

## Resumo

Nesta dissertação consideraremos o problema de valores próprios

$$Tf = \lambda f, f \neq 0, f \in X$$

onde  $T$  é um operador linear compacto definido num espaço de Banach  $X$ , e trataremos os casos em que  $T$  é um operador contínuo em  $X$  ou um operador fechado, de domínio  $D$  denso em  $X$ .

Tradicionalmente este problema é resolvido discretizando  $T$  num espaço  $X_N$  de dimensão finita e resolvendo o correspondente problema matricial de valores próprios,

$$A_N x_N = \lambda x_N, x_N \neq 0$$

Se  $N$  é suficientemente grande a solução deste problema aproxima a do problema dado, em sentido a precisar no capítulo 1.

A resolução do problema (1) tem geralmente um elevado custo computacional, em tempo de cálculo e em memória de computador, particularmente quando  $T$  é um operador integral, visto que, neste caso, a matriz  $A_N$  de discretização é densa.

Uma das tendências actuais da Análise Numérica para ultrapassar estes problemas é a procura de métodos de refinamento de soluções aproximadas

( ver, por exemplo, [1], [3], [4], [7], [10], [11], [13], [16], [17], [18], [21], [22], [23], [24], [26], [27], [28], [29], [31] ).

As fórmulas de refinamento que propomos permitem melhorar iterativamente uma solução aproximada obtida por um dos métodos clássicos a partir de uma discretização  $T_n$  de  $T$ , num subespaço  $X_n$  de  $X$  de pequena dimensão  $n$  (tipicamente, nos exemplos tratados, tomamos  $n = 10$ ), sem resolver directamente o problema de valores próprios de discretizações mais finas.

O operador  $T$  ( ou uma sua discretização  $T_N$  num subespaço  $X_N$  de dimensão finita  $N \gg n$  ) intervem apenas para calcular os valores  $Tx$  ( ou  $T_N x_N$  ), onde  $x \in X$  (  $x_N \in X_N$  ).

Os métodos de refinamento distinguem-se dos métodos iterativos comuns pelo facto de partirem já de uma solução aproximada do problema e de não aumentarem a dimensão da discretização de  $T$ . A resolução do problema matricial de valores próprios, da discretização de  $T$ , é feita uma única vez ( no subespaço  $X_n$  ).

Neste trabalho propomos 5 fórmulas de refinamento iterativo e fazemos o seu estudo comparativo não só do ponto de vista teórico como também do ponto de vista das aplicações que exemplificamos com um conjunto de testes escolhidos.

A primeira fórmula baseia-se na aplicação da teoria das perturbações de Kato [20] ao problema de valores próprios, proposta por Chatelin [13] e estabelece uma ligação entre a Análise Funcional e a Análise Numérica.

As restantes fórmulas de refinamento foram obtidas no contexto do método iterativo de correcção do resíduo [31]. Utilizando noções de Análise Funcional e Teoria Espectral ( nomeadamente a definição de Operador Resolvente, Projecção Espectral e Resolvente Reduzido ) definem-se casos particulares do método de correcção do resíduo para a resolução aproximada do problema (1), cujas iterações são iterações de refinamento. A sua convergência é estabelecida a partir de uma aproximação inicial  $T_n$  de  $T$  uniforme ou fortemente estável ( os correspondentes conceitos de convergência são dados no capítulo 1 ).

Se uma das linhas condutoras deste trabalho é a aplicação da Análise Funcional para obter resultados úteis em Análise Numérica, outra é a demonstração da aplicabilidade prática desses resultados e a discussão de alguns pontos da sua implementação numérica efectiva. Assim, o interesse dos testes descritos no capítulo 4 é, mais do que apresentar a solução dos problemas de valores próprios respectivos, mostrar as características práticas de cada um dos métodos, em diferentes situações, e assim dar uma ideia comparativa do seu comportamento.

No capítulo 1 recordam-se noções fundamentais de Análise Funcional, Teoria Espectral, de convergência de operadores lineares, e ainda os métodos clássicos de discretização de operadores integrais de Fredholm.

No capítulo 2 apresentam-se as fórmulas de refinamento, descreve-se o modo como foram obtidas, demonstram-se as suas propriedades de convergência e estabelecem-se os métodos numéricos correspondentes.

Enquanto que no § 2.1 se considera a iteração por desenvolvimento em série de perturbação, no § 2.2 consideram-se as iterações baseadas no método iterativo de correcção do resíduo. Para isso introduz-se uma extensão da definição de inverso aproximado de Stetter, e estudam-se as propriedades deste operador. Em seguida interpretam-se alguns métodos iterativos obtidos noutros contextos, como casos particulares do método de correcção do resíduo.

Finalmente, da aplicação desta técnica iterativa ao problema (1) resultam os métodos I a IV do refinamento cujo estudo comparativo é feito no § 2.3.

O capítulo 3 é dedicado á implementação numérica destes métodos pormenorizando no § 3.1., os cálculos a efectuar em  $X_n$  nomeadamente, a representação matricial da projecção espectral e um método numérico de cálculo de valores da resolvente reduzida; no § 3.2 refere-se os cálculos a efectuar em  $X_N$  no § 3.3 contam-se as operações necessárias á implementação do refinamento por desenvolvimento em série de perturbação; e no § 3.4 as operações que os algoritmos de refinamento dos Métodos I a IV envolvem. No § 3.5 comparam-se as 5 formulas de iteração quanto aos respectivos custos em número de operações.

No capítulo 4 apresenta-se ensaios com operadores integrais de Fredholm para obter uma visão mais completa dos comportamentos práticos destes métodos de refinamento.

Finalmente, o capítulo 5 é dedicado a conclusões genéricas respeitantes a estas iterações.

Consideramos original a matéria exposta no capítulo 2, §§ 2.2. e 2.3, no capítulo 3, §§ 3.1.2, 3.1.3, 3.3, 3.4, 3.5, e os algoritmos em Anexo, referentes aos métodos I a IV, e que deram origem aos resultados do capítulo 4.

O conteúdo do § 2.2. ( extensão da definição de inverso aproximado, inclusão de métodos iterativos na estrutura de métodos da correcção do resíduo e formulas de refinamento I a IV ) foi essencialmente obtido em Grenoble, em colaboração com M. Ahues e M. Telias.