DINÂMICA ESTRUTURAL ESTOCÁSTICA

Aplicações à Engenharia Sísmica

Álvaro Alberto de Matos Ferreira da Cunha

624(043) CUNHA/DIN
UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
M
N.º 13356-d
CDU
Data 19/3/1991

Tese de doutoramento em Engenharia Civil pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto 1990

A meu Pai

que me ensinou a soletrar

A minha Mãe

que preferia ver-me lavrador
profissão bem mais saudável
mas igualmente mal remunerada

e à Titó

Sumário

O objectivo essencial do trabalho de investigação levado a cabo no âmbito da elaboração da presente tese consistiu no desenvolvimento de um conjunto de programas de cálculo automático destinados a efectuar a análise estocástica do comportamento dinâmico de sistemas estruturais determinísticos, com funcionamento linear ou não-linear, quando sujeitos a excitações sísmicas aleatórias idealizáveis através de processos estocásticos vectoriais estacionários ou não-estacionários moduláveis.

O texto apresentado serve também para organizar e desenvolver as principais formulações da Dinâmica Estrutural Estocástica passíveis de serem utilizadas para esse fim, e que são particularmente numerosas ao nível dos sistemas não-lineares, dada a inexistência de uma teoria geral e exacta para a abordagem do problema nesta situação.

É atribuída uma importância especial à consideração de não-linearidades de natureza histerético-degradativa, particularmente frequentes no domínio da engenharia civil, destacando-se o papel desempenhado a este nível pelo método de linearização estocástica equivalente, aliado à utilização de modelos histeréticos diferenciais, como o de Bouc-Wen e seus sucedâneos.

A descrição da arquitectura dos programas de cálculo automático desenvolvidos com base nas principais formulações expostas é complementada sistematicamente com a apresentação de exemplos práticos elucidativos, tomando como referência os casos de estruturas reticuladas planas, de cascas (barragens do Alto Lindoso e Caldeirão) e de estruturas do tipo "shear-building".

A finalizar, apresentam-se não só diversas conclusões e considerações adicionais resultantes quer de reflexões diversas àcerca das potencialidades das várias formulações descritas, quer dos exemplos de aplicação tratados, mas também um conjunto de ideias que permitem perspectivar novos tópicos de interesse em termos de investigação, na continuidade de todo o trabalho até agora realizado.

Abstract

The aim of the research work presented in this thesis was the development of software suitable for the stochastic analysis of the dynamic behaviour of deterministic structural linear or non-linear systems under random earthquake excitations, modeled by stationary or non-stationary vectorial stochastic processes.

This dissertation also gives a contribution for the organization and development of the most interesting formulations of the Stochastic Structural Dynamics that can be used for that purpose, particularly in the field of the non-linear systems, in which no general and exact theory to assess that problem exists yet.

Special emphasis is given to the consideration of hysteretic degradative structures, very common in civil engineering problems, as well as to the important role that the equivalent linearization method and the differential hysteretic models, like Bouc-Wen model, can play in this domain.

All the computer programs developed are conveniently described in terms of their arquitecture, and practical examples are sistematically presented, considering the behaviour of plane frames, shells (Alto Lindoso and Caldeirão dams) and shear-buildings.

At the end, the main conclusions of this thesis are underlined and new interesting topics of research are presented in order to continue this work.

Agradecimentos

Embora todo o trabalho de investigação levado a cabo durante os últimos cinco anos, no âmbito da elaboração da presente tese, tenha constituído um esforço de carácter eminentemente pessoal, não posso todavia esquecer que para o seu êxito contribuiram de forma mais ou menos significativa várias pessoas e instituições, às quais me cumpre por esse motivo manifestar a minha sincera gratidão.

Desse modo, sinto-me antes de mais na obrigação de prestar publicamente um agradecimento:

- ao Professor Raimundo Delgado, de quem tive o privilégio de ser assistente ao longo dos últimos cinco anos na disciplina de Dinâmica de Estruturas da FEUP, pela enorme confiança que sempre depositou no meu trabalho, pelo grande empenhamento que sempre colocou no sentido da criação das condições necessárias à sua prossecução, e por diversas sugestões críticas formuladas, em particular na fase final da revisão do texto da tese;
- ao Engenheiro Ricardo Teixeira Duarte, investigador coordenador do Núcleo de Dinâmica Aplicada do LNEC, que, embora tendo apenas acompanhado o meu trabalho ao longo dos últimos dois anos, manifestou porém durante esse tempo uma constante e inexcedível disponibilidade para me receber e comigo trocar impressões àcerca do tema em estudo, tendo com a sua inteligência e a sua vasta cultura, contribuído para o enriquecimento da presente dissertação;
- ao Professor Pol Spanos, que me concedeu a valiosíssima oportunidade de, no ano de 1989, efectuar um estágio de especialização no Departamento de Engenharia Civil da George Brown School of Engineering da Universidade de Rice (Houston, USA), tempo durante o qual, com a sua enorme vivacidade e sabedoria, não só exerceu influência decisiva em termos de

orientação científica do meu trabalho, como também me comunicou uma notável confiança àcerca dos avanços até então por mim realizados;

- ao Doutor Werner Rücker do Laboratório de Engenharia Civil de Berlim Ocidental (Bundesanstalt für Materialprüfung), que, para além de me ter possibilitado a realização de dois estágios de especialização no correspondente Departamento de Dinâmica Aplicada, de que é responsável, constituiu a pessoa que mais cedo me cativou para o estudo da tão aliciante área do saber que é a Dinâmica Estrutural Estocástica;
- ao Professor Fabio Casciati da Universidade de Pavia (Itália), que de uma forma muito prestável e desinteressada se dispôs sempre a enviar-me todo o material científico de maior actualidade e interesse para o desenvolvimento do meu trabalho, contribuindo desse modo para reduzir de alguma forma as grandes dificuldades de pesquisa resultantes das apreciáveis carências das bibliotecas nacionais.

Para além destas cinco pessoas que, pelo seu apoio especialmente valioso, faço questão de distinguir, outras há porém de quem recebi ajudas diversas que muito apreciei, e a quem manifesto a minha gratidão, nomeadamente:

- ao Director-Geral Engenheiro Marques Seabra e ao Director Engenheiro Luís Proença, da Direcção de Equipamento Hidráulico da EDP, pela compreensão e pelo apoio possível dispendido em diversas ocasiões, e que serviram também para testemunhar um forte sentimento de amizade, que é aliás recíproco;
- ao Professor Agostinho Álvares Ribeiro que, tendo desempenhado simultaneamente as funções de Chefe do Departamento de Estudos Gerais da EDP e de professor catedrático da FEUP, me apoiou e incentivou incessantemente;
- aos Professores Aristides Guedes Coelho e Adão da Fonseca, da Secção de Estruturas da FEUP, pelas importantes palavras de incentivo recebidas na fase inicial do meu trabalho;

- aos colegas Elsa Caetano e Rui Faria pela colaboração prestada na realização de algumas aplicações de cálculo automático;

- aos senhores Manuel Carvalho e Homero Aguiar pelos excelentes trabalhos de processamento de texto e de desenho que desenvolveram.

Finalmente, e no que respeita a instituições envolvidas, cumpre-me realçar de forma especial o papel desempenhado:

- pela Electricidade de Portugal (EDP), empresa pública a cujos quadros me orgulho de pertencer desde 1979, e que, com as suas excelentes condições e ambiente de trabalho, contribuiu significativamente para o meu desenvolvimento técnico-científico;

- pelo Instituto Nacional de Investigação Científica (que subsidiou a presente publicação), pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, pela Deutscher Akademischer Austauschdienst, pelo American Cultural Council e pelas Fundações Calouste Gulbenkian e Engº António de Almeida, em virtude dos apoios financeiros que em ocasiões diversas me proporcionaram.

ÍNDICE

Introdução xxv

Importância, antecedentes e evolução histórica da Dinâmica Estrutural Estocástica xxv

Objectivo e justificação do trabalho de investigação realizado XXX

Descrição sumária da tese xxxii

1 Elementos da Teoria dos Processos Estocásticos 1

1.1 Introdução 1

1.2 Noção de campo estocástico multidimensional e plurivariado e de processo estocástico 2

1.3 Caracterização completa da estrutura probabilística de um processo estocástico 3

1.4 Principais grandezas estatisticas utilizadas na caracterização de processos estocásticos 8

1.5 Convergência, continuidade, derivabilidade e integrabilidade de processos estocásticos 9

1.6 Processos estocásticos estacionários 12

1.6.1 Noções de homogeneidade e de estacionaridade 12

1.6.2 Propriedades da função de auto-correlação 13

1.6.3 Função densidade espectral de potência 15

1.6.4 Relação de Wiener-Khintchine 18

1.6.5 Ergodicidade 22

1.6.6 Funções de auto-correlação e densidade espectral de potência de processos obtidos por sobreposição 26

1.6.7 Funções de auto-correlação e densidade espectral de potência de processos obtidos por sobreposição 28

1.7 Processos estocásticos não-estacionários 29

1.7.1 Espectro de potência de dupla frequência 30

1.7.2 Espectro de potência de Bendat e Piersol 30

1.7.3 Espectro de potência evolutivo de Priestley 31

1.8 Processos estocásticos do tipo (1D-1V) e (1D-NV) mais utilizados na modelação física 35

1.8.1 Processos de Gauss 35

1.8.2 Processos de Poisson, de impulsos aleatórios e ruído branco 43

1.8.3 Processos de Markov 46

1.8.4 Processos de Wiener 51

1.9 Propriedades importantes dos processos estocásticos relacionadas com o dimensionamento estrutural 52

1.9.1 Frequência média de passagens ascendentes por um dado nível 53

1.9.2 Distribuição de probabilidade dos máximos relativos 56

1.9.3 Distribuição de probabilidade de um extremo absoluto num intervalo de tempo de duração T 60

1.9.4 Distribuição de probabilidade da envolvente 67

1.9.5 Distribuição de probabilidade dos tempos de primeira passagem 77

2 Resposta de sistemas lineares a excitações aleatórias estacionárias 89

2.1 Introdução 89

2.2 Sistemas lineares de 1-GL 91

2.2.1 Relações determinísticas excitação-resposta no dominio do tempo e no domínio da frequência 91

2.2.2 Relações estocásticas excitação-resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência 95

2.2.3 Avaliação do valor médio dos picos de resposta 99

2.2.4 Resposta a uma excitação aleatória do tipo ruído branco 99

2.2.5 Resposta a uma excitação aleatória do tipo ruído branco filtrado 101

2.3 Sistemas lineares de N-GL 107

2.3.1 Relações determinísticas excitação-resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência 107

2.3.2 Relações gerais estocásticas excitação-resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência 110

2.3.3 Formulação modal alternativa 114

2.3.4 Caracterização probabilística de variáveis de controlo relacionadas linearmente com as N coordenadas generalizadas ou suas derivadas 123

2.3.5 Resposta a uma excitação modal do tipo ruído branco 126

2.3.6 Resposta a uma excitação modal do tipo ruído branco filtrado 128

2.3.7 Relações gerais estocásticas excitação-resposta mediante a introdução de variáveis de estado 131

2.3.8 Formulação de estado modal 138

2.3.9 Formulação de estado modal complexa 142

2.3.10 Sobreposição de excitações aleatórias estacionárias 146

2.4 O caso da análise da resposta sísmica. Relação entre as abordagens estocastica e determinística 148

2.4.1 Obtenção de um espectro de resposta a partir de um espectro de potência da aceleração de base 149

2.4.2 Utilização dos coeficientes de correlação espectral para correcção da ponderação quadrática no método dos espectros de resposta 154

2.5 Desenvolvimento de "software" no domínio da engenharia sísmica. Exemplos de aplicação 158

2.5.1 Caracterização das acções sísmicas de acordo com o Regulamento de Segurança e Acções 159

2.5.2 Aplicação a analise sísmica de estruturas reticuladas planas. Descrição dos programas PROG1, PROG2 e PROG3 161

2.5.3 Exemplos de aplicação 176

2.5.4 Aplicação a análise sísmica de cascas. Descrição do programa de cálculo automático PROG4 180

2.5.5 Exemplos de aplicação. Os casos das barragens do Alto Lindoso e do Caldeirão 189

3 Resposta de sistemas lineares a excitações aleatórias não-estacionárias 221

3.1 Introdução 221

3.2 Sistemas lineares de 1-GL 223

3.2.1 Relações estocásticas excitação-resposta relativas ao modelo de Bendat e Piersol 223

3.2.2 Relações estocásticas excitação-resposta relativas ao modelo de Priestley 226

3.2.3 Evolução temporal das características espectrais da resposta a uma excitação pseudo-não-estacionária 228

3.2.4 Caracterização da fiabilidade do sistema 232

3.3 Sistemas lineares de N-GL 233

3.3.1 Análise estocástica da evolução temporal da resposta mediante o recurso a variáveis de estado 234

3.3.2 Formulação de estado modal alternativa 237

3.3.3 Avaliação da fiabilidade estrutural 239

3.4 Desenvolvimento de "software" no domínio da engenharia sísmica. Exemplo de aplicação 241

3.4.1 Modelos não-estacionários da excitação sísmica 241

3.4.2 Aplicação a análise sísmica de estruturas reticuladas planas. Descrição dos programas de cálculo automático PROG5 e PROG6 243

3.4.3 Exemplo de aplicação 253

4 Métodos de análise da resposta aleatória de sistemas não-lineares 273

4.1 Introdução 273

4.2 Abordagem Markoviana baseada na solução da equação de Fokker-Planck-Kolmogorov 276

4.3 Soluções aproximadas da equação de FPX. O método da média estocástica 285

4.4 O método de perturbação 289

4.5 O método de linearização estocástica equivalente 291

4.5.1 Conceito de sistema linear equivalente 291

4.5.2 Formulação do método para sistemas de N-GL com não-linearidades simétricas sujeitos a excitações estacionárias de média nula 293

4.5.3 A hipótese da natureza gaussiana da resposta e as condições de Atalik-Utku 299

4.5.4 Alguns aspectos práticos sobre a utilização do método de linearização equivalente 301

4.5.5 Consideração de não-linearidades não-simétricas ou de excitações estacionárias de média não-nula 303

4.5.6 Extensão do método a analise da resposta a excitações não-estacionarias moduláveis 305

4.5.7 Precisão dos resultados obtidos 312

4.6 O método de não-linearização estocástica equivalente 313

4.7 Os métodos de truncatura gaussiana e não-gaussiana 316

4.8 Técnicas de simulação analógica ou digital 325

4.9 Resumo e conclusões 329

4.10 Desenvolvimento de "software" no domínio da engenharia sísmica 332

4.10.1 Aplicação da linearização estocástica equivalente a análise da resposta sísmica estacionária de um "shear-building" com comportamento bilinear elástico 332

4.10.2 Descrição do programa de cálculo automático PROG7 338

4.10.3 Exemplos de aplicação 342

5 Análise da resposta aleatória de sistemas histeréticos pelo método de linearização estocástica equivalente 362

5.1 Introdução 362

5.2 Os métodos de Caughey e de Goto e Iemura para análise da resposta estacionária de sistemas de I-GL 364

5.3 Aplicação do método de Caughey à análise da resposta estacionária de sistemas com comportamento bilinear histerético 367

5.4 A hipótese restritiva de Krylov-Bogoliubov e a utilidade dos modelos histeréticos diferenciais 371

5.5 Descrição e utilização de modelos histeréticos diferenciais 375

5.5.1 O modelo de Bouc-Wen. Sua versatilidade e significado dos parâmetros intervenientes 375

5.5.2 Consideração da degradação de rigidez e de resistência através do modelo de Baber-Wen 381

5.5.3 Identificação dos parâmetros do modelo de Baber-Wen e sua validação experimental 383

5.5.4 Linearização do modelo diferencial de Baber-Wen 386

5.5.5 Resposta de sistemas de 1-GL caracterizados pelo modelo de Baber-Wen a excitações aleatórias de média nula 389

5.5.6 Consideração de excitações de valor médio não-nulo 391

5.5.7 Idealização do efeito de "pinching" através do modelo de Noori-Baber-Wen 393

5.5.8 O modelo bi-axial de Park-Wen 400

5.5.9 O modelo de Mochio-Samaras-Wen para problemas planos de tensão ou de deformação 405

5.5.10 Os modelos diferenciais multilineares de Suzuki e Minai 406

5.6 Resposta aleatória de sistemas histeréticos de N-GL caracterizados por modelos diferenciais simétricos 411

5.6.1 Análise da resposta estacionára 411

5.6.2 Análise da resposta não-estacionária 414

5.7 Aplicação dos modelos de Wen a análise estocástica da resposta sísmica de estruturas porticadas planas. Desenvolvimento de "software" de aplicação 415

5.7.1 Modelos estruturais utilizáveis 415

5.7.2 Resposta sísmica estacionária ou não-estacionária de estruturas tipo "shear-building" 418

5.7.3 Formulação modal complexa alternativa para análise da resposta não-estacionária 425

5.7.4 Descrição dos programas de cálculo automático PROG8 e PROG9 430

5.7.5 Exemplos de aplicação 436

5.7.6 Resposta sísmica estacionária ou não-estacionária de pórticos planos com rótulas não-lineares histeréticas nas extremidades das barras 453

6 Conclusões e considerações finais 461

6.1 Conclusões gerais relativas a sistemas lineares 462

6.2 Conclusões gerais relativas a sistemas não-lineares 465

6.3 Perspectivas de investigação futura 469

Apêndice A 473

Apêndice B 475

Bibliografia 477

Programas de cálculo automático desenvolvidos

PROG1

Programa de análise estocástica da resposta aleatória de estruturas reticuladas planas com comportamento linear elástico, sujeitas a excitações sísmicas idealizadas através de uma amostra de certa duração de um processo estocástico estacionário de valor médio nulo e densidades espectrais de potência conhecidas, tomando por base a utilização de uma formulação modal.

PROG2

Programa alternativo de análise estocástica da resposta sísmica estacionária de estruturas reticuladas planas com comportamento linear elástico baseado numa formulação de estado, sendo a matriz de covariância da resposta obtida através da resolução de uma equação de Liapunov.

PROG3

Programa de análise sísmica de estruturas reticuladas planas de funcionamento linear elástico através do recurso aos espectros de resposta regulamentares, e efectuando uma ponderação quadrática corrigida das diversas contribuições modais baseada na utilização dos coeficientes de correlação espectral referidos por Kiureghian.

PROG4

Programa de análise estocástica do comportamento dinâmico de cascas em regime elástico e linear, sujeitas a acções sísmicas caracterizadas através das densidades espectrais de potência conjuntas relativas às três componentes de translação do movimento de base definidas pelo Regulamento de Segurança e Acções.

PROG5

Programa de análise estocástica da resposta aleatória não-estacionária de uma estrutura reticulada plana em regime elástico e linear sujeita a um movimento sísmico horizontal idealizado através de um ruído branco evolutivo.

PROG6

Programa de análise estocástica da resposta aleatória não-estacionária de uma estrutura reticulada plana com comportamento elástico e linear sujeita a um movimento sísmico horizontal idealizado através de um processo não-estacionário modulável do tipo ruído branco filtrado.

PROG7

Programa de análise estocástica da resposta aleatória estacionária de uma estrutura de tipo "shear-building" de comportamento bilinear elástico, sujeita a um movimento sísmico horizontal caracterizado pelos espectros de potência regulamentares, tomando por base o método de linearização estocástica equivalente.

PROG8

Programa de análise estocástica da resposta sísmica estacionária de uma estrutura de tipo "shear-building" com comportamento histerético idealizado através do modelo diferencial de Bouc-Wen, baseado no método de linearização equivalente e na utilização de uma formulação de estado em que a matriz de covariância da resposta é obtida através da resolução de uma equação de Liapunov.

PROG9

Programa de análise estocástica da resposta sísmica não-estacionária de uma estrutura de tipo "shear-building" com comportamento histerético idealizado através do modelo diferencial de Bouc-Wen, elaborado mediante o recurso ao método de linearização equivalente, e seguindo uma formulação modal complexa.

"The necessity of a theory of stochastic processes for the description of physical phenomena in a conceptually, analytically, and computationally tractable form is by now understood and accepted, and the steady trend in theories from linear--deterministic to nonlinear and stochastic must be regarded as the primary goal of future research efforts."

Bellman (1960)

"More than two decades later that prediction can be seen to be proven true. The use of probabilistic methods has been adopted for forced upon researches and designers in all the engineering disciplines, biosciences and econometrics."

Benaroya (1984)

INTRODUÇÃO

1 - IMPORTÂNCIA, ANTECEDENTES E EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA DINÂMICA ESTRUTURAL ESTOCÁSTICA

A necessidade cada vez mais sentida de quantificar de forma bastante rigorosa o efeito que, sobre o comportamento das estruturas, é exercido por forças associadas a diversos fenómenos naturais, apenas susceptíveis de serem convenientemente caracterizados em termos probabilísticos, fruto de diversas aleatoriedades de natureza temporal e espacial, fez recair sobre a Teoria das Probabilidades um papel da maior relevância no âmbito da Dinâmica Estrutural, à semelhança aliás do que tem vindo a suceder noutras áreas da Engenharia, das Ciências da Terra e da Economia.

Desse modo, é hoje viável a aplicação de métodos probabilísticos à análise de problemas tão diversos como o da quantificação dos efeitos dos sismos ou do vento sobre edifícios, pontes e barragens, do efeito das ondas do mar sobre estruturas oceânicas, de pressões exercidas sobre aviões ou engenhos aeroespaciais em resultado de fenómenos de turbulência, ou da irregulariedade dos pavimentos sobre veículos automóveis.

Nesse sentido, não só foram criados modelos matemáticos capazes de permitir uma adequada caracterização de diferentes tipos de excitações de natureza aleatória, como também foram desenvolvidas formulações teóricas com vista à quantificação dos seus efeitos sobre o comportamento estrutural.

E se inicialmente o recurso a abordagens probabilísticas era essencialmente justificado pela natureza aleatória das acções actuantes, recentemente o seu campo de aplicação tem-se tornado cada vez mais vasto, podendo contemplar-se a própria incerteza estatística associada à definição das propriedades estruturais.

Por outro lado ainda, do estudo de problemas locais ou de curto prazo, como a análise da resposta estrutural a uma excitação aleatória idealizada de forma estocástica, tem-se tentado passar ao estudo de problemas globais ou de longo prazo, nos quais se procura caracterizar a evolução temporal da fiabilidade estrutural de um sistema submetido a uma sequência de múltiplas acções aleatórias ao longo do seu período de vida útil, como pode suceder, por exemplo, com as estruturas de edifícios sujeitas a sucessivas acções sísmicas, ou com estruturas aeronáuticas na sequência da realização de um grande número de voos [202].

Apesar de os principais trabalhos de investigação no campo da Dinâmica Estrutural Estocástica terem surgido somente a partir dos anos sessenta, e de os conhecimentos relativos a esta área se encontrarem bem menos disseminados por entre estudantes e investigadores que os relativos à Dinâmica Estrutural Determinística, data logo do início do século a primeira aplicação de métodos estocásticos ao estudo de fenómenos físicos. Com efeito, foi Einstein [98] quem pela primeira vez utilizou o conceito de processo estocástico na modelação do movimento Browniano de partículas livres, campo em que se registaram posteriormente outras contribuições valiosas até aos anos quarenta, designadamente por parte de Smoluchowski [208], Fokker [103], Planck [179], Ornstein [163], Uhlenbeck [233] e Wang [244].

Não foi, no entanto, apenas nesses desenvolvimentos teóricos registados no mundo da Física que se veio posteriormente a apoiar a Dinâmica Estrutural Estocástica, já que entretanto outros estudos de grande utilidade tiveram lugar nos domínios da teoria do controlo de sistemas e da teoria das comunicações, de que é paradigma a notável publicação de Rice [188], para além de, em paralelo com todos esses trabalhos de físicos e electrotécnicos, se ter consolidado uma sólida teoria matemática ligada aos processos estocásticos e à análise espectral, campo em que se destacam os contributos de Wiener [254], Khintchine [127] e Kolmogorov [134].

Foi porém apenas no decorrer da década de cinquenta que a Dinâmica Estrutural Estocástica recebeu um forte impulso no âmbito do estudo de vibrações em fuselagens de aviões a jacto causadas quer pela

excitação acústica dos motores, quer por fenómenos de turbulência atmosférica [183]. Simplesmente, do aproveitamento de todo o trabalho anterior levado a cabo nos domínios da Física, da Matemática e da Electrotecnia, resultou com relativa facilidade uma teoria geral de análise do comportamento dinâmico de sistemas lineares sujeitos a excitações aleatórias gaussianas, posteriormente utilizada em variados domínios, nomeadamente na análise probabilística da resposta de estruturas oceânicas às acções das ondas do mar [218], de estruturas de edifícios e pontes a acções sísmicas [93, 237] ou do vento [81], e de veículos automóveis ou comboios devido às irregularidades do pavimento ou dos carris de apoio [198].

Sucede contudo que muitos dos sistemas estruturais apresentam acentuadas formas de comportamento não-linear, tanto mais nítido quanto mais severas são as excitações actuantes e mais elevado é o nível das vibrações provocadas, facto que é, por exemplo, particularmente importante em estruturas de edifícios sujeitas a acções sísmicas.

Por essa razão, boa parte dos trabalhos de investigação a nível mundial têm incidido, especialmente ao longo das últimas três décadas, sobre a análise estocástica do comportamento dinâmico de sistemas não-lineares, muito embora os problemas que se colocam nesta área apresentem bem maior delicadeza e complexidade, dado não se ter conseguido ainda estabelecer uma teoria geral e exacta para o tratamento desta questão.

Sendo a excitação idealizável através de um ruído branco gaussiano, pode comprovar-se, atendendo à teoria matemática das equações diferenciais estocásticas, que a resposta pode ser traduzida por um processo de Markov [8, 47], obedecendo a correspondente função densidade de probabilidade de transição a uma equação diferencial estabelecida por Fokker, Planck e Kolmogorov.

Simplesmente esta forma de abordagem do problema, embora constitua actualmente a única via susceptível de conduzir a resultados exactos, é fortemente restritiva, particularmente nos casos de excitações

não-estacionárias e de sistemas de múltiplos graus de liberdade, em virtude da inexistência de um procedimento geral para obtenção da solução analítica daquela equação diferencial [47].

Nessas circunstâncias, não é de estranhar que se tenha registado um grande número de tentativas de exploração de abordagens aproximadas, umas vezes baseadas na equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, e outras nas próprias equações de equilíbrio dinâmico [34, 191, 192, 227].

Embora sejam extremamente numerosos os métodos aproximados ensaiados, encontrando-se as respectivas formulações publicadas em teses, relatórios de investigação, comunicações de conferências e revistas internacionais, todos eles enfermam de limitações mais ou menos acentuadas.

De entre todas as vias possíveis de análise, destacam-se porém o método de linearização estocástica equivalente [212] e as técnicas de simulação digital [201] como aquelas que encerram maiores potencialidades no que concerne ao tratamento de estruturas de relativa complexidade, pesem embora algumas reservas que possam ser colocadas ao nível do rigor da análise de valores extremos da resposta não-gaussiana, no primeiro caso, ou da eficiência do método em termos de tempo de cálculo dispendido, no segundo.

Por esse motivo, as mais recentes aplicações de maior interesse prático dos métodos de análise estocástica no domínio da engenharia sísmica têm-se apoiado nessas duas vias, procurando-se simultaneamente ter em consideração o comportamento não-linear e o comportamento histerético-degradativo característico das estruturas de engenharia civil mais correntemente analisadas.

Para o efeito, houve necessidade de recorrer a modelos de comportamento histerético que não só traduzissem com suficiente fidelidade o funcionamento estrutural, como também fossem susceptíveis de proporcionar um tratamento matemático eficiente do problema. Nesse sentido, e por esta última razão, tornou-se conveniente traduzir o comportamento histerético dos sistemas mediante a consideração de variáveis auxiliares endócrinas, reguladas por equações diferenciais não-lineares, capazes de reflectir, em cada instante, a influência

da história passada [32, 251], podendo vários dos parâmetros nelas intervenientes, condicionadores da configuração dos ciclos histeréticos, ser determinados com base em técnicas de identificação de sistemas que entretanto têm vindo a ser desenvolvidas [220, 252].

De facto, se é certo que os modelos histeréticos baseados em leis empíricas de carga-descarga [59], como os modelos bilinear, de Ramberg-Osgood, Clough, Takeda, ou de Costa e Costa são passíveis de fácil utilização quando se envereda pela via determinística de integração no tempo, e portanto também quando se recorre a técnicas de simulação digital, já o mesmo não sucede quando se procura seguir o método de linearização estocástica equivalente. Então, é francamente preferível recorrer a modelos diferenciais como o introduzido por Bouc e Wen, e mais recentemente desenvolvido por Baber [19], Noori [159], Park [169], Mochio e Samaras [155], possibilitando também simular os efeitos da degradação de rigidez e resistência, o efeito de "pinching", e mesmo a abordagem de problemas de flexão bidireccional de peças lineares, ou de estados de tensão plana.

Para além disso, tem-se registado um esforço crescente por incrementar o nível de sofisticação dos modelos estruturais utilizados, passando, por exemplo no caso da análise sísmica de estruturas porticadas, da consideração de modelos planos do tipo "shear-building" para modelos planos com rótulas inelásticas usualmente localizadas nas extremidades das barras [19, 37], ou mesmo, ainda mais recentemente, para modelos tridimensionais [42].

Desta forma, a evolução sofrida pela Dinâmica Estrutural Estocástica na óptica da Engenharia Sísmica, ao longo dos últimos anos, embora não possa classificar-se de extraordinariamente rápida, por virtude da grande complexidade do tema tratado, tem sido todavia suficientemente segura e progressiva para que se deva procurar utilizá-la como ferramenta de análise e dimensionamento no âmbito da Engenharia de Estruturas.

2 - OBJECTIVO E JUSTIFICAÇÃO DO TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO REALIZADO

A escolha do tema da presente dissertação resultou de um esforço de detecção e eliminação de algumas das principais lacunas sentidas ao nível da investigação nas áreas da Dinâmica de Estruturas e Engenharia Sísmica da Faculdade de Engenharia do Porto, tendo-se para o efeito procurado confrontar o conteúdo de anteriores trabalhos de pesquisa nesse domínio, levados a cabo por investigadores da FEUP, com aquilo que se pode considerar porventura um dos mais ambiciosos desideratos que se podem colocar naquela área do saber, e que é o de procurar dispor de meios de análise e de dimensionamento de sistemas estruturais com comportamento linear, não-linear e eventualmente histerético, quando sujeitos a excitações dinâmicas de qualquer natureza (determinística ou aleatória), podendo inclusivamente ter-se em linha de conta uma caracterização probabilística das propriedades da estrutura, ou seja, contemplando também as questões relativas à estocasticidade do próprio sistema.

Raciocinando desse modo, pôde concluir-se com facilidade que até 1985 era ainda relativamente escasso o trabalho de investigação desenvolvido na Secção de Estruturas da FEUP no âmbito da Dinâmica de Estruturas e da Engenharia Sísmica, para o que, por certo, terá contribuido em larga medida a reduzida importância atribuida durante várias décadas, pela anterior regulamentação portuguesa de estruturas, às acções sísmicas na análise e dimensionamento de estruturas localizadas na zona norte do território nacional.

Simultaneamente, pôde também constatar-se que todos os estudos até então realizados, exclusivamente virados para o desenvolvimento de modelos numéricos, e essencialmente da autoria de Delgado [85], se basearam apenas na utilização de formulações de carácter determinístico, pressupondo a natureza linear dos sistemas estruturais, e efectuando a análise da resposta através de métodos de integração no tempo ou da técnica de sobreposição modal, sendo a caracterização da acção sísmica realizada em termos de acelerogramas tipo ou de espectros de resposta.

Por outro lado, verificou-se ainda que, embora o panorama fosse substancialmente diferente em termos nacionais, essencialmente fruto de uma notável tradição de investigação nos domínios da Dinâmica de Estruturas e da Engenharia Sísmica registada ao longo das últimas três décadas no Laboratório Nacional de Engenharia Civil, para o que em muito contribuiram nomeadamente os trabalhos de Ferry Borges, Ravara [185], Jervis Pereira [173], Teixeira Duarte [93] e Sousa Oliveira [161], muito raras e pontuais foram as incursões registadas no campo da aplicação dos métodos probabilísticos à análise dinâmica de sistemas não-lineares.

Nestas circunstâncias, entendeu-se do máximo interesse desenvolver, ao longo dos últimos cinco anos, um trabalho de investigação na área da Dinâmica Estrutural Estocástica, compreendendo duas vertentes distintas, nomeadamente:

a) o desenvolvimento de meios experimentais para a análise do comportamento dinâmico de estruturas sujeitas a vibrações aleatórias;

b) o desenvolvimento de modelos numéricos vocacionados para a análise estocástica da resposta dinâmica de sistemas lineares e não-lineares sujeitos a excitações de carácter aleatório, em particular de origem sísmica.

Dada a grande vastidão dos assuntos envolvidos, julgou-se conveniente restringir o tema da presente dissertação a este último domínio, relegando a apresentação de algum do trabalho realizado no campo experimental para diversas comunicações já publicadas e a publicar conjuntamente com outros investigadores da FEUP [87-89].

Deste modo, todo o trabalho subjacente à elaboração da presente tese teve como objectivo nuclear proceder ao desenvolvimento de programas de cálculo automático dirigidos especialmente para a análise estocástica da resposta sísmica (linear ou não-linear, estacionária ou não-estacionária) de estruturas de engenharia civil, servindo o seu texto igualmente de repositório escrito de um vasto e sistemático

trabalho de pesquisa, que serviu para concatenar, organizar e desenvolver as principais formulações teóricas da Dinâmica Estrutural Estocástica passíveis de serem utilizadas para esse fim.

Nestas circunstâncias, julga-se pois que o esforço de investigação realizado se reveste de grande interesse e oportunidade, não só porque com ele se organiza e desenvolve um grande volume de conhecimentos dispersos por várias centenas de artigos científicos publicados em variadas Universidades, conferências e revistas internacionais, mas também, e muito especialmente, porque ele serviu para a criação de novas ferramentas de cálculo automático da resposta dinâmica de sistemas estruturais não-lineares, eventualmente histerético-degradativos, que baseadas no método de linearização estocástica equivalente se revestem de apreciável rigor e eficiência, podendo vir a ser objecto de utilização corrente a prazo relativamente curto, contribuindo desse modo para aperfeiçoar a metodologia e os meios de cálculo a utilizar no âmbito do RSA para análise sísmica não-linear de estruturas.

Interessará apenas realçar que, sendo a questão da análise estocástica da resposta dinâmica de sistemas estruturais por ora insolúvel quando colocada na sua máxima generalidade, ou seja quando se admite não só o carácter não-linear histerético-degradativo do comportamento estrutural, mas também a natureza aleatória, quer da excitação actuante, quer das propriedades do sistema em estudo, entendeu-se por conveniente desprezar, na presente fase de investigação, a questão da estocasticidade estrutural, tanto mais que a aleatoriedade das respectivas propriedades pode, em diversas circunstâncias, ser considerada pouco significativa face à aleatoriedade da excitação actuante.

3 - DESCRIÇÃO SUMÁRIA DA TESE

A estrutura da presente dissertação é uma consequência directa do seu objectivo fundamental anteriormente exposto de forma fundamentada, sendo o respectivo texto composto por cinco capítulos principais e uma secção de conclusões e considerações finais.

O seu desenvolvimento foi marcado pela grande preocupação de sistematizar adequadamente as mais importantes formulações teóricas que, no âmbito da Dinâmica Estrutural Estocástica, permitem efectuar a análise da resposta aleatória de sistemas lineares e não-lineares, complementando cada capítulo com aspectos relativos ao desenvolvimento de programas de cálculo automático, propositadamente elaborados no sentido de fazer realçar as suas potencialidades à análise da resposta sísmica de estruturas, mediante a apresentação de diversos exemplos julgados elucidativos.

Por outro lado, julgou-se conveniente optar pela utilização de uma linguagem clara e acessível, embora correndo o risco de tornar o texto um pouco extenso e detalhado, por se entender desejável que a presente tese não constitua um mero instrumento para obtenção de um grau académico, mas venha também a constituir uma referência útil e atractiva para todos os investigadores menos familiarizados com esta aliciante área da Engenharia de Estruturas, e que tantas vezes não é objecto da devida atenção, em resultado da forma sintética e mesmo excessivamente hermética com que são apresentados muitos dos artigos científicos neste domínio.

No Capítulo 1, foram condensados todos os elementos da vasta Teoria dos Processos Estocásticos [166, 170, 256] julgados mais relevantes para a boa compreensão dos capítulos subsequentes, constituindo o seu suporte matemático essencial.

Assim, nele se começa por fazer referência à noção de campo estocástico multidimensional e plurivariado, descrevendo-se as formas de caracterização completa da estrutura probabilística de um processo estocástico, e indicando as principais grandezas estatísticas mais correntemente utilizadas na sua caracterização. Seguidamente, após serem sucintamente aflorados os conceitos de convergência, continuidade, derivabilidade e integrabilidade de processos estocásticos, são introduzidas as noções de homogeneidade e de estacionaridade. É introduzida a definição de função de auto-correlação e densidade espectral de potência de processos estocásticos estacionários, e são apresentadas as suas principais propriedades, realçando-se a importante relação de Wiener-Khintchine. É também referida a noção

de ergodicidade, sendo posteriormente descritas diversas formas de caracterização de processos estocásticos não-estacionários, designadamente através do espectro de potência de dupla frequência, do espectro de Bendat e Piersol e do espectro evolutivo de Priestley. São ainda mencionados alguns tipos de processos estocásticos vectoriais mais correntemente utilizados na modelação física, nomeadamente os de Gauss, Poisson, ruído branco, de Markov e de Wiener, concentrando-se finalmente a atenção sobre as propriedades mais importantes dos processos estocásticos relacionadas com o dimensionamento estrutural, sendo nesta secção apresentadas expressões para a frequência média de passagens ascendentes por uma dada barreira, bem como para as distribuições de probabilidade dos máximos relativos, de um extremo absoluto num intervalo de tempo T, da envolvente do processo e dos tempos de primeira passagem.

A apresentação das formulações de análise estocástica do comportamento dinâmico de sistemas lineares é feita ao longo dos capítulo 2 e 3, reservando-se o primeiro desses capítulos ao tratamento de excitações estacionárias, e o segundo à abordagem de excitações não-estacionárias.

No Capítulo 2, começam por ser apresentadas as relações determinísticas e estocásticas excitação-resposta, nos domínios do tempo e da frequência, correspondentes a um oscilador linear de um grau de liberdade, procedendo-se à sua aplicação ao caso de uma excitação aleatória do tipo ruído branco e ruído branco filtrado. Seguidamente, apresenta-se a generalização daquelas relações para o caso de osciladores lineares de múltiplos graus de liberdade, bem como uma formulação modal alternativa, é realçada a forma de caracterização probabilística da resposta em termos de quaisquer quantidades estruturais relacionadas linearmente com as coordenadas generalizadas consideradas, e é feita referência à aplicação de expressões gerais indicadas anteriormente com vista à análise da resposta a um ruído branco e a um ruído branco filtrado. São ainda apresentadas as relações gerais estocásticas excitação-resposta mediante a introdução de variáveis de estado, bem como formulações de estado modal alternativas. A parte final do capítulo debruça-se sobre o caso da resposta sísmica,

sublinhando-se a relação existente entre as abordagens estocástica e determinística, e descrevendo-se o fundamento e a organização de quatro programas de cálculo automático aplicáveis à análise sísmica de estruturas reticuladas planas e de cascas. Apresentam-se complementarmente vários exemplos, tratados mediante utilização dos programas desenvolvidos, indicando-se nomeadamente resultados relativos às barragens do Alto Lindoso e do Caldeirão.

No Capítulo 3, e à semelhança do caminho seguido no capítulo anterior, começam por ser apresentadas as relações estocásticas excitação-resposta correspondentes a osciladores lineares de um grau de liberdade, sujeitos a excitações não-estacionárias idealizáveis quer através do modelo de Bendat e Piersol, quer através do modelo de Priestley, referindo-se também uma aplicação de interesse no caso de uma excitação pseudo-não-estacionária. Seguidamente são descritas formulações de estado com vista à análise estocástica da evolução temporal da resposta não-estacionária de osciladores lineares de N-GL e da correspondente fiabilidade do sistema. Por último, e para além de se efectuar uma breve alusão à questão dos modelos não-estacionários da excitação sísmica, são descritos dois programas de cálculo propositadamente elaborados com vista à análise da resposta sísmica não-estacionária de estruturas reticuladas planas, apresentando-se complementarmente sugestivos exemplos de aplicação, que possibilitam inclusivamente retirar algumas conclusões àcerca do interesse e utilidade desta forma de caracterização da acção sísmica.

O Capítulo 4 ocupa-se por sua vez dos principais métodos de análise da resposta aleatória de sistemas não-lineares, designadamente das abordagens exactas e aproximadas baseadas na equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, dos métodos de perturbação, de linearização estocástica equivalente e de não-linearização estocástica equivalente, de truncatura gaussiana e não-gaussiana e das técnicas de simulação. São dessa forma avaliadas as potencialidades das diversas formulações, destacando-se de forma particular a importância da linearização equivalente como método aproximado da maior utilidade no tratamento de sistemas de múltiplos graus de liberdade, razão por que esta abordagem é especialmente aprofundada. Complementarmente,

é descrito um programa de cálculo que, baseado nesta formulação, possibilita efectuar a análise sísmica de estruturas planas do tipo "shear-building" com comportamento bilinear elástico, apresentando-se exemplos de aplicação elucidativos, e confrontando-se os resultados obtidos por essa via com os alcançados através de uma técnica de simulação digital.

Finalmente, o Capítulo 5 é especialmente dedicado á análise da resposta aleatória de sistemas não-lineares histeréticos através do método de linearização estocástica equivalente, dada a enorme importância que este tipo de não-linearidades assume no contexto da engenharia civil. Assim, começam por ser focados os métodos de Caughey e de Goto e Iemura para análise da resposta estacionária de sistemas não-lineares de um grau de liberdade, e em particular com comportamento bilinear elástico, realçando-se de seguida a utilidade do recurso a modelos histeréticos diferenciais como forma de ultrapassar os aspectos restritivos decorrentes da aproximação de Krylov e Bogoliubov. Efectua-se a descrição do modelo diferencial de Bouc-Wen, e de modelos dele resultantes a partir de aperfeiçoamentos posteriores introduzidos no sentido de comtemplar diferentes aspectos, tal como a degradação de rigidez e de resistência, o efeito de "pinching" ou a flexão bi-axial, sendo também aflorada uma técnica de identificação dos principais parâmetros característicos do modelo, e indicada a forma como pode ser efectuada a sua linearização. É realizada uma breve referência aos modelos diferenciais poli-lineares recentemente introduzidos por Suzuki e Minai, e descrita a metodologia geral de análise da resposta estacionária ou não-estacionária de sistemas histeréticos de múltiplos graus de liberdade caracterizados através de modelos histeréticos diferenciais simétricos. A parte final do capítulo ocupa-se da aplicação do método de linearização equivalente ao estudo do comportamento sísmico de estruturas porticadas planas com comportamento histerético caracterizado através dos modelos de Wen, apresentando-se o fundamento e a descrição de dois programas de cálculo automático propositadamente elaborados no sentido de possibilitar a análise da resposta sísmica estacionária e não-estacionária de estruturas de tipo "shear-building", referindo-se, no entanto ainda, o modo de adaptar a formulação

utilizada de molde a aplicá-la a um outro modelo estrutural mais sofisticado, no qual se consideram as não-linearidades concentradas em rótulas localizadas nas extremidades das barras.

1

ELEMENTOS DA TEORIA DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

1.1 - INTRODUÇÃO

A utilização de métodos probabilísticos no sentido de modelar um grande número de fenómenos naturais, e de caracterizar de forma bastante rigorosa os seus efeitos sobre o comportamento dinâmico de sistemas estruturais, requer uma satisfatória assimilação prévia de diversos conhecimentos no campo da Teoria das Probabilidades e dos Processos Estocásticos.

A Teoria dos Processos Estocásticos, em particular, constitui no entanto uma vasta área da Matemática, desenvolvida de forma sólida e consistente no decorrer do presente século, tendo sido abordada de forma profunda e sistemática por diversos autores, nomeadamente por Kolmogorov, Doob [91], Parzen [170], Wong [256] e Papoulis [166].

Deste modo, poderia à primeira vista parecer não fazer sentido incluir na presente dissertação qualquer capítulo relativo especificamente à Teoria dos Processos Estocásticos, já que qualquer eventual lacuna de conhecimentos nesse domínio pode em princípio ser superada através da leitura de uma daquelas obras.

Sucede, todavia, que não só a disseminação de conhecimentos na área da Teoria dos Processos Estocásticos por entre estudantes e jovens investigadores ligados à Dinâmica de Estruturas está longe de ser a desejável, como também nem sempre a forma como aqueles conhecimentos se encontram expostos naqueles tratados matemáticos é a mais simples e adequada do ponto de vista das aplicações de interesse em Engenharia de Estruturas.

Por essas razões, e no sentido de tornar acessível a um maior número de interessados a leitura da presente tese, entendeu-se conveniente nela incluir um capítulo introdutório, em que se explicam de forma clara, mas tão condensada quanto possível, todos os conceitos

da Teoria dos Processos Estocásticos que constituem o suporte matemático dos capítulos subsequentes, e cuja assimilação se revela essencial para a sua boa compreensão.

1.2 - NOÇÃO DE CAMPO ESTOCÁSTICO MULTIDIMENSIONAL E PLURIVARIADO E DE PROCESSO ESTOCÁSTICO

Alguns dos acontecimentos de natureza estocástica podem ser modelados mediante a utilização de variáveis aleatórias, estabelecendo-se uma correspondência entre cada possível ocorrência do acontecimento e um certo valor real ou complexo de uma variável daquele tipo.

Em muitos casos porém, uma correcta modelação dos fenómenos físicos exige que cada ocorrência seja caracterizada não por um único valor, mas antes por uma ou mais famílias de sequências de valores aleatórios, função de um ou mais parâmetros, sendo essas sequências designadas por realizações ou funções de amostra, e dando-se o nome de campo estocástico ao conjunto por elas constituído quando o número de ocorrências tende para infinito, ou, sendo o seu número finito, a cada uma delas se encontra associada uma certa probabilidade.

A noção de campo estocástico surge pois como uma generalização do conceito de variável aleatória, podendo dizer-se que, no caso de cada ocorrência estar associada a N famílias de realizações aleatórias função de M parâmetros independentes, se está em presença de um campo estocástico do tipo (MD-NV), de dimensão M com N variáveis.

Essas variáveis podem ser, por exemplo, a elevação do nível da água do mar por acção do vento (N=1), a pressão sobre uma asa de avião em situações de turbulência (N=1), as componentes horizontais e vertical da aceleração sísmica de base (N=3), ou qualquer conjunto de NR quantidades estruturais caracterizadoras da resposta de um sistema (N=NR), ao passo que os parâmetros independentes podem ser não só o tempo (M=1), mas também as coordenadas espaciais de pontos de medida (M>1).

Assume especial interesse, para uma boa compreensão dos assuntos tratados nos capítulos seguintes, fazer referência aos casos particulares dos campos estocásticos do tipo (1D-1V) e (1D-NV), mais vulgarmente designados por processos estocásticos e processos estocásticos vectoriais respectivamente, facto que aliás se reflecte na estrutura do capítulo presente.

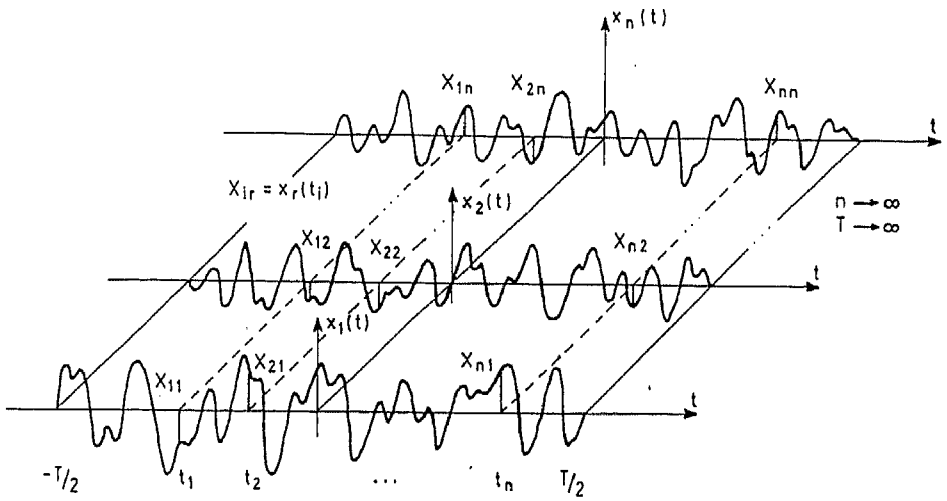


Fig. 1.1 - As $n(n \to \infty)$ realizações do processo estocástico $x(t)$.

Para uma melhor percepção do conceito mais simples de campo estocástico do tipo (1D-1V), apresentam-se na figura 1.1 representações esquemáticas das $n(n \to \infty)$ realizações $x_i(t)$ constituintes de um processo estocástico $x(t)$, susceptível de ser definido sob a forma

$$x(t) = \{x_i(t) \;\; ; \;\; i = 1, 2, \ldots, n(n \to \infty)\} \qquad (1.1)$$

1.3 - CARACTERIZAÇÃO COMPLETA DA ESTRUTURA PROBABILÍSTICA DE UM PROCESSO ESTOCÁSTICO

Sendo o processo estocástico $x(t)$, a que se refere a figura 1.1, constituído por um número infinito de sequências aleatórias tradutoras da evolução temporal de uma dada grandeza, o seu valor $x(t_i)$, em cada instante t_i, pode unicamente ser definido em termos probabilísticos com base na estatística conjunta da totalidade das realizações que

constituem o processo, tornando-se em princípio necessário, para uma completa caracterização probabilística de $x(t)$, o conhecimento de todas as funções densidade de probabilidade pluridimensionais do tipo

$$p_n(\underline{X}) = p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

cuja definição é a seguinte

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) dX_1 dX_2 \ldots dX_n = \tag{1.3}$$
$$= P(X_1 < x(t_1) < X_1 + dX_1; X_2 < x(t_2) < X_2 + dX_2; \ldots; X_n < x(t_n) < X_n + dX_n)$$

Alternativamente, a estrutura probabilística de $x(t)$ pode também ser definida a partir do completo conhecimento de toda a hierarquia de funções características $C_n(\underline{\theta}) = C(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, transformadas de Fourier multidimensionais de cada uma das funções $p_n(\underline{X}) = p(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ com $n = 1, 2, \ldots$, ou seja

$$C_n(\underline{\theta}) = E[\exp(i\underline{\theta}^T \underline{X})]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\underline{\theta}^T \underline{X}) p_n(\underline{X}) dX_1 dX_2 \ldots dX_n \tag{1.4}$$

Uma terceira via, que possibilita igualmente uma conveniente descrição estatística do processo, baseia-se no conhecimento da hierarquia de momentos

$$m_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = E[X_1 X_2 \ldots X_n] \tag{1.5}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 \ldots X_n p_n(\underline{X}) dX_1 dX_2 \ldots dX_n$$

os quais facilmente se relacionam com as funções características correspondentes. De facto, e de uma forma mais geral, os momentos estatísticos

$$m_r(X_i, X_j, \ldots, X_l) = E[X_i X_j \ldots X_l] \tag{1.6}$$

em que $r \leq n$ representa a ordem do momento, ou seja, o número total de argumentos, e $i, j, \ldots, l$ são índices que podem assumir quaisquer valores inteiros entre 1 e n, podem ser obtidos directamente a partir da função característica $C_n(\underline{\theta})$, já que

$$m_r(X_i, X_j, \ldots, X_l) = (-i)^r \left\{ \frac{\partial^r C_n(\underline{\theta})}{\partial\theta_i \partial\theta_j \ldots \partial\theta_l} \right\}_{\underline{\theta}=\underline{0}} \tag{1.7}$$

No caso mais geral de momentos de ordem qualquer, e utilizando a seguinte notação

$$m_{r_1 \ldots r_n} = E\left[X_1^{r_1} X_2^{r_2} \ldots X_n^{r_n}\right] \tag{1.8}$$

a relação entre estes momentos e a função $C_n(\underline{\theta})$ é a seguinte

$$m_{r_1 \ldots r_n} = (-i)^r \left\{ \frac{\partial^r C_n(\underline{\theta})}{\partial\theta_1^{r_1} \partial\theta_2^{r_2} \ldots \partial\theta_n^{r_n}} \right\}_{\underline{\theta}=\underline{0}} \tag{1.9}$$

sendo a ordem $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$, podendo verificar-se que $r \geq n$.

Por outro lado, torna-se possível proceder, com base na equação (1.9), a um desenvolvimento em série de McLaurin da função característica $C_n(\underline{\theta})$, dado por

$$C_n(\underline{\theta}) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\ldots,l=1}^{n} m_r(X_i, X_j, \ldots, X_l)\theta_i\theta_j \ldots \theta_l \tag{1.10}$$

o qual evidencia que o conhecimento da hierarquia de momentos estatísticos torna viável também a determinação da hierarquia de funções características, sendo pois equivalentes estas três formas de descrição da estrutura probabilística do processo estocástico $x(t)$.

Esta descrição pode ainda ser realizada com base num outro conjunto de grandezas estatísticas, designadas por cumulantes, e que se podem obter também a partir da função característica $C_n(\underline{\theta})$, tomando derivadas do respectivo logaritmo neperiano. Os cumulantes de ordem $r \leq n$ são assim definidos por

$$k_r(X_i, X_j, \ldots, X_l) = (-i)^r \left\{ \frac{\partial^r \ln C_n(\underline{\theta})}{\partial\theta_i \partial\theta_j \ldots \partial\theta_l} \right\}_{\underline{\theta}=\underline{0}} \tag{1.11}$$

Por analogia com a equação (1.8), podem também definir-se cumulantes de ordem qualquer, através da relação

$$k_{r_1 \ldots r_n} = (-i)^r \left\{ \frac{\partial^r \ln C_n(\underline{\theta})}{\partial \theta_1^{r_1} \partial \theta_2^{r_2} \ldots \partial \theta_n^{r_n}} \right\}_{\underline{\theta}=\underline{0}} \tag{1.12}$$

sendo $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

Procedendo, de forma semelhante, a um desenvolvimento em série de McLaurin de $\ln C_n(\underline{\theta})$, tendo em atenção que $\ln C_n(\underline{0}) = 0$, e tomando exponenciais de ambos os membros, obtém-se por sua vez a seguinte relação

$$C_n(\underline{\theta}) = \exp\left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\ldots,l=1}^{n} k_r(X_i, X_j, \ldots, X_l)\theta_i\theta_j \ldots \theta_l \right\} \tag{1.13}$$

tornando-se deste modo também evidente que o conhecimento da hierarquia de cumulantes é equivalente ao conhecimento da hierarquia das funções características, do ponto de vista da descrição probabilística do processo estocástico $x(t)$.

As equações (1.10) e (1.13) representam assim dois desenvolvimentos em série da função característica $C_n(\underline{\theta})$, tornando-se possível, à custa da sua igualdade, exprimir directamente os momentos estatísticos m_r em função dos cumulantes k_r [219], e vice versa [113]. Assim, por exemplo

$$m_1(X_i) = k_1(X_i) \tag{1.14}$$

$$m_2(X_i, X_j) = k_2(X_i, X_j) + k_1(X_i)k_1(X_j) \tag{1.15}$$

$$m_3(X_i, X_j, X_l) = k_3(X_i, X_j, X_l) + 3\{k_1(X_i)k_2(X_j, X_l)\}_p + k_1(X_i)k_1(X_j)k_1(X_l) \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} m_4(X_i, X_j, X_l, X_m) = {} & k_4(X_i, X_j, X_l, X_m) + 3\{k_2(X_i, X_j)k_2(X_l, X_m)\}_p + \\ & + 4\{k_1(X_i)k_3(X_j, X_l, X_m)\}_p + \\ & + 6\{k_1(X_i)k_1(X_j)k_2(X_l, X_m)\}_p + \\ & + k_1(X_i)k_1(X_j)k_1(X_l)k_1(X_m) \end{aligned} \tag{1.17}$$

representando $\{\ \}_p$ a média aritmética dos termos resultantes das permutações dos índices.

Estas expressões, cuja complexidade aumenta significativamente com a ordem dos momentos considerados, apresentam no entanto uma forma mais simples caso as variáveis aleatórias X_i $(i=1,\ldots,n)$ assumam valor médio nulo, sendo então

$$m_1(X_i)=k_1(X_i)=0 \tag{1.18}$$

$$m_2(X_i,X_j)=k_2(X_i,X_j) \tag{1.19}$$

$$m_3(X_i,X_j,X_l)=k_3(X_i,X_j,X_l) \tag{1.20}$$

$$m_4(X_i,X_j,X_l,X_m)=k_4(X_i,X_j,X_l,X_m)+3\{k_2(X_i,X_j)k_2(X_l,X_m)\}_p \tag{1.21}$$

$$m_5(X_i,X_j,X_k,X_l,X_m)=k_5(X_i,X_j,X_k,X_l,X_m)+ \\ +10\{k_2(X_i,X_j)k_3(X_k,X_l,X_m)\}_p \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} m_6(X_i,X_j,X_k,X_l,X_m,X_n)=&k_6(X_i,X_j,X_k,X_l,X_m,X_n)+ \\ &+15\{k_2(X_i,X_j)k_4(X_k,X_l,X_m,X_n)\}_p+ \\ &+15\{k_2(X_i,X_j)k_2(X_k,X_l)k_2(X_m,X_n)\}_p+ \\ &+10\{k_3(X_i,X_j,X_k)k_3(X_l,X_m,X_n)\}_p \end{aligned} \tag{1.23}$$

Embora ressalte claro do que foi dito anteriormente que, do ponto de vista teórico, uma completa caracterização probabilística do processo $x(t)$ exige o conhecimento da função densidade de probabilidade pluridimensional $p_n(\underline{X})$, da função característica correspondente $C_n(\underline{\theta})$, dos momentos estatísticos $m_n(\underline{X})$ ou dos cumulantes $k_n(\underline{X})$, para qualquer valor inteiro de n, sucede porém que o conhecimento das grandezas estatísticas de primeira e segunda ordem é da maior importância, não só porque em geral nelas reside a parcela mais importante da informação relativa à caracterização probabilística do processo, mas inclusivamente porque casos há em que todas as grandezas estatísticas de ordem superior podem ser expressas em função das de primeira e segunda ordem.

Neste último caso, incluem-se os processos estocásticos gaussianos, que modelam de forma realista muitos fenómenos físicos de interesse em Dinâmica Estrutural e na Engenharia Sísmica, e a que será feita referência detalhada na secção 1.8.1.

1.4 - PRINCIPAIS GRANDEZAS ESTATÍSTICAS UTILIZADAS NA CARACTERIZAÇÃO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

A completa caracterização da estrutura probabilística de um processo estocástico através de uma das vias antes mencionadas afigura-se, como é compreensível, dificilmente praticável, não sendo indispensável a uma análise expedita das principais características do processo.

Por tal motivo, recorre-se mais frequentemente a um conjunto de parâmetros e de funções estatísticas que, pela sua utilidade e maior acessibilidade, importa aqui realçar, designadamente:

a) Valor médio do processo $x(t)$ no instante t_i

$$m_{x_i} = E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_i p(X_i) dX_i \qquad (1.24)$$

b) Valor quadrático médio

$$m_{x_i^2} = E[x^2(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_i^2 p(X_i) dX_i \qquad (1.25)$$

c) Variância

$$\mu_{x_i} = E\left[(x(t_i) - m_{x_i})^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - m_{x_i})^2 p(X_i) dX_i \qquad (1.26)$$

d) Desvio padrão

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\mu_{x_i}} \qquad (1.27)$$

e) Função de auto-correlação

$$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_i X_j p(X_i, X_j) dX_i dX_j \qquad (1.28)$$

f) Função de auto-covariância

$$\mu_x(t_i,t_j)=E[(x(t_i)-m_{x_i})(x(t_j)-m_{x_j})]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X_i-m_{x_i})(X_j-m_{x_j})p(X_i,X_j)dX_i dX_j \qquad (1.29)$$

Caso se esteja em presença de dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$, revestem-se também de grande interesse as seguintes funções:

g) Função de inter-correlação ou de correlação cruzada

$$R_{xy}(t_i,t_j)=E[x(t_i)y(t_j)] \qquad (1.30)$$

h) Função de inter-covariância ou de covariância cruzada

$$\mu_{xy}(t_i,t_j)=E[(x(t_i)-m_{x_i})(y(t_j)-m_{x_j})] \qquad (1.31)$$

i) Coeficiente de correlação ou de covariância normalizada

$$\rho_{xy}(t_i,t_j)=\frac{\mu_{xy}(t_i,t_j)}{\sigma_{x_i}\sigma_{y_j}} \qquad (1.32)$$

Assumindo o processo estocástico $x(t)$ valores complexos, as definições atrás referidas sofrem naturalmente ligeiras alterações, sendo usual adotar-se [51, 195]

$$m_{x_i}=E\{Re[x(t_i)]\}+iE\{Im[x(t_i)]\} \qquad (1.33)$$

$$\mu_{x_i}=E\left\{[x(t_i)-m_{x_i}][x(t_i)-m_{x_i}]^*\right\} \qquad (1.34)$$

$$R_x(t_i,t_j)=E[x(t_i)x(t_j)^*] \qquad (1.35)$$

$$\mu_x(t_i,t_j)=E\left\{[x(t_i)-m_{x_i}][x(t_j)-m_{x_j}]^*\right\} \qquad (1.36)$$

1.5 - CONVERGÊNCIA, CONTINUIDADE, DERIVABILIDADE E INTEGRABILIDADE DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

A derivação e a integração constituem duas operações fundamentais da Análise Infinitesimal, cuja aplicação aos processos estocásticos muito importa saber generalizar.

Uma vez que tais operações pressupõem o conceito de convergência, subjacente também à noção de continuidade, torna-se essencial definir em que sentido se deverá interpretar o limite da sequência de variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ para um valor X.

Várias interpretações têm sido, no entanto, consideradas para tal efeito, designadamente [143]:

a) Convergência em probabilidade (P)

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0 \quad , \quad \forall \epsilon > 0 \tag{1.37}$$

b) Convergência com probabilidade 1

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = X) = 1 \tag{1.38}$$

c) Convergência em distribuição de probabilidade (F)

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \tag{1.39}$$

d) Convergência em média quadrática

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0 \tag{1.40}$$

Como é de esperar, estas 4 interpretações distintas de convergência encontram-se relacionadas entre si [143], sendo possível concluir que se as noções de convergência com probabilidade 1 e em média quadrática não têm qualquer implicação mútua, qualquer delas porém implica necessariamente a ocorrência de convergência em probabilidade. Por outro lado ainda, a convergência em distribuição de probabilidade é assegurada por qualquer das restantes.

Para o que se segue, será considerada a interpretação de convergência em sentido médio quadrático, a qual exige que $E[X_n^2]$ tenha valor finito, dizendo-se nesse caso que a variável X é uma variável aleatória de segunda ordem.

De forma análoga, um processo estocástico $x(t)$, satisfazendo a condição $E[x^2(t)]<\infty$, é designado por processo estocástico de segunda ordem, podendo utilizar-se como critério de convergência em sentido médio quadrático, quando $t\to t_0$, que a função $E[x(t)x(s)]$ tenha limite finito quando $t,s\to t_0$.

Baseados nessa mesma interpretação da noção de convergência, fácil se torna também constatar a seguinte regra de comutatividade

$$\lim_{t\to t_0} E[x(t)] = E\left[\lim_{t\to t_0} x(t)\right] = E[X] \tag{1.41}$$

responsável pela generalização da maior parte dos teoremas da Análise Infinitesimal aos processos estocásticos.

Por outro lado também, as noções de continuidade, derivabilidade e integrabilidade tornam-se facilmente extensíveis, podendo dizer-se que:

a) Um processo estocástico $x(t)$ é contínuo em média quadrática no instante t quando

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\{|x(t+\epsilon)-x(t)|^2\} = 0 \tag{1.42}$$

o que se verifica se e só se a função $E[x(t)x(s)]$ for contínua para $t=s$;

b) Um processo estocástico $\dot{x}(t)$ é a derivada de $x(t)$ em média quadrática no instante t se se verificar a relação

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left\{\left|\frac{x(t+\epsilon)-x(t)}{\epsilon}-\dot{x}(t)\right|^2\right\} = 0 \tag{1.43}$$

sendo, para tal, condição necessária e suficiente que a derivada de segunda ordem $\partial^2\{E[x(t)x(s)]\}/\partial t\partial s$ exista e seja contínua para $t=s$;

c) $\int_a^b x(t)dt$ é o integral de Riemann em média quadrática do processo estocástico $x(t)$ no intervalo $[a,b]$ se

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t_i\to 0}} E\left\{\left|\int_a^b x(t)dt - \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\Delta t_i\right|^2\right\} = 0 \qquad (1.44)$$

sendo $x(t_i)$ o valor do processo num instante arbitrário de cada um dos n sub-intervalos Δt_i em que se decompõe o intervalo $[a,b]$; é condição necessária e suficiente para que tal se verifique que a função $E[x(t)x(s)]$ seja integrável no sentido de Riemann.

1.6 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONÁRIOS

1.6.1 - Noções de homogeneidade e de estacionaridade

Um processo estocástico $x(t)$ diz-se inteiramente homogéneo se toda a sua estrutura probabilística for independente de uma eventual translação da origem do parâmetro t de que depende.

Sendo a sua descrição realizada com base na função densidade de probabilidade, observa-se então que, para quaisquer valores de n e τ

$$p[x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_n)] = p[x(t_1+\tau),x(t_2+\tau),\ldots,x(t_n+\tau)] \qquad (1.45)$$

tornando-se evidente que a verificação desta igualdade, para um dado valor de n, implica também a sua verificação para todos os valores de n inferiores.

Se a relação (1.45) apenas tiver lugar para $n \leq 2$, o processo $x(t)$ diz-se, por seu turno, fracamente homogéneo ou homogéneo em sentido lato, assumindo então valor constante diversas grandezas estatísticas, em particular a média m_x, a média quadrática m_{x^2}, a variância μ_x e o desvio padrão σ_x, ou seja

$$m_x = E[x(t_i)] = E[x(t_j)] \qquad (1.46)$$

$$m_{x^2} = E[x(t_i)^2] = E[x(t_j)^2] \qquad (1.47)$$

$$\mu_x = E\{[x(t_i) - m_x]^2\} = E\{[x(t_j) - m_x]^2\} \qquad (1.48)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mu_x} \qquad \forall_{t_i, t_j} \qquad (1.49)$$

ao mesmo tempo que as funções de auto-correlação $R_x(t_i, t_j)$ e de auto-covariância $\mu_x(t_i, t_j)$, correspondentes aos valores t_i e t_j, apenas dependem do desfasamento $\tau = t_j - t_i$, isto é

$$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_i + \tau)] = R_x(\tau) \qquad (1.50)$$

$$\mu_x(t_i, t_j) = E\{[x(t_i) - m_x][x(t_i + \tau) - m_x]\} = E[x(t_i)x(t_i + \tau)] - m_x^2 = \mu_x(\tau) \qquad (1.51)$$

No caso particular dos processos estocásticos gaussianos, em que as respectivas funções densidade de probabilidade pluridimensionais são, como melhor se verá em 1.8.1, exclusivamente função do vector de valores médios e da matriz de covariância, ou seja de grandezas estatísticas de 1ª e 2ª ordem, facilmente se compreende que, se o processo $x(t)$ gozar de homogeneidade de 2ª ordem, então é também inteiramente homogéneo.

Se o parâmetro t for considerado como a variável tempo, então a noção de homogeneidade dá lugar à noção de estacionaridade, a qual traduz pois a invariância temporal dos parâmetros estatísticos susceptíveis de caracterizarem probabilisticamente o processo $x(t)$, encontrando-se na prática associada à ocorrência de fenómenos dinâmicos de carácter permanente (ex: vibrações causadas pelo escoamento de um fluído a caudal constante), da mesma forma que a não-estacionaridade se deve, em geral, a fenómenos de natureza transitória (ex: vibrações de origem sísmica).

A ocorrência de estacionaridade torna sempre possível decompor o processo estocástico em duas componentes, uma de natureza estática assumindo valor constante, e outra de natureza estocástica com valor médio nulo.

1.6.2 - Propriedades da função de auto-correlação

A função de auto-correlação $R_x(\tau)$ é uma grandeza estatística de 2ª ordem da maior importância na caracterização de um processo

estocástico estacionário, sendo coincidente com a função de auto-covariância caso este apresente valor médio nulo, permitindo avaliar a relação estatística existente entre as variáveis aleatórias $x(t)$ e $x(t+\tau)$.

Da definição de $R_x(\tau)$, dada pela equação (1.50), decorrem várias importantes propriedades, nomeadamente

$$R_x(0) = E[x^2(t)] = m_{x^2} \tag{1.52}$$

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \tag{1.53}$$

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \tag{1.54}$$

A primeira indica que o valor de $R_x(\tau)$ na origem coincide com o valor quadrático médio m_{x^2}, ou, se se preferir, com o valor da variância $\mu_x = \sigma_x^2$ no caso de um processo de valor médio nulo. A segunda traduz que $R_x(\tau)$ é par em relação à variável τ. Finalmente, a terceira mostra que $R_x(\tau)$ assume o seu valor máximo na origem, verificando-se a partir daí uma redução mais ou menos gradual desta função, a qual, no caso de processos de média nula, tende para zero quando $\tau \to \infty$, em correspondência com o aumento do grau de independência estatística entre $x(t)$ e $x(t+\tau)$ para valores de τ cada vez mais elevados.

Esta última propriedade é aliás melhor compreendida se se tiver em consideração que para dois instantes t_i e t_j, tais que $t_j = t_i + \tau$

$$\begin{aligned} E\{[\alpha x(t_i) + x(t_j)]^2\} &= \alpha^2 E[x(t_i)^2] + 2\alpha E[x(t_i)x(t_j)] + E[x(t_j)^2] \\ &= \alpha^2 m_{x^2} + 2\alpha R_x(\tau) + m_{x^2} \geq 0 \qquad \forall \alpha \end{aligned} \tag{1.55}$$

Para que esta desigualdade se verifique, será necessário que o discriminante

$$R_x(\tau)^2 - m_{x^2}^2 \leq 0 \tag{1.56}$$

donde se conclui que

$$|R_x(\tau)| \leq m_x^2 = R_x(0) \tag{1.57}$$

No sentido de possibilitar uma melhor percepção qualitativa da forma como se altera a configuração da representação gráfica de $R_x(\tau)$ em função das características do processo, apresentam-se na figura 1.2 dois casos distintos que procuram evidenciar que a redução sofrida por $R_x(\tau)$ à medida que $\tau \to \infty$ é tanto mais rápida, quanto maior for a irregularidade associada ao processo em questão.

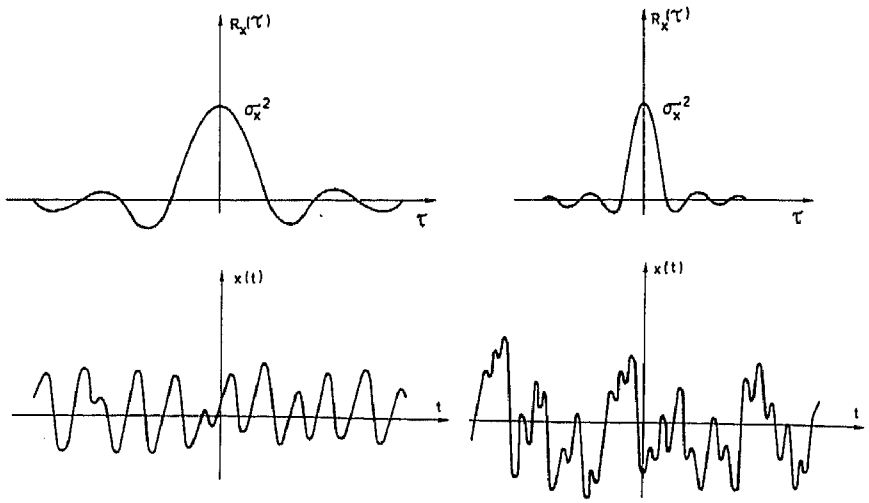


Fig. 1.2 - Influência da irregularidade do processo $x(t)$ sobre a configuração da função de auto-correlação $R_x(\tau)$.

1.6.3 - Função densidade espectral de potência

Uma outra grandeza estatística de 2ª ordem, alternativa à função de auto-correlação, e de extrema utilidade em problemas no domínio das vibrações aleatórias, é a função densidade espectral de potência $S_x(w)$, assim definida

$$S_x(w) = \lim_{T \to \infty} E\left\{ \frac{F_T[x(t)] F_T[x(t)]^*}{2\pi T} \right\} \qquad (1.58)$$

ou, tendo em consideração todas as realizações constitutivas do processo

$$S_x(w) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{T,r}[x(t)]F_{T,r}[x(t)]^*}{2\pi T} \tag{1.59}$$

representando

$$F_T[x(t)] = X_T(w) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-iwt}dt \tag{1.60}$$

a transformada de Fourier do processo restringido ao intervalo $[-T/2, T/2]$, e $F_{T,r}[x(t)]$ a transformada correspondente à sua realização de ordem r.

Por conseguinte, o integral

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(w)dw &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} E\frac{\{F_T[x(t)]F_T[x(t)]^*\}}{2\pi T}dw \\ &= E\left\{\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(w)|^2}{2\pi T}dw\right\}\end{aligned} \tag{1.61}$$

e tendo em conta o teorema de Parseval

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(w)dw &= E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2dt\right\} \\ &= E\{<x(t)^2>\}\end{aligned} \tag{1.62}$$

representando $<x(t)^2>$ o valor quadrático médio temporal do processo $x(t)$.

Por outro lado, em virtude da estacionaridade de $x(t)$

$$E\{<x(t)^2>\} = <E[x(t)^2]> = m_{x^2} \tag{1.63}$$

pelo que o valor quadrático médio do processo m_{x^2} é dado por

$$m_{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w)dw \tag{1.64}$$

ou, no caso particular de o valor médio do processo ser nulo

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w)dw \tag{1.65}$$

As equações (1.64) e (1.65) revelam, pois, não só que a função densidade espectral de potência $S_x(w)$ possibilita, no caso geral, a quantificação do contributo da variável w para o valor quadrático médio do processo, ou, caso $m_x = E[x(t)] = 0$, para a respectiva variância, mas também que estas grandezas estatísticas de 2ª ordem são dadas pela área delimitada por aquela função, não podendo esta naturalmente ter ordenadas negativas ($S_x(w) \geq 0$).

Na figura 1.3 apresentam-se três espectros de potência $S_x(w)$ com configurações distintas, estabelecendo-se de forma esquemática a correspondência existente entre estes e o tipo de processo estocástico estacionário $x(t)$ que lhes está associado. No primeiro caso, existe uma gama de frequências de reduzida amplitude com carácter marcadamente predominante; no segundo, as frequências predominantes inserem-se numa banda relativamente larga; finalmente, no terceiro, todas as frequências têm idêntico contributo para a variância do processo.

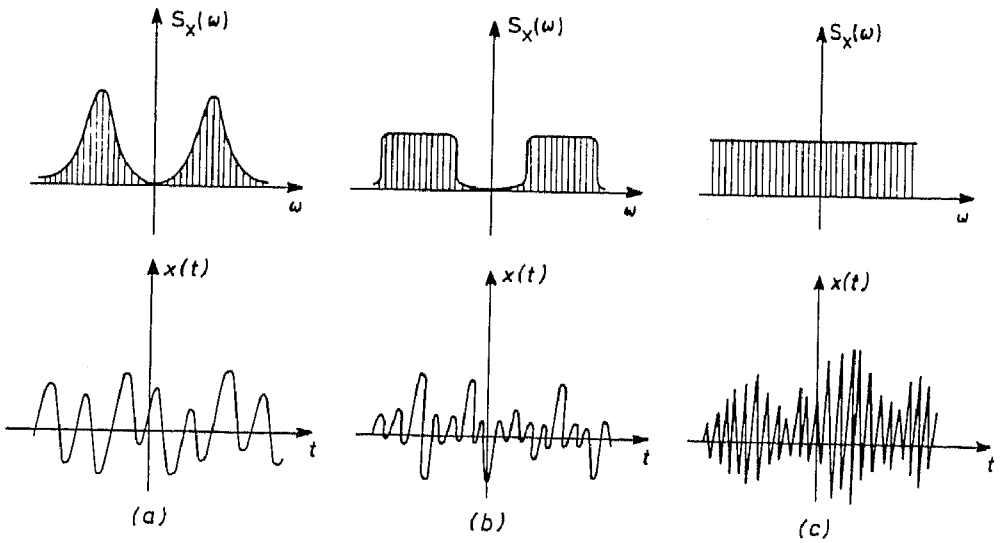


Fig. 1.3 - Relação entre a função densidade espectral de potência e o tipo de processo estocástico estacionário.

A título de curiosidade, é de referir ainda que a designação de função densidade espectral de potência resulta do facto de a potência

de um sistema eléctrico de resistência unitária e com uma intensidade de corrente de valor aleatório, traduzida por um processo estocástico estacionário $x(t)$, ser dada pelo valor quadrático médio m_{x^2}.

1.6.4 - Relação de Wiener-Khintchine

É fácil estabelecer uma relação entre a função de auto-correlação $R_x(\tau)$ e a função densidade espectral de potência $S_x(w)$. Com efeito

$$S_x(w) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left\{\left|\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-iwt}dt\right|^2\right\}}{2\pi T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{E\left\{\int_0^T x(t)e^{-iwt}dt \int_0^T x(s)e^{iws}ds\right\}}{2\pi T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T dt \int_0^T R_x(t-s)e^{-iw(t-s)}ds}{2\pi T} \qquad (1.66)$$

Mas fazendo $\tau = t - s$

$$\int_0^T dt \int_0^T R_x(t-s)e^{-iw(t-s)}ds = \int\int_D R_x(t-s)e^{-iw(t-s)}dtds$$

$$= \int\int_{D'} R_x(\tau)e^{-iw\tau}|J|dtd\tau \qquad (1.67)$$

em que o Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} & \frac{\partial s}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t}{\partial t} & \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{vmatrix} = 1 \qquad (1.68)$$

e os domínios D e D' são os representados na figura 1.4, sendo definidos pelas seguintes equações

$$D\begin{cases} t=0, & t=T \\ s=0, & s=T \end{cases} \qquad D'\begin{cases} t=0, & t=T \\ \tau=t, & \tau=t-T \end{cases} \qquad (1.69)$$

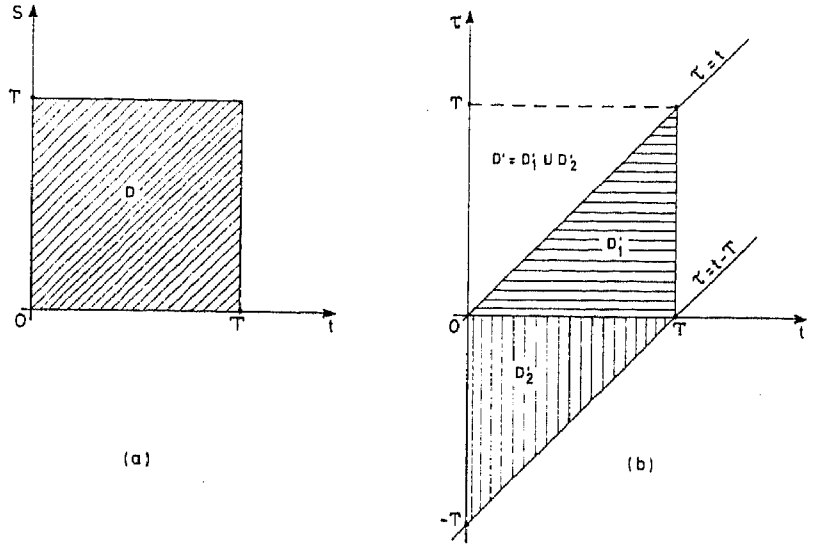


Fig. 1.4 - Domínios de integração D e D'.

Utilizando os limites de integração correspondentes a D'_1 e D'_2, tem-se que

$$\int_0^T dt \int_0^T R_x(t-s)e^{-iw(t-s)}ds = \int_0^T d\tau \int_\tau^T R_x(\tau)e^{-iw\tau}dt + \int_{-T}^0 d\tau \int_0^{T+\tau} R_x(\tau)e^{-iw\tau}dt$$

$$= \int_0^T R_x(\tau)e^{-iw\tau}(T-\tau)d\tau + \int_{-T}^0 R_x(\tau)e^{-iw\tau}(T+\tau)d\tau$$

$$= \int_{-T}^T R_x(\tau)e^{-iw\tau}(T-|\tau|)d\tau \qquad (1.70)$$

Por conseguinte, conjugando as equações (1.66) e (1.70), vem que

$$S_x(w) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^T R_x(\tau)e^{-iw\tau}\frac{(T-|\tau|)}{T}d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-iw\tau}d\tau \qquad (1.71)$$

Conclui-se assim que $S_x(w)$ e $R_x(\tau)/2\pi$ constituem um par de transformadas de Fourier, verificando-se entre si as seguintes relações conhecidas por relações de Wiener-Khintchine

$$S_x(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-iw\tau}d\tau \tag{1.72}$$

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(w)e^{iw\tau}dw \tag{1.73}$$

Sendo $R_x(\tau)$ uma função real e par, torna-se pois evidente, tendo presente as propriedades das transformadas de Fourier, que o mesmo sucede com $S_x(w)$.

Nestas condições, dada a simetria de $R_x(\tau)$ e $S_x(w)$ em relação aos respectivos argumentos, as equações (1.72) e (1.73) podem escrever-se sob a forma

$$S_x(w)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}R_x(\tau)\cos(w\tau)d\tau \tag{1.74}$$

$$R_x(\tau)=2\int_{0}^{\infty}S_x(w)\cos(w\tau)dw \tag{1.75}$$

É de assinalar, no entanto, que a validade destas relações entre $S_x(w)$ e $R_x(\tau)/2\pi$ é condicionada pela existência da transformada de Fourier da função $R_x(\tau)/2\pi$, o que não se verifica se o processo estocástico estacionário $x(t)$ tiver um valor médio não nulo, ou se contiver alguma componente puramente periódica.

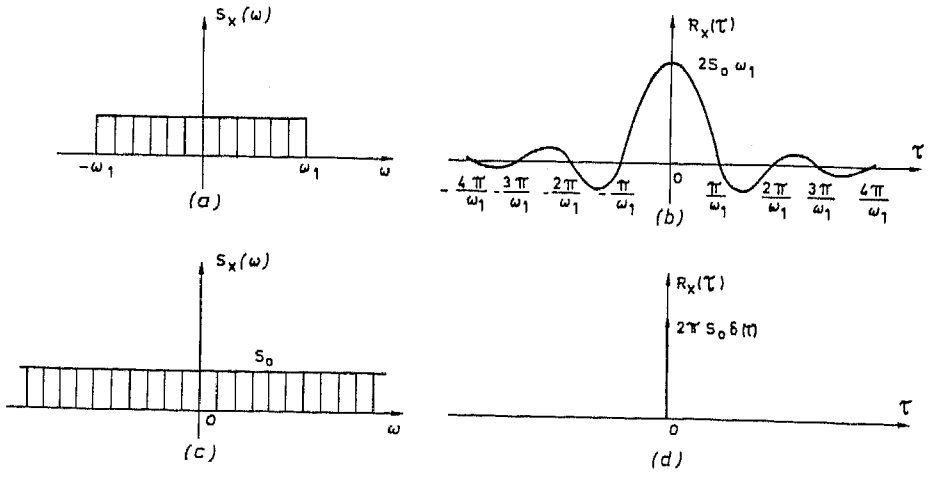


Fig. 1.5 - Funções de auto-correlação relativas a um ruído branco de banda limitada e a um ruído branco.

Considere-se, como exemplo, um processo estocástico estacionário de valor médio nulo, caracterizado por uma função densidade espectral de potência de valor constante S_0 ao longo do intervalo $[-w_1, w_1]$, e nula no exterior desse intervalo (Fig. 1.5 (a)).

A um tal espectro de potência, dá-se habitualmente o nome de ruído branco de banda limitada, podendo obter-se a expressão da correspondente função de auto-correlação directamente através da equação (1.75), isto é

$$R_x(\tau) = 2\int_0^{w_1} S_0 \cos(w\tau)dw = \frac{2S_0}{\tau}\operatorname{sen}(w_1\tau) \tag{1.76}$$

A respectiva variância σ_x^2 é então

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = 2S_0 w_1 \tag{1.77}$$

resultando naturalmente igual ao que se obteria pela expressão

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w)dw \tag{1.78}$$

Supunhamos agora que o espectro de potência de intensidade constante S_0 varre toda a gama de valores de w no intervalo $]-\infty, +\infty[$, (Fig. 1.5 (c)), o que equivale a fazer $w_1 \to \infty$. Nesse caso, à medida que $w_1 \to \infty$, os diversos ciclos adjacentes indicados na figura 1.5 (b) tendem a aproximar-se cada vez mais, ao mesmo tempo que a ordenada na origem $R_x(0) = \sigma_x^2 \to \infty$. Tal sugere, obviamente, que a função de auto-correlação passe a ser representada através da função impulso de Dirac $\delta(t)$, mediante uma relação do tipo

$$R_x(\tau) = C\delta(\tau) \tag{1.79}$$

em que C é uma constante que deve respeitar as relações de Wiener-Khintchine, pelo que

$$S_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C\delta(\tau)e^{-iw\tau}d\tau \tag{1.80}$$

Por conseguinte, tendo em conta as propriedades da função de Dirac, facilmente se conclui que $C = 2\pi S_0$, resultando que

$$R_x(\tau) = 2\pi S_0 . \delta(\tau) \tag{1.81}$$

1.6.5 - Ergodicidade

A caracterização experimental da estrutura probabilística de um processo estocástico e a determinação das suas principais grandezas estatísticas exigem, em princípio, a análise de um número infinito de registos correspondentes a cada uma das sequências ou realizações que o constituem. Assim, assumindo o valor do processo num dado instante t_i como uma variável aleatória $X_i = x(t_i)$, e recorrendo ao conceito de probabilidade como limite da frequência de ocorrência de um dado acontecimento, torna-se teoricamente viável quantificar a respectiva função densidade de probabilidade $p(X_i)$ por amostragem dos valores aleatórios verificados no instante t_i nas $n(n \to \infty)$ realizações constituintes. De forma análoga, seria também teoricamente possível construir funções densidade de probabilidade pluridimensionais de ordem qualquer, em particular $p(X_i, X_j)$, bem como obter todas as grandezas estatísticas mais correntemente utilizadas para a caracterização do processo, como a média, a variância ou a função de auto-correlação.

Em problemas práticos, porém, é apenas viável recorrer a um número finito de realizações de duração limitada, registando-se inclusivamente situações em que a caracterização probabilística de certos processos estacionários pode ser efectuada com rigor com base na estatística de um único registo disponível, designadamente através dos valores temporais da média e da função de auto-correlação, assim definidos respectivamente

$$< x_i(t) > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) dt \tag{1.82}$$

$$\hat{R}_{x_i}(\tau) = < x_i(t) . x_i(t+\tau) > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) . x_i(t+\tau) dt \tag{1.83}$$

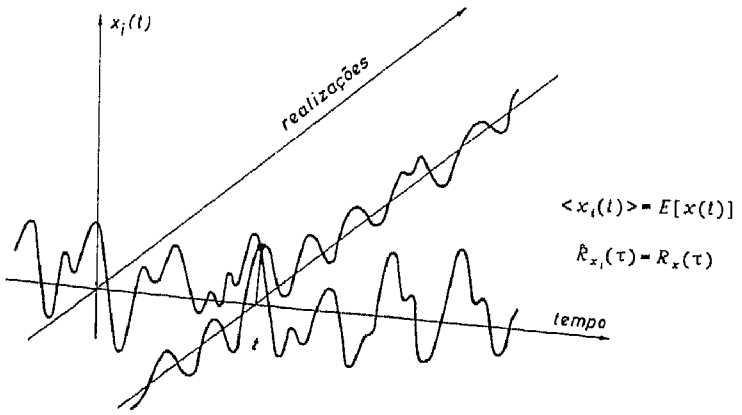


Fig. 1.6 - Processo estocástico estacionário ergódico.

Caso se verifique, para uma amostra de duração infinita, que

$$<x_i(t)> = E[x(t)] \tag{1.84}$$

o processo estacionário $x(t)$ diz-se ergódico de 1ª ordem, dizendo-se também ergódico de 2ª ordem se se verificar simultaneamente a igualdade

$$\hat{R}_{x_i}(\tau) = R_x(\tau) \tag{1.85}$$

Nesse caso aliás, tal amostra pode considerar-se, em muitos casos, suficientemente representativa em termos de caracterização da estrutura probabilística do processo estocástico em questão.

Torna-se pois evidente, tendo em conta a equação (1.84), que um processo ergódico é necessariamente estacionário, não se verificando todavia que um processo estacionário tenha de ser forçosamente ergódico, já que as diversas realizações que o constituem podem assumir características estatísticas temporais diferentes.

Sendo o processo estocástico $x(t)$ estacionário e ergódico de segunda ordem, a função de auto-correlação $R_x(\tau)$ pode assim ser quantificada com base numa única realização através da função de auto-correlação temporal, a qual apresenta propriedades análogas às já referidas para $R_x(\tau)$, nomeadamente

$$\hat{R}_x(0) = <x(t)^2> \qquad \hat{R}_x(\tau) = \hat{R}_x(-\tau) \tag{1.86,87}$$

De forma semelhante, é possível falar também de uma função densidade espectral de potência temporal, $\hat{S}_x(w)$, que constitui a transformada de Fourier de $\hat{R}_x(\tau)/2\pi$, ou seja

$$\hat{S}_x(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{R}_x(\tau)e^{-iw\tau}d\tau \qquad (1.88)$$

$$\hat{R}_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{S}_x(w)e^{iw\tau}dw \qquad (1.89)$$

relações estas formalmente análogas às equações (1.72) e (1.73).

Identificando-se $\hat{S}_x(w)$ e $S_x(w)$, no caso de processos estocásticos estacionários ergódicos, $\hat{S}_x(w)$ apresenta naturalmente propriedades idênticas às já enunciadas para $S_x(w)$.

Por outro lado, fazendo em (1.88) e (1.89) $\tau=0$, vem que

$$\hat{R}_x(0)=<x(t)^2>=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{S}_x(w)dw \qquad (1.90)$$

relação que permite obter a média quadrática temporal do processo $x(t)$ a partir de $\hat{R}_x(\tau)$ ou de $\hat{S}_x(w)$.

É de assinalar, no entanto, que as relações estabelecidas entre $\hat{R}_x(\tau)$ e $\hat{S}_x(w)$, através das equações (1.88) e (1.89), só têm validade caso exista a transformada de Fourier da função $\hat{R}_x(\tau)/2\pi$, o que não se verifica sempre que o processo estocástico estacionário ergódico contenha uma componente constante ou puramente periódica.

Todavia, mesmo nos casos em que o processo é inteiramente dominado por uma única frequência ($w=0$, no caso da componente constante, ou $w=w_1$, no caso de uma componente periódica pura) continua a ser possível caracterizar $\hat{S}_x(w)$, tendo em conta que as ordenadas desta função traduzem a contribuição de cada frequência w para o valor quadrático médio temporal, verificando-se a relação entre $<x(t)^2>$ e $\hat{S}_x(w)$ traduzida pela equação (1.90).

Por conseguinte, no caso de um processo constituído por uma única componente constante de valor A, a que corresponde a média quadrática temporal A^2, a função $\hat{S}_x(w)$ será definida em termos da função impulso por

$$\hat{S}_x(w) = A^2\delta(w) \tag{1.91}$$

ao passo que no caso de uma componente sinusoidal de frequência w_1 e amplitude A, valendo o valor quadrático médio temporal $A^2/2$

$$\hat{S}_x(w) = \frac{A^2}{4}[\delta(w-w_1)+\delta(w+w_1)] \tag{1.92}$$

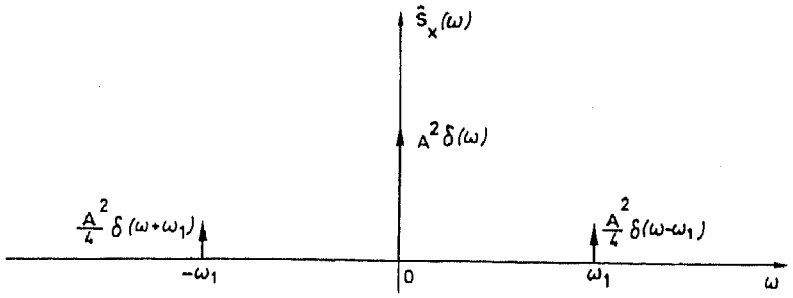


Fig. 1.7 - Espectro de potência temporal $\hat{S}_x(w)$ relativo a uma componente constante e a uma componente sinusoidal.

Em alternativa a $\hat{S}_x(w)$, função par em w e definida no intervalo $]-\infty,+\infty[$, é frequente a consideração de uma função equivalente $\hat{G}_x(f)$, definida apenas no intervalo $[0,+\infty[$, e em que $f = w/2\pi$ representa a frequência expressa em Hz e não em rad/s.

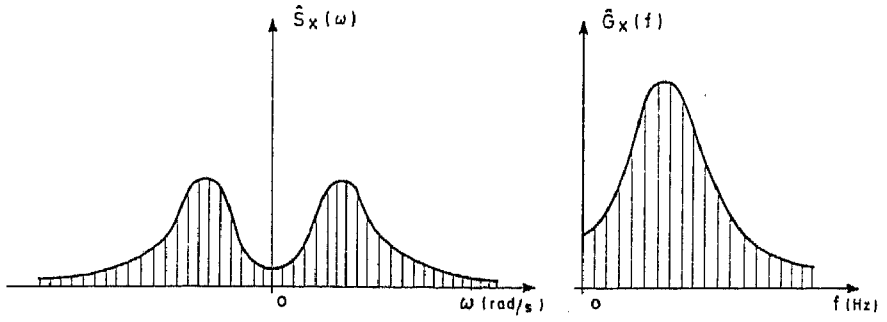


Fig. 1.8 - Espectros de potência $\hat{S}_x(w)$ e $\hat{G}_x(f)$.

A relação entre estas duas funções estabelece-se com facilidade se se tiver em conta a contribuição de cada uma delas para a média quadrática temporal por forma que

$$<x(t)^2>=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{S}_x(w)dw=\int_0^{\infty}\hat{G}_x(f)df \qquad (1.93)$$

Com efeito, sendo $f=w/2\pi$ e $df=dw/2\pi$, tem-se que

$$<x(t)^2>=2\int_0^{\infty}\hat{S}_x(w)dw=\int_0^{\infty}4\pi\hat{S}_x(2\pi f)df \qquad (1.94)$$

donde, tendo em conta a equação (1.93), se obtém

$$\hat{G}_x(f)=4\pi\hat{S}_x(w) \qquad (1.95)$$

Por seu lado, as relações de Wiener-Khintchine assumem a seguinte forma

$$\hat{G}_x(f)=4\int_0^{\infty}\hat{R}_x(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau \qquad (1.96)$$

$$\hat{R}_x(\tau)=\int_0^{\infty}\hat{G}_x(f)\cos(2\pi f\tau)df \qquad (1.97)$$

1.6.6 - Funções de auto-correlação e densidade espectral de potência de processos obtidos por sobreposição

Considere-se um processo estocástico estacionário $r(t)$, resultante da sobreposição de s processos estocásticos estacionários $x_i(t)$, isto é

$$r(t)=\sum_{i=1}^{s}x_i(t) \qquad (1.98)$$

A correspondente função de auto-correlação é nesse caso

$$R_r(\tau)=E\left\{\left[\sum_{i=1}^{s}x_i(t)\right].\left[\sum_{j=1}^{s}x_j(t+\tau)\right]\right\}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}R_{ij}^{x}(\tau) \qquad (1.99)$$

em que

$$R_{ij}^{x}(\tau)=E[x_i(t).x_j(t+\tau)] \qquad (1.100)$$

se designa por função de inter-correlação ou de correlação cruzada, traduzindo o grau de dependência estatística existente entre $x_i(t)$ e $x_j(t+\tau)$. A partir da equação (1.100), identificam-se de imediato as seguintes propriedades da função de inter-correlação

$$R_{ij}^{x}(\tau) = R_{ji}^{x}(-\tau) \tag{1.101}$$

$$R_{ij}^{x}(0) = E[x_i(t)x_j(t)] \tag{1.102}$$

$$R_{ii}^{x}(0) = R_{x_i}(0) = m_{x_i^2} \tag{1.103}$$

Por outro lado, da aplicação da primeira das relações de Wiener-Khintchine à equação (1.99) decorre também que

$$S_r(w) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} S_{ij}^{x}(w) \tag{1.104}$$

com

$$S_{ij}^{x}(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}^{x}(\tau)e^{-iw\tau}d\tau \tag{1.105}$$

designando-se $S_{ij}^{x}(w)$ por função densidade espectral conjunta ou cruzada correspondente aos processos $x_i(t)$ e $x_j(t)$.

A equação (1.105), que evidencia que $S_{ij}^{x}(w)$ e $R_{ij}^{x}(\tau)/2\pi$ constituem um par de transformadas de Fourier, satisfazendo portanto também a relação inversa

$$R_{ij}^{x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}^{x}(w)e^{iw\tau}dw \tag{1.106}$$

poderia aliás ser igualmente obtida se se seguisse caminho idêntico ao referido em 1.6.4, começando por se definir $S_{ij}^{x}(w)$ como o limite

$$S_{ij}^{x}(w) = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{X_{T,i}(w)X_{T,j}(w)^{*}}{2\pi T}\right\} \tag{1.107}$$

De realçar também que a equação (1.105) permite não só concluir que $S_{ij}^{x}(w)$ apresenta uma componente real par em w e uma componente

imaginária ímpar, em virtude de $R_{ij}^{x}(\tau)/2\pi$ ser uma função real de variável real, mas também que, tendo em consideração a equação (1.101)

$$S_{ij}^{x}(w) = S_{ji}^{x}(w)^{*} \tag{1.108}$$

1.6.7 - Funções de auto-correlação e densidade espectral de potência de processos obtidos por derivação

Uma vez conhecidas as funções de auto-correlação e densidade espectral de potência correspondentes a um dado processo estocástico estacionário $x(t)$, torna-se fácil obter as expressões dessas funções relativas aos processos obtidos por derivação $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$. Com efeito, partindo da equação $R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$, e derivando duas vezes sucessivas em ordem a τ, pode obter-se

$$\frac{dR_x(\tau)}{d\tau} = E[x(t).\dot{x}(t+\tau)] = E[x(t-\tau).\dot{x}(t)] \tag{1.109}$$

$$\frac{d^2R_x(\tau)}{d\tau^2} = -E[\dot{x}(t-\tau).\dot{x}(t)] = -E[\dot{x}(t).\dot{x}(t+\tau)] \tag{1.110}$$

pelo que

$$R_{\dot{x}}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2}R_x(\tau) \tag{1.111}$$

$$R_{\ddot{x}}(\tau) = \frac{d^4}{d\tau^4}R_x(\tau) \tag{1.112}$$

Substituindo nestas equações $R_x(\tau)$ pela sua expressão dada pela equação (1.73), vem

$$R_{\dot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w^2 S_x(w) e^{iw\tau} d\tau \tag{1.113}$$

$$R_{\ddot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w^4 S_x(w) e^{iw\tau} d\tau \tag{1.114}$$

o que leva a concluir que as densidades espectrais relativas aos processos derivados $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ são dadas por

$$S_{\dot{x}}(w) = w^2 S_x(w) \tag{1.115}$$

$$S_{\ddot{x}}(w) = w^4 S_x(w) \tag{1.116}$$

De forma análoga, se poderia chegar à conclusão de que

$$R^{\dot{x}}_{ij}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} R^{x}_{ij}(\tau) \qquad S^{\dot{x}}_{ij}(w) = w^2 S^{x}_{ij}(w) \tag{1.117}$$

$$R^{\ddot{x}}_{ij}(\tau) = -\frac{d^4}{d\tau^4} R^{x}_{ij}(\tau) \qquad S^{\ddot{x}}_{ij}(w) = w^4 S^{x}_{ij}(w) \tag{1.118}$$

É ainda interessante assinalar que, derivando por sua vez a equação $R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$ em ordem a t duas vezes consecutivas, podem retirar-se duas outras importantes conclusões. Assim, derivando uma primeira vez e atendendo à equação (1.101), tem-se

$$R_{\dot{x}x}(\tau) + R_{\dot{x}x}(-\tau) = 0 \tag{1.119}$$

e derivando novamente

$$R_{\ddot{x}x}(\tau) + R_{\ddot{x}x}(-\tau) + 2R_{\dot{x}}(\tau) = 0 \tag{1.120}$$

Por conseguinte, fazendo $\tau = 0$, estas equações permitem concluir que

$$R_{\dot{x}x}(0) = 0 \tag{1.121}$$

$$R_{\ddot{x}x}(0) = -R_{\dot{x}}(0) \tag{1.122}$$

ou, no caso particular de processos estacionários de valor médio nulo

$$\mu_{\dot{x}x} = 0 \tag{1.123}$$

$$\mu_{\ddot{x}x} = -\sigma^2_{\dot{x}} \tag{1.124}$$

1.7 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS NÃO-ESTACIONÁRIOS

A descrição matemática de processos estocásticos estacionários tem sido no passado objecto de um tratamento exaustivo, assumindo desse ponto de vista especial relevância a introdução dos conceitos de função de auto-correlação e de função densidade espectral de potência, relacionadas entre si pelas transformações de Fourier já mencionadas.

Muitos dos fenómenos físicos de carácter aleatório, que do ponto de vista da engenharia interessa modelar, apresentam todavia uma mais ou menos acentuada variabilidade temporal das correspondentes características estatísticas, sugerindo o recurso ao conceito de processo estocástico não-estacionário, e aconselhando naturalmente a generalização daquele tipo de funções a processos estocásticos desta natureza.

Sucede, no entanto, que essa generalização pode ser efectuada de formas diversas, utilizando diferentes definições da função densidade espectral de potência, como aliás se descreve de forma detalhada nos pontos seguintes.

1.7.1 - Espectro de potência de dupla frequência

Uma extensão directa do conceito de função densidade espectral de potência, utilizada na análise de processos estocásticos estacionários, consiste em tomar a dupla transformada de Fourier da função de auto-correlação do processo não-estacionário

$$R_x(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_2)] \tag{1.125}$$

A densidade espectral de potência generalizada será então definida por

$$S_x(w_1,w_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(t_1,t_2)e^{-i(w_1t_1+w_2t_2)}dt_1dt_2 \tag{1.126}$$

correspondendo-lhe a transformada inversa

$$R_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(w_1,w_2)e^{i(w_1t_1+w_2t_2)}dw_1dw_2 \tag{1.127}$$

Fazendo $t=t_1=t_2$, obtém-se

$$R_x(t,t)=E[x^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(w_1,w_2)e^{i(w_1+w_2)t}dw_1dw_2 \tag{1.128}$$

Esta via, porém, embora assente em relações matematicamente correctas, apresenta o inconveniente de não conceder à função densidade

espectral de potência $S_x(w_1, w_2)$, definida pela equação (1.126), qualquer interpretação física simples.

1.7.2 - Espectro de potência de Bendat e Piersol

Uma formulação alternativa, e mais intuitiva do ponto de vista físico, deve-se a Bendat e Piersol [26], que referindo a função de auto-correlação $R_x(t,\tau)$ a um instante de tempo t e a um intervalo de tempo τ, tal que

$$R_x(t,\tau) = E\left[x\left(t-\frac{\tau}{2}\right).x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{1.129}$$

define a função densidade espectral de potência não-estacionária como a transformada de Fourier de $R_x(t,\tau)/2\pi$, ou seja

$$S_x(w,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(t,\tau)e^{-iw\tau}d\tau \tag{1.130}$$

relação a que corresponde a transformação inversa

$$R_x(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w,t)e^{iw\tau}dw \tag{1.131}$$

obtendo-se, para $\tau = 0$, que

$$R_x(t,0) = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w,t)dw \tag{1.132}$$

De realçar apenas que, sendo a função de auto-correlação não-estacionária $R_x(t,\tau)$ simétrica em τ, a equação (1.130) leva a que a função $S_x(w,t)$ assuma exclusivamente valores reais.

1.7.3 - Espectro de potência evolutivo de Priestley

Uma terceira via possível consiste no recurso à definição de Priestley de espectro de potência evolutivo [184], a qual pressupõe

o conceito de integral de Fourier generalizado, introduzido por Wiener quando procedeu ao desenvolvimento da teoria da Análise Harmónica Generalizada [254].

Com efeito, se é verdade que a análise de Fourier desempenha um papel fundamental na análise de processos estocásticos, possibilitando a representação de qualquer sinal periódico, ou não periódico mas que tenda para zero quando $t \to \infty$, como a sobreposição de um número infinito de harmónicos com diferentes amplitudes, fases e frequências, não é menos certo que há outro tipo de funções que não podem ser objecto de uma representação desse género.

A teoria desenvolvida por Wiener veio no entanto introduzir uma forma mais geral do desenvolvimento de Fourier, de que quer as séries de Fourier, quer o integral de Fourier são casos particulares, e que possibilita a representação de uma vasta gama de funções através de um integral da forma

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} dZ_x(w) \tag{1.133}$$

em que a função $Z_x(w)$, não necessitando de ser forçosamente diferenciável, é unicamente dependente das características de $x(t)$.

Sendo $x(t)$ uma função periódica, $Z_x(w)$ é traduzida por uma função em degraus, de tal forma que a equação (1.133) degenere num desenvolvimento em série de Fourier, traduzido por um somatório do tipo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inwt} \tag{1.134}$$

Por sua vez, sendo $x(t)$ não periódica, mas tendendo para zero quando $t \to \infty$, $Z_x(w)$ torna-se diferenciável para todo o valor de w, reduzindo-se a equação (1.133) ao integral de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) e^{iwt} dw \tag{1.135}$$

verificando-se pois que

$$\frac{dZ_x(w)}{dw} = \frac{X(w)}{2\pi} \tag{1.136}$$

Tratando-se $x(t)$, não de uma função, mas de um processo estocástico, cada uma das suas realizações pode ser representada através da equação (1.133), variando naturalmente $Z_x(w)$ de realização para realização, e constituindo por isso também no seu conjunto um processo estocástico.

Pode provar-se [184] que, sendo $x(t)$ estacionário, $dZ_x(w)$ é um processo ortogonal, isto é

$$E[dZ_x(w_1)dZ_x(w_2)^*] = 0 \quad , \quad w_1 \neq w_2 \tag{1.137}$$

e que, inversamente, sendo $dZ_x(w)$ ortogonal, $x(t)$ é um processo estocástico estacionário.

A função densidade espectral de potência do processo estacionário $x(t)$ pode então definir-se através da relação

$$S_x(w) = \frac{E\{|dZ_x(w)|^2\}}{dw} \tag{1.138}$$

desde que dZ_x seja da ordem de $\sqrt{dw}$, sendo fácil constatar que esta definição vai ao encontro da expressa pela equação (1.58), para os casos em que $x(t)$ é passível de uma representação através de um integral de Fourier, sendo então $dZ_x(w) = X(w)dw/2\pi$.

Recorrendo à definição mais geral de função de auto-correlação dada pela equação (1.35), e tendo presente a propriedade de ortogonalidade traduzida pela equação (1.137), tem-se que

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)^*] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw_1 t}dZ_x(w_1)e^{-iw_2(t+\tau)}dZ_x(w_2)^*\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw\tau}E\{|dZ_x(w)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w)e^{-iw\tau}dw \tag{1.139}$$

Assumindo $x(t)$ exclusivamente valores reais, as equações (1.133) e (1.138) tornam claro, respectivamente, que $dZ_x(w)$ e $S_x(w)$ são pares em relação à variável w, pelo que a equação (1.139) pode tomar a forma

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_x(w)e^{iw\tau}dw=2\int_{o}^{\infty} S_x(w)e^{iw\tau}dw \qquad (1.140)$$

o que corresponde afinal à conhecida relação de Wiener-Khintchine.

No sentido de proceder à extensão desta formulação a processos estocásticos não-estacionários, Priestley [184] introduziu uma função de modulação determinística $A(t,w)$, dependente simultaneamente do tempo e da frequência, que lhe possibilitou manter a ortogonalidade da decomposição espectral do processo $x(t)$, apesar de este não ser estacionário, recorrendo a uma representação do tipo

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} A(t,w)e^{iwt}dZ_x(w) \qquad (1.141)$$

com

$$E[dZ_x(w_1)dZ_x(w_2)^*]=0 \quad , \quad w_1\neq w_2 \qquad (1.142)$$

Nessas condições, a função de auto-correlação é dada por

$$R_x(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} |A(t,w)|^2 e^{-iw\tau}E\{|dZ_x(w)|^2\} \qquad (1.143)$$

e introduzindo o conceito de função densidade espectral evolutiva, definida por

$$S_x(w,t)=|A(t,w)|^2\frac{E\{|dZ_x(w)^2\}}{dw}=|A(t,w)|^2 S_x(w) \qquad (1.144)$$

em que $S_x(w)$ representa a densidade espectral de potência associada ao processo estacionário correspondente, isento da contribuição da função $A(t,w)$, suposta par em w, conclui-se ser possível manter a habitual relação de Wiener-Khintchine, que agora assume a forma

$$R_x(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_x(w,t)e^{iw\tau}dw \qquad (1.145)$$

No caso particular de a função de modulação utilizada ser unicamente dependente de tempo, isto é $A(t,w)=A(t)$, as equações (1.144), (1.143) e (1.139) permitem escrever que

$$S_x(w,t)=|A(t)|^2 S_x(w) \tag{1.146}$$

$$R_x(t,\tau)=|A(t)|^2 R_x(\tau) \tag{1.147}$$

1.8 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS DO TIPO (1D-1V) E (1D-NV) MAIS UTILIZADOS NA MODELAÇÃO FÍSICA

Os processos estocásticos podem ser classificados de acordo com o tipo de distribuição estatística associada à natureza da sua estrutura probabilística.

Todavia, do ponto de vista da modelação dos fenómenos físicos, existem algumas classes de processos estocásticos que, pelas suas características essenciais, e por algumas propriedades delas decorrentes, se revelam de particular utilidade.

É o caso, no âmbito da Dinâmica Estrutural, dos processos de Gauss, de Poisson, de Markov e de Wiener, pelo que se entende conveniente referir nos pontos seguintes alguns dos aspectos fundamentais que lhes estão associados.

1.8.1 - Processos de Gauss

Um processo estocástico $x(t)$ diz-se gaussiano se todas as funções densidade de probabilidade pluridimensionais referidas por (1.2) puderem ser expressas sob a forma

$$p(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\underline{\mu}_x|^{1/2}}\ \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{X}-\underline{m}_x)^T\underline{\mu}_x^{-1}(\underline{X}-\underline{m}_x)\right] \tag{1.148}$$

em que $\underline{X}$ representa o vector das n variáveis aleatórias $X_1,X_2,\ldots,X_n$ correspondentes aos valores do processo $x(t)$ nos instantes $t_1,t_2,\ldots,t_n$,

tendo em conta a totalidade das realizações que o constituem, $\underline{m}_x$ é o vector formado pelos valores médios daquelas variáveis e $\underline{\mu}_x$ a matriz das correspondentes funções de auto-covariância.

Torna-se assim claro que a distribuição probabilística de processos desta natureza fica inteiramente caracterizada mediante o conhecimento de momentos estatísticos de primeira e segunda ordem (médias e covariâncias), podendo todos os momentos de ordem superior expressar-se em função daqueles.

Por outro lado, caso a matriz $\underline{\mu}_x$ seja diagonal, a função densidade de probabilidade $p_n(\underline{X})$ pode expressar-se como o produto de funções densidade gaussianas de uma só variável, isto é

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = p(X_1)p(X_2)\ldots p(X_n) \tag{1.149}$$

sendo

$$p(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_{x_i}}} \exp\left[-(X_i - m_{x_i})^2/2\mu_{x_i}\right] \tag{1.150}$$

Tal demonstra que, nessas circunstâncias, as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são estatisticamente independentes, sendo fácil verificar que o inverso é também verdadeiro.

A hierarquia de funções $C_n(\underline{\theta}) = C(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ correspondentes a um processo estocástico gaussiano pode obter-se conjugando a equação (1.148) com (1.4), o que conduz a [113]

$$C_n(\underline{\theta}) = \exp\left(i\underline{m}_x^T\underline{\theta} - \frac{1}{2}\underline{\theta}^T\underline{\mu}_x\underline{\theta}\right) \tag{1.151}$$

ou

$$C_n(\underline{\theta}) = \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} m_{x_j}\theta_j - \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n}\mu_{jl}^x\theta_j\theta_l\right) \tag{1.152}$$

sendo m_{x_j} a j-ésima componente do vector $\underline{m}_x$, e μ_{jl}^x o elemento da matriz $\underline{\mu}_x$ correspondente à linha j e à coluna l.

Tendo presente as relações verificadas entre momentos estatísticos e cumulantes, expressas pelas expressões (1.14) e (1.15)

$$m_{x_j} = m_1(X_j) = k_1(X_j) \tag{1.153}$$

$$\mu^x_{jl} = E[(X_j - m_{x_j})(X_l - m_{x_l})] = E[X_j X_l] - E[X_j]E[X_l]$$

$$= m_2(X_j, X_l) - m_1(X_j)m_1(X_l) = k_2(X_j, X_l) \tag{1.154}$$

a hierarquia das funções características $C_n(\underline{\theta})$ pode estabelecer-se também em função dos cumulantes através da equação

$$C_n(\underline{\theta}) = \exp\left[i \sum_{j=1}^{n} k_1(X_j)\theta_j - \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} k_2(X_j, X_l)\theta_j\theta_l \right] \tag{1.155}$$

Comparando esta equação com a relação geral expressa pela equação (1.13), pode concluir-se que, no caso de processos estocásticos gaussianos, são nulos todos os cumulantes de ordem superior a dois, aspecto que constitui aliás uma propriedade de grande interesse desta classe de processos.

Outras propriedades importantes são, designadamente, a de a estacionaridade de segunda ordem implicar a estacionaridade em sentido lato e vice-versa, ou a de processos obtidos por operações lineares sobre processos gaussianos serem igualmente processos gaussianos.

Esta última afirmação pode aliás ser facilmente comprovada, caso se considerem os vectores $\underline{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_n]^T$ e $\underline{Y} = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]^T$, constituídos por n variáveis aleatórias associadas aos valores de dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$ nos instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$, os quais se supõem relacionados entre si por uma relação linear do tipo

$$\underline{Y} = \underline{T}\,\underline{X} \tag{1.156}$$

sendo $\underline{T}$ uma matriz quadrada de dimensão n, suposta constituída por coeficientes complexos, por uma questão de maior generalidade.

Considerando que $x(t)$ é um processo estocástico gaussiano, e conjugando a equação (1.156) com a relação Jacobiana existente entre as funções densidade pluridimensionais $p_n(\underline{X})$ e $p_n(\underline{Y})$

$$p(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)=\left|\begin{array}{cccc}\frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial Y_1}\\ \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial Y_2}\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \frac{\partial X_1}{\partial Y_n} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_n} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial Y_n}\end{array}\right| p(X_1,X_2,\ldots,X_n) \qquad (1.157)$$

pode obter-se que [54, 195]

$$p(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\underline{\mu}_y|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{Y}-\underline{m}_y)^T\underline{\mu}_y^{-1}(\underline{Y}-\underline{m}_y)\right] \qquad (1.158)$$

com

$$\underline{\mu}_y=\underline{T}\underline{\mu}_x\underline{T}^{*T} \qquad (1.159)$$

comprovando a equação (1.158) o carácter gaussiano do processo estocástico $y(t)$, e encontrando-se a respectiva matriz de covariância $\underline{\mu}_y$ relacionada com a matriz homóloga $\underline{\mu}_x$ através da relação matricial (1.159).

Esta importante propriedade é aliás responsável pela preservação do carácter gaussiano em relação aos processos obtidos por derivação ou integração a partir de um processo estocástico gaussiano original.

Apesar do enorme interesse destas propriedades, já que a par do facto de a caracterização estatística de processos desta natureza poder ser exclusivamente efectuada com base em momentos de primeira e segunda ordem, elas tendem a facilitar significativamente a análise probabilística de sistemas lineares, a principal importância desta classe de processos resulta todavia de modelarem de forma adequada grande número de fenómenos físicos, facto que se compreende facilmente se se tiver em conta que grande parte desses fenómenos decorrem de um imenso número de factores aleatórios, não assumindo qualquer deles preponderância significativa sobre os restantes.

É ainda de realçar que, mesmo no caso de processos estocásticos não-gaussianos, em que os cumulantes de ordem superior à segunda não são nulos, as respectivas famílias de funções características, ou de

funções densidade de probabilidade pluridimensionais, podem exprimir-se em termos das funções homólogas, correspondentes a processos estocásticos gaussianos com os mesmos cumulantes de primeira e segunda ordem.

Para tal, convém introduzir a noção de quasi-momentos [139, 195, 219] $b_r(X_i, X_j, \ldots, X_l)$, definidos por forma que

$$\exp\left\{\sum_{r=3}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\ldots,l=1}^{n} k_r(X_i, X_j, \ldots, X_l)\theta_i\theta_j\ldots\theta_l\right\} =$$

$$= 1 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\ldots,l=1}^{n} b_r(X_i, X_j, \ldots, X_l)\theta_i\theta_j\ldots\theta_l \qquad (1.160)$$

sendo a ordem r correspondente igual ao número de argumentos.

Nessas condições, e tendo presente a equação (1.13)

$$C_n(\underline{\theta}) = C_n^g(\underline{\theta})\left\{1 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\ldots,l=1}^{n} b_r(X_i, X_j, \ldots, X_l)\theta_i\theta_j\ldots\theta_l\right\} \qquad (1.161)$$

em que a família de funções características correspondentes ao processo estocástico gaussiano com iguais cumulantes de primeira e segunda ordem é representada por $C_n^g(\underline{\theta})$.

Os quasi-momentos podem relacionar-se com os cumulantes com base na equação (1.160). No entanto, e tendo em consideração que, confrontando as equações (1.10), (1.13) e (1.160), se conclui que as relações entre momentos e cumulantes são idênticas às verificadas entre cumulantes e quasi-momentos, desde que se considerem nulos os momentos e os cumulantes de primeira e segunda ordem, facilmente se deduz, impondo k_1 e k_2 iguais a zero nas equações (1.16), (1.17) e afins de ordem superior, que

$$b_3(X_i, X_j, X_l) = k_3(X_i, X_j, X_l)$$

$$b_4(X_i, X_j, X_l, X_m) = k_4(X_i, X_j, X_l, X_m)$$

$$b_5(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m) = k_5(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m) \qquad (1.162)$$

$$b_6(X_i,X_j,X_k,X_l,X_m,X_n)=k_6(X_i,X_j,X_k,X_l,X_m,X_n)+$$
$$+10\{k_3(X_i,X_j,X_k)k_3(X_l,X_m,X_n)\}_p$$
$$b_7(X_i,X_j,X_k,X_l,X_m,X_n,X_o)=k_7(X_i,X_j,X_k,X_l,X_m,X_n,X_o)+$$
$$+35\{k_3(X_i,X_j,X_k)k_4(X_l,X_m,X_n,X_o)\}_p$$

$C_n(\underline{\theta})$ pode relacionar-se com a correspondente família de funções densidade de probabilidade $p_n(\underline{X})$ através da transformada inversa de Fourier de ordem n

$$p_n(\underline{X})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\underline{\theta}^T\underline{X})\;C_n(\underline{\theta})d\theta_1 d\theta_2\ldots d\theta_n \qquad (1.163)$$

Como esta relação é válida, em particular, para os processos de natureza gaussiana, e observando que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}i^r\theta_i\theta_j\ldots\theta_l\exp(-i\underline{\theta}^T\underline{X})\;C_n^g(\underline{\theta})d\theta_1 d\theta_2\ldots d\theta_n=$$
$$=\left(-\frac{\partial}{\partial X_i}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial X_j}\right)\cdots\left(-\frac{\partial}{\partial X_l}\right)p_n^g(\underline{X}) \qquad (1.164)$$

pode obter-se com base na equação (1.161) o seguinte desenvolvimento da função $p_n(\underline{X})$ do processo não-gaussiano, em termos da função correspondente do processo gaussiano de iguais cumulantes de primeira e segunda ordem, $p_n^g(\underline{X})$, e dos quasi-momentos b_r

$$p_n(\underline{X})=\left\{1+\sum_{r=3}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{i,j,\ldots,l=1}^{n}b_r(X_i,X_j,\ldots,X_l).\left(\frac{\partial}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial X_j}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial X_l}\right)\right\}p_n^g(\underline{X})$$

(1.165)

Tem particular interesse em Dinâmica Estrutural a consideração de processos gaussianos vectoriais $\underline{x}(t)$ constituídos por N processos individuais $x_1(t),x_2(t),\ldots,x_N(t)$. Neste caso, a função densidade de probabilidade de dimensão

$$N'=nN \qquad (1.166)$$

relativa às N' variáveis aleatórias associadas a cada um dos valores

que cada processo individual pode assumir em sucessivos instantes de tempo $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(n \to \infty)$, caracteriza de forma completa a estrutura probabilística do processo vectorial, assumindo este natureza gaussiana se aquela função respeitar a lei normal de dimensão N, o que naturalmente implica que o mesmo aconteça com cada um dos processos individuais. Por conseguinte, a completa descrição do processo gaussiano vectorial $\underline{x}(t)$ exige o conhecimento dos valores médios $m_{x_i}(t_k)$, das funções de auto-covariância $\mu_{x_i}(t_k, t_l)$ e das funções de inter-covariância $\mu_{x_i x_j}(t_k, t_l)$ definidas por

$$m_{x_i}(t_k) = E[x_i(t_k)] \tag{1.167}$$

$$\mu_{x_i}(t_k, t_l) = E\{[x_i(t_k) - m_{x_i}(t_k)][x_i(t_l) - m_{x_i}(t_l)]\} \tag{1.168}$$

$$\mu_{x_i x_j}(t_k, t_l) = E\{[x_i(t_k) - m_{x_i}(t_k)][x_j(t_l) - m_{x_j}(t_l)]\} \tag{1.169}$$

ou, mais simplesmente, no caso de processos estacionários por

$$m_{x_i}(t_k) = m_{x_i} = constante \tag{1.170}$$

$$\mu_{x_i}(t_k, t_l) = \mu_{x_i}(\tau) = R_{x_i}(\tau) - m_{x_i}^2 \tag{1.171}$$

$$\mu_{x_i x_j}(t_k, t_l) = \mu_{ij}^x(\tau) = R_{ij}^x(\tau) - m_{x_i} m_{x_j} \tag{1.172}$$

sendo $\tau = t_l - t_k$.

Torna-se a partir daí possível formar o vector das médias $\underline{m}_x$, e a matriz de covariância $\underline{\mu}_x$, que intervêm na expressão da função densidade de probabilidade de Gauss (eq. 1.148) de dimensão N, que define integralmente a estatística do processo, e em particular, no caso de processos estacionários, determinar a função densidade de probabilidade de dimensão N caracterizadora da distribuição probabilística instantânea ($\tau = 0$).

Neste último caso $\underline{m}_x$ e $\underline{\mu}_x$ resultam simplesmente do conhecimento de (v. eq. 1.73 e 1.106)

$$m_{x_i} = constante \tag{1.173}$$

$$\mu_{x_i} = R_{x_i}(0) - m_{x_i}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_i}(w)dw - m_{x_i}^2 \tag{1.174}$$

$$\mu_{ij}^x = R_{ij}^x(0) - m_{x_i} m_{x_j} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}^x(w)dw - m_{x_i} m_{x_j} \tag{1.175}$$

sendo pois evidente que, no caso de processos estacionários de valor médio nulo, a distribuição probabilística instantânea é integralmente definida pela matriz constituida pelas variâncias μ_{x_i} e pelas inter-covariâncias μ_{ij}^{x}, ou, se se preferir, pelo valor na origem das funções de auto e de inter-correlação.

Aliás, neste caso ainda, e tendo em consideração a relação (1.175)

$$\mu_{ij}^{x} = R_{ij}^{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}^{x}(w)dw = 2\int_{0}^{\infty} R_e[S_{ij}^{x}(w)]dw \qquad (1.176)$$

o que mostra que a distribuição probabilística instantânea de um processo estocástico vectorial gaussiano estacionário de valor médio nulo fica também completamente definida, uma vez conhecida a matriz quadrada de dimensão N formada pelas partes reais das densidades espectrais conjuntas $S_{ij}^{x}(w)$, relativas aos processos individuais $x_i(t)$ e $x_j(t)$.

É também de realçar que se um processo vectorial gaussiano $\underline{x}(t)$, de N componentes, estiver relacionado com um outro processo $\underline{r}(t)$, de M componentes, através da transformação linear

$$\underline{r}(t) = \underline{\underline{T}}\,\underline{x}(t) \qquad (1.177)$$

em que $\underline{\underline{T}}$ é uma matriz de transformação do tipo $M \times N$, então $\underline{r}(t)$ é igualmente gaussiano, verificando-se que

$$\underline{\underline{\mu}}_r = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{\mu}}_x\,\underline{\underline{T}}^{T} \qquad (1.178)$$

Por outro lado, pode ainda demonstrar-se [12] que, sendo $g(\underline{x})$ uma função real do processo estocástico vectorial gaussiano $\underline{x}(t)$, dispondo de derivadas parciais em ordem a cada coordenada $x_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,N)$, e tal que se verique a relação

$$|g(\underline{x})| < \beta \ \exp\left\{\sum_{i=1}^{N} x_i^{\alpha}\right\} \qquad (1.179)$$

com $\alpha < 2$, para algum valor de β e $\underline{x}$ qualquer, então

$$E[\underline{x}g(\underline{x})] = E[\underline{x}\underline{x}^T]E[\underline{\nabla}g(\underline{x})] \tag{1.180}$$

em que $\underline{\nabla}$ é o operador

$$\underline{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right]^T \tag{1.181}$$

1.8.2 - Processos de Poisson, de impulsos aleatórios e ruído branco

Os processos estocásticos de Poisson inserem-se no domínio dos processos de contagem $N(t)$, em que N representa o número de ocorrências verificadas entre os instantes 0 e t, podendo como tal ser caracterizados através de uma hierarquia de funções de probabilidade do tipo

$$P_n(N_1, t_1; N_2, t_2; \ldots; N_n, t_n) \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.182}$$

traduzindo a probabilidade de se verificarem N_1 ocorrências até ao instante t_1, N_2 ocorrências até ao instante t_2, etc.

Um processo desta natureza, que assume naturalmente apenas valores inteiros, é designado como um processo de Poisson com incrementos estacionários, se se verificarem as três seguintes condições:

a) Se houver independência das ocorrências futuras em relação às passadas;
b) Se for constante a taxa média de ocorrências λ, isto é, se a probabilidade de se verificar uma ocorrência num qualquer intervalo de tempo de amplitude dt assumir um valor constante e igual a λdt;
c) Se a probabilidade de se verificarem duas ocorrências num qualquer intervalo de amplitude dt for desprezável face a λdt.

Se satisfeitas estas condições, pode provar-se que [143]

$$P(N, t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^N}{N!} \tag{1.183}$$

Caso apenas se verifiquem as condições a) e c), tornando-se a taxa λ uma função não negativa da variável t, o processo de contagem é designado por processo de Poisson com incrementos não-estacionários, sendo então caracterizado pela seguinte função de probabilidade [143]

$$P(N,t)=\frac{1}{N!}\left[\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right]^N \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right] \qquad (1.184)$$

expressão que inclui naturalmente (1.183) como um caso particular.

A importância dos processos estocásticos de Poisson resulta não só da sua adequação à fácil modelação de determinados fenómenos físicos, mas também de poderem ser utilizados para a construção de outras classes de processos, igualmente de grande interesse desse mesmo ponto de vista.

Uma destas classes é constituída pelos chamados processos de impulsos aleatórios, que têm a seguinte forma geral

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} W_i(t,\tau_i) \qquad (1.185)$$

em que $N(t)$ é um processo de contagem, e cada $W_i(t,\tau_i)$ representa o valor no instante t de um impulso aleatório com uma dada configuração e com início no instante τ_i.

Um caso especial, de grande interesse prático, é aquele em que aquela sobreposição é efectuada tomando como base um único tipo de impulso aleatório com uma dada configuração, fazendo variar aleatoriamente as correspondentes amplitudes, ou seja, considerando

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i w(t,\tau_i) \qquad (1.186)$$

sendo os Y_i variáveis aleatórias identicamente distribuidas, independentes entre si e relativamente aos instantes τ_i, e $w(t,\tau_i)$ uma função determinística que traduz a forma do impulso, a qual não depende do instante em que ocorre, e que se supõe tender para zero a partir de um certo valor $t-\tau_i$.

Sendo $N(t)$ um processo de Poisson com incrementos estacionários ou não, assumindo as variáveis Y_i valores médios nulos e tomando como impulso de referência o impulso unitário de Dirac, ou seja admitindo que

$$w(t,\tau_i)=\delta(t-\tau_i) \tag{1.187}$$

obtém-se a forma característica de uma importante sub-classe dos processos de impulsos aleatórios ("shot noise"), que respeitam a seguinte relação

$$s(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\delta(t-\tau_i) \tag{1.188}$$

podendo mostrar-se [143] que as correspondentes funções média e de auto-covariância obedecem às seguintes equações

$$m_s(t)=0 \tag{1.189}$$

$$\mu_s(t_1,t_2)=I(t_1)\delta(t_2-t_1) \tag{1.190}$$

sendo $I(t)$ a chamada função de intensidade.

Um caso particular é aquele em que $s(t)$ é um processo fracamente estacionário, verificando-se então que

$$m_s(t)=0 \tag{1.191}$$

$$\mu_s(t_1,t_2)=R_s(\tau)=I\delta(\tau) \tag{1.192}$$

sendo $\tau=t_2-t_1$, e representando $R_s(\tau)$ a função de auto-correlação do processo $s(t)$, habitualmente designado por ruído branco ("white noise").

A correspondente função densidade espectral de potência pode determinar-se tendo presente a relação de Wiener-Khintchine, obtendo-se

$$S_s(w)=\frac{I}{2\pi} \tag{1.193}$$

ou seja, assume valor constante ao longo de toda a gama de frequências, aspecto que justifica aliás a designação de ruído branco.

A variância do processo não apresenta porém valor finito, facto que indica que processos desta natureza, como aliás do tipo "shot noise", são fisicamente irrealizáveis, constituindo no entanto modelos matemáticos de grande utilidade.

1.8.3 - Processos de Markov

O grau de aleatoriedade de um processo estocástico pode ser avaliado em função do grau de dependência que o valor do processo em cada instante assume em relação à sua história anterior.

Desse ponto de vista, um processo completamente imprevisível ou sem memória é aquele em que qualquer dos seus valores é completamente independente de todos os restantes. Um processo desta natureza corresponde à noção de ruído branco, naturalmente irrealizável do ponto de vista físico também por admitir-se total independência entre os valores do processo $x(t_i)$ e $x(t_j)$, por maior que seja a proximidade entre os instantes t_i e t_j.

A estrutura probabilística do processo pode neste caso ser inteiramente definida a partir do conhecimento da função densidade de probabilidade de dimensão 1, dado que

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i) \qquad (1.194)$$

Nos casos em que o futuro imediato é condicionado apenas pela situação presente e não pela evolução passada, está-se em presença dos chamados processos de Markov, também designados processos com um grau de memória, os quais, de forma mais rigorosa, obedecem à seguinte relação

$$p_c(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = p_c(X_n \mid X_{n-1}) \qquad (1.195)$$

em que a função densidade de probabilidade condicional $p_c(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ traduz a probabilidade de o processo apresentar um valor próximo de X_n no instante t_n, tendo assumido valores próximos de X_1 no instante t_1, de X_2 no instante t_2, etc., com $t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1$.

Um processo de Markov pode ser inteiramente caracterizado probabilisticamente através da função densidade de probabilidade de dimensão 1, $p(X_i)$, e da função $p_c(X_i \mid X_{i-1})$, também designada densidade de probabilidade de transição, dado que

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n) = p(X_1) p_c(X_2 \mid X_1) p_c(X_3 \mid X_2) \ldots p_c(X_n \mid X_{n-1}) \quad (1.196)$$

Tendo presente que

$$p_c(X_i \mid X_{i-1}) = \frac{p(X_{i-1}, X_i)}{p(X_{i-1})} \quad (1.197)$$

$$p(X_{i-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(X_{i-1}, X_i) dX_i \quad (1.198)$$

torna-se também evidente que um processo de Markov pode ser, em alternativa, completamente definido com base na função densidade de probabilidade bidimensional $p(X_{i-1}, X_i)$.

Caso o valor inicial X_o do processo no instante t_o seja conhecido com probabilidade 1, $p(X_1)$ pode ser substiuída em (1.196) por $p_c(X_1 \mid X_o)$, tornando-se assim claro que, nessas circunstâncias, o conhecimento da densidade de probabilidade de transição $p_c(X_i \mid X_{i-1})$ é suficiente para a completa caracterização do processo.

A função $p_c(X_i \mid X_{i-1})$ deve naturalmente satisfazer algumas condições, nomeadamente

$$p_c(X_i \mid X_{i-1}) \geq 0 \quad (1.199)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_c(X_i \mid X_{i-1}) dX_i = 1 \quad (1.200)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(X_{i-1}) p_c(X_i \mid X_{i-1}) dX_{i-1} = p(X_i) \quad (1.201)$$

Para além destas condições, deve ainda ser verificada a chamada equação de Chapman-Kolmogorov-Smoluchowski, que constitui uma condição de compatibilidade entre estados sucessivos

$$p_c(X_i \mid X_{i-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_c(X_i \mid Y) p_c(Y, X_{i-1}) dY \quad (1.202)$$

sendo Y a variável aleatória associada ao valor do processo de Markov num qualquer instante t intermédio entre t_{i-1} e t_i.

Se a densidade de probabilidade de transição entre os instantes t_{i-1} e t_i, $p_c(X_i \mid X_{i-1})$, ou, se se preferir, $p_c(X_i, t_i \mid X_{i-1}, t_{i-1})$, for invariante em relação a qualquer translação τ introduzida na escala do tempo, isto é se

$$p_c(X_i, t_i \mid X_{i-1}, t_{i-1}) = p_c(X_i, t_i + \tau \mid X_{i-1}, t_{i-1} + \tau) \tag{1.203}$$

então o processo markoviano diz-se ter incrementos estacionários.

Essa é aliás uma condição necessária para que o processo de Markov seja estacionário, não sendo porém suficiente.

Verificando-se a estacionaridade do processo, torna-se possível obter a função densidade de probabilidade unidimensional $p(X_i)$, tomando o limite

$$p(X_i) = \lim_{\tau \to \infty} p_c(X_i, t_i \mid X_1, t_1) \tag{1.204}$$

com $\tau = t_i - t_1$.

As propriedades de um processo de Markov são facilmente generalizáveis ao caso de um processo estocástico vectorial de dimensão N, verificando-se então que

$$p_c(\underline{X}_n \mid \underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_{n-1}) = p_c(\underline{X}_n \mid \underline{X}_{n-1}) \tag{1.205}$$

e que a equação de Chapman-Kolmogorov-Smoluchowski é expressa por

$$p_c(\underline{X}_i \mid \underline{X}_{i-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_c(\underline{X}_i \mid \underline{Y}) p_c(\underline{Y} \mid \underline{X}_{i-1}) dY^1 dY^2 \ldots dY^N \tag{1.206}$$

traduzindo $\underline{Y}$ o valor do processo vectorial $\underline{x}(t)$ num qualquer instante t entre t_{i-1} e t_i, e sendo Y^j a j-ésima componente do vector $\underline{Y}$.

O processo vectorial de Markov $\underline{x}(t)$ constitui simultaneamente um processo de difusão, caso sejam verificadas as seguintes condições para todo o $\epsilon > 0$ e $\underline{X}, \underline{Y} \in R^N$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|\underline{Y}-\underline{X}|>\epsilon}\cdots\int p_c(\underline{Y},t+\Delta t\,|\,\underline{X},t)dY^1dY^2\ldots dY^N=0 \qquad (1.207)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|\underline{Y}-\underline{X}|\leq\epsilon}\cdots\int (Y^i-X^i)p_c(\underline{Y},t+\Delta t\,|\,\underline{X},t)dY^1dY^2\ldots dY^N=\alpha_i(\underline{X},t) \qquad (1.208)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|\underline{Y}-\underline{X}|\leq\epsilon}\cdots\int (Y^i-X^i)(Y^j-X^j)p_c(\underline{Y},t+\Delta t\,|\,\underline{X},t).dY^1dY^2\ldots dY^N=\beta_{ij}(\underline{X},t) \qquad (1.209)$$

em que X^i, X^j e Y^i, Y^j representam as componentes de ordem i e j dos vectores $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ relativos aos instantes t e $t+\Delta t$ respectivamente, designando-se o vector $\underline{\alpha}(\underline{X},t)$ por vector de tendência ("drift") e a matriz $\underline{\beta}(\underline{X},t)$ por matriz de difusão.

Sendo estas condições satisfeitas pelo processo vectorial de Markov $\underline{x}(t)$, a equação de Chapman-Kolmogorov-Smoluchowshi (1.206), equação integral que regula a densidade de probabilidade de transição respectiva, torna em geral possível deduzir uma equação diferencial equivalente [6, 46, 143], denominada equação de Fokker-Planck--Kolmogorov (FPK), que regula igualmente aquela densidade de probabilidade, e cuja forma é

$$\frac{\partial p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial X^i}[\alpha_i p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial X^i\partial X^j}[\beta_{ij}p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)] \qquad (1.210)$$

com a condição inicial

$$\lim_{t\to t_0}p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)=\delta(\underline{X}-\underline{X}_0) \qquad (1.211)$$

sendo $\underline{X}_0$ e $\underline{X}$ os vectores constituídos pelas variáveis aleatórias associadas ao valor do processo vectorial nos instantes t_0 e $t\,(t_0<t)$, X^i e X^j as componentes de ordem i e de ordem j do vector $\underline{X}$, e α_i e β_{ij} os seguintes limites obtidos a partir dos momentos incrementais de primeira e segunda ordem, $E[\Delta X^i]$ e $E[\Delta X^i\Delta X^j]$

$$\alpha_i(\underline{X},t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta X^i]}{\Delta t}\qquad \beta_{ij}(\underline{X},t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta X^i\Delta X^j]}{\Delta t}\qquad (1.212)$$

Na dedução desta equação admite-se ainda existirem as derivadas parciais contínuas indicadas em (1.210), e serem desprezáveis os limites dos momentos incrementais de ordem superior à segunda.

A equação de FPK é usualmente escrita na forma mais condensada

$$\frac{\partial p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)}{\partial t}=L\,p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)\qquad (1.213)$$

em que o operador

$$L=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial X^i}[\alpha_i(\underline{X},t)]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial X^i\partial X^j}[\beta_{ij}(\underline{X},t)]\qquad (1.214)$$

verificando-se também que

$$\frac{\partial p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)}{\partial t_0}=L^*\,p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)\qquad (1.215)$$

com

$$L^*=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial X_0^i}[\alpha_i(\underline{X}_0,t_0)]-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial X_0^i\partial X_0^j}[\beta_{ij}(\underline{X}_0,t_0)]\qquad (1.216)$$

designando-se a equação (1.215) por equação de FPK inversa.

Caso o processo $\underline{x}(t)$ seja estacionário, sucede que quando $t\to\infty$

$$\frac{\partial p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)}{\partial t}\;\to\;0\qquad p_c(\underline{X}\,|\,\underline{X}_0)\;\to\;p(\underline{X})\qquad (1.217)$$

em que $p(\underline{X})$ é uma função densidade de probabilidade independente do tempo e das condições iniciais, tomando por isso a equação de FPK a forma

$$L\,p(\underline{X})=0\qquad (1.218)$$

1.8.4 - Processos de Wiener

Os processos de Wiener constituem também uma importante classe de processos estocásticos de grande utilidade na modelação de fenómenos físicos, tendo começado por ter grande aplicação na caracterização de movimentos Brownianos de partículas.

Um processo estocástico $W(t)$ é um processo de Wiener se os valores que assume em instantes sucessivos

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_n \tag{1.219}$$

são tais que quaisquer incrementos ΔW_i e ΔW_j com

$$\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i) \qquad \Delta W_j = W(t_{j+1}) - W(t_j) \tag{1.220}$$

são estacionários e estatisticamente independentes, verificando-se também que as diferenças

$$W(t_j) - W(t_i) \tag{1.221}$$

obedecem a uma distribuição de Gauss com a seguinte média e variância

$$E[W(t_j) - W(t_i)] = 0 \tag{1.222}$$

$$E\{[W(t_j) - W(t_i)]^2\} = I\,|t_j - t_i| \tag{1.223}$$

sendo I uma constante.

Desta definição resulta evidente que qualquer processo de Wiener $W(t)$ é simultaneamente um processo de Markov, podendo demonstrar-se também [196] que $W(t)$ se encontra sempre relacionado com um processo estocástico estacionário gaussiano de tipo ruído branco $\omega(t)$ através de uma equação integral

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} \omega(u)\,du \tag{1.224}$$

ou de forma inversa

$$\omega(t) = \frac{dW(t)}{dt} \tag{1.225}$$

com

$$m_{\omega}(t) = 0 \tag{1.226}$$

$$\mu_{\omega}(t_i, t_j) = R_{\omega}(t_i, t_j) = I\delta(t_j - t_i) \tag{1.227}$$

sendo de assinalar que o integral (1.224) não é o habitual integral de Riemann [91], e que em (1.225) não foi utilizado o habitual conceito de derivada. Com efeito, tal como está demonstrado por Doob [91] as realizações de um processo de Wiener, embora contínuas são não limitadas, e não são diferenciáveis em quase toda a parte do domínio, devendo por isso as equações (1.224) e (1.225) ser interpretadas de forma cuidadosa [196].

1.9 - PROPRIEDADES IMPORTANTES DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS RELACIONADAS COM O DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL

A utilização da Teoria dos Processos Estocásticos em Dinâmica Estrutural tem como objectivo principal reduzir a probabilidade de ruína das estruturas sujeitas a excitações aleatórias a níveis aceitáveis do ponto de vista da segurança estrutural, recorrendo para o efeito a métodos de análise mais perfeitos e rigorosos.

Cada variável de controlo caracterizadora da resposta dinâmica de uma estrutura, seja uma componente de tensão ou de deformação, um esforço ou um deslocamento, pode ser traduzida por um processo estocástico $x(t)$, podendo a ruína ocorrer, ou porque o processo atinge pela primeira vez um valor suficientemente elevado, registando-se uma primeira passagem de uma dada barreira correspondente a um limiar de segurança, ou porque, embora mantendo-se relativamente baixos os valores assumidos pelo processo, se verifica um fenómeno de fadiga.

Em qualquer dos casos, porém, torna-se conveniente conhecer previamente determinadas propriedades dos processos estocásticos relacionadas especialmente com:

- a frequência média de passagens ascendentes do processo $x(t)$ por um nível a;

- a distribuição de probabilidade de um máximo relativo de $x(t)$;
- a distribuição de probabilidade de um extremo absoluto do processo $x(t)$ num intervalo de tempo T;
- a distribuição de probabilidade da envolvente do processo $x(t)$;
- a distribuição de probabilidade dos tempos de primeira passagem.

A estes aspectos é por isso feita referência detalhada nos pontos seguintes, sendo efectuada alguma particularização em relação aos processos gaussianos, dado que, como facilmente se compreende pelo Teorema do Limite Central, grande número de acções aleatórias e das correspondentes respostas estruturais podem ser adequadamente modeladas por processos deste tipo.

1.9.1 - Frequência média de passagens ascendentes por um dado nível

Para caracterizar a probabilidade de ocorrência de uma passagem ascendente do processo estocástico $x(t)$ por um dado nível a e a correspondente frequência média de ocorrência, é usual recorrer-se ao método introduzido por Rice [188], considerando o processo $x(t)$ e o seu derivado $\dot{x}(t)$ restringidos ao intervalo infinitesimal $[t, t+dt]$, na vizinhança de um atravessamento desse tipo (Fig. 1.9).

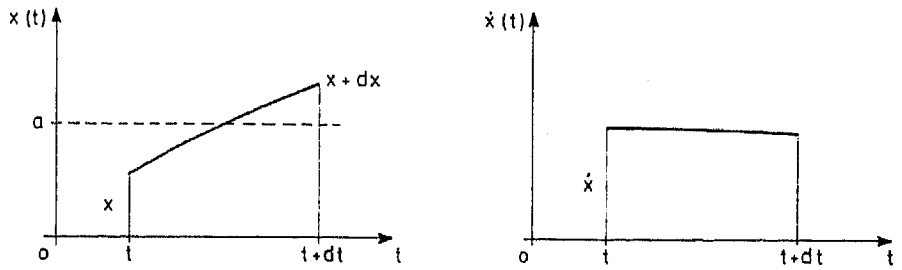


Fig. 1.9 - Passagem ascendente de $x(t)$ pelo nível a.

A condição necessária para a ocorrência dessa passagem ascendente é

$$a - \dot{x}(t)dt < x(t) < a \quad \wedge \quad \dot{x}(t) > 0 \tag{1.228}$$

à qual corresponde no plano $(x,\dot{x})$ a zona tracejada na figura 1.10.

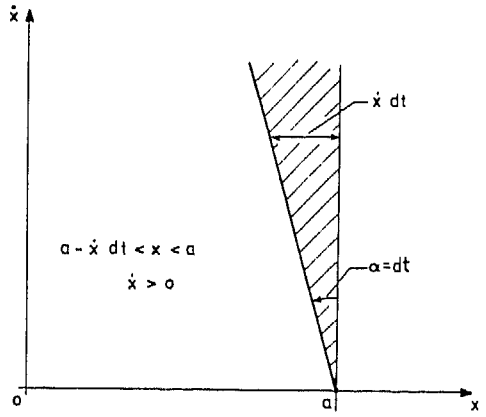


Fig. 1.10 - Domínio de satisfação das condições para a existência de uma passagem ascendente de $x(t)$ pelo nível a.

A probabilidade de ocorrência de uma passagem ascendente por a no intervalo referido é então

$$\int_0^{\infty} \int_{a-\dot{x}dt}^{a} p(x,\dot{x},t)dx\,d\dot{x} = dt \int_0^{\infty} \dot{x}\,p(a,\dot{x},t)d\dot{x} \qquad (1.229)$$

e a correspondente frequência média de passagens ascendentes por unidade de tempo t

$$f_a^{\uparrow}(t) = \int_0^{\infty} \dot{x}\,p(a,\dot{x},t)d\dot{x} \qquad (1.230)$$

No caso particular de processos estocásticos estacionários gaussianos de valor médio nulo, a densidade de probabilidade conjunta é independente de t, sendo definida por

$$p(x,\dot{x}) = \frac{1}{2\pi |\underline{\mu}_v|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,[\underline{v}-\underline{m}_v]^T \underline{\mu}_v^{-1} [\underline{v}-\underline{m}_v]\right\} \qquad (1.231)$$

com

$$\underline{v} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \qquad \underline{m}_v = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_{\dot{x}} \end{Bmatrix} = \underline{0} \qquad \underline{\mu}_v = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{x\dot{x}} \\ \mu_{\dot{x}x} & \mu_{\dot{x}\dot{x}} \end{bmatrix} \qquad (1.232)$$

Designando por momento espectral de ordem k da função densidade espectral de potência $S_x(w)$

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^{\infty} w^k S_x(w) dw \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.233}$$

e atendendo às equações (1.65), (1.123) e (1.115)

$$\begin{aligned} \mu_{xx} &= \sigma_x^2 = \lambda_0 \\ \mu_{x\dot{x}} &= \mu_{\dot{x}x} = 0 \\ \mu_{\dot{x}\dot{x}} &= \sigma_{\dot{x}}^2 = \lambda_2 \end{aligned} \tag{1.234}$$

pelo que

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_0 \lambda_2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\lambda_0} + \frac{\dot{x}^2}{\lambda_2}\right)\right] \tag{1.235}$$

Substituindo esta equação em (1.230), pode obter-se a seguinte expressão da frequência média de passagens ascendentes pelo nível a

$$f_a^{\uparrow} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{1/2} \exp(-a^2/2\lambda_0) \tag{1.236}$$

que conduz, no caso especial em que $a = 0$, a

$$f_0^{\uparrow} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{1/2} \tag{1.237}$$

Se o processo estocástico gaussiano $x(t)$ for não-estacionário com valor médio nulo, o valor instantâneo da frequência média de passagens ascendentes pelo nível a pode determinar-se também com base na equação (1.230), tendo apenas em atenção, na caracterização da densidade de probabilidade conjunta $p(x, \dot{x}, t)$, que as covariâncias $\mu_{x\dot{x}}(t)$ e $\mu_{\dot{x}x}(t)$ deixam de ser nulas, podendo então obter-se que [142]

$$f_a^{\uparrow}(t) = \frac{[1 - \rho_{x\dot{x}}^2(t)]^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_0(t)}\right]^{1/2} \exp[-a^2/2\lambda_0(t)][g(b) + bG(b)] \tag{1.238}$$

com

$$\lambda_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w^m S_x(w,t)dw \qquad (m = 0,1,2) \tag{1.239}$$

$$\rho_{x\dot{x}}(t) = \frac{\mu_{x\dot{x}}(t)}{\sigma_x(t)\sigma_{\dot{x}}(t)} = \frac{\mu_{x\dot{x}}(t)}{\sqrt{\lambda_0(t)\lambda_2(t)}} \tag{1.240}$$

$$g(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-b^2/2} \tag{1.241}$$

$$G(b) = \int_{-b}^{\infty} g(u)du \tag{1.242}$$

$$b = \frac{\rho_{x\dot{x}}(t)}{[1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)]^{1/2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{\lambda_o(t)}} \tag{1.243}$$

Como se pode verificar, à medida que o coeficiente de correlação instantâneo $\rho_{x\dot{x}}(t)$ tende para zero, o que sucede quando se tende para uma situação de estacionaridade, a equação (1.238) tende a transformar-se na equação (1.236).

1.9.2 - Distribuição de probabilidade dos máximos relativos

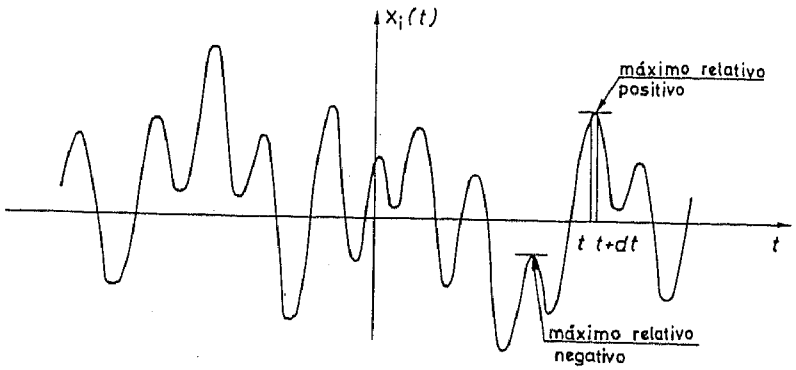


Fig. 1.11 - Máximos relativos positivos e negativos de uma realização do processo $x(t)$.

A caracterização da distribuição de probabilidade dos máximos relativos positivos e negativos de um processo estocástico (Fig. 1.11)

pode também efectuar-se seguindo o método introduzido por Rice [188], considerando o processo $x(t)$, e os seus derivados $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$, restringidos ao intervalo $[t, t+dt]$, na vizinhança de um máximo relativo.

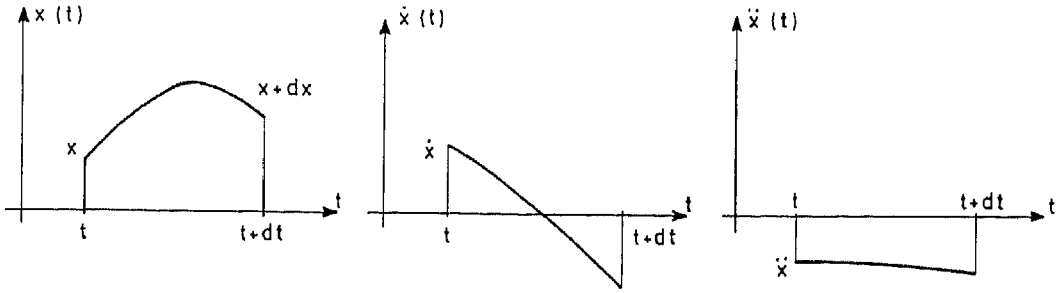


Fig. 1.12 - Evolução de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ na vizinhança de um máximo relativo.

A condição necessária para a existência de um máximo relativo nesse intervalo (Fig. 1.12) pode então expressar-se por

$$0 < \dot{x}(t) < -\ddot{x}(t)dt \quad \wedge \quad -\infty < \ddot{x}(t) < 0 \tag{1.244}$$

correspondendo-lhe no espaço $(x, \dot{x}, \ddot{x})$ o domínio de satisfação indicado na figura 1.13.

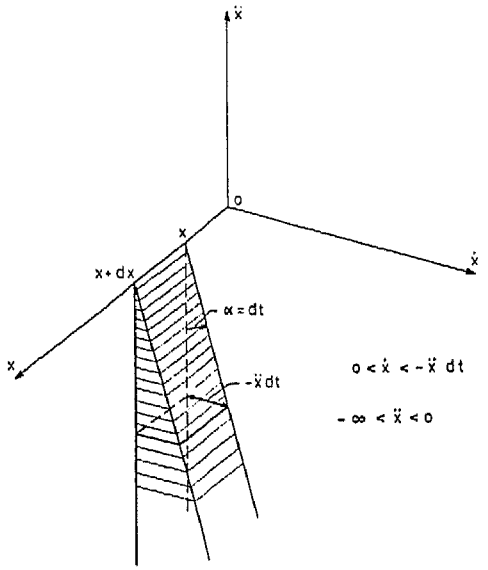


Fig. 1.13 - Domínio de satisfação das condições para a existência de um máximo relativo no intervalo $[t, t+dt]$.

A probabilidade de ocorrência respectiva é então definida por

$$\int_{x}^{x+dx} \int_{0}^{-\ddot{x}dt} \int_{-\infty}^{0} p(x,\dot{x},\ddot{x},t)d\ddot{x}d\dot{x}dx = -dxdt \int_{-\infty}^{0} \ddot{x}\,p(x,0,\ddot{x},t)d\ddot{x} \tag{1.245}$$

sendo o valor esperado do número de máximos relativos no intervalo de amplitude dt

$$-dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{0} \ddot{x}\,p(x,0,\ddot{x},t)d\ddot{x} \tag{1.246}$$

e a frequência média de ocorrência de máximos relativos de $x(t)$ por unidade de tempo t

$$f_{mxr}(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{0} \ddot{x}\,p(x,0,\ddot{x},t)d\ddot{x} \tag{1.247}$$

A função de distribuição de probabilidade dos máximos relativos de $x(t)$ no instante t é, deste modo

$$P[mxr \;\; x(t) < a] = \frac{-dt \int_{-\infty}^{a} dx \int_{-\infty}^{0} \ddot{x}\,p(x,o,\ddot{x},t)d\ddot{x}}{-dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{0} \ddot{x}\,p(x,0,\ddot{x},t)d\ddot{x}} \tag{1.248}$$

sendo a densidade de probabilidade respectiva dada por

$$p_{mxr}(x,t) = -\frac{\int_{-\infty}^{0} \ddot{x}\;\; p(x,0,\ddot{x},t)d\ddot{x}}{f_{mxr}(t)} \tag{1.249}$$

No caso particular de processos estocásticos estacionários gaussianos de valor médio nulo, a densidade de probabilidade conjunta é independente do tempo, sendo definida por

$$p(x,\dot{x},\ddot{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}|\underline{\mu}_v|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\underline{v}-\underline{m}_v]^T \underline{\mu}_v^{-1}[\underline{v}-\underline{m}_v]\right\} \tag{1.250}$$

com

$$\underline{v} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} \qquad \underline{m}_v = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_{\dot{x}} \\ m_{\ddot{x}} \end{Bmatrix} = \underline{0} \qquad \underline{\mu}_v = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{x\dot{x}} & \mu_{x\ddot{x}} \\ \mu_{\dot{x}x} & \mu_{\dot{x}\dot{x}} & \mu_{\dot{x}\ddot{x}} \\ \mu_{\ddot{x}x} & \mu_{\ddot{x}\dot{x}} & \mu_{\ddot{x}\ddot{x}} \end{bmatrix} \tag{1.251}$$

ou, atendendo a que, pelas equações (1.65), (1.115), (1.123), (1.124) e (1.233)

$$\mu_{xx} = \sigma_x^2 = \lambda_0$$

$$\mu_{x\dot{x}} = \mu_{\dot{x}x} = 0$$

$$\mu_{x\ddot{x}} = \mu_{\ddot{x}x} = -\sigma_{\dot{x}}^2 = -\lambda_2 \qquad (1.252)$$

$$\mu_{\dot{x}\ddot{x}} = \mu_{\ddot{x}\dot{x}} = 0$$

por

$$p(x,\dot{x},\ddot{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(\lambda_0\lambda_2\lambda_4 - \lambda_2^3)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\dot{x}^2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_4 x^2 + 2\lambda_2 x\ddot{x} + \lambda_0\ddot{x}^2}{\lambda_0\lambda_4 - \lambda_2^2}\right]\right\} \qquad (1.253)$$

Substituindo esta expressão de $p(x,\dot{x},\ddot{x})$ nas equações (1.247) e (1.249), e introduzindo a variável adimensional reduzida

$$\chi = \frac{x}{\lambda_0^{1/2}} = \frac{x}{\sigma_x} \qquad (1.254)$$

obtém-se que

$$f_{mxr} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_2}\right)^{1/2} \qquad (1.255)$$

sendo a função densidade de probabilidade dos máximos relativos [36]

$$p_{mxr}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\epsilon\exp\left(-\frac{\chi^2}{2\epsilon^2}\right) + (1-\epsilon^2)^{1/2}\chi \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{[\chi(1-\epsilon^2)^{1/2}]/\epsilon} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du\right] \qquad (1.256)$$

com

$$\epsilon^2 = \frac{\lambda_0\lambda_4 - \lambda_2^2}{\lambda_0\lambda_4} \qquad (1.257)$$

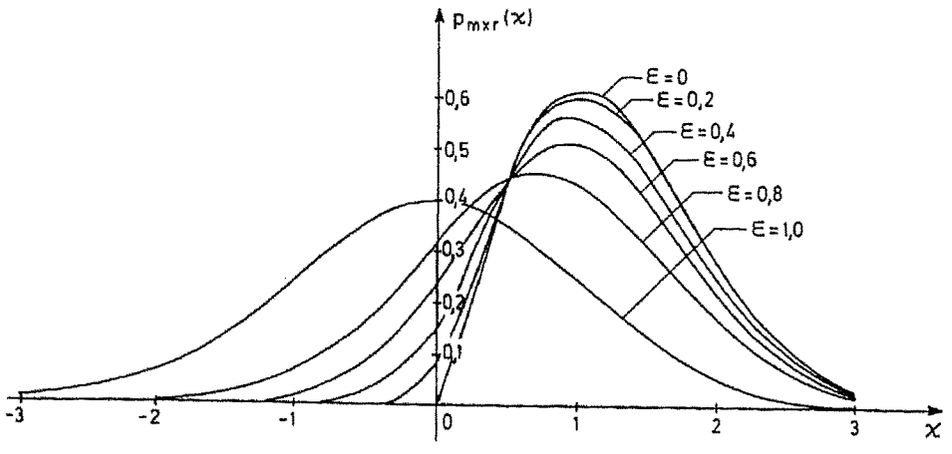


Fig. 1.14 - Densidade de probabilidade dos máximos relativos.

Pode verificar-se [54] que ϵ constitui um coeficiente dependente da configuração do espectro de potência $S_x(w)$, podendo assumir valores compreendidos entre 0 e 1, e que (Fig. 1.14), quando $\epsilon \to 0$, $p_{mxr}(\chi)$ tende para uma distribuição de Rayleigh, aproximando-se por sua vez de uma distribuição normal quando $\epsilon \to 1$.

No caso de processos de banda estreita tendendo para um harmónico simples, o factor $\epsilon \to 0$, assumindo por sua vez o valor $2/3$ quando se trata de um ruído branco, ou ruído branco de banda limitada. O valor limite $\epsilon = 1$ tende por sua vez a ser atingido, por exemplo, por sobreposição de um harmónico simples $x_1(t)$ de frequência w_1 com um processo $x_2(t)$ de banda limitada ao intervalo $[-w_2, w_2]$, por forma que $w_1/w_2 \to \infty$ e $\sigma^2_{x_1}/\sigma^2_{x_2} \to 0$, ou seja, quando se produz a sobreposição de um sinal de muito alta frequência e de baixa amplitude, com um outro de baixa frequência e de banda limitada.

1.9.3 - Distribuição de probabilidade de um extremo absoluto num intervalo de tempo de duração T

A função de distribuição de probabilidade de um máximo absoluto num intervalo de tempo de duração T pode ser caracterizada quantificando a probabilidade de todos os máximos relativos nesse intervalo assumirem valores inferiores a um dado valor a.

No caso particular de um processo estocástico estacionário, o número esperado de máximos deste tipo nesse intervalo é dado por

$$N_{mxr} = f_{mxr} T \tag{1.258}$$

pelo que, se se admitir que eles ocorrem de forma probabilisticamente independente, a correspondente função de distribuição dos máximos absolutos será

$$P\left[\max_T \; x(t) < a\right] = \left\{\int_{-\infty}^{a} p_{mxr}(x)dx\right\}^{N_{mxr}} \tag{1.259}$$

obtendo-se por derivação a função densidade de probabilidade respectiva

$$p_{\max_T}(a) = N_{mxr}\left\{\int_{-\infty}^{a} p_{mxr}(x)dx\right\}^{N_{mxr}-1} p_{mxr}(a) \tag{1.260}$$

Introduzindo novamente a variável adimensional $\chi = x/\sigma_x$, e supondo o processo $x(t)$ estacionário gaussiano de valor médio nulo, pode escrever-se que

$$N_{mxr} = f_{mxr} T = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_2}\right)^{1/2} T \tag{1.261}$$

$$P\left[\max_T \; \chi(t) < \frac{a}{\sigma_x}\right] = \left\{\int_{-\infty}^{a/\sigma_x} p_{mxr}(\chi)d\chi\right\}^{N_{mxr}} \tag{1.262}$$

$$p_{\max_T}\left(\frac{a}{\sigma_x}\right) = N_{mxr}\left\{\int_{-\infty}^{a/\sigma_x} p_{mxr}(\chi)d\chi\right\}^{N_{mxr}-1} p_{mxr}\left(\frac{a}{\sigma_x}\right) \tag{1.263}$$

Com base nestas expressões e na equação (1.256), Davenport [80] mostrou que a distribuição de probabilidade dos máximos absolutos é definida por

$$P\left[\max_T \; x(t) < a\right] = \exp[-f_o^{\uparrow} T \exp(-a^2/2\lambda_o)] \tag{1.264}$$

expressão muitas vezes designada [173, 93] por distribuição assintótica de Cramer [61]. Por outro lado, Devenport [80] demonstrou ainda que o valor médio dos máximos absolutos susceptíveis de ocorrerem

em intervalos de tempo de duração T pode obter-se de forma aproximada através da relação

$$E\left[\max_T \; x(t)\right]=\left[(2\ln f_0^{\uparrow}T)^{1/2}+\frac{\gamma}{(2\ln f_0^{\uparrow}T)^{1/2}}\right]\sigma_x \qquad (1.265)$$

sendo $\gamma=0,577216$ a constante de Euler, ao passo que o desvio padrão correspondente é dado por

$$\sigma_{x_{\max_T}}=\left[\frac{\pi}{\sqrt{6}}\;\frac{1}{(2\ln f_0^{\uparrow}T)^{1/2}}\right]\sigma_x \qquad (1.266)$$

De modo a possibilitar uma mais fácil compreensão das distribuições estatísticas anteriormente referidas, representam-se na figura 1.15 as densidades de probabilidade correspondentes ao processo estocástico gaussiano de valor médio nulo $\chi(t)$, à distribuição dos respectivos máximos relativos, e à dos máximos absolutos num intervalo de tempo de duração T, admitindo-se uma caracterização espectral do tipo ruído branco, para a qual $\epsilon=2/3$, e valores de $f_0^{\uparrow}T$ iguais a 10^2, 10^3, 10^4 e 10^5.

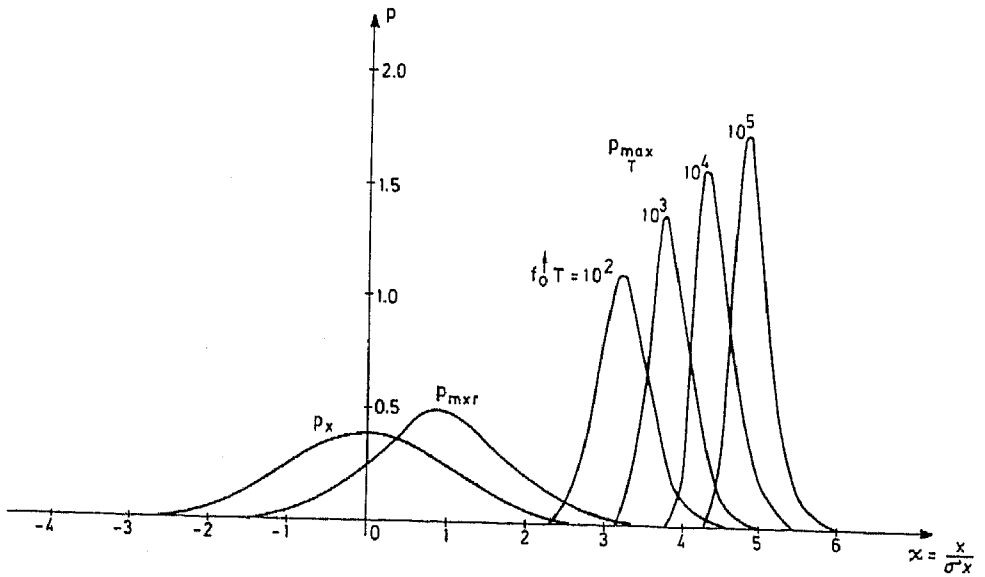


Fig. 1.15 - Densidades de probabilidade correspondentes às variáveis χ, $mxr(\chi)$ e $\max_T(\chi)$.

Desses gráficos pode concluir-se que, à medida que se regista um incremento do número médio de passagens ascendentes por zero, a função densidade de probabilidade dos máximos absolutos se torna cada vez mais aguçada, concentrando-se em torno de um valor sucessivamente mais elevado de $x(t)$, e conduzindo a valores médios $E\left[\max_T \; x(t)\right]$ que podem atingir cerca de $5\sigma_x$ para $f_0^{\uparrow}T = 10^5$, ultrapassando de forma significativa o valor de $3\sigma_x$, frequentemente tomado como referência no domínio da engenharia sísmica, em virtude de, nesta área, os valores mais frequentes de $f_0^{\uparrow}T$ se situarem entre cerca de 5 e 500.

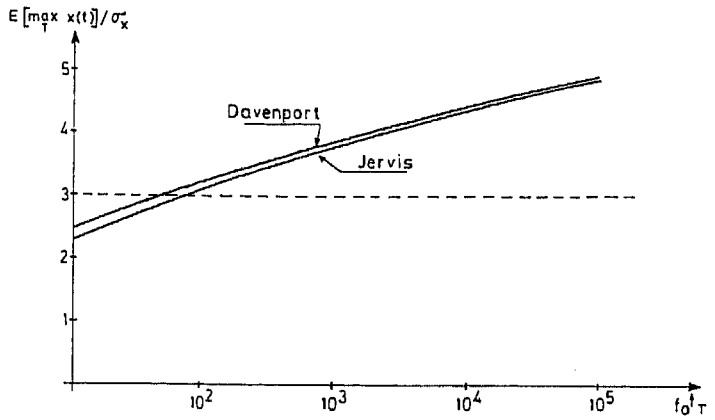


Fig. 1.16 - Variação do valor máximo médio com o número médio de passagens ascendentes por zero.

Tal facto ressalta aliás de forma expressiva da figura 1.16, na qual se representa a evolução sofrida por $E\left[\max_T \; x(t)\right]/\sigma_x$ em função de $f_0^{\uparrow}T$, tendo não só em consideração a expressão aproximada apresentada por Davenport (eq. 1.265), mas ainda utilizando uma outra referida por Jervis [173], cujo estudo se baseou também na solução assintótica de Cramer, e que é a seguinte

$$E\left[\max_T \; x(t)\right] = (2\ln f_0^{\uparrow}T - 2\ln\ln 2)^{1/2}\sigma_x \qquad (1.267)$$

Sucede, no entanto, que a distribuição dos máximos absolutos expressa pela equação (1.264) assenta na hipótese da completa independência estatística dos máximos relativos, os quais, na realidade, podem encontrar-se correlacionados.

Assim, e no sentido de ter em consideração este aspecto, vários autores sugeriram novas distribuições, nomeadamente Stratonovich [219], Lyon [149], Vanmarke [236] e Jervis [173].

Vanmarke, em particular, utilizou o conceito de número de grupo ("clump size"), anteriormente introduzido por Lyon, e que consiste no número de atravessamentos N_D de um dado nível $a = \chi\sigma_x$ por $|x(t)|$ que imediatamente se seguem a cada atravessamento por parte da respectiva envolvente. Este conceito pode ser aliás melhor apreendido mediante a observação da figura 1.17, muito embora a noção de envolvente seja por agora introduzida de forma simplesmente intuitiva, reservando-se para a secção 1.9.4 o tratamento específico de diversos aspectos com ela relacionados.

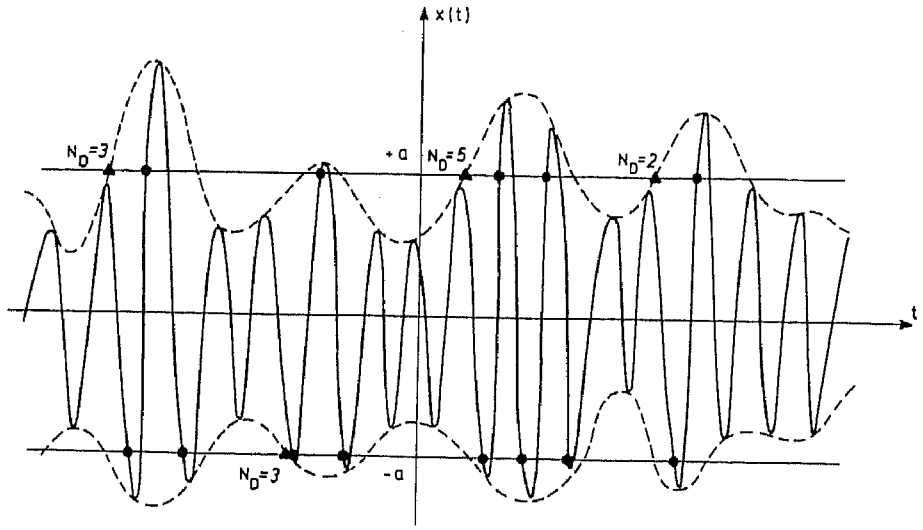


Fig. 1.17 - Conceito de número de grupo N_D.

Fazendo intervir o parâmetro

$$\delta = \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}\right)^{1/2} \tag{1.268}$$

este autor desenvolveu um método [236] que tornou possível a eliminação de todos os casos em que ao atravessamento por parte da envolvente se encontra associado um valor $N_D = 0$, tendo chegado à seguinte expressão aproximada para o valor médio do número de grupo

$$E[N_D] = 1/[1 - \exp(-\sqrt{\pi/2}\delta\chi)] \qquad (1.269)$$

a qual permite concluir que δ varia em sentido inverso a $E[N_D]$ (Fig. 1.18), constituindo por isso um importante indicador da dependência estatística entre atravessamentos.

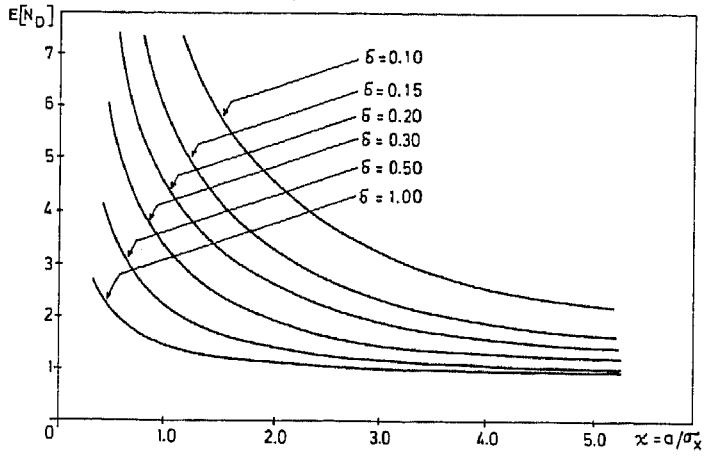


Fig. 1.18 - O parâmetro δ como medida da dependência estatística entre atravessamentos.

Por outro lado também, seguindo uma via a que se fará referência mais detalhada em 1.9.5, Vanmarke conseguiu caracterizar a distribuição de probabilidade correspondente ao tempo de primeira passagem por uma barreira simétrica $\pm a = \pm\chi\sigma_x$, em função dos momentos espectrais λ_0, λ_1 e λ_2 do processo estacionário gaussiano $x(t)$ de valor médio nulo, tendo obtido [236] a seguinte expressão para a função de distribuição dos extremos absolutos num intervalo de tempo T

$$P\left[\max_T |x(t)| < a\right] = P\left[\max_T |\chi(t)| < \frac{a}{\sigma_x}\right] \qquad (1.270)$$

$$= \left[1 - \exp\left(-\frac{a^2}{2\lambda_0}\right)\right] \exp\left\{-2f_0^{\uparrow} T \frac{1 - \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_e a/\lambda_0^{1/2}\right]}{\exp\left(\frac{a^2}{2\lambda_0}\right) - 1}\right\}$$

em que

$$\delta_e = \delta^{1+b} \qquad (1.271)$$

sendo $b = 0,2$ uma constante fixada empiricamente.

O parâmetro δ constitui também um factor de forma, que mede a dispersão de $S_x(w)$, e cujo valor pode oscilar entre zero, para processos de banda estreita, e a unidade, para processos cujo espectro de potência abranja uma franja larga de valores de w.

Consequentemente, no primeiro caso, o número médio de grupo $E[N_D]$ é elevado, traduzindo uma significativa dependência estatística entre atravessamentos, sucedendo o oposto quando $\delta \to 1$. Daí que o modelo de Poisson para fenómenos raros, também utilizado por certos autores, pressupondo a independência das ocorrências futuras em relação às passadas, só conduza a bons resultados quando o processo seja caracterizado por espectros de banda larga.

Por outro lado, ainda segundo Vanmarke, para $10 < 2f_0^{\uparrow}T < 10^3$ e $0.11 < \delta < 1$, gamas de valores de interesse em engenharia sísmica, são as seguintes as expressões que permitem calcular o correspondente valor médio

$$E\left[\max_T |x(t)|\right] = \left[(2\ln 2 f_e^{\uparrow} T)^{1/2} + \frac{0,577216}{(2\ln 2 f_e^{\uparrow} T)^{1/2}}\right]\sigma_x \qquad (1.272)$$

e o desvio padrão

$$\sigma_{\max_T |x|} = \frac{1,2}{(2\ln 2 f_e^{\uparrow} T)^{1/2}} - \frac{5,4}{13 + (2\ln 2 f_e^{\uparrow} T)^{3,2}} \qquad (1.273)$$

com

$$f_e^{\uparrow} = \begin{cases} (1,63\delta^{0.45} - 0,38) f_0^{\uparrow} & , \ \delta < 0,69 \\ f_0^{\uparrow} & , \ \delta \geq 0,69 \end{cases} \qquad (1.274)$$

sendo $f_e^{\uparrow}$ a frequência média de passagens ascendentes por zero estatisticamente independentes.

Na figura 1.19 encontra-se representada a evolução sofrida pelos valores de $E\left[\max_T |x(t)|\right]$ e de $\sigma_{\max_T |x|}$, referidos ao desvio padrão σ_x,

quando o número médio de passagens por zero, ascendentes ou descendentes, varia entre 10 e 10^3, e o factor de forma δ oscila entre 0,11 e 0,69.

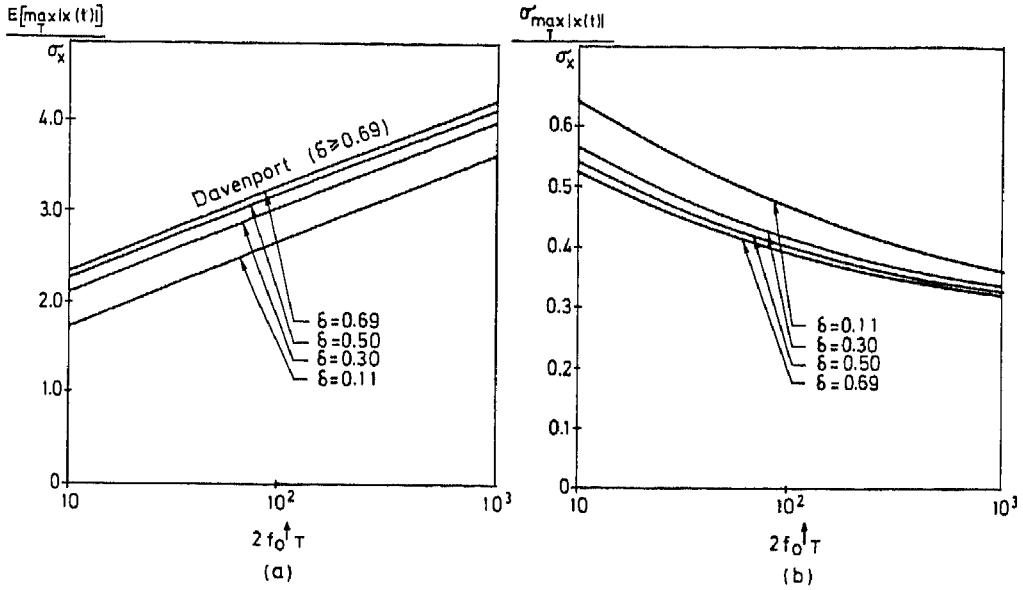


Fig. 1.19 - Variação de $E\left[\max_T |x(t)|\right]$ e $\sigma_{\max_T|x|}$ com $2f_0^{\uparrow}T$ e δ.

Da observação destes gráficos, resulta evidente que, para um dado valor de $f_0^{\uparrow}T$, $E\left[\max_T |x(t)|\right]$ é tanto maior quanto menor for a dependência estatística entre extremos, coincidindo aliás a curva da figura 1.19(a), para $\delta \geq 0,69$, com a correspondente à expressão de Davenport (1.265), que pressupõe a independência dos valores de pico, como foi já sublinhado.

De realçar, finalmente, que a distribuição de Vanmarke (eq. 1.270) revelou ajustar-se muito bem a resultados obtidos a partir de técnicas de simulação numérica, em particular os obtidos por Cook [55], e também por Jervis [173].

1.9.4 - Distribuição de probabilidade da envolvente

A envolvente de um processo estocástico $x(t)$ é naturalmente traduzida por um outro processo $z(t)$, assumindo valores com variação

relativamente suave, e de tal forma que o valor absoluto $|z(t)|$ seja sempre pelo menos tão grande quanto $|x(t)|$, tornando-se igual a $|x(t)|$ nos extremos de $x(t)$ ou na sua vizinhança.

Embora não exista uma definição única de envolvente, existem diversos estudos notáveis neste campo, designadamente os de Rice [188], Dugundji [97], Crandall e Mark [70].

Considere-se assim o processo estocástico $x(t)$ como parte real de um processo complexo

$$y(t) = x(t) + i\hat{x}(t) \tag{1.275}$$

sendo $\hat{x}(t)$ um outro processo com características a definir posteriormente. Designando por $z(t)$ o módulo do complexo $y(t)$, $x(t)$ pode exprimir-se sob a seguinte forma

$$x(t) = z(t)\cos\phi(t) \tag{1.276}$$

com

$$z(t)^2 = x(t)^2 + \hat{x}(t)^2 \qquad \phi(t) = arctg\left[\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}\right] \tag{1.277}$$

Para que $z(t)$ possa traduzir a envolvente do processo $x(t)$ será necessário que $\hat{x}(t)$ seja adequadamente escolhida, por forma a fazer recair sobre $z(t)$ sentido físico apropriado.

Começando por considerar o caso de um sinal sinusoidal $x(t) = z\,\mathrm{sen}\,wt$, em que a envolvente é definida pela constante z, deverá escolher-se $\hat{x}(t) = \pm z\cos wt$, podendo pois $\hat{x}(t)$ relacionar-se com $x(t)$ através da relação

$$\hat{x}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{w} \tag{1.278}$$

ou através da transformada de Hilbert

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \tag{1.279}$$

que tem a propriedade de converter $\cos wt$ em $\mathrm{sen}\,wt$ e $\mathrm{sen}\,wt$ em $-\cos wt$.

Partindo do conhecimento deste facto, e procurando uma extensão a outro tipo de sinais, duas definições de processo envolvente se tornam assim possíveis, sendo a primeira a definição introduzida por Crandall e Mark [70]

$$z(t)=\sqrt{x^2(t)+\left(\frac{\dot{x}(t)}{w_r}\right)^2} \tag{1.280}$$

em que w_r é uma frequência representativa do interior da banda de frequências predominantes do processo $x(t)$, e a segunda a correspondente à definição de Dugundji [97]

$$z(t)=\sqrt{x(t)^2+\hat{x}(t)^2} \tag{1.281}$$

sendo $\hat{x}(t)$ a transformada de Hilbert definida pela equação (1.279).

A noção de envolvente de Crandall e Mark pode aliás ser introduzida de outra forma visualmente mais sugestiva, à custa também de uma generalização da envolvente relativa ao sinal sinusoidal $x(t)=z\,\mathrm{sen}\,wt$, e que é constituída pelas duas rectas horizontais correspondentes às ordenadas $\pm z$ (Fig. 1.20).

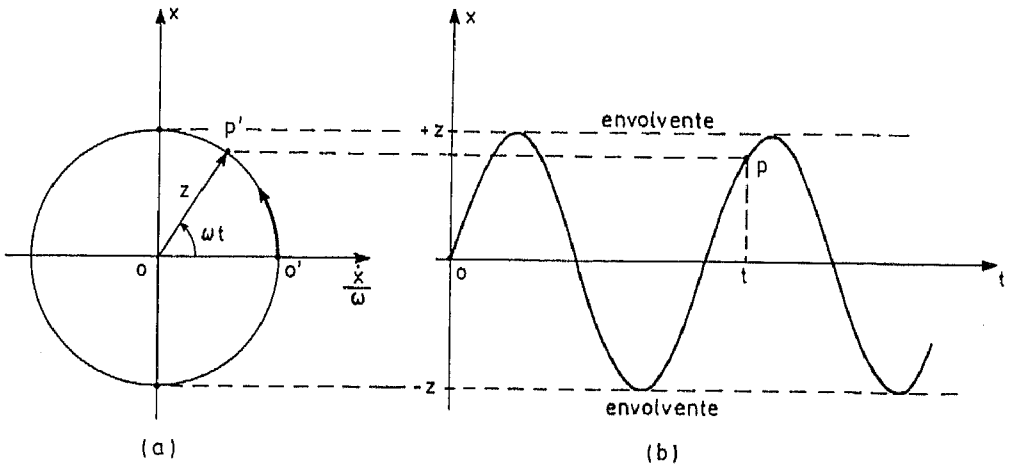


Fig. 1.20 - Conceito de envolvente de uma função sinusoidal.

Tendo em conta que $x(t)=z\,\mathrm{sen}\,wt$ e $\dot{x}(t)=zw\cos wt$, torna-se óbvio que a evolução do sinal pode ser representada, no plano $(x,\dot{x}/w)$,

através da projecção sobre o eixo dos xx (Fig. 1.20) do raio vector $\overrightarrow{OP'}$, de grandeza z, rodando a partir do eixo relativo a $\dot{x}/w$ no sentido directo com uma velocidade angular w.

Generalizando este conceito de envolvente a um processo estocástico de banda estreita (Fig. 1.21), isto é, em que a amplitude do intervalo de frequências com contributo significativo para a variância do processo é reduzida, a envolvente de $x(t)$ poderá ser definida pela equação

$$z(t) = \sqrt{x(t)^2 + \left[\frac{\dot{x}(t)}{w_r}\right]^2} \tag{1.282}$$

sendo w_r uma frequência representativa do interior daquele intervalo.

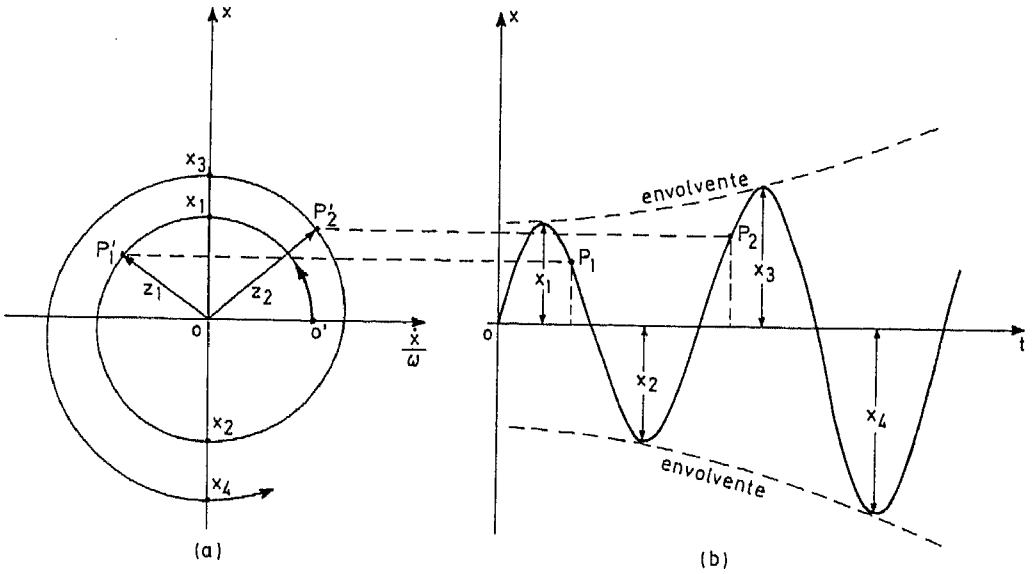


Fig. 1.21 - Conceito de envolvente de um processo estocástico de uma banda estreita (Crandall e Mark).

A probabilidade de que a envolvente assuma valores compreendidos entre z e $z+dz$ poderá naturalmente obter-se através do integral duplo

$$\int\int p\left(x, \frac{\dot{x}}{w}\right) dx \; d\left(\frac{\dot{x}}{w}\right) \tag{1.283}$$

definindo convenientemente os limites de integração em correspondência com a região do plano $(x, \dot{x}/w)$ indicada a tracejado na figura 1.22.

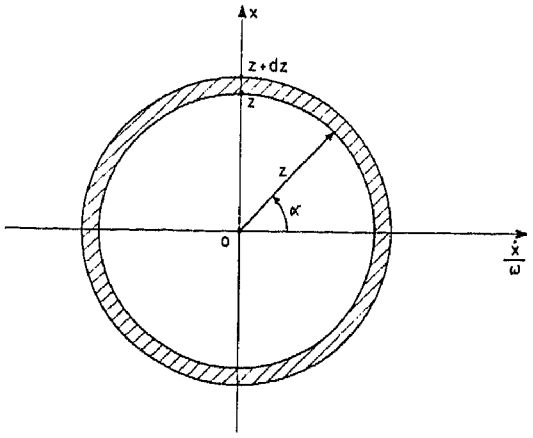


Fig. 1.22 - Área do plano $(x, \dot{x}/w)$ correspondente ao cálculo da probabilidade $P[z < z(t) < z+dz]$.

Designando por $p_e(z)$ a função densidade de probabilidade relativa à envolvente, e utilizando coordenadas polares, tem-se que

$$p_e(z)dz = \int_0^{2\pi} p\left(x, \frac{\dot{x}}{w}\right) z\,dz\,d\alpha \tag{1.284}$$

Tendo em atenção que, pela relação Jacobiana (1.157), $p(x, \dot{x}/w) = w\,p(x, \dot{x})$, sendo $p(x, \dot{x})$ definida pela equação (1.235) no caso de processos gaussianos estacionários de valor médio nulo, e podendo admitir-se para processos de banda estreita que $w = \sigma_{\dot{x}}/\sigma_x = (\lambda_2/\lambda_0)^{1/2}$, obtém-se que

$$p_e(z) = z\int_0^{2\pi} p\left(x, \frac{\dot{x}}{w}\right) d\alpha = zw\int_0^{2\pi} p(x, \dot{x})\,d\alpha$$

$$= \frac{z}{2\pi\lambda_0}\int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\lambda_0} + \frac{\dot{x}^2}{\lambda_2}\right)\right] d\alpha \tag{1.285}$$

e introduzindo a mudança de variáveis $x = z\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $\dot{x}/w = z\cos\alpha$

$$p_e(z) = \frac{z}{2\pi\lambda_0}\int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{2\lambda_0}\right) d\alpha = \frac{z}{\lambda_0}\exp\left(-\frac{z^2}{2\lambda_0}\right) \tag{1.286}$$

expressão que permite concluir que $p_e(z)$ obedece à distribuição de Rayleigh (Fig. 1.23).

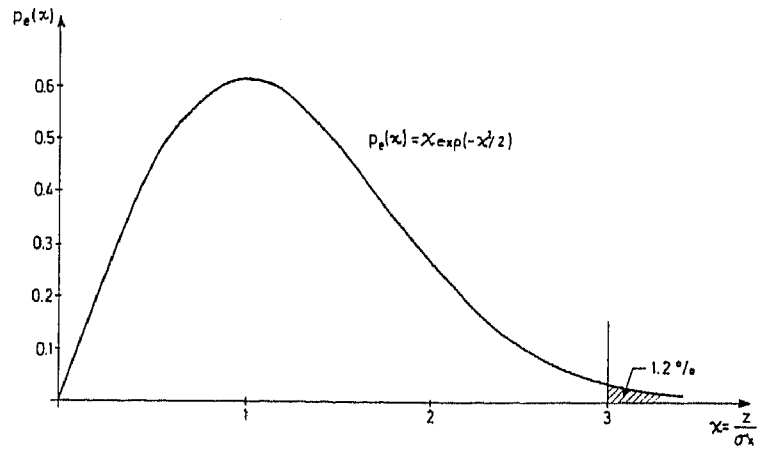


Fig. 1.23 - Função densidade de probabilidade da envolvente de um processo estocástico de banda estreita ($\chi = z/\sigma_x$).

É de referir, meramente a título de curiosidade, que a probabilidade de ocorrência de valores de $z(t)$ superiores a $3\sigma_x$, valor frequentemente tomado como referência em engenharia sísmica, vale apenas 1,2%.

A estatística da envolvente de Crandall e Mark pode ser melhor caracterizada de uma forma mais geral, se se tiver em conta que a definição introduzida pela equação (1.280) é equivalente a

$$x(t) = z(t)\cos\phi(t) \qquad \frac{\dot{x}(t)}{w_r} = z(t)\operatorname{sen}\phi(t) \tag{1.287}$$

Derivando estas duas equações em ordem ao tempo, e eliminando $\phi(t)$ entre as equações resultantes e as equações (1.287), obtêm-se as seguintes relações entre as variáveis $\underline{x} = [x, \dot{x}/w_r, \ddot{x}/w_r]^T$ e $\underline{z} = [z, \dot{z}, \phi]^T$

$$\begin{aligned} x(t) &= z(t)\cos\phi(t) \\ \dot{x}/w_r &= z(t)\operatorname{sen}\phi(t) \\ \ddot{x}/w_r &= \dot{z}(t)\operatorname{cosec}\phi(t) - z(t)w_r\cos\phi(t) \end{aligned} \tag{1.288}$$

Supondo que o processo $x(t)$ é gaussiano e estacionário com valor médio nulo, a função densidade de probabilidade conjunta $p(\underline{x})$ é definida por

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}|\underline{\mu}_x|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\mu}_x^{-1} \underline{x}\right\} \tag{1.289}$$

sendo fácil verificar que a matriz de covariância correspondente tem a seguinte constituição

$$\underline{\mu}_x = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & -\lambda_2/w_r \\ 0 & \lambda_2/w_r^2 & 0 \\ -\lambda_2/w_r & 0 & \lambda_4/w_r^2 \end{bmatrix} \tag{1.290}$$

podendo admitir-se que $w_r = (\lambda_2/\lambda_0)^{1/2}$.

A densidade de probabilidade conjunta correspondente às variáveis $\underline{z} = [z, \dot{z}, \phi]^T$ pode então ser determinada tendo presente a relação Jacobiana expressa pela equação (1.157), obtendo-se

$$p_e(z, \dot{z}, \phi) = \frac{z\,|\operatorname{cosec}\phi|}{(2\pi)^{3/2}\lambda_0\gamma\epsilon} \exp\left\{-\left[\left(\frac{z^2}{2\lambda_0}\right) + \frac{\dot{z}^2 \operatorname{cosec}^2\phi}{2\gamma^2\epsilon^2}\right]\right\} \tag{1.291}$$

com

$$\gamma^2 = \frac{\lambda_0\lambda_4}{\lambda_2} \qquad \epsilon^2 = 1 - \lambda_2^2/\lambda_0\lambda_4 \tag{1.292}$$

Por integração, pode também obter-se a densidade de probabilidade bidimensional

$$p_e(z, \phi) = \frac{z}{2\pi\lambda_0} \exp\left(-\frac{z^2}{2\lambda_0}\right) \tag{1.293}$$

a partir da qual se pode determinar a densidade de probabilidade de Rayleigh $p_e(z)$, e mostrar que ϕ tem uma distribuição de probabilidade uniforme no intervalo de 0 a 2π.

A frequência média de passagens ascendentes da envolvente por um nível a pode, por sua vez, calcular-se tendo em conta a equação (1.230), ou seja

$$\hat{f}_a^{\uparrow} = \int_0^{\infty} \dot{z} p_e(a, \dot{z}) d\dot{z} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \dot{z} p_e(a, \dot{z}, \phi) d\dot{z} d\phi \tag{1.294}$$

obtendo-se, com recurso a (1.293)

$$\hat{f}_a^{\uparrow} = \frac{4}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}\,\epsilon a/\sqrt{\lambda_0}\exp\left(-\frac{a^2}{2\lambda_0}\right) \qquad (1.295)$$

Assim como a envolvente de Crandall e Mark segue os picos do processo ($\dot{x}=0$), como se depreende da equação (1.280), o mesmo tende a suceder com a envolvente de Dugundji. De facto, e continuando a supor o processo $x(t)$ estacionário gaussiano de valor médio nulo, é possível calcular a densidade de probabilidade conjunta $p(\hat{x},\dot{x})$, e a partir dela a densidade de probabilidade condicional $p(\hat{x}\,|\,\dot{x}) = p(\hat{x},\dot{x})/p(\dot{x})$, podendo mostrar-se que [141]

$$E[\hat{x}\,|\,\dot{x}] = -\lambda_1\dot{x}/\lambda_2 \qquad \mu_{\hat{x}|\dot{x}} = \lambda_0\delta^2 \qquad (1.296)$$

sendo δ o parâmetro já definido pela equação (1.268), associado à configuração do espectro de potência $S_x(w)$.

As equações (1.296) demonstram pois que, quando $\dot{x}=0$, o valor médio de $\hat{x}$ é também nulo, assumindo a correspondente variância um valor tanto mais reduzido, quanto menor for δ. Desta forma, pode constatar-se, tendo em conta a equação (1.281), que $z(t)$ tende pois a seguir os picos do processo $x(t)$, de forma tanto mais rigorosa, quanto mais estreita for a respectiva banda de frequências predominantes.

A estatística da envolvente de Dugundji pode ser caracterizada começando por estabelecer a função densidade de probabilidade conjunta correspondente às variáveis $\underline{x} = [x, \hat{x}, \dot{x}, \dot{\hat{x}}]^T$, definida por

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2\,|\underline{\mu}_x|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{x}^T\underline{\mu}_x^{-1}\underline{x}\right\} \qquad (1.297)$$

tendo a matriz de covariância $\underline{\mu}_x$ a seguinte constituição [166]

$$\underline{\mu}_x = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad (1.298)$$

Utilizando novamente a relação Jacobiana expressa pela equação (1.157), é possível efectuar a seguinte transformação [141]

$$p_e(z,\dot{z},\phi,\dot{\phi}) = z^2 p(x,\hat{x},\dot{x},\dot{\hat{x}}) \tag{1.299}$$

obtendo-se

$$p_e(z,\dot{z},\phi,\dot{\phi}) = \frac{z^2}{4\pi^2\lambda_0\lambda_2\delta^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{z^2}{\lambda_0}\right)+\left(\frac{1}{\delta^2\lambda_2}\right)\left(\dot{z}^2+z^2\left[\dot{\phi}-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]^2\right)\right]\right\} \tag{1.300}$$

Mediante integração desta equação, é possível chegar à densidade de probabilidade bidimensional

$$p_e(z,\dot{z}) = \frac{z}{\sqrt{2\pi\lambda_2}\delta\lambda_0}\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{z^2}{\lambda_0}+\frac{\dot{z}^2}{\delta^2\lambda_2}\right]\right\} \tag{1.301}$$

expressão esta coincidente com a associada à definição de envolvente primitivamente introduzida por Rice [188], que embora formalmente diferente, se pode considerar estatisticamente equivalente à de Dugundji, conforme foi recentemente demonstrado por Langley [141].

Por integração da equação (1.300), é também possível chegar à equação

$$p_e(z,\phi) = \frac{z}{2\pi\lambda_0}\ \exp\left(-\frac{z^2}{2\lambda_0}\right) \tag{1.302}$$

igualmente válida para a envolvente de Crandall e Mark, e que permite concluir que $p_e(z)$ obedece a uma distribuição de Rayleigh.

Com base na equação (1.301), torna-se também possível quantificar a frequência média de passagens ascendentes da envolvente por um nível a, obtendo-se

$$\hat{f}_a^{\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\lambda_2/\lambda_0}\,\delta\frac{a}{\sqrt{\lambda_0}}\exp\left(-\frac{a^2}{2\lambda_0}\right) \tag{1.303}$$

o que significa, tendo em conta a equação (1.236), que as frequências médias de passagens ascendentes da envolvente $z(t)$ e do processo $x(t)$ se podem relacionar através da equação

$$\hat{f}_a^{\uparrow} = \sqrt{2\pi}\,\delta a f_a^{\uparrow}/\sqrt{\lambda_0} \tag{1.304}$$

O valor de $\hat{f}_a^{\uparrow}$ correspondente à envolvente de Dugundji é pois diferente do relativo à de Crandall e Mark, sendo o quociente respectivo

$$\frac{(\hat{f}_a^{\uparrow})_{CM}}{(\hat{f}_a^{\uparrow})_D} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\epsilon}{\delta\sqrt{1-\epsilon^2}} \tag{1.305}$$

É de realçar ainda que, embora a maior parte da literatura sobre este domínio se refira essencialmente a processos estacionários, e tal se considere suficiente para o âmbito deste trabalho, a noção de envolvente de Dugundji tem sido já objecto de extensão a processos de natureza não-estacionária, nomeadamente por Yang [242], Krenk, Madsen e Madsen [136].

Assim, e supondo que $x(t)$ é um processo gaussiano não-estacionário com valor médio nulo, torna-se possível seguir um caminho análogo, começando por definir a densidade de probabilidade conjunta $p(x,\hat{x},\dot{x},\dot{\hat{x}},t)$ no instante t, à custa da formação da correspondente matriz de covariância instantânea $\underline{\mu}_x(t)$, cuja constituição difere da expressa pela equação (1.298), havendo elementos que deixam de assumir valor nulo.

Introduzindo uma mudança de variáveis, é igualmente possível obter a expressão da densidade de probabilidade instantânea $p_e(z,\dot{z},t)$, a partir da qual o valor da frequência média de passagens ascendentes da envolvente por um nível a no instante t, por unidade de tempo, pode ser obtida, utilizando uma equação semelhante a (1.294), resultando que [142]

$$\hat{f}_a^{\uparrow}(t) = \sqrt{\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_0(t)}}\frac{a}{\sqrt{\lambda_0(t)}}\left[1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)-\gamma_{x\dot{x}}^2(t)\right]^{1/2}\exp\left(-\frac{a^2}{2\lambda_0(t)}\right).\left[g(ca)+caG(ca)\right] \tag{1.306}$$

com $\lambda_0(t),\lambda_2(t),\rho_{x\dot{x}}(t)$, $g(\ )$ e $G(\ )$ definidos através das equações (1.239) a (1.242) e

$$c = \frac{\rho_{x\dot{x}}(t)}{\sqrt{\lambda_0(t)}\left[1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)-\gamma_{x\dot{x}}^2(t)\right]^{1/2}} \tag{1.307}$$

$$\gamma_{x\dot{x}}(t) = \frac{\mu_{x\dot{x}}(t)}{\sigma_x(t)\sigma_{\dot{x}}(t)} \tag{1.308}$$

É frequente porém admitir-se [142] que, apesar do carácter não-estacionário do processo $x(t)$, o coeficiente de correlação $\rho_{x\dot{x}}(t)$ assume valores suficientemente baixos para que possa considerar-se que c é praticamente nulo, obtendo-se então a seguinte expressão aproximada para $\hat{f}_a^{\uparrow}(t)$

$$\hat{f}_a^{\uparrow}(t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_0(t)}\right]^{1/2} \frac{a}{\sqrt{\lambda_0(t)}}\left[1-\gamma_{x\dot{x}}^2(t)\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{a}{2\lambda_0(t)}\right] \tag{1.309}$$

1.9.5 - Distribuição de probabilidade dos tempos de primeira passagem

Na análise e dimensionamento de sistemas no âmbito da Dinâmica Estrutural Estocástica, revela-se importante não só quantificar a probabilidade de que o valor máximo de um processo estocástico $x(t)$, associado a uma qualquer variável de controlo da resposta de um sistema, num intervalo de tempo de duração T, seja inferior a um determinado valor, como também caracterizar a distribuição de probabilidade relativa ao tempo de primeira passagem do processo $x(t)$ por um dado nível pré-definido.

Como se torna evidente, este tempo ao fim do qual se regista um primeiro atravessamento de uma dada barreira, normalmente associada a um limiar de segurança, contitui uma variável aleatória intimamente ligada ao processo $x(t)$, cuja distribuição de probabilidade constitui uma função de importância fundamental em termos de segurança e fiabilidade estrutural.

Designando por $p^{\uparrow}(t)$ a densidade de probabilidade correspondente ao tempo de primeira passagem, $p^{\uparrow}(t)dt$ representa a probabilidade de que um primeiro atravessamento de um dado nível a se verifique entre os instantes t e $t+dt$, tomando como referência inicial o instante $t=0$.

A função de distribuição de probabilidade correspondente

$$P^{\uparrow}(T)=\int_0^T p^{\uparrow}(t)dt \tag{1.310}$$

representa a probabilidade de ocorrência de um primeiro atravessamento entre os instantes 0 e T, indicando o seu complementar para a unidade

$$L(T)=1-P^{\uparrow}(T) \tag{1.311}$$

a probabilidade de que o processo $x(t)$ não ultrapasse a barreira definida pelo valor a em nenhum instante do intervalo de tempo referido, designando-se frequentemente por fiabilidade, probabilidade de sobrevivência ou de não-excedência do sistema ("reliability").

Entre $p^{\uparrow}(t), P^{\uparrow}(T), L(T)$ e $P\left[\max_T \; x(t)<a\right]$ verifica-se pois que

$$p^{\uparrow}(t)=\frac{dP^{\uparrow}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}[1-L(t)]=-\frac{dL(t)}{dt} \tag{1.312}$$

$$L(T)=P\left[\max_T \; x(t)<a\right] \tag{1.313}$$

De acordo com a classificação clássica introduzida por Crandall [64], são habitualmente considerados, em problemas de Dinâmica Estrutural, três tipos de barreiras (B-"barrier", D-"double-side barrier" e E-"envelope") tendentes a limitar o domínio de segurança do funcionamento dos sistemas, correspondendo-lhes a representação no plano $(x, \dot{x}/w)$ indicada na figura 1.24.

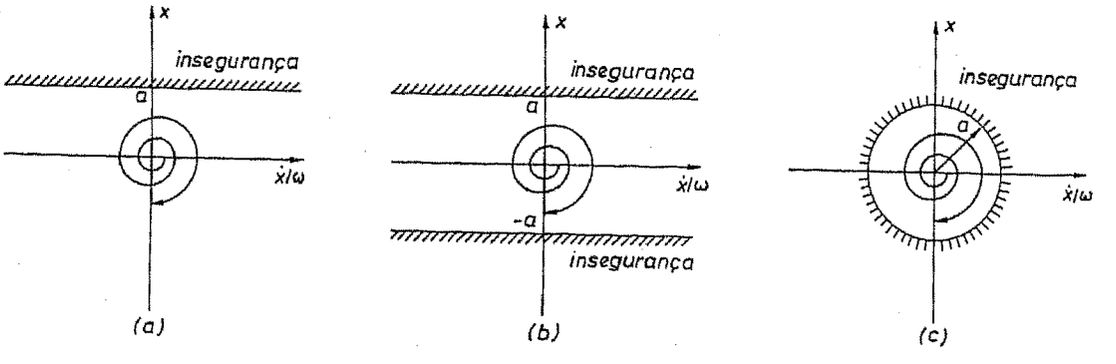


Fig. 1.24 - Representação no plano $(x, \dot{x}/w)$ das barreiras de tipo B(a), D(b) e E(c).

A estas três formas de caracterização do limiar de segurança, correspondem naturalmente diferentes significados para a probabilidade de sobrevivência do sistema, susceptível de ser traduzida em cada caso pelas relações seguintes

$$L_B(T) = P\left[\max_T \; x(t) < \alpha\right]$$

$$L_D(T) = P\left[\max_T \; |x(t)| < \alpha\right] \qquad (1.314)$$

$$L_E(T) = P\left[\max_T \; z(t) < \alpha\right]$$

sendo $z(t)$ a envolvente do processo estocástico $x(t)$.

Embora não seja conhecida uma solução exacta para a determinação da densidade de probabilidade de primeira passagem $p^{\uparrow}(t)$ correspondente a um processo estocástico estacionário de valor médio nulo, estudos de simulação numérica [69] permitiram caracterizar a configuração típica desta função, podendo considerar-se [152] que uma das melhores aproximações é dada pela forma

$$p^{\uparrow}(t) \cong \sum_i A_i \alpha_i e^{-\alpha_i t} \qquad (1.315)$$

sendo os A_i e α_i parâmetros a determinar. Verifica-se também que a evolução de $p^{\uparrow}(t)$ durante um pequeno intervalo de tempo inicial é fortemente dependente das condições iniciais [64], como deixa transparecer a figura 1.25, na qual se representam de forma esquemática

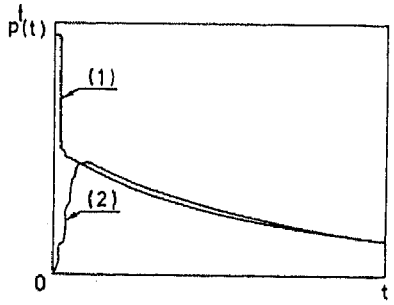


Fig. 1.25 - Representação esquemática de $p^{\uparrow}(t)$ para processos estacionários (1) e pseudo-não-estacionários (2).

as configurações de $p^{\uparrow}(t)$ correspondentes a um processo estacionário e a um pseudo-não-estacionário (condições iniciais nulas para $t=0$ e características estatísticas constantes no tempo).

Todavia, os casos de maior interesse prático são aqueles em que os tempos de primeira passagem são em média bastante superiores à amplitude daquele intervalo, sendo então razoável adoptar-se a seguinte aproximação [64]

$$p^{\uparrow}(t) \cong A\alpha e^{-\alpha t} \tag{1.316}$$

ou mais simplesmente, no caso de barreiras de valor elevado, em que estudos experimentais [69] indicam que A tende para a unidade

$$p^{\uparrow}(t) \cong \alpha e^{-\alpha t} \tag{1.317}$$

sendo α a taxa de redução da densidade de probabilidade de primeira passagem, a determinar em função das características do processo.

Nestas circunstâncias, uma expressão compatível para a probabilidade de sobrevivência $L(t)$ será, tendo em consideração a equação (1.312)

$$L(t) = e^{-\alpha t} \tag{1.318}$$

Uma conhecida aproximação utilizável no sentido de fixar o valor de α consiste em supor que os atravessamentos de uma dada barreira a são acontecimentos raros e estatisticamente independentes, hipótese que é assintoticamente verdadeira quando $a \to \infty$ [60], constituindo então o número $N(t)$ de passagens entre os instantes 0 e t um processo estocástico de Poisson traduzido pela equação (1.183), ou seja

$$P(N,t) = \frac{(\nu t)^N}{N!} \exp(-\nu t) \tag{1.319}$$

em que ν representa a frequência média de ocorrência do acontecimento por unidade de tempo. Por conseguinte, sendo $L(t) = P(0,t)$ e

$$\nu_B = f_a^{\uparrow} \qquad \nu_D = 2 f_a^{\uparrow} \qquad \nu_E = \hat{f}_a^{\uparrow} = \sqrt{2\pi}\,\delta \frac{a}{\sqrt{\lambda_0}} f_a^{\uparrow} \tag{1.320}$$

tem-se que

$$L_B(t) = e^{-f_a^{\uparrow} t} \qquad L_D(t) = e^{-2f_a^{\uparrow} t} \qquad L_E(t) = e^{-\sqrt{2\pi}\,\delta \frac{a}{\sqrt{\lambda_0}} f_a^{\uparrow} t} \tag{1.321}$$

podendo a densidade de probabilidade de primeira passagem correspondente obter-se através da relação (1.312), ou seja

$$p_B^{\uparrow}(t) = f_a^{\uparrow} e^{-f_a^{\uparrow} t} \qquad p_D^{\uparrow}(t) = 2f_a^{\uparrow} e^{-2f_a^{\uparrow} t} \qquad p_E^{\uparrow}(t) = \hat{f}_a e^{-\hat{f}_a t} \tag{1.322}$$

o que conduz a que, em cada caso, o valor médio do tempo de primeira passagem $m_T^{\uparrow}$, e a correspondente variância $\mu_T^{\uparrow}$, sejam dados por

$$m_T^{\uparrow} = \int_0^{\infty} t\, p^{\uparrow}(t)\, dt = \frac{1}{\nu} \tag{1.323}$$

$$\mu_T^{\uparrow} = \int_0^{\infty} (t - m_T^{\uparrow})^2\, p^{\uparrow}(t)\, dt = \frac{1}{\nu^2} \tag{1.324}$$

Esta hipótese corresponde, no fundo, a admitir-se que os tempos de primeira passagem obedecem a uma distribuição exponencial, traduzida por uma função densidade de probabilidade

$$p^{\uparrow}(t) = \nu e^{-\nu t} \tag{1.325}$$

em que

$$\nu = \frac{1}{m_T^{\uparrow}} \tag{1.326}$$

assumindo ν, em cada caso, os valores $\nu_B = f_a^{\uparrow}$, $\nu_D = 2f_a^{\uparrow}$ e $\nu_E = \hat{f}_a^{\uparrow}$.

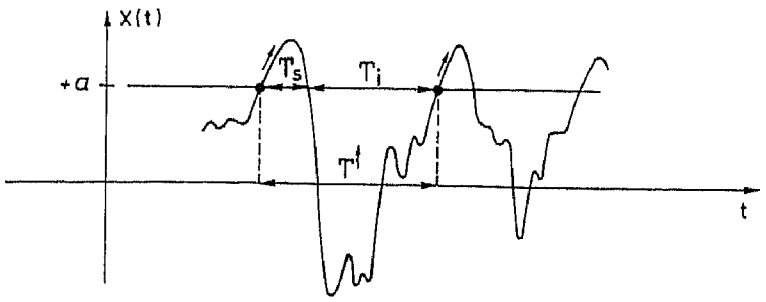


Fig. 1.26 - Diferenciação em dois estados.

Uma melhor aproximação é no entanto conseguida [236] se se subdividir o intervalo de tempo entre dois atravessamentos consecutivos (Fig. 1.26) em dois sub-intervalos (T_s e T_i para $x(t)$ ou $|x(t)|$, e $\hat{T}_s$ e $\hat{T}_i$ para $z(t)$) correspondentes às situações em que o processo ($x(t)$, $|x(t)|$ ou $z(t)$) assume valores superiores e inferiores ao valor a definidor da barreira, e se se admitir que são os tempos T_i ou $\hat{T}_i$ que obedecem a uma distribuição exponencial com

$$\nu_B = \frac{1}{E[T_i]} \qquad \nu_D = \frac{2}{E[T_i]} \qquad \nu_E = \frac{1}{E[\hat{T}_i]} \tag{1.327}$$

Assim, começando por considerar o caso de passagens do tipo B e introduzindo a variável reduzida $\chi = a/\sigma_x$, tem-se que

$$E[T_s + T_i] = \frac{1}{f_a^{\uparrow}} = \frac{1}{f_o^{\uparrow} e^{-\frac{\chi^2}{2}}} \tag{1.328}$$

$$\frac{E[T_s]}{E[T_s + T_i]} = \int_a^{\infty} p(x)dx = \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} dx$$

$$= \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du = \phi(\chi) \tag{1.329}$$

relacionando-se $\phi(\chi)$ com a função de erro através da relação

$$\phi(\chi) = [1 - erf(\chi/\sqrt{2})]/2 \tag{1.330}$$

Conjugando as equações (1.328) e (1.329), podem obter-se os seguintes valores médios

$$E[T_s] = \frac{1}{f_o^{\uparrow}} e^{\chi^2/2} \phi(\chi) \tag{1.321}$$

$$E[T_i] = \frac{1}{f_o^{\uparrow}} e^{\chi^2/2} [1 - \phi(\chi)] \tag{1.332}$$

Procedendo de forma semelhante em relação a passagens do tipo E, tem-se por sua vez que

$$E[\hat{T}_s + \hat{T}_i] = \frac{1}{\hat{f}_a^{\uparrow}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta\chi f_o^{\uparrow} e^{-\frac{\chi^2}{2}}} \tag{1.333}$$

$$\frac{E[\hat{T}_s]}{E[\hat{T}_s+\hat{T}_i]}=\int_a^\infty p_e(z)dz=\int_a^\infty \frac{z}{\sigma_x^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_x^2}}dz=e^{-\frac{\chi^2}{2}} \tag{1.334}$$

donde resulta que

$$E[\hat{T}_s]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta\chi f_o^{\uparrow}} \tag{1.335}$$

$$E[\hat{T}_i]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta\chi f_o^{\uparrow}}(e^{\chi^2/2}-1) \tag{1.336}$$

Nestas condições, admitindo que os tempos T_i e $\hat{T}_i$ têm uma distribuição exponencial com coeficientes de redução ν definidos pela equação (1.327), e supondo ainda que a probabilidade de o processo se iniciar abaixo de uma barreira do tipo B e E é respectivamente

$$A_B=\frac{E[T_i]}{E[T_s+T_i]} \qquad A_E=\frac{E[\hat{T}_i]}{E[\hat{T}_s+\hat{T}_i]} \tag{1.337}$$

são as seguintes as expressões da probabilidade de não-excedência correspondentes aos três tipos de barreiras consideradas

$$L_B(t)=[1-\phi(\chi)]\exp\left\{-\frac{f_o^{\uparrow}te^{-\frac{\chi^2}{2}}}{[1-\phi(\chi)]}\right\} \tag{1.338}$$

$$L_D(t)=[1-2\phi(\chi)]\exp\left\{-\frac{2f_o^{\uparrow}te^{-\frac{\chi^2}{2}}}{[1-2\phi(\chi)]}\right\} \tag{1.339}$$

$$L_E(t)=\left[1-e^{-\frac{\chi^2}{2}}\right]\exp\left\{-\frac{\sqrt{2\pi}\delta\chi f_o^{\uparrow}t}{e^{\frac{\chi^2}{2}}-1}\right\} \tag{1.340}$$

Esta aproximação pode todavia ser melhorada em relação a $L_B(t)$ e $L_D(t)$, se se tiver em consideração que os estudos de simulação numérica demonstram que, no caso de processos de banda estreita, ou em que $\delta\chi$ assume um valor relativamente baixo, as passagens de tipo D ocorrem em grupos na sequência de uma passagem de tipo E, ao passo que no

caso de processos de banda larga, ou em que $\delta\chi$ assume valores elevados, é frequente registarem-se passagens de tipo E às quais não se sucedem quaisquer passagens de tipo D.

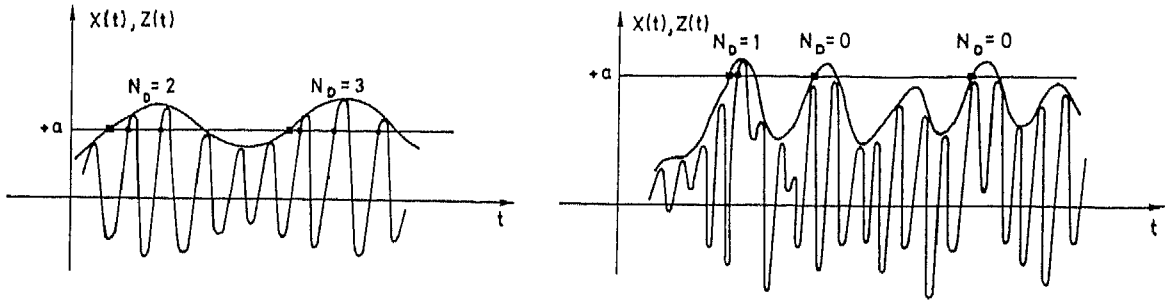


Fig. 1.27 - (a) Agrupamento de passagens do tipo B após uma passagem do tipo E (processo de banda estreita);
(b) Passagens do tipo E desacompanhadas de passagens do tipo B (processo de banda larga).

Com efeito, admitindo por um lado como certa a ocorrência de um atravessamento de tipo D sempre que $2f_o^{\uparrow}\hat{T}_s \geq 1$, e por outro que, para $\hat{T}_s < 1/2f_o^{\uparrow}$, a probabilidade de não se verificar qualquer atravessamento daquele tipo é $1-2f_o^{\uparrow}\hat{T}_s$, a fracção β_E de passagens da envolvente que não são seguidas por qualquer passagem de $|x(t)|$ é definida por

$$\beta_E = \int_0^{1/2f_o^{\uparrow}} (1-2f_o^{\uparrow}t)\, p_{\hat{T}_s}(t)\, dt \qquad (1.341)$$

Considerando simultaneamente que os tempos $\hat{T}_s$ obedecem a uma distribuição exponencial (v. eq. 1.325) com $\nu = 1/E[\hat{T}_s]$, sendo $E[\hat{T}_s]$ dado pela equação (1.335), Vanmarke [236] obteve

$$\beta_E = 1 - \frac{1-\exp(-\sqrt{\pi/2}\delta\chi)}{\sqrt{\pi/2}\delta\chi} \qquad (1.342)$$

Nestas condições, a frequência média de passagens da envolvente efectivamente seguidas por atravessamentos do tipo D pode expressar-se por

$$\hat{f}_a^{\uparrow} = (1-\beta_E)\hat{f}_a^{\uparrow} = 2f_a^{\uparrow}[1-\exp(-\sqrt{\pi/2}\delta\chi)] \qquad (1.343)$$

sendo, por isso, o valor médio do número de grupo

$$E[N_D]=\frac{2f_a^{\uparrow}}{\hat{f}_a^{\prime\uparrow}}=\frac{1}{1-\exp(-\sqrt{\pi/2}\delta\chi)} \qquad (1.344)$$

expressão, aliás, concordante com a equação (1.269) anteriormente referida. Por conseguinte, assumindo cada uma das primeiras passagens correspondentes a cada grupo de atravessamentos de uma barreira D como um acontecimento raro e estatisticamente independente dos restantes, o número de passagens desse tipo entre os instantes 0 e t constitui um processo de Poisson associado a uma frequência de ocorrência

$$\nu_D=\hat{f}_a^{\prime\uparrow} \qquad (1.345)$$

pelo que, para barreiras suficientemente elevadas, para as quais seja lícito admitir que $A=1$ na equação (1.316), e sendo $L_D(t)=P(0,t)$

$$L_D(t)=\exp\{-2f_a^{\uparrow}t[1-\exp(-\sqrt{\pi/2}\delta\chi)]\} \qquad (1.346)$$

No caso de barreiras relativamente baixas, esta aproximação pode no entanto ser ainda melhorada [236], tendo em consideração o tempo de duração dos grupos de atravessamentos, e efectuando novamente uma diferenciação em dois estados com tempos de duração média $E[\hat{T}_s']$ e $E[\hat{T}_i']$, tais que

$$E[\hat{T}_s'].2f_o^{\uparrow}=E[N_D] \qquad E[\hat{T}_i']=\frac{1}{\hat{f}_a^{\prime\uparrow}}-E[\hat{T}_s'] \qquad (1.347,348)$$

donde resulta que

$$E[\hat{T}_s']=E[N_D]/2f_o^{\uparrow} \qquad (1.349)$$

$$E[\hat{T}_i']=\frac{E[N_D]}{2f_o^{\uparrow}}(e^{x^2/2}-1) \qquad (1.350)$$

Admitindo simultaneamente que os tempos $\hat{T}_i'$ têm uma distribuição exponencial com um coeficiente de redução

$$\nu_D=1/E[\hat{T}_i'] \qquad (1.351)$$

e supondo ainda que a probabilidade de um processo se iniciar abaixo da barreira é

$$A_D = \frac{E[\hat{T}_i']}{E[\hat{T}_s' + \hat{T}_i']} \tag{1.352}$$

conclui-se que é a seguinte a expressão da probabilidade de sobrevivência $L_D(t)$

$$L_D(t) = \left[1 - \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)\right] \exp\left\{-2f_o^{\uparrow} t \frac{1 - \exp[-\sqrt{\pi/2}\,\delta\chi]}{\exp\frac{\chi^2}{2} - 1}\right\} \tag{1.353}$$

ou atendendo às relações verificadas entre $f_o^{\uparrow}, f_a^{\uparrow}$ e $\hat{f}_a^{\uparrow}$ (v. eq. 1.236, 1.237 e 1.304)

$$L_D(t) = \left(1 - \frac{f_a^{\uparrow}}{f_o^{\uparrow}}\right) \exp\left\{-2f_a^{\uparrow} t \frac{1 - \exp[-\hat{f}_a^{\uparrow}/2f_a^{\uparrow}]}{1 - f_a^{\uparrow}/f_o^{\uparrow}}\right\} \tag{1.354}$$

sendo fácil verificar que, substituindo em (1.353) $2f_o^{\uparrow}$ e $\sqrt{\pi/2}$ por $f_o^{\uparrow}$ e $\sqrt{2\pi}$, se obtém a expressão correspondente de $L_B(t)$.

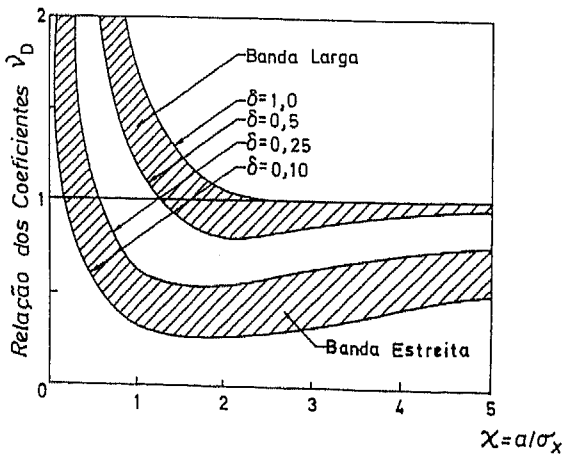


Fig. 1.28 - Variação da relação dos coeficientes ν_D relativos às equações (1.351) e (1.320) em função de $\chi = a/\sigma_x$.

No sentido de permitir ganhar maior sensibilidade em relação à repercussão das aproximações introduzidas sobre a densidade de

probabilidade de primeira passagem e sobre a probabilidade de não-excedência, apresenta-se na figura 1.28 [236] a representação gráfica da evolução da relação entre os coeficientes de redução ν_D expressos pelas equações (1.351) e (1.320), em função de $\chi = a/\sigma_x$.

Da sua observação, resulta pois evidente que para barreiras suficientemente elevadas, como são as normalmente consideradas em casos práticos, os valores de ν_D dados pela equação (1.351) são inferiores ao valor inicialmente adoptado $\nu_D = 2f_a^{\uparrow}$, na hipótese de atravessamentos raros e estatisticamente independentes, sendo fortemente condicionados pela largura de banda, registando-se no entanto, em qualquer caso, uma convergência assintótica $\nu_D \to 2f_a^{\uparrow}$ quando $\chi \to \infty$. Desta forma, a distribuição assintótica de Cramer, se bem que menos correcta teoricamente, tende a colocar-nos em geral numa situação conservativa em termos de segurança, salvo nos casos de processos de banda larga e barreiras relativamente baixas.

Sucede no entanto que, de acordo com simulações numéricas realizadas por Cook [55], casos há em que se registam não só agrupamentos de atravessamentos D, mas também agrupamentos de atravessamentos da própria envolvente ("superclumping"). Para ter também em consideração este efeito, que tende a introduzir uma redução suplementar sobre ν_D, Vanmarke [236] sugere a adopção de um factor de largura de banda equivalente $\delta_e = \delta^{1+b}$, com $b = 0,20$. Assinale-se, aliás, que a substituição de δ por δ_e na equação (1.353), acompanhada do facto de $L_D(T) = P\left[\max_T |x(t)| < a\right]$, reduz esta equação à equação (1.270), justificando-se pois, por esta via, a distribuição de probabilidade então apresentada para os extremos absolutos do processo $x(t)$ num intervalo de tempo de duração T.

Esta abordagem da distribuição probabilística dos tempos de primeira passagem de um processo estacionário, introduzida por Vanmarke, foi também generalizada por ele próprio, por Corotis e Cornell [236, 58] a processos não-estacionários de valor médio nulo, caracterizados por uma densidade espectral de potência evolutiva $S_x(w,t)$. Nesse caso, os momentos espectrais tornam-se temporalmente dependentes

$$\lambda_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w^i S_x(w,t)dw \qquad (1.355)$$

podendo a partir deles calcular-se de forma aproximada os valores instantâneos de $f_o^{\uparrow}(t), f_a^{\uparrow}(t)$ e $\delta(t)$, utilizando as expressões relativas a processos estacionários, e posteriormente a probabilidade de não-excedência, dada por

$$L_D(t) = A\exp\left\{-\int_0^t \alpha(u)du\right\} \qquad (1.356)$$

sendo o valor instantâneo de $\alpha(t)$ definido tendo em conta as equações (1.353) e (1.354), isto é

$$\alpha(u) = 2f_o^{\uparrow}(u)\frac{1-\exp[-\sqrt{\pi/2}\delta(u)\chi]}{\exp\frac{\chi^2}{2}-1} \qquad (1.357)$$

ou então

$$\alpha(u) = 2f_a^{\uparrow}(u)\frac{1-\exp[-\hat{f}_a^{\uparrow}(u)/2f_a^{\uparrow}(u)]}{1-f_a^{\uparrow}(u)/f_o^{\uparrow}(u)} \qquad (1.358)$$

Uma avaliação mais correcta de $\alpha(u)$ pode, no entanto, ainda ser conseguida, caso os valores de $f_o^{\uparrow}(u)$, $f_a^{\uparrow}(u)$ e $\hat{f}_a^{\uparrow}(u)$, intervenientes na equação (1.358), sejam quantificados com base nas expressões (1.238) e (1.306), relativas a processos não-estacionários gaussianos.

2

RESPOSTA DE SISTEMAS LINEARES A EXCITAÇÕES ALEATÓRIAS ESTACIONÁRIAS

2.1 - INTRODUÇÃO

Em numerosas situações no domínio da engenharia estrutural, surge a necessidade de proceder à análise e dimensionamento de sistemas susceptíveis de serem submetidos, durante o seu período de vida útil, a excitações aleatórias de natureza tão diversa como o vento, os sismos, as ondas oceânicas, a turbulência hidráulica ou atmosférica, o tráfego rodoviário ou ferroviário. Interessa, por isso, saber caracterizar de forma adequada, e numa óptica probabilística, o comportamento estrutural originado, tarefa que envolve naturalmente a idealização de modelos que possibilitem não só a consideração de diferentes tipos de acções, mas também a simulação do funcionamento da própria estrutura, de uma forma que se revele, por um lado, suficientemente ajustada à realidade, e, por outro, suficientemente simples e eficiente em termos de utilização corrente.

No que respeita a modelos das acções, estas são usualmente traduzidas por processos estocásticos vectoriais cujos principais parâmetros estatísticos são fixados e aferidos em função de dados experimentais.

Esses processos podem ter natureza não-estacionária, estacionária ou mesmo ergódica, podendo ser classificados na sua maioria como processos de Gauss, de Poisson ou de Markov.

A simulação do comportamento estrutural envolve, por seu turno, a consideração de um modelo físico de natureza contínua ou discreta, sendo neste caso constituído por um conjunto de elementos finitos com características de massa, de rigidez e de amortecimento conhecidas, em correspondência com um número finito de graus de liberdade.

O estabelecimento de relações determinísticas excitação-resposta resulta da aplicação directa das leis da Mecânica, conduzindo a um

conjunto de equações que, de modo condensado, se podem exprimir sob a forma

$$L(\underline{\alpha},\underline{u},t)=\underline{F}(\underline{u},t) \tag{2.1}$$

sendo $L(\ )$ um operador, $\underline{\alpha}$ o vector dos parâmetros definidores do sistema, $\underline{u}$ o vector das variáveis de controlo da resposta, em correspondência com um dado conjunto de coordenadas generalizadas, t a variável tempo e $\underline{F}(\underline{u},t)$ o vector das forças aplicadas segundo aquelas coordenadas.

Estas equações podem ser lineares ou não-lineares. Todavia, na maioria das situações, são utilizados modelos lineares, muito especialmente pela enorme simplicidade que introduzem no tratamento dos problemas correntes, podendo, no entanto, os resultados obtidos com base na sua utilização ser objecto de uma correcção posterior, tendente a reflectir de algum modo os efeitos do comportamento estrutural não-linear, como sucede por exemplo no âmbito da Engenharia Sísmica, de acordo com a regulamentação nacional actualmente em vigor. Essa vantagem é aliás particularmente sentida nos casos em que a excitação pode ser modelada por um processo estocástico gaussiano, facto que sucede frequentemente, como se compreende tendo em conta o Teorema do Limite Central, e que leva a que, dada a linearidade do sistema, a resposta possa ser traduzida por um processo estocástico da mesma natureza, podendo, por conseguinte, ser inteiramente caracterizada, do ponto de vista probabilístico, com base em grandezas estatísticas de primeira e segunda ordem.

O presente capítulo tem como objectivo apresentar os métodos gerais de análise estocástica da resposta dinâmica de sistemas lineares a excitações aleatórias estacionárias, restringindo-se no entanto o tratamento efectuado ao caso de sistemas lineares estáveis, discretizados num conjunto de elementos finitos com um número igualmente finito de graus de liberdade, e com propriedades de massa, de amortecimento e de rigidez conhecidas de forma determinística e invariantes no tempo, isto é, excluindo os problemas relativos à estocasticidade do próprio sistema [202], bem como as chamadas vibrações paramétricas [113].

Para o efeito, são descritas as abordagens gerais mais correntemente utilizadas, baseadas nos conceitos de função de transferência no domínio do tempo ou no domínio da frequência, começando pelos sistemas de um grau de liberdade (1-GL), e passando em seguida à apresentação de diversas formulações aplicáveis à análise de sistemas de múltiplos graus de liberdade (N-GL).

A via alternativa, baseada numa aproximação Markoviana, e na utilização da equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, não será aqui referida, dado o seu menor interesse prático e a sua mais restrita aplicabilidade, exigindo que a excitação seja idealizável através de um ruído branco, sendo apenas focada no capítulo 4 a propósito dos sistemas não-lineares.

É ainda dado um realçe especial ao caso da excitação sísmica, sublinhando a relação existente entre as abordagens estocástica e determinística de análise dos efeitos dos sismos sobre o comportamento estrutural, descrevendo-se também cuidadosamente a arquitectura de diversos programas de cálculo automático desenvolvidos, tomando como exemplo os casos das estruturas reticuladas planas e das estruturas laminares (cascas).

2.2 - SISTEMAS LINEARES DE 1-GL

2.2.1 - Relações determinísticas excitação-resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência

A caracterização da resposta de um sistema linear de $1-GL$ a uma excitação aleatória, traduzida por um processo estocástico estacionário, envolve o conhecimento prévio das características do próprio sistema que possibilitam o estabelecimento das relações determinísticas verificadas entre cada realização do processo de excitação, $p_i(t)$, e a realização correspondente do processo de resposta, $q_i(t)$.

Essas relações são traduzidas por funções expressas no domínio do tempo ou no domínio da frequência, habitualmente designadas por funções de transferência FT_i (Fig. 2.1), verificando-se todavia que, no campo da análise de vibrações, as propriedades do sistema podem frequentemente ser encaradas de forma determinística face à aleatoriadade do processo de excitação, podendo considerar-se que

$$FT = FT_i \qquad i = 1,2,\ldots,n \quad (n \rightarrow \infty) \tag{2.2}$$

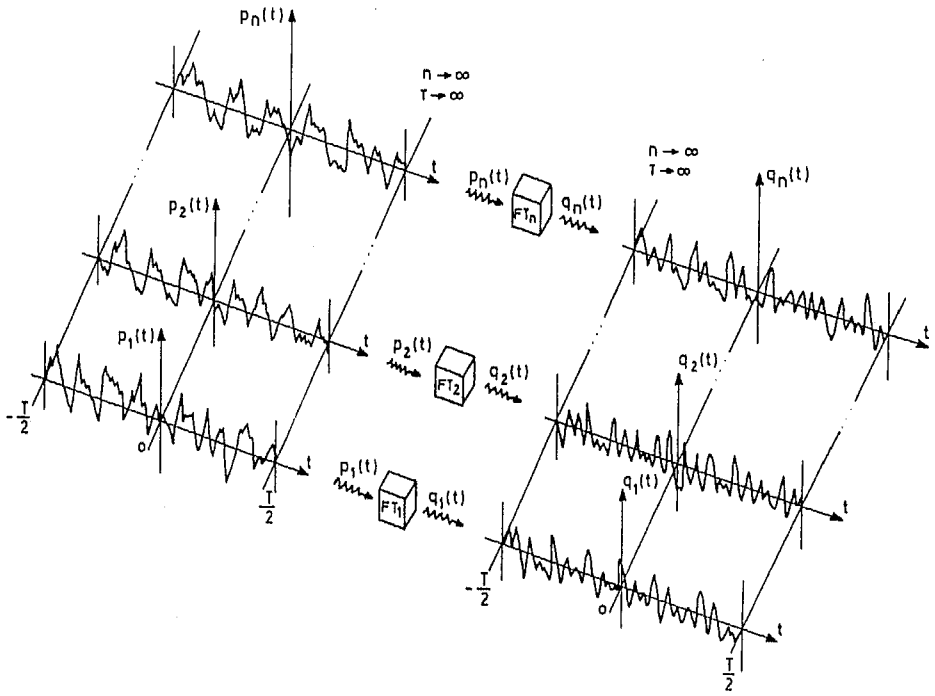


Fig. 2.1 - Processos estocásticos de excitação e de resposta.

Como se verá, tais funções representam um par de transformadas de Fourier, $h(t)$ e $H(w)$, que, uma vez conhecidas, permitem obter a caracterização do processo de resposta a partir da caracterização do processo de excitação correspondente, a qual se poderá efectuar quer através da função de auto-correlação $R_p(\tau)$, se a análise se processar no domínio do tempo t, quer através da função densidade espectral de potência $S_p(w)$, se for seguida a via de análise no domínio da frequência w.

Com efeito, sendo o equilibrio dinâmico de um sistema linear de 1-GL, sujeito a uma acção $p(t)$, traduzido pela equação

$$m\ddot{q}(t)+c\dot{q}(t)+kq(t)=p(t) \tag{2.3}$$

em que m, c e k representam respectivamente a massa, a constante de amortecimento viscoso e a constante de rigidez do sistema, e supondo que este parte de uma situação inicial de repouso, uma análise da resposta no domínio do tempo conduz ao seguinte integral de convolução de Duhamel

$$q(t)=\int_{-\infty}^{t} p(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty} p(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

em que $h(t-\tau)$ representa a resposta do sistema à actuação, no instante τ, do impulso unitário de Dirac $\delta(t-\tau)$, sendo dada, para um coeficiente de amortecimento ξ não superior à unidade, por

$$h(t-\tau)=\frac{1}{mw_d}e^{-w_n\xi(t-\tau)}\operatorname{sen} w_d(t-\tau) \tag{2.5}$$

em que $w_d=w_n\sqrt{1-\xi^2}$, sendo w_n a frequência natural circular.

A função $h(t)$ constitui pois uma característica essencial do sistema, possibilitando o estabelecimento de uma relação determinística, no domínio do tempo, entre a excitação aplicada e a resposta consequente, sendo por tal facto designada por função de transferência.

A análise da resposta pode, no entanto, processar-se também no domínio da frequência. Com efeito, sendo $H(w)e^{iwt}$ a resposta estacionária à actuação de uma excitação harmónica de amplitude unitária e^{iwt}, em que [54]

$$H(w)=\frac{1}{k-w^2m+iwc}=\frac{1}{m(w_n^2-w^2+2i\xi ww_n)} \tag{2.6}$$

e podendo a excitação actuante, $p(t)$, ser decomposta num somatório de um número infinito de harmónicos de amplitude infinitesimal $|P(w)|dw/2\pi$, através da transformada inversa de Fourier

$$p(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(w)e^{iwt}dw \tag{2.7}$$

a resposta do sistema pode ser expressa, em termos de sobreposição de efeitos, por

$$q(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(w)P(w)e^{iwt}dw \tag{2.8}$$

Comparando este integral com a transformada inversa de Fourier $q(t)=F^{-1}[Q(w)]$, conclui-se de imediato ser a relação determinística excitação-resposta no domínio da frequência traduzida pela equação

$$Q(w)=H(w).P(w) \tag{2.9}$$

As equações (2.4) e (2.8) evidenciam pois que ambas as abordagens de análise mencionadas envolvem uma sobreposição de efeitos devidos a excitações unitárias, tomando-se como base, no primeiro caso, a função de resposta ao impulso unitário de Dirac, $h(t)$, e no segundo caso, a função de resposta complexa, $H(w)$, relativa a uma excitação harmónica de amplitude unitária.

Para comprovar que estas duas funções constituem um par de transformadas de Fourier, basta considerar a actuação de um impulso unitário de Dirac $p(t)=\delta(t)$, que de acordo com a equação (2.8), origina como resposta

$$q(t)=h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(w)P(w)e^{iwt}dw \tag{2.10}$$

Na verdade, sendo neste caso particular

$$P(w)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-iwt}dt=1 \tag{2.11}$$

de imediato se conclui que

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(w)e^{iwt}dw \tag{2.12}$$

ou, invertendo o sentido da transformação

$$H(w)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-iwt}dt \tag{2.13}$$

2.2.2 - Relações estocásticas excitação-resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência

Sendo de carácter aleatório a excitação actuante sobre um sistema linear de 1-GL, a completa caracterização da estrutura probabilística da resposta envolve o conhecimento de uma das hierarquias de grandezas estatísticas referidas em 1.3, designadamente da hierarquia de funções densidade de probabilidade ou da hierarquia de momentos.

Sucede porém que, como já foi sublinhado em 1.8.1, muitas das acções actuantes sobre os sistemas estruturais podem ser convenientemente modeladas através da consideração de processos estocásticos gaussianos, tornando-se nesse caso suficiente o conhecimento dos momentos de primeira e segunda ordem para uma completa caracterização probabilística do processo.

Por outro lado, operações lineares efectuadas sobre processos gaussianos conduzem a processos da mesma natureza (v. 1.8.1), pelo que, representando o integral de convolução de Duhamel (eq. 2.4) uma operação linear, o processo de resposta a uma excitação gaussiana é igualmente gaussiano.

Além disso, mesmo quando as acções têm um carácter não-gaussiano mas o sistema tem fraco amortecimento, como frequentemente acontece com os sistemas estruturais, verifica-se que a resposta apresenta uma estatística mais próxima da distribuição normal que a excitação, sendo essa tendência tanto mais acentuada, quanto menor é o amortecimento do sistema [195].

Por estas razões, é corrente a análise da resposta de um sistema linear a excitações aleatórias estacionárias basear-se exclusivamente na determinação de parâmetros estatísticos de ordem não superior a dois, ou seja, no caso particular de sistemas com 1-GL, da média e da variância.

O valor médio da resposta pode ser facilmente obtido, aplicando o operador $E[\ ]$ à equação (2.4), e tendo em consideração a existência de comutatividade entre as operações de integração e de cálculo de valores médios espectáveis, obtendo-se

$$m_q(t)=\int_0^\infty m_p(t-\tau)h(\tau)d\tau=m_p\int_0^\infty h(\tau)d\tau \qquad (2.14)$$

equação que demonstra a estacionaridade de primeira ordem do processo de resposta $q(t)$, uma vez que, sendo o valor médio da excitação $m_p=E[p(t)]$ invariante no tempo, o valor médio espectável da resposta, $m_q(t)=E[q(t)]$, também o é. Em situações reais, porém, em que o início da excitação não corresponde ao instante $t=-\infty$, mas sim ao instante $t=0$ (excitação pseudo-não-estacionária)

$$m_q(t)=m_p\int_0^t h(\tau)d\tau \qquad (2.15)$$

verificando-se a ocorrência de um curto período transitório de crescimento de $m_q(t)$, tendendo rápida e assintoticamente para um valor constante, igual ao definido pela equação (2.14).

Uma outra forma de relacionar os valores médios espectáveis m_p e m_q consiste em recorrer ao valor na origem da função de transferência no domínio da frequência (v. eq. 2.13)

$$H(0)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-iw\tau}d\tau\right\}_{w=0}=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau \qquad (2.16)$$

ou, tendo presente que a função de resposta ao impulso unitário de Dirac, $h(\tau)$, é nula para valores de τ negativos

$$H(0)=\int_0^\infty h(\tau)d\tau \qquad (2.17)$$

Conjugando esta equação com (2.14) e (2.6), resulta pois que

$$m_q=H(0)m_p=\frac{m_p}{k} \qquad (2.18)$$

Sendo a excitação actuante desdobrável em duas componentes, uma constante e igual ao respectivo valor médio m_p, e outra traduzida por um processo estocástico estacionário de valor médio nulo $p_o(t)$, conclui-se pois que o valor médio da resposta devido à excitação total $p(t)$ coincide com a resposta à acção determinística constituída pela componente constante m_p, contribuindo, por isso, a componente ale-

atória de valor médio nulo $p_o(t)$ unicamente para a variância da resposta.

A quantificação da variância da resposta pode, por sua vez, ser efectuada seguindo duas vias alternativas, uma, no domínio do tempo, em que se relacionam as funções de auto-correlação dos processos de excitação, $p_o(t)$, e da resposta correspondente, $q_o(t)$, e outra, no domínio da frequência, em que se relacionam as respectivas funções densidade espectral de potência.

Com efeito, no primeiro caso, partindo da eq. (2.4) na forma

$$q_o(t)=\int_0^\infty p_o(t-u)h(u)du \tag{2.19}$$

$R_{q_o}(t,t+\tau)$ pode exprimir-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} R_{q_o}(t,t+\tau) &= E[q_o(t).q_o(t+\tau)] \\ &= \int_0^\infty h(\tau_1)\int_0^\infty h(\tau_2)E[p_o(t-\tau_1).p_o(t+\tau-\tau_2)]d\tau_2 d\tau_1 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por outro lado, tendo presente o carácter estacionário da excitação actuante

$$\begin{aligned} E[p_o(t-\tau_1)p_o(t+\tau-\tau_2)] &= E[p_o(t)p_o(t+\tau+\tau_1-\tau_2)] \\ &= R_{p_o}(\tau+\tau_1-\tau_2) \end{aligned} \tag{2.21}$$

obtendo-se, por substituição desta igualdade na equação (2.20), que

$$R_{q_o}(t,t+\tau)=R_{q_o}(\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)R_{p_o}(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \tag{2.22}$$

Esta equação, que demonstra que a função de auto-correlação do processo de resposta, $q_o(t)$, é, tal como sucede com $R_{p_o}(\tau)$, exclusivamente dependente do desfasamento τ, permite a determinação de $R_{q_o}(\tau)$ a partir do conhecimento de $R_{p_o}(\tau)$ e da função de transferência $h(t)$, podendo a partir dela quantificar-se a variância do processo de resposta $\mu_q=\mu_{q_o}$, já que pela equação (1.174)

$$\mu_q=\mu_{q_o}=R_{q_o}(o) \tag{2.23}$$

Mais fácil e imediato se torna, porém, seguir uma outra via de análise no domínio da frequência, procurando estabelecer a relação correspondente entre as respectivas funções densidade espectral de potência. Recorrendo, nesse sentido, à equação de equilíbrio dinâmico de um sistema de 1-GL

$$m\ddot{q}_o(t)+c\dot{q}_o(t)+kq_o(t)=p_o(t) \tag{2.24}$$

e tomando transformadas de Fourier de ambos os membros, considerando os processos $p_o(t)$ e $q_o(t)$ restringidos ao intervalo $[-T/2,T/2]$ com $T\to\infty$, tem-se

$$(-mw^2+icw+k)Q_{o,T}(w)=P_{o,T}(w) \tag{2.25}$$

o que revela que as transformadas de Fourier da excitação e da resposta restringidas àquele intervalo se relacionam do seguinte modo através da função de transferência $H(w)$

$$Q_{o,T}(w)=H(w).P_{o,T}(w) \tag{2.26}$$

com

$$H(w)=\frac{1}{k-w^2m+icw}=\frac{1}{m(w_n^2-w^2+2i\xi w_n w)} \tag{2.27}$$

Desta forma, multiplicando ambos os membros da equação (2.26) pelo respectivo complexo conjugado, e tendo presente a definição de função densidade espectral de potência (eq. 1.58), obtém-se a seguinte equação, que possibilita a determinação de $S_{q_o}(w)$ a partir do conhecimento de $S_{p_o}(w)$ e de $H(w)$

$$S_{q_o}(w)=|H(w)|^2 S_{p_o}(w) \tag{2.28}$$

podendo, posteriormente, a variância da resposta ser quantificada pela relação (v. eq. 1.174)

$$\mu_q=\mu_{q_o}=\int_{-\infty}^{\infty} S_{q_o}(w)dw \tag{2.29}$$

2.2.3 - Avaliação do valor médio dos picos de resposta

Uma vez obtida a caracterização probabilística do processo de resposta $q(t)$, o que no caso de processos estocásticos estacionários gaussianos pode ser conseguido mediante a utilização das equações (2.14), (2.18), (2.22), (2.23), (2.28) e (2.29), que proporcionam o conhecimento dos respectivos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, assume em geral particular importância, do ponto de vista do dimensionamento estrutural, a avaliação do valor médio dos correspondentes extremos absolutos num intervalo de tempo de duração T.

Tal pode ser efectuado através da determinação do valor médio dos picos de resposta da sua componente de média nula, $q_o(t)$, e tomando como base uma das expressões para o efeito referidas em 1.9.3, nomeadamente a expressão de Vanmarke (eq. 1.272), pela qual aquele valor médio é igual a

$$E\left[\max_T |q_o(t)|\right] = \overline{p}_{q_o}\sigma_{q_o} \tag{2.30}$$

em que o factor de pico $\overline{p}_{q_o}$ é dado por

$$\overline{p}_{q_o} = (2\ln 2 f_e^{\uparrow} T)^{1/2} + \frac{0,577216}{(2\ln 2 f_e^{\uparrow} T)^{1/2}} \tag{2.31}$$

sendo o parâmetro $f_e^{\uparrow}$ calculado (v. eq. 1.274, 1.268 e 1.237) a partir do conhecimento dos momentos espectrais da resposta $\lambda_o^{q_o}, \lambda_1^{q_o}$ e $\lambda_2^{q_o}$ definidos por

$$\lambda_k^{q_o} = \int_{-\infty}^{\infty} w^k S_{q_o}(w)\,dw \qquad k = 0,1,2 \tag{2.32}$$

2.2.4 - Resposta a uma excitação aleatória do tipo ruído branco

Considere-se um sistema linear de 1-GL de massa unitária, frequência natural circular w_n e coeficiente de amortecimento viscoso ξ, sujeito a uma excitação aleatória idealizada por um processo

estocástico estacionário $p(t)$ de valor médio espectável nulo, e com uma função densidade espectral de potência de valor constante S_o ao longo de toda a gama de frequências. O equilíbrio dinâmico do sistema pode ser traduzido em cada instante pela equação diferencial

$$\ddot{q}(t)+2\xi w_n\dot{q}(t)+w_n^2 q(t)=p(t) \tag{2.33}$$

sendo a função densidade espectral de potência da resposta obtida através da eq. (2.28), ou seja

$$S_q(w)=|H(w)|^2 S_o \tag{2.34}$$

com

$$H(w)=\frac{1}{w_n^2-w^2+2i\xi w_n w} \tag{2.35}$$

Substituindo a equação (2.35) em (2.34), e tendo em conta a definição de momento espectral de ordem k ($k=0,1,2$), podem obter-se as seguintes expressões para os primeiros três momentos espectrais da resposta [129]

$$\lambda_o^q=\frac{\pi S_o}{2\xi w_n^3} \tag{2.36}$$

$$\lambda_1^q=\frac{\pi S_o}{2\xi w_n^2}\cdot\frac{1-\frac{2}{\pi}arc\,tg\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.37}$$

$$\lambda_2^q=\frac{\pi S_o}{2\xi w_n} \tag{2.38}$$

Sendo a excitação de natureza gaussiana, a frequência média de passagens ascendentes por zero do processo de resposta vem dada por

$$f_o^{+q}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\lambda_2^q}{\lambda_o^q}\right)^{1/2}=\frac{w_n}{2\pi} \tag{2.39}$$

e o indicador de dependência estatística entre extremos por

$$\delta^q=\left(1-\frac{\lambda_1^{q\,2}}{\lambda_o^q\lambda_2^q}\right)^{1/2}=\left[1-\frac{1}{1-\xi^2}\left(1-\frac{2}{\pi}arc\,tg\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.40}$$

2.2.5 - Resposta a uma excitação aleatória do tipo ruído branco filtrado

Um dos tipos de função densidade espectral de potência que melhor se adequa à caracterização de uma larga gama de excitações aleatórias, em particular as de natureza sísmica, corresponde ao chamado ruído branco filtrado.

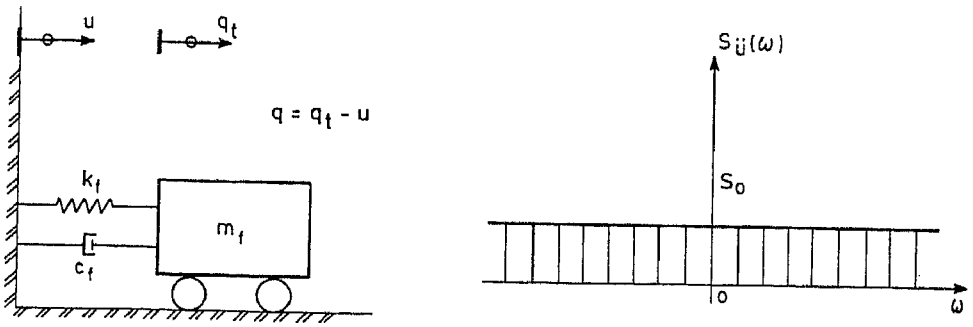


Fig. 2.2 - Sistema linear de 1-GL sujeito a uma excitação do tipo ruído branco.

Um espectro desta natureza pode ser interpretado como a função densidade espectral de potência correspondente à aceleração absoluta de um oscilador linear de 1-GL de frequência natural w_f e coeficiente de amortecimento ξ_f, quando a sua base é sujeita a uma aceleração caracterizada por um espectro de potência do tipo ruído branco (Fig. 2.2).

Com efeito, escrevendo a equação de equilíbrio dinâmico do sistema em função dos respectivos deslocamentos absolutos $q_t(t)$ e dos deslocamentos da base $u(t)$, tem-se

$$m_f\ddot{q}_t(t)+c_f[\dot{q}_t(t)-\dot{u}(t)]+k_f[q_t(t)-u(t)]=0 \qquad (2.41)$$

ou sob outra forma

$$\ddot{q}_t(t)+2\xi_f w_f\dot{q}_t(t)+w_f^2 q_t(t)=2\xi_f w_f\dot{u}(t)+w_f^2 u(t) \qquad (2.42)$$

Tomando transformadas de Fourier de ambos os membros, supondo $q_t(t)$ e $u(t)$ restringidos ao intervalo $[-T/2,T/2]$ com $T\to\infty$

$$(-w^2+2i\xi_f w_f w+w_f^2).F_T[q_t(t)]=(2i\xi_f w_f w+w_f^2).F_T[u(t)] \qquad (2.43)$$

F.E. PORTO

e atendendo também à relação entre as transformadas de Fourier de $q_i(t)$ e de $u(t)$ e dos respectivos processos derivados de 2ª ordem

$$F_T[\ddot{q}_i(t)] = -w^2 F_T[q_i(t)] \qquad F_T[\ddot{u}(t)] = -w^2 F[u(t)] \tag{2.44}$$

pode tornar a escrever-se a equação (2.43) sob a forma

$$F_T[\ddot{q}_i(t)] = H_{\ddot{u}\to\ddot{q}_i}(w) F_T[\ddot{u}(t)] \tag{2.45}$$

em que a função de transferência no domínio da frequência é neste caso

$$H_{\ddot{u}\to\ddot{q}_i}(w) = \frac{w_f^2 + 2i\xi_f w_f w}{w_f^2 - w^2 + 2i\xi_f w_f w} \tag{2.46}$$

Por conseguinte, multiplicando ambos os membros da equação (2.45) pelos respectivos complexos conjugados, e tendo em conta a definição de densidade espectral de potência, conclui-se que o espectro de potência da resposta, em termos da aceleração absoluta $\ddot{q}_i(t)$, vem dado por

$$S_f(w) = S_{\ddot{q}_i}(w) = \frac{w_f^4 + 4\xi_f^2 w_f^2 w^2}{(w_f^2 - w^2)^2 + 4\xi_f^2 w_f^2 w^2} S_o \tag{2.47}$$

Esta função densidade espectral $S_f(w)$ pode, por sua vez, servir para a caracterização de um novo processo de excitação incidindo sobre outro oscilador linear de 1-GL, funcionando neste caso o sistema inicial como um filtro do ruído branco de intensidade S_o, que faz repercutir as suas características próprias w_f e ξ_f sobre o processo de excitação do sistema secundário.

Uma escolha criteriosa das características do filtro, w_f e ξ_f, torna possível a representação de um grande número de excitações com características espectrais distintas, através da função densidade espectral de potência $S_f(w)$.

É, nomeadamente, o caso das vibrações sísmicas [125] que, apresentando em geral uma gama de frequências bastante extensa na sua origem, são "filtradas" pelas formações geológicas atravessadas, levando a que as ordenadas espectrais correspondentes sejam

modificadas em função das características do terreno, nomeadamente da sua frequência fundamental, tornando-se a gama de frequências mais relevantes da excitação actuante sobre as estruturas atingidas mais reduzida.

De realçar que a escolha de w_f determina a gama de frequências dominantes do processo de excitação do sistema secundário, isto é, aquelas que detêm uma contribuição mais significativa para a variância do processo, ao passo que ξ_f condiciona a configuração do espectro, tornando-o tanto mais aguçado na zona das frequências dominantes, quanto mais baixo é o valor que assume (Fig. 2.3).

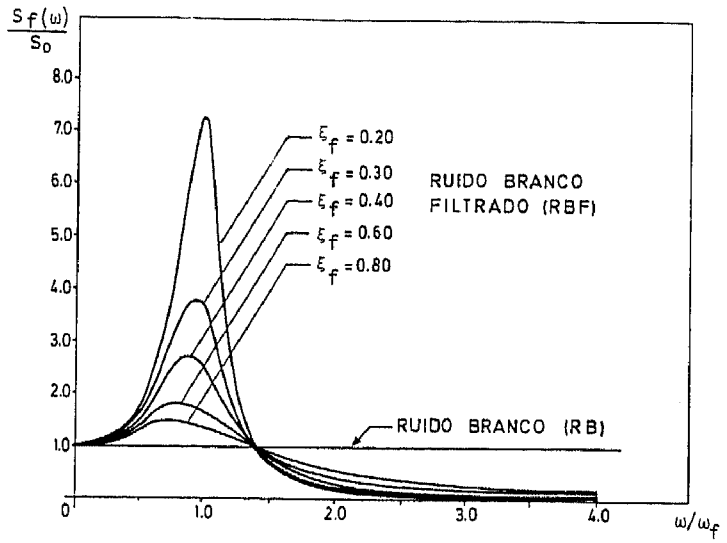


Fig. 2.3 - Espectros de potência do tipo ruído branco (RB) e ruído branco filtrado (RBF).

A este propósito, convirá dizer que, consoante a amplitude da franja de frequências dominantes seja mais ou menos significativa, assim os espectros de potência caracterizados por $S_f(w)$ se poderão designar por espectros de banda larga ou de banda estreita. Muito embora não haja uma fronteira perfeitamente definida entre estes dois tipos de espectro, consideram-se frequentemente [130] como espectros de banda larga os correspondentes a ruídos brancos filtrados com $\xi_f \geq 0,60$, como é por exemplo o caso dos espectros de potência de

aceleração caracterizadores do movimento sísmico, que aproximam os espectros poli-lineares indicados pelo Regulamento de Segurança e Acções.

Observe-se também que os valores espectrais de $S_f(w)$ decrescem acentuadamente quando a frequência w ultrapassa o valor da frequência do filtro w_f, resultando daí que o contributo para a resposta do sistema secundário, $q(t)$, nos casos em que a respectiva frequência natural w_n é superior a w_f, é em geral significativamente inferior à que ocorreria se $w_n < w_f$.

Utilizando as equações (2.28) e (2.47), podem também determinar-se as expressões dos três primeiros momentos espectrais da resposta do sistema secundário, sujeito ao ruído branco filtrado caracterizado pela função densidade espectral de potência $S_f(w)$, as quais constituem uma mera particularização de expressões mais gerais apresentadas por Kiureghian [129], relativas a sistemas lineares com N-GL.

Na figura 2.4 representam-se graficamente as relações existentes entre os momentos espectrais da resposta λ_o^q, λ_1^q e λ_2^q, correspondentes a excitações do tipo ruído branco filtrado e ruído branco de intensidade S_0, em função da relação de frequências $r = w_n / w_f$, do coeficiente de amortecimento do filtro ξ_f, e para os valores de ξ mais correntemente utilizados nos problemas de Dinâmica Estrutural. Destes gráficos, pode concluir-se não só que a relação entre os momentos espectrais λ_k^q é praticamente independente da ordem respectiva ($k = 0, 1, 2$), como também que, mesmo para espectros de banda larga ($\xi_f \geq 0.60$), aqueles quocientes podem diferir significativamente da unidade.

Gráficos idênticos podem ser elaborados relacionando os valores da frequência média de passagens ascendentes por zero, $f_o^{\uparrow q} = (\lambda_2^q / \lambda_o^q)^{1/2} / 2\pi$, e do indicador de dependência estatística entre extremos, $\delta^q = \left(1 - \lambda_1^{q\,2} / \lambda_o^q \lambda_2^q\right)^{1/2}$, correspondentes àqueles dois tipos de excitação (Fig. 2.5). Destes, podem também retirar-se diversas conclusões, em particular que os valores de $f_o^{\uparrow q}$ e δ^q, correspondentes a uma excitação caracterizada por um ruído branco, não diferem de forma sensível dos valores relativos a um ruído branco filtrado, desde

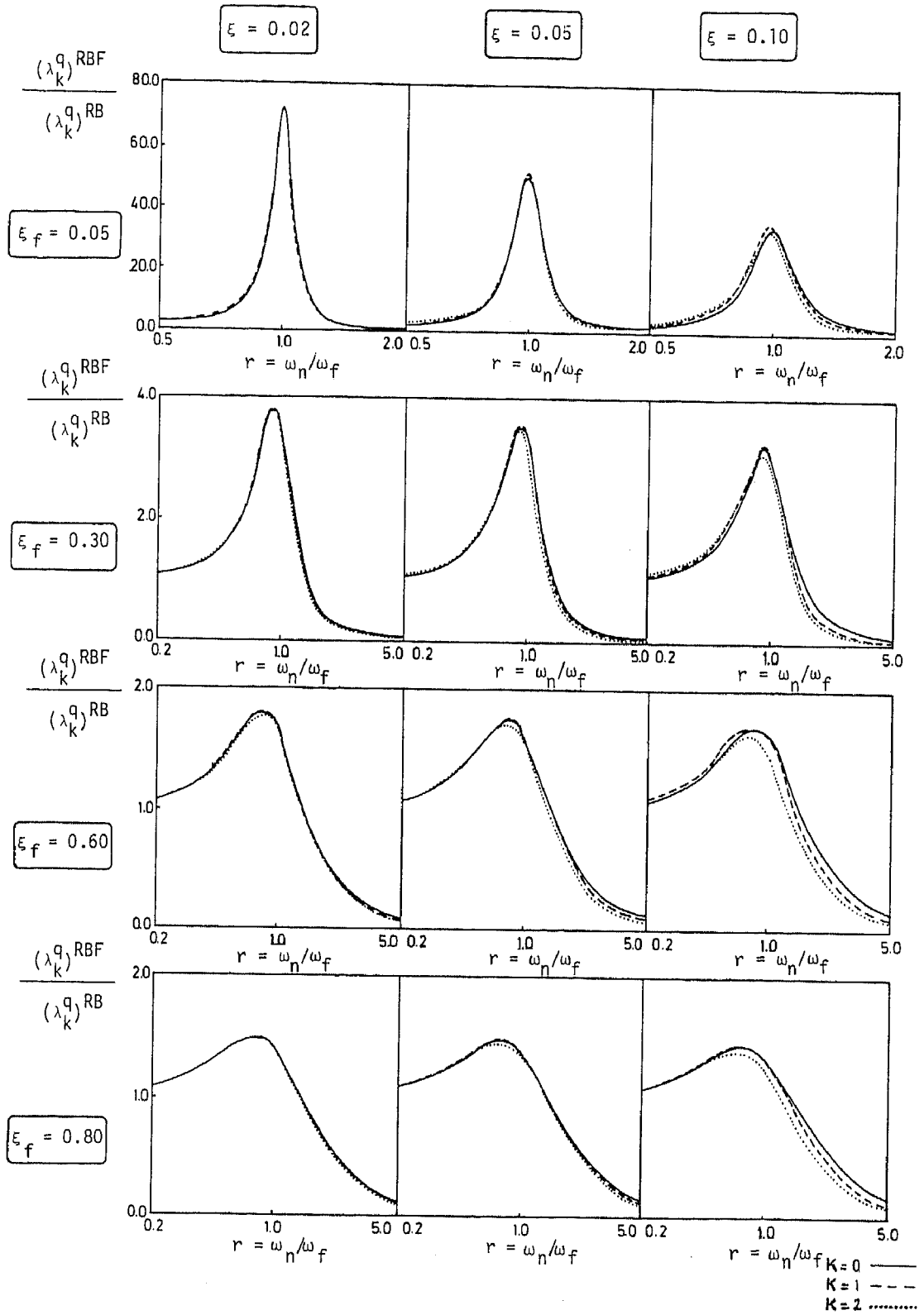


Fig. 2.4 - Relação entre os três primeiros momentos espectrais da resposta correspondentes a excitações do tipo ruído branco filtrado (RBF) e ruído branco (RB).

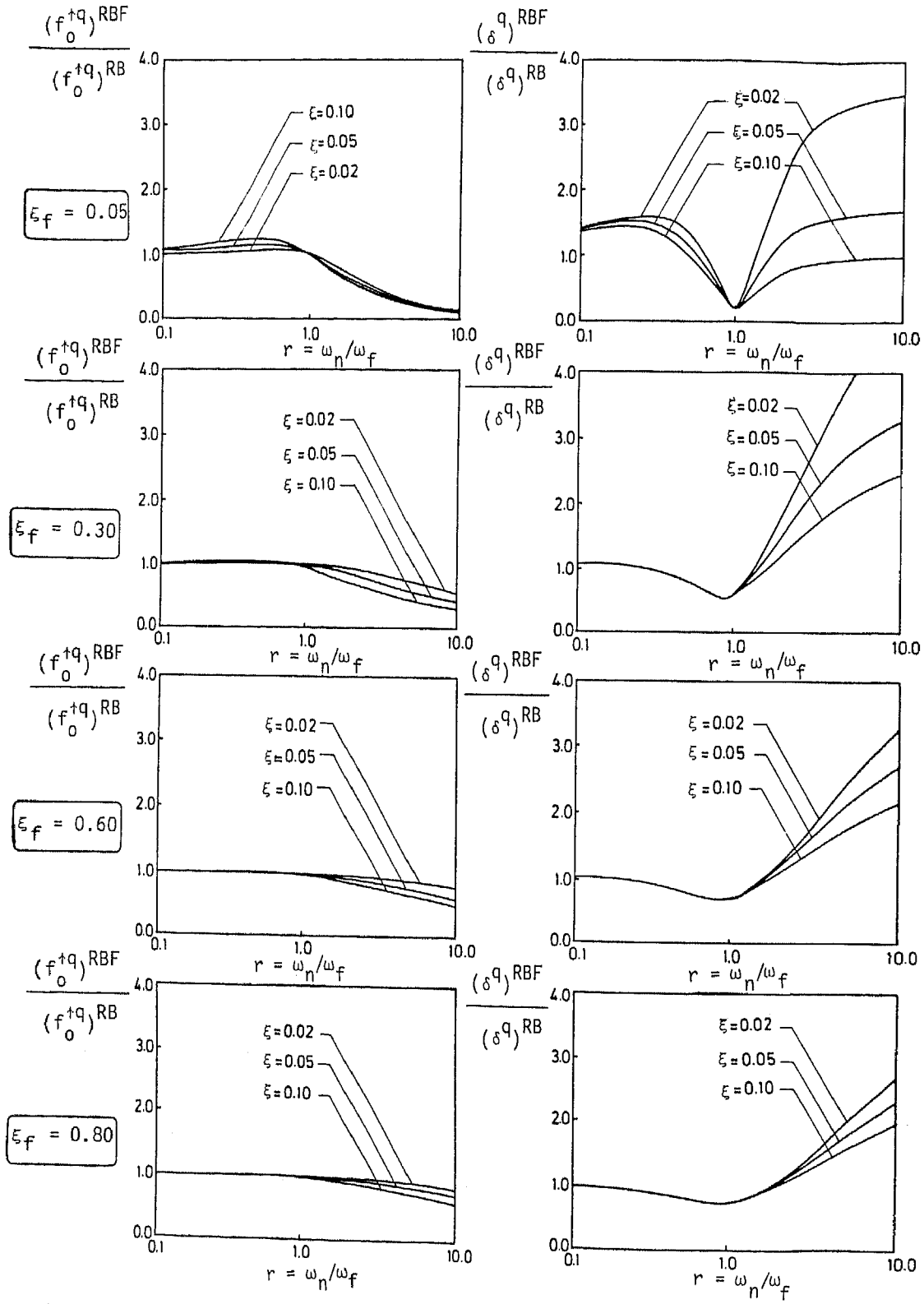


Fig. 2.5 - Relação entre os valores de $f_o^{\dagger q}$ e δ^q correspondentes a excitações do tipo ruído branco filtrado (RBF) e ruído branco (RB).

que se trate de um espectro de banda larga, e a frequência natural do sistema caia dentro da gama de frequências dominantes da excitação.

2.3 - SISTEMAS LINEARES DE N-GL

2.3.1 - Relações determinísticas excitação-resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência

Para passar a analisar a resposta dinâmica de sistemas lineares de maior complexidade, sujeitos a excitações aleatórias estacionárias, torna-se conveniente começar também por estabelecer as relações determinísticas entre a excitação actuante e a respectiva resposta estrutural, introduzindo uma generalização adequada do conceito de funções de transferência, quer no domínio do tempo, quer no domínio da frequência.

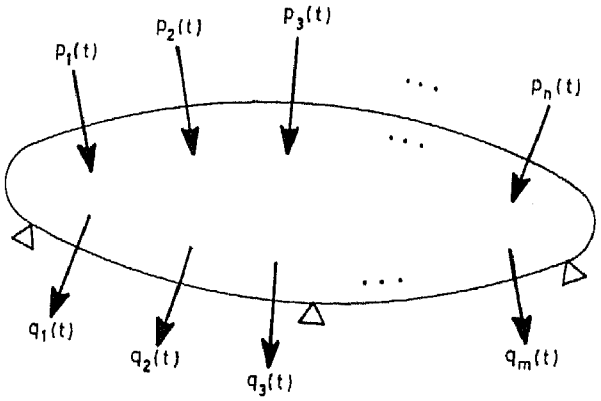


Fig. 2.6 - Coordenadas generalizadas da excitação e da resposta.

Para o efeito, considere-se o sistema linear de N-GL indicado na figura 2.6 sujeito a um conjunto de acções dinâmicas traduzidas pelo vector

$$\underline{p}(t)=[p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)]^T \qquad (2.48)$$

a que a correspondem m respostas estruturais

$$\underline{q}(t)=[q_1(t),q_2(t),\ldots,q_m(t)]^T \tag{2.49}$$

segundo determinadas coordenadas generalizadas.

Designando por $h_{ik}^{qp}(t)$ a resposta segundo a coordenada q_i originada pelo impulso unitário de Dirac

$$p_k(t)=\delta(t) \tag{2.50}$$

a resposta total $q_i(t)$ à excitação traduzida pelo vector $\underline{p}(t)$ pode ser obtida por sobreposição de efeitos, sendo expressa por

$$q_i(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}h_{ik}^{qp}(t-\tau)p_k(\tau)d\tau=\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\infty}h_{ik}^{qp}(\tau)p_k(t-\tau)d\tau \tag{2.51}$$

Esta equação possibilita pois a determinação da evolução temporal da resposta segundo cada coordenada q_i $(i=1,\ldots,m)$, uma vez conhecidas as funções $h_{ik}^{qp}(t)$, as quais constituem manifestamente uma generalização do conceito de função de transferência no domínio do tempo.

Tal como no caso dos sistemas lineares de 1-GL, a análise da resposta pode processar-se também no domínio da frequência se, para o efeito, for introduzido um conjunto de funções $H_{ik}^{qp}(w)$, de tal forma que à excitação harmónica de amplitude unitária

$$p_k(t)=e^{iwt} \tag{2.52}$$

corresponda a resposta

$$q_i(t)=H_{ik}^{qp}(w)e^{iwt} \tag{2.53}$$

Podendo qualquer excitação actuante $p_k(t)$ ser decomposta num somatório de um número infinito de harmónicos de amplitude infinitesimal $|P_k(w)|dw/2\pi$, através da transformada inversa de Fourier

$$p_k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_k(w)e^{iwt}dw \tag{2.54}$$

a resposta do sistema pode novamente ser expressa em termos de sobreposição de efeitos por

$$q_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{ik}^{qp}(w) P_k(w) e^{iwt} dw \tag{2.55}$$

Comparando este integral com a transformada inversa de Fourier

$$q_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q_i(w) e^{iwt} dw \tag{2.56}$$

de imediato se conclui que a relação determinística excitação-resposta no domínio da frequência é

$$Q_i(w) = H_{ik}^{qp}(w) P_k(w) \tag{2.57}$$

sendo fácil constatar, seguindo um caminho idêntico ao referido em 2.2.1, que cada função $H_{ik}^{qp}(w)$, naturalmente designada função de transferência no domínio da frequência, é dada pela transformada de Fourier de $h_{ik}^{qp}(t)$, ou seja que

$$H_{ik}^{qp}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}^{qp}(t) e^{-iwt} dt \tag{2.58}$$

Tem interesse realçar que, no caso de a excitação e a resposta estarem referidas às mesmas coordenadas generalizadas q_i, a matriz $\underline{H}_q(w)$, constituída pelas funções de transferência correspondentes $H_{ik}^{q}(w)$, pode relacionar-se de forma simples com as matrizes de massa $\underline{M}$, de amortecimento $\underline{C}$ e de rigidez $\underline{K}$ da estrutura, referidas àquelas coordenadas. Com efeito, sendo o equilíbrio dinâmico do sistema traduzido pelo sistema de equações diferenciais

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{q}}(t) + \underline{C}\,\underline{\dot{q}}(t) + \underline{K}\,\underline{q}(t) = \underline{p}^{q}(t) \tag{2.59}$$

e supondo a actuação de uma excitação harmónica

$$\underline{p}^{q}(t) = \underline{A} e^{iwt} \tag{2.60}$$

a resposta referida às coordenadas q_i será traduzida pela equação

$$\underline{q}(t) = \underline{H}_q(w)\,\underline{A} e^{iwt} \tag{2.61}$$

obtendo-se por substituição de (2.61) em (2.59) que

$$\underline{H}_q(w) = (-w^2\underline{M} + iw\underline{C} + \underline{K})^{-1} \tag{2.62}$$

2.3.2 - Relações gerais estocásticas excitação-resposta no domínio do tempo e no domínio da frequência

Sendo a excitação a que refere a figura 2.6 de natureza aleatória, traduzida por um processo estocástico vectorial estacionário $\underline{p}(t)$, a completa identificação da estrutura probabilística do processo de resposta $\underline{q}(t)$ deveria, em princípio, envolver o conhecimento de uma das hierarquias de grandezas estatísticas referidas em 1.3, como a hierarquia de funções densidade de probabilidade conjuntas ou a hierarquia de momentos.

Todavia, e pelas razões já focadas em 2.2.2, no que respeita a sistemas de 1-GL, a caracterização da resposta é correntemente realizada apenas com recurso à determinação de parâmetros estatísticos de primeira e segunda ordem, procedimento que é aliás inteiramente correcto no caso de excitações de carácter gaussiano, como frequentemente sucede, tornando-se então suficiente, para uma completa definição da distribuição de probabilidade instantânea do processo estocástico vectorial de resposta $\underline{q}(t)$, o conhecimento dos valores médios espectáveis m_{q_i}, das variâncias μ_{q_i} e das inter-covariância μ_{ij}^{q}.

Os valores médios espectáveis da resposta podem ser facilmente obtidos aplicando o operador $E[\ ]$ à equação (2.51), obtendo-se que

$$m_{q_i}(t) = \sum_{k=1}^{n} m_{p_k} \int_0^{\infty} h_{ik}^{qp}(\tau) d\tau \tag{2.63}$$

Sob a forma matricial pode escrever-se

$$\underline{m}_q(t) = \int_0^{\infty} \underline{h}_{qp}(\tau) d\tau . \underline{m}_p \tag{2.64}$$

sendo $\underline{h}_{qp}(\tau)$ a matriz das funções de transferência no domínio do tempo, $\underline{m}_p$ o vector dos valores médios das componentes da excitação, suposta estacionária, e $\underline{m}_q(t)$ o vector dos valores médios da resposta, que a equação (2.64) demonstra ser também invariante no tempo.

Em situações reais, em que o início da excitação se verifica no instante $t=0$ e não $t=-\infty$

$$\underline{m}_q(t) = \int_0^t \underline{h}_{qp}(\tau)d\tau . \underline{m}_p \qquad (2.65)$$

registando-se um curto período transitório de crescimento, seguido de uma rápida tendência assintótica de $\underline{m}_q(t)$ para o valor definido por (2.64).

Os vectores dos valores médios espectáveis $\underline{m}_p$ e $\underline{m}_q$ podem igualmente relacionar-se através das funções de transferência no domínio da frequência $H_{ik}^{qp}(w)$, transformadas de Fourier de $h_{ik}^{qp}(t)$, tendo em conta que

$$H_{ik}^{qp}(0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}^{qp}(\tau) e^{-iwt} d\tau \right\}_{w=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}^{qp}(\tau) d\tau \qquad (2.66)$$

ou, tendo presente que as funções de resposta ao impulso unitário de Dirac apresentam valores nulos para $\tau < 0$

$$H_{ik}^{qp}(0) = \int_0^{\infty} h_{ik}^{qp}(\tau) d\tau \qquad (2.67)$$

Combinando esta equação com (2.63) resulta pois que

$$\underline{m}_q = \underline{H}_{qp}(0)\underline{m}_p \qquad (2.68)$$

sendo, pela equação (2.62), $\underline{H}_{qp}(0) = \underline{H}_q(0) = \underline{K}^{-1}$, no caso de haver coincidência das coordendas p_i da excitação e q_i da resposta.

Considerando-se a excitação actuante desdobrável em duas componentes, uma constante e igual ao respectivo valor médio $\underline{m}_p$, e outra traduzida por um processo estocástico vectorial estacionário de valor médio nulo $\underline{p}_o(t)$, conclui-se pois que o valor médio da resposta devido à excitação total $\underline{p}(t)$ coincide com a resposta à acção determinística constituída pela componente constante $\underline{m}_p$, contribuindo por isso a componente aleatória de valor médio nulo $\underline{p}_o(t)$ unicamente para a formação da matriz de covariância da resposta.

A quantificação da matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_q$, constituída pelas variâncias μ_{q_i} e pelas inter-covariâncias μ_{ij}^q, pode por seu turno ser efectuada, quer seguindo uma abordagem no domínio do tempo, baseada

na relação existente entre as funções de inter-correlação da componente da excitação $\underline{p}_o(t)$ e da resposta correspondente $\underline{q}_o(t)$, quer seguindo uma abordagem no domínio da frequência, assente na relação verificada entre as respectivas densidades espectrais conjuntas.

No primeiro caso, partindo da equação (2.51) na forma

$$q_{oi}(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} h_{ik}^{qp}(u)\, p_{ok}(t-u)\, du \tag{2.69}$$

a função de inter-correlação da resposta $R_{ij}^{q_o}(t, t+\tau)$ pode exprimir-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} R_{ij}^{q_o}(t, t+\tau) &= E[q_{oi}(t).q_{oj}(t+\tau)] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_{ik}^{qp}(u_1) h_{jl}^{qp}(u_2).E[p_{ok}(t-u_1)p_{ol}(t+\tau-u_2)]\, du_1 du_2 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Tendo, por outro lado, presente o carácter estacionário da excitação actuante

$$\begin{aligned} E[p_{ok}(t-u_1)p_{ol}(t+\tau-u_2)] &= E[p_{ok}(t)p_{ol}(t+\tau+u_1-u_2)] \\ &= R_{kl}^{p_o}(\tau+u_1-u_2) \end{aligned} \tag{2.71}$$

pelo que, substituindo esta igualdade na equação (2.70), se obtém

$$R_{ij}^{q_o}(t, t+\tau) = R_{ij}^{q_o}(\tau) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_{ik}^{qp}(u_1) h_{jl}^{qp}(u_2) R_{kl}^{p_o}(\tau+u_1-u_2)\, du_1 du_2 \tag{2.72}$$

ou, sob a forma matricial

$$\underline{R}_{q_o}(\tau) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \underline{h}_{qp}(u_1)\, \underline{R}_{p_o}(\tau+u_1-u_2)\, \underline{h}_{qp}^{T}(u_2)\, du_1 du_2 \tag{2.73}$$

em que $\underline{R}_{q_o}(\tau)$ e $\underline{R}_{p_o}(\tau)$ são matrizes quadradas que agrupam as funções $R_{ij}^{q_o}(\tau)$ e $R_{kl}^{p_o}(\tau)$, respectivamente.

Esta equação, que demonstra que as funções de inter-correlação da resposta são, tal como sucede com as funções homólogas da excitação, exclusivamente dependentes do desfasamento τ, permite a sua determinação a partir do conhecimento destas e das funções de

transferência no domínio do tempo, podendo a partir delas quantificar-se os elementos correspondentes da matriz de covariância da resposta $\mu_{ij}^{q} = \mu_{ij}^{q_o}$, uma vez que pela equação (1.175)

$$\mu_{ij}^{q} = \mu_{ij}^{q_o} = R_{ij}^{q_o}(0) \tag{2.74}$$

Tal como no caso de sistemas lineares de 1-GL, torna-se porém menos complexo seguir a via alternativa de análise no domínio da frequência. Nesse sentido, tendo presente a relação de Wiener-Khintchine

$$S_{ij}^{q_o}(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}^{q_o}(\tau) e^{-iw\tau} d\tau \tag{2.75}$$

e tendo em atenção que

$$e^{-iw\tau} = e^{-iw(\tau+u_1-u_2)}.e^{iwu_1}.e^{-iwu_2} \tag{2.76}$$

e que $h_{ik}^{pq}(u_1) = 0$ para valores negativos de u_1, obtém-se por sua vez que

$$\begin{aligned} S_{ij}^{q_o}(w) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}^{qp}(u_1) h_{jl}^{qp}(u_2) R_{kl}^{p_o}(\tau+u_1-u_2). \\ &\quad .e^{-iw(\tau+u_1-u_2)}.e^{iwu_1}.e^{-iwu_2} d\tau du_1 du_2 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} S_{kl}^{p_o}(w) H_{ik}^{qp}(w)^{*} H_{jl}^{qp}(w) \end{aligned} \tag{2.77}$$

ou sob forma matricial

$$\underline{S}_{q_o}(w) = \underline{H}_{qp}(w).\underline{S}_{p_o}(w).\underline{H}_{qp}(w)^{T^{*}} \tag{2.78}$$

Esta equação possibilita, pois, a determinação da matriz das densidades espectrais conjuntas da resposta, a partir do conhecimento da matriz homóloga da excitação e da matriz das funções de transferência no domínio da frequência, podendo posteriormente quantificar-se cada elemento da matriz de covariância $\underline{\mu}_{q} = \underline{\mu}_{q_o}$, já que (v. eq. 1.176)

$$\mu_{ij}^{q} = \mu_{ij}^{q_o} = 2\int_{0}^{\infty} R_e\left[S_{ij}^{q_o}(w)\right] dw \tag{2.79}$$

2.3.3 - Formulação modal alternativa

A formulação referida no ponto anterior, com vista à análise estocástica da resposta dinâmica de um sistema linear de N-GL a excitações aleatórias estacionárias, assenta numa mera generalização da metodologia seguida em relação aos sistemas de 1-GL, alargando devidamente o conceito de funções de transferência.

Uma via alternativa consiste porém no recurso ao método clássico de análise modal [54]. Para o efeito, considere-se um sistema de N-GL cujo equilíbrio dinâmico, quando sujeito a uma excitação exterior de carácter aleatório e estacionário, pode ser traduzido pelo sistema de equações diferenciais

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}(t)+\underline{K}\underline{q}(t)=\underline{p}^{q}(t) \tag{2.80}$$

em que $\underline{M}$, $\underline{C}$ e $\underline{K}$ representam as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do sistema referidas às N coordenadas generalizadas definidas, e $\underline{q}(t)$ e $\underline{p}^{q}(t)$ constituem dois processos estocásticos vectoriais estacionários caracterizadores da resposta e da excitação, em correspondência com aquelas mesmas coordenadas.

Ora, como é sabido, este sistema de N equações diferenciais pode ser transformado, sob determinadas condições, num conjunto de M equações diferenciais independentes, tendo em conta as propriedades de ortogonalidade dos modos de vibração, mediante a introdução das chamadas coordenadas normais ou modais $\zeta_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,M)$, que traduzem a contribuição de cada um dos modos considerados $\underline{\phi}_i$ para o vector dos deslocamentos $\underline{q}(t)$ correspondente às coordenadas generalizadas, ou seja

$$\underline{q}(t)=\underline{\phi}\underline{\zeta}(t) \tag{2.81}$$

sendo $\underline{\phi}$ a matriz modal do tipo $(N\times M)$, com $M\leq N$.

Nessas condições, aquele sistema transforma-se no seguinte conjunto de M equações diferenciais independentes nas coordenadas modais

$$m_i^{\xi}\ddot{\zeta}_i(t)+c_i^{\xi}\dot{\zeta}_i(t)+k_i^{\xi}\zeta_i(t)=p_i^{\xi}(t) \qquad (2.82)$$

$$(i=1,2,\ldots,M)$$

em que

$$m_i^{\xi}=\underline{\phi}_i^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\phi}_i \qquad (2.83)$$

$$c_i^{\xi}=\underline{\phi}_i^T\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\phi}_i \qquad (2.84)$$

$$k_i^{\xi}=\underline{\phi}_i^T\,\underline{\underline{K}}\,\underline{\phi}_i \qquad (2.85)$$

e

$$p_i^{\xi}(t)=\underline{\phi}_i^T\,\underline{p}^q(t) \qquad (2.86)$$

Caso o critério de normalização dos vectores próprios da matriz dinâmica corresponda à condição

$$m_i^{\xi}=\underline{\phi}_i^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\phi}_i=1 \qquad (2.87)$$

a equação (2.82) pode tomar a forma

$$\ddot{\zeta}_i(t)+2\xi_i w_i\dot{\zeta}_i(t)+w_i^2\zeta_i(t)=p_i^{\xi}(t) \qquad (2.88)$$

$$(i=1,2,\ldots,M)$$

em que ξ_i e w_i representam respectivamente o coeficiente de amortecimento e a frequência natural circular correspondentes ao modo de ordem i.

As funções de transferência excitação-resposta ao nível das coordenadas modais, $h_i^{\xi}(t)$ e $H_i^{\xi}(w)$, podem então ser definidas pelas equações (2.5) e (2.6), sendo

$$h_i^{\xi}(t)=\frac{1}{w_{d_i}}e^{-\xi_i w_i t}\operatorname{sen} w_{d_i}t \qquad (\xi_i<1) \qquad (2.89)$$

$$H_i^{\xi}(w)=\frac{1}{k_i^{\xi}-w^2-ic_i^{\xi}w}=\frac{1}{w_i^2-w^2+2i\xi_i w_i w} \qquad (2.90)$$

Constata-se também com facilidade, tendo em conta a definição de função de transferência no domínio da frequência, e as equações (2.81)

e (2.86), que a matriz diagonal $\underline{H}_\zeta(w)$, constituída pelas funções de transferência modais está relacionada com a matriz homóloga $\underline{H}_q(w)$ pela equação

$$\underline{H}_q(w) = \underline{\Phi}\,\underline{H}_\zeta(w)\underline{\Phi}^T \tag{2.91}$$

ou, efectuando o desenvolvimento em termos dos modos de vibração

$$\underline{H}_q(w) = \sum_{i=1}^{M} \underline{\phi}_i \underline{\phi}_i^T H_i^\zeta(w) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\underline{\phi}_i \underline{\phi}_i^T}{w_i^2 - w^2 + 2i\xi_i w_i w} \tag{2.92}$$

Esta equação representa, aliás, uma alternativa de grande utilidade à equação (2.62) para cálculo da matriz $\underline{H}_q(w)$, evitando a inversão da matriz nela indicada, para cada valor de w, e possibilitando ter em consideração apenas o número de modos de vibração julgado suficiente.

A caracterização da distribuição de probabilidade instantânea da resposta referida às coordenadas q_i, que passa pela determinação do correspondente vector de valores médios espectáveis $\underline{m}_q$ e da matriz de covariância $\underline{\mu}_q$, e que foi efectuada no ponto anterior através do estabelecimento de relações directas excitação-resposta em termos daquelas coordenadas, pode, em alternativa, ser realizada começando por identificar as relações excitação-resposta existentes ao nível do espaço modal, tendo posteriormente em consideração a forma como, quer a excitação, quer a resposta modais se encontram relacionadas com a excitação e a resposta referidas às coordenadas q_i.

Começando pela relação entre os vectores dos valores médios da excitação e da resposta no espaço modal, esta pode ser expressa, tendo em conta a equação (2.14) referente a sistemas de 1-GL, por

$$m_{\zeta_i} = m_{p_i^\zeta} \int_0^\infty h_i^\zeta(\tau)\,d\tau \tag{2.93}$$

ou sob forma matricial

$$\underline{m}_\zeta = \int_0^\infty \underline{h}_\zeta(\tau)\,d\tau\,.\,\underline{m}_{p^\zeta} \tag{2.94}$$

em que $\underline{h}_\zeta(\tau)$ é a matriz diagonal constituída pelas funções de trans-

ferência correspondentes a cada modo de vibração. Tendo também em atenção que as relações

$$\underline{p}^{\xi}(t) = \underline{\Phi}^T \underline{p}^{q}(t) \qquad \underline{q}(t) = \underline{\Phi}\underline{\xi}(t) \qquad (2.95,96)$$

levam a que

$$\underline{m}_{p^{\xi}} = \underline{\Phi}^T \underline{m}_{p^q} \qquad \underline{m}_q = \underline{\Phi}\underline{m}_{\xi} \qquad (2.97,98)$$

obtém-se, conjugando estas equações com (2.94), que

$$\underline{m}_q = \underline{\Phi} \int_0^{\infty} \underline{h}_{\xi}(\tau) d\tau . \underline{\Phi}^T \underline{m}_{p^q} \qquad (2.99)$$

equação que estabelece a relação desejada entre o vector dos valores médios espectáveis da excitação referida às coordenadas q_i e o vector homólogo da resposta.

Uma outra forma de relacionar estes vectores, tendo por base as funções de transferência modais no domínio da frequência, consiste em ter em conta que, pelas equações (2.17) e (2.90)

$$H_i^{\xi}(0) = \int_0^{\infty} h_i^{\xi}(\tau) d\tau = \frac{1}{k_i^{\xi}} \qquad (2.100)$$

dando por isso as equações (2.94) e (2.99) lugar a

$$\underline{m}_{\xi} = \underline{K}_{\xi}^{-1} \underline{m}_{p^{\xi}} = (\underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi})^{-1} \underline{m}_{p^{\xi}} \qquad (2.101)$$

$$\underline{m}_q = \underline{\Phi}(\underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi})^{-1} \underline{\Phi}^T \underline{m}_{p^q} = \underline{K}^{-1} \underline{m}_{p^q} \qquad (2.102)$$

De forma análoga ao já anteriormente referido em 2.3.2, se a excitação actuante for considerada decomposta em duas componentes, uma constante e igual ao respectivo valor médio, e outra traduzida por um processo vectorial estacionário de valor médio nulo $\underline{p}_o^q(t)$ ou $\underline{p}_o^{\xi}(t)$, fácil é concluir também que o valor médio da resposta devido à excitação total coincide com a resposta à acção determinística constituída pela componente constante, decorrendo a formação da matriz de covariância da resposta do contributo exclusivo da componente aleatória de valor médio nulo.

As relações modais excitação-resposta com vista à quantificação da matriz de covariância $\underline{\mu}_q$ podem, por sua vez, ser conseguidas, quer seguindo uma abordagem no domínio do tempo, relacionando as funções de inter-correlação no espaço modal, quer utilizando uma abordagem no domínio da frequência, relacionando as correspondentes densidades espectrais de potência.

Assim, no primeiro caso, tendo em conta que a resposta à componente aleatória da excitação de valor médio nulo é dada, em termos das coordenadas modais, pelo integral de convolução

$$\zeta_{oi}(t) = \int_{-\infty}^{t} p_{oi}^{\zeta}(\tau) h_i^{\zeta}(t-\tau) d\tau \tag{2.103}$$

a função de inter-correlação $R_{ij}^{\zeta_o}(\tau)$, correspondente aos processos $\zeta_{oi}(t)$ e $\zeta_{oj}(t)$, pode expressar-se por

$$\begin{aligned} R_{ij}^{\zeta_o}(\tau) &= E[\zeta_{oi}(t).\zeta_{oj}(t+\tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{t} p_{oi}^{\zeta}(\tau_1) h_i^{\zeta}(t-\tau_1) d\tau_1 . \int_{-\infty}^{t+\tau} p_{oj}^{\zeta}(\tau_2) h_j^{\zeta}(t+\tau-\tau_2) d\tau_2\right] \end{aligned} \tag{2.104}$$

Efectuando a mudança de variáveis $u_1 = t - \tau_1$ e $u_2 = t + \tau - \tau_2$, obtém-se

$$R_{ij}^{\zeta_o}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{ij}^{p_o^{\zeta}}(\tau - u_2 + u_1) h_i^{\zeta}(u_1) h_j^{\zeta}(u_2) du_1 du_2 \tag{2.105}$$

Fácil é, porém, relacionar directamente $R_{ij}^{\zeta_o}(\tau)$ com as funções de inter-correlação da excitação referida às coordendas q_i. Com efeito, sendo

$$p_{oi}^{\zeta}(t) = \underline{\phi}_i^T \underline{p}_o^q(t) \tag{2.106}$$

e atendendo à definição de função de inter-correlação

$$
\begin{aligned}
R_{ij}^{p_o^{\zeta}}(\tau - u_2 + u_1) &= E[p_{oi}^{\zeta}(t-u_1).p_{oj}^{\zeta}(t+\tau-u_2)] \\
&= E\left[\underline{\phi}_i^T \underline{p}_o^q(t-u_1)\underline{\phi}_j^T \underline{p}_o^q(t+\tau-u_2)\right] \\
&= E\left[\sum_{l=1}^{N} \phi_{li} p_{ol}^q(t-u_1) \sum_{m=1}^{N} \phi_{mj} p_{om}^q(t+\tau-u_2)\right] \\
&= E\left[\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \phi_{li}\phi_{mj} p_{ol}^q(t-u_1) p_{om}^q(t+\tau-u_2)\right] \\
&= \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \phi_{li}\phi_{mj} R_{lm}^{p_o^q}(\tau - u_2 + u_1) \qquad (2.107)
\end{aligned}
$$

pelo que, por substituição da equação (2.107) em (2.105) se obtém

$$R_{ij}^{\zeta_o}(\tau) = \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \phi_{li}\phi_{mj} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} R_{lm}^{p_o^q}(\tau - u_2 + u_1) h_l^{\zeta}(u_1) h_j^{\zeta}(u_2) du_1 du_2 \qquad (2.108)$$

Esta expressão permite, pois, a quantificação de todos os elementos da matriz de covariância da resposta modal, já que

$$\mu_{ij}^{\zeta} = \mu_{ij}^{\zeta_o} = R_{ij}^{\zeta_o}(0) \qquad (2.109)$$

e, consequentemente também, de todos os elementos da matriz de covariância da resposta referida às coordenadas q_i, uma vez que, em resultado da relação linear verificada entre os processos de resposta $\underline{q}(t)$ e $\underline{\zeta}(t)$, supostos gaussianos, traduzida pela equação (2.81), as matrizes de covariância correspondentes obedecem à equação (v. eq. 1.178)

$$\underline{\mu}_q = \underline{\Phi}\,\underline{\mu}_{\zeta}\,\underline{\Phi}^T \qquad (2.110)$$

A via mais simples e correntemente utilizada nos problemas de Dinâmica Estrutural, e de Engenharia Sísmica em particular, consiste porém em começar por relacionar as densidades espectrais conjuntas da excitação e da resposta no espaço modal, $S_{ij}^{\zeta_o}(w)$ e $S_{ij}^{p_o^{\zeta}}(w)$.

Nesse sentido, sendo a relação excitação-resposta relativa a um sistema linear de 1-GL expressa no domínio da frequência pela equação (2.26), pode escrever-se por analogia

$$Z_{oi,T}(w) = H_i^{\zeta}(w) P_{oi,T}^{\zeta}(w) \tag{2.111}$$

em que $Z_{oi,T}(w)$ e $P_{oi,T}^{\zeta}(w)$ representam as transformadas de Fourier dos processos $\zeta_{oi}(t)$ e $p_{oi}^{\zeta}(t)$ restringidos ao intervalo de tempo $[-T/2, T/2]$ com $T \to \infty$, e $H_i^{\zeta}(w)$ a função de transferência no domínio da frequência correspondente ao modo de vibração de ordem i.

Por conseguinte, tendo em consideração que a densidade espectral de potência cruzada $S_{ij}^{\zeta_o}(w)$ é, por definição

$$S_{ij}^{\zeta_o}(w) = \lim_{T \to \infty} \frac{E\{Z_{oi,T}(w).Z_{oj,T}(w)^*\}}{2\pi T} \tag{2.112}$$

pode concluir-se com facilidade que

$$S_{ij}^{\zeta_o}(w) = H_i^{\zeta}(w).H_j^{\zeta}(w)^* S_{ij}^{p_o^{\zeta}}(w) \tag{2.113}$$

ou, sob forma matricial

$$\underline{S}_{\zeta_o}(w) = \underline{H}_{\zeta}(w).\underline{S}_{p_o^{\zeta}}(w).\underline{H}_{\zeta}(w)^* \tag{2.114}$$

em que $\underline{H}_{\zeta}(w)$ e $\underline{H}_{\zeta}(w)^*$ são as matrizes diagonais de dimensão M constituídas respectivamente pelas funções modais de transferência e seus complexos conjugados, sendo as matrizes das densidades espectrais conjuntas relativas às componentes de valor médio nulo da excitação e da resposta no espaço modal representadas por $\underline{S}_{p_o^{\zeta}}(w)$ e $\underline{S}_{\zeta_o}(w)$.

A matriz das densidades espectrais conjuntas da resposta no espaço modal pode, todavia, exprimir-se directamente em função da matriz homóloga da excitação referida às coordenadas q_i. Com efeito, aplicando transformadas de Fourier a ambos os membros da equação (2.106), e considerando os processos $p_{oi}^{\zeta}(t)$ e $\underline{p}_o^q(t)$ restringidos ao intervalo $[-T/2, T/2]$, obtém-se que

$$P_{oi,T}^{\zeta}(w) = \underline{\phi}_i^T \underline{P}_{o,T}^q(w) \tag{2.115}$$

sendo $P_{oi,T}^{\zeta}(w) = F_T[p_{oi}^{\zeta}(t)]$ e $\underline{P}_{o,T}^q(w) = F_T[\underline{p}_o^q(t)]$. Por outro lado, atendendo também à definição da densidade espectral de potência cruzada

$$S_{ij}^{p_o^\zeta}(w) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\{P_{oi,T}^\zeta(w).P_{oj,T}^\zeta(w)^*\}}{2\pi T} \tag{2.116}$$

conclui-se que

$$S_{ij}^{p_o^\zeta}(w) = \underline{\phi}_i^T \underline{S}_{p_o^q}(w)\underline{\phi}_j = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \phi_{ki}\phi_{lj} S_{kl}^{p_o^q}(w) \tag{2.117}$$

ou, de forma mais condensada

$$\underline{S}_{p_o^\zeta}(w) = \underline{\Phi}^T \underline{S}_{p_o^q}(w)\underline{\Phi} \tag{2.118}$$

equação que estabelece a relação entre as matrizes das densidades espectrais conjuntas da excitação ao nível das coordenadas modais ζ_i e das coordenadas generalizadas q_i.

Substituindo a equação (2.117) em (2.113), acaba por se obter

$$S_{ij}^{\zeta_o}(w) = H_i^\zeta(w)H_j^\zeta(w)^* \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \phi_{ki}\phi_{lj} S_{kl}^{p_o^q}(w) \tag{2.119}$$

ou, o que é equivalente

$$\underline{S}_{\zeta_o}(w) = \underline{H}_\zeta(w).\underline{\Phi}^T \underline{S}_{p_o^q}(w)\underline{\Phi}\underline{H}_\zeta(w)^* \tag{2.120}$$

Esta equação abre pois uma segunda via para a quantificação de todos os elementos da matriz de covariância da resposta modal, já que

$$\mu_{ij}^\zeta = \mu_{ij}^{\zeta_o} = 2\int_0^\infty Re\left[S_{ij}^{\zeta_o}(w)\right]dw \tag{2.121}$$

podendo posteriormente determinar-se também a matriz de covariância da resposta referida às coordenadas q_i, novamente através da equação

$$\underline{\mu}_q = \underline{\Phi}\underline{\mu}_\zeta\underline{\Phi}^T \tag{2.122}$$

É de realçar que esta abordagem, baseada numa formulação modal e no estabelecimento de relações excitação-resposta ao nível das matrizes das densidades espectrais conjuntas, é, de entre as vias anteriormente descritas, aquela que em termos práticos se revela habitualmente mais eficaz, levando a um mais baixo tempo total de

computação. A redução desse tempo é, aliás, tanto mais significativa quanto menor for o número de modos de vibração considerados na análise, sendo normalmente desprezáveis os que correspondam a frequências naturais fora da gama de frequências da excitação, por ser muito reduzida a sua contribuição para a resposta do sistema.

Uma outra questão de particular importância prática tem a ver com o cálculo do integral indicado na equação (2.121), aspecto a que se fará referência mais detalhada em 2.5.2.

Tem ainda interesse aludir a outra via alternativa, igualmente assente numa formulação modal e frequentemente seguida por alguns autores [96, 187], a qual em vez de se basear na utilização de uma matriz de funções de transferência modais $\underline{H}_{\zeta}(w)$, se baseia no uso de uma matriz $\underline{H}_{\zeta q}(w)$, constituída pelas funções de transferência $H_{ij}^{\zeta q}(w)$ da excitação referida às coordenadas generalizadas q_j para a resposta relativa às coordenadas modais ζ_i.

Supondo uma única excitação harmónica de amplitude A_j ao nível da j-ésima coordenada, o equilíbrio dinâmico da estrutura é traduzido pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}(t)+\underline{K}\underline{q}(t)=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ A_j e^{i\omega t} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.123)$$

ou, introduzindo as coordenadas modais $\zeta_i(t)$, pelas M equações independentes

$$\ddot{\zeta}_i(t)+2\xi_i\dot{\zeta}_i(t)+w_i^2\zeta_i(t)=\phi_{ji}A_j e^{iwt} \quad (i=1,2,\ldots,M) \qquad (2.124)$$

cuja solução é da forma

$$\zeta_i(t)=B_i e^{iwt} \qquad (2.125)$$

Substituindo (2.125) e as respectivas derivadas de primeira e segunda ordem em (2.124), obtém-se que

$$H_{ij}^{\zeta q}(w) = \frac{B_i}{A_j} = \frac{\phi_{ji}}{w_i^2 - w^2 + 2i\xi_i w_i w} \qquad (2.126)$$

Tendo em conta a equação (2.78), o conhecimento da matriz de transferência $\underline{H}_{\zeta q}(w)$ possibilita a obtenção das densidades espectrais conjuntas da resposta no espaço modal através da relação

$$\underline{S}_{\zeta_o}(w) = \underline{H}_{\zeta q}(w).\underline{S}_{p_o}(w).\underline{H}_{\zeta q}(w)^{T*} \qquad (2.127)$$

podendo então a matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_q$, relativa às coordenadas generalizadas q_i, ser determinada através das equações (2.121) e (2.122).

2.3.4 - Caracterização probabilística de variáveis de controlo relacionadas linearmente com as N coordenadas generalizadas ou suas derivadas

Uma vez determinada a distribuição de probabilidade instantânea da resposta $\underline{q}(t)$, referida às N coordenadas generalizadas associadas aos N graus de liberdade do sistema, tem particular interesse prático proceder igualmente à caracterização probabilística da resposta em termos de qualquer outro conjunto de NR variáveis de controlo $\underline{r}(t)$, como, por exemplo, esforços, tensões, deslocamentos, velocidades ou acelerações, susceptíveis de se relacionarem com $\underline{q}(t)$ através de uma transformação linear do tipo

$$\underline{r}(t) = \underline{\Psi}\,\overset{\alpha.}{\underline{q}}(t) \qquad (2.128)$$

em que

$$\overset{\alpha.}{\underline{q}}(t) = \frac{d^\alpha \underline{q}(t)}{dt^\alpha} \qquad (\alpha = 0,1,2) \qquad (2.129)$$

representa um processo estocástico vectorial obtido por derivação de ordem α de $\underline{q}(t)$, e $\underline{\Psi}$ constitui uma matriz de transformação do tipo $(NR \times N)$.

Tendo a excitação carácter estacionário e gaussiano, e supondo-se por simplicidade e sem qualquer perda de generalidade, por razões já expostas em 1.6.1, nulo o correspondente vector dos valores médios espectáveis, facilmente se conclui que $\underline{m}_r = \underline{0}$, sendo a distribuição de probabilidade instantânea relativa ao processo estocástico vectorial estacionário gaussiano $\underline{r}(t)$ definida exclusivamente pela correspondente matriz de covariância $\underline{\mu}_r$, a qual, tendo em conta as equações (2.128), (1.177) e (1.178), é dada por

$$\underline{\mu}_r = \underline{\Psi}\underline{\mu}_{q,\alpha.}\underline{\Psi}^T \tag{2.130}$$

sendo $\underline{\mu}_{q,\alpha.}$ a matriz de covariância relativa ao processo $\overset{\alpha.}{\underline{q}}(t)$, pelo que, tendo presente as equações (2.79), (2.78) e (1.117)

$$\underline{\mu}_r = \underline{\Psi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w^{2\alpha} Re\left[\underline{H}_{qp}(w)\underline{S}_p(w)\underline{H}_{qp}(w)^{T^*}\right]dw\right\}\underline{\Psi}^T \tag{2.131}$$

Caso se recorra à via alternativa referida em 2.3.3, assente numa formulação modal, interessa naturalmente relacionar $\underline{r}(t)$ com o processo de resposta modal $\underline{\zeta}(t)$ ou seus derivados de ordem α, através de uma relação linear da forma

$$\underline{r}(t) = \underline{\Psi}\,\overset{\alpha.}{\underline{\zeta}}(t) \qquad (\alpha = 0,1,2) \tag{2.132}$$

em que $\underline{\Psi}$ representa então uma matriz do tipo $(NR \times M)$, constituída por M vectores coluna associados às contribuições dos primeiros M modos de vibração.

A matriz de covariância da resposta relativa às variáveis de controlo $\underline{r}(t)$ pode pois ser obtida, de forma análoga, pela relação

$$\underline{\mu}_r = \underline{\Psi}\underline{\mu}_{\zeta,\alpha.}\underline{\Psi}^T \tag{2.133}$$

ou, tendo presente as equações (2.121), (2.120) e (1.117)

$$\underline{\mu}_r = \underline{\Psi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w^{2\alpha} Re\left[\underline{H}_\zeta(w)\underline{\Phi}^T\underline{S}_{pq}(w)\underline{\Phi}\underline{H}_\zeta(w)^*\right]dw\right\}\underline{\Psi}^T \tag{2.134}$$

sendo a matriz das densidades espectrais conjuntas relativas a $\underline{r}(t)$

$$\underline{S}_r(w) = w^{2\alpha}\underline{\Psi}\,\underline{H}_\zeta(w)\underline{\phi}^T\underline{S}_{pq}(w)\underline{\phi}\,\underline{H}_\zeta(w)^*\underline{\Psi}^T \qquad (2.135)$$

ou, o que é equivalente

$$S_{ij}^r(w) = w^{2\alpha}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\psi_{ik}\psi_{jl}H_k^\zeta(w)H_l^\zeta(w)^*\cdot\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\phi_{mk}\phi_{nl}S_{mn}^{pq}(w) \qquad (2.136)$$

$$(i,j=1,2,\ldots,NR)$$

Uma vez caracterizada a distribuição de probabilidade instantânea correspondente ao processo estocástico vectorial estacionário gaussiano $\underline{r}(t)$ através da respectiva matriz de covariância $\underline{\mu}_r$, interessa normalmente procurar quantificar os valores médios dos picos da resposta correspondente a cada processo individual $r_i(t)$, para o que, caso se utilizem as expressões de Vanmarke, se torna necessário determinar os três primeiros momentos espectrais respectivos

$$\lambda_m^{r_i} = \int_{-\infty}^{\infty} w^m S_{r_i}(w)dw \qquad (m=0,1,2) \qquad (2.137)$$

Introduzindo as matrizes dos momentos espectrais de ordem m do processo $\underline{\overset{\alpha\cdot}{\zeta}}(t)$, definidas por

$$\underline{\lambda}_m^{\zeta,\alpha\cdot} = \int_{-\infty}^{\infty} w^m Re\left[\underline{S}_\zeta^{\alpha\cdot}(w)\right]dw \qquad (m=0,1,2) \qquad (2.138)$$

ou, de forma mais extensa (v. eq. 2.119)

$$\lambda_{m,ij}^{\zeta,\alpha\cdot} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\phi_{ki}\phi_{lj}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^{2\alpha+m}Re\left[H_i^\zeta(w)H_j^\zeta(w)^*S_{kl}^{pq}(w)\right]dw \qquad (2.139)$$

e dado que, da conjugação das equações (2.135), (2.120) e (1.117) resulta que

$$\underline{S}_r(w) = \underline{\Psi}\,\underline{S}_\zeta^{\alpha\cdot}(w)\underline{\Psi}^T \qquad (2.140)$$

tem-se que

$$\lambda_m^{r_i} = \underline{\psi}_i\underline{\lambda}_m^{\zeta,\alpha\cdot}\underline{\psi}_i^T \qquad (m=0,1,2) \qquad (2.141)$$

sendo $\underline{\psi}_i$ um vector do tipo $(1\times M)$, constituído pelas componentes da linha de ordem i da matriz $\underline{\Psi}$.

Por conseguinte, a frequência média de passagens ascendentes por zero do processo $r_i(t)$ será dada por

$$f_o^{\uparrow r_i} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\lambda_2^{r_i}}{\lambda_0^{r_i}}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\underline{\psi}_i \underline{\lambda}_2^{\xi,\alpha} \underline{\psi}_i^T}{\underline{\psi}_i \underline{\lambda}_0^{\xi,\alpha} \underline{\psi}_i^T}\right]^{1/2} \tag{2.142}$$

e o indicador da dependência estatística entre extremos por

$$\delta^{r_i} = \left(1 - \frac{\lambda_1^{r_i 2}}{\lambda_0^{r_i}\lambda_2^{r_i}}\right)^{1/2} = 1 - \left[\frac{\left(\underline{\psi}_i \underline{\lambda}_1^{\xi,\alpha} \underline{\psi}_i^T\right)^2}{(\underline{\psi}_i \underline{\lambda}_0^{\xi,\alpha} \underline{\psi}_i^T)(\underline{\psi}_i \underline{\lambda}_2^{\xi,\alpha} \underline{\psi}_i^T)}\right]^{1/2} \tag{2.143}$$

ressaltando destas expressões a importância assumida pelas matrizes dos momentos espectrais da resposta modal de ordem 0, 1 e 2 para a avaliação dos valores médios dos picos da resposta relativa a qualquer variável de controlo $r_i(t)$, relacionada linearmente com as coordenadas modais ou suas derivadas de primeira ou segunda ordem.

2.3.5 - Resposta a uma excitação modal do tipo ruído branco

Sendo a resposta do sistema linear de N-GL, a uma excitação aleatória estacionária gaussiana de valor médio nulo, analisada em termos de variáveis de controlo $r_i(t)$, relacionadas linearmente com as coordenadas modais

$$\lambda_m^{r_i} = \underline{\psi}_i \underline{\lambda}_m^{\xi} \underline{\psi}_i^T = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} \psi_{ik}\psi_{il}\lambda_{m,kl}^{\xi} \qquad (m = 0,1,2) \tag{2.144}$$

sendo $\lambda_0^{r_i} = \sigma_{r_i}^2$ e $\lambda_2^{r_i} = \sigma_{\dot{r}_i}^2$. Tendo em conta as equações (2.139) e (2.117), os momentos espectrais da resposta modal $\lambda_{m,kl}^{\xi}$ podem, por sua vez, ser expressos pela relação

$$\lambda_{m,kl}^{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} w^m R_e\left[H_k^{\xi}(w) H_l^{\xi}(w)^* S_{kl}^{p^{\xi}}(w)\right] dw \qquad (m = 0,1,2) \tag{1.245}$$

tornando-se evidente que (v. eq. 2.113)

$$\lambda_{o,kl}^{\xi} = \mu_{kl}^{\xi} \qquad \lambda_{2,kl}^{\xi} = \mu_{kl}^{\xi} \tag{2.146}$$

ou seja, que $\lambda_{o,kl}^{\xi}$ e $\lambda_{2,kl}^{\xi}$ representam respectivamente as covariâncias

entre $\zeta_k(t)$ e $\zeta_l(t)$, e entre as respectivas derivadas $\dot{\zeta}_k(t)$ e $\dot{\zeta}_l(t)$.

Introduzindo os coeficientes

$$\rho^{\zeta}_{m,kl} = \frac{\lambda^{\zeta}_{m,kl}}{\sqrt{\lambda^{\zeta}_{m,kk} \cdot \lambda^{\zeta}_{m,ll}}} \qquad (m = 0, 1, 2) \tag{2.147}$$

cujo significado estatístico é igualmente evidente para m igual a 0 ou 2 (v. eq. 1.32), representando $\rho^{\zeta}_{0,kl}$ o coeficiente de correlação entre as coordenadas modais $\zeta_k(t)$ e $\zeta_l(t)$, e $\rho^{\zeta}_{2,kl}$ o coeficiente de correlação entre as respectivas derivadas, os momentos espectrais da resposta $r_i(t)$ passam a ser dados por (v. eq. 2.144)

$$\lambda^{r_i}_{m} = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \psi_{ik} \psi_{il} \rho^{\zeta}_{m,kl} \sqrt{\lambda^{\zeta}_{m,kk} \cdot \lambda^{\zeta}_{m,ll}} \tag{2.148}$$

Se se admitir que a excitação modal actuante é do tipo ruído branco de valor médio nulo, caracterizada por uma densidade espectral constante de valor S_o, podem obter-se expressões relativamente complexas, quer para os momentos espectrais $\lambda^{\zeta}_{m,kl}$, quer para os coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$, tendo Kiureghian [129] fornecido as seguintes expressões aproximadas, válidas para coeficientes de amortecimento baixos e frequências naturais de vibração relativamente próximas

$$\rho^{\zeta}_{0,kl} \cong \frac{2\sqrt{\xi_k \xi_l}[(w_k + w_l)^2(\xi_k + \xi_l) + (w_k^2 - w_l^2)(\xi_k - \xi_l)]}{4(w_k - w_l)^2 + (\xi_k + \xi_l)^2 (w_k + w_l)^2} \tag{2.149}$$

$$\rho^{\zeta}_{1,kl} \cong \frac{2\sqrt{\xi_k \xi_l}[(w_k + w_l)^2(\xi_k + \xi_l) - 4/\pi(w_k - w_l)^2]}{4(w_k - w_l)^2 + (\xi_k + \xi_l)^2 (w_k + w_l)^2} \tag{2.150}$$

$$\rho^{\zeta}_{2,kl} \cong \frac{2\sqrt{\xi_k \xi_l}[(w_k + w_l)^2(\xi_k + \xi_l) - (w_k^2 - w_l^2)(\xi_k - \xi_l)]}{4(w_k - w_l)^2 + (\xi_k + \xi_l)^2 (w_k + w_l)^2} \tag{2.151}$$

Uma vez quantificados os valores dos coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$ $(m = 0, 1, 2)$, podem calcular-se os momentos espectrais da resposta $\lambda^{r_i}_{m}$ através da equação (2.148), podendo $\lambda^{\zeta}_{m,kk}$ e $\lambda^{\zeta}_{m,ll}$ ser obtidos através das equações (2.36) a (2.38) referentes a um sistema de 1-GL.

Tem interesse também observar a variação sofrida pelos coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$ $(m=0,1,2)$, em função da relação de frequências naturais w_k/w_l, para diferentes valores dos coeficientes de amortecimento modal.

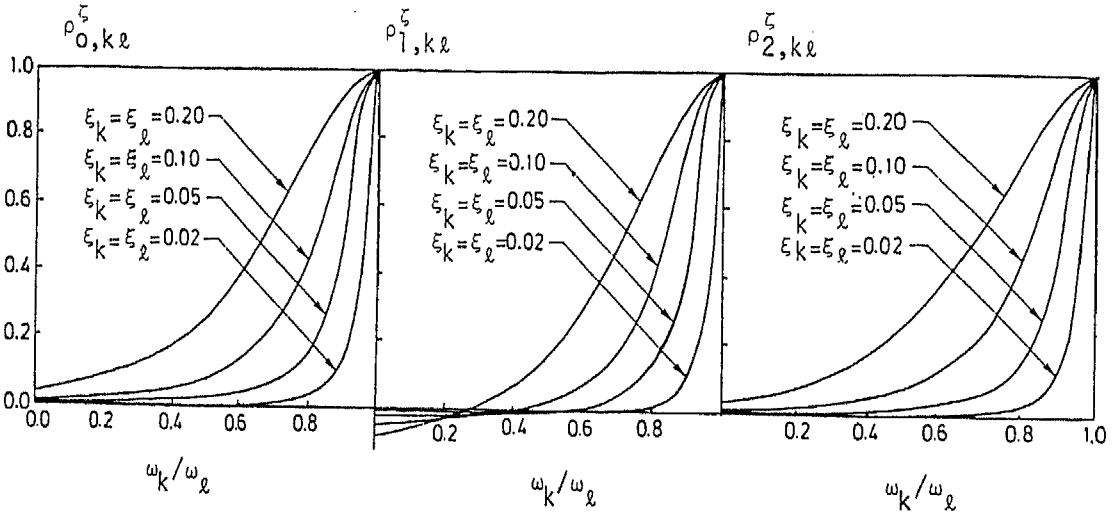


Fig. 2.7 - Variação dos coeficientes $\rho^{\zeta}_{0,kl}$, $\rho^{\zeta}_{1,kl}$ e $\rho^{\zeta}_{2,kl}$ com w_k/w_l.

Da representação gráfica correspondente, traduzida pela figura 2.7, pode pois concluir-se que nos problemas correntes de Dinâmica Estrutural, caracterizados por baixos coeficientes de amortecimento, os coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$ $(m=0,1,2)$ só assumem valores significativos quando as frequências w_k e w_l se encontram bastante próximas, sendo mesmo sugerido por Kiureghian que se desprezem todas as contribuições dos coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$ inferiores a 0,10 no cálculo dos momentos espectrais $\lambda^{r_l}_m$, situação que de forma aproximada corresponde à condição

$$\frac{w_k}{w_l} < \frac{0.2}{\xi_k+\xi_l+0.2} \qquad (2.152)$$

2.3.6 - Resposta a uma excitação modal do tipo ruído branco filtrado

Sendo as densidades espectrais conjuntas da excitação, referida às coordenadas modais, caracterizadas por um espectro de potência do tipo ruído branco filtrado (v. 2.2.5)

$$S_f(w) = \frac{w_f^4 + 4\xi_f^2 w_f^2 w^2}{(w_f^2 - w^2)^2 + 4\xi_f^2 w_f^2 w^2} S_o \qquad (2.153)$$

é igualmente possível obter as expressões [129] dos momentos espectrais cruzados da resposta modal $\lambda^{\zeta}_{m,kl}$ e dos coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$ $(m = 0,1,2)$, expressões que neste caso se revelam extremamente complexas e de utilização trabalhosa.

Tais expressões possibilitam no entanto concluir que, se por um lado os momentos espectrais $\lambda^{\zeta}_{m,kl}$ dependem de forma sensível da configuração do espectro de potência caracterizador da excitação, função de w_f e ξ_f, já o mesmo não sucede com os coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$, os quais variam de forma pouco significativa desde que as frequências naturais w_k e w_l se situem na gama de frequências dominantes da excitação, e que o espectro de potência $S_f(w)$ seja de banda larga, isto é que $\xi_f \geq 0,60$. Esta variação é aliás tanto mais reduzida, quanto menores forem os coeficientes de amortecimento modal.

A reforçar o que se acaba de dizer em relação aos coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$ $(m = 0,1,2)$, apresenta-se na figura 2.8 uma representação gráfica da respectiva evolução, em função da relação de frequências w_k/w_l, e para diversos valores dos coeficientes de amortecimento modal, quer no caso de uma excitação do tipo ruído branco, quer no caso de uma excitação do tipo ruído branco filtrado caracterizado por um espectro de banda larga ($\xi_f = 0,60$, e assumindo w_f três valores distintos).

Nos casos em que a utilização dos valores de $\rho^{\zeta}_{m,kl}$ correspondentes a uma excitação do tipo ruído branco constitua uma boa aproximação dos valores exactos, poder-se-á naturalmente efectuar o cálculo dos momentos espectrais da resposta $\lambda^{r_l}_m$ através da relação

$$\lambda^{r_l}_m = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \psi_{ik} \psi_{il} \rho^{\zeta}_{m,kl} \sqrt{\lambda^{\zeta}_{m,kk} \lambda^{\zeta}_{m,ll}} \qquad (2.154)$$

sendo os coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$ determinados com base nas equações (2.149)

a (2.151), e os momentos espectrais $\lambda^{\zeta}_{m,kk}$ e $\lambda^{\zeta}_{m,ll}$ calculados a partir de equações relativas a sistemas de 1-GL.

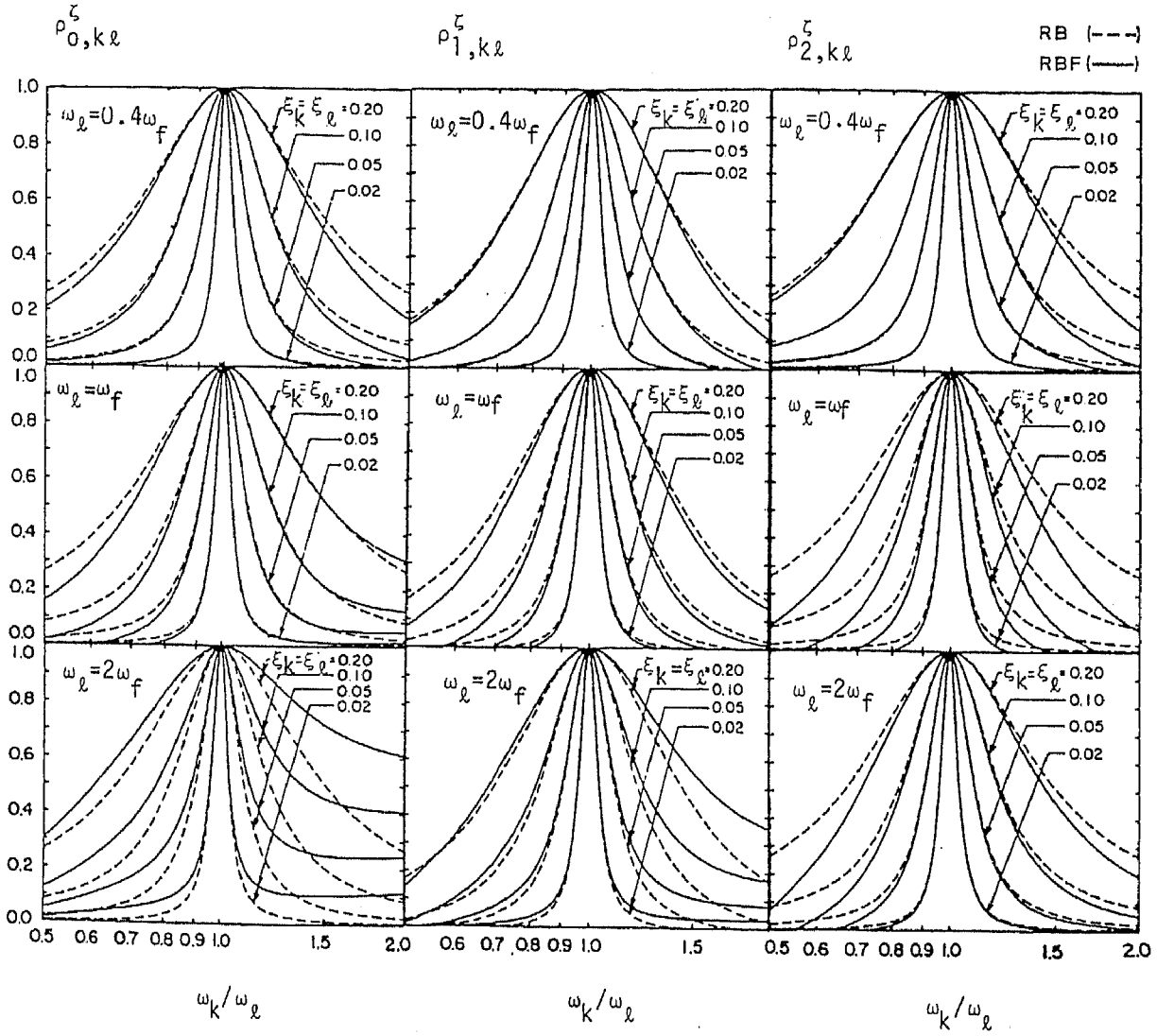


Fig. 2.8 - Evolução dos coeficientes $\rho^{\zeta}_{m,kl}$ correspondentes a uma excitação do tipo ruído branco (RB), ou ruído branco filtrado (RBF) com espectro de banda larga [129].

2.3.7 - Relações gerais estocásticas excitação-resposta mediante a introdução de variáveis de estado

O sistema de N equações diferenciais de segunda ordem utilizado para a tradução do movimento de um sistema linear de N-GL sujeito a uma acção dinâmica

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}(t)+\underline{K}\underline{q}(t)=\underline{p}^{q}(t) \tag{2.155}$$

pode ser transformado num outro sistema de 2N equações diferenciais de primeira ordem, à custa da introdução de um vector

$$\underline{y}(t)=\begin{Bmatrix}\underline{q}(t)\\ \dot{\underline{q}}(t)\end{Bmatrix} \tag{2.156}$$

habitualmente designado vector de estado, passando o movimento do sistema a ser descrito por

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{A}\underline{y}(t)+\underline{x}(t) \tag{2.157}$$

em que

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{I}\\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C}\end{bmatrix} \qquad \underline{x}(t)=\begin{Bmatrix}\underline{0}\\ \underline{M}^{-1}\underline{p}^{q}(t)\end{Bmatrix} \tag{2.158}$$

Caso o movimento do sistema corresponda a uma vibração livre, originada apenas por uma perturbação inicial no instante $t=0$, $\underline{x}(t)=\underline{0}$, transformando-se o sistema (2.157) num sistema homogéneo, cuja solução geral é [5]

$$\underline{y}(t)=e^{\underline{A}t}\underline{y}(0) \tag{2.159}$$

Sendo o movimento causado não só por uma perturbação inicial traduzida pelo vector $\underline{y}(0)$, mas também por acções dinâmicas associadas a um vector $\underline{x}(t)$ não nulo, a solução do sistema (2.157) é dada por [5]

$$\underline{y}(t)=e^{\underline{A}t}\underline{y}(0)+\int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{x}(\tau)d\tau \tag{2.160}$$

No caso particular de o sistema partir de uma situação inicial de repouso, $\underline{y}(0)=\underline{0}$, pelo que a resposta é definida pelo integral de convolução

$$\underline{y}(t)=\int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{x}(\tau)d\tau=\int_0^t e^{\underline{A}\tau}\underline{x}(t-\tau)d\tau \qquad (2.161)$$

em que a matriz $e^{\underline{A}\tau}$, por analogia com a equação (2.51), funciona como uma matriz de funções de transferência no domínio do tempo, sendo habitualmente designada por matriz de transição de estado.

Esta matriz que é, por definição

$$e^{\underline{A}t}=\underline{I}+\underline{A}t+\frac{1}{2!}(\underline{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\underline{A}t)^3+\frac{1}{4!}(\underline{A}t)^4+\ldots \qquad (2.162)$$

pode ser quantificada de forma mais eficiente, começando por resolver o problema de valores e vectores próprios

$$\underline{A}\,\underline{u}_i=\alpha_i\underline{u}_i \qquad (i=1,2,\ldots,2N) \qquad (2.163)$$

Sendo $\underline{T}$ a matriz quadrada de dimensão 2N, cujas colunas são constituídas pelos vectores próprios complexos $\underline{u}_i$, e $\underline{\alpha}$ a matriz diagonal constituída pelos correspondentes valores próprios, a matriz de transição de estado pode ser obtida através da relação [5]

$$e^{\underline{A}t}=\underline{T}e^{\underline{\alpha}t}\underline{T}^{-1} \qquad (2.164)$$

em que $e^{\underline{\alpha}t}$ é uma matriz também diagonal, cujo elemento de ordem i da respectiva diagonal principal vale $e^{\alpha_i t}$.

Apresentando a excitação actuante, não um carácter determinístico, mas antes natureza aleatória e estacionária, a caracterização da distribuição de probabilidade instantânea da resposta, suposta gaussiana, passa naturalmente pela determinação do vector de valores médios espectáveis $\underline{m}_y$ e da matriz de covariância $\underline{\mu}_y$.

A relação excitação-resposta em termos dos vectores de valores médios $\underline{m}_x$ e $\underline{m}_y$ pode neste caso ser alcançada aplicando o operador $E[\ ]$ à equação (2.157), obtendo-se

$$\dot{\underline{m}}_y(t) = \underline{A}\,\underline{m}_y(t) + \underline{m}_x(t) \tag{2.165}$$

pelo que, tendo presente a estacionaridade da resposta ($\dot{\underline{m}}_y(t) = \underline{0}$)

$$\underline{m}_y = -\underline{A}^{-1}\underline{m}_x \tag{2.166}$$

em que o vector $\underline{m}_x$, tendo em conta (2.158), é igual a

$$\underline{m}_x = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\underline{m}_{p^q} \end{Bmatrix} \tag{2.167}$$

A matriz de covariância da resposta em termos das variáveis de estado pode, por sua vez, ser conseguida se se tiver em consideração que, sendo por definição

$$\underline{\mu}_y(t) = E\left\{[\underline{y}(t) - \underline{m}_y][\underline{y}(t) - \underline{m}_y]^T\right\} \tag{2.168}$$

e introduzindo os processos vectoriais de valor médio nulo

$$\underline{x}_o(t) = \underline{x}(t) - \underline{m}_x \tag{2.169}$$

$$\underline{y}_o(t) = \underline{y}(t) - \underline{m}_y \tag{2.170}$$

se pode concluir que

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \frac{d}{dt}\left[\underline{y}_o(t)\underline{y}_o(t)^T\right] &= E\left[\dot{\underline{y}}_o(t)\underline{y}_o(t)^T\right] + E\left[\underline{y}_o(t)\dot{\underline{y}}_o(t)^T\right] \\
&= E\left\{[\underline{A}\underline{y}_o(t) + \underline{x}_o(t)]\underline{y}_o(t)^T\right\} + E\left\{\underline{y}_o(t)[\underline{A}\underline{y}_o(t) + \underline{x}_o(t)]^T\right\} \\
&= \underline{A}E\left[\underline{y}_o(t)\underline{y}_o(t)^T\right] + E\left[\underline{x}_o(t)\underline{y}_o(t)^T\right] + \\
&+ E\left[\underline{y}_o(t)\underline{y}_o(t)^T\right]\underline{A}^T + E\left[\underline{y}_o(t)\underline{x}_o(t)^T\right]
\end{aligned} \tag{2.171}$$

ou seja

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}^T + E\left[\underline{x}_o(t)\underline{y}_o(t)^T\right] + E\left[\underline{y}_o(t)\underline{x}_o(t)^T\right] \tag{2.172}$$

As matrizes correspondentes às terceira e quarta parcelas do segundo membro desta equação podem, por seu turno, ser expressas em função da matriz das funções de inter-correlação $\underline{R}_{x_o}(\tau, t)$ e da matriz

de transição de estado. Com efeito, sendo (v. eq. 2.157 e 2.165)

$$\dot{\underline{y}}_o(t) = \underline{A}\underline{y}_o(t) + \underline{x}_o(t) \tag{2.173}$$

a solução respectiva é, atendendo a (2.160)

$$\underline{y}_o(t) = e^{\underline{A}t}\underline{y}_o(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} x_o(\tau) d\tau \tag{2.174}$$

pelo que, multiplicando ambos os membros desta equação por $\underline{x}_o(t)^T$, e tomando valores médios espectáveis, se obtém

$$E\left[\underline{y}_o(t)\underline{x}_o(t)^T\right] = e^{\underline{A}t} E\left[\underline{y}_o(0)\underline{x}_o(t)^T\right] + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} E\left[\underline{x}_o(\tau)\underline{x}_o(t)^T\right] d\tau \tag{2.175}$$

Tendo em atenção que

$$E\left[\underline{y}_o(0)\underline{x}_o(t)^T\right] = \underline{0} \tag{2.176}$$

desde que as condições iniciais não estejam correlacionadas com a excitação $\underline{x}_o(t)$, e que por definição

$$E\left[\underline{x}_o(\tau)\underline{x}_o(t)^T\right] = \underline{R}_{x_o}(\tau, t) \tag{2.177}$$

resulta de (2.175) que

$$E\left[\underline{y}_o(t)\underline{x}_o(t)^T\right] = \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{R}_{x_o}(\tau, t) d\tau \tag{2.178}$$

Dado que se pode concluir também, seguindo caminho semelhante, que

$$E\left[\underline{x}_o(t)\underline{y}_o(t)^T\right] = \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{R}_{x_o}(\tau, t)^T d\tau \tag{2.179}$$

pode obter-se, finalmente, por substituição de (2.178) e (2.179) em (2.172), que

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}^T + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\left[\underline{R}_{x_o}(\tau, t) + \underline{R}_{x_o}(\tau, t)^T\right] d\tau \tag{2.180}$$

No caso particular de o processo vectorial estacionário $\underline{x}_o(t)$ ser do tipo ruído branco, caracterizado por uma matriz de densidades espectrais conjuntas $\underline{S}_o$, a que corresponde uma matriz de funções de

inter-correlação (v. eq. 1.81)

$$\underline{R}_{x_o}(\tau,t)=2\pi\underline{S}_o\delta(t-\tau) \tag{2.181}$$

a equação (2.180) reduz-se, tendo em conta as propriedades da função impulso, a

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t)=\underline{A}\underline{\mu}_y(t)+\underline{\mu}_y(t)\underline{A}^T+2\pi\underline{S}_o \tag{2.182}$$

Por conseguinte, e dado que o carácter estacionário dos processos de excitação e de resposta obriga a que $\dot{\underline{\mu}}_y(t)=\underline{0}$, este sistema de equações diferenciais de primeira ordem reduz-se à seguinte equação

$$\underline{A}\underline{\mu}_y+\underline{\mu}_y\underline{A}^T+2\pi\underline{S}_o=\underline{0} \tag{2.183}$$

conhecida por equação de Liapunov, a qual uma vez resolvida permite conhecer a matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y$.

A matriz $\underline{S}_o$ interveniente nessa equação, constituída pelas densidades espectrais conjuntas relativas ao processo vectorial

$$\underline{x}_o(t)=\begin{Bmatrix}\underline{0}\\ \underline{M}^{-1}\underline{p}_o^q(t)\end{Bmatrix} \tag{2.184}$$

em que

$$\underline{p}_o^q(t)=\underline{p}^q(t)-\underline{m}_p^q \tag{2.185}$$

pode relacionar-se directamente com as características espectrais da excitação actuante referida às coordenadas generalizadas q_i. Com efeito, tomando transformadas de Fourier de ambos os membros da equação (2.184), e tendo presente a definição de matriz de densidades espectrais conjuntas, fácil é concluir que

$$\underline{S}_o=\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{S}_o^{p^q}\underline{M}^{-1^T}\end{bmatrix} \tag{2.186}$$

sendo $\underline{S}_o^{p^q}$ a matriz das densidades espectrais relativas ao processo vectorial $\underline{p}_o^q(t)$, igualmente do tipo ruído branco.

Embora o caminho seguido para a determinação de $\underline{\mu}_y$ possa parecer algo restritivo, pelo facto de se haver considerado $\underline{x}_o(t)$ como um processo vectorial estacionário do tipo ruído branco, tal não é exacto, porquanto nos casos em que essa hipótese não é aceitável, é em princípio possível supor [195] o processo de excitação $\underline{p}^q(t)$, referente às coordenadas generalizadas q_i, como o processo de resposta de um filtro de ordem n sujeito a uma excitação traduzida por um processo vectorial do tipo ruído branco de valor médio nulo $\underline{\omega}(t)$, verificando-se uma relação do género

$$\underline{\Lambda}_n \overset{n.}{\underline{p}}{}^q(t) + \underline{\Lambda}_{n-1} \overset{(n-1).}{\underline{p}}{}^q(t) + \ldots + \underline{\Lambda}_1 \dot{\underline{p}}^q(t) + \underline{\Lambda}_o \underline{p}^q(t) = \underline{\omega}(t) \tag{2.187}$$

em que cada $\underline{\Lambda}_i$ é uma matriz quadrada de dimensão N caracterizadora do filtro.

Nessas condições, e conjugando esta equação com a equação (2.155), as relações entrada-saída do conjunto sistema-filtro podem ser traduzidas pelo seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{B}\,\underline{z}(t) + \underline{r}(t) \tag{2.188}$$

em que

$$\underline{z} = \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \dot{\underline{q}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \overset{n.}{\underline{q}} \\ \overset{(n+1).}{\underline{q}} \end{Bmatrix} \qquad \underline{r} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{0} \\ \underline{\omega} \end{Bmatrix} \tag{2.189}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{E}_o & \underline{E}_1 & \underline{E}_2 & \underline{E}_3 & \cdots & \underline{E}_n & \underline{E}_{n+1} \end{bmatrix} \tag{2.190}$$

sendo $\underline{B}$ uma matriz quadrada de dimensão $[N(n+2)]$, cujas sub-matrizes $\underline{E}_i$ são dadas por

$$\begin{aligned}
&\underline{E}_o = -(\underline{\Lambda}_n \underline{M})^{-1} \underline{\Lambda}_o \underline{K} \\
&\underline{E}_1 = -(\underline{\Lambda}_n \underline{M})^{-1} (\underline{\Lambda}_o \underline{C} + \underline{\Lambda}_1 \underline{K}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\underline{E}_i = -(\underline{\Lambda}_n \underline{M})^{-1} (\underline{\Lambda}_{i-2} \underline{M} + \underline{\Lambda}_{i-1} \underline{C} + \underline{\Lambda}_i \underline{K}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\underline{E}_{n+1} = -(\underline{\Lambda}_n \underline{M})^{-1} (\underline{\Lambda}_{n-1} \underline{M} + \underline{\Lambda}_n \underline{C})
\end{aligned} \tag{2.191}$$

A matriz de covariância da resposta a uma excitação estacionária não-branca pode pois ser determinada através da resolução da equação de Liapunov correspondente à equação ampliada (2.188)

$$\underline{B}\underline{\mu}_z + \underline{\mu}_z \underline{B}^T + \underline{R} = 0 \tag{2.192}$$

em que a matriz $\underline{R}$ está relacionada com as características do ruído branco $\underline{\omega}(t)$, sendo

$$\underline{R} = 2\pi \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{S}_o \end{bmatrix} \tag{2.193}$$

representando $\underline{S}_o$ a matriz das densidades espectrais conjuntas correspondente a $\underline{\omega}(t)$.

Importa ainda realçar neste caso que, embora não exista nenhuma teoria geral para a determinação das matrizes $\underline{\Lambda}_i$ caracterizadoras do filtro utilizado, estas podem ser quantificadas, em cada situação, recorrendo a técnicas iterativas de ajuste. No caso particular em que $n = 2$, essa questão pode aliás ser identificada com a determinação das matrizes de massa $\underline{\Lambda}_2$, de amortecimento $\underline{\Lambda}_1$ e de rigidez $\underline{\Lambda}_o$ relativas

a um sistema linear de N-GL, o que corresponde no fundo a uma generalização do problema da fixação dos parâmetros do filtro de Kanai-Tajimi [125], utilizado em Engenharia Sísmica.

2.3.8 - Formulação de estado modal

A análise estocástica da resposta dinâmica de um sistema linear de N-GL a uma excitação aleatória estacionária, mediante a introdução de variáveis de estado, pode também ser realizada através de uma formulação modal não complexa, desde que a matriz de amortecimento $\underline{C}$ satisfaça as condições necessárias [54] para que o sistema de equações diferenciais (2.155), que traduz o equilíbrio dinâmico do sistema, possa ser transformado num conjunto de M equações diferenciais independentes do tipo (v. eq. 2.88)

$$\ddot{\zeta}_i(t) + 2\xi_i w_i \dot{\zeta}_i(t) + w_i^2 \xi_i(t) = p_i^{\xi}(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, M) \tag{2.194}$$

Na verdade, introduzindo M vectores de estado

$$\underline{y}_i(t) = \begin{Bmatrix} \zeta_i(t) \\ \dot{\zeta}_i(t) \end{Bmatrix} \tag{2.195}$$

aquele conjunto de M equações diferenciais de segunda ordem pode ser analogamente transformado no seguinte conjunto de $2M$ equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\underline{y}}_i(t) = \underline{A}_i \underline{y}_i(t) + \underline{x}_i(t) \tag{2.196}$$

em que

$$\underline{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_i^2 & -2\xi_i w_i \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_i(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_i^{\xi}(t) \end{Bmatrix} \tag{2.197}$$

Sendo estas equações formalmente idênticas à equação (2.157), as soluções respectivas também o são, pelo que se podem naturalmente aproveitar, ao nível de cada coordenada modal, as conclusões retiradas

na secção anterior (2.3.7) quanto à determinação, quer do vector dos valores médios espectáveis da resposta, quer da correspondente matriz de covariância.

Por conseguinte, e por analogia com a equação (2.166), o vector dos valores médios espectáveis da resposta correspondente à coordenada modal de ordem $\underline{i}$ é dado por

$$\underline{m}_{y_i} = -\underline{A}_i^{-1}\underline{m}_{x_i} \tag{2.198}$$

em que, tendo em conta que $p_i^{\xi}(t) = \underline{\phi}_i^T \underline{p}^q(t)$

$$\underline{m}_{x_i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \underline{\phi}_i^T \underline{m}_{p^q} \end{Bmatrix} \tag{2.199}$$

Por outro lado, caso a excitação seja do tipo ruído branco, sendo o processo estocástico

$$p_{oi}^{\xi}(t) = p_i^{\xi}(t) - m_{p_i^{\xi}} \tag{2.200}$$

caracterizado por uma densidade espectral de potência de valor constante S_{oi}, a matriz de covariância da resposta modal pode, por analogia com a equação (2.183), ser determinada através da resolução da equação de Liapunov

$$\underline{A}_i \underline{\mu}_{y_i} + \underline{\mu}_{y_i} \underline{A}_i^T + 2\pi \underline{S}_{oi} = \underline{0} \tag{2.201}$$

em que $\underline{S}_{oi}$ representa a matriz das densidades espectrais conjuntas relativas ao processo

$$\underline{x}_{oi}(t) = \underline{x}_i(t) - \underline{m}_{x_i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_{oi}^{\xi}(t) \end{Bmatrix} \tag{2.202}$$

dada por

$$\underline{S}_{oi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{oi} \end{bmatrix} \tag{2.203}$$

O valor da constante S_{oi} pode, aliás, relacionar-se directamente

com a matriz $\underline{S}_o^{p^q}$ das densidades espectrais conjuntas relativas ao processo estocástico vectorial de valor médio nulo

$$\underline{p}_o^q(t) = \underline{p}^q(t) - \underline{m}_{p^q} \tag{2.204}$$

grandezas essas que assumem naturalmente valores constantes. Com efeito, sendo

$$p_{oi}^{\zeta}(t) = \underline{\phi}_i^T \underline{p}_o^q(t) \tag{2.205}$$

conclui-se de imediato, tomando transformadas de Fourier de ambos os membros, e tendo presente a definição de densidade espectral de potência, que

$$S_{oi} = \underline{\phi}_i^T \underline{S}_o^{p^q} \underline{\phi}_i \tag{2.206}$$

No caso geral de uma excitação estacionária não-branca, o sistema de equações diferenciais (2.196) pode ser ampliado de forma semelhante à seguida em 2.3.7, se se supuser o processo de excitação $p_i^{\zeta}(t)$, referente à i-ésima coordenada modal, como o processo de resposta de um filtro de ordem n sujeito a uma excitação traduzida por um processo estocástico de tipo ruído branco de valor médio nulo $\omega_i(t)$, verificando-se a relação

$$\lambda_n \overset{n.}{p}_i^{\zeta}(t) + \lambda_{n-1} \overset{(n-1).}{p}_i^{\zeta}(t) + \ldots + \lambda_1 \dot{p}_i^{\zeta}(t) + \lambda_o p_i^{\zeta}(t) = \omega_i(t) \tag{2.207}$$

sendo os coeficientes λ_i características de filtro, e S_{oi} a densidade espectral de potência do ruído branco $\omega_i(t)$.

O sistema de equações diferenciais (2.196) vem então substituído por

$$\dot{\underline{z}}_i(t) = \underline{B}_i \underline{z}_i(t) + \underline{r}_i(t) \tag{2.208}$$

em que

$$\underline{z}_i(t) = \left[\zeta_i, \dot{\zeta}_i, \ldots, \overset{n.}{\zeta}_i, \overset{(n+1).}{\zeta}_i\right]^T \qquad \underline{r}_i = [0, 0, \ldots, \omega_i]^T \tag{2.209}$$

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ e_o & e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_n & e_{n+1} \end{bmatrix} \tag{2.210}$$

sendo $\underline{B}_i$ uma matriz quadrada de dimensão $(n+2)$, cujos coeficientes e_i são dados por

$$\begin{aligned} e_o &= -\lambda_o w_i^2/\lambda_n \\ e_1 &= -(2\lambda_o \xi_i w_i + \lambda_1 w_i^2)/\lambda_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_i &= -(\lambda_{i-2} + 2\lambda_{i-1}\xi_i w_i + \lambda_i w_i^2)/\lambda_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{n+1} &= -(\lambda_{n-1} + 2\lambda_n \xi_i w_i)/\lambda_n \end{aligned} \tag{2.211}$$

Consequentemente, a matriz de covariância da resposta modal à excitação não-branca obtém-se mediante a resolução da equação de Liapunov ampliada (v. eq. 2.192)

$$\underline{B}_i \underline{\mu}_{z_i} + \underline{\mu}_{z_i} \underline{B}_i^T + \underline{R}_i = \underline{0} \tag{2.212}$$

em que a matriz $\underline{R}_i$, relacionada com a densidade espectral de potência S_{oi} do ruído branco $\omega_i(t)$, é dada por

$$\underline{R}_i = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_{oi} \end{bmatrix} \tag{2.213}$$

Uma vez determinadas as matrizes de covariância relativas aos vectores $\underline{z}_i$, e a partir destas, as matrizes homólogas relativas aos vectores $\underline{y}_i$, torna-se imediata a formação da matriz de covariância da resposta modal $\underline{\mu}_\xi$, a qual, uma vez admitida como válida a natureza gaussiana da excitação, se relaciona com a matriz de covariância da

resposta referida às N coordenadas generalizadas q_i através da equação

$$\underline{\mu}_q = \underline{\Phi}\,\underline{\mu}_\xi\,\underline{\Phi}^T \tag{2.214}$$

2.3.9 - Formulação de estado modal complexa

A utilização das formulações modais referidas em 2.3.3 e 2.3.8 pressupõe a ortogonalidade dos modos de vibração sem amortecimento $\underline{\phi}_i$ em relação às matrizes $\underline{M}$, $\underline{C}$ e $\underline{K}$, tornando-se desse modo viável, à custa da introdução da transformação

$$\underline{q}(t) = \underline{\Phi}\,\underline{\xi}(t) \tag{2.215}$$

substituir o sistema de equações diferenciais (2.80), tradutor do equilíbrio dinâmico do sistema, por um conjunto de M equações diferenciais independentes (2.82) nas coordenadas modais.

Todavia, se as condições de ortogonalidade são sempre verificadas em relação às matrizes de massa e de rigidez, o mesmo não sucede com a matriz de amortecimento, cuja diagonalização só pode ter lugar sob determinadas condições [54], facto que naturalmente reduz, pelo menos em termos teóricos, o campo de aplicabilidade das formulações modais mencionadas.

É porém sempre possível utilizar uma formulação de estado modal complexa, em que o movimento do sistema é descrito pelo sistema de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem (2.157)

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}\,\underline{y}(t) + \underline{x}(t) \tag{2.216}$$

introduzindo a transformação

$$\underline{y}(t) = \underline{T}\,\underline{\beta}(t) \tag{2.217}$$

em que $\underline{T}$ é a matriz quadrada de dimensão $2N$, cujas colunas são constituídas pelos vectores próprios complexos $\underline{u}_i$ da matriz $\underline{A}$, e $\underline{\beta}(t)$ é um novo vector de coordenadas modais complexas.

Desse modo, substituindo a equação (2.217) em (2.216), obtém-se que

$$\dot{\underline{\beta}}(t) = \underline{T}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{T}\,\underline{\beta}(t) + \underline{T}^{-1}\,\underline{x}(t) \tag{2.218}$$

ou, dado que [5]

$$\underline{T}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{T} = \underline{\alpha} \tag{2.219}$$

em que $\underline{\alpha}$ é a matriz diagonal constituída pelos valores próprios da matriz $\underline{A}$

$$\dot{\underline{\beta}}(t) = \underline{\alpha}\,\underline{\beta}(t) + \underline{\gamma}(t) \tag{2.220}$$

sendo

$$\underline{\gamma}(t) = \underline{T}^{-1}\,\underline{x}(t) \tag{2.221}$$

Por conseguinte, conseguida a diagonalização da matriz $\underline{A}$ à custa da transformação (2.217), o sistema de $2N$ equações diferenciais traduzido pela equação (2.216) é transformado no conjunto de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem independentes expresso pela equação (2.220), a que corresponde a solução

$$\underline{\beta}(t) = e^{\underline{\alpha} t}\,\underline{\beta}(0) + \int_o^t e^{\underline{\alpha}(t-\tau)}\,\underline{\gamma}(\tau)\,d\tau \tag{2.222}$$

Caso as condições iniciais sejam nulas, esta expressão reduz-se a

$$\underline{\beta}(t) = \int_0^t e^{\underline{\alpha}(t-\tau)}\,\underline{\gamma}(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{\underline{\alpha}\tau}\,\underline{\gamma}(t-\tau)\,d\tau \tag{2.223}$$

assumindo a matriz de transição de estado $e^{\underline{\alpha}\tau}$ o significado de uma matriz diagonal de funções de transferência no domínio do tempo, $\underline{h}_{\beta}(\tau)$, correspondente a cada um dos $2N$ modos, sendo

$$h_i^{\beta}(\tau) = e^{\alpha_i \tau} \tag{2.224}$$

Apresentando a excitação actuante natureza aleatória e estacionária, a determinação do vector dos valores médios espectáveis da resposta $\underline{m}_y$, e da correspondente matriz de covariância $\underline{\mu}_y$, pode

efectuar-se começando por obter previamente as matrizes homólogas da resposta no espaço modal $\underline{m}_\beta$ e $\underline{\mu}_\beta$, tendo posteriormente em conta a transformação linear expressa pela equação (2.217).

A relação excitação-resposta, em termos dos vectores de valores médios $\underline{m}_\gamma$ e $\underline{m}_\beta$, pode ser obtida aplicando o operador $E[\ ]$ à equação (2.220), vindo

$$\dot{\underline{m}}_\beta(t) = \underline{\alpha}\,\underline{m}_\beta(t) + \underline{m}_\gamma(t) \tag{2.225}$$

ou, tendo presente o carácter estacionário da excitação e da resposta

$$m_\beta = -\underline{\alpha}^{-1}\underline{m}_\gamma \tag{2.226}$$

Aplicando também o operador $E[\ ]$ às equações (2.217) e (2.221), e conjugando as equações resultantes com (2.226), pode, por sua vez, obter-se a expressão desejada de $\underline{m}_y$ em função de $\underline{m}_x$, e que é

$$\underline{m}_y = -\underline{T}\,\underline{\alpha}^{-1}\underline{T}^{-1}\underline{m}_x \tag{2.227}$$

ou, atendendo a (2.219)

$$\underline{m}_y = -\underline{A}^{-1}\underline{m}_x \tag{2.228}$$

Por seu turno, a matriz de covariância da resposta estacionária, em termos das coordenadas modais complexas β_i, pode ser determinada recorrendo à definição

$$\underline{\mu}_\beta(t) = E\left\{[\underline{\beta}(t) - \underline{m}_\beta][\underline{\beta}(t) - \underline{m}_\beta]^{*T}\right\} \tag{2.229}$$

e substituindo nesta expressão a equação (2.223), fazendo $t \to \infty$, resultando

$$\begin{aligned}
\underline{\mu}_\beta &= E\left\{\int_0^\infty \int_o^\infty \left\{e^{\underline{\alpha}\tau_1}[\underline{\gamma}(t-\tau_1) - \underline{m}_\gamma]\right\}\left\{e^{\underline{\alpha}\tau_2}[\underline{\gamma}(t-\tau_2) - m_\gamma]\right\}^{*T} d\tau_1 d\tau_2\right\} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \underline{h}_\beta(\tau_1) E\left\{[\underline{\gamma}(t-\tau_1) - \underline{m}_\gamma][\underline{\gamma}(t-\tau_2) - \underline{m}_\gamma]^{*T}\right\} \underline{h}_\beta(\tau_2)^* d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \underline{h}_\beta(\tau_1)\underline{\mu}_\gamma(\tau_1 - \tau_2)\underline{h}_\beta(\tau_2)^* d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned} \tag{2.230}$$

Deste modo, a matriz de covariância relativa às coordenadas modais complexas $\underline{\beta}$ pode ser quantificada a partir do conhecimento da matriz $\underline{\mu}_y(\tau)$, a qual, dada a relação linear expressa pela equação (2.221), e o suposto carácter gaussiano da excitação actuante, obedece à relação

$$\underline{\mu}_y(\tau) = \underline{T}^{-1}\underline{\mu}_x(\tau)\underline{T}^{-1^T} \tag{2.231}$$

em que, tendo em conta (2.158)

$$\underline{\mu}_x(\tau) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{\mu}_{p^q}(\tau)\underline{M}^{-1^T} \end{bmatrix} \tag{2.232}$$

Uma vez conhecida a matriz $\underline{\mu}_\beta$, torna-se também imediata a determinação de $\underline{\mu}_y$, dada a relação linear (2.217), verificando-se pois que

$$\underline{\mu}_y = \underline{T}\underline{\mu}_\beta\underline{T}^{*^T} \tag{2.233}$$

ficando desta forma possibilitada a completa caracterização da distribuição de probabilidade instantânea do processo de resposta através da lei de Gauss.

Esta abordagem de análise da resposta, baseada numa formulação modal complexa, embora parecendo envolver algumas complexidades de cálculo, revela-se no entanto de fácil aplicação em termos do desenvolvimento de programas de cálculo automático, apresentando também como aspectos positivos o facto de ser sempre aplicável qualquer que seja a matriz de amortecimento do sistema, bem como a possibilidade de se ter em consideração na análise da resposta apenas o contributo dos modos julgados mais significativos.

No caso particular de uma excitação do tipo ruído branco de valor médio espectável nulo, sendo

$$\underline{R}_{p^q}(\tau) = \underline{\mu}_{p^q}(\tau) = 2\pi\underline{S}_o\delta(\tau) \tag{2.234}$$

a referida complexidade do método é significativamente reduzida. Com efeito, nesse caso, a equação (2.232) origina que

$$\underline{\mu}_x(\tau)=\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & 2\pi\underline{M}^{-1}\underline{S}_o\underline{M}^{-1^T}\delta(\tau)\end{bmatrix} \tag{2.235}$$

calculando-se então $\underline{\mu}_y(\tau)$ através da relação (2.231), podendo esta matriz de covariância expressar-se como o produto de uma matriz de coeficientes constantes $\underline{\mu}_\gamma$ pela função impulso $\delta(\tau)$, ou seja

$$\underline{\mu}_\gamma(\tau)=\underline{\mu}_\gamma.\delta(\tau) \tag{2.236}$$

Substituindo esta equação em (2.230), resulta que

$$\underline{\mu}_\beta=\int_0^\infty\int_0^\infty \underline{h}_\beta(\tau_1)\underline{\mu}_\gamma\delta(\tau_1-\tau_2)\underline{h}_\beta(\tau_2)^* d\tau_1 d\tau_2$$

$$=\underline{\mu}_\gamma\int_0^\infty \underline{h}_\beta(\tau_1)\underline{h}_\beta(\tau_1)^* d\tau_1 \tag{2.237}$$

ou, dado que $h_i^\beta(\tau_1)=e^{\alpha_i\tau_1}$

$$\mu_{ij}^\beta=\mu_{ij}^\gamma\int_0^\infty e^{(\alpha_i+\alpha_j^*)\tau_1}d\tau_1=-\frac{\mu_{ij}^\gamma}{\alpha_i+\alpha_j^*} \tag{2.238}$$

Deste modo, pode facilmente constituir-se a matriz $\underline{\mu}_\beta$, e posteriormente a matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y$ através da equação (2.233).

Nas situações em que a excitação actuante não for do tipo ruído branco pode, obviamente, procurar-se também utilizar a técnica referida em 2.3.7 e 2.3.8 de introdução de um filtro, ampliando adequadamente o sistema de equações diferenciais (2.216).

2.3.10 - Sobreposição de excitações aleatórias estacionárias

Em todas as formulações apresentadas anteriormente, com vista à análise estocástica do comportamento dinâmico de sistemas lineares de N-GL sujeitos a acções aleatórias estacionárias, se admitiu que a excitação actuante, referida às N coordenadas generalizadas q_i,

podia ser traduzida por um processo estocástico vectorial estacionário e gaussiano $\underline{p}^q(t)$.

Sucede porém que, em certas situações, as acções aleatórias a que o sistema estrutural é submetido têm origens diversas, levando a que o processo $\underline{p}^q(t)$ possa ser interpretado como resultante de uma sobreposição de NP processos vectoriais $\underline{p}_i^q(t)$ da mesma natureza, mas com características estatísticas próprias, podendo escrever-se

$$\underline{p}^q(t) = \sum_{i=1}^{NP} \underline{p}_i^q(t) \tag{2.239}$$

Por essa razão, e no sentido de que as formulações anteriormente descritas continuem a poder ser utilizadas com facilidade, tem naturalmente interesse estabelecer relações entre algumas das grandezas estatísticas relativas aos processos $\underline{p}^q(t)$ e $\underline{p}_i^q(t)$ $(i=1,\ldots,NP)$, designadamente em relação a valores médios espectáveis, funções de inter-covariância, funções de inter--correlação e funções densidade espectral cruzada.

Com efeito, começando por aplicar o operador $E[\ ]$ a ambos os membros da equação (2.239), resulta que

$$\underline{m}_{p^q} = \sum_{i=1}^{NP} \underline{m}_{p_i^q} \tag{2.240}$$

Por outro lado, tendo em conta a equação (2.239), e a definição da matriz das funções de inter-correlação, relativa à componente aleatória da excitação de valor médio nulo

$$\underline{R}_{p_o^q}(\tau) = E\left[\sum_{i=1}^{NP} \underline{p}_{oi}^q(t) \sum_{j=1}^{NP} \underline{p}_{oj}^{qT}(t+\tau)\right] = \sum_{i=1}^{NP}\sum_{j=1}^{NP} E\left[\underline{p}_{oi}^q(t)\,\underline{p}_{oj}^{qT}(t+\tau)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{NP}\sum_{j=1}^{NP} \underline{R}_{p_{oi}^q p_{oj}^q}(\tau) \tag{2.241}$$

podendo então a matriz das funções de inter-covariância $\underline{\mu}_{p^q}(\tau) = \underline{\mu}_{p_o^q}(\tau)$

relacionar-se da seguinte forma com grandezas estatísticas dos diversos processos $\underline{p}_i^q(t)$ intervenientes

$$\underline{\mu}_{p^q}(\tau) = \underline{R}_{p_o^q}(\tau) = \sum_{i=1}^{NP}\sum_{j=1}^{NP} \underline{R}_{p_{oi}^q p_{oj}^q}(\tau) \tag{2.242}$$

Aplicando a relação de Wiener-Khintchine a ambos os membros da equação (2.241), obtém-se por sua vez a seguinte relação entre as matrizes das densidades espectrais conjuntas

$$\underline{S}_{p_o^q}(w) = \sum_{i=1}^{NP}\sum_{j=1}^{NP} \underline{S}_{p_{oi}^q p_{oj}^q}(w) \tag{2.243}$$

Deste modo, as equações (2.240), (2.241), (2.242) e (2.243) possibilitam o conhecimento de todas as grandezas estatísticas necessárias à caracterização do processo actuante $\underline{p}^q(t)$, viabilizando, por conseguinte, a utilização das abordagens de análise anteriormente referidas.

2.4 - O CASO DA ANÁLISE DA RESPOSTA SÍSMICA. RELAÇÃO ENTRE AS ABORDAGENS ESTOCÁSTICA E DETERMINÍSTICA

As acções sísmicas constituem um caso particular das excitações aleatórias, susceptíveis de serem modeladas através de processos estocásticos vectoriais, os quais se encontram neste caso associados às diversas componentes do movimento sísmico de base.

Apesar do carácter manifestamente transitório deste tipo de acção, vários estudos realizados [93, 173] têm, no entanto, revelado que o modelo de maior simplicidade, e suficientemente adequado a uma correcta caracterização probabilística de sismos dos tipos II e III da classificação de Newmark e Rosenblueth [157], é o que considera as diversas componentes do movimento do solo como uma amostra de certa duração de um processo estocástico vectorial estacionário e gaussiano de valor médio espectável nulo.

Desta forma, a distribuição de probabilidade relativa a cada variável de controlo caracterizadora da resposta sísmica pode ser conhecida, utilizando qualquer dos métodos gerais anteriormente descritos para a análise estocástica do comportamento dinâmico de sistemas lineares sujeitos a excitações aleatórias estacionárias.

Embora seja da maior utilidade fazer referência mais detalhada ao caminho a seguir nesse caso, o que será feito aliás na secção 2.5 relativa ao desenvolvimento de "software" e aplicações no domínio da engenharia sísmica, julga-se também do maior interesse aludir a alguns aspectos que estabelecem uma certa relação entre as abordagens estocástica e determinística de análise dos efeitos dos sismos sobre o comportamento estrutural.

Nesse sentido, descreve-se seguidamente não só a via utilizável para obtenção de um espectro de resposta compatível com um dado espectro de potência da aceleração de base, como também a forma de recorrer aos coeficientes de correlação espectral da resposta modal a um ruído branco, melhorando a ponderação quadrática das várias contribuições modais, habitualmente utilizada na abordagem determinística baseada na utilização de espectros de resposta.

2.4.1 - Obtenção de um espectro de resposta a partir de um espectro de potência da aceleração de base

Os espectros de resposta, introduzidos por Housner [253] com vista à caracterização determinística do movimento sísmico num ponto, são grafos que representam o valor máximo de uma dada variável de controlo da resposta de um sistema linear de 1-GL à excitação aplicada, em função da respectiva frequência natural w_n (ou do período $T_n = 2\pi/w_n$), e para diversos valores possíveis do respectivo coeficiente de amortecimento ξ.

Uma vez conhecidos tais espectros, torna-se bastante fácil a análise da resposta de sistemas com maior número de graus de liberdade,

mediante uma combinação adequada das diversas contribuições modais, calculadas a partir daqueles.

Na prática, embora a análise da resposta se processe, em geral, em termos de deslocamentos, é relativamente frequente o recurso aos chamados espectros de pseudo-velocidades, $S_{pv}(w_n,\xi)$, ou de pseudo--acelerações, $S_{pa}(w_n,\xi)$, que se relacionam com os espectros de deslocamentos, $S_d(w_n,\xi)$, através da relação

$$S_{pa}(w_n,\xi)=w_n S_{pv}(w_n,\xi)=w_n^2 S_d(w_n,\xi) \qquad (2.244)$$

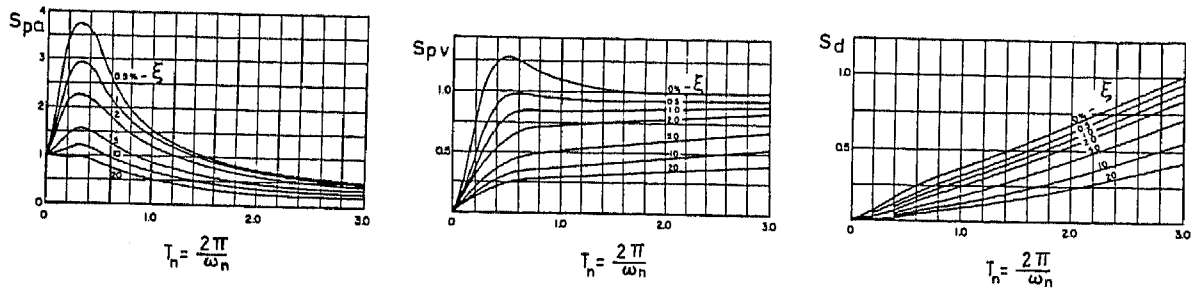


Fig. 2.9 - Espectros de resposta de pseudo-acelerações (S_{pa}), de pseudo-velocidades (S_{pv}) e de deslocamentos (S_d).

Uma vez conhecida a função densidade espectral de potência correspondente a uma dada componente da aceleração do movimento sísmico num ponto, a obtenção de um espectro médio de resposta compatível

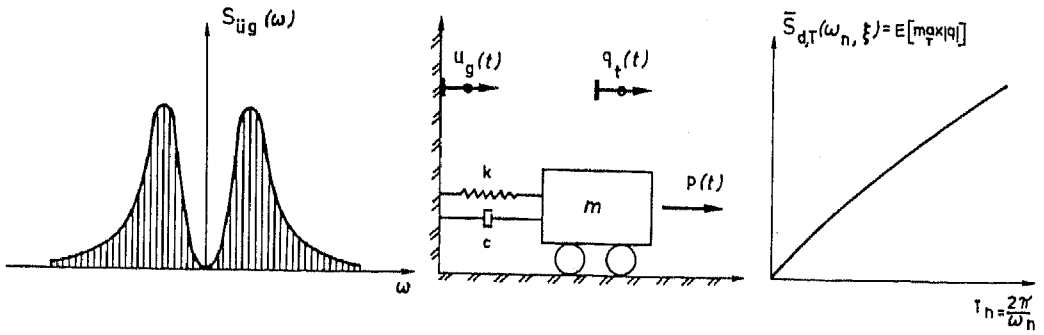


Fig. 2.10 - Obtenção do espectro de resposta de deslocamentos $\overline{S}_{d,T}(w_n,\xi)$ a partir do espectro de potência $S_{\ddot{u}g}(w)$.

pode sempre ser conseguida de forma simples, identificando cada valor desse espectro, correspondente a um dado par (w_n, ξ), com o valor médio dos picos da resposta de um sistema linear de 1-GL, de frequência natural w_n e coeficiente de amortecimento ξ, verificado num dado intervalo de tempo de duração T, e estimado com base numa das expressões referidas em 1.9.3.

Com efeito, sendo o equilíbrio dinâmico de um sistema linear de 1-GL (Fig. 2.10), sujeito a um movimento de base idealizado através do processo estocástico estacionário gaussiano de valor médio nulo $u_g(t)$, traduzido pela equação

$$m\ddot{q}(t)+c\dot{q}(t)+kq(t)=p(t) \tag{2.245}$$

em que $q(t)$ é o deslocamento do sistema em relação à base e

$$p(t)=-m\ddot{u}_g(t) \tag{2.246}$$

a função densidade espectral de potência da resposta, $S_q(w)$, pode obter-se por aplicação da equação (2.28), ou seja

$$S_q(w)=|H(w)|^2 S_p(w) \tag{2.247}$$

em que

$$S_p(w)=m^2 S_{\ddot{u}g}(w) \tag{2.248}$$

como se torna evidente tomando transformadas de Fourier de ambos os membros da equação (2.246), e atendendo à definição de densidade espectral de potência.

Conhecida a função $S_q(w)$, podem calcular-se os momentos espectrais da resposta λ_o^q , λ_1^q e λ_2^q (eq. 1.233), que possibilitam avaliar o valor médio dos extremos absolutos do deslocamento relativo $q(t)$, num intervalo de tempo de duração T, com base na expressão de Vanmarke (1.272).

Por conseguinte, uma vez fixado o valor de T, e fazendo variar a frequência natural $w_n=\sqrt{k/m}$, para cada valor arbitrado do coeficiente

de amortecimento ξ, pode identificar-se o valor correspondente do espectro médio de resposta de deslocamentos, $\overline{S}_{d,T}(w_n,\xi)$, com o valor médio $E\left[\max_T |q(t)|\right]$ dado pela equação (1.272), isto é

$$\overline{S}_{d,T}(w_n,\xi)=E\left[\max_T |q(t)|\right]=\left[(2ln2f_e^{\uparrow}T)^{1/2}+\frac{0.577216}{(2ln2f_e^{\uparrow}T)^{1/2}}\right]\sigma_q \qquad (2.249)$$

em que $\sigma_q=(\lambda_o^q)^{1/2}$ e $f_e^{\uparrow}$ é dado pela equação (1.274), sendo função dos três momentos espectrais referidos.

Desta forma, pode ir sendo gradualmente construído o espectro médio de resposta em termos de deslocamentos, passando-se depois para o espectro de acelerações através da equação (2.244).

A título de exemplo, apresentam-se na figura 2.11 espectros médios de resposta $\overline{S}_{pa,T}(w_n)$ obtidos a partir das funções densidade espectral de potência $S_{\ddot{u}_g}(w)$ definidas pelo Regulamento Português de Segurança e Acções em Edifícios e Pontes, para a zona A do território nacional. Para o efeito, tiveram-se em consideração os três tipos de terreno e os dois tipos de acções sísmicas regulamentares, tendo-se adoptado um coeficiente de amortecimento $\xi=0,05$. Complementarmente, traçaram-se também os espectros de resposta definidos pelo RSA no intervalo de 0 a 7Hz, e habitualmente supostos constantes para frequências superiores. Da comparação destes (RES) com as acelerações espectrais obtidas (POT), conclui-se haver uma apreciável compatibilidade de valores, verificando-se todavia um crescente afastamento entre esses espectros para frequências mais elevadas, facto que se torna apenas significativo para estruturas bastante rígidas.

É de assinalar ainda que o problema da determinação de um espectro de potência compatível com um dado espectro de resposta é também resolúvel, se bem que encerre bastante maior complexidade, por obrigar à inversão do algoritmo anteriormente utilizado, levando normalmente a procedimentos de natureza iterativa [93, 177].

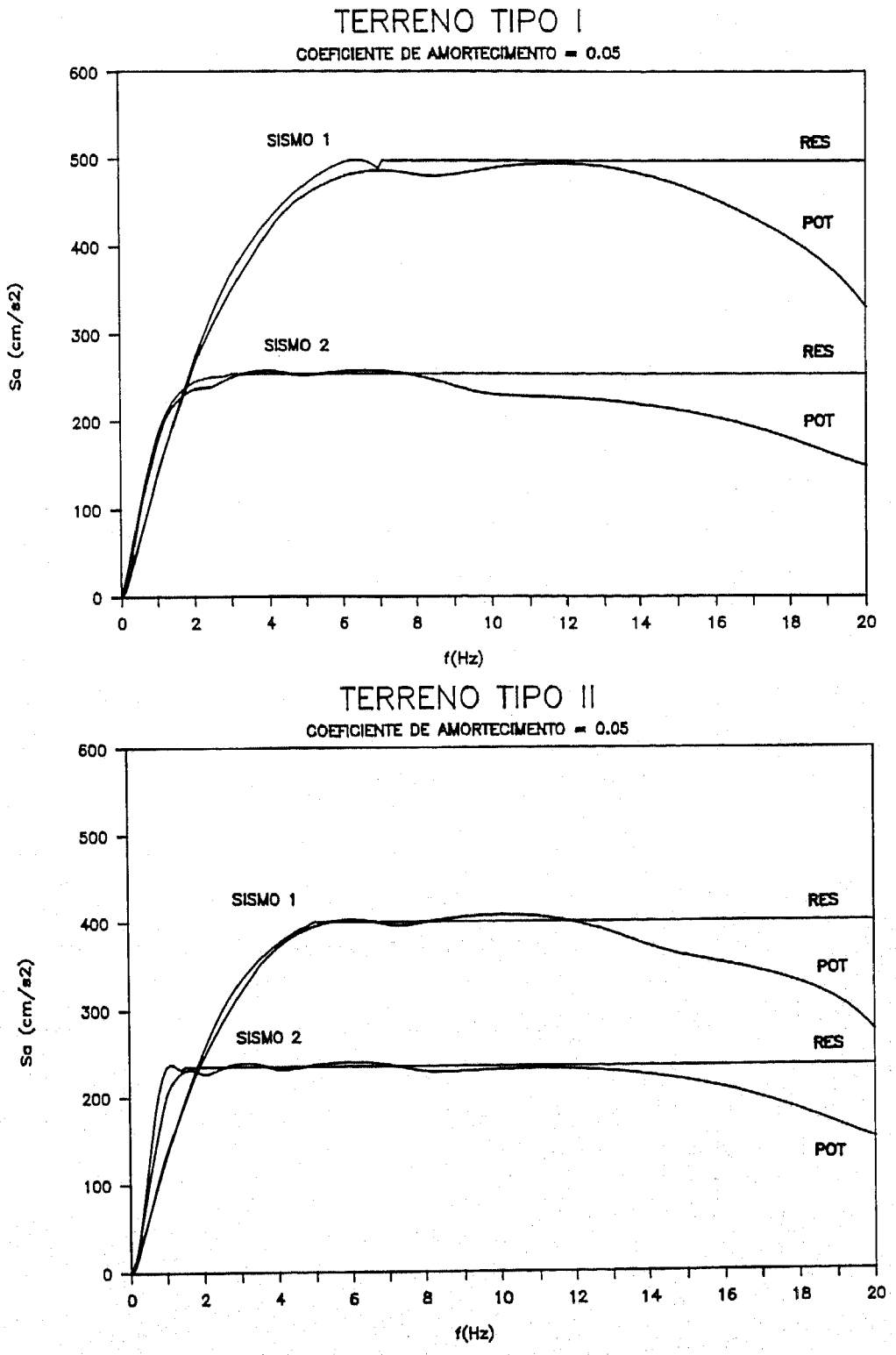


Fig. 2.11 a) - Comparação dos espectros de resposta regulamentares (RES) com os espectros de resposta obtidos a partir dos espectros de potência (POT).

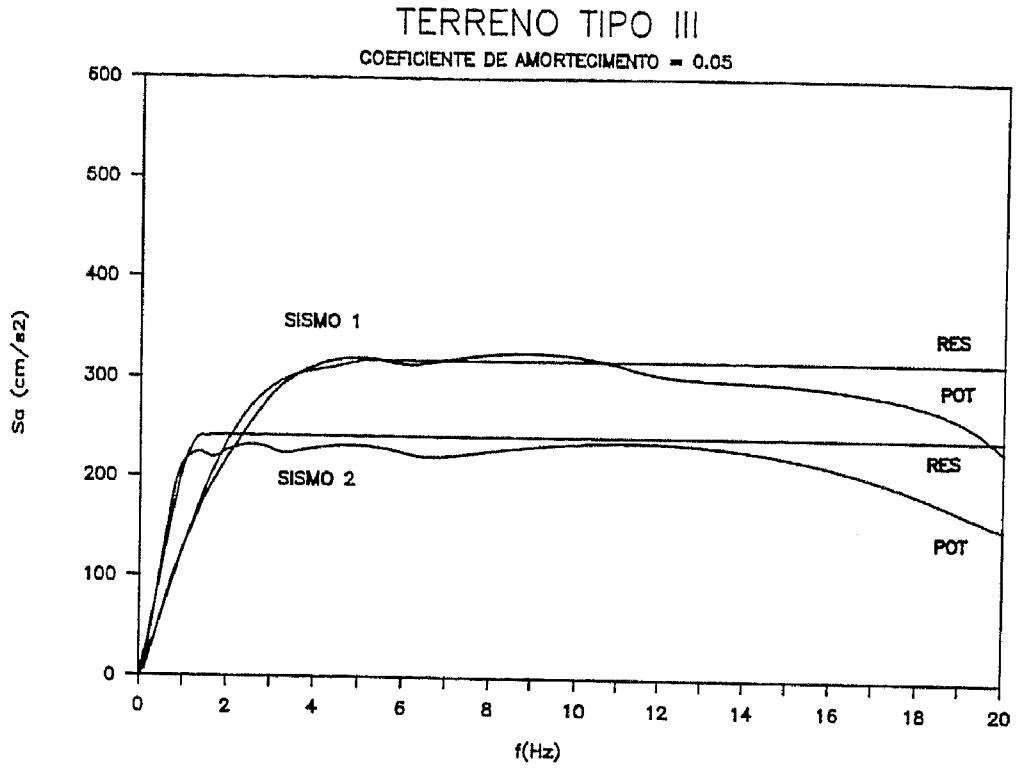


Fig. 2.11 b) - Comparação dos espectros de resposta regulamentares (RES) com os espectros de resposta obtidos a partir dos espectros de potência (POT).

2.4.2 - Utilização dos coeficientes de correlação espectral para correcção da ponderação quadrática no método dos espectros de resposta

A determinação, através do método dos espectros de resposta, do valor máximo de uma dada variável de controlo $r_i(t)$, susceptível de ser expressa como uma combinação linear das coordenadas modais, envolve uma sobreposição do tipo

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^{M} c_{ij}(t) \qquad (2.250)$$

em que $c_{ij}(t)$ representa a contribuição do modo de ordem j para a resposta desejada.

Sendo a excitação actuante idealizada através de um processo estocástico estacionário gaussiano de valor médio espectável nulo, cada contribuição modal $c_{ij}(t)$ é traduzida por um processo da mesma natureza, podendo a função de auto-correlação $R_{r_i}(\tau)$, correspondente ao processo de resposta $r_i(t)$, exprimir-se em termos das funções de inter-correlação $R_{kl}^{c_i}(\tau)$ relativas aos processos $c_{ik}(t)$ e $c_{il}(t)$, tendo em conta a equação (1.99), ou seja

$$R_{r_i}(\tau) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} R_{kl}^{c_i}(\tau) \tag{2.251}$$

Em particular, fazendo $\tau = 0$, obtém-se a variância do processo $r_i(t)$ em função das inter-covariâncias instantâneas dos M processos estocásticos $c_{ij}(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, M)$

$$\mu_{r_i} = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \mu_{kl}^{c_i} \tag{2.252}$$

Caso se admita existir total independência estatística entre as contribuições modais traduzidas por $c_{ij}(t)$, surgindo a matriz de co-variância $\underline{\mu}_{c_i}$ diagonalizada, esta equação simplifica-se dando lugar a

$$\mu_{r_i} = \sum_{k=1}^{M} \mu_{c_{ik}} \tag{2.253}$$

equação que, conjugada com (2.30), permite obter a seguinte expressão para o valor médio dos picos da resposta r_i num intervalo de tempo T

$$E\left[|r_i|_{\max_T} \right] = \left\{ \sum_{k=1}^{M} \frac{\overline{p}_{r_i}^2}{\overline{p}_{c_{ik}}^2} E\left[|c_{ik}|_{\max_T} \right]^2 \right\}^{1/2} \tag{2.254}$$

Supondo-se, simultaneamente, que os quocientes entre os factores de pico indicados nesta equação não diferem significativamente da unidade, acaba por ter-se mais simplesmente que

$$E\left[|r_i|_{\max_T} \right] = \left\{ \sum_{k=1}^{M} E\left[|c_{ik}|_{\max_T} \right]^2 \right\}^{1/2} \tag{2.255}$$

expressão que constitui o suporte do critério de sobreposição modal, frequentemente seguido na prática, e vulgarmente conhecido por método da raíz quadrada da soma dos quadrados.

Sucede, porém, que a hipótese da total independência estatística das diversas contribuições modais, em que assentou a dedução desta expressão, não é correcta, tendendo a perder validade quando as frequências naturais assumem valores bastante próximos, como aliás foi realçado nos pontos 2.3.5 e 2.3.6.

Torna-se porém possível, seguindo uma formulação apresentada por Kiureghian [130], estabelecer uma ligação entre a abordagem determinística da análise da resposta e a abordagem estocástica anteriormente desenvolvida, conseguindo-se dessa forma, sob determinadas condições, melhorar o critério de sobreposição modal utilizado no método dos espectros de resposta, expresso pela equação (2.255), à custa da introdução dos coeficientes de correlação espectral $\rho^{\xi}_{o,kl}$ definidos pela equação (2.149).

Admitindo como hipótese de base que a excitação actuante é caracterizada por um espectro de potência do tipo ruído branco filtrado de banda larga ($\xi_i \geq 0.60$), e que as frequências naturais de interesse se situam na gama de frequências dominantes da excitação, então, como se referiu em 2.2.5 e 2.3.6, os valores da frequência média de passagens ascendentes por zero $f_o^{\uparrow \xi_i}$, e dos coeficientes de correlação espectral $\rho^{\xi}_{o,kl}$, não diferem significativamente dos valores relativos a uma excitação do tipo ruído branco, podendo por isso recorrer-se às equações (2.39) e (2.149), segundo as quais

$$f_o^{\uparrow \xi_i} = \frac{w_i}{2\pi} \tag{2.256}$$

$$\rho^{\xi}_{o,kl} = \frac{2\sqrt{\xi_k \xi_l}\left[(w_k + w_l)^2(\xi_k + \xi_l) + (w_k^2 - w_l^2)(\xi_k - \xi_l)\right]}{4(w_k - w_l)^2 + (\xi_k + \xi_l)^2(w_k + w_l)^2} \tag{2.257}$$

Por outro lado, o valor médio dos picos da resposta modal $\zeta_i(t)$ pode exprimir-se através da equação (2.30), podendo ser identificado com o valor correspondente do espectro médio de resposta de deslocamentos $\overline{S}_{d,T}(w_i, \xi_i)$, ou seja

$$E\left[|\zeta_i|_{\max_T}\right] = \overline{p}_{\zeta_i}\sqrt{\lambda^{\zeta}_{o,ii}} = \overline{S}_{d,T}(w_i,\xi_i) \tag{2.258}$$

O momento espectral de ordem zero da resposta $r_i(t)$ pode, por sua vez, exprimir-se através da equação (2.148), isto é

$$\lambda_o^{r_i} = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\psi_{ik}\psi_{il}\rho^{\zeta}_{o,kl}\sqrt{\lambda^{\zeta}_{o,kk}.\lambda^{\zeta}_{o,ll}} \tag{2.259}$$

resultando, pois, da conjugação destas duas equações que

$$\lambda_o^{r_i} = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{\rho^{\zeta}_{o,kl}}{\overline{p}_{\zeta_k}\overline{p}_{\zeta_l}}.E\left[|c_{ik}|_{\max_T}\right]E\left[|c_{il}|_{\max_T}\right] \tag{2.260}$$

em que

$$E\left[|c_{ik}|_{\max_T}\right] = \psi_{ik}E\left[|\zeta_k|_{\max_T}\right] = \psi_{ik}\overline{S}_{d,T}(w_k,\xi_k) \tag{2.261}$$

$$E\left[|c_{il}|_{\max_T}\right] = \psi_{il}E\left[|\zeta_l|_{\max_T}\right] = \psi_{il}\overline{S}_{d,T}(w_l,\xi_l) \tag{2.262}$$

representam os valores médios das contribuições máximas dos modos de ordem k e l para a resposta $r_i(t)$.

Sendo, por outro lado

$$E\left[|r_i|_{\max_T}\right] = p_{\overline{r}_i}\sqrt{\lambda_o^{r_i}} \tag{2.263}$$

conclui-se assim, tendo em conta a equação (2.260), que

$$E\left[|r_i|_{\max_T}\right] = \left\{\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{\overline{p}^2_{r_i}}{\overline{p}_{\zeta_k}\overline{p}_{\zeta_l}}\rho^{\zeta}_{o,kl}E\left[|c_{ik}|_{\max_T}\right]E\left[|c_{il}|_{\max_T}\right]\right\}^{1/2} \tag{2.264}$$

Ora exprimindo-se $r_i(t)$ como uma combinação linear das coordenadas modais, o factor de pico respectivo, $\overline{p}_{r_i}$, acaba por funcionar como uma média ponderada dos factores de pico $\overline{p}_{\zeta_j}$ $(j=1,2,\ldots,M)$. Por outro lado, a variação sofrida pelos factores de pico $\overline{p}_{\zeta_j}$ em função da frequência natural é pouco acentuada em resultado da relação logarítmica expressa pela equação (1.272), e tendo em conta a proporcionalidade entre $f_o^{\uparrow\zeta_i}$ e w_i traduzida pela equação (2.256).

Consequentemente, os quocientes $\overline{p}_{r_i}/\overline{p}_{\xi_j}$ afastam-se, em geral, pouco significativamente da unidade, tornando razoável considerar que

$$E\left[|r_i|_{\max_T}\right] \cong \left\{\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\rho^{\xi}_{o,kl}E\left[|c_{ik}|_{\max_T}\right]E\left[|c_{il}|_{\max_T}\right]\right\}^{1/2} \qquad (2.265)$$

equação que possibilita a aplicação do método dos espectros de resposta, mediante uma mais adequada combinação das contribuições modais máximas, tendo em consideração as respectivas dependências estatísticas através dos coeficientes de correlação espectral $\rho^{\xi}_{o,kl}$.

Caso as frequências naturais se apresentem significativamente espaçadas, os coeficientes $\rho^{\xi}_{o,kl}$ $(k \neq l)$ tendem para zero, reduzindo-se a equação (2.265) a

$$E\left[|r_i|_{\max_T}\right] = \left\{\sum_{k=1}^{M}E\left[|c_{ik}|_{\max_T}\right]^2\right\}^{1/2} \qquad (2.266)$$

ou seja, obtém-se a equação em que se fundamenta o método tradicional de sobreposição modal da raíz quadrada da soma dos quadrados.

Acrescente-se apenas que Kiureghian admite como desprezáveis, para efeito do cálculo do valor médio dos picos da resposta $r_i(t)$, os coeficientes $\rho^{\xi}_{o,kl}$ inferiores a 0,10, o que corresponde sensivelmente à relação de frequências próprias já referida em (2.152).

2.5 - DESENVOLVIMENTO DE "SOFTWARE" NO DOMÍNIO DA ENGENHARIA SÍSMICA. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A análise estocástica da resposta de um sistema linear de N-GL a uma excitação sísmica de natureza aleatória, tal como é idealizada pelo actual Regulamento de Segurança e Acções, pode ser encarada como um caso particular do problema mais geral já anteriormente abordado em 2.3.

Pelo manifesto interesse de que tal análise se reveste, e com o objectivo de facilitar o entendimento da forma de aplicação de algumas das formulações teóricas anteriormente mencionadas, descrevem-se neste ponto alguns programas de cálculo automático propositadamente

elaborados para o efeito, versando dois casos de grande interesse prático, no domínio das estruturas reticuladas e das estruturas laminares.

Os exemplos apresentados, tratados quer com base na utilização dos espectros de resposta, quer dos espectros de potência indicados pelo RSA, possibilitam ainda uma reflexão sobre a compatibilidade destas duas formas alternativas de caracterização da excitação sísmica.

2.5.1 - Caracterização das acções sísmicas de acordo com o Regulamento de Segurança e Acções

O carácter aleatório inerente aos fenómenos de sismigénese e de propagação das vibrações sísmicas através de complexas formações geológicas sugere a vantagem do recurso a modelos estocásticos, que possibilitem uma conveniente caracterização probabilística deste tipo de excitação e dos seus efeitos sobre o comportamento estrutural.

Embora diversos modelos possam ser encarados no sentido de idealizar a excitação sísmica, e apesar do carácter manifestamente transitório deste tipo de acção, aquele que se tem revelado de maior simplicidade e suficientemente adequado a uma correcta caracterização probabilística é o que considera as diversas componentes do movimento do solo como uma amostra de certa duração de um processo estocástico vectorial estacionário e gaussiano de valor médio espectável nulo.

Vários trabalhos foram aliás realizados no passado em Portugal no sentido de estudar a adequabilidade deste modelo à idealização de diversos sismos de grande intensidade, nomeadamente os realizados por Ravara [186] e Jervis Pereira [173], que para o efeito se basearam nos sismos de El Centro (1934 e 1940), Olympia (1949) e Taft (1954), tendo recorrido a diversos testes estatísticos, designadamente ao teste de Kolmogorov-Smirnov e ao teste de estacionaridade de Bryan. Apesar de diversos resultados negativos obtidos, em particular no que respeita ao teste de estacionaridade, a conclusão desses estudos [173]

foi, no entanto, no sentido da aceitabilidade do modelo estocástico referido, para o que terá por certo contribuído não só a inexistência de razões suficientemente fortes para o porem em causa, mas também a escassez de informação disponível com vista à construção de modelos sísmicos não-estacionários.

A distribuição probabilística das diversas componentes da aceleração do solo de fundação pode assim ser completamente descrita a partir do conhecimento das respectivas densidades espectrais de potência conjuntas, cuja definição decorre da análise de acelerogramas correspondentes a diversos sismos registados, constituindo indicadores preciosos àcerca das gamas de frequências predominantes da excitação.

Nestas circunstâncias, a caracterização da acção sísmica segundo o RSA assenta fundamentalmente na definição, para cada ponto do território nacional, dos valores das densidades espectrais de potência de aceleração correspondentes às componentes horizontais e vertical da aceleração de base, relativas a duas acções sísmicas distintas, e para três tipos de terreno, admitindo como nulas as densidades espectrais conjuntas dos movimentos da base, e fixando em 10 e 30 segundos respectivamente o tempo de duração da amostra do processo estocástico vectorial utilizado para a idealização da excitação sísmica.

Todavia, o RSA possibilita ainda que em diversos casos correntes a acção sísmica seja caracterizada de forma simplificada através de espectros de resposta médios, os quais são igualmente definidos em termos das componentes de aceleração de base horizontais e vertical, considerando três tipos de terreno e duas acção sísmicas diferenciadas, uma representativa de um sismo de magnitude moderada e pequena distância focal, e outra correspondente a um sismo de maior magnitude e maior distância focal.

2.5.2 - Aplicação à análise sísmica de estruturas reticuladas planas. Descrição dos programas PROG1, PROG2 e PROG3.

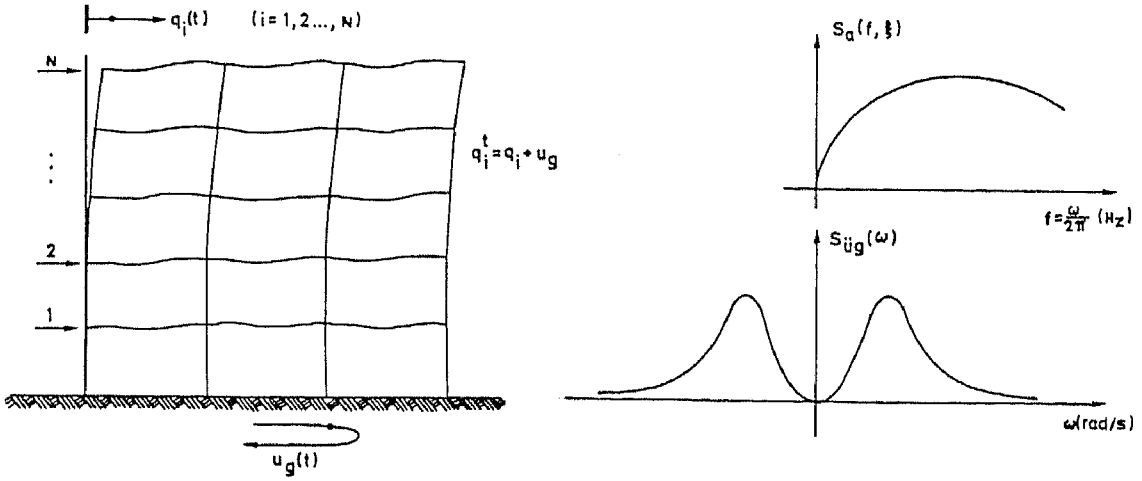


Fig. 2.12 - Estrutura reticulada plana sujeita a uma acção sísmica horizontal.

Considere-se inicialmente o caso de uma estrutura reticulada plana, cujos pontos de apoio na fundação sofrem movimentos sísmicos horizontais no plano da estrutura, que se supõem caracterizados pelo mesmo processo estocástico estacionário gaussiano de valor médio nulo $\ddot{u}_g(t)$, com densidades espectrais de potência $S_{\ddot{u}_g}(w)$ conhecidas (v. Fig. 2.12).

Sendo $\underline{q}^t(t)$ o vector dos deslocamentos horizontais absolutos dos diversos pisos, e $\underline{q}(t)$ o correspondente vector dos deslocamentos relativos face ao deslocamento da base $u_g(t)$, o equilíbrio dinâmico da estrutura pode ser traduzido pelo sistema de N equações diferenciais de segunda ordem

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}\underline{q}(t) = -\underline{M}\underline{\alpha}\ddot{u}_g(t) \qquad (2.267)$$

em que $\underline{M}$, $\underline{C}$ e $\underline{K}$ representam as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez referidas às N coordenadas generalizadas q_i, e $\underline{\alpha}$ é o vector que estabelece a relação

$$\underline{q}^{t}(t) = \underline{q}(t) + \underline{a}u_g(t) \tag{2.268}$$

ou seja, que reune os valores dos deslocamentos de corpo rígido da estrutura decorrentes da introdução de um deslocamento de base unitário.

Sendo a transformada de Fourier do processo estocástico vectorial caracterizador da excitação

$$\underline{P}^{q}(t) = -\underline{\underline{M}}\,\underline{a}\ddot{u}_g(t) \tag{2.269}$$

definida por

$$\underline{P}^{q}(w) = -\underline{\underline{M}}\,\underline{a}F[\ddot{u}_g(t)] \tag{2.270}$$

e atendendo também à definição dos elementos da matriz das densidades espectrais conjuntas da excitação $\underline{S}_{p^q}(w)$, dados por

$$S_{ij}^{p^q}(w) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[P_{i,T}^{q}(w).P_{j,T}^{q}(w)^{*}]}{2\pi T} \tag{2.271}$$

de imediato se conclui que

$$\underline{S}_{p^q}(w) = \underline{\underline{M}}\,\underline{a}\underline{a}^{T}\underline{\underline{M}}^{T}S_{\ddot{u}_g}(w) \tag{2.272}$$

relação que possibilita a obtenção da matriz das densidades espectrais conjuntas da excitação relativa às coordenadas generalizadas q_i, a partir do conhecimento do espectro de potência da aceleração de base, $S_{\ddot{u}_g}(w)$, da matriz de massa $\underline{\underline{M}}$ e do vector $\underline{a}$, neste caso exclusivamente constituído por componentes de valor unitário.

Deste modo, seguindo a formulação modal referida em 2.3.3, não só se pode concluir facilmente ser nulo o valor médio espectável do processo vectorial de resposta ($\underline{m}_q = \underline{0}$), mas também que todos os momentos espectrais de ordem m $(m = 0, 1, 2)$ da resposta em termos das coordenadas modais ou suas derivadas de ordem α podem ser imediatamente quantificados através da equação (2.139), ou seja

$$\lambda_{m,ij}^{\xi,\alpha} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \phi_{ki}\phi_{lj}\int_{-\infty}^{\infty} w^{2\alpha+m}R_e\left[H_i^{\xi}(w).H_j^{\xi}(w)^{*}S_{kl}^{p^q}(w)\right]dw \tag{2.273}$$

Tomando $m=0$, estes momentos coincidem com os elementos da correspondente matriz de covariância da resposta, que, como se sabe, caracteriza de forma completa toda a estrutura probabilística do processo vectorial respectivo, dada a sua natureza gaussiana.

Embora seja possível, em certas circunstâncias, o cálculo analítico dos integrais indicados por esta equação [92, 175], recorrendo para o efeito a expressões bastante complexas e trabalhosas, estes são vulgarmente calculados por métodos numéricos, para o que convém ter presente que

$$Re\left[H_i(w)H_j(w)^* S_{kl}^{pq}(w)\right]=\frac{A_{kl}(w)}{B_{ij}(w)} \tag{2.274}$$

em que

$$A_{kl}(w)=[(w_i^2-w^2)(w_j^2-w^2)+4\xi_i\xi_j w_i w_j w^2].Re\left[S_{kl}^{pq}(w)\right]- \\ -[2(w_i^2-w^2)\xi_j w_j w-2(w_j^2-w^2)\xi_i w_i w].Im\left[S_{kl}^{pq}(w)\right] \tag{2.275}$$

$$B_{ij}(w)=\left[(w_i^2-w^2)^2+4\xi_i^2 w_i^2 w^2\right].\left[(w_j^2-w^2)^2+4\xi_j^2 w_j^2 w^2\right] \tag{2.276}$$

Note-se no entanto que, no caso de sistemas fracamente amortecidos, a função integranda apresenta oscilações muito acentuadas e picos pronunciados, tornando-se necessário recorrer a intervalos de integração muito reduzidos, por forma a alcançar um bom nível de precisão. Por outro lado, é de realçar que constituindo o produto $H_i(w).H_j(w)^*$ uma função simétrica em w_i e w_j, e ξ_i e ξ_j, as matrizes de momentos espectrais da resposta no espaço modal são igualmente simétricas.

Uma vez quantificadas as matrizes $\underline{\lambda}_m^{\xi}$ $(m=0,1,2)$, pode de imediato passar-se ao conhecimento das matrizes de momentos espectrais relativas a quaisquer variáveis de controlo $\underline{r}(t)$, susceptíveis de serem expressas através de uma transformação linear do tipo (v. 2.3.4)

$$\underline{r}(t)=\underline{\Psi}\underline{\xi}(t) \tag{2.277}$$

já que, de acordo com (2.141)

$$\lambda_m^{r_i} = \underline{\Psi}_i \underline{\lambda}_m^{\zeta} \underline{\Psi}_i^T \tag{2.278}$$

sendo $\underline{\Psi}_i$ o vector de tipo (1xM) constituído pelas componentes da i-ésima linha da matriz $\underline{\Psi}$.

No caso presente de uma estrutura reticulada plana, interessa considerar não só os deslocamentos q dos diversos pisos em relação à fundação (situação em que $\underline{\Psi} \equiv \underline{\Phi}$), mas também, por exemplo, todos os momentos flectores, esforços transversos e esforços axiais nas extremidades de todas as barras constituintes da estrutura.

Uma vez conhecidos os valores dos momentos espectrais $\lambda_0^{r_i} = \sigma_{r_i}^2$, $\lambda_1^{r_i}$ e $\lambda_2^{r_i} = \sigma_{\dot{r}_i}^2$ relativos a cada variável $r_i(t)$, podem finalmente calcular-se os valores médios dos picos de resposta num intervalo de tempo de duração T, valores que assumem a maior importância do ponto de vista do dimensionamento estrutural, tendo em consideração a actual filosofia regulamentar, e que podem ser avaliados através da expressão de Vanmarke (v. eq. 1.272)

$$E\left[\max_T |r_i(t)|\right] = \left[(2\ln 2 f_e^{\uparrow} T)^{1/2} + \frac{0.577216}{(2\ln 2 f_e^{\uparrow} T)^{1/2}}\right]\sigma_{r_i} \tag{2.279}$$

em que a frequência média $f_e^{\uparrow}$ é calculada com base nas equações (1.274), (2.142) e (2.143).

Nestas circunstâncias, foi elaborado um programa de cálculo automático (PROG1) com vista à análise estocástica da resposta sísmica de estruturas reticuladas planas, e cuja arquitectura, esquematicamente traduzida pelo fluxograma simplificado indicado na figura 2.13, é a seguinte sob forma sequencial:

a) Leitura de dados gerais envolvendo

- caracterização topológica da estrutura;
- definição das características geométricas e mecânicas das barras e da sua forma de ligação aos nós extremos (em continuidade ou sob a forma de articulações);

- identificação das condições de apoio;
- definição do número de graus de liberdade, das coordendas generalizadas correspondentes e do número de modos de vibração a ter em conta na análise da resposta;
- leitura do valor das massas relativas a cada grau de liberdade;
- leitura do valor do coeficiente de comportamento da estrutura e dos coeficientes de amortecimento modais;
- caracterização da excitação actuante, tornando-se possível a consideração de um espectro de potência de aceleração de base do tipo ruído branco, de um espectro de Kanai-Tajimi [125], ou dos espectros poli-lineares definidos pelo RSA;

b) Formação das matrizes de massa e de rigidez da estrutura referidas às coordenadas generalizadas associadas aos N graus de liberdade pré-definidos
- considerando a matriz de massa diagonal;
- quantificando a matriz de rigidez condensada através da inversão da matriz de flexibilidade respectiva, previamente calculada mediante a consideração da actuação de forças unitárias em correspondência com aquelas coordenadas;

c) Determinação dos valores das $M (M \leq N)$ primeiras frequências naturais, e dos M modos de vibração correspondentes da estrutura, necessários para a análise da resposta, quantificando, com recurso às sub-rotinas MESP, MHS, MVHS e MVS da biblioteca SL-MATH (IBM), os valores e vectores próprios da equação

$$(\underline{K} - \omega_i^2 \underline{M})\underline{\phi}_i = \underline{0} \quad (i = 1, \ldots, M) \tag{2.280}$$

tomando como condição de normalização que as massas modais assumam valor unitário;

d) Determinação dos elementos da matriz dos momentos espectrais da resposta no espaço modal $\lambda^{\xi}_{m,ij}$ $(m = 0, 1, 2)$, quantificando para cada par (i, j), com $(i, j = 1, 2, \ldots, M)$, o duplo somatório a que se

refere a equação (2.273), tomando $\alpha = 0$; O integral que nela figura é calculado numericamente com recurso à regra dos trapézios, sendo o valor da função integranda, correspondente a cada frequência w ao longo do intervalo de integração, calculado a partir das equações (2.274), (2.275), (2.276) e (2.272);

e) Composição da matriz de transformação $\underline{\Psi}$ (v. eq. 2.277) de tipo $(NR \times M)$, que estabelece a relação linear entre os valores das coordenadas modais e dos momentos flectores, esforços transversos e esforços axiais nas extremidades de cada barra da estrutura; A i-ésima coluna da matriz $\underline{\Psi}$ é naturalmente obtida quantificando os valores desses esforços gerados pela aplicação de forças estáticas caracterizadas pelo vector $\underline{f}_i = \underline{K}\underline{\phi}_i$, em correspondência com as coordenadas generalizadas pré-definidas;

f) Quantificação dos momentos espectrais $\lambda_m^{r_i}$ $(m = 0, 1, 2)$ relativos a cada uma das variáveis de controlo da resposta do sistema através da equação (2.278), podendo o processo estocástico vectorial $\underline{r}(t)$ representar não só os deslocamentos q_i, relativos ao movimento de base (situação em que $\underline{\Psi} = \underline{\Phi}$), mas também todo o conjunto de esforços nas barras antes mencionado;

g) Estimativa dos valores médios dos picos de resposta a partir do conhecimento dos momentos espectrais $\lambda_m^{r_i}$, mediante a utilização da expressão de Vanmarke (2.279), e com base no conhecimento do tempo T de duração da amostra estacionária.

A análise estocástica do comportamento dinâmico de estruturas sujeitas a acções sísmicas pode igualmente processar-se com base em qualquer outra das formulações alternativas descritas em 2.3.

Deste modo, foi elaborado um segundo programa de cálculo automático (PROG2) que, baseado na formulação de estado apresentada em 2.3.7, possibilita também uma análise probabilística da resposta de estruturas reticuladas planas, cuja fundação seja sujeita a uma ace-

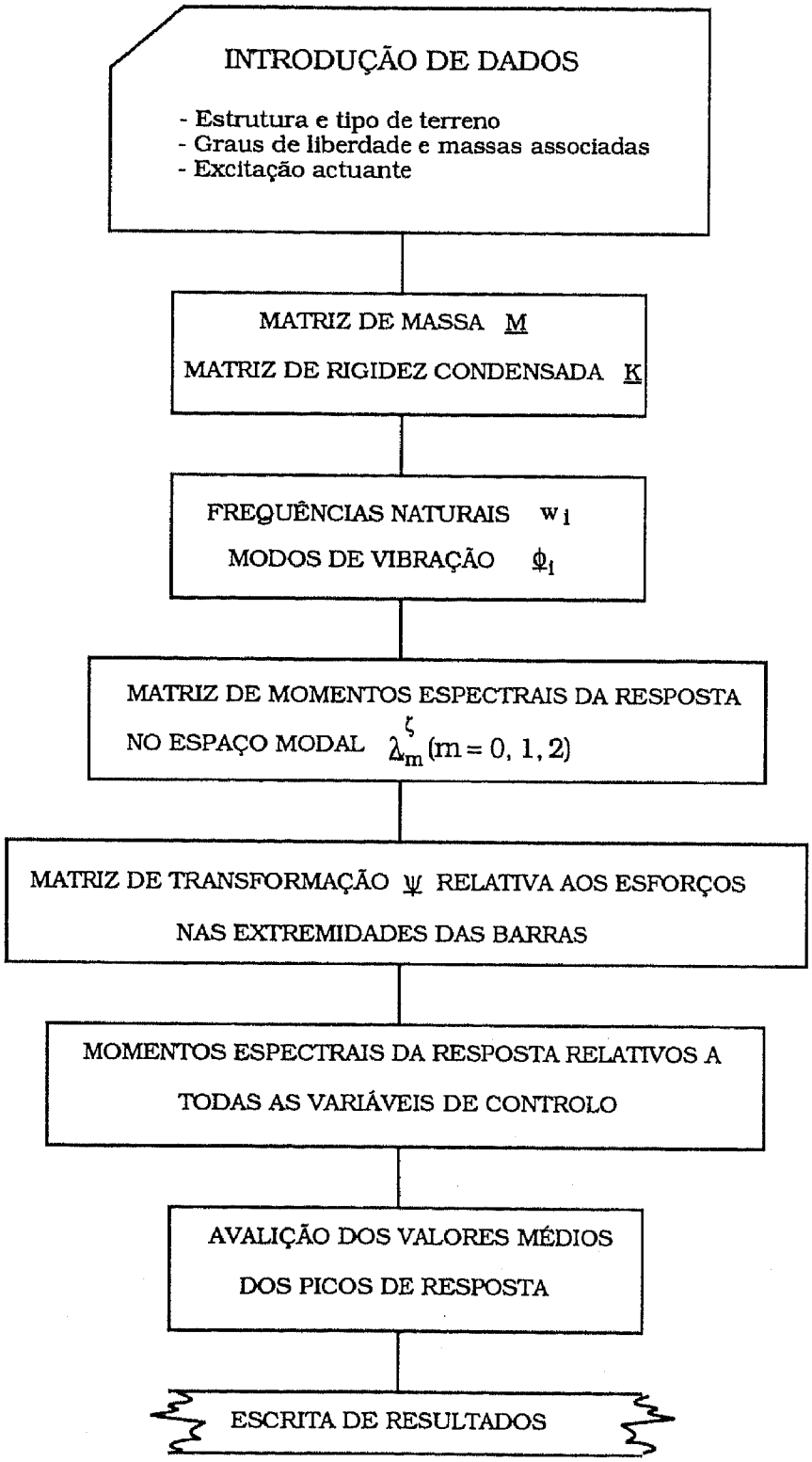


Fig. 2.13 - Fluxograma simplificado do programa PROG1.

leração de base horizontal, idealizada através de um processo estacionário gaussiano de valor médio nulo, do tipo ruído branco ou ruído branco filtrado.

Assim, e no primeiro caso, introduzindo o vector de estado

$$\underline{y}(t)=\begin{Bmatrix}\underline{q}(t)\\ \dot{\underline{q}}(t)\end{Bmatrix} \tag{2.281}$$

a matriz de covariância correspondente é regida pela equação (2.183) ou seja,

$$\underline{A}\,\underline{\mu}_y+\underline{\mu}_y\underline{A}^T+2\pi\underline{S}_o=\underline{0} \tag{2.282}$$

em que

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{I}\\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C}\end{bmatrix}\qquad \underline{S}_o=\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{S}_o^{pq}\underline{M}^{-1^T}\end{bmatrix} \tag{2.283}$$

sendo $\underline{S}_o^{pq}$ a matriz das densidades espectrais conjuntas do processo de excitação referido às coordenadas generalizadas q_i, cuja constituição é definida, a partir da densidade espectral S_o do ruído branco, por (v. eq. 2.272)

$$\underline{S}_o^{pq}=\underline{M}\,\underline{a}\,\underline{a}^T\,\underline{M}^T S_o \tag{2.284}$$

Sendo, na realidade, a aceleração de base $\ddot{u}_g(t)$ melhor idealizada através de um processo estocástico estacionário, cujas densidades espectrais de potência se concentram de forma predominante ao longo de uma dada gama de frequências, pode recorrer-se ao espectro de Kanai-Tajimi, traduzido pela equação (2.47), para caracterizar analiticamente a função densidade espectral $S_{\ddot{u}_g}(w)$.

Tal espectro pode, como se sabe, ser entendido como o correspondente ao processo de resposta, em termos de acelerações absolutas $\ddot{u}_f^!(t)$, de um filtro de 1-GL de massa unitária, com frequência natural w_f e coeficiente de amortecimento ξ_f, quando a sua base é sujeita a uma aceleração aleatória estacionária de média nula $\ddot{u}_g^o(t)$, ideali-

zada através de um ruído branco com uma densidade espectral de potência S_o.

Desse modo, designando por u_f o deslocamento do filtro relativamente à base

$$\ddot{u}_f^t(t) = \ddot{u}_f(t) + \ddot{u}_g^o(t) \tag{2.285}$$

pelo que, sendo a equação de equilíbrio dinâmico do filtro

$$\ddot{u}_f(t) + 2\xi_f w_f \dot{u}_f(t) + w_f^2 u_f(t) = -\ddot{u}_g^o(t) \tag{2.286}$$

se conclui que

$$\ddot{u}_f^t = -2\xi_f w_f \dot{u}_f(t) - w_f^2 u_f(t) \tag{2.287}$$

Identificando $\ddot{u}_f^t(t)$ com $\ddot{u}_g(t)$, e introduzindo o vector ampliado

$$\underline{y}^T = [\underline{q}^T, \dot{\underline{q}}^T, u_f, \dot{u}_f] \tag{2.288}$$

as equações (2.267), (2.286) e (2.287) permitem pois traduzir o movimento do conjunto sistema-filtro, delas resultando a seguinte relação matricial

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}\underline{y}(t) + \underline{x}(t) \tag{2.289}$$

em que

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C} & \underline{a}\alpha_1 & \underline{a}\alpha_o \\ \underline{0} & \underline{0} & 0 & 1 \\ \underline{0} & \underline{0} & -\alpha_1 & -\alpha_o \end{bmatrix} \qquad x(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ -1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g^o(t) \tag{2.290}$$

com

$$\alpha_o = 2\xi_f w_f \qquad \alpha_1 = w_f^2 \tag{2.291}$$

A matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y$ pode pois ser quantificada resolvendo a equação de Liapunov associada a (2.289)

$$\underline{A}\underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y \underline{A}^T + 2\pi \underline{S}_o = \underline{0} \tag{2.292}$$

em que agora a matriz $\underline{S}_o$ tem a seguinte composição

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 1 \end{bmatrix} S_o \tag{2.293}$$

Sendo a matriz $\underline{\mu}_y$ constituída pelo conjunto das seguintes sub-matrizes

$$\underline{\mu}_y = \begin{bmatrix} E[\underline{q}\underline{q}^T] & E[\underline{q}\dot{\underline{q}}^T] & E[\underline{q}u_f] & E[\underline{q}\dot{u}_f] \\ E[\dot{\underline{q}}\underline{q}^T] & E[\dot{\underline{q}}\dot{\underline{q}}^T] & E[\dot{\underline{q}}u_f] & E[\dot{\underline{q}}\dot{u}_f] \\ E[u_f\underline{q}^T] & E[u_f\dot{\underline{q}}^T] & E[u_f u_f] & E[u_f\dot{u}_f] \\ E[\dot{u}_f\underline{q}^T] & E[\dot{u}_f\dot{\underline{q}}^T] & E[\dot{u}_f u_f] & E[\dot{u}_f\dot{u}_f] \end{bmatrix} \tag{2.294}$$

torna-se evidente que dela fazem parte também todos os momentos espectrais de ordem $m = 0,2$ da resposta referente aos deslocamentos q_i, já que

$$\underline{\lambda}_o^q = E[\underline{q}\underline{q}^T] \qquad \underline{\lambda}_2^q = E[\dot{\underline{q}}\dot{\underline{q}}^T] \tag{2.295}$$

Por conseguinte, fácil se torna igualmente a quantificação dos correspondentes momentos espectrais da resposta relativos a quaisquer outras variáveis de controlo, como momentos flectores, esforços transversos e esforços axiais nas extremidades das barras. Para tal, é apenas necessário proceder à constituição da matriz de transformação $\underline{\Psi}$, que estabelece a relação

$$\underline{r}(t) = \underline{\Psi}\,\underline{q}(t) \tag{2.296}$$

entre as quantidades estruturais consideradas $\underline{r}(t)$ e o vector dos deslocamentos $\underline{q}(t)$, uma vez que, da natureza linear dessa transformação, decorre que

$$\lambda_m^{r_i} = \underline{\Psi}_i \underline{\lambda}_m^q \underline{\Psi}_i^T \qquad (m = 0,2) \tag{2.297}$$

Uma vez conhecidos os valores dos momentos espectrais relativos a cada variável de controlo $r_i(t)$, podem finalmente estimar-se também

os correspondentes valores médios dos picos de resposta num intervalo de tempo T, para o que se poderá lançar mão das expressões aproximadas (1.265) ou (1.267).

Deste modo, a estrutura sequencial do programa de cálculo PROG2, a que corresponde o fluxograma simplificado apresentado na figura 2.14, pode descrever-se sumariamente da seguinte forma:

a) Leitura de dados gerais, realizada de forma semelhante à seguida no programa PROG1, podendo a caracterização da excitação sísmica ser efectuada através das seguintes três vias distintas

   - com base num ruído branco de densidade espectral de potência S_o;
   - através de um espectro de Kanai-Tajimi definido pelos parâmetros S_o, w_f e ξ_f;
   - mediante espectros de Kanai-Tajimi que aproximam convenientemente os espectros de potência poli-lineares definidos pelo RSA;

b) Formação das matrizes de massa e de rigidez referidas às coordenadas generalizadas pré-definidas, seguindo procedimento idêntico ao utilizado no programa PROG1;

c) Determinação das frequências naturais e modos de vibração da estrutura, recorrendo às mesmas sub-rotinas de cálculo de valores e vectores próprios, e efectuando o mesmo tipo de normalização;

d) Construção da matriz de amortecimento $\underline{C}$, de acordo com a relação

$$\underline{C} = \alpha_c \underline{M} + \beta_c \underline{K} \qquad (2.298)$$

   sendo os valores de α_c e β_c determinados por forma que os coeficientes de amortecimento modal correspondentes aos primeiro e segundo modos assumam um valor pré-fixado;

e) Composição da matriz de estado $\underline{A}$ e da matriz caracterizadora da excitação $\underline{S}_o$, definidas pelas relações (2.283), ou (2.290)

e (2.293), consoante a excitação seja do tipo ruído branco ou ruído branco filtrado;

f) Resolução da equação de Liapunov (2.282) ou (2.292), mediante o recurso a um eficiente algoritmo de cálculo formulado por Bartels e Stewart [24], quantificando-se desse modo todos os elementos da matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y$ e, simultaneamente, das matrizes de momentos espectrais $\underline{\lambda}_o^q$ e $\underline{\lambda}_2^q$;

g) Formação da matriz de transformação $\underline{\Psi}$, que estabelece a relação linear (2.296) entre os valores dos deslocamentos q_i e dos momentos flectores, esforços transversos e esforços axiais nas extremidades das barras da estrutura; A i-ésima coluna dessa matriz é neste caso obtida quantificando os valores daqueles esforços associados à configuração do sistema definida por

$$q_i = 1 \quad \wedge \quad q_j = 0 \qquad (j = 1,\ldots,N; j \neq i) \qquad (2.299)$$

h) Determinação dos momentos espectrais de ordem $m (m = 0,2)$ relativos a cada uma das variáveis de controlo da resposta r_i, anteriormente mencionadas, tendo por base a equação (2.297);

i) Estimativa dos valores médios dos picos de resposta, quer em termos dos deslocamentos $q_i(t)$, quer dos esforços $r_i(t)$, mediante a utilização das expressões de Davenport (1.265) ou de Jervis (1.267).

Para além da realização dos programas PROG1 e PROG2, foi ainda elaborado um terceiro programa de cálculo automático (PROG3), que possibilita a análise da resposta dinâmica de estruturas reticuladas planas a excitações sísmicas, caracterizadas através dos espectros médios de resposta de aceleração de base regulamentares, $S_a(w,\xi)$. A organização deste programa, à qual corresponde o fluxograma simplificado indicado na figura 2.15, pode neste caso ser sumarizada do seguinte modo:

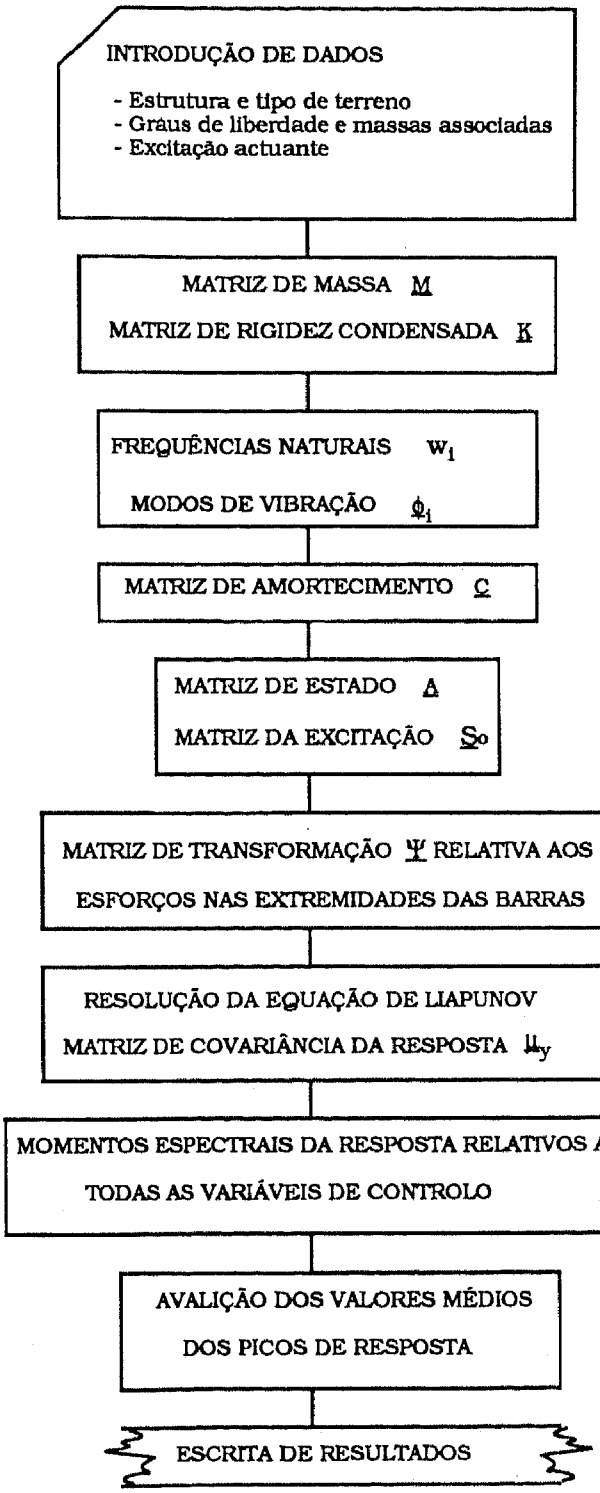


Fig. 2.14 - Fluxograma simplificado do programa PROG2.

a) Leitura dos dados gerais, os quais coincidem praticamente com os fornecidos para utilização do programa PROG1, salvo em alguns aspectos relativos à caracterização da excitação actuante;

b) Formação das matrizes de massa e de rigidez referidas às coordenadas generalizadas associadas aos graus de liberdade pré-definidos;

c) Determinação das frequências naturais e modos de vibração da estrutura;

d) Quantificação dos factores modais de excitação sísmica, também designados por factores de participação modal

$$L_j = \underline{\phi}_j^T \underline{\underline{M}}\, \underline{a} \qquad (j = 1, \ldots, M) \tag{2.300}$$

e dos valores máximos das coordenadas modais

$$|\zeta_j|_{máx} = |L_j| S_a(w_j, \xi_j)/w_j^2 \qquad (j = 1, \ldots, M) \tag{2.301}$$

e) Cálculo das contribuições modais extremas para os deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade considerados na análise, dados por

$$\underline{q}_{j,máx} = \underline{\phi}_j |\zeta_j|_{máx} \qquad (j = 1, \ldots, M) \tag{2.302}$$

f) Cálculo da contribuição máxima do j-ésimo modo de vibração em relação a quaisquer variáveis de controlo $r_i(t)$, neste caso consideradas como os momentos flectores, esforços transversos e esforços axiais nas extremidades das diversas barras constituintes da estrutura; Designando essa contribuição por $|c_{ij}|_{máx}$, ela é obtida aplicando, segundo as coordenadas generalizadas pré-definidas, acções estáticas caracterizadas pelo vector

$$\underline{f}_{j,máx} = \underline{\underline{K}}\, \underline{q}_{j,máx} \qquad (j = 1, \ldots, M) \tag{2.303}$$

e quantificando os correspondentes valores absolutos dos esforços referidos.

g) Determinação dos valores máximos da resposta, $|r_i|_{máx}$, relativos a cada uma das quantidades estruturais analisadas, efectuando uma ponderação das diversas contribuições modais máximas, tendo

em conta os coeficientes de correlação espectral $\rho^{\zeta}_{o,kl}$ dados por (2.257), ou seja, através da relação (v. eq. 2.265)

$$|r_i|_{máx} = \left\{ \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \rho^{\zeta}_{o,kl} \, |c_{ik}|_{máx} \, |c_{il}|_{máx} \right\}^{1/2} \qquad (2.304)$$

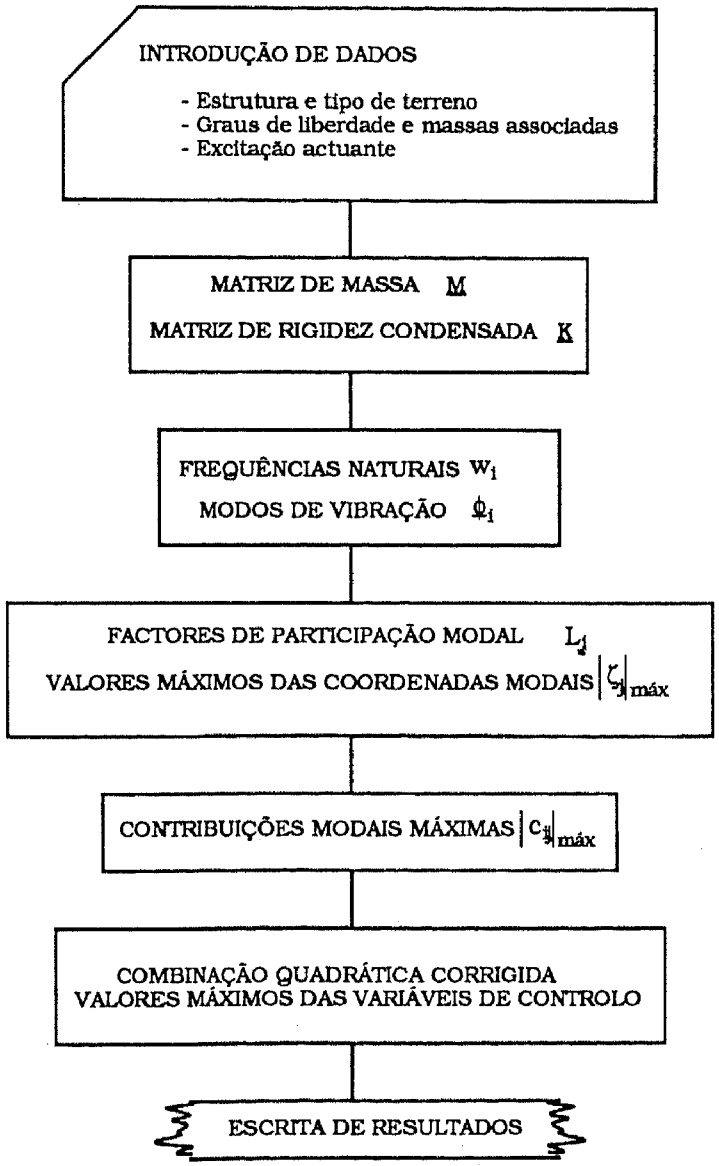


Fig. 2.15 - Fluxograma simplificado do programa PROG3.

2.5.3 - Exemplo de aplicação

Como exemplo de aplicação dos programas de cálculo anteriormente descritos, apresenta-se o caso de um pórtico plano de 7 pisos com barras ortogonais, suposto situado na zona D do território nacional e fundado em terreno tipo II.

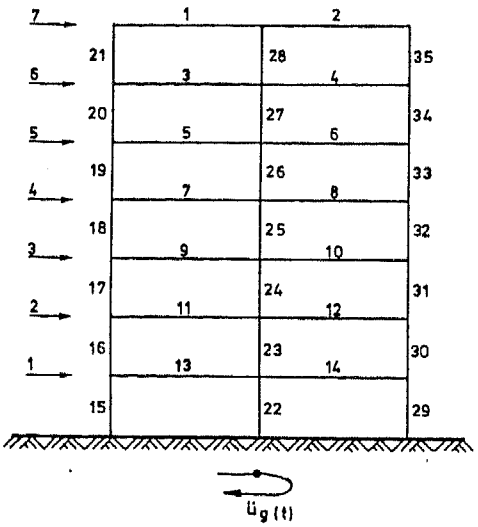


Fig. 2.16 - Pórtico de 7 pisos.

A numeração das barras da estrutura, e dos graus de liberdade considerados, encontra-se indicada na figura 2.16, sendo os seguintes os valores adoptados relativos às características geométricas, mecânicas e de massa:

- Comprimento das vigas ..... 6,0 m
- Comprimento dos pilares ..... 3,0 m
- Secção transversal de vigas e pilares ..... 40 x 60 cm^2
- Módulo de elasticidade ..... 30 GPa
- Coeficiente de amortecimento 0,05
- Coeficiente de comportamento 2,5
- Massa por piso ..... 50 t

tendo-se concluído serem os seguintes os valores das quatro primeiras frequências naturais (em Hz)

$$f_1 = 1,32 \qquad f_2 = 4,12 \qquad f_3 = 7,31 \qquad f_4 = 10,77$$

A análise da resposta sísmica da estrutura foi efectuada mediante o recurso aos três programas de cálculo anteriormente mencionados, e tomando por base a definição regulamentar das acções sísmicas tipo 1 e 2, realizada quer através de espectros de resposta, quer de espectros de potência.

Os cálculos efectuados possibilitaram não só constatar uma igualdade de resultados obtidos por aplicação dos programas PROG1 e PROG2, facto que serviu aliás para testar o seu bom funcionamento, mas também obter quadros de comparação de resultados alcançados mediante a consideração daquelas duas vias de caracterização regulamentar, neles figurando os valores máximos médios dos deslocamentos de andar e de momentos flectores e esforços transversos nas extremidades das barras, tendo em conta, em primeiro lugar, o contributo exclusivo do modo fundamental, e, seguidamente, o contributo dos quatro primeiros modos.

Da observação desses quadros (2.1 e 2.2), pode pois concluir-se em particular, que:

a) Se regista uma assinalável concordância dos valores obtidos caso se tenha apenas em consideração o efeito do primeiro modo de vibração, sendo as diferenças relativas encontradas inferiores a 2%, como era aliás de esperar, tendo em conta que os valores assumidos pelos espectros de resposta regulamentares (RES), e pelos espectros de resposta (POT), compatíveis com os correspondentes espectros de potência, são praticamente coincidentes, na vizinhança da frequência de 1,32 Hz, para ambas as acções sísmicas consideradas (v. fig. 2.11);

b) Se observa também uma satisfatória compatibilidade de resultados, quando se entra em consideração com os quatro primeiros modos de vibração, muito embora as diferenças relativas encontradas, em termos de esforços nas barras, sejam então percentualmente mais significativas, assumindo valores que oscilam entre cerca de 8 e 16% para o sismo 1, e 1 e 10% para o sismo 2.

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 1 (CONTRIBUICAO DO MODO 1)

VALORES MEDIOS DOS DESLOCAMENTOS MAXIMOS DE PISO

WMAX(MM) 1.202 3.156 5.112 6.861 8.293 9.337 9.972

VALORES MEDIOS DOS ESFORCOS MAXIMOS NAS BARRAS

NUM.	ME(KN*M)	MD(KN*M)	TE(KN)	TD(KN)
1	7.67	6.72	2.40	2.40
2	6.72	7.66	2.40	2.40
3	15.87	14.81	5.11	5.11
4	14.80	15.84	5.11	5.11
5	24.89	23.06	7.99	7.99
6	23.05	24.84	7.98	7.98
7	32.83	30.44	10.55	10.55
8	30.42	32.76	10.53	10.53
9	38.97	36.13	12.52	12.52
10	36.09	38.89	12.50	12.50
11	42.22	39.14	13.56	13.56
12	39.10	42.13	13.54	13.54
13	37.99	34.77	12.13	12.13
14	34.73	37.91	12.11	12.11
15	41.13	13.01	18.05	18.05
16	24.97	21.72	15.57	15.57
17	20.50	22.43	14.31	14.31
18	16.55	20.69	12.41	12.41
19	12.14	17.65	9.93	9.93
20	7.24	13.70	6.98	6.98
21	2.17	7.67	3.28	3.28
22	47.66	25.98	24.55	24.55
23	43.52	39.99	27.84	27.84
24	38.25	39.73	25.99	25.99
25	32.49	35.71	22.73	22.73
26	25.15	29.54	18.23	18.23
27	16.57	21.48	12.68	12.68
28	8.14	13.44	7.19	7.19

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 1 (CONTRIBUICAO DO MODO 1)

VALORES MEDIOS DOS DESLOCAMENTOS MAXIMOS DE PISO

WMAX(MM) 1.185 3.110 5.038 6.761 8.172 9.201 9.828

VALORES MEDIOS DOS ESFORCOS MAXIMOS NAS BARRAS

NUM.	ME(KN*M)	MD(KN*M)	TE(KN)	TD(KN)
1	7.56	6.62	2.36	2.36
2	6.62	7.55	2.36	2.36
3	15.64	14.60	5.04	5.04
4	14.59	15.61	5.03	5.03
5	24.53	22.73	7.88	7.88
6	22.71	24.48	7.87	7.87
7	32.35	30.00	10.39	10.39
8	29.97	32.29	10.38	10.38
9	38.41	35.60	12.33	12.33
10	35.57	38.33	12.32	12.32
11	41.61	38.57	13.36	13.36
12	38.54	41.52	13.34	13.34
13	37.44	34.27	11.95	11.95
14	34.23	37.35	11.93	11.93
15	40.53	12.82	17.78	17.78
16	24.61	21.41	15.34	15.34
17	20.20	22.10	14.10	14.10
18	16.30	20.39	12.23	12.23
19	11.96	17.39	9.78	9.78
20	7.14	13.50	6.88	6.88
21	2.14	7.56	3.23	3.23
22	46.97	25.60	24.19	24.19
23	42.89	39.41	27.43	27.43
24	37.70	39.15	25.62	25.62
25	32.02	35.19	22.40	22.40
26	24.78	29.11	17.97	17.97
27	16.33	21.17	12.50	12.50
28	8.02	13.24	7.09	7.09

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 2 (CONTRIBUICAO DO MODO 1)

VALORES MEDIOS DOS DESLOCAMENTOS MAXIMOS DE PISO

WMAX(MM) 1.547 4.061 6.577 8.827 10.669 12.012 12.831

VALORES MEDIOS DOS ESFORCOS MAXIMOS NAS BARRAS

NUM.	ME(KN*M)	MD(KN*M)	TE(KN)	TD(KN)
1	9.87	8.65	3.09	3.09
2	8.65	9.86	3.08	3.08
3	20.41	19.06	6.58	6.58
4	19.05	20.38	6.57	6.57
5	32.02	29.67	10.28	10.28
6	29.65	31.96	10.27	10.27
7	42.24	39.17	13.57	13.57
8	39.13	42.15	13.55	13.55
9	50.14	46.48	16.10	16.10
10	46.44	50.04	16.08	16.08
11	54.32	50.36	17.45	17.45
12	50.31	54.21	17.42	17.42
13	48.87	44.74	15.60	15.60
14	44.69	48.77	15.58	15.58
15	52.91	16.74	23.22	23.22
16	32.13	27.95	20.03	20.03
17	26.37	28.86	18.41	18.41
18	21.29	26.62	15.97	15.97
19	15.62	22.71	12.77	12.77
20	9.32	17.62	8.98	8.98
21	2.79	9.87	4.22	4.22
22	61.32	33.42	31.58	31.58
23	56.00	51.46	35.82	35.82
24	49.22	51.11	33.44	33.44
25	41.60	45.94	29.25	29.25
26	32.36	38.01	23.46	23.46
27	21.32	27.64	16.32	16.32
28	10.47	17.29	9.25	9.25

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 2 (CONTRIBUICAO DO MODO 1)

VALORES MEDIOS DOS DESLOCAMENTOS MAXIMOS DE PISO

WMAX(MM) 1.573 4.129 6.688 8.975 10.849 12.214 13.046

VALORES MEDIOS DOS ESFORCOS MAXIMOS NAS BARRAS

NUM.	ME(KN*M)	MD(KN*M)	TE(KN)	TD(KN)
1	10.04	8.79	3.14	3.14
2	8.79	10.02	3.14	3.14
3	20.76	19.38	6.69	6.69
4	19.37	20.72	6.68	6.68
5	32.56	30.17	10.46	10.46
6	30.15	32.50	10.44	10.44
7	42.95	39.83	13.80	13.80
8	39.79	42.86	13.78	13.78
9	50.99	47.26	16.37	16.37
10	47.21	50.88	16.35	16.35
11	55.23	51.21	17.74	17.74
12	51.16	55.12	17.71	17.71
13	49.70	45.49	15.86	15.86
14	45.44	49.59	15.84	15.84
15	53.80	17.02	23.61	23.61
16	32.67	28.42	20.36	20.36
17	26.82	29.34	18.72	18.72
18	21.64	27.07	16.24	16.24
19	15.88	23.09	12.99	12.99
20	9.47	17.92	9.13	9.13
21	2.84	10.04	4.29	4.29
22	62.36	33.99	32.11	32.11
23	56.94	52.32	36.42	36.42
24	50.05	51.97	34.01	34.01
25	42.50	46.71	29.74	29.74
26	32.90	38.65	23.85	23.85
27	21.68	28.10	16.59	16.59
28	10.64	17.58	9.41	9.41

Quadro 2.1 - Análise comparativa de resultados (contributo do modo 1).

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 1 (CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 4)

VALORES MEDIOS DOS DESLOCAMENTOS MAXIMOS DE PISO

WMAX(MM) 1.388 3.526 5.518 7.145 8.383 9.425 10.277

VALORES MEDIOS DOS ESFORCOS MAXIMOS NAS BARRAS

NUM.	ME(KN*M)	MD(KN*M)	TE(KN)	TD(KN)
1	11.38	9.88	3.54	3.54
2	9.81	11.20	3.50	3.50
3	21.70	20.18	6.98	6.98
4	20.09	21.50	6.93	6.93
5	30.87	28.52	9.90	9.90
6	28.44	30.67	9.85	9.85
7	37.69	34.85	12.09	12.09
8	34.73	37.43	12.03	12.03
9	42.60	39.35	13.66	13.66
10	39.18	42.24	13.57	13.57
11	45.89	42.45	14.72	14.72
12	42.30	45.60	14.65	14.65
13	43.01	39.28	13.71	13.71
14	39.16	42.77	13.66	13.66
15	48.18	16.42	21.54	21.54
16	27.71	25.57	17.57	17.57
17	23.89	25.87	16.37	16.37
18	20.17	23.71	14.37	14.37
19	16.42	21.30	12.44	12.44
20	11.33	17.69	9.57	9.57
21	4.83	11.38	5.34	5.34
22	55.39	31.11	28.83	28.83
23	48.00	45.40	31.09	31.09
24	42.79	44.30	28.93	28.93
25	37.51	40.10	25.77	25.77
26	31.50	35.31	22.22	22.22
27	22.97	27.79	16.89	16.89
28	12.97	19.69	10.88	10.88

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 1 (CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 4)

VALORES MEDIOS DOS DESLOCAMENTOS MAXIMOS DE PISO

WMAX(MM) 1.226 3.182 5.095 6.784 8.174 9.209 9.857

VALORES MEDIOS DOS ESFORCOS MAXIMOS NAS BARRAS

NUM.	ME(KN*M)	MD(KN*M)	TE(KN)	TD(KN)
1	9.57	8.32	2.98	2.98
2	8.26	9.43	2.95	2.95
3	18.42	17.13	5.92	5.92
4	17.07	18.26	5.89	5.89
5	26.61	24.61	8.54	8.54
6	24.56	26.48	8.51	8.51
7	33.21	30.78	10.66	10.66
8	30.73	33.10	10.64	10.64
9	38.58	35.75	12.39	12.39
10	35.70	38.47	12.36	12.36
11	42.01	38.94	13.49	13.49
12	38.89	41.90	13.47	13.47
13	38.49	35.20	12.28	12.28
14	35.14	38.36	12.25	12.25
15	42.21	13.93	18.68	18.68
16	24.97	22.45	15.75	15.75
17	20.49	22.56	14.25	14.25
18	17.20	20.64	12.49	12.49
19	13.87	18.12	10.54	10.54
20	9.69	15.12	8.15	8.15
21	4.27	9.57	4.51	4.51
22	48.77	26.97	25.24	25.24
23	43.62	40.59	28.05	28.05
24	37.93	39.53	25.79	25.79
25	32.81	35.54	22.74	22.74
26	26.93	30.45	19.09	19.09
27	19.55	23.79	14.41	14.41
28	10.95	16.56	9.16	9.16

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 2 (CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 4)

VALORES MEDIOS DOS DESLOCAMENTOS MAXIMOS DE PISO

WMAX(MM) 1.661 4.269 6.775 8.940 10.698 12.035 12.926

VALORES MEDIOS DOS ESFORCOS MAXIMOS NAS BARRAS

NUM.	ME(KN*M)	MD(KN*M)	TE(KN)	TD(KN)
1	11.76	10.26	3.67	3.67
2	10.22	11.66	3.65	3.65
3	23.42	21.82	7.54	7.54
4	21.77	23.29	7.51	7.51
5	35.08	32.46	11.26	11.26
6	32.39	34.92	11.22	11.22
7	44.58	41.28	14.31	14.31
8	41.18	44.37	14.26	14.26
9	51.76	47.89	16.61	16.61
10	47.76	51.49	16.54	16.54
11	56.08	51.93	18.00	18.00
12	51.82	55.84	17.94	17.94
13	51.81	47.35	16.53	16.53
14	47.24	51.58	16.47	16.47
15	57.39	19.06	25.50	25.50
16	33.55	30.35	21.16	21.16
17	28.23	30.82	19.54	19.54
18	23.19	26.23	16.98	16.98
19	17.85	24.70	14.12	14.12
20	11.33	19.69	10.31	10.31
21	3.64	11.76	5.24	5.24
22	66.15	36.77	34.31	34.31
23	58.34	54.59	37.61	37.61
24	51.49	53.46	34.92	34.92
25	44.29	48.08	30.73	30.73
26	35.66	40.99	25.53	25.53
27	24.58	30.88	18.48	18.48
28	12.88	20.48	11.12	11.12

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 2 (CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 4)

VALORES MEDIOS DOS DESLOCAMENTOS MAXIMOS DE PISO

WMAX(MM) 1.585 4.150 6.705 8.982 10.849 12.217 13.055

VALORES MEDIOS DOS ESFORCOS MAXIMOS NAS BARRAS

NUM.	ME(KN*M)	MD(KN*M)	TE(KN)	TD(KN)
1	10.66	9.32	3.33	3.33
2	9.30	10.60	3.32	3.32
3	21.60	20.15	6.96	6.96
4	20.12	21.53	6.94	6.94
5	33.18	30.73	10.65	10.65
6	30.70	33.09	10.63	10.63
7	43.20	40.05	13.87	13.87
8	40.01	43.10	13.85	13.85
9	51.03	47.30	16.39	16.39
10	47.25	50.92	16.36	16.36
11	55.35	51.31	17.78	17.78
12	51.26	55.23	17.75	17.75
13	50.00	45.76	15.96	15.96
14	45.70	49.88	15.93	15.93
15	54.29	17.35	23.87	23.87
16	32.77	28.72	20.48	20.48
17	26.89	29.47	18.76	18.76
18	21.90	27.13	16.31	16.31
19	16.46	23.30	13.21	13.21
20	10.29	18.41	9.52	9.52
21	3.60	10.66	4.70	4.70
22	62.87	34.38	32.42	32.42
23	57.15	52.66	36.60	36.60
24	50.11	52.08	34.05	34.05
25	42.73	46.81	29.83	29.83
26	33.54	39.04	24.18	24.18
27	22.67	28.89	17.18	17.18
28	11.57	18.61	10.05	10.05

Quadro 2.2 - Análise comparativa de resultados (contributo dos modos 1 a 4).

Em relação a estas diferenças, convirá apenas realçar que elas podem decorrer da acção combinada de dois factores, tendo o primeiro a ver com as discrepâncias de ordenadas espectrais (RES) e (POT) verificadas na figura 2.11, e o segundo, e provavelmente o mais importante neste caso, com a forma mais correcta como as abordagens estocásticas, baseadas na utilização dos espectros de potência regulamentares, têm em conta os contributos conjugados dos diversos modos de vibração envolvidos.

2.5.4 - Aplicação à análise sísmica de cascas. Descrição do programa de cálculo automático PROG4

No sentido de realçar a fácil aplicação da formulação modal utilizada em 2.5.3 à análise de estruturas de maior complexidade, foi desenvolvido um outro programa de cálculo automático, que possibilita a análise estocástica do comportamento dinâmico de cascas, quando a respectiva base de apoio é sujeita a movimentos sísmicos, caracterizados pelas densidades espectrais de potência definidas pelo RSA.

Para o efeito, é considerada uma discretização da estrutura numa malha de elementos finitos de volume V_e e superfície exterior S_e, sendo o vector deslocamento

$$\underline{u}(t)^T = [u_x(t), u_y(t), u_z(t)] \tag{2.305}$$

de um ponto genérico do interior de um elemento, num instante t, referido a um referencial geral $oxyz$ (oz vertical), expresso em função do vector dos deslocamentos nos n pontos nodais

$$\underline{u}^e(t)^T = \left[\underline{u}_1^e(t)^T, \underline{u}_2^e(t)^T, \ldots, \underline{u}_n^e(t)^T\right] \tag{2.306}$$

através da aproximação

$$\underline{u}(t) \cong \underline{N}\,\underline{u}^e(t) = \sum_{i=1}^{n} \underline{N}_i \underline{u}_i^e(t) \tag{2.307}$$

em que $\underline{N}$ é uma matriz de funções interpoladoras, constituída por sub-matrizes $\underline{N}_i$.

Designando o vector das componentes de deformação no ponto genérico considerado por $\underline{\epsilon}$, este pode relacionar-se com os vectores de deslocamentos $\underline{u}$ e $\underline{u}^e$ através das relações geométricas

$$\underline{\epsilon} = \underline{L}\underline{u} = \underline{L}\underline{N}\underline{u}^e = \underline{B}\underline{u}^e \tag{2.308}$$

em que $\underline{L}$ é um operador diferencial e $\underline{B}$ é conhecida por matriz das deformações.

O vector das componentes de tensão correspondente $\underline{\sigma}$ pode, por seu turno, relacionar-se com $\underline{\epsilon}$, no caso de materiais de comportamento elástico e linear, através das relações constitutivas

$$\underline{\sigma} = \underline{D}(\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_o) + \underline{\sigma}_o \tag{2.309}$$

em que $\underline{D}$ é a conhecida matriz de elasticidade, e $\underline{\epsilon}_o$ e $\underline{\sigma}_o$ são vectores caracterizadores dos valores inicias das componentes de deformação e de tensão respectivamente.

Tendo, por outro lado, em consideração todas as forças actuantes sobre o elemento, traduzidas nomeadamente por:

- $\underline{f}^e$ - vector das componentes das forças concentradas aplicadas nos nós;
- $\underline{F}_v$ - vector das componentes das forças distribuidas ao longo do volume;
- $\underline{F}_s$ - vector das componentes das forças de superfície aplicadas ao longo da superfície exterior de elementos na fronteira;
- $-\rho\ddot{\underline{u}}$ - vector das componentes das forças fictícias de inércia aplicadas em cada ponto genérico do interior do elemento (ρ - massa específica);
- $-c\dot{u}$ - vector das componentes das forças de amortecimento viscoso (c - coeficiente de amortecimento por unidade de volume);

as equações de equilíbrio do elemento podem ser obtidas mediante aplicação do teorema dos trabalhos virtuais, igualando o trabalho virtual de deformação, relativo a uma qualquer deformação virtual caracterizada por um vector de deslocamentos nodais $\delta \underline{u}^e$, ao correspondente trabalho virtual das forças exteriores, incluindo nestas as forças de amortecimento viscoso e as forças fictícias de inércia. Resulta deste modo que

$$\underline{M}^e \ddot{\underline{u}}^e + \underline{C}^e \dot{\underline{u}}^e + \underline{K}^e \underline{u}^e = \underline{p}^e(t) \tag{2.310}$$

em que as matrizes de massa $\underline{M}^e$, de amortecimento $\underline{C}^e$ e de rigidez do elemento $\underline{K}^e$ são definidas respectivamente pelas equações

$$\begin{aligned} \underline{M}^e &= \int_{V_e} \rho \underline{N}^T \underline{N} dV \\ \underline{C}^e &= \int_{V_e} c \underline{N}^T \underline{N} dV \\ \underline{K}^e &= \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \end{aligned} \tag{2.311}$$

ao passo que o vector das acções exteriores $\underline{p}^e(t)$ vem dado por

$$\underline{p}^e(t) = \underline{f}^e + \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{F}_V dV + \int_{S_e} \underline{N}^T \underline{F}_S dS + \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon}_o dV - \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{\sigma}_o dV \tag{2.312}$$

No caso presente, a discretização da estrutura assentou na utilização do elemento finito de casca isoparamétrico de 8 nós introduzido por Ahamad [1], cujas potencialidades foram já devidamente realçadas por Zienkiewicz [259] e Delgado [85].

Este tipo de elemento, que resulta de uma degeneração do elemento tridimensional de 20 nós, introduz uma significativa redução do número de pontos nodais, com a consequente economia de tempo de cálculo, tirando partido do facto de, em estruturas tipo casca, ser desprezável a energia de deformação correspondente a tensões normais ao folheto médio, mantendo-se as normais a esta superfície praticamente rectas após a deformação. Por outro lado, a hipótese de Kirchoff, usualmente admitida na teoria das cascas, segundo a qual, após a deformação, a

normal se mantém normal é suprimida, tornando-se viável a partir daí ter em consideração a deformação da estrutura por efeito do esforço transverso de acordo com a teoria de Mindlin, aspecto particularmente importante no caso das cascas espessas.

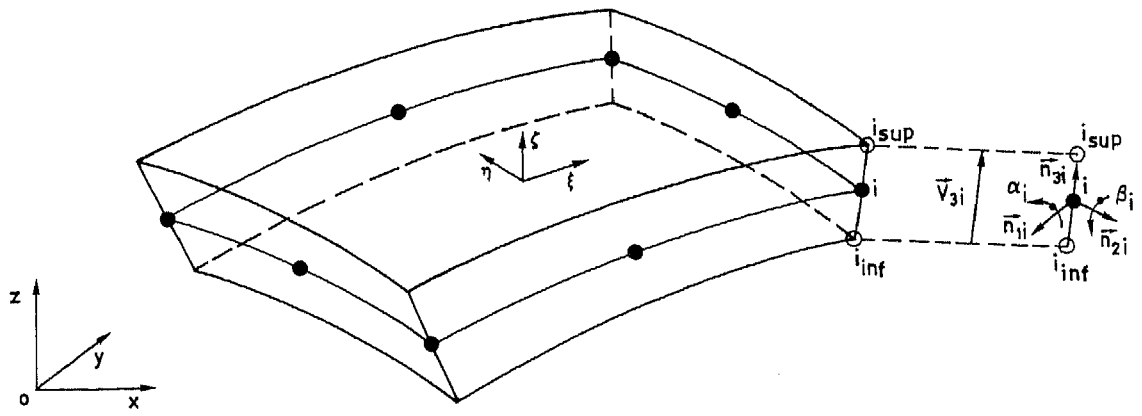


Fig. 2.17 - Elemento de casca espessa de Ahmad.

A geometria do elemento é descrita pela figura 2.17, sendo este delimitado por duas faces exteriores curvas (superior e inferior) e por quatro secções ao longo da espessura geradas por linhas rectas.

O movimento da normal ao folheto médio num nó genérico i é traduzido por 3 componentes de deslocamento segundo cada um dos eixos de um referencial geral $oxyz$, e 2 rotações α_i e β_i em torno de dois versores $\overrightarrow{n_{1i}}$ e $\overrightarrow{n_{2i}}$, ortogonais e existentes no plano normal ao versor $\overrightarrow{n_{3i}}$, correspondente à direcção definida pelos nós i_{sup} e i_{inf}.

As regras adoptadas para fixação dos versores $\overrightarrow{n_{1i}}$ e $\overrightarrow{n_{2i}}$ são as referidas em [259] e [85], sendo as funções interpoladoras intervenientes na constituição das sub-matrizes $\underline{N}_i$ da família Serendipity, sendo expressas em termos das coordenadas curvilíneas ξ e η [259], e servindo simultaneamente para relacionar as coordenadas de um ponto genérico da superfície média do elemento no referencial geral com as coordenadas dos nós, através da relação

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{med} = \sum_{i=1}^{n} \underline{N}_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_i \tag{2.313}$$

dada a natureza isoparamétrica do tipo de elemento utilizado.

Agrupando adequadamente as equações de equilíbrio (2.310), relativas à totalidade dos elementos finitos envolvidos na discretização, e tendo em consideração a actuação exclusiva de um movimento sísmico na base, suposta rígida, caracterizado por três componentes de aceleração $\ddot{u}_g^x(t)$, $\ddot{u}_g^y(t)$ e $\ddot{u}_g^z(t)$, o movimento da estrutura no seu conjunto pode ser descrito por uma equação do tipo

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}(t)+\underline{K}\underline{q}(t)=-\underline{M}\underline{a}_x\ddot{u}_g^x(t)-\underline{M}\underline{a}_y\ddot{u}_g^y(t)-\underline{M}\underline{a}_z\ddot{u}_g^z(t) \tag{2.314}$$

em que $\underline{q}(t)$ é o vector que agrupa a totalidade dos deslocamentos nodais relativos, referidos ao referencial geral $oxyz$ (três translações e duas rotações por nó), e $\underline{M}$, $\underline{C}$ e $\underline{K}$ são as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez globais correspondentes. Os vectores $\underline{a}_x$, $\underline{a}_y$ e $\underline{a}_z$ estabelecem, por seu lado, a seguinte relação entre o vector dos deslocamentos nodais absolutos $\underline{q}^t(t)$, o vector dos deslocamentos nodais relativos $\underline{q}(t)$ e as três componentes do movimento sísmico da fundação

$$\underline{q}^t(t)=\underline{q}(t)+\underline{a}_x u_g^x(t)+\underline{a}_y u_g^y(t)+\underline{a}_z u_g^z(t) \tag{2.315}$$

constituindo pois vectores que reunem os valores dos deslocamentos de corpo rígido da estrutura, decorrentes da introdução de um deslocamento de base unitário segundo cada uma das direcções ox, oy e oz respectivamente.

Sendo a transformada de Fourier do processo estocástico vectorial caracterizador da excitação

$$\underline{P}^q(w)=-\underline{M}\underline{a}_x F[\ddot{u}_g^x(t)]-\underline{M}\underline{a}_y F[\ddot{u}_g^y(t)]-\underline{M}\underline{a}_z F[\ddot{u}_g^z(t)] \tag{2.316}$$

e atendendo à definição da matriz das densidades espectrais conjuntas da excitação $\underline{S}_{pq}(w)$, fácil é concluir que

$$\underline{S}_{pq}(w) = \underline{M}\underline{a}_x\underline{a}_x^T\underline{M}^T S_{\ddot{u}_g}^{x}(w) + \underline{M}\underline{a}_x\underline{a}_y^T\underline{M}^T S_{\ddot{u}_g}^{xy}(w) + \underline{M}\underline{a}_x\underline{a}_z^T\underline{M}^T S_{\ddot{u}_g}^{xz}(w) +$$
$$+ \underline{M}\underline{a}_y\underline{a}_x^T\underline{M}^T S_{\ddot{u}_g}^{yx}(w) + \underline{M}\underline{a}_y\underline{a}_y^T\underline{M}^T S_{\ddot{u}_g}^{y}(w) + \underline{M}\underline{a}_y\underline{a}_z^T\underline{M}^T S_{\ddot{u}_g}^{yz}(w) +$$
$$+ \underline{M}\underline{a}_z\underline{a}_x^T\underline{M}^T S_{\ddot{u}_g}^{zx}(w) + \underline{M}\underline{a}_z\underline{a}_y^T\underline{M}^T S_{\ddot{u}_g}^{zy}(w) + \underline{M}\underline{a}_z\underline{a}_z^T\underline{M}^T S_{\ddot{u}_g}^{z}(w) \qquad (2.317)$$

em que $S_{\ddot{u}_g}^{x}(w)$, $S_{\ddot{u}_g}^{y}(w)$ e $S_{\ddot{u}_g}^{z}(w)$ representam as funções densidade espectral de potência relativas às três componentes da aceleração de base, ao passo que $S_{\ddot{u}_g}^{xy}(w)$, $S_{\ddot{u}_g}^{yx}(w)$, $S_{\ddot{u}_g}^{xz}(w)$, $S_{\ddot{u}_g}^{zx}(w)$, $S_{\ddot{u}_g}^{yz}(w)$ e $S_{\ddot{u}_g}^{zy}(w)$ representam as correspondentes densidades espctrais cruzadas.

Admitindo o actual Regulamento de Segurança e Acções que

$$\begin{aligned} &S_{\ddot{u}_g}^{x}(w) = S_{\ddot{u}_g}^{y}(w) = S_{\ddot{u}_g}(w) \\ &S_{\ddot{u}_g}^{z}(w) = 4/9\, S_{\ddot{u}_g}(w) \\ &S_{\ddot{u}_g}^{xy}(w) = S_{\ddot{u}_g}^{yx}(w) = 0 \\ &S_{\ddot{u}_g}^{xz}(w) = S_{\ddot{u}_g}^{zx} = 0 \\ &S_{\ddot{u}_g}^{yz}(w) = S_{\ddot{u}_g}^{zy}(w) = 0 \end{aligned} \qquad (2.318)$$

a relação (2.317) pode simplificar-se significativamente, dando origem a

$$\underline{S}_{pq}(w) = \left[\underline{M}\underline{a}_x\underline{a}_x^T\underline{M}^T + \underline{M}\underline{a}_y\underline{a}_y^T\underline{M}^T + \frac{4}{9}\underline{M}\underline{a}_z\underline{a}_z^T\underline{M}^T \right] S_{\ddot{u}_g}(w) \qquad (2.319)$$

em que as ordenadas da função $S_{\ddot{u}_g}(w)$ se encontram definidas no quadro III-I do RSA.

Deste modo, seguindo a formulação modal referida em 2.3.3, todos os momentos espectrais de ordem m $(m=0,1,2)$ da resposta, em termos das coordenadas modais, podem ser quantificados mediante o recurso às equações (2.273) a (2.276).

Uma vez constituídas as matrizes $\underline{\lambda}_m^t$ $(m=0,1,2)$, pode de imediato passar-se ao cálculo das matrizes de momentos espectrais referentes a quaisquer variáveis de controlo $\underline{r}(t)$, susceptíveis de serem expressas através de uma transformação linear do tipo

$$\underline{r}(t) = \underline{\Psi}\underline{\zeta}(t) \qquad (2.320)$$

designadamente os deslocamentos nodais relativos ao referencial geral $oxyz$ (caso em que $\underline{\Psi} \equiv \underline{\Phi}$), ou as componentes de tensão nos pontos de Gauss utilizados nas integrações numéricas efectuadas para quantificação das matrizes de rigidez elementares, de acordo com a regra de Gauss-Legendre [259].

Nestas circunstâncias, foi elaborado um programa de cálculo automático (PROG4) com vista à análise estocástica da resposta sísmica de cascas, e cuja organização, esquematicamente caracterizada pelo fluxograma simplificado indicado na figura 2.18, é a seguinte sob a forma sequencial:

a) Leitura de dados gerais envolvendo

   - caracterização topológica da estrutura;
   - definição das características geométricas, mecânicas e de massa de cada um dos elementos finitos considerados na discretização do sistema;
   - identificação das condições de apoio;
   - definição do número de modos a ter em conta na análise dinâmica e dos coeficientes de amortecimento modais;
   - caracterização da excitação actuante em termos das densidades espectrais de potência definidas pelo actual RSA, tornando-se necessário proceder à indicação das componentes de aceleração de base intervenientes, bem como do tipo de terreno e do coeficiente de sismicidade da região;

b) Formação das matrizes de massa e de rigidez da estrutura referidas às coordenadas generalizadas associadas aos N graus de liberdade considerados (5 por cada nó livre), tendo-se para o efeito recorrido a um programa de análise estática de cascas pelo método dos elementos finitos elaborado na Universidade de Swansea e disponível no Gabinete de Estruturas da FEUP, já anteriormente desenvolvido também por Delgado [85] e Faria [102] para outras finalidades, designadamente no domínio da

análise sísmica por integração no tempo, e por espectros de resposta, respectivamente;

c) Determinação dos valores das M primeiras frequências naturais ($M \leq N$), e dos M modos de vibração correspondentes, mediante o recurso às sub-rotinas MTS1, MHS, MESP, MVHS e MVS, da biblioteca SL-MATH da IBM, para resolução de problemas de valores e vectores próprios;

d) Quantificação dos elementos da matriz dos momentos espectrais da resposta no espaço modal $\lambda^{\xi}_{m,ij}$ $(m=0,1,2)$, efectuando o duplo somatório a que refere a equação (2.273) para cada par (i,j); O integral nela indicado é calculado numericamente de forma inteiramente semelhante ao caso das estruturas reticuladas planas, ou seja, avaliando o valor da função integranda, para cada frequência w, através das relações (2.274) a (2.276), e diferindo apenas no facto de cada elemento da matriz das densidades espectrais conjuntas da excitação $S^{pq}_{kl}(w)$ passar a ser dado pela equação (2.319), em função das densidades espectrais de potência da aceleração de base definidas regulamentarmente;

e) Construção de matrizes de transformação $\underline{\Psi}$, estabelecendo a relação linear, verificada ao nível de cada elemento finito, entre as componentes de tensão nos diversos pontos de Gauss e os valores das M coordenadas modais; A i-ésima coluna de cada matriz $\underline{\Psi}$ é obtida quantificando os valores das componentes de tensão naqueles pontos do elemento finito em questão, quando os nós respectivos são sujeitos a deslocamentos caracterizados pelo modo de vibração de ordem i;

f) Determinação dos momentos espectrais de ordem $m(m=0,1,2)$ correspondentes a cada uma das variáveis de controlo $r_i(t)$ da resposta do sistema, mediante aplicação da equação (2.278), podendo cada processo estocástico vectorial $\underline{r}(t)$ representar quer o conjunto das componentes de tensão nos pontos de Gauss de cada elemento, quer a totalidade das componentes de des-

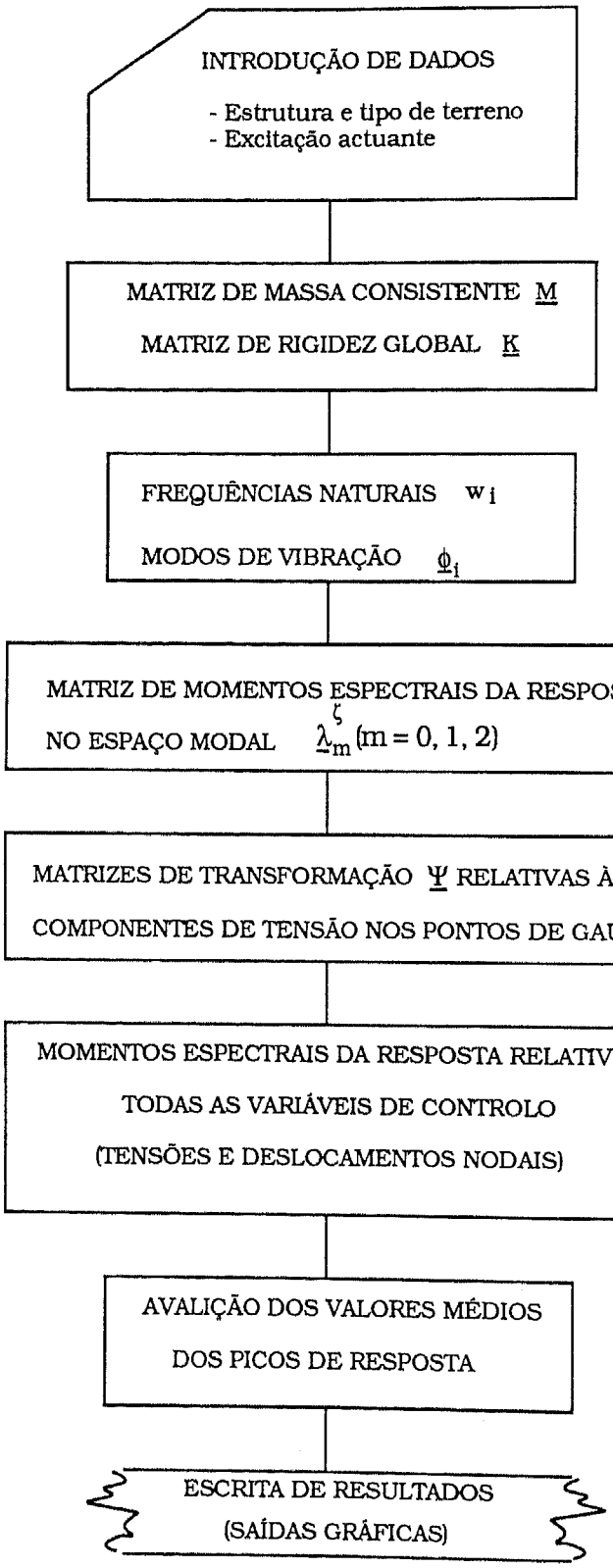


Fig. 2.18 - Fluxograma simplificado do programa PROG4

locamento relativo dos diversos pontos nodais em relação à base (situação em que $\underline{\Psi} = \underline{\Phi}$);

g) Estimativa dos valores médios dos picos de resposta, em termos de tensões e de deslocamentos, mediante a aplicação da expressão de Vanmarke (2.279), e uma vez conhecido o tempo T de duração da amostra estacionária.

2.5.5 - Exemplos de aplicação. Os casos das barragens do Alto Lindoso e do Caldeirão

No sentido de testar o bom funcionamento do programa de cálculo PROG4, foram tratados diversos exemplos práticos, procurando confrontar os resultados obtidos mediante a sua utilização, com os alcançados através de um outro programa já anteriormente utilizado por Delgado e Faria [90], e que se baseia numa análise por espectros de resposta.

Dois dos exemplos tratados referem-se a duas barragens que a Empresa Electricidade de Portugal (EDP) tem presentemente em fase de construção, e que são as barragens abóbada de dupla curvatura do Alto Lindoso (110 m de altura e 270 m de corda) e do Caldeirão (38 m de altura e 101 m de corda), indicando-se seguidamente alguns dos principais resultados obtidos para uma das hipóteses ensaiadas, isto é, considerando a albufeira vazia, a fundação rígida e a actuação de um sismo com as características regulamentares na direcção montante-jusante.

Para o efeito, foi efectuada uma discretização daquelas estruturas numa malha de elementos finitos de casca degenerados de 8 nós, tal como se encontra esquematicamente representado na figura 2.19, tendo-se procedido apenas à análise do comportamento dinâmico de meia barragem, dada a simetria da estrutura e da solicitação actuante em relação ao plano vertical ortogonal ao folheto médio passando pela secção de fecho, tendo-se obtido os seguintes valores das frequências naturais (em Hz) correspondentes a alguns dos modos simétricos:

Modo	Alto Lindoso	Caldeirão
1	4,35	12,01
2	5,08	17,33
3	7,49	24,89
4	7,78	28,77
5	10,77	34,44
6		38,83

Nos quadros 2.3 a 2.10, apresentam-se assim, para as hipóteses referidas, e considerando o contributo de um ou mais modos de vibração simétricos, os valores obtidos das componentes de tensão normal nos pontos de Gauss (em Pa) das superfícies de montante e de jusante de um dos elementos finitos sujeitos a esforços mais elevados, tomando como referencial um sistema de eixos inserido no plano osculador à superfície em causa, sendo um deles horizontal.

Simultaneamente, e no sentido de facilitar a análise comparativa dos resultados alcançados mediante a utilização dos programas de cálculo anteriormente referidos, tendo por base as duas formas alternativas de caracterização regulamentar da acção sísmica, apresentam-se também nas figuras 2.20 a 2.35 representações gráficas das distribuições das tensões normais máximas segundo os arcos e consolas ao longo dos paramentos de montante e jusante, para as diversas hipóteses consideradas (escalas: Alto Lindoso 1 cm : 1,25 MPa; Caldeirão 1 cm : 0,31 MPa).

A finalizar o capítulo, apresenta-se ainda, a título complementar, uma sugestiva análise gráfica comparativa de resultados, em termos de deslocamentos horizontais das barragens do Alto Lindoso e Caldeirão na direcção montante-jusante, para o caso da acção sísmica condicionante (sismo 1), e tendo em consideração o contributo dos vários modos de vibração mencionados.

Da observação dos principais resultados obtidos, sintetizados nos quadros e gráficos apresentados, constatou-se em particular que:

a) tomando em consideração exclusivamente o contributo do modo fundamental, se regista uma perfeita concordância dos valores obtidos pelas duas vias, salvo no caso da barragem do Caldeirão e da actuação do sismo 2, situação em que a abordagem por espectros de resposta conduz a valores cerca de 12% superiores;

b) esta maior diferença deve-se essencialmente à discrepância de ordenadas espectrais verificada entre o espectro de resposta regulamentar (sismo 2, terreno tipo I, $\xi = 0,05$) e o espectro de resposta compatível com o correspondente espectro de potência (v. Fig. 2.11), registando-se um significativo decaimento das ordenadas espectrais (POT) para frequências elevadas, originando uma diferença relativa de ordenadas na vizinhança da frequência fundamental da barragem do Caldeirão ($f_1 = 12,01 Hz$) precisamente daquela ordem de grandeza;

c) muito embora as diferenças relativas encontradas tendam a agravar-se por inclusão na análise do problema de um número mais elevado de modos de vibração, chegando a atingir em alguns casos valores da ordem dos 20 a 25% em termos de componentes de tensão normal segundo os arcos e consolas, as representações gráficas de tensões apresentadas mostram todavia registar-se de uma forma global, para as duas barragens analisadas, uma satisfatória compatibilidade geral de resultados;

d) também em termos de deslocamentos horizontais na direcção montante-jusante se verifica, para o caso da acção sísmica condicionante (sismo 1), uma boa correspondência geral dos resultados alcançados pelas duas vias; as diferenças relativas máximas encontradas são neste caso de 17% para a barragem do Alto Lindoso e de 7% para o Caldeirão, sendo essas diferenças essencialmente devidas, tal como no que respeita às componentes de tensão nos pontos de Gauss, à forma mais apurada como as abordagens estocásticas possibilitam efectuar a conjugação das diversas contribuições modais envolvidas.

****
ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA
****

SISMO 1 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DO MODO 1)

****
ELEMENTO 1
****

NOS(1 2 3 13 20 19 18 12)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.801 Y= -3.059 Z= 3.944

	SIGMA 0.22860632E+04	SIGMA 0.62531794E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.01185350	-0.99912030	-0.04022529
	-0.28241211	0.04193542	-0.95837623
	0.95921981	0.00000000	-0.28266090

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.598 Y= 1.704 Z= 3.944

	SIGMA 0.47154883E+04	SIGMA 0.35022840E+05	
SISTEMA DE EIXOS	-0.00437719	-0.99909550	-0.04229489
	-0.10284925	0.04252077	-0.99378806
	0.99468756	0.00000000	-0.10294235

PT. GAUSS NO. 2 X= -17.410 Y= -1.852 Z= 3.944

	SIGMA 0.73596680E+04	SIGMA 0.46652669E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.04194238	-0.98852199	-0.14513761
	-0.27443701	0.15107650	-0.94966310
	0.96069008	0.00000002	-0.27762341

PT. GAUSS NO. 2 X= -16.683 Y= 2.879 Z= 3.944

	SIGMA 0.68364258E+04	SIGMA 0.59343340E+05	
SISTEMA DE EIXOS	-0.01423947	-0.98818702	-0.15259004
	-0.09181720	0.15325296	-0.98391235
	0.99567407	0.00000001	-0.09291482

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.850 Y= -6.190 Z= 14.722

	SIGMA 0.81089812E+05	SIGMA 0.52541937E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.01197290	-0.99905246	-0.04183988
	-0.27485675	0.04351924	-0.96049964
	0.96141052	0.00000001	-0.27511734

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.549 Y= 0.523 Z= 14.722

	SIGMA 0.37237777E+05	SIGMA 0.12255112E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.00523783	-0.99895209	-0.04546740
	-0.11432296	0.04576810	-0.99238884
	0.99342972	0.00000000	-0.11444283

PT. GAUSS NO. 4 X= -17.591 Y= -4.924 Z= 14.722

	SIGMA 0.75503875E+05	SIGMA 0.40811394E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.04214811	-0.98767418	-0.15074295
	-0.26595581	0.15652460	-0.95119238
	0.96306324	0.00000000	-0.26927477

PT. GAUSS NO. 4 X= -16.502 Y= 1.774 Z= 14.722

	SIGMA 0.53185687E+05	SIGMA 0.12249797E+05	
SISTEMA DE EIXOS	-0.01701870	-0.98634017	-0.16383845
	-0.10190761	0.16472000	-0.98106176
	0.99464804	0.00000000	-0.10331893

****
ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA
****

SISMO 1 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DO MODO 1)

****
ELEMENTO 1
****

NOS(1 2 3 13 20 19 18 12)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.801 Y= -3.059 Z= 3.944

	SIGMA 0.23359592E+04	SIGMA 0.63896694E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.01185350	-0.99912030	-0.04022529
	-0.28241211	0.04193542	-0.95837623
	0.95921981	0.00000000	-0.28266090

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.598 Y= 1.704 Z= 3.944

	SIGMA 0.48184219E+04	SIGMA 0.35787355E+05	
SISTEMA DE EIXOS	-0.00437719	-0.99909550	-0.04229489
	-0.10284925	0.04252077	-0.99378806
	0.99468756	0.00000000	-0.10294235

PT. GAUSS NO. 2 X= -17.410 Y= -1.852 Z= 3.944

	SIGMA 0.75203281E+04	SIGMA 0.49714731E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.04194238	-0.98852199	-0.14513761
	-0.27443701	0.15107650	-0.94966310
	0.96069008	0.00000002	-0.27762341

PT. GAUSS NO. 2 X= -16.683 Y= 2.879 Z= 3.944

	SIGMA 0.69856602E+04	SIGMA 0.60636652E+05	
SISTEMA DE EIXOS	-0.01423947	-0.98818702	-0.15259004
	-0.09181720	0.15325296	-0.98391235
	0.99567407	0.00000001	-0.09291482

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.850 Y= -6.190 Z= 14.722

	SIGMA 0.82859937E+05	SIGMA 0.53688769E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.01197290	-0.99905246	-0.04183988
	-0.27485675	0.04351924	-0.96049964
	0.96141052	0.00000001	-0.27511734

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.549 Y= 0.523 Z= 14.722

	SIGMA 0.38050602E+05	SIGMA 0.12522644E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.00523783	-0.99895209	-0.04546740
	-0.11432296	0.04576810	-0.99238884
	0.99342972	0.00000000	-0.11444283

PT. GAUSS NO. 4 X= -17.591 Y= -4.924 Z= 14.722

	SIGMA 0.77152062E+05	SIGMA 0.41702306E+06	
SISTEMA DE EIXOS	-0.04214811	-0.98767418	-0.15074295
	-0.26595581	0.15652460	-0.95119238
	0.96306324	0.00000000	-0.26927477

PT. GAUSS NO. 4 X= -16.502 Y= 1.774 Z= 14.722

	SIGMA 0.54346816E+05	SIGMA 0.12517211E+05	
SISTEMA DE EIXOS	-0.01701870	-0.98634017	-0.16383845
	-0.10190761	0.16472000	-0.98106176
	0.99464804	0.00000000	-0.10331893

Quadro 2.3 - Análise comparativa de resultados (Barragem do Alto Lindoso).

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 2 NA DIRECCAO *OY*

(CONTRIBUICAO DO MODO 1)

ELEMENTO 1

NOS(1 2 3 13 20 19 18 12)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.801 Y= -3.059 Z= 3.944

	SIGMA 0.13418167E+04		SIGMA 0.36703394E+06	
SISTEMA	-0.01185350	-0.99912030	-0.04022529	
DE	-0.28241211	0.04193542	-0.95837623	
EIXOS	0.95921981	0.00000000	-0.28266090	

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.598 Y= 1.704 Z= 3.944

	SIGMA 0.27677910E+04		SIGMA 0.20556883E+05	
SISTEMA	-0.00437719	-0.99909550	-0.04229489	
DE	-0.10284925	0.04252077	-0.99378806	
EIXOS	0.99468756	0.00000000	-0.10294235	

PT. GAUSS NO. 2 X= -17.410 Y= -1.852 Z= 3.944

	SIGMA 0.43198086E+04		SIGMA 0.28557012E+06	
SISTEMA	-0.04194238	-0.98852199	-0.14513761	
DE	-0.27443701	0.15107650	-0.94966310	
EIXOS	0.96069008	0.00000002	-0.27762341	

PT. GAUSS NO. 2 X= -16.683 Y= 2.879 Z= 3.944

	SIGMA 0.40126877E+04		SIGMA 0.34831922E+05	
SISTEMA	-0.01423947	-0.98818702	-0.15259004	
DE	-0.09181720	0.15325296	-0.98391235	
EIXOS	0.99567407	0.00000001	-0.09291482	

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.850 Y= -6.190 Z= 14.722

	SIGMA 0.47596273E+05		SIGMA 0.30839762E+06	
SISTEMA	-0.01197290	-0.99905246	-0.04183988	
DE	-0.27485675	0.04351924	-0.96049964	
EIXOS	0.96141052	0.00000001	-0.27511734	

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.549 Y= 0.523 Z= 14.722

	SIGMA 0.21856937E+05		SIGMA 0.71932312E+05	
SISTEMA	-0.00523783	-0.99895209	-0.04546740	
DE	-0.11432296	0.04576810	-0.99238884	
EIXOS	0.99342972	0.00000000	-0.11444283	

PT. GAUSS NO. 4 X= -17.591 Y= -4.924 Z= 14.722

	SIGMA 0.44317547E+05		SIGMA 0.23954537E+06	
SISTEMA	-0.04214811	-0.98767418	-0.15074295	
DE	-0.26595581	0.15652460	-0.95119238	
EIXOS	0.96306324	0.00000000	-0.26927477	

PT. GAUSS NO. 4 X= -16.502 Y= 1.774 Z= 14.722

	SIGMA 0.31217770E+05		SIGMA 0.71901055E+04	
SISTEMA	-0.01701870	-0.98634017	-0.16383845	
DE	-0.10190761	0.16472000	-0.98106176	
EIXOS	0.99464804	0.00000000	-0.10331893	

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 2 NA DIRECCAO *OY*

(CONTRIBUICAO DO MODO 1)

ELEMENTO 1

NOS(1 2 3 13 20 19 18 12)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.801 Y= -3.059 Z= 3.944

	SIGMA 0.13313005E+04		SIGMA 0.36415737E+06	
SISTEMA	-0.01185350	-0.99912030	-0.04022529	
DE	-0.28241211	0.04193542	-0.95837623	
EIXOS	0.95921981	0.00000000	-0.28266090	

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.598 Y= 1.704 Z= 3.944

	SIGMA 0.27460972E+04		SIGMA 0.20395777E+05	
SISTEMA	-0.00437719	-0.99909550	-0.04229489	
DE	-0.10284925	0.04252077	-0.99378806	
EIXOS	0.99468756	0.00000000	-0.10294235	

PT. GAUSS NO. 2 X= -17.410 Y= -1.852 Z= 3.944

	SIGMA 0.42859570E+04		SIGMA 0.28333212E+06	
SISTEMA	-0.04194238	-0.98852199	-0.14513761	
DE	-0.27443701	0.15107650	-0.94966310	
EIXOS	0.96069008	0.00000002	-0.27762341	

PT. GAUSS NO. 2 X= -16.683 Y= 2.879 Z= 3.944

	SIGMA 0.39812412E+04		SIGMA 0.34558941E+05	
SISTEMA	-0.01423947	-0.98818702	-0.15259004	
DE	-0.09181720	0.15325296	-0.98391235	
EIXOS	0.99567407	0.00000001	-0.09291482	

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.850 Y= -6.190 Z= 14.722

	SIGMA 0.47223211E+05		SIGMA 0.30598075E+06	
SISTEMA	-0.01197290	-0.99905246	-0.04183988	
DE	-0.27485675	0.04351924	-0.96049964	
EIXOS	0.96141052	0.00000001	-0.27511734	

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.549 Y= 0.523 Z= 14.722

	SIGMA 0.21685645E+05		SIGMA 0.71368562E+05	
SISTEMA	-0.00523783	-0.99895209	-0.04546740	
DE	-0.11432296	0.04576810	-0.99238884	
EIXOS	0.99342972	0.00000000	-0.11444283	

PT. GAUSS NO. 4 X= -17.591 Y= -4.924 Z= 14.722

	SIGMA 0.43970230E+05		SIGMA 0.23766812E+06	
SISTEMA	-0.04214811	-0.98767418	-0.15074295	
DE	-0.26595581	0.15652460	-0.95119238	
EIXOS	0.96306324	0.00000000	-0.26927477	

PT. GAUSS NO. 4 X= -16.502 Y= 1.774 Z= 14.722

	SIGMA 0.30973121E+05		SIGMA 0.71337578E+04	
SISTEMA	-0.01701870	-0.98634017	-0.16383845	
DE	-0.10190761	0.16472000	-0.98106176	
EIXOS	0.99464804	0.00000000	-0.10331893	

Quadro 2.4 - Análise comparativa de resultados (Barragem do Alto Lindoso).

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 1 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 5)

ELEMENTO 1

NOS(1 2 3 13 20 19 18 12)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.801 Y= -3.059 Z= 3.944

	SIGMA 0.48608250E+05		SIGMA 0.70936931E+06	
SISTEMA	-0.01185350	-0.99912030		-0.04022529
DE	-0.28241211	0.04193542		-0.95837623
EIXOS	0.95921981	0.00000000		-0.28266090

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.598 Y= 1.704 Z= 3.944

	SIGMA 0.55516648E+05		SIGMA 0.82715844E+06	
SISTEMA	-0.00437719	-0.99909550		-0.04229489
DE	-0.10284925	0.04252077		-0.99378806
EIXOS	0.99468756	0.00000000		-0.10294235

PT. GAUSS NO. 2 X= -17.410 Y= -1.852 Z= 3.944

	SIGMA 0.45202801E+05		SIGMA 0.64147362E+06	
SISTEMA	-0.04194238	-0.98852199		-0.14513761
DE	-0.27443701	0.15107650		-0.94966310
EIXOS	0.96069008	0.00000002		-0.27762341

PT. GAUSS NO. 2 X= -16.683 Y= 2.879 Z= 3.944

	SIGMA 0.52120180E+05		SIGMA 0.65963681E+06	
SISTEMA	-0.01423947	-0.98818702		-0.15259004
DE	-0.09181720	0.15325296		-0.98391235
EIXOS	0.99567407	0.00000001		-0.09291482

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.850 Y= -6.190 Z= 14.722

	SIGMA 0.20483556E+06		SIGMA 0.52310369E+06	
SISTEMA	-0.01197290	-0.99905246		-0.04183988
DE	-0.27485675	0.04351924		-0.96049964
EIXOS	0.96141052	0.00000001		-0.27511734

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.549 Y= 0.523 Z= 14.722

	SIGMA 0.19333050E+06		SIGMA 0.64618125E+06	
SISTEMA	-0.00523783	-0.99895209		-0.04546740
DE	-0.11432296	0.04576810		-0.99238884
EIXOS	0.99342972	0.00000000		-0.11444283

PT. GAUSS NO. 4 X= -17.591 Y= -4.924 Z= 14.722

	SIGMA 0.19442856E+06		SIGMA 0.44100500E+06	
SISTEMA	-0.04214811	-0.98767418		-0.15074295
DE	-0.26595581	0.15652460		-0.95119238
EIXOS	0.96306324	0.00000000		-0.26927477

PT. GAUSS NO. 4 X= -16.502 Y= 1.774 Z= 14.722

	SIGMA 0.19362381E+06		SIGMA 0.48705750E+06	
SISTEMA	-0.01701870	-0.98634017		-0.16383845
DE	-0.10190761	0.16472000		-0.98106176
EIXOS	0.99464804	0.00000000		-0.10331893

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 1 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 5)

ELEMENTO 1

NOS(1 2 3 13 20 19 18 12)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.801 Y= -3.059 Z= 3.944

	SIGMA 0.53314230E+05		SIGMA 0.83971200E+06	
SISTEMA	-0.01185350	-0.99912030		-0.04022529
DE	-0.28241211	0.04193542		-0.95837623
EIXOS	0.95921981	0.00000000		-0.28266090

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.598 Y= 1.704 Z= 3.944

	SIGMA 0.60740941E+05		SIGMA 0.90056200E+06	
SISTEMA	-0.00437719	-0.99909550		-0.04229489
DE	-0.10284925	0.04252077		-0.99378806
EIXOS	0.99468756	0.00000000		-0.10294235

PT. GAUSS NO. 2 X= -17.410 Y= -1.852 Z= 3.944

	SIGMA 0.49049059E+05		SIGMA 0.65856900E+06	
SISTEMA	-0.04194238	-0.98852199		-0.14513761
DE	-0.27443701	0.15107650		-0.94966310
EIXOS	0.96069008	0.00000002		-0.27762341

PT. GAUSS NO. 2 X= -16.683 Y= 2.879 Z= 3.944

	SIGMA 0.55766148E+05		SIGMA 0.70300794E+06	
SISTEMA	-0.01423947	-0.98818702		-0.15259004
DE	-0.09181720	0.15325296		-0.98391235
EIXOS	0.99567407	0.00000001		-0.09291482

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.850 Y= -6.190 Z= 14.722

	SIGMA 0.21960137E+06		SIGMA 0.66739137E+06	
SISTEMA	-0.01197290	-0.99905246		-0.04183988
DE	-0.27485675	0.04351924		-0.96049964
EIXOS	0.96141052	0.00000001		-0.27511734

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.549 Y= 0.523 Z= 14.722

	SIGMA 0.20754194E+06		SIGMA 0.75354637E+06	
SISTEMA	-0.00523783	-0.99895209		-0.04546740
DE	-0.11432296	0.04576810		-0.99238884
EIXOS	0.99342972	0.00000000		-0.11444283

PT. GAUSS NO. 4 X= -17.591 Y= -4.924 Z= 14.722

	SIGMA 0.20649387E+06		SIGMA 0.46956900E+06	
SISTEMA	-0.04214811	-0.98767418		-0.15074295
DE	-0.26595581	0.15652460		-0.95119238
EIXOS	0.96306324	0.00000000		-0.26927477

PT. GAUSS NO. 4 X= -16.502 Y= 1.774 Z= 14.722

	SIGMA 0.20488562E+06		SIGMA 0.52397394E+06	
SISTEMA	-0.01701870	-0.98634017		-0.16383845
DE	-0.10190761	0.16472000		-0.98106176
EIXOS	0.99464804	0.00000000		-0.10331893

Quadro 2.5 - Análise comparativa de resultados (Barragem do Alto Lindoso).

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 2 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 5)

ELEMENTO 1

NOS(1 2 3 13 20 19 18 12)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.801 Y= -3.059 Z= 3.944

	SIGMA 0.24674344E+05	SIGMA 0.38530000E+06	
SISTEMA	-0.01185350	-0.99912030	-0.04022529
DE	-0.28241211	0.04193542	-0.95837623
EIXOS	0.95921981	0.00000000	-0.28266090

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.598 Y= 1.704 Z= 3.944

	SIGMA 0.28466879E+05	SIGMA 0.41842819E+06	
SISTEMA	-0.00437719	-0.99909550	-0.04229489
DE	-0.10284925	0.04252077	-0.99378806
EIXOS	0.99468756	0.00000000	-0.10294235

PT. GAUSS NO. 2 X= -17.410 Y= -1.852 Z= 3.944

	SIGMA 0.22938090E+05	SIGMA 0.34571087E+06	
SISTEMA	-0.04194238	-0.98852199	-0.14513761
DE	-0.27443701	0.15107650	-0.94966310
EIXOS	0.96069008	0.00000002	-0.27762341

PT. GAUSS NO. 2 X= -16.683 Y= 2.879 Z= 3.944

	SIGMA 0.26720543E+05	SIGMA 0.34078656E+06	
SISTEMA	-0.01423947	-0.98818702	-0.15259004
DE	-0.09181720	0.15325296	-0.98391235
EIXOS	0.99567407	0.00000001	-0.09291482

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.850 Y= -6.190 Z= 14.722

	SIGMA 0.10222781E+06	SIGMA 0.29949412E+06	
SISTEMA	-0.01197290	-0.99905246	-0.04183988
DE	-0.27485675	0.04351924	-0.96049964
EIXOS	0.96141052	0.00000001	-0.27511734

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.549 Y= 0.523 Z= 14.722

	SIGMA 0.98391687E+05	SIGMA 0.32982656E+06	
SISTEMA	-0.00523783	-0.99895209	-0.04546740
DE	-0.11432296	0.04576810	-0.99238884
EIXOS	0.99342972	0.00000000	-0.11444283

PT. GAUSS NO. 4 X= -17.591 Y= -4.924 Z= 14.722

	SIGMA 0.97146812E+05	SIGMA 0.25388844E+06	
SISTEMA	-0.04214811	-0.98767418	-0.15074295
DE	-0.26595581	0.15652460	-0.95119238
EIXOS	0.96306324	0.00000000	-0.26927477

PT. GAUSS NO. 4 X= -16.502 Y= 1.774 Z= 14.722

	SIGMA 0.98193312E+05	SIGMA 0.25496244E+06	
SISTEMA	-0.01701870	-0.98634017	-0.16383845
DE	-0.10190761	0.16472000	-0.98106176
EIXOS	0.99464804	0.00000000	-0.10331893

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 2 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 5)

ELEMENTO 1

NOS(1 2 3 13 20 19 18 12)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.801 Y= -3.059 Z= 3.944

	SIGMA 0.27310137E+05	SIGMA 0.45888656E+06	
SISTEMA	-0.01185350	-0.99912030	-0.04022529
DE	-0.28241211	0.04193542	-0.95837623
EIXOS	0.95921981	0.00000000	-0.28266090

PT. GAUSS NO. 1 X= -4.598 Y= 1.704 Z= 3.944

	SIGMA 0.31226293E+05	SIGMA 0.47898331E+06	
SISTEMA	-0.00437719	-0.99909550	-0.04229489
DE	-0.10284925	0.04252077	-0.99378806
EIXOS	0.99468756	0.00000000	-0.10294235

PT. GAUSS NO. 2 X= -17.410 Y= -1.852 Z= 3.944

	SIGMA 0.25162816E+05	SIGMA 0.36362006E+06	
SISTEMA	-0.04194238	-0.98852199	-0.14513761
DE	-0.27443701	0.15107650	-0.94966310
EIXOS	0.96069008	0.00000002	-0.27762341

PT. GAUSS NO. 2 X= -16.683 Y= 2.879 Z= 3.944

	SIGMA 0.28557699E+05	SIGMA 0.37471394E+06	
SISTEMA	-0.01423947	-0.98818702	-0.15259004
DE	-0.09181720	0.15325296	-0.98391235
EIXOS	0.99567407	0.00000001	-0.09291482

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.850 Y= -6.190 Z= 14.722

	SIGMA 0.11421712E+06	SIGMA 0.36896819E+06	
SISTEMA	-0.01197290	-0.99905246	-0.04183988
DE	-0.27485675	0.04351924	-0.96049964
EIXOS	0.96141052	0.00000001	-0.27511734

PT. GAUSS NO. 3 X= -4.549 Y= 0.523 Z= 14.722

	SIGMA 0.10651356E+06	SIGMA 0.40445287E+06	
SISTEMA	-0.00523783	-0.99895209	-0.04546740
DE	-0.11432296	0.04576810	-0.99238884
EIXOS	0.99342972	0.00000000	-0.11444283

PT. GAUSS NO. 4 X= -17.591 Y= -4.924 Z= 14.722

	SIGMA 0.10738887E+06	SIGMA 0.26382137E+06	
SISTEMA	-0.04214811	-0.98767418	-0.15074295
DE	-0.26595581	0.15652460	-0.95119238
EIXOS	0.96306324	0.00000000	-0.26927477

PT. GAUSS NO. 4 X= -16.502 Y= 1.774 Z= 14.722

	SIGMA 0.10557875E+06	SIGMA 0.28024562E+06	
SISTEMA	-0.01701870	-0.98634017	-0.16383845
DE	-0.10190761	0.16472000	-0.98106176
EIXOS	0.99464804	0.00000000	-0.10331893

Quadro 2.6 - Análise comparativa de resultados (Barragem do Alto Lindoso).

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 1 NA DIRECCAO *OY*

(CONTRIBUICAO DO MODO 1)

ELEMENTO 10

NOS(29 38 43 44 45 39 31 30)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -12.648 Y= -2.516 Z= 5.192

	SIGMA 0.43666836E+04	SIGMA 0.19901512E+06	
SISTEMA	-0.09584463	-0.97060007	-0.22079206
DE	-0.38648856	0.24069738	-0.89033210
EIXOS	0.91730040	0.00000003	-0.39819539

PT. GAUSS NO. 1 X= -11.645 Y= 1.550 Z= 6.400

	SIGMA 0.65987617E+04	SIGMA 0.10405256E+06	
SISTEMA	-0.03598738	-0.97005856	-0.24019146
DE	-0.14373749	0.24287224	-0.95935047
EIXOS	0.98896122	0.00000000	-0.14817411

PT. GAUSS NO. 2 X= -13.165 Y= -4.419 Z= 10.036

	SIGMA 0.36074406E+05	SIGMA 0.16137606E+06	
SISTEMA	-0.09350699	-0.96477240	-0.24590784
DE	-0.34290326	0.26308572	-0.90177798
EIXOS	0.93470550	0.00000002	-0.35542375

PT. GAUSS NO. 2 X= -11.715 Y= 0.918 Z= 11.371

	SIGMA 0.33684340E+05	SIGMA 0.77527812E+05	
SISTEMA	-0.02737404	-0.96366400	-0.26571256
DE	-0.09875512	0.26711893	-0.95859015
EIXOS	0.99473494	0.00000000	-0.10247880

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.447 Y= -3.930 Z= 5.152

	SIGMA 0.67853047E+04	SIGMA 0.27179581E+06	
SISTEMA	-0.02752627	-0.99779952	-0.06032144
DE	-0.41423237	0.06630510	-0.90775305
EIXOS	0.90975493	0.00000003	-0.41514575

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.166 Y= 0.211 Z= 6.441

	SIGMA 0.19456472E+04	SIGMA 0.48407453E+05	
SISTEMA	-0.01130216	-0.99778104	-0.06561804
DE	-0.16936541	0.06658429	-0.98330134
EIXOS	0.98548871	0.00000000	-0.16974205

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.606 Y= -6.018 Z= 9.946

	SIGMA 0.39199852E+05	SIGMA 0.22512687E+06	
SISTEMA	-0.02837061	-0.99728227	-0.06799036
DE	-0.38404638	0.07367212	-0.92036980
EIXOS	0.92287791	0.00000002	-0.38509268

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.197 Y= -0.573 Z= 11.461

	SIGMA 0.21537035E+05	SIGMA 0.11606316E+05	
SISTEMA	-0.01025559	-0.99726146	-0.07324243
DE	-0.13828987	0.07395697	-0.98762649
EIXOS	0.99033868	0.00000000	-0.13866961

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 1 NA DIRECCAO *OY*

(CONTRIBUICAO DO MODO 1)

ELEMENTO 10

NOS(29 38 43 44 45 39 31 30)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -12.648 Y= -2.516 Z= 5.192

	SIGMA 0.43915312E+04	SIGMA 0.20014731E+06	
SISTEMA	-0.09584463	-0.97060007	-0.22079206
DE	-0.38648856	0.24069738	-0.89033210
EIXOS	0.91730040	0.00000003	-0.39819539

PT. GAUSS NO. 1 X= -11.645 Y= 1.550 Z= 6.400

	SIGMA 0.66362969E+04	SIGMA 0.10464444E+06	
SISTEMA	-0.03598738	-0.97005856	-0.24019146
DE	-0.14373749	0.24287224	-0.95935047
EIXOS	0.98896122	0.00000000	-0.14817411

PT. GAUSS NO. 2 X= -13.165 Y= -4.419 Z= 10.036

	SIGMA 0.36279609E+05	SIGMA 0.16229412E+06	
SISTEMA	-0.09350699	-0.96477240	-0.24590784
DE	-0.34290326	0.26308572	-0.90177798
EIXOS	0.93470550	0.00000002	-0.35542375

PT. GAUSS NO. 2 X= -11.715 Y= 0.918 Z= 11.371

	SIGMA 0.33875965E+05	SIGMA 0.77968875E+05	
SISTEMA	-0.02737404	-0.96366400	-0.26571256
DE	-0.09875512	0.26711893	-0.95859015
EIXOS	0.99473494	0.00000000	-0.10247880

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.447 Y= -3.930 Z= 5.152

	SIGMA 0.68239023E+04	SIGMA 0.27334181E+06	
SISTEMA	-0.02752627	-0.99779952	-0.06032144
DE	-0.41423237	0.06630510	-0.90775305
EIXOS	0.90975493	0.00000003	-0.41514575

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.166 Y= 0.211 Z= 6.441

	SIGMA 0.19567148E+04	SIGMA 0.48682855E+05	
SISTEMA	-0.01130216	-0.99778104	-0.06561804
DE	-0.16936541	0.06658429	-0.98330134
EIXOS	0.98548871	0.00000000	-0.16974205

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.606 Y= -6.018 Z= 9.946

	SIGMA 0.39422852E+05	SIGMA 0.22640769E+06	
SISTEMA	-0.02837061	-0.99728227	-0.06799036
DE	-0.38404638	0.07367212	-0.92036980
EIXOS	0.92287791	0.00000002	-0.38509268

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.197 Y= -0.573 Z= 11.461

	SIGMA 0.21659562E+05	SIGMA 0.11672348E+05	
SISTEMA	-0.01025559	-0.99726146	-0.07324243
DE	-0.13828987	0.07395697	-0.98762649
EIXOS	0.99033868	0.00000000	-0.13866961

Quadro 2.7 - Análise comparativa de resultados (Barragem do Caldeirão).

****
ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA
****

SISMO 2 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DO MODO 1)

****
ELEMENTO 10
****

NOS(29 38 43 44 45 39 31 30)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -12.648 Y= -2.516 Z= 5.192

	SIGMA 0.20017434E+04		SIGMA 0.91230937E+05	
SISTEMA	-0.09584463	-0.97060007	-0.22079206	
DE	-0.38648856	0.24069738	-0.89033210	
EIXOS	0.91730040	0.00000003	-0.39819539	

PT. GAUSS NO. 1 X= -11.645 Y= 1.550 Z= 6.400

	SIGMA 0.30249504E+04		SIGMA 0.47698930E+05	
SISTEMA	-0.03598738	-0.97005856	-0.24019146	
DE	-0.14373749	0.24287224	-0.95935047	
EIXOS	0.98896122	0.00000000	-0.14817411	

PT. GAUSS NO. 2 X= -13.165 Y= -4.419 Z= 10.036

	SIGMA 0.16536930E+05		SIGMA 0.73976687E+05	
SISTEMA	-0.09350699	-0.96477240	-0.24590784	
DE	-0.34290326	0.26306572	-0.90177798	
EIXOS	0.93470550	0.00000002	-0.35542375	

PT. GAUSS NO. 2 X= -11.715 Y= 0.918 Z= 11.371

	SIGMA 0.15441293E+05		SIGMA 0.35539707E+05	
SISTEMA	-0.02737404	-0.96366400	-0.26571256	
DE	-0.09875512	0.26711893	-0.95859015	
EIXOS	0.99473494	0.00000000	-0.10247880	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.447 Y= -3.930 Z= 5.152

	SIGMA 0.31104653E+04		SIGMA 0.12459444E+06	
SISTEMA	-0.02752627	-0.99779952	-0.06032144	
DE	-0.41423237	0.06630510	-0.90775305	
EIXOS	0.90975493	0.00000003	-0.41514575	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.166 Y= 0.211 Z= 6.441

	SIGMA 0.89190771E+03		SIGMA 0.22190555E+05	
SISTEMA	-0.01130216	-0.99778104	-0.06561804	
DE	-0.16936541	0.06658429	-0.98330134	
EIXOS	0.98548871	0.00000000	-0.16974205	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.606 Y= -6.018 Z= 9.946

	SIGMA 0.17969672E+05		SIGMA 0.10320087E+06	
SISTEMA	-0.02837061	-0.99728227	-0.06799036	
DE	-0.38404638	0.07367212	-0.92036980	
EIXOS	0.92287791	0.00000002	-0.38509268	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.197 Y= -0.573 Z= 11.461

	SIGMA 0.98728320E+04		SIGMA 0.53204727E+04	
SISTEMA	-0.01025559	-0.99726146	-0.07324243	
DE	-0.13828987	0.07395697	-0.98762649	
EIXOS	0.99033868	0.00000000	-0.13866961	

****
ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA
****

SISMO 2 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DO MODO 1)

****
ELEMENTO 10
****

NOS(29 38 43 44 45 39 31 30)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -12.648 Y= -2.516 Z= 5.192

	SIGMA 0.22405786E+04		SIGMA 0.10211606E+06	
SISTEMA	-0.09584463	-0.97060007	-0.22079206	
DE	-0.38648856	0.24069738	-0.89033210	
EIXOS	0.91730040	0.00000003	-0.39819539	

PT. GAUSS NO. 1 X= -11.645 Y= 1.550 Z= 6.400

	SIGMA 0.33858691E+04		SIGMA 0.53390086E+05	
SISTEMA	-0.03598738	-0.97005856	-0.24019146	
DE	-0.14373749	0.24287224	-0.95935047	
EIXOS	0.98896122	0.00000000	-0.14817411	

PT. GAUSS NO. 2 X= -13.165 Y= -4.419 Z= 10.036

	SIGMA 0.18510016E+05		SIGMA 0.82803187E+05	
SISTEMA	-0.09350699	-0.96477240	-0.24590784	
DE	-0.34290326	0.26306572	-0.90177798	
EIXOS	0.93470550	0.00000002	-0.35542375	

PT. GAUSS NO. 2 X= -11.715 Y= 0.918 Z= 11.371

	SIGMA 0.17283668E+05		SIGMA 0.39780094E+05	
SISTEMA	-0.02737404	-0.96366400	-0.26571256	
DE	-0.09875512	0.26711893	-0.95859015	
EIXOS	0.99473494	0.00000000	-0.10247880	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.447 Y= -3.930 Z= 5.152

	SIGMA 0.34815874E+04		SIGMA 0.13946037E+06	
SISTEMA	-0.02752627	-0.99779952	-0.06032144	
DE	-0.41423237	0.06630510	-0.90775305	
EIXOS	0.90975493	0.00000003	-0.41514575	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.166 Y= 0.211 Z= 6.441

	SIGMA 0.99832495E+03		SIGMA 0.24838211E+05	
SISTEMA	-0.01130216	-0.99778104	-0.06561804	
DE	-0.16936541	0.06658429	-0.98330134	
EIXOS	0.98548871	0.00000000	-0.16974205	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.606 Y= -6.018 Z= 9.946

	SIGMA 0.20113707E+05		SIGMA 0.11551419E+06	
SISTEMA	-0.02837061	-0.99728227	-0.06799036	
DE	-0.38404638	0.07367212	-0.92036980	
EIXOS	0.92287791	0.00000002	-0.38509268	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.197 Y= -0.573 Z= 11.461

	SIGMA 0.11050805E+05		SIGMA 0.59552812E+04	
SISTEMA	-0.01025559	-0.99726146	-0.07324243	
DE	-0.13828987	0.07395697	-0.98762649	
EIXOS	0.99033868	0.00000000	-0.13866961	

Quadro 2.8 - Análise comparativa de resultados (Barragem do Caldeirão).

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 1 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 6)

ELEMENTO 10

NOS(29 38 43 44 45 39 31 30)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -12.648 Y= -2.516 Z= 5.192

	SIGMA 0.60049375E+04		SIGMA 0.19685094E+06	
SISTEMA	-0.09584463	-0.97060007	-0.22079206	
DE	-0.38648856	0.24069738	-0.89033210	
EIXOS	0.91730040	0.00000003	-0.39819539	

PT. GAUSS NO. 1 X= -11.645 Y= 1.550 Z= 6.400

	SIGMA 0.78593594E+04		SIGMA 0.11277919E+06	
SISTEMA	-0.03598738	-0.97005856	-0.24019146	
DE	-0.14373749	0.24287224	-0.95935047	
EIXOS	0.98896122	0.00000000	-0.14817411	

PT. GAUSS NO. 2 X= -13.165 Y= -4.419 Z= 10.036

	SIGMA 0.33694211E+05		SIGMA 0.16065769E+06	
SISTEMA	-0.09350699	-0.96477240	-0.24590784	
DE	-0.34290326	0.26308572	-0.90177798	
EIXOS	0.93470550	0.00000002	-0.35542375	

PT. GAUSS NO. 2 X= -11.715 Y= 0.918 Z= 11.371

	SIGMA 0.33425324E+05		SIGMA 0.83174625E+05	
SISTEMA	-0.02737404	-0.96366400	-0.26571256	
DE	-0.09875512	0.26711893	-0.95859015	
EIXOS	0.99473494	0.00000000	-0.10247880	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.447 Y= -3.930 Z= 5.152

	SIGMA 0.74816875E+04		SIGMA 0.26185600E+06	
SISTEMA	-0.02752627	-0.99779952	-0.06032144	
DE	-0.41423237	0.06630510	-0.90775305	
EIXOS	0.90975493	0.00000003	-0.41514575	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.166 Y= 0.211 Z= 6.441

	SIGMA 0.63041797E+04		SIGMA 0.98981750E+05	
SISTEMA	-0.01130216	-0.99778104	-0.06561804	
DE	-0.16936541	0.06658429	-0.98330134	
EIXOS	0.98548871	0.00000000	-0.16974205	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.606 Y= -6.018 Z= 9.946

	SIGMA 0.37410105E+05		SIGMA 0.22106819E+06	
SISTEMA	-0.02837061	-0.99728227	-0.06799036	
DE	-0.38404638	0.07367212	-0.92036980	
EIXOS	0.92287791	0.00000002	-0.38509268	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.197 Y= -0.573 Z= 11.461

	SIGMA 0.27349363E+05		SIGMA 0.66936250E+05	
SISTEMA	-0.01025559	-0.99726146	-0.07324243	
DE	-0.13828987	0.07395697	-0.98762649	
EIXOS	0.99033868	0.00000000	-0.13866961	

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 1 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 6)

ELEMENTO 10

NOS(29 38 43 44 45 39 31 30)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -12.648 Y= -2.516 Z= 5.192

	SIGMA 0.11714207E+05		SIGMA 0.20776662E+06	
SISTEMA	-0.09584463	-0.97060007	-0.22079206	
DE	-0.38648856	0.24069738	-0.89033210	
EIXOS	0.91730040	0.00000003	-0.39819539	

PT. GAUSS NO. 1 X= -11.645 Y= 1.550 Z= 6.400

	SIGMA 0.17122887E+05		SIGMA 0.12156450E+06	
SISTEMA	-0.03598738	-0.97005856	-0.24019146	
DE	-0.14373749	0.24287224	-0.95935047	
EIXOS	0.98896122	0.00000000	-0.14817411	

PT. GAUSS NO. 2 X= -13.165 Y= -4.419 Z= 10.036

	SIGMA 0.52454113E+05		SIGMA 0.16392075E+06	
SISTEMA	-0.09350699	-0.96477240	-0.24590784	
DE	-0.34290326	0.26308572	-0.90177798	
EIXOS	0.93470550	0.00000002	-0.35542375	

PT. GAUSS NO. 2 X= -11.715 Y= 0.918 Z= 11.371

	SIGMA 0.61506652E+05		SIGMA 0.87162625E+05	
SISTEMA	-0.02737404	-0.96366400	-0.26571256	
DE	-0.09875512	0.26711893	-0.95859015	
EIXOS	0.99473494	0.00000000	-0.10247880	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.447 Y= -3.930 Z= 5.152

	SIGMA 0.13674691E+05		SIGMA 0.28665712E+06	
SISTEMA	-0.02752627	-0.99779952	-0.06032144	
DE	-0.41423237	0.06630510	-0.90775305	
EIXOS	0.90975493	0.00000003	-0.41514575	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.166 Y= 0.211 Z= 6.441

	SIGMA 0.16166973E+05		SIGMA 0.12905619E+06	
SISTEMA	-0.01130216	-0.99778104	-0.06561804	
DE	-0.16936541	0.06658429	-0.98330134	
EIXOS	0.98548871	0.00000000	-0.16974205	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.606 Y= -6.018 Z= 9.946

	SIGMA 0.60103434E+05		SIGMA 0.23535550E+06	
SISTEMA	-0.02837061	-0.99728227	-0.06799036	
DE	-0.38404638	0.07367212	-0.92036980	
EIXOS	0.92287791	0.00000002	-0.38509268	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.197 Y= -0.573 Z= 11.461

	SIGMA 0.61262699E+05		SIGMA 0.90143062E+05	
SISTEMA	-0.01025559	-0.99726146	-0.07324243	
DE	-0.13828987	0.07395697	-0.98762649	
EIXOS	0.99033868	0.00000000	-0.13866961	

Quadro 2.9 - Análise comparativa de resultados (Barragem do Caldeirão).

ANALISE POR ESPECTROS DE POTENCIA

SISMO 2 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 6)

ELEMENTO 10

NOS(29 38 43 44 45 39 31 30)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -12.648 Y= -2.516 Z= 5.192

	SIGMA 0.28271248E+04		SIGMA 0.88777687E+05	
SISTEMA	-0.09584463	-0.97060007	-0.22079206	
DE	-0.38648856	0.24069738	-0.89033210	
EIXOS	0.91730040	0.00000003	-0.39819539	

PT. GAUSS NO. 1 X= -11.645 Y= 1.550 Z= 6.400

	SIGMA 0.33851860E+04		SIGMA 0.52366809E+05	
SISTEMA	-0.03598738	-0.97005856	-0.24019146	
DE	-0.14373749	0.24287224	-0.95935047	
EIXOS	0.98896122	0.00000000	-0.14817411	

PT. GAUSS NO. 2 X= -13.165 Y= -4.419 Z= 10.036

	SIGMA 0.13368059E+05		SIGMA 0.73300187E+05	
SISTEMA	-0.09350699	-0.96477240	-0.24590784	
DE	-0.34290326	0.26308572	-0.90177798	
EIXOS	0.93470550	0.00000002	-0.35542375	

PT. GAUSS NO. 2 X= -11.715 Y= 0.918 Z= 11.371

	SIGMA 0.13706105E+05		SIGMA 0.38931312E+05	
SISTEMA	-0.02737404	-0.96366400	-0.26571256	
DE	-0.09875512	0.26711893	-0.95859015	
EIXOS	0.99473494	0.00000000	-0.10247880	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.447 Y= -3.930 Z= 5.152

	SIGMA 0.32208584E+04		SIGMA 0.11613862E+06	
SISTEMA	-0.02752627	-0.99779952	-0.06032144	
DE	-0.41423237	0.06630510	-0.90775305	
EIXOS	0.90975493	0.00000003	-0.41514575	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.166 Y= 0.211 Z= 6.441

	SIGMA 0.30390730E+04		SIGMA 0.43536707E+05	
SISTEMA	-0.01130216	-0.99778104	-0.06561804	
DE	-0.16936541	0.06658429	-0.98330134	
EIXOS	0.98548871	0.00000000	-0.16974205	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.606 Y= -6.018 Z= 9.946

	SIGMA 0.15297176E+05		SIGMA 0.99154500E+05	
SISTEMA	-0.02837061	-0.99728227	-0.06799036	
DE	-0.38404638	0.07367212	-0.92036980	
EIXOS	0.92287791	0.00000002	-0.38509268	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.197 Y= -0.573 Z= 11.461

	SIGMA 0.12052023E+05		SIGMA 0.28729262E+05	
SISTEMA	-0.01025559	-0.99726146	-0.07324243	
DE	-0.13828987	0.07395697	-0.98762649	
EIXOS	0.99033868	0.00000000	-0.13866961	

ANALISE POR ESPECTROS DE RESPOSTA

SISMO 2 NA DIRECCAO *OY*
(CONTRIBUICAO DOS MODOS 1 A 6)

ELEMENTO 10

NOS(29 38 43 44 45 39 31 30)

TENSOES NOS PONTOS DE GAUSS

PT. GAUSS NO. 1 X= -12.648 Y= -2.516 Z= 5.192

	SIGMA 0.59766289E+04		SIGMA 0.10600319E+06	
SISTEMA	-0.09584463	-0.97060007	-0.22079206	
DE	-0.38648856	0.24069738	-0.89033210	
EIXOS	0.91730040	0.00000003	-0.39819539	

PT. GAUSS NO. 1 X= -11.645 Y= 1.550 Z= 6.400

	SIGMA 0.87362031E+04		SIGMA 0.62022891E+05	
SISTEMA	-0.03598738	-0.97005856	-0.24019146	
DE	-0.14373749	0.24287224	-0.95935047	
EIXOS	0.98896122	0.00000000	-0.14817411	

PT. GAUSS NO. 2 X= -13.165 Y= -4.419 Z= 10.036

	SIGMA 0.26762258E+05		SIGMA 0.83632812E+05	
SISTEMA	-0.09350699	-0.96477240	-0.24590784	
DE	-0.34290326	0.26308572	-0.90177798	
EIXOS	0.93470550	0.00000002	-0.35542375	

PT. GAUSS NO. 2 X= -11.715 Y= 0.918 Z= 11.371

	SIGMA 0.31380902E+05		SIGMA 0.44470969E+05	
SISTEMA	-0.02737404	-0.96366400	-0.26571256	
DE	-0.09875512	0.26711893	-0.95859015	
EIXOS	0.99473494	0.00000000	-0.10247880	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.447 Y= -3.930 Z= 5.152

	SIGMA 0.69768789E+04		SIGMA 0.14625469E+06	
SISTEMA	-0.02752627	-0.99779952	-0.06032144	
DE	-0.41423237	0.06630510	-0.90775305	
EIXOS	0.90975493	0.00000003	-0.41514575	

PT. GAUSS NO. 3 X= -3.166 Y= 0.211 Z= 6.441

	SIGMA 0.82484531E+04		SIGMA 0.65844937E+05	
SISTEMA	-0.01130216	-0.99778104	-0.06561804	
DE	-0.16936541	0.06658429	-0.98330134	
EIXOS	0.98548871	0.00000000	-0.16974205	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.606 Y= -6.018 Z= 9.946

	SIGMA 0.30664980E+05		SIGMA 0.12007912E+06	
SISTEMA	-0.02837061	-0.99728227	-0.06799036	
DE	-0.38404638	0.07367212	-0.92036980	
EIXOS	0.92287791	0.00000002	-0.38509268	

PT. GAUSS NO. 4 X= -3.197 Y= -0.573 Z= 11.461

	SIGMA 0.31256473E+05		SIGMA 0.45991520E+05	
SISTEMA	-0.01025559	-0.99726146	-0.07324243	
DE	-0.13828987	0.07395697	-0.98762649	
EIXOS	0.99033868	0.00000000	-0.13866961	

Quadro 2.10 - Análise comparativa de resultados (Barragem do Caldeirão).

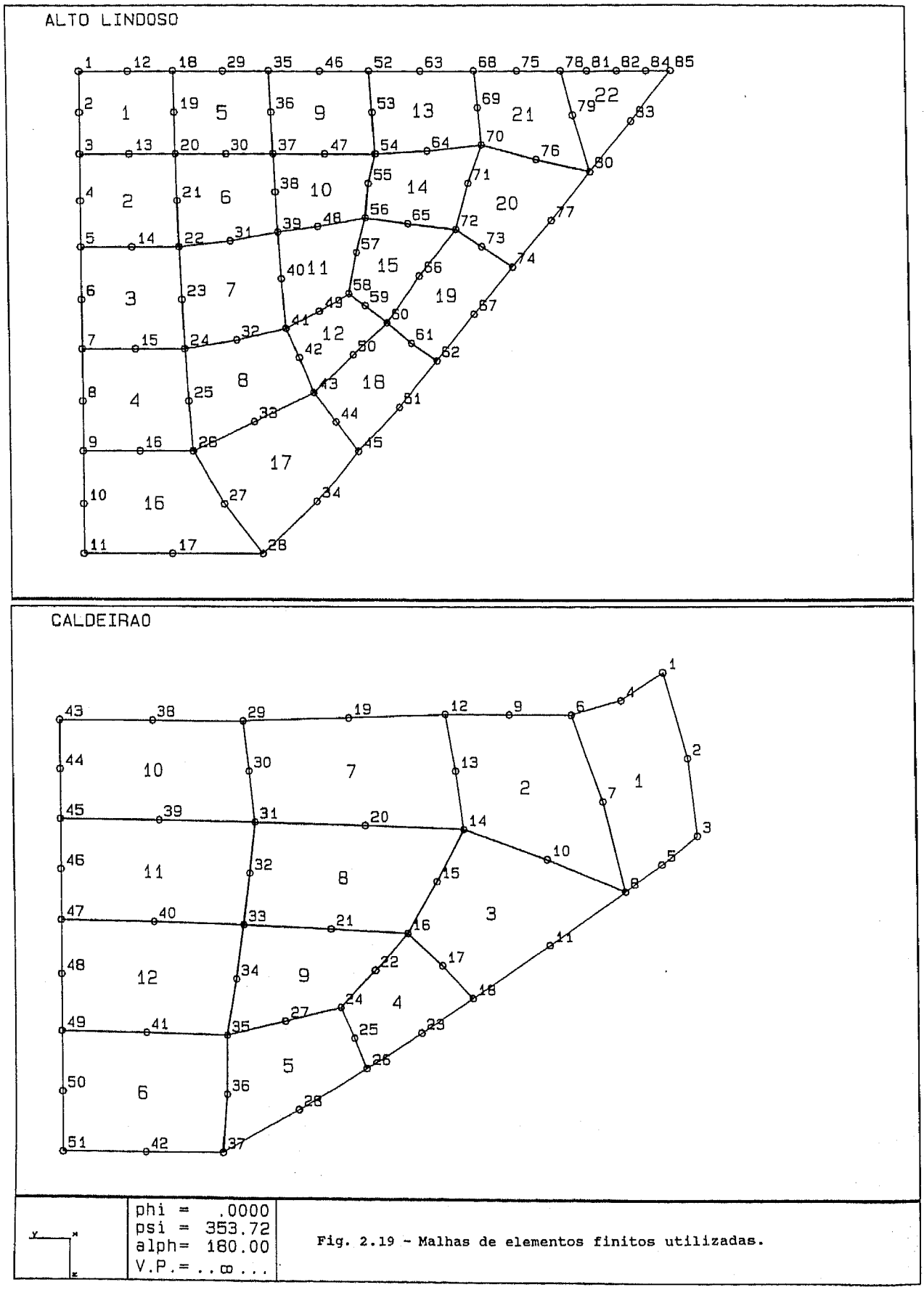
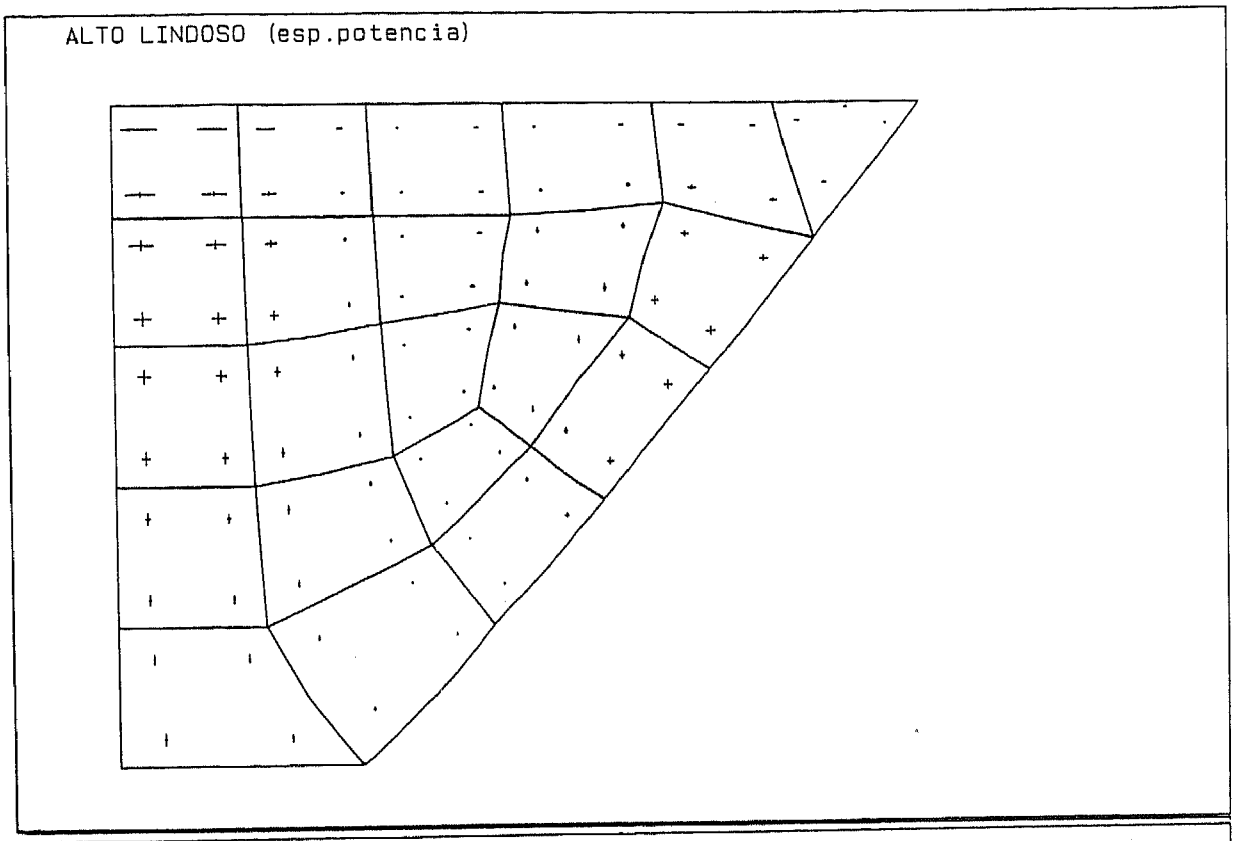
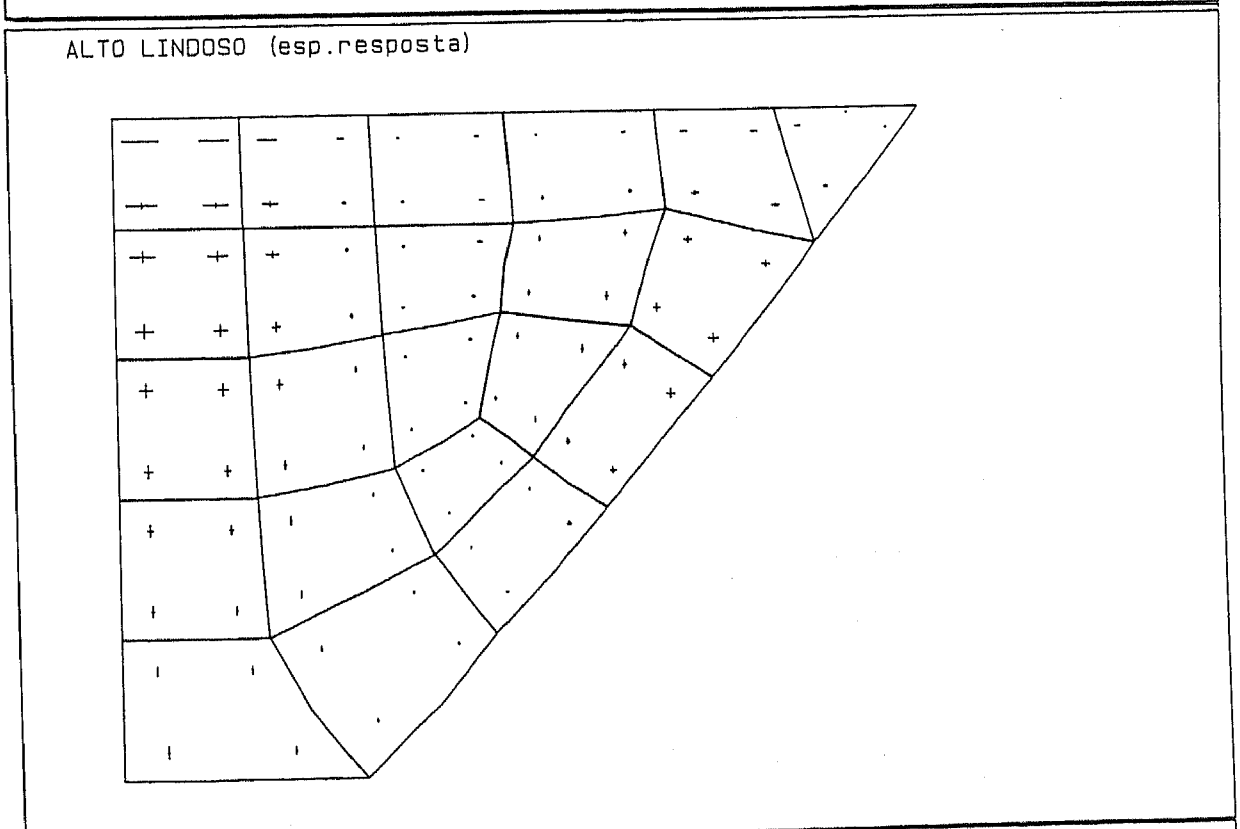


Fig. 2.19 - Malhas de elementos finitos utilizadas.





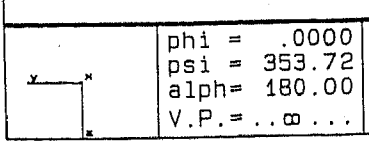
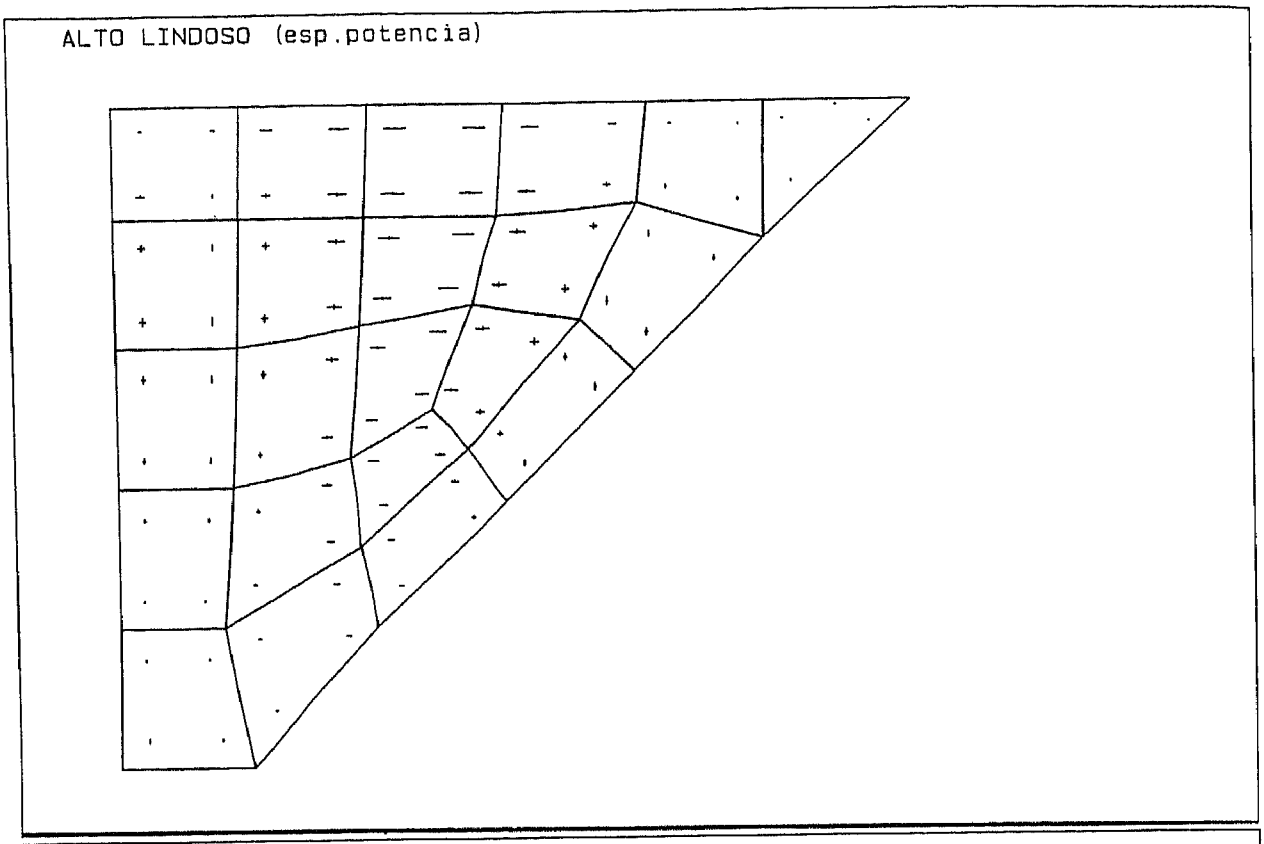
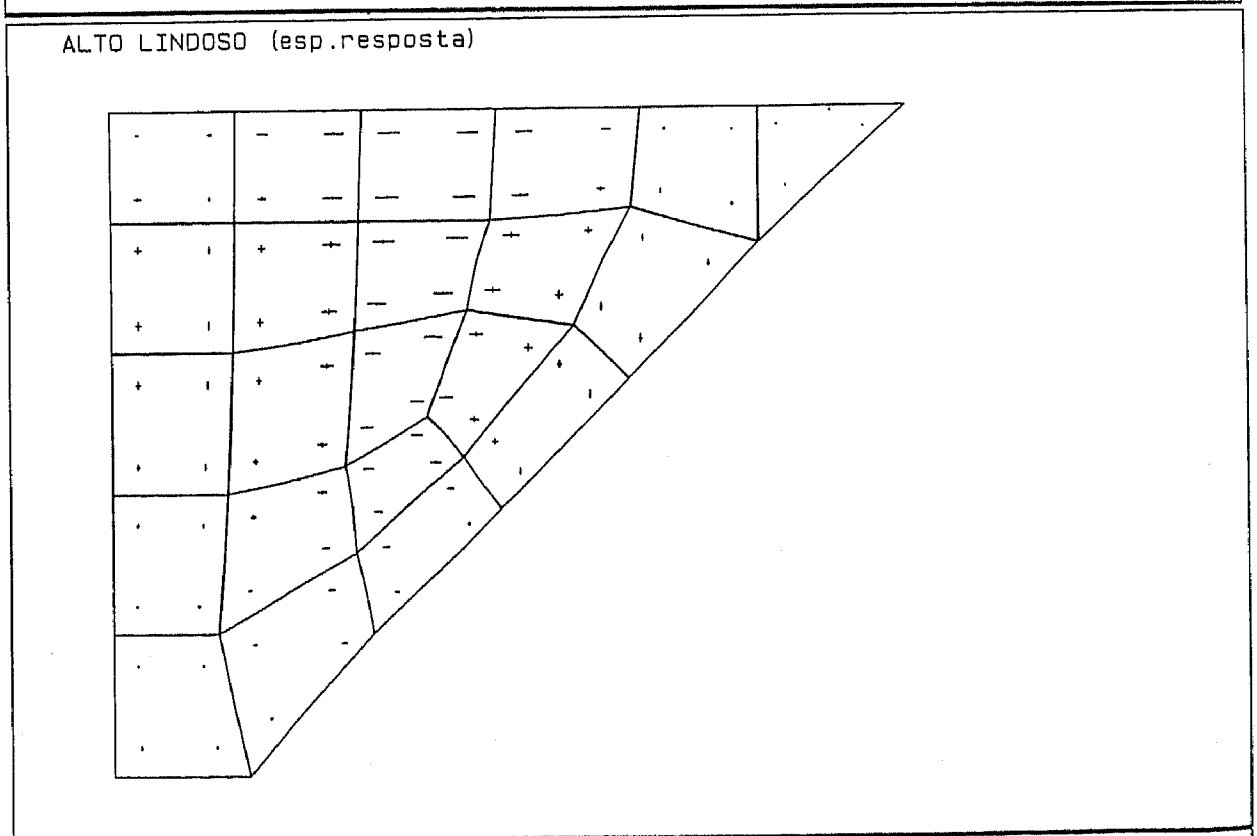


Fig. 2.20 - Distribuição de tensões na superfície de montante (sismo 1; contributo do primeiro modo).





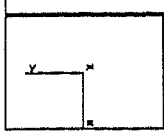
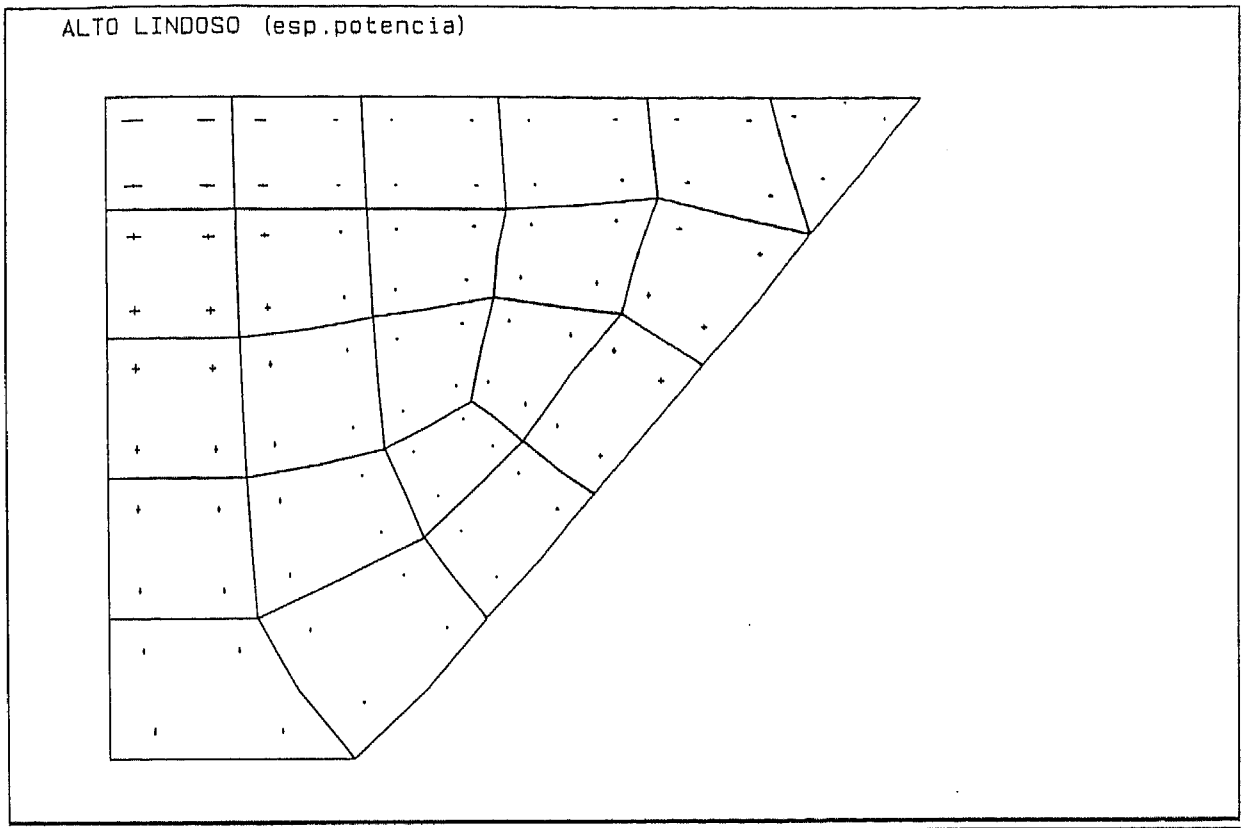
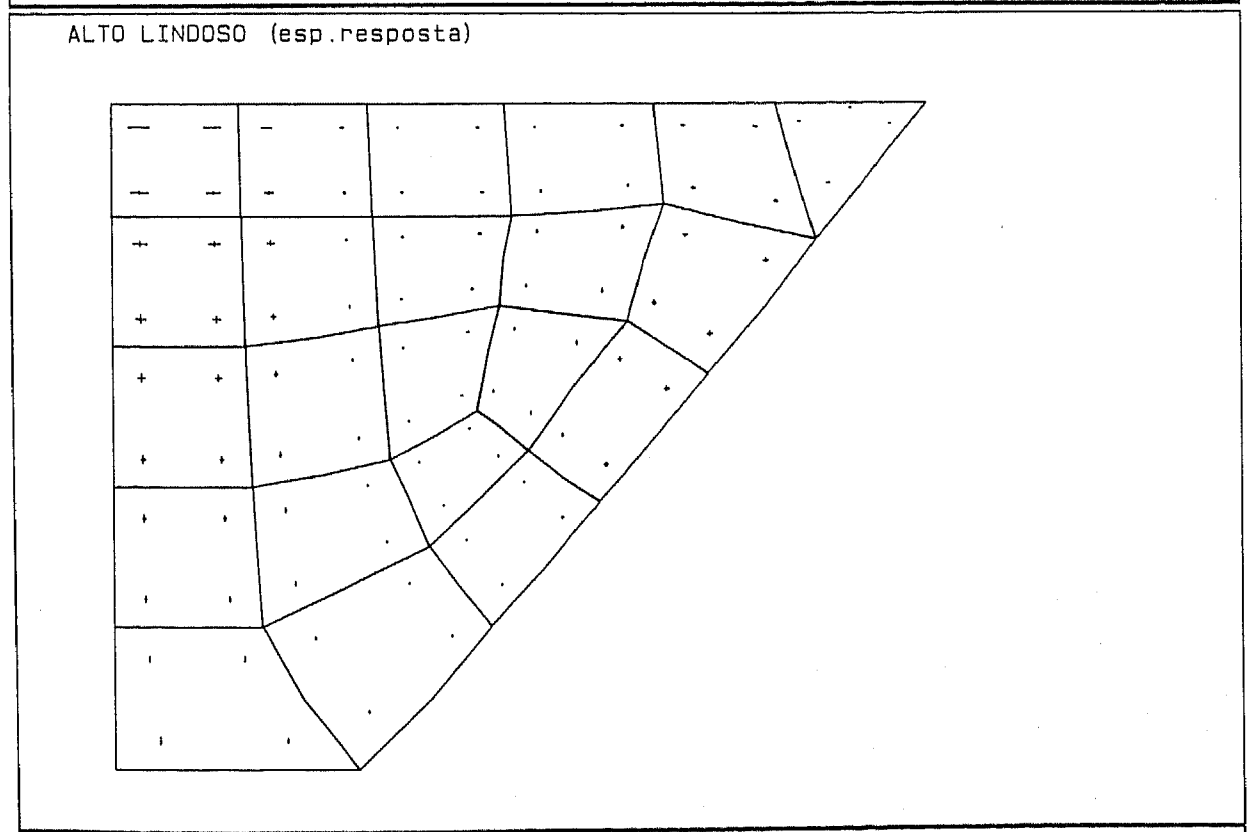
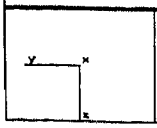


Fig. 2.21 - Distribuição de tensões na superfície de jusante (sismo 1; contributo do primeiro modo).

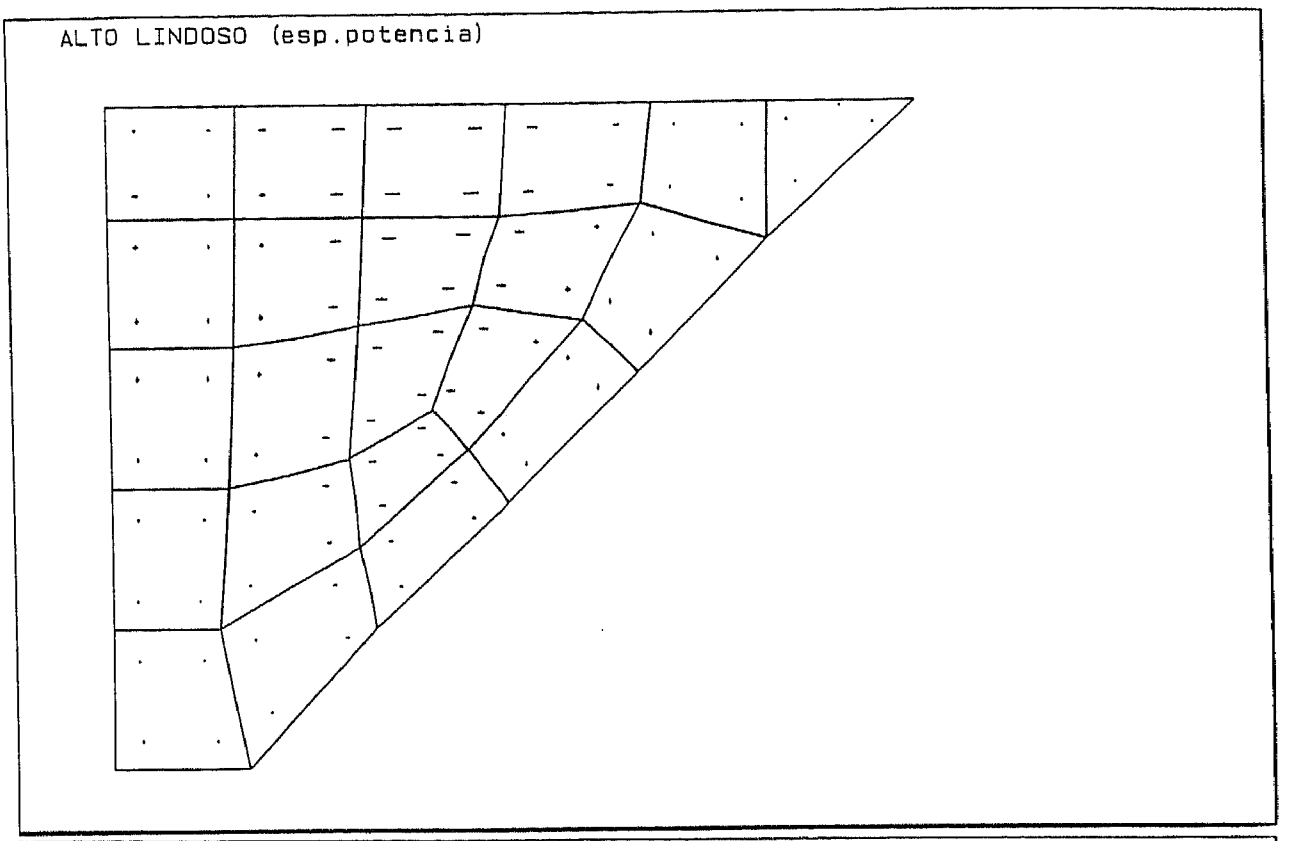


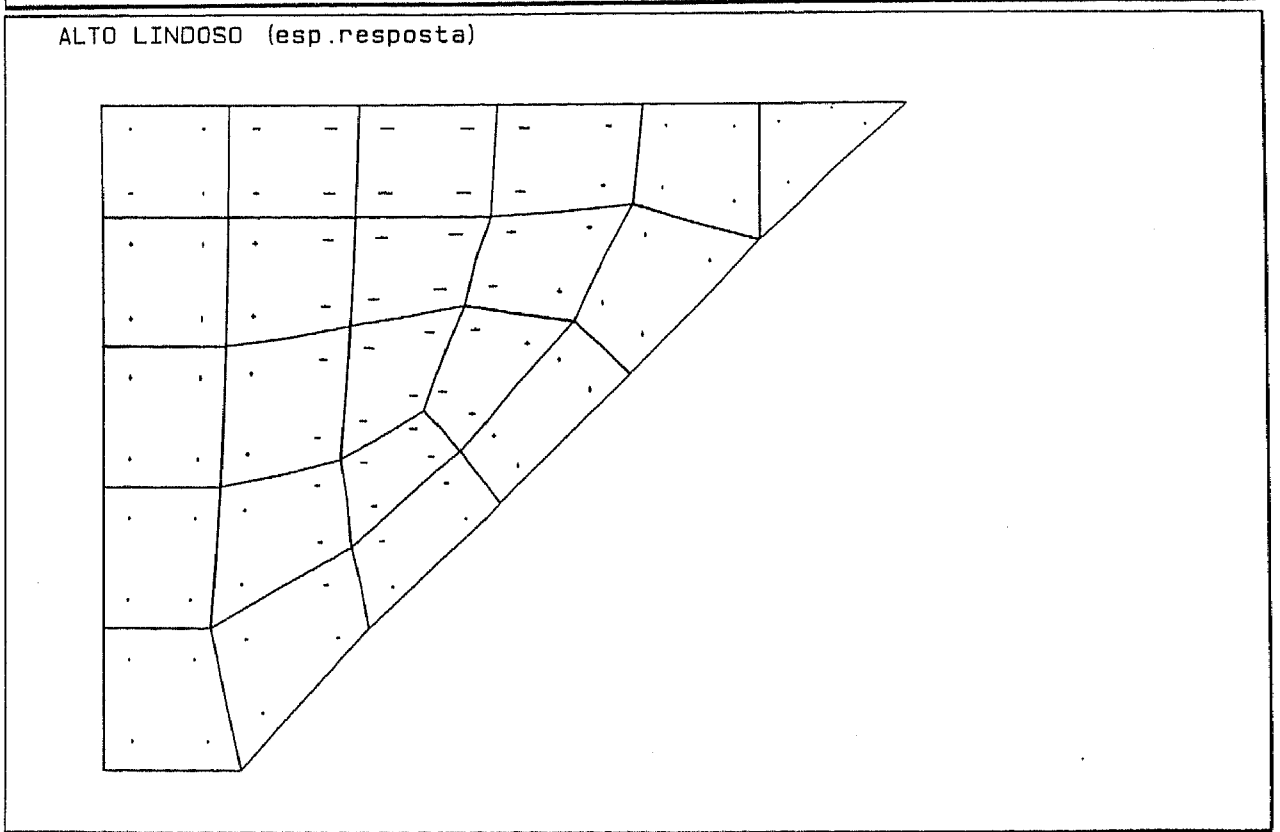




phi = .0000
psi = 353.72
alph= 180.00
V.P.= .. ∞ ...

Fig. 2.22 - Distribuição de tensões na superfície de montante (sismo 2; contributo do primeiro modo).





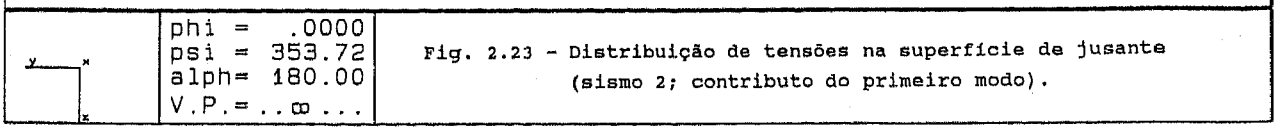
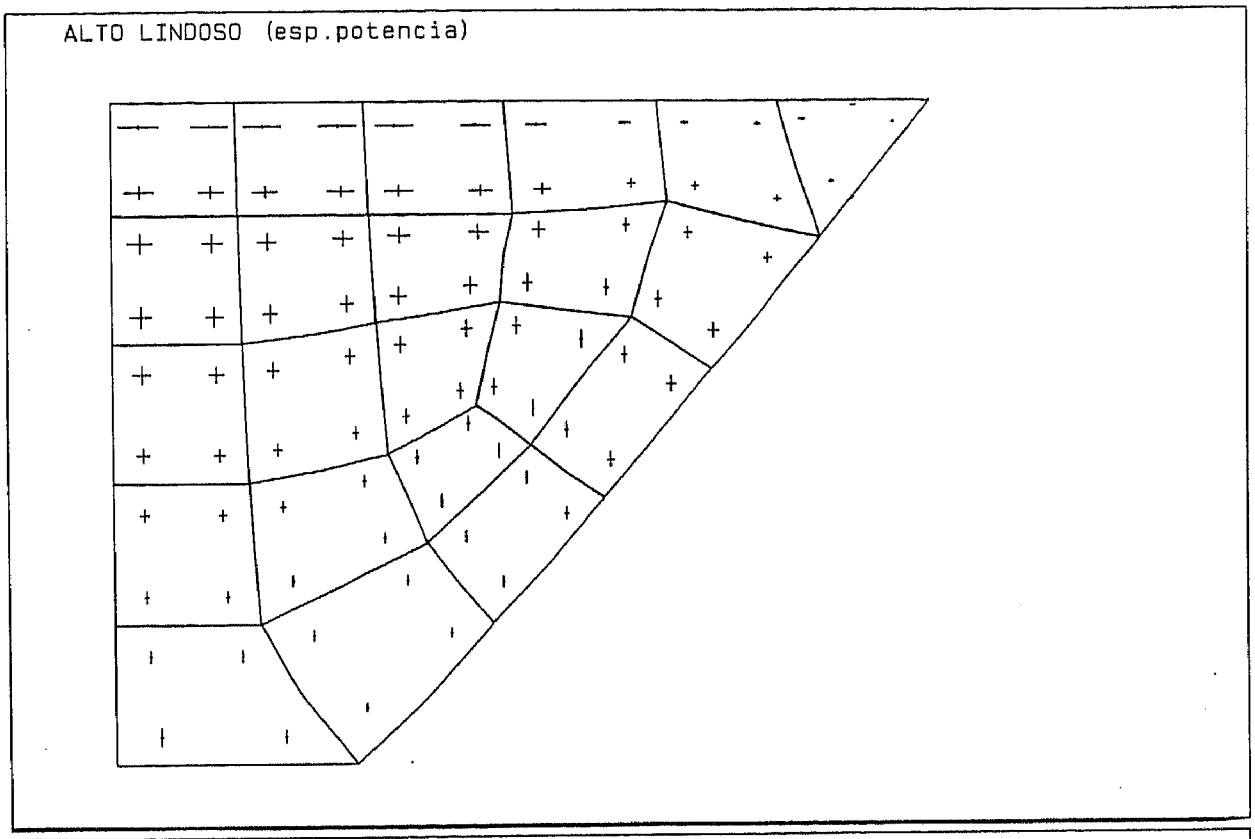
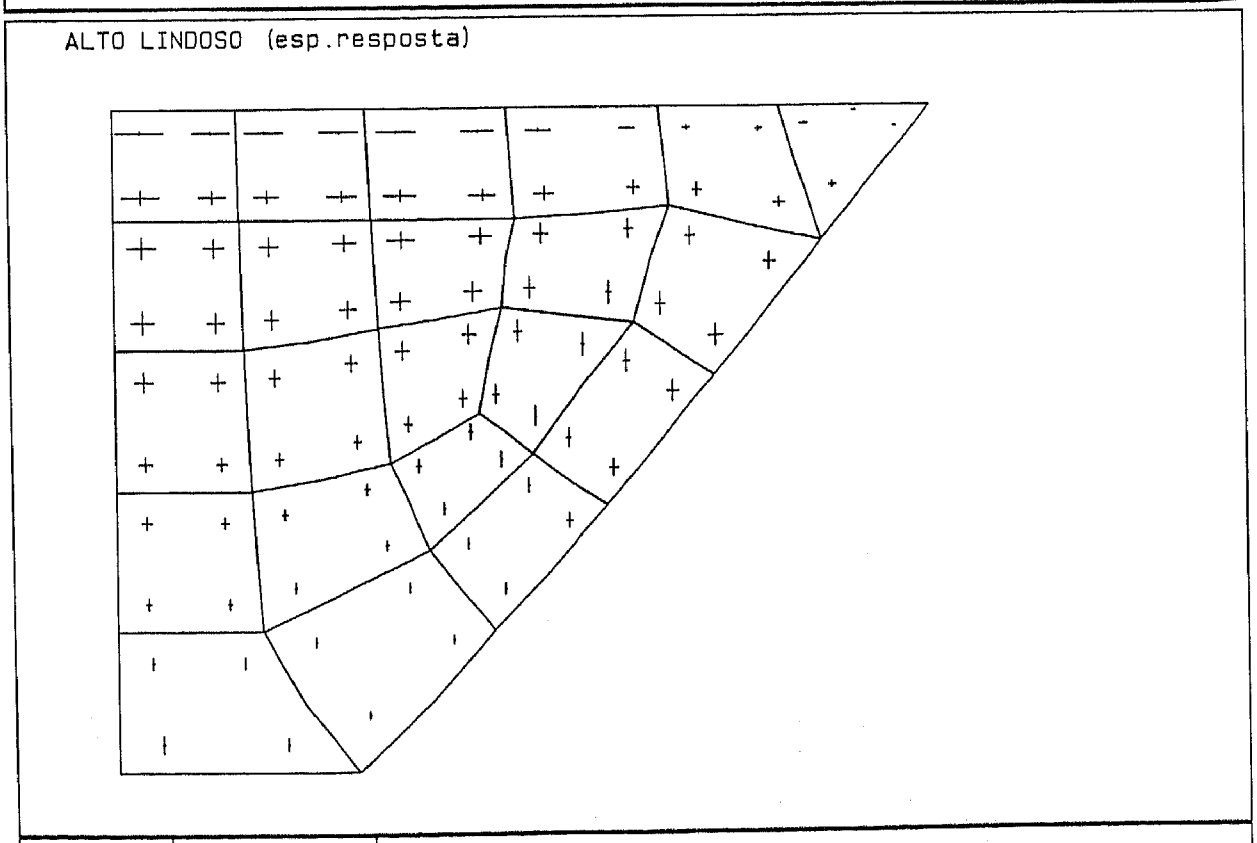
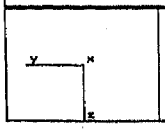


Fig. 2.23 - Distribuição de tensões na superfície de jusante (sismo 2; contributo do primeiro modo).

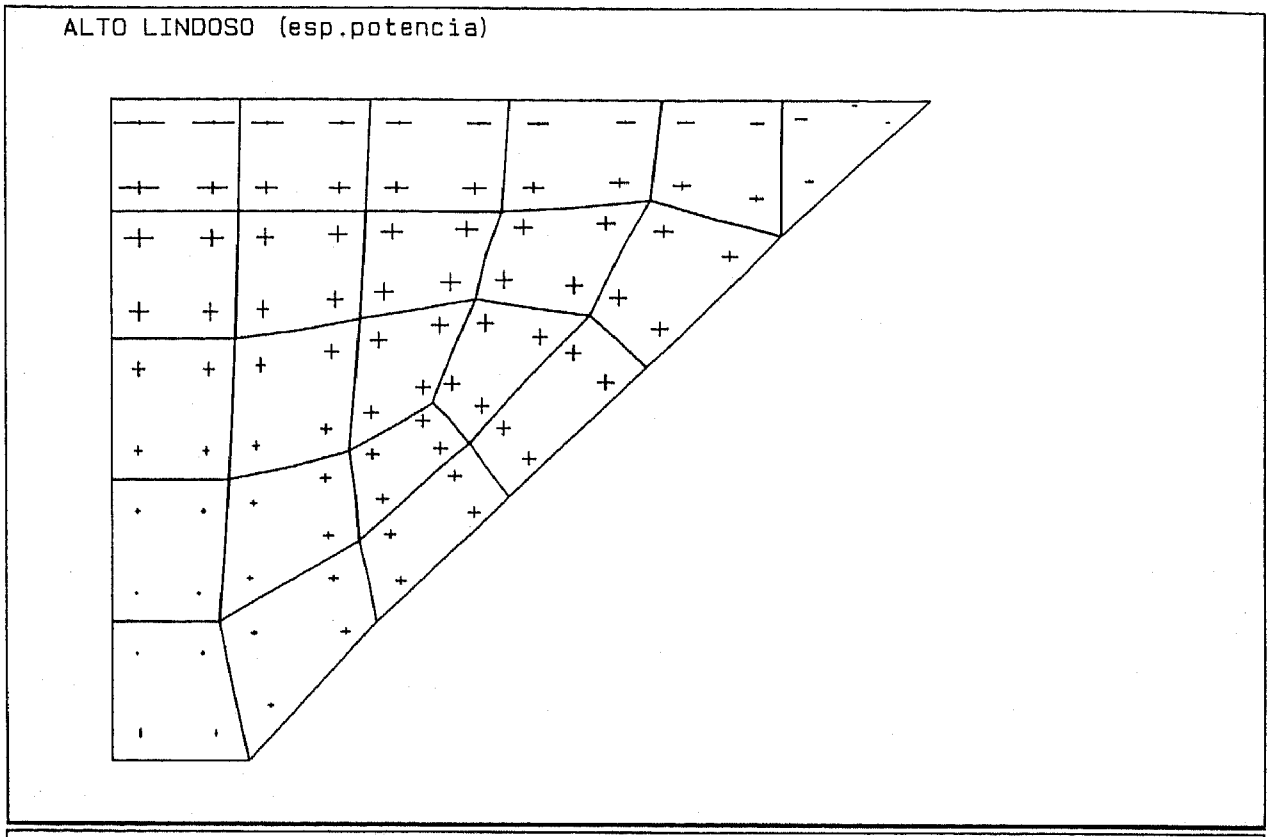


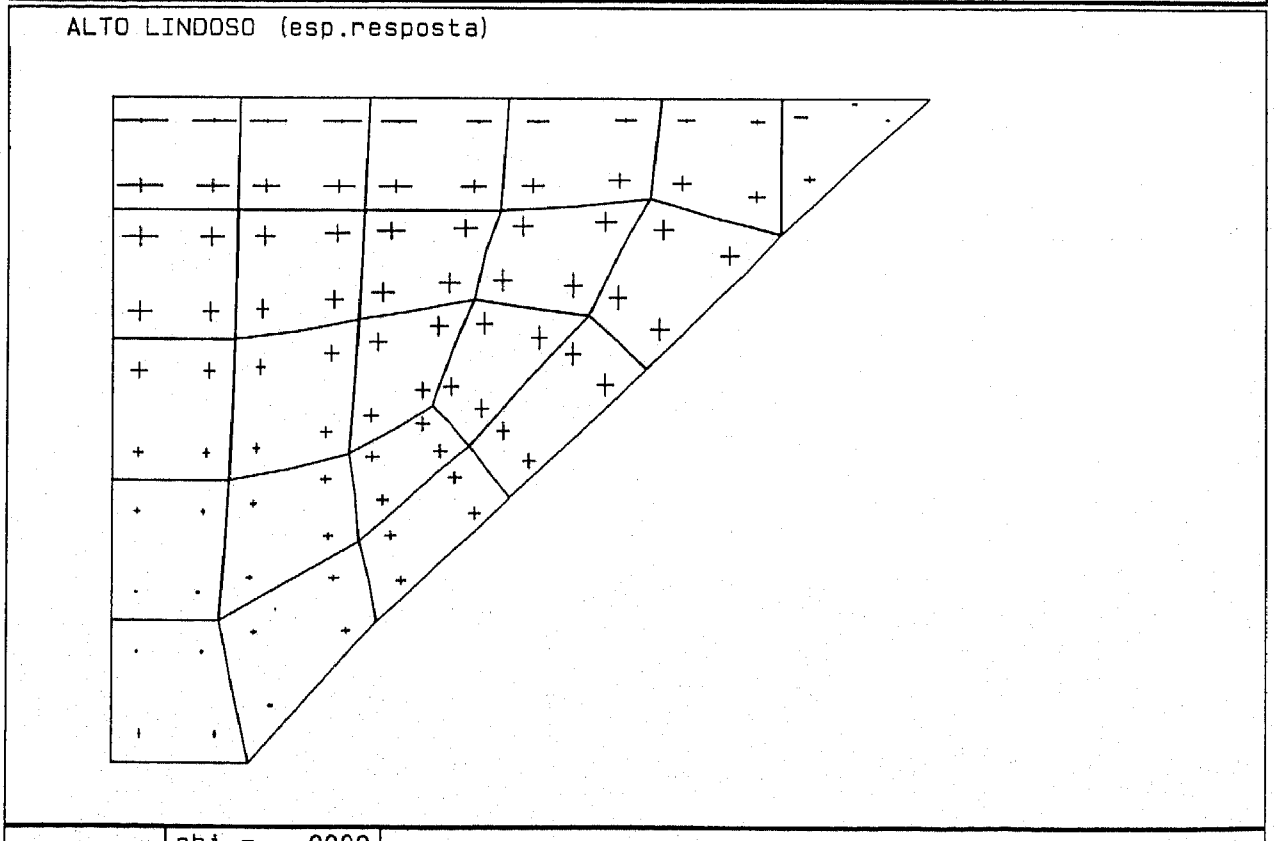




phi = .0000
psi = 353.72
alph= 180.00
V.P.= . . ∞ . . .

Fig. 2.24 - Distribuição de tensões na superfície de montante (sismo 1; contributo dos 5 primeiros modos simétricos).





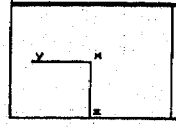
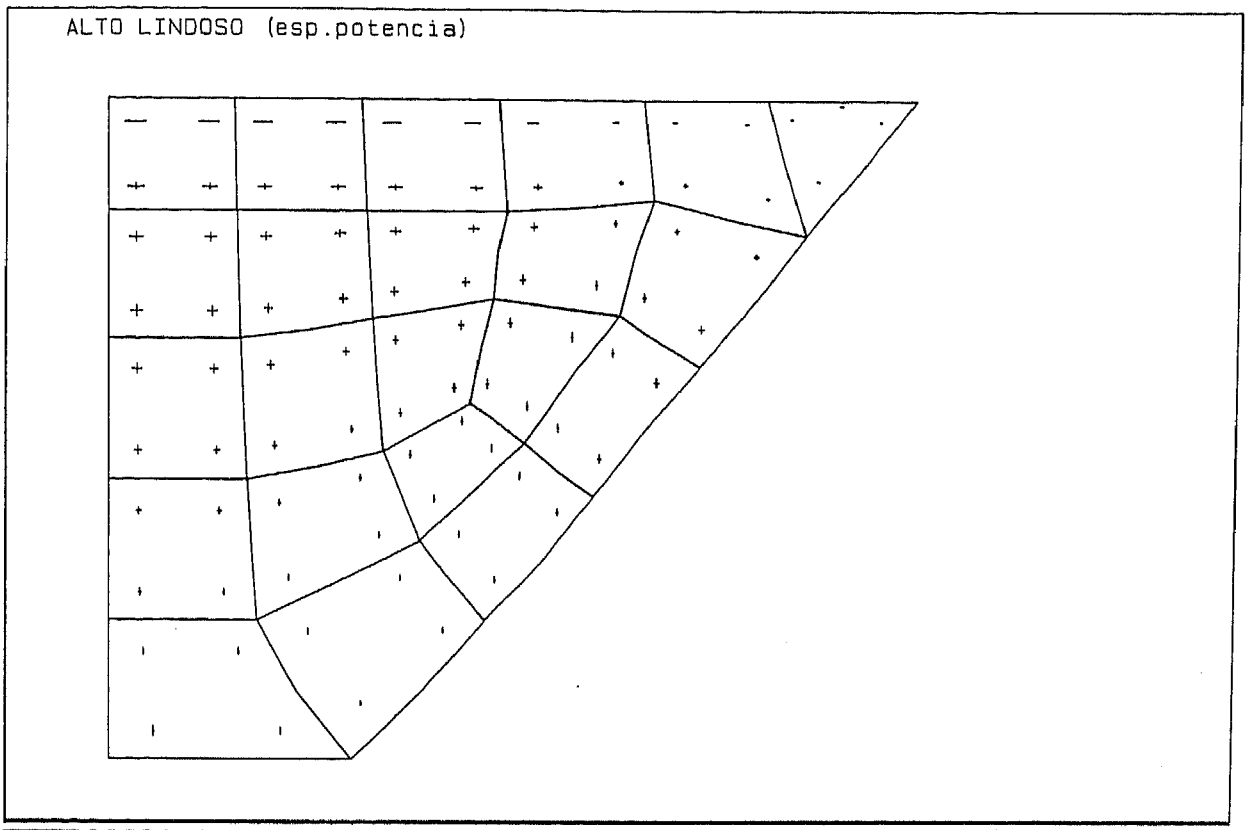
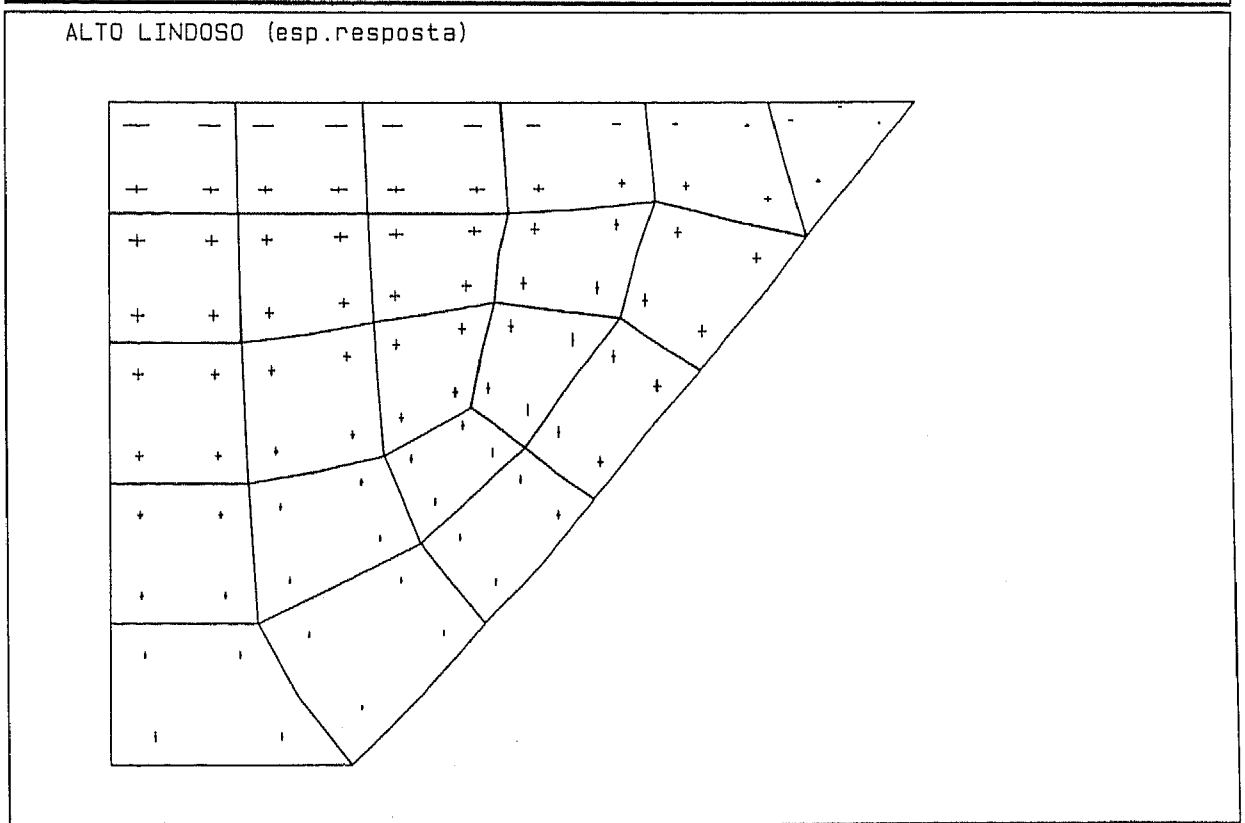


Fig. 2.25 - Distribuição de tensões na superfície de jusante (sismo 1; contributo dos 5 primeiros modos simétricos).





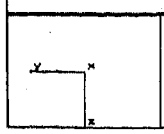
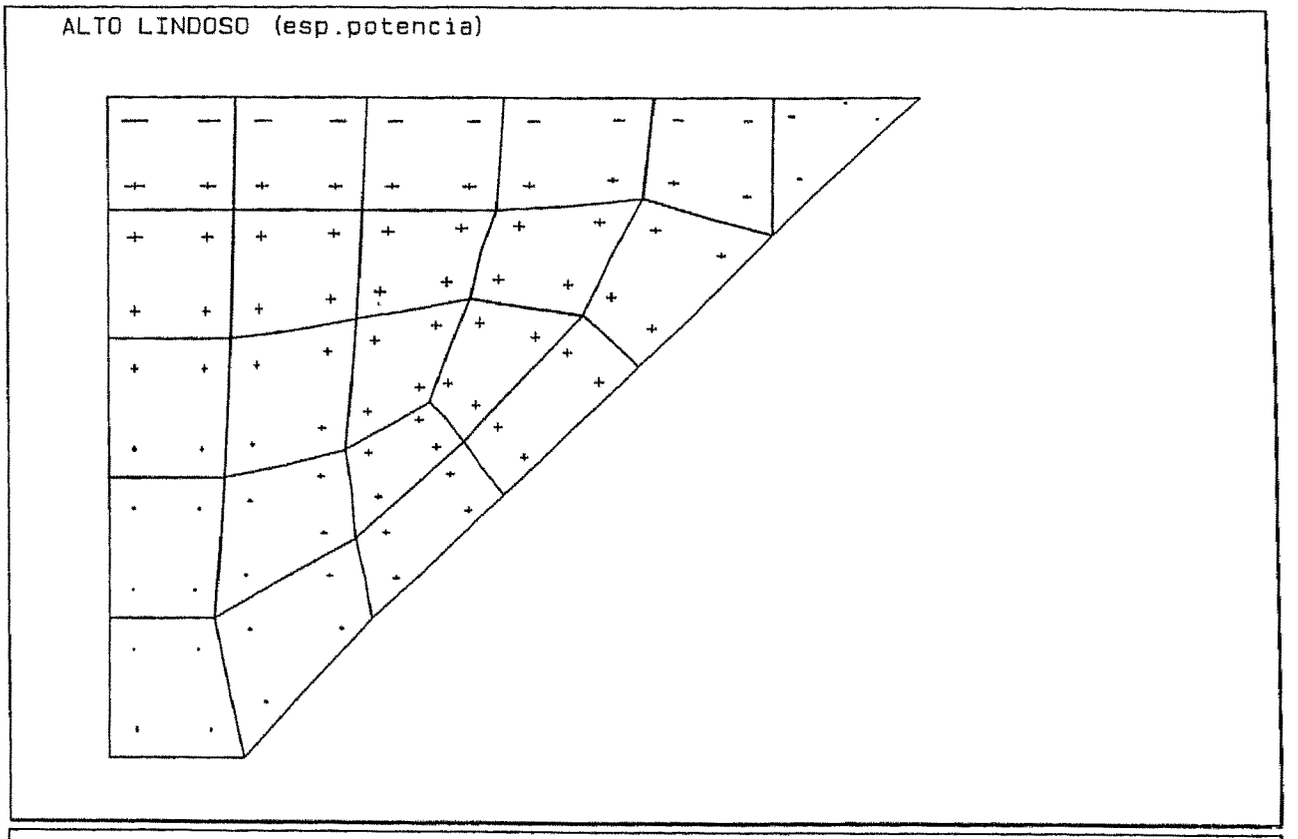
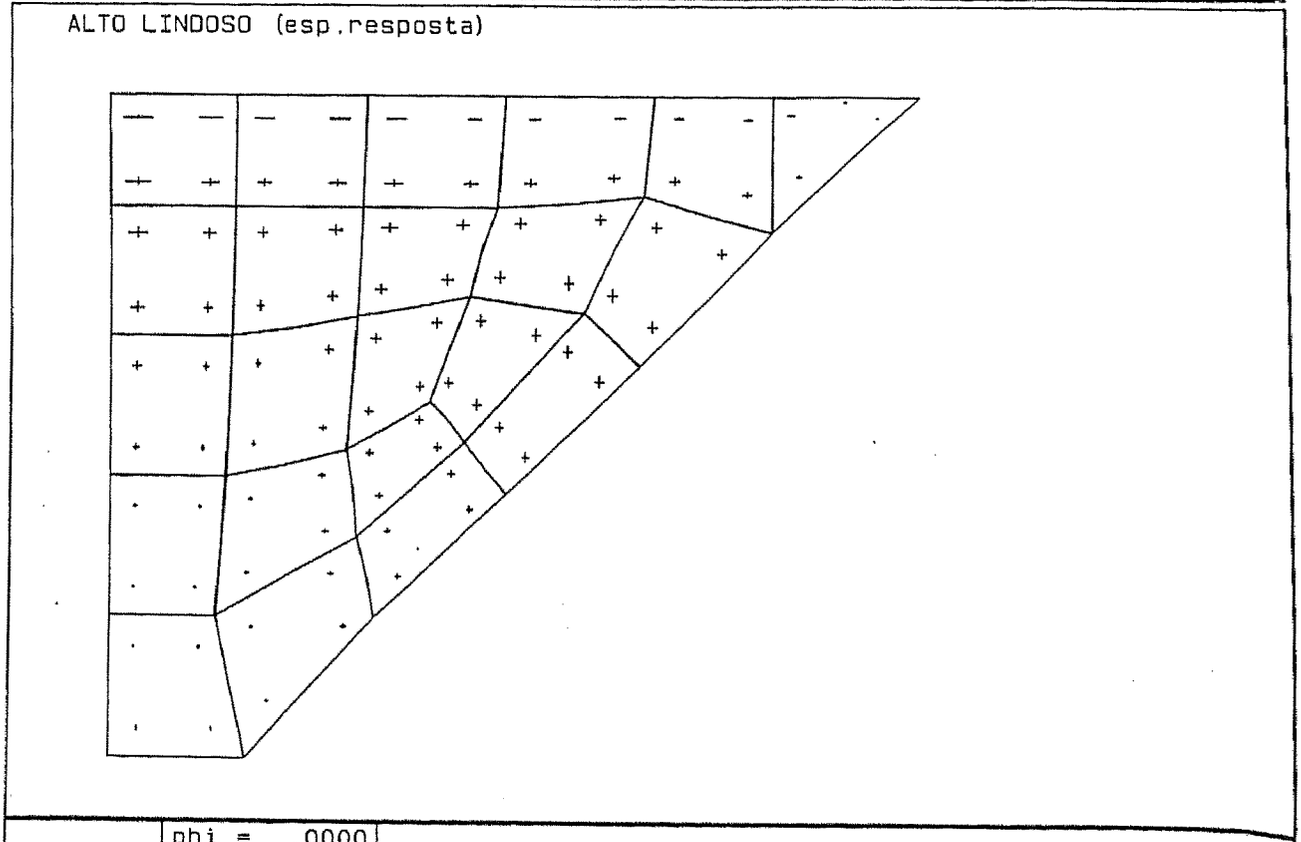


Fig. 2.26 - Distribuição de tensões na superfície de montante (sismo 2; contributo dos 5 primeiros modos simétricos).





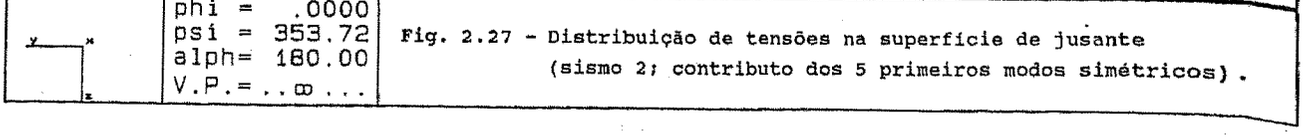
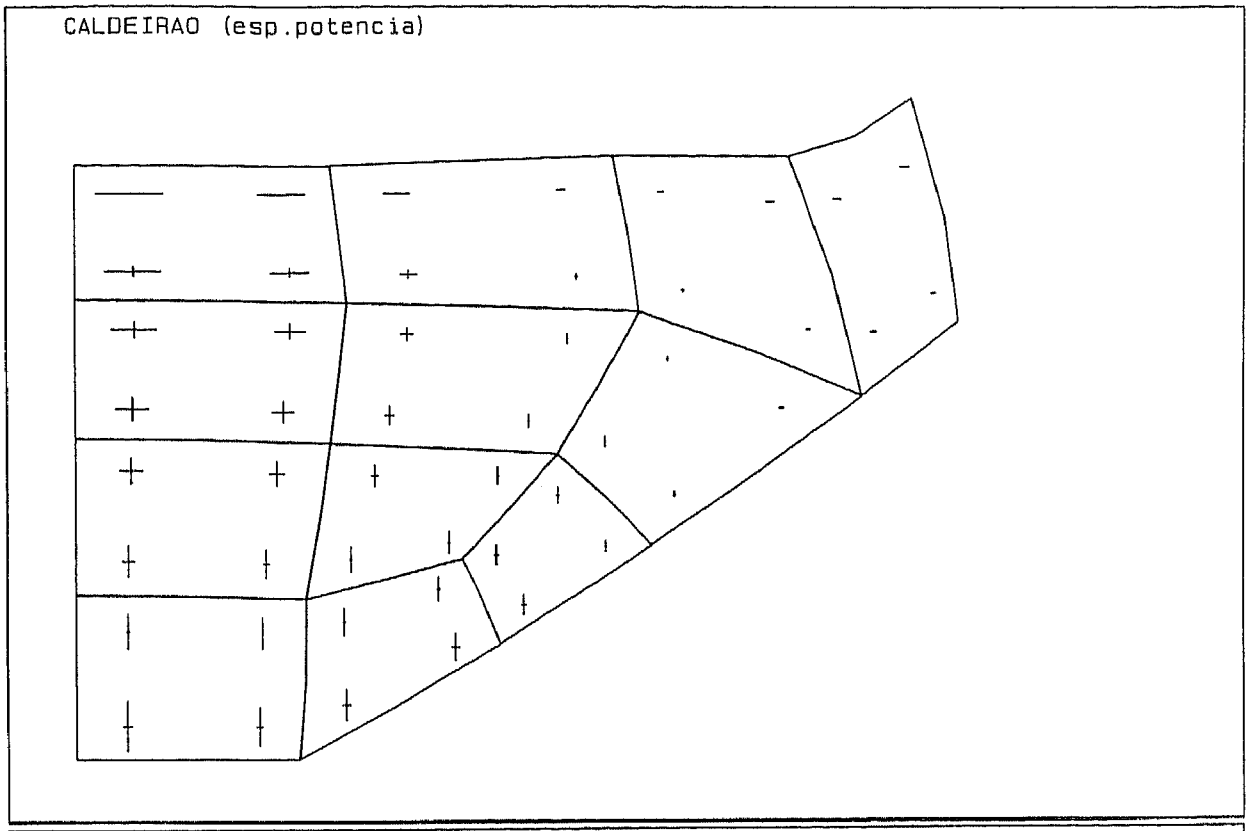
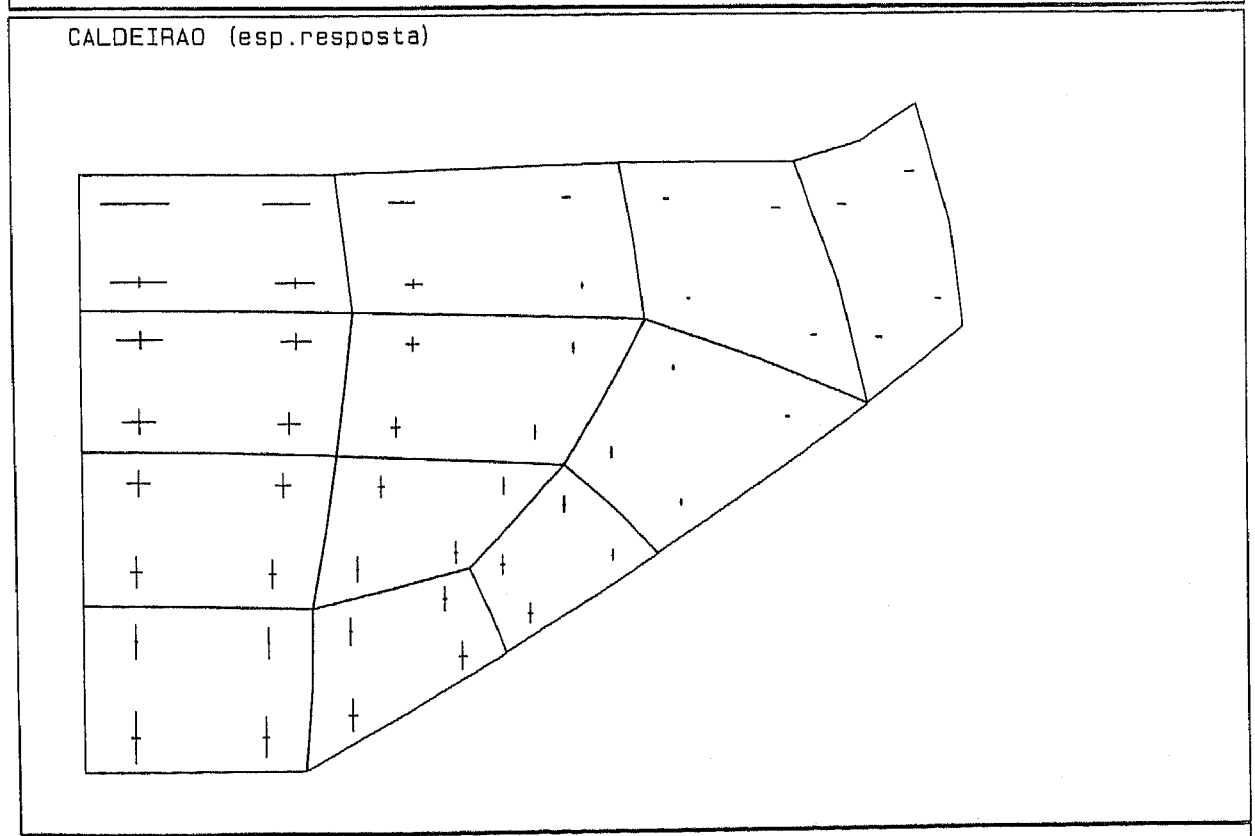


Fig. 2.27 - Distribuição de tensões na superfície de jusante (sismo 2; contributo dos 5 primeiros modos simétricos).





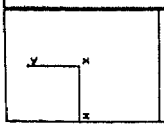
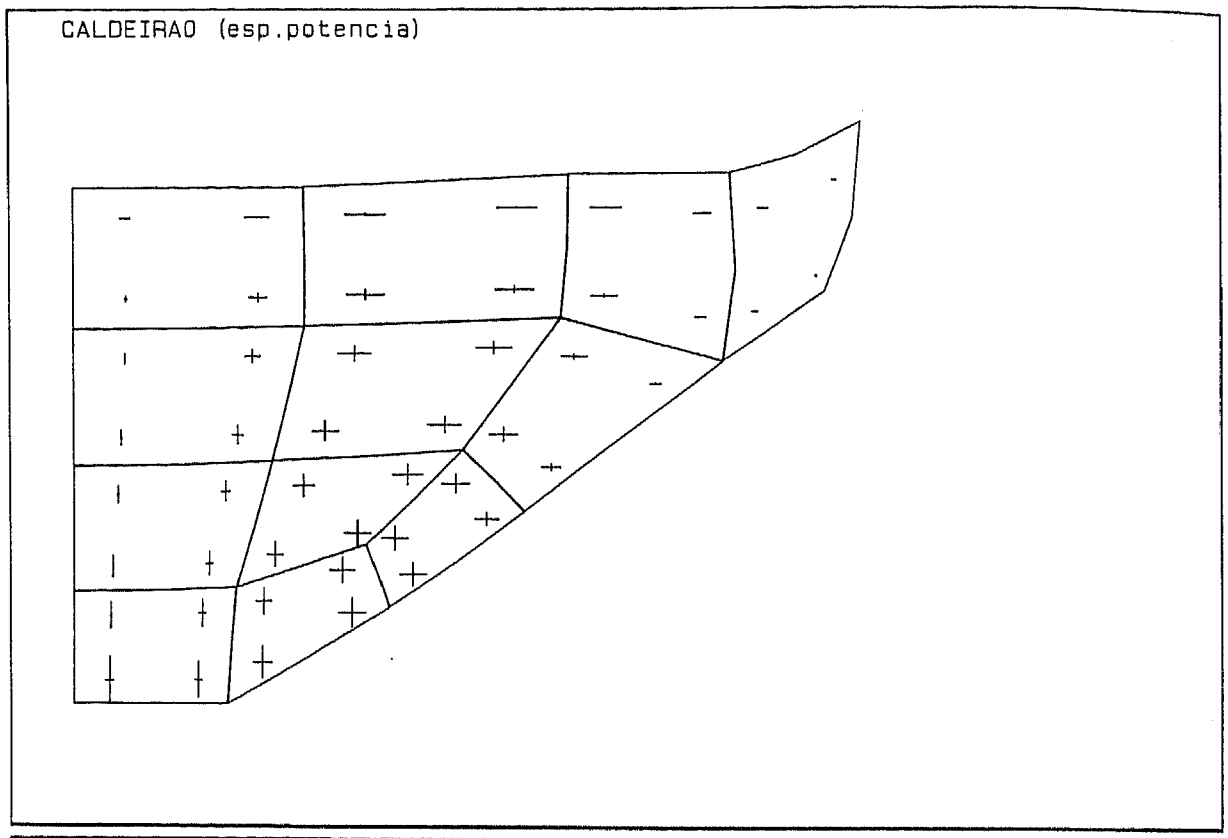
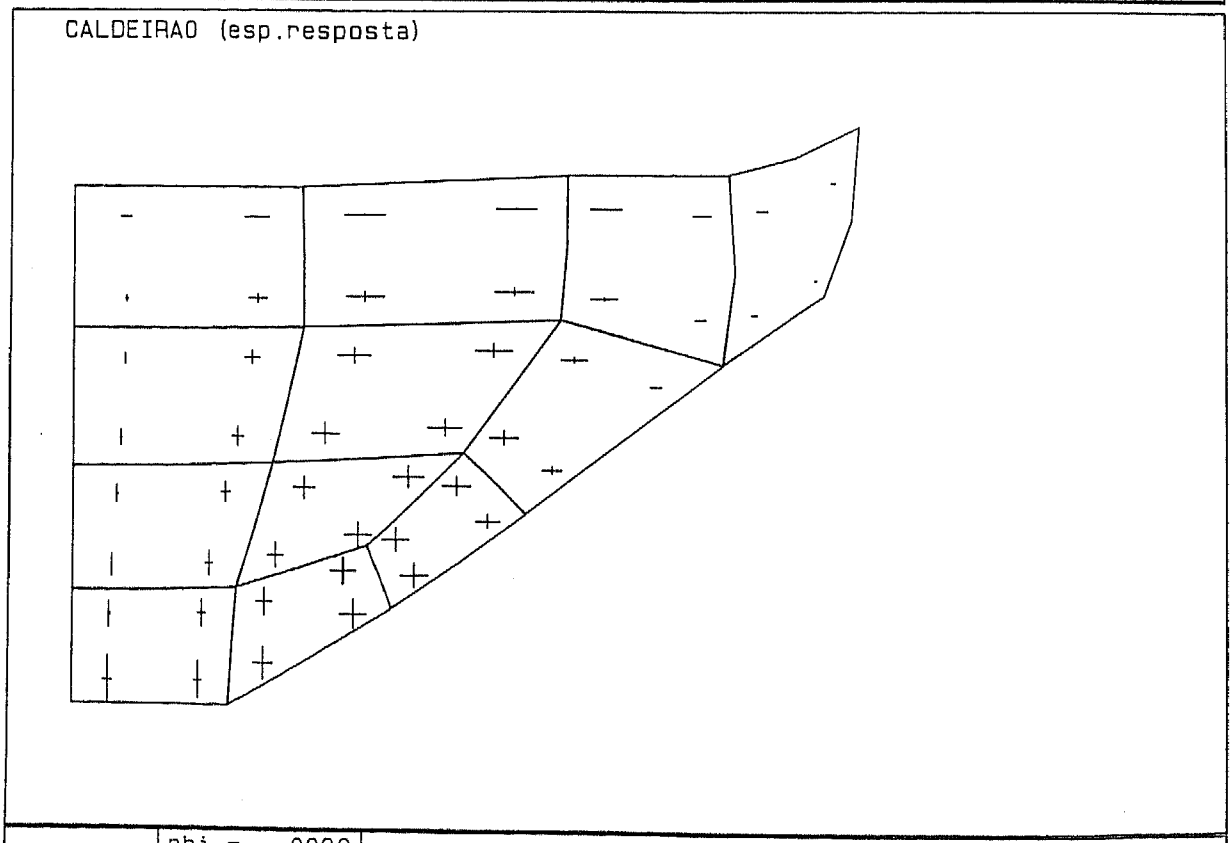


Fig. 2.28 - Distribuição de tensões na superfície de montante (sismo 1; contributo do primeiro modo).





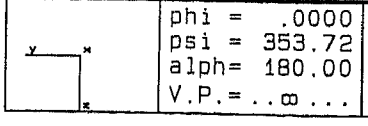
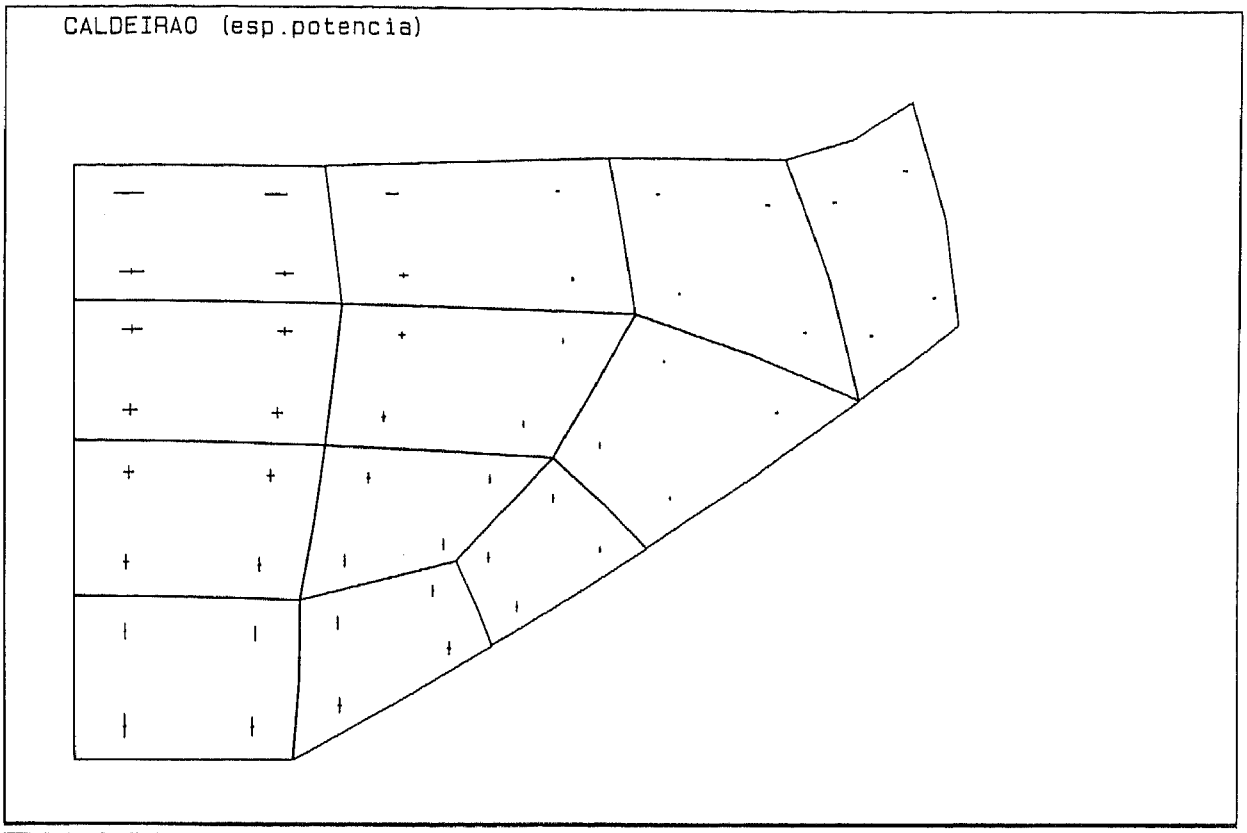
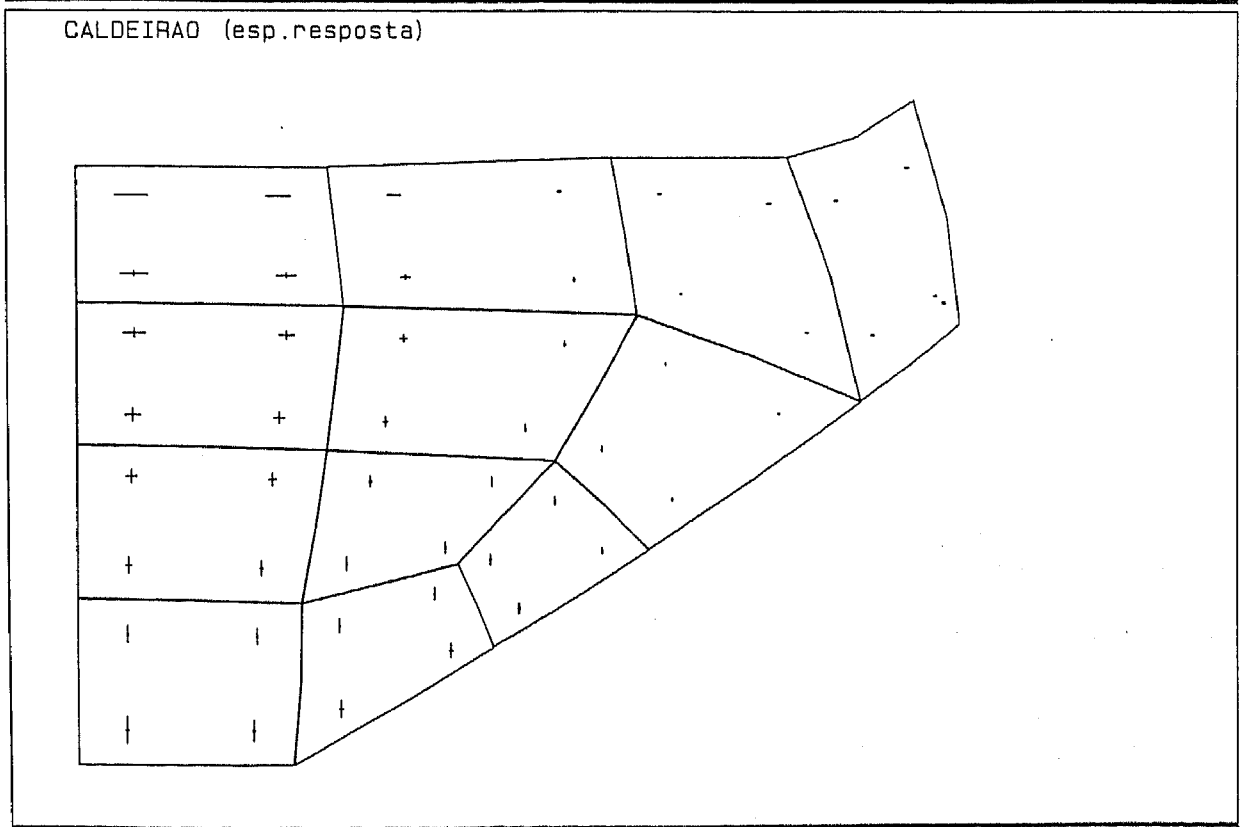
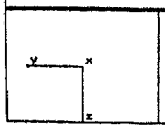


Fig. 2.29 - Distribuição de tensões na superfície de jusante (sismo 1; contributo do primeiro modo).

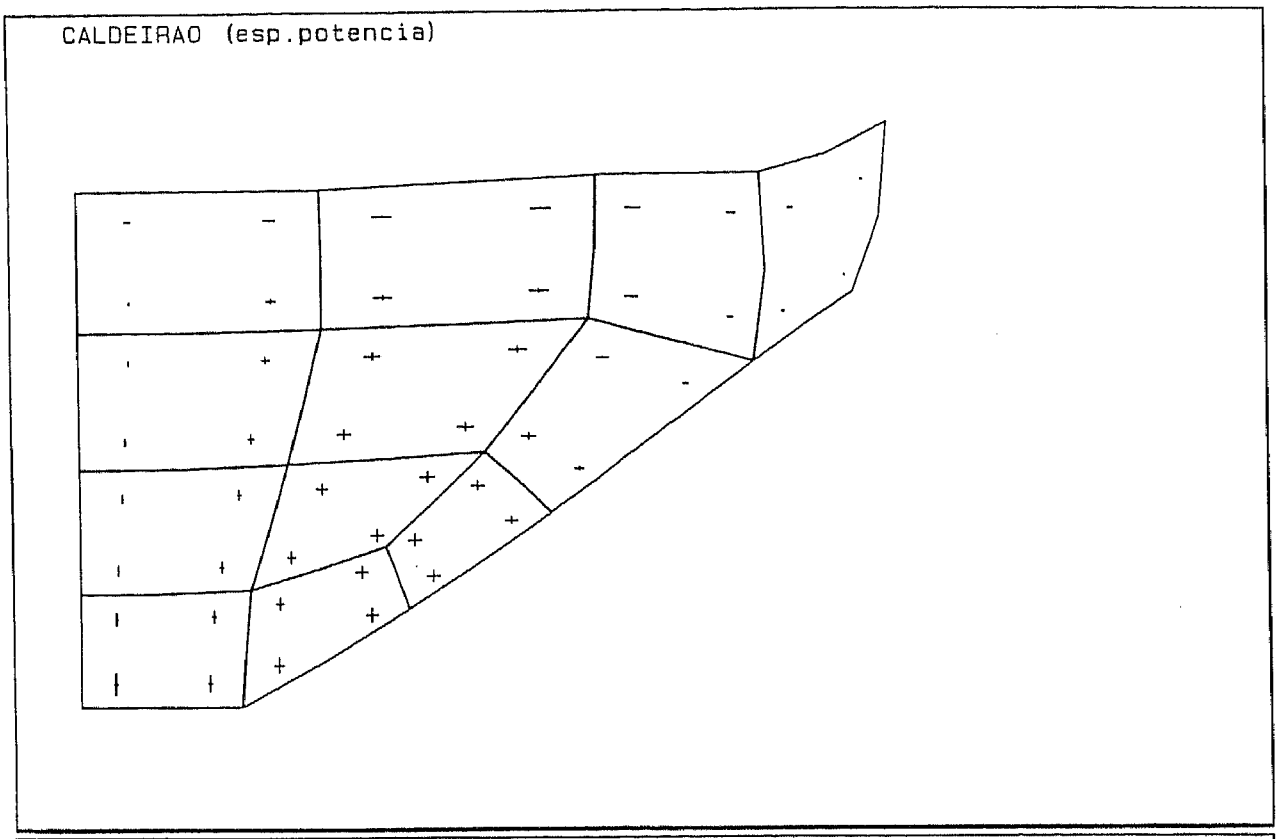


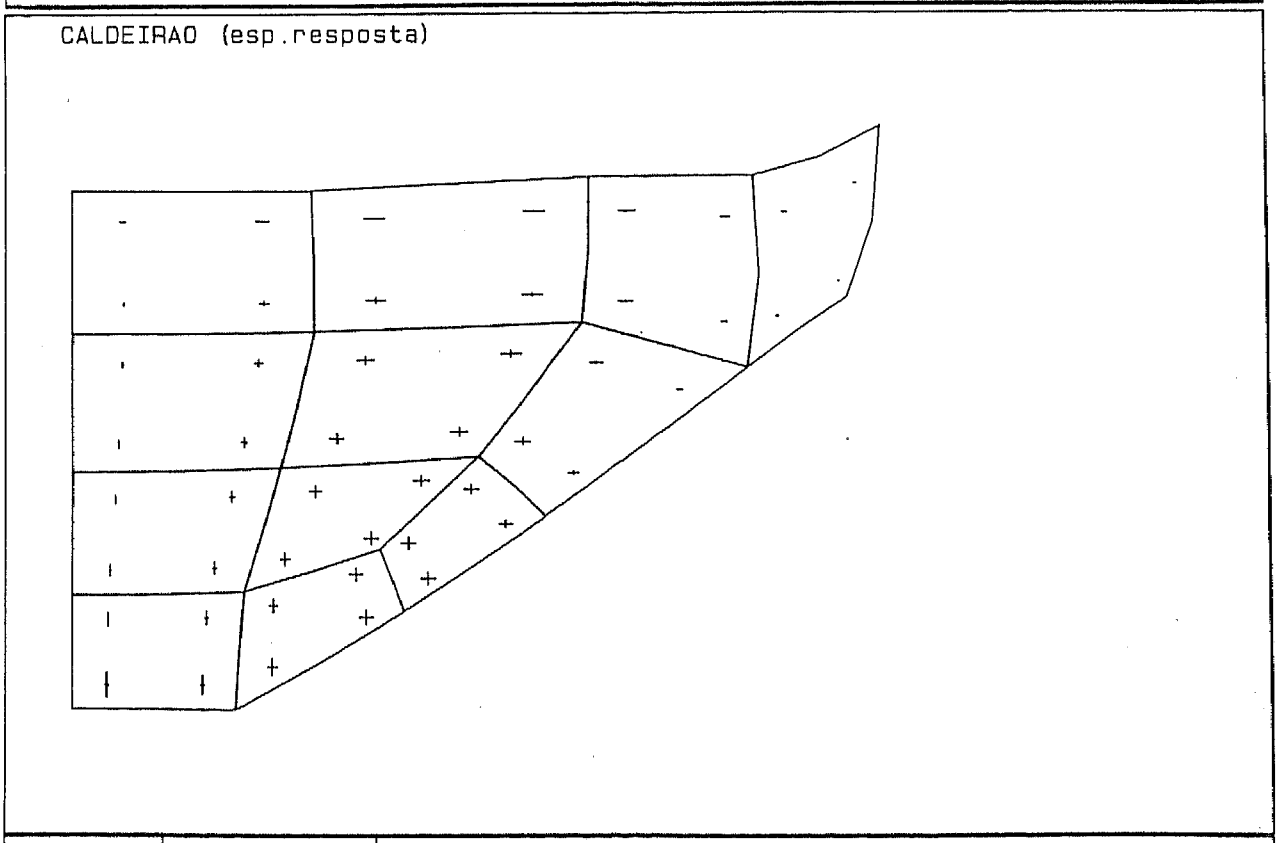




phi = .0000
psi = 353.72
alph= 180.00
V.P.= . . ∞ . . .

Fig. 2.30 - Distribuição de tensões na superfície de montante (sismo 2; contributo do primeiro modo).





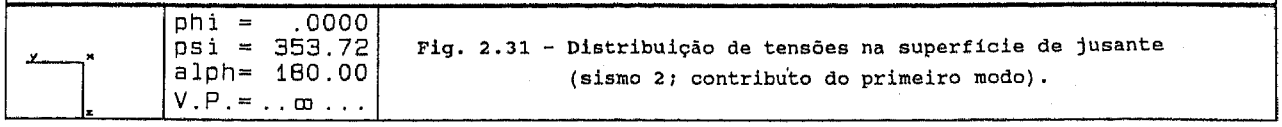
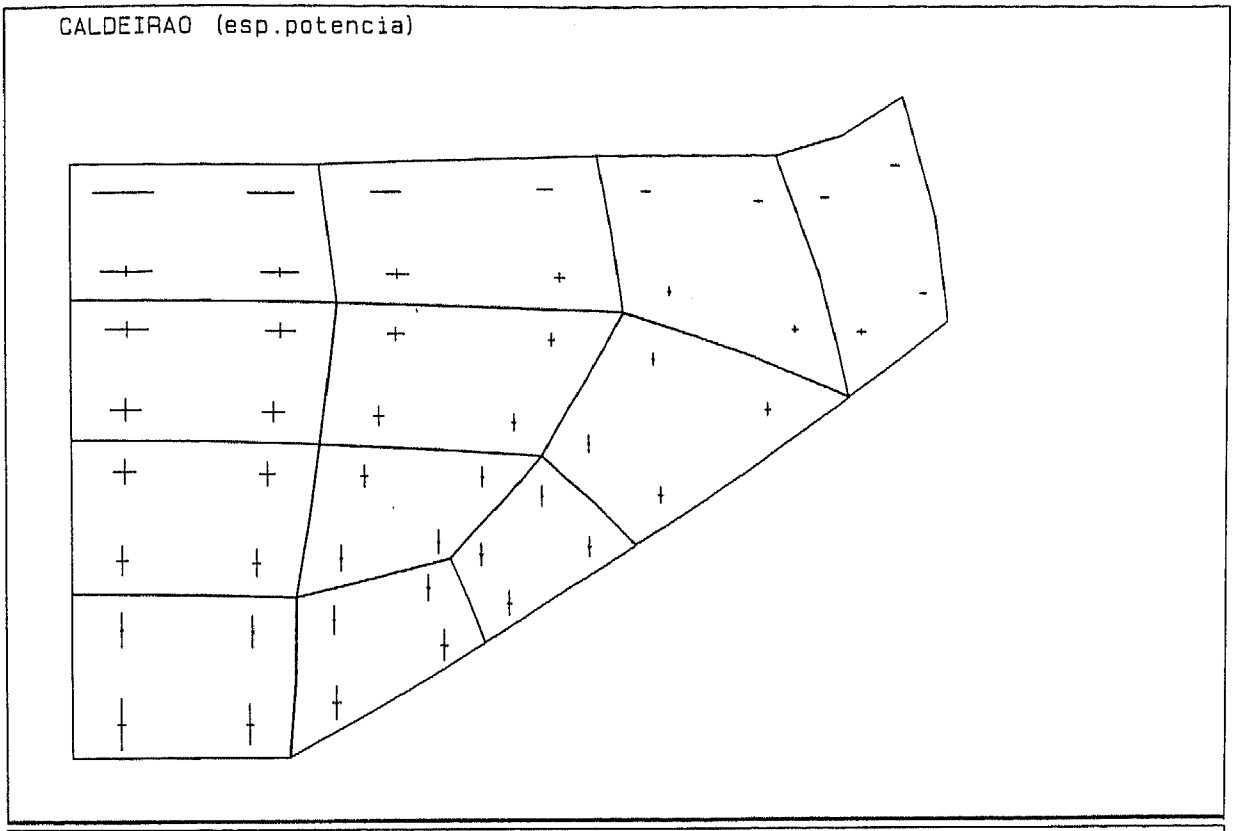
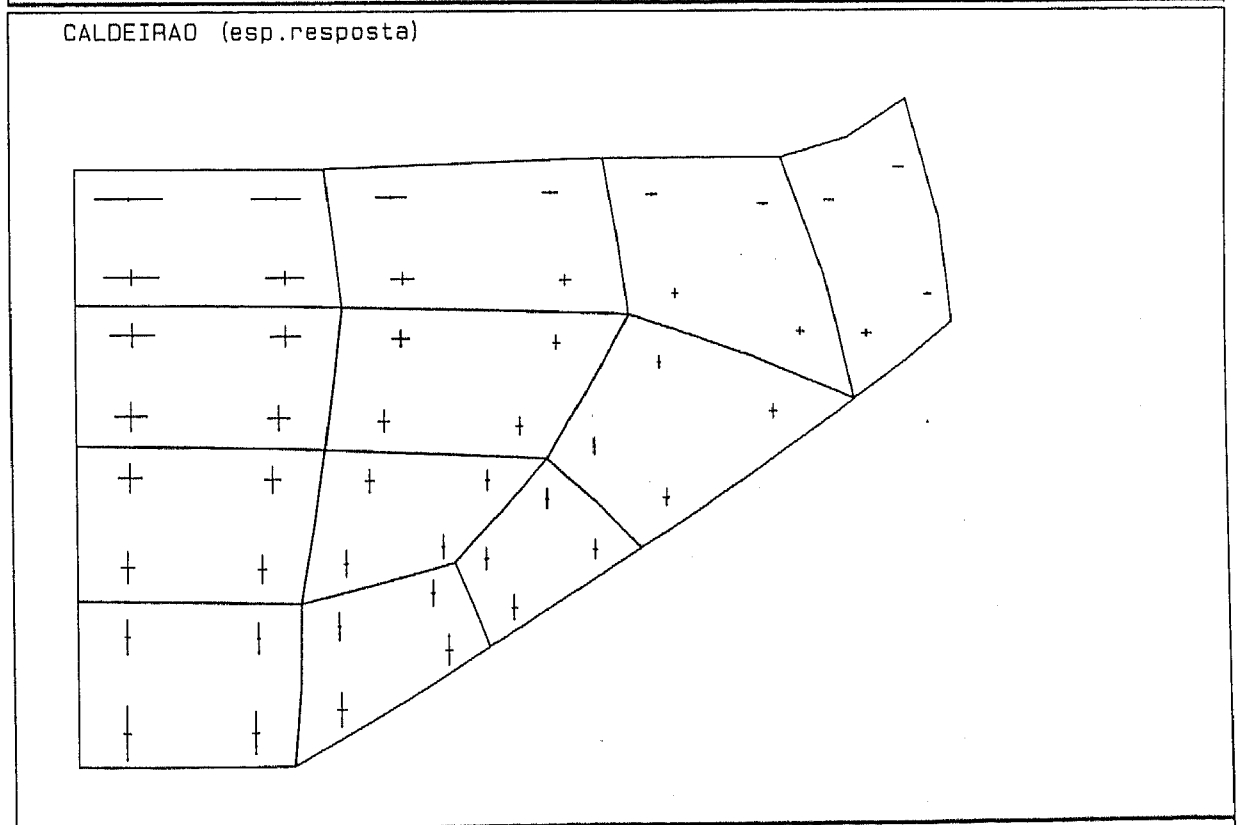


Fig. 2.31 - Distribuição de tensões na superfície de jusante (sismo 2; contributo do primeiro modo).





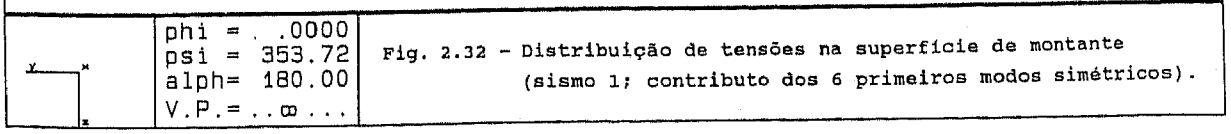
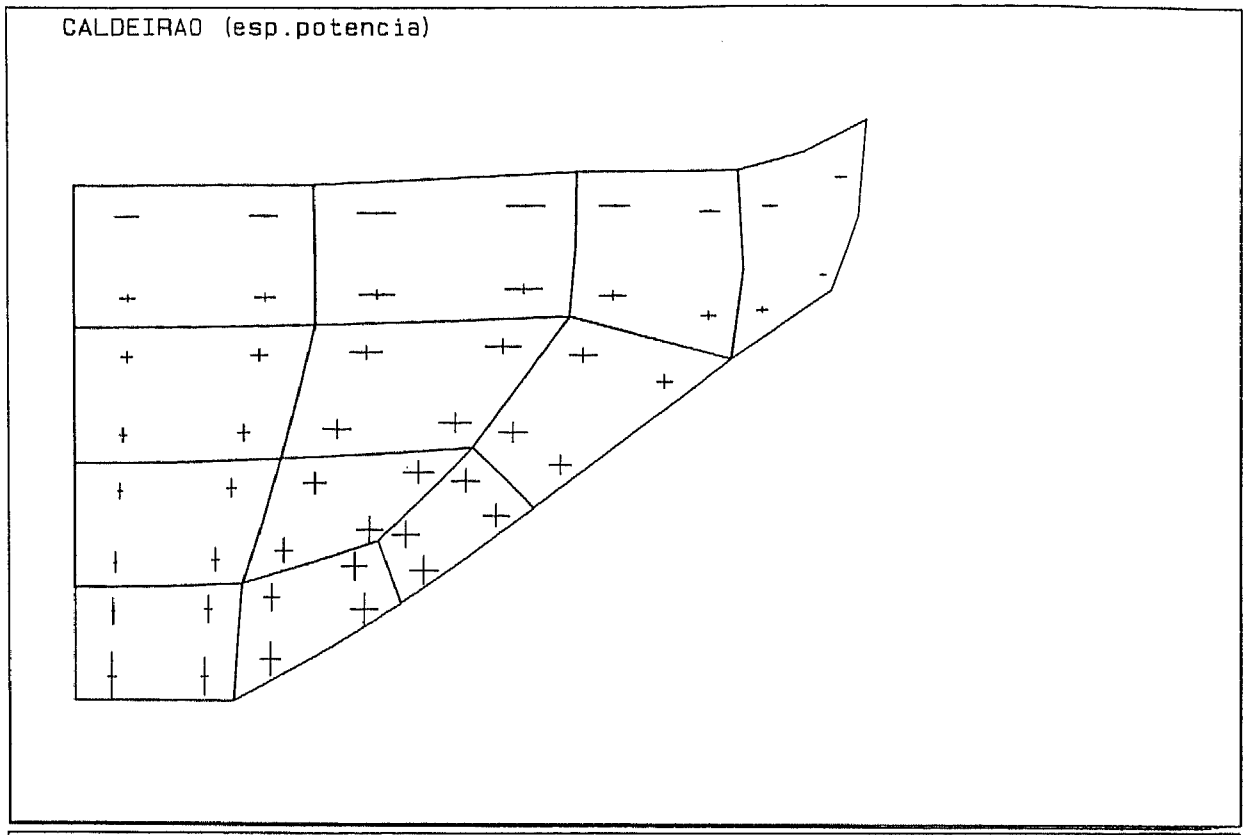
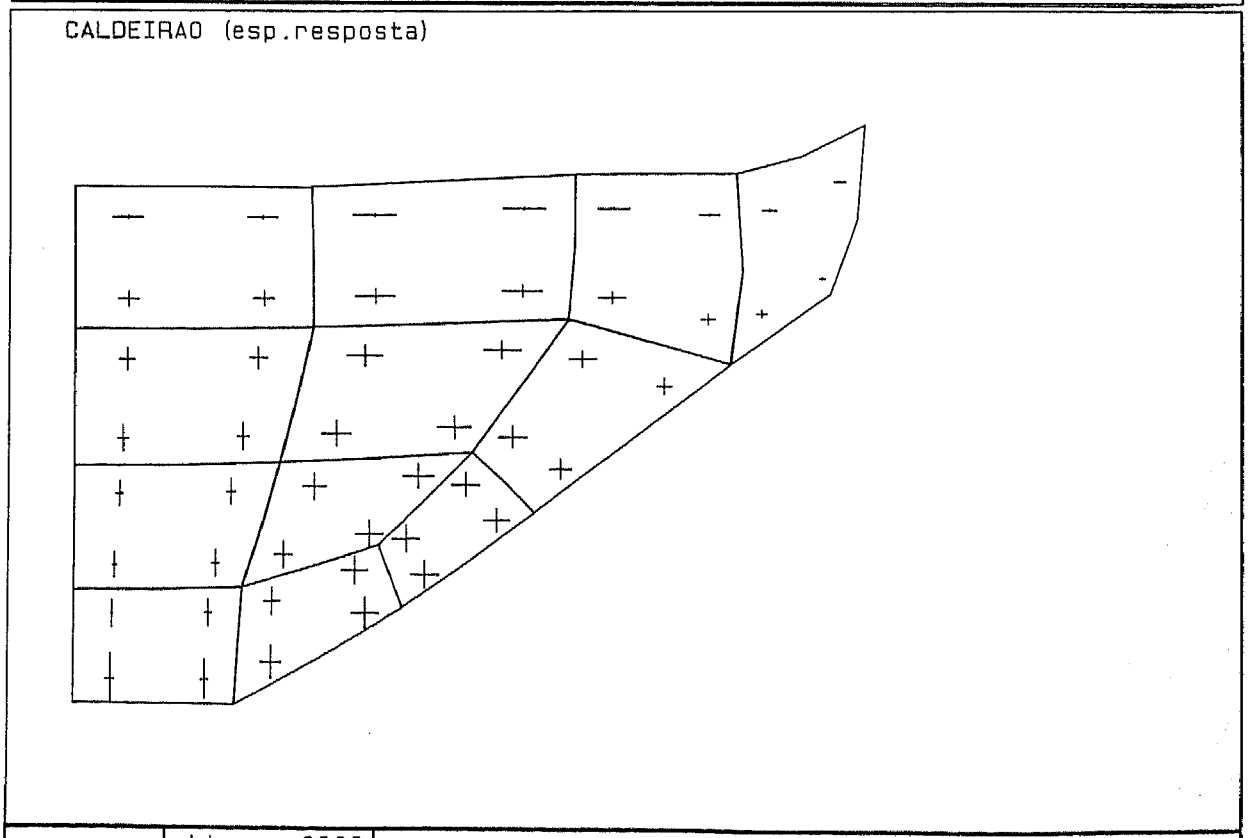


Fig. 2.32 - Distribuição de tensões na superfície de montante (sismo 1; contributo dos 6 primeiros modos simétricos).





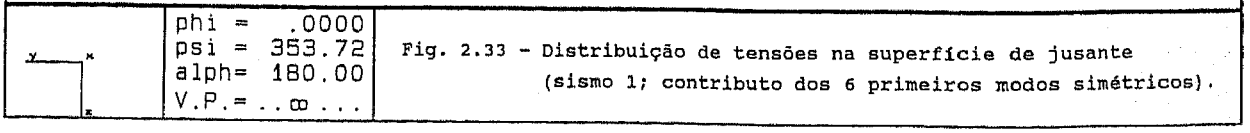
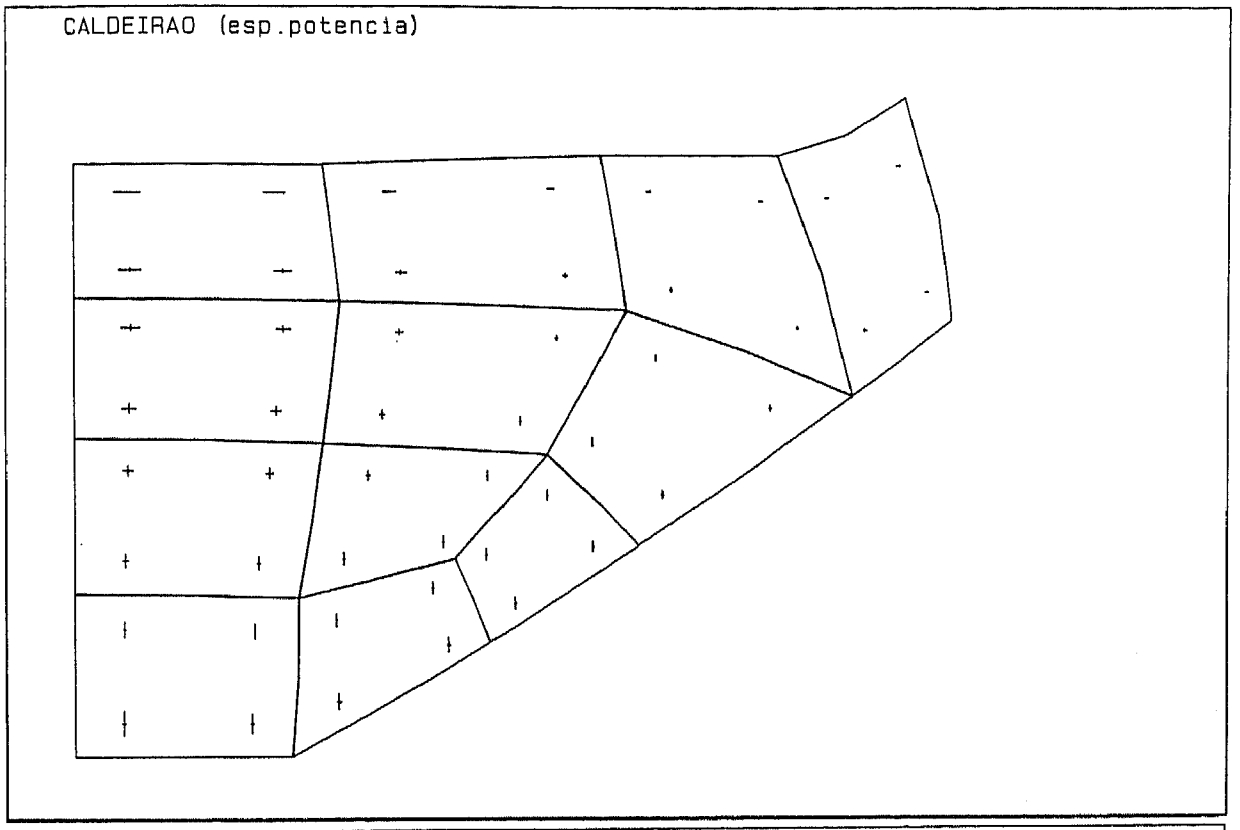
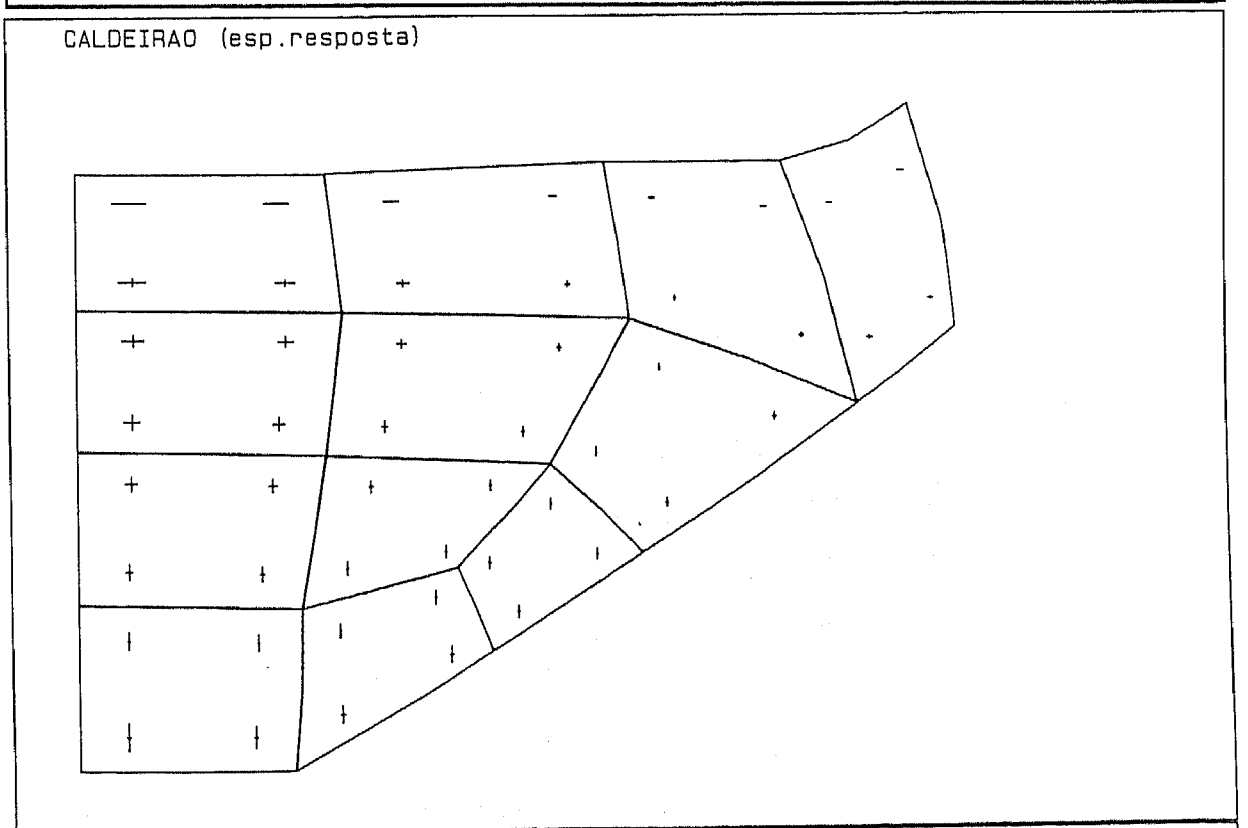


Fig. 2.33 - Distribuição de tensões na superfície de jusante (sismo 1; contributo dos 6 primeiros modos simétricos).





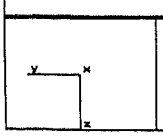
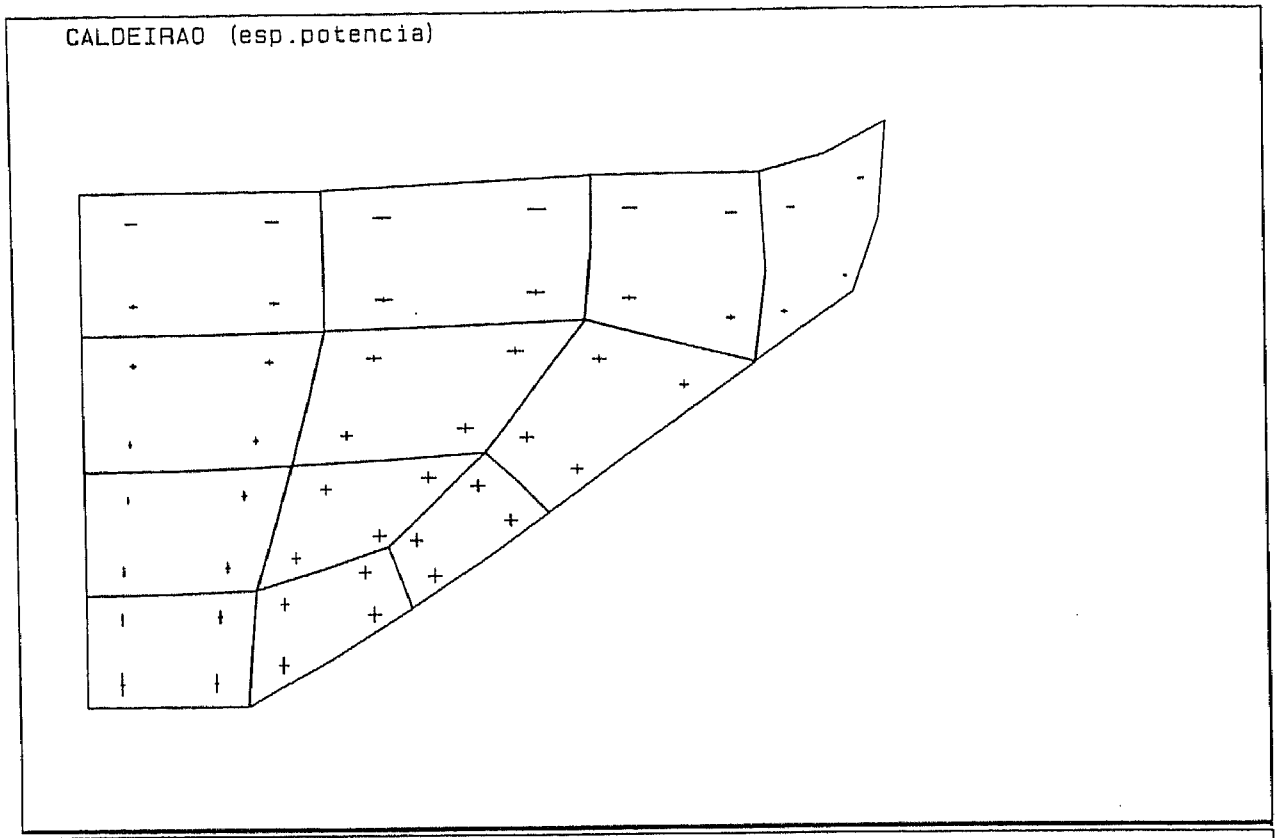
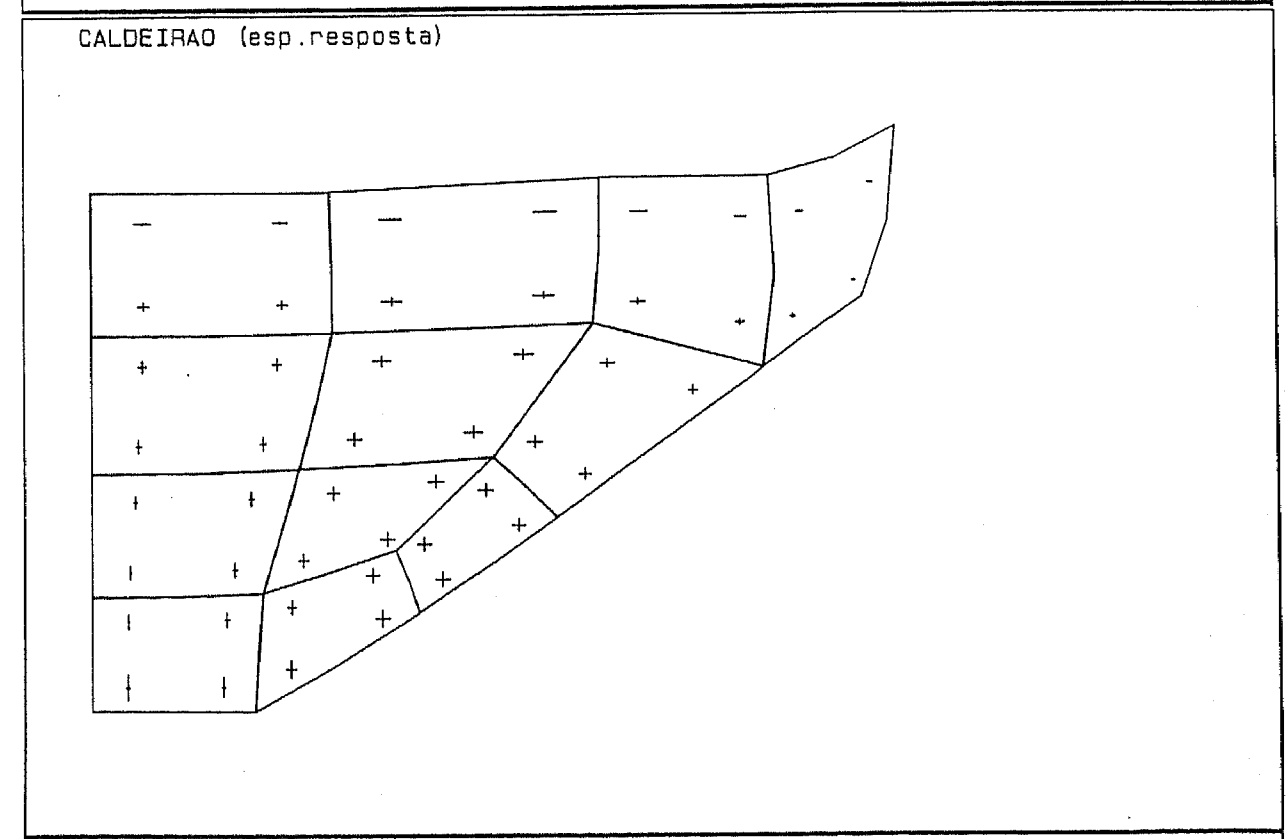


Fig. 2.34 - Distribuição de tensões na superfície de montante (sismo 2; contributo dos 6 primeiros modos simétricos).





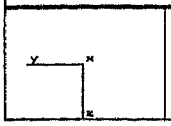


Fig. 2.35 - Distribuição de tensões na superfície de jusante (sismo 2; contributo dos 6 primeiros modos simétricos).

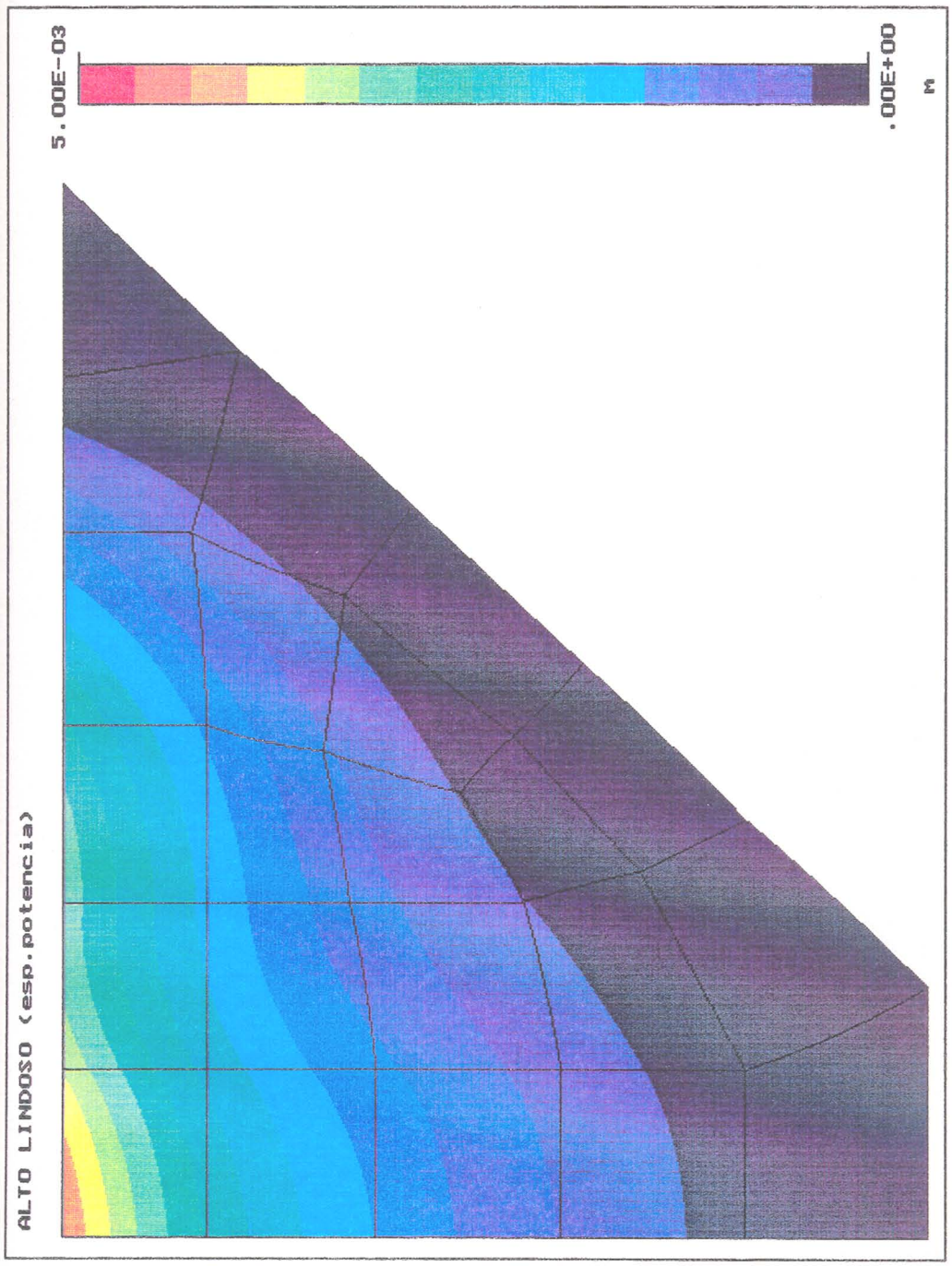


Fig. 2.36 - Deslocamentos máximos na direcção montante-jusante. Sismo 1; Contributo dos 5 modos simétricos.

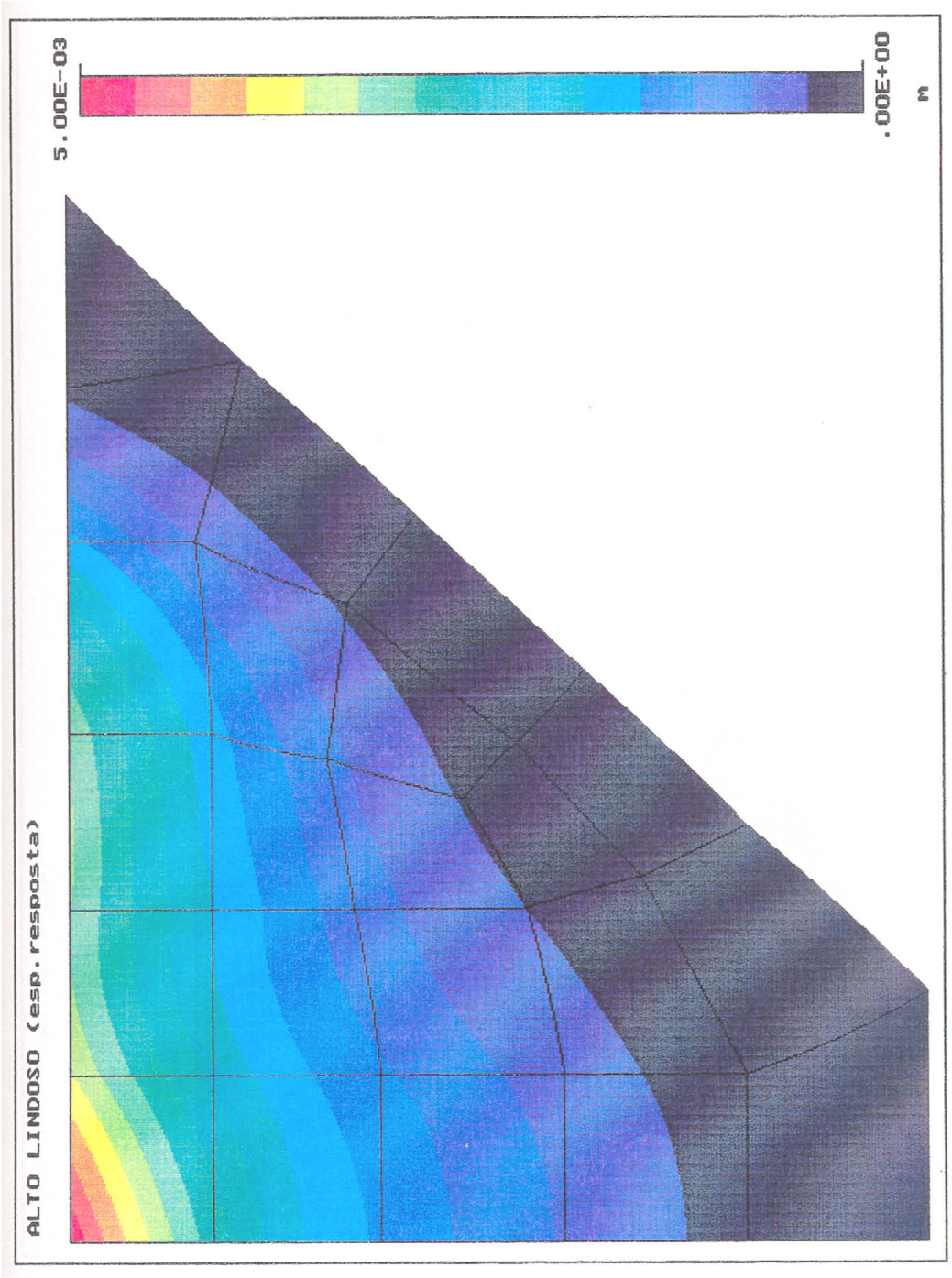


Fig. 2.37 - Deslocamentos máximos na direcção montante-jusante. Sismo 1; Contributo dos 5 modos simétricos.

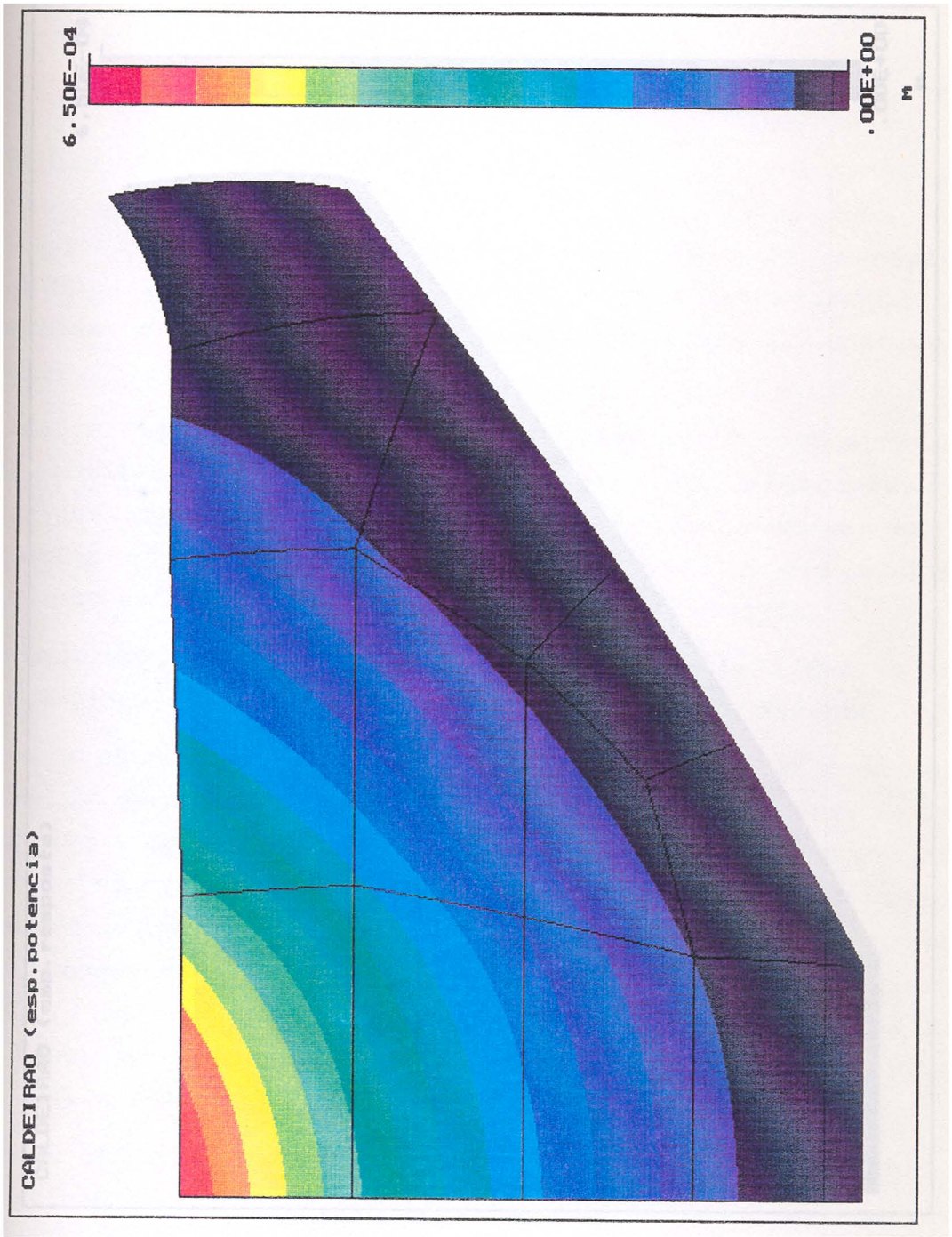


Fig. 2.38 - Deslocamentos máximos na direcção montante-jusante. Sismo 1; Contributo dos 6 modos simétricos.

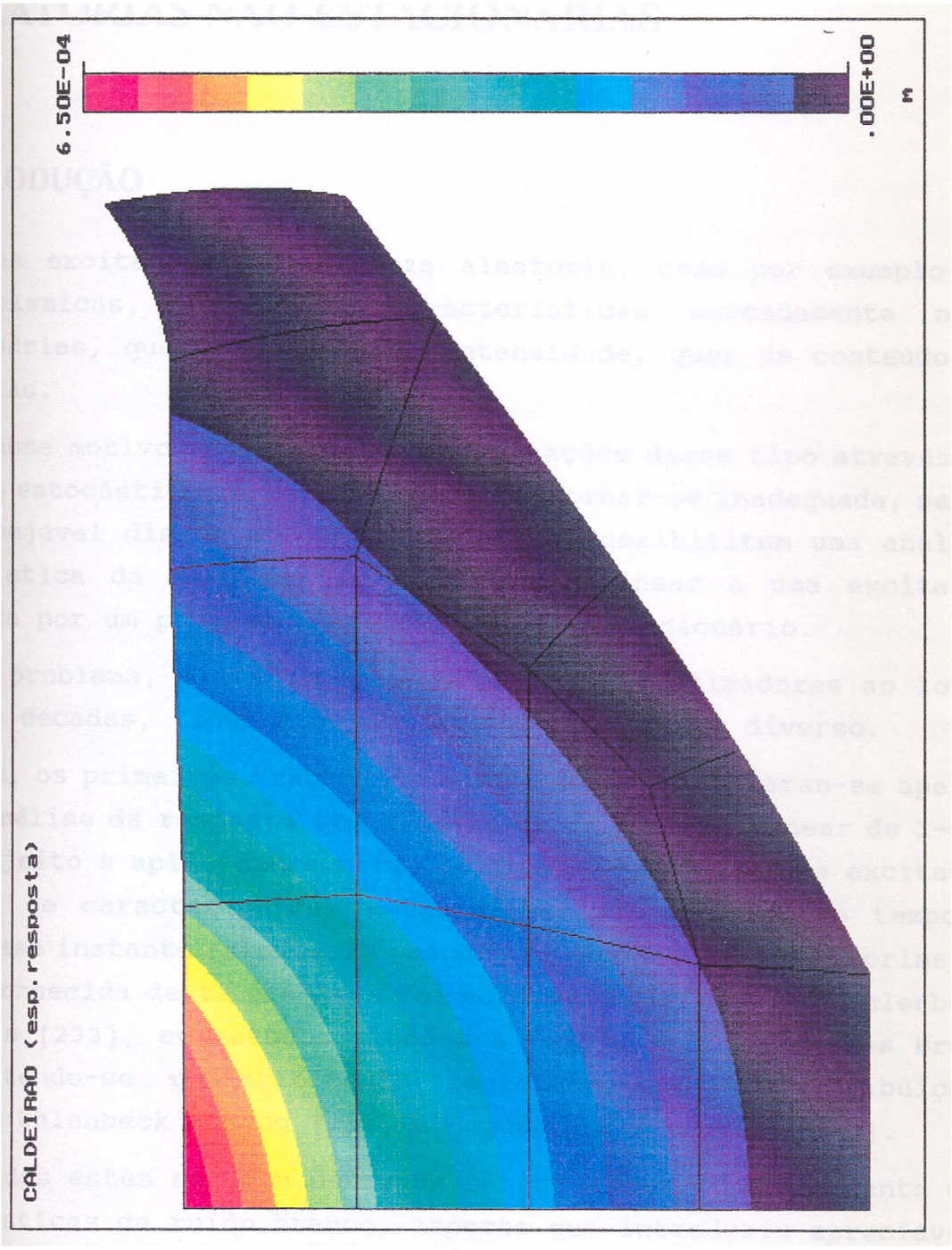


Fig. 2.39 - Deslocamentos máximos na direcção montante-jusante. Sismo 1; Contributo dos 6 modos simétricos.

3

RESPOSTA DE SISTEMAS LINEARES A EXCITAÇÕES ALEATÓRIAS NÃO-ESTACIONÁRIAS

3.1 - INTRODUÇÃO

Certas excitações de natureza aleatória, como por exemplo as acções sísmicas, apresentam características marcadamente não-estacionárias, quer em termos de intensidade, quer de conteúdo de frequências.

Por esse motivo, a modelação de excitações desse tipo através de processos estocásticos estacionários pode tornar-se inadequada, sendo então desejável dispor de formulações que possibilitem uma análise probabilística da resposta de um sistema linear a uma excitação idealizada por um processo estocástico não-estacionário.

Este problema, aliás, preocupou muitos investigadores ao longo de várias décadas, tendo sido objecto de tratamento diverso.

Assim, os primeiros trabalhos neste domínio debruçaram-se apenas sobre a análise da resposta transitória de um sistema linear de 1-GL, quando sujeito à aplicação súbita, no instante $t = 0$, de uma excitação aleatória de características estatísticas invariantes no tempo a partir desse instante (excitação pseudo-não-estacionária). A primeira solução conhecida deste problema foi conseguida em 1930 por Uhlenbeck e Ornstein [233], em estudos ligados à teoria dos movimentos Brownianos, tendo-se posteriormente registado outras contribuições devidas a Uhlenbeck e Wang [234] e Bogdanoff e Goldberg [29].

Em todos estes estudos se supôs sempre a excitação actuante com características de ruído branco, aspecto que introduziu apreciáveis simplificações no desenvolvimento matemático do problema.

Apenas em 1961, Caughey e Stumpf [50] desenvolveram uma formulação que possibilitou analisar a resposta transitória de um sistema linear

de 1-GL, sujeito a uma excitação pseudo-não-estacionária caracterizada por um espectro de potência de configuração arbitrária.

Posteriormente, Barnoski e Maurer [23], seguindo uma abordagem no domínio da frequência, e não no domínio do tempo como Caughey e Stumpf, caracterizaram a evolução temporal do valor quadrático médio da resposta, tendo passado a considerar uma gama mais alargada de excitações não-estacionárias, designadas por excitações moduláveis, susceptíveis de se exprimirem como o produto de uma função de modulação determinística, exclusivamente função do tempo, por um processo estocástico estacionário de banda larga e valor médio nulo, resultando as excitações pseudo-não-estacionárias como um mero caso particular, a que corresponde uma função de modulação do tipo Heaviside.

Na sequência desse trabalho, Roberts [189], referindo-se à mesma gama de excitações não-estacionárias utilizada por Barnoski e Maurer, introduziu uma abordagem aproximada, igualmente no domínio da frequência, que assente numa formulação modal, possibilitou passar a analisar a resposta não-estacionária de sistemas lineares de N-GL.

Já no campo dos sistemas lineares de N-GL, outras contribuições ulteriores de importância significativa foram dadas por outros autores, nomeadamente por Hammond [109], que teve em conta a não-estacionaridade da excitação actuante com maior generalidade, através da consideração do espectro de potência evolutivo de Priestley [184], sendo no entanto conduzido a procedimentos de cálculo bastante complexos e trabalhosos, bem como por Madsen e Krenk [150], que apresentaram expressões exactas para o valor quadrático médio da resposta em termos das funções de inter-correlação da excitação, suposta pseudo-não-estacionária e colorida, e por Krenk, Madsen e Madsen [136], que estenderam esta análise por forma a conseguir obter também, no caso de sistemas de 1-GL, grandezas estatísticas de segunda ordem relativas à resposta não-estacionária e à correspondente transformada de Hilbert, preparando assim o tratamento dos problemas de primeira passagem.

No entanto, merecem especial destaque as formulações mais recentes desenvolvidas por Gasparini e DebChaudhury [105, 106] e Langley [142]

que, mediante a introdução de variáveis de estado, possibilitam efectuar uma eficiente análise evolutiva da resposta de um sistema linear de N-GL a uma excitação aleatória modulável, bem como a abordagem modal introduzida por Pradlwarter e Chen [180], susceptível de ser facilmente estendida a excitações não-estacionárias idealizadas através do modelo de Priestley.

Nestas condições, julga-se conveniente iniciar este capítulo abordando o caso dos sistemas lineares de 1-GL, explicitando as relações estocásticas excitação-resposta em termos de duas grandezas estatísticas de segunda ordem de fundamental importância para a caracterização probabilística de processos gaussianos, e que são a função de auto-correlação e a função densidade espectral de potência, convenientemente generalizada a processos não-estacionários, quer através do modelo de Bendat e Piersol, quer do modelo de Priestley.

Seguidamente, são indicados alguns aspectos de interesse relativos à evolução temporal das características espectrais da resposta a uma excitação não-estacionária modulável, e à avaliação da fiabilidade do sistema, passando-se depois a descrever detalhadamente abordagens particularmente eficientes de análise da resposta de sistemas de N-GL sujeitos àquele tipo de excitações.

Por último, são referidas interessantes aplicações das formulações descritas ao caso particular da engenharia sísmica, efectuando-se uma descrição dos programas de cálculo automático desenvolvidos para o efeito, e apresentando exemplos práticos julgados sugestivos.

3.2 - SISTEMAS LINEARES DE 1-GL

3.2.1 - Relações estocásticas excitação-resposta relativas ao modelo de Bendat e Piersol

Considere-se um sistema linear de 1-GL sujeito a uma excitação aleatória, idealizada por um processo estocástico não-estacionário $p_*(t)$, sendo o respectivo equilíbrio dinâmico traduzido pela equação

$$m\ddot{q}(t)+c\dot{q}(t)+kq(t)=p_*(t) \tag{3.1}$$

Tendo a excitação natureza gaussiana, o mesmo sucede com a resposta, sendo a correspondente distribuição de probabilidade instantânea definida exclusivamente com base no valor médio espectável e na variância da resposta no instante considerado.

Encontrando-se o sistema inicialmente em repouso no instante $t=0$, a evolução temporal do valor médio espectável da resposta pode obter-se aplicando o operador $E[\ ]$ a ambos os membros da equação (2.4), resultando que

$$m_q(t)=\int_0^t m_{p_*}(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{3.2}$$

o que significa que, caso a excitação apresente em qualquer instante um valor médio nulo, o mesmo sucederá com o processo de resposta.

Esta hipótese simplificativa é, aliás, correntemente aceite na modelação de muitas excitações não-estacionárias, e em particular no domínio da engenharia sísmica, tornando-se então a distribuição de probabilidade instantânea da resposta exclusivamente função da variância correspondente.

Podendo esta variância ser determinada a partir, quer da função de auto-correlação do processo de resposta, quer da correspondente função densidade espectral de potência, convenientemente generalizada a processos não-estacionários através do modelo de Bendat e Piersol ou do modelo de Priestley, assume naturalmente particular importância o estabelecimento de relações entre estas funções e as funções homólogas referentes ao processo de excitação.

Começando por adoptar a definição de Bendat e Piersol, e supondo a excitação modulável, isto é, susceptível de ser representada através da relação

$$p_*(t)=A(t)p(t) \tag{3.3}$$

em que $A(t)$ é uma função de modulação determinística unicamente função do tempo, e $p(t)$ um processo estocástico estacionário, a função de auto-correlação do processo de resposta é dada por (v. eq. 2.4 e 3.3)

$$R_q(t,\tau) = E\left[q\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$= \int_0^{t-\frac{\tau}{2}} \int_0^{t+\frac{\tau}{2}} h\left(t-\frac{\tau}{2}-u\right)h\left(t+\frac{\tau}{2}-v\right)E[p_*(u)p_*(v)]dudv$$

$$= \int_0^{t-\frac{\tau}{2}} \int_0^{t+\frac{\tau}{2}} A(u)A(v)h\left(t-\frac{\tau}{2}-u\right)h\left(t+\frac{\tau}{2}-v\right)R_p(u-v)dudv \qquad (3.4)$$

ou, tendo presente as relações de Wiener-Khintchine e permutando a ordem de integração, por

$$R_q(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{t-\frac{\tau}{2}}\int_0^{t+\frac{\tau}{2}} A(u)A(v)h\left(t-\frac{\tau}{2}-u\right)h\left(t+\frac{\tau}{2}-v\right)S_p(w)e^{iw(u-v)}dudvdw \qquad (3.5)$$

Comparando esta equação com (1.131), resulta pois que

$$S_q(w,t) = S_p(w)\int_0^{t-\frac{\tau}{2}}\int_0^{t+\frac{\tau}{2}} A(u)A(v)h\left(t-\frac{\tau}{2}-u\right)h\left(t+\frac{\tau}{2}-v\right)e^{iw(u-v-\tau)}dudv \qquad (3.6)$$

Tendo também em consideração que a função de auto-correlação não-estacionária de Bendat e Piersol $R_q(t,\tau)$ é par em τ, assumindo a correspondente função densidade espectral de potência $S_q(w,t)$ exclusivamente valores reais, independentes do desfazamento τ (v. 1.7.2), pode atribuir-se a τ um valor nulo na equação (3.6), obtendo-se finalmente que

$$S_q(w,t) = S_p(w)\int_0^t \int_0^t A(u)A(v)h(t-u)h(t-v)\cos[w(u-v)]dudv \qquad (3.7)$$

As equações (3.4) e (3.7) constituem assim as duas relações desligadas que possibilitam o conhecimento das funções de auto-correlação e densidade espectral de potência relativas ao processo de resposta não-estacionário, a partir do conhecimento das funções homólogas relativas ao processo estacionário $p(t)$, podendo a partir delas determinar-se a evolução temporal do valor quadrático médio da resposta através da equação (1.132), ou seja

$$E[q^2(t)] = R_q(t,o) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(w,t)dw \qquad (3.8)$$

valor que é coincidente com a variância, caso a excitação tenha valor médio nulo.

3.2.2 - Relações estocásticas excitação-resposta relativas ao modelo de Priestley

Supunhamos agora que o equilíbrio dinâmico de um sistema linear de 1-GL é traduzido pela equação

$$m\ddot{q}(t)+c\dot{q}(t)+kq(t)=p(t) \tag{3.9}$$

em que $p(t)$ representa um processo estocástico não-estacionário, susceptível de ser representado através do integral (1.141), ou seja

$$p(t)=\int_{-\infty}^{\infty} A_p(t,w)e^{iwt}dZ_p(w) \tag{3.10}$$

Nessas condições, a resposta será traduzida por um processo igualmente não-estacionário, obedecendo a uma representação integral do mesmo tipo, isto é

$$q(t)=\int_{-\infty}^{\infty} A_q(t,w)e^{iwt}dZ_q(w) \tag{3.11}$$

sendo a função densidade espectral de potência evolutiva da resposta definida pela equação (1.144), ou seja

$$S_q(w,t)=|A_q(t,w)|^2 S_q(w) \tag{3.12}$$

em que $S_q(w)$ representa a densidade espectral de potência associada ao processo estacionário correspondente, isto é, isento da contribuição da função $A(t,w)$, verificando-se também que (v. eq. 1.145)

$$R_q(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_q(w,t)e^{iw\tau}dw \tag{3.13}$$

Encontrando-se o sistema inicialmente em repouso, a resposta pode ser expressa através do integral de convolução (2.4) que, conjugado com a equação (3.10), dá lugar a

$$q(t)=\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} A_p(\tau,w)e^{iw\tau}dZ_p(w)h(t-\tau)d\tau \qquad (3.14)$$

ou, introduzindo a substituição de variáveis $u=t-\tau$ e permutando a ordem de integração

$$q(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t A_p(t-u,w)e^{-iwu}h(u)du \; e^{iwt}dZ_p(w) \qquad (3.15)$$

Por outro lado, tendo em conta que no caso de um processo estocástico estacionário (v. eq. 1.136, 2.9 e 2.28)

$$dZ_p(w)=\frac{P(w)}{2\pi}dw=\frac{1}{H(w)}.\frac{Q(w)}{2\pi}dw=\frac{1}{H(w)}dZ_q(w) \qquad (3.16)$$

sendo

$$S_q(w)=|H(w)|^2 S_p(w) \qquad (3.17)$$

pode concluir-se, substituindo (3.16) em (3.15), e comparando a expressão resultante com (3.11), que

$$A_q(t,w)=\frac{1}{H(w)}\int_0^t A_p(t-u,w)e^{-iwu}h(u)du \qquad (3.18)$$

Substituindo, por último, em (3.12) as expressões de $A_q(t,w)$ e de $S_q(w)$ dadas pelas equações (3.18) e (3.17), obtém-se a seguinte relação excitação-resposta em termos de densidades espectrais de potência

$$S_q(t,w)=\left|\int_0^t A_p(t-u,w)e^{-iwu}h(u)du\right|^2 S_p(w) \qquad (3.19)$$

equação que substituída em (3.13), dá lugar à correspondente relação excitação-resposta ao nível das funções de auto-correlação, ou seja

$$R_q(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^t A(t-u,w)e^{-iwu}h(u)du\right|^2 S_p(w)e^{iw\tau}dw \qquad (3.20)$$

com

$$S_p(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_p(v)e^{-iwv}dv \qquad (3.21)$$

Desta forma, torna-se também possível caracterizar a evolução temporal do valor quadrático médio da resposta, já que

$$E[q^2(t)] = R_q(t,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(t,w)dw \qquad (3.22)$$

valor que é coincidente com a variância, caso a excitação tenha valor médio nulo, definindo então por si só a distribuição probabilística instantânea da resposta suposta gaussiana.

De assinalar apenas que as relações excitação-resposta, acabadas de deduzir para excitações não-estacionárias, encerram como casos particulares relações correspondentes já conhecidas para excitações estacionárias, obtendo-se, por exemplo, a equação (3.17) a partir de (3.19) se se considerar $A_p(t,w) = 1$ e $t \to \infty$.

3.2.3 - Evolução temporal das características espectrais da resposta a uma excitação pseudo-não-estacionária

Uma vez conhecidas as relações estocásticas entre a excitação não-estacionária actuante e a correspondente resposta de um sistema linear de 1-GL, assume também certo interesse efectuar algumas observações relativas à evolução temporal das características espectrais da resposta de um sistema linear de 1-GL, de massa unitária e frequência natural $w_n = w_o$, a uma excitação pseudo-não-estacionária, susceptível de ser traduzida pela equação

$$p_*(t) = A(t)p(t) \qquad (3.23)$$

em que $A(t)$ é uma função de Heaviside ($A(t) = 0$ para $t < 0$, e $A(t) = 1$ para $t \geq 0$), e $p(t)$ representa um processo estacionário de valor médio nulo, caracterizado por um espectro de potência $S_p(w)$ de configuração qualquer.

Utilizando a formulação de Bendat e Piersol, segundo a qual a relação excitação-resposta ao nível das funções densidade espectral de potência é fornecida pela equação (3.7), Corotis e Vanmarke [57], substituindo nessa equação a expressão da função de resposta ao impulso de Dirac dada pela equação (2.5), obtiveram que

$$S_q(w,t) = S_p(w)\,|H(w)|^2 \{1 + e^{-2\xi w_o t}[1 + a(t) + w^2 b(t)] - e^{-\xi w_o t}[c(t)\cos(wt) + w d(t)\,\mathrm{sen}(wt)]\} \quad (3.24)$$

em que

$$a(t) = \frac{\xi^2 w_o^2 - w_d^2}{w_d^2}\,\mathrm{sen}^2(w_d t) + \frac{\xi w_o}{w_d}\,\mathrm{sen}(2w_d t)$$

$$b(t) = \frac{\mathrm{sen}^2(w_d t)}{w_d^2} \quad (3.25)$$

$$c(t) = \frac{2\xi w_o}{w_d}\,\mathrm{sen}(w_d t) + 2\cos(w_d t)$$

$$d(t) = \frac{2\,\mathrm{sen}(w_d t)}{w_d}$$

Esta expressão, que é aliás consistente com uma outra obtida por Hammond [109] com recurso à formulação de Priestley, é susceptível de ser simplificada no caso de baixos coeficientes de amortecimento ξ, dando lugar a

$$S_q(w,t) = S_p(w)|H(w)|^2 \left\{ 1 + e^{-2\xi w_o t}\left[\cos^2(w_o t) + \frac{w^2}{w_o^2}\,\mathrm{sen}^2(w_o t) \right] - e^{-\xi w_o t}\left[2\cos(w_o t)\cos(wt) + \frac{2w}{w_o}\,\mathrm{sen}(w_o t)\,\mathrm{sen}(wt) \right] \right\} \quad (3.26)$$

Na figura 3.1 [57] apresenta-se a tradução gráfica desta equação para três valores distintos do coeficiente de amortecimento ξ, podendo constatar-se que à medida que $w_o t$ cresce, se regista uma transição do espectro de potência da resposta não-estacionária, inicialmente de tipo banda larga, para um espectro de banda estreita, verificando-se simultaneamente um franco crescimento do pico do espectro na vizinhança da frequência natural do sistema, e uma tendência assintótica para os valores espectrais estacionários definidos por $S_q(w) = |H(w)|^2 S_p(w)$.

Por outro lado, conclui-se também que quanto menor é o coeficiente de amortecimento ξ, maior é a concentração de ordenadas espectrais

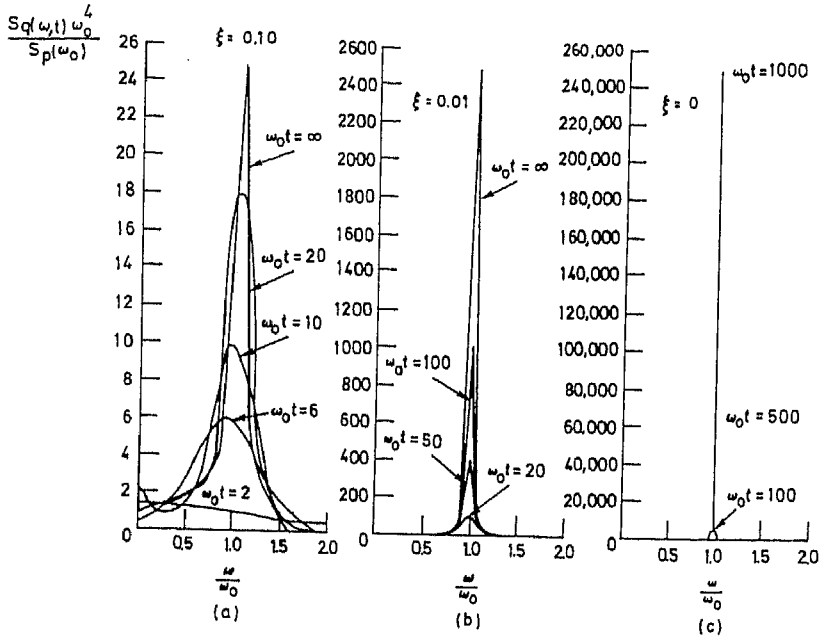


Fig. 3.1 - Evolução temporal de $S_q(w,t)$.

nas proximidades de w_o, e muito mais acentuado é o crescimento das ordenadas espectrais dominantes.

Nestas condições, a evolução temporal da variância da resposta $\mu_q(t)$, coincidente com o momento espectral de ordem zero $\lambda_o^q(t)$, pode ser determinada calculando-se em cada instante o valor da área subentendida pela função $S_q(w,t)$, podendo desse modo obter-se a seguinte expressão, inicialmente obtida por Caughey e Stumpf [50]

$$\mu_q(t)=\lambda_o^q(t)=\frac{\pi S_p(w_o)}{2\xi w_o^3}\left\{1-e^{-2\xi w_o t}\left[1+\frac{2\xi^2 w_o^2}{w_d^2}\operatorname{sen}^2(w_d t)+\frac{\xi w_o}{w_d}\operatorname{sen}(2w_d t)\right]\right\} \tag{3.27}$$

a qual é exacta se $p(t)$ for um processo do tipo ruído branco, e aproximada caso $p(t)$ apresente um espectro de potência de banda larga.

Na figura 3.2 encontra-se representada a evolução temporal da variância da resposta a uma excitação pseudo-não-estacionária de valor

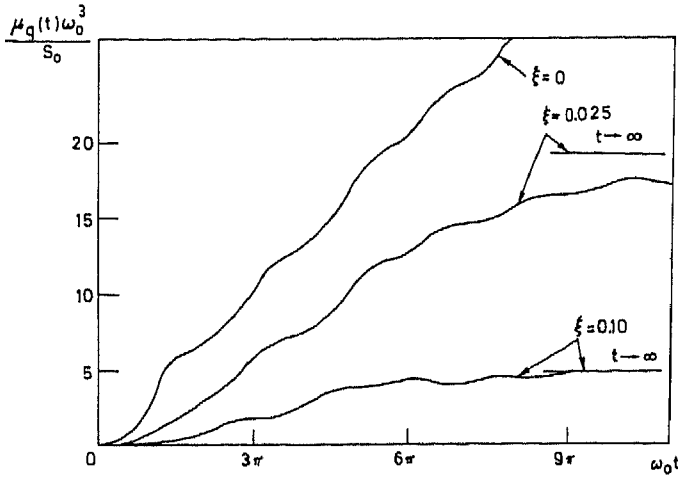


Fig. 3.2 - Evolução temporal da variância da resposta a uma excitação pseudo-não-estacionária do tipo ruído branco.

médio nulo, caracterizada por um ruído branco de densidade espectral constante S_o, para vários valores do coeficiente de amortecimento ξ, podendo observar-se a tendência assintótica para o valor estacionário

$$\mu_q = \frac{\pi S_o}{2\xi w_o^3} \tag{3.28}$$

De forma análoga, Corotis, Vanmarke e Cornell [58] procuraram quantificar os correspondentes momentos espectrais $\lambda_1^q(t)$ e $\lambda_2^q(t)$, tendo

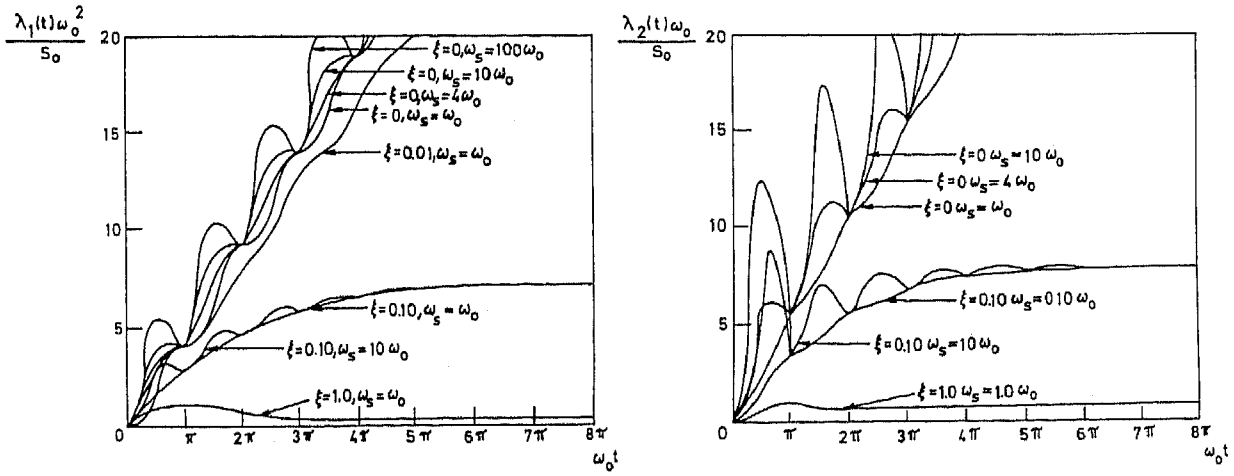


Fig. 3.3 - Evolução temporal dos momentos espectrais da resposta $\lambda_1^q(t)$ e $\lambda_2^q(t)$ a uma excitação pseudo-não-estacionária do tipo ruído branco limitado à banda $[-w_s, w_s]$.

verificado que a integração exigida para esse efeito envolve termos divergentes no caso de um ruído branco.

No entanto esses investigadores conseguiram obter expressões de $\lambda_1^q(t)$ e $\lambda_2^q(t)$ para o caso de uma excitação do tipo ruído branco de banda limitada ao intervalo de frequências $[-w_s, w_s]$, as quais se encontram traduzidas graficamente na figura 3.3 [58], permitindo constatar a existência de uma evolução ondulante de $\lambda_1^q(t)$ e $\lambda_2^q(t)$, tanto mais acentuada quanto mais elevada é a relação w_s/w_o, facto que foi aliás também verificado através de simulações numéricas realizadas por Crandall, Chandiramani e Cook [69].

3.2.4 - Caracterização da fiabilidade do sistema

Sendo a excitação actuante traduzida por um processo estocástico não-estacionário de valor médio nulo, a fiabilidade do sistema, entendida como a probabilidade de o processo não-estacionário de resposta não ultrapassar uma dada barreira simétrica $\pm a$ entre os instantes 0 e t, pode ser estimada através da extensão da abordagem probabilística introduzida por Vanmarke, referente à distribuição dos tempos de primeira passagem de um processo estocástico estacionário, extensão essa traduzida pela equação (1.356).

Nessas condições, supondo o sistema em repouso no instante $t=0$, sendo nula a probabilidade de um primeiro atravessamento nesse instante ($A=1$), a probabilidade de não-excedência $L_D(t)$ será dada por

$$L_D(t) = \exp\left\{-\int_0^t \alpha(u)\,du\right\} \tag{3.29}$$

sendo

$$\alpha(u) = 2f_o^{+q}(u)\frac{1-\exp\{-\sqrt{\pi/2}\,\delta^q(u)\sqrt{a/\lambda_o^q(u)}\}}{\exp\left\{\frac{a^2}{2\lambda_o^q(u)}\right\}-1} \tag{3.30}$$

Por conseguinte, uma vez conhecida a evolução temporal da densidade espectral de potência do processo não-estacionário de resposta, podem

quantificar-se os valores instantâneos dos momentos espectrais de ordem 0, 1 e 2

$$\lambda_m^q(u) = \int_{-\infty}^{\infty} w^m S_q(w,u)\,dw \qquad (m = 0,1,2) \tag{3.31}$$

com base nos quais podem ser também determinados, de forma aproximada, os correspondentes valores de $f_o^{\uparrow q}(u)$ e $\delta^q(u)$, com recurso às expressões relativas a processos estacionários

$$f_o^{\uparrow q}(u) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda_2^q(u)}{\lambda_o^q(u)}} \tag{3.32}$$

$$\delta^q(u) = \sqrt{1 - \frac{[\lambda_1^q(u)]^2}{\lambda_o^q(u)\lambda_2^q(u)}} \tag{3.33}$$

tornando-se imediata a avaliação da fiabilidade do sistema através da equação (3.29).

3.3 - SISTEMAS LINEARES DE N-GL

A análise da evolução temporal das características estatísticas da resposta de um sistema linear de N-GL a uma excitação aleatória não-estacionária é habitualmente realizada de forma mais simples e eficiente recorrendo ao conceito de variáveis de estado, e transformando o sistema de N equações diferenciais de segunda ordem tradutoras do seu equilíbrio dinâmico num outro sistema de 2N equações diferenciais de primeira ordem, possibilitando desse modo usufruir dos meios proporcionados pela teoria matemática de resolução de sistemas de equações diferenciais deste tipo.

Por esse motivo, as abordagens descritas baseiam-se sempre numa formulação de estado, admitindo-se também que a não-estacionaridade da excitação é susceptível de ser traduzida por um processo estocástico não-estacionário modulável, hipótese que embora restritiva é perfeitamente aceitável do ponto de vista da modelação de grande número de excitações não-estacionárias, em particular no domínio da engenharia sísmica.

3.3.1 - Análise estocástica da evolução temporal da resposta mediante o recurso a variáveis de estado

O equilíbrio dinâmico de um sistema linear de N-GL, sujeito a uma excitação aleatória não-estacionária modulável, pode traduzir-se através de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem do tipo

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}(t)+\underline{K}\underline{q}(t)=\underline{p}_*^q(t) \tag{3.34}$$

em que o processo vectorial não-estacionário

$$\underline{p}_*^q(t)=\underline{\theta}(t)\underline{p}^q(t) \tag{3.35}$$

sendo $\underline{\theta}(t)$ uma matriz de funções de modulação determinísticas, exclusivamente dependentes do tempo, e $\underline{p}^q(t)$ um processo estocástico vectorial estacionário.

Introduzindo o vector de estado

$$\underline{y}(t)=\begin{Bmatrix}\underline{q}(t)\\ \dot{\underline{q}}(t)\end{Bmatrix} \tag{3.36}$$

este sistema transforma-se num outro de 2N equações diferenciais de primeira ordem, definido por

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{A}\underline{y}(t)+\underline{x}(t) \tag{3.37}$$

em que

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{I}\\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C}\end{bmatrix} \qquad \underline{x}(t)=\begin{Bmatrix}\underline{0}\\ \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(t)\underline{p}^q(t)\end{Bmatrix} \tag{3.38}$$

Assumindo a excitação actuante carácter gaussiano, como se tem vindo a supor, o mesmo sucede com a resposta, passando a correspondente distribuição de probabilidade instantânea a ser inteiramente definida pelo vector dos valores médios espectáveis $\underline{m}_y(t)$ e pela matriz de covariância $\underline{\mu}_y(t)$.

A relação excitação-resposta, em termos de valores médios $\underline{m}_x(t)$ e $\underline{m}_y(t)$, pode ser conseguida aplicando o operador $E[\ ]$ à equação

(3.37), obtendo-se o seguinte sistema de 2N equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\underline{m}}_y(t) = \underline{A}\,\underline{m}_y(t) + \underline{m}_x(t) \tag{3.39}$$

com

$$\underline{m}_x(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\,\underline{\theta}(t)\,\underline{m}_p^q \end{Bmatrix} \tag{3.40}$$

cuja solução é dada por (v. eq. 2.160)

$$\underline{m}_y(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{m}_y(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{m}_x(\tau)\,d\tau \tag{3.41}$$

A matriz de covariância da resposta, em cada instante, pode por seu turno ser determinada seguindo um caminho análogo ao referido em 2.3.7, e que possibilita chegar à conclusão de que

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}\,\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\,\underline{A}^T + E\left[\underline{x}_o(t)\,\underline{y}_o(t)^T\right] + E\left[\underline{y}_o(t)\,\underline{x}_o(t)^T\right] \tag{3.42}$$

verificando-se que, se as condições iniciais não estiverem correlacionadas com a excitação actuante

$$E\left[\underline{y}_o(t)\,\underline{x}_o(t)^T\right] = \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,E\left[\underline{x}_o(\tau)\,\underline{x}_o(t)^T\right]d\tau \tag{3.43}$$

sendo

$$E\left[\underline{x}_o(t)\,\underline{y}_o(t)^T\right] = \left\{E\left[\underline{y}_o(t)\,\underline{x}_o(t)^T\right]\right\}^T \tag{3.44}$$

com

$$\underline{x}_o(t) = \underline{x}(t) - \underline{m}_x(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\,\underline{\theta}(t)\,\underline{p}_o^q(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{p}_{o*}^q(t) \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

e

$$\underline{p}_o^q(t) = \underline{p}^q(t) - \underline{m}_{p^q} \tag{3.46}$$

No caso particular de o processo $\underline{p}_o^q(t)$ ser do tipo ruído branco, caracterizado por uma matriz de densidades espectrais constantes $\underline{S}_o^{p^q}$, tal que

$$\underline{R}_{p_o^q}(t-\tau)=2\pi\underline{S}_o^{p^q}\delta(t-\tau) \tag{3.47}$$

fácil é constatar, tendo presente a equação (3.45), que

$$E\left[\underline{x}_o(\tau)\underline{x}_o(t)^T\right]=2\pi\delta(t-\tau)\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(\tau)\underline{S}_o^{p^q}\underline{\theta}(t)^T\underline{M}^{-1^T}\end{bmatrix} \tag{3.48}$$

Nestas circunstâncias, substituindo (3.48) em (3.43), e atendendo às propriedades da função impulso, obtém-se que

$$E\left[\underline{y}_o(t)\underline{x}_o(t)^T\right]=\pi\underline{S}_o(t) \tag{3.49}$$

sendo

$$\underline{S}_o(t)=\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(t)\underline{S}_o^{p^q}\underline{\theta}(t)^T\underline{M}^{-1^T}\end{bmatrix} \tag{3.50}$$

o que permite concluir que a evolução temporal da matriz de covariância instantânea $\underline{\mu}_y(t)$ é regulada pela equação (v. eq. 3.42)

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t)=\underline{A}\underline{\mu}_y(t)+\underline{\mu}_y(t)\underline{A}^T+2\pi\underline{S}_o(t) \tag{3.51}$$

Por conseguinte, a solução da equação (3.51) conduz à caracterização da evolução temporal da matriz de covariância instantânea da resposta $\underline{\mu}_y(t)$, solução essa que é dada por [105, 106]

$$\underline{\mu}_y(t)=e^{\underline{A}t}\underline{\mu}_y(0)e^{\underline{A}^Tt}+2\pi\int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{S}_o(\tau)e^{\underline{A}^T(t-\tau)}d\tau \tag{3.52}$$

Caso a excitação actuante não apresente características próprias de ruído branco evolutivo, esta formulação pode naturalmente continuar a ser seguida, desde que, tal como foi referido em 2.3.7, o processo $\underline{p}^q(t)$ seja interpretado como a resposta de um filtro de ordem n sujeito a uma excitação traduzida por um processo vectorial do tipo ruído branco, ampliando-se de forma apropriada o sistema de equações diferencias (3.37), de modo a reflectir as relações entrada-saída do conjunto sistema-filtro (v. eq. 2.188).

3.3.2 - Formulação de estado modal alternativa

Tal como no caso das excitações aleatórias estacionárias (v. 2.3.8), a análise estocástica da resposta dinâmica de um sistema linear de N-GL a uma excitação aleatória não-estacionária pode também ser realizada através de uma formulação de estado modal não complexa, desde que a matriz de amortecimento $\underline{C}$ satisfaça as condições necessárias para que o sistema de equações diferenciais (3.34) possa ser transformado no seguinte conjunto de M equações diferenciais independentes

$$\ddot{\zeta}_i(t) + 2\xi_i w_i \dot{\zeta}_i(t) + w_i^2 \zeta_i(t) = p_{i*}^{\zeta}(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, M) \tag{3.53}$$

em que a excitação correspondente ao modo de ordem i é definida pelo processo estocástico não-estacionário

$$p_{i*}^{\zeta}(t) = \underline{\phi}_i^T \underline{p}_*^q(t) = \underline{\phi}_i^T \underline{\theta}(t) \underline{p}^q(t) \tag{3.54}$$

De facto, introduzindo M vectores de estado

$$\underline{y}_i(t) = \begin{Bmatrix} \zeta_i(t) \\ \dot{\zeta}_i(t) \end{Bmatrix} \tag{3.55}$$

o conjunto de M equações diferenciais de segunda ordem (3.53) pode ser também transformado no seguinte conjunto de $2M$ equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\underline{y}}_i(t) = \underline{A}_i \underline{y}_i(t) + \underline{x}_i(t) \tag{3.56}$$

ou, o que é equivalente

$$\dot{\underline{y}}_i(t) = \underline{A}_i \underline{y}_i(t) + \underline{B}_i \begin{Bmatrix} 0 \\ \underline{p}^q(t) \end{Bmatrix} \tag{3.57}$$

em que

$$\underline{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_i^2 & -2\xi_i w_i \end{bmatrix} \quad \underline{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \underline{0} \\ 0 & \underline{\phi}_i^T \underline{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad \underline{x}_i(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_{i*}^{\zeta}(t) \end{Bmatrix} \tag{3.58}$$

Dada a analogia formal verificada entre as equações (3.56) e (3.37), torna-se imediata a caracterização da evolução temporal do vector de valores médios espectáveis da resposta modal, o mesmo sucedendo com a matriz de covariância correspondente, tomando as equações (3.42) a (3.52) como referência.

Com efeito, a relação excitação-resposta em termos de valores médios obedece neste caso às $2M$ equações diferenciais

$$\dot{\underline{m}}_{y_i}(t) = \underline{A}_i \underline{m}_{y_i}(t) + \underline{m}_{x_i}(t) \tag{3.59}$$

com

$$\underline{m}_{x_i}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\phi}_i^T \underline{\theta}(t) \underline{m}_{p^q} \end{Bmatrix} \tag{3.60}$$

e cuja solução é

$$\underline{m}_{y_i}(t) = e^{\underline{A}_i t} \underline{m}_{y_i}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}_i (t-\tau)} \underline{m}_{x_i}(\tau) d\tau \tag{3.61}$$

Por outro lado, caso a excitação seja do tipo ruído branco evolutivo, pode concluir-se com facilidade, seguindo um raciocínio análogo ao utilizado em 3.3.1, que

$$\dot{\underline{\mu}}_{y_i}(t) = \underline{A}_i \underline{\mu}_{y_i}(t) + \underline{\mu}_{y_i}(t) \underline{A}_i^T + 2\pi \underline{S}_{oi}(t) \tag{3.62}$$

podendo a matriz $\underline{S}_{oi}(t)$ relacionar-se directamente com a matriz das densidades espectrais conjuntas $\underline{S}_o^{p^q}$, relativa ao processo de excitação estacionário de média nula $\underline{p}_o^q(t)$, através da equação

$$\underline{S}_{oi}(t) = \underline{B}_i \begin{bmatrix} 0 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{S}_o^{p^q} \end{bmatrix} \underline{B}_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{\phi}_i^T \underline{\theta}(t) \underline{S}_o^{p^q} \underline{\theta}(t)^T \underline{\phi}_i \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Por conseguinte, a evolução temporal da matriz de covariância instantânea da resposta modal será obtida a partir da solução da equação (3.62), ou seja

$$\underline{\mu}_{y_i}(t) = e^{\underline{A}_i t} \underline{\mu}_{y_i}(0) e^{\underline{A}_i^T t} + 2\pi \int_0^t e^{\underline{A}_i (t-\tau)} \underline{S}_{oi}(\tau) e^{\underline{A}_i^T (t-\tau)} d\tau \tag{3.64}$$

verificando-se simultaneamente que [105]

$$\underline{\mu}_{y_i y_j}(t) = e^{\underline{A}_i t}\underline{\mu}_{y_i y_j}(0)e^{\underline{A}_j^T t} + 2\pi\int_0^t e^{\underline{A}_i(t-\tau)}S_{oij}(\tau)e^{\underline{A}_j^T(t-\tau)}d\tau \qquad (3.65)$$

sendo

$$\underline{S}_{oij}(\tau) = \underline{B}_i\begin{bmatrix}0 & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{S}_o^{pq}\end{bmatrix}\underline{B}_j^T = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \underline{\phi}_i^T\underline{\theta}(\tau)\underline{S}_o^{pq}\underline{\theta}(\tau)^T\underline{\phi}_j\end{bmatrix} \qquad (3.66)$$

No caso geral de uma excitação não-estacionária colorida, a formulação descrita pode ainda continuar a ser seguida, à semelhança do referido em 2.3.8, devendo para isso recorrer-se à utilização de filtros, e ampliando de forma apropriada as equações utilizadas.

Uma vez determinadas as matrizes de auto e inter-covariância relativas a $\underline{y}_i(t)$ e $\underline{y}_j(t)$, torna-se imediata a formação das matrizes de covariância da resposta modal $\underline{\mu}_\xi(t)$ e $\underline{\mu}_\xi(t)$, e posteriormente das matrizes de covariância da resposta referida às N coordenadas generalizadas q_i, tendo em conta que

$$\underline{\mu}_q(t) = \underline{\Phi}\underline{\mu}_\xi(t)\underline{\Phi}^T \qquad (3.67)$$

$$\underline{\mu}_{\dot{q}}(t) = \underline{\Phi}\underline{\mu}_\xi(t)\underline{\Phi}^T \qquad (3.68)$$

3.3.3 - Avaliação da fiabilidade estrutural

A utilização de qualquer das formulações de estado anteriormente descritas, utilizáveis para a caracterização probabilística da resposta de um sistema linear de N-GL sujeito a uma excitação aleatória não-estacionária gaussiana modulável, possibilita pois o conhecimento da matriz de covariância instantânea da resposta $\underline{\mu}_y(t)$, relativa ao vector de estado $\underline{y}(t)^T = [\underline{q}(t)^T, \underline{\dot{q}}(t)^T]$, tornando-se fácil a determinação posterior da matriz de covariância da resposta em termos de qualquer outro conjunto de variáveis de controlo relacionadas com $\underline{q}(t)$ através de uma transformação linear.

Por conseguinte, torna-se possível, recorrendo à abordagem introduzida por Vanmarke, relativa a processos não-estacionários de valor médio nulo (v. 1.9.5), estimar a fiabilidade do sistema,

entendida como a probabilidade de uma dada quantidade estrutural caracterizadora da resposta, em particular $q_i(t)$, não ultrapassar uma dada barreira simétrica $\pm a$ entre os instantes 0 e t, desde que a excitação seja modelada através de um processo não-estacionário de valor médio nulo ou de valor médio constante.

Sendo nulo o valor médio da resposta não-estacionária $q_i(t)$, a respectiva probabilidade de não-excedência pode assim ser avaliada começando por quantificar o valor instantâneo dos momentos espectrais da resposta $\lambda_o^{q_i}(t)$ e $\lambda_2^{q_i}(t)$, contidos na matriz de covariância

$$\underline{\mu}_y = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_q(t) & \underline{\mu}_{q\dot{q}}(t) \\ \underline{\mu}_{\dot{q}q}(t) & \underline{\mu}_{\dot{q}}(t) \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

sendo

$$\lambda_o^{q_i}(t) = \mu_{q_i}(t) \qquad \lambda_2^{q_i(t)} = \mu_{\dot{q}_i}(t) \tag{3.70}$$

e recorrendo às equações (1.356) e (1.320), obtendo-se

$$L_D^{q_i}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \alpha(u)du\right\} \tag{3.71}$$

com

$$\alpha(u) = 2f_a^{\uparrow}(u) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda_2^{q_i}(t)}{\lambda_o^{q_i}(t)}} \tag{3.72}$$

Este procedimento, porém, assenta na hipótese de os atravessamentos de uma dada barreira poderem ser interpretados como acontecimentos raros e estatisticamente independentes, não se tornando possível uma melhor aproximação no cálculo de $\alpha(u)$ através do recurso à equação (1.357), por esta envolver a determinação do coeficiente $\delta(u)$, a qual exige o conhecimento do momento espectral de primeira ordem $\lambda_1^{q_i}(t)$, não contido na matriz $\underline{\mu}_y(t)$.

Não sendo possível o uso da equação (1.357), a qual procura já contemplar a dependência estatística dos atravessamentos, traduzida no seu agrupamento após cada passagem da envolvente pelo nível considerado, é porém viável recorrer à equação equivalente (1.358)

$$\alpha(u) = 2 f_a^{\uparrow}(u) \frac{1 - \exp[-\tilde{f}_a^{\uparrow}(u)/2 f_a^{\uparrow}(u)]}{1 - f_a^{\uparrow}(u)/f_o^{\uparrow}(u)} \tag{3.73}$$

sendo os valores instantâneos das frequências médias $f_o^{\uparrow}(u)$, $f_a^{\uparrow}(u)$ e $\tilde{f}_a^{\uparrow}(u)$ calculados utilizando as expressões (1.238) e (1.306), deduzidas especificamente para processos não-estacionários de valor médio nulo.

Simplesmente, como ressalta das equações (1.306) a (1.308), esta via exige o recurso a abordagens que possibilitem o conhecimento da evolução temporal da estatística conjunta da resposta $q_i(t)$ e da respectiva transformada de Hilbert $\hat{q}_i(t)$, por forma a poder quantificar-se o valor instantâneo de $\mu_{q_i \hat{q}_i}(t)$ [142].

3.4 - DESENVOLVIMENTO DE "SOFTWARE" NO DOMÍNIO DA ENGENHARIA SÍSMICA. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

No sentido de proporcionar uma mais fácil compreensão àcerca do modo de aplicação das formulações anteriormente referidas à análise da resposta sísmica não-estacionária de sistemas lineares de múltiplos graus de liberdade, descrevem-se nesta secção dois programas de cálculo automático, propositadamente elaborados para o efeito, e que, embora apenas aplicáveis a estruturas reticuladas planas, são de fácil generalização a outros sistemas estruturais.

Seguidamente, é apresentando um exemplo de aplicação julgado elucidativo, e que possibilita ainda uma reflexão àcerca do interesse e necessidade do recurso à idealização da excitação sísmica com base em processos estocásticos não-estacionários, e, concomitantemente, àcerca da razoabilidade da actual filosofia regulamentar.

3.4.1 - Modelos não-estacionários da excitação sísmica

Embora o actual Regulamento de Segurança e Acções idealize as diversas componentes do movimento sísmico como uma amostra de certa duração de um processo estocástico vectorial estacionário gaussiano

de valor médio espectável nulo, este tipo de excitação reveste-se frequentemente de um carácter não-estacionário, quer em termos de intensidade, quer de conteúdo de frequências.

Segundo Pradlwarter e Chen [180], este aspecto é aliás particularmente sentido no caso dos sismos europeus, em grande parte dos quais não é identificável qualquer fase com características verdadeiramente estacionárias, mesmo quando a análise recai exclusivamente sobre a zona mais intensa dos acelerogramas.

Torna-se então conceptualmente mais adequado idealizar este tipo de acção aleatória através da consideração de processos estocásticos não-estacionários, recorrendo, se possível, à representação introduzida por Priestley e referida em 1.7.3, fazendo intervir, por uma questão de maior generalidade, uma função de modulação determinística $\theta(t,w)$, dependente simultaneamente das variáveis tempo e frequência.

A forma mais correntemente utilizada, no domínio da engenharia sísmica, para traduzir a não-estacionaridade da excitação actuante consiste porém na sua representação através do produto de uma função de modulação $\theta(t)$, exclusivamente dependente do tempo, por um processo estocástico vectorial estacionário gaussiano colorido de valor médio espectável nulo.

Desta forma, e no sentido de conseguir uma adequada idealização deste tipo de excitação, vários autores têm utilizado diferentes tipos de funções de intensidade $\theta(t)$ [22, 180], sendo no entanto de realçar duas das mais vulgarizadas, e que são, respectivamente, a sugerida por Amin e Ang [3]

$$\theta(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ (t/t_1)^2 & , \quad 0\leq t<t_1 \\ 1 & , \quad t_1\leq t<t_2 \\ e^{-c(t-t_2)} & , \quad t_2<t \end{cases} \tag{3.74}$$

em que t_1, t_2 e c são parâmetros a definir, e a utilizada por Shinozuka e Sato [204]

$$\theta(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ \dfrac{1}{c}(e^{-at}-e^{-bt}) & , \quad t\geq 0\end{cases} \tag{3.75}$$

em que a e b são constantes a arbitrar e

$$c=\max(e^{-at}-e^{-bt})=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{a/(b-a)}-\left(\frac{a}{b}\right)^{b/(b-a)}\right] \tag{3.76}$$

podendo observar-se na figura 3.4 as configurações características das representações gráficas destes dois tipos de funções.

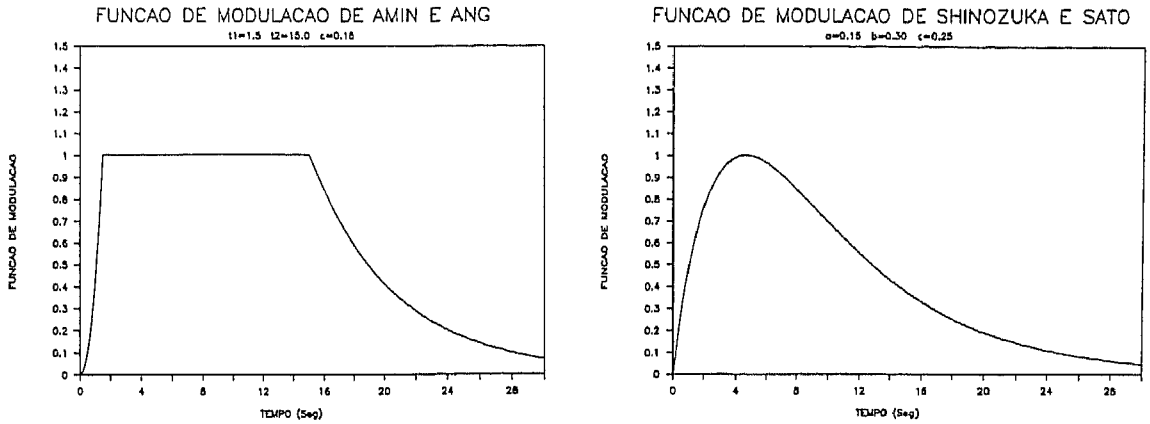


Fig. 3.4 - Funções de modulação determinística utilizadas por Amin e Ang e por Shinozuka e Sato.

3.4.2 - Aplicação à análise sísmica de estruturas reticuladas planas. Descrição dos programas de cálculo automático PROG5 e PROG6

Considere-se agora que a base de uma estrutura reticulada plana regista um movimento sísmico horizontal, idealizado por um processo estocástico não-estacionário gaussiano $\ddot{u}_{g*}(t)$, definido pelo produto de uma função de modulação de carácter determinístico $\theta(t)$ por um processo estocástico estacionário de valor médio nulo $\ddot{u}_g(t)$.

Recorrendo à formulação modal descrita em 3.3.2, o equilíbrio dinâmico do sistema pode ser traduzido por M equações diferenciais

independentes nas coordenadas modais, que agora tomam a forma (v. eq. 3.53)

$$\ddot{\zeta}_i(t)+2\xi_i w_i\dot{\zeta}_i(t)+w_i^2\zeta_i(t)=-\underline{\phi}_i^T\underline{M}\,\underline{a}\ddot{u}_{g*}(t) \tag{3.77}$$

pressupondo o valor unitário das massas modais como condição de normalização dos modos de vibração do sistema.

Introduzindo M vectores de estado

$$\underline{y}_i=[\zeta_i,\dot{\zeta}_i]^T \tag{3.78}$$

estas equações podem transformar-se no seguinte conjunto de 2M equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\underline{y}}_i(t)=\underline{A}_i\underline{y}_i(t)+\underline{x}_i(t) \tag{3.79}$$

ou, o que é equivalente

$$\dot{\underline{y}}_i(t)=\underline{A}_i\underline{y}_i(t)+\underline{b}_i\theta(t)\ddot{u}_g(t) \tag{3.80}$$

em que

$$\underline{A}_i=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -w_i^2 & -2\xi_i w_i\end{bmatrix}\qquad \underline{b}_i=\begin{Bmatrix}0\\ -\underline{\phi}_i^T\underline{M}\,\underline{a}\end{Bmatrix} \tag{3.81}$$

Sendo a excitação gaussiana e o sistema linear, a distribuição probabilística instantânea do processo de resposta $\underline{y}_i(t)$ é igualmente gaussiana, sendo inteiramente caracterizada pelo vector de valores médios $\underline{m}_{y_i}(t)$ e pela matriz de covariância $\underline{\mu}_{y_i}(t)$.

Em relação à evolução temporal do vector dos valores médios, esta é definida pela equação (3.61), ou seja

$$\underline{m}_{y_i}(t)=e^{\underline{A}_i t}\underline{m}_{y_i}(0)+\int_0^t e^{\underline{A}_i(t-\tau)}\underline{m}_{x_i}(\tau)d\tau \tag{3.82}$$

facto que permite concluir de imediato que, se o sistema partir de uma situação inicial de repouso, o valor médio do processo de resposta $\underline{m}_{y_i}(t)$ assume valor nulo.

Caso o processo estocástico estacionário $\ddot{u}_g(t)$ seja do tipo ruído

branco, caracterizado por uma densidade espectral de potência constante S_o, a evolução temporal da matriz de covariância é, por seu lado, regida pela equação (3.62), isto é

$$\dot{\underline{\mu}}_{y_i}(t) = \underline{A}_i \underline{\mu}_{y_i}(t) + \underline{\mu}_{y_i}(t) \underline{A}_i^T + 2\pi \underline{S}_{oi}(t) \tag{3.83}$$

em que

$$\underline{S}_{oi}(t) = \underline{b}_i \underline{b}_i^T \theta(t)^2 S_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{a} \underline{a}^T \underline{M}^T \underline{\phi}_i \end{bmatrix} \theta^2(t) S_o \tag{3.84}$$

A solução correspondente é definida por (3.64), ou seja

$$\underline{\mu}_{y_i}(t) = e^{\underline{A}_i t} \underline{\mu}_{y_i}(0) e^{\underline{A}_i^T t} + 2\pi \int_0^t e^{\underline{A}_i (t-\tau)} S_{oi}(\tau) e^{\underline{A}_i^T (t-\tau)} d\tau \tag{3.85}$$

em que [105]

$$e^{\underline{A}_i t} = e^{-\xi_i w_i t} \begin{bmatrix} \cos(\beta_i t) + \dfrac{\xi_i w_i}{\beta_i} \operatorname{sen}(\beta_i t) & \dfrac{1}{\beta_i} \operatorname{sen}(\beta_i t) \\ -\dfrac{w_i^2}{\beta_i} \operatorname{sen}(\beta_i t) & \cos(\beta_i t) - \dfrac{\xi_i w_i}{\beta_i} \operatorname{sen}(\beta_i t) \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

com $\beta_i = w_i (1 - \xi_i^2)^{1/2}$, verificando-se simultaneamente que (v. eq. 3.65)

$$\underline{\mu}_{y_i y_j}(t) = e^{\underline{A}_i t} \underline{\mu}_{y_i y_j}(0) e^{\underline{A}_j^T t} + 2\pi \int_0^t e^{\underline{A}_i^T (t-\tau)} S_{oij}(\tau) e^{\underline{A}_j^T (t-\tau)} d\tau \tag{3.87}$$

sendo

$$S_{oij}(\tau) = \underline{b}_i \underline{b}_j^T \theta^2(\tau) S_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{a} \underline{a}^T \underline{M} \underline{\phi}_j \end{bmatrix} \theta^2(\tau) S_o \tag{3.88}$$

Na situação mais geral de o processo estocástico $\ddot{u}_g(t)$ apresentar densidades espectrais de potência predominantemente concentradas ao longo de uma determinada gama de frequências, podendo a função $S_{\ddot{u}_g}(w)$ assimilar-se a um espectro de Kanai-Tajimi, aquele espectro pode ser interpretado como o correspondente ao da resposta de um filtro caracterizado pelos parâmetros w_f e ξ_f, em termos de acelerações absolutas $\ddot{u}_f^t(t) = \ddot{u}_g^o(t) + \ddot{u}_f(t)$, quando a sua base é sujeita a uma aceleração

$\ddot{u}_g^o(t)$ de natureza aleatória do tipo ruído branco com intensidade espectral S_o (v. Fig. 3.5).

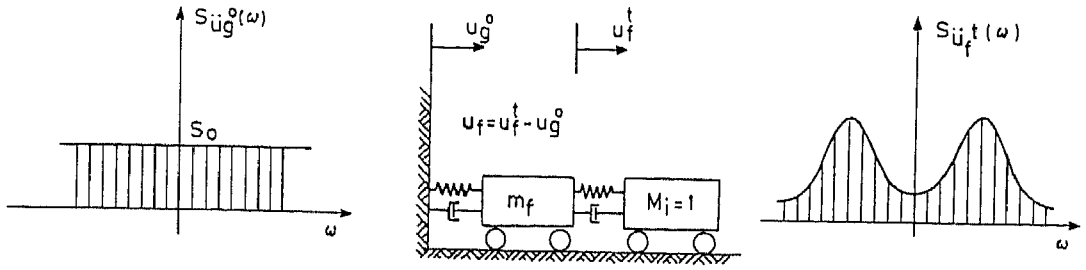


Fig. 3.5 - Introdução de um filtro para idealização de uma excitação não-estacionária colorida.

Nessas circunstâncias, cada equação diferencial do movimento relativa a cada massa modal unitária deve ser acrescida da equação diferencial do movimento do filtro, ou seja ter-se-á

$$\ddot{u}_f(t)+2\xi_f w_f \dot{u}_f(t)+w_f^2 u_f(t)=-\theta(t)\ddot{u}_g^o(t) \tag{3.89}$$

$$\ddot{\zeta}_i(t)+2\xi_i w_i \dot{\zeta}_i(t)+w_i^2 \zeta_i(t)=-\underline{\phi}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{a}[\theta(t)\ddot{u}_g^o(t)+\ddot{u}_f(t)] \tag{3.90}$$

o que, passando para uma formulação de estado em que

$$\underline{y}_i=\begin{Bmatrix}\zeta_i\\ \dot{\zeta}_i\\ u_f\\ \dot{u}_f\end{Bmatrix} \tag{3.91}$$

conduz a

$$\dot{\underline{y}}_i(t)=\underline{\underline{A}}_i\underline{y}_i(t)+\underline{b}_i\theta(t)\ddot{u}_g^o(t) \tag{3.92}$$

com

$$\underline{\underline{A}}_i=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -w_i^2 & -2\xi_i w_i & \underline{\phi}_i^T\underline{\underline{M}}\,\underline{a}w_f^2 & 2\underline{\phi}_i^T\underline{\underline{M}}\,\underline{a}\xi_f w_f\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -w_f^2 & -2\xi_f w_f\end{bmatrix} \qquad \underline{b}_i=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\-1\end{Bmatrix} \tag{3.93}$$

A evolução temporal da matriz de covariância relativa ao vector $\underline{y}_i(t)$ é então regulada pela equação

$$\dot{\underline{\mu}}_{y_i}(t) = \underline{A}_i \underline{\mu}_{y_i}(t) + \underline{\mu}_{y_i}(t) \underline{A}_i^T + 2\pi \underline{S}_{oi}(t) \tag{3.94}$$

sendo neste caso

$$\underline{S}_{oi}(t) = \underline{b}_i \underline{b}_i^T \theta^2(t) S_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \theta^2(t) S_o \tag{3.95}$$

A respectiva solução é também definida pela equação (3.64), ou seja

$$\underline{\mu}_{y_i}(t) = e^{\underline{A}_i t} \underline{\mu}_{y_i}(0) e^{\underline{A}_i^T t} + 2\pi \int_0^t e^{\underline{A}_i (t-\tau)} S_{oi}(\tau) e^{\underline{A}_i^T (t-\tau)} d\tau \tag{3.96}$$

podendo a evolução temporal das matrizes de inter-covariância modal ser obtidas com base na equação (3.65), resultando por seu turno que

$$\underline{\mu}_{y_i y_j}(t) = e^{\underline{A}_i t} \underline{\mu}_{y_i y_j}(0) e^{\underline{A}_j^T (t)} + 2\pi \int_0^t e^{\underline{A}_i (t-\tau)} S_{oij}(\tau) e^{\underline{A}_j^T (t-\tau)} d\tau \tag{3.97}$$

sendo

$$\underline{S}_{oij}(\tau) = \underline{b}_i \underline{b}_j^T \theta^2(\tau) S_o = \underline{S}_{oi}(\tau) \tag{3.98}$$

A matriz de transição de estado foi neste caso calculada por Gasparini [106], apresentando a seguinte constituição

$$e^{\underline{A}_i t} = \begin{bmatrix} & & Y_{13} & Y_{14} \\ & \underline{Y}_{\zeta_i} & & \\ & & Y_{23} & Y_{24} \\ 0 & 0 & & \\ & & & \underline{Y}_{u_j} \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

sendo a sub-matriz $\underline{Y}_{\zeta_i}$ definida por (3.86), o mesmo sucedendo com $\underline{Y}_{u_j}$,

devendo para o efeito substituir-se w_i e ξ_i por w_f e ξ_f respectivamente. Os elementos restantes, Y_{13}, Y_{23}, Y_{14} e Y_{24}, são fornecidos pelas expressões indicadas no Apêndice A.

Deste modo, com base nas equações (3.85) e (3.87), ou (3.96) e (3.97), podem quantificar-se todas as matrizes de auto e inter-covariância relativas aos vectores $\underline{y}_i(t)$ e $\underline{y}_j(t)$ ao longo de sucessivos instantes de tempo, utilizando técnicas de integração numérica, ou mesmo analítica [105, 106], podendo compor-se posteriormente as matrizes de covariância global da resposta no espaço modal $\underline{\mu}_\zeta(t) = \underline{\lambda}_o^\zeta(t)$ e $\underline{\mu}_\xi(t) = \underline{\lambda}_2^\xi(t)$, tendo em consideração que

$$\underline{\mu}_{y_i y_j} = \begin{bmatrix} E[\zeta_i \zeta_j] & E[\zeta_i \dot{\zeta}_j] & E[\zeta_i u_f] & E[\zeta_i \dot{u}_f] \\ E[\dot{\zeta}_i \zeta_j] & E[\dot{\zeta}_i \dot{\zeta}_j] & E[\dot{\zeta}_i u_f] & E[\dot{\zeta}_i \dot{u}_f] \\ E[u_f \zeta_j] & E[u_f \dot{\zeta}_j] & E[u_f u_f] & E[u_f \dot{u}_f] \\ E[\dot{u}_f \zeta_j] & E[\dot{u}_f \dot{\zeta}_j] & E[\dot{u}_f u_f] & E[\dot{u}_f \dot{u}_f] \end{bmatrix} \tag{3.100}$$

É assim possível também proceder à construção das matrizes de covariância da resposta em termos de quaisquer variáveis de controlo $\underline{r}(t)$ relacionadas linearmente com as coordenadas modais através de uma matriz de transformação $\underline{\Psi}$, pois que então

$$\underline{\mu}_r = \underline{\Psi}\underline{\mu}_\zeta \underline{\Psi}^T \qquad \underline{\mu}_r = \underline{\Psi}\underline{\mu}_\zeta \underline{\Psi}^T \tag{3.101}$$

Deste modo, fica viabilizada a completa caracterização probabilística da resposta ao longo de sucessivos instantes de tempo, podendo inclusivamente estimar-se a probabilidade de que qualquer variável de controlo $r_i(t)$ não exceda um dado nível ou barreira simétrica $\pm a$ entre os instante 0 e t, a qual pode ser avaliada, na hipótese de os atravessamentos serem raros e estatisticamente independentes, constituindo os tempos correspondentes um processo de Poisson, através da expressão (v. 1.9.5)

$$L_D^{r_i}(t) = \exp\left\{ - \int_0^t 2 f_{a,r_i}^{\uparrow}(t) dt \right\} \tag{3.102}$$

sendo $f_{a,r_i}^{\uparrow}(t)$ o valor instantâneo da correspondente frequência média de passagens ascendentes pelo nível $+a$ por unidade de tempo.

Nestas circunstâncias, foram elaborados dois programas de cálculo automático, PROG5 e PROG6, que assentando na formulação anteriormente apresentada, possibilitam efectuar a análise estocástica do comportamento dinâmico de estruturas reticuladas planas sujeitas a uma excitação sísmica não-estacionária do tipo ruído branco ou ruído branco filtrado, respectivamente. As formas de organização desses programas, esquematicamente traduzidas pelo fluxograma indicado na figura 3.6, são formalmente semelhantes entre si, podendo ser descritas do seguinte modo sob a forma sequencial:

a) Leitura de dados gerais envolvendo

- caracterização topológica da estrutura;
- definição das características geométricas e mecânicas das barras e da sua forma de ligação aos seus nós extremos;
- identificação das condições de apoio;
- definição do número de graus e liberdade, das coordenadas generalizadas correspondentes e do número de modos de vibração a ter em conta na análise da resposta;
- leitura do valor das massas relativas a cada grau de liberdade;
- leitura do valor do coeficiente de comportamento da estrutura e dos coeficientes de amortecimento modais;
- caracterização da componente horizontal da aceleração sísmica de base, através de
  - uma função de modulação determinística do tipo Amin e Ang (eq. 3.74), Shinozuka e Sato (eq. 3.75) ou poli-linear;
  - uma densidade espectral de potência S_0 correspondente a um ruído branco, no caso do programa PROG5, ou de um espectro de Kanai-Tajimi correspondente a um ruído branco filtrado caracterizado por parâmetros S_0, w_f e ξ_f, caso seja utilizado o programa PROG6;

- definição da duração do intervalo de tempo incremental para a análise da resposta não-estacionária e do tempo máximo de análise;

b) Formação da matriz de massa diagonal e da matriz de rigidez condensada referidas aos N graus de liberdade pré-definidos, seguindo o procedimento indicado, para o mesmo efeito, nos programas PROG1 a PROG3;

c) Determinação dos valores das M primeiras frequências naturais da estrutura e dos M modos de vibração correspondentes, utilizando as sub-rotinas de cálculo da biblioteca SL-MATH (IBM) já referidas em 2.5.2;

d) Composição da matriz de transformação $\underline{\Psi}$, que estabelece a relação linear entre os valores das coordenadas modais e dos momentos flectores, esforços transversos e esforços axiais nas extremidades de cada barra;

e) Quantificação das matrizes de auto e inter-covariância relativas aos vectores $\underline{y}_i(t)$ e $\underline{y}_j(t)$ ao longo de sucessivos instantes de tempo, tendo em atenção que, aproximando a função $\theta^2(t)$ por troços lineares, de tal modo que

$$\theta_s^2(\tau) = \theta_{so}^2 + \frac{\Delta\theta_s^2}{\Delta t_s}\tau \qquad (0 \leq \tau \leq \Delta t_s) \tag{3.103}$$

em que $\Delta\theta_s^2$ e Δt_s representam a variação da função $\theta^2(t)$ ao longo do troço genérico de ordem s, e a duração do intervalo de tempo correspondente, e θ_{so}^2 e $\theta_s^2(\tau)$ os valores que essa função toma no instante correspondente ao início do troço, e no instante τ segundos posterior, respectivamente, as equações (3.87) e (3.97) podem escrever-se sob a forma

$$\underline{\mu}_{y_i y_j}(t) = e^{\underline{A}_i t}\underline{\mu}_{y_i y_j}(0)e^{\underline{A}_j^T t} + 2\pi\int_0^t e^{\underline{A}_i(t-\tau)}\underline{b}_i\underline{b}_j^T\theta_{so}^2 S_o e^{\underline{A}_j^T(t-\tau)}d\tau +$$

$$+ 2\pi\int_0^t e^{\underline{A}_i(t-\tau)}\underline{b}_i\underline{b}_j^T\frac{\Delta\theta_s^2}{\Delta t_s}\tau e^{\underline{A}_j^T(t-\tau)}d\tau \tag{3.104}$$

$$(i, j = 1, \ldots, M)$$

Deste modo, os programas PROG5 e PROG6 procedem ao cálculo dos integrais referidos em (3.104), para cada troço linear da aproximação da função $\theta^2(t)$, e ao longo dos sucessivos instantes de tempo em que se pretende obter a caracterização probabilística da resposta da estrutura, tendo para o efeito em consideração a definição das matrizes de transição de estado $e^{\underline{A}_i t}$, dada pelas equações (3.86) ou (3.99) respectivamente, bem como dos vectores $\underline{b}_i$, de acordo com as equações (3.81) ou (3.93); Sendo inicialmente nula a matriz $\underline{\mu}_{y_i y_j}(0)$, as matrizes de inter-covariância $\underline{\mu}_{y_i y_j}(t)$ ficam imediatamente conhecidas, uma vez calculados aqueles integrais; Sempre que se transita de um troço linear correspondente à função $\theta^2(t)$ para o seguinte, os valores de $\underline{\mu}_{y_i y_j}(t)$ correspondentes ao último instante de tempo analisado são armazenados em $\underline{\mu}_{y_i y_j}(0)$, seguindo-se de novo idêntico procedimento de cálculo;

f) Formação, para cada instante de tempo considerado, das matrizes de covariância global da resposta no espaço modal $\underline{\mu}_\xi(t) = \underline{\lambda}_o^\xi(t)$ e $\underline{\mu}_\xi(t) = \underline{\lambda}_2^\xi(t)$, a partir do conhecimento das diversas sub-matrizes constituintes de $\underline{\mu}_{y_i y_j}(t)$, cuja composição é, no caso mais geral de uma excitação do tipo ruído branco filtrado evolutivo, definida por (3.100);

g) Quantificação, em cada instante, das matrizes de momentos espectrais da resposta $\underline{\lambda}_o^r(t) = \underline{\mu}_r(t)$ e $\underline{\lambda}_2^r(t) = \underline{\mu}_r(t)$, tendo por base as equações (3.101), podendo o processo estocástico vectorial $\underline{r}(t)$ representar não só os deslocamentos q_i relativos ao movimento de base (situação em que $\underline{\Psi} = \underline{\Phi}$), mas também todo o conjunto de esforços nas extremidades das barras;

h) Análise da fiabilidade do sistema, traduzida pela avaliação da probabilidade de que cada variável de controlo da resposta da estrutura não exceda uma dada barreira simétrica $\pm a$ entre o instante inicial e o instante considerado, cálculo que é realizado com base na equação (3.102), sendo o valor instantâneo da frequência média de passagens ascendentes pelo nível a calculada a partir dos correspondentes valores instantâneos dos momentos espectrais da resposta de ordem 0 e 2.

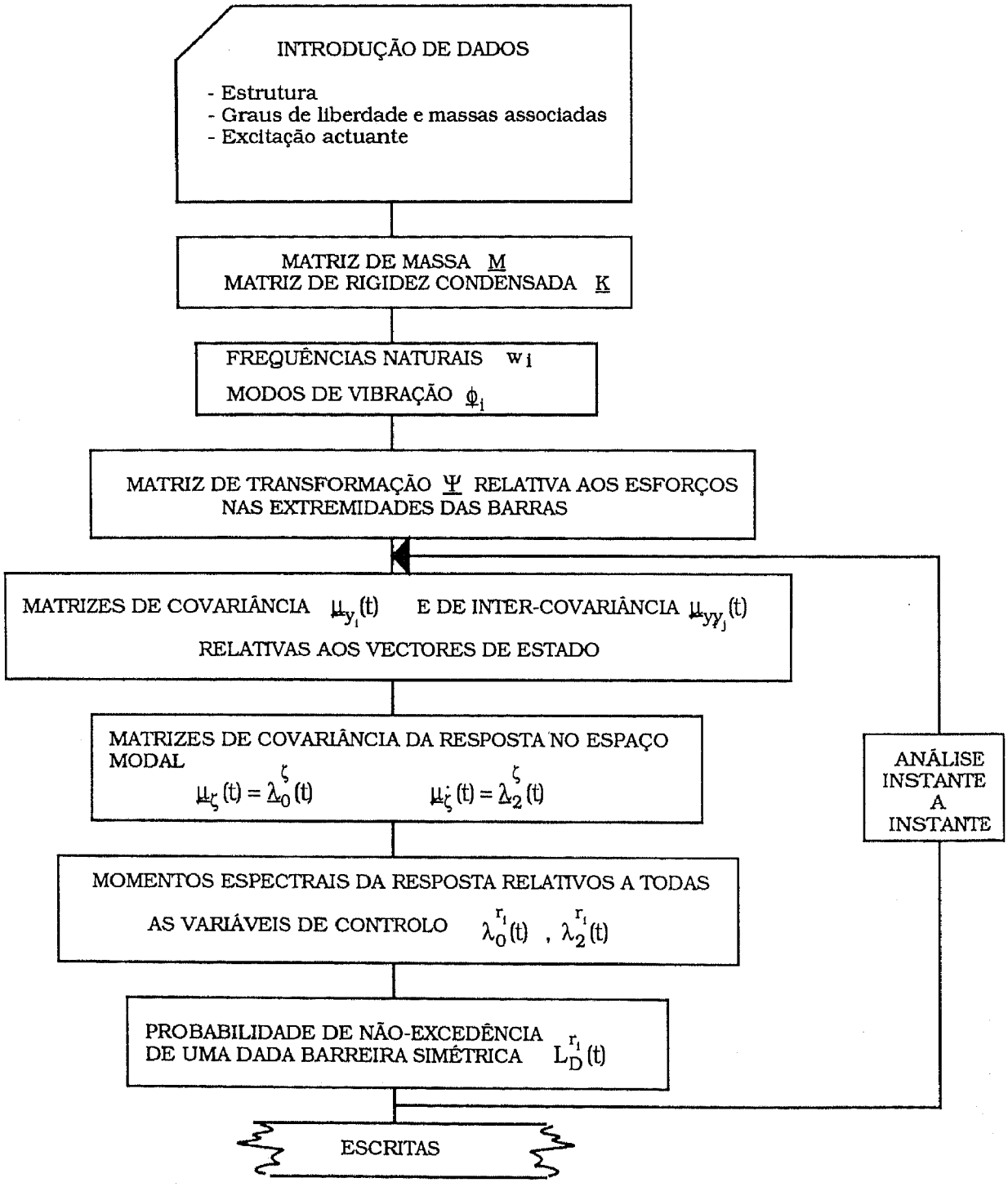
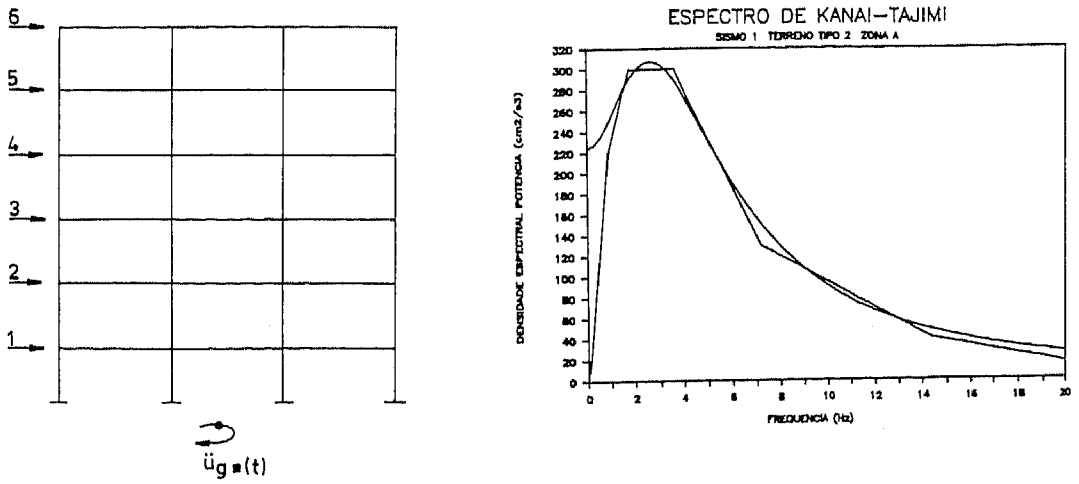


Fig. 3.6 - Fluxograma simplificado dos programas PROG5 e PROG6.

3.4.3 - Exemplo de aplicação

Como exemplo de aplicação do programa de cálculo PROG6, apresenta-se o caso de um pórtico plano de 6 pisos, esquematicamente indicado na figura 3.7(a), constituído por vigas de 5,0 m de vão e com uma secção transversal de 0,30 x 0,50 m^2, e por pilares de 3,0 m de altura, sendo a respectiva secção de 0,30 x 0,60 m^2. O módulo de elasticidade longitudinal do material utilizado foi suposto igual a 30 GPa.



(a) (b)

Fig. 3.7 - Pórtico de 6 pisos (a); Espectro de Kanai-Tajimi (b).

A aceleração sísmica de base, suposta horizontal, foi idealizada através de um processo estocástico não-estacionário gaussiano, definido pelo produto de uma função de modulação determinística por um processo estacionário de valor médio nulo, caracterizado por um espectro de potência de Kanai-Tajimi (Fig. 3.7 (b)) com $S_0 = 225$ cm^2 s^{-3}, $\omega_f = 7,3\pi$ rad s^{-1} e $\xi_f = 0,95$, o qual aproxima bastante bem o espectro regulamentar definido por troços lineares para a zona A, sismo 1 e terreno do tipo II, registando-se também uma coincidênica quase perfeita de ordenadas espectrais em correspondência com a frequência fundamental da estrutura ($f_1 = 1,60$ Hz).

Foram consideradas, a título de exemplo, quatro funções de modulação distintas (Fig. 3.8), correspondendo a primeira a uma excitação pseudo-não-estacionária, e refletindo as restantes, de formas diferentes, as três fases que habitualmente se distinguem nos acelerogramas.

A função nº 2 corresponde a uma configuração poligonal com pontos de quebra aos 3 e 15 segundos; a função nº 3 corresponde à envolvente de Amin e Ang, definida por (3.74) com $t_1 = 3s$, $t_2 = 15s$ e $c = 0,18$; finalmente a função nº 4 traduz uma envolvente do tipo utilizado por Shinozuka e Sato, sendo obtida a partir de (3.75) tomando $a = 0,15$, $b = 0,30$ e $c = 0,25$.

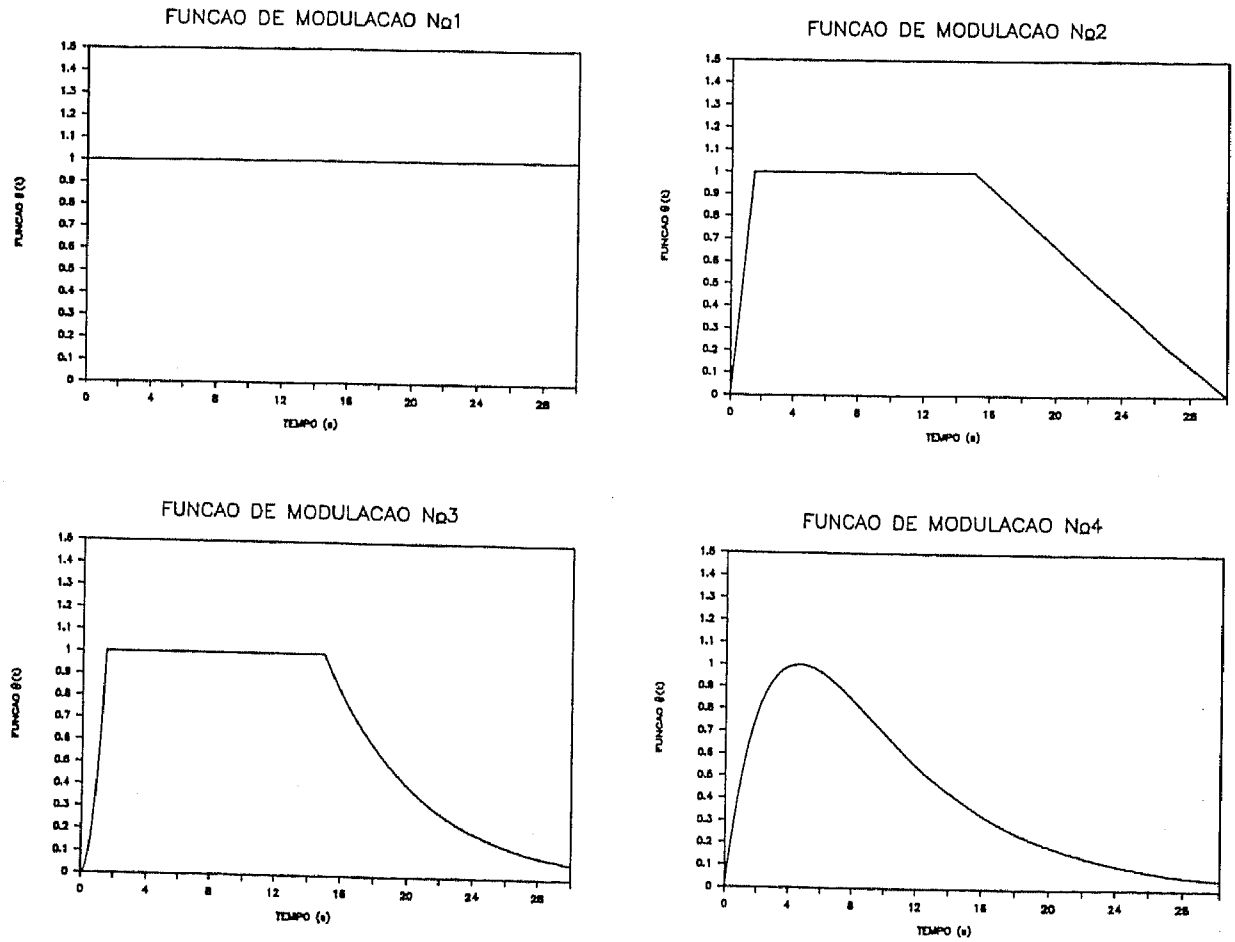


Fig. 3.8 - Funções de modulação utilizadas.

A análise do comportamento dinâmico foi realizada considerando 6 graus de liberdade correspondentes aos 6 deslocamentos horizontais de piso, sendo a massa associada a cada um deles de 40 t.

Nas figuras 3.9 a 3.16 apresenta-se, para cada tipo de função de modulação, a evolução temporal dos desvios padrões de diversas variáveis de controlo da resposta não-estacionária, nomeadamente dos correspondentes às duas primeiras coordenadas modais, $\sigma_{\zeta_1}(t)$ e $\sigma_{\zeta_2}(t)$, aos deslocamentos horizontais de andar, $\sigma_{q_i}(t)$, e aos deslocamentos relativos entre pisos consecutivos, $\sigma_{u_i}(t)$, bem como das frequências médias de passagens ascendentes por zero, $f^{\uparrow}_{0,q_i}$, e por um nível igual a três vezes o desvio padrão máximo, $f^{\uparrow}_{a,q_i}$ $\left(a=3\sigma^m_{q_i}\right)$, e das probabilidades de não-excedência, $L^{q_i}_D(t)$ e $L^{u_i}_D(t)$, definidas também para barreiras $a=3\sigma^m_{q_i}$ e $a=3\sigma^m_{u_i}$ respectivamente. Da sua observação, podem retirar-se diversas conclusões, e em particular que:

a) No caso da excitação pseudo-não-estacionária, os desvios padrões relativos às coordenadas modais tendem muito rapidamente para os valores correspondentes à excitação estacionária ($\sigma_{\zeta_1}=0,11533$m e $\sigma_{\zeta_2}=0,006811$m), encontrados pelo programa PROG1, sendo inclusivamente esta tendência mais acentuada no caso do 2º modo; em relação às restantes funções de modulação, esses valores decrescem rapidamente logo que se atenua a intensidade da acção sísmica;

b) O mesmo se verifica no que respeita à evolução dos desvios padrões referentes quer aos deslocamentos de andar, quer aos deslocamentos relativos, sendo os primeiros tanto maiores quanto mais elevado é o piso, ao passo que os segundos são máximos entre o 1º e 2º pisos, no caso concreto do problema em análise;

c) A frequência média de passagens ascendentes por zero, $f^{\uparrow}_{0,q_i}$, é praticamente independente do tipo de função de modulação, assumindo valores entre 1,6 e 1,8 s^{-1}, já o mesmo não sucedendo com a frequência de passagens ascendentes $f^{\uparrow}_{a,q_i}$, cuja evolução é nitidamente dependente da configuração da função de modulação escolhida;

d) O decréscimo temporal da probabilidade de não-excedência é essencialmente marcado pela zona de maior intensidade da acção sísmica, não sendo significativos os contributos das fases de crescimento e atenuação da excitação actuante.

Deste modo, o exemplo tratado permite pois concluir não só que, no caso de uma excitação pseudo-não-estacionária, as grandezas estatísticas caracterizadoras da resposta tendem de forma muito rápida para a estacionaridade, como também que, de uma forma geral, para qualquer função de modulação, são os troços de maior intensidade da acção sísmica, frequentemente com características estatísticas pouco variáveis no tempo, que são absolutamente determinantes do decréscimo da probabilidade de não-excedência de uma dada barreira.

Nestas condições, desde que os acelerogramas espectáveis para sismos intensos num dado local apresentem uma fase intermédia de elevadas amplitudes e de características estatísticas sensivelmente estacionárias, torna-se perfeitamente aceitável seguir uma filosofia de análise como a do RSA, segundo a qual as acções sísmicas podem ser idealizadas através de uma amostra de certa duração de um processo estocástico vectorial estacionário e gaussiano com densidades espectrais definidas, tomando como medida dos efeitos causados pela excitação o valor médio dos picos da resposta relativa a cada variável de controlo, tornando-se no entanto importante adoptar um valor suficientemente elevado do tempo de duração da amostra, por forma a cobrir a fase intermédia de elevadas amplitudes dos acelerogramas.

Nos casos porém em que, face aos registos sísmicos passados, não seja esperável reconhecer qualquer zona minimamanete extensa dos acelerogramas com as características antes indicadas, esta filosofia, embora podendo conduzir a resultados suficientemente seguros, pode revelar-se francamente desajustada da realidade, sendo pois preferível idealizar a acção sísmica através do recurso a processos estocásticos não-estacionários, desde que haja, evidentemente, dados de base fiáveis que possibilitem uma definição suficientemente realista das funções de modulação determinística caracterizadoras da natureza não-estacionária da excitação sísmica no local considerado.

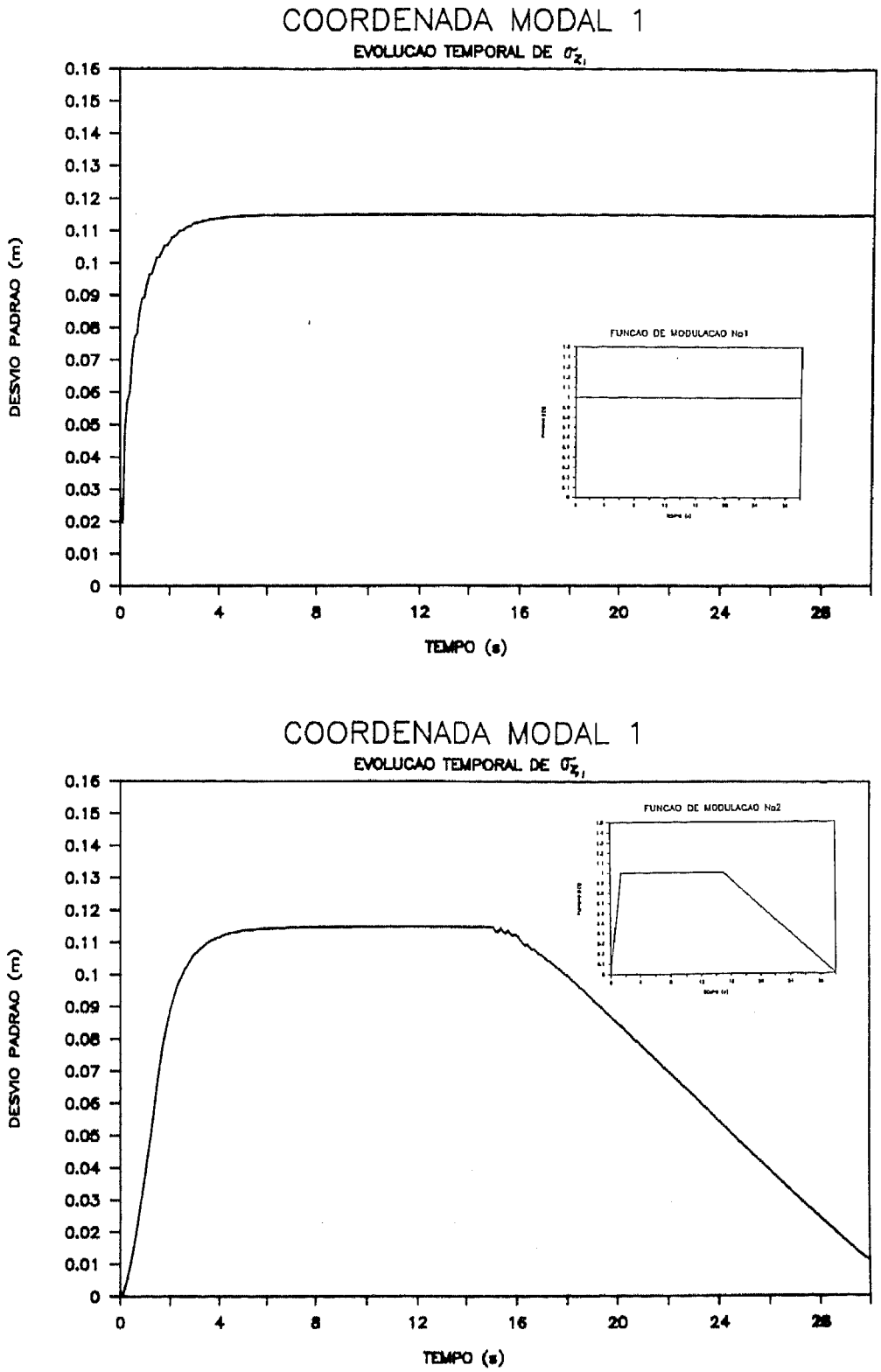


Fig. 3.9 (a) - Evolução temporal de σ_{ζ_1}.

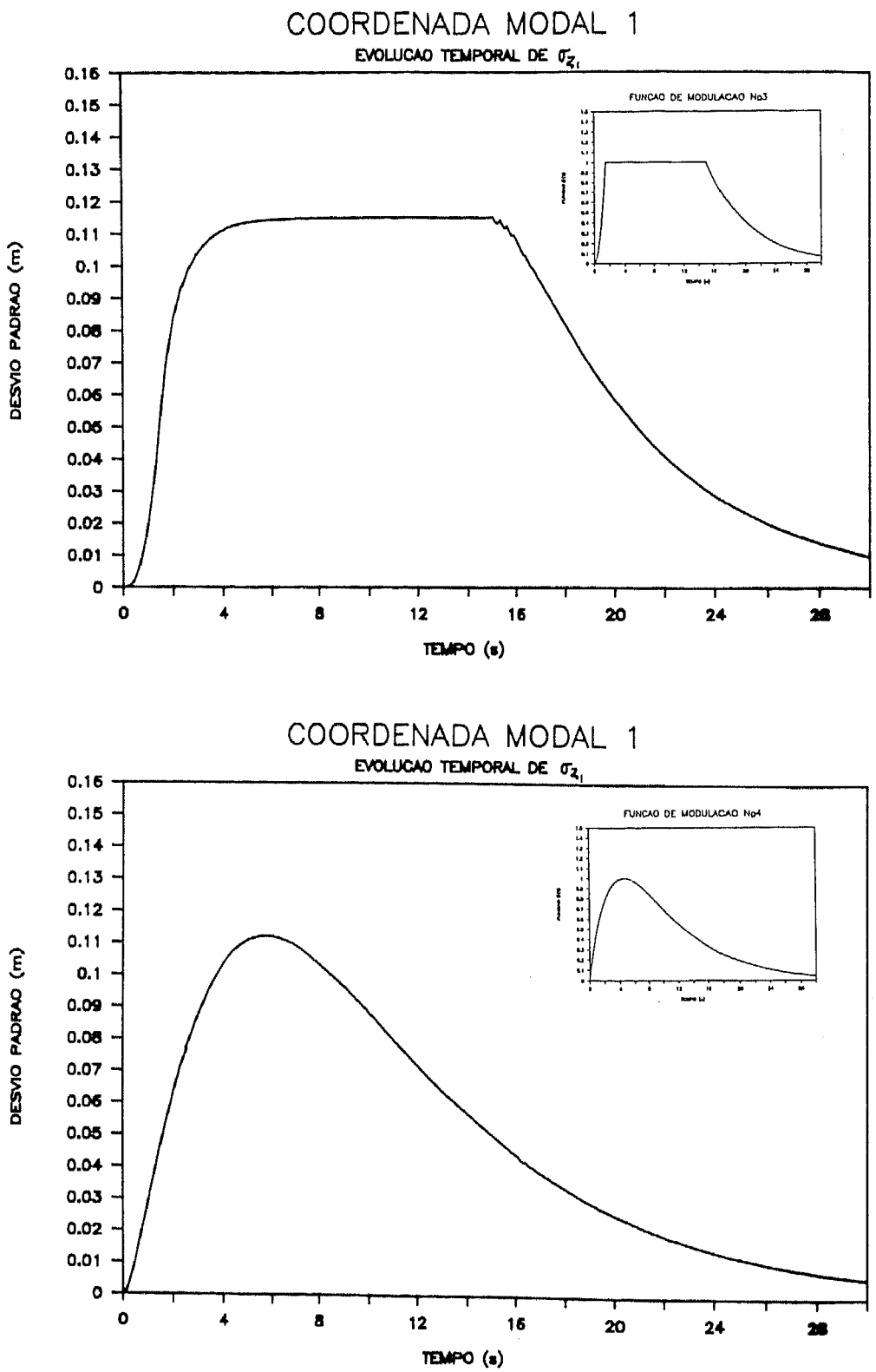


Fig. 3.9 (b) - Evolução temporal de σ_{ζ_1}.

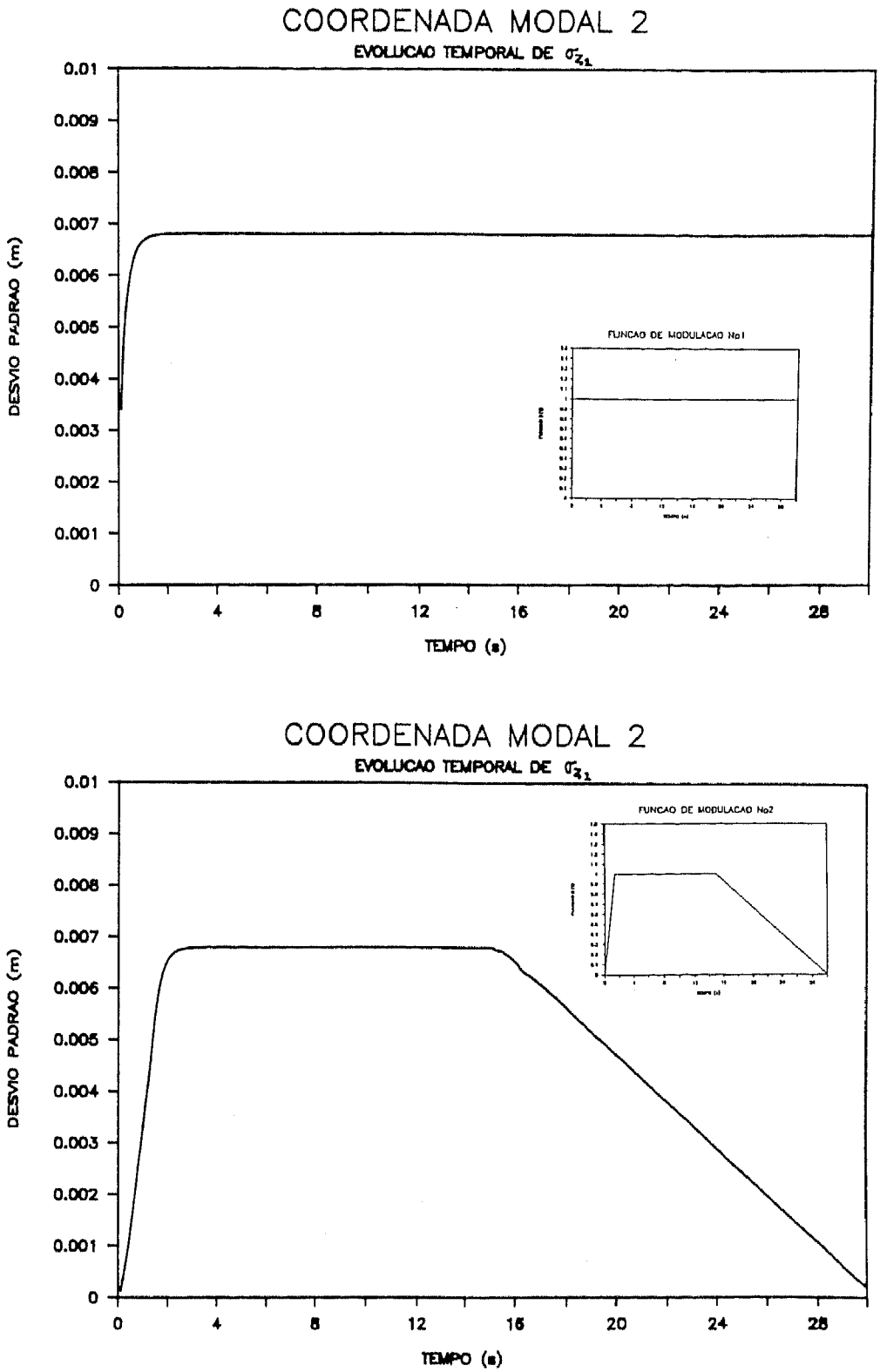


Fig. 3.10 (a) - Evolução temporal de σ_{ζ_2}.

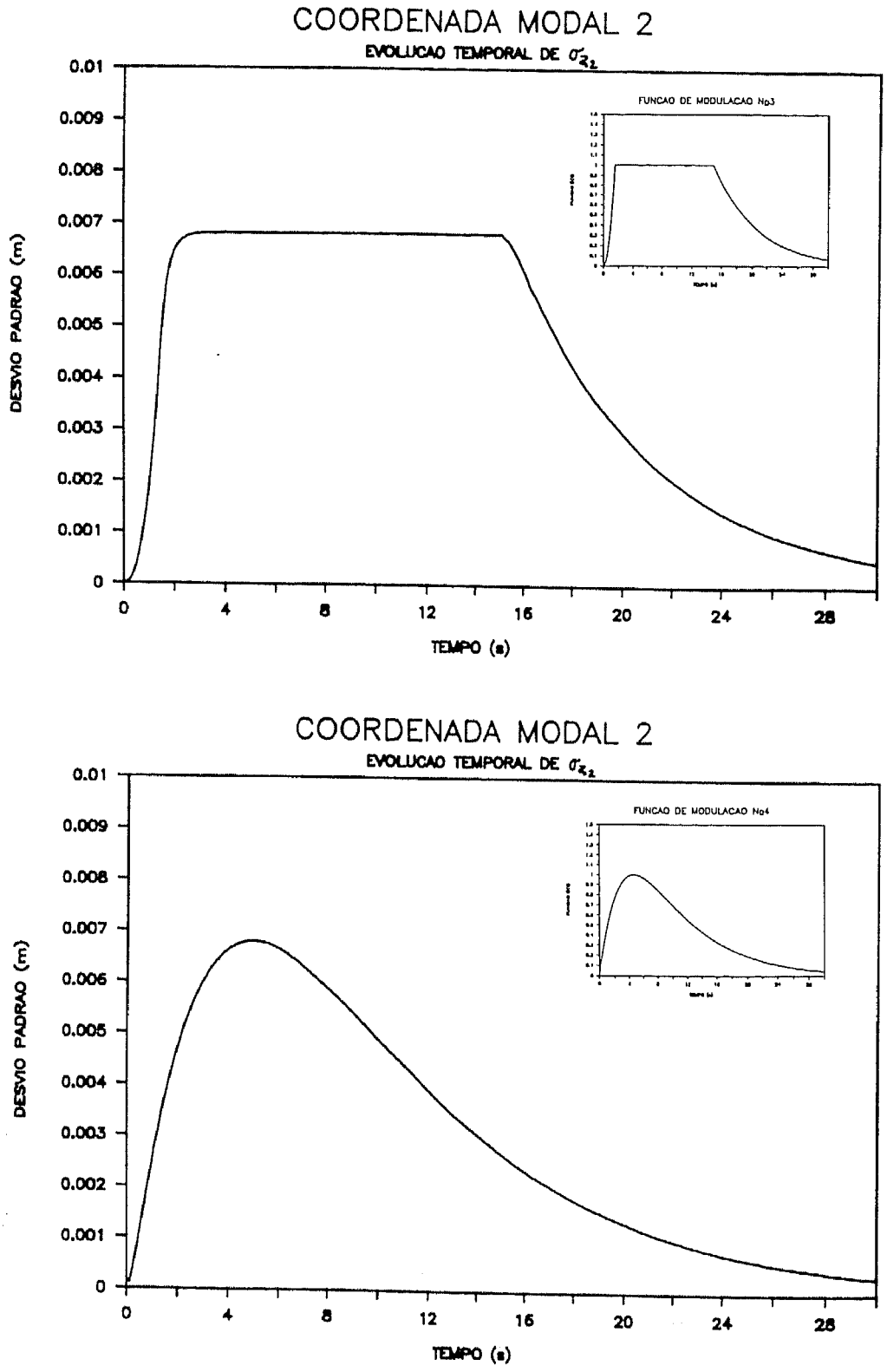


Fig. 3.10 (b) - Evolução temporal de σ_{ξ_2}.

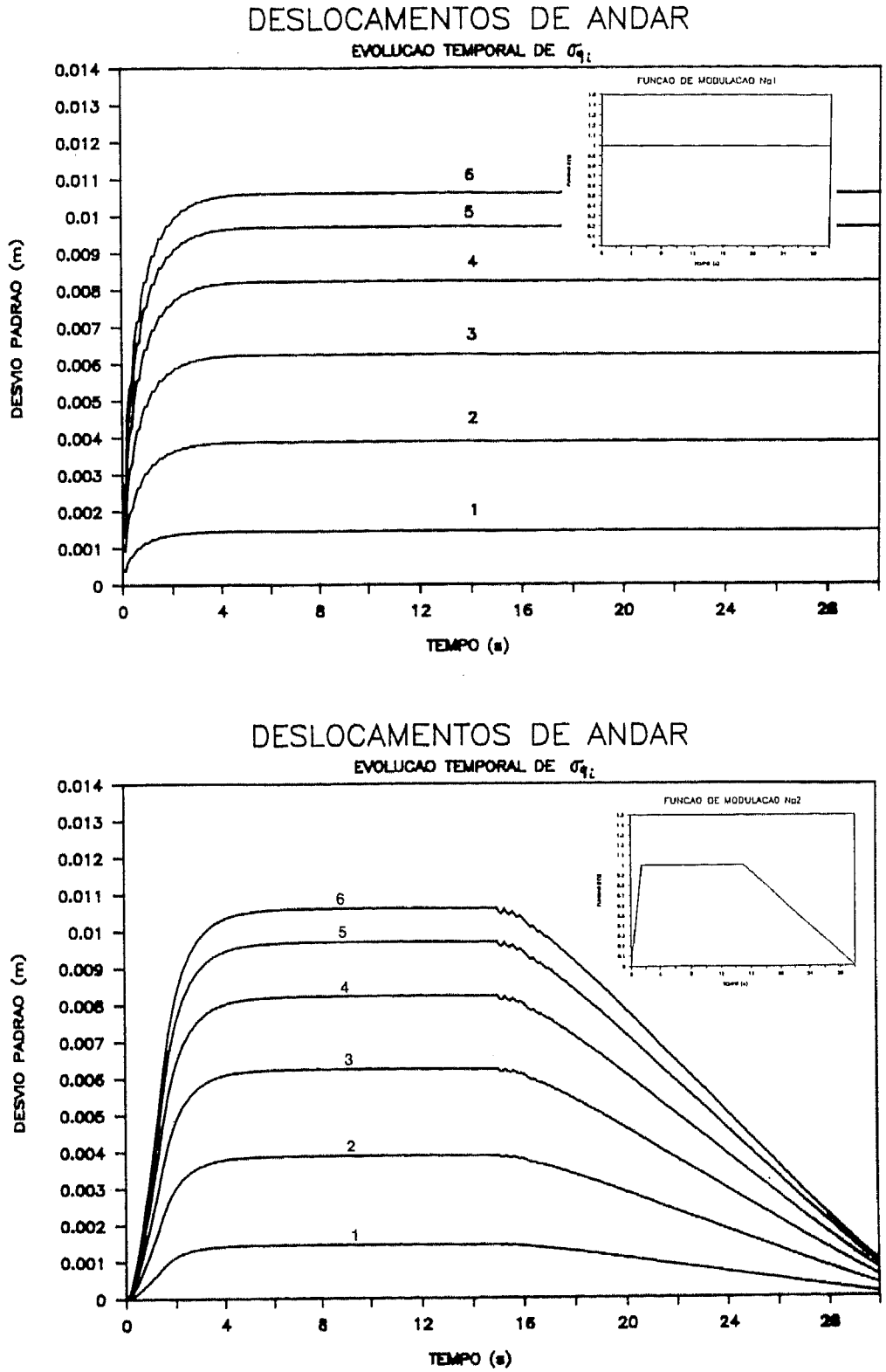
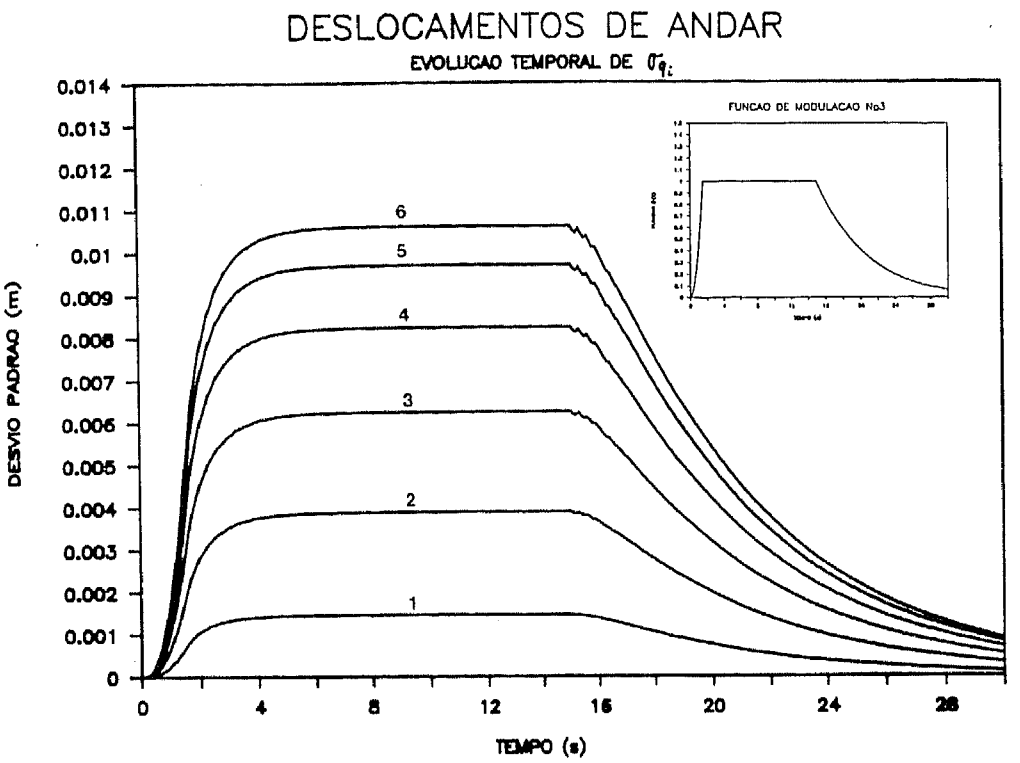


Fig. 3.11 (a) - Evolução temporal de σ_{q_i}.



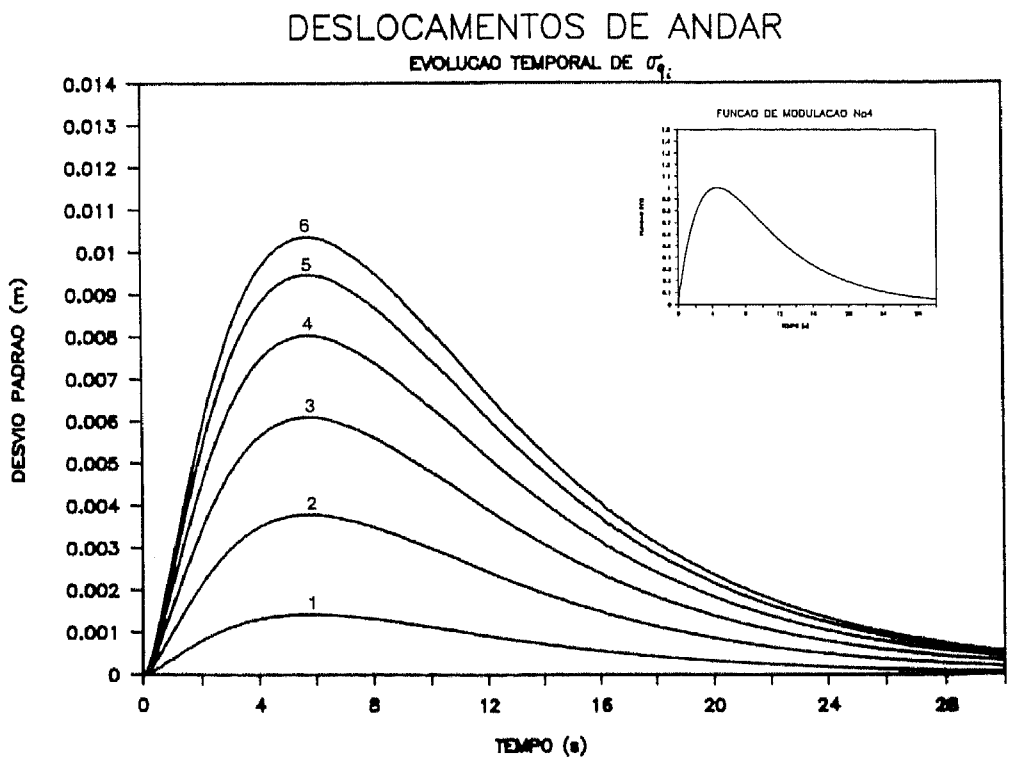
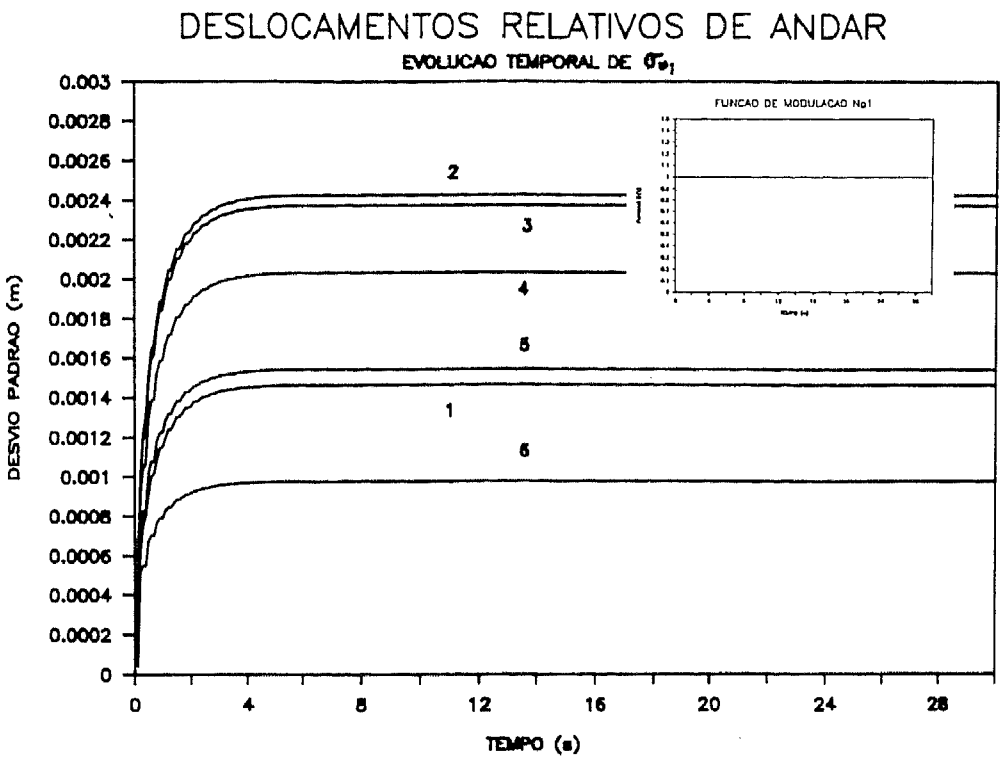


Fig. 3.11 (b) - Evolução temporal de σ_{q_i}.



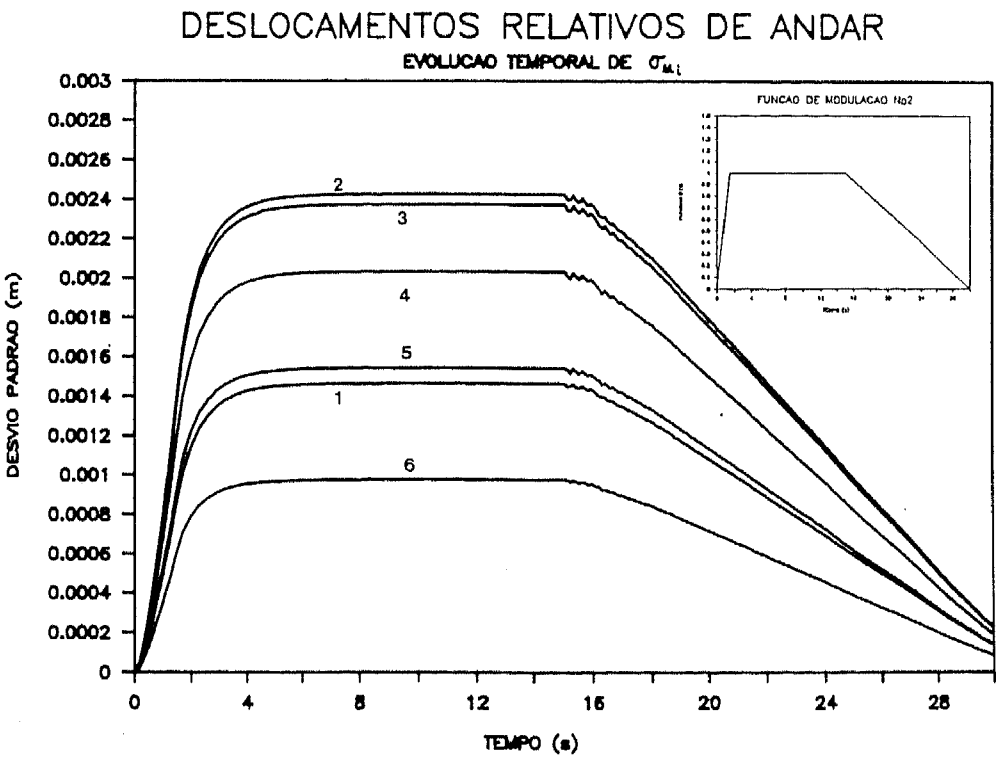


Fig. 3.12 (a) - Evolução temporal de σ_{u_i}.

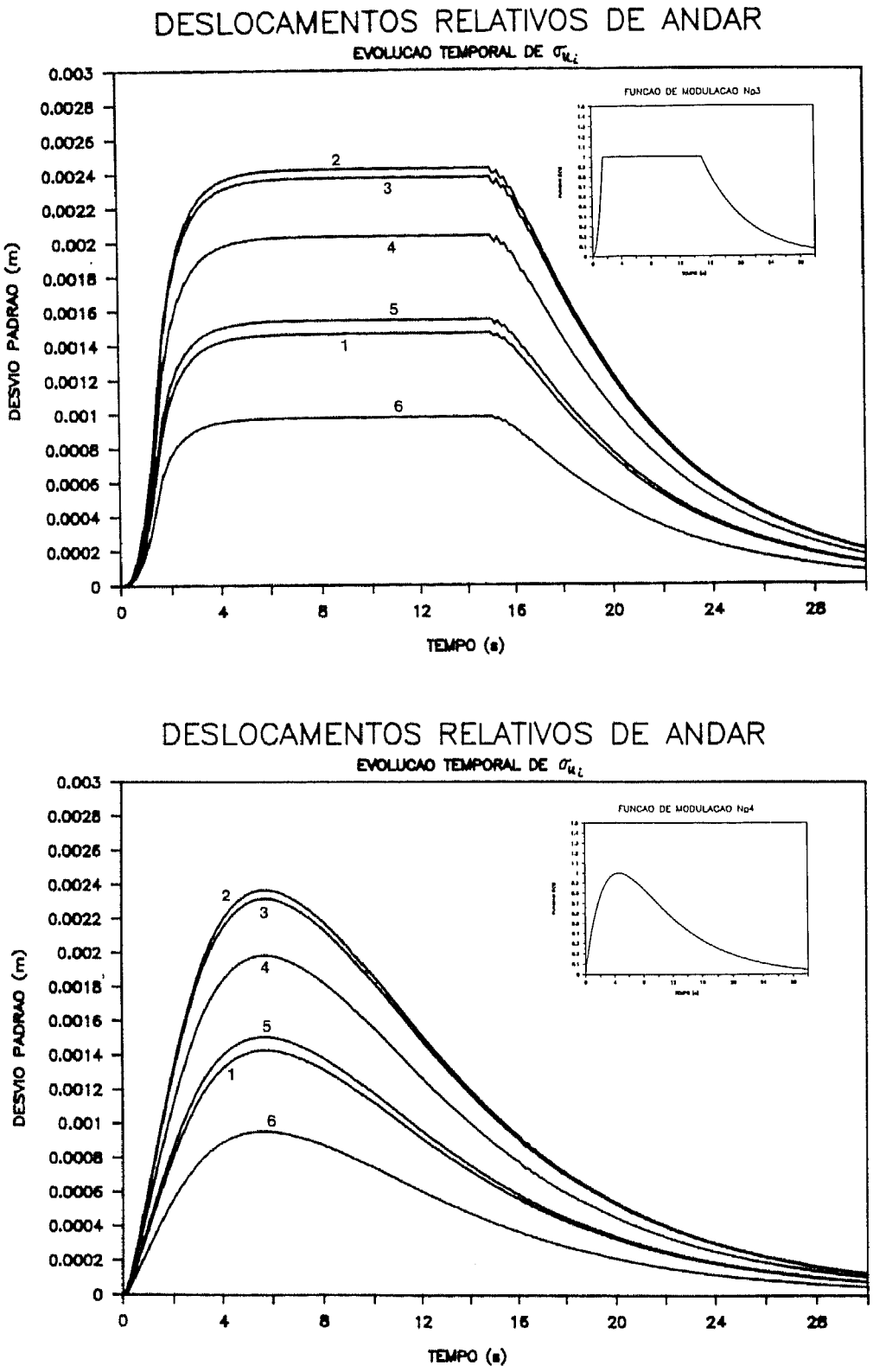
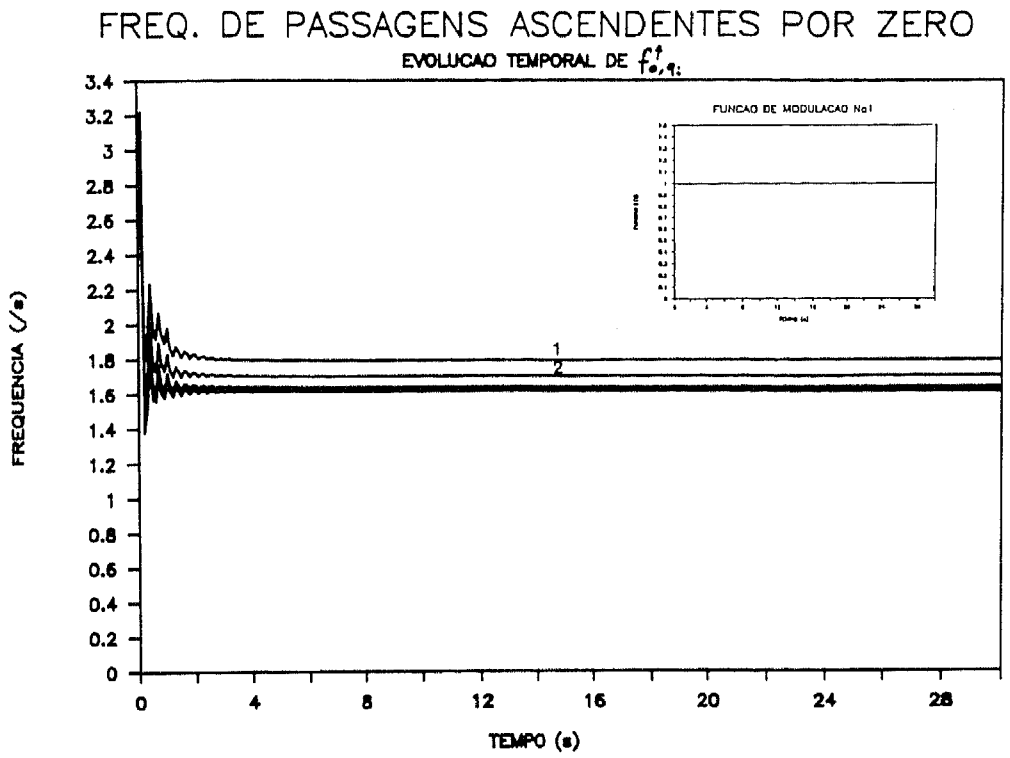


Fig. 3.12 (b) - Evolução temporal de σ_{u_i}.



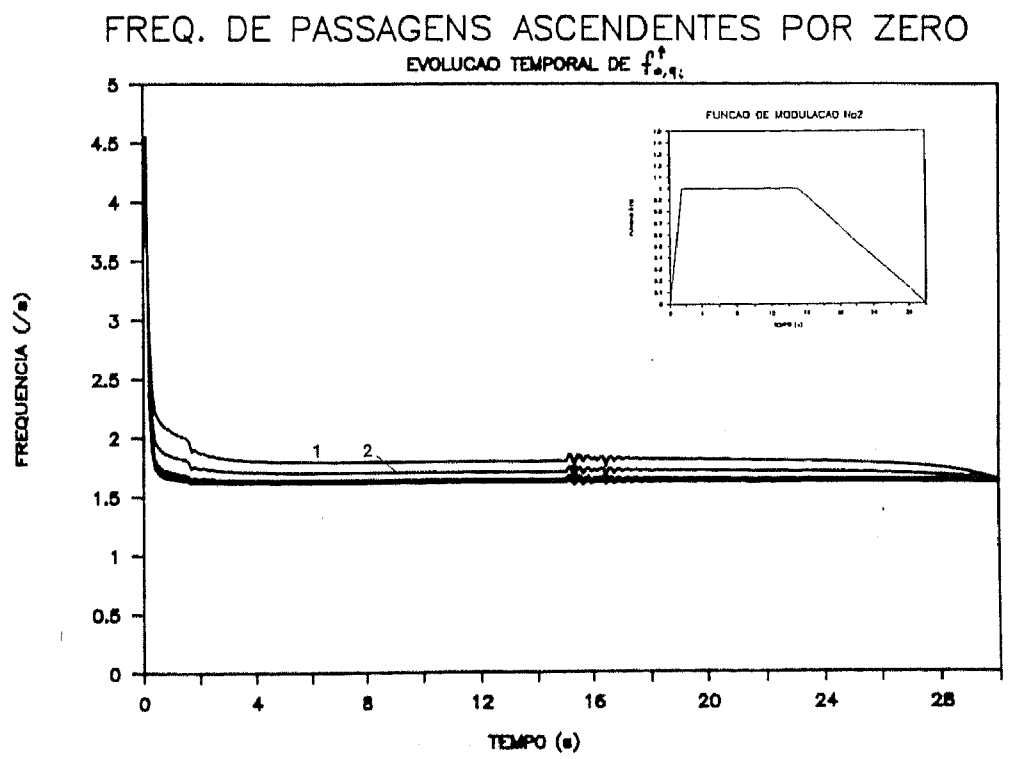


Fig. 3.13 (a) - Evolução temporal de $f^{\uparrow}_{0,q_i}$.

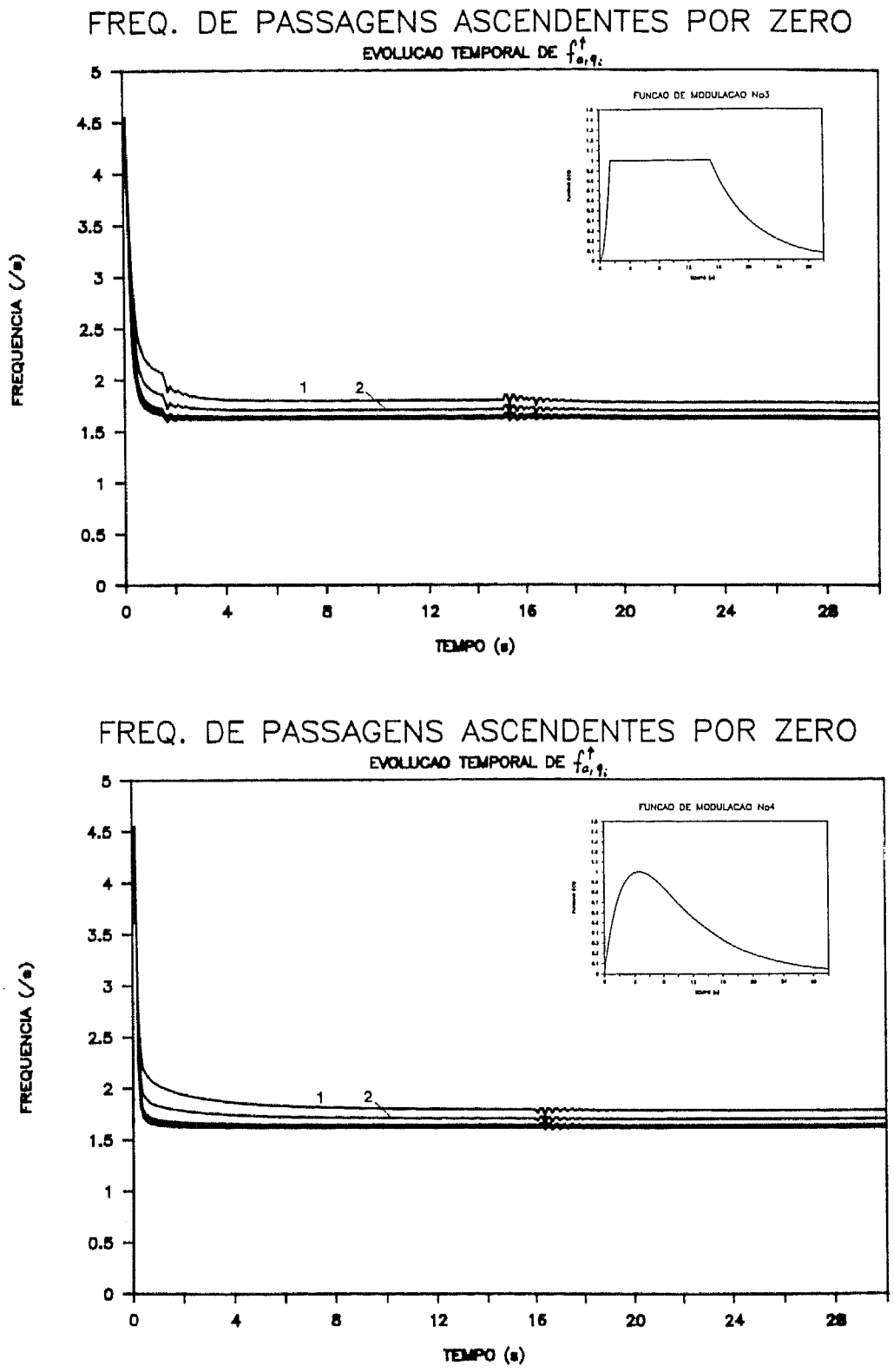


Fig. 3.13 (b) - Evolução temporal de $f^{\uparrow}_{0,q_i}$.

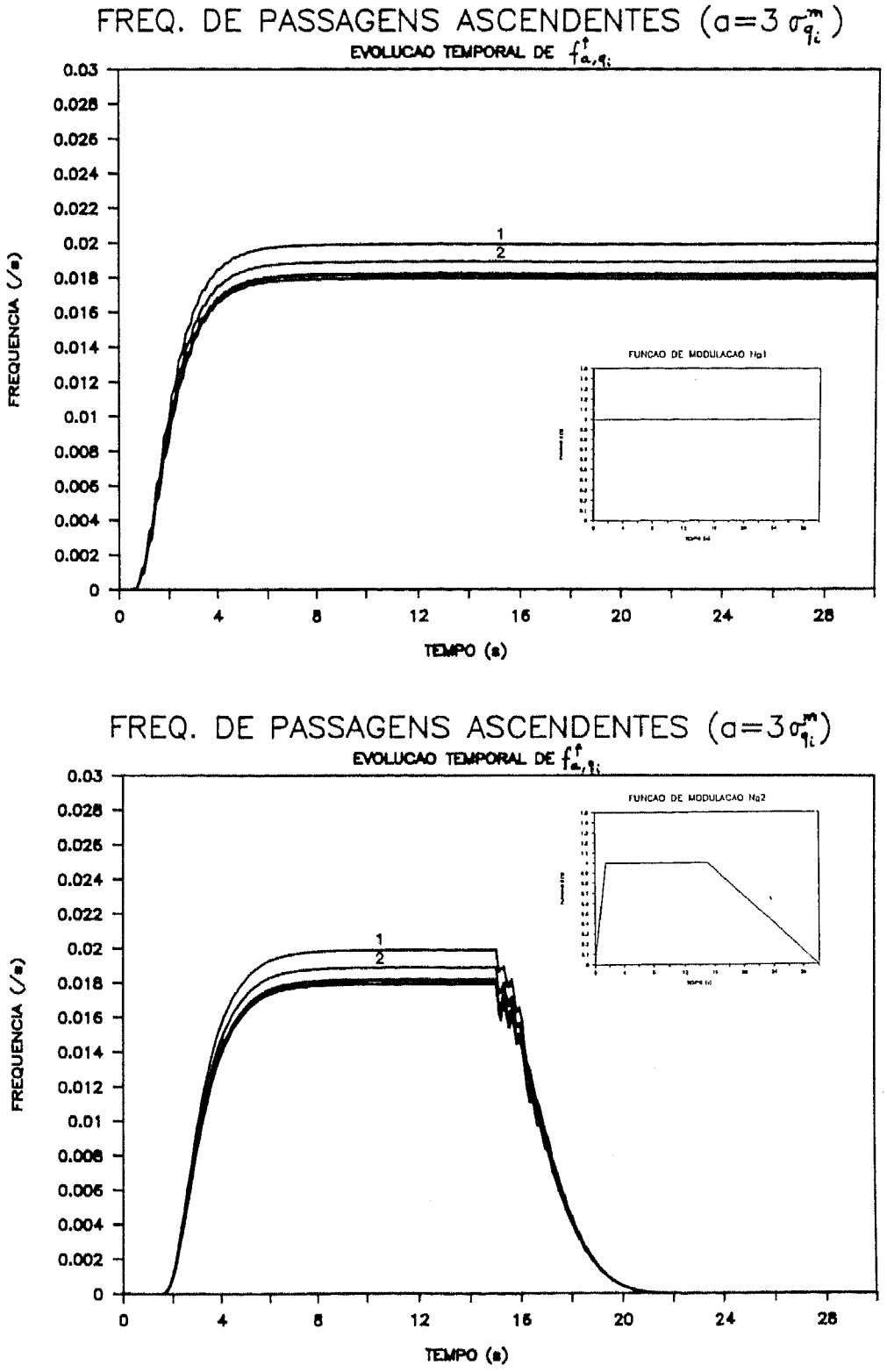


Fig. 3.14 (a) - Evolução temporal de $f^{\uparrow}_{a,q_i}$.

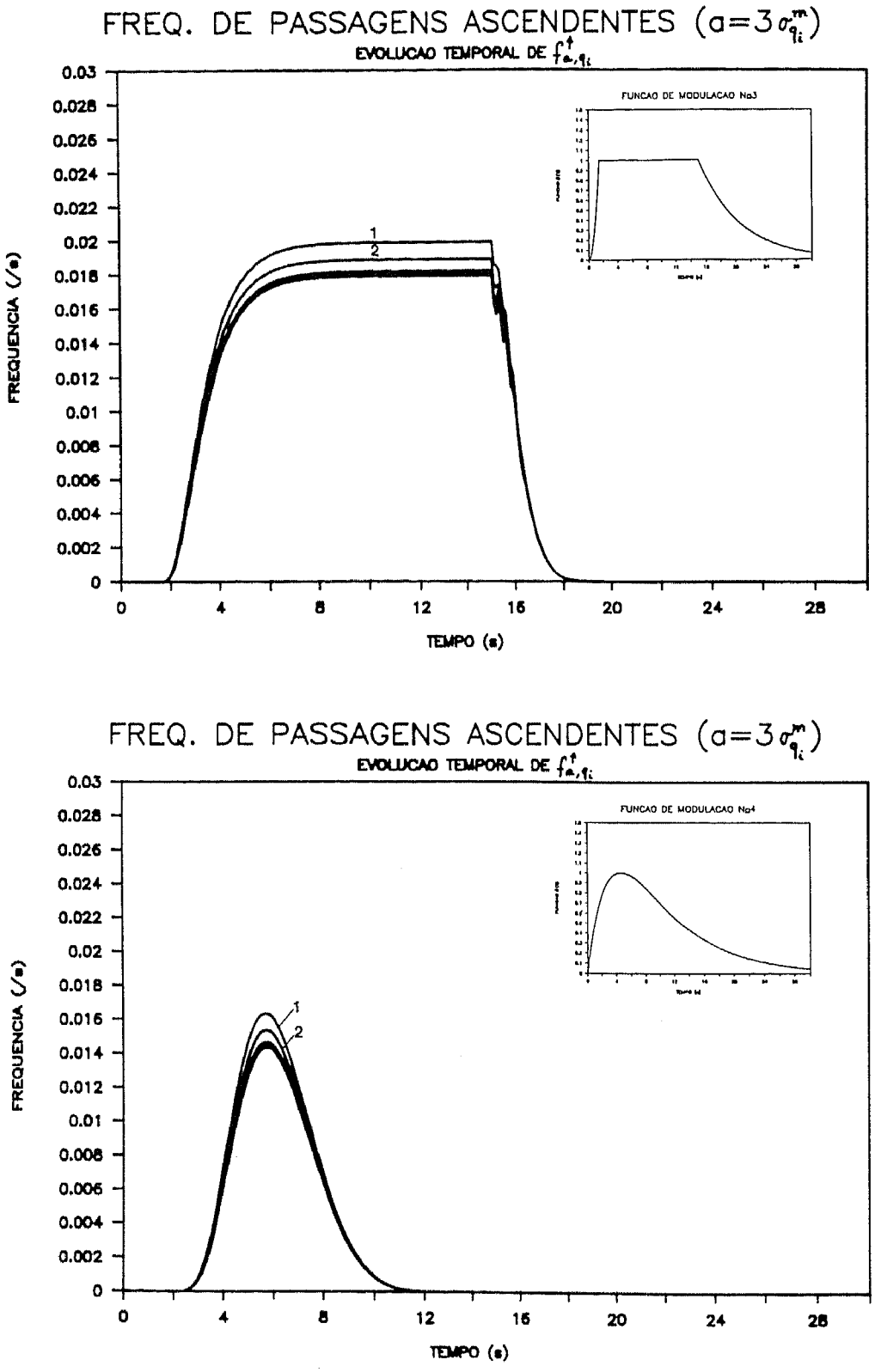


Fig. 3.14 (b) - Evolução temporal de $f^{\uparrow}_{a,q_i}$.

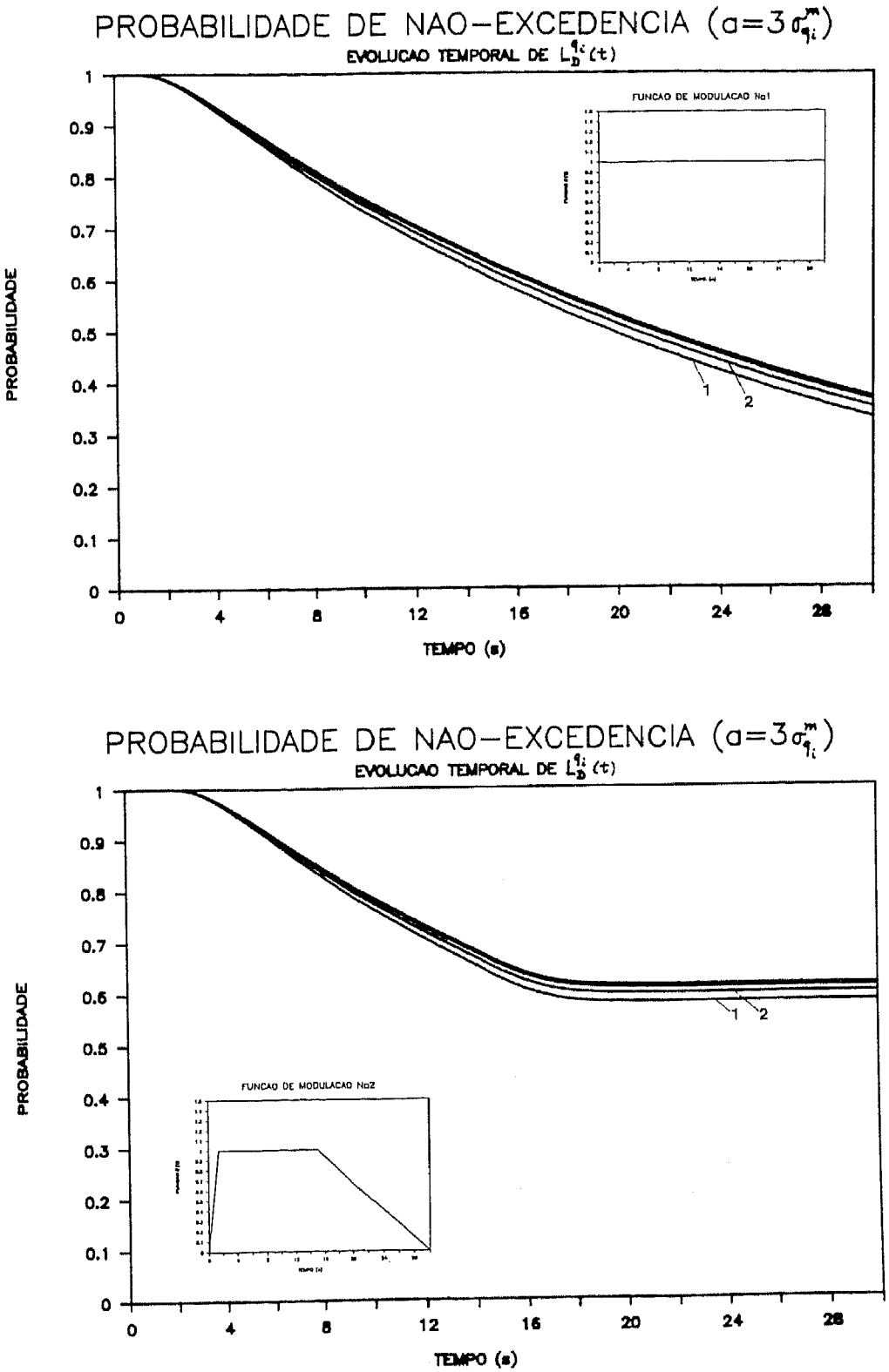


Fig. 3.15 (a) - Evolução temporal de $L_D^{q_i}$.

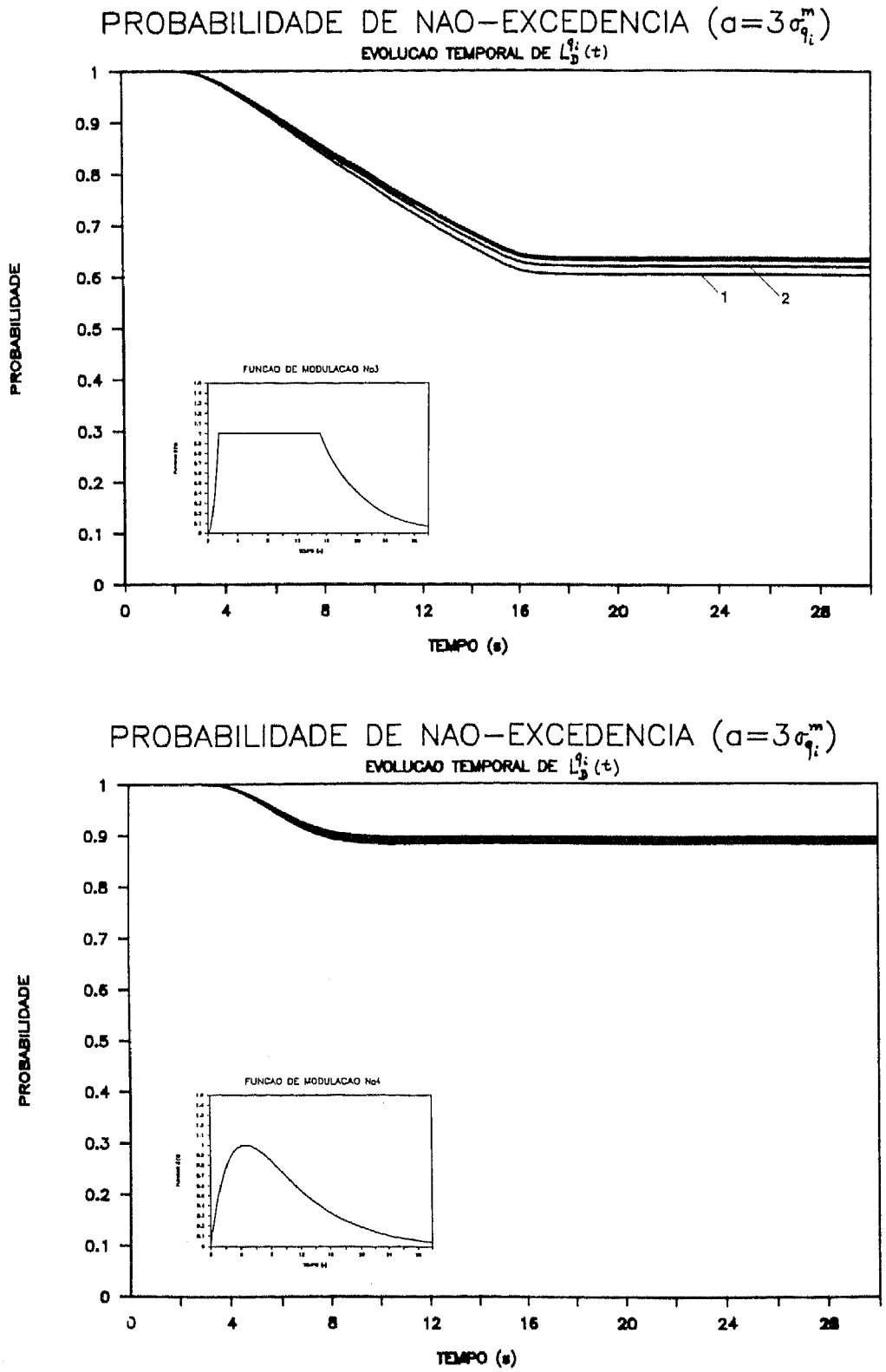


Fig. 3.15 (b) - Evolução temporal de $L_D^{q_i}$.

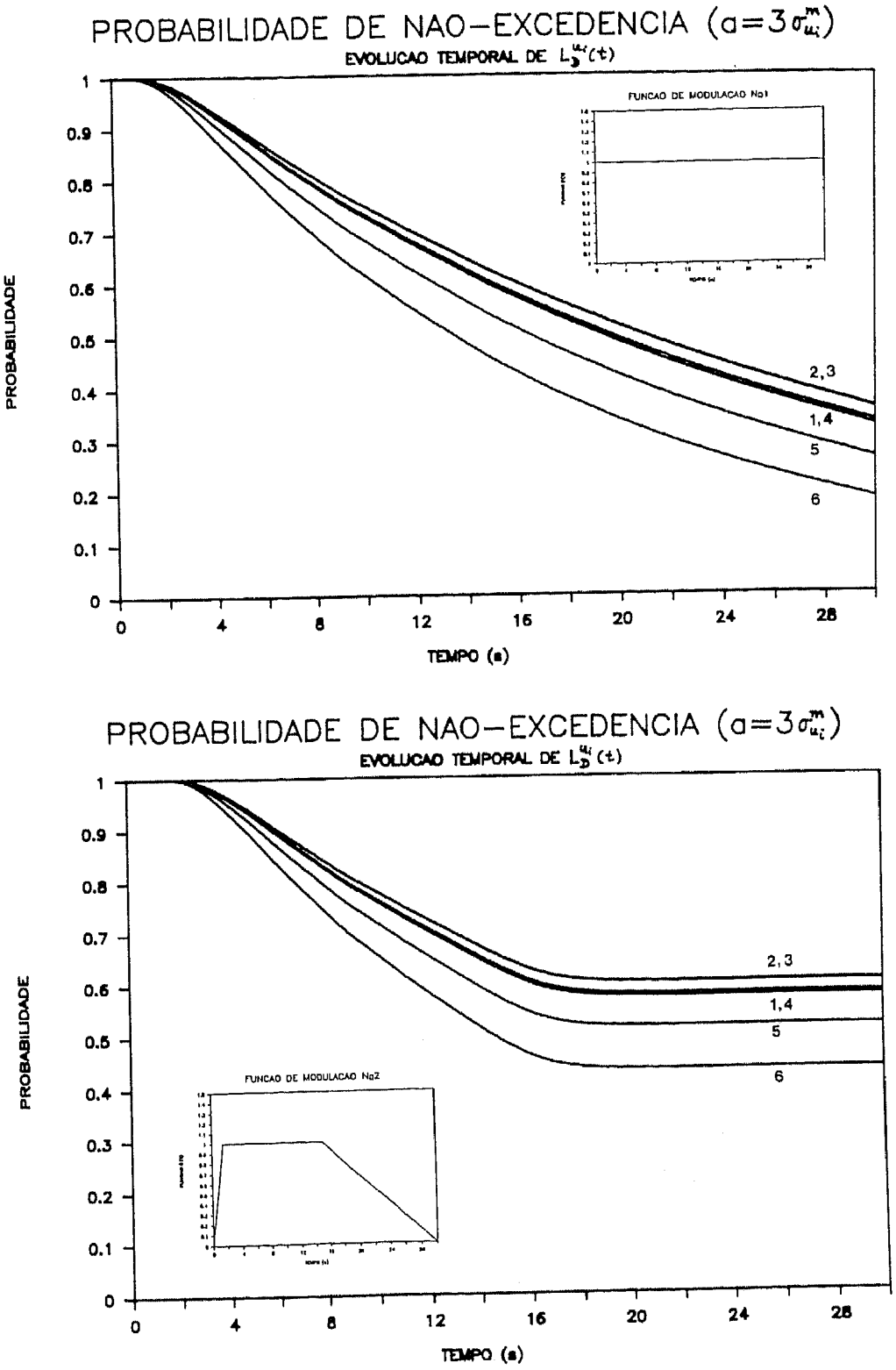


Fig. 3.16 (a) - Evolução temporal de $L_D^{u_i}$.

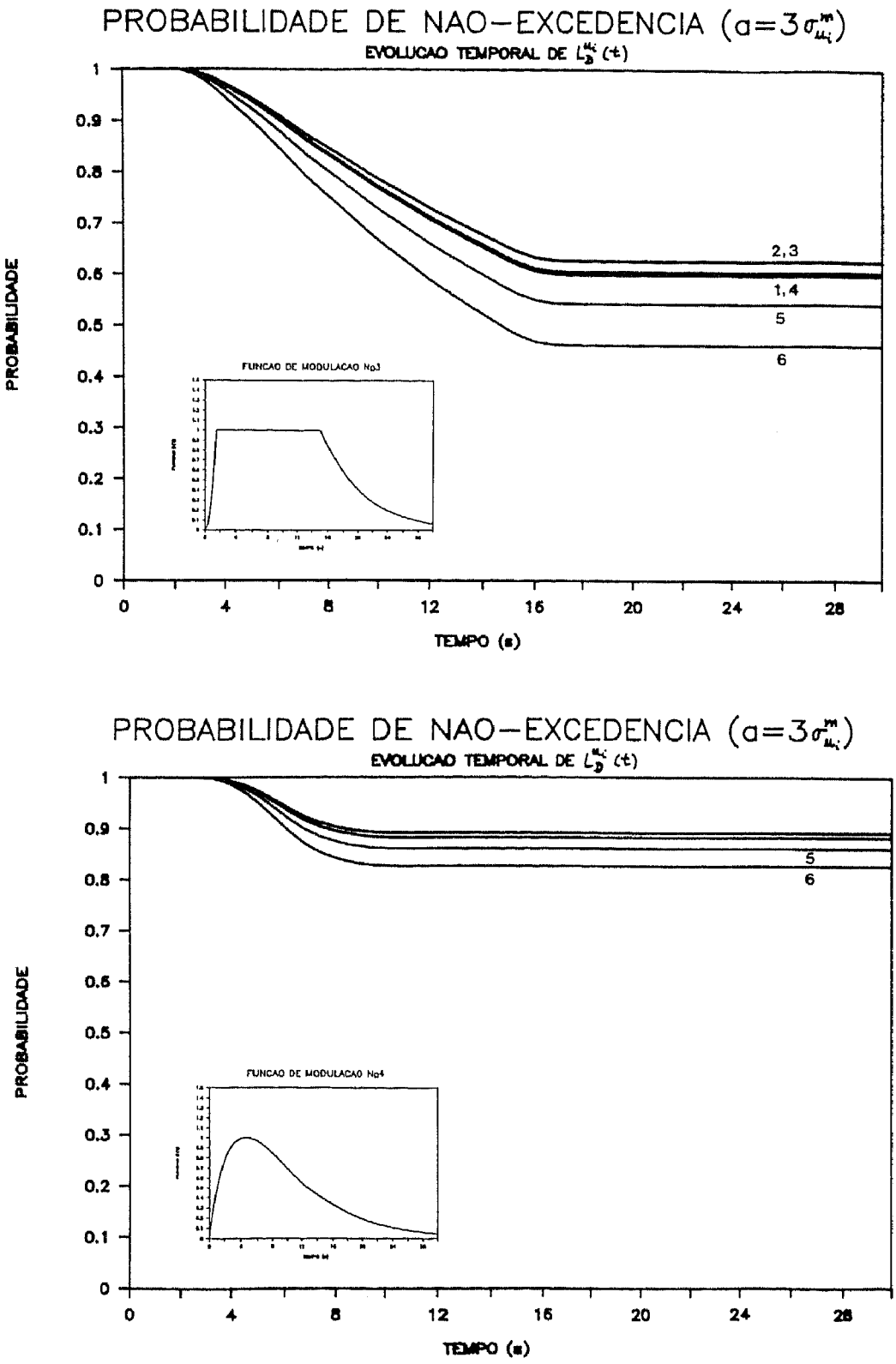


Fig. 3.16 (b) - Evolução temporal de $L^{u_i}_D$.

4

MÉTODOS DE ANÁLISE DA RESPOSTA ALEATÓRIA DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

4.1 - INTRODUÇÃO

A análise estocástica do comportamento dinâmico de sistemas lineares sujeitos a acções aleatórias gaussianas estacionárias ou não-estacionárias é hoje um problema inteiramente dominado, em relação ao qual se dispõe de abordagens de grande generalidade, possibilitando o desenvolvimento de rotinas relativamente simples para efeito de utilização corrente.

Sucede, porém, que muitos dos sistemas estruturais são marcados por acentuadas não-linearidades geométricas ou materiais, que inviabilizam, em princípio, a utilização das formulações descritas nos dois capítulos anteriores.

Por outro lado, mesmo nos casos em que, por mera questão de simplicidade de cálculo, o comportamento dos sistemas é suposto linear, não se pode esquecer que estes apresentam sempre um limite de proporcionalidade a partir do qual as não-linearidades, elásticas ou inelásticas, começam a revelar-se de uma forma tanto mais nítida, quanto mais severas são as excitações actuantes e mais elevado é o nível de amplitude das vibrações provocadas, como sucede, por exemplo, no caso de muitas estruturas sujeitas a acções sísmicas.

Além disso, as não-linearidades podem envolver a caracterização das próprias acções actuantes, como sucede no caso das acções dinâmicas induzidas por ondas oceânicas sobre estruturas flexíveis, que podem considerar-se funções não-lineares da velocidade e da aceleração, quer das partículas da água, quer da estrutura, de acordo com a chamada equação de Morison [156].

Por estas razões, o princípio da sobreposição de efeitos, quer no domínio do tempo, quer no domínio da frequência, responsável aliás

por uma apreciável simplicidade e eficiência dos métodos de análise de sistemas lineares, perde validade.

Um outro problema adicional, inerente aos sistemas não-lineares, advém do facto de a resposta a excitações de natureza gaussiana ser não-gaussiana, contrariamente ao que sucede nos sistemas lineares, tornando-se desse modo insuficiente o conhecimento dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem para assegurar a completa caracterização da distribuição probabilística da resposta. Este aspecto é aliás tanto mais importante, quanto as não-linearidades podem afectar de forma particular as caudas da distribuição, podendo por isso a deficiente consideração dos seus efeitos ser responsável por erros de avaliação da probabilidade de sobrevivência ou fiabilidade do sistema.

A resposta dinâmica de sistemas não-lineares sujeitos a excitações aleatórias deve pois ser conseguida à custa da resolução do sistema de equações diferenciais não-lineares tradutor do respectivo equilíbrio dinâmico, cujo tratamento matemático é, no entanto, bastante mais difícil que no caso de sistemas lineares. Sendo a excitação gaussiana e do tipo ruído branco, pode comprovar-se que a resposta de sistemas não-lineares elásticos é de natureza markoviana [8, 47], sendo a correspondente densidade de probabilidade de transição regulada por uma equação de Fokker-Planck-Kolmogorov (v. 1.8.3). Esta abordagem, que apresenta a vantagem fundamental de poder conduzir a resultados exactos, é infelizmente aplicável a um número limitado de situações, e particularmente restrito nos casos de excitações não-estacionárias e de sistemas de N graus de liberdade, em virtude da inexistência de um procedimento geral para obtenção da solução analítica exacta da equação de FPK.

Perante a grande dificuldade de resolução do referido sistema de equações diferenciais não-lineares estocásticas, é frequente, na prática, o recurso aos chamados métodos de simulação digital, também conhecidos por métodos de Monte-Carlo, que consistem em interpretar aquele sistema como um conjunto infinito de sistemas de equações diferenciais não-lineares determinísticos, gerando-se artificialmente um número teoricamente infinito de séries temporais da excitação,

compatíveis com uma determinada estrutura probabilística pré-definida. Resolvendo sucessivamente cada um desses sistemas, através do recurso a programas de cálculo para análise dinâmica de estruturas não-lineares por integração no tempo, obtém-se o conjunto de realizações da resposta que, uma vez tratadas estatisticamente, possibilitam estimar a correspondente caracterização probabilística.

Sendo esta via de análise altamente dispendiosa e consumidora de tempo de cálculo, várias têm sido as tentativas no sentido de desenvolver abordagens aproximadas que, embora menos rigorosas, se revelam de aplicação mais acessível e eficiente.

Tais métodos podem classificar-se em dois grupos [34, 47, 191, 192, 216, 227], incluindo o primeiro todas as técnicas aproximadas que, baseadas numa abordagem markoviana da resposta, incidem sobre a equação de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK), e reunindo o segundo todas as formulações aplicáveis às equações de equilíbrio dinâmico.

As técnicas aproximadas baseadas na equação de FPK [47, 191], entre as quais se incluem, nomeadamente, as técnicas de truncatura, de médida estocástica, iterativas, numéricas, de caminhos aleatórios e baseadas em desenvolvimentos em série, referem-se em geral apenas a sistemas de 1-GL, pelo que a sua utilização continua a ser limitada em termos práticos.

São por isso as formulações pertencentes ao segundo grupo aquelas que merecem maior atenção quando se pretende analisar sistemas de maior complexidade, sendo diversas as abordagens desenvolvidas por vários autores, designadamente as técnicas de perturbação [62, 232], os métodos de linearização estocástica equivalente [45, 241, 11, 209, 153] e a sua extensão mais recente conhecida por não-linearização equivalente [48, 195], e os métodos de representação em séries de funções [34, 192].

É assim objectivo do presente capítulo descrever com um certo detalhe as principais abordagens utilizáveis na análise estocástica da resposta de sistemas não-lineares, realçando as respectivas potencialidades e limitações, no sentido de destacar as vantagens inerentes à utilização do método de linearização estocástica equiva-

lente, cujo tratamento será por isso mais aprofundado, sendo-lhe inclusivamente reservado o capítulo 5, onde serão considerados os modelos de comportamento não-linear de maior interesse no domínio da análise sísmica de estruturas de edifícios, conhecidos por modelos histeréticos.

Admitir-se-á, tal como nos capítulos anteriores, que o sistema é discretizável num conjunto de elementos finitos, podendo as não-linearidades incidir sobre as respectivas matrizes de rigidez ou de amortecimento. Começará por se fazer uma breve referência às soluções exactas alcançáveis com base na equação de FPK, bem como às abordagens aproximadas correspondentes, sendo depois descritos os métodos mais potentes em termos de aplicações, designadamente a técnica de perturbação, o método de linearização estocástica equivalente (ou não-linearização equivalente), as técnicas de truncatura e de simulação.

Para além de se realçar a importância prática assumida pela linearização equivalente, sublinha-se também o interesse da não-linearização equivalente e do método de truncatura não-gaussiana, como vias que possibilitam controlar os efeitos das não-linearidades sobre o comportamento não-gaussiano da resposta, aspecto que assume particular importância em termos da avaliação da probabilidade de não-excedência de uma dada barreira.

Finalmente, é efectuada referência pormenorizada ao desenvolvimento de "software" específico para a análise sísmica de estruturas de tipo "shear-building" com comportamento bilinear elástico, apresentando-se exemplos de aplicação julgados elucidativos, tratados através de um programa de cálculo automático propositadamente elaborado para o efeito.

4.2 - ABORDAGEM MARKOVIANA BASEADA NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV

O problema da análise da resposta dinâmica de um sistema não-linear a excitações de natureza aleatória é uma questão cuja formulação

matemática apresenta grande analogia com outras questões que se colocam noutras áreas do conhecimento, designadamente na teoria do controlo de sistemas não-lineares, na teoria das comunicações e na electrónica.

Por esse motivo, embora o trabalho mais antigo relativo a vibrações aleatórias de sistemas não-lineares se deva a Andronov et al [4], que se baseou numa abordagem markoviana da resposta e no uso da equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, e posteriormente se tenham registado outras contribuições do mesmo tipo na área da Dinâmica, como as de Crandall [63], Ariaratnam [6], Lyon [149], Smith [207], Klein [131] e Herbert [110], diversos trabalhos envolvendo técnicas semelhantes foram também desenvolvidos noutras áreas, em particular na Química por Kramers [135] e na teoria de controlo de sistemas não-lineares por Chuang e Kazda [53].

A aproximação markoviana da resposta de um sistema não-linear sujeito a uma excitação aleatória de banda larga resulta directamente da teoria dos sistemas de equações diferenciais estocásticos.

Com efeito, o equilíbrio dinâmico de um sistema não-linear elástico de N-GL sujeito a uma excitação aleatória $\underline{p}^q(t)$ pode ser traduzido pelo sistema de N equações diferenciais

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{g}(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)=\underline{p}^q(t) \tag{4.1}$$

sendo $\underline{g}(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)$ um vector caracterizador das forças de restituição não-lineares. Introduzindo o vector de estado $\underline{y}(t)^T=[\underline{q}(t)^T,\dot{\underline{q}}(t)^T]$, aquele sistema pode transformar-se num outro sistema de 2N equações, definido por

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{a}(\underline{y},t)+\underline{x}(t) \tag{4.2}$$

ou, se se preferir na forma diferencial

$$d\underline{y}(t)=\underline{a}(\underline{y},t)dt+\underline{x}(t)dt \tag{4.3}$$

com

$$\underline{a}(\underline{y},t)=\begin{Bmatrix}\dot{\underline{q}}(t)\\ -\underline{M}^{-1}\underline{g}(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)\end{Bmatrix} \qquad \underline{x}(t)=\begin{Bmatrix}\underline{0}\\ \underline{M}^{-1}\underline{p}^q(t)\end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

Considerando-se a excitação actuante caracterizada pela relação formal

$$\underline{p}^{q}(t)=\underline{\theta}(t)\omega(t)=\underline{\theta}(t)\frac{dW(t)}{dt} \tag{4.5}$$

sendo $\underline{\theta}(t)$ um vector de funções de modulação determinísticas, $\omega(t)$ um processo gaussiano do tipo ruído branco de média nula, e $W(t)$ o correspondente processo de Wiener, a equação (4.2), interpretada como uma equação de Itô [115], pode escrever-se sob a forma

$$d\underline{y}(t)=\underline{a}(\underline{y},t)dt+\underline{b}(t)dW(t) \tag{4.6}$$

em que

$$\underline{b}(t)=\begin{Bmatrix}\underline{0}\\ \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(t)\end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

Ora, de acordo com a teoria das equações diferenciais estocásticas [8, 47], a solução $\underline{y}(t)$ relativa à equação (4.6) é um processo de Markov, sendo por isso a função densidade de probabilidade de transição da resposta regulada por uma equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, ou seja

$$\frac{\partial p_c(\underline{y}/\underline{y}_o)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{2N}\frac{\partial}{\partial y_i}[\alpha_i p_c(\underline{y}\,|\,\underline{y}_o)]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2N}\sum_{j=1}^{2N}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}[\beta_{ij}p_c(\underline{y}\,|\,\underline{y}_o)] \tag{4.8}$$

sendo $\underline{y}_o$ e $\underline{y}$ os vectores constituídos pelos valores do processo vectorial markoviano de resposta de dimensão 2N nos instantes t_o e t $(t_o<t)$, y_i e y_j as componentes de ordem i e de ordem j do vector $\underline{y}$, e α_i e β_{ij} os seguintes limites obtidos a partir dos momentos incrementais de primeira e segunda ordem

$$\alpha_i(\underline{y},t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta y_i]}{\Delta t}\qquad \beta_{ij}(\underline{y},t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta y_i\Delta y_j]}{\Delta t} \tag{4.9}$$

os quais podem ser calculados com base no conhecimento das equações de equilíbrio dinâmico.

Nas situações em que o processo de resposta assume natureza

estacionária, o primeiro membro da equação (4.8) anula-se, sendo a densidade de probabilidade de transição $p_c(\underline{y}\,|\,\underline{y}_o)$ substituída por uma função densidade de probabilidade $p(\underline{y})$ independente do tempo e das condições iniciais, ou seja a equação de FPK assume a forma

$$-\sum_{i=1}^{2N}\frac{\partial}{\partial y_i}[\alpha_i p(\underline{y})]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2N}\sum_{j=1}^{2N}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}[\beta_{ij} p(\underline{y})]=0 \tag{4.10}$$

Esta abordagem markoviana da resposta, embora apresente uma importante vantagem por poder conduzir a soluções exactas, reveste-se porém de sérios aspectos restritivos.

Um primeiro obstáculo decorre do pressuposto de a excitação actuante ser caracterizada por um ruído branco gaussiano de valor médio nulo, pois que, embora em muitos casos esta restrição possa ser contornada mediante o recurso a filtros susceptíveis de gerarem processos coloridos com características espectrais adequadas, tal procedimento leva a um aumento da dimensão do processo markoviano da resposta, envolvendo o conjunto sistema-filtro, introduzindo-se dessa maneira um agravamento da complexidade do problema.

A dificuldade maior reside, contudo, no facto de ser muito limitada a classe de sistemas não-lineares em relação aos quais é conhecida uma solução exacta da equação de FPK [47].

No domínio dos sistemas de 1-GL, a equação de FPK é resolúvel para equações do movimento da forma

$$\ddot{q}(t)+c\dot{q}(t)+g(q,t)=\omega(t) \tag{4.11}$$

em que $\omega(t)$ é um ruído branco gaussiano estacionário de valor médio nulo e densidade espectral de potência constante de valor S_o.

Introduzindo o vector de estado $\underline{y}(t)=[q(t),\dot{q}(t)]^T$, esta equação transforma-se em

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{a}(\underline{y},t)+\underline{x}(t) \tag{4.12}$$

traduzindo que

$$\begin{Bmatrix}\dot{q}(t)\\ \ddot{q}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dot{q}(t)\\ -c\dot{q}(t)-g(q,t)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ \omega(t)\end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

Os coeficientes α_i e β_{ij} da equação de FPK, associada ao processo bidimensional de Markov $\underline{y}(t)$, podem então ser quantificados, já que

$$\alpha_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E[\Delta y_1]}{\Delta t} = y_2 \tag{4.14}$$

$$\alpha_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E[\Delta y_2]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E\left\{[-c\dot{q}(t) - g(q,t)]\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \omega(u)du\right\}}{\Delta t}$$

$$= -c\dot{q}(t) - g(q,t) \tag{4.15}$$

$$\beta_{11} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E[\Delta y_1^2]}{\Delta t} = 0 \tag{4.16}$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E[\Delta y_1 \Delta y_2]}{\Delta t} = 0 \tag{4.17}$$

$$\beta_{22} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E[\Delta y_2^2]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E\left\{\left[(-c\dot{q}(t) - g(q,t))\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \omega(u)du\right]^2\right\}}{\Delta t} \tag{4.18}$$

Desenvolvendo o quadrado indicado na expressão de β_{22}, e tendo presente que a função de auto-correlação da excitação é $R_\omega(\tau) = 2\pi S_o \delta(\tau)$, conclui-se de imediato que

$$\beta_{22} = 2\pi S_o \tag{4.19}$$

sendo possível mostrar [46] que os limites dos momentos incrementais de ordem superior são nulos.

Nestas condições, a equação de FPK correspondente é a seguinte

$$\pi S_o \frac{\partial^2 p}{\partial y_2^2} - \frac{\partial}{\partial y_1}(y_2 p) + \frac{\partial}{\partial y_2}\{[cy_2 + g(y_1)]p\} = 0 \tag{4.20}$$

Segundo Wang e Uhlenbeck [244], a solução respectiva é dada por

$$p(q,\dot{q}) = C \exp\left\{-\frac{c}{\pi S_o}\left[\frac{\dot{q}^2}{2} + \int_o^q g(u)du\right]\right\} \tag{4.21}$$

em que C é uma constante de normalização, determinável através da condição

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(q,\dot{q})dqd\dot{q} = 1 \tag{4.22}$$

No caso particular de um sistema linear, em que

$$c = 2\xi w_n \qquad g(q,t) = w_n^2 q(t) \tag{4.23}$$

a equação de FPK (4.20) reduz-se a

$$\pi S_o \frac{\partial^2 p}{\partial y_2^2} + (w_n^2 y_1 + 2\xi w_n y_2)\frac{\partial p}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial p}{\partial y_1} + 2\xi w_n p = 0 \tag{4.24}$$

podendo a respectiva solução exprimir-se em função de q e $\dot{q}$ por

$$p(q,\dot{q}) = \frac{\xi w_n^2}{2\pi S_o}\exp\left[-\frac{\xi w_n}{\pi S_o}(w_n^2 q^2 + \dot{q}^2)\right] \tag{4.25}$$

Sabendo-se que a resposta de um sistema linear a uma excitação gaussiana é igualmente gaussiana, pode comparar-se esta equação com a equação (1.235)

$$p(q,\dot{q}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_o^q \lambda_2^q}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{\lambda_o^q} + \frac{\dot{q}^2}{\lambda_2^q}\right)\right] \tag{4.26}$$

concluindo-se que

$$\lambda_o^q = \frac{\pi S_o}{2\xi w_n^3} \qquad \lambda_2^q = \frac{\pi S_o}{2\xi w_n} \tag{4.27}$$

o que aliás condiz com as equações (2.36) e (2.38), já anteriormente obtidas em 2.2.4.

A equação de Fokker-Planck-Kolmogorov é ainda resolúvel de forma exacta, caso se introduza também uma não-linearidade no amortecimento, transformando-se a equação (4.11) em

$$\ddot{q}(t) + h(V)\dot{q}(t) + g(q,t) = \omega(t) \tag{4.28}$$

sendo $h(V)$ uma função da energia total

$$V = \frac{\dot{q}^2}{2} + U(q) \tag{4.29}$$

com

$$U(q)=\int_o^q g(q)dq \tag{4.30}$$

obtendo-se nesse caso que [47]

$$p(q,\dot{q})=C\exp\left[-\frac{1}{\pi S_o}\int_o^V h(u)du\right] \tag{4.31}$$

A resposta estacionária de certos sistemas não-lineares de N-GL pode também ser determinada através da equação de FPK. Tal é possível no caso de as equações do movimento serem da forma

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}(t)+\nabla\underline{U}_q(t)=\underline{\omega}^q(t) \tag{4.32}$$

em que $\underline{M}$ e $\underline{C}$ são matrizes simétricas, $\underline{\omega}^q(t)$ é um processo vectorial gaussiano estacionário do tipo ruído branco de valor médio nulo, com uma matriz de funções de inter-correlação proporcional à matriz de amortecimento, ou seja

$$E[\underline{\omega}^q(t)]=\underline{0} \qquad \underline{R}_{\omega^q}(\tau)=2d\underline{C}\delta(\tau) \tag{4.33}$$

e

$$\nabla\underline{U}_q=\left[\frac{\partial U}{\partial q_1},\frac{\partial U}{\partial q_2},\ldots,\frac{\partial U}{\partial q_N}\right]^T \tag{4.34}$$

representando $U=U(\underline{q})$ uma energia potencial.

Nesse caso, introduzindo o problema de valores e vectores próprios

$$\underline{C}\underline{\phi}_i=\lambda_i\underline{M}\underline{\phi}_i \tag{4.35}$$

pode escrever-se que

$$\underline{\Phi}^T\underline{M}\underline{\Phi}=\underline{I} \qquad \underline{\Phi}^T\underline{C}\underline{\Phi}=\underline{\lambda} \tag{4.36,37}$$

em que $\underline{\Phi}$ é a matriz quadrada constituída pelos vectores próprios $\underline{\phi}_i$ normalizados em relação à matriz de massa, $\underline{I}$ é a matriz identidade e $\underline{\lambda}$ é uma matriz diagonal constituída pelos valores próprios correspondentes.

Por outro lado, tendo em consideração que a introdução da transformação linear

$$\underline{q}(t) = \underline{\Phi}\,\underline{z}(t) \tag{4.38}$$

implica que

$$\underline{\Phi}^T \nabla \underline{U}_q(t) = \nabla \underline{U}_z(t) \tag{4.39}$$

a equação (4.32) pode transformar-se, tendo em conta as equações (4.36) a (4.39), no seguinte conjunto de N equações diferenciais independentes

$$\ddot{\underline{z}}(t) + \underline{\lambda}\,\dot{\underline{z}}(t) + \nabla \underline{U}_z(t) = \underline{\Phi}^T \underline{\omega}^q(t) = \underline{\omega}^z(t) \tag{4.40}$$

ou

$$\ddot{z}_i(t) + \lambda_i \dot{z}_i(t) + \frac{\partial U(\underline{z})}{\partial z_i} = \omega_i^z(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{4.41}$$

sendo

$$E[\underline{\omega}^z(t)] = \underline{0} \qquad \underline{R}_{\omega^z}(\tau) = 2d\underline{\lambda}\,\delta(\tau) \tag{4.42}$$

Recorrendo ao vector de estado $\underline{y}(t)^T = [\underline{z}(t)^T, \dot{\underline{z}}(t)^T]$, estas equações podem, por sua vez, transformar-se no seguinte sistema de 2N equações diferenciais de segunda ordem

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= y_{i+N}(t) \\ \dot{y}_{i+N}(t) &= -\lambda_i y_{i+N}(t) - \frac{\partial U(\underline{y})}{\partial y_i} + \omega_i^z(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned} \tag{4.43}$$

tornando-se viável calcular os coeficientes α_i e β_{ij} da equação de FPK associada ao processo de Markov $\underline{y}(t)$ de dimensão 2N, caracterizador da resposta do sistema não-linear, seguindo um procedimento perfeitamente semelhante ao anteriormente utilizado para sistemas de 1-GL (eq. 4.14 a 4.19), resultando assim que

$$\alpha_i = y_{i+N} \qquad \alpha_{i+N} = -\lambda_i y_{i+N} - \partial U(\underline{y})/\partial y_i \tag{4.44}$$

$$b_{ij} = 0 \qquad b_{i+N,\,j+N} = 0 \qquad b_{ii} = 0 \qquad b_{i+N,\,i+N} = 2d\lambda_i \tag{4.45}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N; \quad i \neq j)$$

Desta forma, a equação de FPK, que condiciona a função densidade de probabilidade estacionária $p(\underline{y})$, surge com o seguinte aspecto

$$\sum_{i=1}^{2N} d\lambda_i \frac{\partial^2 p}{\partial y_{i+N}^2} - \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial y_i}(y_{i+N} p) + \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial y_{i+N}}\left[\left(\lambda_i y_{i+N} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\right) p\right] = 0 \qquad (4.46)$$

A solução respectiva foi primeiro obtida por Ariaratnam [6] para sistemas de 2-GL, sendo posteriormente generalizada por Caughey [46], que chegou à seguinte expressão para $p(\underline{y})$

$$p(\underline{y}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{d}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2N} y_{i+N}^2 + U(\underline{y})\right]\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{d}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2N} y_{i+N}^2 + U(\underline{y})\right]\right\} dy_1 \ldots dy_{2N}} \qquad (4.47)$$

À semelhança do que se passa nos sistemas de 1-GL, a equação de FPK é também resolúvel caso se verifique uma não-linearidade ao nível das forças de amortecimento, desde que a equação (4.41) seja substituída por uma equação da forma

$$\ddot{z}_i(t) + c_i h(V)\dot{z}_i(t) + \frac{\partial U(\underline{z})}{\partial z_i} = \omega_i^z(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (4.48)$$

sendo

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \dot{z}_i^2 + U(\underline{z}) \qquad (4.49)$$

e $h(V)$ uma função positiva monotonamente crescente. $\omega_i^z(t)$ é um ruído branco gaussiano de valor médio nulo, tal que

$$\underline{R}_{\omega^z}(\tau) = 2\underline{D}\delta(\tau) \qquad (4.50)$$

sendo $\underline{D}$ uma matriz diagonal relacionada com os coeficientes c_i através da relação

$$D_{ii}/c_i = d \qquad (4.51)$$

Nesse caso, Caughey mostrou também que a solução de FPK correspondente conduz a que

$$p(\underline{y}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{d}\int_0^V h(u)du\right]}{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{d}\int_0^V h(u)du\right]dy_1\ldots dy_{2N}} \qquad (4.52)$$

4.3 - SOLUÇÕES APROXIMADAS DA EQUAÇÃO DE FPK. O MÉTODO DA MÉDIA ESTOCÁSTICA

Como se depreende da leitura do ponto anterior, a abordagem markoviana da resposta baseada na resolução da equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, embora tenha a vantagem de poder conduzir a resultados exactos, apresenta severas restrições de aplicabilidade a sistemas de N-GL, mesmo no caso de excitações estacionárias, exigindo que, quer as não-linearidades, quer as matrizes das funções de inter-correlação da excitação actuante, obedeçam a relações em regra pouco compatíveis com as situações reais.

Por essa razão, diversos autores ensaiaram variados métodos aproximados de resolução da equação de FPK, empregando nomeadamente técnicas iterativas (Mayfield [154], Ilin e Khasminski [114] e Kushner [138]), técnicas utilizando desenvolvimentos em série (Atkinson [13], Payne [172], Stratonovitch [219] Bhandarri e Sherrer [28] e Wen [246]), técnicas de caminhos aleatórios (Toland e Yang [229]), técnicas de média estocástica (Roberts e Spanos [194]), técnicas numéricas (Wolaver [255] e Cumming [72]) e de truncatura (Dashevskii [77-79]).

Estes métodos aproximados, baseados na equação de FPK, referem-se em geral, no entanto, a sistemas não-lineares de 1-GL, pelo que o seu interesse prático continua a ser muito limitado.

Apesar disso porém, julga-se de interesse fazer referência a duas dessas formulações, nomeadamente ao método da média estocástica e aos métodos de truncatura, em virtude de, por um lado, o primeiro desses métodos constituir uma das formulações aproximadas mais potentes no domínio dos sistemas de 1-GL, e de, por outro lado, os métodos de truncatura encerrarem interessantes virtualidades, encontrando-se intimamente relacionados com o método de linearização estocástica

equivalente. Por esta última razão aliás, entende-se conveniente proceder neste ponto unicamente a uma breve descrição do método da média estocástica, reservando para fase posterior uma referência mais detalhada às técnicas de truncatura gaussiana e não-gaussiana.

O método da média estocástica ("stochastic averaging"), aplicável a sistemas não-lineares de 1-GL com baixo amortecimento, cuja resposta pode considerar-se de banda estreita, é devido a Stratonovitch [219], que generalizou uma técnica anteriormente utilizada por Bogoliubov e Mitropolsky [30], aplicada em análises de carácter determinístico.

Neste tipo de abordagem aproximada, aplicável a equações de equilíbrio da forma

$$\ddot{q}(t)+\epsilon g(q,\dot{q},t)+w_o^2 q(t)=p(t) \tag{4.53}$$

em que $g(q,\dot{q},t)$ traduz as não-linearidades do sistema, e $p(t)$ é um processo de banda larga, a resposta é analisada em termos da respectiva envolvente z e fase ϕ, definidas pelas relações

$$q(t)=z(t)\cos[w_o t+\phi(t)] \tag{4.54}$$

$$\dot{q}(t)=-z(t)w_o \operatorname{sen}[w_o t+\phi(t)] \tag{4.55}$$

Conjugando as equações (4.53) a (4.55), pode obter-se que [194]

$$\dot{z}=\frac{\epsilon}{w_o} g(z\cos\Phi,-zw_o\operatorname{sen}\Phi)\operatorname{sen}\Phi-\frac{p(t)}{w_o}\operatorname{sen}\Phi \tag{4.56}$$

$$\dot{\phi}=\frac{\epsilon}{zw_o} g(z\cos\Phi,-zw_o\operatorname{sen}\Phi)\cos\Phi-\frac{p(t)}{zw_o}\cos\Phi \tag{4.57}$$

em que

$$\Phi=w_o t+\phi \tag{4.58}$$

Os segundos membros das equações (4.56) e (4.57) dependem não só explicitamente de $z(t)$ e $p(t)$, mas também de $\phi(t)$ e t através dos termos de natureza oscilatória $\operatorname{sen}\Phi$ e de $\cos\Phi$. Como o andamento da envolvente z e da fase ϕ é naturalmente caracterizado por variações muito lentas em sistemas de baixo amortecimento, e em que a resposta é traduzida por processos de banda estreita, pode introduzir-se uma aproximação

que consiste em substituir as componentes oscilatórias por valores médios, calculados de forma determinística, no caso das primeiras parcelas dos segundos membros das equações (4.56) e (4.57), ou de forma estocástica com base num teorema limite utilizado por Stratonovitch [219] e Khasminskii [126], no caso das segundas, função também do processo estocástico de banda larga $p(t)$.

Seguindo essa via, é possível demonstrar [194] que as equações (4.56) e (4.57) podem substituir-se de forma aproximada por

$$\dot{z} = \frac{\epsilon}{w_o} G_1(z) + \frac{\pi S_p(w_o,t)}{2zw_o^2} - \frac{\sqrt{\pi S_p(w_o,t)}}{w_o}\omega_1(t) \tag{4.59}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\epsilon}{zw_o} G_2(z) - \frac{\sqrt{\pi S_p(w_o,t)}}{zw_o}\omega_2(t) \tag{4.60}$$

com

$$G_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} g(z\cos\Phi, -zw_o \operatorname{sen}\Phi)\operatorname{sen}\Phi d\Phi \tag{4.61}$$

$$G_2(z) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} g(z\cos\Phi, -zw_o \operatorname{sen}\Phi)\cos\Phi d\Phi \tag{4.62}$$

em que $S_p(w_o,t)$ é o valor do espectro de potência evolutivo da excitação actuante para $w = w_o$, e $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$ são dois ruídos brancos unitários independentes. A equação (4.59) surge assim desligada da equação (4.60), podendo ser representada na forma diferencial traduzida pela equação (4.6), pelo que $z(t)$ pode ser interpretado como um processo de Markov, cuja função densidade de probabilidade de transição $p_c(z \mid z_o)$ é regulada pela equação de FPK [194]

$$\frac{\partial p_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-\frac{\epsilon G_1(z)}{w_o} - \frac{\pi S_p(w_o,t)}{2zw_o^2}\right)p_c\right] + \frac{\pi S_p(w_o,t)}{2w_o^2}\frac{\partial^2 p_c}{\partial z^2} \tag{4.63}$$

equação que, no caso de excitações estacionárias, apresenta a seguinte solução exacta conhecida

$$p(z) = Cz\exp\left\{\frac{2\epsilon w_o}{\pi S_p(w_o)}\int_o^z G_1(u)du\right\} \tag{4.64}$$

Por outro lado, as equações (4.59) e (4.60) permitem também interpretar $z(t)$ e $\phi(t)$ como um processo de Markov bidimensional, ao qual está associada uma outra equação de FPK que, comparada com a equação (4.63), possibilita concluir que para excitações estacionárias

$$p(z,\phi) = p(z)p(\phi) = p(z)/2\pi \tag{4.65}$$

Deste modo, atendendo às relações entre $(q,\dot{q})$ e (z,ϕ), bem como à relação Jacobiana (1.157), pode concluir-se também que a função densidade de probabilidade correspondente à resposta estacionária $(q,\dot{q})$ é dada por

$$p(q,\dot{q}) = \frac{1}{2\pi w_o z} p(z) \tag{4.66}$$

com

$$z = \sqrt{q^2 + (\dot{q}/w_o)^2} \tag{4.67}$$

No caso particular de sistemas lineares, em que $\epsilon g(q,\dot{q}) = 2\xi w_o \dot{q}$, as equações (4.64) e (4.66) conduzem exactamente às distribuições de Rayleigh e de Gauss já anteriormente referidas.

Sendo a excitação de carácter não-estacionário, a resolução da equação de FPK (4.63) torna-se extremamente difícil, dispondo-se apenas de uma solução geral para a situação específica de um sistema linear.

Como facilmente se compreende, a vantagem essencial deste método consiste em substituir o problema da determinação da distribuição de probabilidade do processo de Markov bidimensional $(q,\dot{q})$ por um problema análogo em termos do processo de Markov unidimensional relativo à envolvente z, simplificando consideravelmente o problema em termos matemáticos, tornando-se viável posteriormente obter uma aproximação da distribuição de probabilidade relativa a $(q,\dot{q})$.

4.4 - O MÉTODO DE PERTURBAÇÃO

O método de perturbação é uma abordagem aproximada de análise da resposta aleatória de sistemas não-lineares de N-GL, que se apoia directamente nas respectivas equações de equilíbrio dinâmico.

Suponha-se estas equações expressas sob a forma

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}(t)+\underline{K}\underline{q}(t)+\epsilon\underline{g}(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)=\underline{p}^{q}(t) \tag{4.68}$$

em que ϵ constitui um parâmetro de perturbação, tradutor do grau de importância das não-linearidades definidas pelo vector $\underline{g}(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)$, e considere-se que a solução $\underline{q}(t)$ pode ser expressa através de um desenvolvimento em série de potências de ϵ, isto é

$$\underline{q}(t)=\underline{q}_{o}(t)+\epsilon\underline{q}_{1}(t)+\epsilon^{2}\underline{q}_{2}(t)+\ldots \tag{4.69}$$

Então, torna-se possível, substituindo (4.69) em (4.68), reunindo os termos correspondentes às mesmas potências de ϵ e igualando-os a zero, transformar o problema não-linear traduzido pela equação (4.68) na seguinte cadeia de problemas lineares

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}_{o}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}_{o}(t)+\underline{K}\underline{q}_{o}(t)=\underline{p}^{q}(t) \tag{4.70}$$

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}_{1}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}_{1}(t)+\underline{K}\underline{q}_{1}(t)=-\underline{g}(\dot{\underline{q}}_{o},\underline{q}_{o},t) \tag{4.71}$$

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}_{2}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}_{2}(t)+\underline{K}\underline{q}_{2}(t)=-\underline{q}_{1}(t)^{T}\left\{\frac{\partial g_{i}(\dot{\underline{q}}_{o},\underline{q}_{o})}{\partial q_{o,i}}\right\}-\dot{\underline{q}}_{1}(t)^{T}\left\{\frac{\partial g_{i}(\dot{\underline{q}}_{o},\underline{q}_{o})}{\partial q_{o,i}}\right\} \tag{4.72}$$

.....

Desta forma, torna-se possível obter a caracterização probabilística da resposta do sistema não-linear, recorrendo apenas a métodos focados anteriormente para sistemas lineares.

Com efeito, desprezando o contributo dos termos correspondentes a potências de ϵ de ordem superior à primeira, e supondo a excitação estacionária, conclui-se da equação (4.69) que o valor médio espectável da resposta é dado por

$$m_{q}=E[\underline{q}(t)]=E[\underline{q}_{o}(t)]+\epsilon E[\underline{q}_{1}(t)] \tag{4.73}$$

obtendo-se os valores médios $E[\underline{q}_{o}(t)]$ e $E[\underline{q}_{1}(t)]$ a partir da resolução

dos problemas lineares traduzidos pelas equações (4.70) e (4.71), para o que se torna necessário calcular o valor médio da excitação correspondente ao segundo problema, $E[\underline{g}(\dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o, t)]$, o que pode ser feito a partir do conhecimento da distribuição de probabilidade da resposta correspondente ao primeiro.

Por outro lado, a matriz das funções de inter-correlação instantânea da resposta é dada por

$$\underline{R}_q(o) = E[\underline{q}\underline{q}^T] = E\left[\underline{q}_o \underline{q}_o^T\right] + \epsilon\left\{E\left[\underline{q}_o \underline{q}_1^T\right] + E\left[\underline{q}_1 \underline{q}_o^T\right]\right\} \tag{4.74}$$

sendo o conhecimento da matriz $E[\underline{q}_o \underline{q}_o^T]$ decorrente da resolução do primeiro problema linear a que se refere a equação (4.70).

O cálculo da matriz $E[\underline{q}_o \underline{q}_1^T]$ pode, por sua vez, fazer-se tendo em conta que (v. eq. 2.51)

$$\underline{q}_o(t) = \int_o^\infty \underline{h}_q(\tau)\underline{p}^q(t-\tau)d\tau \tag{4.75}$$

$$\underline{q}_1(t) = -\int_o^\infty \underline{h}_q(\tau)\underline{g}(\dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o, t-\tau)d\tau \tag{4.76}$$

pelo que

$$E\left[\underline{q}_o \underline{q}_1^T\right] = -\int_o^\infty \int_o^\infty \underline{h}_q(\tau_1) E[\underline{p}^q(t-\tau_1)\underline{g}^T(q_o, q_o, t-\tau_2)]\underline{h}_q^T(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \tag{4.77}$$

podendo o valor médio espectável $E[\underline{p}^q(t-\tau_1)\underline{g}^T(\dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o, t-\tau_2)]$ calcular-se tendo em consideração a equação (4.75), as características da excitação aleatória $\underline{p}^q(t)$ e as propriedades dos processos gaussianos [62]. No entanto, o cálculo de $E[\underline{q}_o \underline{q}_1^T]$ não se revela nada simples por esta via na maioria dos casos.

Esta abordagem de análise da resposta, inicialmente utilizada por Crandall [62] em sistemas de um ou dois graus de liberdade, foi posteriormente utilizada por Lyon [148] em sistema contínuos, e por Tung [232], que baseando-se numa formulação de estado, conseguiu desligar as equações (4.70) e (4.71), criando um procedimento mais

simples de cálculo da matriz das funções de inter-correlação da resposta em sistemas de N-GL.

As técnicas de perturbação apresentam, no entanto, sérias restrições, não só porque a utilização de termos do desenvolvimento em série (4.69) correspondentes a potências de ϵ superiores à primeira leva a cálculos extraordinariamente pesados e trabalhosos, mas também porque não existe prova da convergência daquele desenvolvimento em série.

A comparação de resultados obtidos através desta técnica com os alcançados por técnicas de simulação, ou com o recurso a soluções exactas, permite porém concluir que o método de perturbação conduz a boas aproximações desde que as não-linearidades sejam pouco acentuadas.

4.5 - O MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE

4.5.1 - Conceito de sistema linear equivalente

O método de linearização estocástica equivalente teve a sua génese numa técnica aproximada criada por Krylov e Bogoliubov [137] para análise da resposta de um sistema não-linear a acções determinísticas, posteriormente generalizada por Booton [31] e Caughey [45] ao caso de excitações aleatórias.

A ideia básica subjacente ao desenvolvimento deste método consiste simplesmente em procurar aproximar a resposta do sistema não-linear pela resposta de um sistema linear equivalente, cujas características são determinadas de modo a minimizar alguma medida do erro cometido.

Considere-se então, para clarificar ideias, um sistema de 1-GL com comportamento não-linear em termos de amortecimento e de rigidez, sujeito a uma excitação aleatória, que vamos começar por supor estacionária e de valor médio nulo, sendo o equilíbrio dinâmico correspondente traduzido pela equação

$$\ddot{q}(t)+g(\dot{q},q,t)=p(t)/m \tag{4.78}$$

em que $g(\dot{q},q,t)$ é uma função caracterizadora das não-linearidades, suposta ímpar em q e $\dot{q}$, como sucede na maioria dos casos de interesse prático, levando a que a resposta $q(t)$ tenha valor médio nulo por razões de simetria.

A resposta deste sistema não-linear pode ser aproximada pela resposta de um sistema linear equivalente, caracterizado pelos parâmetros β_e e w_e, obedecendo à equação de equilíbrio

$$\ddot{q}(t)+\beta_e\dot{q}(t)+w_e^2q(t)=p(t)/m \tag{4.79}$$

A fixação dos valores de β_e e w_e é naturalmente função da diferença ϵ entre os primeiros membros das equações (4.78) e (4.79), sendo

$$\epsilon(t)=g(\dot{q},q,t)-\beta_e\dot{q}(t)-w_e^2q(t) \tag{4.80}$$

Um critério adequado para a escolha dos parâmetros do sistema linear equivalente consiste em minimizar o valor quadrático médio $E[\epsilon^2]$, o que exige a satisfação das seguintes condições necessárias

$$\frac{\partial}{\partial\beta_e}E[\epsilon^2]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial w_e}E[\epsilon^2]=0 \tag{4.81}$$

Conjugando estas condições com a equação (4.80), e resolvendo as duas equações resultantes em ordem a β_e e w_e^2, resulta que

$$\beta_e=\frac{E[q^2]E[\dot{q}g(\dot{q},q)]-E[q\dot{q}]E[qg(\dot{q},q)]}{E[q^2]E[\dot{q}^2]-E[q\dot{q}]^2} \tag{4.82}$$

$$w_e^2=\frac{E[\dot{q}^2]E[qg(\dot{q},q)]-E[q\dot{q}]E[\dot{q}g(\dot{q},q)]}{E[q^2]E[\dot{q}^2]-E[q\dot{q}]^2} \tag{4.83}$$

expressões que se podem simplificar, tendo em conta que, sendo o processo de resposta estacionário e de valor médio nulo (v. Cap. 1)

$$E[q^2]=\sigma_q^2 \qquad E[\dot{q}^2]=\sigma_{\dot{q}}^2 \qquad E[q\dot{q}]=0 \tag{4.84}$$

pelo que

$$\beta_e = \frac{E[\dot{q}g(\dot{q},q)]}{\sigma_{\dot{q}}^2} \qquad w_e^2 = \frac{E[qg(\dot{q},q)]}{\sigma_q^2} \tag{4.85}$$

Deste modo, os parâmetros definidores do sistema linear equivalente, β_e e w_e^2, surgem expressos em função da própria estatística da resposta, o que tende a dificultar a sua determinação. No entanto, o problema pode ser ultrapassado se se seguir uma via iterativa, começando por arbitrar valores iniciais para β_e e w_e^2, e calculando os valores correspondentes de σ_q^2 e $\sigma_{\dot{q}}^2$. Supondo-se a excitação actuante de natureza gaussiana, a resposta do sistema linear equivalente será do mesmo tipo, pelo que as variáveis $(q,\dot{q})$ obedecem a uma distribuição de Gauss bidimensional, condicionada exclusivamente pelos valores das variâncias σ_q^2 e $\sigma_{\dot{q}}^2$. Por conseguinte, torna-se viável o cálculo dos valores médios $E[\dot{q}g(\dot{q},q)]$ e $E[qg(\dot{q},q)]$, tomando como base essa distribuição de probabilidade conjunta, podendo posteriormente calcular-se os valores corrigidos de β_e e w_e^2 a utilizar na iteração seguinte, e assim sucessivamente até que se atinja a desejada convergência.

4.5.2 - Formulação do método para sistemas de N-GL com não-linearidades simétricas sujeitos a excitações estacionárias de média nula

Embora o método de linearização estocástica equivalente tenha começado por se referir a sistemas não-lineares de 1-GL sujeitos a excitações aleatórias [45], foi posteriormente objecto de diversas contribuições (Foster [104], Yang [241], Iwan [118], Atalik [11], Spanos [209], Mason [153]) no sentido de o tornar aplicável, de uma forma simples e eficiente, a sistemas de N-GL sujeitos a excitações estacionárias e mesmo não-estacionárias.

Considere-se então um sistema não-linear de N-GL sujeito a uma excitação aleatória gaussiana, que vamos começar por supor caracterizada através de um processo vectorial estacionário de valor médio nulo $\underline{p}^q(t)$, sendo o equilíbrio dinâmico respectivo traduzido na sua forma mais geral pela equação

$$\underline{g}(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},q,t)=\underline{p}^{q}(t) \tag{4.86}$$

o que corresponde a admitir também a possibilidade de ocorrência de termos não-lineares função do vector de acelerações $\ddot{\underline{q}}(t)$, embora tal não se verifique normalmente nos problemas de Dinâmica Estrutural, onde as não-linearidades incidem geralmente sobre as matrizes de amortecimento ou de rigidez, ou seja apenas sobre os termos função dos vectores de velocidades $\dot{\underline{q}}(t)$ e de deslocamentos $\underline{q}(t)$.

Suponha-se também que o vector $\underline{g}(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q},t)$ é ímpar em $\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}}$ e $\underline{q}$, situação em que se verifica a igualdade

$$\underline{g}(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q},t)=-\underline{g}(-\ddot{\underline{q}},-\dot{\underline{q}},-\underline{q},t) \tag{4.87}$$

designando-se as não-linearidades por simétricas [211], e assumindo então a média da resposta $E[\underline{q}(t)]$ valor nulo por razões de simetria.

O objectivo do método de linearização estocástica equivalente consiste neste caso em aproximar a solução do sistema de equações diferenciais não-lineares (4.86) através da solução do seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\underline{M}_{e}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}_{e}\dot{\underline{q}}(t)+\underline{K}_{e}\underline{q}(t)=\underline{p}^{q}(t) \tag{4.88}$$

tradutor do equilíbrio dinâmico de um sistema linear equivalente, caracterizado pelas matrizes de massa $\underline{M}_{e}$, de amortecimento $\underline{C}_{e}$, e de rigidez $\underline{K}_{e}$, quando sujeito à mesma excitação actuante.

A definição daquelas matrizes é naturalmente função da grandeza vectorial $\underline{\epsilon}(t)$ correspondente à diferença entre os primeiros membros dos sistemas de equações (4.86) e (4.88), ou seja

$$\underline{\epsilon}(t)=\underline{g}(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q},t)-\underline{M}_{e}\ddot{\underline{q}}(t)-\underline{C}_{e}\dot{\underline{q}}(t)-\underline{K}_{e}\underline{q}(t) \tag{4.89}$$

tornando-se necessário, para este efeito, minimizar alguma grandeza com ela relacionada. Embora não exista um critério único de minimização para fixação dos parâmetros do sistema linear equivalente (Patula e Iwan [171]), o procedimento geralmente considerado como mais adequado, no caso de excitações de carácter aleatório, consiste em procurar minimizar o valor médio espectável do quadrado da norma euclidiana

do vector $\underline{\epsilon}(t)$, ou seja

$$\text{minimizar } E[\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}] \tag{4.90}$$

Em virtude das propriedades do operador $E[\ ]$, esta condição de minimização pode também expressar-se sob a forma

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^{N} E[\epsilon_i^2] \tag{4.91}$$

representando ϵ_i a componente de ordem i do vector $\underline{\epsilon}$, definida por (v. eq. 4.89)

$$\epsilon_i(t) = g_i(\underline{\ddot{q}}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}, t) - \sum_{j=1}^{N} m_{ij}^e \ddot{q}_j(t) - \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^e \dot{q}_j(t) - \sum_{j=1}^{N} k_{ij}^e q_j(t) \tag{4.92}$$

em que $g_i(\underline{\ddot{q}}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}, t)$ representa a i-ésima componente do vector $\underline{g}$, e m_{ij}^e, c_{ij}^e e k_{ij}^e, constituem os elementos da linha i e da coluna j das matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ respectivamente.

Como a condição (4.91) exprime a procura de minimização de um somatório de N parcelas não-negativas, o critério usado equivale também à minimização de cada uma das parcelas, ou seja corresponde a

$$\text{minimizar } E[\epsilon_i^2] \tag{4.93}$$

o que exige a satisfação das seguintes condições necessárias

$$\frac{\partial}{\partial m_{ij}^e} E[\epsilon_i^2] = 2E\left[\epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial m_{ij}^e}\right] = 0 \tag{4.94}$$

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}^e} E[\epsilon_i^2] = 2E\left[\epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial c_{ij}^e}\right] = 0 \tag{4.95}$$

$$\frac{\partial}{\partial k_{ij}^e} E[\epsilon_i^2] = 2E\left[\epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial k_{ij}^e}\right] = 0 \tag{4.96}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N)$$

Substituindo nestas equações a expressão de ϵ_i dada por (4.92), resulta que

$$\sum_{l=1}^{N} m_{il} E[\ddot{q}_l \ddot{q}_j] + \sum_{l=1}^{N} c_{il}^e E[\dot{q}_l \ddot{q}_j] + \sum_{l=1}^{N} k_{il}^e E[q_l \ddot{q}_j] = E[\ddot{q}_j g_i(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q})] \qquad (4.97)$$

$$\sum_{l=1}^{N} m_{il} E[\ddot{q}_l \dot{q}_j] + \sum_{l=1}^{N} c_{il}^e E[\dot{q}_l \dot{q}_j] + \sum_{l=1}^{N} k_{il}^e E[q_l \dot{q}_j] = E[\dot{q}_j g_i(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q})] \qquad (4.98)$$

$$\sum_{l=1}^{N} m_{il} E[\ddot{q}_l q_j] + \sum_{l=1}^{N} c_{il}^e E[\dot{q}_l q_j] + \sum_{l=1}^{N} k_{il}^e E[q_l q_j] = E[q_j g_i(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q})] \qquad (4.99)$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N)$$

o que equivale às seguintes relações matriciais

$$\underline{M}_e E[\ddot{\underline{q}}\ddot{\underline{q}}^T] + \underline{C}_e E[\dot{\underline{q}}\ddot{\underline{q}}^T] + \underline{K}_e E[\underline{q}\ddot{\underline{q}}^T] = E[\underline{g}(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q})\ddot{\underline{q}}^T] \qquad (4.100)$$

$$\underline{M}_e E[\ddot{\underline{q}}\dot{\underline{q}}^T] + \underline{C}_e E[\dot{\underline{q}}\dot{\underline{q}}^T] + \underline{K}_e E[\underline{q}\dot{\underline{q}}^T] = E[\underline{g}(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q})\dot{\underline{q}}^T] \qquad (4.101)$$

$$\underline{M}_e E[\ddot{\underline{q}}\underline{q}^T] + \underline{C}_e E[\dot{\underline{q}}\underline{q}^T] + \underline{K}_e E[\underline{q}\underline{q}^T] = E[\underline{g}(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q})\underline{q}^T] \qquad (4.102)$$

Estas 3N equações, que traduzem as condições necessárias para a satisfação da condição de minimização (4.90), podem ainda expressar-se de forma mais condensada se se introduzir o vector $\underline{z}$, tal que

$$\underline{z}^T = [\underline{q}^T, \dot{\underline{q}}^T, \ddot{\underline{q}}^T] \qquad (4.103)$$

dando então lugar à relação matricial

$$E[\underline{z}\underline{z}^T] \begin{Bmatrix} \underline{K}_e^T \\ \underline{C}_e^T \\ \underline{M}_e^T \end{Bmatrix} = E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})] \qquad (4.104)$$

No entanto, a satisfação destas equações por parte das matrizes $\underline{1}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ não garante necessariamente a minimização de $E[\underline{\epsilon}^T\underline{\epsilon}]$ ou, o ue é equivalente, de $E[\epsilon_i^2]$, porquanto as condições (4.94) a (4.96), ıe lhes deram origem, constituem condições necessárias mas não ficientes para a ocorrência de um mínimo.

Importa por isso comparar o valor de $E[\epsilon_i^2]$ relativo a $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ ı o valor correspondente $E[\epsilon_{i*}^2]$ associado a um outro qualquer terno natrizes $\underline{M}_e^*$, $\underline{C}_e^*$ e $\underline{K}_e^*$, verificando-se as relações

$$m_{ij}^{e*} = m_{ij}^{e} + \Delta m_{ij}^{e}$$

$$c_{ij}^{e*} = c_{ij}^{e} + \Delta c_{ij}^{e} \tag{4.105}$$

$$k_{ij}^{e*} = k_{ij}^{e} + \Delta k_{ij}^{e}$$

Utilizando, para esse efeito, um desenvolvimento em série de Taylor de $E[\epsilon_{i*}^2]$ em torno de m_{ij}^e, c_{ij}^e e k_{ij}^e, e tendo em consideração que, sendo $E[\epsilon_i^2]$ uma função polinomial quadrática daqueles parâmetros (v. eq. 4.92), são nulas todas as derivadas parciais de $E[\epsilon_i^2]$ de ordem superior à segunda, $E[\epsilon_{i*}^2]$ pode exprimir-se através da equação

$$\begin{aligned} E[\epsilon_{i*}^2] = E[\epsilon_i^2] + \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{\partial E[\epsilon_i^2]}{\partial m_{ij}^e} \Delta m_{ij}^e + \frac{\partial E[\epsilon_i^2]}{\partial c_{ij}^e} \Delta c_{ij}^e + \frac{\partial E[\epsilon_i^2]}{\partial k_{ij}^e} \Delta k_{ij}^e \right\} + \\ + \frac{1}{2!} \sum_{k,l=1}^{N} \left\{ \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial m_{ik}^e \partial m_{il}^e} \Delta m_{ik}^e \Delta m_{il}^e + \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial c_{ik}^e \partial c_{il}^e} \Delta c_{ik}^e \Delta c_{il}^e + \right. \\ + \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial k_{ik}^e \partial k_{il}^e} \Delta k_{ik}^e \Delta k_{il}^e + \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial m_{ik}^e \partial c_{il}^e} \Delta m_{ik}^e \Delta c_{il}^e + \\ \left. + \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial m_{ik}^e \partial k_{il}^e} \Delta m_{ik}^e \Delta k_{il}^e + \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial c_{ik}^e \partial k_{il}^e} \Delta c_{ik}^e \Delta k_{il}^e \right\} \end{aligned} \tag{4.106}$$

Esta equação pode ser substancialmente simplificada se, por um lado, se tiverem presentes as condições (4.94) a (4.96), que obrigam ao anulamento das parcelas relativas ao somatório em j, e se, por outro, se proceder ao cálculo das derivadas parciais de segunda ordem cruzadas intervenientes nesta equação, tendo por base a equação (4.92), resultando [195]

$$E[\epsilon_{i*}^2] = E[\epsilon_i^2] + \frac{1}{2} E\left\{ \left[\sum_{j=1}^{N} (\ddot{q}_j \Delta m_{ij}^e + \dot{q}_j \Delta c_{ij}^e + q_j \Delta k_{ij}^e) \right]^2 \right\} \tag{4.107}$$

Desta forma, chega-se à importante conclusão de que

$$E[\epsilon_{i*}^2] \geq E[\epsilon_i^2] \tag{4.108}$$

o que significa que, se existir um sistema linear caracterizado por matrizes de massa $\underline{M}_e$, de amortecimento $\underline{C}_e$ e de rigidez $\underline{K}_e$, satisfazendo a equação (4.104), o valor correspondente de $E[\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}]$ nunca é maior que o relativo a qualquer outro terno de matrizes $\underline{M}_e^*$, $\underline{C}_e^*$ e $\underline{K}_e^*$. Por outro

lado, como a igualdade em (4.108) exige o anulamento do somatório em j representado na equação (4.107), ou seja que

$$\sum_{j=1}^{N}(\ddot{q}_j\Delta m_{ij}^e+\dot{q}_j\Delta c_{ij}^e+q_j\Delta k_{ij}^e)=0 \tag{4.109}$$

o que equivale a dizer que as componentes do vector $\underline{z}^T=[\underline{q}^T,\dot{\underline{q}}^T,\ddot{\underline{q}}^T]$ são linearmente dependentes em qualquer instante do tempo t, conclui-se também que, se essas componentes forem linearmente independentes, o valor de $E[\underline{\epsilon}^T\underline{\epsilon}]$ correspondente às matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ constitui efectivamente um mínimo absoluto.

A independência linear entre as diversas componentes do vector $\underline{z}^T=[\underline{q}^T,\dot{\underline{q}}^T,\ddot{\underline{q}}^T]$ é aliás também essencial para garantir a existência e unicidade do sistema linear equivalente. Com efeito, para que a equação (4.104) possa ser resolvida em ordem a $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$, obtendo-se garantidamente uma solução única, é necessário que a matriz das funções de inter-correlação instantânea da resposta $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ seja invertível, e portanto não singular. Ora de acordo com a Teoria das Probabilidades [153], a matriz $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ é singular se e só se a probabilidade de pelo menos uma das componentes de $\underline{z}$ se poder exprimir como uma combinação linear determinística das restantes for igual a um. Essa singularidade significaria aliás, em termos físicos, que o verdadeiro número de graus de liberdade do sistema seria inferior a N, sendo pois sempre possível eliminar todas as equações de equilíbrio redundantes, por forma a garantir a não singularidade da matriz $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ e a correspondente existência e unicidade do sistema linear equivalente.

Desta forma, a equação (4.104) possibilita sempre a determinação das matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ caracterizadoras do sistema linear equivalente, verificando-se apenas uma dificuldade adicional decorrente de aquelas matrizes surgirem definidas em função da própria estatística da resposta desse sistema.

No entanto, o problema pode ser ultrapassado mediante o recurso a um procedimento iterativo, em que as matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ começam por ser arbitradas, caracterizando-se posteriormente a estrutura

probabilística da resposta do sistema linear correspondente, a partir da qual podem ser conhecidos os valores médios $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ e $E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})]$ constantes da equação (4.104). Resolvendo esta equação em ordem a $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$, obtêm-se as versões corrigidas daquelas matrizes a utilizar numa nova iteração, prosseguindo-se este procedimento até se atingir a desejada convergência.

4.5.3 - A hipótese da natureza gaussiana da resposta e as condições de Atalik-Utku

O cálculo dos valores médios $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ e $E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})]$, intervenientes na equação (4.104), deveria em princípio efectuar-se tomando por base a verdadeira distribuição de probabilidade da resposta do sistema não-linear, a qual pode assumir um carácter não-gaussiano, mesmo que a excitação actuante obedeça a uma distribuição normal.

Não sendo obviamente possível obter essa distribuição, o método de linearização estocástica equivalente introduz uma aproximação que consiste em passar a admitir que ela coincide com a distribuição de probabilidade correspondente à resposta do sistema linear equivalente.

Desta forma, e uma vez que a resposta de um sistema linear a uma excitação gaussiana é igualmente caracterizada por uma distribuição normal, este método pressupõe também a natureza gaussiana do processo de resposta, hipótese que, podendo não corresponder à verdade, constitui o principal aspecto restritivo desta abordagem aproximada, não possibilitando, em especial, avaliar as repercussões das não-linearidades sobre as caudas da distribuição de probabilidade correspondente à resposta do sistema não-linear, e impedindo, por este facto, uma caracterização inteiramente correcta da probabilidade de sobrevivência ou de não-excedência de barreiras pré-definidas.

Tomando, porém, como boa tal aproximação, que é aliás essencial ao desenvolvimento do método de linearização estocástica equivalente, torna-se possível transformar a equação (4.104), obtendo uma forma mais simples e eficiente de caracterização dos elementos das matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$.

Com efeito, lançando mão da propriedade dos processos estocásticos gaussianos vectoriais a que se refere a equação (1.180), e pressupondo que as funções $g_i(\underline{z})$, tradutoras das não-linearidades do sistema em análise, respeitam as condições de aplicabilidade dessa propriedade antes enunciadas, o que genericamente sucede, pode escrever-se que

$$E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})] = E[\underline{z}\underline{z}^T]E\left\{\underline{J}_z^T[\underline{g}(\underline{z})]\right\} \tag{4.110}$$

em que $\underline{J}_z[\underline{g}(\underline{z})]$ é a matriz Jacobiana de $\underline{g}(\underline{z})$, pelo que, substituindo (4.110) em (4.104), se obtém

$$E[\underline{z}\underline{z}^T]\begin{Bmatrix}\underline{K}_e^T\\ \underline{C}_e^T\\ \underline{M}_e^T\end{Bmatrix} = E[\underline{z}\underline{z}^T]E\left\{\underline{J}_z^T[\underline{g}(\underline{z})]\right\} \tag{4.111}$$

Admitindo-se que a matriz $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ é não singular, por razões já antes apontadas, esta equação apresenta pois a seguinte solução única

$$\begin{Bmatrix}\underline{K}_e^T\\ \underline{C}_e^T\\ \underline{M}_e^T\end{Bmatrix} = E\left\{\underline{J}_z^T[\underline{g}(\underline{z})]\right\} \tag{4.112}$$

Referindo-nos directamente às componentes $\ddot{\underline{q}}$, $\dot{\underline{q}}$ e $\underline{q}$ do vector $\underline{z}$, esta equação pode escrever-se também sob a forma

$$\begin{Bmatrix}\underline{M}_e\\ \underline{C}_e\\ \underline{K}_e\end{Bmatrix} = E\begin{Bmatrix}\underline{J}_{\ddot{q}}[\underline{g}(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q})]\\ \underline{J}_{\dot{q}}[\underline{g}(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q})]\\ \underline{J}_{q}[\underline{g}(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q})]\end{Bmatrix} \tag{4.113}$$

extraindo-se dela a conclusão de que os elementos das matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ obedecem às seguintes condições

$$m_{ij}^e = E\left[\frac{\partial g_i(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q})}{\partial \ddot{q}_j}\right] \tag{4.114}$$

$$c_{ij}^e = E\left[\frac{\partial g_i(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q})}{\partial \dot{q}_j}\right] \tag{4.115}$$

$$k_{ij}^{e} = E\left[\frac{\partial g_i(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q})}{\partial q_j}\right] \tag{4.116}$$

Estas equações, devidas a Atalik e Utku [11], substituem pois com vantagem a equação (4.104), desde que satisfeitas as condições consideradas na sua dedução, definindo de forma explícita os coeficientes das matrizes do sistema linear equivalente, o que possibilita mesmo, em muitos casos de menor complexidade, uma solução analítica directa do problema sem recurso a técnicas iterativas.

Estas equações permitem ainda constatar que as matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ são simétricas nos casos em que as não-linearidades estiverem associadas a potenciais $W(\ddot{\underline{q}})$, $V(\dot{\underline{q}})$ e $U(\underline{q})$, de tal forma que as equações de equilíbrio se possam exprimir sob a forma

$$g_i(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q}) = \frac{\partial W(\ddot{\underline{q}})}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial V(\dot{\underline{q}})}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U(\underline{q})}{\partial q_i} \tag{4.117}$$

4.5.4 - Alguns aspectos práticos sobre a utilização do método de linearização equivalente

A formulação do método de linearização estocástica equivalente, tal como foi descrita nas duas secções anteriores, possibilita o fácil desenvolvimento de rotinas de cálculo simples e eficientes, destinadas à caracterização estatística aproximada da resposta de um sistema não-linear de múltiplos graus de liberdade, com não-linearidades simétricas, a uma excitação aleatória traduzida por um processo estocástico vectorial gaussiano estacionário de valor médio espectável nulo.

Com efeito, quer a equação (4.104), quer as condições de Atalik-Utku, expressas pelas equações (4.114) a (4.116), permitem definir os elementos das matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do sistema linear equivalente em função das respectivas características estatísticas da resposta, abrindo duas vias possíveis para a resolução prática do problema.

A via mais geral, que possibilita o fácil desenvolvimento de uma rotina de cálculo, mesmo no caso de sistemas de maior complexidade, consiste no recurso a uma técnica iterativa, em que se começam por arbitrar os valores iniciais dos elementos das matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$, determinando em seguida a matriz de covariância da resposta do sistema linear equivalente $E[\underline{z}\underline{z}^T]$. Uma vez conhecida esta matriz, podem calcular-se os valores corrigidos de $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ a utilizar na iteração seguinte, quer recorrendo à equação (4.104), o que envolve o cálculo do valor médio $E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})]$ e a inversão da matriz $E[\underline{z}\underline{z}^T]$, quer, o que é substancialmente mais simples, utilizando as condições de Atalik-Utku, (4.114) a (4.116), que fornecem directamente os elementos m_{ij}^e, c_{ij}^e e k_{ij}^e, a partir do cálculo dos valores médios espectáveis das derivadas parciais de $g_i(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q})$ em ordem a $\ddot{q}_j$, $\dot{q}_j$ e q_j respectivamente. Estes valores médios podem ser facilmente quantificados com base nas propriedades dos processos gaussianos, devendo este procedimento ser repetido sucessivamente até que seja alcançada a necessária convergência.

Em certos casos de menor complexidade, pode no entanto seguir-se uma outra via que, tomando por base as condições de Atalik-Utku, possibilita mesmo uma resolução analítica directa sem recurso a quaisquer técnicas iterativas. Com efeito, sendo cada g_i função não-linear de $\ddot{\underline{q}}$, $\dot{\underline{q}}$ e $\underline{q}$, os valores médios das derivadas parciais indicados nas equações (4.114) a (4.116) constituem momentos estatísticos conjuntos de ordem normalmente superior à segunda, envolvendo as diversas componentes do vector $\underline{z}^T=[\underline{q}^T,\dot{\underline{q}}^T,\ddot{\underline{q}}^T]$.

Todavia, todos os momentos de ordem superior podem ser expressos em função dos momentos de segunda ordem, através da aplicação repetida da propriedade a que se refere a equação (1.180).

Por conseguinte, encontrando-se todos os parâmetros caracterizadores do sistema linear equivalente expressos em função da matriz de covariância da resposta respectiva, a resolução deste sistema linear, através de um dos métodos conhecidos para o efeito, conduz directamente ao conhecimento da matriz $E[\underline{z}\underline{z}^T]$.

Ressalta pois claro, da descrição sumária destas duas vias possíveis de resolução do problema, que a forma utilizada por Atalik

e Utku para traduzir as condições necessárias para a minimização do valor médio $E[\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}]$ veio introduzir no método de linearização estocástica equivalente uma considerável simplicidade em termos de utilização corrente, aumentando significativamente a eficiência das rotinas de cálculo em relação a versões anteriores do método apresentadas por Caughey [45], Foster [104] e Yang [241].

Independentemente da opção tomada quanto à utilização de uma técnica iterativa ou de resolução directa, o método de linearização equivalente envolve sempre a resolução de um sistema linear, o que pode naturalmente fazer-se recorrendo a qualquer dos métodos referidos para o efeito no Capítulo 2.

Apesar disso porém, há sempre vantagem em atender a alguns aspectos particulares, no sentido de escolher a formulação mais adequada à resolução do sistema linear, em especial quando se recorre a técnicas iterativas que envolvem a repetição sucessiva de cálculos daquele tipo.

De uma forma geral, pode dizer-se que a escolha do método depende em larga medida das características da excitação actuante. Assim, sendo a excitação idealizável através de um ruído branco, a utilização de uma formulação de estado, envolvendo uma abordagem no domínio do tempo, revela-se frequentemente vantajosa para estruturas de dimensão média, podendo no entanto deixar de o ser no caso de excitações coloridas, particularmente aquelas que envolvem a introdução de pré-filtros de ordem relativamente elevada, já que estes levam a um aumento significativo da dimensão do problema, tornando-se então preferível seguir uma formulação baseada nas relações estocásticas excitação-resposta no domínio da frequência.

4.5.5 - Consideração de não-linearidades não-simétricas ou de excitações estacionárias de média não-nula

O método de linearização estocástica equivalente, tal como foi exposto até aqui, pressupõe que as não-linearidades do sistema, traduzidas pelo vector $\underline{g}(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q})$, são simétricas, facto que leva a que

o valor médio espectável da resposta $E[\underline{q}(t)]$ seja nulo.

Embora se constate que essa hipótese corresponde efectivamente à maior parte das não-linearidades de interesse prático, há no entanto todo o interesse em identificar as modificações a ter em conta nos casos em que a função $\underline{g}(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q})$ não é ímpar em $\ddot{\underline{q}}$, $\dot{\underline{q}}$ e $\underline{q}$

Nessa situação, o valor médio da resposta $E[\underline{q}(t)]$ deixa de ser nulo, mesmo que o processo de excitação tenha média nula, o que aliás sucede também, quando o valor médio da excitação $E[\underline{p}^q(t)]$ toma valor diferente de zero, qualquer que seja o tipo de não-linearidade.

Por conseguinte, os processos vectoriais estacionários de excitação e de resposta podem considerar-se de uma forma geral expressos pelas relações

$$\underline{p}^q(t) = \underline{p}_o^q(t) + \underline{m}_{p^q} \tag{4.118}$$

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_o(t) + \underline{m}_q \tag{4.119}$$

em que $\underline{p}_o^q(t)$ e $\underline{q}_o(t)$ são os correspondentes processos de média nula, e $\underline{m}_{p^q}$ e $\underline{m}_q$ são os respectivos vectores de valores médios.

Substituindo estas duas relações na equação de equilíbrio dinâmico do sistema não-linear

$$\underline{g}(\ddot{\underline{q}},\dot{\underline{q}},\underline{q},t) = \underline{p}^q(t) \tag{4.120}$$

e aplicando o operador $E[\ ]$ a ambos os membros, resulta que

$$E[\underline{g}(\ddot{\underline{q}}_o,\dot{\underline{q}}_o,\underline{q}_o+\underline{m}_q)] = \underline{m}_{p^q} \tag{4.121}$$

Subtraindo membro a membro estas equações, obtém-se por seu lado

$$\underline{h}(\ddot{\underline{q}}_o,\dot{\underline{q}}_o,\underline{q}_o,\underline{m}_q,t) = \underline{p}_o^q(t) \tag{4.122}$$

em que

$$\underline{h}(\ddot{\underline{q}}_o,\dot{\underline{q}}_o,\underline{q}_o,\underline{m}_q,t) = \underline{g}(\ddot{\underline{q}}_o,\dot{\underline{q}}_o,\underline{q}_o+\underline{m}_q,t) - E[\underline{g}(\ddot{\underline{q}}_o,\dot{\underline{q}}_o,\underline{q}_o+\underline{m}_q)] \tag{4.123}$$

Desta forma, pode continuar a utilizar-se o método de linearização estocástica equivalente, aproximando a equação (4.122) pela equação

$$\underline{M}_e\ddot{\underline{q}}_o(t)+\underline{C}_e\dot{\underline{q}}_o(t)+\underline{K}_e\underline{q}_o(t)=\underline{p}_o^q(t) \tag{4.124}$$

correspondente ao equilíbrio dinâmico de um sistema linear equivalente sujeito a uma excitação traduzida pelo processo de média nula $\underline{p}_o^q(t)$, desde que simultaneamente se tenha em consideração a equação (4.121).

O estabelecimento de uma rotina de cálculo iterativa pode assim continuar a ter lugar, começando por arbitrar os valores iniciais, não só das matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$, mas também do vector $\underline{m}_q$. Dessa forma, resolvendo o problema linear a que se refere a equação (4.124), pode chegar-se ao conhecimento da matriz de covariância da resposta expressa em termos do processo vectorial $\underline{z}_o^T=[\underline{q}_o^T,\dot{\underline{q}}_o^T,\ddot{\underline{q}}_o^T]$, naturalmente coincidente com a matriz de covariância relativa a $\underline{z}^T=[\underline{q}^T,\dot{\underline{q}}^T,\ddot{\underline{q}}^T]$, o que possibilita não só calcular os valores corrigidos dos elementos das matrizes $\underline{M}_e$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ do sistema linear equivalente a partir das condições de Atalik-Utku, ou seja

$$m_{ij}^e=E\left[\frac{\partial h(\ddot{\underline{q}}_o,\dot{\underline{q}}_o,\underline{q}_o,\underline{m}_q)}{\partial\ddot{q}_{ij}^o}\right] \tag{4.125}$$

$$c_{ij}^e=E\left[\frac{\partial h(\ddot{\underline{q}}_o,\dot{\underline{q}}_o,\underline{q}_o,\underline{m}_q)}{\partial\dot{q}_{ij}^o}\right] \tag{4.126}$$

$$k_{ij}^e=E\left[\frac{\partial h(\ddot{\underline{q}}_o,\dot{\underline{q}}_o,\underline{q}_o,\underline{m}_q)}{\partial q_{ij}^o}\right] \tag{4.127}$$

mas também estabelecer N equações algébricas com base na equação (4.121), que possibilitam quantificar os valores corrigidos dos elementos de $\underline{m}_q$ a utilizar numa iteração seguinte.

4.5.6 - Extensão do método à análise da resposta a excitações não-estacionárias moduláveis

O método de linearização estocástica equivalente, para além de se revelar uma formulação simples e eficiente, utilizável para a

análise da resposta estacionária de sistemas não-lineares de múltiplos graus de liberdade, apresenta ainda a grande vantagem de ser facilmente extensível ao tratamento de excitações não-estacionárias.

A extensão do método à análise da resposta a excitações deste tipo é relativamente recente, tendo sido objecto de diversas contribuições por parte de vários investigadores [2, 153, 197].

A principal dificuldade nessa generalização advém do facto de as características do sistema linear equivalente serem, como se sabe, função da distribuição probabilística da resposta, o que leva a que, tendo esta carácter não-estacionário, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do sistema linear equivalente deixem de ser constantes no tempo.

Considere-se então um sistema não-linear de N-GL, sujeito a uma excitação aleatória idealizada através do processo estocástico vectorial não-estacionário $\underline{p}_*^q(t)$. Supondo que as não-linearidades se verificam exclusivamente nos termos que são função de velocidades ou de deslocamentos e não de acelerações, como aliás costuma suceder nos problemas de Dinâmica Estrutural e de Engenharia Sísmica, a equação de equilíbrio dinâmico correspondente toma a forma

$$\underline{M}\,\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{g}(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)=\underline{p}_*^q(t) \tag{4.128}$$

ou, em termos de variáveis de estado, com $\underline{y}^T=[\underline{q}^T,\dot{\underline{q}}^T]$

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{a}(\underline{y},t)+\underline{x}(t) \tag{4.129}$$

com

$$\underline{a}(\underline{y},t)=\begin{Bmatrix}\dot{\underline{q}}(t)\\ -\underline{M}^{-1}\underline{g}(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)\end{Bmatrix}\quad \underline{x}(t)=\begin{Bmatrix}\underline{0}\\ \underline{M}^{-1}\underline{p}_*^q(t)\end{Bmatrix} \tag{4.130}$$

Começando por supor também, por simplicidade, que as não-linearidades têm natureza simétrica e que a excitação tem valor médio nulo, a solução daquele sistema de equações diferenciais não-lineares pode ser aproximada através da solução do seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}_e(t)\dot{\underline{q}}(t)+\underline{K}_e(t)\underline{q}(t)=\underline{p}_*^q(t) \tag{4.131}$$

tradutor do equilíbrio dinâmico de um sistema linear equivalente, cujas matrizes de amortecimento e de rigidez são função do tempo.

Introduzindo o vector de estado $\underline{y}(t)$, este sistema pode também ser transformado num outro de 2N equações diferenciais de primeira ordem, obedecendo à relação matricial

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{A}_e(t)\underline{y}(t)+\underline{x}(t) \tag{4.132}$$

em que

$$\underline{A}_e(t)=\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K}_e(t) & -\underline{M}^{-1}\underline{C}_e(t) \end{bmatrix} \tag{4.133}$$

À semelhança do sucedido na análise da resposta estacionária, a definição das matrizes $\underline{C}_e(t)$ e $\underline{K}_e(t)$ decorre da minimização de alguma grandeza relacionada com a norma euclidiana do vector $\underline{\epsilon}(t)$ correspondente à diferença dos primeiros membros das equações (4.131) e (4.128), ou seja

$$\underline{\epsilon}(t)=\underline{g}(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)-\underline{C}_e(t)\dot{\underline{q}}(t)-\underline{K}_e\underline{q}(t) \tag{4.134}$$

Utilizando como critério para a determinação dos valores instantâneos dos elementos das matrizes de amortecimento e de rigidez, a minimização do valor médio espectável do quadrado da norma euclidiana do vector $\underline{\epsilon}(t)$, ou seja

$$\text{minimizar } E[\underline{\epsilon}(t)^T\underline{\epsilon}(t)] \tag{4.135}$$

pode facilmente concluir-se, seguindo um raciocínio semelhante ao utilizado em 4.5.2, que as condições necessárias para a satisfação da condição de mínimo podem ser expressas pela relação matricial

$$E[\underline{y}(t)\underline{y}(t)^T]\begin{Bmatrix} \underline{K}_e(t)^T \\ \underline{C}_e(t)^T \end{Bmatrix}=E[\underline{y}(t)\underline{g}(y,t)^T] \tag{4.136}$$

Por outro lado, admitindo novamente o carácter gaussiano da resposta, as condições de Atalik-Utku podem ser facilmente generalizadas ao caso da resposta não-estacionária, obtendo-se que

$$c_{ij}^{e}(t)=E\left[\frac{\partial g_i(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)}{\partial \dot{q}_j}\right] \qquad k_{ij}^{e}(t)=E\left[\frac{\partial g_i(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)}{\partial q_j}\right] \tag{4.137,138}$$

ou, o que é equivalente

$$a_{ij}^{e}(t)=E\left[\frac{\partial a_i(\underline{y},t)}{\partial y_j}\right] \tag{4.139}$$

sendo $a_{ij}^{e}(t)$ o elemento da linha i e da coluna j da matriz $\underline{A}_e(t)$, e $a_i(\underline{y},t)$ a i-ésima componente do vector $\underline{a}(\underline{y},t)$.

Por conseguinte, a análise estocástica da resposta não-estacionária do sistema não-linear pode continuar a realizar-se de forma aproximada através do método de linearização equivalente, utilizando ao longo de sucessivos instantes de tempo uma técnica iterativa semelhante à já anteriormente descrita para a análise da resposta estacionária.

A única diferença reside no facto de as matrizes de amortecimento e de rigidez do sistema linear equivalente não serem invariantes no tempo, facto que aliás exige a introdução de algumas modificações em relação à formulação de estado apresentada em 3.3.1, destinada ao tratamento de sistemas lineares.

Com efeito, sendo a matriz $\underline{A}_e$ função do tempo, a solução de um sistema de equações diferenciais determinísticas com a forma da equação (4.132) deixa de ser dada por (2.160), passando a ser [5]

$$\underline{y}(t)=\underline{Y}(t)\underline{y}(0)+\underline{Y}(t)\int_0^t \underline{Y}^{-1}(\tau)\underline{x}(\tau)d\tau \tag{4.140}$$

em que a matriz $\underline{Y}(t)$ é a solução da equação homogénea

$$\dot{\underline{Y}}=\underline{A}_e(t)\underline{Y} \tag{4.141}$$

com a condição inicial

$$\underline{Y}(0)=\underline{I} \tag{4.142}$$

sendo

$$\underline{Y}(t)=\exp\left\{\int_0^t \underline{A}_e(u)du\right\} \tag{4.143}$$

Por outro lado, a evolução temporal da matriz de covariância instantânea da resposta é definida, de acordo com (2.172), pela equação

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + E[\underline{x}(t)\underline{y}(t)^T] + E[\underline{y}(t)\underline{x}(t)^T] \tag{4.144}$$

podendo, então, as terceira e quarta parcelas do segundo membro exprimir-se exclusivamente em função das características da excitação actuante e do sistema linear com base na equação (4.140).

Assim, multiplicando ambos os membros desta equação por $\underline{x}(t)^T$ e aplicando o operador $E[\ ]$, obtém-se que

$$E[\underline{y}(t)\underline{x}(t)^T] = \underline{Y}(t)E[\underline{y}(0)\underline{x}(t)^T] + \underline{Y}(t)\int_0^t \underline{Y}^{-1}(\tau)E[\underline{x}(\tau)\underline{x}(t)^T]d\tau \tag{4.145}$$

concluindo-se pois que, se as condições iniciais não estiverem correlacionadas com a excitação actuante

$$E[\underline{y}(t)\underline{x}(t)^T] = \underline{Y}(t)\int_0^t \underline{Y}^{-1}(\tau)E[\underline{x}(\tau)\underline{x}(t)^T]d\tau \tag{4.146}$$

sendo

$$E[\underline{x}(t)\underline{y}(t)^T] = \{E[y(t)x(t)^T]\}^T \tag{4.147}$$

Um caso particular de especial interesse é aquele em que a excitação é tal que

$$\underline{p}_*^q(t) = \underline{\theta}(t)\underline{p}^q(t) \tag{4.148}$$

sendo $\underline{\theta}(t)$ uma matriz de funções de modulação determinísticas e $\underline{p}^q(t)$ um processo estocástico vectorial estacionário, verificando-se então, tendo em conta (4.130), que

$$E[\underline{x}(\tau)\underline{x}(t)^T] = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(\tau)\underline{R}_{p^q}(t-\tau)\underline{\theta}(t)^T\underline{M}^{-1^T} \end{bmatrix} \tag{4.149}$$

Se, para além disso, o processo $\underline{p}^q(t)$ for do tipo ruído branco, caracterizado por uma matriz de densidades espectrais constantes $\underline{S}_o^{p^q}$, tal que

$$\underline{R}_{p^q}(t-\tau)=2\pi\underline{S}_o^{p^q}\delta(t-\tau) \tag{4.150}$$

a equação (4.149) dá lugar a

$$E[\underline{x}(\tau)\underline{x}(t)^T]=2\pi\delta(t-\tau)\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(\tau)\underline{S}_o^{p^q}\underline{\theta}(t)^T\underline{M}^{-1^T}\end{bmatrix} \tag{4.151}$$

Assim, substituindo (4.151) em (4.146), e atendendo às propriedades da função impulso, obtém-se que

$$E[\underline{y}(t)\underline{x}(t)^T]=\pi\underline{S}_o(t) \tag{4.152}$$

sendo

$$\underline{S}_o(t)=\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(t)\underline{S}_o^{p^q}\underline{\theta}(t)^T\underline{M}^{-1^T}\end{bmatrix} \tag{4.153}$$

o que permite concluir que a evolução temporal da matriz de covariância instantânea $\underline{\mu}_y(t)$ é regulada pela equação (v. eq. 4.144)

$$\dot{\underline{\mu}}(t)=\underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t)+\underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T+2\pi\underline{S}_o(t) \tag{4.154}$$

Nestas condições, a análise da resposta não-estacionária de um sistema não-linear a uma excitação de tipo ruído branco modulado pode continuar a fazer-se desenvolvendo uma rotina de cálculo iterativa, cujas diferenças essenciais em relação ao procedimento utilizado no caso de excitações estacionárias consistem, por um lado, em os parâmetros do sistema linear terem de ser recalculados ao longo de sucessivos instantes, e, por outro, a determinação da matriz de covariância instantânea da resposta do sistema linear resultar da resolução do sistema de equações diferenciais de primeira ordem a que se refere a equação (4.154) e não da resolução de uma equação algébrica de Liapunov.

Esta técnica pode inclusivamente ser estendida ao caso de excitações coloridas moduladas mediante o recurso a filtros, à semelhança do que foi já anteriormente referido para os sistemas lineares. O único inconveniente desta via pode consistir num grande aumento da dimensão do vector de estado $\underline{y}(t)$, em resultado da consideração das equações de equilíbrio do conjunto sistema-filtro.

Uma técnica alternativa introduzida por Sakata e Kimura [197] consiste em calcular as terceira e quarta parcelas do segundo membro da equação (4.144) através de um algoritmo recursivo.

É de realçar ainda que, embora a formulação desenvolvida neste ponto tenha pressuposto a existência de uma excitação de média nula e de não-linearidades simétricas, ela é muito facilmente generalizável aos casos de excitações de média não-nula e/ou de não-linearidades não-simétricas, havendo apenas que proceder então à introdução de modificações em tudo semelhantes às referidas em 4.5.5. Um outro procedimento pode, no entanto, também ser seguido. Com efeito, podendo o processo de resposta decompor-se em cada instante em duas componentes, de acordo com a relação

$$\underline{y}(t) = \underline{m}_y(t) + \underline{y}_o(t) \tag{4.155}$$

sendo $\underline{m}_y(t)$ o valor médio espectável do processo de resposta e $\underline{y}_o(t)$ um processo vectorial de valor médio nulo, a equação (4.132) pode passar a escrever-se sob a forma

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{a}_e(t) + \underline{A}_e(t)\underline{y}_o(t) + \underline{x}(t) \tag{4.156}$$

em que

$$\underline{a}_e(t) = \underline{A}_e(t)\underline{m}_y(t) \tag{4.157}$$

Considerando o vector $\underline{\epsilon}(t)$ definido pela diferença dos segundos membros das equações (4.129) e (4.156), ou seja

$$\underline{\epsilon}(t) = \underline{a}(\underline{y},t) - \underline{a}_e(t) - \underline{A}_e(t)\underline{y}_o(t) \tag{4.158}$$

e impondo, como é habitual no método de linearização estocástica equivalente, a minimização do valor médio do quadrado da respectiva norma euclidiana, pode concluir-se, tendo em conta as seguintes condições necessárias à satisfação daquela condição de mínimo

$$\frac{\partial E[\epsilon_i(t)^2]}{\partial a_i^e} = 0 \qquad \frac{\partial E[\epsilon_i(t)^2]}{\partial a_{ij}^e} = 0 \tag{4.159}$$

que o vector $\underline{a}_e(t)$ e a matriz $\underline{A}_e(t)$ devem verificar as seguintes relações

$$\underline{a}_e(t) = E[\underline{a}(\underline{y},t)] \tag{4.160}$$

$$\underline{A}_e(t)E\left[\underline{y}_o(t)\underline{y}_o(t)^T\right] = E\left[\underline{a}(\underline{y},t)\underline{y}_o(t)^T\right] \tag{4.161}$$

Desta forma, uma resolução iterativa do problema torna-se também possível com base nestas duas equações. Assim, uma vez arbitrados os valores iniciais de $\underline{a}_e(t)$ e $\underline{A}_e(t)$, pode determinar-se a matriz de covariância instantânea da resposta do sistema linear através da resolução do sistema de equações diferenciais

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \tag{4.162}$$

Uma vez conhecida a matriz de covariância $\underline{\mu}_y(t)$, bem como o vector de valores médios $\underline{m}_y(t)$ através da equação (4.157), torna-se viável calcular os valores médios constantes do segundo membro das equações (4.160) e (4.161), e a partir daí recalcular os valores de $\underline{a}_e(t)$ e $\underline{A}_e(t)$ a utilizar numa iteração seguinte, para o que se torna necessário proceder à inversão da matriz $\underline{\mu}_y(t) = E[\underline{y}_o(t)\underline{y}_o(t)^T]$.

4.5.7 - Precisão dos resultados obtidos

A precisão do método de linearização estocástica equivalente pode ser analisada, quer confrontando os resultados obtidos através dele com soluções exactas alcançadas com base na equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, quer recorrendo à comparação com os valores conseguidos mediante simulações numéricas.

O recurso à primeira via fica no entanto limitada aos casos em que a resposta é markoviana e estacionária, e em que, por outro lado, a correspondente equação de FPK apresenta uma solução exacta conhecida. Apesar destas fortes restrições, esta via foi utilizada por diversos autores, designadamente por Iwan e Yang [124], Yang [241], Atalik [12], Roberts e Spanos [195].

A utilização de técnicas de simulação digital assume assim a maior importância no caso de sistemas não-lineares de múltiplos graus de liberdade e de excitações de natureza quer estacionária, quer

não-estacionária, tendo esta via sido seguida também com idêntico objectivo por vários investigadores, como é o caso de Spanos [211], Iwan e Mason [121] e Sakata e Kimura [197].

Desses estudos, bem como dos exemplos de aplicação apresentados no final dos capítulos 4 e 5 da presente dissertação, tratados com base em programas de cálculo propositadamente elaborados, pode retirar-se a conclusão essencial de que o método de linearização estocástica equivalente conduz a excelentes aproximações dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem da resposta, verificando-se que os erros relativos encontrados (na gama dos 0 a 20%) são relativamente reduzidos, mesmo em muitos casos de não-linearidades acentuadas, sendo perfeitamente toleráveis no domínio das aplicações práticas em engenharia de estruturas.

Apenas no que respeita à caracterização das caudas da distribuição probabilística da resposta, é que o método de linearização equivalente não é geralmente considerado tão fiável, já que, baseando-se na hipótese de natureza gaussiana da resposta, não torna possível avaliar os efeitos das não-linearidades sobre a resposta não-gaussiana do sistema, podendo introduzir erros um pouco mais significativos na estimativa da probabilidade de não-excedência de uma dada barreira ou do valor médio dos picos da resposta.

Apesar de tudo, convirá realçar que, mesmo deste ponto de vista, os erros cometidos são em muitos casos pouco relevantes, em particular no domínio da engenharia sísmica, em virtude do elevado grau de incerteza associado à caracterização da excitação actuante.

4.6 - O MÉTODO DE NÃO-LINEARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE

A descrição anteriormente efectuada do método de linearização estocástica equivalente, embora tenha contribuído para salientar as suas notáveis potencialidades como forma de abordagem aproximada da resposta aleatória estacionária ou não-estacionária de sistemas não-lineares de múltiplos graus de liberdade, permitiu também identificar o seu principal ponto fraco, que consiste na impossi-

bilidade de prever em que medida as não-linearidades do sistema podem originar afastamentos significativos da verdadeira distribuição não-gaussiana da resposta em relação à distribuição normal obtida, facto que, em diversos casos, inviabiliza um rigoroso tratamento dos problemas de primeira passagem.

Sendo esse aspecto uma consequência da substituição do sistema não-linear por um sistema linear equivalente, o que leva a que, sendo a excitação gaussiana a resposta também o seja, pode pensar-se em ultrapassar aquela dificuldade tomando antes como sistema equivalente um outro sistema não-linear, mas cuja solução exacta seja conhecida.

Esta abordagem alternativa, conhecida por não-linearização estocástica equivalente, foi introduzida recentemente por Caughey [48], sofrendo no entanto das fortes limitações já conhecidas relativas à razoabilidade da aproximação markoviana da resposta e ao conhecimento de soluções exactas da correspondente equação de FPK.

No caso de sistemas não-lineares sujeitos a excitações aleatórias estacionárias, esta via torna porém possível conseguir, em diversos casos, aproximações bastante precisas da distribuição de probabilidade não-gaussiana da resposta, e consequentemente estimativas rigorosas da fiabilidade do sistema.

A título de exemplo, considere-se um sistema não-linear de 1-GL sujeito a uma excitação gaussiana estacionária $\omega(t)$ idealizada através de um ruído branco de média nula e densidade espectral S_o, sendo a respectiva equação de equilíbrio dinâmico

$$\ddot{q}(t)+g_1(\dot{q},q,t)+g_2(q,t)=\omega(t) \tag{4.163}$$

em que as funções g_1 e g_2 traduzem as não-linearidades existentes.

Embora a resposta do sistema possa ser traduzida por um processo de Markov, a correspondente equação de FPK não tem solução exacta conhecida. O mesmo não sucede porém com o sistema não-linear a que se refere a equação de equilíbrio

$$\ddot{q}(t)+h(V)\dot{q}(t)+g_2(q,t)=\omega(t) \tag{4.164}$$

sendo $h(V)$ uma função da energia total

$$V = \frac{\dot{q}^2}{2} + U(q) \tag{4.165}$$

com

$$U(q) = \int_0^q g_2(q)dq \tag{4.166}$$

ao qual se encontra associada uma equação de FPK cuja solução exacta é (v. eq. 4.28 e 4.31)

$$p(q,\dot{q}) = C\exp\left[-\frac{1}{\pi S_o}\int_0^V h(u)du\right] \tag{4.167}$$

Por conseguinte, a resposta do sistema não-linear a que se refere a equação (4.163) pode ser aproximada pela resposta deste outro sistema não-linear, desde que a função $h(V)$ seja escolhida por forma a minimizar o valor quadrático médio da diferença entre os primeiros membros das equações (4.163) e (4.164), ou seja

$$\text{minimizar } E[\epsilon^2] \tag{4.168}$$

em que

$$\epsilon(t) = g_1(\dot{q},q,t) - h(V)\dot{q}(t) \tag{4.169}$$

A definição de $h(V)$ pode ser realizada através do produto

$$h(V) = c_e h_o(V) \tag{4.170}$$

em que $h_o(V)$ é uma função arbitrada em função das características de $g_1(\dot{q},q,t)$, e c_e é uma constante escolhida por forma a verificar-se a seguinte condição necessária para a minimização de $E[\epsilon^2]$

$$\frac{dE[\epsilon^2]}{dc_e} = 0 \tag{4.171}$$

Impondo a satisfação desta condição, e atendendo à equação (4.169), pode obter-se que

$$c_e = \frac{E[\dot{q}h_o(V)g_1(\dot{q},q)]}{E[\dot{q}^2 h_o(V)]} \tag{4.172}$$

Nestas condições, o valor da constante c_e, caracterizadora do

sistema não-linear equivalente, pode ser quantificado, calculando-se os valores médios indicados nesta equação com base na função densidade de probabilidade conjunta $p(q,\dot{q})$ expressa pela equação (4.167), a qual é também função de c_e.

Uma vez determinado o valor dessa constante, a distribuição de probabilidade da resposta do sistema em análise é definida pela função $p(q,\dot{q})$ a que se refere a equação (4.167) com $h(V)=c_e h_o(V)$.

Como é evidente, a precisão dos resultados encontrados depende da função $h_o(V)$ arbitrada, aumentando naturalmente à medida que a função $c_e h_o(V)\dot{q}$ tenda a melhor ajustar-se à função $g_1(\dot{q},q)$.

4.7 - OS MÉTODOS DE TRUNCATURA GAUSSIANA E NÃO-GAUSSIANA

A completa caracterização da estrutura probabilística instantânea da resposta do sistema não-linear a que se refere a equação de equilíbrio dinâmico (v. eq. 4.2)

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{a}(\underline{y},t)+\underline{x}(t) \tag{4.173}$$

pode ser efectuada não só através do conhecimento da hierarquia de funções densidade de probabilidade multidimensionais $p_n(\underline{Y})$, como também através das hierarquias de funções características $C_n(\underline{\theta})$, de momentos estatísticos $m_r(Y_i,Y_j,\ldots,Y_l)$ ou de cumulantes $k_r(Y_i,Y_j,\ldots,Y_l)$, sendo $Y_i=y_i(t)$ e $n=2N$.

Por outro lado, a família de funções densidade de probabilidade $p_n(\underline{Y})$ do processo não-gaussiano de resposta é susceptível de um desenvolvimento em série em termos das funções homólogas $p_n^g(\underline{Y})$, correspondentes ao processo vectorial gaussiano de iguais cumulantes de primeira e segunda ordem, e dos quasi-momentos $b_r(Y_i,Y_j,\ldots,Y_l)$, de acordo com a seguinte expressão (v. eq. 1.165)

$$p_n(\underline{Y})=\left\{1+\sum_{r=3}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{i,j,\ldots,l=1}^{n} b_r(Y_i,Y_j,\ldots,Y_l).\left(\frac{\partial}{\partial Y_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial Y_j}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial Y_l}\right)\right\}p_n^g(\underline{Y}) \tag{4.174}$$

Podendo os quasi-momentos relacionar-se com os cumulantes (v. eq. 1.162) e estes com os momentos estatísticos (v. eq. 1.14 a 1.17), as funções densidade de probabilidade multidimensionais não-gaussianas $p_n(\underline{Y})$ podem ser definidas de forma aproximada a partir do conhecimento dos momentos estatísticos da resposta até uma dada ordem, efectuando uma truncatura do desenvolvimento em série expresso pela equação (4.174), de forma a ter apenas em consideração o contributo de um creto número de termos desse desenvolvimento.

É nessa ideia aliás que se baseiam os chamados métodos de truncatura, que apoiados na Teoria dos Processos de Markov e nas regras matemáticas do Cálculo Estocástico, procuram gerar equações de momentos estatísticos da resposta de ordem sucessivamente crescente, por forma a possibilitar a sua determinação.

Por essa razão, a aplicabilidade de tais técnicas de geração das equações de momentos exige que a excitação actuante seja idealizável através de um ruído branco (estacionário ou não-estacionário), ou que, caso tal não se verifique, possa ser interpretada como a resposta de um filtro a uma excitação desse tipo, traduzindo já a equação (4.173) o equilíbrio dinâmico do conjunto sistema-filtro. Por outro lado também, as não-linearidades traduzidas (v. eq. 4.1) através das funções $g_i(\dot{\underline{q}},\underline{q},t)$ devem poder ser expressas, pelo menos de forma aproximada, através de uma soma algébrica de produtos de potências inteiras das componentes de $\dot{\underline{q}}$ e $\underline{q}$.

A truncatura da hierarquia das equações de momentos levanta porém um problema fundamental, que consiste na impossibilidade aparente de fechar o sistema de equações resultante, devido ao aparecimento de momentos de ordem superior ao nível de truncatura utilizado, por efeito dos termos não-lineares, o que leva à existência de um número de incógnitas superior ao número de equações.

Esse problema não é no entanto insolúvel, podendo ser ultrapassado truncando o desenvolvimento em série de $p_n(\underline{Y})$ após um número adequado de termos, e exprimindo os momentos de ordem superior em função dos de ordem inferior, à custa das relações já conhecidas entre momentos e cumulantes ou momentos e quasi-momentos.

O nível mais baixo de truncatura corresponde naturalmente a tomar em consideração exclusivamente o primeiro termo do desenvolvimento em série (4.174), ou seja, a assumir que a resposta é caracterizada por uma distribuição normal, a qual é, como se sabe, unicamente função dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem.

Por conseguinte, a determinação desses momentos, que constituem o vector dos valores médios $\underline{m}_y(t)$ e a matriz de covariância $\underline{\mu}_y(t)$, exige a escrita das duas equações que regulam a respectiva evolução temporal.

A primeira dessas equações pode obter-se aplicando o operador $E[\ ]$ à equação (4.173), donde resulta que

$$\underline{m}_y(t) = E[\underline{a}(\underline{y},t)] + \underline{m}_x(t) \tag{4.175}$$

Uma segunda equação, regulando a evolução temporal da matriz de covariância $\underline{\mu}_y(t)$, pode obter-se directamente da Teoria Matemática das Equações Diferenciais Estocásticas [196], sendo

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = E\left[\underline{a}(\underline{y},t)\underline{y}_o(t)^T\right] + E\left[\underline{y}_o(t)\underline{a}(\underline{y},t)^T\right] + 2\pi\underline{S}_o(t) \tag{4.176}$$

em que

$$\underline{y}_o(t) = \underline{y}(t) - \underline{m}_y(t) \tag{4.177}$$

e $\underline{S}_o(t)$ representa a matriz das densidades espectrais conjuntas relativas ao processo vectorial de excitação do tipo ruído branco gaussiano evolutivo de valor médio nulo $\underline{x}_o(t) = \underline{x}(t) - \underline{m}_x(t)$.

A título exemplificativo, e no sentido de facilitar a compreensão da forma de aplicação prática do método de truncatura gaussiana, considere-se o seguinte sistema não-linear de 1-GL com uma não-linearidade cúbica em termos de rigidez, cujo equilíbrio dinâmico é traduzido pela equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + \epsilon q(t)^3 = \omega(t) \tag{4.178}$$

ou, o que é equivalente, pelas duas equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{a}(\underline{y},t)+\underline{x}(t) \tag{4.179}$$

com

$$\underline{y}(t)=\begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \quad \underline{a}(\underline{y},t)=\begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ -c\dot{q}(t)-\epsilon q(t)^3 \end{Bmatrix} \quad \underline{x}(t)=\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega(t) \end{Bmatrix} \tag{4.180}$$

sendo $\omega(t)$ um ruído branco gaussiano de valor médio nulo e densidade espectral $S_o(t)$.

Da aplicação das equações (4.175) e (4.176) a este caso concreto resulta então que

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} E[y_1] \\ E[y_2] \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} E[y_2] \\ -cE[y_2]-\epsilon E[y_1^3] \end{Bmatrix} \tag{4.181}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} E[y_1y_1] & E[y_1y_2] \\ E[y_2y_1] & E[y_2y_2] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2E[y_1y_2] & E[y_2^2]-cE[y_1y_2]-\epsilon E[y_1^4] \\ E[y_2^2]-cE[y_1y_2]-\epsilon E[y_1^4] & -2cE[y_2^2]-2\epsilon E[y_1^3y_2] \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi S_o(t) \end{bmatrix} \tag{4.182}$$

Estas relações matriciais representam pois um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, que regulam a evolução temporal dos elementos do vector dos valores médios e da matriz de covariância da resposta, as quais degeneram num simples sistema de equações algébricas no caso de a excitação apresentar natureza estacionária, em virtude do anulamento dos primeiros membros.

Supondo, por uma questão de simplicidade, que a excitação actuante é estacionária ($S_o(t)=S_o$), e tendo em consideração que, sendo o seu valor médio nulo e as não-linearidades de natureza simétrica, $E[y_1]=0$, todos os momentos estatísticos da resposta de ordem superior à segunda, intervenientes nas equações (4.181) e (4.182), nomeadamente

$$m_{30}=E[y_1^3] \quad m_{40}=E[y_1^4] \quad m_{31}=E[y_1^3y_2] \tag{4.183}$$

podem ser facilmente expressos em função dos momentos de primeira e segunda ordem, tendo em conta as relações momentos-cumulantes traduzidas pelas equações (1.18) a (1.23), bem como o facto de todos os cumulantes de ordem superior à segunda, relativos a uma distribuição de Gauss, serem nulos, obtendo-se desse modo que

$$E[y_1^3]=0 \qquad E[y_1^4]=3(E[y_1^2])^2 \qquad E[y_1^3 y_2]=3E[y_1^2]E[y_1 y_2] \tag{4.184}$$

Desta forma, as equações indicadas por (4.181) são automaticamente satisfeitas com $E[y_1]=E[y_2]=0$, ao passo que (4.182) dá origem a um sistema de três equações a três incógnitas, $E[y_1^2]$, $E[y_2^2]$ e $E[y_1 y_2]$, que uma vez resolvido permite saber que

$$E[y_1^2]=E[q^2]=\sqrt{\frac{\pi S_o}{3\epsilon c}} \tag{4.185}$$

$$E[y_2^2]=E[\dot{q}^2]=\frac{\pi S_o}{c} \tag{4.186}$$

$$E[y_1 y_2]=E[q\dot{q}]=0 \tag{4.187}$$

ficando assim completamente caracterizada a distribuição de probabilidade gaussiana que aproxima a distribuição de probabilidade da resposta do sistema não-linear.

Baseando-se quer o método de truncatura gaussiana, quer o método de linearização estocástica equivalente, na hipótese de que a distribuição probabilística da resposta segue a lei normal, torna-se interessante comparar os resultados acabados de obter com os correspondentes à resposta do sistema linear equivalente, cujo equilíbrio dinâmico é traduzido pela equação

$$\ddot{q}(t)+c_e\dot{q}(t)+k_e q(t)=\omega(t) \tag{4.188}$$

ou, em termos de variáveis de estado

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{A}_e\underline{y}(t)+\underline{x}(t) \tag{4.189}$$

com

$$\underline{A}_e=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_e & -c_e \end{bmatrix} \qquad \underline{x}(t)=\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega(t) \end{Bmatrix} \tag{4.190}$$

Com efeito, sendo as condições de Atalik-Utku expressas, em termos de uma formulação de estado, pela relação

$$a_{ij}^e=E\left[\frac{\partial a_i}{\partial y_j}\right] \tag{4.191}$$

a matriz $\underline{A}_e$, caracterizadora do sistema linear equivalente, pode

expressar-se em função das características da resposta através da equação

$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3\epsilon E[y_1^2] & -c \end{bmatrix} \tag{4.192}$$

podendo pois chegar-se directamente ao conhecimento da matriz de covariância instantânea da resposta através da resolução da equação de Liapunov

$$\underline{A}_e \underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y \underline{A}_e^T + 2\pi \underline{S}_o = \underline{0} \tag{4.193}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3\epsilon E[y_1^2] & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[y_1^2] & E[y_1 y_2] \\ E[y_1 y_2] & E[y_2^2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E[y_1^2] & E[y_1 y_2] \\ E[y_1 y_2] & E[y_2^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3\epsilon E[y_1^2] \\ 1 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\pi S_o \end{bmatrix} \tag{4.194}$$

Resolvendo esta equação em ordem a $E[y_1^2]$, $E[y_2^2]$ e $E[y_1 y_2]$, conclui-se que a matriz de covariância instantânea da resposta alcançada pelo método de linearização estocástica equivalente apresenta exactamente a mesma constituição que a obtida através do método de truncatura gaussiana (v. eq. 4.185 a 4.187), sendo por outro lado o erro relativo cometido em termos da variância $\mu_q = E[y_1^2]$, em relação à solução teórica exacta

$$\mu_q = E[y_1^2] = 0{,}6760 \sqrt{\frac{\pi S_o}{c\epsilon}} \tag{4.195}$$

obtida com base na equação de FPK [192], de 14,6%, ou seja 7,6% em termos de desvio padrão σ_q, sendo de realçar que esse erro é independente do parâmetro ϵ, de cuja grandeza depende a importância das não-linearidades do sistema.

A coincidência dos resultados encontrados com base nestas duas diferentes formulações não é todavia acidental.

De facto, a questão da comparação das técnicas de truncatura gaussiana e de linearização equivalente foi objecto de grande atenção e de alguma polémica por parte de diversos investigadores, designa-

damente por Dashevskii [77-79], Crandall [66], Wen [249], Iyengar e Dash [116], tendo todas as dúvidas sido esclarecidas num artigo muito recente de Wen-Fang Wu [258], que veio comprovar que ambas as abordagens conduzem efectivamente aos mesmos resultados.

Com efeito, é fácil verificar que assim é, se nos referirmos ao caso mais geral em que o equilíbrio dinâmico do sistema linear equivalente, correspondente à equação (4.173), é traduzido por

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e(t)\underline{y}(t) + \underline{x}(t) \tag{4.196}$$

ou, se se preferir, pela equação

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{a}_e(t) + \underline{A}_e(t)\underline{y}_o(t) + \underline{x}(t) \tag{4.197}$$

devendo o vector $\underline{a}_e(t)$ e a matriz $\underline{A}_e(t)$ satisfazer as equações (v. eq. 4.160 e 4.161)

$$\underline{a}_e(t) = E[\underline{a}(\underline{y},t)] \tag{4.198}$$

$$\underline{A}_e(t) = E\left[\underline{a}(\underline{y},t)\underline{y}_o(t)^T\right]\underline{\mu}_y(t)^{-1} \tag{4.199}$$

De facto, a evolução temporal do valor médio da resposta do sistema linear é obtida aplicando o operador $E[\ ]$ à equação (4.197), resultando que

$$\dot{\underline{m}}_y(t) = \underline{a}_e(t) + \underline{m}_x(t) \tag{4.200}$$

ao passo que a correspondente matriz de covariância evolutiva obedece à equação (v. eq. 4.154)

$$\dot{\underline{\mu}}(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \tag{4.201}$$

pelo que, atendendo às equações (4.198) e (4.199), se pode escrever que

$$\dot{\underline{m}}_y(t) = E[\underline{a}(\underline{y},t)] + \underline{m}_x(t) \tag{4.202}$$

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = E\left[\underline{a}(\underline{y},t)\underline{y}_o(t)^T\right] + E\left[\underline{y}_o(t)\underline{a}(\underline{y},t)^T\right] + 2\pi\underline{S}_o(t) \tag{4.203}$$

Por conseguinte, pode constatar-se que estas equações, nas quais se baseia o método de linearização estocástica equivalente, são intei-

ramente coincidentes com as equações (4.175) e (4.176), em que se apoia o método de truncatura gaussiana anteriormente exposto, pelo que, sendo os valores médios indicados em todas essas equações calculados admitindo que a distribuição de probabilidade da resposta obedece à lei normal, os resultados obtidos por ambos os métodos são naturalmente coincidentes.

A aproximação da verdadeira resposta não-gaussiana do sistema não-linear pode, no entanto, ser melhorada introduzindo um nível mais elevado de truncatura do desenvolvimento em série da função densidade de probabilidade pluridimensional $p_n(\underline{Y})$, expresso pela equação (4.174), sendo o rigor daquela aproximação tanto maior, quanto maior for o número de termos considerados.

Deste modo, a utilização de um método de truncatura não-gaussiana leva a que a caracterização da densidade de probabilidade $p_n(\underline{Y})$ passe a ser não só dependente do conhecimento dos momentos estatísticos da resposta de primeira e segunda ordem, mas também de momentos de ordem superior. Por esta razão, as equações (4.202) e (4.203) são manifestamente insuficientes para a determinação de todos os momentos estatísticos envolvidos, tornando-se indispensável dispor de equações de momentos de ordem mais elevada.

A obtenção dessas equações de momentos pode ser conseguida com recurso à Teoria dos Processos de Markov e às regras do Cálculo Estocástico, podendo ser utilizadas para o efeito duas vias distintas. A primeira dessas abordagens, introduzida por Caughey e Dienes [49], consiste em obter aquelas equações através da relação

$$\dot{m}_{r_1 \ldots r_n} = \frac{d}{dt} E[\Phi(\underline{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\underline{Y}) \frac{\partial p_c(\underline{Y} \mid \underline{Y}_o)}{\partial t} dY_1 dY_2 \ldots dY_n \quad (4.204)$$

em que

$$\Phi(\underline{Y}) = Y_1^{r_1} Y_2^{r_2} \ldots Y_n^{r_n} \quad (4.205)$$

sendo a derivada parcial $\partial p_c(\underline{Y} \mid \underline{Y}_o)/\partial t$ definida pela equação de FPK, e procedendo-se a uma integração por partes no domínio $-\infty < \underline{Y} < +\infty$ [113].

Uma outra via alternativa, utilizada por Cumming [72, 73], apoia-se na regra diferencial de Itô do Cálculo Estocástico [112], a partir da qual se pode concluir que

$$\frac{d}{dt}E[\Phi(\underline{Y})]=E[\underline{\nabla}\Phi^{T}\underline{a}(\underline{Y})]+\pi tr\,E[\underline{S}_{o}(t)\underline{J}] \tag{4.206}$$

sendo

$$\underline{\nabla}\Phi^{T}=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial Y_{1}},\frac{\partial\Phi}{\partial Y_{2}},\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial Y_{n}}\right] \tag{4.207}$$

$$\underline{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^{2}\Phi}{\partial Y_{1}\partial Y_{1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{2}\Phi}{\partial Y_{1}\partial Y_{n}}\\ \cdot & & \cdot\\ \dfrac{\partial^{2}\Phi}{\partial Y_{n}\partial Y_{1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{2}\Phi}{\partial Y_{n}\partial Y_{n}}\end{bmatrix} \tag{4.208}$$

e indicando tr o traço de uma matriz. Substituindo (4.205) em (4.206), pode obter-se [195] uma expressão geral das equações dos momentos estatísticos da resposta de ordem $r=r_{1}+\ldots+r_{n}$.

Desta forma, todas as equações de momentos correspondentes ao nível de truncatura pretendido podem ser escritas, surgindo apenas o problema de fecho dessas equações, em virtude do facto de as não-linearidades levaram ao aparecimento de momentos de ordem superior ao desejado.

À semelhança do sucedido no método de truncatura gaussiana, interessa pois exprimir esses momentos em função dos de ordem inferior, por forma que o número de equações iguale o número de incógnitas, e o problema se torne resolúvel.

Para isso, basta ter em consideração que desprezar os termos do desenvolvimento em série (4.174) de ordem superior a r, equivale a impor o anulamento dos quasi-momentos correspondentes, facto que permite, conjuntamente com as relações momentos-cumulantes (v. eq. 1.14 a 1.23) e quasi-momentos-cumulantes (eq. 1.162) exprimir todos os momentos de ordem superior a r em função dos de ordem inferior. Esta técnica é, aliás, em muitos casos equivalente ao anulamento dos

correspondentes cumulantes, dada a igualdade verificada entre cumulantes e quasi-momentos até à 5ª ordem, ou mesmo até à 7ª ordem, caso o valor médio da resposta seja nulo.

O método de truncatura não-gaussiana, cuja formulação foi desenvolvida e consolidada por diversos investigadores, designadamente Dashevskii [77-79], Assaf e Zirkle [10], Crandall [67, 68], Bover [33] e Wu e Lin [257], apresenta pois a grande virtude de possibilitar a caracterização do efeito das não-linearidades sobre a resposta não-gaussiana do sistema, facto que, como foi já referido, se reveste da maior importância do ponto de vista do tratamento dos problemas de primeira passagem.

Infelizmente porém, a aplicação prática do método reveste-se de uma complexidade que aumenta de forma drástica com o nível de truncatura, o que leva a que a sua aplicabilidade, à semelhança do sucedido com o método de não-linearização estocástica equivalente, se restrinja praticamente aos sistemas de um grau de liberdade.

4.8 - TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO ANALÓGICA OU DIGITAL

As técnicas de simulação consistem em interpretar o sistema de equações diferenciais estocásticas não-lineares, tradutor do equilíbrio dinâmico do sistema não-linear sujeito a uma excitação aleatória actuante, como um conjunto infinito de sistemas de equações diferenciais não-lineares determinísticos. Desse modo, gerando artificialmente um número teoricamente infinito de histórias temporais da excitação, compatíveis com uma determinada estrutura probabilística pré-definida, e determinando as correspondentes respostas do sistema não-linear com recurso a métodos de integração no tempo, pode obter-se um conjunto de realizações do processo de resposta, que, uma vez tratadas estatisticamente, possibilitam a sua caracterização probabilística.

Embora inicialmente as técnicas de simulação se baseassem na utilização de geradores de sinais aleatórios para simulação da excitação, e de computadores analógicos para determinação dos sinais

de resposta [245], o aparecimento dos computadores digitais levou ao rápido desenvolvimento de técnicas de simulação numérica, também conhecidas por simulações de Monte-Carlo, baseadas em algoritmos de geração de números pseudo-aleatórios com uma distribuição de probabilidade pré-definida.

O principal inconveniente dos métodos de simulação reside no enorme esforço computacional exigido para que possa reduzir-se a níveis aceitáveis a incerteza estatística dos resultados obtidos, a qual segundo Crandall e Zhu [71] diminui apenas na razão inversa da raiz quadrada do número de realizações.

Este facto leva aliás a que, em geral, as características estatísticas da resposta tenham de ser estimadas com base em valores médios espectáveis tendo em conta várias dezenas ou mesmo centenas de realizações. Apenas no caso de processos de resposta estacionários e ergódicos, a necessidade de geração de um tão largo número de histórias temporais deixa de ter lugar, podendo a estatística da resposta passar a ser integralmente caracterizada a partir da estatística temporal de uma única realização de duração adequada.

Uma forma de gerar realizações de um processo estocástico consiste em recorrer a somatórios de funções sinusoidais, podendo ser seguidas várias vias possíveis para o efeito.

Uma dessas vias consiste em expressar as diversas realizações de um processo estocástico estacionário $x(t)$ através de um somatório do tipo

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(w_i t - \theta_i) \tag{4.209}$$

em que os ângulos de fase θ_i constituem variáveis aleatórias independentes, distribuídas uniformemente ao longo do intervalo $[0, 2\pi]$, isto é

$$p(\theta_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & , \ 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \\ 0 & , \ \theta_i < 0 \ \vee \ \theta_i > 2\pi \end{cases} \tag{4.210}$$

podendo verificar-se que o processo $x(t)$ assim definido satisfaz as condições necessárias de estacionaridade e ergodicidade [240], sendo

$$E[x(t)]=<x_j(t)>=0 \tag{4.211}$$

$$E[x(t)^2]=<x_j(t)^2>=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}A_i^2 \tag{4.212}$$

O processo estocástico $x(t)$ apresenta pois valor médio nulo, sendo a contribuição da frequência w_i para a respectiva variância igual a $A_i^2/2$.

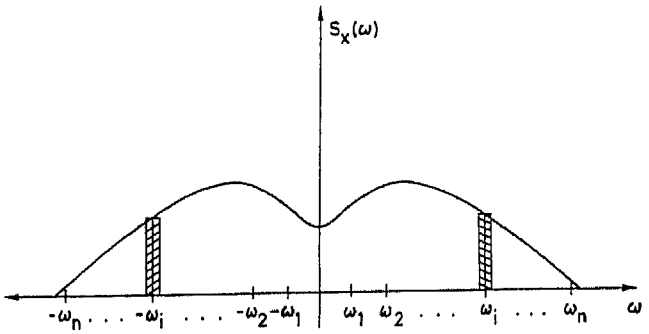


Fig. 4.1 - Função densidade espectral de potência do processo $x(t)$.

Por conseguinte, para que as realizações geradas a partir da equação (4.209) sejam representativas de um processo estocástico caracterizado por uma função densidade espectral de potência contínua $S_x(w)$, dever-se á impor a condição

$$\frac{1}{2}A_i^2=2S_x(w_i)\Delta w \tag{4.213}$$

em que Δw representa o intervalo entre duas frequências consecutivas, supostas igualmente espaçadas. Deste modo, as amplitudes dos diversos harmónicos devem assumir o valor

$$A_i=2\sqrt{S_x(w_i)\Delta w} \tag{4.214}$$

podendo assim as diversas realizações do processo ser obtidas através do somatório

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{S_x(w_i)\Delta w}\cos(w_i t - \theta_i) \tag{4.215}$$

ou, o que é equivalente, recorrendo à função densidade espectral de potência $G_x(f)$, definida em Hz e apenas no intervalo $[0,+\infty[$, através da relação

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2G_x(f_i)\Delta f}\cos(2\pi f_i t - \theta_i) \tag{4.216}$$

Existem ainda outras vias de obter realizações de um processo estocástico estacionário, designadamente utilizando a forma de representação utilizada por Rice [188]

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos w_i t + b_i \operatorname{sen} w_i t) \tag{4.217}$$

em que os coeficientes a_i e b_i são variáveis aleatórias independentes, normalmente distribuídas em torno de zero com um desvio padrão igual a $\sqrt{S_x(w_i)\Delta w}$, bem como uma outra utilizada por Shinozuka [200]

$$x_j(t) = \sigma_x\left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \sum_{i=1}^{n} \cos(w_i t + \theta_i) \tag{4.218}$$

em que σ_x é uma constante igual ao desvio padrão do processo $x(t)$, e os w_i constituem variáveis aleatórias independentes, distribuídas de acordo com a função densidade de probabilidade

$$p(w) = \frac{S_x(w)}{\sigma_x^2} \tag{4.219}$$

Este tipo de representações pode ainda ser generalizado à simulação de campos estocásticos multidimensionais e pluvariados [199], podendo inclusivamente recorrer-se, para o efeito, a algoritmos baseados no uso de transformadas rápidas de Fourier (FFT) que possibilitam o desenvolvimento de rotinas de cálculo de grande eficiência [239].

4.9 - RESUMO E CONCLUSÕES

Os pontos anteriores do presente capítulo tiveram como objectivo efectuar uma descrição das principais abordagens de análise da resposta de sistemas não-lineares a excitações aleatórias, dando o devido realce às suas principais virtualidades e limitações, por forma a poderem retirar-se algumas conclusões de interesse em termos das suas condições de aplicabilidade, de eficiência e precisão, julgando-se importante, desse ponto de vista, sublinhar os seguintes aspectos fundamentais:

a) A única abordagem conducente a soluções exactas do ponto de vista matemático é a que se baseia numa aproximação markoviana da resposta, sendo a correspondente função densidade de probabilidade de transição regulada por uma equação de FPK;

b) Infelizmente, porém, essa via de análise, para além de apenas ser válida caso a excitação seja idealizável através de um ruído branco gaussiano, só permite a resolução do problema num número muito limitado de situações, particularmente no caso de sistemas de múltiplos graus de liberdade e de excitações não-estacionárias, exigindo que quer as não-linearidades, quer as matrizes das funções de inter-correlação da excitação actuante, obedeçam a relações geralmente não verificadas na prática, para que a equação de FPK tenha uma solução exacta conhecida;

c) Os diversos métodos aproximados que se apoiam directamente na equação de FPK, designadamente as técnicas iterativas, as técnicas baseadas em desenvolvimentos em série, as técnicas de caminhos aleatórios, as técnicas de média estocástica, ou mesmo as técnicas de truncatura, continuam a ter um interesse prático muito limitado por se referirem em geral a sistemas não-lineares de um único grau de liberdade;

d) As técnicas de perturbação, embora permitindo analisar sistemas de múltiplos graus de liberdade, enfermam ainda de graves restrições, não só por conduzirem a boas aproximações da resposta unicamente no caso de não-linearidades pouco

acentuadas, mas também porque a consideração de termos do desenvolvimento em série em que se apoiam, correspondentes a potências de ϵ superiores à primeira, leva a cálculos muito pesados e trabalhosos, não existindo também garantia de convergência da série;

e) O método de linearização estocástica equivalente constitui, sem sombra de dúvida, a formulação aproximada mais potente e versátil, que possibilita obter estimativas dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem da resposta de sistemas não-lineares de N-GL, sujeitos a excitações quer estacionárias, quer não-estacionárias, sendo os erros verificados em relação aos valores exactos, ou aos encontrados por técnicas de simulação, em geral perfeitamente toleráveis do ponto de vista da engenharia de estruturas, mesmo em muitos casos de não-linearidades relativamente acentuadas;

f) A maior limitação do método de linearização equivalente advém da hipótese da natureza gaussiana do processo de resposta, inevitável dado o suposto carácter gaussiano da excitação actuante e o comportamento linear do sistema equivalente, facto que leva a que o método nem sempre se revele capaz de caracterizar com rigor as caudas da distribuição de probabilidade da resposta, originando dessa forma erros por vezes algo significativos na avaliação de probabilidades de não-excedência de uma dada barreira, ou de valores médios de picos de resposta;

g) Embora uma boa aproximação da distribuição não-gaussiana do processo de resposta possa teoricamente ser conseguida, quer utilizando um sistema equivalente não-linear, quer recorrendo a técnicas de truncatura não-gaussiana, essas formulações não são susceptíveis de serem utilizadas com vista ao desenvolvimento de rotinas de cálculo gerais e eficientes, dado que no primeiro caso são raras as situações em que é possível dispor de um sistema não-linear equivalente cuja equação de FPK tenha uma solução exacta conhecida, ao passo que no segundo

a complexidade do método aumenta drasticamente com o nível de truncatura, podendo considerar-se impraticável a sua aplicação a sistemas não-lineares de N-GL;

h) O recurso a técnicas de simulação digital, embora se revista da vantagem de possibilitar uma correcta caracterização da distribuição não-gaussiana da resposta, é, no entanto, altamente consumidora de tempo de cálculo, em virtude de a redução das incertezas estatísticas dos resultados a níveis aceitáveis exigir a geração e análise de um número bastante elevado de realizações do processo de resposta.

O balanço acabado de efectuar serve pois para realçar o enorme interesse e importância do método de linearização estocástica equivalente como método aproximado que encerra diversas virtualidades apreciáveis, designadamente em termos de simplicidade, eficiência, economia de tempo de cálculo e razoável rigor.

Apesar das suas limitações, a utilização do método é francamente vantajosa, pelo menos numa primeira fase do dimensionamento de sistemas não-lineares, na qual se procede normalmente à análise comparativa de diversas soluções tecnicamente possíveis, reservando-se o emprego de técnicas de simulação digital para uma fase final de dimensionamento, em que o tratamento mais rigoroso dos problemas de primeira passagem pode assumir maior importância.

Cumpre realçar, no entanto, que os erros cometidos pela aplicação do método de linearização estocástica equivalente à análise e dimensionamento de estruturas correntes no âmbito da Engenharia Sísmica acabam por assumir normalmente uma importância bastante reduzida face ao elevado grau de incerteza associado à própria forma de caracterização da acção actuante, pelo que a sua utilização se revela neste contexto da maior utilidade.

4.10 - DESENVOLVIMENTO DE "SOFTWARE" NO DOMÍNIO DA ENGENHARIA SÍSMICA

Dado o manifesto interesse do método de linearização estocástica equivalente como metodologia de análise e dimensionamento de estruturas em regime não-linear sujeitas a excitações aleatórias, e no sentido de tornar mais clara a sua forma de utilização corrente, particulariza-se nesta secção a aplicação da formulação geral anteriormente descrita ao caso de estruturas planas de tipo "shear-building" (pórticos com vigas de rigidez infinita) submetidas a acções sísmicas idealizadas através de modelos estacionários.

Para o efeito, considera-se também que o comportamento não-linear dos diversos troços de pilar entre andares assume natureza simétrica, sendo o contributo de cada troço para cada força de restituição de piso regido por um diagrama bilinear elástico.

4.10.1 - Aplicação da linearização estocástica equivalente à análise da resposta sísmica estacionária de um "shear-building" com comportamento bilinear elástico

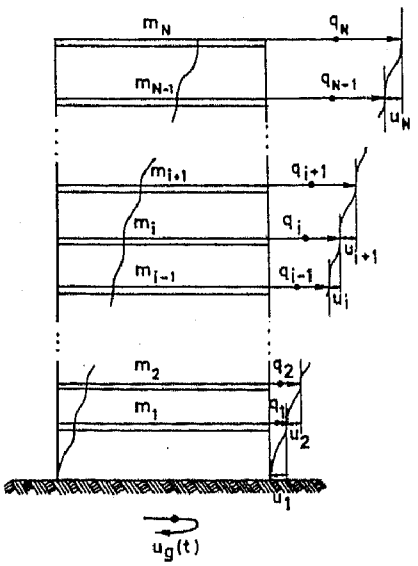


Fig. 4.2 - "Shear-building".

Considere-se então uma estrutura plana de tipo "shear-building", como aquela a que se refere a figura 4.2, sujeita a uma aceleração de base horizontal idealizada através de um processo estocástico estacionário gaussiano de valor médio nulo $\ddot{u}_g(t)$, caracterizado por uma função densidade espectral de potência $S_{\ddot{u}_g}(w)$.

Considerando que os N graus de liberdade do sistema se encontram associados aos N deslocamentos $q_i (i = i,\ldots,N)$ de cada piso em relação à fundação, e que o amortecimento estrutural é muito baixo, podendo supor-se constante, independentemente do nível da excitação actuante, o equilíbrio da estrutura pode ser traduzido pela equação

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{g}(\underline{q},t) = -\underline{M}\underline{a}\ddot{u}_g(t) \qquad (4.220)$$

em que $\underline{g}(\underline{q},t)$ representa o processo estocástico vectorial tradutor das forças de restituição relativas a cada andar, função dos deslocamentos q_i em relação ao movimento da base.

Nesta equação, a matriz de massa $\underline{M}$ pode supor-se diagonal e constituída pelas N massas m_i correspondentes aos diversos pisos, podendo por seu lado a matriz de amortecimento $\underline{C}$ ser assumida como uma combinação linear do tipo

$$\underline{C} = \alpha_c \underline{M} + \beta_c \underline{K}_L \qquad (4.221)$$

sendo os coeficientes α_c e β_c judiciosamente escolhidos por forma que os coeficientes de amortecimento modal correspondentes aos dois primeiros modos de vibração, calculados com base na matriz de rigidez linear inicial $\underline{K}_L$ assumam um dado valor.

Nestas condições, o comportamento do sistema não-linear pode ser aproximado através da equação

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}_e \underline{q}(t) = -\underline{M}\underline{a}\ddot{u}_g(t) \qquad (4.222)$$

em que $\underline{K}_e$ representa a matriz de rigidez de um sistema linear equivalente, cujos elementos, de acordo com a condição de Atalik-Utku (v. eq. 4.116) devem satisfazer a igualdade

$$k_{ij}^e = E\left[\frac{\partial g_i(\underline{q})}{\partial q_j}\right] \qquad (4.223)$$

ou, de outra forma

$$k_{ij}^e = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial g_i(\underline{q})}{\partial q_j} p_N(\underline{q})\, dq_1 \ldots dq_N \qquad (4.224)$$

em que $p_N(\underline{q})$ representa a função densidade de probabilidade de Gauss de dimensão N associada às variáveis aleatórias $q_i(t)$ $(i=1,\ldots,N)$.

Sendo a relação existente entre os deslocamentos q_i e os deslocamentos relativos u_i, entre pisos consecutivos, traduzida pelas equações

$$u_i = q_i - q_{i-1} \qquad q_i = \sum_{j=1}^{i} u_j \tag{4.225}$$

e tendo presente a relação verificada entre as funções densidade de probabilidade multidimensionais $p_N(\underline{q})$ e $p_N(\underline{u})$

$$p_N(\underline{u}) = |J| p_N(\underline{q}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial q_i}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial q_N}{\partial u_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial u_i} & \cdots & \frac{\partial q_i}{\partial u_i} & \cdots & \frac{\partial q_N}{\partial u_i} \\ \frac{\partial q_1}{\partial u_N} & \cdots & \frac{\partial q_i}{\partial u_N} & \cdots & \frac{\partial q_N}{\partial u_N} \end{vmatrix} p_N(\underline{q}) \tag{4.226}$$

de imediato se conclui que

$$p_N(\underline{u}) = p_N(\underline{q}) \tag{4.227}$$

porquanto $|J| = 1$.

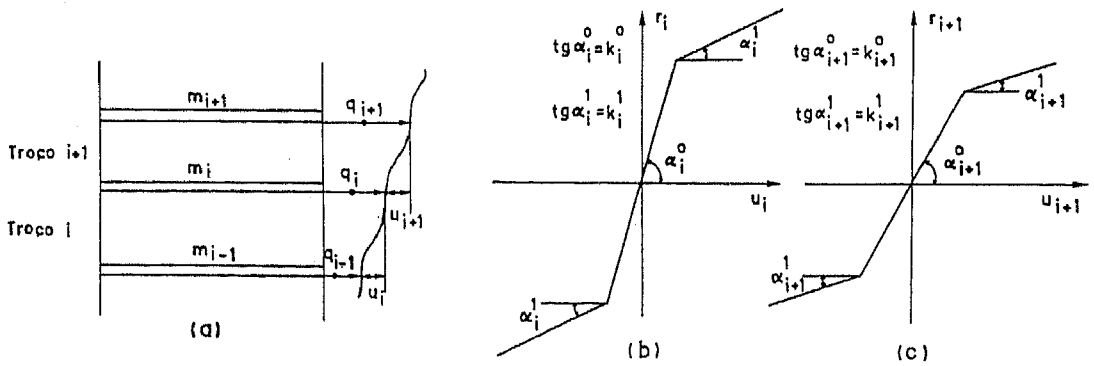


Fig. 4.3 - Contributo dos troços i e $i+1$ para a força de restituição elástica $g_i(\underline{q})$.

Por outro lado, sendo a rigidez das vigas teoricamente infinita, a força de restituição elástica correspondente ao piso de ordem i é exclusivamente função dos três deslocamentos q_{i-1}, q_i e q_{i+1} ou, o que é equivalente, dos dois deslocamentos relativos u_i e u_{i+1}, podendo escrever-se que

$$g_i(q_{i-1}, q_i, q_{i+1}) = r_i(u_i) - r_{i+1}(u_{i+1}) \tag{4.228}$$

constituindo $r_i(u_i)$ e $-r_{i+1}(u_{i+1})$ as contribuições dos troços de pilar de ordem i e $i+1$, respectivamente, para aquela força de restituição.

Nestas condições, as derivadas parciais $\partial g_i(\underline{q})/\partial q_j$ podem exprimir-se através da equação

$$\frac{\partial g_i(\underline{q})}{\partial q_j} = \frac{\partial r_i(u_i)}{\partial q_j} - \frac{\partial r_{i+1}(u_{i+1})}{\partial q_j} = \frac{\partial r_i(u_i)}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial q_j} - \frac{\partial r_{i+1}(u_{i+1})}{\partial u_{i+1}}\frac{\partial u_{i+1}}{\partial q_j} \tag{4.229}$$

tornando-se também evidente, através de (4.225), que estas derivadas parciais são nulas sempre que $|i-j| \geq 2$, podendo verificar-se nas restantes situações os seguintes três casos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial q_j} = -1 \quad \wedge \quad \frac{\partial u_{i+1}}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = i-1 \\
&\frac{\partial u_i}{\partial q_j} = 1 \quad \wedge \quad \frac{\partial u_{i+1}}{\partial q_j} = -1 \quad , \quad j = i \\
&\frac{\partial u_i}{\partial q_j} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial u_{i+1}}{\partial q_j} = 1 \quad , \quad j = i+1
\end{aligned} \tag{4.230}$$

Por conseguinte, conjugando (4.230), (4.229), (4.224) e (4.227), pode concluir-se que os elementos não nulos da matriz de rigidez do sistema linear equivalente são dados por

$$\begin{aligned}
j = i-1 \;\rightarrow\; k_{ij}^e &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_i(q_{i-1}, q_i, q_{i+1})}{\partial q_j} p_N(\underline{q}) dq_1 \ldots dq_N \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial r_i(u_i)}{\partial u_i} p_N(\underline{u}) du_1 \ldots du_N \\
&= -E\left[\frac{\partial r_i}{\partial u_i}\right]
\end{aligned} \tag{4.231}$$

$$j=i \quad \rightarrow \quad k_{ij}^e = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_i(q_{i-1}, q_i, q_{i+1})}{\partial q_j} p_N(\underline{q}) dq_1 \ldots dq_N$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial r_i(u_i)}{\partial u_i} + \frac{\partial r_{i+1}(u_{i+1})}{\partial u_{i+1}} \right] p_N(\underline{u}) du_1 \ldots du_N$$

$$= E\left[\frac{\partial r_i}{\partial u_i} \right] + E\left[\frac{\partial r_{i+1}}{\partial u_{i+1}} \right] \tag{4.232}$$

$$j=i+1 \quad \rightarrow \quad k_{ij}^e = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_i(q_{i-1}, q_i, q_{i+1})}{\partial q_j} p_N(\underline{q}) dq_1 \ldots dq_N$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} - \frac{\partial r_{i+1}(u_{i+1})}{\partial u_{i+1}} p_N(\underline{u}) du_1 \ldots du_N$$

$$= -E\left[\frac{\partial r_{i+1}}{\partial u_{i+1}} \right] \tag{4.233}$$

Desta forma, a matriz de rigidez do sistema linear equivalente é uma matriz simétrica com semi-banda de largura 2, apresentando esquematicamente a seguinte composição

$$\underline{K}_e = \begin{bmatrix} k_1^e + k_2^e & -k_2^e & & & & \\ -k_2^e & \ddots & & & & \\ & & k_i^e + k_{i+1}^e & -k_{i+1}^e & & \\ & & -k_{i+1}^e & \ddots & & \\ & & & & k_{N-1}^e + k_N^e & -k_N^e \\ & & & & -k_N^e & k_N^e \end{bmatrix} \tag{4.234}$$

em que

$$k_i^e = E\left[\frac{\partial r_i}{\partial u_i} \right] \tag{4.235}$$

Cada coeficiente k_i^e traduz pois a intervenção que o troço de pilares de ordem i tem na formação da matriz de rigidez equivalente $\underline{K}_e$, podendo a sua obtenção ter lugar desde que seja conhecida a função densidade de probabilidade da resposta em termos do deslocamento

relativo u_i, ou, mais simplesmente, desde que seja conhecida a correspondente variância $\sigma^2_{u_i}$, dado ter-se admitido que o processo de excitação $\ddot{u}_g(t)$ é gaussiano e tem valor médio nulo.

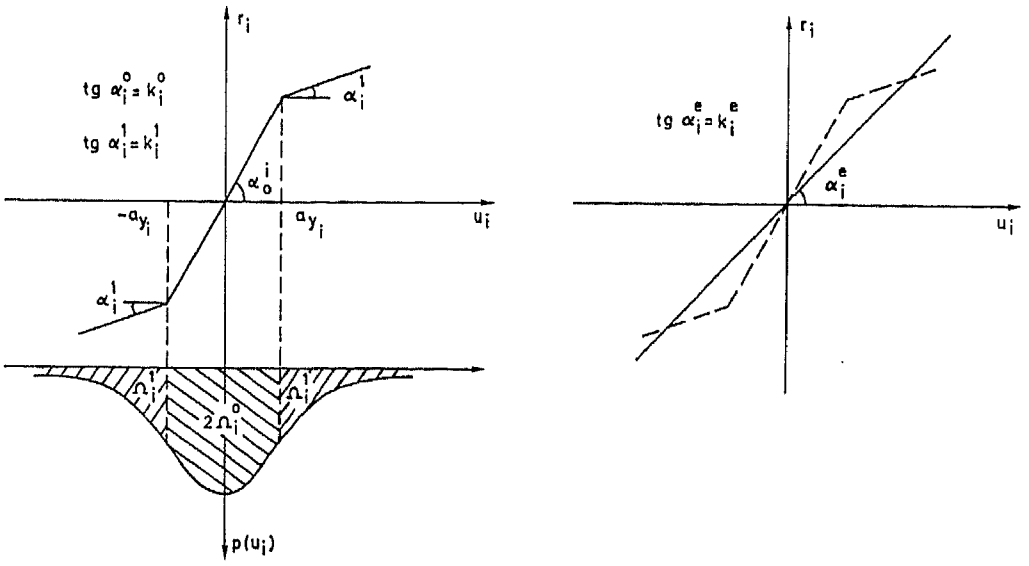


Fig. 4.4 - Cálculo dos coeficientes k_i^e para a formação da matriz $\underline{K}_e$.

Sendo a função densidade de probabilidade de Gauss $p(u_i)$ definida através de (1.150), cada k_i^e pode pois ser quantificado através da relação

$$k_i^e = E\left[\frac{\partial r_i}{\partial u_i}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial r_i}{\partial u_i} p(u_i)\,du_i$$

$$= 2\int_0^{a_{y_i}} k_i^o\, p(u_i)\,du_i + 2\int_{a_{y_i}}^{\infty} k_i^1\, p(u_i)\,du_i \qquad (4.236)$$

em que a_{y_i} representa o deslocamento de cedência correspondente ao troço em causa. Designando por Ω_i^o e Ω_i^1 as áreas subentendidas pela função $p(u_i)$ ao longo dos intervalos $[0, a_{y_i}]$ e $[a_{y_i}, +\infty[$, como se indica na figura 4.4, cada k_i^e pode exprimir-se de forma mais condensada através da equação

$$k_i^e = 2\Omega_i^o k_i^o + 2\Omega_i^1 k_i^1 \qquad (4.237)$$

em que

$$\Omega_i^o = \int_0^{a_{y_i}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{u_i}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{\sigma_{u_i}}\right)^2\right] du_i = \int_0^{a_{y_i}/\sigma_{u_i}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (4.238)$$

$$\Omega_i^1 = \int_{a_{y_i}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{u_i}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{\sigma_{u_i}}\right)^2\right] du_i = \frac{1}{2} - \Omega_i^o \quad (4.239)$$

Nestas circunstâncias, a análise estocástica da resposta sísmica da estrutura pode processar-se através do método de linearização equivalente, seguindo o procedimento iterativo habitual, começando por arbitrar valores iniciais para os elementos da matriz $\underline{K}_e$. Uma forma de iniciar esse processo consiste em assimilar $\underline{K}_e$ à matriz de rigidez linear inicial do sistema, tornando-se possível de seguida, utilizando uma das formulações já referidas para análise de sistemas lineares, quantificar todas as variâncias $\sigma_{u_i}^2$ caracterizadoras da distribuição de probabilidade gaussiana da resposta. A partir do seu conhecimento, pode imediatamente compor-se a matriz de rigidez equivalente $\underline{K}_e$ a utilizar na iteração seguinte, tendo por base as equações (4.234) e (4.237) a (4.239), prosseguindo o ciclo iterativo até que seja alcançada a necessária convergência.

4.10.2 - Descrição do programa de cálculo automático PROG7

Tendo por base a formulação teórica descrita no ponto anterior, foi elaborado o programa de cálculo automático PROG7, que possibilita efectuar a análise da resposta estacionária de estruturas planas de tipo "shear-building" a acções sísmicas horizontais caracterizadas por espectros de potência do tipo Kanai-Tajimi ou poli-lineares, como é o caso dos espectros regulamentares.

Em relação à arquitectura desse programa, esquematicamente traduzida pelo fluxograma simplificado indicado na figura 4.5, há pois a destacar os seguintes passos:

a) Leitura de dados gerais envolvendo

- caracterização topológica da estrutura;

- definição das características geométricas e mecânicas de todos os troços de pilar entre pisos, designadamente dos respectivos deslocamentos de cedência α_{y_i} e das rigidezes iniciais k_i^o e pós-cedência k_i^1;
- leitura do valor das massas associadas a cada andar e dos coeficientes de amortecimento correspondentes aos dois primeiros modos de vibração em regime linear;
- caracterização da excitação actuante, podendo recorrer-se, em alternativa, à definição dos parâmetros S_o, w_f e ξ_f de um espectro de Kanai-Tajimi, ou aos espectros de potência definidos pelo RSA;

b) Formação da matriz de massa diagonal $\underline{M}$ e da matriz de rigidez linear inicial $\underline{K}_L$;

c) Determinação das frequências naturais w_i e dos modos de vibração $\underline{\phi}_i$ associados ao funcionamento linear inicial do sistema e, a partir deles e dos coeficientes de amortecimento pré-definidos, dos coeficientes α_c e β_c a que se refere a equação (4.221), chegando dessa maneira ao conhecimento da matriz de amortecimento $\underline{C}$, suposta invariante ao longo da análise da resposta;

d) Caracterização da resposta sísmica estacionária do sistema linear equivalente, começando por supor $\underline{K}_e = \underline{K}_L$; para o efeito, é utilizada a formulação modal descrita em 2.3.3, a qual possibilita a obtenção da matriz de covariância $\underline{\mu}_q$, e posteriormente da matriz de covariância $\underline{\mu}_u$ associada aos deslocamentos relativos entre pisos já que

$$\underline{\mu}_u = \underline{T}\,\underline{\mu}_q\,\underline{T}^T \qquad (4.240)$$

sendo $\underline{T}$ a matriz que estabelece a relação matricial $\underline{u} = \underline{T}\,\underline{q}$;

e) Quantificação da matriz de rigidez corrigida do sistema linear equivalente, $\underline{K}_e$, a partir do conhecimento das variâncias $\sigma^2_{u_i}$ decorrentes da iteração anterior, e tendo por base as equações (4.234) e (4.237) a (4.239);

f) Determinação das novas matrizes de covariância da resposta $\underline{\mu}_q$ e $\underline{\mu}_u$ resultantes da alteração da matriz de rigidez equivalente $\underline{K}_e$, tomando novamente por base a formulação modal referida em 2.3.3;

g) Análise da convergência da resposta, mediante a comparação dos desvios padrões σ_{u_i}, obtidos em cada iteração, com os calculados na iteração imediatamente anterior; para o efeito, e designando por r e $r-1$ os números de ordem de duas iterações consecutivas, o erro relativo definido por

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\sigma_{u_i}^{(r)} - \sigma_{u_i}^{(r-1)}}{\sigma_{u_i}^{(r)}} \right| \tag{4.241}$$

é comparado com uma tolerância pré-definida ϵ_{max};

h) Repetição dos passos descritos nas alíneas e) f) e g) caso não tenha sido atingida a desejada convergência, situação em que $\epsilon > \epsilon_{max}$;

i) Determinação dos momentos espectrais da resposta de ordem 0, 1, e 2 em termos de todas as variáveis de controlo analisadas (deslocamentos q_i e u_i, esforços transversos e momentos flectores nas extremidades dos pilares) e estimativa dos correspondentes valores médios dos picos de resposta, seguindo para o efeito o procedimento já descrito em 2.5.2 para sistemas lineares.

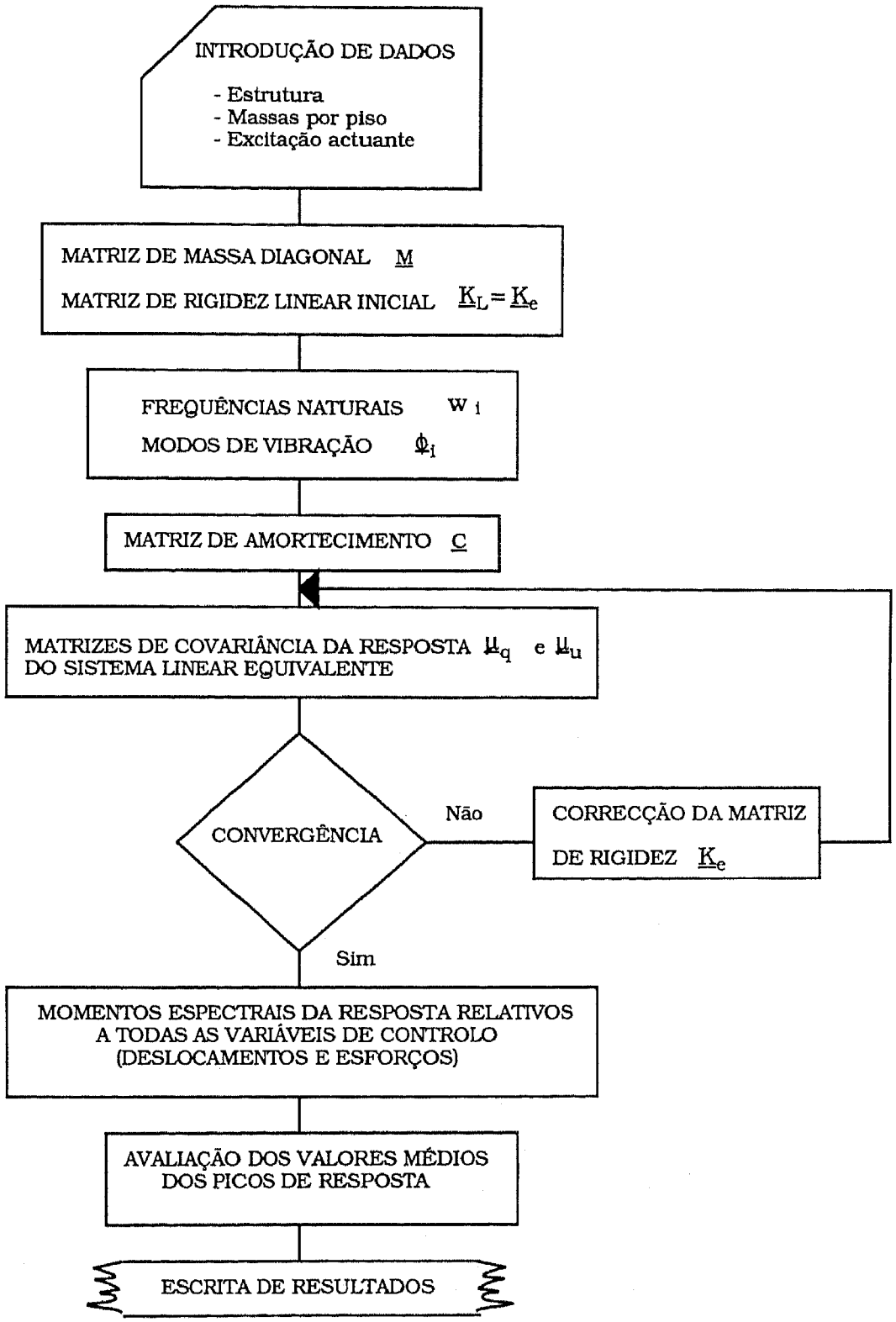


Fig. 4.5 - Fluxograma simplificado do programa PROG7.

4.10.3 - Exemplos de aplicação

No sentido de ilustrar a aplicação do programa de cálculo PROG7 à análise estocástica da resposta sísmica de estruturas do tipo "shear-building", apresentam-se seguidamente dois exemplos julgados bastante sugestivos, e que possibilitam, em particular, constatar o apreciável rigor dos resultados obtidos com base no método de linearização equivalente.

O primeiro exemplo diz respeito a uma estrutura de um único piso, com pilares dotados de comportamento bilinear elástico, apresentando as seguintes características:

- Rigidez inicial dos pilares (k°) ..... 40000 KN/m
- Deslocamento de cedência (a_y) ..... 0,00375 m
- Massa do piso (m) ..... 200 t
- Coeficiente de amortecimento (ξ) 0,05

tendo-se suposto que a relação α entre a rigidez pós-cedência k^{1} e a rigidez inicial k° poderia assumir diversos valores entre 1 (regime elástico linear) e 0 (regime elasto-plástico).

A aceleração sísmica horizontal foi idealizada através de um modelo estacionário correspondente à definição regulamentar da acção sísmica tipo 1, tendo-se considerado a estrutura fundada em terreno tipo II e localizada na zona A do território nacional.

A análise da resposta sísmica estacionária foi realizada quer através da utilização do programa PROG7, quer mediante o recurso a técnicas de simulação numérica, por forma a ser possível avaliar a ordem de grandeza dos erros cometidos em resultado da aplicação do método de linearização equivalente.

Para este efeito, foi gerado, com base na equação (4.216), um acelerograma artificial, correspondente a uma amostra de duração apreciável ($T = 81,92s$) de um processo estocástico estacionário de valor médio nulo, caracterizado pelo espectro de potência $G_{\ddot{u}_g}(f)$ indicado pelo RSA para o tipo de acção sísmica mencionado. A análise

da evolução temporal da resposta foi efectuada com recurso a um programa de integração no tempo baseado no método de Newmark [35] e tomando um passo de integração de $0,01s$, tendo-se posteriormente realizado um tratamento estatístico dos resultados obtidos, para o que se admitiu o carácter estacionário e ergódigo do processo de resposta, por forma a ser possível obter estimativas dos principais parâmetros estatísticos relativos a diversas variáveis controlo, tendo apenas em consideração uma amostra de grande extensão de uma única realização da resposta.

Nestas circunstâncias, foi possível obter, por estas duas vias alternativas, estimativas das seguintes grandezas:

- desvio padrão do deslocamento do piso relativamente à base;
- desvios padrões das correspondentes velocidades e acelerações;
- desvio padrão da força de restituição não-linear;
- valor médio dos picos de resposta num intervalo de tempo com $10s$ de duração;

encontrando-se os valores obtidos representados graficamente nas figuras 4.6 a 4.8 (a).

Complementarmente apresentam-se ainda sob forma gráfica os seguintes elementos (Fig. 4.8 (b) a 4.13):

- valores da rigidez equivalente correspondentes aos diversos valores considerados da relação α entre a rigidez pós-cedência e a rigidez inicial;
- caracterização do acelerograma artificial considerado nas simulações numéricas;
- evolução temporal do deslocamento de piso obtida por integração no tempo, considerando quatro valores distintos de α.

De realçar que, no tratamento estatístico dos resultados obtidos através das simulações numéricas realizadas, houve o cuidado de eliminar um troço inicial de características transitórias, tendo-se, por uma questão de prudência, procedido ao cálculo dos desvios padrões das diversas variáveis de controlo tomando como referência o intervalo

de tempo $15-80s$, ao passo que o valor médio dos picos de resposta foi estimado eliminando a informação relativa aos primeiros $20s$ e calculando a média dos valores máximos encontrados ao longo dos 6 intervalos de $10s$ posteriores.

Da observação dos gráficos apresentados, e em particular das figuras 4.6 a 4.8, pode pois constatar-se uma excelente compatibilidade global dos resultados obtidos, quer em termos de desvios padrões, quer dos valores máximos médios, mesmo para não-linearidades muito acentuadas, sendo a diferença máxima encontrada da ordem dos 10%.

Um segundo exemplo tratado refere-se a uma estrutura de tipo "shear-building" com 5 pisos, com pilares igualmente dotados de comportamento bilinear elástico, apresentando as seguintes características

- Rigidez inicial dos pilares $(k_i^o, i=1,...,5)$ ..... 40000 KN/m
- Deslocamento de cedência $(\alpha_{y_i}, i=1,...,5)$ ..... 0,005 m
- Factor de endurecimento $(\alpha_i = k_i^1/k_i^o, i=1,...,5)$ 0,10
- Massa por piso $(m_i, i=1,...,5)$ ..... 200 t
- Coeficiente de amortecimento (ξ) 0,05

A análise da resposta sísmica estacionária foi igualmente realizada através das duas vias anteriormente referidas, e seguindo um procedimento inteiramente semelhante, tendo-se suposto a actuação da mesma acção sísmica regulamentar.

Os principais resultados obtidos através das simulações numéricas realizadas, designadamente os desvios padrões dos deslocamentos relativos entre pisos consecutivos σ_{u_i}, das velocidades e acelerações de cada piso em relação à base, $\sigma_{\dot{q}_i}$ e $\sigma_{\ddot{q}_i}$, das forças de restituição não-linear relativas a cada troço de pilares σ_{r_i}, e dos valores médios dos picos de resposta em termos de deslocamentos relativos entre andares $E\left[\max_T |u_i|\right]$ para $T=10s$, encontram-se condensados no quadro 4.1. Simultaneamente, apresentam-se no quadro 4.2 as diferenças relativas alcançadas mediante a aplicação do método de linearização

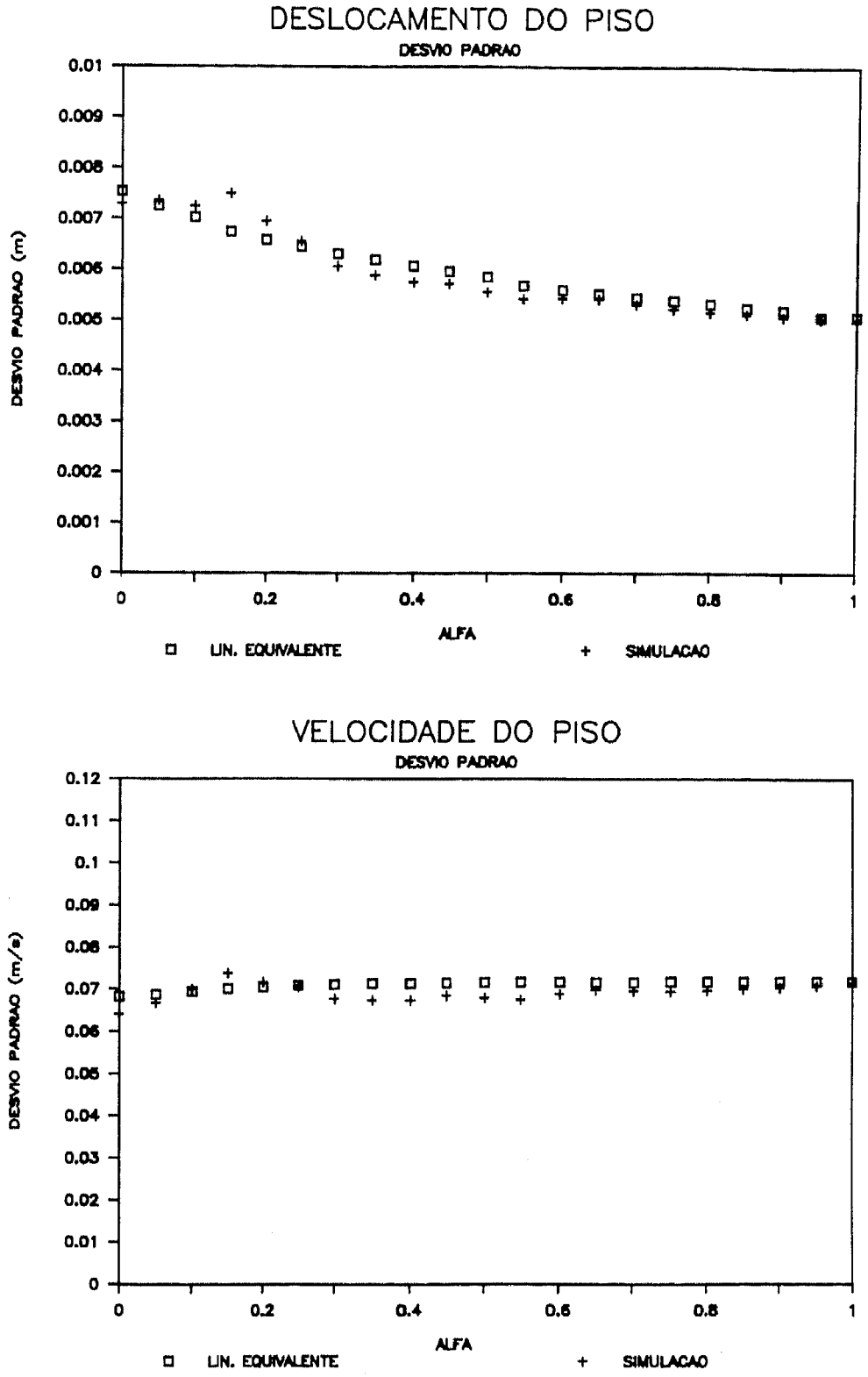


Fig. 4.6 - Variação do desvio padrão do deslocamento e da velocidade do piso com α.

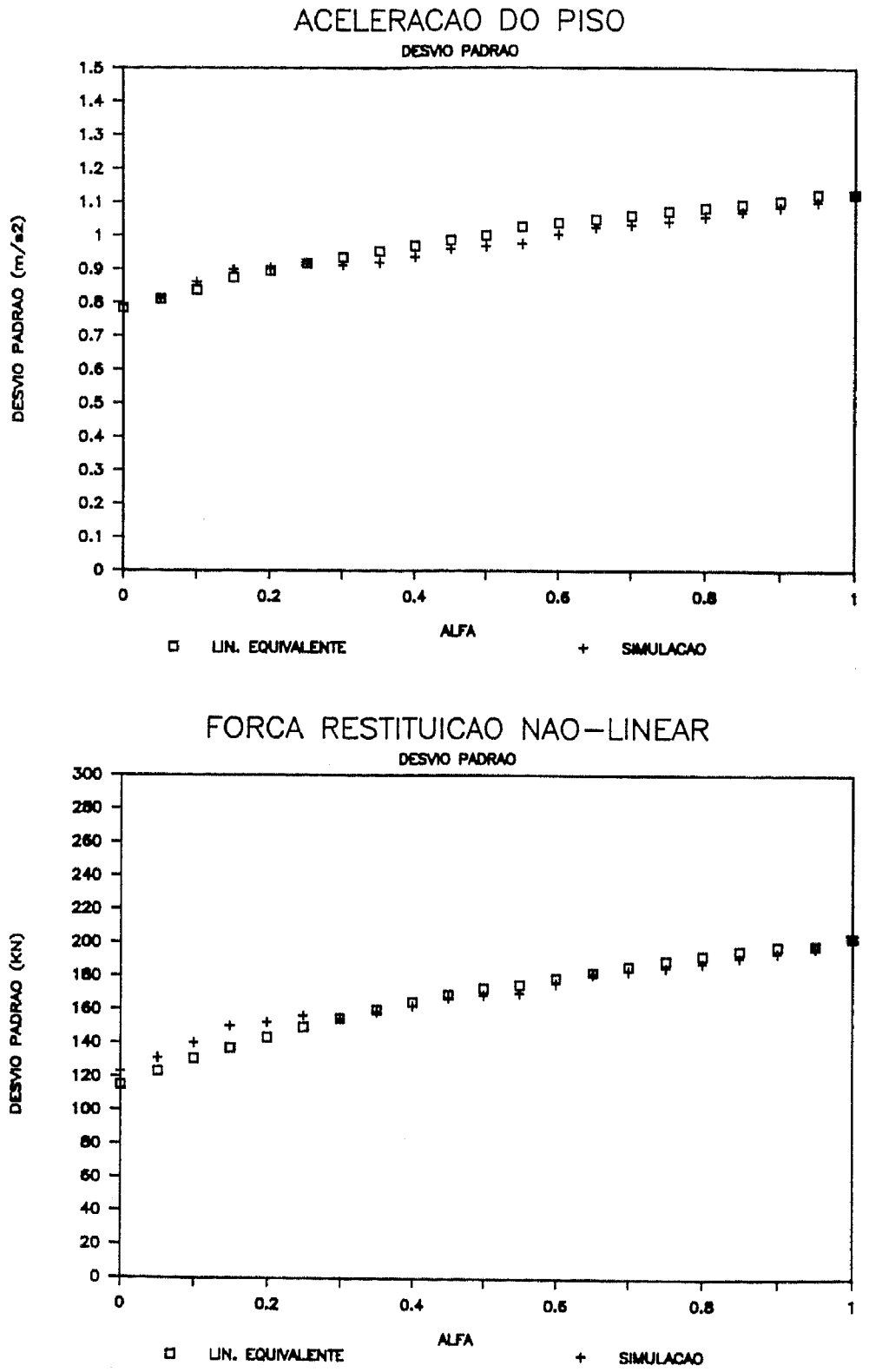


Fig. 4.7 - Variação do desvio padrão da acelaração do piso e da força de restituição não-linear com α.

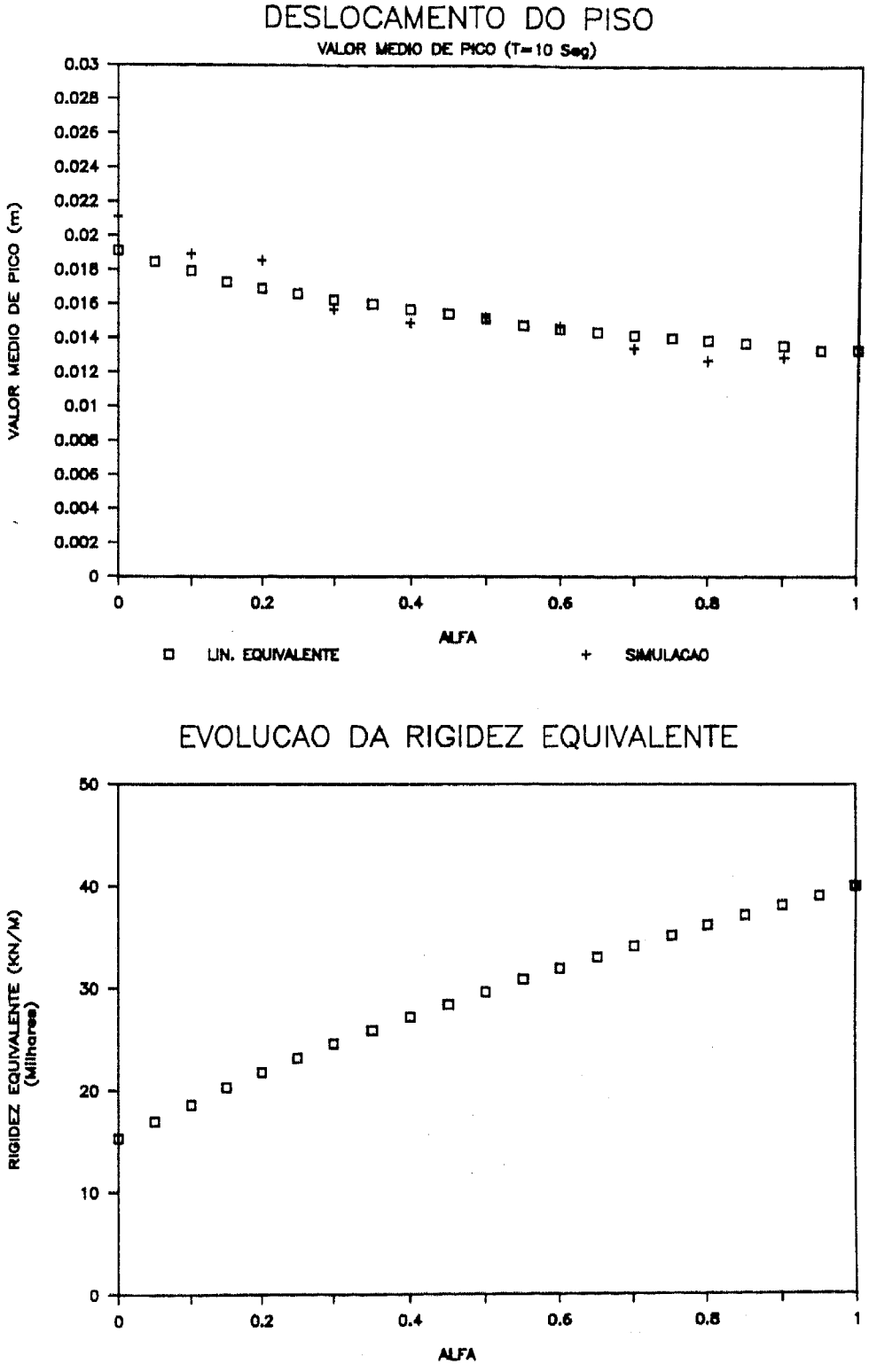


Fig. 4.8 - Variação do valor máximo médio do deslocamento do piso (a) e da rigidez equivalente com α (b).

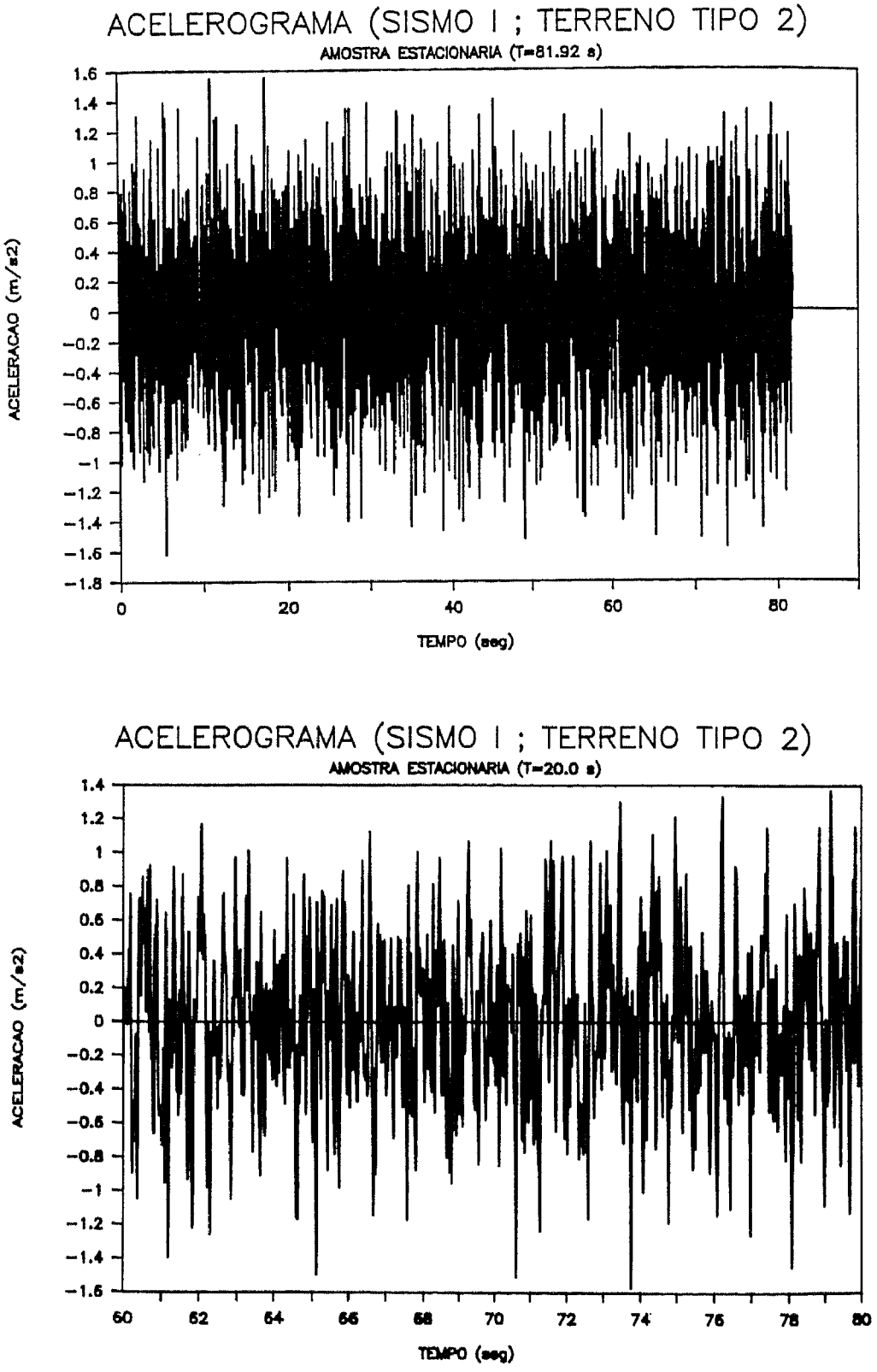


Fig. 4.9 - Acelerograma artificial utilizado na simulação.

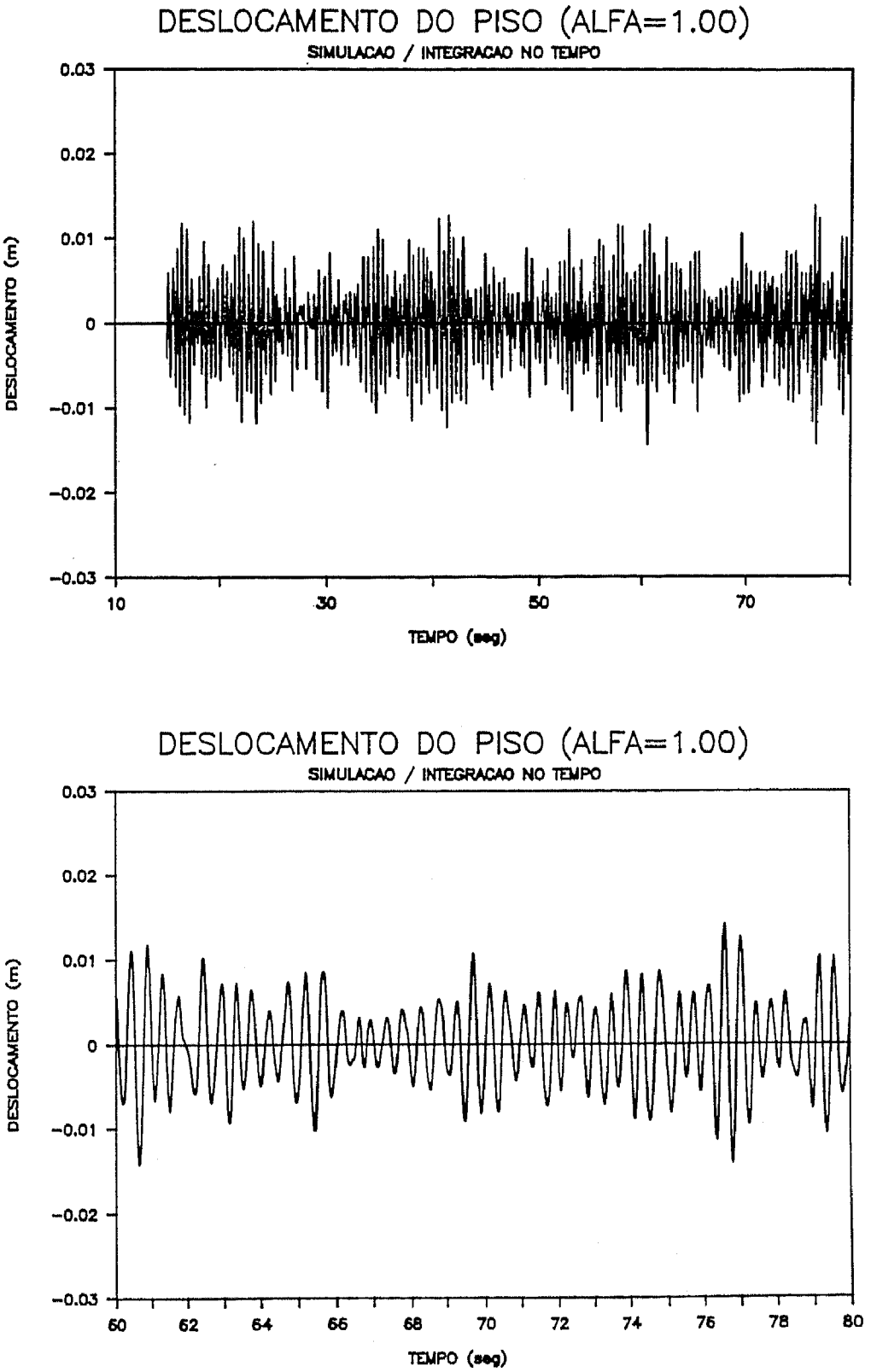


Fig. 4.10 - Evolução temporal do deslocamento de piso obtida por simulação numérica com $\alpha = 1,00$.

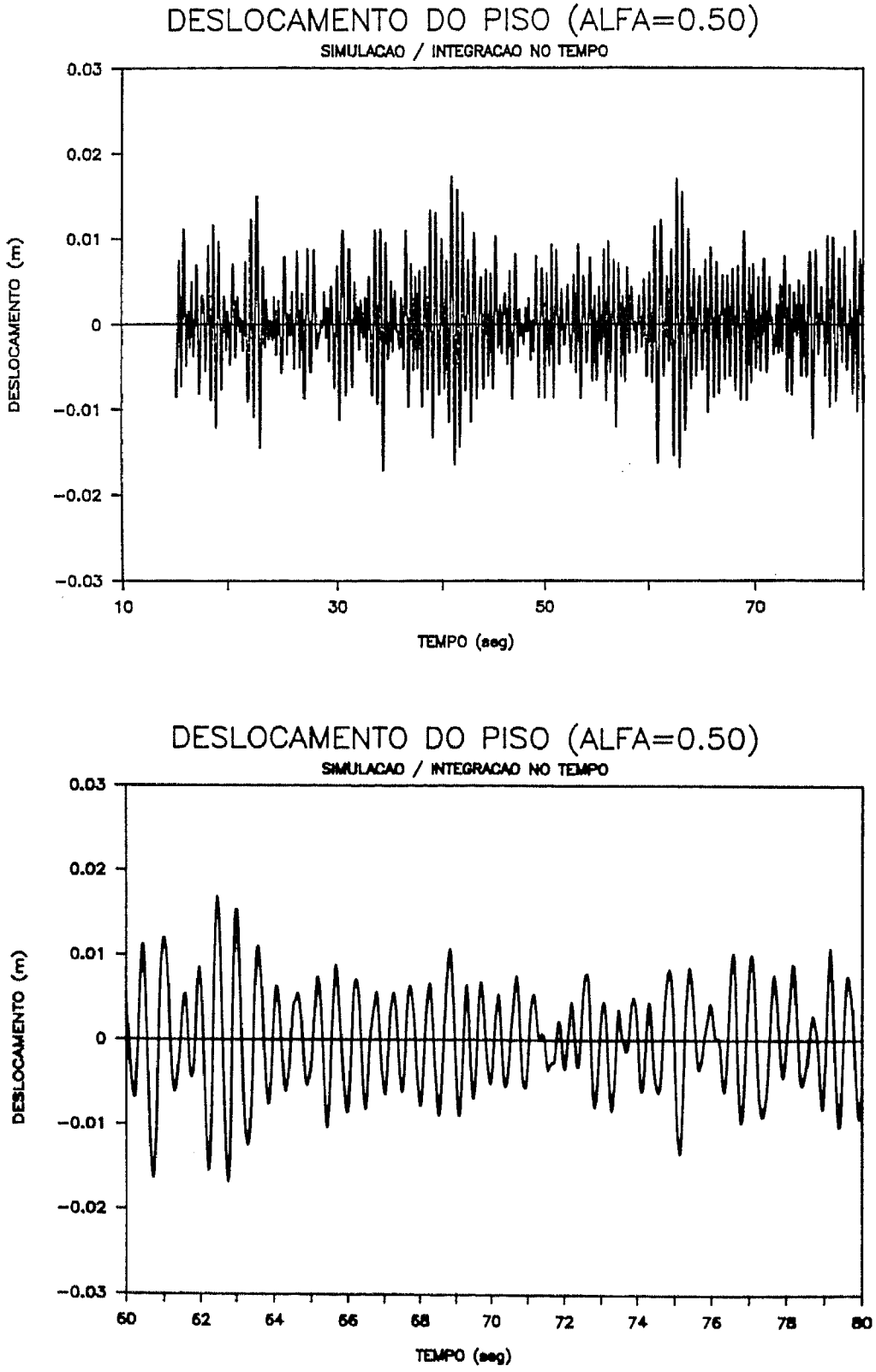


Fig. 4.11 - Evolução temporal do deslocamento de piso obtida por simulação numérica com $\alpha = 0,50$.

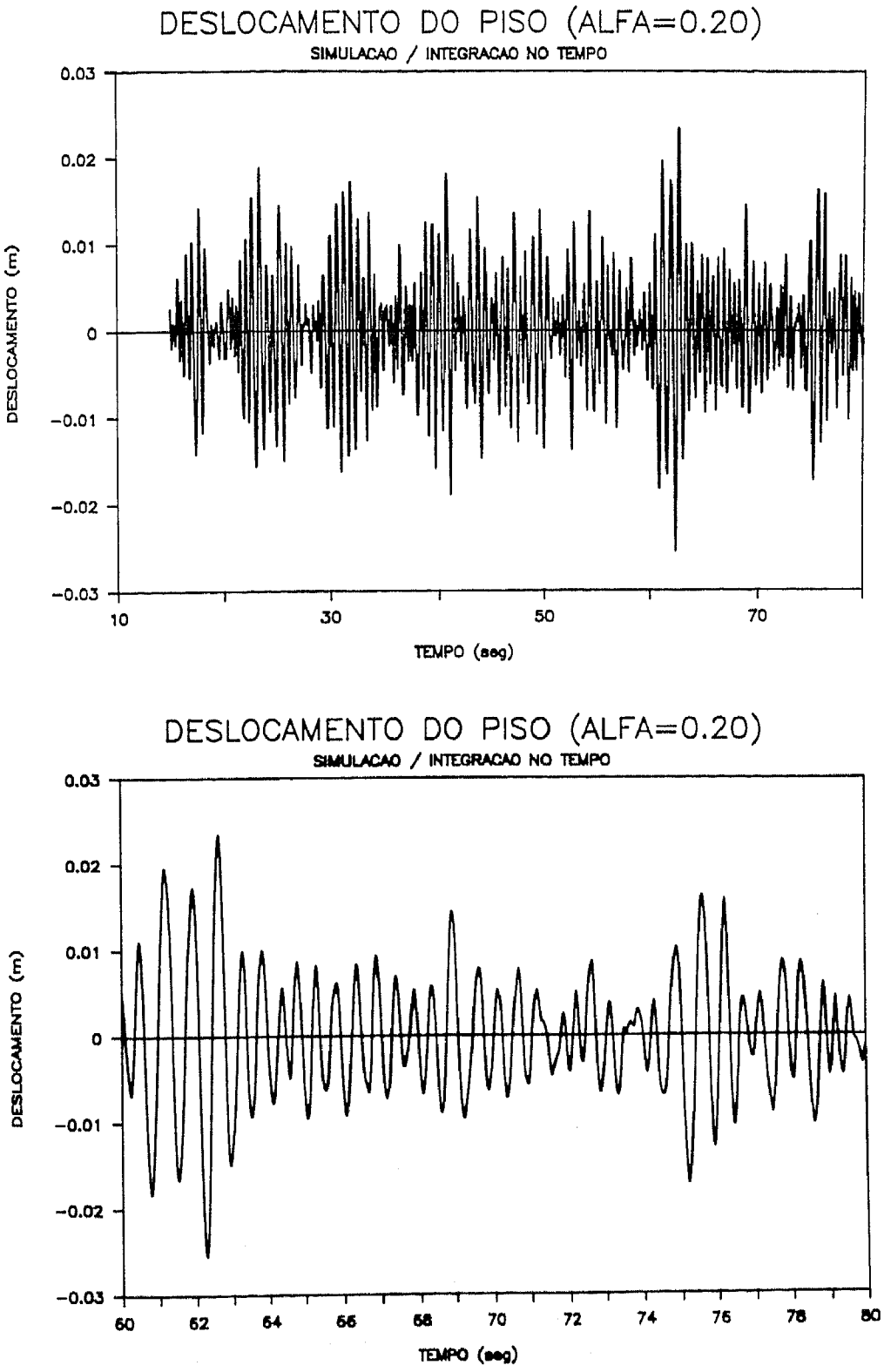


Fig. 4.12 - Evolução temporal do deslocamento de piso obtida por simulação numérica com $\alpha = 0,20$.

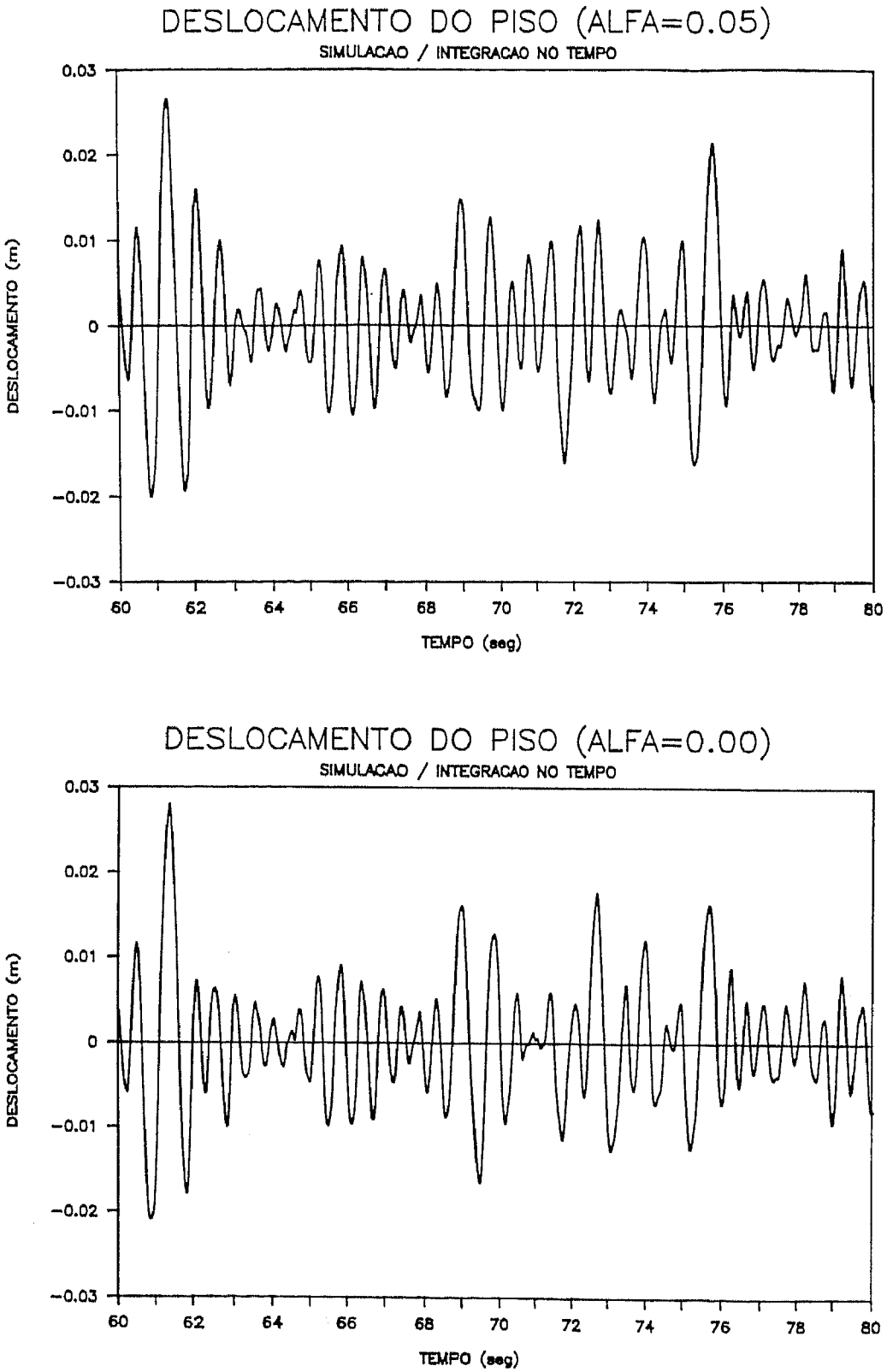


Fig. 4.13 - Evolução temporal do deslocamento de piso obtida por simulação numérica com $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,00$.

equivalente (programa PROG7), sendo a forma de convergência do processo iterativo correspondente caracterizada pela figura 4.14 (a) e pelo quadro 4.3, no qual se encontram indicados os valores assumidos pelas seguintes grandezas em cada iteração:

FOA - frequência média de passagens ascendentes por zero $f^{\uparrow}_{o,u_i}$;

DPDEL - desvio padrão do deslocamento relativo, σ_{u_i};

DELMAX - estimativa do valor médio do máximo deslocamento relativo entre pisos consecutivos com base na expressão de Vanmarke;

DPVEL - desvio padrão $\sigma_{\dot{u}_i}$;

DPACEL - desvio padrão $\sigma_{\ddot{u}_i}$;

AY - deslocamento de cedência α_{y_i};

AREA1 - área Ω^1_i;

AREA2 - área $2\Omega^o_i$;

K0 - rigidez inicial k^o_i;

K1 - rigidez pós-cedência k^1_i;

KEQ - rigidez equivalente k^e_i;

DPF - desvio padrão da força de restituição não-linear, σ_{r_i}.

A título complementar, apresenta-se ainda ao longo das figuras 4.14 a 4.19 informação adicional relativa às simulações numéricas realizadas, possibilitando em particular avaliar o grau de incursão de cada troço de pilares no regime não-linear.

Da observação dos quadros 4.1 e 4.2 pode novamente constatar-se que, apesar de se haver considerado uma forma de comportamento acentuadamente não-linear , se regista uma satisfatória compatibilidade global de resultados, em particular no que respeita às forças

de restituição não-linear, verificando-se inclusivamente que as maiores diferenças relativas dizem respeito ao troço de pilares cujas incursões em regime não-linear são menos significativas (troço 5).

TROÇO	σ_{u_i} (m)	$\sigma_{\dot{q}_i}$ (m/s)	$\sigma_{\ddot{q}_i}$ (m/s^2)	σ_{r_i} (KN)	$E\left[\max_T \lvert u_i \rvert\right]$ (m)
1	0,01437	0,04952	0,5947	209,1	0,03652
2	0,01088	0,07433	0,6030	188,2	0,02758
3	0,00611	0,08830	0,5965	158,1	0,01658
4	0,00335	0,09644	0,6040	121,7	0,00852
5	0,00184	0,10183	0,6165	73,2	0,00529

Quadro 4.1 - Resultados obtidos por simulação numérica.

TROÇO	σ_{u_i}	$\sigma_{\dot{q}_i}$	$\sigma_{\ddot{q}_i}$	σ_{r_i}	$E\left[\max_T \lvert u_i \rvert\right]$
1	+ 13,7	+ 6,5	- 6,2	- 1,1	+ 4,0
2	+ 5,2	+ 8,0	- 4,8	- 1,8	- 8,0
3	+ 2,7	- 2,4	- 5,8	- 2,0	- 9,8
4	- 5,5	+ 6,4	- 5,6	- 6,6	- 6,3
5	- 17,2	+ 5,0	- 4,6	- 16,8	- 25,0

Quadro 4.2 - Diferenças relativas encontradas por aplicação do método de linearização equivalente (em %).

ITERACAO N. 1

PISO	FOA	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	KO	K1	KEQ	DPF
1	0.81	0.00889	0.02243	0.04542	0.63442	0.00500	0.28697	0.42606	40000.	4000.	19338.	171.97
2	0.75	0.00805	0.01970	0.03781	0.40287	0.00500	0.26721	0.46558	40000.	4000.	20761.	167.08
3	0.82	0.00682	0.01712	0.03508	0.38653	0.00500	0.23181	0.53639	40000.	4000.	23310.	159.02
4	1.81	0.00526	0.01374	0.03347	0.37717	0.00500	0.17083	0.65834	40000.	4000.	27700.	145.65
5	1.45	0.00313	0.00867	0.02650	0.42901	0.00500	0.05514	0.88972	40000.	4000.	36030.	112.81

ITERACAO N. 2

PISO	FOA	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	KO	K1	KEQ	DPF
1	0.68	0.00991	0.02465	0.04214	0.57214	0.00500	0.30699	0.38603	40000.	4000.	17897.	177.40
2	0.59	0.00831	0.01974	0.03066	0.25504	0.00500	0.27373	0.45254	40000.	4000.	20291.	168.65
3	0.68	0.00638	0.01564	0.02726	0.21738	0.00500	0.21672	0.56655	40000.	4000.	24396.	155.72
4	0.91	0.00425	0.01097	0.02439	0.22139	0.00500	0.11961	0.76077	40000.	4000.	31388.	133.35
5	1.14	0.00187	0.00498	0.01331	0.14597	0.00500	0.00369	0.99262	40000.	4000.	39734.	74.15

ITERACAO N. 3

PISO	FOA	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	KO	K1	KEQ	DPF
1	0.65	0.01069	0.02636	0.04356	0.57073	0.00500	0.32005	0.35991	40000.	4000.	16957.	181.33
2	0.57	0.00847	0.01992	0.03026	0.24056	0.00500	0.27740	0.44519	40000.	4000.	20027.	169.56
3	0.68	0.00605	0.01485	0.02597	0.20377	0.00500	0.20416	0.59168	40000.	4000.	25301.	152.99
4	0.92	0.00366	0.00949	0.02121	0.19745	0.00500	0.08611	0.82777	40000.	4000.	33800.	123.80
5	1.13	0.00163	0.00435	0.01157	0.12759	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	65.23

ITERACAO N. 7

PISO	FOA	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	KO	K1	KEQ	DPF
1	0.57	0.01311	0.03142	0.04729	0.56358	0.00500	0.35144	0.29712	40000.	4000.	14696.	192.64
2	0.52	0.00926	0.02126	0.03053	0.21413	0.00500	0.29457	0.41086	40000.	4000.	18791.	173.96
3	0.65	0.00565	0.01378	0.02304	0.17351	0.00500	0.18809	0.62381	40000.	4000.	26457.	149.49
4	0.86	0.00315	0.00812	0.01710	0.15734	0.00500	0.05632	0.88736	40000.	4000.	35945.	113.29
5	1.06	0.00157	0.00417	0.01045	0.11328	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	62.81

ITERACAO N. 8

PISO	FOA	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	KO	K1	KEQ	DPF
1	0.56	0.01395	0.03315	0.04870	0.56239	0.00500	0.36000	0.27999	40000.	4000.	14080.	196.40
2	0.51	0.00974	0.02217	0.03132	0.21082	0.00500	0.30378	0.39244	40000.	4000.	18128.	176.49
3	0.63	0.00579	0.01404	0.02293	0.16869	0.00500	0.19395	0.61211	40000.	4000.	26036.	150.77
4	0.83	0.00319	0.00818	0.01673	0.15194	0.00500	0.05851	0.88297	40000.	4000.	35787.	114.16
5	1.02	0.00158	0.00418	0.01014	0.10841	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	63.13

ITERACAO N. 9

PISO	FOA	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	KO	K1	KEQ	DPF
1	0.54	0.01509	0.03546	0.05073	0.56132	0.00500	0.37020	0.25959	40000.	4000.	13345.	201.40
2	0.50	0.01046	0.02354	0.03266	0.20785	0.00500	0.31635	0.36729	40000.	4000.	17223.	180.18
3	0.61	0.00606	0.01458	0.02310	0.16415	0.00500	0.20483	0.59034	40000.	4000.	25252.	153.14
4	0.80	0.00327	0.00834	0.01637	0.14559	0.00500	0.06309	0.87383	40000.	4000.	35458.	115.92
5	0.97	0.00160	0.00420	0.00974	0.10207	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	63.83

ITERACAO N.10

PISO	FOA	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	KO	K1	KEQ	DPF
1	0.52	0.01623	0.03774	0.05279	0.56002	0.00500	0.37899	0.24202	40000.	4000.	12713.	206.29
2	0.48	0.01124	0.02500	0.03415	0.20463	0.00500	0.32827	0.34346	40000.	4000.	16364.	184.00
3	0.59	0.00636	0.01516	0.02339	0.15979	0.00500	0.21588	0.56823	40000.	4000.	24456.	155.54
4	0.76	0.00333	0.00841	0.01591	0.13794	0.00500	0.06650	0.86700	40000.	4000.	35212.	117.19
5	0.92	0.00160	0.00417	0.00923	0.09411	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	63.82

ITERACAO N.11

PISO	FOA	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	KO	K1	KEQ	DPF
1	0.51	0.01639	0.03807	0.05287	0.55810	0.00500	0.38015	0.23970	40000.	4000.	12629.	206.98
2	0.48	0.01142	0.02531	0.03433	0.20076	0.00500	0.33072	0.33856	40000.	4000.	16188.	184.83
3	0.58	0.00634	0.01511	0.02318	0.15614	0.00500	0.21533	0.56934	40000.	4000.	24496.	155.42
4	0.75	0.00323	0.00815	0.01529	0.13081	0.00500	0.06102	0.87796	40000.	4000.	35607.	115.14
5	0.90	0.00154	0.00400	0.00872	0.08719	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	61.41

ITERACAO N.12

PISO	FOA	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	KO	K1	KEQ	DPF
1	0.51	0.01634	0.03797	0.05274	0.55797	0.00500	0.37980	0.24040	40000.	4000.	12654.	206.77
2	0.48	0.01144	0.02536	0.03437	0.20046	0.00500	0.33099	0.33802	40000.	4000.	16169.	184.92
3	0.58	0.00628	0.01496	0.02300	0.15533	0.00500	0.21289	0.57421	40000.	4000.	24672.	154.89
4	0.75	0.00317	0.00799	0.01501	0.12860	0.00500	0.05727	0.88546	40000.	4000.	35876.	113.67
5	0.90	0.00152	0.00397	0.00865	0.08654	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	60.87

Quadro 4.3 - Evolução do processo iterativo.

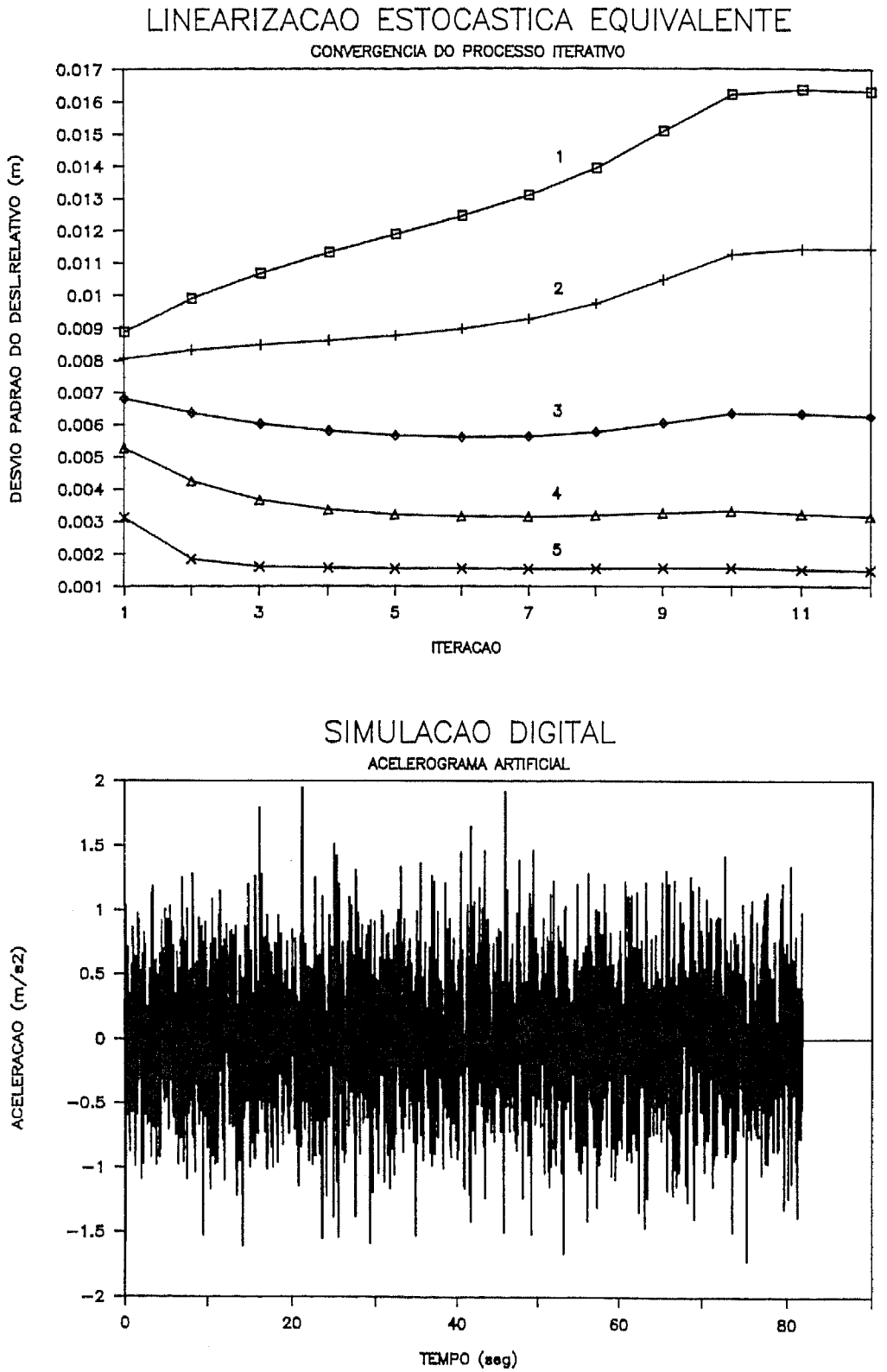


Fig. 4.14 - (a) Convergência do processo iterativo
(b) Acelerograma utilizado na simulação.

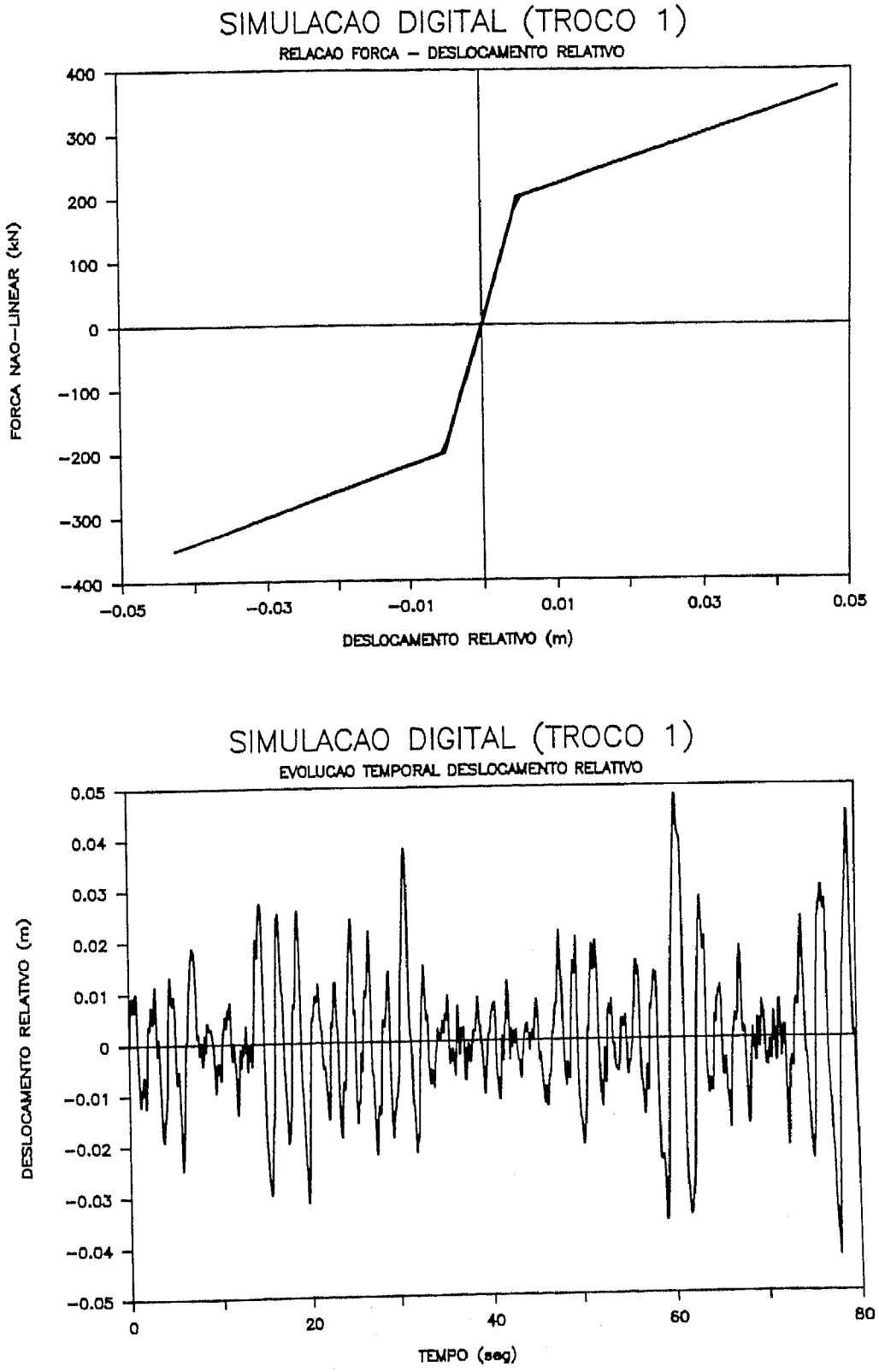


Fig. 4.15 - Simulação digital (troço 1).

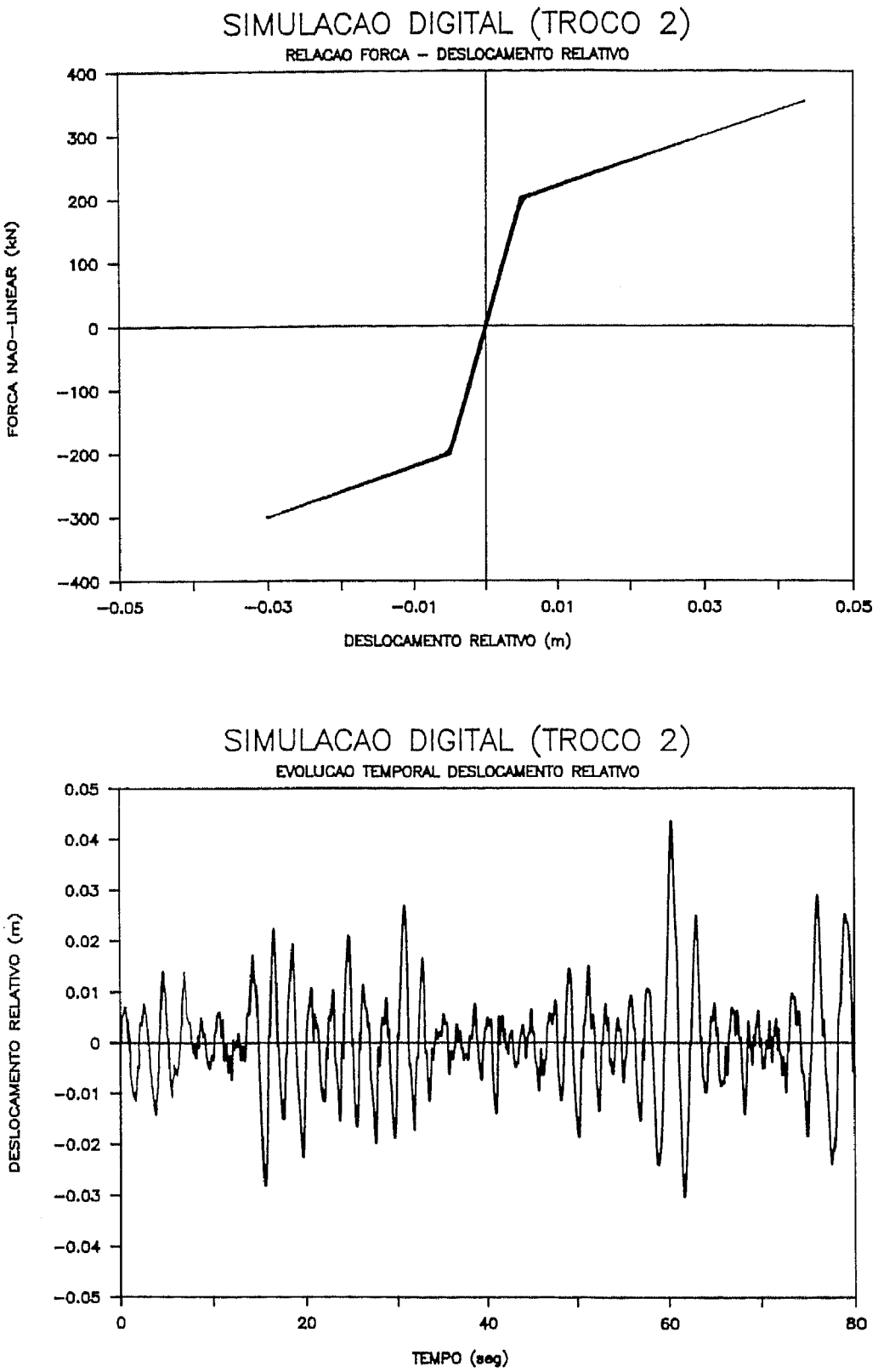


Fig. 4.16 - Simulação digital (troço 2).

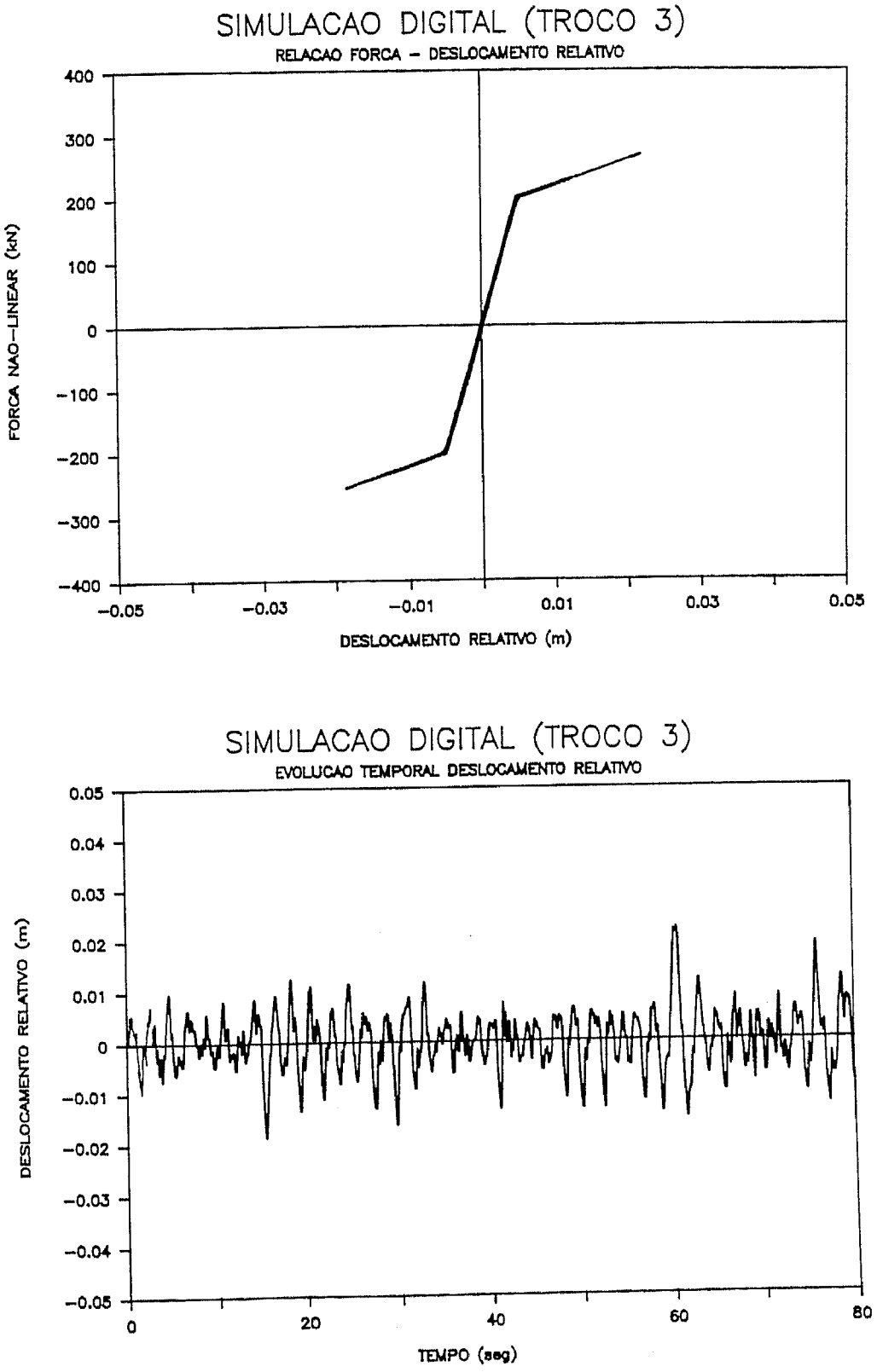


Fig. 4.17 - Simulação digital (troço 3).

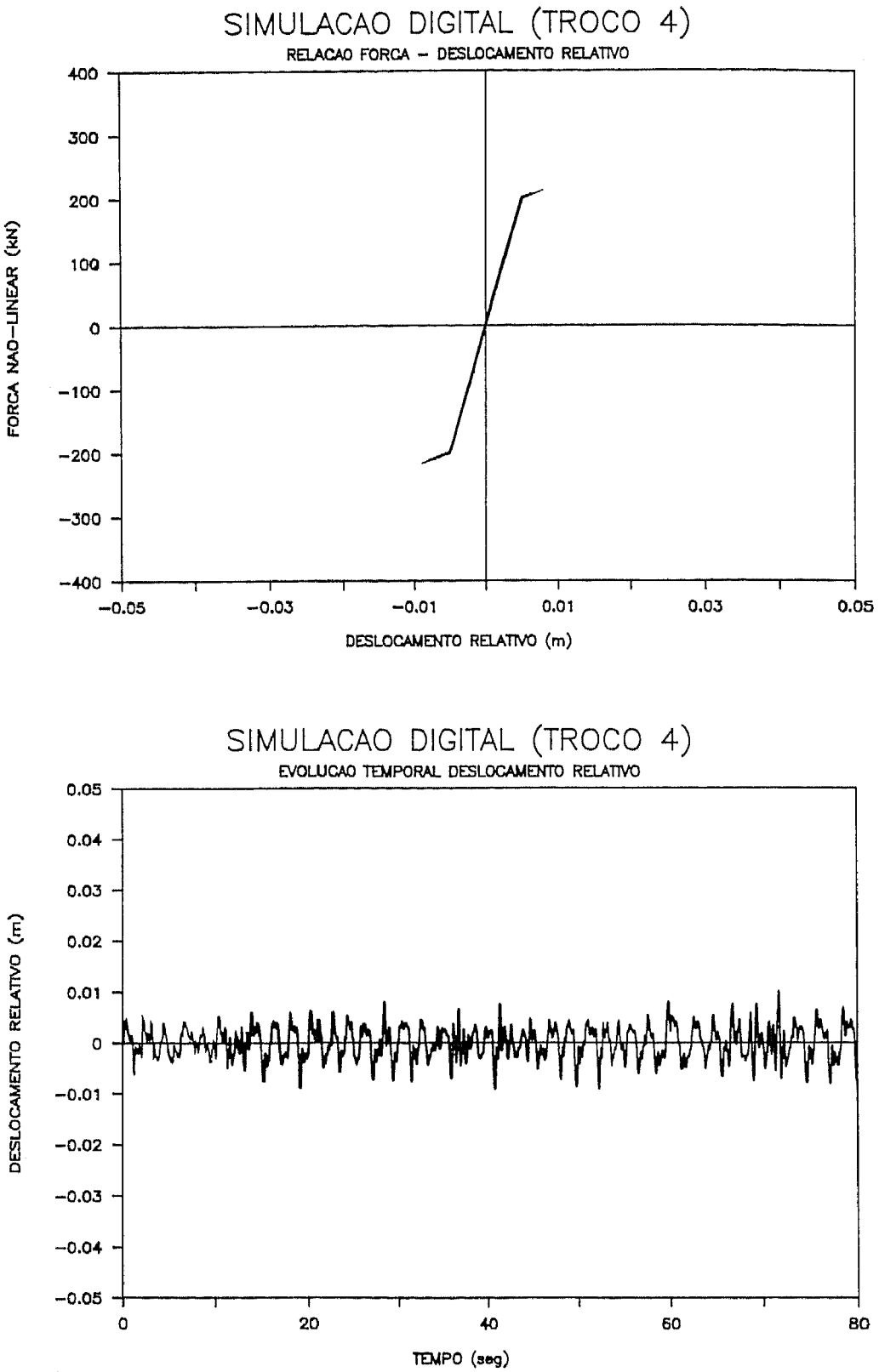


Fig. 4.18 - Simulação digital (troço 4).

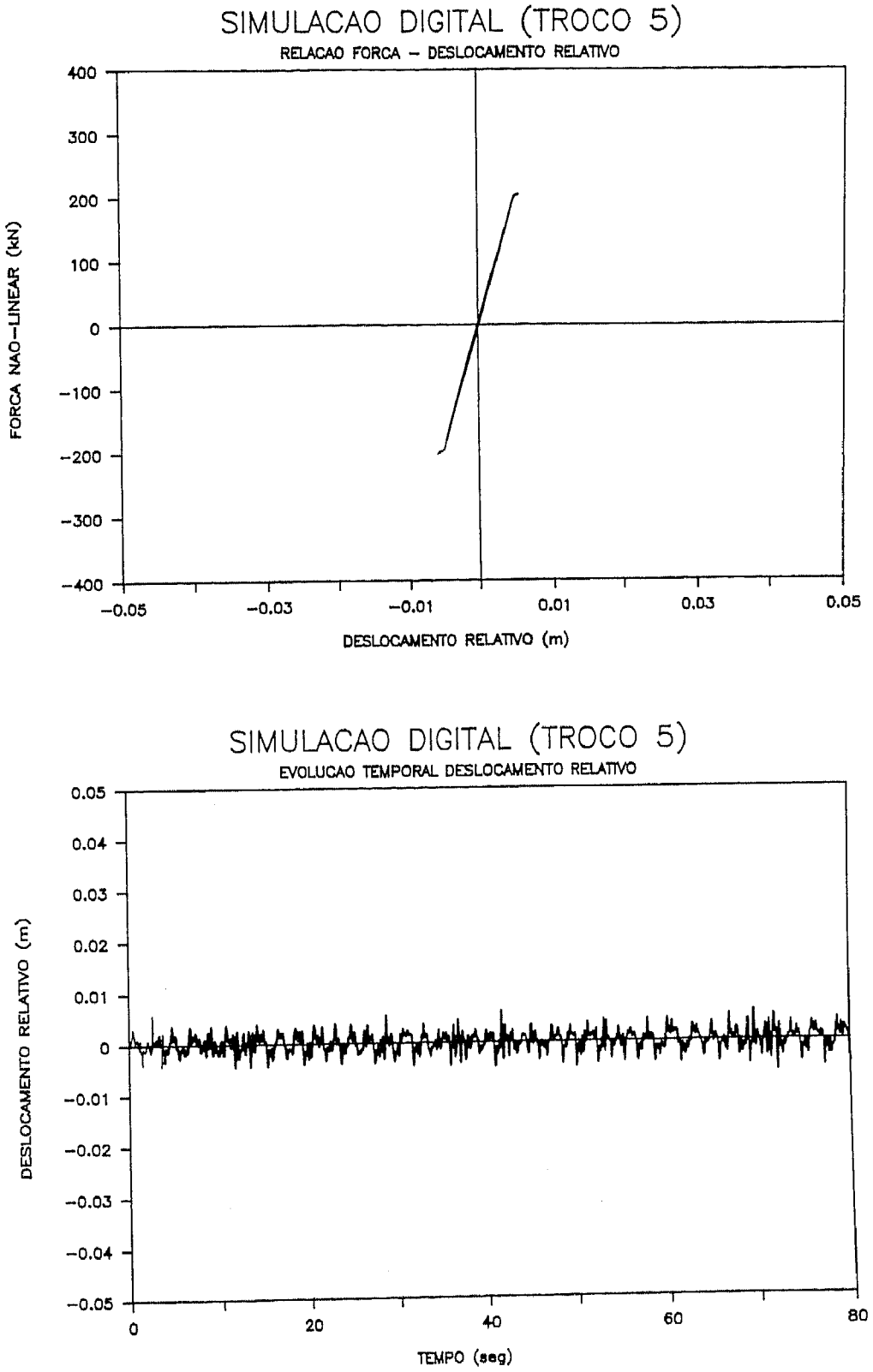


Fig. 4.19 - Simulação digital (troço 5).

5

ANÁLISE DA RESPOSTA ALEATÓRIA DE SISTEMAS HISTERÉTICOS PELO MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE

5.1 - INTRODUÇÃO

As apreciáveis vantagens reveladas pelo método de linearização estocástica equivalente, no que respeita à análise da resposta aleatória estacionária ou não-estacionária de sistemas não-lineares de múltiplos graus de liberdade, justificam naturalmente que se procure explorar todas as suas potencialidades no sentido de conseguir, em particular, o desenvolvimento de rotinas simples e eficientes viradas para o tratamento específico do tipo de não-linearidades de maior interesse no âmbito da engenharia sísmica, e que são as chamadas não-linearidades de natureza histerética.

Este tipo de não-linearidades é caracterizado pelo facto de as forças generalizadas de restituição dos sistemas em cada instante não serem unicamente função do valor correspondente da resposta, mas também de toda a história anterior do carregamento, como sucede por exemplo com as estruturas de betão armado.

A análise da resposta de sistemas não-lineares histeréticos exige que sejam previamente definidos modelos analíticos que caracterizem devidamente o funcionamento estrutural.

Nesse sentido, vários têm sido os modelos de comportamento histerético considerados por diversos investigadores [119, 59], desde os mais simples, como o modelo bilinear ou o de Ramberg-Osgood, até outros de maior versatilidade, como os modelos de Clough, de Takeda ou o trilinear, tornando-se possível a consideração de diversas particularidades do funcionamento estrutural, nomeadamente, a degradação de rigidez com a deformação e com a inversão do carregamento, a degradação de resistência, a influência do esforço transverso

("pinching") e da deterioração da aderência das armaduras ("slipping").

Todos estes modelos têm em comum o facto de assentarem na definição de um certo número de regras de origem empírica, que procuram descrever o comportamento material ao longo de sucessivas cargas e descargas, sendo especialmente adequados para análises determinísticas da resposta por integração numérica no domínio do tempo. No entanto, e porque tais formas de idealização, para além de conterem o máximo de informação sobre o comportamento físico do sistema, devem ser matematicamente tratáveis, outros modelos de natureza diferencial, como os referidos por Suzuki e Minai [223], ou o introduzido por Bouc e Wen [247], foram também desenvolvidos no sentido de melhor se adaptarem à análise estocástica da resposta aleatória de sistemas não-lineares histeréticos.

O presente capítulo tem assim como objectivo mostrar como a linearização estocástica equivalente pode ser aplicada com sucesso à análise da resposta aleatória de sistemas histeréticos de múltiplos graus de liberdade, tomando por base modelos caracterizadores das não-linearidades estruturais adequados.

Assim, começa por fazer-se referência ao método inicialmente utilizado por Caughey [44, 45] no tratamento de sistemas histeréticos de 1-GL, e à correspondente variante de Goto e Iemura [107], sublinhando a limitação de que enferma esta abordagem, pelo facto de se admitir a resposta do sistema caracterizada por um processo de banda estreita. Seguidamente, é justificada a vantagem da utilização de modelos histeréticos diferenciais como forma de ultrapassar esta hipótese restritiva, conhecida por aproximação de Krylov-Bogoliubov [137], procedendo-se à apresentação dos modelos diferenciais de Suzuki e Minai e de Bouc-Wen, e realçando sobretudo a enorme versatilidade permitida por este último, em particular, tendo em consideração os aperfeiçoamentos ulteriormente introduzidos por Noori e Baber [159], Park, Wen e Ang [169], Mochio, Samaras e Shinozuka [155].

Posteriormente, são apresentadas formulações que, tendo por base o modelo histerético de Bouc-Wen, permitem uma análise eficiente da resposta de sistemas estruturais de N-GL, sujeitos a excitações quer

estacionárias, quer não-estacionárias, em particular de natureza sísmica. Por último, é efectuada uma descrição dos modelos computacionais desenvolvidos para análise da resposta sísmica de sistemas histeréticos de N-GL com base em formulações apresentadas, podendo observar-se simultaneamente alguns resultados julgados elucidativos.

5.2 - OS MÉTODOS DE CAUGHEY E DE GOTO E IEMURA PARA ANÁLISE DA RESPOSTA ESTACIONÁRIA DE SISTEMAS DE 1-GL

Considere-se um sistema histerético de 1-GL sujeito a uma excitação aleatória estacionária de valor médio nulo, sendo o correspondente equilíbrio dinâmico traduzido pela equação

$$\ddot{q}(t)+g(\dot{q},q,t)=p(t)/m \tag{5.1}$$

em que $g(\dot{q},q,t)$ é uma função caracterizadora das não-linearidades de natureza histerética do sistema, suposta ímpar nos seus argumentos, como vulgarmente sucede na prática, por forma a que o valor médio da resposta possa também considerar-se nulo.

Sendo, por sua vez, o equilíbrio dinâmico do sistema linear equivalente traduzido pela equação

$$\ddot{q}(t)+\beta_e\dot{q}(t)+w_e^2 q(t)=p(t)/m \tag{5.2}$$

os coeficientes β_e e w_e^2 podem obter-se minimizando o valor quadrático médio da diferença

$$\epsilon(t)=g(\dot{q},q,t)-\beta_e\dot{q}(t)-w_e^2 q(t) \tag{5.3}$$

entre os primeiros membros das equações (5.1) e (5.2).

Seguindo, para o efeito, o caminho já descrito em 4.5.1, conclui-se que

$$\beta_e=\frac{E[\dot{q}g(\dot{q},q)]}{\sigma_{\dot{q}}^2} \qquad w_e^2=\frac{E[qg(\dot{q},q)]}{\sigma_q^2} \tag{5.4}$$

equações aliás coincidentes com as referidas em (4.85).

No caso particular de não-linearidades de natureza histerética, a principal dificuldade reside porém no cálculo dos valores médios intervenientes nestas equações.

Este problema foi, no entanto, contornado por Caughey [44], que se serviu de uma aproximação anteriormente utilizada por Krylov e Bogoliubov [137], válida nos casos em que o processo de resposta é de banda estreita, o que sucede quando o amortecimento equivalente, medido pelo coeficiente β_e, é baixo e o processo de excitação é de banda larga.

Nessas condições, o movimento de resposta tem um andamento sensivelmente sinusoidal, traduzido pelas equações

$$q(t) = R(t)\cos[w_e t + \phi(t)] \tag{5.5}$$

$$\dot{q}(t) = -R(t)w_e \operatorname{sen}[w_e t + \phi(t)] \tag{5.6}$$

em que a amplitude do processo envolvente $R(t)$ e a correspondente fase $\phi(t)$ assumem variações muito lentas ao longo de cada ciclo da resposta de duração igual a $2\pi/w_e$.

Por conseguinte, é razoável supor nesta hipótese que $R(t)$ e $\phi(t)$ assumem valores constantes, R e ϕ, ao longo de cada ciclo, calculando os valores médios espectáveis $E[\dot{q}g(\dot{q},q)]$ e $E[qg(\dot{q},q)]$ intervenientes nas equações (5.4), tomando uma média temporal de $\dot{q}g(\dot{q},q)$ e $qg(\dot{q},q)$ ao longo daqueles ciclos.

Desse modo, as equações (5.4) podem escrever-se sob a forma

$$\beta_e = \frac{E\left[\frac{1}{2\pi/w_e}\int_0^{2\pi/w_e} -Rw_e \operatorname{sen}(w_e t+\phi)g(R,t)dt\right]}{E\left[\frac{1}{2\pi/w_e}\int_0^{2\pi/w_e} R^2 w_e^2 \operatorname{sen}^2(w_e t+\phi)dt\right]} \tag{5.7}$$

$$w_e^2 = \frac{E\left[\frac{1}{2\pi/w_e}\int_0^{2\pi/w_e} R\cos(w_e t+\phi)g(R,t)dt\right]}{E\left[\frac{1}{2\pi/w_e}\int_0^{2\pi/w_e} R^2\cos^2(w_e t+\phi)dt\right]} \tag{5.8}$$

em que $g(R,t)$ representa a variação sofrida pela função $g(\dot{q},q,t)$ ao longo de uma oscilação sinusoidal de $q(t)$ de amplitude R.

Procedendo ao cálculo dos integrais indicados nos denominadores dos segundos membros destas equações, e introduzindo as funções

$$C(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(R,\psi)\cos\psi d\psi \tag{5.9}$$

$$S(R)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(R,\psi)\operatorname{sen}\psi d\psi \tag{5.10}$$

com

$$\psi=w_e t+\phi \tag{5.11}$$

os coeficientes do sistema linear equivalente podem ser expressos pelas seguintes equações

$$\beta_e=\frac{2E[RS(R)]}{w_e E[R^2]} \qquad w_e^2=\frac{2E[RC(R)]}{E[R^2]} \tag{5.12}$$

Desta forma, sendo a distribuição de probabilidade da envolvente de um processo de banda estreita uma distribuição de Rayleigh, cuja função densidade de probabilidade é (v. eq. 1.286)

$$p_e(R)=\frac{R}{\sigma_q^2}\exp\left(-\frac{R}{2\sigma_q^2}\right) \tag{5.13}$$

os valores médios $E[RS(R)]$ e $E[RC(R)]$ podem ser expressos através das relações

$$E[RS(R)]=\int_0^{\infty} RS(R)p_e(R)dR \tag{5.14}$$

$$E[RC(R)]=\int_0^{\infty} RC(R)p_e(R)dR \tag{5.15}$$

podendo pois exprimir-se os coeficientes β_e e w_e^2 directamente em função da variância σ_q^2, o que possibilita a resolução do problema à custa de um procedimento iterativo idêntico ao referido em 4.5.1.

Uma abordagem ligeiramente diferente da introduzida por Caughey foi utilizada por Goto e Iemura [107], que procuraram determinar os coeficientes β_e e w_e^2 do sistema linear equivalente, não através da

minimização do valor quadrático médio $E[\epsilon^2]$, mas antes procurando minimizar o valor médio temporal de $\epsilon^2(t)$ ao longo de um ciclo de duração $2\pi/w_e$

$$<\epsilon^2(t)>=\frac{1}{2\pi/w_e}\int_0^{2\pi/w_e}\epsilon^2(t)dt \qquad (5.16)$$

aplicando posteriormente o operador $E[\ ]$ às expressões encontradas de β_e e w_e^2.

Desta forma, podem obter-se as seguintes expressões para β_e e w_e^2, distintas das alcançadas por Caughey

$$\beta_e=E\left[\frac{2S(R)}{Rw_e}\right] \qquad w_e^2=E\left[\frac{2C(R)}{R}\right] \qquad (5.17)$$

calculando-se os valores médios indicados também com base na função densidade de probabilidade $p_e(R)$ definida pela equação (5.13).

5.3 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DE CAUGHEY À ANÁLISE DA RESPOSTA ESTACIONÁRIA DE SISTEMAS COM COMPORTAMENTO BILINEAR HISTERÉTICO

A primeira aplicação do método de linearização estocástica equivalente à análise da resposta aleatória de sistemas histeréticos foi realizada por Caughey [44], mediante o recurso à formulação anteriormente descrita, e tendo por base o modelo histerético bilinear.

Para melhor se entender como a aplicação do método pode nesse caso ter lugar, considere-se um oscilador bilinear histerético sujeito a uma excitação aleatória $p(t)$, sendo o respectivo equilíbrio dinâmico traduzido pela equação

$$m\ddot{q}(t)+c\dot{q}(t)+g(q,t)=p(t) \qquad (5.18)$$

em que $g(q,t)$ representa uma força de natureza histerética com as características descritas na figura 5.1(a), para uma oscilação sinusoidal de amplitude $q_R=R$, e que é susceptível de ser decomposta

em duas componentes, uma de natureza elástica e linear (Fig. 5.1b) e outra de tipo elasto-plástico-histerético (Fig. 5.1c), através da relação

$$g = \alpha k q + (1-\alpha) k z \tag{5.19}$$

em que k representa a rigidez inicial e α o quociente entre a rigidez pós-cedência e a rigidez inicial, funcionando também como uma medida da contribuição relativa da componente histerética.

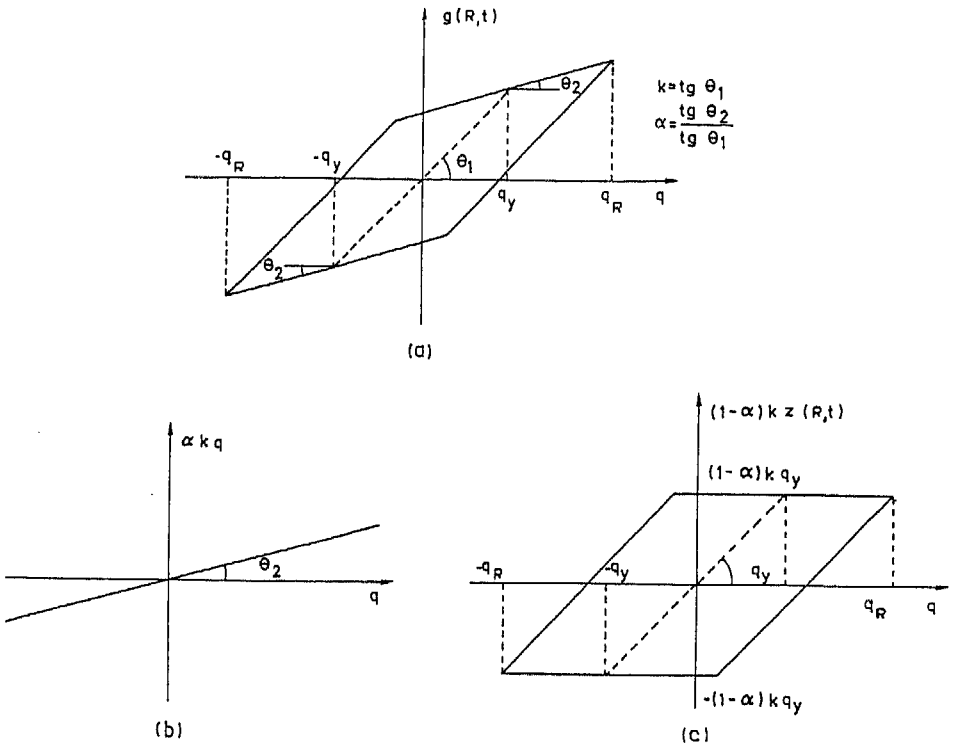


Fig. 5.1 - Decomposição de g numa componente elástica e linear e noutra elasto-plástica histerética.

Substituindo (5.19) em (5.18), dividindo ambos os membros por k, e introduzindo a mudança de variáveis

$$\tau = w_o t \tag{5.20}$$

com $w_o = \sqrt{k/m}$, o equilíbrio dinâmico do sistema pode passar a ser traduzido pela equação

$$\ddot{q}(\tau)+\beta\dot{q}(\tau)+g'(q,\tau)=p'(\tau) \tag{5.21}$$

em que

$$\beta=c/mw_o$$

$$g'(q,\tau)=\alpha q(\tau)+(1-\alpha)z(q,\tau) \tag{5.22}$$

$$p'(\tau)=p(\tau)/k$$

Nestas condições, os coeficientes β_e e w_e^2 da equação linear equivalente (5.2) podem ser determinados começando por calcular os valores de $C(R)$ e $S(R)$ definidos pelas equações (5.9) e (5.10).

Assim, e tendo presente as equações (5.5) e (5.6), pode escrever-se que

$$C(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[-\beta R w_e \operatorname{sen}\psi\cos\psi+\alpha R\cos^2\psi+(1-\alpha)z(R,\psi)\cos\psi]d\psi \tag{5.23}$$

$$S(R)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[-\beta R w_e \operatorname{sen}^2\psi+\alpha R\cos\psi\operatorname{sen}\psi+(1-\alpha)z(R,\psi)\operatorname{sen}\psi]d\psi \tag{5.24}$$

Atendendo também a que

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\psi\cos\psi d\psi=0 \qquad \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\psi d\psi=\int_0^{2\pi}\cos^2\psi d\psi=\pi \tag{5.25}$$

as equações (5.23) e (5.24) podem simplificar-se, obtendo-se

$$C(R)=\frac{\alpha R}{2}+(1-\alpha)C_z(R) \tag{5.26}$$

$$S(R)=\frac{\beta R w_e}{2}+(1-\alpha)S_z(R) \tag{5.27}$$

em que $C_Z(R)$ e $S_Z(R)$ são dados por

$$C_z(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}z(R,\psi)\cos\psi d\psi \tag{5.28}$$

$$S_z(R)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}z(R,\psi)\operatorname{sen}\psi d\psi \tag{5.29}$$

Estes integrais, por seu lado, podem ser facilmente calculados decompondo o intervalo de integração $[0,2\pi]$, correspondente à variação de ψ ao longo de um ciclo elasto-plástico histerético $z(R,\psi)$ de amplitude $q_R = R$, em quatro sub-intervalos correspondentes a cada um dos lados desse ciclo (AB, BC, CD e DA), consoante se indica na figura 5.2.

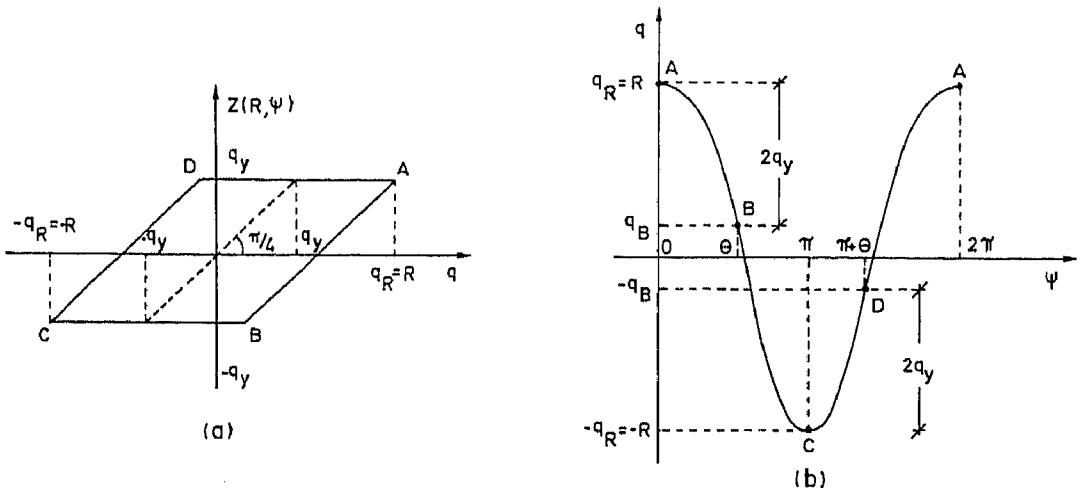


Fig. 5.2 - Fases do ciclo elasto-plástico histerético $z(R,\psi)$.

Dessa forma, supondo que o ciclo se inicia no ponto A, a que corresponde o valor de $\psi = 0$, e designando por θ o valor de ψ relativo à passagem pelo ponto B, os integrais $C_z(R)$ e $S_z(R)$ podem calcular-se através da seguinte decomposição

$$C_z(R) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\theta} z_{AB}(R,\psi)\cos\psi\, d\psi + \int_{\theta}^{\pi} z_{BC}(R,\psi)\cos\psi\, d\psi + \right.$$
$$\left. + \int_{\pi}^{\pi+\theta} z_{CD}(R,\psi)\cos\psi\, d\psi + \int_{\pi+\theta}^{2\pi} z_{DA}(R,\psi)\cos\psi\, d\psi \right\} \qquad (5.30)$$

$$S_z(R) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\theta} z_{AB}(R,\psi)\,\mathrm{sen}\,\psi\, d\psi + \int_{\theta}^{\pi} z_{BC}(R,\psi)\,\mathrm{sen}\,\psi\, d\psi + \right.$$
$$\left. + \int_{\pi}^{\pi+\theta} z_{CD}(R,\psi)\,\mathrm{sen}\,\psi\, d\psi + \int_{\pi+\theta}^{2\pi} z_{DA}(R,\psi)\,\mathrm{sen}\,\psi\, d\psi \right\} \qquad (5.31)$$

Tendo em conta que, atendendo a relações geométricas simples e à equação (5.5), as equações de $z(R,\psi)$ relativas a cada um daqueles sub-intervalos são dadas por

$$z_{AB}(R,\psi) = R\cos\psi + q_y - R \tag{5.32}$$

$$z_{BC}(R,\psi) = -q_y \tag{5.33}$$

$$z_{CD}(R,\psi) = R\cos\psi - q_y + R \tag{5.34}$$

$$z_{DA}(R,\psi) = q_y \tag{5.35}$$

as equações (5.30) e (5.31) dão lugar, mediante o recurso a elementares regras de integração, às seguintes expressões para $C_Z(R)$ e $S_Z(R)$

$$C_z(R) = \frac{R}{\pi}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right) \tag{5.36}$$

$$S_z(R) = \frac{R}{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta \tag{5.37}$$

válidas para $R > q_y$. Caso $R \leq q_y$, não ocorrerá qualquer comportamento histerético, podendo verificar-se, de forma análoga, que então

$$C_z(R) = R/2 \tag{5.38}$$

$$S_z(R) = 0 \tag{5.39}$$

Por conseguinte, o problema da análise da resposta do sistema histerético bilinear a que se refere a equação (5.18) pode ser resolúvel, determinando-se de forma iterativa os coeficientes β_e e w_e^2 do sistema linear equivalente definidos pelas equações (5.12), tendo simultaneamente em consideração que os coeficientes $C(R)$ e $S(R)$ intervenientes nessas equações obedecem às relações (5.26), (5.27) e (5.36) a (5.39).

5.4 - A HIPÓTESE RESTRITIVA DE KRYLOV-BOGOLIUBOV E A UTILIDADE DOS MODELOS HISTERÉTICOS DIFERENCIAIS

O método de Caughey, que começou por ser aplicado à análise estocástica da resposta de osciladores não-lineares de 1-GL com comportamento bilinear histerético, de acordo com a formulação anteriormente descrita, foi posteriormente utilizado também com algum

sucesso por Lutes e Takemiya [146, 147, 224] que, mediante a introdução de várias modificações, tornaram possível o tratamento de outras formas de comportamento histerético, designadamente as caracterizadas pelos modelos trilinear e de Ramberg-Osgood.

Por outro lado, Kobori, Minai e Suzuki [132] apresentaram uma generalização do método de Caughey, que procurou ter em consideração a flutuação aleatória sofrida pelos centros dos sucessivos ciclos histeréticos, vulgarmente conhecida por "drift", e que, para além de ser marcada por uma frequência muito baixa, é tanto mais sensível quanto maior for a largura de banda do processo de resposta.

Sucede porém que, quer o método de Caughey, quer todas as formulações dele decorrentes, têm como subjacente a hipótese de Krylov e Bogoliubov, segundo a qual o processo estocástico de resposta é um processo de banda estreita, o que leva a supor como praticamente constante o valor da amplitude e da fase ao longo de cada ciclo de oscilação.

Simplesmente, tal pressuposto só é efectivamente verificado quando os níveis de excitação são bastante baixos, originando respostas maioritariamente no domínio elástico, ou em certos casos de excitações muito elevadas gerando respostas maioritariamente em domínio plástico, como sucede no caso do modelo bilinear. Nesta situação, por exemplo, pode verificar-se através de estudos de simulação que, para valores da rigidez pós-cedência relativamente baixos e para níveis de excitação intermédios, o processo de resposta deixa de poder considerar-se de banda estreita [190].

Por conseguinte, a consideração da hipótese de Krylov-Bogoliubov constitui um aspecto fortemente limitativo do método de Caughey, o qual pode porém ser ultrapassado à custa da consideração de modelos histeréticos diferenciais. Deste modo, traduzindo a evolução dos ciclos histeréticos através de uma equação diferencial não-linear adequada, e adicionando essa equação à equação diferencial que rege o equilíbrio dinâmico do sistema, torna-se viável, utilizando técnicas anteriormente descritas, linearizar as equações obtidas, conseguindo por essa via assegurar a resolução do problema de forma analítica.

Assim, considere-se por exemplo um oscilador histerético de 1-GL cujo movimento é traduzido pela equação

$$m\ddot{q}(t)+c\dot{q}(t)+g(q,t)=p(t) \tag{5.40}$$

Suponha-se também que a força de restituição não-linear $g(q,t)$ é decomposta em duas parcelas, uma elástica e linear, e outra de natureza histerética, de acordo com uma equação do tipo (v. eq. 5.19)

$$g=\alpha kq+(1-\alpha)kz \tag{5.41}$$

sendo z um parâmetro auxiliar, que se admite respeitar uma equação diferencial não-linear traduzida pela relação

$$\dot{z}=\Phi(\dot{q},z) \tag{5.42}$$

Seguindo a técnica de linearização introduzida por Atalik e Utku, o que pressupõe o carácter gaussiano da distribuição conjunta das variáveis $\dot{q}$ e z, esta equação pode ser aproximada pela equação linear equivalente

$$\dot{z}(t)=c_e\dot{q}(t)+k_e z(t) \tag{5.43}$$

em que

$$c_e=E\left[\frac{\partial\Phi(\dot{q},z)}{\partial\dot{q}}\right] \qquad k_e=E\left[\frac{\partial\Phi(\dot{q},z)}{\partial z}\right] \tag{5.44}$$

sendo os coeficientes c_e e k_e dependentes do tempo no caso da resposta não-estacionária.

A análise estocástica da resposta aleatória estacionária do sistema em questão pode então processar-se através da conjugação das equações (5.40), (5.41) e (5.43), o que pode fazer-se por exemplo introduzindo o vector $\underline{u}=[q,z]^T$, concluindo-se então que

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{u}}(t)+\underline{C}_e\,\underline{\dot{u}}(t)+\underline{K}_e\,\underline{u}(t)=\underline{p}(t) \tag{5.45}$$

com

$$\underline{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{C}_e=\begin{bmatrix} c & 0 \\ -c_e & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{K}_e=\begin{bmatrix} \alpha k & (1-\alpha)k \\ 0 & -k_e \end{bmatrix} \qquad \underline{p}(t)=\begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.46}$$

ou, em alternativa, fazendo intervir o vector $\underline{y}=[q,\dot{q},z]^T$, o que dá origem à relação

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{A}_e\underline{y}(t)+\underline{x}(t) \tag{5.47}$$

em que

$$\underline{A}_e=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\alpha k}{m} & -\dfrac{c}{m} & -\dfrac{(1-\alpha)k}{m} \\ 0 & c_e & k_e \end{bmatrix} \qquad x(t)=\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{p(t)}{m} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.48}$$

O primeiro modelo histerético diferencial do tipo $\dot{z}=\Phi(\dot{q},z)$ foi introduzido por Bouc [32], sendo posteriormente generalizado por Wen [247], Noori e Baber [159], Park, Wen e Ang [169], Mochio, Samaras e Shinozuka [155], revestindo-se, por um lado, de uma enorme versatilidade no que respeita à modelação de variadas formas de comportamento histerético, e possibilitando, por outro lado, um eficiente tratamento matemático do problema da análise estocástica da resposta estacionária ou não-estacionária de sistemas não-lineares histeréticos de múltiplos graus de liberdade, em particular no que respeita à linearização do conjunto das equações diferenciais obtidas.

Por estes motivos, será efectuada nos pontos seguintes uma descrição detalhada das características deste modelo, realçando-se em especial as suas grandes potencialidades, o significado dos parâmetros nele intervenientes, e a forma de os quantificar a partir dos resultados de ensaios experimentais.

Complementarmente, serão também referidos outros modelos de natureza diferencial entretanto desenvolvidos, designadamente os modelos bilinear e multilinear, utilizados muito recentemente por Suzuki e Minai [223].

5.5 - DESCRIÇÃO E UTILIZAÇÃO DE MODELOS HISTERÉTICOS DIFERENCIAIS

5.5.1 - O modelo de Bouc-Wen. Sua versatilidade e significado dos parâmetros intervenientes

De acordo com este modelo, a força de restituição não-linear $g(q,t)$, a que se refere a equação (5.40), é decomposta numa componente elástica e linear e noutra de natureza histerética através da relação

$$g = \alpha k q + (1-\alpha) k z \tag{5.49}$$

sendo z um parâmetro endócrino que obedece a uma equação diferencial do tipo

$$\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z) = A\dot{q} - \beta |\dot{q}| |z|^{n-1} z - \gamma \dot{q} |z|^{n} \tag{5.50}$$

em que A, β, γ e n são parâmetros que regulam a configuração do ciclo histerético.

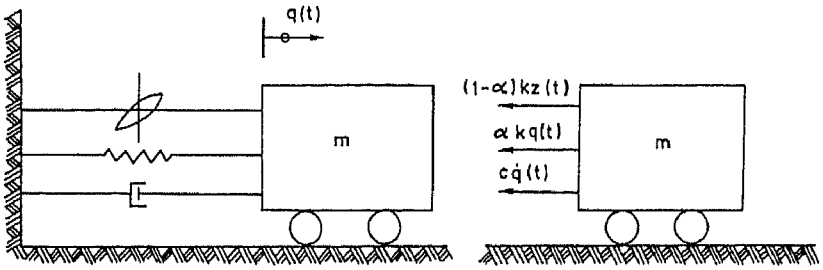


Fig. 5.3 - Representação esquemática de um sistema de 1-GL (Modelo de Bouc-Wen).

Dividindo ambos os membros de (5.50) por $\dot{q}$ obtém-se

$$\frac{dz}{dq} = A - \beta \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}} |z|^{n-1} z - \gamma |z|^{n} \tag{5.51}$$

ou, o que é equivalente, suprimindo os módulos, e tendo em conta as diferentes combinações de sinais possíveis de $\dot{q}$ e z

$$\frac{dz}{dq}=\begin{cases} A-(\beta+\gamma)z^n & , \ \dot{q}\geq 0 \ \wedge \ z\geq 0 \quad (5.52)\\ A+(\beta-\gamma)z^n & , \ \dot{q}<0 \ \wedge \ z\geq 0 \quad (5.53)\\ A+(-1)^{n-1}(\beta+\gamma)z^n & , \ \dot{q}<0 \ \wedge \ z<0 \quad (5.54)\\ A-(-1)^{n-1}(\beta-\gamma)z^n & , \ \dot{q}\geq 0 \ \wedge \ z<0 \quad (5.55)\end{cases}$$

A enorme versatilidade deste modelo pode ser facilmente constatada observando as diferentes configurações possíveis dos ciclos histeréticos traduzidos pela representação gráfica da função $z=z(q)$, correspondente a diversos valores dos parâmetros de controlo A, β, γ e n, quando se impõe ao sistema uma oscilação sinusoidal de certa amplitude.

Supondo, por exemplo, que $A=n=1$, a equação (5.51) pode escrever-se sob a forma

$$\frac{dz}{dq}=1+z[-\beta sgn(\dot{q})-\gamma sgn(z)] \quad (5.56)$$

resultando da sua integração a seguinte expressão para z

$$z=\frac{1}{-\beta sgn(\dot{q})-\gamma sgn(z)}\{C\exp\{q[-\beta sgn(\dot{q})-\gamma sgn(z)]\}-1\} \quad (5.57)$$

ou, o que é equivalente

$$z=\begin{cases} \{C\exp[q(-\beta-\gamma)]-1\}/(-\beta-\gamma) & , \ \dot{q}\geq 0 \ \wedge \ z\geq 0 \quad (5.58)\\ \{C\exp[q(\beta-\gamma)]-1\}/(\beta-\gamma) & , \ \dot{q}<0 \ \wedge \ z\geq 0 \quad (5.59)\\ \{C\exp[q(\beta+\gamma)]-1\}/(\beta+\gamma) & , \ \dot{q}<0 \ \wedge \ z<0 \quad (5.60)\\ \{C\exp[q(-\beta+\gamma)]-1\}/(-\beta+\gamma) & , \ \dot{q}\geq 0 \ \wedge \ z<0 \quad (5.61)\end{cases}$$

em que a constante de integração C pode ser determinada em função de condições iniciais traduzidas por um par de valores (q_o, z_o), obtendo-se que

$$C=\frac{z_o(\pm\beta\pm\gamma)+1}{\exp[q_o(\pm\beta\pm\gamma)]} \quad (5.62)$$

Caso os valores de β e γ levem ao anulamento de algum dos deno-

minadores das equações (5.58) a (5.61), então decorre da equação (5.56) que $dz = dq$, pelo que a evolução de z será linear, sendo traduzida pela equação

$$z = q + C \tag{5.63}$$

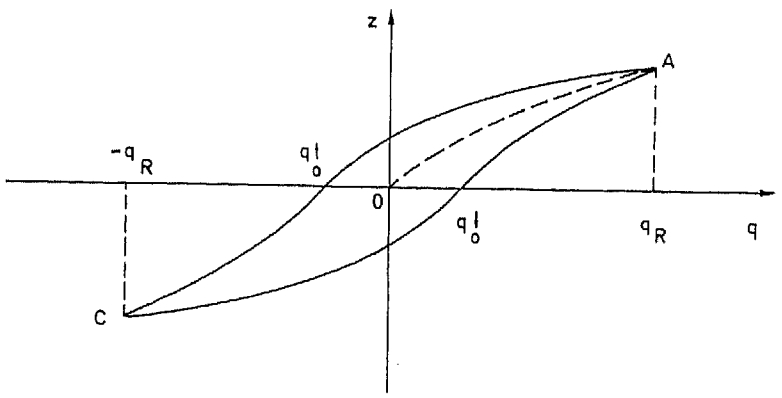


Fig. 5.4 - Evolução de z relativa a uma oscilação sinusoidal de amplitude q_R (curva esqueleto OA).

Por outro lado, os valores de q correspondentes a $z = 0$, associados quer à fase ascendente do ciclo histerético, $q_o^{\uparrow}$, quer à fase descendente, $q_o^{\downarrow}$, podem ser facilmente determinados a partir das equações (5.61) e (5.59), obtendo-se que

$$q_o^{\uparrow} = \frac{\ln(1/C)}{-\beta+\gamma} \qquad q_o^{\downarrow} = \frac{\ln(1/C)}{\beta-\gamma} \tag{5.64}$$

ou, no caso particular dos denominadores destas equações apresentarem valor nulo, através da equação (5.63).

Desta forma, recorrendo às equações (5.58) a (5.64), torna-se possível representar graficamente a evolução sofrida pelo parâmetro endócrino z ao longo de uma oscilação sinusoidal de certa amplitude, para diferentes valores de β e γ.

Na figura 5.5 apresentam-se vários gráficos desse tipo assim obtidos, que permitem compreender a apreciável versatilidade do modelo, no sentido de idealizar as mais diversas formas de comportamento histerético.

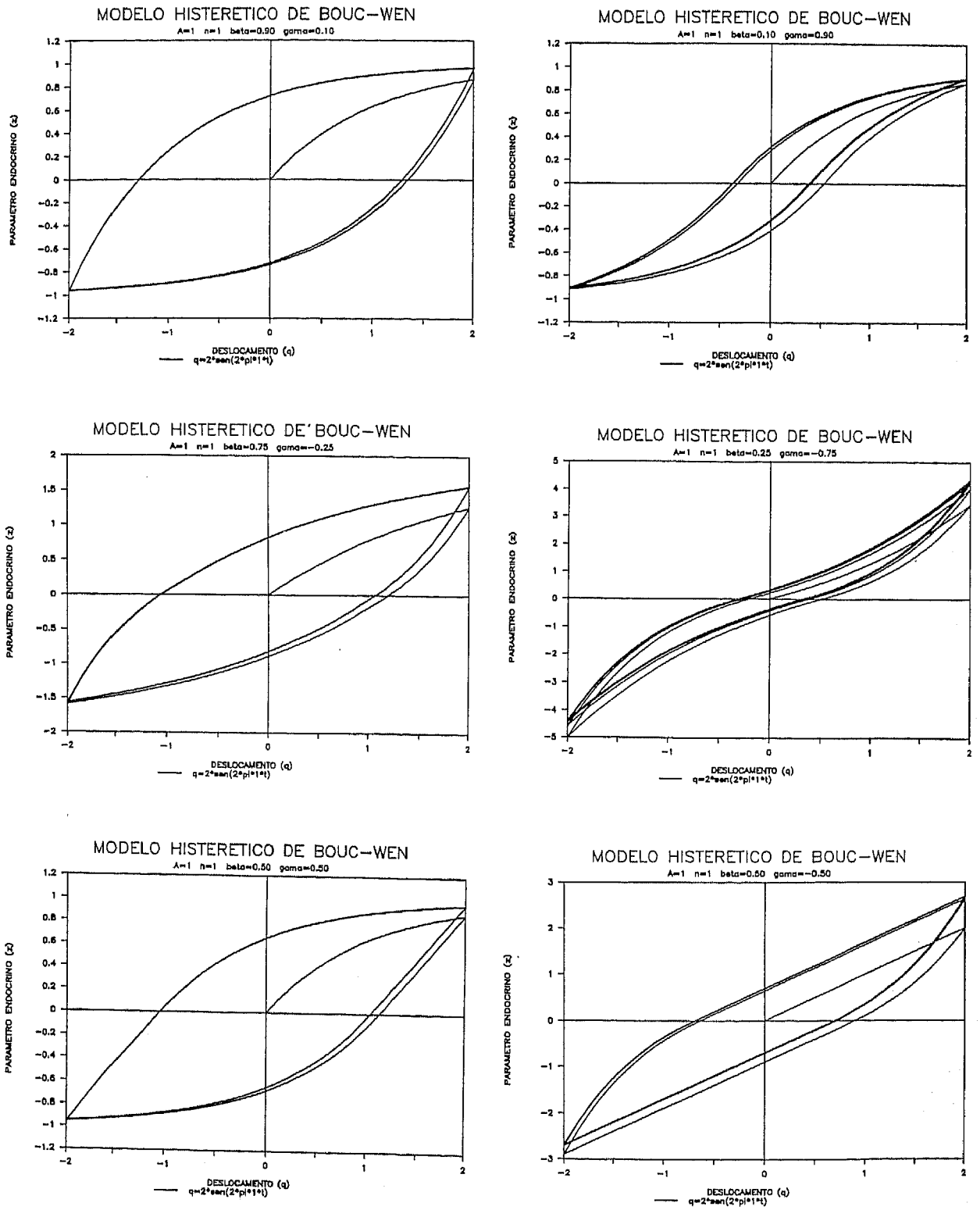


Fig. 5.5 - Evolução de z relativa a uma oscilação sinusoidal de amplitude $q_R = 2$ $(A = n = 1)$.

Estes gráficos servem também para melhor ilustrar as seguintes observações quanto ao efeito das variações dos parâmetros de controlo β e γ, válidas para quaisquer valores de A e n.

O parâmetro β traduz o nível de dissipação de energia por ciclo, sendo nulo no caso de comportamento não-histerético, e assumindo um valor maior que zero caso se registe uma energia dissipada positiva. Do parâmetro γ depende, por seu lado, a idealização de uma forma de comportamento sem endurecimento ou com endurecimento, podendo verificar-se que a ocorrência da primeira situação tem lugar sempre que $\gamma > 0$, ou quando $|\gamma| < |\beta|$ e $\gamma < 0$.

Neste caso também, o crescimento do parâmetro n traduz-se numa tendência para o modelo histerético bilinear elastoplástico, como resulta aliás evidente da observação das figuras 5.6 apresentadas por Baber e Wen [19]. Nelas se encontra representada, para $\beta = \gamma = 0,5$, $A = 1$ ou 2 e n crescente, a curva média correspondente aos ramos ascendente e descendente do ciclo $z = z(q)$ para $\dot{z} \geq 0$, vulgarmente designada por curva esqueleto (v. Fig. 5.4), e cuja equação é dada por (v. eq. 5.52 e 5.53)

$$S(z) = \frac{1}{2}\left\{ \int_0^z \frac{du}{A - (\beta+\gamma)u^n} + \int_0^z \frac{du}{A + (\beta-\gamma)u^n} \right\} \tag{5.65}$$

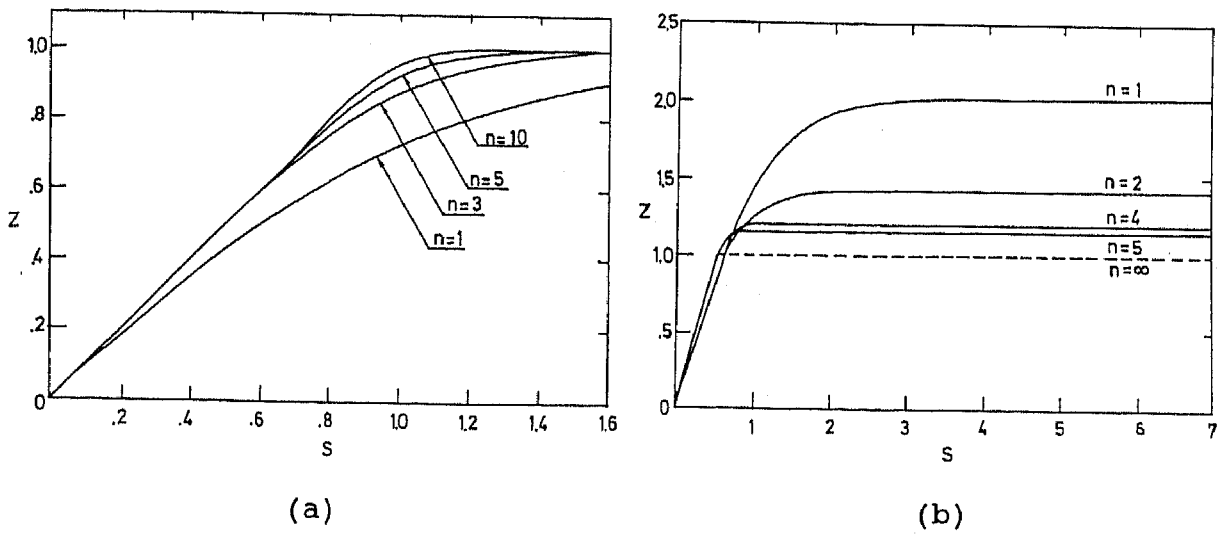


Fig. 5.6 - Evolução da curva esqueleto para valores crescentes de n (a) $\beta = \gamma = 0.5$ e $A = 1$ (b) $\beta = \gamma = 0,5$ e $A = 2$.

Ainda no caso de sistemas sem endurecimento ("soft systems"), constata-se facilmente, através da equação (5.51), que o valor máximo que o parâmetro z pode assumir, e que leva ao anulamento de dz/dq, é dado por

$$z_{máx} = \left(\frac{A}{\beta + \gamma} \right)^{1/n} \tag{5.66}$$

podendo verificar-se que, quando se impõe uma oscilação sinusoidal ao sistema, o valor máximo de z em cada ciclo tende assintoticamente para $z_{máx}$, à medida que a amplitude da oscilação tende para infinito (Fig. 5.7).

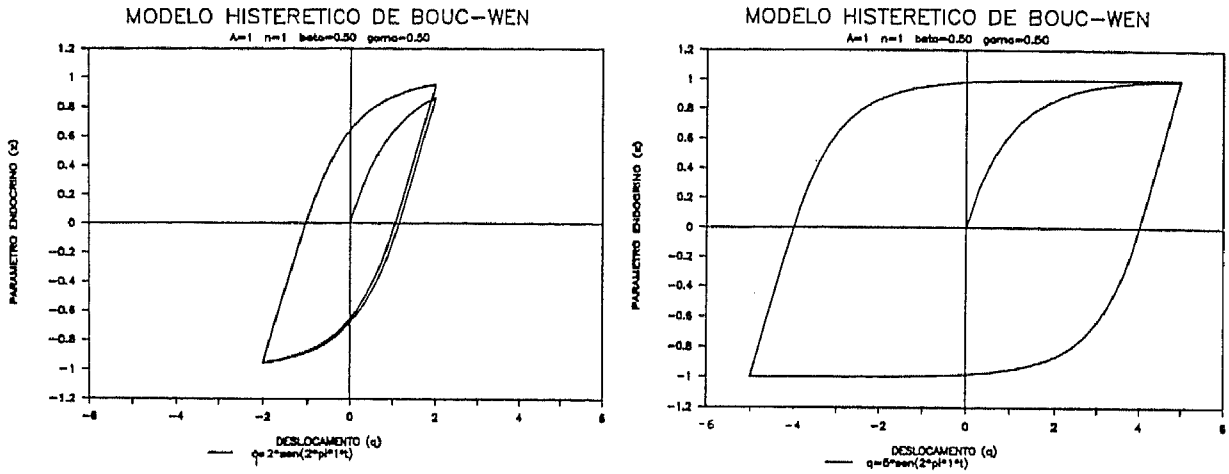


Fig. 5.7 - Representação de $z = z(q)$ relativa a oscilações sinusoidais de diferente amplitude ($A = n = 1$ e $\beta = \gamma = 0,5$).

Por outro lado, atendendo às equações (5.49) e (5.51), torna-se também evidente que a rigidez inicial do sistema é expressa por

$$k_i = \left(\frac{\partial g}{\partial q} \right)_0 = \alpha k + (1 - \alpha) k \left(\frac{\partial z}{\partial q} \right)_0 \tag{5.67}$$

ou seja

$$k_i = \alpha k + (1 - \alpha) k A \tag{5.68}$$

ao passo que a rigidez final ou pós-cedência é dada por

$$k_f = \left(\frac{\partial g}{\partial q}\right)_{z_{max}} = \alpha k + (1-\alpha)k\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)_{z_{max}} \tag{5.69}$$

pelo que

$$k_f = \alpha k \tag{5.70}$$

Por conseguinte, das equações (5.68) e (5.70) pode ainda concluir-se não só que o parâmetro A contribui para a fixação da rigidez inicial do sistema, mas também que α traduz a relação entre a rigidez pós-cedência e a rigidez inicial, caso $A = 1$.

5.5.2 - Consideração da degradação de rigidez e de resistência através do modelo de Baber-Wen

Baber e Wen [19] introduziram um aperfeiçoamento em relação ao modelo anteriormente descrito, no sentido de possibilitar ter ainda em consideração os fenómenos de degradação de rigidez e de resistência, particularmente importantes no domínio das estruturas de betão armado.

Como é compreensível, tais formas de deterioração estrutural são função da energia dissipada por histerese W_d, definida por

$$dW_d = (1-\alpha)kzdq = (1-\alpha)kz\dot{q}dt \tag{5.71}$$

ou, se se preferir, por

$$\dot{W}_d = (1-\alpha)kz\dot{q} \tag{5.72}$$

Por conseguinte, e atendendo ao significado dos parâmetros A e $z_{máx}$, a idealização da degradação de rigidez sem degradação de resistência poderia efectuar-se expressando A através de uma função decrescente da energia dissipada W_d, mantendo-se z_{max} constante, ao passo que a degradação de resistência poderia ser modelada exprimindo também $z_{máx}$ através de uma função daquele tipo, mas deixando invariante o valor de A.

A via utilizada por Baber e Wen para traduzir estas duas formas de deterioração estrutural consistiu na introdução de dois parâmetros adicionais ν e η, transformando a equação (5.50) em

$$\dot{z} = [A\dot{q} - \nu(\beta |\dot{q}||z|^{n-1} z + \gamma \dot{q} |z|^{n})]/\eta \qquad (5.73)$$

Definindo os parâmetros A, ν e η como funções monótonas da energia dissipada através das relações

$$A(W_d) = A_o - \delta_A W_d$$

$$\nu(W_d) = 1 + \delta_\nu W_d \qquad (5.74)$$

$$\eta(W_d) = 1 + \delta_\eta W_d$$

em que A_o é um valor inicial e δ_A, δ_ν e δ_η são constantes a fixar de forma adequada, torna-se efectivamente possível simular aqueles dois tipos de degradação, já que incrementar o valor de ν equivale a aumentar β e γ sem afectar A, o que por (5.66) conduz a uma redução de $z_{máx}$, ao passo que aumentar η equivale a reduzir A, β e γ em proporção, o que leva naturalmente a uma redução de rigidez (v. eq. 5.68) sem alteração da resistência (v. eq. 5.66).

No sentido de possibilitar uma fácil visualização do efeito de δ_A, δ_ν e δ_η sobre a deterioração do comportamento estrutural, apresentam-se na figura 5.8 três gráficos correspondentes a um sistema caractrizado por $A_o = n = 1$ e $\beta = \gamma = 0,5$, podendo analisar-se separadamente o efeito de cada um daqueles parâmetros.

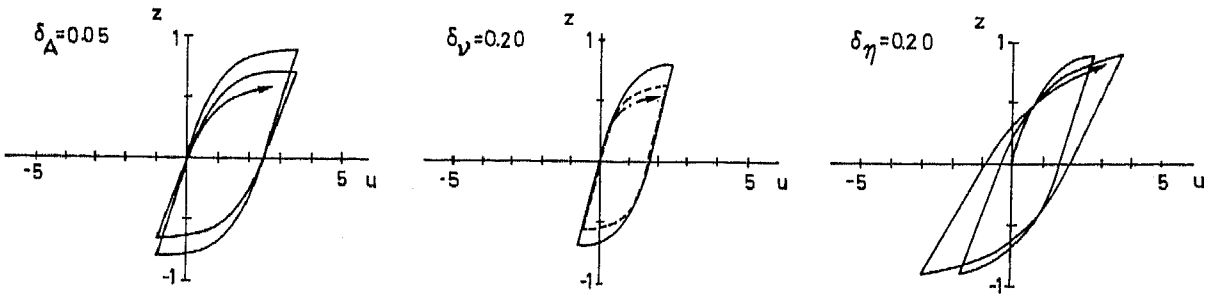


Fig. 5.8 - Efeito dos parâmetros δ_A, δ_ν e δ_η [19].

Destes gráficos, resulta pois evidente o contributo de δ_ν para a degradação de resistência, de δ_η para a degradação de rigidez e de δ_A para a deterioração conjunta de rigidez e resistência do sistema.

5.5.3 - Identificação dos parâmetros do modelo de Baber-Wen e sua validação experimental

Um aspecto da maior importância, no que respeita à utilização dos modelos diferenciais anteriormente descritos para simulação de situações reais, consiste na possibilidade de definição adequada dos seus parâmetros caracterizadores, por forma a haver garantia de uma boa aproximação entre o comportamento do modelo e o comportamento do sistema real idealizado.

Nesse sentido, pode recorrer-se a uma técnica de identificação de sistemas histeréticos utilizada por Sues [220], e que se baseia na obtenção experimental de uma sequência de pares de valores (q_i, z_i).

Com efeito, começando por supôr a inexistência de degradação estrutural, e integrando a equação (5.51), obtém-se que

$$z(q_i) = z_o + AI_{1i} - \beta I_{2i} - \gamma I_{3i} \tag{5.75}$$

sendo

$$I_{1i} = \int_{q_o}^{q_i} dq$$

$$I_{2i} = \int_{q_o}^{q_i} \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}} |z|^{n-1} z\, dq \tag{5.76}$$

$$I_{3i} = \int_{q_o}^{q_i} |z|^n dq$$

Por conseguinte, uma vez conhecida por via experimental uma sequência de pares de valores (q_i, z_i), e arbitrando um valor apropriado para n, torna-se não só possível quantificar numericamente os integrais I_{1i}, I_{2i} e I_{3i}, como também expressar o erro quadrático total entre os valores teóricos $z(q_i)$ e os valores medidos z_i, através da relação

$$\epsilon = \sum_i (z_o + AI_{1i} - \beta I_{2i} - \gamma I_{3i} - z_i)^2 \tag{5.77}$$

Aplicando então o método dos mínimos quadrados, que impõe como condições necessárias para a minimização desse erro que

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial A}=0 \qquad \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta}=0 \qquad \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma}=0 \tag{5.78}$$

obtém-se o seguinte sistema de três equações, que possibilita a determinação dos valores dos parâmetros A, β e γ

$$\begin{bmatrix} \sum_i I_{1i}^2 & -\sum_i I_{1i}I_{2i} & -\sum_i I_{1i}I_{3i} \\ -\sum_i I_{2i}I_{1i} & \sum_i I_{2i}^2 & -\sum_i I_{2i}I_{3i} \\ -\sum_i I_{3i}I_{1i} & -\sum_i I_{3i}I_{2i} & \sum_i I_{3i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_i I_{1i}(z_i - z_o) \\ -\sum_i I_{2i}(z_i - z_o) \\ -\sum_i I_{3i}(z_i - z_o) \end{Bmatrix} \tag{5.79}$$

No caso de haver degradação de rigidez, traduzida pelas equações (5.73) e (5.74), a equação (5.51) dá lugar a

$$\frac{dz}{dq}=\left[A_o-\delta_A W_d-(1+\delta_\nu W_d)\left(\beta\frac{|\dot{q}|}{\dot{q}}|z|^{n-1}z+\gamma|z|^n\right)\right]/(1+\delta_\eta W_d) \tag{5.80}$$

tornando-se o problema de identificação dos parâmetros bastante mais difícil.

No entanto, a questão pode ser substancialmente simplificada, caso se suponham já conhecidos os valores de β e γ através da formulação anteriormente descrita, e os valores de n e δ_η sejam arbitrados de forma apropriada.

Nestas condições, integrando a equação (5.80), e aplicando de forma idêntica o método dos mínimos quadrados, pode obter-se o seguinte sistema de 3 equações, cuja solução conduz ao conhecimento dos parâmetros A_o, δ_A e δ_ν

$$\begin{bmatrix} \sum_i I_{5i}^2 & -\sum_i I_{5i}I_{6i} & -\sum_i I_{5i}S_{1i} \\ -\sum_i I_{5i}I_{6i} & \sum_i I_{6i}^2 & \sum_i I_{6i}S_{1i} \\ -\sum_i I_{5i}S_{1i} & \sum_i I_{6i}S_{1i} & \sum_i S_{1i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_o \\ \delta_A \\ \delta_\nu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_i I_{5i}S_{2i} \\ -\sum_i I_{6i}S_{2i} \\ -\sum_i S_{1i}S_{2i} \end{Bmatrix} \tag{5.81}$$

em que

$$S_{1i}=\beta I_{7i}+\gamma I_{8i}$$

$$S_{2i}=z_i-z_o+\beta I_{9i}+\gamma I_{10i} \tag{5.82}$$

e

$$I_{5i} = \int_{q_o}^{q_i} \frac{dq}{1 + \delta_\eta W_d}$$

$$I_{6i} = \int_{q_o}^{q_i} \frac{W_d}{1 + \delta_\eta W_d} dq$$

$$I_{7i} = \int_{q_o}^{q_i} W_d \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}} \frac{|z|^{n-1}}{1 + \delta_\eta W_d} dq \qquad (5.83)$$

$$I_{8i} = \int_{q_o}^{q_i} W_d \frac{|z|^n}{1 + \delta_\eta W_d} dq$$

$$I_{9i} = \int_{q_o}^{q_i} \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}} \frac{|z|^{n-1} z}{1 + \delta_\eta W_d} dq$$

$$I_{10i} = \int_{q_o}^{q_i} \frac{|z|^n}{1 + \delta_\eta W_d} dq$$

A confirmação da correcção e utilidade desta técnica de identificação dos parâmetros caracterizadores do modelo foi realizada por Sues [222], que para o efeito considerou diversos registos temporais de excitações, quer de carácter sinusoidal, quer de natureza sísmica. Determinando as correspondentes histórias temporais da resposta de um sistema de 1-GL idealizado através dos modelos de Bouc-Wen ou de Baber-Wen, com parâmetros pré-definidos, e aplicando posteriormente a técnica de identificação descrita, foi possível na maioria dos casos obter valores dos parâmetros muito próximos dos inicialmente arbitrados, validando deste modo o método proposto.

Um outro aspecto da maior importância consiste naturalmente na própria validação do modelo diferencial utilizado, ou seja em saber se a sua aplicação aproxima de forma suficientemente satisfatória a realidade.

No sentido de realçar a boa aproximação conseguida, confrontam-se na figura 5.9 as relações força-deslocamento relativas a um pórtico de betão armado, decorrentes quer de uma análise experimental realizada

por Gulkan e Sozen [108], quer da modelação realizada por Sues [222] com base no modelo de Baber-Wen, sendo notória a boa concordância conseguida.

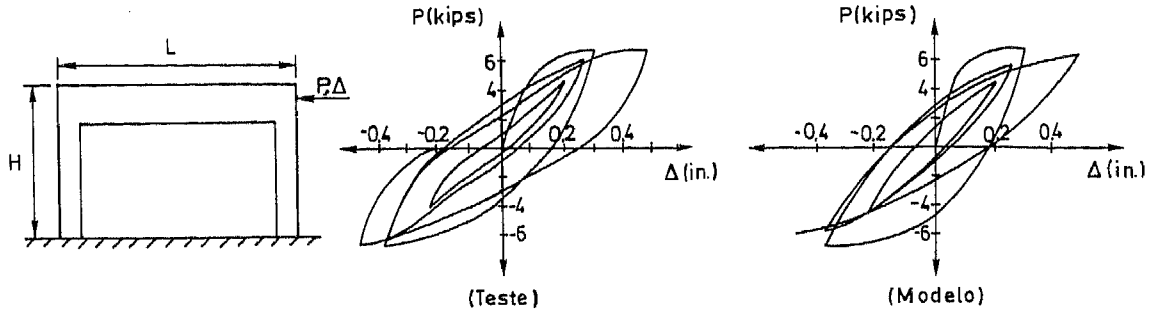


Fig. 5.9 - Validação experimental do modelo de Baber-Wen [222].

Tendo também por base diversos ensaios experimentais, que possibilitaram a identificação dos valores dos parâmetros de controlo do modelo de Baber-Wen mais ajustados à tradução de diversas situações reais, Sues concluiu ainda ser recomendável a adopção dos valores $A=1$, $n=1$, $\alpha=0,04$ e $\beta=\gamma$ para estruturas de aço, e $A=1$, $n=2$, $\alpha=0,02$ e $\beta=-3\gamma$ $(\gamma<0)$ para estruturas de betão armado.

5.5.4 - Linearização do modelo diferencial de Baber-Wen

Os modelos diferenciais de Bouc-Wen e de Baber-Wen baseiam-se na introdução de um parâmetro auxiliar z, que se admite respeitar uma equação diferencial não-linear do tipo

$$\dot{z}=\Phi(\dot{q},z) \tag{5.84}$$

havendo interesse, do ponto de vista da análise do comportamento dinâmico de sistemas histeréticos através do método de linearização estocástica equivalente, em proceder à sua linearização através da relação

$$\dot{z}(t)=c_e(t)\dot{q}(t)+k_e(t)z(t) \tag{5.85}$$

como aliás foi já referido na secção 5.4.

No caso do modelo de Baber-Wen, os coeficientes da equação linear, c_e e k_e, podem ser obtidos mediante a aplicação das condições (5.44) à equação (5.73), podendo pois escrever-se que

$$c_e = E\left\{\left[\frac{\partial A}{\partial \dot{q}}\dot{q} + A - \frac{\partial \nu}{\partial \dot{q}}(\beta|\dot{q}||z|^{n-1}z + \gamma\dot{q}|z|^n) - \right.\right.$$
$$-\nu\left(\beta\frac{\partial|\dot{q}|}{\partial\dot{q}}|z|^{n-1}z + \gamma|z|^n\right)\Big]/\eta -$$
$$\left.\left.-[A\dot{q} - \nu(\beta|\dot{q}||z|^{n-1}z + \gamma\dot{q}|z|^n)]\frac{\partial\eta}{\partial\dot{q}}/\eta^2\right\}\right. \qquad (5.86)$$

$$k_e = E\left\{\left[\frac{\partial A}{\partial z}\dot{q} - \frac{\partial \nu}{\partial z}(\beta|\dot{q}||z|^{n-1}z + \gamma\dot{q}|z|^n) - \right.\right.$$
$$-\nu\left(\beta|\dot{q}|\frac{\partial}{\partial z}|z|^{n-1}z + \gamma\dot{q}\frac{\partial}{\partial z}|z|^n\right)/\eta -$$
$$\left.\left.-[A\dot{q} - \nu(\beta|\dot{q}||z|^{n-1}z + \gamma\dot{q}|z|^n)]\frac{\partial\eta}{\partial z}/\eta^2\right\}\right. \qquad (5.87)$$

em que os parâmetros A, ν e η são função da energia dissipada do sistema (v. eq. 5.74), a qual respeita a equação diferencial (5.72).

O cálculo dos valores médios a que se referem as equações (5.86) e (5.87), que não é nada simples, mesmo supondo que as variáveis $\dot{q}$ e z têm uma distribuição normal, pode no entanto ser substancialmente simplificado, caso se admita que os parâmetros A, ν e η têm uma lenta evolução monótona, associada a valores relativamente baixos dos coeficientes δ_A, δ_ν e δ_η, hipótese que é perfeitamente aceitável desde que a degradação estrutural não se processe muito rapidamente. Nesse caso, A, ν e η podem ser substituídos pelos respectivos valores médios m_A, m_ν e m_η, tornando-se também desprezáveis todas as derivadas parciais daqueles parâmetros em ordem a $\dot{q}$ e z, pelo que as equações (5.86) e (5.87) dão lugar às seguintes equações aproximadas

$$c_e \cong E\left\{\left[m_A - m_\nu\left(\beta\frac{\partial|\dot{q}|}{\partial\dot{q}}|z|^{n-1}z + \gamma|z|^n\right)\right]/m_\eta\right\} \qquad (5.88)$$

$$k_e \cong E\left\{\left[-m_\nu\left(\beta|\dot{q}|\frac{\partial}{\partial z}|z|^{n-1}z + \gamma q\frac{\partial}{\partial z}|z|^n\right)\right]/m_\eta\right\} \qquad (5.89)$$

Os valores médios m_A, m_ν e m_η obtêm-se aplicando o operador valor médio a ambos os membros das equações (5.74), resultando que

$$m_A = A_o - \delta_A m_{W_d} \qquad m_\nu = 1 + \delta_\nu m_{W_d} \qquad m_\eta = 1 + \delta_\eta m_{W_d} \tag{5.90}$$

sendo, por outro lado, o valor médio da energia dissipada regulado pela equação (v. eq. 5.72)

$$\dot{m}_{W_d} = (1-\alpha) k E[z\dot{q}] \tag{5.91}$$

Deste modo, tendo em consideração o suposto carácter gaussiano das variáveis $\dot{q}$ e z, e admitindo que o processo de resposta tem valor médio nulo, os valores médios indicados nas equações (5.88) e (5.89) podem ser calculados, obtendo-se para c_e e k_e as seguintes expressões [19]

$$c_e = [m_A - m_\nu(\beta F_1 + \gamma F_2)]/m_\eta \tag{5.92}$$

$$k_e = -m_\nu(\beta F_3 + \gamma F_4)/m_\eta \tag{5.93}$$

em que os coeficientes F_1, F_2, F_3 e F_4 podem ser expressos em função das características estatísticas da resposta através das seguintes relações

$$\begin{aligned}
F_1 &= E\left[\frac{\partial|\dot{q}|}{\partial\dot{q}}|z|^{n-1}z\right] = \frac{\sigma_z^n}{\pi}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)2^{n/2}I_s \\
F_2 &= E[|z|^n] = \frac{\sigma_z^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)2^{n/2} \\
F_3 &= E\left[|\dot{q}|\frac{\partial}{\partial z}|z|^{n-1}z\right] \\
&= \frac{n\sigma_{\dot{q}}\sigma_z^{n-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)2^{n/2}\left\{\frac{2(1-\rho_{\dot{q}z}^2)^{\frac{n+1}{2}}}{n} + \rho_{\dot{q}z}I_s\right\} \\
F_4 &= E\left[\dot{q}\frac{\partial}{\partial z}|z|^n\right] \\
&= \frac{n}{\sqrt{\pi}}\rho_{\dot{q}z}\sigma_{\dot{q}}\sigma_z^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)2^{n/2}
\end{aligned} \tag{5.94}$$

em que

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx \qquad , \quad n>0 \tag{5.95}$$

é a conhecida função gama, e

$$I_s=2\int_l^{\pi/2} \operatorname{sen}^n\theta d\theta \tag{5.96}$$

com

$$l=arctg\left(\frac{\sqrt{1-\rho_{\dot{q}z}^2}}{\rho_{\dot{q}z}}\right) \tag{5.97}$$

5.5.5 - Resposta de sistemas de 1-GL caracterizados pelo modelo de Baber-Wen a excitações aleatórias de média nula

A linearização do modelo histerético de Baber-Wen, traduzida pela substituição da equação diferencial não-linear (5.73) pela equação linear (5.85), cujos coeficientes c_e e k_e podem ser conhecidos através das equações (5.92) a (5.97), torna viável uma abordagem simples e eficiente da análise da resposta aleatória de um sistema histerético de 1-GL idealizado através deste modelo, utilizando para o efeito a técnica iterativa característica do método de linearização estocástica equivalente, já anteriormente descrita.

Com efeito, recorrendo à equação (5.47), que condensa as equações (5.40), (5.41) e (5.43), ou seja

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{A}_e\underline{y}(t)+\underline{x}(t) \tag{5.98}$$

com

$$\underline{y}(t)=\begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} \qquad \underline{A}_e=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha k}{m} & -\frac{c}{m} & -\frac{(1-\alpha)k}{m} \\ 0 & c_e & k_e \end{bmatrix} \qquad x(t)=\begin{Bmatrix} 0 \\ p(t)/m \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.99}$$

e começando por supor que a excitação actuante tem carácter estacionário e valor médio nulo, e que a degradação estrutural é des-

prezável, o problema pode ser facilmente resolúvel, começando por arbitrar valores iniciais para c_e e k_e.

Dessa forma, a matriz $\underline{A}_e$ fica perfeitamente determinada, tornando-se possível a quantificação da matriz de covariância instantânea da resposta $\underline{\mu}_y$, seguindo uma formulação própria de sistemas lineares, podendo posteriormente, a partir dos seus elementos, calcular-se os valores corrigidos de c_e e k_e a considerar na iteração seguinte com base nas equações (5.92) a (5.97), e assim sucessivamente até que se atinja a desejada convergência.

Porém, no caso de excitações não-estacionárias de média nula, ou mesmo no caso de excitações estacionárias, mas em que a degradação estrutural não seja desprezável, o problema torna-se mais complicado, já que nessas circunstâncias a resposta do sistema é sempre não-estacionária, levando a que os coeficientes de linearização c_e e k_e, bem como a matriz $\underline{A}_e$, sofram uma variação ao longo do tempo.

Nessa situação, as características probabilísticas da resposta têm de ser avaliadas ao longo de sucessivos instantes de tempo, verificando-se que, no caso de uma excitação idealizada através de um ruído branco evolutivo, caracterizado pelo produto de uma função de modulação determinística $\theta(t)$ por um processo estocástico estacionário de valor médio nulo e densidade espectral de potência constante S_o, a matriz de covariância instantânea da resposta obedece à equação (v. eq. 4.154)

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \tag{5.100}$$

em que

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta(t)^2 S_o/m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.101}$$

Desse modo, o sistema de equações diferenciais (5.100) deve ser integrado numericamente, actualizando em cada instante de forma iterativa a matriz $\underline{A}_e(t)$, cujos coeficientes $c_e(t)$ e $k_e(t)$ dependem das

características estatísticas da resposta, de acordo com as equações (5.92) a (5.97).

A forma mais simples de incluir também o efeito da degradação de rigidez e de resistência, traduzida pela consideração de parâmetros A, ν e η dependentes da energia dissipada W_d (v. eq. 5.74), consiste em adicionar à equação (5.100) a equação (5.91)

$$\dot{m}_{W_d} = (1-\alpha)kE[z\dot{q}] \tag{5.102}$$

O problema pode então ser resolvido integrando numericamente o sistema de equações diferenciais de primeira ordem definido pelas equações (5.100) e (5.102), actualizando em cada instante de forma iterativa os valores médios dos parâmetros A, ν e η através das equações (5.90), e seguidamente os valores dos coeficientes de linearização $c_e(t)$ e $k_e(t)$ com base nas equações (5.92) a (5.97).

Não sendo a excitação actuante do tipo ruído branco, esta pode ser interpretada como a resposta de um filtro a uma excitação daquele tipo, havendo então simplesmente que proceder à ampliação do sistema de equações diferenciais (5.98), por forma a traduzir o equilíbrio dinâmico do conjunto sistema-filtro, como aliás foi já anteriormente referido em casos análogos.

5.5.6 - Consideração de excitações de valor médio não-nulo

Na dedução das equações (5.92) a (5.97), que fornecem os valores dos coeficientes c_e e k_e relativos à linearização do modelo de Baber-Wen, foi suposta a hipótese de que as variáveis $\dot{q}$ e z obedecem a uma distribuição bidimensional de Gauss com valores médios nulos, tendo os valores médios indicados nas equações (5.88) e (5.89) sido calculados com base na função densidade de probabilidade conjunta correspondente.

Tal sucede, evidentemente, desde que o processo de excitação apresente também valor médio nulo, dada a natureza simétrica do tipo de não-linearidade traduzida pelo modelo diferencial em questão. Simplesmente, casos há em que esse valor médio é não-nulo, acarretando

a necessidade de introdução de algumas modificações, à semelhança do que foi já anteriormente referido em 4.5.5, para que possam continuar a ser utilizadas as equações (5.92) a (5.97) na linearização do modelo.

Assim, decompondo quer o processo de excitação, quer o de resposta através das relações

$$p(t)=p_o(t)+m_p(t) \tag{5.103}$$

$$q(t)=q_o(t)+m_q(t) \tag{5.104}$$

$$z(t)=z_o(t)+m_z(t) \tag{5.105}$$

substituindo (5.104) em (5.40), e aplicando o operador $E[\ ]$ a ambos os membros resulta que

$$E[g(q_o+m_q,t)]=m_p(t) \tag{5.106}$$

Subtraindo membro a membro as equações (5.40) e (5.106), obtém-se pois que

$$m\ddot{q}_o(t)+c\dot{q}_o(t)+h(q_o,m_q,t)=p_o(t) \tag{5.107}$$

sendo a função não-linear $h(q_o,m_q,t)$ definida por

$$h(q_o,m_q,t)=g(q_o+m_q,t)-E[g(q_o+m_q,t)] \tag{5.108}$$

verificando-se pois que

$$E[h(q_o,m_q,t)]=0 \tag{5.109}$$

Sendo também a função g decomponível através da equação (5.41), a equação (5.106) permite ainda concluir que

$$\alpha k m_q(t)+(1-\alpha)k m_z(t)=m_p(t) \tag{5.110}$$

Por outro lado, podendo também a função h ser decomposta através da relação

$$h=\alpha k q_o+(1-\alpha)k z_o \tag{5.111}$$

a equação (5.107) pode escrever-se

$$m\ddot{q}_o(t)+c\dot{q}_o(t)+\alpha k q_o(t)+(1-\alpha)k z_o(t)=p_o(t) \tag{5.112}$$

Por conseguinte, a linearização do modelo pode ser conseguida recorrendo à equação

$$\dot{z}_o(t) = c_e(t)\dot{q}_o(t) + k_e(t)z_o(t) \tag{5.113}$$

sendo o valor dos coeficientes $c_e(t)$ e $k_e(t)$ encontrado mediante o recurso às equações (5.92) a (5.97), referentes a processos de resposta de valor médio nulo. Para tal, no entanto, deve seguir-se uma técnica iterativa, começando por arbitrar valores iniciais para $c_e(t)$, $k_e(t)$, $m_q(t)$ e $m_z(t)$. Uma vez conhecidos esses valores, e podendo as equações (5.112) e (5.113) expressar-se sob a forma (v. eq. 5.47)

$$\dot{\underline{y}}_o(t) = \underline{A}_e(t)\underline{y}_o(t) + \underline{x}_o(t) \tag{5.114}$$

em que

$$\underline{y}_o(t) = \begin{Bmatrix} q_o(t) \\ \dot{q}_o(t) \\ z_o(t) \end{Bmatrix} \quad \underline{A}_e(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\alpha k}{m} & -\dfrac{c}{m} & -\dfrac{(1-\alpha)k}{m} \\ 0 & c_e(t) & k_e(t) \end{bmatrix} \quad \underline{x}_o(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_o(t)/m \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.115}$$

pode determinar-se a composição da matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y(t)$, utilizando técnicas de análise de sistemas lineares já anteriormente descritas.

Dessa forma, fica inteiramente caracterizada a distribuição de probabilidade de Gauss relativa às variáveis $(q_o, \dot{q}_o, z_o)$, podendo não só calcular-se valores corrigidos de $c_e(t)$ e $k_e(t)$ a utilizar na iteração seguinte através das equações (5.92) a (5.97), como também quantificar novos valores de $m_q(t)$ e de $m_z(t)$ com base nas equações (5.109) e (5.110), fazendo prosseguir este processo até que esteja assegurada a indispensável convergência.

5.5.7 - Idealização do efeito de "pinching" através do modelo de Noori-Baber-Wen

Embora os fenómenos de "pinching" possam ser observados em vários materiais e em diversas situações (combinações de esforços), eles são

muito evidentes em elementos de betão armado sujeitos a elevados esforços transversos (Fig. 5.10).

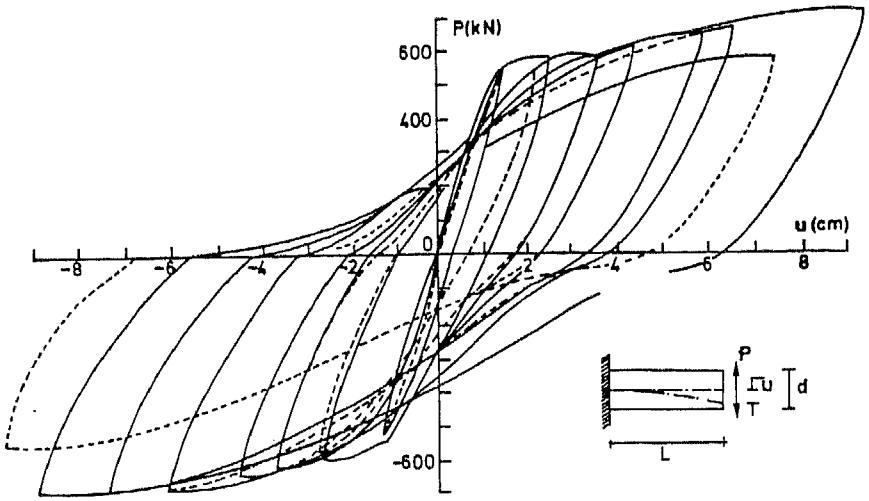


Fig. 5.10 - Observação experimental do efeito de "pinching".

Uma outra virtualidade do modelo diferencial de Baber-Wen consiste na possibilidade da sua modificação no sentido de contemplar também este efeito, responsável aliás por uma redução da capacidade de dissipação de energia dos elementos estruturais.

Um modo de idealizar tal forma de comportamento histerético consiste em recorrer ao modelo de Noori-Baber-Wen [159], traduzido esquematicamente pela figura 5.11, o qual resulta da introdução de

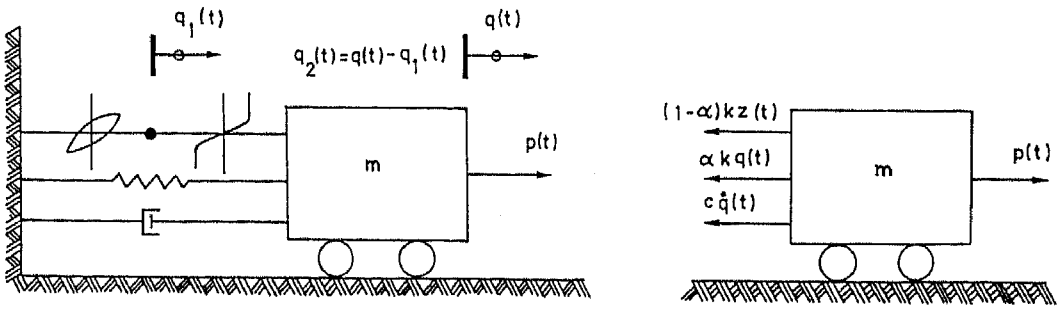


Fig. 5.11 - Sistema histerético de 1-GL com efeito de "pinching" (modelo de Noori-Baber-Wen).

um novo elemento de ligação ao exterior, para além dos três já considerados no modelo de Baber-Wen.

Esse novo elemento, que apresenta características de endurecimento, e se encontra ligado em série ao elemento histerético de Baber-Wen, condiciona a resposta $q(t)$ do sistema à excitação actuante, sendo a sua contribuição traduzida por

$$q_2 = \lambda arctg(z/\xi) \tag{5.116}$$

ao passo que a força de restituição não-linear $g(q,t)$ se supõe caracterizada pela equação

$$g = \alpha k q + (1-\alpha) k z \tag{5.117}$$

obedecendo, neste caso, o parâmetro auxiliar z à equação diferencial não-linear

$$\dot{z} = [A\dot{q}_1 - \nu(\beta|\dot{q}_1||z|^{n-1} z + \gamma \dot{q}_1 |z|^n)]/\eta \tag{5.118}$$

em que

$$q_1(t) = q(t) - q_2(t) \tag{5.119}$$

Os parâmetros λ e ξ, intervenientes na equação (5.116), caracterizam o efeito de "pinching" idealizado, sendo este sentido para valores de q_2 tanto mais elevados, quanto maior é o valor de λ, e levando a uma configuração tanto mais aguçada do ciclo histerético, quanto menor é o valor de ξ.

Estes dois parâmetros são também definidos como funções crescentes da energia dissipada através das relações

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_o + \delta_\lambda W_d \\ \xi &= \xi_o + \delta_\xi W_d \end{aligned} \tag{5.120}$$

por forma a melhor traduzir a deterioração estrutural.

Uma forma de confirmar que o modelo de Noori-Baber-Wen traduz de forma adequada a inclusão do efeito de "pinching" consiste em procurar representar graficamente a evolução sofrida pelo parâmetro z ao longo de variações cíclicas da resposta.

Para tal, pode admitir-se, por exemplo, uma variação sinusoidal para q_1, tornando-se então possível obter a correspondente evolução dos valores de z, mediante integração da equação (5.118), tal como foi referido em 5.5.1, e posteriormente a determinação dos respectivos valores de q_2 e q através das equações (5.116) e (5.119). Os parâmetros λ e ξ, caracterizadores do efeito de "pinching", podem ser ciclicamente actualizados através das equações (5.120) e (5.71), por forma a ter em consideração a deterioração estrutural.

Deste modo, Noori [159] pôde obter as representações gráficas traduzidas pela figura 5.12, obtidas numa situação em que foi desprezado o efeito da degradação de rigidez e de resistência, sendo os seguintes os valores dos principais parâmetros do modelo: $A = 1$, $\beta = \gamma = 0,5$, $\lambda_o = 0$, $\delta_\lambda = 0,5$, $\xi_o = 0,125$ e $\delta_\xi = 0$.

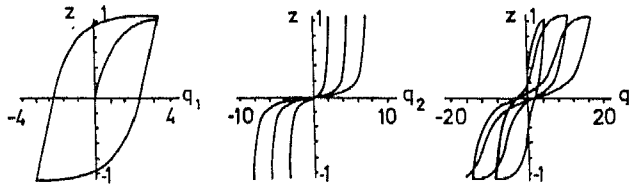


Fig. 5.12 - Representação gráfica das relações (z, q_1), (z, q_2) e (z, q) para uma variação sinusoidal de q_1.

Introduzindo também a degradação de rigidez e de resistência através dos parâmetros $\delta_A = \delta_\nu = \delta_\eta = 0,01$, e supondo $\lambda_o = 0$, $\delta_\lambda = 0,2$, $\xi_o = 0,05$ e $\delta_\xi = 0$, pode por sua vez obter-se a representação gráfica da relação (z, q) correspondente a uma variação sinusoidal de q_1, expressa pela figura 5.13 [160].

Da observação desta figura, e da sua comparação qualitativa com a figura 5.10, pode pois constatar-se a justeza do modelo de Noori-Baber-Wen como forma de idealização do comportamento histerético de elementos estruturais em que o efeito de "pinching" seja significativo.

Este modelo apresenta igualmente a assinalável virtude de ser matematicamente tratável, tornando-se viável a sua linearização e a

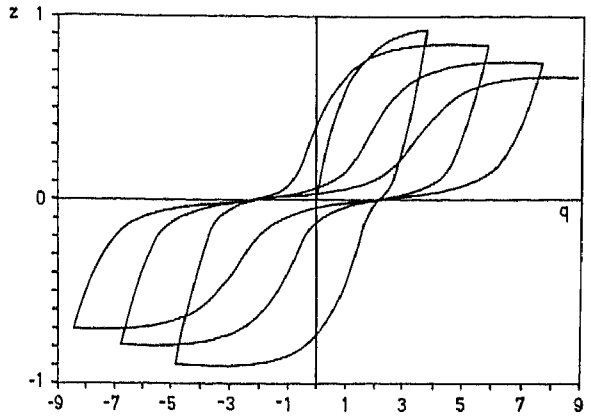


Fig. 5.13 - Efeito da deterioração estrutural em termos de rigidez, resistência e de efeito de "pinching".

análise estocástica da resposta a excitações aleatórias estacionárias ou não-estacionárias.

Antes de proceder à sua linearização, convém, no entanto, introduzir uma modificação em relação às expressões anteriormente apresentadas, que consiste em tomar derivadas em ordem ao tempo da equação (5.116), conjugando a expressão resultante com a equação (5.118), obtendo-se assim que

$$\dot{q}_2 = \left(\frac{\lambda\xi}{\xi^2+z^2}\right).[A\dot{q}_1 - \nu(\beta|\dot{q}_1||z|^{n-1}z + \gamma\dot{q}_1|z|^n)]/\eta \qquad (5.121)$$

Deste modo, introduzindo o vector

$$\underline{y} = [q, \dot{q}, z, q_1, q_2]^T \qquad (5.122)$$

as equações (5.40), (5.41), (5.118), (5.119) e (5.121), que traduzem o movimento do sistema de 1-GL e a natureza do seu comportamento histerético, podem escrever-se sob a forma

$$\dot{y}_1 = y_2 \qquad (5.123)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{c}{m}y_2 - \frac{\alpha k}{m}y_1 - \frac{(1-\alpha)}{m}ky_3 + \frac{p(t)}{m} \qquad (5.124)$$

$$\dot{y}_3 = [A\dot{y}_4 - \nu(\beta|\dot{y}_4||y_3|^{n-1}y_3 + \gamma|y_3|^n\dot{y}_4)]/\eta \qquad (5.125)$$

$$\dot{y}_4 = y_2 - \dot{y}_5 \tag{5.126}$$

$$\dot{y}_5 = \left(\frac{\lambda\xi}{\xi^2 + y_3^2}\right).[A\dot{y}_4 - (\beta|\dot{y}_4||y_3|^{n-1}y_3 + \gamma\dot{y}_4|y_3|^n)]/\eta \tag{5.127}$$

Sendo as equações (5.125) e (5.127) manifestamente não-lineares, elas podem ser aproximadas por equações lineares do tipo

$$\dot{y}_3 = c_{e_3}\dot{y}_4 + k_{e_3}y_3 \tag{5.128}$$

$$\dot{y}_5 = c_{e_5}\dot{y}_4 + k_{e_5}y_3 \tag{5.129}$$

utilizando a técnica de linearização estocástica equivalente, e determinando os coeficientes c_{e_3}, k_{e_3}, c_{e_5} e k_{e_5} através das condições de Atalik e Utku. No que respeita a c_{e_3} e k_{e_3}, podem obter-se directamente expressões analíticas destes coeficientes, supondo nulo o valor médio do processo de resposta, tal como foi descrito em 5.5.4. Já em relação a c_{e_5} e k_{e_5}, seguindo procedimento semelhante, apenas é possível obter expressões que permitem a sua quantificação em função de σ_{y_3}, $\sigma_{\dot{y}_4}$ e $\rho_{y_3\dot{y}_4}$ com recurso a métodos numéricos, e que por serem relativamente longas se apresentem no Apêndice B.

Deste modo, conjugando por um lado as equações (5.128), (5.129) e (5.126), e tendo por outro lado em conta as equações (5.123) e (5.124), pode obter-se que

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e(t)\underline{y}(t) + \underline{x}(t) \tag{5.130}$$

sendo

$$\underline{A}_e(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha k}{m} & -\frac{c}{m}y_2 & -\frac{(1-\alpha)}{m}k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{e_3}}{1+c_{e_5}} & k_{e_3} - \frac{c_{e_3}k_{e_5}}{1+c_{e_5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+c_{e_5}} & -\frac{k_{e_5}}{1+c_{e_5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{e_5}}{1+c_{e_5}} & \frac{k_{e_5}}{1+c_{e_5}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{p(t)}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.131}$$

Por conseguinte, sendo a excitação idealizada através de um ruído branco ou ruído branco evolutivo, a evolução temporal da matriz de covariância instantânea da resposta $\underline{\mu}_y$ é regida pela equação

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \tag{5.132}$$

em que a matriz $\underline{S}_o(t)$ depende das densidades espectrais de potência do processo de excitação $p(t)$.

Nestas condições, a análise da resposta do sistema pode ser efectuada ao longo de sucessivos instantes de tempo, caso a resposta seja não-estacionária, integrando numericamente o sistema de equações diferenciais (5.132), simultaneamente com a equação (v. eq. 5.102)

$$\dot{m}_{W_d} = (1-\alpha)k\mu_{y_2y_3} \tag{5.133}$$

se se tiver em consideração a degradação estrutural, actualizando-se em cada instante de forma iterativa quer os valores dos coeficientes de linearização c_{e_3}, k_{e_3}, c_{e_5} e k_{e_5}, quer os valores médios dos parâmetros A, ν, η, λ e ξ, susceptíveis de traduzirem a degradação do sistema ao longo do tempo.

A única dificuldade que aparentemente se levanta resulta do facto de o cálculo dos valores corrigidos dos coeficientes de linearização envolver o conhecimento prévio de σ_{y_3}, $\sigma_{\dot{y}_4}$ e $\rho_{y_3\dot{y}_4}$, pois que se, da resolução das equações (5.132) e (5.133), se obtém, em cada iteração, directamente o valor de σ_{y_3}, já o mesmo não sucede com $\sigma_{\dot{y}_4}$ e $\rho_{y_3\dot{y}_4}$.

Esse problema pode, no entanto, ser rapidamente ultrapassado, tendo em conta que, da quarta equação traduzida pelo sistema (5.130), se pode facilmente concluir que

$$\sigma^2_{\dot{y}_4} = \left(\sigma^2_{y_2} - 2k_{e_5}\rho_{y_2y_3}\sigma_{y_2}\sigma_{y_3} + k^2_{e_5}\sigma^2_{y_3}\right)/(1+c_{e_5})^2 \tag{5.134}$$

$$\rho_{y_3\dot{y}_4} = (\rho_{y_2y_3}\sigma_{y_2}/\sigma_{\dot{y}_4} - k_{e_5}\sigma_{y_3}/\sigma_{\dot{y}_4})/(1+c_{e_5}) \tag{5.135}$$

No sentido de colocar em evidência a boa aproximação conseguida pela aplicação do método de linearização estocástica equivalente na análise da resposta de um sistema de 1-GL, cujo comportamento histerético seja idealizado através do modelo de Noori-Baber-Wen,

apresentam-se na figura 5.14 gráficos [160] representativos da evolução temporal dos valores de σ_q e $\sigma_{\dot{q}}$ obtidos por esta via, e através de técnicas de simulação digital com base em 250 realizações distintas, para um caso em que $A = 1$, $\beta = \gamma = 0,5$, $\lambda_o = 0$, $\delta_\lambda = 0,5$, $\xi_o = 0,125$ e $\delta_\xi = 0$, sendo o coeficiente de amortecimento igual a 0,02 e a excitação pseudo-não-estacionária, caracterizada por uma densidade espectral constante S_o. Da sua observação, pode pois constatar-se, para além de uma satisfatória compatibilidade global de resultados, que é mesmo nas situações em que a excitação actuante assume maior intensidade que as diferenças relativas encontradas são menos significativas, verificando-se, em contrapartida, que, para baixos níveis de excitação, a linearização equivalente tende a conduzir a estimativas por defeito de σ_q e $\sigma_{\dot{q}}$.

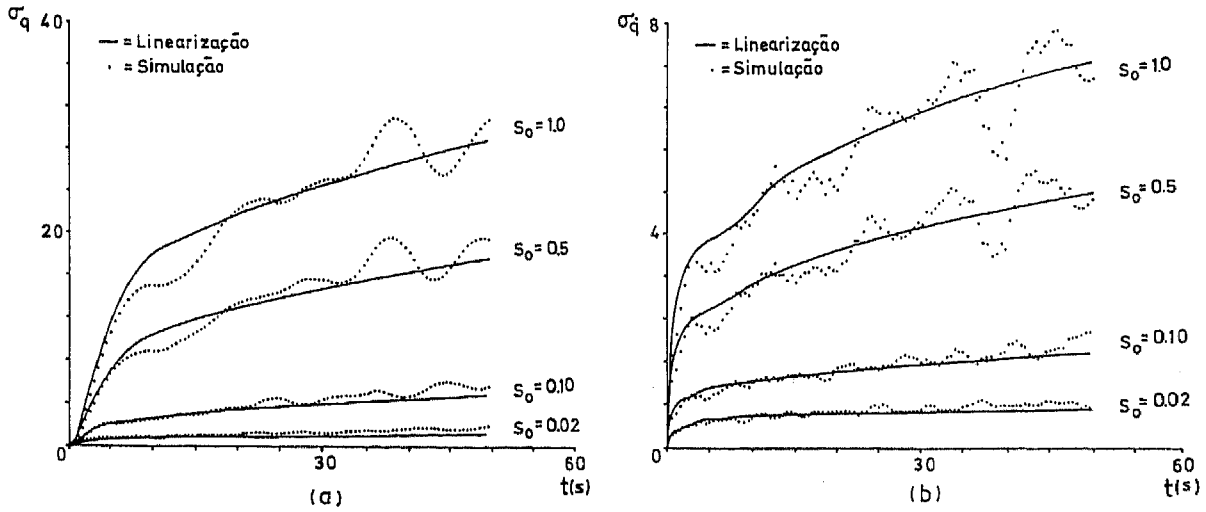


Fig. 5.14 - Evolução temporal de σ_q e de $\sigma_{\dot{q}}$.

5.5.8 - O modelo bi-axial de Park-Wen

Estudos analíticos e experimentais realizados [169] com base em colunas de aço e de betão armado sujeitas a carregamentos cíclicos em duas direcções ortogonais mostraram existir uma significativa interacção entre as forças de restituição bi-axial em regime não-linear.

Sendo a excitação sísmica caracterizada, em particular, por duas componentes horizontais do movimento de base, tendentes a induzir o funcionamento bi-axial de muitas das peças lineares constituintes das estruturas dos edifícios, há naturalmente toda a conveniência em dispor de modelos histeréticos que idealizem suficientemente bem esta forma de comportamento, e que sejam ao mesmo tempo matematicamente tratáveis do ponto de vista da análise estocástica do comportamento dinâmico das estruturas.

Ora sucede que o modelo de Bouc-Wen, para além dos aspectos positivos já anteriormente mencionados, revela ainda a vantagem adicional de se adaptar à caracterização do comportamento histerético bi-axial, mediante a introdução de determinadas modificações introduzidas por Park [169].

Considere-se então um sistema histerético de 2-GL sujeito a uma excitação bi-direccional, podendo o respectivo equilíbrio dinâmico ser traduzido pela equação

$$\underline{m}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{c}\dot{\underline{q}}(t)+\underline{g}(\underline{q},t)=\underline{p}(t) \tag{5.136}$$

em que

$$\underline{q}^T=[q_x,q_y] \qquad \underline{g}^T=[g_x,g_y] \qquad \underline{p}^T=[p_x,p_y] \tag{5.137}$$

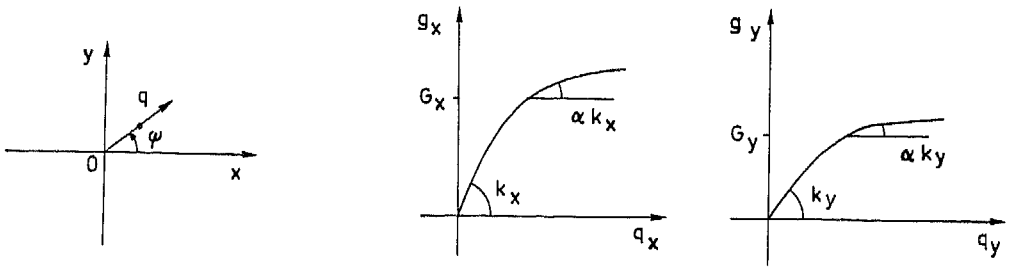
As forças de restituição podem neste caso ser objecto da seguinte decomposição

$$\underline{g}=\alpha\underline{k}\underline{q}+(1-\alpha)\underline{k}\underline{z} \tag{5.138}$$

em que $\underline{k}$ é uma matriz associada à definição da rigidez inicial e $\underline{z}=[z_x,z_y]^T$ é um vector constituído por dois parâmetros que, segundo Park, devem satisfazer as seguintes equações diferenciais, no caso de forças histeréticas de restituição isotrópicas

$$\dot{z}_x=A\dot{q}_x-\beta|\dot{q}_x z_x|z_x-\gamma\dot{q}_x z_x^2-\beta|\dot{q}_y z_y|z_x-\gamma\dot{q}_y z_x z_y \tag{5.139}$$

$$\dot{z}_y=A\dot{q}_y-\beta|\dot{q}_y z_y|z_y-\gamma\dot{q}_y z_y^2-\beta|\dot{q}_x z_x|z_y-\gamma\dot{q}_x z_x z_y \tag{5.140}$$



a) b)

Fig. 5.15 - (a) Deslocamento uniaxial q;
(b) Sistema não-isotrópico.

Introduzindo uma conversão para coordenadas polares através das relações

$$q_x = q\cos\psi \qquad q_y = q\,\mathrm{sen}\,\psi \qquad z_x = z\cos\psi \qquad z_y = z\,\mathrm{sen}\,\psi \tag{5.141}$$

em que q e z representam o deslocamento uniaxial e o parâmetro endócrino do modelo correspondente a uma direcção caracterizada pelo ângulo ψ em relação ao eixo ox, as equações (5.139) e (5.140) reduzem-se à forma característica do modelo uniaxial de Bouc-Wen com $n = 2$, isto é

$$\dot{z} = A\dot{q} - \beta\,|\dot{q}z|\,z - \gamma\dot{q}z^2 \tag{5.142}$$

independentemente do valor de ψ, o que significa que essas expressões representam efectivamente um modelo histerético bi-direccional isotrópico.

No caso de as formas de comportamento histerético serem diferentes segundo duas direcções ortogonais ox e oy, pode utilizar-se a seguinte transformação no sentido de procurar reduzir o sistema a um sistema equivalente isotrópico

$$g_y' = \frac{G_x}{G_y} g_y \qquad q_y' = \frac{k_y G_x}{k_x G_y} q_y \tag{5.143}$$

representando k_x e k_y os valores das rigidezes iniciais, e G_x e G_y as resistências de cedência consideradas (Fig. 5.15b).

Segundo Park [169], subsituindo g_y por g'_y e q_y por q'_y, as equações (5.136), (5.138), (5.139) e (5.140) continuam a poder ser utilizadas para descrever o comportamento dinâmico do sistema não-isotrópico.

Esta forma de idealização do comportamento histerético bi-axial foi também comparada com resultados colhidos experimentalmente [168], podendo visualizar-se através da figura 5.16 a boa aproximação conseguida.

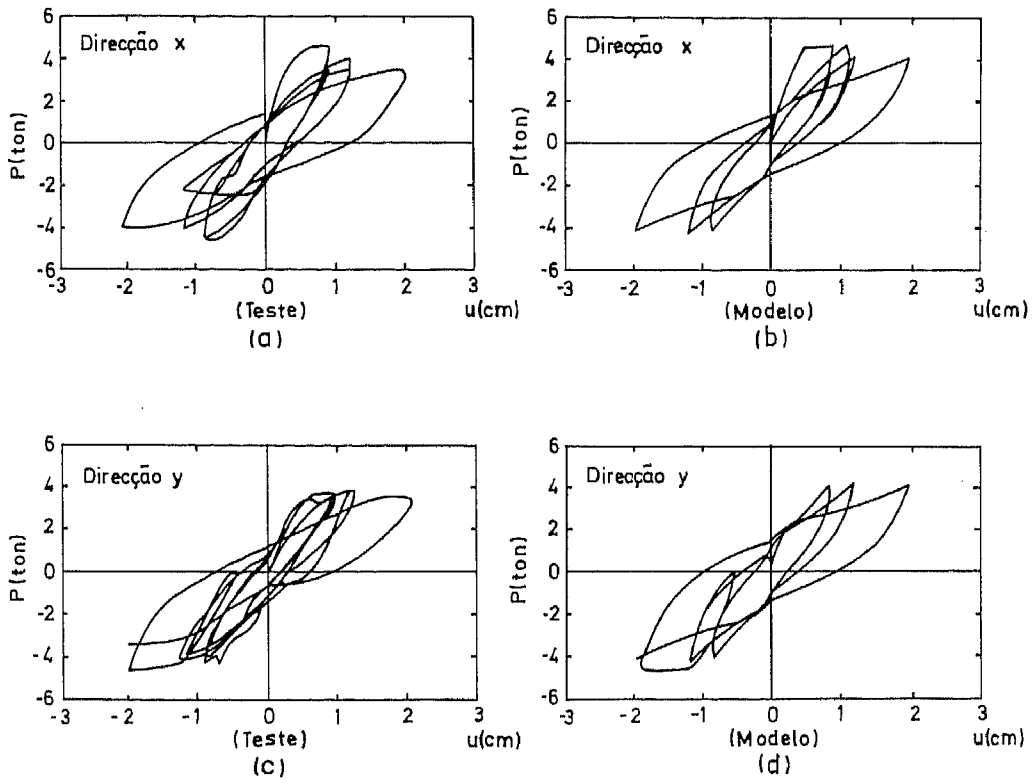


Fig. 5.16 - Validação experimental do modelo de Park-Wen.

À semelhança dos modelos diferenciais anteriormente descritos, o modelo de Park-Wen é também matematicamente tratável, podendo proceder-se à linearização das equações (5.139) e (5.140) sob a forma

$$\dot{z}_x = C_{x1}\dot{q}_x + C_{x2}z_x + C_{x3}\dot{q}_y + C_{x4}z_y \tag{5.144}$$

$$\dot{z}_y = C_{y1}\dot{q}_y + C_{y2}z_y + C_{y3}\dot{q}_x + C_{y4}z_x \tag{5.145}$$

em que os coeficientes C_{x1}, C_{x2}, C_{x3} e C_{x4} são dados pelas relações

seguintes [169], no caso de o processo de resposta ter valor médio nulo

$$C_{x1} = A - \sigma_{z_x}^2 \left(\frac{2\gamma}{\pi} \phi_x - \frac{\gamma}{\pi} \operatorname{sen} 2\phi_x \right) \tag{5.146}$$

$$C_{x2} = -\sigma_{\dot{q}_x} \sigma_{z_x} \left[\frac{4\gamma}{\pi} \left(1 - \rho_{\dot{q}_x z_x}^2 \right)^{3/2} + \rho_{\dot{q}_x z_x} \left(\frac{4\gamma}{\pi} \phi_x - \frac{2\gamma}{\pi} \operatorname{sen} 2\phi_x \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\gamma}{\pi} (\cos \psi_x + \psi_x \rho_{\dot{q}_x z_x}) \right] \tag{5.147}$$

$$C_{x3} = -\sigma_{z_x} \sigma_{z_y} \rho_{z_x z_y} \gamma \qquad C_{x4} = -\sigma_{\dot{q}_y} \sigma_{z_y} \rho_{\dot{q}_y z_x} \gamma \tag{5.148}$$

com

$$\phi_x = arctg \left[-\left(1 - \rho_{\dot{q}_x z_x}^2 \right)^{1/2} / \rho_{\dot{q}_x z_x} \right] \qquad \psi_x = arcsen (\rho_{\dot{q}_x z_x}) \tag{5.149}$$

ao passo que os coeficientes C_{y1}, C_{y2}, C_{y3} e C_{y4} se obtêm trocando os índices x por y.

Deste modo, supondo as matrizes $\underline{m}$, $\underline{c}$ e $\underline{k}$ diagonais com $m_{11} = m_{22} = m$, $c_{11} = c_{22} = c$, $k_{11} = k_x$ e $k_{22} = k_y$, e introduzindo o vector

$$\underline{y}^T = [q_x, \dot{q}_x, z_x, q_y, \dot{q}_y, z_y] \tag{5.150}$$

as equações (5.136), (5.138), (5.144) e (5.145) podem escrever-se sob a forma

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e(t) \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \tag{5.151}$$

com

$$\underline{A}_e(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha \frac{k_x}{m} & -\frac{c}{m} & -\frac{(1-\alpha)}{m} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{x_1} & C_{x_2} & 0 & C_{x_3} & C_{x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha k_y}{m} & -\frac{c}{m} & -\frac{(1-\alpha)}{m} k_y \\ 0 & C_{y_3} & C_{y_4} & 0 & C_{y_1} & C_{y_2} \end{bmatrix} \qquad x(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{p_x(t)}{m} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{p_y(t)}{m} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.152}$$

podendo, pois, a análise da resposta processar-se utilizando a técnica iterativa característica da aplicação prática do método de linearização estocástica equivalente, tal como foi já anteriormente referido em 5.5.5, 5.5.6 e 5.5.7.

É ainda de assinalar que a técnica de identificação de sistemas, descrita em 5.5.3 com vista à determinação dos parâmetros do modelo histerético de Baber-Wen, pode ser facilmente generalizada por forma a possibilitar também a quantificação dos parâmetros de controlo do modelo bi-axial de Park-Wen, de acordo aliás com a formulação recentemente desenvolvida por Ang e Wen [252].

5.5.9 - O modelo de Mochio-Samaras-Wen para problemas planos de tensão ou de deformação

Uma outra extensão muito recente do modelo diferencial de Baber-Wen consiste na tentativa de abordagem de problemas de estado de tensão ou de deformação planos. Essa generalização foi ensaiada por Mochio, Samaras e Shinozuka [155] que, referindo-se a um problema de estado de tensão plano, consideraram as relações tensões-extensões expressas através das equações

$$\begin{aligned}(1-\nu^2)\tau_x &= E[\alpha_x\epsilon_x+(1-\alpha_x)z_x]+E\nu\epsilon_y\\ (1-\nu^2)\tau_y &= E[\alpha_y\epsilon_y+(1-\alpha_y)z_y]+E\nu\epsilon_x\\ \tau_{xy} &= G[\alpha_{xy}\epsilon_{xy}+(1-\alpha_{xy})z_{xy}]\end{aligned} \qquad (5.153)$$

em que E e G representam os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, ν o coeficiente de Poisson, $\underline{\tau}=[\tau_x,\tau_y,\tau_{xy}]^T$ o vector das componentes de tensão, e $\underline{\epsilon}=[\epsilon_x,\epsilon_y,\epsilon_{xy}]^T$ o vector das componentes de deformação, sendo z_x, z_y e z_{xy} parâmetros auxiliares que obedecem genericamente a equações diferenciais do tipo

$$\dot{z}_* = A_*\dot{\epsilon}_* - \beta_*|\dot{\epsilon}_*||z_*|^{n_*-1}z_* - \gamma_*\dot{\epsilon}_*|z_*|^{n_*} \qquad (5.154)$$

$$(*=x,y,xy)$$

Estas equações diferenciais não-lineares podem ser linearizadas sob a forma

$$\dot{z}_* = c_{e*}\dot{\epsilon}_* + k_{e*}z_* \tag{5.155}$$

com recurso às condições de Atalik-Utku, obtendo-se desse modo expressões já conhecidas para c_{e*} e k_{e*} em função das características estatísticas da resposta.

Este procedimento que, conjugado com uma formulação de elementos finitos, permite analisar a resposta aleatória de sistemas contínuos [155], parece no entanto enfermar de uma deficiência decorrente da não consideração de qualquer forma de interacção entre os três parâmetros auxiliares z_x, z_y e z_{xy}, aspecto que aliás não foi descurado por Park no caso do modelo bi-axial e cuja importância foi comprovada por Takizawa e Aoyama [226].

5.5.10 - Os modelos diferenciais multilineares de Suzuki e Minai

Como se viu anteriormente, o modelo diferencial de Bouc-Wen, bem como os modelos modificados subsequentes devidos a Baber, Noori e Park, constituem excelentes formas de idealização do comportamento histerético, dotadas de uma grande versatilidade e susceptíveis de reproduzir com boa aproximação o comportamento de sistemas histeréticos analisados experimentalmente, apresentando também a assinalável vantagem de possibilitarem a aplicação do método de linearização estocástica equivalente à análise da resposta de sistemas não-lineares histeréticos sem recurso à aproximação de Krylov e Bogoliubov, podendo obter-se directamente expressões analíticas dos coeficientes de linearização em função das características estatísticas da resposta.

No entanto, Suzuki e Minai [223] introduziram muito recentemente outras formas de caracterização diferencial de diversos modelos histeréticos constituídos por troços lineares, entre os quais se inclui o modelo bilinear já referido em 5.3.

Neste caso, por exemplo, o parâmetro auxiliar z, a que se refere a equação (5.41), deve respeitar a seguinte equação diferencial

$$\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z) = \dot{q}[1 - U(\dot{q})U(z - q_y) - U(-\dot{q})U(-z - q_y)] \qquad (5.156)$$

em que $U(\ )$ é a função de Heaviside, e q_y representa o valor de q correspondente ao início de cedência, sendo fácil verificar que ela traduz correctamente o ciclo histerético elasto-plástico a que se refere a figura 5.2(a).

De forma análoga, também os modelos multilineares são susceptíveis de uma caracterização diferencial através das relações

$$z = \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_{i+1}) z_i \qquad (5.157)$$

$$\dot{z}_i = \Phi(\dot{q}, z_i) = \dot{q}[1 - U(\dot{q})U(z_i - q_{y_i}) - U(-\dot{q})U(z_i - q_{y_i})] \qquad (5.158)$$

em que r_i representa a rigidez do troço de ordem i $(i = 1, \ldots, n+1)$, e z_i é o parâmetro auxiliar associado a cada um dos n ciclos histeréticos elasto-plástico perfeitos, que por sobreposição geram o comportamento multilinear, e aos quais correspondem deslocamentos de início de cedência designados por q_{y_i}.

O modelo bilinear diferencial traduzido pela equação (5.156) é também matematicamente tratável do ponto de vista da aplicação do método de linearização estocástica equivalente. Com efeito, e referindo-nos, para exemplificação, à componente histerética elasto-plástica perfeita normalizada indicada na figura 5.17, a que corresponde a equação

$$\dot{z} = \dot{q}[1 - U(\dot{q})U(z - 1) - U(-\dot{q})U(-z - 1)] \qquad (5.159)$$

esta pode ser aproximada pela equação linear

$$\dot{z} = c_e \dot{q} + k_e z \qquad (5.160)$$

em que os coeficientes de linearização obedecem às seguintes relações, de acordo com as condições de Atalik-Utku

$$c_e = E\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}\right] = E\{[1 - U(\dot{q})U(z-1) - U(-\dot{q})U(-z-1)] +$$

$$+ \dot{q}[1 - \delta(\dot{q})U(z-1) + \delta(\dot{q})U(-z-1)]\} \qquad (5.161)$$

$$k_e = E\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right] = E\{\dot{q}[1 - U(\dot{q})\delta(z-1) + U(-\dot{q})\delta(-z-1)]\} \qquad (5.162)$$

sendo $\delta(\ )$ a função impulso.

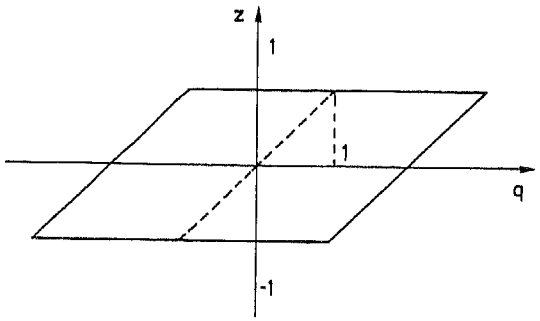


Fig. 5.17 - Componente histerética elasto-plástica perfeita normalizada.

Por conseguinte, sendo $p(\dot{q}, z)$ a função densidade de probabilidade conjunta relativa às variáveis $\dot{q}$ e z, supostas gaussianas de valor médio nulo

$$c_e = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - U(\dot{q})U(z-1) - U(-\dot{q})U(-z-1)]p(\dot{q}, z)d\dot{q}dz +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}[1 - \delta(\dot{q})U(z-1) + \delta(\dot{q})U(-z-1)]p(\dot{q}, z)d\dot{q}dz \qquad (5.163)$$

Tendo em conta que pelas propriedades da função impulso

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x)dx = 0 \qquad (5.164)$$

e que $E[\dot{q}] = 0$, conclui-se pois que o segundo integral duplo indicado na equação (5.163) assume valor nulo, pelo que, atendendo também à definição da função de Heaviside, se pode escrever que

$$c_e = 1 - \int_{1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} p(\dot{q}, z)d\dot{q}dz - \int_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{0} p(\dot{q}, z)d\dot{q}dz \qquad (5.165)$$

ou

$$c_e = 1 - 2\int_1^{\infty} \int_0^{\infty} p(\dot{q},z)d\dot{q}dz \tag{5.166}$$

Por outro lado, no que respeita a k_e, tendo novamente em conta que o valor médio $E[\dot{q}]$ é nulo, bem como as propriedades da função $U(\ )$, facilmente se conclui que

$$k_e = -\int_0^{\infty} \dot{q}\,p(\dot{q},1)d\dot{q} + \int_{-\infty}^{0} \dot{q}\,p(\dot{q},-1)d\dot{q} \tag{5.167}$$

ou seja

$$k_e = -2\int_0^{\infty} \dot{q}\,p(\dot{q},1)d\dot{q} \tag{5.168}$$

Deste modo, as equações (5.166) e (5.168) possibilitam a determinação dos coeficientes de linearização, uma vez conhecida a distribuição probabilística da resposta através da função densidade de probabilidade de Gauss $p(\dot{q},z)$, o que naturalmente viabiliza a análise da resposta do sistema mediante o recurso a uma técnica iterativa.

O cálculo de c_e e k_e é facilitado tendo em conta que [195]

$$\int_1^{\infty} \int_0^{\infty} p(\dot{q},z)d\dot{q}dz = a\sqrt{\frac{\pi}{2bc}}\int_{\sqrt{c}}^{\infty} \exp[-(1-\rho_{\dot{q}z})x^2][1+erf(\rho_{\dot{q}z}x)]dx \tag{5.169}$$

$$\int_0^{\infty} \dot{q}\,p(\dot{q},1)d\dot{q} = \frac{a}{b}\exp(e^2-c)\left[\frac{1}{2}\exp(-e^2) + \rho_{\dot{q}z}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+\exp e)\right] \tag{5.170}$$

em que

$$a = \frac{1}{2\pi\sqrt{f}} \qquad b = \frac{\sigma_z^2}{2f} \qquad c = \frac{\sigma_{\dot{q}}^2}{2f} \tag{5.171}$$

$$d = \frac{\rho_{\dot{q}z}\sigma_{\dot{q}}\sigma_z}{2f} \qquad e = \frac{d}{\sqrt{b}} \qquad f = \sigma_{\dot{q}}^2\sigma_z^2(1-\rho_{\dot{q}z}^2) \tag{5.172}$$

constatando-se, pois, que o cálculo de k_e pode efectuar-se directamente com base na solução analítica fornecida pela equação (5.170), ao passo

que a determinação de c_e obriga a uma integração numérica com base na equação (5.169).

O arranque do processo iterativo pode processar-se supondo inicialmente nulos os valores de $\sigma_{\dot{q}}$ e σ_z, o que equivale a tomar para valores iniciais dos coeficientes de linearização $c_e = 1$ e $k_e = 0$, tendo em conta as equações (5.166) e (5.168).

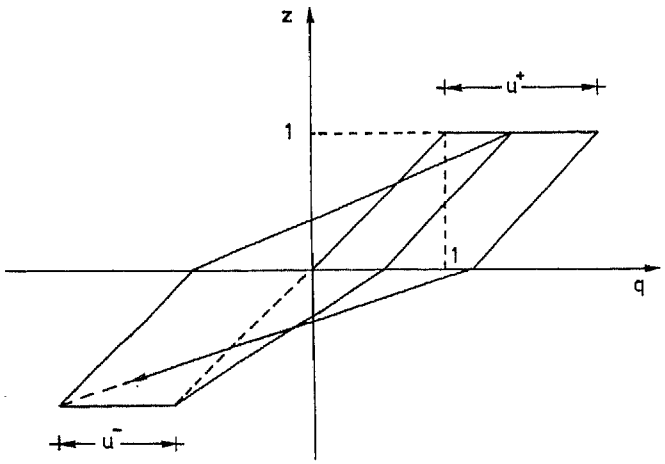


Fig. 5.18 - Componente histerética de Clough normalizada.

É ainda interessante realçar que, muito recentemente, Suzuki e Minai introduziram também formas de caracterização diferencial de variados modelos histeréticos, entre os quais se destaca, pelo seu maior interesse no domínio das estruturas de betão armado, o modelo bilinear com degradação de Clough e Johnston.

No caso particular do modelo de Clough, por exemplo, a componente histerética normalizada é traduzida pela equação diferencial

$$\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z) = \dot{q}U(z)\{A^+U(\dot{q})[1 - U(z-1)] + U(-\dot{q})\} + \\ + \dot{q}U(-z)\{A^-U(-\dot{q})[1 - U(-z-1)] + U(\dot{q})\} \quad (5.173)$$

em que

$$A^+ = \frac{1-z}{1+u^+-q} \qquad A^- = \frac{1-z}{1+u^-+q} \quad (5.174)$$

e as variáveis adicionais u^+ e u^-, que representam a resposta máxima

positiva e negativa (v. Fig. 5.18), satisfazem por sua vez as equações diferenciais

$$\dot{u}^{+} = \dot{q}U(\dot{q})(z-1)$$

$$\dot{u}^{-} = -\dot{q}U(-\dot{q})U(-z-1) \qquad (5.175)$$

5.6 - RESPOSTA ALEATÓRIA DE SISTEMAS HISTERÉTICOS DE N-GL CARACTERIZADOS POR MODELOS DIFERENCIAIS SIMÉTRICOS

5.6.1 - Análise da resposta estacionária

Considere-se um sistema não-linear de N-GL, cujo equilíbrio dinâmico é traduzido pela equação

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{g}(\underline{q},t) = \underline{p}^{q}(t) \qquad (5.176)$$

e cujo comportamento histerético é descrito por um modelo diferencial, de tal forma que cada componente do vector $\underline{g}$ possa ser decomposta através da equação

$$g_i = \alpha_i k_i q_i + (1-\alpha_i)k_i z_i \qquad (i = 1,\ldots,N) \qquad (5.177)$$

em que os parâmetros auxiliares z_i obedecem a equações diferenciais do tipo

$$\dot{z}_i = \Phi(\dot{q}_i, z_i) \qquad (i = 1,\ldots,N) \qquad (5.178)$$

Nessas condições, as equações (5.177) podem escrever-se sob a seguinte forma matricial

$$\underline{g} = \underline{K}\underline{q} + \underline{G}\underline{z} \qquad (5.179)$$

em que $\underline{K}$ e $\underline{G}$ são matrizes diagonais com a seguinte constituição

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_i k_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \alpha_N k_N \end{bmatrix} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} (1-\alpha_1)k_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & (1-\alpha_i)k_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & (1-\alpha_N)k_N \end{bmatrix} \qquad (5.180)$$

ao passo que as equações diferenciais (5.178), uma vez linearizadas, dão lugar à relação matricial

$$\dot{\underline{z}} = \underline{C}_e \dot{\underline{q}} + \underline{K}_e \underline{z} \tag{5.181}$$

em que $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ são igualmente matrizes diagonais constituídas pelos coeficientes de linearização correspondentes a cada uma das equações (5.178), ou seja

$$\underline{C}_e = \begin{bmatrix} c_{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & c_{e_N} \end{bmatrix} \qquad \underline{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{e_N} \end{bmatrix} \tag{5.182}$$

Por conseguinte, da conjugação das equações (5.176) e (5.179) resulta que

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}\underline{q}(t) + \underline{G}\underline{z}(t) = \underline{p}^q(t) \tag{5.183}$$

podendo a análise da resposta aleatória do sistema não-linear em questão processar-se com base nesta equação e na equação (5.181).

Assim, introduzindo o vector

$$\underline{y} = \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \dot{\underline{q}} \\ \underline{z} \end{Bmatrix} \tag{5.184}$$

estas duas equações podem exprimir-se de forma condensada através da relação

$$\underline{D}\dot{\underline{y}}(t) + \underline{E}\underline{y}(t) = \underline{f}(t) \tag{5.185}$$

em que

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{M} & \underline{0} \\ \underline{K} & \underline{C} & \underline{G} \\ \underline{0} & -\underline{C}_e & -\underline{K}_e \end{bmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{p}^q(t) \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \tag{5.186}$$

Em alternativa, as 3N equações diferenciais de primeira ordem traduzidas pela equação (5.185) podem ser expressas através da relação

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \tag{5.187}$$

sendo

$$\underline{A}_e = -\underline{D}^{-1}\underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C} & -\underline{M}^{-1}\underline{G} \\ \underline{0} & \underline{C}_e & \underline{K}_e \end{bmatrix} \qquad x(t) = \underline{D}^{-1}\underline{f}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\underline{p}^q(t) \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \tag{5.188}$$

Deste modo, sendo a excitação estacionária gaussiana de valor médio nulo, o mesmo sucede com a resposta, dada a suposta natureza simétrica das não-linearidades envolvidas e as características lineares da equação (5.187), sendo por isso a sua distribuição de probabilidade inteiramente caracterizada a partir do conhecimento da matriz de covariância instantânea da resposta $\underline{\mu}_y$, a qual, no caso de uma excitação idealizada através de um ruído branco, obedece à equação

$$\underline{A}_e\underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y\underline{A}_e^T + 2\pi\underline{S}_o = \underline{0} \tag{5.189}$$

com

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{S}_o^{pq}\underline{M}^{-1^T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \tag{5.190}$$

sendo $\underline{S}_o^{pq}$ a matriz das densidades espectrais conjuntas relativas ao ruído branco vectorial $\underline{p}^q(t)$.

Por conseguinte, a análise da resposta estacionária pode nesse caso ser facilmente efectuada, começando por arbitrar valores iniciais das matrizes $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$, e resolvendo em seguida a equação de Liapunov (5.189). O conhecimento das características estatísticas da resposta associadas a essa primeira iteração permite calcular de imediato os valores corrigidos de $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ a utilizar na iteração seguinte, prosseguindo este processo iterativo sucessivamente até que se atinja a necessária convergência, o que aliás exige normalmente um número relativamente reduzido de iterações.

De realçar apenas que, no caso de excitações idealizadas através de processos coloridos, haverá que aumentar a dimensão do sistema de equações diferenciais de primeira ordem (5.187), por forma a contemplar

a introdução de um filtro que permita supor a excitação actuante efectivamente do tipo ruído branco, ao passo que no caso de excitações de média não-nula haverá que proceder à introdução de algumas modificações, em tudo semelhantes às indicadas em 5.5.6 para sistemas de 1-GL.

5.6.2 - Análise da resposta não-estacionária

A não-estacionaridade da resposta pode dever-se quer à não-estacionaridade da excitação actuante, quer à própria degradação do sistema estrutural, traduzida pela variação de determinados parâmetros caracterizadores do modelo histerético diferencial, função da energia dissipada.

Tomando como referência o modelo de Baber-Wen, em que o valor médio dos parâmetros A_i, ν_i e η_i $(i=1,\ldots,N)$ se relaciona com o valor médio da energia dissipada W_{d_i} através das equações

$$\begin{aligned} m_{A_i}(t) &= A_{oi} + \delta_{A_i} m_{W_{d_i}}(t) \\ m_{\nu_i}(t) &= 1 - \delta_{\nu_i} m_{W_{d_i}}(t) \\ m_{\eta_i}(t) &= 1 - \delta_{\eta_i} m_{W_{d_i}}(t) \end{aligned} \tag{5.191}$$

verificando-se que

$$\dot{m}_{W_{d_i}} = (1-\alpha_i) k_i E[z_i \dot{q}_i] \tag{5.192}$$

a análise da resposta não-estacionária pode processar-se integrando numericamente o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e^T(t) + 2\pi \underline{S}_o(t) \tag{5.193}$$

que regula a evolução temporal da matriz de covariância instantânea $\underline{\mu}_y(t)$, conjuntamente com as N equações (5.192), actualizando em cada instante de forma iterativa os valores médios dos parâmetros A_i, ν_i e η_i através das equações (5.191) e seguidamente os valores dos coeficientes de linearização $c_{e_i}(t)$ e $k_{e_i}(t)$, que intervêm na formação da matriz $\underline{A}_e(t)$, tendo em conta as equações (5.92) a (5.97).

5.7 - APLICAÇÃO DOS MODELOS DE WEN À ANÁLISE ESTOCÁSTICA DA RESPOSTA SÍSMICA DE ESTRUTURAS PORTICADAS PLANAS. DESENVOLVIMENTO DE "SOFTWARE" DE APLICAÇÃO

5.7.1 - Modelos estruturais utilizáveis

A análise estocástica da resposta sísmica de estruturas com comportamento histerético exige a consideração de modelos estruturais adequados, podendo para o efeito utilizar-se diversos modelos de complexidade variável.

No caso particular das estruturas reticuladas planas, um primeiro modelo bastante rudimentar, e apenas teoricamente susceptível de aplicação em situações de pilares muito rígidos e vigas bastante flexíveis, consiste em supor os pilares infinitamente rígidos e resistentes, concentrando-se as não-linearidades nas extremidades das vigas, como indica a figura 5.19, passando dessa forma a estrutura a ser modelada por um sistema de 1-GL caracterizado pela rotação ψ_b.

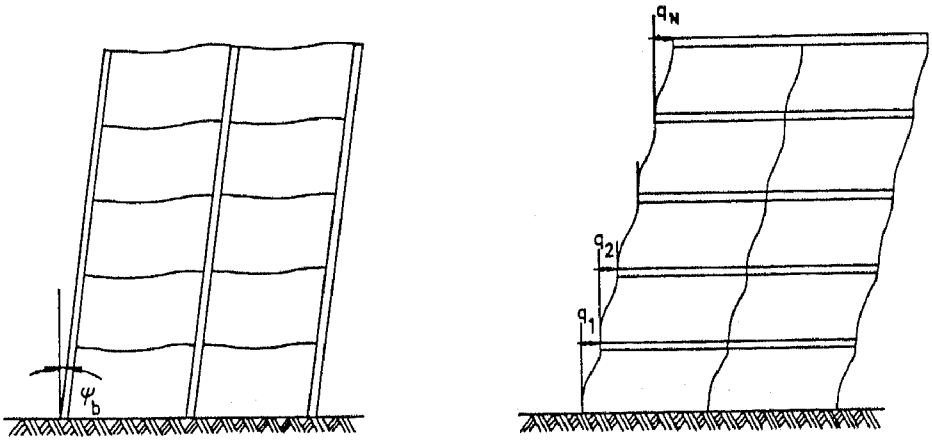


Fig. 5.19 - Modelos estruturais com pilares ou vigas de rigidez infinita.

Em oposição a este esquema, pode utilizar-se o extremamente vulgarizado modelo "shear-building", constituído por vigas de rigidez e resistência infinita e por pilares de comportamento não-linear,

especialmente adequado à idealização de pórticos planos cujas vigas apresentem uma rigidez bastante elevada face à dos pilares que os constituem, situação em que geralmente os comportamentos inelásticos se restringem aos pilares.

No entanto, torna-se conveniente neste caso definir para cada troço de pilares uma rigidez inicial e uma resistência equivalentes, de modo que o modelo traduza de forma satisfatória o comportamento real da estrutura.

Segundo Anagnostopoulos [221], a resistência equivalente correspondente ao conjunto de troços de pilares imediatamente abaixo de um dado piso pode considerar-se igual a

$$f_{y_{máx}} = \min\left\{\frac{2\sum M_y^v}{h} \;,\; \frac{2\sum M_y^p}{h}\right\} \tag{5.194}$$

em que $\sum M_y^v$ representa a soma dos momentos correspondentes às capacidades plásticas de todas as vigas desse andar, $\sum M_y^p$ traduz a soma de todos os momentos correspondentes às capacidades plásticas dos troços de pilares envolvidos, e h indica o comprimento destes.

Por outro lado, pode também definir-se uma matriz de rigidez inicial do modelo "shear-building" equivalente com a seguinte composição

$$\underline{K}_L = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2+k_3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & k_{N-1}+k_N & -k_N \\ & & & -k_N & k_N \end{bmatrix} \tag{5.195}$$

sendo os N elementos k_j $(j=1,\ldots,N)$ determinados por forma que haja coincidência entre os valores da primeira frequência natural, e do modo de vibração associado, relativos ao pórtico plano em análise e ao "shear-building" equivalente [221]. Deste modo, tendo em conta a relação

$$\left(\underline{K}_L - w_1^2 \underline{M}\right)\underline{\phi}_1 = \underline{0} \tag{5.196}$$

e uma vez conhecidos os valores da frequência fundamental e do primeiro modo associados às características iniciais de rigidez do pórtico plano não-linear, ω_1 e $\underline{\phi}_1$, torna-se possível a determinação da matriz de rigidez inicial do "shear-building" equivalente, à qual correspondem, por sua vez, frequências naturais e modos de vibração de ordem superior algo diferentes dos valores relativos ao pórtico plano, embora as diferenças encontradas não sejam, em muitos casos, muito significativas.

Nestas circunstâncias, a fixação dos parâmetros do modelo diferencial de Bouc-Wen, cuja utilização pode servir para idealizar o comportamento histerético do conjunto de troços de pilares imediatamente abaixo do piso de ordem j, pode efectuar-se começando por fixar os valores de A_j, α_j, k_j e n_j, bem como a relação β_j/γ_j, tendo em consideração as recomendações para esse efeito expressas em 5.5.3. Assim, igualando o valor da resistência equivalente dada pela equação (5.194) ao valor máximo da componente histerética

$$f_{y_{máx}} = (1-\alpha_j)k_j z_{j_{máx}} = (1-\alpha_j)k_j\left(\frac{A_j}{\beta_j+\gamma_j}\right)^{1/n_j} \tag{5.197}$$

podem também obter-se os valores de β_j e γ_j.

O modelo "shear-building", cuja maior virtude reside na sua grande simplicidade, nem sempre permite todavia uma representação satisfatória do sistema estrutural em análise quando sujeito a uma excitação sísmica, facto que foi evidenciado por Takizawa [224], e que levou ao desenvolvimento de modelos estruturais de maior complexidade.

Um desses modelos, utilizado por Park, Ang e Wen [167], e que constitui uma extensão do modelo "shear-building" convencional, consiste na introdução adicional de colunas elásticas flectidas entre os pisos infinitamente rígidos, e ligadas a estes através de molas de rotação inelásticas (Fig. 5.20).

Um outro modelo susceptível de permitir uma mais correcta análise da resposta sísmica de pórticos planos, recentemente utilizada por Baber e Wen [19] e por Casciati e Faravelli [37], consiste em supor

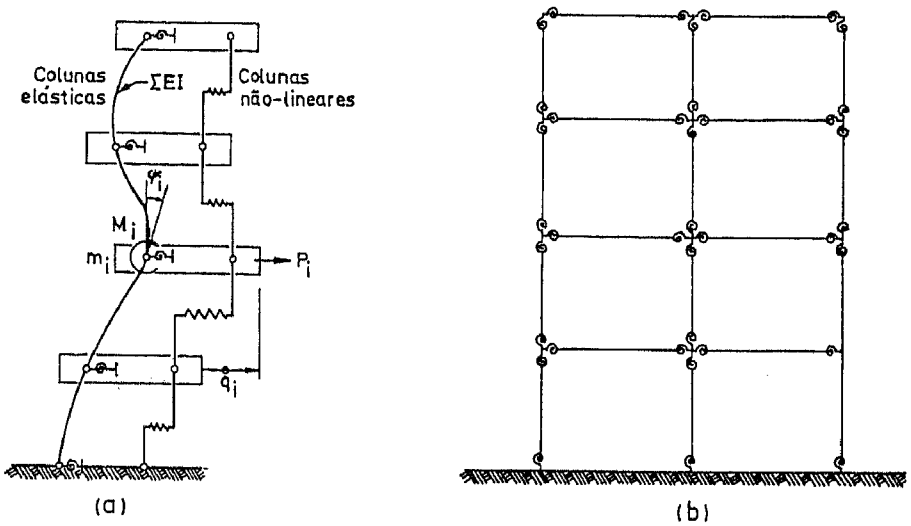


Fig. 5.20 - (a) Extensão do modelo "shear-building";
(b) Modelo de rótulas plásticas.

a estrutura discretizada num conjunto de elementos elásticos interligados por rótulas de funcionamento não-linear histerético.

Deste modo, serão descritas nos pontos seguintes formulações que permitem efectuar, com base no método de linearização estocástica equivalente, a análise da resposta sísmica estacionária e não-estacionária de pórticos planos, idealizados quer através do vulgarizado modelo "shear-building", quer do modelo de rótulas plásticas, supondo que as não-linearidades de natureza histerética são caracterizadas através do modelo diferencial de Bouc-Wen.

5.7.2 - Resposta sísmica estacionária ou não-estacionária de estruturas tipo "shear-building"

Considere-se um pórtico plano de N pisos, idealizado através de um modelo "shear- building" sujeito a uma acção sísmica horizontal, caracterizada por uma aceleração de base traduzida por um processo estocástico estacionário gaussiano de valor médio nulo $\ddot{u}_g(t)$ (Fig. 5.21).

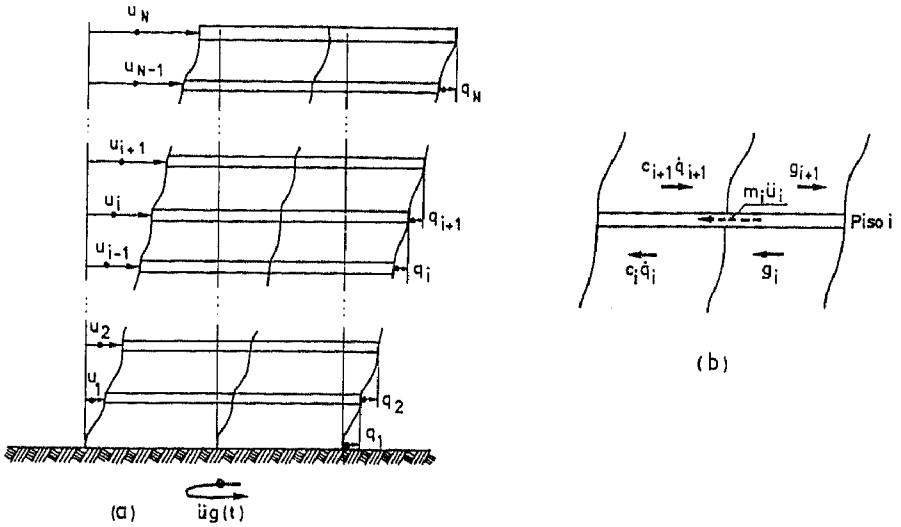


Fig. 5.21 - "Shear-building" sujeito à aceleração de base $\ddot{u}_g(t)$.

Nesse caso, os N graus de liberdade do sistema encontram-se associados às N translações de andar, pelo que, designando por $u_i \quad (i=1,\ldots,N)$ os deslocamentos horizontais de cada piso em relação à fundação, e por $q_i \quad (i=1,\ldots,N)$ as translações relativas entre pisos, é a seguinte a equação de equilíbrio dinâmico do andar de ordem i, tendo em consideração a totalidade das forças actuantes a esse nível, indicadas aliás na figura 5.21(b)

$$m_i\left[\sum_{j=1}^{i}\ddot{q}_j(t)+\ddot{u}_g(t)\right]+c_i\dot{q}_i(t)-c_{i+1}\dot{q}_{i+1}(t)+g_i-g_{i+1}=0 \qquad (5.198)$$

As forças $g_i \quad (i=1,\ldots,N)$ intervenientes nestas equações de equilíbrio correspondem ao somatório dos esforços transversos nas extremidades superiores dos troços dos pilares entre os pisos i e $i-1$, cujo comportamento se admite não-linear histerético, caracterizado pelo modelo de Bouc-Wen, podendo cada força g_i decompor-se através da relação

$$g_i=\alpha_i k_i q_i+(1-\alpha_i)k_i z_i \qquad (5.199)$$

em que o parâmetro auxiliar z_i obedece à equação diferencial não-linear

$$\dot{z}_i=A_i\dot{q}_i-\beta_i|\dot{q}_i||z_i|^{n_i-1}z_i-\gamma_i\dot{q}_i|z_i|^{n_i} \qquad (5.200)$$

Conjugando as equações (5.198) e (5.199), obtém-se a seguinte relação matricial

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t)+\underline{C}\dot{\underline{q}}(t)+\underline{K}\underline{q}(t)+\underline{G}\underline{Z}(t)=-\underline{M}_d\underline{\alpha}\ddot{u}_g(t) \tag{5.201}$$

em que

$$\underline{M}=\begin{bmatrix} m_1 & & & & 0 \\ m_2 & m_2 & & & \\ m_3 & m_3 & m_3 & & \\ & & & \ddots & \\ m_N & m_N & m_N & \cdots & m_N \end{bmatrix} \quad \underline{M}_d=\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & m_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & m_N \end{bmatrix} \quad \underline{\alpha}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.202}$$

$$\underline{K}=\begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & -\alpha_2 k_2 & & & \\ & \alpha_2 k_2 & -\alpha_3 k_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{N-1}k_{N-1} & -\alpha_N k_N \\ & & & & \alpha_N k_N \end{bmatrix} \quad \underline{G}=\begin{bmatrix} (1-\alpha_1)k_1 & -(1-\alpha_2)k_2 & & & \\ & (1-\alpha_2)k_2 & -(1-\alpha_3)k_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (1-\alpha_{N-1})k_{N-1} & -(1-\alpha_N)k_N \\ & & & & (1-\alpha_N)k_N \end{bmatrix}$$

(2.203)

Por outro lado, a linearização das equações diferenciais não-lineares (5.200) conduz à relação matricial

$$\dot{\underline{z}}=\underline{C}_e\dot{\underline{q}}+\underline{K}_e\underline{z} \tag{5.204}$$

em que $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ são matrizes diagonais constituídas pelos coeficientes de linearização c_{e_i} e k_{e_i} correspondentes a cada uma das N equações (5.200), com $i=1,\ldots,N$.

Assim, introduzindo o vector ampliado

$$\underline{y}^T=[\underline{q}^T,\dot{\underline{q}}^T,\underline{z}^T] \tag{5.205}$$

as equações (5.201) e (5.204) podem exprimir-se simplesmente através da relação matricial

$$\underline{D}\dot{\underline{y}}+\underline{E}\underline{y}(t)=\underline{f}(t) \tag{5.206}$$

em que

$$\underline{D}=\begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad \underline{E}=\begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{M} & \underline{0} \\ \underline{K} & \underline{C} & \underline{G} \\ \underline{0} & -\underline{C}_e & -\underline{K}_e \end{bmatrix} \quad \underline{f}(t)=\begin{Bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{M}_d\underline{\alpha} \\ \underline{0} \end{Bmatrix}\ddot{u}_g(t) \tag{5.207}$$

Alternativamente, a equação (5.206) pode escrever-se também sob a forma

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \tag{5.208}$$

em que

$$\underline{A}_e = -\underline{D}^{-1}\underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C} & -\underline{M}^{-1}\underline{G} \\ \underline{0} & \underline{C}_e & \underline{K}_e \end{bmatrix} \qquad \underline{x}(t) = \underline{D}^{-1}\underline{f}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{M}_d\underline{a} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \tag{5.209}$$

A natureza linear do sistema de equações diferenciais de primeira ordem (5.208) leva a que o processo de resposta seja igualmente gaussiano e de valor médio nulo, sendo por isso a sua estrutura probabilística integralmente caracterizada com base no conhecimento da matriz de covariância instantânea $\underline{\mu}_y$, que, no caso de a excitação $\ddot{u}_g(t)$ ser idealizada através de um ruído branco de densidade espectral constante S_o, obedece à equação de Liapunov

$$\underline{A}_e\underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y\underline{A}_e^T + 2\pi\underline{S}_o = \underline{0} \tag{5.210}$$

com

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{M}_d\underline{a}\underline{a}^T\underline{M}_d\underline{M}^{-1^T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} S_o \tag{5.211}$$

No caso de a aceleração de base $\ddot{u}_g(t)$ ser traduzida por um processo colorido caracterizado por um espectro do tipo Kanai-Tajimi, há interesse em supor tal espectro como o correspondente ao processo de resposta em termos de acelerações absolutas $\ddot{u}_f^t(t)$ de um filtro de 1-GL de massa unitária, com uma frequência natural w_f e um coeficiente de amortecimento ξ_f, quando a sua base é sujeita a uma aceleração aleatória estacionária de média nula idealizada através de um ruído branco $\ddot{u}_g^o(t)$ com uma densidade espectral de potência S_o.

Desse modo, designando por u_f o deslocamento do filtro relativamente

à base

$$\ddot{u}_f^t(t) = \ddot{u}_f(t) + \ddot{u}_g^o(t) \tag{5.212}$$

pelo que, sendo a equação de equilíbrio dinâmico do filtro

$$\ddot{u}_f(t) + 2\xi_f w_f \dot{u}_f(t) + w_f^2 u_f(t) = -\ddot{u}_g^o(t) \tag{5.213}$$

se conclui que

$$\ddot{u}_f^t(t) = -2\xi_f w_f \dot{u}_f(t) - w_f^2 u_f(t) \tag{5.214}$$

Identificando $\ddot{u}_f^t(t)$ com $\ddot{u}_g(t)$, a equação (5.201) dá então origem a

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}\underline{q}(t) + \underline{G}\underline{z}(t) - \alpha_1 \underline{M}_d \underline{\alpha} u_f(t) - \alpha_o \underline{M}_d \underline{\alpha} \dot{u}_f(t) = \underline{0} \tag{5.215}$$

com

$$\alpha_o = 2\xi_f w_f \qquad \alpha_1 = w_f^2 \tag{5.216}$$

Por conseguinte, introduzindo desta feita o vector ampliado

$$\underline{y}^T = [\underline{q}^T, \dot{\underline{q}}^T, \underline{z}^T, u_f, \dot{u}_f] \tag{5.217}$$

as equações (5.215) e (5.204), conjuntamente com a equação do movimento do filtro (5.213), podem também dar lugar a uma relação matricial do tipo

$$\underline{D}\dot{\underline{y}}(t) + \underline{E}\underline{y}(t) = \underline{f}(t) \tag{5.218}$$

em que agora

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 1 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{M} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{K} & \underline{C} & \underline{G} & -\underline{M}_d \underline{\alpha} \alpha_1 & -\underline{M}_d \underline{\alpha} \alpha_o \\ \underline{0} & -\underline{C}_e & -\underline{K}_e & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & -1 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \alpha_1 & \alpha_o \end{bmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g^o(t) \tag{5.219}$$

ou, em alternativa, à relação

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \tag{5.220}$$

sendo

$$\underline{A}_e = -\underline{D}^{-1}\underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C} & -\underline{M}^{-1}\underline{G} & \underline{M}^{-1}\underline{M}_d\underline{\alpha}\alpha_1 & \underline{M}^{-1}\underline{M}_d\underline{\alpha}\alpha_o \\ \underline{0} & \underline{C}_e & \underline{K}_e & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 1 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\alpha_1 & -\alpha_o \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \underline{D}^{-1}\underline{f}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g^o(t)$$

(5.221)

A determinação da matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y$ pode pois efectuar-se, tal como no caso de uma excitação idealizada por um ruído branco, mediante a resolução da equação de Liapunov

$$\underline{A}_e\underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y\underline{A}_e^T + 2\pi\underline{S}_o = \underline{0} \tag{5.222}$$

em que agora a matriz $\underline{S}_o$ apresenta a seguinte composição

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} S_o \tag{5.223}$$

A resolução desta equação, com vista à caracterização da distribuição de probabilidade da resposta sísmica estacionária do "shear-building" em análise, exige naturalmente o conhecimento prévio das matrizes $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$, para o que se torna mais uma vez conveniente a utilização da técnica iterativa já anteriormente descrita em 5.6.1.

Uma vez quantificada a matriz de covariância $\underline{\mu}_y$ caracterizadora da distribuição probabilística do processo estocástico vectorial estacionário $\underline{y}(t)$, suposto gaussiano, fácil se torna também determinar a matriz de covariância relativa a quaisquer outras variáveis de controlo da resposta do sistema. Assim, por exemplo, no caso das forças de restituição inelásticas dadas por (v. eq. 5.199 e 5.201)

$$\underline{g} = \underline{K}\underline{q} + \underline{G}\underline{z} \tag{5.224}$$

a correspondente matriz de covariância pode ser obtida multiplicando

ambos os membros de (5.224) pela respectiva transposta e aplicando o operador $E[\ ]$, resultando que

$$\underline{\mu}_g = \underline{K}E[\underline{q}\underline{q}^T]\underline{K}^T + \underline{K}E[\underline{q}\underline{z}^T]\underline{G}^T + \underline{G}E[\underline{z}\underline{q}^T]\underline{K}^T + \underline{G}E[\underline{z}\underline{z}^T]\underline{G}^T \qquad (5.225)$$

em que $E[\underline{q}\underline{q}^T]$, $E[\underline{q}\underline{z}^T]$, $E[\underline{z}\underline{q}^T]$ e $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ constituem sub-matrizes de $\underline{\mu}_y$.

Caso a excitação actuante assuma um carácter não-estacionário, torna-se necessário no entanto introduzir algumas modificações. Assim, se a aceleração de base for idealizada através de um processo estocástico não-estacionário modulável $\ddot{u}_{g*}(t)$, susceptível de ser expresso através do produto

$$\ddot{u}_{g*}(t) = \theta(t)\ddot{u}_g(t) \qquad (5.226)$$

em que $\theta(t)$ é uma função de modulação determinística e $\ddot{u}_g(t)$ um ruído branco gaussiano de média nula e de densidade espectral de potência S_o, não só as matrizes de linearização $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ se tornam dependentes do tempo, como também se torna necessário substituir $\ddot{u}_g(t)$ por $\theta(t)\ddot{u}_g(t)$ nas equações (5.198), (5.201), (5.207) e (5.209).

Deste modo, e atendendo ao referido em 4.5.6, fácil é concluir que a evolução temporal da matriz de covariância da resposta é regulada pela equação

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y\underline{A}_e^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \qquad (5.227)$$

em que agora a matriz $\underline{S}_o(t)$ é dada por

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{M}_d\underline{a}\underline{a}^T\underline{M}_d\underline{M}^{-1^T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \theta(t)^2 S_o \qquad (5.228)$$

sendo a composição da matriz $\underline{A}_e(t)$ idêntica à definida em (5.209).

De forma análoga, caso a excitação actuante seja não-estacionária e colorida, podendo a aceleração de base do filtro anteriormente mencionado ser caracterizada através de um processo estocástico $\ddot{u}^o_{g*}(t)$,

separável mediante a relação

$$\ddot{u}_{g*}^{o}(t) = \theta(t)\ddot{u}_{g}^{o}(t) \tag{5.229}$$

em que a função de modulação $\theta(t)$ é multiplicada pelo ruído branco estacionário e gaussiano de média nula e densidade espectral de potência S_o, deve substituir-se $\ddot{u}_g^o(t)$ por $\theta(t)\ddot{u}_g^o(t)$ nas equações (5.212), (5.213), (5.219) e (5.221). Pode assim concluir-se que a evolução temporal da matriz de covariância da resposta é regida igualmente pela equação (5.227), sendo neste caso a matriz $\underline{S}_o(t)$ definida por

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} \theta(t)^2 S_o \tag{5.230}$$

e tendo a matriz $\underline{A}_e(t)$ uma composição semelhante à indicada por (5.221).

Se a não-estacionaridade da resposta for também motivada pela própria degradação estrutural, considerada função da energia dissipada, haverá que adicionar ainda a equação (5.192)

$$\dot{m}_{W_{d_i}} = (1-\alpha_i)k_i E[z_i \dot{q}_i] \tag{5.231}$$

A análise da resposta sísmica não-estacionária, que passa pela determinação da evolução temporal da matriz de covariância instantânea da resposta, pode assim ser efectuada integrando numericamente as equações (5.227) e (5.231), e utilizando a técnica iterativa descrita em 5.6.2.

5.7.3 - Formulação modal complexa alternativa para análise da resposta não-estacionária

A análise da resposta sísmica não-estacionária pode ser também realizada utilizando uma formulação modal complexa alternativa, que permite evitar a integração numérica do sistema de equações diferenciais (5.227).

Essa formulação tem como primeiro objectivo conseguir desligar o sistema de equações diferenciais de primeira ordem (5.208), em que $\underline{A}_e = \underline{A}_e(t)$, com base numa metodologia semelhante à descrita em 2.3.9, como foi sugerido por Singh, Maldonado e Heller [205], ou, o que é equivalente, desligar o sistema de equações diferenciais (5.206), em que $\underline{E} = \underline{E}(t)$, tal como é proposto por Chang, Mochio, Samaras e Shinozuka [155].

Neste último caso, por exemplo, torna-se necessário começar por resolver os problemas de valores e vectores próprios traduzidos pelas equações seguintes

$$-\underline{D}^{-1}\underline{E}\underline{\phi}_i = \lambda_i \underline{\phi}_i \tag{5.232}$$

$$-\underline{\psi}_j^T \underline{E}\underline{D}^{-1} = \lambda_j \underline{\psi}_j^T \tag{5.233}$$

ao longo dos sucessivos instantes de tempo t_k em que se processa a análise da resposta não-estacionária, supondo-se que os elementos da matriz $\underline{E}(t)$ assumem valores aproximadamente constantes entre dois instantes de tempo consecutivos t_k e $t_k + \Delta t$.

Os vetores $\underline{\phi}_i$ e $\underline{\psi}_j^T$, que representam respectivamente os vectores próprios à direita da matriz $-\underline{D}^{-1}\underline{E}$ e à esquerda da matriz $-\underline{E}\underline{D}^{-1}$, respeitam a seguinte condição de ortogonalidade

$$\underline{\psi}_j^T \underline{D}\underline{\phi}_i = 0 \quad , \quad \lambda_i \neq \lambda_j \tag{5.234}$$

como aliás se pode facilmente constatar pré-multiplicando a equação (5.232) por $\underline{\psi}_j^T \underline{D}$, pós-multiplicando (5.233) por $\underline{D}\underline{\phi}_i$, e subtraindo membro a membro as equações obtidas. Analogamente pode verificar-se que

$$\underline{\psi}_j^T \underline{E}\underline{\phi}_i = 0 \quad , \quad \lambda_i \neq \lambda_j \tag{5.235}$$

Por outro lado, os vectores próprios $\underline{\phi}_i$ e $\underline{\psi}_j^T$ podem também ser normalizados por forma que

$$\underline{\psi}_i^T \underline{D}\underline{\phi}_i = 1 \tag{5.236}$$

verificando-se então que

$$\underline{\psi}_i^T \underline{E} \underline{\phi}_i = -\lambda_i \tag{5.237}$$

como se pode comprovar pré-multiplicando (5.232) por $\underline{\psi}_i^T \underline{D}$.

Deste modo, introduzindo a tranformação linear

$$\underline{y}(t_k + \tau) = \sum_{i=1}^{3N} \underline{\phi}_i \beta_i(\tau) = \underline{T}\,\underline{\beta}(\tau) \tag{5.238}$$

em que $\beta_i(\tau)$ representa a coordenada modal complexa de ordem i, podendo τ assumir valores pertencentes ao intervalo $[0, \Delta t]$, o sistema de equações diferenciais de primeira ordem (5.206) pode ser desligado, já que, por substituição de (5.237) em (5.206), se obtém

$$\underline{D} \sum_{i=1}^{3N} \underline{\phi}_i \dot{\beta}_i(\tau) + \underline{E} \sum_{i=1}^{3N} \underline{\phi}_i \beta_i(\tau) = \underline{f}(t_k + \tau) \tag{5.239}$$

e pré-multiplicando esta equação por $\underline{\psi}_j^T$, e atendendo às relações (5.234) a (5.237), se conclui que

$$\dot{\beta}_i(\tau) = \lambda_i \beta_i(\tau) + \underline{\psi}_i^T \underline{f}(t_k + \tau) \tag{5.240}$$

Tendo presente a equação (5.207) que define o vector $\underline{f}$, estas $3N$ equações diferenciais de primeira ordem independentes nas coordenadas modais β_i podem também expressar-se através da relação

$$\dot{\beta}_i(\tau) = \lambda_i \beta_i(\tau) - L_i \ddot{u}_{g*}(t_k + \tau) \tag{5.241}$$

em que L_i representa o factor de participação relativo ao i-ésimo vector próprio $\underline{\psi}_i^T$

$$L_i = \underline{\psi}_i^T \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}_d \underline{a} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \tag{5.242}$$

e $\ddot{u}_{g*}(t_k + \tau)$ o valor do processo não-estacionário caracterizador da

aceleração de base no instante $t_k+\tau$, e que se admite poder ser expresso através do produto

$$\ddot{u}_{g*}(t_k+\tau)=\theta(t_k+\tau)\ddot{u}_g(t_k+\tau) \tag{5.243}$$

sendo $\theta(t)$ uma função de modulação determinística e $\ddot{u}_g(t)$ um processo estacionário gaussiano de valor médio nulo.

Nestas condições, recorrendo à solução da equação (5.241) para $\tau=\Delta t$

$$\beta_i(\Delta t)=e^{\lambda_i\Delta t}\beta_i(0)-\int_0^{\Delta t} e^{\lambda_i(\Delta t-v)}L_i\ddot{u}_{g*}(t+v)dv \tag{5.244}$$

pode facilmente obter-se a expressão da resposta $\underline{y}(t_k+\Delta t)$ através da sobreposição modal traduzida pela equação (5.238).

Deste modo, a matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y(t_k+\Delta t)$ no instante $t_k+\Delta t$ pode ser quantificada através da relação

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_y(t_k+\Delta t)&=R_e\left\{E[\underline{y}(t_k+\Delta t)\underline{y}(t_k+\Delta t)]^{*T}\right\}\\&=R_e\left\{E\left\{\left[\sum_{i=1}^{3N}\underline{\phi}_i\beta_i(\Delta t)\right]\left[\sum_{j=1}^{3N}\underline{\phi}_j\beta_j(\Delta t)\right]^{*T}\right\}\right\}\\&=R_e\left\{\sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{3N}\underline{\phi}_iE[\beta_i(\Delta t)\beta_j(\Delta t)^*]\underline{\phi}_j^{*T}\right\}\end{aligned} \tag{5.245}$$

podendo o valor médio espectável $E[\beta_i(\Delta t)\beta_j(\Delta t)^*]$ nela interveniente ser determinado com base na equação (5.244). Com efeito, dessa maneira pode escrever-se que

$$\begin{aligned}E[\beta_i(\Delta t)\beta_j(\Delta t)^*]=E\Bigg\{&\left[e^{\lambda_i\Delta t}\beta_i(0)-L_i\int_0^{\Delta t}e^{\lambda_i(\Delta t-v_1)}\ddot{u}_{g*}(t+v_1)dv_1\right]\\&\left[e^{\lambda_j^*\Delta t}\beta_j^*(0)-L_j^*\int_0^{\Delta t}e^{\lambda_j^*(\Delta t-v_2)}\ddot{u}_{g*}(t+v_2)dv_2\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.246}$$

ou mais simplesmente, efectuando o produto indicado e desprezando os termos em $\beta_i(0)\ddot{u}_g(t+v_2)$ e $\beta_j(0)^*\ddot{u}_{g*}(t+v_1)$

$$E[\beta_i(\Delta t)\beta_j(\Delta t)^*] \cong e^{(\lambda_i+\lambda_j^*)\Delta t}\{E[\beta_i(0)\beta_j(0)^*]+ \tag{5.247}$$
$$+ L_i L_j^* \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{-\lambda_i v_1 - \lambda_j^* v_2} E[\ddot{u}_{g^*}(t_k+v_1)\ddot{u}_{g^*}(t_k+v_2)]dv_1 dv_2\Big\}$$

Introduzindo também uma aproximação que consiste em tomar os valores da função de modulação a meio dos intervalos de integração de amplitude Δt, suposta muito pequena, pode ainda escrever-se que

$$E[\beta_i(\Delta t)\beta_j(\Delta t)^*] \cong e^{(\lambda_i+\lambda_j^*)\Delta t}\{E[\beta_i(0)\beta_j(0)^*]+ \tag{5.248}$$
$$+ L_i L_j^* \theta^2\left(t_k+\frac{\Delta t}{2}\right)\int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{-\lambda_i v_1 - \lambda_j^* v_2} R_{\ddot{u}_g}(v_2-v_1)dv_1 dv_2\Big\}$$

Por conseguinte, conjugando esta equação com a equação (5.245), podem determinar-se todos os elementos da matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y$ correspondente ao instante $t_k+\Delta t$. O cálculo do integral duplo indicado na equação (5.248) exige, no entanto, o conhecimento da função de auto-correlação $R_{\ddot{u}_g}(\tau)$ relativa ao processo estacionário gaussiano de média nula $\ddot{u}_g(t)$. Sendo a função densidade espectral de potência respectiva $S_{\ddot{u}_g}(w)$ do tipo Kanai-Tajimi (v. eq. 2.47), caracterizada por uma densidade constante S_o e por um filtro de frequência natural w_f e coeficiente de amortecimento ξ_f, pode mostrar-se que a função $R_{\ddot{u}_g}(\tau)$ é dada por [51]

$$R_{\ddot{u}_g}(\tau) = S_o \pi \frac{w_f}{2\xi_f} e^{-\xi_f w_f|\tau|}\Big[(1+4\xi_f^2)\cos\left(w_f\tau\sqrt{1-\xi_f^2}\right)+$$
$$+(1-4\xi_f^2)\frac{\xi_f}{\sqrt{1-\xi_f^2}}\operatorname{sen}\left(w_f|\tau|\sqrt{1-\xi_f^2}\right)\Big] \tag{5.249}$$

Desta forma, torna-se viável a quantificação da matriz de covariância evolutiva da resposta, determinando em cada instante, de forma iterativa, os valores dos coeficientes de linearização c_{e_i} e k_{e_i}, os quais, uma vez atingida a necessária convergência, podem tomar-se iguais aos respectivos valores iniciais no instante seguinte.

De realçar ainda que esta formulação é susceptível de permitir uma interessante simplificação, que consiste em ter apenas em conta na análise do problema os modos complexos $\underline{\phi}_i$ que contribuem de forma

mais significativa para a resposta do sistema, podendo tomar-se como indicador dessa contribuição o respectivo factor de participação L_i.

5.7.4 - Descrição dos programas de cálculo automático PROG8 e PROG9

Tendo em consideração as formulações descritas em 5.7.2 e 5.7.3, foram desenvolvidos dois programas de cálculo automático com vista à análise estocástica do comportamento dinâmico de estruturas planas do tipo "shear-building" com comportamento não-linear histerético sujeitas a acções sísmicas horizontais.

O primeiro desses programas, designado por PROG8, pressupõe a natureza estacionária da excitação actuante e da resposta estrutural, e por isso implicitamente também a inexistência de degradação de rigidez ou de resistência do sistema, tornando-se, no entanto, fácil a sua generalização por forma a contemplar estes aspectos tendo em atenção o referido em 5.7.2 sobre esta questão. Em relação à arquitectura desse programa, esquematicamente traduzida pelo fluxograma simplificado indicado na figura 5.22, há pois a destacar os seguintes passos:

a) Leitura de dados gerais envolvendo

- caracterização topológica da estrutura;
- definição das características geométricas e mecânicas de todos os troços de pilar entre pisos, designadamente dos seis parâmetros α_i, k_i, A_i, n_i, β_i e γ_i caracterizadores do correspondente comportamento histerético, de acordo com o modelo diferencial de Bouc-Wen;
- leitura do valor das massas associadas a cada andar, e dos coeficientes de amortecimento correspondentes aos dois primeiros modos de vibração calculados com base na rigidez inicial, ou, em alternativa, leitura dos coeficientes α_c e β_c a que se refere a equação (4.221);
- caracterização da excitação actuante, podendo esta ser idealizada quer através de um ruído branco de intensidade

espectral S_o, quer de um ruído branco filtrado caracterizado por um espectro de potência de Kanai-Tajimi de parâmetros S_o, w_f e ξ_f, sendo viável, em particular, a consideração de espectros desta natureza que aproximam convenientemente os espectros poli-lineares definidos pelo RSA;

b) Formação da matriz de massa diagonal $\underline{M}_d$ e de uma matriz de rigidez $\underline{K}_i$ associada aos valores iniciais da rigidez dos diversos troços de pilares; determinação das frequências e modos de vibração correspondentes e, se necessário, dos coeficientes α_c e β_c a que se refere a equação (4.221), quantificando através dela a matriz de amortecimento $\underline{C}$, que se supõe invariante ao longo da análise da resposta;

c) Constituição das matrizes $\underline{M}$, $\underline{K}$ e $\underline{G}$ caracterizadas pelas equações (5.202) e (5.203), bem como das matrizes $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ na sua versão inicial, admitindo para o efeito os seguintes valores de partida para os coeficientes de linearização

$$c_{e_i} = A_i \qquad k_{e_i} = -\delta_i \tag{5.250}$$

sendo δ_i um valor positivo muito pequeno;

d) Composição da matriz de estado $\underline{A}_e$ definida por (5.209), mediante a conveniente manipulação das matrizes $\underline{M}$, $\underline{C}$, $\underline{K}$, $\underline{G}$, $\underline{K}_e$ e $\underline{C}_e$, no caso de um ruído branco, ou através da relação correspondente (5.221), nas situações em que a excitação seja idealizada através de um processo de natureza colorida;

e) Formação da matriz $\underline{S}_o$ caracterizadora da excitação actuante, recorrendo às relações (5.211) ou (5.223), também de acordo com a forma de idealização da acção sísmica;

f) Resolução da equação de Liapunov (5.210) ou (5.222), mediante o recurso a uma eficiente rotina de cálculo baseada no algoritmo

de Bartels e Stewart [24], já anteriormente referida, chegando-se por essa via ao conhecimento de todos os elementos da matriz de covariância $\underline{\mu}_y$, caracterizadora da estrutura probabilística do processo estocástico vectorial estacionário $\underline{y}(t)$ definido por (5.205) ou (5.217), que por hipótese se admite apresentar natureza gaussiana;

g) Determinação dos valores corrigidos dos coeficientes de linearização c_{e_i} e k_{e_i} através da utilização das equações (5.92) a (5.97), e tendo por base os valores de $\sigma_{\dot{q}_i}$, σ_{z_i} e $\rho_{\dot{q}_i z_i}$ obtidos a partir dos elementos da matriz $\underline{\mu}_y$;

h) Correcção da composição da matriz de estado $\underline{A}_c$ por virtude da alteração das matrizes $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$, e realização de uma nova iteração, resolvendo novamente a equação de Liapunov associada ao problema em questão;

i) Análise da convergência do processo iterativo, mediante a comparação dos desvios padrões σ_{y_i}, obtidos em cada iteração, com os calculados na iteração anterior; para o efeito, e designando por r e $r-1$ os números de ordem de duas iterações consecutivas, o erro relativo definido por

$$\epsilon = \frac{1}{N_{A_e}} \sum_{i=1}^{N_{A_e}} \left| \frac{\sigma_{y_i}^{(r)} - \sigma_{y_i}^{(r-1)}}{\sigma_{y_i}^{(r)}} \right| \qquad (5.251)$$

em que N_{A_e} é a dimensão da matriz $\underline{A}_e$, é comparado com uma tolerância máxima pré-definida ϵ_{max};

j) Repetição dos passos descritos nas alíneas g), h) e i) caso não tenha sido atingida a desejada convergência, situação em que $\epsilon > \epsilon_{max}$;

l) Quantificação da matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_g$ relativa às forças de restituição inelásticas através da relação (5.225).

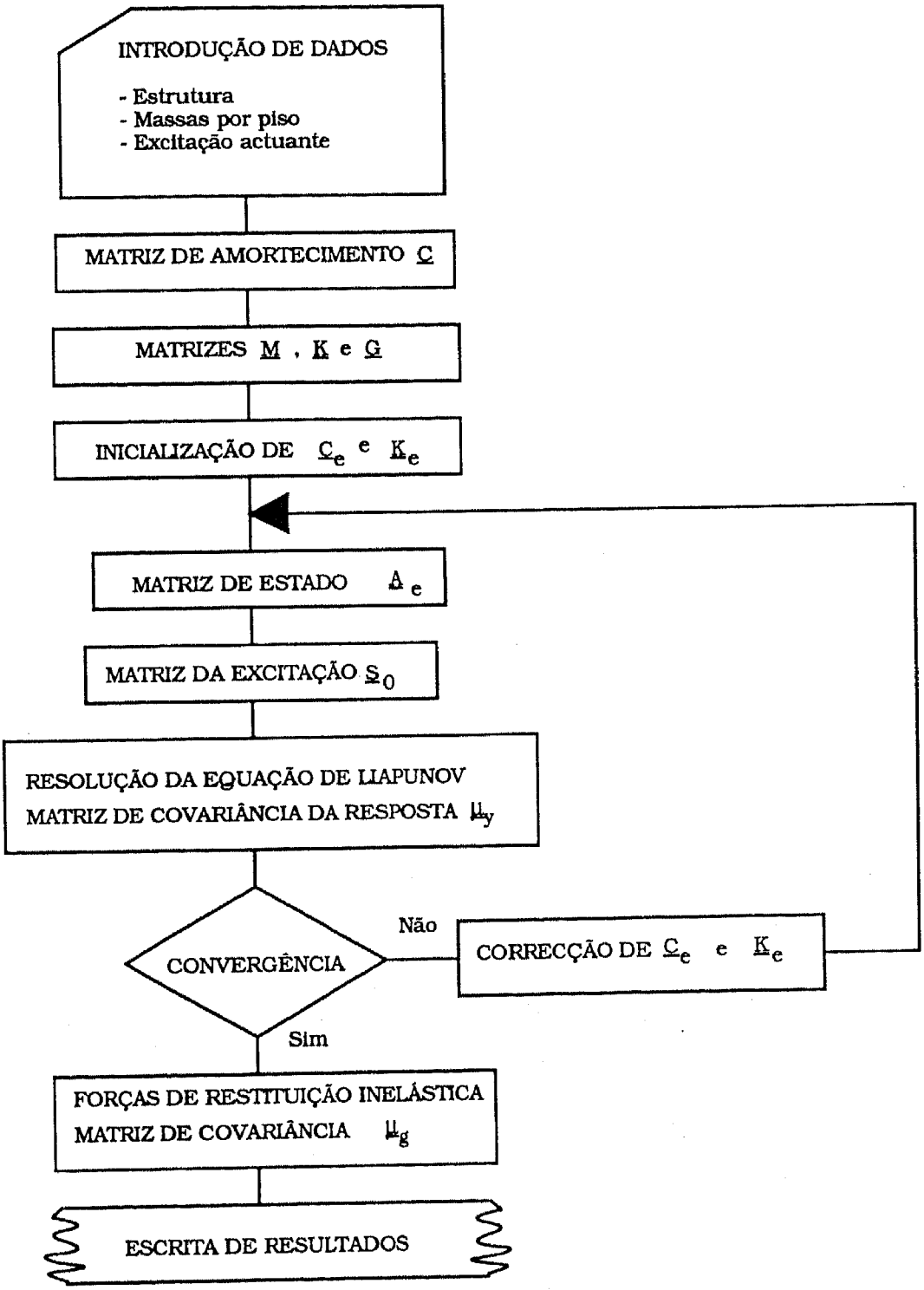


Fig. 5.22 - Fluxograma simplificado do programa PROG8.

Para além da realização deste programa de cálculo automático, foi ainda elaborado um outro (PROG9) que, assente na formulação de estado complexa descrita em 5.7.3, possibilita também a análise da evolução temporal das características da resposta de estruturas do tipo antes mencionado a excitações sísmicas de carácter não-estacionário, idealizadas através do produto de uma função de modulação determinística por um processo estocástico estacionário gaussiano colorido de valor médio nulo caracterizado por um espectro de Kanai-Tajimi.

Neste caso, são os seguintes os principais passos caracterizadores da arquitectura do programa realizado, sinteticamente apresentados no fluxograma simplificado indicado na figura 5.23:

a) Leitura de dados gerais, os quais coincidem praticamente com os fornecidos para utilização do programa PROG8, salvo no que se refere à indicação do intervalo de tempo incremental Δt e do tempo máximo de análise da resposta não-estacionária T_{max}, bem como à caracterização da excitação actuante, havendo para o efeito que proceder à definição da função de modulação $\theta(t)$, podendo esta ser caracterizada através de uma sequência de troços lineares, ou mediante o recurso às funções utilizadas por Amin e Ang (v. eq. 3.74) ou Shinozuka e Sato (v. eq. 3.75);

b) Formação da matriz de amortecimento $\underline{C}$, suposta invariante ao longo de toda a evolução temporal da resposta, bem como das matrizes $\underline{M}$, $\underline{K}$ e $\underline{G}$, seguindo o mesmo procedimento que foi já referido anteriormente para o caso do programa PROG8;

c) Inicialização das matrizes $\underline{C}_e(t_k)$ e $\underline{K}_e(t_k)$ relativas ao instante genérico de análise t_k, começando por seguir o critério definido por (5.250) no instante inicial, e constituição das matrizes $\underline{D}$ e $\underline{E}(t_k)$ definidas por (5.207);

d) Resolução dos problemas de valores e vectores próprios definidos pelas equações (5.232) e (5.233), recorrendo às sub-rotinas MQR, MHRE, MER, MVHR e MVRE da biblioteca SL-MATH (IBM),

quantificando para o instante t_k os valores próprios λ_i (1 real e 2 complexos conjugados por cada grau de liberdade) e os vectores próprios complexos à direita $\underline{\phi}_i$ e à esquerda $\underline{\psi}_i^T$;

e) Normalização dos vectores próprios complexos encontrados por forma a verificar-se a condição (5.236) e, simultaneamente, a relação (5.237);

f) Quantificação dos factores de participação complexos L_i relativos a cada vector próprio $\underline{\psi}_i^T$ através da equação (5.242);

g) Formação da matriz de covariância modal complexa $\underline{\mu}_\beta(t_k+\Delta t)$ relativa ao instante seguinte ao instante genérico de análise t_k, tendo por base a equação (5.248) e a própria constituição da matriz de covariância modal $\underline{\mu}_\beta(t_k)$ nesse instante (nula para $t_k = 0$); para o efeito o integral duplo representado nessa equação é avaliado numericamente, sendo os valores da função integranda calculados a partir do conhecimento dos valores próprios complexos λ_i e da função de auto-correlação $R_{\ddot{u}_g}(\tau)$ definida por (5.249);

h) Determinação da matriz de covariância $\underline{\mu}_y(t_k+\Delta t)$, caracterizadora da distribuição probabilística do processo estocástico vectorial definido por (5.205) no instante $t_k+\Delta t$, tendo presente a relação (5.245) e os vectores próprios complexos $\underline{\phi}_i$;

i) Cálculo iterativo dos coeficientes de linearização c_{e_i} e k_{e_i} que contribuem para a formação das matrizes $\underline{C}_e(t)$ e $\underline{K}_e(t)$; para o efeito aqueles coeficientes são recalculados, mediante a utilização das equações (5.92) a (5.97), em função das grandezas estatísticas $\sigma_{\dot{q}_i}(t_k+\Delta t)$, $\sigma_{z_i}(t_k+\Delta t)$ e $\rho_{\dot{q}_i z_i}(t_k+\Delta t)$, obtidas directamente a partir dos elementos de $\mu_y(t_k+\Delta t)$; este procedimento é continuado enquanto o erro médio relativo ϵ definido por (5.251), correspondente a duas iterações consecutivas, exceder uma tolerência máxima pré-definida ϵ_{max}; cada vez que as matrizes $\underline{C}_e(t)$ e $\underline{K}_e(t)$ são recalculadas, a matriz $\underline{E}(t)$ sofre

a necessária recomposição, sendo repetidos todos os passos sumariamente descritos nas alíneas d), e), f), g) e h) até se acabar por atingir a desejada convergência ao nível do instante $t_k + \Delta t$;

j) Passagem à análise das características da resposta no instante seguinte, tomando como valores iniciais dos coeficientes de linearização os correspondentes aos do instante anterior, e seguindo novamente todo o procedimento descrito entre as alíneas d) e i), enquanto não for ultrapassado o período de tempo máximo de análise da resposta considerado.

5.7.5 - Exemplos de aplicação

O desenvolvimento dos programas de cálculo automático PROG8 e PROG9 foi acompanhado do tratamento de diversos exemplos de aplicação, sendo de realçar dois casos, já anteriormente abordados por Chang [51], e que se entendeu da maior utilidade tomar como referência por forma a, por um lado, testar o bom funcionamento dos modelos computacionais desenvolvidos e, por outro, avaliar o grau de rigor dos resultados alcançados face a valores obtidos por simulação numérica.

O primeiro exemplo diz respeito a uma estrutura de um único piso, com uma massa de $0,933 kips.s^2/ft$, sendo os seguintes os valores dos parâmetros do modelo de Bouc-Wen utilizados para idealizar o comportamento histerético dos respectivos pilares: $k = 35,2 kips/ft$, $\alpha = 0,04$, $A = 1,0$, $n = 1$, $\beta = \gamma = 2/ft$. O amortecimento foi, por seu turno, quantificado através da relação (4.221), tomando $\alpha_c = 0,614/s$ e $\beta_c = 0s$.

A acção sísmica começou por ser idealizada através de um processo não-estacionário, obtido através do produto de um processo estacionário do tipo Kanai-Tajimi, com $S_o = 0,1 ft^2/s^3$, $w_f = 15,56 rad/s$ e $\xi_f = 0,64$, por uma função de modulação do tipo Shinozuka e Sato com $a = 0,25/s$, $b = 0,50/s$ e $c = 0,25$.

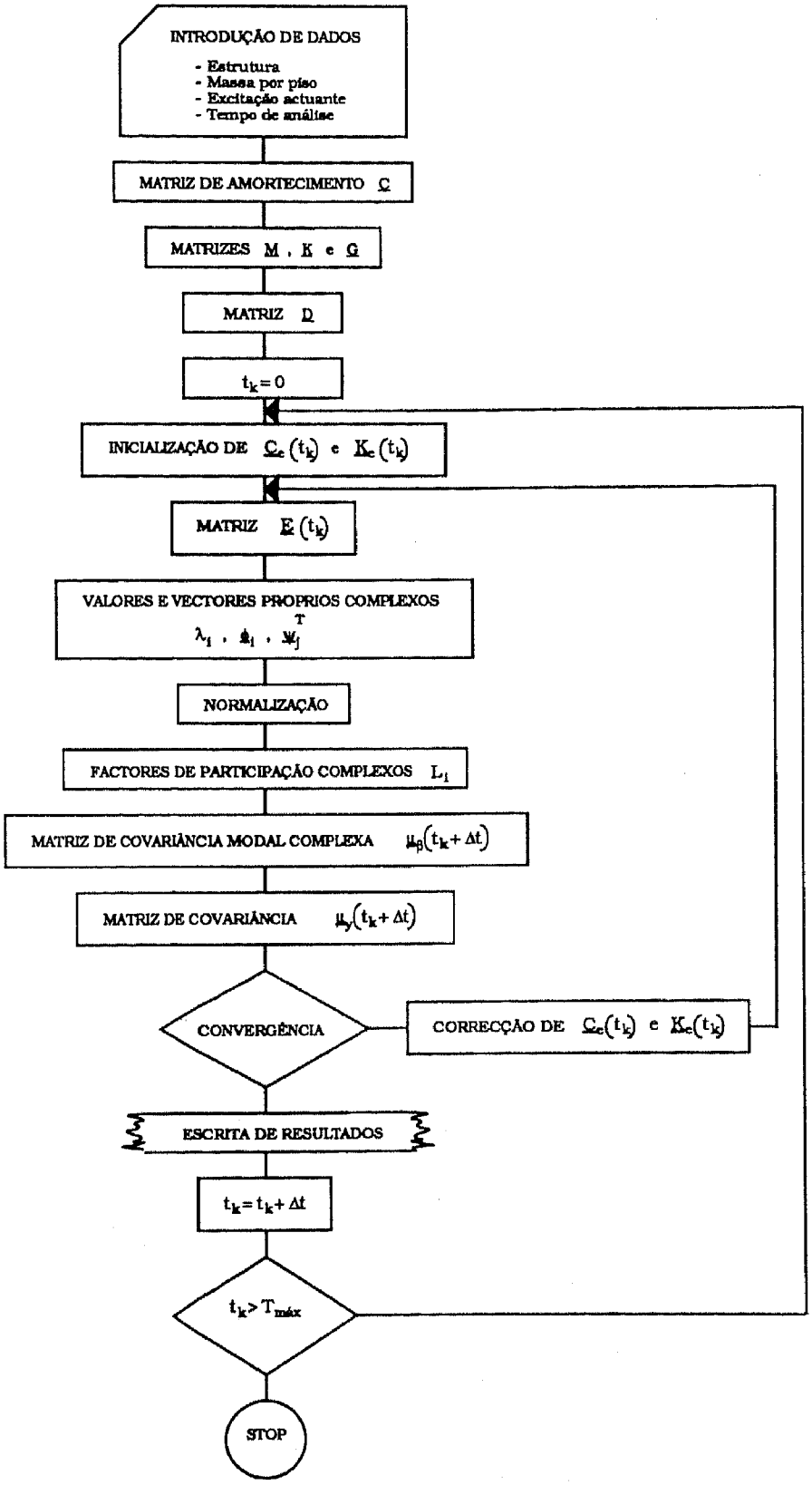


Fig. 5.23 - Fluxograma simplificado do programa PROG9.

Nessas condições, foi calculada, mediante utilização do programa PROG9, a evolução temporal quer dos desvios padrões do deslocamento e da velocidade do piso em relação à base, $\sigma_u(t)$ e $\sigma_{\dot{u}}(t)$, quer dos coeficientes de linearização $c_e(t)$ e $k_e(t)$, tendo sido considerado um intervalo de tempo incremental $\Delta t = 0,15s$. A tradução gráfica dessa evolução ao longo dos primeiros $10s$ encontra-se representada nas figuras 5.24 e 5.25, indicando-se nesta última também os valores de $\sigma_u(t)$ e $\sigma_{\dot{u}}(t)$ obtidos por Chang [51] com recurso a técnicas de simulação digital, envolvendo o tratamento estatístico de 100 realizações distintas dos processos de resposta, obtidas por aplicação de um método de integração directa a partir de outras tantas histórias temporais da aceleração de base, compatíveis com o modelo não-estacionário da excitação sísmica antes referido.

Da comparação dos valores alcançados com o programa PROG9 com os apresentados por Chang, pôde constatar-se não só o bom funcionamento deste programa face a um modelo computacional análogo desenvolvido por aquele investigador com base no método de linearização estocástica equivalente, mas também a excelente aproximação conseguida por este método no que respeita à estimativa de $\sigma_u(t)$ e $\sigma_{\dot{u}}(t)$.

No sentido de testar também o programa de cálculo PROG8, foi igualmente considerada uma função de modulação do tipo Heaviside, por forma a idealizar uma excitação pseudo-não-estacionária, cuja resposta estrutural, obtida pelo programa PROG9, se encontra traduzida de forma gráfica nas figuras 5.26 e 5.27. A evolução temporal de $\sigma_u(t)$ e $\sigma_{\dot{u}}(t)$, analisada ao longo de um intervalo de tempo $100s$, mostra pois a existência de uma tendência assintótica daquelas variáveis, sendo essa tendência bastante rápida no caso da velocidade de piso, mas significativamente mais lenta no caso do deslocamento correspondente, aspecto que é nitidamente motivado pela natureza não-linear histerética do comportamento estrutural, como resulta claro da comparação destes resultados com os de análises do mesmo tipo apresentadas na secção 3.4.3, envolvendo sistemas lineares. É de realçar, por outro lado, que se registou uma excelente concordância entre os valores máximos de $\sigma_u(t)$ e $\sigma_{\dot{u}}(t)$ motivados pela excitação pseudo-não-estacionária e os correspondentes valores estacionários avaliados por aplicação

do programa PROG8 ($\sigma_u = 0,118 ft$ e $\sigma_{\dot{u}} = 0,518 ft/s$), sendo a diferença relativa máxima da ordem dos 4%, facto que serviu naturalmente também para testar o bom funcionamento deste modelo computacional.

Este mesmo exemplo foi ainda analisado para duas outras acções sísmicas com características em tudo semelhantes, salvo no que se refere à intensidade espectral S_o, que foi quadriplicada, encontrando-se as correspondentes evoluções temporais de $c_e(t)$, $k_e(t)$, $\sigma_u(t)$ e $\sigma_{\dot{u}}(t)$ traduzidas graficamente nas figuras 5.28 e 5.29. Como se pode concluir da sua observação, regista-se também neste caso uma apreciável compatibilidade dos resultados obtidos pelo método de linearização equivalente com os alcançados por simulações numéricas [51], o mesmo sucedendo entre os valores máximos de $\sigma_u(t)$ e $\sigma_{\dot{u}}(t)$, decorrentes da aplicação da excitação pseudo-não-estacionária (fig. 5.30 e 5.31), e os valores estacionários estimados com base no programa PROG8 ($\sigma_u = 0,271 ft$ e $\sigma_{\dot{u}} = 0,86 ft/s$), tendo-se obtido diferenças relativas da mesma ordem de grandeza que no caso anterior.

Como segundo exemplo de aplicação, apresenta-se o caso de uma estrutura do tipo "shear-building" com dois pisos, aos quais se encontram associadas massas de valor $m_1 = 2,488$ e $m_2 = 1,244 kips.s^2/ft$, sendo o comportamento histerético dos pilares entre pisos caracterizado pelos seguintes parâmetros do modelo de Bouc-Wen: $k_1 = 83,5$, $k_2 = 35,2 kips/ft$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,04$, $A_1 = A_2 = 1,0$, $n_1 = n_2 = 1$, $\beta_1 = \gamma_1 = 3,55/ft$ e $\beta_2 = \gamma_2 = 2,0/ft$. A matriz de amortecimento foi por sua vez quantificada através da relação (4.221), tomando $\alpha_c = 0,263/s$ e $\beta_c = 0,00852s$. A acção sísmica foi caracterizada da mesma forma que no caso anterior, tendo-se igualmente considerado as duas funções de modulação já mencionadas, e fixado o valor da densidade espectral S_o em $0,1 ft^2/s^3$.

Nas figuras 5.32 e 5.33 encontram-se representadas sob forma gráfica as evoluções temporais dos desvios padrões relativos aos deslocamentos relativos entre pisos, σ_{u_1} e σ_{u_2}, e às velocidades correspondentes, $\sigma_{\dot{u}_1}$ e $\sigma_{\dot{u}_2}$, decorrentes da actuação daqueles dois tipos de excitação.

À semelhança do sucedido no exemplo anterior, verifica-se também uma excelente concordância de resultados face aos valores apresentados

por Chang, calculados quer com base no método de linearização estocástica equivalente, quer com recurso a técnicas de simulação numérica.

Por outro lado, no caso da excitação pseudo-não-estacionária (Fig. 5.34 e 5.35) regista-se ainda uma boa compatibilidade de resultados em relação aos correspondentes valores estacionários, calculados com o programa PROG8 ($\sigma_{u_1}=0,188ft$, $\sigma_{u_2}=0,133ft/s$, $\sigma_{\dot{u}_1}=0,387ft$ e $\sigma_{\dot{u}_2}=0,434ft/s$), muito embora a diferença relativa encontrada para σ_{u_1} seja um pouco superior ao verificado nos exemplos anteriores, situando-se na ordem dos 10%.

É de realçar, no entanto, que estas pequenas diferenças relativas encontradas em relação aos valores assintóticos, praticamente inexistentes no caso de sistemas lineares, são aqui facilmente compreensíveis, sendo essencialmente resultantes das aproximações introduzidas por consecutivas linearizações do modelo histerético registadas ao cabo de cada intervalo de tempo incremental, e cujo efeito é cumulativo em termos da análise da resposta não-estacionária, como ressalta aliás evidente da observação da equação (5.248).

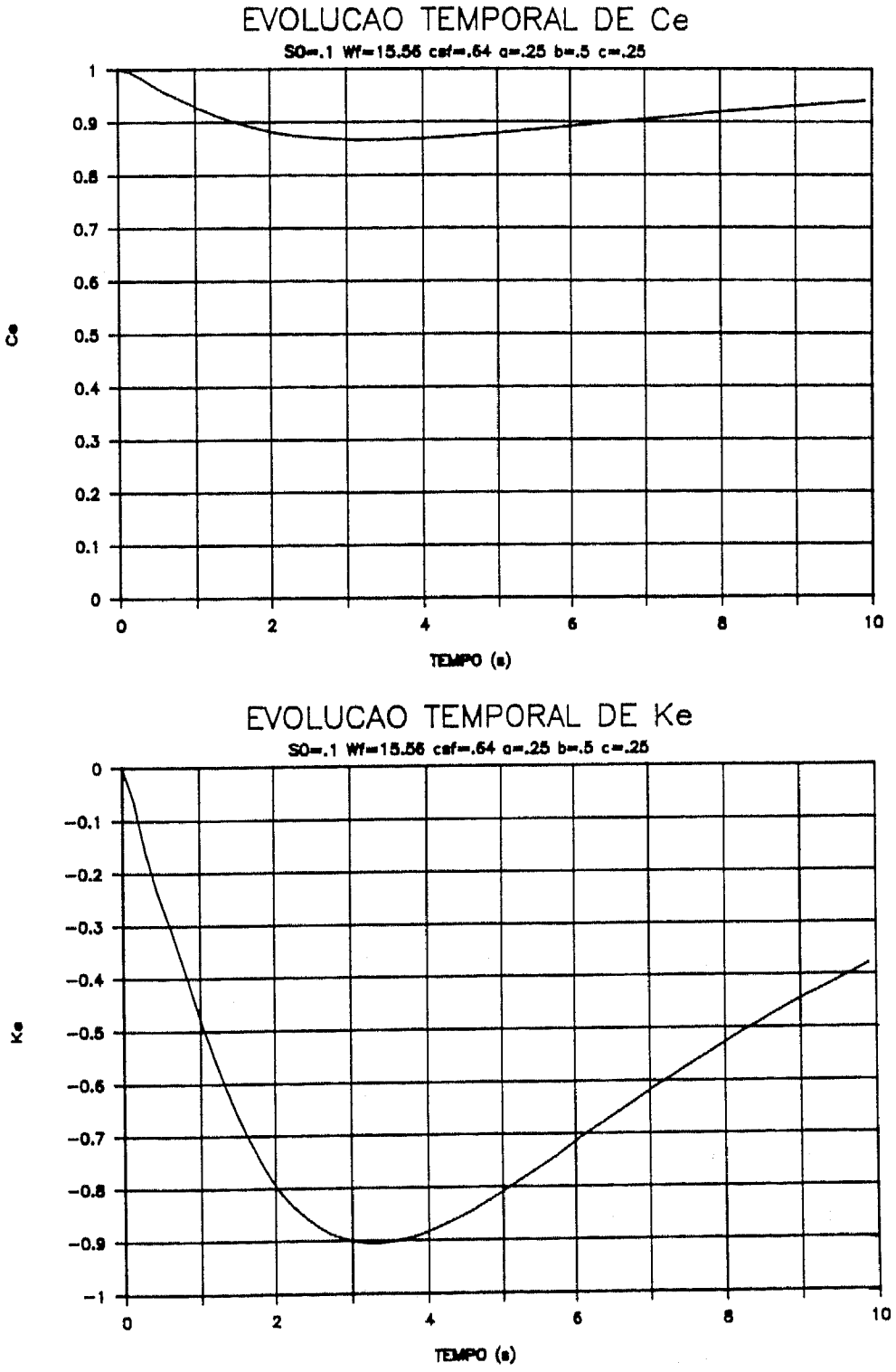


Fig. 5.24 - Sistema de 1-GL; Excitação não-estacionária ($S_o = 0,1$)
Evolução temporal dos coeficientes c_e e k_e.

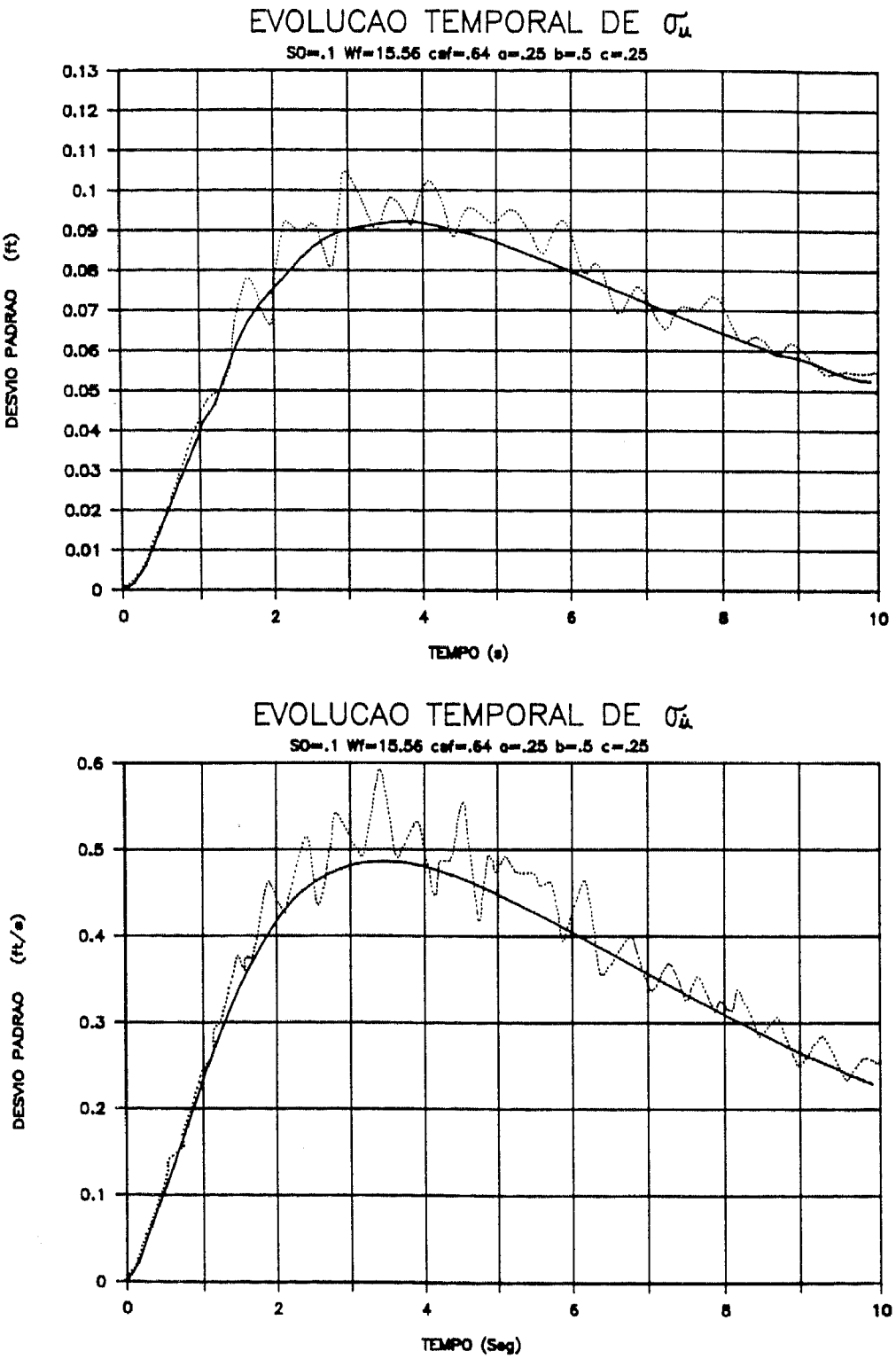


Fig. 5.25 - Sistema de 1-GL; Excitação não-estacionária ($S_o = 0,1$)
Evolução temporal de σ_u e $\sigma_{\dot{u}}$.

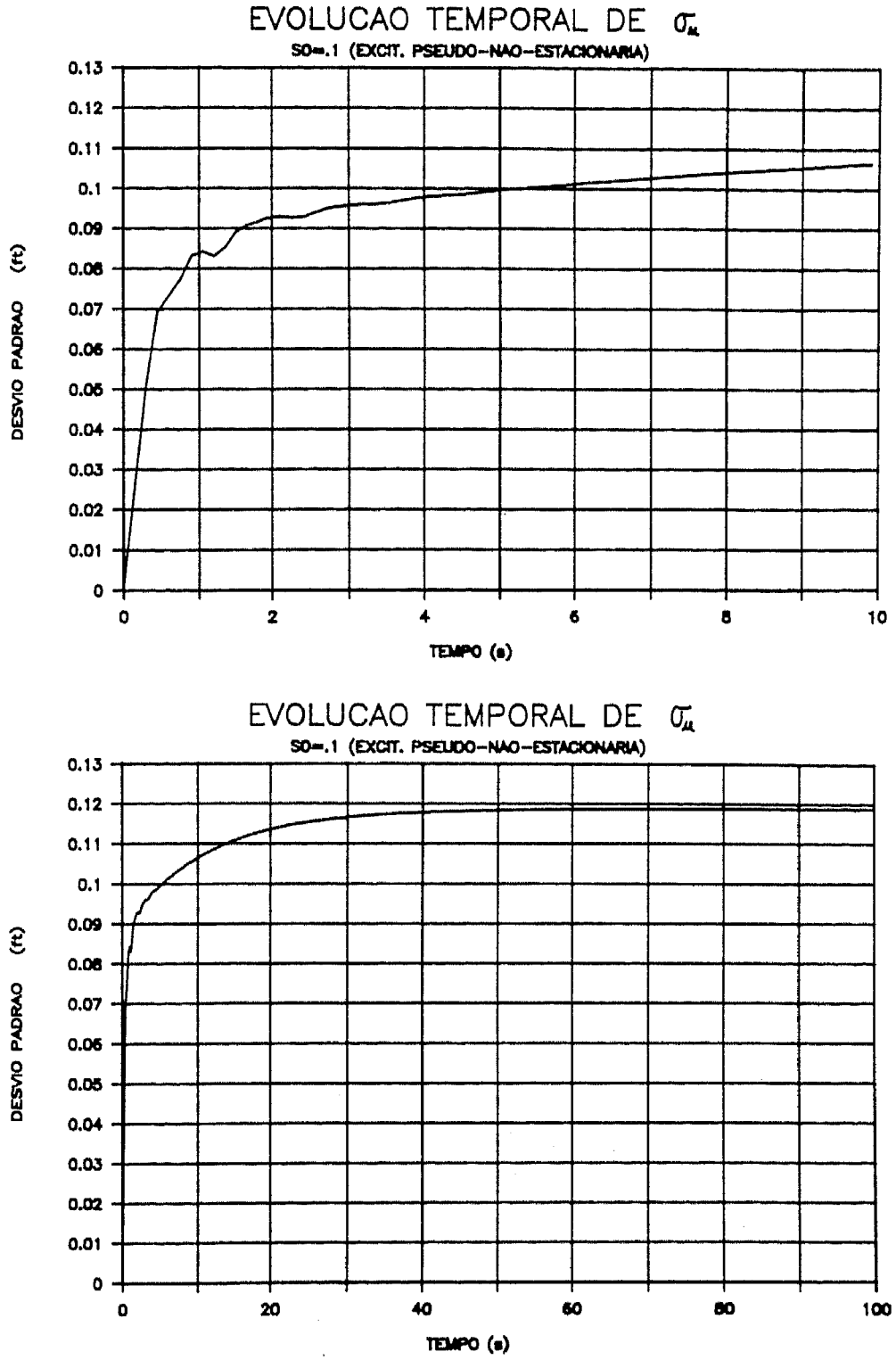


Fig. 5.26 - Sistema de 1-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ($S_o = 0,1$); Evolução temporal de σ_u.

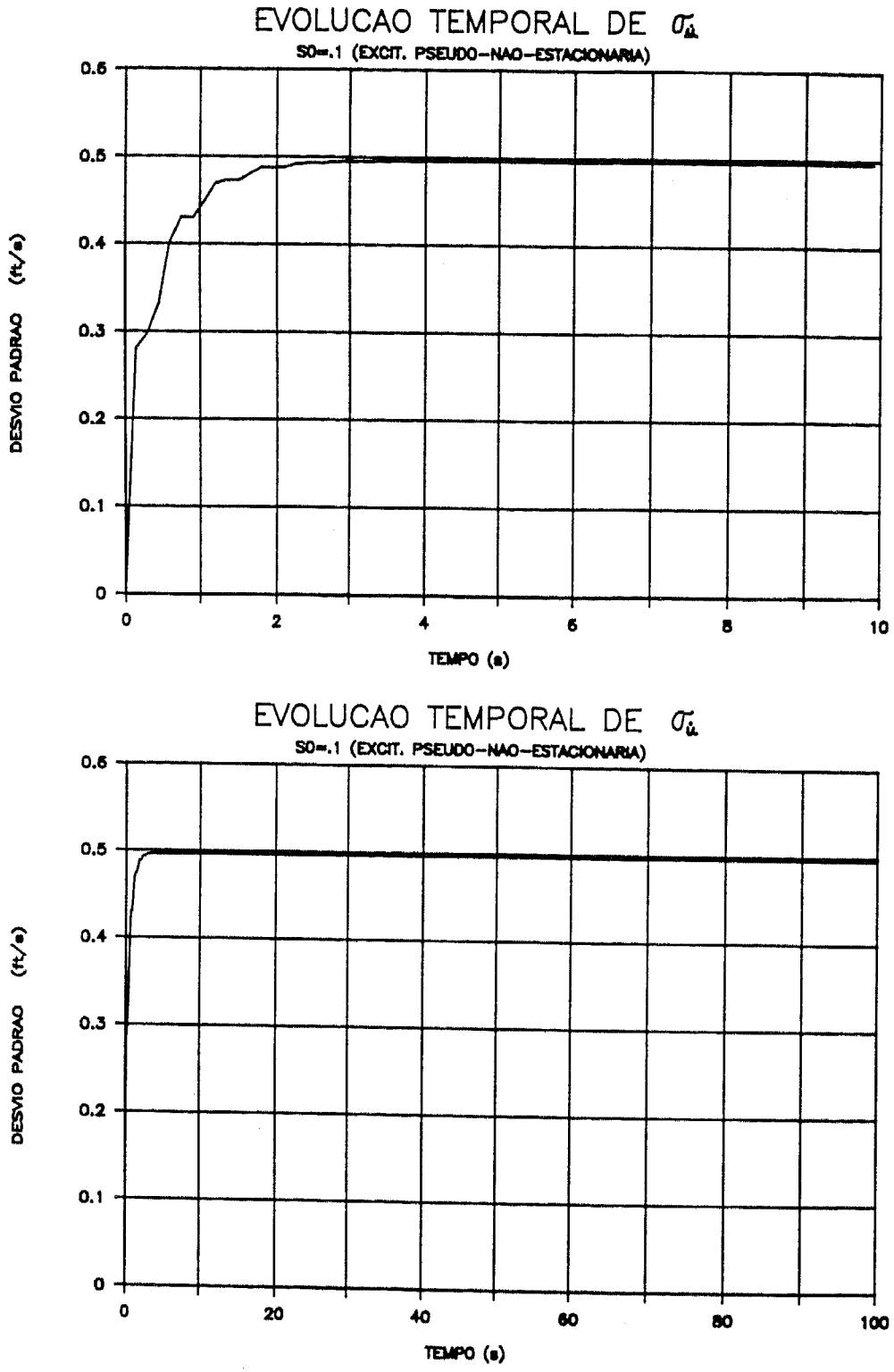


Fig. 5.27 - Sistema de 1-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ($S_o = 0,1$); Evolução temporal de $\sigma_{\dot{u}}$.

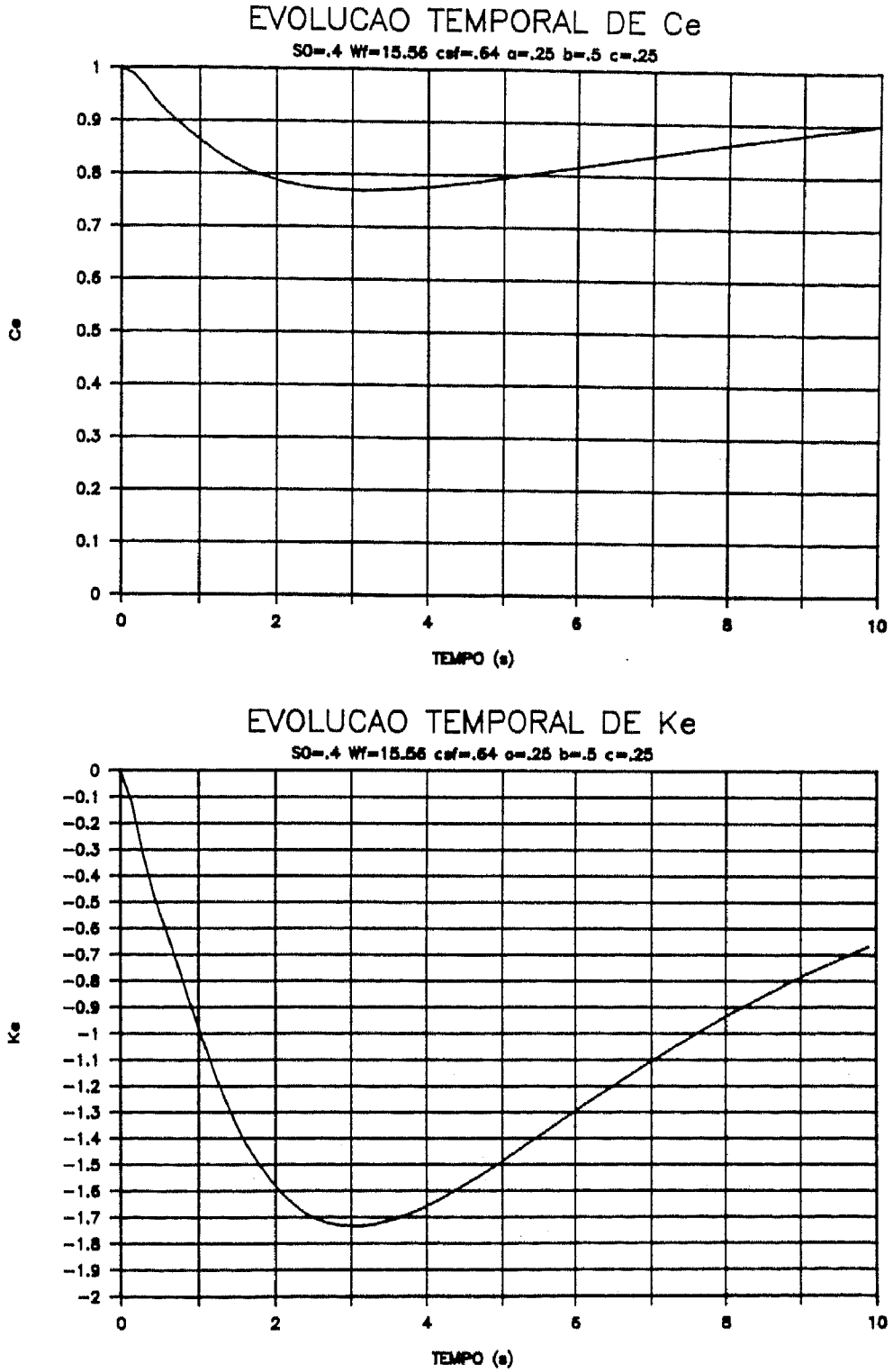


Fig. 5.28 - Sistema de 1-GL; Excitação não-estacionária ($S_o = 0,4$)
Evolução temporal dos coeficientes c_e e k_e.

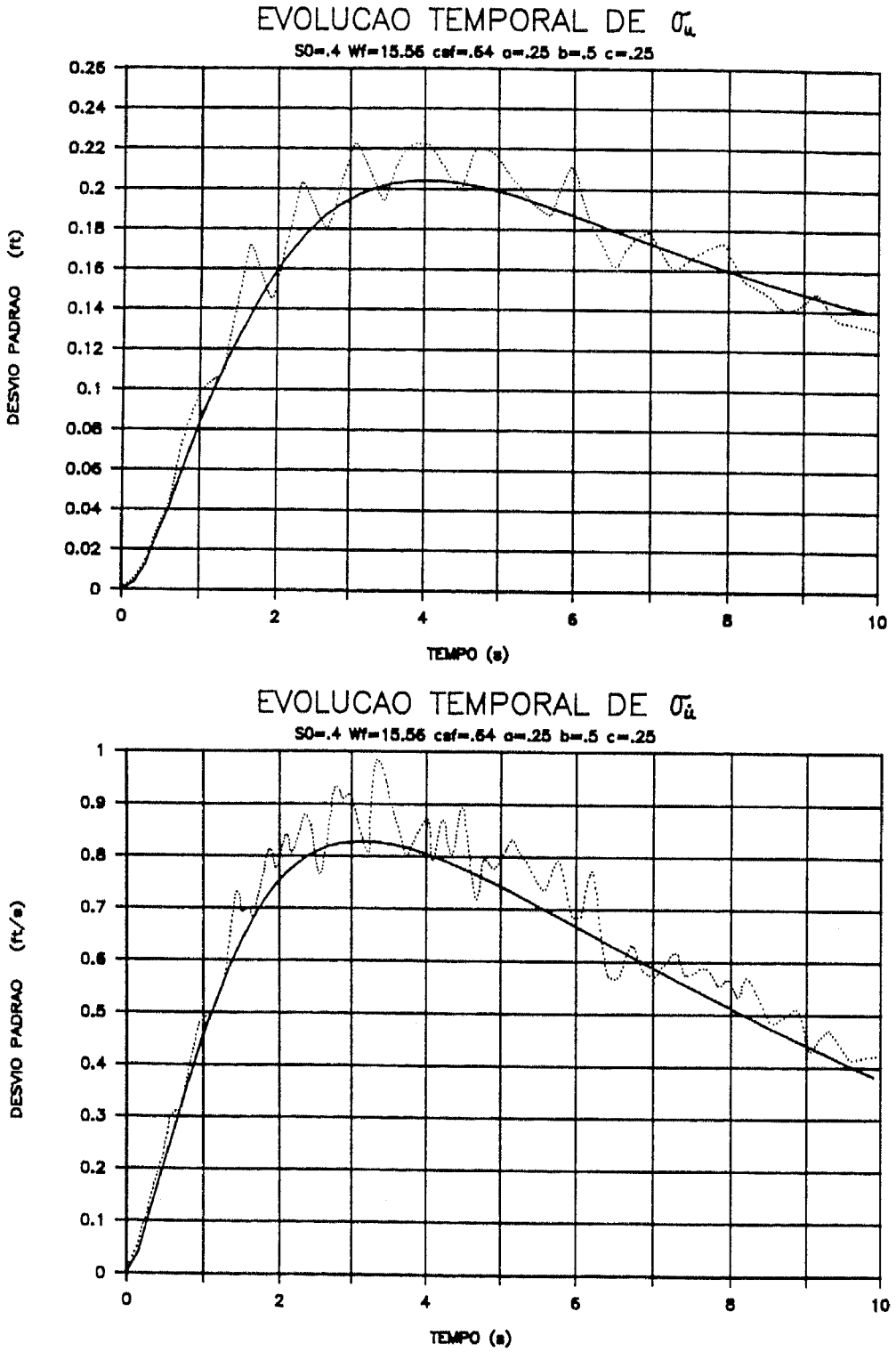


Fig. 5.29 - Sistema de 1-GL; Excitação não-estacionária ($S_o = 0,4$)
Evolução temporal de σ_u e $\sigma_{\dot{u}}$.

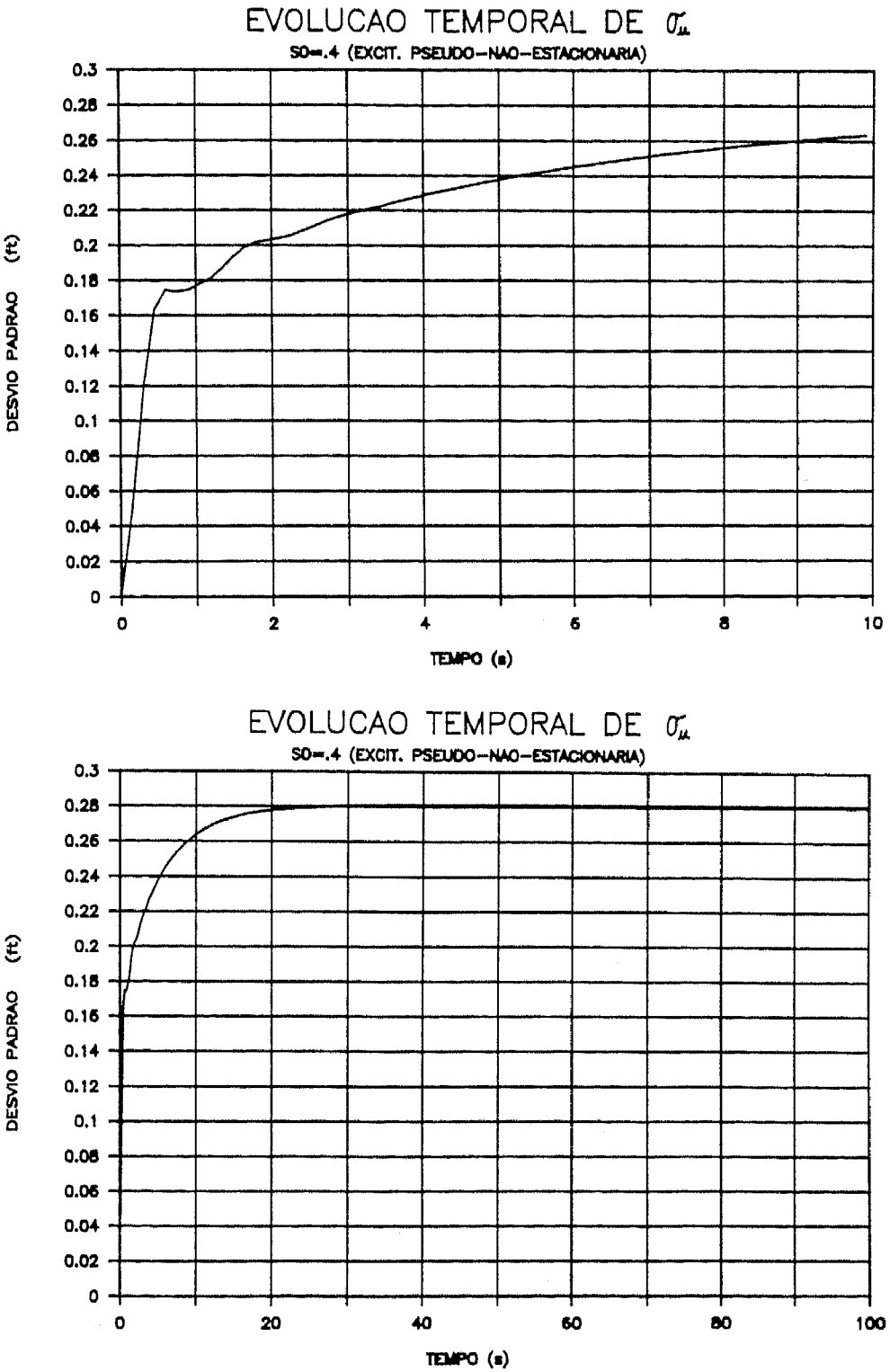


Fig. 5.30 - Sistema de 1-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ($S_o = 0,4$); Evolução temporal de σ_u.

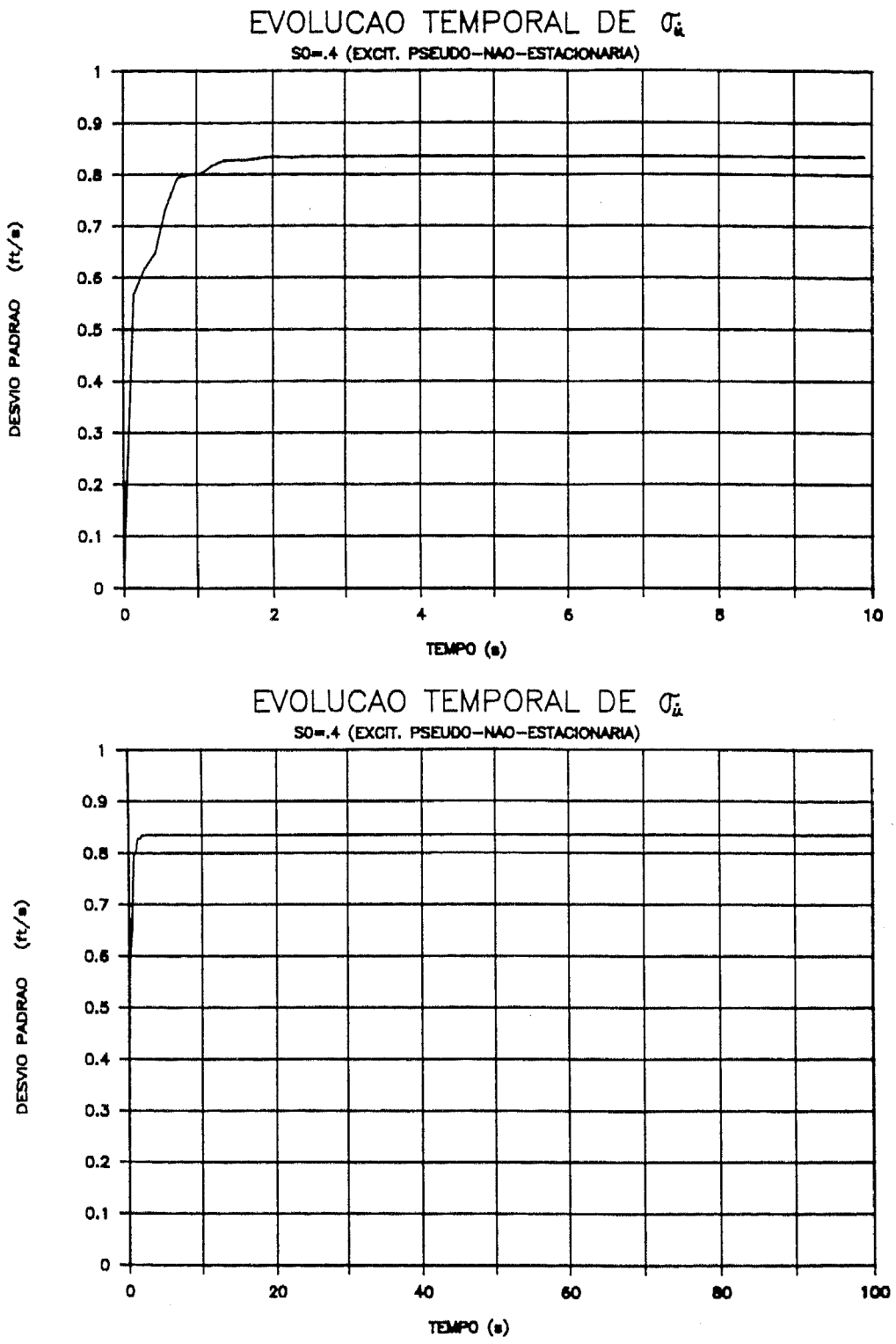


Fig. 5.31 - Sistema de 1-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ($S_o = 0,4$); Evolução temporal de $\sigma_{\ddot{u}}$.

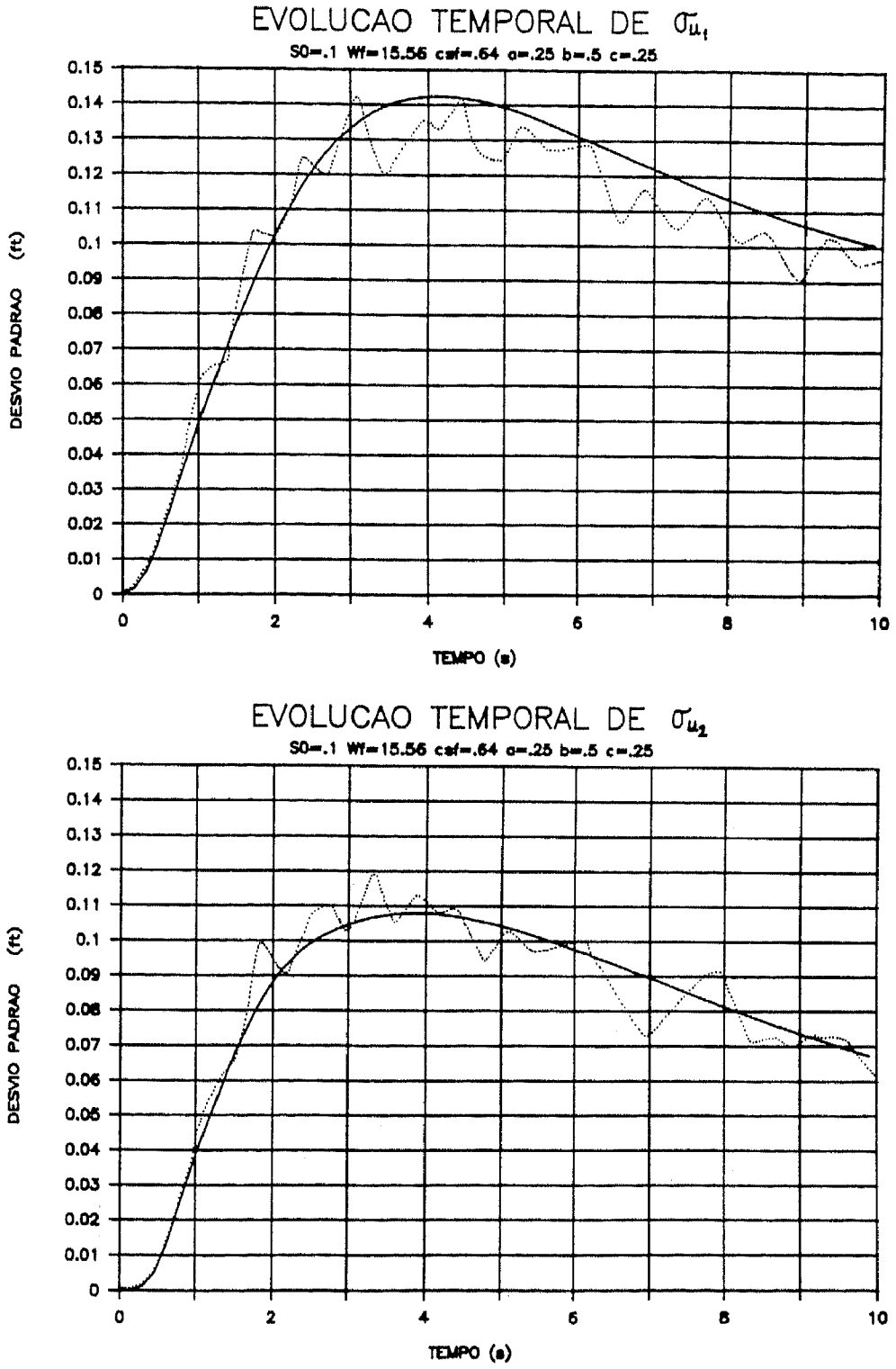


Fig. 5.32 - Sistema de 2-GL; Excitação não-estacionária ($S_o = 0,1$)
Evolução temporal de σ_{u_1} e σ_{u_2}.

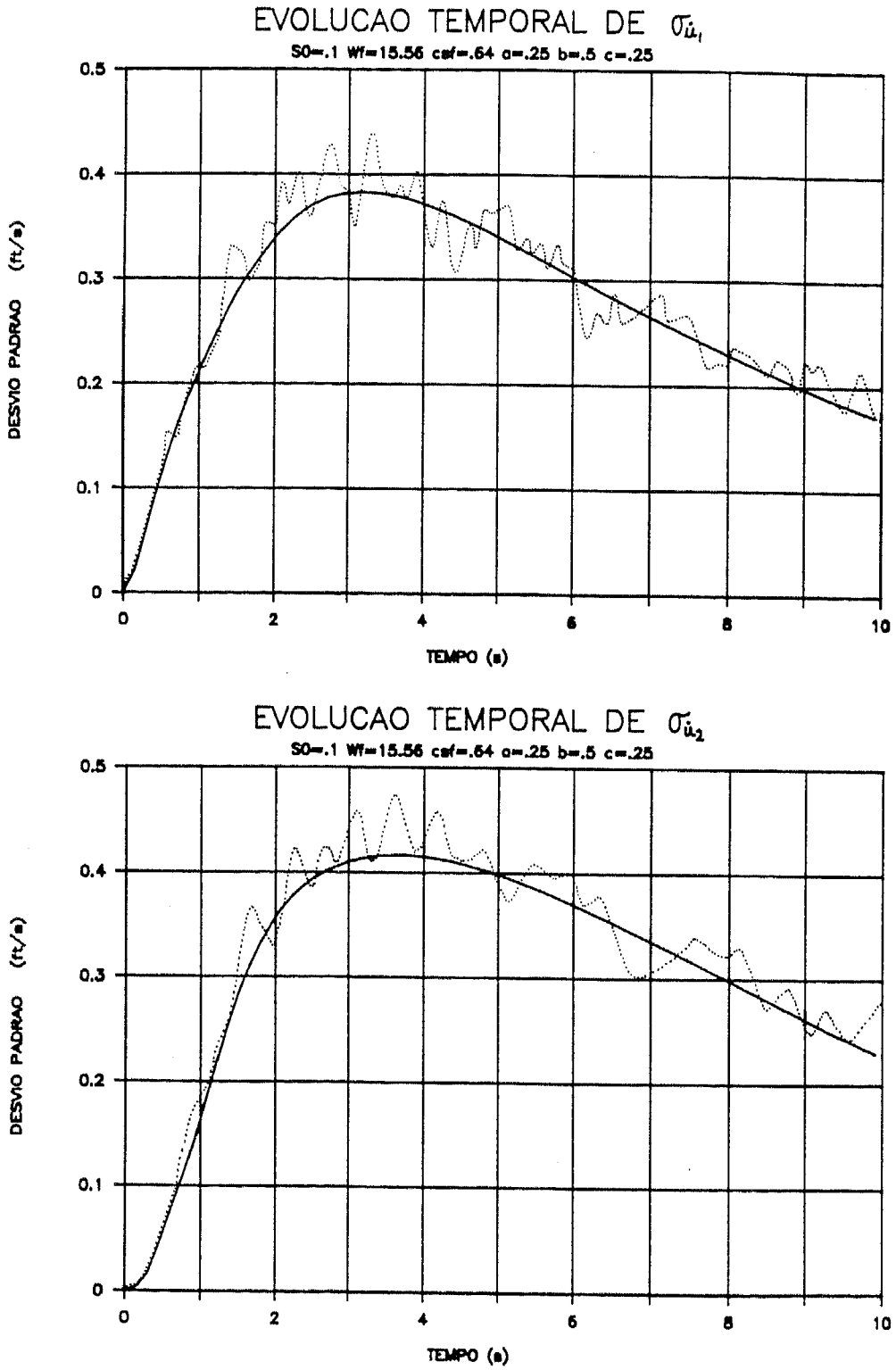


Fig. 5.33 - Sistema de 2-GL; Excitação não-estacionária ($S_o = 0,1$)
Evolução temporal de $\sigma_{\dot{u}_1}$ e $\sigma_{\dot{u}_2}$.

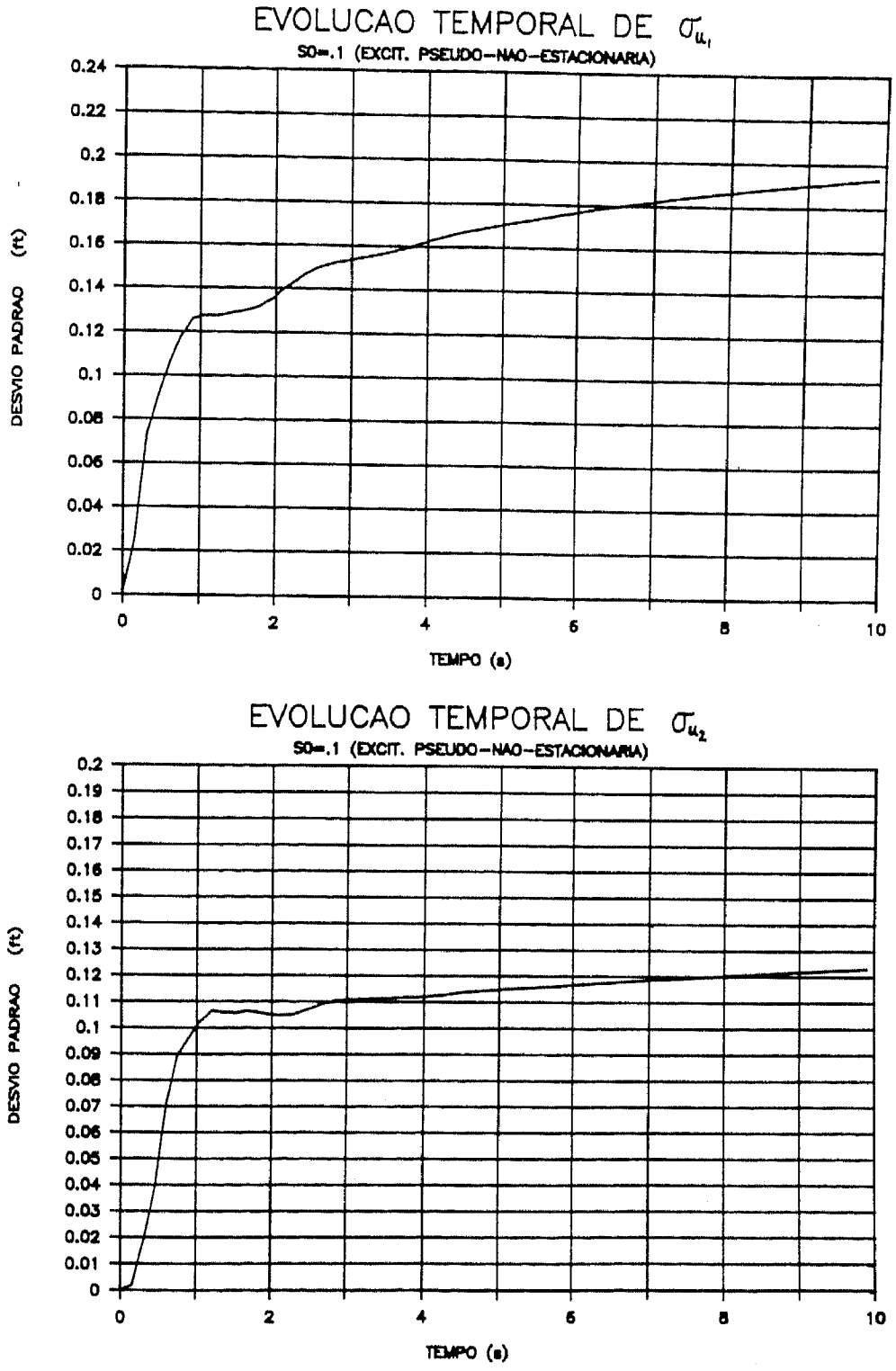


Fig. 5.32 - Sistema de 2-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ($S_o = 0,1$); Evolução temporal de σ_{u_1} e σ_{u_2}.

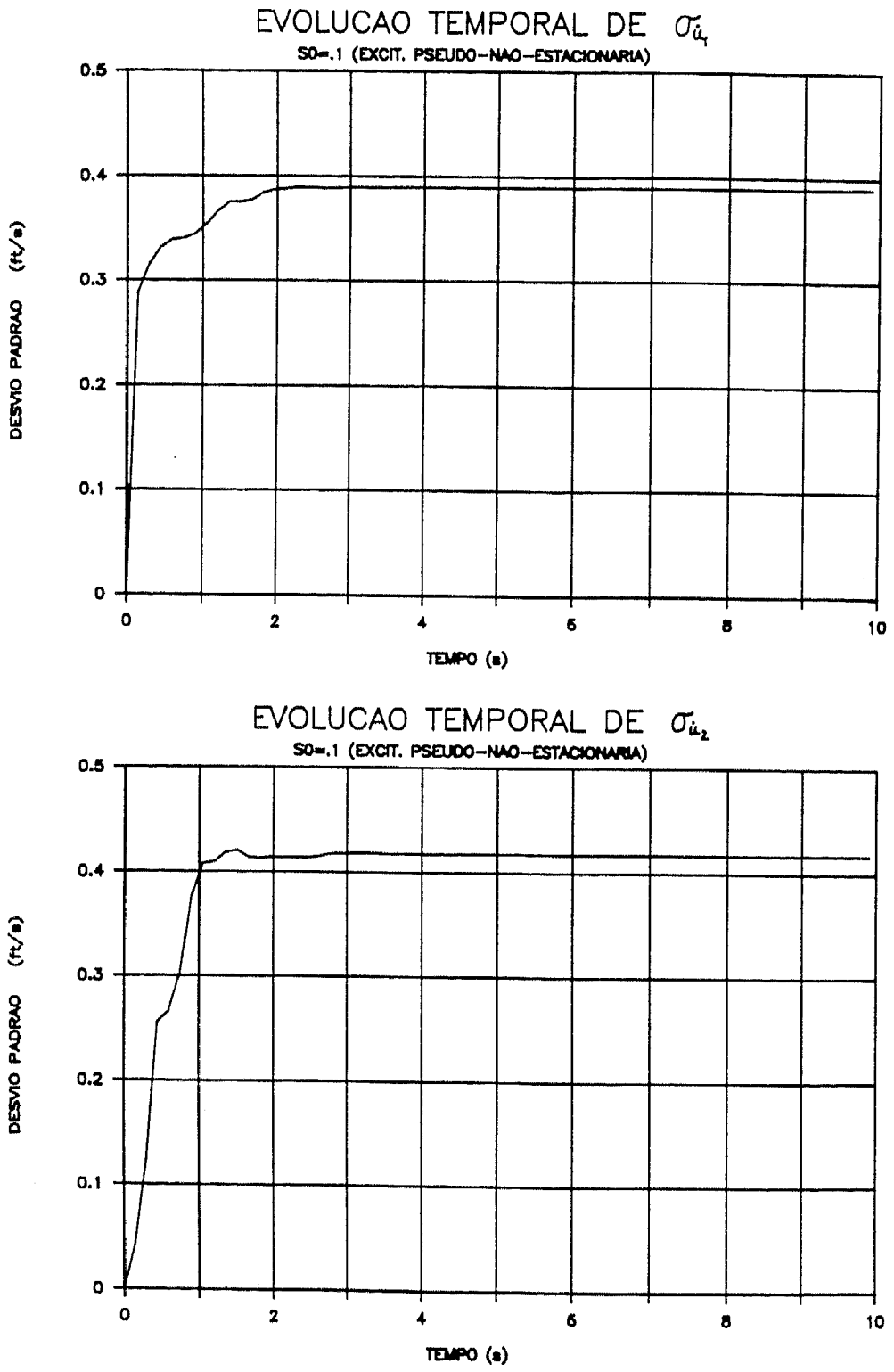


Fig. 5.33 - Sistema de 2-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ($S_o = 0,1$); Evolução temporal de $\sigma_{\dot{u}_1}$ e $\sigma_{\dot{u}_2}$.

5.7.6 - Resposta sísmica estacionária ou não-estacionária de pórticos planos com rótulas não-lineares histeréticas nas extremidades das barras

Considere-se agora o comportamento não-linear histerético de um pórtico, idealizado através de uma discretização da estrutura num conjunto de elementos de funcionamento elástico e linear, interligados através de rótulas plásticas supostamente localizadas nas extremidades das barras.

Para o efeito, considere-se apenas a barra genérica l representada na figura 5.36, que estabelece a ligação entre os nós i e j da estrutura. Designando por $\underline{F}_l$ o vector constituído pelas 6 componentes das forças nodais nas extremidades, por $\underline{u}_l$ o vector dos deslocamentos generalizados correspondentes e por $\underline{\psi}_l$ o vector formado pelas rotações inelásticas ψ_{li} e ψ_{lj} nas duas rótulas plásticas respectivas, fácil é constatar que entre eles se verifica a relação

$$\underline{F}_l = \underline{K}_l \underline{u}_l - \underline{Q}_l \underline{\psi}_l \tag{5.252}$$

sendo

$$\underline{K}_l = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad \underline{Q}_l = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.253}$$

Nestas condições, o equilíbrio dinâmico do sistema, quando sujeito a uma acção aleatória estacionária, poderia ser traduzido, mediante a consideração de 3 graus de liberdade em cada nó livre, através do sistema de equações diferenciais de segunda ordem

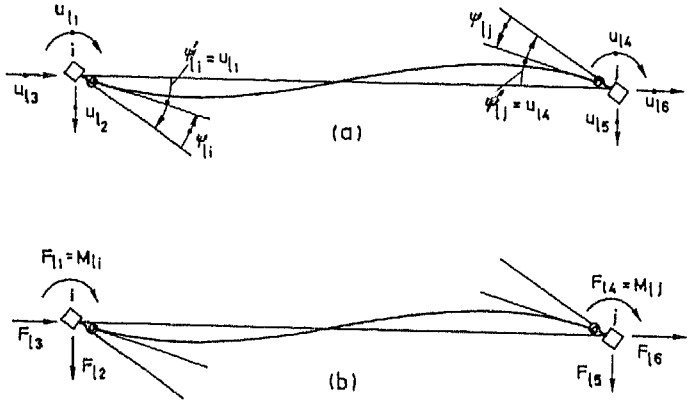


Fig. 5.36 - Deslocamentos, forças nodais e rotações inelásticas.

$$\underline{M}\ddot{\underline{u}} + \underline{C}\dot{\underline{u}} + \underline{K}\underline{u} - \underline{Q}\underline{\Psi} = \underline{p}^{u}(t) \tag{5.254}$$

em que $\underline{u}$ seria o vector representativo dos deslocamentos associados à totalidade dos graus de liberdade considerados, resultando as matrizes $\underline{K}$ e $\underline{Q}$ do espalhamento conveniente das matrizes $\underline{K}_l$ e $\underline{Q}_l$ relativas a cada barra constituinte da estrutura. $\underline{M}$ e $\underline{C}$ seriam por sua vez as matrizes de massa e de amortecimento referidas às coordenadas generalizadas consideradas, $\underline{\Psi}$ o vector das rotações inelásticas registadas nas rótulas plásticas e $\underline{p}^{u}(t)$ o processo estocástico ;al estacionário caracterizador da excitação.

»de porém que, tendo apenas em consideração os efeitos da a horizontal, muitas das componentes quer do vector das dos vectores das forças de inércia e de amortecimento 'endo pois vantagem em introduzir um número mais reduzido generalizadas, condensando também o número de equações :a traduzir o equilíbrio dinâmico do sistema.

ignando por $\underline{q}$ um vector constituído por N deslocamentos erizadores dos deslocamentos horizontais dos N pisos, ·or que aglutina as restantes componentes do vector $\underline{u}$,

$$\underline{u}^{T} = \left[\underline{q}^{T}, \underline{q}_{o}^{T}\right] \tag{5.255}$$

o movimento do sistema pode ser descrito pela equação

$$\begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{q}} \\ \ddot{\underline{q}}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\underline{q}}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{MM} & \underline{K}_{MO} \\ \underline{K}_{OM} & \underline{K}_{OO} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \underline{q}_o \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underline{Q}_M \\ \underline{Q}_o \end{Bmatrix} \underline{\Psi} = \begin{Bmatrix} -\underline{M}\underline{a} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \tag{5.256}$$

em que $\underline{M}$ e $\underline{C}$ representam as matrizes de massa e de amortecimento referidas às N coordenadas q_i, e $\underline{K}_{MM}$, $\underline{K}_{MO}$, $\underline{K}_{OM}$, $\underline{K}_{OO}$, $\underline{Q}_M$ e $\underline{Q}_o$ constituem submatrizes de $\underline{K}$ e $\underline{Q}$.

Esta igualdade matricial permite de imediato concluir não só que

$$\underline{q}_o = \underline{K}_{OO}^{-1}(\underline{Q}_o \underline{\Psi} - \underline{K}_{OM}\underline{q}) \tag{5.257}$$

mas também que

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{C}\dot{\underline{q}} + \underline{K}_c\underline{q} - \underline{Q}_c\underline{\Psi} = -\underline{M}\underline{a}\ddot{u}_g(t) \tag{5.258}$$

sendo as matrizes condensadas $\underline{K}_c$ e $\underline{Q}_c$ dadas por

$$\begin{aligned} \underline{K}_c &= \underline{K}_{MM} - \underline{K}_{MO}\underline{K}_{OO}^{-1}\underline{K}_{OM} \\ \underline{Q}_c &= \underline{Q}_M - \underline{K}_{MO}\underline{K}_{OO}^{-1}\underline{Q}_o \end{aligned} \tag{5.259}$$

Por outro lado, o vector $\underline{M}_l$, constituído pelos momentos flectores M_{li} e M_{lj} actuantes nas extremidades da barra genérica l, pode também relacionar-se com os vectores de deslocamentos nodais $\underline{u}_l$ e de rotações inelásticas $\underline{\psi}_l$ através da equação

$$\underline{M}_l = \underline{Q}_l^T \underline{u}_l - \underline{K}_{\psi l}\underline{\psi}_l \tag{5.260}$$

em que

$$\underline{K}_{\psi l} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{5.261}$$

Procedendo ao adequado agrupamento de todas as equações deste tipo, referentes à totalidade das barras da estrutura, pode conseguir-se a expressão do vector $\underline{M}_p$, que engloba os valores de todos os momentos plásticos, em função dos vectores $\underline{u}$ e $\underline{\psi}$, obtendo-se que

$$\underline{M}_p = \underline{Q}^T \underline{u} - \underline{K}_\psi \underline{\psi} \tag{5.262}$$

Tendo presente (5.255), pode também escrever-se que

$$\underline{M}_p = \left[\underline{Q}_M^T \underline{Q}_o^T\right] \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \underline{q}_o \end{Bmatrix} - \underline{K}_\psi \underline{\psi} \tag{5.263}$$

equação que, conjugada com (5.257), permite escrever directamente $\underline{M}_p$ em função de $\underline{q}$ e de $\underline{\psi}$ através da relação

$$\underline{M}_p = \underline{Q}_1 \underline{q} - \underline{Q}_2 \underline{\psi} \tag{5.264}$$

com

$$\underline{Q}_1 = Q_M^T - Q_o^T K_{OO}^{-1} K_{OM}$$

$$\underline{Q}_2 = \underline{K}_\psi - \underline{Q}_O^T K_{OO}^{-1} \underline{Q}_O \tag{5.265}$$

Por outro lado ainda, supondo-se a lei constitutiva do comportamento histerético de cada rótula plástica descrita através do modelo de Bouc-Wen, podem escrever-se as seguintes equações relativas ao funcionamento de cada rótula

$$M_{ii} = \alpha_{ii} k_{ii} \psi_{ii} + (1 - \alpha_{ii}) k_{ii} z_{ii} \tag{5.266}$$

$$\dot{z}_{ii} = A_{ii} \dot{\psi}_{ii} - \beta_{ii} |\dot{\psi}_{ii}| |z_{ii}|^{n_{ii}-1} - \gamma_{ii} \dot{\psi}_{ii} |z_{ii}|^{n_{ii}} \tag{5.267}$$

Considerando a linearização das equações (5.267) sob a forma habitual

$$\dot{z}_{ii} = c_{ii}^e \dot{\psi}_{ii} + k_{ii}^e z_{ii} \tag{5.268}$$

e procedendo ao conveniente agrupamento de todas as equações (5.266) e (5.268), obtêm-se também relações matriciais do tipo

$$\underline{M}_p = \underline{Q}_3 \underline{\psi} + \underline{Q}_4 \underline{z} \tag{5.269}$$

$$\dot{\underline{z}} = \underline{C}_e \dot{\underline{\psi}} + \underline{K}_e \underline{z} \tag{5.270}$$

em que $\underline{Q}_3$, $\underline{Q}_4$, $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ são matrizes diagonais constituídas respectivamente pelos valores de $\alpha_{ii} k_{ii}$, $(1-\alpha_{ii}) k_{ii}$, c_{ii}^e e k_{ii}^e.

Igualando os segundos membros das equações (5.264) e (5.269), pode retirar-se a expressão do vector $\underline{z}$ em função de $\underline{q}$ e $\underline{\psi}$

$$\underline{z} = \underline{Q}_4^{-1} [\underline{Q}_1 \underline{q} - (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) \underline{\psi}] \tag{5.271}$$

a qual, mediante substituição em (5.270), possibilita concluir que

$$\dot{\underline{\psi}} = \left[-\underline{Q}_4^{-1} (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) - \underline{C}_e \right]^{-1} \left[\underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 \underline{q} - \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 \dot{\underline{q}} - \underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) \underline{\psi} \right] \tag{5.272}$$

Deste modo, as equações (5.258) e (5.272) caracterizam no seu conjunto o equilíbrio dinâmico do sistema estrutural em análise e a forma de comportamento não-linear histerético correspondente, podendo ser expressas de forma mais condensada através da introdução do vector de estado

$$\underline{y} = \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \dot{\underline{q}} \\ \underline{\psi} \end{Bmatrix} \tag{5.273}$$

resultando então que

$$\underline{D} \dot{\underline{y}}(t) + \underline{E} \underline{y}(t) = \underline{f}(t) \tag{5.274}$$

sendo

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{M} & \underline{0} \\ \underline{K}_c & \underline{C} & -\underline{Q}_c \\ -\underline{Q}_e \underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 & \underline{Q}_e \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 & \underline{Q}_e \underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) \end{bmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{M} \underline{a} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \tag{5.275}$$

com

$$\underline{Q}_e = \left[-\underline{Q}_4^{-1} (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) - \underline{C}_e \right]^{-1} \tag{5.276}$$

Alternativamente, pode também escrever-se

$$\dot{\underline{y}}(t)=\underline{A}_e\underline{y}(t)+\underline{x}(t) \tag{5.277}$$

em que

$$\underline{A}_e=\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K}_c & -\underline{M}^{-1}\underline{C} & \underline{M}^{-1}\underline{Q}_c \\ \underline{Q}_e\underline{K}_e\underline{Q}_4^{-1}\underline{Q}_1 & -\underline{Q}_e\underline{Q}_4^{-1}\underline{Q}_1 & -\underline{Q}_e\underline{K}_e\underline{Q}_4^{-1}(\underline{Q}_2+\underline{Q}_3) \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t)=\begin{Bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{a} \\ \underline{0} \end{Bmatrix}\ddot{u}_g(t) \tag{5.278}$$

Se o processo estocástico $\ddot{u}_g(t)$ for do tipo ruído branco de média nula e densidade espectral S_o, a matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y$ obedece à equação de Liapunov

$$\underline{A}_e\underline{\mu}_y+\underline{\mu}_y\underline{A}_e^T+2\pi\underline{S}_o=\underline{0} \tag{5.279}$$

com

$$\underline{S}_o=\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{a}\underline{a}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}S_o \tag{5.280}$$

No caso mais geral de a aceleração de base ser traduzida por um processo estocástico $\ddot{u}_g(t)$ caracterizado por um espectro de potência de Kanai-Tajimi, deve proceder-se à introdução de um filtro, à semelhança do procedimento utilizado em 5.7.2, tendo nesse caso o vector de estado a seguinte constituição

$$\underline{y}^T=[\underline{q}^T,\dot{\underline{q}}^T,\underline{\psi}^T,u_f,\dot{u}_f] \tag{5.281}$$

e sendo a matriz de estado $\underline{A}_e$ e o vector da excitação $\underline{x}(t)$ dados por

$$\underline{A}_e=\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K}_c & -\underline{M}^{-1}\underline{C} & \underline{M}^{-1}\underline{Q}_c & \underline{a}\alpha_1 & \underline{a}\alpha_o \\ \underline{Q}_e\underline{K}_e\underline{Q}_4^{-1}\underline{Q}_1 & -\underline{Q}_e\underline{Q}_4^{-1}\underline{Q}_1 & -\underline{Q}_e\underline{K}_e\underline{Q}_4^{-1}(\underline{Q}_2+\underline{Q}_3) & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 1 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\alpha_1 & -\alpha_o \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t)=\begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}\ddot{u}_g^o(t) \tag{5.282}$$

em que $\ddot{u}_g^o(t)$ representa o ruído branco de intensidade espectral S_o

actuante sobre o filtro de frequência natural w_f e coeficiente de amortecimento ξ_f, sendo $\alpha_0 = 2\xi_f w_f$ e $\alpha_1 = w_f^2$.

Nessas condições, a matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_y$ pode ser obtida através da resolução da equação de Liapunov (5.279), tomando neste caso

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} S_o \tag{5.283}$$

Caso a aceleração de base assuma um carácter não-estacionário, sendo idealizada através do produto

$$\ddot{u}_{g*}(t) = \theta(t)\ddot{u}_g(t) \tag{5.284}$$

de uma função de modulação $\theta(t)$ por um ruído branco gaussiano $\ddot{u}_g(t)$ de média nula e densidade espectral de potência S_o, não só as matrizes de linearização $\underline{C}_e$ e $\underline{K}_e$ se tornam dependentes do tempo, como também se torna necessário substituir $\ddot{u}_g(t)$ por $\theta(t)\ddot{u}_g(t)$ nas equações (5.256), (5.258), (5.275) e (5.278), acabando a evolução temporal da matriz de covariância da resposta por ser regulada pela equação

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y\underline{A}_e^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \tag{5.285}$$

em que

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{a}\underline{a}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \theta^2(t) S_o \tag{5.286}$$

sendo a composição da matriz $\underline{A}_e(t)$ idêntica à referida em (5.278).

No caso mais geral de uma excitação não-estacionária do tipo colorido, em que a aceleração de base do filtro anteriormente referido seja idealizada através do produto definido pela equação (5.229), isto é

$$\ddot{u}^{o}_{g*}(t) = \theta(t)\ddot{u}^{o}_{g}(t) \tag{5.287}$$

deve analogamente substituir-se $\ddot{u}^{o}_{g}(t)$ por $\theta(t)\ddot{u}^{o}_{g}(t)$ em (5.282), podendo concluir-se neste caso que a evolução temporal da matriz de covariância da resposta é regida igualmente pela equação (5.285), passando a matriz $\underline{S}_{o}(t)$ a ser definida por

$$\underline{S}_{o}(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} \theta^{2}(t) S_{o} \tag{5.288}$$

e tendo a matriz $\underline{A}_{e}(t)$ uma composição semelhante à indicada por (5.282).

Sendo a não-estacionaridade da resposta originada também pela própria degradação estrutural, torna-se necessário ter simultaneamente em consideração a equação (5.231), podendo efectuar-se a caracterização evolutiva da resposta sísmica não-estacionária integrando numericamente as equações (5.285) e (5.231), e utilizando a técnica iterativa referida em 5.6.2.

6

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho de investigação realizado no âmbito da elaboração desta tese permitiu alcançar os objectivos inicialmente propostos, tendo levado ao desenvolvimento de um conjunto de programas de cálculo automático destinados à análise estocástica da resposta sísmica de estruturas de engenharia civil, dotadas de comportamento linear, não-linear elástico ou mesmo histerético, sendo a excitação actuante idealizada através de um processo estocástico estacionário ou não-estacionário modulável.

Por outro lado, o texto da presente dissertação serviu também para concatenar, organizar e desenvolver, com unidade e coerência, as principais formulações da Dinâmica Estrutural Estocástica susceptíveis de serem utilizadas para aquele fim, tarefa que, tendo resultado de todo o trabalho de pesquisa exigido, se entendeu do maior interesse e utilidade face ao grande número e elevada dispersão de artigos científicos publicados internacionalmente ao longo de várias décadas, versando directa ou indirectamente esta aliciante área do conhecimento.

A concluir a apresentação desta tese, julga-se ainda importante reunir as principais conclusões obtidas ao longo dos vários capítulos que a constituem, quer decorrentes da descrição das diversas formulações teóricas abordadas, quer da consideração dos exemplos de aplicação dos programas de cálculo automático elaborados.

Complementarmente, tecem-se também algumas considerações adicionais, particularmente àcerca de perspectivas de futuros desenvolvimentos, sendo para o efeito apresentadas algumas sugestões, que constituirão por certo um novo objectivo de investigação a breve prazo, na continuidade de todo o trabalho até agora levado a cabo.

6.1 - CONCLUSÕES GERAIS RELATIVAS A SISTEMAS LINEARES

No que se refere à análise da resposta aleatória estacionária de sistemas lineares de múltiplos graus de liberdade, são inteiramente conhecidas as relações gerais estocásticas excitação-resposta, quer no domínio do tempo, quer no domínio da frequência, podendo assim, para esse efeito, ser desenvolvidos programas de cálculo automático de relativa simplicidade.

Do ponto de vista da eficiência de cálculo, há no entanto alguma vantagem no recurso à formulação modal alternativa referida em 2.3.3, ou às formulações de estado descritas em 2.3.7 e 2.3.8, passando neste último caso a determinação da matriz de covariância da resposta pela resolução de uma equação de Liapunov, a qual pode ter lugar mediante a utilização do algoritmo de Bartels e Stewart, cujo funcionamento eficaz está garantido para problemas de pequena e média dimensão.

A aplicação dos programas baseados nestes dois tipos de formulações à análise sísmica de estruturas de edifícios correntes demonstrou a sua apreciável eficiência, à semelhança do sucedido com o programa baseado na utilização de espectros de resposta, não se tendo justificado efectuar uma análise sistemática comparativa de tempos de cálculo, em virtude de estes assumirem sempre valores muito pouco significativos, na ordem dos segundos.

Apenas em estruturas caracterizadas por um número muito elevado de graus de liberdade, como é por exemplo o caso da barragem do Alto Lindoso, é que a análise da resposta aleatória estacionária a uma excitação sísmica caracterizada por espectros de potência se tornou relativamente mais morosa que a análise alternativa por espectros de resposta, para o que contribuiu significativamente o elevado número de operações envolvidas no cálculo dos momentos espectrais da resposta no espaço modal.

As análise comparativas da resposta sísmica de estruturas reticuladas planas e de cascas, efectuadas mediante o recurso aos espectros de resposta e às densidades espectrais de potência de aceleração definidas pelo RSA, mostraram registar-se uma satisfatória compatibilidade global de resultados, mesmo quando se tem em

consideração o contributo conjunto de vários modos de vibração, e as frequências naturais são relativamente próximas, sendo as diferenças relativas máximas respeitantes às principais variáveis de controlo da resposta pouco significativas face à elevada incerteza associada à caracterização da própria acção actuante.

Nestas condições, é-se levado a concluir que se, por um lado, a quantificação do valor médio dos picos de resposta em estruturas de média complexidade, como as estruturas de edifícios altos, pode ser efectuada, de acordo com a actual filosofia regulamentar, com alguma vantagem através do recurso aos espectros de potência do RSA, conseguindo-se por essa via uma avaliação mais rigorosa do efeito conjunto das diversas contribuições modais, sem que se registe um agravamento sensível de tempos de cálculo, já o mesmo não sucede em estruturas caracterizadas por um número muito elevado de graus de liberdade, como é o caso de grandes barragens, em que a análise por espectros de resposta se tende a afirmar como uma alternativa competitiva, cujos erros de avaliação têm como contrapartida uma economia de tempo de cálculo, tanto mais significativa quanto mais elevado for o número de modos de vibração considerados.

É de realçar, no entanto, que a análise estocástica da resposta sísmica, baseada na definição da acção em termos de espectros de potência, constitui porém a via mais adequada de abordagem do problema da segurança estrutural, já que não só permite a estimativa de valores médios dos picos de resposta, mas inclusivamente a quantificação da probabilidade de ruína da estrutura, a partir do conhecimento da distribuição probabilística multidimensional correspondente à globalidade das variáveis de controlo analisadas, e de uma adequada caracterização de uma superfície de colapso no espaço n-dimensional definido por essas variáveis, estabelecendo a delimitação de um sub-espaço de segurança.

No que se refere à análise estocástica da resposta aleatória de sistemas lineares sujeitos a excitações sísmicas não-estacionárias moduláveis do tipo ruído branco ou ruído branco filtrado, foram também desenvolvidos programas de cálculo que, baseados numa formulação de estado, possibilitam analisar de forma eficiente a evolução temporal

de diversas grandezas estatísticas associadas à caracterização das variáveis de controlo da resposta de estruturas reticuladas planas, podendo facilmente ser generalizados a estruturas de outro tipo.

Os exemplos de aplicação desses programas de cálculo, tomando por base várias funções de modulação distintas, possibilitaram em particular concluir que não só, no caso de uma excitação pseudo-não-estacionária, as grandezas estatísticas caracterizadoras da resposta tendem de forma muito rápida para a estacionaridade, como também que, de uma forma geral, para qualquer função de modulação, são os troços de maior intensidade da acção sísmica, frequentemente com características estatísticas pouco variáveis no tempo, que são absolutamente determinantes do decréscimo da probabilidade de não-excedência de uma dada barreira por parte de uma qualquer variável de controlo da resposta.

Nestas condições, conclui-se também que, desde que os acelerogramas espectáveis de um dado local apresentem uma fase intermédia de elevadas amplitudes e de características estatísticas sensivelmente estacionárias, se torna perfeitamente aceitável uma filosofia de análise como a do RSA, segundo a qual as acções sísmicas podem ser idealizadas através de uma amostra de certa duração de um processo estocástico vectorial estacionário e gaussiano com densidades espectrais definidas, tomando como medida dos efeitos causados pela excitação o valor médio dos picos da resposta relativa a cada variável de controlo, tornando-se no entanto importante adoptar um valor do tempo da amostra compatível com a duração espectável da referida fase dos acelerogramas, por forma a garantir um dimensionamento seguro das estruturas.

Nos casos porém em que, face aos registos sísmicos passados, não seja esperável reconhecer qualquer zona minimamente extensa dos acelerogramas com aquelas características, esta filosofia, embora possa conduzir a resultados suficientemente seguros, pode revelar-se francamente desajustada da realidade, tornando-se então preferível idealizar a acção sísmica através do recurso a processos estocásticos não-estacionários moduláveis, desde que haja, evidentemente, dados

de base fiáveis que possibilitem uma definição suficientemente realista das funções de modulação determinística caracterizadoras da natureza não-estacionária da excitação sísmica numa dada região.

6.2 - CONCLUSÕES GERAIS RELATIVAS A SISTEMAS NÃO-LINEARES

No que respeita à resposta aleatória de sistemas não-lineares, pôde também observar-se que, contrariamente ao que se passa com os sistemas lineares, não é ainda conhecida qualquer abordagem geral e rigorosa de análise estocástica da resposta, tendo-se concluído, após uma vasta pesquisa de informação, traduzida resumidamente na apresentação das principais formulações aproximadas descritas no capítulo 4, incidindo quer sobre a equação de FPK, quer sobre as equações do movimento, que o método de linearização estocástica equivalente constitui a abordagem mais poderosa e versátil, permitindo a análise do comportamento dinâmico de sistemas não-lineares elásticos ou inelásticos de relativa complexidade, sujeitos a excitações aleatórias estacionárias, ou mesmo não-estacionárias.

Por esse motivo, foram desenvolvidos três novos programas de cálculo automático que, baseados no método de linearização estocástica equivalente, possibilitam efectuar a análise estocástica da resposta sísmica, estacionária ou não-estacionária, de estruturas do tipo "shear-building", com pilares dotados de funcionamento não-linear elástico ou histerético.

No caso de estruturas com comportamento histerético, pôde também observar-se que não são os modelos histeréticos tradicionais, apoiados num conjunto de regras de natureza empírica de carga-descarga, os mais adequados à análise estocástica da resposta aleatória, mas antes os modelos histeréticos diferenciais, como os de Bouc-Wen ou de Suzuki e Minai, cuja introdução possibilitou ultrapassar a hipótese restritiva de Krylov-Bogoliubov, inicialmente considerada no método de Caughey, passando a equação diferencial não-linear reguladora da evolução temporal do parâmetro auxiliar do modelo a ser linearizada com base nas condições de Atalik-Utku. O modelo histerético de Bouc-Wen, utilizado nos programas de cálculo desenvolvidos, revelou-se

em especial altamente versátil no sentido de possibilitar a idealização das mais variadas formas de comportamento histerético, permitindo mesmo, mediante generalizações adequadas, a consideração da degradação de rigidez e de resistência em função da energia dissipada, do efeito de "pinching", da flexão bi-axial, e mesmo o tratamento de problemas de estado de tensão ou de deformação plana, podendo dispor-se simultaneamente de técnicas de identificação de sistemas, que viabilizam uma adequada quantificação dos parâmetros do modelo, baseada na realização de ensaios experimentais.

Além disso, constatou-se não só ser fácil obter, a partir da conjugação das equações do modelo histerético linearizadas com as equações do movimento do sistema linear equivalente, equações diferenciais reguladoras da evolução temporal dos momentos estatísticos da resposta de primeira e segunda ordem, que no caso da resposta estacionária se transformam em simples equações algébricas, mas também a relativa simplicidade e eficiência da formulação modal complexa utilizada para a análise da resposta não-estacionária de sistemas não-lineares histeréticos, e que serviu de base à elaboração de um dos programas de cálculo desenvolvidos.

As aplicações apresentadas, no âmbito dos sistemas não-lineares elásticos, tiveram por base duas estruturas do tipo "shear-building" com 1 e 5 pisos respectivamente, e com pilares de funcionamento bilinear, tendo-se procurando confrontar os resultados obtidos através do método de linearização estocástica equivalente com os alcançados através de técnicas de simulação numérica. Para o efeito, foram geradas artificialmente amostras de duração relativamente longa correspondentes a processos estocásticos estacionários compatíveis com um dos espectros de potência de aceleração de base apresentadas no RSA, tendo-se determinado a evolução temporal da resposta à acção sísmica assim idealizada através do recurso a um programa de integração no tempo. Desse modo, o tratamento estatístico dos resultados obtidos, efectuado pressupondo o carácter estacionário e ergódico do processo de resposta, possibilitou concluir que as diferenças relativas encontradas, quer em termos do desvio padrão de diversas variáveis de controlo da resposta (deslocamentos, velocidades, acelerações e

forças de restituição não-linear), quer mesmo em termos de estimativa de valores máximos médios, são relativamente reduzidas (na gama dos 0 a 20%), mesmo para não-linearidades bastante acentuadas, o que aliás foi evidenciado fazendo alterar gradualmente a relação entre a rigidez inicial e a rigidez pós-cedência.

As aplicações apresentadas, no âmbito dos sistemas não-lineares histeréticos, tiveram também como objectivo essencial avaliar o grau de rigor dos resultados alcançados através do método de linearização estocástica equivalente, para o que se procurou comparar os valores obtidos através do programa de cálculo desenvolvido com vista à análise estocástica da resposta não-estacionária de estruturas do tipo "shear-building", com valores alcançados através de simulações digitais, e que se encontram apresentados em artigos recentes da literatura internacional, tomando como referência sistemas com um e dois graus de liberdade e uma função de modulação do tipo Shinozuka e Sato. O tratamento desses exemplos permitiu não só aferir do bom funcionamento do programa desenvolvido, como também constatar que as diferenças relativas encontradas, em termos da evolução temporal dos desvios padrões relativos às variáveis de controlo da resposta não-estacionária, são em geral da mesma ordem de grandeza das diferenças relativas verificadas na análise da resposta aleatória de sistemas não-lineares elásticos, sendo por isso, em geral, perfeitamente aceitáveis do ponto de vista da engenharia de estruturas.

No sentido de testar também o bom funcionamento do programa de análise estocástica da resposta sísmica estacionária de estruturas histeréticas do tipo "shear-building", foram complementarmente efectuadas comparações entre os valores dos desvios padrões de deslocamentos e velocidades entre pisos consecutivos alcançados por aplicação deste programa, e as evoluções temporais dessas mesmas grandezas verificadas para uma excitação sísmica pseudo--não-estacionária, mediante a consideração do mesmo espectro de potência de aceleração de base e de uma função de modulação do tipo Heaviside. Procedendo dessa maneira, não só se pôde constatar uma boa compatibilidade global de resultados, como também se pôde verificar

que a tendência assintótica para a estacionaridade é significativamente mais lenta que no caso dos sistemas lineares.

Apesar do satisfatório grau de rigor do método de linearização equivalente, pôde ainda observar-se que o principal aspecto restritivo desta formulação aproximada decorre do facto de, em virtude da substituição do sistema não-linear por um outro linear equivalente, se tornar impossível avaliar o efeito das não-linearidades sobre o carácter não-gaussiano da resposta, o que pode conduzir a erros um pouco mais significativos na avaliação de valores extremos das variáveis de controlo. No entanto, nenhuma das tentativas conhecidas no sentido de ultrapassar esta limitação foi ainda bem sucedida no que concerne a sistemas de múltiplos graus de liberdade, já que, embora uma boa aproximação da distribuição não-gaussiana do processo de resposta possa teoricamente ser alcançada ou através do método de não-linearização equivalente, ou mediante o recurso a técnicas de truncatura não-gaussiana, nenhuma dessas formulações possibilita o desenvolvimento de programas de cálculo gerais e eficientes, dado que, no primeiro caso, são raras as situações em que é possível dispor de um sistema não-linear equivalente cuja equação de FPK tenha uma solução exacta conhecida, enquanto que no segundo a complexidade do cálculo aumenta acentuadamente com o nível de truncatura utilizado, o que compromete a sua aplicabilidade a sistemas não-lineares de N-GL.

Apesar disso, porém, torna-se lícito concluir que o método de linearização estocástica equivalente se reveste da maior utilidade na análise e dimensionamento de estruturas usuais no âmbito da Engenharia Sísmica, dado que o grau de importância de eventuais erros resultantes da sua aplicação é, neste caso, fortemente atenuado pelo elevado nível de incerteza associado à caracterização da própria acção actuante. Aliás, mesmo em situações em que esse nível de incerteza não seja tão acentuado, ou em que, face ao elevado grau de responsabilidade das estruturas a dimensionar, haja interesse em proceder a uma cuidada análise de valores extremos, a linearização equivalente pode sempre desempenhar um papel altamente vantajoso no dimensionamento de sistemas não-lineares, possibilitando, pelo menos numa primeira fase do estudo, uma análise comparativa de diversas soluções

tecnicamente possíveis, reservando-se o emprego de métodos de simulação digital, fortemente consumidores de tempo de cálculo, para uma fase final de dimensionamento, em que a abordagem dos problemas de primeira passagem pode ser efectuada de forma mais rigorosa, tendo em conta um número mais reduzido de soluções alternativas.

A finalizar, pôde ainda observar-se como os modelos computacionais desenvolvidos, com vista à análise da resposta sísmica de estruturas do tipo "shear-building", podem ser facilmente generalizadas de forma a possibilitarem a consideração de um modelo estrutural de maior complexidade, em que o comportamento não-linear histerético de um pórtico seja idealizado através de uma discretização da estrutura num conjunto de elementos de funcionamento elástico e linear, interligados através de rótulas plásticas supostamente localizadas nas extremidades das barras.

6.3 - PERSPECTIVAS DE INVESTIGAÇÃO FUTURA

Como facilmente se depreende da leitura atenta da presente dissertação, o esforço de investigação realizado, embora se julgue ter atingido os objectivos inicialmente propostos, constitui apenas uma primeira fase de um trabalho necessariamente mais vasto no âmbito da Dinâmica Estrutural Estocástica, ao qual se pretende dar futuramente continuidade.

Nesse sentido, e a finalizar, sumarizam-se algumas ideias que servirão de base a novos desenvolvimentos que se pretende levar a cabo, individualmente ou em colaboração com outros investigadores.

Assim, no domínio dos sistemas lineares, poder-se-á desde logo proceder à elaboração de novos programas de cálculo automático que, baseados nas formulações anteriormente descritas, possibilitem a análise estocástica da resposta sísmica de outros tipos de estruturas de grande interesse prático, como por exemplo estruturas tridimensionais de edifícios. Neste caso, a aplicação dessas formulações pode tornar viável, em particular, uma mais apurada definição dos esforços de dimensionamento de pilares sujeitos a flexão desviada, tendo em

devida consideração a distribuição probabilística conjunta dos momentos flectores actuantes em duas direcções ortogonais.

Por outro lado, sente-se cada vez mais a necessidade de dispor de meios que permitam efectuar uma correcta identificação das propriedades estruturais, pelo que se pretende vir a dar um forte impulso à componente experimental.

Desse modo, criar-se-ão condições para caracterizar adequadamente os principais parâmetros modais e as funções de transferência caracterizadoras do funcionamento estrutural, podendo pensar-se inclusivamente no tratamento do chamado problema inverso, que consiste na caracterização de excitações de natureza aleatória a partir do conhecimento experimental de diversas realizações do processo de resposta e das propriedades do sistema estrutural em análise, tema que pode assumir importância, por exemplo, na abordagem de excitações de origem hidrodinâmica, ferroviária ou rodoviária.

Ainda no domínio dos sistemas lineares, haverá interesse em proceder ao desenvolvimento de novos e eficientes programas de cálculo automático, que possibilitem contemplar os efeitos da própria estocasticidade dos sistemas estruturais analisados.

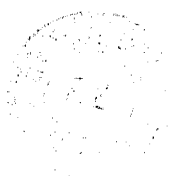
No campo dos sistemas não-lineares histeréticos será, por seu lado, da maior utilidade levar à prática ensaios de identificação estrutural que possibilitem confirmar ou estabelecer novos critérios de fixação corrente dos parâmetros de controlo do modelo histerético diferencial de Bouc-Wen e seus sucedâneos.

Paralelamente, poder-se-á não só pensar na generalização dos programas de cálculo desenvolvidos com vista à análise sísmica estacionária ou não-estacionária de estruturas planas do tipo "shear-building", por forma a contemplar modelos estruturais de maior complexidade, designadamente modelos planos com barras de funcionamento elástico e linear interligadas através de rótulas plásticas, ou mesmo modelos tridimensionais, mas também aplicar as ferramentas de cálculo desenvolvidas para a análise estocástica da resposta aleatória de sistemas histeréticos, no sentido de aferir a validade

de alguns aspectos regulamentares ligados à definição dos coeficientes de comportamento.

Com base nesses modelos computacionais, é possível calcular para cada estrutura um índice de danos acumulados, naturalmente função das ductilidades atingidas e da energia dissipada. A quantificação de índices deste tipo, com base no tratamento de edifícios efectivamente abalados no passado por acções sísmicas bem caracterizadas, pode inclusivamente levar à definição de um índice limite de danos acumulados que, procurando estabelecer a fronteira entre um domínio de segurança e um domínio de colapso, poderá permitir, juntamente com uma caracterização probabilística da intensidade da acção, a quantificação da fiabilidade global da estrutura, entendida como a probabilidade de não-excedência desse estado limite.

Finalmente, julga-se do maior interesse procurar usufruir das apreciáveis virtualidades do método de linearização estocástica equivalente no que se refere, em particular, à análise da resposta aleatória de sistemas histeréticos de múltiplos graus de liberdade, procurando articulá-lo convenientemente com critérios de segurança estrutural e de economia, de molde a tornar possível a sua aplicação corrente ao dimensionamento optimizado de estruturas não-lineares histeréticas sujeitas a acções sísmicas.



Apêndice A

Expressões dos elementos Y_{13}, Y_{23}, Y_{14} e Y_{24} da matriz de transição de estado $e^{\underline{A}_i t}$ a que se refere a equação (3.99):

$$Y_{13} = e^{-\xi_f w_f t}[A_i'' \cos(\beta_f t) + B_i'' \operatorname{sen}(\beta_f t)] + e^{-\xi_i w_i t}[C_i'' \cos(\beta_i t) + D_i'' \operatorname{sen}(\beta_i t)]$$

$$Y_{23} = e^{-\xi_f w_f t}[E_i'' \cos(\beta_f t) + F_i'' \operatorname{sen}(\beta_f t)] + e^{-\xi_i w_i t}[G_i'' \cos(\beta_i t) + H_i'' \operatorname{sen}(\beta_i t)]$$

$$Y_{14} = e^{-\xi_f w_f t}[A_i' \cos(\beta_f t) + B_i' \operatorname{sen}(\beta_f t)] + e^{-\xi_i w_i t}[C_i' \cos(\beta_i t) + D_i' \operatorname{sen}(\beta_i t)]$$

$$Y_{24} = e^{-\xi_f w_f t}[E_i' \cos(\beta_f t) + F_i' \operatorname{sen}(\beta_f t)] + e^{-\xi_i w_i t}[G_i' \cos(\beta_i t) + H_i' \operatorname{sen}(\beta_i t)]$$

com

$$A_i'' = [l_1(p_1 m_1 + p_2) + l_2(m_2 p_1 - p_2)]_i$$

$$A_i' = [l_1(n_1 m_1 + n_2) + l_2(m_2 n_1 - n_2)]_i$$

$$B_i'' = [l_1(p_1 - m_1 p_2) + l_2(-p_1 - m_2 p_2)]_i$$

$$B_i' = [l_1(n_1 - m_1 n_2) + l_2(-n_1 - m_2 n_2)]_i$$

$$C_i'' = -A_i'' \qquad C_i' = -A_i'$$

$$D_i'' = [l_1(-p_1 + m_1 p_2) + l_2(-p_1 - m_2 p_2)]_i$$

$$D_i' = [l_1(-n_1 + m_1 n_2) + l_2(-n_1 - m_2 n_2)]_i$$

$$E_i'' = -\xi_f w_f A_i'' + \beta_f B_i'' \qquad E_i' = -\xi_f w_f A_i' + \beta_f B_i'$$

$$F_i'' = -\xi_f w_f B_i'' - \beta_f A_i'' \qquad F_i' = -\xi_f w_f B_i' - \beta_f A_i'$$

$$G_i'' = -\xi_i w_i C_i'' + \beta_i D_i'' \qquad G_i' = -\xi_i w_i C_i' + \beta_i D_i'$$

$$H_i'' = -\xi_i w_i D_i'' - \beta_i C_i'' \qquad H_i' = -\xi_i w_i D_i' - \beta_i C_i'$$

$$l_1 = \frac{\underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{a}}{2\beta_i} \frac{\xi_i w_i - \xi_f w_f}{(\xi_i w_i - \xi_f w_f)^2 + (\beta_f - \beta_i)^2} \qquad l_2 = \frac{\underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{a}}{2\beta_i} \frac{\xi_i w_i - \xi_f w_f}{(\xi_i w_i - \xi_f w_f)^2 (\beta_f + \beta_i)^2}$$

$$m_1 = \frac{\beta_i - \beta_f}{\xi_i w_i - \xi_f w_f} \qquad m_2 = \frac{\beta_i + \beta_f}{\xi_i w_i - \xi_f w_f} \qquad p_1 = w_f^2 \qquad p_2 = \frac{\xi_f w_f^3}{\beta_f}$$

$$n_1 = 2\xi_f w_f \qquad n_2 = \frac{\xi_f^2 w_f^2}{\beta_f} - \beta_f \qquad (A.1 \text{ a } A.28)$$

Apêndice B

Expressões dos coeficientes de linearização c_{e_5} e k_{e_5} relativos ao modelo histerético de Noori-Baber-Wen [159]

$$c_{e_5} = m_\lambda m_\xi [m_A E_1 - m_\nu(\beta E_2 + \gamma E_3)]/m_\eta \qquad (B.1)$$

$$k_{e_5} = m_\lambda m_\xi [-2m_A E_4 + 2m_\nu(\beta E_5 + \gamma E_6) - m_\nu(\beta E_7 + \gamma E_8)]/m_\eta \qquad (B.2)$$

em que

$$E_1 = \frac{\sqrt{\pi/2}}{m_\xi \sigma_{y_3}}\left[1 - erf\left(m_\xi/\sqrt{2}\sigma_{y_3}\right)\right]\exp\left(m_\xi^2/2\sigma_{y_3}^2\right) \qquad (B.3)$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_3}}\left\{\int_0^\infty y_3^n/\alpha_1 \exp(\alpha_2)[1 - erf(\phi)]dy_3 - \right.$$

$$\left. -(-1)^n \int_0^\infty y_3^n/\alpha_1 \exp(\alpha_2)[1 - erf(\phi)]dy_3\right\} \qquad (B.4)$$

$$E_3 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_3}}\int_0^\infty y_3^n/\alpha_1 \exp(\alpha_2)dy_3 \qquad (B.5)$$

$$E_4 = 2\rho_{y_3\dot{y}_4}\left[\sigma_{\dot{y}_4}/\left(\sqrt{2\pi}\sigma_{y_3}^2\right)\right]\int_0^\infty y_3^2/\alpha_1^2 \exp(\alpha_2)dy_3 \qquad (B.6)$$

$$E_5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_3}}\int_0^\infty y_3^{n+1}/\alpha_1^2[1 - erf(\phi)]dy_3 -$$

$$-\int_0^\infty y_3^{n+1}/\alpha_1^2 \exp(\alpha_2)[1 - erf(-\phi)]dy_3 \qquad (B.7)$$

$$E_6 = \frac{2\rho_{y_3\dot{y}_4}\sigma_{\dot{y}_4}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_3}^2}\int_0^\infty y_3^{n+2}/\alpha_1^2 \exp(\alpha_2)dy_3 \qquad (B.8)$$

$$E_7 = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_3}}\int_0^\infty y_3^{n-1}/\alpha_1 \exp(\alpha_2)[1 - erf(\phi)]dy_3 -$$

$$-\int_0^\infty y_3^{n-1}/\alpha_1 \exp(\alpha_2)[1 - erf(-\phi)]dy_3 \qquad (B.9)$$

$$E_8 = \frac{2n\rho_{y_3\dot{y}_4}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_3}^2}\int_0^{\infty} y_3^n/\alpha_1 \exp(\alpha_2) dy_3 \qquad (B.10)$$

$$\alpha_1 = m_\xi^2 + y_3^2 \qquad \alpha_2 = -y_3^2/2\sigma_{y_3}^2 \qquad (B.11)$$

$$\phi = -\rho_{y_3\dot{y}_4} y_3 / \left[\sigma_{y_3}\sqrt{2\left(1-\rho_{y_3\dot{y}_4}^2\right)}\right] \qquad (B.12)$$

sendo $erf(\phi)$ a função de erro, definida por

$$erf(\phi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\phi} e^{-u^2} du \qquad (B.13)$$

Bibliografia

[1] AHMAD, S.; IRONS, B. e ZIENKIEWICZ, O.C. - "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2, (1970).

[2] AHMADI, G. - "Mean Square Response of a Duffing Oscillator to a Modulated White Noise Excitation by the Generalized Method of Equivalent Linearization", Journal of Sound and Vibration, Vol 71, Nº 1, pp. 9-15, (1980).

[3] AMIN, M. e ANG, A.H-S. - "Nonstationary Stochastic Model of Earthquake Motions", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, pp. 559-583, (1968).

[4] ANDRONOV, A.; PONTRYAGIN, L. e WITT, A. - "On Statistical Investigation of Dynamical Systems", Zh. Eksp. Teor. Fiz, Vol. 3, pp. 165-180, (1933).

[5] APOSTOL, T.M. - "Calculus", Xerox College Publ., (1969).

[6] ARIARATNAM, S.T. - "Random Vibrations of Non-linear Suspensions", Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 2, Nº 3, pp. 195-201, (1960).

[7] ARIARATNAM, S.T.; SCHUELLER, G.I. e ELISHAKOFF, I. (eds) - "Stochastic Structural Dynamics, Progress in Theory and Applications", Elsevier Applied Science, (1988).

[8] ARNOLD - "Stochastic Differential Equations: Theory and Applications", John Wiley & Sons, (1974).

[9] ASANO, K. e IWAN, W.D. - "An Alternative Approach to the Random Response of Bilinear Hysteretic Systems", Earth. Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 12, pp. 229-236, (1984).

[10] ASSAF, S.A. e ZIRKLE, L. D. - "Approximate Analysis of Non-linear Stochastic Systems", Int. J. Control, pp. 477-492, (1976).

[11] ATALIK, T.S. - "Stochastic Random Response of Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Systems by a Direct Equivalent Linearization Technique", Ph. D. Thesis, Duke University, (1974).

[12] ATALIK, T.S. e UTKU, S. - "Stochastic Linearization of Multi-degree-of-freedom Non-linear Systems", Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 4, pp. 411-420, (1976).

[13] ATKINSON, J.D. - "Eigenfunction Expansions for Randomly Excited Nonlinear Systems", J. Sound Vib., Vol. 30, pp. 153-172, (1973).

[14] AUGUSTI, G.; BARATTA, A. e CASCIATI, F. - "Probabilistic Methods in Structural Engineering", Chapman and Hall, London, (1984).

[15] BABER, T.T. - "Nonzero Mean Random Vibration of Hysteretic Systems", Journal of Engineering Mechanics", Vol. 110, Nº 7, pp. 1036-1049, (1984).

[16] BABER, T.T. - "Modal Analysis for Random Vibration of Hysteretic Frames", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 14, pp. 841-859, (1986).

[17] BABER, T.T. - "Nonzero Mean Random Vibration of Hysteretic Frames", Computer & Structures, Vol. 23, Nº 2, pp. 265-277, (1986).

[18] BABER, T.T. e NOORI, M.N. - "Modeling General Hysteresis Behavior and Random Vibration Application", Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 108, pp. 411-420, (1986).

[19] BABER, T.T. e WEN, Y.K. - "Stochastic Equivalent Linearization for Hysteretic Degrading, Multistorey Structures", Report UILU-ENG-80-2001, University of Illinois at Urbana-Champaign, (1980).

[20] BABER, T.T. e WEN, Y.K. - "Random Vibration of Hysteretic, Degrading Systems", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 107, pp. 1069-1087, (1981).

[21] BABER, T.T. e WEN, Y.K. - "Stochastic Response of Multi-Storey Yielding Frames", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pp. 403-416, (1982).

[22] BARBAT, A.H. - "Stochastic Prediction of Seismic Response Spectra", Seminar on The Prediction of Earthquakes, Lisboa, (1988).

[23] BARNOSKI, R.L. e MAURER, J.R.- "Mean-Square Response of Simple Mechanical Systems to Nonstationary Random Excitation", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 36, pp. 221-227, (1968).

[24] BARTELS, R.H. e STEWART, G.W. - "Solution of the Matrix Equation AX + BX = C", Algorithm 432, Communications of the ACM, Vol. 15, Nº 9, (1972).

[25] BENAROYA, H. - "Stochastic Structural Dynamics - A Theoretical Basis and a Selective Review of the Literature", Tech. Report, Air Force Office of Scientific Research, USA, (1984).

[26] BENDAT, J.S. e PIERSOL, A.G. - "Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis", John Wiley & Sons, (1980).

[27] BENJAMIN, J.R. e CORNELL, C.A. - "Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers", McGraw-Hill, (1970).

[28] BHANDARI, R.G. e SHERRER, R.E. - "Random Vibrations in Discrete Non-linear Dynamic Systems", J. Mech. Eng. Sci., pp. 168-174, (1968).

[29] BOGDANOFF, J.L. e GOLDBERG, J.E. - "On the Transient Behavior of a System under Random Disturbance", Fourth Midwestern Conference on Solid Mechanics, University of Texas , pp. 488-496, (1959).

[30] BOGOLIUBOV, N.N. e MITROPOLSKY, Y.A. - "Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillators", Gordon and Breach, (1964).

[31] BOOTON, R.C. - "The Analysis of Nonlinear Control Systems with Random Inputs", IRE Trans. Circuit Theory, pp. 32-34, (1954).

[32] BOUC, R. - "Forced Vibration of Mechanical Systems with Hysteresis", Abstract, Proc. 4th Conf. Nonlin. Oscill., Praga, (1967).

[33] BOVER, D.C.C. - "Moment Equation Methods for Non-linear Stochastic Systems", J. Math. Anal. Applic., pp. 306-320, (1978).

[34] BRANSTETTER, L.J.; JEONG, G.D.; YAO, J.T.P.; WEN, Y.K. e LIN, Y.K. - "Mathematical Modelling of Structural Behaviour during Earthquakes", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, Nº 3, pp. 130-145, (1988).

[35] CAETANO, ELSA - Relatório de investigação, FEUP, (1989).

[36] CARTWRIGHT, D.E. e LONGUET-HIGGINS, M.S. - "The Statistical Distributions of the Maxima of a Random Function", Proc. R. Soc., ser. A, Vol. 237, pp. 212-232, (1956).

[37] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Methods of Non-linear Stochastic Dynamics for the Assessment of Structural Fragility", Nuclear Engineering and Design, Vol. 90, pp. 341-356, (1985).

[38] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Reliability Assessment of Non-linear Random Frames", em "Probabilistic Methods in the Mechanics of Solids and Structures", Eggwertz S. e Lind N.C. (eds), Springer-Verlag, pp. 469-478, (1985).

[39] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Non-linear Stochastic Dynamics by Equivalent Linearization", Proc. 2nd Int. Workshop on Stochastic Methods in Structural Mechanics, Pavia, (1985).

[40] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Equivalent Linearization in Non-linear Random Vibration Problems", Proc. Int. Conf. on Vib. Problems in Eng., Xian, China, (1986).

[41] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Non-linear Stochastic Dynamics of Frames", Proc. 3 rd Int. Conf. on Recent Adv. in Struct. Dynamics, Southampton, (1988).

[42] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Stochastic Equivalent Linearization for 3-D Frames", J. of Engineering Mechanics, Vol. 114, Nº 10, pp. 1760-1771, (1988).

[43] CASCIATI, F.; FARAVELLI, L. e SINGH, M.P. - "Non-linear Structural Response and Modelling Uncertainty on System Parameters and Seismic Excitation", Proc. 8th European Conference on Earthquake Engineering, Lisboa, (1986).

[44] CAUGHEY, T.K. - "Random Excitation of a System With Bilinear Hysteresis", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 27, Nº 4, pp. 649-652, (1960).

[45] CAUGHEY, T.K. - "Equivalent Linearization Techniques", The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 35, Nº 11, pp. 1706-1711, (1963).

[46] CAUGHEY, T.K. - "Derivation and Application of the Fokker-Planck Equation to Discrete Nonlinear Dynamic Systems Subjected to White Random Excitation", J. of Acoust. Soc. America, Vol. 35, Nº 11, pp. 1683-1692, (1963).

[47] CAUGHEY, T.K. - "Nonlinear Theory of Random Vibrations", Adv. Applied Mechanics, Vol. 11, pp. 209-253, (1971).

[48] CAUGHEY, T.K. - "On the Response of Non-linear Oscilators to Stochastic Excitation", Probab. Eng. Mechanics, Vol. 1, Nº1, pp. 2-4, (1986).

[49] CAUGHEY, T.K. e DIENES, J.K. - "The behavior of linear systems with random parametric excitation", J. Math. Phys., pp. 300-318, (1962).

[50] CAUGHEY, T.K. e STUMPF, H.J. - "Transient Response of a Dynamic System Under Random Excitation", Journal of App. Mech., ASME, Vol. 28, Nº 4, pp. 563-566, (1961).

[51] CHANG, T.P. - "Seismic Response of Nonlinear Structures using the Stochastic Equivalent Linearization Technique", Ph. D. Thesis, Columbia University, (1985).

[52] CHANG, T.P.; MOCHIO, T. e SAMARAS, E. - "Seismic Response Analysis of Nonlinear Structures", Prob. Engineering Mechanics, Vol. 1, Nº 3, pp. 157-166, (1986).

[53] CHUANG, K. e KAZDA, F. - "A Study of Nonlinear Systems with Random Inputs", AIEE, 78, (1959).

[54] CLOUGH, R.W. e PENZIEN, J. - "Dynamics of Structures", Mc Graw-Hill, (1975).

[55] COOK - "Digital Simulation of Random Vibration", Ph. D. Thesis, MIT, Cambridge, Massachussets, (1964).

[56] COROTIS, R.B. e MARSHALL, T.A. - "Oscillator Response to Modulated Random Excitation", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 103, pp. 501-513, (1977).

[57] COROTIS, R.B. e VANMARKE, E.H. - "Time-Dependent Spectral Content of System Response", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 101, pp. 623-637, (1975).

[58] COROTIS, R.B.; VANMARKE, E.H. e CORNELL, C.A. - "First Passage of Nonstationary Random Processes", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 98, pp. 401-414, (1972).

[59] COSTA, A. - "Análise Sísmica de Estruturas Irregulares", Tese de Doutoramento, FEUP, (1989).

[60] CRAMER, H. - "On the Intersections Between the Trajectories of a Normal Stationary Stochastic Process and a High Level", Arkiv. Mat., Vol. 6, pp. 337, (1966).

[61] CRAMER, H. e LEADBETTER - "Stationary and Related Stochastic Processes", John Wiley & Sons (1967).

[62] CRANDALL, S.H. - "Perturbation Techniques of Random Vibration of Nonlinear Systems", J. of Acoust. Soc. of America, Vol. 35, Nº 11, pp. 1700-1705, (1963).

[63] CRANDALL, S.H. - "The Spectrum of Random Vibration of a Non-linear Oscillator", Proc. 11th Cong. Applied Mechanics, Munich, (1964).

[64] CRANDALL, S.H. - "First-Crossing Probabilities of the Linear Oscillator", Journal of Sound and Vibration, Vol. 12, Nº 3, pp. 285-299, (1970).

[65] CRANDALL, S.H. - "On Statistical Linearization for Nonlinear Oscillators", Problems of the Asymptotic Theory of Non-linear Oscillators, Academy of Sciences of the Ukranian SSR, Kiev, (1977).

[66] CRANDALL, S.H. - "Heuristic and equivalent linearization techniques for random vibration of nonlinear oscillators", Proc. 8th Int. Conf. Nonlinear Oscillation, pp. 211-226, Praga, (1978).

[67] CRANDALL, S.H. - "Non-Gaussian Closure for Random Vibration of Non-linear Oscillators", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 15, pp. 303-313, (1980).

[68] CRANDALL, S.H. - "Non-Gaussian Closure Techniques for Stationary Random Vibration", Int. J. Non-linear Mech., Vol. 20, Nº 1, pp. 1-8, (1985).

[69] CRANDALL, S.H.; CHANDIRAMANI, K.L. e COOK, R.G. - "Some First-Passage Problems in Random Vibration", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 88, pp. 532-538, (1966).

[70] CRANDALL, S.H. e MARK, W.D. - "Random Vibration in Mechanical Systems", Academic Press, N.Y., (1963).

[71] CRANDALL, S.H. e ZHU, W.Q. - "Random Vibration: A Survey of Recent Developments", Jounal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 50, Nº 4, pp. 953-962, (1983).

[72] CUMMING, I.G. - "Computing Aspects of Problems in Nonlinear Prediction and Filtering", Ph. D. Thesis, Imperial College, London, (1967).

[73] CUMMING, I.G. - "Derivation of the moments of a continuous stochastic system", Int. J. Contr., pp. 85-90, (1967).

[74] CUNHA, A. - "Análise Estocástica da Resposta de Sistemas Lineares a Excitações Aleatórias Estacionárias Gausseanas", Relatório do Gabinete de Estruturas da FEUP, (1987).

[75] CUNHA, A. e DELGADO, R. - "Comparação das Abordagens Estocástica e Determinística da Análise da Resposta Sísmica segundo o RSAEP", Jornadas sobre a Aplicação da Nova Regulamentação de Estruturas, Porto, (1987).

[76] CUNHA, A. e DELGADO, R. - "Análise da Resposta de Sistemas Lineares de Múltiplos Graus de Liberdade a Excitações Sísmicas Não-Estacionárias do Tipo Ruído Branco Filtrado", Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Lisboa, (1989).

[77] DASHEVSKII, M.L. - "Approximate analysis of the accuracy on nonstationary systems using the method of semi-invariants", Automation and Remote Control, pp. 1673-1690, (1967).

[78] DASHEVSKII, M.L. e LIPSTER, R.S. - "Application of conditional semi-invariant in problems of nonlinear filtering of Markov process", Automation and Remote Control, pp. 912-921, (1967).

[79] DASHEVSKII, M.L. - "Equations for the semi-invariants of nonlinear dynamic system", Automation and Remote Control, pp. 1605-1613, (1968).

[80] DAVENPORT, A.G. - "Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading", Proc. Inst. Civ. Eng., 28, pp. 187-196, (1964).

[81] DAVENPORT, A.G. - "Vibration of Structures Induced by Wind", Schock and Vibration Handbook (eds. Harris & Crade), McGraw-Hill, N.Y., (1976).

[82] DEBCHAUDHURY, A. e GASPARINI, D. - "Response of MDOF Systems to Vector Random Excitation", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 108, pp. 367-385, (1982).

[83] DEBCHAUDHURY, A. - "RMS Response Cascaded MDOF Subsystem to Multiple Support Excitation", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 114, pp. 1628-1650, (1988).

[84] DEBCHAUDHURY, A. - "Response of MDOF Systems to Multiple Support Seismic Excitation", Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 114, pp. 583-603, (1988).

[85] DELGADO, R. - "O Método dos elementos finitos na análise dinâmica de barragens incluindo a interacção sólido-líquido", Tese de doutoramento, FEUP, (1984).

[86] DELGADO, R.; CUNHA, A.; COSTA, A.; MATEUS, G. e FARIA, R. - "Os Computadores e a Determinação dos Efeitos da Acção dos Sismos em Estruturas", Congresso da Ordem dos Engenheiros, Porto, (1988).

[87] DELGADO, R.; CUNHA A. e CAETANO, E. - "Um Sistema de Aquisição e Processamento de Dados para Medição de Vibrações em Estruturas", Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Lisboa, (1989).

[88] DELGADO, R.; CUNHA, A.; CAETANO, E. e GUEDES M. - "Medição de vibrações provocadas por explosões", Encontro da Sociedade Portuguesa de Análise Experimental de Tensões, Lisboa, (1990).

[89] DELGADO, R.; RESTIVO, F.; CUNHA, A. e CAETANO, E. - "Measuring Vibrations on Large Structures", Proc. 1989 Spring Conference on Experimental Mechanics, Boston, (1989).

[90] DELGADO, R. e FARIA, R. - Relatório do Estudo Dinâmico da Barragem do Caldeirão, Anteprojecto EDP, (1987).

[91] DOOB, J.L. - Stochastic Processes", Wiley, N.Y., (1953).

[92] DUARTE, R.T. - "Oscilador Linear de 1 Grau de Liberdade", Aplicações em Engenharia Sísmica, Relatório LNEC, (1974).

[93] DUARTE, R.T. - "Uma Teoria Linear do Comportamento Dinâmico das Estruturas sujeitas a Acções Sísmicas", Tese, LNEC, (1978).

[94] DUARTE, R.T. - "Princípios e Métodos da Dinâmica Aplicada à Engenharia de Estruturas", Seminário 265, LNEC, (1983).

[95] DUARTE, R.T. - "Nonlinear Seismic Behaviour Analysis of Structures by a Stochastic Method", Proc. 8th European Conference on Earthquake Engineering, Lisboa, (1986).

[96] DUARTE, R.T. e AZEVEDO, A.V. - "Curso sobre Estruturas de Betão Armado sujeitas à Acção dos Sismos", LNEC, (1985).

[97] DUGUNDJI, J. - "Envelopes and pre-envelopes of real wave forms", Trans. on Information Theory, pp. 53-57, (1958).

[98] EINSTEIN, A. - "The Theory of Brownian Movement", Dover, N.Y., (1956).

[99] ELGHADAMSI, F.E.; MOHRAZ, B. e LEE, C.T. - "Time-dependent power spectral density of earthquake ground motion", Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 7, Nº 1, pp. 15-21, (1988).

[100] ELISHAKOFF, I. - "Probabilistic Methods in the Theory of Structures", John Wiley, N.Y., (1983).

[101] FARAVELLI, L.; CASCIATI, F. e SINGH, M.P. - "Stochastic Equivalent Linearization Algorithms and their Applicability to Hysteretic Systems", Meccanica, Vol. 23, pp. 107-112, (1988).

[102] FARIA, R. - "Análise Numérica de Barragens Abóbada Sujeitas à Acção Sísmica", Tese de Mestrado, FEUP, (1988).

[103] FOKKER, A.P. - "Die Mittlere Energie rotierender elektricher Dipole in Strahlungs-field", Ann. Physik, 43, (1914).

[104] FOSTER, E.T. - "Semilinear Random Vibrations in Discrete Systems", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 35, Nº 3, pp. 560-564, (1968).

[105] GASPARINI, D.A. - "Response of MDOF Systems to Nonstationary Random Excitation", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, pp. 13-27, (1979).

[106] GASPARINI, D.A. - "Dynamic Response to Nonstationary Nonwhite Excitation", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, pp. 1233-1248, (1980).

[107] GOTO, H. e IEMURA, H. - "Linearization Techniques for Earthquake Response of Simple Hysteretic Structures", Proc. Jap. Soc. Civ. Eng., Nº 212, pp. 109-119, (1973).

[108] GULKAN, P. e SOZEN, M.A. - "Response and Energy-Dissipation of Reinforced Concrete Frames Subjected to Strong Base Motions", Civil Eng. Studies, SRS, Nº 377, Dept. Civil Eng., University of Illinois, Urbana, (1971).

[109] HAMMOND, J.K. - "On the Response of Single and Multidegree of Freedom Systems to Non-Stationary Random Excitations", J. Sound Vib., Vol. 7, Nº 3, pp. 393-416, (1968).

[110] HERBERT, R.E. - "Random Vibrations of a Nonlinear Elastic Beam", J. Acoust. Soc. America, Vol. 36, pp. 2090-2094, (1964).

[111] IBRAHIM, R.A. - "Stationary Response of a Randomly Parametric Excited Nonlinear System", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 45, pp. 910-916, (1978).

[112] IBRAHIM, R.A.; SOUNDARARAJAN, A. e HEO, H. - "Stochastic Response of Nonlinear Dynamic Systems Based on a Non-Gaussian Closure", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 52, Nº 6, pp. 965-970, (1985).

[113] IBRAHIM, R.A. - "Parametric Random Vibration", John Wiley & Sons, (1985).

[114] ILIN, A.M. e KHASMINSKII - "On Equations of Brownian Motion", Theory Probability Applic., 9, pp. 421-444, (1964).

[115] ITO, K. - "On Stochastic differential equations", Mem. Amer. Math. Soc., Nº 4, (1951).

[116] IYENGAR, R.N. e DASH, P.K. - "Study of the Random Vibration of Nonlinear Systems by the Gaussian Closure Technique", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 45, pp. 393-399, (1978).

[117] IWAN, W.D. - "On Defining Equivalent Systems for Certain Ordinary Non-linear Differential Equations", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 4, pp. 325-334, (1969).

[118] IWAN, W.D. - "A Generalization of the Concept of Equivalent Linearization", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 8, pp. 279-287, (1973).

[119] IWAN, W.D. - "Application of Nonlinear Analysis Techniques", Applied Mechanics in Earthquake Engineering, Applied Mech. Div., ASME, AMD - Vol. 8, pp. 135-161, (1974).

[120] IWAN, W.D. e LUTES, L.D. - "Response of the Bilinear Hysteretic System to Stationary Random Excitation", the Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 43, Nº 3, pp. 545-552, (1967).

[121] IWAN, W.D. e MASON, A.B. - "Equivalent Linearization for Systems Subjected to Non-stationary Random Excitation", Int. J. Non-Lin. Mech., Vol. 15, pp. 71-82, (1980).

[122] IWAN, W.D. e PAPAZIROS, L.G. - "The stochastic response of strongly yielding systems", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, Nº 2, pp. 75-82, (1988).

[123] IWAN, W.D. e YANG, I-M. - "Statistical Linearization for Nonlinear Structures", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, pp. 1609-1623, (1971).

[124] IWAN, W.D. e YANG, I-M. - "Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multidegree-of-Freedom Systems", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 39, Nº 2, pp. 545-550, (1972).

[125] KANAI, K. - "An Empirical Formula for the Spectrum of Strong Earthquake Motions", Bull. Research Instit., Vol. 39, University of Tokyo, Japan, (1961).

[126] KHASMINSKII, R.Z. - "A Limit Theorem for the Solution of Differential Equations with Random Right Hand Sides", Theory Probability Applic., pp. 390-405, (1966).

[127] KHINTCHINE, A. - "Korrelation Theories der Stationaren Stochastischen Prozess", Math. Ann., Vol. 109, pp. 604-615, (1934).

[128] KIMURA, K. e SAKATA, M. - "Non-stationary Responses of a Non-symmetric Non-linear System Subjected to a Wide Class Random Excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 76, Nº 2, pp. 261-272, (1981).

[129] KIUREGHIAN, A.D. - "Structural Response to Stationary Excitation", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, pp. 1195-1213, (1980).

[130] KIUREGHIAN, A.D. - "A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems", Earth. Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 9, pp. 419-435, (1981).

[131] KLEIN, G.H. - "Random Excitation of a Nonlinear System with Tangent Elasticity Characteristics", J. Acoust. Soc. America, Vol. 36, pp. 2095-2105, (1964).

[132] KOBORI, T.; MINAI, R. e SUZUKI, Y. - "Statistical Linearization Techniques of Hysteretic Structures to Earthquake Excitations", Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Vol. 23, Kyoto University, (1973).

[133] KOBORI, T.; MINAI, R. e SUZUKI, Y. - "Statistical Linearization Techniques for Dynamical Systems with Fluctuating Hysteresis", Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 23, University of Tokyo, (1975).

[134] KOLMOGOROV, A. - "Über die Analytischen Metoden in Wahrsheinlichkeitsrechnung", Math. Ann., Vol. 104, pp. 415-458, (1931).

[135] KRAMERS, H.A. - "Brownian Motion in a Field of Force and the Diffusion Model of Chemical Reactions", Physica, Vol. 7, (1940).

[136] KRENCK, S.; MADSEN, H.O. e MADSEN, P.H. - "Stationary and Transient Response Envelopes", Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 109, pp. 263-278, (1983).

[137] KRYLOV, N. e BOGOLIUBOV, N. - "Introduction to Nonlinear Mechanics", Princeton University Press, N.Y., (1943).

[138] KUSHNER, H.J. - "The Cauchy Problem for a Class of Degenerate Parabolic Equations and Asymptotic Properties of the Related Diffusion Processes", J. Differential Equations, pp. 209-231, (1969).

[139] KUZNETZOV, P.I.; STRATONOVITCH, R.L. e TIKHONOV, V.I. - "Non-linear Transformation of Stochastic Processes", Pergamon Press, U.K., (1965).

[140] LABBE - "Comparison of Spectrum Methods in Seismic Nuclear Engineering Evolution of Regulatory Rules", Proc. 8th Europ. Conf. on Earth. Engineering, Lisboa, (1986).

[141] LANGLEY, R.S. - "On Various Definitions of the Envelope of a Random Process", Jounal of Sound and Vibration, Vol. 105, Nº 3, pp. 503-512, (1986).

[142] LANGLEY, R.S. - "Structural Response to Non-stationary Non-white Stochastic Ground Motions", Earth. Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 14, pp. 909-924, (1986).

[143] LIN, Y.K. - "Probabilistic Theory of Structural Dynamics", Mc Graw-Hill, (1967).

[144] LIN, Y.K. e SCHUELLER - "A short course on Stochastic Structural Dynamics", Lausanne, (1986).

[145] LIN, Y.K. e WU, W.F. - "Applications of Cumulant Closure to Random Vibration Problems", Proc. Symp. Random Vibration, ASME, Winter Ann. Mtg., New Orleans, (eds. Huang, T.C. e Spanos, P.D.), AMD, Vol. 65, (1984).

[146] LUTES, L.D. - "Equivalent Linearization for Random Vibration", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 96, pp. 227-242, (1970).

[147] LUTES, L.D. e TAKEMIYA, H. - "Random Vibration of a Yielding Oscillator", J. Eng. Mech. Div., Vol. 100, pp. 343-358, (1974).

[148] LYON, R.H. - "Response of a Nonlinear String to Random Excitation", J. Acoust. Soc. America, Vol. 32, pp. 953-960, (1960).

[149] LYON, R.H. - "On the Vibration Statistics of a Random Excited Hard-Spring Oscillator", Journal of the Acoustical Society of America, (1961).

[150] MADSEN, P.H. E KRENCK, S. - "Stationary and Transient Response Statistics", Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 108, pp. 622-635, (1982).

[151] MADSEN, H.O.; KRENCK, S. e LIND, N.C. - "Methods of Structural Safety", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y., (1986).

[152] MARK, W.D. - "On false-alarm probabilities of filtered noise", Proc. IEEE, Vol. 54, pp. 316, (1966).

[153] MASON, A.B. - "Some Observations on the Random Response of Linear and Nonlinear Dynamical Systems", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, (1978).

[154] MAYFIELD, W.W. - "A Sequence Solution to Fokker-Planck Equation", IEEE Trans. Theory, IT19 (2), pp. 165-175, (1973).

[155] MOCHIO, T.; SAMARAS, E. e SHINOZUKA, M. - "Stochastic Equivalent Linearization for Finite Element-Based Reliability Analysis", Proc. 4^{th} ICOSSAR, Kobe, (1985).

[156] MORISON, J.R.;O'BRIEN, M.P.; JOHNSON, J.N. e SCHAST, S.A. - "The Force Exerted by Surface Waves on Piles", Petroleum Trans., ASME, Vol. 189, pp. 149-154, (1950).

[157] NEWMARK, N.M. e ROSENBLUETH - "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1971).

[158] NIGAM, N.C. - "Introduction to Random Vibrations", MIT Press, (1983).

[159] NOORI, M.N. - "Random Vibration of Degrading Systems with General Hysteretic Behaviour", Ph. D. Thesis, Faculty of the School of Engineering and Applied Sciences, University of Virginia, (1984).

[160] NOORI, M.; CHOI, J-D. e DAVOODI, H. - "Zero and nonzero random vibration analysis of a new general hysteresis model", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 1, Nº 4, pp. 192-201, (1986).

[161] OLIVEIRA, C.S. - "O Risco Sísmico em Portugal e sua Influência na Segurança Estrutural das Construções", Tese, LNEC, (1979).

[162] ORABI, I.I. e AHMADI, G. - "An Iterative Method for Non-stationary Response Analysis of Non-linear Random Systems", Journal of Sound and Vibration, Vol. 119, Nº 1, pp. 145-157, (1987).

[163] ORNSTEIN, L.S. - Konink. Akad. Wetenschap. Amsterdam, (1917).

[164] PAOLA, M.Di; IOPPOLO, M. e MUSCOLINO, G. - "Stochastic seismic analysis of multidegree of freedom systems", Engineering Struct., Vol. 6, pp. 113-118, (1984).

[165] PAPAZIROS, L.G. - "Some Observations on the Random Response of Hysteretic Systems", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, (1987).

[166] PAPOULIS, A. - "Probability Random Variables and Stochastic Processes", Mc Graw-Hill, N.Y., (1984).

[167] PARK, Y.J. e ANG, A.H-S. - "Mechanistic Seismic Damage Model for Reinforced Concrete", Journal of Structural Engineering, Vol. 111, Nº 4, pp. 722-739, (1985).

[168] PARK, Y.J.; ANG, A.H-S. e WEN, Y.K. - "Seismic Damage Analysis of Reinforced Concrete Buildings", J. Struct. Eng., ASCE, Vol. 111, Nº 4, pp. 740-757, (1985).

[169] PARK, Y.J.; WEN, Y.K. e ANG, A.H-S. - "Random Vibration of Hysteretic Systems Under Bi-directional Ground Motions", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 14, pp. 543-557, (1986).

[170] PARZEN, E. - "Stochastic Processes", Holden-Day, (1962).

[171] PATULA, E.J. e IWAN, W.D. - "On the Validity of Equation Difference Minimization Techniques", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 7, pp. 1-17, (1972).

[172] PAYNE, H.J. - "An Approximate Method for Nearly Linear First Order Stochastic-Differential Equations", Int. J. Control, pp. 451-468, (1968).

[173] PEREIRA, J. - "Métodos Probabilísticos em Engenharia Sísmica", Memória Nº 442, LNEC, (1974).

[174] PEREIRA, J.; OLIVEIRA, S. e DUARTE, T. - "Direct and Inverse Conversion from Power Spectra to Response Spectra", LNEC, (1977).

[175] PFAFFINGER, D.D. - "Analytical Evaluation of Modal Covariance Matrices", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 24, (1980).

[176] PFAFFINGER, D.D. - "Probabilistic Dynamic Analysis with Adina", Computer & Structures, Vol. 13, pp. 637-646, (1981).

[177] PFAFFINGER, D.D. - "Calculation of Power Spectra from Response Spectra", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 109, pp. 357-371, (1983).

[178] PIRES, J.E.A.; WEN, Y.K. e ANG, A.H-S. - "Stochastic Analysis of Liquefaction Under Earthquake Loading", Tech. Report UILU-ENG-83-2005, University of Illinois, (1983).

[179] PLANCK, M. - "Über einen Statz der Statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie", Sitz-Berlin Akad-Wiss, (1917).

[180] PRADLWARTER, H.J. e CHEN, X-W. - "On the response of a linear MDOF - system to nonstationary colored and white noise excitation", European Earthquake Engineering, Vol. 1, pp. 41-46, (1988).

[181] PRADLWARTER, H.J. e SCHUELLER, G.I. - "Accuracy and Limitations of the Method of Equivalent Linearization for Hysteretic Multi-Storey Structures" em "Nonlinear Stochastic Dynamic Engineering Systems", Proc. IUTAM Symposium, Innsbruck, Springer-Verlag, (1987).

[182] PRADLWARTER, H.J.; SCHUELLER, G.I. e CHEN, X-W. - "Consideration of Non-Gaussian Response Properties by Use of Stochastic Equivalent Linearization", Proc. 3rd Int. Conf. on Recent Adv. in Struct. Dynamics, Southampton, (1988).

[183] PRESS, H. e HOUBOLT, J.C. - "Some Applications of Generalized Harmonic Analysis to Gust Loads on Airplanes", J. Aero. Sci., Vol. 22, Nº 1, pp. 17-26, (1955).

[184] PRIESTLEY, M.B. - "Power Spectral Analysis of Non-Stationary Random Processes", Journal of Sound and Vibration, Vol. 6, Nº 1, pp. 86-97, (1967).

[185] RAVARA, A. - "Dinâmica de Estruturas", LNEC, (1969).

[186] RAVARA, A. - "Spectral Analysis of Seismic Actions", Memória Nº 268, LNEC, (1965).

[187] RAVARA, A.; DUARTE, R.T. e CARVALHO, E.C. - "Engenharia Sísmica de Pontes", LNEC, (1984).

[188] RICE, S.O. - "Mathematical Analysis of Random Noise", em "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes", Wax ed., (1954).

[189] ROBERTS, J.B. - "The Covariance Response of Linear Systems to Non-Stationary Random Excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 14, Nº 3, pp. 385-400, (1971).

[190] ROBERTS, J.B. - "The Response of an Oscillator with Bilinear Hysteresis to Stationary Random Excitation", J. Appl. Mech., ASME, Vol. 45, pp. 923-928, (1978).

[191] ROBERTS, J.B. - "Response of Nonlinear Mechanical Systems to Random Excitation, Part I: Markov Methods", The Shock and Vibration Digest, Vol. 13, Nº 4, pp. 17-28, (1981).

[192] ROBERTS, J.B. - "Response of Nonlinear Mechanical Systems to Random Excitation, Part II: Equivalent Linearization and Other Methods", The Shock and Vibration Digest, Vol. 13, Nº 5, pp. 15-29. (1981).

[193] ROBERTS, J.B. - "First-passage Probabilities for Randomly Excited System: Diffusion Methods", Probability Engineering Mechanics, Vol. 1, Nº 2, pp. 66-81, (1986).

[194] ROBERTS, J.B. e SPANOS, P.D. - "Stochastic Averaging: An Approximate Method of Solving Random Vibration Problems", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 21, Nº 2, pp. 111-134, (1986).

[195] ROBERTS, J.B. e SPANOS, P.D. - "Random Vibration and Statistical Linearization", John Wiley, Chichester, U.K., (1990).

[196] SAGE, A.P. e MELSA, J.L. - "Introdução às Probabilidades e Processos Estocásticos", Editora Portuguesa de Livros Técnicos e Científicos, (1983).

[197] SAKATA, M. e KIMURA, K. - "Calculation of the Non-Stationary Mean Square Response of a Non-linear System Subjected to Non-white Excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 73, Nº 3, pp. 333-343, (1980).

[198] SCHIEHLEN, W.O. - "Random Vehicle Vibrations", Random Vibration - Status and Recent Developments (eds. Elishakoff e Lyon) Elsevier, Amsterdam, pp. 379-388, (1985).

[199] SCHUELLER, G.I. e SHINOZUKA, M. - "Stochastic Methods in Structural Dynamics", Martinus Nijhoff Publ., (1987).

[200] SHINOZUKA, M. - "Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes", The Journal of the Acoust. Soc. of America, Vol. 49, Nº 1, pp. 357-368, (1971).

[201] SHINOZUKA, M. - "Monte Carlo Solution of Structural Dynamics", Computers & Structures, Vol. 2, pp. 855-874, (1972).

[202] SHINOZUKA, M. - "Random Processes in Engineering Mechanics", 4th ASCE EMD Speciality Conference, Purdue University, (1983).

[203] SHINOZUKA, M. e DEODATIS, G. - "Stochastic Process Models for Earthquake Ground Motion", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, Nº 3, pp. 114-123, (1988).

[204] SHINOZUKA, M. e SATO, Y. - "Simulation of Nonstationary Random Processes", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, pp. 11-40, (1967).

[205] SINGH, M.P.; MALDONALDO, G.O. e HELLER, R.A. - "Modal Analysis of Nonlinear Hysteretic Structures for Seismic Motions", em "Nonlinear Stochastic Dynamic Engineering Systems", IUTAM Symposium, Ziegler & Schuëller (eds.), Spring-Verlag, (1987).

[206] SINGH, M.P. e MEHTA, K.B. - "Seismic Design Response by an Alternative SRSS Rule", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, pp. 771-783, (1983).

[207] SMITH, P.W. - "Response of Nonlinear Structures to Random Excitation", J. Acoust. Soc. America, Vol. 34, (1962).

[208] SMOLUCHOWSKI, M.V. - "Drei Vortage über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen", Phys. Zeit, 17, (1916).

[209] SPANOS, P.D. - "Linearization Techniques for Non-Linear Dynamical Systems", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, (1977).

[210] SPANOS, P.D. - "Stochastic Linearization Method for Dynamic Systems with Asymmetric Nonlinearities", EMRL 1126, University of Texas at Austin, (1978).

[211] SPANOS, P.D. - "Formulation of Stochastic Linearization for Symmetric or Asymmetric M.D.O.F. Nonlinear Systems", J. Appl. Mech., Vol. 47, Nº 1, pp. 209-211, (1980).

[212] SPANOS, P.D. - "Stochastic Linearization in Structural Dynamics", Applied Mechanics Reviews, Vol. 34, Nº 1, pp. 1-8, (1981).

[213] SPANOS, P.D. - "Monte-Carlo Simulations of Responses of Non-Symmetric Dynamic Systems to Random Excitations", Computer & Structures, Vol. 13, pp. 371-376, (1981).

[214] SPANOS, P-T.D. - "Random Response to Flow-Induced Forces", J. Eng. Mech. Div., Vol. 107, pp. 1173-1190, (1981).

[215] SPANOS, P.D. e IWAN, W.D. - "On the Existence and Uniqueness of Solutions Generated by Equivalent Linearization", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 13, pp. 71-78, (1978).

[216] SPANOS, P.D. e LUTES, L.D. - "A Primer of Random Vibration Techniques in Structural Engineering", The Shock and Vibration Digest, Vol. 18, Nº 4, pp. 3-10, (1986).

[217] SPANOS, P.D. e VARGAS LOLI, L.M. - "A Statistical approach to generation of design spectrum compatible earthquake time histories", Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 4, Nº 1, pp. 2-8, (1985).

[218] ST. DENIS, M. e PIERSON, W.J. - "On the Motions of Ships in Confused Seas", Trans. Society of Naval Architects and Marine Engineers (SNAME), Vol. 61, (1953).

[219] STRATONOVICH, R.L. - "Topics in the Theory of Random Noise", Gordon & Breach, (1964).

[220] SUES, R.H.; MAU, S.T. e WEN, Y.K. - "Systems Identification of Degrading Hysteretic Restoring Forces", J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 114, Nº 5, pp. 833-846, (1988).

[221] SUES, R.H.; WEN, Y.K. e ANG, A.H-S. - "Stochastic Seismic Perfomance Evaluation of Buildings", Tech. Report UILU-ENG-83-2008, University of Illinois at Urbana Champaign, (1983).

[222] SUES, R.H.; WEN Y.K. e ANG, A.H-S. - "Stochastic Evaluation of Seismic Structural Perfomance", J. Struct. Eng., Vol. 111, Nº 6, pp. 1204-1218, (1985).

[223] SUZUKI, Y. e MINAI, R. - "Application of Stochastic Differential Equation to Seismic Reliability Analysis of Hysteretic Structures", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, Nº 1, pp. 43-52, (1988).

[224] TAKEMIYA, H. e LUTES, L.D. - "Stationary Random Vibration of Hysteretic Systems", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, pp. 673-687, (1977).

[225] TAKIZAWA, H. - "Nonlinear models for simulating the dynamic damaging processes of low rise reinforced concrete buildings during severe earthquakes", Earth. Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 4, pp. 73-94, (1975).

[226] TAKIZAWA, H. e AOYAMA, H. - "Biaxial Effects in Modelling Earthquake Response of R/C Structures", Earth. Eng. in Struct. Dynamics, Vol. 4, pp. 523-552, (1976).

[227] TO, C.W.S. - "The Response of Nonlinear Structures to Random Excitations", Shock and Vibration Digest, Vol. 16, Nº 4, pp. 13-18, (1984).

[228] TO, C.W.S. - "The Stochastic Central Difference Method in Structural Dynamics", Computers & Structures, Vol. 23, Nº 6, pp. 813-818, (1986).

[229] TOLAND, R.H. e YANG, C.H. - "Random Walk Model for First-Passage Probability", Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 97, pp. 791-807, (1971).

[230] TOLAND, R.H.; YANG, C.Y. e HSU, C.K-C. - "Non-Stationary Random Vibration of Non-Linear Structures", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 7, pp. 395-406, (1972).

[231] TOTTENHAM, H. - "Introduction to Random Vibrations", Course on Vibration of Eng. Structures, Southampton, (1980).

[232] TUNG, C.C. - "The Effects of Runway Roughness on the Dynamic Response of Airplanes", J. Sound and Vibration, Vol. 5, Nº 1, pp. 164-172, (1967).

[233] UHLENBECK, G.E. e ORNSTEIN, L.S. - "On the Theory of Brownian Motion", Phys. Rev., Vol. 36, (1930).

[234] UHLENBECK, G.E. e WANG, M.C. - "On the theory of the Brownian Motion, II", Reviews of Modern Physics, Vol. 17, pp. 323-342, (1945).

[235] VANMARCKE, E.H. - "Properties of Spectral Moments with Application to Random Vibration", Journal of the Eng. Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, pp. 425-446, (1972).

[236] VANMARCKE, E.H. - "On the Distribution of the First-Passage Time for Normal Stationary Random Processes", Journal of Appl. Mech., ASME, Vol. 42, pp. 215-220, (1975).

[237] VANMARCKE, E.H. - "Structural Response to Earthquakes", Seismic Risk and Engineering Decisions (eds. Lomnitz & Rosenblueth), Elsevier, Amsterdam, (1976).

[238] VANMARCKE, E.H. - "Some Recent Developments in Random Vibration", Applied Mechanics Reviews, Vol. 32, Nº 10, pp. 1197-1202, (1979).

[239] YAMAZAKI, F. - "Simulation of Stochastic Fields and its Application to Finite Element Analysis", Ohsaki Research Institute, Inc., (1987).

[240] YANG, C.Y. - "Random Vibration of Structures", John Wiley & Sons, (1986).

[241] YANG, I-M. - "Stationary Random Response of Multidegree-of--Freedom Systems", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, (1970).

[242] YANG, J-N. - "Non-Stationary Envelope Process and First Excursion Probability", Journal of Structural Mechanics, Vol. 1, pp. 231-248, (1972).

[243] YANG, J-N. - "Approximation to First Passage Probabilities", J. Eng. Mech. Div., Vol. 101, pp. 361-372, (1975).

[244] WANG, M.C. e UHLENBECK, G.E. - "On the Theory of Brownian Motion II", Reviews of Modern Physics, Vol. 17, Nº 2, (1945).

[245] WARD, H.S. - "Analog Simulations of Earthquake Motions", ASCE, J. Eng. Mech. Div., pp. 173-190, (1965).

[246] WEN, Y.K. - "Approximate Method for Nonlinear Random Vibration", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 101, pp. 389-401, (1975).

[247] WEN, Y.K. - "Method for Random of Hysteretic Systems", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 102, pp. 249-264, (1976).

[248] WEN, Y.K. - "Stochastic Seismic Response Analysis of Hysteretic Multi-Degree-of-Freedom Structures", Earth. Eng. Struct. Dyn., Vol. 7, pp. 181-191, (1979).

[249] WEN, Y.K. - "Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 47, Nº 1, pp. 150-154, (1980).

[250] WEN, Y.K. - "Stochastic Response and Damage Analysis of Inelastic Structures", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 1, Nº 1, pp. 49-57, (1986).

[251] WEN, Y.K. - "Methods of Random Vibration for Inelastic Structures", Applied Mechanics Review, Vol. 42, Nº 2, pp. 39-52, (1989).

[252] WEN, Y.K. e ANG, H-S. - "Inelastic Modelling and System Identification", Proc. Workshop "Structural Safety Evaluation Based on System Identification Approaches", Fridr. Vieweg & Sohn, (1988).

[253] WIEGEL, R.L. (edt.) - "Earthquake Engineering", Prentice-Hall, Inc., N.Y., (1970).

[254] WIENER, N. - "Generalized Harmonic Analysis", Acta Math. Stockh., 55, pp. 117-258, (1930).

[255] WOLAVER, L.E. - "Second order properties of Nonlinear Systems Driven by Random Noise", Ph. D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, (1964).

[256] WONG, I. e HAJEK, B. - "Stochastic Processes in Engineering Systems", Springer-Verlag, (1985).

[257] WU, W.F. e LIN, Y.K. - "Cumulant-Neglect Closure for Non-Linear Oscillators Under Random Parametric and External Excitations", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 19, Nº 4, pp. 349-362, (1984).

[258] WU, W.F. - "Comparison of Gaussian Closure Technique and Equivalent Linearization Method", Prob. Engineering Mechanics, Vol. 2, Nº 1, pp. 2-8, (1987).

[259] ZIENKIEWICZ, O.C. - "The Finite Element Method", Mc Graw-Hill, U.K., (1977).