RESUMO

Equações não lineares surgem em quase todas as áreas da Engenharia e da Física, sendo por isso de importância fundamental a existência de métodos para determinar as suas raízes. Infelizmente, como a determinação de soluções por métodos analíticos não é possivel na maioria dos casos, a construção e aplicação de métodos numéricos eficientes é essencial. O método de decomposição de Adomian tem sido aplicado com sucesso na obtenção de soluções exactas ou aproximadas de problemas lineares, não lineares, estocásticos ou determinísticos. Uma das vantagens do método é a obtenção da solução sob a forma de uma série rapidamente convergente. No entanto, isto não parece ser bem o caso quando o método é aplicado na resolução de equações não lineares, podendo-se encontrar na literatura diversas variações do método. Neste trabalho é construido um novo método iterativo baseado no método de decomposição de Adomian. A convergência e a ordem cúbica deste novo método são demonstradas.

Outra das aplicações do método de decomposição de Adomian é na resolução de equações em derivadas parciais. Sempre que a solução exacta não seja identificável a partir da série solução, a truncagem da série torna-se necessária. Uma desvantagem que daí pode advir é o raio de convergência da série ser pequeno. Aproximantes de Padé têm sido usados por diversos autores para alargar o domínio de convergência da série solução de equações diferenciais ordinárias, tendo sido obtidos bons resultados. Neste trabalho esta técnica é aplicada a equações não lineares em derivadas parciais, em particular à equação de Burgers. Só recentemente e paralelamente ao desenvolvimento deste trabalho, o uso de aproximantes de Padé aplicados à solução obtida pelo método de Adomian foi testado em equações em derivadas parciais, equações KdV e mKdV e num exemplo da equação de Boussinesq e de Burgers, onde ilustrações gráficas foram utilizadas para mostrar que a técnica pode alargar o domínio de convergência da solução, tendo sido igualmente referido que a precisão da solução podia ser melhorada pelo aumento da ordem dos aproximantes de Padé usados. Neste trabalho, além das ilustrações gráficas, são também apresentados resultados numéricos que mostram que o uso de aproximantes de Padé não só podem alargar o domínio de convergência da solução, como também podem melhorar a sua precisão. No

entanto, existe uma desvantagem ainda não referida a ter em conta no uso de aproximantes de Padé aplicados à solução obtida pelo método de Adomian: a aproximação obtida pode criar valores errados nas vizinhanças dos polos e dubletos polo/zero (Froissart) da aproximação racional sempre que a solução analítica não é obtida por este meio. É por isso conveniente tentar determinar a ordem óptima do aproximante de Padé a ser usado podendo ser conveniente reduzir a ordem deste.

A aplicação do método de Adomian após discretização espacial por diferenças finitas de uma equação em derivadas parciais, conhecido por método das linhas, é efectuada neste trabalho e mostrado que esta abordagem não tem utilidade, visto o raio de convergência da série solução poder diminuir com o número de pontos espaciais usados. De igual modo, a aplicação de aproximantes de Padé não se mostra útil neste caso.

Para valores baixos do coeficiente de viscosidade, a equação de Burgers pode desenvolver choques e descontinuidades difíceis de simular num computador. Devido ao fenómeno de Gibbs, oscilações podem ocorrer da aplicação de métodos espectrais na resolução das equações. Sob o ponto de vista dinâmico, todas estas instabilidades podem estar relacionadas com a presença de diferentes atractores e bifurcações para diferentes valores do coeficiente de viscosidade, que se podem observar na equação discretizada de Burgers por métodos espectrais. Neste trabalho é estudada a estabilidade, bifurcações e dinâmica de soluções espectrais da equação de Burgers forçada, pelo método de colocação. Na literatura está descrita para a equação de Burgers forçada, a existência de uma bifurcação de Hopf e de uma zona de atracção que surge após a perda de estabilidade das órbitas periódicas com a redução do coeficiente de viscosidade.

Neste trabalho, vários outros fenómenos são observados. Assim, são observados atractores não periódicos, torus e atractores estranhos, para valores mais baixos do coeficiente de viscosidade. Também são observadas situações de bistabilidade com dois atractores periódicos, um periódico e outro não periódico (torus ou atractor estranho) e até com dois atractores não periódicos. Neste último caso, as órbitas não periódicas parecem corresponder a movimentos quasiperiódicos. Outros pontos estáveis de equilíbrio são observados não correspondendo à solução assimptótica da equação de Burgers, podendo aí ocorrer novas bifurcaçes de Hopf, quebrando ou não a simetria que possa eventualmente estar presente no sistema considerado. A discussão sobre as condições necessárias para o surgimento destes fenómenos é também efectuada. Este tipo de comportamento indica que a equação de Burgers pode ser um bom modelo para o estudo de diferentes comportamentos dinâmicos que podem ocorrer em diferentes situações. De igual modo, este tipo de comportamento pode ser usado para o estudo e a implementação de novas técnicas de sincronização de sistemas de elevada dimensão, dado a sua aplicação em muitas áreas tais como telecomunicações.

Condições suficientes de sincronização idêntica de equações de Burger acopladas, por intermédio de uma função de Lyapunov, são estudadas. Como aplicação para o comportamento dinâmico evidenciado pelas soluções espectrais das equações de Burgers é efectuado o estudo de soluções espectrais dessas equações acopladas unidireccionalmente, com e sem valores diferentes do parâmetro (coeficiente de viscosidade). É efectuado o acoplamento com a equação de entrada em regime estacionário, sendo o comportamento da equação de saida variável com o parâmetro de acoplamento, até estabilizar em torno da solução assimptótica. Também é confirmada a presença de sincronização idêntica ou generalizada para acoplamentos entre equações em diversos regimes assimptóticos.

Combinando a substituição parcial, técnica usada para por vezes sincronizar equações diferenciais ordinárias, e um acoplamento não linear apresentado na literatura para sistemas discretos acoplados, é construido um acoplamento não linear entre soluções espectrais da equação de Burgers, obtido por acoplamento em três diferentes posições. É observado que sincronização idêntica ou generalizada é praticamente só alcançada na posição correspondente à velocidade das ondas da equação de Burgers. É também observado o facto da sincronização ser obtida por combinação linear convexa das variáveis de entrada com as da saída, revelando que a substituição parcial pode não conduzir à sincronização do sistema, mas que isso poderá ser conseguido por este tipo de acoplamento não linear.

ABSTRACT

Nonlinear equations arise in all fields of Engineering and Physics, hence being of fundamental importance the existence of methods to find their real roots. As analytical solutions are only available in few cases, the construction of efficient numerical methods are essential. Adomian's decomposition method has been successfully applied to linear and nonlinear problems, stochastic and deterministic, obtaining an exact or approximate solution to the problem. One of its advantage is that it provides a rapid convergent solution series. However, the method applied to nonlinear equations does not seem to be fast enough to be a efficient method to solve these kind of equations and one can find in the open literature some modifications proposed by several authors. By applying the Adomian's decomposition method, a new iterative method to compute nonlinear equations is developed and is presented in this work. The convergence of the new scheme is proved herein and at least the cubic order of convergence is established.

The application of Adomian's decomposition method to partial differential equations, when the exact solution is not reached, demands the use of truncated series. But the solution's series may have small convergence radius and the truncated series may be inaccurate in many regions. In order to enlarge the convergence domain of the truncated series, Padé approximants to the Adomian's series solution have been tested and applied to ordinary differential equations, yielding promising and good results. In this thesis this technique is applied to partial differential equations, particularly to Burgers equation. Only recently, and simultaneously to the development of the work presented in this thesis, Padé approximants were implemented to the series solution given by Adomian's decomposition technique applied to partial differential equations, KdV and mKdV equations, and to an example of the Boussinesq and Burgers equation. Graphical illustrations were used to show that this technique can enlarge the domain of convergence of Adomian's solution. It is also referred that the solution accuracy can be improved by increasing the order of the Padé approximants. In this thesis, besides graphical illustrations, also numerical results are presented to show that this technique can not only enlarge the domain of convergence of the solution but also improves its accuracy even when the actual solution cannot be expressed as the

ratio of two polynomials. In addition, a disadvantage not referred can come through: the rational approximation may create inaccurate solutions near its poles when the real solution is not achieved. This drawback advises the search for the optimal order of the Padé approximant to be used, which can be of lower order.

Also, the application of Adomian's method to the ordinary differential equations set arising from the discretization of the spatial derivatives by finite differences, the so called method of lines, is performed in the present work and it is shown that this is not useful, because this technique may reduce the convergence domain of the series solution. Also, the application of Padé approximants is not useful in this case.

For low values of the viscosity coefficient, Burgers equation can develop sharp discontinuities, which are difficult to simulate in a computer. Oscillations can occur by discretization through spectral collocation methods, due to Gibbs phenomena. Under a dynamic point of view, all these instabilities may be related to the presence of different attractors and bifurcations arising to the discretized equations for different values of the viscosity coefficient. In this thesis it is studied the stability, bifurcation and dynamics of spectral collocation methods applied to forced Burgers equations, where the unknown solution of the differential equation is expanded as a global interpolant. In the open literature, it is described to the forced Burgers equation the presence of a trapping region, arising from the loss of stability of the periodic orbits arising from an Hopf bifurcation.

In this work several other phenomena are observed. In fact, it is observed the existence of nonperiodic attractors, torus and strange attractors, for lower values of the parameter below the Hopf point. Also observed is the presence of bistability with two periodic attractors, with a periodic attractor and a nonperiodic one (torus or strange attractor) and even with two nonperiodic attractors. In this last case, the nonperiodic orbits seem to correspond to quasiperiodic motions. During this work, it was verified that other stable equilibrium points can occur, diverse from the ones corresponding to the asymptotic solution of Burgers equation, and that new Hopf points can occur, breaking (or not breaking) the symmetry of the system, if present. Discussion of the necessary conditions for the emergence of these phenomena is also presented. This rich behavior indicates that Burgers equation is a good model for the study of several dynamical behaviors that can occur in many other situations. Also, this kind of behavior can be used to study and to implement new techniques of synchronization of high dimensional systems, very useful due to its application on several areas, as telecommunications.

Sufficient conditions for identical synchronization of coupled Burgers equations, by means of a Lyapunov function, is present. As an application for the dynamics apparent by spectral solutions of forced Burgers equations, unidirectionally coupling of these equations, with and without parameter mismatch, is also studied. It is tested the unidirectionally coupling with a drive forced spatially spectral discretized Burgers equation in stationary regime and the driven equation in any motion regime. It is found out that increasing the coupling strength it is possible to carry out the suppression of the corresponding motion till the stationary solution is reached. Numerical studies show and confirm the presence of identical and generalized synchronization for different values of spacial points and different values of the viscosity coefficient in several regimes.

By combining the partial replacement used sometimes to synchronize ordinary differential equations and a nonlinear coupling presented in the literature for discrete coupled systems, a nonlinear coupling for spectral solutions of Burgers equations in three locations of the response discretized equation, is constructed. It is observed that identical or generalized synchronization is almost all the time only achieved at the position corresponding to the waves velocity, by a convex linear combination of the drive and driven variables. This point out the fact that although the partial replacement may not reach synchronization, nonlinear coupling may do it.