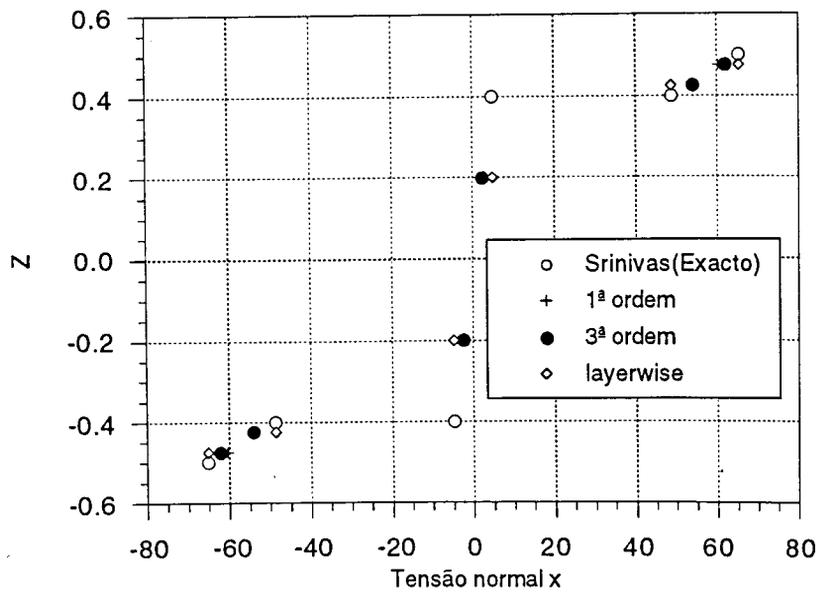


Figura 2.11 - Caso 2 - tensões normais x

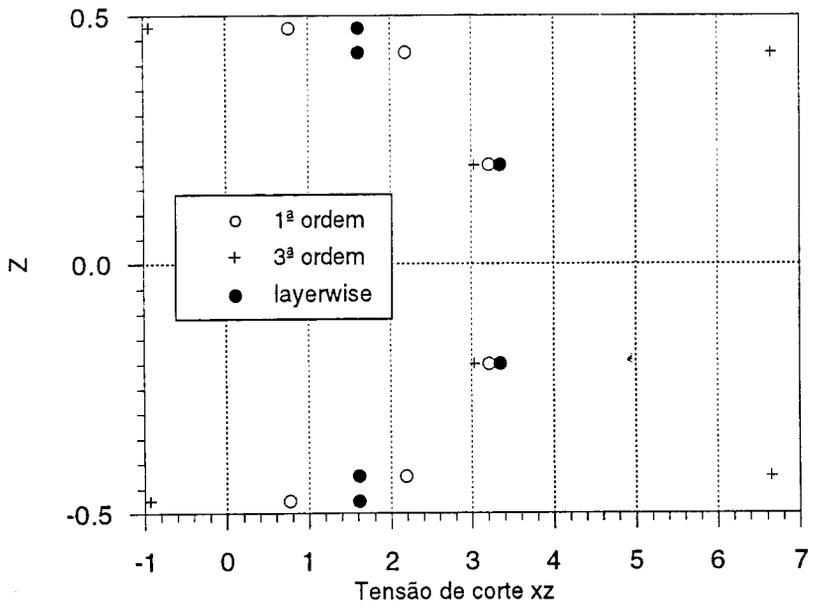


Figura 2.12 - Caso 2 - tensões de corte xz

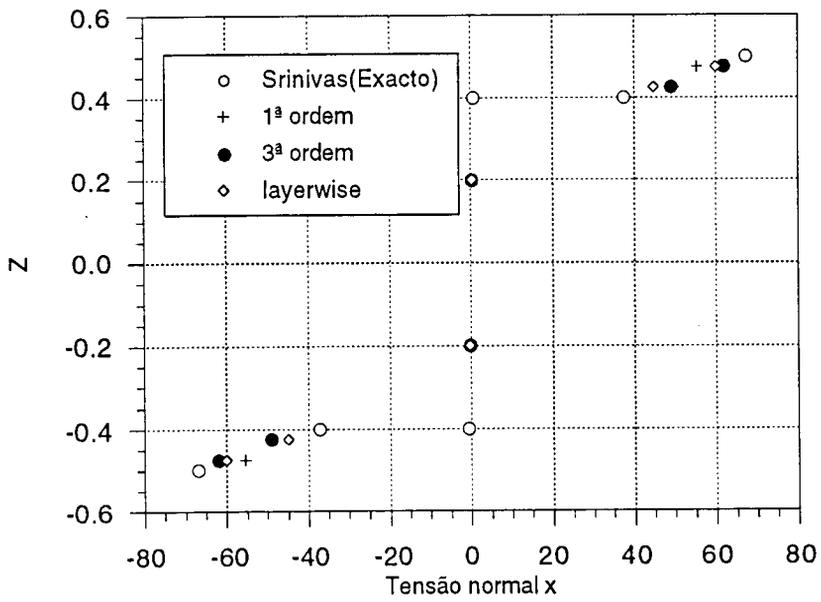


Figura 2.13 - Caso 3 - tensões normais x

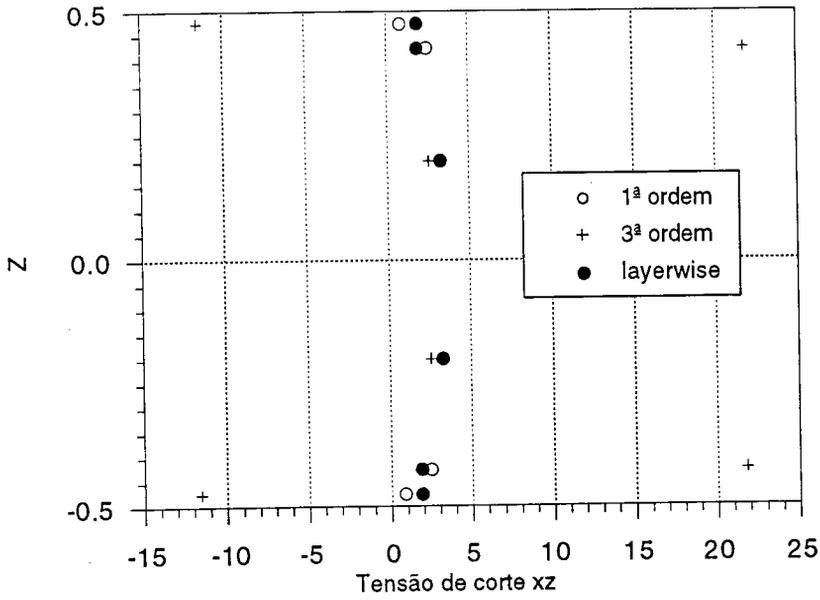


Figura 2.14 - Caso 3 - tensões de corte xz

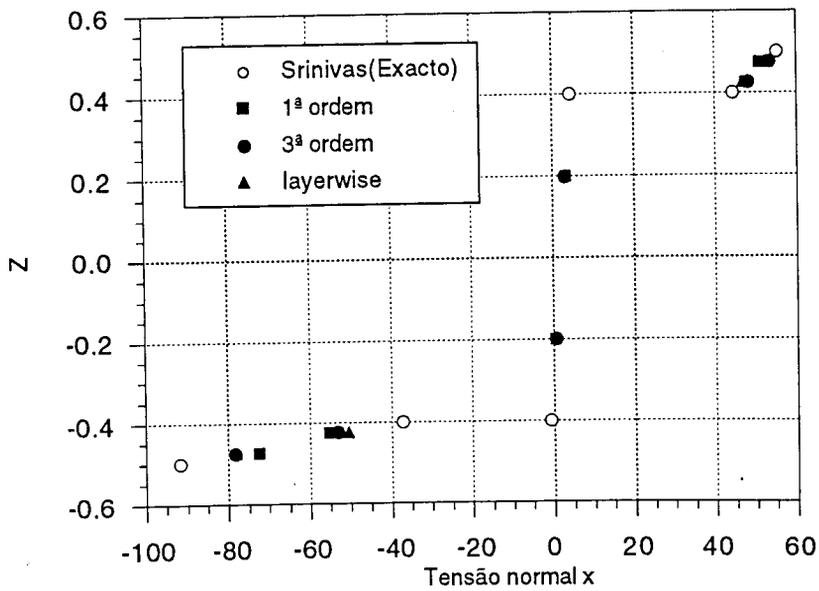


Figura 2.15 - Caso 4 - tensões normais x

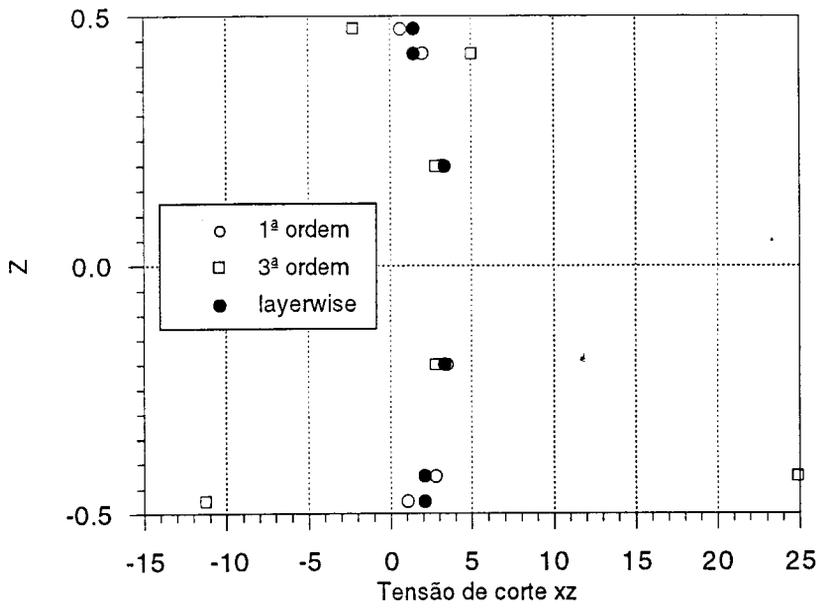


Figura 2.16a - Caso 4 - tensões de corte xz

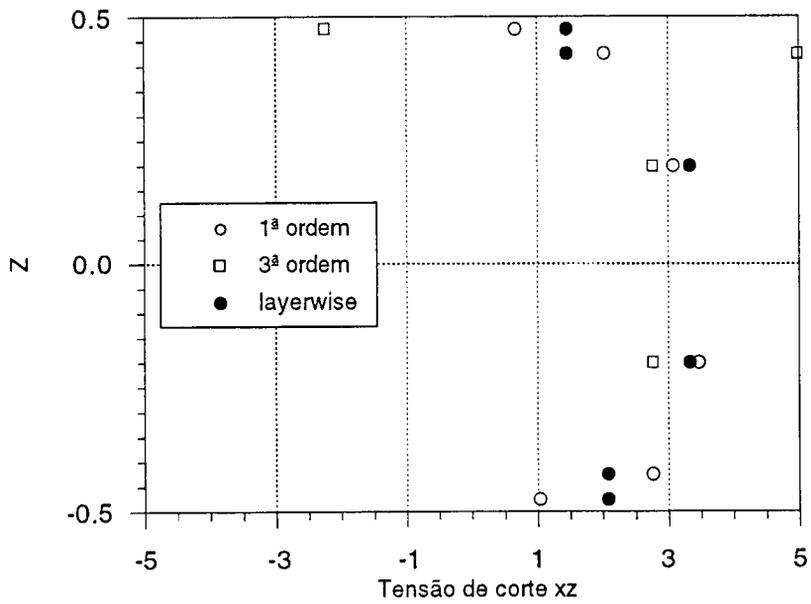


Figura 2.16b - Caso 4 - tensões de corte xz, com restrição da amplitude de tensão

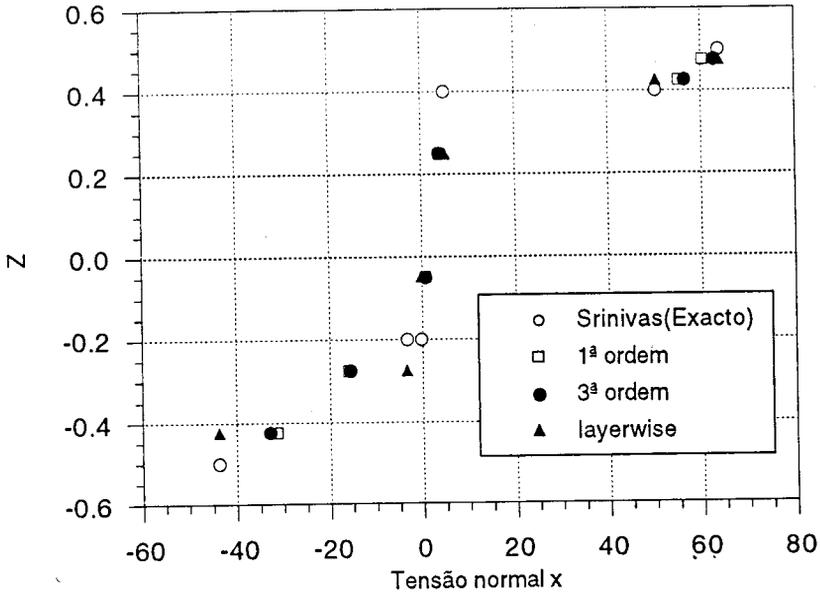


Figura 2.17 - Caso 5 - tensões normais x

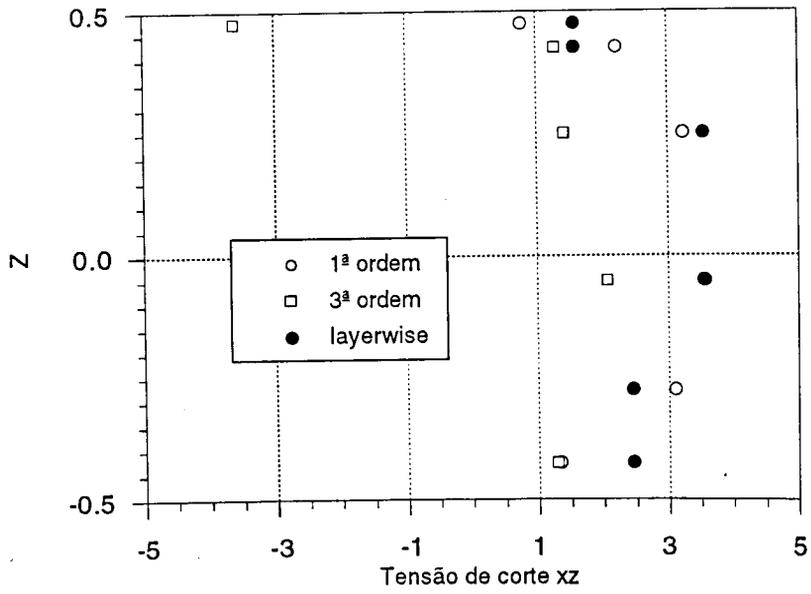


Figura 2.18 - Caso 5 - tensões de corte xz

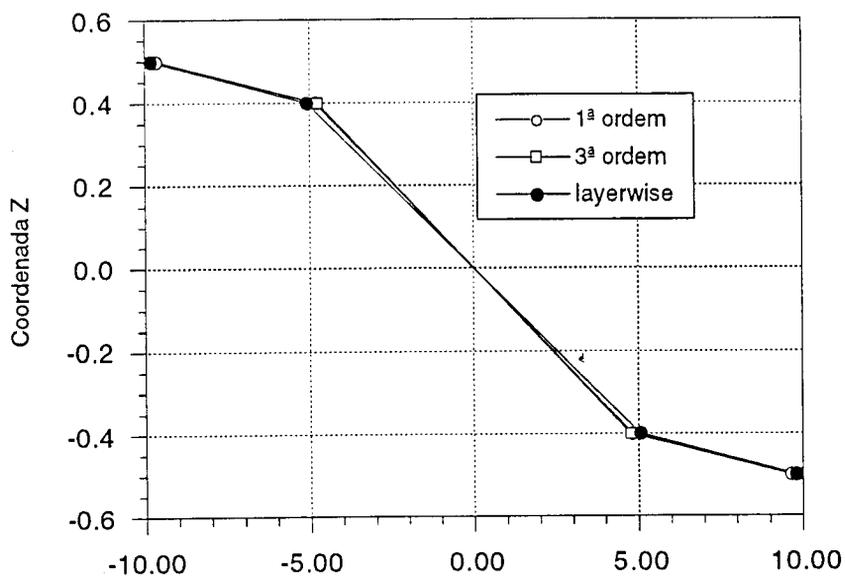


Figura 2.19 - Caso 1 - evolução do deslocamento u na espessura

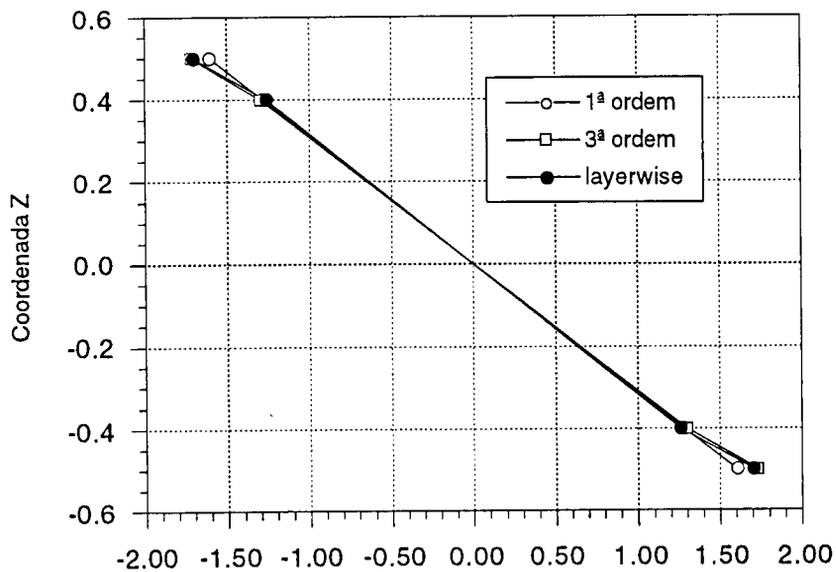


Figura 2.20 - Caso 2 - evolução do deslocamento u na espessura

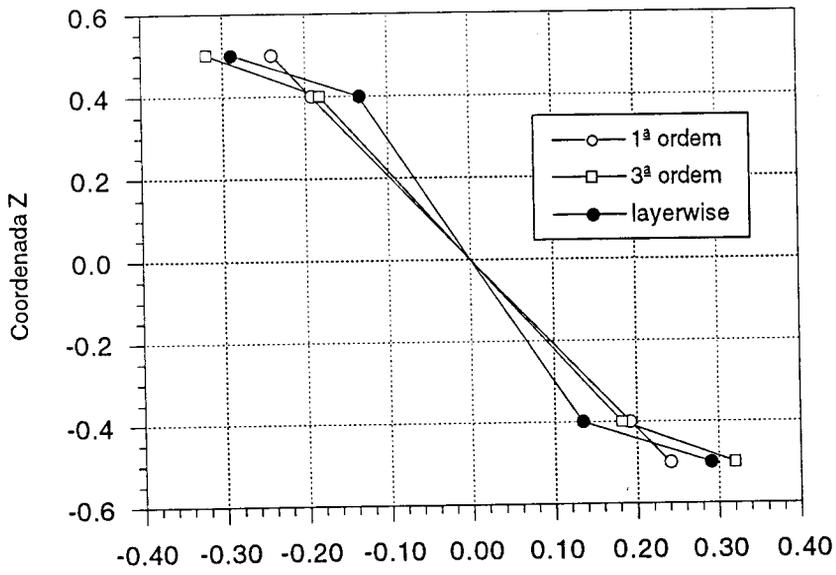


Figura 2.21 - Caso 3 - evolução do deslocamento u na espessura

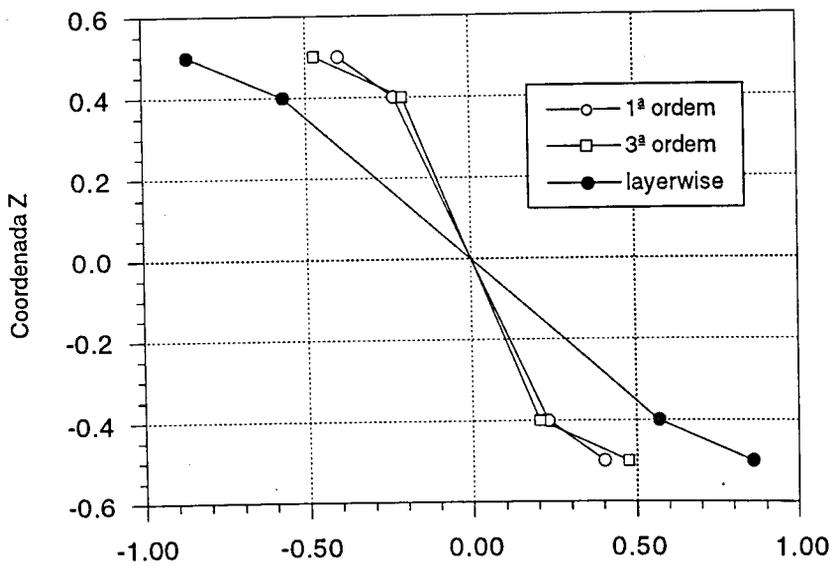


Figura 2.22 - Caso 4 - evolução do deslocamento u na espessura

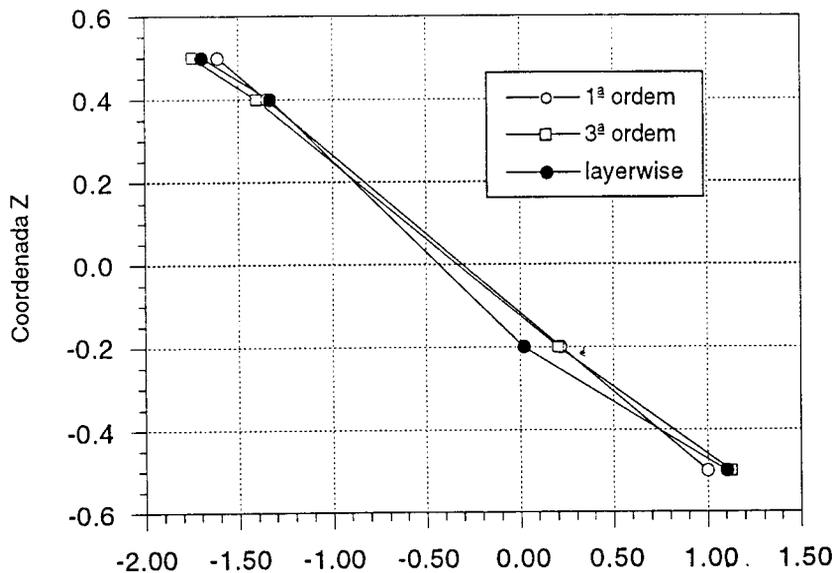


Figura 2.23 - Caso 5 - evolução do deslocamento u na espessura

Dos resultados obtidos neste exemplo, pode concluir-se que:

- para laminados isotrópicos, como é o caso 1, as teorias estudadas apresentam resultados próximos umas das outras, particularmente em relação às tensões normais; a teoria de deformação de 2ª ordem apresenta resultados bastante incorrectos;
- verifica-se uma grande proximidade entre a teoria de 1ª ordem e layerwise em termos das tensões de corte transversal;
- quando as diferenças de módulos se acentuam, a teoria de 3ª ordem apresenta variações significativas em termos das tensões de corte;
- a teoria de deformação de corte de 3ª ordem parece ser uma boa alternativa à teoria de 1ª ordem quando as diferenças de módulos não são acentuadas. Aquela teoria proporciona directamente tensões de corte parabólicas, enquanto que na teoria de 1ª ordem, aquelas têm de ser corrigidas;
- enquanto as teorias de 1ª e 3ª ordem apresentam tensões variáveis na espessura, a teoria layerwise apresenta uma variação com patamares, o que advém do facto desta formulação apresentar deformações de corte constantes em cada camada.

2.5.2 - Placa compósita em flexão cilíndrica

O problema em causa consiste numa placa com 2 e 3 camadas sujeita a um carregamento transversal sinusoidal como descrito por Pagano[30]. As tensões de corte transversal e axiais são comparadas com [30]. Um modelo esquemático é apresentado na figura 2.24. A estrutura é uma placa compósita constituída por camadas ortotrópicas de igual espessura. Cada camada modela um compósito fibroso com as seguintes propriedades:

$$E_1 = 172.4 \text{ GPa} ; E_2 = 6.90 \text{ GPa} ; G_{12} = 3.45 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 1.38 \text{ GPa} ; \nu_{12} = \nu_{23} = 0.25$$

Uma carga distribuída com uma evolução sinusoidal $p = p_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ é aplicada no topo da placa compósita.

São consideradas três placas neste exemplo. A primeira é uma placa unidireccional com as fibras orientadas segundo o eixo dos x . A segunda é uma placa com duas camadas orientadas paralelamente e ortogonalmente ao eixo dos x , nas camadas superior e inferior, respectivamente. Na terceira placa, que tem três camadas de igual espessura, as fibras nas camadas externas são orientadas paralelamente ao eixo dos x , enquanto que as fibras na camada central são ortogonais ao eixo dos x . A razão comprimento/espessura $S = \frac{L}{h}$ das placas varia de 4 a 20. Utiliza-se uma malha de elementos finitos de casca Lagrangianos, para a modelação da placa. Na figura 2.25 ilustra-se a influência da deformação de corte para o primeiro caso. Na figura 2.26 a 2.60 são comparadas as tensões normais e de corte transversal para as três teorias de deformação. Quando seja possível, comparam-se os resultados com a teoria de [30].

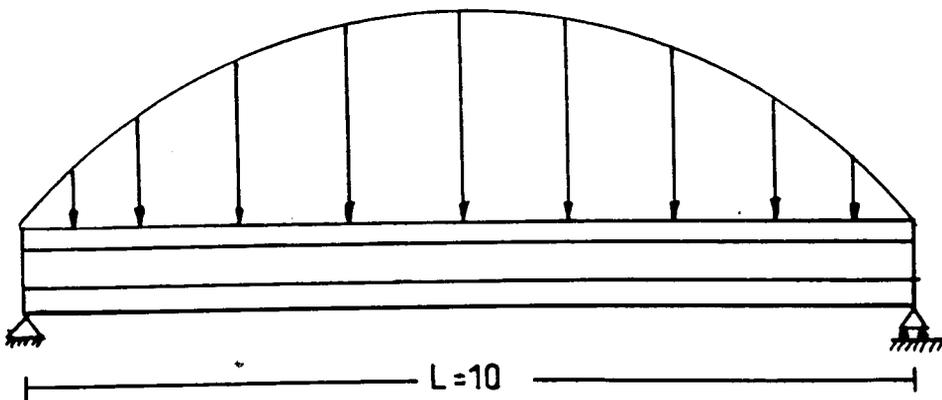
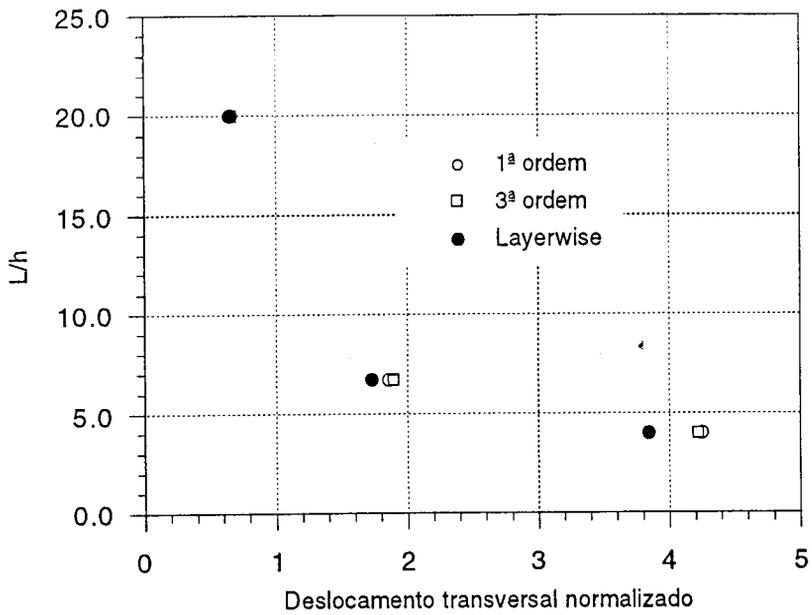
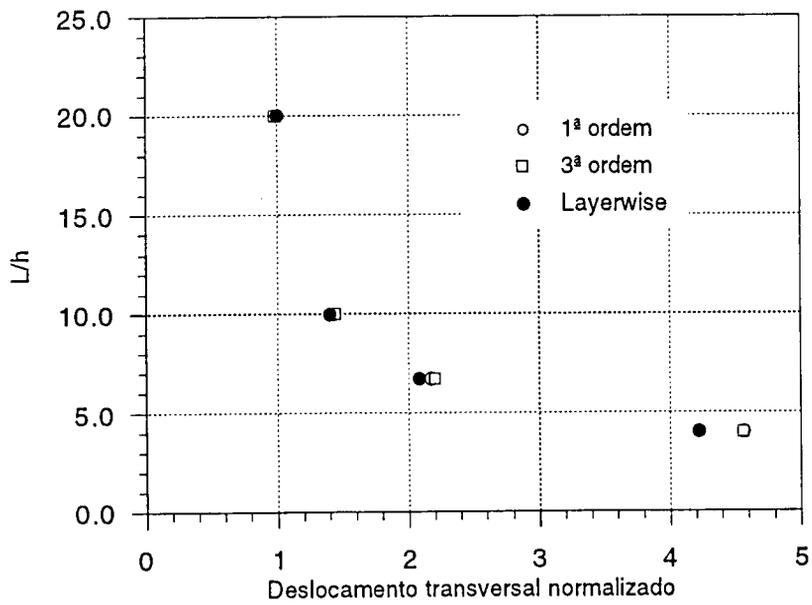


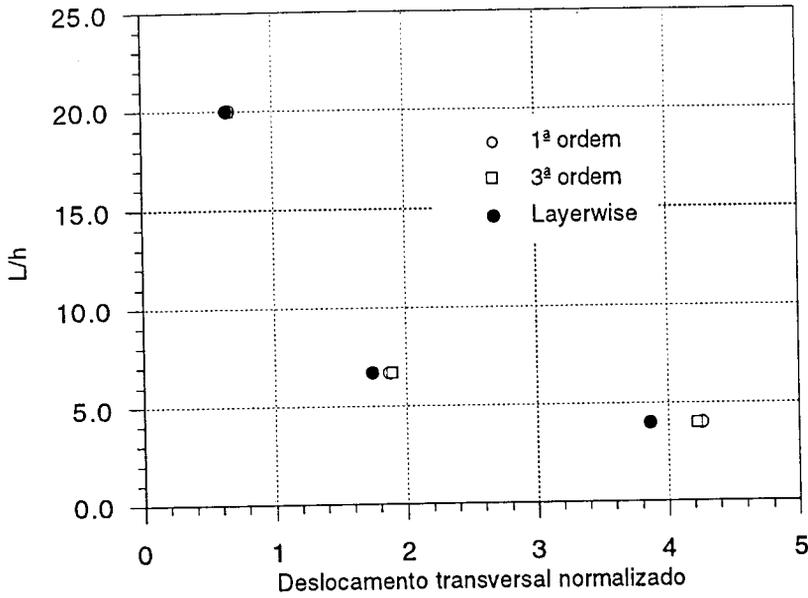
Figura 2.24- Placa compósita sujeita a carregamento distribuído sinusoidal



a) caso 1



b) caso 2



c) caso 3, Figura 2.25 a) a c)- Deslocamento máximo função da razão comprimento/espessura função das teorias

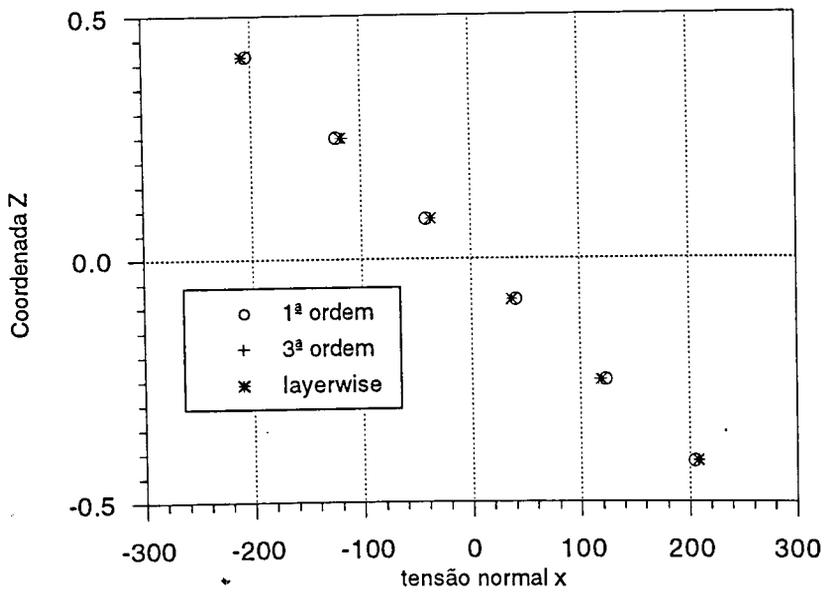


Fig.2.26 - Comparação das teorias para o caso 1, tensão normal x , , razão $L/h=20$

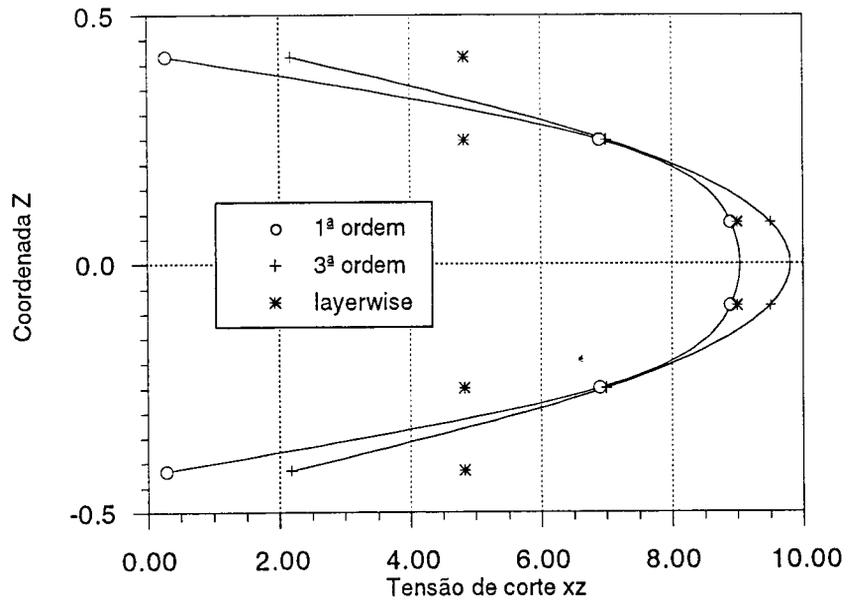


Fig.2.27 - Comparação das teorias para o caso 1, tensão de corte xz , razão $L/h=20$

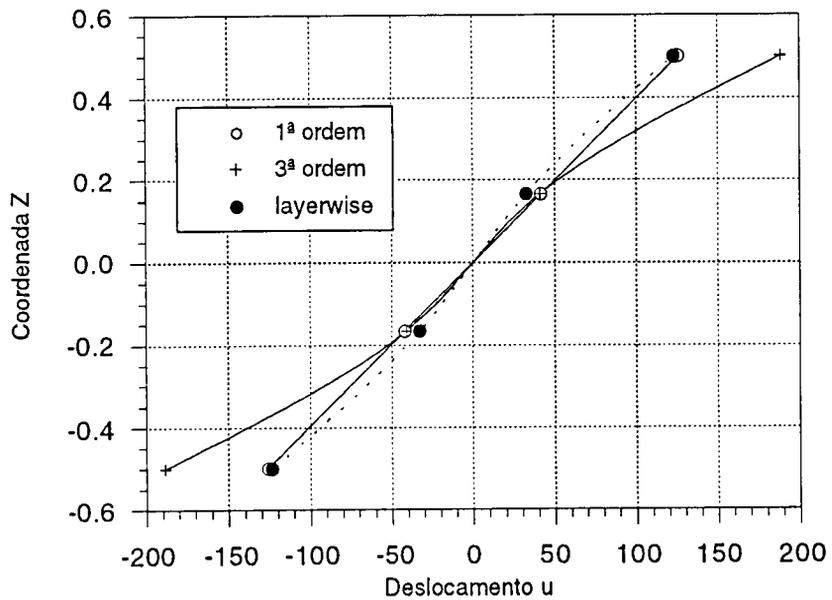


Fig.2.28 - Comparação das teorias para o caso 1, deslocamento u , razão $L/h=20$

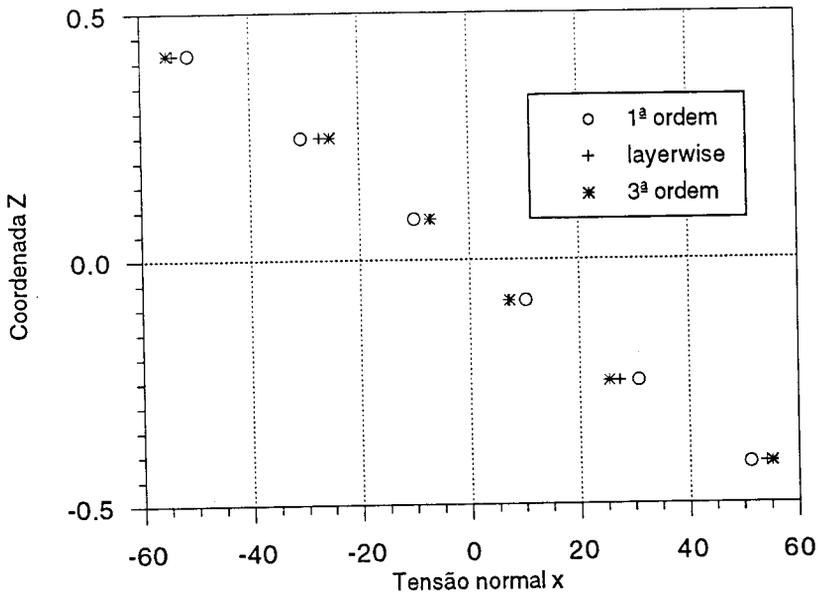


Fig.2.29 - Comparação das teorias para o caso 1, tensão de corte x, razão L/h=10

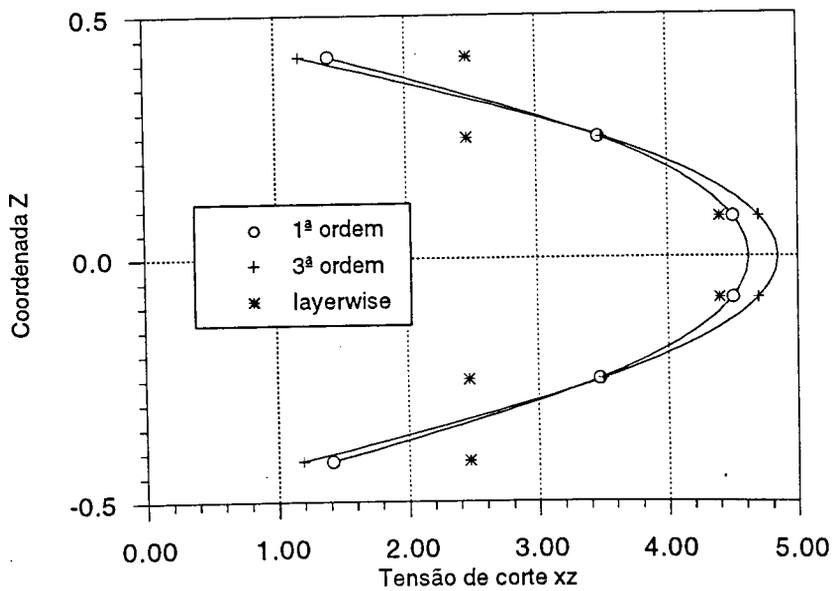


Fig.2.30 - Comparação das teorias para o caso 1, tensão de corte xz, razão L/h=10

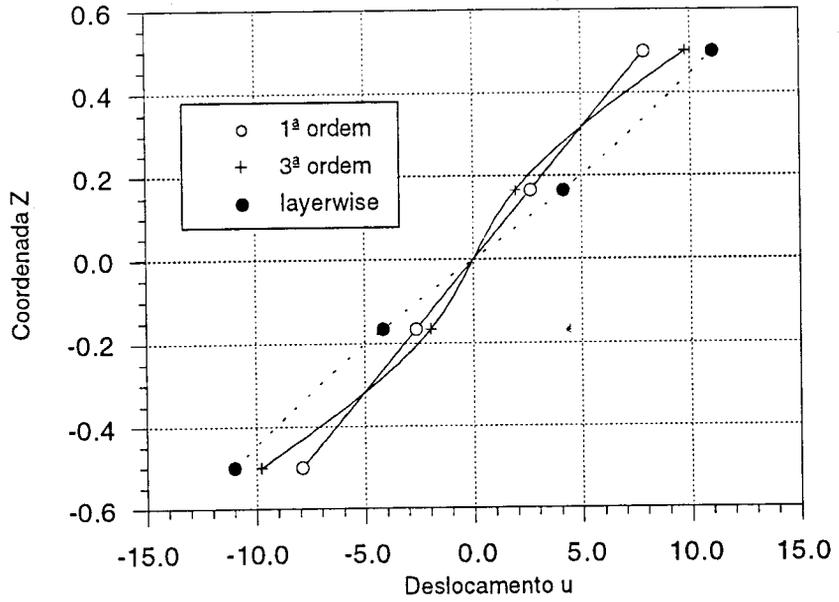


Fig.2.31 - Comparação das teorias para o caso 1, deslocamento u, razão L/h=10

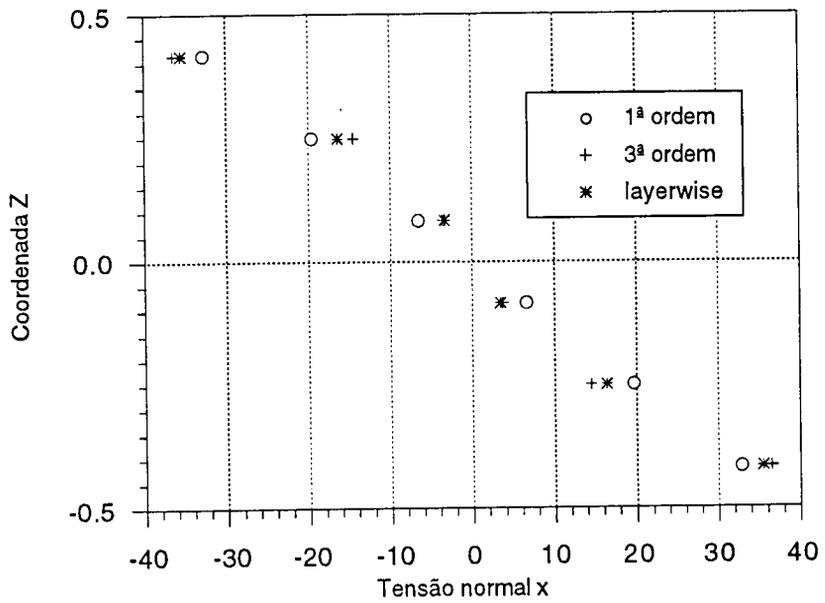


Fig.2.32 - Comparação das teorias para o caso 1, tensão normal x, razão L/h=8

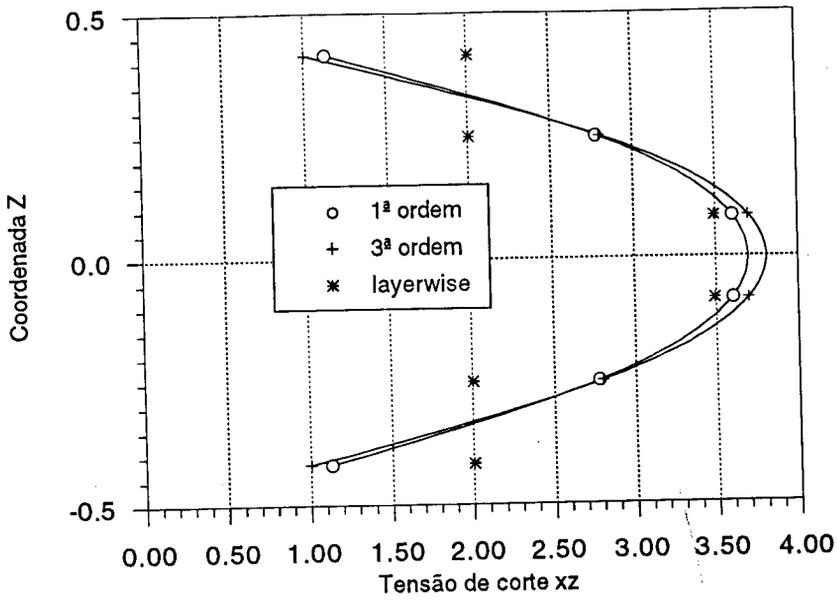


Fig.2.33 - Comparação das teorias para o caso 1, tensão de corte xz, razão L/h=8

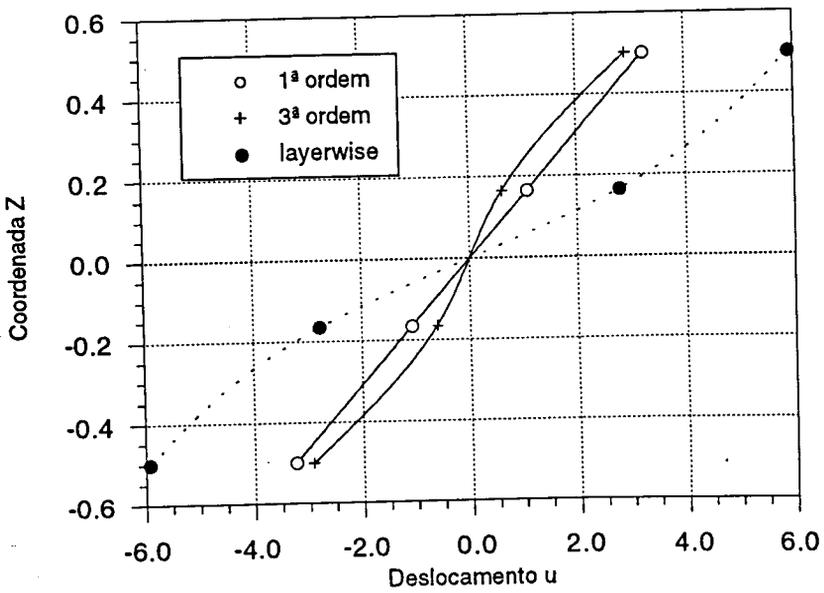


Fig.2.34 - Comparação das teorias para o caso 1, deslocamento u, razão L/h=8

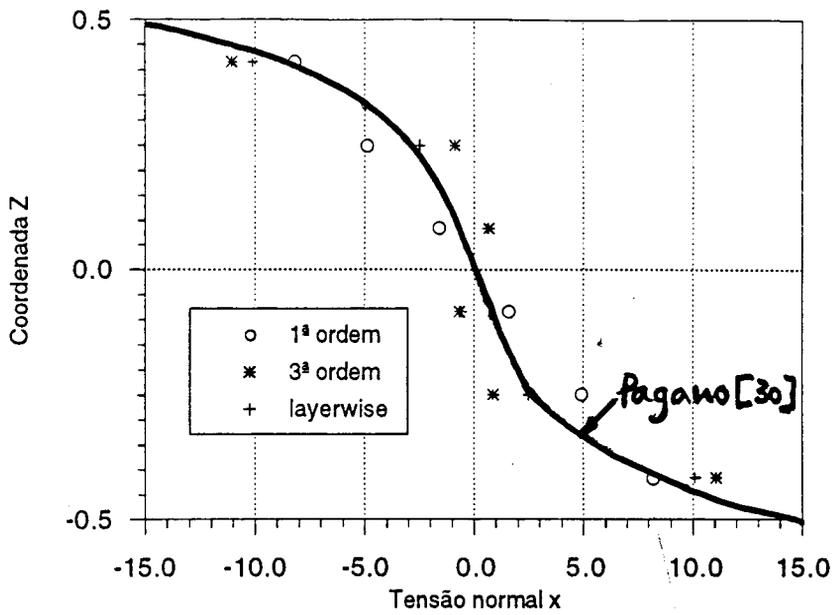


Fig.2.35 - Comparação das teorias para o caso 1, tensão normal x , razão $L/h=4$

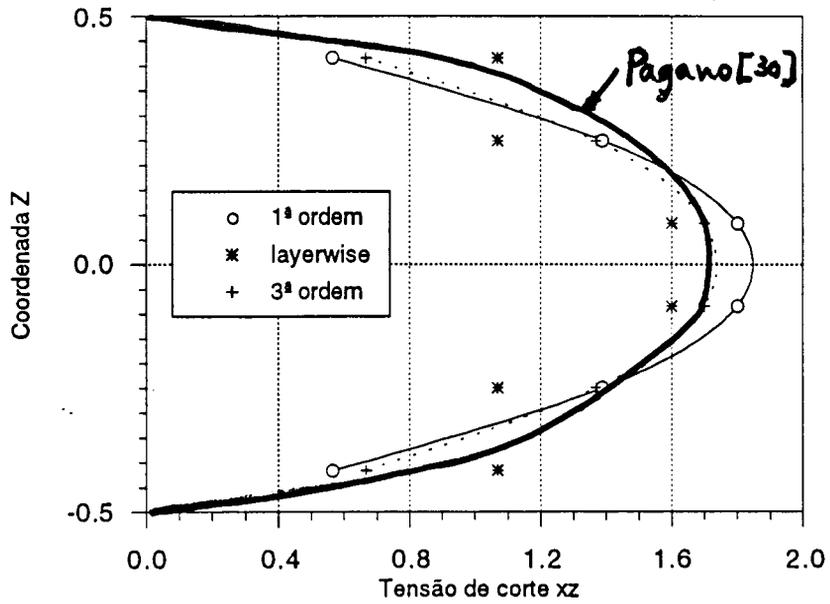


Fig.2.36 - Comparação das teorias para o caso 1, tensão de corte xz , razão $L/h=4$

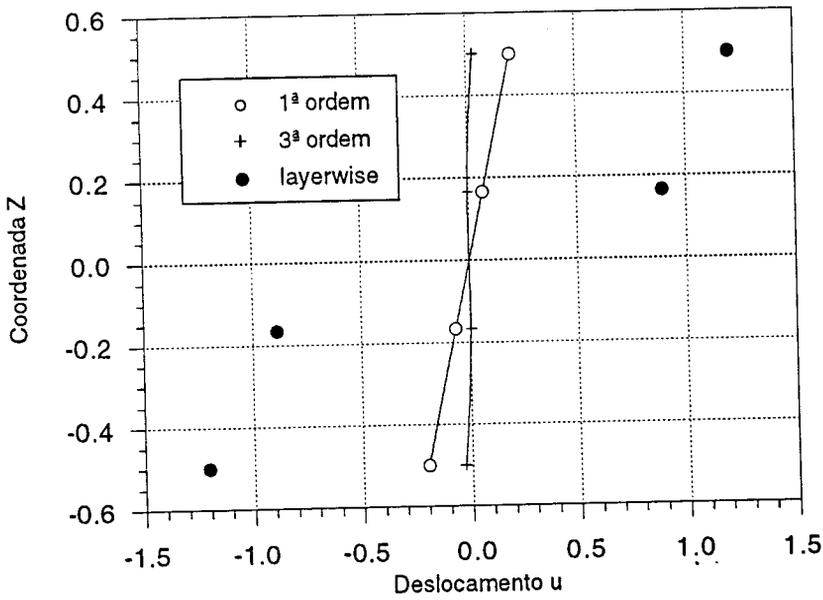


Fig.2.37 - Comparação das teorias para o caso 1, deslocamento u , razão $L/h=4$

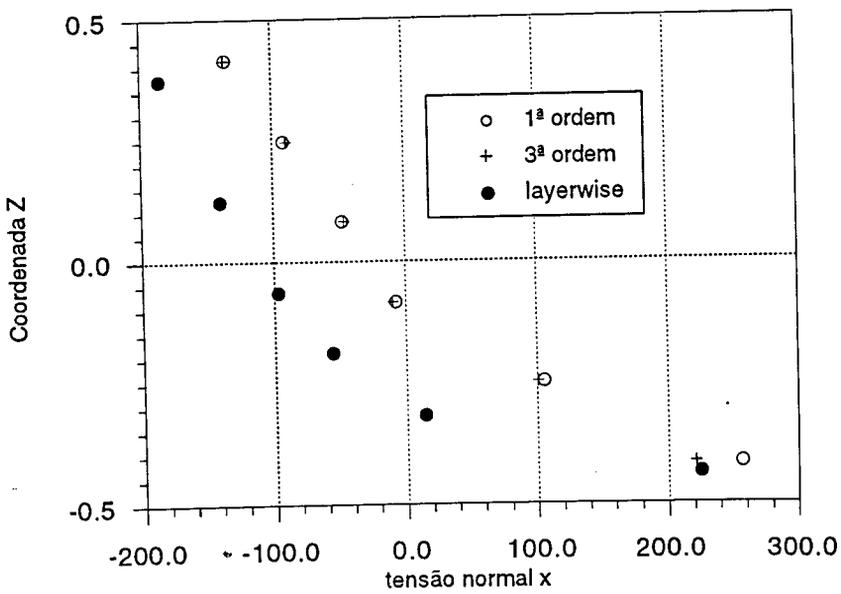


Fig.2.38 - Comparação das teorias para o caso 2, tensão normal x , razão $L/h=20$

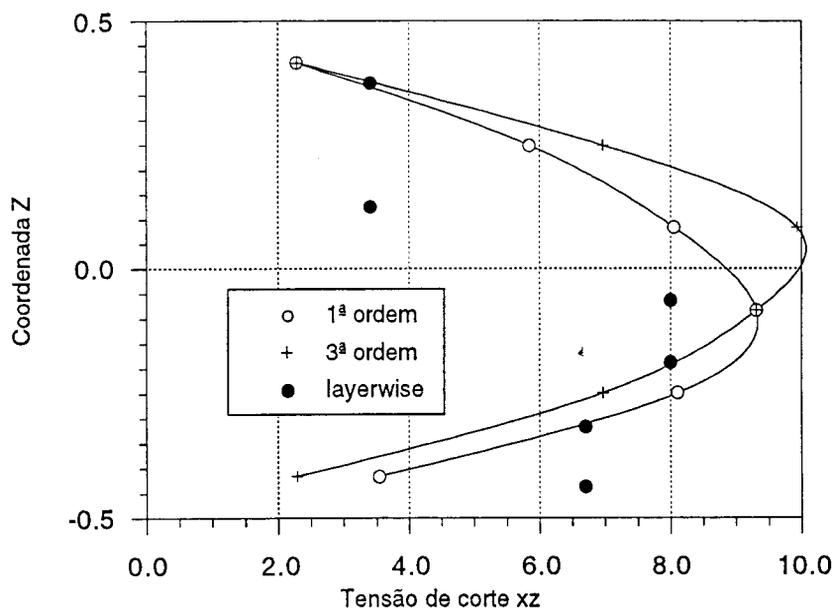


Fig.2.39 - Comparação das teorias para o caso 2, tensão de corte xz, razão L/h=20

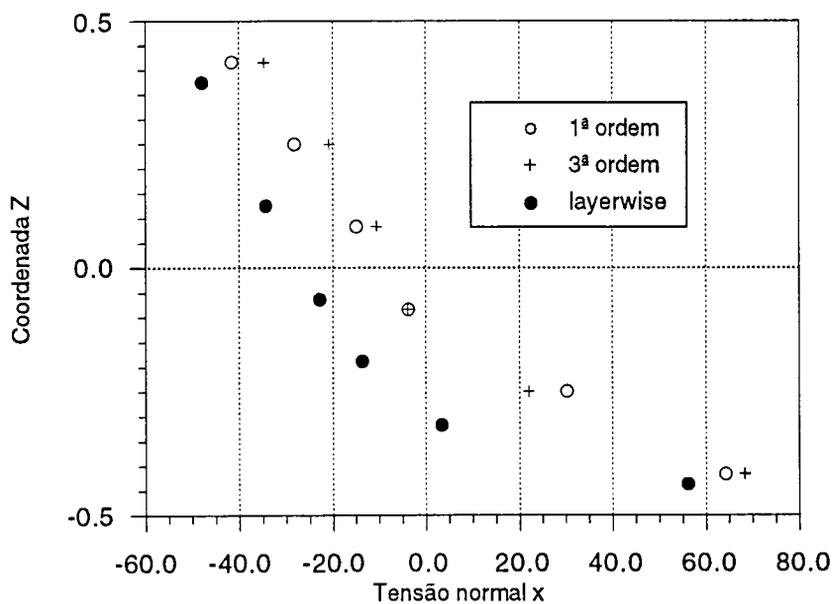


Fig.2.40 - Comparação das teorias para o caso 2, tensão normal x, razão L/h=10

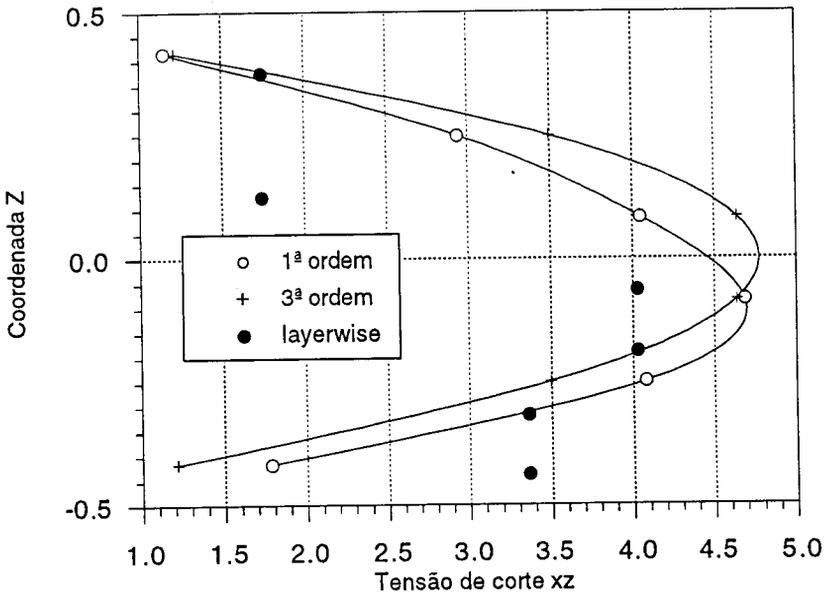


Fig.2.41 - Comparação das teorias para o caso 2, tensão de corte xz , razão $L/h=10$

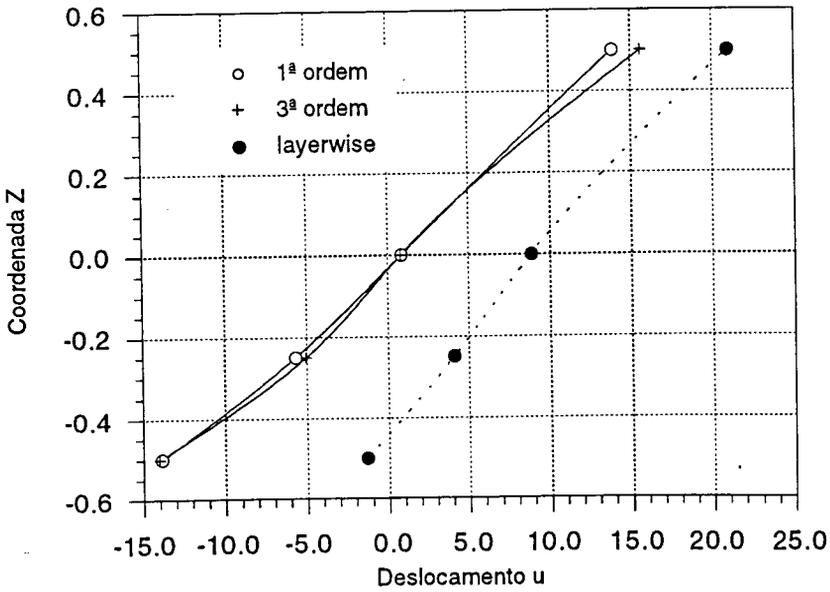


Fig.2.42 - Comparação das teorias para o caso 2, deslocamento u , razão $L/h=10$

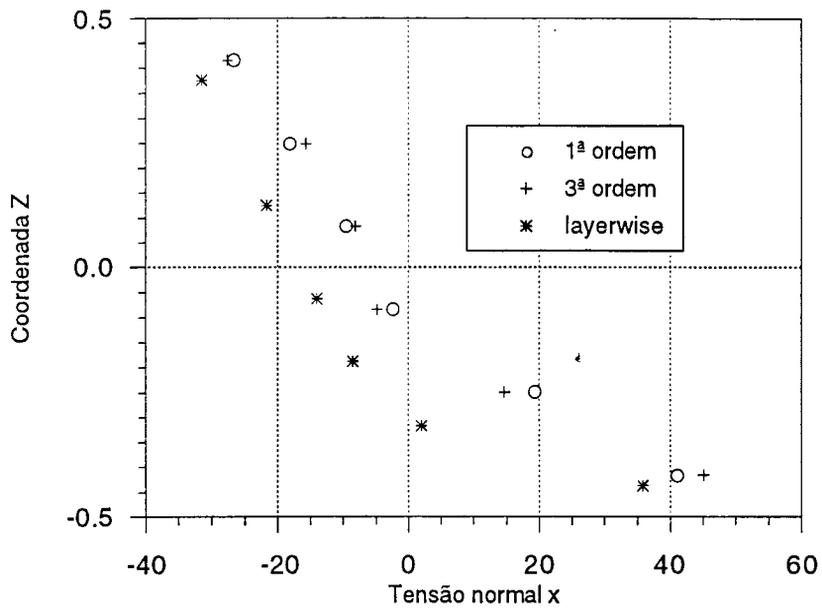


Fig.2.43 - Comparação das teorias para o caso 2, tensão normal x , razão $L/h=8$

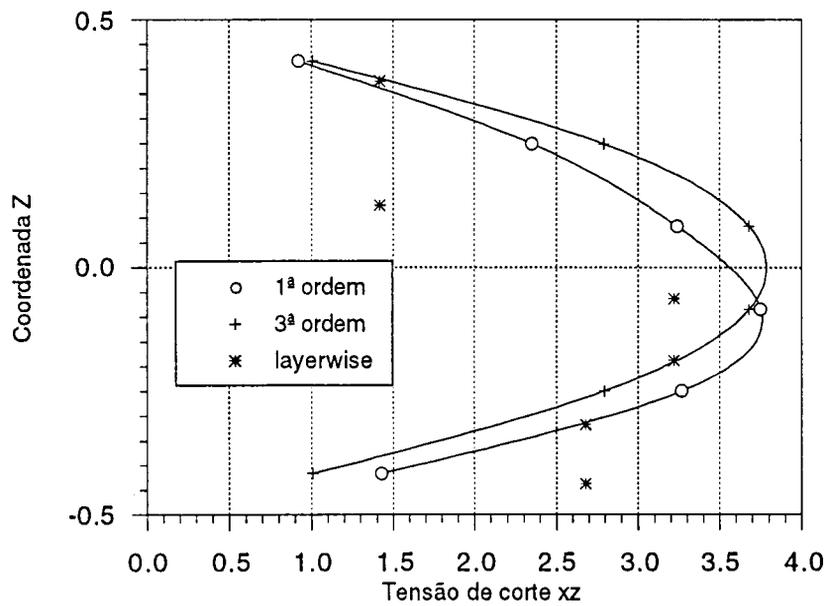


Fig.2.44 - Comparação das teorias para o caso 2, tensão de corte xz , razão $L/h=8$

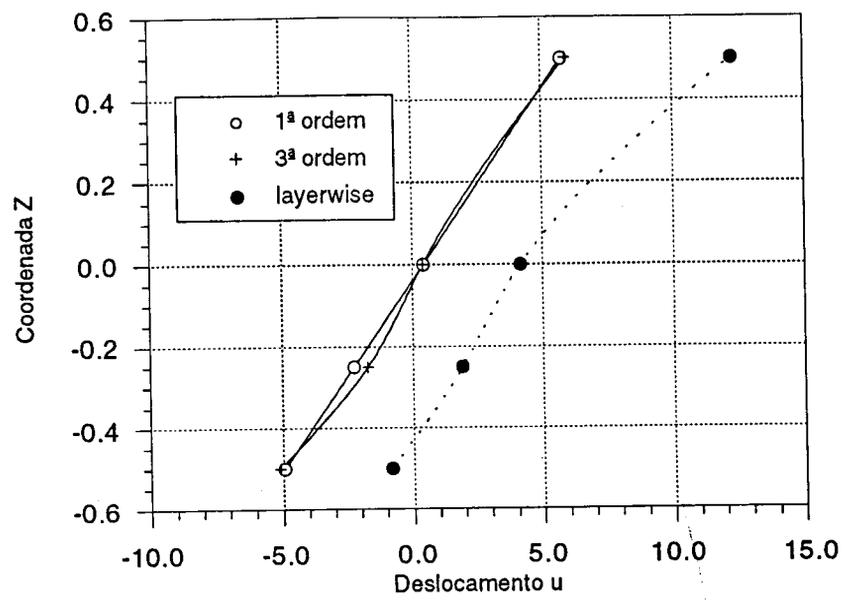


Fig.2.45 - Comparação das teorias para o caso 2, deslocamento u, razão L/h=8

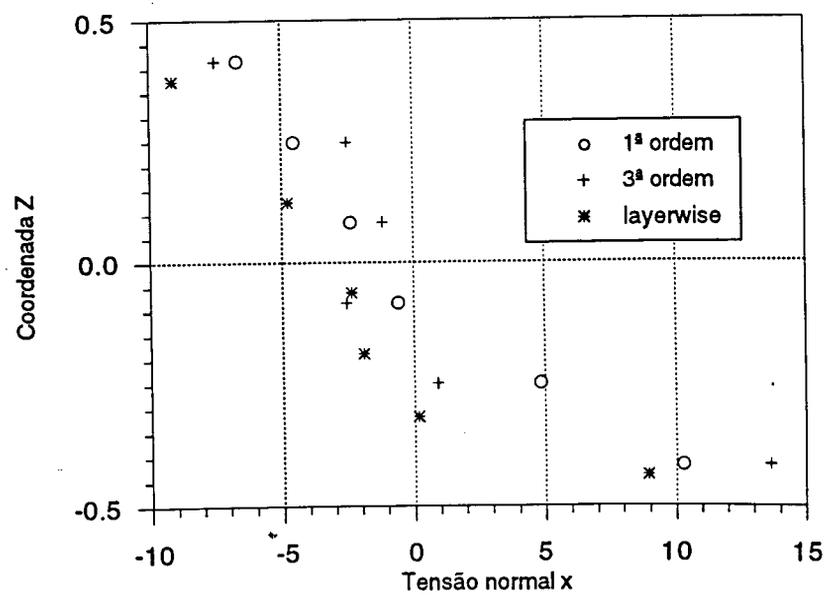


Fig.2.46 - Comparação das teorias para o caso 2, tensão normal x, razão L/h=4

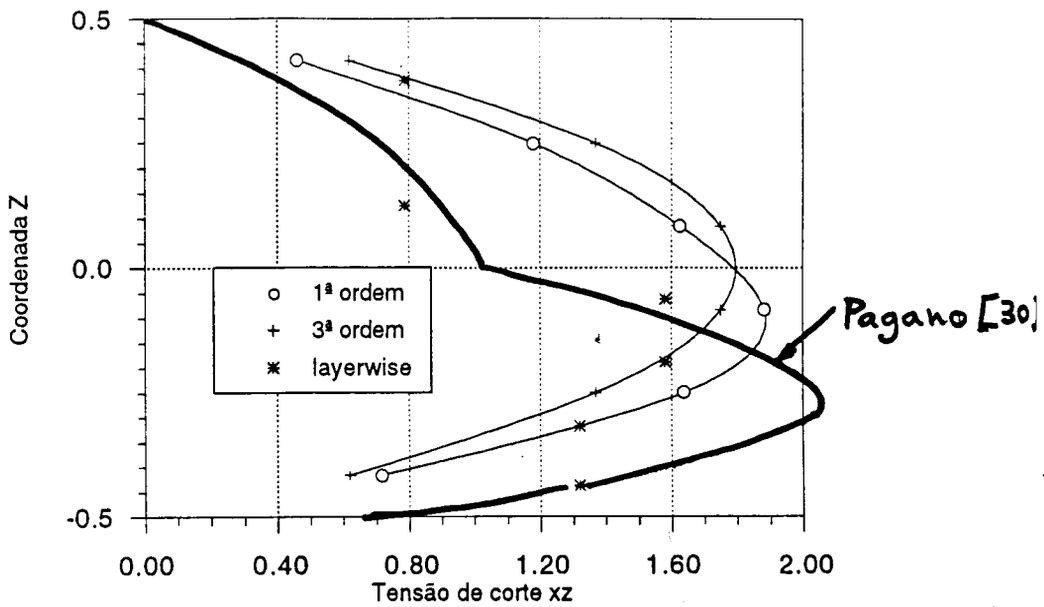


Fig.2.47 - Comparação das teorias para o caso 2, tensão de corte xz , razão $L/h=4$

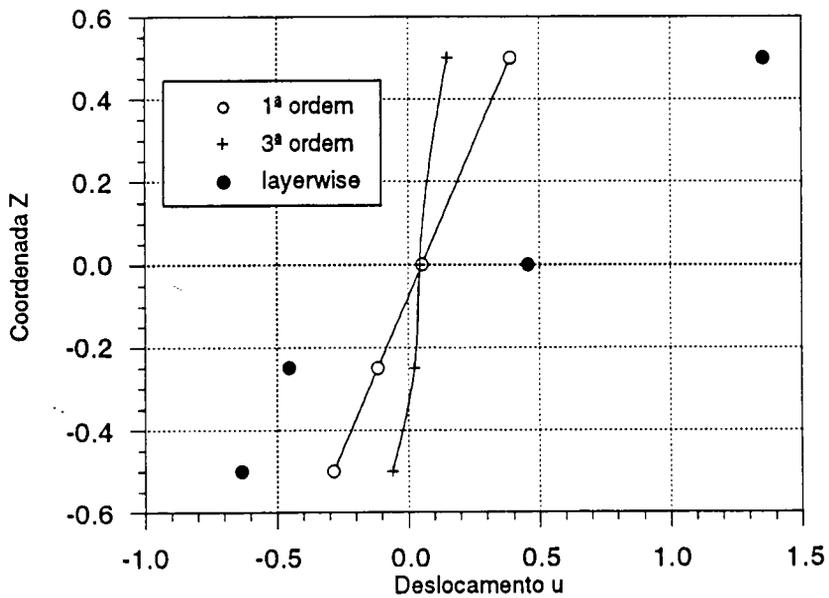


Fig.2.48 - Comparação das teorias para o caso 2, deslocamento u , razão $L/h=4$

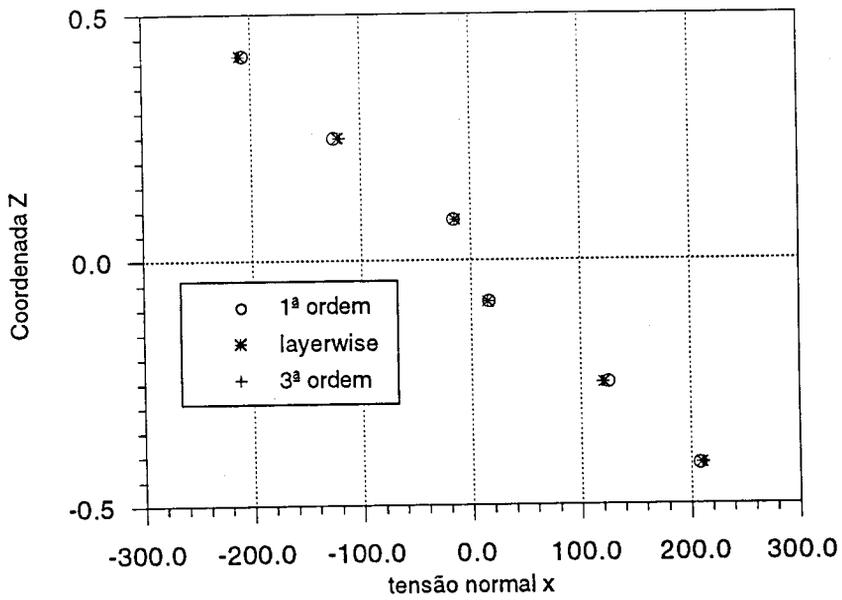


Fig.2.49 - Comparação das teorias para o caso 3, tensão normal x, razão L/h=20

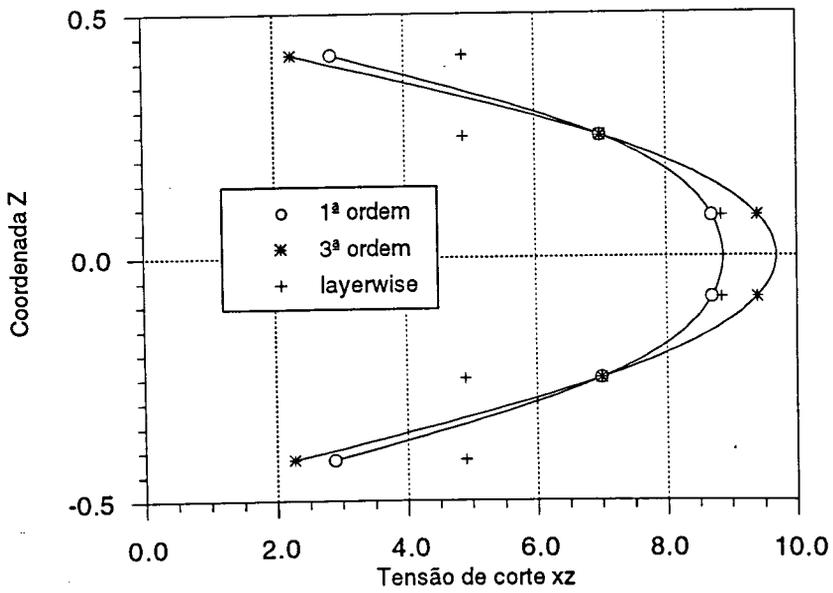


Fig.2.50 - Comparação das teorias para o caso 3, tensão de corte xz, razão L/h=20

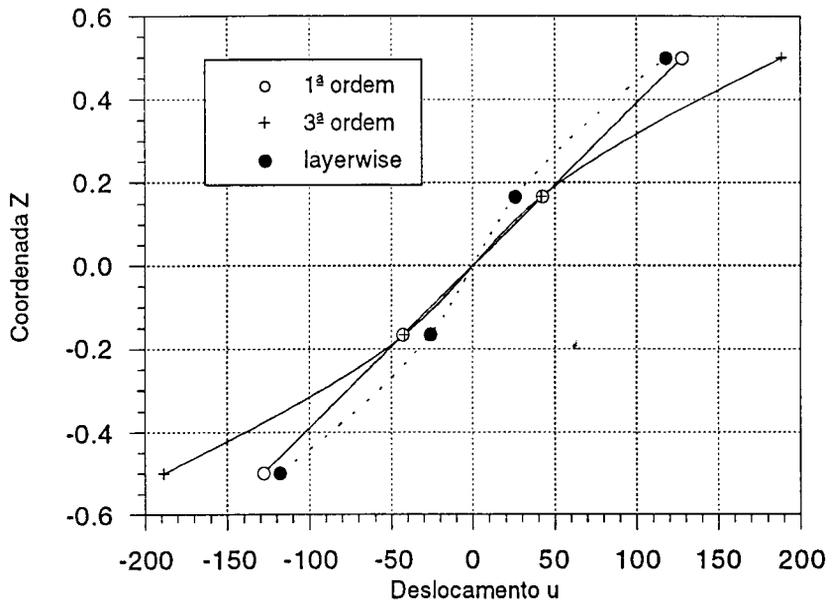


Fig.2.51 - Comparação das teorias para o caso 3, deslocamento u, razão L/h=20

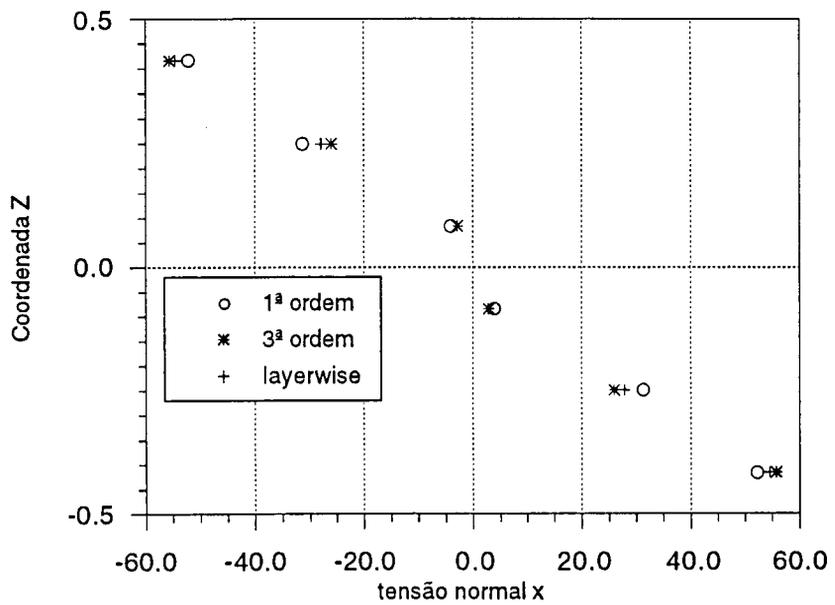


Fig.2.52 - Comparação das teorias para o caso 3, tensão normal x, razão L/h=10

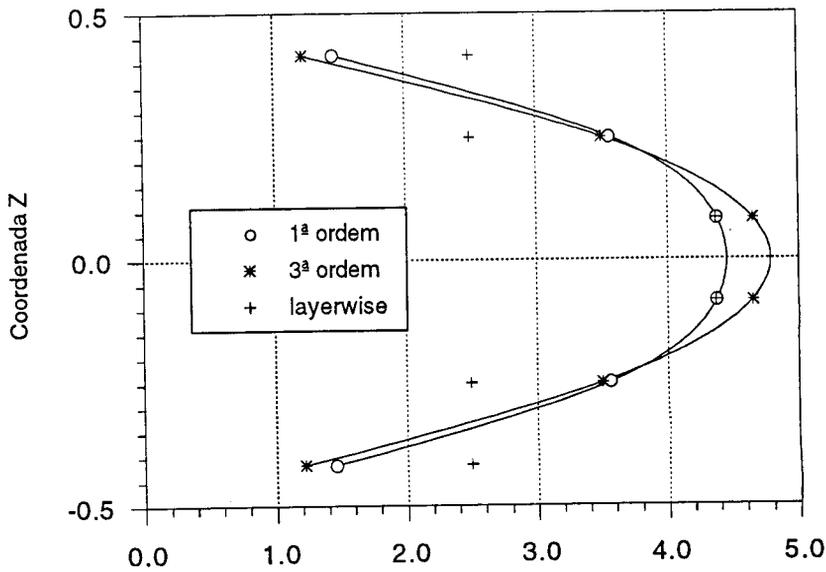


Fig.2.53 - Comparação das teorias para o caso 3, tensão de corte xz , razão $L/h=10$

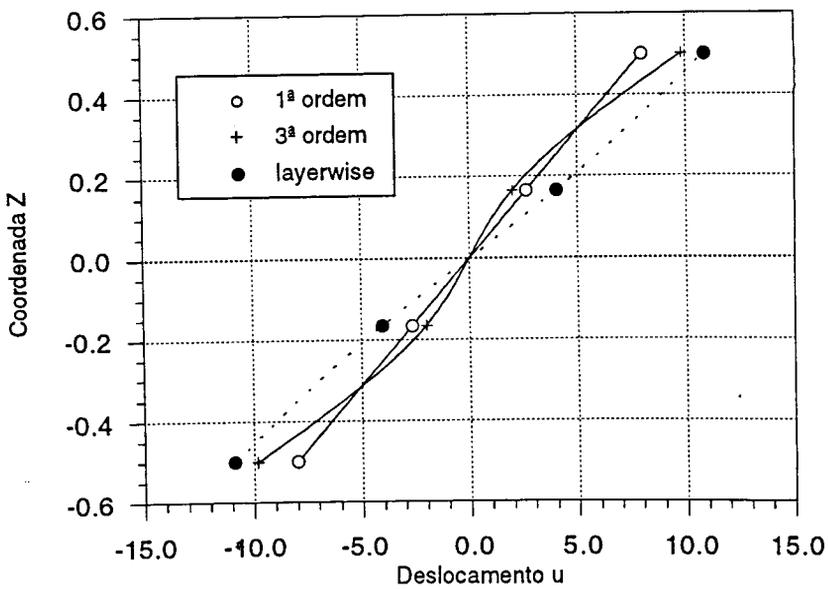


Fig.2.54 - Comparação das teorias para o caso 3, deslocamento u , razão $L/h=10$

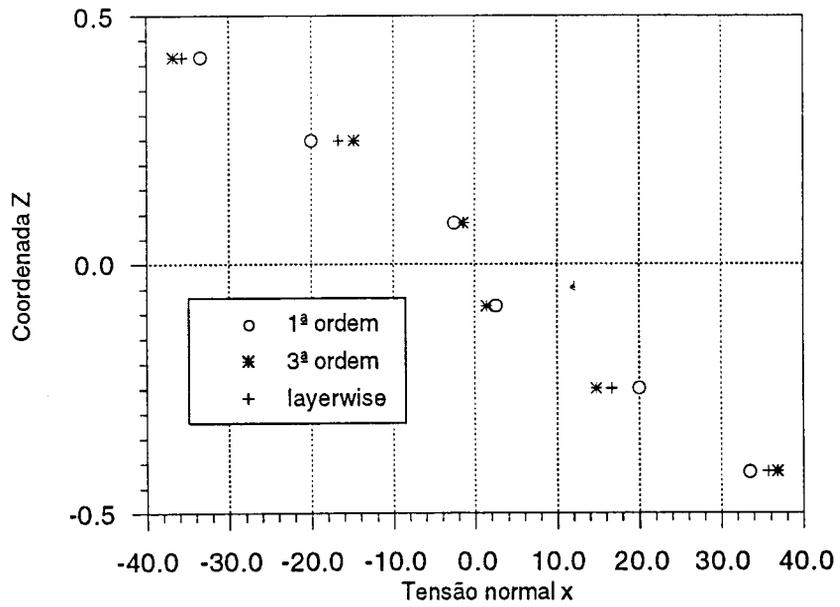


Fig.2.55 - Comparação das teorias para o caso 3, tensão normal, razão $L/h=8$

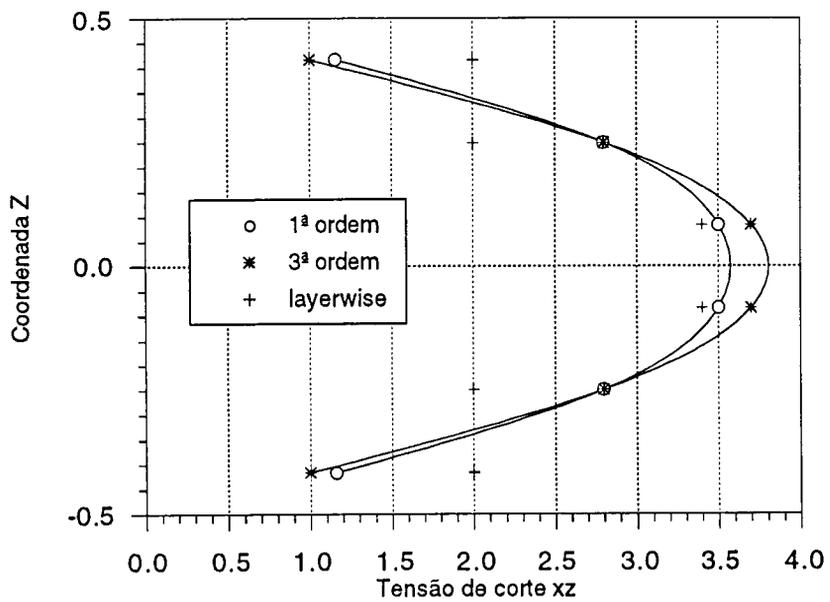


Fig.2.56 - Comparação das teorias para o caso 3, tensão de corte xz, razão $L/h=8$

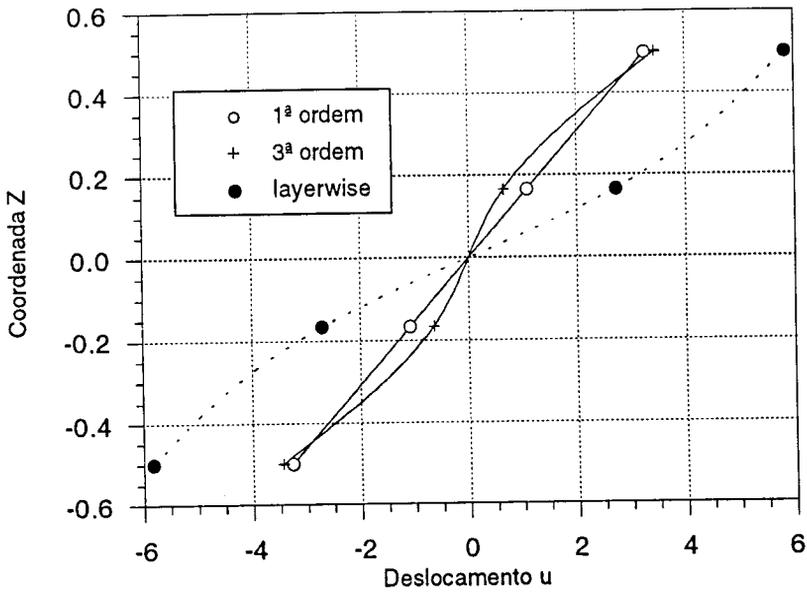


Fig.2.57 - Comparação das teorias para o caso 3, deslocamento u , razão $L/h=8$

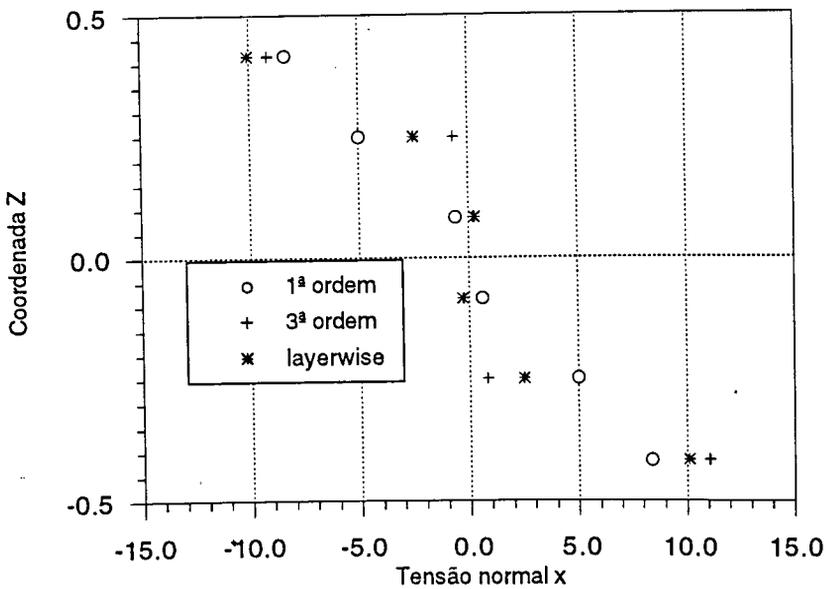


Fig.2.58 - Comparação das teorias para o caso 3, tensão normal x , razão $L/h=4$

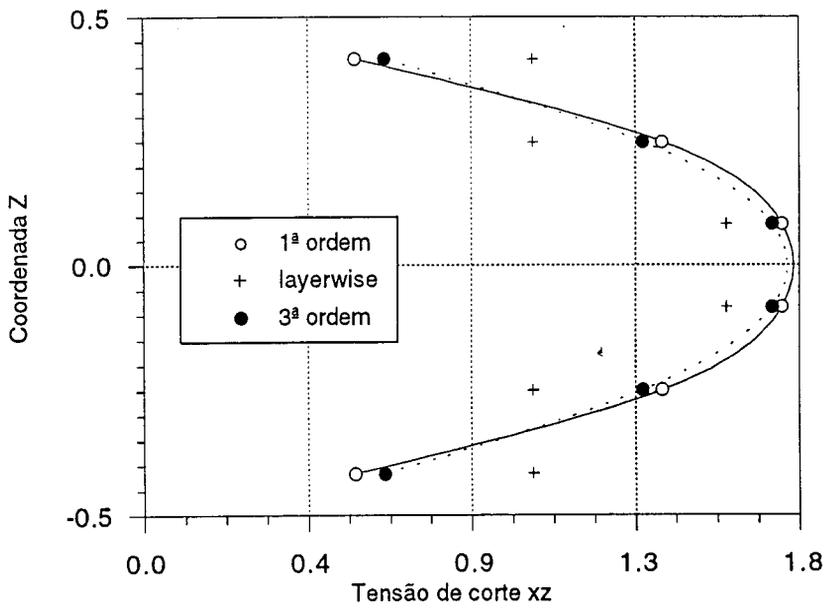


Fig.2.59 - Comparação das teorias para o caso 3, tensão de corte xz, razão L/h=4

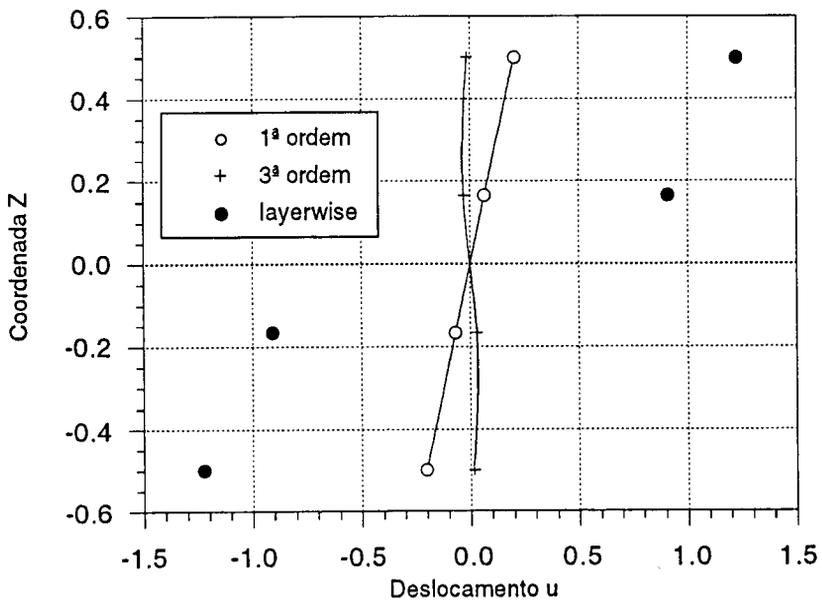


Fig.2.60 - Comparação das teorias para o caso 3, deslocamento u, razão L/h=4

A teoria layerwise é a que se aproxima mais dos resultados de Pagano [30], quer em termos de tensões normais, quer em termos de tensões de corte, particularmente com raios L/h menores. Há que registar, no entanto, que todas as teorias apresentam valores próximos, o que se pode explicar pelo tipo de laminado em estudo, com pouca diferença de módulos e pela espessura de cada camada. A teoria layerwise é aquela que apresenta uma evolução mais real do empenamento da normal.

2.5.3 - Placa quadrada encastrada em flexão

Uma placa quadrada encastrada (fig.2.61) homogénea ou laminada é sujeita a pressão uniforme. Pretende-se avaliar a resposta linear elástica da estrutura quando se utilizam as teorias de deformação mencionadas, em vários tipos de laminados:

- a) laminado homogéneo, $E=30000$, $\nu=0.3$
- b) laminado sandwich simétrico, $E_{pele}=30000$, $\nu=0.3$, $E_{núcleo}=E_{pele}/10$,
Espessura da pele= $0.1xh$, espessura do núcleo= $0.8xh$
- c) igual a b) mas $E_{núcleo}=E_{pele}/100$
- d) igual a b) mas $E_{núcleo}=E_{pele}/1000$
- e) b) laminado sandwich não simétrico, $E_{pele}=30000$, $\nu=0.3$, $E_{núcleo}=E_{pele}/100$,
Espessura da pele superior= $0.1xh$, espessura do núcleo= $0.6xh$, Espessura da pele inferior= $0.3xh$

São testadas várias espessuras: $h=1.0, 0.5, 0.25, 0.15$, correspondentes a razões comprimento/espessura de 6, 12, 24 e 40. Nas figuras 2.62 a 2.121, apresentam-se a variação de $\sigma_x(0,0)$, $\tau_{xz}(0,0)$, $u(0,0)$ com as teorias de deformação e função dos laminados a) a e).

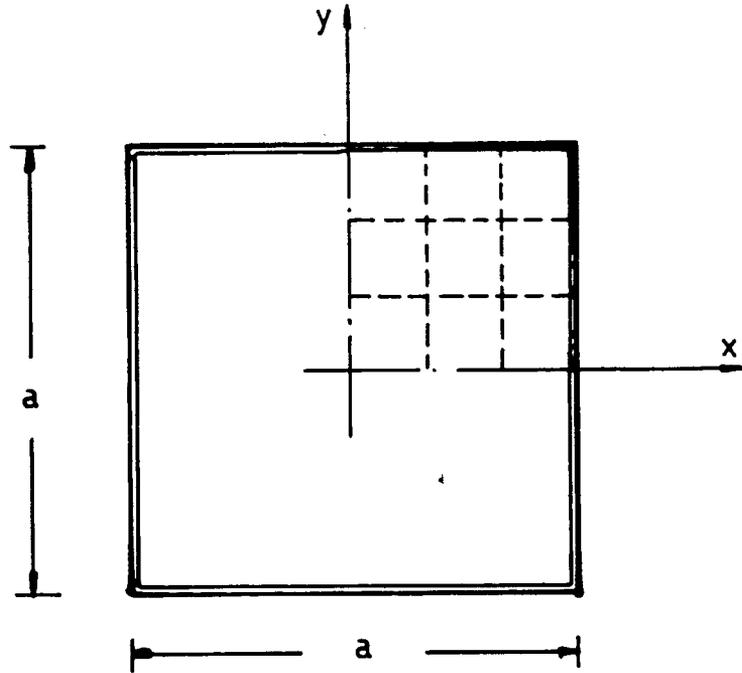


Figura 2.61 - Placa quadrada encastrada - geometria, apoios e carregamentos

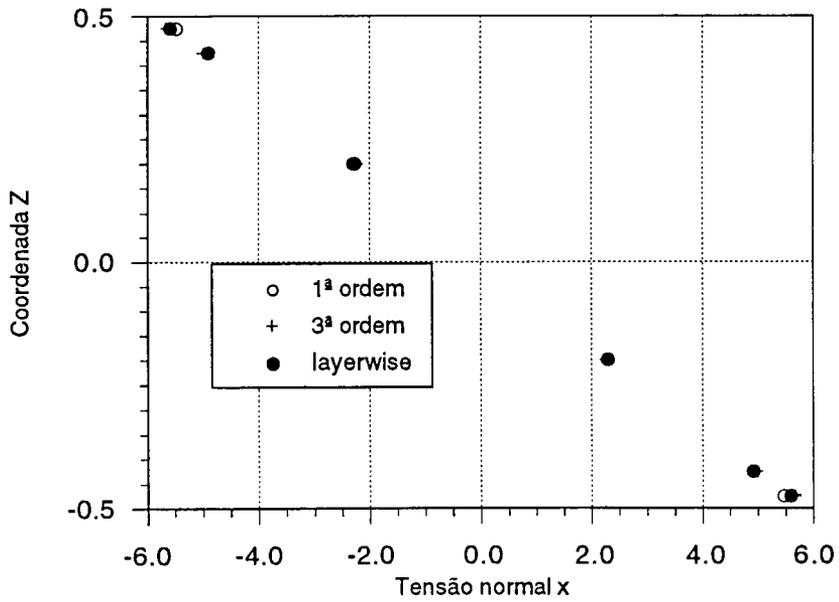


Figura 2.62 - Rácio Epele/Enúcleo=1, $h=1$, tensão x

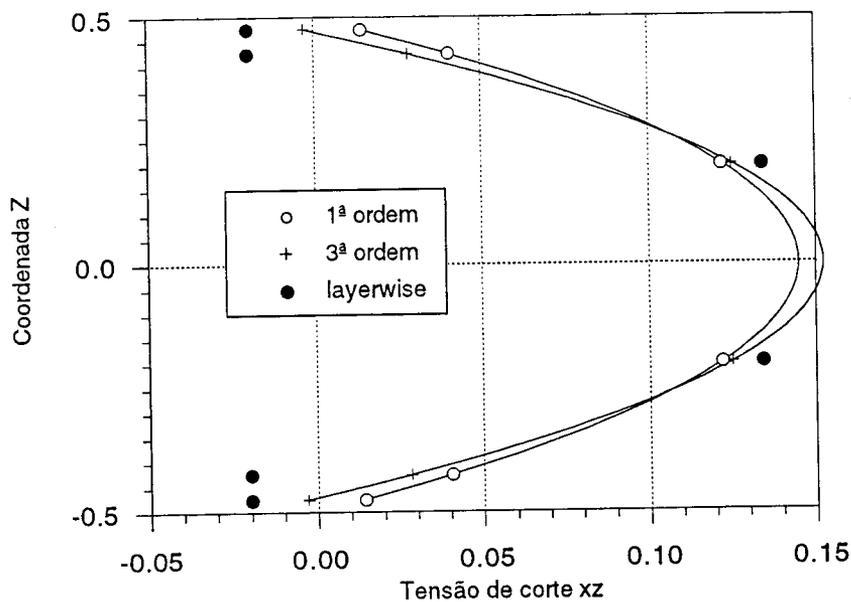


Figura 2.63 - Epele/Enúcleo=1, h=1, xz

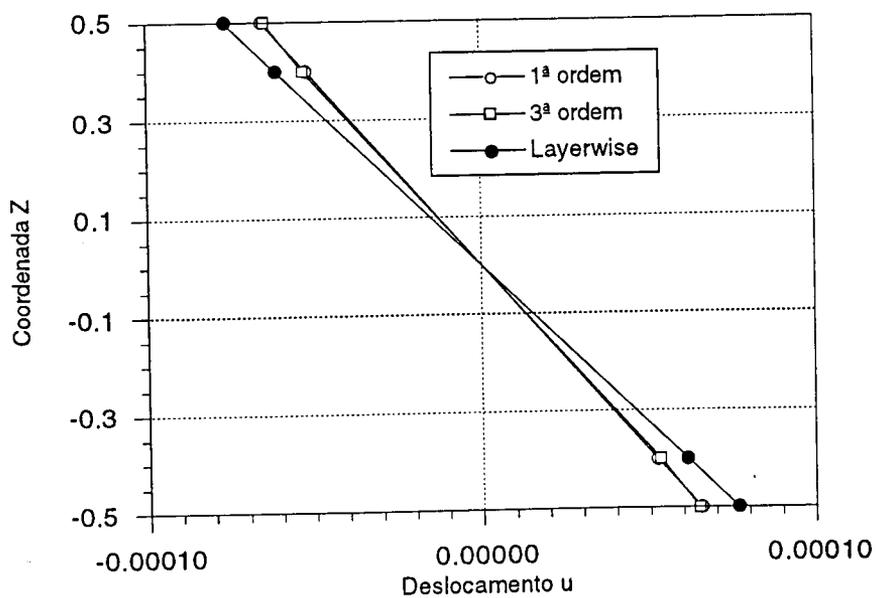


Figura 2.64 - Epele/Enúcleo=1, h=1, u

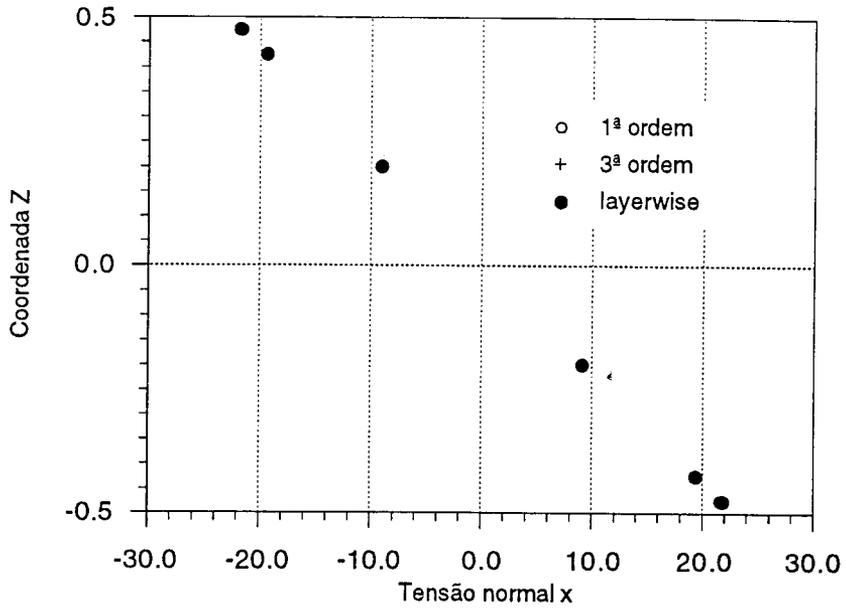


Figura 2.65 - Epele/Enúcleo=1, $h=0.5$, tensão normal x

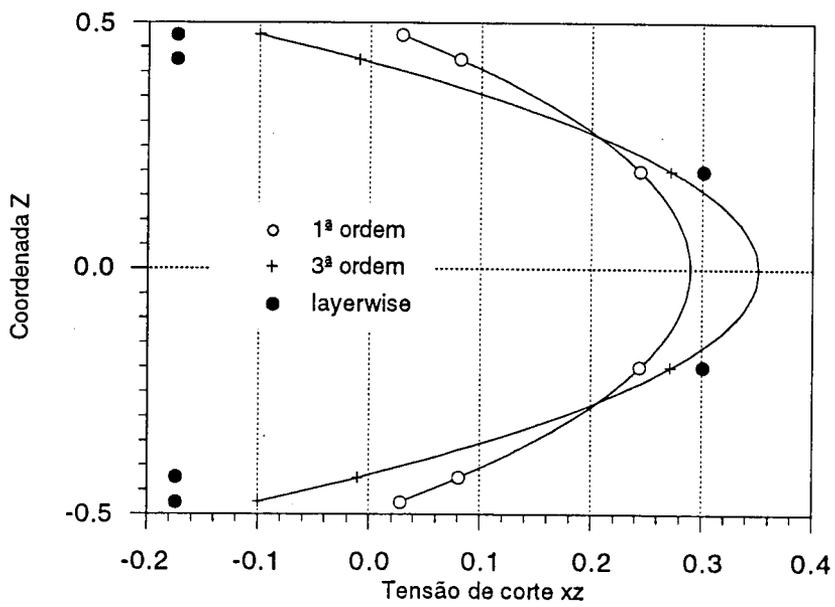


Figura 2.66 - Epele/Enúcleo=1, $h=0.5$, tensão de corte xz

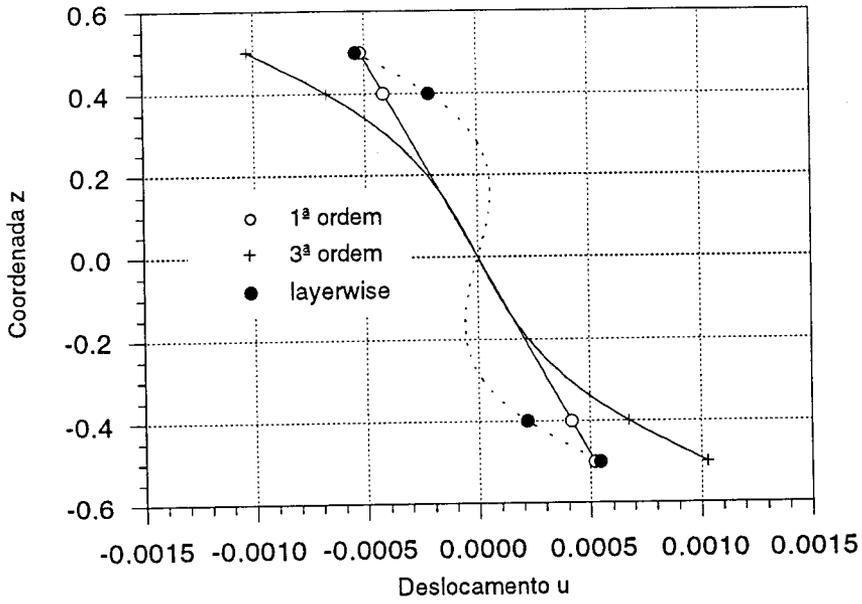


Figura 2.67 - Epele/Enúcleo=1, $h=0.5$, deslocamento u

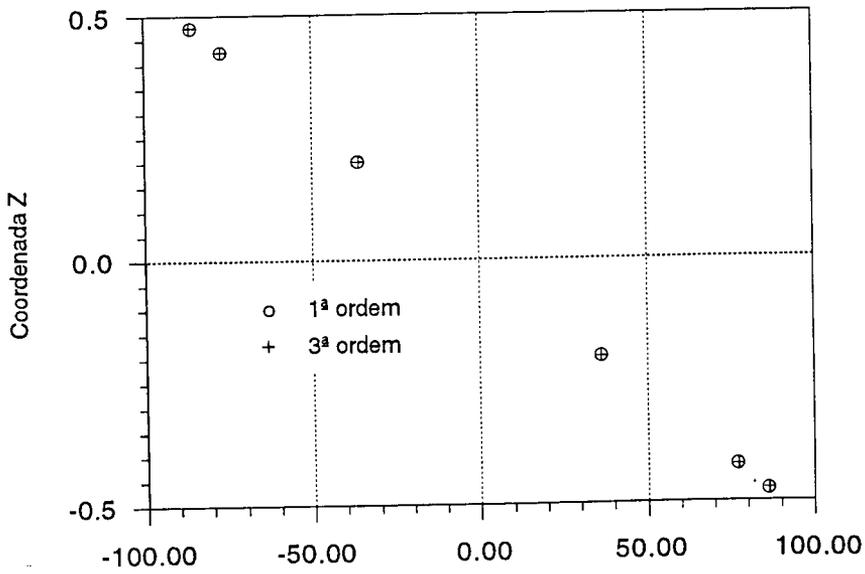


Figura 2.68 - Epele/Enúcleo=1, $h=0.25$, tensão normal x

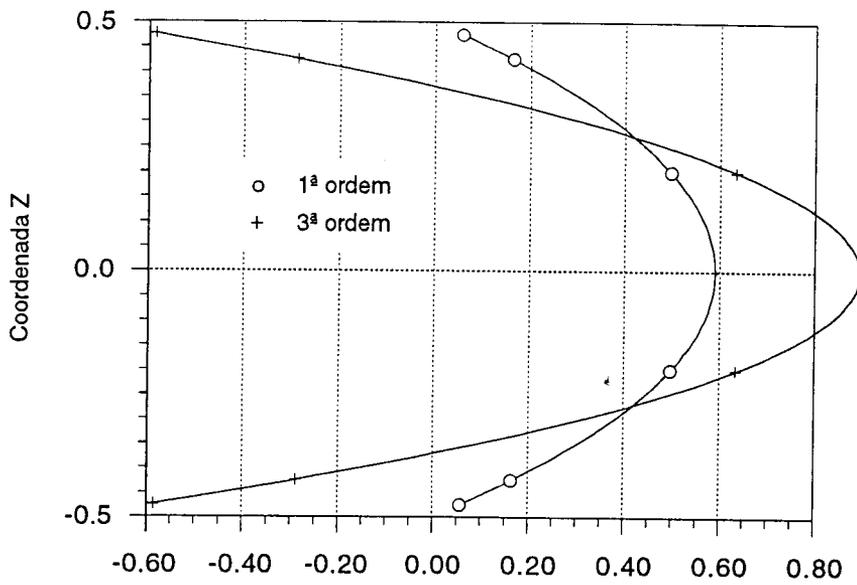


Figura 2.69 - $E_{pele}/E_{núcleo}=1$, $h=0.25$, tensão de corte xz

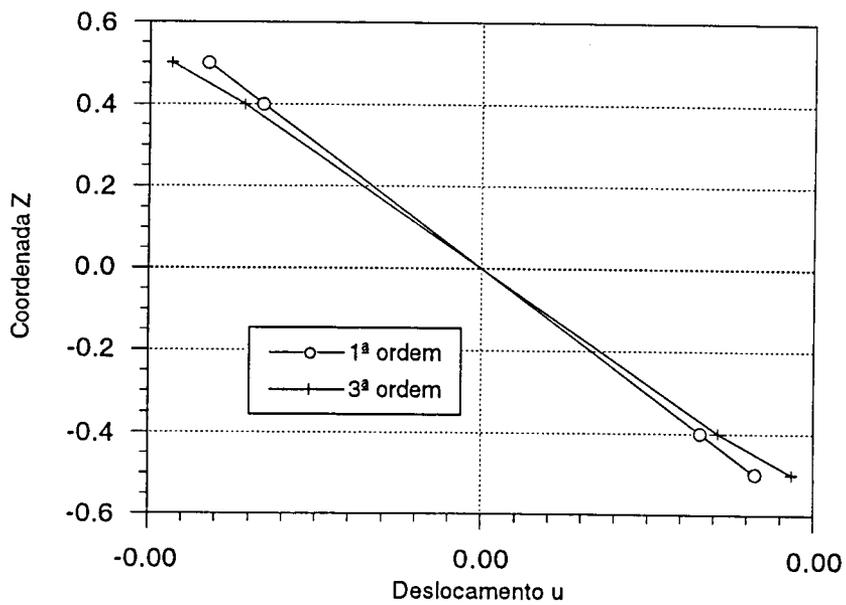


Figura 2.70 - $E_{pele}/E_{núcleo}=1$, $h=0.25$, deslocamento u

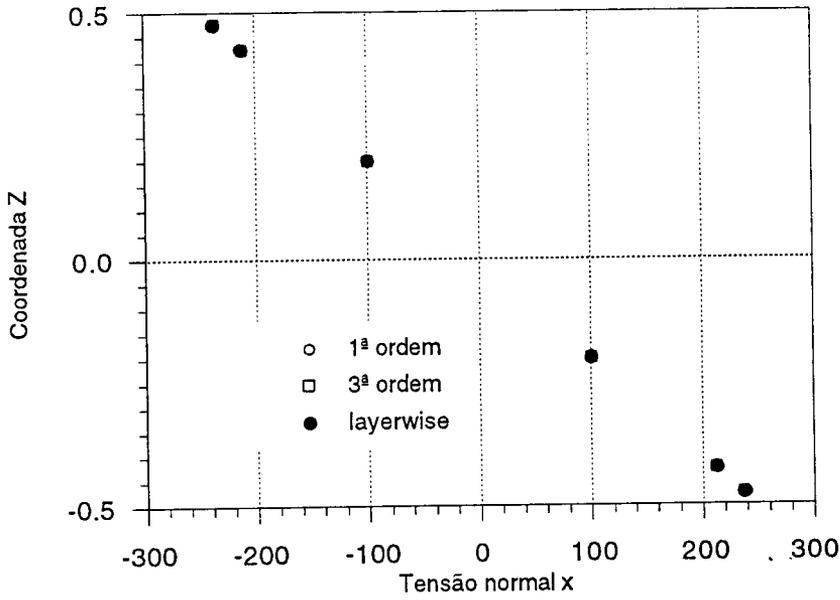


Figura 2.71 - Epele/Enúcleo=1, h=0.15, tensão normal x

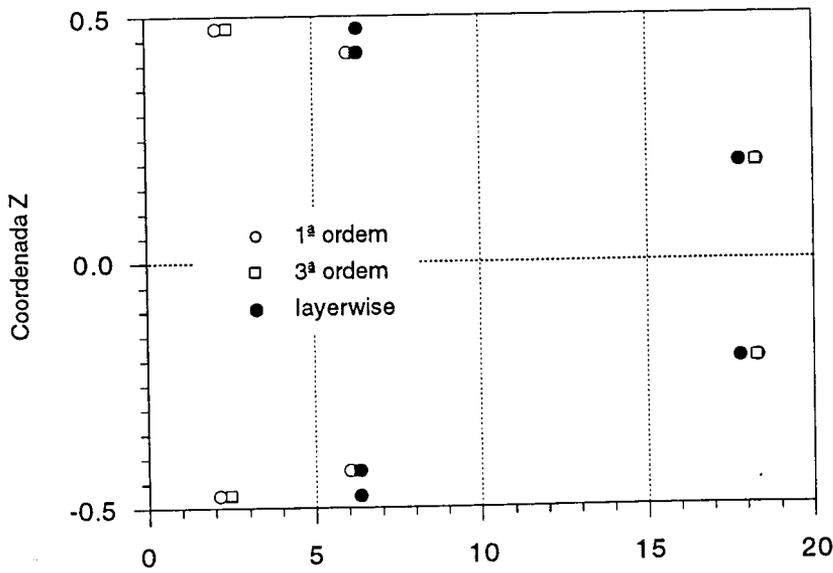


Figura 2.72 - Epele/Enúcleo=1, h=0.15, tensão de corte xz

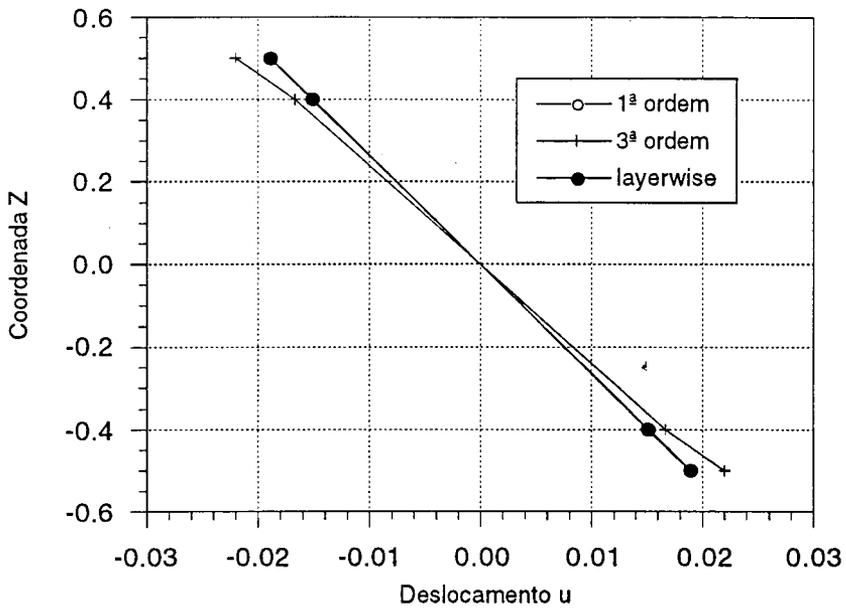


Figura 2.73 - Epele/Enúcleo=1, h=0.15, deslocamento u

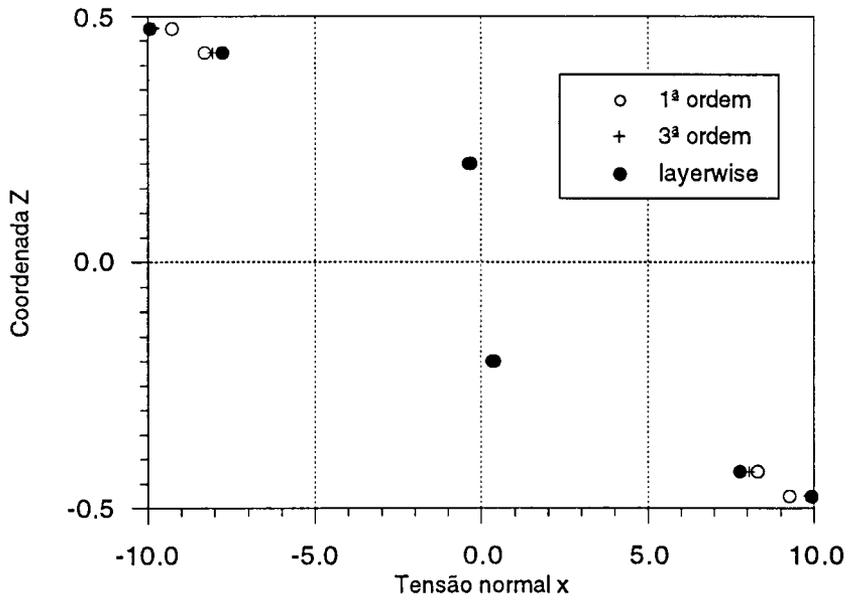


Figura 2.74 - Epele/Enúcleo=10, h=1, tensão normal x

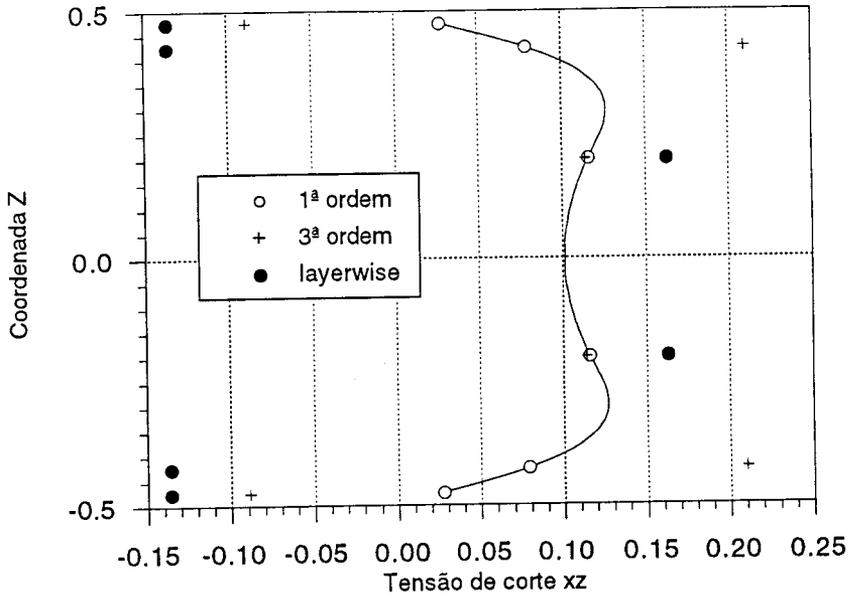


Figura 2.75 - Epele/Enúcleo=10, h=1, xz

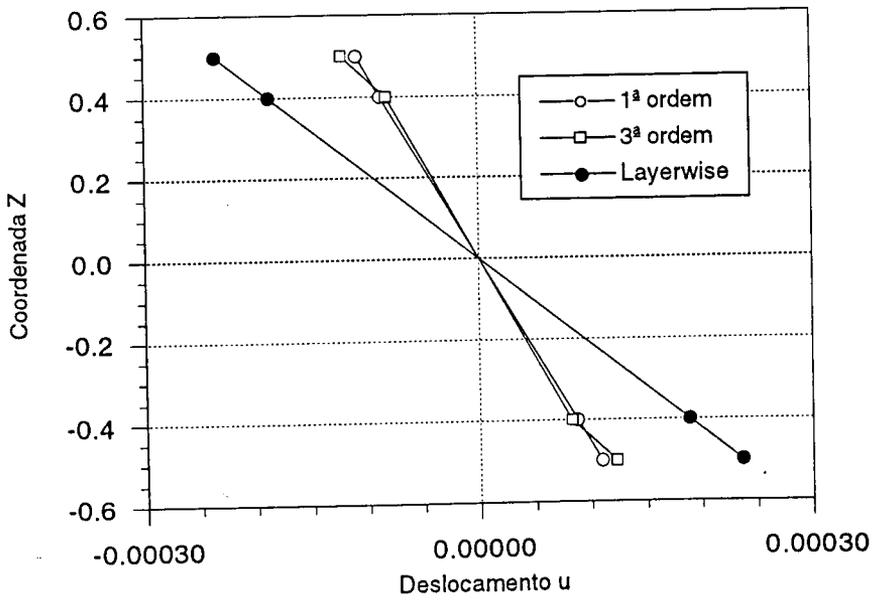


Figura 2.76 - Epele/Enúcleo=10, h=1, deslocamento u

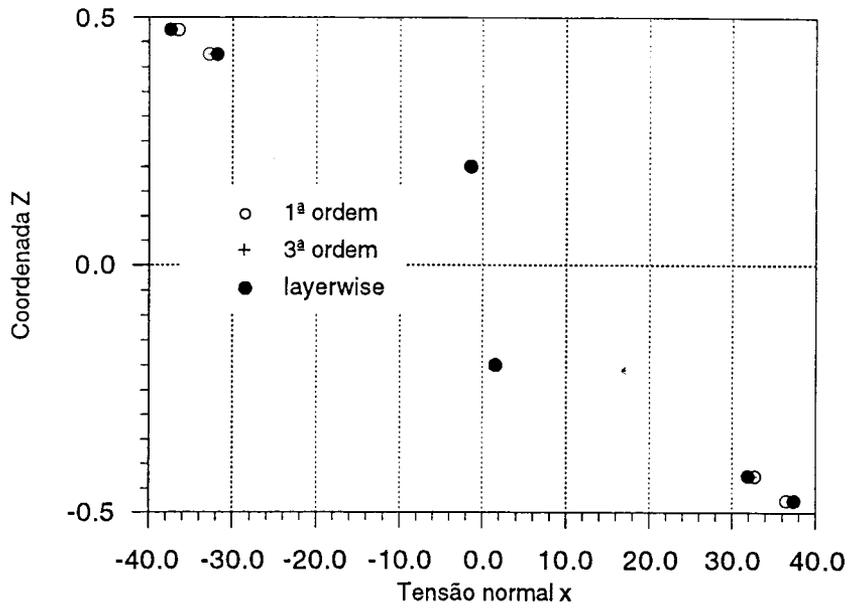


Figura 2.77 - Epele/Enúcleo=10, h=0.5, tensão normal x

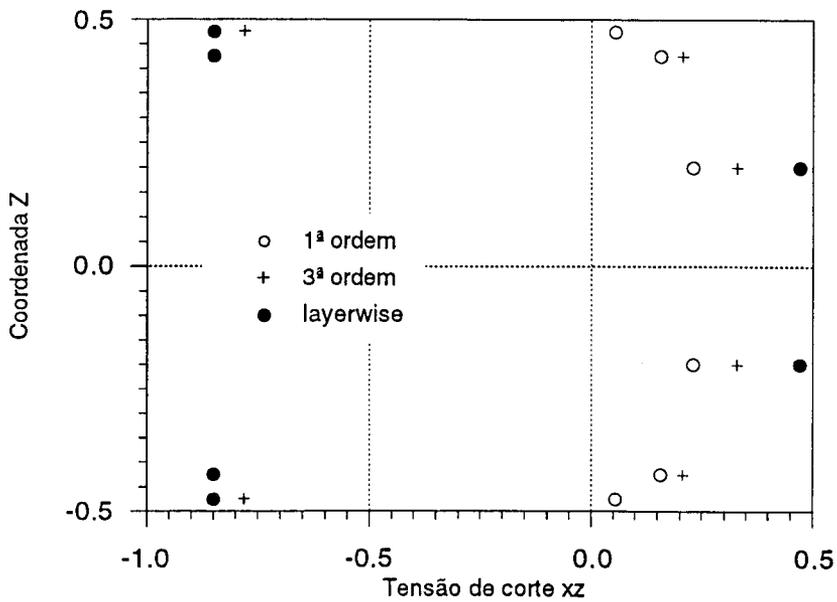


Figura 2.78 - Epele/Enúcleo=10, h=0.5, tensão de corte xz

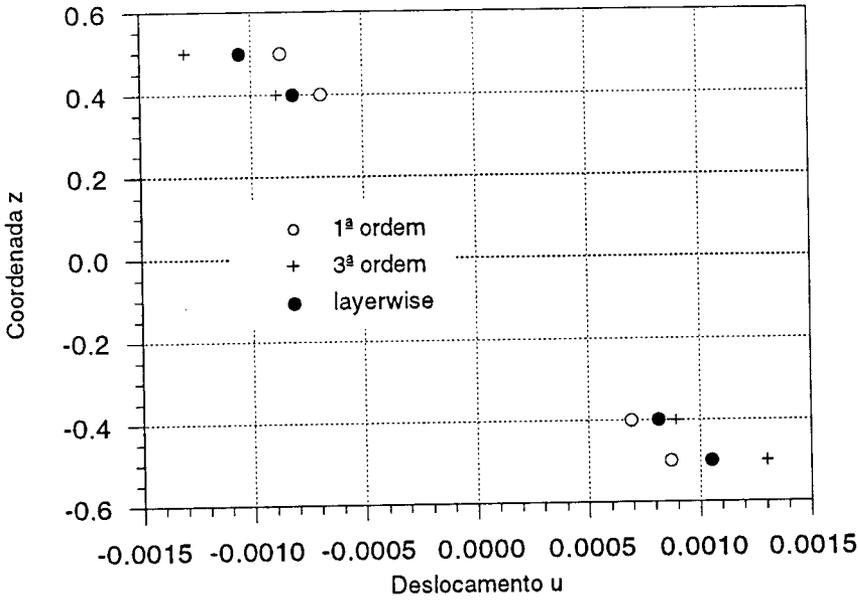


Figura 2.79 - Epele/Enúcleo=10, h=0.5, deslocamento u

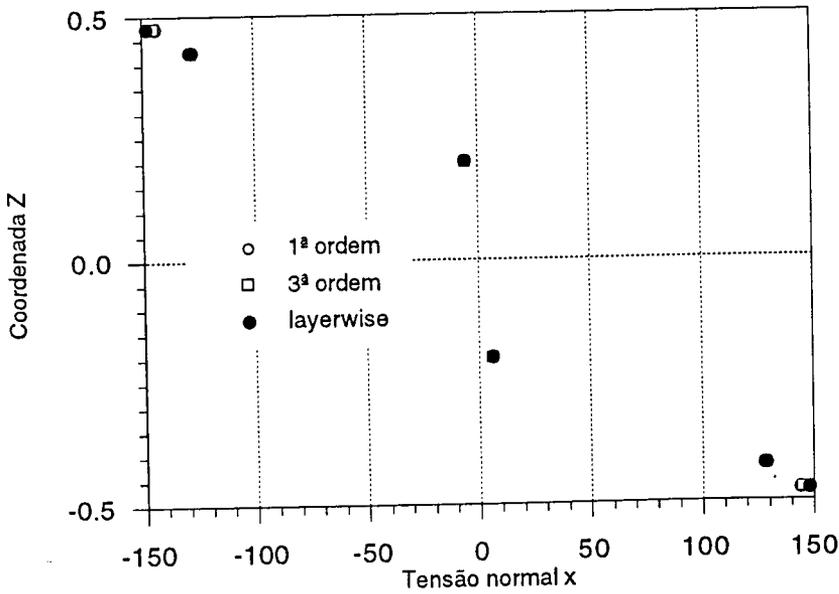


Figura 2.80 - Epele/Enúcleo=10, h=0.25, tensão normal x

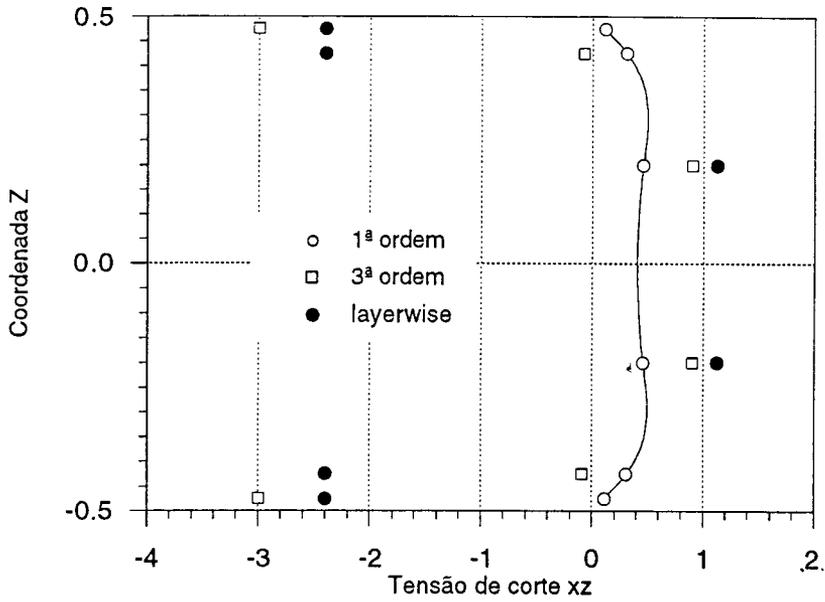


Figura 2.81 - Epele/Enúcleo=10, h=0.25, tensão de corte xz

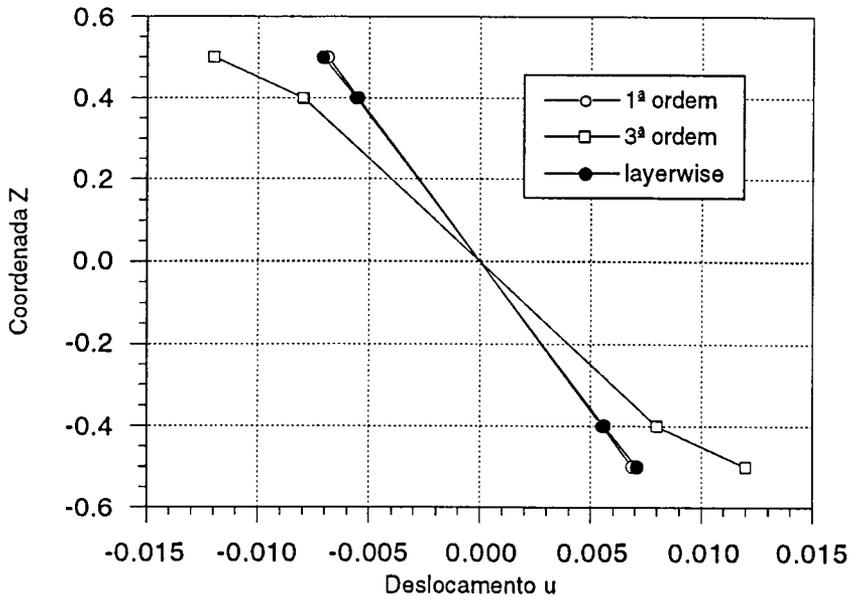


Figura 2.82 - Epele/Enúcleo=10, h=0.25, deslocamento u

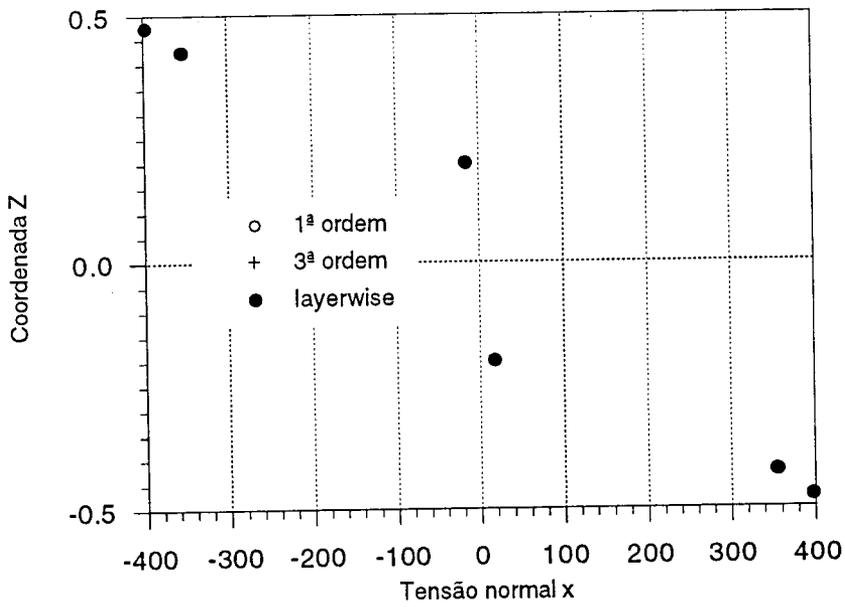


Figura 2.83 - Epele/Enúcleo=10, h=0.15, tensão normal x

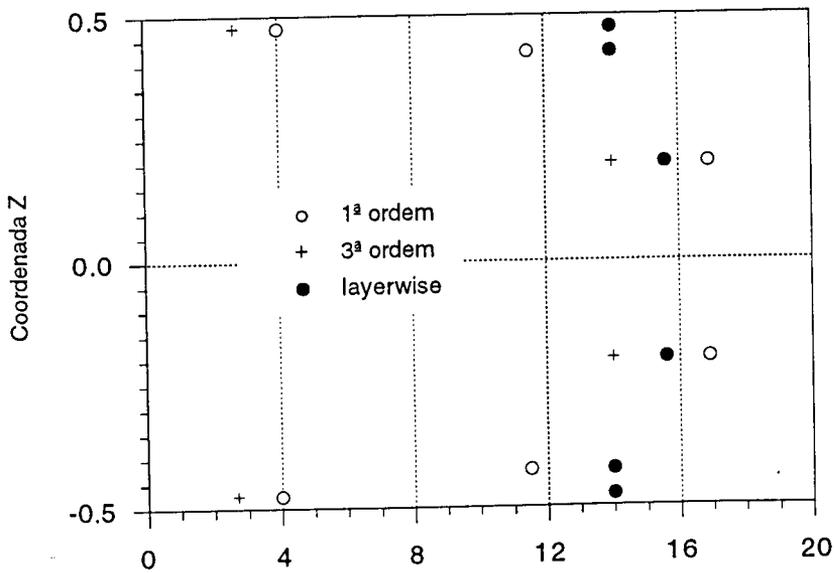


Figura 2.84 - Epele/Enúcleo=10, h=0.15, tensão de corte xz

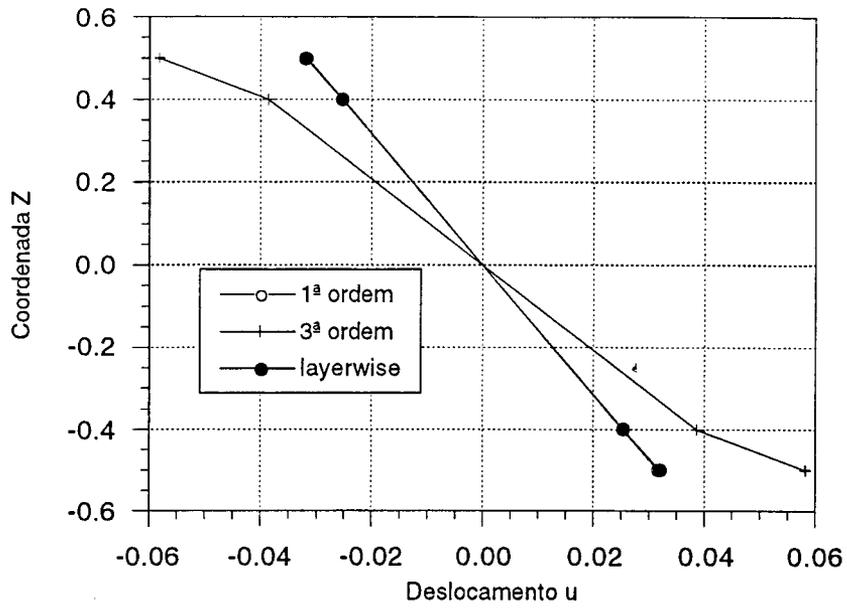


Figura 2.85 - Epele/Enúcleo=10, h=0.15, deslocamento u

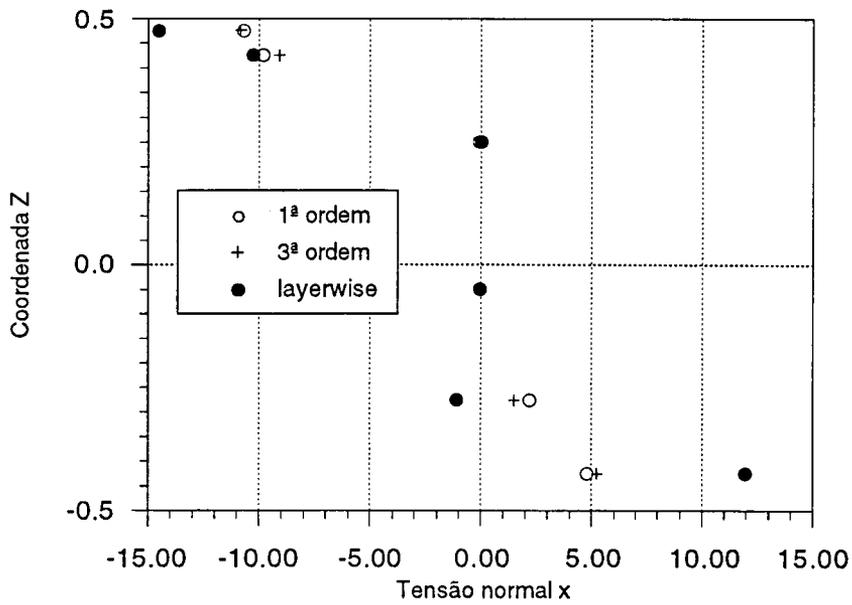


Figura 2.86 - Epele/Enúcleo=100, h=1, tensão normal x

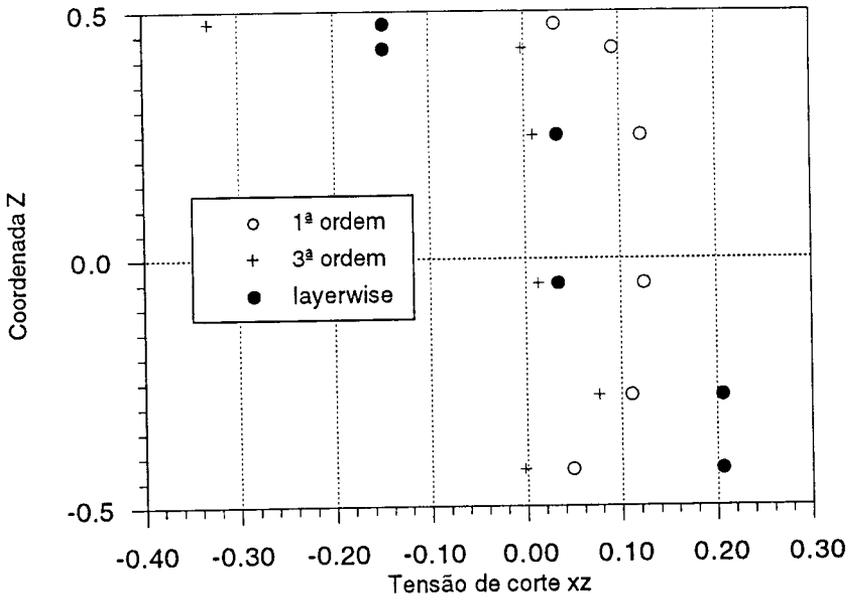


Figura 2.87 - Epele/Enúcleo=100, h=1, tensão de corte xz

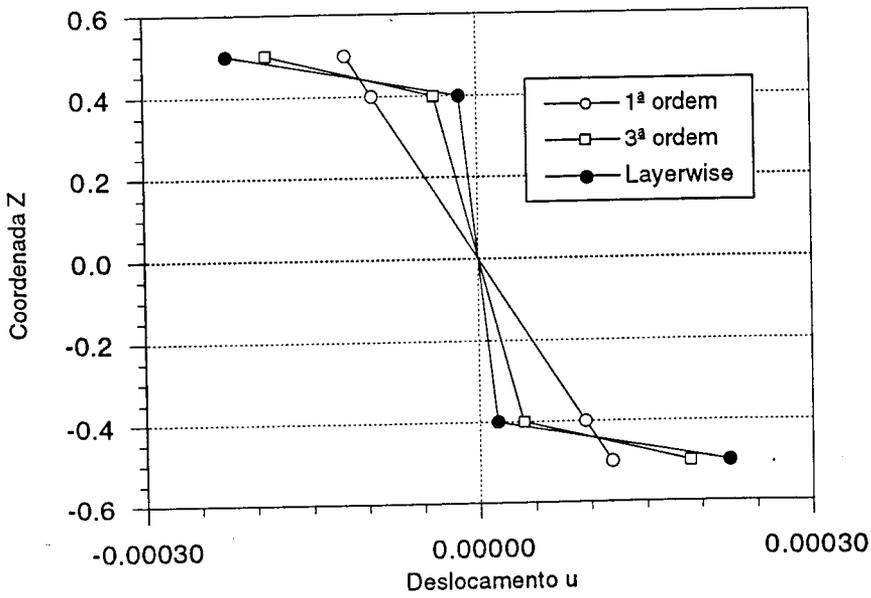


Figura 2.88 - Epele/Enúcleo=100, h=1, deslocamento u

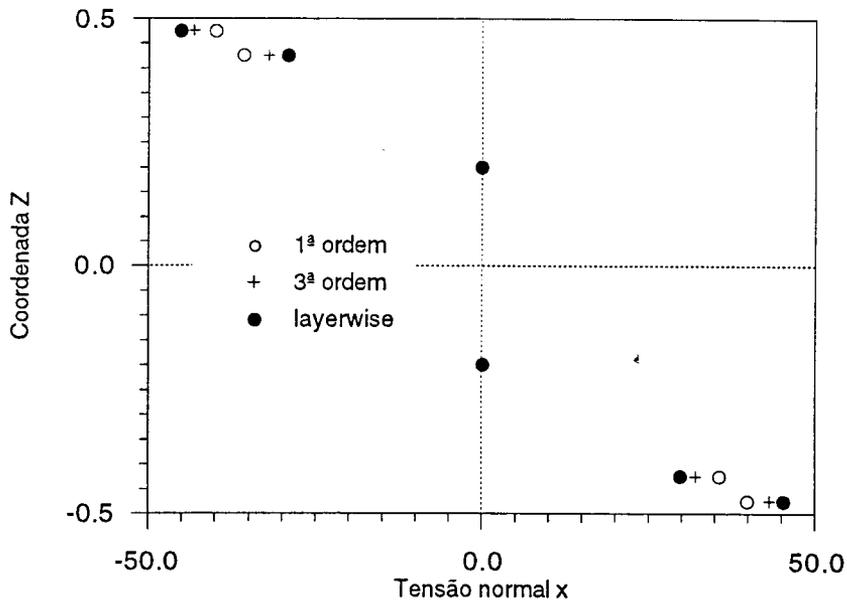


Figura 2.89 - Epele/Enúcleo=100,h=0.5, tensão normal x

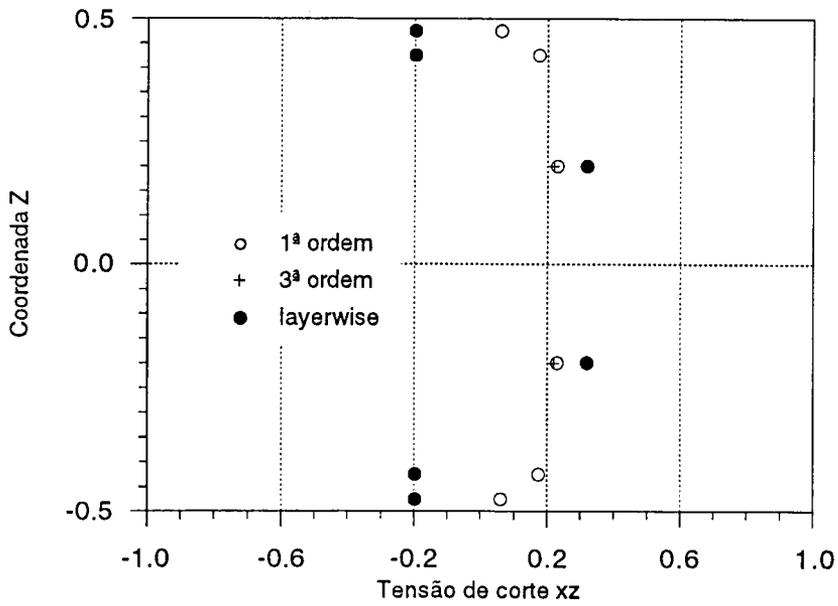


Figura 2.90 - Epele/Enúcleo=100,h=0.5, tensão de corte xz

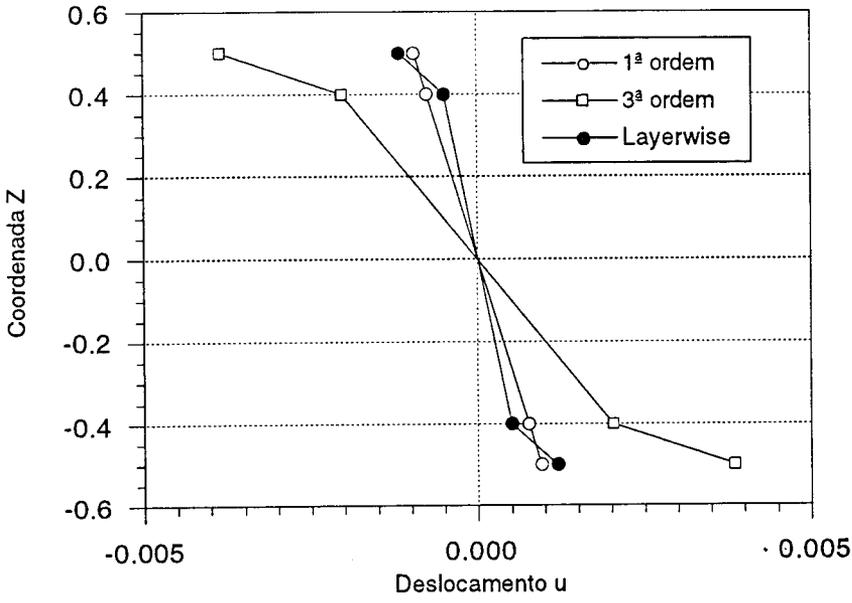


Figura 2.91 - Epele/Enúcleo=100,h=0.5, deslocamento u

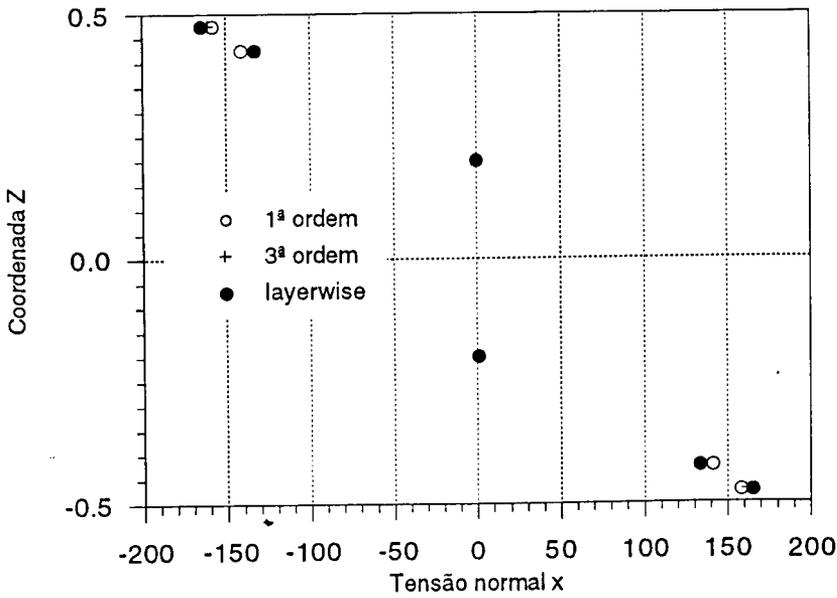


Figura 2.92 - Epele/Enúcleo=100,h=0.25, tensão normal x

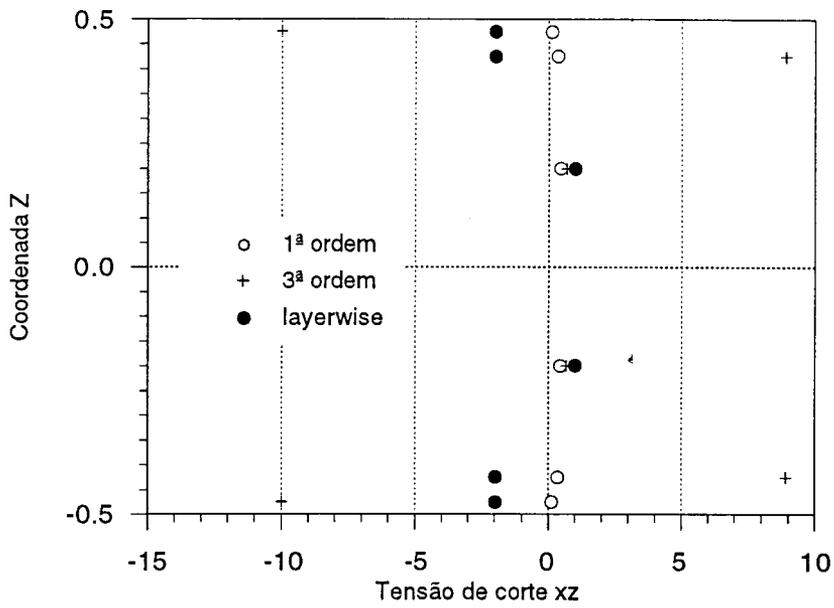


Figura 2.93 - Epele/Enúcleo=100, h=0.25, tensão de corte τ_{xz}

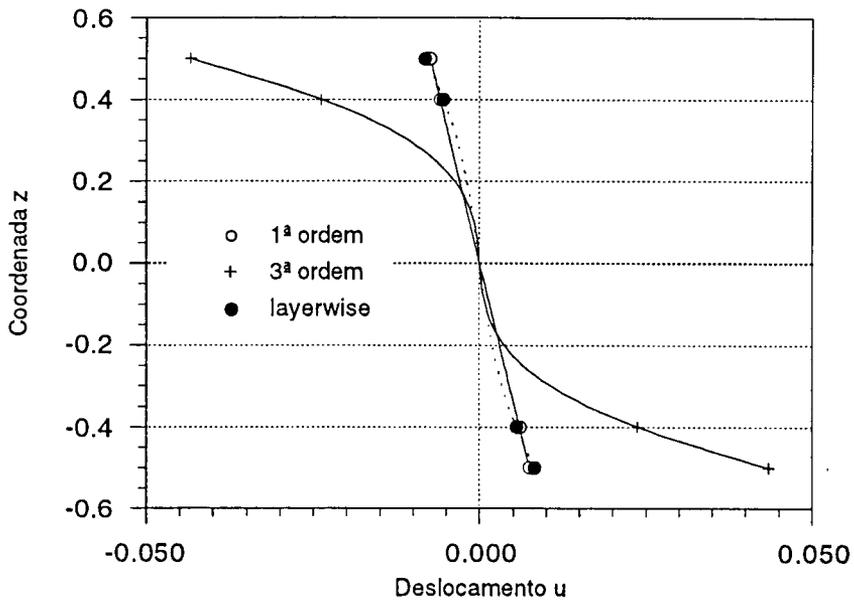


Figura 2.94 - Epele/Enúcleo=100, h=0.25, deslocamento u

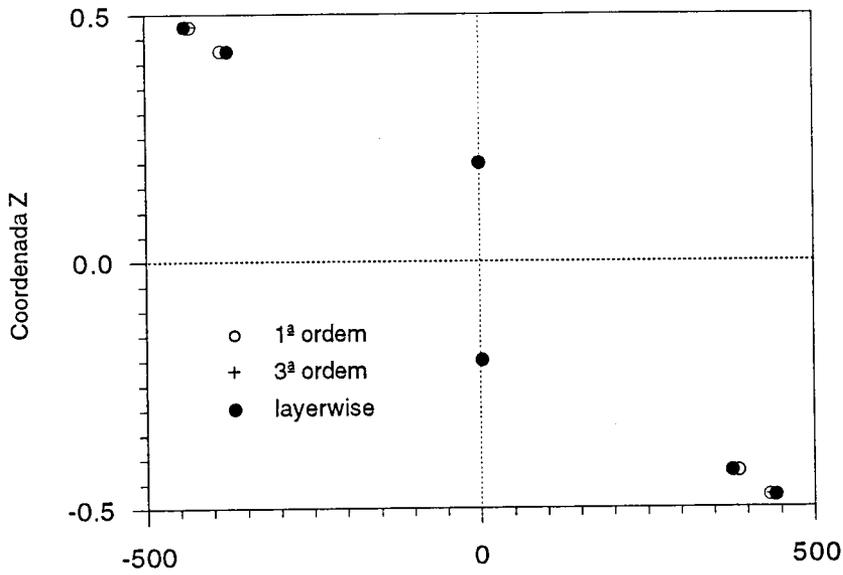


Figura 2.95 - Epele/Enúcleo=100,h=0.15, tensão normal x

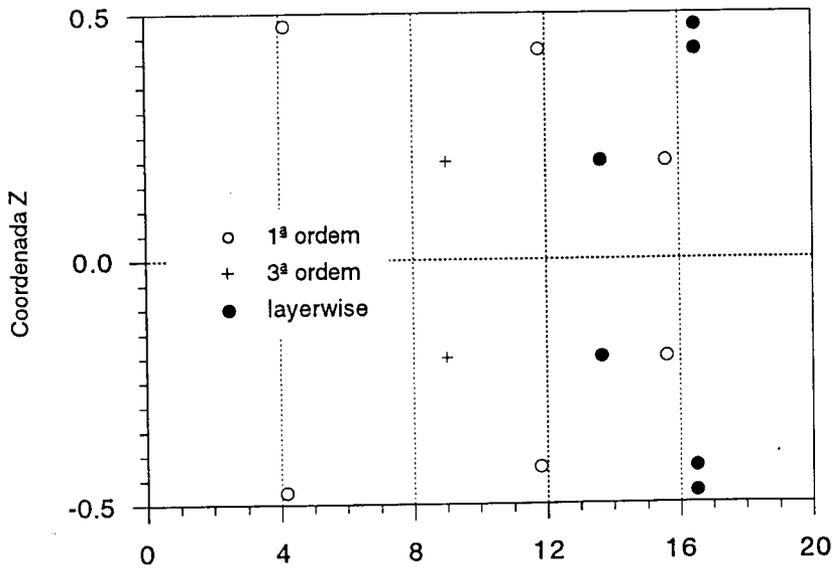


Figura 2.96 - Epele/Enúcleo=100,h=0.15, tensão de corte xz

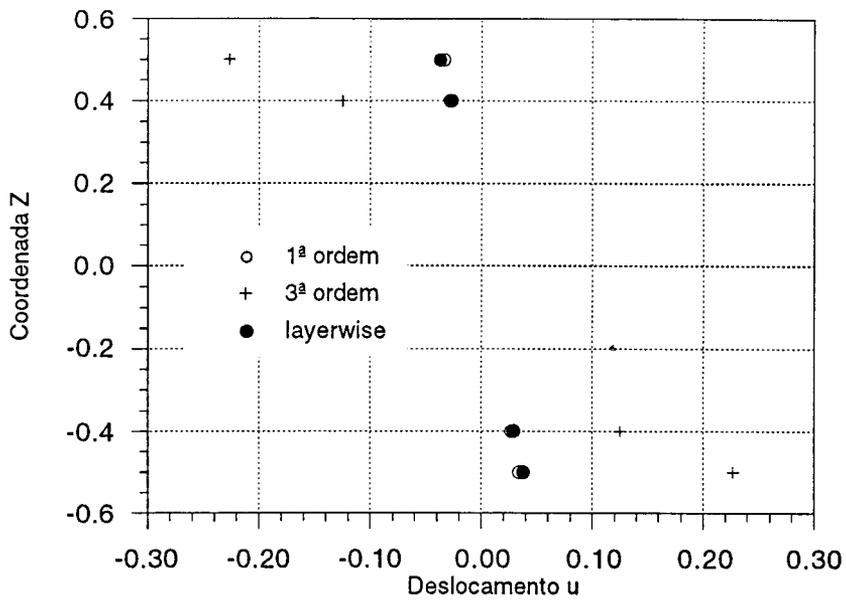


Figura 2.97 - Epele/Enúcleo=100, h=0.5, deslocamento u

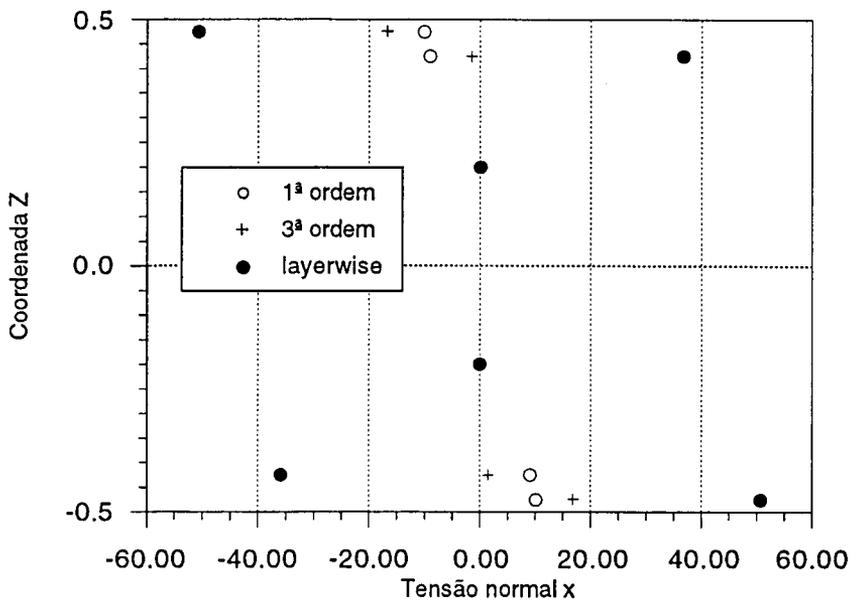


Figura 2.98 - Epele/Enúcleo=1000, h=1, tensão normal x

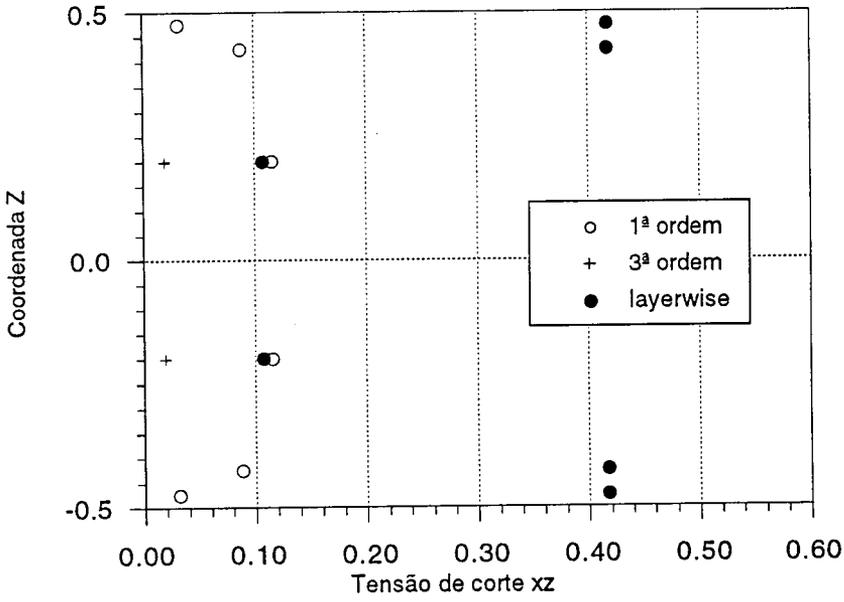


Figura 2.99 - Epele/Enúcleo=1000, h=1, tensão de corte xz

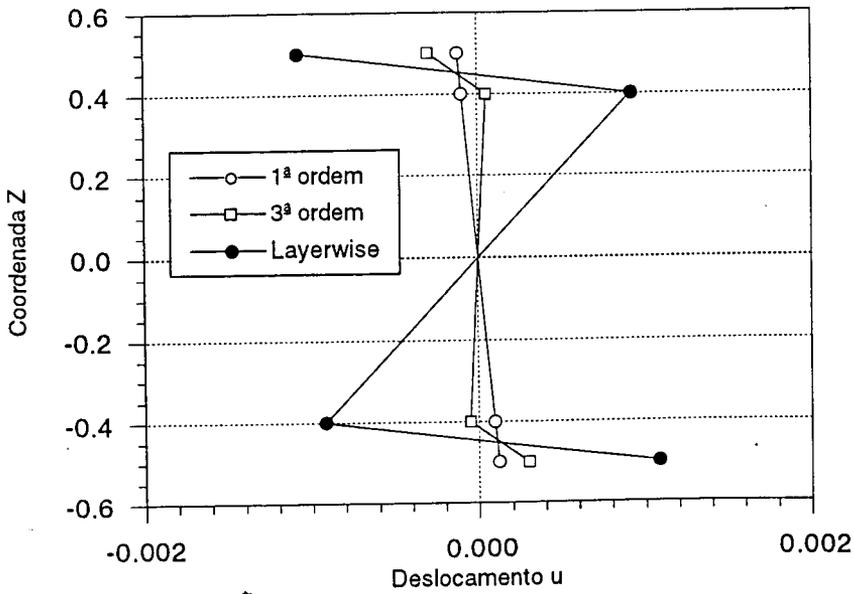


Figura 2.100 - Epele/Enúcleo=1000, h=1, deslocamento u

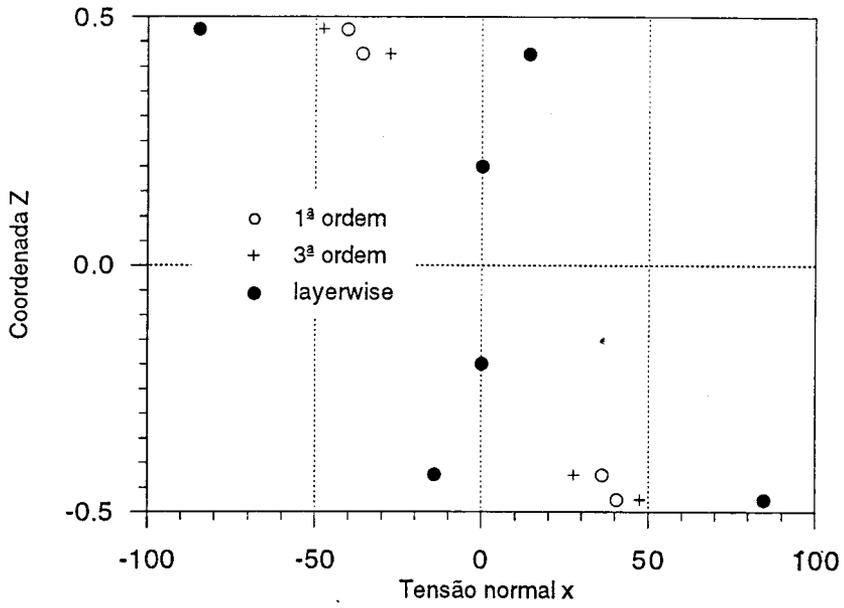


Figura 2.101 - Epele/Enúcleo=1000, $h=0.5$, tensão normal x

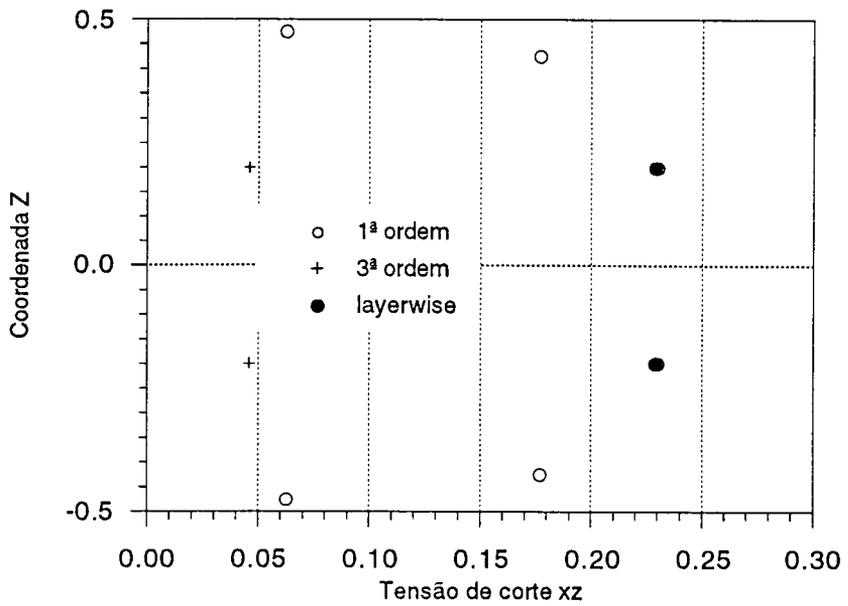


Figura 2.102 - Epele/Enúcleo=1000, $h=0.5$, tensão de corte xz

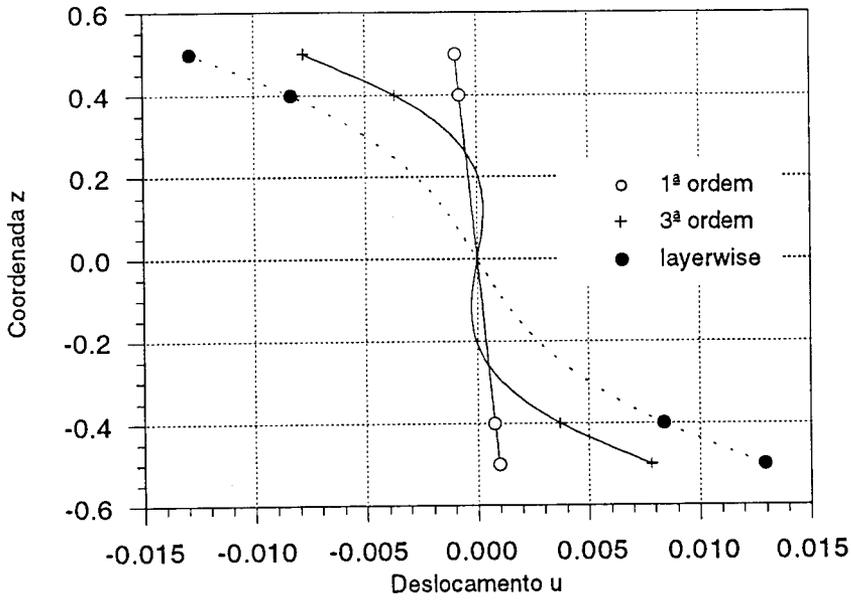


Figura 2.103 - Epele/Enúcleo=1000, $h=0.5$, deslocamento u

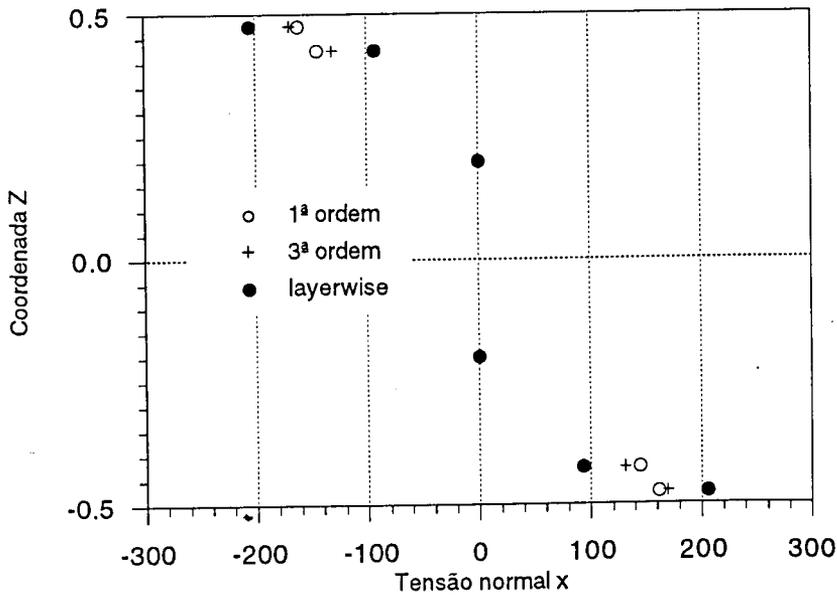


Figura 2.104 - Epele/Enúcleo=1000, $h=0.25$, tensão normal x

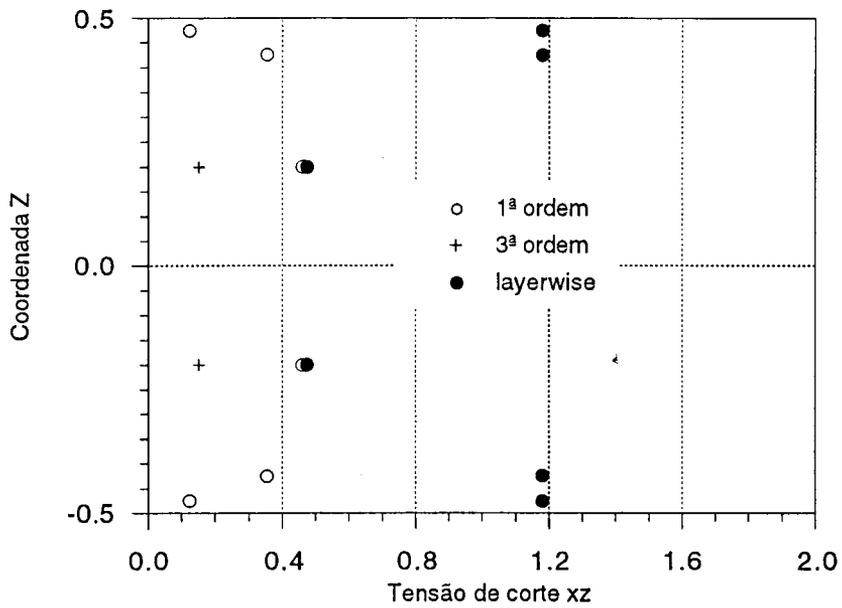


Figura 2.105 - Epele/Enúcleo=1000, $h=0.25$, tensão de corte τ_{xz}

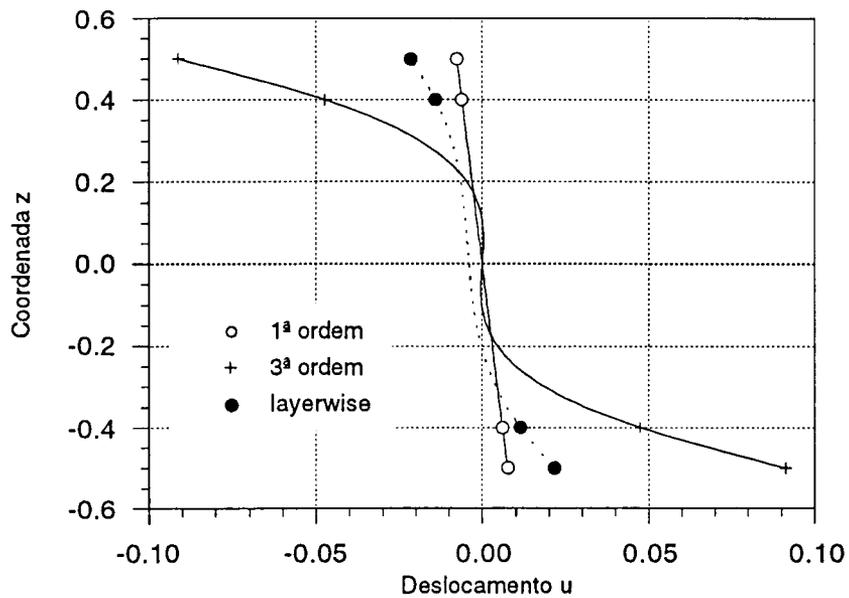


Figura 2.106 - Epele/Enúcleo=1000, $h=0.25$, deslocamento u

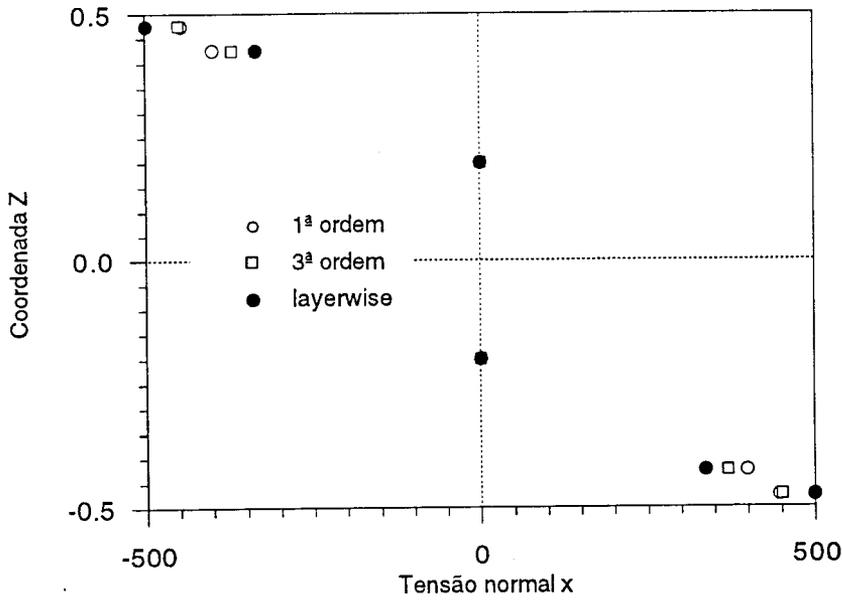


Figura 2.107 - Epele/Enúcleo=1000, h=0.15, tensão normal x

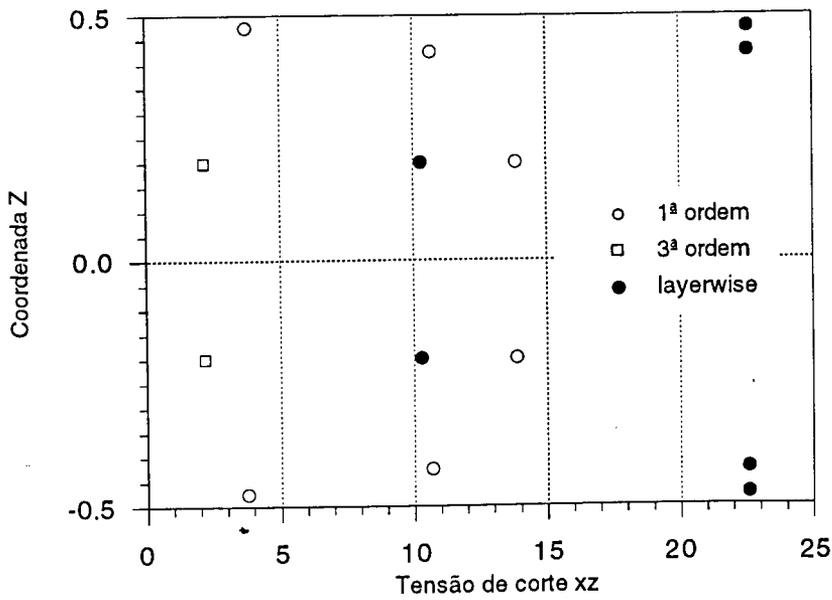


Figura 2.108 - Epele/Enúcleo=1000, h=0.15, tensão de corte xz

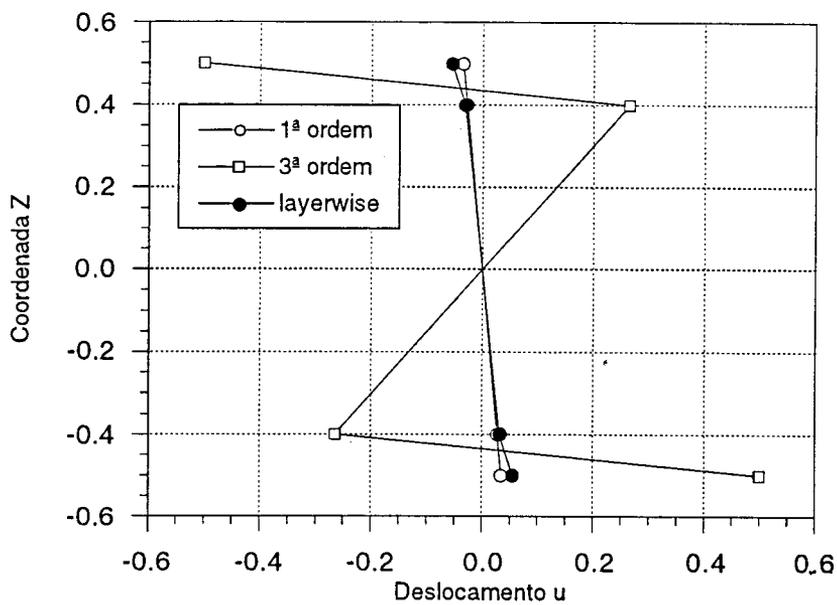


Figura 2.109 - Epele/Enúcleo=1000, $h=0.15$, deslocamento u

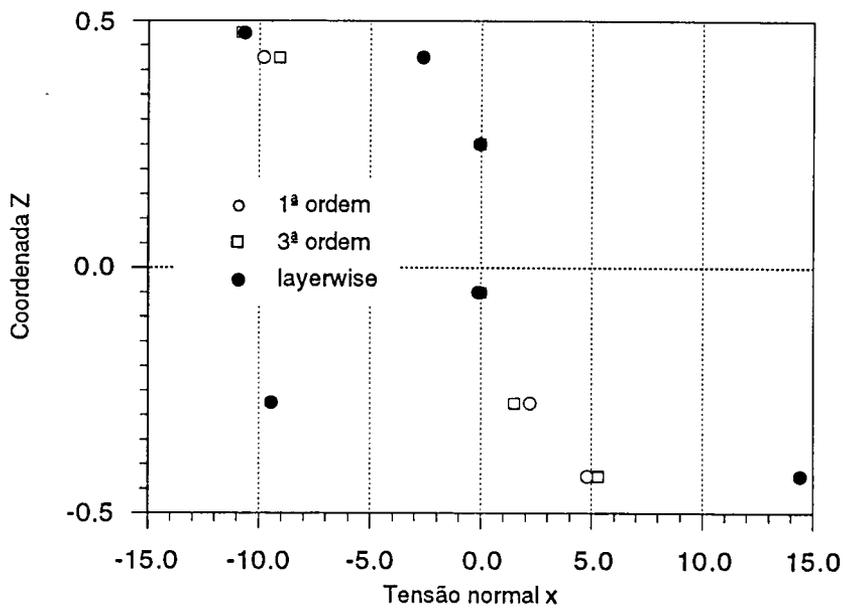


Figura 2.110 - Laminado e, $h=1$, tensão normal x

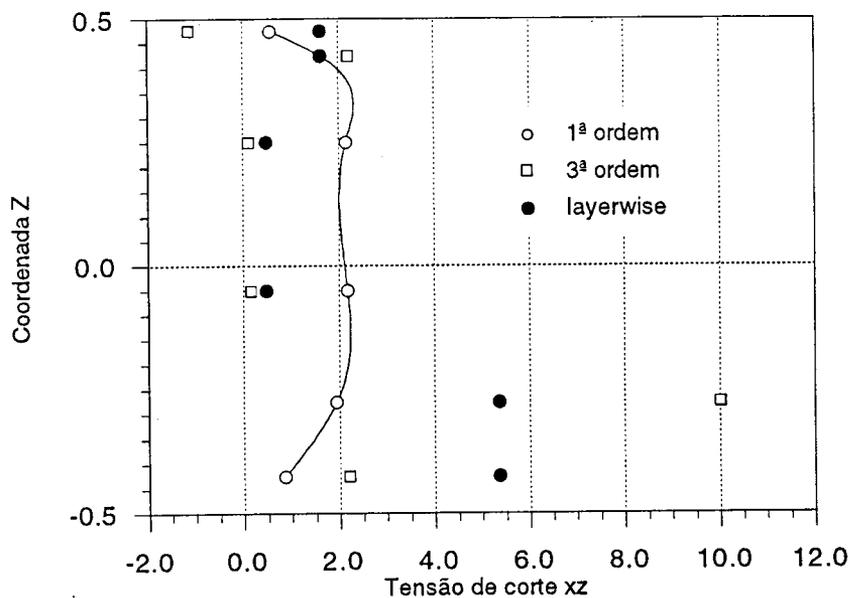


Figura 2.111 - Laminado e, h=1, tensão de corte xz

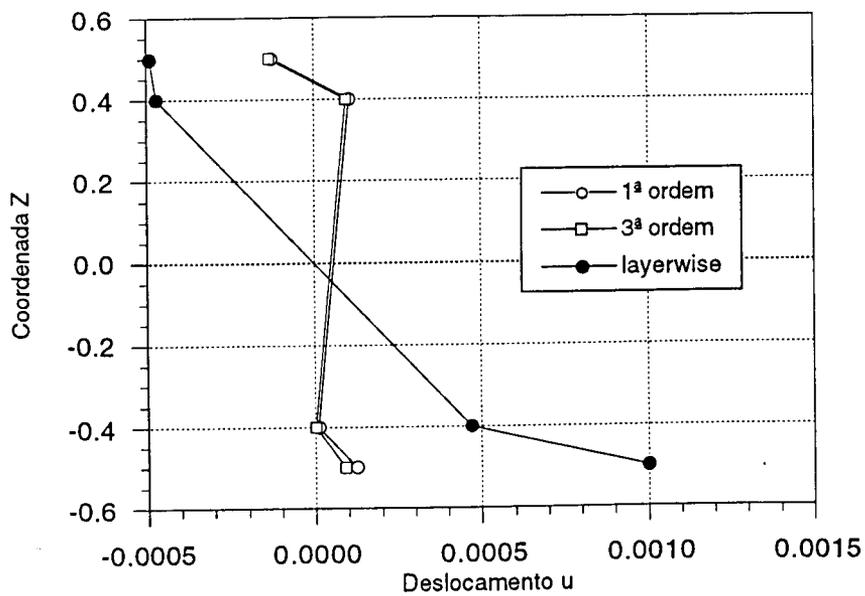


Figura 2.112 - Laminado e, h=1, deslocamento u

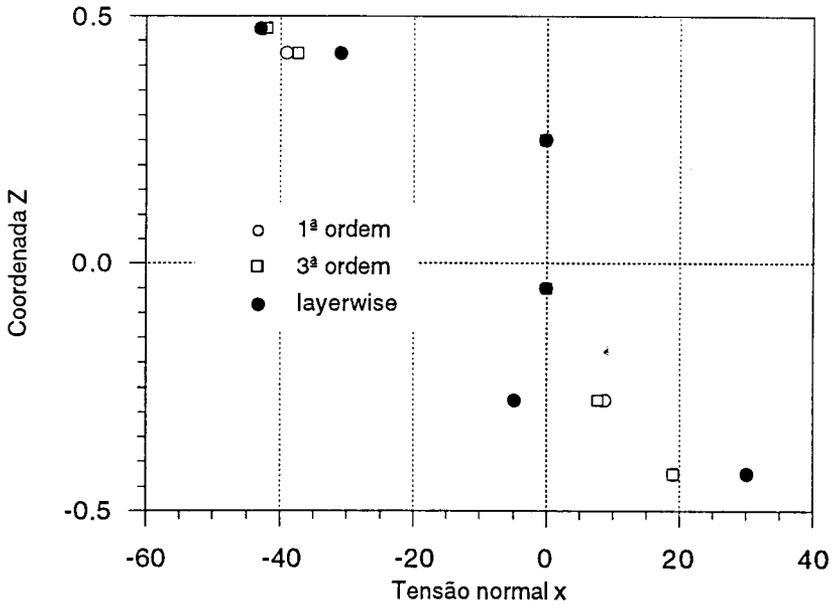


Figura 2.113 - Laminado e, $h=0.5$, tensão normal x

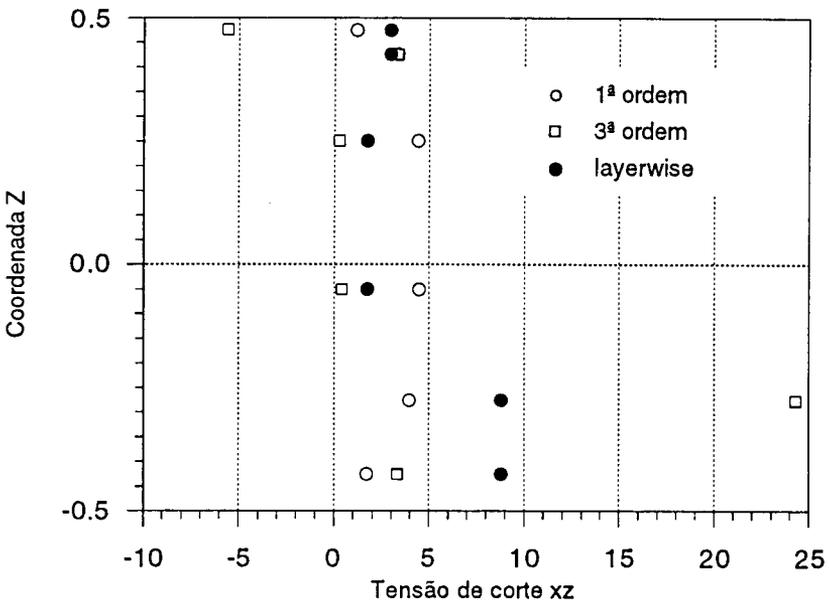


Figura 2.114 - Laminado e, $h=0.5$, tensão de corte xz

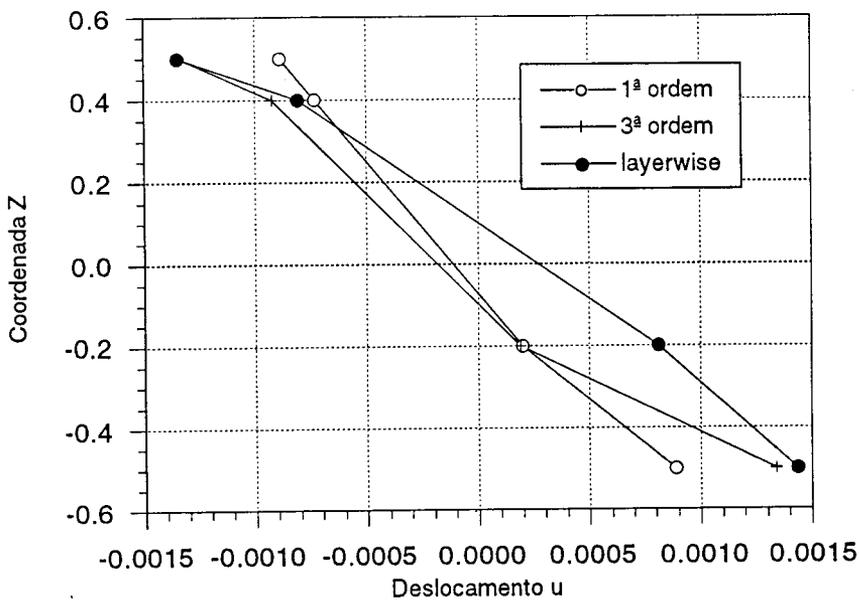


Figura 2.115 - Laminado e, $h=0.5$, deslocamento u

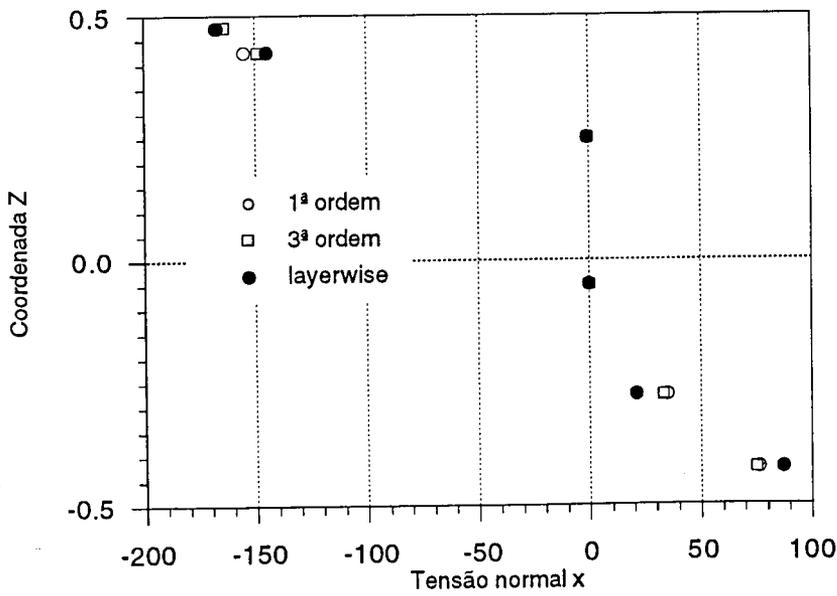


Figura 2.116 - Laminado e, $h=0.25$, tensão normal x

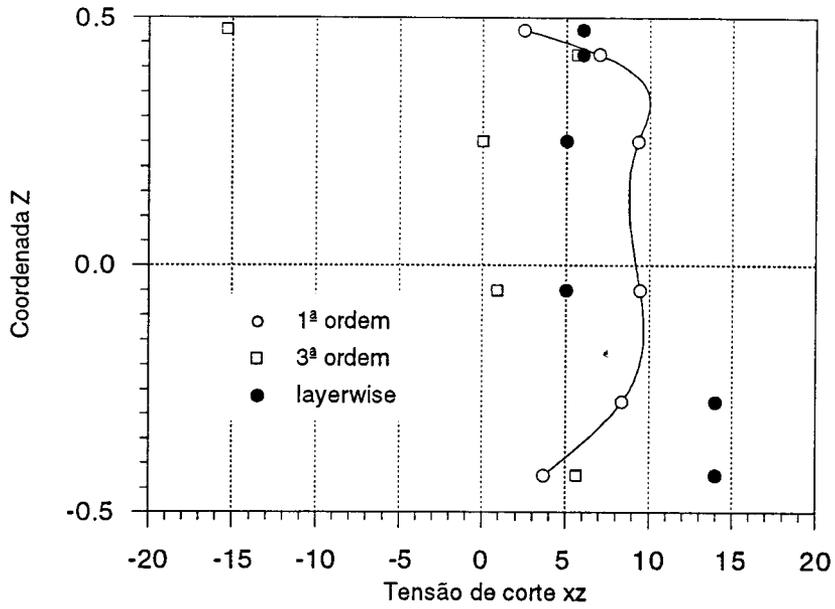


Figura 2.117 - Laminado e, h=0.25, tensão de corte xz

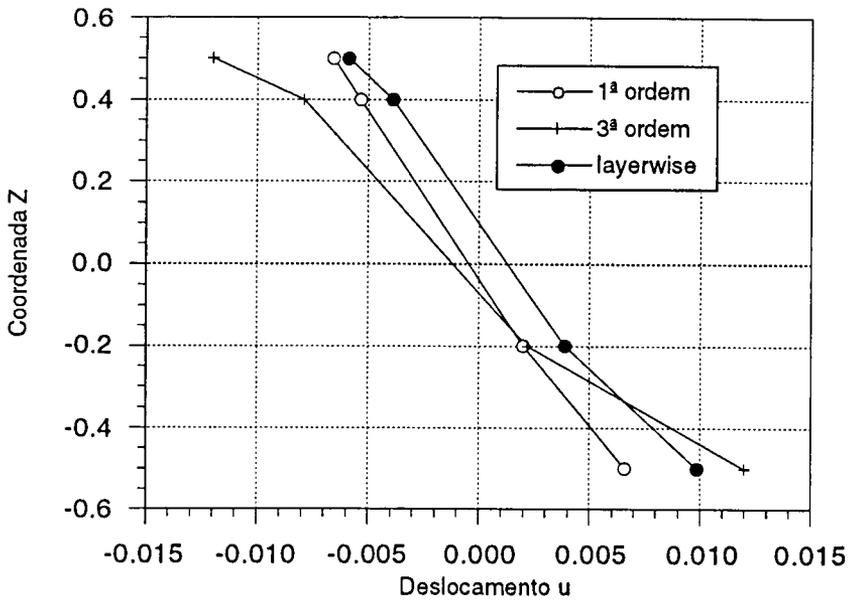


Figura 2.118 - Laminado e, h=0.25, deslocamento u

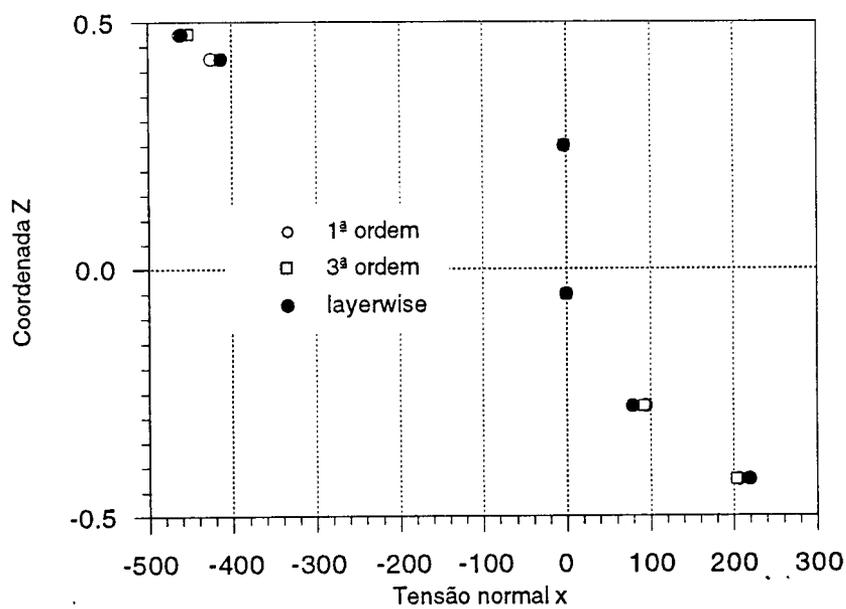


Figura 2.119 - Laminado e, $h=0.15$, tensão normal x

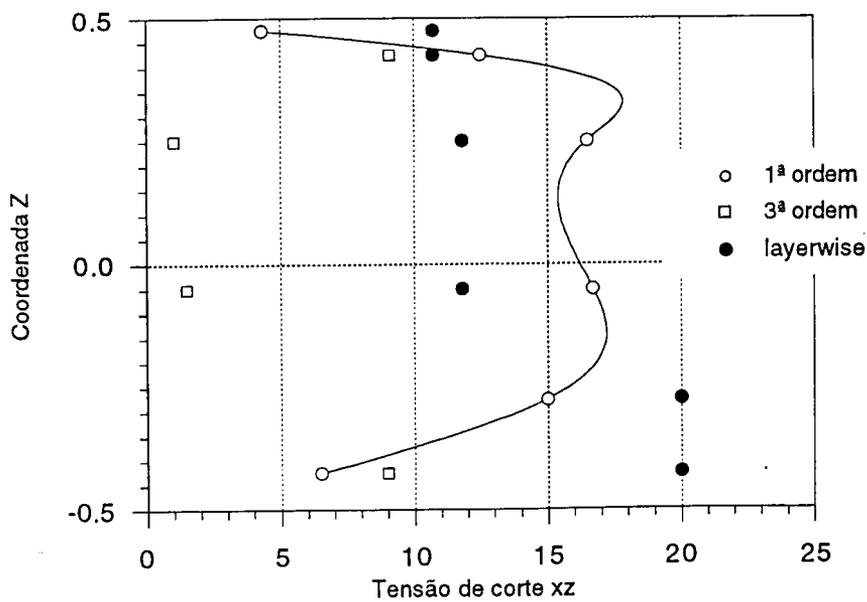


Figura 2.120 - Laminado e, $h=0.15$, tensão de corte xz

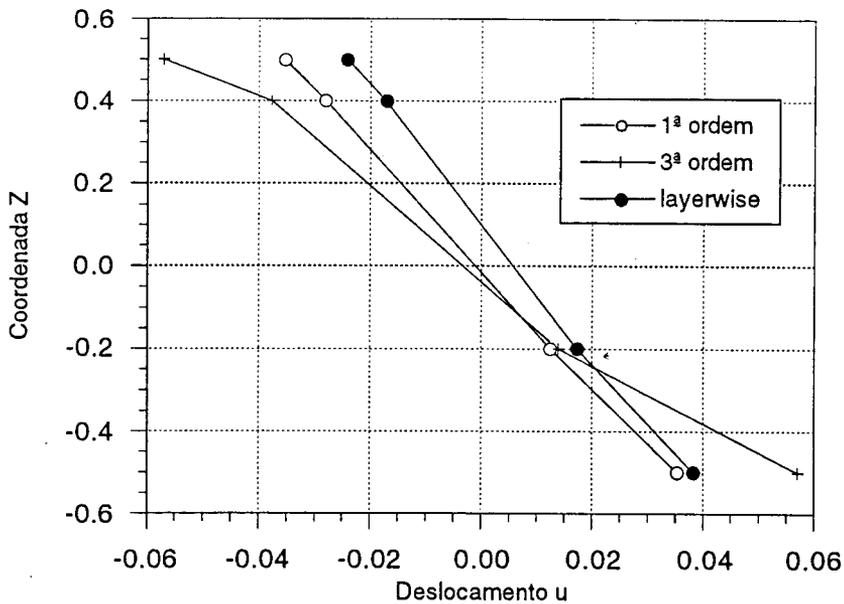


Figura 2.121 - Laminado e, $h=0.15$, deslocamento u

Da análise dos resultados deste exemplo, pode concluir-se que :

- para a placa quadrada homogénea, as três teorias apresentam valores muito próximos, quer em tensões normais, quer em tensões de corte. Mesmo variando as espessuras, não se registam grandes alterações;
- à medida que os rácios modulares aumentam verifica-se que as três teorias apresentam uma evolução semelhante da tensão normal σ_x , a menos de rácios muito elevados;
- os deslocamentos apresentam uma evolução bastante diferente de teoria para teoria, particularmente com rácios modulares elevados;
- as tensões de corte transversa apresentam variações significativas, particularmente para rácios modulares elevados. As teorias de 1ª ordem e layerwise têm alguma proximidade, particularmente nas tensões do núcleo.

2.5.4 - Casca cilíndrica laminada simplesmente apoiada sujeita a pressão uniforme

Na figura 2.122 esquematiza-se uma casca cilíndrica simplesmente apoiada nos bordos rectos, sujeita a carga pontual. Tal como no exemplo 2.5.3 foram testados vários

laminados e em cada caso verificado o desempenho das teorias de deformação. Nas figuras 2.123 a 2.182 apresenta-se um conjunto de figuras comparativas do desempenho das teorias apresentadas neste capítulo. Foram testadas as espessuras 6.35, 12.7 e 25.4 mm.

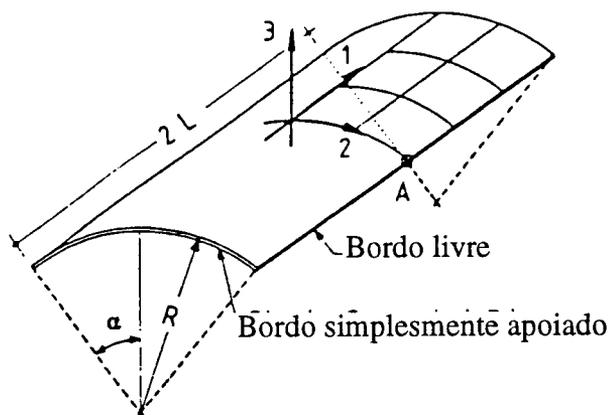


Figura 2.122 - Casca cilíndrica simplesmente apoiada, sujeita a carga pontual

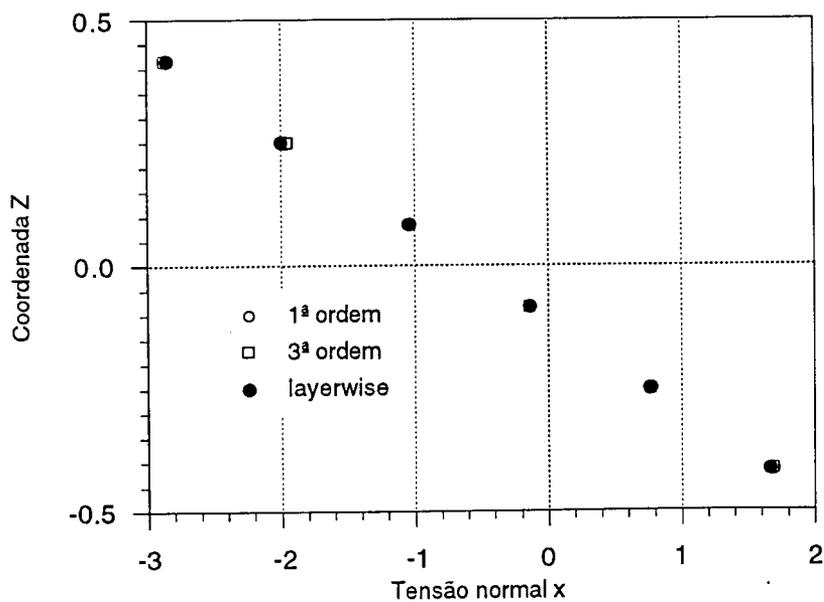


Figura 2.123 -Laminado isotrópico, espessura 6.35, tensão normal x

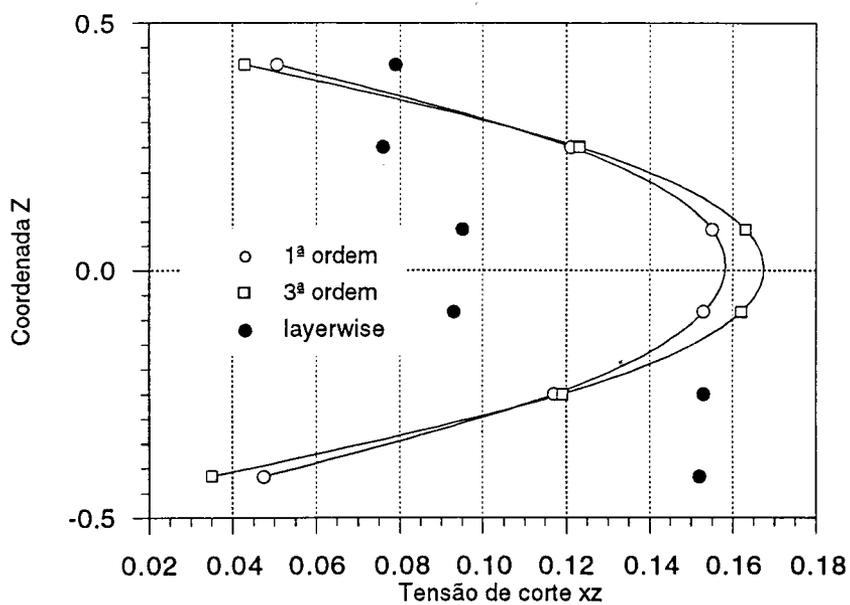


Figura 2.124 -Laminado isotrópico, espessura 6.35, tensão de corte xz

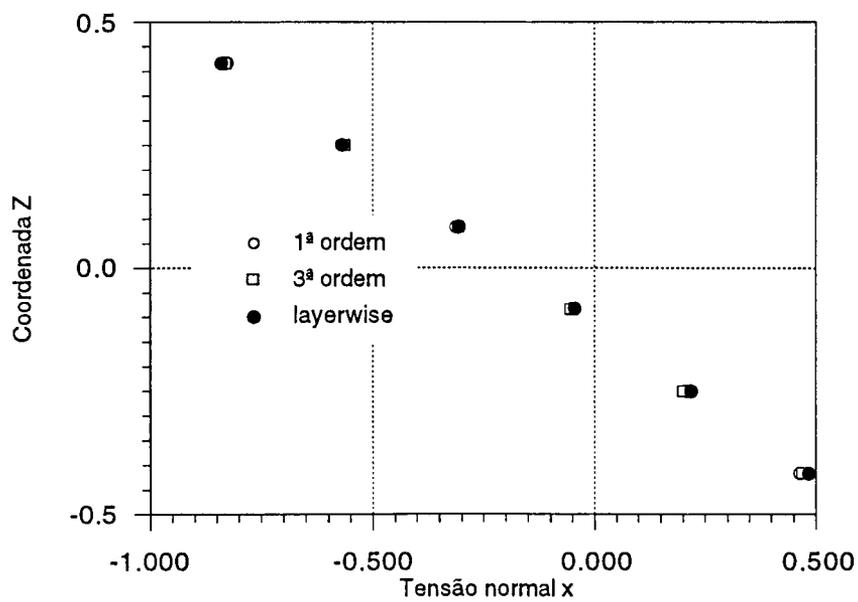


Figura 2.125 -Laminado isotrópico, espessura 12.7, tensão normal x

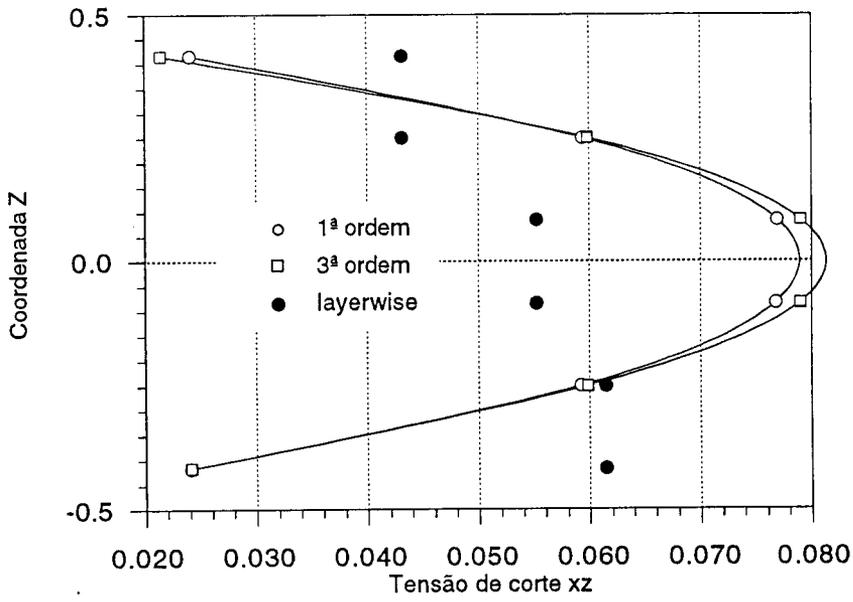


Figura 2.126 -Laminado isotrópico, espessura 12.7, tensão de corte xz

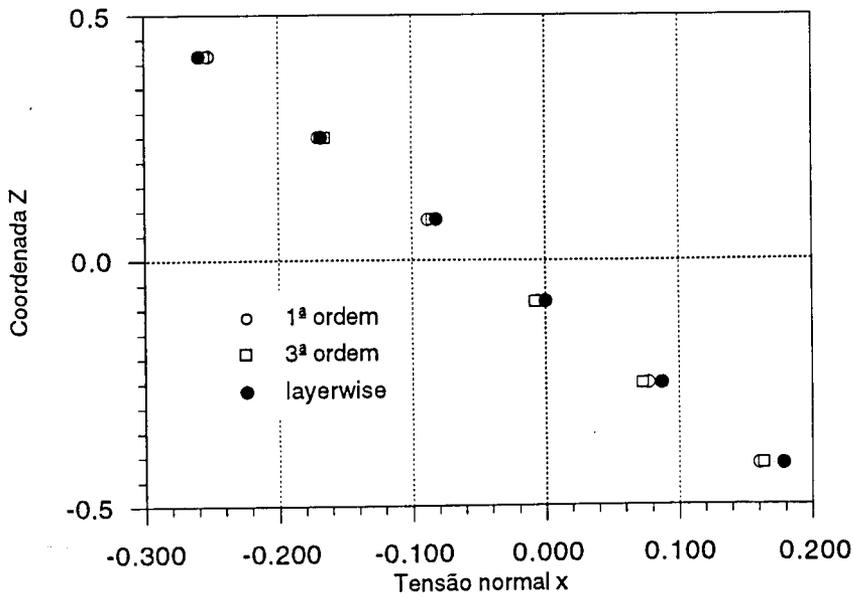


Figura 2.127 -Laminado isotrópico, espessura 25.4, tensão normal x

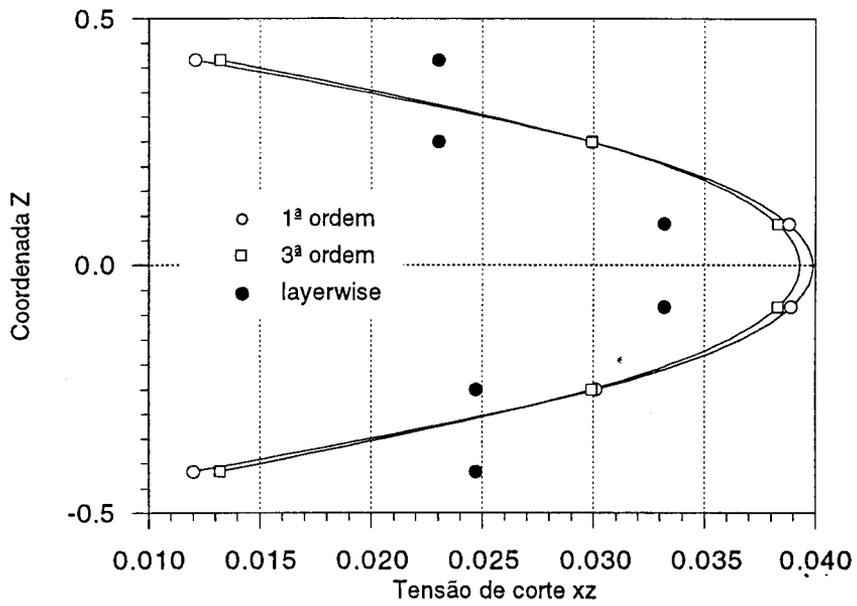


Figura 2.128 -Laminado isotrópico, espessura 25.4, tensão de corte xz

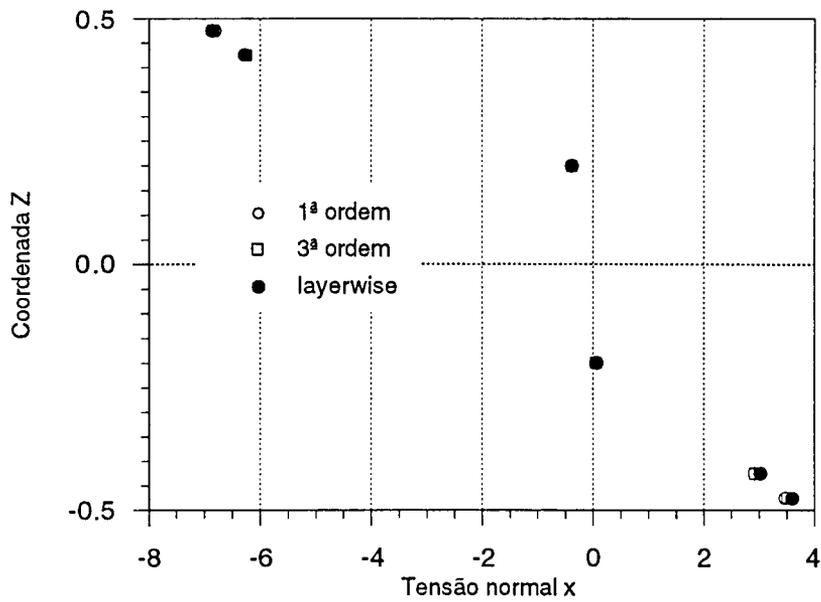


Figura 2.129 -Laminado b, espessura 6.35 tensão normal x

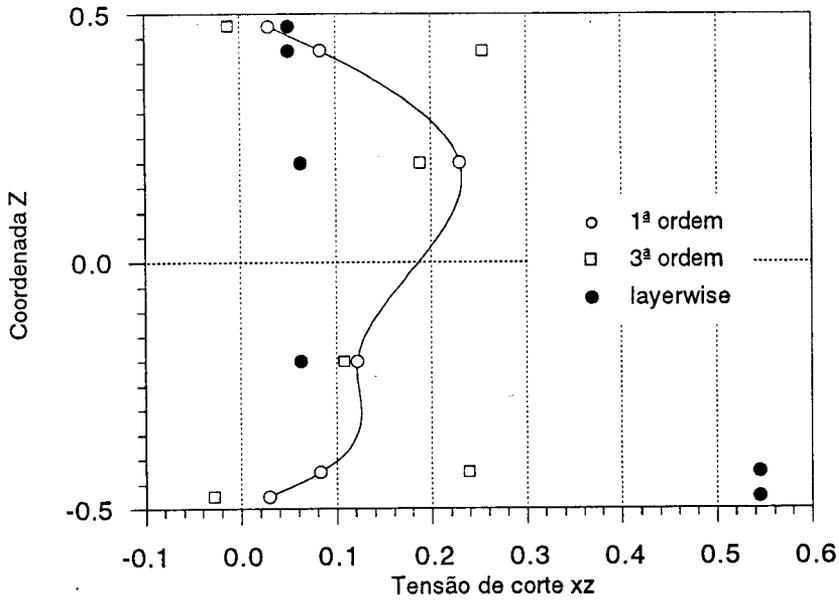


Figura 2.130 -Laminado b, espessura 6.35 tensão de corte xz

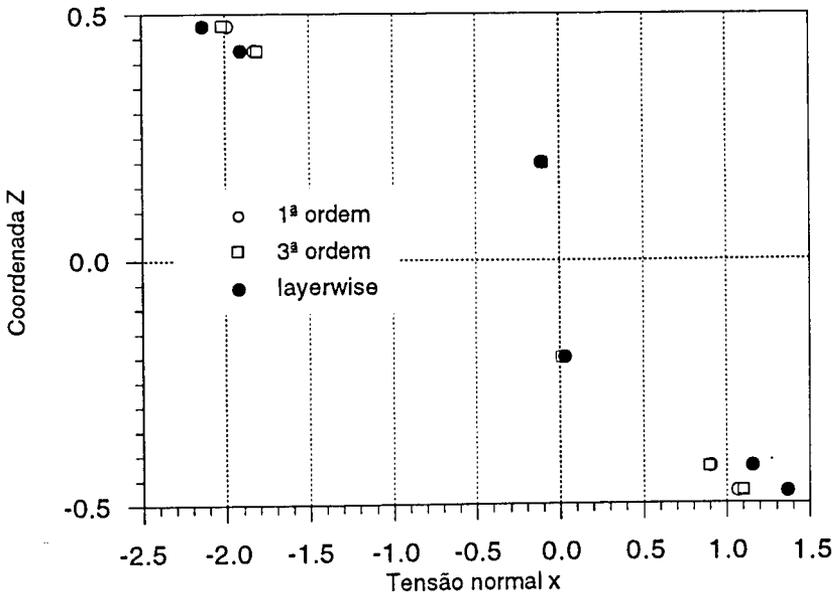


Figura 2.131 -Laminado b, espessura 12.7, tensão normal x

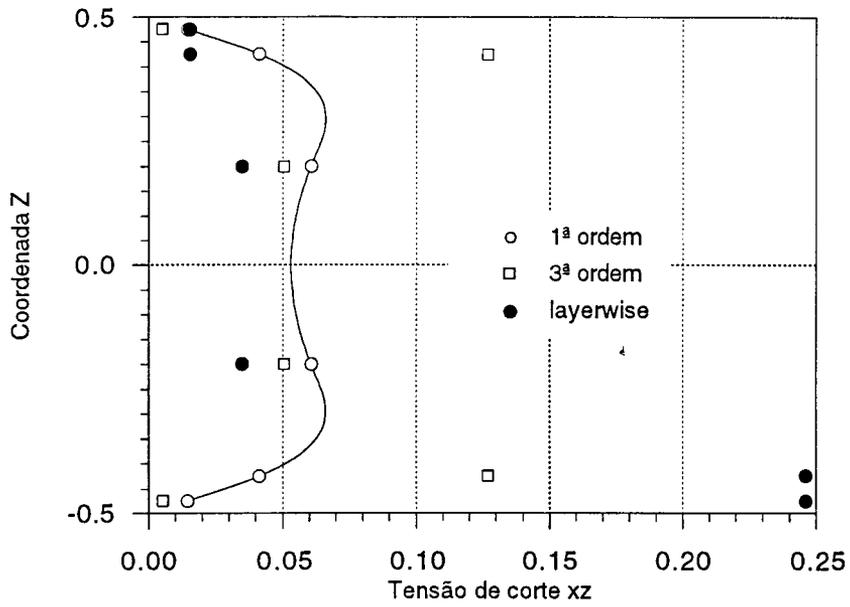


Figura 2.132 -Laminado b, espessura 12.7, tensão de corte xz

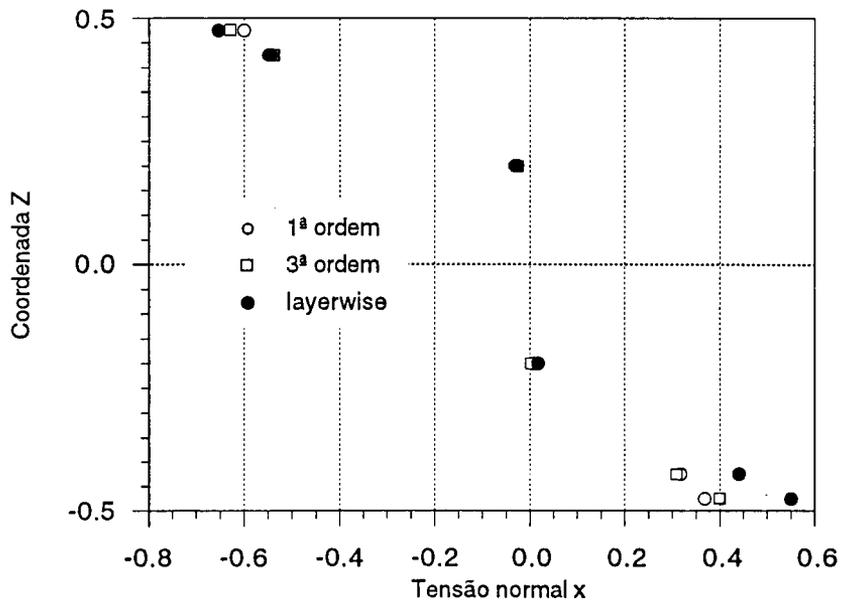


Figura 2.133 -Laminado b, espessura 25.4, tensão normal x

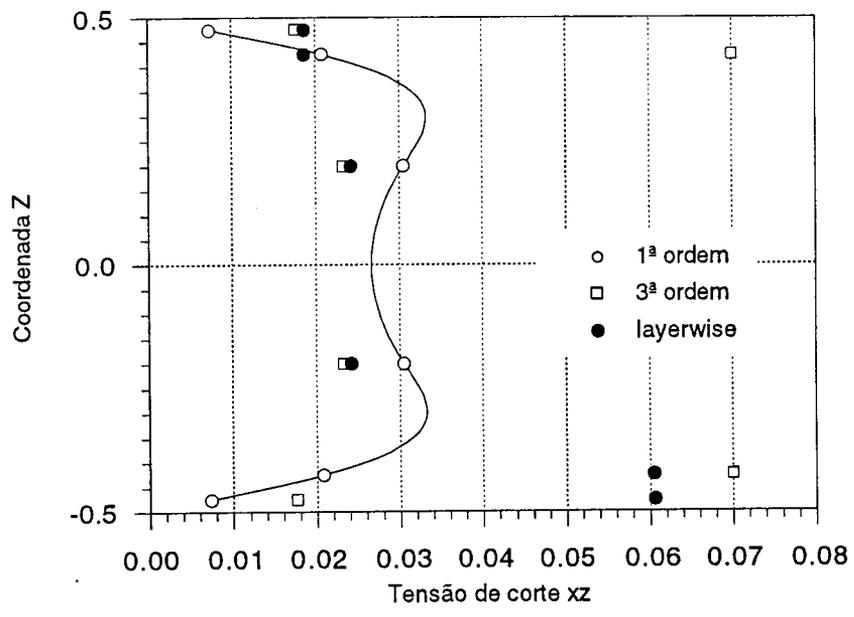


Figura 2.134 -Laminado b, espessura 25.4, tensão de corte xz

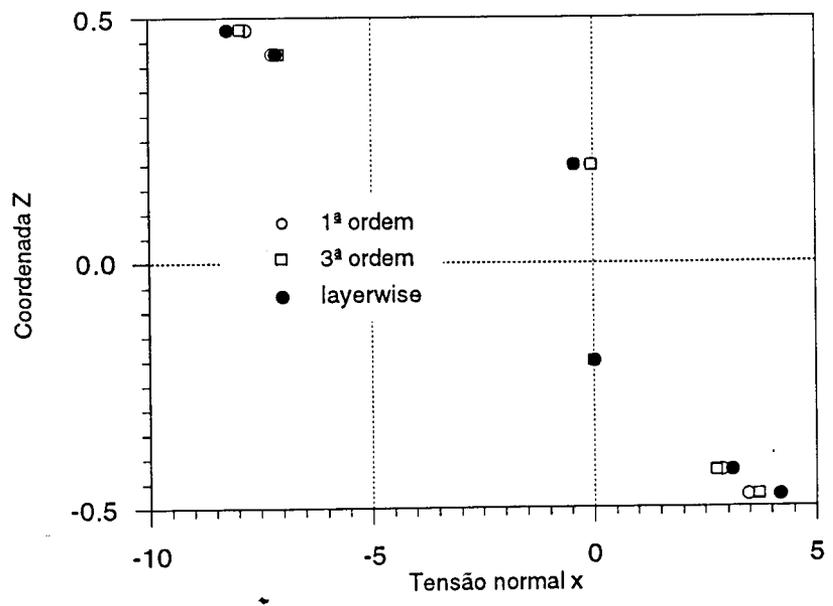


Figura 2.135 -Laminado c, espessura 6.35, tensão normal x

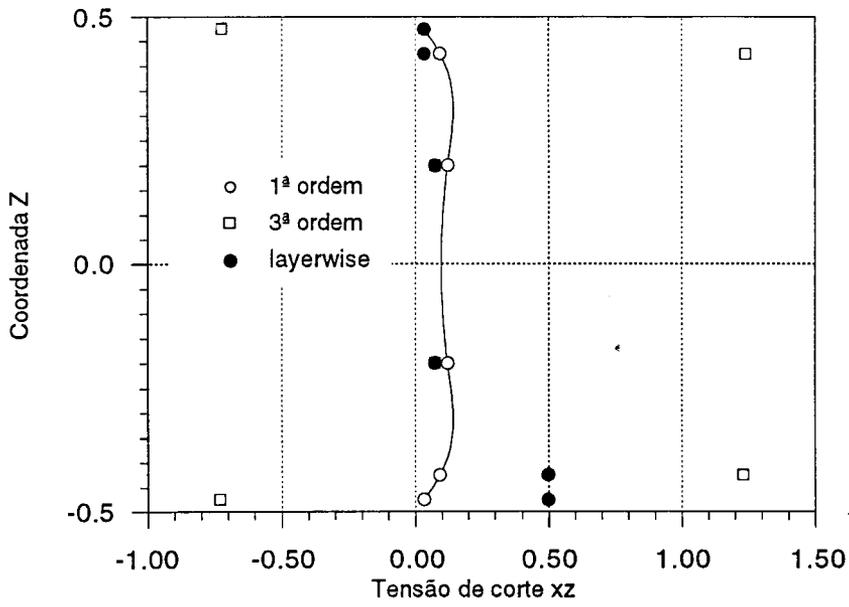


Figura 2.136 -Laminado c, espessura 6.35, tensão de corte xz

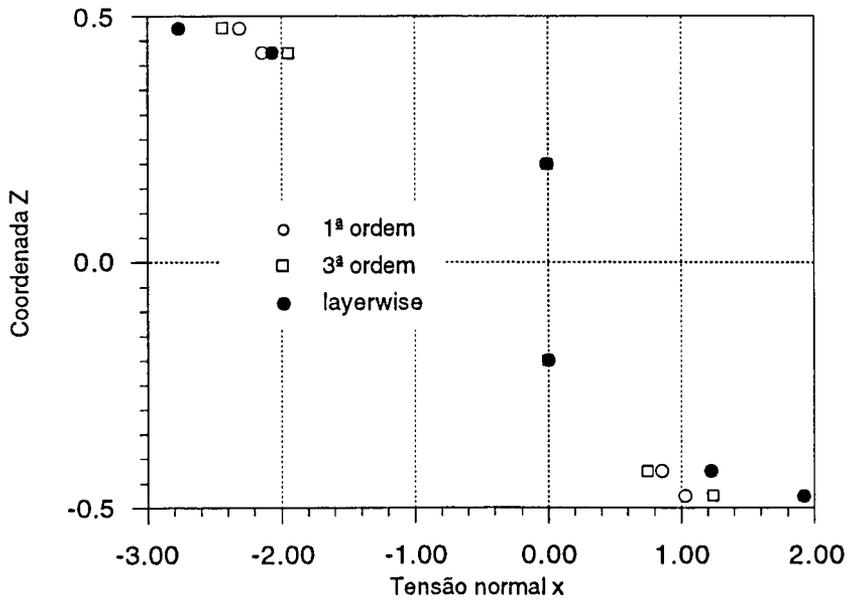


Figura 2.137 -Laminado c, espessura 12.7, tensão normal x

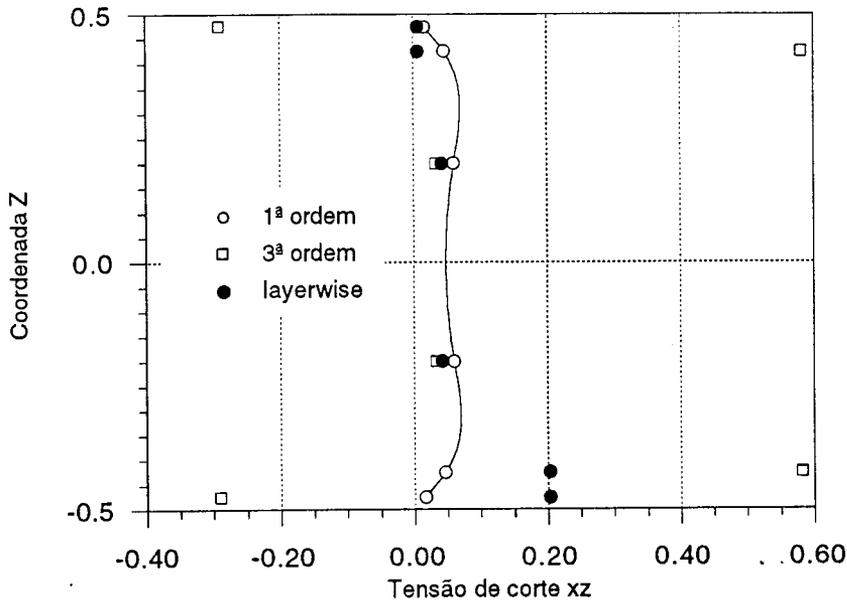


Figura 2.138 -Laminado c, espessura 12.7, tensão de corte xz

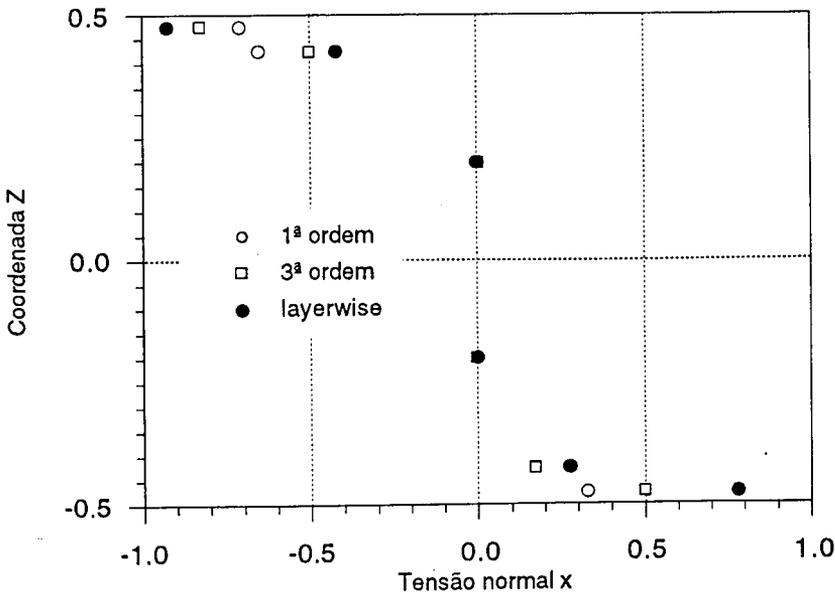


Figura 2.139 -Laminado c, espessura 25.4, tensão normal x

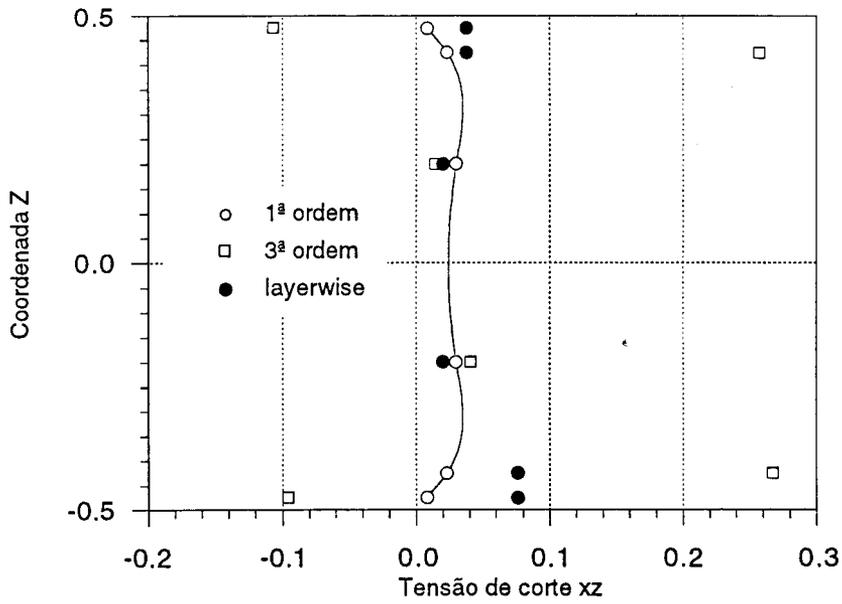


Figura 2.140 -Laminado c, espessura 25.4, tensão de corte xz

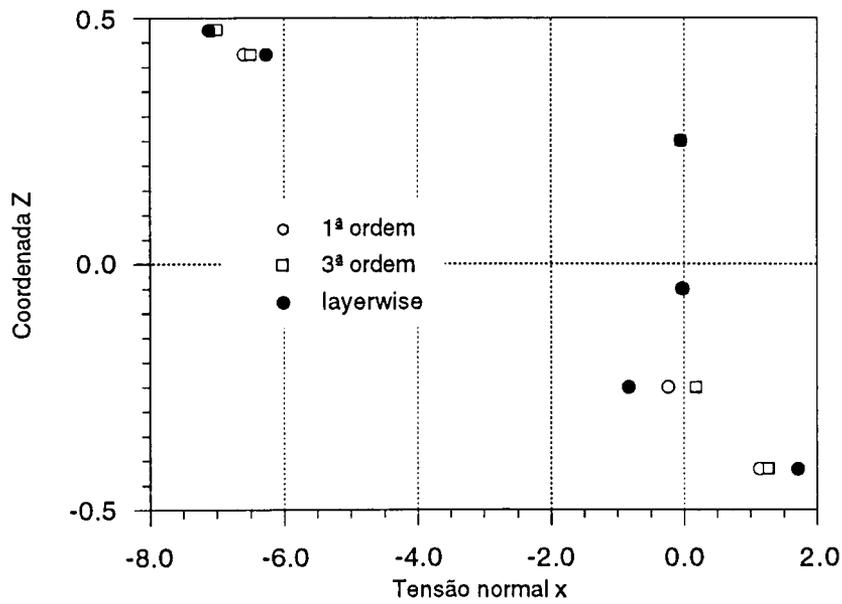


Figura 2.141 -Laminado e, espessura 6.35, tensão normal x

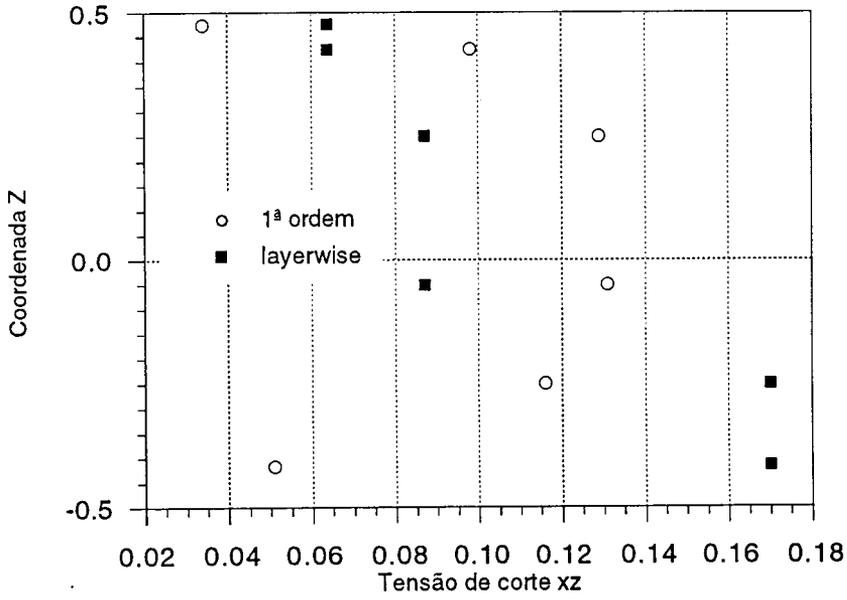


Figura 2.142 -Laminado e, espessura 6.35, tensão de corte xz

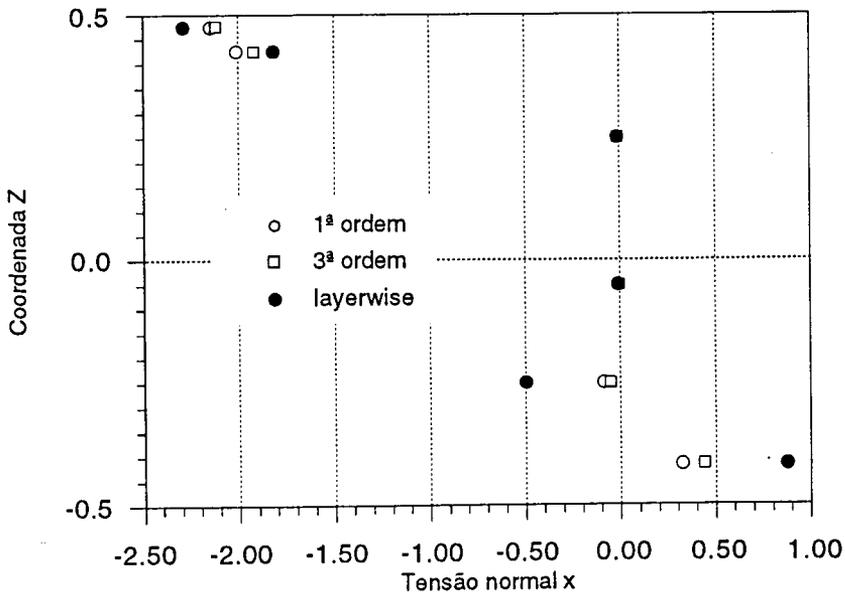


Figura 2.143 -Laminado e, espessura 12.7, tensão normal x

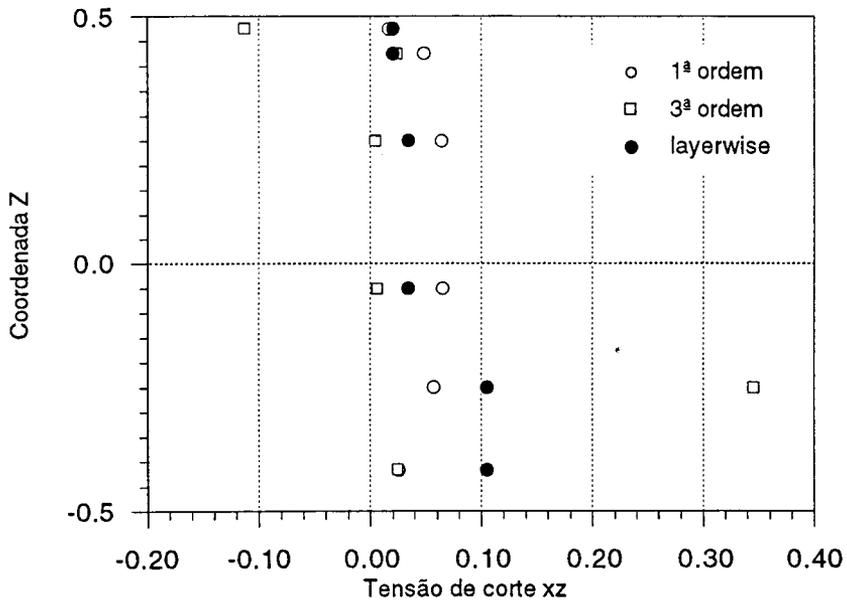


Figura 2.144 -Laminado e, espessura 12.7, tensão de corte xz

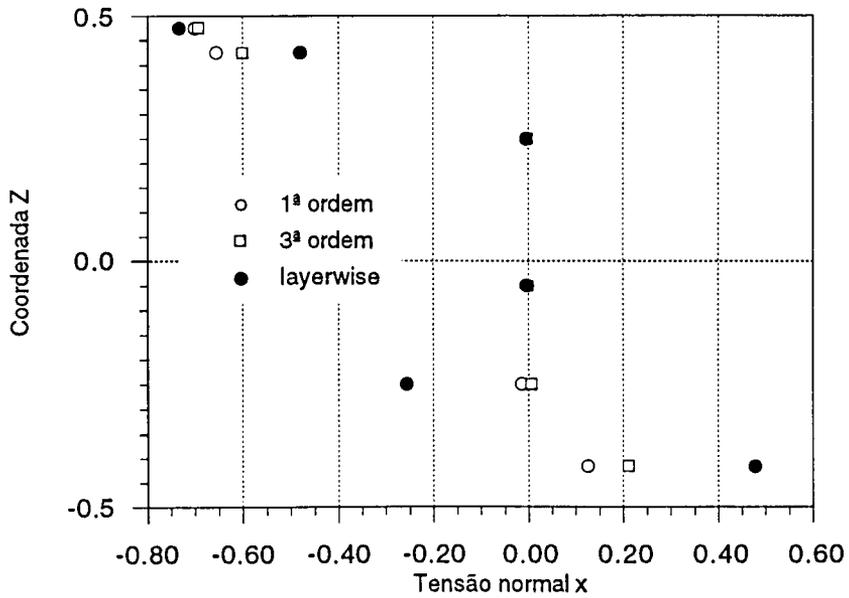


Figura 2.145 -Laminado e, espessura 25.4, tensão normal x

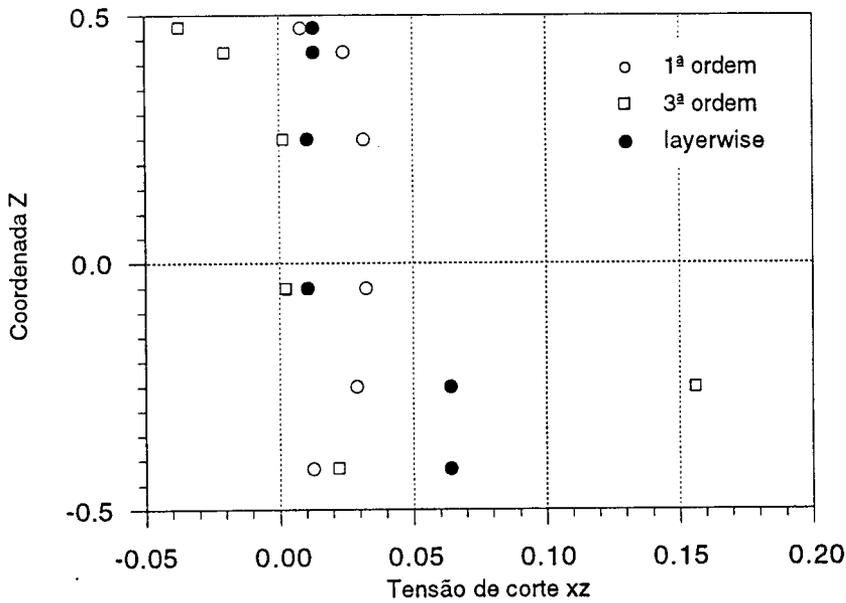


Figura 2.146 -Laminado e, espessura 25.4, tensão de corte xz

Destes resultados no exemplo de casca, verifica-se que:

- para laminados isotrópicos, as três teorias apresentam tensões normais e de corte muito próximas;
- à medida que os rácios modulares vão aumentando, a variação de resultados aumenta, embora na zona do núcleo, a variação seja muito menor do que nas peles-há que ter em conta que a espessura das peles é pequena e que a correcção de corte pode ser por isso influenciada;
- a variação de resultados em termos das tensões normais é menor do que em termos das tensões transversais;
- verifica-se uma maior variação dos resultados das três teorias neste exemplo, comparativamente ao exemplo da placa, tendo em conta a interpretação dos efeitos de membrana e de corte.

2.6 - CONCLUSÕES

Neste segundo capítulo, realizou-se a análise linear elástica de placas e cascas laminadas compósitas e sandwich. Utilizaram-se os elementos de casca degenerada de elementos

sólidos. Foram utilizadas as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens e ainda a teoria layerwise preconizada pelos autores em [51]. Foram ainda utilizados os elementos de casca Serendipita, Lagrangiano e Heterosis. Foi apresentada a formulação genérica dos elementos, tendo em conta as relações cinemáticas de cada teoria de deformação. Foram executados alguns exemplos numéricos, em que se pretendem avaliar a resposta estrutural das três teorias, quando na análise de vários tipos de laminados. Particularmente, há interesse em avaliar laminados sandwich cujas características elásticas são muito diferentes das características das peles.

Estes elementos finitos, baseados nas deformações de corte que apresentamos são capazes de simular com boa qualidade um amplo espectro de situações estruturais, desde estruturas isotrópicas, até laminados sandwich assimétricos.

A teoria de deformação de 1ª ordem necessita da correcção do corte transversal, para que as tensões de corte possuam um “perfil” adequado através da espessura do laminado. Foi implementada uma nova versão da formulação de 1ª ordem, que permite uma grande redução de custos de cálculo, dado que apenas calcula a matriz \underline{B}' , em cada ponto de integração, nas suas superfícies superior e inferior. Nas restantes superfícies, os termos da matriz \underline{B}' são obtidas por interpolação linear.

Foi ainda implementada a formulação de 3ª ordem que produz directamente deformações de corte transversal parabólicas. Com esta formulação obtêm-se bons resultados em estruturas isotrópicas e em laminados compósitos. Lamentavelmente, a qualidade da solução degrada-se em laminados sandwich, particularmente naqueles cujos módulos das peles e do núcleo sejam muito diferentes.

Finalmente, implementou-se a formulação layerwise, especialmente dedicada a laminados sandwich com pequeno número de camadas. Em laminados sandwich cujos módulos de peles e núcleos sejam muito diferentes, esta formulação revela-se particularmente adequada.

REFERÊNCIAS

1. S.Ahmad, B.M.Irons, O.C.Zienkiewicz, Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, Int. J. of Num. Meth Eng., Vol.2, 419-451, 1970
2. N.Buechter, E.Ramm, Shell theory versus degeneration-A comparison in large rotation finite element analysis, Int. J. of Num. Meth Eng., Vol.34, 39-60, 1992

3. O.C. Zienkiewicz, R.L.Taylor, J.M.Too, Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells, *Int. J. of Num. Meth Eng.*, Vol.3, 275-290, 1971
4. T.J.R. Hughes, R.L.Taylor, W. Kanoknukulchai, A simple and efficient element for plate bending, *Int. J. of Num. Meth Eng.*, Vol.11, 1529-1543, 1977
5. J.Barlow, Optimal stress locations in finite element models, *Int. J. of Num. Meth Eng.*, Vol.10, 243-251, 1976
6. J.T.Oden, G.A.Wempner e D.A.Kross, Finite element analysis of thin shells, *Proc. Am.Soc.Civ.Eng.*, vol94, 1273-1294, 1968
7. J.L.Batoz, K.J.Bathe, L.W.Ho, A study of three-node triangular plate bending elements, *Int. J. of Num. Meth Eng.*, Vol. 15, 1771-1812, 1980
8. G.Dhatt, L.Marcotte, Y. Matte, A new triangular discrete Kirchhoff plate/shell element, *Int. J. of Num. Meth Eng.*, Vol. 23, 453-470, 1986
9. J.L.Batoz, P.Lardeur, A discrete shear triangular nine D.O.F. element for the analysis of thick to very thin plates, *Int. J. of Num. Meth Eng.*, Vol. 28, 533-560. 1989
10. B.M.Irons, The semiloof shell element, *Finite elements for thin shells and curved members*, Cap.11, 197-222, Eds. D.G.Ashwell, R.H.Gallagher, J.Wiley, 1976
11. R. A. F. Martins, Analysis of plates and arbitrary shells by the semiloof element, Ph.D. Thesis, University of Wales, Swansea, U.K., 1976
12. L.M.J.S. Dinis, Quasi-static and Dynamic Transient Nonlinear Analysis of Plates and Arbitrary Thin Shells by Use of the Semillof Element, Ph.D.Thesis, C/Ph/49/78, Univ. of Wales, Swansea, U.K., 1978
13. C.A.Magalhães Oliveira, Elementos Semiloof e seus derivados na análise linear e não linear de estruturas tipo casca, Tese de Doutorado, FEUP, 1984
14. T.Belytschko, C.S.Tsay, W.K.Liu, A stabilization matrix for the bilinear Mindlin plate element, *Comp. Meth.Appl. Mech. Eng.*, Vol.29, 2313-327,1981
15. T.Belytschko, H.Stolarski, W.K.Liu, N. Carpenter, J.S.J.Ong, Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements, *Comp. Meth.Appl. Mech. Eng.*, Vol.51, 221-258,1985

16. T.Belytschko, W.K.Liu, J.S.J.Ong, D.Lam, Implementation and application of a 9-node Lagrange shell element with spurious mode control, *Comp. Struct.*, Vol.20, 121-128, 1985
17. W.K.Liu, T.Belytschko, J.S.J.Ong, S.E Law, use of stabilisation matrices in nonlinear analysis, *Eng. Comp.*, Vol.2, 47-55, 1985
18. T.J.R.Hughes, W.K.Liu, Nonlinear finite element analysis of shells, Part I. Three-dimensional shells, *Comp. Meth.Appl. Mech. Eng.*, Vol.26, 331-362, 1981
19. T.Belytschko, C.S.Tsay, A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature, *Int. J. of Num. Meth Eng.*, Vol. 19, 405-419, 1983
20. D.P.Flanagan, T. Belytschko, A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, *Int. J. of Num. Meth Eng.*, Vol. 17, 679-706, 1981
21. J. Hallquist, R.G.Whirley, *Dyna3D Users Manual, Nonlinear Dynamic Analysis in Three Dimensions*, Univ. of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID 19592, Rev. 5
22. T.J.R.Hughes, T.E.Tezduyar, Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element, *J.Appl.Mech.*, Vol.48, 587-596, 1981
23. R.H.MacNeal, Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions, *Nuc.Eng.Des.*, Vol. 70, 3-12, 1982
24. G.Wempner, D.Talasilidis, C.M.Hwang, A simple and efficient approximation of shells via finite quadrilateral elements, *J.Appl.Mech.*, Vol.49, 115-120, 1982
25. E.N.Dvorkin, K.J.Bathe, A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis, *Eng. Comp.*, Vol.1, 77-88, 1984
26. H.C.Huang, E.Hinton, A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation, *Int. J. of Num. Meth Eng.*, Vol.22, 73-92, 1986
27. E.Onate, B.Suarez, O.C.Zienkiewicz, Una metodología para obtener elementos de placa de Reissner-Mindlin basados en campo de deformaciones de cortante impuestas, *Actas del I congreso de metodos numericos en ingenieria*, 1990

28. E.Onate, J.Castro, Elementos de placa y laminas basados en campos de deformaciones impuestas, CIMNE, 1991
29. J.C.Simo, T.J.R.Hughes, On variational foundation of assumed strain methods, J.Appl. Mech., Vol.53, 51-54, 1986
30. N.J.Pagano, Exact solution for composite laminates in cylindrical bending, J.Comp.Mater., Vol.3, 398-411, 1969
31. N.J.Pagano, S.L.Mo, Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, J.Comp.Mat., Vol.4, 20-34, 1970
32. N.J.Pagano, Stress fields in composite laminates, Int.J.Sol.Struct., Vol.14, 385-400, 1978
33. R. D. Mindlin, Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J.Appl. Mech, vol.18(1), Trans. ASME, 31-38, 1951.
34. E. Reissner, The effects of transverse Shear Deformation on the bending of elastic-plates, J. Appl. Mech., 12(2), Trans. ASME, vol.67, 69-77, 1945.
35. A.J.M.Ferreira, Análise por elementos finitos de estruturas tipo casca em materiais compósitos, Tese de Mestrado, FEUP, 1990
36. S.B.Dong, K.Pister, R.L.Taylor, On the theory of laminated anisotropic shells and plates, J.Aero. Sci., Vol.29, 969-975, 1962
37. E.Reissner, Y.Stavsky, Bending and stretching of certain types of heterogeneous aerolotropic elastic plates, J.Appl. Mech., ASME, Vol.28, 402-408, 1961
38. Y.Stavsky, Bending and stretching of laminated aerolotropic elastic plates, J.Eng. Mech. Div., Vol.87, 31-56, 1961
39. P.C.Yang, C.H.Norris, Y.Stavsky, Elastic wave propagation in heterogeneous plates, Int.J.Sol. Struct., Vol.2, 665-684, 1966
40. K.H.Lo, R.M.Christensen, E.M.Wu, A higher-order theory of plate deformation, J.Appl.Mech. Trans. ASME, Vol. 44, Part 1
41. K.H.Lo, R.M.Christensen, E.M.Wu, A higher-order theory of plate deformation, J.Appl.Mech. Trans. ASME, Vol. 44, Part 2

42. J.M.Whitney, A higher-order theory for extensional motion of laminated composites, *J.Sound Vibration*, Vol.30, 85-97, 1973
43. J.N.Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *J.of Applied Mech.*, Vol.51, 745-751, 1984
44. N.S.Putchá, A mixed shear flexible finite element for geometrically nonlinear analysis of laminated plates, Ph.D. Dissertation, V.P.I., 1984
45. N.S.Putchá, J.N.Reddy, A refined mixed shear flexible finite element for the nonlinear analysis of laminated plates, *Comp. Struct.*, Vol.22, 529-538, 1986
46. N.S.Putchá, J.N.Reddy, Stability and vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory, *J.Sound Vibration*, Vol.104, 285-300, 1986
47. T.Kant e D.R.J.Owen, A refined higher-order C^0 plate bending element, *Comp.Struct.*, Vol.15, 177-183, 1982
48. Mallikarjuna e T. Kant, On Transient response of laminated composite plates based on higher-order theory, *Proc. 3rd Int Conf. on Recent advances in structural dynamics*, 18-22, July 1988, Southampton, U.K.
49. A. S. Mawenya , J. D. Davies, Finite element analysis of multilayer plates, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol.8, pag. 215-225, 1974.
50. H. H. Al-Qarra, H. G. Allen, Finite deflections of sandwich beams and plates by the finite element method, Department of Civil Engineering, University of Southampton, UK, 1980
51. A.J.M.Ferreira, A.T.Marques, J.C.de Sá, A degenerated shell element for the static linear analysis of sandwich structures, *International Conference on Composite Materials*, 1993
52. J. A. Figueiras, Ultimate load analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete plates and shells, Ph. D. Thesis, c/ph/72/83, University College of Swansea, 1983.
53. H. G. Allen, The story of sandwich construction, *The 1st Core Conference*, DUPONT, 1988

54. D.R.J.Owen e J.A.Figueiras, Anisotropic elastoplastic finite element analysis of thick and thin plates, *Int. J.Num.Meth.Eng.*, 19, 1983
55. J. M. A. Cesar de Sa, Numerical Modelling Of Incompressible Problems In Glass Forming And Rubber Technology, Ph.D. Thesis, University College Swansea, C/Ph/91/86, 1986.
56. E.Onate, *Calculo de estructuras por el metodo de elementos finitos*, CIMNE, 1992
57. S. Srinivas, A refined analysis of composite laminates, *J. of Sound and Vibration*, vol.30, pag.495-507,1973
58. G. Stanley, Continuum-based shell elements, Ph.D.Thesis, Stanford University, 1985
59. D.R.J.Owen, Z.H.Li, A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods-I. Fundamentals and static analysis; II. Vibration and stability, *Comp. Structures*, Vol. 26, pag. 907-923, 1987

CAPÍTULO 3

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE CASCAS LAMINADAS SANDWICH E COMPÓSITAS

3.1 - INTRODUÇÃO

3.2 - FORMULAÇÃO GEOMÉTRICAMENTE NÃO LINEAR

3.2.1 - Formulação lagrangeana total e actualizada

3.2.2 - Equações incrementais de equilíbrio e sua solução pelo método dos elementos finitos

3.3 - TÉCNICAS DE SOLUÇÃO

3.3.1 - O método de Newton-Raphson

3.3.2 - Os métodos de Newton-Raphson modificados

3.3.2.1 - O método da rigidez inicial

3.3.2.2 - Os métodos KT1 e KT2

3.3.3 - Métodos de controlo do comprimento do arco

3.3.3.1 - Formulação genérica

3.3.3.2 - Método da formulação esférica

3.3.3.3 - Método do plano normal

3.3.3.4 - Método de controlo do deslocamento

3.4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

3.4.1 - Placa quadrada encastrada sob carga uniformemente distribuída

3.4.2 - Casca cilíndrica sujeita a carga central pontual

3.4.3 - Casca cilíndrica sujeita a carga central pontual-análise da resposta inelástica até à instabilidade e pós-instabilidade

3.5 - CONCLUSÕES

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 3

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE CASCAS LAMINADAS SANDWICH E COMPÓSITAS

3.1 - INTRODUÇÃO

Na maioria das estruturas, não é suficiente considerar apenas o comportamento linear elástico, tendo em conta as condições de carga em serviço. A análise do comportamento até ao colapso, ou perto do colapso, é considerada actualmente como uma necessidade tecnológica e económica, tendo em conta as vantagens de aproveitamento da estrutura para além da cedência ou para além de instabilidades.

Assim, elementos cada vez mais esbeltos são utilizados no projecto das estruturas, com vista à poupança de material, sendo também mais frequente a utilização de materiais de maior resistência. Dentro destes materiais, os aços de elevada resistência, e os compósitos de vidro e carbono assumem, entre outros, papel de relevância cada vez mais acentuada. Os fenómenos de instabilidade são assim cada vez mais frequentes e o estudo no comportamento não linear estrutural representa um factor de interesse por um número crescente de investigadores. As não linearidades habitualmente presentes e consideradas na análise estrutural são de dois tipos: uma de carácter geométrico, envolvendo grandes deslocamentos, rotações ou deformações e uma outra, envolvendo efeitos não lineares no comportamento do material, como por exemplo elasto-plasticidade ou dano.

O método dos elementos finitos, logo após o seu aparecimento, foi extendido à análise de problemas não lineares [1]. A não linearidade geométrica foi posteriormente incluída nos métodos de elementos finitos [2,3]. É actualmente, ainda, uma das áreas de grande desenvolvimento e investigação na engenharia estrutural e computacional. Duma forma genérica, adopta-se na análise não linear de elementos finitos uma formulação incremental com ciclos de correcção, por forma a garantir a estabilidade da solução das equações de equilíbrio linearizadas e por forma a garantir a convergência para o "caminho" da solução.

Duma forma geral, as equações discretizadas de equilíbrio não são passíveis de resolução directa. É, no entanto, possível linearizá-las, tendo em conta que as variáveis estejam referidas a uma dada configuração de equilíbrio. A carga, no processo incremental-

iterativo, é sucessivamente aplicada e em cada incremento de carga procura-se obter uma solução dentro dum intervalo de convergência, através dum número determinado de iterações. As variáveis do problema são então actualizadas em cada incremento, até que se obtenha uma resposta suficientemente correcta para a solução.

Os problemas não lineares complexos podem assim ser resolvidos pelo método dos elementos finitos, sem grandes dificuldades teóricas, devido ao carácter numérico do procedimento. As questões que se levantam ao analista são o consumo de tempo (cada vez menor devido à crescente performance dos processadores), e os algoritmos mais adequados para ultrapassar algumas dificuldades físicas ou numéricas em alguns problemas de engenharia [4].

Neste capítulo realiza-se a análise não linear geométrica de placas e cascas laminadas compósitas e sandwich, através do método dos elementos finitos. Não são consideradas as questões das grandes deformações, nem das instabilidades geométricas. São considerados problemas de pequenas deformações e grandes deslocamentos. Adota-se em todo o capítulo a formulação lagrangeana total, no contexto das suposições de Von Karman [2], na descrição da deformação da estrutura. Comparam-se neste contexto, as três teorias de deformação de corte apresentadas no capítulo 2, quer em laminados compósitos quer em laminados sandwich. Apresentam-se resumidamente algumas técnicas de solução numérica e são discutidos alguns exemplos.

3.2 - FORMULAÇÃO GEOMÉTRICAMENTE NÃO LINEAR

3.2.1 - Formulação lagrangeana total e actualizada

Tendo como objectivo a solução das equações de equilíbrio e compatibilidade da estrutura deformada, e usando o método dos elementos finitos, é conveniente aplicar o princípio dos trabalhos virtuais com uma formulação de deslocamentos ou deformações assumidas.

O desenvolvimento das equações linearizadas necessita do conhecimento prévio das configurações de equilíbrio. As tensões e deformações são então referidas a essas configurações. Na prática utilizam-se basicamente duas opções: a formulação Lagrangeana Total (FLT) e a formulação Lagrangeana Actualizada (FLA). Na FLT todas as variáveis estáticas e cinemáticas estão referidas à configuração inicial, enquanto que na FLA aquelas estão referidas à configuração imediatamente anterior. Em qualquer dos casos, o princípio dos trabalhos virtuais escreve-se na forma

$$\int_v \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv = \delta W \quad (3.1)$$

em que δW é o trabalho virtual as forças exteriores, obtido pela equação

$$\delta W = \int_V b_i \delta u_i dv + \int_S t_i \delta u_i ds \quad (3.2)$$

onde b_i e t_i são, respectivamente, as componentes das forças volúmicas e de superfície, e δu_i a componente do vector dos deslocamentos virtuais.

Tanto na FLT como na FLA se incluem os efeitos cinemáticos não lineares devidos aos efeitos dos grandes deslocamentos e das grandes deformações. A sua correcta aplicação ao caso das grandes deformações depende em grande medida do modelo constitutivo utilizado.

3.2.2 - Equações incrementais de equilíbrio e sua solução pelo método dos elementos finitos

Apresenta-se o desenvolvimento da forma incremental das equações de equilíbrio da estrutura deformada nas FLT pelo método dos elementos finitos. Não se utiliza neste trabalho a FLA. Toma-se como ponto de partida para este desenvolvimento a equação do princípio dos trabalhos virtuais para uma dada configuração. O método mais habitual para obter essa forma incremental das equações de equilíbrio na solução de problemas não lineares é o de linearizar as equações de equilíbrio pelo princípio dos trabalhos virtuais. Este procedimento supõe que o incremento de deslocamentos entre duas configurações é pequeno, conduzindo à expressão clássica da matriz tangente, utilizada em métodos de solução do tipo Newton-Raphson completo ou modificado [2,3,5,6].

A utilização da configuração original para referência das variáveis do problema tem algumas vantagens sob o ponto de vista da formulação de elementos de casca degenerado. Dada a complexidade e o custo de cálculo da matriz das deformações, com a FLT, calcula-se apenas uma vez a sua componente linear e apenas se realiza a actualização da sua componente não linear.

Tendo em conta o equilíbrio da estrutura numa dada configuração, pode escrever-se a equação básica de equilíbrio como

$$\underline{f} = \underline{p}(\underline{a}) \quad (3.3)$$

em que \underline{f} é o vector das forças exteriores aplicadas e $\underline{p}(\underline{a})$ o vector das forças nodais equivalentes, função do vector de deslocamentos \underline{a} , e expresso na forma

$$\underline{p}(\underline{a}) = \int_v \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dv \quad (3.4)$$

em que a matriz das deformações incremental é agora função do campo de deslocamentos corrente e deve ser actualizada durante o processo não linear. O campo de deformações em problemas geométricamente não lineares é composto por uma parte linear e outra não linear, e de igual forma a matriz \underline{B} pode ser considerada como a soma de duas matrizes

$$\underline{B} = \underline{B}_o + \underline{B}_L \quad (3.5)$$

onde \underline{B}_o representa a parte linear de \underline{B} usada em análise linear de pequenos deslocamentos e \underline{B}_L a parte não linear, função dos deslocamentos correntes.

Aplicando variações à equação (3.4), relativamente às variações de deslocamentos $d\underline{a}$, obtem-se

$$d\underline{p} = \int_v \underline{B}^T d\underline{\sigma} \, dv + \int_v d\underline{B}^T \underline{\sigma} \, dv = \underline{K} \, d\underline{a} \quad (3.6)$$

onde \underline{K} representa a matriz de rigidez tangencial para a configuração corrente[7].

Tendo em consideração que

$$d\underline{\sigma} = \underline{D} \, d\underline{\varepsilon} = \underline{D} \, \underline{B} \, d\underline{a} \quad (3.7)$$

em que \underline{D} é a matriz de elasticidade, ou a matriz elasto-plástica para problemas de elasto-plasticidade (ver capítulo 4), e

$$d\underline{B}^T = d\underline{B}_L^T \quad (3.8)$$

e assumindo ainda que

$$\int_v d\underline{B}_L^T \underline{\sigma} \, dv = \underline{K}_\sigma \, d\underline{a} \quad (3.9)$$

pode finalmente obter-se a matriz de rigidez tangencial como

$$\underline{K} = \underline{\bar{K}} + \underline{K}_\sigma \quad (3.10)$$

em que

$$\underline{\bar{K}} = \int_v \underline{B}^T \underline{D} \, \underline{B} \, dv \quad (3.11)$$

e \underline{K}_σ é denominada habitualmente como matriz de rigidez geométrica, cuja forma será definida mais adiante.

Assume-se neste trabalho as suposições de Von Karman que usou as seguintes hipóteses para grandes deslocamentos de placas [8]:

1 - a espessura h é muito inferior à dimensão típica da casca L (hipótese não restrictiva);

2 - os deslocamentos transversais w são da mesma ordem de grandeza de h ;

3 - as inclinações das tangentes são pequenas $\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \ll 1$ e $\left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \ll 1$;

4 - os deslocamentos tangenciais u e v são pequenos - nas relações deformação-deslocamento apenas os termos $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$ são retidos, enquanto os outros são desprezados;

5 - todas as componentes de deformação são pequenas.

As deformações de Green-Lagrange, neste contexto são expressas em termos das derivadas locais dos deslocamentos. Para elementos de casca essas deformações, depois de introduzidas as suposições de Von Karman, são obtidas como

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

As deformações são assim separadas nas suas componentes linear e não linear

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_o + \underline{\varepsilon}_L \quad (3.13)$$

bem como nas suas componentes incrementais

$$d\underline{\varepsilon} = d\underline{\varepsilon}_o + d\underline{\varepsilon}_L \quad (3.14)$$

A matriz das deformações \underline{B} pode então ser calculada. O cálculo da parte linear foi referido no capítulo 2. A parte não linear do vector de deformações pode ser calculado a partir da equação (3.12):

$$\underline{\varepsilon}_L = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ou
$$\underline{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \underline{A} \underline{R} \quad (3.16)$$

As derivadas de w' podem ser relacionadas com as variáveis nodais \underline{a} como

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} = \underline{G} \underline{a} \quad (3.17)$$

Tendo em conta a variação da equação (3.16) obtém-se

$$d\underline{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} d\underline{A} \underline{R} + \frac{1}{2} \underline{A} d\underline{R} = \underline{A} d\underline{R} = \underline{A} \underline{G} d\underline{a} \quad (3.18)$$

e então, por definição, obtém-se

$$\underline{B}_L = \underline{A} \underline{G} \quad (3.19)$$

Note-se que os termos de corte transversal não são afectados pela presente formulação. Conhecida a matriz \underline{B} falta explicitar a matriz de rigidez geométrica

$$\underline{K}_\sigma d\underline{a} = \int_v d\underline{B}^T \underline{\sigma} dv = \int_v \underline{G}^T d\underline{A}^T \underline{\sigma} dv \quad (3.20)$$

em que $d\underline{A}^T \underline{\sigma}$ pode ser expresso por

$$d\underline{A}^T \underline{\sigma} = d \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & \frac{\partial w'}{\partial y'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d \frac{\partial w'}{\partial x'} \sigma_{x'} + d \frac{\partial w'}{\partial y'} \tau_{x'y'} \\ d \frac{\partial w'}{\partial y'} \sigma_{y'} + d \frac{\partial w'}{\partial x'} \tau_{x'y'} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Arranjando este vector

$$d\mathbf{A}^T \underline{\sigma} = d \left[\begin{array}{cc} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} d \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ d \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

e usando
$$d\mathbf{A}^T \underline{\sigma} = [\underline{\sigma}] \mathbf{G} da \quad (3.23)$$

com
$$[\underline{\sigma}] = \left[\begin{array}{cc} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{array} \right] \quad (3.24)$$

obtem-se assim a matriz de rigidez simétrica geométrica \mathbf{K}_σ .

3.3 - TÉCNICAS DE SOLUÇÃO

Na aplicação do Método dos Elementos Finitos à resolução de problemas estruturais não lineares, há necessidade de resolução de um conjunto de equações não lineares de equilíbrio, não sendo possível aplicar os métodos de solução directa. Existem publicados um conjunto de alternativas para a resolução destes problemas. Os algoritmos habitualmente considerados são os métodos incrementais e os incrementais-iterativos que constituem a base do método de Newton-Raphson. Em ambos os casos, o problema não linear é reduzido a uma sequência de soluções lineares, substituindo a carga total por incrementos de carga até se atingir a carga final. Enquanto que nos métodos incrementais puros existe a possibilidade de acumulação de erros e desvios da solução correcta, os métodos incrementais-iterativos consideram um processo iterativo em cada incremento de carga, corrigindo assim os erros a transmitir ao incremento seguinte.

O método de Newton-Raphson (NR) puro [5,7] constitui um método dispendioso, dado que implica a reformulação da matriz de rigidez da estrutura em todas as iterações do processo incremental. Foram desenvolvidas por diferentes autores diversos métodos de reduzir o custo computacional deste método na análise não linear de estruturas. Foram considerados, entre outros, os métodos de Newton Modificados, os métodos Quasi-Newton e Secante-Newton e do Gradiente Conjugado [2,9,10].

Estes métodos apresentam dificuldades para ultrapassar pontos limite na curva de equilíbrio da estrutura em estudo. Exemplos destes fenómenos são os comportamentos tipo "snap-back" e "snap-through", muito frequentes na análise de instabilidade geométrica de cascas finas. Em ambos os casos, verifica-se que com os métodos anteriores não é possível conhecer o comportamento completo da estrutura, sendo

necessário recorrer a outros métodos. Os métodos de Controlo do Comprimento do Arco[9-13], são habitualmente usados com sucesso para contornar estas dificuldades.

Neste capítulo, apresentam-se os diversos métodos à disposição do projectista para a análise não linear de estruturas, bem como se estuda o comportamento de estruturas tipo casca, com materiais compósitos ou sandwich. Estes métodos representam uma capacidade acrescida e uma grande flexibilidade para qualquer código de elementos finitos, tendo sido adoptados neste trabalho. De acordo com as características da análise a realizar, poderá o utilizador, em qualquer momento, optar por um dos métodos.

3.3.1 - O método de Newton-Raphson

Em qualquer problema de análise estrutural, procura-se obter a solução de um sistema de equações de equilíbrio. Adoptando a formulação de deslocamentos do método dos elementos finitos, esse sistema de equações tem a forma

$$\underline{K}\underline{d} = \underline{f} \quad (3.25)$$

em que \underline{K} é a matriz de rigidez global da estrutura, simétrica, não singular, obtida a partir da contribuição dos diferentes elementos ou macro-elementos da estrutura [1]; \underline{d} é o vector dos deslocamentos nodais (solução); e \underline{f} é o vector das forças nodais exteriores.

A solução linear deste sistema é obtida directamente, a partir da inversa da matriz de rigidez. Se o problema é não linear, no entanto, a matriz de rigidez é dependente de \underline{d} e os métodos de solução directa não são aplicáveis. Os métodos incrementais-iterativos passam então a ser os mais indicados, em particular o método de Newton-Raphson (NR) pela sua simplicidade e pela sua capacidade.

Tendo em conta que a carga total se encontra dividida num determinado número de incrementos, e para um dado incremento de carga n , pode escrever-se o sistema de equações não linear, sob a forma linearizada como

$$\underline{\varphi}(\underline{d}^n) = \underline{r}(\underline{d}^n) - \underline{f}^n = \underline{0} \quad (3.26)$$

em que \underline{f}^n é o vector das forças nodais aplicadas exteriores, associado ao incremento de carga n ; \underline{d}^n é o vector dos deslocamentos nodais a encontrar; $\underline{r}(\underline{d}^n)$ é o vector das forças nodais equivalentes internas (equivalentes à distribuição das tensões) encontrada no final do incremento de carga n e cujo valor é definido por

$$\underline{r}^n = \int_V (\underline{B}^n)^T \underline{\sigma}^n dV \quad (3.27)$$

e finalmente $\underline{\varphi}(\underline{d}^n)$ é o vector das forças residuais ou não equilibradas associado ao incremento de carga n .

Designando por \underline{d}_i^n uma estimativa do vector de deslocamentos para o incremento corrente e para a iteração i , à qual corresponde um vector de forças residuais $\underline{\varphi}(\underline{d}_i^n) \geq \underline{0}$ pode obter-se um valor mais correcto dos deslocamentos, \underline{d}_{i+1}^n , através do desenvolvimento em série de Taylor limitada de $\underline{\varphi}(\underline{d}_{i+1}^n)$ na vizinhança de \underline{d}_i^n ou seja,

$$\underline{\varphi}(\underline{d}_{i+1}^n) \equiv \underline{\varphi}(\underline{d}_i^n) + \left. \frac{\partial \underline{\varphi}(\underline{d})}{\partial \underline{d}} \right|_i^n \delta \underline{d}_i^n = \underline{0} \quad (3.28)$$

Esta equação pode ser reescrita, na seguinte forma:

$$\underline{\varphi}(\underline{d}_{i+1}^n) \equiv \underline{\varphi}(\underline{d}_i^n) + \underline{K}_{T_i}^n \delta \underline{d}_i^n = \underline{0} \quad (3.29)$$

onde $\underline{K}_{T_i}^n$ representa a matriz de rigidez global tangencial da estrutura em análise. O vector da variação dos deslocamentos $\delta \underline{d}_i^n$ pode ser obtido, modificando (3.29) na forma

$$\delta \underline{d}_i^n = -[\underline{K}_{T_i}^n]^{-1} \underline{\varphi}(\underline{d}_i^n) \quad (3.30)$$

A solução pode então ser corrigida, obtendo-se o novo vector dos deslocamentos como

$$\underline{d}_{i+1}^n = \underline{d}_i^n + \delta \underline{d}_i^n \quad (3.31)$$

Estas equações apresentadas constituem a base do método NR, para a solução de sistemas de equações não lineares. A sua representação esquemática para um sistema unidimensional é ilustrada na figura 3.1. Refira-se que, em cada incremento de carga, o número de iterações a efectuar depende de um determinado critério de convergência.

Para sistemas em que as forças são conservativas, ou seja em que o vector das forças exteriores aplicadas na estrutura não depende do vector dos deslocamentos, a matriz de rigidez tangencial pode ser calculada como

$$\underline{K}_T = \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{d}} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{d}} \quad (3.32)$$

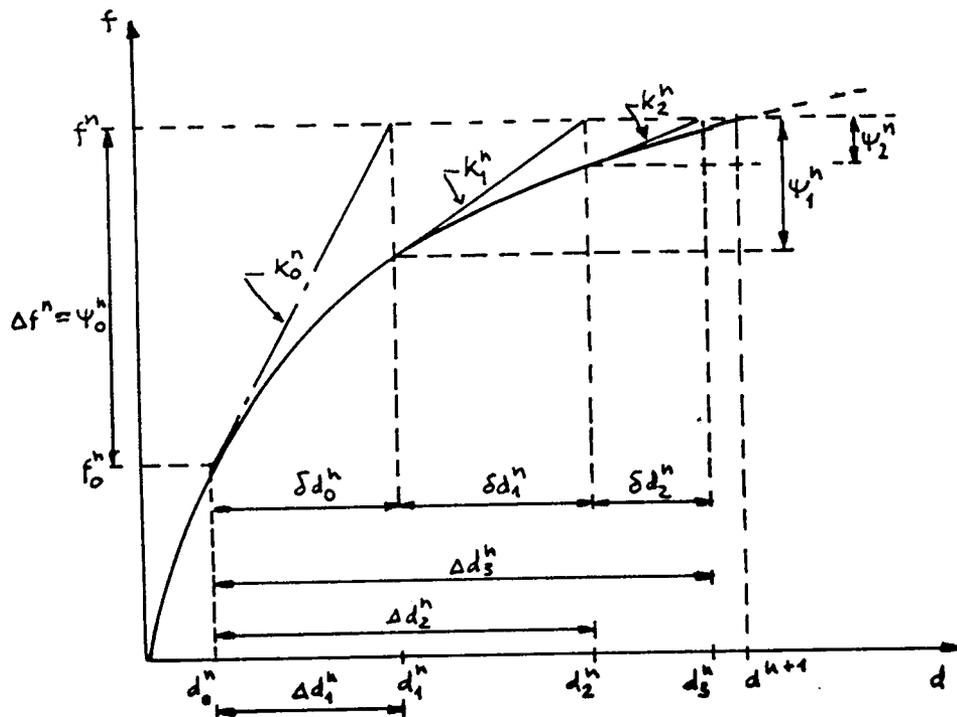


Figura 3.1 - Ilustração do método de Newton-Raphson para um sistema unidimensional

3.3.2 - Os métodos de Newton-Raphson modificados

O método de NR na análise não linear de estruturas envolve, em cada incremento de carga e em cada iteração, o cálculo da matriz de rigidez tangencial e a sua inversa, tal como indicado na expressão 3.30. Dependendo do número de elementos da estrutura e do número de incrementos de carga, este cálculo pode significar um enorme esforço de cálculo. Em materiais compósitos ou sandwich esta questão é ainda mais relevante, dado tratarem-se de estruturas laminadas multicamadas, sendo necessário recorrer a uma discretização verdadeiramente tridimensional, aumentando assim o tempo de cálculo. Existem diversas formas de diminuir esse esforço de cálculo, através da modificação do método de NR, em que a matriz de rigidez é mantida constante em parte do processo e actualizada apenas noutra parte. De acordo com os métodos em causa, esta actualização varia e vai ser explicada de seguida.

3.3.2.1 - O método da rigidez inicial

Neste método, apresentado por Zienkiewicz et al. [14], utiliza-se a matriz de rigidez elástica inicial, em todo o processo incremental-iterativo. Esta matriz é calculada na

primeira iteração do primeiro incremento de carga, como é ilustrado na figura 3.2. Esta abordagem reduz drasticamente o cálculo da matriz de rigidez, mas tem como desvantagem a menor velocidade de convergência do processo [15]. O esforço de computação passa então a ser importante, dado o número de iterações necessário para se atingir a convergência. Este método é muitas vezes denominado K_0 . Devido às características deste método, foram encontradas alternativas, em que a matriz de rigidez é actualizada apenas uma vez em cada incremento de carga.

3.3.2.2 - Os métodos KT1 e KT2

No método KT1 a matriz tangente é actualizada na primeira iteração de cada incremento de carga, figura 3.3, enquanto que no método KT2 a actualização se faz no início da segunda iteração e após a aplicação do incremento de carga na primeira iteração, figura 3.4.

A equação 3.30 passa a ter a forma seguinte, de acordo com o método

Método

$$\text{KT1} \quad \delta \underline{d}_{i-1}^n = -[\underline{K}_{T_0}^n]^{-1} \underline{\varphi}(\underline{d}_{i-1}^n); \quad i \geq 1 \quad (3.33)$$

$$\text{KT2} \quad \delta \underline{d}_{i-1}^n = -[\underline{K}_{T_1}^n]^{-1} \underline{\varphi}(\underline{d}_{i-1}^n), \quad i \geq 2 \quad (3.34)$$

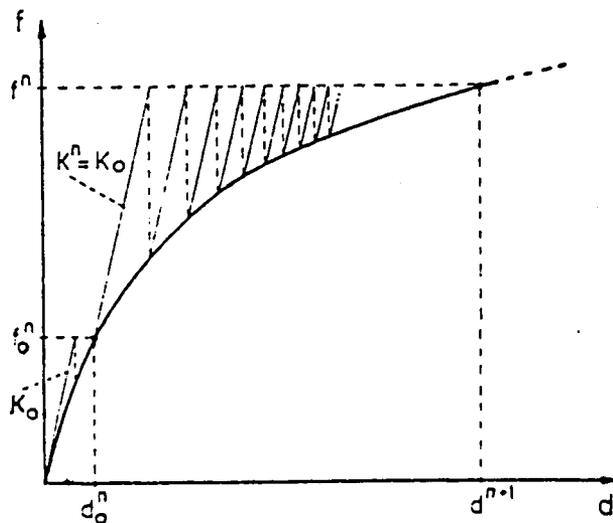


Figura 3.2 - O método da rigidez inicial para um sistema unidimensional

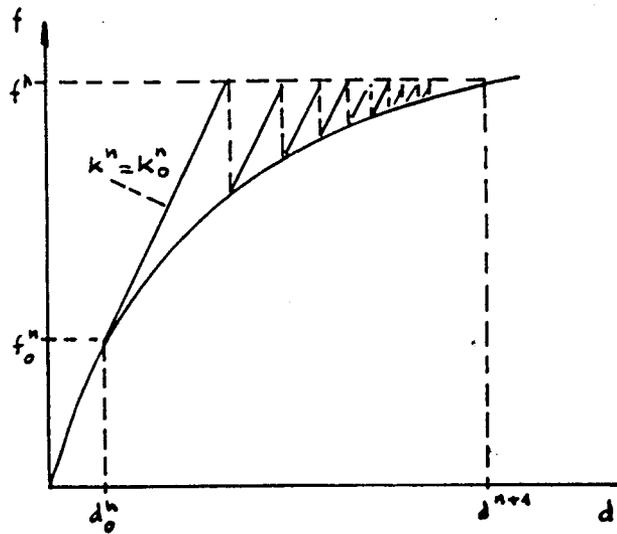


Figura 3.3 - Método KT1 para um sistema unidimensional

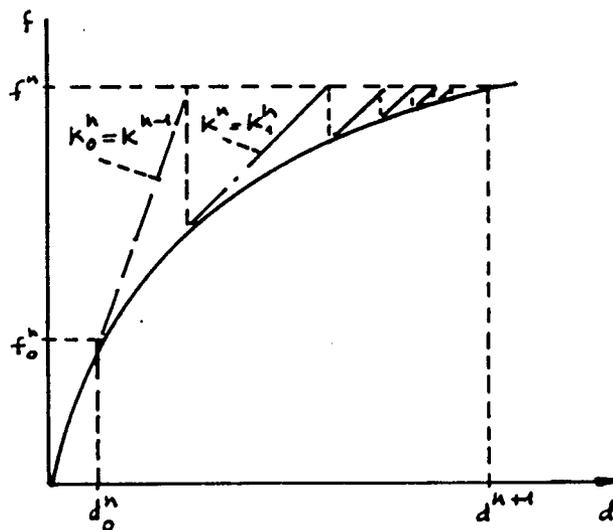


Figura 3.4 - Método KT2 para um sistema unidimensional

Estes métodos conduzem habitualmente a uma diminuição da velocidade de convergência, que é quadrática no método de NR [15], ou até à divergência do processo iterativo. A primeira situação ocorre sempre que haja diminuição da rigidez e a segunda pode ser contornada aplicando incrementos de carga menores. Estes métodos podem ainda ser complementados com esquemas aceleradores de convergência do tipo Aitken [16-18], ou Alpha-Constant [18]. Em alternativa aos métodos anteriores, existe também o método de Line-Search, que consiste na correcção do vector da variação dos deslocamentos calculados, por forma a minimizar a energia potencial do sistema [15]. Este método não será explicado, podendo os interessados consultar [15], como uma boa referência nestes métodos.

3.3.3 - Métodos de controlo do comprimento do arco

Em comportamentos não lineares extremos como no caso de "snap-back" e "snap-through", frequentes na análise da instabilidade geométrica de cascas finas, os métodos iterativos convencionais são inadequados para a definição completa da curva de equilíbrio, cujo completo conhecimento é essencial para a obtenção do colapso da estrutura. Na figura 3.5 apresenta-se um exemplo de uma curva característica onde se evidenciam as dificuldades mencionadas. Numa formulação incremental pura para as cargas aplicadas, a solução passaria do ponto B para o ponto D, ignorando o comportamento do sistema relativamente ao segmento BD da curva de equilíbrio. Esta passagem é referida na literatura como "snap-through", ou seja um salto da solução para um novo estado de deslocamentos a carga constante, podendo ser solucionada se na análise os deslocamentos forem prescritos incrementalmente. Outro problema ocorre com o salto de E para F, com variação de carga a deslocamento constante, fenómeno designado por "snap-back".

Os métodos de controlo do comprimento do arco tornaram possível a completa definição da curva de equilíbrio, para além dos pontos limite, permitindo assim definir os pontos de colapso da estrutura. Estes métodos permitem ainda uma melhoria das características de convergência dos métodos iterativos convencionais, como os métodos de NR modificados.

Registe-se que estes métodos têm maior interesse na análise não linear de laminados compósitos monolíticos do que em laminados sandwich, pela pequena espessura dos primeiros e pela maior espessura dos segundos. Os fenómenos indicados na figura 3.5 ocorrem com maior probabilidade em estruturas de casca fina.

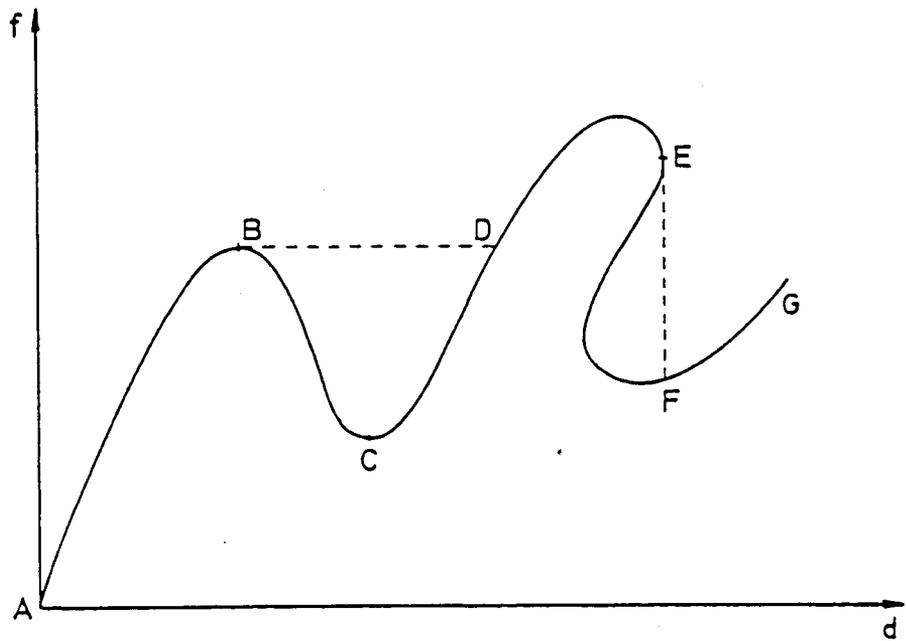


Figura 3.5 - Curva de equilíbrio típica em regime não linear geométrico

3.3.3.1 - Formulação genérica

A principal característica destes métodos é a introdução de uma condição de restrição extra no comprimento do vector iterativo $(\Delta \underline{d}_i, \Delta \lambda_i)$. O vector de forças residuais toma a forma

$$\underline{\varphi} = \underline{p} - \lambda \underline{q} \quad (3.35)$$

onde \underline{q} é um vector fixo de carga aplicada e λ , uma variável extra, representa o factor de carga. Pode escrever-se, para qualquer ajuste de carga $\delta \lambda_i$

$$\underline{\varphi}_i(\lambda_i + \delta \lambda_i) = \underline{\varphi}_i(\lambda_i) - \delta \lambda_i \underline{q} \quad (3.36)$$

Pode então corrigir-se os deslocamentos correntes como

$$\underline{\delta}_i(\lambda_i + \delta \lambda_i) = \underline{\delta}_i(\lambda_i) + \delta \lambda_i \underline{\delta}_T \quad (3.37)$$

onde

$$\underline{\delta}_T = \underline{K}_{Ti}^{-1} \underline{q} \quad (3.38)$$

Conhecendo $\delta \lambda_i$, pode calcular-se

$$\Delta \underline{d}_{i+1} = \Delta \underline{d}_i + \underline{\delta}_i(\lambda_i + \delta \lambda_i) = \Delta \underline{d}_i + \underline{\delta}_i + \delta \lambda_i \underline{\delta}_T \quad (3.39)$$

A forma como se irá calcular $\delta\lambda_i$, o ajuste do nível de carga, depende do método de constrição usado para o vector iterativo.

3.3.3.2 - Método da formulação esférica

Neste método, a equação de constrição é dada por

$$\Delta \underline{d}_i^T \Delta \underline{d}_i + b \Delta \lambda_i^2 = \Delta l^2 \quad (3.40)$$

onde Δl é um valor prescrito do comprimento do arco para o incremento de carga corrente [11]. O termo esférico resulta do facto das iterações, na satisfação das equações de constrição, se enquadrarem numa esfera n-dimensional de raio Δl . O processo é ilustrado na figura 3.6 para diferentes valores de b . Ao substituirmos (3.39) em (3.40) o factor $\delta\lambda_i$ pode ser calculado a partir da equação quadrática resultante

$$a_1 \delta \lambda_i^2 + a_2 \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (3.41)$$

onde

$$a_1 = \underline{\delta}_T^T \underline{\delta}_T + b \quad (3.42)$$

$$a_2 = 2[(\Delta \underline{d}_i + \underline{\delta}_i)^T \underline{\delta}_T + b \Delta \lambda_i] \quad (3.43)$$

$$a_3 = (\Delta \underline{d}_i + \underline{\delta}_i)^T (\Delta \underline{d}_i + \underline{\delta}_i) + b \Delta \lambda_i^2 - \Delta l^2 \quad (3.44)$$

Estas equações fornecem duas soluções, sejam $(\Delta \underline{d}_{i+1,1}, \Delta \lambda_{i+1,1})$ e $(\Delta \underline{d}_{i+1,2}, \Delta \lambda_{i+1,2})$. Escolhe-se o vector iterativo que é mais próximo ao anterior. Os cosenos dos ângulos que estes dois vectores formam com o anterior, ou seja,

$$\cos \theta_1 = \frac{\Delta \underline{d}_{i+1,1}^T \Delta \underline{d}_i + \Delta \lambda_i^2 + \delta \lambda_{i,1} \Delta \lambda_i}{\Delta l^2} \quad (3.45)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\Delta \underline{d}_{i+1,2}^T \Delta \underline{d}_i + \Delta \lambda_i^2 + \delta \lambda_{i,2} \Delta \lambda_i}{\Delta l^2} \quad (3.46)$$

fornecem a informação necessária para o critério de escolha. Se estes valores tiverem sinais diferentes, escolhemos o $\delta\lambda_i$ que implica um coseno positivo, dado corresponder a um ângulo agudo [11]. Se ambos os cosenos forem positivos, Crisfield[11] propõe a escolha do $\delta\lambda_i$ mais perto da solução linear $\delta\lambda_i = -\frac{a_3}{a_2}$. Este processo é equivalente a escolher o $\delta\lambda_i$ com o menor valor absoluto [12]. Para o primeiro incremento de carga, impomos um determinado parâmetro de carga $\Delta\lambda_0$ após convergência calculamos o "comprimento" do incremento como

$$\Delta l^1 = \Delta \lambda_0 \sqrt{\delta_T^T \delta_T + b} \quad (3.47)$$

Para todos os incremento de carga além do primeiro, o parâmetro de carga inicial é definido como

$$\Delta \lambda_0^j = \frac{\Delta l^{j-1}}{\sqrt{\delta_T^T \delta_T + b}} \quad (3.48)$$

Habitualmente[11], em vez de se usar Δl^{j-1} na equação (3.48) o comprimento de arco é escalado por forma a usar menores comprimentos em não linearidades severas e maiores incrementos noutras regiões. Isto é possível fazendo

$$\Delta l_{\text{novo}}^{j-1} = \Delta l_{\text{velho}}^{j-1} \sqrt{\frac{I_d}{I_{j-1}}} \quad (3.49)$$

onde I_d é o número ideal de iterações necessárias à convergência e I_{j-1} é o o número de iterações do último incremento.

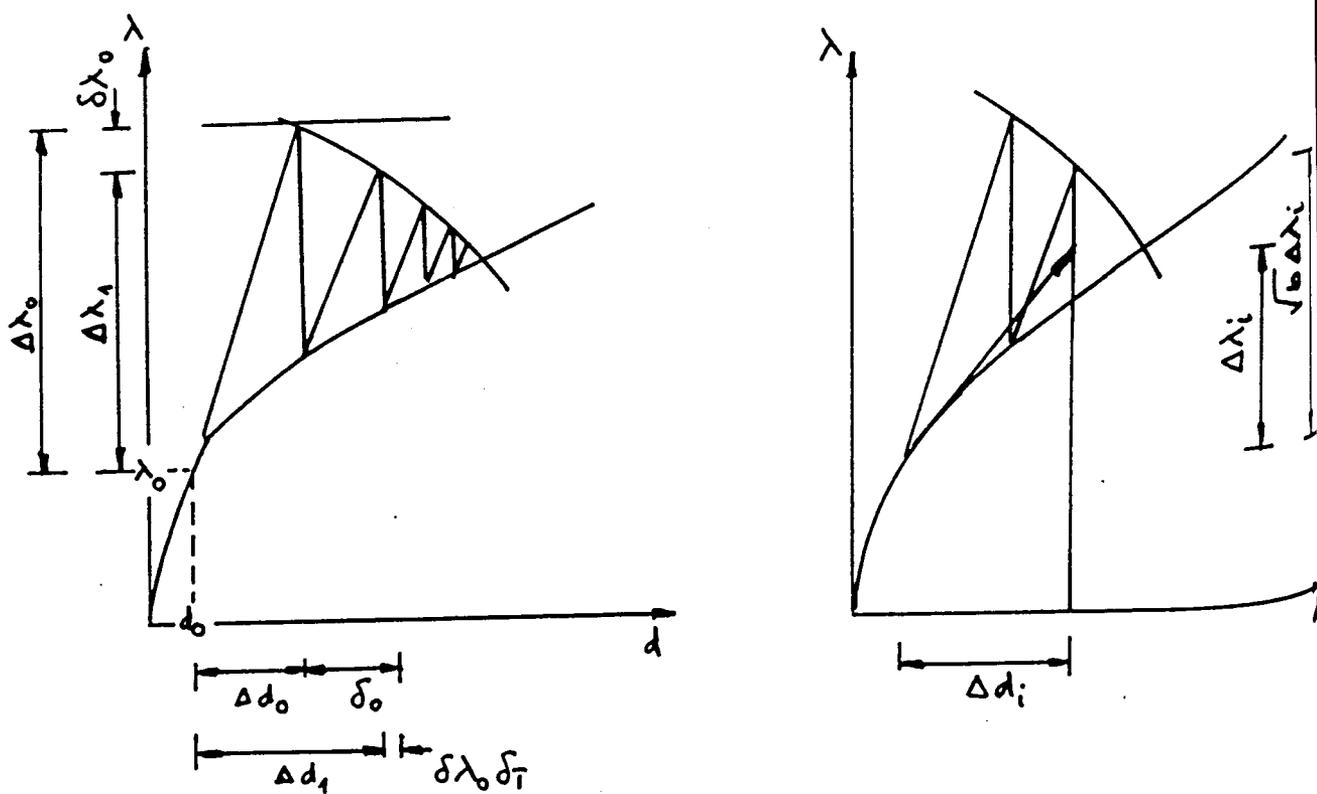


Figura 3.6 a-Formulação esférica com $b=1$ Figura 3.6b - Formulação esférica com $b \neq 1$

3.3.3.3 - Método do plano normal

Nestes métodos, o comprimento do arco inicial é definido como no método anterior, mas as equações de constrição são diferentes [35]. No chamado método do plano normal fixo (figura 3.7), impõe-se um caminho normal ao vector iterativo inicial por

$$(\Delta \underline{d}_o, \Delta \lambda_o)(\Delta \underline{d}_{i+1} - \Delta \underline{d}_i, \delta \lambda_i) = 0 \quad (3.50)$$

sendo então $\delta \lambda_i$ calculado como

$$\delta \lambda_i = -\frac{\Delta \underline{d}_o^T \underline{\delta}_i}{\Delta \underline{d}_o^T \underline{\delta}_T + \Delta \lambda_o} \quad (3.51)$$

No método do plano normal actualizado (figura 3.8) o processo é similar, mas neste caso para cada iteração o caminho é constringido a ser normal ao vector iterativo anterior e assim a equação de constrição vem dada por

$$(\Delta \underline{d}_i, \Delta \lambda_i)(\Delta \underline{d}_{i+1} - \Delta \underline{d}_i, \delta \lambda_i) = 0 \quad (3.52)$$

obtendo-se

$$\delta \lambda_i = -\frac{\Delta \underline{d}_i^T \underline{\delta}_i}{\Delta \underline{d}_i^T \underline{\delta}_T + \Delta \lambda_i} \quad (3.53)$$

Em [12] Sá corrige o “comprimento” incremental por forma a diminuir os comprimentos excessivos que tornam a convergência lenta. Após o cálculo de $\delta \lambda_i$, calcula-se um factor correctivo de acordo com

$$k = \frac{\sqrt{\Delta \underline{d}_{i+1}^T \Delta \underline{d}_{i+1} + (\Delta \lambda_i + \delta \lambda_i)^2}}{\sqrt{\Delta \underline{d}_i^T \Delta \underline{d}_i + (\Delta \lambda_i)^2}} \quad (3.54)$$

sendo o vector iterativo definido agora como

$$\underline{d}_{i+1} = k(\Delta \underline{d}_i + \underline{\delta}_i + \delta \lambda_i \underline{\delta}_T) \quad (3.55)$$

$$\Delta \lambda_{i+1} = k(\Delta \lambda_i + \delta \lambda_i) \quad (3.56)$$

Para $b=1$ a iteração toma o lugar duma esfera n-dimensional (figura 3.9).

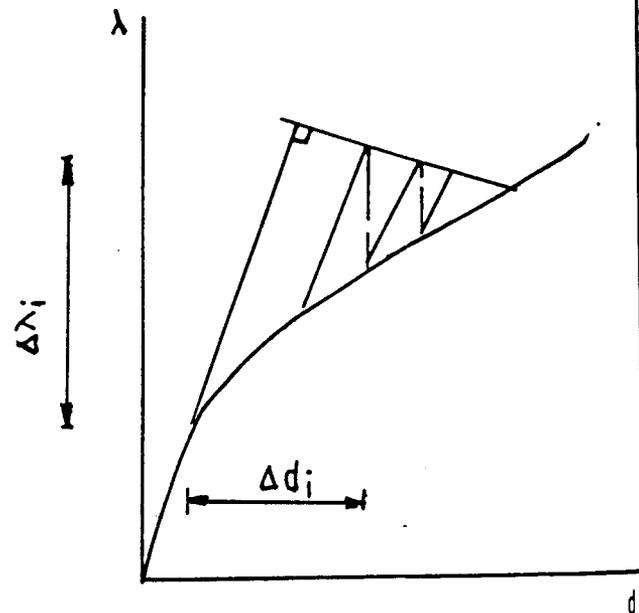


Figura 3.7 - Método do plano normal

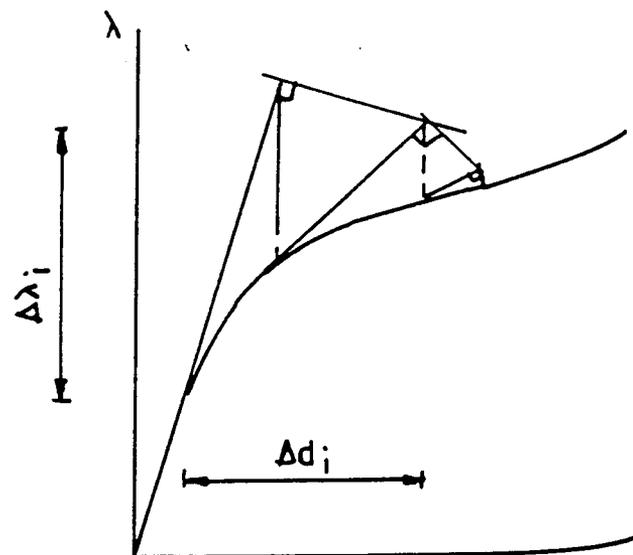


Figura 3.8 - Método do plano normal actualizado

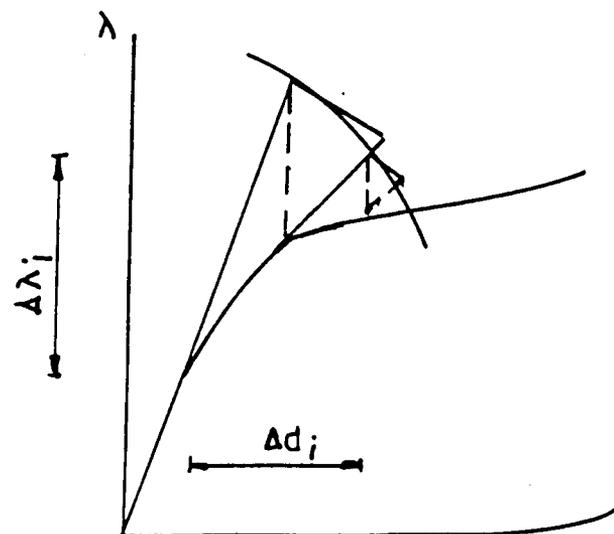


Figura 3.9 - Método do plano normal actualizado com "correção" do comprimento

3.3.3.4 - Método de controlo do deslocamento

Este método, em que se seleciona uma única componente de deslocamentos como o parâmetro de controlo do método, foi inicialmente introduzido por Argyris [36] mas foi posteriormente modificado [34,37-39]. Regista-se, em particular, as modificações de Batoz e Dhatt[34] que colocam este método no conjunto dos anteriores. A condição de constrição consiste em tornar a componente iterativa do deslocamento escolhido \underline{d}_{i+1}^k igual a um certo valor \bar{d} , tal que

$$\Delta \underline{d}_{i+1}^k = \Delta \underline{d}_i^k + \underline{\delta}_i^k + \delta \lambda_i \underline{\delta}_T^k = \bar{d} \quad (3.57)$$

e assim, neste caso

$$\delta \lambda_i = \frac{\bar{d} - (\underline{d}_i^k + \underline{\delta}_i^k)}{\underline{\delta}_T^k} \quad (3.58)$$

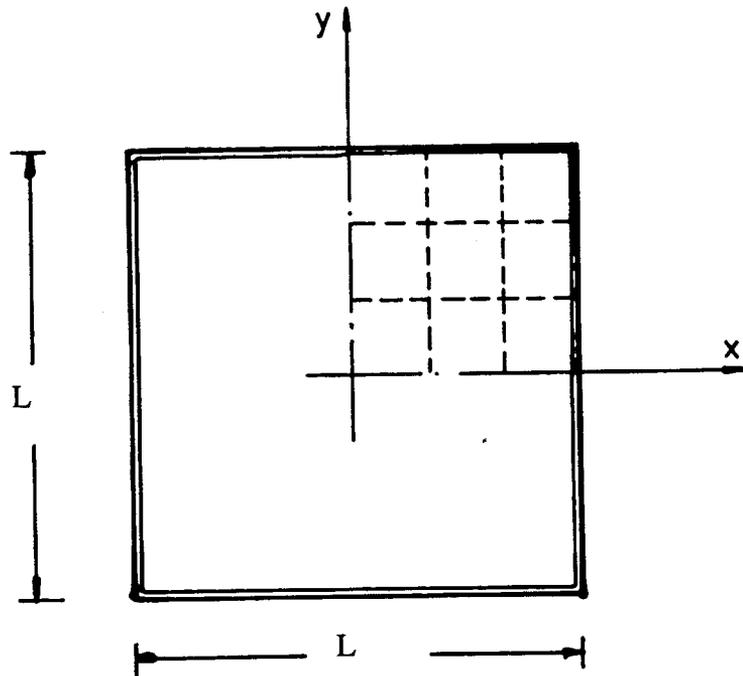
Este método tem particular interesse em problemas onde um determinado grau de liberdade tenha relevância.

3.4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

De seguida apresentam-se dois exemplos numéricos da análise geométrica não linear de placas e cascas laminadas compósitas e sandwich. No primeiro exemplo, uma placa quadrada encastrada sujeita a carga uniformemente distribuída é analisada. No segundo exemplo, uma casca cilíndrica simplesmente apoiada é sujeita a carga pontual central. Em ambos os exemplos são estudados vários laminados e são comparadas as respostas estruturais das três teorias de deformação apresentadas no capítulo 2.

3.4.1 - Placa quadrada encastrada sob carga uniformemente distribuída

Uma placa quadrada encastrada sujeita a uma carga uniformemente distribuída é analisada. A geometria e as propriedades mecânicas estão especificadas na figura 3.10. Um quarto da placa é dividido em 9 elementos de 8 nós. É utilizada a integração reduzida. A tolerância utilizada para verificar a convergência do processo não linear é de 0.25% em termos das forças residuais.



laminado a	Isotrópico		
laminado b	0.1 h		$E_{\text{pele}} = 10 E_{\text{núcleo}}$
	0.8 h		núcleo
	0.1 h		pele
laminado c	0.1 h		$E_{\text{pele}} = 100 E_{\text{núcleo}}$
	0.8 h		núcleo
	0.1 h		pele
laminado d	0.1 h		$E_{\text{pele}} = 1000 E_{\text{núcleo}}$
	0.8 h		núcleo
	0.1 h		pele
laminado e	0.1 h		$E_{\text{pele}} = 1000 E_{\text{núcleo}}$
	0.6 h		núcleo
	0.3 h		pele

Figura 3.10 - Placa quadrada encastrada - geometria, malha e materiais

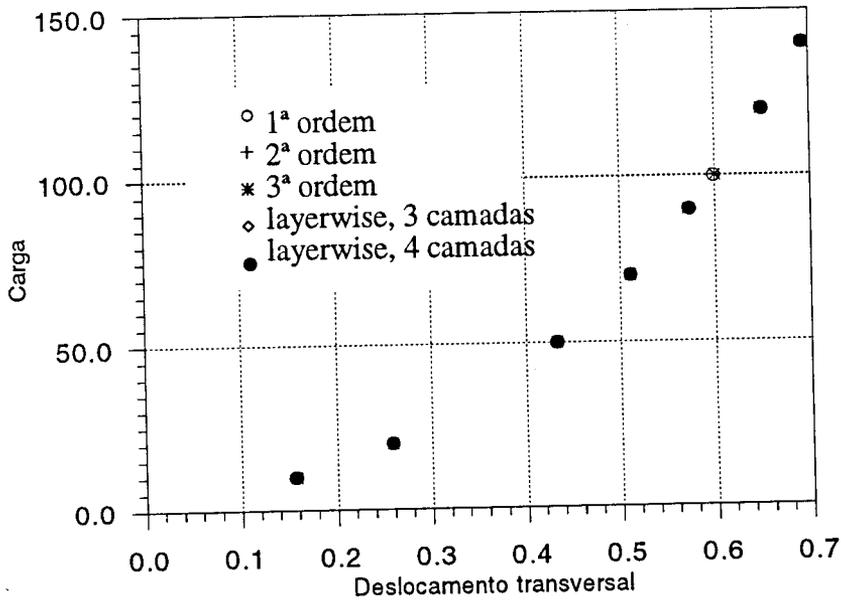


Figura 3.11 - Curva carga-deslocamento central transversal, laminado (a), $L/h=20$

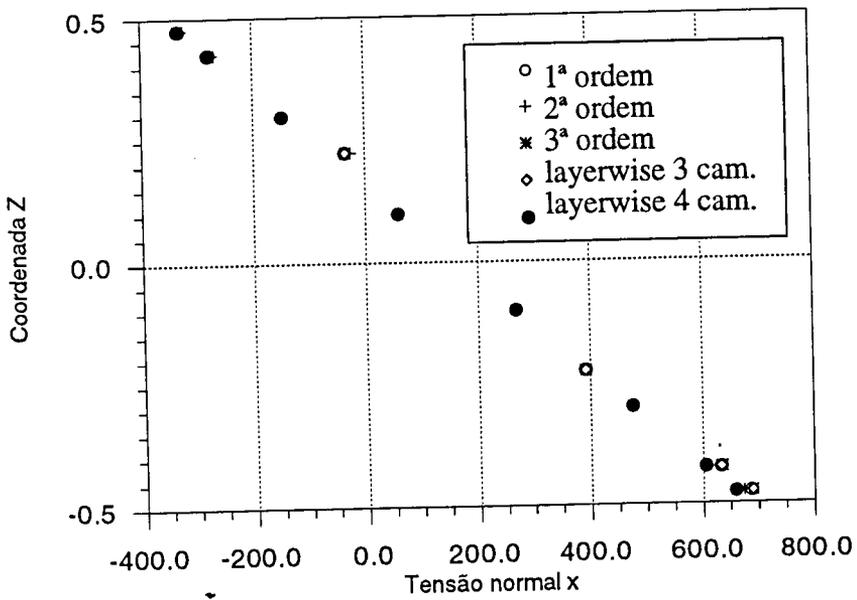


Figura 3.12 - Laminado isotrópico (a), $L/h=20$, tensão normal x

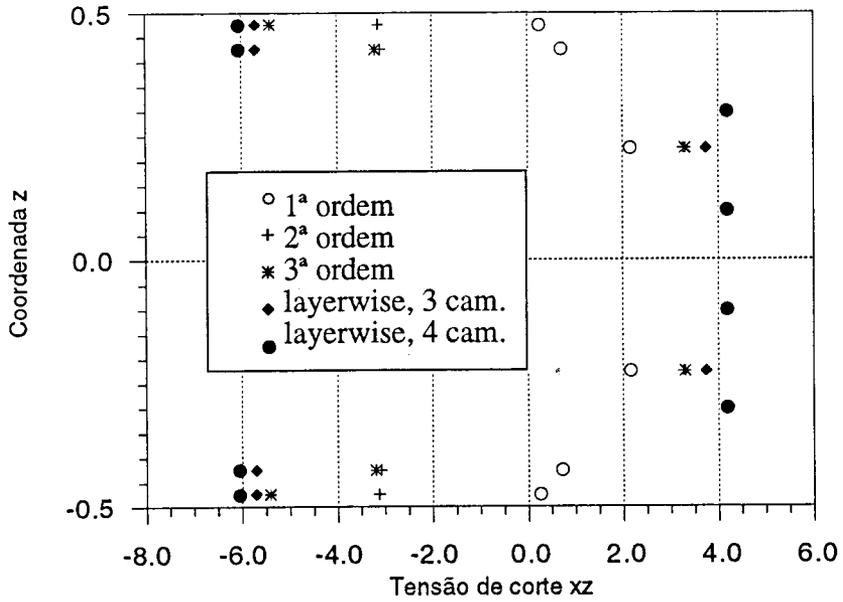


Figura 3.13 - Laminado isotrópico (a), $L/h=20$, tensão de corte τ_{xz} , (0,0)

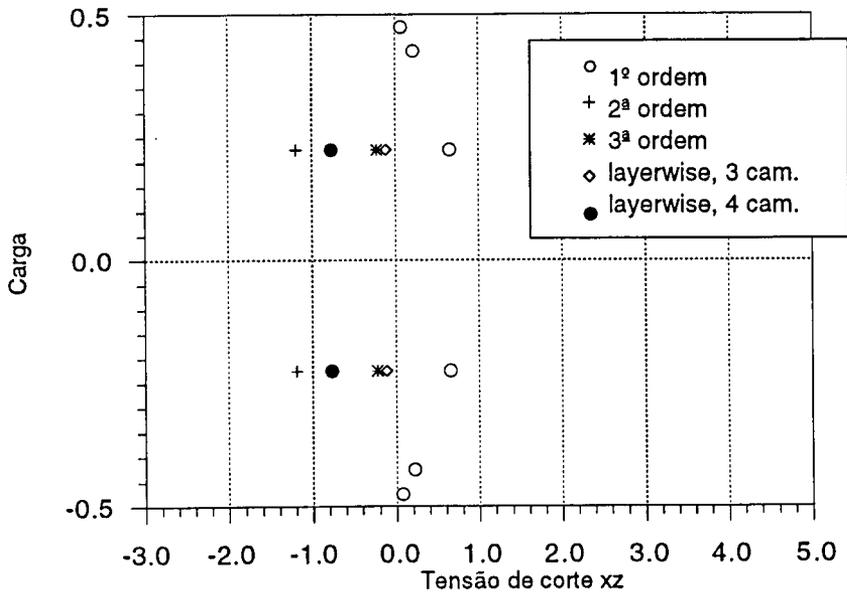


Figura 3.14 - Laminado isotrópico (a), $L/h=20$, tensão de corte τ_{xz} , ($L/2,0$)

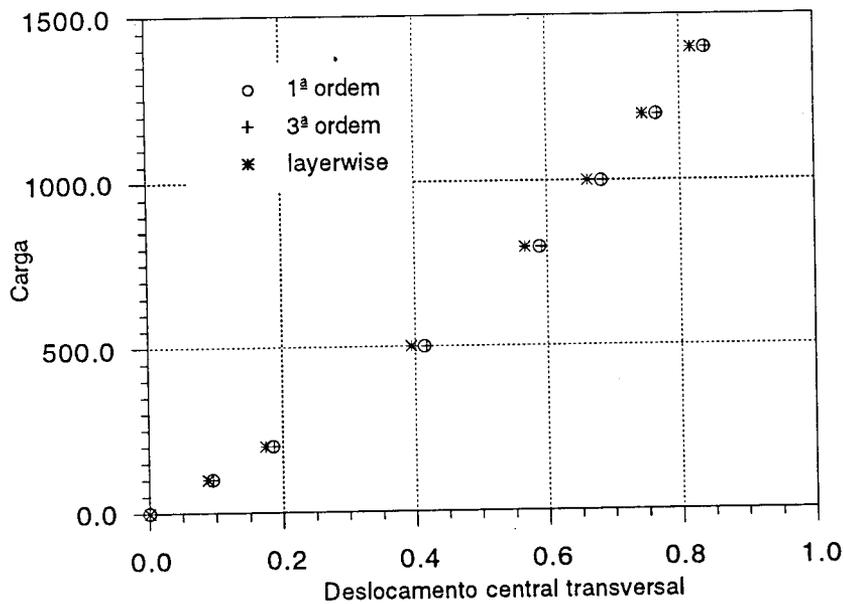


Figura 3.15 - Laminado isotrópico (a), $L/h=6$, carga-deslocamento central

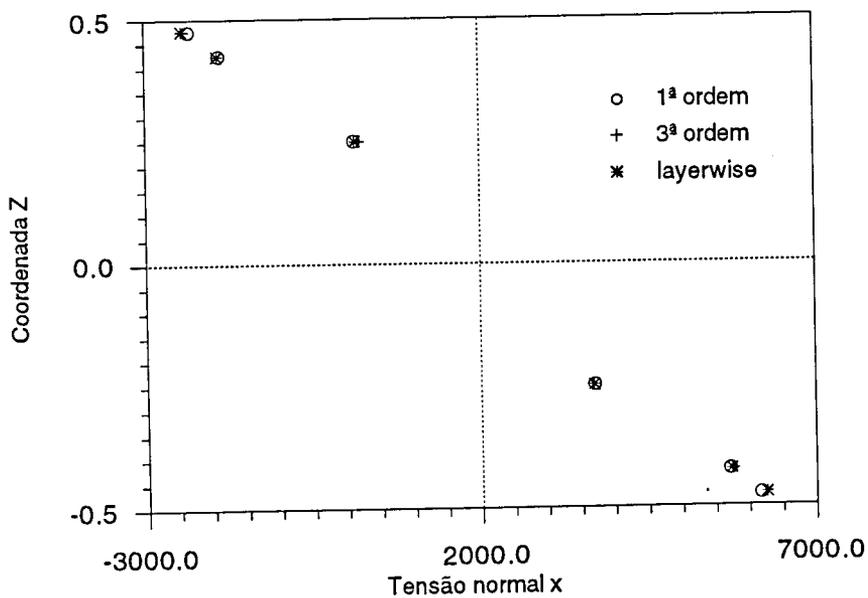


Figura 3.16 - Laminado isotrópico (a), $L/h=6$, tensão normal x, (0,0), carga =1400

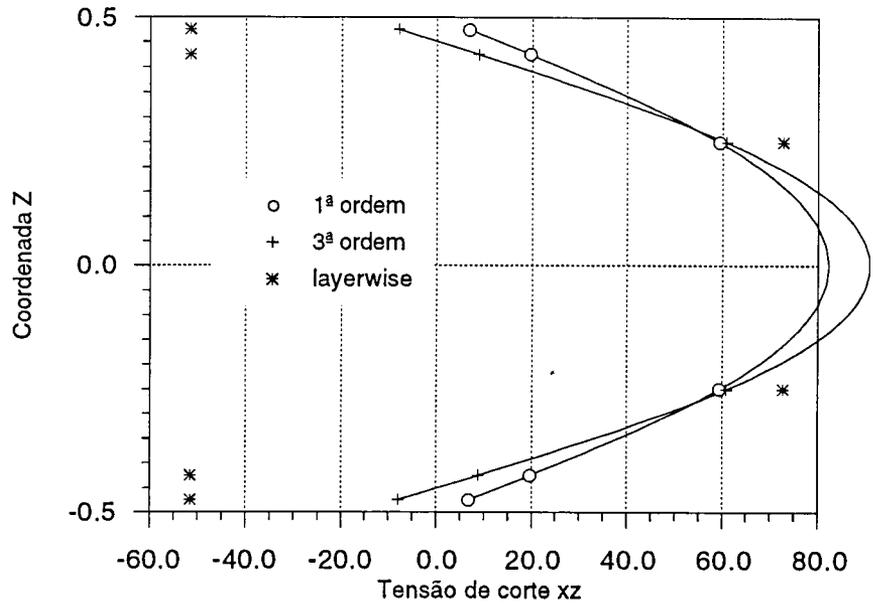


Figura 3.17 - Laminado isotrópico (a), $L/h=6$, tensão de corte xz , $(0,0)$, carga =1400

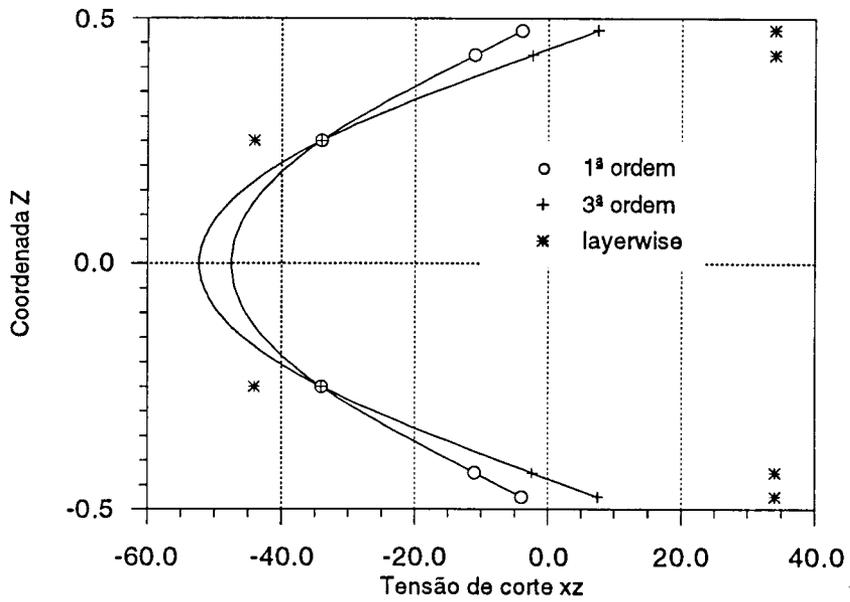


Figura 3.18 - Laminado isotrópico (a), $L/h=6$, tensão de corte xz , $(L/2,0)$, carga =1400

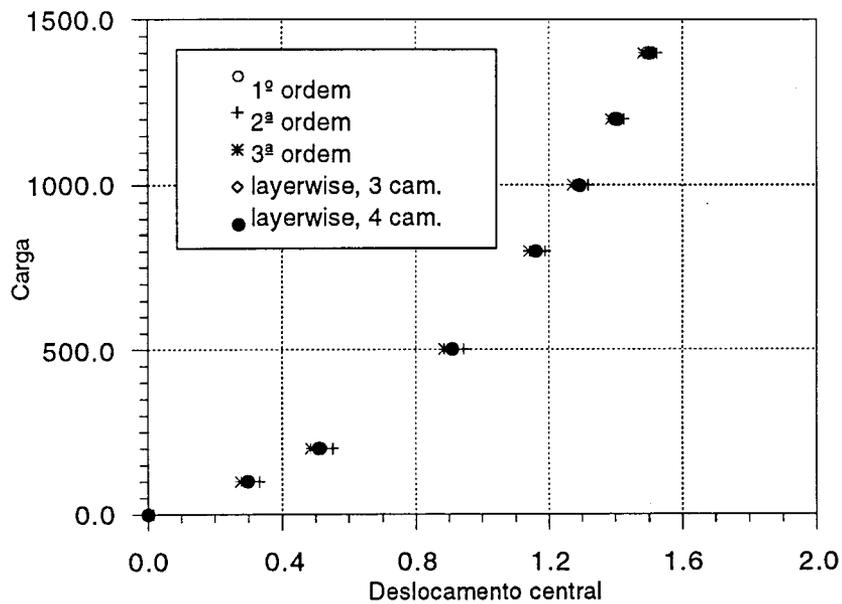


Figura 3.19 - Laminado (b), $L/h=6$, carga-deslocamento

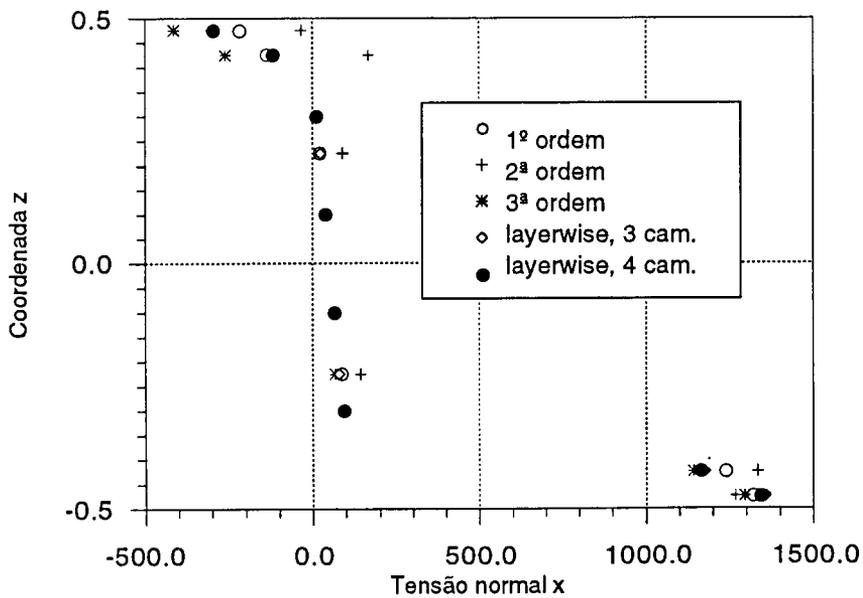


Figura 3.20 - Laminado (b), $L/h=6$, tensão normal x, (0,0)

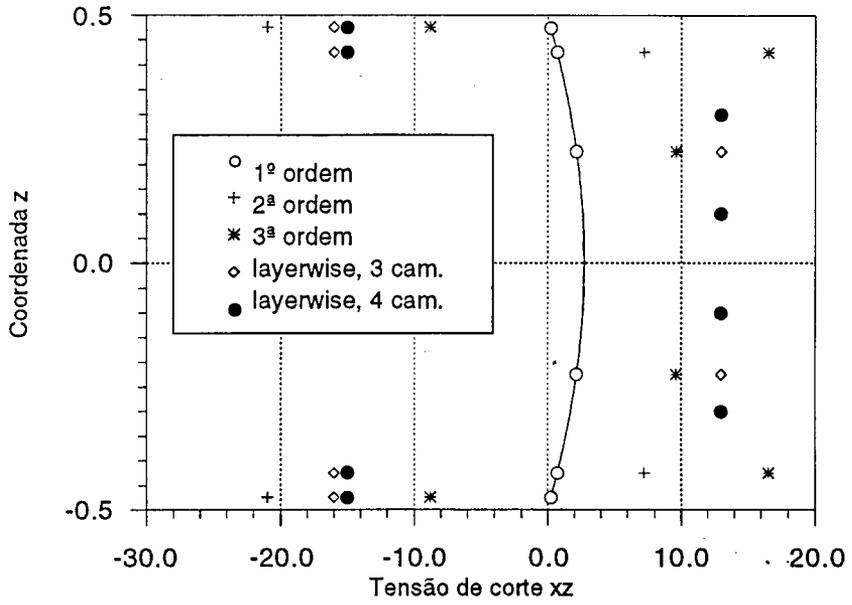


Figura 3.21 - Laminado (b), $L/h=6$, tensão de corte xz, (0,0)

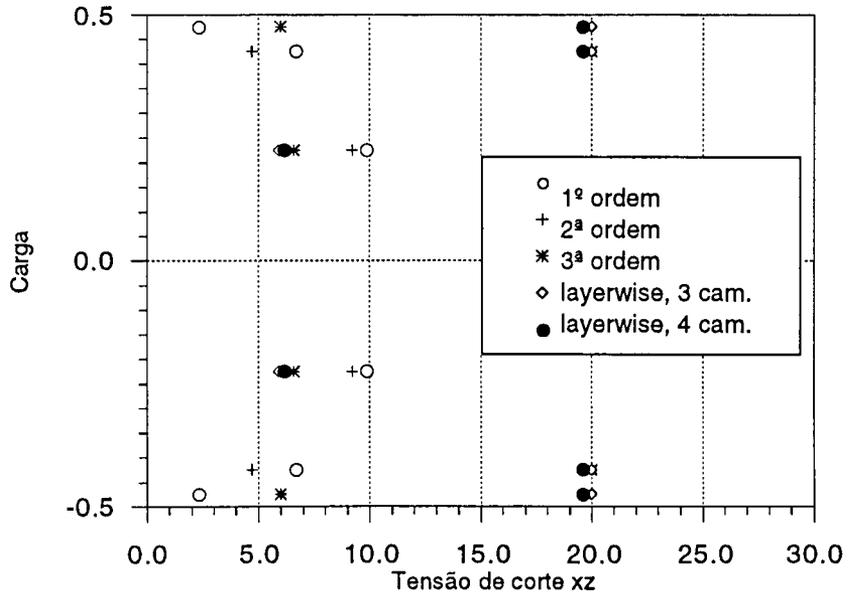


Figura 3.22 - Laminado (b), $L/h=6$, tensão de corte xz, (L/2,0)

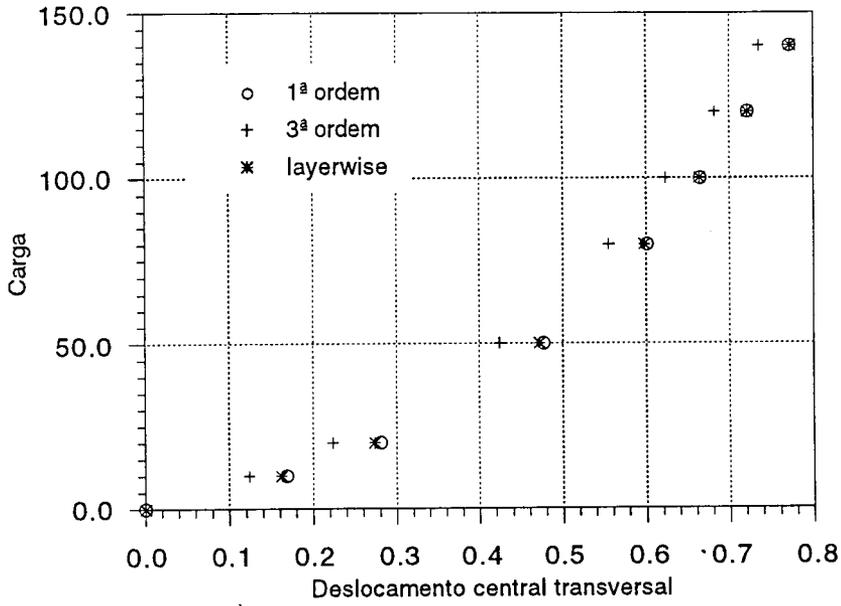


Figura 3.23 - Laminado (b), $L/h=6$, curva carga-deslocamento

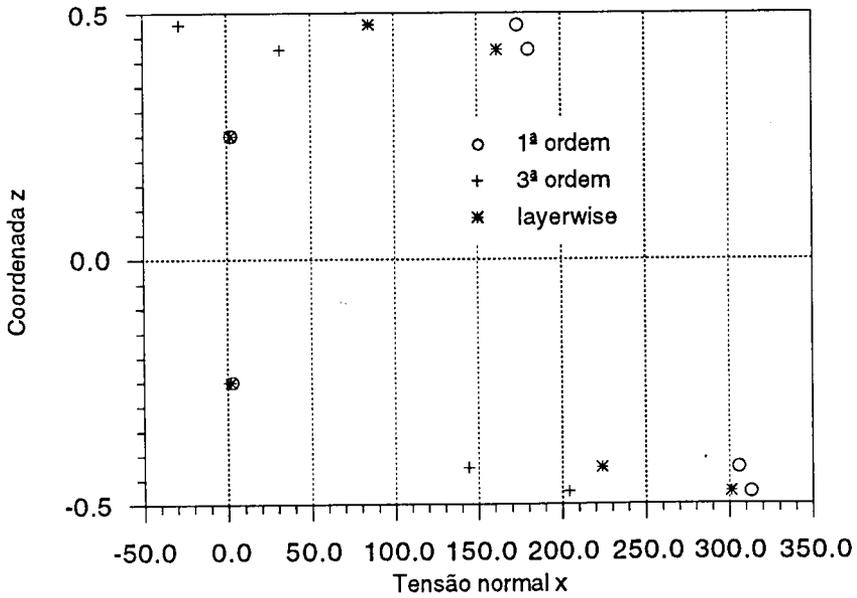


Figura 3.24 - Laminado (c), $L/h=6$, tensão normal x (0,0)

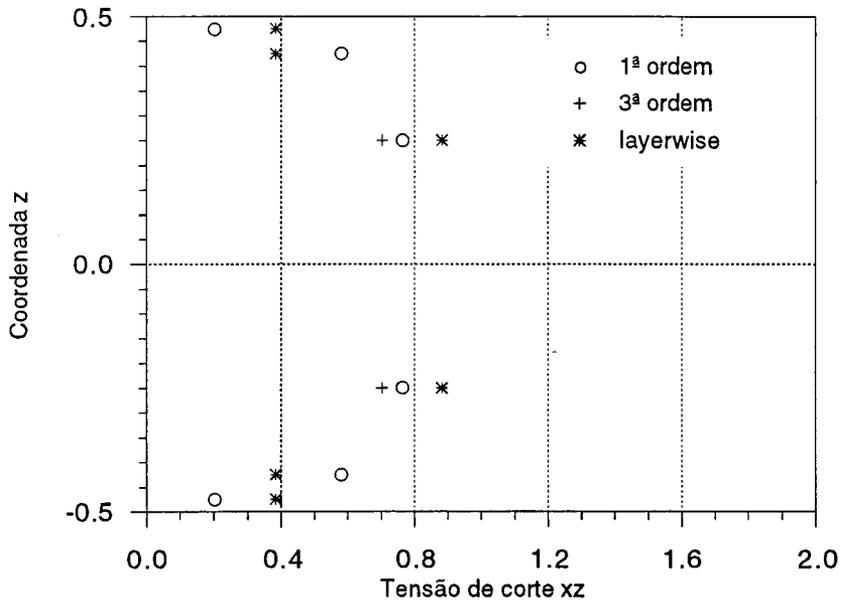


Figura 3.25 - Laminado (c), $L/h=6$, tensão de corte xz (0,0)

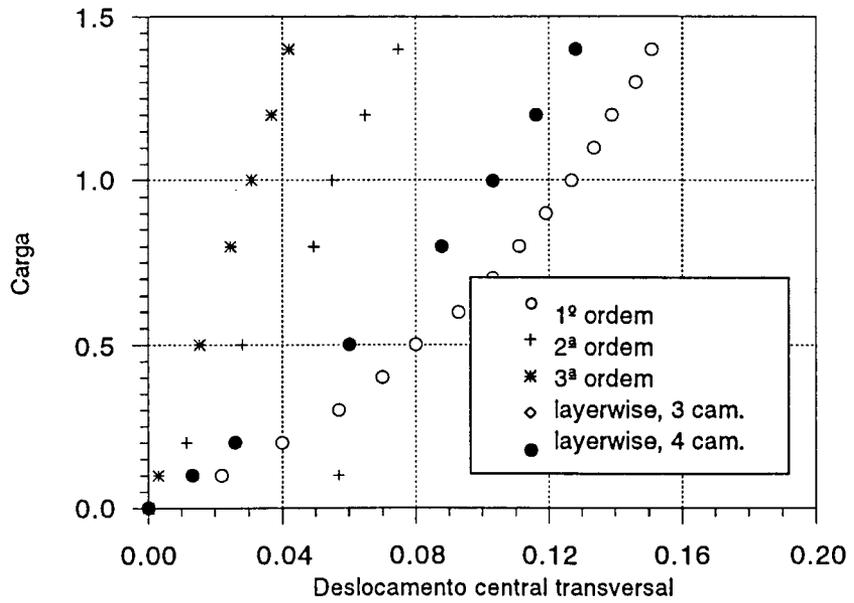


Figura 3.26 - Laminado (d), $L/h=6$, carga-deslocamento

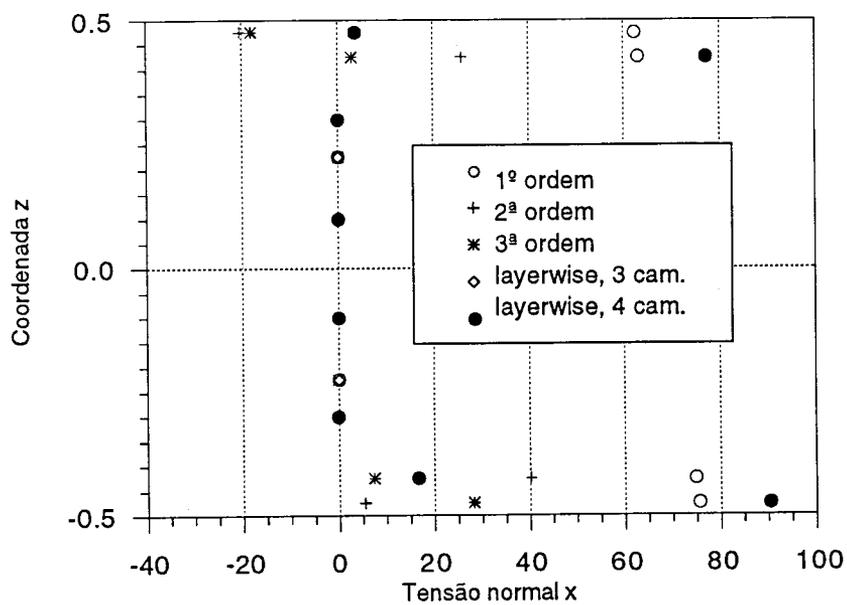


Figura 3.27 - Laminado(d), $L/h=6$, tensão normal x

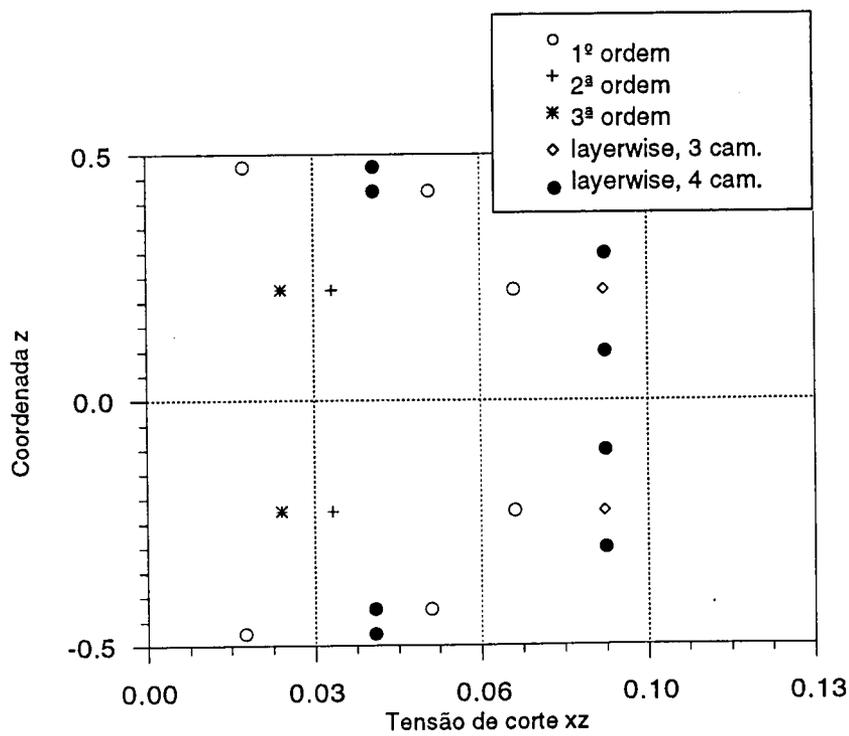


Figura 3.28 - Laminado (d), $L/h=6$, tensão de corte xz (0,0)

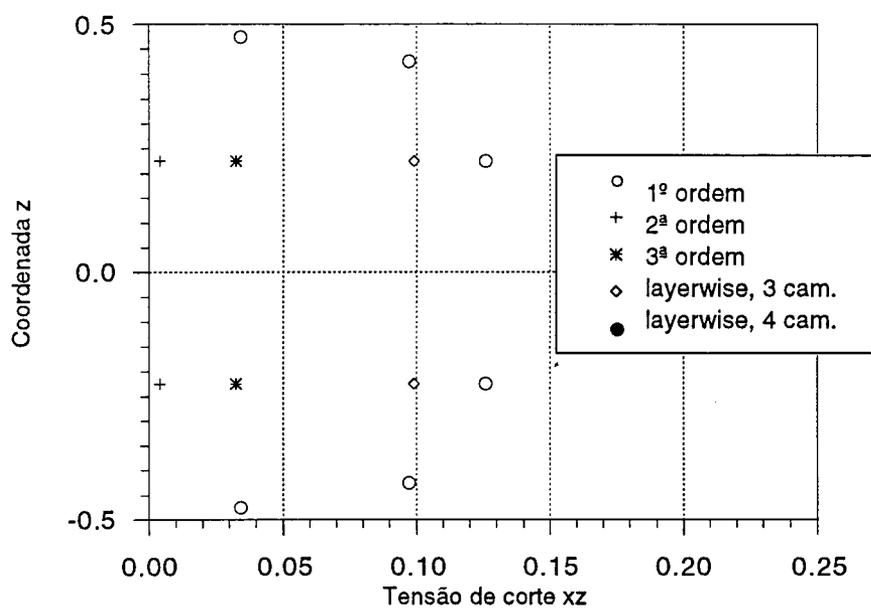


Figura 3.29 - Laminado (d), $L/h=6$, tensão de corte xz ($L/2,0$)

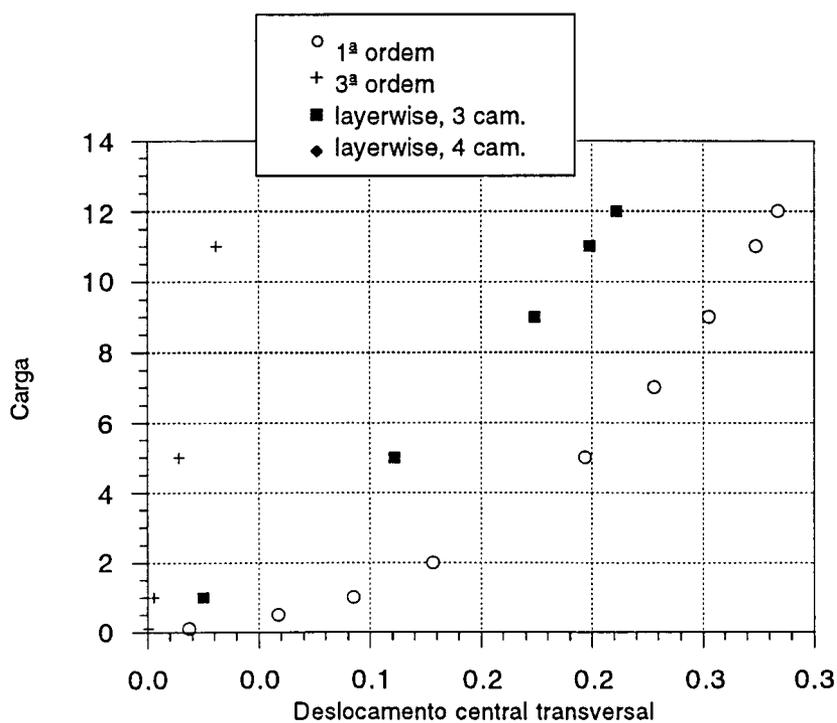


Figura 3.30 - Laminado não simétrico (e), $L/h=6$, carga-deslocamento

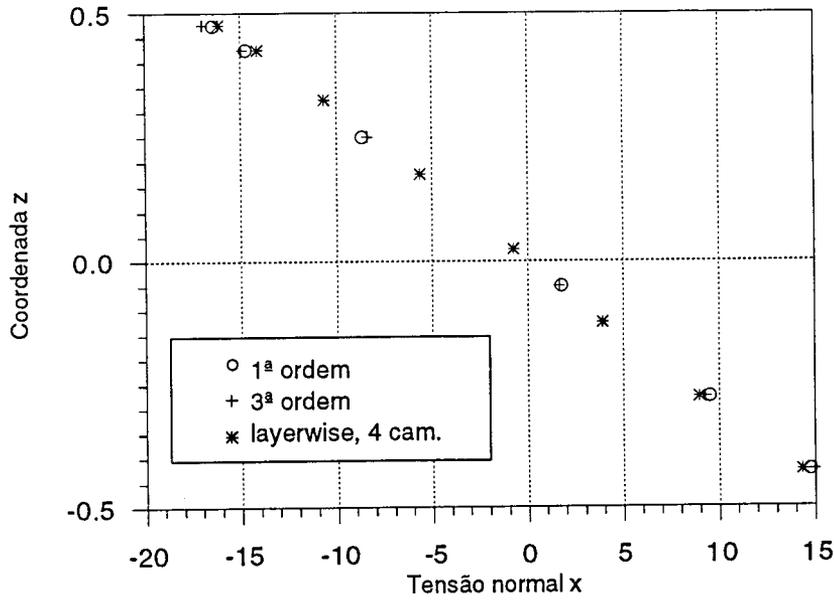


Figura 3.31 - Laminado não simétrico (e), $L/h=6$, tensão normal x

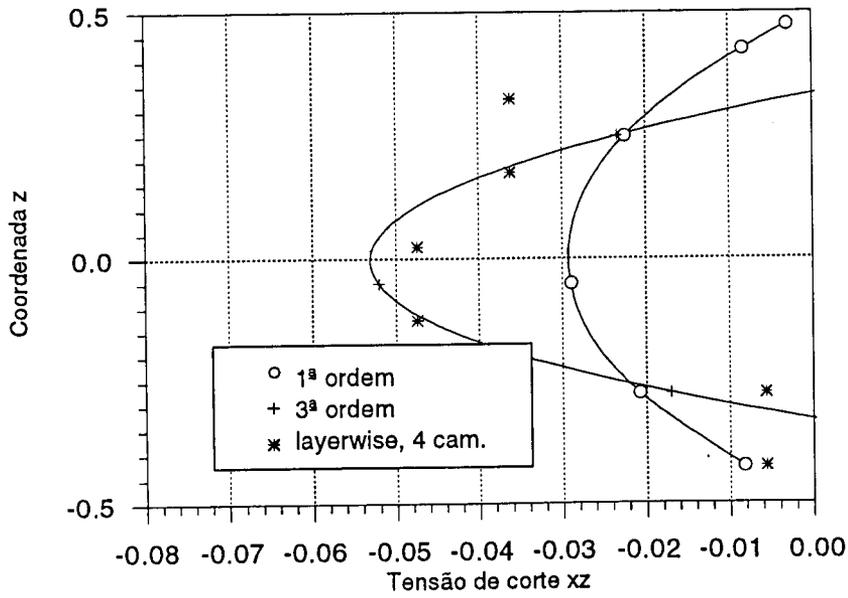


Figura 3.32 - Laminado não simétrico (e), $L/h=6$, tensão de corte xz (0,0)

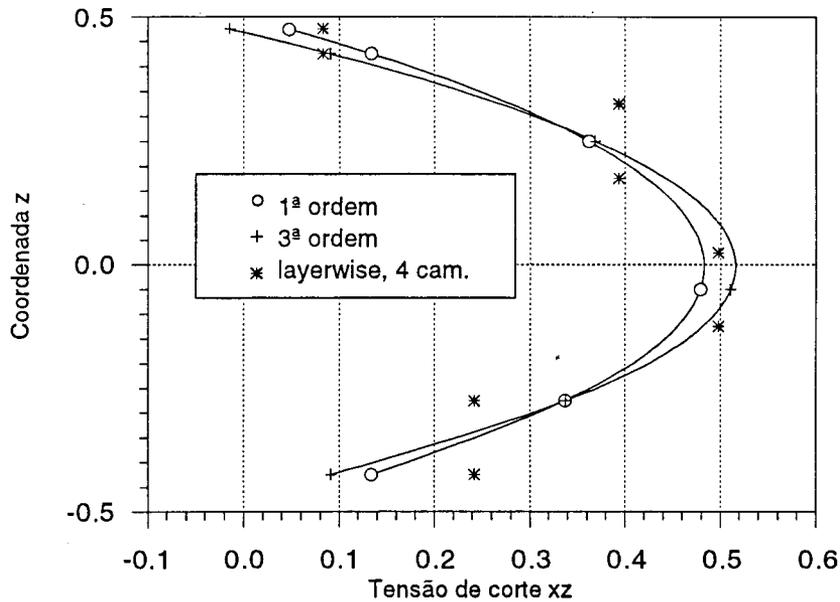


Figura 3.33 - Laminado não simétrico (e), $L/h=6$, tensão de corte xz ($L/2,0$)

Neste exemplo verifica-se boa aproximação das três teorias para o caso isotrópico, enquanto que à medida que na estrutura sandwich as razões dos módulos se tornam mais acentuadas, verificam-se variações mais ou menos pronunciadas nas tensões de corte transversa e no deslocamento central. Esta variação é eventualmente devida às diferentes interpretações das deformações de membrana em cada teoria. Pensa-se que a formulação layerwise, pela forma como representa a evolução da normal através da espessura, e consequentemente as deformações de corte, é aquela que apresenta uma solução mais coerente com a deformação real dos laminados sandwich.

3.4.2 - Casca cilíndrica sujeita a carga central pontual

Uma casca cilíndrica simplesmente apoiada nos bordos rectos é sujeita a carga central pontual. A geometria e as propriedades mecânicas estão especificadas na figura 3.34.

Neste exemplo verifica-se que, logo que a razão do módulo das peles e do núcleo atinge o valor de 100, há uma variação na resposta das três teorias de deformação. A grande disparidade verificada para razões de 1000 pode eventualmente residir na instabilidade numérica do sistema global de equações a resolver.

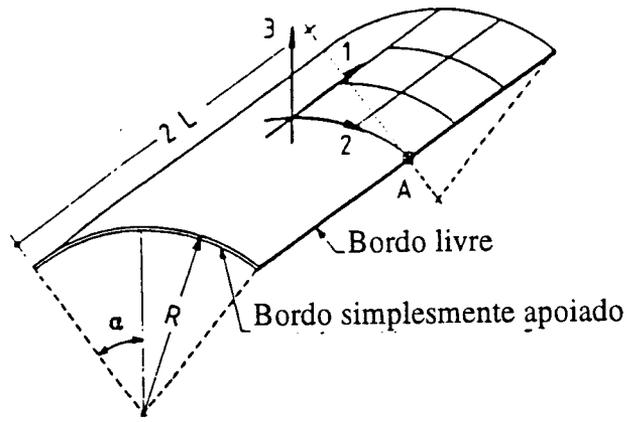


Figura 3.34 - Casca cilíndrica sujeita a carga central

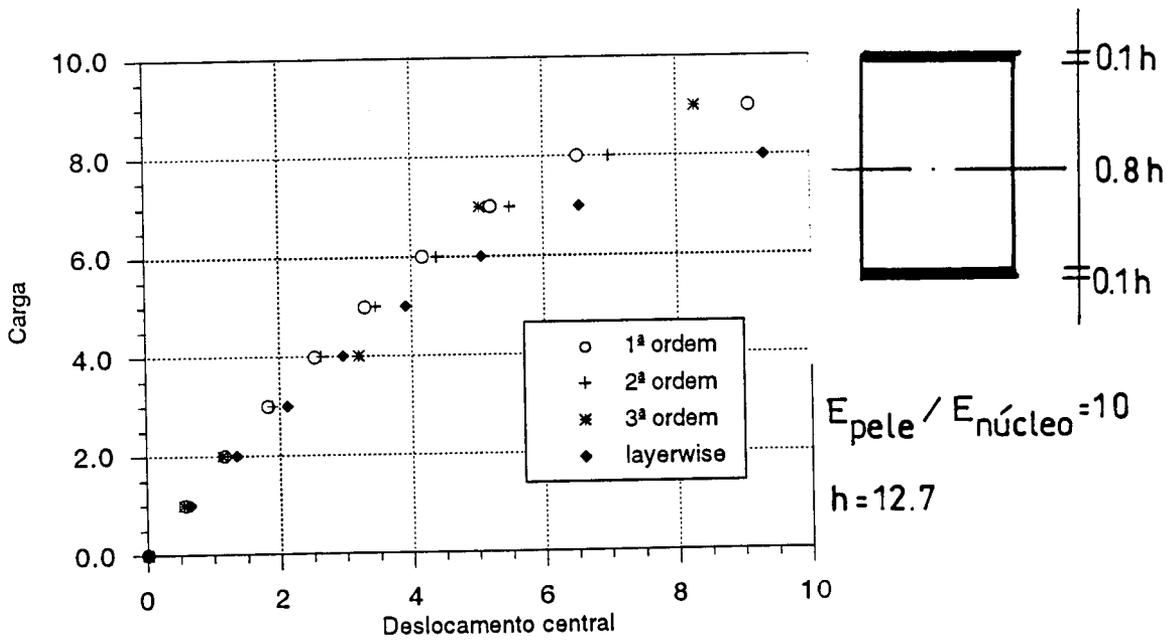


Figura 3.35 - Curva carga-deslocamento

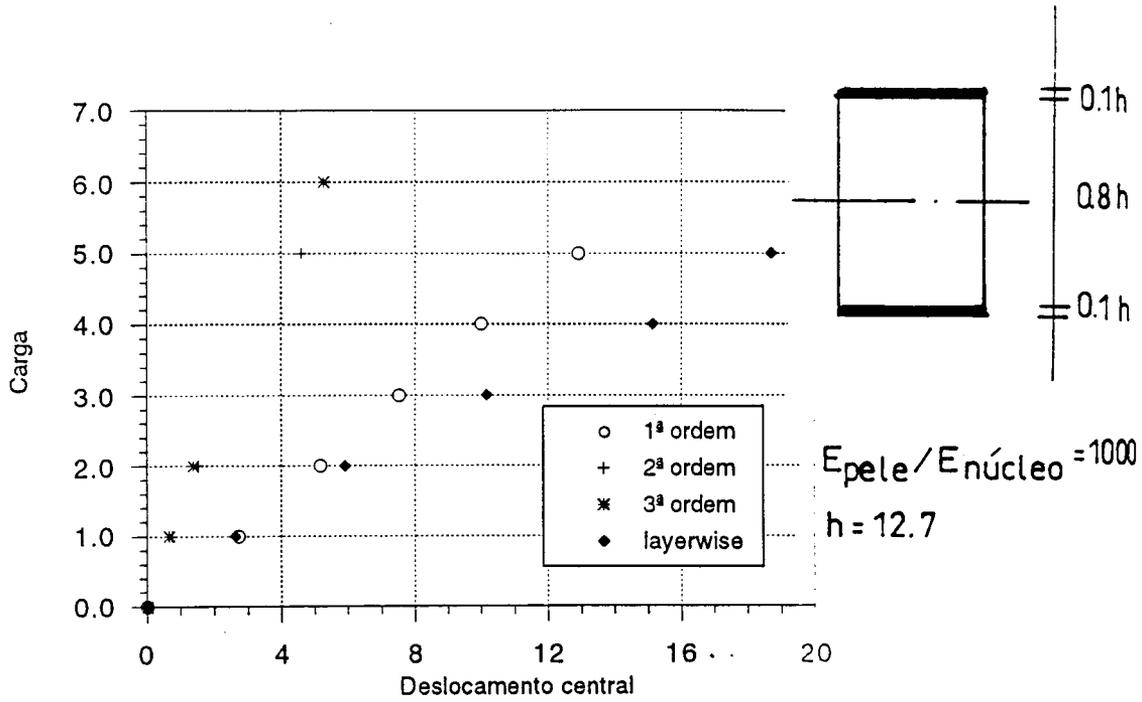


Figura 3.36 - Curva carga-deslocamento

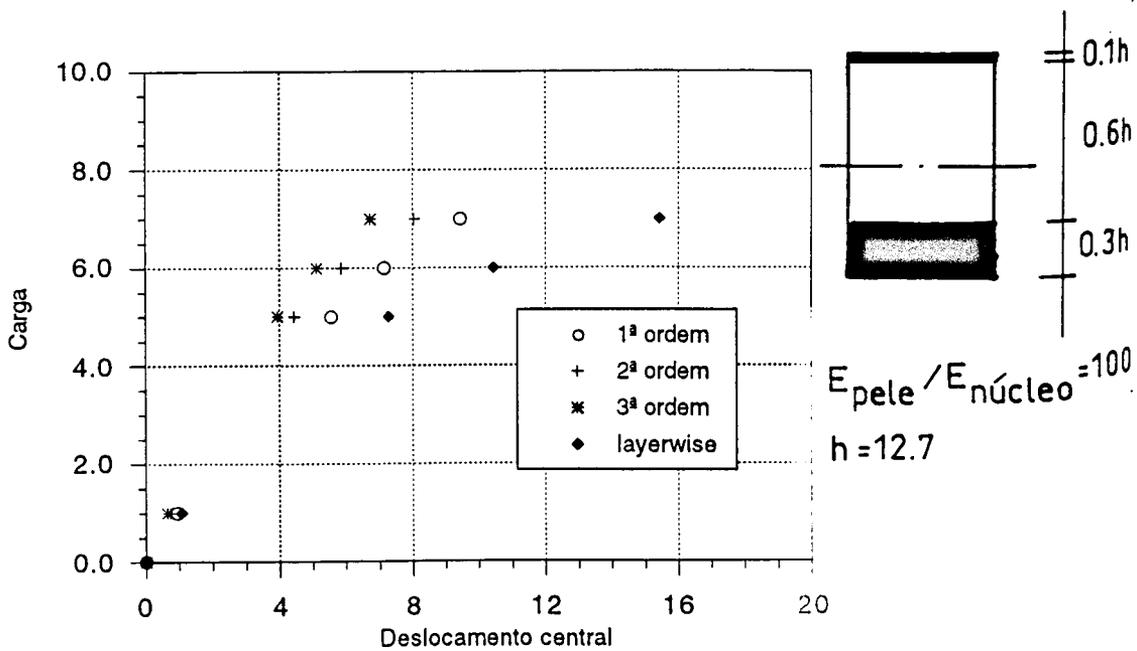


Figura 3.37 - Curva carga-deslocamento

3.4.3 - Casca cilíndrica sujeita a carga central pontual-análise da resposta inelástica até à instabilidade e pós-instabilidade

Este exemplo ilustra a utilização do método de controlo do comprimento o arco, para obter a resposta em equilíbrio estático instável duma casca elástica. A casca em questão é rebaixada, simplesmente apoiada nos bordos rectos e sujeita a uma carga pontual central. Dado que este exemplo foi estudado por muitos autores, a verificação desta análise é feita por comparação com os resultados publicados.

As dimensões da casca são ilustradas na figura 3.38. O material é linear elástico com um módulo de Young de 3.103 GPa e um coeficiente de Poisson de 0.3. Supondo que a casca deforma duma forma simétrica, discretiza-se um quadrante, com 16 elementos de 9 nós Heterosis.

Na figura 3.39 ilustra-se o deslocamento vertical (para baixo) do ponto sob a carga e do ponto médio sob o bordo livre da casca, em função da carga aplicada total. A casca colapsa instavelmente para uma carga de cerca de 600 N, com um abaixamento acentuado da carga até um valor de cerca de -380N ("snap-through"). No final desta fase de "snap-through", o ponto médio da casca movimenta-se para cima ligeiramente ("snap-back") dum deslocamento de cerca de 16.8 mm para 14.1 mm mesmo antes do fim do "snap-through". A casca rigidifica-se rapidamente à medida que a carga aumenta. Na configuração indeformada, o ponto central da casca está cerca de 12.7 mm acima dos bordos rectos. Da figura 3.39 pode ver-se que a instabilidade ocorre quando o ponto solicitado tem um deslocamento para baixo de cerca de 14.4 mm, quando está logo abaixo do plano horizontal definido pelos bordos rectos. No entanto, neste ponto de instabilidade, o ponto no centro do bordo livre só se deslocou para baixo cerca de 3 mm. No fim do "snap-through", o ponto sob a carga deslocou-se cerca de 16.3 mm, enquanto que o centro do bordo livre se deslocou cerca de 26.3 mm. Assim, durante este "snap", o ponto sob a carga só se movimenta num total de 2 mm, enquanto que o centro do bordo livre se movimenta de 23.3 mm.

Vários autores investigaram este mesmo problema [11,39,40] e os seus resultados são muito próximos dos aqui obtidos (teoria de 1ª ordem). Na figura 3.40 ilustra-se a comparação das várias soluções para a variação da carga com o deslocamento do ponto central (sob a carga).

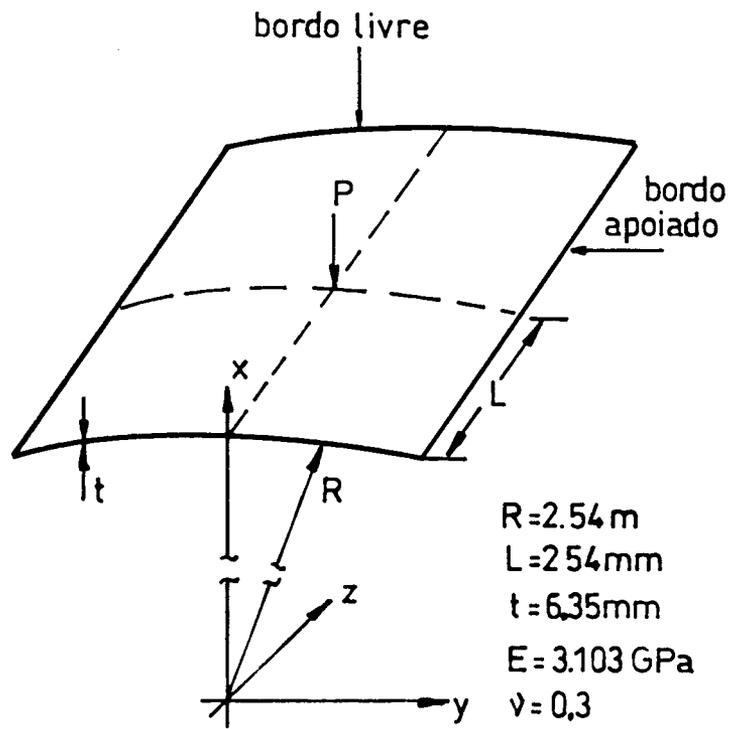


Figura 3.38 - Casca elástica sujeta a carga puntual central

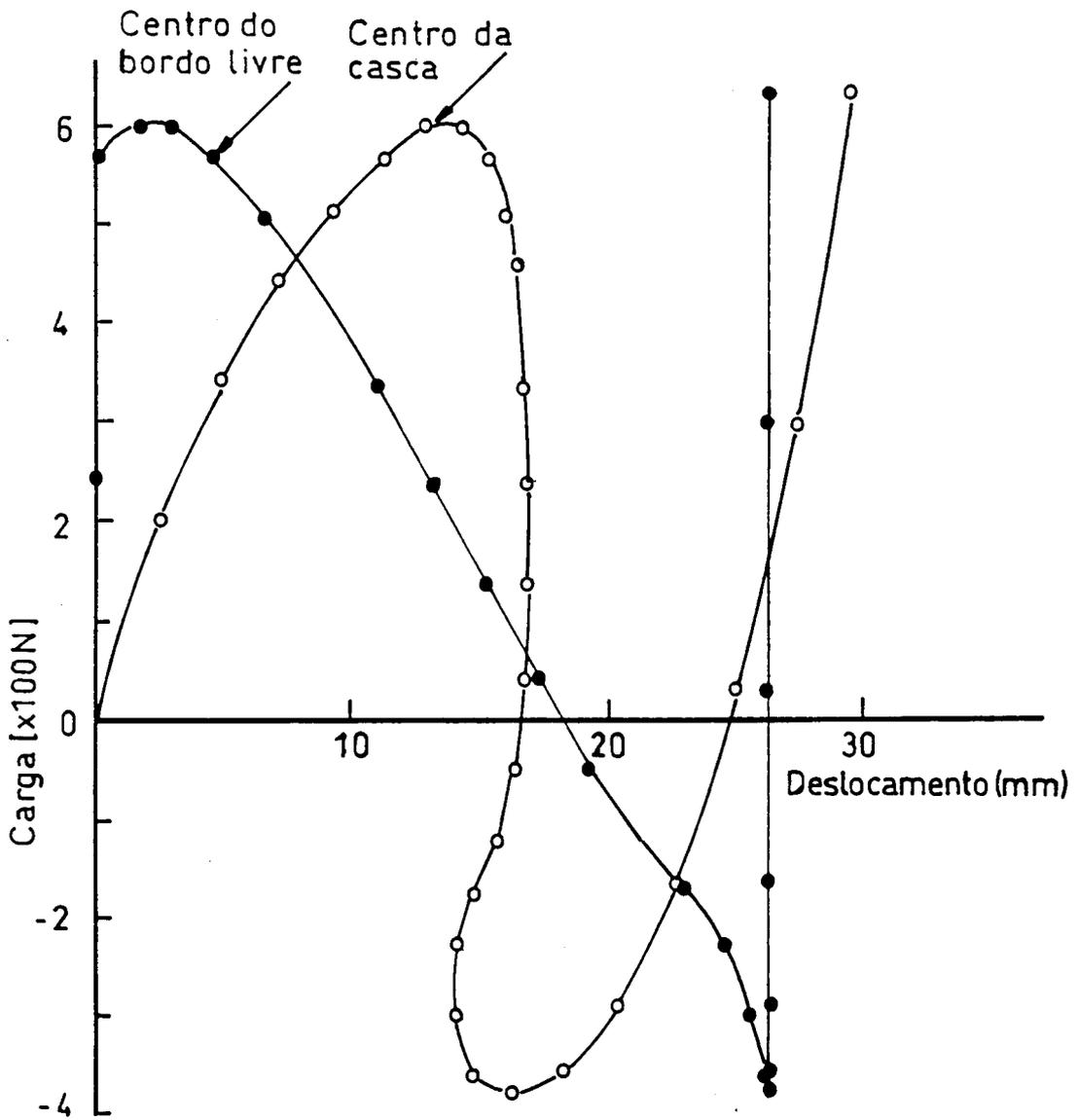


Figura 3.39 - Resposta carga-deslocamento para uma casca cilíndrica

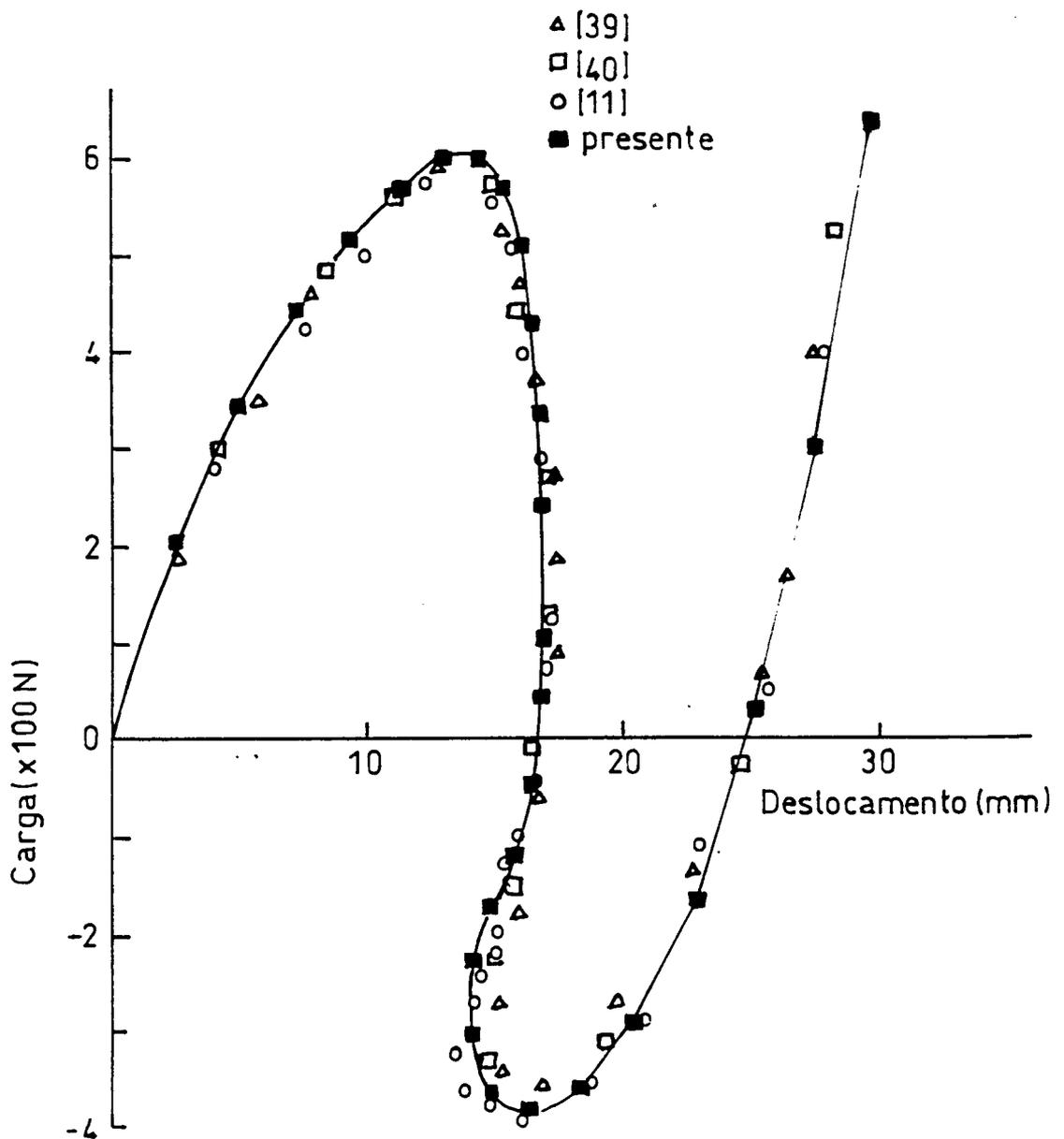


Figura 3.40 - Comparação de soluções para uma casca cilíndrica

Na figura 3.41 apresenta-se a influência do núcleo na resposta, para o elemento de Ahmad. Aqui os módulos de Young e de corte são uniformemente reduzidos a 10% dos das peles.

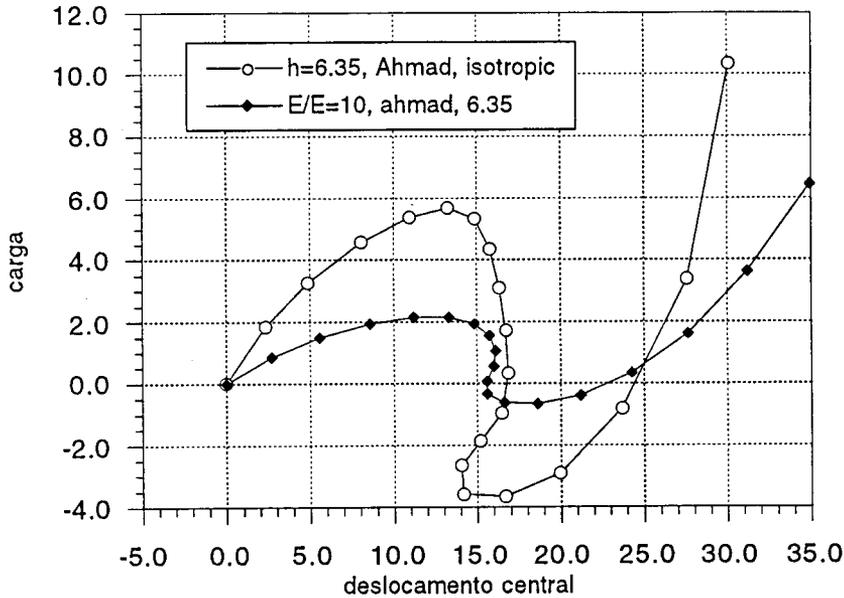


Figura 3.41 - Comparação entre um material homogêneo e uma sandwich com razão de características =10, espessura =6.35 mm

Na figura 3.42 ilustra-se o mesmo caso que na figura 3.41, mas alargado a várias razões de módulos das peles vs. módulos do núcleo.

Na figura 3.43 ilustra-se o caso da figura 3.41, mas com razão de 1000, onde se pode observar a deformação com vincos bastante pronunciados no “snap-back”. Refira-se que a deformação é praticamente não linear até à instabilidade e que, a partir desse momento, a instabilidade é bastante vincada. Na figura 3.44 ilustra-se a comparação das teorias de deformação de 1ª e 3ª ordem para a situação isotrópica.

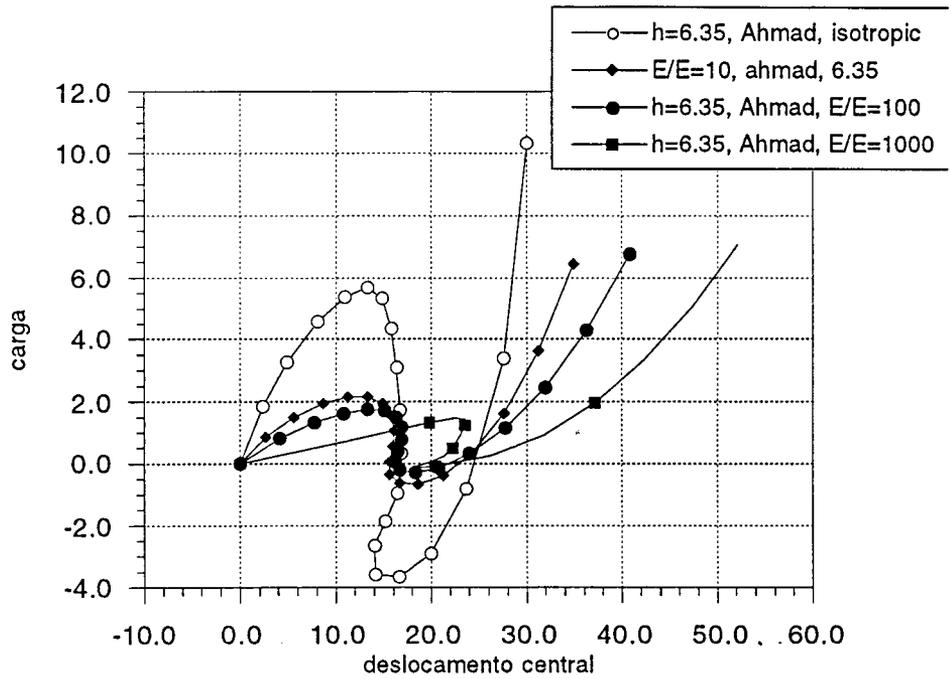


Figura 3.42 - Comparação entre um material homogéneo e uma sandwich com razão de características variável, espessura =6.35 mm

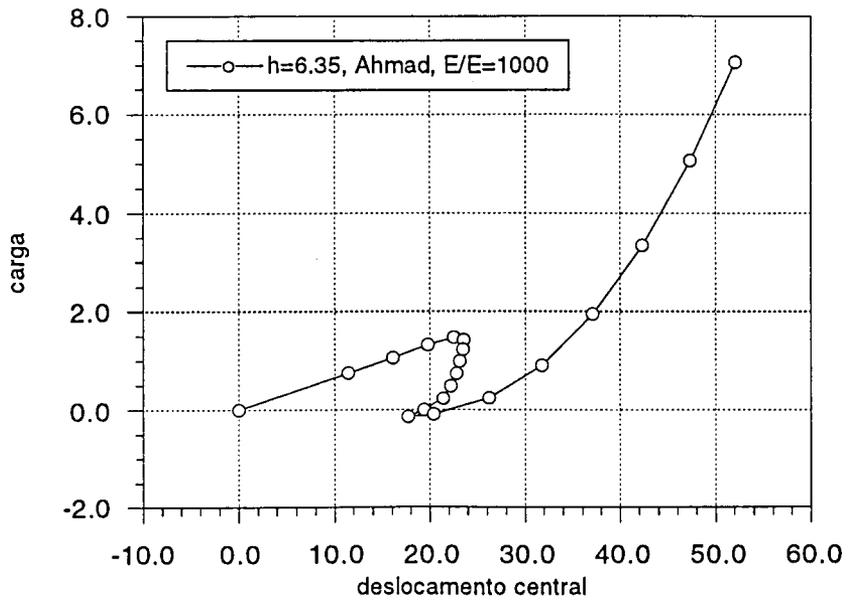


Figura 3.43 - Comparação entre um material homogéneo e uma sandwich com razão de características de 1000, espessura =6.35 mm

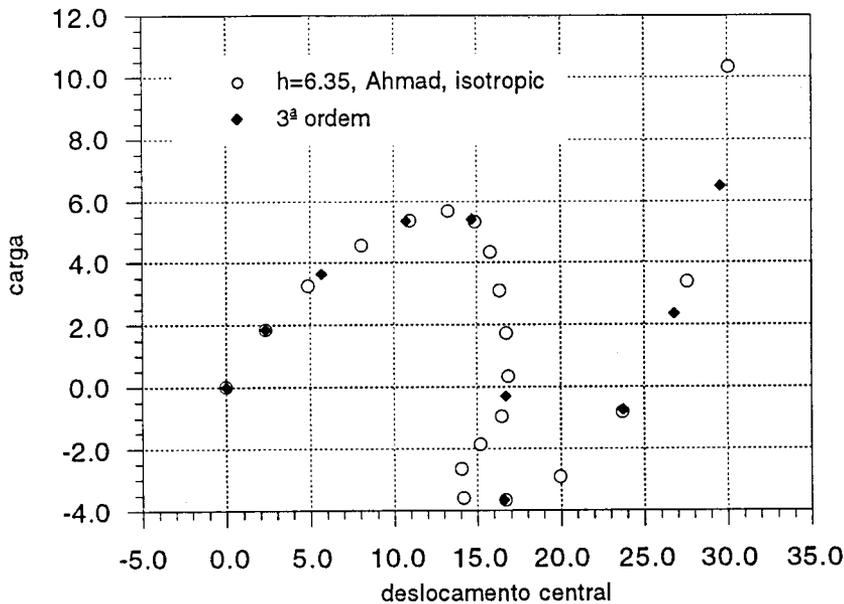


Figura 3.44 - Comparação para um material homogêneo, das teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens, espessura = 6.35 mm

Verifica-se que as teorias de 1ª e 3ª ordens apresentam respostas muito próximas e que o núcleo influencia significativamente a deformação instalada, a carga de instabilidade e o "snap-back".

3.5 - CONCLUSÕES

Neste capítulo realizou-se a análise geométrica não linear de estruturas tipo casca laminada compósita e sandwich. Foram apresentadas a formulação lagrangeana total e as equações incrementais de equilíbrio, bem como a sua solução pelo método dos elementos finitos. As técnicas de solução mais correntes, em particular os métodos de Newton-Raphson e do controlo do comprimento do arco, foram também discutidos e formulados. Foram ainda executados alguns exemplos numéricos, relativamente a placas e cascas laminadas, onde se procurou estudar o desempenho dos elementos finitos de casca, bem como das teorias de deformação de corte. Foi verificado que para placas e cascas isotrópicas, as três teorias estudadas (1ª ordem, 3ª ordem e layerwise) apresentam uma resposta semelhante, quer em termos de deformação, quer em termos de tensões normais e de corte transversal. Algumas variações mais ou menos significativas são registadas, entre estas teorias, quando se estudam laminados sandwich. Neste âmbito, pensa-se que a formulação layerwise representa adequadamente a deformação e as tensões no

laminado, dado considerar localmente a possibilidade de rotações de cada camada do laminado.

Com a implementação no elemento de casca degenerada dos métodos de controlo do comprimento do arco, torna-se possível ultrapassar alguns pontos críticos da resposta da estrutura e obter, assim, uma resposta completa em deformação. Neste contexto, foi estudado o comportamento duma casca cilíndrica em flexão, sujeita a uma resposta instável, onde se pode averiguar do efeito do laminado na resposta global. Foi comparada a resposta do elemento de casca degenerada aqui implementado, com outras referências. A resposta obtida pelo método proposto é muito semelhante ao apresentado noutras referências. Dado o tipo de casca em estudo, a resposta de ambos os elementos é muito semelhante. Para cascas mais curvas, pensa-se que a resposta será algo diferente. Foi ainda implementada a teoria de deformação de corte de 3ª ordem, neste contexto. No exemplo de casca isotrópica, tal como seria de esperar, esta formulação tem uma resposta semelhante à teoria de deformação de corte de 1ª ordem.

Como conclusão final, poderia afirmar-se que estas formulações fornecem ao projectista um valor acrescentado na análise de estruturas tipo casca sujeita a instabilidades. As teorias de deformação de corte, por seu lado, constituem alternativas interessantes para essa análise. Dos resultados obtidos, pensa-se poder afirmar que a teoria de 3ª ordem é uma boa alternativa à teoria de 1ª ordem na análise de casca isotrópicas, enquanto que a teoria layerwise deverá ser a escolhida para a análise de estruturas sandwich, particularmente as mais espessas e aquelas onde os rácios modulares pele/núcleo sejam mais elevados.

REFERÊNCIAS

1. J.T. Oden, Finite Element Applications In Nonlinear Structural Analysis, Applications Of Finite Element Methods In Civil Engineering, Asce, J. Of Structural Division, 419-456, 1989
2. O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 4th Edition, Mcgraw-Hill Book Company, 1994
3. K.-J. Bathe, Finite Element Procedures In Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1982

4. B. Maker, R. Ferenz, J. Hallquist, NIKE3D-A Nonlinear, Implicit, Three-Dimensional Finite Element Code for Solid and Structural Mechanics, LLNL, U.S.A., 1991
5. J.A.T. Barbosa, Análise Não Linear Por Elementos Finitos De Placas E Cascas Reforçadas, Aplicação A Laminados Anisotrópicos, Tese De Doutorado, Feup, 1992
6. D.R.J. Owen, E. Hinton, Finite Elements In Plasticity: Theory And Practice, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980
7. E. Onate, Una Formulacion Incremental Para Problemas De No Linearidad Geometrica Por El Metodo De Los Elementos Finitos, Tese De Catedrático, U.P.C., Espanha, 1986
8. Y.C. Fung, Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1965
9. M.A. Crisfield, Non-Linear Finite Element Analysis Of Solids And Structures, John Wiley And Sons, Chichester, U.K., 1991
10. E. Carnoy, Etude De La Stabilité Elastique Des Coques Par Elements Finis, Tese de Doutorado, Univ. Liege, Bélgica, 1980
11. M.A. Crisfield, A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-Through", Comp. Structures, Vol. 13, 55-62, 1981
12. J.M.A.C. De Sá, Numerical Modelling Of Incompressible Problems In Glass Forming And Rubber Technology, Ph.D. Thesis, C/Ph/91/86, Univ. Of Wales, Swansea, U.K., 1986
13. C. M. B. R. Gomes, Matrix Update Methods In Nonlinear Analysis Of Two Dimensional And Thin Shell Problems, Ph.D. Thesis, C/Ph/67/82, Univ. Of Wales, Swansea, U.K., 1982
14. O.C. Zienkiewicz, S. Valliapan, I.P. King, Elasto-Plastic Solutions Of Engineering Problems, Initial Stress Finite Element Approach, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.1, 75-100, 1969
15. H. Mathies, G. Strang, The Solution Of Nonlinear Finite Element Equations, Int. J. Num. Meth. Eng, Vol.14, 1613-1626, 1979

16. H.H.A. Rahman, Computational Methods For The Nonlinear Analysis Of Reinforced Concrete Flexural Slab Systems, Ph.D. Thesis, C/Ph/66/82, Univ. Of Wales, Swansea, U.K., 1982
17. J.M.M.C. Marques, Nonlinear Finite Element Solutions With Quasi- And Secant-Newton Methods, Numerical Methods For Non-Linear Problems, Vol.3, 1117-1147, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1986
18. K.-J.Bathe, A.P.Cimento, Some Pratical Procedures For The Solution Of Nonlinear Finite Element Equations, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.22, 59-85, 1980
19. G.C.Nayak, O.C.Zienkiewicz, Note On The "Alpha"-Constant Stiffness Method For The Analysis Of Non-Linear Problems, Int.J.Num.Meth.Eng., Vol.4, 579-582, 1972
20. M.A.Crisfield, Accelerating And Damping The Modified Newton-Raphson Method, Comp. Structures, Vol.18, 395-407, 1984
21. A.Pica, E.Hinton, The Quasi-Newton Bfgs Method In The Large Deflection Analysis Of Plates, Numerical Methods For Non-Linear Problems, Vol.1, 335-366, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980
22. W.C. Davidson, Variable Metric Method For Minimization, Rep.Anl-5990 Rev., Argonne Nat. Laboratory, 1959
23. C.G.Broyden, A New Double-Rank Minimization Algorithm, Notices Amer. Math.Soc., Vol.16, 670, 1969
24. R.Fletcher, A New Approach To Variable Metric Algorithms, Comput.J.Vol.13, 317-322,1970
25. D. Goldfarb, A Family Of Variable Metric Methods Derived By Variational Means, Math.Comp., Vol.24, 23-26, 1970
26. D.F.Shano, Conditioning Of Quasi-Newton Methods For Function Minimization, Math.Comp., Vol.24, 647-656, 1970
27. M.A.Crisfield, Incremental/Iterative Solution Procedures For Nonlinear Structural Analysis, Numerical Methods For Non-Linear Problems, Vol.1, 335-366, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980

28. R.Fletcher, M.J.D.Powell, A Rapid Convergent Descent Method For Minimization, *Comput.J.*, Vol.6, 163-168,1963
29. E.Riks, The Application Of Newton's Method To The Problem Of Elastic Stability, *J.Appl.Mech.*, Vol.39, 1060-1066, 1972
30. G.A.Wempner, Discrete Approximations Related To Nonlinear Theories Of Solids, *Int.J.Solids And Structures*, Vol.7, 1581-1599,1971
31. K.C.Park, A Family Of Solution Algorithms For Non-Linear Structural Analysis Based On Relaxation Equations, *Int.J.Num.Meth.Eng.* Vol.18, 1337-1347, 1982
32. P.G.Bergan, G.Horrigmoe,B.Krakeland,T.H.Soreide, Solution Techniques For Non-Linear Finite Element Problems, *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol.12, 1677-1696,1978
33. M.A.Crisfield, An Arc-Length Method Including Line Searches And Accelerations, *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol.19, 1269-1289,1983
34. J.L.Batoz, G.Dhatt, Incremental Displacement Algorithms For Nonlinear Problems, *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol.14, 1262-1267,1979
35. E.Ramm, The Riks/Wempner Approach- an Extension of the Displacement Control Method in Nonlinear Analysis, *Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics*, Ed.E.Hinton, D.R.J.Owen, C.Taylor, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1982
- 36.J.H.Argyris, Continua and Discontinua, *Proc.1st Conf. Matrix Meth. Structu.Mech.*, Wright-Patterson A.F.B., Ohio, 11-189, 1965
37. T.H.H.Pian, P.Tong, Variational Formulation of Finite Displacement Analysis, *IUTAM Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures*, 43-63, Liege, Bélgica, 1970
38. O.C. Zienkiewicz, Incremental Displacement in Non-Linear Analysis, *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol.3, 587-588,1971
39. A.C.Lock, A.B.Sabir, Algorithm for Large Deflection Geometrically Nonlinear Plane and Curved Structures, em *Mathematics of Finite Elements and Applications*, ed. J.R.Whiteman, Academic Press, N.Y., U.S.A., 1973

40. E. Ramm, Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, editado por W.Wunderlich, E.Stein e K.J.Bathe, Springer-Verlag, Berlin, 1981

CAPÍTULO 4

ANÁLISE INELÁSTICA DE PLACAS E CASCAS LAMINADAS ANISOTRÓPICAS

4.1 - INTRODUÇÃO

4.2 - COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

4.3 - COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE ESTRUTURAS SANDWICH

4.4 - TEORIA DE FLUXO DA PLASTICIDADE

4.4.1 - O critério de cedência de Huber-Mises

4.4.2 - Parâmetros de anisotropia

4.4.3 - Relações elasto-plásticas tensão-deformação

4.4.4 - O critério de Sun/Chen

4.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.5.1- Ensaio de tracção de compósitos termoplásticos

4.5.2- Ensaio de flexão em viga isotrópica

4.5.3- Ensaio de flexão em viga sandwich

4.5.4 Placas anisotrópicas não laminadas

4.5.5 Placas anisotrópicas laminadas

4.5.6 Cascas anisotrópicas não laminadas

4.6 - CONCLUSÕES

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 4

ANÁLISE INELÁSTICA DE PLACAS E CASCAS LAMINADAS ANISOTRÓPICAS

4.1 - INTRODUÇÃO

Os corpos sólidos podem ser considerados elásticos apenas em zonas limitadas da sua resposta estrutural. A partir de determinados limites, desenvolvem-se deformações permanentes, independentes do tempo. Este tipo de comportamento enquadra-se na chamada teoria matemática da plasticidade.

Muitos componentes estruturais são supostos permanecer elásticos durante a sua vida útil. A previsão do seu comportamento próximo da rotura pode, no entanto, resultar num projecto mais seguro e potencialmente mais económico. Para além disto, muitos processos de fabrico actuais fazem uso da fase plástica ou inelástica dos materiais, como por exemplo a estampagem de chapa metálica ou de compósitos termoplásticos.

Os compósitos reforçados com fibras exibem comportamento não linear, especialmente os de matriz metálica e os de matriz termoplástica.

A maior parte dos materiais compósitos tem um comportamento praticamente elástico até à rotura quando são solicitados em tracção na direcção das fibras, quer possuam matrizes termoplásticas quer possuam matriz termoendurecível. No entanto, existe um número apreciável de materiais compósitos que ganham alguma expressão nos mercados actuais, cujo comportamento material pode ser considerado inelástico. Entre os mais significativos encontram-se os materiais compósitos de matriz metálica e os de matriz termoplástica, cujo desenvolvimento recente arrasta a necessidade de análise elasto-plástica, visco-elástica e visco-plástica de estruturas laminadas reforçadas. Os compósitos de matriz polimérica exibem um comportamento inelástico quando são solicitados na direcção dominada pela matriz, ou seja, quando a direcção de solicitação é desviada da direcção das fibras de pelo menos 15° , ângulo para o qual já se regista elevada não linearidade.

Neste capítulo analisa-se por elementos finitos de casca o comportamento elasto-plástico de estruturas laminadas (sandwich ou não), tendo em conta três abordagens cinemáticas e

uma teoria de fluxo associativa. Nas abordagens cinemáticas, consideram-se as teorias de deformação apresentadas no capítulo 2, em particular as teorias de 1ª, 3ª ordens e layerwise. Considera-se ainda o comportamento de estruturas sandwich onde o núcleo é elasto-plástico, como é o caso de espumas poliméricas.

4.2 - COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

Na figura 4.1 apresentam-se as curvas carga-deslocamento de ensaios de tracção realizados no INEGI-CEMACOM [2] em compósitos epóxida-carbono UD, com variações de ângulos de fibras relativamente aos eixos estruturais. Na figura 4.2 apresenta-se a curva carga-deslocamento referentes a ensaios de tracção realizados por Brito [3], em compósitos de matriz termoendurecível reforçados com mantas e tecidos.

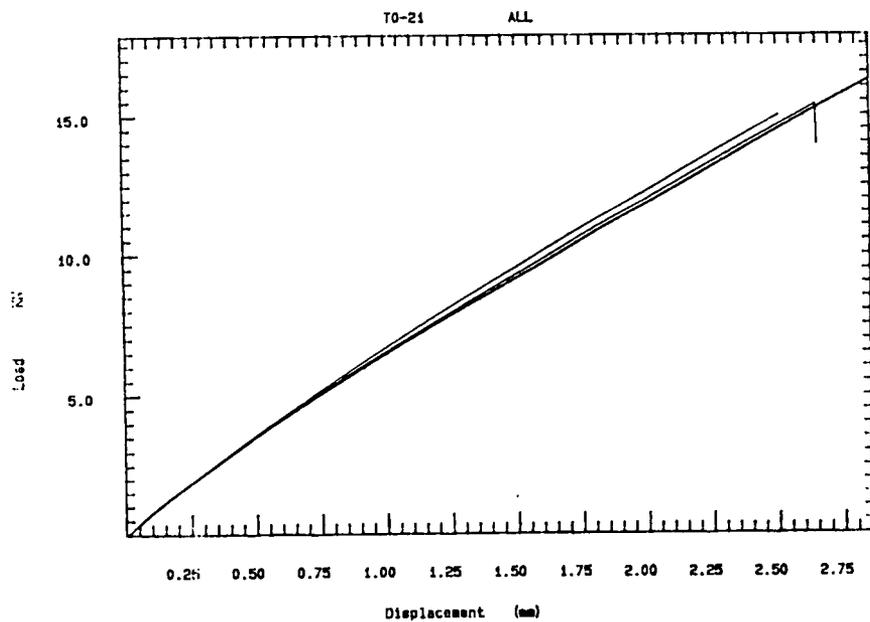


Figura 4.1a-Curvas carga-deslocamento de compósitos de matriz termoendurecível[2]-
ângulos de $[0^\circ]_n$

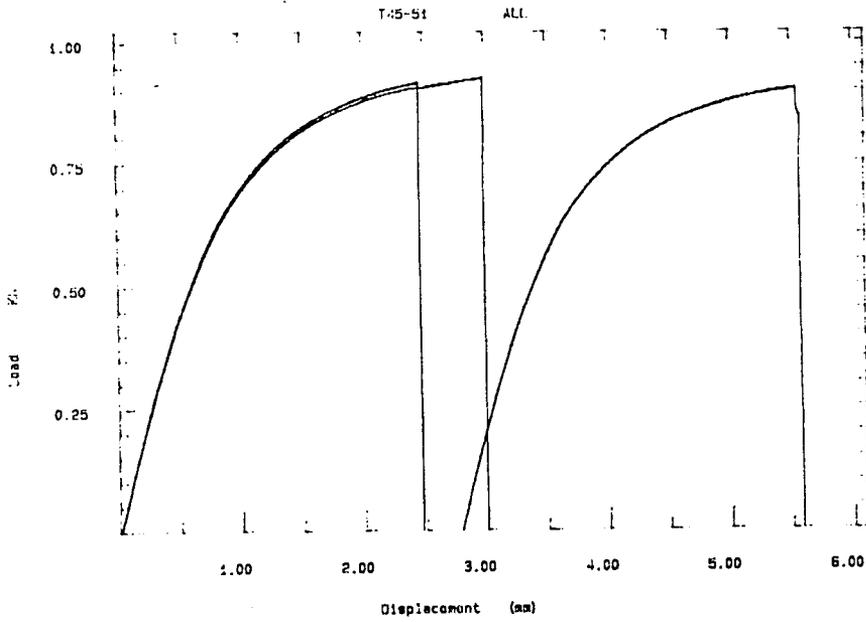


Figura 4.1b-Curvas carga-deslocamento de compósitos de matriz termoendurecível[2]- ângulos de $[45^\circ]_n$

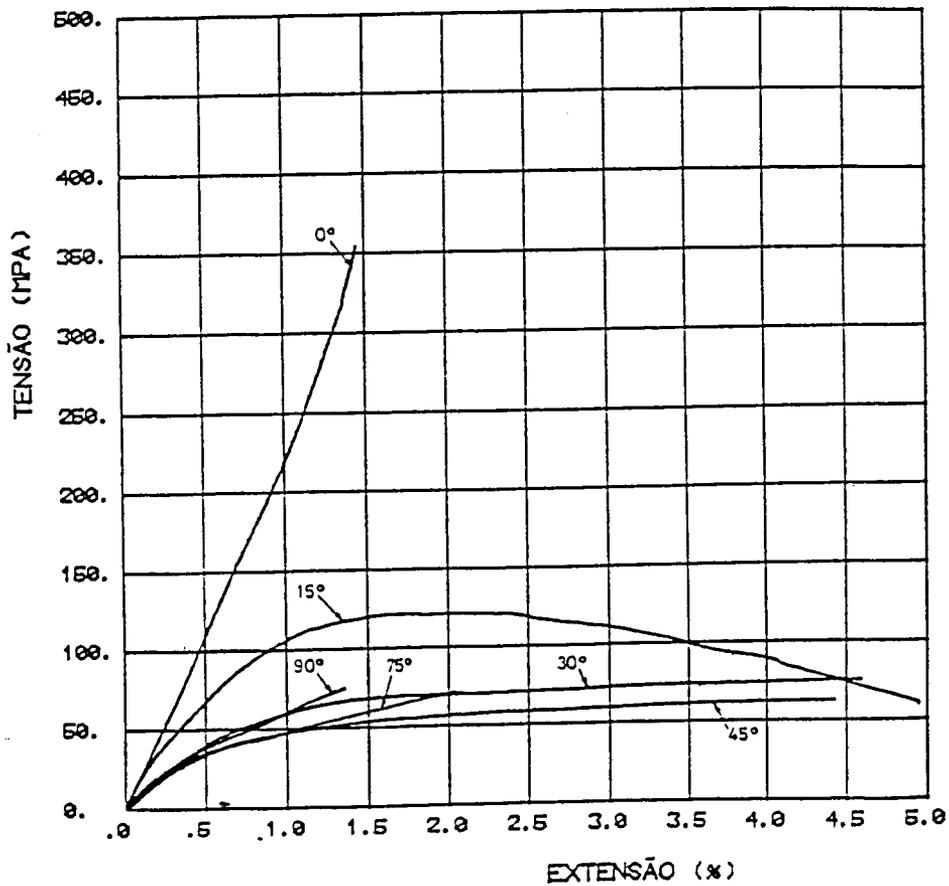


Figura 4.2 - Curvas carga-deslocamento de compósitos de matriz termoendurecível [3]

Na figura 4.3 apresenta-se as curvas tensão-deformação de compósitos poliéster-tecido de vidro de 300g/m² [3], sujeitos à tracção, onde se pode verificar a anisotropia do material e o efeito da matriz sobre o comportamento global da estrutura.

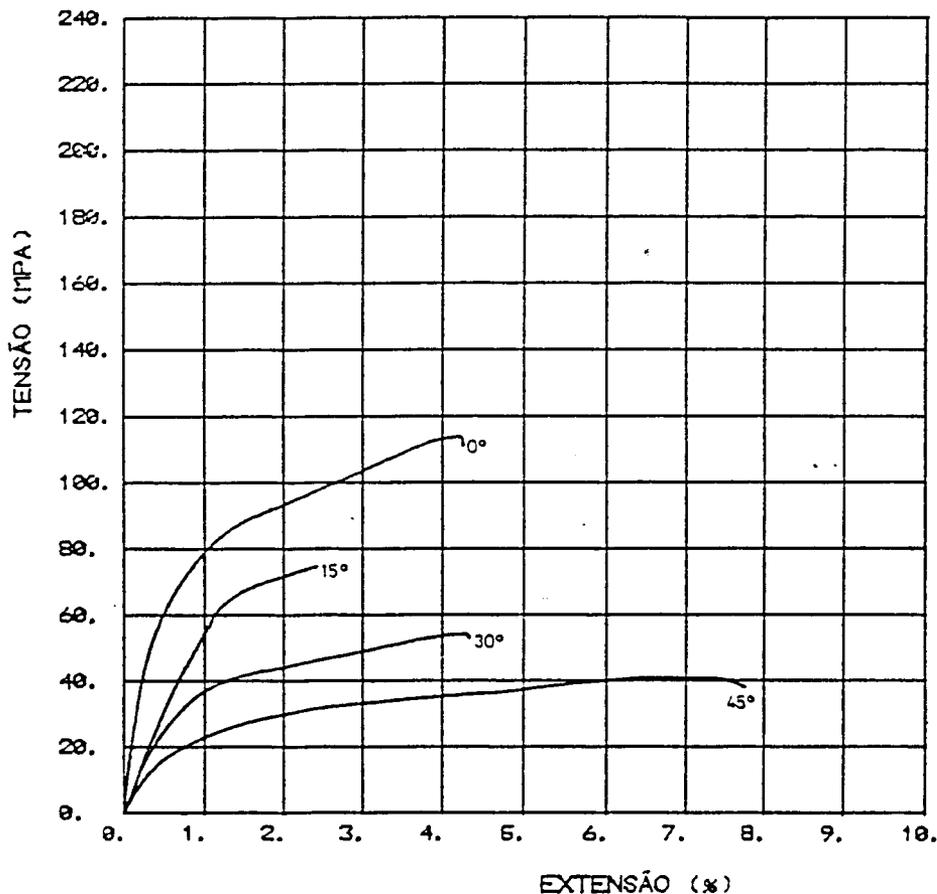


Figura 4.3 - Curvas tensão-deformação para compósitos de tecido de 300g/m² [3]

Na figura 4.4 apresentam-se curvas semelhantes para tecidos de 800g/m². A resina parece ter uma influência pronunciada no comportamento estrutural, embora em direcções de predominância de resina, as fibras apresentem alguma reserva de resistência, como ilustrado na figura 4.5 [3].

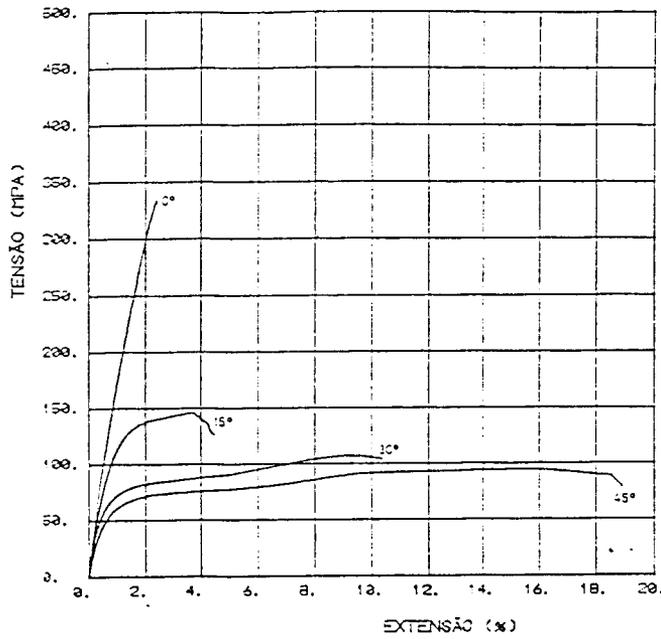


Figura 4.4 - Curvas tensão-deformação para compósitos de tecido de 800g/m2 [3]

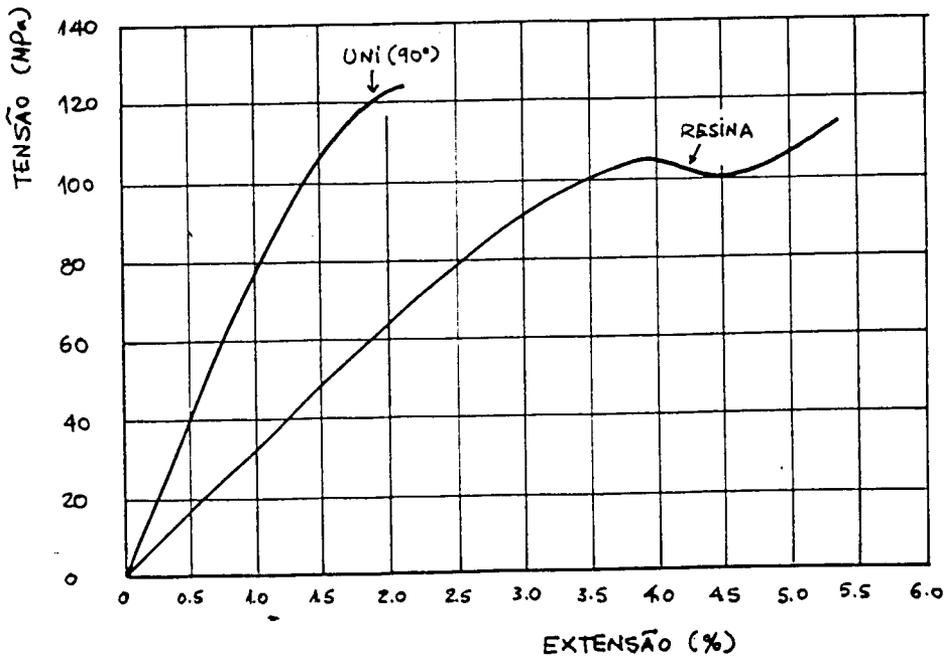


Figura 4.5 - Comparação das curvas de compressão de placa [90°] e resina pura [3]

Comprova-se que estes compósitos, tipicamente lineares até à rotura quando solicitados na direcção das fibras, exibem comportamento inelástico, mais ou menos marcado de acordo com a predominância da matriz.

Os compósitos de matriz termoplástica são mais recentes que os de matriz termoendurecível, tendo particular interesse pelas suas possibilidades de fabrico, pela maior tenacidade e pela sua maior ductilidade. Na figura 4.6 apresenta-se a curva tensão-deformação do compósito AS4/PEEK, em ensaios de tracção [4]. Registe-se a forte presença de não-linearidade exibida a partir de cerca de 30% da carga de rotura.

Outros compósitos ainda mais recentes possuem matrizes termoendurecíveis, como por exemplo a epóxida e são reforçados com fibras termoplásticas. Os compósitos reforçados com fibras de polietileno têm também comportamento tipicamente inelástico, conforme é apresentado na figura 4.7 [5].

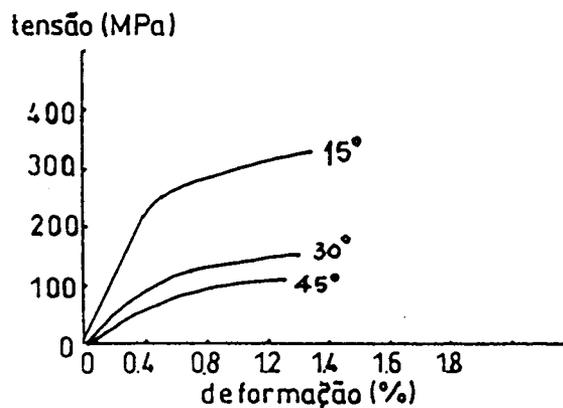


Figura 4.6 - Curvas carga-deslocamento de compósitos de matriz termoplástica [4]

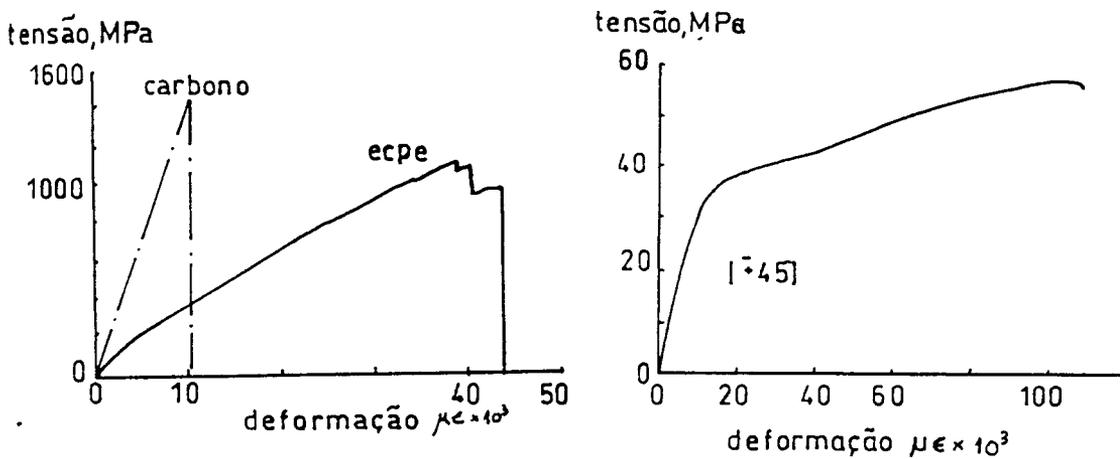


Figura 4.7 - Curvas carga-deslocamento de compósitos de matriz termoendurecível e fibras termoplásticas [5]

4.3 - COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE ESTRUTURAS SANDWICH

As estruturas sandwich foram resumidamente apresentadas no capítulo 2.

Estas são vulgarmente constituídas por peles rígidas e resistentes e por núcleos macios. Entre outros núcleos, as espumas poliméricas são bastante usadas pelo seu baixo custo e pela suas boas capacidades de isolamento acústico e absorção de choque. Como núcleos estruturais, o seu comportamento pode ser considerado inelástico [6]. Na figura 4.8 apresenta-se a curva carga-deslocamento medida num ensaio de compressão no ENSAM (França)[7] para as espumas Dywidag 80 e AIREX.

Regista-se uma marcada linearidade e após a cedência um patamar bem marcado. Pode, então, considerar-se este comportamento como linear-perfeitamente plástico.

No contexto da análise inelástica destes materiais far-se-á por isso uso da chamada teoria matemática da plasticidade [8]. Considerar-se-ão apenas neste capítulo situações de casca e procurar-se-á comparar as teorias de deformação de ordens várias, tendo em conta que as características elásticas das peles e do núcleo são tipicamente bastante diferentes.

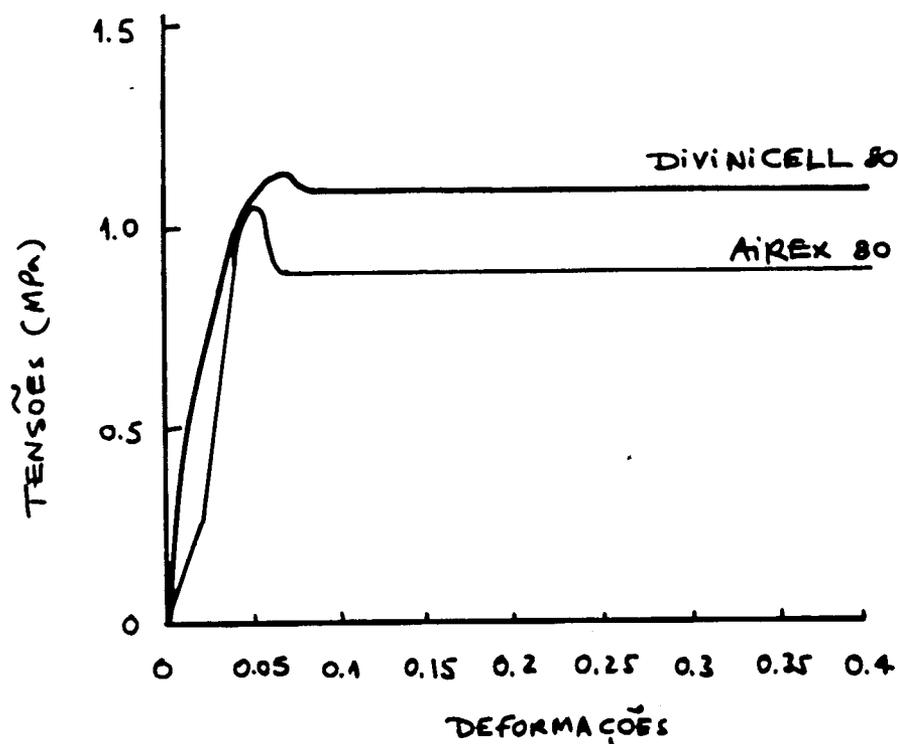


Figura 4.8 - Curvas carga-deslocamento de espumas estruturais [7]

4.4 - TEORIA DE FLUXO DA PLASTICIDADE

Supõe-se nesta fase do trabalho que o comportamento dos materiais em causa pode ser modelado através de uma teoria elasto-plástica. Para que se possa formular uma teoria que modele a deformação elasto-plástica do material é necessário que se cumpram três requisitos [9,10]: a) Deve estabelecer-se uma relação constitutiva; b) tem de ser postulada um critério de cedência indicando o nível de tensão para o qual se inicia o fluxo plástico; c) deve desenvolver-se uma relação tensão-deformação para o comportamento pós-cedência.

Um critério de cedência define o início de plasticidade e pode ser escrito na forma

$$F(\sigma, \chi) = f(\sigma) - Y(\chi) = 0 \quad (4.1)$$

em que o nível de cedência Y pode ser uma função do parâmetro de encruamento χ e f é uma função qualquer dos invariantes de tensão desvio.

4.4.1 - O critério de cedência de Huber-Mises

Ao definir um potencial plástico, ou tensão efectiva, $\bar{\sigma}$, numa forma similar à função de cedência de Huber-Mises para materiais isotrópicos, pode escrever-se

$$f(\sigma) = \bar{\sigma}^2 = \alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \alpha_{13}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3\alpha_{44}\tau_{12}^2 + 3\alpha_{55}\tau_{13}^2 + 3\alpha_{66}\tau_{23}^2 \quad (4.2)$$

em que σ_{ij} são as componentes do tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, os α_{ij} são parâmetros de anisotropia e os índices 1,2,3 reportam às direcções dos eixos principais de anisotropia. Considerando a suposição habitual das cascas $\sigma_{33} = \sigma_z = 0$, pode desenvolver-se a expressão (4.2), obtendo-se

$$\bar{\sigma}^2 = a_1\sigma_{11}^2 + 2a_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + a_2\sigma_{22}^2 + a_3\tau_{12}^2 + a_4\tau_{13}^2 + a_5\tau_{23}^2 \quad (4.3)$$

onde a_i são os parâmetros anisotrópicos que deverão ser determinados experimentalmente [10]. No caso mais geral, em que os eixos principais de anisotropia não coincidem com os eixos de referência x,y , mas estão desfazados de um certo ângulo θ , os parâmetros de anisotropia são modificados por transformação tensorial.

Na forma matricial, (4.3) pode escrever-se como

$$\underline{\sigma}^2 = \underline{\sigma}_{1,2,3}^T \underline{A} \underline{\sigma}_{1,2,3} \quad (4.4)$$

onde

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_5 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A equação de transformação é a seguinte:

$$\underline{\sigma}_{1,2,3} = \underline{T} \underline{\sigma}_{x,y,z} \quad (4.6)$$

em que \underline{T} é a matriz de transformação definida nos capítulos anteriores. A tensão efectiva, expressa no referencial x,y,z , é então,

$$\bar{\sigma}^2 = \underline{\sigma}_{x,y,z}^T \underline{A} \underline{\sigma}_{x,y,z} \quad (4.7)$$

em que \underline{A} é a matriz dos novos parâmetros de anisotropia, obtida por

$$\underline{A} = \underline{T}^T \overline{A} \underline{T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_2 & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_5 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.4.2 - Parâmetros de anisotropia

Segundo Figueiras [10], os parâmetros de anisotropia podem ser calculados através de ensaios independentes, do tipo tracção uniaxial. Por exemplo, num teste de tracção uniaxial na direcção 1, obtém-se

$$\bar{a}_{10} = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\sigma_{10}^2} \quad (4.9)$$

em que $\bar{\sigma}_0$ é a tensão uniaxial de cedência na direcção 1 e o índice "o" indica valores antes do endurecimento. Tomando a direcção 1, como a direcção de referência, então $\bar{a}_{10} = 1.0$. Da mesma forma, podem definir-se os restantes parâmetros de anisotropia

$$\bar{a}_{20} = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\sigma_{20}^2}, \quad \bar{a}_{30} = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\tau_{120}^2}, \quad \bar{a}_{40} = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\tau_{130}^2}, \quad \bar{a}_{50} = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\tau_{230}^2} \quad (4.10)$$

Para se obter \bar{a}_{120} é necessário um outro teste de tracção uniaxial, em que o material é retirado do plano 12 [10]. Se o eixo do provete estiver rodado de um ângulo θ , relativamente ao eixo 1, é assumido $\sigma_{\theta 0}$ como a tensão uniaxial de cedência obtida no ensaio, podendo escrever-se

$$\sigma_1 = \sigma_{\theta 0} \cos^2 \theta, \quad \sigma_2 = \sigma_{\theta 0} \sin^2 \theta, \quad \tau_{12} = \sigma_{\theta 0} \sin \theta \cos \theta, \quad \tau_{13} = \tau_{23} = 0 \quad (4.11)$$

Substituindo estes componentes de tensão em (4.3), e assumindo, por exemplo $\theta=45^\circ$, obtém-se o parâmetro adicional

$$\bar{a}_{120} = 2 \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_{\theta 0}} \right)^2 - \frac{1}{2} (1 + \bar{a}_{20} + \bar{a}_{30}) \quad (4.12)$$

Para um material isotrópico, $\sigma_{\theta 0} = \bar{\sigma}_0$, $\bar{a}_{20} = 1.0$ e $\bar{a}_{30} = 3.0$ e assim \bar{a}_{120} toma o valor -0.5.

Estes parâmetros são funções das tensões correntes de cedência, variando, portanto, durante o fluxo plástico para um material endurecível. Os seus valores subsequentes [10]

são obtidos, introduzindo os valores das tensões de cedência correntes em (4.10) e (4.12).

4.4.3 - Relações elasto-plásticas tensão-deformação

O incremento total de deformação local $d\bar{\epsilon}$ é a soma dos componentes elástica e plástica, tal que

$$d\bar{\epsilon}' = d\bar{\epsilon}^e + d\bar{\epsilon}^p \quad (4.13)$$

O incremento de deformação elástica $d\bar{\epsilon}^e$ pode ser obtido pela forma incremental habitual e o incremento de deformação plástica pela regra de fluxo [9,10]

$$d\bar{\epsilon}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \bar{\sigma}} \quad (4.14)$$

em que Q é denominado potencial plástico e $d\lambda$ é uma constante. A suposição $Q \equiv f$ torna possível a formulação de uma teoria de plasticidade associada, na qual a expressão (4.14) é denominada condição de normalidade [9,10], dado que $\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}$ é um vector normal à superfície de cedência numa interpretação geométrica do espaço das tensões.

A forma diferencial de (4.1) pode ser escrita como

$$\underline{a}^T d\bar{\sigma} - A d\lambda = 0 \quad (4.15)$$

em que o vector de fluxo \underline{a} é definido por

$$\underline{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \quad (4.16)$$

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi \quad (4.17)$$

Através das equações (4.13) a (4.17), pode estabelecer-se a relação tensão-deformação incremental elasto-plástica [1,9,10]

$$d\bar{\sigma} = \underline{D}_{ep} d\bar{\epsilon} \quad (4.18)$$

em que a matriz constitutiva elastoplástica é dada por [1-4]:

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D} - \frac{\underline{D} \underline{a} \underline{a}^T \underline{D}}{A + \underline{a}^T \underline{D} \underline{a}} \quad (4.19)$$

O parâmetro de encruamento A pode ser deduzido de ensaios uniaxiais, como

$$A = H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}_p} \quad (4.20)$$

Assim A é a inclinação da tangente à curva tensão efectiva-deformação plástica e é função da deformação plástica efectiva acumulada $\bar{\epsilon}_p$ [1,9,10]. A matriz de rigidez tangencial do material pode ser obtida por

$$\underline{K} = \frac{dp}{da} = \int_V \underline{B}^T \frac{d\sigma}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{da} dv + \int_V \underline{B}^T \underline{D}_{ep} \underline{B} dv \quad (4.21)$$

4.4.4 - O critério de Sun/Chen

Sun e Chen [11] formularam um critério de cedência baseado no critério de Huber-Mises, com o objectivo de analisar compósitos termoplásticos. Foi considerado que os compósitos unidireccionais, quando solicitados em tracção na direcção das fibras têm comportamento linear até à rotura. Nesse contexto assume-se que a deformação plástica na direcção 1 é zero

$$d\epsilon_{11}^P = 0 \quad (4.22)$$

o que conduz a

$$a_{11}=a_{12}=0 \quad (4.23)$$

Pode então considerar-se que o potencial plástico é definido como função dum só parâmetro

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_{22}^2 + b(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2) \quad (4.24)$$

onde b é um parâmetro que é determinado por ensaios uniaxiais fora dos eixos (off-axis tests). Em [11] obteve-se os valores de $b=3$ para o AS4/PEEK e $b=4.0$ para os compósitos Boro/Alumínio.

Neste trabalho foram implementados ambos os critérios de cedência, embora o critério de Huber-Mises seja o mais utilizado.

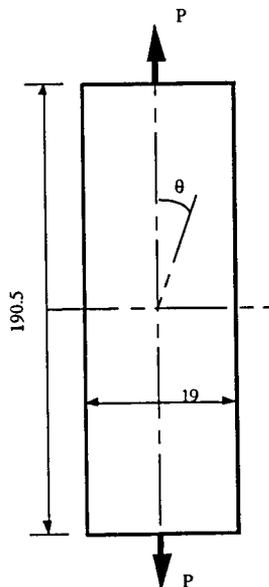
De seguida, apresentam-se e discutem-se alguns exemplos numéricos em que diversas estruturas são sujeitas a carregamentos que originam comportamento elasto-plástico. Comparam-se as teorias de deformação apresentadas no capítulo 2.

4.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Através de exemplos numéricos pretende-se comparar o desempenho relativo das teorias de deformação de corte, em particular nos valores de cedência, e ainda estudar o comportamento elasto-plástico de estruturas sandwich, cujo comportamento possa eventualmente ser considerado como elasto-plástico. Consideram-se nestes exemplos as teorias de deformação apresentadas no capítulo 2 e o elemento de casca já apresentado [10,12,13].

4.5.1- Ensaio de tracção de compósitos termoplásticos

Na figura 4.9 ilustra-se um provete sujeito á tracção [11]. O material deste provete é compósito termoplástico reforçado com fibras de carbono AS4/Peek, cujas características são também apresentadas na figura 4.9. Na figura 4.10a apresentam-se as curvas experimentais [11]. Verifica-se uma forte influência da orientação das fibras no comportamento elasto-plástico do material. Na figura 4.10b compara-se a resposta experimental e numérica para $\theta=90^\circ$. Nota-se uma boa concordância da teoria de 1ª ordem com os resultados experimentais. As alterações propostas por Sun [11] revelam-se demasiado rígidas, quando implementadas neste elemento. O critério de Huber-Mises revela-se mais adequado para representar, neste exemplo, o comportamento elasto-plástico destes compósitos termoplásticos.



$$E_1 = 127.6 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 10.3 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 6.0 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.3$$

$$X = 2130 \text{ MPa}$$

$$Y = 95 \text{ MPa}$$

$$S = 82 \text{ MPa}$$

Figura 4.9 - Ensaio de tracção a termoplástico reforçado AS4/PEEK

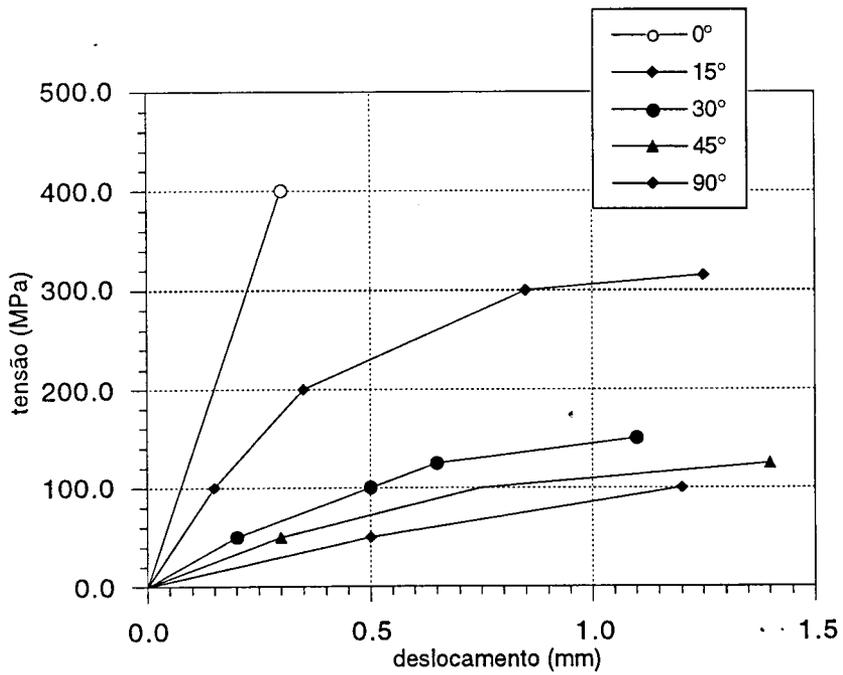


Figura 4.10a - Curvas tensão-deformação experimentais [11]

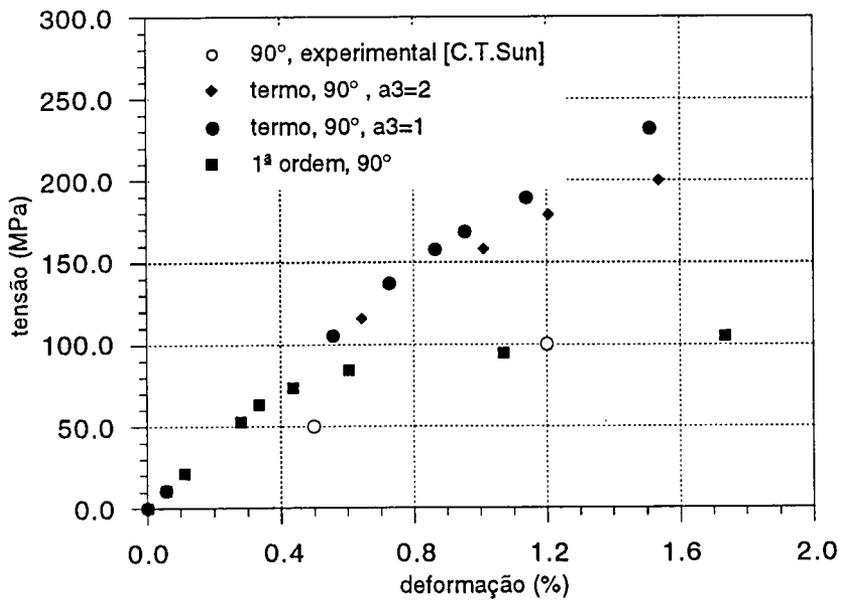


Figura 4.10b - Comparação experimental-numérica

4.5.2- Ensaio de flexão em viga isotrópica

Na figura 4.11, considera-se uma viga simplesmente apoiada, sujeita a carga central pontual, simulando um ensaio de flexão em 3 pontos. Considera-se um material isotrópico, com $E = 10 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 120 \text{ MPa}$, $E_p = 0$.

Verifica-se uma boa concordância entre todas as teorias de deformação, com curvas carga-deslocamento muito próximas umas das outras. Este tipo de resposta vem confirmar resultados anteriores, onde se verifica que para estruturas isotrópicas, as três teorias são muito próximas.

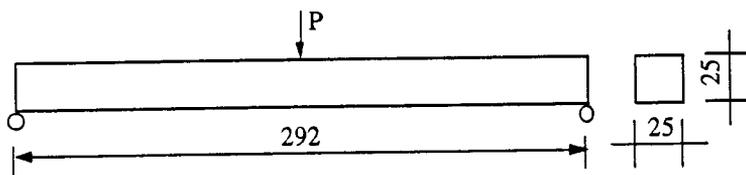


Figura 4.11 - Viga simplesmente apoiada, ensaio de flexão em três pontos

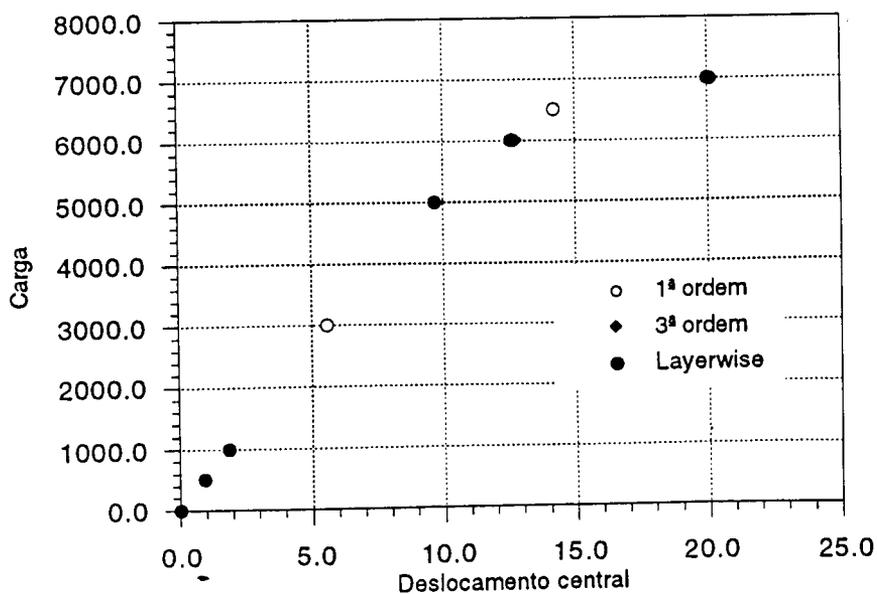


Figura 4.12 - Curva carga-deslocamento para a viga isotrópica.

4.5.3- Ensaio de flexão em viga sandwich

Na figura 4.14, apresenta-se a curva carga-deslocamento referente à mesma viga da figura 4.11, mas com um novo laminado, ilustrado na figura 4.13.

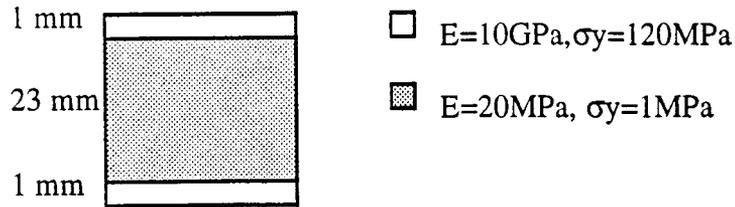


Figura 4.13 - Laminado sandwich, compósito-espuma de AIREX

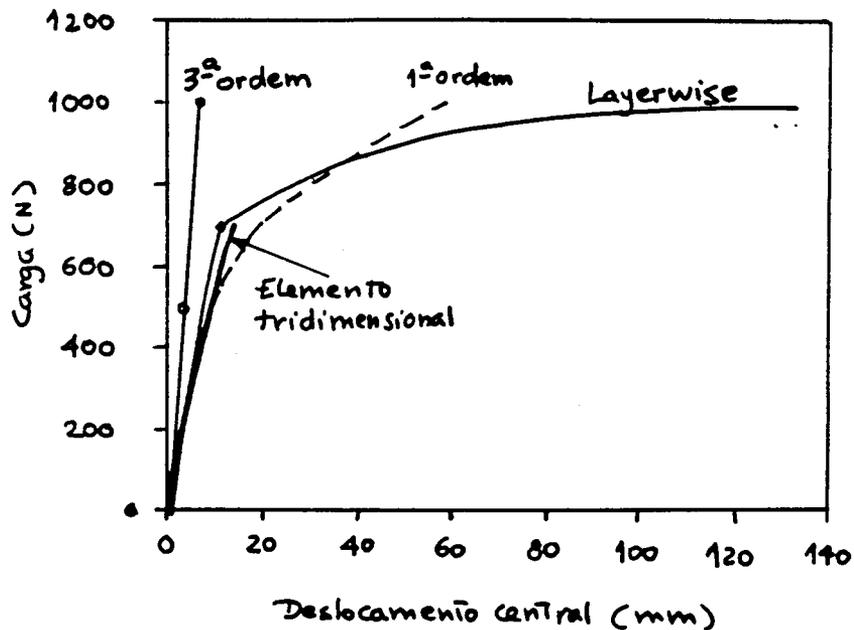


Figura 4.14 - Curva carga-deslocamento para o laminado da figura 4.13

Comparam-se as teorias de deformação com uma formulação tridimensional [14].

Comparam-se, neste exemplo, as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens, bem como a teoria layerwise, com uma formulação tridimensional [14]. A teoria de 3ª ordem apresenta-se demasiado rígida, confirmando as dificuldades de análise deste tipo de laminados. Verifica-se uma grande proximidade entre as teorias de 1ª ordem e layerwise, o que poderá ser explicado pela simetria do laminado. Os resultados tridimensionais são muito próximos das anteriores teorias. A variação na cedência deve-se ao facto de [14]

usar um critério diferente do Huber-Mises, o que poderá ter influenciado a forma da curva elasto-plástica.

4.5.4 Placas anisotrópicas não laminadas

Estuda-se o comportamento elasto-plástico de uma placa quadrada encastrada sob pressão uniforme, figura 4.15. Um quarto da placa é discretizado com 9 elementos Heterosis. O número de camadas é função do tipo de formulação usada. As seguintes características materiais foram usadas:

$$\begin{aligned} E_x = E_y &= 30000, \quad \nu = 0.3 \\ G_{xz} = G_{yz} = G_{xy} &= 11540 \\ \bar{\sigma}_0 = \sigma_{x0} = \sigma_{y0} = \sigma_{45_0} &= 30 \\ \tau_{x0} = \tau_{y0} = \tau_{45_0} &= 17.32 \\ E_p &= 300, \quad G_p = 100 \end{aligned} \quad (4.22)$$

com as outras características constantes. Características geométricas: espessura $h=0,20$; vão $a=6,0$, quantidades em MN e m.

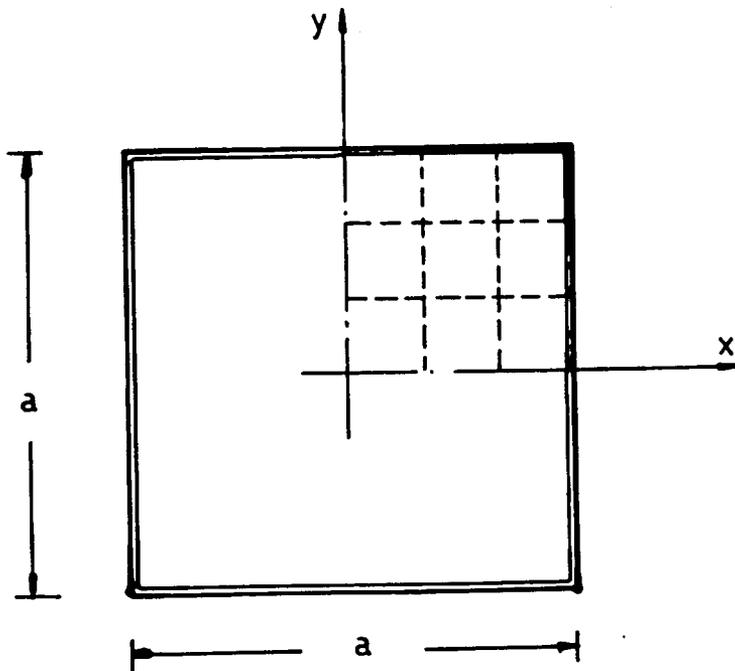


Figura 4.15 - Placa quadrada encastrada

Na figura 4.16 é ilustrada a variação do deslocamento transversal do ponto central para diferentes níveis de carga para ambos os materiais, assumindo a linearidade geométrica.

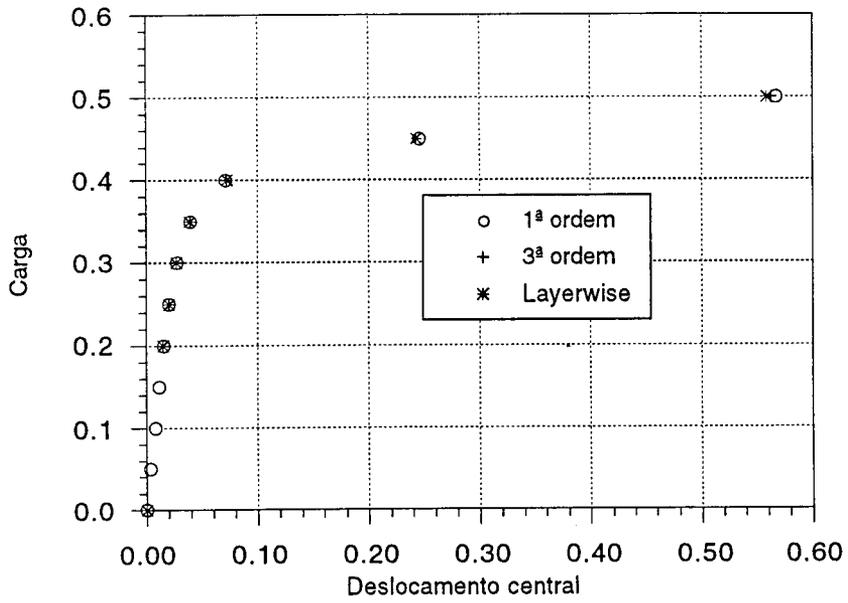


Figura 4.16 - Curvas carga-deslocamento para placa quadrada isotrópica, $a/h=30$

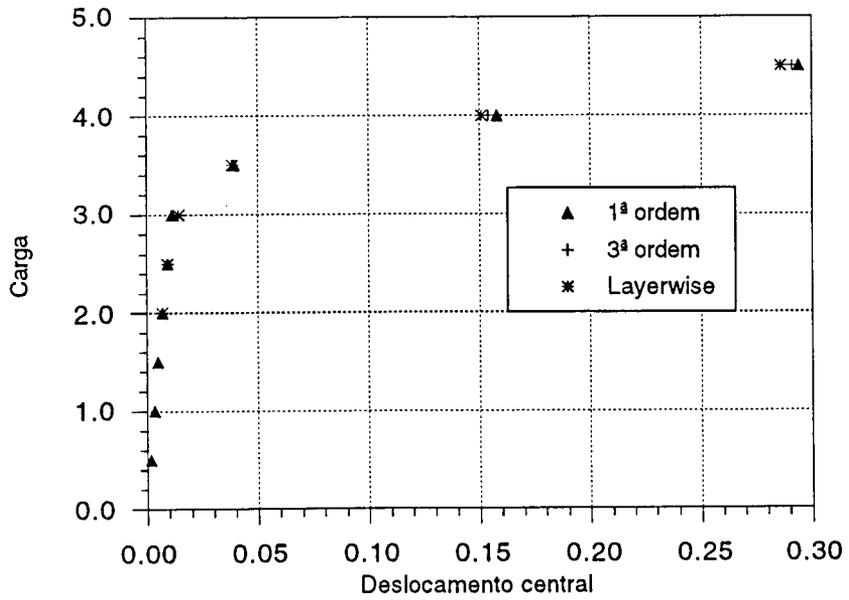


Figura 4.17 - Curvas carga-deslocamento para placa quadrada isotrópica, $a/h=10$

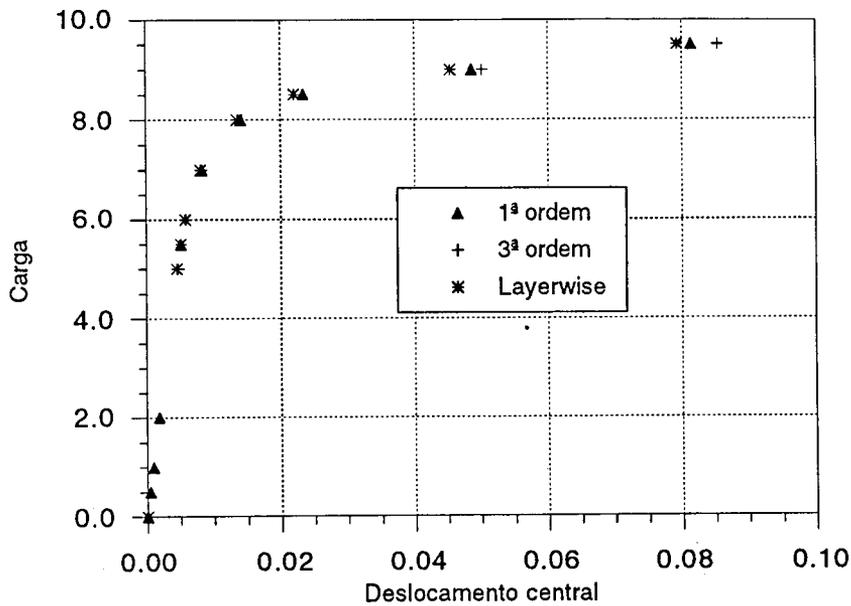


Figura 4.18 - Curvas carga-deslocamento para placa quadrada isotrópica, $a/h=6$.

Nas figuras 4.16 a 4.18 revela-se que as três teorias apresentam resultados muito semelhantes, para qualquer das relações a/h . Como a deformação é sobretudo de flexão e corte, estas componentes são interpretadas de forma semelhante em todas as teorias, confirmando resultados anteriores. A interpretação do comportamento elasto-plástico não é alterado pela definição da deformação, sendo independente da teoria apresentada.

4.5.5 Placas anisotrópicas laminadas

Na figuras seguintes estuda-se o mesmo problema de 4.5.4, para laminados sandwich, ilustrados na figura 4.19.

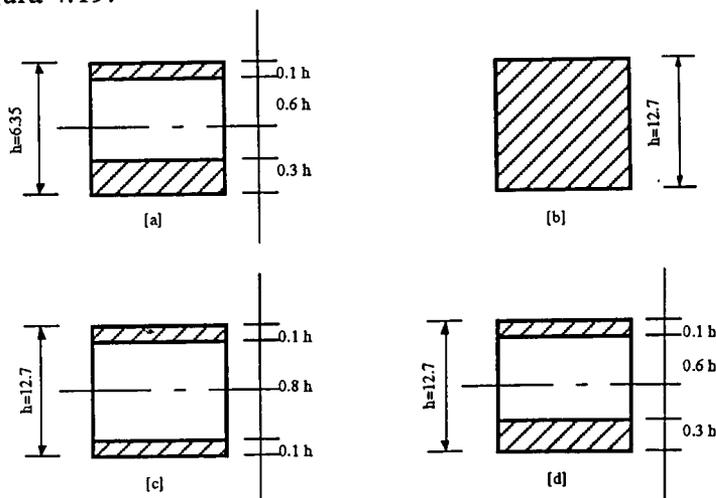


Figura 4.19 - Laminados a estudar para a placa quadrada

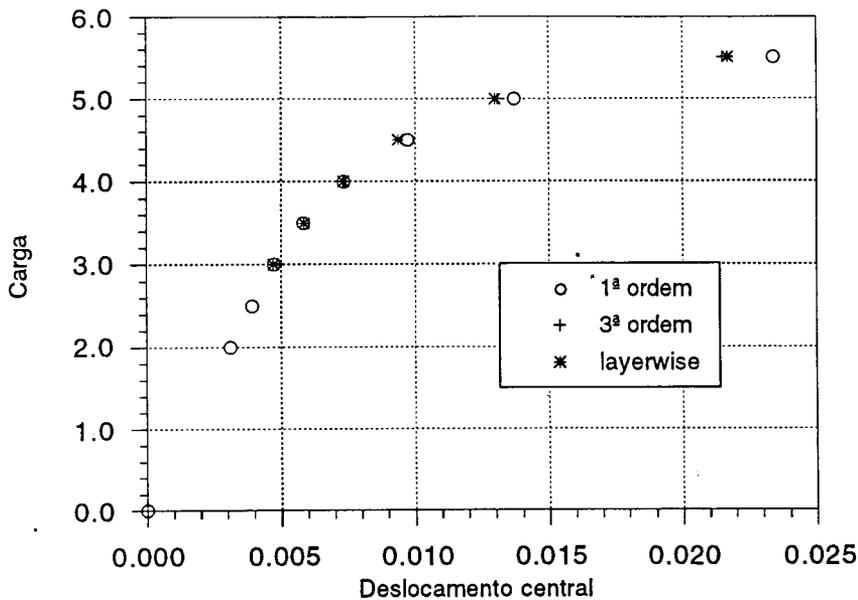


Figura 4.20 - Curva carga-deslocamento, laminado a, $L/h=6$, $E_{pele}/E_{núcleo}=10$

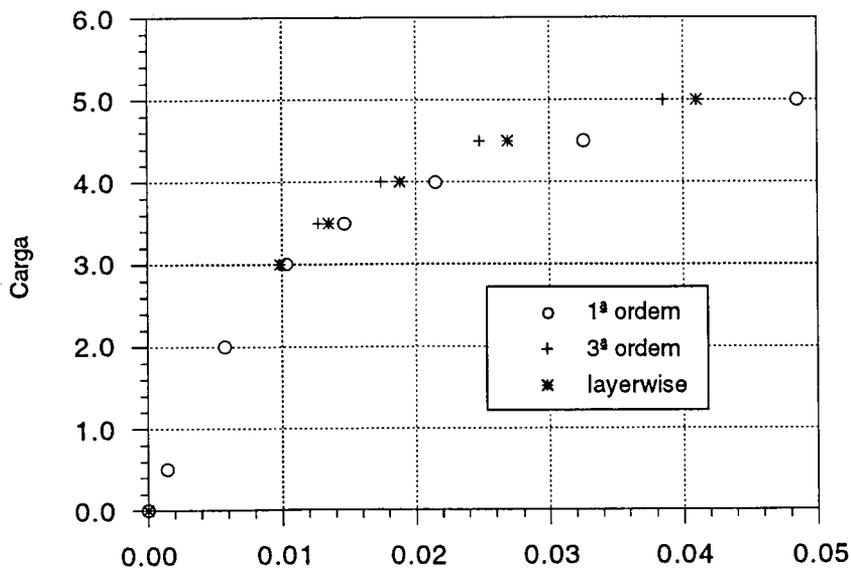


Figura 4.21 - Curva carga-deslocamento, laminado b, $L/h=6$, $E_{pele}/E_{núcleo}=10$

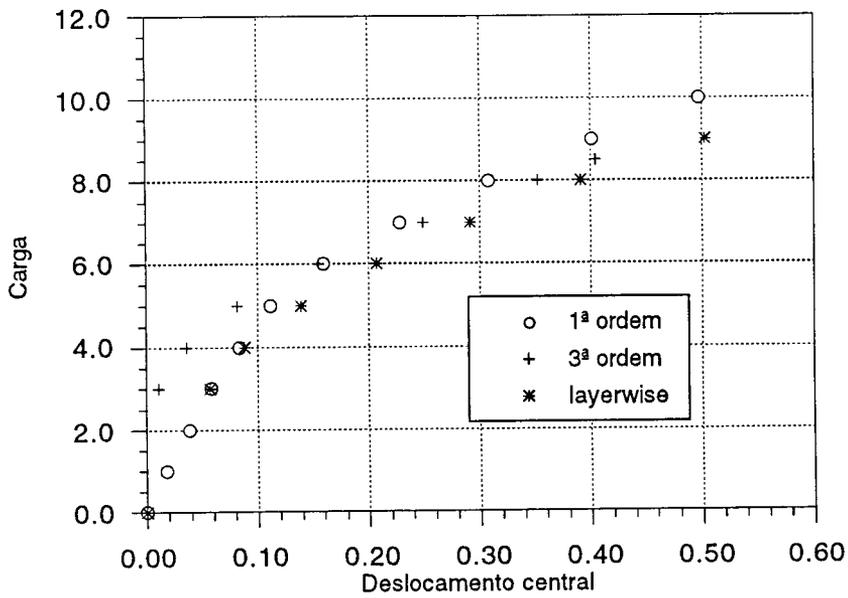


Figura 4.22 - Curva carga-deslocamento, laminado c, $L/h=6$, $E_{pele}/E_{núcleo}=100$

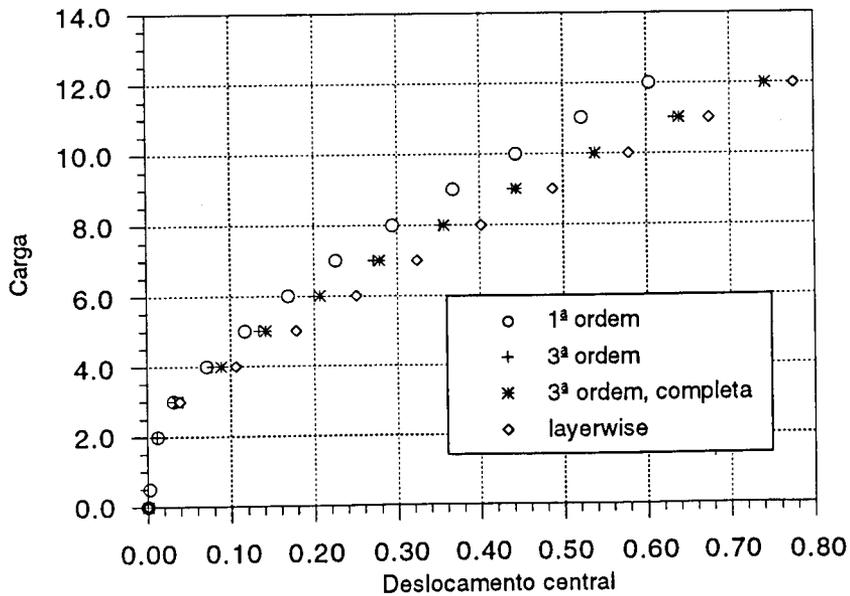


Figura 4.23 - Curva carga-deslocamento, laminado d, $L/h=6$, $E_{pele}/E_{núcleo}=100$

Neste exemplo, onde a relação vão/espessura é pequena - 6, os efeitos da deformação de corte são relevantes. Nota-se que a resposta das três teorias diverge, para relações de módulos de 10 ou 100, particularmente em laminados não simétricos ([a] ou [d]). Em laminados simétricos, onde o acoplamento membrana-flexão não existe, esta variação é menor.

4.5.6 Cascas anisotrópicas não laminadas

Analisa-se o comportamento elasto-plástico de uma casca quadrática encastrada não laminada sujeita a carga pontual central, para demonstrar a aplicabilidade dos modelos para estas situações. A casca é discretizada num quadrante com uma configuração 3x3x6. Utiliza-se o elemento Heterosis e as características da equação (4.22). As características geométricas consideradas são: espessura $h=0.2$, vão $L=6.0$, parâmetros $C_1=C_2=C=L/10$ e as coordenadas da superfície média $z = \frac{C}{(L/2)^2}(x^2 + y^2)$, como ilustrado na figura 4.24. As características de carga/deslocamento são apresentadas na figura 4.25. São comparados nesta figura os diferentes modelos cinemáticos utilizados neste trabalho, ou seja, o modelo de 1ª ordem, o modelo de terceira ordem ou refinado e o modelo layerwise. Nota-se uma boa correlação entre todos eles, para este exemplo, embora o elemento layerwise seja mais flexível, o que é de esperar, dado o seu maior número de graus de liberdade por nó.

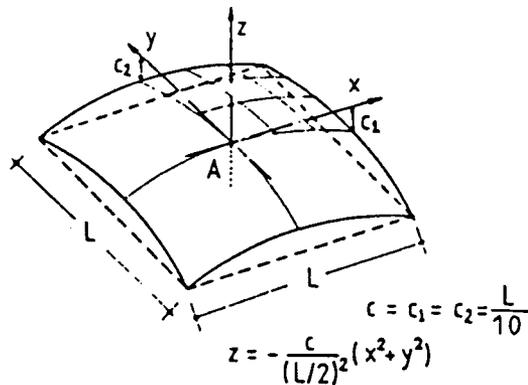


Figura 4.24- Casca anisotrópica não laminada- geometria e características

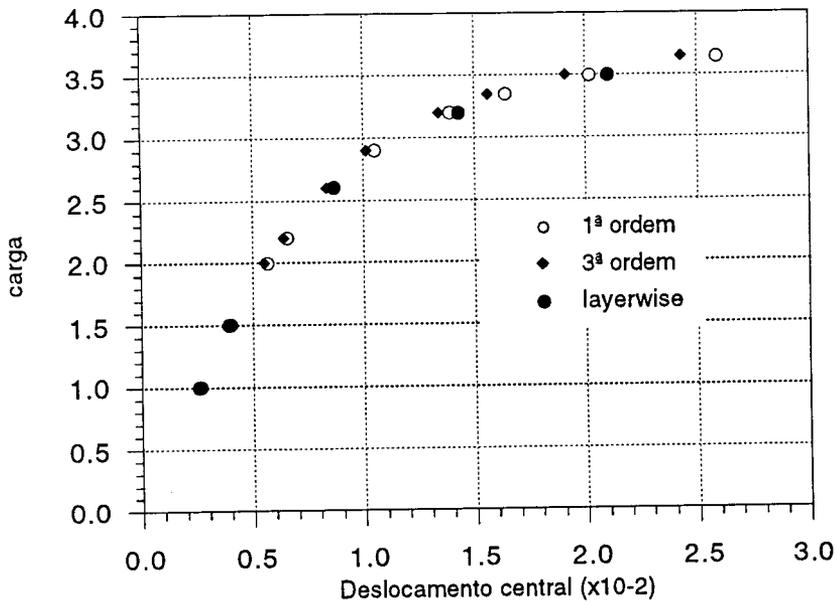


Figura 4.25 - Curvas carga-deslocamento para o comportamento elasto-plástico de uma casca não laminada quadrática encastada. Comparação de vários modelos cinemáticos.

4.5.7 - Casca cilíndrica sandwich, sujeita a carga pontual

Considera-se neste exemplo uma casca cilíndrica, figura 4.26, simplesmente apoiada sujeita a uma carga pontual central. São analisadas as espessuras de 6.35, 12.7 e 25.4.

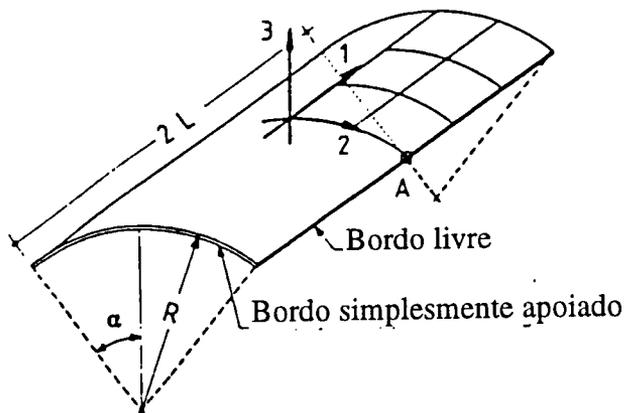


Figura 4.26 - Casca cilíndrica simplesmente apoiada, sujeita a carga pontual

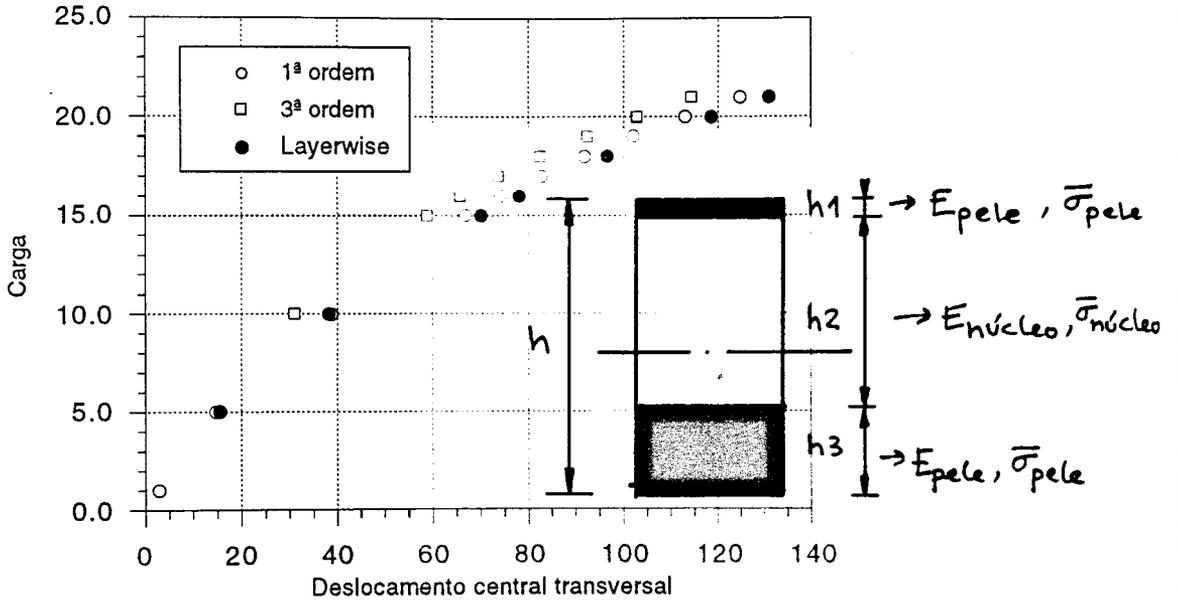


Figura 4.27 - Espessura, $h=6.35$ mm, laminado assimétrico, $h_1=0.1h$, $h_2=0.6h$, $h_3=0.3h$, $E_{pele}=3102.8$, $E_{núcleo}=31.028$, $\bar{\sigma}_{pele}=30$, $\bar{\sigma}_{núcleo}=30$

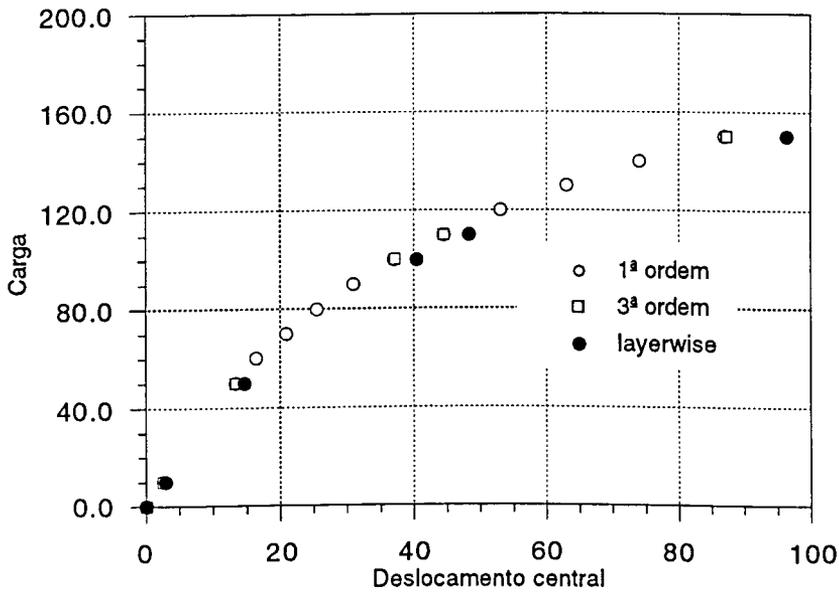


Figura 4.28 - Espessura, $h=12.7$ mm, laminado assimétrico, $h_1=0.1h$, $h_2=0.6h$, $h_3=0.3h$, $E_{pele}=3102.8$, $E_{núcleo}=3102.8$, $\bar{\sigma}_{pele}=30$, $\bar{\sigma}_{núcleo}=30$

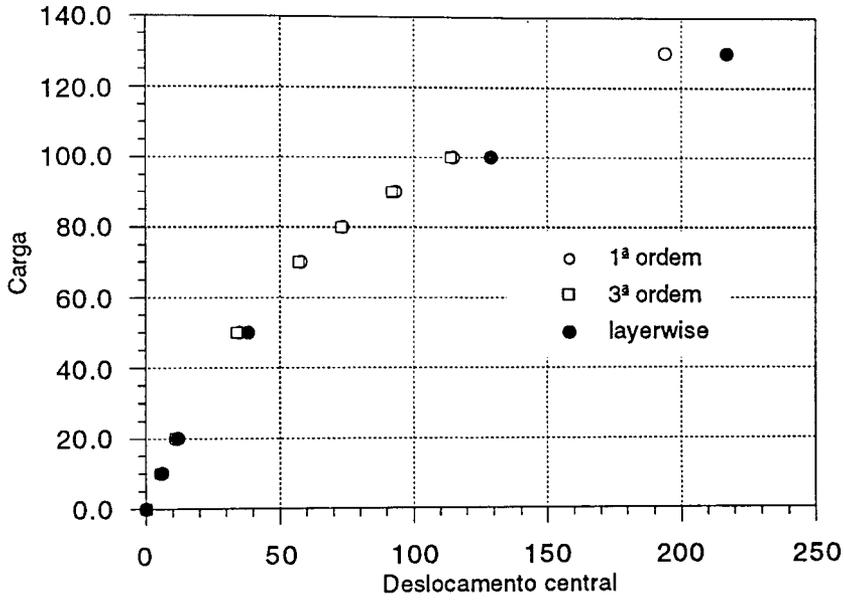


Figura 4.29 - Espessura, $h=12.7$ mm, laminado assimétrico, $h_1=0.1h$, $h_2=0.6h$, $h_3=0.3h$, $E_{pele}=3102.8$, $E_{núcleo}=310.28$, $\bar{\sigma}_{pele}=30$, $\bar{\sigma}_{núcleo}=15$

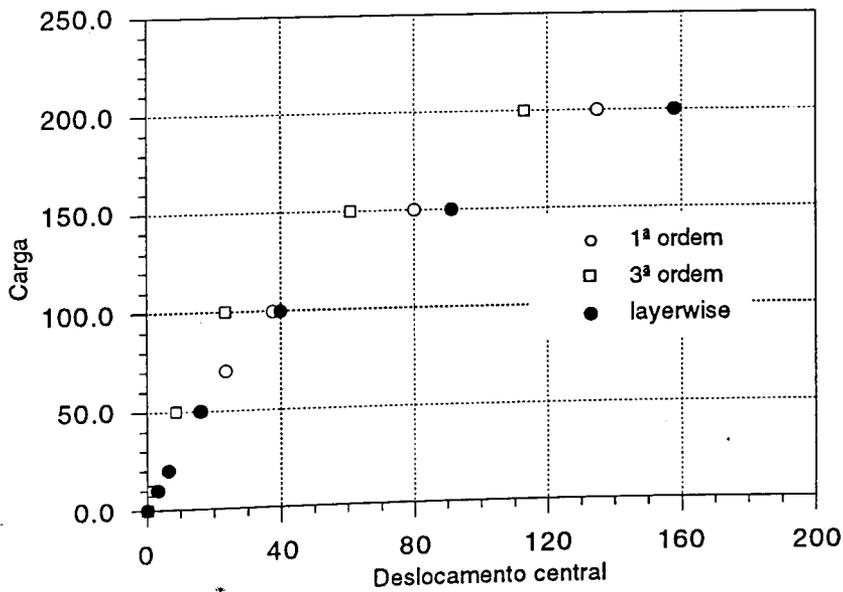


Figura 4.30 - Espessura, $h=6.35$ mm, laminado assimétrico, $h_1=0.1h$, $h_2=0.6h$, $h_3=0.3h$, $E_{pele}=3102.8$, $E_{núcleo}=31.028$, $\bar{\sigma}_{pele}=30$, $\bar{\sigma}_{núcleo}=30$

Deste exemplo conclui-se que a combinação de uma espessura elevada, um laminado não simétrico e de um rácio modular elevado, conduz a variações significativas na resposta das três teorias de deformação. A teoria de 1ª ordem e a teoria layerwise têm respostas mais próximas, sendo habitualmente a teoria de 3ª ordem a mais rígida. Note-se que não foram impostas orientações às camadas, o que poderá influenciar ainda mais os resultados.

4.5.8 - Flexão de vigas sandwich

Na figura 4.31 ilustra-se uma viga sandwich simplesmente apoiada e sujeita a uma carga pontual central, conforme se pode visualizar na fotografia 4.1. Foram ensaiados um conjunto de vigas com comprimentos de 160, 260, 400 e 550 mm. Nas figuras 4.32 a 4.35 apresentam-se as curvas carga-deslocamento obtidas nos ensaios de flexão em três pontos. Foram utilizados os elementos de casca com as teorias de 1ª ordem 3ª ordem e layerwise. O material das peles da estrutura sandwich é um compósito de poliéster-fibra de vidro quasi-isotrópico com $E=10$ GPa, $\nu=0.3$, $\sigma_y=120$ MPa. A espuma de PVC tem um módulo de 20 MPa, $\nu=0.3$ e $\sigma_y=2$ MPa. Na figura 4.36 apresentam-se as curvas carga-deslocamento para a viga de 160 mm. Verifica-se uma boa concordância com os valores experimentais com as teorias de 1ª ordem e layerwise, enquanto que a teoria de 3ª ordem se revela muito rígida.

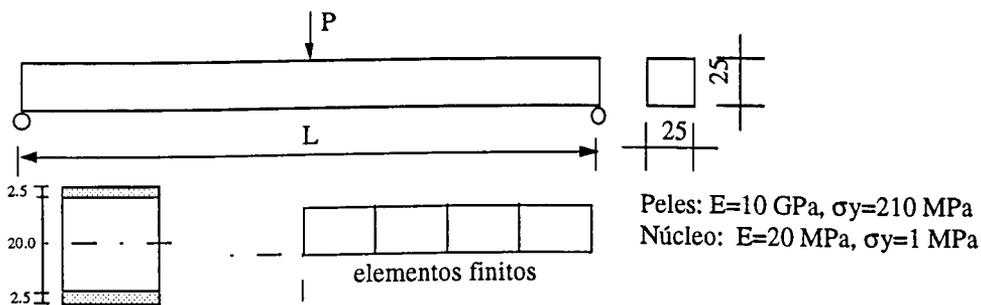
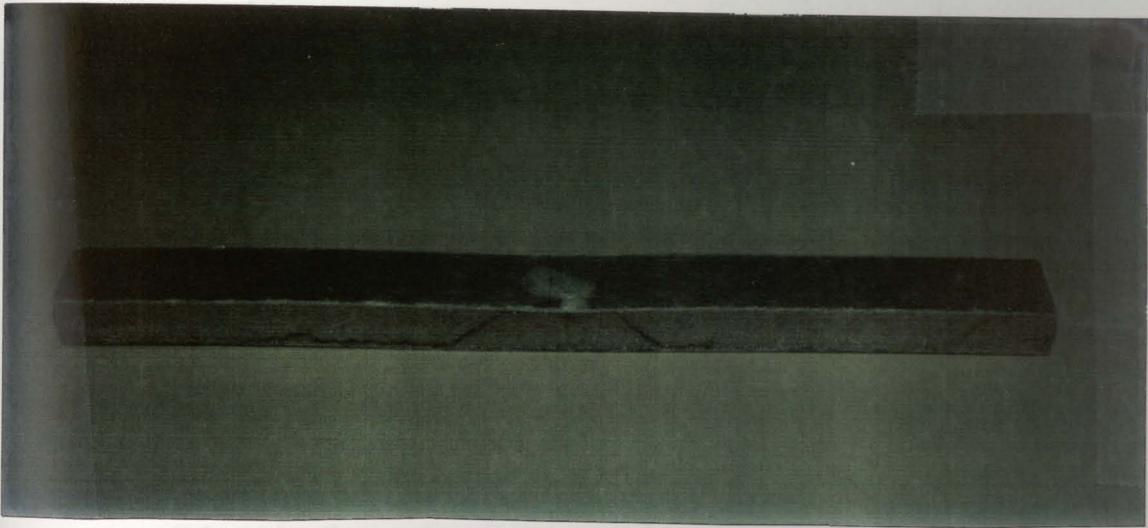


Figura 4.31 - Viga sandwich compósito-espuma de PVC



Fotografia 4.1 - Viga sandwich

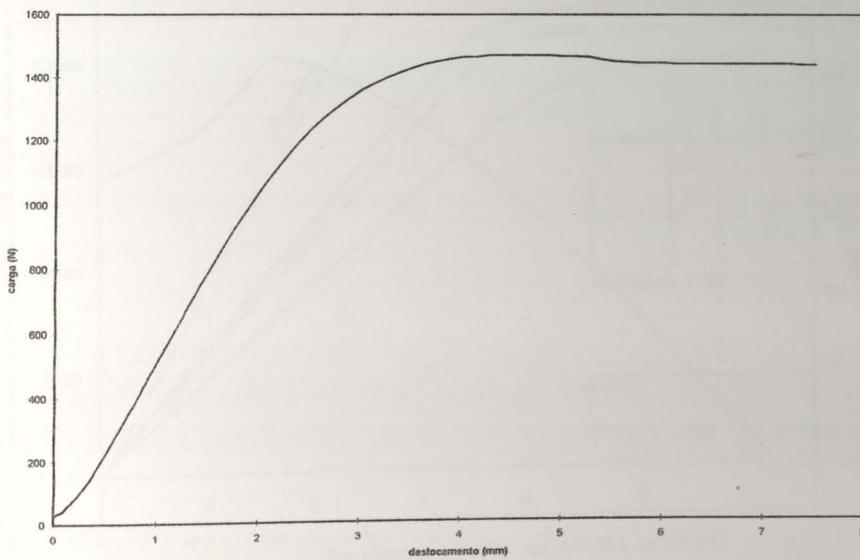


Figura 4.32 - Curva carga-deslocamento para viga sandwich, $L=160$ mm

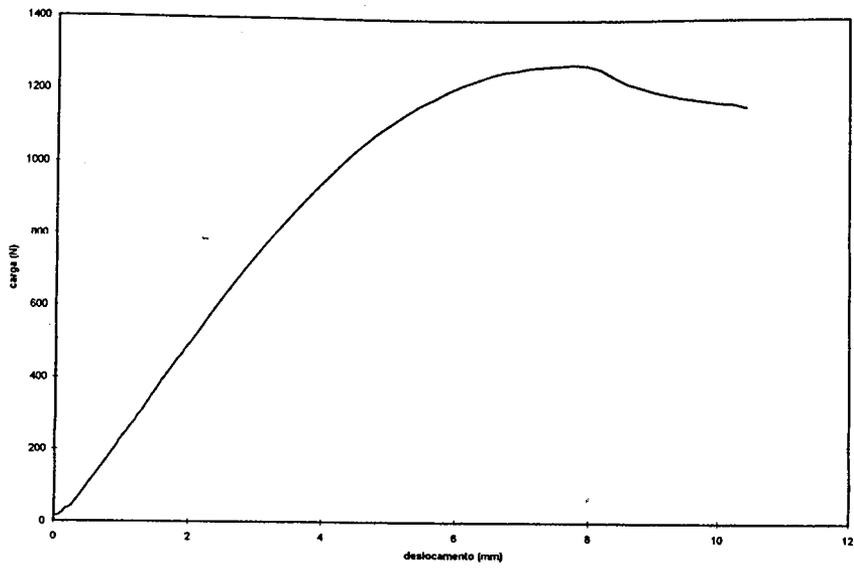


Figura 4.33 - Curva carga-deslocamento para viga sandwich, $L=260$ mm

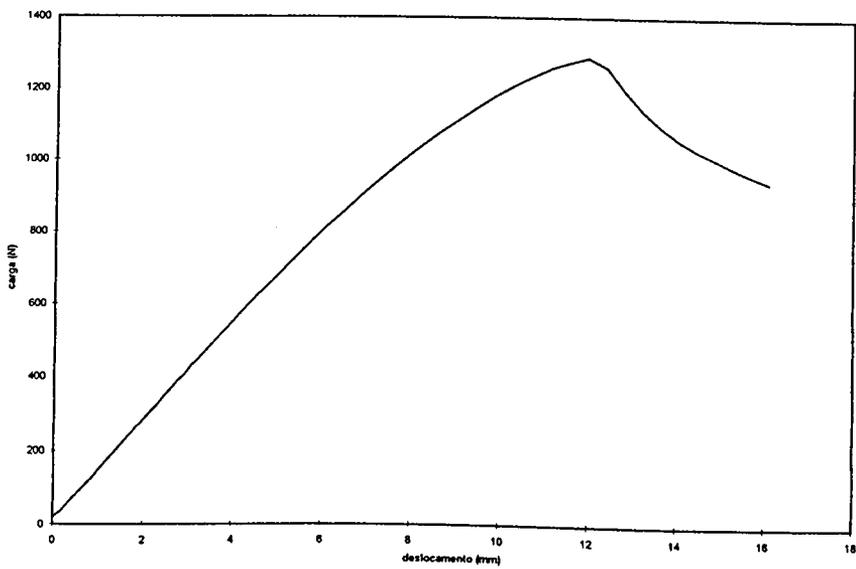


Figura 4.34 - Curva carga-deslocamento para viga sandwich, $L=400$ mm

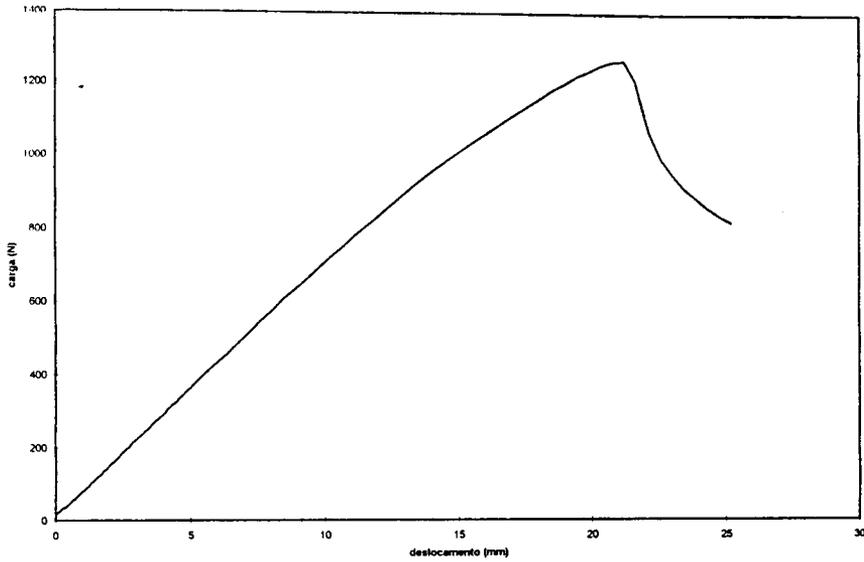


Figura 4.35 - Curva carga-deslocamento para viga sandwich, L=550 mm

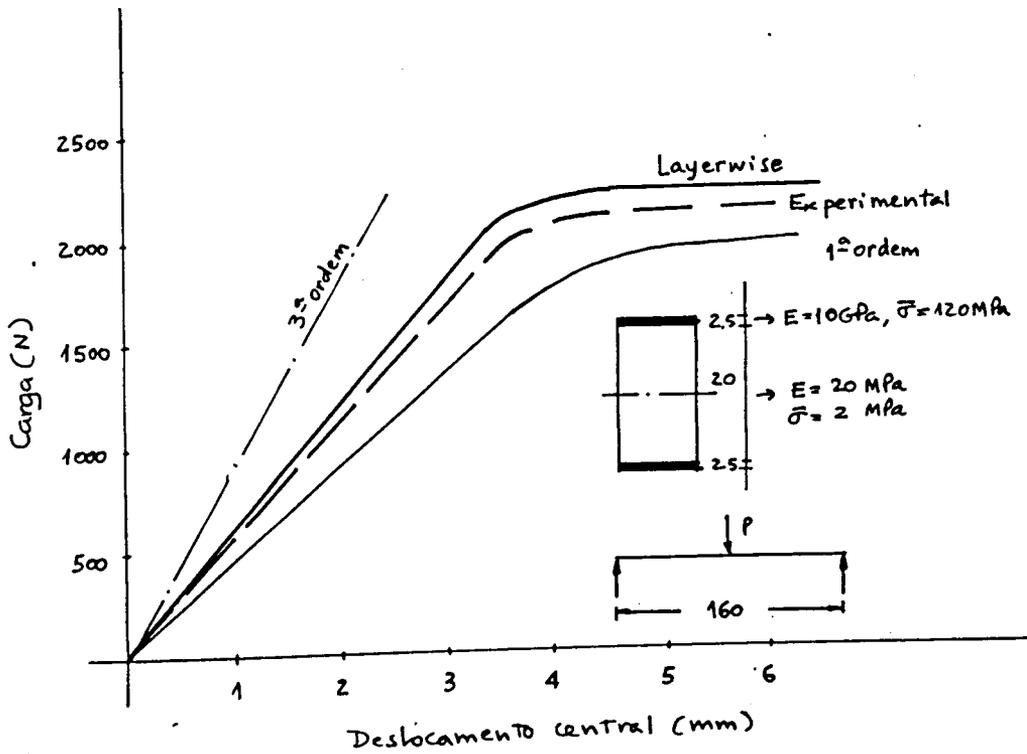


Figura 4.36 - Curva carga-deslocamento para viga sandwich, L=160 mm- Comparação de resultados experimentais e numéricos

Na figura 4.36 comparam-se a curva carga-deslocamento experimental com as curvas obtidas pelas três teorias de deformação, implementadas no elemento de casca degenerado. Verifica-se uma boa concordância com a teoria layerwise. A teoria de 3ª ordem apresenta-se demasiado rígida, confirmando a sua dificuldade em analisar estruturas sandwich com rácios modulares elevados (neste caso, 500).

Refira-se, ainda, que foi escolhida a viga de 160 mm, para comparação de resultados, porque, de acordo com o observado nas figuras 4.32 a 4.35, é aquela onde os efeitos da deformação de corte são mais relevantes, dada a relação comprimento/espessura (inferior a 10). Neste exemplo, verifica-se uma grande intervenção do núcleo, em termos do seu comportamento ao corte. Daqui, pensa-se, a boa correlação da teoria layerwise com os resultados experimentais.

4.6 - CONCLUSÕES

Neste capítulo foram analisadas vigas, placas e cascas laminadas compósitas e sandwich. Consideraram-se elementos de casca degenerada, nos quais foram implementadas as teorias de deformação de corte de 1ª e 3ª ordens e ainda a teoria layerwise. O comportamento inelástico dos materiais foi tido em conta, através duma formulação elasto-plástica. O critério utilizado foi o de Huber-Mises, tendo sido comparado com um critério alternativo [11]. Foram ensaiadas estruturas isotrópicas e laminadas e comparado o desempenho das teorias de deformação.

Foram realizados ensaios de flexão em três pontos em vigas sandwich, com peles de compósito e núcleo de espuma polimérica, e apresentados os resultados para diferentes comprimentos de viga. Para um desses comprimentos ($L=160$ mm), foram comparados os resultados numéricos e experimentais. Registou-se uma razoável concordância entre estes resultados, sendo de realçar a proximidade entre os resultados da teoria layerwise e os resultados experimentais. Nos restantes ensaios, verifica-se que, para os exemplos considerados, as teorias estudadas apresentam valores muito próximos. A razão deste facto pode residir na não consideração, nestes ensaios, da não linearidade geométrica. Regista-se, também, a capacidade dos elementos para simular, em simultâneo, vigas espessas, placas e cascas, finas ou espessas. A inclusão do comportamento inelástico do núcleo torna-se relevante, e consegue-se evidenciar o efeito da sua baixa tensão de cedência.

Realizou-se ainda um ensaio de tracção em compósitos termoplásticos e comparou-se os resultados experimentais [11] com a teoria de 1ª ordem, sendo a concordância muito boa. Estes modelos permitem, assim, aproximar com boa qualidade, os resultados

experimentais dos novos compósitos termoplásticos, chamados de compósitos da nova geração, bem como laminados sandwich cujo núcleo possua um comportamento elasto-plástico.

REFERÊNCIAS

1. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1991
2. J. Francisco, *Relatório de ensaios de tracção*, INEGI, 1995
3. F.J.M. Martins de Brito, *Caracterização do comportamento dos plásticos reforçados com vista a aplicações estruturais*, Tese de Especialista, LNEC, 1985, (3 volumes)
4. K.J. Yoon e C.T. Sun, *Characterization of elastic-viscoplastic properties of an AS4/PEEK thermoplastic composite*, *Journal of Composite Materials*, Vo. 25, pag. 1277-1296, 1991
5. F. Sloan e Huy Nguyen, *Mechanical characterization of extended-chain polyethylene (ECPE) fiber-reinforced composites*, *Journal of Composite Materials*, Vo. 29, pag. 2092, 2107, 1995
6. L. J. Gibson, M.F. Ashby, *Cellular solids*, Pergamon Press, 1988
7. F. Pecault, *Tese de Doutorado*, ENSAM, 1996
8. R. Hill, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, 1950
9. D.R.J. Owen, E. Hinton, *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press, 1980
10. J. A. Figueiras, *Ultimate load analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete plates and shells*, Ph. D. Thesis, c/ph/72/83, University College of Swansea, 1983.
11. C.T. Sun e G. Chen, *Elastic-plastic finite element analysis of thermoplastic composite plates and shells*, *AIAA Journal*, Vo. 30, nº 2, pag. 513-518, 1992
12. S. Ahmad, B. M. Irons e O. C. Zienkiewicz, *Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements*, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 2, pag. 419-451, 1970.
13. A. J. M. Ferreira, J. C. de Sá, A. T. Marques, *A degenerated shell element for the static linear analysis of sandwich structures*, ICCM-9, Madrid, 1993

14. B.Maker, R.Ferenz, J.Hallquist, NIKE3D-A Nonlinear, Implicit, Three-Dimensional Finite Element Code for Solid and Structural Mechanics, LLNL, U.S.A., 1991

CAPÍTULO 5

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS SANDWICH COM NÚCLEOS DE NINHO DE ABELHA

- 5.1 - INTRODUÇÃO AOS NINHOS DE ABELHA
- 5.2 - MECANISMOS DE DEFORMAÇÃO DE NINHOS DE ABELHA
 - 5.2.1 - Deformação do plano
 - 5.2.2 - Deformação transversal
- 5.3 - CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DOS NINHOS DE ABELHA
 - 5.3.1 - Deformação do plano
 - 5.3.1.1 - Deformação linear elástica
 - 5.3.1.2 - Deformação elástica não linear
 - 5.3.1.3 - Colapso plástico
 - 5.3.2 - Deformações transversais no ninho de abelha
 - 5.3.2.1 - Deformações elásticas
 - 5.3.2.2 - Deformações elásticas não lineares
 - 5.3.2.3 - Colapso plástico
- 5.4 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CÁLCULO DE
CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS
 - 5.4.1 - Modelo multicelular
 - 5.4.2 - Modelo unicelular
- 5.5.1. INTRODUÇÃO
- 5.5.2 - TEORIA
 - 5.5.2.1 - Campo de deslocamentos
 - 5.5.2.2 - Campo de deformações
 - 5.5.2.3 - Campo de tensões
 - 5.5.2.4 - Relações tensão-deformação
 - 5.5.2.5 - Princípio dos trabalhos virtuais
- 5.5.3 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS
 - 5.5.3.1 - Discretização do campo de deslocamentos
 - 5.5.3.2 - Matriz de deformações
 - 5.5.3.3 - Matriz de rigidez do elemento
- 5.7 - MODELOS DE CASCA VERSUS MODELOS 3D
- 5.8 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS
- 5.9 - CONCLUSÕES
- REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 5

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS SANDWICH COM NÚCLEOS DE NINHO DE ABELHA

5.1 - INTRODUÇÃO AOS NINHOS DE ABELHA

As estruturas sandwich são escolhidas para um grande número de aplicações estruturais. A sua leveza e elevada rigidez conferem-lhe interesse para um conjunto alargado de novas aplicações ou para substituição de anteriores conceitos.

Entre as numerosas possibilidades construtivas das estruturas sandwich, uma das mais inovadoras (embora já antiga) constitui o conjunto das sandwich com núcleos de ninho de abelha.

Um ninho de abelha consiste num conjunto regular de células hexagonais prismáticas. Habitualmente com secção hexagonal, os ninhos de abelha podem genericamente tomar outras geometrias, como se ilustra na figura 5.1 e na fotografia 5.1.

Os ninhos de abelha são habitualmente realizados em materiais poliméricos, metálicos ou cerâmicos. Aqueles que são constituídos com materiais poliméricos ou metálicos são utilizados em aplicações tão diversas como painéis de paredes até componentes para estruturas aeroespaciais. Dada a sua utilização crescente como núcleos de estruturas especiais, torna-se importante o estudo do seu comportamento estrutural e mecânico.

Gibson e Ashby [1] apresentam um conjunto de expressões para a definição do comportamento mecânico dos ninhos de abelha que, referem, poderá também servir de base para o comportamento de espumas tridimensionais complexas.

Dado que os ninhos de abelha têm uma estrutura geométrica regular, as suas deformações poderão ser aproximadamente analisadas no sentido de descrever as suas propriedades mecânicas. Estas propriedades são fundamentais para qualquer analista, quer como recurso simples para o projecto, quer como base para o método dos elementos finitos. Neste trabalho, estamos particularmente interessados na segunda opção. Por um lado, estamos interessados em conhecer as características mecânicas dos ninhos de abelha para a análise não linear de estruturas sandwich. Por outro lado, como será descrito mais

adiante, servimo-nos do próprio método dos elementos finitos para a determinação dessas propriedades.

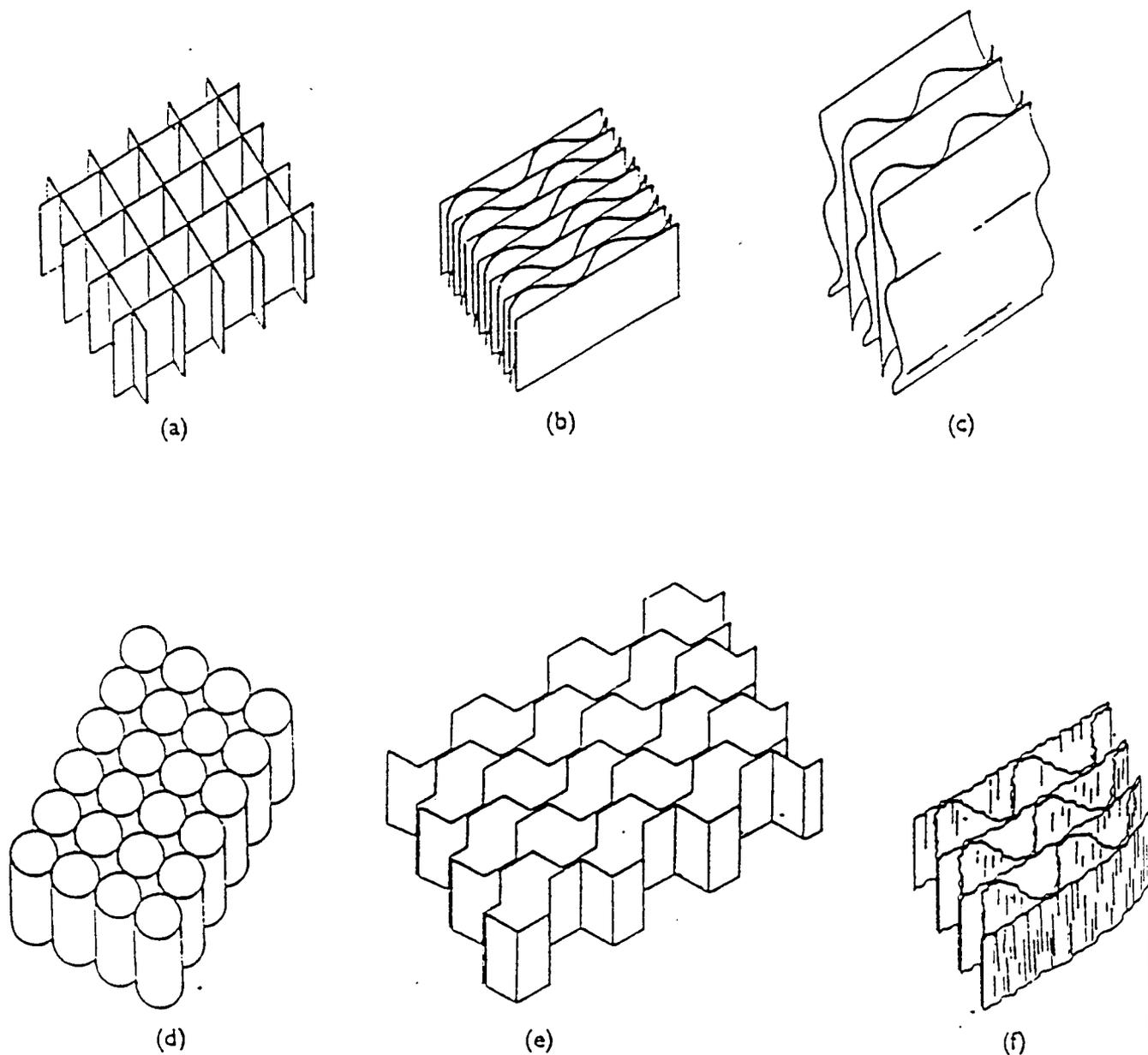
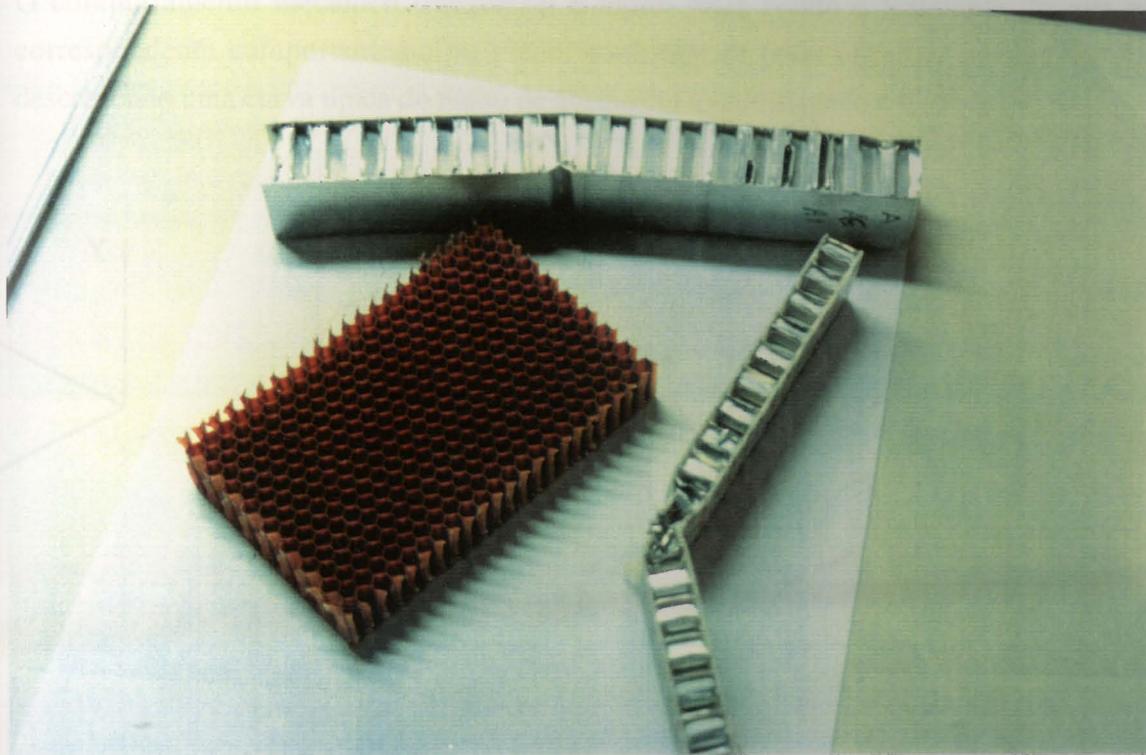


Figura 5.1 - Ninhos de abelha com geometrias variáveis



Fotografia 5.1 - Ninhos de abelha (nomex) e sandwich aluminio/aluminio

O método dos elementos finitos, enquanto ferramenta de cálculo de estruturas foi amplamente descrito em inúmeras referências, das quais destacamos [2-6].

Neste capítulo serão descritas as expressões analíticas do comportamento dos ninhos de abelha; será apresentado um estudo por elementos finitos dos ninhos de abelha e por último serão analisadas placas e cascas com estes materiais.

5.2 - MECANISMOS DE DEFORMAÇÃO DE NINHOS DE ABELHA

Os ninhos de abelha podem, como muitas outras estruturas, experimentar deformações em vários planos. Quando um ninho de abelha é comprimido no seu plano (X-Y na figura 5.2) as células inicialmente flectem sob deformação elástica, até que se atinge o colapso que pode ocorrer por instabilidade elástica, cedência plástica ou fractura frágil,

conforme o tipo de geometria e material das paredes da célula [1]. Esta fase de deformação é interrompida quando as células se tocam. A estrutura densifica-se e a sua rigidez aumenta. Caso o material da célula ceda plásticamente, o ninho de abelha pode apresentar uma extensa plasticidade ou, em caso de materiais frágeis, apresentar fracturas.

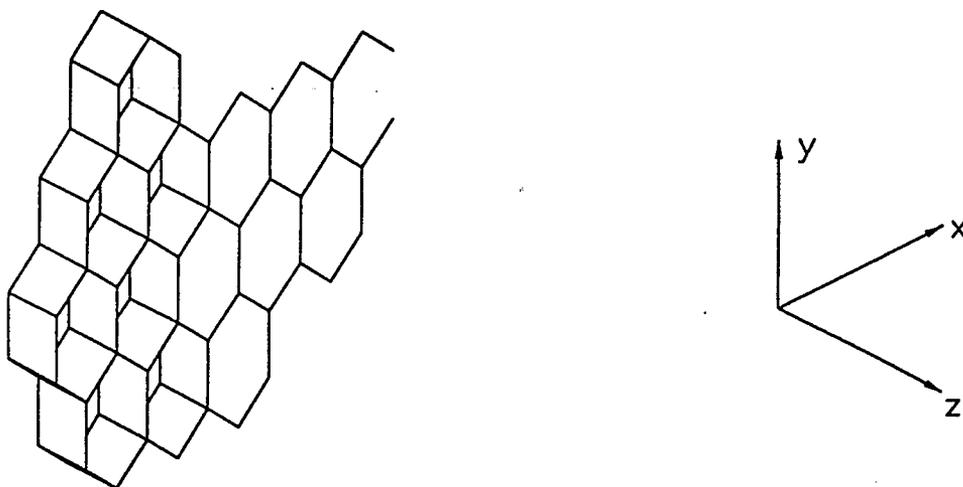


Figura 5.2 - Ninho de abelha com células hexagonais

Em carregamentos transversais (direcção Z da figura 5.2) o ninho de abelha pode sofrer compressões ou extensões. Os módulos e as tensões de cedência nesta direcção são superiores às correspondentes do plano.

Quando o ninho de abelha é utilizado como núcleo de estrutura sandwich, o seu comportamento fora do plano é o mais importante, e é aquele que nos interessa. O comportamento no plano X-Y será descrito tendo em conta o enquadramento do comportamento global, e tendo ainda em conta que é habitualmente aquele que é utilizado nos elementos de casca.

5.2.1 - Deformação do plano

Na referência [1] estão descritas algumas curvas de comportamento dos ninhos de abelha sob compressão no plano X-Y. Na figura 5.3 ilustra-se esse comportamento para a) e b) ninhos de abelha poliméricos; c) e d) ninhos de abelha elasto-plásticos e e) e f) ninho de

abelha frágeis. É notória, na maioria dos casos, a fase elástica, um patamar de cedência e uma fase de densificação.

5.2.2 - Deformação transversal

O comportamento mecânico transversal é muito mais rígido e resistente do que o correspondente comportamento no plano, conforme se pode observar na figura 5.4, descrevendo uma curva típica do ninho de abelha em a) compressão e b) tracção.

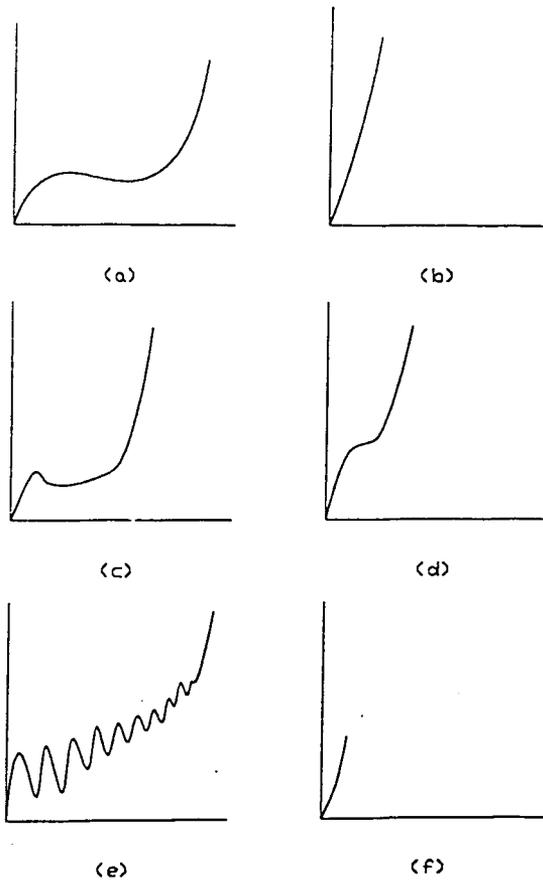


Figura 5.3 - Curvas tensão-deformação para ninhos de abelha sujeitos à compressão

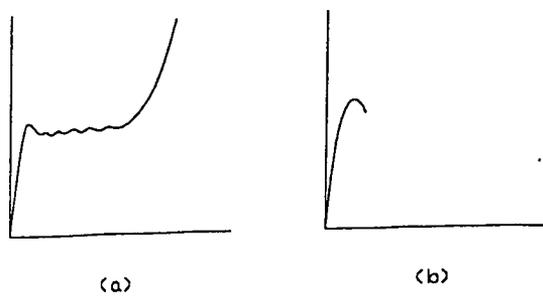


Figura 5.4 - Curvas tensão-deformação para o ninho de abelha sujeito a deformações transversais

5.3 - CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DOS NINHOS DE ABELHA

5.3.1 - Deformação do plano

5.3.1.1 - Deformação linear elástica

Na referência [1] considera-se que a resposta no plano do ninho de abelha é convenientemente descrita através de cinco constantes (tal como num material ortotrópico): dois módulos de Young E_1^* e E_2^* , um módulo de corte G_{12}^* e dois coeficientes de Poisson ν_{12}^* e ν_{21}^* , que não são independentes, antes ligados pela seguinte expressão:

$$E_1^* \nu_{21}^* = E_2^* \nu_{12}^* \quad (5.1)$$

Estas características podem ser calculadas em função da geometria da célula básica do ninho de abelha (figura 5.5), da seguinte forma [1,7]:

$$\frac{E_1^*}{E_s} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\cos \theta}{\left(\frac{h}{l} + \text{sen} \theta\right) \text{sen}^2 \theta} \quad (5.2)$$

$$\frac{E_2^*}{E_s} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\left(\frac{h}{l} + \text{sen} \theta\right)}{\cos^3 \theta} \quad (5.3)$$

em que E_s representa o módulo de Young do material da célula do ninho de abelha.

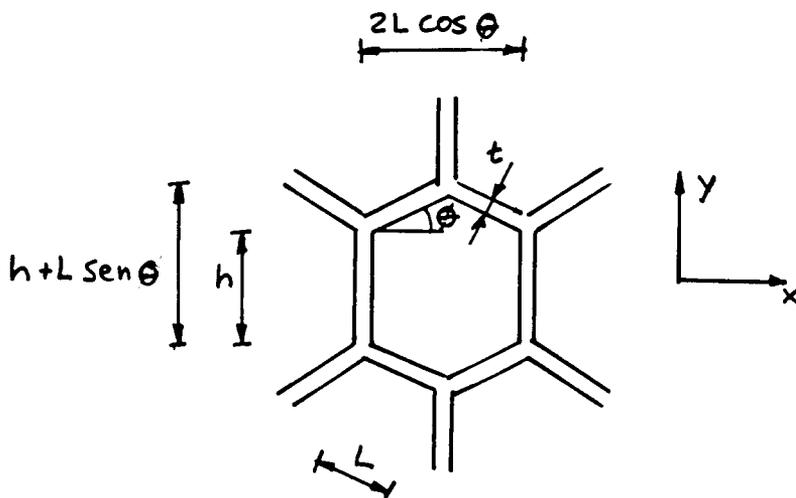


Figura 5.5 - Geometria da célula básica do ninho de abelha

Caso o ninho de abelha tenha células hexagonais de espessura uniforme, obtém-se a expressão

$$\frac{E_1^*}{E_s} = \frac{E_2^*}{E_s} = 2.3 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \quad (5.4)$$

Os coeficientes de Poisson são obtidos pela expressão

$$\nu_{12}^* = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\cos^2 \theta}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta} \quad (5.5)$$

O módulo de corte é obtido através dum simulação analítica dum ensaio de corte na célula

$$G_{12}^* = \frac{\tau}{\gamma} = E_s \left(\frac{t}{l} \right)^3 \frac{\frac{h}{l} + \sin \theta}{\left(\frac{h}{l} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{h}{l} \right) \cos \theta} \quad (5.6)$$

Para hexágonos regulares, a expressão (5.6) reduz-se a:

$$\frac{G_{12}^*}{E_s} = 0.57 \left(\frac{t}{l} \right)^3 = \frac{1}{4} \frac{E^*}{E_s} \quad (5.7)$$

Gibson[8] obteve um conjunto de resultados experimentais que confirmam as expressões anteriores, embora demonstrando sensibilidade à qualidade do ninho de abelha.

5.3.1.2 - Deformação elástica não linear

Para a curva tensão-deformação em compressão, o patamar, para ninhos de abelha elastoméricos, é causado por instabilidade elástica das paredes da célula [1]. De acordo com a carga de Euler, é possível obter a tensão crítica elástica $(\sigma_{el}^*)_2$ para hexágonos regulares como

$$\frac{(\sigma_{el}^*)_2}{E_s} = 0.22 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \quad (5.8)$$

5.3.1.3 - Colapso plástico

Os ninhos de abelha construídos com materiais metálicos ou poliméricos têm a possibilidade de ceder plasticamente, sempre que o momento flector da parede da célula

atinga o momento plástico. Pode obter-se uma expressão para a tensão de cedência da parede em função da geometria da célula e da tensão de cedência do material [1]:

$$\frac{(\sigma_{pl}^*)_1}{\sigma_{ced}} = \left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{1}{2\left(\frac{h}{l} + \text{sen}\theta\right)\text{sen}\theta} \quad (5.9)$$

Para hexágonos regulares uniformes, esta expressão reduz-se a

$$\frac{(\sigma_{pl}^*)_1}{\sigma_{ced}} = \frac{2}{3} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad (5.10)$$

na direcção 2 é possível encontrar uma expressão semelhante a (5.9). De qualquer modo, para hexágonos regulares a expressão da tensão de cedência na direcção 2 é igual à expressão (5.10).

Quando o ninho de abelha é solicitado em corte puro, podem também formar-se rótulas plásticas nas paredes. Supondo que o ninho de abelha sofre plasticidade no corte, a sua tensão de cedência é obtida como

$$\frac{(\tau_{pl}^*)_{12}}{\sigma_{ced}} = \frac{1}{4} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{1}{\frac{h}{l} \cos\theta} \quad (5.11)$$

ou, para hexágonos regulares

$$\frac{(\tau_{pl}^*)_{12}}{\sigma_{ced}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad (5.12)$$

5.3.2 - Deformações transversais no ninho de abelha

5.3.2.1 - Deformações elásticas

Os ninhos de abelha são frequentemente usados como núcleos de estruturas sandwich, o que aliás é o interesse principal para este trabalho. A função do núcleo de ninho de abelha é a de transferir as cargas normais e de corte na direcção z da figura 5.6.

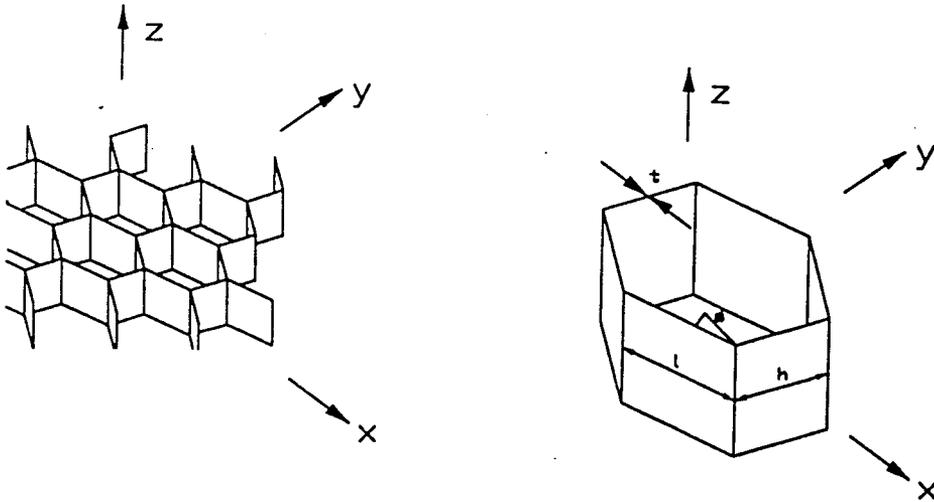


Figura 5.6 - Ninho de abelha

Quando solicitadas na direcção Z, as paredes da célula expandem ou contraem (mais do que flectem), e os módulos, para hexágonos regulares são muito superiores aos obtidos para solicitações do plano X-Y.

O módulo de Young na direcção Z é obtido por relação directa do módulo do material sólido E_s , tendo em conta a secção resistente:

$$\frac{E_3^*}{E_s} \approx \frac{t}{l} \quad (5.13)$$

Os coeficientes de Poisson ν_{31}^* e ν_{13}^* são iguais ao correspondente coeficiente de Poisson do material sólido

$$\nu_{31}^* = \nu_{32}^* = \nu_s \quad (5.14)$$

Os módulos de corte são de cálculo complexo, dado que a distribuição ds tensões resulta das acções exteriores, bem como da interacção das células vizinhas. Os cálculos mais exactos resultam de métodos numéricos [9].

Na referência [1] sugere-se que para hexágonos regulares, esses módulos podem ser obtidos por

$$\frac{G_{13}^*}{G_s} = 0.577 \left(\frac{t}{l} \right) \quad (5.15)$$

$$G_{23}^* = G_{13}^* \quad (5.16)$$

5.3.2.2 - Deformações elásticas não lineares

Estas propriedades são relativamente escassas, encontrando-se na literatura as seguintes propriedades [1]:

$$\frac{(\sigma_{el}^*)_3}{E_s} = 5.2 \left(\frac{t}{l}\right)^3 \quad (5.17)$$

para hexágonos regulares e $\nu=0.3$. Refira-se que esta expressão corresponde a tensões cerca de 20 vezes superiores às da correspondente tensão para solitação do plano.

5.3.2.3 - Cedência

A tensão de cedência da parede é obtida como [1]:

$$\frac{(\sigma_{pl}^*)_3}{\sigma_{ced}} = \frac{\rho^*}{\rho_s} \quad (5.18)$$

em que σ_{ced} e ρ_s são, respectivamente, a tensão de cedência e a densidade do material base. Este tipo de cedência foi estudado por [10] e [11], obtendo-se para hexágonos regulares uma outra expressão

$$\frac{(\sigma_{pl}^*)_3}{\sigma_{ced}} \approx 2 \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad (5.19)$$

tendo em conta a formação de rótulas plásticas por compressão das paredes.

Tendo em conta não apenas uma célula isolada, como na expressão (5.19), [11] obteve a expressão seguinte, que considera alguma interferência das células vizinhas

$$\frac{(\sigma_{pl}^*)_3}{\sigma_{ced}} = 5.6 \left(\frac{t}{l}\right)^{5/3} \quad (5.20)$$

para hexágonos regulares, com espessura uniforme, ou

$$\frac{(\sigma_{pl}^*)_3}{\sigma_{ced}} = 6.6 \left(\frac{t}{l}\right)^{5/3} \quad (5.21)$$

para células em que duas das faces têm espessura dupla. Refira-se que esta situação é muito frequente, dado o método de fabrico corrente de colagem de folhas, com subsequente expansão [12].

Rasmussen [13] sugere as seguintes características para o ninho de abelha, cuja geometria é ilustrada na figura 5.7:

$$E_3 = \frac{8 t}{3 d} E^* \quad (5.22)$$

$$G_{13} = \frac{68 t}{75 d} G^* = G_{23} \quad (5.23)$$

onde uma vez mais E^* e G^* representam, respectivamente, o módulo de elasticidade e o módulo de corte do material das paredes das células do ninho de abelha.

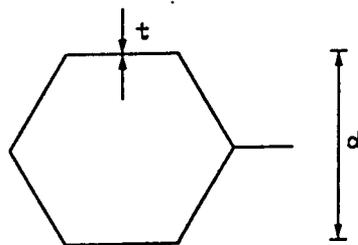


Figura 5.7 - Ninho de abelha hexagonal [13]

O cálculo dos módulos elásticos, particularmente dos módulos de corte, revela-se fundamental para o cálculo de estruturas, em particular pelo método dos elementos finitos. Dependendo do tipo de análise e do tipo de elemento a utilizar, serão necessárias diferentes características. Grediac [9] apresentou um estudo por elementos finitos de uma

célula de ninho de abelha (estudo local) em que os módulos G_{xz} e G_{yz} são obtidos como função linear da espessura das paredes das células. Este estudo não tem em conta a interacção das células vizinhas. Nas figuras 5.8 e 5.9 apresenta-se os gráficos dos principais resultados obtidos em [9].

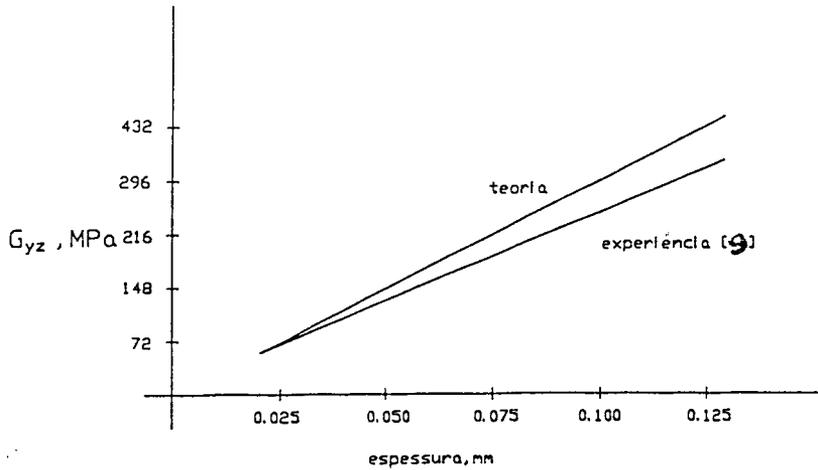


Figura 5.8 - Módulos de corte transversal em função da espessura das paredes das células do ninho de abelha de alumínio [9]

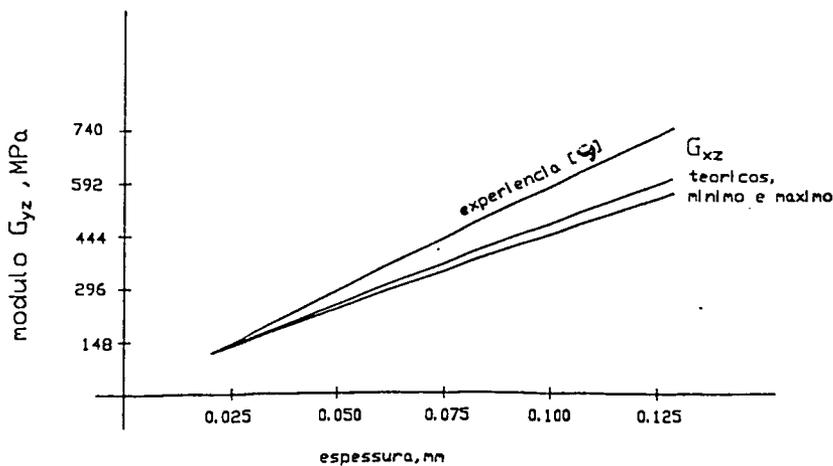


Figura 5.9 - Evolução teórica e experimental de G_{xz} em função da espessura das paredes

5.4 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CÁLCULO DE CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS

O cálculo das características elásticas tem sido realizado, como vimos, por meios analíticos ou numéricos em células isoladas. Pretende-se averiguar da qualidade destes procedimentos.

Neste estudo, pretende-se atingir dois objectivos principais:

- 1 - a partir do método dos elementos finitos, concluir sobre quais os módulos equivalentes dos ninhos de abelha a utilizar no cálculo de estruturas;
- 2 - a partir do conhecimento dessas características, realizar a análise não linear de estruturas sandwich com ninhos de abelha.

5.4.1 - Modelo multicelular

Considerando o 1º objectivo, estabeleceu-se inicialmente a criação de um modelo de elementos finitos, tendo por base a célula base da figura 5.10 e a geração automática através de dum pré-processor.

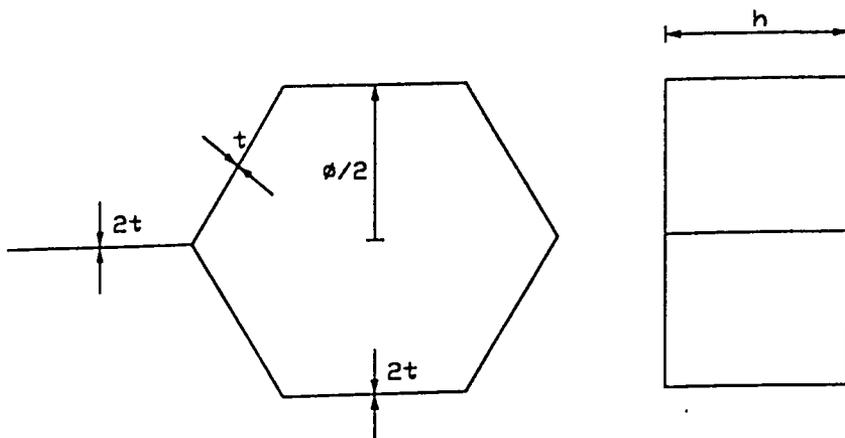


Figura 5.10 - Geometria da célula base do ninho de abelha

Esta célula prevê que as paredes horizontais tenham o dobro da espessura das paredes inclinadas, o que é corrente no mercado actual dos ninhos de abelha.

O programa de geração [14] cria automaticamente a malha, as condições fronteira, as cargas especificadas e executa o cálculo, ou seja, realiza uma sessão completa de elementos finitos linear. O programa aproveita as capacidades do código I-DEAS [15].

Pode estudar-se o comportamento estrutural do ninho de abelha através do material das paredes das células, tendo em conta que o ninho de abelha é uma estrutura regular. Dado que o alumínio é um material muito usado nos ninhos de abelha e que as suas características são isotrópicas e bem conhecidas, foi eleito como o material de base para as células, com as seguintes características

$$E=70 \text{ GPa}, \nu=0.3 \quad (5.24)$$

Solicitando o ninho de abelha, enquanto estrutura, em várias direcções ou planos, pode obter-se uma resposta global que define o seu comportamento estrutural. Queremos conhecer as características homogeneizadas globais desta estrutura, para poder ser utilizada como camada (núcleo) de um laminado sandwich típico. Realizaram-se então um conjunto de testes simples, tracção, compressão, flexão e corte, com o objectivo de determinar as características elásticas dessa camada em função da geometria e do material das células. Quando solicitado em tracção, figura 5.11, por exemplo, pode-se determinar o módulo elástico longitudinal dessa camada, através da deformação da estrutura de ninho de abelha.

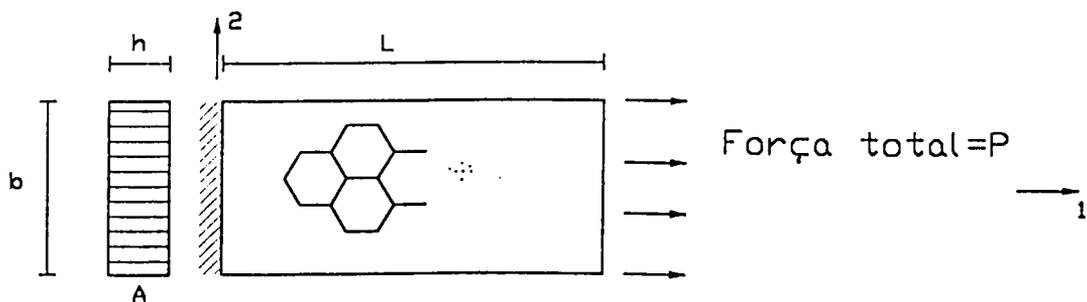


Figura 5.11 - Ensaio de tracção ao ninho de abelha

Por igualdade de deslocamentos entre esta estrutura de ninho de abelha e uma outra estrutura homogénea fictícia de material a conhecer, pode encontrar-se a característica equivalente de interesse [16]

$$E_1 = \frac{PL}{\delta A} \quad (5.25)$$

Outros exemplos foram testados, conforme se pode ver na figura 5.12. Em cada caso pretendeu-se, dentro do possível, representar estados de tensão uniaxial, dos quais se possa retirar uma única característica. Em alguns casos desprezou-se efeitos de acoplamento entre modos de deformação, considerando-se apenas o modo principal.

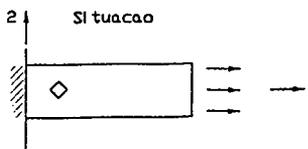
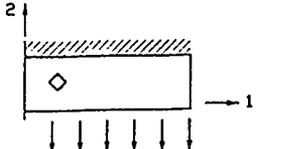
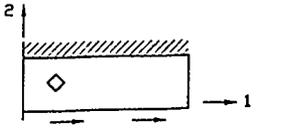
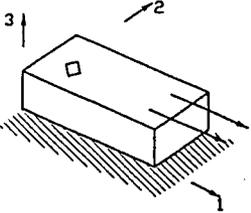
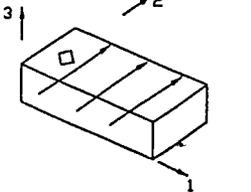
Situação	Estado	Objectivo
	Tracção/compressão pura no plano	E_1
	Tracção/compressão pura no plano	E_2
	Corte puro no plano	G_{12}
	Corte transversal	G_{13}
	Corte transversal	G_{23}

Figura 5.12 - Estudos simples do comportamento estrutural de ninhos de abelha

Na figura 5.13 apresenta-se um ninho de abelha sujeito a corte transversal e correspondentes deformações e tensões.

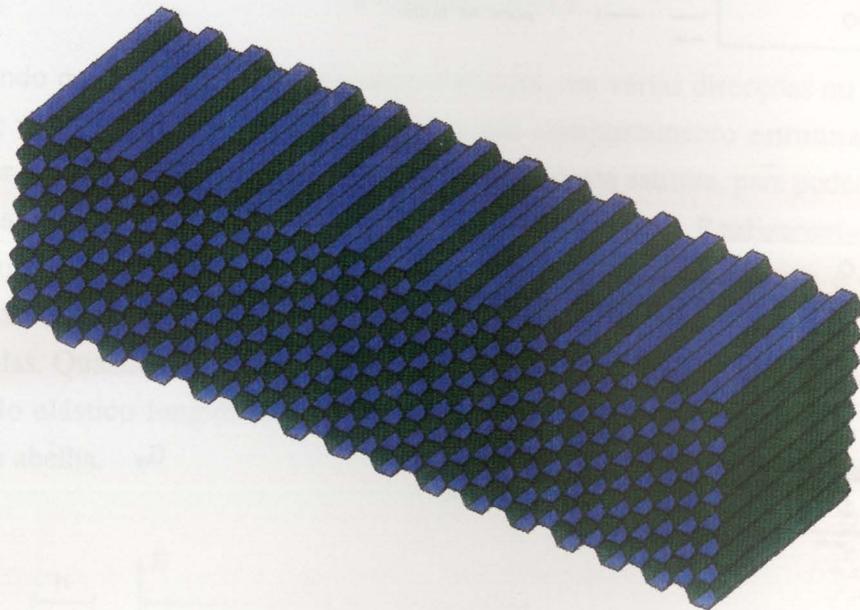


Figura 5.13 a - Geometria de ninho de abelha hexagonal



Figura 5.13 b - Ninho de abelha hexagonal sujeito a deformações de corte transversal - evolução de deformações

Na figura 5.13 apresenta-se um modelo de elemento finito de uma célula hexagonal de um ninho de abelha, submetida a deformações de corte transversal. A evolução das tensões é mostrada na figura 5.13 c.

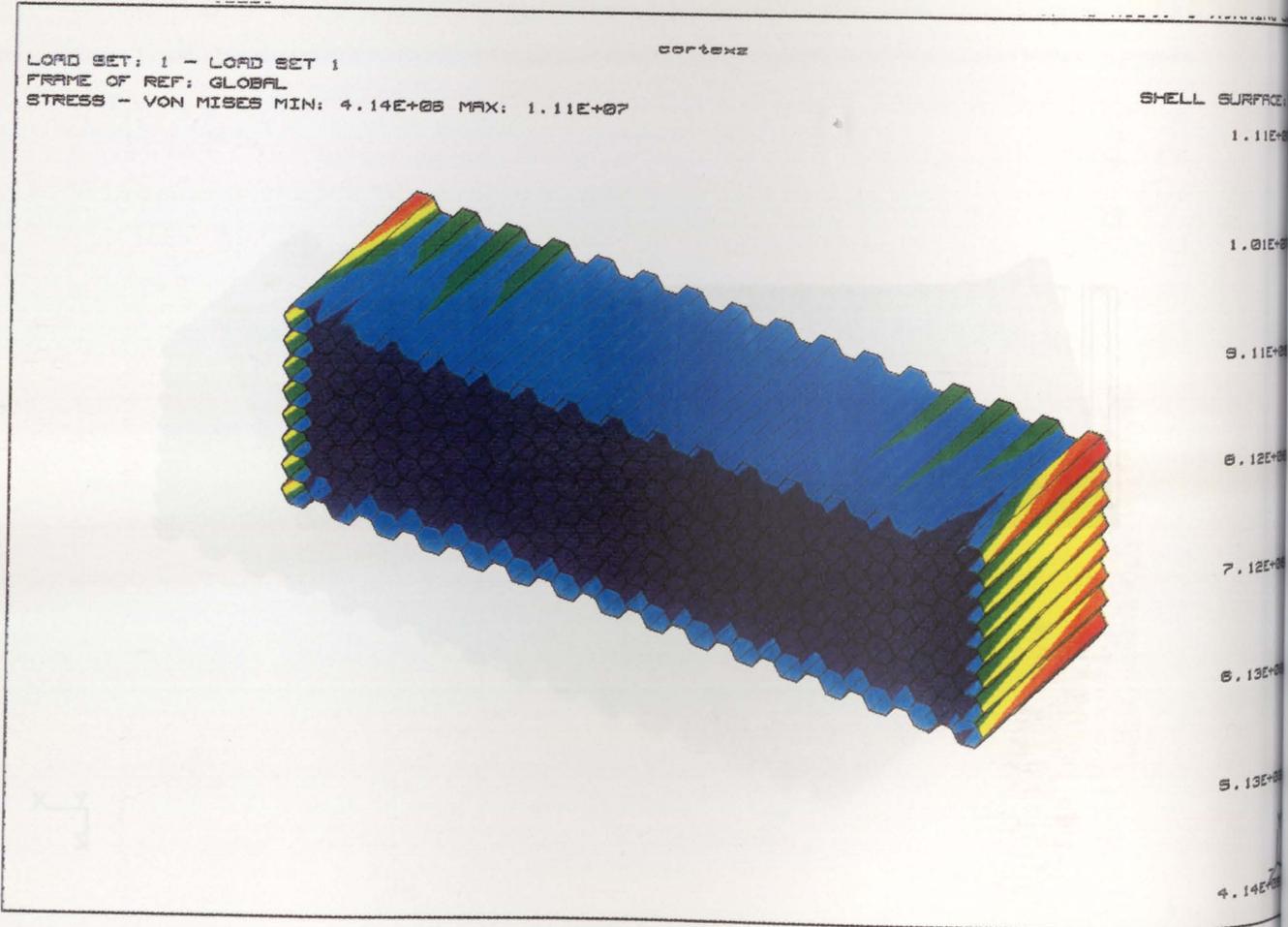


Figura 5.13 c - Ninho de abelha hexagonal sujeito a deformações de corte transversal - evolução de tensões

5.4.2 - Modelo unicelular

Por comparação com o modelo de elementos finitos em que se consideram um conjunto de células hexagonais, foi também tido em conta um modelo de célula isolada (unitária). Pretende-se averiguar qual o módulo de corte tendo em conta determinadas características geométricas. Na figura 5.14 apresenta-se a geometria e as condições fronteira aplicadas. Foi considerada uma força de corte na face superior, enquanto que na face inferior da célula se impõem restrições às translacções. Considera-se que a tensão de corte pode ser calculada pela razão entre a força total e a área da célula. Foi estudada a influência da espessura das paredes e do diâmetro da célula nos módulos de corte G_{xz} e G_{yz} (figuras 5.15 e 5.16). É curioso registar que esta simulação encontrou valores de módulos de corte praticamente iguais aos da simulação multicelular. Para um ninho de abelha de 25 mm de altura, espessura 0.2 mm (dupla espessura nas faces longitudinais) e diâmetro 1/8", obteve-se para o modelo uni-celular um módulo de corte G_{xz} de 1316 MPa, enquanto que no modelo multicelular se obteve o valor de 1385 MPa, o que nos parece suficientemente próximo.

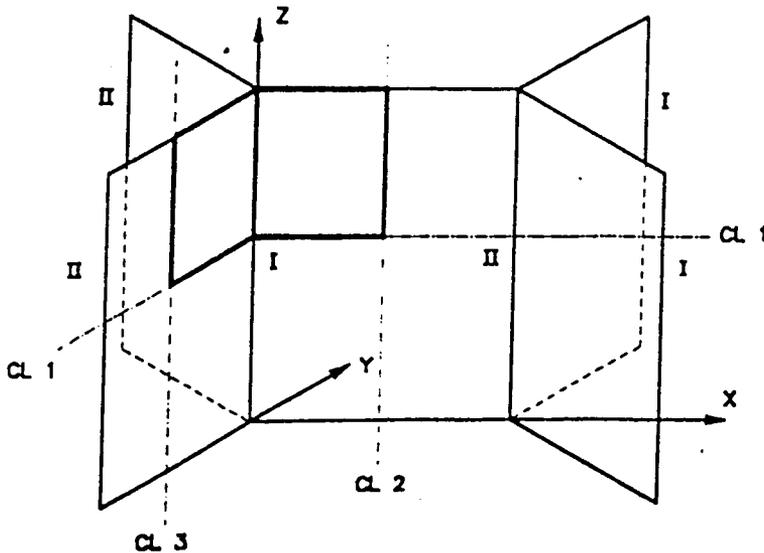


Figura 5.14 - Modelo uni-celular de ninho de abelha, para simulação do corte transversal

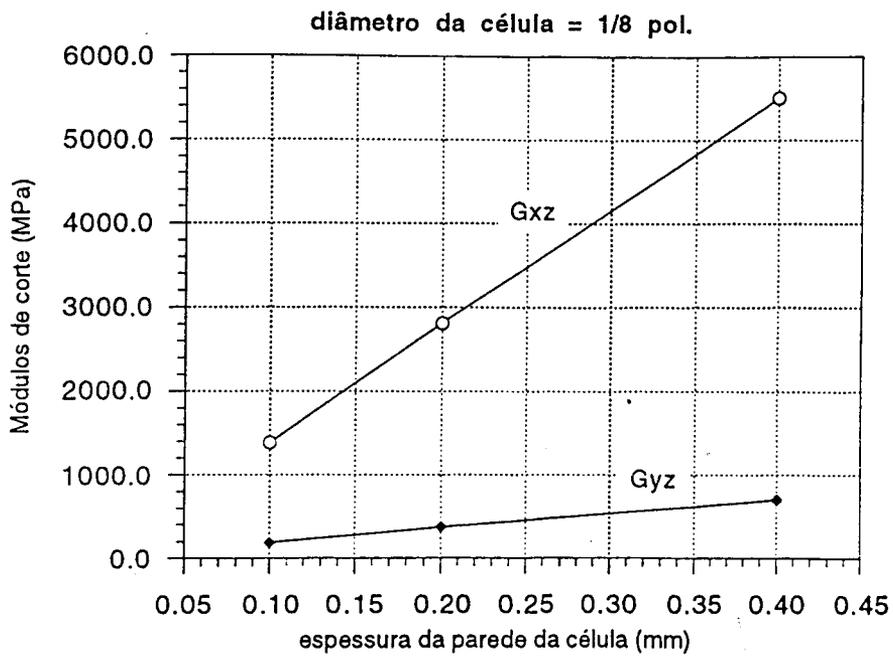


Figura 5.15 - Dependência dos módulos de corte com a espessura

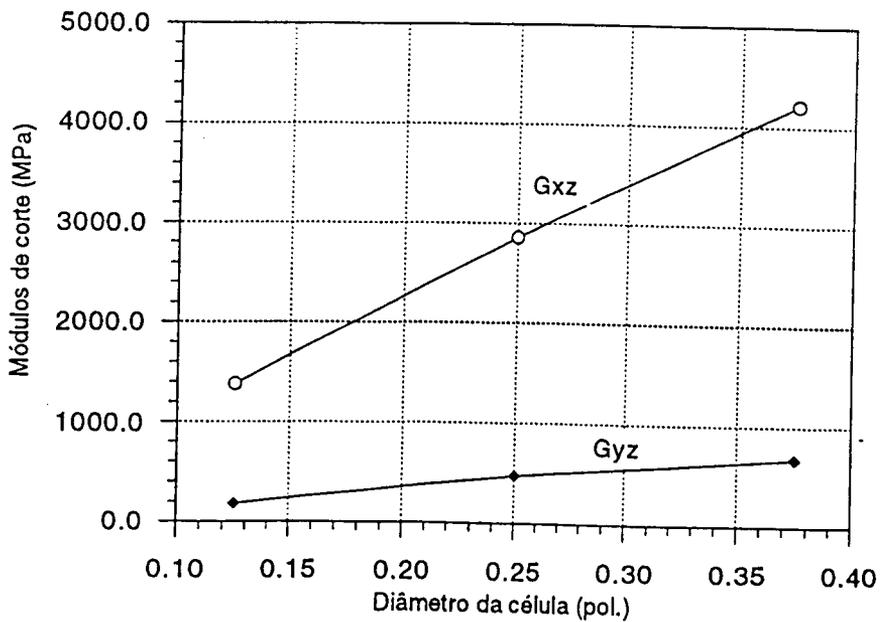


Figura 5.16 - Dependência dos módulos de corte com o diâmetro da célula, para espessura constante

5.5 - MODELO TRIDIMENSIONAL (3D) PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS LAMINADAS SANDWICH

5.5.1. INTRODUÇÃO

O conceito de estruturas sandwich tem como base a utilização de núcleos espessos e peles finas. Os núcleos são tipicamente pouco rígidos e pouco resistentes, relativamente às peles, habitualmente altamente rígidas e resistentes. Tendo em conta a flexibilidade do núcleo, é possível a ocorrência de deformações localizadas, quer com núcleos de espuma, quer com núcleos de ninho de abelha. Existe ainda a possibilidade de ocorrer efeitos de bordo, junto a descontinuidades geométricas.

Os elementos de casca, mesmo os espessos, têm a dificuldade de modelar tais parâmetros localizados. Estes elementos são constituídos por um conjunto de camadas, cada uma delas supostamente em estado plano de tensão. Os elementos de casca possuem um conjunto de dificuldades a seguir enumeradas:

- dado que a regra de quadratura necessária para integrar as forças residuais e a rigidez tangencial através da espessura tem alguns problemas de capturar todos os modos de deformação, é necessário usar bastantes camadas matemáticas para se obter a qualidade de solução desejada;
- o número elevado de pontos de integração em cada elemento torna o cálculo da matriz de rigidez e do vector de forças internas bastante caro em termos computacionais;
- a suposição de estado plano de tensão na casca laminada implica que a tensão normal à superfície média seja desprezada, o que com laminados compósitos e sandwich pode inviabilizar o estudo de delaminagens-em muitos modelos há ainda a registar a forma inconsistente de tratar em separado as tensões de plano e transversais;
- são habitualmente usados elementos baseados nas suposições de Mindlin, o que provoca desde logo uma distribuição uniforme de deformações de corte através da espessura. Registe-se que a inclusão de termos de deformação de ordem superior já apresentados no capítulo 2, representam um acréscimo mais ou menos importante de graus de liberdade por nó;
- nas cascas torna-se muito difícil a representação de fenómenos localizados pela dificuldade de cálculo da tensão normal transversal, mesmo à posteriori.

Por estas razões, desenvolveu-se um elemento finito sólido tridimensional, baseado numa formulação elasto-plástica, tendo como alvo as estruturas sandwich espessas, cujas características materiais das peles e do núcleo sejam bastante diferentes. Foram desenvolvidos os elementos de 8 e 20 nós. Em seguida, apresenta-se a sua formulação.

5.5.2 - TEORIA

5.5.2.1 - Campo de deslocamentos

Considere-se um sólido tridimensional, como consta na figura 5.17. O movimento de um ponto no espaço pode ser definido através do vector de deslocamentos

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

onde u , v e w são os deslocamentos dum ponto genérico segundo os eixos cartesianos x, y e z .

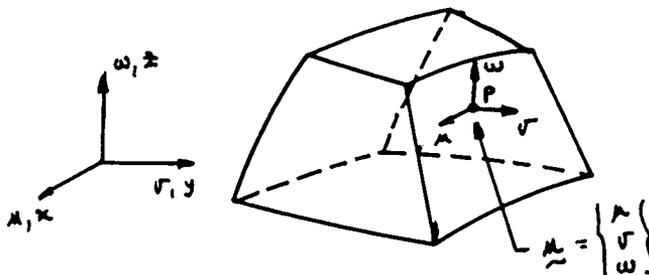


Figura 5.17 - Sólido tridimensional. Vector de deslocamentos de um ponto genérico.

5.5.2.2 - Campo de deformações

O vector das deformações dum ponto é definido por seis componentes, segundo a teoria clássica da elasticidade tridimensional, como

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

onde

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5.28)$$

onde ε_x , ε_y e ε_z são as deformações normais e γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} são as deformações tangenciais.

5.5.2.3 - Campo de tensões

O vector das tensões dum ponto contém seis componentes de tensão, associadas às correspondentes componentes de deformação, na forma

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

onde σ_x , σ_y e σ_z são as tensões normais e τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} as tensões tangenciais. Na figura 5.18 apresenta-se a convenção das tensões positivas.

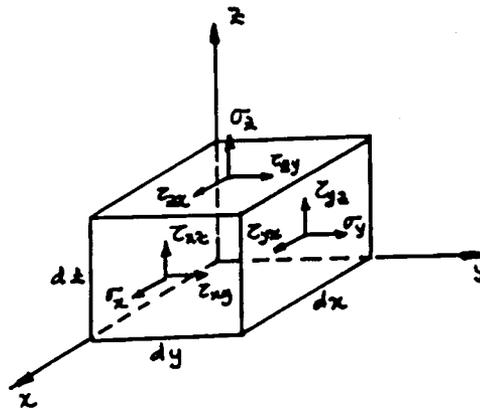


Figura 5.18 - Convenção de sinais para as tensões de um elemento diferencial de um sólido tridimensional

5.5.2.4 - Relações tensão-deformação

A relação entre as deformações e as tensões para um material anisotrópico vem expresso em eixos principais materiais como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

onde só intervêm 9 constantes materiais, dada a simetria material

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12} ; E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23} ; E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31} \quad (5.31)$$

A partir das relações (5.31) em eixos locais materiais, pode transformar-se (5.30) para eixos globais, de acordo com procedimentos análogos aos apresentados no capítulo 2 para cascas. Nos materiais isotrópicos, as constantes materiais reduzem-se a duas: o módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν . Neste caso a equação constitutiva pode escrever-se directamente em eixos globais, como

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (5.32)$$

e a matriz constitutiva elástica vem dada por

$$\underline{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{sim.} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Esta matriz é modificada quando houver lugar a plasticidade, de forma semelhante à referida no capítulo anterior.

5.5.2.5 - Princípio dos trabalhos virtuais

A equação do princípio dos trabalhos virtuais escreve-se da seguinte forma, tendo em conta o carácter tridimensional da análise

$$\iiint_V \delta \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} \, dV = \iiint_V \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{b}} \, dV + \iint_A \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{t}} \, dA + \sum_i \delta \underline{\underline{a}}_i^T \underline{\underline{q}}_i \quad (5.34)$$

onde V e A são o volume e a área do corpo sobre o qual actuam as forças volúmicas $\underline{\underline{b}}$, as forças tractivas $\underline{\underline{t}}$, e pontuais $\underline{\underline{q}}_i$, respectivamente.

5.5.3 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

5.5.3.1 - Discretização do campo de deslocamentos

Considere-se um elemento finito de 8 ou 20 nós, conforme ilustrado na figura 5.19.

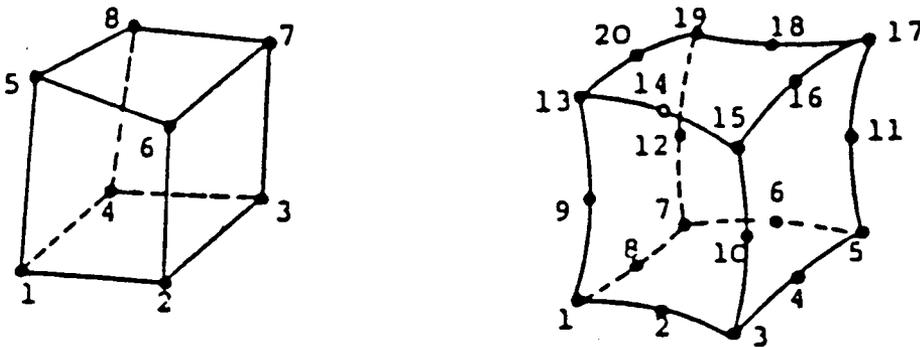


Figura 5.19 - Elemento finito tridimensional de 8 ou 20 nós

A geometria do elemento fica definida através de funções interpoladoras e pela posição global dos nós, de acordo com

$$\underline{\underline{x}} = \sum_{j=1}^{n^{\circ}\text{nós}} N_j(\xi, \eta, \zeta) \underline{\underline{x}}_j \quad (5.35)$$

onde N_j representa a função de forma para o nó j em questão, de acordo com a expressão

$$N_j = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad (5.36a)$$

para o elemento de 8 nós e

$$\begin{aligned}
 \text{Nós de canto} \quad N_j &= \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i - 2) \\
 \text{Nós de meio} \quad N_j &= \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \begin{cases} \zeta_i = 0 \\ \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.36b}$$

para o elemento de 20 nós, em função das coordenadas naturais do elemento.

O campo de deslocamentos no interior do elemento fica aproximado da seguinte forma [2,3]

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nn} \underline{N}_i \underline{a}_i^{(e)} = \underline{N} \underline{a}^{(e)} \tag{5.37}$$

onde nn representa o nº de nós do elemento, e onde

$$\underline{N} = [\underline{N}_1, \underline{N}_2, \dots, \underline{N}_{nn}], \quad \underline{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

$$e \quad \underline{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(e)} \end{Bmatrix}; \quad \underline{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \tag{5.39}$$

são, respectivamente, a matriz das funções de forma e o vector de deslocamentos do elemento e de um nó.

5.5.3.2 - Matriz de deformações

Substituindo (5.37) em (5.27), obtém-se a deformação para um elemento arbitrário de nn nós [2,3]

$$\underline{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{nn} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} w_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i + \frac{\partial N_i}{\partial z} u_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} v_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{nn} \underline{B}_i \underline{a}_i^{(e)} = \underline{B} \underline{a}^{(e)} \tag{5.40}$$

onde \underline{B} é a matriz de deformações do elemento dada por

$$\underline{B} = [\underline{B}_1 \quad \underline{B}_2 \quad \dots \quad \underline{B}_{nn}] \quad (5.41)$$

onde \underline{B}_i é a matriz de deformação correspondente ao nó i , com

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

5.5.3.3 - Matriz de rigidez do elemento

Tendo em conta a expressão do princípio dos trabalhos virtuais, obtém-se a equação de equilíbrio estático do elemento

$$\underline{K}^{(e)} \underline{a}^{(e)} - \underline{f}^{(e)} = \underline{q}^{(e)} \quad (5.43)$$

onde $\underline{K}^{(e)}$ é a matriz de rigidez do elemento, $\underline{f}^{(e)}$ é o vector das forças equivalentes nodais e $\underline{q}^{(e)}$ o vector das forças nodais de equilíbrio [2,3].

5.6 - PLASTICIDADE ANISOTRÓPICA

Considerou-se um modelo de plasticidade de Hill para comportamento anisotrópico [4,5,17]. A função de tensão de Hill é uma extensão da função potencial de Mises para permitir o comportamento anisotrópico. Esta função é expressa por

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{F(\sigma_y - \sigma_x)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2} \quad (5.44)$$

em termos das componentes de tensão rectangulares Cartesianas, onde as constantes materiais F, G, H, L, M e N são obtidas por ensaios mecânicos em diferentes orientações [17]. Estas constantes são definidas como

$$F = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \quad (5.45)$$

$$G = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_3^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_1^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_2^2} \right) \quad (5.46)$$

$$H = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_1^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_2^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_3^2} \right) \quad (5.47)$$

$$L = \frac{3}{2} \frac{\tau_0^2}{\tau_{23}^2} \quad (5.48)$$

$$M = \frac{3}{2} \frac{\tau_0^2}{\tau_{13}^2} \quad (5.49)$$

$$N = \frac{3}{2} \frac{\tau_0^2}{\tau_{13}^2} \quad (5.50)$$

onde $\sigma_0, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\tau}_{12}, \bar{\tau}_{13}$ e $\bar{\tau}_{23}$ são especificadas pelo utilizador do código e $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$.

5.7 - MODELOS DE CASCA VERSUS MODELOS 3D

Os elementos finitos tridimensionais possuem a característica de poderem considerar na sua formulação o módulo transversal E_3 , bem como a tensão normal σ_3 . Os elementos de casca, por seu turno apenas consideram as tensões de corte transverso. Pode, no entanto, considerar-se que quer os elementos de casca, quer os elementos 3D são válidos na análise não linear de estruturas sandwich com núcleos de ninhos de abelha, dada a importância dos módulos de corte transverso. Serão comparadas as respostas de ambas as filosofias, tendo ainda em conta que, nos elementos de casca, serão utilizadas as teorias de corte refinadas. Na figura 5.20 ilustram-se algumas das deformações potenciais das estruturas sandwich com ninhos de abelha. Desta figura infere-se a necessidade de utilização de diferentes abordagens de elementos finitos, dada a complexidade potencial da deformação evidenciada pela influência do núcleo.

Compara-se nesta secção, para situações de viga em flexão, os elementos de casca [capítulo 2], os elementos de viga [5] e os elementos 3D deste capítulo.

No primeiro exemplo, simula-se a viga apresentada por Owen e Hinton [5], apresentada na figura 5.21.

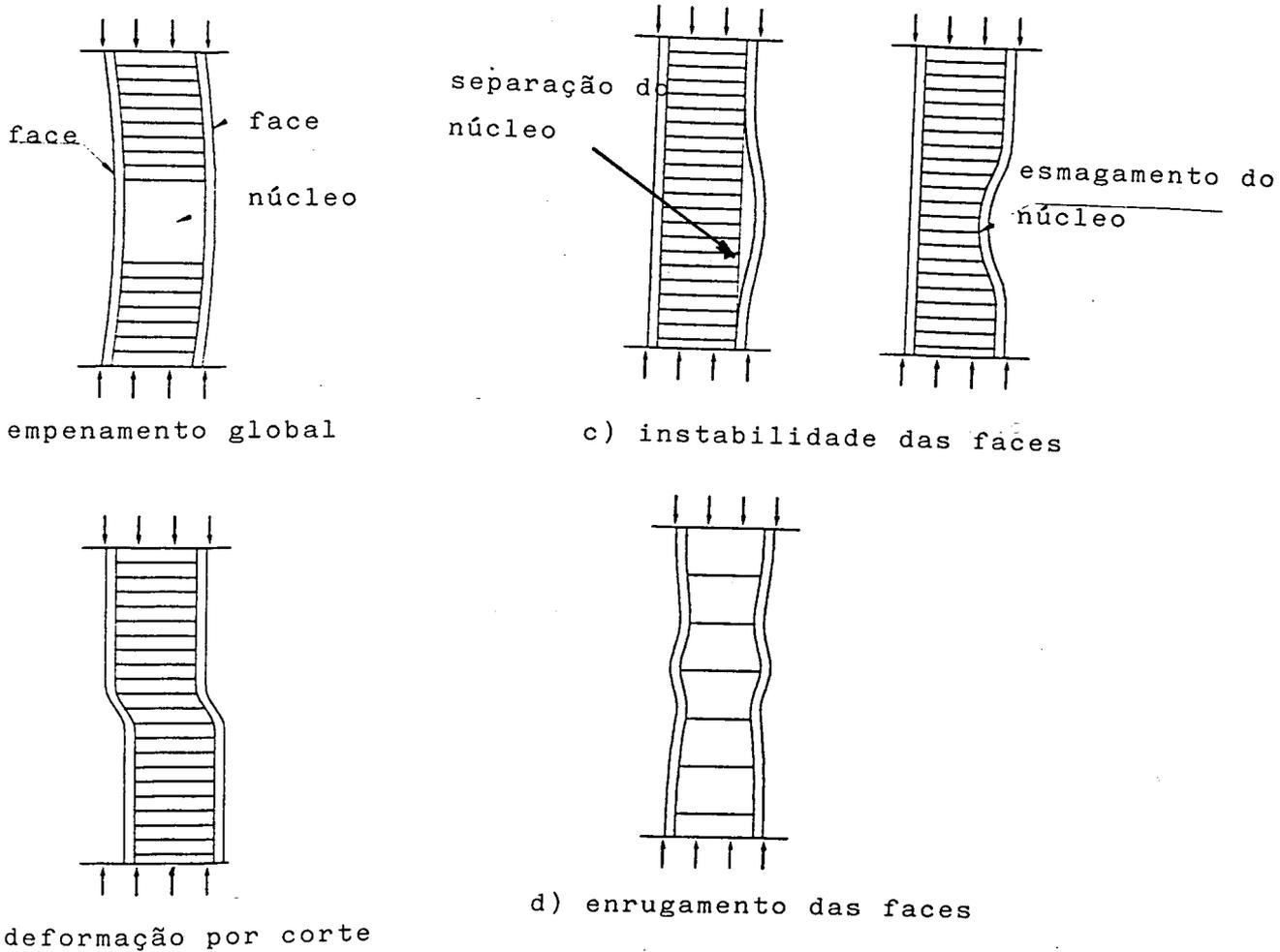


Figura 5.20 - Deformações típicas de estruturas sandwich com núcleos de ninhos de abelha

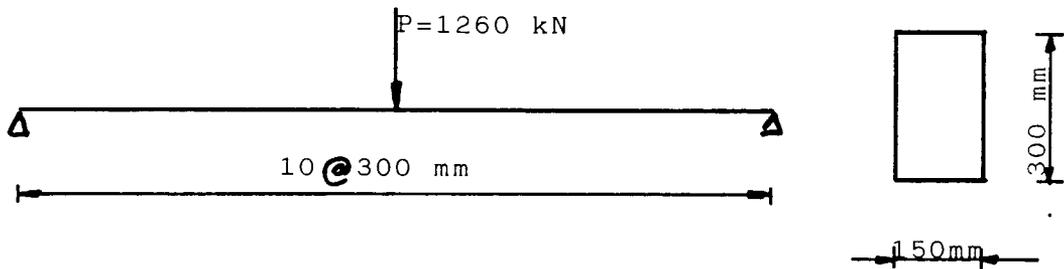


Figura 5.21 - Viga isotrópica em flexão [5]

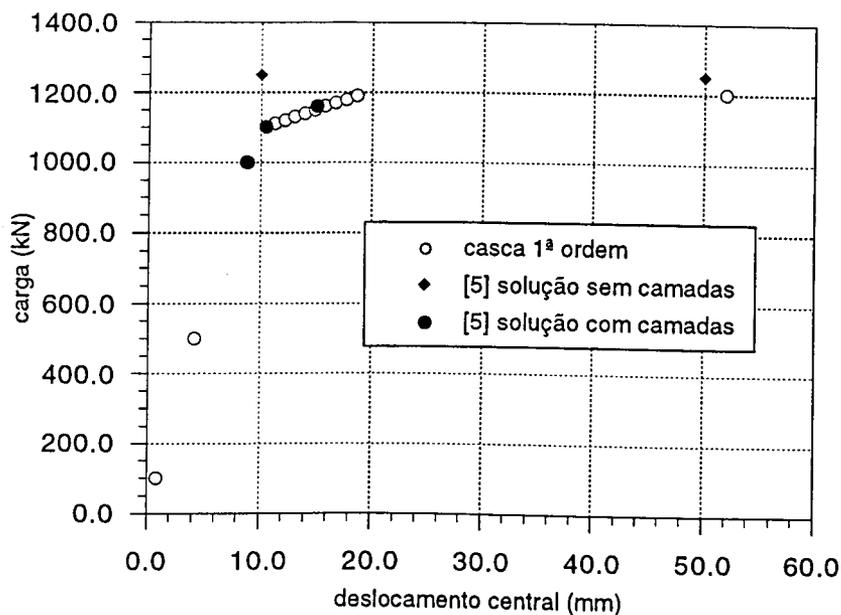


Figura 5.22 - Viga simplesmente apoiada [5]- comparação com elementos de casca

Da figura 5.22 conclui-se que os elementos de casca são adequados para a discretização de vigas isotrópicas. Poderá inferir-se que dada a formulação para laminados, que os

elementos de casca serão também adequados para a simulação de vigas laminadas compósitas e sandwich.

Na figura 5.23 apresenta-se uma simulação similar, mas para uma viga sandwich com rácio modular entre as peles e o núcleo de 100. Na figura 5.24 apresenta-se a curva carga-deslocamento para diferentes elementos e teorias. Refira-se que quer os elementos 3D, quer os elementos de casca apresentam deformação similar, a menos do elemento de casca de 3ª ordem, que, como já se tinha constatado, sofre perturbações em situações deste tipo, ou seja, quando o módulos do núcleo são muito inferiores ao das peles.

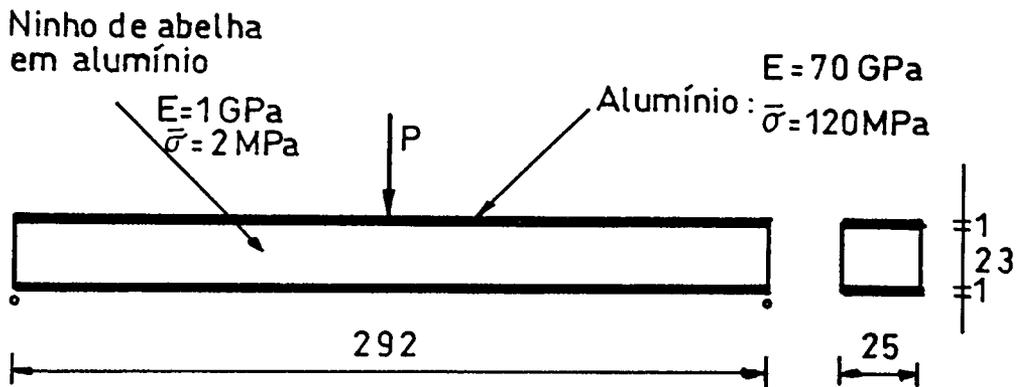


Figura 5.23 - Viga simplesmente apoiada laminada sandwich

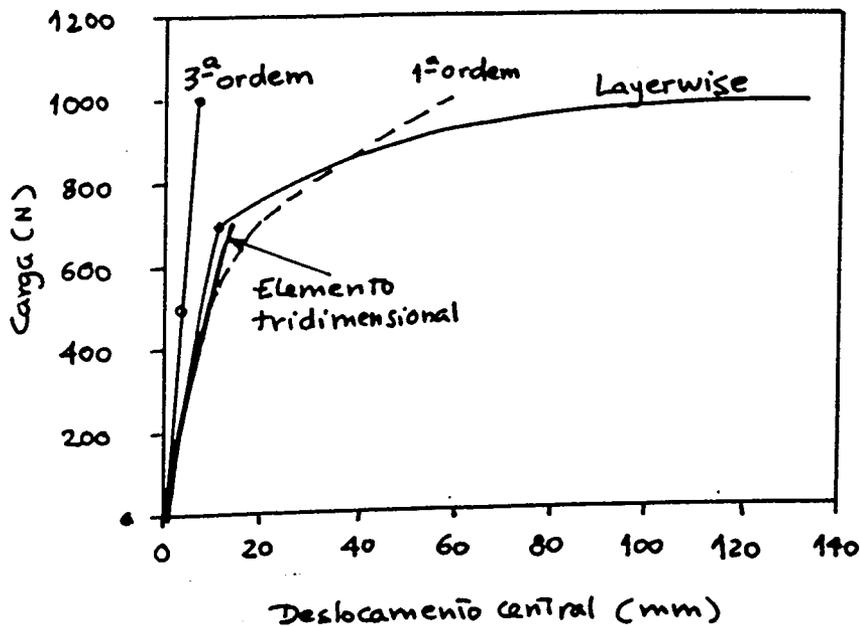


Figura 5.24 - Curva carga deslocamento para uma viga sandwich

5.8 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS

Tendo em vista a comparação destes modelos com alguns resultados experimentais, decidiu-se sujeitar algumas vigas sandwich a ensaios de flexão em 3 pontos [18]. Estes ensaios foram realizados em vigas de peles e ninho de abelha de alumínio, conforme esquematizado na figura 5.25.

Na figura 5.26 apresenta-se uma curva típica obtida, sendo de registar a cedência e o comportamento tipicamente elasto-plástico destas estruturas.

Na figura 5.27 apresentam-se algumas curvas carga-deslocamento com resultados experimentais e numéricos. Verifica-se uma boa concordância geral com os resultados experimentais, particularmente para os elementos de casca layerwise. Os elementos 3D apresentam-se um patamar de cedência superior ao encontrado pelas formulações de casca.

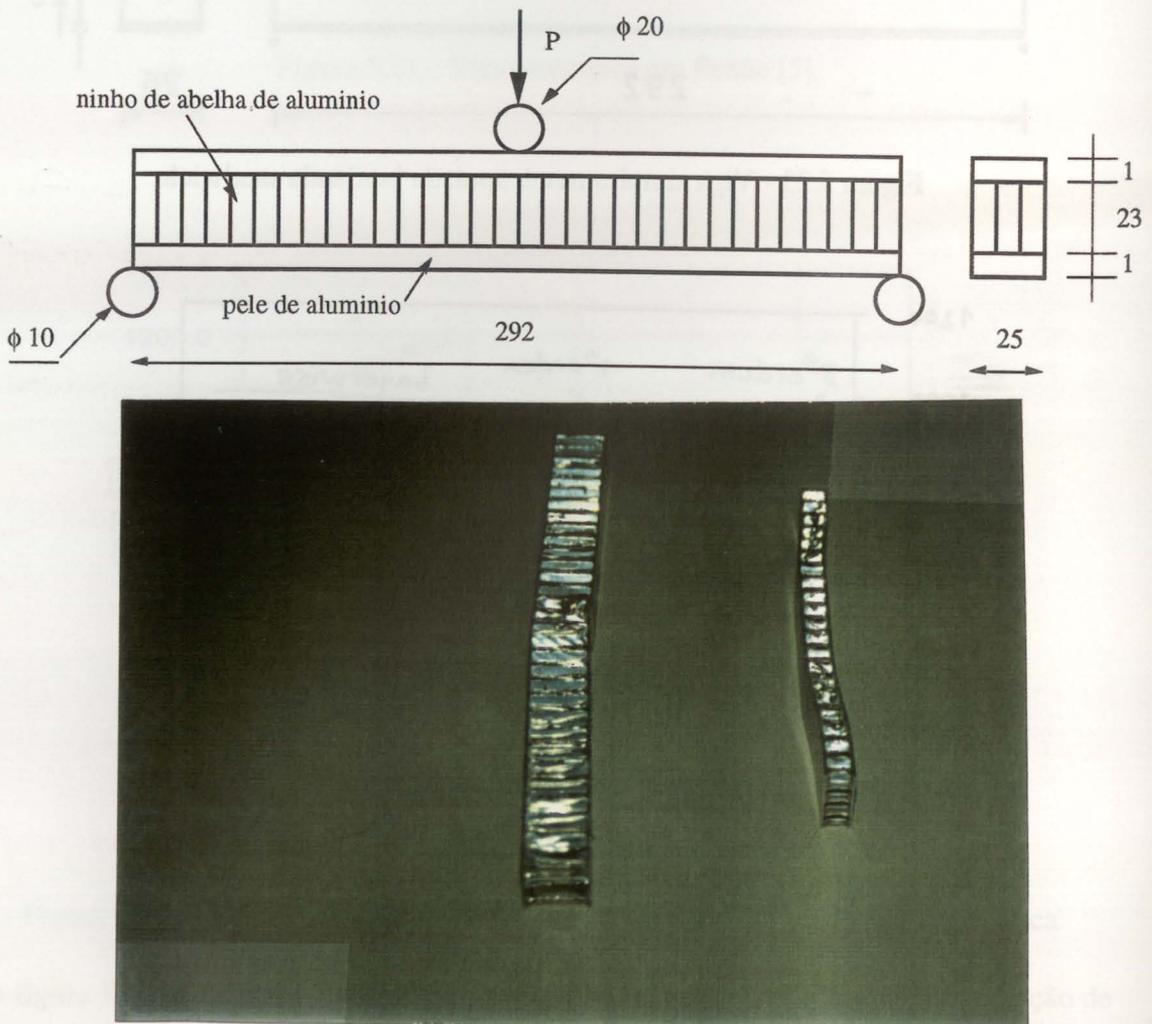


Figura 5.25 - Viga sandwich [pele de alumínio/ninho de abelha de alumínio]

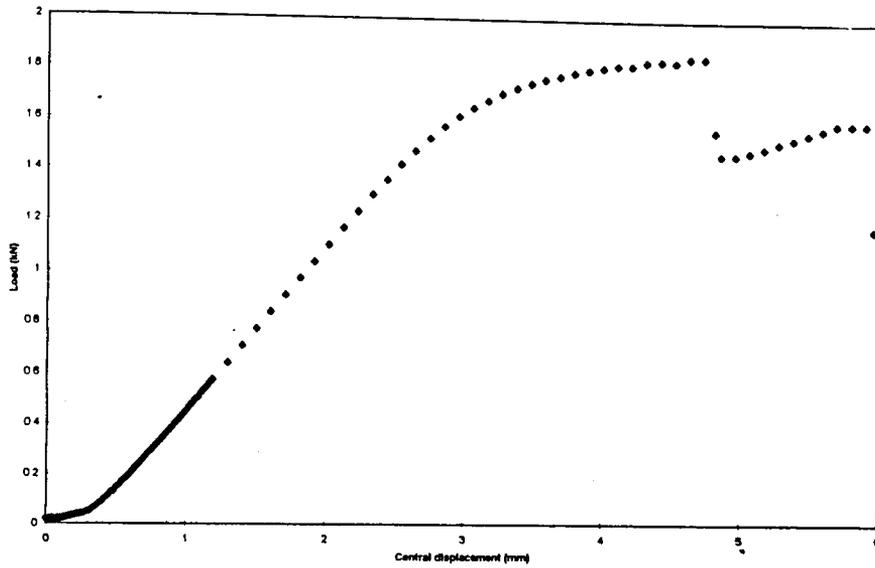


Figura 5.26 - Curva carga-deslocamento típica

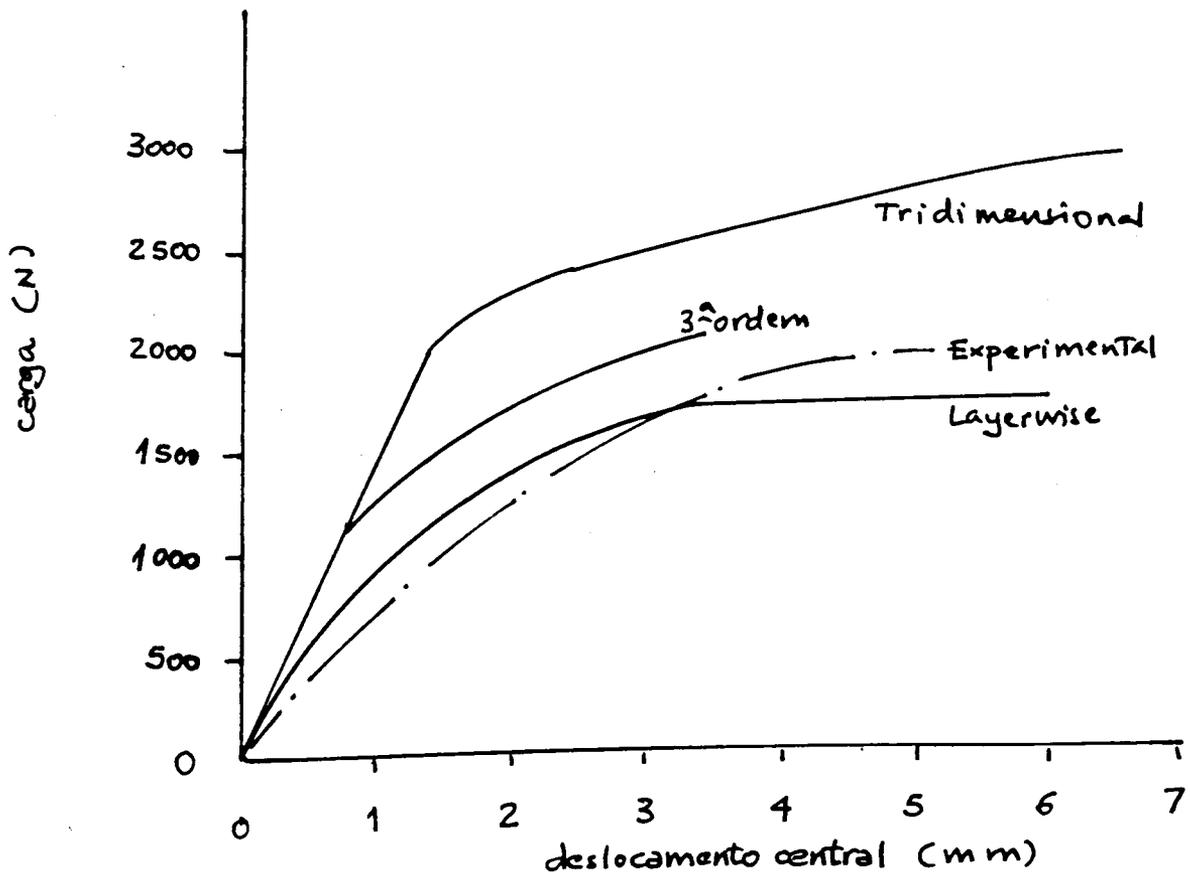


Figura 5.27 - Comparação dos resultados experimentais com as soluções numéricas

5.9 - CONCLUSÕES

Neste capítulo pretendeu-se realizar a análise não linear de estruturas sandwich com núcleos em ninho de abelha.

Foram inicialmente apresentadas as principais expressões analíticas de cálculo de módulos e tensões de cedência.

Foram em seguida apresentados dois modelos de determinação de características elásticas de ninhos de abelha através da simulação por elementos finitos. O modelo multicelular e o modelo unicelular apresentaram valores próximos e coerentes com o esperado, o que permite considerar que estes modelos possibilitam o cálculo de características elásticas para um dado ninho de abelha. Estas características elásticas têm interesse para a simulação por elementos finitos, em que há necessidade de introduzir características mecânicas equivalentes às de um ninho de abelha.

Foi, em seguida, apresentada a formulação de um elemento finito tridimensional que, baseado numa formulação elasto-plástica, representa uma alternativa aos elementos de casca na análise de estruturas sandwich, particularmente as mais espessas.

Foram ensaiadas vigas sandwich com peles em alumínio e ninho de abelha igualmente em alumínio. Foi considerado o ensaio de flexão em 3 pontos e os resultados foram comparados com os resultados computacionais. Verificou-se que a teoria layerwise é aquela que mais se aproxima dos resultados experimentais.

REFERÊNCIAS

1. L. J. Gibson, M.F.Ashby, Cellular solids, Pergamon Press, 1988
2. O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1991
3. E.Onate, Calculo de estructuras por el metodo de elementos finitos, CIMNE, Espanha, 1992
4. K.-J. Bathe, Finite Element Procedures In Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1982
5. D.R.J.Owen, E.Hinton, Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, 1980
6. T. J. R. Hughes, The finite element method, Prentice-Hall, 1987

7. F.K. Abd El-Sayed, Ph.D. Thesis, Univ. Sheffield, 1976
8. L.J.Gibson, Ph.D.Thesis, Cambridge University, Cambridge, U.K., 1981
9. M. Grédiac, A Finite Element Study of the Transverse Shear in Honeycomb Cores, Int.J.Solids and Structures, Vol.30, nº 13, 1777-1788, 1993
10. R.K.McFarland, AIAA Journal, Vol.1, 1380, 1963
11. T.Wierzbicki, Int.J.Impact Engineering, Vol.1, 157, 1983
12. Bonded Honeycomb Sandwich Construction, Manual HEXCEL TSB-124, Hexcel Corporation, U.S.A., 1989
13. J.Rasmussen, J.Baatrup, Rational Design of Large Sandwich Structures, 1st Core Conference, 1988
14. A. N. Costa, Geração Automática de Malhas de Elementos Finitos através de Programação I-DEAS, Laboratório de Computação, Mestrado de Engenharia Mecânica, FEUP, 1995
15. Manual I-DEAS, SRDC, U.S.A., 1993
16. S. Timoshenko, Theory of Elasticity, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1982
17. Abaqus Theory Manual, H.K.S., U.S.A., 1995
18. A.J.M.Ferreira, R.Marini, A.T.Marques, J.M.C.de Sá , Experimental and Numerical Evaluation of Aluminium Honeycomb Sandwich Structures, ECCM 7, Paris, França, 1996



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000013153

CAPÍTULO 6

ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS E CASCAS DE BORRACHA REFORÇADA COM FIBRAS

6.1 - INTRODUÇÃO

6.2 - ANÁLISE DE GRANDES DEFORMAÇÕES

6.2.1 - Definição de deformações e tensões

6.2.2 - Equações incrementais de equilíbrio

6.3 - TEORIA DE BORRACHAS

6.3.1 - Características da borracha

6.3.2 - Teorias de elasticidade das borrachas

6.3.3 - Determinação das tensões

6.3.4 - Tensões numa casca

6.4 - BORRACHA REFORÇADA

6.4.1 - Características e aplicações

6.5 - SOLUÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE DE GRANDES DEFORMAÇÕES

6.5.1 - Formulação Lagrangiana Total

6.5.1.1 - Discretização por elementos finitos e equações básicas

6.5.1.2 - Cálculo de deformações e tensões

6.6 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE GERAL DE CASCAS

6.6.1 - Introdução

6.7 - MODELO BI-FÁSICO BORRACHA-FIBRAS DE REFORÇO

6.8 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.8.1 - Viga em flexão

6.8.2 - Flexão e insuflamento de uma placa circular de borracha

6.9 - CONCLUSÕES

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 6

ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS E CASCAS DE BORRACHA REFORÇADA COM FIBRAS

6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo descreve-se a aplicação de técnicas numéricas para a solução de problemas de borrachas, borracha reforçadas com fibras (tecidos ou rovings) ou estruturas sandwich em que o núcleo é composto de borracha e as peles são de material compósito. As estruturas e os componentes na forma de cascas de borracha reforçada e na forma de sandwich compósito/borracha são bastante utilizadas em aplicações industriais. A previsão do seu comportamento é complicada pela anisotropia e pelo empilhamento dos laminados compósitos e pela natureza incompressível da borracha. Desenvolveu-se um elemento finito de casca laminada degenerada de elementos tridimensionais, baseados nos conceitos de Ahmad. São utilizadas uma teoria simplificada de 1ª ordem e uma teoria de 3ª ordem. A borracha pode também ser reforçada, sendo consideradas duas fases materiais bem distintas em que a matriz de borracha é reforçada por fibras unidireccionais ou tecidos (telas). A contribuição para o comportamento da estrutura é tida em conta em separado, ou seja, introduzem-se dois modelos materiais distintos, um hiperelástico incompressível (borracha) e outro linear elástico até à rotura (fibras). A solução numérica tendo em conta a incompressibilidade é baseada numa formulação "single-field", por eliminação, em cada ponto de interpolação, do multiplicador de Lagrange utilizado para a imposição de incompressibilidade. O comportamento em grandes deslocamentos é considerado, por adopção do processo de solução lagrangiano total.

Apesar de se ter atingido bastantes progressos na tecnologia de computadores e na modelação matemática dos fenómenos físicos, as estruturas de borracha reforçada, tais como os pneus, barcos, edificios insufláveis, entre outros, ainda requerem ensaio de protótipos ou à escala natural. Ainda não existe um conjunto de valores experimentais suficientemente válidos e vastos que permitam estabelecer um modelo constitutivo adequado, em particular para grandes elongações. Foi realizado algum trabalho no

sentido de estabelecer simulações numéricas válidas de estruturas de borracha simples ou reforçada[1-6].

A associação de borracha e compósitos, na forma de cascas laminadas sandwich, na qual a borracha representa o núcleo e os compósitos as faces da sandwich, ainda não constitui um campo de investigação muito aberto. Introdz-se neste trabalho um modelo cinemático de 3ª ordem. Este modelo é comparado com o modelo de 1ª ordem apresentado em [5,6], modelo este simplificado de acordo com o que foi exposto no capítulo 2. As complexidades do fenómeno a estudar advêm da necessidade de considerar simultâneamente um modelo constitutivo e um modelo cinemático adequados, bem como grandes deformações, estrutura de material compósito e sandwich compósito/borracha. Este trabalho deverá ser comparado com resultados experimentais e industriais, que se esperam obter no futuro.

6.2 - ANÁLISE DE GRANDES DEFORMAÇÕES

6.2.1 - Definição de deformações e tensões

A não consideração das variações geométricas num corpo é suficientemente válida quando grandes deslocamentos ou grandes deformações não estão presentes. No caso das borrachas, borrachas reforçadas ou sandwich compósito/borracha, mesmo sob condições normais de carregamento, há que ter em conta a variação contínua da configuração geométrica do corpo. Esta análise pode ser realizada por definição de tensões e deformações auxiliares, tal que, em qualquer momento, o trabalho virtual possa ser definido relativamente a uma configuração conhecida.

Pode definir-se o tensor de deformações de Green-Lagrange como [8]

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (6.1)$$

em que u_i são os deslocamentos e g_{ij} é o tensor de deformação de Green.

Os três invariantes de γ_{ij} são habitualmente utilizados na formulação da lei constitutiva para a borracha. Estes podem ser escritos em função das deformações de Green-Lagrange como [9]:

$$I_1 = 3 + 2\gamma_{ii} \quad (6.2)$$

$$I_2 = 3 + 4\gamma_{ii} + 2(\gamma_{ii}\gamma_{jj} - \gamma_{ij}\gamma_{ji}) \quad (6.3)$$

$$I_3 = 1 + 2\gamma_{ii} + 2(\gamma_{ii}\gamma_{jj} - \gamma_{ij}\gamma_{ji}) + 4/3 \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{rst} \gamma_{ir}\gamma_{js}\gamma_{kt} \quad (6.4)$$

em que ε^{ijk} e ε^{rst} são os símbolos de permutação.

Se dV_0 for um elemento de volume na configuração de referência e V o volume do mesmo elemento na configuração corrente, pode mostrar-se [9] que

$$\frac{dV}{dV_0} = \sqrt{I_3} \quad (6.5)$$

e assim para um material incompressível, obtém-se

$$I_3 = 1 \quad (6.6)$$

As tensões conjugadas energeticamente das deformações de Green-Lagrange na configuração de referência [10] são as segundas tensões de Piola-Kirchhoff S_{ij} . Estas podem ser relacionadas caso seja necessário, com as tensões reais σ_{ij} (ou tensões de Cauchy) na configuração deformada por

$$S_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial X_i}{\partial x_r} \sigma_{rs} \frac{\partial X_j}{\partial x_s} \quad (6.7)$$

em que ρ_0 / ρ é a razão entre as densidades nas duas configurações e X_i e x_i são as coordenadas nas configurações de referência e deformada, respectivamente.

6.2.2 - Equações incrementais de equilíbrio

Para ter em conta as não-linearidades originadas pela formulação de grandes deformações, acrescidas pelo comportamento não-linear material, há necessidade de estabelecer uma forma incremental do principio dos trabalhos virtuais (PTV). Este pode ser escrito, se se considerar o carregamento conservativo como [11]:

$$\int_{V_0} (\Delta S_0 \delta \gamma_{ij} + S_{ij} \delta \Delta \gamma_{ij}) dV_0 = \int_{S_0} \Delta t_i^0 \delta u_i dS_0 + \int_{V_0} \Delta b_i^0 \delta u_i dV_0 \quad (6.8)$$

$$\Delta S_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial \gamma_{kl}} \Delta \gamma_{kl} = D_{klij} \Delta \gamma_{kl} \quad (6.9)$$

$$\Delta\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{k,i}\Delta u_{k,j} + u_{k,j}\Delta u_{k,i} + \Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j}) \quad (6.10)$$

$$\delta\Delta\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{k,i}\Delta u_{k,j} + \delta u_{k,j}\Delta u_{k,i}) = \Delta\delta\gamma_{ij} \quad (6.11)$$

em que Δt_i^0 e Δb_i^0 são respectivamente as pseudo forças volúmicas e as pseudo tracções superficiais, na configuração de referência, definidas por

$$\Delta t_i^0 dS_0 = \Delta t_i dS \quad (6.12)$$

$$\Delta b_i^0 dV_0 = \Delta b_i dV \quad (6.13)$$

Os termos Δt_i e Δb_i são as forças reais referidas à configuração deformada.

6.3 - TEORIA DE BORRACHAS

Apresentam-se as principais características das borrachas. As características dos materiais compósitos foram descritas no capítulo 1.

6.3.1 - Características da borracha

As borrachas sintéticas são materiais poliméricos caracterizados por suportarem grandes deformações elásticas e por as recuperarem de forma quase instantânea. Esta propriedade de alta recuperação elástica advem da estrutura molecular [12,13]. Na figura 6.1 ilustra-se a resposta de uma borracha típica [12], que apesar de elástica é marcadamente não linear. Apesar das elongações sob tracção poderem atingir 500 ou 600%, elongações superiores a 100% são raramente encontradas na prática. A ligação aos materiais compósitos, sob a forma de núcleo de sandwich, limita ainda mais as elongações.

6.3.2 - Teorias de elasticidade das borrachas

A borracha pode ser considerada como um material hiperelástico incompressível. No conceito de hiperelasticidade, é tida em conta a reversibilidade da deformação elástica e a independência da história da deformação, através da definição das tensões como gradientes de uma função potencial, a energia de deformação [5,9].

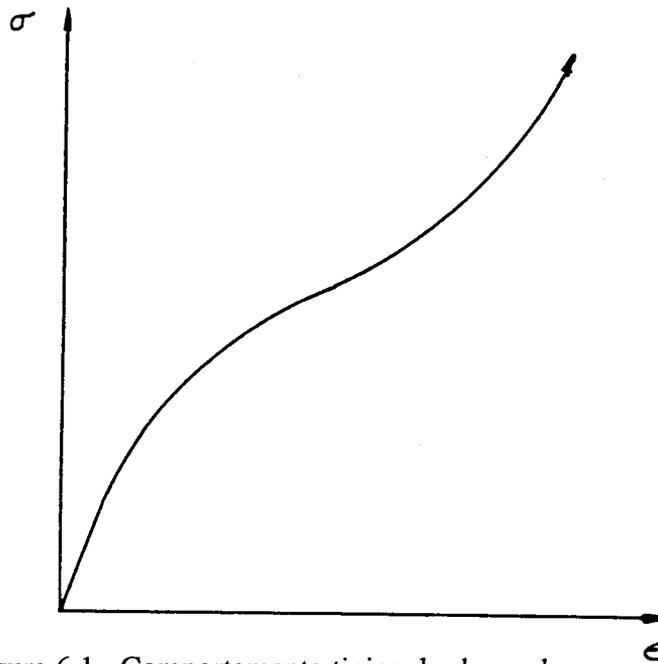


Figura 6.1 - Comportamento típico das borrachas

Adopta-se a teoria fenomenológica das grandes deformações elásticas [12,14], que se baseia na teoria clássica da elasticidade. Utiliza-se uma definição da energia da deformação, adoptada por Mooney [15] e desenvolvida por Rivlin [16]. Para um material isotrópico, a energia de deformação por unidade de volume indeformado pode ser considerado como uma função dos invariantes principais do tensor de deformação de Green, na forma

$$W=W(I_1,I_2,I_3) \quad (6.14)$$

Para um material incompressível, tal como a borracha, a função de energia de deformação deve ser independente de I_3 de acordo com Oden [9]. A equação (6.14) pode então ser reescrita, como uma série de potências em I_1 e I_2 ,

$$W = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{lm} (I_1 - 3)^l (I_2 - 3)^m, \text{ with } C_{00} = 0 \quad (6.15)$$

onde C_{ij} são parâmetros a determinar experimentalmente.

A forma mais utilizada da equação (6.15) para borrachas foi proposta por Mooney e é conhecida com a lei de Mooney-Rivlin:

$$W=C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3) \quad (6.16)$$

Esta lei é considerada aceitável para alongações até 450-500%, sendo portanto suficiente para este trabalho. As duas constantes da expressão (6.16) podem ser determinadas experimentalmente para cada tipo de borracha.

6.3.3 - Determinação das tensões

As tensões são determinadas, por definição, como derivadas da função de energia de deformação. Para um material incompressível, as deformações ocorrem sem variações de volume e qualquer estado hidrostático de tensão pode ser adicionado sem variação de volume e conseqüentemente da sua energia de deformação. Isto implica que as tensões calculadas a partir da função da energia de deformação são desviadas [6]. Se adicionarmos um funcional constringido à energia de deformação, obtem-se uma nova função [9]

$$\bar{W} = W(\gamma_{ij}) - \lambda(\sqrt{I_3} - 1) \quad (6.17)$$

em que λ é um multiplicador de Lagrange que ao impor a condição de incompressibilidade (6.6) pode ser identificado com a pressão hidrostática [6,9].

O tensor das tensões é então calculado, tendo em conta que em cada ponto se impõe $I_3=1$, como

$$S_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} - \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ij}} \quad (6.18)$$

6.3.4 - Tensões numa casca

Em estruturas tipo casca, assume-se que a tensão normal ao plano médio da casca é desprezável, ou seja, $S_{33}=0$, podendo estabelecer-se algumas simplificações. A contribuição explícita do multiplicador de Lagrange pode ser eliminada ao nível do elemento, evitando uma formulação mista ou penalizada na solução numérica.

O funcional constringido e as tensões podem ser escritas numa forma mais conveniente [6]. Supoe-se que $S_{ij}=S_{ji}$ e $\epsilon_{ij}=\epsilon_{ji}$, de acordo com a mecânica dos meios contínuos. Os invariantes de deformação podem ser escritos como

$$I_1=3+2 J_1 \quad (6.19)$$

$$I_2=3+4 J_1 +4 J_2 \quad (6.20)$$

$$I_3 = I_1 + 2 J_1 + 4 J_2 + 3 J_3 \quad (6.21)$$

$$J_1 = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} \quad (6.22)$$

$$J_2 = \gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{22}\gamma_{33} + \gamma_{11}\gamma_{33} - 1/4 (\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2) \quad (6.23)$$

$$J_3 = \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} + 1/4\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} - 1/4 (\gamma_{11}\gamma_{23}^2 + \gamma_{22}\gamma_{13}^2 + \gamma_{33}\gamma_{12}^2) \quad (6.24)$$

Assim o funcional restringido (6.17) pode ser expresso como

$$\bar{W} = \bar{C}_1 J_1 + \bar{C}_2 J_2 - \bar{\lambda} \bar{I} \quad (6.25)$$

em que

$$\bar{C}_1 = 2C_1 + 4C_2 \quad (6.26)$$

$$\bar{C}_2 = 4C_2 \quad (6.27)$$

$$\bar{\lambda} = 2\lambda \quad (6.28)$$

$$\bar{I} = J_1 + 2J_2 + 4J_3 \quad (6.29)$$

As tensões são então expressas como

$$S_{ij} = \bar{C}_1 \frac{\partial J_1}{\partial \gamma_{ij}} + \bar{C}_2 \frac{\partial J_2}{\partial \gamma_{ij}} - \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \gamma_{ij}} \quad (6.30)$$

e o tensor constitutivo material (6.9) para a solução incremental é obtido pelas derivadas das tensões relativamente às deformações

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial \gamma_{kl}} = D_{klij} = (\bar{C}_1 - \bar{\lambda}) \frac{\partial^2 J_1}{\partial \gamma_{kl} \partial \gamma_{ij}} + (\bar{C}_2 - \bar{\lambda}) \frac{\partial^2 J_2}{\partial \gamma_{kl} \partial \gamma_{ij}} - 4\bar{\lambda} \frac{\partial^2 J_3}{\partial \gamma_{kl} \partial \gamma_{ij}} \quad (6.31)$$

Se S_{33} for zero, como se supõe nas cascas, pode ser eliminada na equação (6.8). O valor de γ_{33} , não necessariamente nulo, é dependente dos valores das outras deformações, e mesmo que nas equações (6.30) e (6.31) S_{33} e γ_{33} não forem consideradas explicitamente, a contribuição de γ_{33} deve ser incluída. De acordo com [5], considera-se γ_{33} como uma função implícita das outras deformações, quando calculamos as derivadas em (6.30) e (6.31)-ver tabela 1. Pode calcular-se, através da equação de condição de incompressibilidade, o valor explícito de γ_{33}

$$I_3 - 1 = R + S\gamma_{33} = 0 \quad (6.32)$$

em que

$$R = \gamma_{11} + \gamma_{22} + 2\gamma_{11}\gamma_{22} - 1/2(\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2) + \gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} - \gamma_{11}\gamma_{23}^2 - \gamma_{22}\gamma_{13}^2 \quad (6.33)$$

e

$$S = 1 + 2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + 4(\gamma_{11}\gamma_{22}) - \gamma_{12}^2 \quad (6.34)$$

ou seja

$$\gamma_{33} = -R/S \quad (6.35)$$

A suposição $S_{33} = 0$ permite o cálculo do multiplicador de Lagrange em cada ponto. De (6.30) obtém-se

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{C}_1 \frac{\partial J_1}{\partial \gamma_{33}} + \bar{C}_2 \frac{\partial J_2}{\partial \gamma_{33}}}{\frac{\partial J_1}{\partial \gamma_{33}} + 2 \frac{\partial J_2}{\partial \gamma_{33}} + 4 \frac{\partial J_3}{\partial \gamma_{33}}} \quad (6.36)$$

Assim estabelece-se um processo iterativo usando uma formulação de campo único, em que o multiplicador de Lagrange é constantemente actualizado a partir da solução do campo de deslocamentos, de acordo com a equação (6.36). Note-se que este processo, embora elimine a necessidade de métodos mistos, resulta num processo altamente não linear.

6.4 - BORRACHA REFORÇADA

6.4.1 - Características e aplicações

Em muitas aplicações, a borracha é reforçada com fibras (nylon, poliéster, aço ou Kevlar) [13,17]. Combina-se assim a resistência do reforço com a capacidade de suportar grandes deformações da borracha. Exemplos de aplicações podem encontrar-se nos pneus, diafragmas, barcos, dirigíveis, hovercrafts, telas transportadoras, entre outros.

As diferentes camadas de reforço podem ser orientadas predominantemente numa direcção na qual uma dada rigidez possa ser necessária. O corpo deixa então de ser considerável como homogéneo ou isotrópico. Estes materiais são integráveis na classe dos materiais compósitos e têm o seu comportamento definido nos capítulos 1 e 2.

Os laminados sandwich compósito/borracha têm interesse em algumas aplicações onde seja necessário combinar as características de rigidez e amortecimento, como por

exemplo, em chão de comboios. Nestes casos o comportamento mecânico destes laminados pode ser descrito por uma abordagem cinemática de 1ª ordem, 3ª ordem e do tipo layerwise [7], por forma a capturar as diferentes propriedades elásticas e a evolução da "normal" deformada.

Cada camada de um material compósito (matriz reforçada com fibras) é habitualmente anisotrópico, em muitos casos ortotrópico, ou seja, possuindo três planos ortogonais de simetria. Para caracterizar a anisotropia do laminado, é antes de mais necessário caracterizar a anisotropia de cada camada. No capítulo 2 foram abordadas as relações tensão-deformação de um material anisotrópico.

Neste trabalho foi ainda implementada uma nova formulação, em que se consideram dois modelos materiais para a análise de borrachas reforçadas com fibras unidireccionais ou tecidos. No primeiro modelo material (borracha) considera-se um material incompressível, cuja formulação foi anteriormente discutida. O segundo modelo material diz respeito às fibras, consideradas linear elásticas até à rotura. Dado o elevado número de camadas de fibras, adoptaram-se somente as teorias de 1ª e 3ª ordens.

6.5 - SOLUÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE DE GRANDES DEFORMAÇÕES

Na aplicação do método dos elementos finitos em problemas de grandes deformações adoptam-se habitualmente duas abordagens diferentes: A formulação Lagrangiana Total e a formulação Lagrangiana Actualizada [10,20]. Na formulação Lagrangiana Total a configuração de referência à qual todas as variáveis são referidas, é a configuração inicial. Na formulação Lagrangiana Actualizada a configuração de referência é a última obtida, ou seja, a malha é constantemente actualizada em cada iteração e assim o referencial ligado a cada elemento move-se de acordo com as variações geométricas. Ambas as formulações são teóricamente correctas e assim equivalentes, embora uma possa ter vantagens sobre as outras, dependendo das aplicações [10,20]. A formulação Lagrangiana Total é adoptada neste trabalho.

TABELA 1

1. Derivadas de J_1, J_2 e J_3 para $m=1,3$ para $k,i=1,2$ para $l,j=1,3$

$$J_m = f_m(\gamma_{ij}, \gamma_{33}(\gamma_{ij}))$$

$$\frac{\partial J_m}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial f_m}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial f_m}{\partial \gamma_{33}} \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial \gamma_{ij}} = g_m(\gamma_{ij}, \gamma_{33}(\gamma_{ij}), \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial \gamma_{ij}}(\gamma_{ij}))$$

$$\frac{\partial^2 J_m}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} = \frac{\partial g_m}{\partial \gamma_{kl}} + \frac{\partial g_m}{\partial \gamma_{33}} \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial \gamma_{kl}} + \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial \gamma_{kl} \partial \gamma_{ij}}$$

2. Derivadas de γ_{33} para $k,i=1,2$ para $l,j=1,3$

$$\gamma_{33} = -\frac{R(\gamma_{ij})}{S(\gamma_{ij})}$$

$$\frac{\partial \gamma_{33}}{\partial \gamma_{ij}} = -\frac{1}{S} \frac{\partial R}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{R}{S^2} \frac{\partial S}{\partial \gamma_{ij}}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial \gamma_{kl}} \frac{\partial R}{\partial \gamma_{ij}} - \frac{\partial^2 R}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} + \frac{1}{S} \frac{\partial R}{\partial \gamma_{kl}} \frac{\partial S}{\partial \gamma_{ij}} - 2 \frac{R}{S^2} \frac{\partial S}{\partial \gamma_{kl}} \frac{\partial S}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{R}{S} \frac{\partial^2 S}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)$$

6.5.1 - Formulação Lagrangiana Total

6.5.1.1 - Discretização por elementos finitos e equações básicas

As equações a serem resolvidas podem ser derivadas da equação (6.8). Seguindo o procedimento habitual do método dos elementos finitos, os deslocamentos são obtidos por

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{d} \quad (6.37)$$

$$\Delta \underline{u} = \underline{N} \Delta \underline{d} \tag{6.38}$$

O vector de deformações de Green-Lagrange $\underline{\gamma}$ pode ser escrito como a soma de dois vectores, correspondentes às partes linear e não linear de acordo com a equação (6.1).

$$\underline{\gamma} = \underline{\epsilon}_L + \underline{\epsilon}_{NL} \tag{6.39}$$

ou, expresso como uma função dos deslocamentos nodais

$$\underline{\gamma} = \underline{B} \underline{d} = (\underline{B}_L + 1/2 \underline{B}_{NL}) \underline{d} \tag{6.40}$$

em que
$$\underline{\epsilon}_L = \underline{B}_L \underline{d} \tag{6.41}$$

$$\underline{\epsilon}_{NL} = 1/2 \underline{B}_{NL} \underline{d} \tag{6.42}$$

e \underline{B}_L é a matriz tradicional \underline{B} para pequenas deformações [20-22]. A matriz \underline{B}_{NL} pode ser escrita como

$$\underline{\epsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \underline{A} \underline{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial Y} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial Y} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial Z} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial Z} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial X} & 0 & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial X} & 0 & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial X} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial Z} & \frac{\partial u}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial Z} & \frac{\partial v}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial w}{\partial Z} & \frac{\partial w}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} \\ \frac{\partial w}{\partial Y} \\ \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \tag{6.43}$$

em que $X=X_1, Y=X_2, Z=X_3, u=u_1, v=u_2, w=u_3$.

A equação (6.43) pode também ser escrita na forma

$$\underline{\epsilon}_{NL} = 1/2 \underline{A} \underline{G} \underline{d} \tag{6.44}$$

em que \underline{G} é uma matriz composta das derivadas espaciais das funções de forma e assim

$$\underline{B}_{NL} = \underline{A}\underline{G} \quad (6.45)$$

O incremento das deformações de Green-Lagrange pode ser obtido a partir da equação (6.10) como

$$\Delta\gamma = \Delta\varepsilon_L + \Delta\varepsilon_{NL} \quad (6.46)$$

Na equação (52)

$$\Delta\varepsilon_{NL} = \underline{B}_L \Delta\mathbf{d} \quad (6.47)$$

e

$$\Delta\varepsilon_{NL} = \Delta\varepsilon^1_{NL} + \Delta\varepsilon^2_{NL} = \underline{B}_{NL} \Delta\mathbf{d} + 1/2 \Delta\underline{B}_{NL} \Delta\mathbf{d} \quad (6.48)$$

em que

$$\Delta\underline{B}_{NL} = \Delta\underline{A}\underline{G} \quad (6.49)$$

e $\Delta\underline{A}$ é uma matriz idêntica à matriz \underline{A} mas com componentes como derivadas espaciais dos incrementos em lugar dos deslocamentos totais.

A variação das deformações de Green-Lagrange pode ser expressa como

$$\delta\gamma = \delta\varepsilon_L + \delta\varepsilon_{NL} = (\underline{B}_L + 1/2 \underline{B}_{NL}) \delta\mathbf{d} \quad (6.50)$$

A variação do incremento das deformações de Green-Lagrange é obtido, de acordo com (6.11) como

$$\delta\Delta\gamma = \delta\underline{A} \underline{G} \Delta\mathbf{d} \quad (6.51)$$

O incremento das tensões é obtido a partir da equação (6.9) como

$$\Delta\underline{S} = \underline{D} \Delta\gamma \quad (6.52)$$

em que \underline{D} é a matriz constitutiva do material. Usando a aproximação

$$\Delta\gamma = \Delta\varepsilon_L + \Delta\varepsilon^1_{NL} = (\underline{B}_L + \underline{B}_{NL}) \Delta\mathbf{d} \quad (6.53)$$

pode finalmente obter-se a seguinte equação do movimento:

$$\int_{V_0} (\delta\mathbf{d}^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \Delta\mathbf{d} + \underline{S}^T \delta\underline{A} \underline{G} \Delta\mathbf{d}) dV_0 = \int_{S_0} \delta\mathbf{d}^T \underline{N}^T \Delta\mathbf{t}^0 dS_0 + \int_{V_0} \delta\mathbf{d}^T \underline{N}^T \Delta\mathbf{b}^0 dV_0 \quad (6.54)$$

O produto $\delta \underline{\Delta}^T \underline{S}$ pode ser escrito como

$$\delta \underline{\Delta}^T \underline{S} = \underline{t} \underline{G} \delta \underline{d} \quad (6.55)$$

onde

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} \underline{S} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{S} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{S} \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

e

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Dado que os deslocamentos virtuais em (6.54) são arbitrários, esta equação pode ser escrita como

$$\underline{K}_T = \underline{\Delta} \underline{d} = \underline{\Delta} \underline{f} \quad (6.58)$$

em que \underline{K}_T é a matriz de rigidez tangencial e pode ser considerada como a soma de três matrizes da seguinte forma

$$\underline{K}_T = \underline{K}_L + \underline{K}_{NL} + \underline{K}_S \quad (6.59)$$

Em (6.63) \underline{K}_L é a matriz de rigidez "linear" relevante para uma formulação de pequenos deslocamentos, \underline{K}_{NL} é a matriz de rigidez de "grandes deslocamentos", e \underline{K}_S é a matriz de rigidez das "tensões iniciais" ou matriz de rigidez geométrica, que depende dos valores correntes das tensões. Estas três matrizes têm as seguintes formas explícitas:

$$\underline{K}_L = \int_{V_0} \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L dV_0 \quad (6.60)$$

$$\underline{K}_{NL} = \int_{V_0} (\underline{B}_{NL}^T \underline{D} \underline{B}_L + \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_{NL}) dV_0 \quad (6.61)$$

$$\underline{K}_S = \int_{V_0} \underline{G}^T \underline{t} \underline{G} dV_0 \quad (6.62)$$

6.5.1.2 - Cálculo de deformações e tensões

Após o cálculo do incremento $\Delta \underline{d}$ pela equação (6.38) os deslocamentos nodais totais podem ser actualizados

$$\bar{\underline{d}} = \underline{d} + \Delta \underline{d} \quad (6.63)$$

e as deformações totais podem então ser calculadas como

$$\bar{\underline{\gamma}} = (\underline{\mathbf{B}}_L + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{B}}_{NL})\bar{\underline{d}} \quad (6.64)$$

Alternativamente, pode-se calcular o incremento de deformação usando as equações (6.39) e (6.40), como

$$\Delta\bar{\underline{\gamma}} = (\underline{\mathbf{B}}_L + \underline{\mathbf{B}}_{NL} + \frac{1}{2}\Delta\underline{\mathbf{B}}_{NL})\Delta\underline{d} \quad (6.65)$$

e eventualmente determinar a deformação total como

$$\bar{\underline{\gamma}} = \underline{\gamma} + \Delta\underline{\gamma} \quad (6.66)$$

O cálculo das tensões depende das relações constitutivas dos materiais. Se estas existirem na forma incremental, as tensões deverão ser actualizadas, por soma às tensões anteriores o incremento de tensão, tal como em materiais hipoeelásticos ou hiperelásticos. Em materiais elásticos ou hiperelásticos, a tensão total pode ser directamente calculada a partir das deformações totais.

$$\bar{S}_{ij} = S_{ij}(\gamma_{ij}) \quad (6.67)$$

6.6 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE GERAL DE CASCAS

O método dos elementos finitos provou ser particularmente útil na análise de estruturas tipo casca, dado que as soluções analíticas estão habitualmente restrictas a geometrias simples e a comportamento linear. Numerosos elementos de placa e casca para diferentes aplicações foram propostos na literatura, durante os últimos 20 anos. Descrições e referências podem ser encontradas nas Refs.[22-29]. De qualquer forma, continuam os esforços para melhorar o seu comportamento [25-28].

O elemento de casca degenerado [29], apresentado no capítulo 2, é adoptado neste capítulo. A inclusão de propriedades dos materiais variáveis através da espessura é tornada possível, através duma abordagem discreta na definição do elemento [21,22].

Neste capítulo consideram-se as três teorias de deformação apresentadas no capítulo 2. Em primeiro lugar apresenta-se uma modificação da teoria de deformação de 1ª ordem, anteriormente apresentada pelo autor na sua tese de mestrado [30], em que se reduzem os

custos da integração por camadas, por uma simplificação no cálculo da matriz de deformações. Considera-se também uma teoria de deformação de ordem superior à primeira, nomeadamente uma teoria de terceira ordem, anteriormente apresentada por Kant e sua equipa [31,32]. A formulação usada em termos de deslocamentos, deformações e tensões corresponde àquela que foi apresentada no capítulo 2 e 3, com as devidas modificações para o material hiperelástico.

6.7 - MODELO BI-FÁSICO BORRACHA-FIBRAS DE REFORÇO

Tem sido prática habitual na modelação por elementos finitos de borrachas reforçadas com fibras, a consideração desta combinação material como um material composto homogéneo ortotrópico linear [5,6,11]. A suposição de comportamento linear do conjunto borracha-fibras pode ser considerada razoável para fracções volúmicas de fibras elevadas. No caso inverso, o comportamento mecânico da borracha tem grande relevância. Propõe-se, neste contexto, um novo modelo que considera ambos os comportamentos materiais: o da borracha, enquanto material hiperelástico, incompressível e isotrópico; o das fibras enquanto material unidireccional ou bidireccional (tecido), elástico até à rotura (figura 6.2).

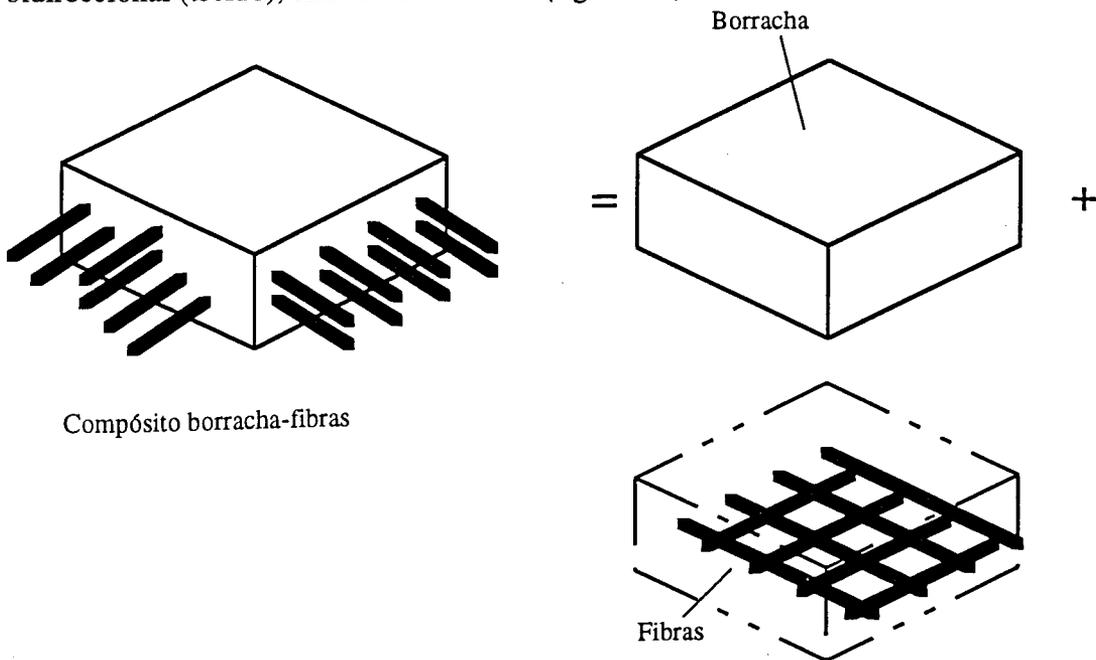


Figura 6.2 - Representação do modelo bi-fásico borracha-fibras

Este modelo retém a hiperelasticidade da borracha e a possibilidade de constituição de laminados, através da consideração de camadas de fibras de espessura equivalente. Esta

combinação permite um melhor conhecimento do efeito reforçador das fibras num meio hiperelástico. A rigidez do conjunto é obtida por sobreposição de efeitos, da borracha e das fibras. Foram implementadas as teorias de 1ª e 3ª ordens, tendo em conta, que em muitos casos, a espessura da casca pode ser considerada espessa. A teoria de 3ª ordem tem a vantagem de produzir directamente deformações de corte transversal parabólicas, embora à custa de mais graus de liberdade.

6.8 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.8.1 - Viga em flexão

Considera-se neste exemplo uma viga em flexão, conforme ilustrado na figura 6.3. Considera-se a espessura de 25 mm. Analisam-se uma viga de borracha, uma viga de borracha com fibras e uma viga sandwich borracha-compósito. Compara-se a performance da teoria de 1ª e 3ª ordens, conforme ilustrado na figura 6.4.

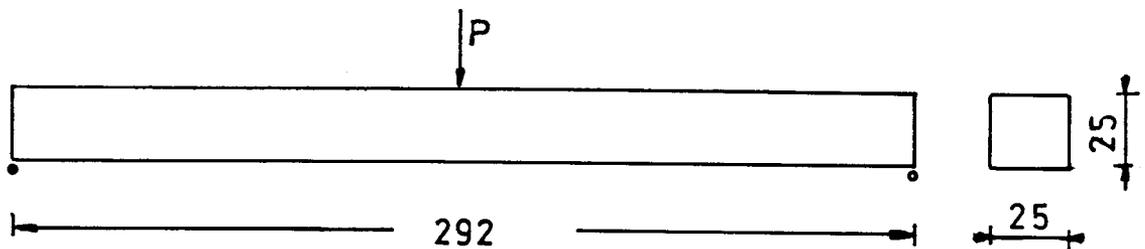


Figura 6.3 - Viga de borracha em flexão

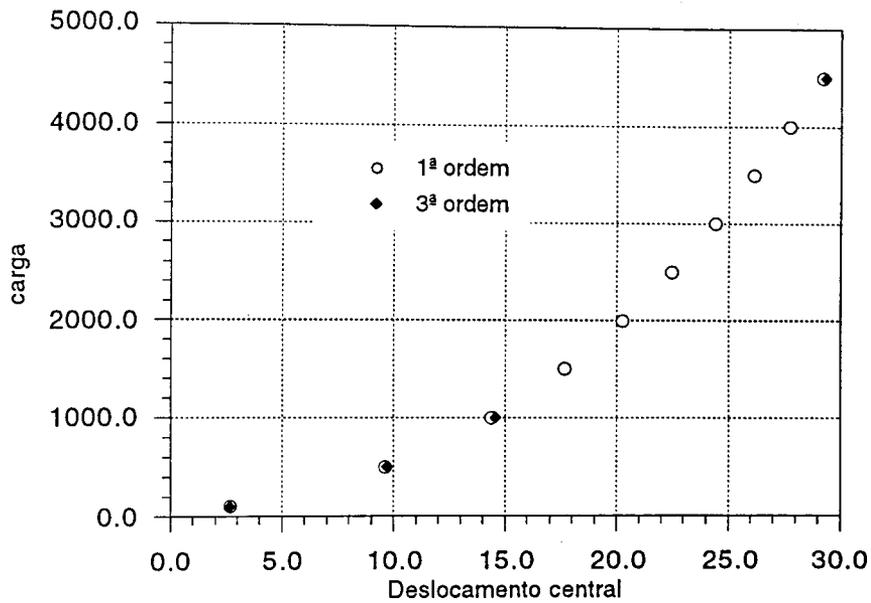


Figura 6.4 - Carga-deslocamento central para a viga de borracha

No laminado de borracha reforçada, os reforços são colocados simetricamente e todos na direcção da viga (fibras UD), conforme apresentado na figura 6.5. Consideram-se fibras de vidro com diâmetros de 1.2 mm.

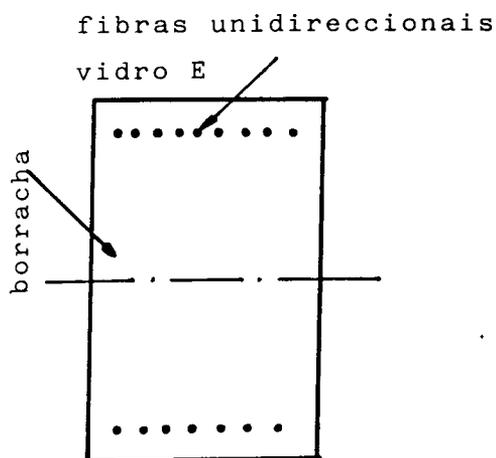


Figura 6.5 - Laminado de borracha reforçada com fibras de vidro



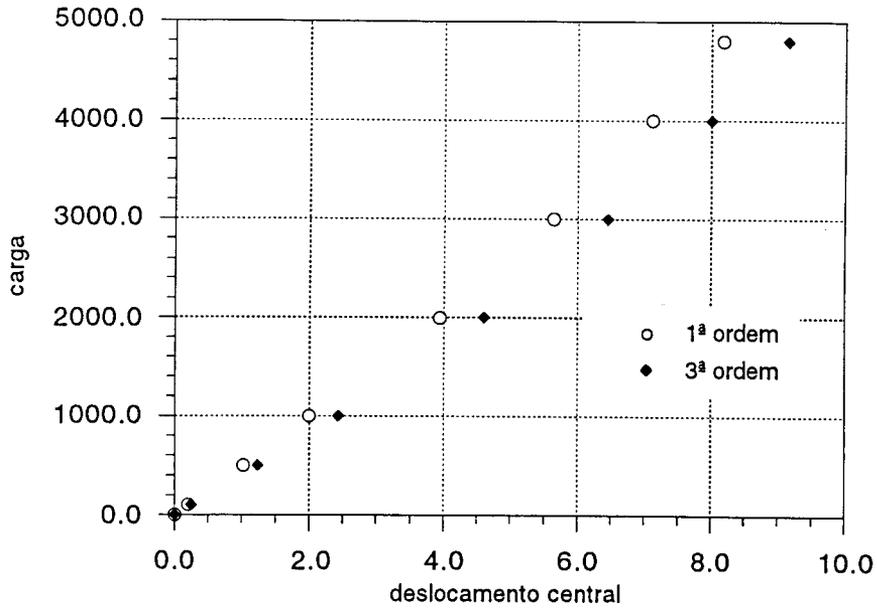


Figura 6.6 - Carga-deslocamento para borracha reforçada com fibras de vidro

Na figura 6.7, considera-se um laminado sandwich em que as peles são de compósito UD de poliéster-fibra de vidro e o núcleo de borracha.

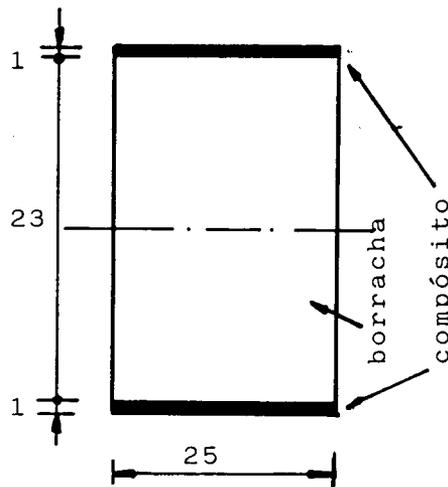


Figura 6.7 - Laminado sandwich composto - borracha

Na figura 6.8 apresenta-se a resposta estrutural da viga tendo em conta ambas as teorias de deformação.

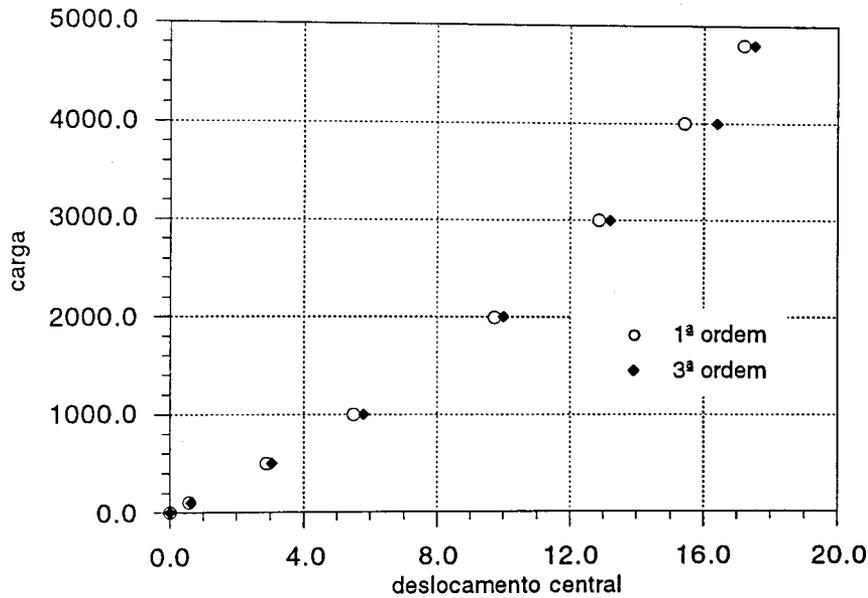


Figura 6.8 - Carga-deslocamento para a viga sandwich borracha-compósito

Na tabela 6.2 apresentam-se as características da borracha (Mooney-Rivlin) e do compósito UD.

Tabela 6.2

Características	Borracha	Compósito
A (MPa)	0.55	-
B (MPa)	0.138	-
E1 (MPa)	-	10000
E2 (MPa)	-	10000
ν_{12}	-	0.3
G12 (MPa)	-	3900
G13 (MPa)	-	3900
G23 (MPa)	-	3900

6.7.2 - Flexão e insuflamento de uma placa circular de borracha

Este exemplo refere-se à análise do comportamento de uma placa circular simplesmente apoiada sujeita a uma pressão externa crescente (Fig. 6.9). Esta carga aplicada é não-

conservativa dado que as superfícies de carga do elemento esticam e mudam de orientação. Este fenómeno envolve grandes deformações e rotações e pode ser um bom teste à formulação apresentada.

Para uma grande parte do caminho de carga, a acção de membrana é predominante e o comportamento da placa aproxima-se do de uma membrana insuflada. Este exemplo é referido em literatura diversa, quer sob o ponto de vista experimental como numérico [11,36-40]. As soluções numéricas para as equações diferenciais resultantes foram dadas por Adkins e Rivlin [37] e Yang e Feng [38]. As soluções de elementos finitos foram também exploradas. Oden e Key [39] usaram uma malha de 80 elementos de membrana triangular, enquanto Tang [40] usou 32 elementos lineares. Mattiasson [11] usou uma malha de 97 elementos de membrana triangulares e relatou que os resultados com 13 elementos diferiam de 17% relativamente aos anteriores.

No presente estudo, o exemplo das referências [11, 38, 40] foi resolvido usando os mesmos elementos de casca como foi referido. A malha de 13 elementos utilizada é ilustrada na figura 6.10. Apenas se considera um sector de 22.5° devido às condições de simetria. As dimensões, propriedades dos materiais e valores de pressão são dados na figura 6.9.

Na figura 6.10 os resultados obtidos são comparados com os das referências [11,38,40]. A concordância de resultados é tida como boa e o processo foi terminado para um factor de carga de 17.3 dado que a convergência se tornou muito lenta.

6.9 - CONCLUSÕES

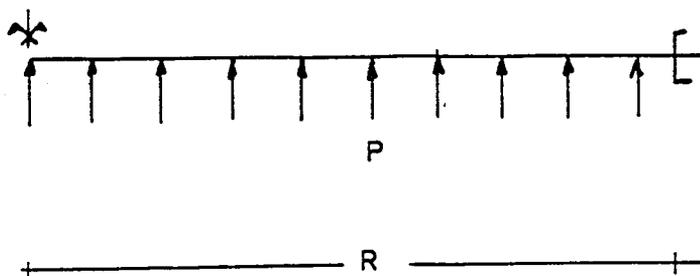
Neste capítulo foram analisadas as estruturas tipo casca, particularmente as cascas de borracha, cascas de borracha com fibras e ainda as cascas sandwich com núcleo de borracha e peles de material elástico ortotrópico. Foi usado o elemento de casca degenerado e foram implementadas as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens. Para borracha reforçada, foi considerado um modelo bi-fásico que se pensa traduzir mais fielmente o comportamento deste tipo de compósito, do que um modelo homogeneizado. A modelação do comportamento elástico não linear da borracha é feita, recorrendo a uma formulação de campo único, por eliminação ao nível do ponto de integração do multiplicador de Lagrange que impõe a condição de incompressibilidade.

Foi apresentada a formulação geométrica não linear e foi apresentado o modelo de

determinação das características elásticas da borracha, baseado nos modelos de Mooney e Rivlin. Foi ainda apresentado o processo iterativo de eliminação do multiplicador de Lagrange.

Foram ensaiados alguns exemplos numéricos, com vigas de borracha, laminados de borracha com fibras, laminados sandwich com núcleos de borracha e placas de borachas.

Foram comparadas as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens, sendo os resultados obtidos bastante próximos. O modelo apresentado permite simular placas e cascas laminadas de borracha com boa aproximação, conforme se pode verificar no último exemplo.



$$R = 190.5 \text{ mm}$$

$$h = 12.7 \text{ mm}$$

$$C_1 = 0.6205 \text{ MPa}$$

$$C_2 = 0.06205 \text{ MPa}$$

$$p_0 = 0.01 \text{ MPa}$$

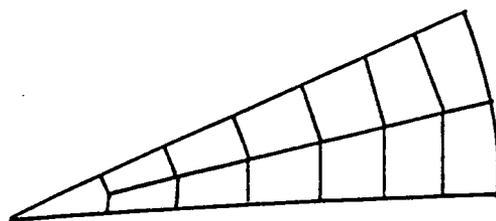


Figura 6.9 - Placa circular de borracha, geometria, material e malha de elementos finitos

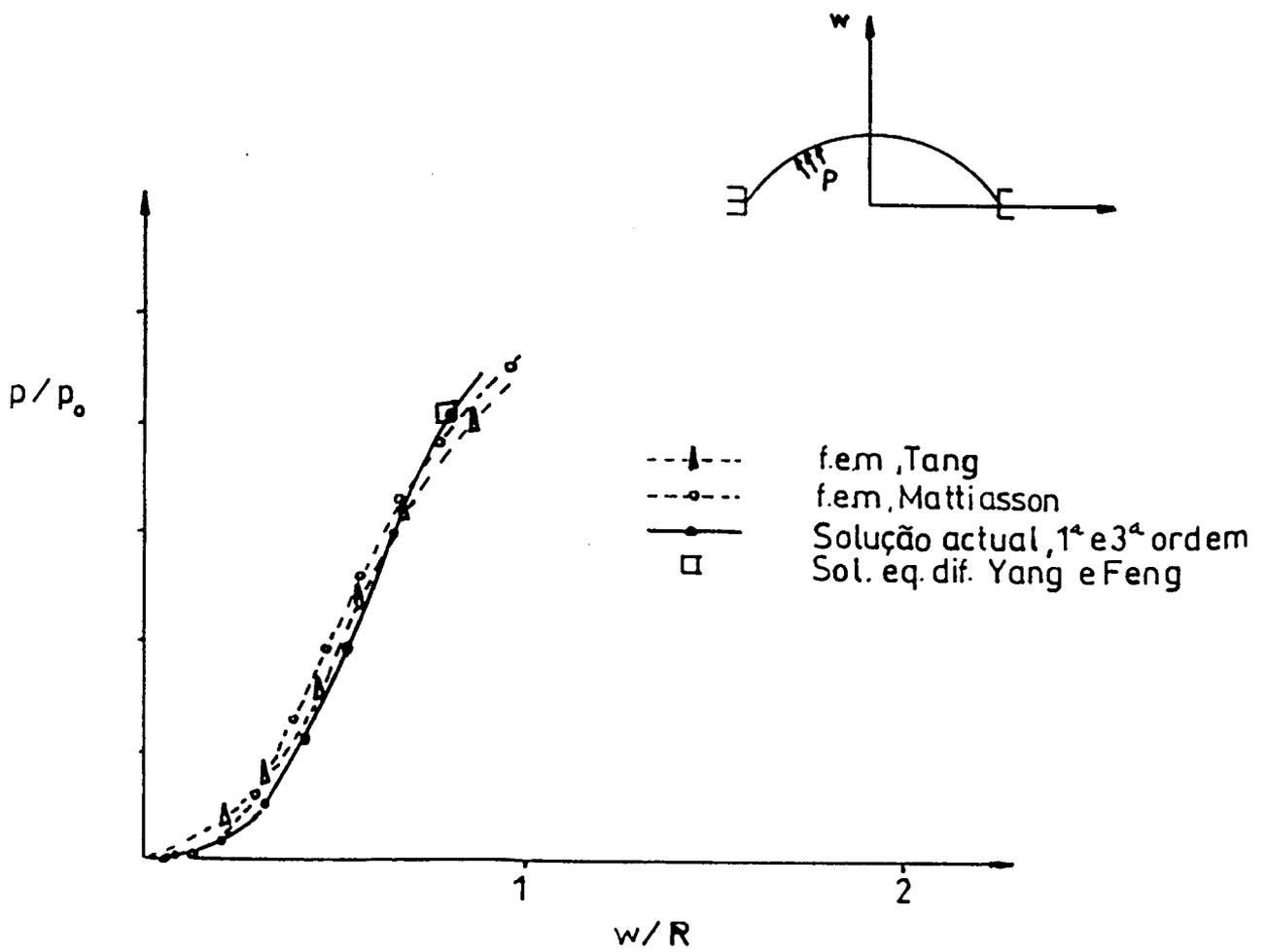


Figura 6.10 - Carga deslocamento para placa circular de borracha

REFERÊNCIAS

1. M.Tuomala, D. R. J. Owen, D. R. J., O.C. Zienkiewicz and S. Nakazawa - A Penalty Function Finite Element Method In Nonlinear Elasticity. In: Numerical Methods For Coupled Problems, Pineridge Press, Swansea 1981.
2. E. Jankovich, F. Leblanc, M. Durand and M. Bercovier - A Finite Element Method For The Analysis Of Rubber Parts, Experimental And Analytical Assessment, Comp. & Struct.L4, No.5-6, 385-391, 1981.l
3. B. Haggblad and J.A. Sunderberg- Large Strain Solutions Of Rubber Components, Comp. & Struct. 17, No.5-6, 835-843, 1983.
4. H.J. Anderson - Isotropic And Reinforced Rubber Analysis, Ph.D. Thesis, C/Ph/82/85, University College Of Swansea, 1985.
5. J.M.A. Cesar De Sa - Numerical Modelling Of Incompressible Problems In Glass Forming And Rubber Technology, Ph.D. Thesis, University College Swansea, C/Ph/91/86, 1986.
6. J.M.A. Cesar De Sá and D.R.J. Owen, The Finite Element Analysis Of Reinforced Rubber Shells, Computational Methods For Non-Linear Problems, Taylor, Owen, Hinton (Eds.), Pineridge Press, Swansea, 1987
7. A.J.M. Ferreira, J.M.A. Cesar De Sa, A. Torres Marques, A Degenerated Shell Element For The Static Linear Analysis Of Sandwich Structures, ICCM 9, Madrid,1993
8. Y.C. Fung - Foundations Of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
9. J.T. Oden- Finite Elements Of Nonlinear Continua, Mcgraw-Hill Book Company Inc., Usa, 1972.
10. K.-J. Bathe - Finite Element Procedures In Engineering Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1982.
11. K. Mattiasson - On The Co-Rotational Finite Element Formulation For Large Deformation Problems, Chalmers University Of Technology, Dept. Structural Mechanics, Publication 83:1, Goteborg, 1983.

12. L.R.G. Treloar - The Physics Of Rubber Elasticity, 2nd Ed. Oxford University Press, 1958.
13. P.K. Freakley and A.R. Payne- Theory And Practice Of Engineering Rubber, Applied Science Publ. Ltd., 1978.
14. R.S. Rivlin and D.N. Saunders- Large Elastic Deformation Of Isotropic Material. VII Experiments On The Deformation Of Rubber. Phil. Trans. Roy. Soc. A243, 251-298, 1951.
15. M. Mooney - J. Appl. Phys., 11, 582, 1940.
16. R.S. Rivlin - Rheology Theory And Applications. Vol.I, Ed. F. K. Eitich, Academic Press, New York, Ch.10, 1956.
14. J.M. Klosner and A. Segal - Mechanical Characterization Of A Natural Rubber, Pibal, Rep. 69-42, Polytechnic Institute Of Brooklyn, New York, 1969.
15. L.J. Hart-Smith - Elasticity Parameters For Finite Deformations Of Rubber-Like Materials. Z. Agnew. Math. Phys. 17, 608-625, 1966.
16. W.D. Hutchinson, G. W. Becker and R.F. Lander -Determination Of The Stored Energy Function Of Rubber-Like Materials. Bull. 4th Meeting Interagency Chem. Rocket Propulsion Group - Working Group Mech- Behaviour, Cpia Publ. 94, Vol.L, 141-152, 1965.
18. H.P. Patel, J.L. Turner and J.D Walter - Radial Tyre Cord-Rubber Composites, Rubber Chemistry And Technology, 4a, 1977.
18. R.M. Jones- Mechanics Of Composite Materials, McGraw-Hill Book Co., Usa 1975.
19. D.R.J. Owen and J.A. Figueiras - Anisotropic Elasto-Plastic Finite Element Analysis Of Thick And Thin Plates And Shells. Int. J. Num. Meth. Engng. 19, 541-566, 1983.
20. O.C. Zienkiewicz - The Finite Element Method, Mcgraw-Hill, London, 1977.
21. E. Hinton and D.R.J. Owen - Finite Element Programming, Academic Press Inc. (London) Ltd., 1977.

21. E. Hinton and D.R.J. Owen - Finite Element Software For Plates And Shells, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1984.
22. J.A Figueiras - Ultimate Load Analysis Of Anisotropic And Reinforced Concrete Plates And Shells. Ph.D. Thesis, C/Ph/72/83, University College Of Swansea, 1983.
23. R.H. Gallagher - Shell Elements. Proc. First World Congress On Finite Element Methods In Structural Mechanics, Bournemouth, England, 1975.
24. T.J.R. Hughes and W.K. Liu - Nonlinear Finite Element Analysis Of Shells: Part 1. Three Dimensional Shells. Comp Meth. Appl. Mech. Engng. 26, 331-362, 1981.
25. K.-J. Bathe and E.N. Dvorkin - A Formulation Of General Shell Elements - The Use Of Mixed Interpolation Of Tensorial Components. In Proceedings Of Numeta 85 Conference, Swansea 1985.
26. H.C. Huang and E. Hinton - An Improved Lagrangian 9-Node Mindlin Plate Element, Idem.
27. T. Belytschko, M. Stolarski, W.K.Liu, N. Carpenter and J.S.J. Ong - Stress Projection For Membrane And Shear Locking In Shell Finite Elements. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 51. 221-258, 1985.
28. H.C. Huang - Defect Free Shell Elements. Ph.D. Thesis, University College Of Swansea, C/Ph/89/86, 1986.
29. S. Ahmad, B. Irons, B. M. and O.C. Zienkiewicz - Analysis Of Thick And Thin Shell Structures By Curved Finite Elements. Int. J. Num. Meth. Engng. 2, 419-451, 1970.
32. E. Reissner - The Effect Of Transverse Shear Deformation On The Bending Of Elastic Plates. J. Appl. Mech. 12(2), Trans. Asme 67, 69-77, 1945.
33. R.D. Mindlin - Influence Of Rotary Inertia And Shear On Flexural Motions Of Isotropic, Elastic Plates. J. Appl. Mech. 18(1), Trans. Asme 73, 31-38, 1951.
33. J. Argyris - An Excursion Into Large Rotations, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.32, 85-155,1982

35. I. Cormeau, I. - Elastoplastic Thick Shell Analysis By Viscoplastic Solid Finite Elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 12, 203-227, 1978.
36. L.J. Hart-Smith and J.D.C. Crisp - Large Elastic Deformations Of Thin Rubber Membranes, *Int. J. Engng. Sci.* 5, 1-24, 1967.
37. J.E. Adkins and R.S. Rivlin - Large Elastic Deformations Of Isotropic Material IX. *Philosophical Transactions Of Royal Society, London, Series A*, 244, 505, 1952.
38. W.H. Yang and W.W. Feng - On Axisymmetrical Deformations Of Nonlinear Membranes. *J. Appl. Mech.*, 37, 1002-1011, 1970.
39. J.T. Oden and J.E. Key - Analysis Of Finite Deformations Of Elastic Solids By The Finite Element Method. *Proc. Iutam Colloq., High Speed Computing Elastic Struc.*, Liege 1971.
40. S.C. Tang - Large Strain Analysis Of An Inflating Membrane, *Comp. & Struct.*, 15, No.L, 71-78, 1982.
42. J. A. Barros, Modelos de análise de estruturas laminares e de compósitos laminados, Tese de Mestrado, Feup, 1989

CAPÍTULO 7

ANÁLISE DE PLACAS E VIGAS LAMINADAS COMPÓSITAS E SANDWICH ATRAVÉS DE TEORIAS DE DEFORMAÇÃO DE CORTE DE 1ª ORDEM, 3ª ORDEM E LAYERWISE

7.1 - INTRODUÇÃO

7.2 - PLACA

7.2.1 - Formulação de 1ª ordem

7.2.2 - Formulação de 3ª ordem

7.2.3 - Formulação layerwise

7.3 - VIGA

7.3.1 - Teoria de 1ª ordem

7.3.2 - Teoria de 3ª ordem

7.3.3 - Teoria de viga layerwise

7.4 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO LINEARES

7.4.1 - Placa

7.4.2 - Viga

7.5 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

7.5.1 - Introdução

7.5.2 - Elemento de placa de 1ª ordem

7.5.3 - Elemento de placa com teoria de 3ª ordem

7.5.4 - Elemento de placa com teoria layerwise

7.5.5 - Elemento de viga de 1ª ordem (Timoshenko)

7.5.6 - Elemento de viga de 3ª ordem

7.5.7 - Elemento de viga layerwise

7.6 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 7

ANÁLISE DE PLACAS E VIGAS LAMINADAS COMPÓSITAS E SANDWICH ATRAVÉS DE TEORIAS DE DEFORMAÇÃO DE CORTE DE 1ª ORDEM, 3ª ORDEM E LAYERWISE

7.1 - INTRODUÇÃO

Embora a maioria deste trabalho se debruce sobre problemas de cascas, apresenta-se neste capítulo a formulação de elementos finitos de placa e viga laminada compósita ou sandwich.

As estruturas tipo placa e viga são bastante importantes na mecânica estrutural, com inúmeras aplicações, como é o caso das lajes, painéis, vigas caixão, perfis de pultrusão, etc..

Neste capítulo realiza-se o estudo do comportamento não linear de placas e vigas, com a apresentação dos conceitos cinemáticos e estáticos relevantes para a definição dos elementos de placa e viga. Definem-se, assim, os campos de deslocamento e deformação, as relações constitutivas (com comportamento elástico linear do material) e os esforços que actuam na secção de cada elemento estrutural.

São consideradas as três teorias de deformação que já foram discutidas no capítulo 2, em particular, a teoria de deformação de 1ª ordem, a teoria de deformação de 3ª ordem e a teoria layerwise. A teoria de deformação de 1º ordem confunde-se com a teoria de Mindlin para placas e Timoshenko para vigas.

Nestes modelos de placa e viga, tal como nos modelos de cascas são consideradas a discretização em camadas ao longo da direcção da espessura, permitindo a variação de propriedades mecânicas, o que se reveste de particular interesse nos laminados compósitos e sandwich. Na teoria layerwise são apenas consideradas 3 camadas, correspondentes ao núcleo e às duas peles.

7.2 - PLACA

Considere-se uma placa (figura 7.1) definida pelas suas dimensões (x,y) no plano médio da estrutura e pela espessura na direcção normal (z) ao plano médio. Admite-se que a placa é constituída por um número arbitrário de camadas de espessura variável. Supõe-se em cada camada um comportamento material constante, e supõe-se ainda que o estado de tensão e deformação é representado pelo valores da superfície média da camada. Estão ainda representados na figura 1 os graus de liberdade do elemento de placa.

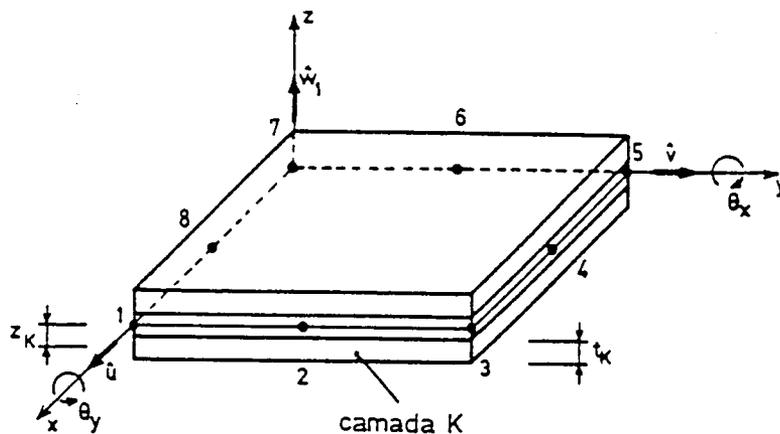


Figura 7.1 - Geometria, graus de liberdade e camadas numa placa genérica

7.2.1 - Formulação de 1ª ordem

Históricamente, a primeira teoria para a análise de placas [1,2] baseava-se nas hipóteses de Love-Kirchhoff, onde os pontos colocados inicialmente na normal à superfície média da placa se mantinham na normal na configuração deformada. A rotação sofrida pela secção transversal da placa é então igual à inclinação da superfície média, não sendo considerados, assim, os efeitos da deformação de corte transversal. Estas teorias, que foram também aplicadas em laminados compósitos [3] revelaram-se inadequadas, particularmente em laminados espessos ou sandwich [4]. Quando se aplicam estas teorias na formulação por elementos finitos, por efeito da continuidade dos deslocamentos e das suas derivadas, entre elementos adjacentes, torna-se necessário utilizar funções de forma

do tipo C^1 , o que implica habitualmente elementos de ordem elevada ou elementos não conformes [1,5].

Na denominada teoria de Mindlin-Reissner [1,6,7], consideram-se os efeitos da deformação de corte, uma vez que se admite que a rotação da normal à superfície média da placa é independente do deslocamento transversal. É, então, possível utilizar funções de forma do tipo C^0 , para assegurar a continuidade do campo de deslocamentos através dos elementos finitos considerados. Esta teoria, que se pode considerar de 1ª ordem, dada a dependência dos deslocamentos com z , é a mais utilizada quer para materiais isotrópicos, quer para laminados compósitos ou sandwich [6-8].

As hipóteses da teoria de Mindlin para placas são as seguintes:

- 1) os deslocamentos de qualquer ponto da placa são pequenos quando comparados com a sua espessura;
- 2) as tensões normais à superfície média da placa são desprezáveis qualquer que seja o tipo de carregamento existente;
- 3) as normais à superfície média antes da deformação mantêm-se rectas, mas não necessariamente normais àquela superfície após a deformação.

Tendo em atenção a anterior discussão, o vector deslocamento em qualquer ponto de coordenadas (x,y,z) pode ser expresso em função das translações u_0, v_0 e w_0 da superfície média ($z=0$) e das rotações da normal àquela superfície nos planos xz e yz , θ_x e θ_y , respectivamente, conforme esquematizado na figura 7.2. Obtem-se então

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x,y) - z\theta_x(x,y) \\ v_0(x,y) - z\theta_y(x,y) \\ w_0(x,y) \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

Note-se que este campo de deslocamentos é um caso especial do campo correspondente para cascas.

Dado que as normais à superfície média antes da deformação não o são após esta ter ocorrido, as rotações θ_x e θ_y são iguais à soma algébrica das inclinações do eixo neutro com as rotações devido às deformações de corte transversais, ou seja, de acordo com a figura 7.2,

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \quad (7.2)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \quad (7.3)$$

A não consideração de ϕ_x e ϕ_y corresponde à teoria de Kirchhoff para placas.

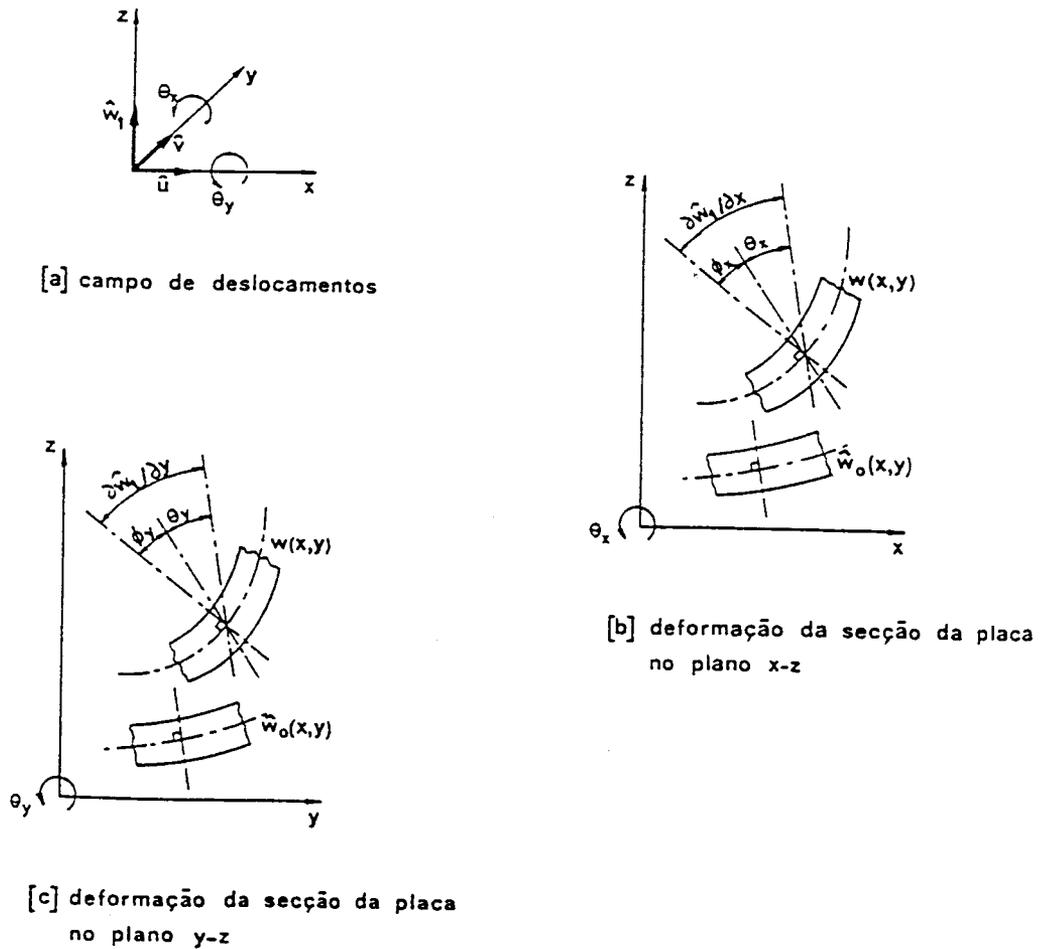


Figura 7.2 - Campo de deslocamentos para a teoria de deformação de 1ª ordem (Mindlin)

O campo de deslocamentos é construído a partir do tensor de deformações de Green e com base nas hipóteses de von Kármán, obtendo-se

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \left\{ \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\}^T \quad (7.4)$$

Este vector pode também ser expresso por

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}_m + z\underline{\varepsilon}_f + \underline{\varepsilon}_L \\ \underline{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}_p \\ \underline{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

onde $\underline{\varepsilon}_p$ e $\underline{\varepsilon}_c$ representam, respectivamente, as deformações de plano e de corte. As deformações de membrana, flexão e não lineares são representadas, respectivamente, por $\underline{\varepsilon}_m$, $\underline{\varepsilon}_f$ e $\underline{\varepsilon}_L$. Estas componentes de deformação podem, então, ser expressas por

$$\underline{\varepsilon}_m = \left\{ \frac{\partial u_o}{\partial x}, \frac{\partial v_o}{\partial y}, \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right\}^T \quad (7.6)$$

$$\underline{\varepsilon}_f = \left\{ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right\}^T \quad (7.7)$$

$$\underline{\varepsilon}_L = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right\}^T \quad (7.8)$$

$$\underline{\varepsilon}_c = \left\{ \frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta_x, \frac{\partial w_o}{\partial y} - \theta_y \right\}^T \quad (7.9)$$

As hipóteses de von Kármán, junto com a formulação Lagrangeana Total, só poderão ser válidas para rotações pequenas ou moderadas [10].

O vector das segundas tensões de Piola-Kirchhoff associado com o vector das deformações de Green definido em (7.4) a (7.9) é obtido por

$$\underline{\sigma} = \left\{ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \right\}^T \quad (7.10)$$

Este vector pode ser obtido, para um material ortotrópico como

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{\varepsilon} \quad (7.11)$$

onde \underline{D} é a matriz constitutiva [ver expressões (2.44) a (2.50)]. Se se admitir um dado comportamento não linear do material, a matriz constitutiva \underline{D} terá de reflectir adequadamente esse comportamento.

A consideração de camadas materiais através da espessura da placa necessita da definição das deformações e tensões nessas camadas. Admite-se que o estado de tensão e deformação é constante em cada camada e referidas ao seu plano médio.

Os esforços generalizados na secção da placa, figura 7.3, podem ser calculadas integrando explicitamente o vector das tensões, $\underline{\sigma}$, através da espessura t da placa. O vector dos esforços generalizados é dado por

$$\underline{\sigma}_u = \{ \underline{N}, \underline{M}, \underline{Q} \}^T \quad (7.12)$$

onde os esforços de membrana, \underline{N} , flexão (momentos), \underline{M} , e de corte, \underline{Q} , são, respectivamente, obtidas por

$$\underline{N} = \{ N_x, N_y, N_{xy} \}^T = \int_{-t/2}^{t/2} \{ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \}^T dz \quad (7.13)$$

$$\underline{M} = \{ M_x, M_y, M_{xy} \}^T = \int_{-t/2}^{t/2} z \{ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \}^T dz \quad (7.14)$$

$$\underline{Q} = \{ Q_x, Q_y \}^T = \int_{-t/2}^{t/2} \{ \tau_{xz}, \tau_{yz} \}^T dz \quad (7.15)$$

Tendo em conta a distribuição de tensões, adopta-se a regra da ordenada média nos integrais indicados.

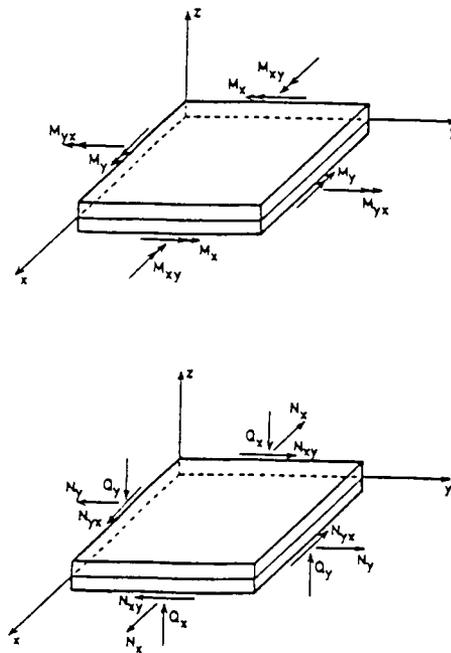


Figura 7.3 - Esforços generalizados no elemento de placa

7.2.2 - Formulação de 3ª ordem

Tal como no capítulo 2, para cascas, formula-se nesta secção a teoria de deformação de 3ª ordem para placas. Esta teoria tem por base uma evolução de 3ª ordem de deslocamentos com a coordenada z , correspondente à direcção da espessura.

Nesta teoria, o campo de deslocamentos é obtido por

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\theta'_x(x, y) - z^3\theta'_x(x, y) \quad (7.16)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\theta'_y(x, y) - z^3\theta'_y(x, y) \quad (7.17)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (7.18)$$

Esta teoria é, assim, uma extensão da teoria de 1ª ordem, com inclusão de termos de ordem superior, em que intervêm as rotações de ordem superior θ'_x e θ'_y . As deformações de Green são obtidas, nesta teoria, como

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}}_m + z\underline{\underline{\varepsilon}}_f + z^3\underline{\underline{\varepsilon}}_{f'} + \underline{\underline{\varepsilon}}_L \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_c + z^2\underline{\underline{\varepsilon}}_{c'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}}_p \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix} \quad (7.19)$$

onde $\underline{\underline{\varepsilon}}_m$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_f$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_c$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}_L$, são descritos por (7.6) a (7.9) e as deformações de ordem superior $\underline{\underline{\varepsilon}}_{f'}$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}_{c'}$ são obtidas por

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{f'} = \left\{ -\frac{\partial\theta'_x}{\partial x}, -\frac{\partial\theta'_y}{\partial y}, -\frac{\partial\theta'_x}{\partial y} - \frac{\partial\theta'_y}{\partial x} \right\}^T \quad (7.20)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{c'} = \left\{ -3\theta'_x, -3\theta'_y \right\}^T \quad (7.21)$$

Esta teoria origina directamente deformações de corte parabólicas, enquanto que a teoria de 1ª ordem produz deformações constantes. A teoria de 3ª ordem não necessita, então, de factores correctivos de corte.

As relações constitutivas são igualmente obtidas por (7.11), sem correcção de corte, enquanto que aos esforços expressos por (7.13) a (7.15) há a adicionar os momentos e esforços de corte de ordem superior

$$\underline{\underline{M}}' = \left\{ M'_x, M'_y, M'_{xy} \right\}^T = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^3 \left\{ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \right\}^T dz \quad (7.22)$$

$$\underline{Q}' = \{Q'_x, Q'_y\}^T = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T dz \quad (7.23)$$

7.2.3 - Formulação layerwise

A teoria layerwise é aqui formulada unicamente para placas sandwich com duas peles e um núcleo. Não são consideradas as sandwich multi-núcleo. Neste contexto, o campo de deslocamentos é descrito como (figura 7.4):

$$u^k = u_o - z_k^* \theta_{x2} - (z - z_k^*) \theta_x^k \quad (7.24)$$

$$v^k = v_o - z_k^* \theta_{y2} - (z - z_k^*) \theta_y^k \quad (7.25)$$

$$w^k = w_o \quad (7.26)$$

onde

$$z_1^* = \frac{h_1 - h_2 - h_3}{2} \quad (7.27)$$

$$z_3^* = \frac{h_1 + h_2 - h_3}{2} \quad (7.28)$$

$$z_2^* = 0 \quad (7.29)$$

As rotações θ_{xk} e θ_{yk} são as rotações respeitantes à camada k. Neste trabalho são apenas consideradas três camadas, conforme esquematizado na figura 7.4.

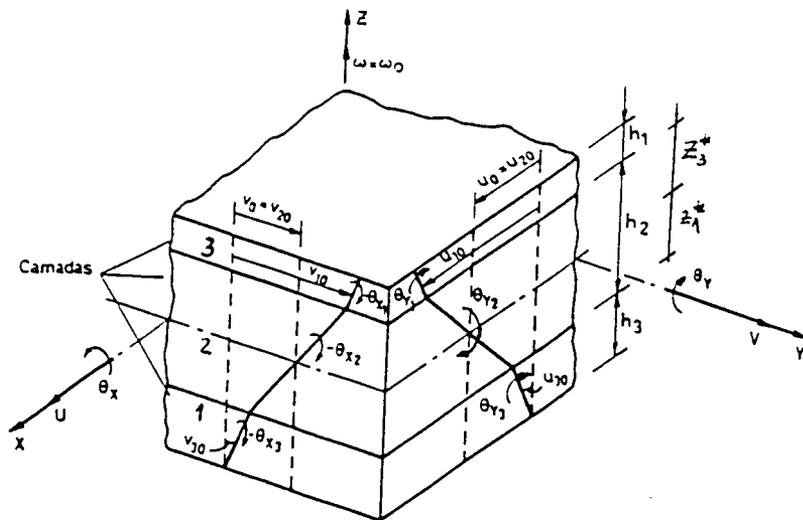


Figura 7.4 - Placa com formulação layerwise- deslocamentos e rotações

De acordo com este campo de deslocamentos, as deformações de Green, para cada camada k , são obtidas como

$$\underline{\varepsilon}^k = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\varepsilon}_m + z \underline{\varepsilon}_f^k + \underline{\varepsilon}_{mf}^k + \underline{\varepsilon}_L \\ \underline{\varepsilon}_c^k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\varepsilon}_p \\ \underline{\varepsilon}_c \end{array} \right\}^k \quad (7.30)$$

onde

$$\underline{\varepsilon}_m = \left\{ \frac{\partial u_o}{\partial x}, \frac{\partial v_o}{\partial y}, \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right\}^T \quad (7.31)$$

$$\underline{\varepsilon}_{mf}^k = \left\{ -z_k^* \frac{\partial \theta_{x2}}{\partial x} + z_k^* \frac{\partial \theta_{xk}}{\partial x}, -z_k^* \frac{\partial \theta_{y2}}{\partial y} + z_k^* \frac{\partial \theta_{yk}}{\partial y}, -z_k^* \frac{\partial \theta_{x2}}{\partial y} + z_k^* \frac{\partial \theta_{xk}}{\partial y} - z_k^* \frac{\partial \theta_{y2}}{\partial x} + z_k^* \frac{\partial \theta_{yk}}{\partial x} \right\}^T \quad (7.32)$$

$$\underline{\varepsilon}_f^k = \left\{ -\frac{\partial \theta_{xk}}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_{yk}}{\partial y}, -\frac{\partial \theta_{xk}}{\partial y} - \frac{\partial \theta_{yk}}{\partial x} \right\}^T \quad (7.33)$$

$$\underline{\varepsilon}_L = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right\}^T \quad (7.34)$$

$$\underline{\varepsilon}_c^k = \left\{ \frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta_{xk}, \frac{\partial w_o}{\partial y} - \theta_{yk} \right\}^T \quad (7.35)$$

As relações constitutivas para cada camada k são obtidas por

$$\underline{\sigma}^k = \underline{D}^k \underline{\varepsilon}^k \quad (7.36)$$

seguindo a mesma formulação de (7.10) e (7.11), mas onde não se aplicam factores de correcção de corte. Os esforços na placa são obtidos de igual forma às expressões (7.13) a (7.15), mas tendo em conta as tensões em cada camada, ou seja,

$$\underline{N} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T = \int_{-1/2}^{1/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T dz = \sum_{k=1}^3 t_k \underline{\sigma}^k \quad (7.37)$$

$$\underline{M} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T = \int_{-1/2}^{1/2} z \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T dz = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{inf}^k}^{z_{sup}^k} z \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}_k^T dz \quad (7.38)$$

$$\underline{Q} = \{Q_x, Q_y\}^T = \int_{-1/2}^{1/2} \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T dz = \sum_{k=1}^3 t_k \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}_k^T \quad (7.39)$$

7.3 - VIGA

Tal como no caso da placa, são apresentadas para a viga as teorias de 1ª ordem, 3ª ordem e layerwise.

7.3.1 - Teoria de 1ª ordem

O comportamento de vigas à flexão pode ser basicamente estudado de acordo com a teoria de vigas de Euler-Bernoulli ou com a teoria de Timoshenko. A teoria de Euler-Bernoulli é equivalente à teoria de Kirchhoff para placas. Não considera, assim, o efeito da deformação de corte transversal, uma vez que as normais ao eixo neutro antes da deformação mantêm-se normais a esse eixo após a ocorrência de deformação. Apresenta pois o inconveniente de exigir funções de forma C^1 para assegurar a continuidade do campo de deslocamentos entre os elementos finitos considerados. A teoria de Timoshenko [6,11,12], por seu lado, considera o efeito de deformação de corte transversal admitindo a independência da rotação da normal ao eixo neutro em relação ao deslocamento vertical. Assim, tal como na teoria de Mindlin, necessita apenas de funções de forma C^0 para garantir a continuidade do campo de deslocamentos. A teoria de Timoshenko é aquela que se apresenta coerente com a teoria de placa de Mindlin e portanto será aquela que será desenvolvida.

As hipóteses de base da teoria de Timoshenko são as seguintes:

- 1) os deslocamentos verticais em qualquer ponto da viga são pequenos quando comparados com a sua espessura;
- 2) as tensões normais ao eixo neutro são desprezáveis;
- 3) as normais ao eixo neutro antes da deformação mantêm-se rectas, mas não necessariamente normais àquele eixo após a deformação.

Para além destas hipóteses, consideram-se ainda as seguintes simplificações:

- 1) a viga é simétrica em relação ao plano xz , figura 7.5;
- 2) a torção de empenamento da secção da viga é desprezável em relação à torção de St. Venant;
- 3) a rigidez à flexão no plano xy é considerada nula.

Não se considera, simplificada, a torção, considerando-se apenas a deformação axial e a flexão.

O campo de deslocamentos de 1ª ordem é exposto como

$$u = u_0 - z\theta_x \tag{7.40}$$

$$w = w_0 \tag{7.41}$$

onde u é o deslocamento axial e w o deslocamento transversal. À semelhança da placa, a rotação θ_x é obtida como

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \tag{7.42}$$

ou seja, é igual à soma algébrica da inclinação do eixo neutro com a rotação devida à deformação de corte transversal, figura 7.5.

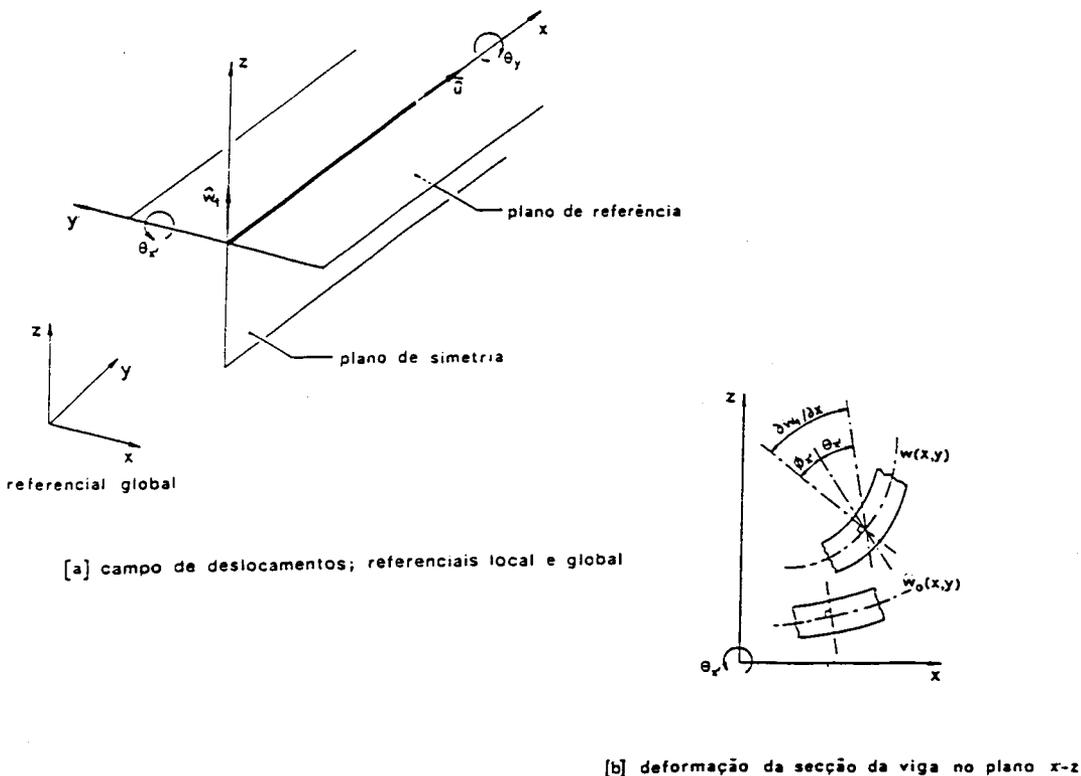


Figura 7.5 - Campo de deslocamentos para a viga de Timoshenko-1ª ordem

Tal como na placa, as hipóteses de von Kármán e de Timoshenko permitem obter as deformações de Green como

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m + z\varepsilon_f + \varepsilon_L \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} \quad (7.43)$$

onde
$$\varepsilon_m = \frac{\partial u_o}{\partial x} \quad (7.44)$$

$$\varepsilon_f = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (7.45)$$

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 \quad (7.46)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\partial w_o}{\partial x} - \theta_x \quad (7.47)$$

As relações constitutivas, em cada camada k do laminado, são obtidas por

$$\underline{\sigma}^k = \underline{D}^k \underline{\varepsilon}^k \quad (7.48)$$

onde
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G/\alpha \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (7.49)$$

onde α é um factor de correcção de corte. Para secções homogéneas aplica-se o factor 1.5 [6,12]. Para secções laminadas, haverá que aplicar um procedimento semelhante ao apresentado no capítulo 2 [13], para calcular o factor de correção de corte.

Os esforços actuantes na secção da viga, figura 7.6, poderão ser determinados, integrando o vector $\underline{\sigma}$ em toda a secção da viga. Assim, os esforços de membrana, flexão e corte são obtidos respectivamente por

$$N_x = \int_A \sigma_x dA \quad (7.50)$$

$$M_x = \int_A z \sigma_x dA \quad (7.51)$$

$$Q_x = \int_A \tau_{xz} dA \quad (7.52)$$

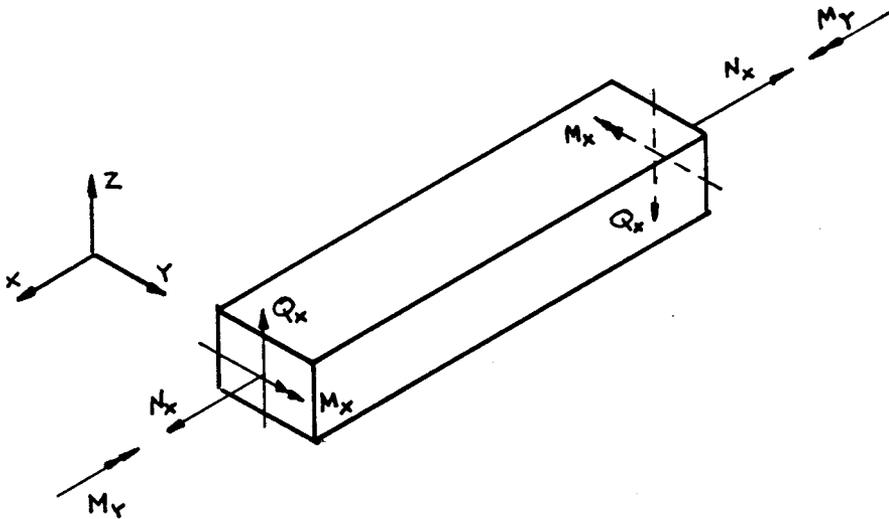


Figura 7.6 - Esforços no elemento de viga

7.3.2 - Teoria de 3ª ordem

Na teoria de 3ª ordem considera-se o seguinte campo de deslocamentos

$$u = u_0 - z\theta_x - z^3\theta'_x \quad (7.53)$$

$$w = w_0 \quad (7.54)$$

As deformações de Green são obtidas como

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m + z\varepsilon_f + z^3\varepsilon_{f'} + \varepsilon_L \\ \varepsilon_c + z^2\varepsilon_{c'} \end{Bmatrix} \quad (7.55)$$

onde

$$\varepsilon_m = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (7.56)$$

$$\varepsilon_f = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (7.57)$$

$$\varepsilon_{f'} = -\frac{\partial \theta'_x}{\partial x} \quad (7.58)$$

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \quad (7.59)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_x \quad (7.60)$$

$$\varepsilon_c' = -3\theta'_x \quad (7.61)$$

As relações constitutivas, em cada camada k do laminado, são obtidas pelas expressões (7.48) e (7.49), sem incluir o factor α , enquanto que os esforços são expressos por (7.50) a (7.52) e os esforços de ordem superior por

$$M'_x = \int_A z^3 \sigma_x dA \quad (7.62)$$

$$Q'_x = \int_A z^2 \tau_{xz} dA \quad (7.63)$$

7.3.3 - Teoria de viga layerwise

Na teoria layerwise, considera-se uma viga sandwich com 3 camadas, conforme ilustrado na figura 7.7.

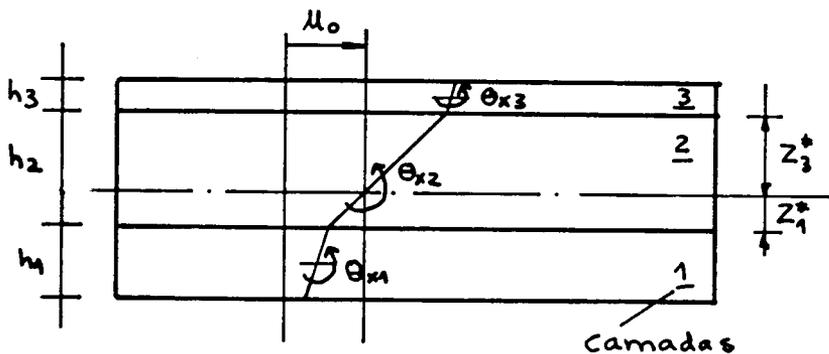


Figura 7.7 - Elemento de viga sandwich. Consideração de deslocamentos e rotações para a teoria layerwise

O seguinte campo de deslocamentos para a camada k é obtido como

$$u^k = u_0 - z^* \theta_{x2} - (z - z^*) \theta_{xk} \quad (7.64)$$

$$w^k = w_0 \quad (7.65)$$

As deformações de Green em cada camada são obtidas como

$$\underline{\varepsilon}^k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix}^k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m + \varepsilon_{mf} + z\varepsilon_f + \varepsilon_L \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix}^k \quad (7.66)$$

onde

$$\varepsilon_m^k = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (7.67)$$

$$\varepsilon_f^k = -\frac{\partial \theta_{xk}}{\partial x} \quad (7.68)$$

$$\varepsilon_L^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \quad (7.69)$$

$$\varepsilon_c^k = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_{xk} \quad (7.70)$$

$$\varepsilon_{mf}^k = -z_k^* \frac{\partial \theta_{x2}}{\partial x} - z_k^* \frac{\partial \theta_{xk}}{\partial x} \quad (7.71)$$

As relações constitutivas, em cada camada k do laminado, são obtidas pelas expressões (7.36) e (7.49), ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (7.72)$$

Note-se que, tal como na teoria de 3º ordem, não se aplicam factores correctivos de corte. Tal como no elemento de placa, podem obter-se os esforços para a viga, de acordo com esta teoria. O esforço de membrana é obtido como

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = \sum_{k=1}^3 A_k \sigma_x^k \quad (7.73)$$

onde A_k é a área respeitante à camada k . O momento flector é obtido por

$$M_x = \int_A z \sigma_x dA \quad (7.74)$$

No cálculo dos momentos pode seguir-se o mesmo procedimento de (7.38). O esforço de corte é obtido como

$$Q_x = \int_A \tau_{xz} dA \quad (7.75)$$

7.4 - EQUAÇÕES DE EQUILIBRIO NÃO LINEARES

7.4.1 - Placa

A expressão dos trabalhos virtuais para a placa toma a forma, considerando apenas cargas de corpo,

$$\int_V (\delta \underline{\underline{\epsilon}})^T \underline{\underline{\sigma}} dV = \int_V (\delta \underline{\underline{u}})^T \underline{\underline{b}} dV \quad (7.76)$$

onde

$$\delta \underline{\underline{\epsilon}} = \{ \delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz} \}^T \quad (7.77)$$

é o vector das deformações virtuais e

$$\delta \underline{\underline{u}} = \{ \delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta_x, \delta \theta_y \}^T \quad (7.78)$$

é o correspondente vector de deslocamentos virtuais. Podem construir-se de igual forma a expressão dos trabalhos virtuais para outras teorias. A única diferença é a da alteração no vector dos deslocamentos virtuais, cujo número de componentes é de 7 para a teoria de 3ª ordem e 9 para a teoria layerwise.

7.4.2 - Viga

Tal como no elemento de placa, a expressão dos trabalhos virtuais para a viga toma a forma, considerando apenas cargas de corpo, e para a teoria de 1ª ordem,

$$\int_V (\delta \underline{\underline{\epsilon}})^T \underline{\underline{\sigma}} dV = \int_V (\delta \underline{\underline{u}})^T \underline{\underline{b}} dV \quad (7.79)$$

onde

$$\delta \underline{\underline{\epsilon}} = \{ \delta \epsilon_x, \delta \gamma_{xz} \}^T \quad (7.80)$$

é o vector das deformações virtuais e

$$\delta \underline{\underline{u}} = \{ \delta u_0, \delta w_0, \delta \theta_x \}^T \quad (7.81)$$

é o correspondente vector de deslocamentos virtuais.

Será realizada, em seguida, a descrição da aplicação do Método dos Elementos Finitos no tratamento das equações de equilíbrio não linear, consideradas numa forma incremental.

7.5 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

7.5.1 - Introdução

Pretende-se apresentar uma descrição detalhada da aplicação do Método dos Elementos Finitos no tratamento das equações incrementais de equilíbrio para cada um dos elementos estruturais desenvolvidos neste capítulo, tendo ainda em atenção as diferentes teorias de deformação. Neste contexto, destacam-se a definição da matriz de rigidez tangencial dos elementos e a definição do vector das forças nodais equivalentes ao estado de tensão, essencial para a determinação das forças residuais nas equações de equilíbrio não lineares.

7.5.2 - Elemento de placa de 1ª ordem

a) Representação de deslocamentos

Considerando um elemento finito de n nós, os deslocamentos podem ser obtidos como

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \underline{u}_{oi} + \sum_{i=1}^n \underline{N}_i z \begin{Bmatrix} -\theta_{xi} \\ -\theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (7.82)$$

onde \underline{N}_i é a matriz de funções de forma do elemento para o nó em questão, \underline{u} é o vector de deslocamentos dum ponto genérico no interior do elemento finito e \underline{u}_{oi} o correspondente vector relativo no folheto médio no nó i .

b) Funções de forma (representação isoparamétrica)

São usadas as funções de forma correspondentes nos elementos de 8 nós de Serendipity, de 9 nós de Lagrange e de 9 nós Heterosis, conforme descrito no capítulo 2 e em [1,4,6,7,10-14]. Tendo em conta a representação isoparamétrica, as funções de forma podem ser usadas para definir a geometria da estrutura:

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \underline{x}_i \quad (7.83)$$

onde x e y são as coordenadas cartesianas de um ponto genérico no elemento.

A matriz Jacobiana pode então ser obtida a partir de (7.83) como

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (7.84)$$

O elemento de volume discretizado é obtido uma

$$dV = dx dy dz = dA dz = (\det \underline{J} \, d\xi d\eta) dz \quad (7.85)$$

onde $\det \underline{J}$ é o determinante da matriz Jacobiana.

c) Representação das deformações

O vector de deformações de Green pode ser escrito em termos do vector dos deslocamentos generalizados nodais \underline{u} do seguinte modo

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z \underline{B}_f + \frac{1}{2} \underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix} \underline{u}_i \quad (7.86)$$

onde \underline{B}_m , \underline{B}_f e \underline{B}_c são as matrizes de deformação correspondentes às deformações de membrana, flexão e corte, respectivamente, e \underline{B}_L a matriz correspondente às componentes não lineares do vector das deformações. Para um nó genérico i tem-se, então,

$$\underline{B}_{mi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.87)$$

$$\underline{B}_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.88)$$

$$\underline{B}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (7.89)$$

$$\underline{B}_{Li} = \underline{A}_i \underline{G}_i \quad (7.90)$$

onde

$$\underline{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_o}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w_o}{\partial y} \\ \frac{\partial w_o}{\partial y} & \frac{\partial w_o}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.91)$$

$$\underline{G}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.92)$$

As derivadas cartesianas das funções de forma podem ser obtidas através das funções de forma em coordenadas naturais (ξ, η) , como

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (7.93)$$

d) Equações de equilíbrio não lineares

As equações de equilíbrio não lineares podem ser expressas, para um dado elemento, como

$$(\delta \underline{a})^T \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dV - (\delta \underline{a})^T \underline{f} = 0 \quad (7.94)$$

onde o vector das forças nodais equivalentes \underline{f} devido às forças exteriores aplicadas é obtido como

$$\underline{f} = \int_V \underline{N}^T \underline{b} \, dV \quad (7.95)$$

para cargas de corpo.

Uma vez que (7.94) se deverá verificar para quaisquer deslocamentos virtuais $\delta \underline{a}$, as equações de equilíbrio pãssam a escrever-se

$$\underline{\psi}(\underline{a}) = \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dV - \underline{f} = 0 \quad (7.96)$$

Sendo estas equações não lineares em \underline{a} , não é possível utilizar métodos directos de solução, como já vimos no capítulo 3 e 4.

e) Matriz de rigidez tangencial

Para o elemento de placa, a matriz de rigidez tangencial pode ser determinada através da variação de (7.96) em relação à variação dos deslocamentos generalizados $d\underline{a}$, ou seja,

$$d\underline{\psi}(\underline{a}) = \int_V \underline{B}^T d\underline{\sigma} dV + \int_V (d\underline{B})^T \underline{\sigma} dV = \underline{K}_T d\underline{a} \quad (7.97)$$

Como apenas a componente não linear de \underline{B} depende de \underline{a} , pode considerar-se que

$$(d\underline{B})^T = (d\underline{B}_L)^T \quad (7.98)$$

Tendo em conta que $\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{\varepsilon}$, pode obter-se

$$d\underline{\sigma} = \underline{D} d\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{B} d\underline{a} \quad (7.99)$$

e escrever-se
$$d\underline{\psi}(\underline{a}) = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV d\underline{a} + \int_V (d\underline{B}_L)^T \underline{\sigma} dV = \underline{K}_T d\underline{a} \quad (7.100)$$

Pode escrever-se $(d\underline{B}_L)^T \underline{\sigma}$ [13,14] da seguinte forma

$$(d\underline{B}_L)^T \underline{\sigma} = \underline{G}^T (dA_1)^T \underline{\sigma} = \underline{G}^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \underline{G} d\underline{a} \quad (7.101)$$

pelo que a matriz de rigidez tangencial \underline{K}_T pode ser escrita como

$$\underline{K}_T = \underline{K}_L + \underline{K}_\sigma \quad (7.102)$$

onde \underline{K}_L toma a forma

$$\underline{K}_L = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \quad (7.103)$$

e \underline{K}_σ , a matriz de rigidez geométrica, é obtida por

$$\underline{K}_\sigma = \int_V \underline{G}^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \underline{G} dV \quad (7.104)$$

A matriz de rigidez \underline{K}_L pode ser obtida discretizando em função dos termos de membrana, flexão, corte e não linear:

$$\underline{K}_L = \int_V \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{D}^p & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{D}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix} dV \quad (7.105)$$

A contribuição para a matriz \underline{K}_L do agrupamento de dois nós i e j genéricos do elemento é definida da seguinte forma

$$(\underline{K}_L)_{ij} = (\underline{K}_{mm} + \underline{K}_{mL} + \underline{K}_{mf} + \underline{K}_{LL} + \underline{K}_{Lf} + \underline{K}_{ff} + \underline{K}_{cc})_{ij} + (\underline{K}_{mL} + \underline{K}_{mf} + \underline{K}_{Lf})_{ij}^T \quad (7.106)$$

Considerando a integração na espessura da placa através da regra da ordenada média, podem obter-se as expressões das sub-matrizes

$$(\underline{K}_{mm})_{ij} = \int_V (\underline{B}_m)_i^T \underline{D}^P (\underline{B}_m)_j \, dV = \int_A (\underline{B}_m)_i^T \sum_{k=1}^m t_k \underline{D}_k^P (\underline{B}_m)_j \, dA \quad (7.107)$$

$$(\underline{K}_{mL})_{ij} = \int_V (\underline{B}_m)_i^T \underline{D}^P (\underline{B}_L)_j \, dV = \int_A (\underline{B}_m)_i^T \sum_{k=1}^m t_k \underline{D}_k^P (\underline{B}_L)_j \, dA \quad (7.108)$$

$$(\underline{K}_{mf})_{ij} = \int_V (\underline{B}_m)_i^T \underline{D}^P (\underline{B}_f)_j \, dV = \int_A (\underline{B}_m)_i^T \sum_{k=1}^m t_k z_k \underline{D}_k^P (\underline{B}_f)_j \, dA \quad (7.109)$$

$$(\underline{K}_{ff})_{ij} = \int_V (\underline{B}_f)_i^T \underline{D}^P (\underline{B}_f)_j \, dV = \int_A (\underline{B}_f)_i^T \sum_{k=1}^m \left(\frac{t_k^3}{12} + z_k^2 t_k \right) \underline{D}_k^P (\underline{B}_f)_j \, dA \quad (7.110)$$

$$(\underline{K}_{cc})_{ij} = \int_V (\underline{B}_c)_i^T \underline{D}^P (\underline{B}_c)_j \, dV = \int_A (\underline{B}_c)_i^T \sum_{k=1}^m t_k \underline{D}_k^c (\underline{B}_c)_j \, dA \quad (7.111)$$

$$(\underline{K}_{Lf})_{ij} = \int_V (\underline{B}_L)_i^T \underline{D}^P (\underline{B}_f)_j \, dV = \int_A (\underline{B}_L)_i^T \sum_{k=1}^m t_k z_k \underline{D}_k^P (\underline{B}_f)_j \, dA \quad (7.112)$$

$$(\underline{K}_{LL})_{ij} = \int_V (\underline{B}_L)_i^T \underline{D}^P (\underline{B}_L)_j \, dV = \int_A (\underline{B}_L)_i^T \sum_{k=1}^m t_k \underline{D}_k^P (\underline{B}_L)_j \, dA \quad (7.113)$$

onde m designa o número de camadas consideradas enquanto que para uma camada genérica k , t_k é a sua espessura e z_k é a distância do folheto médio da placa ao folheto médio da camada.

A matriz de rigidez geométrica \underline{K}_σ é definida pela contribuição dos nós i e j , por

$$(\underline{K}_\sigma)_{ij} = \int_V \underline{G}_i^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \underline{G}_j \, dV \quad (7.114)$$

$$(\underline{K}_\sigma)_{ij} = \int_A \underline{G}_i^T \sum_{k=1}^m t_k \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \underline{G}_j dA =$$

ou

$$= \int_A \underline{G}_i^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \underline{G}_j dA \quad (7.115)$$

Existe apenas um termo não nulo correspondente ao terceiro grau de liberdade de cada nó, ou seja,

$$(\underline{K}_\sigma)_{33} = \int_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} N_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} N_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \right] dA \quad (7.116)$$

f) Forças nodais equivalentes ao estado de tensão

O vector das forças residuais $\underline{\psi}(\underline{a})$ é função do vector das forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado em determinada configuração de equilíbrio, $\underline{r}(\underline{a})$, cuja definição é dada por

$$\underline{r}(\underline{a}) = \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dV \quad (7.117)$$

Substituindo na expressão anterior a matriz \underline{B} , e integrando ao longo da espessura, pela regra da ordenada média, o vector $\underline{r}(\underline{a})$ é obtido por

$$\underline{r}_i = \int_A [\underline{B}_m + \underline{B}_L]_i^T \underline{N} dA + \int_A [\underline{B}_f]_i^T \underline{M} dA + \int_A [\underline{B}_c]_i^T \underline{Q} dA \quad (7.118)$$

onde \underline{N} , \underline{M} e \underline{Q} são, respectivamente, os esforços de membrana, flexão e corte, cujos valores passam a ser definidos como (7.13) a (7.15).

7.5.3 - Elemento de placa com teoria de 3ª ordem

a) Representação de deslocamentos

Tendo em conta a teoria de 3ª ordem atrás exposta, o campo de deslocamentos, para um elemento finito com n nós, pode ser obtido como

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \underline{u}_{oi} + \sum_{i=1}^n \underline{N}_i z \begin{Bmatrix} -\theta'_{xi} \\ -\theta'_{yi} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n \underline{N}_i z^3 \begin{Bmatrix} -\theta''_{xi} \\ -\theta''_{yi} \end{Bmatrix} \quad (7.119)$$

b) Funções de forma

São usadas as mesmas funções de forma que na teoria de 1ª ordem.

c) Representação de deformações

O vector de deformações de Green, na teoria de deformação de 3ª ordem, pode ser escrito em termos do vector dos deslocamentos generalizados nodais \underline{u}_i do seguinte modo

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + z^3\underline{B}'_f + \frac{1}{2}\underline{B}_L \\ \underline{B}_c + z^2\underline{B}'_c \end{bmatrix} \underline{u}_i \quad (7.120)$$

onde as matrizes de deformação são explicitamente definidas para um nó genérico i como

$$\underline{B}_{mi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.121)$$

$$\underline{B}_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.122)$$

$$\underline{B}'_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.123)$$

$$\underline{B}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.124)$$

$$\underline{B}'_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3N_i \end{bmatrix} \quad (7.125)$$

A matriz \underline{B}_{Li} é construída de igual forma a (7.91) e (7.92) respeitando os graus de liberdade por nó que nesta abordagem são 7, $\{u_o, v_o, w_o, \theta_x, \theta_y, \theta'_x, \theta'_y\}^T$.

d) Equações de equilíbrio não linear

Estas equações têm a mesma formalidade que nas expressões (7.94) a (7.96).

e) Matriz de rigidez tangencial

A matriz de rigidez tangencial é regida, nesta teoria, pelas equações (7.97) a (7.104). A expressão (7.103) é modificada, nesta teoria, para

$$\underline{K}_L = \int_V \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + z^3\underline{B}'_f + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c + z^2\underline{B}'_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{D}^p & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{D}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + z^3\underline{B}'_f + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c + z^2\underline{B}'_c \end{bmatrix} dV \quad (7.126)$$

A contribuição para a matriz \underline{K}_L do agrupamento de dois nós i e j genéricos do elemento é definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} (\underline{K}_L)_{ij} = & (\underline{K}_{mm} + \underline{K}_{mL} + \underline{K}_{mf} + \underline{K}_{LL} + \underline{K}_{mf'} + \underline{K}_{ff'} + \underline{K}_{cc'} + \underline{K}_{c'c'} + \underline{K}_{f'f'} + \underline{K}_{f'L} + \underline{K}_{Lf} + \underline{K}_{ff} + \underline{K}_{cc})_{ij} \\ & (\underline{K}_{mL} + \underline{K}_{mf} + \underline{K}_{Lf} + \underline{K}_{mf'} + \underline{K}_{ff'} + \underline{K}_{f'L} + \underline{K}_{cc'})_{ij}^T \end{aligned} \quad (7.127)$$

Para além das sub-matrizes de rigidez expressas por (7.105) a (7.111) há a considerar ainda as matrizes

$$(\underline{K}_{mf'})_{ij} = \int_V (\underline{B}_m)_i^T \underline{D}^p z^3 (\underline{B}'_f)_j dV \quad (7.128)$$

$$(\underline{K}_{ff'})_{ij} = \int_V (\underline{B}_f)_i^T \underline{D}^p z^4 (\underline{B}'_f)_j dV \quad (7.129)$$

$$(\underline{K}_{f'L})_{ij} = \int_V (\underline{B}_f)_i^T \underline{D}^p z^3 (\underline{B}_L)_j dV \quad (7.130)$$

$$(\underline{K}_{f'f'})_{ij} = \int_V (\underline{B}_f)_i^T \underline{D}^p z^6 (\underline{B}'_f)_j dV \quad (7.131)$$

$$(\underline{K}_{cc'})_{ij} = \int_V (\underline{B}_c)_i^T \underline{D}^c z^2 (\underline{B}'_c)_j dV \quad (7.132)$$

$$(\underline{K}_{c'c'})_{ij} = \int_V (\underline{B}'_c)_i^T \underline{D}^c z^4 (\underline{B}'_c)_j dV \quad (7.133)$$

A matriz de rigidez geométrica \underline{K}_G é definida, nesta teoria, de igual modo à teoria de 1ª ordem, por não intervirem termos de rotação, ou seja, pode ser definida por (7.114) a (7.116).

f) Forças nodais equivalentes

O vector de forças nodais equivalentes ao estado de tensão, $\underline{r}(\underline{a})$ é obtido, nesta teoria, por

$$\begin{aligned} \underline{r}_i = & \int_A [\underline{B}_m + \underline{B}_L]_i^T \underline{N} \, dA + \int_A [\underline{B}_f]_i^T \underline{M} \, dA + \int_A [\underline{B}_c]_i^T \underline{Q} \, dA \\ & + \int_A [\underline{B}_f']_i^T \underline{M}' \, dA + \int_A [\underline{B}_c']_i^T \underline{Q}' \, dA \end{aligned} \quad (7.134)$$

onde \underline{M}' e \underline{Q}' são definidos por (7.22) a (7.23).

7.5.4 - Elemento de placa com teoria layerwise

a) Representação de deslocamentos

Tendo em conta a teoria layerwise atrás exposta, o campo de deslocamentos, para um elemento finito com n nós, e para uma camada k , pode ser obtido como

$$\underline{u}^k = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^k = \sum_{i=1}^n N_i \underline{u}_{oi} + \sum_{i=1}^n N_i z \begin{Bmatrix} -\theta_{xk} \\ -\theta_{yk} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n N_i z_k^* \begin{Bmatrix} -\theta_{x2} \\ -\theta_{y2} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n N_i z_k^* \begin{Bmatrix} \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} \quad (7.135)$$

b) Funções de forma

São usadas as funções de forma da teoria de 1ª ordem.

c) Representação de deformações

O vector de deformações para uma camada k , pode ser obtida como

$$\underline{\varepsilon}^k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix}^k = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z \underline{B}_f + \underline{B}_{mf} + \frac{1}{2} \underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix}_i^k \underline{u}_i \quad (7.136)$$

onde as matrizes de deformação são explicitamente definidas para um nó genérico i como

$$\underline{B}_{mi}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.137)$$

$$\underline{B}_{fi}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.138)$$

$$\underline{B}_{fi}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.139)$$

$$\underline{B}_{fi}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.140)$$

$$\underline{B}_{ci}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.141)$$

$$\underline{B}_{ci}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & -N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.142)$$

$$\underline{B}_{ci}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (7.143)$$

$$\underline{B}_{mfi}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z_1^* \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -z_1^* \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1^* \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -z_1^* \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^* \frac{\partial N_i}{\partial y} & z_1^* \frac{\partial N_i}{\partial x} & -z_1^* \frac{\partial N_i}{\partial y} & -z_1^* \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.144)$$

$$\underline{B}_{mfi}^2 = [0] \quad (7.145)$$

$$\underline{B}_{mfi}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_3^* \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & z_3^* \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_3^* \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & z_3^* \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_3^* \frac{\partial N_i}{\partial y} & -z_3^* \frac{\partial N_i}{\partial x} & z_3^* \frac{\partial N_i}{\partial y} & z_3^* \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.146)$$

As componentes não lineares são obtidas de igual forma a (7.90) a (7.92).

d) Equações de equilíbrio não lineares

Estas são formalmente iguais às contidas nas expressões (7.94) a (7.96).

e) Matriz de rigidez tangencial

Substituindo as matrizes (7.137) a (7.146) em (7.103) pode reescrever-se a expressão da matriz de rigidez tangencial para o elemento de placa layerwise como

$$\underline{K}_L = \sum_{k=1}^3 \int_{V_k} \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z \underline{B}_f + \underline{B}_{mf} + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{D}^p \\ \underline{0} \\ \underline{D}^c \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z \underline{B}_f + \underline{B}_{mf} + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix}^k dV_k \quad (7.147)$$

$$\text{Tomando} \quad \underline{B}_a^k = \underline{B}_m + \underline{B}_L + \underline{B}_{mf}^k \quad (7.148)$$

pode escrever-se

$$(\underline{K}_L)_{ij} = \sum_{k=1}^3 (\underline{K}_{aa} + \underline{K}_{af} + \underline{K}_{ff} + \underline{K}_{cc})_{ij}^k + (\underline{K}_{af})_{ij}^{kT} \quad (7.149)$$

f) Forças nodais equivalentes

O vector de forças nodais equivalentes ao estado de tensão, $\underline{r}(\underline{a})$ é obtido, nesta teoria, por

$$\underline{\Gamma}_i = \sum_{k=1}^3 \left\{ \int_{V_k} [\underline{B}_m + \underline{B}_L]_i^T \underline{\sigma}^k dV_k + \int_{V_k} [\underline{B}_f^k]_i^T \underline{\sigma}^k dV_k + \int_{V_k} [\underline{B}_c^k]_i^T \underline{\tau}^k dV_k \right\} \quad (7.150)$$

7.5.5 - Elemento de viga de 1ª ordem (Timoshenko)

a) Representação de deslocamentos

Os deslocamentos generalizados para um elemento finito de viga com n nós, pode ser obtido como

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \begin{Bmatrix} u_{oi} \\ w_{oi} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n \underline{N}_i z \begin{Bmatrix} -\theta_{xi} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.151)$$

b) Funções de forma

As funções de forma correspondem às de um elemento de viga de 2 ou 3 nós [1,6,7,10-12,14]. A matriz jacobiana do elemento é obtida por

$$\underline{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2} \quad (7.152)$$

onde ξ é a coordenada natural do elemento, figura 7.8 e L é o comprimento do elemento.

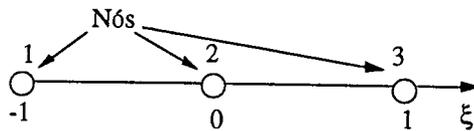


Figura 7.8 - Elemento de viga de 3 nós

c) Representação de deformações

Seguindo um processo semelhante ao elemento de placa, o vector de deformações de Green, definido em (7.43) a (7.47) pode ser apresentado em função do vector de deslocamentos nodais da seguinte maneira:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + \frac{1}{2}\underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix}_i \underline{u}_i \quad (7.153)$$

onde as matrizes de deformação são explicitamente definidas para um nó genérico i como

$$\underline{B}_{mi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.154)$$

$$\underline{B}_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.155)$$

$$\underline{B}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i \end{bmatrix} \quad (7.156)$$

$$\underline{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial w_o}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.157)$$

As derivadas cartesianas $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ podem ser obtidas a partir de

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\det \underline{J}} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad (7.158)$$

d) Equações de equilíbrio

Podem escrever-se as equações de equilíbrio não lineares como

$$(\delta \underline{a})^T \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dV - (\delta \underline{a})^T \underline{f} = 0 \quad (7.159)$$

onde o vector das forças nodais equivalentes \underline{f} devido às forças exteriores aplicadas é obtido como

$$\underline{f} = \int_V \underline{N}^T \underline{b} \, dV \quad (7.160)$$

para cargas de corpo.

A aplicação do princípio dos trabalhos virtuais torna possível reescrever a equação (7.159) como

$$\underline{\Psi}(\underline{a}) = \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dV - \underline{f} = 0 \quad (7.161)$$

e) Matriz de rigidez tangencial

Para o elemento de viga, a matriz de rigidez tangencial pode ser determinada através da variação das forças residuais em relação à variação dos deslocamentos generalizados, ou seja,

$$d\underline{\psi}(\underline{a}) = \int_V \underline{B}^T d\underline{\sigma} dV + \int_V (d\underline{B})^T \underline{\sigma} dV = \underline{K}_T d\underline{a} \quad (7.162)$$

A matriz de rigidez toma a forma

$$\underline{K}_T = \underline{K}_L + \underline{K}_\sigma \quad (7.163)$$

onde \underline{K}_L toma a forma

$$\underline{K}_L = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \quad (7.164)$$

e \underline{K}_σ , a matriz de rigidez geométrica, é obtida por

$$\underline{K}_\sigma = \int_V \underline{G}^T \underline{\sigma}_x \underline{G} dV \quad (7.165)$$

A matriz de rigidez \underline{K}_L pode ser obtida discretizando em função dos termos de membrana, flexão, corte e não linear:

$$\underline{K}_L = \int_V \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix} dV \quad (7.166)$$

A contribuição para a matriz \underline{K}_L do agrupamento de dois nós i e j genéricos do elemento é definida da seguinte forma

$$(\underline{K}_L)_{ij} = (\underline{K}_{mm} + \underline{K}_{mL} + \underline{K}_{mf} + \underline{K}_{LL} + \underline{K}_{Lf} + \underline{K}_{ff} + \underline{K}_{cc})_{ij} + (\underline{K}_{mL} + \underline{K}_{mf} + \underline{K}_{Lf})_{ij}^T \quad (7.167)$$

Considerando a integração na espessura da viga através da regra da ordenada média,

$$(\underline{K}_{mm})_{ij} = \int_V (\underline{B}_m)_i^T E (\underline{B}_m)_j dV = \int_L (\underline{B}_m)_i^T \sum_{k=1}^3 A_k E_k (\underline{B}_m)_j dL \quad (7.168)$$

onde A_k e E_k representam a área e o módulo da camada k . As outras sub-matrizes são obtidas de forma semelhante,

$$(\underline{K}_{mL})_{ij} = \int_V (\underline{B}_m)_i^T E (\underline{B}_L)_j dV \quad (7.169)$$

$$(\underline{K}_{ff})_{ij} = \int_V (\underline{B}_f)_i^T E z^2 (\underline{B}_f)_j dV \quad (7.170)$$

$$(\underline{K}_{fL})_{ij} = \int_V (\underline{B}_f)_i^T E z (\underline{B}_L)_j \, dV \quad (7.171)$$

$$(\underline{K}_{mf})_{ij} = \int_V (\underline{B}_m)_i^T E z (\underline{B}_f)_j \, dV \quad (7.172)$$

$$(\underline{K}_{cc})_{ij} = \int_V (\underline{B}_c)_i^T G / \alpha (\underline{B}_c)_j \, dV \quad (7.173)$$

$$(\underline{K}_{LL})_{ij} = \int_V (\underline{B}_L)_i^T E (\underline{B}_L)_j \, dV \quad (7.174)$$

A matriz de rigidez geométrica \underline{K}_σ é definida pela contribuição dos nós i e j , por

$$(\underline{K}_\sigma)_{ij} = \int_V \underline{G}_i^T \sigma_x \underline{G}_j \, dV \quad (7.175)$$

Existe apenas um termo não nulo correspondente ao terceiro grau de liberdade de cada nó, ou seja,

$$(\underline{K}_\sigma)_{33} = \int_L \frac{\partial N_i}{\partial x} N_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \, dL \quad (7.176)$$

f) Forças nodais equivalentes ao estado de tensão

O vector das forças residuais $\underline{\psi}(\underline{a})$ é função do vector das forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado em determinada configuração de equilíbrio, $\underline{r}(\underline{a})$ é obtido por

$$\underline{r}_i = \int_L [(\underline{B}_m + \underline{B}_L)]_i^T N_x \, dL + \int_L (\underline{B}_f)_i^T M_x \, dL + \int_L (\underline{B}_c)_i^T Q_x \, dL \quad (7.177)$$

onde N_x , M_x e Q_x são, respectivamente, o esforço axial, o momento flector e o esforço de corte, definidos em (7.50) a (7.52).

7.5.6 - Elemento de viga de 3ª ordem

a) Representação de deslocamentos

O campo de deslocamentos para um elemento finito de viga de n nós pode ser descrito como

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i \begin{Bmatrix} u_{oi} \\ w_{oi} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n \underline{N}_i z \begin{Bmatrix} -\theta_{xi} \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n \underline{N}_i z^3 \begin{Bmatrix} -\theta'_{xi} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.178)$$

b) Funções de forma

Utilizam-se as mesmas funções de forma do elemento de 1ª ordem.

c) Representação de deformações

O vector de deformações de Green, para a viga de 3ª ordem, pode ser apresentado em função do vector de deslocamentos nodais na seguinte forma:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + z^3\underline{B}_f + \frac{1}{2}\underline{B}_L \\ \underline{B}_c + z^2\underline{B}_c \end{bmatrix}_i \underline{u}_i \quad (7.179)$$

onde as matrizes de deformação são explicitamente definidas para um nó genérico i como

$$\underline{B}_{mi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.180)$$

$$\underline{B}_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.181)$$

$$\underline{B}_{f_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.182)$$

$$\underline{B}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (7.183)$$

$$\underline{B}_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3N_i \end{bmatrix} \quad (7.184)$$

$$\underline{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.185)$$

As derivadas cartesianas $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ podem ser obtidas a partir de (7.158).

d) Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio não lineares são obtidas por (7.159) a (7.161).

e) Matriz de rigidez tangencial

Para o elemento de viga de 3ª ordem, a matriz de rigidez tangencial pode ser determinada através de (7.162) a (7.165). A expressão (7.161) é modificada para

$$\underline{K}_L = \int_V \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + z^3\underline{B}_{f'} + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c + z^2\underline{B}_{c'} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + z^3\underline{B}_{f'} + \underline{B}_L \\ \underline{B}_c + z^2\underline{B}_{c'} \end{bmatrix} dV \quad (7.186)$$

A contribuição para a matriz \underline{K}_L do agrupamento de dois nós i e j genéricos do elemento é definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} (\underline{K}_L)_{ij} = & (\underline{K}_{mm} + \underline{K}_{mL} + \underline{K}_{mf} + \underline{K}_{LL} + \underline{K}_{mf'} + \underline{K}_{ff'} + \underline{K}_{cc'} + \underline{K}_{c'c'} + \underline{K}_{f'f'} + \underline{K}_{f'L} + \underline{K}_{Lf} + \underline{K}_{ff} + \underline{K}_{cc})_{ij} \\ & (\underline{K}_{mL} + \underline{K}_{mf} + \underline{K}_{Lf} + \underline{K}_{mf'} + \underline{K}_{ff'} + \underline{K}_{f'L} + \underline{K}_{cc'})_{ij}^T \end{aligned} \quad (7.187)$$

Para além das sub-matrizes de rigidez expressas por (7.168) a (7.174) há a considerar ainda as matrizes

$$(\underline{K}_{mf'})_{ij} = \int_V (\underline{B}_m)_i^T E z^3 (\underline{B}_{f'})_j dV \quad (7.188)$$

$$(\underline{K}_{ff'})_{ij} = \int_V (\underline{B}_f)_i^T E z^4 (\underline{B}_{f'})_j dV \quad (7.189)$$

$$(\underline{K}_{f'L})_{ij} = \int_V (\underline{B}_{f'})_i^T E z^3 (\underline{B}_L)_j dV \quad (7.190)$$

$$(\underline{K}_{f'f'})_{ij} = \int_V (\underline{B}_{f'})_i^T E z^6 (\underline{B}_{f'})_j dV \quad (7.191)$$

$$(\underline{K}_{cc'})_{ij} = \int_V (\underline{B}_c)_i^T G z^2 (\underline{B}_{c'})_j dV \quad (7.192)$$

$$(\underline{K}_{c'c'})_{ij} = \int_V (\underline{B}_{c'})_i^T G z^4 (\underline{B}_{c'})_j dV \quad (7.193)$$

A matriz de rigidez geométrica \underline{K}_σ é definida, nesta teoria, de igual modo à teoria de 1ª ordem, por não intervirem termos de rotação, ou seja, pode ser definida por (7.175) a (7.176).

f) Forças nodais equivalentes

O vector de forças nodais equivalentes ao estado de tensão, $\underline{r}(\underline{a})$ é obtido, nesta teoria, por

$$\begin{aligned} \underline{r}_i = & \int_L [\underline{B}_m + \underline{B}_L]_i^T N_x \, dL + \int_L [\underline{B}_f]_i^T M_x \, dL + \int_L [\underline{B}_c]_i^T Q_x \, dL \\ & + \int_L [\underline{B}_f']_i^T M'_x \, dL + \int_L [\underline{B}_c']_i^T Q'_x \, dL \end{aligned} \quad (7.194)$$

onde M'_x e Q'_x são os esforços de ordem superior definidos por (7.62) e (7.63).

7.5.7 - Elemento de viga layerwise

a) Representação de deslocamentos

O campo de deslocamentos para um elemento finito de viga de n nós pode ser descrito, para uma camada k , como

$$\underline{u}^k = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}^k = \sum_{i=1}^n N_i \begin{Bmatrix} u_{oi} \\ w_{oi} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n N_i z \begin{Bmatrix} -\theta_{xk} \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n N_i z_k^* \begin{Bmatrix} -\theta_{x2} + \theta_{xk} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.195)$$

b) Funções de forma

Utilizam-se as mesmas funções de forma do elemento de 1ª ordem.

c) Representação de deformações

O vector de deformações de Green, para a viga layerwise, pode ser apresentado em função do vector de deslocamentos nodais na seguinte forma, para cada camada k :

$$\underline{\varepsilon}^k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \underline{B}_m + z\underline{B}_f + \underline{B}_{mf} + \frac{1}{2}\underline{B}_L \\ \underline{B}_c \end{bmatrix}_i^k \underline{u}_i \quad (7.196)$$

onde as matrizes de deformação são explicitamente definidas para um nó genérico i como

$$\underline{B}_{mi}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.197)$$

$$\underline{B}_{fi}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.198)$$

$$\underline{B}_{fi}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.199)$$

$$\underline{B}_{fi}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.200)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{ci}^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.201)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{ci}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (7.202)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{ci}^3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (7.203)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{mfi}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (z_1^* - 1) \frac{\partial N_i}{\partial x} & z_1^* \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.204)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{mfi}^2 = [0] \quad (7.205)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{mfi}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z_3^* \frac{\partial N_i}{\partial x} & (z_3^* - 1) \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.206)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial w_o}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.207)$$

As derivadas cartesianas $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ podem ser obtidas a partir de (7.158).

d) Equações de equilíbrio não lineares

As equações de equilíbrio não lineares são obtidas por (7.159) a (7.161).

e) matriz de rigidez

A matriz de rigidez para a viga layerwise segue as expressões (7.162) a (7.165). A expressão (7.166) é modificada para

$$\underline{\mathbf{K}}_L = \sum_{k=1}^3 \int_{V_k} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_m + z \underline{\mathbf{B}}_f + \underline{\mathbf{B}}_{mf} + \underline{\mathbf{B}}_L \\ \underline{\mathbf{B}}_c \end{bmatrix}^{kT} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_m + z \underline{\mathbf{B}}_f + \underline{\mathbf{B}}_{mf} + \underline{\mathbf{B}}_L \\ \underline{\mathbf{B}}_c \end{bmatrix}^k dV_k \quad (7.208)$$

A contribuição para a matriz $\underline{\mathbf{K}}_L$ do agrupamento de dois nós i e j genéricos do elemento é definida da seguinte forma

$$\text{Tomando} \quad \underline{\mathbf{B}}_a^k = \underline{\mathbf{B}}_m + \underline{\mathbf{B}}_L + \underline{\mathbf{B}}_{mf}^k \quad (7.209)$$

pode escrever-se

$$(\underline{\mathbf{K}}_L)_{ij} = \sum_{k=1}^3 (\underline{\mathbf{K}}_{aa} + \underline{\mathbf{K}}_{af} + \underline{\mathbf{K}}_{ff} + \underline{\mathbf{K}}_{cc})_{ij}^k + (\underline{\mathbf{K}}_{af})_{ij}^{kT} \quad (7.210)$$

A matriz de rigidez geométrica pode ser obtida genericamente como (7.175) e (7.176).

f) Forças nodais equivalentes

O vector de forças nodais equivalentes ao estado de tensão, $\underline{r}(\underline{a})$ é obtido, nesta teoria, por (7.150).

7.6 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo consideram-se dois exemplos: a placa de Srinivas [15] e a viga de Pagano [16].

7.6.1 - Placa sandwich

Neste exemplo comparam-se as formulações apresentadas com os resultados de Srinivas[15] (solução analítica considerada como solução exacta). Uma placa quadrada, simplesmente apoiada, é analisada para diferentes configurações materiais e espessuras. A placa é carregada transversalmente sob pressão uniforme ($q=1.0$). Utiliza-se, em todas as formulações, o elemento de 8 nós, calculando-se o deslocamento transversal máximo no centro da placa e as máximas tensões nos pontos de gauss. O comprimento adimensional da placa é $a=10.0$, a espessura adimensional é $h=1.0$, sendo a placa modelada com uma malha 2x2 num quadrante, devido à simetria. As espessuras das três camadas são respectivamente h_1, h_2, h_3 . As características adimensionais do núcleo são

$$D'_{\text{núcleo}} = \begin{bmatrix} 3.802 & 0.879 & 0 & 0 & 0 \\ 0.879 & 1.996 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.608 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.015 \end{bmatrix} \quad (7.211)$$

As características das peles (camadas superior e inferior) são proporcionais às do núcleo, sendo calculadas através dos factores c_{sup} e c_{inf} , sendo definidas como

$$c_{\text{sup}} = \frac{D'_{\text{face sup}}}{D'_{\text{núcleo}}}, \quad c_{\text{inf}} = \frac{D'_{\text{face inf}}}{D'_{\text{núcleo}}} \quad (7.212)$$

Estudaram-se 5 casos diferentes, tendo em vista a simulação de vários tipos de sandwich, tais como um laminado homogéneo isotrópico (caso 1), sandwich simétricas (casos 2 e 3) e sandwich não-simétricas (casos 4 e 5). Apresentam-se na tabela 1 os resultados obtidos, relativamente ao deslocamento transversal. Na figura 7.9, apresenta-se a geometria da placa e a malha utilizada, e ilustram-se as tensões normais e de corte

transverso, para os casos 2 e 3. No caso 2, $c_{sup}=c_{inf}=10$ e no caso 3, $c_{sup}=c_{inf}=50$. Em ambos os casos, as relações de espessuras são as seguintes: $h_1/h=h_3/h=0.1$, $h_2/h=0.8$.

Tabela 1 - Deslocamento transversal, para diferentes casos e teorias

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
Srinivas	181.05	41.906	16.753	28.297	34.549
1ª ordem	186.3	42.97	17.09	28.93	35.42
2ª ordem	198.3	51.15	22.26	33.34	35.66
3ª ordem	186.9	41.46	14.31	26.38	31.06
Layerwise	185.4	42.81	17.10	28.59	35.24

	h_1/h	h_2/h	h_3/h	C 1	C 3
Caso 1	0.1	0.8	0.1	1	1
Caso 2	0.1	0.8	0.1	10	10
Caso 3	0.1	0.8	0.1	50	50
Caso 4	0.1	0.8	0.1	10	50
Caso 5	0.3	0.6	0.1	10	10

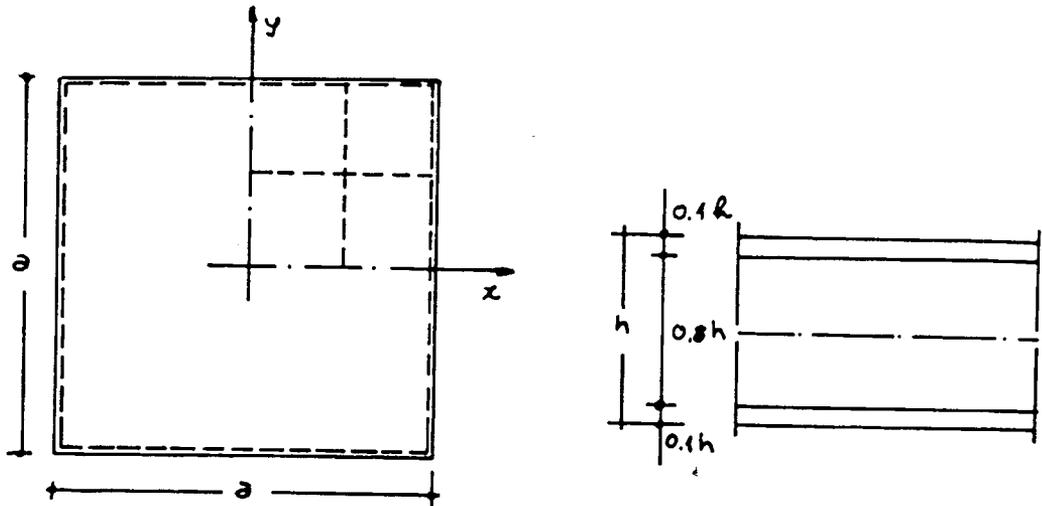


Figura 7.9 - Placa laminada sandwiche - características geométricas e malha

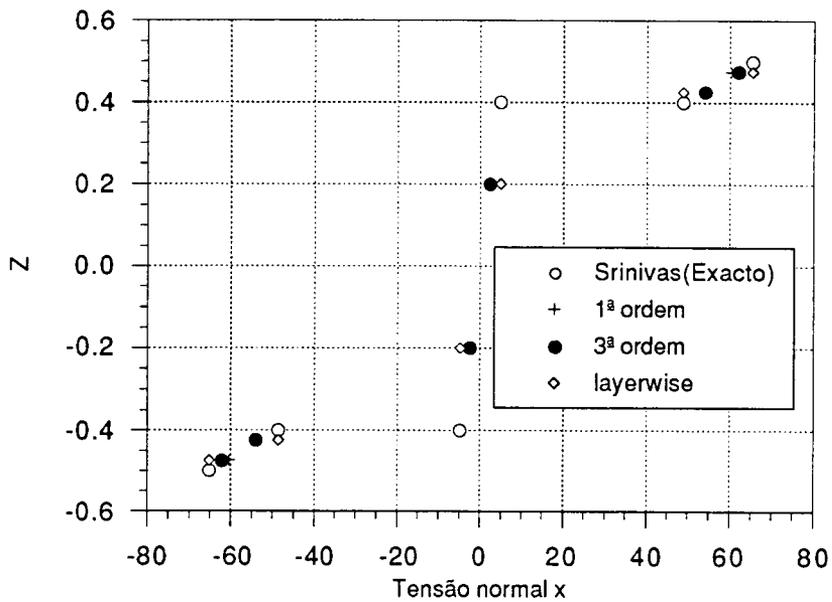


Figura 7.10 - Caso 2 - tensões normais x

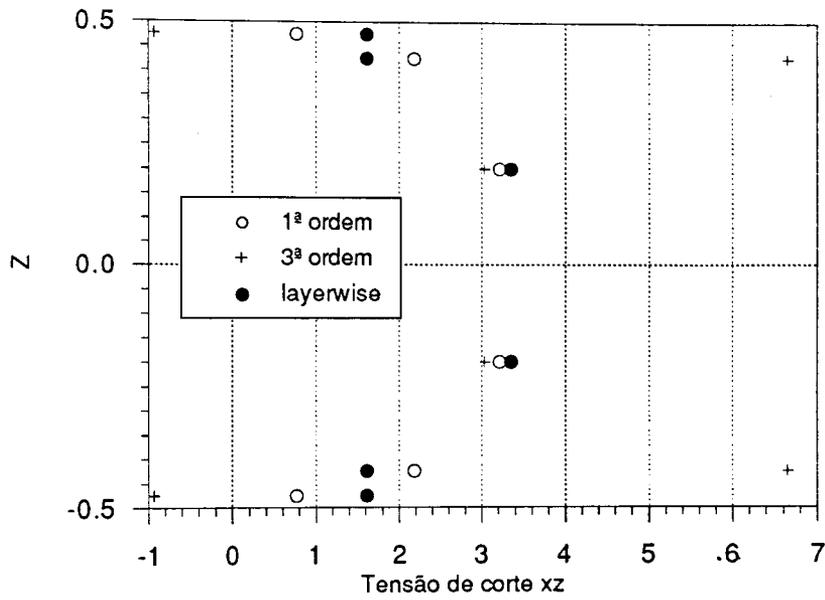


Figura 7.11 - Caso 2 - tensões de corte xz

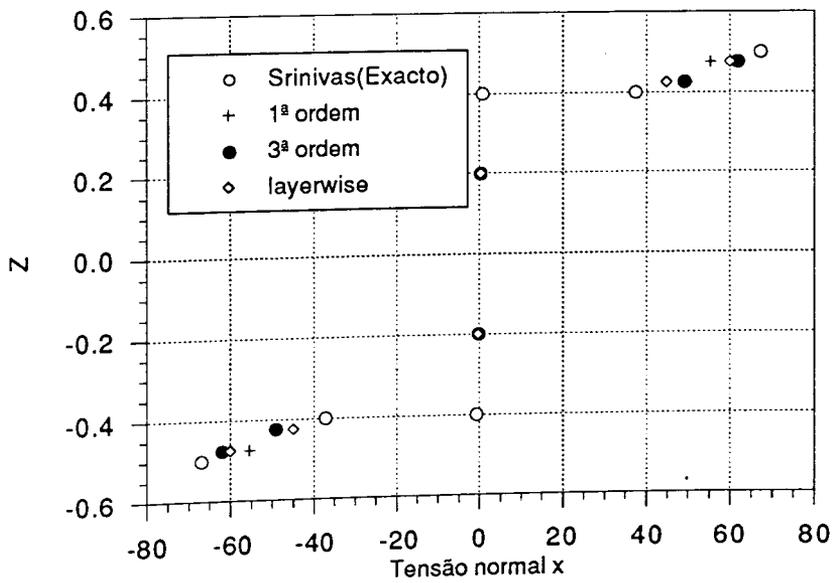


Figura 7.12 - Caso 3 - tensões normais x

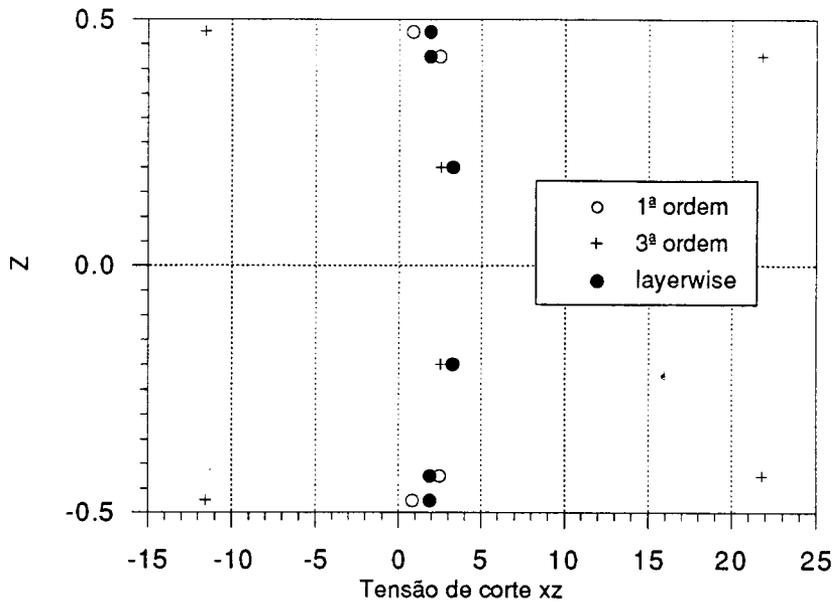


Figura 7.13 - Caso 3 - tensões de corte xz

7.6.2 - Viga sandwich

O problema em causa consiste numa viga com 2 e 3 camadas sujeita a um carregamento transversal sinusoidal como descrito por Pagano[16]. As tensões de corte transversal e axiais são comparadas com [16]. Um modelo esquemático é apresentado na figura 7.14. A estrutura é uma placa compósita composta de camadas ortotrópicas de igual espessura. Cada camada modela um compósito fibroso com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} E_1 &= 172.4 \text{ GPa} ; E_2 = 6.90 \text{ GPa} ; G_{12} = 3.45 \text{ GPa} \\ G_{23} &= 1.38 \text{ GPa} ; \nu_{12} = \nu_{23} = 0.25 \end{aligned} \quad (7.213)$$

Uma carga distribuída com uma evolução sinusoidal $p = p_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ é aplicada no topo da viga compósita.

São consideradas três viga neste exemplo. A primeira é uma viga unidireccional com as fibras orientadas segundo o eixo dos x. A segunda é uma viga com duas camadas orientadas paralelamente e ortogonalmente ao eixo dos x, nas camadas superior e inferior, respectivamente. Na terceira viga, que tem três camadas de igual espessura, as fibras nas

camadas externas são orientadas paralelamente ao eixo dos x, enquanto que as fibras na camada central são ortogonais ao eixo dos x.

A razão comprimento/espessura $S = \frac{L}{h}$ das vigas varia de 4 a 20. Utiliza-se uma malha de elementos finitos de casca Lagrangianos, para a modelação da viga. Na figura 7.15 a 7.16 são comparadas as tensões normais e de corte transversal para as três teorias de deformação.

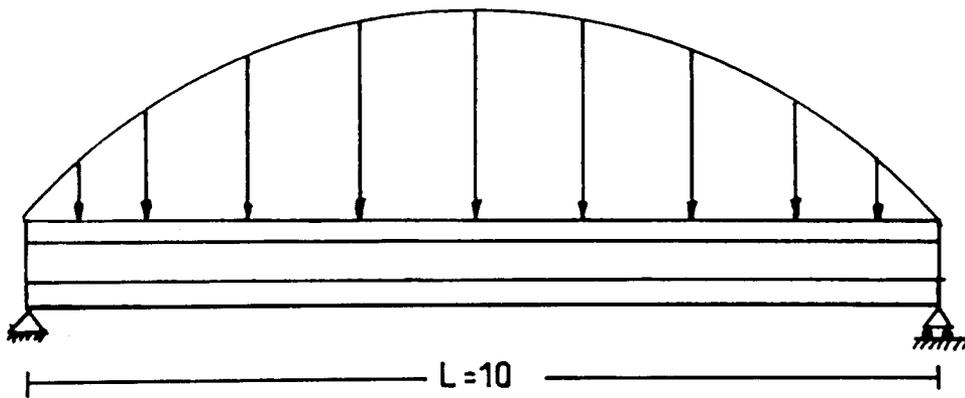


Figura 7.14 - Viga composta sujeita a carregamento distribuído sinusoidal

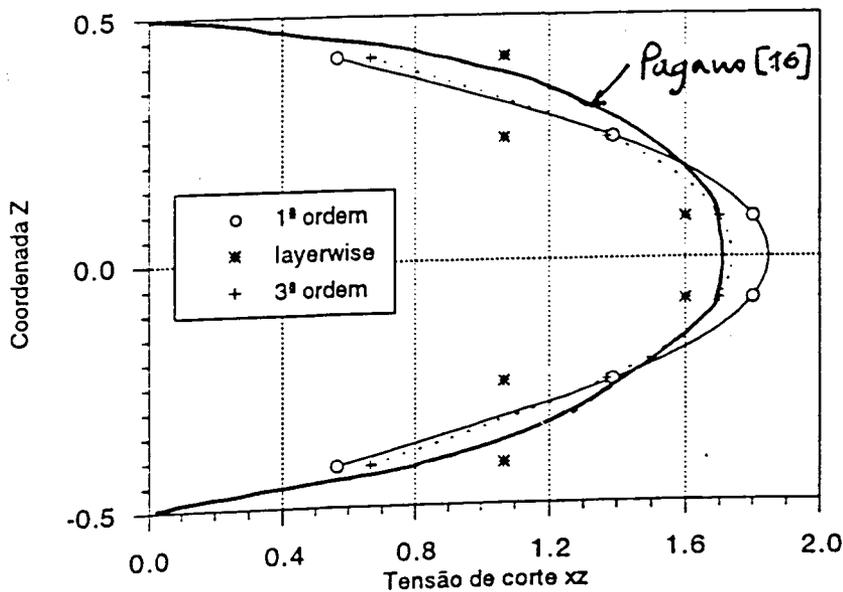


Figura 7.15 - Comparação das teorias para o caso 1, tensão de corte xz, razão $L/h=4$

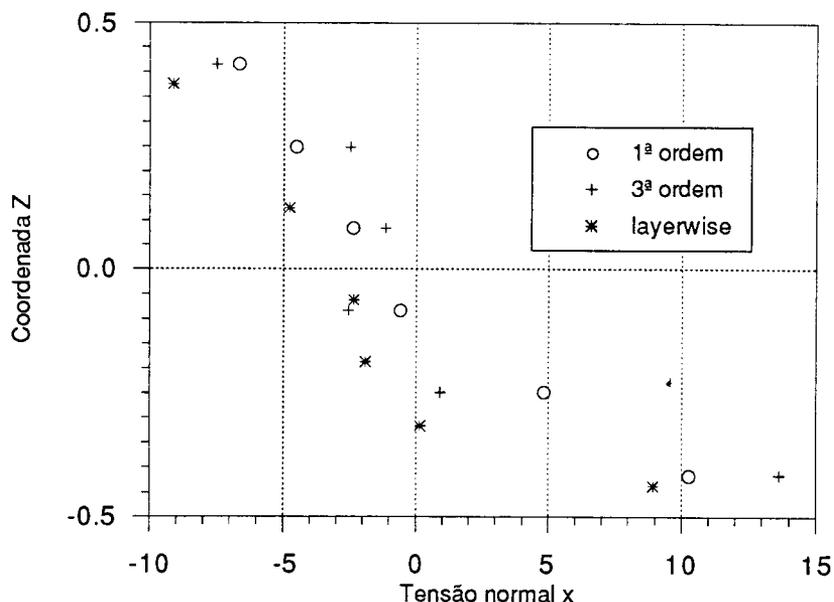


Figura 7.16 - Comparação das teorias para o caso 2, tensão normal x , razão $L/h=4$

7.7 - CONCLUSÕES

Neste capítulo foi apresentada a formulação para elementos de placa e viga, baseados em teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens e ainda na teoria layerwise. Estas formulações são exemplos mais simples das formulações de cascas apresentadas no capítulo 2. São, no entanto, úteis pela sua simplicidade e pela maior velocidade de cálculo, quando se analisam estruturas planas tipo placa ou viga.

Foram apresentadas quer as teorias, quer a sua implementação em elementos finitos.

Tal como nas cascas, verifica-se que a teoria de 3ª ordem apresenta dificuldades numéricas no tratamento de estruturas sandwich, particularmente naquelas com rácios de características elásticas elevados.

A formulação layerwise é a mais indicada para analisar placas e vigas laminadas sandwich. Esta formulação é naturalmente mais elaborada e tem a particularidade do número de graus de liberdade ser função do número de camadas. Assim, advoga-se que

seja utilizada apenas em estruturas sandwich com 3 camadas, o que é o caso mais representativo das estruturas sandwich.

REFERÊNCIAS

1. O.C. Zienkiewicz, R. Taylor, The Finite Element Method, 4th Edition, Mcgraw-Hill Book Company, 1994
2. C. Y. Chia, Nonlinear Analysis of plates, Mc Graw Hill Book Comp. Ltd, U.S.A., 1980
3. S.Tsai, Theory of Composites Design, Think Composites, 1992
4. A.J.M.Ferreira, Análise por elementos finitos de estruturas tipo casca em materiais compósitos, Tese de Mestrado, FEUP, 1990
5. G. Prathap, S. Viswanath, An optimally integrated four-node quadrilateral plate bending element, IJNME, Vol.19, 831-840, 1983
6. D.R.J.Owen, E.Hinton, Finite Elements In Plasticity: Theory And Practice, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980
7. E.Hinton, D.R.J.Owen, Finite element software for plates and shells, Pineridge Press Ltd, U.K., 1984
8. A. Pica, R.Wood, E.Hinton, Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a Mindlin formulation, Comp. Struct., Vol.11, 203-215, 1980
9. Y.C. Fung, Foundations Of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1965
10. E. Onate, Una Formulacion Incremental Para Problemas De No Linearidad Geometrica Por El Metodo De Los Elementos Finitos, Tese De Catedrático, U.P.C., Espanha, 1986
11. H.H.A. Rahman, Computational Methods For The Nonlinear Analysis Of Reinforced Concrete Flexural Slab Systems, Ph.D. Thesis, C/Ph/66/82, Univ. Of Wales, Swansea, U.K., 1982
12. E. Hinton, D.R.J.Owen, Introduction to finite element computations, Academic Press, U.K., 1977

13. J. A. Figueiras, Ultimate load analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete plates and shells, Ph. D. Thesis, c/ph/72/83, University College of Swansea, 1983.

14. J.A.T.Barbosa, Análise Não Linear Por Elementos Finitos De Placas E Cascas Reforçadas, Aplicação A Laminados Anisotrópicos, Tese De Doutorado, FEUP, 1992

15. S. Srinivas, A refined analysis of composite laminates, J. of Sound and Vibration, vol.30, pag.495-507,1973

16. N.J.Pagano, Exact solution for composite laminates in cylindrical bending, J.Comp.Mater., Vol.3, 398-411, 1969

CAPÍTULO 8

ANÁLISE DO INÍCIO E PROGRESSÃO DA ROTURA EM ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS

8.1 - INTRODUÇÃO

8.2 - CRITÉRIOS DE ROTURA

8.2.1 - Critérios de rotura isotrópicos

8.2.2 - Critérios de rotura anisotrópicos

8.3 - DEGRADAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS

8.3.1 - Exemplo numérico de degradação das características elásticas

8.4 - MODELO CONSTITUTIVO BI-FÁSICO FIBRA-RESINA

8.4.1 - Introdução

8.4.2 - Modelo material à compressão para as resinas termoendurecíveis

8.4.2.1 - A condição de cedência

8.4.2.2 - A regra de fluxo

8.4.2.3 - A regra de endurecimento

8.4.2.4 - A condição de esmagamento

8.4.2.5 - Comportamento à compressão de resina com fendas

8.4.3 - Comportamento à tracção da resina

8.4.4 - Modelo de fractura distribuido

8.4.5 - Módulo de corte da resina fracturada

8.4.6 - Modelo para matrizes termoplásticas

8.4.7 - Modelo material para as fibras

8.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

8.5.1 - Viga em flexão-matrizes termoendurecíveis

8.5.2 - Placa simplesmente apoiada sob carga uniforme-matrizes termoendurecíveis

8.5.3 - Placa simplesmente apoiada-matrizes termoplásticas

8.6 - CONCLUSÕES

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 8

ANÁLISE DO INÍCIO E PROGRESSÃO DA ROTURA EM ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS

8.1 - INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos são cada vez mais utilizados em aplicações estruturais, em que a segurança nos laminados é fundamental. É necessário, em termos de projecto, prever o comportamento em resistência dos compósitos. A maior parte da informação baseia-se em testes uniaxiais, embora na maioria dos casos as solicitações são pelo menos biaxiais. Os laminados compósitos estruturais podem ser considerados como um conjunto de camadas anisotrópicas coladas em orientações diferentes. Ao contrário dos materiais isotrópicos, a resistência dos materiais compósitos é dependente da direcção de solicitação e do seu empilhamento. A rotura de algumas camadas pode não representar a rotura do laminado, dado que as camadas remanescentes podem redistribuir as tensões.

A previsão da rotura através de um dado ou conjunto de critérios pode ser considerado económico, tendo em vista o esforço que representa um projecto experimental de ensaios de materiais.

Neste capítulo faz-se uma revisão das teorias de resistência mais conhecidas e implementam-se estes critérios nos elementos finitos de casca apresentados no capítulo 2. Considera-se, dado o potencial número de camadas, as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens.

Os critérios de rotura apresentados têm a limitação de considerarem o material compósito como um material homogéneo ortotrópico. Quando se verifica a rotura do material, não é possível, através destes modelos, prever qual das fases materiais é atingida e como é que a rotura evolui nessa fase material.

Propõe-se, também, neste capítulo um modelo bi-fásico onde as duas fases materiais são consideradas e onde se investiga a rotura de cada fase material em separado.

8.2 - CRITÉRIOS DE ROTURA

A previsão da rotura é importante no projecto de estruturas sujeito a uma combinação de carregamentos normais e de corte.

Muitos dos critérios de resistência anisotrópicos são extensões dos critérios de cedência isotrópicos. Grande parte do trabalho inicial (antes de 1950) foi realizado em madeira e metais [1]. A investigação nos metais foi aparentemente realizada em paralelo à madeira, embora de forma independente. A teoria de energia de distorção de Von Mises [2] influenciou significativamente a base de muitos critérios de resistência em compósitos. Em 1950, Hill [3] generalizou a formulação de Von Mises, incluindo a anisotropia. A teoria de Hill foi adoptada por Azzi e Tsai [4] como um critério de resistência para compósitos. Hoffman [5] alterou o critério de Hill para ter em conta a diferença de resistência à tracção e compressão. Foi proposta por Stowell e Liu [6] uma variação do critério de tensão máxima, em que a tensão limite das fibras seria a tensão limite da camada na direcção das fibras, enquanto que a tensão transversal e a tensão de corte últimas seriam as da matriz. Este critério ignora qualquer interacção fibra-matriz.

A teoria da máxima deformação de St. Venant foi ampliada para incluir anisotropia por Petit [7], Reed [8], e Petit e Waddoups [9].

Tsai e Wu [10] e Tennyson et al [11] desenvolveram teorias que são invariantes relativamente ao sistema coordenado.

Não existe aparentemente nenhuma teoria que se adeque perfeitamente aos resultados experimentais [1]. As teorias de Tsai-Hill e Hoffman são relativamente fáceis de usar, mas são válidas apenas em casos especiais de ortotropia. Os critérios de Tsai-Wu e Tennyson são mais abrangentes, dada a sua invariância, mas estão limitados pelos coeficientes de interacção em estados biaxiais de tensão.

8.2.1 - Critérios de rotura isotrópicos

Tendo em conta que muitos critérios anisotrópicos se baseiam em critérios isotrópicos, apresenta-se um resumo das principais teorias. Muitas das teorias apresentadas são referidas em revisões bibliográficas [1] e livros básicos [12].

Os critérios isotrópicos são mais simples que os correspondentes anisotrópicos, dada a independência dos primeiros relativamente à direcção. É ainda possível exprimir o critério em termos das tensões ou deformações principais.

Teoria de Galileo, 1638

A realizar experiências em rochas à tracção, Galileo observou que a resistência dependia da área da secção transversal, mas era independente do comprimento. Concluiu então que a rotura acontecia quando uma tensão crítica ("resistência absoluta à fractura") era atingida. Aparentemente esta foi a primeira sugestão da teoria da tensão normal máxima para materiais frágeis.

Teoria de Coulomb, 1773

Trabalhando também em rochas, mas à compressão, Coulomb verificou que se desenvolviam fendas inclinadas relativamente ao eixo de carregamento. Sugeriu então que a rotura acontecia quando a tensão de corte τ num dado plano se tornava igual à soma da resistência coesiva do material c , e à força de fricção, em que μ é o coeficiente de atrito e σ a tensão normal no plano,

$$|\tau| = c - \mu\sigma \quad (8.1)$$

Teoria da tensão normal máxima- Rankine, Lamé, Clayperon, 1858

Esta teoria postula que a rotura sucede quando as tensões principais $\sigma_p, \sigma_q, \sigma_r$ satisfazem

$$(\sigma_p^2 - \sigma_o^2)(\sigma_q^2 - \sigma_o^2)(\sigma_r^2 - \sigma_o^2) \geq 0 \quad (8.2)$$

onde σ_o é uma característica do material, obtida por um ensaio de tracção uniaxial. A rotura é prevista para $\sigma_p = \sigma_o$, $\sigma_q = \sigma_o$ ou $\sigma_r = \sigma_o$, separadamente.

Teoria da deformação principal máxima -Saint Venant, 1837

Esta teoria prevê que a rotura (cedência ou fractura) ocorra sob qualquer estado de tensão, quando a máxima deformação atinge um valor crítico.

Teoria da máxima tensão de corte - Tresca, 1870

Nesta teoria, prevê-se que a cedência se inicia quando

$$\left[(\sigma_p - \sigma_r)^2 - \sigma_y^2 \right] \left[(\sigma_q - \sigma_p)^2 - \sigma_y^2 \right] \left[(\sigma_r - \sigma_q)^2 - \sigma_y^2 \right] = 0 \quad (8.3)$$

em que σ_y é a tensão de cedência obtida em carregamento uniaxial. Este critério representa três conjuntos de planos paralelos, em que cada conjunto é normal a um

plano coordenado. Estes 6 planos definem um prisma hexagonal no espaço $\sigma_p, \sigma_q, \sigma_r$. Este critério é bem aceite para aços macios.

Teoria de Mohr, 1900

Mohr avançou a hipótese de que de todos os planos com a mesma tensão normal, a rotura deve acontecer naqueles com maior tensão de corte. Esta teoria é menos usada que a de Tresca para metais, mas parece ser bem aceite em mecânica de solos.

Teoria de energia de distorção - Huber, Von Mises, Hencky, Nadai, 1920

Neste critério postulou-se que a cedência ocorre devido à energia de distorção. Não considerando a contribuição hidrostática, o critério pode ser escrito como

$$(\sigma_p - \sigma_q)^2 + (\sigma_q - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_p)^2 = 2\sigma_y^2 \quad (8.4)$$

em que, novamente, σ_y é a tensão de cedência sob tracção uniaxial. Em estado plano de tensão, $\sigma_r = 0$ e

$$\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_y}\right)^2 - \frac{\sigma_p\sigma_q}{\sigma_y^2} + \left(\frac{\sigma_q}{\sigma_y}\right)^2 = 1 \quad (8.5)$$

Como se verá mais adiante, muitos dos critérios anisotrópicos de rotura são baseados em (8.4) e (8.5).

8.2.2 - Critérios de rotura anisotrópicos

Nos laminados compósitos ou sandwich, os critérios são aplicados camada a camada, ponto a ponto. A rotura de uma camada não representa, necessariamente, a rotura do laminado. Por outro lado, a rotura transversal ou por corte da camada não invalida a retenção de alguma resistência longitudinal. Embora os critérios sejam aplicados em metais, tendo em conta a cedência, nos materiais compósitos eles são normalmente aplicados tendo em vista a rotura. De seguida são apresentados alguns critérios frequentemente usados.

Teoria da máxima deformação

Este critério é a extensão do critério de St. Venant aos meios anisotrópicos. Numa camada ortotrópica, os componentes de deformação têm de estar referidos aos eixos principais materiais. Se numa camada, qualquer dos componentes de deformação atingir os valores limites especificados por ensaios uniaxiais, então essa camada é suposta ter rompido. A envolvente de rotura do laminado consistirá na sobreposição

dos diagramas de rotura de todas as camadas, todas referidas aos eixos principais materiais.

Teoria da máxima tensão

O critério da máxima tensão para materiais ortotrópicos foi utilizado por Jenkins [11] para a madeira. As tensões são referidas aos eixos principais materiais. Postulou-se que a rotura sucede quando qualquer das componentes de tensão atinge valores limites:

$$-X' \leq \sigma_1 \leq X ; -Y' \leq \sigma_2 \leq Y ; S \leq \tau_{12} \leq S \quad (8.6)$$

onde X, X', Y, Y' e S são, respectivamente, as resistências uniaxiais à tracção e compressão longitudinal e transversal e a resistência ao corte. Não existe qualquer interacção entre os modos de rotura.

Teoria de Hill

Hill [3] propôs um critério de cedência ortotrópico. Sob estado plano de tensão, esta teoria prevê o início da cedência quando se respeite a seguinte condição

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (8.7)$$

Hill assumiu que as resistências em tracção e compressão são iguais, ou seja, não considerou o efeito de Bauschinger. Este critério, incluindo as tensões de corte transversal, foi usado por Figueiras [13] e Owen e Figueiras [14] na análise de estruturas tipo casca laminada. Foi também usado no capítulo 4 desta tese, tendo em conta as teorias cinemáticas de 1ª e 3ª ordens e ainda a teoria layerwise.

Se se considerar a isotropia, então $X = Y = \sigma_y$ e a equação (7.7) reduz-se a

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_y^2}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (8.8)$$

que é igual à teoria de cedência da energia de distorção de Von Mises. Ao contrário das teorias de tensão e deformação máximas, esta abordagem contém termos de interacção entre tensões, envolvendo portanto modos combinados de rotura.

Teoria de Norris

Norris [15] apresentou um critério semelhante ao de Hill [3] para o estudo de madeira. Considera o seguinte sistema de condições

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\sigma_1}{X} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 - \left(\frac{1}{XY} \right) \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 \geq 1 \\ \left(\frac{\sigma_1}{X} \right)^2 \geq 1 \\ \left(\frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 \geq 1 \end{array} \right. \quad (8.9)$$

Teoria de Tsai-Hill

Tal como muitas outras teorias, a teoria de Tsai-Hill considera a camada como a unidade básica da tecnologia do laminado. Esta análise não é invariante com respeito a rotações de coordenadas. Tem algumas dificuldades na aplicação directa a laminados. A rotura de cada camada é então avaliada pela expressão

$$\left(\frac{\sigma_1}{X} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} \right) + \left(\frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 = 1 \quad (8.10)$$

Esta teoria é muito semelhante à de Norris.

Teoria de Tsai-Wu

Tsai e Wu [10] propuseram uma teoria que esperavam poder representar melhor os resultados experimentais. Assumiram uma superfície de rotura no espaço das tensões na forma

$$f(\sigma) = F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (8.11)$$

Sob condições de estado plano de tensão, este critério de rotura torna-se em

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \tau_{12} + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (8.12)$$

onde

$$F_1 = \frac{1}{X} - \frac{1}{X'} \quad F_2 = \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \quad F_{11} = \frac{1}{X'X} \quad (8.13)$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y'Y} \quad F_{66} = \frac{1}{S^2}$$

A dificuldade de aplicação deste critério reside na determinação de F_{12} , que deverá ser obtido em testes biaxiais. Wu [16] considera que F_{12} pode ser considerado nulo no intervalo $[-0.6E - 4, 0.6E - 4]$. A teoria de Tsai-Wu é mais abrangente que a de Tsai-Hill, dado que inclui a invariância relativa aos sistemas de coordenadas [1].

Teoria de Tennyson

Tennyson et al [11] estenderam a análise de Tsai-Wu, e incluíram termos cúbicos

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\tau_{12} + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 3F_{112}\sigma_1^2\sigma_2 + 3F_{221}\sigma_2^2\sigma_1 + 3F_{116}\tau_{12}^2\sigma_1 + 3F_{266}\tau_{12}^2\sigma_2 = 1 \quad (8.14)$$

Os coeficientes F_1 , F_2 , F_{11} e F_{22} são obtidas por (7.13) e os restantes coeficientes por testes biaxiais.

Teoria de Hoffman

Hoffman [5] propôs uma teoria semelhante à de Tsai-Hill que prevê a rotura de materiais ortotrópicos frágeis e que tem em conta diferentes resistências de tracção e compressão:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{XX'} + F_{66}\tau_{12}^2 = 1 \quad (8.15)$$

8.3 - DEGRADAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS

É conhecido que num meio bifásico como os materiais compósitos de matriz polimérica (particularmente os de matriz termoendurecível) com diferentes resistências das fases materiais, a fase menos resistente (matriz) é a que terá maior probabilidade de rotura. Este facto é constatado por ensaios mecânicos, verificando-se que na maioria das direcções de solitação a matriz rompe em primeiro lugar e só mais tarde ocorre a rotura das fibras.

A avaliação dos modos de dano, tendo em conta a homogeneização realizada é complexa, dado que nesta abordagem não se faz a distinção das fases materiais. A camada de material compósito é assim composta dum único material com rigidez e resistência variáveis de acordo com a direcção de solitação. Neste trabalho supõe-se, dada a menor capacidade da matriz, que sempre que se verificar a condição do critério de rotura, ocorre rotura da matriz. Neste contexto, sabendo que as propriedades transversais de um compósito unidireccional são influenciadas sobretudo pela matriz, afectam-se as propriedades transversais (E_2 , G_{12} e ν_{12}) sempre que se verificar um determinado critério de rotura. Quando ocorrer rotura de fibras, afectam-se, para além destas propriedades, o módulo longitudinal E_1 . Esta afectação de características é realizada dum única vez em cada camada, em cada ponto de gauss. Supõe-se que a camada rompida perde todas as características de rigidez e resistência. Considerou-se, para efeitos de análise dos exemplos seguintes, o critério de Huber-Mises para materiais ortotrópicos.

8.3.1 - Exemplo numérico de degradação das características elásticas

Estuda-se o comportamento elasto-plástico de uma placa quadrada encastrada sob pressão uniforme, figura 8.1. Um quarto da placa é discretizado com 9 elementos Heterosis. O número de camadas é função do tipo de formulação usada. As seguintes características materiais foram usadas:

$$E_x = E_y = 30000, \nu = 0.3$$

$$G_{xz} = G_{yz} = G_{xy} = 11540$$

$$\bar{\sigma}_o = \sigma_{x_o} = \sigma_{y_o} = \sigma_{45_o} = 30$$

$$\tau_{x_o} = \tau_{y_o} = \tau_{45_o} = 17.32$$

$$E_p = 300, G_p = 100$$

com as outras características constantes. Características geométricas: espessura $h=0,20$; vão $a=6,0$, quantidades em MN e m. Supõe-se neste exemplo um comportamento elasto-frágil, com degradação das características elásticas nas direcções afectadas á matriz.

Na figura 8.2 é ilustrada a variação do deslocamento transversal do ponto central para diferentes níveis de carga para ambos os materiais, assumindo a linearidade geométrica, e o material indicado em (8.16).

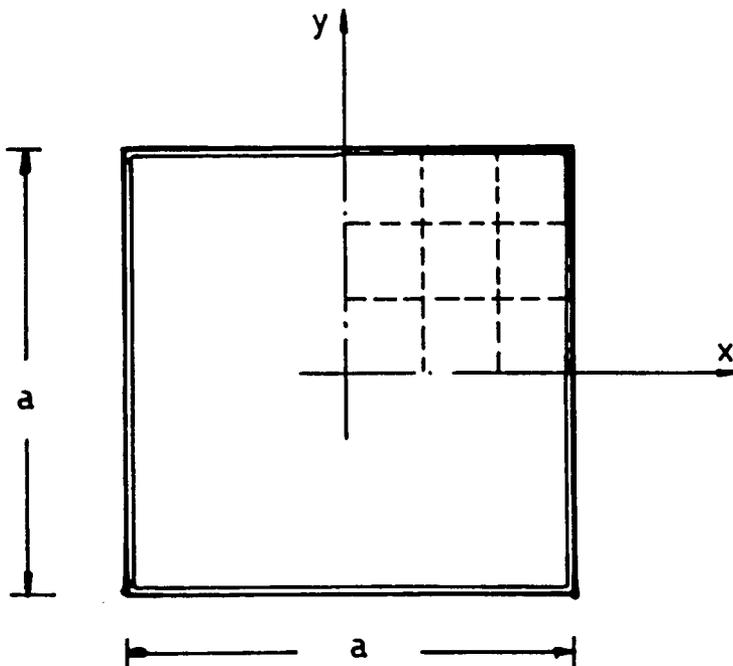


Figura 8.1 - Placa quadrada encastrada

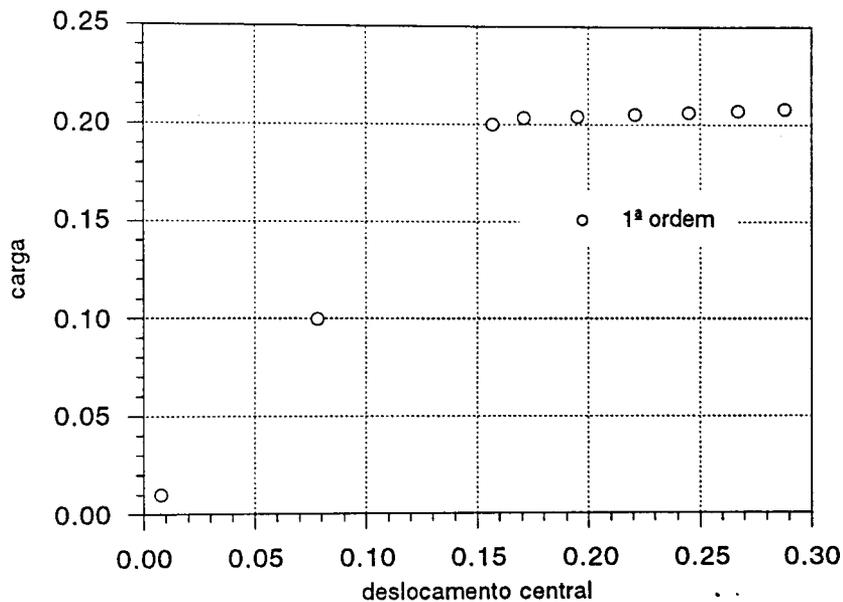


Figura 8.2 - Curva carga-deslocamento para uma placa encastrada sujeita a pressão uniforme.

Na figura 8.3 apresenta-se a curva carga deslocamento referente à placa da figura 8.1, mas com um laminado sandwich, cujo módulo é 1000 vezes inferior ao da pele e com tensão de rotura 10 vezes inferior à da pele.

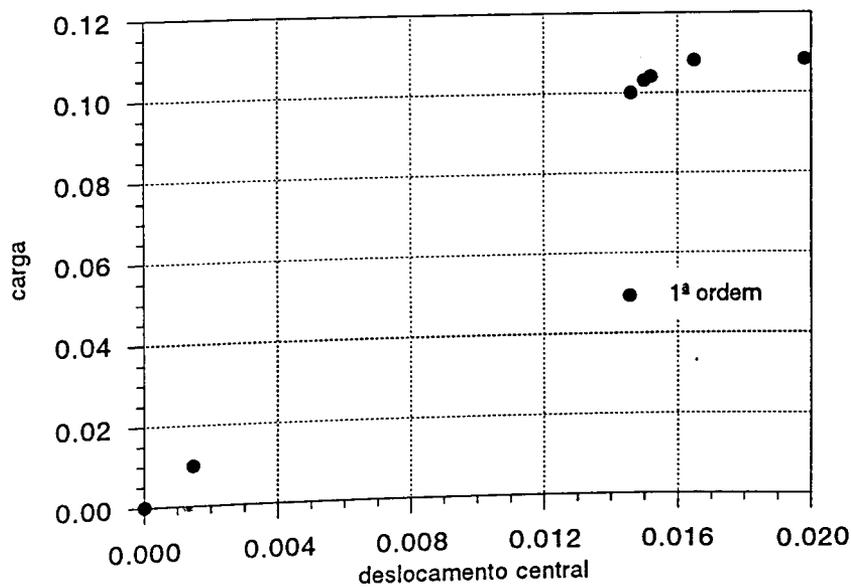


Figura 8.3 - Curva carga-deslocamento para a placa encastrada sandwich sujeita a pressão uniforme.

Verifica-se que o comportamento elástico se mantém até que se dá a rotura da primeira camada, o que inicia a não linearidade material ilustrada nas figuras 8.2 e 8.3.

8.4 - MODELO CONSTITUTIVO BI-FÁSICO FIBRA-RESINA

8.4.1 - Introdução

Os materiais compósitos de matriz polimérica subdividem-se em dois grandes grupos, no tocante ao tipo de matriz: os compósitos de matriz termoendurecível e os compósitos de matriz termoplástica. Embora os compósitos de matriz termoplástica sejam mais recentes e com ainda pequena expressão no mercado global, revelam-se de extraordinário interesse para a indústria de grande produtividade, como por exemplo o mercado automóvel. Acresce o facto desta matriz ser reciclável, o compósito ser estampável, e a matriz ser bem mais dúctil que as correspondentes termoendurecíveis. Os compósitos podem distinguir-se entre compósitos de elevado desempenho, com elevadas percentagens de fibras e os compósitos de grande difusão, com baixas percentagens de fibras, qualquer que seja a matriz. No segundo caso, em particular para percentagens da ordem dos 30-45 %, ocorre a existência duma elevada percentagem de resina, podendo considerar-se que existe uma interfase entre reforços, constituída exclusivamente por resina. Na figura 8.4 representa-se esquematicamente a disposição de fibras unidireccionais numa matriz polimérica. Verifica-se a existência de camadas constituídas por resina e fibras e camadas de resina apenas.

As resinas termoendurecíveis foram discutidas no capítulo 1. O seu comportamento mecânico à tracção e à compressão foi caracterizado por ensaios realizados por Brito [17], conforme ilustrado nas figuras 8.5 e 8.6. Em tracção as resinas têm um comportamento elasto-frágil, enquanto que em compressão, o seu comportamento pode ser considerado elasto-plástico. Este comportamento dual será tido em conta no modelo proposto.

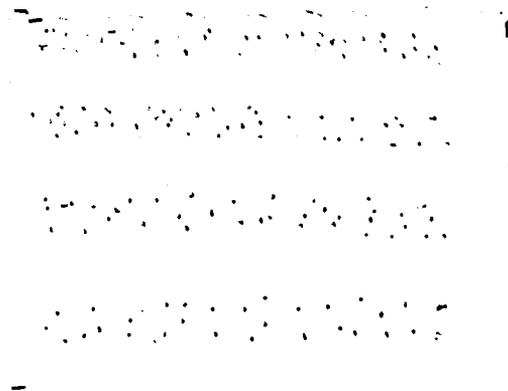


Figura 8.4 - Compósito resina-fibras unidireccionais; esquema de corte transversal duma secção típica

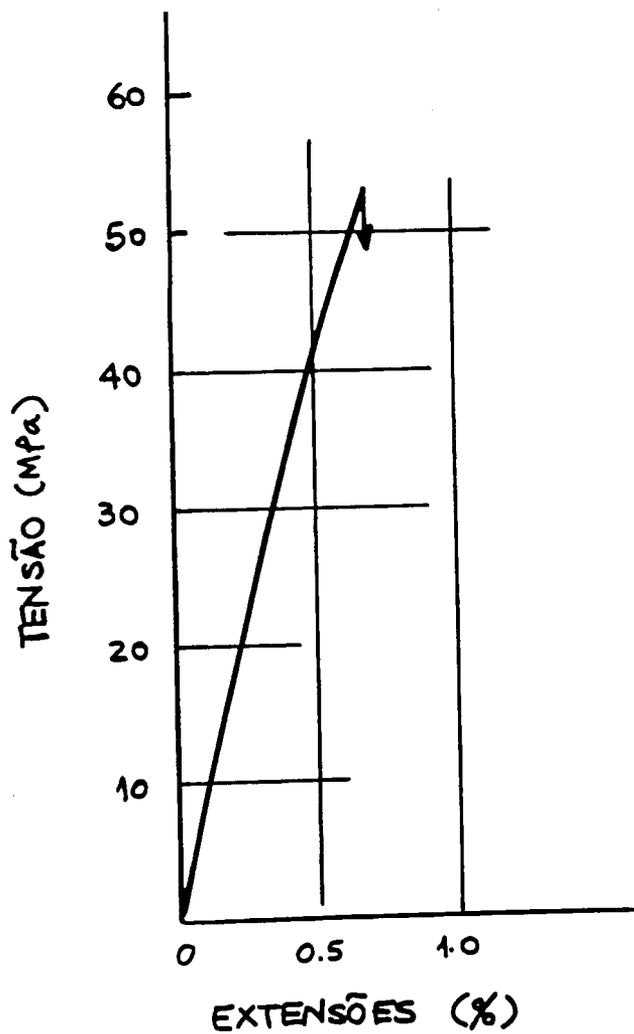


Figura 8.5 - Curva carga-deslocamento em tração de uma resina termoendurecível (poliester) [17]

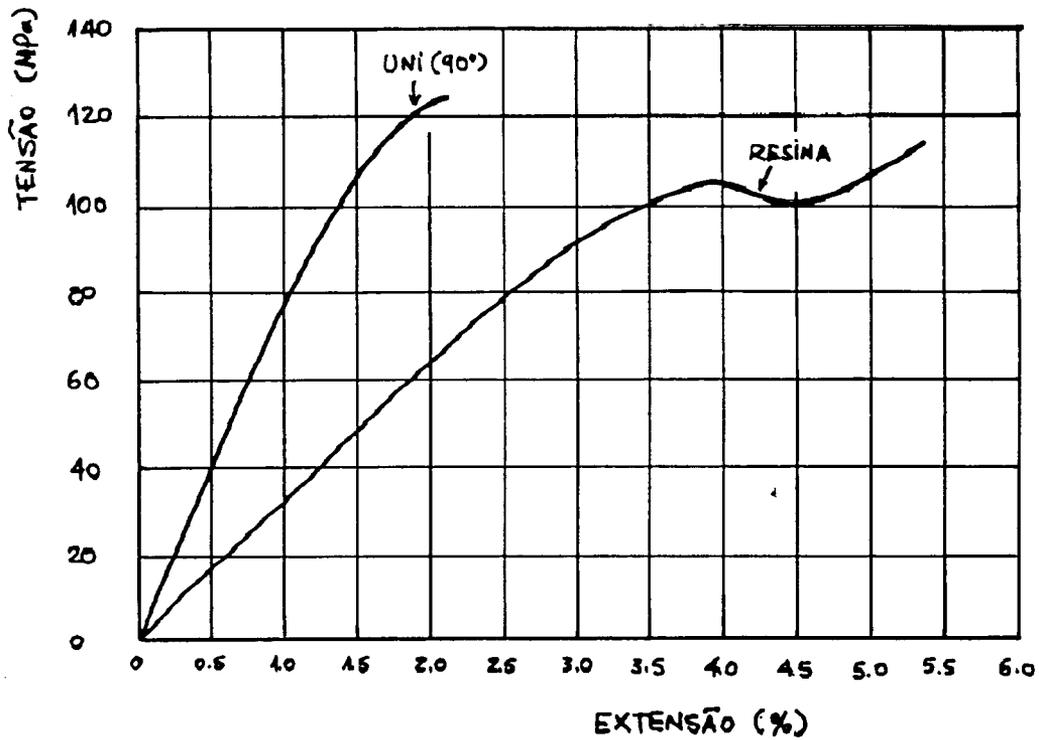


Figura 8.6 - Curva carga-deslocamento em compressão de resina termoendurecível (poliéster) [17]

As resinas termoplásticas têm um comportamento elasto-plástico, quer em tracção, quer em compressão. Considera-se que ambas as respostas são semelhantes. As fibras unidireccionais são consideradas como materiais elasto-frágeis com elevadas tensões de rotura e elevados módulos longitudinais, como indicado na tabela 8.1 [18].

Tabela 8.1 - Características das fibras de reforço

	Carbono alta resistência	Carb. alto módulo	Kevlar 29	Kevlar 49	Vidro E	Vidro S
Densidade	1.8	1.9	1.4	1.4	2.6	2.5
Módulo, GPa	230	370	83	124	72	87
Resistência, MPa	2480	1790	2270	2270	1720	2530
Elongação à tracção (%)	1.1	0.5	2.8	1.8	2.4	2.9

Na tabela 8.2 apresentam-se características típicas das resinas habitualmente presentes em materiais compósitos [18].

Tabela 8.2 - Propriedades típicas das resinas à temperatura ambiente (sem cargas)

Resina	Tipo	Densidade	Módulo à tracção, GPa	Resistência à tracção, MPa
Epóxida	Termoendurecível	1.1-1.4	2.1-5.5	40-85
Fenólica	Termoendurecível	1.2-1.4	2.7-4.1	35-60
Poliéster	Termoendurecível	1.1-1.4	1.3-4.1	40-85
Acetal	Termoplástico	1.4	3.5	70
Nilon	Termoplástico	1.1	1.3-3.5	55-90
Policarbonato	Termoplástico	1.2	2.1-3.5	55-70
Poliétileno	Termoplástico	0.9	0.7-1.4	20-35
Poliéster	Termoplástico	1.3	2.1-2.8	55-60

É prática habitual considerar a camada de compósito como um material homogéneo anisotrópico onde as características da camada são supostas serem o resultado da associação da fibra e da matriz. Os métodos micromecânicos [17-21] aproximam as características desse "material" a partir das características da resina e das fibras. A título de exemplo, o módulo de elasticidade longitudinal desse compósito pode ser calculado através da lei de misturas [17-21], como uma combinação do módulo das fibras, E_f , e da matriz, E_m , e das correspondentes fracções volúmicas.

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad (8.16)$$

onde f representa o índice das fibras e m o índice relativo à matriz.

Esta abordagem aproximada tem a vantagem de alguma simplicidade, é coerente em termos de rigidez, mas apresenta dificuldades de interpretação em termos de resistência (rotura). Torna-se difícil distinguir entre a rotura da matriz e a rotura das fibras. A importância das interfaces matriz-fibras é dificilmente tida em conta. Propõe-se neste capítulo um modelo bi-fásico em que se consideram as fases materiais distintas, se aplicam modelos materiais distintos e se avalia em separado a rotura de cada fase. Consideram-se, dado o número potencialmente elevado de camadas, apenas as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens. Utiliza-se o elemento de casca degenerado, apresentado no capítulo 2, nas versões Serendipita, Lagrangiano e Heterosis. É

considerado o efeito dos grandes deslocamentos, no contexto das suposições de Von Kármán e numa descrição de deformações Lagrangiana Total.

8.4.2 - Modelo material à compressão para as resinas termoendurecíveis

Verificou-se experimentalmente [17] que a deformação em compressão da resina é inelástica, podendo as relações tensão-deformação ser divididas em componentes recuperáveis e irre recuperáveis. Enquanto que as primeiras componentes podem ser tratadas através da teoria da elasticidade, as segundas podem ser consideradas pela teoria matemática clássica da plasticidade. Na análise de estruturas tipo casca de resina reforçada com fibras, considera-se para o comportamento em compressão da resina, quer uma abordagem perfeitamente plástica, quer uma abordagem com endurecimento. Considera-se, ainda, um critério dual para a cedência e para o esmagamento em termos de tensões e deformações, complementado por uma representação de anulamento de tensões.

Ao estabelecer um conjunto de relações lineares tensão-deformação, tendo em conta a teoria de fluxo da plasticidade, há que considerar a condição de cedência, as regras de fluxo e endurecimento e ainda a condição de esmagamento.

8.4.2.1 - A condição de cedência

Na presente análise de estruturas tipo casca considera-se o critério de Huber-Mises em que a superfície de cedência é expressa por

$$f(J_2) = (3J_2)^{1/2} = \sigma_0 \quad (8.17)$$

onde σ_0 é a tensão efectiva equivalente à tensão de compressão dum teste uniaxial.

No modelo perfeitamente plástico σ_0 é a tensão última à compressão f_c obtida por um teste de compressão uniaxial. Assume-se neste modelo uma resposta elástica até que a tensão efectiva atinja f_c , a partir do que se assume um comportamento perfeitamente plástico até que a superfície de esmagamento seja atingida. No modelo de encruamento, a superfície inicial de cedência é atingida quando a tensão efectiva atinge 30% da tensão última f_c . As superfícies de carregamento subsequentes $f(\sigma, \chi)$ são funções do parâmetro de encruamento χ definido pela regra de encruamento (ver capítulo 4). Quando a tensão efectiva, definida pela tensão de cedência, atinge a tensão última à compressão f_c , assume-se uma resposta perfeitamente plástica até que a superfície de esmagamento seja atingida. Na figura 8.7 ilustra-se a representação unidimensional dos modelos perfeitamente plástico e de encruamento. Representa-se também o modelo de tracção, a ser discutido mais adiante.

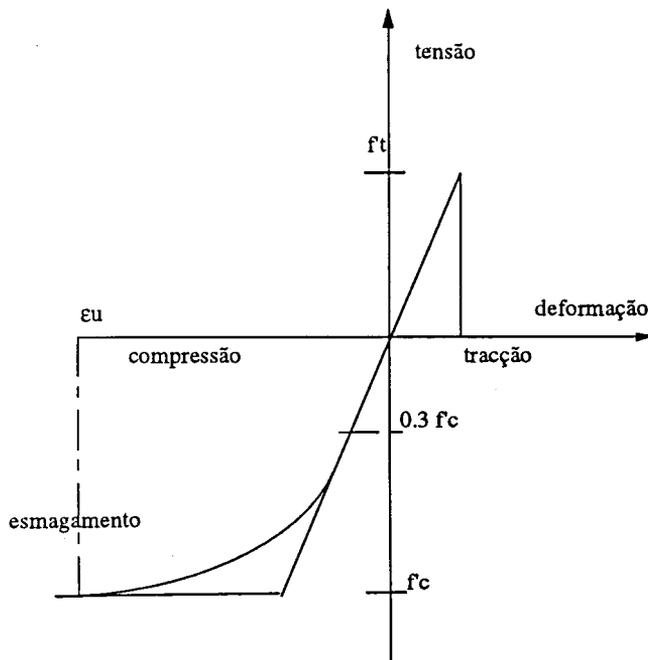


Figura 8.7 - Representação unidimensional do modelo constitutivo da resina termoendurecível

A representação bidimensional no espaço das tensões principais é ilustrado na figura 8.8. Para o modelo com encruamento, a partir do momento em que a superfície de cedência inicial seja atingida, carregamentos subsequentes produzirão deformações plásticas que caracterizam o correspondente nível de tensão efectiva. No descarregamento considera-se o módulo elástico e decorrem respostas elásticas para carregamentos subsequentes até que se atinga novamente a correspondente superfície de carregamento.

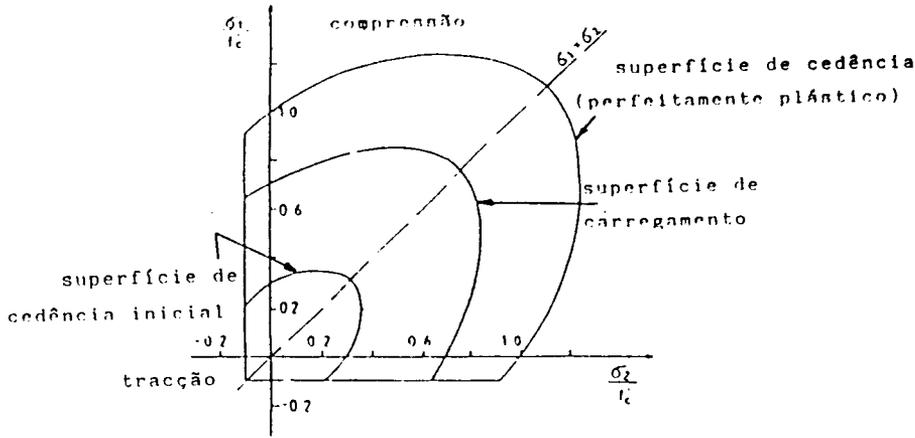


Figura 8.8 - Representação bidimensional no espaço das tensões do modelo constitutivo da resina termoendurecível

8.4.2.2 - A regra de fluxo

No estabelecimento das relações tensão-deformação, assume-se habitualmente a normalidade do vector de deformação plástica relativamente à superfície de cedência. Considera-se para o modelo de compressão da resina a regra de fluxo associativa, tendo em conta que não temos dados experimentais que permitam escolher doutro modo. O incremento de deformação plástica é definido como

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{df(\sigma)}{d\sigma_{ij}} \quad (8.18)$$

onde $d\lambda$ é uma constante de proporcionalidade que determina a intensidade do incremento de deformação plástica e $\frac{df(\sigma)}{d\sigma_{ij}}$ define a sua direcção perpendicular à superfície de cedência. A função de tensão corrente $f(\sigma)$ é a condição de cedência, ou as funções de carregamento subsequentes no modelo com encruamento.

As derivadas da função de cedência que definem o vector de fluxo \underline{a} têm as seguintes expressões relativamente à superfície de cedência (8.17) [13,14]

$$\underline{a}^T = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right] \quad (8.19)$$

onde

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{\text{const.}}$$

$$a_2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{\text{const.}}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = \frac{6\tau_{xy}}{\text{const.}} \\
 a_4 &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} = \frac{6\tau_{xz}}{\text{const.}} \\
 a_5 &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} = \frac{6\tau_{yz}}{\text{const.}}
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

$$\text{onde} \quad \text{const.} = 2 \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]^{1/2} \tag{8.21}$$

O factor $d\lambda$ pode ser obtido como [22]

$$d\lambda = \frac{\underline{a}^T \underline{D}}{(H + \underline{a}^T \underline{D} \underline{a})} d\underline{\varepsilon} \tag{8.22}$$

onde \underline{D} é a matriz de elasticidade para a resina elástica, $d\underline{\varepsilon}$ é o vector de incremento de deformação total, H é o módulo de encruamento, $H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}$. Os incrementos elasto-

plásticos das tensões totais podem ser calculadas, somando as componentes de deformação elástica e plástica,

$$d\underline{\varepsilon} = d\underline{\varepsilon}^e + d\underline{\varepsilon}^p = \underline{D}^{-1} d\underline{\sigma} + d\lambda - \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \underline{D}^{-1} d\underline{\sigma} + \frac{\underline{a} \underline{a}^T}{H + \underline{a}^T \underline{D} \underline{a}} \underline{D} d\underline{\varepsilon} \tag{8.23}$$

obtendo-se a relação elasto-plástica de tensão-deformação habitual

$$d\underline{\sigma} = \underline{D}_{ep} d\underline{\varepsilon} \tag{8.24}$$

onde a matriz elasto-plástica \underline{D}_{ep} é obtida por

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D} - \frac{\underline{D} \underline{a} \underline{a}^T \underline{D}}{H + \underline{a}^T \underline{D} \underline{a}} \tag{8.25}$$

8.4.2.3 - A regra de endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de cedência subsequentes durante a deformação plástica. Determina a relação entre as superfícies de carregamento $f(\sigma, \chi)$ (ou tensões efectivas) e a deformação plástica acumulada (ou deformação plástica efectiva). O conceito de tensão efectiva torna possível a consideração de situações multiaxiais. Neste trabalho a relação entre tensão efectiva e deformação efectiva é extrapolada a partir de relações tensão-deformação uniaxiais pela relação

$$\sigma = E_0 \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{E_0}{\varepsilon_0} \varepsilon^2 \quad (8.26)$$

onde E_0 é o módulo de elasticidade inicial, ε é a deformação corrente total, ε_0 é a deformação total para a tensão última, f'_c . Substituindo a componente de deformação elástica $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0}$ em (8.26) obtém-se

$$\sigma = -E_0 \varepsilon_p + (2E_0^2 \varepsilon_0 \varepsilon_p) ; \quad 0.3f'_c < \sigma < f'_c \quad (8.27)$$

onde ε_p é a componente de deformação plástica e ε_0 é tomado aproximadamente igual a $\frac{2f'_c}{E_0}$. Esta regra de endurecimento teve boa aplicação noutros materiais [13].

8.4.2.4 - A condição de esmagamento

Considera-se que o tipo de esmagamento da resina é um fenómeno controlado pela deformação. Devido à pouca informação existente sobre o assunto, decidiu-se converter directamente o critério de cedência de tensões para deformações. Assim, obtém-se

$$3J'_2 = \varepsilon_u^2 \quad (8.28)$$

onde J'_2 é um invariante de deformação e ε_u é a deformação total última. Esta condição pode ser expressa em termos das componentes de deformação total como

$$\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + 0.75(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) = \varepsilon_u^2 \quad (8.29)$$

Quando ε_u atinge o valor especificado como sendo a deformação última, o material é suposto perder todas as características de resistência e rigidez.

8.4.2.5 - Comportamento à compressão de resina com fendas

Assumem-se dois tipos de roturas para a resina termoendurecível: fendas e esmagamento.

O aparecimento de fendas está ligado à tracção e é suposto acontecer quando a máxima tensão principal atingir a tensão resistente especificada para a resina. Considera-se então um plano de fractura normal à direcção da tensão principal em questão e a resina perde a sua rigidez na direcção dessa tensão principal. A tensão normal ao plano de fractura e as tensões de corte nesse plano são reduzidas a zero ou a outro valor especificado.

O esmagamento é uma fractura associada à compressão e é suposta ocorrer quando a deformação total efectiva, dada pela expressão (8.14), atingir o valor limite da máxima

deformação de compressão. A partir do momento em que o esmagamento suceda, a resina perde todas as suas características de rigidez e resistência no ponto em questão. A correspondente matriz de elasticidade \underline{D} passa a ser uma matriz nula e o vector das tensões totais é reduzido a zero.

A fractura por tracção da resina é uma fractura parcial, dado que a rigidez e a resistência em direcções paralelas ao plano de fractura não são directamente afectadas. Nessas direcções pode formar-se um segundo plano de fractura, ou pode ocorrer cedência plástica se estiverem activos os efeitos de compressão, ou ainda neste caso, pode ocorrer uma fractura do tipo esmagamento. Tal como em pontos não fracturados, realiza-se uma análise elasto-plástica em pontos com roturas numa direcção. Em cada iteração do processo não linear, o nível de tensões é comparado com possíveis fracturas e em seguida o critério de cedência é verificado. Se ocorrer fractura, então as componentes de tensão total são modificadas, ou seja, o nível de tensão é reduzido para o domínio da condição de cedência. Os componentes de tensão modificados são então utilizados para calcular a tensão efectiva. São ainda reduzidos à superfície de cedência, caso ela tenha sido atingida. Na figura 8.9 ilustra-se o comportamento descrito no espaço das tensões principais biaxiais.

Note-se que a descontinuidade da condição de cedência, devido às intercepções dos planos de anulamento das tensões, não causa dificuldades na definição dum caminho único de transferência de tensões, dado que a fractura é verificada em primeiro lugar. Por outro lado, a descrição de rotura descontínua fornece informação adicional no tipo de rotura (fractura em tracção, cedência ou esmagamento) e a direcção da fractura. Quando se aplica a condição de esmagamento (8.29) em conjunto com um plano fracturado devem tomar-se alguns cuidados. As componentes de deformação fictícias directamente afectadas pela fractura à tracção não devem entrar na equação (8.29), ou seja, os componentes de deformação normal ao plano fracturado e os componentes de deformação de corte nesse plano, que são deformações fictícias usadas no modelo de fractura distribuída, devem ser anuladas quando se usa a condição de esmagamento. Quando a resina está fracturada em duas direcções diferentes, a cedência e o esmagamento são supostos não sucederem.

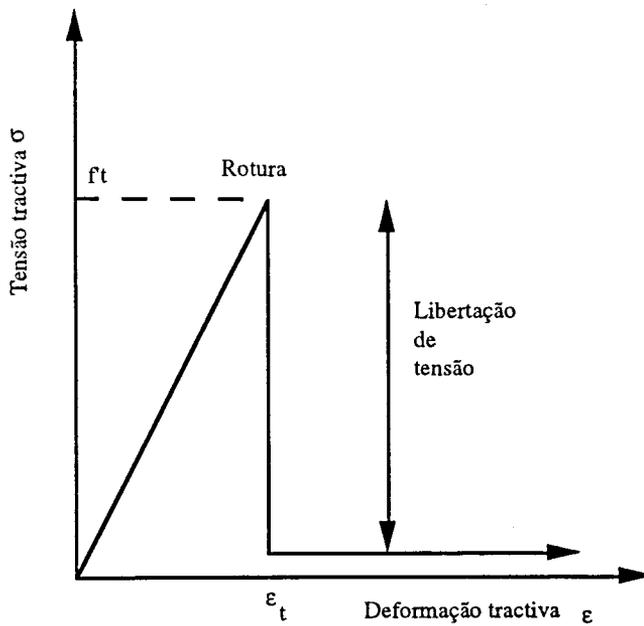


Figura 8.10 - Comportamento linear elástico-frágil da resina em tracção

A rotura por tracção ocorre quando a máxima tensão tractiva atinge o valor especificado como a tensão de tracção última f_t .

8.4.4 - Modelo de fractura distribuido

Considera-se um modelo de rotura em que se assume que a resina mantém a sua continuidade material. Não são tidas em conta quaisquer discontinuidades materiais, como por exemplo, em modelos de mecânica da fractura. À medida que o dano produzido no material vai evoluindo, as propriedades da resina vão sendo modificadas. A partir da primeira rotura, a resina torna-se ortotrópica com os eixos materiais alinhados com as direcções de fractura, conforme ilustrado na figura 8.11.

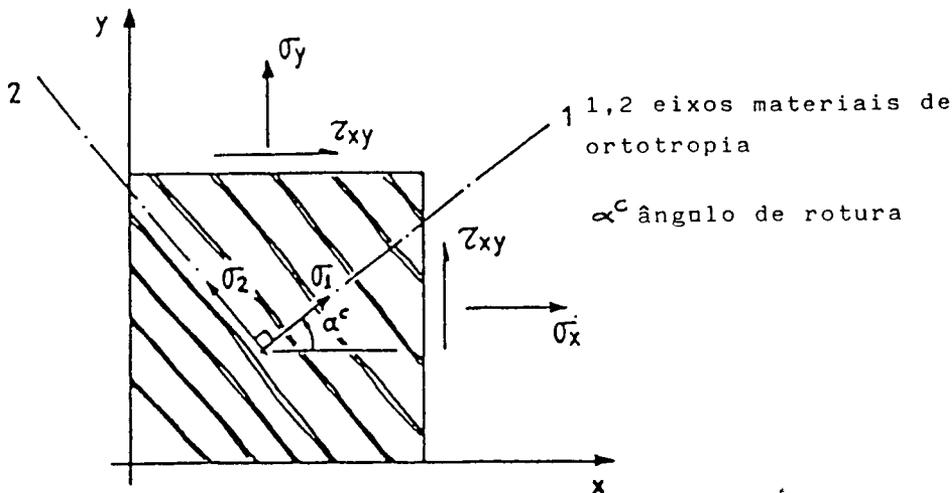


Figura 8.11 - Modelo de fractura distribuído e correspondente eixos materiais para a resina fracturada numa direcção

Na direcção perpendicular ao plano de fractura anula-se o módulo de elasticidade e despreza-se o efeito de Poisson correspondente. O módulo de corte paralelo ao plano da fenda G , é reduzido a um valor βG , em que o factor β varia entre zero e um. Este modelo tem vantagens computacionais sobre os modelos discretos, dado que a topologia da estrutura idealizada permanece intacta. Antes da rotura, a resina é suposta isotrópica com uma relação tensão-deformação expressa por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (8.30)$$

em que x e y são os eixos estruturais e E é o módulo de elasticidade da resina, ν o coeficiente de Poisson, G o módulo de corte, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, e α o factor de correcção ao corte transversal. Na teoria de deformação de corte de 1ª ordem utilizada, $\alpha=5.0/6.0$, enquanto que na teoria de deformação de corte de 3ª ordem $\alpha=1.0$.

Tomando 1 e 2 como as duas direcções principais de tensão, no plano da estrutura, a relação tensão-deformação para a resina fracturada na direcção 1 (plano de fractura normal à direcção 1) é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (8.31)$$

onde G^c é o módulo de corte reduzido da resina fracturada, a ser discutido adiante. Quando a tensão tractiva na direcção 2 atinge o valor f'_t , assume-se que se forma um segundo plano perpendicular ao primeiro, passando a relação tensão-deformação a tomar a forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{12}^c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (8.32)$$

A resina reforçada torna-se então anisotrópica e estas relações devem ser transformadas para os eixos de referência (ver capítulo 4). Assume-se que os módulos de corte da resina fracturada são funções da tensão normal ao plano de rotura.

8.4.5 - Módulo de corte da resina fracturada

Considera-se que alguma força de corte pode ser transmitida através da resina fracturada, particularmente porque quando a resina fractura danifica as interfaces fibra-matriz e essas fibras soltas induzem alguma resistência.

Como não temos resultados experimentais que permitam caracterizar o modelo de redução dos módulos de corte, decidiu-se adoptar o modelo de Figueiras na análise de betão [13] em que se supõe que a redução de módulos de corte é função da deformação normal ao plano de fractura (figura 8.12).

Para a resina fracturada na direcção 1, os módulos de corte são reduzidos segundo as expressões

$$G_{12} = 0.25G \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{0.004} \right); \quad G_{12} = 0 \quad \text{se } \varepsilon_1 \geq 0.004$$

$$G_{13} = G_{12}; \quad G_{23} = \frac{5}{6}G \quad (8.33)$$

em que G é o módulo de corte da resina intacta e ε_1 a deformação de tracção na direcção 1. Se houver rotura em duas direcções, então os módulos de corte são reduzidos de acordo com

$$\begin{aligned}
 G_{13} &= 0.125G \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{0.004} \right); \quad G_{13} = 0 \text{ se } \varepsilon_1 \geq 0.004 \\
 G_{23} &= 0.125G \left(\frac{1 - \varepsilon_2}{0.004} \right); \quad G_{23} = 0 \text{ se } \varepsilon_2 \geq 0.004 \\
 G_{12} &= 0.5G_{13} \text{ ou } G_{12} = 0.5G_{13} \text{ se } G_{13} = G_{23}
 \end{aligned}
 \tag{8.34}$$

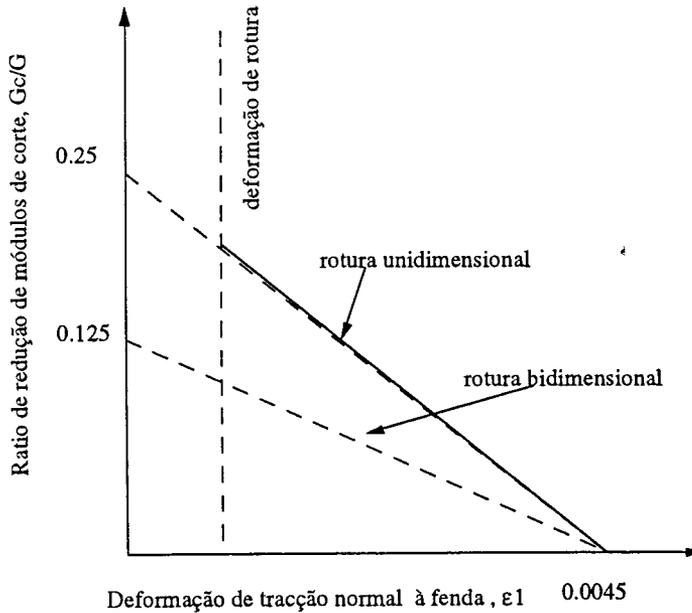


Figura 8.12 - Módulo de corte reduzido para a resina fracturada

8.4.6 - Modelo para matrizes termoplásticas

Como já foi referido os compósitos de matriz termoplástica são actualmente usados em inúmeras aplicações industriais, particularmente na indústria aeronáutica. São aqui consideradas as matrizes termoplásticas como materiais isotrópicos, com comportamento elasto-perfeitamente-plástico. De facto, a grande maioria dos termoplásticos usados como matrizes de compósitos (polietileno, polipropileno, polieterimida), têm um comportamento tipicamente desse tipo, quer em tracção, quer em compressão (figura 8.13)[23].

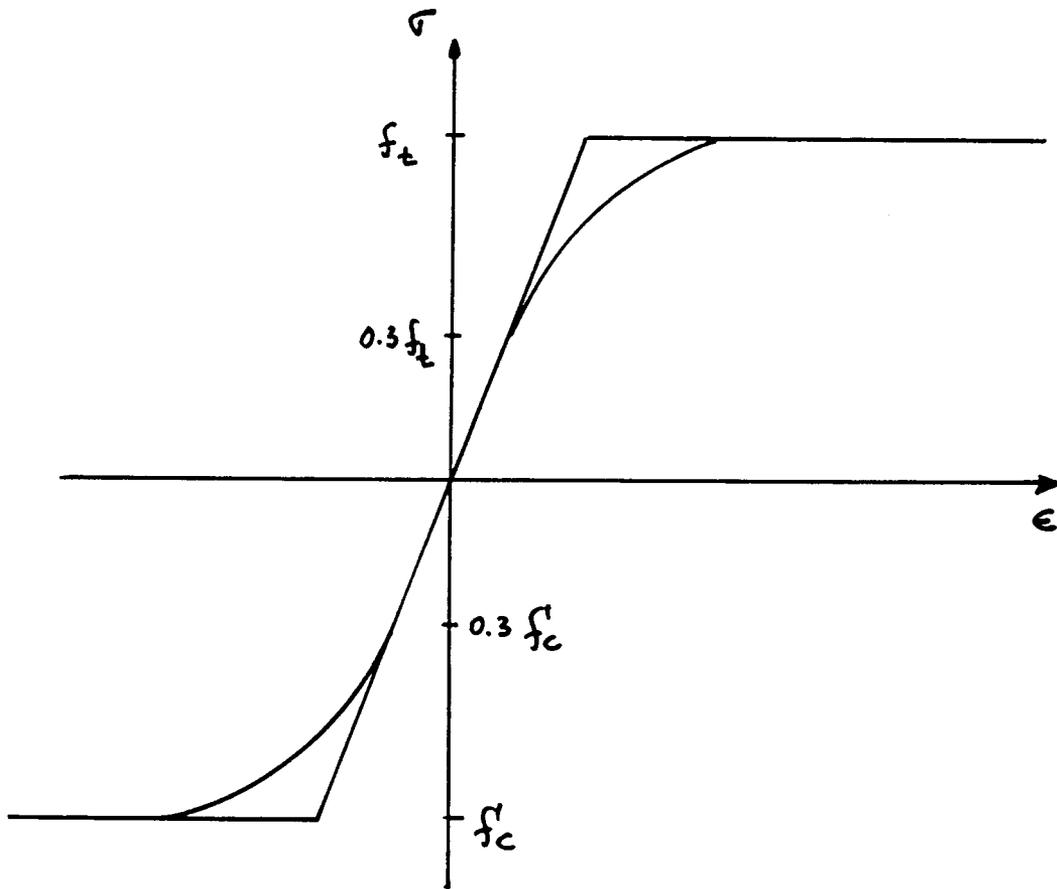


Figura 8.13 - Comportamento típico das matrizes termoplásticas

Verifica-se através da figura 8.13 que estes materiais apresentam elevada ductilidade, não apresentam esmagamento, ao contrário do que pode suceder com matrizes termoendurecíveis frágeis, e podem ser modeladas através de modelos elasto-plásticos tradicionais, como já acontecia com os materiais metálicos. São consideradas neste modelo, de forma semelhante ao que sucedeu nas matrizes termoendurecíveis, as matrizes termoplásticas, com as seguintes diferenças:

- não se considera o esmagamento em compressão;
- não se considera a fractura frágil em tracção;
- supõe-se igual comportamento em tracção e compressão;
- não são supostas fracturas, daí não haver lugar a redução dos módulos de corte.

Este modelo é, então, mais simples do que o correspondente modelo de matriz termoendurecível.

8.4.7 - Modelo material para as fibras em tracção e compressão

A enorme maioria das fibras de reforço para compósitos existente no mercado tem um comportamento elasto-frágil. Começam a surgir, no entanto, algumas fibras termoplásticas, cujo comportamento à tracção é elasto-plástico. Nesta formulação considera-se a elasto-plasticidade das fibras, dado que representa uma maior generalidade. As relações básicas para o comportamento elasto-plástico uniaxial e a correspondente formulação numérica podem ser consultadas em [22].

8.5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Consideram-se alguns exemplos numéricos de ilustração do modelo de elementos finitos. Importa reconhecer a necessidade futura de validar estes resultados com valores experimentais.

8.5.1 - Viga em flexão-matrizes termoendurecíveis

Considera-se na figura 8.14 uma viga em flexão de três pontos, constituída por resina de epóxido reforçada com fibras de carbono unidireccionais de alta resistência. Nas figuras 8.15 a 8.17 apresenta-se a curva carga-deslocamento central da viga, onde se pode verificar a não linearidade provocada pela degradação da matriz.

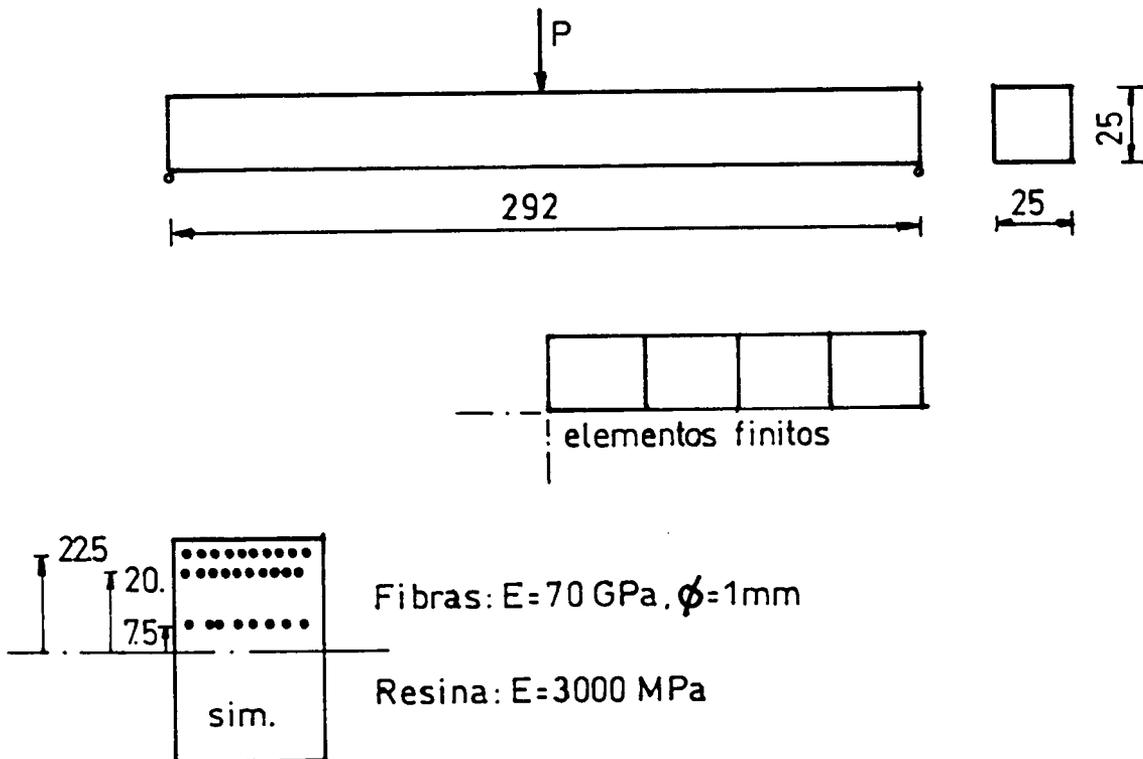


Figura 8.14 - Viga em flexão de três pontos

Na figura 8.15 apresenta-se o comportamento não linear da viga da figura 8.14, tendo em conta as teorias de 1ª e 3ª ordens com as fibras dispostas longitudinalmente [0°]. As teorias apresentam uma resposta muito semelhante.

Na figura 8.16, e considerando a teoria de 1ª ordem, regista-se a influência da orientação das fibras na resposta estrutural.

Na figura 8.17 ilustra-se o comportamento dum compósito de matriz termoplástica. A não linearidade é muito esbatida, dado que as fibras estão dispostas unidireccionalmente.

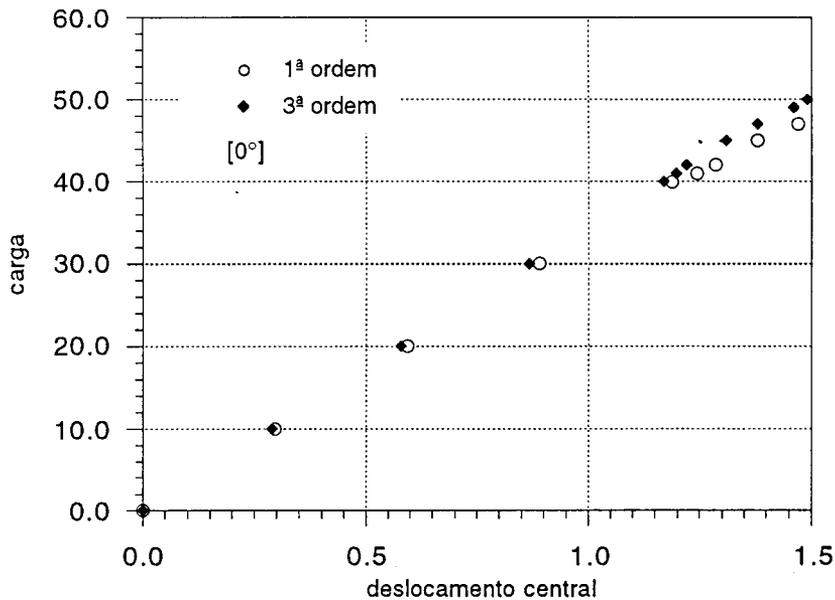


Figura 8.15- Curva carga-deslocamento para a viga em flexão-resina termoendurecível

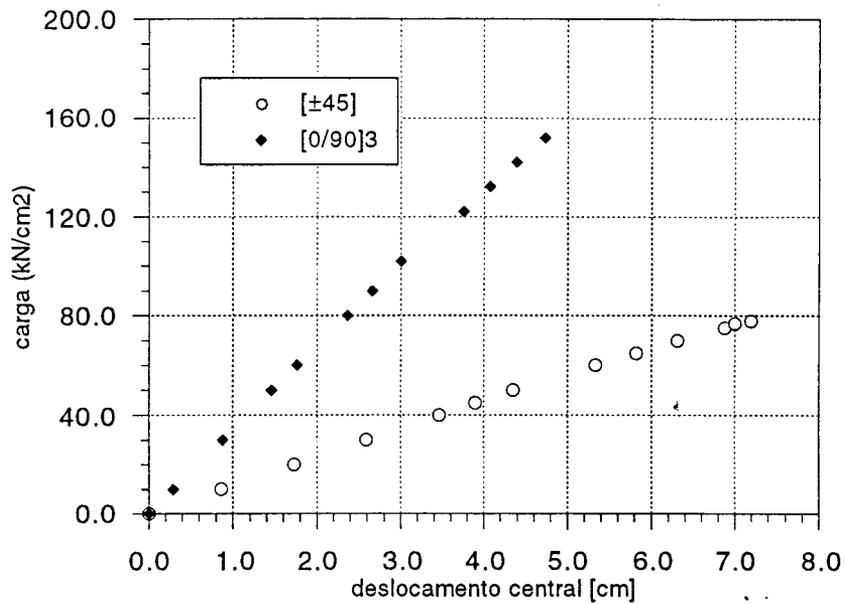


Figura 8.16- Curva carga-deslocamento para a viga em flexão-resina termoendurecível

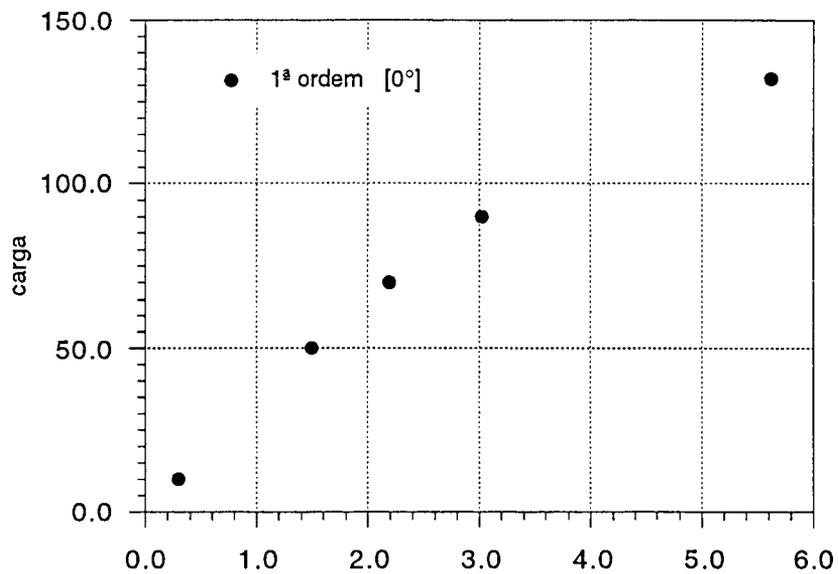


Figura 8.17- Curva carga-deslocamento para a viga em flexão-resina termoplástica

8.5.2 - Placa simplesmente apoiada sob carga uniforme-matrizes termoendurecíveis

Na figura 8.18 considera-se uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga uniforme, constituída por resina de epóxico e fibras de vidro unidireccionais. Na figura 8.19 e 8.20 apresentam-se as curvas carga-deslocamento, tendo em conta a teoria de 1ª ordem e considerando, respectivamente, o compósito e apenas a resina.

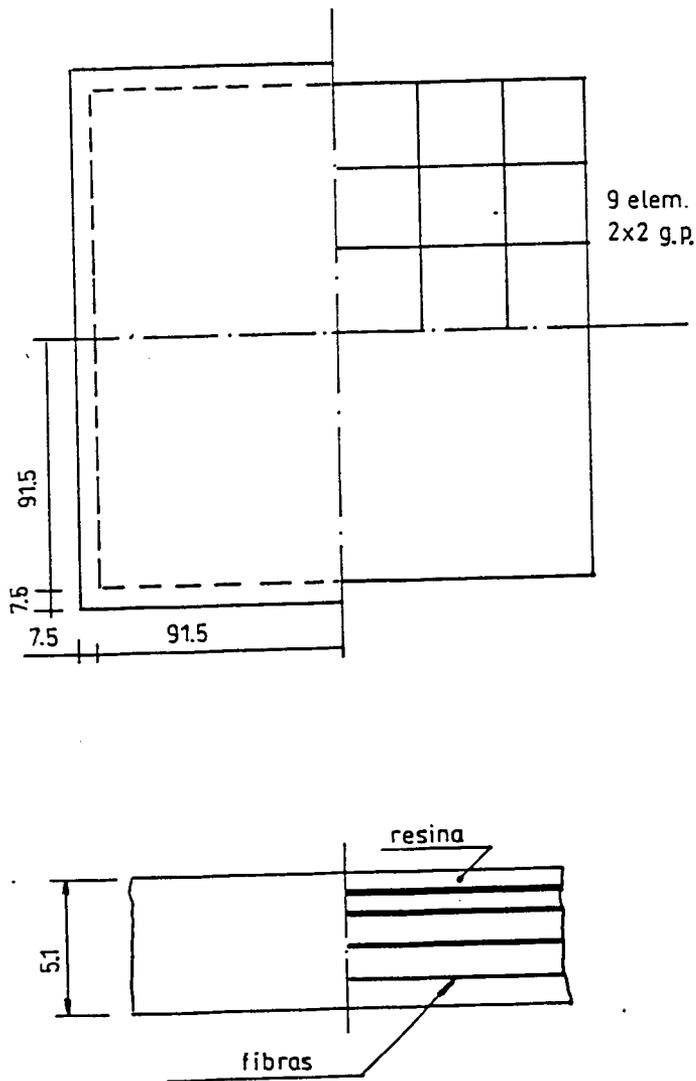


Figura 8.18 - Placa simplesmente apoiada

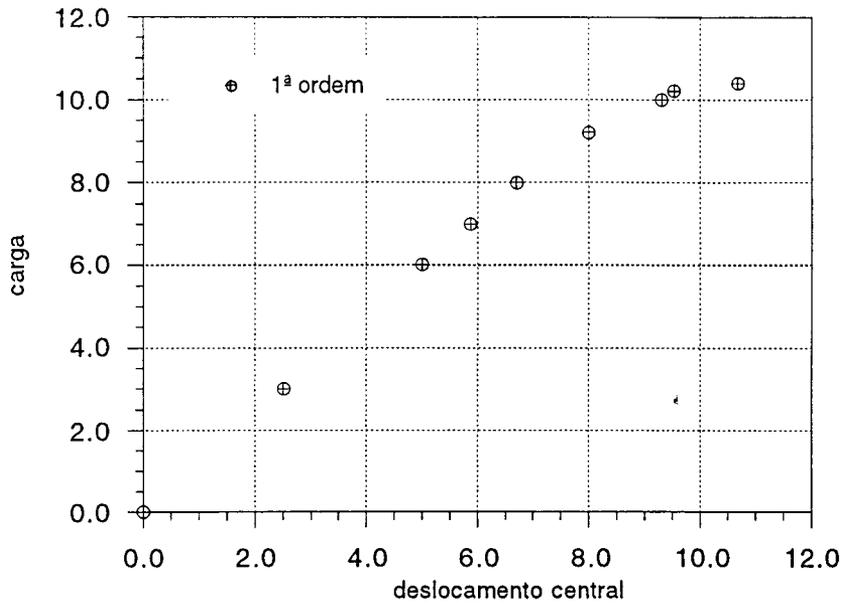


Figura 8.19 - Curva carga-deslocamento para compósitos termoendurecíveis

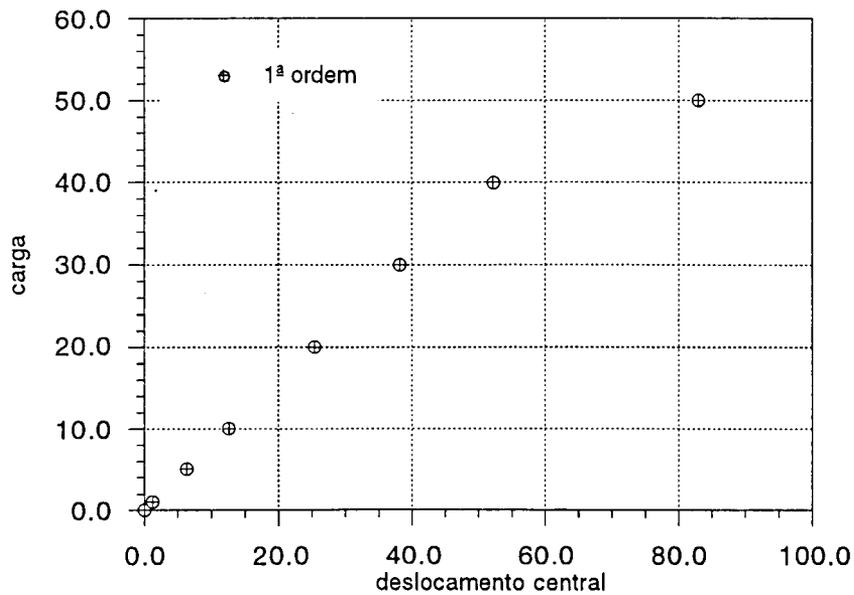


Figura 8.20- Curva carga-deslocamento para compósitos termoendurecíveis-só resina

8.5.3 - Placa simplesmente apoiada-matrizes termoplásticas

Considera-se o mesmo exemplo da figura 8.18, mas em que a matriz é um termoplástico com características elasto-plásticas. Na figura 8.21, apresenta-se a curva

carga-deslocamento, em que se pode verificar o efeito da elevada ductilidade do material de base. A curva é marcadamente não linear.

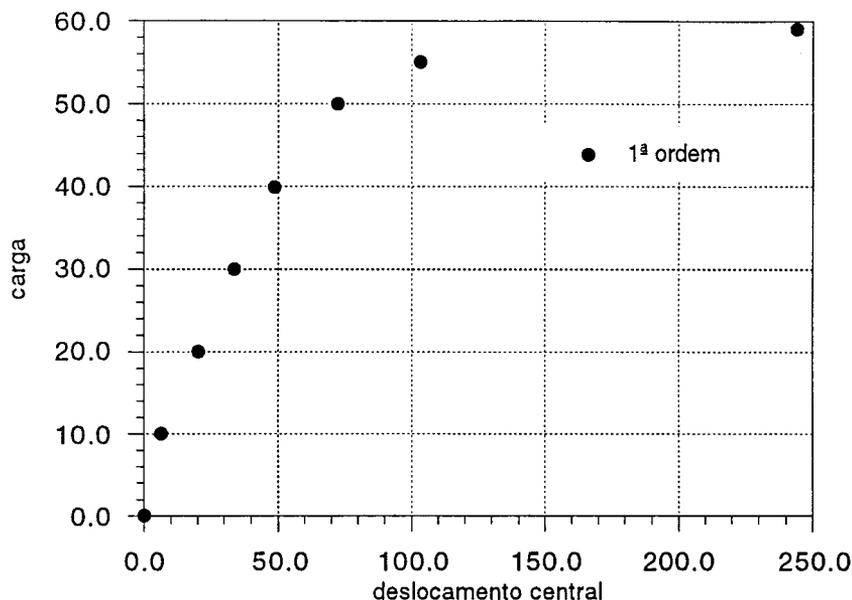


Figura 8.21 - Curva carga-deslocamento para os compósitos de matriz termoplástica

Na figura 8.23 compara-se a solução actual com a solução dita homogénea, apresentada no capítulo 2, para a teoria de deformação de 1ª ordem. Na figura 8.22 apresenta-se o laminado sandwich estudado. Refira-se que o comportamento é aproximadamente semelhante, mas dada a forma diferente como é encarada a rotura da matriz, esta aparece mais cedo no modelo actual.

O modelo bi-fásico, ao considerar modelos materiais distintos para a matriz e para as fibras permite avaliar mais adequadamente a rotura de cada fase em separado, em particular da matriz, sendo esta a fase mais susceptível de romper. Os modelos homogéneos têm maior dificuldade em estabelecer a rotura de cada uma das fases materiais, sendo portanto mais adequados para compósitos de elevada percentagem de fibras, onde os efeitos da matriz são mais difusos.

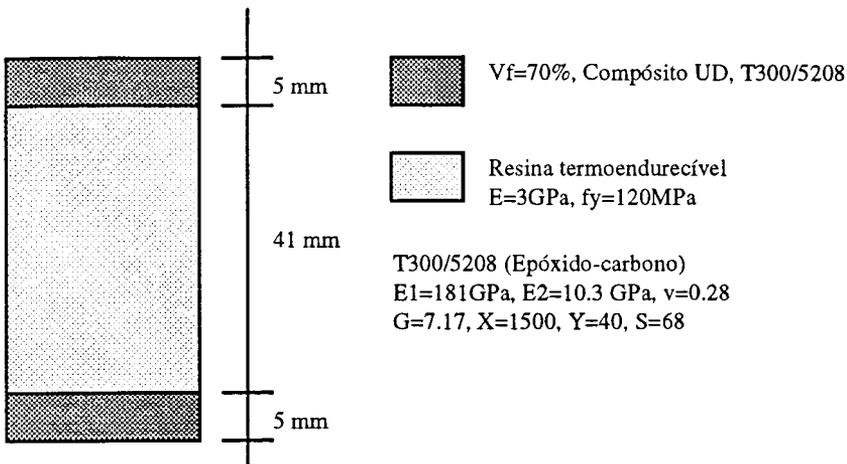


Figura 8.22 - Modelo de estrutura sandwich

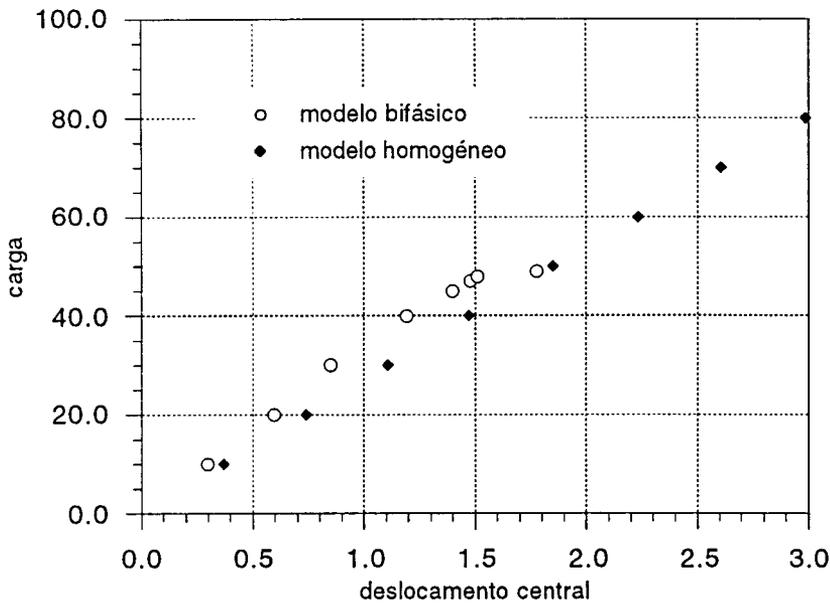


Figura 8.23 - Curva carga-deslocamento para uma estrutura sandwich- comparação do modelo bifásico com o modelo homogêneo [24]

8.6 - CONCLUSÕES

A maioria das teorias e formulações de estruturas laminadas compósitas, considera a camada de material compósito como um material equivalente à associação de fibras e matriz. O laminado é considerado como a associação de um conjunto de camadas. Torna-se difícil aplicar, neste contexto, critérios de rotura ou mesmo de dano a materiais equivalentes. Em todo o caso, foram apresentados neste capítulo, os principais critérios de rotura e discutida a sua implementação no elemento de casca. Foi

ainda apresentado um modelo simples de degradação das características elásticas a partir dos critérios de rotura.

Dado que na realidade o comportamento da matriz e das fibras é bastante diferente, parece lógico diferenciar essas fases materiais, particularmente no tocante ao comportamento em resistência. Considerou-se, então, um modelo que considera as fases materiais em separado, no qual são introduzidos modelos materiais para a matriz e para as fibras. A matriz é considerada como um material elasto-plástico até à rotura frágil em tracção, quando se considera uma resina termoendurecível. Quando se considera uma matriz termoplástica, tem-se em conta um comportamento elasto-plástico, quer em tracção, quer em compressão. As fibras são consideradas como materiais elásticos até à rotura. Chamamos bi-fásico a este modelo, que consegue representar correctamente a rigidez do conjunto matriz-fibra, mas permite detectar com maior rigor as roturas da matriz, que são frequentemente os primeiros a ocorrer. Foram estudados alguns exemplos, onde se pode verificar que o modelo permite simular um comportamento dual elasto-plástico e elástico-frágil. Foram implementadas no elemento de casca degenerada as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens. Nos exemplos apresentados a sua resposta foi muito semelhante.

REFERÊNCIAS

1. R.E.Rowlands, Strength (failure) theories and their experimental correlation, Handbook of Composites, Vol.3, 1985
2. R. VonMises, Mechanik der plastischen formänderung von kristallen, Z. Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol.8, 161-185, 1928
3. R. Hill, The mathematical theory of plasticity, Oxford Univ. Press, 1950
4. V.D. Azzi, S.W.Tsai, Anisotropic strength of composites, Experimental Mechanics, Vol.5, 283-288, 1965
5. O.Hoffman, The brittle strength of orthotropic materials, J. of Composite Materials, Vol.1, 200-206, 1967
6. E.Z.Stowell, T.S.Liu, On the mechanical behaviour of fiber-reinforced crystalline materials, J.Mech.Phys.Solids, Vol.9, 242-260, 1961
7. P.H.Petit, Ultimate strength of laminated composites, Report FZM-4977, 1967
8. D.L.Reed, Point stress laminated analysis, Report FZM-5994, 1970

9. P.H.Petit, M.E.Waddoups, A method of predicting the nonlinear behaviour of laminated composites, *J.Comp.Mat.*, Vol.3, 2-19,1969
10. S.W.Tsai, E.M.Wu, A general theory of strength for anisotropic materials, *J.Comp.Materials*, Vol.5, 58-80, 1971
11. R.C.tennyson, D.MacDonald, A.P.Nanyaro, Evaluation of tensor polynomial failure criteria for composite materials, *J.Comp.Materials*, Vol.12, 63-75, 1978
12. S.P.Timoshenko, *Strength of Materials*, 1956
13. J. A. Figueiras, Ultimate load analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete plates and shells, Ph. D. Thesis, c/ph/72/83, University College of Swansea, 1983.
14. D.R.J.Owen e J.A.Figueiras, Anisotropic elastoplastic finite element analysis of thick and thin plates, *Int. J.Num.Meth.Eng.*, 19, 1983
15. C.B.Norris, Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses, U.S. Forest Products Laboratory, Report # 1816, 1950
16. E.M.Wu, Optimal experimental measurements of anisotropic failure tensors, *J.Comp.Materials*, Vol.5, 472-489, 1972
17. F.J.M.Martins de Brito, Caracterização do comportamento dos plásticos reforçados com vista a aplicações estruturais, Tese de Especialista, LNEC, 1985, (3 volumes)
18. Manual AIRTECH de materiais compósitos, AIRTECH, USA, 1985
19. S. Tsai, *Composites Design*, Think Composites, USA, 1993
20. S. Tsai, Hahn, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Pub. Co., U.S.A., 1980
21. R. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill Book Company, USA, 1975
22. D.R.J.Owen, E.Hinton, *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press, 1980
23. R.J. Crawford, *Plastics Engineering*, Pergamon Press, U.K., 1987
24. A.J.M. Ferreira, J.César de Sá, A. Torres Marques, Nonlinear analysis of composite laminated shells using higher-order shear deformation theories and a bi-phase material model, *Complas 5*, Barcelona, Março 1997

CAPÍTULO 9

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS TIPO CASCA EM BETÃO REFORÇADO COM COMPÓSITOS - AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DAS TEORIAS DE DEFORMAÇÃO DE 1ª E 3ª ORDENS E LAYERWISE

9.1 - INTRODUÇÃO

9.2 - FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CASCA DEGENERADA CURVA
PARA A ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE BETÃO REFORÇADO

9.3 - SOLUÇÃO NÃO LINEAR POR ELEMENTOS FINITOS

9.4 - MODELO MATERIAL PARA O BETÃO

9.4.1 - Comportamento à compressão

9.4.2 - Comportamento elasto-plástico-frágil

9.5 - MODELO MATERIAL PARA O MATERIAL COMPÓSITO UNIDIRECCIONAL

9.6 - EXEMPLO NUMÉRICO

9.7 - CONCLUSÕES

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 9

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS TIPO CASCA EM BETÃO REFORÇADO COM COMPÓSITOS - AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DAS TEORIAS DE DEFORMAÇÃO DE 1ª E 3ª ORDENS E LAYERWISE

9.1 - INTRODUÇÃO

As estruturas de betão armado e pré-esforçado representam um sector industrial importante na construção civil.

A análise de estruturas de engenharia civil foi baseada durante muitos anos em leis empíricas e equações de equilíbrio. Os actuais códigos, embora continuem a basear-se na anterior experiência, reflectem um melhor conhecimento sobre a acção compósita do material [1]. O betão armado apresenta um comportamento complexo [1], como a fissuração, rigidificação em tracção, propriedades não lineares multiaxiais e interfaces complexas. Os métodos numéricos, particularmente o método dos elementos finitos, permitem uma melhor abordagem destes fenómenos.

Apesar do excelente comportamento do betão armado, a corrosão instala-se dada a porosidade do betão e é possível a ocorrência de corrosão das armaduras de aço. Existe um interesse actual em corrigir esta situação, através da reabilitação das estruturas de betão. Uma das formas de o fazer é a de colar à estrutura de betão materiais compósitos de elevado desempenho, em particular nas faces sujeitas à tracção. Este tipo de reforço apresenta um conjunto de vantagens, particularmente a sua elevada rigidez e resistência à tracção nos materiais unidireccionais, e a sua boa resistência à corrosão.

Há, no entanto, que ligar este material à estrutura de betão, o que nem sempre é fácil, dada a eventual complexidade geométrica da estrutura a reabilitar e dada a necessidade de aplicar um adesivo entre a camada de compósito e o betão.

Neste capítulo pretende-se estudar o comportamento de estruturas de betão ou betão armado, reforçados nas faces em tracção com camadas finas de materiais compósitos unidireccionais. Pretende-se realizar uma primeira avaliação sobre a capacidade e

influência do reforço, e pretende-se comparar a performance das três teorias de deformação aplicadas em capítulos anteriores. A análise será restrita aos elementos de casca, expostos no capítulo 2. São considerados o comportamento não linear geométrico e material no contexto elasto-plástico e elasto-plástico-frágil, para os comportamentos em compressão e tracção do betão. Os materiais compósitos de reforço são considerados elásticos até à rotura. São apresentados, de forma reduzida, os modelos materiais de interesse.

9.2 - FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CASCA DEGENERADA CURVA PARA A ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE BETÃO REFORÇADO

O elemento finito de casca utilizado neste capítulo segue a mesma formulação apresentada no capítulo 2, com as devidas modificações para as teorias de 1ª ordem, 3ª ordem e layerwise.

O objectivo de introdução das teorias de ordem superior, em particular no que toca à teoria layerwise, é a suposição de que a matriz (betão) e o reforço (compósito) têm características mecânicas suficientemente dispares para justificar uma análise de ordem superior, particularmente em zona de elevados gradientes de tensão. Neste trabalho utiliza-se uma teoria de ordem superior baseada em campos de deslocamentos de 1ª e 3ª ordem, já apresentados no capítulo 2. Na teoria layerwise, considera-se um campo de deslocamentos afectos às camadas, em que se considera que as duas primeiras camadas representam as de compósito e a terceira a de betão, conforme esquematizado na figura 9.1. Com esta configuração de laminado, permite-se a colocação de reforço [0/90] ou [45/-45], por exemplo, em placas ou cascas de betão em que se estime necessário o reforço bidireccional.

9.3 - SOLUÇÃO NÃO LINEAR POR ELEMENTOS FINITOS

A análise não linear é realizada através da consideração do comportamento não linear geométrico sob uma abordagem lagrangiana total tendo em conta as suposições de Von Kármán. É ainda considerado para o betão um modelo material elasto-plástico com avaliação da fendilhação e da conseqüente redução de rigidez. O reforço é considerado como um material unidireccional com comportamento elasto-frágil, correspondente a uma camada de material compósito.

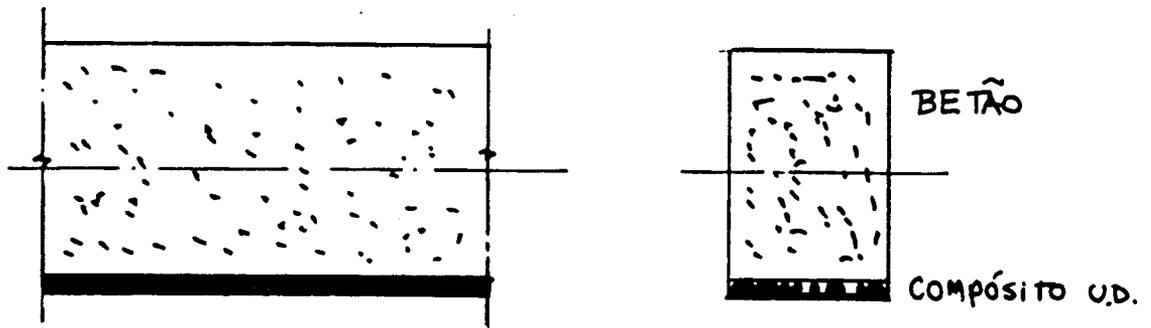


Figura 9.1 - Esquema de laminado típico para análise com a teoria layerwise

A análise geométrica não linear e a análise elasto-plástica são formalmente semelhantes à apresentada nos capítulos 3 e 4. Há unicamente a registar que no cálculo das tensões, se verificam algumas correcções, que são indicadas a seguir:

a) Para as camadas de betão:

- No modelo elasto-plástico-frágil que será apresentado mais adiante, são calculadas as tensões principais σ_i ;
- se σ_i for superior à máxima tensão de tracção (f'_t) ou se o betão já rompeu, usa-se o modelo de tracção que será apresentado mais adiante;
- a partir das tensões σ_i actualizadas, calcula-se a tensão efectiva $\bar{\sigma}$ de acordo com a função de cedência;
- se $\bar{\sigma}$ for superior à tensão de cedência inicial da camada, ou se esta camada já tiver apresentado cedência, as tensões são corrigidas de acordo com a formulação elasto-plástica;

b) Para as camadas de material compósito:

- a partir das tensões σ_j actualizadas, calculam-se as tensões nas camadas de reforço;
- se a tensão efectiva for superior à tensão de rotura do material, ou se a camada já tiver rompido, a rigidez é reduzida a zero.

9.4 - MODELO MATERIAL PARA O BETÃO

O modelo material escolhido para o betão foi tratado por Owen e Figueiras [2] e será designado por modelo elasto-plástico-frágil. Este modelo corresponde às seguintes suposições:

- comportamento à compressão

o betão é suposto comportar-se em compressão como um material elasto-plástico e as deformações elevadas em compressão induzem a rotura por esmagamento do betão, sendo necessária a sua consideração no modelo;

- comportamento em tracção

Supõe-se um comportamento linear elástico até que a máxima tensão de tracção seja atingida.

9.4.1 - Comportamento à compressão

O critério de cedência, as regras de escoamento plástico, endurecimento e a condição de rotura são condições necessárias à formulação das relações tensão-deformação não lineares. É considerada adequada a dependência da função de cedência na tensão normal média $I_1(\sigma_{\text{oct}})$ e no invariante da tensão de corte $J_2(\tau_{\text{oct}})$ [2].

São considerados os efeitos de corte transversal e daí se considera que um critério de cedência triaxial seja necessário para a função de cedência

$$f(I_1, J_2) = [\beta(3J_2) + \alpha I_1]^{1/2} = \sigma_0 \quad (9.1)$$

onde α e β são parâmetros materiais e σ_0 a tensão efectiva obtida por um ensaio de compressão uniaxial. A expressão da cedência pode ser apresentada em termos das tensões principais da seguinte forma

$$\beta[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3] + \alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (\sigma_0)^2 \quad (9.2)$$

Pode encontrar-se a condição de cedência de Huber-Mises tomando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

O estado de tensão em cascas e placas moderadamente espessas pode ser considerado biaxial, dada a habitual suposição $\sigma_z = 0$.

É possível encontrar, em termos práticos, uma relação entre a tensão de cedência biaxial e a tensão de cedência uniaxial, o que permite reescrever a equação de cedência

$$\{1.355[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x\sigma_y + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xy}^2)] + 0.355\sigma_0(\sigma_x + \sigma_y)\}^{1/2} = \sigma_0 \quad (9.3)$$

Esta expressão é ilustrada na figura 9.2. No modelo elástico-perfeitamente plástico, σ_0 é igual à tensão última de compressão f'_c , obtida por um ensaio de compressão uniaxial. Assume-se um comportamento elástico até que a tensão efectiva σ_0 atinga o valor f'_c , a partir do qual se segue um comportamento perfeitamente plástico até que se atinga a superfície de rotura. No modelo com encruamento, a superfície inicial de cedência é atingida quando a tensão efectiva σ_0 atinga o valor de 30% de f'_c .

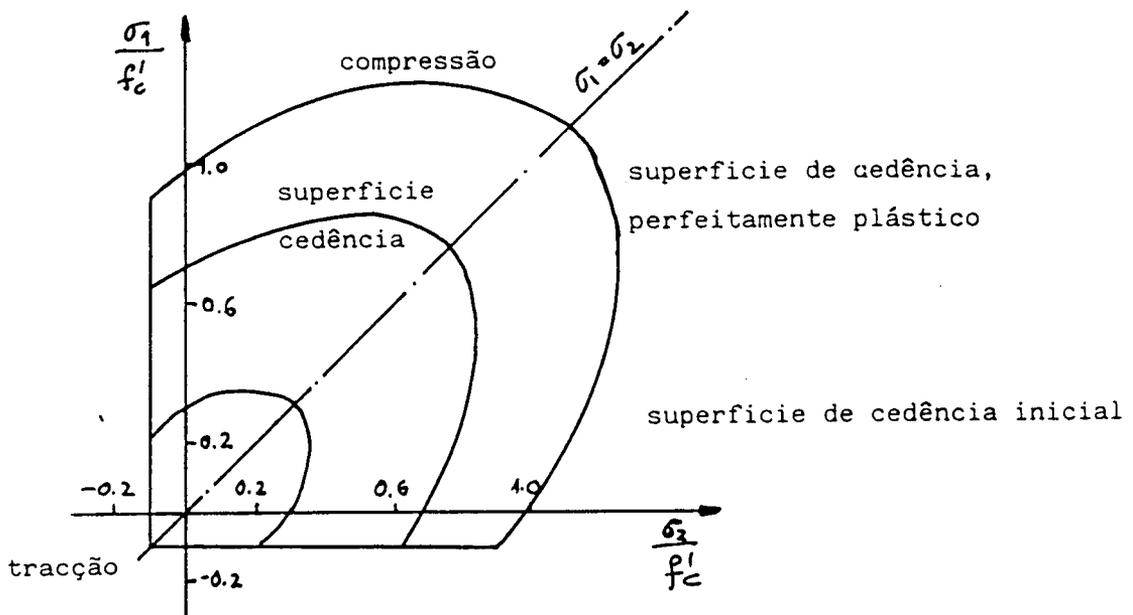


Figura 9.2 - Condição de cedência para a análise elasto-plástica do betão

Na figura 9.3 apresenta-se a representação unidimensional do modelo perfeitamente plástico e com encruamento, enquanto que na figura 9.4 se apresenta a representação bidimensional.

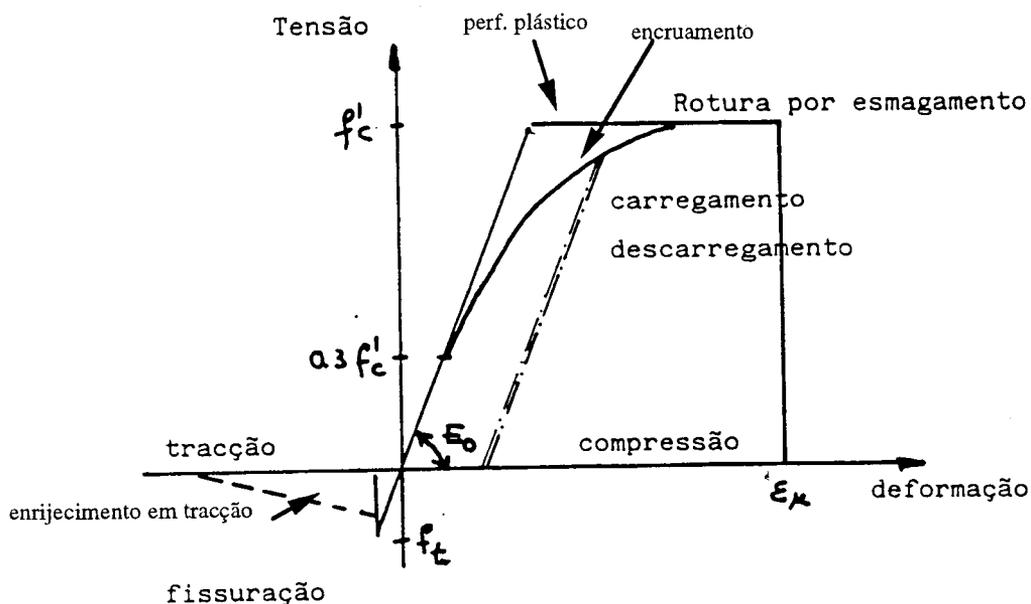


Figura 9.3 - Representação unidimensional do modelo constitutivo do betão

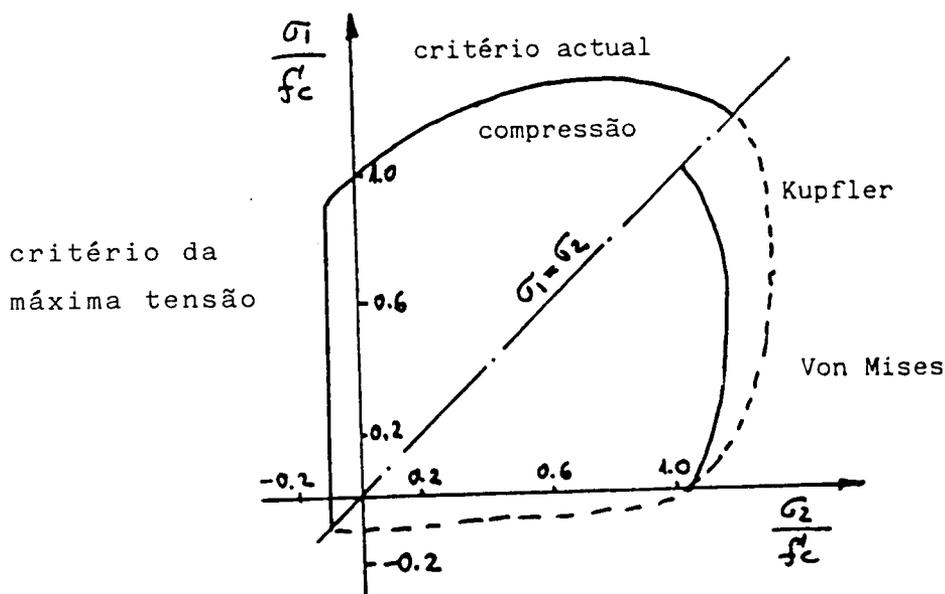


Figura 9.4 - Representação bidimensional no espaço das tensões do modelo constitutivo do betão

Considera-se uma lei associativa de escoamento plástico. Os incrementos de deformação plástica são definidos [3-6] como

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9.4)$$

onde $d\lambda$ é uma constante de proporcionalidade que determina a intensidade do incremento de deformação plástica e o gradiente $\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}$ define que a sua direcção seja

perpendicular à superfície de cedência ou às subsequentes superfícies de carregamento no modelo de encruamento. A formulação da matriz constitutiva elasto-plástica \underline{D}'_{ep} segue uma formulação idêntica à apresentada no capítulo 4. As derivadas da função de cedência que define o vector de escoamento \underline{a} tomam as seguintes expressões explícitas para a superfície de cedência dada por (9.3)

$$\underline{a}^T = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right] \quad (9.5)$$

onde

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \frac{2(c^2 + \beta)\sigma_x + (2c^2 - \beta)\sigma_y}{\text{const.}} + c$$

$$a_2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \frac{2(c^2 + \beta)\sigma_y + (2c^2 - \beta)\sigma_x}{\text{const.}} + c$$

$$a_3 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = \frac{6\beta\tau_{xy}}{\text{const.}}$$

$$a_4 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} = \frac{6\beta\tau_{xz}}{\text{const.}}$$

$$a_5 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} = \frac{6\beta\tau_{yz}}{\text{const.}} \quad (9.6)$$

onde $c = \frac{\alpha}{2\sigma_0}$ e onde α e β são parâmetros materiais e

$$\text{const.} = 2 \left[(c^2 + \beta)\sigma_x^2 + (c^2 + \beta)\sigma_y^2 + (2c^2 - \beta)\sigma_x\sigma_y + 3\beta(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]^{1/2} \quad (9.7)$$

A regra de encruamento define a evolução das superfícies de cedência subsequentes durante a deformação plástica. Aquela determina a relação entre as superfícies de carga $f(\sigma, \chi)$ (ou tensões efectivas) e as deformações plásticas acumuladas (ou deformação plástica efectiva). O conceito de tensão efectiva e de deformação plástica efectiva torna possível a extrapolação de testes uniaxiais a situações multiaxiais. A relação entre a tensão

efectiva e a deformação plástica efectiva é extrapolada a partir da relação tensão-deformação uniaxial usando

$$\sigma = E_0 \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{E_0}{\varepsilon_0} \varepsilon^2 \quad (9.8)$$

onde E_0 é o módulo de elasticidade inicial, ε é a deformação total e ε_0 é a deformação total para a tensão f'_c .

Substituindo a componente elástica de deformação $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0}$ em (9.8) obtêm-se

$$\sigma = -E_0 \varepsilon_p + \sqrt{2E_0^2 \varepsilon_0 \varepsilon_p} \quad ; \quad 0.3f'_c < \sigma \leq f'_c \quad (9.9)$$

onde ε_p é a componente de deformação plástica, e ε_0 pode ser tomada igual a $2 \frac{f'_c}{E_0}$ para betões correntes [2,7].

A fractura do betão por esmagamento em compressão é um fenómeno controlado por deformação [2,7]. Por dificuldades em encontrar resultados experimentais, estes investigadores transformaram o critério de cedência em tensões para o equivalente em deformações. Assim

$$\beta(3J'_2) + \alpha I'_1 = \varepsilon_u^2 \quad (9.10)$$

onde I'_1 e J'_2 são, respectivamente, os invariantes de deformação [8] e ε_u é a deformação total última extrapolada a partir de resultados de ensaios uniaxiais. A expressão usada para a condição de esmagamento [2,7], a partir dos resultados de Kupfler[9], é a seguinte:

$$\{1.355[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + 0.75(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yx}^2 + \gamma_{xy}^2)] + 0.355\varepsilon_u(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\}^{1/2} = \varepsilon_u^2 \quad (9.11)$$

Quando ε_u atinge o valor especificado como deformação última, é suposto que o material perdeu todas as suas características de rigidez e resistência.

9.4.2 - Comportamento elasto-plástico-frágil

O comportamento do betão sob tensões de tracção é suposto ser linear elástico até que se atinga a superfície de fractura. A fractura ou rotura é governada por um critério de tensão tractiva máxima. É suposto que as fendas se formam em planos perpendiculares à direcção das máximas tensões principais de tracção, logo que estas tensões atingem a

resistência especificada em tracção do betão f'_t . As fendas são supostas acontecerem apenas em planos perpendiculares ao plano estrutural (x' , y'). Após a fendilhação, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são reduzidos a zero na direcção perpendicular ao plano de fendilhação, sendo utilizado um módulo de corte reduzido. Tomando 1 e 2 como as duas direcções principais no plano da estrutura, a relação tensão-deformação para o betão fendilhado na direcção 1 é obtida como

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

Quando as tensões tractivas na direcção 2 atingem o valor f'_t , forma-se um segundo plano de fendilhação perpendicular ao primeiro. A relação tensão-deformação é então obtida como

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{12}^c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

O betão fendilhado é anisotrópico e estas relações devem ser referidas aos eixos $x'y'$.

Mais do que a resistência à tracção do betão, normalmente pequena, importa analisar a influência do betão fendilhado no comportamento estrutural. Utiliza-se uma representação distribuída de fendas numa região do elemento finito.

O modelo de fendilhação distribuído atribui um valor estimativo para o módulo de corte fendilhado G^c . Adopta-se [2,7] um módulo de corte que é função da deformação de tracção corrente. Na direcção 1

$$G_{12}^c = 0.25G \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{0.004} \right) ; \quad G_{12}^c = 0 \text{ se } \varepsilon_1 \geq 0.004 \quad (9.14)$$

$$G_{13}^c = G_{12}^c ; \quad G_{23}^c = \frac{5}{6}G$$

em que G é o módulo de corte do betão intacto e ε_1 é a deformação de tracção na direcção 1. Em ambas as direcções

$$\begin{aligned} G_{13}^c &= 0.25G \left(\frac{1-\varepsilon_1}{0.004} \right) ; G_{13}^c = 0 \text{ se } \varepsilon_1 \geq 0.004 \\ G_{23}^c &= 0.25G \left(\frac{1-\varepsilon_2}{0.004} \right) ; G_{23}^c = 0 \text{ se } \varepsilon_2 \geq 0.004 \\ G_{12}^c &= 0.5G_{13}^c \text{ ou } G_{12}^c = 0.5G_{23}^c \text{ se } G_{13}^c = G_{23}^c \end{aligned} \quad (9.15)$$

9.5 - MODELO MATERIAL PARA O MATERIAL COMPÓSITO UNIDIRECCIONAL

No modelo presente, considera-se um comportamento elasto-frágil uniaxial. Quando se atinge a superfície de fractura do compósito, a rigidez é reduzida a zero. Supõe-se que este material só absorve tensões na direcção das fibras.

9.6 - EXEMPLO NUMÉRICO

Considera-se uma placa quadrada simplesmente apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída, testada por Taylor et al.[10] e estudada em [2]. A placa tem $198 \times 198 \text{ cm}^2$ e é simplesmente apoiada em todos os bordos, com vão de 183 cm. A espessura da placa é de 5.1 cm. Reforça-se a placa de betão com material compósito na face inferior. A espessura do laminado compósito é uma variável de estudo, no sentido de observar a influência da espessura na resposta estrutural do laminado. Aplicam-se laminados [0/90] e [45/-45] com espessuras entre 1 e 5 mm. Comparam-se os resultados com os apresentados por Figueiras [2] com armaduras de aço. Este investigador aplicou barras de reforço em aço inclinadas a 45/-45 graus e paralelas aos lados [0/90]. Os reforços considerados são varões de aço redondos com diâmetros de 0.476 cm, diferentemente espaçados em cada direcção, por forma a proporcionar o mesmo momento em cada direcção. A geometria da placa e dos laminados de reforço usados são representados na figura 9.5. Na tabela 9.1 apresentam-se as características materiais dos materiais usados em [2] e os actuais.

Em [2] considerou-se um comportamento elasto-plástico para os varões de aço. Na representação actual utilizam-se materiais frágeis do tipo epóxida/vidro ou epóxida/carbono unidireccionais.

Na discretização por elementos finitos utiliza-se uma malha num quarto de placa, com 9 elementos heterosis. Considera-se uma discretização de 10 camadas de betão e duas

camadas de varões de aço [2]. O laminado de betão com compósitos considera, para as teorias de 1ª e 3ª ordens, um laminado com 6 camadas de betão e 2 de compósito, enquanto que na teoria layerwise é suficiente considerar um laminado com 3 camadas de betão e 2 de compósito.

Pretende-se também comparar, neste exemplo, a resposta estrutural do reforço em compósito, comparativamente ao reforço em aço. Pretende-se ainda comparar a performance das três teorias de deformação, e verificar se ocorrem diferenças significativas entre elas. Importa também referir que foi implementada a teoria de 3ª ordem para o caso de estruturas de betão com armaduras de aço.

Os resultados são unicamente apresentados em termos de curvas carga-deslocamento, dado que a distribuição de tensões se assemelha ao verificado em [2].

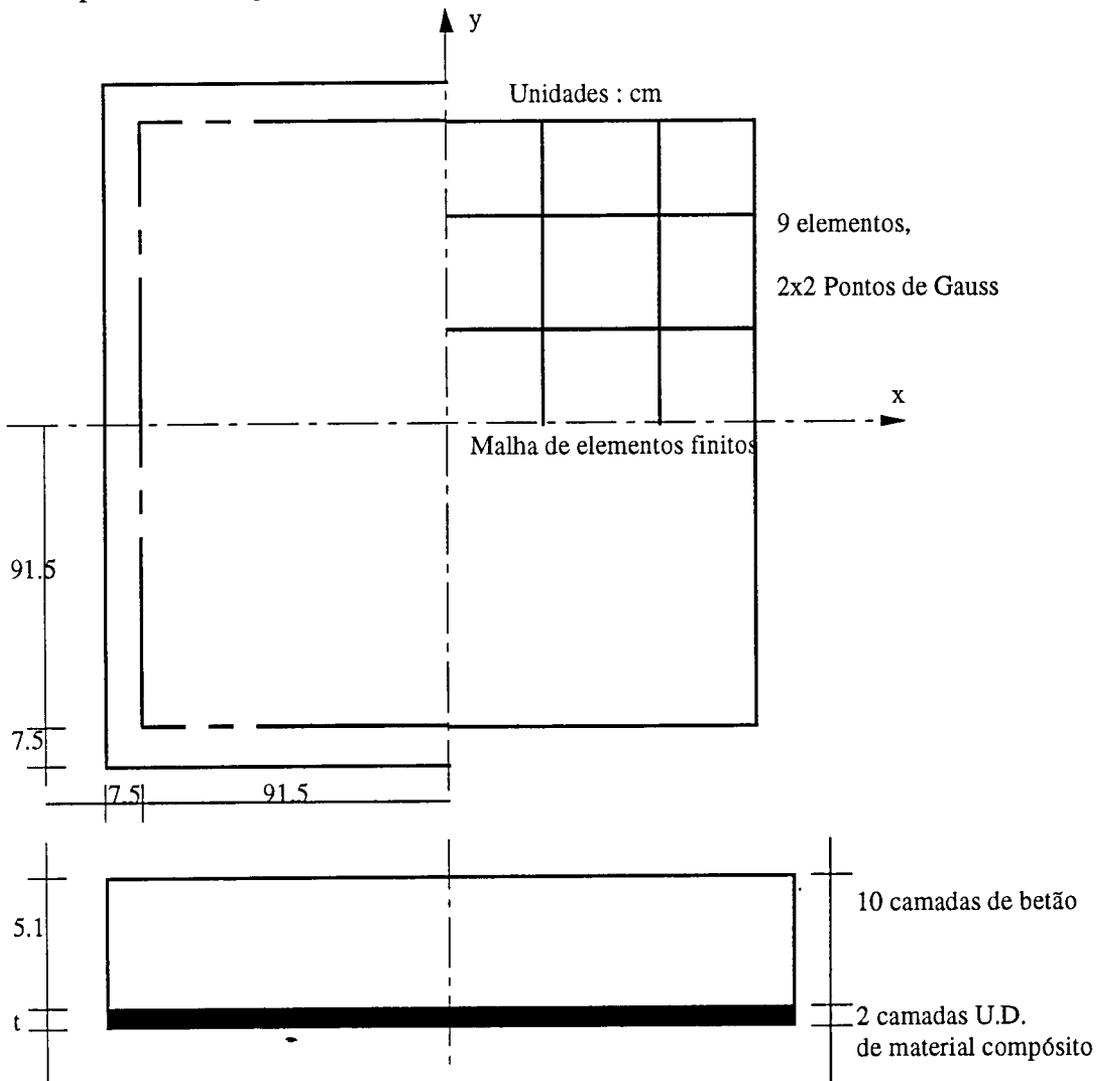


Figura 9.5a - Placa quadrada simplesmente apoiada. geometria, reforço e malha de elementos finitos

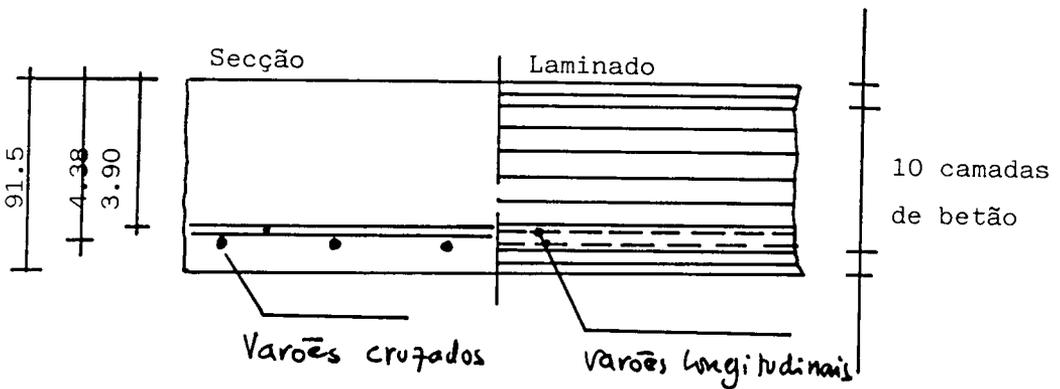
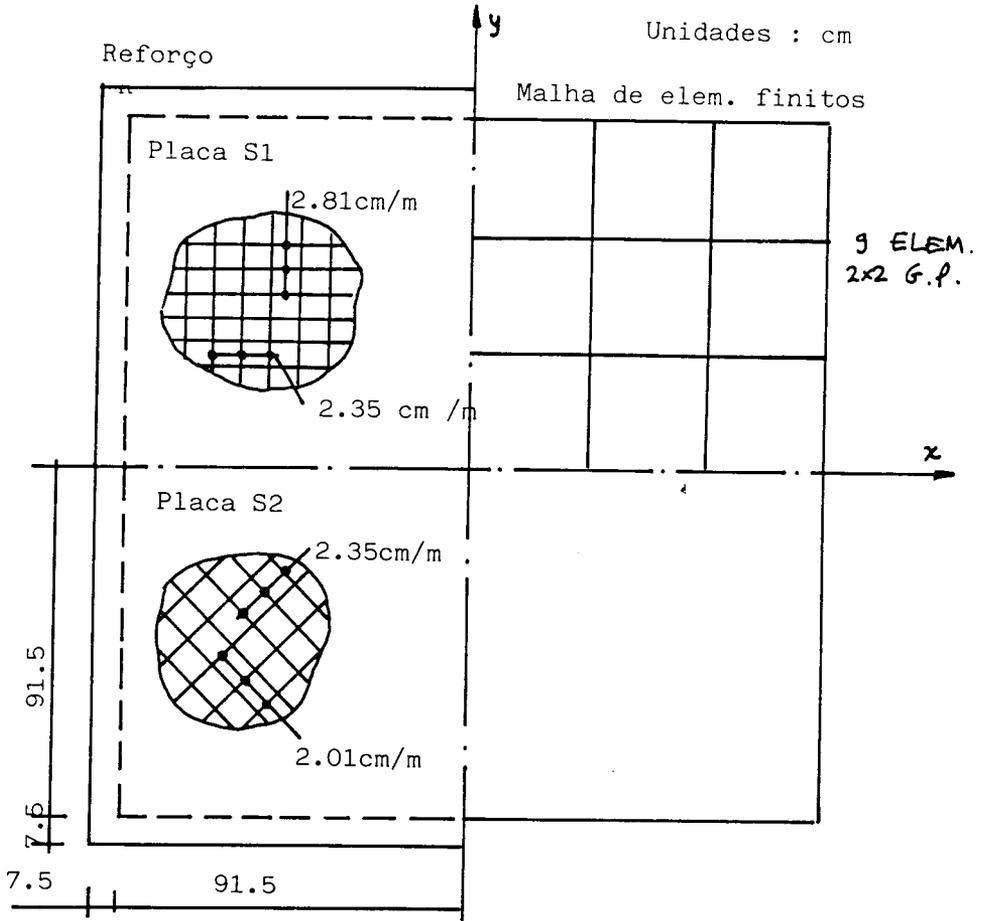


Figura 9.5b - Placa quadrada simplesmente apoiada. geometria, reforço e malha de elementos finitos, para o betão reforçado com armadura de aço

Tabela 9.1 - Parâmetros materiais para o problema da placa simplesmente apoiada

Propriedades materiais [cm, kN]

Betão

Módulo de Young	E_c	3242
Coefficiente de Poisson	ν	0.18
Tensão de rotura à compressão	f'_c	3.5
Tensão de rotura à tracção	f'_t	0.379
Def. rotura à compressão	ϵ_u	0.0035
Coef. enrij. tracção	α	0.6
	ϵ_m	0.002

Compósito UD

Módulo	E	7000
Tensão de rotura	f_{UD}	1000
Ângulo das fibras	θ	variável

Aço

Módulo de Young	E_s	20691
Tensão de cedência	f_y	37.59
Módulo de cedência	E'_s	3000

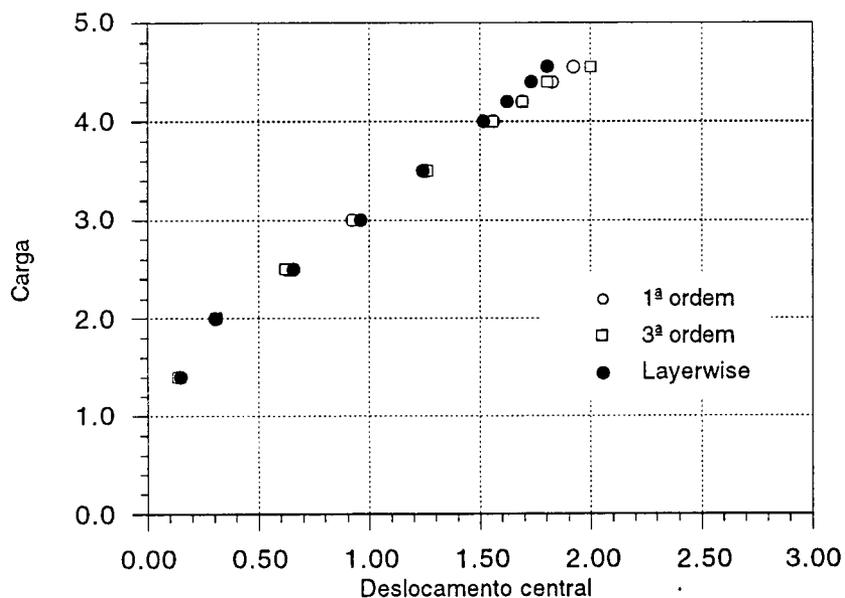


Figura 9.6 - Reforço de compósito, 1mm espessura, [0/90], $E=180$ GPa, $\sigma_{ult}=1000$ MPa, comparação das três teorias.

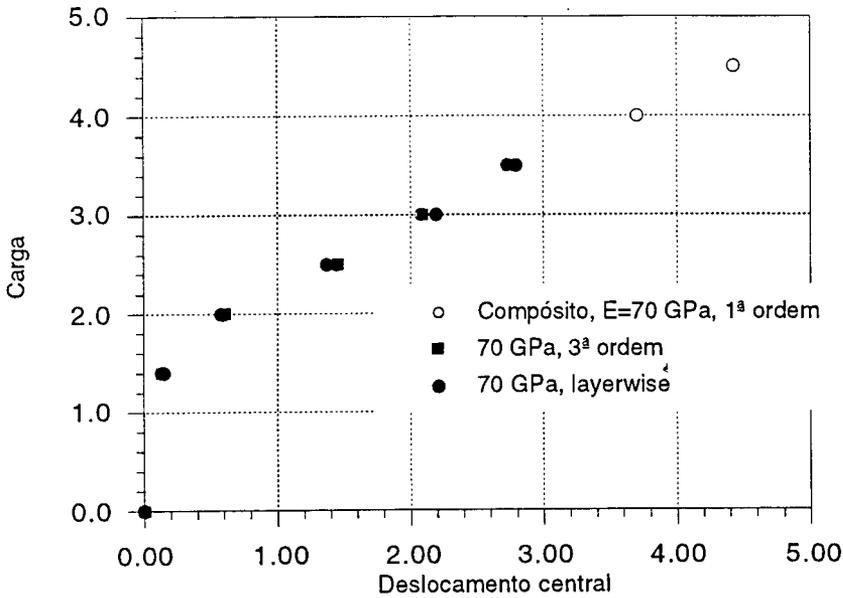


Figura 9.7 - Reforço de compósito, 1mm espessura, [0/90], E=70 GPa, $\sigma_{ult}=1000$ MPa, comparação das três teorias.

Nas figuras 9.6 e 9.7 verifica-se que as teorias estudadas apresentam respostas muito semelhantes, em termos das curvas carga-deslocamento. A resposta elasto-plástica, dependente da deformação e das tensões é assim interpretada de forma muito semelhante.

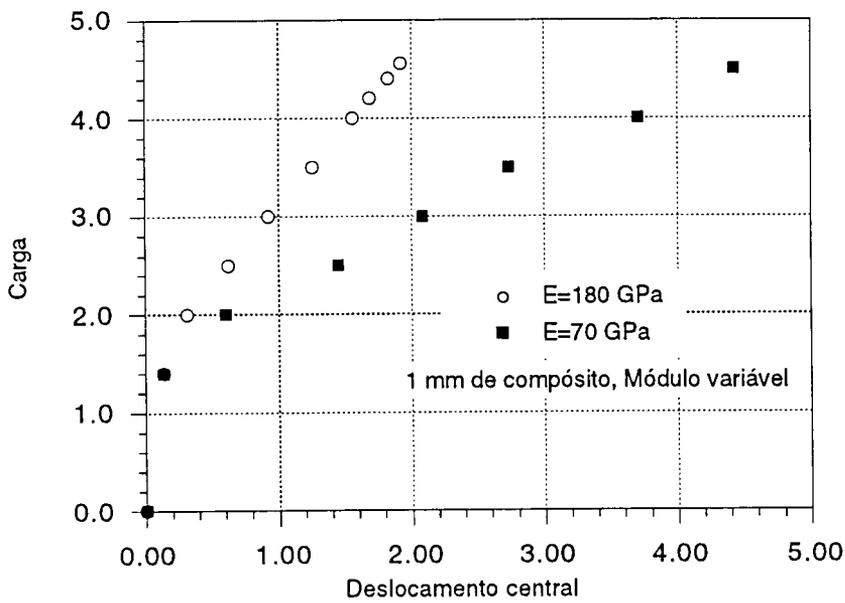


Figura 9.8 - Efeito do módulo de elasticidade do reforço, 1 mm espessura [0/90]

Registe-se que o módulo de elasticidade do material compósito tem um efeito significativo na resposta da estrutura. Assim, os compósitos de carbono ($E=180$ GPa), permitem uma resposta bem mais rígida do que os de fibra de vidro ($E=70$ GPa).

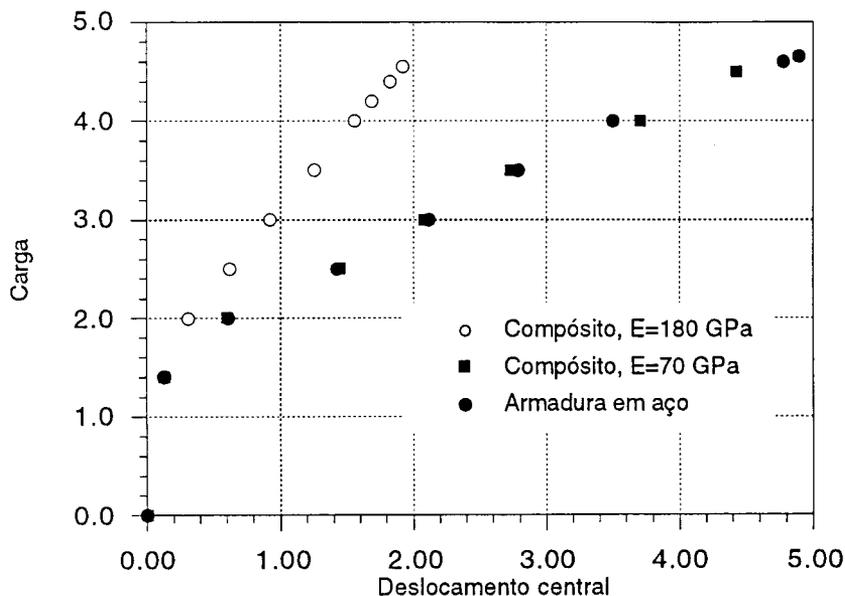


Figura 9.9 - Comparação entre o reforço de compósito e armadura de aço, 1mm de espessura de compósito, teoria de deformação de 1ª ordem

Reportando-nos às figuras 9.9 e 9.5, verifica-se que o reforço de compósito de fibra de vidro com apenas 1 mm de espessura, terá um efeito próximo do reforço de aço. Note-se que este reforço de compósito está mais afastado do eixo neutro do que os reforços de aço.

Na figura 9.10 apresenta-se o efeito da orientação dos reforços. Os reforços a $[45/-45]$ apresentam uma resposta mais rígida do que os correspondentes a $[0/90]$.

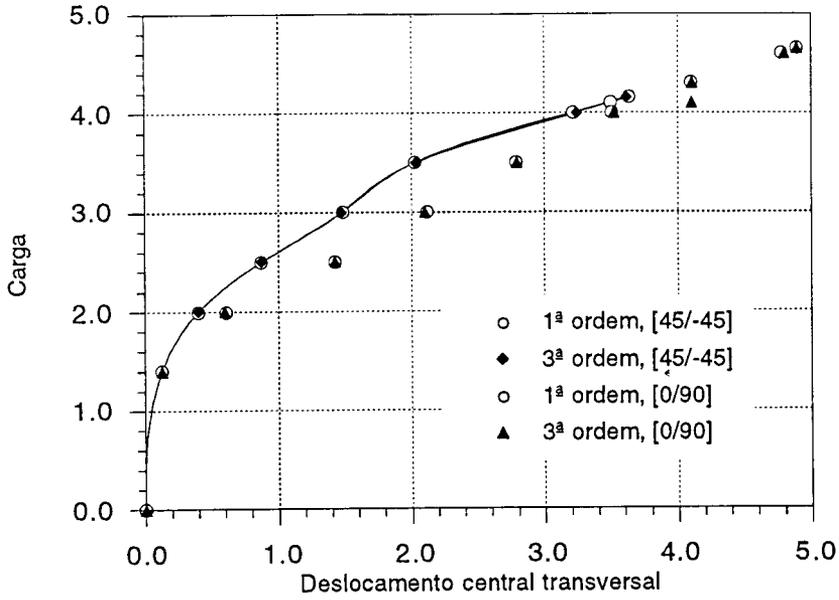


Figura 9.10 - Armadura de aço, diferentes orientações dos varões de aço- comparação da teoria de 1ª e 3ª ordem

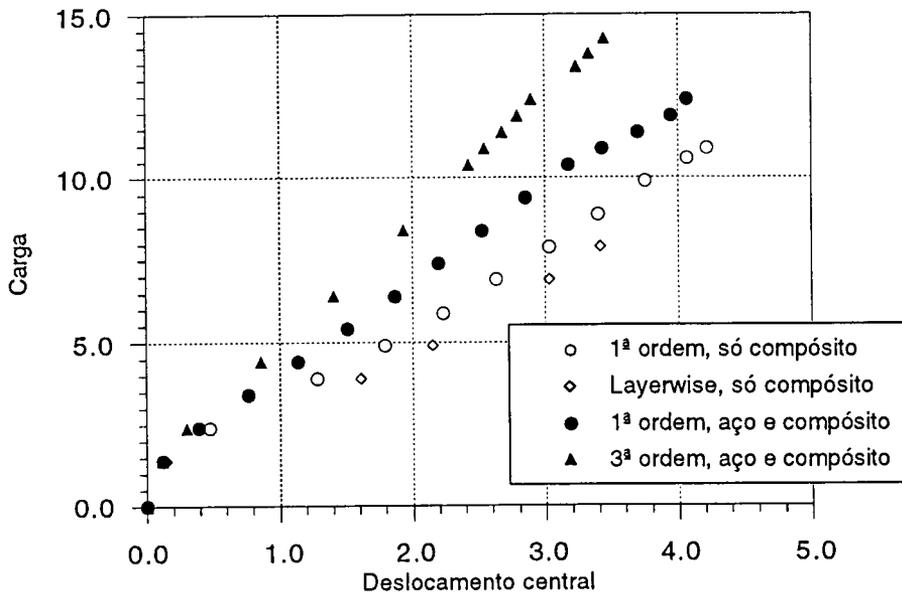


Figura 9.11 - Comparação de diferentes ordens para a) reforço em compósito [0/90] 2 mm de espessura ou b) reforço em compósito e varões de aço [1]

Verifica-se, na figura 9.11, que as teorias layerwise e as de 1ª e 3ª ordens têm um comportamento próximo. Verifica-se ainda que o reforço de aço e compósito em simultâneo apresenta uma resposta algo superior.

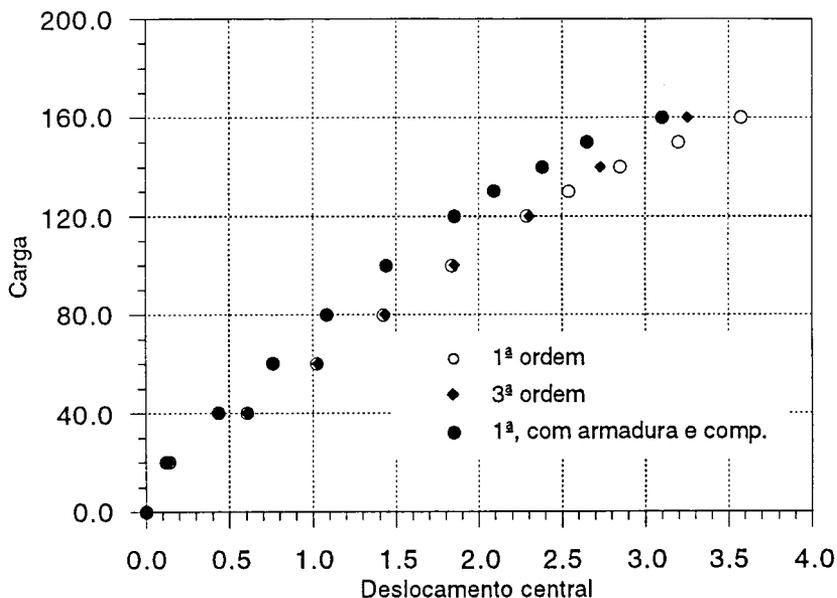


Figura 9.12 - Comparação da resposta para placa de 151 mm. Reforço apenas com compósito ou com compósito e armadura de aço

Para uma placa mais espessa (151 mm) o efeito do reforço de compósito (1ª e 3ª ordem) é comparado com o efeito do reforço de compósito a betão com armadura. Verifica-se uma boa concordância relativamente às duas teorias e um aumento da rigidez para estruturas já reforçadas.

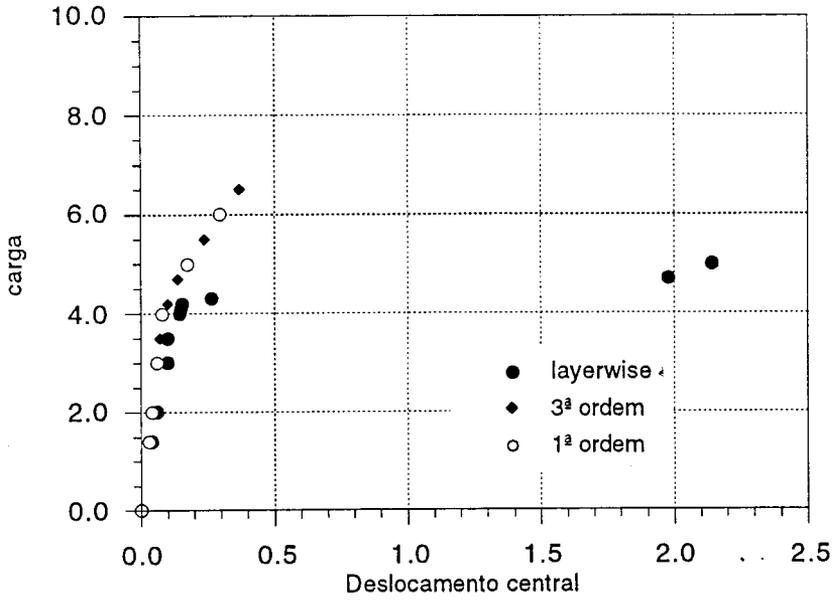


Figura 9.13 - Comparação da resposta para placa de 81mm. Reforço com compósito.[0/90], espessura 3mm.

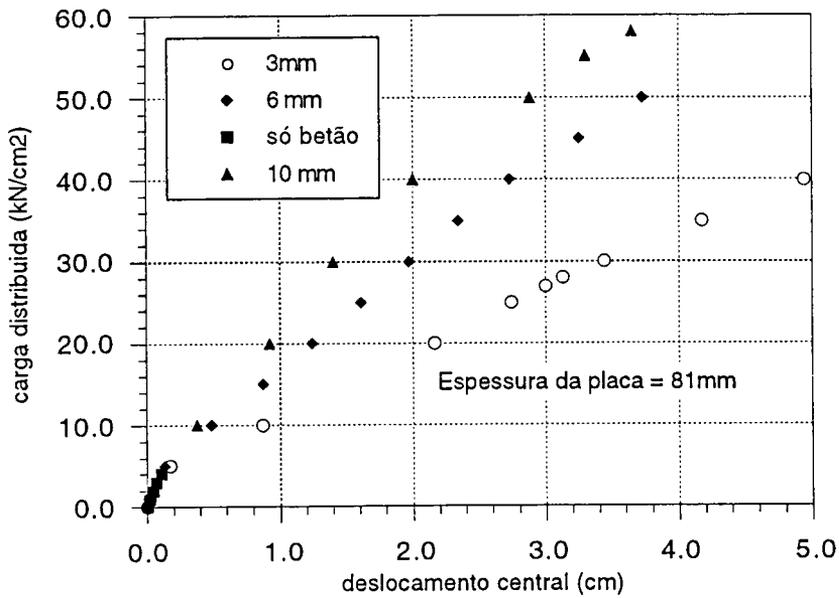


Figura 9.14 - Comparação da resposta para placa de 81mm. Reforço com compósito.[0/90], espessura variável.

Na figura 9.13 é possível verificar que as três teorias de deformação apresentam resultados próximos no regime elasto-plástico. A teoria layerwise é aquela onde a cedência ocorre mais cedo.

Na figura 9.14 verifica-se o importante efeito da espessura de material compósito unidireccional na resposta carga-deslocamento do betão reforçado.

Estuda-se agora a influência de uma camada adesiva na laje de betão reforçada com material compósito UD [0/90].

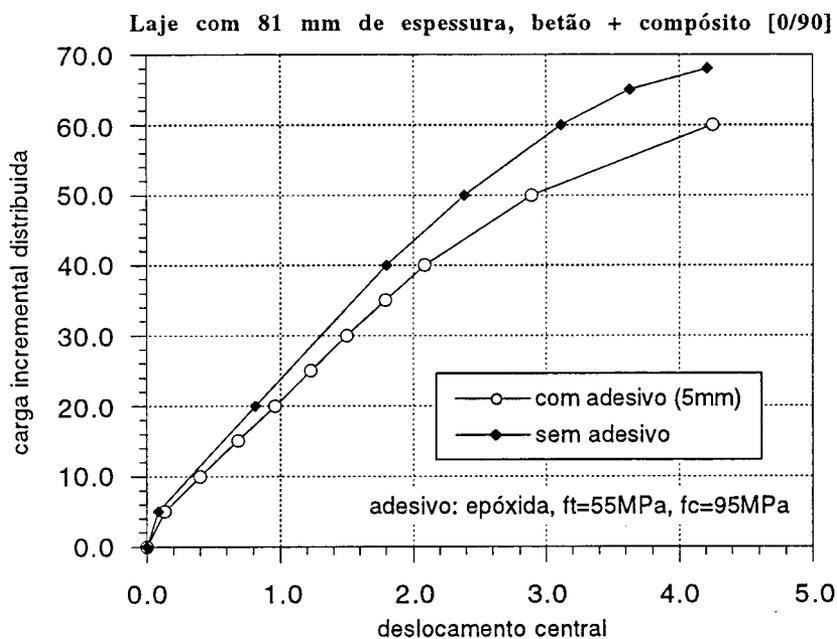


Figura 9.15 - Comparação da resposta para placa de 81mm. Reforço com compósito.[0/90], influência da camada de adesivo.

Não se verifica uma grande influência, com este modelo, do adesivo na resposta da estrutura. De qualquer maneira verifica-se que havendo uma camada de adesivo, haverá uma cedência mais cedo. O mais importante seria simular o descolamento, para o que seria necessário incluir elementos de interface.

9.7 - CONCLUSÕES

Foi realizada a análise não linear material e geométrica de estruturas tipo casca de betão armado ou não, com reforço de materiais compósitos unidireccionais na face de tracção.

Foi considerada uma abordagem bi-fásica para o betão reforçado, em que o betão (matriz) tem um comportamento dual elasto-plástico em compressão e elástico com rotura frágil em tracção. Os reforços de aço têm um comportamento unidimensional elasto-plástico em tracção. Os reforços de compósito unidireccional são considerados elásticos em tracção até à rotura frágil.

Com estes modelos pretende-se averiguar do efeito que os reforços de compósito, nas faces da estrutura sujeitas à tracção, poderão ter, tendo em vista a reabilitação de estruturas ou o reforço para maiores cargas.

Considerou-se que a interface entre o betão e o compósito era perfeita e portanto não se considerou o descolamento do adesivo, o que deverá ser tido em conta no futuro.

Foram implementadas as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens e ainda a teoria layerwise, no elemento de casca degenerada, à luz do que foi descrito no capítulo 2. Torna-se assim possível analisar uma ampla gama de estruturas tipo casca, reforçadas ou não com materiais compósitos. A formulação geométrica não linear foi exposta no capítulo 3, enquanto que a formulação materialmente não linear (elasto-plástica) foi exposta no capítulo 4.

Verifica-se que os materiais têm um efeito reforçador no betão, próximo do reforço do aço, pelo menos nas configurações estudadas. Registe-se que, para além do compósito poder ser aplicado em qualquer altura, permite uma melhor protecção à corrosão. Verifica-se, como seria de esperar, uma melhoria significativa da resposta estrutural do betão reforçado com compósitos, à medida que a espessura destes aumenta.

As três teorias de deformação de corte apresentam respostas semelhantes para o exemplo estudado.

Uma potencial vantagem futura da aplicação do materiais compósitos reside no facto de ser hoje possível encontrar um elevado número de combinações de matrizes (resinas termoendurecíveis ou termoplásticas) e reforços (fibras de vidro, carbono ou aramidas). Os novos compósitos termoplásticos, muito usados na indústria automóvel, pelo facto de poderem ser transportados secos à temperatura ambiente e pelas suas elevadas prestações mecânicas, poderão ser uma alternativa comercialmente viável aos actuais compósitos termoendurecíveis nestes mercados.

REFERÊNCIAS

- 1- J.A.Figueiras, Ultimate load analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete plates and shells, Ph. D. Thesis, c/ph/72/83, University College of Swansea, 1983.
- 2- D.R.J.Owen, J.A.Figueiras, Ultimate load analysis of reinforced concrete plates and shells, in Finite Element Software for Plates and Shells, E.Hinton e D.R.J.Owen (Eds.), Pineridge Press, 1984
- 3- D.R.J.Owen, E.Hinton, Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice, Pineridge Press, 1980
- 4- O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1991
- 5- K-J. Bathe, Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall, 1982
- 6- M.A. Crisfield, Non-linear finite element analysis of solids and structures, Vol.1, John Wiley, 1991
- 7- E.Onate, Lectures on nonlinear finite element analysis of concrete shells, Monografia n° 7, CIMNE, 1992
- 8- W.F.Chen, Plasticity in reinforced concrete, McGraw Hill Book Company, 1982
- 9- H.Kupfler, K.H.Hilsdorf e H.Rush, Behaviour of concrete under biaxial stresses, Proceedings, American Concrete Institute, Vol.66, n° 8, 656-666, 1969
- 10- R. Taylor, D.R.H. Maher, B. Hayes, Effect of the arrangement of the reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs, Magazine of Concrete Research, Vol.18, n° 55, 1966, pp.85-94

CAPÍTULO 10

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

10.1 - CONCLUSÕES

10.2 - SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

CAPÍTULO 10

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

10.1 - CONCLUSÕES

Foi realizada a análise de estruturas tipo casca laminada sandwich ou compósita, através de elementos de casca degenerada e de teorias de deformação de corte de 1ª ordem, 3ª ordem e layerwise.

Foi realizada a análise linear elástica, a análise geométrica e materialmente não linear de estruturas laminadas compósitas ou sandwich.

Foram ainda estudados laminados de borracha reforçada com fibras.

As resinas termoendurecíveis e termoplásticas reforçadas com fibras foram estudadas através de um modelo bifásico, em que as características de cada material se evidenciaram.

Foram aplicados critérios de rotura a camadas de materiais compósitos, e foi implementado um modelo degradativo das características elásticas do material logo que, num determinado ponto, se verifique esse critério.

Analisou-se, por fim, estruturas de betão reforçado (no contexto da reabilitação) com materiais compósitos unidireccionais. Pretende-se avaliar do efeito reforçador dos compósitos em estruturas de betão, quando este reforço é colocado sobretudo em faces sujeitas à tracção.

Neste trabalho foram implementadas as teorias de deformação de 1ª e 3ª ordens e ainda a teoria layerwise. As duas primeiras recorrem de graus de liberdade translacionais e rotações afectas ao laminado, enquanto que a última recorre a graus de liberdade translacionais do laminado, mas de rotações afectas às camadas. Enquanto as duas primeiras se destinam principalmente à análise de estruturas monolíticas compósitas, a terceira tem como alvo principal as estruturas sandwich, onde se verifica uma separação e identificação muito nítida das fases materiais das peles e do núcleo. Como contrapartida a

uma melhor definição das deformações e tensões de corte transversal através da espessura, as teorias de 3ª ordem e layerwise apresentam maiores custos de computação, devido ao maior número de graus de liberdade por nó. Em particular, a teoria layerwise apresenta-se como demasiado cara para mais de 5 camadas. Dado o número de camadas tipicamente envolvidas nos laminados compósitos, esta teoria fica restrita a laminados sandwich.

Foi verificado que as teorias não apresentam grandes diferenças em termos de rigidez e tensões normais, embora se revelem algo distantes na interpretação das tensões de corte transversal. A teoria de 1ª ordem apresenta deformações de corte constantes no laminado, enquanto que na teoria de 3ª ordem, estas deformações são parabólicas. Na teoria layerwise, as deformações são constantes em cada camada, mas diferentes de camada para camada.

Foram utilizados os elementos de casca degenerada (conhecidos na Mecânica Computacional por elementos de Ahmad ou elementos contínuos de casca degenerada), nas versões Serendipita, Lagrangiana e Heterosis. Estes elementos foram formulados com base em deslocamentos assumidos, não sendo utilizadas as mais recentes formulações em deformações. As razões principais da não inclusão destas novas linhas de formulação residem principalmente no bom desempenho global dos elementos utilizados, particularmente o elemento de casca de 9 nós Heterosis, e ainda pelo facto de se ter como alvo principal os laminados espessos, quer monolíticos compósitos, quer sandwich.

Verificou-se que as formulações de elementos finitos apresentadas são capazes de modelar com razoável acuidade os problemas lineares ou não lineares geométricos, bem como a linearidade material e a inelasticidade própria destes materiais a partir de determinados níveis de solicitação.

Foram apresentados modelos clássicos de formulações elasto-plásticas que foram basicamente modificadas para incluir as teorias de deformação de ordem superior. Foram também apresentados modelos bifásicos em que se faz a distinção do efeito da matriz e do reforço, compatibilizando a sua acção de deformação. Este novo modelo foi aplicado a resinas termoendurecíveis e termoplásticas, com reforços unidireccionais representativos das fibras. Uma das grandes vantagens destes modelos é a representação do comportamento em rotura, que pode ser melhor discretizado. Em particular, consideraram-se para as resinas termoendurecíveis comportamentos dual em tracção e compressão, em que se supôs que o comportamento à tracção era elástico até à rotura

frágil e a compressão elasto-plástica até ao esmagamento. Nas resinas termoplásticas considerou-se comportamento elasto-plástico da matriz em tracção e em compressão, sem esmagamento nem rotura, tendo em conta o comportamento habitual dos termoplásticos. Considerou-se para os reforços um comportamento elástico até à rotura. Estes modelos carecem até ao momento de validação experimental, constituindo no actual momento apenas uma ferramenta ao dispor de grupos de trabalho nesta área.

Neste contexto de modelos bifásicos foram estudados laminados cuja matriz é de borracha, em que se faz intervir o carácter hiperelástico e a incompressibilidade.

Por último consideram-se laminados de betão reforçados unicamente na face em tracção com compósitos unidireccionais. Não foram considerados reforços tipo fibras longas unidireccionais dentro da matriz porque este caso não corresponde a nenhuma realidade industrial do momento (o CEM-FIL consiste em fibras curtas dispersas), e porque se pensou sobretudo na reabilitação das estruturas de betão. Foram consideradas estruturas de betão reforçado com compósitos e de betão armado reforçado com compósitos.

10.2 - SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

No decurso deste trabalho foram surgindo ideias e dificuldades que permitem perspectivar algumas áreas de trabalho futuro :

- desenvolvimento das teorias de deformação de ordem superior no contexto das formulações de deformações assumidas;
- implementação destas teorias em códigos de análise dinâmica, particularmente em análise explícita, no contexto do amortecimento de ruído e vibrações e no choque a alta velocidade;
- implementação em códigos dinâmicos implícitos para fenómenos de menor velocidade, como o impacto de baixa velocidade, considerando particularmente as estruturas sandwich, relativamente pouco estudadas neste contexto;
- desenvolvimento de elementos de interface casca-sólido para a modelação de estruturas sandwich;
- desenvolvimento e aperfeiçoamento dos modelos bifásicos à luz de teorias micromecânicas, que permitam assegurar dos efeitos das interfaces fibra-matriz, aqui não considerados;