

Maria Fernanda Gentil Costa

# Estudo biomecânico do ouvido médio

Dissertação apresentada à  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
para obtenção do grau de Doutor em Ciências de Engenharia

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Janeiro - 2008

*Ao António e aos meus gatos*

## Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador, Prof. Doutor António Ferreira, todo o apoio e incentivo manifestado desde a escolha do tema até à sua conclusão.

De seguida, um agradecimento muito especial ao Prof. Doutor Renato Natal Jorge, meu co-orientador, pelo seu apoio, disponibilidade constante e paciência. Sem ele teria sido impossível a elaboração desta tese.

Não posso deixar de agradecer, também, ao Dr. Eurico de Almeida, responsável pela Clínica onde exerço as minhas funções como audiologista desde 1987, que sempre disponibilizou as condições por mim solicitadas para a elaboração desta investigação.

Aos meus colegas da Faculdade de Engenharia toda a ajuda e colaboração no desenvolvimento deste trabalho, com particular destaque ao Marco Parente, Pedro Martins, Fátima Alexandre e Miguel Moreira.

Não queria deixar de agradecer, também, ao Dr. Casimiro Milheiro, pela colaboração prestada na área da Imagiologia.

Um agradecimento a todos aqueles que trabalham comigo, tanto na Widex-Porto, como na Clínica e que, de algum modo, me apoiaram na realização deste projecto.

À minha família e amigos que directa ou indirectamente me estimularam para a prossecução desta tese.

Um agradecimento muito particular, à Noémia, por todo o suporte que me proporcionou e que se revelou fundamental desde o meu início de carreira.

Finalmente, um agradecimento muito especial ao António, por toda a sua força, apoio “psicológico” e compreensão, sem o qual teria sido muito difícil chegar até aqui.

# **Estudo biomecânico do ouvido médio**

por

**Maria Fernanda Gentil Costa**

Tese submetida para o grau de Doutor em Ciências de Engenharia da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, realizada sob a orientação e co-orientação de

**Prof. Doutor António Joaquim Mendes Ferreira**

e

**Prof. Doutor Renato Manuel Natal Jorge**

## ***Resumo***

A presente tese estuda o comportamento mecânico do ouvido médio para uma melhor compreensão da sua função.

Construiu-se um modelo geométrico dos principais componentes do ouvido médio, a partir de imagens de TAC sendo feita a respectiva discretização, utilizando o método de elementos finitos. As propriedades dos materiais foram obtidas da literatura e aplicadas as respectivas condições fronteira. Foi utilizada uma formulação de contacto para simulação dos ligamentos capsulares, sendo os ligamentos da cadeia ossicular ao seu exterior simulados como tendo um comportamento hiperelástico.

Foram feitos estudos de análise estática e dinâmica, incluindo o cálculo dos modos próprios de vibração. Em sequência destes estudos foi possível obter os deslocamentos ao nível do umbo e da platina do estribo, para diferentes níveis de pressão acústica aplicada sobre a membrana timpânica e os resultados comparados com outros trabalhos conhecidos da literatura. Foram analisadas as tensões ao nível dos ligamentos e cruras do estribo. Determinaram-se as rotações na base do estribo para diferentes níveis de pressão acústica e para distintas frequências. A utilização de um modelo constitutivo com activação permitiu analisar a influência dos músculos, tensor do tímpano e estapediano, tendo-se confirmado os dados fisiológicos descritos na literatura, bem como a importância de cada um dos músculos na protecção do ouvido interno.

# Biomechanical study of the middle ear

by  
Maria Fernanda Gentil Costa

Thesis submitted for satisfaction of the requirements for the Ph. D. degree in Engineering Science of the Faculty of Engineering of University of Porto under the supervision of

**Prof. Doutor António Joaquim Mendes Ferreira**  
and

**Prof. Doutor Renato Manuel Natal Jorge**

## *Abstract*

The present thesis studies the mechanical behaviour of the middle ear for a better understanding of its function.

It starts with a geometric modelling with the main components of the middle ear, based on imagiology and simultaneously with the respective finite element method discretization. The mechanical properties available in the literature are considered and boundaries conditions applied. The connection between ossicles is done using a contact formulation, which can be interpreted as a simulation of the capsular ligaments. Hyperelastic behaviour of the ligaments was taken into account.

Static and dynamic studies were done, including the eigenvalues and eigenmodes evaluation. Following these studies, it was possible to obtain the umbo and footplate stapes displacements for the different sound pressure levels, applied in the eardrum, and the results compared with others previously published. The suspensory ligaments and crus stapes stresses were analysed. The footplate rotations were obtained for different frequencies and sound pressure levels. The muscles (tensor tympani and stapedial) influence was analysed, using a constitutive model with activation, being confirmed by physiology data, as well as, the importance of each one of the muscles in the inner ear protection.

# Étude biomécanique de l'oreille moyenne

par

Maria Fernanda Gentil Costa

Thèse soutenue pour l'obtention du titre de Docteur en Sciences de Ingénierie de la Faculté de Ingénierie de l'Université du Porto et réalisée sous la direction de

**Prof. Doutor António Joaquim Mendes Ferreira**

et

**Prof. Doutor Renato Manuel Natal Jorge**

## *Résumé*

Cette dissertation a pour but l'étude du comportement mécanique de l'oreille moyenne pour une meilleure compréhension de sa fonction.

Pour cela on a construit un modèle géométrique avec les principaux composants de l'oreille moyenne, à partir d'images, avec la respectueuse discrétisation, utilisant la méthode des éléments finis. Les propriétés du matériel ont été obtenues de la littérature et appliquées les respectives conditions aux limites. Pour obtenir la simulation des ligaments capsulaires on considère la formulation de contact. D'autre côté les ligaments au extérieur des osselets ont été obtenus à partir du comportement hyperélastique.

Les études concernant l'analyse statique et dynamique (avec le calcul des modes propres de vibration) ont été considérées.

Avec ces études a été possible obtenir les déplacements de l'ombilic et de la platine de l'étrier, pour différents niveaux de pression acoustique, appliquée sur la membrane du tympan et les résultats ont été comparés à d'autres études. Nous avons, aussi, analysé les tensions au niveau de ligaments et des branches de l'étrier. Les rotations de la platine de l'étrier, ont été déterminées pour différents niveaux de pression acoustique et différentes fréquences. L'utilisation du modèle constitutif avec activation a permis analyser l'influence des muscles, (du marteau et de l'étrier), ce qui confirme les résultats physiologiques dans la littérature scientifique, bien que l'importance de chacun des muscles dans la protection de l'oreille interne.

## ÍNDICE

### **Simbologia**

#### **1. Introdução**

1.1 – Objectivos da Tese.....	1
1.2 – Apresentação da Tese .....	4
<b>Anexo:</b> Tensores .....	6
1.3 – Referências .....	19

#### **2. Anatomia e fisiologia do ouvido**

2.1 – Introdução .....	21
2.2 – Ouvido externo .....	22
2.2.1 - Vascularização e enervação .....	25
2.3 – Ouvido médio .....	28
2.3.1 - Paredes da caixa timpânica .....	28
2.3.1.1 - Parede externa .....	29
2.3.1.2 - Parede interna.....	31
2.3.1.3 - Parede superior.....	33
2.3.1.4 - Parede inferior.....	33
2.3.1.5 - Parede posterior.....	33
2.3.1.6 - Parede anterior .....	34
2.3.2 - Cadeia ossicular .....	36
2.3.2.1 - Martelo .....	36
2.3.2.2 - Bigorna.....	37
2.3.2.3 - Estribo .....	38
2.3.3 - Ligações dos ossículos.....	39
2.3.3.1 - Articulações entre os ossículos .....	40
2.3.3.2 - União dos ossículos com as paredes da caixa timpânica .....	41
2.3.3.3 - Sistema biomecânico dos ossículos .....	42
2.3.4 - Anatomia da corda do tímpano.....	45
2.3.5 - Vascularização da caixa timpânica .....	46

2.4 – Ouvido interno .....	48
2.4.1 - Labirinto ósseo.....	48
2.4.1.1 - Vestíbulo ósseo .....	49
2.4.1.2 - Canais semicirculares ósseos .....	49
2.4.1.3 - Cóclea óssea.....	50
2.4.1.4 - Canal auditivo interno.....	51
2.4.2 - Labirinto membranoso.....	52
2.4.2.1 - Vestíbulo membranoso .....	52
2.4.2.2 - Canais semicirculares membranosos .....	53
2.4.2.3 - Cóclea membranosa .....	53
2.4.3 - Terminações do nervo auditivo .....	56
2.4.4 - Irrigação do ouvido interno .....	58
2.5 – Sistema nervoso auditivo .....	60
2.5.1. - Via auditiva central.....	60
2.5.2. - Vias neurais do reflexo acústico .....	63
2.5.3. - Hemisférios cerebrais .....	65
2.6 – Referências.....	67

### **3. Psicoacústica**

3.1 – Considerações gerais sobre o som .....	68
3.1.1 - Frequência.....	68
3.1.2 - Intensidade, Potência acústica e Pressão sonora.....	73
3.1.3 - Amplitude, Fase e Timbre .....	77
3.2 – Propagação do som .....	79
3.2.1 - Velocidade de propagação .....	79
3.2.2 - Comprimento de onda.....	80
3.2.3 - Fenómenos de propagação do som .....	80
3.2.4 - Impedância acústica .....	83
3.3 – Percepção espacial .....	87
3.3.1 - Efeito de máscara.....	87
3.3.2 - Localização do som .....	87
3.3.3 - Binauralidade .....	88
3.3.4 - Limiares auditivos .....	89

3.4 – Classificação das disfunções auditivas .....	92
3.4.1 - Tipos de surdez .....	92
3.4.2 - Graus de surdez.....	93
3.5 – Algumas disfunções auditivas .....	95
3.5.1 - Otosclerose .....	95
3.5.2 - Doença de Ménière .....	96
3.5.3 - Traumatismo acústico .....	97
3.5.4 - Presbiacusia .....	97
3.5.5 - Surdez súbita, induzida por ototóxicos ou por vírus.....	98
3.5.6 - Schwannoma do acústico.....	99
3.5.7 - Acufenos, Recobro e Hiperacusia.....	99
3.5.8 - Surdez cortical e agnosia auditiva .....	100
3.6 – Uso de sistemas de amplificação no auxílio à surdez.....	102
3.7 – Referências.....	104

#### **4. Cinemática do meio contínuo**

4.1 – Descrição do movimento do meio contínuo .....	106
4.1.1 - Descrição material e espacial.....	108
4.1.2 - Campo de deslocamentos .....	108
4.1.3 - Deformações infinitesimais .....	109
4.1.4 - Dilatação .....	112
4.1.5 - Deformações finitas .....	112
4.1.6 - Tensores de extensões finitas .....	113
4.1.7 - Tensor de Cauchy-Green à direita .....	114
4.1.8 - Tensor das extensões de Lagrange .....	115
4.1.9 - Tensor de Cauchy-Green à esquerda .....	117
4.1.10 - Tensor de deformação euleriano.....	119
4.1.11 - Variação de Volume e Área devido à Deformação .....	122
4.2 – Estado de tensão.....	125
4.2.1 - Vector tensão .....	125
4.2.2 - Tensor de tensão .....	126
4.2.3 - Tensores de Tensão de Piola Kirchhoff.....	128
4.2.3.1 - Tensor das primeiras tensões de Piola Kirchhoff.....	128

4.2.3.2 - Tensor das segundas tensões de Piola Kirchhoff .....	129
4.3 – Referências.....	131

## 5. Modelos Constitutivos

5.1 – Introdução .....	132
5.2 – Elasticidade.....	133
5.3 – Hiperelasticidade .....	140
5.3.1 - Considerações gerais sobre equações constitutivas .....	140
5.3.2 - Formas equivalentes da função de energia de deformação .....	142
5.3.3 - Formas reduzidas de equações constitutivas .....	143
5.3.4 - Materiais hiperelásticos isotrópicos.....	144
5.3.5 - Equações constitutivas em termos de invariantes.....	145
5.3.6 - Equações constitutivas derivadas de $\Psi(\mathbf{B}^*)$ e $\Psi(\mathbf{V})$ .....	148
5.3.7 - Equações constitutivas em termos de alongamentos principais .....	148
5.3.8 - Materiais hiperelásticos incompressíveis .....	149
5.3.9 - Modelo de Yeoh para materiais incompressíveis .....	151
5.4 – Modelo de Hill para músculos esqueléticos .....	152
5.5 – Referências.....	158

## 6. Método de elementos finitos

6.1 – Introdução .....	159
6.2 – Elementos finitos .....	162
6.2.1 - Elemento linear de dois nós.....	162
6.2.2 - Elemento isoparamétrico de oito nós.....	164
6.2.3 - Elemento tetraédrico de quatro nós .....	170
6.3 – Dinâmica.....	176
6.4 – Formulação de Contacto .....	180
6.4.1 - Considerações cinemáticas .....	180
6.4.2 - Algoritmo de contacto .....	181
6.5 – Referências.....	186

## **7. Análise estática e dinâmica do comportamento mecânico do ouvido médio**

7.1 – Introdução .....	187
7.2 – Modelo construído com base em relações geométricas.....	189
7.3 – Construção do modelo baseado em imagiologia .....	200
7.3.1 - Modelo geométrico e malha de elementos finitos .....	200
7.3.2 - Propriedades de material.....	206
7.3.3 - Condições fronteira.....	209
7.4 – Estudo do comportamento biomecânico do ouvido médio .....	210
7.4.1 - Análise estática .....	210
7.4.2 - Análise dinâmica: modos próprios de vibração.....	211
7.4.3 - Análise dinâmica: vibrações forçadas .....	213
7.4.3.1 - Amortecimento.....	213
7.4.3.2 - Análise do contacto entre os ossículos.....	216
7.4.3.3 - Diferentes níveis de pressão sonora .....	217
7.4.3.4 - Análise do comportamento mecânico dos ligamentos e músculos....	219
7.4.3.5 - Análise do comportamento dinâmico do ouvido médio .....	220
7.4.4 - Análise dos esforços nos ligamentos .....	226
7.4.5 - Estudo do nível de tensão nas cruras do estribo .....	231
7.4.6 - Influência da acção dos músculos.....	233
7.5 – Referências.....	240

## **8. Conclusões**

8.1 – Síntese e conclusões .....	244
8.2 – Perspectivas de trabalhos futuros.....	247

## Simbologia

São apresentados os principais símbolos utilizados ao longo de toda a tese e o respectivo significado. Os símbolos encontram-se agrupados em quantidades escalares, funções e matrizes, seguidas de vectores e tensores.

### Quantidades escalares, funções e matrizes

- $l$  - Comprimento
- $dS$  - Comprimento do segmento definido pelo vector  $d\mathbf{X}$
- $ds$  - Comprimento do segmento definido pelo vector  $d\mathbf{x}$
- $L^M$  - Comprimento do músculo
- $L_0^M$  - Comprimento do músculo em repouso
- $L^{EC}$  - Comprimento do elemento contráctil do músculo
- $L^{ES}$  - Comprimento do elemento em série do músculo
- $L^{EP}$  - Comprimento do elemento em paralelo do músculo
- $e_i$  - Direcções principais
- $I_i$  - Invariantes do tensor das extensões (ou das tensões)
- $A$  - Área
- $A_0$  - Área não deformada
- $dA$  - Área de um elemento de área infinitesimal na configuração corrente
- $dA_0$  - Área de um elemento de área infinitesimal na configuração original
- $\Delta A$  - Área de um elemento de área (não infinitesimal) na configuração corrente
- $dV$  - Volume de um elemento de volume infinitesimal na configuração corrente
- $dV_0$  - Volume de um elemento de volume infinitesimal na configuração original
- $\Delta(dV)$  - Variação do volume material
- $J$  - Determinante do gradiente de deformação

- $\Delta l$  - Alongamento
- $\xi, \eta, \zeta$  - Coordenadas naturais
- $S_i$  - Parte da fronteira onde há forças aplicadas
- $E_i$  - Valores próprios do tensor  $\mathbf{E}$
- $I_i$  - Invariantes escalares principais do tensor das extensões
- $\dot{\gamma}_{eq}$  - Taxa de deslizamento equivalente
- $\bar{\theta}$  - Temperatura média no ponto de contacto
- $\bar{f}^\alpha$  - Média da variável de campo pré-definida no ponto de contacto
- $e$  - Dilatação
- $\rho$  - Densidade na configuração corrente
- $\rho_0$  - Densidade na configuração original
- $t$  - Tempo; posição temporal
- $t_0$  - Instante inicial
- $\lambda_i$  - Valores próprios
- $\epsilon$  - Deformação unidimensional
- $\gamma$  - Deformação de corte
- $\alpha, \beta$  - Coeficientes de amortecimento de Rayleigh
- $\mathbf{f}$  - Força por unidade de volume
- $\Delta \mathbf{F}$  - Força resultante existente numa pequena área  $\Delta A$
- $d\mathbf{f}$  - Força actuando na área  $dA$
- $d\mathbf{f}_0$  - Força actuando na área  $dA_0$
- $d\tilde{\mathbf{f}}$  - (pseudo) força que se transforma na força actual,  $d\mathbf{f}$
- $\mathbf{t}_e$  - Tracções externas
- $\mathbf{t}_i$  - Tracções internas
- $\mathbf{g}_n$  - Deslocamento normal
- $\mathbf{g}_t$  - Deslocamento tangencial
- $\lambda^M$  - Alongamento do músculo

## Simbologia

$\bar{\lambda}_f$	- Alongamento da fibra muscular não deformada
$P$	- Carga
$\varepsilon_a$	- Deformação axial
$\sigma_m$	- Tensão hidrostática
$E$	- Módulo de Young ou módulo de elasticidade
$\nu$	- Coeficiente de Poisson
$p$	- Multiplicadores de Lagrange
$k$	- Módulo de compressibilidade
$G$	- Módulo de elasticidade transversal
$\mathbf{e}_i$	- Base de referência
$\mathbf{e}_i$	- Base corrente
$\mu, \lambda$	- Constantes de Lamé
$N_i$	- Funções de forma associadas ao nó $i$
$U$	- Função de energia de deformação
$\Psi$	- Função de energia livre de Helmholtz
$\Omega_0$	- Região (configuração de referência)
$\Omega$	- Região (configuração corrente)
$p$	- Escalar definido como o multiplicador indeterminado de <i>Lagrange</i>
$F^M$	- Força do músculo
$F_0^M$	- Força isométrica muscular de pico
$F^{EC}$	- Força no elemento contráctil do músculo
$F^{ES}$	- Força no elemento em série do músculo
$F^{EP}$	- Força no elemento em paralelo do músculo
$K^{ES}$	- Rigidez do elemento elástico em série do músculo
$f_{EP}$	- Força passiva do músculo
$f_{ES}$	- Força activa do músculo

- $T_0^M$  - Tensão de pico no músculo
- $T^{EP}$  - Primeiras tensões de Piola-Kirchhoff no elemento em paralelo, do músculo
- $T^{ES}$  - Primeiras tensões de Piola-Kirchhoff no elemento em série, do músculo
- $U$  - Energia de deformação por unidade de volume da configuração de referência
- $U_I$  - Energia de deformação armazenada na matriz isotrópica das fibras musculares
- $U_f$  - Energia de deformação armazenada em cada família de fibras musculares
- $U_J$  - Energia de deformação associada com a variação de volume
- $I$  - Matriz identidade
- $J$  - Matriz *Jacobiana*
- $B$  - Matriz das deformações
- $N$  - Matriz das funções de forma
- $D$  - Matriz de elasticidade
- $M$  - Matriz de massa
- $C$  - Matriz de amortecimento
- $K$  - Matriz de rigidez
- $G$  - Matriz transformação

## Vectores

- $\mathbf{r}$  - Vector posição
- $\mathbf{X}$  - Vector com as coordenadas de referência de um ponto material
- $\mathbf{x}$  - Vector com as coordenadas correntes de um ponto material
- $d\mathbf{X}$  - Vector de posição infinitesimal (na configuração de referência)
- $d\mathbf{x}$  - Vector de posição infinitesimal (na configuração corrente)
- $\mathbf{u}_i$  - Vector com as componentes do deslocamento de um ponto material
- $\mathbf{d}$  - Vector dos deslocamentos nodais
- $\delta\mathbf{u}$  - Vector dos deslocamentos virtuais
- $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  - Vector associado às deformações virtuais
- $\mathbf{b}$  - Vector de forças de massa

- $\mathbf{n}, \mathbf{m}$  - Versores normais a planos (ou a superfícies)  
 $\mathbf{n}_i$  - Vectores ortonormais  
 $\mathbf{t}$  - Vector contendo as tensões de Cauchy calculadas com base em  $d\mathbf{f}$  e  $dA$   
 $\mathbf{t}_n$  - Vector tensão  
 $\mathbf{t}_o$  - Vector de tensões calculadas com base em  $d\mathbf{f}_o$  e  $dA_o$   
 $\mathbf{R}_n$  - Vector próprio de  $\mathbf{B}^*$   
 $\mathbf{e}$  - Vector com as extensões infinitesimais

## Tensores

- $\mathbf{E}$  - Tensor das extensões ou tensor de deformação infinitesimal  
 $\bar{I}_1^c$  - Primeiro invariante do tensor das deformações de Cauchy-Green à direita  
 $\nabla \mathbf{u}$  - Gradiente de deslocamentos (relativamente à configuração de referência)  
 $\nabla_x \mathbf{u}$  - Gradiente de deslocamentos (relativamente à configuração corrente)  
 $\mathbf{F}$  - Gradiente das deformações  
 $\mathbf{F}^*$  - Gradiente de deformação relativo à região  $\Omega_0^*$   
 $\mathbf{I}$  - Tensor identidade  
 $\mathbf{U}$  - Gradiente de deformação simétrico (tensor de extensões finitas à direita)  
 $\mathbf{R}$  - Tensor de segunda ordem que descreve o movimento de corpo rígido  
 $\mathbf{V}$  - Tensor de extensões finitas à esquerda  
 $\mathbf{C}$  - Tensor das deformações de Cauchy-Green à direita  
 $\mathbf{B}^*$  - Tensor das deformações de Cauchy –Green à esquerda  
 $\mathbf{E}^*$  - Tensor das extensões finitas (lagrangianas)  
 $\mathbf{e}^*$  - Tensor com as extensões de Almansi (*eulerianas*)  
 $\mathbf{T}$  - Tensor das tensões de Cauchy  
 $\mathbf{t}_a$  - Tensão axial  
 $\tau$  - Tensão de corte simples

*Simbologia*

- $\bar{\tau}$  - Tensão de corte equivalente
- $\mathbf{T}_0$  - Tensor das primeiras tensões de Piola-Kirchhoff
- $\tilde{\mathbf{T}}$  - Tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff
- $\sigma$  - Campo de tensões

# Capítulo 1

## *Introdução*

### **1.1 Objectivos da Tese**

A função do sistema auditivo é, essencialmente, transformar as variações de pressão originadas pela propagação das ondas sonoras, recebidas pela membrana timpânica, em impulsos eléctricos, no ouvido interno. Estes impulsos são canalizados pelo nervo auditivo ao cérebro, transformando-os em sensações auditivas.

O ser humano nasce com uma sensibilidade auditiva muito desenvolvida [1]. Pela 4ª semana de gravidez forma-se a vesícula ótica, que dá origem aos órgãos auditivos. Os ossículos do ouvido médio aparecem pelo 33º dia e, aproximadamente, ao 6º mês de vida intra-uterina já têm a forma adulta. O pavilhão auricular e o canal auditivo externo começam a formar-se pela 5ª semana de gestação e prolongam-se até à 10ª semana. O nervo e os núcleos auditivos são visíveis pela 6ª ou 7ª semanas. Na 10ª semana de gravidez estão formados muitos dos órgãos do equilíbrio e o canal coclear. As diferentes cavidades do ouvido médio formam-se entre a 10ª e a 30ª semanas de gestação. O labirinto alcança a maturidade por volta da 24ª semana de gestação. A maturação do sistema nervoso, relacionado com a audição, inicia-se pelas 27ª ou 28ª semanas. Pela 30ª semana de gestação, o núcleo coclear tem uma morfologia semelhante à do adulto.

No 2º trimestre da gestação pode detectar-se resposta auditiva do feto. No 3º trimestre já são atingidas as características de resposta do adulto. O ruído ambiente do feto é dominado pela voz da mãe, que parece ser fundamental para o normal funcionamento do sistema auditivo da criança. A maturação completa das vias de processamento auditivo surge durante o 1º ano de vida.

Os factores que podem influenciar negativamente esse desenvolvimento (hereditariedade, tóxicos, medicamentos, infecções, etc.) podem ter repercussões quer no funcionamento (deficiência auditiva) quer na forma (malformações anatómicas) do aparelho auditivo.

Tudo o que, a partir da concepção do feto, modifique, interrompa ou altere o funcionamento do órgão da audição, poderá conduzir à surdez em maior ou menor grau.

Embora não existam estudos oficiais sobre a percentagem da população que sofre de problemas auditivos em Portugal, estima-se que cerca de 10 % (um milhão de pessoas) se encontre afectada. A surdez profunda atinge um em cada mil nascimentos, devido a factores genéticos e prematuridade, existindo em Portugal 35 mil surdos profundos num universo de 135 mil pessoas afectadas por deficiências auditivas [2].

A otosclerose, ossificação anormal do osso mais pequeno do corpo humano - estribo - é uma das causas mais frequentes de surdez de condução, em adultos. A maioria das pessoas com este tipo de surdez tem grandes dificuldades de comunicação, a partir da adolescência, com agravamento na idade adulta [3].

Qualquer perda auditiva pode condicionar a vida do indivíduo, tanto no que diz respeito à comunicação com os outros, como ao simples prazer de ouvir uma música, pelo que toda a intervenção que possa minorar estas dificuldades, se revela da maior importância.

Neste sentido tornou-se pertinente o desenvolvimento da presente investigação, sabendo que a energia sonora é captada pelo ouvido externo até à membrana timpânica, onde é transformada em energia mecânica e comunicada aos ossículos do ouvido médio. Este é constituído pela cadeia ossicular, ligamentos, músculos e respectivos tendões. Os ossículos do ouvido médio estão articulados de tal modo que o deslocamento de um deles interfere indirectamente no deslocamento dos outros.

O objectivo desta investigação surge com o interesse de melhor perceber o comportamento biomecânico do ouvido médio. Tendo esta percepção será mais fácil simular patologias do ouvido médio, comparando-as com o ouvido normal, como por exemplo, estudos sobre perfurações timpânicas de vários calibres [4], [5]. Outra aplicação interessante seria a escolha de novos materiais para próteses, em casos, por exemplo, de otosclerose, ou desarticulação da cadeia ossicular [6].

Actualmente, o método de elementos finitos (MEF) é a ferramenta mais poderosa para simular problemas mecânicos, permitindo uma análise de meios discretos e contínuos, com alto nível de complexidade, a partir de modelos geométricos [7]. Neste método um sistema contínuo é dividido num número finito de partes, chamados elementos. Em cada elemento finito, a solução é obtida a partir de nós, garantindo as respectivas condições fronteira, transformando um problema com um número infinito de graus de liberdade num meio contínuo, noutra problema finito [7].

O primeiro trabalho conhecido, acerca do comportamento biomecânico do ouvido médio, utilizando o MEF, foi feito no gato e data de 1978 [8]. Este primeiro modelo foi sendo aperfeiçoado com a colaboração de outros autores [9], [10], mas não seria apropriado para investigar o comportamento do ouvido médio humano.

Neste sentido, outros modelos a partir da geometria do ouvido médio humano foram sendo desenvolvidos, considerando a membrana timpânica, os ossículos, a impedância coclear e posteriormente a inserção de alguns ligamentos e tendões [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17]. A partir daí, outros modelos foram desenvolvidos, simulando o comportamento estático e dinâmico do modelo [18], [19]. Muitos destes trabalhos comparam os seus resultados com dados experimentais.

No entanto, todos os modelos referidos na literatura representam o comportamento do ouvido médio, tomando os ligamentos capsulares como meio contínuo entre os ossículos, admitindo os ligamentos ao exterior da cadeia ossicular com comportamento elástico, não apresentando qualquer análise relativa à activação dos músculos do ouvido médio.

Neste trabalho de investigação, na simulação dos ligamentos capsulares foi utilizada formulação de contacto, os ligamentos considerados com comportamento hiperelástico e foi utilizado um modelo constitutivo para simulação da função activa e passiva dos músculos do ouvido médio.

## 1.2 Apresentação da Tese

No capítulo 2 é feita uma revisão da anatomo-fisiologia do ouvido, englobando o ouvido externo, ouvido médio e ouvido interno, quanto à sua constituição, vascularização e enervação. É ainda descrito, numa forma muito sucinta, o sistema nervoso auditivo, tanto periférico como central.

No capítulo 3 descrevem-se conceitos básicos relacionados com a psicoacústica, ou seja, a forma como os sons são percebidos pelo ser humano. A psicoacústica estuda a relação entre as propriedades físicas do som e a sua interpretação, individual, a nível psicológico. Este capítulo inicia com algumas considerações referentes ao som, como sejam, frequência, intensidade, potência acústica, pressão sonora, amplitude, fase e timbre. Consideram-se ainda alguns fenómenos de propagação, velocidade e localização do som, assim como, a impedância acústica, percepção espacial e binauralidade. É, ainda, feita a classificação dos tipos e graus de disfunções auditivas, assim como uma breve descrição de algumas dessas disfunções. Este capítulo termina com propostas de soluções, graças ao avanço tecnológico, para minimizar os diferentes problemas auditivos.

No capítulo 4 é feita uma breve revisão da mecânica dos meios contínuos que caracterizam a deformação de um corpo sólido e deformável, assim como a definição dos campos referentes aos estados de deformação e de tensão.

No capítulo 5 apresentam-se alguns modelos constitutivos, relacionados com a elasticidade e hiperelasticidade, sendo apresentadas algumas equações constitutivas, que relacionam o estado de tensão com o estado de deformação, em regime não linear. É feita uma breve descrição do modelo de Yeoh, utilizado na modelação dos ligamentos e, também, dos músculos. Por fim é feita uma abordagem ao modelo constitutivo de Hill para músculos esqueléticos, que é adaptado aos músculos do ouvido médio.

No capítulo 6 são apresentados os principais aspectos que se relacionam com a aplicação do método dos elementos finitos (MEF), iniciando com uma breve história da sua aplicação, seguida da descrição de alguns tipos de elementos utilizados no presente modelo, como sejam, elemento linear de dois nós, elemento isoparamétrico de oito nós e elemento tetraédrico de quatro nós. Seguidamente é feita uma exposição de equações de dinâmica aplicada e, por fim, algumas considerações cinemáticas da formulação de contacto, utilizada para simulação dos ligamentos

capsulares entre os ossículos. São, ainda, apresentadas formulações baseadas no princípio dos trabalhos virtuais.

No capítulo 7 descreve-se a construção do modelo do ouvido médio, que engloba a membrana timpânica, ossículos, ligamentos, articulações, músculos e impedância coclear, ao qual foi aplicado o MEF. O primeiro modelo sólido foi construído com base em relações geométricas, tendo, posteriormente, sido obtido um outro modelo mais realista, a partir de imagiologia. Depois de aplicadas as propriedades de material, baseadas em trabalhos publicados, foram atribuídas as respectivas condições fronteira.

O modelo serve de base a várias simulações, tanto a nível estático como dinâmico, numa banda frequencial compreendida entre 100 Hz e 10 kHz, para vários valores de pressão acústica, aplicados sobre a membrana timpânica. Os resultados obtidos quanto aos deslocamentos do umbo e da platina do estribo foram comparados com trabalhos anteriormente publicados. Seguidamente foram analisadas as tensões exercidas sobre os ligamentos suspensores e sobre as cruras do estribo.

Foi utilizado um modelo constitutivo com activação que permitiu analisar a influência dos músculos do ouvido médio e foram determinadas as rotações na base do estribo, assim como a pressão exercida sobre o fluido coclear, ao nível da platina do estribo.

No capítulo 8 foi feita uma breve síntese de todo o trabalho, com as respectivas conclusões e, por fim, foram apresentadas algumas sugestões de possíveis trabalhos futuros.

# Anexo

## *Tensores*

O presente anexo pretende identificar a nomenclatura utilizada na descrição dos modelos matemáticos e foi baseada na bibliografia clássica em mecânica dos meios contínuos, de que se destacam as referências [20], [21].

Em termos matemáticos, um tensor é uma quantidade linear generalizada ou uma entidade geométrica, que pode ser expressa por um vector multi-dimensional relativamente a uma base do espaço onde é definido. Na mecânica dos sólidos usam-se tensores para exprimir tensões e deformações, assim como a relação entre elas. Correntemente recorre-se a modelos lineares para relacionar as tensões e as deformações, embora, na realidade, a maioria dos materiais tenham um comportamento não-linear.

### 1. Transformação linear

Um tensor,  $\mathbf{T}$ , é uma transformação, ou aplicação linear, que transforma um vector em outro vector, de acordo com as seguintes propriedades lineares:

$$\mathbf{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{T}\mathbf{a} + \mathbf{T}\mathbf{b} \quad (1)$$

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{a} \quad (2)$$

sendo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , dois vectores arbitrários e  $\alpha$  um escalar.

### 2. Componentes de um tensor

As componentes de um tensor dependem dos vectores que constituem a base usada para descrever essas componentes.

Sejam  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  vectores unitários nas direcções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente, dum sistema de coordenadas cartesianas. Aplicando  $\mathbf{T}$ , estes vectores transformam-se em  $T(e_1)$ ,  $T(e_2)$  e  $T(e_3)$ .

Cada uma das imagens  $T(e_i)$  ( $i=1,2,3$ ), sendo um vector, pode ser escrita como uma combinação linear dos vectores unitários  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ .

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T_{11}e_1 + T_{21}e_2 + T_{31}e_3 \\ T(e_2) &= T_{12}e_1 + T_{22}e_2 + T_{32}e_3 \\ T(e_3) &= T_{13}e_1 + T_{23}e_2 + T_{33}e_3 \end{aligned} \quad (3)$$

ou

$$T(e_i) = T_{ji}e_j \quad (4)$$

Os escalares  $T_{ij}$  representam as componentes do tensor  $\mathbf{T}$ , em relação à base dos vectores unitários, podendo ser apresentados sob a forma de matriz:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 3. Ordem de um tensor

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas e usando vectores unitários ao longo das coordenadas positivas, definem-se as componentes cartesianas dos tensores de diferentes ordens em termos das suas leis de transformação, onde as quantidades de referência são referidas na base  $\{\mathbf{e}'_i\}$  e as quantidades correntes referidas na base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , sendo que  $\mathbf{e}'_i$  e  $\mathbf{e}_i$  se relacionam como  $\mathbf{e}'_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i$ , em que  $\mathbf{Q}$  é uma transformação ortogonal.

$$\alpha' = \alpha \quad \text{tensor de ordem zero (escalar)}$$

$$a'_i = Q_{mi}a_m \quad \text{tensor de primeira ordem (vector)}$$

$$T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn} \quad \text{tensor de segunda ordem (tensor)}$$

$$T'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}T_{mnr} \quad \text{tensor de terceira ordem}$$

etc.

Usando estas leis de transformação, podem ser estabelecidas regras de adição, de multiplicação e quociente:

a) Regra da adição

Se  $T_{ij}$  e  $S_{ij}$  são componentes de dois tensores, então  $T_{ij} + S_{ij}$  são componentes de um tensor. Da mesma forma, se  $T_{ijk}$  e  $S_{ijk}$  são componentes de dois tensores de terceira ordem, então  $T_{ijk} + S_{ijk}$  são componentes de um tensor de terceira ordem.

b) Regra da multiplicação

Sejam  $a_i$  componentes de um vector e  $T_{ij}$  componentes de um tensor. Os produtos obtidos são componentes do tensor, cuja ordem é igual ao número de índices livres. Por exemplo,  $a_i a_i$  é um escalar (tensor de ordem zero),  $a_i a_j a_k$  são componentes de um tensor de terceira ordem,  $T_{ij} T_{kl}$  componentes de um tensor de quarta ordem.

b) Regra do quociente

Se  $a_i$  são componentes de um vector,  $T_{ij}$  componentes de um tensor e  $a_i = T_{ij} b_j$  para todas as coordenadas, então  $b_i$  são componentes de um vector.

## 4. Propriedades de um tensor

### 4.1 Soma de tensores

Sejam  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{S}$  dois tensores e  $\mathbf{a}$  um vector arbitrário. A soma de  $\mathbf{T}$  com  $\mathbf{S}$  é definida por

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S})\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{a} + \mathbf{S}\mathbf{a} \quad (6)$$

### 4.2 Produto de tensor por escalar

$$(\alpha\mathbf{T})\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{T}\mathbf{a}) \quad (7)$$

### 4.3 Produto de dois tensores

Sejam  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{S}$  dois tensores e  $\mathbf{a}$  um vector arbitrário. Os produtos  $\mathbf{TS}$  e  $\mathbf{ST}$  são definidos como:

$$(\mathbf{TS})\mathbf{a} = \mathbf{T}(\mathbf{S}\mathbf{a}) \quad (8)$$

e

$$(\mathbf{ST})\mathbf{a} = \mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{a}) \quad (9)$$

Em forma de componentes, temos, para o tensor  $\mathbf{TS}$ ,

$$(\mathbf{TS})_{ij} = e_i \cdot (\mathbf{TS}) e_j = e_i \cdot \mathbf{T}(\mathbf{S}e_j) = e_i \cdot \mathbf{T}(S_{mj}e_m) = S_{mj} (e_i \cdot \mathbf{T}e_m) \quad (10)$$

isto é

$$(\mathbf{TS})_{ij} = T_{im} S_{mj} \quad (11)$$

De modo análogo, obtém-se

$$(\mathbf{ST})_{ij} = S_{im} T_{mj} \quad (12)$$

A equação (11) é equivalente à equação matricial

$$[\mathbf{TS}] = [\mathbf{T}][\mathbf{S}] \quad (13)$$

bem como a equação (12) corresponde a

$$[\mathbf{ST}] = [\mathbf{S}][\mathbf{T}] \quad (14)$$

Os dois produtos matriciais são, por norma, diferentes, uma vez que o produto de tensores não goza da propriedade comutativa, isto é,  $\mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}$ .

Se  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{V}$  são três tensores, então

$$(\mathbf{T}(\mathbf{SV}))\mathbf{a} = \mathbf{T}((\mathbf{SV})\mathbf{a}) = \mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathbf{V}\mathbf{a})) \quad (15)$$

e

$$(\mathbf{TS})(\mathbf{V}\mathbf{a}) = \mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathbf{V}\mathbf{a})) \quad (16)$$

isto é

$$\mathbf{T}(\mathbf{SV}) = (\mathbf{TS})\mathbf{V} \quad (17)$$

Conclui-se que o produto de tensores goza da propriedade associativa.

#### 4.4 Transposto de um tensor

O transposto de um tensor  $\mathbf{T}$ , representado pelo tensor  $\mathbf{T}^T$ , é definido, para qualquer par de vectores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{T}^T\mathbf{a} \quad (18)$$

Em forma de componentes:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{T}^T\mathbf{e}_i \quad (19)$$

Assim,

$$T_{ij} = T_{ji}^T \quad (20)$$

ou seja, recorrendo à notação matricial,

$$[\mathbf{T}^T] = [\mathbf{T}]^T \quad (21)$$

Note-se que a partir da equação (18) se obtém

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{T}^T)^T \mathbf{a} \quad (22)$$

Assim,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{T} \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{T}^T)^T \mathbf{a}$ , para quaisquer vectores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , pelo que:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}^T)^T \quad (23)$$

Também se verifica que

$$(\mathbf{TS})^T = \mathbf{S}^T \mathbf{T}^T \quad (24)$$

isto é, o transposto dum produto de tensores é igual ao produto dos tensores transpostos em ordem inversa. De modo genérico pode escrever-se

$$(\mathbf{ABC...D})^T = \mathbf{D}^T \dots \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (25)$$

## 4.5 Produto escalar

O produto escalar, ou produto interno, de dois vectores,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , é um escalar, definido do seguinte modo:

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (26)$$

Em notação tensorial, o produto escalar é escrito da seguinte forma:

$$c = a_i b_i \quad (27)$$

A norma, ou intensidade, de um vector  $\mathbf{a}$  é a grandeza não negativa definida por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a \cdot a} \quad (28)$$

Designando por  $\theta$ , o menor ângulo formado pelos vectores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , verifica-se que

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta \quad (29)$$

## 4.6 Produto vectorial

O produto vectorial, ou produto externo, de dois vectores,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , é um vector definido por:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (30)$$

e cuja norma, é

$$\|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \quad (31)$$

Trata-se de um vector que é perpendicular aos vectores,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Verifica-se, ainda, que a sua norma,  $c = \|\mathbf{c}\|$ , é numericamente igual à área do paralelogramo formado pelos vectores,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

Em notação tensorial, e recorrendo ao símbolo de permuta, o produto vectorial é expresso da seguinte forma:

$$c_i = \mathbf{e}_{ijk} a_j b_k \quad (32)$$

#### 4.7 Produto misto

O produto misto de três vectores,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , é um escalar definido por:

$$v = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (33)$$

e que tem o valor do determinante de terceira ordem:

$$v = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (34)$$

Se os vectores,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , formarem um sistema ortogonal definido no sentido directo, o produto misto é numericamente igual ao volume do paralelepípedo que tem os vectores,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , como lados adjacentes.

Em notação tensorial o produto misto é escrito da seguinte forma:

$$v = \mathbf{e}_{ijk} a_i b_j c_k \quad (35)$$

#### 4.8 Produto tensorial

O produto tensorial dos vectores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , representado por  $\mathbf{ab}$ , ou  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ , é um tensor de segunda ordem que transforma um vector arbitrário,  $\mathbf{c}$ , no vector definido do seguinte modo:

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (36)$$

em que  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  representa o produto escalar dos vectores  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ .

Para quaisquer vectores  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  e escalares,  $\alpha$  e  $\beta$ , obtemos a partir da definição anterior:

$$(\mathbf{ab})(\alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot (\alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}))\mathbf{a} = ((\alpha\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\beta\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}))\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{ab})\mathbf{c} + \beta(\mathbf{ab})\mathbf{d} \quad (37)$$

Designando por  $\mathbf{W}$  o tensor  $\mathbf{ab}$ , as componentes de  $\mathbf{W}$  são:

$$W_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{ab})\mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j) \quad (38)$$

pelo que

$$W_{ij} = a_i b_j \quad (39)$$

Em notação matricial, a equação (39) pode ser escrita como

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Em geral, pode exprimir-se qualquer tensor,  $\mathbf{T}$ , como uma combinação linear dos produtos tensoriais  $e_i e_j$ , em termos das nove componentes  $T_{ij}$ , isto é,

$$\mathbf{T} = T_{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \dots + T_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad (41)$$

ou ainda, em notação tensorial,

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (42)$$

## 4.9 Traço de um tensor

O traço de  $\mathbf{ab}$ , representado por  $tr \mathbf{ab}$ , é definido como o escalar dado por

$$tr \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (43)$$

Trata-se de um operador linear que satisfaz a seguinte relação

$$tr(\alpha \mathbf{ab} + \beta \mathbf{cd}) = \alpha tr \mathbf{ab} + \beta tr \mathbf{cd} \quad (44)$$

para quaisquer tensores  $\mathbf{ab}$  e  $\mathbf{cd}$  e escalares  $\alpha$  e  $\beta$ .

Usando a equação (42), o traço do tensor  $\mathbf{T}$ ,  $tr \mathbf{T}$ , pode ser reescrito como

$$tr \mathbf{T} = tr(T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = T_{ij} tr(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = T_{ij} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii} \quad (45)$$

ou seja, é igual à soma dos seus elementos principais

$$tr \mathbf{T} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (46)$$

Além disso, verifica-se que:

$$tr \mathbf{T}^T = tr \mathbf{T} \quad (47)$$

## 4.10 Tensor identidade

O tensor identidade, representado por  $\mathbf{I}$ , é uma transformação linear que aplica qualquer vector nele próprio. Assim, para qualquer vector  $\mathbf{a}$ , obtém-se:

$$\mathbf{Ia} = \mathbf{a} \quad (48)$$

As componentes do tensor identidade são

$$I_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (49)$$

ou seja, em notação matricial,

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Note-se que para qualquer tensor  $\mathbf{T}$ , verifica-se  $\mathbf{T}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{T} = \mathbf{T}$  e se  $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ , para qualquer  $\mathbf{a}$ , então  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ .

#### 4.11 Inverso de um tensor

Dado o tensor  $\mathbf{T}$ , se existir um tensor  $\mathbf{S}$ , tal que  $\mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{I}$ , então  $\mathbf{S}$  é chamado tensor inverso de  $\mathbf{T}$ . Neste caso, é corrente escrever-se

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1} \quad (51)$$

O inverso de um tensor satisfaz a seguinte relação recíproca

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I} \quad (52)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade.

Para o inverso de um tensor, as seguintes relações são satisfeitas:

$$(\mathbf{T}^T)^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^T \quad (53)$$

e

$$(\mathbf{S}\mathbf{T})^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1} \quad (54)$$

Note-se que se existir o tensor inverso de  $\mathbf{T}$ , então:

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} \quad (55)$$

#### 4.12 Tensor Ortogonal

Um tensor ortogonal é uma transformação linear, em que as imagens de um conjunto de vectores arbitrários conservam os seus comprimentos e as suas posições relativas.

Se  $\mathbf{Q}$  é um tensor ortogonal, então, por definição,

$$|\mathbf{Q}\mathbf{a}| = |\mathbf{a}| \quad \text{e} \quad \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos(\mathbf{Q}\mathbf{a}, \mathbf{Q}\mathbf{b}) \quad (56)$$

para quaisquer  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

Assim,

$$\mathbf{Qa} \cdot \mathbf{Qb} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (57)$$

Usando as definições de transposta e produto de tensores

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{Qa}) \cdot (\mathbf{Qb}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T (\mathbf{Qa}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) \mathbf{a} \quad (58)$$

e uma vez que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  conclui-se que

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (59)$$

Atendendo a (52) tem-se  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \quad (60)$$

Em notação matricial, a equação (60) toma a seguinte forma

$$[\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^T = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{Q}] = [\mathbf{I}] \quad (61)$$

e em notação tensorial

$$Q_{im} Q_{jm} = Q_{mi} Q_{mj} = \delta_{ij} \quad (62)$$

onde  $\delta_{ij}$  é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (63)$$

Tendo em conta que

$$|[\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^T| = |\mathbf{Q}| |\mathbf{Q}^T| = |\mathbf{I}| \quad (64)$$

e uma vez que

$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{Q}^T|$  e  $|\mathbf{I}| = 1$ , então,  $|\mathbf{Q}|^2 = 1$ . Assim,

$$|\mathbf{Q}| = \pm 1 \quad (65)$$

ou seja, o determinante da matriz de um tensor ortogonal  $\mathbf{Q}$  é igual a 1 ou -1.

### 4.13 Tensor simétrico e anti-simétrico

Um tensor diz-se simétrico se:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (66)$$

Assim, as componentes dum tensor simétrico têm a seguinte propriedade

$$T_{ij} = T_{ij}^T = T_{ji} \quad (67)$$

isto é,  $T_{12}=T_{21}$ ,  $T_{13}=T_{31}$ ,  $T_{23}=T_{32}$ .

Um tensor diz-se anti-simétrico se:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T \quad (68)$$

Assim, as componentes dum tensor anti-simétrico têm a seguinte propriedade:

$$T_{ij} = -T_{ij}^T = -T_{ji} \quad (69)$$

ou seja,

$$T_{11}=T_{22}=T_{33}=0 \text{ e } T_{12}=-T_{21}, T_{13}=-T_{31}, T_{23}=-T_{32} \quad (70)$$

Qualquer tensor,  $\mathbf{T}$ , pode ser decomposto na soma de um tensor simétrico com um tensor anti-simétrico, tal como:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A \quad (71)$$

em que  $\mathbf{T}^S$ , o tensor simétrico, corresponde a

$$\mathbf{T}^S = \frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^T}{2} \quad (72)$$

e  $\mathbf{T}^A$ , o tensor anti-simétrico é

$$\mathbf{T}^A = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2} \quad (73)$$

#### 4.14 Vector dual dum tensor anti-simétrico

Os elementos principais de um tensor anti-simétrico são iguais a zero e dos restantes seis elementos, só três são independentes, uma vez que  $T_{12} = -T_{21}$ ,  $T_{13} = -T_{31}$ ,  $T_{23} = -T_{32}$ . Para qualquer tensor anti-simétrico,  $\mathbf{T}$ , corresponde um vector  $\mathbf{t}^A$ , de tal modo que para todo vector  $\mathbf{a}$ , o vector transformado,  $\mathbf{T}\mathbf{a}$ , pode ser obtido a partir do produto vectorial de  $\mathbf{t}^A$  com  $\mathbf{a}$ , ou seja,

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{t}^A \times \mathbf{a} \quad (74)$$

O vector  $\mathbf{t}^A$ , é chamado vector dual do tensor anti-simétrico.

Da equação (74) e dado que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ , o vector dual é dado por

$$\begin{aligned} T_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_3 = -t_3^A \\ T_{31} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_2 = -t_2^A \\ T_{23} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_1 = -t_1^A \end{aligned} \quad (75)$$

Cálculos similares resultam em  $T_{21} = t_3^A$ ,  $T_{13} = t_2^A$ ,  $T_{32} = t_1^A$  e  $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$ .

Assim, só um tensor anti-simétrico tem um vector dual definido pela equação (74) e dado por:

$$\mathbf{t}^A = -\left(T_{23}^A \mathbf{e}_1 + T_{31}^A \mathbf{e}_2 + T_{12}^A \mathbf{e}_3\right) = \left(T_{32}^A \mathbf{e}_1 + T_{13}^A \mathbf{e}_2 + T_{21}^A \mathbf{e}_3\right) \quad (76)$$

ou em notação indicial

$$2\mathbf{t}^A = -\varepsilon_{ijk} T_{jk} \mathbf{e}_i \quad (77)$$

#### 4.15 Módulo de um tensor

O módulo (ou comprimento) de um tensor  $\mathbf{v}$  de ordem 1,  $\mathbf{T}$  de ordem 2,  $\mathbf{A}$  de ordem 3 e  $\mathbf{C}$  de ordem 4 é definido como:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} = (v_i v_i)^{1/2} \\ |\mathbf{T}| &= (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T})^{1/2} = \left(\text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{T}^T)\right)^{1/2} = (T_{ij} T_{ij})^{1/2} \\ |\mathbf{A}| &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2} = (A_{ijk} A_{ijk})^{1/2} \\ |\mathbf{C}| &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C})^{1/2} = (C_{ijkl} C_{ijkl})^{1/2} \end{aligned}$$

#### 4.16 Valores e vectores próprios de um tensor

Seja  $\mathbf{T}$  um tensor e  $\mathbf{a}$  um vector, não nulo, tal que

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} \quad (78)$$

para um dado escalar,  $\lambda$ . Neste caso, diz-se que  $\mathbf{a}$  é vector próprio de  $\mathbf{T}$ , associado ao valor próprio,  $\lambda$ .

Alem disso, se  $\mathbf{a}$  é um vector próprio de  $\mathbf{T}$  correspondente ao valor próprio,  $\lambda$ , então qualquer vector paralelo a  $\mathbf{a}$  é também um vector próprio de  $\mathbf{T}$  associado ao valor próprio  $\lambda$ . Com efeito, para qualquer escalar  $\alpha$  tem-se

$$\mathbf{T}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \mathbf{T}\mathbf{a} = \alpha (\lambda \mathbf{a}) = \lambda (\alpha \mathbf{a}) \quad (79)$$

A propriedade anterior torna evidente que um tensor admite uma infinidade de vectores próprios. Por exemplo, uma vez que  $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ , então qualquer vector é um vector próprio do tensor identidade,  $\mathbf{I}$ , todos eles associados ao valor próprio unidade. Pode, ainda, mostrar-se que existe um e um só valor próprio correspondente a um dado vector próprio.

Alguns tensores têm vectores próprios numa só direcção. Por exemplo, para um tensor rotação, que resulta na rotação de um corpo rígido sobre um eixo através de um ângulo diferente de múltiplos de  $\pi$ , apenas os vectores paralelos ao eixo de rotação serão paralelos a eles próprios.

Seja  $\mathbf{n}$  um vector próprio unitário, associado ao valor próprio,  $\lambda$ , então

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{n} \quad (80)$$

Assim,

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = 0 \quad (81)$$

Seja  $\mathbf{n} = \alpha_i\mathbf{e}_i$ , em forma de componentes tem-se

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})\alpha_j = 0 \quad (82)$$

ou

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda)\alpha_1 + T_{12}\alpha_2 + T_{13}\alpha_3 &= 0 \\ T_{21}\alpha_1 + (T_{22} - \lambda)\alpha_2 + T_{23}\alpha_3 &= 0 \\ T_{31}\alpha_1 + T_{32}\alpha_2 + (T_{33} - \lambda)\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad (83)$$

As equações (83) formam um sistema de equações lineares homogéneas em  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  que apenas admite uma das duas situações seguintes:

i) O sistema é possível e determinado, possuindo a solução trivial, ou nula,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  com solução única, se  $|\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}| \neq 0$ .

ii) O sistema é possível e indeterminado, se  $|\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ , tendo, neste caso, um conjunto infinito de soluções não nulas, sendo a solução nula uma das suas soluções particulares.

Uma vez que, por definição, os vectores próprios deverão ser as soluções não nulas de (83), então deverá verificar-se a condição

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (84)$$

O determinante anterior resulta numa equação polinomial, de grau 3, que é designado por polinómio característico de  $\mathbf{T}$ . As raízes reais do polinómio são os valores próprios de  $\mathbf{T}$ .

As equações (83) juntamente com a equação seguinte

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad (85)$$

permite obter os vectores próprios unitários associados a cada um dos valores próprios encontrados.

#### 4.17 Invariantes escalares principais de um tensor

O polinómio característico do tensor,  $\mathbf{T}$ , definido em (84),  $|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$  é uma equação cúbica em  $\lambda$ , que pode ser escrito como

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (86)$$

onde:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} = \text{tr } \mathbf{T}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)]$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det[\mathbf{T}]$$

Dado que, os valores próprios de  $\mathbf{T}$  não dependem da base de vectores considerada, os coeficientes da equação (86) não dependem da escolha da base, sendo chamados invariantes escalares principais de  $\mathbf{T}$ . Note-se que, em termos de valores próprios de  $\mathbf{T}$ , que são as raízes da equação (86), os invariantes tomam a forma mais simples:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

## 1.3 Referências

- [1] <http://bebes.clix.pt/biblioteca/noticia.asp?IDNoticia=510>.
- [2] LUSA - Agência de Notícias de Portugal, S.A., 2007.
- [3] H.F. Schuknecht, “*Pathology of the ear*”, second edition Lea and Febiger, 1993.
- [4] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, P.A.L.S. Martins, E. Almeida, “Estudo Biomecânico do ouvido médio considerando a perfuração da membrana” 2º *Encontro Nacional de Biomecânica, H.Rodrigues et al. (Eds)*, CD-Rom e Livro de artigos, pp. 51-56, Évora, Portugal, 8 e 9 de Fevereiro de 2007.
- [5] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, P.A.L.S. Martins, E. Almeida, “Estudo sobre o efeito da perfuração da membrana timpânica no comportamento dinâmico do ouvido médio” *Congresso de Métodos Numéricos e Computacionais em Engenharia, CMNE/CILAMCE 2007*, CD-Rom e Livro de artigos, pp. 62, Lisboa, Portugal, 13 a 15 de Junho de 2007.
- [6] N.F. Rilo, M.F. Paulino, R.A.C.P. Leal, Mechanical behaviour of a human middle ear with a titanium total prosthesis reconstruction, *Proceedings of II International Conference on Computational Bioengineering, ICCB2005, H Rodrigues, M Cerrolaza, M Doblaré, J Ambrósio, M Viceconti (Eds)*, pp. 141-152, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 14 - 16 de Setembro de 2005.
- [7] T. Belytschko, L. Moran, “*Nonlinear Finite Element for Continua and Structures*”, John Wiley and Sons, Ltd, 2001.
- [8] W.R.J. Funnell, C.A. Laszlo, “Modeling of the cat eardrum as a thin shell using the finite element method”, *J Acoust Soc Am*, 63, pp. 1461-1467, 1978.
- [9] W.R.J. Funnell, W.F. Decraemer, S.M. Khanna, “On the damped frequency response of a finite-element model of the cat eardrum”, *J Acoust Soc Am*, 81, pp. 1851-1859, 1987.
- [10] H.M. Ladak, W. Funnell, “Finite element modelling of the normal and surgically repaired cat middle ear”, *J Acoust Soc Am* 100, pp. 933-944, 1996.
- [11] H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi, “Analysis of dynamic behaviour of human middle ear using a finite method”, *J Acoust Soc Am* 92, pp. 3157-3168, 1992.

- [12] H. Wada, T. Metoki, T. Kobayashi, “Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear.”, In: Hüttenbrink KB (ed) *Middle ear mechanics in research and otosurgery*. Department of Oto-Rhino-Laryngology, Dresden University of Technology, Dresden, pp. 76-80, 1996.
- [13] T. Koike, H. Wada, T. Kobayashi, “Modeling of the human middle ear using the finite-element method”, *J Acoust Soc Am* 111, pp. 1306-1317, 2002.
- [14] K.R. Williams, T.H.J. Lesser, “A finite element analysis of the natural frequencies of vibration of the human tympanic membrane”, *I. Br J. Audiol* 24, pp. 319-327, 1990.
- [15] K.R. Williams, A.W. Blayney, H.J. Rice, “Development of a finite element model of the middle ear”, *Rev Laryngol Otol Rhinol* 117, pp. 259-264, 1996.
- [16] H.J. Beer, M. Bornitz, J. Drescher, R. Schmidt, H.J. Hardtke, “Finite element modelling of the human eardrum and applications”, In: Hüttenbrink KB (ed) *Middle ear mechanics in research and otosurgery*. Department of Oto-Rhino-Laryngology, Dresden University of Technology, Dresden, Germany, pp. 40-47, 1996.
- [17] H.J. Beer, M. Bornitz, H.J. Hardtke, R. Schmidt, G. Hofmann, U. Vogel, T. Zahnert, K.B. Hüttenbrink, “Modelling of components of the human middle ear and simulation of their dynamic behaviour”, *Audiol Neurootol* 4, pp. 156-162, 1999.
- [18] P.J. Prendergast, P. Ferris, H.J. Rice, A.W. Blayney, “Vibro-acoustic modelling of the outer and middle ear using the finite element method, *Audiol & Neuro-Otology*, 4, pp. 185-191, 1999.
- [19] P. Ferris, P.J. Prendergast, “Middle-ear dynamics before and after ossicular replacement”, *J. Biomech* 33, pp. 581-590, 2000.
- [20] W.M. Lai, D. Rubin, E. Krempl, *Introduction to Continuum Mechanics, 3<sup>th</sup> ed.*, Pergamon Press, New York, 1993.
- [21] G.A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd, Austria, 2000.

## Capítulo 2

### *Anatomia e fisiologia do ouvido*

#### 2.1 Introdução

O ouvido humano é o órgão que nos permite perceber e interpretar ondas sonoras numa gama de frequências entre 16 Hz e 20 kHz e intensidades compreendidas entre 0 dB e 130 dB [1]. Este órgão, também responsável pelo nosso equilíbrio, possui uma particular sensibilidade para transformar as ondas sonoras em sinais eléctricos, transmitindo esta informação ao cérebro, através do nervo auditivo. O ouvido está localizado, na sua quase totalidade, no osso temporal.

O sistema auditivo divide-se em periférico e central. O sistema auditivo periférico é composto pelo ouvido externo, ouvido médio e ouvido interno. O sistema auditivo central é formado pelo nervo e córtex auditivo (Figura 2.1).

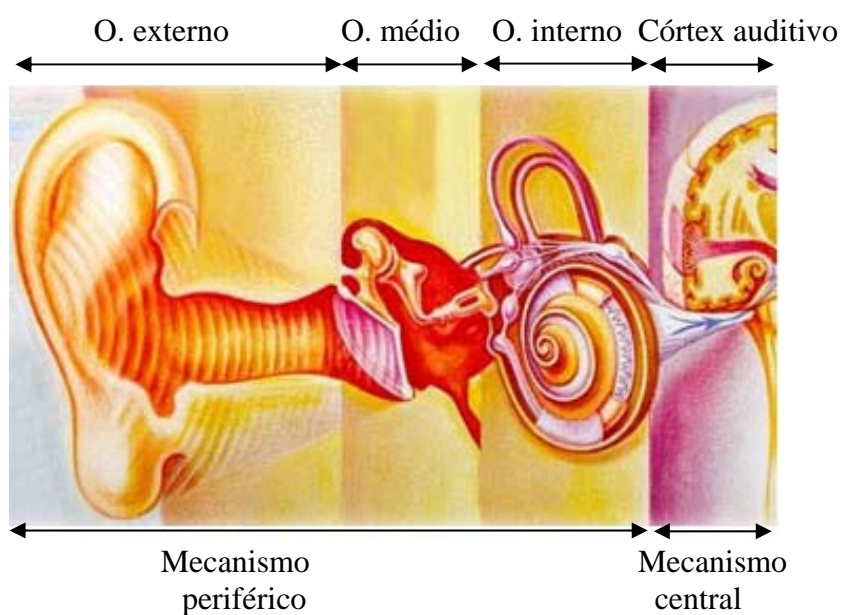


Figura 2.1: Esquema representativo do ouvido [2].

## 2.2 Ouvido externo

O ouvido externo é a parte do sistema auditivo que reconhece os sons e os dirige ao sistema tímpano-ossicular. É constituído pelo pavilhão auricular e pelo canal auditivo externo.

O pavilhão auricular (com exceção do lóbulo) é constituído por tecido fibrocartilagenoso, ligamentos e músculos. É o primeiro elo da complexa cadeia responsável pela transmissão de vibrações sonoras, do meio exterior para o cérebro (Figura 2.2).

Os ligamentos são de dois tipos: intrínsecos e extrínsecos [3]. Os intrínsecos têm todas as suas inserções nas eminências das cartilagens, preenchendo as incisuras cartilagenosas que mantêm a forma das pregas das cartilagens do pavilhão auricular. Os extrínsecos são dois (anterior e posterior) e unem o pavilhão auricular ao osso temporal. O anterior insere-se na frente, sobre a apófise zigomática e sobre a porção da aponevrose temporal, dirigindo-se para trás, fixando-se ao *tragus* e à apófise do hélix. O posterior, insere-se na base da apófise mastóidea, na convexidade da concha, e na parede superior do canal auditivo externo.

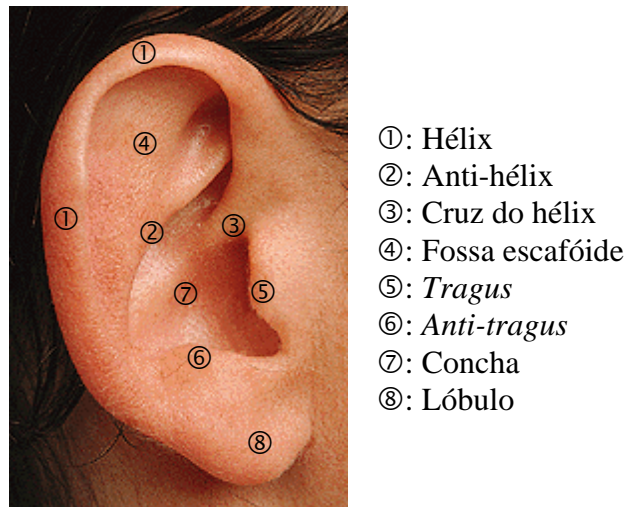


Figura 2.2: Pavilhão auricular direito [4].

Os músculos são muito rudimentares e a sua acção no homem é quase nula. Também se agrupam, como os ligamentos, em intrínsecos e extrínsecos (Figura 2.3). Os intrínsecos inserem-se entre as pregas da cartilagem, ou entre esta e a pele: músculo grande do hélix, músculo do *tragus*, músculo menor do hélix, músculo do *anti-tragus*, músculos transverso e oblíquo. Os músculos extrínsecos são três: anterior, superior e posterior.

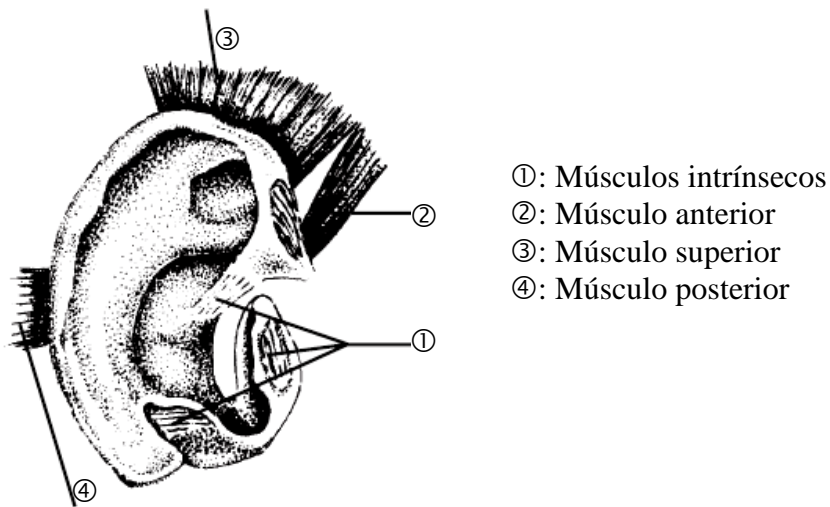


Figura 2.3: Músculos auriculares do pavilhão auricular [5].

O pavilhão auricular forma com a parede craniana um ângulo de 20° a 45°. Situa-se por baixo da região temporal, em frente à região mastóidea, por trás da articulação temporomandibular e da região parótido-massetérica e por cima da região da fossa retromaxilar, ou subauricular. As suas dimensões podem variar entre 6 a 7 cm de eixo vertical e de 3 a 4 cm de eixo horizontal. Aos sete anos de idade, as dimensões alcançadas podem ser consideradas definitivas. O pavilhão engloba a concha (4/5 superiores) e o lóbulo (1/5 inferior).

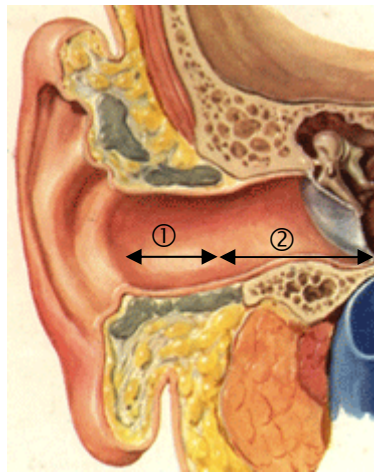
A região auricular (Figura 2.2) pode ser subdividida em:

- 1) Hélix: proeminência curvilínea que ocupa a parte anterior, superior e posterior do pavilhão, contornando externamente o pavilhão auricular.
- 2) Anti-hélix: preenche o espaço que separa a fossa escafóide da concha.
- 3) Cruz do hélix: terminação superior do hélix.
- 4) Fossa escafóide: depressão entre o hélix e o anti-hélix.
- 5) *Tragus*: de forma triangular, situa-se na parte anterior da concha. A base do *tragus* junta-se à parte cartilaginosa do canal auditivo externo.
- 6) *Anti-tragus*: proeminência oposta ao *tragus*, na região inferior do anti-hélix e ocupa a parte posterior e inferior da concha.
- 7) Concha: concavidade auricular entre o anti-hélix e o *anti-tragus*.
- 8) Lóbulo: formação de pele, flácida, sem tecido cartilaginoso, situado abaixo do *anti-tragus*. É muito variável na forma e nas suas dimensões.

O canal auditivo externo (Figura 2.4) tem como função conduzir as ondas sonoras ao ouvido médio. É fibrocartilaginoso no seu 1/3 externo e ósseo no resto da sua extensão interna. É revestido por uma capa epidérmica que é o prolongamento da pele do pavilhão auricular.

A porção óssea é composta por três partições de osso: temporal, mastóidea e timpânica.

O revestimento cutâneo prolonga a pele do pavilhão e continua com a camada externa da membrana timpânica. Está aderente às paredes, particularmente ao nível das suturas. Na porção externa, fibrocartilaginosa, a pele é grossa com algum tecido adiposo e pode apresentar pelos. A derme contém glândulas sebáceas e o tecido subcutâneo contém glândulas ceruminosas. Estas glândulas produzem cerúmen, evitando, assim, a entrada de corpos estranhos e protegendo o seu epitélio de macerações pela retenção de água. Têm o seu máximo desenvolvimento na puberdade, atrofiando-se com a idade. Na parede óssea a pele é lisa, seca, intimamente aderente ao periósseo tornando-se mais delgada à medida que se aproxima da membrana timpânica. O trajecto do canal auditivo externo, no plano horizontal, é sinuoso, em forma de “S”, oblíquo de cima para baixo e de fora para dentro, sendo a parede inferior a mais longa. Mede aproximadamente 24 mm de comprimento, sendo 8 mm na sua parte fibrocartilaginosa e 16 mm na sua porção óssea.



- ①: Parte fibrocartilaginosa
- ②: Parte óssea

Figura 2.4: Canal auditivo externo [6].

Segundo Tröltzsch [7], os comprimentos (em mm) das quatro paredes do canal auditivo externo são apresentadas na Tabela 2.1.

O calibre do canal é muito variável. Diminui progressivamente, de fora para dentro, até à união dos 3/4 externos com o 1/4 interno. A partir deste ponto, chamado istmo do canal auditivo

externo, o canal aumenta novamente até à membrana timpânica. O diâmetro maior varia entre 8 e 10 mm e o menor, entre 5 e 6 mm. O canal auditivo externo termina na membrana timpânica, que separa o ouvido externo do ouvido médio.

<b>Parede</b>	<b>Porção cartilaginosa</b>	<b>Porção óssea</b>	<b>Canal auditivo</b>
Inferior	9	18	27
Anterior	10	16	26
Posterior	7	15	22
Superior	7	14	21

Tabela 2.1: Comprimentos (mm) das quatro paredes do canal auditivo externo.

As relações do canal auditivo externo com as suas paredes são as seguintes:

A parede anterior relaciona-se, anatomicamente, com a articulação temporomandibular. A parede posterior, correspondendo ao bordo anterior da apófise da mastóide, relaciona-se com a metade inferior do canal de Falópio. A espessura do osso que separa o nervo facial do ângulo postero-inferior do canal ósseo, na sua porção mais interna, tem entre 3 e 4 mm. A parede superior relaciona-se topograficamente com a fossa cerebral média. Por fora, no seu segmento condro-membranoso, relaciona-se com a região temporal subjacente e por dentro com a fossa craneal média. Entre as duas regiões há cavidades pneumáticas, sobretudo na sua parte mais interna. A parede inferior relaciona-se com a glândula parótida, cuja cápsula adere ao pericôndrio. A parte mais interna ou profunda desta parede desce bastante, formando com a membrana timpânica uma depressão chamada seio pré-timpânico.

### **2.2.1 Vascularização e enervação**

A vascularização do pavilhão auricular é muito abundante. Está distribuída em duas redes: anterior e posterior, ambas procedentes da carótida externa. A rede anterior vem da artéria temporal superficial e bifurca-se em três ramos, que são as artérias auriculares anteriores: a superior para o hélix, a média para a raiz do hélix e a inferior para o *tragus* e para o lóbulo. A rede posterior é mais importante e vem do ramo terminal anterior da artéria auricular posterior (terminal da carótida externa) que se ramifica por toda a face interna do pavilhão auricular. Alguns ramos chegam à face externa, contornando o hélix. Existem anastomoses entre a rede

anterior e a rede posterior.

A porção cartilaginosa do canal auditivo externo é irrigada por ramos da auricular posterior, da temporal superficial e por alguns ramos parotídeos. A porção óssea é vascularizada por ramos da artéria estilomastóidea e da artéria timpânica anterior ou auricular profunda. Estes ramos chegam até à pele através do osso timpânico e das incisuras.

O sistema venoso segue um percurso paralelo ao arterial, reunindo-se num sistema anterior e noutro posterior. As redes venosas surgem à frente da veia temporal superficial, por trás das veias auriculares posteriores e da veia mastóidea e por baixo fazem-no directamente na jugular externa, que é o principal colector venoso.

O sistema linfático nasce de uma rede linfática que se divide em interna e externa. Os vasos linfáticos superiores da rede interna percorrem a metade superior da face interna, terminando nos gânglios mastóideos, perto da inserção do músculo esternocleidomastóideo. Os vasos linfáticos inferiores da face interna vêm da metade inferior e por consequência do lóbulo, drenam, em grande parte, para os gânglios parotídeos posteriores. Outra parte é drenada para os gânglios cervicais, que se encontram por baixo do esternocleidomastóideo. Os vasos linfáticos da rede externa orientam-se em três direcções: anterior, posterior e inferior. Os vasos anteriores têm a sua origem na concha e drenam para o gânglio pré-auricular (situado em frente ao *tragus*). Os vasos posteriores nascem nas partes do pavilhão situadas acima e atrás da concha e dirigem-se para os gânglios mastóideos. Os vasos inferiores provêm do lóbulo, terminando nos gânglios parotídeos posteriores.

O ouvido externo tem enervação motora e sensitiva. Os nervos motores, ramos do nervo facial destinados aos músculos intrínsecos, são o nervo auricular posterior e ramos temporais procedentes do ramo temporo-facial. O nervo auricular posterior nasce por baixo do buraco estilomastóideo, contorna pela frente o ventre posterior do músculo digástrico e o bordo anterior da apófise mastóidea, enervando o músculo auricular posterior e auricular superior e os músculos da face interna do pavilhão auricular. Os ramos temporais do ramo temporo-facial enervam os músculos da face externa do pavilhão auricular.

A enervação sensitiva é mais complexa e tem uma origem múltipla. O ramo aurículo-temporal do nervo trigémeo dá sensibilidade ao *tragus* e à porção ascendente do hélix. O plexo cervical superficial, através do seu ramo auricular, dá sensibilidade à maior parte do hélix, da região pré-

hélix, *anti-tragus*, todo o lóbulo e à face interna do pavilhão.

O ramo sensitivo do nervo facial sai do tronco do nervo ao nível do buraco estilomastóideo, contorna o bordo anterior da apófise mastóidea por baixo do canal auditivo externo e entra na parede posterior do canal. As fibras deste ramo sensitivo enervam a chamada área de Ramsey-Hunt, que compreende a concha e as zonas vizinhas do *tragus*, do *anti-tragus* e do hélix, assim como o canal auditivo externo e a membrana timpânica.

O nervo vago pelo seu ramo anastomótico que vem do gânglio jugular, através da fossa jugular, atinge o canal auditivo externo. Na junção osteo-cartilaginosa do canal penetra um ramo do nervo aurículo-temporal, que é o ramo sensitivo para o canal. Através deste ramo, o facial transporta fibras do nervo intermédio de wrisberg e do vago.

## **2.3 Ouvido médio**

A energia sonora é captada pelo pavilhão auricular, conduzida pelo canal auditivo externo até à membrana timpânica, onde é transformada em energia mecânica, que por sua vez, é comunicada aos ossículos do ouvido médio.

O ouvido médio é uma cavidade, de forma cúbica, conhecida por caixa do tímpano, repleta de ar. É constituído pela cadeia ossicular, seis ligamentos, dois músculos e respectivos tendões e uma porção do nervo facial.

No que concerne às dimensões da caixa timpânica verifica-se que, tanto o diâmetro antero-posterior, como o diâmetro vertical, têm 15 mm; o diâmetro transversal varia segundo o ponto onde é considerado, medindo cerca de 4 mm na sua parte mais baixa, 5 a 6 mm na sua porção mais alta e 1,5 a 2 mm no centro da caixa.

A caixa timpânica está situada na porção anterior do segmento petroso do osso temporal, imediatamente à frente do processo mastóideo. Separa-se do exterior pela membrana timpânica e comunica com a rinofaringe pela trompa de Eustáquio.

### **2.3.1 Paredes da caixa timpânica**

As paredes da caixa timpânica são revestidas por uma mucosa muito delgada, aderente ao osso subjacente. É constituída por epitélio e por uma camada de tecido conjuntivo.

O epitélio é formado por três tipos celulares: células ciliadas de tipo respiratório, células mucíparas produtoras de muco que em casos patológicos provocam a otite média com efusão seromucosa e células com microvilosidades. Na parte anterior da caixa, o epitélio é cilíndrico, estratificado, rico em células secretoras e ciliadas. Na parte posterior da caixa o epitélio é uniestratificado com algumas células ciliadas e poucas células secretoras. Na região antro-ático-mastóidea, o epitélio é formado por uma camada de células planas e algumas células ciliadas.

A camada conjuntiva é de espessura variável, segundo a sua topografia e idade. Nesta camada circulam vasos e nervos.

A região central da caixa timpânica denomina-se átrio e do ponto de vista descritivo, está limitada por seis paredes: externa, interna, superior, inferior, posterior e anterior.

### 2.3.1.1 Parede externa

A parede externa, também denominada timpânica, que separa o ouvido externo do ouvido médio, é composta por uma porção óssea (2/5) e uma porção membranosa (3/5).

A parte superior da porção óssea tem 5 a 6 mm de altura e recebe o nome de recesso epitimpânico (ático). Está ao nível da cabeça do martelo e corpo da bigorna. A parte anterior e posterior da porção óssea tem 2 mm. A parte inferior, o recesso hipotimpânico, é a mais reduzida, medindo entre 1 e 1,5 mm de altura.

A porção membranosa, conhecida por membrana timpânica, tem um diâmetro que varia entre 9,5 mm e 10,5 mm, tendo uma área de aproximadamente 85 mm<sup>2</sup>, ainda que só 55 mm<sup>2</sup> tenham mobilidade (uma vez que a periferia é rígida). A sua orientação é quase horizontal durante a vida embrionária, verticalizando com o desenvolvimento do crânio. A sua inclinação com o plano horizontal varia de acordo com a idade, sendo de 30° a 35° à nascença e de 40° a 45° no adulto. No recém-nascido, o canal auditivo externo é muito oblíquo para baixo e para dentro, já que quase não existe porção óssea. Esta inclinação do canal faz com que a membrana timpânica se encontre num plano quase horizontal [7].

A membrana timpânica (Figura 2.5) tem uma forma aproximadamente circular, embora côncava, em funil, no local onde termina o canal auditivo externo. A parte mais saliente tem o nome de umbo, situado um pouco abaixo do centro da membrana timpânica, correspondendo à extremidade do cabo do martelo. Abaixo do umbo encontra-se o triângulo luminoso, com uma direcção oblíqua para baixo e para a frente. A direcção deste triângulo faz um ângulo de cerca de 110° com o cabo do martelo. O seu aspecto e inclinação variam muito de pessoa para pessoa.

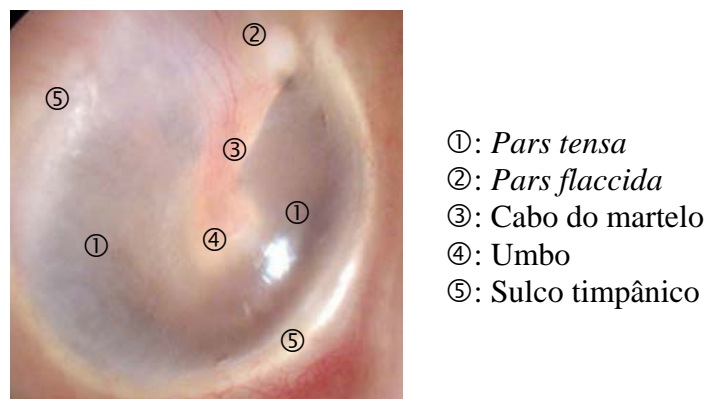


Figura 2.5: Membrana timpânica [8].

A membrana timpânica é formada por três camadas de tecido: externa, intermédia e interna.

A camada externa é fina e cutânea e está ligada à camada que reveste o canal auditivo externo.

A camada intermédia é fibrosa e é a principal responsável pela sua mobilidade. Compreende fibras radiais, circulares, fascículos parabólicos e fibras do sistema semilunar [3].

As fibras radiais (externas) vão desde o bordo anular até ao cabo do martelo e permitem o movimento de rotação do cabo do martelo em torno do seu eixo. As fibras circulares (internas) formam anéis concêntricos ao umbo, estando inseridos no cabo do martelo e passando por dentro dele. Os fascículos parabólicos (anterior e posterior) nascem da apófise curta do martelo, irradiando desde a apófise para a parte anterior e posterior da membrana, até ao ligamento anular e a maior parte destas fibras alcançam o lado oposto à sua origem, cruzando-se entre si. As fibras do sistema semilunar descrevem arcos côncavos e convexos desde a periferia da membrana até ao umbo. O conjunto destas fibras dá à membrana um certo grau de rigidez, bem como a possibilidade de se deformar sem modificar as suas características acústicas essenciais.

A camada interna é mucosa e contínua com o revestimento do ouvido médio.

A membrana timpânica é constituída por duas regiões: *pars tensa* e *pars flaccida* (Figura 2.6).

A *pars tensa*, localizada na parte inferior, é composta pelas três camadas anteriormente referidas.

É uma membrana fibrosa, elástica, espessa, resistente e pouco móvel. É a membrana timpânica propriamente dita. Não é completamente plana, tendo uma deflexão de cerca de 2 mm até ao umbo, com direcção para o promontório. As suas dimensões [7] são descritas na Tabela 2.2.

Altura	Largura	Espessura	Superfície
10 mm	9 mm	0,1 mm	65 mm <sup>2</sup>

Tabela 2.2: Dimensões médias da membrana timpânica.

No recém-nascido, as dimensões são aproximadas às do adulto, uma vez que o desenvolvimento timpânico já está terminado. A *pars tensa* é suprida por poucos nervos sensitivos, ao contrário da *pars flaccida* que é ricamente enervada.

A *pars flaccida*, localizada na parte superior, também denominada membrana flácida de Shrapnell, tem muito poucas fibras, daí a flacidez dessa zona, composta apenas pelas camadas cutânea e mucosa. Tem uma forma triangular cujo vértice inferior corresponde à apófise externa do martelo. Está numa posição quase vertical e a sua altura atinge cerca de 2 a 3 mm. É proeminente na sua face externa e faz uma depressão na sua face interna denominada bolsa de

Prussak.

Topograficamente pode dividir-se a membrana timpânica em seis quadrantes, sendo quatro referentes à *pars tensa*: postero-superior, postero-inferior, antero-superior e antero-inferior, e dois referentes à *pars flaccida* (Figura 2.6).

A membrana timpânica insere-se no sulco timpânico, embora na sua parte superior exista uma perda de substância (cerca de 5 mm), a que se chama nó de Rivinus.

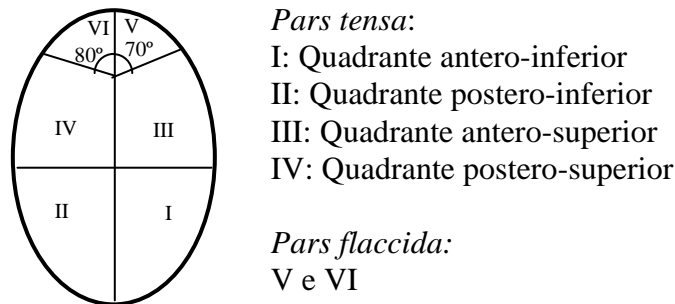


Figura 2.6: Divisão topográfica da membrana timpânica [9].

### 2.3.1.2 Parede interna

A parede interna, ou labiríntica, de estrutura petrosa, separa o ouvido médio do ouvido interno. Dela constam o promontório, a janela oval, janela redonda, o seio timpânico, a pirâmide e o canal do músculo do martelo.

O promontório é uma saliência com cerca de 6 mm de largura e 5 mm de altura [7]. Na parte inferior do promontório, perto da parede inferior da caixa, encontra-se o orifício superior do canal de Jacobson, por onde passa o nervo de Jacobson.

Um pouco acima e para trás do promontório, existe uma área alongada no sentido transversal, chamada janela oval. O seu diâmetro maior, dirigido de trás para a frente e de baixo para cima, mede entre 3 e 3,5 mm. O diâmetro menor varia entre 1 e 1,5 mm. A janela oval ocupa o fundo duma depressão, conhecida por fossa da janela oval. Esta janela faz a comunicação do ouvido médio com o vestíbulo do ouvido interno através da base do estribo.

Na parte postero-inferior do promontório, abaixo da janela oval, encontra-se outra área circular, mais pequena, chamada janela redonda. Ela corresponde à extremidade inferior da rampa timpânica da cóclea e é fechada por uma fina membrana um pouco côncava do lado da caixa (tímpano secundário). O seu diâmetro varia entre 1,5 e 2 mm. Histologicamente esta membrana é

semelhante à membrana timpânica, sendo também composta por três camadas: uma camada média formada por fibras conjuntivas, uma camada externa mucosa e uma camada interna, banhada pela perilinfa e que é constituída por uma formação endotelial.

Como a janela oval, também a janela redonda se abre numa depressão chamada fossa da janela redonda. Entre a fossa da janela oval e a fossa da janela redonda existe uma terceira fossa, o seio timpânico, imediatamente atrás do promontório. Tem uma forma circular de aproximadamente 4 mm de diâmetro e 3 mm de profundidade. Corresponde, do lado do ouvido interno, à extremidade ampolar do canal semicircular posterior.

Imediatamente atrás do seio timpânico, mas sobre um plano mais externo, encontra-se uma pequena saliência óssea, que pela sua forma toma o nome de pirâmide. A sua altura, muito variável, de indivíduo para indivíduo, mede entre 1 e 1,5 mm [7]. Na extremidade da pirâmide abre-se um canal, por onde passa o músculo estapediano. O orifício circular, que termina na parte superior, dá passagem ao tendão deste músculo. Este canal situa-se à frente do canal de Falópio, apenas separado por uma fina camada óssea. Estes canais comunicam-se por um ou dois orifícios, em forma de fendas, permitindo a passagem do nervo e das veias do músculo estapediano.

Na parte antero-superior da parede interna existe ainda o canal do músculo tensor do tímpano, que começa no ângulo que forma o bordo anterior do rochedo com o lobo temporal. Daí dirige-se obliquamente para fora, para trás e um pouco para cima, seguindo exactamente o mesmo trajecto da trompa de Eustáquio, que está situada ligeiramente abaixo dele. Este canal entra na caixa timpânica, passa por cima do promontório e chega à parte anterior da janela oval. Aí inflecte sobre si mesmo para se colocar transversalmente de dentro para fora, terminando num pequeno orifício pelo qual sai o tendão do músculo tensor do tímpano. O canal deste músculo divide-se em duas porções: uma porção reflectida, com cerca de 1 mm de comprimento, inteiramente na caixa timpânica e outra, porção directa, em que 5 mm se situam dentro da caixa timpânica e 8 a 10 mm na caixa extra-timpânica. A extremidade timpânica do canal do músculo tensor do tímpano é conhecida por bico de colher. Os dois músculos do ouvido médio ocupam na maior parte da sua extensão, o interior dum canal ósseo, abrindo-se os dois canais ósseos junto dos seus tendões, na parte superior da caixa: o canal do músculo estapediano ao nível da extremidade posterior da janela oval e o canal do músculo tensor do tímpano, ao nível da extremidade

anterior desta mesma janela. Cada um destes dois canais formam um cotovelo na sua extremidade timpânica, modificando assim a direcção inicial dos músculos neles contidos, tendo por consequência uma função de roldana de reflexão.

### **2.3.1.3 Parede superior**

A parede superior ou tecto da caixa timpânica (*tegmen tympani*), de estrutura petroescamosa, corresponde ao bordo superior e à face anterior do rochedo. A sua largura, no sentido transversal varia entre 5 e 6 mm. A parede é formada por uma fina lâmina óssea, por vezes mesmo transparente, que separa, a este nível, o ouvido médio da cavidade craniana. Esta lâmina é constituída, por dentro, pelo rochedo e, por fora, pela escama temporal. A sutura que resulta da união destas duas porções do temporal, sutura petro-escamosa, é uma verdadeira fissura, através da qual passam os tractos conjuntivos e um certo número de vasos da dura-mater craniana para a mucosa da caixa timpânica. Embora a fissura desapareça no adulto, as conexões vasculares, pela finura da separação óssea, favorecem o atingimento das meninges e cérebro a partir de possíveis lesões do ouvido médio [7].

### **2.3.1.4 Parede inferior**

A parede inferior, também denominada parede hipotimpânica, é um pouco mais estreita que a superior, medindo cerca de 4 mm de largura. A sua estrutura é tímpano-petrosa e forma um sulco na direcção antero-posterior, limitada, por dentro, pelo promontório e por fora por um rebordo ósseo, sobre o qual se insere a membrana timpânica. A espessura desta parede é muito variável, podendo ser formada por duas lâminas de tecido compacto, com uma de tecido esponjoso entre elas, ou pode estar reduzida a uma simples camada de tecido compacto, fino e transparente. Abaixo dela encontra-se a fossa jugular e o golfo da veia jugular. A sua parte central é a mais inclinada e forma o recesso hipotimpânico.

### **2.3.1.5 Parede posterior**

Também conhecida por parede mastóidea, é a mais alta das quatro paredes que delimitam o perímetro sagital da caixa. Tem cerca de 13 mm. A sua estrutura é essencialmente petrosa, e tímpano-escamosa por fora.

Percorrendo a parede posterior de cima para baixo, encontra-se sucessivamente:

1º - *Aditus ad antrum*, larga abertura que conduz às cavidades mastóideas, preenchidas por ar, podendo ter uma forma arredondada, oval ou triangular, sendo esta última a mais frequente.

2º - Uma pequena incisura em forma de sela, no ângulo inferior do orifício de entrada das cavidades mastóideas, na qual se encontra a apófise curta da bigorna.

3º - O orifício de entrada da corda do tímpano, um pouco mais abaixo, entre a base da pirâmide que está por dentro, e a extremidade postero-superior do sulco timpânico, que está por fora, pelo qual este ramo do nervo facial entra na caixa timpânica (canal de Huguier).

4º - A protuberância estiloide da caixa um pouco mais abaixo, uma eminência arredondada.

### 2.3.1.6 Parede anterior

Esta parede, de estrutura tímpano-petrosa, também conhecida por parede tubar, pela sua relação com a trompa de Eustáquio, é ocupada em grande parte pelo orifício timpânico da trompa, situado na sua parte mais elevada. O comprimento total da trompa varia entre 35 e 45 mm, sendo 2/3 de porção fibrocartilaginosa e 1/3 de porção óssea. O seu calibre varia de acordo com três regiões (Tabela 2.3).

	Altura (mm)	Largura (mm)
Orifício timpânico	5	3
Istmo da trompa	2	1
Orifício faríngeo	8	5

Tabela 2.3: Calibre da trompa de Eustáquio.

A trompa de Eustáquio é composta por duas porções: uma externa, óssea, que se cruza na parte inferior do temporal, que é regular, lisa e coberta em toda a sua extensão pelo periósseo e outra interna, membranosa, fibrocartilaginosa, de forma triangular, em que o vértice se fixa à extremidade interna da porção óssea da trompa e cuja base, completamente livre, faz uma saliência sobre a face lateral da faringe.

A cartilagem da trompa é muito fina ao nível da sua inserção óssea, não apresentando mais do que 1 mm de espessura. À medida que se aproxima da faringe aumenta a sua espessura, atingindo 2 mm na sua parte média e 3 mm na sua extremidade interna [7].

A trompa de Eustáquio dirige-se obliquamente de trás para a frente, do ouvido para a nasofaringe, de fora para dentro e de cima para baixo, sendo no adulto mais longa, mais

inclinada e mais estreita que na criança (Figura 2.7). Apresenta uma inclinação no adulto de 45°, em relação ao plano horizontal, enquanto que na criança essa inclinação é de 10°, facilitando a entrada de secreções no ouvido médio [10]. Daí que a função de protecção seja menos eficaz nas crianças.

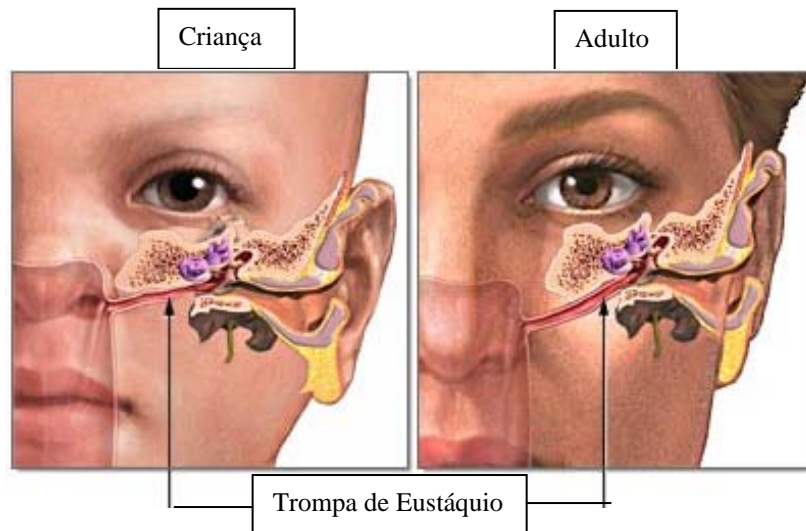


Figura 2.7: Comparação da direcção da trompa de Eustáquio entre a criança e o adulto [11].

No que concerne às relações do orifício timpânico da trompa de Eustáquio, verifica-se que se situa acima do canal do músculo tensor do tímpano, para dentro relaciona-se com a parte anterior do promontório e para fora responde à parte antero-superior da membrana timpânica. No ponto onde o ângulo superior e externo do orifício da trompa de Eustáquio faz contacto com o sulco timpânico, encontra-se uma pequena abertura em forma de fenda que é a extremidade externa da incisura de *Glasser*, através da qual passa o ligamento anterior do martelo e a artéria timpânica. Um pouco abaixo deste orifício existe um outro orifício por onde sai a corda do tímpano.

A trompa de Eustáquio estabelece uma comunicação directa entre a caixa timpânica e a faringe, tendo uma dupla função: permitir a passagem de mucosidades segregadas pela mucosa timpânica e manter o equilíbrio de pressões entre o ar retido na caixa timpânica e o ar livre do canal auditivo externo, condições necessárias para o bom funcionamento da membrana timpânica.

A trompa de Eustáquio tem três funções principais: a protecção do ouvido médio de agressões bacterianas, ventilação e drenagem do ouvido médio.

### 2.3.2 Cadeia ossicular

A cadeia ossicular (Figura 2.8) é formada por três ossículos: martelo, bigorna e estribo. Estes ossículos estão unidos entre si por articulações. O conjunto da cadeia ossicular está coberta por mucosa e forma um conjunto ósseo que atravessa a caixa timpânica desde a membrana timpânica até à janela oval.

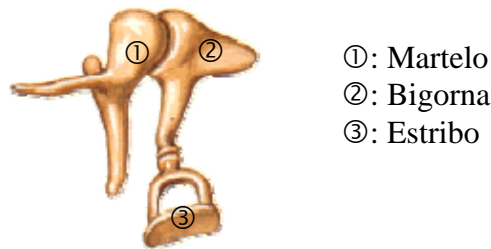


Figura 2.8: Cadeia ossicular [6].

#### 2.3.2.1 Martelo

O martelo (Figura 2.9) é o mais longo dos três ossículos, medindo entre 7,6 mm e 9,1 mm e pesando cerca de 22 a 24 mg [7]. Está inserido na camada intermédia da membrana timpânica e divide-se anatomicamente em cabeça, colo, cabo e duas apófises (externa e anterior).

A cabeça corresponde à extremidade superior do osso e está situada um pouco acima da membrana timpânica, na cavidade superior da caixa timpânica, o ático. Ela é irregularmente arredondada, ovóide, lisa e convexa por quase toda a sua superfície. Na sua parte postero-interna existe uma superfície que se articula com o corpo da bigorna. Esta superfície articular tem uma forma elíptica, com o eixo maior oblíquo dirigido para baixo e para dentro.

O colo é uma parte que se torna mais estreita, a seguir à cabeça, achatado da frente para trás e ligeiramente torcido sobre o seu eixo. A sua parte externa relaciona-se com a parte superior da membrana timpânica, ou, mais concretamente, a *pars flaccida*. A sua parte interna cruza em ângulo recto com a corda do tímpano. Neste movimento descendente, o cabo do martelo segue-se ao colo, dirigindo-se para baixo e um pouco para trás, até ao umbo, terminando numa extremidade alargada em forma de disco. A sua forma é achatada de frente para trás, apresentando duas faces (anterior e posterior) e duas arestas (externa e interna). O cabo do

martelo não está situado exactamente no prolongamento do eixo da cabeça e do colo, mas forma com este último um ângulo obtuso, cuja abertura está voltada para cima e para dentro.

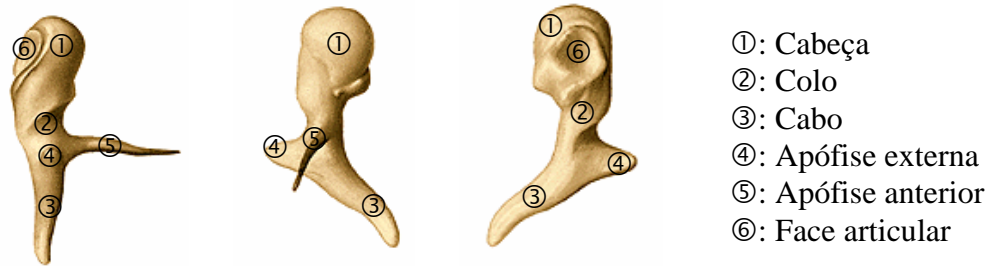


Figura 2.9: Martelo do ouvido direito, respectivamente com vistas lateral, ventral e dorsal [4].

Na região do cabo, próximo ao colo, insere-se o tendão do músculo tensor do tímpano, ou músculo do martelo. O cabo do martelo está fixo à parte superior da membrana timpânica, puxando-a para dentro. A fixação do martelo à membrana timpânica é mais forte no meio da membrana, separando-se gradualmente para a parte superior.

A apófise externa (curta e grossa) tem a forma de uma pequena eminência cônica, com apenas 1 mm. Ela nasce sobre a parte inferior e externa do colo e dirige-se para fora e um pouco para cima, para a porção superior da membrana timpânica, em direcção ao canal auditivo externo. A apófise anterior (longa), também conhecida como apófise de *Raw*, tem cerca de 4 a 5 mm e uma forma de pico, achatado, curvilíneo ou mesmo ligeiramente sinuoso. Ela nasce no colo, na sua parte anterior e média, dirigindo-se para a frente e cruzando obliquamente a parte antero-superior do osso timpanal, ao nível do sulco maleolar. Insere-se na parte mais externa da incisura de Glasser. Sobre ela, ao nível da sua base, fixa-se o ligamento anterior do martelo.

### 2.3.2.2 Bigorna

A bigorna (Figura 2.10), segundo ossículo da cadeia ossicular, está situada atrás e para dentro do martelo. É o mais pesado dos três ossículos, com um peso um pouco superior ao do martelo, tendo em média 25 mg [7]. A bigorna é constituída por um corpo e três apófises.

O corpo da bigorna, assim como a cabeça do martelo, ocupa a parte superior da caixa timpânica. Tem a forma de um cubo, sendo achatada no sentido transversal. Apresenta duas faces: uma externa, quase plana, que corresponde à parede externa da caixa e uma face interna, ligeiramente deprimida no seu centro, que se relaciona com a mucosa. As apófises (curta e longa) da bigorna

separam-se do corpo na sua parte postero-inferior, fazendo entre elas um ângulo que varia entre 85° e 90°, com abertura para trás e para baixo.



Figura 2.10: Bigorna do ouvido direito, com vistas lateral e medial, respectivamente [4].

A apófise curta (superior ou horizontal) com cerca de 5 mm, tem uma forma triangular e dirige-se horizontalmente para trás, até à parede posterior da caixa. Na sua extremidade posterior está suspenso o ligamento posterior da bigorna, que se apoia no ângulo inferior da entrada do *aditus* ao nível da fossa *incudis*. A apófise longa (inferior ou vertical), com cerca de 7 mm, dirige-se do corpo da bigorna para baixo seguindo um trajecto quase paralelo ao cabo do martelo. Depois inflecte para dentro para se tornar horizontal e termina na apófise lenticular, que se articula com a cabeça do estribo.

### 2.3.2.3 Estribo

O estribo (Figura 2.11) é o osso mais pequeno do corpo humano, pesando apenas cerca de 2 mg [7] tendo, no entanto, extrema importância na fisiologia da audição. Está situado no *atrium* da caixa, mesmo por baixo do canal de Falópio, antes da sua segunda curva, por dentro da bigorna, num plano horizontal entre a apófise lenticular e a janela oval. Anatomicamente divide-se em cabeça, colo, cruras e platina.

A cabeça de forma cilíndrica-discoide é achatada de cima para baixo. A sua extremidade externa apresenta uma pequena faceta articular côncava, que se articula com a apófise lenticular da bigorna. A sua extremidade interna liga-se às duas cruras. O colo, estreitamente circular, une a cabeça às cruras; na sua parte posterior insere-se o tendão do músculo estapediano. As duas cruras do estribo, posterior e anterior, encontram-se perto das extremidades da face externa da base do estribo, dirigindo-se para fora, em direcção à cabeça do estribo, descrevendo uma curva, cuja concavidade está voltada para o centro do estribo. Nota-se que a crura posterior é geralmente mais curva e mais longa que a anterior. As duas cruras formam no seu conjunto um

semicírculo, com cerca de 2 mm, normalmente designado por *ansa do estribo*. A distância platina - apófise lenticular é cerca de 4,5 mm.

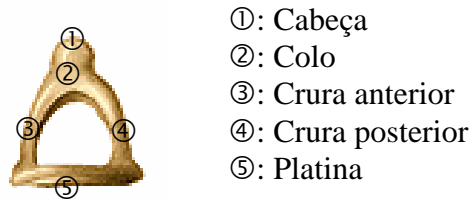


Figura 2.11: Estribo do ouvido direito, com vista superior [4].

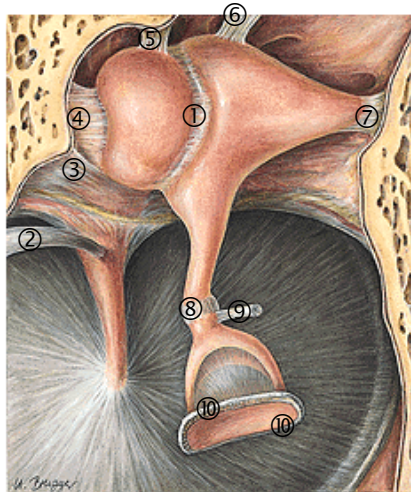
A platina do estribo é uma pequena placa óssea irregular e oval, que se insere na janela oval, com uma extremidade posterior arredondada e uma extremidade anterior pontiaguda, tendo um bordo superior convexo e um bordo inferior rectilíneo ou ligeiramente côncavo. A platina possui duas faces, sendo a interna, ou vestibular, um pouco convexa e separada do líquido do labirinto pelo periósseo do vestíbulo e a externa, côncava, voltada para a caixa timpânica é, geralmente dividida por uma crista oblíqua, formando duas pequenas fossas secundárias. O seu diâmetro maior tem 3 mm e o menor 1,5 mm, com superfície de 3,2 mm<sup>2</sup>. A sua espessura é de 220 µm na frente e 420 µm atrás [7]. Tem uma cobertura profunda cartilaginosa, rodeada por dentro pelo endósteo da cápsula ótica. Por cima existe uma cobertura externa, óssea, de muco-periósseo. Constitui, pois, um fragmento ósseo totalmente desconectado do resto da cápsula ótica, que está unido à janela oval pelo ligamento anular. Este ligamento vem duma diferenciação da cápsula ótica à volta da platina. Tem uma estrutura fibrosa, muito sólida, sendo fixo à volta do contorno cartilaginoso da platina e do contorno cartilaginoso da janela oval. Na sua face vestibular une-se ao tecido conjuntivo da entrada da fissura *antefenestram*. É mais largo à frente que atrás, o que explica a maior mobilidade da platina para a frente.

### 2.3.3 Ligação dos ossículos

Os ossículos do ouvido médio unem-se entre si por articulações revestidas por cartilagens, que evitam ruídos de funcionamento, amortecendo eventuais efeitos de ressonância.

Por outro lado, unem-se às diferentes paredes da caixa timpânica, por ligamentos, de tal forma que o martelo e a bigorna, juntos, funcionam como uma alavanca simples, cujo fulcro se localiza, aproximadamente, nas bordas da membrana timpânica (Figura 2.12). A cabeça do martelo,

situada no lado oposto ao fulcro do cabo, equilibra, quase exactamente, a outra extremidade da alavanca. A articulação da bigorna com o estribo faz com que a base do estribo, em contacto com a janela oval, empurre o líquido coclear sempre que o cabo do martelo se move para dentro e puxe o mesmo líquido todas as vezes que o martelo se move para fora.



- ①: Articulação incudomaleolar
- ②: Músculo tensor do tímpano
- ③: Ligamento anterior do martelo
- ④: Ligamento lateral do martelo
- ⑤: Ligamento superior do martelo
- ⑥: Ligamento superior da bigorna
- ⑦: Ligamento posterior da bigorna
- ⑧: Articulação incudoestapediana
- ⑨: Músculo estapediano
- ⑩: Ligamento anular

Figura 2.12: Ligações da cadeia ossicular [4].

### 2.3.3.1 Articulações entre os ossículos

Como já foi referido, o martelo articula-se com a bigorna, e esta com o estribo. Estas duas articulações pertencem à classe das diartroses. A articulação incudomaleolar, do martelo com a bigorna, é uma articulação de encaixe recíproco. Do lado da cabeça do martelo existe uma superfície elíptica ou oval, que se dirige obliquamente para baixo e para dentro, tendo uma aresta quase vertical, que a divide em duas facetas secundárias. O corpo da bigorna apresenta à sua volta uma superfície articular dividida igualmente em duas facetas, correspondentes às do martelo. Estes dois ossículos são mantidos por um ligamento capsular, que se insere de cada um dos lados das superfícies articulares. Na sua parte interna destaca-se um prolongamento em forma de cunha, chamado menisco intra-articular. Como todas as diartroses, esta articulação possui uma sinovial, destinada a permitir a ligação recíproca entre os dois ossículos. A articulação incudoestapediana, da bigorna com o estribo, apresenta do lado da bigorna, uma forma arredondada e convexa, ocupando a parte interna da apófise lenticular e do lado do estribo apresenta uma forma com as mesmas dimensões, arredondada e côncava, situada sobre a parte externa da cabeça do estribo. Estas duas superfícies articulares são revestidas por uma fina

cartilagem e mantidas por uma cápsula fibrosa (com numerosas fibras elásticas) com uma pequena sinovial, no seu interior. Apenas a articulação incudoestapediana tem uma função fisiológica [7].

### **2.3.3.2 União dos ossículos com as paredes da caixa timpânica**

Tal como já foi referido, cada um dos ossículos está unido às paredes da caixa timpânica pelos respectivos ligamentos.

#### **Ligações timpânicas do martelo**

O martelo é mantido na sua posição por 4 ligamentos: superior, externo, anterior e posterior.

O ligamento superior desce quase verticalmente da parede superior da caixa (*tegmen tympani*) sobre a extremidade superior da cabeça do martelo e contém no seu interior um ramo da artéria meníngea média. É rígido, curto e de forma cilíndrica, sendo a sua altura de cerca de 1 mm [9].

O ligamento externo é igualmente rígido e curto, mas menos desenvolvido. Este insere-se, por um lado, sobre a parede externa da caixa, imediatamente acima do bordo superior da membrana timpânica, e por outro, sobre o lado externo do martelo, ao nível da união da cabeça com o colo. Este ligamento forma o limite superior da *pars flaccida* da membrana (bolsa de Prussak).

O ligamento anterior, marcado pelo seu comprimento e pela sua origem, nasce na base do crânio, na vizinhança da espinha do esfenóide; daí dirige-se para fora, junto à incisura de Glaser, entra na caixa timpânica, fixa-se no colo do martelo, sobre a base da apófise anterior e acompanha a artéria timpânica anterior. Este ligamento apresenta um valor médio de 1,4 mm de comprimento [9].

O ligamento posterior, não é mais do que um feixe recuado do ligamento externo. Como está situado, exactamente, no prolongamento do ligamento anterior e como ambos se inserem no colo do martelo, passando pelo seu eixo de rotação, Helmholtz considerou-os como um só.

#### **Ligações timpânicas da bigorna**

Existem dois ligamentos que unem a bigorna às paredes da caixa timpânica: ligamento superior e ligamento posterior. O superior desce da parede superior da caixa timpânica até ao corpo da bigorna. O posterior dirige-se da extremidade da apófise curta da bigorna para a fossa *incudis*, na parede posterior da caixa timpânica.

### **Ligações timpânicas do estribo**

A platina do estribo, revestida por cartilagem, aloja-se na janela oval, que está, igualmente, revestida por cartilagem. As duas regiões ósseas da base do estribo e da janela oval não estão exactamente em contacto, existindo entre elas uma pequena fenda circular, cuja altura aumenta progressivamente a partir da extremidade posterior, onde mede 15  $\mu\text{m}$ , até à extremidade anterior, atingindo os 100  $\mu\text{m}$ . Este espaço está preenchido por um conjunto de fibras conjuntivas e elásticas, que constituem o ligamento anular do estribo.

### **2.3.3.3 Sistema biomecânico dos ossículos**

A cadeia ossicular, do ponto de vista do seu movimento activo, está submetida à acção de dois músculos: um que se insere no martelo, o tensor do tímpano (Figura 2.13) e outro ligado ao estribo, o músculo estapediano (Figura 2.14). Os ossículos do ouvido médio estão articulados de tal modo que o deslocamento de um deles interfere indirectamente no deslocamento dos outros. Os dois músculos, anteriormente referidos, exercem a sua acção sobre duas condições importantes na audição: o estado de tensão da membrana do tímpano e a pressão intra-labiríntica. Na presença de sons fortes, o músculo tensor do tímpano estica a membrana timpânica e determina, ao mesmo tempo, um aumento de pressão no líquido labiríntico. O músculo estapediano relaxa a membrana e reduz a pressão no labirinto. Os dois músculos são reciprocamente antagonistas. Num estado de contracção do músculo tensor do tímpano, a membrana, fortemente esticada, vibra mais dificilmente, ao mesmo tempo que aumenta a pressão do líquido labiríntico, recebendo choques menos violentos. Quando o músculo estapediano se contrai, as condições físicas da membrana e do líquido labiríntico são inversas. É referido na literatura [7] que o músculo tensor do tímpano se contrai para sons mais fortes, para proteger o nervo auditivo, e que o músculo estapediano intervém, ao contrário, dispondo o ouvido para a percepção de sons baixos ou longínquos.

### **Músculo tensor do tímpano**

Este músculo (Figura 2.13) fusiforme, de 20 a 25 mm de comprimento, tem um percurso de 2,5 mm dentro da caixa timpânica e nasce na parede superior da porção cartilaginosa da trompa de Eustáquio. Daí, dirige-se obliquamente para trás, para fora e para cima, ao longo do lado superior e interno da trompa, chegando, assim, à caixa timpânica e seguidamente à parede

interna até à janela oval. Aqui dirige-se para trás, atravessa horizontalmente a caixa e vai ligar-se à extremidade superior do cabo do martelo, um pouco acima da sua apófise anterior.

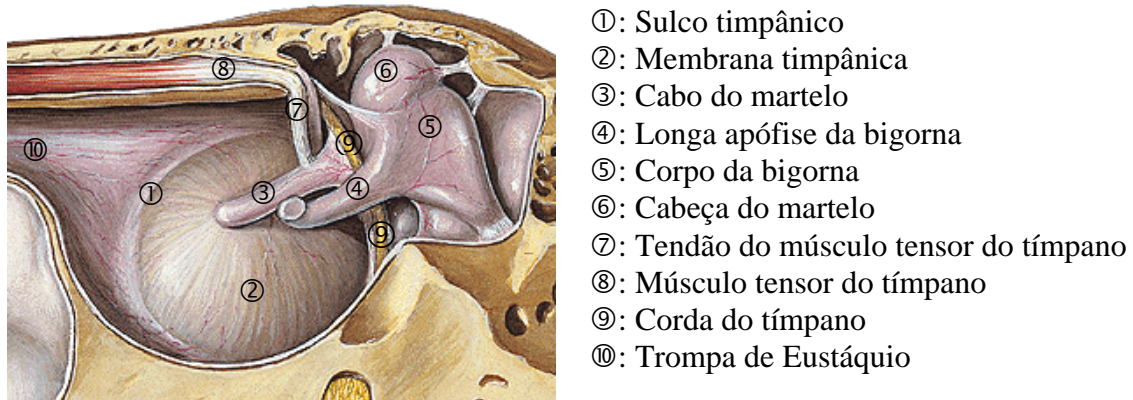


Figura 2.13: Músculo tensor do tímpano, corda do tímpano e suas relações [4].

O músculo tensor do tímpano, tal como o canal ósseo que o protege, apresenta duas porções que são muito diferentes, tanto no que diz respeito à sua direcção e comprimento, como à sua estrutura: uma porção interna, mais longa, que corresponde ao corpo do músculo e que é, praticamente, paralela ao eixo do rochedo e uma porção externa, perpendicular à interna, relativamente forte e curta, constituída pelo seu tendão. O músculo tensor do tímpano, tendo na sua terminação uma direcção transversal, arrasta para dentro o ponto em que ele se insere, ou seja, a extremidade superior do cabo do martelo. Este balança ao nível do seu colo, de tal forma que a sua extremidade inferior se dirige para dentro, ao mesmo tempo que a extremidade superior - cabeça do martelo - se inclina para fora. O corpo da bigorna, articulada com a cabeça do martelo, segue o seu deslocamento à volta da apófise curta. Simultaneamente, a apófise longa da bigorna desloca-se para dentro, comprimindo o estribo contra a janela oval. A sua acção consiste em movimentar o cabo do martelo para dentro, perpendicularmente ao eixo de rotação do bloco martelo-bigorna, que aumentando desta forma a tensão da membrana timpânica, empurra o estribo para a janela oval [3].

### Músculo estapediano

Este músculo (Figura 2.14) apresenta menor resistência que o músculo tensor do tímpano e está protegido dentro de um canal ósseo - canal da pirâmide - que se abre na parede posterior da caixa timpânica. O músculo estapediano, visto em corte longitudinal, tem a forma de pêra; num corte transversal tem a forma de prisma triangular com ângulos arredondados. O seu

comprimento é de 8 mm, sendo 6 mm referentes à sua porção intra-piramidal e 2 mm à sua porção livre ou intra-timpânica. Este músculo nasce na parede do canal da pirâmide e continua pelo seu tendão, que é pouco resistente, reflectindo-se em ângulo obtuso no vértice da pirâmide. Atravessa, horizontalmente, a parte da caixa que separa a pirâmide do estribo, ligando-se ao bordo posterior da cabeça do estribo. Este músculo, empurra para trás e para fora, num plano paralelo, o eixo de rotação do bloco martelo-bigorna. A apófise longa da bigorna é também empurrada para fora. Como resultado da sua contracção, há diminuição da tensão da membrana timpânica e da pressão do líquido labiríntico [5].

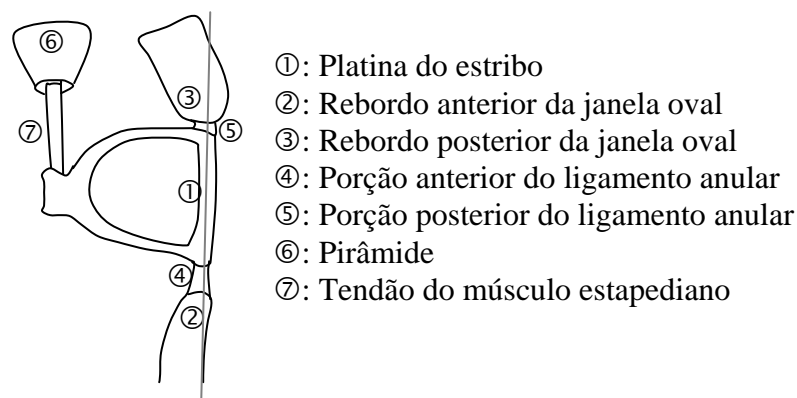


Figura 2.14: Músculo estapediano [7].

O músculo estapediano, depois da sua flexão, tem uma direcção postero-anterior. Quando se contrai, arrasta para trás, a cabeça do estribo, o que se reflecte nas duas extremidades da cadeia ossicular: do lado do estribo, a base deste osso executa um movimento de bácia, à volta dum eixo vertical, de tal modo que a sua extremidade posterior se vai encaixar na janela oval, enquanto que a sua extremidade anterior se afasta. Como o eixo de rotação está mais próximo da extremidade posterior do que da extremidade anterior resulta que o deslocamento para dentro da extremidade posterior do estribo é menor que o deslocamento para fora da sua extremidade anterior [7]. Este duplo deslocamento amplia a cavidade vestibular, resultando numa diminuição de pressão do líquido labiríntico. Do lado da bigorna, a sua apófise longa dirige-se para trás, tal como a cabeça do estribo, articulando-se com esta. Simultaneamente, o corpo da bigorna inclina-se para baixo e para dentro, arrastando consigo a cabeça do martelo, que executando sobre o seu colo, um movimento de bácia, provoca um deslocamento para fora do cabo do martelo. Este último movimento tem como consequência o afastamento do umbo do centro da caixa timpânica levando a um relaxamento da membrana timpânica.

### 2.3.4 Anatomia da corda do tímpano

A corda do tímpano é um ramo do nervo facial e constitui uma anastomose entre o nervo facial (VII par) e o nervo trigêmeo (V par), tendo o seu trajecto ao longo do ouvido médio, o que explica o seu interesse em otologia [3]. Nasce da terceira porção intramastóidea do nervo facial, mesmo por baixo do nascimento do nervo do músculo estapediano a uma distância que varia entre 1 e 3 mm por cima do buraco estilomastóideo. Atravessa o ouvido médio (Figura 2.13) e sai pela região inter-pterigoidea onde se anastomosa com o nervo lingual. No seu percurso descreve uma curva de concavidade inferior, cujo trajecto é sinuoso e pode resumir-se em quatro segmentos [7]:

- 1) Da sua origem até à caixa timpânica: realiza desde o seu nascimento um trajecto recorrente, dirigindo-se para cima, para fora e um pouco para a frente, até que penetra na parte deiscente da sutura petro-timpânica posterior pelo canal posterior da corda.
- 2) Trajecto na caixa timpânica: situa-se entre a camada interna mucosa e a camada média fibrosa da membrana timpânica, mais propriamente situada entre as pregas mucosas tímpano-maleolares anterior e posterior, contornando por dentro o colo do martelo.
- 3) Trajecto desde a caixa timpânica à sua saída exocraneal: a corda sai da caixa por um canal ósseo autónomo, denominado canal anterior da corda. Este canal é constituído por uma deiscência da sutura petro-timpânica anterior.
- 4) Trajecto na base do crânio: à sua saída do crânio, a corda encontra-se na região ptérigo-maxilar ao nível do ângulo inter-pterigoideo. Desde a face interna da espinha do esfenoide desce obliquamente para baixo e para a frente, fazendo um ângulo agudo para atingir o bordo posterior do nervo lingual. Aquando da sua fusão com o nervo lingual, a corda enerva a glândula submaxilar e sublingual com fibras de acção vasodilatadora e secretoras, enerva a mucosa da metade anterior da língua, proporcionando fibras para captar a sensibilidade gustativa, fibras secretoras para as glândulas linguais e fibras vasodilatadoras.

A corda do tímpano possui fibras da sensibilidade gustativa, provenientes da extremidade superior do núcleo solitário e fibras parassimpáticas do núcleo salivar superior. Estas fibras nascidas no tronco encefálico, caminham com o intermédio de Wrisberg até ao gânglio geniculado e a partir do gânglio como nervo facial intrapetroso, até sair do canal de Falópio.

### **2.3.5 Vascularização da caixa timpânica**

A cadeia ossicular tem uma rica rede sanguínea. A rede arterial da caixa timpânica é especialmente densa ao nível da parede inferior do promontório e da metade inferior das paredes anterior e posterior. A artéria principal do martelo divide-se, na parte anterior do colo, em dois ramos principais: o ramo ascendente, que se distribui pela cabeça do martelo e o ramo descendente que entra pelo interior do cabo do martelo, distribuindo vários pequenos ramos pela parte exterior do osso, anastomosando-se com a rede sub-mucosa.

A bigorna e o estribo têm também uma rede intra-óssea e uma rede periférica anastomosadas. A artéria estapediana possui um ramo que passa entre as duas cruras do estribo.

Na sua origem, a rede arterial tem a artéria carótido-timpânica que nasce do segmento ascendente da carótida interna intrapetrosa, passa por um canal horizontal, atravessa a parede anterior da caixa e distribui-se pela parede anterior e pela metade inferior da parede interna; a artéria timpânica inferior, ramo da carótida externa, nasce da faríngea ascendente, nas proximidades do buraco lácero posterior, introduz-se pelo canal de Jacobson, emerge ao nível da parede inferior da caixa, distribuindo-se pelo promontório, pela parede inferior e pelo orifício tubárico; a artéria estilomastóidea surge do ramo auricular posterior, penetrando no canal de Falópio pelo buraco estilomastóideo, contorna o tronco do nervo facial e irriga o músculo estapediano e a corda do tímpano. Fornece alguns ramos perfurantes à parede posterior da caixa timpânica (mastóide) e três ramos à caixa timpânica, propriamente dita, um inferior (destinado à parte posterior da parede inferior), um superior (que se dirige para a parte posterior da janela oval) e um médio (que chega à caixa timpânica pelo mesmo canal ósseo da corda e que se distribui à membrana timpânica). A artéria petrosa superficial é um ramo colateral da artéria meníngea média, que acompanha o grande nervo petroso superficial no buraco de Falópio que se anastomosa com a artéria estilomastóidea, no canal de Falópio, distribuindo-se pela mucosa da parede interna do ático. A artéria timpânica superior é um ramo da meníngea média, que acompanha o pequeno nervo petroso superficial no buraco acessório que se distribui pela parede interna do ático, irrigando o músculo tensor do tímpano. A artéria timpânica anterior, ramo colateral da artéria maxilar interna, penetra pela incisura de Glasser, na caixa timpânica, dividindo-se em três ramos pela parede externa da caixa e pela metade externa das paredes superior e inferior. A artéria auricular profunda é um ramo da maxilar interna, que atravessa a

parede inferior do canal auditivo externo e que se distribui pela membrana timpânica e pela parede externa da caixa. O ramo tubárico, surge da faríngea ascendente e distribui-se pela parede anterior da caixa. A rede superficial submucosa é a continuação da rede submucosa das paredes da caixa timpânica, que fazem a vascularização dos ossículos. A artéria ossicular é um ramo da artéria timpânica anterior que atinge a caixa conjuntamente com a corda do tímpano, dividindo-se em artéria maleolar e artéria incudal, que penetram nos ossículos, sendo os seus ramos nutritivos. O ramo da artéria estilomastóidea irriga o estribo e o tendão do músculo estapediano. De referir que a irrigação da parte central do estribo se faz por difusão e que a apófise lenticular tem uma vascularização pobre.

As veias são mais numerosas e com maior volume do que as artérias, sendo o seu trajecto análogo. Na rede cutânea, as veias formam uma dupla corrente: umas dirigem-se para o umbo e outras para a membrana timpânica misturando-se com as que vão para o canal auditivo externo. As veias da rede externa da membrana timpânica terminam na veia jugular externa. Na rede mucosa, as veias entram na rede venosa da trompa de Eustáquio e por seu intermédio no plexo pterigóideo, nas veias da dura mater e no seio transversal.

O sistema linfático do ouvido médio drena para os gânglios parotídeos e subparotídeos posteriores, para os gânglios retrofaríngeos e mastóideos.

Os nervos destinados à caixa timpânica são de três tipos: motores, sensitivos e simpáticos. Os motores destinam-se aos músculos: o músculo tensor do tímpano enervado pelo nervo trigémeo e o músculo estapediano pelo nervo facial. Os ramos sensitivos e simpáticos são enviados à mucosa timpânica pelo nervo de Jacobson, que vem do glossofaríngeo e pelo ramo carótido-timpânico, com origem no plexo carotídeo.

## 2.4 Ouvido interno

O ouvido interno, parte essencial no processo da audição, está situado ao nível do rochedo, para dentro e um pouco para trás da caixa timpânica.

O ouvido interno consiste de duas partes: labirinto ósseo e labirinto membranoso (Figura 2.15). Funciona com dois receptores sensoriais: a cóclea responsável pela audição, na sua parte anterior, e o vestíbulo e os canais semicirculares, responsáveis pelo equilíbrio, na sua parte posterior. Os canais semicirculares são três: superior (CSS), externo (CSE) e posterior (CSP) (Figura 2.15).

O labirinto membranoso, preenchido por endolinfa (líquido similar aos líquidos intracelulares com alta concentração de  $K^+$  e baixa concentração de  $Na^+$ ) está incluído no labirinto ósseo e está separado da parede óssea por um espaço contendo perilinfa (líquido similar ao dos corpos extra celulares, com baixa concentração de  $K^+$  e elevada concentração de  $Na^+$ ).



Figura 2.15: Ouvido interno: labirinto ósseo e membranoso, respectivamente [4].

### 2.4.1 Labirinto ósseo

O labirinto ósseo compreende o vestíbulo, os canais semicirculares (cavidades em forma de tubo) e a cóclea (cavidade também tubular, que se contorna sobre ela própria em forma de espiral). Estas diferentes cavidades comunicam, directa ou indirectamente, com o canal auditivo interno, através dos seus filamentos nervosos sensoriais.

### **2.4.1.1 Vestíbulo ósseo**

O vestíbulo, parte central do ouvido interno, com forma oval, é uma cavidade óssea, dentro da parte petrosa do osso temporal, que contém os órgãos otolíticos (utrículo e sáculo) (Figura 2.16). As dimensões do vestíbulo [7] são as seguintes: diâmetro antero-posterior, 6 mm; diâmetro vertical, 4 a 5 mm; diâmetro transversal, 3 mm.

Distinguem-se seis paredes no vestíbulo: externa, interna, anterior, posterior, superior e inferior. A parede externa separa o vestíbulo da caixa timpânica e é ocupada, na sua maior parte, pela janela oval. A parede interna corresponde ao fundo do canal auditivo interno, apresentando uma crista horizontal com três concavidades que se relacionam com o utrículo, com o sáculo e com a extremidade posterior da cóclea. A parede anterior é muito estreita (cerca de 2 mm) e representa a menor distância que separa a parede interna da parede externa. Ela relaciona-se em cima com o canal de Falópio, que a contorna, bem como o nervo facial contido neste canal. Em baixo relaciona-se com a parte correspondente à base da cóclea. A parede posterior é um pouco mais larga que a anterior e evidencia na sua parte inferior o orifício ampolar do canal semicircular posterior. A parede superior é ligeiramente côncava e apresenta quatro orifícios circulares: dois posteriores, em que um é externo (orifício não ampolar do canal semicircular externo) e outro é interno (orifício comum aos canais semicirculares superior e posterior); os dois orifícios anteriores, situados um pouco acima da extremidade anterior da janela oval, distinguem-se em externo (orifício ampolar do canal semicircular externo) e interno (orifício ampolar do canal semicircular superior). A parede inferior, ou pavimento do vestíbulo, está situada 8 a 9 mm acima do pavimento da caixa timpânica e apresenta na sua parte externa uma fina lamela óssea, disposta horizontalmente, a lamela espiral.

### **2.4.1.2 Canais semicirculares ósseos**

Os canais semicirculares, importantes na manutenção do equilíbrio do corpo, estão situados atrás e acima do vestíbulo (Figura 2.16). Cada um destes canais tem forma tubular, em arco, com 0,8 mm de diâmetro, apresentando duas extremidades: uma ligeiramente dilatada, chamada ampola (dobro do diâmetro do tubo) que contém a crista ampolar e outra que conserva as mesmas dimensões do tubo, orifício não ampolar. A crista ampolar contém o mesmo tipo de células sensoriais do sáculo e do utrículo – células de suporte e os dois tipos de células ciliadas.

Os orifícios não ampolares dos canais posterior e superior abrem-se no vestíbulo por um orifício comum. Assim, os três canais semicirculares comunicam com o vestíbulo por cinco orifícios. O canal comum (cruz comum), dos canais semicirculares superior e posterior é muito curto, medindo, em média 4 mm (Figura 2.16).

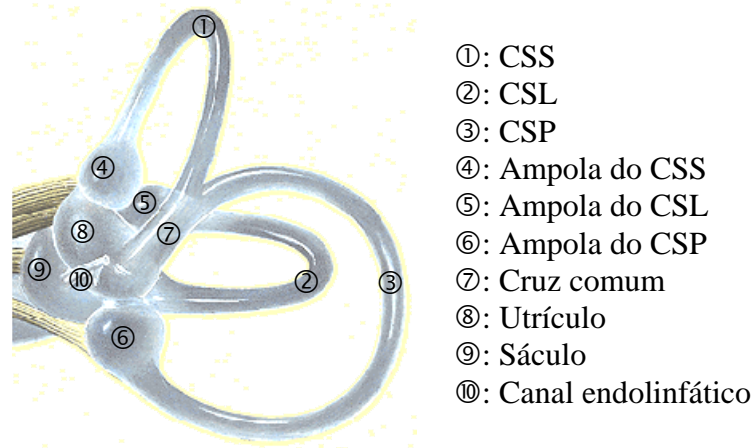


Figura 2.16: Canais semicirculares, utrículo e sáculo [4].

Os canais semicirculares diferem entre si pela sua situação e direcção: O CSS, também conhecido por canal semicircular anterior é o mais elevado de todos. Mede, ao longo do seu bordo convexo, entre 15 e 20 mm. É vertical e desenvolve-se segundo um plano perpendicular ao eixo maior da porção petrosa do osso temporal; o CSP, o mais comprido dos 3 canais, está situado para fora e para baixo do superior. Mede, entre 18 e 22 mm. É também vertical, mas desenvolve-se segundo um plano paralelo ao eixo do rochedo, formando um ângulo de 90° com o canal superior; o CSL, também conhecido por canal semicircular externo, é o mais pequeno dos 3 canais. É horizontal, formando, com cada um dos outros dois, um ângulo de 90°. A sua convexidade dirige-se para fora e mede entre 12 e 15 mm.

### 2.4.1.3 Cóclea óssea

A cóclea, com forma cónica (Figura 2.17) encontra-se na parte anterior do labirinto ósseo, sendo o seu eixo maior quase perpendicular ao eixo do rochedo. Dirige-se obliquamente de trás para a frente e de dentro para fora. A sua base, voltada para trás, está situada no fundo do canal auditivo interno; o seu ápice, voltado para a frente, corresponde à parte anterior da caixa timpânica. Mede cerca de 5 mm da base até ao ápice e a largura da base é aproximadamente 9 mm [7]. Do ponto de vista da sua constituição anatómica, a cóclea compõem-se, essencialmente, de três partes:

núcleo (*modiolus*), canal espiral ósseo e lâmina espiral. O núcleo ocupa a parte central e tem cerca de 3 mm de largura na base, diminuindo para o vértice, que não tem mais do que 1 mm ao nível da segunda volta da cóclea. O canal espiral ósseo é um tubo cavado que se enrola à volta do núcleo. O seu comprimento total varia entre 28 e 30 mm e o seu diâmetro de 2 mm na sua origem, diminuindo pouco a pouco até ao ápice. O canal espiral ósseo começa no lado interno do promontório, imediatamente acima da janela redonda. Daí, orienta-se para baixo e para dentro, até à parte inferior do núcleo, dirigindo-se para a parte superior do núcleo, descrevendo, de seguida, a primeira, segunda e terceira volta da espira. A lâmina espiral é uma lâmina óssea contida no canal ósseo coclear, da base ao ápice, terminando num orifício arredondado – helicotrema - onde se faz a comunicação entre as rampas vestibular e timpânica.

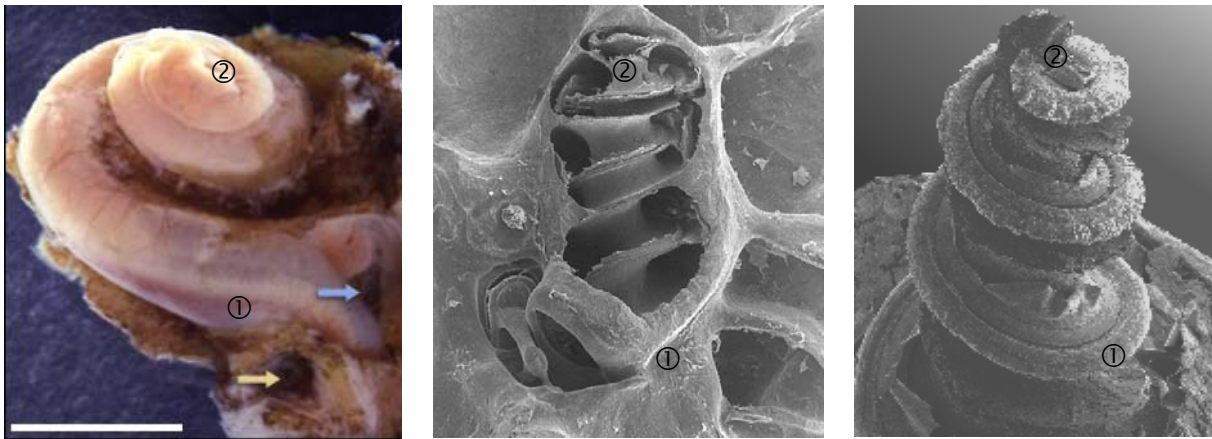


Figura 2.17: Cóclea óssea e membranosa (①: Base; ②: Ápice) [12].

#### 2.4.1.4 Canal auditivo interno

O canal auditivo interno é um canal ósseo que, se estende ao labirinto a partir da face posterior do rochedo. Este canal dá passagem a três cordões nervosos: auditivo, facial e intermédio de Wrisberg. O seu comprimento varia entre 8 e 10 mm e o seu diâmetro entre 4 e 5 mm. Quanto à sua orientação dirige-se obliquamente de dentro para fora e de trás para a frente, fazendo com o eixo do rochedo, um ângulo de cerca de 45°. Consideram-se duas extremidades neste canal: a interna e a externa. A interna, representada pelo orifício interno do canal, ocupa a parte postero-superior do rochedo. A externa é fechada por uma parede óssea que corresponde, por um lado, à parede interna do vestíbulo e, por outro, à base da cóclea.

## 2.4.2 Labirinto membranoso

O labirinto membranoso (vestíbulo, canais semicirculares e cóclea) está inserido no labirinto ósseo (Figura 2.15).

### 2.4.2.1 Vestíbulo membranoso

Compõe-se essencialmente pelos órgãos otolíticos (utrículo e sáculo), pela porção inicial do canal coclear e o pelo canal endolinfático (Figura 2.16).

Cada órgão otolítico tem uma mácula constituída por células sensoriais tipo I e tipo II e por células de suporte [13]. Cada célula sensorial tem um kinocílio e vários estereocílios. A otocónia (cristais de carbonato de cálcio -  $\text{CaCO}_3$ ) cobre a membrana otolítica na mácula. A função dos órgãos otolíticos relaciona-se com a percepção da gravidade, com a aceleração linear e com a força centrífuga, detectando mudanças posicionais durante o movimento do corpo.

O utrículo, de forma alongada, ocupa a parte superior do vestíbulo, tendo entre 3 e 4 mm de comprimento e apenas 2 mm de largura e de altura. A sua face externa fica, sensivelmente, a 2 mm de distância da base do estribo. Sobre a superfície interior do utrículo encontramos os cinco orifícios ampolares e não ampolares dos canais semicirculares membranosos. Na parede oposta à mácula do utrículo existe uma região de células epiteliais, “células negras”, envolvidas na produção e/ou manutenção da endolinfa. A mácula do utrículo recebe os filamentos utriculares do nervo auditivo. Da parede anterior parte o canal utrículo-sacular, que se abre no canal endolinfático.

O sáculo, situado abaixo do utrículo, tem uma forma arredondada e, em média, 2 mm de diâmetro, sendo, portanto, muito mais pequeno que o utrículo. O sáculo relaciona-se, para cima, com a parede inferior do utrículo, para baixo, com o pavimento do vestíbulo, para fora, com a parede externa do vestíbulo, separada por 1,5 mm e, finalmente, para dentro, com a fosseta hemisférica. A mácula do sáculo é perpendicular à mácula do utrículo e recebe os filamentos saculares do nervo auditivo. No sáculo existem duas pequenas aberturas: uma, na parede posterior, que se liga ao canal endolinfático, comunicando com o utrículo, pelo canal utrículo-sacular; outra, na sua parte inferior, comunica com o canal coclear através do canal de Hensen.

O canal endolinfático é formado por dois ramos, que finalizam num canal único: da face interna do utrículo parte um pequeno canal - canal utricular - que se dirige para cima e para trás; da face

interna do sáculo parte um outro canal - canal sacular - com a mesma direcção, encontrando-se e formando o canal endolinfático, que se liga ao aqueduto do vestíbulo, terminando na face posterior do rochedo.

#### **2.4.2.2 Canais semicirculares membranosos**

Têm cerca de 1/4 do diâmetro dos canais ósseos, sendo, no entanto, similares no número e na forma.

O utrículo, o sáculo e os canais semicirculares são mantidos na sua posição por numerosas bandas de fibras que se estendem até às paredes ósseas.

Quanto à estrutura das paredes do utrículo, do sáculo e dos canais semicirculares consideram-se três camadas: externa, intermédia e interna. A externa é composta por tecido fibroso, contendo vasos sanguíneos. A intermédia, fina e transparente, forma uma membrana homogénea com numerosas projecções papiliformes. A camada interna é formada por células epiteliais.

Na mácula do utrículo e do sáculo e nas zonas ampolares dos canais semicirculares, o epitélio é colunar e contém células de suporte e células ciliadas.

#### **2.4.2.3 Cóclea membranosa**

Enrola-se em caracol, cerca de duas voltas e 3/4, em torno de uma coluna central do osso, *modiolus*, que abriga o gânglio espiral coclear e o nervo coclear. O canal dentro da cóclea termina na janela redonda. O interior da cóclea está dividido em três secções: rampa vestibular, rampa média e rampa timpânica (Figura 2.18).

A rampa vestibular é a mais superior e é preenchida por perilinf. Como a janela oval se abre nesta rampa, é o primeiro espaço a receber as vibrações da base do estribo. A rampa média (ou canal coclear) está entre a rampa vestibular e a rampa timpânica e está preenchida por endolinf. Esta rampa tem duas fronteiras: membrana de *Reissner* e membrana basilar. A membrana de *Reissner* (ou vestibular) separa a rampa vestibular da rampa média. Atendendo à sua espessura (muito fina) não oferece obstáculo à passagem das ondas sonoras. Tem como função separar os líquidos das duas rampas, pelo facto de terem origem e composição química distintas, sendo importantes para o adequado funcionamento das células receptoras do som.

Histologicamente, a membrana de *Reissner* é constituída por uma fina lâmina de tecido conjuntivo, que se continua com o perióstio da lâmina espiral e com o ligamento espiral.

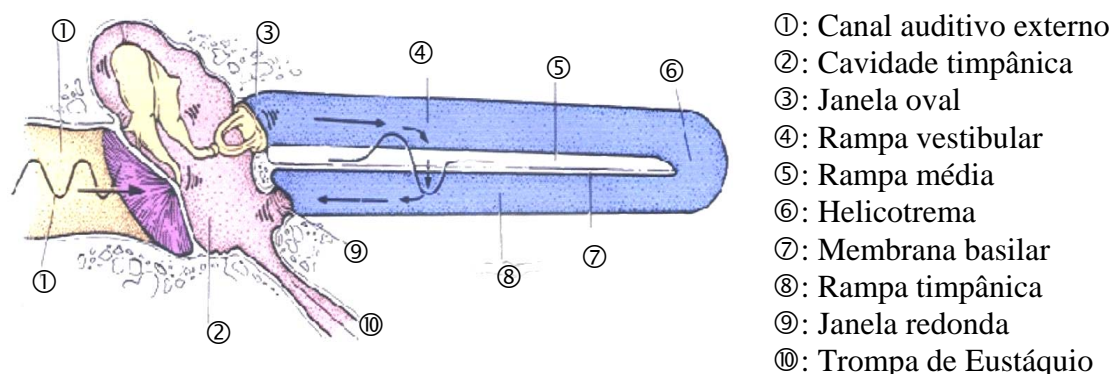


Figura 2.18: Passagem do som desde o ouvido externo à cóclea [12].

A membrana basilar separa a rampa média da rampa timpânica. É mais estreita e densa na base (0,16 mm) e mais larga e fina no ápice (0,52 mm). É a parte mais importante da cóclea, porque aí se encontra o órgão de Corti (órgão da audição) que contém cerca de 13.000 células ciliadas, que recebem a energia acústica (Figura 2.19). É uma estrutura bastante resistente, que bloqueia as ondas sonoras.

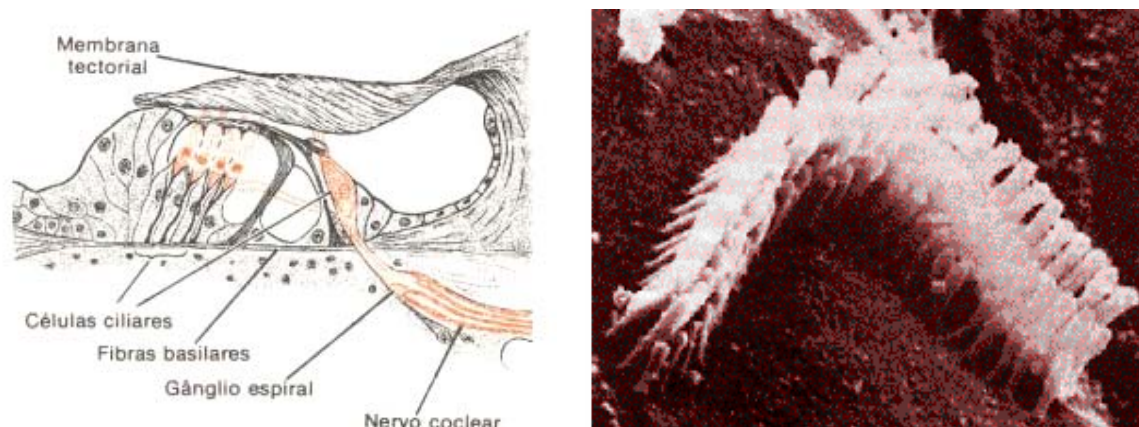


Figura 2.19: Órgão de Corti [14], [15].

Esta membrana é sustentada por cerca de 25.000 estruturas finas, em forma de palheta, que se projectam de um dos lados da membrana e aparecem ao longo de toda a sua extensão – as fibras basilares. A membrana basilar consiste em duas partes: uma interna, fina, chamada *zona arcuata* (lisa) que suporta o órgão de Corti e uma externa, mais espessa e estriada, chamada *zona pectinata* (estriada). A superfície inferior da membrana, por baixo do túnel de Corti, está coberta por uma camada de tecido conjuntivo vascular, que contém fibras de colagénio.

O canal coclear (Figura 2.20) tem uma forma triangular, ligando-se de um lado à lâmina espiral óssea estendendo-se, lateralmente, pela parede óssea da cóclea - membrana basilar - formando,

assim, o chão do canal coclear. Um segundo lado comunica com a parede óssea externa da cóclea. Esta região, chamada parede coclear lateral, contém o ligamento espiral (porção espessada do periósteo, constituída por fibras e vasos sanguíneos), a estria vascular (muito rica em vasos, composta por células que produzem a endolinfa) e a proeminência espiral (constituída por células epiteliais envolvidas na homeostase dos fluidos cocleares). O terceiro lado ou tecto do canal coclear é a membrana vestibular, conhecida por membrana de *Reissner*.

O órgão de Corti tem duas funções: converter a energia acústica / mecânica em energia electroquímica e enviar ao cérebro um sinal codificado contendo todas as informações sobre o som em causa (frequência, intensidade e timbre).

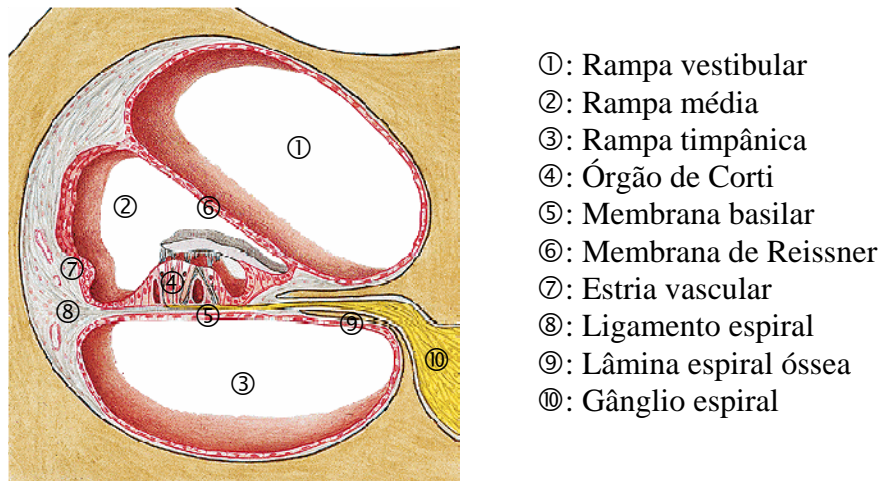


Figura 2.20: Secção transversal da cóclea [4].

O órgão de Corti encontra-se sobre os 2/3 ou 3/4 internos da membrana basilar e é composto por células sensoriais e de suporte. As sensoriais são células ciliadas, ou estereocilia, (Figura 2.21) que contêm actina (proteína encontrada nos tecidos musculares e que os torna rígidos). A membrana tectorial cobre a parte superior da estereocilia e é feita de material gelatinoso (90% é água). Há dois tipos de células ciliadas, internas e externas, separadas por um túnel de secção triangular – túnel de Corti. Este túnel é formado pelos pilares de Corti. As células ciliadas internas, dispostas numa só camada e mais próximas do *modiolus*, são cerca de 3500 no ouvido humano. As células ciliadas externas que se dispõem em três camadas na base da cóclea e em quatro camadas no ápice, são aproximadamente 12.500 na cóclea humana. Estas estão mais afastadas do *modiolus*. Cada célula tem aproximadamente 150 cílios formando um V ou W [7]. As células de suporte são células pilares para as células ciliadas internas e externas: as células

falângicas externas (células de Deiters) prendem as células ciliadas externas à membrana basilar; as células falângicas internas prendem as células ciliadas internas à membrana basilar; as células de Hensen, adjacentes às células de Deiters, estão dispostas em cinco ou seis camadas; células Claudius, cilíndricas, dispostas no lado oposto das células de Hensen, sobre a parte mais interna e sobre a parte mais externa do órgão de Corti, formando o *espaço de Nuel* (entre o túnel de Corti e as células ciliadas adjacentes).

As extremidades livres das células ciliadas externas estão cobertas pela membrana reticular e o órgão de Corti está completamente coberto pela membrana tectorial.

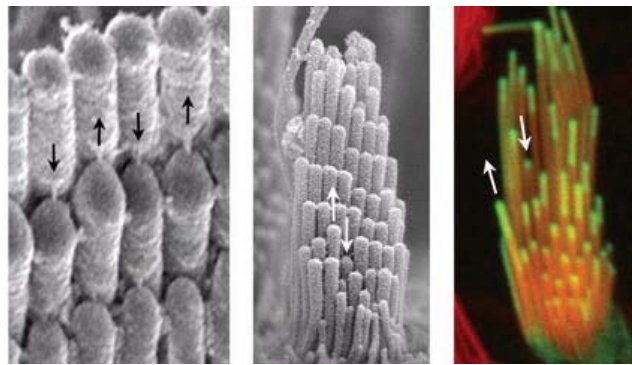


Figura 2.21: Células ciliadas [12].

Quando os líquidos vibram, provocam o movimento da membrana basilar e das suas células ciliadas. Ao mesmo tempo, a membrana tectorial faz um deslocamento relacionado com o movimento das células ciliadas, constituindo estímulos para os filamentos do nervo auditivo, que leva a informação ao cérebro. O movimento dos cílios das células de Corti estimula as dendrites que se encontram no gânglio espiral, convertendo assim o movimento mecânico em impulsos nervosos [16]. Existem cerca de 30.000 neurónios bipolares ao longo do órgão de Corti.

Por fim, a rampa timpânica, preenchida por perilinfa e conectada com a rampa vestibular pelo helicotrema (localizado no ápice da cóclea), termina na janela redonda.

### 2.4.3 Terminações do nervo auditivo

O nervo coclear divide-se em numerosos filamentos ao nível da base do *modiolus* que se estende até ao ápice. O gânglio de Corti é constituído por células nervosas bipolares, que estão na origem deste nervo. As fibras são enviadas ao cerebelo e metade delas continua para o lobo temporal do

mesmo lado e outra metade cruza para o lobo temporal do lado oposto. Isto significa que a informação vinda de cada ouvido termina em ambos os lados do cérebro.

O nervo auditivo entra no canal auditivo interno e divide-se em dois ramos: o anterior ou coclear e o posterior ou vestibular (Figura 2.22).

O ramo anterior encontra-se obliquamente dirigido para a frente e para fora, em direcção à fosseta antero-inferior do canal auditivo interno, que apresenta múltiplos pequenos orifícios dispostos ao longo da espiral da cóclea, crivo espiral da base da cóclea. Depois de ter atravessado os orifícios do crivo espiral, os filamentos do ramo coclear chegam à columela, seguindo, inicialmente, um trajecto paralelo ao seu eixo, inclinando-se, depois, para fora em direcção ao canal espiral de Rosenthal, onde entram em contacto com o gânglio de Corti [7].

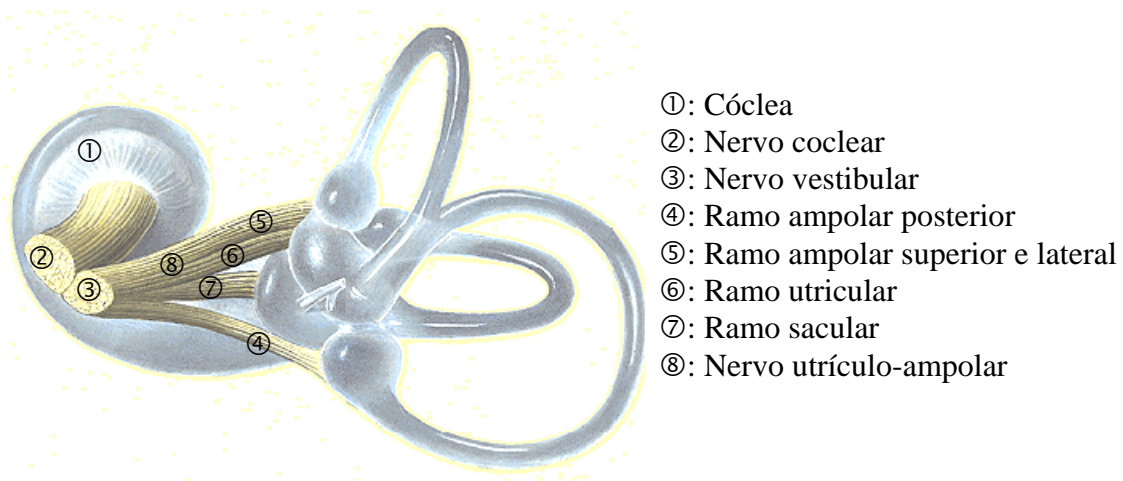


Figura 2.22: Divisões do nervo cocleo-vestibular [4].

Ao sair do gânglio de Corti, os filamentos do ramo coclear passam entre as duas lamelas da lâmina espiral, anastomosando-se, para formar uma espécie de plexo, chegando, assim, ao túnel de Corti. Ao chegar ao crivo espiral, o nervo coclear orienta alguns filamentos para o lado postero-externo, chegando ao vestíbulo - ramo vestibular do nervo coclear. Estes filamentos vestibulares distribuem-se à porção inicial do canal coclear, que ocupa o vestíbulo e pelo tabique que separa o utrículo do sáculo.

O nervo vestibular envia ramos para o utrículo, para o sáculo e para as ampolas dos canais semicirculares (Figura 2.22). Perto do canal auditivo interno, no tronco deste nervo, existe o gânglio vestibular (gânglio de Scarpa) que tem a mesma estrutura do gânglio de Corti e que é constituído por células bipolares.

A seguir ao gânglio de Scarpa, o nervo divide-se em 3 ramos (Figura 2.22): o superior, o mais volumoso dos três, que se dirige para cima e para trás, até à fosseta postero-superior do canal auditivo interno terminando na mácula do utrículo e nas ampolas dos canais semicirculares superior e lateral; o inferior, que constitui o nervo sacular terminando na mácula do sáculo; o posterior, que constitui o nervo ampolar posterior, terminando na ampola do canal semicircular posterior.

#### **2.4.4 Irrigação do ouvido interno**

O ouvido interno recebe a maior parte das suas artérias através da artéria auditiva interna. A esta artéria juntam-se outras artérias - artérias acessórias – que se destinam, sobretudo, ao labirinto ósseo e ao seu perióstio.

A artéria auditiva interna dirige-se pelo canal auditivo interno, conjuntamente com o nervo auditivo e divide-se no fundo do canal, em dois ramos: o vestibular e o coclear. O ramo vestibular entra no vestíbulo e distribui-se pelo sáculo, pelo utrículo e pelas extremidades ampolares dos dois canais semicirculares, superior e externo. O ramo coclear é mais curto e bifurca-se, quase na sua origem, em dois ramos secundários: o ramo vestíbulo-coclear, que entra no vestíbulo ramificando-se para o sáculo, para o utrículo e para os canais semicirculares posterior e lateral, bem como para a porção inicial da cóclea membranosa e ramo coclear propriamente dito, que entra pela base da cóclea, convertendo-se em 15 a 20 ramos que se dirigem para a lâmina espiral e terminam em três pequenos conjuntos de ramos: anteriores, médios e posteriores. Os ramos anteriores dirigem-se para a rampa vestibular, contornam em seguida o perióstio e terminam no ligamento espiral; os ramos médios percorrem a lâmina espiral; os ramos posteriores, mais curtos, dirigem-se ao canal espiral e ramificam-se pelo gânglio de Corti.

As paredes ósseas das cavidades labirínticas recebem numerosas arteríolas, artérias acessórias, que se ramificam pelo perióstio e pelas diferentes porções do labirinto membranoso.

O sangue venoso, vindo das reservas capilares do labirinto, passa por três veias principais: veia auditiva interna, que ocupa, como a artéria homónima, o canal auditivo interno e desce do ápice à base da cóclea; a veia do canal do vestíbulo, que tem origem nos canais semicirculares e no utrículo, chegando, assim, à face postero-superior do rochedo, terminando no seio petroso

superior (directamente, ou por intermédio da veia meníngea); a veia do canal da cóclea que conduz à jugular interna, parte do sangue venoso do utrículo e do sáculo e uma grande parte do sangue da cóclea.

A via de fluxo do sistema linfático mais importante para a perilinfa é constituída por um canal, que segue o canal coclear e que, partindo da rampa timpânica termina nos espaços sub-aracnóideos e também na cavidade aracnóidea.

## **2.5 Sistema nervoso auditivo**

### **2.5.1 Via auditiva central**

O nervo auditivo é constituído por fibras nervosas aferentes e eferentes. Quanto à condução dos impulsos nervosos, os neurónios aferentes (sensoriais) transmitem impulsos do órgão de Corti para o cérebro e os eferentes (motores) trazem a informação do córtex cerebral para o órgão de Corti. As fibras individuais que o constituem estão organizadas de acordo com a frequência a que são mais sensíveis.

O nervo auditivo tem origem em três segmentos do ouvido interno: cóclea, vestíbulo e canais semicirculares. As fibras que provêm da cóclea atravessam o gânglio de Corti e formam o nervo coclear. Após atravessarem o nervo coclear, os estímulos são transmitidos aos centros auditivos do tronco encefálico e córtex cerebral, onde são processados.

As fibras do vestíbulo e das ampolas dos canais semicirculares, atravessam o gânglio de Scarpa e formam o nervo vestibular. Estes dois nervos unem-se dentro do canal auditivo interno, formando o nervo auditivo, ou cocleo-vestibular, e entram na cavidade craniana sobre o plano lateral do bulbo, dividindo-se em dois feixes: raiz anterior, que representa o nervo vestibular e raiz posterior que é a continuação do nervo coclear. A raiz anterior está situada atrás da raiz coclear (o vestíbulo é posterior em relação à cóclea), mas cruza-a para se colocar em frente a ela. As fibras que constituem a raiz vestibular passam por um espaço que separa o corpo restiforme da raiz inferior do trigémeo e dividem-se em dois grupos: ramos ascendentes e ramos descendentes. Os ramos ascendentes terminam nos núcleos de substância cinzenta (núcleo dorsal externo, núcleo dorsal interno e núcleo de Bechterew) abaixo do quarto ventrículo [7]. Os ramos descendentes chegam sobre o lado interno do corpo restiforme, constituindo a raiz inferior do nervo auditivo. As fibras desta raiz terminam numa colónia de células nervosas juntando-se ao núcleo de Burdach.

As fibras que constituem a raiz coclear separam-se da raiz vestibular, atingindo a face externa do corpo restiforme, dividindo-se em duas partes: uma antero-interior, que constitui o núcleo anterior do auditivo e uma postero-externa que constitui o tubérculo acústico lateral.

Os sinais nervosos levados pelo nervo auditivo ao cérebro têm informação quanto às frequências que compõem o som. Somente 14 mil células receptoras geram as 32 mil fibras nervosas que deixam a cóclea e seguem em direção ao cérebro.

Os centros auditivos do tronco encefálico relacionam-se com a localização da direção dos sons e com a produção reflexa de movimentos rápidos da cabeça, dos olhos e de todo o corpo, em resposta a estímulos auditivos.

O sistema auditivo seleciona a informação relevante para o indivíduo, quer quanto ao tempo de entrada da informação, quer quanto à intensidade do som.

Através das fibras nervosas aferentes, os impulsos nervosos saem da cóclea (gânglio espiral de Corti) em direção aos núcleos cocleares dorsal e ventral (Figura 2.24). Aqui surge a primeira sinapse [17], [18]. Cada núcleo coclear, situado no tronco cerebral, na parte inferior da protuberância, tem uma forma de feijão (Figura 2.23). Cada núcleo coclear tem três divisões: um núcleo antero-ventral, um núcleo postero-ventral e o núcleo coclear dorsal. As fibras que enervam o ápice da cóclea (e que transmitem as baixas frequências) terminam nas camadas superficiais dos núcleos cocleares, ao passo que as que enervam a base (altas frequências) terminam na profundidade dos núcleos cocleares [19].

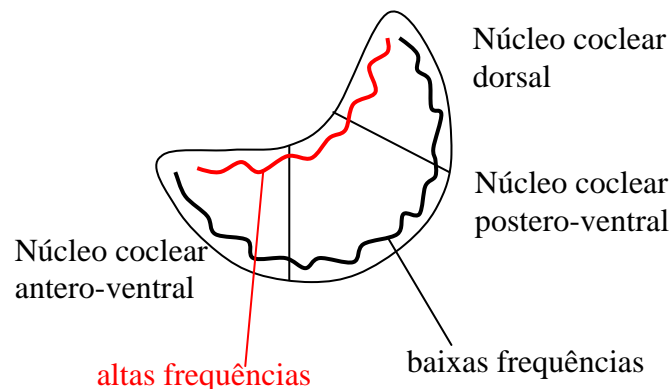


Figura 2.23: Núcleos cocleares e suas fibras aferentes [19].

Os axónios emitidos pelo núcleo coclear (segundo neurónio da via auditiva) têm dois destinos possíveis: a maioria das fibras cruza para o lado oposto, através do corpo trapezóide para alcançar o núcleo olivar superior contralateral. No entanto, algumas fibras não cruzam para o lado oposto, dirigindo-se para o núcleo olivar superior ipsilateral (Figura 2.24). A existência destas duas vias permite dar suporte à capacidade para detectar a origem do som.

É a partir do cruzamento desta informação, tendo em conta o tempo de ocorrência, que se gera o

conceito de localização do som no espaço exterior. Quando uma fonte sonora está mais próxima de um ouvido, o outro recebe o som com uma intensidade ligeiramente mais fraca, podendo esta diferença ser detectada por células especializadas.

Através do lemnisco lateral, as fibras de ambos os lados atingem o colículo inferior, que recebe a maioria, senão todas as fibras ascendentes dos centros auditivos baixos (Figura 2.24). O colículo inferior é o ponto de junção sináptica para, praticamente, todas as fibras da via auditiva e tem também um papel importante na localização dos sons, na vigília auditiva (solicitando a formulação reticulada ascendente) e na orientação da cabeça e dos olhos, suscitadas por ruídos.

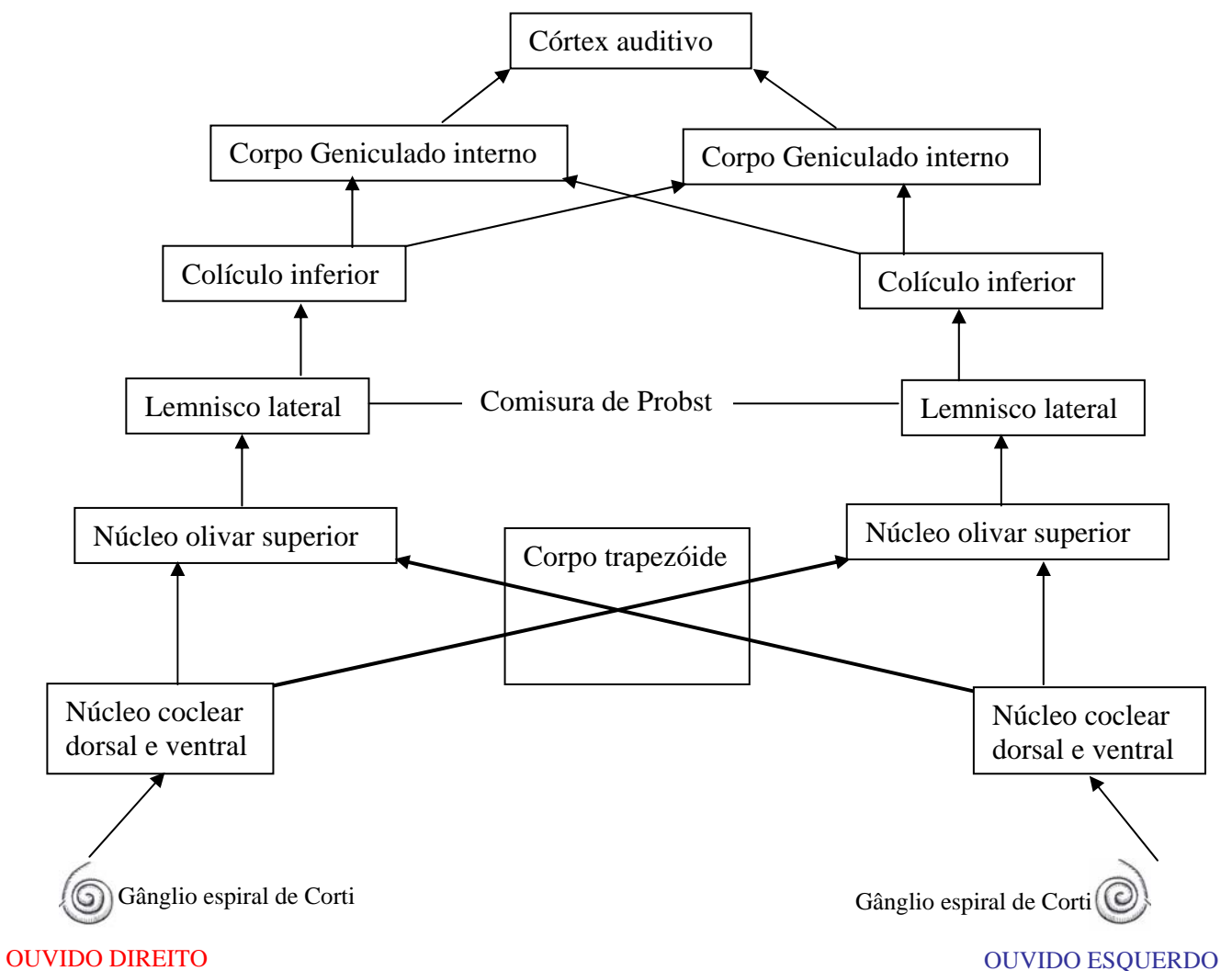


Figura 2.24: Via auditiva central.

Do colículo inferior, a via dirige-se para o corpo geniculado interno ipsilateral e contralateral, onde ocorre, novamente, a junção sináptica de todas as fibras (Figura 2.24).

Através da radiação auditiva, a via atinge o córtex cerebral, localizado no lobo temporal. No entanto, as fibras nervosas podem tomar muitos trajectos possíveis [17].

Quando o estímulo é binaural, de cada núcleo coclear partem ligações para cada oliva superior, tanto ipsi como contralateral. Existem três locais no tronco onde ocorrem cruzamentos entre os dois lados (Figura 2.24): no corpo trapezóide, na comissura de Probst (entre os dois núcleos do lemnisco lateral) e na comissura colicular inferior (entre os dois colículos inferiores) [18].

### 2.5.2 Vias neurais do reflexo acústico

O músculo estapediano, enervado pelo nervo facial, contrai-se bilateralmente na presença de um som suficientemente forte. A essa contracção chama-se reflexo acústico.

As vias neurais do reflexo acústico estão localizadas na parte baixa do tronco encefálico e consiste de vias ipsilaterais e contralaterais [20].

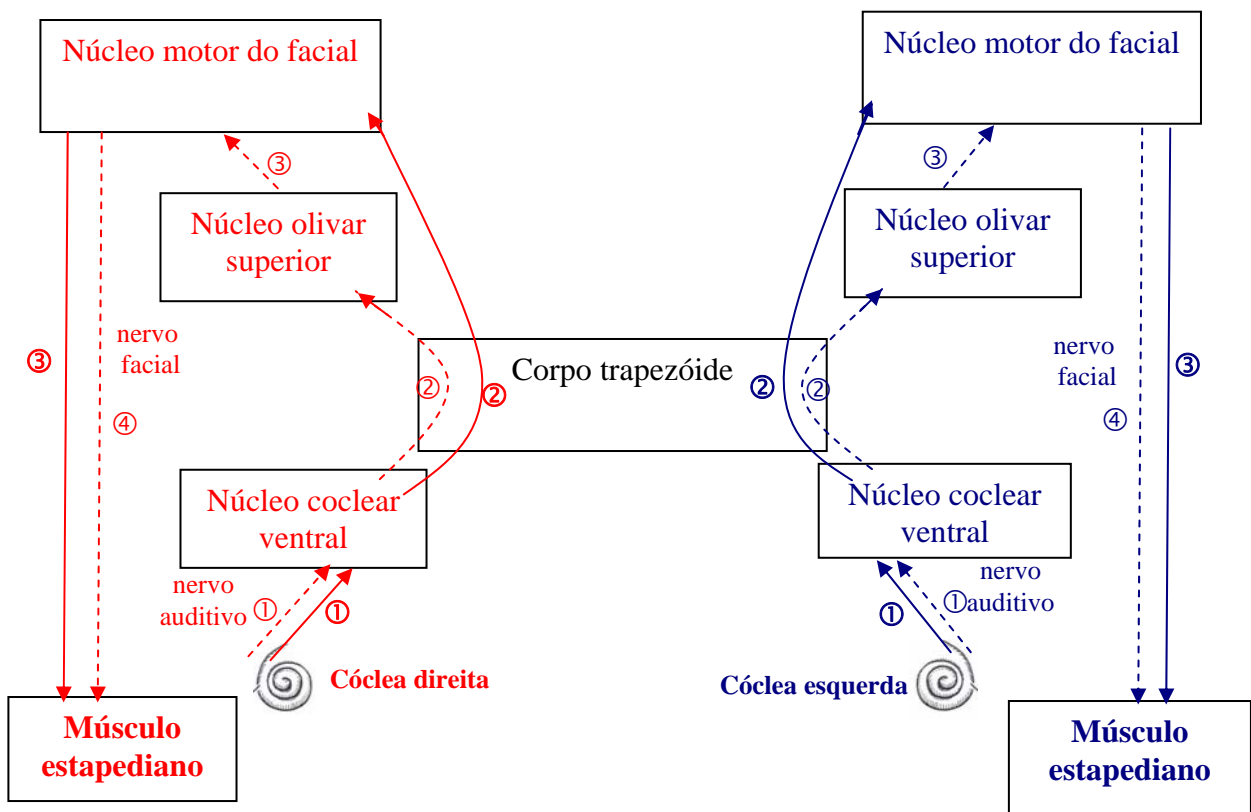


Figura 2.25: Vias neurais do reflexo acústico ipsilateral.

O reflexo acústico ipsilateral consiste de três, e em alguns casos, de quatro neurónios (Figura 2.25). Durante a estimulação com sons fortes, a via ipsilateral inicia-se com impulsos das células ciliadas que são transmitidos pelo nervo auditivo para o núcleo coclear ventral ipsilateral. A maioria dos axónios do núcleo coclear ventral passa pelo corpo trapezóide para a parte medial do núcleo motor do facial e vai pelo nervo facial para o músculo estapediano ipsilateral. Algumas fibras nervosas do núcleo coclear ventral passam pelo corpo trapezóide para o núcleo olivar superior medial ipsilateral. Daí vão para a parte medial do núcleo motor do facial atingindo o músculo estapediano através do nervo facial.

A via do reflexo acústico contralateral contém sempre quatro neurónios (Figura 2.26). Do nervo auditivo e do núcleo coclear ventral, os impulsos são transmitidos para o núcleo olivar superior e cruzam para o núcleo motor do facial contralateral. O 4º neurónio transmite este impulso para o respectivo músculo estapediano.

Quando qualquer ouvido é activado por um som suficientemente forte, ambos os músculos ipsi e contralateral se contraem.

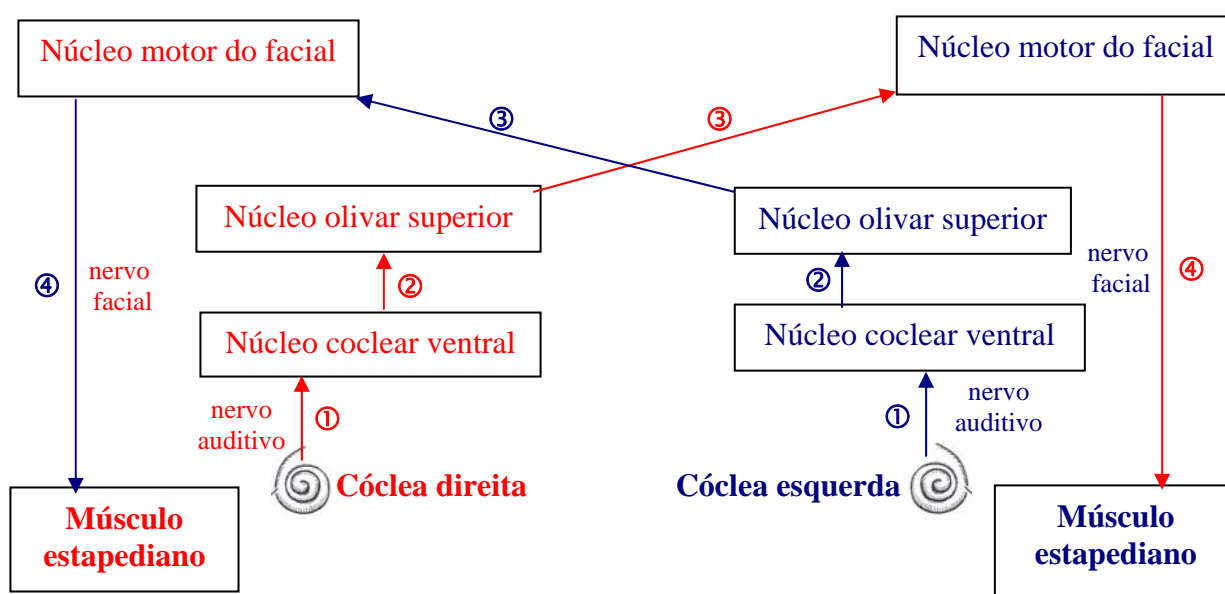


Figura 2.26: Vias neurais do reflexo acústico contralateral.

### 2.5.3 Hemisférios cerebrais

Os hemisférios cerebrais são formados por uma espessa camada de substância branca, revestida perifericamente, por uma fina camada de substância cinzenta - o córtex cerebral. Cada hemisfério está dividido em lobos: frontal, parietal, temporal e occipital (Figura 2.27). Por sua vez os lobos estão divididos em circunvoluções [21]. As comissuras inter-hemisféricas ligam os dois hemisférios pela sua face interna.

Os sons relacionados com a linguagem podem ser processados nos dois hemisférios cerebrais, mas de forma diversa. Enquanto que no esquerdo, o tratamento da informação conduzirá à identificação das unidades de significado simbólico, que constituem a linguagem e funções lógicas, sendo, por isso, possível reconhecer os respectivos conteúdos, já o hemisfério direito trata a informação que conduz ao reconhecimento da prosódia do discurso, ou à linha melódica de uma canção, ou seja, funções não verbais, assim como actividades artísticas e funções emotivas [19].

Em mais de 90 % da população humana a linguagem é processada no hemisfério esquerdo e o seu esquema corporal no hemisfério direito.

O córtex auditivo, localizado na porção média do giro superior do lobo temporal, recebe os estímulos auditivos e interpreta-os como sons diferentes, fazendo uma análise detalhada das características do som e possui duas áreas distintas, responsáveis pela audição: córtex auditivo primário e córtex auditivo secundário. O córtex auditivo primário é excitado directamente pelas projecções provenientes do corpo geniculado interno e está localizado na parte superior do lobo temporal, de ambos os hemisférios, na parte superior da primeira circunvolução temporal, ao nível da circunvolução de Heschl, parcialmente escondida no rego de Sylvius. Corresponde à área 41 de Brodmann e representa a área de recepção principal das terminações auditivas [19].

O córtex auditivo secundário (ou de associação auditiva) é excitado indirectamente pelas projecções provenientes do córtex auditivo primário e de áreas talâmicas associativas, adjacentes ao corpo geniculado interno. É aqui que é trabalhada a informação de forma mais orientada.

É no córtex de associação que o som é reconhecido como linguagem. Situado na região do *planum temporale* (região do cérebro responsável pelo tratamento da informação auditiva), atrás da circunvolução de Heschl, ultrapassando a região parietal inferior. A área da fala de Broca, localizada no lobo frontal, corresponde aproximadamente à área 44 de Brodmann [19].

No hemisfério esquerdo, o córtex de associação auditiva está organizado e preparado para trabalhar a informação verbal. Esta região recebe o nome de área de Wernicke (Figura 2.27).

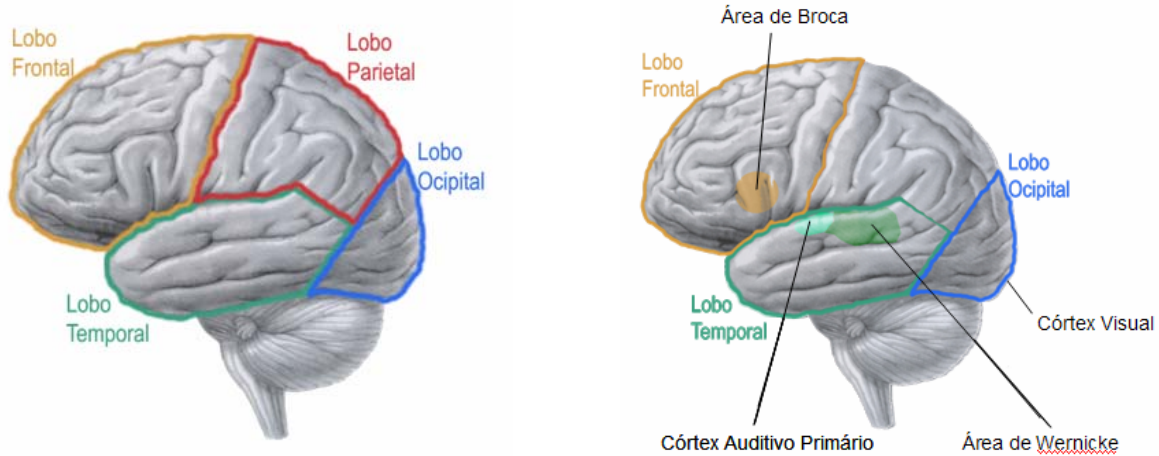


Figura 2.27: Hemisférios cerebrais [22].

Chegada a informação auditiva à área de Wernicke, portanto, já trabalhada no sentido de ser reconhecida como linguagem, algumas características do som, como sendo, o timbre e a sonoridade da voz, são já conhecidas, permitindo, por exemplo, distinguir se se trata de uma mulher, de uma criança ou homem e se essa pessoa nos é familiar. A área de Wernicke participa na análise dos elementos da comunicação que estão constituídos em palavras, isto é, toda aquela informação que é passível de ser representada também em código escrito.

Lesões que afectam as áreas auditivas associativas, mas que preservam o córtex auditivo primário, não diminuem a capacidade de ouvir ou diferenciar tons sonoros e de interpretar padrões simples de som, mas impossibilita a interpretação do significado do som ouvido.

## 2.6 Referências

- [1] L.L. Henrique, *Acústica Musical*, Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.
- [2] [http://www.siemens-hearing.ca/hearing\\_aids/hearing\\_info/anatomy.aspx](http://www.siemens-hearing.ca/hearing_aids/hearing_info/anatomy.aspx).
- [3] <http://www.otorrinoweb.com/superior/oido.htm>.
- [4] Sobotta\_v1.5 – Atlas of Human Anatomy.
- [5] M.M. Paparella, D.A. Shumrick, *Otorrinolaringologia*, 2ª ed. Editora Médica Panamericana SA, Buenos Aires, pp. 196-212, 1982.
- [6] F.H. Netter, *Interactive Atlas of Human Anatomy*, Ciba Med.Education & Publications, 1995.
- [7] L. Testut, *Traité d'Anatomie humaine – organes des sens , tome septieme*.
- [8] [http://www.kids-ent.com/newkids800/ear\\_nl.html](http://www.kids-ent.com/newkids800/ear_nl.html).
- [9] J. Paço, *Doenças do tímpano*, Lidel, Lisboa, 2003.
- [10] E.T.Betti, Disfunção da tuba auditiva. In: SIH, T. Otorrinolaringologia Pediátrica, Revinter Cap. 24, pp. 118-120, Rio de Janeiro, 1998.
- [11] <http://www.nlm.nih.gov/medlineplus/framing.html>.
- [12] <http://faculty.augie.edu/~pchanavan/audiology/Chapter3.ppt>.
- [13] Y. Harada, *The Vestibular Organs – S.E.M. atlas of the inner ear*, Kugler & Ghedini Publications, Hiroshima, 1988.
- [14] W.J. Stanley, C.A. Francone, W.J. Lossow, *Anatomia e Fisiologia Humana*, Editora Guanabara, 5ª edição, 1990.
- [15] <http://www.afh.bio.br/sentidos/Sentidos3.asp>.
- [16] R.W. Zemlin, *Speech and Hearing Science: Anatomy and Physiology*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1988.
- [17] S.S. Stevens, F. Warshofsky, *Sound and Hearing*, Time Inc. Tradução Brasileira: Som e Audição, Livraria José Olympio Editora, Rio de Janeiro, 1970.
- [18] A.C. Guyton, *Tratado de fisiologia médica*, Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1992.
- [19] M. Habib, *Bases neurológicas dos comportamentos*, Climepsi Editores, 2000.
- [20] J. Katz, *Tratado de audiologia clínica*, 4ª Edição, Manole, Brasil, 1991.
- [21] A. Carvalho, *O Sistema Nervoso*, in *Biologia Funcional*, Livraria Almedina, Coimbra, 1984.
- [22] [mit.edu/kaitire/www/evelin2004/Docs/Neuro\\_Aula1.ppt](http://mit.edu/kaitire/www/evelin2004/Docs/Neuro_Aula1.ppt).

## Capítulo 3

### *Psicoacústica*

#### 3.1 Considerações gerais sobre o som

O som pode ser interpretado como uma sensação auditiva, resultante do movimento de moléculas num determinado meio, por um dado período de tempo. Este movimento molecular propaga-se através de ondas sendo, para tal, necessário um emissor, que produz o movimento num determinado meio e que, por sua vez, é percebido por um receptor [1].

Consideram-se como principais características de um som, a altura, a intensidade e o timbre. Cientificamente esta classificação pode ser considerada como de menor rigor, porque mistura características psicológicas, como a altura e o timbre, com características físicas, a intensidade.

O estudo e análise do som são feitos por aparelhos que realizam medições rigorosas das suas características físicas, podendo ser expressas por um valor numérico. Por outro lado, o som provoca no ouvido humano, sensações auditivas individuais (características psicológicas) não mensuráveis, que variam de pessoa para pessoa (subjectivas).

##### 3.1.1 Frequência

Por definição, frequência ( $f$ ) é o número de ciclos efectuados por segundo, cuja unidade é o ciclo/s ou Hz (Hertz). Período, por seu lado, é o intervalo de tempo que leva a efectuar um ciclo, ou seja, o inverso da frequência,

$$f = \frac{1}{T} \quad (3.1)$$

A banda de frequências audíveis no ser humano varia entre 16 e 20 kHz. As frequências acima de 20 kHz são chamadas ultra-sons e abaixo de 16 Hz, infra-sons.

De entre as frequências audíveis, até cerca de 256 Hz, consideram-se frequências baixas, entre 256 e 1kHz, frequências médias e superiores a 1kHz, frequências altas.

Um som puro é o mais elementar dos sinais e tem uma importância fundamental em acústica e no processamento de sinais em geral. A forma de onda é uma sinusóide e a sua especificidade resulta de ser constituída por uma única frequência.

Um som puro é descrito pela seguinte função:

$$x(t) = A \times \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (3.2)$$

em que  $x(t)$  é o sinal contínuo em função do tempo,  $A$  a amplitude,  $\omega$  é a frequência angular,  $t$  o tempo e  $\phi$  a fase inicial. As unidades de  $x$  e de  $A$  podem ser diversas: pressão, deslocamento, voltagem. Por convenção,  $A$ , é sempre positivo.

A duração de uma sinusóide é infinita, logo, em rigor um som puro não existe.

Os sons complexos são constituídos por mais do que uma frequência, ou seja, podem ser considerados somatórios de sons simples. Cada uma das frequências que constitui um som complexo denomina-se componente ou parcial. O primeiro dos parciais é designado por som fundamental, que não é mais do que o som cuja frequência corresponde ao primeiro modo vibratório ou acústico do sistema. Se um parcial tiver uma frequência que é um múltiplo inteiro da frequência do som fundamental, denomina-se harmónico; se não for um múltiplo inteiro da frequência do som fundamental, diz-se não-harmónico. Quando um som é constituído unicamente por parciais harmónicos diz-se periódico; se pelo menos um dos seus parciais for não-harmónico, o som diz-se aperiódico.

A análise de sons pode ser feita numa perspectiva temporal, que consiste no traçado da variação de uma determinada grandeza em função do tempo. Quando se trata de sinais periódicos, a análise da representação temporal permite calcular a frequência fundamental do sinal.

Além da perspectiva temporal existe a representação espectral, definida no domínio frequencial. Neste espaço são evidenciadas não só as frequências em que o sinal contém energia, bem como as periodicidades existentes. A representação espectral é uma espécie de fotografia de um som num determinado momento, um congelamento do tempo, que permite retirar informações sobre as componentes sinusoidais dessa vibração complexa, a partir da variação temporal da onda.

Quando se trata de sinais periódicos, a passagem do domínio temporal para o espectral ou frequencial é feita por aplicação do teorema de Fourier, permitindo a passagem de uma função  $f$ ,

que depende do tempo, para uma nova função  $F$ , que depende da frequência [2]. Esta nova função, sendo periódica, exprime as amplitudes das diversas componentes frequenciais harmónicas, que estão contidas na função original. A partir de uma representação temporal, a análise de Fourier permite saber quais são as frequências em que o sinal contém energia, traduzida pelas respectivas amplitudes e fases associadas. Uma tal representação é, em geral, muito mais elucidativa do que a representação temporal, no caso de sinais complexos.

Considere-se uma função periódica  $f = x(t)$ , com período  $T$ . A aplicação do teorema de Fourier permite representar  $x(t)$  do seguinte modo:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad (3.3)$$

sendo os coeficientes da série calculados a partir de:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (3.4)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad (3.5)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad (3.6)$$

e a frequência de cada termo:

$$\frac{2\pi n}{T} = \omega_n \quad (3.7)$$

A função (3.3) indica que qualquer sinal periódico de frequência,  $f$ , pode ser decomposto numa soma de ondas sinusoidais e co-sinusoidais de frequências múltiplas da fundamental.

A altura do som é a característica psicológica relacionada directamente com a frequência do estímulo e traduz a sensação auditiva que permite ordenar os sons, de graves a agudos. A sensação de altura depende essencialmente da zona da membrana basilar que é mais excitada. A unidade para quantificar a sensação subjectiva de altura é o “mel”, que deriva da palavra melodia [1]. O som de 1 kHz equivale a 1000 mel. A escala é estabelecida de modo que duplicando o número de mel, duplica a sensação subjectiva de altura (Figura 3.1). A escala de mel [3] varia entre 0 mel a 3000 mel, intervalo que corresponde à gama de frequências de 20 a 20 kHz.

Se se fizer um varrimento de frequências num gerador de sinais, verifica-se que a frequência varia continuamente.

No entanto, o mesmo não acontece com a altura, uma vez que os sons não soam diferentes indefinidamente.

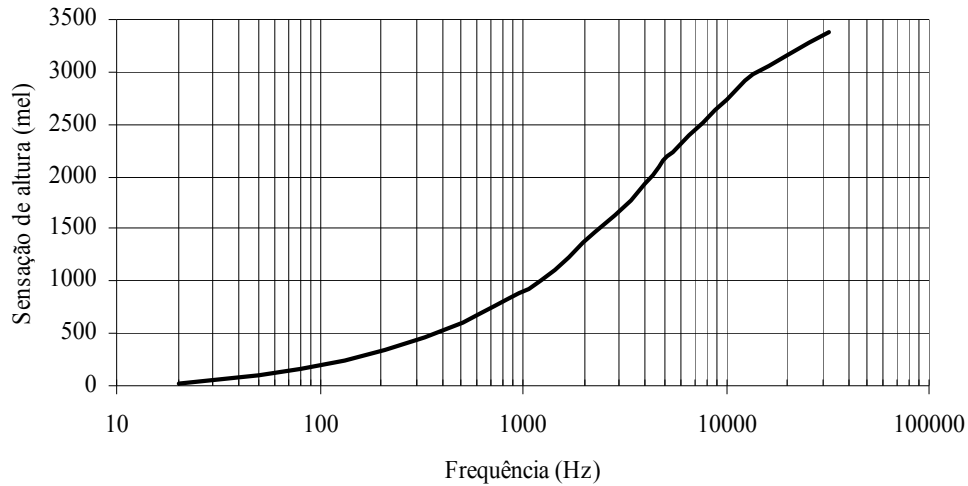


Figura 3.1: Escala de mel.

Quando o som atinge o intervalo de oitava, existe a sensação de se voltar ao ponto de partida. A identidade entre os sons é tão acentuada que o novo som tem o mesmo nome. Continuando o varrimento, há a percepção de que se repete a situação da primeira oitava. A altura do som apresenta dois aspectos distintos: o cromatismo e a posição. Dois sons separados de uma oitava apresentam o mesmo cromatismo, mas diferentes posições (Figura 3.2).

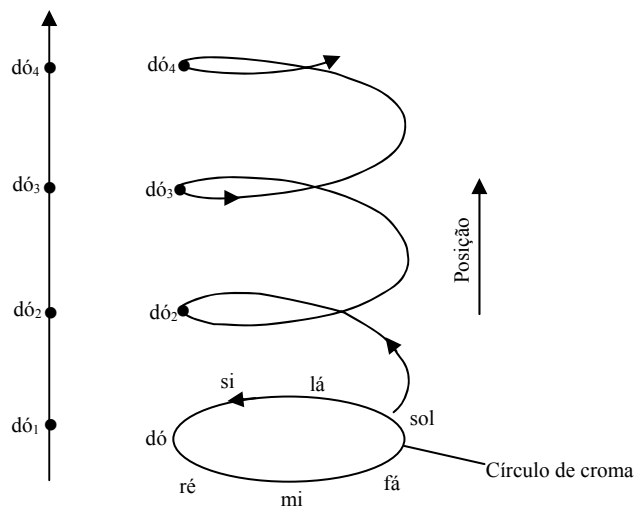


Figura 3.2: Espiral de Shepard, que sugere a circularidade da sensação de altura do som [3].

A altura do som é uma grandeza multidimensional originando uma sensação de circularidade [4], conhecida por *Escala de Shepard*, isto é, uma variação contínua do croma que dá a sensação da mesma posição. Quando se ouve uma sequência de 12 sons cromáticos de Shepard, o resultado é uma escala que dá a ilusão de subir contínua e indefinidamente, sem sair da gama dos sons audíveis.

Para sons puros, verifica-se que a variação de intensidade pode afectar a sensação de altura [5]. Ao aumentar a intensidade, os sons graves descem e os sons agudos sobem. Este fenómeno é conhecido por efeito Stevens (Figura 3.3).

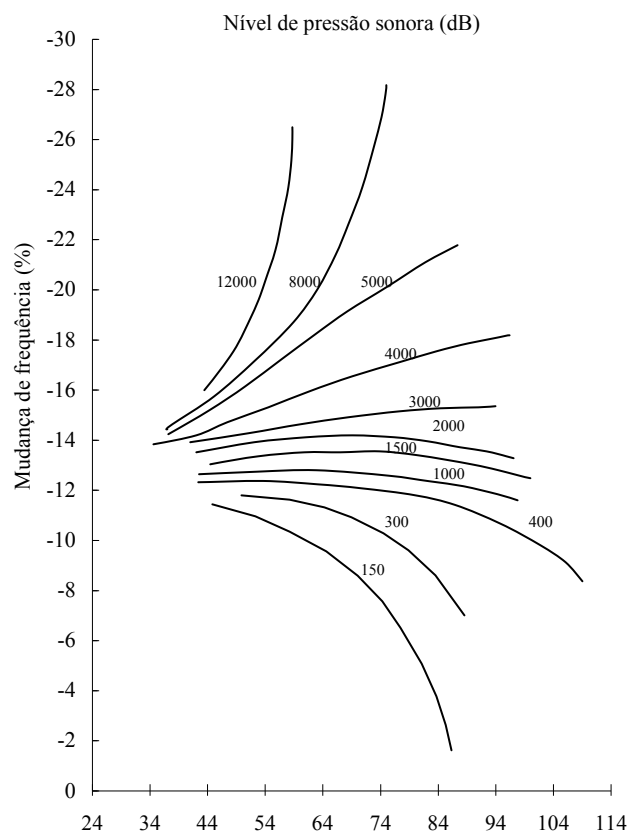


Figura 3.3: O Efeito Stevens consiste na influência da intensidade na altura.

A leitura da Figura 3.3 permite perceber quanto se deve diminuir na frequência para contrariar a tendência de aumento de altura auditiva, com o aumento de intensidade. É de salientar que em ordenadas, a percentagem de variação de frequência é negativa, para mostrar a compensação necessária para que não haja variação na sensação de altura. Por exemplo, quando se aumenta a intensidade de um som para 150 Hz de 45 dB para 90 dB, a altura do som parece baixar o

correspondente a 12 % da frequência; aumentando 12 % a frequência, a sensação de altura permanecerá constante. O mesmo é válido para os sons mais agudos.

Uma determinada frequência origina uma onda que percorre a membrana basilar, com um máximo de amplitude num determinado ponto, função da frequência em causa. Essa crista da membrana basilar não responde ao envolvimento de uma única terminação nervosa, mas abrange um determinado número de terminações nervosas na vizinhança desse máximo. Os pontos da membrana basilar assim afectados correspondem a uma banda de frequências, denominada banda crítica. A banda crítica varia em função da zona de frequências. Assim, por exemplo, para uma frequência de 200 Hz a banda crítica é de 90 Hz, para a frequência de 5 kHz a banda crítica é de 900 Hz. A banda crítica corresponde a uma zona da membrana basilar de largura constante e igual a 1,2 mm, contendo cerca de 1300 células sensoriais [6].

Quando dois sons puros têm frequências de tal modo próximas, que as curvas envolventes da membrana basilar se sobrepõem substancialmente, diz-se que pertencem à mesma banda crítica. Dentro da gama de frequências audíveis existem cerca de 24 bandas críticas.

### 3.1.2 Intensidade, Potência acústica e Pressão sonora

A passagem de uma onda sonora por um meio fluido origina alterações de pressão e da velocidade das partículas. A intensidade sonora é definida pelo produto da pressão pela velocidade das partículas, que é equivalente à potência recebida por unidade de área.

O nível de intensidade sonora,  $L_I$ , [7] relaciona a intensidade sonora,  $I$ , com um valor de referência  $I_0$  ( $10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>) e é geralmente dado numa base logarítmica por:

$$L_I = 10 \times \log \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad (3.8)$$

Numa onda progressiva que se propaga livremente no ar, o nível de pressão sonora e o nível de intensidade sonora são praticamente iguais.

A potência acústica é a energia recebida por unidade de tempo [7]. O nível de potência acústica,  $L_w$ , reflecte a potência sonora total emitida pela fonte sonora em todas as direcções e é representado como função da potência acústica de referência,  $P_0$ , ( $10^{-12}$  W) e a potência acústica real,  $P$ , por:

$$L_w = 10 \times \log \left( \frac{P}{P_0} \right) \quad (3.9)$$

A pressão sonora representa o aumento de pressão relativamente à pressão atmosférica, provocado pela onda. O nível de pressão sonora, SPL (*sound pressure level*), é o nível correspondente à pressão provocada pela vibração sonora, medida num determinado ponto. O SPL é a medida mais usual quando se fala em amplitude da onda sonora, devido à sensibilidade do ouvido em relação às variações de pressão e por ser uma quantidade simples de ser medida. A escala de decibéis, SPL, define níveis sonoros comparando as pressões sonoras,  $p$ , com uma pressão sonora de referência,  $p_0$ , ( $2 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$ ) correspondente ao limiar de audibilidade:

$$SPL = 20 \times \log \left( \frac{P}{P_0} \right) \quad (3.10)$$

A pressão sonora para fontes sonoras reais pode variar entre 20  $\mu\text{Pa}$  (mínimo de audição) e 20 Pa (limiar de dor), para o ouvido humano a 1 kHz de frequência.

O valor do nível sonoro pretende traduzir, sob a forma de valor único, a pressão sonora “sentida” pelo ouvido humano. Pode ser expresso em dB (A) e não dá informação sobre a distribuição do nível do sinal ao longo da frequência. O cálculo deste valor, usando a malha de ponderação A, corresponde à integração corrigida, do conteúdo espectral em presença.

Esta ponderação é feita de acordo com a seguinte expressão [8]:

$$SPL = 10 \times \log_{10} \left( \sum_i 10^{0,1 \times (SPL_i + C_i)} \right) \quad (3.11)$$

em que  $SPL_i$  representa o nível de pressão sonora em cada uma das bandas de frequências  $i$  consideradas e  $C_i$  as correcções relativas à ponderação em causa (malha A), as quais, para análises efectuadas por bandas de frequências com a largura de 1/3 de oitava, entre as frequências centrais extremas de 100 Hz e 5kHz, se apresentam no Quadro 3.1.

É possível “quantificar” a sensação de intensidade (*loudness level*) e estabelecer a escala de fones, reflectindo, assim, a resposta do ouvido, através de curvas isófonas, correspondentes ao nível de igual sensação de intensidade para sons puros [9]. Para isso foram feitos testes a milhares de pessoas e os resultados médios condensados num gráfico, definido de acordo com a recomendação da ISO (International Standard Organization) - *Diagrama de Fletcher* ou *Curvas de Fletcher* (Figura 3.4).

Frequência (Hz)	$C_i$	Frequência (Hz)	$C_i$
100	-19,1	800	-0,8
125	-16,1	1000	0,0
160	-13,4	1250	0,6
200	-10,9	1630	1,0
250	-8,6	2000	1,2
315	-6,6	2500	1,3
400	-4,8	3150	1,2
500	-3,2	4000	1,0
630	-1,9	5000	0,5

Quadro 3.1: Correções devidas à malha A.

O número de fones de um som de frequência,  $f$ , é dado pelo nível de pressão sonora de um som de 1 kHz (que se julga ter a mesma intensidade) [6].

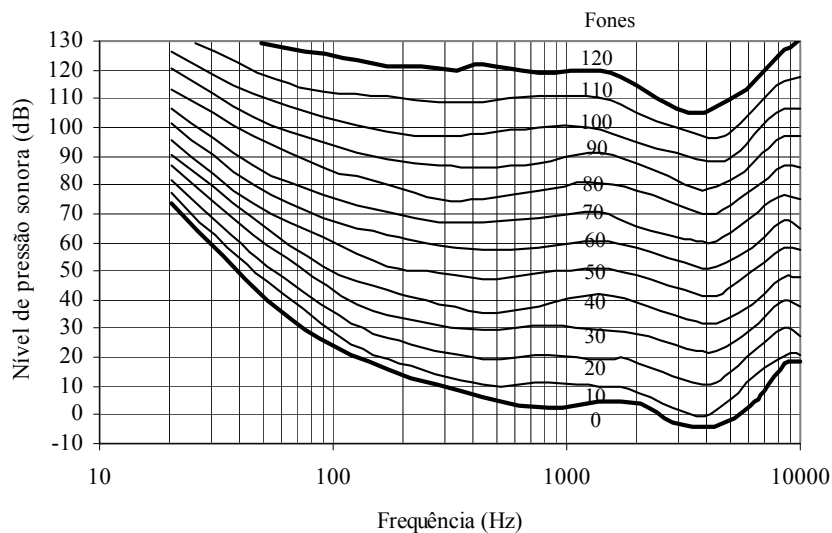


Figura 3.4: Diagrama de Fletcher.

As grandezas referidas (potência acústica, intensidade sonora e pressão acústica) apresentam uma gama de variação muito extensa entre os sons minimamente audíveis e os sons insuportáveis para o ouvido humano, o que torna a sua utilização directa pouco prática. Esta questão passou a ser resolvida com a utilização de uma escala logarítmica, o decibel (dB):

$$\text{dB} = 10 \times \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad (3.12)$$

em que dB representa o nº de decibéis,  $I$  a intensidade do som e  $I_0$  a intensidade de referência.

Uma razão muito importante que justifica a utilização de escalas logarítmicas prende-se com o facto do ouvido responder às perturbações acústicas em termos logarítmicos (não linear).

Assim sendo, não se pode calcular a intensidade resultante de vários sons pela simples soma aritmética das intensidades de cada som individual. Para determinar a energia sonora resultante de duas ondas, adiciona-se a energia relativa de cada uma, e não os níveis de pressão.

Seja  $p_1$  a pressão sonora exercida num certo ponto pela fonte sonora 1,  $p_2$  a pressão sonora exercida no mesmo ponto pela fonte sonora 2, ... ,  $p_n$  a pressão sonora exercida pela fonte sonora  $n$ , então o nível de pressão sonora resultante das  $n$  fontes sonoras nesse ponto será:

$$L_p = 10 \times \log_{10} \left( \frac{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)}{p_0^2} \right) \quad (3.13)$$

Durante a propagação sonora, verifica-se que a intensidade sonora tem uma diminuição, que é proporcional ao quadrado da distância. Este fenómeno, conhecido por “lei do inverso do quadrado da distância”, diz que em campo livre, a intensidade sonora é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre a fonte e o observador. Num campo livre, se uma fonte emitir energia sonora igualmente em todas as direcções, verifica-se que o nível de pressão sonora diminui 6 dB, sempre que a distância à fonte sonora duplica. No ar, o som transmite-se por ondas esféricas, cujo centro é a fonte sonora. Num dado momento o som chega ao mesmo tempo a todos os pontos da superfície de uma certa esfera. Assim, sabendo a potência da fonte sonora,  $P$ , o raio da esfera,  $r$ , e a superfície da esfera ( $4\pi r^2$ ), é possível calcular a intensidade sonora que se ouve à distância  $r$  da fonte sonora, através da seguinte equação:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (3.14)$$

Se o ruído estiver misturado com a fala, parte desta pode tornar-se inaudível ou “mascarada”. A percepção da fala de indivíduos com audição normal é mais afectada pelo ruído de espectro constante, do que por ruídos impulsivos. Os efeitos globais do ruído, na percepção da fala, podem ser deduzidos a partir de uma relação sinal/ruído (S/R) expressa em dB, que relaciona o índice de intensidade da fala (S) com a intensidade do ruído existente (R) [10].

A média ponderada (A) dos níveis de ruído de fundo, em escolas e em casas encontra-se entre 45 dB e 55 dB [11]. Com um nível médio de fala de aproximadamente 65 dB, medido a uma distância de 1 m da boca do falante, a relação S/R em escolas e casas está compreendida entre 10

dB e 20 dB. De referir que a relação S/R deveria ser de, pelo menos, +10 dB, para garantir uma boa comunicação da fala.

Indivíduos com 30 dB de perda auditiva necessitarão de um aumento de 4 dB na relação S/R, enquanto que pessoas com 80 dB de perda, podem necessitar de 12 dB de aumento, para manter os mesmos 50 % de compreensão da fala [11].

Sonoridade, ou sensação de intensidade (*loudness*), é uma grandeza psicológica que transmite a sensação como se ouve o som, se é forte ou fraco. Essa sensação depende, essencialmente, da sua intensidade, mas também de outros factores, como, por exemplo, o efeito de ressonância do ouvido externo.

O efeito do pavilhão auricular e do canal auditivo externo, provoca uma resposta do sistema auditivo que não é a mesma para todas as frequências [7].

A sensação de intensidade pode ser modificada devido a vários factores: previsibilidade (saber se vai ouvir, ou não, um som forte ou fraco, provoca diferentes sensações de intensidade); fadiga (produz diminuição, ou mesmo anulação, da sensação de intensidade); idade (a sensibilidade auditiva diminui com a idade, verificando-se as maiores perdas nos agudos, fenómeno conhecido por presbiacusia); exposição prolongada a sons intensos (pode provocar traumatismo acústico).

### 3.1.3 Amplitude, Fase e Timbre

A amplitude, medida da magnitude da onda sonora, relaciona-se directamente com a percepção de intensidade sonora; por exemplo, sons mais intensos serão resultado de uma maior amplitude, ou seja, um deslocamento maior das moléculas.

Define-se fase como sendo o ângulo que define a fracção de um período ou ciclo, entre um ponto de referência e outro qualquer ponto de uma sinusóide.

O timbre é uma característica subjectiva do som, que permite ao indivíduo diferenciar dois sons de altura e intensidades iguais. O timbre resulta da correlação, subjectiva, de todas as propriedades do som que não influenciam directamente nem a altura nem a sensação de intensidade [12]. O timbre é a mais complexa das características do som e por ser extremamente difícil de quantificar está muito menos esclarecido, fisicamente, que as sensações de altura e de intensidade. Em música, chama-se timbre à característica sonora que permite distinguir sons da mesma frequência produzidos por fontes sonoras conhecidas, diferenciando-as. Quando se ouve,

por exemplo, uma nota de um piano e a mesma nota (com a mesma altura) produzida por um violino, é possível imediatamente, identificar os dois sons como tendo a mesma frequência, apesar das características sonoras distintas. O que permite diferenciar os dois sons é o timbre instrumental. O timbre está directamente relacionado com a habilidade de analisar frequências e depende das combinações de frequências e de intensidades no modelo físico da estimulação acústica.

## 3.2 Propagação do som

O meio funciona como um suporte para a perturbação inicial, provocada pela vibração de uma fonte sonora, se poder propagar. Pode dizer-se que uma onda é uma perturbação que se propaga num meio elástico, designado por movimento ondulatório.

O som, ao propagar-se no ar, origina flutuações de pressão (compressões e rarefacções) relativamente à pressão atmosférica. O ouvido, que é um órgão extremamente sensível às variações de pressão, detecta diferenças diminutas, relativamente à pressão atmosférica.

A transmissão do som é regida pelo princípio de Huygens, segundo o qual se considera que qualquer ponto de um meio transmissor (à distância  $\Delta x$ ) tende a “imitar” a origem, com um certo atraso:  $\Delta t = \Delta x / c$ , em que  $c$  é a velocidade de propagação do som. Na prática, isto significa que a relação entre as amplitudes vibratórias, em dois pontos do meio distanciados  $\Delta x$ , é a seguinte:

$$y(x + \Delta x, t) = y(x, t - \Delta t) = y\left(x, t - \frac{\Delta x}{c}\right) \quad (3.15)$$

### 3.2.1 Velocidade de propagação

A velocidade do som depende da massa e da elasticidade do meio de propagação, as quais dependem da temperatura. No caso dos sólidos dependem, ainda, da densidade do material e o módulo de *Young*, que representa a elasticidade do material em questão. A velocidade é proporcional ao quadrado da razão entre o módulo de *Young* e a densidade do sólido.

No caso dos gases, a velocidade depende do tipo de gás, do seu peso molecular e da sua temperatura absoluta [7] segundo a equação:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad \text{ou:} \quad c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (3.16)$$

em que  $c = 331$  m/s (para o caso do ar seco, a  $0^\circ C$ ),  $\gamma$  a constante que depende do gás (1,4),  $R$  a constante universal dos gases ( $8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ),  $T$  a temperatura absoluta ( $273,15 \text{ K}$ ),  $M$  a massa molecular ( $2,88 \times 10^{-2} \text{ Kg mol}^{-1}$ ),  $\rho$  massa volúmica e  $p$  a pressão atmosférica.

Admitindo  $\gamma$ ,  $R$ ,  $M$  constantes para o ar, pode escrever-se a equação (3.16) apenas em função da temperatura:

$$c = 20,1\sqrt{T} \quad (3.17)$$

Verifica-se que a velocidade de propagação do som no ar aumenta, aproximadamente, 0,6 m/s por cada grau celsius.

### 3.2.2 Comprimento de onda

As ondas de pressão, que caracterizam as chamadas ondas sonoras, são do tipo longitudinal e propagam-se num meio material – sólido, líquido ou gasoso, sendo susceptíveis de provocar uma sensação auditiva. Quanto à sua natureza, as ondas sonoras são mecânicas.

Por definição, comprimento de onda ( $\lambda$ ) é a distância percorrida pela onda durante um período de tempo, sendo a equação do movimento ondulatório dada por:

$$\lambda = C / f \quad (3.18)$$

em que  $C$  representa a velocidade do som e  $f$  a frequência da onda sonora.

O cálculo dos comprimentos de onda das frequências limite dos sons audíveis põe em evidência a grande variação de valores existentes. Os sons graves, têm grandes comprimentos de onda e, inversamente, os sons agudos têm comprimentos de onda pequenos.

É particularmente importante para os fenómenos de percepção espacial dos sons e para a sua propagação, em recintos fechados, saber a ordem de grandeza do comprimento de onda, relativamente às dimensões dos objectos.

### 3.2.3 Fenómenos de propagação do som

O campo sonoro é uma zona do espaço, definido pela pressão sonora e pela velocidade das partículas. A sua natureza depende da radiação da fonte sonora, da distância à fonte e dos obstáculos no percurso das ondas.

Campo livre é um campo em que as ondas sonoras se podem propagar em todas as direcções, sem obstáculos, não havendo reflexão, difracção, refração, absorção nem mesmo difusão. Assim, não existem fenómenos de ressonância. Um ambiente assim definido só dificilmente existe [7].

A melhor aproximação é feita através de câmaras anecóicas, que devem ser utilizadas na realização dos exames de audição, para uma maior fidelização dos resultados.

As ondas sonoras ao encontrarem um obstáculo de grandes dimensões, relativamente ao comprimento de onda (parede plana e rígida) geram o fenómeno de reflexão. Se os obstáculos forem muito menores do que o comprimento da onda incidente, criam apenas uma sombra acústica, ou não afectam a transmissão. Nas médias e altas frequências, as ondas sonoras comportam-se, geometricamente, como raios, à semelhança dos raios de luz. A reflexão tende a gerar efeitos como o eco e a reverberação.

A difracção representa a distorção das frentes de onda, na propagação do som, provocada pelos obstáculos que as ondas sonoras encontram e que têm de contornar. Sons mais graves, com ondas mais longas, têm maior difracção que os sons agudos. A difracção sonora provocada pela cabeça é um dos principais factores em que se baseia a estereofonia.

Existe refacção quando as ondas passam de um meio para outro com diferente velocidade de propagação. É o que acontece com a propagação em meios submetidos a variações de temperatura ou em presença de vento. O som tende a ter maior velocidade na direcção e sentido do vento e tende a ser retardado em sentido contrário. A velocidade de propagação do som no ar aumenta, substancialmente, com a temperatura.

À diminuição da energia das ondas sonoras, provocada pelo meio que a onda está a atravessar na propagação do som, chama-se absorção [7]. Essa atenuação pode depender da temperatura, da humidade ou da poluição. O som é absorvido quando entra em contacto com qualquer objecto físico. Isto acontece porque o objecto atingido tenderá a vibrar, dispersando energia da onda sonora e também porque há perda, por fricção, dentro do material. Em geral, materiais porosos (lã de vidro, tecidos, cortiça) absorvem melhor o som.

A difusão é a reflexão das ondas numa superfície irregular, sendo a direcção da dispersão independente do ângulo de incidência.

O eco é uma repetição simples com diferença de tempo de mais de 0,08 segundos do som original e de sua reflexão. Para ocorrer o eco é necessário existir um obstáculo que esteja a mais do que 17 metros de distância do emissor; o obstáculo tem que ser feito de um material polido e denso que não absorva o som (metais, rochas, betão). O ser humano detecta dois sons que estejam separados por cerca de 0,1 segundos, ou seja, para a velocidade do som no ar, esse tempo representa 34 metros. Assim, se o obstáculo estiver a menos de 17 metros não se detecta a

diferença entre o som que se emite e o som que se recebe, e desse modo, o efeito de eco não acontece apesar da onda ter sido reflectida.

Em processamento de sinal de áudio e em acústica, o eco é uma reflexão de som que chega ao ouvinte pouco tempo depois do som directo. Um eco verdadeiro é uma única reflexão da fonte de som. O intervalo de tempo é a distância extra, dividida pela velocidade do som.

A ressonância consiste na geração de vibrações num sistema, pela aplicação de uma força periódica, cuja frequência é igual à frequência própria do sistema.

Um aspecto importante relacionado com a ressonância é a amplificação feita pelo ouvido externo, antes das ondas sonoras atingirem a membrana timpânica. Uma das funções do ouvido externo é o aumento da intensidade dos sons captados. Este aumento resulta da ressonância, quer do canal auditivo externo, quer da concha. O canal auditivo externo comporta-se como um tubo sonoro fechado, funcionando como um ressoador. A frequência de ressonância depende do comprimento do canal, tendo um pico de ressonância perto dos 4kHz, superior a 10 dB. Não funciona, exactamente, com um tubo fechado, por ser tapado pela membrana timpânica. Outro efeito de ressonância complementar, com um pico de 5kHz é provocado pela concha [13]. A amplificação provocada pela ressonância da concha e do canal auditivo externo é muito importante para a percepção da palavra.

A reverberação é um conjunto de reflexões rápidas e complexas, em superfícies de um ambiente fechado, que o ouvinte não consegue distinguir [14]. A reverberação ocorre quando o som reflectido atinge o observador no instante em que o som normal termina, ocasionando um prolongamento da sensação auditiva. As múltiplas reflexões das ondas sonoras numa sala constituem a reverberação desse espaço. A reverberação natural é produzida pela reflexão de sons em superfícies, que dispersam o som, enriquecendo-o por sobreposição das suas reflexões. A quantidade e qualidade da reverberação num ambiente natural são influenciadas por vários factores: o volume e dimensão do espaço, o tipo, a forma e o número de superfícies com as quais o som colide. No que concerne à reverberação [7] consideram-se normalmente quatro parâmetros: tempo de reverberação, dependência de frequências do tempo de reverberação, atraso da chegada da primeira reflexão, taxa de crescimento da densidade de eco.

Na maioria dos casos, quando uma fonte sonora emite um som, a frequência captada pelo observador é igual à frequência emitida. No entanto, se a fonte sonora e o ouvinte estiverem em movimento, isso não acontece. Se houver aproximação relativa, a frequência percebida sobe

progressivamente e se houver afastamento, a frequência detectada diminui. Durante a aproximação é percebido um maior número de frentes de ondas, por segundo, e durante o afastamento, o ouvido capta um menor número. Esta variação aparente da frequência chama-se efeito Doppler, em homenagem ao físico e matemático austríaco, Christian Johann Doppler (1803-1853). O efeito Doppler detecta-se quando a velocidade relativa é superior a 25 Km/h.

Denominando,  $f'$ , a frequência recebida pelo observador e,  $f$ , a frequência emitida pela fonte, tem-se: Aproximação ( $f' > f$ ) e Afastamento ( $f' < f$ ). Estas grandezas são relacionadas por:

$$f' = f \left( \frac{v \pm v_0}{v \pm v_F} \right) \quad (3.19)$$

em que  $v$  é a velocidade da onda;  $v_F$  a velocidade da fonte;  $v_0$  a velocidade do observador;  $f$  a frequência real emitida pela fonte;  $f'$  a frequência aparente recebida pelo observador.

Os sinais (+) ou (-) que precedem  $v_0$  ou  $v_F$  são utilizados de acordo com a convenção:

$v_0$   $\left\{ \begin{array}{l} + \text{ observador aproxima - se da fonte} \\ - \text{ observador afasta-se da fonte} \end{array} \right.$

$v_F$   $\left\{ \begin{array}{l} + \text{ fonte afasta-se do observador} \\ - \text{ fonte aproxima - se do observador} \end{array} \right.$

$v_0 = 0$ , o observador está fixo

$v_F = 0$ , a fonte está fixa

### 3.2.4 Impedância acústica

A impedância acústica reflecte o grau de resistência que um meio oferece ao movimento das ondas sonoras. Em acústica interessa, particularmente, a transferência de energia mecânica e acústica nos sistemas envolvidos. São as diferenças de impedância que criam as reflexões das ondas. Uma descontinuidade de massa ou de rigidez provoca diferenças de impedância. A impedância acústica numa superfície especificada de um meio de ondas sonoras é considerada como a pressão, dividida pelo fluxo através desta.

A impedância acústica ( $Z$ ) é composta por duas grandezas: a resistência e a reactância. As vibrações produzidas por uma onda sonora não continuam indefinidamente pois são amortecidas pela resistência que o meio material lhes oferece. Essa resistência acústica ( $R$ ) é função da

densidade do meio  $\rho$ , conseqüentemente, da velocidade de propagação do som nesse meio. A resistência é a parte da impedância que não depende da frequência.

A reactância acústica (X) é a parte da impedância que está relacionada com a frequência do movimento resultante (onda sonora que se propaga). É proveniente do efeito produzido pela massa e pela elasticidade do meio material sobre o movimento ondulatório.

A admitância acústica (Y) é a recíproca da impedância e define a facilitação que o meio elástico oferece ao movimento vibratório. Para o som, a impedância do ar é maior que a da água.

A impedância acústica pode ser descrita pela seguinte expressão:

$$Z = \sqrt{\mu^2 + \left( M \times 2\pi f - \left( \frac{k}{2\pi f} \right) \right)^2} \quad (3.20)$$

em que  $\mu$  representa o atrito,  $M$  a massa,  $k$  a rigidez e  $f$  a frequência.

Para avaliar a impedância do ouvido médio existem testes de diagnóstico, nomeadamente a Impedanciometria, que engloba a timpanometria e a pesquisa do reflexo acústico.

Uma sonda que contém um microfone e um sinal acústico (normalmente a 226 Hz) é colocada no canal auditivo externo. É importante que a sonda adira bem ao canal, enquanto faz variar a pressão de ar de +200 para -400 decapascal (daPa). O pico de máxima *compliance* ocorre quando a pressão de ar do canal auditivo externo se mantém igual à pressão do ouvido médio, maximizando a transmissão acústica através do ouvido médio. A sonda detecta a quantidade de som que passa pelo ouvido médio e a quantidade que é reflectida. O timpanograma é um teste que permite avaliar a mobilidade da membrana timpânica e detectar lesões ao nível do ouvido médio, medindo a reflexão do som aplicada sobre a membrana timpânica, enquanto se varia a pressão de ar no canal auditivo externo. A classificação de Jerger é a mais usada para timpanogramas. Existem cinco tipos (tipo A, As, Ad, B e C). O timpanograma do tipo A considera a função do ouvido médio normal (Figura 3.5-a)). O pico de *compliance* varia de -150 a + 100 daPa, e a imitância de 0,2 a 2,5 (mmhos). O timpanograma tipo As sugere um sistema de ouvido médio rígido (Figura 3.5-b)). O pico de *compliance* varia de -150 a + 100 daPa, mas a imitância é menor que 0,2 mmhos. Pode sugerir um ouvido otosclerótico. O timpanograma tipo Ad representa uma membrana timpânica flácida, ou uma desarticulação da cadeia ossicular (Figura 3.5-c)). O pico de *compliance* varia de -150 a + 100 daPa, e a imitância é maior que 2,5 mmhos.

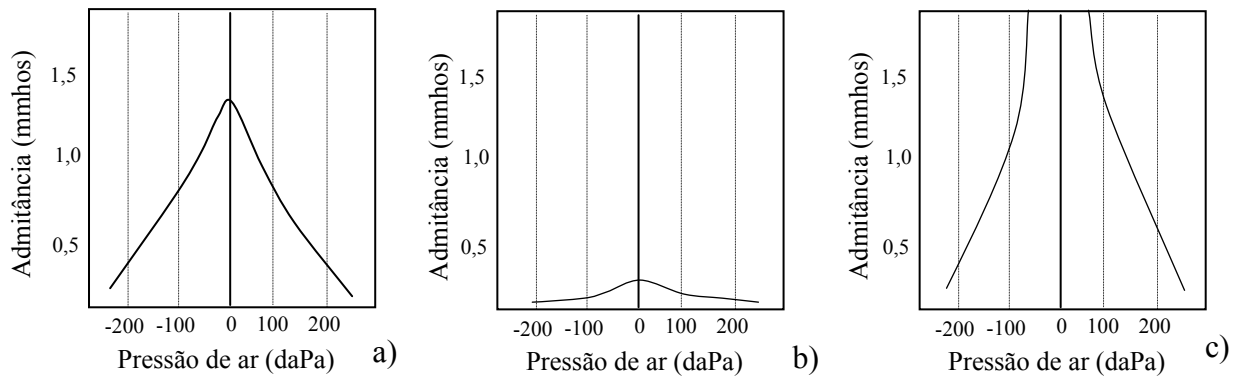


Figura 3.5: Timpanogramas tipo A, As e Ad, respectivamente.

O timpanograma tipo B é um traçado plano sem pico de *compliance* ou imitância e pode estar relacionado com a presença de otite média (Figura 3.6-a)).

O timpanograma tipo C revela uma significativa pressão negativa no ouvido médio e pode sugerir uma otite em fase de cura. O pico de imitância é medido, mas o pico de *compliance* é menor que -150 daPa (Figura 3.6-b)).

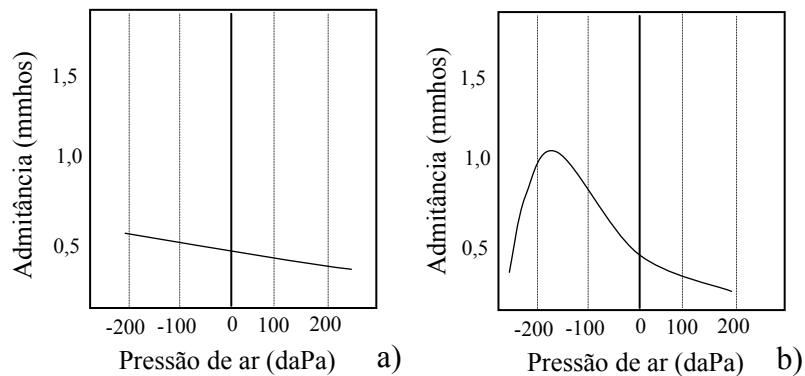


Figura 3.6: Timpanogramas tipo B e C, respectivamente.

A pesquisa do reflexo acústico revela a contração do músculo estapediano, que se espera ser normal, em indivíduos com audição normal ou com perda neurosensorial, cujo grau não seja elevado. Este músculo contrai-se em resposta a sons fortes, particularmente sons graves e médios, reduzindo a transmissão do som e, conseqüentemente, protegendo o ouvido interno.

O reflexo acústico tem grande valor no diagnóstico diferencial de perdas auditivas neurosensoriais, na avaliação do funcionamento do nervo facial, integridade do funcionamento do ouvido médio e do cruzamento das vias auditivas centrais ao nível do tronco cerebral.

Na avaliação do reflexo acústico, o músculo estapediano contrai-se bilateralmente.

O limiar do reflexo acústico corresponde à menor intensidade de um som, capaz de desencadear o mecanismo de contração do músculo estapediano (Figura 3.7). Os limiares do reflexo acústico são, por norma, determinados em resposta a um estímulo de 500, 1 k, 2 k, e 4 k Hz. É possível a pesquisa dos reflexos acústicos, tanto ipsilaterais como contralaterais.

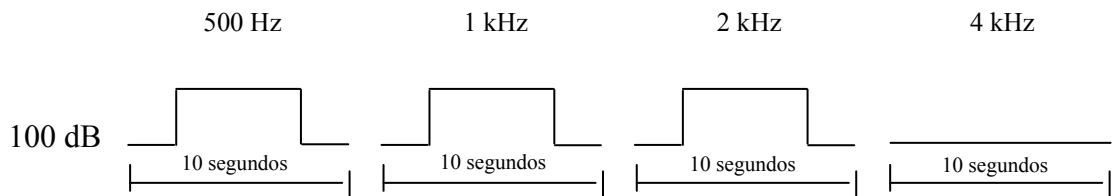


Figura 3.7: Presença de reflexo acústico, a 500, 1 k e 2 k Hz, e ausência a 4 kHz, para uma intensidade de 100 dB.

## 3.3 Percepção espacial

O ouvido humano tem a capacidade de ouvir sons complexos de dois modos: analítico, ouvindo as componentes frequenciais isoladamente, e global, sem se aperceber dessas componentes.

Na percepção da fala pode acontecer um fenómeno, denominado “efeito cocktail party”, o qual consiste na capacidade de focalizar a audição num comunicador, enquanto decorrem conversações simultâneas, do mesmo nível sonoro, num ambiente reverberante.

O “efeito cocktail party” é extensível a outro tipo de sons e resulta de características inerentes à audição bilateral: diferenças de intensidade e temporais ao nível dos dois ouvidos.

### 3.3.1 Efeito de máscara

Na audição de dois ou mais sons, simultaneamente, pode acontecer que um deles mascare os outros, fenómeno que se designa por efeito de máscara. Este efeito é a resultante de uma subida do limiar de audibilidade do som que é mascarado. Pode concluir-se que os sons puros, de frequências próximas, mascaram-se mais facilmente do que sons de frequências afastadas; um som puro mascara mais eficazmente sons de alta frequência do que sons de baixa frequência; quanto maior for a intensidade de um som, maior é a gama de frequências que pode mascarar; uma banda estreita de ruído tem uma capacidade de mascarar, idêntica à dos sons puros; quando o som mascarador é um ruído branco, verifica-se uma relação linear entre o nível de intensidade do ruído e o efeito de máscara produzido. O efeito de máscara será reduzido se o tipo de oscilação da membrana basilar, provocado por um som, ficar fora da banda crítica de outros sons em presença [7].

### 3.3.2 Localização do som

O ouvido humano capta sons vindos de todas as direcções. No entanto, a intensidade com que se ouve não é a mesma em qualquer incidência. Por exemplo, um som vindo do lado direito terá que contornar a cabeça para atingir o ouvido esquerdo. A cabeça é a principal responsável pelas características direccionais do ouvido, por constituir um “obstáculo” à captação do som. Quando se diz que o ouvido tem características direccionais significa que a sua sensibilidade varia com a direcção de incidência do som. Para frequências inferiores a 300 Hz, a sensação de intensidade

não depende da direcção do som. Para frequências mais agudas, todas as direcções em que as ondas têm de contornar a cabeça, provocam uma sensação de intensidade inferior. Para determinar a localização de uma fonte sonora é necessário conhecer a sua direcção, isto é, o seu azimute, a altura e a distância a que se encontra (profundidade) (Figura 3.8).

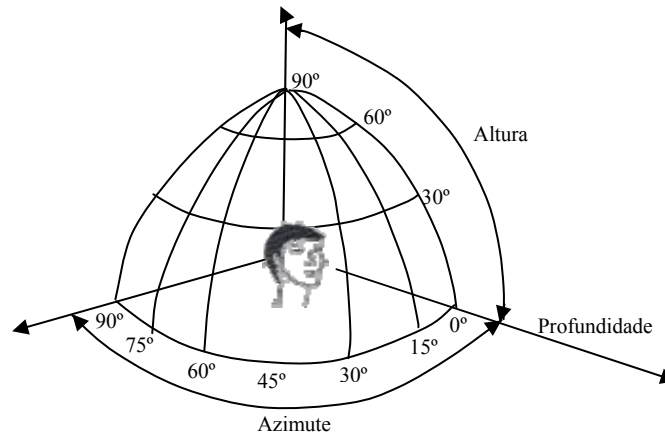


Figura 3.8: Diagrama com os três parâmetros que permitem a localização de uma fonte sonora.

### 3.3.3 Binauralidade

Ao processamento do som pelos dois ouvidos chama-se binauralidade. Esta determina a forma como as informações codificadas por um ouvido interagem com as informações codificadas pelo outro ouvido. Se o som incidir rigorosamente na direcção do eixo frontal da cabeça, as ondas sonoras atingirão os dois ouvidos exactamente ao mesmo tempo.

O sistema nervoso humano tem a capacidade de detectar a direcção de incidência do som, através da diferença de percurso das ondas até aos dois ouvidos. Um lapso de tempo de 0,03 ms é suficiente para se detectar uma mudança de direcção do som; este valor corresponde a uma diferença de percurso de 1 cm para cada ouvido, isto é, o ouvido humano consegue reconhecer um desvio de 3° do eixo de incidência frontal [15]. A amplitude deste ângulo pode aumentar, aproximadamente, até 7,5° para outras direcções de incidência.

A percepção da direcção do som deve-se às diferenças detectadas ao nível dos dois ouvidos: diferenças de tempo, de intensidade e de timbre. A conjugação destes três parâmetros permite ao ouvido humano detectar, com certo rigor, diferenças de 3° para ângulos de +/- 45°, relativamente ao eixo frontal e diferenças de 4,5° para ângulos de 45° a 90° [15], [16].

### 3.3.4 Limiares auditivos

Audibilidade é o estudo de como o ouvido recebe e interpreta as variações da pressão sonora, associadas a variações de frequência. Para que um som se ouça tem de ter uma determinada intensidade mínima, a que se chama limiar de audibilidade. Este limiar é definido, segundo *American National Standards Institute* (ANSI), como “O nível mínimo de pressão sonora de um sinal acústico, que produz sensação auditiva numa percentagem específica de testagem” [11]. Utilizando um gerador de sons sinusoidais, facilmente se verifica que o limiar de audibilidade não é o mesmo para todas as frequências (Figura 3.9). Observando a curva dos limiares verifica-se que se ouve menos bem nas regiões grave e sobreaguda, onde os valores dos limiares de audibilidade são altos; a máxima sensibilidade auditiva situa-se na zona 1kHz-5kHz [17].

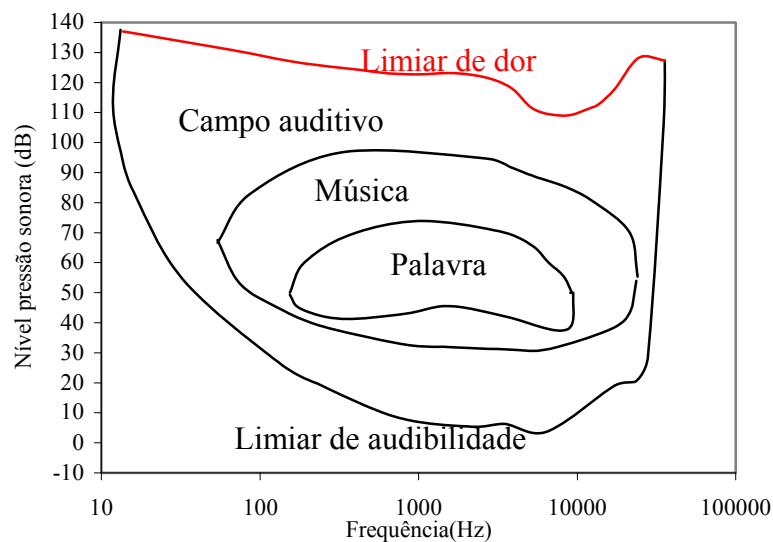


Figura 3.9: Zonas do campo auditivo.

Se a intensidade de um som for aumentada, atinge-se um ponto de intolerância auditiva. Ultrapassado esse limite, o som pode causar dor. Esse valor, que separa o tolerável do intolerável, denomina-se limiar de dor; não é mais do que a intensidade máxima que o ouvido pode tolerar. Tal como o limiar de audibilidade, também o limiar de dor depende da frequência, ainda que em menor grau.

As duas linhas que representam os referidos limiares delimitam o campo auditivo.

A avaliação auditiva de um indivíduo pode ser feita por métodos subjectivos e objectivos.

O método subjectivo necessita da cooperação do indivíduo a ser testado e é, normalmente, feito através de um audiograma, que é um gráfico que representa a resposta do ouvido humano em função de uma gama de frequências (normalmente entre 128 Hz e 8 kHz) revelando, assim, o nível mínimo de audibilidade de cada ouvido (Figura 3.12, Figura 3.13).

O método objectivo baseia-se nos registos da actividade eléctrica ao longo de toda a via auditiva, desde a cóclea até ao córtex cerebral, sendo de realçar os potenciais evocados auditivos precoces do tronco cerebral - BER - (Figura 3.10-a)) e a electrococleografia – ECOG - (Figura 3.10-b)). O BER permite avaliar a integridade nervosa e a sua sincronia até ao corpo do gânglio geniculado, sendo utilizado, clinicamente, para determinar limiares electrofisiológicos auditivos (por ex. em crianças pequenas que ainda não colaboram na audiometria convencional ou em casos de simuladores) e para despiste de tumores (ex. schwanoma do acústico).

A ECOG regista o potencial de somação (SP) das células ciliadas da cóclea e o potencial de acção (AP) do nervo auditivo, permitindo diagnosticar a hidropisia endolabiríntrica (aumento da endolinfa no ouvido interno), nomeadamente a doença de Ménière. Em casos patológicos a relação PS/PA é superior a 37%.

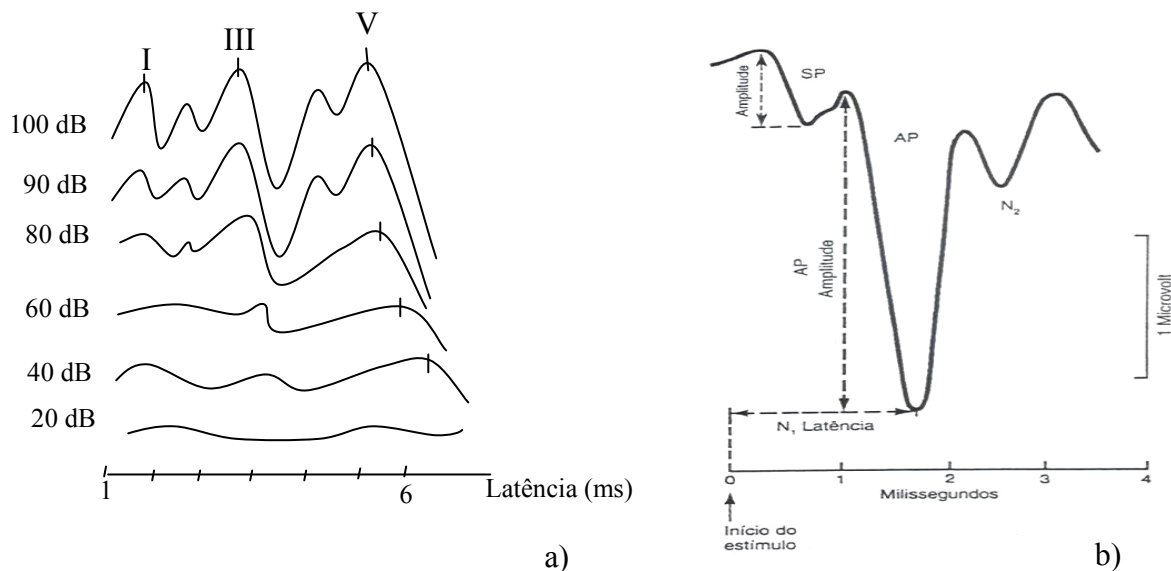


Figura 3.10: Traçados: BER, com evidência das ondas I, III e V, revelando um limiar electrofisiológico de 40 dB (a); Electrococleografia normal, com a indicação de SP e AP.

A linguagem é uma actividade adquirida e o estudo do seu desenvolvimento na criança demonstra que essa aquisição se faz progressivamente. A comunicação oral implica a existência de um sistema de produção da fala, mecanismo de propagação do som emitido e sistema de percepção. A máxima sensibilidade do ouvido situa-se na gama de 400 Hz a 4kHz, que corresponde também à gama das principais frequências em que se definem os sons da fala [18]. Em audiologia existem testes de audiometria vocal (Figura 3.11) que avaliam a habilidade de discriminação da palavra, com o objectivo de se determinarem os níveis de intensidade a partir dos quais a fala é ouvida e compreendida.

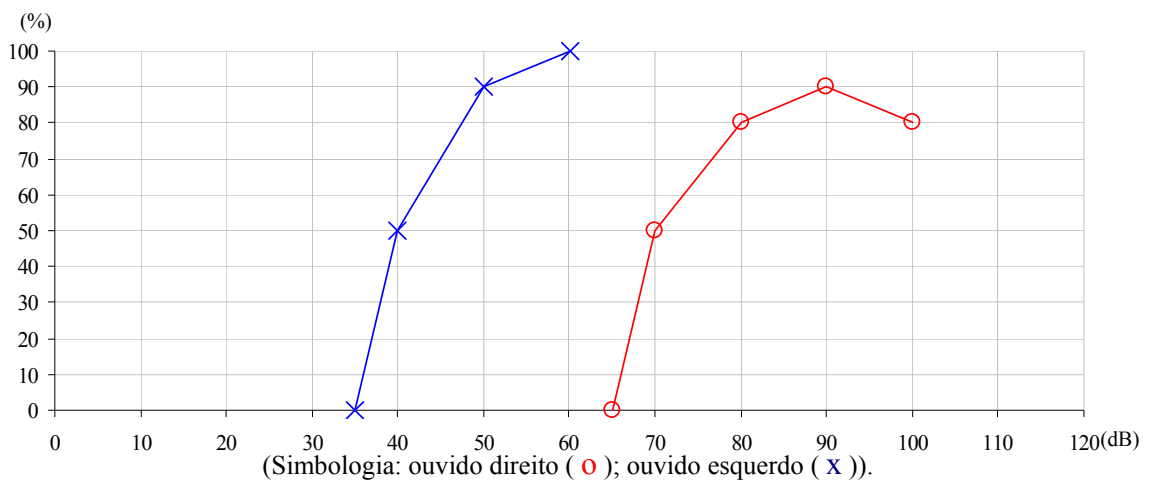


Figura 3.11: Traçados de curvas de inteligibilidade dos dois ouvidos, que permitem verificar a percentagem de palavras ditas correctamente, para determinados níveis de intensidade.

## 3.4 Classificação das disfunções auditivas

A perda auditiva (hipoacusia) pode ser considerada como exógena ou endógena. A perda exógena (não genética) pode ser causada por doença inflamatória, toxicidade, ruído, acidentes ou lesões que danificam qualquer parte do sistema auditivo. A perda endógena (genética) pode ser congênita (presente ao nascimento, como por exemplo a criança que nasce com perda auditiva devido a rubéola contraída pela mãe) ou hereditária (alguns defeitos hereditários da audição só se manifestam na vida adulta).

A surdez pode ser parcial ou total, temporária ou permanente.

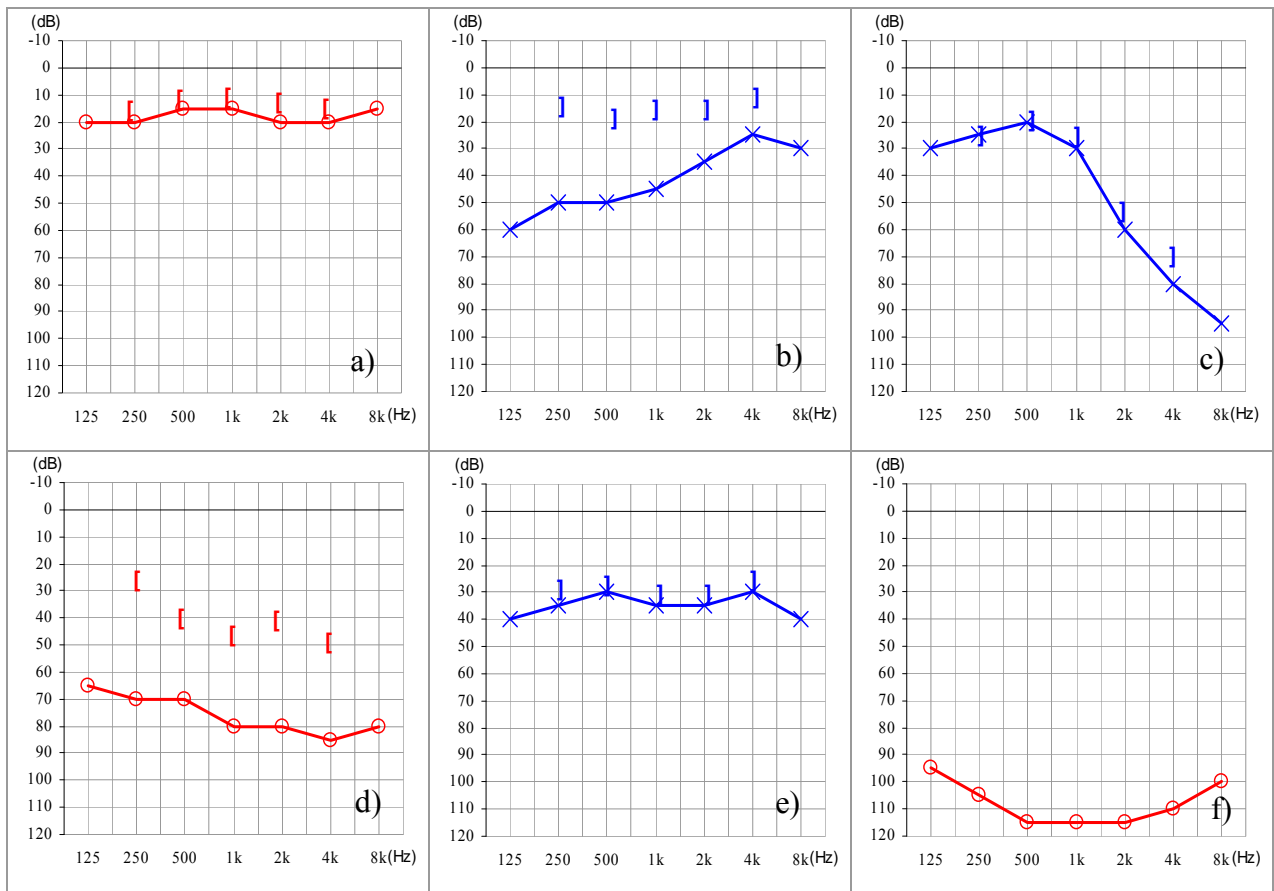
### 3.4.1 Tipos de surdez

De acordo com a localização da lesão, podem considerar-se três tipos de surdez: surdez de transmissão (ou de condução), surdez neurosensorial e surdez mista [19].

A surdez de transmissão (Figura 3.12-b)) relaciona-se com problemas ao nível do ouvido externo e do ouvido médio, impedindo a transmissão das ondas sonoras. A maior parte dos casos pode ser resolvida por tratamento médico ou cirúrgico. Os casos que mais frequentemente provocam surdez de transmissão são: cerúmen e corpos estranhos no canal auditivo externo, otite externa (vírica ou bacteriana), otites médias, obstrução da trompa de Eustáquio, perfuração timpânica, timpanosclerose (deposição de placas que criam um efeito enrijecedor na membrana timpânica e na cadeia ossicular), agenesia do pavilhão auricular, atresia do canal auditivo externo (ausência ou fechamento do canal), quistos e tumores (benignos ou malignos) e otosclerose.

A surdez neurosensorial (Figura 3.12-c)) está relacionada com problemas ao nível do ouvido interno e nervo auditivo, como sejam, presbiacusia, traumatismo acústico, doença de Ménière, otosclerose coclear, doenças provocadas por ototóxicos, infecções bacterianas e víricas (ex.: sarampo, meningite, rubéola), surdez congénita, tumores benignos e malignos (ex.: schwannoma do acústico, colesteatoma), surdez cortical.

A surdez mista (Figura 3.12-d)) engloba, simultaneamente, um componente de condução e um componente neurosensorial.



(Simbologia: condução aérea do ouvido direito ( ○ ); condução aérea do ouvido esquerdo ( × );  
condução óssea do ouvido direito ( ] [ ); condução óssea do ouvido esquerdo ( [ ] ).

Figura 3.12: Exemplos de audiogramas: a) Normal; b) Surdez de condução; c) Surdez neurosensorial; d) Surdez mista; e) Surdez ligeira; f) Surdez profunda.

### 3.4.2 Graus de surdez

As deficiências auditivas são, na generalidade, devidas a uma perda da percepção dos sons, dificultando a compreensão da palavra. Esta dificuldade aumenta com o grau de surdez.

No que diz respeito às crianças é muito importante que seja feita uma triagem auditiva neonatal para se detectar precocemente perdas auditivas que possam interferir na qualidade de vida do indivíduo, como o desenvolvimento da fala e da comunicação.

A perda tonal média é a média dos valores, obtidos em dB, nas frequências de 500, 1k, 2k, e 4 k Hz. Toda a frequência não percebida é referenciada como 120 dB de perda.

Em casos de surdez assimétrica, o nível médio de perda em dB é multiplicado por 7 em relação ao melhor ouvido, e por 3 para o pior ouvido. A soma é dividida por 10.

Considera-se que até 20 dB, a audição é normal (Figura 3.12-a)).

Segundo o BIAP (Bureau International d'Audiophonologie) [20], a deficiência auditiva subdivide-se em:

- Surdez ligeira (Figura 3.12-e)) – Perda tonal média entre 21 dB e 40 dB. A palavra é percebida em voz normal, mas dificilmente em voz ciciada ou à distância; a maior parte dos ruídos ambientais é percebida.

- Surdez média (Figura 3.13-a)) – Perda tonal média entre 41 dB e 70 dB:

Grau I – perda entre 41 dB e 55 dB

Grau II – perda entre 56 dB e 70 dB.

A palavra é percebida se se elevar a voz. A pessoa compreende melhor fazendo leitura labial.

- Surdez severa (Figura 3.12-d) – Perda tonal média entre 71 dB e 90 dB:

Grau I – perda entre 71 dB e 80 dB

Grau II – perda entre 81 dB e 90 dB.

A palavra só é percebida com voz forte junto do ouvido. Só os ruídos intensos são percebidos.

- Surdez profunda (Figura 3.12-f)) – Perda tonal média entre 91 dB e 119 dB:

Grau I – perda entre 91 dB e 100 dB

Grau II – perda entre 101 dB e 110 dB

Grau III – perda entre 111 dB e 119 dB.

A palavra não é percebida. Apenas se ouvem os ruídos muito intensos.

- Surdez total – Perda média é de 120 dB. Cofose. Nenhum som é percebido.

## 3.5 Algumas disfunções auditivas

### 3.5.1 Otosclerose

A otosclerose é uma das principais causas de surdez de condução. É uma doença exclusiva da espécie humana. Atinge mais frequentemente a mulher e é transmitida geneticamente, podendo ser agravada com a gravidez. Envolve, habitualmente, os dois ouvidos, e tem carácter progressivo. A maior parte das pessoas com surdez otosclerótica começa a ter dificuldades na comunicação com os outros a partir da segunda ou terceira década de vida [21]. Em 2/3 dos doentes há história familiar de surdez de transmissão autosómica dominante, com 40 % de penetração [22]. A surdez otosclerótica é causada por crescimento de osso, em torno da janela oval, que imobiliza a base do estribo. Quando o estribo deixa de ter os movimentos normais, a onda acústica não se propaga da forma habitual e a estimulação das células ciliadas da cóclea não se processa de forma adequada. Como consequência, a mensagem que atinge o centro auditivo do córtex temporal é menor e, em virtude disso, a audição diminui. A curva audiométrica mais típica é de condução, mais acentuada nas frequências graves, como, por exemplo, se verifica na Figura 3.12-b). A lesão pode, também, invadir a cóclea, provocando perda neurosensorial – otosclerose coclear, em que o paciente pode apresentar um audiograma semelhante ao da Figura 3.13-a). A perda progride lentamente, causando perdas auditivas superiores a 60 dB em ambos os ouvidos. Além da perda auditiva, algumas pessoas com otosclerose podem apresentar também tonturas, vertigens, ou acufenos.

A causa da otosclerose não é ainda bem conhecida, embora alguns estudos revelem existir uma tendência familiar, sendo hereditária e outros estudos alguma evidência para a associar a infecções virais, tais como o sarampo. Uma pessoa que tenha uma história familiar de otosclerose tem mais probabilidade de desenvolver a doença. Quando um dos progenitores tem otosclerose, existe 25 % de probabilidade de desenvolver a doença. Se o pai e a mãe a tiverem, o risco aumenta para 50%. Estudos revelam, ainda, que nas mulheres brancas de meia-idade esse risco aumenta. A raça negra é raramente afectada [21].

O tratamento da otosclerose é, essencialmente, cirúrgico, visando a substituição total ou parcial do estribo, por uma prótese que mantenha a propagação da onda acústica. Cerca de 90% dos pacientes passam a ter níveis normais de audição [23].

A primeira intervenção cirúrgica para correcção de surdez otosclerótica foi efectuada no final dos anos 50 por John Shea nos Estados Unidos [24].

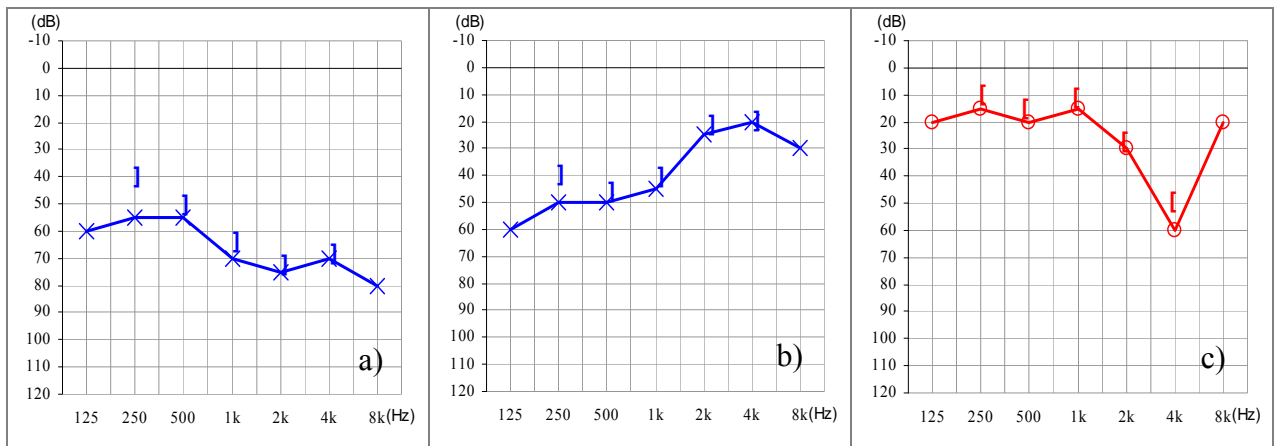
A primeira prótese de substituição do estribo foi feita com material plástico, com forma tubular, em que uma das extremidades encaixava na bigorna e a outra, em forma de bisel, entrava em contacto com o vestíbulo do ouvido interno, ficando coberto por um pequeno fragmento de veia. Desde então numerosas próteses, de múltiplos materiais, têm surgido no mercado. Existem próteses de teflon, de ligas de aço, de titânio, e de vários materiais misturados. Se estes variam, também a sua morfologia difere. Existem próteses que se destinam a abraçar a apófise longa da bigorna, enquanto outras possuem uma taça para receber a apófise lenticular da bigorna.

Na estapedectomia, o estribo lesado é substituído por uma prótese, permitindo assim a passagem do som ao ouvido interno.

Se apenas se remove parcialmente o estribo (estapedotomia) reconstruindo o restante, corre-se um risco menor de provocar distúrbios no sistema do equilíbrio. Os pacientes podem voltar, brevemente, à sua rotina diária, com uma boa recuperação auditiva. Os resultados obtidos em cirurgia da otosclerose são, no início, extremamente satisfatórios, mas existe, frequentemente, uma perda progressiva à medida que os anos passam, de tal forma que 15 anos depois da operação, pouco mais de 80% dos doentes continuam com a boa audição do pós-operatório inicial [23]. Esta perda progressiva, evidenciada por um número significativo de doentes, deve-se essencialmente a dois factores: evolução da doença e situações relacionadas com a prótese aplicada no momento da cirurgia.

### **3.5.2 Doença de Ménière**

A doença de Ménière pode estar associada a surdez neurosensorial flutuante, normalmente com maior perda nos sons graves, como pode ser exemplificada na Figura 3.13-b), desequilíbrio, tontura ou vertigem rotatória, acufenos de *pitch* grave, sensação de “ouvido cheio”, náuseas e vômitos [11]. Existe grande intolerância para sons mais intensos. A doença é unilateral em 80% dos casos, podendo revelar recobro. Histologicamente, a doença de Ménière mostra aumento de volume da endolinfa. Em termos audiológicos, o teste de despiste é a electrocolegrafia. No que concerne ao tratamento, existem alguns medicamentos para atenuação dos sintomas e é feito essencialmente à base de dieta (pobre em sal e estimulantes).



(Simbologia: condução aérea do ouvido direito ( o ); condução aérea do ouvido esquerdo ( x );  
 condução óssea do ouvido direito ( □ ); condução óssea do ouvido esquerdo ( ■ ).

Figura 3.13: Exemplos de audiogramas: a) Surdez neurosensorial média; b) Surdez neurosensorial ligeira; c) Curva típica de traumatismo acústico.

### 3.5.3 Traumatismo acústico

A exposição a sons intensos durante algumas horas pode causar um estado de fadiga auditiva, que consiste numa diminuição da sensibilidade auditiva. Trata-se de uma perda auditiva temporária que, normalmente, desaparece ao fim de algumas horas, podendo ir até vários dias. Este fenómeno é conhecido por alteração temporária do limiar [7].

Quando a exposição a sons intensos é mais prolongada pode provocar traumatismo acústico, (Figura 3.13-c)). Quem primeiro sofre as consequências é o órgão de Corti. A exposição ao ruído excessivo causa a destruição das células sensoriais de Corti, que não se regeneram [25].

Outra situação que pode causar danos graves é a resultante de sons impulsivos, que não permitem que o sistema muscular actue a tempo, podendo mesmo causar ruptura do tímpano.

### 3.5.4 Presbiacusia

Durante o envelhecimento as terminações no nervo acústico vão-se deteriorando, o que se reflecte numa perda gradual da audição. Esta começa nas frequências agudas e estende-se, progressivamente, às frequências graves (Figura 3.12-c)). É um processo degenerativo das células sensoriais e das fibras nervosas que conectam com o cérebro. O fenómeno é conhecido por perda dos agudos ou presbiacusia. Neste caso há uma diminuição da sensibilidade auditiva e

uma redução da inteligibilidade da fala, o que compromete seriamente o processo de comunicação verbal. A perda auditiva nas altas frequências torna mais difícil a percepção dos sons das consoantes, especialmente quando a comunicação ocorre em ambientes ruidosos. A queixa típica dos indivíduos idosos, com presbiacusia, é que “ouvem, mas não percebem o que lhes é dito”.

Schuknecht contribuiu para uma melhor compreensão dos efeitos do envelhecimento do ouvido interno e das estruturas neurais, classificando a presbiacusia em quatro categorias [11]: sensorial (atrofia do órgão de Corti, perda de células ciliadas e de sustentação); neural (perda de fibras nervosas ou células do sistema nervoso central); metabólica (atrofia da estria vascular e desequilíbrio bioelétrico e bioquímico da cóclea); mecânica (alteração da mecânica do canal coclear e da membrana basilar).

Johnson e Hawkins descreveram mais duas categorias de presbiacusia [11]: vascular (perda de vasos sanguíneos que irrigam o ligamento espiral, a estria vascular e o anel timpânico) e central (perda de neurónios no núcleo coclear e outros centros auditivos do cérebro).

### **3.5.5 Surdez súbita, induzida por ototóxicos ou por vírus**

A perda auditiva súbita pode derivar do uso de drogas, trauma ou infecção. Os casos sem etiologia aparente podem ser justificados por labirintite viral ou obstrução vascular (causando interrupção súbita da irrigação sanguínea) [11]. A perda auditiva súbita está geralmente associada aos acúfenos e por vezes vertigens. Nestes casos é muito importante uma intervenção médica rápida. A surdez induzida por ototóxicos é provocada por drogas que podem lesar as células do órgão de Corti. As mais comuns pertencem ao grupo dos antibióticos (estreptomicina, gentamicina,...) e dos salicilatos, sobretudo o quinino [11]. O ouvido interno pode ser afectado por vírus específicos ou não específicos. O sarampo pode provocar perda auditiva neurosensorial bilateral de grau moderado, severo, ou mesmo profundo. Outros vírus que podem provocar surdez são a febre tifóide, gripe, sífilis, meningite, parotidite e outros [11].

### 3.5.6 Schwanoma do acústico

O schwannoma do acústico é um tumor do VIII par craniano, que comprime este nervo, quer no canal auditivo interno, quer na região do ângulo pontocerebeloso. Ao comprimir as fibras nervosas, o seu volume aumenta, levando à compressão e à degeneração das fibras nervosas. No audiograma verifica-se uma perda auditiva unilateral, mais acentuada nos sons agudos (Figura 3.12-c)). O exame de potenciais evocados mostra respostas eléctricas do tronco cerebral anormais. O tratamento consiste em intervenção cirúrgica.

A evolução clínica passa por três fases: fase otológica, em que a avaliação funcional da audição assume um valor etiológico considerável, pois os sinais neurológicos associados podem ainda estar ausentes e existir apenas a síndrome cocleovestibular (perda auditiva unilateral, acufenos e vertigens frequentes); fase otoneurológica, em que aparecem os sintomas neurológicos, (alterações de outros nervos cranianos); fase de hidrocefalia terminal [11].

### 3.5.7 Acufenos, Recobro e Hiperacusia

*“Acufeno é a percepção de uma sensação sonora localizada em um, ou nos dois ouvidos, ou ainda no interior do crânio, na ausência de qualquer vibração sonora, por via externa”* [26].

Existem dois tipos de acufenos: objectivos e subjectivos. Os acufenos subjectivos apenas são sentidos pelo próprio paciente, não podendo ser ouvidos por outras pessoas. Estes são os mais frequentes e as causas mais comuns podem ser de ordem otológica, cardiovascular, metabólica, neurológica, farmacológica, psicológica ou dentária [27]. Os acufenos objectivos, mais raros, podem ser captados no exterior, como fenómenos acústicos fisicamente mensuráveis. Podem ser de origem neurológica, osteo-muscular, vascular ou anatómica.

Com interesse diagnóstico sabe-se que os distúrbios de transmissão provocam mais facilmente acufenos graves (abaixo dos 500 Hz) enquanto que os distúrbios de percepção provocam acufenos agudos (acima dos 4 kHz) [28].

Os acufenos podem ter causas orgânicas variadas e assumir graus variados de intensidade e timbre. O paciente apresenta queixas muito variadas. Uma vez refere, claramente, um som definido num ouvido, outras vezes, um ruído na cabeça difícil de explicar. Noutras situações, os pacientes são capazes de ouvir mais do que um som. Várias situações patológicas do ouvido como otosclerose, doença de Ménière, e schwannoma do acústico, podem apresentar acufenos,

como sintoma inicial ou tardio. No entanto, um grande número de pacientes com queixas de acufenos, não tem patologia otológica e apresentam exames dentro do normal. Existe, sem dúvida, uma forte relação entre o stress e ansiedade com o início dos acufenos [26].

O modelo neurofisiológico de acufenos, de Jastreboff [29], considera que várias componentes cerebrais, em conjunto com o sistema auditivo, estão envolvidas na origem dos acufenos, dando maior ênfase às conexões entre os sistemas auditivo, límbico e autónomo.

O recobro pode ser explicado devido a problemas ao nível das células ciliadas externas da cóclea, resultando numa hipersensibilidade em frequências com perda auditiva [27]. Trata-se de uma distorção da sensação de intensidade, que ocorre nas perdas auditivas neurosensoriais cocleares, em que os indivíduos têm dificuldade em ouvir os sons baixos, sentindo os sons intensos como desconfortáveis. O resultado final é um maior estreitamento da faixa de sensação de intensidade entre o que é quase inaudível e o que é muito intenso.

A hiperacusia, considerada como um distúrbio central da percepção auditiva, tem sido definida como uma tolerância reduzida aos sons, mesmo em intensidade moderada. Os pacientes queixam-se de desconforto para sons do dia-a-dia e o nível de desconforto para a sensação de intensidade (Loudness Discomfort Level – LDL) encontra-se abaixo de 100 dB [28].

Associado a este conceito existe o de *phonophobia* e *misophonia* [30]. *Phonophobia* é o “sentimento de medo à exposição sonora”, cuja origem é essencialmente psíquica estando, geralmente, associada a experiências sonoras negativas. *Misophonia* é a “resposta emocional ou condicionada associada a uma aversão à exposição de sons”. Ocorre por reacção desproporcionada do sistema límbico e do sistema nervoso autónomo, sem que tenha ocorrido uma activação intensa, anormal, do sistema auditivo. Tanto na *misophonia* como na *phonofobia*, os limiares auditivos podem ser normais ou alterados [26].

### **3.5.8 Surdez cortical e agnosia auditiva**

A surdez cortical corresponde a lesões extensas e bilaterais dos lobos temporais [31]. Trata-se, quer de lesões estritamente corticais, que destroem as circunvoluções de Heschl, quer de lesões subcorticais que incidem nas radiações auditivas, realizando, assim, uma desaferentização das áreas auditivas primárias. Nos dois casos, nenhuma informação auditiva atinge o córtex cerebral. O quadro clínico então observado é o de uma surdez total: o indivíduo é incapaz de detectar um

ruído produzido fora do seu campo visual. Esta surdez associa-se sempre a perturbações da linguagem expressiva.

A agnosia auditiva é uma incapacidade rara, que impede o reconhecimento e identificação dos ruídos percebidos, e isto apesar da ausência de surdez importante. É causada por lesões temporais bilaterais ao nível do giro *de Heschl*. O défice pode ser variável e relacionar-se com agnosia auditiva verbal, agnosia para os sons familiares, ou agnosia musical.

Uma lesão unilateral direita poderá provocar uma agnosia auditiva que comporta perturbações predominantes da percepção da música, originando uma agnosia musical ou amusia.

### 3.6 Uso de sistemas de amplificação no auxílio à surdez

A deficiência auditiva tem sido reconhecida como uma doença severamente incapacitante.

Para minimizar este problema existem sistemas cada vez mais desenvolvidos, graças ao avanço tecnológico e aos conhecimentos da psicoacústica. Os sistemas de amplificação são instrumentos poderosos que, utilizados adequadamente, podem minimizar os problemas relacionados com a deficiência auditiva. O objectivo tem sido conseguir instrumentos mais potentes, com melhor qualidade em termos de resposta frequencial, mais confortáveis e esteticamente aceitáveis. Na maioria das pessoas que conservam uma audição residual significativa, as próteses auditivas podem ampliar os sons até níveis suficientes para activar as células ciliadas existentes. As próteses mais recentes estão preparadas para compensar a hipoacusia de cada paciente, aumentando, sobretudo, os sons de frequências com maior perda auditiva, aumentando menos as frequências relacionadas com melhor audição [32]. O uso de uma prótese auditiva tem como finalidade a ampliação de todos os sons, nomeadamente, os da fala. É fundamental que esses sons sejam audíveis de forma confortável, sem serem excessivamente intensos. A quantidade de amplificação fornecida pela prótese é denominada “ganho acústico”. A prótese auditiva é um dos componentes mais importantes para a habilitação e reabilitação do processo auditivo. As crianças devem ser adaptadas com próteses auditivas, tão precocemente quanto possível, logo após o diagnóstico da deficiência auditiva, evitando os efeitos da privação sensorial sobre o desenvolvimento global e sobre a linguagem. Os dados audiométricos são um indicador extremamente importante quanto à necessidade do uso de uma prótese auditiva. No entanto, existem outros factores a ter em conta: aceitação da perda auditiva, motivação para obtenção de ajuda, necessidades de comunicação, preocupações estéticas e ainda aspectos financeiros. As próteses auditivas são o meio primário de reabilitação, para portadores de surdez neurosensorial. Em casos de surdez profunda ou surdez severa, sem bom rendimento auditivo com próteses convencionais, existe a possibilidade de utilização do implante coclear. Este consiste na inserção de eléctrodos na cóclea (ao nível da rampa timpânica) que visam estimular o nervo auditivo, permitindo, assim, alguma acuidade auditiva.

Se os mecanismos fisiológicos de protecção do sistema auditivo não são suficientes para evitar danos que podem conduzir à surdez, deve-se procurar preservar a audição. Determinados sons podem afectar irreversivelmente o nosso ouvido. A exposição a sons intensos causa alteração

temporária do limiar de audibilidade. Uma das consequências é a perda da sensibilidade e acuidade auditivas. Um tipo de protecção eficaz é a utilização de protectores auditivos. Podem ser simples tampões que atenuam o som em geral, auscultadores ou protectores com filtros (que variam em termos de bandas de frequências). Estes últimos são os mais aconselháveis aos trabalhadores de locais com um nível de ruído superior ao mínimo permitido por lei.

### 3.7 Referências

- [1] [http://music.nuim.ie/vlazzarini/papers/Elementos\\_de\\_Acustica.pdf](http://music.nuim.ie/vlazzarini/papers/Elementos_de_Acustica.pdf).
- [2] J.O. Pickles, *An Introduction to the Physiology of Hearing*, Academic Press, 2ª edição, USA, 1998.
- [3] S.S. Stevens, J. Volkman, The Relation of Pitch to Intensity, *Am.J. of Psychology* 53, pp. 329-353, 1940.
- [4] R.N. Shepard, Circularity in Judgements of Relative Pitch, *J. Acoust. Soc. Am.* 36, pp. 2346-2353, 1964.
- [5] S.S. Stevens, The Relation of Pitch to Intensity, *Am.J. of Psychology* 6, pp. 150-154, 1935.
- [6] J.G. Roederer, *The Physics and Psychophysics of Music: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [7] L.L. Henrique, *Acústica Musical*, Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.
- [8] J. Patrício, *Acústica nos edifícios*, 2ª edição, 2003.
- [9] H. Fletcher, W.A. Munson, Loudness, Its Definition, Measurement and Calculation, *J. Acoust. Soc. Am.* 5, pp. 82-108, 1933.
- [10] C.E. Speaks, *Introduction to Sound*, Singular Publishing Group, Inc., 1992.
- [11] J. Katz, *Tratado de audiologia clínica*, 4ª Edição, Manole, Brasil, 1991.
- [12] A.J.M. Houtsma, T.D. Rossing, W.M. Wagenaars, Auditory Demonstrations, *Acoustical Society of America*, New York, 1987.
- [13] E.A.G. Shaw, Ear Canal Pressure Generated by a Source Field, *J. Acoust. Soc. Am.* 3, pp. 465-470, 1966.
- [14] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Reverbera%C3%A7%C3%A3o>.
- [15] J. Meyer, Acoustics and the Performance of Music, *Verlag das Musikinstrument*, Frankfurt am Main, 1978.
- [16] B.C.J. Moore, An Introduction to the Psychology of Hearing, *Academic Press*, 4ª edição, USA, 1997.
- [17] K.B. Ginn, Architectural Acoustics, *Nærum, Brüel & Kjær*, 1978.
- [18] T.D. Rossing, The Science of Sound, Reading, *Addison-Wesley*, 1990.
- [19] M. Portmann, C. Portmann, *Tratado de Audiometria Clínica*, 6ª edição, Roca, S. Paulo, 1993.

- [20] <http://www.biap.org>.
- [21] H.F. Schuknecht, *Pathology of the ear*, Lea and Febiger, 2<sup>a</sup> edition, 1993.
- [22] I. Glasscock, Total stapedectomy operative techniques in Otolaryngology, *Head and Neck surgery*, 9, 1, 1998.
- [23] E. Almeida, Resultados da cirurgia em Otosclerose, *Congresso Nacional de ORL e Cirurgia Cérvico-Facial*, Porto, 2004.
- [24] J.J. Shea, Fenestration of the oval window, *Ann Otol Rhinol Laryngol*, 67, pp. 932-951, 1958.
- [25] J.D. Miller, Effects of Noise on People, *J. Acoust. Soc. Am.* 58, pp. 729-764, 1994.
- [26] P.J. Jastreboff, *Tinnitus as phantom perception theories and clinical implications*, Chapter 8, University of Maryland School of Medicine, 1999.
- [27] F. Gentil, R. Nunes, Terapia Sonora dos Acufenos, *Revista Portuguesa de Otorrinolaringologia e Cirurgia Cérvico-Facial*, Vol.41, pp. 271-284, 2003.
- [28] J. Hazell, *Proceedings of the Sixth International Tinnitus Seminar*, Cambridge, UK, 1999.
- [29] P.J. Jastreboff, *Phantom auditory perception (tinnitus): mechanisms of generation and perception*, New Haven, USA, 1990.
- [30] [http://www.tinnitus.org/home/frame/DST\\_NL2\\_PJMJ.pdf](http://www.tinnitus.org/home/frame/DST_NL2_PJMJ.pdf).
- [31] A.C. Caldas, *A Herança de Franz Joseph Gall – O cérebro ao serviço do comportamento humano*, Mc Graw Hill, 2000.
- [32] C. Almeida, M.C.M. Iorio, *Próteses auditivas Fundamentos teóricos & Aplicações clínicas*, 2<sup>a</sup> edição, Lovise, São Paulo, 2003.

# Capítulo 4

## *Cinemática do meio contínuo*

### **4.1 Descrição do movimento do meio contínuo**

A mecânica dos meios contínuos é um ramo da física que estuda, para diferentes condições de acções externas, as respostas de materiais, como sendo os movimentos, as deformações, as tensões, mudanças de temperatura, etc. Matematicamente e para resolução destes problemas é utilizado um conjunto de equações diferenciais (equações constitutivas) e outros princípios gerais, assim como leis da física, conservação de massa, condições de equilíbrio, momentos, força, energia, etc.

Uma equação diferencial é uma equação em que as derivadas duma função aparecem como variáveis. Muitas leis fundamentais são formuladas através destas equações, das quais se retiram soluções. Em geral, uma equação constitutiva é uma relação entre duas quantidades físicas (frequentemente tensores) que são específicas a um material ou substância, que se combinam com outras equações para a resolução de problemas físicos.

É possível considerar cinco classes de relações, para resolver problemas de um meio contínuo mecânico:

- Cinemática (ex.: aceleração, deslocamento, deformação, etc.).
- Forças (incluindo tracção e tensão).
- Relações de equilíbrio (massa, momento, energia).
- Relações constitutivas (descritores de comportamento material).
- Condições fronteira e iniciais (para complemento matemático).

A cinemática é definida como o estudo do movimento, incluindo a mudança de posição duma partícula numa configuração de referência para uma outra configuração.

O conhecimento da mecânica é muito importante no estudo de várias áreas (física, química, biologia), tendo sido aplicada também na área referente a este trabalho.

Em mecânica dos meios contínuos, considera-se uma partícula como um volume infinitesimal de material, enquanto que um corpo é a sua totalidade, ou seja um conjunto de partículas materiais. A configuração de um corpo é a especificação de posições de cada partícula, dentro do corpo, num instante particular,  $t$ . O movimento pode ser definido como uma sequência de configurações parametrizadas pelo tempo.

O caminho percorrido por uma partícula é descrito por um vector em função do tempo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (4.1)$$

Onde  $\mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$  é o vector posição.

Na forma de componentes, a equação (4.1) pode ser escrita como:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t) \quad (4.2)$$

Se há  $N$  partículas, há  $N$  caminhos, cada um descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t), \quad n=1,2,\dots,N \quad (4.3)$$

Num meio contínuo não há só uma infinidade de partículas, mas dentro de cada uma e na sua vizinhança existem muitas outras partículas. Por isso, não é possível identificar as partículas atribuindo a cada uma delas um número da mesma maneira que na cinemática das partículas. No entanto, é possível identificar as partículas pelas posições que ocupam no mesmo instante (sendo o inicial,  $t_0$ ). Se uma partícula se encontrava na posição  $(X_1, X_2, X_3)$  num instante  $t_0$ , será identificada pelo conjunto de coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$ . Assim, o caminho de cada partícula num meio contínuo pode ser descrito por um vector equação da forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{com} \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X} \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$  é o vector posição no instante  $t$ , para a partícula  $P$ , que estava na posição  $\mathbf{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$  (Figura 4.1). Na forma de componentes, a equação (4.4) toma a forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ou:

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \text{ com } x_i(X_1, X_2, X_3, t_0) = X_i \quad (4.6)$$

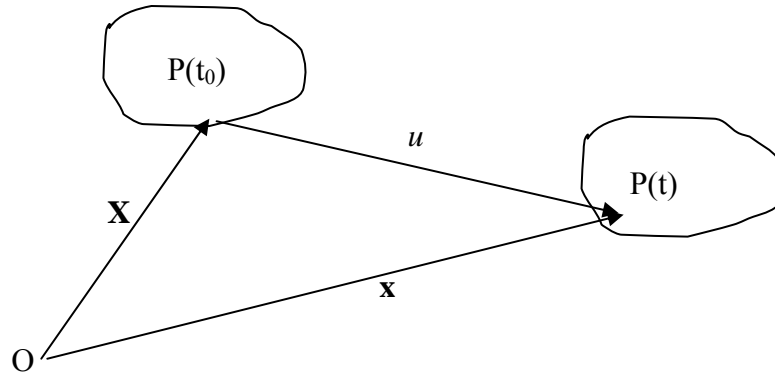


Figura 4.1:  $\mathbf{x}$  é o vector posição num instante  $t$ , para uma partícula  $P$ , quando esta se encontrava na posição inicial em  $\mathbf{X}$ .

### 4.1.1 Descrição material e espacial

Para a análise da cinemática do corpo material há necessidade de definir as coordenadas do corpo na configuração original (coordenadas *lagrangianas* representadas por  $\mathbf{X}$ ) e na configuração deformada (coordenadas espaciais ou *eulerianas*, identificadas por  $\mathbf{x}$ ), onde  $\mathbf{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ .

Para uma determinada função contínua que descreve o movimento entre o estado inicial e o deformado, o comportamento do corpo material no seu estado deformado pode ser obtido a partir do seu estado inicial. Este procedimento é conhecido por descrição *lagrangiana*. Por outro lado, se o comportamento do corpo material é descrito com base nas coordenadas da sua posição corrente, o procedimento é conhecido por descrição *euleriana* [1], [2], [3], [4], [5].

### 4.1.2 Campo de deslocamentos

O campo deslocamento numa partícula da posição  $P$ , para outra posição  $Q$ , é dado pelo vector  $PQ$  (Figura 4.2). Assim, o vector deslocamento dessa partícula, numa posição inicial para outra posição num instante  $t$ , é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (4.7)$$

O movimento dum meio contínuo pode, assim, ser descrito pela equação do seu caminho, (4.4) ou pelo campo do seu vector deslocamento (4.7).

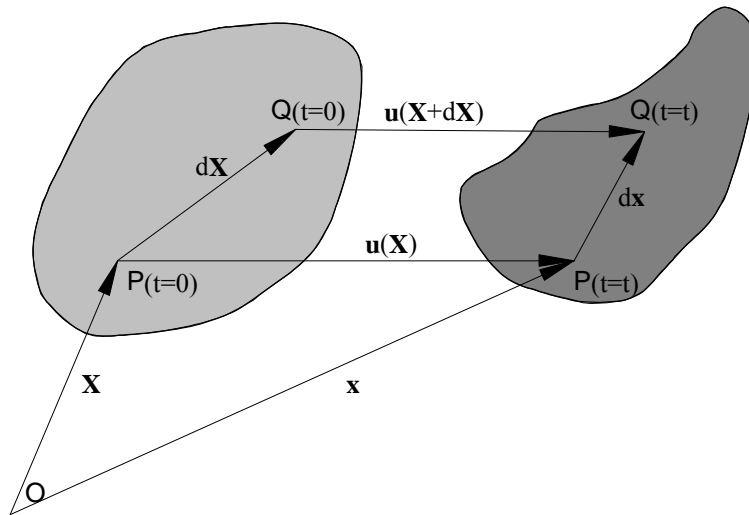


Figura 4.2: Configurações de um corpo material.

### 4.1.3 Deformações infinitesimais

Existem muitos problemas de engenharia relacionados com componentes estruturais, que face às solicitações impostas, conduzem a deslocamentos muito reduzidos em qualquer ponto material do componente.

Considere-se um corpo material, que passa de uma configuração no instante  $t_0$ , para outra configuração, no instante  $t$ . De acordo com a Figura 4.2, um ponto material  $P$ , descreve um deslocamento  $\mathbf{u}$  assumindo a seguinte posição:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (4.8)$$

Um ponto  $Q$ , vizinho de  $P$ , ocupa uma posição no espaço no instante  $t_0$ ,  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ , e no instante  $t$  passa a ocupar a posição:

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \quad (4.9)$$

Subtraindo (4.8) de (4.9) obtém-se:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (4.10)$$

o que, por definição de gradiente, permite estabelecer a seguinte relação:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \nabla \mathbf{u} d\mathbf{X} \quad (4.11)$$

em que  $\nabla \mathbf{u}$  é um tensor de segunda ordem designado por gradiente de deslocamentos [6] definido por:

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

A equação (4.11) pode reescrever-se da seguinte forma:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (4.13)$$

em que

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (4.14)$$

sendo  $\mathbf{F}$  o gradiente das deformações [7] tomando em coordenadas cartesianas, a seguinte forma:

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Para se determinar a relação entre  $ds$ , que é o comprimento de  $d\mathbf{x}$  e  $dS$ , que é o comprimento de  $d\mathbf{X}$ , calcula-se o seguinte produto interno:

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (4.16)$$

ou seja,

$$(ds)^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (4.17)$$

Se  $\mathbf{F}$  for um tensor ortogonal, então  $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}$  e  $(ds)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (dS)^2$ .

Conclui-se, assim, que o movimento de um corpo rígido (translação e/ou rotação) corresponde a  $\mathbf{F}$  ser ortogonal.

Com base em (4.14) pode estabelecer-se a seguinte relação:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) = (\mathbf{I}^T + (\nabla \mathbf{u})^T) (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u} \quad (4.18)$$

Assumindo que as deformações infinitesimais apenas são relacionadas com casos em que as componentes do vector deslocamento, bem como as suas derivadas parciais, são muito pequenas (matematicamente infinitesimais), então os coeficientes de segunda ordem do tensor  $(\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}$  podem considerar-se desprezáveis. Deste modo, obtém-se:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} \approx \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \equiv \mathbf{I} + 2\mathbf{E} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}] \equiv \text{parte simétrica de } \nabla \mathbf{u} \quad (4.20)$$

Em coordenadas cartesianas, este tensor toma explicitamente a forma:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (4.21)$$

$\mathbf{E}$  é um tensor de segunda ordem, designado por tensor das extensões ou também conhecido por tensor de deformação infinitesimal, que caracteriza a mudança de comprimentos num meio contínuo para pequenas deformações. De acordo com (4.20) verifica-se que este tensor corresponde à parte simétrica do gradiente dos deslocamentos [8].

Sendo,  $\mathbf{E}$ , o tensor das extensões, simétrico, existem três direcções representadas pelos vectores ortonormais  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  e  $\mathbf{n}_3$ , segundo as quais apenas existem extensões normais, isto é:

$$[\mathbf{E}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Geometricamente, os segmentos de recta infinitesimais nestas direcções permanecem ortogonais, após deformação. Estas direcções designam-se por direcções principais de extensão. Os valores das extensões principais,  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ , correspondem aos valores próprios do tensor  $\mathbf{E}$ , os quais podem ser calculados a partir da seguinte equação cúbica [9]:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (4.23)$$

em que

$$I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad (4.24)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

$$I_3 = |E_{ij}| \quad (4.26)$$

Os coeficientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os invariantes escalares principais do tensor das extensões.

#### 4.1.4 Dilatação

O primeiro invariante escalar do tensor das extensões tem um significado apenas geométrico. Para uma deformação específica, considere-se três linhas materiais que partindo dum ponto  $P$ , têm as direcções principais. Estas linhas definem um paralelepípedo rectangular, cujos lados foram alongados, partindo de dimensões iniciais  $dS_1$ ,  $dS_2$  e  $dS_3$  para  $dS_1(1+E_1)$ ,  $dS_2(1+E_2)$  e  $dS_3(1+E_3)$ , onde  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  são as extensões principais.

A variação  $\Delta(dV)$  no volume material  $dV$  é dada por:

$$\Delta(dV) = (dS_1)(dS_2)(dS_3)(1+E_1)(1+E_2)(1+E_3) - (dS_1)(dS_2)(dS_3) = \quad (4.27)$$

$$= (dV)(E_1 + E_2 + E_3) + \text{termos de ordem superior em } E_i \quad (4.28)$$

Assim, para pequenas deformações, a variação de volume unitário (Dilatação) pode ser escrita da seguinte forma:

$$e \equiv \frac{\Delta(dV)}{dV} = E_1 + E_2 + E_3 = E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad (4.29)$$

#### 4.1.5 Deformações finitas

As deformações num ponto material,  $\mathbf{X}$ , dum corpo são caracterizadas por mudanças de distâncias entre qualquer par de pontos materiais, dentro duma pequena vizinhança de  $\mathbf{X}$ .

Assim, através dum movimento, um elemento material  $d\mathbf{X}$  passa a ser  $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ .

Note-se que se  $\mathbf{F}$  é um tensor ortogonal, então não existe deformação em  $\mathbf{X}$ .

Usa-se a notação,  $\mathbf{U}$ , para o gradiente de deformação,  $\mathbf{F}$ , que é simétrico. Assim, para um gradiente de deformação simétrico, pode escrever-se:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{U}d\mathbf{X} \quad (4.30)$$

Neste caso, o material numa pequena vizinhança de  $\mathbf{X}$ , diz-se estar num estado puro de deformação de extensão. Inclui o caso especial onde o movimento é homogéneo, isto é, em que todo o corpo está num estado puro de extensão.

Uma vez que  $\mathbf{U}$  é real e simétrico, existem três direcções perpendiculares, sendo a matriz  $\mathbf{U}$  diagonal. Assim, se  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  são as direcções principais, com os valores próprios  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , então para  $d\mathbf{X}^{(1)} = dX_1\mathbf{e}_1$ , a equação (4.30) resulta em  $d\mathbf{x}^{(1)} = \lambda_1 dX_1\mathbf{e}_1$ , isto é,

$$d\mathbf{x}^{(1)} = \lambda_1 d\mathbf{X}^{(1)} \quad (4.31)$$

De forma análoga, para  $d\mathbf{X}^{(2)} = dX_2\mathbf{e}_2$  e  $d\mathbf{X}^{(3)} = dX_3\mathbf{e}_3$  se obtém:

$$d\mathbf{x}^{(2)} = \lambda_2 d\mathbf{X}^{(2)} \quad (4.32)$$

$$d\mathbf{x}^{(3)} = \lambda_3 d\mathbf{X}^{(3)} \quad (4.33)$$

Verifica-se que ao longo destas três direcções, o elemento deformado tem a mesma direcção do elemento não deformado. Se os valores próprios são diferentes, estes serão os únicos elementos que não mudam de direcção. A razão entre o comprimento deformado e o comprimento original, chamado “*stretch*”, é dado por:

$$stretch = \frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} \quad (4.34)$$

Assim, os valores próprios de  $\mathbf{U}$  são os “*stretches*” principais, incluindo os “*stretches*” máximo e mínimo.

#### 4.1.6 Tensores de Extensões Finitas

Para um dado gradiente de deformação,  $\mathbf{F}$ , resulta  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T (\mathbf{R}\mathbf{U}) = (\mathbf{U})^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = (\mathbf{U})^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (4.35)$$

É possível calcular  $\mathbf{U}$ , tensor de extensões finitas à direita, a partir do gradiente de deformação:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad (4.36)$$

Uma vez calculado  $\mathbf{U}$ , pode ser calculado o tensor correspondente ao movimento de corpo rígido,  $\mathbf{R}$  :

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} \quad (4.37)$$

Multiplicando a expressão (4.35) à esquerda e à direita por  $\mathbf{U}^{-1}$ , verifica-se:

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}^2\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} \quad (4.38)$$

e como  $\mathbf{U}$  é simétrico:

$$(\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1})^T \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} \quad (4.39)$$

Assim, da equação (4.37) obtém-se:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (4.40)$$

Esta equação garante que o tensor  $\mathbf{R}$  obtido a partir de (4.37) é um tensor ortogonal.

O tensor de extensões finitas à esquerda,  $\mathbf{V}$ , pode ser obtido por:

$$\mathbf{V} = \mathbf{F}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \quad (4.41)$$

### 4.1.7 Tensor de Cauchy-Green à direita

O quadrado da distância entre os pontos  $P(t=0)$  e  $Q(t=0)$  (Figura 4.2) e o quadrado da distância entre os pontos  $P(t)$  e  $Q(t)$  podem ser calculados do seguinte modo:

$$dS^2 = |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_i dX_i \quad (4.42)$$

$$ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i \quad (4.43)$$

Atendendo a que  $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ , numa formulação de Lagrange, o vector  $d\mathbf{x}$  pode reescrever-se:

$$ds^2 = (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{U}^2 d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X} \quad (4.44)$$

$$ds^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j = C_{ij} dX_i dX_j \quad (4.45)$$

em que  $\mathbf{C}$  é conhecido como o tensor das deformações de Cauchy-Green à direita [10]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (4.46)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (4.47)$$

Considere-se dois segmentos  $d\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(1)}$  e  $d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(2)}$ .

Através destes segmentos é possível estabelecer a seguinte relação:

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(2)} = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}^{(2)} \quad (4.48)$$

Assim, se  $d\mathbf{x} = ds\mathbf{n}$  for o vector deformado do segmento inicial, definido por  $d\mathbf{X} = dS\mathbf{e}_1$ , da expressão (4.48) tem-se  $(ds)^2 = (dS)^2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{C}\mathbf{e}_1$ , para  $d\mathbf{X}^{(1)} = d\mathbf{X}^{(2)} = dS\mathbf{e}_1$ , o que permite retirar os componentes da diagonal principal:

$$C_{11} = \left( \frac{ds}{dS} \right)^2 \text{ para um segmento } d\mathbf{X} = dS\mathbf{e}_1 \quad (4.49)$$

$$C_{22} = \left( \frac{ds}{dS} \right)^2 \text{ para um segmento } d\mathbf{X} = dS\mathbf{e}_2 \quad (4.50)$$

$$C_{33} = \left( \frac{ds}{dS} \right)^2 \text{ para um segmento } d\mathbf{X} = dS\mathbf{e}_3 \quad (4.51)$$

Considerando agora dois segmentos de recta,  $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1\mathbf{e}_1$  e  $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2\mathbf{e}_2$ , que em situação de deformada passam a  $d\mathbf{x}^{(1)} = ds_1\mathbf{m}$  e  $d\mathbf{x}^{(2)} = ds_2\mathbf{n}$ , sendo  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  versores, com um ângulo  $\beta$ , entre eles, aplicando (4.48), obtém-se:

$$ds_1 ds_2 \cos \beta = dS_1 dS_2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{C}\mathbf{e}_2 \quad (4.52)$$

ou seja,

$$C_{12} = \frac{ds_1 ds_2}{dS_1 dS_2} \cos(\mathbf{dx}^{(1)}, \mathbf{dx}^{(2)}) \text{ para } d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1\mathbf{e}_1 \text{ e } d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2\mathbf{e}_2 \quad (4.53)$$

$$C_{13} = \frac{ds_1 ds_3}{dS_1 dS_3} \cos(\mathbf{dx}^{(1)}, \mathbf{dx}^{(3)}) \text{ para } d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1\mathbf{e}_1 \text{ e } d\mathbf{X}^{(3)} = dS_3\mathbf{e}_3 \quad (4.54)$$

$$C_{23} = \frac{ds_2 ds_3}{dS_2 dS_3} \cos(\mathbf{dx}^{(2)}, \mathbf{dx}^{(3)}) \text{ para } d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2\mathbf{e}_2 \text{ e } d\mathbf{X}^{(3)} = dS_3\mathbf{e}_3 \quad (4.55)$$

### 4.1.8 Tensor das extensões de Lagrange

Considere-se o tensor

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (4.56)$$

como o tensor das extensões finitas ou de Lagrange, sendo  $\mathbf{C}$ , o tensor de deformação de Cauchy-Green à direita e  $\mathbf{I}$ , o tensor identidade. Note-se que se não houver deformação, então passamos a ter  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{E}^* = 0$ .

Atendendo a (4.48) tem-se:

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} - d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X}^{(2)} = 2d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{E}^* d\mathbf{X}^{(2)} \quad (4.57)$$

Para um segmento  $d\mathbf{X} = dS\mathbf{e}_1$ , que no estado deformado passa a  $d\mathbf{x} = ds\mathbf{n}$ , onde  $\mathbf{n}$  é um vector unitário, tem-se, por aplicação de (4.57):

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}^* \mathbf{e}_1 = \frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2} \quad (4.58)$$

Resultando, para cada um dos segmentos em causa:

$$E_{11}^* = \frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2} \text{ para } d\mathbf{X} = dS\mathbf{e}_1 \quad (4.59)$$

$$E_{22}^* = \frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2} \text{ para } d\mathbf{X} = dS\mathbf{e}_2 \quad (4.60)$$

$$E_{33}^* = \frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2} \text{ para } d\mathbf{X} = dS\mathbf{e}_3 \quad (4.61)$$

Note-se que para extensões infinitesimais, (4.58) reduz-se à equação das deformações infinitesimais:

$$\frac{ds - dS}{dS} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n} = E_{nn} \text{ (não soma em n)} \quad (4.62)$$

Considerando agora dois segmentos de recta  $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1\mathbf{e}_1$  e  $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2\mathbf{e}_2$  que depois de deformados passam a  $d\mathbf{x}^{(1)} = ds_1\mathbf{m}$  e  $d\mathbf{x}^{(2)} = ds_2\mathbf{n}$ , sendo  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  vectores unitários, aplicando (4.57), obtém-se:

$$2E_{12}^* = \frac{ds_1 ds_2}{dS_1 dS_2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \quad (4.63)$$

Para deformações infinitesimais, a equação (4.63) reduz-se a:

$$\gamma = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n} \quad (4.64)$$

em que  $\gamma$  representa a redução do ângulo entre  $d\mathbf{X}^{(1)}$  e  $d\mathbf{X}^{(2)}$ , denominada como deformação de corte. Por raciocínio semelhante se obtêm as expressões para  $2E_{13}^*$  e  $2E_{23}^*$ .

Também se podem estabelecer os coeficientes de  $\mathbf{E}^*$  em termos de deslocamentos. Com base em (4.56), (4.46) e (4.14), obtém-se:

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u} \quad (4.65)$$

ou em notação indicial:

$$E_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \quad (4.66)$$

### 4.1.9 Tensor de Cauchy-Green à esquerda

Seja:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{V}^2 \quad (4.67)$$

em que  $\mathbf{V}$  é o tensor de extensões finitas à esquerda, definido por (4.41), e  $\mathbf{B}^*$  o tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda (também chamado tensor de deformação de Finger).

Note-se que se não houver deformação, então  $\mathbf{V} = \mathbf{B}^* = \mathbf{I}$ .

Uma vez que  $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$ , e  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ , facilmente se verifica que:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{FF}^T \quad (4.68)$$

Assim, é possível calcular  $\mathbf{B}^*$  directamente a partir do gradiente de deformações  $\mathbf{F}$ .

Substituindo  $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$  em (4.68), obtém-se uma relação entre o tensor de Cauchy-Green à direita,  $\mathbf{C}$ , e o tensor de Cauchy-Green à esquerda,  $\mathbf{B}^*$ :

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{RCR}^T \quad (4.69)$$

e

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^T \mathbf{B}^* \mathbf{R} \quad (4.70)$$

De referir que se  $\mathbf{n}$  é um vector próprio de  $\mathbf{C}$ , com valor próprio,  $\lambda$ , então  $\mathbf{Rn}$  é um vector próprio de  $\mathbf{B}^*$ , com o mesmo valor próprio,  $\lambda$ .

Considere-se um segmento de recta  $d\mathbf{X} = dS\mathbf{n}$ , em que,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}^T \mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{R}$  o tensor de rotação associado ao gradiente de deformação  $\mathbf{F}$ . Então, a partir de (4.48) obtém-se:

$$ds^2 = dS^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{Cn} = dS^2 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{CR}^T \mathbf{e}_1 = dS^2 \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{CR}^T)^T \mathbf{R}^T \mathbf{e}_1 = dS^2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{RCR}^T \mathbf{e}_1 \quad (4.71)$$

Atendendo a (4.69) é possível calcular a distância com base no tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda:

$$ds^2 = dS^2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{B}^* \mathbf{e}_1 \quad \text{para } d\mathbf{X} = dS(\mathbf{R}^T \mathbf{e}_1) \quad (4.72)$$

Donde se podem deduzir as seguintes equações:

$$B_{11}^* = \left( \frac{ds}{dS} \right)^2 \quad \text{para um segmento } d\mathbf{X} = dS (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_1) \quad (4.73)$$

$$B_{22}^* = \left( \frac{ds}{dS} \right)^2 \quad \text{para um segmento } d\mathbf{X} = dS (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_2) \quad (4.74)$$

$$B_{33}^* = \left( \frac{ds}{dS} \right)^2 \quad \text{para um segmento } d\mathbf{X} = dS (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3) \quad (4.75)$$

Considerando agora dois segmentos de recta  $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1 (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_1)$  e  $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2 (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_2)$  que em situação de deformada passam a  $d\mathbf{x}^{(1)} = ds_1 \mathbf{m}$  e  $d\mathbf{x}^{(2)} = ds_2 \mathbf{n}$ , sendo  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  versores com um ângulo  $\beta$  entre eles, aplicando (4.48) obtém-se:

$$ds_1 ds_2 \cos \beta = dS_1 dS_2 (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{C} (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_2) = dS_1 dS_2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{B}^* \mathbf{e}_2 \quad (4.76)$$

ou seja,

$$B_{12}^* = \frac{ds_1 ds_2}{dS_1 dS_2} \cos (d\mathbf{x}^{(1)}, d\mathbf{x}^{(2)}) \quad \text{para } d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1 (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_1) \quad \text{e } d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2 (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_2) \quad (4.77)$$

$$B_{13}^* = \frac{ds_1 ds_3}{dS_1 dS_3} \cos (d\mathbf{x}^{(1)}, d\mathbf{x}^{(3)}) \quad \text{para } d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1 (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_1) \quad \text{e } d\mathbf{X}^{(3)} = dS_3 (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3) \quad (4.78)$$

$$B_{23}^* = \frac{ds_2 ds_3}{dS_2 dS_3} \cos (d\mathbf{x}^{(2)}, d\mathbf{x}^{(3)}) \quad \text{para } d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2 (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_2) \quad \text{e } d\mathbf{X}^{(3)} = dS_3 (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3) \quad (4.79)$$

Os coeficientes de  $\mathbf{B}^*$  também podem ser expressos em termos de deslocamentos. Usando (4.14) obtém-se:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{I} + [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + (\nabla \mathbf{u})(\nabla \mathbf{u})^T \quad (4.80)$$

ou em notação indicial:

$$B_{ij}^* = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial X_m} \frac{\partial u_j}{\partial X_m} \quad (4.81)$$

Note-se que para pequenos gradientes de deslocamento,  $1/2(B_{ij}^* - \delta_{ij})$ , se reduz a  $2E_{ij}$  da equação (4.21).

### 4.1.10 Tensor de deformação *euleriano*

O tensor das extensões *eulerianas*,  $\mathbf{e}^*$ , também conhecidas por extensões de Almansi, é definido a partir da diferença  $ds^2 - dS^2$ :

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{x} \cdot \left( \mathbf{I} - (\mathbf{B}^*)^{-1} \right) d\mathbf{x} = 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^* d\mathbf{x} \quad (4.82)$$

$$ds^2 - dS^2 = \left( \delta_{ij} - (B_{ij}^*)^{-1} \right) dx_i dx_j = 2e_{ij}^* dx_i dx_j \quad (4.83)$$

Sendo o tensor das extensões *eulerianas*:

$$\mathbf{e}^* \equiv \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} - (\mathbf{B}^*)^{-1} \right) \quad (4.84)$$

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - (B_{ij}^*)^{-1} \right) \quad (4.85)$$

Se não houver deformação, então  $(\mathbf{B}^*)^{-1} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{e}^* = 0$ .

Com base em  $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$  obtém-se:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \quad (4.86)$$

Em coordenadas cartesianas, a equação (4.86) pode ser escrita como:

$$dX_i = F_{ij}^{-1} dx_j \quad (4.87)$$

Assim,

$$F_{ij}^{-1} = \frac{dX_i}{dx_j} \quad (4.88)$$

onde  $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$  é o inverso de  $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$ .

Por outras palavras, quando são usadas as coordenadas cartesianas, tanto para a configuração inicial como para a corrente, obtém-se:

$$[\mathbf{F}^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

A partir de:

$$d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} d\mathbf{x}^{(2)} \quad (4.90)$$

isto é,

$$d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot (\mathbf{B}^*)^{-1} d\mathbf{x}^{(2)} \quad (4.91)$$

e

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} - d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot (\mathbf{I} - (\mathbf{B}^*)^{-1}) d\mathbf{x}^{(2)} \quad (4.92)$$

ou

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} - d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} = 2d\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{e}^* d\mathbf{x}^{(2)} \quad (4.93)$$

Se for considerado um segmento que no instante  $t$  tem direcção de  $\mathbf{e}_1$ , isto é,  $d\mathbf{x} = ds\mathbf{e}_1$ , e que no instante inicial seja  $d\mathbf{X} = dS\mathbf{n}$ , em que  $\mathbf{n}$  é um vector unitário, então das equações (4.91) e (4.93) pode deduzir-se para  $d\mathbf{x} = ds\mathbf{e}_1$ :

$$(\mathbf{B}_{11}^*)^{-1} = \frac{dS^2}{ds^2} \quad (4.94)$$

e

$$e_{11}^* = \frac{(ds^2 - dS^2)}{dS^2} \quad (4.95)$$

Similar raciocínio é utilizado para os outros elementos da diagonal de  $(\mathbf{B}^*)^{-1}$  e  $\mathbf{e}^*$ .

Considerando agora dois segmentos de recta  $d\mathbf{x}^{(1)} = ds_1\mathbf{e}_1$  e  $d\mathbf{x}^{(2)} = ds_2\mathbf{e}_2$ , no instante  $t$ , correspondendo a  $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1\mathbf{n}$  e  $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2\mathbf{m}$ , no instante inicial, sendo  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  vectores unitários, das equações (4.91) e (4.93) pode deduzir-se:

$$(\mathbf{B}_{12}^*)^{-1} = \frac{dS_1 dS_2}{ds_1 ds_2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \quad (4.96)$$

$$2e_{12}^* = 1 - \frac{dS_1 dS_2}{ds_1 ds_2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \quad (4.97)$$

Em termos de deslocamentos temos, a partir de  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (4.98)$$

$$X_i = x_i - u_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (4.99)$$

em que se usa uma descrição espacial (*euleriana*) para definir o campo de deslocamentos, pois as derivadas são feitas relativamente às coordenadas espaciais. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.100)$$

ou seja

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \nabla_x \mathbf{u} \quad (4.101)$$

que permite obter o tensor das deformações de Cauchy:

$$(\mathbf{B}^*)^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{I} - \nabla_x \mathbf{u})^T (\mathbf{I} - \nabla_x \mathbf{u}) = \mathbf{I} - [\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^T] + (\nabla_x \mathbf{u})^T (\nabla_x \mathbf{u}) \quad (4.102)$$

e o tensor das extensões *eulerianas*:

$$\mathbf{e}^* = \frac{1}{2} \left( [\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^T] - (\nabla_x \mathbf{u})^T (\nabla_x \mathbf{u}) \right) \quad (4.103)$$

Na forma de componentes, a equação (4.103) pode ser reescrita como:

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \quad (4.104)$$

Note-se que para deformações infinitesimais,  $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Logo, a equação (4.104) reduz-se à equação (4.21).

Agrupando sob a forma de vector, explicitamente as extensões *eulerianas*:

$$\mathbf{e}^* = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{zz}^* \\ \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (4.105)$$

### 4.1.11 Variação de Volume e Área devido à Deformação

Considere-se o elemento de área definido pelos segmentos  $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1\mathbf{e}_1$  e  $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2\mathbf{e}_2$ . O vector de área formado por  $d\mathbf{X}^{(1)}$  e  $d\mathbf{X}^{(2)}$ , no instante  $t_0$  é dado por:

$$d\mathbf{A}_0 = d\mathbf{X}^{(1)} \times d\mathbf{X}^{(2)} = dS_1 dS_2 \mathbf{e}_3 = dA_0 \mathbf{e}_3 \quad (4.106)$$

Em que  $dA_0$  é o valor numérico da área no estado não deformado e  $\mathbf{e}_3$  o vector normal ao elemento de área. No instante  $t$ ,  $d\mathbf{X}^{(1)}$  deforma-se para  $d\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(1)}$  e  $d\mathbf{X}^{(2)}$  deforma-se para  $d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(2)}$ , sendo a área dada por:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(1)} \times \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(2)} = dS_1 dS_2 \mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2 = dA_0 \mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2 \quad (4.107)$$

A orientação do vector de área deformada é normal a  $\mathbf{F}\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{F}\mathbf{e}_2$ . Seja esta orientação definida pelo versor  $\mathbf{n}$ :

$$d\mathbf{A} = dA \mathbf{n} \quad (4.108)$$

vem, por substituição em (4.107):

$$dA \mathbf{n} = dA_0 (\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2) \quad (4.109)$$

Da equação anterior, deduz-se:

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \cdot dA \mathbf{n} = \mathbf{F}\mathbf{e}_2 \cdot dA \mathbf{n} = 0 \quad (4.110)$$

e

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{A} = dA_0 (\mathbf{F}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2) \quad (4.111)$$

Note-se que para qualquer vector  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , se tem  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \text{determinante}$ , cujas linhas são as componentes de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Assim sendo:

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2 = \det \mathbf{F} \quad (4.112)$$

Substituindo (4.112) em (4.111) resulta:

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_3 \cdot dA \mathbf{n} = dA_0 \det \mathbf{F} \quad (4.113)$$

Usando a definição de transposta de um tensor, a equação (4.110) pode reescrever-se:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{n} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{n} = 0 \quad (4.114)$$

e a equação (4.113) como:

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{n} = \left( \frac{dA_0}{dA} \right) \det \mathbf{F} \quad (4.115)$$

Assim,  $\mathbf{F}^T \mathbf{n}$  tem a direcção de  $\mathbf{e}_3$ , tal que:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{n} = \frac{dA_0}{dA} (\det \mathbf{F}) \mathbf{e}_3 \quad (4.116)$$

resultando finalmente

$$d\mathbf{A}\mathbf{n} = dA_0 (\det \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{e}_3 \quad (4.117)$$

Esta equação indica que o vector da área deformada tem a normal na direcção de  $(\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{e}_3$ , com uma magnitude dada por:

$$dA = dA_0 (\det \mathbf{F}) \left| (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{e}_3 \right| \quad (4.118)$$

Ao estabelecer a relação (4.117) escolheu-se um elemento de área inicial rectangular, formado pelos versores cartesianos  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ . No entanto, a expressão mantém-se válida para qualquer área, desde que se utilize como versor de definição do vector da área não deformada,  $\mathbf{n}_0$ , em substituição de  $\mathbf{e}_3$ :

$$d\mathbf{A}\mathbf{n} = dA_0 (\det \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{n}_0 \quad (4.119)$$

Considere-se agora o elemento de volume definido pelos vectores  $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1 \mathbf{e}_1$ ,  $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2 \mathbf{e}_2$  e  $d\mathbf{X}^{(3)} = dS_3 \mathbf{e}_3$ . O volume formado por  $d\mathbf{X}^{(1)}$ ,  $d\mathbf{X}^{(2)}$  e  $d\mathbf{X}^{(3)}$  no instante  $t_0$  é dado por:

$$dV_0 = dS_1 dS_2 dS_3 \quad (4.120)$$

No instante  $t$ ,  $d\mathbf{X}^{(1)}$  deforma-se em  $d\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(1)}$ ,  $d\mathbf{X}^{(2)}$  deforma-se em  $d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(2)}$  e  $d\mathbf{X}^{(3)}$  deforma-se em  $d\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(3)}$ , sendo o volume:

$$\begin{aligned} dV &= \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(2)} \times \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(3)} = dS_1 dS_2 dS_3 (\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}\mathbf{e}_2 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_3) \\ &= dV_0 (\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}\mathbf{e}_2 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (4.121)$$

isto é,

$$dV = (\det \mathbf{F}) dV_0 \quad (4.122)$$

Atendendo à definição dos tensores de deformação de Cauchy-Green à direita,  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ , e de Cauchy-Green à esquerda,  $\mathbf{B}^* = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ , resulta:

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{B}^* = (\det \mathbf{F})^2 \quad (4.123)$$

o que permite calcular o elemento de volume na configuração corrente, em função daqueles tensores como:

$$dV = \sqrt{\det \mathbf{C}} dV_0 = \sqrt{\det \mathbf{B}^*} dV_0 \quad (4.124)$$

Note-se que para um material incompressível,  $dV = dV_0$ , resulta:

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{C} = \det \mathbf{B}^* = 1 \quad (4.125)$$

Devido à equação (4.122) a equação da conservação da massa, em termos de densidade do material no estado deformado,  $\rho$ , e no estado não deformado,  $\rho_0$ , pode ser escrita como:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\det \mathbf{F}} \quad (4.126)$$

## 4.2 Estado de tensão

### 4.2.1 Vector Tensão

Numa teoria clássica de meios contínuos, as forças internas podem ser relacionadas com o conceito de forças do corpo ou forças da superfície. As forças do corpo são as que actuam em todas as partículas materiais no corpo, sem contacto físico, ou seja, em todo o seu volume (gravidade, força electrostática, electromagnética). As forças de superfície são as que actuam por contacto físico no corpo (pressão ou forças de fricção).

Considere-se um corpo material (Figura 4.3) sujeito a um sistema de forças, pelo qual se faz passar um plano  $S$ . Considere-se ainda um versor normal ao plano,  $\mathbf{n}$ , que passa por um ponto  $P$ , contido no corpo material. Este plano corta o corpo em duas partes, uma que contém o vector  $\mathbf{n}$  (porção II) e outra que contém a origem de  $\mathbf{n}$  (porção I).

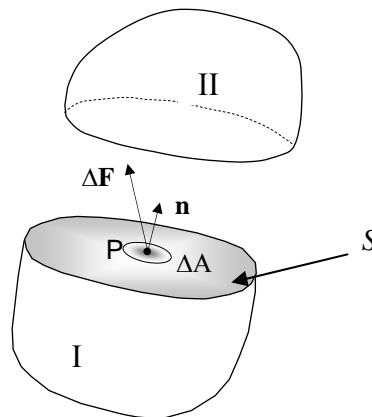


Figura 4.3: Vector de tensão.

A força resultante existente numa pequena área  $\Delta A$  que contém o ponto  $P$  é  $\Delta \mathbf{F}$ . Define-se o vector tensão,  $\mathbf{t}_n$  (de II para I), no ponto  $P$  e no plano  $S$  como:

$$\mathbf{t}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \quad (4.127)$$

Se a porção II é considerada como um corpo livre, então pela Lei de Newton de acção e reacção, o vector tensão (de I para II),  $\mathbf{t}_{-n}$ , pode ser definido no mesmo ponto e no mesmo plano, oposto ao dado pela equação (4.127), isto é:

$$\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{-n} \quad (4.128)$$

Se  $S$  passar a ser uma superfície, em vez de um plano, passando pelo ponto  $P$  e seja  $\Delta\mathbf{F}$  a força resultante numa pequena área  $\Delta S$ , na superfície  $S$ , então o vector contendo as tensões de Cauchy é definido por:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta S} \quad (4.129)$$

É possível estabelecer o Princípio de Tensão de Cauchy que diz que o vector tensão, em qualquer lugar e tempo, tem o mesmo valor em todas as partes do material, tendo o mesmo plano tangente em  $P$ . Assim, o estado de tensão num corpo material depende do instante  $t$  considerado, do ponto  $\mathbf{x}$ , e da direcção  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \quad (4.130)$$

No entanto, pela segunda lei de Newton, a dependência de  $\mathbf{n}$  pode ser expressa como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \quad (4.131)$$

em que  $\mathbf{T}$  é uma transformação linear.

## 4.2.2 Tensor de Tensão

O conceito de tensão, introduzido por Euler para componentes normais e completado por Cauchy e com muita importância na mecânica dos meios contínuos, é tipicamente definido como uma força actuando numa determinada área.

De acordo com a equação (4.130), o vector tensão no plano passando por um ponto específico  $\mathbf{x}$  e num dado instante  $t$ , depende apenas do vector normal,  $\mathbf{n}$ , ao plano. Assim, seja  $\mathbf{T}$  um tensor de segunda ordem (tensor das tensões de Cauchy) pode estabelecer-se a seguinte relação:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (4.132)$$

De acordo com a equação (4.132), os vectores de tensão  $\mathbf{t}_{e_i}$  nos três eixos de  $R^3$ , relacionam-se com o tensor de tensão  $\mathbf{T}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{t}_{e_1} = \mathbf{T}\mathbf{e}_1, \mathbf{t}_{e_2} = \mathbf{T}\mathbf{e}_2, \mathbf{t}_{e_3} = \mathbf{T}\mathbf{e}_3 \quad (4.133)$$

Por definição de componentes de um tensor, obtém-se:

$$T_{e_i} = T_{mi}e_m \quad (4.134)$$

resultando:

$$\begin{aligned} t_{e_1} &= T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 \\ t_{e_2} &= T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3 \\ t_{e_3} &= T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.135)$$

Note-se que para cada componente de tensão,  $T_{ij}$ , o segundo índice,  $j$ , indica o plano em que actua a componente e o primeiro índice,  $i$ , indica a direcção da componente.

De referir, ainda, que tensões normais positivas são designadas de tracção e tensões normais negativas são designadas como tensões de compressão. Tensões tangentes são conhecidas como tensões de corte. Por exemplo,  $T_{21}$  e  $T_{31}$  têm as mesmas componentes de tensão de corte actuando no mesmo plano ( $e_1$ ). Assim, a tensão de corte resultante neste plano é dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 \quad (4.136)$$

e a sua magnitude:

$$|\boldsymbol{\tau}_1| = \sqrt{T_{21}^2 + T_{31}^2} \quad (4.137)$$

Da mesma forma, no plano  $e_2$  obtém-se:

$$\boldsymbol{\tau}_2 = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{32}\mathbf{e}_3 \quad \text{e} \quad |\boldsymbol{\tau}_2| = \sqrt{T_{12}^2 + T_{32}^2} \quad (4.138)$$

e no plano  $e_3$ :

$$\boldsymbol{\tau}_3 = T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad |\boldsymbol{\tau}_3| = \sqrt{T_{13}^2 + T_{23}^2} \quad (4.139)$$

A partir de  $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$ , as componentes de  $\mathbf{t}$  relacionam-se com  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{n}$ , pela equação:

$$t_i = T_{ij}n_j \quad (4.140)$$

ou, por uma forma mais conveniente em termos computacionais:

$$[\mathbf{t}] = [\mathbf{T}][\mathbf{n}] \quad (4.141)$$

De referir que o estado de tensão num ponto é caracterizado pelo tensor de tensão,  $\mathbf{T}$ .

Numa análise envolvendo grandes deformações, o corpo material pode sofrer grandes rotações e/ou grandes deformações. As variações na configuração do corpo material podem ser estabelecidas através da definição do estado de tensão, em conjunto com a definição de estado de deformação, o que permite estabelecer a equação do trabalho virtual e respectiva integração a todo o volume. Em princípio, quando um estado de deformação é referido a uma determinada configuração de referência, o estado de tensão deve referir-se à mesma configuração.

### 4.2.3 Tensores de Tensão de Piola Kirchhoff

Seja  $dA_0$  um elemento de área de um corpo material deformável, cuja orientação é definida pelo respectivo versor  $\mathbf{n}_0$ , no instante inicial  $t_0$  e  $dA$  define o mesmo elemento de área no instante  $t$ , na mesma área material com o vector normal  $\mathbf{n}$ . Em termos de nomenclatura, designa-se  $dA_0$  como a área não deformada e  $dA$  como a área deformada. Seja,  $d\mathbf{f}$ , a força actuando na área deformada  $dA$ . Assim, obtém-se:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}dA \quad (4.142)$$

e

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} \quad (4.143)$$

Através destas equações definem-se dois vectores e tensores de tensão, baseados na área não deformada: tensor das primeiras tensões de Piola Kirchhoff e tensor das segundas tensões de Piola Kirchhoff.

#### 4.2.3.1 Tensor das primeiras tensões de Piola-Kirchhoff

Seja

$$d\mathbf{f} \equiv \mathbf{t}_0 dA_0 \quad (4.144)$$

O vector tensão,  $\mathbf{t}_0$ , definido deste modo, é um vector de pseudo-tensões, que calculado com base na área não deformada, não descreve com rigor a intensidade da força numa direcção. Note-se, contudo, que  $\mathbf{t}_0$  tem a mesma direcção do vector tensão de Cauchy,  $\mathbf{t}$ .

O tensor das primeiras tensões de Piola-Kirchhoff (também conhecido como tensor de tensões de Lagrange) é uma transformação linear,  $\mathbf{T}_0$ , definido em termos de forças correntes que actuam em superfícies no estado não deformado, tal que:

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{T}_0 \mathbf{n}_0 \quad (4.145)$$

A relação entre o tensor das primeiras tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor de tensão de Cauchy pode ser obtida da seguinte forma:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}dA = \mathbf{t}_0 dA_0 \quad (4.146)$$

$$\mathbf{t}_0 = \frac{dA}{dA_0} \mathbf{t} \quad (4.147)$$

Substituindo (4.143) e (4.145) em (4.147), obtém-se:

$$\mathbf{T}_0 \mathbf{n}_0 = \left( \frac{dA}{dA_0} \right) \mathbf{T} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{T} dA \mathbf{n}}{dA_0} \quad (4.148)$$

Usando:

$$dA \mathbf{n} = dA_0 (\det \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{n}_0 \quad (4.149)$$

é possível escrever:

$$\mathbf{T}_0 \mathbf{n}_0 = \mathbf{T} (\det \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{n}_0 \quad (4.150)$$

Esta equação é verdadeira para todo o  $\mathbf{n}_0$  chegando, assim, à relação pretendida:

$$\mathbf{T}_0 = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (4.151)$$

Em componentes cartesianas a equação (4.151) pode ser escrita como:

$$(T_0)_{ij} = (\det \mathbf{F}) T_{im} (F_{jm}^{-1}) \quad (4.152)$$

A equação (4.151) pode, ainda, ser expressa como:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{T}_0 \mathbf{F}^T \quad (4.153)$$

que em componentes cartesianas se pode escrever:

$$T_{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} (T_0)_{im} F_{jm} \quad (4.154)$$

Note-se que o tensor das primeiras tensões de Piola-Kirchhoff, em geral, não é simétrico.

### 4.2.3.2 Tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff

O tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff,  $\tilde{\mathbf{T}}$ , é definido em termos de forças correntes, estabelecidas em função da deformação local, que actuam em superfícies no estado não deformado. Este tensor pode ser calculado a partir das tensões de Cauchy, por simples transformação cinemática [11] o que conduz a um tensor simétrico, já que o de Cauchy também é simétrico. Naturalmente que o processo inverso também é válido. A propriedade mais importante das segundas tensões de Piola-Kirchhoff é a sua invariância relativamente à rotação. Quando se define o tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff, assume-se que as forças  $d\mathbf{f}$  e  $d\mathbf{f}_0$  são relacionadas do mesmo modo que se relaciona o vector de posição material,  $d\mathbf{X}$ , e o vector de posição espacial,  $d\mathbf{x}$  ( $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ ).

Seja

$$d\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{t}} dA_0 \quad (4.155)$$

onde:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F} d\tilde{\mathbf{f}} \quad (4.156)$$

Em que  $d\tilde{\mathbf{f}}$  é uma (pseudo) força que se transforma na força actual,  $d\mathbf{f}$ , (configuração deformada) através do gradiente de deformação,  $\mathbf{F}$ . Deste modo, o vector de tensão  $\tilde{\mathbf{t}}$  tem, em termos genéricos, uma direcção distinta do vector  $\mathbf{t}$  contendo as tensões de Cauchy.

O tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff é uma transformação linear,  $\tilde{\mathbf{T}}$ , tal que:

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{n}_0 \quad (4.157)$$

em que  $\mathbf{n}_0$  é a normal à superfície no estado não deformado.

Das equações (4.155), (4.156) e (4.157) obtém-se:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{n}_0 dA_0 \quad (4.158)$$

Por outro lado, atendendo às definições expressas em (4.144) e (4.145), tem-se:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}_0 dA_0 = \mathbf{T}_0 \mathbf{n}_0 dA_0 \quad (4.159)$$

Comparando (4.158) com (4.159), estabelece-se uma relação entre os dois tensores de tensão de Piola-Kirchhoff:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_0 \quad (4.160)$$

Das equações (4.151) e (4.160) define-se a relação entre o tensor das segundas tensões de Piola-kirchhoff e o tensor das tensões de Cauchy:

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (4.161)$$

De realçar, que o tensor das segundas tensões de Piola-kirchhoff é sempre simétrico, contrariamente ao tensor das primeiras tensões de Piola-kirchhoff.

### 4.3 Referências

- [1] Y.C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, New Jersey, U.S.A., 1965.
- [2] B. Ekmark, *On Large Strain Theories in Sheet Metal Forming*, PhD. Thesis, Luleå University, Sweden, 1983.
- [3] L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, 1969.
- [4] K. Mattiasson, *On The Co-Rotational Finite Element Formulation for Large Deformation Problems*, PhD. Thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1983.
- [5] A.J.M. Spencer, *Continuum mechanics*, Longmans, Hong-Kong, 1980.
- [6] L.A. Segel, *Mathematics applied to continuum mechanics*, Dover Publications, Inc., New York, 1977.
- [7] J.E. Marsden, T.J.R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [8] W.M. Lai, D. Rubin, E. Krempl, *Introduction to Continuum Mechanics, 3<sup>th</sup> ed.*, Pergamon Press, New York, 1993.
- [9] P.C. Chou, N.J. Pagano, *ELASTICITY Tensor, Dyadic, and Engineering approaches*, Dover Publications, Inc., New York, 1967.
- [10] F.D. Murnaghan, *Finite Deformation of an Elastic Solid*, Dover Publications, Inc., New York, 1961.
- [11] E.C. Young, *Vector and Tensor Analysis*, Marcel Decker, New York, 1978.

# Capítulo 5

## *Modelos constitutivos*

### 5.1 Introdução

Neste capítulo é considerada a elasticidade dos corpos (materiais que voltam ao seu estado inicial depois de retirada a tensão aplicada) ou sua plasticidade (propriedade dos materiais que se deformam, mudando a sua forma inicial para irreversível, em resposta a uma tensão aplicada) (Figura 5.1).

Existem várias descrições matemáticas sobre plasticidade. Uma é a teoria da deformação (Leis de Hooke) onde o tensor de tensão, de ordem  $n$ , em  $n$  dimensões, é uma função do tensor de deformação. A teoria matemática mais correcta, a teoria da plasticidade, usa um conjunto de equações não lineares e não integráveis para descrever um conjunto de alterações de deformações e tensões em relação ao estado anterior e a pequenos aumentos de deformação.

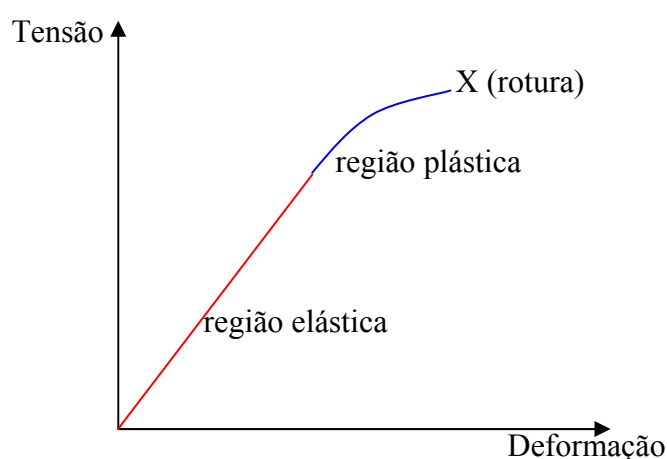


Figura 5.1: Componentes de tensão de corte relativamente às componentes de deformação de corte com aumento de deformação

## 5.2 Elasticidade

Para melhor se perceber o comportamento mecânico dos materiais sólidos, considere-se um bloco cilíndrico de área transversal  $A$ . É-lhe aplicada uma carga  $P$ , com alongamento  $\Delta l$  e comprimento  $l$  (Figura 5.2).

Numa porção linear  $OA$  (gama proporcional) se a carga for anulada (descarregamento), então a linha  $OA$  fica a zero e o modelo tem um comportamento elástico.

Aplicando uma carga maior que  $A$ , passa a existir  $OABC$ , com um alongamento permanente  $OC$ . Se se voltar a aplicar a carga em  $C$ , isto indica um comportamento elástico com o mesmo declive  $OA$ , mas com um limite aumentado proporcionalmente. O material diz-se endurecido por deformação [1].

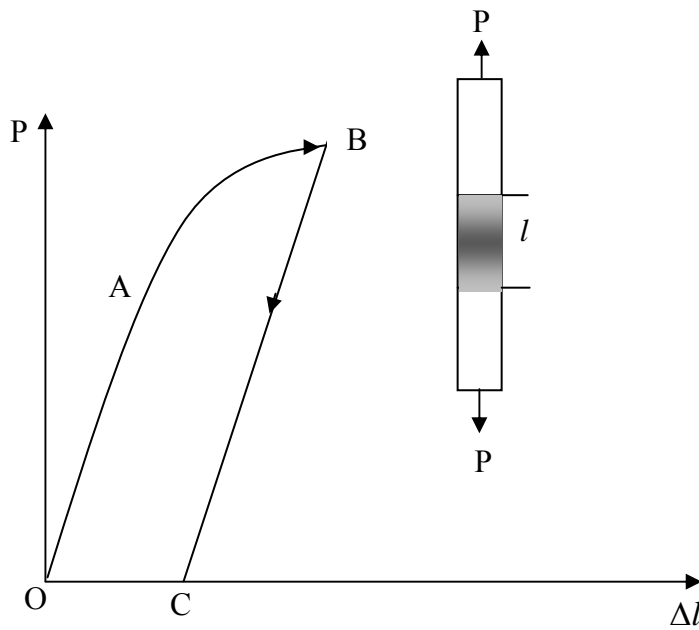


Figura 5.2: Diagrama de carga alongamento.

O diagrama de carga alongamento depende da secção transversal e do comprimento de  $l$ . Com o objectivo de ter uma representação do comportamento material, que são independentes do tamanho do exemplo e das variáveis introduzidas, utiliza-se o valor de tensão axial:

$$t_a = P / A_0 \quad (5.1)$$

onde  $A_0$  é a área não deformada da secção versus a deformação axial  $\varepsilon_a = \Delta l / l$ . O declive da linha  $OA$  define o coeficiente de material chamado módulo de Young (ou módulo de elasticidade).

$$E = \frac{\mathbf{T}}{\varepsilon_a} \quad (5.2)$$

Dentro de certos limites, podem ser retiradas algumas conclusões:

- a) A relação entre as cargas aplicadas e as deformações é linear.
- b) A variação de carga aplicada não tem nenhum efeito.
- c) Removidas as cargas aplicadas, as deformações desaparecem completamente.
- d) As deformações são muito pequenas.

As características de a) a d) são usadas para formular equações constitutivas de um material ideal, sólido linear elástico, ou sólido elástico de Hook. A equação constitutiva relaciona a tensão com quantidades relevantes de deformação. Neste caso, as deformações são pequenas e a variação de carga aplicada não tem nenhum efeito.

Pode escrever-se:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E}) \quad (5.3)$$

onde  $\mathbf{T}$  é um tensor das tensões de Cauchy e  $\mathbf{E}$  o tensor de deformação infinitesimal, com  $\mathbf{T}(0) = 0$ . Se, ainda, a função for linear, pode escrever-se em termos de componentes:

$$\begin{aligned} T_{11} &= D_{1111}E_{11} + D_{1112}E_{12} + \dots + D_{1133}E_{33} \\ T_{12} &= D_{1211}E_{11} + D_{1212}E_{12} + \dots + D_{1233}E_{33} \\ &\dots\dots\dots \\ T_{33} &= D_{3311}E_{11} + D_{3312}E_{12} + \dots + D_{3333}E_{33} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Estas nove equações podem ainda ser reescritas como:

$$T_{ij} = D_{ijkl}E_{kl} \quad (5.5)$$

Uma vez que  $T_{ij}$  e  $E_{ij}$  são componentes de tensores de segunda ordem, então  $D_{ijkl}$  são componentes do tensor de quarta ordem, conhecido como tensor de elasticidade.

Os valores destas componentes, em relação à base de referência  $\mathbf{e}'_i$  e à base corrente  $\mathbf{e}_i$ , são relacionadas pela seguinte lei de transformação:

$$D'_{ijkl} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}Q_{sl}D_{mhrs} \quad (5.6)$$

Se o corpo é homogéneo, isto é, as propriedades mecânicas são as mesmas para cada partícula no corpo, então  $D_{ijkl}$  são constantes, isto é, independentes da posição.

Existem 81 coeficientes na equação (5.4). Contudo, uma vez que  $E_{ij} = E_{ji}$  é possível combinar a soma de dois termos, tais como  $D_{1112}E_{12} + D_{1121}E_{21}$  num só termo,  $(D_{1112} + D_{1121})E_{12}$ , em que  $(D_{1112} + D_{1121})$  se torna num coeficiente independente. Da mesma forma, se pode simplificar,  $D_{1112} = D_{1121}$ . Assim, devido à simetria do tensor de deformação, pode ser escrita a seguinte condição:

$$D_{ijkl} = D_{ijlk} \quad (5.7)$$

A equação (5.7) reduz o número de  $D_{ijkl}$  independentes de 81 para 54.

Se considerarmos os casos em que o tensor de tensão é simétrico, isto é,

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (5.8)$$

obtém-se:

$$D_{ijkl} = D_{jikl} \quad (5.9)$$

A equação (5.9) reduz o número de coeficientes independentes para 18. Assim, para o caso geral de um corpo elástico linear, passam a existir no máximo 36 coeficientes materiais.

Um material diz-se isotrópico se as suas propriedades mecânicas podem ser descritas sem referência à direcção [1]. Caso contrário, diz-se anisotrópico.

Para um sólido linear elástico, em relação à base  $\mathbf{e}_i$ , tem-se

$$T_{ij} = D_{ijkl}E_{kl} \quad (5.10)$$

e em relação à base  $\mathbf{e}'_i$ :

$$T'_{ij} = D'_{ijkl}E'_{kl} \quad (5.11)$$

Se o material for isotrópico, as componentes do tensor elasticidade podem ser iguais, isto é:

$$D'_{ijkl} = D_{ijkl} \quad (5.12)$$

Um tensor, tendo as mesmas componentes em relação a qualquer base ortonormal, é conhecido como tensor isotrópico. Por exemplo, o tensor identidade,  $\mathbf{I}$ , é um tensor isotrópico, uma vez que as suas componentes  $\delta_{ij}$  são iguais em qualquer base cartesiana.

A partir de  $\delta_{ij}$  podem ser formados os seguintes tensores isotrópicos independentes de quarta ordem:

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &\equiv \delta_{ij}\delta_{kl} \\ B_{ijkl} &\equiv \delta_{ik}\delta_{jl} \\ H_{ijkl} &\equiv \delta_{il}\delta_{jk} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Assim, para um material elástico linear isotrópico, o tensor elasticidade  $D_{ijkl}$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$  e  $H_{ijkl}$

$$C_{ijkl} = \lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl} \quad (5.14)$$

onde  $\lambda$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. Substituindo (5.14) na equação (5.10) e ainda sabendo que

$$A_{ijkl}E_{kl} = \delta_{ij}\delta_{kl}E_{kl} = \delta_{ij}E_{kk} = \delta_{ij}e \quad (5.15)$$

$$B_{ijkl}E_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}E_{kl} = E_{ij} \quad (5.16)$$

$$H_{ijkl}E_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk}E_{kl} = E_{ji} = E_{ij} \quad (5.17)$$

obtém-se

$$T_{ij} = D_{ijkl}E_{kl} = \lambda e\delta_{ij} + (\alpha + \beta)E_{ij} \quad (5.18)$$

ou substituindo  $\alpha + \beta$  por  $2\mu$ , a equação (5.18) pode ser reescrita como

$$T_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (5.19)$$

ou, em notação directa

$$\mathbf{T} = \lambda e\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (5.20)$$

onde  $e = E_{kk}$  é o primeiro escalar invariante de  $\mathbf{E}$ .

A equação (5.19) pode, ainda, ser escrita da seguinte forma:

$$T_{11} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{11} \quad (5.21)$$

$$T_{22} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{22} \quad (5.22)$$

$$T_{33} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{33} \quad (5.23)$$

$$T_{12} = 2\mu E_{12} \quad (5.24)$$

$$T_{13} = 2\mu E_{13} \quad (5.25)$$

$$T_{23} = 2\mu E_{23} \quad (5.26)$$

As equações de (5.21) a (5.26) são as equações constitutivas para um sólido linear isotrópico.

As duas constantes materiais  $\lambda$  e  $\mu$  são conhecidas como coeficientes ou constantes de Lamé.

Uma vez que  $E_{ij}$  é adimensional,  $\lambda$  e  $\mu$  têm as mesmas dimensões do tensor tensão, força por unidade de área.

A equação (5.19) expressa as componentes de tensão em termos das componentes de deformação. Esta equação pode ser invertida para se ter

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (5.27)$$

ou ainda

$$e = \left( \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \right) T_{kk} \quad (5.28)$$

Se o estado de tensão é tal que apenas uma das componentes normais de tensão é diferente de zero, chama-se estado de tensão uniaxial. Se a direcção de  $\mathbf{e}_1$  for axial com  $T_{11} \neq 0$  e todos os outros  $T_{ij} = 0$ , então a equação (5.27) pode ser escrita como

$$E_{11} = \frac{1}{2\mu} \left[ T_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{11} \right] = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11} \quad (5.29)$$

$$E_{33} = E_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} E_{11} \quad (5.30)$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0 \quad (5.31)$$

A razão  $T_{11} / E_{11}$  correspondente a (5.2) é o módulo de Young ou módulo de elasticidade  $E$ .

Assim, a equação (5.29) pode ser reescrita como

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (5.32)$$

A razão  $-E_{22} / E_{11}$  e  $-E_{33} / E_{11}$  correspondendo à razão  $-\varepsilon_d / \varepsilon_a$  é o coeficiente de Poisson e da equação (5.30) obtém-se

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (5.33)$$

Usando as equações (5.32) e (5.33), a equação (5.27) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$E_{11} = \frac{1}{E} [T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})] \quad (5.34)$$

$$E_{22} = \frac{1}{E} [T_{22} - \nu(T_{33} + T_{11})] \quad (5.35)$$

$$E_{33} = \frac{1}{E} [T_{33} - \nu(T_{11} + T_{22})] \quad (5.36)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2\mu} T_{12} \quad (5.37)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2\mu} T_{13} \quad (5.38)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2\mu} T_{23} \quad (5.39)$$

Eliminando  $\lambda$  das equações (5.32) e (5.33) tem-se a seguinte relação muito importante:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.40)$$

Usando esta relação, a equação (5.27) ainda pode ser escrita da seguinte forma:

$$E_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)T_{ij} - \nu(T_{kk})\delta_{ij}] \quad (5.41)$$

Se o estado de tensão é tal que, só um par de tensões de corte é diferente de zero, é chamado estado de tensão de corte simples. Este estado de tensão pode ser descrito por  $T_{12} = T_{21} = \tau$  e a partir de (5.37) obtém-se:

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\tau}{2\mu} \quad (5.42)$$

Definindo o módulo de elasticidade transversal,  $G$ , como a razão entre a tensão de corte,  $\tau$ , e a variação do ângulo entre elementos que estavam inicialmente nas direcções  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  obtém-se:

$$\frac{\tau}{2E_{12}} \equiv G \quad (5.43)$$

Comparando (5.43) com (5.42) nota-se que a constante de Lamé,  $\mu$ , é também o módulo de elasticidade transversal,  $G$ .

Para um material elástico existe uma relação linear para  $e$  (dilatação) e define-se o módulo de compressibilidade,  $k$ , como a razão entre a tensão hidrostática,  $\sigma_m$ , por unidade de variação de volume

$$k = \frac{\sigma_m}{e} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (5.44)$$

	$\lambda, \mu$	$E, \nu$	$\mu, \nu$	$E, \mu$	$k, \nu$
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$\frac{3k\nu}{1+\nu}$
$\mu$	$\mu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\mu$	$\mu$	$\frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$
$k$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$	$k$
$E$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$E$	$2\mu(1+\nu)$	$E$	$3k(1-2\nu)$
$\nu$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\nu$	$\nu$	$\frac{E}{2\mu} - 1$	$\nu$

Tabela 5.1: Conversão de constantes para um material elástico isotrópico [1].

Das equações (5.32), (5.33), (5.40) e (5.44) conclui-se que as constantes de Lamé, o módulo de Young, o módulo de elasticidade transversal, o coeficiente de Poisson e o módulo de compressibilidade, se interrelacionam. A tabela 1 expressa as várias constantes elásticas em termos de dois pares base.

Assume-se que o conceito de “elasticidade” está associado à existência de uma função de energia de deformação  $U(E_{ij})$ . Esta é uma função definida positiva das componentes de deformação tal como:

$$T_{ij} = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}} \quad (5.45)$$

Note-se que definida positiva significa que uma função é zero se e só se todas as componentes de deformação são zero. Caso contrário, a função diz-se positiva.

## 5.3 Hiperelasticidade

O objectivo deste sub-capítulo prende-se com o estudo de várias equações constitutivas, que relaciona componentes de tensão com componentes de deformação, dentro de um regime não linear, apropriadas a técnicas de aproximação, tais como o método de elementos finitos.

### 5.3.1 Considerações gerais sobre equações constitutivas

O objectivo das teorias constitutivas é desenvolver modelos matemáticos para representar o real comportamento dos materiais [2].

Os materiais hiperelásticos implicam a existência de uma função de energia livre de Helmholtz,  $\Psi$ , que é definida como uma relação entre a unidade de volume de referência e a unidade de massa.

No caso de  $\Psi = \Psi(\mathbf{F})$  ser apenas uma função de  $\mathbf{F}$ , ou algum tensor de deformação, a função de Helmholtz é referida como uma função de energia de deformação, que é um exemplo típico de uma função escalar de um tensor variável,  $\mathbf{F}$ , assumida como contínua.

A distribuição dos constituintes internos é uniforme numa escala contínua. Para este tipo de materiais, a função  $\Psi$  depende apenas do gradiente de deformação,  $\mathbf{F}$ .

Para materiais heterogéneos (materiais não homogéneos)  $\Psi$  depende também da posição de um ponto no meio.

Um material hiperelástico é definido como uma sub-classe de um material elástico, cujas funções de resposta  $\mathfrak{G}$  e  $\mathfrak{g}$  têm expressões físicas da seguinte forma

$$\mathbf{T}_0 = \mathfrak{G}(\mathbf{F}) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{T}_{0_{aA}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}_{aA}} \quad (5.46)$$

Usando a seguinte relação do tensor simétrico das tensões de Cauchy:

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{T}_0 \mathbf{F}^T = \mathbf{T}^T \quad (5.47)$$

e lembrando que  $J = \det \mathbf{F}$ , obtém-se:

$$\mathbf{T} = \mathfrak{g}(\mathbf{F}) = J^{-1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \quad (5.48)$$

ou:

$$\mathbf{T}_{ab} = J^{-1} F_{Aa} \frac{\partial \Psi}{\partial F_{Ab}} = J^{-1} F_{aA} \frac{\partial \Psi}{\partial F_{bA}} \quad (5.49)$$

Este tipo de equações é conhecido como equações constitutivas ou equações de estado. Estabelecem um modelo axiomático ou empírico como base de aproximação do comportamento dum material real. O modelo diz-se constitutivo ou modelo material.

A derivada da função escalar  $\Psi$ , em relação ao tensor variável,  $\mathbf{F}$ , determina o gradiente de  $\Psi$ , que é um tensor de segunda ordem, conhecido como o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{T}_0$ .

A derivação implica que a função componente,  $\Psi(F_{aA})$ , é diferenciável em relação a todas as componentes  $F_{aA}$ .

Por conveniência, assume-se que a função de energia de deformação tende para 0 na configuração de referência, isto é, onde  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ , sendo expressa pela condição de normalização:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{I}) = 0 \quad (5.50)$$

A partir de uma observação física nota-se que a função de energia de deformação,  $\Psi$ , aumenta com a deformação, donde se deduz:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}) \geq 0 \quad (5.51)$$

que limita as gamas de funções admissíveis ocorrendo em expressões para a energia deformada. Assume-se que  $\Psi$  não tem pontos estacionários no espaço deformado.

As relações (5.50) e (5.51) asseguram que a tensão na configuração de referência, chamada tensão residual, é zero. Diz-se que a configuração de referência é livre de tensão.

Para o comportamento de deformações finitas é necessário que a função escalar,  $\Psi$ , satisfaça também as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty & \quad se \quad \det \mathbf{F} \rightarrow +\infty \\ \Psi(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty & \quad se \quad \det \mathbf{F} \rightarrow 0^+ \end{aligned} \quad (5.52)$$

Fisicamente, isto quer dizer que é necessário uma quantidade infinita de energia deformada, de forma a expandir um corpo contínuo para um intervalo infinito, ou reduzindo-o a um ponto com um volume a tender para zero.

### 5.3.2 Formas equivalentes da função de energia de deformação

A função de energia de deformação,  $\Psi(\mathbf{F})$ , deve ser igual à função de energia de deformação  $\Psi(\mathbf{F}^+)$  gerada pelo segundo movimento  $\mathbf{x}^+ = \chi^+(\mathbf{X}, t^+)$  que difere de  $\chi$  por um movimento de corpo rígido. Empregando a regra de transformação para o gradiente de deformação, nota-se que  $\Psi$  não pode ser uma função arbitrária de  $\mathbf{F}$ . Em particular, deve obedecer à restrição:

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{F}^+) = \Psi(\mathbf{QF}) \quad (5.53)$$

para todos os tensores  $\mathbf{F}$  com  $\det \mathbf{F} > 0$  e para todo o tensor  $\mathbf{Q}$ , uma vez que  $\mathbf{F}$  se transforma em  $\mathbf{QF}$ , isto é,  $F_{aA}^+ = Q_{ab} F_{bA}$ .

De forma a obter formulações equivalentes a (5.53) faz-se uma escolha especial para  $\mathbf{Q}$ , nomeadamente o transposto do tensor de rotação ortogonal,  $\mathbf{R}^T$ , donde se deduz

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{R}^T \mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) \quad (5.54)$$

e finalmente:

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{U}) \quad (5.55)$$

A partir da equação (5.55), conclui-se que  $\Psi$  é independente da parte rotacional de  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ . Conclui-se que o material hiperelástico depende apenas do tensor de extensão simétrico à direita,  $\mathbf{U}$ . É importante notar que a relação (5.55) especifica a condição necessária e suficiente para a função de energia de deformação ser objectiva durante os movimentos de corpos rígidos.

Uma vez que o tensor de Cauchy-Green à direita e o tensor de Lagrange são dados por  $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$  e

$\mathbf{E}^* = \frac{(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I})}{2}$ ,  $\Psi$  pode ser expressa como uma função de seis componentes  $C_{AB}$ ,  $E_{AB}$  dos

tensores materiais simétricos  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}^*$ , respectivamente, tal que:

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{E}^*) \quad (5.56)$$

### 5.3.3 Formas reduzidas de equações constitutivas

Ao considerar a função de energia de deformação,  $\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{C})$ , em relação ao instante  $t$ , é possível obter as seguintes expressões, que são válidas para qualquer tensor arbitrário  $\dot{\mathbf{F}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= tr \left[ \left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \dot{\mathbf{F}} \right] = tr \left[ \left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) \dot{\mathbf{C}} \right] = \\ &= tr \left[ \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \left( \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right) \right] = 2 tr \left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Uma vez que  $\mathbf{C}$  é um tensor simétrico de segunda ordem, o gradiente do tensor escalar  $\Psi(\mathbf{C})$ , também é simétrico. A partir de (5.57) pode deduzir-se que:

$$\left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (5.58)$$

que, quando substituída em (5.48), resulta na forma reduzida da equação constitutiva para materiais hiperelásticos, nomeadamente:

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T = 2 J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (5.59)$$

ou:

$$\mathbf{T}_{ab} = J^{-1} F_{aA} \frac{\partial \Psi}{\partial F_{bA}} = 2 J^{-1} F_{aA} F_{bB} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{AB}} \quad (5.60)$$

Alternativamente, as expressões podem ser obtidas para o tensor das primeiras tensões de Piola-Kirchhoff ( $\mathbf{T}_0$ ) e tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff, ( $\tilde{\mathbf{T}}$ ).

$$\mathbf{T}_0 = 2 \mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{T}_{0_{aA}} = 2 F_{aB} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{AB}} \quad (5.61)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}^*)}{\partial \mathbf{E}^*} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{T}}_{AB} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C_{AB}} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{AB}^*} \quad (5.62)$$

### 5.3.4 Materiais hiperelásticos isotrópicos

Os materiais hiperelásticos isotrópicos têm a propriedade, baseada no princípio físico, de que a resposta do material é igual em todas as direcções.

A formulação matemática da isotropia, dentro do contexto da hiperelasticidade, é a seguinte:

Considere-se um ponto arbitrário,  $\mathbf{X}$ , dum corpo elástico ocupando a região  $\Omega_0$  no instante  $t=0$ . O movimento  $\chi$  leva este ponto  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  para o local  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ , especificando a localização na região  $\Omega$ , no instante  $t$ . O corpo ocupando a região  $\Omega_0$  é deslocado pelo vector,  $\mathbf{c}$ , e rodado pelo tensor ortogonal,  $\mathbf{Q}$ , de acordo com a expressão:

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{X} \quad (5.63)$$

que move  $\Omega_0$  para a nova região  $\Omega_0^*$  (nova configuração de referência) e um ponto arbitrário com vector posição  $\mathbf{X}$ , para um novo local identificado pelo vector posição  $\mathbf{X}^* \in \Omega_0^*$  (Figura 5.3).

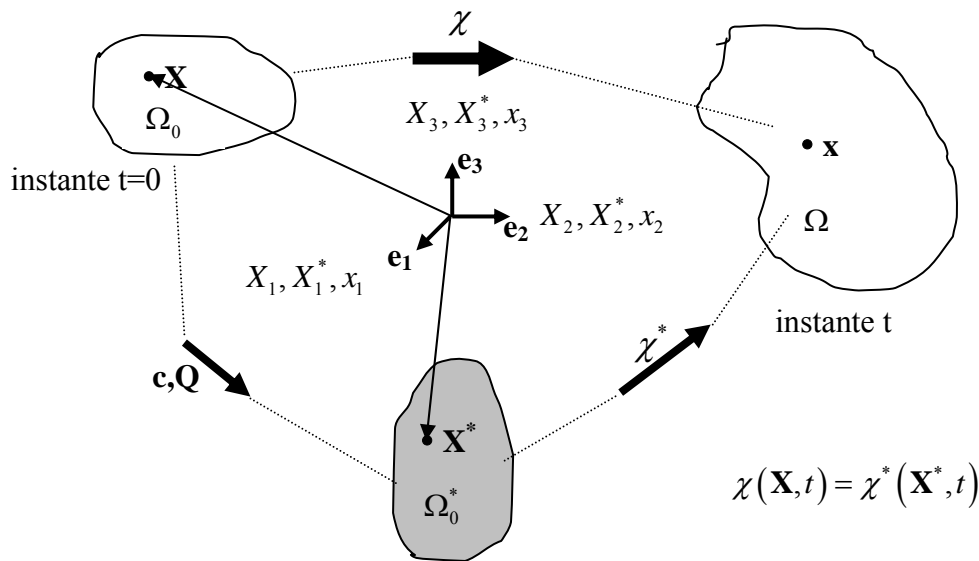


Figura 5.3: Movimento de um corpo rígido numa configuração de referência.

É necessário que a seguir, um movimento diferente,  $\mathbf{x} = \chi^*(\mathbf{X}^*, t)$ , mova  $\Omega_0^*$  para uma configuração corrente,  $\Omega$ , tal que:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) = \chi^*(\mathbf{X}^*, t) \quad (5.64)$$

projectando  $\mathbf{X}^*$  para  $\mathbf{x}$ .

Pela regra da cadeia e pela relação (5.63), o gradiente de deformação,  $\mathbf{F}$ , pode ser expresso como

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^*} \mathbf{Q} = \mathbf{F}^* \mathbf{Q} \quad (5.65)$$

ou

$$F_{aA} = \frac{\partial x_a}{\partial X_A} = \frac{\partial x_a}{\partial X_B^*} Q_{BA} = F_{aB}^* Q_{BA} \quad (5.66)$$

onde  $\mathbf{F}^* = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^*}$  se define como o gradiente de deformação relativo à região  $\Omega_0^*$ .

A partir de (5.65) é possível deduzir a seguinte transformação:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} \mathbf{Q}^T \quad \text{ou} \quad F_{aA}^* = F_{aB} Q_{AB} \quad (5.67)$$

Assim, é possível afirmar que um material hiperelástico é isotrópico relativamente a uma configuração de referência,  $\Omega_0$ , se os valores da energia de deformação  $\Psi(\mathbf{F})$  e  $\Psi(\mathbf{F}^*)$  são iguais para qualquer tensor,  $\mathbf{Q}$ , ortogonal.

A partir de (5.67) é possível escrever:

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{F}^*) = \Psi(\mathbf{F} \mathbf{Q}^T) \quad (5.68)$$

### 5.3.5 Equações constitutivas em termos de invariantes

Se um tensor escalar é um invariante com rotação, pode ser expressa em termos de invariantes principais dos seus argumentos (por exemplo,  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{B}^*$ ) que é o resultado fundamental para funções escalares isotrópicas, conhecido por teorema de representação de invariantes.

As energias de deformação podem ser expressas como um conjunto de invariantes de deformação independentes dos tensores de Cauchy-Green simétricos  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}^*$ , respectivamente, à direita e à esquerda, nomeadamente  $I_a = I_a(\mathbf{C})$ ,  $I_a = I_a(\mathbf{B}^*)$ ,  $a = 1, 2, 3$ .

Baseado na expressão  $\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{B}^*)$ , é possível reescrever a seguinte expressão:

$$\Psi = \Psi[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})] = \Psi[I_1(\mathbf{B}^*), I_2(\mathbf{B}^*), I_3(\mathbf{B}^*)] \quad (5.69)$$

A expressão (5.69) é exclusivamente válida para materiais hiperelásticos isotrópicos satisfazendo

a condição  $\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T)$  para qualquer tensor ortogonal  $\mathbf{Q}$ .

Uma vez que  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}^*$  têm os mesmos valores próprios, que são os quadrados dos alongamentos principais,  $\lambda_a^2$ ,  $a=1,2,3$ , pode concluir-se que:

$$I_1(\mathbf{C}) = I_1(\mathbf{B}^*), \quad I_2(\mathbf{C}) = I_2(\mathbf{B}^*), \quad I_3(\mathbf{C}) = I_3(\mathbf{B}^*) \quad (5.70)$$

onde os três invariantes principais são dados explicitamente por:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{B}^*) &= \text{tr}\mathbf{B}^* = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2(\mathbf{B}^*) &= \frac{1}{2} \left[ (\text{tr}\mathbf{B}^*)^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^{*2}) \right] = \text{tr}\mathbf{B}^{*-1} \det \mathbf{B}^* = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_3(\mathbf{B}^*) &= \det \mathbf{B}^* = J^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (5.71)$$

Note-se que para a configuração de referência de tensão livre, as funções de energia de deformação (5.69) com (5.71) podem satisfazer a condição de normalização (5.50), isto é,  $\Psi = 0$  para  $I_1 = I_2 = 3$  e  $I_3 = 1$ .

Com o objectivo de determinar as equações constitutivas para materiais hiperelásticos isotrópicos, em termos de invariantes de deformação, considere-se a equação diferencial  $\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(I_1, I_2, I_3)$  relativamente ao tensor  $\mathbf{C}$ . Assume-se que  $\Psi(\mathbf{C})$  tem derivadas contínuas, em relação aos invariantes principais  $I_a$ ,  $a=1,2,3$ . Utilizando a regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_a} \frac{\partial I_a}{\partial \mathbf{C}} \quad (5.72)$$

A derivada do primeiro invariante  $I_1$  relativamente a  $\mathbf{C}$ , resulta na contracção dupla:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \text{tr}\mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial I_1}{\partial C_{AB}} = \delta_{AB} \quad (5.73)$$

As derivadas dos outros dois invariantes relativamente a  $\mathbf{C}$ , têm a seguinte forma:

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left( 2 \text{tr}\mathbf{C}\mathbf{I} - \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{C}^2)}{\partial \mathbf{C}} \right) = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (5.74)$$

ou

$$\frac{\partial I_2}{\partial C_{AB}} = I_1 \delta_{AB} - C_{AB}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial C_{AB}} = I_3 C_{AB}^{-1} \quad (5.75)$$

Substituindo (5.72)-(5.75) na equação constitutiva (5.62), obtém-se a forma geral da relação de tensão em termos dos três invariantes de deformação, que caracteriza materiais hiperelásticos isotrópicos em deformações finitas, isto é:

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (5.76)$$

O gradiente do invariante  $\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(I_1, I_2, I_3)$  tem a representação simples (5.76), que é a relação fundamental na teoria da hiperelasticidade finita. Note-se que (5.76) é a representação geral para três dimensões, em que  $\Psi$  pode adoptar qualquer função escalar isotrópica de um tensor variável simétrico de segunda ordem.

Multiplicando (5.76) pelo tensor  $\mathbf{C}$  à direita ou à esquerda obtém-se o mesmo resultado. Pode-se afirmar que  $\frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}$  comuta com  $\mathbf{C}$  de tal forma que

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} = \mathbf{C} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (5.77)$$

é uma consequência essencial da isotropia.

De acordo com a relação do tensor de tensão de Cauchy,  $\mathbf{T}$ , e do tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff,  $\tilde{\mathbf{T}}$ ,  $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T$ , multiplicando os tensores  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}^{-1}$  com  $\mathbf{F}$ , à esquerda e com  $\mathbf{F}^T$  à direita, e sendo  $\mathbf{B}^*$  o tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda,  $\mathbf{B}^* = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ , isto é,

$$\mathbf{F} \mathbf{I} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{B}^*, \quad \mathbf{F} \mathbf{C} \mathbf{F}^T = (\mathbf{F} \mathbf{F}^T)^2 = \mathbf{B}^{*2}, \quad \mathbf{F} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}^T = (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T) = \mathbf{I} \quad (5.78)$$

pode ser escrita a seguinte equação

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} \left[ I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{I} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{B}^* - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{B}^{*2} \right] \quad (5.79)$$

ou uma forma alternativa a (5.79)

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} \left[ \left( I_2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{B}^* - I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{B}^{*-1} \right] \quad (5.80)$$

### 5.3.6 Equações constitutivas derivadas de $\Psi(\mathbf{B}^*)$ e $\Psi(\mathbf{V})$

Se a função de energia deformação depende do tensor de Cauchy-Green à esquerda,  $\mathbf{B}^*$ , então a resposta isotrópica hiperelástica é

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{B}^*)}{\partial \mathbf{B}^*} \mathbf{B}^* = 2J^{-1} \mathbf{B}^* \frac{\partial \Psi(\mathbf{B}^*)}{\partial \mathbf{B}^*} \quad \text{ou} \quad \mathbf{T}_{ab} = 2J^{-1} B_{ac} \frac{\partial \Psi}{\partial B_{cb}^*} \quad (5.81)$$

onde  $\Psi(\mathbf{B}^*)$  é uma função isotrópica escalar do tensor  $\mathbf{B}^* = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ .

Uma vez que o tensor de extensões finitas à esquerda,  $\mathbf{V} = (\mathbf{B}^*)^{1/2}$ , é a única raiz quadrada de  $\mathbf{B}^*$ , a função de energia deformação pode ser expressa como uma função isotrópica de  $\mathbf{V}$ . Assim, a relação  $\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{B}^*)$  pode ser estendida a  $\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{B}^*) = \Psi(\mathbf{V})$ .

Relativamente à equação constitutiva (5.81) pode ser derivada uma fórmula equivalente em termos do tensor de extensões finitas à esquerda,  $\mathbf{V}$ :

$$2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{B}^*)}{\partial \mathbf{B}^*} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{V}^{-1} \quad (5.82)$$

Existindo assim, outra relação de tensão importante, caracterizando o comportamento de materiais hiperelásticos isotrópicos para deformações finitas:

$$\mathbf{T} = J^{-1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{V} = J^{-1} \mathbf{V} \frac{\partial \Psi(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}} \quad (5.83)$$

Note-se que,  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^*}$  também comuta com  $\mathbf{V}$ .

### 5.3.7 Equações constitutivas em termos de alongamentos principais

Se a função de energia deformação,  $\Psi$ , é um invariante, pode ser escrita como uma função dos alongamentos principais  $\lambda_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Em vez de (5.69),  $\Psi$  pode ser representada da seguinte maneira:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (5.84)$$

Na configuração de referência de tensão livre, a condição de normalização (5.50) pode ter a forma  $\Psi(1,1,1) = 0$ .

Relativamente a (5.83), as principais tensões de Cauchy  $\mathbf{T}_a$ ,  $a=1,2,3$ , resultam em

$$\mathbf{T}_a = J^{-1} \lambda_a \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_a}, \quad a=1,2,3 \quad (5.85)$$

com um variação de volume:

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (5.86)$$

Partindo da condição (5.85), podem ser introduzidas relações equivalentes para as três tensões principais de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{T}_{0_a}$  e  $\tilde{\mathbf{T}}_a$ :

$$\mathbf{T}_{0_a} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_a}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_a = \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_a}, \quad a=1,2,3 \quad (5.87)$$

As relações constitutivas (5.85) e (5.87) mostram que as tensões principais num material hiperelástico isotrópico dependem apenas dos alongamentos principais. São simplesmente obtidas por diferenciação da função de energia de deformação, em relação aos principais alongamentos respectivos.

### 5.3.8 Materiais hiperelásticos incompressíveis

Materiais hiperelásticos incompressíveis são materiais que se deformam sem alteração de volume, isto é:

$$J = 1 \quad (5.88)$$

Em geral, um material que é sujeito a uma restrição interna em que a incompressibilidade é a mais comum, diz-se um material incompressível.

Como o objectivo de derivar equações constitutivas para materiais hiperelásticos incompressíveis é possível definir a seguinte função de energia de deformação:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}) - p(J - 1) \quad (5.89)$$

onde a função de energia de deformação,  $\Psi$ , é definida por  $J = \det \mathbf{F} = 1$ .  $p$  é um escalar definido como o multiplicador indeterminado de *Lagrange*, que pode ser identificado como pressão hidrostática. Note-se que este escalar só pode ser determinado a partir das equações de equilíbrio e das condições fronteira.

Diferenciando a equação (5.89) em relação ao gradiente de deformação,  $\mathbf{F}$ , chega-se à equação constitutiva geral do tensor das primeiras tensões de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{T}_0$ :

$$\mathbf{T}_0 = -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial\Psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}} \quad (5.90)$$

Multiplicando a equação (5.90) por  $\mathbf{F}^{-1}$  à esquerda, conclui-se que o tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff,  $\tilde{\mathbf{T}}$ , pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{T}} = -p\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial\Psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}} = -p\mathbf{C}^{-1} + 2 \frac{\partial\Psi(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} \quad (5.91)$$

em que  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}$ , tendo sido usada a expressão (5.58).

Contudo, se (5.91) for multiplicada por  $\mathbf{F}^T$  à direita, conclui-se, a partir da expressão  $\mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{T}_0\mathbf{F}^T = \mathbf{T}^T$ , que o tensor das tensões de Cauchy-Green,  $\mathbf{T}$ , pode ser expresso por

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial\Psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{F}^T = -p\mathbf{I} + \mathbf{F} \left( \frac{\partial\Psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}} \right)^T \quad (5.92)$$

As equações constitutivas fundamentais (5.90), (5.91) e (5.92) são as formas gerais mais usadas para definir materiais hiperelásticos incompressíveis para deformações finitas.

Em casos de isotropia, a dependência de  $\Psi$  com os tensores de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}^*$ , à direita e à esquerda respectivamente, pode ser expressa pelos seus três invariantes de deformação, (5.69). Contudo, em casos de incompressibilidade, pode ser considerada a seguinte restrição cinemática:

$$I_3 = \det \mathbf{C} = \det \mathbf{B}^* = 1 \quad (5.93)$$

No entanto, os 2 invariantes principais  $I_1$  e  $I_2$  são variáveis de deformação independentes.

A função de energia de deformação para materiais hiperelásticos incompressíveis isotrópicos, onde  $p/2$  representa um multiplicador indeterminado de Lagrange, é dada por:

$$\Psi = \Psi[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C})] - \frac{1}{2} p(I_3 - 1) = \Psi[I_1(\mathbf{B}^*), I_2(\mathbf{B}^*)] - \frac{1}{2} p(I_3 - 1) \quad (5.94)$$

Como o objectivo de verificar a equação constitutiva em termos dos dois invariantes de deformação principais  $I_1$  e  $I_2$  a expressão (5.94) pode ser derivada em relação ao tensor  $\mathbf{C}$ :

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2 \frac{\partial\Psi(I_1, I_2)}{\partial\mathbf{C}} - \frac{\partial[p(I_3 - 1)]}{\partial\mathbf{C}} = -p\mathbf{C}^{-1} + 2 \left( \frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial\Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - 2 \frac{\partial\Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} \quad (5.95)$$

que é basicamente a equação constitutiva (5.76), cujo termo  $I_3 \left( \frac{\partial\Psi}{\partial I_3} \right)$  é substituído por  $-\frac{p}{2}$ .

### 5.3.9 Modelo de Yeoh para materiais incompressíveis

Algumas formas de funções de energia de deformação, que se relacionam com a teoria constitutiva da elasticidade finita, em particular materiais hiperelásticos isotrópicos, são conhecidas como elasticidade de tipo borracha.

Existem vários modelos que permitem simular o comportamento hiperelástico de vários materiais, como sendo o modelo de Yeoh, Ogden, Mooney-Rivlin, neo-Hookean, entre outros.

Neste trabalho foi utilizado o modelo de Yeoh [3] para simular o comportamento mecânico dos ligamentos e músculos do ouvido médio.

Algumas publicações, sobre estes materiais tipo borracha, apontam para o facto de  $\partial\Psi/\partial I_2$  ser numericamente quase zero. Yeoh simplifica esta expressão e toma-a como zero, propondo uma função de energia de deformação de três termos, onde o segundo invariante de deformação não aparece, tomando a seguinte forma:

$$\Psi = c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_1 - 3)^2 + c_3 (I_1 - 3)^3 \quad (5.96)$$

onde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  são constantes materiais que devem satisfazer certas restrições.

Partindo de (5.51), a função de energia de deformação,  $\Psi$ , pode ser:

$$\Psi \begin{cases} = 0, & \text{se } \Psi \text{ tem uma só raiz real, correspondendo a } I_1 = 3 \\ > 0, & \text{se } I_1 > 3 \end{cases} \quad (5.97)$$

Note-se que para um material incompressível,  $I_1 \geq 3$ , sendo  $I_1 = 3$  só na configuração de referência. Por este motivo, a função de energia de deformação (convexa) aumenta com  $I_1$  e  $\partial\Psi/\partial I_1 = 0$  sem raízes reais. A partir dos discriminantes das respectivas equações cúbica e quadrática em  $(I_1 - 3)$  podem ser determinados os valores das restrições apropriadas aos valores  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ .

O módulo de elasticidade transversal,  $G$ , envolve termos de primeira e segunda ordem em  $(I_1 - 3)$  e aproxima-se de um comportamento físico não linear, com uma exactidão satisfatória ( $c_2 < 0$  e  $c_1 > 0$ ,  $c_3 > 0$ ):

$$G = 2c_1 + 4c_2 (I_1 - 3) + 6c_3 (I_1 - 3)^2 > 0 \quad (5.98)$$

## 5.4 Modelo de Hill para músculos esqueléticos

Para simulação dos músculos do ouvido médio foi utilizado o modelo numérico de Hill, baseado em músculos esqueléticos [4]. Os músculos distinguem-se dos ligamentos, por exemplo, pelo facto de se contraírem activamente perante um estímulo e poderem ser voluntários ou involuntários.

No caso do ouvido médio, os músculos (tensor do tímpano e estapediano) têm uma função de protecção do ouvido interno, perante sons mais fortes e essencialmente de frequência grave, reagindo numa forma involuntária, tendo, ainda, uma função voluntária que predispõe o ouvido para captação de sons mais fracos.

As equações constitutivas adoptadas são uma generalização do modelo para o comportamento passivo do músculo cardíaco [5]. Esta generalização foi feita de modo a tornar este modelo compatível com o modelo unidimensional para o comportamento passivo e activo dos músculos esqueléticos [6].

Os músculos esqueléticos do ouvido médio são responsáveis pelo movimento relativo dos ossículos nas articulações, fornecendo resistência à cadeia ossicular. Estes músculos têm um comportamento não isotrópico devido à orientação das fibras musculares.

Durante o processo de contracção, os músculos têm a capacidade de gerar tensões quando o seu comprimento decresce. A justificação para este efeito prende-se com o facto de alguns filamentos nas fibras musculares poderem deslizar uns relativamente aos outros e poderem estabelecer ligações químicas em resultado dum processo de activação desencadeado por estimulação eléctrica neural [7].

Os músculos têm uma estrutura complexa bem definida hierarquicamente em vários níveis.

A um nível mais exterior, os músculos estão cobertos por um tecido conectivo fibroso, o epimísio, composto por vários feixes revestidos por um tecido conectivo denso, o perimísio (Figura 5.4). Estes feixes são compostos por longas células cilíndricas com várias centenas de núcleos, as fibras musculares, cobertas por tecido conectivo livre, o endomísio. Entre as fibras musculares encontram-se vasos sanguíneos e por baixo do endomísio de cada fibra muscular existe uma fina membrana elástica com dobras, o sarcolema. As fibras musculares têm uma espessura que varia entre 10 e 100  $\mu\text{m}$  e um comprimento de 1 a 30 cm.

As fibras musculares são formadas por um grande número de miofibrilas, repetidas ao longo do seu comprimento, os sarcómeros, que são as unidades funcionais do sistema contráctil. Cada sarcómero é composto por miofilamentos espessos e miofilamentos finos, constituídos respectivamente pelas proteínas miosina e actina. Os filamentos de actina são presos numa extremidade, mas livres ao longo do seu comprimento deslizando relativamente aos filamentos de miosina. Entre as extremidades das moléculas de miosina e os filamentos de actina, formando pontes cruzadas, e em diferentes locais destes filamentos podem estabelecer-se e quebrar-se ligações químicas. Este é o processo responsável pela contracção activa e geração de força dos músculos e é regulado por duas proteínas adicionais existentes nos filamentos de actina, a tropomiosina e a troponina. A activação de contracção e desconracção é feita por iões de cálcio, cuja concentração na vizinhança das pontes cruzadas, é alterada como o resultado de estímulos eléctricos dos neurónios.

A mais pequena parte dum músculo que se contrai independentemente, unidade motora, é composta por um neurónio e as fibras musculares são estimuladas por ele. Em músculos grandes, cada unidade motora pode ter entre 1000 e 2000 fibras musculares. O grau de activação de um músculo é o resultado de um número de unidades motoras activadas. Note-se que as fibras de cada unidade motora não são contíguas, mas dispersas por todo o músculo. Assim, sempre que uma simples unidade motora for estimulada, uma grande porção do músculo será contraída.

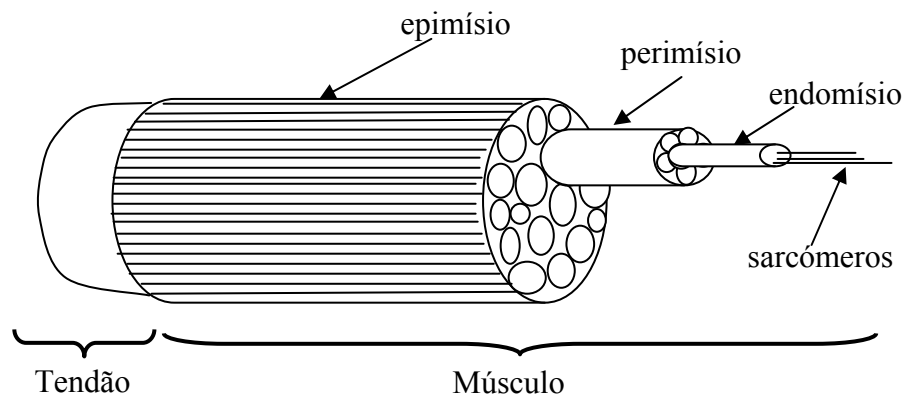


Figura 5.4: Constituição do músculo.

Hill [8] propôs um modelo mecânico simples no qual se baseia, ainda, a maior parte dos modelos utilizados actualmente. Compõe-se de 3 elementos (Figura 5.5):

- Elemento contráctil (EC), que modela a parte activa do músculo, livremente extensível quando desactivado, mas capaz de encurtar quando activado.
- Elemento em série (ES), uma mola não linear disposta em série com o elemento contráctil, que permite uma mudança rápida entre os estados activo e inactivo do músculo e fornece um mecanismo de armazenamento da energia.
- Elemento em paralelo (EP), uma mola não linear disposta em paralelo com os dois elementos anteriores, que é responsável pelo comportamento passivo do músculo quando este é alongado, mesmo quando o elemento contráctil não está activado.

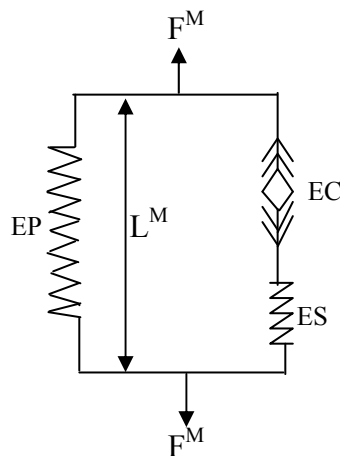


Figura 5.5: Modelo de 3 elementos do músculo de Hill.

A Figura 5.5 permite concluir que a força no músculo,  $F^M$ , e as forças nos elementos contráctil, em série e em paralelo,  $F^{EC}$ ,  $F^{ES}$  e  $F^{EP}$ , respectivamente, satisfazem:

$$\begin{aligned} F^M &= F^{EP} + F^{ES} \\ F^{EC} &= F^{ES} \end{aligned} \quad (5.99)$$

Por outro lado, o comprimento do músculo,  $L^M$  e os comprimentos  $L^{EC}$ ,  $L^{ES}$  e  $L^{EP}$  satisfazem:

$$\begin{aligned} L^M &= L^{EP} \\ L^M &= L^{ES} + L^{EC} \end{aligned} \quad (5.100)$$

Seja  $L_0^M$  o comprimento do músculo em repouso. Quando totalmente activado, o músculo desenvolve uma força,  $F_0^M$ , a força isométrica muscular de pico, isto é, a máxima força de

tracção em regime estacionário, que um músculo pode desenvolver em condições isométricas. O comprimento  $L_0^M$  é, por isso, também conhecido por comprimento óptimo do músculo.

Quando não activado ( $F^{EC}=F^{ES}=0$ ) o músculo desenvolve uma força no elemento passivo que é positiva para  $L^M/L_0^M > 1$  (quando o músculo é alongado) e que é essencialmente nula para  $L^M/L_0^M \leq 1$ :

$$F^{EP} = F_0^M f_{EP}(\lambda^M) \quad (5.101)$$

em que  $\lambda^M = L^M/L_0^M$  é o alongamento do músculo. A força passiva é dada por:

$$f_{EP}(\lambda^M) = \begin{cases} 4(\lambda^M - 1)^2, & \text{para } \lambda^M > 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.102)$$

Quanto ao elemento elástico em série, é caracterizado como uma mola não-linear [6], [9], cuja rigidez é uma função da força  $F^{ES}$  no mesmo elemento:

$$K^{ES} = \frac{dF^{ES}}{dL^{ES}} = \frac{100F^{ES} + 10F_0^M}{L_0^M} \quad (5.103)$$

que só tem significado se  $F^{ES} (=F^{EC}) \geq 0$  (tensões de tracção no elemento contráctil).

Integrando esta expressão entre o estado em repouso não activado do músculo, isto é,  $(F^{ES}, L^{ES}) = (0, L_0^{ES})$  com  $F^M = F^{EC} = F^{ES} = 0$  e  $L_0^M = L_0^{ES} + L_0^{EC}$  e o valor corrente de  $(F^{ES}, L^{ES})$ , obtém-se o seguinte resultado:

$$F^{ES} = F_0^M f_{ES}(\lambda^M, \zeta^{EC}) \quad (5.104)$$

em que,

$$f_{ES}(\lambda^M, \zeta^{EC}) = \begin{cases} 0,1 \left\{ \exp \left[ 100(\lambda^M - 1 - \zeta^{EC}) \right] - 1 \right\}, & \text{se } \lambda^M > 1 + \zeta^{EC} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.105)$$

$$\zeta^{EC} = \frac{L^{EC} - L_0^{EC}}{L_0^M} = \frac{L_0^{EC}}{L_0^M} \left( \frac{L^{EC} - L_0^{EC}}{L_0^{EC}} \right) \quad (5.106)$$

é uma quantidade adimensional proporcional à extensão  $\left( \frac{L^{EC} - L_0^{EC}}{L_0^{EC}} \right)$  do elemento contráctil, medida a partir do estado não activado em repouso do músculo.

Quando activado, a força muscular desenvolvida no elemento contráctil depende do comprimento do músculo (o alongamento do músculo  $\lambda^M$ ), da velocidade de deformação do elemento contráctil (a taxa de variação em ordem ao tempo de  $\zeta^{EC}$ ) e do nível de activação.

Dividindo (5.101) e (5.104) pela área da secção transversal fisiológica do músculo,  $A_0$ , obtêm-se as seguintes relações elásticas não lineares para as primeiras tensões de Piola-Kirchhoff no elemento em paralelo e no elemento em série.

$$\begin{aligned} T^{EP} &= T_0^M f^{EP}(\lambda^M) \\ T^{ES} &= T_0^M f^{ES}(\lambda^M, \zeta^{EC}) \end{aligned} \quad (5.107)$$

em que  $T_0^M = F_0^M / A_0$  é a tensão de pico no músculo [10]. Esta quantidade pode variar de músculo para músculo, particularmente entre músculos “rápidos” e “lentos” e entre sujeitos novos e velhos [6]. Têm sido referidos na literatura valores entre 0,16 MPa e 1 MPa [6], [11].

O modelo adoptado para o comportamento 3-D passivo e activo dos tecidos dos músculos esqueléticos é uma generalização do modelo hiperelástico 3-D transversalmente isotrópico de Humphrey e Yin [5] e pode ser descrita da seguinte forma :

$$U = U_I + U_f + U_J \quad (5.108)$$

em que

$$U_I = c \left\{ \exp \left[ b(\bar{I}_1^C - 3) \right] - 1 \right\} \quad (5.109)$$

é a energia de deformação armazenada na matriz isotrópica que embebe as fibras musculares

$$U_f = U_{EP}(\bar{\lambda}_f) + U_{ES}(\bar{\lambda}_f, \zeta^{EC}) \quad (5.110)$$

é a energia de deformação armazenada em cada família de fibras musculares e

$$U_J = \frac{1}{D} (J - 1)^2 \quad (5.111)$$

é a energia de deformação associada com a variação de volume.

Nestas definições,  $c$ ,  $b$ , e  $D$  são constantes;  $\bar{I}_1^C$  é o primeiro invariante do tensor das deformações de Cauchy-Green à direita com a variação de volume eliminada, isto é,

$$\bar{I}_1^C = \text{tr } \bar{\mathbf{C}} = \text{tr}(\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}) = J^{-2/3} \text{tr } \mathbf{C} \quad (5.112)$$

$\bar{\lambda}_f$  representa o alongamento na direcção  $N$  da fibra não deformada.

$$\bar{\lambda}_f = \sqrt{\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{N}} \quad (5.113)$$

Em (5.112)  $\bar{\mathbf{F}}$  é o gradiente da deformação com a variação de volume eliminada, em que  $\mathbf{F}$  é o gradiente da deformação e  $J = \det \mathbf{F}$  é a variação de volume.

Da condição (5.110) define-se  $U_{EP}(\bar{\lambda}_f)$  e  $U_{ES}(\bar{\lambda}_f, \zeta^{EC})$ , respectivamente, como:

$$\begin{aligned} U_{EP}(\bar{\lambda}_f) &= T_0^M \int_1^{\bar{\lambda}_f} f_{EP}(\lambda) d\lambda \\ U_{ES}(\bar{\lambda}_f, \zeta^{EC}) &= T_0^M \int_1^{\bar{\lambda}_f} f_{ES}(\lambda, \zeta^{EC}) d\lambda \end{aligned} \quad (5.114)$$

## 5.5 Referências

- [1] W.M. Lai, D. Rubin, E. Krempl, *Introduction to Continuum Mechanics*, 3<sup>th</sup> ed., Pergamon Press, New York, 1993.
- [2] G.A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd, Austria, 2000.
- [3] O.H. Yeoh, Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates, *Rubber Chemistry and Technology*, 63, pp. 792-805, 1990.
- [4] J.A.C. Martins, E.B. Pires, R. Salvado, P.B. Dinis, Um modelo de elementos finitos para o comportamento dos músculos esqueléticos, *V Encontro nacional de mecânica computacional*, Guimarães, 20 a 22 de Outubro de 1997.
- [5] J.D. Humphrey, F.C.P. Yin, On constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue: I. A pseudostrain-energy function, *ASME J. Biomech. Engrg.* 109, pp. 298-304, 1987.
- [6] F.E. Zajac, Muscle and tendon: Properties, models, scaling and application to biomechanics and motor control, *CRC Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 17, pp. 359-411, 1989.
- [7] M.I. Pitman, L. Peterson, Biomechanics of skeletal muscle, in: M. Nordin, V.H. Frankel, eds., *Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System*, Lea & Febiger, Philadelphia, pp. 89-111, 1989.
- [8] A.V. Hill, The heart of shortening and the dynamic constants of muscle, *Proc. R. Soc. Biol.*, 126, pp. 136-195, 1938.
- [9] M.G. Pandy, F.E. Zajac, E. Sim, W.S. Levine, An optimal control model for maximum-height human jumping, *J. Biomechanics*, 23, pp. 1185-1198, 1990.
- [10] J.A.C. Martins, E.B. Pires, R. Salvado, P.B. Dinis, A numerical model of passive and active behaviour of skeletal muscles, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 151, pp. 419-433, 1998.
- [11] R. Crowningsfield, R. Brand, a physiologically based criterion of muscle force prediction in locomotion, *J. Biomechanics*, 14, pp. 793-801, 1981.

# Capítulo 6

## *Método de Elementos Finitos*

### 6.1 Introdução

O Método de Elementos Finitos (MEF) é um método matemático que consiste na discretização (subdivisão) de um meio contínuo em pequenos sub-domínios (elementos), mantendo as mesmas propriedades do meio original. O comportamento destes elementos pode ser descrito por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos, através de uma análise computacional, para que sejam obtidos os resultados desejados. A origem do desenvolvimento deste método ocorreu no final do século XVIII, mas só se tornou possível a sua aplicação com o aparecimento dos computadores, facilitando a resolução das equações algébricas de grande dimensão. A origem do MEF, propriamente dito, remonta aos anos entre 1943 e 1965 com os trabalhos de Courant [1], Argyris [2] e Clough [3] tendo as contribuições de Zienkiewicz [4] sido também muito significativas para o desenvolvimento do método [5]. O método de diferenças finitas foi inicialmente o método numérico mais popular, mas o MEF é agora tido como uma técnica numérica dominante em problemas de mecânica dos sólidos e estruturas. O MEF é actualmente o método preferido para a solução numérica de muitas equações diferenciais parciais, especialmente quando a geometria da região ou condições fronteira ou os carregamentos são mais complexos.

Este método pode ser utilizado em diversas áreas das ciências exactas e biológicas e, devido à sua grande aplicabilidade e eficiência, existem trabalhos com esta metodologia nas diversas especialidades, quando se deseja analisar cargas, tensões ou deslocamentos, como é o caso do estudo biomecânico do ouvido médio. Torna-se, portanto, oportuno o conhecimento dos conceitos básicos do MEF para que os resultados dos trabalhos sejam melhor interpretados. Um elemento finito é uma sub-região de um meio contínuo, com um tamanho finito (não

infinitesimal). Os pontos onde os elementos se conectam são chamados nós, ou pontos nodais, e o procedimento de selecção de nós e formação dos elementos finitos é chamado discretização.

O MEF permite converter um problema com um número infinito de graus de liberdade num outro problema com um número finito, de forma a simplificar o processo de resolução. Fornece, ainda, uma solução aproximada, baseada numa função deslocamento, numa função de tensão ou uma mistura das duas, dentro de cada elemento finito, chamadas funções de forma.

O problema estrutural envolve um campo de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ , deslocamentos,  $\mathbf{u}$ , e forças por unidade de volume,  $\mathbf{f}$ . Os deslocamentos,  $\mathbf{u}$ , são especificados para tomar valores prescritos de deslocamento,  $\bar{\mathbf{u}}$ , na parte  $S_u$  da superfície fronteira  $S$ , enquanto são aplicadas cargas (ou tracções) prescritas,  $\mathbf{t}_e$ , na parte  $S_\sigma$  [6].

Dado este problema, é necessário que existam as seguintes condições:

1) Compatibilidade:

$\mathbf{u}$  contínuo e diferenciável.

Condições fronteira de deslocamento  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  em  $S_u$ .

Lei de deformação - deslocamento,  $\mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ , onde  $\mathbf{L}$  é um operador linear e todos os termos não lineares são desprezados.

2) Equilíbrio:

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (6.1)$$

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_e \quad \text{em } S_\sigma \quad (6.2)$$

onde  $\mathbf{t}_i$  são tracções internas e  $\mathbf{S}=\mathbf{L}^T$  é um operador linear.

3) Lei de tensão-deformação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{e} \quad (6.3)$$

onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz simétrica com termos fixos que são funções do módulo de Young,  $E$ , e coeficiente de Poisson,  $\nu$ .

Uma análise estrutural do MEF inclui os seguintes passos:

- 1) Discretização da estrutura – O meio contínuo (geometria) é subdividido em elementos finitos.
- 2) Os elementos são conectados por um número discreto de pontos nodais situados nas suas fronteiras.
- 3) Definição das propriedades materiais dos elementos.

- 4) Escolha de um conjunto de funções para definir o estado de deslocamento dentro de cada “elemento finito” em termos dos seus deslocamentos nodais.
- 5) As funções de deslocamento definem o estado de deformação dentro de um elemento em termos dos deslocamentos nodais. Estas deformações em conjunto com as deformações iniciais e as propriedades constitutivas do material definem o estado de tensão através dos elementos.
- 6) Agrupamento de matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez, que são derivadas de um método de energia, baseado em funções de forma. Estas matrizes relacionam o deslocamento nodal, velocidade e aceleração nas forças aplicadas sobre os nós.
- 7) Determinação de um sistema de forças concentradas nos nós, equilibrando as tensões de fronteira e cargas distribuídas.
- 8) Aplicação de cargas – forças ou momentos aplicados externamente de forma concentrada ou distribuída.
- 9) Definição de condições fronteira.
- 10) Resolução de sistemas de equações algébricas lineares.
- 11) Calculo de tensões, reacções, modos naturais ou outra informação pertinente.

As etapas básicas do MEF utilizadas na discretização do modelo da membrana timpânica e ouvido médio foram as seguintes:

- 1) A partir de imagens dum modelo geométrico, baseado na geometria e nas dimensões descritas na obra de Anson e Donaldson [7] e posteriormente em imagens de Tomografia Axial Computorizada (TAC), foi extraída a geometria da membrana timpânica e ossículos.
- 2) Foi feita a respectiva discretização em elementos finitos.
- 3) Foram atribuídas as propriedades de material apropriadas.
- 4) Definidas as condições fronteira.
- 5) Foram feitos vários estudos estáticos e dinâmicos do comportamento do modelo.
- 6) Cálculo dos deslocamentos a nível do umbo e da platina do estribo, assim como as tensões ao nível das cruras do estribo, tensões dos ligamentos, rotações da platina e a acção passiva e activa exercida pelos músculos.

## 6.2 Elementos finitos

### 6.2.1 Elemento linear de dois nós

Considere-se um elemento de barra, situado sobre o eixo global X (Figura 6.1). Para o cálculo da matriz de rigidez, o primeiro passo reside na relação entre as coordenadas globais X e as coordenadas naturais,  $\xi$ , onde  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

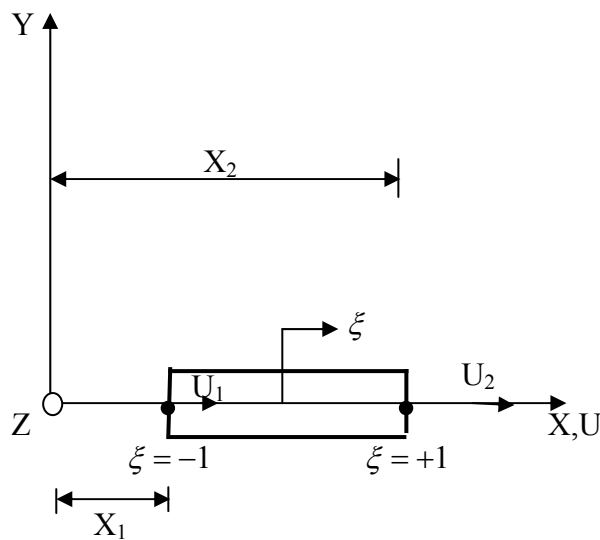


Figura 6.1: Elemento de barra no sistema coordenado global e natural.

A relação é dada por:

$$X = \frac{1}{2}(1-\xi)X_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)X_2 \quad (6.4)$$

ou:

$$X = \sum_{i=1}^2 N_i X_i \quad (6.5)$$

onde:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi); \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (6.6)$$

representam as funções de forma, que traduzem de forma única a relação entre as coordenadas X e  $\xi$  na barra.

Os deslocamentos globais da barra são expressos de forma semelhante às coordenadas globais:

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^2 N_i d_i \quad (6.7)$$

A interpolação das coordenadas e dos deslocamentos dos elementos, usando as mesmas funções de forma, definidas no sistema de coordenadas naturais, constitui a base da formulação de elementos finitos isoparamétricos.

O cálculo da deformação é estabelecido do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\mathbf{d}}{dX} = \frac{d\mathbf{d}}{d\xi} \frac{d\xi}{dX} \quad (6.8)$$

onde

$$\frac{d\mathbf{d}}{d\xi} = \frac{d_2 - d_1}{2} \quad (6.9)$$

e

$$\frac{dX}{d\xi} = \frac{X_2 - X_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (6.10)$$

onde L é o comprimento da barra.

Assim, obtém-se

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d_2 - d_1}{2} \frac{2}{L} = \frac{d_2 - d_1}{L} \quad (6.11)$$

A relação entre deformações e deslocamentos é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (6.12)$$

onde

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \quad (6.13)$$

A matriz de rigidez é então obtida por:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 1] J d\xi \quad (6.14)$$

onde  $J$  é o jacobiano, que relaciona o comprimento do elemento no sistema coordenado global para o correspondente comprimento no sistema natural, ou seja

$$dX = J d\xi \quad (6.15)$$

Tem-se então

$$\frac{dX}{d\xi} = J = \frac{L}{2} \quad (6.16)$$

Obtém-se, assim, a matriz de rigidez em (6.14), como:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{2L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dr = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

## 6.2.2 Elemento isoparamétrico de oito nós

A solução por elementos finitos, baseada em deslocamentos, considera o princípio dos deslocamentos virtuais, que assume que num corpo em equilíbrio, para quaisquer deslocamentos virtuais (pequenos), nulos para correspondentes deslocamentos prescritos, impostos ao corpo em equilíbrio, o trabalho virtual interno total é igual ao trabalho virtual externo total.

A expressão integral de equilíbrio de forças em problemas de elasticidade pode ser obtida através do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_{\Omega} \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\mathbf{t}\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{b}\} d\Omega - \int_{S_f} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{t}_s\} dS_f = 0 \quad (6.18)$$

$\mathbf{t}$  representa o vector de tensão,  $\mathbf{b}$  o vector de forças de massa,  $\mathbf{t}$  o vector de forças na fronteira,  $\delta \mathbf{u}$  vector dos deslocamentos virtuais,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  vector associado às deformações virtuais,  $\Omega$  o domínio em questão e  $S_f$  parte da fronteira onde há forças aplicadas.

As deformações virtuais associadas à equação (6.18) são representadas por:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}, \frac{\partial(\delta v)}{\partial y}, \frac{\partial(\delta w)}{\partial z}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x}, \frac{\partial(\delta v)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} \right\}^T \quad (6.19)$$

Os deslocamentos, deformações e os correspondentes termos virtuais são obtidos através das seguintes relações:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i d_i \quad \delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i \delta d_i \quad (6.20)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n B_i d_i \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n B_i \delta d_i \quad (6.21)$$

em que a representação é feita para o nó  $i$ , sendo  $d_i$  o componente do vector dos deslocamentos nodais,  $\delta d_i$  o componente do vector dos deslocamentos nodais virtuais,  $N_i$  a componente da

matriz das funções de forma,  $B_i$  a componente da matriz global de deslocamentos / deformações e  $n$  o número total de nós do elemento.

Substituindo (6.20) e (6.21) em (6.18) obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \{\delta d_i\}^T \left\{ \int_{\Omega} [B_i]^T \mathbf{t} d\Omega - \int_{\Omega} [N_i]^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{S_i} [N_i]^T \mathbf{t}_s dS_i \right\} = 0 \quad (6.22)$$

Considerando a equação verdadeira para um qualquer deslocamento virtual, obtém-se para cada nó  $i$  uma equação do tipo:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{t} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{S_i} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_s dS_i = 0 \quad (6.23)$$

Os deslocamentos podem ser expressos através das funções de forma de acordo com a seguinte expressão:

$$\mathbf{d}^e = \sum_{i=1}^n N_i^e d_i^e \quad (6.24)$$

As coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um ponto qualquer, de um elemento de  $n$  nós, é expressa sob a forma isoparamétrica, sendo, genericamente, para o caso tridimensional apresentada pela equação:

$$\begin{bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \begin{bmatrix} N_i^e & 0 & 0 \\ 0 & N_i^e & 0 \\ 0 & 0 & N_i^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^e \\ y_i^e \\ z_i^e \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

A matriz jacobiana da transformação das coordenadas naturais a cartesianas é definida como se representa na equação seguinte:

$$\mathbf{J}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} x_i^e & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} y_i^e & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} z_i^e \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} x_i^e & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} y_i^e & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} z_i^e \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} x_i^e & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} y_i^e & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} z_i^e \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

O inverso do Jacobiano,  $\mathbf{J}$ , é determinado pela expressão:

$$[\mathbf{J}^e]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

O campo de deformações relaciona-se com o campo de deslocamentos conforme se verifica na seguinte relação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{i=1}^n B_i^e d_i^e \quad (6.28)$$

$B_i$  é a matriz de deformação definida através da seguinte expressão:

$$[B_i]^e = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^e & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^e & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^e \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^e & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^e & 0 \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^e & 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^e \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^e & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^e \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

No caso de elementos tridimensionais, o integral é dado de acordo com a expressão:

$$d\Omega^e = \det \mathbf{J}^e d\xi d\eta d\zeta \quad (6.30)$$

A relação tensão-deformação linear para cada elemento é dada pela equação:

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e = [\mathbf{D}^e] \left( \sum_{j=1}^n B_j^e d_j^e \right) \quad (6.31)$$

O primeiro termo da equação (6.23) resulta na combinação de cada elemento através da seguinte expressão:

$$\sum_{j=1}^r K_{ij}^e d_j^e = \int_{\Omega^e} [B_i^e]^T [D^e] \left( \sum_{j=1}^r B_j^e d_j^e \right) d\Omega^e \quad (6.32)$$

$K_{ij}$  é a sub-matriz da matriz de rigidez elementar  $\mathbf{K}$ .

A contribuição para cada elemento e para o segundo termo da equação (6.23) calcula-se através da equação:

$$\mathbf{f}_{b_i}^e = \int_{\Omega^e} [N_i^e]^T \{ \mathbf{b}^e \} d\Omega^e \quad (6.33)$$

Para o terceiro termo da equação (6.23), a contribuição elementar do vector de força calcula-se na forma:

$$\mathbf{f}_{t_i}^e = \int_{S_i} [N_i^e]^T \{ \mathbf{t}_s^e \} dS_i \quad (6.34)$$

A matriz de rigidez  $K_{ij}$  é calculada numericamente e obtida por integração em coordenadas naturais.

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i^e]^T [D^e] [B_j^e] \det \mathbf{J}^e d\xi d\eta d\zeta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^e d\xi d\eta d\zeta \quad (6.35)$$

A integração numérica segue a regra de Gauss estando o programa elaborado para a integração  $2 \times 2 \times 2$  ou  $3 \times 3 \times 3$  pontos de Gauss no estudo de estruturas tridimensionais.

Designando  $K_{ij}$  a função integranda da equação (6.35) a matriz desenvolve-se numericamente.

$$K_{ij}^e = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n T(\bar{\xi}_p, \bar{\eta}_q, \bar{\zeta}_r) W_p W_q W_r \quad (6.36)$$

$W_p W_q W_r$  representam respectivamente os factores de peso da regra e  $(\bar{\xi}_p, \bar{\eta}_q, \bar{\zeta}_r)$  as coordenadas dos respectivos pontos específicos.

Um aspecto muito importante de qualquer cálculo por elementos finitos é o cálculo de matrizes de elementos finitos, entre outras, a matriz de rigidez, a matriz de massa, o vector de cargas nodais equivalente às cargas exteriores aplicadas.

A ideia básica dos elementos finitos isoparamétricos é a de que a relação entre os deslocamentos no interior do elemento e os deslocamentos nodais pode ser directamente estabelecida através de funções de interpolação (funções de forma).

Numa representação isoparamétrica utilizam-se as funções de forma para interpolação da geometria e dos deslocamentos. A formulação isoparamétrica permite utilizar elementos

irregulares e com lados curvos. A definição do elemento efectua-se a partir das coordenadas da sua geometria real, para aproximar o cálculo de todos os integrais à geometria normalizada do elemento.

As principais características das funções de forma dos elementos finitos utilizados são a sua continuidade do interior dos elementos e ainda o valor que essas funções apresentam em determinados pontos do domínio, conforme se impõe nas equações seguintes

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) = 1 \quad (6.37)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 \Rightarrow i = j \\ 0 \Rightarrow i \neq j \end{cases} \quad (6.38)$$

em que  $\xi$  e  $\eta$  representam as coordenadas naturais do elemento finito.

As funções de forma assim definidas permitem assegurar a continuidade do campo de deslocamentos no interior do elemento, garantindo ainda uma continuidade do tipo  $C_0$  entre elementos adjacentes.

Note-se que as funções de forma possuem algumas propriedades importantes:

- São unitárias no nó a que respeitam e nulas nos restantes.
- Possuem a partição da unidade, ou seja,  $\sum N_i = 1$ .

No âmbito de elementos de deformação constante, uma maneira possível de gerar as funções de forma é definir uma função incógnita a partir de uma expressão polinomial contendo tantos termos quantos os nós do elemento. Escrever essa expressão polinomial com coeficientes  $\alpha_i$  para cada um dos nós do elemento, inverter o sistema obtido e calcular os coeficientes do polinómio.

Na maior parte dos elementos finitos torna-se impraticável calcular as matrizes de rigidez,  $\mathbf{K}$ , e o vector de cargas,  $\mathbf{f}$ , sem recurso a integração numérica. O método mais usado nos elementos finitos é a integração de Gauss, que pode ser considerada em domínios unidimensionais ou bidimensionais

Em casos de domínios unidimensionais, considere-se uma função  $f(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

Na regra de integração de Gauss, o integral

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (6.39)$$

é expresso na forma dum somatório estendido a  $p$  pontos de Gauss (do interior do elemento finito) onde se multiplica o valor da função,  $f$ , nesses pontos,  $p$ , por pesos, na forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^p f(x_i)W_i \quad (6.40)$$

onde  $W_i$  representa os pesos correspondentes ao ponto  $i$ .

Na tabela 6.1 apresentam-se as coordenadas e pesos para a técnica de integração de Gauss.

Note-se que esta técnica de integração, de grau  $n$ , fornece uma solução exacta para um polinómio de grau  $2n-1$ .

$n$	$\pm x_i$	$W_i$
1	0,0	2,0
2	0,5773502692	1,0
3	0,774596697 0,0	0,5555555556 0,8888888889
4	0,86113663116 0,3399810436	0,3478548451 0,6521451549

Tabela 6.1: Coordenadas e pesos para a técnica de integração de Gauss (até 4 pontos).

Tal como na integração numérica a uma dimensão, o objectivo da integração numérica a duas dimensões é a solução dos integrais da matriz de rigidez, vector de forças nodais equivalente e matriz de massa, através da quadratura de Gauss.

O integral de uma função em coordenadas naturais pode então ser substituído por dois somatórios contendo produtos dos pesos de Gauss e função nos pontos de Gauss respectivos, através de

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q w_i w_j F(\xi_i, \eta_j) \quad (6.41)$$

onde  $p, q$  são o número de pontos na direcção  $\xi, \eta$ , respectivamente, e  $w_i, w_j$  os seus pesos.

Em particular, para a matriz de rigidez podemos calcular o integral da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} h \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (6.42)$$

em que  $h$  representa a espessura do elemento.

### 6.2.3 Elemento tetraédrico de quatro nós

A três dimensões, o elemento contínuo mais simples corresponde a um tetraedro, um elemento de quatro nós.

As características de um elemento tetraédrico podem ser definidas em funções deslocamento, matriz de formação, rigidez, tensão e matrizes de cargas.

Na análise de elementos finitos aproxima-se o corpo como um conjunto de elementos finitos discretos interligados em pontos nodais nas fronteiras dos elementos. Os deslocamentos medidos no sistema coordenado local  $x$ ,  $y$  e  $z$  em cada elemento são assumidos como função dos deslocamentos em  $n$  pontos no elemento.

Seja um elemento tetraédrico  $i, j, m, p$ , num espaço definido pelas coordenadas  $x, y$  e  $z$  (Figura 6.2). O estado de deslocamento dum ponto é definido pelas três componentes deslocamento  $u, v, w$ , nas direcções das três coordenadas  $x, y, z$ .

Assim,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (6.43)$$

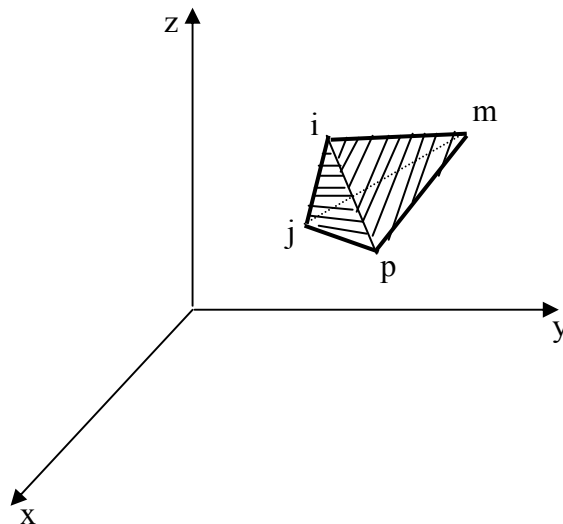


Figura 6.2: Volume do tetraedro.

A variação linear é definida por quatro valores nodais, podendo ser escrita, por questão de simplicidade apenas para  $\mathbf{u}$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 Z \quad (6.44)$$

A equação (6.44) pode, ainda, ser reescrita em quatro equações do tipo:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i + \alpha_4 Z_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j + \alpha_4 Z_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 X_m + \alpha_3 Y_m + \alpha_4 Z_m \\ u_p &= \alpha_1 + \alpha_2 X_p + \alpha_3 Y_p + \alpha_4 Z_p \end{aligned} \quad (6.45)$$

em que se calculam  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$ .

É possível escrever esta solução, usando a forma determinante, isto é:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{6V} \left[ (a_i + b_i X + c_i Y + d_i Z) u_i + (a_j + b_j X + c_j Y + d_j Z) u_j + (a_m + b_m X + c_m Y + d_m Z) u_m + (a_p + b_p X + c_p Y + d_p Z) u_p \right] \quad (6.46)$$

com

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_m & Y_m & Z_m \\ 1 & X_p & Y_p & Z_p \end{vmatrix} \quad (6.47)$$

em que  $V$  representa o volume do tetraedro. Expandindo os outros determinantes relevantes nos seus co-factores obtém-se:

$$\begin{aligned} a_i &= \det \begin{vmatrix} X_j & Y_j & Z_j \\ X_m & Y_m & Z_m \\ X_p & Y_p & Z_p \end{vmatrix} & b_i &= -\det \begin{vmatrix} 1 & Y_j & Z_j \\ 1 & Y_m & Z_m \\ 1 & Y_p & Z_p \end{vmatrix} \\ c_i &= -\det \begin{vmatrix} X_j & 1 & Z_j \\ X_m & 1 & Z_m \\ X_p & 1 & Z_p \end{vmatrix} & d_i &= -\det \begin{vmatrix} X_j & Y_j & 1 \\ X_m & Y_m & 1 \\ X_p & Y_p & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6.48)$$

O deslocamento do elemento é definido por 12 componentes de deslocamento dos nós como:

$$\mathbf{d}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_p \end{Bmatrix} \quad (6.49)$$

com:

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_m = \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_p = \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} \quad (6.50)$$

Os deslocamentos dum ponto arbitrário podem ser escritos como:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{I}N_i, \mathbf{I}N_j, \mathbf{I}N_m, \mathbf{I}N_p] \mathbf{a}^e \quad (6.51)$$

em que as funções de forma são definidas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{a_i + b_i X + c_i Y + d_i Z}{6V} \\ N_j &= \frac{a_j + b_j X + c_j Y + d_j Z}{6V} \\ N_m &= \frac{a_m + b_m X + c_m Y + d_m Z}{6V} \\ N_p &= \frac{a_p + b_p X + c_p Y + d_p Z}{6V} \end{aligned} \quad (6.52)$$

em que  $\mathbf{I}$  representa uma matriz identidade 3x3.

As deformações são obtidas por derivação dos deslocamentos. Assim, numa análise tri-dimensional são relevantes seis componentes de deformação, definidas como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial w}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \\ \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Z} \end{Bmatrix} \quad (6.53)$$

Usando as equações (6.46) - (6.51) verifica-se que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}^e \left[ \mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j, \mathbf{B}_m, \mathbf{B}_p \right] \mathbf{a}^e \quad (6.54)$$

onde

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_i}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial X} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

Sendo que as outras sub-matrizes,  $\mathbf{B}_j, \mathbf{B}_m, \mathbf{B}_p$ , são obtidas de maneira semelhante.

Para um material isotrópico, com matriz de elasticidade,  $\mathbf{D}$ , a relação entre tensões e deformações é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.56)$$

onde:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (6.57)$$

em que  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  representam as tensões normais e  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  as tensões de corte.

A matriz das constantes elásticas,  $\mathbf{D}$ , para o estado tridimensional, é a função de  $E$  que representa o módulo de elasticidade e  $\nu$ , o coeficiente de Poisson.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Na solução por elementos finitos, as equações de equilíbrio não são satisfeitas exactamente em todos os pontos considerados, havendo duas propriedades que são satisfeitas em qualquer malha de elementos finitos. A primeira propriedade refere-se ao equilíbrio nos nós, enquanto que a segunda propriedade se refere ao equilíbrio no elemento.

Considere-se que em cada elemento finito,  $e$ , os vectores de forças nodais são dados por:

$$\mathbf{f}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\sigma}^e dV^e \quad (6.59)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e$ .

De acordo com a primeira propriedade, em cada nó, a soma das forças nodais está em equilíbrio com as forças externas aplicadas, tendo em conta que:

$$\sum_e \mathbf{f}^e = \mathbf{Kd} \quad (6.60)$$

De acordo com a segunda propriedade, cada elemento está em equilíbrio sob as suas forças  $\mathbf{f}^e$ . Esta propriedade é satisfeita, desde que a matriz de interpolação  $\mathbf{N}^e$  satisfaça requisitos de convergência.

Assim, na análise por elementos finitos, podem referir-se as seguintes condições:

- A estrutura é idealizada como um conjunto interligado de elementos discretos ligados em nós.
- As forças externas aplicadas são atribuídas a esses nós, usando o princípio dos trabalhos virtuais para obter forças nodais equivalentes às forças aplicadas.
- As forças nodais equivalentes às forças externas aplicadas são equilibradas pelas forças nodais equivalentes às tensões internas nos elementos, ou seja,

$$\sum_e \mathbf{f}^e = \mathbf{R} \quad (6.61)$$

- As equações de compatibilidade de tensão-deformação são satisfeitas exactamente.

A matriz de rigidez pode ser integrada explicitamente uma vez que as componentes de deformação e tensão são constantes dentro do elemento.

A sub-matriz geral da matriz de rigidez é uma matriz 3x3 definida como:

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j V^e \quad (6.62)$$

em que  $V^e$  representa o volume dum tetraedro elementar.

As forças nodais devidas à deformação inicial resultam em:

$$\mathbf{f}_i^e = -\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 V^e \quad (6.63)$$

## 6.3 Dinâmica

A equação de movimento de massa numa posição de equilíbrio estático é expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (6.64)$$

em que o movimento é descrito como  $u = u(t)$ ,  $\ddot{u}$  a aceleração (note-se que  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$  e  $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$ ).

Da equação (6.64), obtém-se:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{C} = \int_{\Omega} \mu \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (6.65)$$

representam respectivamente a massa,  $\mathbf{M}$ , coeficiente de amortecimento,  $\mathbf{C}$ , e rigidez,  $\mathbf{K}$ .

De referir que

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}^T \quad (6.66)$$

representa o vector deslocamento de qualquer elemento, onde  $n$  é o número de graus de liberdade do elemento.

As funções de forma de deslocamento, que relacionam os deslocamentos genéricos com os deslocamentos nodais são definidas por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{d} \quad (6.67)$$

$\mathbf{F}$  a força de excitação:

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS \quad (6.68)$$

O elemento vector deslocamento nodal,  $\mathbf{d}$ , pode ser expresso usando o sistema vector deslocamento nodal,  $\mathbf{X}(t)$ , como uma matriz transformação,  $\mathbf{G}$ , como sendo:

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \mathbf{X}(t) \quad (6.69)$$

Substituindo a equação (6.69) em (6.64), multiplicando a matriz  $\mathbf{G}^T$  e somando todos os elementos, obtém-se:

$$\sum (\mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G}) \ddot{\mathbf{X}}(t) + \sum (\mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{G}) \dot{\mathbf{X}}(t) + \sum (\mathbf{G}^T \mathbf{K} \mathbf{G}) \mathbf{X}(t) = \sum \mathbf{G}^T \mathbf{F} \quad (6.70)$$

onde

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G}, \quad \mathbf{C} = \sum \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{G}, \quad \mathbf{K} = \sum \mathbf{G}^T \mathbf{K} \mathbf{G} \quad (6.71)$$

são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez [8], [9].

O vector carga externa do sistema é definido por:

$$\mathbf{F}(t) = \sum \mathbf{G}^T \mathbf{F} \quad (6.72)$$

Assim, o sistema de equações de equilíbrio dinâmico fica definido como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (6.73)$$

Onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ddots & m_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ddots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ddots & k_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

$$\mathbf{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}^T \quad (6.75)$$

$$\mathbf{F}(t) = \{F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)\}^T \quad (6.76)$$

Onde  $n$  representa o número total de graus de liberdade.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são matrizes simétricas.

O vector deslocamento,  $\mathbf{X}(t)$ , contém termos que inclui translações nas direcções de  $x$ ,  $y$  e  $z$  e rotações nas direcções  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ .

O vector carga externa  $\mathbf{F}(t)$  contém termos que incluem forças nas direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$  e momentos nas direcções  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ .

Usando o amortecimento proporcional de Rayleigh [8], a matriz de amortecimento,  $\mathbf{C}$ , pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, tal como:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (6.77)$$

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os coeficientes de amortecimento de Rayleigh, com unidades respectivamente  $s^{-1}$  e  $s$ . Estes coeficientes são convertidos no amortecimento modal,  $\zeta_i$ , para  $i$  modos, sendo obtido da seguinte forma:

$$\zeta_i = \frac{\alpha + \beta \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (6.78)$$

As frequências naturais e os modos naturais são calculados através duma análise de vibração livre sem amortecimento. Assim, a resposta de deslocamento é expressa como uma combinação linear dos modos naturais do sistema.

A vibração livre sem amortecimento é representada pela equação (6.73) sem amortecimento ( $\mathbf{C} = 0$ ) e sem carga externa ( $\mathbf{F} = 0$ ), donde resulta a seguinte equação matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = 0 \quad (6.79)$$

Assume-se como solução da equação (6.79):

$$\mathbf{X}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{a}_1(t) \\ \bar{a}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{a}_n(t) \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} \bar{b}_1(t) \\ \bar{b}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{b}_n(t) \end{Bmatrix} \sin \omega t = \bar{\mathbf{A}} \cos \omega t + \bar{\mathbf{B}} \sin \omega t \quad (6.80)$$

Substituindo a equação (6.80) na equação (6.79) e agrupando os termos, resulta:

$$\left[ -\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K} \right] \bar{\mathbf{A}} \cos \omega t + \left[ -\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K} \right] \bar{\mathbf{B}} \sin \omega t = 0 \quad (6.81)$$

Uma vez que  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$  não são simultaneamente zero, então:

$$\left[ -\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K} \right] \bar{\mathbf{A}} = 0, \quad \left[ -\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K} \right] \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (6.82)$$

A solução não trivial de (6.82) pode ser obtida através do determinante:

$$\left| -\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K} \right| = 0 \quad (6.83)$$

A equação (6.83) é um polinómio de ordem  $n$ , havendo  $n$  incógnitas de  $\omega^2$ . Uma vez que  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  são matrizes simétricas e positivas existem sempre  $n$  soluções reais de  $\omega^2$ , que satisfazem a seguinte condição:

$$\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2 \quad (6.84)$$

$\omega_1$  (menor valor de  $\omega_i$ ) chama-se frequência natural fundamental de vibração;  $\omega_2$  a segunda frequência natural de vibração e assim sucessivamente.  $\omega_i^2$  é chamado valor próprio de ordem  $i$  do sistema. Cada frequência natural do sistema tem um vector próprio correspondente, denotado  $\phi_i$ , relacionando-se da seguinte forma:

$$\left[ -\mathbf{M}\omega_i^2 + \mathbf{K} \right] \phi_i = 0 \quad (6.85)$$

Os vectores próprios são chamados modos naturais do sistema, tomando a forma:

$$\varphi_i = \{\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \dots, \varphi_{ni}\}^T \quad (6.86)$$

A resposta da estrutura pode ser representada como combinação dos  $n$  modos naturais, a partir das  $n$  soluções de  $\omega$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^n [\bar{\mathbf{A}}_i \cos \omega_i t + \bar{\mathbf{B}}_i \text{sen} \omega_i t] \quad (6.87)$$

Se a equação (6.87) for substituída na equação (6.79), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n [-\mathbf{M}\omega_i^2 + \mathbf{K}] [\bar{\mathbf{A}}_i \cos \omega_i t + \bar{\mathbf{B}}_i \text{sen} \omega_i t] = 0 \quad (6.88)$$

Para se obter a solução não trivial, tendo em conta que:

$$[-\mathbf{M}\omega_i^2 + \mathbf{K}] \bar{\mathbf{A}}_i = 0, \quad [-\mathbf{M}\omega_i^2 + \mathbf{K}] \bar{\mathbf{B}}_i = 0 \quad (6.89)$$

Comparando a equação (6.85) com a equação (6.89), obtém-se:

$$\bar{\mathbf{A}}_i = a_i \varphi_i, \quad \bar{\mathbf{B}}_i = b_i \varphi_i \quad (6.90)$$

Da equação (6.87), resulta:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i [a_i \cos \omega_i t + b_i \text{sen} \omega_i t] = \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i(t) \quad (6.91)$$

Onde  $q_i(t)$  é a solução da vibração livre sem amortecimento.  $a_i$  e  $b_i$  podem ser determinados baseado nas condições iniciais dadas.

## 6.4 Formulação de Contacto

O programa ABAQUS/Standard [10] permite a utilização de dois métodos para modelar interacções entre corpos: usando superfícies ou elementos de contacto. Neste trabalho foi utilizada modelação do contacto por superfícies entre dois corpos deformáveis, em que se admitiu pequenos deslizamentos entre corpos (*small-sliding*).

Um dos objectivos do estudo do contacto entre corpos deformáveis é avaliar a evolução das tensões nos corpos de modo a se poder estudar o desgaste dos mesmos e desta forma otimizar o processo de enformação [11]. Para a modelação do contacto torna-se necessário definir as superfícies que poderão estar em contacto, especificando os pares de superfícies que contactam entre si e definir as respectivas propriedades mecânicas.

### 6.4.1 Considerações cinemáticas

A modelação de contacto pretende descrever a interferência entre dois corpos ao longo do tempo [12]. Seja P o ponto da superfície dum corpo, A, para a análise de contacto e, F, o ponto de outro corpo, B, que mais se aproxima de P (Figura 6.3). Se se definir  $\mathbf{n}$  como o vector normal à superfície do corpo A, no ponto F, o sistema de eixos local curvilíneo fica representado a partir de  $\mathbf{n}$  e da coordenada direcciona,  $\xi$ , definida a partir de um ponto inicial da superfície do corpo A,  $F_0$ . O sistema de eixos local cartesiano é representado pelo vector normal  $\mathbf{n}$  e o vector tangente à superfície do corpo A,  $\mathbf{t}$ , no ponto F (Figura 6.3).

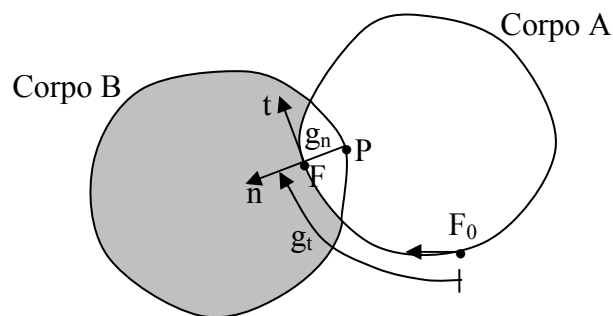


Figura 6.3: Variáveis cinemáticas

As variáveis cinemáticas na modelação do contacto estão descritas num referencial local associado às entidades geométricas que constituem a definição do corpo A.

Para se estabelecer uma ordem nas orientações dos vectores e para a definição dos referenciais locais é necessário ordenar as entidades geométricas do corpo A, no sentido anti-horário, por compatibilidade na numeração dos nós dos elementos finitos.

As primeiras variáveis cinemáticas a ser introduzidas são o deslocamento normal,  $\mathbf{g}_n$ , e o deslocamento tangencial,  $\mathbf{g}_t$ , associadas a um ponto da superfície do corpo B [12]. Se a posição actual do nó P for definida como:

$$x_P = X_P + u_P \quad (6.92)$$

onde  $u_P$  representa o deslocamento do nó P, então define-se o deslocamento normal,  $\mathbf{g}_n$ , como:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_n &= g_n \mathbf{n} \\ \mathbf{g}_n &= (x_F - x_P) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (6.93)$$

Em que  $x_F$  define a posição actual do corpo A, sendo representada por:

$$x_F = X_F + u_F \quad (6.94)$$

onde  $u_F$  é o deslocamento do corpo A.

O deslocamento tangencial no sistema de eixos curvilíneos define-se como:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_t &= g_t \mathbf{t} \\ g_t &= \int_{F_0}^F d\Gamma_F = \xi(x_F) - \xi(x_{F_0}) \end{aligned} \quad (6.95)$$

## 6.4.2 Algoritmo de contacto

O algoritmo de contacto, apresentado na Figura 6.5, foi construído segundo a técnica de Newton-Raphson. O programa ABAQUS/Standard [10] usa um algoritmo de contacto de *master-slave* em que os nós de uma superfície (*slave*) não podem penetrar os segmentos que fazem parte de uma outra superfície (*master*). O algoritmo não imprime restrições à superfície *master*, podendo penetrar na superfície *slave*, entre os seus nós (Figura 6.4). A consequência desta formulação exige uma correcta escolha das respectivas superfícies, para se obter uma melhor simulação de contacto possível. Uma das regras será que a superfície *slave* deverá ter uma malha mais

refinada, mas se as densidades das malhas forem similares, então a superfície *slave* deverá ser uma superfície de material menos rígido.

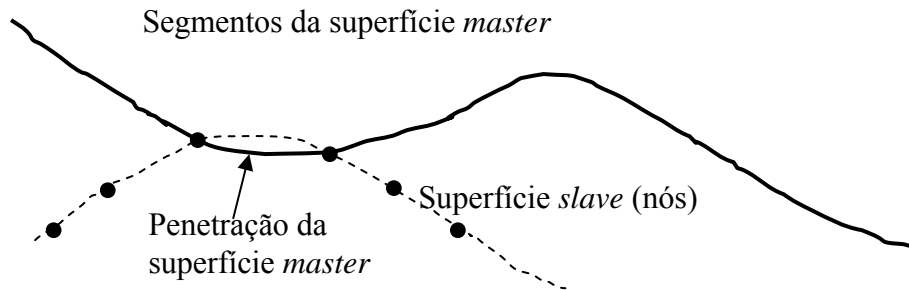


Figura 6.4: A superfície *master* pode penetrar na superfície *slave*.

Quando se usa a formulação de *small-sliding*, o ABAQUS/Standard estabelece a relação entre os nós *slave* e as superfícies *master* no início da simulação, determinando que segmento na superfície *master* entra em contacto com cada nó da superfície *slave*. Esta relação mantém-se durante toda a análise não alterando as superfícies que interagem.

Se são incluídas no modelo, geometrias não lineares, o algoritmo de *small-sliding* considera qualquer rotação e deformação da superfície *master*, actualizando as cargas transmitidas. Se não são incluídas geometrias não lineares, as rotações e deformações serão ignoradas, mantendo-se as cargas fixas.

O ABAQUS/Standard examina o estado de todas as interações de contacto no início de cada incremento para verificar se os nós *slave* são penetrados ou não. Na Figura 6.5,  $p$  refere-se à pressão de contacto no nó *slave* e  $h$  a penetração dum nó *slave* numa superfície *master*. Se o nó penetra, o programa determina se ele desliza ou está fixo, aplicando uma restrição para cada nó penetrado e removendo a restrição para os nós não penetrados. O programa conclui uma iteração e actualiza a configuração do modelo usando correcções calculadas.

Antes de verificar o equilíbrio das forças ou momentos, o programa primeiro verifica as mudanças nas condições de contacto nos nós *slave*. Qualquer nó que ao fim de cada iteração se torne negativo ou zero muda o estado de não penetrado para penetrado. Qualquer nó cuja pressão de contacto se torne negativa muda o seu estado de penetrado para não penetrado. Se for detectada alguma alteração na iteração corrente, o programa rotula-a como “iteração de descontinuidade severa”, e não é concluída a verificação de equilíbrio.

O programa modifica as restrições de contacto para reflectir a mudança no estado de contacto depois da primeira iteração e tenta uma segunda iteração. O programa repete o procedimento até uma iteração estar completa sem alteração no estado de contacto.

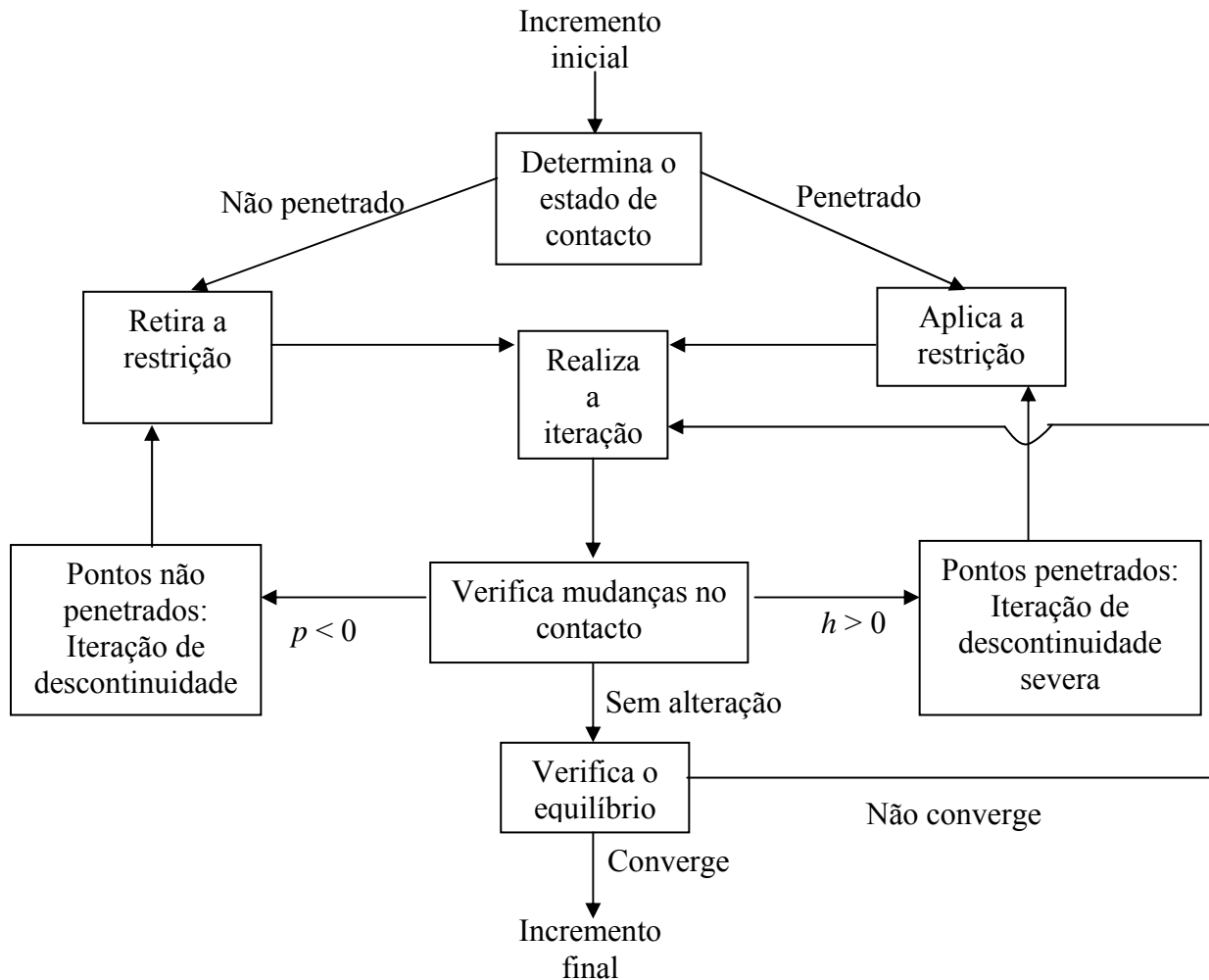


Figura 6.5: Algoritmo de contacto

Esta iteração torna-se a primeira iteração de equilíbrio e o programa realiza a verificação de convergência de equilíbrio normal. Se a convergência falha, o programa faz outra iteração. Cada vez que ocorre uma iteração de descontinuidade severa, o programa volta a colocar os contadores internos das iterações de equilíbrio a zero. Este contador de iterações é usado para determinar se um incremento deve ser abandonado devido a uma taxa de convergência baixa. O programa repete todo o processo até se conseguir a convergência, como se visualiza na Figura 6.5.

O resumo para cada incremento completo nos ficheiros de mensagem e de estado mostra quantas iterações eram iterações de descontinuidade severa e quantas eram iterações de equilíbrio. O número total de iterações para um incremento é a soma destes dois.

Se o número de iterações de descontinuidade severa é alto, mas há várias iterações de equilíbrio, o programa terá dificuldades em determinar as próprias condições de contacto. Por defeito, o programa rejeita qualquer incremento que necessite mais de 12 iterações de descontinuidade severa e tenta novamente com um incremento menor. Se não há iterações de descontinuidade severa, o estado de contacto não muda de incremento para incremento.

O programa ABAQUS combina as duas componentes de tensão de corte numa “tensão de corte equivalente”,  $\bar{\tau}$ , para o cálculo de fixação/deslizamento, onde  $\bar{\tau} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$ . O ABAQUS combina ainda as duas componentes de velocidade de deslizamento numa taxa de deslizamento equivalente,  $\dot{\gamma}_{eq} = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}$ . O cálculo de fixação/deslizamento define a superfície na pressão de contacto – espaço de tensão de corte ao longo do qual um ponto passa de fixo a deslizante (Figura 6.6).

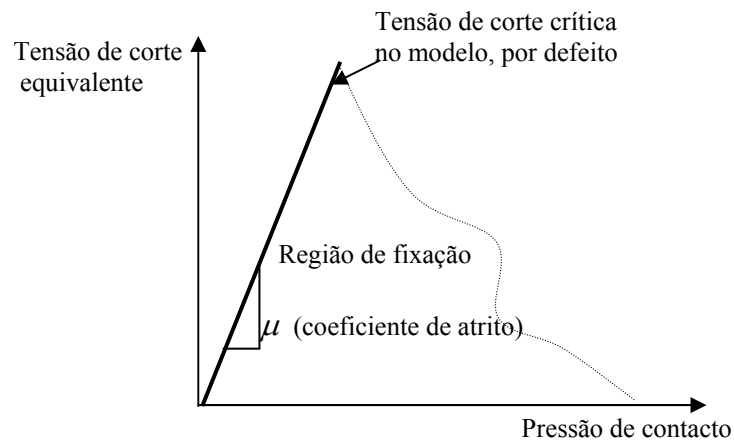


Figura 6.6: Região de deslizamento para o modelo de atrito clássico de Coulomb.

Quando as superfícies de dois corpos se encontram em contacto, geralmente transmitem forças tangenciais e normais na respectiva interface, sendo conhecida a relação entre estas duas componentes de força. A relação, conhecida como atrito entre os corpos, é usualmente expressa em termos de tensões na interface dos corpos [10]. Existem duas formas para definir o modelo de atrito clássico de Coulomb no programa ABAQUS: especificar directamente os coeficientes de

atrito estático e cinemático ou definir o coeficiente de atrito como sendo uma função da taxa de deslizamento equivalente e da pressão de contacto, tendo sido este o utilizado nesta tese.

O clássico isotrópico de Coulomb é definido por:

$$\mu = \mu(\dot{\gamma}_{eq}, p, \bar{\theta}, \bar{f}^\alpha) \quad (6.96)$$

onde  $\dot{\gamma}_{eq}$  é a taxa de deslizamento equivalente,  $p$  é a pressão de contacto,  $\bar{\theta} = \frac{1}{2}(\theta_A + \theta_B)$  é a temperatura média no ponto de contacto e  $\bar{f}^\alpha = \frac{1}{2}(f_A^\alpha + f_B^\alpha)$  corresponde à média da variável de campo pré-definida ( $\alpha$ ) no ponto de contacto,  $\theta_A, \theta_B, f_A^\alpha$  e  $f_B^\alpha$  são as temperaturas e variáveis de campo pré-definidas nos pontos  $A$  e  $B$  das superfícies. O ponto  $A$  é um nó pertencente à superfície *slave* e o ponto  $B$  corresponde ao ponto mais perto do ponto  $A$  e pertence à superfície considerada *master*.

Por defeito, assumiu-se que o coeficiente de atrito toma um valor constante ao longo do processo não dependendo das variáveis de campo acima descritas.

## 6.5 Referências

- [1] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, *Bull. Am. Math. Soc.*, 49, pp. 1-23, 1943.
- [2] J.H. Argyris, Matrix displacement analysis of anisotropic shells by triangular elements, *J. Roy. Aero. Soc.*, 69, pp. 801-805, 1965.
- [3] R.W. Clough, The finite element method in plane stress analysis, *Proc. 2<sup>nd</sup> A.S.C.E. Conf. in Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa., 1960.
- [4] O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung, *The finite element method for analysis of elastic isotropic and anisotropic slabs*, Proc. Inst. Civ. Eng., 28, pp. 471-488, 1964.
- [5] A.J.M. Ferreira, Elementos finitos em Matlab, 2007.
- [6] M.A. Crisfield, *Finite elements and solution procedures for structural analysis, Vol. I: Linear analysis*, U.K., 1986.
- [7] B.J. Anson, J.A. Donaldson, “*The Surgical anatomy of the temporal bone and ear*”, London, 1976.
- [8] R.D. Cook, *Finite element modeling for stress analysis*, Chapter 9, John Wiley & sons, Inc., 1995.
- [9] X. Dong, S.P. Wang, E. Nakamachi, *Dynamic explicit finite element analysis*, Chapter 4, Nakamachi Lab. Report, 1995.
- [10] ABAQUS Analyses User’s Manual, Version 6.5, 2005.
- [11] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, John Wiley & sons, Ltd., Germany, 2002.
- [12] R.P.R. Cardoso, *Desenvolvimento de modelos para regeneração adaptativa e contacto em processo de enformação plástica*, Porto, 1998.

## Capítulo 7

# *Análise estática e dinâmica do comportamento mecânico do ouvido médio*

### 7.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a construção do modelo do ouvido médio, que engloba a membrana timpânica, ossículos (martelo, bigorna e estribo), ligamentos, articulações e músculos, assim como a impedância coclear.

Inicialmente foi construído um modelo de elementos finitos com base em parâmetros dimensionais existentes [1]. No sentido de se obter um modelo mais realista foi, posteriormente, construído um novo modelo geométrico, tendo por base um exame imagiológico.

Foram aplicadas as respectivas propriedades de material para os diversos componentes do modelo, como o módulo de Young, coeficiente de Poisson, densidades e coeficientes de amortecimento, sendo baseadas em trabalhos publicados [2], [3], [4].

De seguida foram atribuídas as adequadas condições fronteira, ao nível da membrana timpânica, base do estribo, ligamentos e músculos.

Efectuaram-se estudos estáticos do comportamento do ouvido médio, fazendo incidir sobre a membrana timpânica vários valores de níveis de pressão acústica, de 0 dB SPL a 120 dB SPL.

Nesta sequência foram, igualmente, feitos estudos de dinâmica, tendo sido calculados os respectivos modos próprios, assim como vários varrimentos de bandas frequenciais, entre 100 Hz a 10 kHz, para vários valores de pressão acústica, aplicados sobre a membrana timpânica. Foram, então, calculados os deslocamentos, a nível do umbo e da platina do estribo. Estes resultados foram comparados com outros estudos existentes na literatura, anteriormente publicados.

Seguidamente calcularam-se os esforços exercidos sobre as cruras do estribo e sobre os ligamentos suspensores.

Por último, e no sentido de se perceber o comportamento exercido pelos músculos do ouvido médio, foram feitos alguns estudos a nível das pressões e rotações obtidas sobre a platina do estribo, para diferentes níveis de activação.

## 7.2 Modelo construído com base em relações geométricas

O primeiro modelo de elementos finitos do ouvido médio foi criado com base na geometria e nas dimensões descritas na obra de Anson e Donaldson [1]. Este modelo foi iniciado pela membrana timpânica, a que se acrescentaram sequencialmente o martelo, a bigorna e o estribo (Figura 7.1). Neste modelo não se incluíram os ligamentos, músculos e respectivos tendões do ouvido. Com base neste modelo gerou-se, para cada ossículo, uma malha de elementos finitos do tipo tetraedros. Os elementos utilizados eram quadráticos com dez nós, correspondendo no software ABAQUS [5], ao elemento C3D10. Na sua totalidade, o modelo realizado apresentava 137028 elementos e 227480 nós (Figura 7.2).

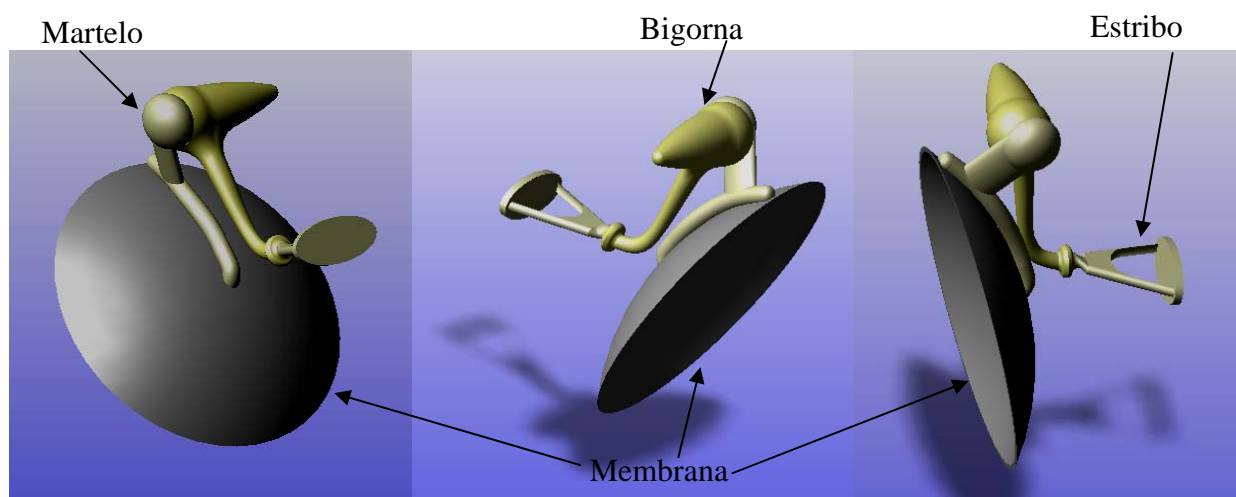


Figura 7.1: Modelo geométrico da membrana, martelo, bigorna e estribo.

As propriedades de material foram baseadas no trabalho de Sun *et al.* [2] em que se tomaram todos os ossículos com o mesmo coeficiente de Poisson (0,3) e o mesmo módulo de elasticidade (14,1 GPa). À região da membrana timpânica correspondente à *pars flaccida* foi-lhe atribuído um módulo de elasticidade de 10 GPa e à região correspondente à *pars tensa*, 20 GPa. Admitiu-se ainda, o material como tendo um comportamento isotrópico.

As condições fronteira incluíram a simulação do sulco timpânico, em que a membrana timpânica foi fixa em toda a sua periferia, e a platina do estribo, também fixa na sua periferia, simulava o ligamento anular.

Numa primeira abordagem [6] optou-se por não considerar as articulações mecânicas entre os

ossículos, pelo que no modelo apresentado, estas ligações foram consideradas como ligações rígidas, como apresentado por outros autores [2], [3]. Para o modelo descrito foram obtidos os resultados, para um comportamento estático, para um nível de pressão acústica de 90 dB SPL, incidente sobre a membrana timpânica.



Figura 7.2: Malha de elementos finitos 3D da membrana timpânica e ossículos.

A Figura 7.3 mostra a distribuição do campo de deformação equivalente (elástica). Como se pode verificar, a deformação assume maiores valores na membrana timpânica, sendo muito reduzida no estribo, o que está de acordo com as condições fronteira consideradas.

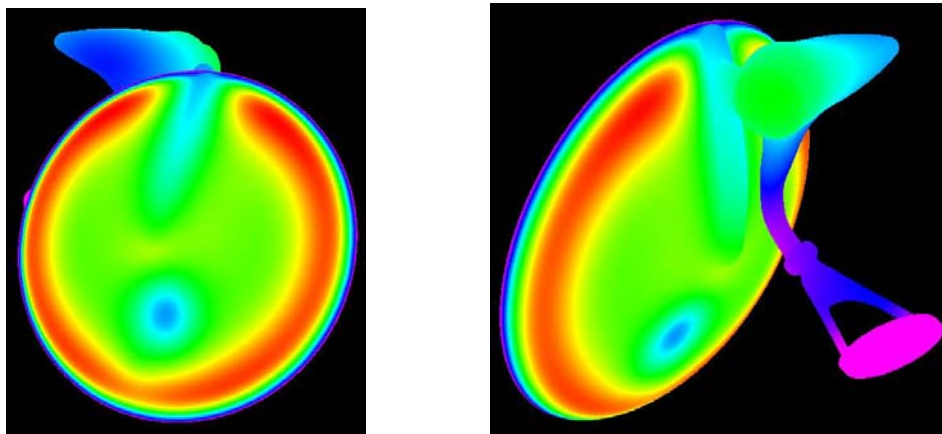


Figura 7.3: Distribuição do campo de deformação equivalente.

No seguimento deste estudo foram incluídos os ligamentos capsulares, ou seja, a conexão entre os ossículos, martelo/bigorna e bigorna/estribo [7]. Os resultados obtidos foram comparados para o comportamento mecânico do ouvido médio entre dois modelos distintos: um em que se considerou que a ligação entre os ossículos era rígida [6] e outra em que a ligação permitia que

os ossículos pudessem deslizar entre eles por intermédio de elementos de contacto, tendo-se tomado o coeficiente de atrito como zero.

Ao efectuar-se uma verificação dos esforços normais suportados pelas cruras do estribo, para a pressão aplicada, pode constatar-se diferenças significativas entre os dois modelos. No modelo rígido (Figura 7.4-a)) uma das cruras encontra-se submetida a compressão ( $-6,8310E-08$ ), enquanto a outra é sujeita a tracção ( $6,0803E-09$ ). No modelo em que a ligação entre os ossículos é modelada por intermédio de elementos de contacto (Figura 7.4-b)) ambas as cruras se encontram sujeitas a esforços de compressão ( $-9,0347E-09$  e  $-4,0232E-09$ ).

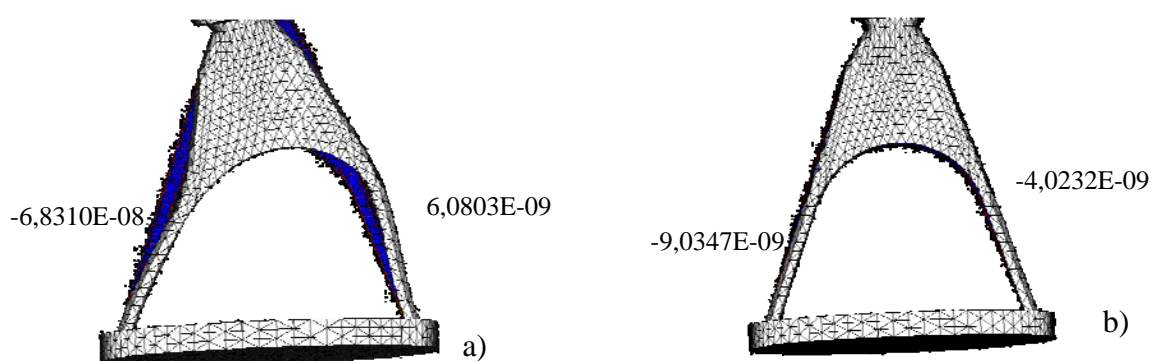


Figura 7.4: Esforços normais (em N) nas cruras do estribo, para os modelos: sem contacto (a); com contacto (b).

Note-se que as duas figuras foram obtidas com igual factor de escala na representação das respectivas malhas deformadas.

De seguida foram incluídos os ligamentos, anterior, superior e lateral do martelo, superior e posterior da bigorna (Figura 7.5) e o ligamento anular do estribo (Figura 7.6) [8], [9], [10].

Os ligamentos foram modelados com elementos de barra lineares, do tipo T3D2. Aos ligamentos foi atribuído um comportamento elástico, com um módulo de elasticidade de 2 GPa [2].

Além das anteriores condições fronteira foram incluídas as extremidades dos ligamentos anterior, superior e lateral do martelo e dos ligamentos superior e posterior da bigorna.

As ligações entre o martelo e a bigorna e a bigorna e o estribo continuaram a ser modeladas por intermédio de elementos de contacto, tendo-se tomado o coeficiente de atrito como zero.

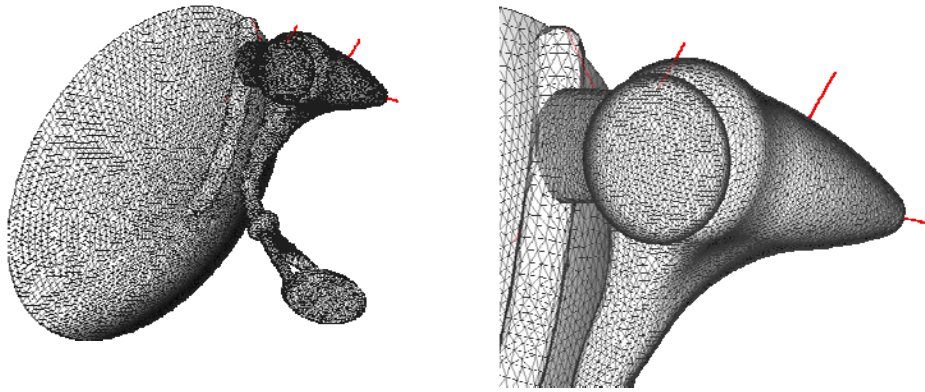


Figura 7.5: Modelo de elementos finitos dos ossículos do ouvido médio, incluindo os ligamentos.

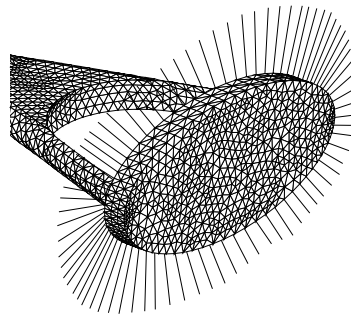


Figura 7.6: Estribo com evidência do ligamento anular.

Na Figura 7.7 apresenta-se a distribuição do campo de deslocamentos na direção normal à membrana, permitindo constatar diferenças de resultados, tanto na distribuição como nos valores máximos. Os valores máximos [10] obtidos no modelo sem ligamentos foram de  $1.54E-05$  mm e no modelo com ligamentos de  $2.10E-03$  mm.

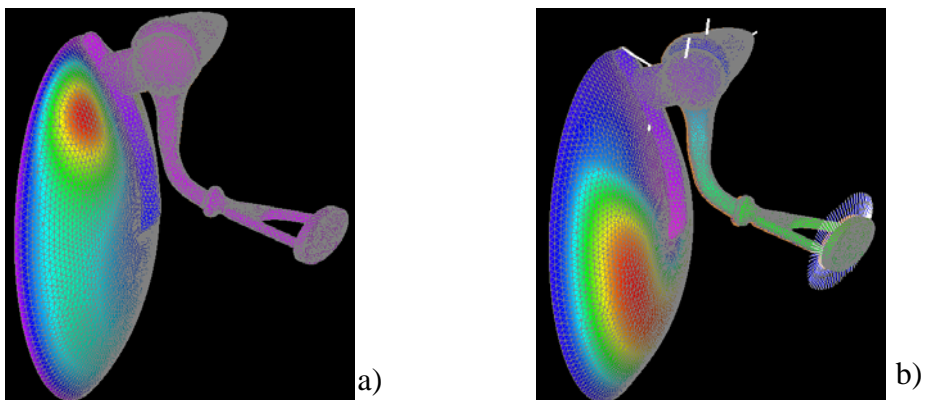


Figura 7.7: Campo de deslocamentos para o modelo: sem ligamentos (a); com ligamentos (b).

No primeiro modelo a distribuição maior verifica-se a nível da *pars flaccida*, enquanto que no segundo modelo ocorre ao nível da *pars tensa*.

Ao efectuar-se uma verificação dos esforços normais suportados pelas cruras do estribo, para a pressão aplicada, pode constatar-se diferenças significativas entre os dois modelos [9], [10].

Embora nos dois modelos, ambas as cruras se encontrem sujeitas a esforços de compressão, no modelo com ligamentos essa compressão é maior (Figura 7.8-b)).

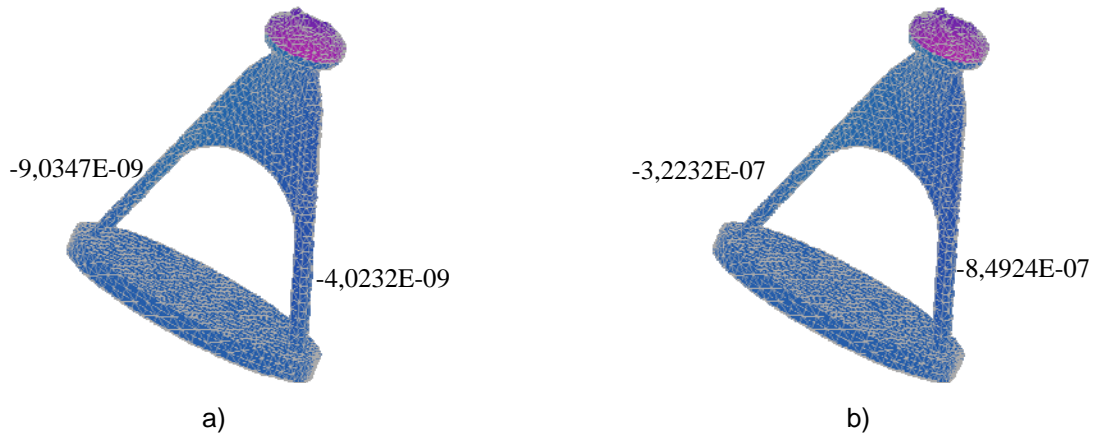


Figura 7.8: Esforços normais (em N) nas cruras do estribo, para o modelo: sem ligamentos (a); com ligamentos (b).

Como é sabido da literatura [11], [12], [13], [14], os ligamentos, bem como a generalidade dos tecidos moles, apresentam um comportamento não linear, que é normalmente considerado como hiperelástico.

Assim sendo, os ligamentos dos ossículos ao exterior da cadeia ossicular foram simulados como tendo um comportamento hiperelástico [15]. Para tal, foi utilizado o modelo de Yeoh [16], com os seguintes valores para as constantes [17]:  $c_1 = 0,013113$ ;  $c_2 = 0,060411$ ;  $c_3 = -0,05626$ .

Foi, seguidamente, efectuado um estudo dinâmico que permitiu comparar, em termos de valores próprios, dois modelos, um considerando os ligamentos com comportamento elástico e outro em que os ligamentos tinham um comportamento hiperelástico [15].

Na Figura 7.9 é possível verificar os primeiros 40 valores próprios para os dois modelos [18], [19]. Pode concluir-se que as maiores diferenças se encontram nos primeiros 3 modos próprios, havendo, também, algumas diferenças nos últimos modos próprios. Apenas para os valores da parte central não existem diferenças significativas.

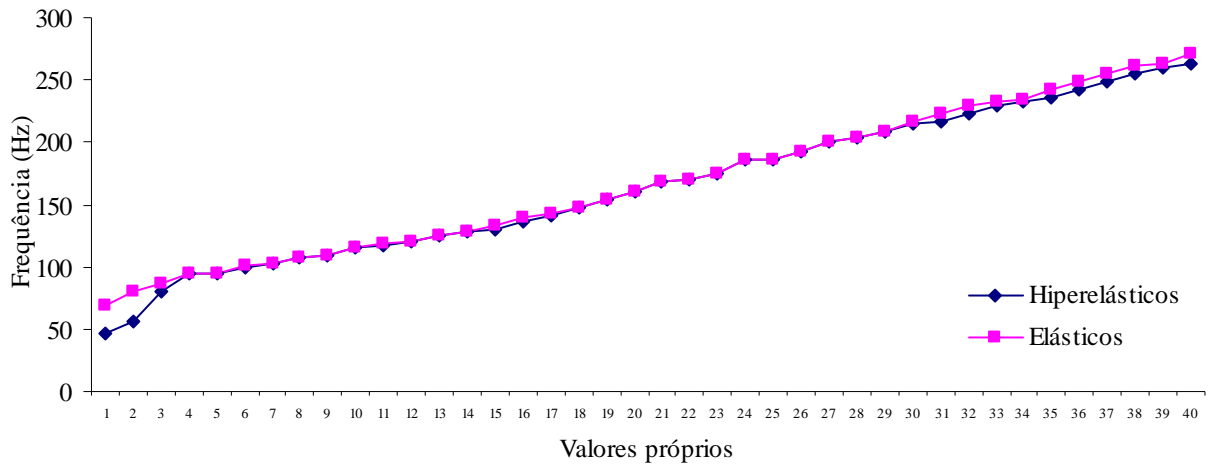


Figura 7.9: Os primeiros 40 valores próprios para os dois modelos.

Na Figura 7.10 são mostrados alguns dos primeiros 40 modos próprios (1, 2, 4, 7, 19, 30, 35 e 40), considerando o modelo em que os ligamentos e músculos foram tidos como hiperelásticos, sendo possível verificar que nos 2 primeiros, o sistema vibra como um corpo rígido, enquanto que as vibrações dos outros modos se concentram mais na membrana timpânica [15].

A Figura 7.11 apresenta os primeiros 20 valores próprios obtidos entre dois modelos: um em que os ligamentos capsulares são tidos como rígidos (modelo contínuo) e outro simulados com formulação de contacto [18], [20].

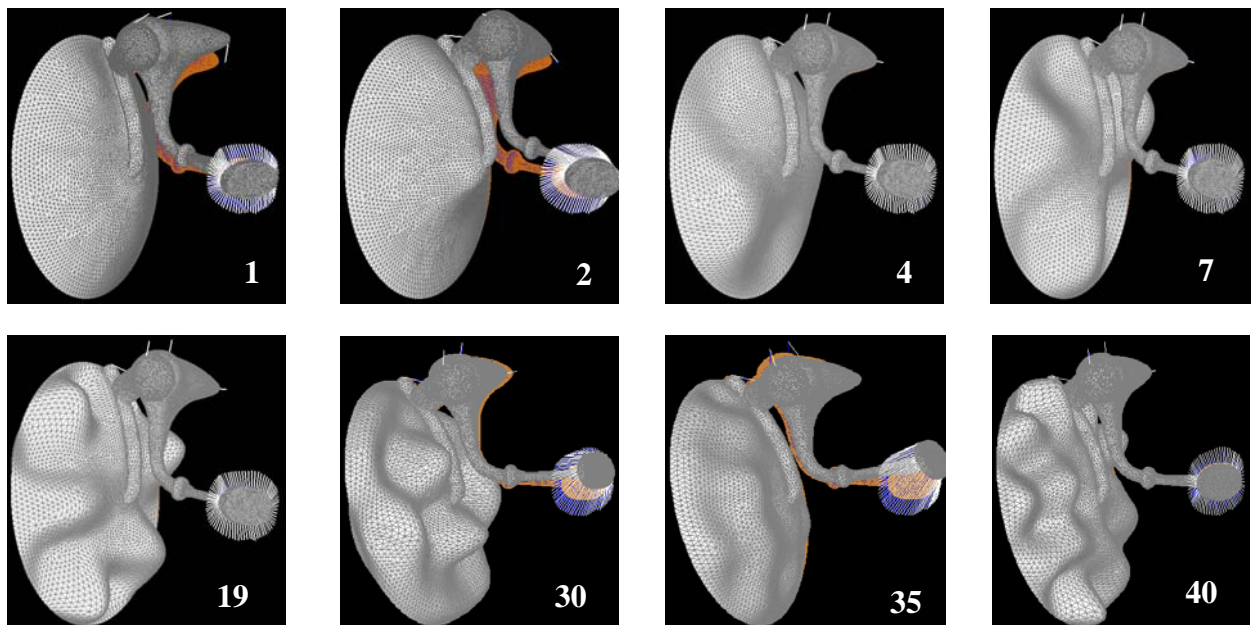


Figura 7.10: Alguns dos primeiros 40 modos próprios para o modelo constitutivo hiperelástico.

Em ambos os modelos os ligamentos foram considerados com tendo um comportamento hiperelástico. Como se pode verificar, não são encontradas diferenças significativas entre os dois modelos. Pode, então, concluir-se que numa análise de frequências naturais, a conexão rígida entre os ossículos é uma boa aproximação.

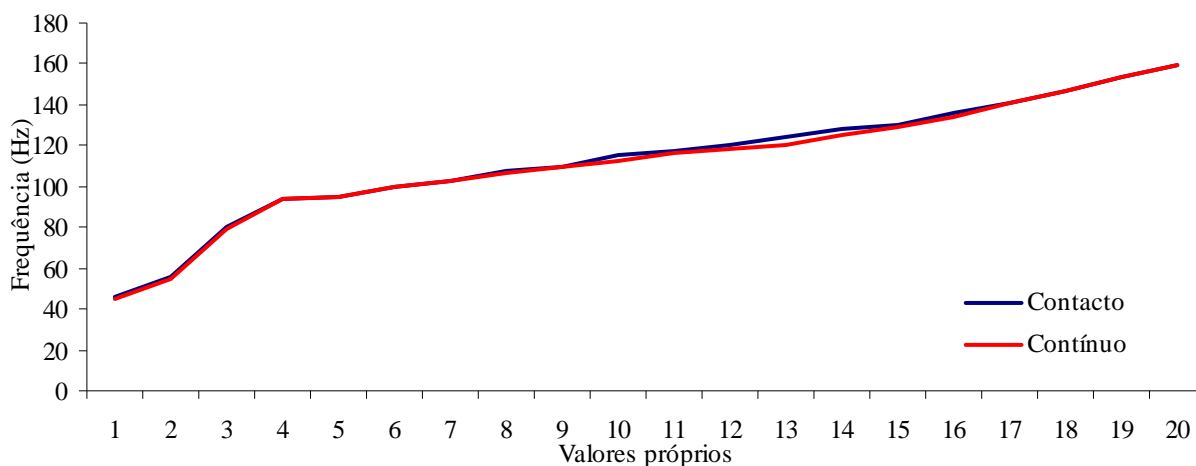


Figura 7.11: Primeiros 20 valores próprios para o modelo contínuo e para o modelo de contacto.

Ao incluir a formulação de contacto na simulação dos ligamentos capsulares entre os ossículos, era importante perceber qual seria o coeficiente de atrito mais adequado. Para tal foram efectuados quatro estudos para diferentes valores de pressão exercidos sobre a membrana timpânica (equivalentes a 25, 50 e 120 dB SPL) e para vários coeficientes de atrito compreendidos entre 0 e 1 [21].

No primeiro estudo foram medidos os deslocamentos em vários pontos da membrana timpânica, tendo-se concluído que para as três pressões aplicadas, os pontos de menor deslocamento se situam ao nível da *pars flaccida* e perto do sulco timpânico, sendo os pontos de maior deslocamento a meio da *pars tensa*. Perto do umbo existe uma maior variação do deslocamento entre as pressões.

Analisando a Figura 7.12 verifica-se que, para uma pressão equivalente a 120 dB SPL e para coeficientes de atrito compreendidos entre 0 e 0,5, o umbo desloca-se no sentido oposto ao estribo (valores negativos de deslocamento), passando a deslocar-se em sentido contrário (valores positivos de deslocamento) para coeficientes de atrito superiores a 0,5.

Esta troca de sentido no deslocamento do umbo para pressões equivalentes a 25 e 50 dB SPL verifica-se para um coeficiente de atrito de 0,8 (Figura 7.12).

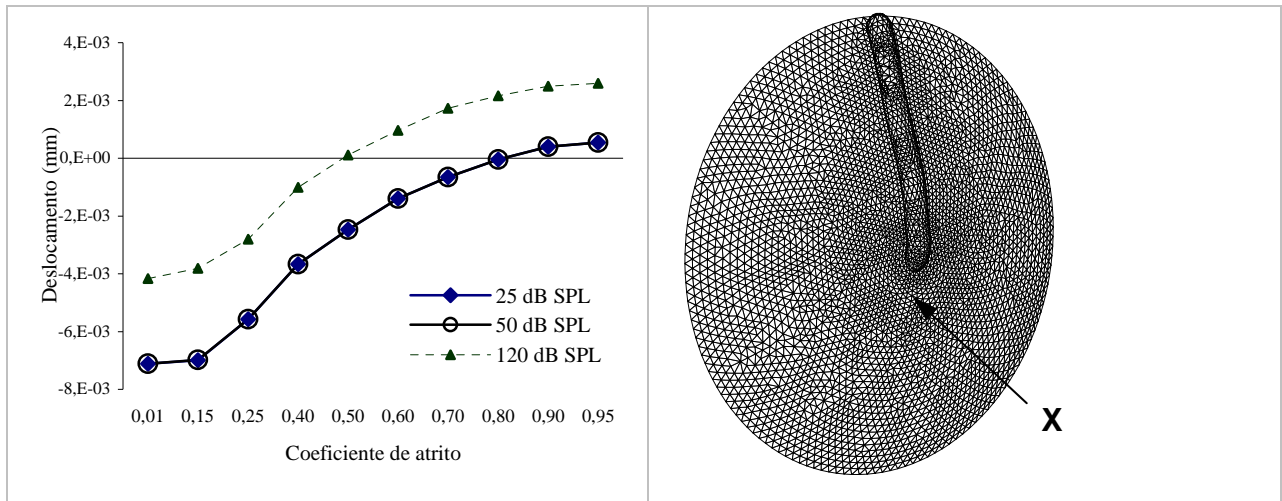


Figura 7.12: Variação do deslocamento da membrana timpânica, em função do coeficiente de atrito, num ponto perto do umbro (X), para pressões equivalentes a 25, 50 e 120 dB SPL.

No segundo estudo foram analisados os deslocamentos perpendiculares ao plano que inclui a platina do estribo.

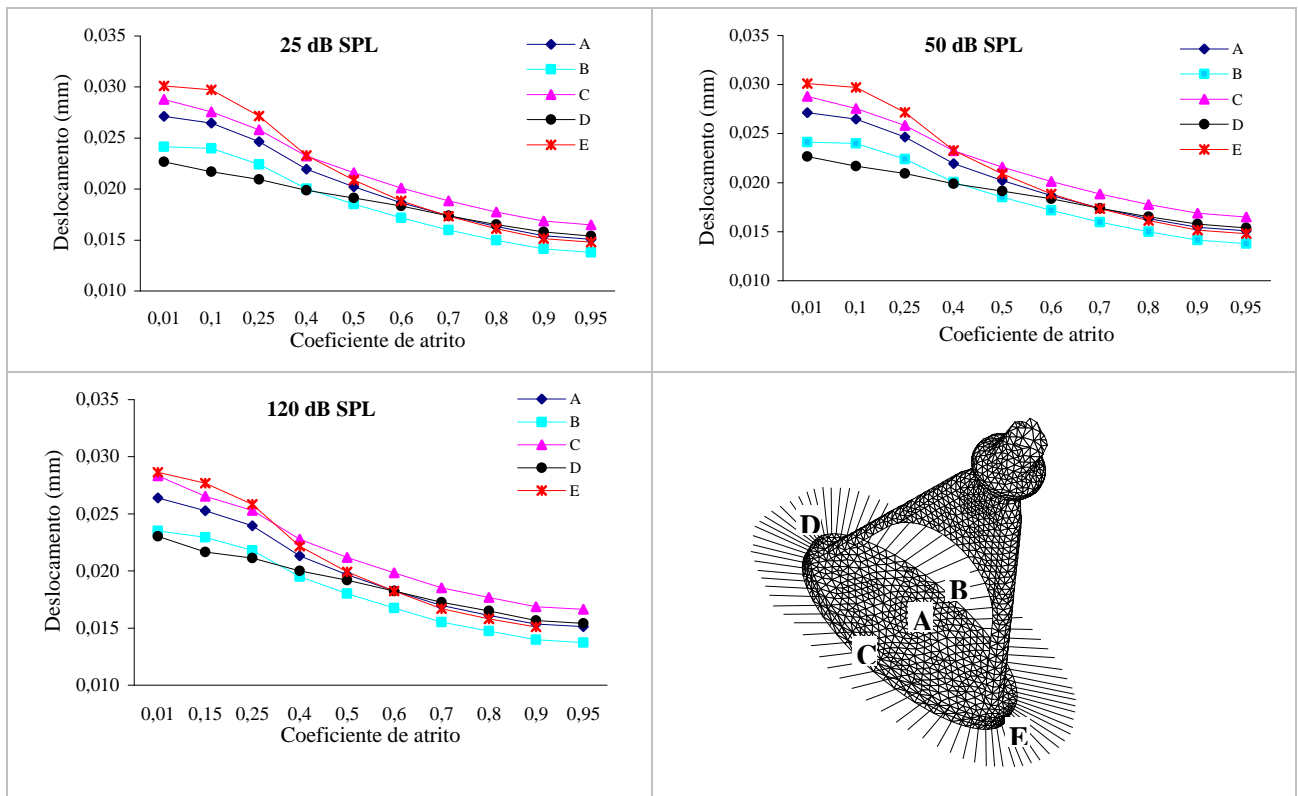


Figura 7.13: Valores de deslocamentos sofridos nos cinco pontos da platina do estribo, para vários coeficientes de atrito, para uma pressão de 25, 50 e 120 dB SPL.

Para o efeito, registaram-se os deslocamentos em cinco pontos (nós) da platina do estribo, para os três valores de pressão exercida sobre a membrana timpânica (Figura 7.13). Foram considerados os seguintes pontos: A - nó central da platina; B e C - extremos do eixo da diagonal menor (eixo inferior-superior); D e E - extremos do eixo da diagonal maior (eixo anterior-posterior), permitindo analisar a influência do coeficiente de atrito.

Para todos os valores de pressão, o comportamento foi semelhante, tendo sido obtidos deslocamentos a variar entre 0,013 mm e 0,030 mm.

Em todos os casos, e para coeficientes de atrito muito baixos (próximos de zero) foram obtidos os maiores deslocamentos, existindo uma tendência para estes valores estabilizarem em torno de 0,015 mm (principalmente o ponto no centro da platina e os pontos juntos às cruras do estribo) para coeficientes de atrito superiores a 0,7.

No terceiro estudo apresenta-se a análise das rotações sofridas pela platina do estribo, relativamente aos seus eixos maior e menor (Figura 7.14). Para todas as pressões aplicadas, o comportamento da rotação do eixo menor foi semelhante, existindo uma tendência a estabilizar nos 0,12°, o que se verifica para valores do coeficiente de atrito superiores a 0,1.

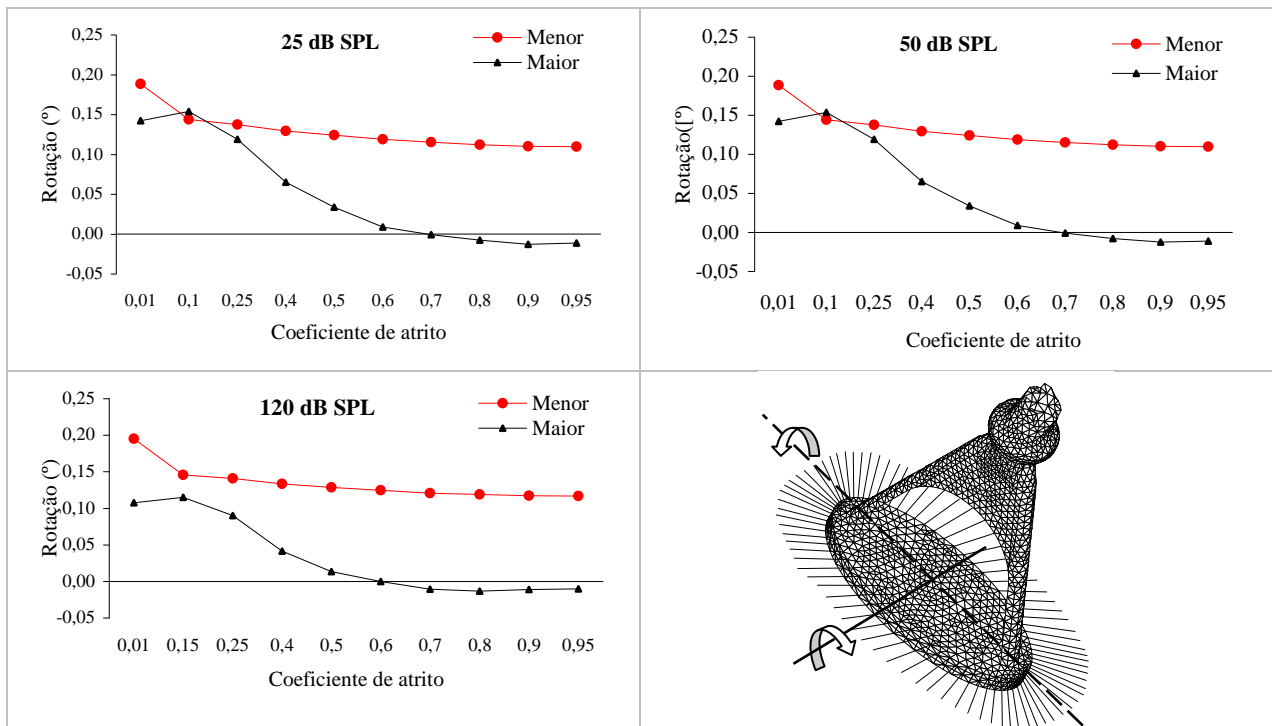


Figura 7.14: Rotações relativamente ao eixo maior (traço interrompido) e eixo menor da platina do estribo (os sentidos indicam o sentido positivo da rotação).

Ainda para o eixo menor, existe a maior variação para um coeficiente de atrito compreendido entre 0,01 e 0,1, passando a rotação de  $0,19^\circ$  para  $0,15^\circ$ .

As maiores diferenças ficam a dever-se à rotação do eixo maior, tendo-se obtido rotações de  $0,15^\circ$  para coeficientes de atrito perto de 0, havendo uma tendência a estabilizar em valores ligeiramente inferiores a  $0^\circ$  ( $-0,01^\circ$ ), para coeficientes de atrito superiores a 0,6 (Figura 7.14).

Por último, no quarto estudo foram avaliados os esforços normais obtidos no ligamento superior do martelo e nos ligamentos posterior e superior da bigorna.

Para os três valores de pressão aplicados sobre a membrana timpânica, o ligamento superior da bigorna apresentou uma tensão mais estável, para todos os coeficientes de atrito, quando comparados com os outros ligamentos (Figura 7.15) com os valores negativos a indicarem tracção.

O ligamento superior do martelo, para pressões de 25 dB SPL e 50 dB SPL, apresentou valores à “compressão” (valores de esforços positivos), até coeficientes de atrito de 0,8, passando depois à tracção (valores de esforços negativos).

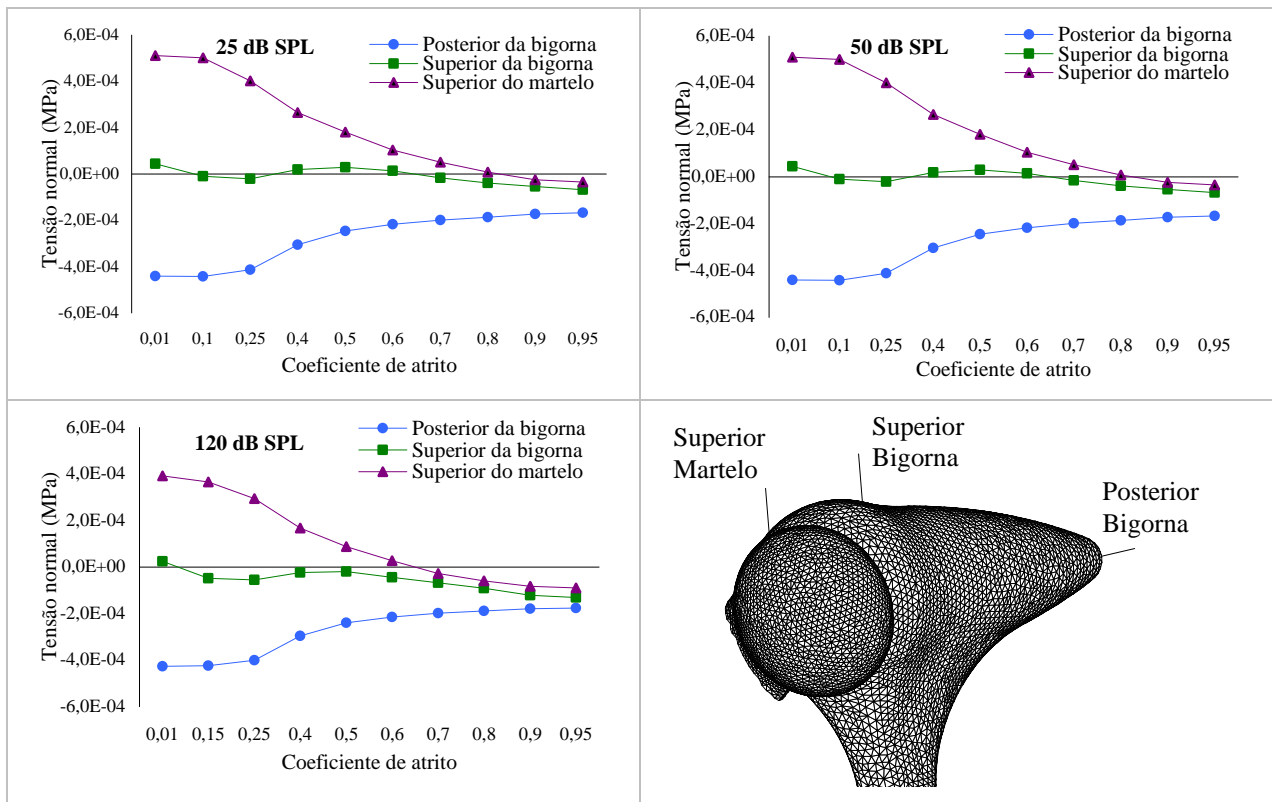


Figura 7.15: Valores de tensões exercidas sobre os três ligamentos, para vários coeficientes de atrito, e pressões de 25, 50 e 120 dB SPL.

Esta inversão de sinal, para uma pressão de 120 dB aparece perto de um coeficiente de atrito de 0,6. O ligamento posterior da bigorna apresentou sempre valores correspondentes a um comportamento de tração.

Para os três ligamentos, a tensão normal tem tendência a aproximar-se de ]0; -1,9E-04[ para coeficientes de atrito perto de 1.

A maior diferença entre os ligamentos posterior da bigorna e superior do martelo, verificou-se para coeficientes muito baixos (próximo de 0).

Da análise dos resultados é possível concluir que a ligação entre os ossículos é relativamente rígida, na medida em que só para valores do coeficiente de atrito superior a 0,8 é que o ligamento posterior sofre alongamento e por conseguinte fica sujeito a esforços de tração.

Por outro lado, é para os mais elevados valores de coeficiente de atrito, que se verificam campos de deslocamentos, nomeadamente na membrana timpânica e platina do estribo, compatíveis com a prática clínica.

O modelo descrito permitiu avaliar a utilização de vários materiais, comparando o comportamento dos ligamentos elásticos *versus* hiperelásticos, bem como avaliar a modelação dos ligamentos capsulares, recorrendo à formulação de contacto.

Todavia, tendo em consideração que este modelo não apresenta, do ponto de vista dimensional e geométrico, o necessário rigor, procedeu-se à construção de um modelo mais realista, utilizando-se, para o efeito, a modelação através de imagens obtidas por TAC.

## 7.3 Construção do modelo baseado em imagiologia

### 7.3.1 Modelo geométrico e malha de elementos finitos

No sentido de se obter um modelo do ouvido médio mais realista foi construído um outro baseado em imagens extraídas de Tomografia Axial Computorizada (TAC) [22], [23].

Estas imagens pertenciam a uma mulher de 65 anos, com audição normal (Figura 7.16).

Devido ao difícil reconhecimento dos contornos das imagens dos ossículos do ouvido médio, pela sua estrutura e reduzido tamanho, não foi possível a utilização da segmentação automática para a obtenção dos modelos 3 D da membrana timpânica e dos ossículos (martelo e bigorna). Recorreu-se, então, a uma metodologia baseada na segmentação manual, utilizando um software de CAD.

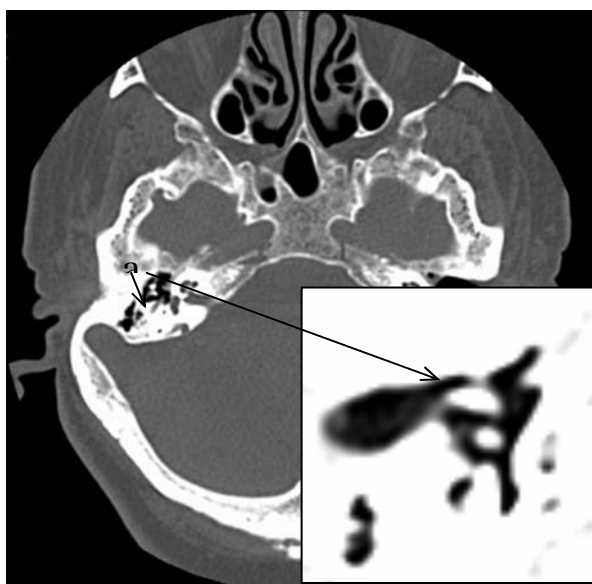


Figura 7.16: Visualização axial 2D da imagem obtida por TAC do ouvido médio.

Quando um órgão é seccionado, os contornos externos das estruturas são tratados como polígonos fechados. Cada contorno é constituído por uma sequência de pontos seleccionados do limite do objecto. Estes contornos são aproximados por segmentos de recta unidos às coordenadas dos pontos seleccionados [24]. Mas, a obtenção destes contornos pode necessitar de um pré-processamento de imagens, que na presente aplicação seguiu o esquema representado na Figura 7.17 [25].

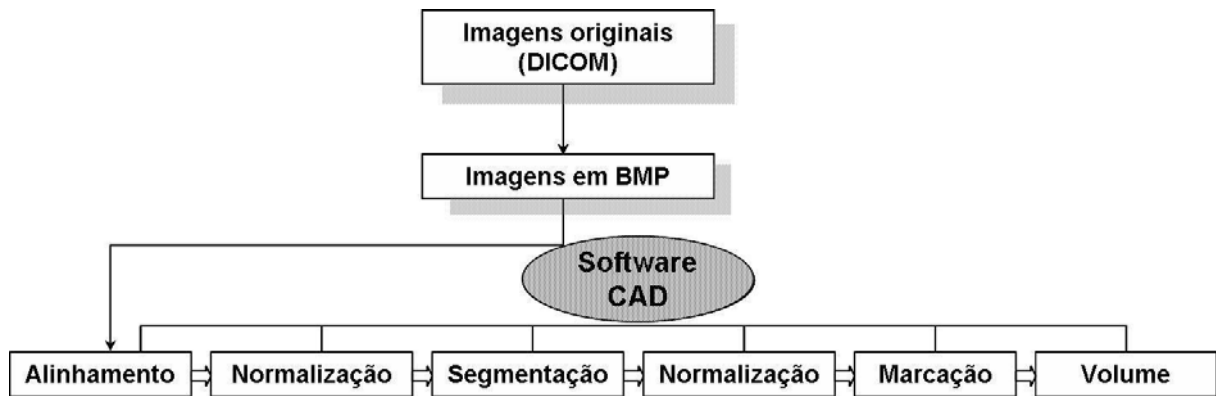


Figura 7.17: Etapas de processamento da imagem para obtenção da região de interesse [23].

Assim, foram usados métodos unicamente manuais para o seccionamento das imagens (*slices*) e delimitação de contornos da área de interesse. Uma vez extraídos todos os contornos das secções transversais, foi feita a reconstrução entre eles, e, finalmente, obtido o modelo geométrico 3D. Na Figura 7.18 é possível verificar a representação tri-dimensional da bigorna, martelo e membrana timpânica e sua respectiva junção.

Este método tem a desvantagem de ser mais moroso que o método automático, dependendo cerca do dobro do tempo, mas pode revelar-se mais fiável.

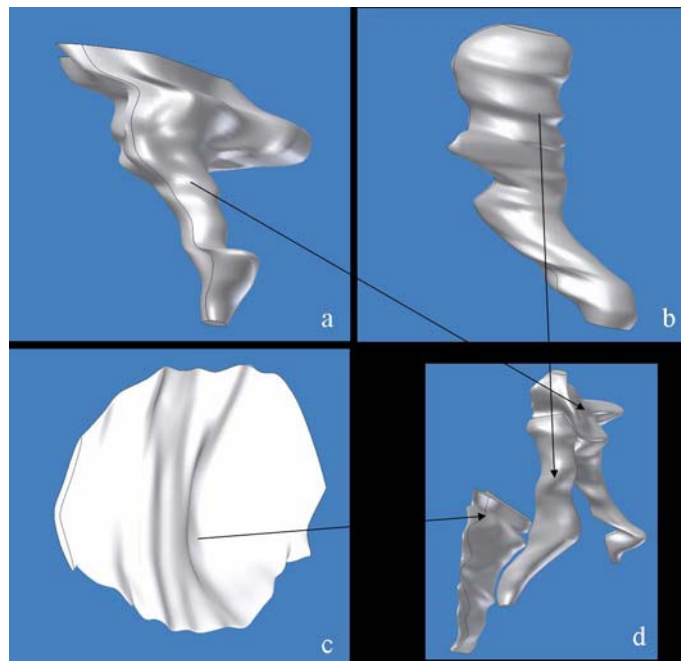


Figura 7.18: Representação 3D: Bigorna (a); Martelo (b); Membrana timpânica (c); Parte do ouvido médio (d).

Mesmo assim, não foi possível extrair o estribo, através deste método, pelo seu reduzido tamanho, pelo que se optou pelo estribo obtido no modelo anterior.

Usando o programa ABAQUS foi feita a discretização do modelo descrito. Foi inicialmente feita a malha de elementos finitos para a membrana timpânica e para cada um dos ossículos, martelo, bigorna e estribo (Figura 7.19).

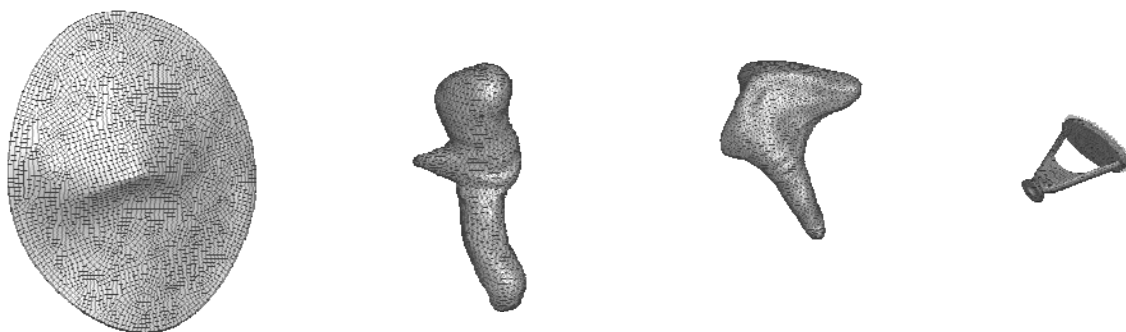


Figura 7.19: Malha de elementos finitos da membrana timpânica, martelo, bigorna e estribo.

Posteriormente os ossículos foram unidos formando assim a cadeia ossicular, aderentes à membrana timpânica (Figura 7.20).

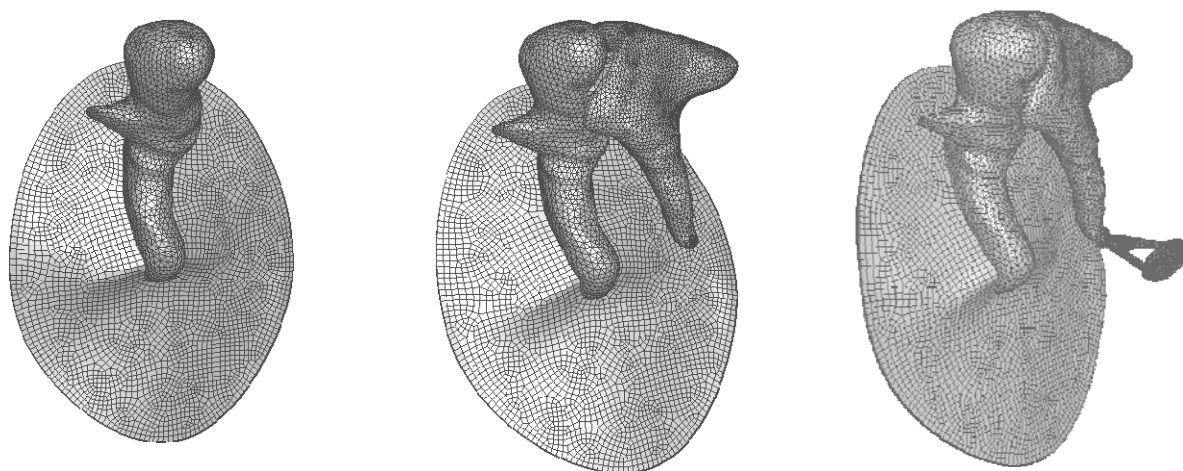


Figura 7.20: Malha de elementos finitos da membrana timpânica e ossículos.

A membrana timpânica é formada por 7648 nós, sendo que na sua periferia, simulando o sulco timpânico, existem 202 nós, onde vão ser aplicadas as condições fronteira (Tabela 7.1).

A membrana é também formada por 3722 elementos hexaédricos do tipo C3D8. Destes elementos, 302 correspondem à *pars flaccida* e os restantes à *pars tensa* (Figura 7.21).

<b>Componentes</b>	<b>Nós</b>	<b>Elementos</b>
Membrana timpânica (Total):	7648	3722
<i>Pars tensa</i>		3420
<i>Pars flaccida</i>		302
Sulco timpânico	202	
Martelo (Total):	3932	18841
Cabeça		5163
Colo		4162
Cabo		9516
Bigorna (Total):	8373	39228
Corpo		16263
Apófise curta		10105
Apófise longa		12860
Estribo	2840	9218
Ligamento incudomaleolar		171
Ligamento incudoestapediano		63
Ligamentos (martelo)	2	3
Ligamentos (bigorna)	2	2
Ligamento Anular	78	78
Fluido coclear	2	1056
Músculo tensor do tímpano	1	1
Músculo estapediano	1	1

Tabela 7.1: Número de nós e elementos do modelo.

Todos os elementos referentes aos ossículos são tetraédricos do tipo C3D4.

A junção do martelo com a membrana timpânica foi considerada rígida.

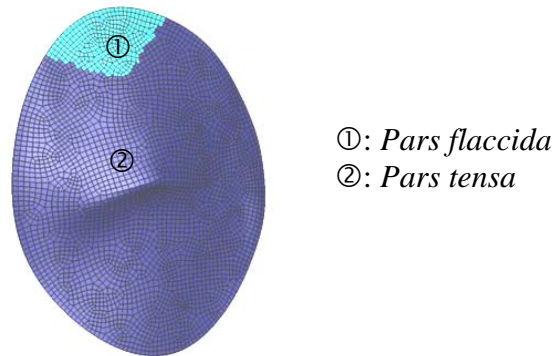


Figura 7.21: Membrana timpânica, dividida em *pars tensa* e *pars flaccida*.

O martelo é formado por 3932 nós e por 18841 elementos (Tabela 7.1). Estes elementos foram divididos em três grupos, 5163 para a cabeça, 4162 para o colo e 9516 para o cabo (Figura 7.22).

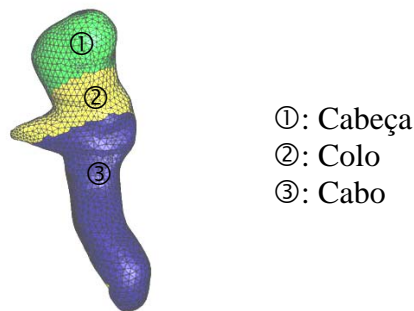


Figura 7.22: Martelo, dividido em cabeça, colo e cabo.

A bigorna é composta por 8373 nós e 39228 elementos (Tabela 7.1), distribuídos também em três grupos, 16263 elementos para o corpo, 10105 para a apófise curta e 12860 para a apófise longa (Figura 7.23).

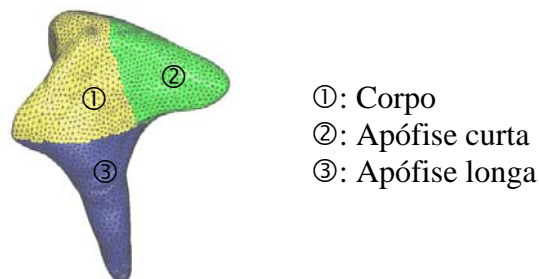


Figura 7.23: Bigorna, dividida em corpo, apófise curta e apófise longa.

O estribo é formado por 2840 nós e 9218 elementos (Tabela 7.1).

A simulação das articulações entre os ossículos, martelo/bigorna e bigorna/estribo (ligamentos capsulares) foi efectuada de duas formas distintas: uma usando elementos tetraédricos de quatro nós, do tipo C3D4 e outra utilizando formulação de contacto.

No primeiro método utilizaram-se 171 elementos para a simulação da articulação incudomaleolar e 63 elementos para a simulação da articulação incudoestapediana (Tabela 7.1).

No segundo método as ligações entre os ossículos, martelo/bigorna e bigorna/estribo, foram efectuadas por intermédio de formulações representativas do contacto [5].

Foram aplicados três ligamentos ao martelo (superior, lateral e anterior) e dois à bigorna (superior e posterior). Estes ligamentos foram considerados como sendo elementos lineares, com dois nós (Tabela 7.1), do tipo T3D2 (Figura 7.24).

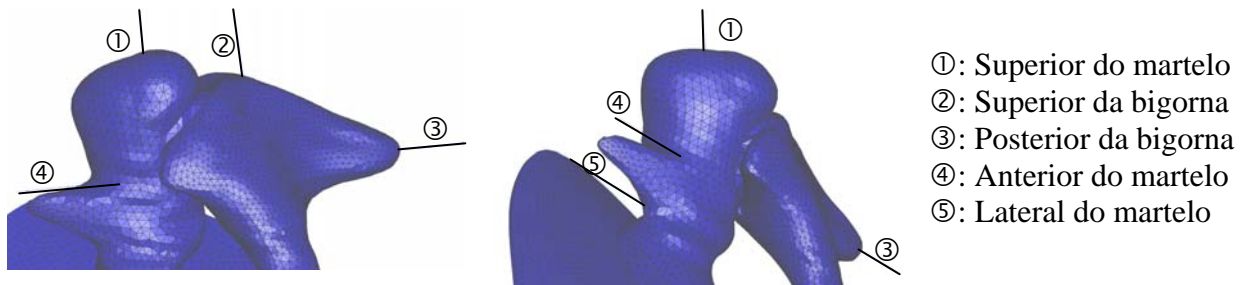


Figura 7.24: Ligamentos do martelo e bigorna.

À volta da platina do estribo, na sua periferia, foram colocados 78 elementos lineares, do tipo T3D2, (Tabela 7.1) formados pelos nós da platina e outros tantos exteriores, simulando o ligamento anular (Figura 7.25-a)). No sentido de simular o fluido coclear foi criado um conjunto de 1056 elementos de fluido do tipo F3D3 (Tabela 7.1), sobre a platina (Figura 7.25-b)).

Por fim, foram aplicados os dois músculos, também estes com elementos lineares (Figura 7.26).

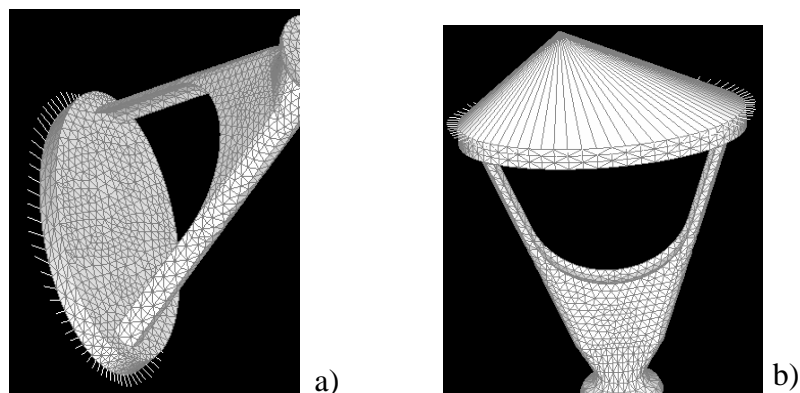
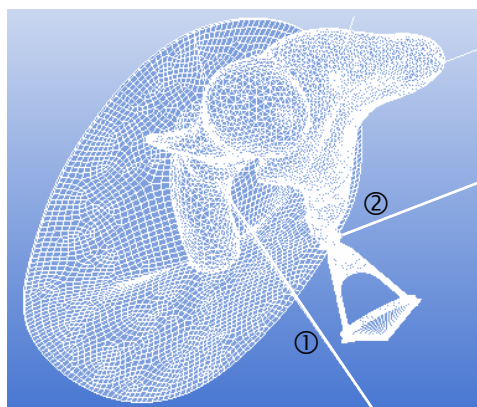


Figura 7.25: Estribo: Ligamento anular (a); Fluido coclear (b).



- ①: Músculo tensor do tímpano
- ②: Músculo estapediano

Figura 7.26: Músculos do ouvido médio.

No seu total, o número de nós utilizados foram 22879. Em relação aos elementos foram usados 72384 no modelo que usou as articulações como rígidas e 72150 elementos no modelo em que se utilizou formulação de contacto para o ligamento capsular.

### 7.3.2 Propriedades de material

A membrana timpânica e ossículos foram modelados como tendo um comportamento não linear geométrico, elástico e isotrópico.

Para todos os componentes do modelo do ouvido médio foi considerado um coeficiente de Poisson de 0,3, baseado na literatura [2], [3].

Em relação ao módulo de Young (Tabela 7.2) foi atribuído um valor de  $1,41 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup> para todos os ossículos, martelo, bigorna e estribo. A membrana timpânica foi dividida em *pars tensa* e *pars flaccida*, tendo um valor de  $2,0 \times 10^7$  N/m<sup>2</sup> para a *pars tensa* e  $1,0 \times 10^7$  N/m<sup>2</sup> para a *pars flaccida* (Tabela 7.2).

A massa específica atribuída à membrana timpânica foi de  $1,2 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup>. Em relação aos ossículos, ela foi distribuída de acordo com as várias partes constituintes. Assim, para a cabeça do martelo este valor foi de  $2,55 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup>, para o colo de  $4,53 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup> e para o cabo de  $3,70 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup>. No caso da bigorna foi atribuída uma massa específica de  $2,36 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup> para o corpo,  $2,26 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup> para a apófise curta e  $5,08 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup> para a apófise longa. Já para o estribo este teve o mesmo valor,  $2,20 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup> (Tabela 7.2).

<b>Componentes</b>	<b>Módulo de Young (N/m<sup>2</sup>)</b>	<b>Massa específica (Kg/m<sup>3</sup>)</b>	<b>Amortecimento</b>
Membrana timpânica: <i>Pars tensa</i> <i>Pars flaccida</i>	 2,0×10 <sup>7</sup> 1,0×10 <sup>7</sup>	1,2×10 <sup>3</sup>	$\alpha = 0s^{-1}; \beta = 0,0001s$
Martelo: Cabeça Colo Cabo	1,41×10 <sup>10</sup>	 2,55×10 <sup>3</sup> 4,53×10 <sup>3</sup> 3,70×10 <sup>3</sup>	$\alpha = 0s^{-1}; \beta = 0,0001s$
Bigorna: Corpo Apófise curta Apófise longa	1,41×10 <sup>10</sup>	 2,36×10 <sup>3</sup> 2,26×10 <sup>3</sup> 5,08×10 <sup>3</sup>	$\alpha = 0s^{-1}; \beta = 0,0001s$
Estribo	1,41×10 <sup>10</sup>	2,20×10 <sup>3</sup>	$\alpha = 0s^{-1}; \beta = 0,0001s$

Tabela 7.2: Propriedades de material dos ossículos e membrana timpânica.

Os coeficientes de amortecimento ( $\alpha = 0s^{-1}; \beta = 0,0001s$ ), quando utilizados, na membrana timpânica, ossículos, ligamentos, articulações e músculos foram baseados na literatura [2].

O módulo de Young atribuído aos ligamentos e músculos, quando considerados com comportamento elástico, foi no caso do martelo de  $4,9 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup> para o ligamento superior,  $6,7 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup> para o ligamento lateral e  $2,1 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> para o ligamento anterior. Considerando a bigorna, foi atribuído um valor de  $4,9 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup> para o ligamento superior e  $6,5 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup> para o ligamento posterior. Os ligamentos que simulam o ligamento anular do estribo têm um módulo de Young de  $1,0 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup>. Relativamente aos músculos, foi atribuído um valor de  $2,6 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> para o músculo tensor do tímpano e  $5,2 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup> para o músculo estapediano (Tabela 7.3).

Quando se consideram os ligamentos e músculos com um comportamento hiperelástico, utilizou-se o modelo de Yeoh [16], (5.96) cujas constantes materiais [26] são mostradas na Tabela 7.4.

<b>Componentes</b>	<b>Módulo de Young (N/m<sup>2</sup>)</b>
Ligamentos do martelo:	
Superior	$4,9 \times 10^4$
Lateral	$6,7 \times 10^4$
Anterior	$2,1 \times 10^6$
Ligamentos da bigorna:	
Superior	$4,9 \times 10^4$
Posterior	$6,5 \times 10^5$
Ligamento do estribo:	
Anular	$1,0 \times 10^4$
Músculos:	
Tensor do tímpano	$2,6 \times 10^6$
Estapediano	$5,2 \times 10^5$

Tabela 7.3: Propriedades de material dos ligamentos e músculos com comportamento elástico.

<b>Componentes</b>	$c_1$	$c_2$	$c_3$
Ligamentos do martelo:			
Superior	$4,0 \times 10^3$	$2,2 \times 10^3$	$-1,0 \times 10^3$
Lateral	$4,0 \times 10^3$	$7,6 \times 10^4$	$-1,2 \times 10^4$
Anterior	$4,0 \times 10^3$	$2,7 \times 10^3$	$-1,0 \times 10^3$
Ligamentos da bigorna:			
Superior	$4,0 \times 10^3$	$2,2 \times 10^3$	$-1,0 \times 10^3$
Posterior	0,0	$4,0 \times 10^4$	$-1,4 \times 10^4$
Ligamento do estribo:			
Anular	$9,0 \times 10^2$	$4,5 \times 10^4$	$-3,0 \times 10^4$
Músculos:			
Tensor do tímpano	$1,4 \times 10^4$	$8,5 \times 10^4$	$-1,0 \times 10^4$
Estapediano	$1,4 \times 10^4$	$8,5 \times 10^4$	$-1,0 \times 10^4$

Tabela 7.4: Constantes (5.96) dos ligamentos e músculos com um comportamento hiperelástico.

### **7.3.3 Condições fronteira**

O conjunto formado pelos três ossículos (martelo, bigorna e estribo) está fixo na sua parte exterior à membrana timpânica pelo martelo e na parte interna à janela oval pelo estribo.

Os ossículos estão ainda suspensos por ligamentos e músculos.

A membrana timpânica foi fixa em toda a sua periferia por 202 nós, simulando o sulco timpânico.

Na periferia à volta da platina do estribo foram fixos os 78 elementos de barra, simulando o ligamento anular.

O ligamento superior do martelo prende-se a um nó da cabeça do martelo, sendo o outro nó fixo na outra extremidade, simulando a parede superior da caixa timpânica. O ligamento lateral do martelo tem um nó preso no sulco timpânico e o outro nó ao nível do colo do martelo. O ligamento anterior do martelo fixa-se no colo do martelo, sobre a base da sua apófise anterior, sendo a outra extremidade presa num plano anterior, simulando a parede anterior da caixa timpânica.

O ligamento superior da bigorna é formado por um nó que se fixa ao nível do seu corpo e outro simula a parede superior da caixa timpânica. O ligamento posterior da bigorna tem um nó que se fixa na apófise curta, sendo a outra extremidade presa num plano que simula a parede posterior da caixa timpânica.

O músculo tensor do tímpano tem um nó que se liga à extremidade superior do cabo do martelo enquanto que um dos nós do músculo estapediano se liga ao bordo posterior da cabeça do estribo. Os respectivos nós das extremidades opostas dos músculos são fixas, fazendo parte das condições fronteira.

## **7.4 Estudo do comportamento biomecânico do ouvido médio**

A primeira simulação foi feita através da análise estática do modelo, fazendo incidir sobre a membrana timpânica diferentes valores de pressão acústica e comparando os resultados obtidos, tanto em termos de deslocamentos do umbo como da parte central da platina do estribo.

Seguidamente foi feita uma análise dinâmica, sendo determinados e comparados os valores próprios obtidos nos modelos constituídos apenas pela membrana timpânica, conjunto da membrana e martelo e modelo completo. Os valores próprios foram ainda comparados entre os modelos em que se consideraram os ligamentos e músculos como tendo um comportamento elástico e hiperelástico.

Foram depois efectuados estudos dinâmicos do modelo (vibrações forçadas), para gamas frequenciais compreendidas entre 100 Hz e 10 kHz e para diferentes pressões acústicas aplicadas sobre a membrana timpânica. Foi analisado o efeito da utilização do amortecimento, formulação de contacto, ligamentos com comportamento elástico e hiperelástico, assim como a comparação com outros trabalhos existentes referenciados na bibliografia, quanto aos deslocamentos obtidos a nível do umbo e a nível da parte central da platina do estribo.

Seguidamente foram analisados os esforços exercidos sobre os ligamentos, assim como ao nível das cruras do estribo.

Por último foram feitos alguns estudos relativamente à influência da acção dos músculos sobre a cadeia ossicular, nomeadamente, sobre os seus efeitos na cinemática da platina do estribo.

### **7.4.1 Análise estática**

Consideraram-se os ligamentos e os músculos com comportamento elástico e a ligação entre os ossículos, contínua. Na Figura 7.27 verifica-se o comportamento estático dos deslocamentos do umbo e da parte central da platina do estribo, para diferentes níveis de pressão acústica aplicada sobre a membrana timpânica, dentro da gama de intensidades audíveis, ou seja, entre 0 dB SPL e 130 dB SPL.

Conclui-se que este deslocamento é sempre maior para o umbo do que para a platina do estribo e que o seu aumento é directamente proporcional ao aumento da pressão aplicada.

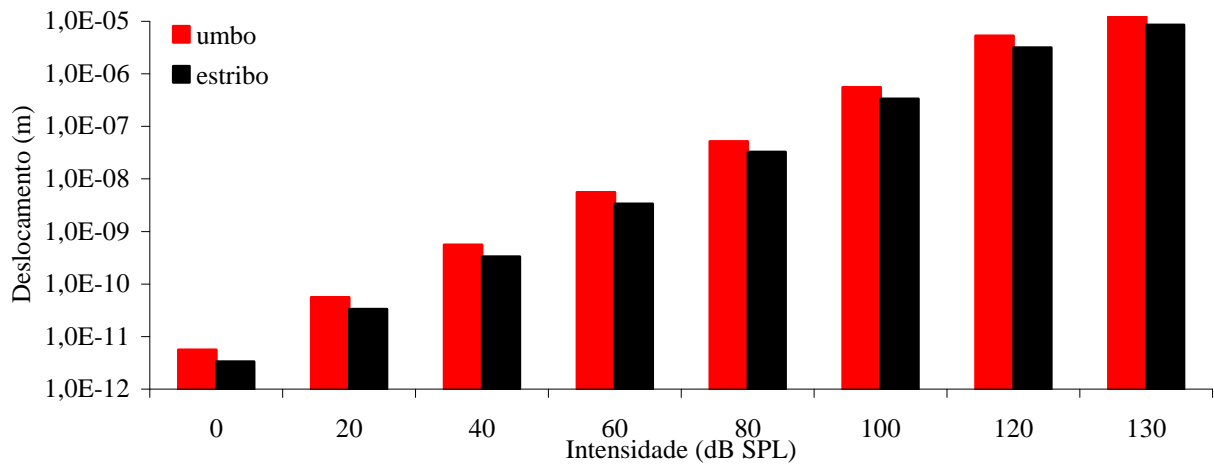


Figura 7.27: Deslocamentos do umbo e da parte central da platina do estribo, para várias intensidades.

## 7.4.2 Análise dinâmica: modos próprios de vibração

Utilizando um modelo constituído só pela membrana timpânica foram determinados os primeiros 40 valores próprios. Posteriormente incluiu-se o martelo e por fim o modelo completo. Os ligamentos e músculos foram tidos como elásticos e a simulação das articulações capsulares como sendo contínua. Na Figura 7.28 apresentam-se os resultados obtidos para os três modelos analisados e incluem-se os dados recolhidos da bibliografia [27], [28].

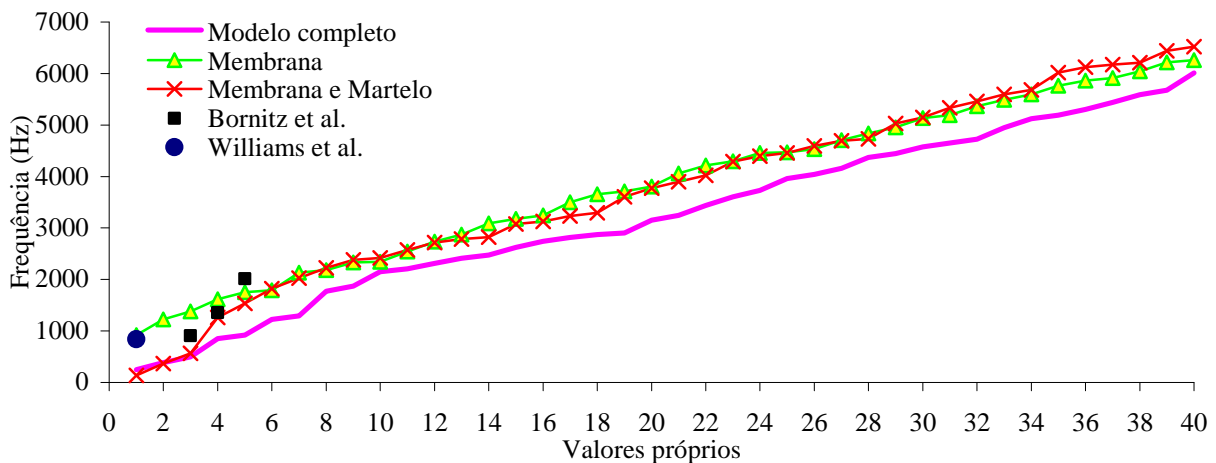


Figura 7.28: Primeiros 40 valores próprios.

O primeiro valor próprio foi de 917,57 Hz quando se considera apenas a membrana, decrescendo este valor para 138,15 Hz para o conjunto membrana timpânica e martelo. Para o modelo completo, este valor é de 250,67 Hz. Quando se compara o modelo constituído apenas pela membrana timpânica com o modelo constituído pela membrana e martelo, verifica-se que as maiores diferenças se encontram nos primeiros três modos próprios. Ao contrário, quando se compara o modelo constituído pela membrana timpânica e martelo com o modelo completo, só não existem diferenças significativas nos primeiros 3 modos próprios.

Comparando com o trabalho de Williams *et al.* [27] em que foi usado um módulo de Young de 10000 N/mm<sup>2</sup> e uma massa específica de 10<sup>-6</sup> Kg/mm<sup>3</sup>, verificou-se uma boa concordância nos resultados.

Na Figura 7.28 ainda se pode fazer a comparação com os resultados de Bornitz *et al.* [28], que considerou apenas a membrana timpânica, tendo obtido para o 3º, 4º e 5º modos próprios, respectivamente, os valores de 908 Hz, 1355 Hz e 2012 Hz, que se encontram na gama dos obtidos no presente trabalho.

Em seguida foram comparados os resultados obtidos em termos de valores próprios entre os modelos em que se consideraram as articulações capsulares com e sem formulação de contacto, como se pode verificar na Figura 7.29. As menores diferenças encontram-se nos primeiros quatro modos próprios e entre o 10º e o 17º modos. A análise destes resultados permite concluir não ser muito significativa a utilização de qualquer um dos dois modelos.

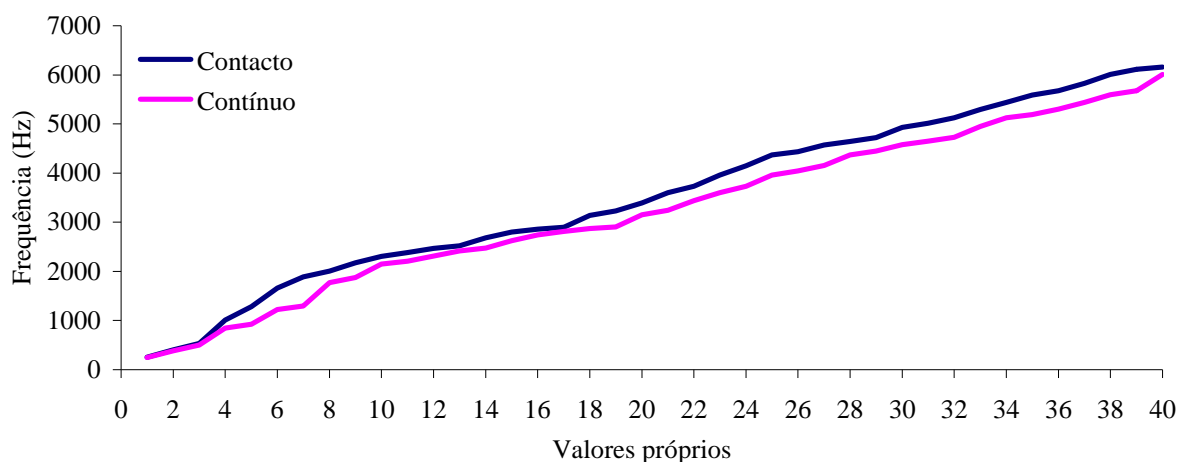


Figura 7.29: Primeiros 40 valores próprios nos modelos com e sem formulação de contacto.

### 7.4.3 Análise dinâmica: vibrações forçadas

Com o objectivo de se perceber o comportamento do ouvido médio, ao longo duma gama frequencial compreendida entre 100 Hz e 10 kHz, foram feitos vários estudos baseados em análises dinâmicas, verificando-se o campo de deslocamentos tanto ao nível do umbo, como da parte central da platina do estribo, na presença duma excitação aplicada sobre a membrana timpânica. Apresentando os tecidos biológicos um carácter viscoso, considerou-se no modelo essa característica por intermédio da introdução de uma variável mecânica de amortecimento. Devido à dificuldade encontrada na caracterização das propriedades mecânicas dos tecidos constituintes do ouvido médio, nomeadamente os dos ligamentos capsulares, efectuou-se também um estudo tendo por base a formulação do contacto entre os ossículos. Nas análises efectuadas, teve-se em atenção as diferenças existentes para vários níveis de intensidade aplicadas, análise do comportamento mecânico dos ligamentos e músculos e por último foi feita a comparação com outros trabalhos anteriormente publicados.

#### 7.4.3.1 Amortecimento

No sentido de se verificar o comportamento viscoelástico dos tecidos utilizou-se o efeito do amortecimento no modelo, sendo comparados os resultados obtidos em função do deslocamento do umbo e da parte central da platina do estribo, na ausência de amortecimento, utilizando amortecimento apenas na membrana timpânica (MT) e nos ossículos bem como nos ligamentos e músculos, ou seja, no modelo completo. Os coeficientes de amortecimento utilizados foram  $\alpha = 0s^{-1}$  e  $\beta = 0,0001s$  [2], [3]. Consideraram-se os ligamentos ao exterior da cadeia ossicular como tendo um comportamento elástico. Os ligamentos capsulares que fazem a ligação entre os ossículos martelo/bigorna e bigorna/estribo, foram modelados utilizando formulação de contacto. A pressão exercida sobre a membrana timpânica foi de 0,632 Pa, a que corresponde um nível de pressão sonora de 90 dB SPL (3.10).

Na Figura 7.30 verificam-se as diferenças existentes entre a utilização de amortecimento, relativamente ao deslocamento do umbo e na Figura 7.31, relativamente ao deslocamento da parte central da platina do estribo.

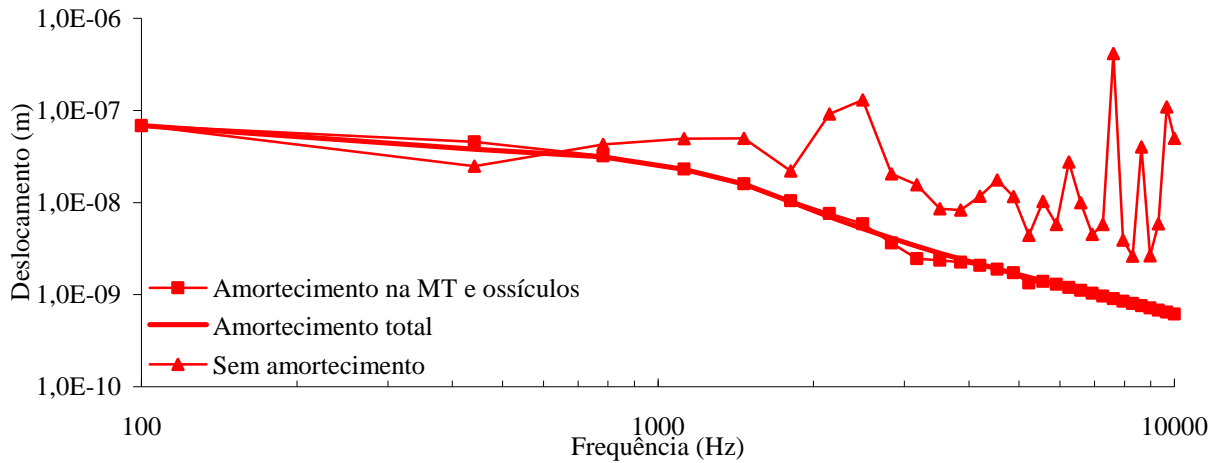


Figura 7.30: Deslocamento do umbo, na ausência de amortecimento, usando amortecimento na MT e ossículos e no modelo completo.

Como se pode verificar, tanto para o deslocamento do umbo como da parte central da platina do estribo, existe uma maior instabilidade da curva na ausência de amortecimento, especialmente para as frequências agudas.

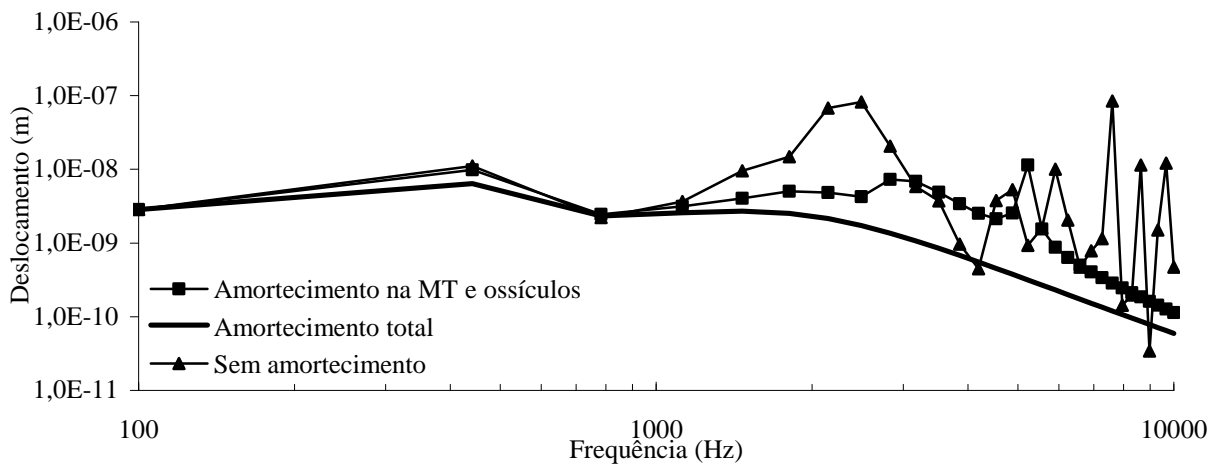


Figura 7.31: Deslocamento da parte central da platina do estribo, na ausência de amortecimento, usando amortecimento na MT e ossículos e utilizando no modelo completo.

Na Figura 7.32 faz-se a comparação do deslocamento do umbo e da parte central da platina do estribo, usando formulação de contacto e ligamentos com comportamento elástico, na ausência de amortecimento.

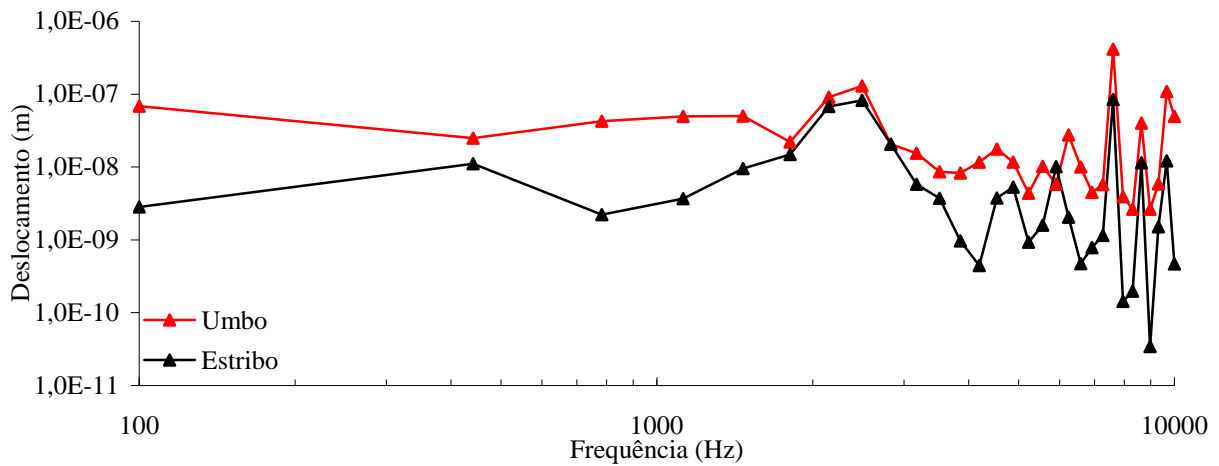


Figura 7.32: Deslocamento do umbo e da parte central do estribo, não usando amortecimento.

Na Figura 7.33 verifica-se o deslocamento do umbo e da parte central da platina do estribo, no mesmo modelo, usando amortecimento apenas na membrana timpânica e nos ossículos, verificando-se uma maior instabilidade para o estribo.

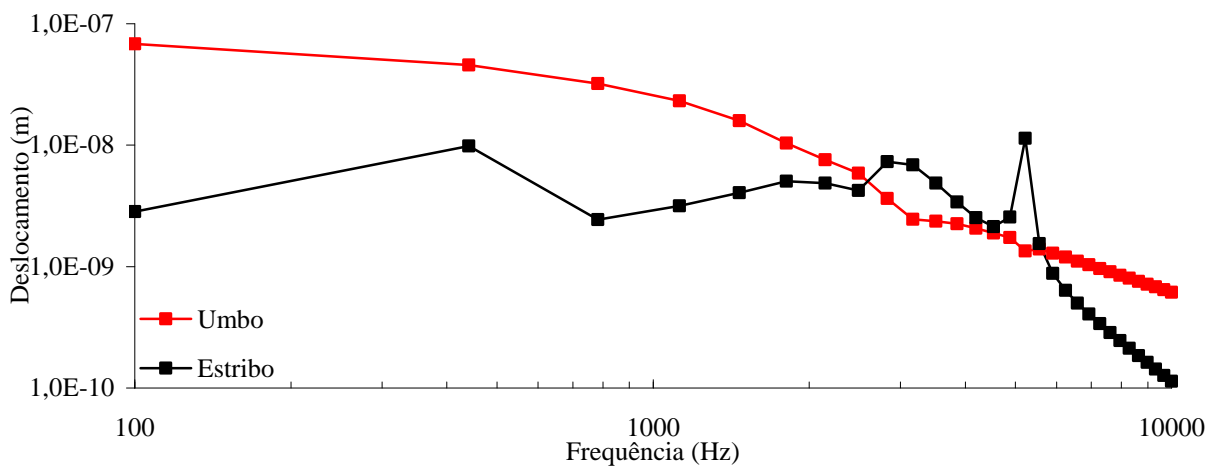


Figura 7.33: Deslocamento do umbo e da parte central da platina do estribo, usando amortecimento na MT e ossículos.

Na Figura 7.34 mostram-se os mesmos deslocamentos, mas utilizando amortecimento em todo o modelo. Da análise destes resultados pode concluir-se que a aplicação do amortecimento melhora o comportamento mecânico do sistema e que a sua ausência permite confirmar o comportamento viscoelástico dos tecidos envolvidos.

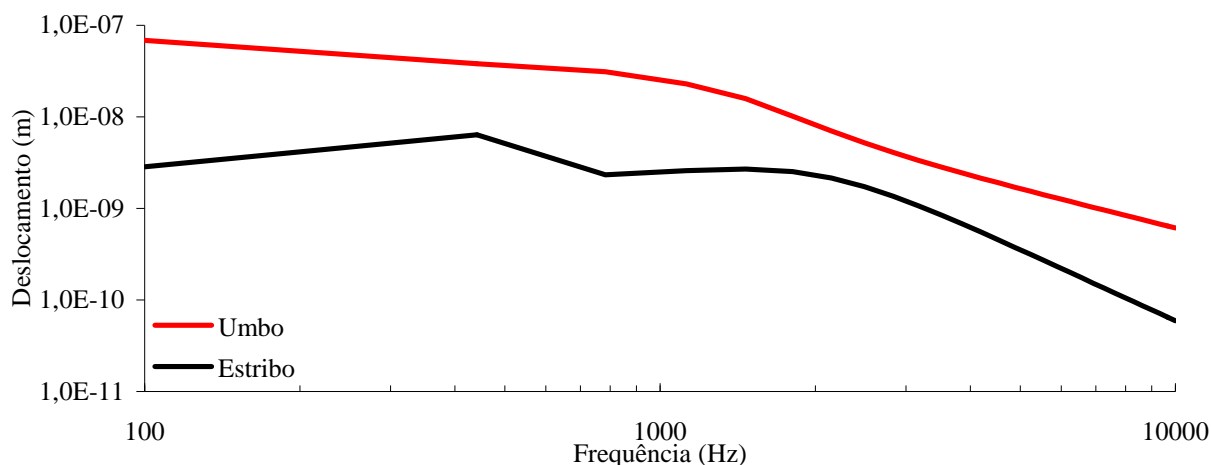


Figura 7.34: Deslocamento do umbo e da parte central da platina do estribo, usando amortecimento no modelo completo.

### 7.4.3.2 Análise do contacto entre os ossículos

No sentido de se estudar o efeito da formulação de contacto para simular os ligamentos capsulares foram comparados dois modelos, um utilizando a formulação de contacto e outro considerando esta ligação rígida, ou contínua. Os ligamentos dos ossículos ao exterior da cadeia ossicular foram considerados como tendo um comportamento elástico. A pressão exercida sobre a membrana timpânica foi de 0,632 Pa.

Na Figura 7.35 pode comparar-se os deslocamentos obtidos no umbo, nos modelos com e sem formulação de contacto, na simulação dos ligamentos capsulares. Conclui-se que não existem diferenças significativas entre os dois modelos.

Na Figura 7.36, para a mesma simulação entre os dois modelos, comparam-se os deslocamentos obtidos na parte central da platina do estribo. Pode concluir-se que existem maiores diferenças para as frequências agudas, existindo diferenças pouco significativas para as frequências graves, sendo essas diferenças mínimas para as frequências médias.

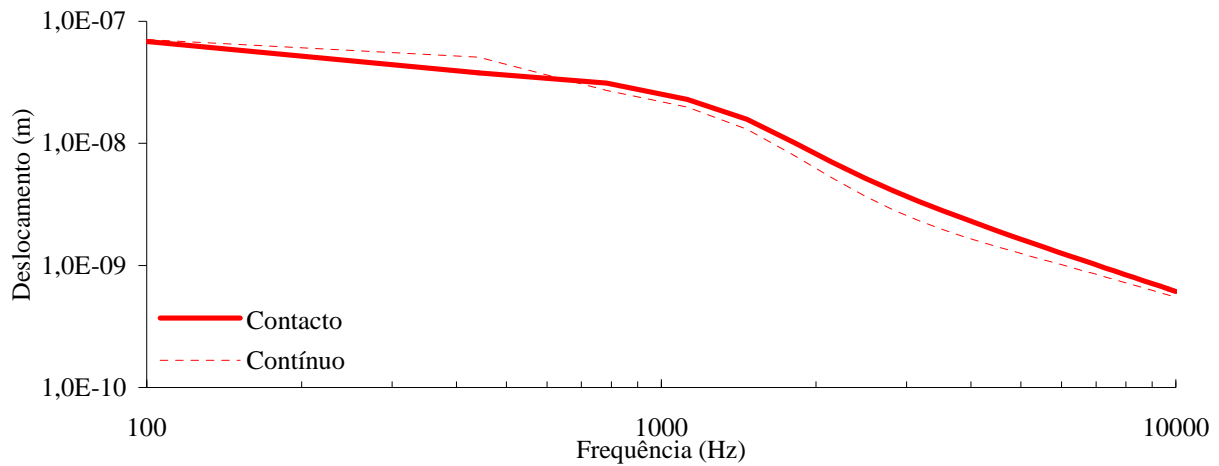


Figura 7.35: Deslocamento do umbo nos modelos com e sem formulação de contacto, na simulação dos ligamentos capsulares.

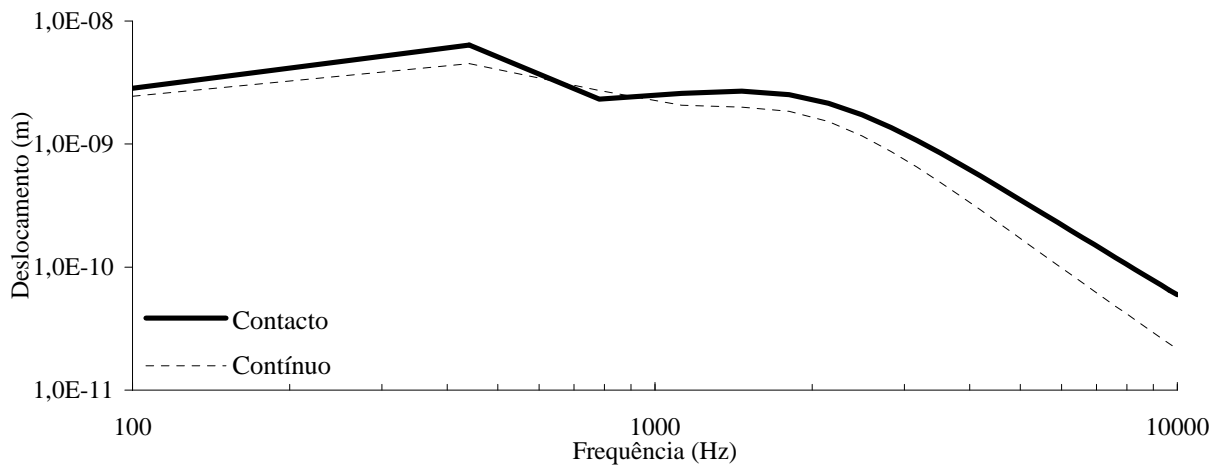


Figura 7.36: Deslocamento da parte central da platina do estribo nos modelos com e sem formulação de contacto, na simulação dos ligamentos capsulares.

### 7.4.3.3 Diferentes níveis de pressão sonora

Os níveis de pressão sonora audíveis variam entre 0 dB SPL, (considerado o nível mínimo de audibilidade), e 130 dB (limiar de dor). Na Figura 7.37 é possível verificar qual o comportamento do deslocamento do umbo, ao longo do intervalo de intensidades audíveis,

nomeadamente para os níveis de pressão sonora de 0 dB SPL ( $2,0 \times 10^{-5}$  Pa), 60 dB SPL ( $2,0 \times 10^{-2}$  Pa), 90 dB SPL (0,632 Pa) e 130 dB SPL (63,246 Pa).

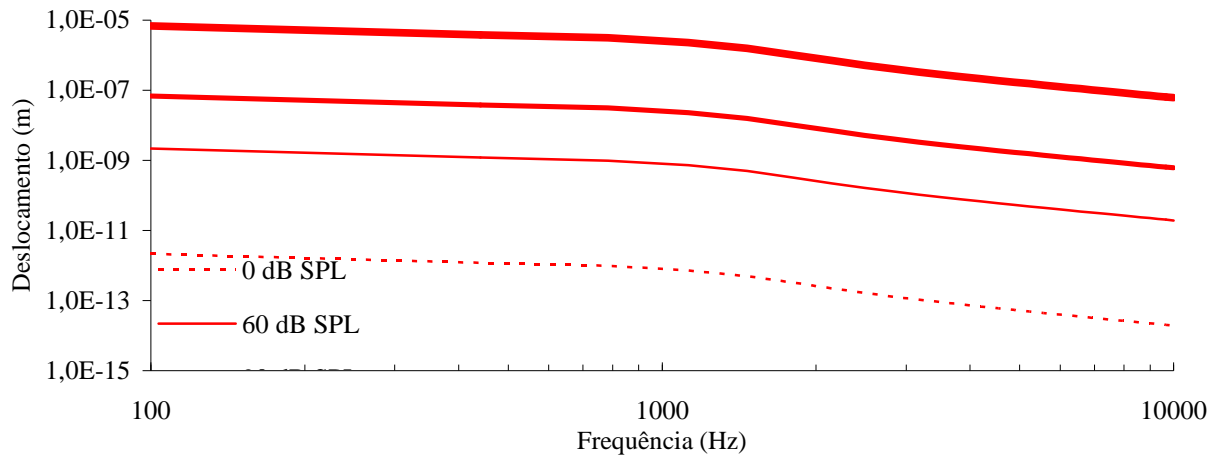


Figura 7.37: Comparação do deslocamento do umbo entre 4 diferentes níveis de pressão sonora.

Na Figura 7.38 verifica-se qual o comportamento do deslocamento da parte central da platina do estribo, para os mesmos níveis de pressão sonora, 0, 60, 90 e 130 dB SPL.

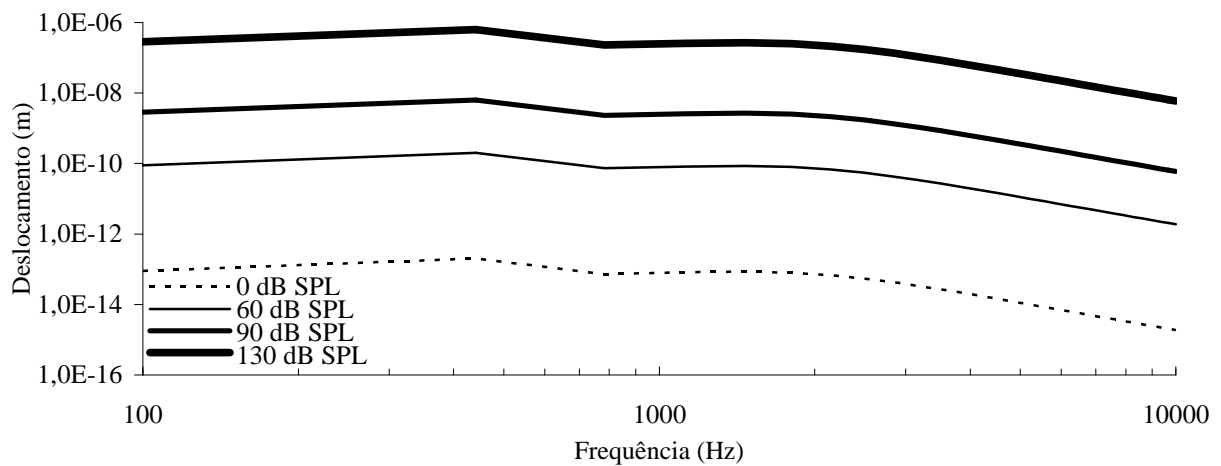


Figura 7.38: Comparação do deslocamento da parte central da platina do estribo entre 4 diferentes níveis de pressão sonora.

Pode concluir-se que o deslocamento aumenta proporcionalmente com o aumento da intensidade, tanto no caso do umbo como da parte central da platina do estribo.

#### 7.4.3.4 Análise do comportamento mecânico dos ligamentos e músculos

Na literatura relacionada com o estudo do ouvido médio é usual considerar tanto os ligamentos como os músculos como tendo um comportamento linear, elástico [2], [3]. Contudo, no estudo de muitos outros sistemas do corpo humano é habitual admitir-se um comportamento hiperelástico para estes tecidos [11], [12], [13], [14]. Assim, pretende-se analisar qual a influência que pode ter a utilização de dois modelos constitutivos distintos (nos ligamentos e músculos) no comportamento biomecânico do ouvido médio.

Para o efeito foi utilizado o modelo com formulação de contacto e um nível de pressão sonora correspondente a 80 dB (0,2 Pa).

Na Figura 7.39 pode comparar-se o comportamento dos deslocamentos do umbo usando ligamentos e músculos com características elásticas e hiperelásticas. Conclui-se que existe alguma influência apenas para as frequências graves, não existindo diferenças para as frequências médias e agudas.

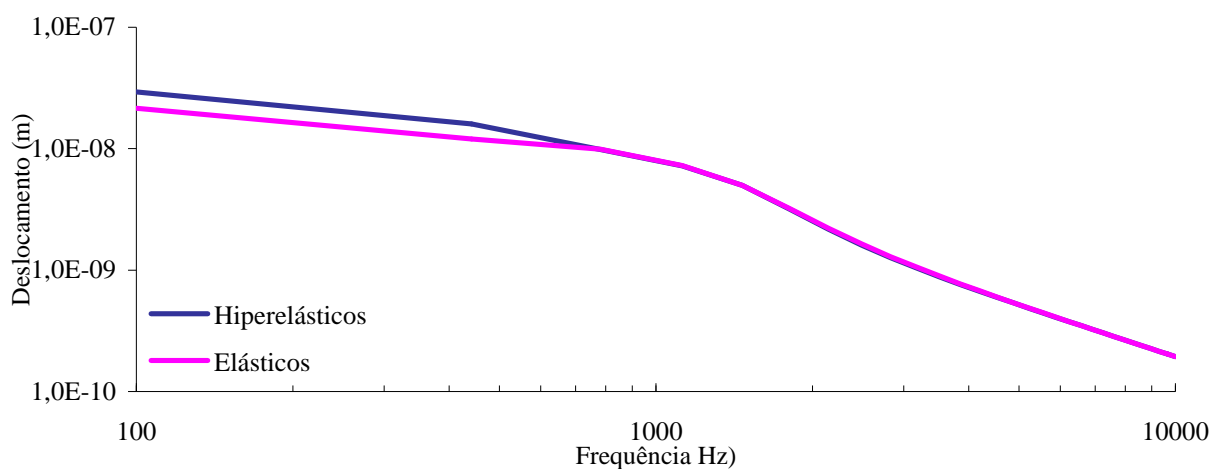


Figura 7.39: Comparação do deslocamento do umbo nos modelos considerando os ligamentos e músculos com comportamento elástico e hiperelástico.

Na Figura 7.40 faz-se a mesma comparação para os deslocamentos da parte central da platina do estribo. Ao longo de toda a gama frequencial, estes deslocamentos têm sensivelmente o mesmo acréscimo, que pode ser significativo, quando se considera o modelo em que os ligamentos têm um comportamento hiperelástico.

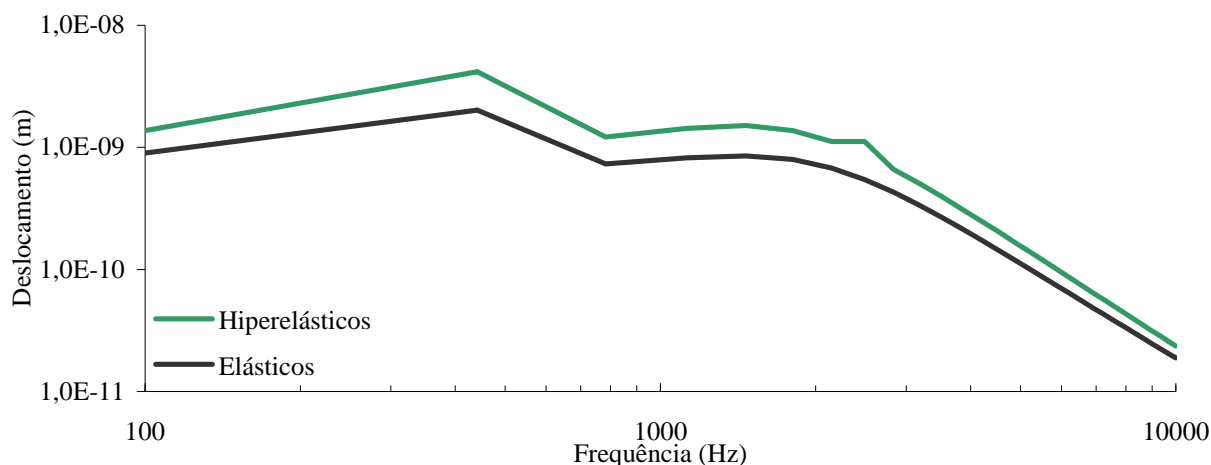


Figura 7.40: Comparação do deslocamento da parte central da platina do estribo com ligamentos e músculos de comportamento elástico e hiperelástico.

#### 7.4.3.5 Análise do comportamento dinâmico do ouvido médio

Com base nos resultados obtidos pode-se concluir que a formulação de contacto pode ser utilizada e que os ligamentos com modelo hiperelástico apresentam comportamento similar aos elásticos com amortecimento, pelo que na presente análise se considera a formulação de contacto para simular os ligamentos capsulares e o modelo hiperelástico para os ligamentos ao exterior da cadeia ossicular. Para efeitos comparativos com outros autores, apresentam-se, também, os resultados considerando os ligamentos e músculos com comportamento elástico.

Os deslocamentos obtidos ao nível do umbo e da platina do estribo, para um estímulo acústico de 80 dB SPL aplicado sobre a membrana timpânica, foram comparados com outros estudos existentes na literatura [3], [4], [29], [30] e [31].

Um estudo feito por Chia-Fone Lee *et al.* [4] compara a amplitude dos deslocamentos do umbo com estudos experimentais de Nishihara *et al.* [29] e Huber *et al.* [30] usando um processo de calibração cruzada.

No trabalho de Chia *et al.* [4] fazem parte da sua amostra 31 pessoas (13 mulheres e 18 homens com idades compreendidas entre 18 e 81 anos) com audição normal e sem disfunções otológicas. Destas pessoas foram extraídos 15 ouvidos direitos e 16 ouvidos esquerdos para avaliação. Foi utilizado o programa ANSYS e uma gama frequencial compreendida entre 100 Hz e 8 kHz.

No trabalho de Nishihara *et al.* [29] a amostra constava de 64 pessoas com audição normal. Nesta experiência foi colocado um material reflector ao nível do umbo para servir de alvo reflector do laser. O deslocamento do umbo induzido por 34 tons puros a 80 dB SPL sobre a membrana timpânica foi medido numa gama de frequências de 195 Hz a 19433 Hz. As medições foram obtidas através de instrumentos de laser.

No trabalho de Huber *et al.* [30] os dados experimentais foram obtidos a partir de 10 ossos temporais.

Ainda no trabalho de Chia *et al.* [4] é referido o trabalho de Gan *et al.* [31] que serve de comparação para os deslocamentos da platina do estribo, obtidos em 17 ossos temporais humanos.

Um outro estudo de Prendergast *et al.* [3] determina os respectivos deslocamentos do umbo e da platina do estribo, para uma pressão de 0,2 Pa.

Para se ser consistente com estes resultados, foi aplicado o mesmo nível de pressão sonora de 80 dB SPL sobre a membrana timpânica do modelo de elementos finitos. Na Figura 7.41 faz-se a comparação dos deslocamentos do umbo para o modelo considerando os ligamentos com comportamento elástico e hiperelástico, com os resultados de Chia *et al.* [4], Nishihara *et al.* [29] Huber *et al.* [30] e Prendergast *et al.* [3].

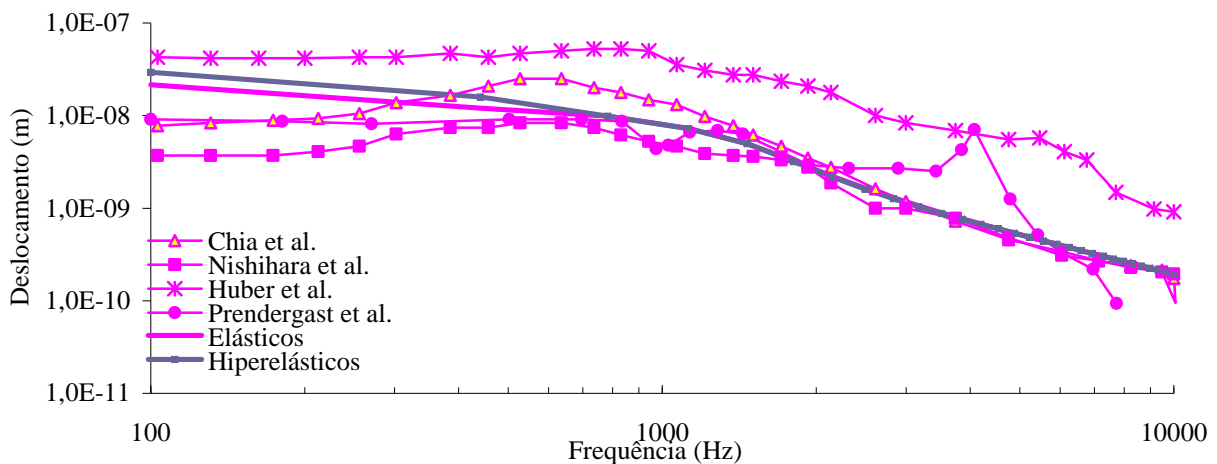


Figura 7.41: Comparação do deslocamento do umbo entre o presente modelo e os resultados de outros autores, para um nível de pressão sonora de 80 dB SPL.

Pode concluir-se que o presente modelo apresenta deslocamentos, nas frequências médias e agudas, muito próximos aos resultados obtidos por Chia *et al.* [4] e Nishihara *et al.* [29], sendo que para as frequências graves apresenta deslocamentos maiores.

Quando se compara com o trabalho de Prendergast *et al.* [3], existe um pico nas frequências agudas que não é evidenciado nos resultados obtidos no presente trabalho. Verifica-se ainda que os dados experimentais de Huber *et al.* [30] apresentam deslocamentos maiores em toda a gama frequencial.

Na Figura 7.42 faz-se a comparação dos deslocamentos da parte central da platina do estribo para o modelo, considerando os ligamentos com comportamento elástico e hiperelástico, com os resultados de Chia *et al.* [4], Gan *et al.* [31] e Prendergast *et al.* [3].

Quando se comparam os ligamentos com comportamento elástico e hiperelástico pode concluir-se que os resultados obtidos para os hiperelásticos estão mais próximos dos resultados obtidos por Prendergast *et al.* [3], à excepção dum pico nas frequências altas. Os resultados de Gan *et al.* [31] apresentam valores menores nas frequências altas. Ao contrário, os resultados de Chia *et al.* [4] estão mais próximos nas frequências altas, havendo um aumento nas frequências baixas e médias, quando comparados com os resultados do presente trabalho.

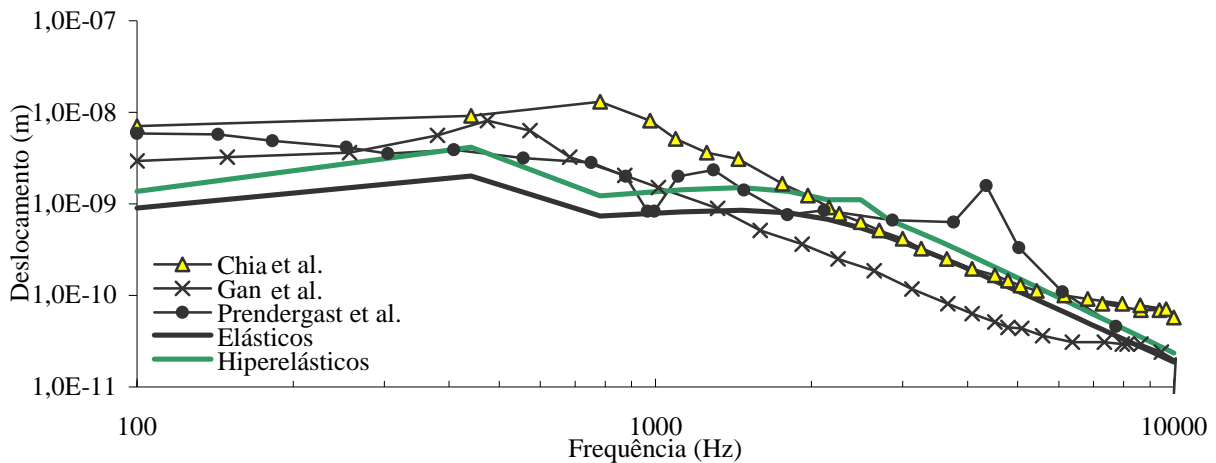


Figura 7.42: Comparação do deslocamento da platina do estribo entre o presente modelo e os resultados de outros autores, para um nível de pressão sonora de 80 dB SPL.

Fazendo incidir sobre a membrana timpânica um nível de pressão sonora de 90 dB SPL (0,632 Pa), os resultados foram comparados com os trabalhos de Sun *et al.* [2] e Gan *et al.* [32].

No trabalho de Gan *et al.* [32] a magnitude dos deslocamentos do umbo e da platina do estribo foram obtidos através duma análise harmónica numa gama de frequências de 200 Hz a 8 kHz, usando o programa ANSYS. Este modelo foi testado e validado por comparação dos seus resultados com estudos experimentais de dez ossos temporais, usando interferometria laser para os deslocamentos do umbo e interferometria laser de duplo feixe para determinar os deslocamentos do estribo.

Sun *et al.* [2] usaram o mesmo programa, com uma gama frequencial de 250 Hz a 8 kHz.

A Figura 7.43 mostra as curvas de resposta frequencial do deslocamento do umbo, considerando os ligamentos com comportamento elástico e hiperelástico, com os resultados obtidos por Gan *et al.* [32].

Pode concluir-se que a maior diferença existe nas frequências médias, apresentando o presente modelo deslocamentos menores nesse intervalo.

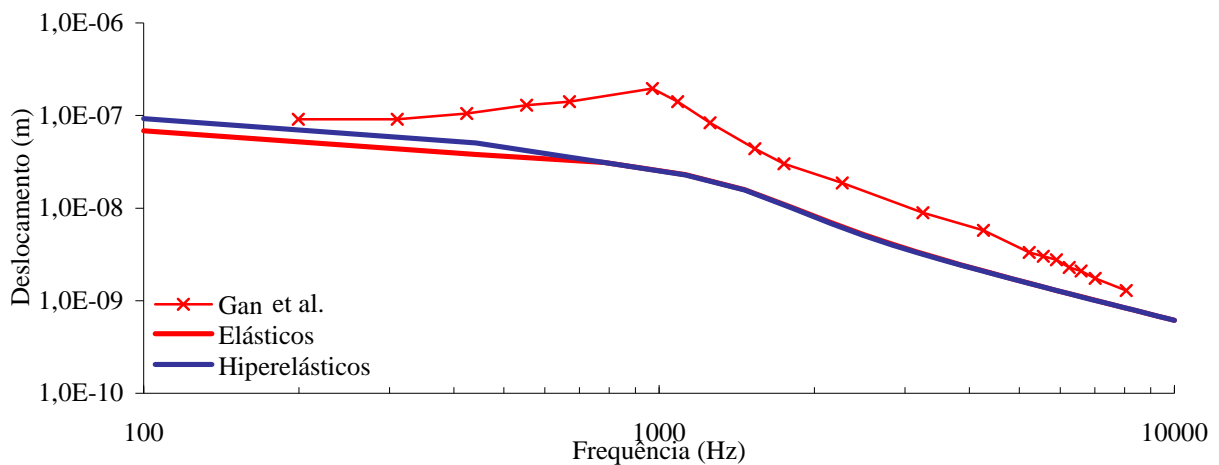


Figura 7.43: Comparação do deslocamento do umbo entre o presente modelo e os resultados de Gan *et al.* para um nível de pressão sonora de 90 dB SPL.

A Figura 7.44 permite verificar os deslocamentos da parte central da platina do estribo comparativamente com os resultados obtidos por Gan *et al.* [32] e Sun *et al.* [2].

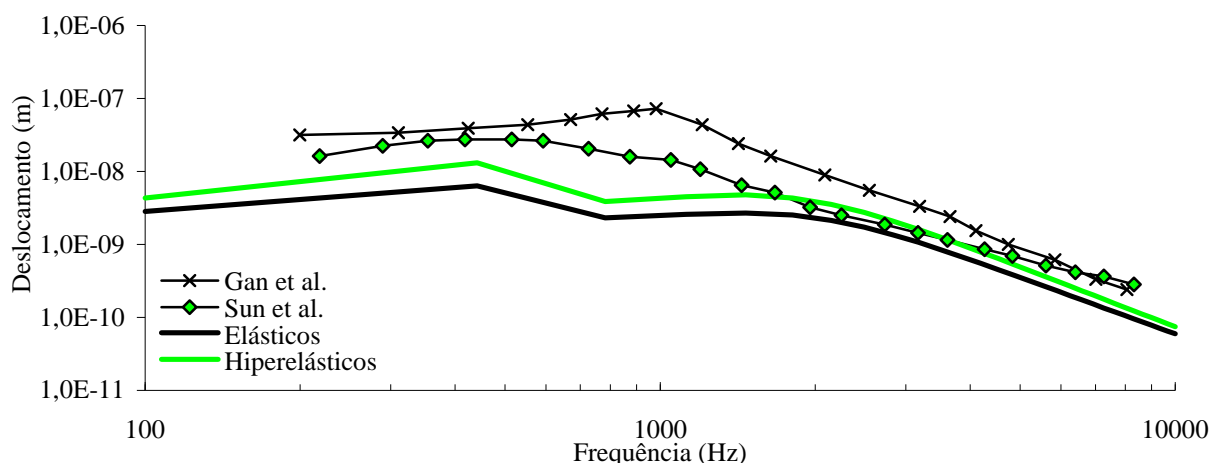


Figura 7.44: Comparação do deslocamento da platina do estribo entre o presente modelo e os resultados de outros autores para um nível de pressão sonora de 90 dB SPL.

No caso dos deslocamentos da parte central da platina do estribo, os resultados do presente trabalho estão mais próximos do trabalho de Sun *et al.* [2]. Quando comparados com o trabalho de Gan *et al.* [32] os resultados obtidos são francamente menores, sendo essas diferenças mais acentuadas nas frequências médias.

Um outro estudo de Hironobu Kurokawa *et al.* [33] revela o deslocamento do umbo e da platina do estribo com base num método de medida em seis ossos temporais humanos, masculinos, com idades compreendidas entre 61 e 74 anos, com uma média de 68,9 anos, utilizando LDV (laser Doppler vibrometer). Estes resultados foram obtidos para um nível de pressão sonora de 105 dB SPL (3,557 Pa), sobre a membrana timpânica.

Na Figura 7.45 podem comparar-se os deslocamentos do umbo, dos modelos em que os ligamentos têm um comportamento elástico e hiperelástico, com os resultados obtidos por Kurokawa *et al.* [33].

Na Figura 7.46 é feita a comparação dos deslocamentos da parte central da platina do estribo, dos modelos em que os ligamentos têm um comportamento elástico e hiperelástico, com os resultados obtidos por Kurokawa *et al.* [33].

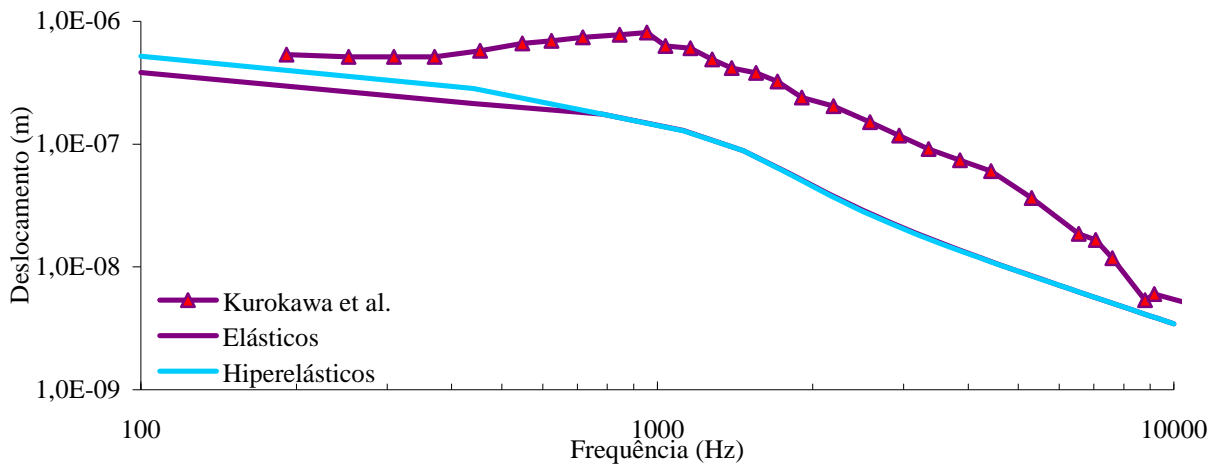


Figura 7.45: Comparação do deslocamento do umbo entre o presente modelo e os resultados de Kurokawa *et al.*, para um nível de pressão sonora de 105 dB SPL.

Para ambos os deslocamentos se denota uma diferença maior para as frequências médias, tendo o presente modelo, deslocamentos menores em praticamente toda a gama frequencial, ainda que no global os comportamentos sejam similares.

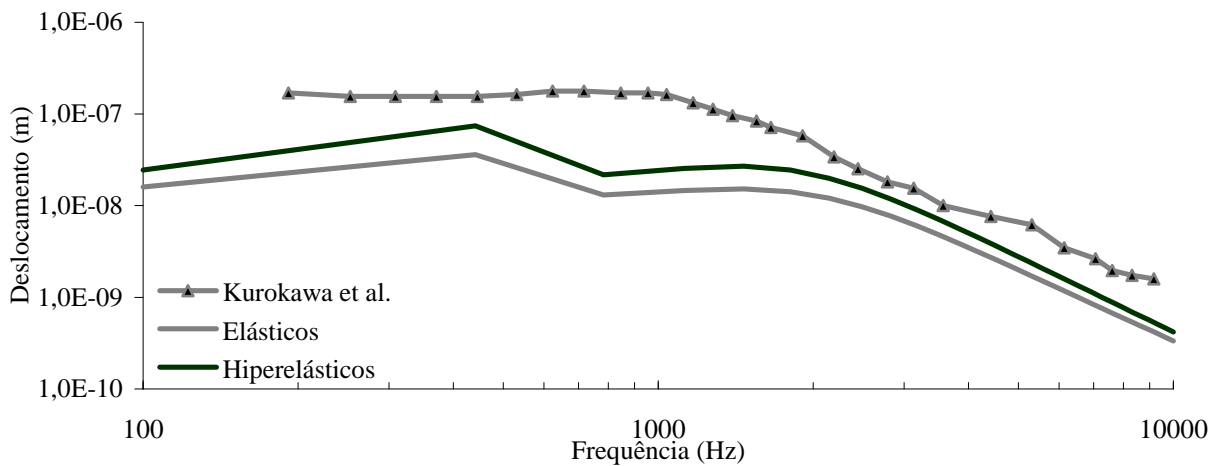


Figura 7.46: Comparação do deslocamento da platina do estribo entre o presente modelo e os resultados de Kurokawa *et al.*, para um nível de pressão sonora de 105 dB SPL.

### 7.4.4 Análise dos esforços nos ligamentos

O estudo das tensões axiais nos ligamentos superior e anterior do martelo e superior e posterior da bigorna foi feito para quatro diferentes níveis de pressão sonora sobre a membrana timpânica, respectivamente 20, 60, 80 e 120 dB SPL.

Na Figura 7.47 mostra-se a distribuição da tensão normal nos referidos ligamentos para 20 dB SPL, para o espectro de frequência.

Conclui-se que o ligamento que atinge o maior pico de tensão ( $1,82E-03$  Pa a 228,6 Hz) é o superior do martelo e a menor tensão ( $\approx 0$ ) é exercida no ligamento posterior da bigorna. O maior valor verifica-se na vizinhança da frequência correspondente ao primeiro modo próprio, anteriormente calculado. O ligamento anterior do martelo apresenta um pico máximo próximo do ligamento superior do martelo, embora menor ( $1,49E-3$  Pa a 211,1 Hz). O ligamento superior da bigorna apresenta também um pico próximo do primeiro modo próprio, embora de menor valor ( $2,23E-04$  Pa a 228,6 Hz), quando comparado com os ligamentos do martelo, apresentando em seguida um outro pico de maior valor ( $2,34E-04$  Pa a 485,7 Hz).

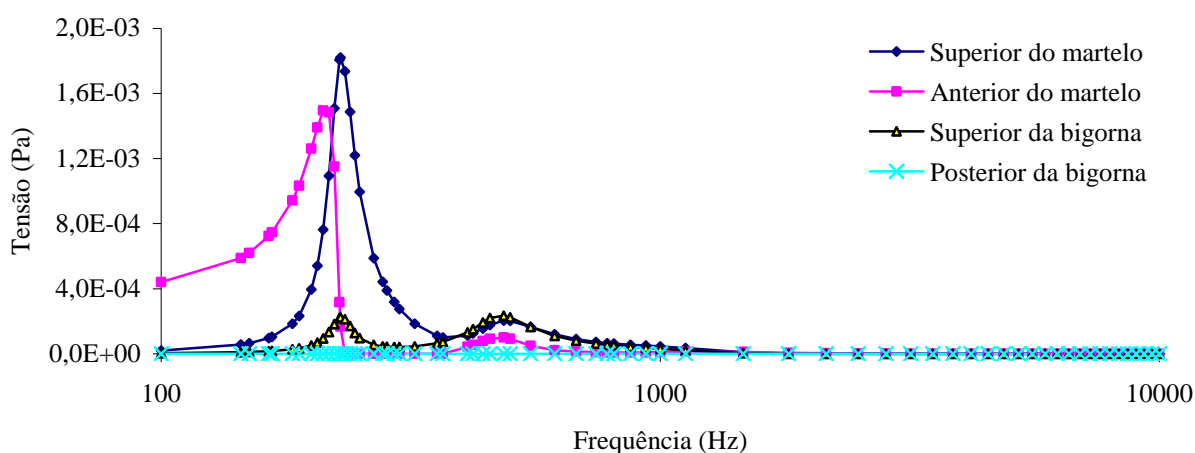


Figura 7.47: Tensão axial nos ligamentos, para um nível de pressão sonora de 20 dB SPL.

Na Figura 7.48 analisa-se a tensão normal nos mesmos ligamentos, para um nível de pressão sonora correspondente a 60 dB SPL.

É possível concluir que a configuração das curvas é semelhante, embora sendo obtidos valores maiores de tensão, atingindo o pico máximo do ligamento superior do martelo um valor de  $1,82E-01$  Pa.

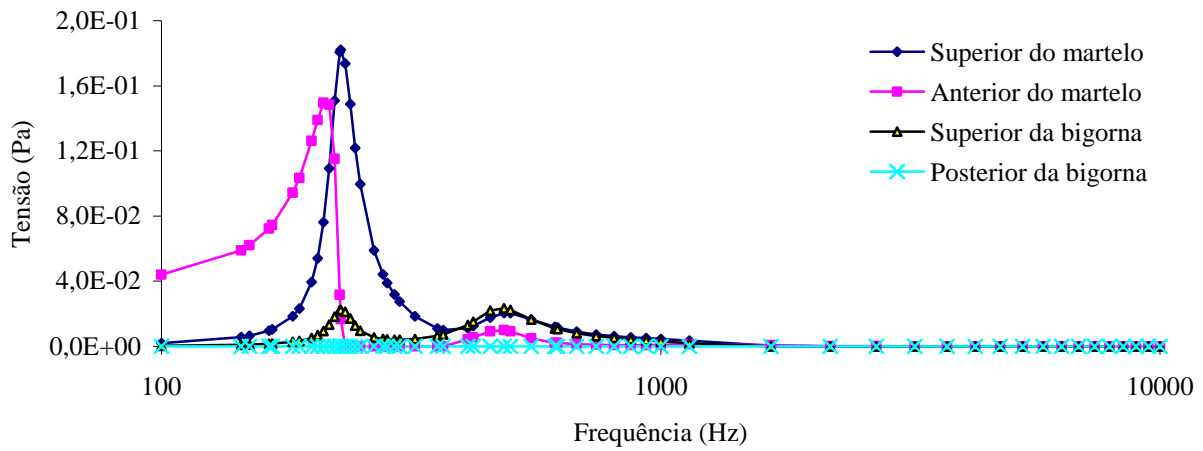


Figura 7.48: Tensão axial nos ligamentos, para um nível de pressão sonora de 60 dB SPL.

Na Figura 7.49 e na Figura 7.50 verifica-se, respectivamente, a tensão nos ligamentos para 80 dB SPL e 120 dB SPL.

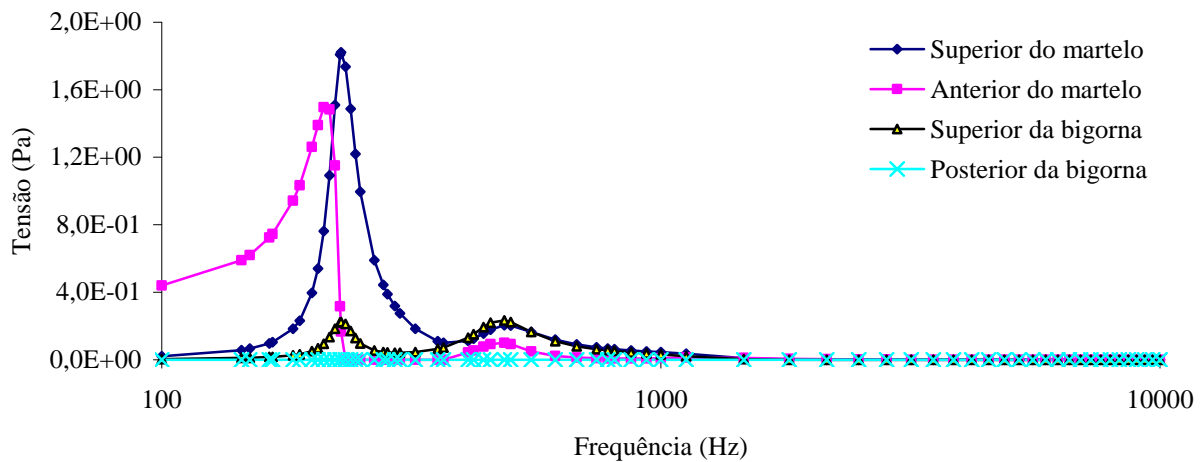


Figura 7.49: Tensão axial nos ligamentos, para um nível de pressão sonora de 80 dB SPL.

Continua a verificar-se a mesma configuração das curvas, apresentando o ligamento superior do martelo um pico máximo de 1,82 Pa a 80 dB SPL e 182 Pa a 120 dB SPL.

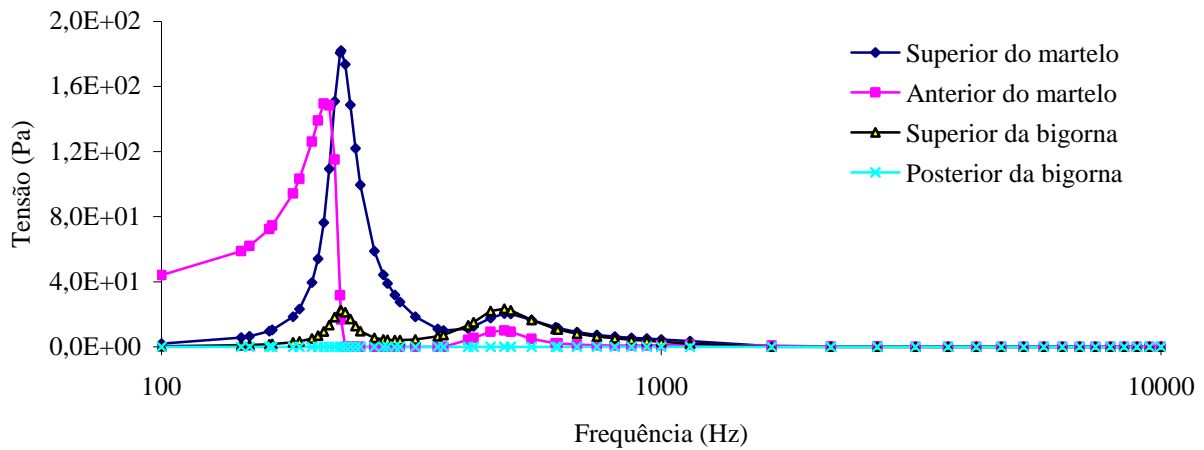


Figura 7.50: Tensão axial nos ligamentos, para um nível de pressão sonora de 120 dB SPL.

Foi feita, em seguida, a comparação de cada ligamento separadamente (Figura 7.51: superior do martelo; Figura 7.52: anterior do martelo; Figura 7.53: superior da bigorna; Figura 7.54: posterior da bigorna).

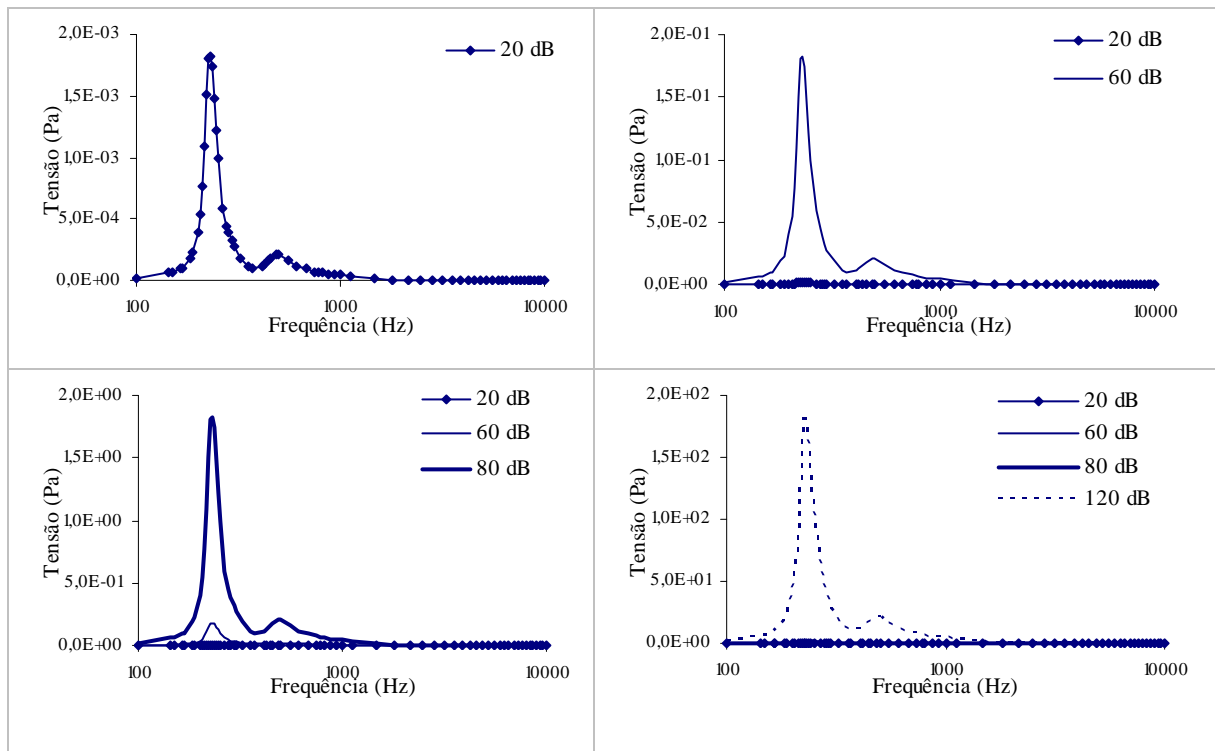


Figura 7.51: Tensão axial no ligamento superior do martelo, para vários níveis de pressão sonora.

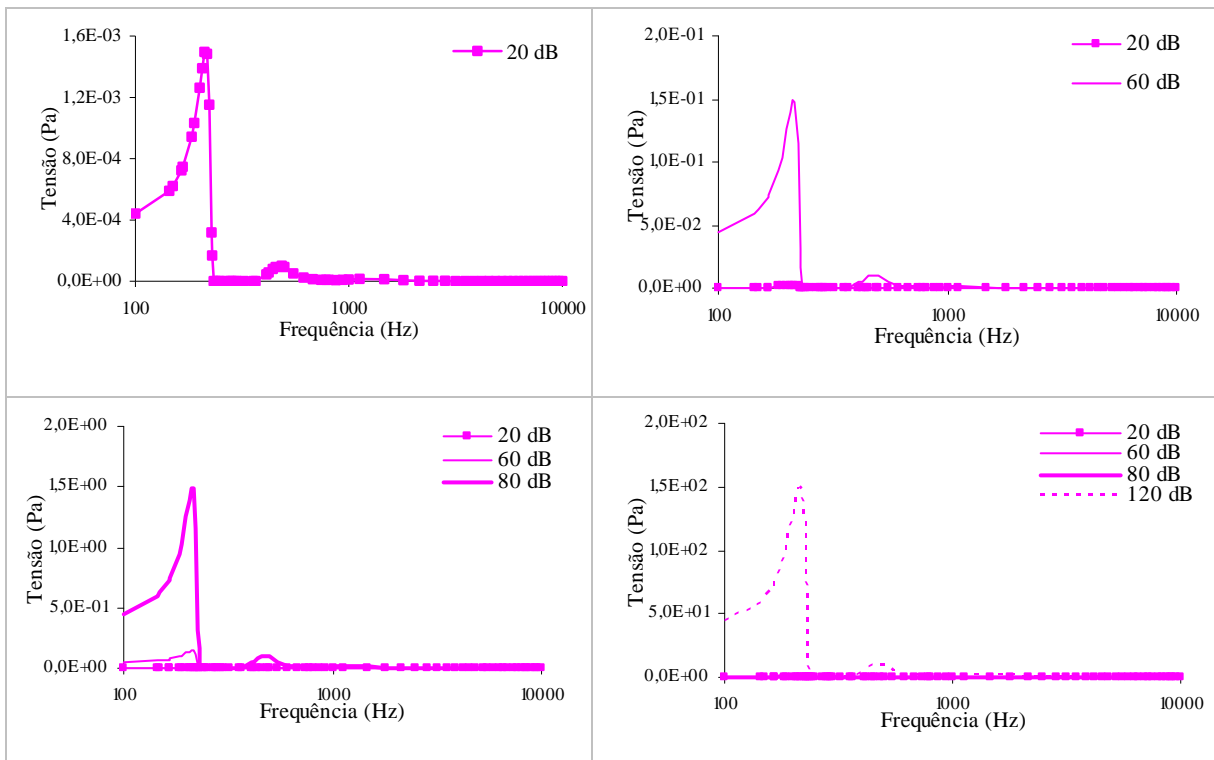


Figura 7.52: Tensão axial no ligamento anterior do martelo, para vários níveis de pressão sonora.

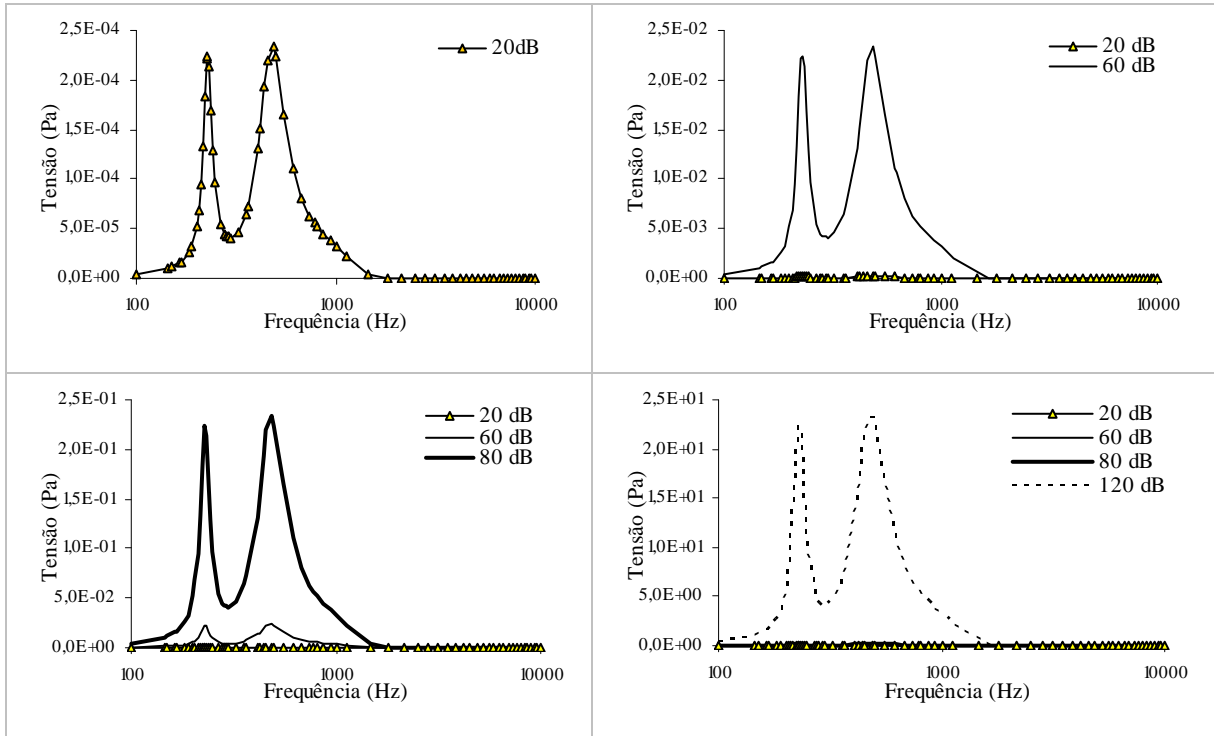


Figura 7.53: Tensão axial no ligamento superior da bigorna, para vários níveis de pressão sonora.

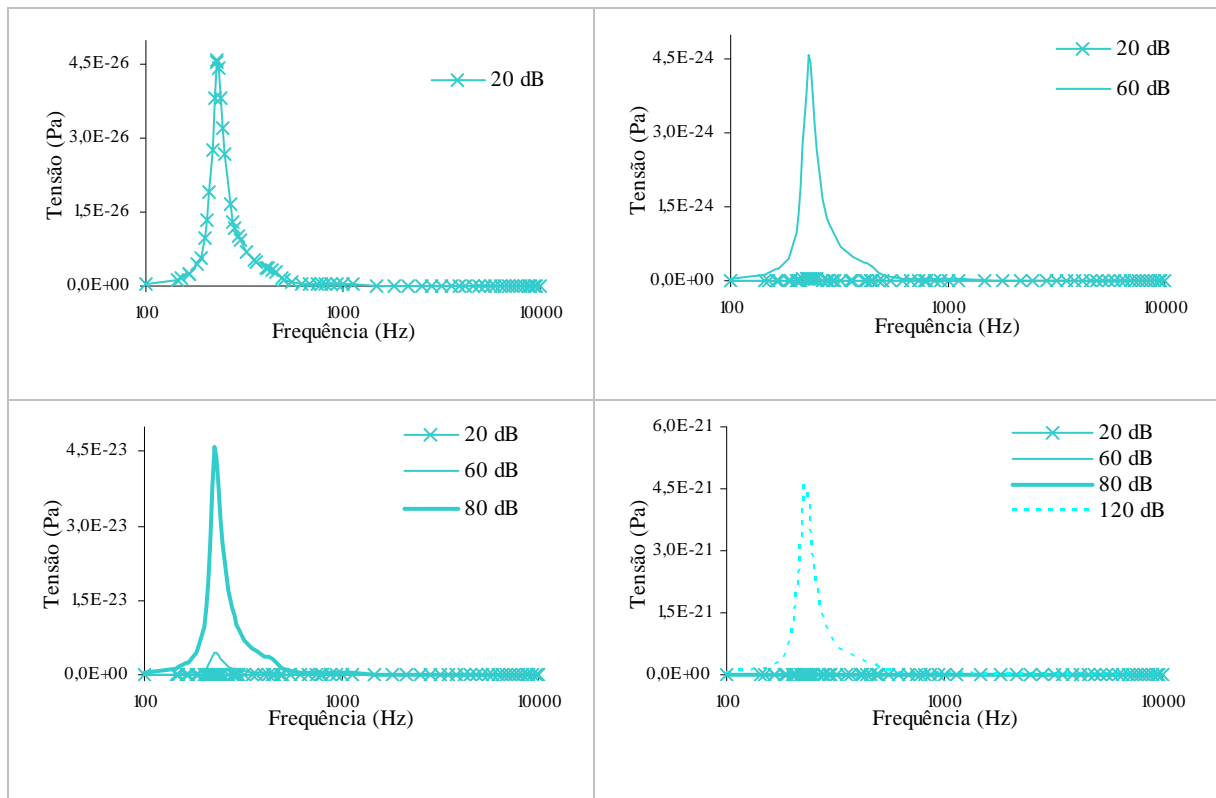


Figura 7.54: Tensão axial no ligamento posterior da bigorna, para diferentes níveis de pressão sonora.

Pode verificar-se que para todos os níveis de pressão sonora, cada ligamento apresenta o mesmo comportamento, sendo as tensões directamente proporcionais ao aumento dos níveis de pressão sonora.

É visível a diferença de valores de tensão para os níveis de pressão mais elevados, pois nos gráficos que contêm os quatro níveis, a única curva que se distingue é a correspondente a 120 dB SPL, o que permite avaliar o grau de tensão introduzido nos ligamentos para este nível sonoro.

### 7.4.5 Estudo do nível de tensão nas cruras do estribo

No sentido de se perceber quais os níveis de tensões exercidas nas cruras do estribo foi feito um corte transversal das cruras (anterior e posterior) do estribo, exactamente na junção com a platina do estribo e obteve-se a tensão principal máxima nessa secção. Na Figura 7.55 é possível verificar essas mesmas tensões para diferentes frequências, para um nível de pressão sonora de 100 dB SPL, aplicada sobre a membrana timpânica.

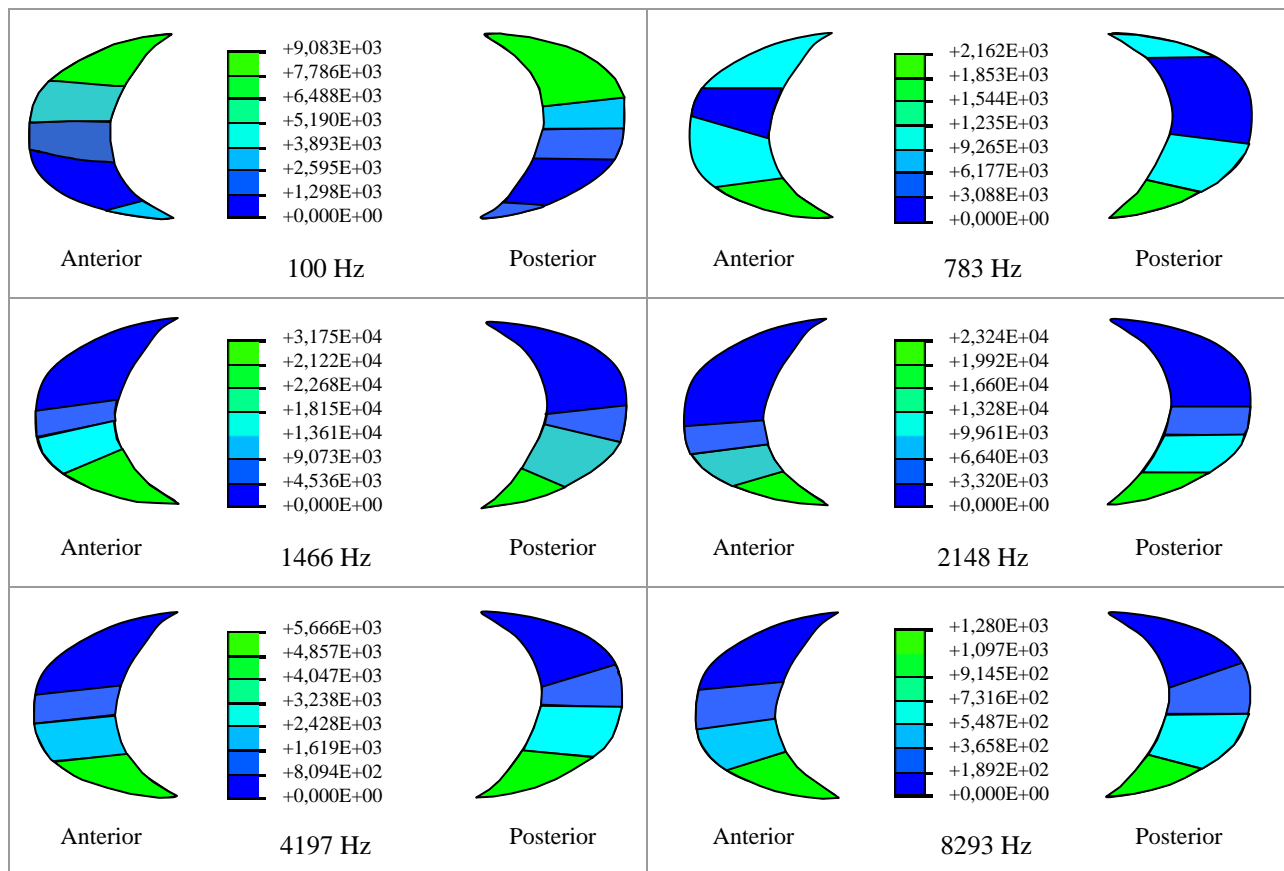


Figura 7.55: Tensão principal máxima nas cruras (anterior e posterior) do estribo, para diferentes frequências.

Pode concluir-se que para frequências mais graves (100 Hz) obtêm-se tensões máximas perto de  $9,1E+03$  Pa, havendo uma diminuição dessas tensões para as frequências mais agudas. Na vizinhança de 783 Hz nota-se que a crura anterior apresenta um ligeiro aumento de tensão

comparativamente com a crura posterior, assim como para frequências mais agudas ( $\approx 8$  kHz). Estes resultados podem ser confirmados pela Figura 7.56.

De referir, ainda, que apenas para as frequências mais graves as tensões são maiores nos extremos inferiores das cruras. Para frequências médias e agudas as maiores tensões são exercidas nos extremos superiores.

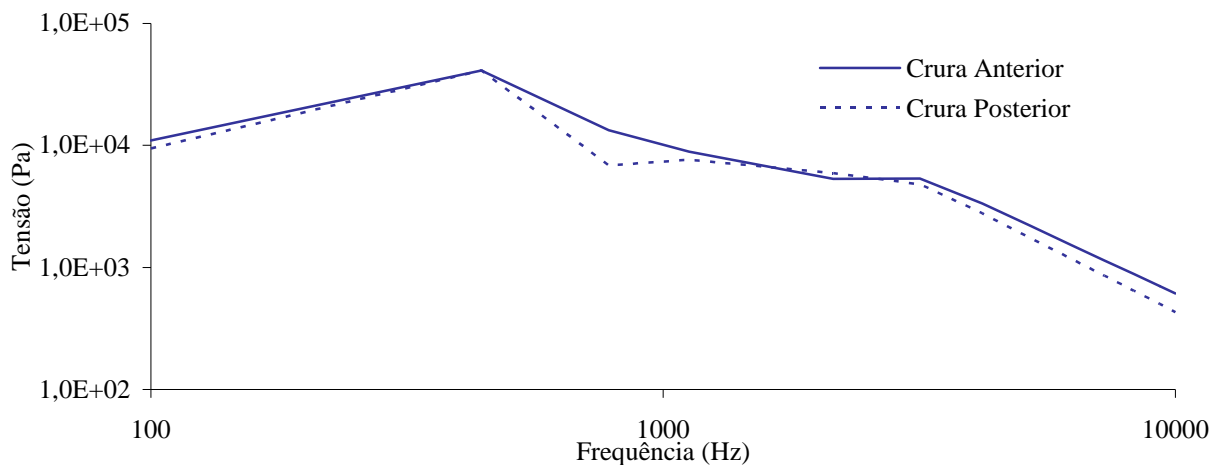


Figura 7.56: Tensão principal máxima nas cruras do estribo.

Através da Figura 7.56 pode ainda concluir-se que, não havendo diferenças significativas entre as duas cruras, elas apresentam um aumento de tensão nas frequências graves, apresentando o seu máximo ( $4,1E+04$  Pa) próximo de 441 Hz. A partir desta frequência há uma tendência da tensão diminuir atingindo os valores de 611,2 Pa e 428,7 Pa, respectivamente nas cruras anterior e posterior, a 10 kHz.

## 7.4.6 Influência da acção dos músculos

Seguidamente foi feita a modelação do comportamento dos músculos, tensor do tímpano e estapediano, usando o modelo constitutivo de Hill.

No sentido de se determinar qual a activação mais adequada (5.108) - (5.111), foram considerados, inicialmente, os dois músculos com igual activação, para um nível de pressão sonora de 120 dB SPL (20 Pa), aplicada sobre a membrana timpânica (MT).

A pressão obtida ao nível da platina do estribo, considerando os músculos passivos (activação igual a zero) foi de 741 Pa (Figura 7.57).

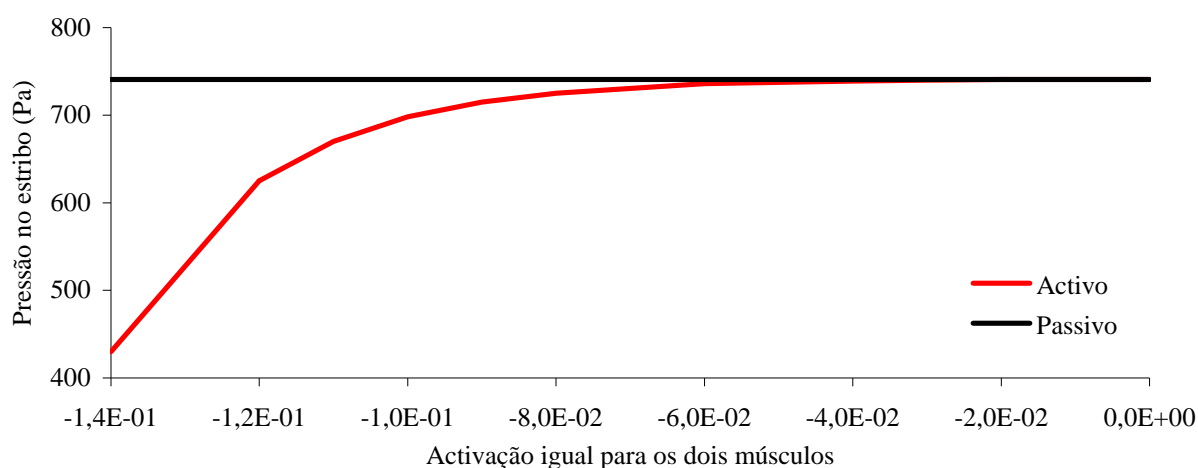


Figura 7.57: Variação da pressão obtida ao nível da platina do estribo com a activação dos músculos, para um nível de pressão sonora de 120 dB SPL sobre a MT.

De referir que o sinal negativo da activação não tem qualquer significado físico, pelo que no texto que se segue é considerado o seu valor absoluto.

Pode concluir-se que ao atribuir uma activação compreendida entre 0 e 8,0E-02, a pressão obtida na platina do estribo não sofre variação significativa, mas a partir deste valor, essa pressão vai diminuindo, atingindo um valor de 430 Pa, para um nível de activação de 1,4E-01.

Na Figura 7.58 é possível verificar a mesma variação de pressão sobre a platina do estribo, mas quando se aplica sobre a membrana timpânica, um nível de pressão sonora correspondente a 80 e 100 dB SPL, respectivamente. A pressão obtida ao nível da platina do estribo, considerando os músculos passivos, foi de 7,56 Pa e 75,5 Pa, respectivamente.

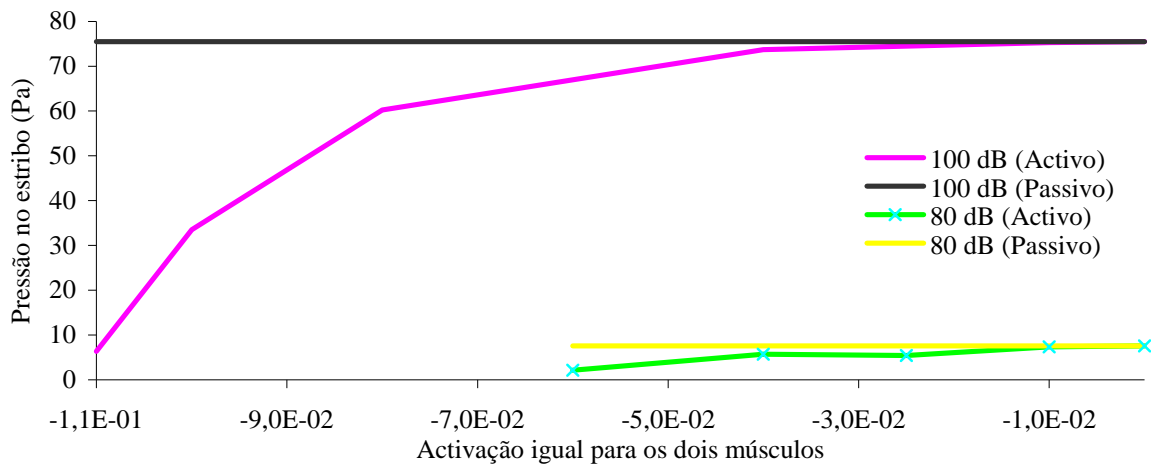


Figura 7.58: Variação da pressão obtida ao nível da platina do estribo com a activação dos músculos, para um nível de pressão sonora de 100 e 80 dB SPL, sobre a MT.

Posteriormente, a activação do músculo tensor do tímpano (MTT) foi fixa, fazendo variar a activação do músculo estapediano (ME) (Figura 7.59).

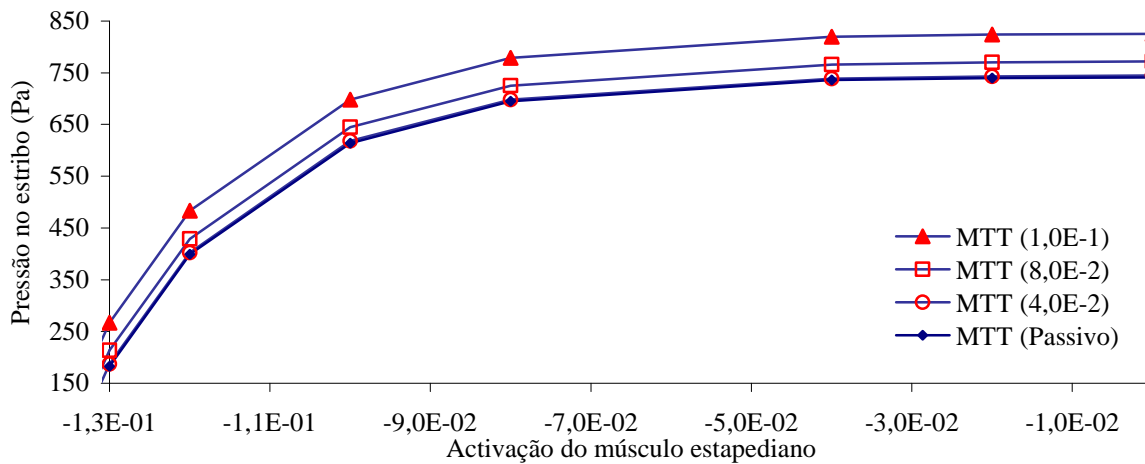


Figura 7.59: Variação da pressão obtida na platina do estribo com a activação do MTT fixa, para um nível de pressão sonora de 120 dB SPL sobre a MT.

Mantendo o MTT passivo e activando o ME, até  $8,0E-2$  não há grande variação, assumindo um comportamento idêntico ao estado de os dois músculos estarem passivos. Aumentando a activação do ME, vai havendo um decréscimo dessa pressão, chegando mesmo a um valor de 183 Pa, para um nível de activação de  $1,3E-01$ . Se aumentar a activação do MTT, a diminuição da pressão no estribo não é tão acentuada.

Estes resultados estão de acordo com os dados clínicos que nos indicam que o ME tende a diminuir a pressão exercida ao nível da platina do estribo [34].

Seguidamente foi efectuado o procedimento contrário, ou seja, a activação do ME foi fixa, fazendo variar a activação do MTT (Figura 7.60).

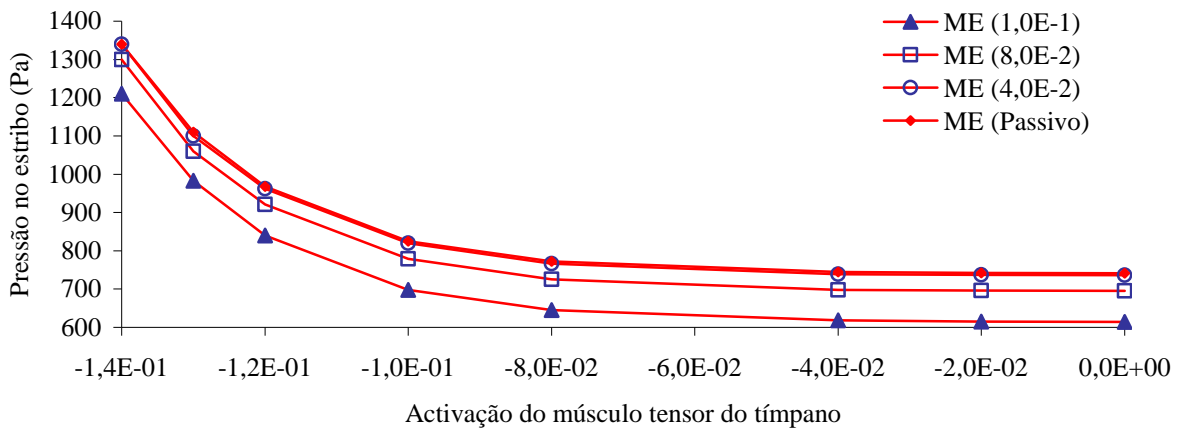


Figura 7.60: Variação da pressão obtida ao nível da platina do estribo com a activação do ME fixa, para um nível de pressão sonora de 120 dB SPL sobre a MT.

Mantendo o ME passivo verifica-se que com uma activação do MTT superior a 8,0E-02 há uma tendência para aumentar a pressão exercida sobre a platina do estribo, o que também está de acordo com os registos clínicos que indicam que a função do MTT é aumentar a pressão do líquido labiríntico. Ao fazer activar o ME, este aumento de pressão é contrariado, fazendo com que essa pressão não seja tão elevada.

No sentido de se perceber qual o movimento exercido pela platina do estribo foram estudadas as rotações segundo o eixo anterior-posterior e segundo o eixo superior-inferior, como se pode verificar nas 3 figuras seguintes, para 80, 100 e 120 dB SPL, respectivamente, considerando os dois músculos com igual activação.

À medida que se aumenta a intensidade, também as rotações segundo o eixo posterior-anterior e superior-inferior vão aumentando.

De referir que para 80 dB SPL, só a partir duma activação de 4,0E-02, se torna possível diferenciar as rotações entre os dois eixos. Comportamento similar é encontrado para 100 dB SPL, a partir de uma activação de 8,0E-02.

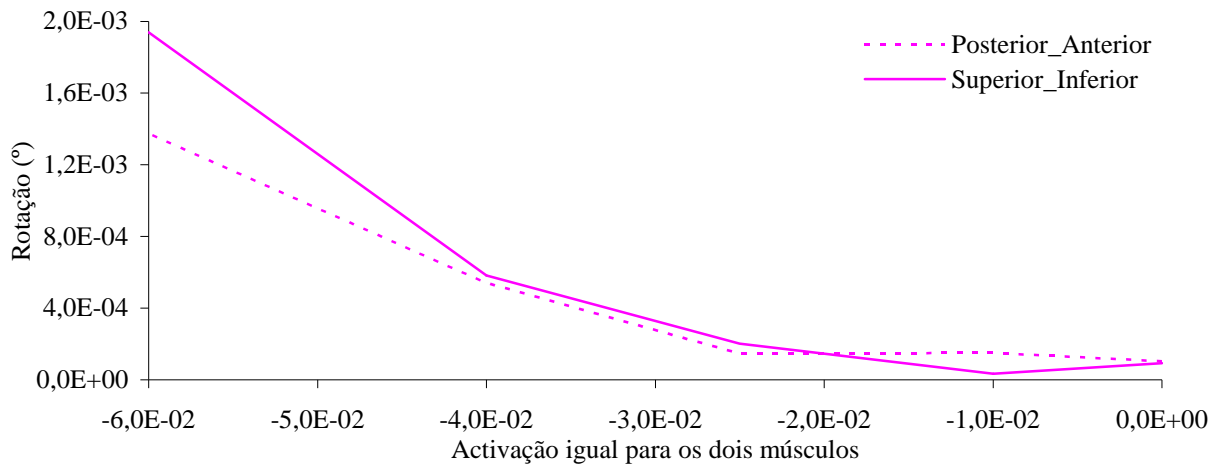


Figura 7.61: Rotações da platina do estribo, segundo os dois eixos, para 80 dB SPL.

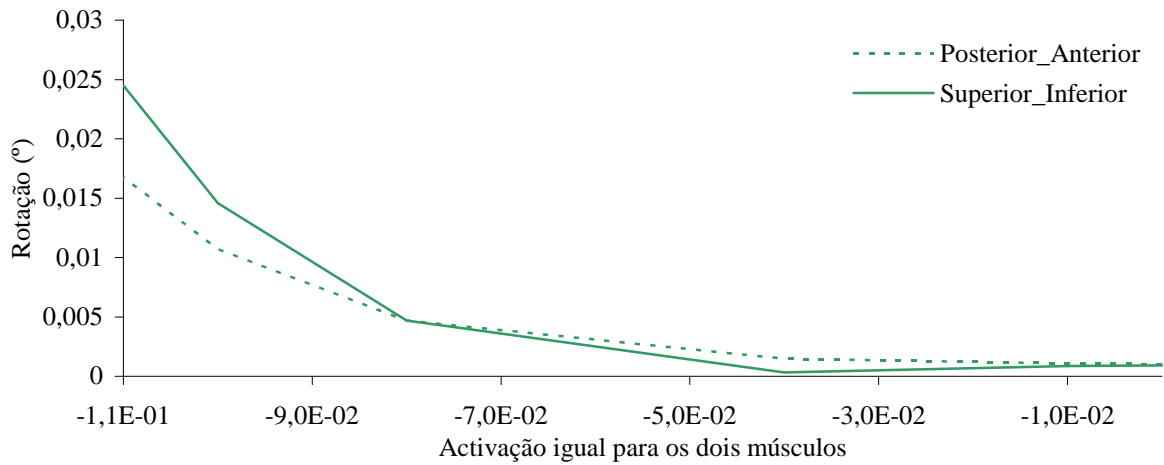


Figura 7.62: Rotações da platina do estribo, segundo os dois eixos, para 100 dB SPL.

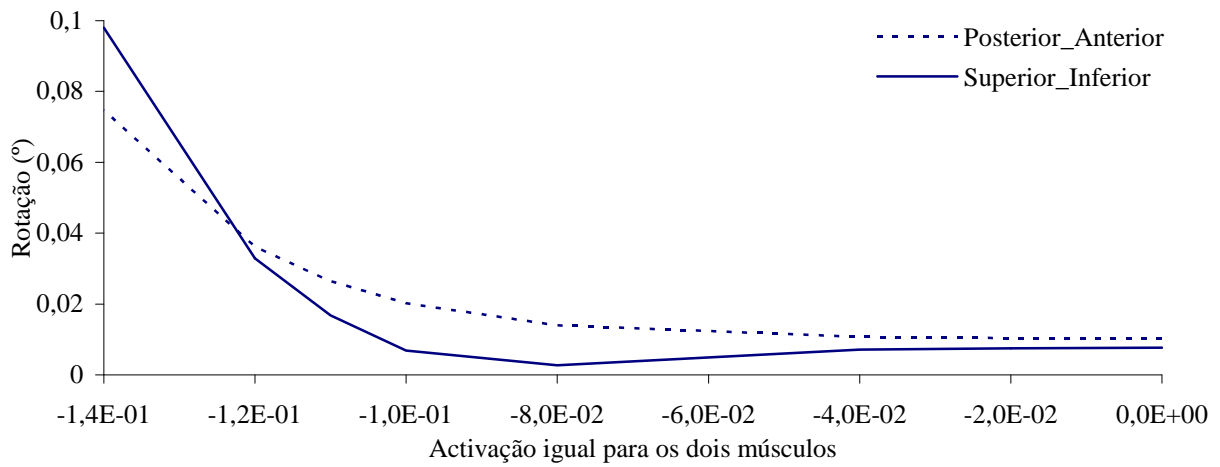


Figura 7.63: Rotações da platina do estribo, segundo os dois eixos para 120 dB SPL.

Para 120 dB SPL verifica-se que o valor da rotação posterior-anterior é sempre maior que a rotação segundo o eixo superior-inferior, para valores de activação menores que  $1,2E-01$ . Contudo, para valores de activação superiores verifica-se um comportamento contrário, o que está de acordo com os princípios fisiológicos, conhecidos da literatura [34], [35].

De seguida, a activação do MTT foi fixa, e foi feito um varrimento para a activação do ME, tendo sido obtidas as respectivas rotações (Figura 7.64).

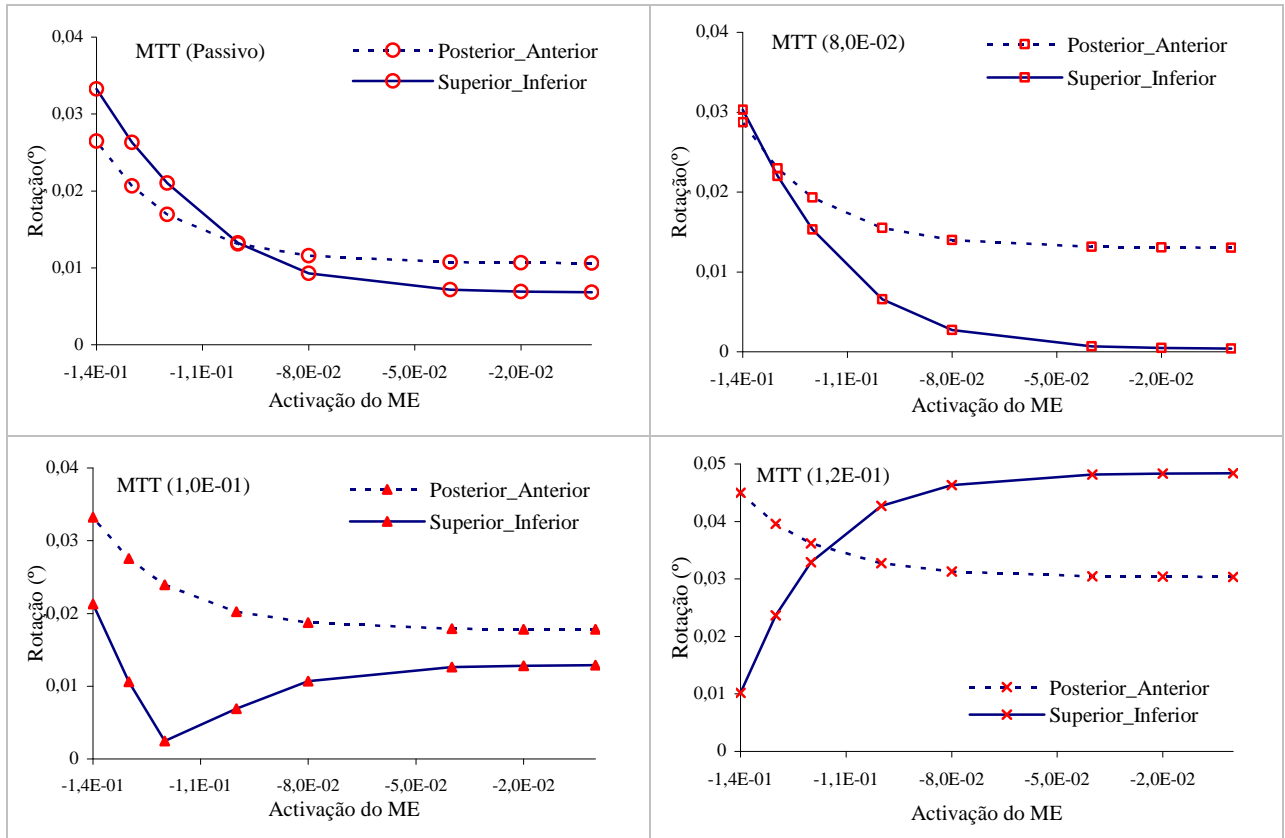


Figura 7.64: Rotações da platina do estribo, para 120 dB SPL, sem activação do MTT e com activação de  $8,0E-02$ ,  $1,0E-01$  e  $1,2E-01$ .

Quando se considera o MTT passivo nota-se que existe uma maior rotação segundo o eixo posterior-anterior, para uma nível de activação inferior a  $1,0E-01$ . A partir deste valor, a rotação é maior segundo o eixo superior-inferior.

Para uma activação do MTT de  $8,0E-02$ , só para valores muito altos de activação do ME se verifica uma alteração na rotação da platina do estribo. Para valores superiores de activação do MTT, ou não existe alteração ou a rotação da platina deixa de fazer sentido do ponto de vista fisiológico. Esta análise permite concluir que a activação do MTT será inferior a  $8,0E-02$ .

Seguidamente fixou-se a activação do ME e fez-se variar a activação do MTT, tendo sido obtidas as respectivas rotações, considerando um nível de pressão sonora de 120 dB SPL (Figura 7.65).

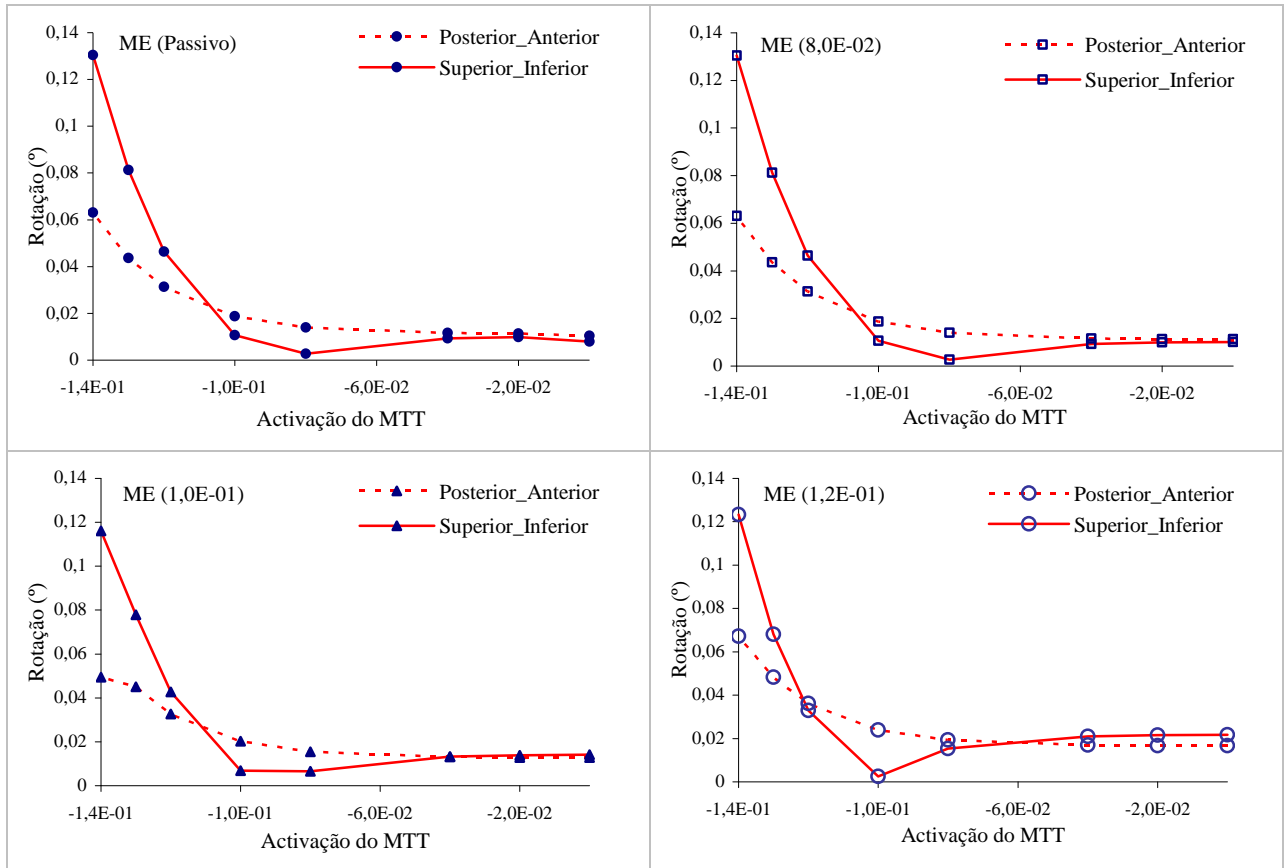


Figura 7.65: Rotações da platina do estribo, para 120 dB SPL, sem activação do ME e com activação de 8,0E-02, 1,0E-01 e 1,2E-01.

Independentemente do nível de activação do ME, verifica-se que para os maiores valores de activação do MTT, a rotação da platina do estribo em torno do eixo superior-inferior é maior do que a rotação em torno do eixo posterior-anterior. Este comportamento, que já se tinha manifestado quando os níveis de activação eram iguais nos dois músculos (Figura 7.63), comprova a análise fisiológica conhecida da literatura. Para níveis de activação do ME superiores a 8,0E-02 e níveis de activação do MTT próximos de zero, verifica-se que a rotação segundo o eixo superior-inferior é maior do que a rotação segundo o outro eixo.

Seguidamente foi feito um estudo dinâmico, para uma gama de frequências compreendidas entre 100 e 10 kHz, para diferentes níveis de activação.

Na Figura 7.66 é possível verificar que para qualquer nível de activação, as diferenças mais significativas se encontram nas frequências baixas. As maiores pressões exercidas sobre o estribo encontram-se para uma activação maior do músculo tensor do tímpano. Quando se consideram ambos os músculos passivos, o maior pico (1800 Pa) situa-se a 441 Hz. Este valor decresce para 1560 Pa quando se aplica um nível máximo de activação ao músculo estapediano. Estes resultados estão de acordo com os registos clínicos que nos referem que os músculos do ouvido médio têm uma maior influência sobre os sons graves e que a contração do músculo tensor do tímpano imprime uma maior pressão sobre a platina do estribo, fazendo aumentar a pressão do líquido labiríntico e que o músculo estapediano contraria esta tendência, fazendo diminuir essa mesma pressão, no sentido de proteger o ouvido interno de sons mais fortes.

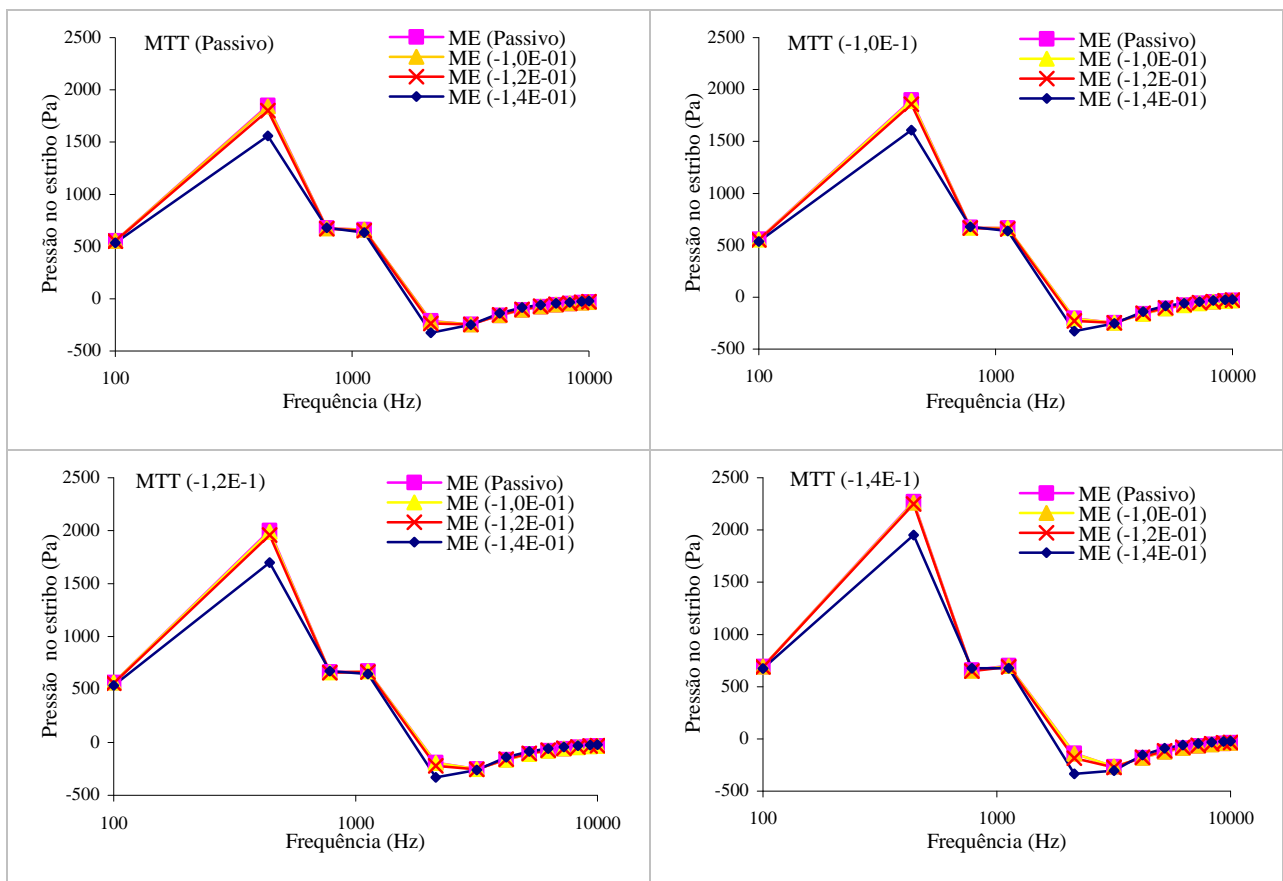


Figura 7.66: Pressões obtidas na platina do estribo, para 120 dB SPL, e um varrimento de frequências de 100 Hz a 10 kHz.

## 7.5 Referências

- [1] B.J. Anson, J.A. Donaldson, “*The Surgical anatomy of the temporal bone and ear*”, London, 1976.
- [2] Q. Sun, R.Z. Gan, K.H. Chang, K.J. Dormer, Computer-integrated finite element modeling of human middle ear, *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 1, pp. 109-122, 2002.
- [3] P.J. Prendergast, P. Ferris, H.J. Rice, A.W. Blayney, Vibro-Acoustic Modelling of the Outer and Middle Ear Using the Finite-Element Method, *Audiology & Neuro-Otology*, 4, pp. 185-191, 1999.
- [4] C.F. Lee, P.R. Chen, W.J. Lee, J.H. Chen, T.C. Liu, Computer aided three-dimensional reconstruction and modeling of middle ear biomechanics by high-resolution computed tomography and finite element analysis, *Biomedical Engineering-applications, Basis & Communications*, Vol. 18 No. 5, pp. 214-221, October 2006.
- [5] ABAQUS Analyses User’s Manual, Version 6.5, 2005.
- [6] F. Gentil, M. Moreira, M.P.L. Parente, R.M. Natal Jorge, A.M. Ferreira, E. Almeida “Ouvido médio: um estudo biomecânico”, *Congresso nacional de Métodos Computacionais em Engenharia*, C. Mota Soares et al., Lisboa, CD-Rom, Livro de Resumos, pp. 48, 31 de Maio a 2 de Junho de 2004.
- [7] F. Gentil, M. Moreira, M.P.L. Parente, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, E. Almeida, “Estudo biomecânico do ouvido médio, considerando as articulações entre os ossículos”, *encontro, 1, biomecânica*, JA Simões, HC Rodrigues, MA Vaz, AP Veloso (Eds), CD-Rom e Livro de artigos, Martinchel, Abrantes, pp. 69-73, 3 e 4 de Fevereiro de 2005.
- [8] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, M. Moreira, E. Almeida, “Estudo biomecânico do ouvido médio considerando os ligamentos dos ossículos”, *Métodos Numéricos en Ingeniería*, JLP Aparício, AR Ferran, JAC Martins, R Gallego, JMA César de Sá (Eds.), CD-Rom (a15), Livro de Resumos, pp. 34, Granada, 4 - 7 de Julho de 2005.
- [9] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, M. Moreira, E. Almeida, “Biomechanical study of middle ear”, *Proceedings of VIII International Conference on Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, COMPLAS VIII*, eds. DRJ Owen, E Oñate, B Suárez, CIMNE, Part 2, pp. 785-788, Barcelona, 5 - 7 de Setembro de 2005.

- [10] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, M. Moreira, E. Almeida, “Biomechanical study of middle ear”, *Proceedings of II International Conference on Computational Bioengineering, ICCB2005*, H Rodrigues, M Cerrolaza, M Doblaré, J Ambrósio, M Viceconti (Eds), pp. 189-196, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 14 - 16 de Setembro de 2005.
- [11] V. Alastrué, J.F. Rodríguez, B. Calvo, M. Doblaré, Structural damage models for fibrous biological soft tissues, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 44, Issues 18-19, pp. 5894-5911, September 2007.
- [12] A. Pérez del Palomar, M. Doblaré, An accurate simulation model of anteriorly displaced TMJ discs with and without reduction, *Medical Engineering & Physics*, Volume 29, Issue 2, pp. 216-226, March 2007.
- [13] E. Peña, B. Calvo, M.A. Martínez, M. Doblaré, An anisotropic visco-hyperelastic model for ligaments at finite strains. Formulation and computational aspects, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 44, Issues 3-4, pp. 760-778, February 2007.
- [14] E. Peña, B. Calvo, M.A. Martinez, D. Palanca and M. Doblaré, Influence of the tunnel angle in ACL reconstructions on the biomechanics of the knee joint, *Clinical Biomechanics*, Volume 21, Issue 5, pp. 508-516, June, 2006.
- [15] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, M. Moreira, E. Almeida, “On the effect of ligaments in the dynamic study of the middle ear”, *Proceedings of 7th International Symposium on Computer Methods in Biomechanics & Biomedical Engineering*, Antibes, França, 22 - 25 de Março de 2006.
- [16] O.H. Yeoh, Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates, *Rubber Chemistry and Technology*, 63, pp. 792-805, 1990.
- [17] P. Martins, R.N. Jorge, A. Ferreira, Determination of material parameters for different hyperelastic models, *Computational plasticity VIII*, pp. 789-792, Barcelona, September 2005.
- [18] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, M. Moreira, E. Almeida, “Dynamic study of the middle ear”, ECCM-2006, III European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, CA Mota Soares, JAC Martins, H Rodrigues, JAC Ambrósio, CAB Pina, CM Mta Soares, EBR Pereira, J Folgado, (Eds.), CD-Rom (1496), pp. 674, Lisboa, 5-8 de Junho de 2006.

- [19] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, M. Moreira, E. Almeida, “Biomechanical simulation of middle ear using hyperelastic models” *5th World Congress of Biomechanics, Rik Huiskes, Farshid Guilak, (Eds.)*, CD-Rom (REF: 6035), Munique, Alemanha, 29 de Julho a 4 de Agosto de 2006.
- [20] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, M. Moreira, E. Almeida, “Numerical study of dynamic behaviour of the human middle ear” *7th World Congress on Computational Mechanics, WCCM VII*, CD-Rom de Abstracts (858), Los Angeles, EUA, 16-22 de Julho de 2006.
- [21] F. Gentil, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, M. Moreira, E. Almeida “Estudo do efeito do atrito no contacto entre os ossículos do ouvido médio”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 23, 2, pp. 177-187, 2007.
- [22] F. Alexandre, A.A. Fernandes, R.N. Jorge, F. Gentil, P. Martins, T. Mascarenhas, C. Milheiro, A.J.M. Ferreira, M.P.L. Parente, "3D Reconstruction of the Middle Ear for FEM Simulation", *Simpósio Internacional CompIMAGE - Computational Modelling of Objects Represented in Images: Fundamentals, Methods and Applications*, J.M.R.S. Tavares, R.M. Natal Jorge (Eds.), pp. 181-184, Coimbra, 19-20 de Outubro de 2006.
- [23] F. Alexandre, R.N. Jorge, J.M.Tavares, T. Mascarenhas, R.F. El Sayed, A.A. Fernandes, F. Gentil, A.J.M. Ferreira, “Segmentação e reconstrução 3D de estruturas em imagens médicas : Comparação entre uma metodologia automática e uma outra manual”, *CMNE/CILAMCE*, Porto, 13-15 de Junho de 2007.
- [24] J. Mille, R. Boné, P. Makris, H. Cardot, “Fast estimation of skeleton points on 3D deformable meshes”, *Computational Modelling of Objects Represented in Images*, pp. 289-294, 2006.
- [25] J. Brandt, V. Algazi, “Continuous skeleton computation by Voronoi diagram”, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding* 55(3), pp. 329-337, 1992.
- [26] P.A.L.S. Martins, R.M. Natal Jorge, A.J.M. Ferreira, A Comparative Study of Several Material Models for Prediction of Hyperelastic Properties: Application to Silicone-Rubber and Soft Tissues, *Strain*, 42, pp. 135-147, 2006.

- [27] K. R. Williams, A.W. Blayney, T.H.J. Lesser, A 3-D finite element analysis of the natural frequencies of vibration of a stapes prosthesis replacement reconstruction of the middle ear, *Clin. Otolaryngol.*, 20, pp. 36-44, 1995.
- [28] M. Bornitz, T. Zahnert, H.J. Hardtke, K.B. Hüttenbrink, Identification of Parameters for the Middle Ear Model, *Audiol Neurootol*, 4, pp. 163-169, 1999.
- [29] S. Nishihara, R.L. Goode, Measurement of tympanic membrane vibration in 99 human ears. In: Hüttenbrink KB, eds. Middle ear mechanics in research and otosurgery. Dresden University of Technology, Dresden, Germany, pp. 91-93, 1996.
- [30] A. Huber, G. Ball, M. Asai, R. Goode, The vibration pattern of the tympanic membrane after placement of a total ossicular replacement prosthesis. In: Proceeding of the International Workshop on middle ear mechanics in research and otosurgery, Dresden, Germany, pp. 219-222, 1997.
- [31] R.Z. Gan, Q. Sun, K.D. Jr. Robert, K.H. Chang, K.J. Dormer, Three-dimensional modeling of middle ear biomechanics and its applications, *Otol and Neurotol*, 23, pp. 271-280, 2002.
- [32] R.Z. Gan, B. Feng, Q. Sun, Three-Dimensional Finite Element Modeling of Human Ear for Sound Transmission, *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 32, No 6, pp. 847-859, June 2004.
- [33] H. Kurokawa, R.L. Goode, Sound pressure gain produced by the human middle ear, *Otolaryngology – Head and Neck Surgery*, Vol. 113, No 4, pp. 349-355, 1995.
- [34] M.M. Paparella, D.A. Shumrick, *Otorrinolaringologia*, 2<sup>a</sup> ed. Editora Médica Panamericana SA, Buenos Aires, pp. 196-212, 1982.
- [35] L. Testut, *Traité d'Anatomie humaine – organes des sens*, tome septième.

# Capítulo 8

## *Conclusões*

### **8.1 Síntese e conclusões**

A presente investigação teve como objectivo o estudo biomecânico do ouvido médio, simulando o seu funcionamento, tendo em vista o melhor controlo de algumas patologias associadas. Para tal, foi construído um modelo geométrico dos seus componentes, incluindo a membrana timpânica, ossículos, ligamentos e músculos, bem como o fluido coclear.

O modelo mais realista foi obtido a partir de imagens de TAC, tendo sido feita a respectiva discretização, recorrendo ao método de elementos finitos. As propriedades dos materiais foram obtidas de literatura científica e foram aplicadas as respectivas condições fronteira.

Com base no modelo construído, foram feitos vários estudos, estáticos e dinâmicos, comparando diversos resultados, quer da simulação dos ligamentos capsulares, quer dos ligamentos ao exterior da cadeia ossicular e músculos.

O primeiro estudo, estático, considera os ligamentos e os músculos como tendo um comportamento elástico, sendo contínua a ligação entre os ossículos. Foram determinados os deslocamentos existentes, tanto no umbo como ao nível da parte central da platina do estribo, para diferentes níveis de pressão sonora sobre a membrana timpânica (entre 0 e 130 dB SPL). Pôde verificar-se que para todos os níveis de pressão acústica, os deslocamentos do umbo eram sempre maiores, quando comparados com os deslocamentos da platina do estribo, sendo este aumento directamente proporcional ao aumento da pressão aplicada.

Posteriormente foi feito o cálculo de valores próprios, para três modelos: um constituído apenas pela membrana timpânica, outro pela membrana e pelo martelo e por último o modelo completo. Os primeiros modos foram comparados com trabalhos de Williams *et al.* e Bornitz *et al.*, tendo-se verificado resultados concordantes. Usando o modelo com simulação de rigidez dos

ligamentos capsulares e com formulação de contacto foram determinados os primeiros 40 modos próprios, concluindo-se que não existiam diferenças significativas.

Considerando os ligamentos elásticos foi feita uma análise dinâmica, comparando os ligamentos capsulares, com e sem formulação de contacto. Para tal foi exercida uma pressão de 0,632 Pa sobre a membrana timpânica. Os resultados obtidos, no que concerne aos deslocamentos do umbo, permitiram concluir que não existiam diferenças significativas entre os dois modelos. No caso da parte central da platina do estribo, as maiores diferenças encontram-se associadas às frequências agudas, existindo diferenças pouco significativas para as frequências graves, sendo mínimas para as frequências médias.

Admitindo ainda, os ligamentos com comportamento linear elástico, foram determinados os deslocamentos do umbo e da parte central da platina do estribo, considerando diferentes níveis de pressão sonora (0, 60, 90 e 130 dB SPL), tendo-se concluído que o deslocamento aumenta proporcionalmente ao aumento da intensidade.

Visando a simulação do carácter viscoelástico próprio dos tecidos biológicos, considerou-se, no modelo com ligamentos elásticos, a introdução de uma variável mecânica de amortecimento. Os resultados obtidos foram comparados em função do deslocamento do umbo e da parte central da platina do estribo, considerando diferentes casos: na ausência de amortecimento; amortecimento apenas na membrana timpânica e nos ossículos; amortecimento no modelo completo. Da análise destes resultados concluiu-se que a aplicação do amortecimento melhora o comportamento mecânico do sistema, confirmando o seu comportamento viscoelástico.

Tendo em conta que em estudos de outros sistemas do corpo humano é habitual admitir-se um comportamento hiperelástico para estes tecidos, foram feitos estudos comparativos entre os ligamentos considerados como elásticos e hiperelásticos, usando um nível de pressão acústica correspondente a 80 dB SPL. Para tal, e para a simulação considerando o comportamento hiperelásticos dos ligamentos, foram calculadas as constantes necessárias à aplicação do método de Yeoh. Concluiu-se que, para o umbo, existe um pequeno acréscimo de deslocamento no modelo hiperelástico, apenas nas frequências graves. Para a platina do estribo, estes deslocamentos tiveram sensivelmente o mesmo acréscimo, em toda a gama frequencial, no modelo com comportamento hiperelástico.

Foram, ainda, analisadas as tensões exercidas nos diferentes ligamentos ao exterior da cadeia ossicular, tendo-se concluído que o ligamento que é submetido a maior tensão é o ligamento superior do martelo, enquanto que, o de menor tensão é o ligamento posterior da bigorna.

Relativamente às tensões exercidas nas cruras do estribo, verificou-se que estas eram maiores para frequências mais graves, havendo uma diminuição dessas tensões para as frequências mais agudas. Apenas nas frequências mais graves, as tensões eram maiores nos extremos inferiores das cruras. Para frequências médias e agudas, as maiores tensões foram verificadas nos extremos superiores.

Usando o modelo constitutivo de Hill, foi feita a modelação dos músculos do ouvido médio, através de estudos estáticos e dinâmicos, tendo sido analisadas as diferentes pressões na platina do estribo e as rotações existentes sobre o seu eixo anterior-posterior e superior-inferior. Os resultados revelaram-se concordantes com os dados fisiológicos observados na prática clínica, verificando-se uma maior rotação segundo o eixo inferior-superior para uma forte activação do músculo estapediano. Foi, ainda, possível observar que a activação deste músculo, diminui a pressão exercida sobre a platina do estribo, no sentido de proteger o ouvido interno de sons mais fortes.

Aplicando à membrana timpânica diferentes níveis de pressão acústica (80, 90 e 105 dB SPL), foram determinados os respectivos deslocamentos do umbo e da parte central da platina do estribo e os resultados foram comparados com outros trabalhos anteriormente publicados.

Os resultados da presente investigação encontram-se mais concordantes com os de Prendergast *et al.* e Chia *et al.*, tendo-se verificado que comparando com resultados experimentais, estes apresentam deslocamentos maiores. Os resultados obtidos, em que se consideraram os ligamentos com comportamento hiperelástico, apresentaram-se mais próximos dos resultados experimentais.

Podemos, finalmente, concluir que o modelo mais realista pode considerar formulação de contacto para simulação dos ligamentos capsulares (entre o martelo e a bigorna e a bigorna e o estribo); por outro lado, os ligamentos que unem a cadeia ossicular ao seu exterior devem ser simulados como tendo um comportamento hiperelástico; é interessante a aplicação do modelo constitutivo de Hill na simulação dos músculos.

## 8.2 Perspectivas de trabalhos futuros

A presente tese permitiu a construção de uma base que proporcionou a simulação biomecânica do ouvido médio humano sem patologias. Todavia, o modelo construído pode permitir a possibilidade de outros estudos, nomeadamente, a avaliação de diferentes comportamentos do ouvido médio, perante as mais diversas patologias, entre elas, perfurações timpânicas, miringosclerose, timpanosclerose, otosclerose, colesteatoma, etc.

A melhoria do modelo, com a construção do ouvido externo e interno, pode permitir ter uma visão mais global do funcionamento de todo o ouvido, possibilitando avaliar a influência do ouvido externo sobre o ouvido médio, por exemplo.

Atendendo à escassez de resultados experimentais, é essencial a realização de novas experiências, especialmente, *in vivo*, o que permitiria validar e melhorar os modelos numéricos.

Seria interessante continuar com um trabalho, já iniciado, que se prende com o facto de se determinarem as correctas propriedades dos materiais, baseadas em ossículos, extraídos de humanos.

A reabilitação de pacientes com otosclerose é feita, essencialmente, por intervenção cirúrgica, substituindo o estribo, parcial ou totalmente, por uma prótese mecânica, assegurando, assim, a transmissão do som, o melhor possível. Estas próteses devem ter características biomecânicas, tais como resistência e rigidez, que permitam os melhores resultados. Ao longo do tempo vários materiais têm sido testados no sentido do seu comportamento ser aperfeiçoado. Uma futura aplicação deste trabalho poderá relacionar-se com o estudo de diferentes materiais para próteses de estribo, com o objectivo de se obterem resultados, tão próximos quanto possível, do ouvido médio normal. O mesmo se poderá testar em casos de total ou parcial desarticulação da cadeia ossicular.

A partir de imagens de TAC realizadas para determinado paciente, tornaria mais fácil a obtenção de próteses “à medida”, tornando a reabilitação mais individual.

Um melhor conhecimento da simulação do comportamento biomecânico do ouvido é fundamental, para uma melhor intervenção futura.