MÁRIO RUI MONTEIRO ALVIM DE CASTRO

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE PERFIS PULTRUDIDOS SUJEITOS A IMPACTO DE BAIXA VELOCIDADE

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica - Opção de Engenharia Estrutural

FACULDADE DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE DO PORTO
1996

MÁRIO RUI MONTEIRO ALVIM DE CASTRO

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE PERFIS PULTRUDIDOS SUJEITOS A IMPACTO DE BAIXA VELOCIDADE

DEMEGI-FEUP
188508
B2/CAS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica - Opção de Engenharia Estrutural

621(043)/CASm/EST
11803
621(043)
04 06 97

FACULDADE DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE DO PORTO
1996

RESUMO

Neste trabalho foi efectuado o estudo do comportamento de perfis pultrudidos sujeitos a impacto de baixa velocidade.

No primeiro capitulo foi abordado o processo de pultrusão. Na necessidade de conhecer as características mecânicas, foi efectuado um estudo sobre este processo e a constituição destes produtos. Com base neste estudo, e sabendo que as propriedades dos materiais compósitos dependem das percentagens de fibra e de carga, foram realizados alguns ensaios para determinação das propriedades mecânicas deste tipo de produtos e a relação entre estas percentagens e as suas propriedades. Para tal foram realizados ensaios de flexão e de impacto (por queda livre de peso).

O estudo do comportamento ao impacto de perfis pultrudidos foi efectuado através do modelo mola-massa com dois graus de liberdade, que é referido no terceiro capitulo. A determinação do comportamento ao impacto é realizado por métodos numéricos.

Neste trabalho também foi abordado o assunto da absorção de energia deste tipo de materiais, onde são determinados os coeficientes de dissipação de energia ou de amortecimento. Aqui foi mostrado que a absorção de energia em materiais compósitos depende do tipo de empilhamento da fibra.

ABSTRACT

In this work it was made the study of pultruded profiles behaviour due to low velocity impact.

In the first chapter was study the pultrusion process. In the need of known of the mechanical properties it was made a study of this process and the constitution of this products. With base of this study, and known that the composites materials properties depend of the rate of fibre and filler, it was made some tests to find the mechanically properties of this products and the relation between this rates and these properties. So, it was made flexural and impact (by instrument falling-weight impact test system) tests.

The study of the impact behaviour of pultruded profiles it was made by the mass-spring model of two degrees of freedom, that it s refereed in the third chapter. The determination of impact behaviour it is made by numerical methods.

In this work the energy absorption of this materials also have been made, where was determinate the dissipation or damping coefficients. Here was shown that the energy absorption of composite materials depend of the kind of stack.

AGRADECIMENTOS

Diferentes pessoas e entidades contribuíram, de forma diversa, nos trabalhos conduzentes à concretização desta dissertação. A todas elas gostaria de exprimir o meu reconhecimento. Gostaria, no entanto, de particularizar alguns agradecimentos.

Ao Prof. Doutor António Torres Marques, que acompanhou e orientou este trabalho de investigação. Desejo exprimir-lhe a amizade e gratidão pelo apoio, estímulo e ambiente de amizade que me proporcionou em todo o período de trabalho.

Aos meus colegas da Unidade de Materiais Compósitos do INEGI, que agradeço o espírito de amizade e apoio, bem como os valiosos comentários e sugestões.

Ao Eng. Marcelo Moura, agradeço a disponibilização do seu programa de modelação mola-massa com dois graus de liberdade que serviu de base para a modelação aqui apresentada.

Ao meu colega António Tomé dos Santos, a disponibilidade e apoio para a conclusão desta dissertação.

À empresa ALTO - Perfis Pultrudidos, Lda, que agradeço a colaboração na realização dos provetes.

Finalmente à minha família e em especial ao meu filho Francisco, a quem dedico esta dissertação, agradeço o carinho e apoio que sempre me deram.

ÍNDICE GERAL

CAPITULO 1 - OBJECTIVOS E INTRODUÇÃO 1

1.1. OBJECTIVOS 2
1.2. INTRODUÇÃO 2
1.3. REFERÊNCIAS 5

CAPITULO 2 - PULTRUSÃO 6

2.1. INTRODUÇÃO 7
2.2. PROCESSO DE PULTRUSÃO 8
2.3. MATERIAIS 10
2.3.1. FIBRAS 10
2.3.2. RESINAS 12
2.3.3. CARGAS 13
2.4. EQUIPAMENTO 14
2.4.1. SISTEMA DE SUPORTE DO REFORÇO 15
2.4.2. IMPREGNAÇÃO DAS FIBRAS 16
2.4.3. FIEIRAS 17
2.4.4. FASE DE TRACÇÃO 18
2.4.5. CORTE 20
2.4.6. CONTROLOS 21
2.4.7. HIGIENE E SEGURANÇA 22
2.5. VANTAGENS E LIMITAÇÕES DO PROCESSO DE PULTRUSÃO 22
2.6. CARACTERISTICAS DOS PERFIS PULTRUDIDOS 24
2.7. APLICAÇÕES 25
2.8. REFERÊNCIAS 27

CAPITULO 3 - IMPACTO DE BAIXA VELOCIDADE - CÁLCULO DA FORÇA E DO TEMPO DE IMPACTO 28

3.1. INTRODUÇÃO 29
3.2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA 30
3.3. MODELO DE BALANÇO DE ENERGIA 32
3.4. MODELO MOLA-MASSA 36
3.5. REFERÊNCIAS 39

CAPITULO 4 - CARACTERÍSTICAS ELASTO-DISSIPATIVAS DE CORPOS ANISOTRÓPICOS 41

4.1. INTRODUÇÃO ... 42
4.2. CARACTERIZAÇÃO ELÁSTICA DE CORPOS ANISOTRÓPICOS ... 43
4.2.1 FORMA MATRICIAL DA LEI DE HOOKE ... 45
4.2.2 CASOS ESPECIAIS DE SIMETRIA ELÁSTICA ... 48
4.2.2.1 O PLANO DE SIMETRIA ELÁSTICA ... 48
4.2.2.2 CORPO ORTOTRÓPICO ... 49
4.2.2.3 O PLANO DE ISOTROPIA E O PLANO TRANSVERSAL DE ISOTROPIA DE UM CORPO ... 51
4.2.3 ESTADO PLANO DE TENSÃO ... 52
4.2.4 TRANFORMAÇÃO DAS CARACTERISTICAS ELÁSTICAS SUJEITO A ROTAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS ... 54
4.3. PERDAS DE ENERGIA DE UM CORPO ANISOTROPICO SUJEITO A UM CARREGAMENTO CÍCLICO ... 58
4.3.1 FRICÇÃO INTERNA INDEPENDENTE DA AMPLITUDE ... 60
4.3.2 FRICÇÃO INTERNA DEPENDENTE DA AMPLITUDE PARA CORPOS ISOTRÓPICOS ... 63
4.4. MODULO COMPLEXO DE CORPOS ANISOTRÓPICOS ... 69
4.5. TENSORES DAS CARACTERÍSTICAS ELASTO-DISSIPATIVAS PARA MATERIAIS COM DIFERENTES TIPOS DE SIMETRIA ... 73
4.6. SISTEMA DAS CONSTANTES DE ENGENHARIA ... 75
4.7. ESTADO PLANO DE TENSÃO ... 78
4.8. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ... 81
4.9. REFERÊNCIAS ... 85

CAPITULO 5 - RESPOSTA DISSIPATIVA DE COMPÓSITOS REFORÇADOS COM FIBRAS UNIDIRECCIONAIS 86

5.1. INTRODUÇÃO ... 87
5.2. COMPÓSITOS DE FIBRAS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICAS E MATRIZ ISOTRÓPICA: ESTADO DE TENSÃO TRIDIMENSIONAL ... 87
5.3. ESTADO PLANO DE TENSÃO PARA UM COMPÓSITO DE FIBRAS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICAS E MATRIZ ISOTRÓPICA ... 95
5.4. COMPÓSITO DE FIBRAS ISOTRÓPICAS E MATRIZ ISOTRÓPICA: ESTADO DE TENSÃO TRIDIMENSIONAL ... 96
5.5. ESTADO PLANO DE TENSÃO PRA UM COMPÓSITO DE FIBRAS ISOTRÓPICAS E MATRIZ ISOTRÓPICA ... 112
5.6. REFERÊNCIAS ... 116

CAPITULO 6 - PROPRIEDADES DISSIPATIVAS DE COMPÓSITOS LAMINADOS 117

6.1. INTRODUÇÃO ... 118
6.2. CARACTERISTICAS ELÁSTICAS DE COMPÓSITOS LAMINADOS ... 119
6.2.1 ESTADO PLANO DE TENSÃO DE COMPÓSITOS LAMINADOS ... 120
6.2.2 FLEXÃO DE COMPÓSITOS LAMINADOS ... 122

6.2.2.1 EXEMPLO 1. UMA ESTRUTURA LAMINADA SIMETRICA COM O NÚMERO TOTAL DE CAMADAS IMPAR 125
6.2.2.2 EXEMPLO 2. UMA ESTRUTURA LAMINADA ASSIMÉTRICA COM UM NÚMERO TOTAL DE CAMADAS PAR. 127
6.2.3 RELAÇÕES INVERSAS 127
6.3. COMPORTAMENTO DISSIPATIVO DE COMPÓSITOS LAMINADOS SUJEITOS A ESTADO PLANO DE TENSÃO 129
6.3.1 COMPÓSITOS COM CAMADAS ANGULARES (ANGLE-PLY) 131
6.4. DISSIPAÇÃO DE ENERGIA EM COMPÓSITOS LAMINADOS SUJEITOS A FLEXÃO 138
6.4.1 O CASO GERAL DE LAMINADOS COM *N* CAMADAS 138
6.4.2 MODOS DE CARREGAMENTO DE COMPÓSITOS MULTICAMADA - O MODO DE FLEXÃO LIVRE 141
6.4.3 ESTRUTRAS SIMÉTRICAS DE COMPÓSITOS HÍBRIDOS LAMINADOS. TIPOS ESPECÍFICOS DE COMPÓSITOS 143
6.5. REFERÊNCIAS 151

CAPITULO 7 - RESULTADOS **152**

7.1. INTRODUÇÃO 153
7.2. RESULTADOS EXPERIMENTAIS 153
7.2.1 ENSAIOS DE FLEXÃO 154
7.2.1.1 SÉRIE 50F40C 158
7.2.1.2 SÉRIE 60F40C 160
7.2.1.3 SÉRIE 75F40C 161
7.2.1.4 SÉRIE 75F20C 163
7.2.1.5 SÉRIE 75F10C 164
7.2.2 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS 165
7.2.3 ENSAIOS DE IMPACTO 171
7.2.3.1 SÉRIE 50F40C1-3 173
7.2.3.2 SÉRIE 50F40C4-6 174
7.2.3.3 SÉRIE 50F40C7-9 176
7.2.3.4 SÉRIE 60F40C1-3 177
7.2.3.5 SÉRIE 60F40C4-6 178
7.2.3.6 SÉRIE 60F40C7-9 179
7.2.3.7 SÉRIE 75F40C1-3 180
7.2.3.8 SÉRIE 75F40C4-6 181
7.2.3.9 SÉRIE 75F40C7-9 182
7.2.3.10 SÉRIE 75F20C1-3 183
7.2.3.11 SÉRIE 75F20C4-6 184
7.2.3.12 SÉRIE 75F20C7-9 186
7.2.3.13 SÉRIE 75F10C1-3 187
7.2.3.14 SÉRIE 75F10C4-6 188
7.2.3.15 SÉRIE 75F10C7-9 189
7.2.4 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS 190
7.2.4.1 VELOCIDADE DE IMPACTO DE 3.5 M/S 190
7.2.4.2 VELOCIDADE DE IMPACTO DE 3.0 M/S 196
7.2.4.3 VELOCIDADE DE IMPACTO DE 2.5 M/S 201
7.3. RESULTADOS NUMÉRICOS 206
7.4. RESULTADOS ANALITICOS 211

7.5. REFERÊNCIAS 214

CAPÍTULO 8 - SÍNTESE, CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS **215**

8.1. SÍNTESE, CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS 216

CAPÍTULO 1

OBJECTIVOS E INTRODUÇÃO

1.1. OBJECTIVOS

O objectivo desta tese é o impacto de baixa velocidade de materiais compósitos, nomeadamente, o estudo do comportamento de perfis pultrudidos sujeitos a impacto de baixa velocidade.

1.2. INTRODUÇÃO

O processo de pultrusão surgiu nos Estados Unidos nos anos cinquenta, quando Brandt Goldsworthy inventou a primeira máquina de pultrusão [1]. Goldsworthy foi pioneiro nas aplicações dos perfis pultrudidos nas estações espaciais, aplicações aeroespaciais e outras aplicações de alta tecnologia.

Em 1990 o mercado Norte Americano dos perfis pultrudidos cresceu a uma a taxa de 10% [1] ao ano, chegando mesmo nos anos seguintes a aumentar para 12 - 20% [2]. Com base na referência [1] é mostrado no gráfico 1.1 o consumo dos produtos pultrudidos na América do Norte desde 1970.

O consumo de perfis pultrudidos no mercado Europeu é significativamente inferior ao do mercado Norte Americano, mas o seu crescimento é bastante promissor, tendo actualmente crescimentos de 10% ao ano [2].

Em Portugal, este processo é relativamente recente, existindo actualmente uma única máquina nas instalações do INEGI - Instituto de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, que esteve à disposição deste trabalho.

Devido à potencialidade destes produtos, das quais se destaca a ausência de manutenção e o seu baixo peso especifico, quando comparado com os materiais tradicionais de engenharia, e ao crescimento do mercado em Portugal, mas do qual não existem dados concretos. Este facto relaciona-se com a falta de conhecimento de

algumas empresas, que importam esporadicamente estes produtos em que o nome do produto aparece simplesmente como PRV (plástico reforçado com vidro), que como se pode interpretar cobre todo o campo dos materiais compósitos com reforço de fibra-de-vidro. Como tal, o registo de importação de perfis pultrudidos é praticamente inexistente.

Estando o mercado nacional em franca expansão, no consumo dos perfis pultrudidos, este tema parece merecedor de um estudo mais aprofundado, o qual foi objecto deste trabalho.

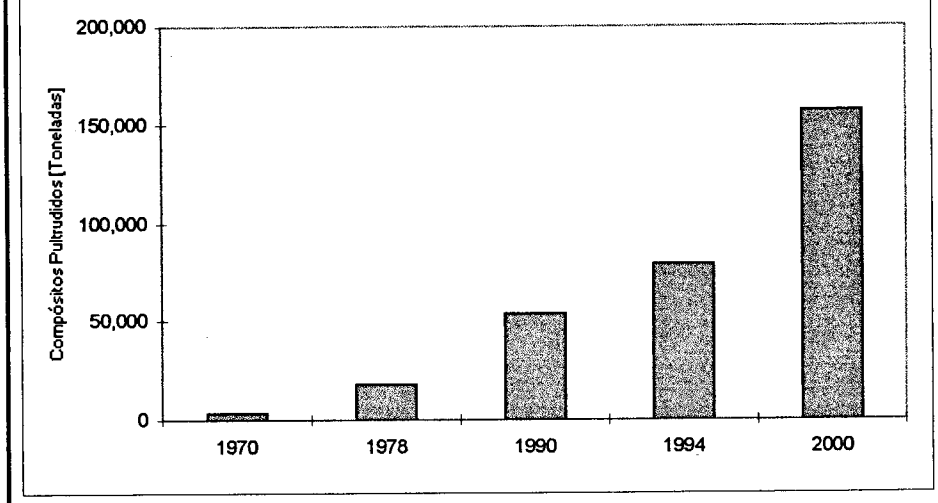


Gráfico 1.1 - Evolução do consumo de perfis pultrudidos do mercado Norte Americano

O trabalho apresentado nesta tese divide-se essencialmente três partes, sendo a primeira o estudo do processo de pultrusão. Sendo um processo novo em Portugal e tendo uma máquina à disposição foi efectuado um estudo da forma como o processo de efectua. factor essencial para a produção de perfis é a resina e a sua formulação. Como tal, efectuou-se alguns estudos sobre o comportamento de algumas resinas no processo de pultrusão. Após este estudo, produziu-se algumas barras de pultrusão com diferentes percentagens de fibra e de carga, a partir das quais foram retirados provetes para ensaios de flexão e de impacto. O objectivo dos ensaios de flexão é fazer uma caracterização das propriedades mecânicas dos perfis pultrudidos, nomeadamente, o módulo de elasticidade e a resistência à rotura, em função das percentagens de fibra e de carga.

Um outro factor a ter em consideração neste estudo foi o estudo do comportamento ao impacto de materiais compósitos. Com base no modelo de Hertz modificado foi elaborado um programa para simulação do comportamento de materiais compósitos ao impacto, nomeadamente, o gráfico força-deslocamento. Este tipo de comportamento foi determinado experimentalmente através de ensaios de impacto, utilizando uma máquina de ensaios de queda de peso por gravidade. Nestes ensaios experimentais foram ensaiados alguns provetes com diferentes percentagens de fibra e de carga.

Foi também realizado um estudo sobre a absorção de energia em função das características do compósito e nomeadamente do seu empilhamento. Em função destas características foram determinados os factores de dissipação de energia.

1.3. REFERÊNCIAS

[1] *Reinforced Plastics*, October 1994, pp. 26-28.

[2] *Reinforced Plastics*, June 1995, pp. 52-54.

CAPÍTULO 2

PULTRUSÃO

2.1. INTRODUÇÃO

Pultrusão é o nome atribuído ao processo automático para a produção, em continuo, de produtos de secção constante, sendo a maior parte destes produtos perfis e tubos. Este processos é aplicado exclusivamente a materiais compósitos.

O processo pode ser comparado com a extrusão convencional; com a diferença de que a força para obrigar o material a atravessar a fieira é aplicada após esta, através de um sistema de tracção que agarra o perfil, enquanto que na extrusão é aplicada pressão antes da fieira.

Como a Pultrusão é um processo continuo, beneficia de vantagens inerentes da eficiência e controle efectivo do processo, resultando em propriedades uniformes e com bom toleranciamento dimensional. Também, como resultado da continuidade do processo, podem ser produzidos perfis com qualquer comprimento, tendo como única limitação o transporte do perfil. É também normal produzir rolos de perfis de pequena secção, podendo assim ter alguns quilómetros de comprimento, o que facilita o transporte.

É possível produzir qualquer secção, que podem ser bastante planas com elevado brilho, embora para aplicações industriais não seja normalmente solicitado tal acabamento.

A Pultrusão é um dos grandes processos dos plásticos reforçados com fibra-de-vidro (PRFV), embora outros tipos de fibra possam também ser utilizados, com por exemplo as fibras de carbono e aramida (Kevlar®).

Este processo tem sido desenvolvido de encontro às necessidades dos plásticos estruturais com altas propriedades mecânicas e físicas - compósitos que podem competir com os materiais de engenharia tradicionais (aço, alumínio). Este processo permite obter perfis de secções diversas e complexas, sendo algumas delas impossíveis de obter para perfis metálicos.

2.2. PROCESSO DE PULTRUSÃO

O processo de pultrusão consiste, geralmente, no arrasto de fibras continuas (roving) manta e/ou tecidos contínuos. Estes são impregnados num banho de resina passando de seguida por um sistema de guiamento e controlo, onde é retirado o excesso de resina e é dada a conformação às fibras de forma a que estas tenham a forma aproximada à secção a produzir. Estas passam de seguida por uma fieira aquecida com a forma da secção do perfil e onde se efectua a cura do compósito. Os materiais são conformados e curados à medida que a secção progride ao longo da parte aquecida da ferramenta. O avanço do perfil é efectuado através de um sistema de tracção que permite o movimento continuo e controla a velocidade de produção.

A velocidade de produção é controlada de forma a que a cura seja efectuada completamente no tempo em que o produto se encontra na fieira. Isto é necessário para o material ter resistência suficiente para resistir às forças exercidas durante a fase de tracção. Depois de passar o sistema de tracção, existe um sistema de corte onde os perfis são cortados no comprimento desejado.

O processo de Pultrusão, bem como a maioria dos métodos de fabricação dos plásticos reforçados com fibra, envolve as seguintes fases:

1. Impregnação do reforço de fibra por resina liquida.
2. Consolidação para remover ar e excessos de resina.
3. Conformação e cura no molde.
4. Desmoldação e termo.

Afim de efectuar todas estas fases, as máquinas de Pultrusão são constituídas basicamente por:

- Sistema de suporte do reforço
- banho de resina
- conformação do reforço e remoção do excesso de resina

- fieira aquecida
- sistema de tracção
- sistema de corte

Na figura 1.1 está indicado como estes passos são integrados no processo automático continuo.

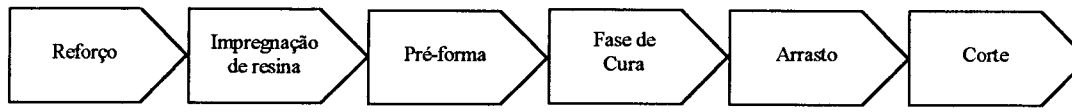


Figura 1.1 - Elementos essenciais do processo de Pultrusão.

Uma disposição esquemática de uma unidade de produção simples de Pultrusão encontra-se na figura 1.2.

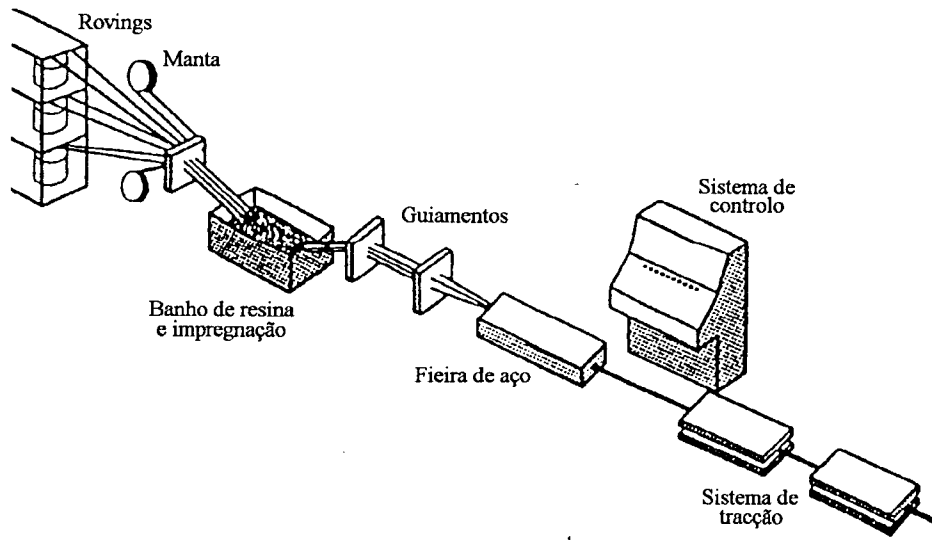


Figura 1.2 - Diagrama esquemático do processo de Pultrusão.

2.3. MATERIAIS

No processo de pultrusão são utilizados como matérias essenciais o reforço, a resina e as cargas, produtos estes que serão objecto de abordagem de seguida.

2.3.1. FIBRAS

O grande mercado do processo de Pultrusão são os produtos com reforço de fibra-de-vidro, embora se possa utilizar qualquer outro tipo de fibras ou arame que seja compatível com as condições de cura. Em produtos pultrudidos comerciais são predominantes as fibras-de-vidro produzidas a partir de vidro-E. A qualidade é importante para todos os processos automáticos, mas a Pultrusão é sensível à qualidade das fibras, o processo é impraticável se o reforço não for consistente. Por esta razão, em muitos casos, vários tipos específicos de reforço têm sido desenvolvidos, os quais são especialmente adequados ao processo de Pultrusão.

Também, para o controlo das propriedades mecânicas do produto, as fibras têm importantes efeitos no estado de processamento. É essencial para a continuidade do processo que o reforço tenha resistência longitudinal suficiente para agir como um transportador, para arrastar o material através do processo. As fibras também ajudam a evitar a aderência da resina à superfície da fieira durante a fase de cura. É necessário uma quantidade elevada de fibras para assegurar que as fibras externas sejam pressionadas contra a superfície da fieira e assim efectuar o movimento continuo da resina até ao estado critico, quando começa a curar.

Os fios de fibra (*rovings*) são incorporados na maioria dos produtos para obter resistência longitudinal no processo e no produto final. Quando utilizado como único reforço podem ser conseguidas altas fracções de fibra, resultando um produto com propriedades mecânicas elevadas. Mas estas propriedades são essencialmente unidireccionais e a resistência interlaminar ao corte, sendo controlada largamente pela matriz de resina, é relativamente baixa. É, no entanto, também utilizada uma gama de

reforços multidireccionais em algumas aplicações para obter as propriedades mecânicas desejadas em outras direcções para a aplicação do produto final. Uma característica deste tipo de reforço é o seu *Tex* (peso por quilometro linear), havendo *Tex* de 300, 1200, 2400,4800 e 9600. Conforme o tipo de perfil, de pequena ou grande secção, é escolhido o *Tex* mais apropriado.

Os *spun rovings* são um compromisso útil, combinando a resistência longitudinal com a componente transversal por meio de fios soltos (tipo cordão de sisal), os quais são torcidos ou esmagados durante a produção. Como produtos de especialidade, estes são mais caros do que os *rovings* normais e o seu uso é restrito apenas a algumas aplicações.

Rovings, mantas e tecidos estão disponíveis em variáveis formas. Estas têm boas características de processamento com excelente resistência, quando impregnados, e dão ao produto um alto nível de resistência bidireccional. A resistência ao corte interlaminar entre camadas adjacentes de reforços de tecidos é geralmente fraca, sendo estes, no entanto, normalmente utilizados em conjunto com outros materiais. Como cada forma tem o perímetro diferente as mantas e os tecidos têm de ser cortados com larguras diferentes, este é cortado para a produção com uma largura especifica precisa, com uma costura ou borda limite para evitar a desorientação das fibras no caso dos tecidos. Os tecidos são entre as formas mais caras de reforço de vidro e tendem a ser utilizado com moderação. Ligações mecânicas, fitas de materiais não tecidos são utilizadas para aplicações de elevadas performances para evitar a redução nas propriedades associadas com o esmagamento, o qual ocorre no processo de tecelagem, nomeadamente no caso dos tecidos tridimensionais.

Manta de filamentos contínuos é provavelmente a forma de reforço cruzado mais vulgarmente utilizado em Pultrusão. Gamas especiais para Pultrusão têm sido desenvolvidos para combater o problema de arrasto da manta durante a fase de impregnação. Deve-se assegurar uma boa impregnação das mantas de forma a eliminar bolhas de ar. Uma das características das mantas é a sua gramagem (peso por metro quadrado), havendo gramagem de 300 e 450 gr/m^2. A sua escolha depende também do tipo de perfil a produzir, não esquecendo que para geometrias mais complexas deve-se utilizar uma manta mais flexível, por forma a facilitar a sua conformação.

Tecidos de superficie, denominados também como véu de superficie, são por vezes utilizados para melhorar a superficie final e características de resistência aos ultra-violetas de alguns perfis. Tecido feito de vidro é especificado para resistência química,

embora considerável interesse tem sido desenvolvido em superfícies de tecidos de poliéster, como por exemplo, imitação de madeira.

2.3.2. RESINAS

No processo convencional de pultrusão são normalmente utilizadas resinas termoendureciveis. As resinas de poliéster são as mais utilizadas no processo de pultrusão por razões económicas e características de processo. Elevada reactividade e velocidades de cura rápidas, são geralmente necessárias, e os mecanismos livres radicais de cura das resinas de poliéster torna-o particularmente desejado para a pultrusão. Dentro destas, são utilizadas resinas do tipo ortoftálicas ou isoftálicas, a escolha depende do aquecimento e da resistência química especifica do produto.

Uma das resinas mais reactivas é a resina acrílica, e saliente-se as resinas da *Ashland* denominadas *Modar*. Estas resinas permitem velocidades de produção muito maiores e forças de tracção extremamente baixas, devido à sua baixíssima viscosidade, que tem vantagens na fase de impregnação para assegurar (penetração e superfície húmida) e reduz o derrame de resina no espremedor. Como desvantagem deste tipo de resinas, tem-se o seu custo e a menor resistência química.

Um grau de flexibilidade na cura da resina é desejado para reduzir as tensões térmicas devido ao rápido ciclo de cura. Um número de aditivos é também utilizado para reduzir a contracção e dar no final um bom acabamento superficial.

Agentes de cura de peróxido adequados a condições de cura a quente são adicionados à resina para assegurar um adequado tempo de vida para a mistura de resina, combinada com a desejada velocidade de cura. Um agente interno desmoldante eficiente é essencial para prevenir a adesão entre a resina e a superfície da fieira na fase de cura. O agente desmoldante também lubrifica a interface entre o produto sólido e a superfície da fieira bem como a secção que é arrastada para fora da fieira.

Outros tipos de resinas podem ser especificadas para melhorar as propriedades mecânicas e eléctricas e aumentar a resistência ao fogo e à corrosão. As resinas de epóxido, embora mais caras, têm muitas propriedades atractivas, mas o seu uso é restrito

as aplicações especificas devido a problemas de processamento. As velocidades de produção são baixas e os custos mais elevados do que com as resinas de poliéster. As excelentes propriedades adesivas do epóxido também facilita a adesão do material à superfície da fieira, aumentando a força de tracção na fase de arrasto. Um compromisso útil é encontrado em resinas de viniléster, que combinam excelentes performances mecânicas e resistência químicas com as boas características de processamento dos poliésteres. As resinas fenólicas são difíceis de processar, mas são de elevada importância devido às suas propriedades de resistência ao fogo.

Resinas termoplásticas têm problemas especiais de processamento. A maior dificuldade é a obtenção da adequada adesão no estado de impregnação. Tanto a fusão quente como os sistemas de solvência têm sido utilizados com algum sucesso em algumas aplicações. Polímeros de alta performance, tais como os poli(eter sulfona) dão boa resistência mecânica e excelente resistência térmica, mas o alto custo destes polímeros associado com técnicas especiais de processamento requeridas têm restringido o campo de aplicações comerciais.

Uma nova técnica de produção de perfis pultrudidos termoplásticos, baseia-se na utilização de fibras pré-impregnas com termoplástico. Estas costumam aparecer em duas forma, os *towpregs* , que consistem em *rovings* impregnados com resina, e a *tape*, que consistem em bandas de fibras impregnadas. Este processo ainda no seu inicio, precisa de uma fieira aquecida e outra arrefecida, sendo a primeira para fundir o termoplástico e a segunda para arrefecer o perfil de forma consolidar o termoplástico.

2.3.3. CARGAS

No processo de Pultrusão as cargas são utilizados como auxiliares do processo e para diminuição dos custo da formulação. A viscosidade e efeitos de filtragem geralmente restringe o nível de cargas a um máximo de 40 partes por 100 de resina (ppc) e 10-20 ppc é a gama mais comum, embora algumas resinas permitam ir até a 200 ppc, como é o caso das resina acrílicas. O tamanho das partículas e forma são críticos, um pequeno diâmetro e forma esférica têm vantagens. A selecção cuidada da distribuição do tamanho

das partículas para melhorar as características é importante se se quiser obter altos níveis de conteúdo de cargas.

Carbonato de cálcio é provavelmente a carga mais utilizada, bem como de menor custo, auxilia o processo, e melhora o produto reduzindo a contracção. Talco é também utilizado quando é requerido resistência química. Tanto o trióxido de antimónio como os óxidos de hidratos de alumínio (hidróxido de alumínio) são adicionados para dar propriedades de retardadoras de fogo, normalmente em conjunto com componente de hidrocarbonato halogenado na resina. Polietileno, como pó puro, pode também ser incorporado em formulações de baixa contracção, como expansor do termoplástico na compensação do aquecimento para contracção na resina.

Pastas de pigmento são adicionadas em cerca de 2 ppc para colorar o produto final.

2.4. EQUIPAMENTO

Como o equipamento de Pultrusão é operado continuamente, muitas vezes 24 horas por dia, qualquer paragem ocasional poderá ser desastrosa, porque a resina cura e obstrui a fieira. No entanto, é essencial, que o equipamento de Pultrusão seja dimensionado e construído para assegurar um alto grau de robustez e confiança. Por estas razões, muitas companhias empreenderam-se na escolha de operações de produção por Pultrusão para comprar uma linha de produção completa com uma "*package*" associada que inclua "*know-how*" técnico, formulações e treino.

2.4.1. SISTEMA DE SUPORTE DO REFORÇO

Filamentos de vidro na forma de rolos (*rovings*), são colocados numa estrutura apropriada. Para a produção de um perfil são geralmente necessários dezenas de rolos e como cada rolo pesa cerca de 15 Kg a estrutura de suporte deve ser capaz de suportar o considerável peso envolvido. Deve-se efectuar um dimensionamento compacto por forma a conservar espaço no chão, afim de deixar uma área suficiente para permitir a substituição dos rolos durante a operação. Um rolo em média contém cerca de 6000 - 10000 metros lineares, dependendo do *Tex*, e é substituído durante a produção efectuando-se uma emenda.

É geralmente preferido o desenrolar do rolo pelo seu centro, sendo os filamentos arrastados através de um anel suspenso verticalmente sobre o centro de cada rolo. É essencial ter cuidado para prevenir estragos por abrasão ou emaranhamento causado por nós. Embora uma ligeira tensão seja desejada em todos os filamentos, não é geralmente aplicada nesta fase porque seria necessário um grande número de unidades, em vez disso as fibras são arrastadas através de barras de tensão logo à saída da estrutura de suporte.

Formas de tecido ou manta de reforço de fibra-de-vidro são fornecidas como bobinas cortadas com uma largura especificada. Um eixo simples central é tudo o que é necessário para a desenrolar mas a montagem deve ser cuidadosamente posicionada. Para alguns tipos de perfis pode ser necessário diversas bobinas, como elas muitas vezes apenas contêm 180 metros lineares, provisões devem ser efectuadas para as bobinas por forma a poderem ser colocados de uma forma rápida e fácil. Uma variedade de métodos para juntar bobinas são utilizados dependendo do tipo de reforço. O tecido pode ser costurado e uma junta dobrada pode muitas vezes ser tolerada. Juntas fortes são mais difíceis de obter com manta. O problema pode ser ultrapassado utilizando fitas adesivas especiais, costuradas a um transportador de tecido. O controlo da tensão em tecidos e mantas é essencial para evitar o enrugamento.

As fibras-de-vidro estragam-se facilmente e em equipamento continuo forma-se um aglomerado de fibras rapidamente e obstrui as aberturas. Embora a velocidade linear do reforço de fibras no equipamento de pultrusão seja muito menor que os outros processos, como o enrolamento filamentar, a colocação das fibras e o guiamento é ainda

o mais importante por causa das enormes quantidades envolvidas. A absorção de água pode ser um problema em atmosferas húmidas por causa das grandes superfícies de filamentos expostas. Pode ser prevenido por condicionamento de ar ou pré-aquecimento das fibras antes da impregnação.

2.4.2. IMPREGNAÇÃO DAS FIBRAS

Existem dois métodos principais utilizados para impregnar o reforço de fibra com resina termoendurecivel. A técnica mais simples é arrastar as fibras através de um, banho aberto de resina. As fibras são espaçadas e devem permanecer no banho o tempo suficiente para assegura uma completa molhagem durante a fase de impregnação. As fibras podem ser arrastadas à volta de uma série de barras para aumentar o caminho efectivo para um determinado volume de resina. A agitação mecânica também ajuda a melhorar a impregnação.

A pré-forma do perfil é efectuada por uma série de guias, os quais estão colocados por forma a retirar o excesso de resina progressivamente e alimenta um feixe de fibras de composição e forma pré-determinada para a entrada da fieira de Pultrusão. O excesso de resina é conduzido para a tina por um tabuleiro colocado debaixo dos guiamentos para reutilização.

O desfiar, a distorção e o "cotão" nas barras de guiamento são problemas típicos a ser ultrapassados se for requerido um alto grau de precisão e se a qualidade do produto for mantida ao longo de períodos longos da operação continua. Por estas razões, métodos alternativos de impregnação de resina têm sido desenvolvidos, os quais, utilizam técnicas de injecção de resina.

O sistema de injecção de resina elimina a necessidade de uma tina de resina aberta. Em vez disso, o feixe seco do reforço de fibras é alimentado directamente na entrada da fieira e a resina é injectada numa cavidade de impregnação especial situada a pequena distância da entrada da fieira. São utilizadas pressões até 6 atm para assegurar que a resina se infiltre completamente no feixe de fibras e efectue uma boa impregnação. O dimensionamento e posicionamento da cavidade de resina é critico por causa da

impregnação das fibras e é um factor dependente da velocidade de produção. Durante a produção a unidade é operada de forma a que a cavidade da resina esteja sempre fluída e uma contra-corrente de fluxo de resina volte através das fibras a uma velocidade que ocorra um gotejamento desde a entrada da fieira. Sobre estas condições existe um equilíbrio dinâmico entre a pressão, a viscosidade da resina, a fracção de fibra e a velocidade linear do feixe de fibras. Um número de métodos alternativos são operados e a resina pode ser fornecida num contentor pressurizado ou pode ser pressurizada por meio de uma bomba de alta pressão. O pré-aquecimento da resina é possível para reduzir a viscosidade e aumentar a velocidade de cura mas deve ser tomado cuidado para não ocorrer a cura prematura da resina. A cavidade para a resina pode ser integrada com a fieira, ou pode ser uma componente fixa para o extremo de entrada da fieira. Em todas estas variações, no entanto, o objectivo é controlar a posição de cada grupo de fibras no conjunto de reforço e prever o movimento causado pelo "*washing*" durante a impregnação das fibras. O equipamento de impregnação é rápido e facilmente desligado, o desperdício de resina deve ser limpo com um solvente não inflamável, em contraste com o sistema com banho de resina que necessita de limpeza exaustiva. Outras vantagens incluem níveis reduzidos na atmosfera de estireno, condições de trabalho limpas e poucos desperdícios de resinas.

Por vezes é utilizado um método de impregnação de baixa pressão, no qual o tanque ou câmara substitui a cavidade para a resina. O reforço de fibras passa direito através do tanque e embora a entrada e a saída restringem consideravelmente a fuga de resina, esta ocorrerá sempre nestes pontos. As fibras podem ser largamente espaçadas o que facilita a impregnação. O *wasinhg* e distorção das mantas pode ser um problema que é dificil de detectar ou corrigir antes da quebra na produção.

2.4.3. FIEIRAS

A maioria das operações de Pultrusão comerciais utilizam fieiras de aço aquecidas para dar forma ao produto. As superfícies de trabalho são normalmente cobertas por uma camada de crómio e polida para reduzir o desgaste e melhorar o acabamento superficial

do produto. Tolerâncias precisas de maquinagem aliadas a· excelente acabamento superficial são essenciais ao longo da secção de cura da fieira por forma a manter o paralelismo e assim reduzir a fricção interna. As cavidades de injecção de resina e a distribuição de resina nos canais deve ser dimensionada de forma a permitir áreas estanques onde a resina pode curar ou detritos de fibra-de-vidro acumulam. A maioria das fieiras são produzidas como duas meias fendas ao longo do eixo longitudinal, em parte para facilitar a maquinagem, mas mais importante para permitir a abertura da fieira para limpeza. As velocidades de produção estão directamente relacionadas com o comprimento da fieira, então para grandes produções a ênfase é a utilização de fieiras compridas com 1-2 metros de comprimento. Secções tubulares são produzidas utilizando um mandril para formar as superfícies interiores. O mandril geralmente corre o comprimento total da fieira e é rigidamente suportado no extremo de entrada por uma consola para permitir o movimento lento do reforço de fibra na fieira. O custo das fieiras dependem das tolerâncias de produção e comprimento mas é baixo comparado com outros processos automáticos para a produção de PRFV. Para secções pequenas, aberturas múltiplas são preferidas permitindo produzir diversos produtos similares na mesma fieira.

As fieiras de Pultrusão operam normalmente a temperaturas entre 130 e 180°C. Resistências eléctricas são a fonte de aquecimento mais empregues, quer como cartuchos inseridos em orifícios maquinados através do bloco da fieira ou mais convenientemente como placas de aquecimento separadas as quais são fixadas do lado exterior da fieira. Aquecedores de óleo e de vapor podem também ser utilizados mas as fugas de ligações flexíveis podem ser um problema. Para perfis grandes são utilizadas um número de zonas de aquecimento controladas separadamente para permitir o aquecimento progressivo dos materiais e reduzir a temperatura de pico exotérmico, a qual ocorre com a cura da resina. Testes laboratoriais para estabilizar o tempo de gel e características exotérmicas dão os dados básicos, a partir dos quais se pode optimizar o perfil de temperaturas ao longo do eixo longitudinal da fieira e permite determinar o tempo necessário para a cura ocorrer e, em função do comprimento da fieira, estimar a velocidade de produção

Em operações normais os materiais frios entram no extremo frio da fieira e assim evita-se a cura prematura de qualquer resina que deixe de correr na entrada da fieira; no entanto, o arrefecimento por água pode ser incorporado como uma precaução auxiliar.

Quando a cavidade de injecção de resina é maquinada na fieira, a temperatura nessa região deve ser controlada para prevenir a resina de solidificar na cavidade.

As velocidades de saída dependem, em geral, da espessura da secção e do comprimento da porção aquecida da fieira. Para o equipamento convencional descrito, utilizando fieiras de um metro de comprimento, as velocidades de produção variam entre 0.5 e 3 metros por minuto sendo 1 m/min típico para varões ou tubos até 4 mm de espessura com resinas de poliéster e podendo atingir os 3 m/s com resinas acrílicas. Estas velocidades podem ser dobradas por aumento do comprimento da fieira, mas os custos da fieira crescerão dramaticamente.

Para ultrapassar os problemas de transferência de calor da cura rápida dos PRFV, métodos patenteados de aquecimento por micro-ondas têm sido desenvolvidos [2] para incorporação em maquinas sofisticadas de Pultrusão. Velocidades de produção superiores a 3 m/min, para resinas de poliéster, podem ser conseguidas embora o acabamento superficial possa deteriorar-se à velocidade máxima. No entanto, os materiais da fieira devem ser transparentes à energia de micro-ondas, os metais são impróprios e são utilizadas resistências de aquecimento em plástico como o PTFE em conjunto com a fieira metálica de pós-cura. A maquina é mais eficiente quando utilizada para produções "longas" de um só produto.

As fieiras de produção são fixadas ao suporte de armação ou mesa da fieira. Para maquinas com mais do que um par de carros de tracção são providenciadas facilidades para acomodar um número de fieiras diferentes com acesso a aquecedores, controladores e linhas de injecção de resina independentes.

2.4.4. FASE DE TRACÇÃO

Esta é a fase, bastante importante, que gera a força motriz para arrastar os materiais através do processo e o seu dimensionamento é o centro de todas as operações. Embora sistemas de arrasto intermitentes sejam conhecidos, é preferível um movimento de arrasto continuo, o qual impõe um movimento suave e estável ao perfil. À primeira vista, uma série de arrastadores ou tractores parecem ser ideais. No entanto, as forças de

tracção geradas durante a cura na fieira podem exceder facilmente milhares de quilogramas e ocorrerá escorregamento a não ser que sejam utilizadas pressões de fecho nos carros grandes. Como tal, equipamento robusto e de qualidade deve ser especificado, o qual é volumoso e caro. Os tapetes rolantes (tipo *caterpillar*) dão resultados satisfatórios para secções sólidas regulares, mas para secções ocas e a maioria das secções de engenharia, tais como, cantoneiras e perfis em U é preferível um sistema com carros de tracção.

Nos últimos anos, operações com dois sistemas de tracção num simples carro têm encontrado aprovação em produções comerciais de materiais de Pultrusão de secções diferentes. A sua concepção permite movimento estável de arrasto por sincronismo da operação do mecanismo de amarração com o movimento recíproco dos transportadores. Um sistema mecânico convencional é utilizado para conduzir os transportadores de arrasto enquanto os carros podem actuar quer por equipamento hidráulico quer por equipamento pneumático controlados por válvulas electromecânicas. Tal é construído para obter as cargas típicas das operações de Pultrusão, sem a penalidade de custos elevados. Quando são produzidos diferentes perfis ao mesmo tempo, é preferível equipamento com dois transportadores de arrasto com sistemas de fecho independentes, os quais são pouco dispendiosos de fabricar e a mudança é simples.

Equipamento com mais do que um carro de tracção tem sido desenvolvido de forma a serem produzidas até três ou quatro secções diferentes simultaneamente por preparação de múltiplas conjuntos de amarração. Por exemplo um tubo, uma cantoneira e seis varões sólidos podem ser produzidos juntos na mesma maquina, resultando numa unidade de produção compacta e eficiente. Saliente-se que todos os sistemas de amarração movem-se à mesma velocidade e a velocidade de produção será controlada pela produção mais lenta das secções.

2.4.5. CORTE

Um sistema de corte automático com uma serra diamantada é utilizado frequentemente para completar a linha de produção de Pultrusão. É necessário montar a serra numa

plataforma que se mova à mesma velocidade do perfil enquanto a operação de corte está a ser efectuada.

Para operações em que se produz mais do que um perfil ao mesmo tempo e são requeridos comprimentos diferentes, é preferível o corte grosseiro à mão com um serrote comum e então cortar com as dimensões requeridas.

2.4.6. CONTROLOS

As seguintes funções de controlo devem ser claramente mostradas no painel de controlo central.

i. Tracção: paragem/arranque; gama de velocidades como uma progressão continua; força de arrasto aplicada à secção pultrudida; pressão de fecho aplicada aos mordentes dos carros; abertura e fecho manual dos grampos independentemente da operação automática.

ii. Aquecimento da fieira: ligado/desligado; controlo da temperatura ± 2°C para cada zona de aquecimento; amperímetro para medir corrente em cada grupo de elementos de aquecimento; tempo para pré-aquecimento antes do arranque; dos circuitos interruptores para proteger os circuitos eléctricos são preferíveis aos fusíveis.

iii. Pressão de resina: ligado/desligado; pressão em cada linha de injecção de resina (para sistemas de injecção).

iv. Serra: paragem/arranque; fechado/abertura; velocidade de corte.

Botões de corte de emergência devem ser colocados na serra e em ambos os extremos da máquina.

2.4.7. HIGIENE E SEGURANÇA

O equipamento de Pultrusão não é geralmente perigoso de operar porque os componentes movem-se a velocidades relativamente baixas. As máquinas que levam roletes espremedores ou sistema de tracção tipo *caterpillar* devem ser protegidas para assegurar que roupa ou mãos não possam ser arrastadas pelo mecanismo.

Deve também ser utilizado equipamento de extracção de ar, para assegurar um boa ventilação na saída da fieira, sobre o banho de resina e na área de mistura da resina para assegurar que os níveis de vapor de estireno não excedam os níveis recomendados.

Restos de fibra-de-vidro não parece ser um perigo particular mas deve ser mantida uma limpeza mínima, por forma a manter o lixo ao mínimo. O corte ou maquinagem de produtos de PRFV devem ser acompanhados de equipamento de extracção de poeiras eficiente e os trabalhadores devem ser protegidos com mascaras.

O equipamento de corte deve estar devidamente vedado e deve conter botões de paragem de emergência ligados aos equipamento de corte automático.

Devem ser mantidas prevenções contra fogos a altos níveis porque a maioria das resinas são altamente inflamáveis e os produtos em PRFV irão suportar a combustão na eventualidade de incêndio. Catalisadores e aceleradores devem ser guardados separadamente numa área fresca e bem ventilada longe da instalação principal. Não devem ser utilizados solventes inflamáveis para limpezas gerais e do equipamento de injecção de resina.

2.5. VANTAGENS E LIMITAÇÕES DO PROCESSO DE PULTRUSÃO

A Pultrusão é um processo continuo e beneficia de vantagens inerentes da eficiência e controle efectivo do processo, resultando em propriedades uniformes e boas tolerâncias dimensionais. Também, como resultado da continuidade do processo, pode-se produzir perfis com qualquer comprimento, tendo como única limitação o transporte do perfil. É

também normal produzir rolos de perfis de pequena secção, podendo assim ter alguns quilómetros de comprimento, o que facilita o transporte.

Todas as superficies são moldadas e podem ser bastante planas e lisas com elevado brilho, embora para aplicações industriais não seja normalmente solicitado.

Na tabela 2.1 apresentam-se um resumo das vantagens e limitações do processo de Pultrusão.

Vantagens	Limitações
Processo contínuo. É possível produzir perfis de qualquer comprimento, só limitado pelo transporte; até 15 mm de espessura pode ser enrolado.	Apenas secções constantes e direitas.
Todas as superfícies são moldadas.	Não é possível aplicar *gelcoat.*
Exactidão das dimensões.	A compressão no molde não é exacta.
É possível controlar o processo a alto nível.	Custos de instalação e desenvolvimento podem ser altos.
Os custos da fieira são relativamente baixos.	Produção mínima: poliéster/vidro = 10.000 m; epóxido/vidro=1.000 m.
É possível produzir uma grande variedade de secções.	1200 mm de largura x 300 mm de altura
Possibilidade de produzir secções muito pequenas	1.5 mm de largura x 1.5 mm de altura

Tabela 2.1 - Vantagens e Limitações do Processo de Pultrusão

As vantagens e limitações apresentadas nesta tabela [3] poderão estar desactualizadas, pois esta referência já tem algum tempo.

2.6. CARACTERISTICAS DOS PERFIS PULTRUDIDOS

Os produtos pultrudidos beneficiam de vantagens inerentes do próprio processo. Neste processo o tipo de reforço é essencialmente unidireccional, o que permite obter excelentes propriedades nesta direcção. Uma das grandes vantagens dos materiais compósitos consiste no facto de se poder orientar o reforço por camadas, resultando assim no produto com características anisotrópicas, isto é propriedades diferentes em cada direcção. Como tal pode-se orientar o reforço preferencialmente numa direcção em detrimento das outras e assim concentrar a maior resistência numa direcção bem determinada em função das solicitações que vão ser impostas. Estes produtos apresentam resistência, sobretudo na direcção longitudinal muito mais elevadas que os materiais tradicionais de engenharia, que têm propriedades isotrópicas, isto é apresentam as mesmas propriedades em todas as direcções.

Na tabela 2.2 comparam-se as características de alguns materiais tradicionais de engenharia com os produtos pultrudidos. Nos perfis pultrudidos a variação das propriedades mecânicas depende essencialmente da percentagem de fibra.

Material	Resistência à tracção (MPa)	Módulo de Elasticidade (GPa)	Peso (g/cm^3)
Aço	300 - 500	210	7.8
Alumínio	250	70	2.7
PVC	50 - 100	0.5 - 3	1.05
Pultrudido	150 - 1000	15 - 40	1.6 -2.0

Tabela 2.2 - Propriedades mecânicas

Como características não menos importantes, senão mesmo mais importantes temos:

- Ausência de manutenção
- Resistência: elevada relação resistência/peso.
- Não corrosivo: resistente a ácidos e muitos produtos químicos corrosivos.
- Isolamento: excelente isolamento eléctrico, térmico e magnético.

- estabilidade dimensional: coeficiente de dilatação térmico baixo; resistência ao calor e ao frio intenso.
- Cor: são adicionados pigmentos às resinas para dar a cor desejada.
- Fabricação: os materiais são facilmente ligados através de parafusos, rebites e colagens.

2.7. APLICAÇÕES

As aplicações dos produtos de pultrusão são bastantes diversas, cobrindo áreas desde a construção civil até lazer e desporto. Alguns exemplos de aplicação estão classificadas na tabela 2.3.

Eléctricas	- Caminhos de cabos - Escadas - Armaduras - Perfis de ligação - Tirantes - Estruturas não-magnéticas - Postes de iluminação - Postes eléctricos - Cabos de ferramentas
Transporte	- Perfis para camiões - Reboques - Prumos para placas de sinalização - Estruturas de contentores e painéis - Barras de amortecimento
Construção Civil/ Anticorrosão	- Estruturas de edifícios - Beirais - Passarelas - Armaduras de câmaras de frio - Barreiras - Pontes de peões - guarda-corpos - corrimões
Lazer e Desporto	- Vara de salto - Bancos de jardim - Balizas - Canas de Pesca

Tabela 2.3 - Aplicações de perfis pultrudidos

2.8. REFERÊNCIAS

[1] Meyer, L. S., Pultrusion, 25th Annual SPI Technical Conference, USA, 1970.

[2] US Patent No. 2,781,911 (1953)

[3] Spencer, R. A. P., *Developments in Pultrusion*, chapter 1 of "Developments in GRP techonology", edited by B. Harris, Appl. Sci. Pub., London, 1983.

CAPÍTULO 3

IMPACTO DE BAIXA VELOCIDADE - CÁLCULO DA FORÇA E DO TEMPO DE IMPACTO

3.1. INTRODUÇÃO

O impacto de baixa velocidade em laminados compósitos tem tido bastante importância, devido aos danos invisíveis causados por impactos moderados, os quais diminuem a resistência mecânica.

Métodos de determinação da força de impacto [1-8], incluindo o efeito da deformação por contacto, podem ser classificados em duas categorias:

1. Método de Hertz.
2. Método de Hertz modificado.

O método de Hertz, que apenas inclui a deformação por contacto para placas suportadas nas suas extremidades sobrestima a força de impacto algumas ordens de magnitude [3]. O método de Hertz modificado inclui a deformação por flexão da placa em conjunto com a deformação por contacto.

O método de Hertz modificado despreza os efeitos das grandes deformações e da deformação de corte transverso em placas de laminados quando o impacto ocorre a baixa velocidade. Este método subestima a força de impacto para placas finas e sobrestima-a para placas espessas. Uma solução exacta para o impacto de baixa velocidade em laminados compósitos envolve uma análise dinâmica não-linear tridimensional de laminados através de uma mola Hertziana ligada ao centro da placa, mas tal análise é matematicamente bastante complexa e intratável numericamente, mesmo nos computadores modernos.

O problema considerado neste estudo é o impacto, no centro de uma placa laminada circular, por uma esfera. É assumida ser constituída por um laminado quasi-isotrópico, tendo propriedades materiais transversalmente isotrópicas. A condição fronteira é o encastramento.

Durante o impacto a placa e o impactor são submetidos a deformação por contacto e a placa é submetida, posteriormente, a deformações de flexão, corte transverso e de membrana. Estudos anteriores [1,8,10] demonstraram que a duração do impacto é muitas vezes superior ao tempo necessário para gerar ondas de tensão que se propagam até às extremidades e regressam. Além disso, os efeitos de altos modos, especialmente

quando a placa está sujeita a grandes deflexões, são pequenos e podem ser desprezados. Assim assumindo o primeiro modo de vibração da placa, dois modelos simples são apresentados:

1. Modelo do balanço de energia.
2. Modelo de mola-massa.

O modelo do balanço de energia é uma aproximação de primeiro modo ao modelo mola-massa para calcular a magnitude da força de impacto. O modelo do balanço de energia (equacionando a energia cinética do impactor antes do impacto em relação às energias de deformação do sistema placa-impactor) leva a uma equação da energia que pode ser resolvida numéricamente para a força máxima. No entanto, para determinar a história completa da força durante o impacto, foi desenvolvido o modelo mola-massa. No modelo mola-massa, o impactor e a placa são representados por duas massas rígidas e as características associadas de deformação são representadas por molas. Equações do movimento de duas massas são obtidas utilizando a segunda lei de Newton do movimento. O resultado conjugado das equações diferenciais não-lineares são resolvidos utilizando uma técnica de integração numérica. As duas análises foram comparadas e estão descritas em [4,9].

3.2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A figura 3.1(a) mostra um impactor esférico de raio R_I, massa M_I e velocidade V_o dirigida ao centro de uma placa circular de raio a e espessura h. A placa é assumida ser constituída de um laminado quasi-isotrópico tendo propriedades materiais transversalmente isotrópicas, isto é, o material é isotrópico no plano perpendicular ao carregamento. É assumido um sistema de coordenadas cilíndricas com origem no centro da placa. Uma secção representativa da placa, $\theta = C^{te}$, é mostrada na figura 3.1.

Durante o impacto ($t>0$, figura 3.1(b)) a força de impacto induz dois tipos de deformações [4]:

1. Deformação de contacto, α, entre o impactor e a placa.
2. Deslocamento transversal, w, da placa, que é medida da superfície média.

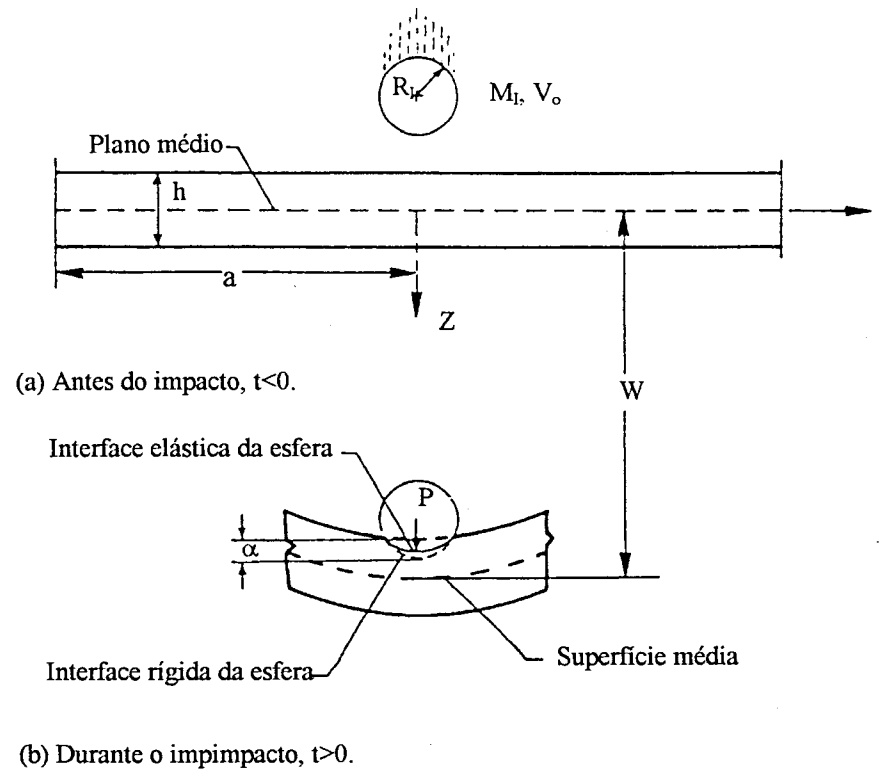


Figura 3.1 - Impacto transversal, no centro, numa placa circular.

A deformação α é a medida de quanto os centros da placa e do impactor se aproximam. A força de impacto P e a deformação de contacto são relacionados pela bem conhecida lei de Hertz [2,11]. A deflexão transversal w é a soma das deformações de flexão w_f e de corte transverso w_c da placa. (A partir daqui, o "corte transverso" é referido como corte). Além disso, a deformação de membrana é causada pelo alongamento associado com a deflexão w da placa. Se w é pequeno comparado com uma espessura da placa ($w/h \leq 0.2$), o efeito de membrana pode ser desprezado [12].

Depois do contacto placa-impactor, a força de impacto P actua sobre uma área de contacto entre o impactor e a placa. A área de contacto depende da força e dos módulos do impactor e da placa. O carregamento na placa e a deflexão são relacionados pela rigidez associada com as deformações de flexão, corte e membrana. Devido à área de contacto ser pequena, será assumido que a força de impacto é concentrada centralmente. As expressões para os parâmetros de rigidez de flexão K_f e rigidez de membrana K_m são obtidos utilizando o método variacional de Babunov-Galerkin [13]. Estas expressões de rigidez para K_f e K_m são dadas na tabela 3.1 para quatro tipos de fronteira, denominadas, encastrada (extremidade móvel ou imóvel) e simplesmente apoiada (extremidade móvel ou imóvel). A expressão de rigidez de corte transverso K_c foi determinada pressupondo

que a força de impacto é distribuída ao longo da região de contacto [14]. Esta expressão de K_c foi verificada comparando a deformação de corte calculada, com os resultados Woinowsky-Krieger's [12] para placas isotrópicas. A formulação e resultados dos dois modelos propostos, modelo do balanço de energia e modelo mola-massa, são apresentados nas secções seguintes.

Condições fronteira	Condições extremas	Rigidez à flexão K_f	Parâmetros de rigidez de membrana K_m
Encastrada	Imóvel	$\frac{4\pi E_r h^3}{3(1-\upsilon_r^2)a^2}$	$\frac{(353-191\upsilon_r)\pi E_r h}{648(1-\upsilon_r)a^2}$
	Móvel	$\frac{4\pi E_r h^3}{3(1-\upsilon_r^2)a^2}$	$\frac{191\pi E_r h}{648a^2}$
Simplesmente apoiada	Imóvel	$\frac{4\pi E_r h^3}{3(1+\upsilon_r)(1-\upsilon_r)a^2}$	$\frac{\pi E_r h}{(3+\upsilon_r)^4 a^2}\left\{\frac{191}{648}(1+\upsilon_r)^4+\frac{41}{27}(1+\upsilon_r)^3+\right.$ $\left.+\frac{32}{9}(1+\upsilon_r)^2+\frac{40}{9}(1+\upsilon_r)+\frac{8}{3}+\frac{1}{1-\upsilon_r}\left[\frac{(1+\upsilon_r)^4}{4}\right.\right.$ $\left.\left.+2(1+\upsilon_r)^3+8(1+\upsilon_r)^2+16(1+\upsilon_r)+16\right]\right\}$
	Móvel	$\frac{4\pi E_r h^3}{3(1+\upsilon_r)(1-\upsilon_r)a^2}$	$\frac{\pi E_r h}{a^2(3+\upsilon_r)^4}\left[\frac{191}{648}(1+\upsilon_r)^4+\frac{41}{27}(1+\upsilon_r)^3+\right.$ $\left.+\frac{32}{9}(1+\upsilon_r)^2+\frac{40}{9}(1+\upsilon_r)+\frac{8}{3}\right]$

Tabela 3.1 - Parâmetros de rigidez de flexão e membrana de placas carregadas centralmente

3.3. MODELO DE BALANÇO DE ENERGIA

O modelo de balanço de energia foi baseado no principio da conservação total de energia do sistema placa-impactor. Nesta análise, a energia cinética da massa do impactor foi equacionada como a soma das energias devidas às deformações de contacto, flexão, corte e membrana. As perdas de energia de amortecimento do material, fricção superficial e altos modos de vibração [10] foram desprezados. Para a força de

impacto a equação resultante é resolvida utilizando uma técnica numérica, como a de Newton-Raphson.

A energia cinética máxima do impacto antes de este se dar, no instante t=0, é $1/2M_I V_o^2$. Depois do instante t=0, o sistema placa-impactor é submetido a deformações de contacto, flexão-corte e membrana, às quais correspondem as energias de deformação E_{cont}, E_{fc} e E_m, respectivamente. Então, do principio da conservação total de energia, a equação do balanço de energia do sistema placa-impactor é:

$$\frac{1}{2}M_I V_o^2 = E_{cont} + E_{fc} + E_m \tag{3.1}$$

As energias E_{cont}, E_{fc} e E_m são calculadas utilizando as relações força-deformação correspondentes, como se segue.

A relação força de impacto P e a deformação de contacto ,α para o impacto de dois corpos de revolução, é dado pela lei de Hertz [2]

$$P = n\alpha^{3/2} \tag{3.2}$$

onde n é o parâmetro de rigidez de contacto, o qual depende do material e propriedades geométricas da placa e do impactor. A expressão para n, para impactor esférico isotrópico e placa em material compósito transversalmente isotrópico, é dado por [11]

$$n = \frac{4\sqrt{R_I}}{3\pi(K_1 + K_2)} \tag{3.3}$$

onde

$$K_1 = \frac{1-\upsilon_I^2}{\pi E_I}$$

e

$$K_2 = \frac{\sqrt{A_{22}}\left[\left(\sqrt{A_{11}A_{22}} + G_{zr}\right)^2 - \left(A_{12} + G_{zr}\right)^2\right]^{1/2}}{2\pi\sqrt{G_{zr}}\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)}$$

com

$$A_{11} = E_z(1-\upsilon_r)\beta$$

$$A_{22} = \frac{E_r\beta(1-\upsilon_{zr}^2\delta)}{1+\upsilon_r}$$

$$A_{12} = E_r \upsilon_{zr} \beta$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \upsilon_r - 2\upsilon_{zr}^2 \delta}$$

$$\delta = \frac{E_r}{E_z}$$

As constantes E_I e ν_I são, respectivamente, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson do impactor. As constantes E, G e ν são, respectivamente, o módulo de Young, módulo de corte e coeficiente de Poisson da placa, enquanto que os índices r e z indicam as direcções radial e a direcção ao longo da espessura, respectivamente.

Se o material for isotrópico a expressão de K_2 é idêntica à utilizada para a esfera [15]

$$K_2 = \frac{1 - \upsilon_p^2}{\pi E_p}$$

Se o material for ortotrópico, utilizam-se as mesmas expressões anteriores, efectuando-se as seguintes substituições [16]

$$\frac{1}{E_r} = \frac{Cos^4\theta}{E_L} + \frac{Sen^4\theta}{E_T} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{G_{TL}} - \frac{2\upsilon_{TL}}{E_L}\right) Sen^2 2\theta$$

$$\upsilon_r = \frac{E_r}{E_L}\left[\upsilon_{LT} - \frac{1}{4}\left(1 + 2\upsilon_{LT} + \frac{E_L}{E_T} - \frac{E_L}{G_{LT}}\right) Sen^2 2\theta\right]$$

sendo,

índice L - direcção das fibras

índice T - direcção perpendicular à das fibras

θ - o ângulo entre a direcção das fibras e uma dada direcção no plano

A energia de contacto E_{cont} é então o integral do produto da força de impacto e da deformação de contacto:

$$E_{cont} = \int_o^\alpha P d\alpha$$

A força de impacto P é substituída pela função α da equação (3.2), então após integração e simplificações E_{cont} torna-se

$$E_{cont} = \frac{2}{5}\frac{P^{5/3}}{n^{2/3}} \tag{3.4}$$

A força de reacção P da placa pode ser resolvida em duas componentes

$$P = P_{fc} + P_m \tag{3.5}$$

onde P_{fc} é a força associada com a deformação de flexão e corte e P_m é a força associada com a deformação de membrana. Utilizando a relação força-deflexão referida na referência [13], a força P é escrita como

$$P = K_{fc}w + K_m w^3 \tag{3.6}$$

onde $K_{fc} = \left(K_f K_c\right) / \left(K_f + K_c\right)$ é a rigidez efectiva à flexão e ao corte.

As constantes K_f, K_c e K_m são as rigidez de flexão, corte e membrana, respectivamente, da placa. Expressões para K_c e K_m para as condições de fronteira da placa são dadas na tabela 3.1. A rigidez de corte K_c é calculada partindo da relação tensão de corte-deformação com carregamento transverso num laminado circular [14]. É dado como:

$$K_c = \frac{4\pi G_{zr} h}{3}\left(\frac{E_r}{E_r - 4\upsilon_{rz}G_{zr}}\right)\left(\frac{1}{4/3 + \log a/a_c}\right) \tag{3.7}$$

onde a_c é o raio de contacto entre o impactor e o laminado, o qual depende da força P e é expresso como [4]

$$a_c = \left[\frac{3\pi}{4}P\left(K_1 + K_2\right)R_I\right]^{1/3} \tag{3.8}$$

A força de impacto P é inicialmente desconhecida, aqui um valor inicial de a_c=h/2 é utilizado na equação (3.7) para estimar P. A energia flexão-corte E_{fc} e a energia de membrana E_m do laminado, são obtidas por integração das forças P_{fc} e P_m (das equações (3.5) e (3.6)) em ordem a w. Então:

$$E_{fc} = \frac{1}{2} K_{fc} w^2 \tag{3.9}$$

$$E_m = \frac{1}{4} K_m w^4 \tag{3.10}$$

Substituindo as equações (3.4), (3.9) e (3.10) na equação (3.1) e efectuando simplificações utilizando a equação (3.6), a equação do balanço de energia torna-se:

$$M_I V_o^2 = K_{fc} w^2 + \frac{K_m w^4}{2} + \frac{4}{5}\left[\frac{\left(K_{fc} w + K_m w^3\right)^5}{n^2}\right]^{1/3} \tag{3.11}$$

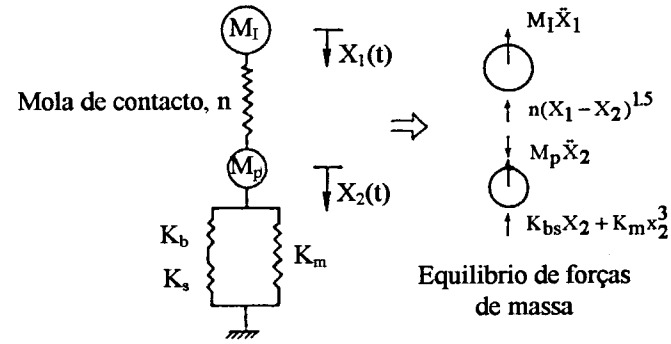
A deflexão w é calculada resolvendo a equação (3.11), utilizando a técnica numérica de Newton-Raphson. Pode também ser seguido o processo inverso de calculo da velocidade de impacto para um valor escolhido w. A força de impacto P é então calculada por substituição do valor de w na equação (3.6). A análise pode ser repetida para diferentes configurações de placa e diferentes velocidades de impacto.

3.4. MODELO MOLA-MASSA

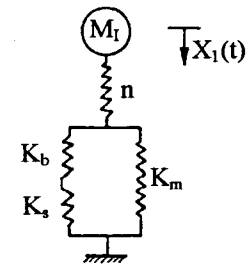
O modelo do balanço de energia apresentado na secção anterior estima a força de impacto com grande precisão, mas não prediz a história da força, velocidade ou deslocamento do principio ao fim do impacto. Então, um modelo alternativo denominado modelo mola-massa é aqui apresentado. Este modelo é uma extensão do modelo mola-massa de Lee para o impacto de vigas [1]. No presente modelo mola-massa (figura 3.2), o impactor e a placa são representados por duas massas rígidas M_I e M_P, respectivamente. Estudos anteriores [17] em vibrações livres de placas com uma massa concentrada no centro indicaram que a contribuição efectiva da massa da placa é um quarto da sua massa total. Aqui, também na presente análise, a massa efectiva da placa M_P foi tomada como um quarto da massa total da placa. As duas massas foram ligadas através de uma mola Hertziana que representa as características de contacto carregamento-deformação [11]. O comportamento transverso carregamento-deformação da placa é representado pela combinação das molas de flexão, corte e membrana (ver

figura 3.2(a)). A combinação de molas abaixo da massa da placa satisfaz as seguintes condições:

- A força de impacto é comparticipada pelas deformações de flexão, corte e membrana da placa.
- Para placas finas a combinação de molas reduz-se à teoria das placas finas devido à relativamente baixa rigidez à flexão $K_{fc} = 1/(1/K_f + 1/K_c) \approx K_f$.
- Para pequenos deslocamentos transversais da placa ($w<0.2h$), a combinação de molas reduz-se à teoria dos pequenos deslocamentos devido à relativamente pequena força transmitida pelo alongamento de membrana ($P=K_m W^3$).



(a) Modelo mola-massa de dois graus de liberdade



(b) Modelo mola-massa de um mgrau de liberdade

Figura 3.2 - Modelo mola-massa para impacto de baixa velocidade de um placa circular.

Expressões de rigidez de flexão e membrana para quatro tipos de fronteira de placas são dadas na tabela 3.1; A expressão de rigidez de corte é dada pela equação (3.7). De novo, o amortecimento do material, dano da placa e fricção superficial são desprezados.

Fazendo $X_1(t)$ e $X_2(t)$ (ver figura 3.2(a)) representar a resposta do deslocamento de duas massas em cada instante de tempo t depois do impacto, as correspondentes velocidades serão representadas por $\dot{X}_1(t)$ e $\dot{X}_2(t)$. O ponto indica a diferencial em

relação ao tempo *t*. A deflexão transversal da placa é dada por w=$X_2(t)$ e a deformação de contacto é dada por $\alpha = X_1(t) - X_2(t)$. Assume-se que a massa do impactor M_I está em contacto com a placa do principio ao fim da análise. Aplicando a segunda lei de Newton do movimento, as equações de equilíbrio de sistemas mola-massa de dois graus de liberdade são escritos como (ver figura 3.2):

$$M_I \ddot{X}_1 + \lambda n \left| X_1 - X_2 \right|^{1.5} = 0 \tag{3.12}$$

$$M_P \ddot{X}_2 + K_{fc} X_2 + K_m X_2^3 - \lambda m \left| X_1 - X_2 \right|^{1.5} = 0 \tag{3.13}$$

com

λ=1 para $X_1 > X_2$

λ=-1 para $X_1 < X_2$

Se a massa efectiva da placa M_P é menor do 0.071 vezes a massa do impactor (ou a massa do impactor maior do que 3.5 vezes da massa total da placa), a referência [17] sugere que a massa da placa pode ser desprezada. Os sistemas de dois graus de liberdade ficam reduzidos a um sistema de um único grau de liberdade como se pode ver na figura 3.2(b). Então a equação de equilíbrio da massa M_I é escrita como:

$$M_I \ddot{X}_1 + K_{fc} w + K_m w^3 + n\alpha^{1.5} = 0 \tag{3.14}$$

$$X_1 = w + \alpha \tag{3.15}$$

Condições iniciais são *t*=0, $X_1(0)$=0 e $\dot{X}_1(0) = V_o$.

As equações (3.14) e (3.15) são resolvidas numericamente para $X_1(t)$ e P como antes. Pode ser notado aqui, que a equação do balanço de energia (3.11) é o integral no tempo da equação (3.14).

3.5. REFERÊNCIAS

[1] Lee, E. H., "Impact of a Mass Striking a Beam", ASME Journal of Applied Mechanics, Dec. 1940, pp. A-129-A-138.

[2] Goldsmith, W., *Impact*, Edward Arnold Ltd., London, 1960.

[3] Preston, J. L., Jr, and Cook, T. S., "Impact Response of Graphite/Epoxy Flat Laminates Using Projectiles That Simulate Aircraft Engine Encounters , "ASTM STP568, American Society for Testing Materials 1975, pp. 49-71.

[4] Greszczuk, L. B., "Damage in Composites Materials Due to Low Velocity Impact", in Zukas, J. A., et al. eds., *Impact Dynamics*, John Wiley and Sons, New York,1982.

[5] Sun, C. T., and Chattopadhyay, S., "Dynamic Response of Anisotropics Plates Under Initial Stress Due to Impact of a Mass", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, 1975, pp. 693-698.

[6] Dobyns, A. L., and Porter, T. R., "A Study of the Structural Integrity Graphite/Epoxy Composite Structure Subjected to Low Velocity Impact", *Polymer Engineering and Science,* Vol. 21, June 1981, pp. 493-498.

[7] Dobyns, A. L., "Analysis of a Simply-Supported Orthotropic Plates Subjected to a Static and Dynamic Loads", AIAA paper No. 80-0680, 1980.

[8] Elber, W., "Failure Mechanics in Low-Velocity Impacts on The. Composite Plates", NASA TP 2152, May 1983.

[9] Lal, K. M., "Prediction of Residual Tensile Strength of Transversely Impacted Composite Laminates", Housner, J. M., and Noor, A. K. , eds., *Research in Structural and Solid Mechanics*, NASA CP 2245, 1982 pp. 97-112

[10] Lord Rayleigh, "On the Prediction of Vibrations by Forces Relatively Long Duration, With to the theory of collisions", *Philosophical Magazine*, Series 6, Vol. 11, 1906, pp. 283-292.

[11] Conway, H. D., and Angew, Z., "The Pressure Distribution Between Two Elastic Bodies in Contact", *Journal of Mathematics and* Physics, Vol. 7, 1956, pp. 460-465.

[12] Timoshenko, S. P., and Woinowsky, S., Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, New-York, 1959.

[13] Volmir, A. S., " A Translation of Flexible Plates and Shells", AFFDL-TR-66-216, Apr. 1967.

[14] Lukasicwiez, S. A., "Introduction of Concentrated Loads in Plates and Shells", *Progress in Aerospace Science*, Vol. 17, 1976, pp. 109-146.

[15] Timoshenko, S., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, Ed. 1982.

[16] Greszczuk, L. B., and Chao, H., *Investigation of Brittles Fracture in Graphite-epoxy composites subjected to impact*, U. S. Army Air Mobility Research and Development Laboratory, (U.S.A.M.R.D.L.)-TR-75-15, 1975

[17] Leissa, A. W., "Vibrations of Plates", NASA SP-160,1969.

CAPÍTULO 4

CARACTERÍSTICAS ELASTO-DISSIPATIVAS DE CORPOS ANISOTRÓPICOS

4.1. INTRODUÇÃO

É habitual utilizar o termo "elástico" para descrever os sólidos para os quais as tensões (σ_{ij}) são funções não ambíguas das deformações (ε_{ij}) durante a deformação, ou seja,

$$\sigma_{ij} = f\left(\varepsilon_{ij}\right) \tag{4.1}$$

Aqui σ_{ij} e ε_{ij} são os tensores simétricos de segunda ordem das tensões e deformações. Cada um deles é caracterizado por seis componentes independentes.

O comportamento de materiais elásticos sujeitos a carregamento e descarregamento é o mesmo. O ciclo de deformação corresponde ao ciclo de carregamento. O trabalho necessário para a deformação do ciclo é igual a zero.

A experiência mostra que muitos materiais são lineares elásticos quando sujeitos a pequenas deformações, isto é, as deformações são proporcionais às tensões aplicadas e vice-versa. No caso de deformação simples (uniaxial), esta relação (lei de Hooke) é escrita como

$$\sigma = E\varepsilon$$

e

$$\varepsilon = \sigma / E \tag{4.2}$$

onde E é o modulo de elasticidade.

Basicamente, a elasticidade é o único modelo fenomenológico do comportamento do material, mas não traduz bem o estado real da questão. Corpos reais, mesmo sujeitos a pequenas deformações, exibem um desvio da elasticidade ideal. O ciclo de carregamento parece ser irrealizável sem alguma libertação de energia, que é o amortecimento do corpo.

Perdas de energia numa unidade de volume, de corpos isotrópicos, num ciclo de carregamento completo, ΔW, são normalmente proporcionais ao máximo valor da energia elástica, W, num ciclo de carregamento simétrico

$$\Delta W = \psi W \tag{4.3}$$

onde ψ é o amortecimento relativo ou o factor de dissipação de energia.

O método energético para consideração da fricção interna pressupõe a introdução de uma função de dissipação de energia num ciclo de carregamento completo, desde que a resposta tensão-deformação se mantenha linear elástica.

Corpos anisotrópicos, como objectos com propriedades dependentes da orientação das coordenadas, têm um sistema mais complexo de parâmetros que descrevem o seu comportamento elástico e dissipativo.

O presente capitulo considera: a hipótese acerca da função de dissipação de energia para um corpo anisotrópico, o qual depende da amplitude das vibrações; casos especiais de simetria material em materiais anisotrópicos; o sistema de constantes de engenharia elásticas e dissipativas e as regras das suas transformações sujeitos a rotação do sistema de coordenadas.

Será mostrado que a resposta dissipativa de um corpo está relacionada com a sua resposta elástica. As propriedades elásticas determinam o potencial nível de amortecimento de energia, pelo que é sensato lidar com o sistema unificado de características elasto-dissipativas.

4.2. CARACTERIZAÇÃO ELÁSTICA DE CORPOS ANISOTRÓPICOS

Experiências com corpos anisotrópicos mostraram que quando qualquer componente do tensor de tensão (σ_{ij}) afecta um corpo, o aparecimento de qualquer componente do tensor de deformações (ε_{ij}) é possível. A generalização da lei de Hooke [equação (4.2)] considerando esta condição, envolve o pressuposto que as componentes do tensor de

deformações são funções lineares uniformes de todas as componentes do tensor das tensões (e vice-versa)

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{4.4}$$

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4.5}$$

com $i,j,k,l = 1,2,3$.

Aqui, S_{ijkl} e G_{ijkl} são os coeficientes de flexibilidade e de rigidez do material, respectivamente.

Os coeficientes de flexibilidade e de rigidez são as componentes dos tensores correspondentes de quarta ordem, isto é, o tensor de flexibilidade e de rigidez do material. No caso geral o número de componentes destes tensores é igual a $3^4 = 81$.

As relações da equação (4.4) na forma desenvolvida são da forma

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= S_{1111}\sigma_{11} + S_{1112}\sigma_{12} + S_{1113}\sigma_{13} + S_{1121}\sigma_{21} \\
&\quad + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1123}\sigma_{23} + S_{1131}\sigma_{31} + S_{1132}\sigma_{32} + S_{1133}\sigma_{33} \\
\varepsilon_{12} &= S_{1211}\sigma_{11} + S_{1212}\sigma_{12} + S_{1213}\sigma_{13} + S_{1221}\sigma_{21} \\
&\quad + S_{1222}\sigma_{22} + S_{1223}\sigma_{23} + S_{1231}\sigma_{31} + S_{1232}\sigma_{32} + S_{1233}\sigma_{33} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_{33} &= S_{3311}\sigma_{11} + S_{3312}\sigma_{12} + S_{3313}\sigma_{13} + S_{3321}\sigma_{21} \\
&\quad + S_{3322}\sigma_{22} + S_{3323}\sigma_{23} + S_{3331}\sigma_{31} + S_{3332}\sigma_{32} + S_{3333}\sigma_{33}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

No entanto, devido à simetria dos tensores σ_{ij} e ε_{ij}, apenas seis relações entre nove nas equações (4.4) e (4.5) são independentes. Como resultado, o número de componentes independentes dos tensores G_{ijkl} e S_{ijkl} é reduzido a trinta e seis. Como também existe simetria destes tensores em relação aos índices *ij* e *kl*, o número de componentes independentes é reduzido a vinte e um.

Rodando o sistema de coordenadas, as coordenadas dos tensores de quarta ordem, G_{ijkl} e S_{ijkl}, são transformadas seguindo as regras de transformação, como se indica a seguir:

$$\begin{aligned}
S'_{ijkl} &= S_{pqrs}l_{ip}l_{jq}l_{kr}l_{ls} \\
G'_{ijkl} &= G_{ijkl}l_{ip}l_{jq}l_{kr}l_{ls}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde l_{ip} são os cosenos directores dos ângulos entre os eixos do novo sistema de coordenadas, x_i', e o sistema de coordenadas principal, x_p.

A energia potencial de um corpo elástico pode ser escrita numa das seguintes formas [1]:

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$
$$W = \frac{1}{2}G_{iklj}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \qquad (4.8)$$
$$W = \frac{1}{2}S_{iklj}\sigma_{ij}\varepsilon_{kl}$$

4.2.1 FORMA MATRICIAL DA LEI DE HOOKE

A forma matricial normalmente utilizada nas publicações técnicas para a representação das tensões e das deformações é

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad (4.9)$$

Utilizando as designações matriciais para as tensões e deformações, as equações (4.4) e (4.5) poderão ser escritas na forma matricial como:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \tag{4.10}$$

e

$$\{\sigma\} = [G]\{\varepsilon\}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & g_{46} \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & g_{56} \\ g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} & g_{65} & g_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.11}$$

Aqui $[S]$ e $[G]$ são as matrizes simétricas de flexibilidade e de rigidez com a dimensão de 6x6.

A inversão da equação (4.10) para a equação (4.11) é possível se o determinante

$$\det |S| \neq 0 \tag{4.12}$$

As componentes das matrizes $[S]$ e $[G]$ com dois índices são relacionados com as componentes dos tensores S_{ijkl} e G_{ijkl} com quatro índices da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{mn} &= S_{ijkl}, \text{ se } m,n = 1,2,3; \\ S_{mn} &= 2S_{ijkl}, \text{ se } m \text{ ou } n \text{ igual a } 4,5,6; \\ S_{mn} &= 4S_{ijkl}, \text{ se } m \text{ e } n \text{ igual a } 4,5,6; \\ \mathrm{G}_{mn} &= G_{ijkl} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Os pares de índices 11, 22, 33, 23 ou 32, 31 ou 13, 12 ou 21 são alterados para os índices 1, 2, 3, 4, 5, 6 de acordo com as seguinte regra:

- *ij* é alterado para o índice *i*, se $i=j$.

- *ij* é alterado para o índice que for igual a $9-i-j$, se $i \neq j$.

A energia potencial de um corpo elástico anisotrópico [equação (4.8)] pode ser escrito na forma matricial como:

$$W = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}$$

$$W = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T[S]\{\sigma\} \qquad (4.14)$$

$$W = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[G]\{\varepsilon\}$$

onde as matrizes $\{\sigma\}^T$ e $\{\varepsilon\}^T$ são, respectivamente, as matrizes de tensão e deformação transpostas.

A energia potencial tem um valor não negativo. Assim, se as componentes das tensões e deformações não forem zero, as formas quadráticas da equação (4.14) são determinadas positivamente. É necessário e suficiente que cada um dos seguintes determinantes das matrizes $[G]$ e $[S]$

$$g_{11}, \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \det |G| \qquad (4.15)$$

$$s_{11}, \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \det |S|$$

seja positivo. Todos os determinantes menores dos $det\,|G|$ e $det\,|S|$ são positivos. Isto acontece porque todos os coeficientes das matrizes $[G]$ e $[S]$ são também positivos.

Da equação (4.15) obtém-se

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0 \quad \text{e} \quad s_{11}s_{22} - s_{12}^2 > 0 \qquad (4.16)$$

No caso geral ocorre uma desigualdade, onde

$$\left|g_{ij}\right| < \left|\sqrt{g_{ii}g_{jj}}\right| \quad \text{e} \quad \left|s_{ij}\right| < \left|\sqrt{s_{ii}s_{jj}}\right| \tag{4.17}$$

4.2.2 CASOS ESPECIAIS DE SIMETRIA ELÁSTICA

Anisotropia do tipo geral, onde os coeficientes das matrizes de flexibilidade e de rigidez nas equações (4.10) e (4.11) incluem vinte e um coeficientes independentes, é o caso raro de materiais reais. Normalmente a estrutura interna do material é tal, que as propriedades elásticas são as mesmas em algumas direcções. Assim, o número de coeficientes independentes nas matrizes dos coeficientes de flexibilidade e de rigidez podem ser grandemente reduzidos. A forma da lei de Hooke torna-se mais simples, quando se escolhe o sistema de coordenadas apropriado.

Considere-se alguns casos principais de simetria elástica.

4.2.2.1 O PLANO DE SIMETRIA ELÁSTICA

Se a resposta elástica de um corpo anisotrópico for idêntica em duas direcções que são simétricas em relação ao mesmo plano, então este plano é chamado o plano de simetria elástica. Neste caso há treze coeficientes independentes que descrevem o comportamento do material [1]. A lei de Hooke é de forma mais simples quando um dos planos coordenados coincide com o plano de simetria elástico. Por exemplo, se o plano (x_1,x_2) é o plano de simetria, a matriz dos coeficientes de flexibilidade da Equação (4.10) podem ser representados da seguinte forma:

$$[S]=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & S_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & sim. & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Em particular, para um material anisotrópico em tensão uniaxial na direcção perpendicular ao plano de simetria elástico, obtém-se

$$\varepsilon_1 = s_{13}\sigma_3 \qquad \varepsilon_2 = s_{23}\sigma_3 \qquad \varepsilon_3 = s_{33}\sigma_3$$

$$\gamma_{23} = 0 \qquad \gamma_{13} = 0 \qquad \gamma_{12} = s_{36}\sigma_3$$

Para tal estado de tensão, o material é apenas sujeito a corte no plano (x_1,x_2). Da equação (4.18) pode-se constatar que se um dos eixos principais do estado de tensão é perpendicular ao plano de simetria elástico, então um dos eixos principais do estado de deformação é também perpendicular a este plano. Este é o motivo pela qual a direcção perpendicular ao plano de simetria elástica é chamado a direcção principal (ou o eixo principal) de elasticidade.

4.2.2.2 CORPO ORTOTRÓPICO

Um corpo com três planos mutuamente perpendiculares de simetria elástica é chamado um corpo ortotrópico. Um corpo ortotrópico tem nove coeficientes independentes que descrevem o seu comportamento elástico [1].

Quando os planos coordenados são os planos de simetria elástica, a lei de Hooke para o corpo ortotrópico toma uma forma mais simples; então a matriz de flexibilidade toma a forma:

$$[S]=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Os coeficientes de flexibilidade e de rigidez tornam-se mais fáceis de determinar, por experiências simples se forem escritos em termos das chamadas constantes de engenharia - modulo de elasticidade, modulo de corte e coeficiente de Poisson. Então, em vez da equação (4.19), obtém-se

$$[S]=\begin{bmatrix} 1/E_1 & -\upsilon_{21}/E_2 & -\upsilon_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\upsilon_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\upsilon_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\upsilon_{31}/E_1 & -\upsilon_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Aqui, E_1, E_2 e E_3 são os módulos de elasticidade das direcções correspondentes; G_{12}, G_{13} e G_{23} são os módulos de corte nos planos (x_1,x_2), (x_1,x_3) e (x_2,x_3), respectivamente; υ_{ij},, são os coeficientes de Poisson, onde os primeiros índices indicam a direcção da tensão e o segundos a direcção da deformação transversal.

O número de coeficientes independentes na Equação (4.20) permanece igual a nove e devido à simetria da matriz dos coeficientes de flexibilidade obtêm-se as seguintes igualdades:

$$E_1\upsilon_{21}=E_2\upsilon_{12}, \quad E_2\upsilon_{32}=E_3\upsilon_{23}, \quad E_3\upsilon_{13}=E_1\upsilon_{31} \tag{4.21}$$

Destas igualdades obtém-se a seguinte relação:

$$\upsilon_{12}\upsilon_{23}\upsilon_{31}=\upsilon_{21}\upsilon_{32}\upsilon_{13}$$

A lei de Hooke em termos das tensões resulta na equação (4.11). Aplicando as constantes de engenharia, obtém-se

$$\begin{aligned}
g_{11} &= E_1(1-\upsilon_{23}\upsilon_{32})/\Delta \\
g_{22} &= E_2(1-\upsilon_{31}\upsilon_{13})/\Delta \\
g_{33} &= E_3(1-\upsilon_{12}\upsilon_{21})/\Delta \\
g_{12} &= E_2(\upsilon_{12}+\upsilon_{13}\upsilon_{32})/\Delta = E_1(\upsilon_{21}+\upsilon_{23}\upsilon_{31})/\Delta \\
g_{13} &= E_3(\upsilon_{13}+\upsilon_{12}\upsilon_{23})/\Delta = E_1(\upsilon_{31}+\upsilon_{32}\upsilon_{21})/\Delta \\
g_{23} &= E_3(\upsilon_{23}+\upsilon_{21}\upsilon_{13})/\Delta = E_2(\upsilon_{32}+\upsilon_{31}\upsilon_{12})/\Delta \\
g_{44} &= G_{23},\ g_{55} = G_{13},\ g_{66} = G_{12}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\upsilon_{12} & -\upsilon_{13} \\ -\upsilon_{21} & 1 & -\upsilon_{23} \\ -\upsilon_{31} & -\upsilon_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}-\upsilon_{23}\upsilon_{32}-\upsilon_{31}\upsilon_{13}-2\upsilon_{12}\upsilon_{23}\upsilon_{31}$$

4.2.2.3 O PLANO DE ISOTROPIA E O PLANO TRANSVERSAL DE ISOTROPIA DE UM CORPO

Um plano, onde todas as direcções são equivalentes em relação às propriedades elásticas, é chamado o plano de isotropia (plano isotrópico). Um corpo que tenha tal plano de isotropia é chamado de corpo transversalmente isotrópico. Se o plano de coordenadas (x_2,x_3) coincidir com o plano de isotropia, obtém-se para este caso especifico de um material ortotrópico a seguinte equação

$$\begin{aligned}
&E_2 = E_3, \qquad G_{13} = G_{12} \\
&\upsilon_{12} = \upsilon_{13}, \qquad \upsilon_{21} = \upsilon_{31}, \qquad \upsilon_{23} = \upsilon_{32} \\
&G_{23} = E_2/2(1+\upsilon_{23}) = E_3/2(1+\upsilon_{32})
\end{aligned} \tag{4.23}$$

A matriz de flexibilidade é da forma

$$[S]=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22}^{0} & s_{23}^{0} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{22}^{0} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{55} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

ou, em termos das constantes de engenharia

$$[S]=\begin{bmatrix} 1/E_1 & -\upsilon_{21}/E_2 & -\upsilon_{21}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\upsilon_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\upsilon_{32}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\upsilon_{12}/E_1 & -\upsilon_{23}/E_2 & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

O módulo de corte no plano de isotropia, G_{23}, de acordo com a equação (4.23) não é independente e o número geral de constantes independentes para tal corpo é igual a cinco.

4.2.3 ESTADO PLANO DE TENSÃO

É normal assumir que o estado plano de tensão é um caso especifico do estado de tensão do material, quando

$$\sigma_3 = 0, \quad \tau_{23} = 0, \quad \tau_{13} = 0 \tag{4.26}$$

No caso geral de anisotropia, como é visto das Equações (4.10) e (4.11), as componentes de deformação correspondentes não são iguais a zero

$$\varepsilon_3 \neq 0, \quad \gamma_{23} \neq 0, \quad \gamma_{13} \neq 0 \tag{4.27}$$

De particular interesse é o caso de estado plano de tensão para alguns tipos específicos de simetria material.

Assim, vê-se das equações (4.14), (4.20), (4.22), (4.24) e (4.25), que no caso de estado plano de tensão, as relações de Hooke para materiais ortotrópicos e transversalmente isotrópicos são da mesma forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 & 0 \\ g_{12}^0 & g_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{66}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.28}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^0 & s_{12}^0 & 0 \\ s_{12}^0 & s_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{66}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.29}$$

Quando se utiliza constantes de engenharia, as relações entre os coeficientes de rigidez, g_{ij}^0, e os coeficientes de flexibilidade, s_{ij}^0, serão escritas como:

$$\begin{aligned} g_{11}^0 &= \frac{E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} = \frac{s_{22}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - \left(s_{12}^0\right)^2} \\ g_{22}^0 &= \frac{E_2}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} = \frac{s_{11}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - \left(s_{12}^0\right)^2} \\ g_{12}^0 &= \frac{\upsilon_{21}E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} = \frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - \left(s_{12}^0\right)^2} \\ g_{66}^0 &= G_{12} = \frac{1}{s_{66}^0} \end{aligned} \tag{4.30a}$$

$$
\begin{aligned}
s_{11}^0 &= \frac{1}{E_1} = \frac{g_{22}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - \left(g_{12}^0\right)^2} \\
s_{22} &= \frac{1}{E_2} = \frac{g_{11}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - \left(g_{12}^0\right)^2} \\
s_{12}^0 &= \frac{\upsilon_{12}}{E_1} = \frac{g_{12}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - \left(g_{12}^0\right)^2} \\
s_{66}^0 &= \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{g_{66}^0}
\end{aligned}
\tag{4.30b}
$$

As matrizes de rigidez e de flexibilidade têm a estrutura das equações (4.28) e (4.29) apenas no caso dos eixos principais de simetria coincidirem com o sistema dos eixos de coordenadas. Neste caso, os coeficientes são identificados com o expoente zero.

Num sistema de eixos coordenados arbitrário as matrizes [G] e [S] nas equações (4.28) e (4.29) podem ser completamente preenchidas, isto é, não têm termos nulos.

4.2.4 TRANFORMAÇÃO DAS CARACTERISTICAS ELÁSTICAS SUJEITO A ROTAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

No caso geral, a transformação dos tensores de tensões e de deformações em relação aos novos eixos coordenados é realizado de acordo com as seguintes fórmulas

$$
\begin{aligned}
\sigma_{i'j'} &= \sigma_{ij} l_{i'i} l_{j'i'} \\
\varepsilon_{i'j'} &= \varepsilon_{ij} l_{i'i} l_{j'j}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

com $i', j' = 1,2,3$ e $i, j = 1,2,3$.

Quando os eixos (x_1,x_2) rodam de um ângulo α, os cosenos directores l_{ij} (na forma matricial), são da forma

$$[l]=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{4.32}$$

Utilizando as equações (4.31) e (4.32) para o caso de estado plano de tensão, as relações para a transformação das tensões são obtidas na forma

$$\{\sigma'\}=[T_1]\{\sigma\} \tag{4.33}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \tau'_{12} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2-s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

onde s=senα, c=cosα.

A equação (4.31) pode ser aplicada às componentes do tensor. Utilizando a relação entre as designações de matriz e tensor para deformações [Equação (4.9)] pode-se escrever

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}=[\Omega]\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

onde $[\Omega]$ é a matriz diagonal.

As componentes do tensor de tensões estão relacionadas com as da matriz por uma relação inversa

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}=[\Omega]^{-1}\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.35}$$

Aplicando as equações (4.31) e (4.35), obtém-se

$$[\Omega]^{-1}\{\varepsilon'\}=[T_1][\Omega]^{-1}\{\varepsilon\} \tag{4.36}$$

Então,

$$\{\varepsilon'\} = [\Omega][T_1][\Omega]^{-1}\{\varepsilon\}$$

ou

$$\{\varepsilon'\} = [T_2]\{\varepsilon\} \tag{4.37}$$

onde $[T_2]$ é a matriz transformação para as componentes da matriz de deformação, que é da forma:

$$[T_2] = [\Omega][T_1][\Omega]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

As formulas das transformações inversas derivam das equações (4.33) e (4.37)

$$\{\sigma\} = [T_1]^{-1}\{\sigma'\} \tag{4.39}$$

$$\{\varepsilon\} = [T_2]^{-1}\{\varepsilon'\} \tag{4.40}$$

As matrizes para as transformações inversas são expressas como

$$[T_1]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

$$[T_2]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

É conveniente utilizar as seguintes identidades, quando se efectuar os cálculos

$$
\begin{aligned}
&[T_1]^{-1} = [T_2]^T, \qquad [T_2]^{-1} = [T_1]^T \\
&\left([T_1]^{-1}\right)^T = [T_2], \qquad \left([T_2]^{-1}\right)^T = [T_1] \\
&[T_1]^{-1} = [T_1(-\alpha)], \qquad [T_2]^{-1} = [T_2(-\alpha)]
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Substituindo as equações (4.39) e (4.40) na equação (4.38), obtém-se

$$\{\sigma'\} = [\overline{G}]\{\varepsilon'\} \tag{4.44}$$

onde a matriz de rigidez nos novos eixos coordenados (x_1', x_2'), é calculado da seguinte forma:

$$[\overline{G}] = \begin{bmatrix} \overline{g}_{11} & \overline{g}_{12} & \overline{g}_{16} \\ & \overline{g}_{22} & \overline{g}_{26} \\ sim. & & \overline{g}_{66} \end{bmatrix} = [T_1][G^0][T_1]^T \tag{4.45}$$

As componentes das matrizes são da forma:

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{11} &= c^4 g_{11}^0 + s^4 g_{22}^0 + 2\left(g_{12}^0 + 2g_{66}^0\right)s^2c^2 \\
\overline{g}_{12} &= \left(g_{11}^0 + g_{22}^0 - 4g_{66}^0\right)s^2c^2 + \left(s^4 + c^4\right)g_{12}^0 \\
\overline{g}_{16} &= \left[c^2 g_{11}^0 - s^2 g_{22}^0 + \left(g_{12}^0 + 2g_{66}^0\right)\left(s^2 - c^2\right)\right]sc \\
\overline{g}_{22} &= s^4 g_{11}^0 + c^4 g_{22}^0 + 2\left(g_{12}^0 + 2g_{66}^0\right)s^2c^2 \\
\overline{g}_{26} &= \left[s^2 g_{11}^0 - c^2 g_{22}^0 - \left(g_{12}^0 + 2g_{66}^0\right)\left(s^2 - c^2\right)\right]sc \\
\overline{g}_{66} &= \left(g_{11}^0 - 2g_{12}^0 + g_{22}^0\right)s^2c^2 + \left(s^2 - c^2\right)g_{66}^0
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

As relações que são inversas da equação (4.44) é dado por:

$$\{\varepsilon'\} = [\overline{S}]\{\sigma'\} \tag{4.47}$$

onde a matriz de flexibilidade $[\bar{S}]$ é calculado como

$$[\bar{S}] = [T_2][S^0][T_2]^T \tag{4.48}$$

A sua estrutura é análoga à estrutura da matriz $[\bar{G}]$ [equação (4.45)] e as suas componentes são da forma

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{11} &= c^4 s_{11}^0 + s^4 s_{22}^0 + 2\left(s_{12}^0 + 2s_{66}^0\right)s^2c^2 \\
\bar{s}_{12} &= \left(s_{11}^0 + s_{22}^0 - 4s_{66}^0\right)s^2c^2 + \left(s^4 + c^4\right)s_{12}^0 \\
\bar{s}_{16} &= \left[2c^2 s_{11}^0 - 2s^2 s_{22}^0 + \left(s_{12}^0 + s_{66}^0\right)\left(s^2 - c^2\right)\right]sc \\
\bar{s}_{22} &= s^4 s_{11}^0 + c^4 s_{22}^0 + \left(2s_{12}^0 + s_{66}^0\right)s^2c^2 \\
\bar{s}_{26} &= \left[2s^2 s_{11}^0 - 2c^2 s_{22}^0 - \left(2s_{12}^0 + s_{66}^0\right)\left(s^2 - c^2\right)\right]sc \\
\bar{s}_{66} &= \left(4s_{11}^0 - 8s_{12}^0 + 4s_{22}^0\right)s^2c^2 + \left(s^2 - c^2\right)^2 s_{66}^0
\end{aligned} \tag{4.49}$$

4.3. PERDAS DE ENERGIA DE UM CORPO ANISOTROPICO SUJEITO A UM CARREGAMENTO CÍCLICO

Quando se descreve a dissipação de energia, de um corpo anisotrópico arbitrário, sujeito a um carregamento cíclico, devem ter-se em consideração as seguintes hipóteses:

- As perdas de energia, ΔW, numa unidade de volume, de um corpo num ciclo de carregamento completo, é definido por uma função do tensor de tensão e/ou de deformação e pode depender da temperatura do corpo, T. e frequência de carregamento, ω,

$$\Delta W = f\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, T, \omega\right) \tag{4.50}$$

onde a função f obedece aos requisitos necessários da expansão de Taylor de tensão e deformação.

- O carregamento é executado de acordo com o ciclo simétrico monoharmonico de modo a que σ_{ij} e ε_{ij} na equação (4.50) e em expressões análogas que se seguirão são os valores de amplitude das componentes dos tensores tensão e deformação durante o ciclo de carregamento.
- As tensões e deformações são relacionadas pela lei de Hooke, ou seja,

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4.51}$$

ou

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{4.52}$$

onde G_{ijkl} é o tensor do modulo elástico (o tensor de rigidez), e S_{ijkl} é o tensor de flexibilidade.

Representando a equação (4.50) como uma série de Taylor em termos de potências das componentes σ_{ij} ou ε_{ij}

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left(\Psi_{ij}\sigma_{ij} + \Psi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \ldots\right) \tag{4.53}$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left(\Phi_{ij}\varepsilon_{ij} + \Phi_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \ldots\right) \tag{4.54}$$

Aqui os coeficientes Ψ_{ij}, Ψ_{ijkl}, ... *e* Φ_{ij}, Φ_{ijkl}, ... são tensores da mesma ordem e os valores destes tensores de tensões (deformações) são escalares. Em geral, as componentes destes tensores dependem da temperatura, T, e da frequência, ω.

Normalmente a dissipação de energia em sólidos é caracterizado pela dissipação de energia relativa (o factor de dissipação), ψ, que é definido como a razão de perdas de energia, ΔW numa unidade de volume de um corpo para o valor da amplitude da energia elástica, W, sujeito a um dado estado tensão-deformação:

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \tag{4.55}$$

onde a amplitude da energia elástica numa unidade de volume de um corpo num ciclo de carregamento completo é traduzido pela equação (4.8).

As equações (4.53) e (4.54) devem ser invariantes para a mudança do valor do sinal de amplitude opostos. por esta razão, apenas os termos com potências pares relacionados com tensões (deformações) devem permanecer nas séries, isto é, tensores de características elasto-dissipativas de quarta, oitava, décima segunda, etc. ordem.

4.3.1 FRICÇÃO INTERNA INDEPENDENTE DA AMPLITUDE

Considere-se o caso de fricção interna independente da amplitude de um corpo anisotrópico. Sob mudança proporcional de amplitudes de todas as componentes de tensão (deformação) $\sigma'_{ij} = \lambda\sigma_{ij}$, $\varepsilon' = \lambda\varepsilon_{ij}$ em tal corpo (λ é um parâmetro), o factor de dissipação não depende de λ. A energia elástica especifica (numa unidade de volume), W', é a função uniforme de tensão (deformação) de segunda ordem

$$W' = \frac{1}{2}\lambda^2 G_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\lambda^2 S_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \lambda^2 W$$

A função de perda de energia, numa unidade de volume de um corpo, num ciclo de carregamento completo [equação (4.50)] também deve ser uma função uniforme de segunda ordem. Então, apenas os termos quadráticos permanecem nas equações (4.53) e (4.54). Assim, a fricção interna independente da amplitude, no corpo anisotrópico é descrito pelas relações para perdas de energia, numa unidade de volume, num ciclo de carregamento como se segue:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\Psi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \qquad (4.56)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\Phi_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

Utilizando as equações (4.51) e (4.52), pode-se representar a equação (4.56) na forma mista:

$$\Delta W = \frac{1}{2} X_{ijkl} \varepsilon_{ij} \sigma_{kl}$$
$$\Delta W = \frac{1}{2} X^{*}_{ijkl} \sigma_{ij} \varepsilon_{kl} \tag{4.57}$$

As componentes Ψ_{ijkl}, Φ_{ijkl}, X_{ijkl} e X^{*}_{ijkl} formam tensores de quarta ordem, e dão um escalar quando sujeita ao produto de dois tensores de segunda ordem (σ_{ij} e ε_{ij}). Estas são relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Psi_{ijkl} &= X_{mnkl} S_{mnij} = X^{*}_{ijmn} S_{mnkl} = \Phi_{mnps} S_{pskl} S_{mnij} \\
\Phi_{ijkl} &= X_{ijmn} G_{mnkl} = X^{*}_{mnkl} G_{mnij} = \Phi_{psmn} S_{psij} S_{mnkl} \\
X_{ijkl} &= \Psi_{mnkl} G_{mnij} = \Phi_{ijmn} S_{mnkl} = X^{*}_{klij} \\
X^{*}_{ijkl} &= \Psi_{ijmn} G_{mnkl} = \Phi_{mnkl} S_{mnij} = X_{klij}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Os tensores das características elásticas de um corpo anisotrópico encontram-se na equação (4.58). Por esta razão, deve-se determinar o tensor Ψ_{ijkl}, como o tensor das características elasto-dissipativas relacionado com as tensões ou o tensor das características elasto-dissipativas de tensão, o tensor Φ_{ijkl}, como o tensor das características elasto-dissipativas relacionado com as deformações e X_{ijkl} e X^{*}_{ijkl} são os tensores mistos das características elasto-dissipativas de um corpo anisotrópico.

As relações da equação (4.56) são as formas quadráticas relacionadas com as componentes do tensor das tensões ou das deformações. Como os tensores Ψ_{ijkl} e Φ_{ijkl} devem determinar as perdas de energia ambiguamente, então as formas quadráticas são simétricas. De facto, não pode haver nenhuma diferença entre os coeficientes, por exemplo, relacionando com $\sigma_{ij}\sigma_{kl}$ e $\sigma_{kl}\sigma_{ij}$. Pelo menos os seus valores devem sempre ser iguais. Por esta razão, os tensores Ψ_{ijkl} e Φ_{ijkl} são simétricos, tendo em consideração a transposição do primeiro e segundo pares de índices

$$\Phi_{ijkl} = \Phi_{klij}, \qquad \Psi_{ijkl} = \Psi_{klij} \tag{4.59}$$

Da simetria dos tensores σ_{ij} e ε_{ij} verifica-se que as componentes das tensões e deformações das características elasto-dissipativas não variam quando a transposição do índice (i e j, k e l) ocorre

$$\Phi_{ijkl} = \Phi_{jikl} = \Phi_{ijlk}, \qquad \Psi_{ijkl} = \Psi_{jikl} = \Psi_{ijlk} \tag{4.60}$$

As equações (4.59) e (4.60) permitem reduzir o número de componentes diferentes do tensor das características elasto-dissipativas. Apenas vinte e uma componentes entre oitenta e uma do tensor de quarta ordem permanecem diferentes no espaço tridimensional $(\Psi_{ijkl}, \Phi_{ijkl})$.

A simetria para os tensores mistos das características elasto-dissipativas [equação (4.57)] ocorre quando as transposições são feitas nos índices i e j, k e l

$$X_{ijkl} = X_{jikl} = X_{ijlk} = X_{jilk} \tag{4.61}$$

Os tensores das características elasto-dissipativas são tensores de quarta ordem. por esta razão, quando se troca das coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) para coordenadas cartesianas (x_1', x_2', x_3'), as suas componentes são transformadas de acordo com a regra dos tensores. Por exemplo, o tensor das características elasto-dissipativas de tensões, Ψ_{ijkl}', nas novas coordenadas é definido da seguinte forma:

$$\Psi_{ijkl}' = \Psi_{pqrs} l_{ip} l_{jq} l_{kr} l_{ls} \tag{4.62}$$

onde l_{ip} são os cosenos directores dos ângulos entre os eixos x_i' e x_p.

Na expansão das perdas de energia [equações (4.53) e (4.54)] para o caso de fricção interna dependente da amplitude de um corpo anisotrópico deve-se ter em consideração os coeficientes do tensor de maior ordem (8ª, 12ª, etc.). Deve-se admitir a consideração de que a dependência da amplitude da fricção interna de um corpo anisotrópico requer a determinação de um grande número das componentes independentes do tensor das

características elasto-dissipativas. O número de componentes independentes nos tensores de ordem elevada são dados na tabela 4.1 [1].

Tipo de simetria	Ordem do tensor , Ψ_{ijkl} ...$(i,j,k,l=1,2,3)$		
	4	8	12
Anisotropia do tipo geral	21	126	462
Corpo ortotrópico	9	42	138
Corpo transversalmente isotrópico	5	16	39
Corpo isotrópico	2	4	7

Tabela 4.1 - Componentes independentes dos tensores

Não há necessidade de explicar que a determinação de tão grande número de constantes é um problema difícil na prática.

No caso de pequenas amplitudes de tensão, os factores de dissipação, para a maioria dos corpos anisotrópicos não dependem da amplitude, isto pode ser demonstrado experimentalmente. Por esta razão, será tomado em atenção a fricção interna independente da amplitude para corpos anisotrópicos

4.3.2 FRICÇÃO INTERNA DEPENDENTE DA AMPLITUDE PARA CORPOS ISOTRÓPICOS

A obtenção de um modelo de perdas de energia num corpo isotrópico com fricção interna dependente da amplitude é mais fácil do que é para um corpo anisotrópico. Isto torna possível considerar as relações entre os factores de dissipação de energia e o nível de tensão, sujeito a um estado de tensão volúmico.

As constantes de dissipação são definidas da aproximação das relações empíricas entre factores de dissipação e o nível de tensão de tipos de estados de tensão simples.

As relações básicas para perdas de energia num corpo isotrópico, são obtidas tendo em atenção a equação (4.53), mas com os mesmos pressupostos.

Para um corpo isotrópico $\Delta W = f(\sigma_{ij})$ não depende geralmente da transformação do sistema coordenado. No entanto, as perdas de energia serão escritas como uma função de três invariantes independentes do tensor de tensão. Podem ser utilizados os seguintes invariantes:

$$\begin{aligned} \Sigma_I &= \sigma_{ii} \\ \Sigma_{II} &= \sigma_{ij}\sigma_{ij} \\ \Sigma_{III} &= \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \end{aligned} \tag{4.63}$$

ou

$$\begin{aligned} I_1 &= \Sigma_I \\ I_2 &= \frac{1}{2}\left(\Sigma_I^2 - \Sigma_{II}\right) \\ I_3 &= \frac{1}{6}\left(\Sigma_I^3 - 3\Sigma_I\Sigma_{II} + 2\Sigma_{III}\right) \end{aligned} \tag{4.64}$$

A expressão para perdas de energia também pode ser apresentada na forma de séries relacionadas com as potências dos invariantes I_1, I_2 e I_3. É conhecido que $\psi = \Delta W / W$ não pode mudar quando à mudança dos sinais da tensão. Assim, apenas os termos com potências das tensões que são múltiplos de dois devem permanecer na expressão para ΔW

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left(A_2 I_1^2 + B_2 I_2 + A_4 I_1^4 + B_4 I_2^2 + A_6 I_1^6 + B_6 I_2^3 + C_6 I_3^2 + \ldots\right) \tag{4.65}$$

A equação (4.65) define as perdas de energia de um corpo isotrópico sujeito a um estado de tensão volúmico arbitrário. Aqui os coeficientes A_i, B_i e C_i são correspondentes aos invariantes I_1, I_2 e I_3, respectivamente. Estes podem depender da temperatura, T, e da frequência de carregamento, ω. Os índices das constantes A, B e C conferem com o expoente da tensão para os termos da expansão em série. Se a expansão é restringida apenas pelo sexto expoente de tensão, então será obtida a dependência da

amplitude da dissipação de energia relativa da quarta potência, para tipos de estados de tensão simples.

Um conjunto de constantes de dissipação descreve a amplitude - fricção interna dependente; estas são determinadas experimentalmente. Há sete constantes: A_2, B_2, A_4, B_4, A_6, B_6 e C_6.

A expressão para o valor de amplitude da energia elástica de uma unidade de volume de um corpo, em termos dos invariantes do tensor de tensões será escrita como:

$$W = \frac{1}{2E}\left[I_1^2 - 2(1+\upsilon)I_2\right] \tag{4.66}$$

onde E é o modulo de Young e υ é o coeficiente de Poisson de um corpo isotrópico.

Note-se que está em consideração o modelo de amplitude - dependente da energia de amortecimento. Para determinar os valores das sete constantes de dissipação de um corpo isotrópico, é necessário efectuar experiências e obter as relações entre a dissipação de energia relativa, ψ, e o nível de tensão. Por exemplo, é suficiente definir as relações para carregamento uniaxial , corte ideal e carregamento hidrostático tridimensional.

Assumindo que o material é sujeito a carregamento cíclico uniaxial ao longo do eixo x_1 pela tensão σ, o tensor das tensões terá então a forma $\sigma_{11} = \sigma$, $\sigma_{ij} = 0$ $(ij \neq 11)$ e os invariantes de tensão são: $I_1 = \sigma$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$. As expressões para perdas de energia e energia elástica [equações (4.65) e (4.66)] serão

$$\Delta W(\sigma) = \frac{1}{2}\left(A_2\sigma^2 + A_4\sigma^4 + A_6\sigma^6\right) \tag{4.67}$$

$$W(\sigma) = \frac{1}{2E}\sigma^2$$

A relação de quarta potencia será obtida para o factor de dissipação, ψ_σ:

$$\psi_\sigma = E\left(A_2 + A_4\sigma^2 + A_6\sigma^4\right) \tag{4.68}$$

É necessário aproximar os dados experimentais com o auxilio do polinómio [equação (4.68)] e calcular os valores das três constantes de dissipação A_2, A_4 e A_6.

As constantes de dissipação B_i, podem ser definidas de experiências em corte ideal, por exemplo no plano dos eixos (x_1,x_2). Neste caso $\sigma_{12} = \tau$, $\sigma_{ij} = 0$ $(ij \neq 12, ji \neq 12)$. O factor de dissipação sujeito a corte ideal será designado como $\psi_\tau(\tau)$. Os invariantes do tensor de tensões será da forma: $I_1 = 0$, $I_2 = -\tau^2$, $I_3 = 0$. As expressões análogas à equação (4.42), para corte ideal, terá a forma:

$$\Delta W(\tau) = \frac{1}{2}\left(-B_2\tau^2 + B_4\tau^4 - B_6\tau^6\right)$$
$$W(\tau) = \frac{1}{2G}\tau^2 \tag{4.69}$$

onde G é o modulo de corte do material, relacionado com as outras constantes elásticas como

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

O factor de dissipação $\psi_\tau(\tau)$ é representado na forma da seguinte relação

$$\psi_\tau(\tau) = G\left(-B_2 + B_4\tau^2 - B_6\tau^4\right) \tag{4.70}$$

Os valores das três constantes de dissipação, B_2, B_4 e B_6 são determinadas da aproximação dos dados experimentais pela relação para $\psi_\tau(\tau)$.

A última constante C_6, pode ser definida de experiências em carregamento hidrostático 3-D. Assumindo que o factor de dissipação correspondente, ψ_p, depende da pressão hidrostática, p. O tensor de tensão para este tipo de carregamento é da forma

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{ij} = 0 \ (i \neq j)$$

Os invariantes de tensão tomam os seguintes valores

$$I_1 = 3p, \quad I_2 = 3p^2, \quad I_3 = p^3$$

Como resultado, as expressões para perdas de energia e energia elástica são da forma

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left[(9A_2 + 3B_2)p^2 + (81A_4 + 9B_4)p^4 + (729A_6 + 27B_6 + C_6)p^6\right] \tag{4.71}$$

$$W = \frac{1}{2K}p^2$$

onde $K = E/3(1-2\upsilon)$ é o modulo elástico de compressibilidade do material.

O factor de dissipação $\psi_p(p)$, que inclui uma constante desconhecida, C_6, é definido pela seguinte formula

$$\psi_p(p) = K\left[9A_2 + 3B_2 + (81A_4 + 9B_4)p^2 + (729A_6 + 27B_6 + C_6)p^4\right] \tag{4.72}$$

Aproximando a relação experimental dos factores de dissipação com o auxilio da equação (4.72), obtém-se o valor da constante C_6.

A experiências no carregamento cíclico tridimensional para determinar as perdas de energia relativas, pode ser um problema técnico dificil. Razão pela qual, o número de constantes pode ser reduzido na equação (4.65), se o material for assumido não dissipar energia quando ocorrem estas condições de carregamento. Então, a perda de energia, ΔW, será uma função do tensor de tensões desvio. Significa que, para o corpo isotrópico ΔW é função de dois invariantes do desvio. O desvio de tensões, $\overline{S}_{ij}$, não varia quando é carregado, tridimensionalmente, em tracção ou compressão. É definido como:

$$\overline{S}_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \tag{4.73}$$

onde a componente hidrostática de tensão é da forma:

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\Sigma_I = \frac{1}{3}I_1$$

e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Os invariantes do tensor de tensões desvio, $\overline{\Sigma}_I = 0$, $\overline{\Sigma}_{II}$, $\overline{\Sigma}_{III}$ são iguais, respectivamente

$$\overline{\Sigma}_I = 0$$
$$\overline{\Sigma}_{II} = \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p\right)\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p\right)$$
$$\overline{\Sigma}_{III} = \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p\right)\left(\sigma_{ik} - \delta_{ik} p\right)\left(\sigma_{kj} - \delta_{kj} p\right)$$

ou em termos das tensões principais, σ_1, σ_2 e σ_3

$$\overline{\Sigma}_{II} = \frac{1}{3}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]$$
$$\overline{\Sigma}_{III} = \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^3 + \left(\sigma_2 - \sigma_1\right)^3 + \left(\sigma_3 - \sigma_2\right)^3 \qquad (4.74)$$

A expressão para perdas de energia, ΔW, será da forma

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left(D_2 \overline{\Sigma}_{II} + D_4 \overline{\Sigma}_{II}^2 + D_6 \overline{\Sigma}_{II}^3 + F_6 \overline{\Sigma}_{III}^2 + \ldots\right) \qquad (4.75)$$

Aqui as constantes de dissipação, D_i e F_i, têm índices em conformidade com os expoentes das tensões para os termos da expansão em série, a qual inclui estas constantes [análogo à equação (4.65)].

Se a série é limitada pelos termos de sexta potencia relacionado com tensões, então a resposta dissipativa do corpo isotrópico será descrito por quatro constantes independentes, D_2, D_4, D_6 e F_6. Os valores das constantes são definidos de duas experiências, uma em carregamento uniaxial e outra corte ideal.

Supondo que $\sigma_{11} = \sigma$, $\sigma_{ij} = 0$ $(ij \neq 11)$, então as relações para os invariantes do desvio em termos das tensões principais permite determinar $\overline{\Sigma}_{II} = 2/3(\sigma^2)$, $\overline{\Sigma}_{III} = 0$. Uma vez feitas as transformações necessárias, obtém-se para o factor de dissipação sujeito a carregamento cíclico a seguinte expressão:

$$\psi_\sigma(\sigma) = E\left(\frac{2}{3}D_2 + \frac{4}{9}D_4\sigma^2 + \frac{8}{27}D_4\sigma^4\right) \tag{4.76}$$

Os valores de três constantes de dissipação, D_i, pode ser determinado por aproximação dos dados experimentais com o polinómio [equação (4.76)].

A segunda experiência é o corte ideal no plano (x_1,x_2). Neste caso $\sigma_{12} = \tau$, $\sigma_{ij} = 0$ $(ij \neq 12, ij \neq 21)$. As tensões principais em corte ideal será: $\sigma_1 = -\tau$, $\sigma_2 = \tau$, $\sigma_3 = 0$. As equações para os invariantes do tensor desvio será da forma: $\overline{\Sigma}_{II} = 2\tau^2$, $\overline{\Sigma}_{III} = 6\tau^3$.

As expressões para o factor de dissipação, ψ_τ, sujeito a corte ideal será:

$$\psi_\tau = G\left[2D_2 + 4D_4\tau^2 + \left(8D_6 + 36F_6\right)\tau^4\right] \tag{4.77}$$

onde apenas uma constante de dissipação, F_6, é desconhecida. O seu valor é determinado por aproximação à relação experimental entre ψ_τ e τ com o polinómio [equação (4.77)].

Saliente-se que em alguns casos é requerida correspondência mais completa de dados experimentais com os valores das constantes D_2, D_4, D_6 e F_6. Depois qualquer método de aproximação pode ser utilizado.

Para verificar as relações teóricas, equações (4.65) e (4.75), experimentalmente, é suficiente comparar os valores experimentais e teóricos dos factores de dissipação sujeitos a tipos de estado de tensão complexos, tendo já determinado os valores necessários das constantes de dissipação de um corpo isotrópico através de condições de carregamento simples.

4.4. MODULO COMPLEXO DE CORPOS ANISOTRÓPICOS

Um modelo que descreve o amortecimento de energia sujeito a carregamento cíclico é o modelo material viscoelástico linear. As propriedades viscoelásticas de um material

podem ser demonstrados através dos resultados experimentais em fluência e relaxação de tensões. Estas experiências são efectuadas para determinar a lei de variação das tensões ou deformações com o tempo, sabendo que os valores das tensões (deformações) permanecem constantes.

Muitas relações especiais são propostas para as equações de estado que relacionam as tensões e deformações. Uma forma alternativa para as relações físicas da teoria linear de um corpo viscoelástico, é uma relação da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} G_{ijkl}(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau) \tag{4.78}$$

onde $G_{ijkl}(t)$ é o tensor da função relaxação de tensões, $\sigma_{ij}(t)$ e $\varepsilon_{ij}(t)$ são os tensores de tensão e deformação dependentes do tempo, t [2]. A equação (4.78) considera que as tensões em qualquer instante de tempo são determinadas pela historia completa de mudança de deformação até esse instante.

As relações viscoelásticas são também representadas na forma da relação funcional de deformações versus função de tensão:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} S_{ijkl}(t-\tau) d\sigma_{kl}(\tau) \tag{4.79}$$

Aqui $S_{ijkl}(t)$ é o tensor da função de fluência.

As transformações de Laplace tornam possível obter as relações entre os tensores de relaxação e as funções de fluência [1].

A resposta viscoelástica de corpos anisotrópicos são completamente descritas por um conjunto de funções de fluência ou funções de relaxação. Dependendo da simetria material viscoelástica, o número de funções independentes de fluência ou relaxação é reduzido e é igual ao número de constantes elásticas independentes. A forma das funções de fluência ou relaxação podem ser definidas com base em experiências de fluência ou relaxação de tensões sujeitas a tipos de carregamento simples.

Considere-se o carregamento cíclico num corpo com frequência, ω, e amplitude de deformações, ε_{kl}^{0}. O carregamento é efectuado de acordo com a lei:

$$\varepsilon_{kl}^{*}(t) = \varepsilon_{kl}^{0} e^{i\omega t}$$

onde $\varepsilon_{kl}^{*}(t)$ é a deformação complexa. Então, a equação (4.78) é transformada da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^{*} = i\omega\varepsilon_{kl}^{0} e^{i\omega t} \int_{0}^{\infty} G_{ijkl}(u) e^{-i\omega u} du \tag{4.80}$$

ou

$$\sigma_{ij}^{*} = G_{ijkl}^{*} \varepsilon_{kl}^{*}$$

onde $u = t - \tau$, σ_{ij}^{*} são as tensões complexas e G_{ijkl}^{*} são os módulos complexos.

Os módulos complexo podem ser expandidos em partes reais e imaginárias

$$G_{ijkl}^{*} = G_{ijkl}^{'} + iG_{ijkl}^{''}$$

onde

$$\begin{aligned} G_{ijkl}^{'}(\omega) &= \omega \int_{0}^{\infty} G_{ijkl}(u) \operatorname{sen}(\omega u) du \\ G_{ijkl}^{''}(\omega) &= \omega \int_{0}^{\infty} G_{ijkl}(u) \cos(\omega u) du \end{aligned} \tag{4.81}$$

As tensões e deformações complexas são relacionadas pelo modulo complexo na lei de Hooke. Por isso, quando se resolvem os problemas dinâmicos no carregamento harmónico do corpo viscoelástico, é suficiente utilizar as soluções correspondentes da teoria linear de elasticidade. Fazendo isto, o módulo elástico deve ser alterado para o modulo complexo do corpo viscoelástico.

A equação (4.80) pode ser considerada como a transformação de Fourier da função de fluência. Esta é a transformação inversa de Fourier que permite encontrar a original pela sua imagem. Assim, o tensor das funções de fluência, $G_{ijkl}(t)$, pode ser obtido das funções de modulo complexo, $G_{ijkl}^{'}(\omega)$ ou $G_{ijkl}^{''}(\omega)$ [1].

$$G_{ijkl}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{G'_{ijk}(\omega)}{\omega} \operatorname{sen}\omega t d\omega \tag{4.82}$$

ou

$$G_{ijkl}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{G''_{ijk}(\omega)}{\omega} \cos\omega t d\omega$$

Saliente-se que a equação (4.80) pode ser representada na seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^{*} = \sigma_{ij}^{0} e^{i(\omega t + \varphi_{ij})}$$

onde $\sigma_{ij}^{0} = \left|\sigma_{ijkl}^{*}\varepsilon_{kl}^{0}\right|$, a tangente de perda é $tg\varphi_{ij}(\omega) = \left[G''_{ijkl}(\omega)\varepsilon_{kl}^{0}\right] / \left[G'_{ijkl}(\omega)\varepsilon_{kl}^{0}\right]$, os ângulos φ_{ij} não são objectos do tensor, estes são denominados ângulos de atraso das deformações $\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^{0} e^{i\omega t}$ em relação às tensões, sujeito a vibrações harmónicas estáveis.

Perdas de energia, numa unidade de volume de um corpo, num ciclo completo de carregamento são definidas como:

$$\Delta W = \oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \oint \operatorname{Re}\sigma_{ij}^{*} d(\operatorname{Re}\varepsilon_{ij}^{*}) \tag{4.84}$$

Das equações (4.80) e (4.81)

$$\operatorname{Re}\varepsilon_{ij}^{*} = \varepsilon_{ij}^{0}\cos\omega t$$

$$\operatorname{Re}\sigma_{ij}^{*} = \varepsilon_{kl}^{0}\left(G'_{ijkl}\cos\omega t - G''_{ijkl}\operatorname{sen}\omega t\right)$$

Substituindo os valores das últimas expressões e efectuando a integração num período de carregamento, obtém-se

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} \omega\left(G''_{ijkl}\sin^2\omega t - \frac{1}{2}G''_{ijkl}\sin\omega t\right)\varepsilon_{kl}^{0}\varepsilon_{ij}^{0} dt \tag{4.85}$$

ou

$$\Delta W = \pi G''_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}\varepsilon_{kl}^{0}$$

A comparação das equações (4.85) e (4.56) mostra que o tensor das características elasto-dissipativas de deformações e a parte imaginária do tensor do modulo complexo coincide com a exactidão de um factor constante 2π.

Saliente-se que o modelo de corpo elástico com comportamento dissipativo, em oposição ao corpo viscoelástico, torna possível manter a simplicidade para determinar o estado tensão-deformação. O modelo permite considerar a dependência da amplitude da dissipação de energia relativa e descrever frequência - independente da fricção interna. isto é essencial para alguns materiais.

4.5. TENSORES DAS CARACTERÍSTICAS ELASTO-DISSIPATIVAS PARA MATERIAIS COM DIFERENTES TIPOS DE SIMETRIA

Escreva-se as equações (4.56) e (4.57) na forma matricial

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2}\{\sigma\}^T[\Psi]\{\sigma\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[X]\{\sigma\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\{\sigma\}^T[X^*]\{\varepsilon\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[\Phi]\{\varepsilon\} \end{aligned} \tag{4.86}$$

Aqui, as componentes para cada tensor das características elasto-dissipativas das tensões ou deformações e tensores mistos são representados pelas matrizes $[\Psi]$, $[\Phi]$, $[X]$ e $[X^*]$, respectivamente.

Um corpo anisotrópico pode ter alguns tipos de simetria. Nesse caso a selecção do sistema de coordenadas apropriado resulta numa expressão simples para as matrizes $[\Psi]$, $[\Phi]$, $[X]$ e $[X^*]$. Para casos específicos de simetria material pode ser demonstrado que as matrizes $[\Psi]$ e $[\Phi]$ (da mesma ordem dos tensores do modulo de elasticidade e

flexibilidade) têm estruturas que são similares às estruturas das matrizes correspondentes dos tensores G_{ijkl} e S_{ijkl} e do mesmo número de constantes independentes.

O corpo ortotrópico tem três planos de simetria mutuamente ortogonais. A sua resposta elasto-dissipativa é definida por nove componentes da matriz das características elasto-dissipativas. A matriz $[\Psi]$ é da forma:

$$[\Psi]=\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \psi_{22} & \psi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \psi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \psi_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & \psi_{55} & 0 \\ & & & & & \psi_{66} \end{bmatrix} \tag{4.87}$$

A matriz das características elasto-dissipativas de um corpo transversalmente isotrópico [para o qual o plano (x_1,x_2) é o plano de simetria] contém cinco componentes independentes

$$[\Psi]=\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \psi_{22} & \psi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \psi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(\psi_{22}-\psi_{23}) & 0 & 0 \\ & sim. & & & \psi_{55} & 0 \\ & & & & & \psi_{66} \end{bmatrix} \tag{4.88}$$

4.6. SISTEMA DAS CONSTANTES DE ENGENHARIA

As matrizes das características elasto-dissipativas determinam perdas de energia num corpo anisotrópico sujeito a um estado de tensão arbitrário. Os valores das suas componentes podem ser obtidas de um conjunto de testes materiais, sujeitando o material a carregamento cíclico. Na prática, é conveniente determinar as componentes das matrizes das características elasto-dissipativas de tensão $[\Psi]$.

Assim, para um material ortotrópico os valores dos factores de dissipação ψ_1^*, ψ_2^* e ψ_3^* [equação (4.55)] podem ser determinados, se for efectuado o carregamento uniaxial ao longo dos eixos coordenados x_1, x_2 e x_3. De experiências de corte nos planos coordenados (x_2,x_3), (x_1,x_3) e (x_1,x_2) é possível determinar os factores de dissipação ψ_4^*, ψ_5^* e ψ_6^*. Um conjunto de seis experiências permite definir os valores das componentes da diagonal da matriz $[\Psi]$, [equação (4.87)].

$$\psi_{11}=\frac{\psi_1^*}{E_1},\ \psi_{22}=\frac{\psi_2^*}{E_2},\ \psi_{33}=\frac{\psi_3^*}{E_3},\ \psi_{44}=\frac{\psi_4^*}{G_{23}},\ \psi_{55}=\frac{\psi_5^*}{G_{13}},\ \psi_{66}=\frac{\psi_6^*}{G_{12}} \tag{4.89}$$

Aqui E_1, E_2 e E_3 são os módulos de Young sujeitos a carregamento uniaxial ao longo dos eixos x_1, x_2 e x_3; enquanto G_{23}, G_{13} e G_{12} são os módulos de corte nos planos coordenados correspondentes.

Fazendo os factores de dissipação, determinados em experiências num ciclo de carregamento biaxial uniforme ao longo dos eixos x_1 e x_2, x_1 e x_3, x_2 e x_3 como ψ_{12}^*, ψ_{13}^* e ψ_{23}^*, o resto das componentes da matriz $[\Psi]$ [equação (4.87)] é traduzido por:

$$\begin{aligned}
\psi_{12}&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{E_1}\left[\psi_{12}^*(1-2\upsilon_{12})-\psi_1^*\right]+\frac{1}{E_2}\left(\psi_{12}^*-\psi_2^*\right)\right\}\\
\psi_{13}&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{E_1}\left[\psi_{13}^*(1-2\upsilon_{13})-\psi_1^*\right]+\frac{1}{E_3}\left(\psi_{13}^*-\psi_3^*\right)\right\}\\
\psi_{23}&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{E_2}\left[\psi_{23}^*(1-2\upsilon_{23})-\psi_2^*\right]+\frac{1}{E_3}\left(\psi_{23}^*-\psi_3^*\right)\right\}
\end{aligned} \tag{4.90}$$

onde υ_{12}, υ_{13} e υ_{23} são os coeficientes de Poisson.

As combinações dos nove factores podem ser assumidas como o sistema das constantes de engenharia, determinando o comportamento dissipativo do corpo ortotrópico sujeito a um estado arbitrário de tensão. Estes factores são os seguintes:

- factores de dissipação sujeitos a carregamento uniaxial ao longo dos eixos x_1, x_2 e x_3, ψ_1^*, ψ_2^* e ψ_3^*
- factores de dissipação sujeitos a corte nos planos coordenados (x_2,x_3), (x_1,x_3) e (x_1,x_2), ψ_4^*, ψ_5^* e ψ_6^*
- factores de dissipação sujeitos a carregamento biaxial uniforme ao longo dos planos coordenados, ψ_{12}^*, ψ_{13}^* e ψ_{23}^*

Saliente-se que, como relacionadas com a estrutura, as componentes da matriz $[\Psi]$ são os coeficientes de dissipação com modulo de elasticidade, isto é, dependem quer dos factores de dissipação quer das constantes elásticas do material. Por esta razão, é aconselhado chamar às matrizes $[\Psi]$, $[\Phi]$, $[X]$ e $[X^*]$ as matrizes das características elasto-dissipativas do corpo anisotrópico.

A resposta dissipativa de um corpo transversalmente isotrópico é descrito por cinco coeficientes [equação (4.88)]. Por esta razão, é suficiente determinar as seguintes constantes: ψ_1^*, ψ_2^*, ψ_4^*, ψ_6^* e ψ_{12}^* (figura 4.1) [o plano (x_2,x_3) é o plano de isotropia]. Os valores das componentes da matriz $[\Psi]$ são calculados com o auxilio das equações (4.89) e (4.90), considerando a equação (4.88). A realização do ciclo de carregamento biaxial com o objectivo de determinar o coeficiente ψ_{12}^* envolve algumas dificuldades. Esta é a razão pela qual se torna vantajoso modificar este procedimento para carregamento uniaxial a um ângulo de 45° em relação ao eixo x_1 no plano (x_1,x_3). O factor de dissipação, neste caso de carregamento, será designada como $\psi_{1/2}^*$. Assim o valor da componente ψ_{12} da matriz $[\Psi]$ [equação (4.88)] é calculado da formula:

$$\psi_{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{\psi^*_{1/2}(1-2\upsilon_{12})-\psi^*_1}{E_1} + \frac{\psi^*_{1/2}-\psi^*_2}{E_2} + \frac{\psi^*_{1/2}-\psi^*_6}{G_{12}}\right] \quad (4.91)$$

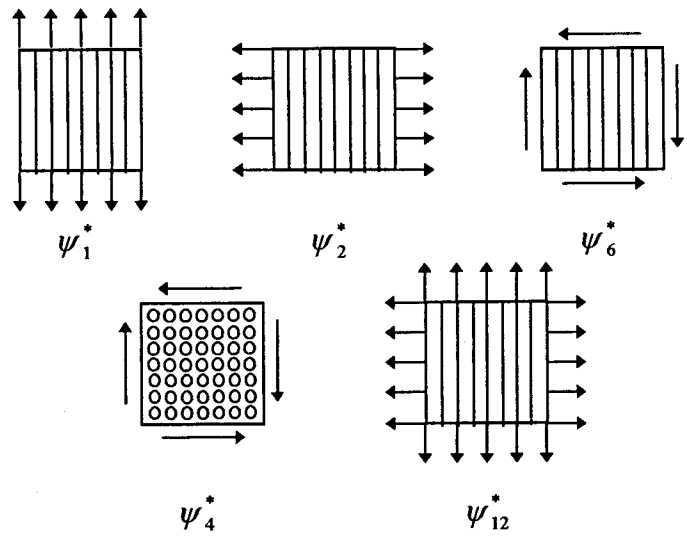


Figura 4.1 - Esquemas de experiências para determinar os valores das constantes de dissipação de engenharia de um corpo transversalmente isotrópico.

No caso de completa isotropia das propriedades, apenas duas componentes da matriz das características elasto-dissipativas permanecem independentes. Por exemplo, a matriz elasto-dissipativa de tensões é da forma:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & \psi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(\psi_{11}-\psi_{12}) & 0 & 0 \\ & sim. & & & 2(\psi_{11}-\psi_{12}) & 0 \\ & & & & & 2(\psi_{11}-\psi_{12}) \end{bmatrix}$$

É conveniente utilizar duas constantes como constantes independentes de engenharia de dissipação do corpo isotrópico - o factor de dissipação em carregamento uniaxial, ψ^*_1, e o factor de dissipação ao corte, ψ^*_6. Se o módulo de Young for designado por E e o modulo de corte por G, então as componentes da matriz $[\Psi]$ são expressas em termos das constantes elásticas e de dissipação da seguinte forma:

$$[\Psi]=\begin{bmatrix} \frac{\psi_1^*}{E} & \frac{\psi_1^*}{E}-\frac{\psi_6^*}{2G} & \frac{\psi_1^*}{E}-\frac{\psi_6^*}{2G} & & & \\ & \frac{\psi_1^*}{E} & \frac{\psi_1^*}{E}-\frac{\psi_{61}^*}{2G} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{\psi_1^*}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{\psi_6^*}{E} & 0 & 0 \\ & sim. & & & \frac{\psi_6^*}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{\psi_6^*}{E} \end{bmatrix}$$

4.7. ESTADO PLANO DE TENSÃO

Discuta-se o estado plano de tensão do corpo transversalmente isotrópico. Fazendo o plano (x_2,x_3) ser o plano de isotropia (o plano isotrópico). As tensões $\sigma_3=\sigma_{23}=\sigma_{13}=0$. No entanto, é suficiente considerar a matriz coluna reduzida das tensões e deformações

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}, \qquad \{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ 2\varepsilon_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}$$

e as matrizes das características elasto-dissipativas

$$[\psi]=\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12} & 0\\ \psi_{12} & \psi_{22} & 0\\ 0 & 0 & \psi_{66}\end{bmatrix}, \quad [\varphi]=\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & 0\\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varphi_{66}\end{bmatrix}, \quad [\chi]=\begin{bmatrix}\chi_{11} & \chi_{12} & 0\\ \chi_{12} & \chi_{22} & 0\\ 0 & 0 & \chi_{66}\end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Aqui τ_{12} é a tensão de corte e γ_{12} é a deformação de corte.

As expressões para perdas de energia em termos das características elasto-dissipativas sujeito a estado plano de tensão são da forma:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2}\{\sigma\}^T[\psi]\{\sigma\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[\chi]\{\sigma\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\{\sigma\}^T[\chi^*]\{\varepsilon\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[\varphi]\{\varepsilon\} \end{aligned} \tag{4.93}$$

As componentes correspondentes das matrizes das características elasto-dissipativas de tensões [equação (4.88)] e para estado plano de tensão [equação (4.92)] são idênticas, mas isto não é verdade para as componentes das matrizes das características elasto-dissipativas de deformações $[\Phi]$ e $[\varphi]$, e matrizes mistas $[X]$ e $[\chi]$. As relações entre as componentes das matrizes podem ser determinadas facilmente, se for suposto que $\sigma_3 = 0$ na lei de Hooke para estado plano de deformação, então a expressão de deformação obtida é a seguinte, ε_3:

$$\varepsilon_3 = -\frac{g_{13}}{g_{33}}\varepsilon_1 - \frac{g_{23}}{g_{33}}\varepsilon_2$$

Substituindo o valor de ε_3 na equação (4.86) e transformando o termo similar, obtém-se as seguintes relações para as componentes das matrizes $[X]$ e $[\chi]$

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= X_{11} - X_{31}g_{13}/g_{33} \\ \chi_{12} &= X_{12} - X_{32}g_{13}/g_{33} \\ \chi_{21} &= X_{21} - X_{31}g_{23}/g_{33} \\ \chi_{22} &= X_{22} - X_{32}g_{23}/g_{33} \\ \chi_{66} &= X_{66} \end{aligned} \tag{4.94}$$

e para as componentes das matrizes das características elasto-dissipativas de deformações $[\Phi]$ e $[\varphi]$

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= \Phi_{11} + g_{13}\left(\Phi_{33}g_{13} - 2\Phi_{13}g_{33}\right)/g_{33}^2 \\
\varphi_{12} &= \Phi_{12} + g_{13}\left(\Phi_{33}g_{13}g_{23} - \Phi_{13}g_{23}g_{33} - \Phi_{23}g_{13}g_{33}\right)/g_{33}^2 \\
\varphi_{22} &= \Phi_{11} + g_{23}\left(\Phi_{33}g_{23} - 2\Phi_{23}g_{33}\right)/g_{33}^2 \\
\varphi_{66} &= \Phi_{66}
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Represente-se as relações entre tensões e deformações, lei de Hooke para estado plano de tensão [equações (4.51) e (4.52)], na forma matricial com o auxilio da matriz de rigidez [G] ou a matriz de flexibilidade [S] (secção 4.2.1.)

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [G]\{\varepsilon\} \\
\{\varepsilon\} &= [S]\{\sigma\}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

As matrizes de rigidez e de flexibilidade são da forma

$$\begin{aligned}
[G] &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\gamma}\begin{bmatrix} E_1 & E_1\upsilon_{21} & 0 \\ E_2\upsilon_{12} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1-\gamma) \end{bmatrix} \\
[S] &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\upsilon_{12}/E_1 & 0 \\ -\upsilon_{21}/E_2 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Aqui E_1, E_2 e G_{12} são o modulo de Young ao longo dos eixos x_1 e x_2 e o modulo de corte no plano (x_1,x_2); υ_{12} e υ_{21} são os coeficientes de Poisson; $\gamma = \upsilon_{12}\upsilon_{21}$ e $E_1\upsilon_{21} = E_2\upsilon_{12}$.

Substituindo a equação (4.96) na equação (4.93) e comparando os seus primeiros membros, obtêm-se relações que são análogas à equação (4.58), mas são escritas na forma matricial:

$$
\begin{aligned}
[\psi] &= [S][\chi] = [S][\varphi][S] \\
[\varphi] &= [\chi][G] = [G][\psi][G] \\
[\chi] &= [G][\psi] = [\varphi][S] = [\chi^*]^T
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

Saliente-se que as matrizes $[\psi]$ e $[\varphi]$ são simétricos e as matrizes mistas $[\chi]$ e $[\chi^*]$ não são simétricas.

4.8. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Será aqui discutida a transformação de coordenadas das características elasto-dissipativas [equação (4.92)] para o corpo transversalmente isotrópico, como uma mudança do sistema coordenado (x_1,x_2) para um sistema coordenado arbitrariamente orientado (x_1',x_2'). O novo sistema coordenado é rodado em torno do eixo x_3 de um ângulo α em relação aos eixos (x_1,x_2). O valor da amplitude da energia elástica W num ciclo de carregamento é definido pela equação (4.14).

Para obter as relações para as matrizes $[\psi']$, $[\varphi']$ e $[\chi']$ no novo sistema de coordenadas (x_1',x_2'), é suficiente trocar as tensões e deformações na equação (4.93) para as suas expressões nos eixos (x_1',x_2') [equações (4.39) e (4.40)].

O valor de amplitude para a energia elástica e perdas de energia num ciclo de carregamento são valores escalares e não dependem da transformação de coordenadas. Substituindo as equações (4.39) e (4.40) nas equações (4.14) e (4.93), é fácil obter as regras de transformação para as matrizes correspondentes.

A comparação das regras de transformação [equação (4.93) e (4.14)] sujeitas a mudança dos eixos coordenados mostra que a matriz das características elasto-dissipativas de tensões, $[\psi]$, transforma-se da mesma forma como a matriz flexibilidade, $[S]$; a matriz das características elasto-dissipativas de deformações, $[\varphi]$ transforma-se como a matriz de rigidez, $[G]$, e vice-versa,

$$\begin{aligned}\left[\psi'\right] &= \left[T_2\right]\left[\psi\right]\left[T_2\right]^T \\ \left[\varphi'\right] &= \left[T_1\right]\left[\varphi\right]\left[T_1\right]^T\end{aligned} \tag{4.99}$$

As seguintes formulas de transformação são válidas para a matriz mista $\left[\chi'\right]$:

$$\left[\chi'\right] = \left[T_1\right]\left[\varphi\right]\left[T_2\right]^T \tag{4.100}$$

Multiplicando as matrizes nas equações (4.99) e (4.100), podem-se obter as relações entre as componentes das matrizes $\left[\psi'\right]$, $\left[\varphi'\right]$ e $\left[\chi'\right]$ no plano coordenado (x_1', x_2') e as componentes na sistema coordenado (x_1, x_2):

$$\begin{aligned}
\psi'_{11} &= c^4\psi_{11} + s^4\psi_{22} + (2\psi_{12} + \psi_{66})s^2c^2 \\
\psi'_{12} &= (\psi_{11} + \psi_{22} - \psi_{66})s^2c^2 + (s^4 + c^4)\psi_{12} \\
\psi'_{16} &= \left[2c^2\psi_{11} - 2s^2\psi_{22} + (2\psi_{12} + \psi_{66})(s^2 - c^2)\right]sc \\
\psi'_{22} &= s^4\psi_{11} + c^4\psi_{22} + (2\psi_{12} + \psi_{66})s^2c^2 \\
\psi'_{26} &= \left[2s^2\psi_{11} - 2c^2\psi_{22} + (2\psi_{12} + \psi_{66})(s^2 - c^2)\right]sc \\
\psi'_{66} &= (4\psi_{11} - 8\psi_{12} + 4\psi_{22})s^2c^2 + (s^2 - c^2)^2\psi_{66}
\end{aligned} \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned}
\chi'_{11} &= c^4\chi_{11} + s^4\chi_{22} + (\chi_{12} + \chi_{21} + 2\chi_{66})s^2c^2 \\
\chi'_{12} &= c^4\chi_{12} + s^4\chi_{21} + (\chi_{11} + \chi_{22} - 2\chi_{66})s^2c^2 \\
\chi'_{16} &= 2\left[c^2(\chi_{11} + \chi_{22} - \chi_{66}) - s^2(\chi_{22} + \chi_{21} - \chi_{66})\right]sc \\
\chi'_{21} &= (\chi_{11} + \chi_{22} - \chi_{66})s^2c^2 + s^4\chi_{12} + c^4\chi_{21} \\
\chi'_{22} &= c^4\chi_{22} + s^4\chi_{11} + (\chi_{12} + \chi_{21} + 2\chi_{66})s^2c^2 \\
\chi'_{26} &= 2\left[s^2(\chi_{11} - \chi_{12} - \chi_{66}) - c^2(\chi_{22} - \chi_{21} - \chi_{66})\right]sc \\
\chi'_{61} &= \left[c^2(\chi_{11} - \chi_{21} - \chi_{66}) - s^2(\chi_{22} - \chi_{12} - \chi_{66})\right]sc
\end{aligned} \tag{4.102}$$

$$\chi'_{62} = \left[s^2(\chi_{11} - \chi_{21} - \chi_{66}) - c^2(\chi_{22} - \chi_{12} - \chi_{66})\right]sc$$

$$\chi'_{66} = 2(\chi_{11} + \chi_{22} - \chi_{12} - \chi_{21})s^2c^2 + (c^2 - s^2)\chi_{66}$$

$$\begin{aligned}
\psi'_{11} &= c^4\psi_{11} + s^4\psi_{22} + (2\psi_{12} + \psi_{66})s^2c^2 \\
\psi'_{12} &= (\psi_{11} + \psi_{22} - \psi_{66})s^2c^2 + (s^4 + c^4)\psi_{12} \\
\psi'_{16} &= \left[2c^2\psi_{11} - 2s^2\psi_{22} + (2\psi_{12} + \psi_{66})(s^2 - c^2)\right]sc \\
\psi'_{22} &= s^4\psi_{11} + c^4\psi_{22} + (2\psi_{12} + \psi_{66})s^2c^2 \\
\psi'_{26} &= \left[2s^2\psi_{11} - 2c^2\psi_{22} + (2\psi_{12} + \psi_{66})(s^2 - c^2)\right]sc \\
\psi'_{66} &= (4\psi_{11} - 8\psi_{12} + 4\psi_{22})s^2c^2 + (s^2 - c^2)^2\psi_{66}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

O comportamento material anisotrópico é conhecido como dependente da orientação dos eixos de carregamento. Esta dependência pode servir como um indicador da anisotropia material. Como relação com as propriedades dissipativas, a dependência do factor de dissipação, sujeito a carregamento uniaxial ao longo dos eixos coordenados e sujeito a corte ideal no ângulo de rotação dos eixos coordenados, pode ser considerado como tal indicador. É preferível obter estas dependências em experiências de investigação.

A expressão para os factores de dissipação é definida por uma razão de perda de energia [equação (4.93)] com a amplitude da energia elástica. [equação (4.14)] num ciclo completo de carregamento. Se os factores de dissipação sujeito a carregamento uniaxial cíclico ao longo dos eixos x'_1, x'_2 forem designados como ψ'_1, ψ'_2 e sujeito a corte ideal nos eixos x'_1, x'_2 como ψ'_6, então

$$\psi'_1 = \frac{\psi'_{11}}{s'_{11}}, \quad \psi'_2 = \frac{\psi'_{22}}{s'_{22}}, \quad \psi'_6 = \frac{\psi'_{66}}{s'_{66}} \tag{4.104}$$

onde ψ'_{11}, ψ'_{22} e ψ'_{66} são as componentes da matriz das características elasto-dissipativas de tensões; s'_{11}, s'_{22} e s'_{66} são as componentes da matriz de flexibilidade. Se se

expressar equação (4.104) em termos das constantes elásticas de engenharia e das constantes de dissipação

$$\psi_1' = \frac{\left(c^2 - s^2\right)\left(c^2 \frac{\psi_1^*}{E_1} - s^2 \frac{\psi_2^*}{E_2}\right) + \psi_{1/2}^* \left(\frac{1-2\upsilon_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{G_{12}}\right) s^2 c^2}{\frac{c^4}{E_1} + \frac{s^4}{E_2} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\upsilon_{12}}{E_1}\right) s^2 c^2}$$

$$\psi_6' = \frac{4\frac{2\psi_1^*}{E_1} + \frac{2\psi_1^*}{E_2} - \psi_{1/2}^* \left(\frac{1-2\upsilon_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{G_{12}}\right) s^2 c^2 + \frac{\psi_6^*}{G_{12}} \left(s^2 - c^2\right)^2}{4\left[\frac{1+2\upsilon_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right] s^2 c^2 + \frac{1}{G_{12}} \left(s^2 - c^2\right)^2} \tag{4.105}$$

A formula para ψ_2' é definida pela equação (4.105), tendo em atenção que o ângulo α é alterado para $(\pi/2 - \alpha)$.

4.9. REFERÊNCIAS

[1] Zinoviev, Peter A., Ermakov, Yury E., *Energy Dissipation in Composite Materials*, Techomic Publishing Company, 1994.

[2] Christensen, R. M., *Mechanics of Composites Materials*. New York: John Willey & Sons, Inc, 1979.

CAPÍTULO 5

RESPOSTA DISSIPATIVA DE COMPÓSITOS REFORÇADOS COM FIBRAS UNIDIRECCIONAIS

5.1. INTRODUÇÃO

O comportamento elástico e dissipativo dos materiais compósitos dependem da sua estrutura interna e das propriedades dos seus componentes (a fibra e a matriz). As características das componentes de ligação é também importante. O problema de determinação das características compósitas efectivas, com base nas características dos seus componentes constituintes é assunto das estruturas mecânicas compósitas. Este é um grande, importante, ramo de desenvolvimento da mecânica dos compósitos.

O objectivo da presente análise é discutir o problema estrutural como aplicado ao comportamento dissipativo de compósitos unidireccionais. O objectivo principal não é obter resultados quantitativos de confiança, mas revelar as principais características de modelação da resposta dissipativa de compósito baseadas nas propriedades das fibras e da matriz.

Os resultados para uma análise simples podem ser obtidos apenas com a utilização de modelos estruturais simples. O desejo da simplicidade é a situação denominante da presente análise. É claro que há um número praticamente ilimitado de possibilidades de redefinir os resultados descritos. Alguns métodos para resolução de problemas estruturais de compósitos foram propostos, referências [1,2,3,4].

5.2. COMPÓSITOS DE FIBRAS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICAS E MATRIZ ISOTRÓPICA: ESTADO DE TENSÃO TRIDIMENSIONAL

Considere-se um material unidireccional sujeito a um estado de tensão tridimensional. Alinhando a direcção das fibras com o eixo x_1 do sistema de coordenadas cartesianas (figura 5.1), e os eixos x_2 e x_3 perpendiculares às fibras, quando se determina perdas de

energia num ciclo de carregamento harmónico simétrico, deve-se basear a análise nos seguintes pressupostos:

1. o material, as fibras e a matriz são lineares elásticos e uniformes; as fibras são transversalmente isotrópicas e a matriz é isotrópica
2. não há descontinuidade no campo de deslocamentos na interface fibra-matriz e as perdas de energia, numa unidade de volume do compósito, ΔW, são iguais ao somatório das perdas de energia da fibra, ΔW_f, e da matriz, ΔW_m, considerando as suas fracções volúmicas

$$\Delta W = \xi \Delta W_f + (1-\xi)\Delta W_m \tag{5.1}$$

onde ξ é a fracção volúmica da fibra no compósito

3. as propriedades dissipativas das componentes do compósito são descritas por cinco constantes de dissipação para as fibras transversalmente isotrópicas e duas constantes dissipativas para a matriz isotrópica; os factores de dissipação não dependem da amplitude de tensão, mas podem depender da temperatura e frequência do carregamento
4. as hipóteses mais simples são aceites para descrever o estado de tensão-deformação do compósito; o reforço é unidireccional e como tal a tensão na direcção longitudinal depende da tensão na matriz e na fibra, tendo em consideração a percentagem volúmica de fibra, ξ, enquanto nas restantes direcções as tensões dependem essencialmente das tensões na matriz e as componentes do estado de tensão e deformação são expressas como [1]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}^0 = \xi\sigma_{11}^f + (1-\xi)\sigma_{11}^m \\
&\sigma_{22}^f = \sigma_{22}^0, \quad \sigma_{22}^m = \sigma_{22}^0 \\
&\sigma_{33}^f = \sigma_{33}^0, \quad \sigma_{33}^m = \sigma_3^0 \\
&\sigma_{23}^f = \sigma_{23}^0, \quad \sigma_{23}^m = \sigma_{23}^0 \\
&\sigma_{13}^f = \sigma_{13}^0, \quad \sigma_{13}^m = \sigma_{13}^0 \\
&\sigma_{12}^f = \sigma_{12}^0, \quad \sigma_{12}^m = \sigma_{12}^0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{f} &= \varepsilon_{11}^{0}, \quad \varepsilon_{11}^{\mathrm{m}} = \varepsilon_{11}^{0} \\
\varepsilon_{22}^{0} &= \xi\varepsilon_{22}^{f} + (1-\xi)\varepsilon_{22}^{m} \\
\varepsilon_{33}^{0} &= \xi\varepsilon_{33}^{f} + (1-\xi)\varepsilon_{33}^{m} \\
\varepsilon_{23}^{0} &= \xi\varepsilon_{23}^{f} + (1-\xi)\varepsilon_{23}^{m} \\
\varepsilon_{13}^{0} &= \xi\varepsilon_{13}^{f} + (1-\xi)\varepsilon_{13}^{m} \\
\varepsilon_{12}^{0} &= \xi\varepsilon_{12}^{f} + (1-\xi)\varepsilon_{12}^{m}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Aqui, σ_{ij}^{0}, $\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{0}$ são as tensões e deformações médias do compósito em relação ao eixo natural de isotropia e σ_{ij}^{f}, $\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{f}}$, $\sigma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{m}}$, $\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{m}}$ são as componentes dos tensores das tensões e das deformações na fibra e na matriz no sistema de coordenadas escolhido.

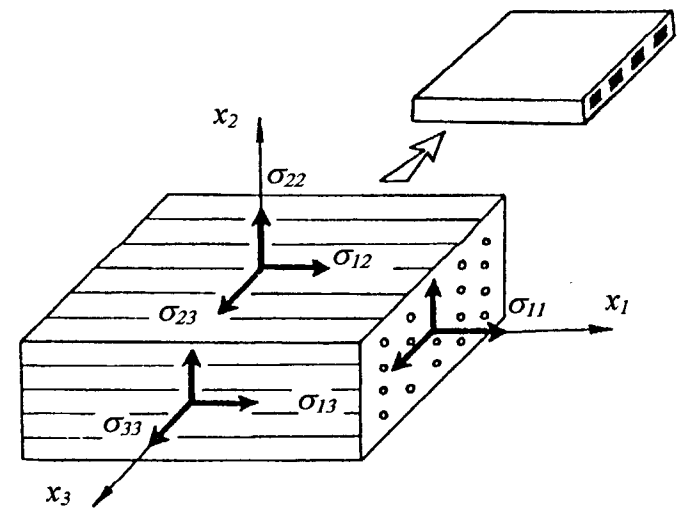


Figura 5.1 - Compósito unidireccional sujeito a um estado de tensão tridimensional

As tensões, as deformações, tal como a energia potencial são representadas pelos seus valores de amplitude durante o ciclo de carregamento harmónico. As tensões e as

deformações na fibra e na matriz são relacionadas entre si pela bem conhecida lei de Hooke:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon^f\} &= [S^f]\{\sigma^f\} \\ \{\varepsilon^m\} &= [S^m]\{\sigma^m\}\end{aligned} \tag{5.4}$$

onde as matrizes de flexibilidade para uma fibra transversalmente isotrópica e para uma matriz isotrópica são da forma:

$$[S^f] = \begin{bmatrix} s_{11}^f & s_{12}^f & s_{12}^f & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^f & s_{22}^f & s_{23}^f & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^f & s_{23}^f & s_{22}^f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(s_{22}^f - s_{23}^f\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^f \end{bmatrix}$$

$$[S^m] = \begin{bmatrix} s_{11}^m & s_{12}^m & s_{12}^m & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^m & s_{11}^m & s_{12}^m & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^m & s_{12}^m & s_{11}^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(s_{11}^m - s_{12}^m\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(s_{11}^m - s_{12}^m\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(s_{11}^m - s_{12}^m\right) \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

As matrizes coluna (os vectores) de deformações e tensões têm as componentes:

$$\{\varepsilon^f\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^f \\ \varepsilon_{22}^f \\ \varepsilon_{33}^f \\ 2\varepsilon_{23}^f \\ 2\varepsilon_{13}^f \\ 2\varepsilon_{12}^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^f \\ \varepsilon_{22}^f \\ \varepsilon_{33}^f \\ \gamma_{23}^f \\ \gamma_{13}^f \\ \gamma_{12}^f \end{Bmatrix}, \qquad \{\varepsilon^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^m \\ \varepsilon_{22}^m \\ \varepsilon_{33}^m \\ 2\varepsilon_{23}^m \\ 2\varepsilon_{13}^m \\ 2\varepsilon_{12}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^m \\ \varepsilon_{22}^m \\ \varepsilon_{33}^m \\ \gamma_{23}^m \\ \gamma_{13}^m \\ \gamma_{12}^m \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma^f\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^f \\ \sigma_{22}^f \\ \sigma_{33}^f \\ \sigma_{23}^f \\ \sigma_{13}^f \\ \sigma_{12}^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^f \\ \sigma_{22}^f \\ \sigma_{33}^f \\ \tau_{23}^f \\ \tau_{13}^f \\ \tau_{12}^f \end{Bmatrix}, \qquad \{\sigma^m\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^m \\ \sigma_{22}^m \\ \sigma_{33}^m \\ \sigma_{23}^m \\ \sigma_{13}^m \\ \sigma_{12}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^m \\ \sigma_{22}^m \\ \sigma_{33}^m \\ \tau_{23}^m \\ \tau_{13}^m \\ \tau_{12}^m \end{Bmatrix}.$$

aqui γ_{ij}^f, γ_{ij}^m são as deformações de corte da fibra e da matriz, nos planos correspondentes.

Perdas de energia na fibra e na matriz são definidas pelas relações definidas no capitulo 4, para corpos isotrópicos e transversalmente isotrópicos em termos das tensões

$$\begin{aligned} \Delta W_f &= \frac{1}{2}\{\sigma^f\}[\psi^f]\{\sigma^f\} \\ \Delta W_m &= \frac{1}{2}\{\sigma^m\}[\psi^m]\{\sigma^m\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Aqui a matriz $[\psi^f]$ tem a forma da equação (4.88) e a matriz $[\psi^m]$ é a matriz para um corpo isotrópico.

Para resolver o problema estrutural em termos das características dissipativas do compósito, é necessário determinar a expressão de perdas de energia do compósito como uma função das tensões médias. Os coeficientes na expressão devem ser determinados em termos dos parâmetros dissipativos e elásticos da fibra e da matriz. Com base nas equações (5.1) e (5.6), é necessário escolher as expressões das tensões para a fibra e para a matriz em termos das tensões médias do compósito. A equação (5.2) dá directamente as expressões requeridas, excepto para as componentes de tensão σ_{11}^f, σ_{11}^m. As equações para as componentes de tensão seleccionadas das equações (5.2) e (5.3) são as seguintes:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= \xi\sigma_{11}^f + (1-\xi)\sigma_{11}^m \\ \varepsilon_{11}^f &= \varepsilon_{11}^0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Utilizando a lei de Hooke [equação (5.4)], a condição de que as tensões normais na fibra, ao longo dos eixos x_2 e x_3, e as tensões na matriz são iguais às tensões médias do compósito, a equação (5.7) transforma-se em:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{0} &= \xi\sigma_{11}^{f} + (1-\xi)\sigma_{11}^{m} \\ \left(s_{12}^{m} - s_{12}^{f}\right)\left(\sigma_{22}^{0} - \sigma_{33}^{0}\right) &= s_{11}^{f}\sigma_{11}^{f} - s_{11}^{f}\sigma_{11}^{f} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Resolvendo este conjunto de equações para as tensões na fibra e na matriz, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{f} &= h_{11}^{f}\sigma_{11} + h_{12}^{f}\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right) \\ \sigma_{11}^{m} &= h_{11}^{m}\sigma_{11} + h_{12}^{m}\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right) \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde os coeficientes

$$\begin{aligned} h_{11}^{f} &= \frac{s_{11}^{m}}{(1-\xi)s_{11}^{f} + \xi s_{11}^{m}}; & h_{12}^{f} &= \frac{(1-\xi)\left(s_{12}^{m} - s_{12}^{f}\right)}{(1-\xi)s_{11}^{f} + \xi s_{11}^{m}} \\ h_{11}^{m} &= \frac{s_{11}^{f}}{(1-\xi)s_{11}^{f} + \xi s_{11}^{m}}; & h_{12}^{m} &= \frac{\xi\left(s_{12}^{f} - s_{12}^{m}\right)}{(1-\xi)s_{11}^{f} + \xi s_{11}^{m}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

A relação requerida, considerando as equações (5.2) e (5.9), terá então a forma:

$$\begin{aligned} \{\sigma^{f}\} &= [H^{f}]\{\sigma^{0}\} \\ \{\sigma^{m}\} &= [H^{m}]\{\sigma^{0}\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Aqui a matriz $\{\sigma^{0}\}$ é a matriz de tensões médias do compósito, e as matrizes $[H^{f}]$ *e* $[H^{m}]$ são as seguintes:

$$\left[H^f\right]=\begin{bmatrix} h_{11}^f & h_{12}^f & h_{12}^f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[H^m\right]=\begin{bmatrix} h_{11}^m & h_{12}^m & h_{12}^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação (5.1) para perdas de energia no compósito toma a forma matricial

$$\Delta W=\frac{1}{2}\left\{\sigma^0\right\}^T\left[\psi^0\right]\left\{\sigma^0\right\} \tag{5.12}$$

onde

$$\left[\psi^0\right]=\xi\left[H^f\right]\left[\psi^f\right]\left[H^f\right]+(1-\xi)\left[H^m\right]\left[\psi^m\right]\left[H^m\right]$$

é a matriz das características de dissipação de energia efectivas para um compósito com fibras transversalmente isotrópicas e matriz isotrópica.

O amortecimento de energia num compósito é determinado pela razão entre as perdas de energia [equação (5.12)] e o valor de amplitude da energia potencial elástica. A energia elástica é determinada em termos das tensões médias e da matriz de flexibilidade efectiva $\left[S^0\right]$

$$W=\frac{1}{2}\left\{\sigma^0\right\}^T\left[S^0\right]\left\{\sigma^0\right\} \tag{5.13}$$

A matriz $\left[S^0\right]$ pode ser obtida das equações (5.3) que relacionam as deformações médias do compósito com as deformações da fibra e da matriz tendo em consideração a lei de Hooke para as componentes constituintes do compósito e o compósito como um todo. Estas relações [equação (5.3)] pode ser escrita da forma matricial como

$$\left\{\varepsilon^0\right\}=\left[D^f\right]\left\{\varepsilon^f\right\}+\left[D^m\right]\left\{\varepsilon^m\right\} \tag{5.14}$$

onde

$$[D^f]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&\xi&0&0&0&0\\0&0&\xi&0&0&0\\0&0&0&\xi&0&0\\0&0&0&0&\xi&0\\0&0&0&0&0&\xi\end{bmatrix}$$

$$[D^m]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&(1-\xi)&0&0&0&0\\0&0&(1-\xi)&0&0&0\\0&0&0&(1-\xi)&0&0\\0&0&0&0&(1-\xi)&0\\0&0&0&0&0&(1-\xi)\end{bmatrix}$$

As deformações médias do compósito são expressas em termos das tensões médias de acordo com a lei

$$\{\varepsilon^0\}=[S^0]\{\sigma^0\} \tag{5.15}$$

Substituindo as expressões das equações (5.14), (5.4) e (5.11) na equação (5.15), obtém-se a relação para a matriz de flexibilidade efectiva

$$[S^0]=[D^f][S^f][H^f]+[D^m][S^m][H^m] \tag{5.16}$$

Aqui as componentes da matriz $[S^0]$ são determinadas em termos das componentes das matrizes de flexibilidade para os constituintes do compósito e fracção volúmica da fibra.

As equações (5.12), (5.13) e (5.16) definem as características dissipativas e elásticas efectivas do compósito em termos das características isotrópicas da matriz e transversalmente isotrópicas da fibra.

5.3. ESTADO PLANO DE TENSÃO PARA UM COMPÓSITO DE FIBRAS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICAS E MATRIZ ISOTRÓPICA

A ordem das matrizes e as suas formas nas equações (5.4) a (5.6) e (5.11) a (5.16) tornam-se mais simples no caso de estado plano de tensão [no plano (x_1,x_2)]. É suficiente considerar matrizes coluna de três componentes das tensão e das deformação

$$\left\{\sigma^f\right\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}^f\\ \sigma_{22}^f\\ \tau_{12}^f\end{Bmatrix},\quad \left\{\sigma^m\right\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}^m\\ \sigma_{22}^m\\ \tau_{12}^m\end{Bmatrix},\quad \left\{\varepsilon^f\right\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}^f\\ \varepsilon_{22}^f\\ \gamma_{12}^f\end{Bmatrix},\quad \left\{\sigma^f\right\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}^f\\ \varepsilon_{22}^f\\ \gamma_{12}^f\end{Bmatrix} \tag{5.17}$$

As matrizes $\left[H^f\right]$ e $\left[H^m\right]$ na equação (5.11) e as matrizes de flexibilidade da fibra e da matriz são da forma:

$$\left[H^f\right]=\begin{bmatrix}h_{11}^f & h_{12}^f & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \left[H^m\right]=\begin{bmatrix}h_{11}^m & h_{12}^m & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left[S^f\right]=\begin{bmatrix}s_{11}^f & s_{12}^f & 0\\ s_{12}^f & s_{22}^f & 0\\ 0 & 0 & s_{66}^f\end{bmatrix},\qquad \left[S^m\right]=\begin{bmatrix}s_{11}^m & s_{12}^m & 0\\ s_{12}^m & s_{11}^m & 0\\ 0 & 0 & 2\left(s_{11}^m-s_{12}^m\right)\end{bmatrix} \tag{5.18}$$

A equação (5.10) verifica-se para as componentes h_{ij}^f e h_{ij}^m das matrizes $\left[H^f\right]$ e $\left[H^m\right]$. As matrizes de características elasto-dissipativas $\left[\psi^f\right]$ e $\left[\psi^m\right]$ são da forma

$$\left[\psi^f\right]=\begin{bmatrix}\psi_{11}^f & \psi_{12}^f & 0\\ \psi_{12}^f & \psi_{22}^f & 0\\ 0 & 0 & \psi_{66}^f\end{bmatrix},\qquad \left[\psi^m\right]=\begin{bmatrix}\psi_{11}^m & \psi_{12}^m & 0\\ \psi_{12}^m & v_{22}^m & 0\\ 0 & 0 & 2\left(\psi_{11}^m-\psi_{12}^m\right)\end{bmatrix} \tag{5.19}$$

e as matrizes das componentes de deformação $\left[D^f\right]$ e $\left[D^m\right]$ tomam a seguinte forma:

$$[D^f]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \xi & 0\\ 0 & 0 & \xi\end{bmatrix}, \qquad [D^m]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & (1-\xi) & 0\\ 0 & 0 & (1-\xi)\end{bmatrix} \tag{5.20}$$

As matrizes de dimensão 3x3 para as características elasto-dissipativas do compósito e de flexibilidade do compósito são descritas pelas equações (5.12) e (5.16).

O comportamento dissipativo do compósito unidireccional sujeito a um estado plano de tensão é caracterizado por quatro constantes independentes, que resultam do produto das matrizes e incluem os termos ψ_{11}, ψ_{12}, ψ_{22} *e* ψ_{66}.

5.4. COMPÓSITO DE FIBRAS ISOTRÓPICAS E MATRIZ ISOTRÓPICA: ESTADO DE TENSÃO TRIDIMENSIONAL

Examine-se o caso onde a isotropia das propriedades é característica não só das matriz mas também da fibra. Os pressupostos da análise formulada no ponto 5.2 do presente capítulo continuam a ser aplicados, excepto para o terceiro deles que é alterado para a seguinte forma:

- As perdas de energia especifica (numa unidade de volume) nos constituintes do compósito são iguais à soma das perdas de energia devido às deformações de corte e de volume

$$\Delta W_f = \Delta W'_f + \Delta W''_f, \qquad \Delta W_m = \Delta W'_m + \Delta W''_m \tag{5.21}$$

  onde um só apostrofo corresponde à energia de mudança de forma e o duplo apostrofo corresponde à energia de mudança de volume
- As perdas de energia especifica nas componentes do compósito durante o ciclo de carregamento são proporcionais aos valores de amplitude das energias de mudanças de forma e de volume

$$\Delta W'_f = \psi'_f W'_f, \qquad \Delta W''_f = \psi''_f 'W''_f$$
$$\Delta W'_m = \psi'_m W'_m, \qquad \Delta W''_m = \psi''_m W''_m \tag{5.22}$$

Aqui ψ'_f e ψ'_m são os factores de dissipação para a fibra e para a matriz, que corresponde à energia de mudança forma da fibra W'_f e da matriz W'_m; ψ''_f e ψ''_m são os factores de dissipação de energia para a fibra e para a matriz, que corresponde à energia de mudança de volume da fibra W'_f e da matriz W'_m; a dissipação de energia dos constituintes do compósito não dependem da amplitude de tensão, mas em geral pode depender da temperatura e frequência de carregamento.

Considere-se a expressão para as energias especificas dos constituintes do compósito [equação (5.21)] em termos das tensões da fibra e da matriz. A energia de mudança de forma é determinado como [1]:

$$W'_x = \sigma_x \, \vartheta_x /2, \qquad \sigma_x = \sqrt{s_{ij}^x s_{ij}^x}, \qquad \vartheta_x = \sqrt{\vartheta_{ij}^x \vartheta_{ij}^x} \tag{5.23}$$

onde os desvios de tensão s_{ij}^x e os desvios de deformação ϑ_{ij}^x são expressos em termos dos tensores de tensão σ_{ij}^x, dos tensores de deformação ε_{ij}^x e do delta de Kronecker δ_{ij} (o expoente x deve ser alterado para o expoente f e m para a fibra e para a matriz, respectivamente).

$$s_{ij}^x = \sigma_{ij}^x - \delta_{ij}\sigma_{ll}/3, \qquad \vartheta_{ij}^x = \varepsilon_{ij}^x - \delta_{ij}\varepsilon_{ll}/3 \tag{5.24}$$

A energia de mudança de volume é expressa na forma:

$$W''_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{ii}^x}{3}\varepsilon_{jj}^x \tag{5.25}$$

Considerando a relação entre as tensões e deformações desvio e o primeiro invariante das tensões e das deformações $\sigma_x = 2G_x \, \vartheta_x$, $\sigma_{ij}^x = 3K_x \varepsilon_{ii}^x$, utilizando as equações

(5.21), (5.22), (5.23) e (5.25), obtém-se a relação para todas as perdas de energia da fibra e da matriz

$$\Delta W_x = \psi'_x \frac{\sigma_x^2}{4G_x} + \psi''_x \frac{\left(\sigma_{ii}^x\right)^2}{18K_x} \tag{5.26}$$

Aqui G_f e G_m são os módulos de corte, enquanto K_f e K_m são o módulo de compressibilidade para a fibra e para a matriz, respectivamente. Estes módulos estão relacionados com os módulo de Young E_f e E_m e coeficientes de Poisson υ_f e υ_m na forma

$$G_x = \frac{E_x}{2(1+\upsilon_x)}, \quad K_x = \frac{E_x}{3(1-2\upsilon_x)} \tag{5.27}$$

A equação (5.26) com o auxilio da equação (5.27) toma a seguinte forma:

$$\Delta W_x = \frac{1}{2E_x}\left[\psi'_x(1+\upsilon_x)\sigma_x^2 + \frac{\psi''_x}{3}(1-2\upsilon_x)\left(\sigma_{ij}^x\right)^2\right]$$

ou de forma mais detalhada

$$\begin{aligned}\Delta W_x = \frac{1}{2E_x}\Bigg\{&\frac{2\psi'_x(1+\upsilon_x)}{3}\left[\sigma_{11}^{x^2}+\sigma_{22}^{x^2}+\sigma_{33}^{x^2}-\sigma_{11}^x\sigma_{22}^x-\sigma_{11}^x\sigma_{33}^x-\sigma_{22}^x\sigma_{33}^x+3\left(\sigma_{12}^{x^2}+\sigma_{23}^{x^2}\right)\right]\\&+\frac{\psi''_x}{3}(1-2\upsilon_x)\left[\sigma_{11}^{x^2}+\sigma_{22}^{x^2}+\sigma_{33}^{x^2}+2\left(\sigma_{11}^x\sigma_{22}^x+\sigma_{11}^x\sigma_{33}^x+\sigma_{22}^x\sigma_{33}^x\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.28}$$

Notar que os tensores σ_{ij}^x são os valores de amplitude de tensão dos constituintes do compósito num ciclo de harmónico de carregamento completo.

A equação (5.11) para uma fibra e matriz isotrópica é expressa na forma [1]:

$$B=\frac{1}{3}\left\{\frac{\xi}{E_f}\left[2\psi'_f\left(1+\upsilon_f\right)+\psi''_f\left(1-2\upsilon_f\right)\right]+\frac{(1-\xi)}{E_m}\left[2\psi'_m\left(1+\upsilon_m\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\psi''_m\left(1-2\upsilon_m\right)\right]+\frac{2k\xi(1-\xi)}{E_1}\left(\frac{\psi'_f-\psi''_f}{E_f}-\frac{\psi'_m-\psi''_m}{E_m}\right)\right\}$$
$$C=2\left[\frac{\xi\psi'_f\left(1+\upsilon_f\right)}{E_f}+\frac{(1-\xi)\psi'_m\left(1+\upsilon_m\right)}{E_m}\right] \tag{5.32}$$
$$D=\frac{2}{3E_1}\left\{\frac{\xi(1-\xi)k}{E_1}\left(2\psi'_m+\psi''_m-2\psi'_f+\psi''_f\right)+\xi\left[\psi''_f\left(1-2\upsilon_f\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\psi'_f\left(1+\upsilon_f\right)\right]+(1-\xi)\left[\psi''_m\left(1-2\upsilon_m\right)-\psi'_m\left(1+\upsilon_m\right)\right]\right\}$$
$$F=\frac{2\xi}{3E_f}\left[2(1-\xi)\frac{k}{E_1}\left(\psi'_f-\psi''_f\right)-\psi'_f\left(1+\upsilon_f\right)+\psi''_f\left(1-2\upsilon_f\right)\right]$$
$$+\frac{2(1-\xi)}{3E_m}\left[2\xi\frac{k}{E_1}\left(\psi'_m-\psi''_m\right)+\psi''_m\left(1-2\upsilon_m\right)-\psi'_m\left(1+\upsilon_m\right)\right]$$

Na equação (5.32) os termos de ordem do quadrado do coeficiente de Poisson são desprezados, por serem de pequena magnitude comparando com a unidade.

As relações nas equações (5.31) e (5.32) permitem determinar perdas de energia em compósitos unidireccionais sujeitos a um estado de tensão tridimensional. Estas relações devem ser tratadas como relações aproximadas, tal como as perdas de energia em compósitos reais podem ser tratadas não apenas como absorção de energia das fibras e da matriz, mas também com a presença de compostos químicos intermédios, fissuras, poros, etc. É difícil estimar o seu efeito à priori.

Representando a equação (5.31) na forma matricial e em termos da matriz das características elasto-dissipativas de tensão

$$\Delta W=\frac{1}{2}\left\{\sigma^0\right\}^T[\Psi]\left\{\sigma^0\right\} \tag{5.33}$$

onde as componentes da matriz $[\Psi]$ são as seguintes

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} A & D/2 & D/2 & 0 & 0 & 0 \\ & B & F/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & B & 0 & 0 & 0 \\ & & & C & 0 & 0 \\ & sim. & & & C & 0 \\ & & & & & C \end{bmatrix}$$

e $\{\sigma^0\}$ é a matriz coluna das tensões.

O compósito unidireccional pode ser considerado como um corpo uniforme transversalmente isotrópico. Foi mostrado no capitulo 4 que a matriz $[\Psi]$ para tal corpo tem a forma da equação (4.88), isto é, a dissipação de energia quando sujeito a um estado de tensão tridimensional é descrita com o auxilio de cinco componentes da matriz das características elasto-dissipativas de tensão. Devido à existência de um plano isotrópico, a componente ψ_{44} é expressa em termos das componentes ψ_{22} e ψ_{23} da seguinte forma: $\psi_{44} = 2(\psi_{22} - \psi_{23})$. É fácil assegurar que numa aproximação estrutural para determinação das componentes da matriz $[\Psi]$ a relação mencionada é mantida com novas notações:

$$C = 2B - F \tag{5.34}$$

No entanto, a análise estrutural mostra o mecanismo para modelar o comportamento dissipativo do compósito unidireccional quando sujeito a um estado de tensão arbitrário.

Excepto para a equação (5.34), mais uma relação adicional entre as componentes da matriz $[\Psi]$ toma lugar:

$$\psi_{44} = \psi_{66} \tag{5.35}$$

A relação mencionada segue-se de alguns pressupostos que são característicos para o modelo material escolhido. De facto, é assumido na equação (5.29), que

$$\tau_{23}^m = \tau_{23}^f = \tau_{23}^0$$

e

$$\tau_{12}^{m} = \tau_{12}^{f} = \tau_{12}^{0}$$

Isto resulta para fibras isotrópicas no aparecimento da equação (5.35).

Neste caso o comportamento dissipativo do material é definido por quatro constantes, por exemplo, A, B, C, e D.

Os valores destes coeficientes podem ser determinados da experiência do ciclo de carregamento. Considerando o compósito unidireccional sujeito a tensão longitudinal, as perdas de energia durante o ciclo de carregamento e o valor de amplitude da energia elástica dependem da amplitude de tensão

$$\Delta W = \frac{1}{2} A \sigma_{11}^2, \qquad W = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{11}^2}{E_1}$$

O factor de dissipação neste caso é

$$\psi_1^* = \Delta W / W = A E_1 = \psi_{11} E_1 \tag{5.36}$$

A expressão para o factor de dissipação ψ_2^*, quando se carrega o compósito na direcção transversal da fibra (ao longo do eixo x_2) e o factor de dissipação ψ_6^*, quando se carrega o compósito em corte no plano (x_1, x_2), será determinada de modo análogo:

$$\psi_2^* = B E_2 = \psi_{22} E_2, \qquad \psi_6^* = C G_{12} = \psi_{66} G_{12} \tag{5.37}$$

Os factores de dissipação que conformam o carregamento uniaxial ao longo do eixo x_3, ψ_3^*, tal como o carregamento a um ângulo 45° em relação ao eixo x_1 no plano (x_1, x_2), $\psi_{1/2}^*$, e os factores que conformam com o corte nos planos (x_2, x_3) e (x_1, x_3), ψ_4^* e ψ_5^*, tomam a seguinte forma:

$$\psi_3^* = BE_3, \qquad \psi_{1/2}^* = \frac{A+B+C+D}{\frac{1-2\upsilon_{12}}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{1}{G_{12}}}$$
$$\psi_4^* = CG_{23}, \qquad \psi_5^* = CG_{13} \tag{5.38}$$

É aqui adoptada a nomenclatura universal para um corpo transversalmente isotrópico - E_1, E_2 e E_3 são os módulo de Young; G_{12}, G_{13} e G_{23} são os módulos de corte; υ_{12} é o coeficiente de Poisson, neste caso

$$E_2 = E_3, \quad G_{12} = G_{13} \tag{5.39}$$

Três equações para os factores de dissipação de material unidireccional surgem das fórmulas (5.37) - (5.39)

$$\psi_2^* = \psi_3^*, \quad \psi_5^* = \psi_6^*, \quad \psi_6^* / G_{12} = \psi_3^* / G_{23} \tag{5.40}$$

Um conjunto de coeficientes ψ_1^*, ψ_2^*, ψ_6^* e $\psi_{1/2}^*$ pode ser considerado como um sistema de quatro constantes de engenharia independentes, que são determinadas de experiências directas sujeito a tipos simples de estados de tensão. Estes coeficientes governam a dissipação de energia do ciclo de carregamento de um compósito unidireccional sujeito a um estado tridimensional de tensão arbitrário.

As componentes da matriz de flexibilidade efectiva são definidas em termos da constantes elásticas de engenharia [1]:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\upsilon_{21}/E_2 & -\upsilon_{12}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_2 & -\upsilon_{12}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ & \textit{sim.} & & & 1/G_{13} & 0 \\ & & & & & 1/G_{12} \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

onde as constantes de engenharia E_1 e E_2 são os módulos de Young sujeito a tensão ao longo das fibras e transverso às das fibras, G_{23} é o modulo de corte no plano isotrópico,

G_{13} e G_{12} ($G_{13} = G_{12}$) são os módulos de corte nos planos que são perpendiculares ao plano isotrópico, e υ_{12} e υ_{21} são os coeficientes de Poisson. Para o caso das propriedades de isotropia da fibra e da matriz [1] as expressões para as constantes de engenharia são da forma:

$$\begin{aligned} E_1 &= \xi E_f + (1-\xi)E_m \\ E_2 &= \frac{E_f E_m}{\xi E_m + (1-\xi)E_f} \\ G_{13} = G_{12} &= \frac{G_f G_m}{\xi E_m + (1-\xi)G_f} \\ \upsilon_{12} &= \xi \upsilon_f + (1-\xi)\upsilon_m, \quad \upsilon_{21} = \frac{\upsilon_{12} E_2}{E_1} \end{aligned} \tag{5.42}$$

Aqui E_f, E_m, G_f, G_m, υ_f e υ_m são os módulos de Young, módulos de corte e coeficientes de Poisson da fibra e da matriz.

Deve ser recordado que as equações (5.42) são determinadas se as equações (5.2) e (5.3) forem conhecidas e que os termos de ordem do quadrado do coeficiente de Poisson são desprezados, desde que sejam de pequena magnitude comparado com a unidade.

Considere-se o caso especifico das relações para as constantes A, B, C e D [equação (5.32)]. A constante F é relacionada com as constantes B e C pela equação (5.34).

Agora supondo que a fibra não tem capacidade para dissipar energia, isto é, $\psi'_f = \psi''_f = 0$. Então decorre da equação (5.32)

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1-\xi)E_m}{3E_1^2}\left[2\psi'_m(1+\upsilon_m) + \psi''_m(1-2\upsilon_m)\right] \\ B &= \frac{(1-\xi)}{3E_m}\left[2\psi'_m(1+\upsilon_m) + \psi''_m(1-2\upsilon_m) - \frac{2k\xi}{E_1}(\psi'_m - \psi''_m)\right] \\ C &= \frac{2(1-\xi)\psi'_m(1+\upsilon_m)}{E_m} \\ D &= \frac{2(1-\xi)}{3E_1}\left[\frac{\xi k}{E_1}(2\psi'_m + \psi''_m) - \psi'_m(1+\upsilon_m) + \psi''_m(1-2\upsilon_m)\right] \end{aligned} \tag{5.43}$$

Quando se substitui a equação (5.30) pelos parâmetros k e E na expressão para o coeficiente B e utilizando a regra das misturas para o coeficiente de Poisson do compósito

$$\upsilon_{12} = \xi\upsilon_f + (1-\xi)\upsilon_m \tag{5.44}$$

a expressão para B torna-se mais simples.

Representando as expressões para os coeficientes A, C e D noutra forma, utilizando o modulo de corte, G_m, e o modulo de compressibilidade, K_m, da matriz, equação (5.27), os coeficientes podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(1-\xi)E_m^2}{3E_1^2}\left[\frac{\psi'_m}{G_m} + \frac{\psi''_m}{3K_m}\right] \\
B &= \frac{(1-\xi)}{3}\left[\frac{2\psi'_m + \psi''_m}{E_m} + \frac{2\upsilon_{12}}{E_1}(\psi'_m - \psi''_m)\right] \\
C &= \frac{(1-\xi)\psi'_m}{G_m} \\
D &= \frac{2(1-\xi)E_m}{3E_1}\left[\frac{\xi k}{E_1 E_m}(2\psi'_m + \psi''_m) - \frac{\psi'_m}{2G_m} + \frac{\psi''_m}{3K_m}\right]
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Assumindo que não há dissipação de energia na fibra e na matriz durante a deformação volúmica, apenas o coeficiente ψ'_m, entre os quatro coeficientes de dissipação e ψ'_f, ψ''_f, e ψ'_m, e ψ''_m, difere de zero. Então a equação (5.45) é transformada como se indica a seguir:

$$\begin{aligned}
A &= (1-\xi)\psi'_m \frac{E_m^2}{3E_1^2 G_m} \\
B &= (1-\xi)\psi'_m \frac{2}{3}\left(\frac{1}{E_m} + \frac{\upsilon_{12}}{E_1}\right)
\end{aligned} \tag{5.46}$$

$$C = (1-\xi)\psi'_m \frac{1}{G_m}$$

$$D = (1-\xi)\psi'_m \frac{2}{3}\frac{\xi(E_f \upsilon_m - E_m \upsilon_f) - \upsilon_{12} E_m}{E_1^2} - \frac{1}{E_1}$$

Todos os coeficientes A, B, C e D na equação (5.46) são proporcionais ao produto $(1-\xi)\psi'_m$, mas os valores absolutos destas constantes podem diferir consideravelmente. De facto, os compósitos reais são constituídos de fibras rígidas e a matrizes flexíveis, isto é, $E_f \gg E_m$, $G_f \gg G_m$; os módulos de corte e de Young da matriz são da mesma ordem, e os módulos de Young da fibra e o módulo longitudinal do compósito também são da mesma ordem: $G_m \approx E_m$, $E_f \approx E_1$.

Baseado nas condições mencionadas, estimando os valores absolutos dos coeficientes na equação (5.46), obtém-se

$$B \approx C, \quad B \gg D, \quad C \gg D, \quad D \gg A \tag{5.47}$$

No entanto na soma (equação 5.31) que define as perdas de energia do compósito unidireccional sujeito a um estado de tensão tridimensional arbitrário, o coeficiente para σ_{11}^2 tem o menor valor absoluto. Os coeficientes B, C e F prevalecem aqui [equação (5.34)], enquanto o coeficiente D tem o valor intermedio. Deve-se ter em atenção que a estimativa dada é verdadeira apenas para valores absolutos dos coeficientes A, B, C, D e F. A contribuição de cada elemento para a soma total das perdas de energia do compósito depende do estado de tensão. Na pratica, o compósito é dimensionado de forma a que fibras suportem o carregamento principal. Por exemplo, tensões ao longo da direcção das fibras são normalmente muito superiores que as tensões na direcção transversal, e o acréscimo de $A\sigma_{11}^2$, $A\sigma_{22}^2$, ... pode ser da mesma ordem.

É possível utilizar as equações (5.46) para calcular todos os coeficientes A, B, C, D e F de um valor experimental do factor de dissipação de energia de um compósito. Para tal, é suficiente conhecer os valores das seguintes constantes elásticas: os módulos de Young e de corte da matriz, E_m e G_m, modulo elástico longitudinal do compósito, E_1, o coeficiente de Poisson, υ_{12}, e a fracção volúmica da fibra, ξ. Os restante parâmetros elásticos são calculados através da lei das misturas.

Na analise final, a aplicação da equação (4.46) a um compósito especifico é determinado por comparação com os dados experimentais e resultados teóricos.

Para muitos corpos isotrópicos reais, as perdas de energia num ciclo completo de carregamento é caracterizado não pelas amplitudes das mudanças de forma e/ou volume, mas pela amplitude da energia elástica especifica completa de um corpo num ciclo de carregamento [1]. Isto significa que o comportamento dissipativo de um corpo é determinado apenas por um parâmetro, o factor de dissipação de energia, ψ. Tal problema de formulação é o caso especial da equação (5.28), quando os factores de dissipação relacionados com a mudança de forma e de volume são iguais, $\psi = \psi' = \psi''$. O total das perdas de energia num corpo, ΔW, são proporcionais às amplitudes da energia elástica, W

$$\Delta W = \psi W$$

Então deve ser suposto na equação (5.32) que $\psi_f = \psi'_f = \psi''_f$ e $\psi_m = \psi'_m = \psi''_m$, logo

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{E_1^2}\left[\psi_f E_f \xi + \psi_m E_m (1-\xi)\right] \\ B &= \frac{\xi \psi_f}{E_f} + \frac{(1-\xi)\psi_m}{E_m} \\ C &= \frac{\xi \psi_f}{G_f} + \frac{(1-\xi)\psi_m}{G_m} \\ D &= \frac{2}{E_1^2}\left[\xi \upsilon_f + (1-\xi)\upsilon_m\right]\left[\xi \psi_f E_f + (1-\xi)\psi_m E_m\right] \end{aligned} \tag{5.48}$$

Aqui a equação (5.34) verifica-se para B, C e F, e o coeficiente D é o dependente. Considerando a expressão para o coeficiente de Poisson υ_{12}, obtém-se

$$D = -2\upsilon_{12} A \tag{5.49}$$

A existência da relação simples entre os coeficientes A e D, mostrado na equação (5.49) permite reduzir o numero de parâmetros elasto-dissipativos independentes do compósito unidireccional sujeito a um estado tridimensional de tensão arbitrário a três parâmetros. A matriz elasto-dissipativa de tensão simétrica $[\Psi]$, equação (5.33), tendo em consideração a equação (5.34) toma a forma

$$[\Psi]=\begin{bmatrix} A & -\upsilon_{12}A & -\upsilon_{12}A & 0 & 0 & 0 \\ & B & -C/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & B & 0 & 0 & 0 \\ & & & C & 0 & 0 \\ & sim. & & & C & 0 \\ & & & & & C \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

As figuras 5.2 a 5.4, retiradas da referência [1] mostram as relações entre a dissipação energia relativa e modulo de elasticidade com a fracção volúmica de fibra em compósitos unidireccionais sujeito a tipos de carregamento simples. Os dados para os cálculos encontram-se na tabela 5.1. As curvas com o número 1 corresponde ao caso mais geral de dissipação de energia tanto da fibra como da matriz, equações (5.32). As curvas com o número 2 correspondem ao modelo com um factor de dissipação de energia na matriz e na fibra, equações (5.48) (um modelo com uma só componente). Para as curvas com o número 3, ocorre dissipação de energia na matriz devido apenas à mudança de forma.

Nº	ψ'_f, %	ψ''_f, %	ψ'_m, %	ψ''_m, %
1	2	1	8	4
2	2	2	8	8
3	0	0	8	0

As constantes elásticas são: E_f=74 GPa, ν_f=0.2, E_m=3 GPa, ν_m=0.35

Tabela 5.1 - Constantes de dissipação para três variações de calculo

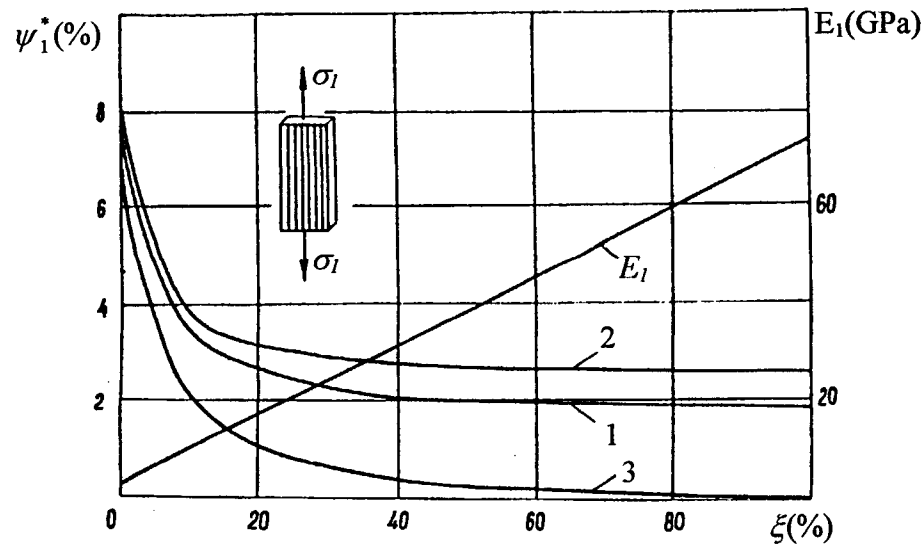


Figura 5.2. - Relações entre o factor de dissipação, ψ_1^*, e módulo de Young, E_1, durante carregamento na direcção das fibras versus fracção volúmica de fibra, ξ. Para os dados da tabela 5.1.

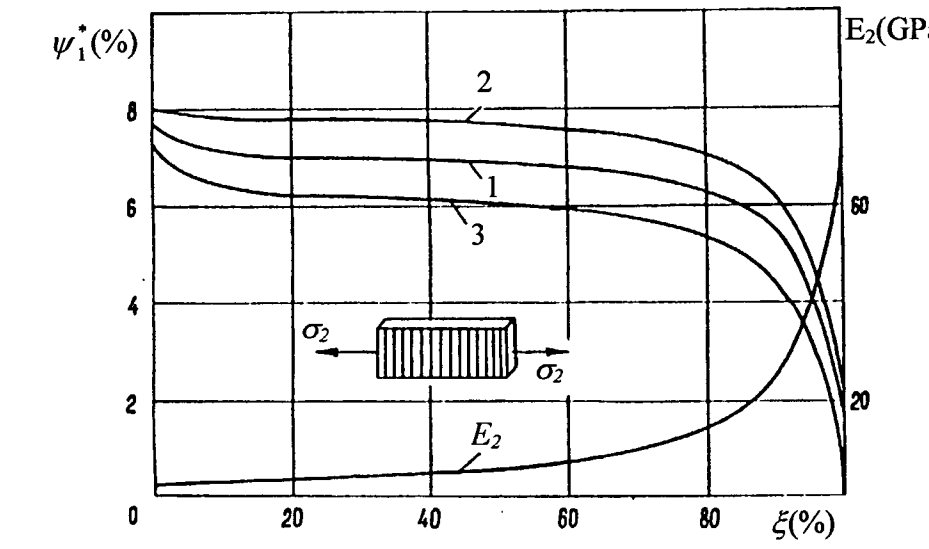


Figura 5.3. - Relações entre o factor de dissipação, ψ_2^*, e módulo de Young, E_2, durante carregamento na direcção transversal às fibras versus fracção volúmica de fibra, ξ. Para os dados da tabela 5.1.

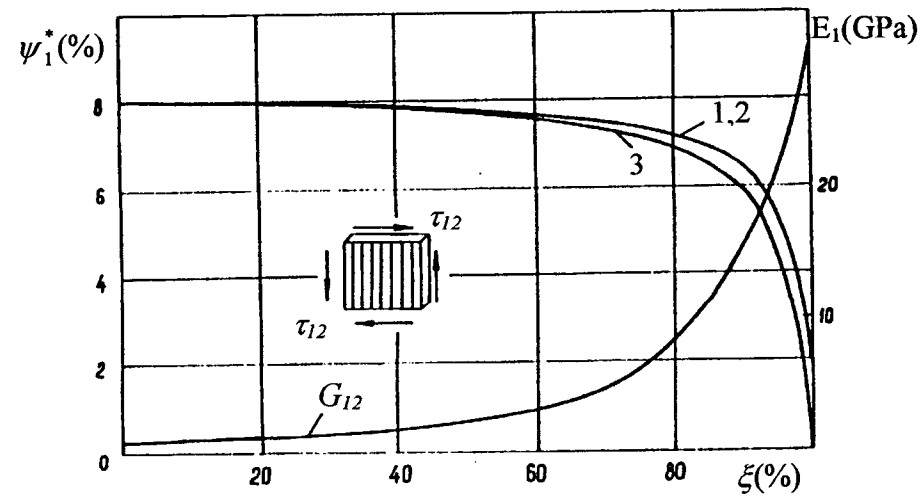


Figura 5.4. - Relações entre o factor de dissipação, ψ_6^*, e módulo de Young, G_{12}, corte ideal versus fracção volúmica de fibra, ξ. Para os dados da tabela 5.1.

A tentativa de testar as equações (5.32) experimentalmente ocorre em dificuldades técnicas, pois é necessário determinar um grande número de factores de dissipação e constantes elásticas para a matriz e para a fibra. É por esta razão que os gráficos experimentais, para os factores de dissipação de energia na direcção do reforço versus fracção volúmica da fibra [5] são comparados com as equações (5.48). Os valores de dissipação de energia , tal como o modulo de Young da fibra e da matriz são calculados de dados experimentais quando $\xi = 0$ e $\xi = 0.5$, utilizando a regra das misturas [equação (5.30)]. Os dados teóricos e experimentais nas figuras 5.5 e 5.6 conferem bem.

O método fenomenológico de aproximação torna possível determinar os valores de todos os coeficientes nas equações (5.48) e (5.50) das experiências de carregamento cíclico uniaxial ao longo e transversalmente às fibras e em corte ideal nos eixos (x_1, x_2). Como um resultado os factores correspondentes de dissipação ψ_1^*, ψ_2^*, e ψ_6^* (constantes de engenharia) podem ser obtidas. Os coeficientes A, B e C são iguais a

$$A = \frac{\psi_1^*}{E_1}, \quad B = \frac{\psi_2^*}{E_2}, \quad A = \frac{\psi_6^*}{G_{12}} \tag{5.51}$$

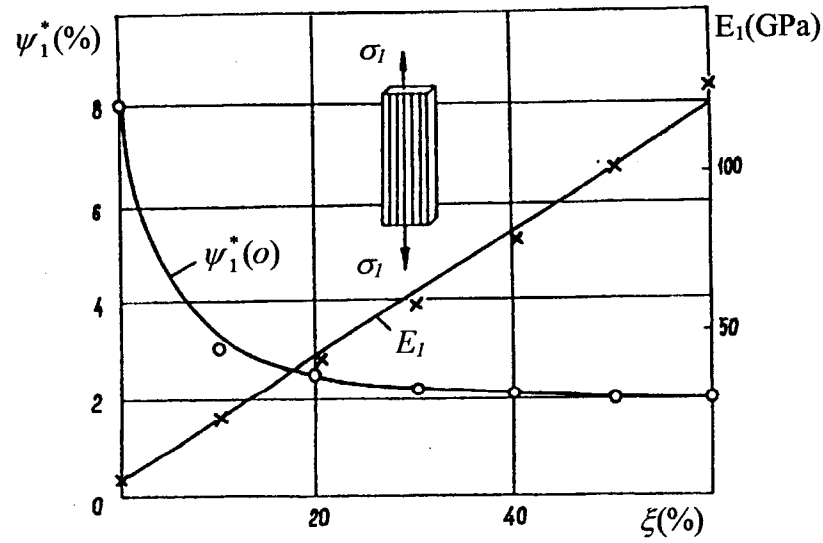


Figura 5.5. - Factor de dissipação, ψ_1^*, e módulo de Young, E_1, durante carregamento na direcção das fibras versus fracção volúmica de fibra, ξ. Para os dados da tabela 5.1. Linhas a cheio - resultados calculados, pontos - dados experimentais [5]. Dados para calculo: E_f= 194 GPa, ν_f= 0.3., ψ_f= 1.8%, E_m= 6 GPa, ν_m= 0.3., ψ_m= 8.0%

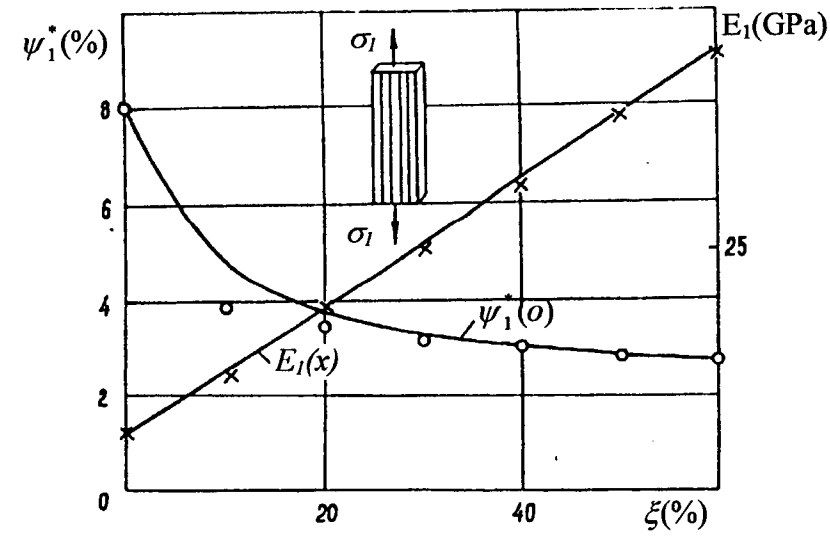


Figura 5.6. - Factor de dissipação, ψ_1^*, e módulo de Young, E_1, durante carregamento na direcção das fibras versus fracção volúmica de fibra, ξ. Para os dados da tabela 5.1. Linhas a cheio - resultados calculados, pontos - dados experimentais [5]. Dados para calculo: E_f= 71 GPa, ν_f= 0.3., ψ_f= 2.5%, E_m= 6 GPa, ν_m= 0.3., ψ_m= 8.0%

As componentes da matriz $[\Psi]$ [equação (5.50)] são expressas em termos da dos factores de dissipação - constantes dissipativas de engenharia - e em termos das constantes elásticas de engenharia - módulos de Young E_1, E_2 módulo de corte G_{12} e coeficiente de Poisson υ_{12}:

$$[\Psi]=\begin{bmatrix} \frac{\psi_1^*}{E_1} & -\frac{\upsilon_{12}\psi_1^*}{E_1} & -\frac{\upsilon_{12}\psi_1^*}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{\psi_2^*}{E_2} & \frac{\psi_2^*}{E_1}-\frac{\psi_6^*}{2G_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{\psi_2^*}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{\psi_6^*}{G_{12}} & 0 & 0 \\ & sim. & & & \frac{\psi_6^*}{G_{12}} & 0 \\ & & & & & \frac{\psi_6^*}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

5.5. ESTADO PLANO DE TENSÃO PRA UM COMPÓSITO DE FIBRAS ISOTRÓPICAS E MATRIZ ISOTRÓPICA

Num estado plano de tensão nos eixos (x_1, x_2), quando $\sigma_{13}^0 = \sigma_{23}^0 = \sigma_{33}^0 = 0$, as perdas de energia podem ser representadas com o auxilio da matriz reduzida das características elasto-dissipativas de tensões $[\psi]$ e da matriz reduzida de tensões $\{\sigma^0\} = \{\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0\}^T$

$$\Delta W = \{\sigma^0\}^T [\psi] \{\sigma^0\}$$

$$[\psi^0] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 \\ \psi_{12} & \psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D/2 & 0 \\ D/2 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

A matriz, $[\psi^0]$, é análoga à correspondente matriz elasto-dissipativas de tensão do capitulo 4 no número de componentes independentes e nos modos de as determinar, em termos dos factores de dissipação (constantes de engenharia). É possível inverter da matriz, $[\psi^0]$ [equação (5.53)] para a matriz elasto-dissipativa de deformações $[\varphi]$ e da matriz mista, $[\chi]$ [equação (4.98)]. Quando se transforma o sistema coordenado por rotação dos eixos (x_1, x_2) em torno do eixo x_3, as componentes ψ_{ij}, φ_{ij} e χ_{ij} $(i,j = 1,2,6)$ das matrizes $[\psi]$, $[\varphi]$ e $[\chi]$ são calculadas de acordo com as regras das equações (4.101) - (4.103).

Escrevam-se as perdas de energia especificas num ciclo completo de carregamento para o compósito sujeito a estado plano de tensão. Isto pode ser feito com o auxilio da matriz elasto-dissipativa reduzida de tensões [Ψ], e a matriz de tensão, $\{\sigma^0\}$, na seguinte forma:

$$\Delta W = \{\sigma^0\}^T [\psi^0] \{\sigma^0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^0 \\ \sigma_{22}^0 \\ \sigma_{12}^0 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dfrac{\psi_1^*}{E_1} & -\dfrac{\upsilon_{12}\psi_1^*}{E_1} & 0 \\ -\dfrac{\upsilon_{12}\psi_1^*}{E_1} & \dfrac{\psi_2^*}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\psi_6^*}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^0 \\ \sigma_{22}^0 \\ \sigma_{12}^0 \end{Bmatrix} \tag{5.54}$$

Aplique-se de seguida a equação (4.98) à matriz elasto-dissipativa de deformação, $[\varphi]$, e à matriz mista das características elasto-dissipativas, $[\chi]$ [equação (4.97)]. Tendo em consideração as expressões para as componentes da matriz de rigidez, [*G*], e a matriz de flexibilidade, [*S*], em termos das constantes elásticas de engenharia, pode-se obter as expressões para as matrizes $[\chi]$ e $[\varphi]$

$$[\chi]=\frac{1}{1-\gamma^2}\begin{bmatrix}(1-\gamma)\psi_1^* & \upsilon_{12}\left(\psi_2^*-\psi_1^*\right) & 0\\ 0 & -\gamma\psi_1^*+\psi_2^* & 0\\ 0 & 0 & (1-\gamma)\psi_6^*\end{bmatrix}$$

$$[\varphi]=\frac{1}{(1-\gamma)^2}\begin{bmatrix}E_1\left[\psi_1^*-\gamma\left(\psi_2^*-2\psi_1^*\right)\right] & E_1\upsilon_{21}\left(\psi_2^*-\psi_1^*\right) & 0\\ E_2\upsilon_{12}\left(\psi_2^*-\psi_1^*\right) & E_2\left(\psi_2^*-\psi_1^*\right) & 0\\ 0 & 0 & (1-\gamma)^2\psi_6^*G_{12}\end{bmatrix} \tag{5.55}$$

onde $\gamma=\upsilon_{12}\upsilon_{21}$. Entre cada uma das componentes da matriz das características elasto-dissipativas [equações (5.54) e (5.55)] apenas três componentes são independentes, desde que se verifiquem as seguintes relações anteriores:

$$\begin{aligned}\psi_{12}&=-\upsilon_{12}\psi_{11}\\ \chi_{12}&=\upsilon_{12}\left(\chi_{22}-\chi_{11}\right)\\ \varphi_{12}&=\upsilon_{12}\varphi_{22}\end{aligned} \tag{5.56}$$

Notar que quando se muda de um estado de tensão tridimensional do compósito unidireccional [equação (5.52)] para o estado plano de tensão, o número de constantes de engenharia independentes (aquelas que descrevem as perdas de energia do material) permanece o mesmo e é igual a três.

No entanto, o método estrutural de aproximação para determinação da resposta dissipativa do compósito unidireccional sujeito a um estado tridimensional de tensão arbitrário através do método energético resulta em dois modelos para o sistema de constantes de dissipação independentes. No primeiro caso, a energia especifica (matrizes de características elasto-dissipativas) é descrito pelo sistema de quatro coeficientes *A*, *B*, *C* e *D* de acordo com a equação (5.33). No segundo caso, as perdas de energia são descritas pelo sistema de três constantes *A*, *B* e *C*, de acordo com a equação (5.50), desde que a equação (5.49) se verifique. O primeiro sistema de parâmetros de dissipação para o material compósito unidireccional é designado por modelo de quatro componentes, e o segundo sistema é designado por modelo de três componentes. O

modelo de três componentes torna possível examinar alguns problemas na forma analítica conveniente e para determinar interpretações geométricas claras.

5.6. REFERÊNCIAS

[1] Zinoviev, Peter A., Ermakov, Yury E., *Energy Dissipation in Composite Materials*, Techomic Publishing Company, 1994.

[2] Christensen, R. M., *Mechanics of Composites Materials*. New York: John Willey & Sons, Inc, 1979.

[3] Hashin, Z., "*Complex Moduli of Viscoelastic Composites. I. General Theory and Application of Particulate Composites*", Int. J. Solids Structures, 6(5, pp.539-552, 1970

[4] Hashin, Z., "*Complex Moduli of Viscoelastic Composites. IIFiber Reinforced Materials*", Int. J. Solids Structures, 6(6), pp.797-807, 970.

[5] Wright, G. C., "*The Dynamic Properties of Glass and Carbon Fibre Reinforced lastics Beams*", J. Sound and Vibration (2), pp.205-212, 1972.

CAPÍTULO 6

PROPRIEDADES DISSIPATIVAS DE COMPÓSITOS LAMINADOS

6.1. INTRODUÇÃO

É habitual assumir que materiais compósitos laminados são materiais constituídos por empilhamentos sucessivos de várias camadas (figura 6.1). No caso geral cada camada é ortotrópica, distinguida pelo seu conjunto de características: $E_1^{(k)}$, $E_2^{(k)}$, $G_{12}^{(k)}$, $\upsilon_{12}^{(k)}$ e $h^{(k)}$, onde k é o número da camada num laminado com diversas camadas, enquanto $h^{(k)}$ é a espessura da camada k. Considerar-se-ão os seguintes sistemas de coordenadas (figura 6.2): o sistema de coordenadas geral ou global (x_1, x_2) para o compósito com n camadas e o sistema de coordenadas local ou natural para cada camada $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$. Os eixos das coordenadas locais coincide com os eixos ortotrópicos principais de cada camada. Se a k-ésima camada for o compósito unidireccional, então o eixo $x_1^{(k)}$ está alinhado com as fibras de reforço do material. O ângulo $\alpha^{(k)}$ indica a orientação dos eixos principais da k-ésima camada no sistema de coordenadas global.

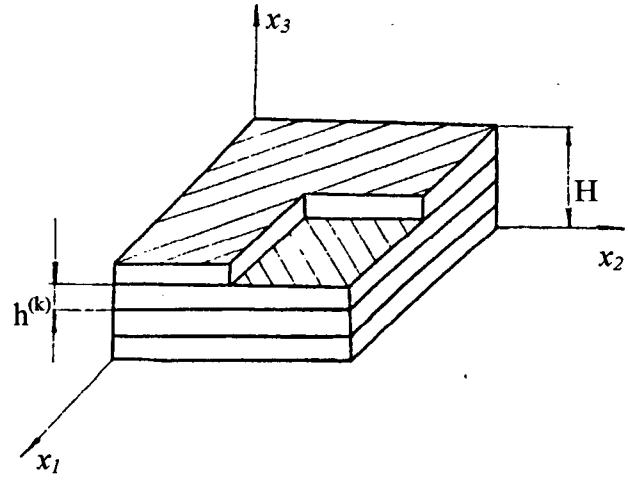


Figura 6.1. - Um material laminado

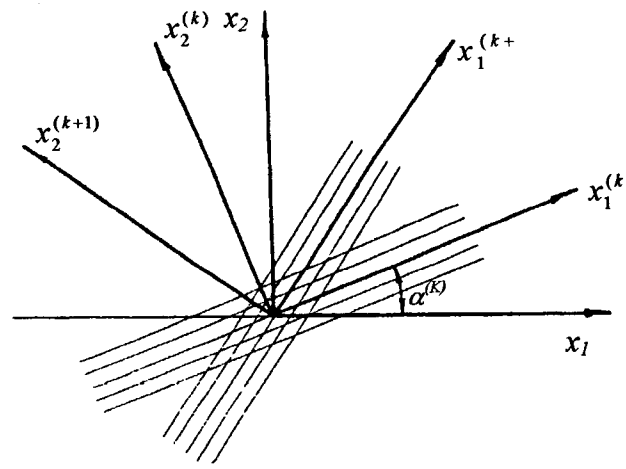


Figura 6.2. - Sistema de eixos natural da camada $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ e sistema de coordenadas global (x_1,x_2).

6.2. CARACTERISTICAS ELÁSTICAS DE COMPÓSITOS LAMINADOS

Será utilizada neste capitulo a seguinte nomenclatura:

- as tensões e as deformações na *k*-ésima camada, nas direcções dos eixos principais (naturais) da camada, $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, são

$$\{\sigma\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \tau_{12}^0 \end{Bmatrix}^{(k)}, \qquad \{\varepsilon\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{Bmatrix}^{(k)}$$

- as tensões e as deformações na *k*-ésima camada na direcção dos eixos gerais (globais) do laminado (x_1, x_2) são

$$\{\sigma\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{(k)}, \qquad \{\varepsilon\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)}$$

- as tensões e deformações médias do laminado na direcção dos eixos coordenadas gerais (globais) (x_1, x_2) são

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \qquad \{\varepsilon\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

6.2.1 ESTADO PLANO DE TENSÃO DE COMPÓSITOS LAMINADOS

Assumindo que as camadas deformam-se integralmente sem escorregamento, isto é, as deformações correspondentes de todas as camadas são as mesmas e iguais às deformações médias de compósitos com n camadas, obtém-se

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(k)}, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(k)}, \qquad \gamma_{21} = \gamma_{21}^{(k)} \quad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{6.1}$$

As tensões médias do laminado são definidas da seguinte forma:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{n} \sigma_1^{(k)} \overline{h}^{(k)} \\ \sum_{k=1}^{n} \sigma_2^{(k)} \overline{h}^{(k)} \\ \sum_{k=1}^{n} \tau_{12}^{(k)} \overline{h}^{(k)} \end{Bmatrix} \tag{6.2}$$

Aqui $\overline{h}^{(k)}$ é a espessura relativa da k-ésima camada

$$\overline{h}^{(k)} = h^{(k)} / H$$

onde H é a espessura total do laminado

$$H = \sum_{k=1}^{n} \overline{h}^{(k)}$$

Substituindo a lei de Hooke para a camada na equação (4.28), obtém-se

$$\{\sigma\} = [G]\{\varepsilon\} \tag{6.3}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{16} \\ g_{12} & g_{22} & g_{26} \\ g_{16} & g_{26} & g_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

onde

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ij}^{(k)} \overline{h}^{(k)} \qquad (i,j = 1,2,6) \tag{6.4}$$

Invertendo a relação (6.3)

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \tag{6.5}$$

Aqui $[G]$ e $[S]$ são as matrizes de rigidez e de flexibilidade do laminado

$$[S] = [G]^{-1} \tag{6.6}$$

Os coeficientes da matriz de flexibilidade $[S]$ relacionam-se com os coeficientes da matriz de rigidez $[G]$, os quais são definidos pela equação (6.4), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
s_{11} &= \frac{g_{22}g_{66} - g_{23}^2}{\Delta g}; & s_{12} &= \frac{g_{16}g_{26} - g_{66}g_{12}}{\Delta g} \\
s_{22} &= \frac{g_{11}g_{66} - g_{16}^2}{\Delta g}; & s_{12} &= \frac{g_{12}g_{26} - g_{22}g_{16}}{\Delta g} \\
s_{11} &= \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{\Delta g}; & s_{12} &= \frac{g_{12}g_{16} - g_{11}g_{26}}{\Delta g} \\
\Delta g &= \det|G|
\end{aligned} \tag{6.7}$$

As constantes de engenharia de compósitos com n camadas - módulos de elasticidade nas direcções dos eixos x_1 e x_2, E_1 e E_2, e coeficiente de Poisson, υ_{12} - são expressos no sistema de coordenadas da seguinte forma:

$$E_1 = \frac{\Delta g}{g_{22}g_{66} - g_{26}^2}; \qquad E_2 = \frac{\Delta g}{g_{11}g_{66} - g_{16}^2}$$
$$G_{12} = \frac{\Delta g}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}; \qquad \upsilon_{12} = \frac{g_{12}g_{66} - g_{16}g_{26}}{g_{22}g_{66} - g_{26}^2} \tag{6.8}$$

No caso de laminados ortotrópicos ($g_{16} = g_{66} = 0$) as equações (6.8) tornam-se mais simples

$$E_1 = g_{11} - g_{12}^2 / g_{22}; \qquad E_2 = g_{22} - g_{12}^2 / g_{11}$$
$$G_{12} = g_{66}; \qquad \upsilon_{12} = g_{12} / g_{22} \tag{6.9}$$

6.2.2 FLEXÃO DE COMPÓSITOS LAMINADOS

Assumindo que as camadas têm adesão ideal (isto é, não existe escorregamento mutuo das camadas no laminado). A teoria clássica das placas baseada nas hipóteses de Kirchhoff-Love resulta, para as deformações do laminado, nas seguintes formulas:

$$\{\varepsilon\} = [G]\{e\} + z\{\chi\} \tag{6.10}$$

ou

$$\varepsilon_1 = e_1 + \zeta\chi_1$$
$$\varepsilon_2 = e_2 + \zeta\chi_2$$
$$\gamma_{12} = e_{12} + \zeta\chi_{12}$$

Aqui ζ é a distância ao longo da direcção x_3 de um plano coordenado. Qualquer plano que é paralelo às ligações das camadas do laminado pode ser considerado como um

plano coordenado (ver figura 6.3), $\{e\}$ é o vector de deformação do plano coordenado e $\{\chi\}$ é o vector da variação de curvatura do laminado.

Estas matrizes são da forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \qquad \{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{Bmatrix}, \qquad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \end{Bmatrix} \tag{6.11}$$

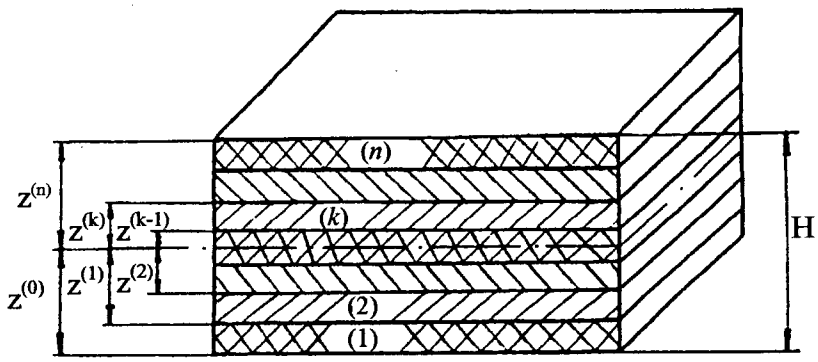


Figura 6.3. Um compósito com *n* camadas.

Introduzindo a matriz das forças $\{T\}$ e a matriz dos momentos $\{M\}$, que são relacionadas com o comprimento unitário da linha coordenada, estas matrizes coluna têm as componentes:

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_{12} \end{Bmatrix}, \qquad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{Bmatrix} \tag{6.12}$$

onde os valores das componentes são calculados em termos das tensões em cada camada como:

$$\{T\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} \{\sigma\}^{(k)} d\zeta$$

$$\{M\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} \{\sigma\}^{(k)} \zeta d\zeta \tag{6.13}$$

A utilização do somatório do integral na equação (6.13), torna possível a consideração de uma característica parcialmente linear da distribuição das tensões ao longo da espessura do laminado. A expressão para as tensões na camada [equação (6.3)] tendo em consideração a equação (6.10) será escrita como:

$$\{\sigma\}^{(k)} = [G]^{(k)}\left(\{e\} + \zeta\{\chi\}\right) \tag{6.14}$$

Substituindo a equação (6.14) na equação (6.13) obtém-se:

$$\begin{aligned} \{T\} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} [G]^{(k)} d\zeta \{e\} + \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} [G]^{(k)} \zeta d\zeta \{\chi\} \\ \{M\} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} [G]^{(k)} \zeta d\zeta \{e\} + \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} [G]^{(k)} \zeta^2 d\zeta \{\chi\} \end{aligned} \tag{6.15}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_1] & [G_2] \\ [G_2] & [G_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix} \tag{6.16}$$

As sub-matrizes de dimensão 3x3 $[G_j]$ $(j = 1,2,3)$ da expressão anterior são expressas em termos da matriz de rigidez de cada camada pelas formulas

$$[G_j] = \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} [G]^{(k)} \zeta^{j-1} d\zeta \quad (j = 1,2,3) \tag{6.17}$$

As designações seguintes são muitas vezes utilizadas na literatura para descrever as matrizes $[G_j]$:

$$[G_1] = [A], \qquad [G_2] = [C], \qquad [G_3] = [D] \tag{6.18}$$

Então a equação (6.16) toma a forma

$$\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [C] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix}$$

ou na forma detalhada

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & C_{16} & C_{26} & C_{66} \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ C_{12} & C_{12} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{22} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \end{Bmatrix} \tag{6.19}$$

Se as componentes da matriz $[G]^{(k)}$ não variarem com a espessura da *k*-ésima camada, então, efectuando a integração na equação (6.17), obtém-se

$$[G_j] = \frac{1}{j}[G]^{(k)}\left(\zeta_{(k)}^{j} - \zeta_{(k-1)}^{j}\right) \tag{6.20}$$

onde j=1,2,3; k=1,2,...,n.

As formas especificas das matrizes $[A]$, [C] e [D] de $([G_j])$ dependem da estrutura do laminado e da posição do plano coordenado.

6.2.2.1 EXEMPLO 1. UMA ESTRUTURA LAMINADA SIMETRICA COM O NÚMERO TOTAL DE CAMADAS IMPAR

O esquema deste tipo de material é mostrado na figura 6.4(a). Todas as camadas são iguais na espessura e propriedades. Uma secção de camadas [duas camadas na figura 6.4(a)] é orientado de forma a que as fibras formem um ângulo $+\alpha$ em relação à direcção do eixo global do laminado, x_1, enquanto a outra secção de camadas formam o ângulo $-\alpha$. As secções claras de fibra na figura correspondem às camadas com a o ângulo de orientação $+\alpha$, as secções escuras das fibras correspondem às camadas com o ângulo de orientação $-\alpha$. Neste caso os coeficientes das sub-matrizes de rigidez $[A]$, $[C]$ e $[D]$ são traduzidos por

$$\left(A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}\right) = \left(g_{11}^{(k)}, g_{12}^{(k)}, g_{22}^{(k)}, g_{66}^{(k)}\right) H$$

$$\left(A_{16}, A_{26}\right) = \left(g_{16}^{(k)}, g_{26}^{(k)}\right) H / n$$

$$C_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1,2,6)$$

$$\left(D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}\right) = \left(g_{11}^{(k)}, g_{12}^{(k)}, g_{22}^{(k)}, g_{66}^{(k)}\right) H^3 / 12$$

$$\left(D_{16}, D_{26}\right) = \left(g_{16}^{(k)}, g_{26}^{(k)}\right) \frac{3n^2 - 2}{n^3} \frac{H^3}{12}$$

As componentes A_{16}, A_{26}, D_{16} e D_{26} têm o sinal do ângulo de orientação das camadas exteriores do laminado. As outras componentes não nulas são positivas.

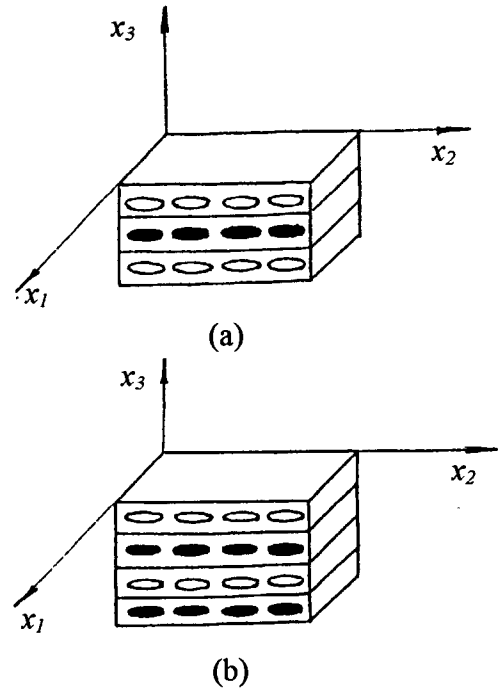


Figura 6.4. - Exemplos de compósitos laminados: (a) estrutura laminada simétrica com número total de camadas impar, e (b) estrutura laminada assimétrica com número total de camadas par.

6.2.2.2 EXEMPLO 2. UMA ESTRUTURA LAMINADA ASSIMÉTRICA COM UM NÚMERO TOTAL DE CAMADAS PAR.

O esquema do material é ilustrado pela figura 6.4(b). Neste caso os coeficientes das sub-matrizes de rigidez $[A]$, $[C]$ e $[D]$ na equação (6.19) são da forma

$$\left(A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}\right) = \left(g_{11}^{(k)}, g_{12}^{(k)}, g_{22}^{(k)}, g_{66}^{(k)}\right) H$$

$$A_{16} = A_{26} = 0$$

$$C_{11} = C_{12} = C_{22} = C_{66} = 0$$

$$\left(C_{16}, C_{26}\right) = \left(g_{16}^{(k)}, g_{26}^{(k)}\right) H^2 / 2n$$

$$\left(D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}\right) = \left(g_{11}^{(k)}, g_{12}^{(k)}, g_{22}^{(k)}, g_{66}^{(k)}\right) H^3 / 12$$

$$\left(D_{16}, D_{26}\right) = 0$$

As componentes C_{16}, C_{26} têm o sinal do ângulo de orientação das camadas exteriores do laminado, se ζ é positivo. As outras componentes não nulas são positivas.

6.2.3 RELAÇÕES INVERSAS

As relações (6.19) podem ser invertidas. Se tomar lugar inversão parcial, então

$$\begin{Bmatrix} e \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & C'_1 \\ C'_2 & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ \chi \end{Bmatrix} \tag{6.21}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} T \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' & C''_1 \\ C''_2 & D'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ M \end{Bmatrix} \tag{6.22}$$

onde

$$[A'] = [A]^{-1}; \qquad [C'_1] = -[A]^{-1}[C]$$

$$[C'_2] = [C][A]^{-1}; \qquad [D'] = [D] - [C][A]^{-1}[C]$$

$$[A''] = [A] - [C][D]^{-1}[C]; \qquad [C''_1] = [C][D]^{-1}$$

$$[C''_2] = -[D]^{-1}[C]; \qquad [D] = [D]^{-1}$$

A inversão total da equação (6.19) dá

$$\begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} \tag{6.23}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix}$$

onde

$$[A^*] = [K]^{-1}$$

$$[C^*] = -[K]^{-1}[C][D]^{-1}$$

$$[D^*] = -[D]^{-1} + [D]^{-1}[C][K]^{-1}[C][D]^{-1}$$

$$[K] = [A] - [C][D]^{-1}[C]$$

Se o material tiver uma estrutura simétrica e o plano médio for seleccionado como o plano coordenado, então as equações (6.23) tornam-se bem mais simples:

$$[A^*] = [A]^{-1}; \qquad [C^*] = [0]; \qquad [D^*] = [D]^{-1}$$

A energia potencial de deformação de placas laminados sujeitas a flexão são descritas pelas fórmulas [1]

$$W = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix}$$

ou

$$W = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [G_1] & [G_2] \\ [G_2] & [G_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix} \tag{6.24}$$

ou

$$W = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} e \\ \chi \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix}$$

Para estruturas simétricas

$$[S_2] = [0], \qquad [G_2] = [0]$$

6.3. COMPORTAMENTO DISSIPATIVO DE COMPÓSITOS LAMINADOS SUJEITOS A ESTADO PLANO DE TENSÃO

A perda de energia em compósitos laminados com ligações entre camadas ideais e sujeitas a carregamento cíclico é igual ao somatório das perdas de energia das camadas. Os valores das perdas durante o carregamento cíclico na *k*-ésima camada do compósito é determinada: (1) pela matriz das características elasto-dissipativas das deformações. $[\varphi]^{(k)}$, em termos dos valores de amplitude das componentes do vector deformação, ou (2) com o auxilio da matriz das características elasto-dissipativas das tensões, $[\psi]^{(k)}$, em termos dos valores de amplitude das tensões, ou (3) com o auxilio da matriz mista, $[\chi]^{(k)}$ [equação (4.93)]. É no entanto possível representar as perdas de energia num paralelepípedo laminado de comprimento unitário e largura relacionada com a altura H em três formas:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{h}^{(i)} \{\varepsilon\}^T [\varphi^{(i)}] \{\varepsilon\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{h}^{(i)} \{\varepsilon\}^T [\chi^{(i)}] \{\sigma^{(i)}\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{h}^{(i)} \{\sigma^{(i)}\}^T [\psi^{(i)}] \{\sigma^{(i)}\} \end{aligned} \qquad (6.25)$$

Saliente-se que as tensões e deformações são identificados com os seus valores de amplitudes num ciclo de carregamento harmónico. Todas as matrizes na equação (6.25) incluindo as características elasto-dissipativas - $[\varphi]^{(k)}$, $[\chi]^{(k)}$, $[\psi]^{(k)}$ - são completamente preenchidas.

As perdas de energia num laminado compósito são definidas pelas matrizes de características elasto-dissipativas

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[\varphi^c]\{\varepsilon\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[\chi^c]\{\sigma\} \\ \Delta W &= \frac{1}{2}\{\sigma\}^T[\psi^c]\{\sigma\} \end{aligned} \tag{6.26}$$

onde $\{\sigma\}$ e $\{\varepsilon\}$ são as tensões e deformações médias.

As relações entre as matrizes das características elasto-dissipativas do laminado e as matrizes das características elasto-dissipativas das camadas podem ser determinadas por inversão das deformações nas equações (6.25) e (6.26) e comparando as relações correspondentes. As tensões de cada camada e as tensões médias do laminado são determinadas a partir das deformações com o auxilio da matriz de rigidez da camada $[G]^{(k)}$ e a matriz de rigidez da matriz $[G]$

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^{(k)} &= [G]^{(k)}\{\varepsilon\}^{(k)} \\ \{\sigma\} &= [G]\{\varepsilon\} \end{aligned} \tag{6.27}$$

onde a expressão para [G], considerando a equação (6.4), é dado por

$$[G] = \sum_{k=1}^{n} [G]^{(k)} \overline{h}^{(k)} \tag{6.28}$$

As matrizes de rigidez $[G]^{(k)}$ no plano coordenado (x_1, x_2) são relacionados com as matrizes de rigidez $\left[G^0\right]^{(k)}$ nos eixos naturais $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ na forma:

$$[G]^{(k)} = \left[T_1^{(k)}\right][G^0]^{(k)}\left[T_1^{(k)}\right]^T \tag{6.29}$$

Aqui a matriz de transformação $\left[T_1^{(k)}\right]$ está descrita na equação (4.33) e a matriz de rigidez da camada $\left[G^0\right]$ é definida pelas suas constantes de engenharia da equação (4.30).

Substituindo a equação (6.27) nas equações (6.25) e (6.26) tendo em consideração a equação (6.1), obtêm-se as relações para as matrizes de características elasto-dissipativas laminado

$$\begin{aligned}
[\varphi] &= \sum_{k=1}^{n} \bar{h}^{(k)}[\varphi]^{(k)} \\
[\chi] &= \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{h}^{(k)}[G]^{(k)}[\psi]^{(k)}[G]^{(k)}\right)[S] \\
[\chi] &= [S]\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{h}^{(k)}[G]^{(k)}[\psi]^{(k)}[G]^{(k)}\right)[S]
\end{aligned} \tag{6.30}$$

onde $[S]$ é a matriz de flexibilidade do laminado $[S] = [G]^{-1}$.

As equações matriciais (6.26) e (6.30) permitem calcular perdas de energia durante o ciclo de carregamento das tensões e/ou deformações médias para um compósito laminado com uma estrutura de reforço arbitrária. As equações (6.30) descritas de forma detalhada são difíceis de obter, mas para os casos especiais da estrutura do laminado podem ser consideravelmente simplificadas.

6.3.1 COMPÓSITOS COM CAMADAS ANGULARES (ANGLE-PLY)

Neste caso será assumido que todas as camadas no compósito têm a mesma rigidez e as matrizes das características elasto-dissipativas das deformações no sistema coordenado natural são:

$$\left[G^0\right]=\begin{bmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 & 0 \\ g_{12}^0 & g_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{66}^0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\psi^0\right]=\begin{bmatrix} \psi_{11}^0 & \psi_{12}^0 & 0 \\ \psi_{12}^0 & \psi_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{66}^0 \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

Compósitos com camadas angulares (angle-ply) são materiais ortotrópicos se forem constituídas por um número par de camadas, metade do qual são orientadas num ângulo $-\alpha$ em relação ao eixo x_1 e as restantes são orientadas de um ângulo $+\alpha$ (ver figura 6.5). Tal material ortotrópico têm as matrizes $[\varphi]$ e $[G]$ da forma

$$[Y]=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 \\ y_{12} & y_{22} & 0 \\ 0 & 0 & y_{66} \end{bmatrix} \tag{6.32}$$

onde y é alterado para g^0 para a matriz $[G]$ e para ψ para a matriz $[\varphi]$.

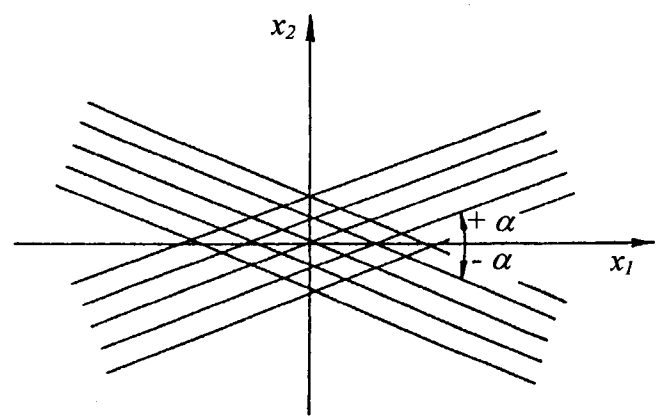


Figura 6.5 - O empilhamento das camadas num compósito cruzado.

Determine-se a forma especifica para a matriz das características elasto-dissipativas de tensão $[\psi]$. Utilizando as fórmulas de transformação [que são análogas à equação (4.103)] para as componentes da matriz de rigidez $[G^+]$ e $[G^-]$ da camada e a equação de transformação (4.101) para as componentes da matriz das características elasto-dissipativas de tensão $[\psi^+]$ e $[\psi^-]$ da camada (os sinais + e - correspondem aos ângulos

do reforço $+\alpha$ e $-\alpha$), pode-se observar que os pares de matrizes diferem apenas nos sinais antes dos componentes com índices 16 e 26

$$[G^{\pm}]=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \pm g_{16} \\ g_{12} & g_{22} & \pm g_{26} \\ \pm g_{16} & \pm g_{26} & g_{66} \end{bmatrix}, \qquad [\psi^{\pm}]=\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \pm\psi_{16} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \pm\psi_{26} \\ \pm\psi_{16} & \pm\psi_{26} & \psi_{66} \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

Introduzindo matrizes auxiliares obtém-se

$$[G]^{(+)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{16} \\ 0 & 0 & g_{26} \\ g_{16} & g_{26} & 0 \end{bmatrix}, [\psi]^{(0)}=\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 \\ \psi_{12} & \psi_{212} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{66} \end{bmatrix}, [\psi]^{(+)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \psi_{16} \\ 0 & 0 & \psi_{26} \\ \psi_{16} & \psi_{26} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

Represente-se as matrizes da equação (6.33) como a soma

$$[G^{\pm}]=[G]\pm[G]^{(+)}, \qquad [\psi^{\pm}]=[\psi]^{(o)}\pm[\psi]^{(+)} \tag{6.35}$$

Utilizando a as equações (6.30), (6.33) a (6.35) obtém-se

$$[\psi]=[\psi]^{(o)}+[G]^{-1}[P][G]^{-1} \tag{6.36}$$

onde a matriz $[P]$ é da forma

$$[P]=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{66} \end{bmatrix}$$

e as suas componentes são escritas como

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= g_{16}\left(2\psi_{16}g_{11} + 2\psi_{26}g_{12} + \psi_{66}g_{16}\right) \\
p_{12} &= \psi_{16}\left(g_{26}g_{11} + g_{12}g_{16}\right) + \psi_{26}\left(g_{22}g_{16} + g_{26}g_{12}\right) + \psi_{66}g_{16}g_{26} \\
p_{22} &= g_{26}\left(2\psi_{16}g_{12} + 2\psi_{26}g_{22} + \psi_{66}g_{66}\right) \\
p_{66} &= \psi_{11}g_{16}^2 + 2\psi_{12}g_{16}g_{26} + 2\psi_{16}g_{16}g_{66} + 2\psi_{26}g_{26}g_{66} + \psi_{22}g_{26}^2
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

As perdas de energia de compósitos angulares (angle-ply), durante o ciclo de carregamento sujeito a um estado plano de tensão arbitrário [equação (6.26)] são determinados com o auxilio da matriz das características elasto-dissipativas $[\psi]$ [equação (6.36)]. A amplitude das energia elástica, W, no ciclo de carregamento é caracterizado pela matriz flexibilidade $[S]$

$$
W = \frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}[\mathrm{S}]\{\sigma\} \tag{6.38}
$$

onde $[S]$ tem os seguintes componentes

$$
[S] = [G]^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} & 0 \\ -g_{12} & g_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{66}} \end{bmatrix} \tag{6.39}
$$

Sujeitando o compósito angulares (angle-ply) a carregamento biaxial cíclico ao longo do eixo x_1 ($\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 = 0,\ \tau_{12} = 0$), as perdas de energia, ΔW [equação (6.26)], e o valor de amplitude da energia elástica, W [equação (6.38)], são iguais a

$$
\Delta W = \frac{1}{2}\psi_{11}\sigma_1^2, \quad \Delta W = \frac{1}{2}s_{11}\sigma_1^2
$$

e o factor de dissipação é do género:

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\psi_{11}}{s_{11}}$$

A componente ψ_{11} da matriz $[\psi]$ é definido da equação (6.36). Multiplicando a matriz $[P]$ à esquerda e à direita pela matriz de flexibilidade [equação (6.39)] e depois, considerando as expressões para as componentes da matriz $[P]$ [equação (6.37)] e $[S]$ [equação (6.39)], obtém-se

$$\psi = \frac{\psi_{11}\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)}{g_{22}} + \frac{2\psi_{16}\left(g_{16}g_{22} - g_{26}g_{12}\right)}{g_{22}} + \frac{\psi_{66}\left(g_{16}g_{22} - g_{26}g_{12}\right)^2}{g_{22}\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} \qquad (6.41)$$

As componentes ψ_{11}, ψ_{16}, e ψ_{66} da matriz das características elasto-dissipativas de tensões, tal como as componentes da matriz de rigidez da camada g_{11}, g_{12}, g_{22}, g_{16} e g_{66} são relacionadas com as componentes das correspondentes matrizes nos eixos naturais. As figuras 6.6-6.8 traduzem as dependências dos factores de dissipação e módulo de Young no ângulo α para compósitos cruzados sujeitos a carregamento uniaxial ao longo do eixo x_1. Os dados iniciais para os cálculos são dados na tabela 6.1. Nesta tabela, E_1 é o módulo de Young na direcção das fibras, E_2 é o módulo de Young na direcção transversal à direcção das fibras, G_{12} é o módulo de corte no plano da camada, υ_{12} é o maior coeficiente de Poisson e ψ_1^*, ψ_2^* e ψ_6^* são os factores de dissipação de energia, respectivamente, quando de carregamento uniaxial na direcção das fibras, na direcção transversal às fibras e quando sujeito a corte ideal no plano da camada.

Foi utilizado para calculo dos diagramas o modelo de três componentes para as características elasto-dissipativas da camada. O módulo de Young E_1 que é o inverso das componentes da matriz de flexibilidade com o índice 11 são determinado pelas equações (6.8). As figuras 6.6 a 6.8 ilustraram o bom acordo entre dados previstos e dados experimentais.

Material	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	υ_{12}	ψ_1^* [%]	ψ_2^* [%]	ψ_6^* [%]	Refer--ências
HMS/DX 209	188.8	6.01	2.7	0.3	0.64	6.9	10.0	[2]
HTS/DX 210	103.4	7.6	3.8	0.3	0.49	5.48	6.75	[2]
HMS/DX 210	172.7	7.2	3.8	0.3	0.45	4.22	7.05	[3]
GLASS/DX 210	37.8	10.9	4.9	0.3	0.87	5.05	6.91	[3]
KMU-3	139.0	9.0	5.2	0.17	4.7	7.4	11.0	[1]
KMU-4	100.4	10.1	6.9	0.21	3.5	6.4	10.0	[1]
"Kulon"	238.0	4.4	3.7	0.2	3.6	10.1	16.15	[1]

Tabela 6.1. - Propriedades elasto-dissipativas de compósitos de matriz de epóxido e reforço unidireccional

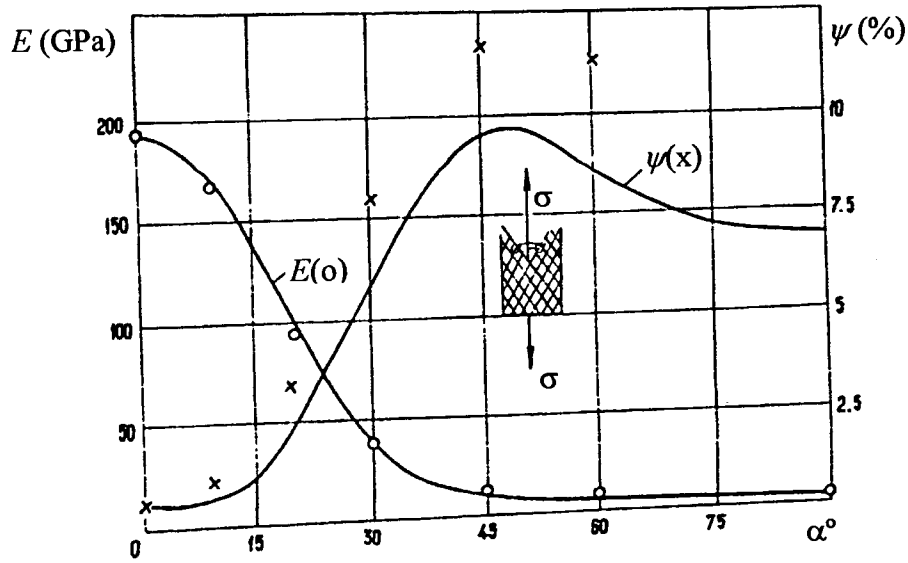


Figura 6.6 - Factor de dissipação, ψ, e modulo de Young, E, de laminado angular de plástico reforçado com fibra de carbono, HMS/DX 209 sujeito a carregamento uniaxial versus ângulo de orientação da fibra, α. Os dados experimentais são mostrados pelos pontos [2], os diagramas estimados são mostrados pelas linhas a cheio [equação (6.41)].

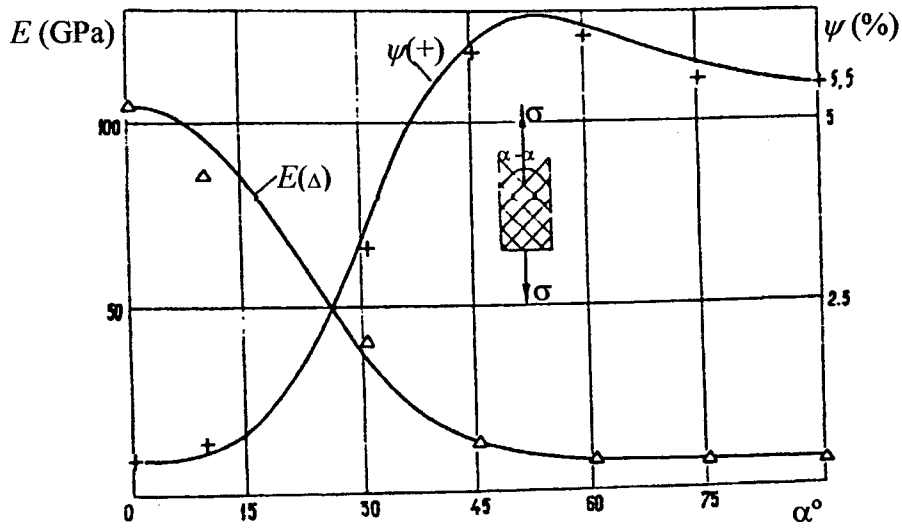


Figura 6.7 - Factor de dissipação, ψ, e modulo de Young, E, de laminado angular de plástico reforçado com fibra de carbono, HTS/DX 210 sujeito a carregamento uniaxial versus ângulo de orientação da fibra, α. Os dados experimentais são mostrados pelos pontos [2], os diagramas estimados são mostrados pelas linhas a cheio [equação (6.41)].

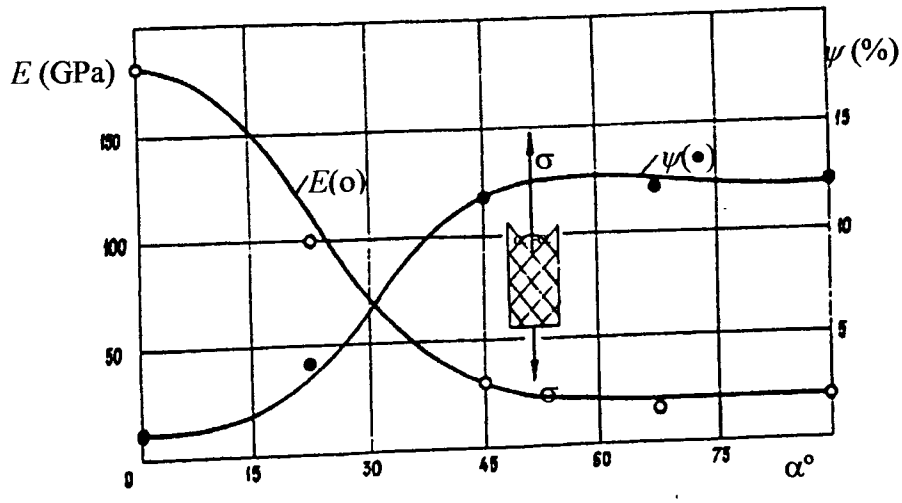


Figura 6.8 - Factor de dissipação, ψ, e modulo de Young, E, de laminado angular de plástico reforçado com fibra de boro, HMS/DX 209 sujeito a carregamento uniaxial versus ângulo de orientação da fibra, α. Os dados experimentais são mostrados pelos pontos [4], os diagramas estimados são mostrados pelas linhas a cheio [equação (6.41)].

6.4. DISSIPAÇÃO DE ENERGIA EM COMPÓSITOS LAMINADOS SUJEITOS A FLEXÃO

A flexão é uma forma típica de carregamento para materiais compósitos. Determine-se a relação para a dissipação de energia em placas compósitas laminados em termos das características elasto-dissipativas da camada.

Supondo (como foi feito durante a análise das características elásticas) que as camadas estão ligadas idealmente e que as hipóteses de Kirchhoff-Love da teoria clássicas das placas são verificadas na integra. As hipóteses, na forma matricial, resultam nas seguintes relações para as deformações:

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + \zeta\{\chi\}$$

6.4.1 O CASO GERAL DE LAMINADOS COM *N* CAMADAS

Perdas de energia especificas, $\Delta W^{(k)}$, em cada *k*-ésima camada durante o ciclo de carregamento, sujeito a estado plano de tensão, são determinadas [com respeito ao sistema coordenado global (x_1, x_2)] pelas matriz das características elasto-dissipativas das deformações, $[\varphi]^{(k)}$, ou pela matriz das características elasto-dissipativas das tensões, $[\psi]^{(k)}$, e pelos valores de amplitude das deformações $\{\varepsilon\}^{(k)}$ ou das tensões $\{\sigma\}^{(k)}$, como se segue:

$$\Delta W^{(k)} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^{(k)}[\varphi]^{(k)}\{\varepsilon\}^{(k)}$$

$$\Delta W^{(k)} = \frac{1}{2}\{\sigma\}^{(k)}[\psi]^{(k)}\{\sigma\}^{(k)}$$

As componentes das matrizes $[\varphi]^{(k)}$ e $[\psi]^{(k)}$ são expressas em termos das componentes das correspondentes matrizes elasto-dissipativas no sistema coordenado natural $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ através das formulas de transformação. As matrizes de tensão $\{\sigma^{(k)}\}$, de deformação $\{\varepsilon^{(k)}\}$, tal como matrizes elasto-dissipativas $[\varphi]^{(k)}$ e $[\psi]^{(k)}$ são relacionadas uma com outra através da matriz de rigidez da camada $[G]^{(k)}$:

$$\{\sigma\}^{(k)} = [G]^{(k)}\{\varepsilon\}^{(k)}; \qquad [\varphi]^{(k)} = [G]^{(k)}[\psi]^{(k)}[G]^{(k)} \tag{6.43}$$

Serão determinadas as perdas de energia, ΔW, em compósitos laminados com dimensões unitária ao longo dos eixos (x_1, x_2) e com uma altura, H, correspondendo à espessura do laminado. Agora efectuando a integração em relação à altura de cada camada na primeira equação (6.42), tomando em consideração a equação (6.10), e depois somando as perdas de energia em todas as camadas, obtém-se, na forma matricial, a seguinte relação:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left(\{e\}^T[\varphi_1]\{e\} + 2\{e\}^T[\varphi_2]\{\chi\} + \{\chi\}^T[\varphi_3]\{\chi\}\right) \tag{6.44}$$

onde as matrizes $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$ e $[\varphi_3]$ são relacionadas com as matrizes das características elasto-dissipativas na forma

$$\begin{aligned}
[\varphi_1] &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} [\varphi]^{(k)} d\zeta \\
[\varphi_2] &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} [\varphi]^{(k)} \zeta d\zeta \\
[\varphi_3] &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} [\varphi]^{(k)} \zeta^2 d\zeta
\end{aligned} \tag{6.45}$$

As equações (6.45) podem ser escritas na forma reduzida como:

$$[\varphi_j] = \sum_{k=}^{n} \int_{\zeta^{(k-1)}}^{\zeta^{(k)}} [\varphi]^{(k)} \zeta^{j-1} d\zeta \qquad (j = 1,2,3) \tag{6.46}$$

Se as componentes das matrizes $[\varphi]^{(k)}$ não variarem com a espessura da camada correspondente, então as equações (6.46) tomam a forma simples

$$[\varphi_j]=\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{n}[\varphi]^{(k)}\left(\zeta_{(k)}^{j}-\zeta_{(k-1)}^{j}\right)$$

onde j=1,2,3; k=1,2,...,n

Depois de combinada as matrizes, $[\varphi_j]$ (j=1,2,3), pode-se escrever a equação (6.44) na forma matricial detalhada

$$\Delta W=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}e\\ \chi\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}[\varphi_1] & [\varphi_2]\\ [\varphi_2] & [\varphi_3]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e\\ \chi\end{Bmatrix} \tag{6.47}$$

As matrizes $[\varphi_j]$ (j = 1,2,3), $[\varphi]^{(k)}$, $[\psi]^{(k)}$ e $[G]^{(k)}$ (k = 1,2,...,n) nas equações (6.42)-(6.47) são simétricas. Falando genericamente, para um laminado com empilhamento das camadas arbitrário, estas matrizes são completamente preenchidas. As matrizes $[\varphi]^{(k)}$, $[\psi]^{(k)}$ e $[G]^{(k)}$ são de forma mais simples no sistema de coordenado natural $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ para a k-ésima camada.

Perdas de energia, ΔW, em compósitos laminados durante o ciclo de carregamento podem ser representadas por uma função dos factores de carregamento, equação (6.12). As perdas de energia em compósitos sujeitos a ciclos de carregamentos são governadas pelos valores da amplitude dos parâmetros de carregamento. Os factores de carregamento e deformações são representados pelos seus valores de amplitude no ciclo de carregamento. Substituindo a equação (6.25) na equação (6.47), obtém-se

$$\Delta W=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}T\\ M\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}[S_1] & [S_2]\\ [S_2] & [S_3]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[\varphi_1] & [\varphi_2]\\ [\varphi_2] & [\varphi_3]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[S_1] & [S_2]\\ [S_2] & [S_3]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T\\ M\end{Bmatrix} \tag{6.48}$$

Notar que para calcular o valor de amplitude da energia potencial de um compósito laminado, é suficiente utilizar uma das equações (6.44), (6.47) ou (6.48), substituído φ por g e a notação ΔW por W.

6.4.2 MODOS DE CARREGAMENTO DE COMPÓSITOS MULTICAMADA - O MODO DE FLEXÃO LIVRE

A equação (4.48) verifica-se para o caso geral de compósitos laminados carregados segundo uma combinação de seis componentes de forças, $\{T\}$, e de momentos, $\{M\}$. A consideração de um número especifico de modos de carregamento pode ser realizado na prática. A determinação exacta do modo de carregamento é de particular importância para a análise de dados experimentais.

Considerem-se alguns casos específicos de carregamento. Assumindo que as componentes do vector de carregamento são dadas como:

$$M_1 \neq 0, \quad M_2 = 0, \quad M_{12} = 0, \quad \{T\} = \{0\} \tag{6.49}$$

Decorre da equação (6.25), que neste caso não dá só a curvatura χ_1 diferente de zero, mas também $\chi_2 \neq 0$ e $\chi_{12} \neq 0$. No caso geral, o plano coordenado é também deformado

$$e_1 \neq 0, \quad e_2 \neq 0, \quad e_{12} \neq 0$$

Isto significa que o modo de carregamento de acordo com a equação (6.49) pode ser realizado quando as deformações do compósito laminado não são restringidas. Chama-se a tal modo de carregamento o modo de flexão livre. O modo mais fácil para determinar as características de amortecimento do compósito é testar provetes planos de secção prismática sujeito a vibrações de flexão. Os factores de dissipação dos provetes, sujeitos a vibrações, são normalmente obtidos como sendo iguais aos factores de dissipação quando sujeito a carregamento plano uniaxial, isto é, no modo de carregamento

$$T_1 \neq 0, \quad T_2 = 0, \quad T_{12} = 0, \quad \{M\} = \{0\} \tag{6.50}$$

Em particular, todos os dados experimentais das figuras 6.6 a 6.8 foram determinados assumindo que as características de amortecimento obtidas do ciclo de flexão são idênticas às características obtidas para carregamento no plano.

As equações (4.48) indicam que, no caso geral, tal identidade não se verifica. (Posteriormente, será mostrado que as estruturas compósitas com as propriedades dadas nas figuras 6.6-6.8 são excepções deste caso, e tal identidade é bastante razoável).

As condições de amarração do provete durante o teste verificam, aproximadamente, a condição da equação (6.49). É possível obter o sentido da influência das restrições de deformação à flexão na magnitude do factor de dissipação, se considerar mais dois modos de carregamento além do modo de flexão livre.

O primeiro modo pode ser chamado o modo de carregamento de flexão com restrição das deformações torsionais:

$$M_1 \neq 0, \quad M_2 = 0, \quad \chi_{12} = 0 \ \ (M_{12} \neq 0), \quad \{T\} = \{0\} \tag{6.51}$$

Da equação (6.25), de acordo com o valor de M_1 e considerando a condição χ_{12}=0, pode-se determinar o valor correspondente de M_{12}. As perdas de energia podem ser determinadas das equações (6.48), mas não são iguais, no caso geral, para a energia de dissipação do material sujeito ao modo de flexão livre.

Para o segundo exemplo, considere-se o modo de flexão pelo momento M_1 quando a flexão ao longo do eixo x_2 é restringida:

$$M_1 \neq 0, \quad \chi_{12} = 0 \ \ (\mathrm{M}_2 \neq 0), \quad M_{12} = 0, \quad \{T\} = \{0\} \tag{6.52}$$

Neste caso, considerando o valor de M_1 e a condição χ_{12}=0, o valor do momento M_2 pode ser encontrado da equação (6.25). As perdas de energia podem ser calculadas das equações (6.48). Estas não coincidem, no caso geral, com as perdas de energia, quando o carregamento do compósito é nos modos das equações (6.49) e (6.51).

Comparando os valores dos factores de dissipação para tipos específicos de compósitos sujeitos a modos de carregamento das equações (6.49), (6.50), (6.51) e (6.52) permite tirar conclusões acerca dos efeitos das restrições de deformação durante os testes dos provetes. A figura 6.9 representa os factores de dissipação de compósitos unidireccionais para diferentes tipos de amarração do provete. Como se pode observar, a diferença nos

factores de dissipação - que correspondem a condições de amarração- podem ser perceptível. Infelizmente, deve ser notado que os autores de uma grande quantidade de trabalhos experimentais omitem os detalhes da amarração dos provetes nas suas experiências como detalhes insignificantes. Isto torna muito difícil a comparação dos resultados de diferentes autores.

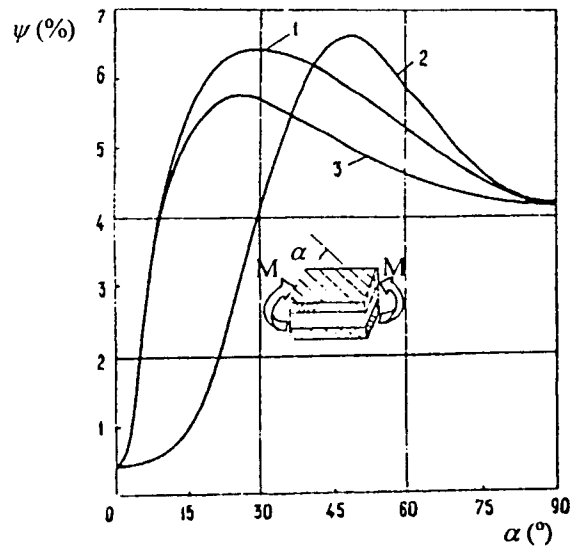


Figura 6.9 - Factor de dissipação, ψ, de plástico reforçado com fibra de carbono unidireccional versus ângulo, α, entre a direcção das fibras e o plano de flexão: 1 - o modo de flexão livre; 2 - equação (6.51) (torção restringida); e 3 - equação (6.52) (restrição de flexão no plano ortogonal ao plano de flexão).

6.4.3 ESTRUTRAS SIMÉTRICAS DE COMPÓSITOS HÍBRIDOS LAMINADOS. TIPOS ESPECÍFICOS DE COMPÓSITOS

A equação (4.84) torna-se mais simples para um compósito laminado quando o empilhamento das camadas é simétrico em relação ao plano médio, escolhendo este como o plano coordenada:

$$[S_1]=[G_1]^{-1}, \qquad [S_2]=0, \qquad [S_3]=[G_3]^{-1} \tag{6.53}$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} [\mathrm{S}_1][\varphi_1][S_1] & 0 \\ 0 & [\mathrm{S}_3][\varphi_3][S_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} \tag{6.54}$$

As equações (6.54) e (6.24) permitem calcular as perdas de energia e a energia potencial para uma placa constituída por diferentes camadas com orientação arbitrária (compósito híbrido), sujeito à acção das forças e dos momentos. Para tal, é suficiente conhecer as matrizes das características elasto-dissipativas de cada camada [equações (6.42) e (6.43)], os parâmetros geométricos das camadas [equação (6.46)], e os factores de forças a utilizar.

As figuras 6.10 a 6.15 ilustram as dependências que foram calculadas com base na equação (6.50), tal como os dados experimentais para a maioria dos compósitos. Os compósitos foram carregados pelo momento de flexão, tendo em atenção que o plano de acção do momento de flexão muda a sua direcção em relações aos eixos do compósito. Foi utilizado o modelo de quatro componentes das características elasto-disssipativas para as camadas com reforço de fibra de carbono HMS/DX 210 e para as camadas com reforço de fibra-de-vidro GLASS/DX 210 (ver tabela 6.1). Todos os cálculos foram efectuados para o modo de flexão livre. Os resultados para a ortogonalidade dos compósitos reforçados, tanto como os compósitos híbridos e simétricos de estrutura geral, mostram boa concordância entre os dados teóricos e experimentais.

Determinem-se as formas especificas para as matrizes $[\varphi_j]$, $[\mathrm{G_j}]$ $(j = 1,3)$ para tipos de compósitos específicos com empilhamento simétrico de n camadas similares na placa com espessura total, H. O comportamento elasto-dissipativo da camada no sistema de coordenadas geral (x_1, x_2) é determinado pelas matrizes de rigidez $[G]$ e de flexibilidade $[S]$ $\left([S] = [G]^{-1}\right)$ e pelas matrizes das características elasto-dissipativas de deformações e de tensões, $[\varphi]$ ou $[\psi]$. As suas componentes podem ser calculadas das componentes destas matrizes nos eixos naturais das camadas e podem ser expressas em termos das constantes elasto-dissipativas de engenharia, das equações do tipo das (4.101)-(4.103).

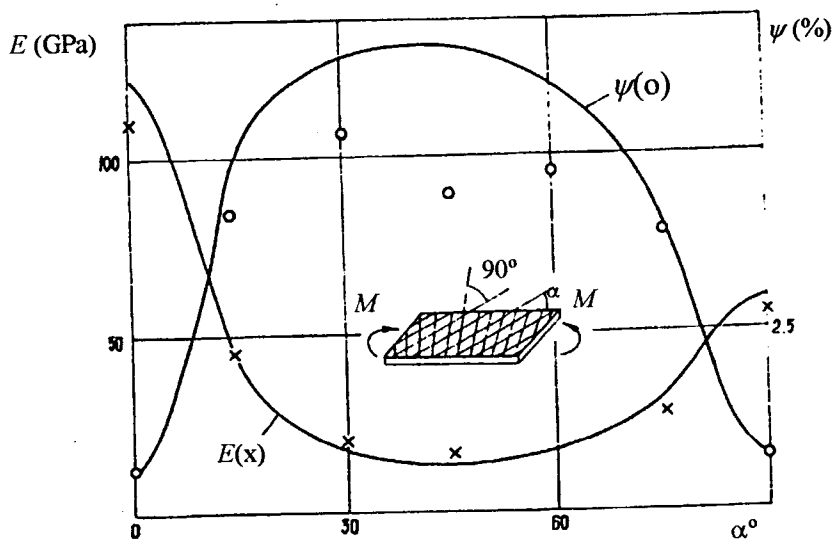


Figura 6.10 - Factor de dissipação, ψ, e modulo de Young efectivo, E, de laminado de plástico reforçado com fibra de carbono, HMS/DX 210 versus ângulo de orientação da fibra, α, em relação ao plano do momento de flexão Os dados experimentais são mostrados pelos pontos [3], os diagramas estimados são representados pelas linhas a cheios. A estrutura do laminado é a seguinte: $[0°,90°,0°,90°]_s$.

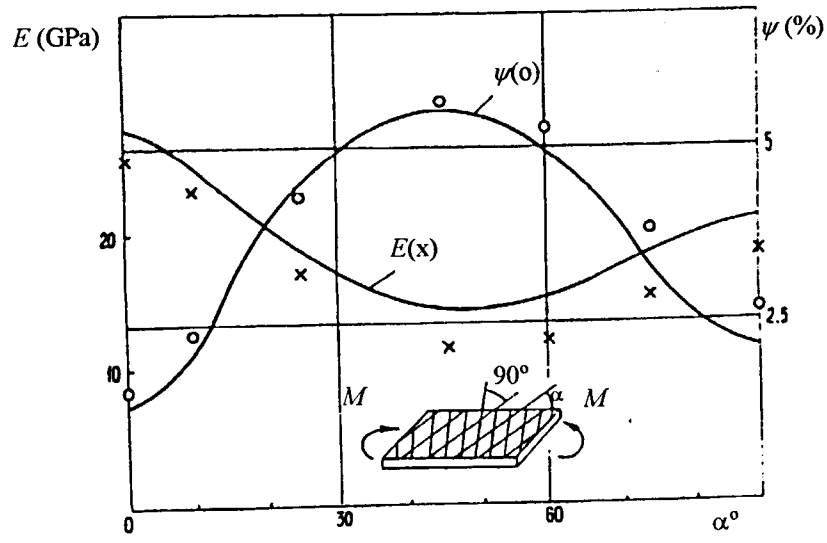


Figura 6.11 - Factor de dissipação, ψ, e modulo de Young efectivo, E, de laminado de plástico reforçado com fibra de vidro HMS/DX 210 versus ângulo de orientação da fibra, α, em relação ao plano do momento de flexão Os dados experimentais são mostrados pelos pontos [3], os diagramas estimados são representados pelas linhas a cheios. A estrutura do laminado é a seguinte: $[0°,90°,0°,90°]_s$.

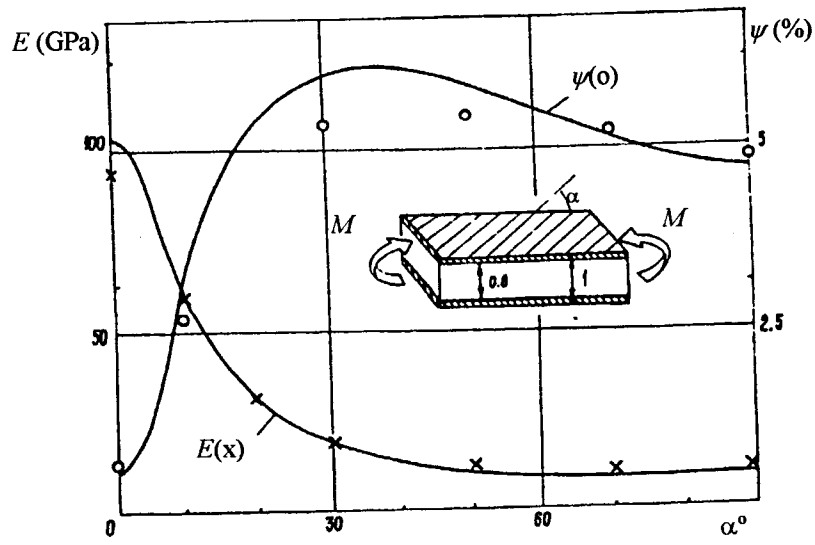


Figura 6.12 - Factor de dissipação, ψ, e modulo de Young efectivo, E, de compósito híbrido unidireccional versus ângulo de orientação da fibra, α, em relação ao plano do momento de flexão As camadas exteriores são constituídas por plástico reforçado com fibra de carbono HMX/DX 210, a camada interior é constituída por plástico reforçado com fibra de vidro GLASS/DX 210. A espessura relativa da camada é dada na figura. Os dados experimentais são mostrados pelos pontos [5], os diagramas estimados são representados pelas linhas a cheio.

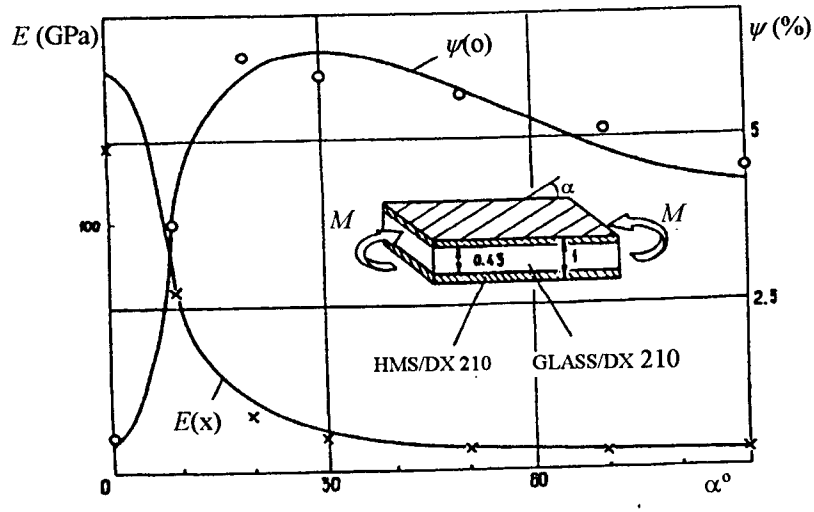


Figura 6.13 - Factor de dissipação, ψ, e modulo de Young efectivo, E, de plástico híbrido reforçado com carbono/vidro unidireccional versus ângulo de orientação da fibra, α, em relação ao plano do momento de flexão As camadas exteriores são constituídas por plástico reforçado com fibra de carbono HMX/DX 210, a camada interior é constituída por plástico reforçado com fibra de vidro GLASS/DX 210. A espessura relativa da camada é dada na figura. Os dados experimentais são mostrados pelos pontos [5], os diagramas estimados são representados pelas linhas a cheio.

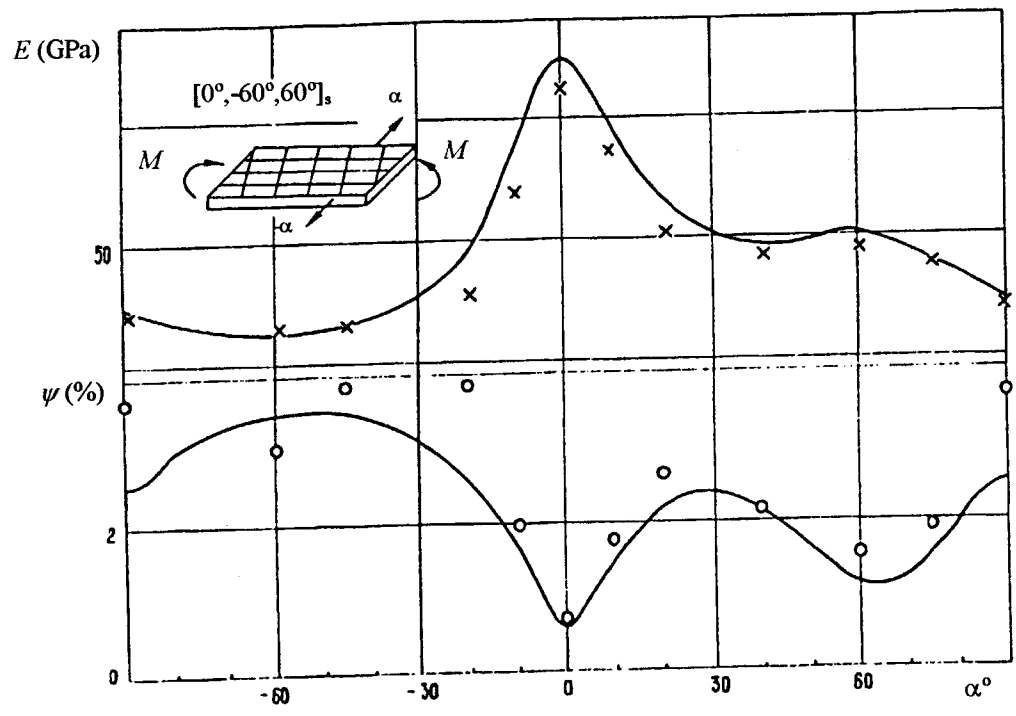


Figura 6.14 - Factor de dissipação, ψ, e modulo de Young efectivo, E, de plástico reforçado com fibra de carbono HMS/DX 210 com empilhamento das camadas simétrico $[0°,-60°,60°]_s$ versus ângulo, α (o ângulo entre a direcção da fibra na camada 0° e o plano do momento de flexão). Os dados experimentais são mostrados pelos pontos [3], os diagramas estimados são representados pelas linhas a cheio.

Considerem-se dois tipos de compósitos. O primeiro é um material unidireccional com um ângulo de orientação, α, em relação ao eixo x_1. O segundo é um material laminado angular (angle-ply) ($\pm\alpha$).

As relações para perdas de energia num material unidireccional, utilizando equações (6.46) e (6.54), é expresso como

$$\Delta W = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \dfrac{[\psi]}{H} & 0 \\ 0 & \dfrac{12[\psi]}{H^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} \tag{6.55}$$

O valor de amplitude da energia potencial é definido como:

$$W = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix}^{T}\begin{bmatrix} \dfrac{[S]}{H} & 0 \\ 0 & \dfrac{12[S]}{H^3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} \tag{6.56}$$

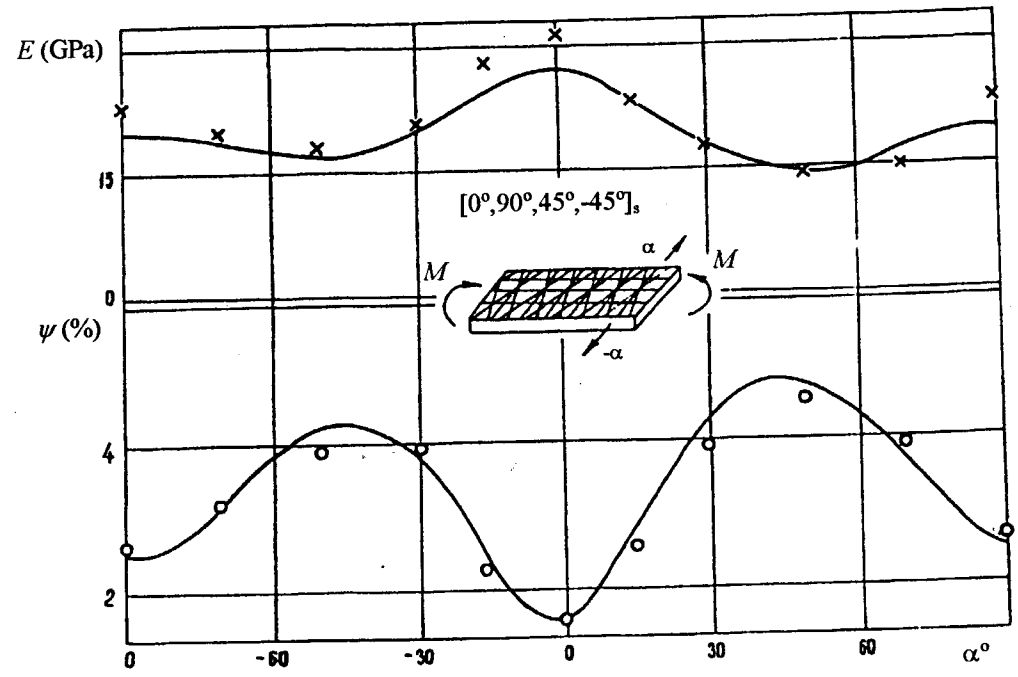


Figura 6.15 - Factor de dissipação, ψ, e modulo de Young efectivo, E, de plástico reforçado com fibra de vidro GLASS/DX 210 com empilhamento das camadas simétrico $[0°,90°,45°,-45°]_s$ versus ângulo, α (o ângulo entre a direcção da fibra na camada 0° e o plano do momento de flexão). Os dados experimentais são mostrados pelos pontos [3], os diagramas estimados são representados pelas linhas a cheio.

O factor de dissipação de energia do compósito unidireccional sujeito a flexão livre é da forma

$$\psi = \frac{\psi_{11}}{s_{11}} \tag{6.57}$$

A equação (6.57) coincide com a expressão para o factor de dissipação do caso de ciclo de carregamento uniaxial de material unidireccional, fazendo um ângulo com a direcção do reforço [equação (4.105)]. Isto também pode ser concluído directamente das equações (6.55) e (6.56), considerando o seguinte modo de carregamento:

$$T_1 \neq 0, \quad T_2 = 0, \quad T_{12} = 0, \quad \{M\} = \{0\}$$

Para o material com laminado angular (angle-ply), as matrizes $[G_j]$ e $[\varphi_j]$ (j=1,3) são definidos das equações (6.17) e (6.46). Juntando as expressões para componentes destas matrizes para um material com ângulos de empilhamento resulta em:

$$\left(y_{11j}, y_{12j}, y_{22j}, y_{66j}\right) = a_j\left(y_{11}, y_{12}, y_{22}, y_{66}\right), \quad (j = 1,3)$$

$$a_j = H, \qquad b_j = H^3 / 12$$

$$\left(y_{16j}, y_{26j}\right) = b_j\left(y_{16}, y_{26}\right), \quad (j = 1,3)$$

- se n for par, então os coeficientes b_j são: $b_1 = 0$, $b_3 = H^3 / 4n$
- se n for impar, então $b_1 = H / n$, $b_3 = \left(3n^2 - 2\right)H^3 / 4n^3$

onde y deve ser alterado para φ para as matrizes $\left[\varphi_j\right]$ e para g para as matrizes $\left[G_j\right]$; as componentes y_{16j}, y_{26j} $(j = 1,3)$ têm o sinal que corresponde ao sinal do ângulo de reforço, α, das camadas exteriores.

Para compósitos angulares (angle-ply) as componentes das matrizes $\left[\varphi_j\right]$ e $\left[G_j\right]$ $(j = 1,3)$ com os índices 16 e 26 têm ordem de $1/n$ (n é o número de camadas). Se o número das camadas do compósito é bastante grande, estes coeficientes são assumidos como zero. No modo de flexão livre, as equações (6.54) e (6.57) dão a seguinte formula para a dissipação de energia

$$\psi = \varphi_{11_3} s_{11_3} + 2\varphi_{12_3} s_{12_3} + \varphi_{22_3}\left(s_{12_3}\right)^2 / s_{11_3}$$

Utilizando a relação entre as matrizes $[\varphi]$ e $[\psi]$, a formula pode ser escrita na forma

$$\psi = \psi_{11}\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right) / g_{22} + 2\psi_{16}\left(g_{16}g_{22} - g_{26}g_{12}\right) / g_{22} +$$
$$+\psi_{66}\left(g_{16}g_{22} - g_{26}g_{12}\right)^2 / g_{22}\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)$$

A equação (6.58) coincide com a formula do factor de dissipação para empilhamento angular do compósito sujeito a carregamento uniaxial, equação (6.41).

Da figura 6.16, é possível estimar o efeito do numero das camadas do empilhamento angular nos valores dos factores de dissipação no modo de flexão livre. Os dados para os cálculos são os mesmos dos da figura 6.9. As equações (6.54) e (6.57) foram utilizados no calculo dos valores de $\psi(n)$. Estas equações resultam na equação (6.58), quando $n \to \infty$.

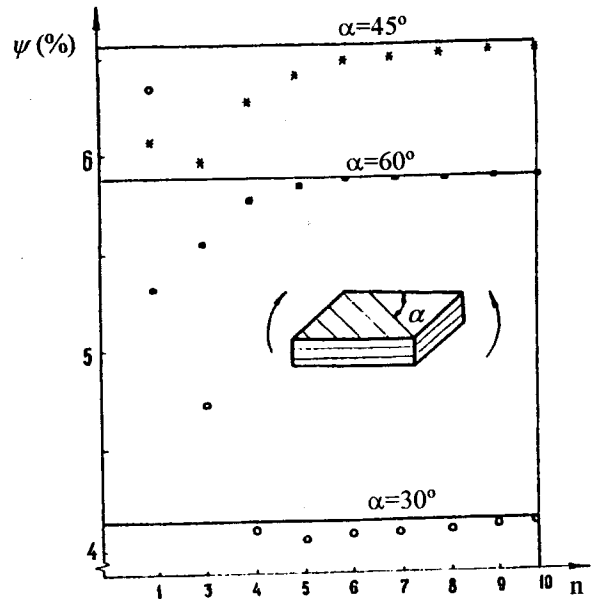


Figura 6.16. - Efeito do número de camadas, n, de compósito angular (angle-ply) HMS/DX 210 com empilhamento simétrico das camadas no valor do factor de dissipação, ψ, no modo de flexão livre.

A figura 6.16 mostra que se o número das camadas no empilhamento angular do material for igual de oito a dez, pode-se utilizar a equação simplificada (6.58). Pelo contrário, para um compósito que consiste de apenas três a cinco camadas, o erro pode ser muito apreciável durante o calculo do factor de dissipação através desta formula.

Em conclusão, deve-se dar ênfase, que a coincidência dos factores de dissipação para compósitos unidireccionais ou empilhamentos angulares (angle-ply) em flexão livre e carregamento uniaxial não se aplica - no caso geral - em compósitos de uma estrutura arbitrária.

6.5. REFERÊNCIAS

[1] Zinoviev, Peter A., Ermakov, Yury E., *Energy Dissipation in Composite Materials*, Techomic Publishing Company, 1994.

[2] Adams, R. D. and D. G. C. Bacon. "*Effect of Fibre Orienation and Laminate Geometry on the Dynamic Properties of CFRP*", J. Composite Materials, 7(5), pp.402-428, 1973.

[3] Ni R. G. and D. Adams, "*The Damping and Dynamic Moduli of Symmetric Laminate Composite Beams - Theorical and Experimental Results*", J. Composite Materials, 18(2), 1984, pp.104-121.

[4] Georgi, H., "Damping Effects in Aerospace Structures", Proceedings of 48th Meet. AGARD, Williamsburg, USA, April 2-3, 1979, pp.9.1-9.20.

[5] Ni, R. G. and R. D. Adams, "*The Dynamic Properties of Carbon-Glass Fibre Sandwich-Laminated Composites: Theorical, Experimental and Economic Considerations*", Composites, 15(4), 1984, pp.297-199.

CAPÍTULO 7

RESULTADOS

7.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados experimentais, numéricos e analíticos obtidos para perfis de pultrusão submetidos a impacto. Além dos ensaios de impacto também foram efectuados ensaios experimentais de flexão.

Em primeiro lugar são apresentados os resultados experimentais. Esta parte é constituída por ensaios de flexão e de impacto, para caracterização mecânica dos perfis pultrudidos e estudo da relação entre estas características e as percentagens de fibra e de carga.

Em segundo lugar são mostrados os comportamentos força-tempo para os perfis pultrudidos obtidos pelo modelo mola-massa de dois graus de liberdade.

Por último, são apresentados os resultados analíticos para determinação dos coeficientes de absorção de energia de materiais compósitos.

7.2. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

As propriedades mecânicas dos materiais compósitos dependem da percentagem de fibra e da percentagem de carga existentes nos produtos. Estes factores apesar de interferirem directamente no processo de pultrusão, como já se referiu no capitulo 2, são factores que devem estar relacionados entre si, isto é, quando se utiliza uma fracção elevada de fibra deve-se diminuir à percentagem de carga e vice-versa. Estes dois constituintes são determinantes nas características mecânicas dos compósitos.

Assim, não sendo conhecida esta relação e sendo as características de impacto dependentes das características mecânicas, será de interesse estudar a relação entre a percentagem de fibra e de carga e as propriedades mecânicas e de impacto. Assim, neste capitulo será estudada a relação entre estes parâmetros.

Para a caracterização das propriedades mecânicas dos perfis obtidos pelo processo de pultrusão, perfis pultrudidos, foram efectuados ensaios mecânicos de flexão, de acordo com a norma EN 63. O sistema de flexão utilizado foi o sistema I, que é o sistema de flexão em três pontos.

O objectivo destes ensaios é obter uma relação entre as características mecânicas resultantes e as percentagens de fibra e de carga.

Além dos ensaios de flexão também foram efectuados ensaios de impacto. Para tal, utilizou-se uma máquina de ensaios de impacto de queda de peso por gravidade. Destes ensaios obteve-se o comportamento ao impacto de provetes de pultrusão e suas características. Obtidos estes resultados, o objectivo seguinte consiste em obter uma relação entre as características de impacto e as percentagens de fibra e de carga.

Os provetes utilizados para os ensaios de flexão e de impacto são da mesma espécie, isto é, foram utilizados provetes com as mesmas características, percentagem de fibra e de carga, para ambos os ensaios.

7.2.1 ENSAIOS DE FLEXÃO

Os produtos de pultrusão apresentam características especificas deste processo, sendo uma delas a elevada percentagem de fibra unidireccional (*roving*) com que se trabalha. Neste processo não é possível distinguir duas camadas de *roving* consecutivas, é que a distinção entre estas camadas não existe, uma vez que as fibras não ficam empilhadas como camadas, mas sim de uma forma um pouco aleatória. Como tal, as características mecânicas obtidas por este processo não podem ser comparadas com as obtidas por outros processos. Assim, efectuaram-se ensaios para determinar as suas propriedades mecânicas.

A escolha de ensaios de flexão para caracterização mecânica dos produtos pultrudidos, deve-se ao facto de não se ter conseguido efectuar ensaios de tracção válidos, pois a rotura ocorria sempre junto às amarras (mesmo com bolachas) ou na matriz na direcção longitudinal (de tracção,) o que originou que umas fibras fossem mais traccionadas que

outras, isto é, havia uma parte do provete que, após o ensaio, apresentava maior deslocamento das fibras do que a restante na direcção longitudinal.

Para a realização dos provetes produziu-se, pelo processo de pultrusão, uma barra de 80 milímetros de comprimento por 5 milímetros de espessura. Esta barra, dentro das fieiras existentes, era a que mais se adequava para se poder retirar provetes.

Para a realização de provetes foi utilizado reforço de fibra-de-vidro e matriz de poliéster. O empilhamento é constituído por manta nas camadas exteriores e *roving* no seu interior, como ilustrado na figura 7.1. O véu de superfície que aparece nas camadas mais exteriores é desprezável para as características mecânicas, pois não apresenta resistência mecânica significativa e a sua utilização é só para melhorar o acabamento superficial e facilitar o processamento. A manta de filamentos contínuos utilizada tem gramagem de 450 g/m^2, o *roving* é de 4800 tex e o véu de superfície é de fibra-de-vidro com gramagem de 30 g/m^2.

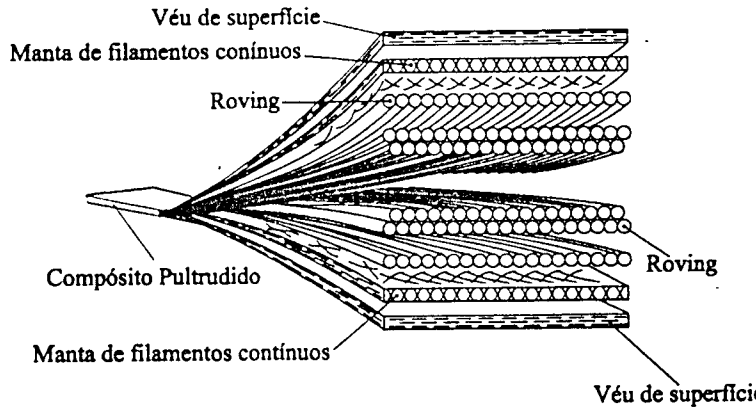


Figura 7.1 - Constituição dos provetes

A matriz é constituída por uma resina de poliéster isoftálica da CPB, Quires 272, indicada para o processo de pultrusão, com as propriedades apresentadas na tabela 7.1 e o tipo de carga utilizada é o carbonato de cálcio, com granulometria média de 3.6 μ.

Tendo em consideração que o objectivo destes ensaios é estudar a relação entre as percentagens de fibra e de carga com as características mecânicas, efectuaram-se alguns ensaios de flexão. Para tal, foram realizadas cinco séries de provetes com a percentagem de fibra e de carga diferentes. Pretendeu-se produzir três séries de provetes com 50, 60 e 75% de fibra-de-vidro e todos estes com 40 partes por cem (ppc) de carga e mais duas

séries com 75% de fibra-de-vidro com 10 e 20 ppc de cargas. Estes provetes foram referenciados em primeiro lugar com a percentagem de fibra-de-vidro seguido de um *F*, que corresponde à fibra, seguido das ppc de carga às quais se segue um *C*, que corresponde à carga. Por fim é adicionado um número correspondente ao número do provete dessa série. Na tabela 7.2 são apresentadas as séries (notar que os números dos provetes não são aqui apresentados).

Módulo de Elasticidade [GPa]	Resistência à Tracção [MPa]	Elongação na Rotura [%]	Contracção Volumétrica [%]
3.5	75	3.8	8.3

Tabela 7.1 - Características mecânicas da resina

Após efectuado o controlo das percentagens de fibra e de carga, verificou-se que os valores fugiam um pouco daquilo que se pretendia, como se pode ver na tabela 7.2. Estes ensaios deveriam ter sido feitos em número de três, para cada série, mas por motivos de disponibilidade de equipamento, até à conclusão deste trabalho, só pode ser efectuado um por série, estando em curso os restantes ensaios.

Série	% Fibra	% Carga
50F40C	46.50	13.20
60F40C	62.00	7.80
75F40C	63.00	10.30
75F20C	67.10	4.10
75F10C	68.70	3.20

Tabela 7.2 - Constituição dos provetes realizados

Os valores das percentagens de fibra e carga foram determinados a partir de amostras retiradas do perfil produzido, através de ensaios de determinação de teores, os quais são realizados em duas fases, como se indica.

1. Ensaio de queima. Nesta primeira fase, a amostra é colocada numa mufla que através de calor queima o provete, eliminando-se assim a resina e as suas componentes (acelerador, pigmento, desmoldantes, etc.), excepto as cargas. O valor do peso da fibra com a carga é registado e comparado com o seu valor inicial, permitindo obter o valor da percentagem mássica da componente resina (resina com aditivos).

2. Ataque químico. Nesta segunda fase, são utilizadas as "sobras" do ensaio de queima, isto é, a fibra misturada com a carga. Para efectuar esta separação é utilizado um agente químico, ácido clorídrico, que elimina as cargas, passando alguma parte destas à fase gasosa e outra parte dissolve-se na solução, obtendo-se assim só a componente de fibra do produto. A comparação com os valores de peso registados anteriormente permite obter a percentagem mássica das fibras e das cargas.

A diferença que se verifica na tabela 7.2, entre os valores pretendidos e os valores reais deve-se essencialmente a dois factores. O primeiro deve-se ao facto de a manta com a largura pretendida ter sido cortada à mão, o que apresentou alguma irregularidade na largura. Tal facto provoca diferentes percentagens de fibra em diferentes secções, pois em alguns sítios a manta tinha largura superior à largura da barra e noutros sítios a manta apresentava largura inferior à largura da barra. A ausência de fibra era coberta pelo aumento de resina, pelo que a secção se apresentava completamente preenchida, isto é, não existia falta de material na secção da barra. Este factor é o motivo da diferente percentagem de fibra ao longo do perfil. O segundo factor pode dever-se à má mistura da resina. Como as quantidades de resina utilizadas para a produção da barra eram sempre pequenas (cerca de 10 Kg), pois não se pretendia produzir grandes quantidades de perfil, a mistura teve de ser feita com um misturador manual improvisionado, o que originou uma má mistura das cargas, que necessitam bastante agitação para se dissolverem.

Os ensaios para determinação das características mecânicas escolhidos foram os ensaios de flexão. Esta escolha, teve como principal motivo o facto de não se conseguir obter resultados válidos nos ensaios de tracção, como já referido. Os ensaios efectuados foram realizados de acordo com a EN 63.

Como se pode constatar da observação do gráfico 7.1 e da tabela 7.3, a variação, calculada da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo (amplitude dos resultados) divida pelo valor da média, é baixa pelo que pode-se dizer que existe boa concordância dos resultados obtidos para esta série, como é visível no gráfico 7.1.

Provete	Tensão de Rotura [MPa]	Deformação máxima	Módulo de Elasticidade [GPa]
50F40C1	644	0.0480	40
50F40C2	657	0.0462	43
50F40C3	640	0.0474	41
Média	647	0.0472	41
Variação Média	2.6 %	3.8 %	7.3 %

Tabela 7.3 - Resultados dos ensaios de flexão para a série 50F40C.

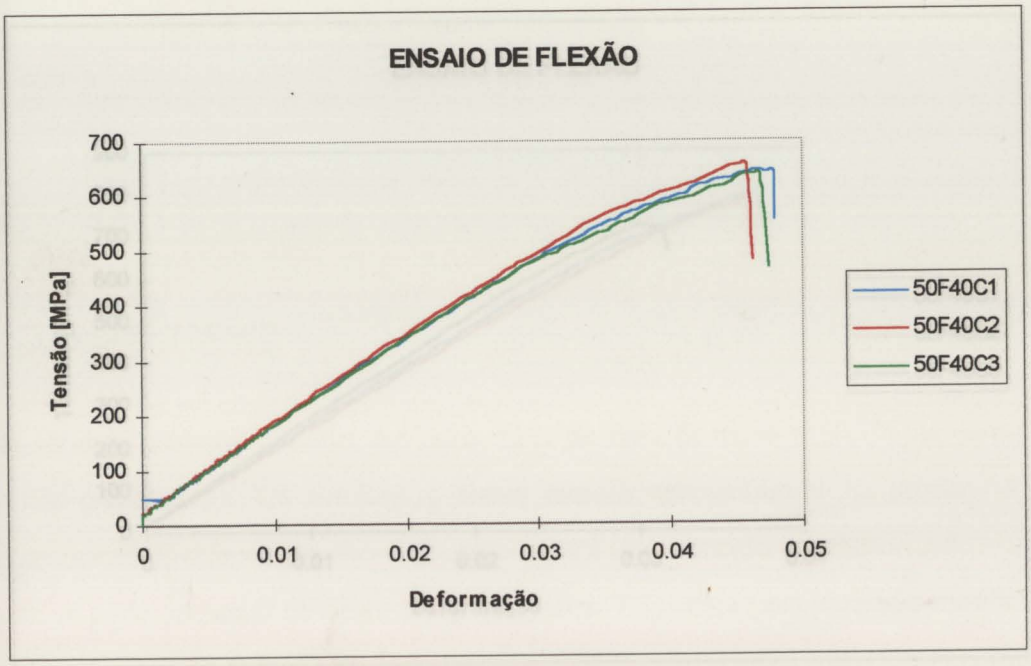


Gráfico 7.1 - Ensaio de flexão da série 50F40C

7.2.1.2 SÉRIE 60F40C

Esta série de provetes contém, em peso, 62% de fibra de vidro e 7.8% de carbonato de cálcio como carga. Os resultados destes ensaios apresentam-se na tabela 7.4 e o comportamento mecânico, tensão-deformação, está representado no gráfico 7.2.

Provete	Tensão de Rotura [MPa]	Deformação Máxima	Módulo de Elasticidade [GPa]
60F40C1	799	0.0379	44
60F40C2	780	0.0371	44
60F40C3	723	0.0318	48
Média	767	0.0378	45
Variação Média	9.9 %	16.1 %	8.9 %

Tabela 7.4 - Resultados dos ensaios de flexão para a série 60F40C.

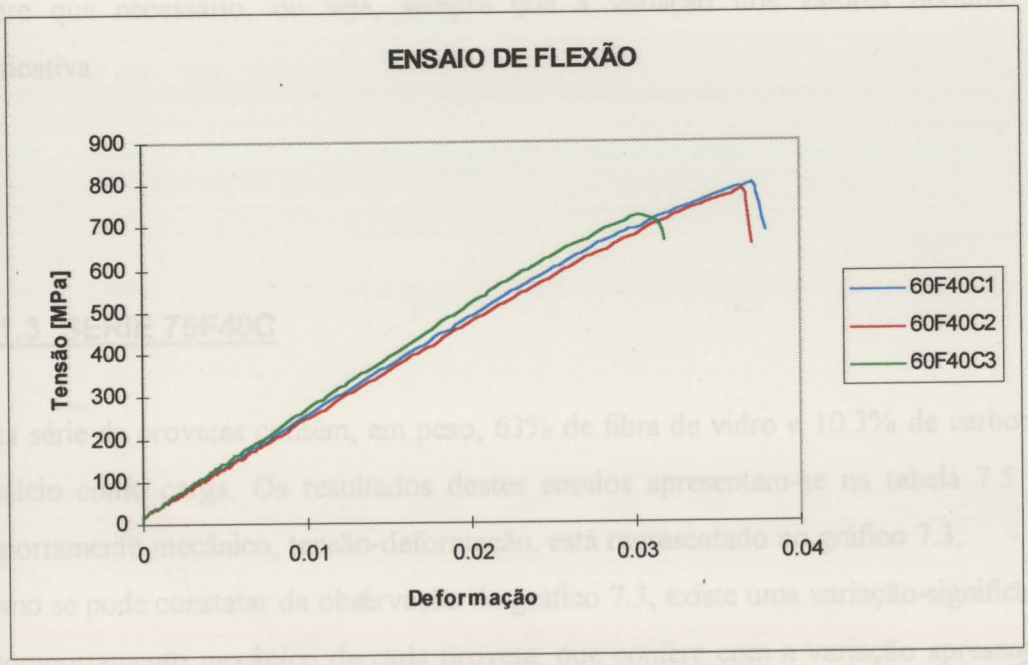


Gráfico 7.2 - Ensaio de flexão da série 60F40C

Como se pode constatar da observação da tabela 7.4 e do gráfico 7.2, a variação o valor da deformação máxima para o provete 60F40C3 é significativamente inferior ao

dos dois outros provetes, o que se traduz numa variação destes resultados significativa. Como tal, apenas deveriam ser considerados os provetes 60F40C1 e 60F40C2, a partir dos quais se obteriam os seguintes valores médios e correspondente variação:

Tensão de rotura:	790 MPa	Variação média: 2.7%
Deformação máxima:	0.0375	Variação média: 2.1%
Módulo de elasticidade:	44 GPa	Variação média: 0%

Aqui a variação média é calculada pela diferença entre os valores obtidos, divida pelo valor médio destes dois.

Neste caso a melhor solução seria efectuar novos ensaios, mas problemas de tempo para entrega deste trabalho, obrigou a que se utilizassem estes valores. Posteriormente, quando se referir a valores médios, serão os valores médios referentes aos resultados dos três provetes (tabela 7.4). Quando necessário referir a média de dois valores, será devidamente indicado. Esta situação também se verificará para as séries posteriores, sempre que necessário, ou seja, sempre que a variação dos valores obtidos seja significativa.

7.2.1.3 SÉRIE 75F40C

Esta série de provetes contém, em peso, 63% de fibra de vidro e 10.3% de carbonato de cálcio como carga. Os resultados destes ensaios apresentam-se na tabela 7.5 e o comportamento mecânico, tensão-deformação, está representado no gráfico 7.3.

Como se pode constatar da observação do gráfico 7.3, existe uma variação significativa do comportamento mecânico de cada provete, que confere com a variação apresentada na tabela 7.5. Desta tabela constata-se que o provete 75F40C1, apresenta a tensão de rotura e o módulo de elasticidade bastantes elevadas em relação aos outros dois ensaios desta série. Como tal, apenas deveriam ser considerados os provetes 75F40C2 e 75F40C3, a partir dos quais se obteriam os seguintes valores médios e correspondente variação:

Tensão de rotura: 891 MPa Variação média: 2.5%

Deformação máxima: 0.0324 Variação média: 8.6%

Módulo de elasticidade: 48 GPa Variação média: 6.3%

Provete	Tensão de Rotura [MPa]	Deformação Máxima	Módulo de Elasticidade [GPa]
75F40C1	1044	0.0323	56
75F40C2	902	0.0310	49
75F40C3	880	0.0338	46
Média	942	0.0324	50
Variação Média	17.4 %	8.6 %	20 %

Tabela 7.5 - Resultados dos ensaios de flexão para a série 75F40C.

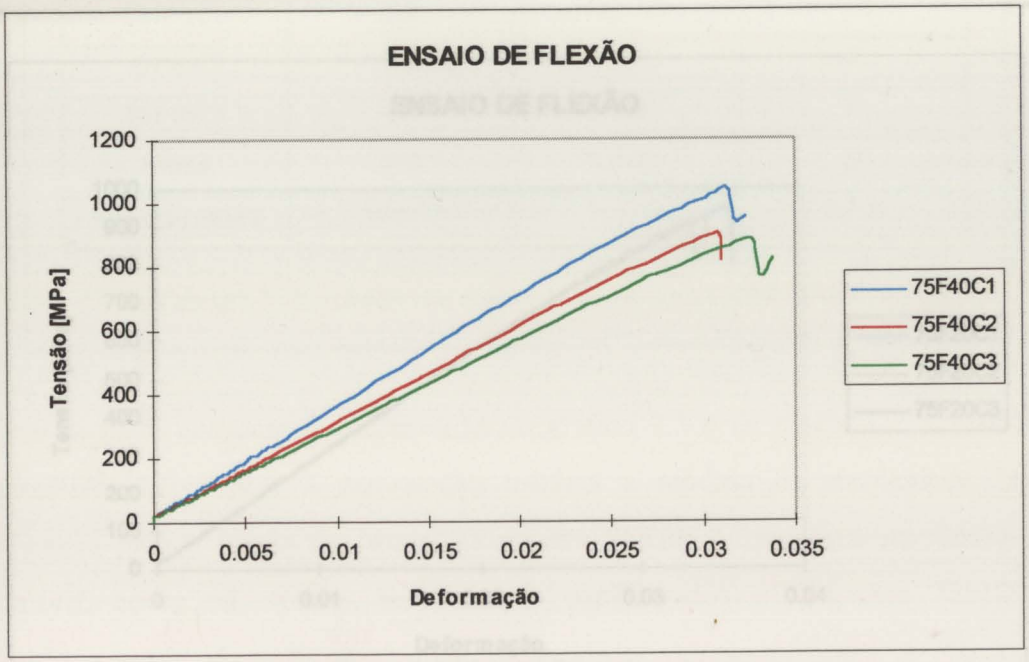


Gráfico 7.3 - Ensaio de flexão da série 75F40C

7.2.1.4 SÉRIE 75F20C

Esta série de provetes contém, em peso, 67.1% de fibra de vidro e 4.1% de carbonato de cálcio como carga. Os resultados destes ensaios apresentam-se na tabela 7.6 e o comportamento mecânico, tensão-deformação, está representado no gráfico 7.4.

Provete	Tensão de Rotura [MPa]	Deformação Máxima	Módulo de Elasticidade [GPa]
75F20C1	947	0.0356	45
75F20C2	918	0.0340	44
75F20C3	899	0.0334	43
Média	921	0.0343	44
Variação Média	5.2 %	4.7 %	4.5 %

Tabela 7.6 - Resultados dos ensaios de flexão para a série 75F20C.

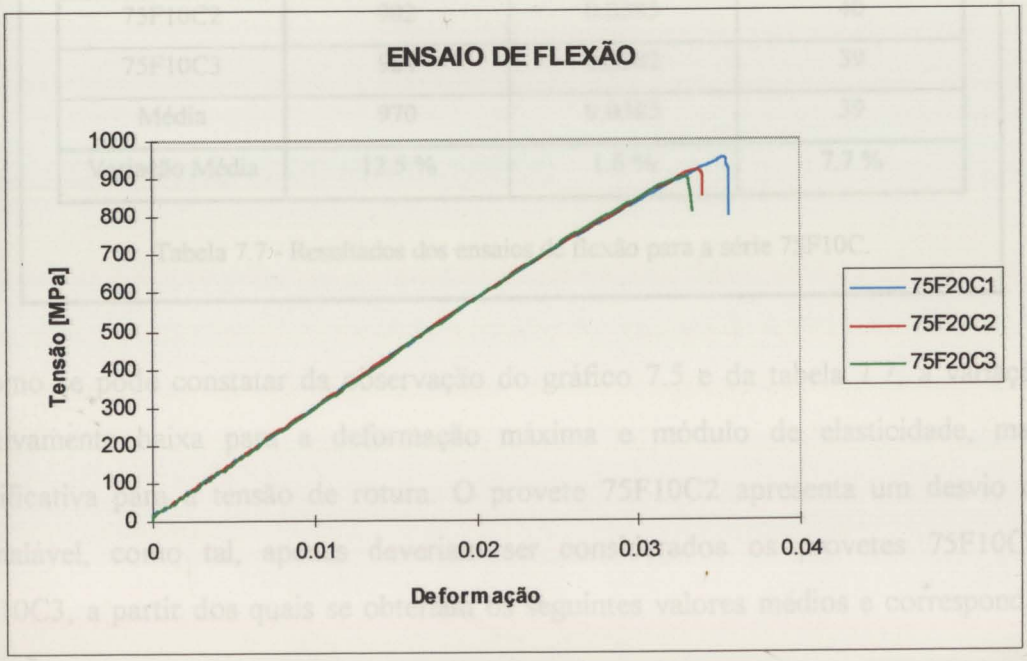


Gráfico 7.4 - Ensaio de flexão da série 75F20C

Como se pode constatar da observação do gráfico 7.4 e da tabela 7.6, a variação é baixa pelo que pode-se dizer que existe boa concordância dos resultados obtidos para esta série, como é visível no gráfico 7.4.

7.2.1.5 SÉRIE 75F10C

Esta série de provetes contém, em peso, 68.7% de fibra de vidro e 3.2% de carbonato de cálcio como carga. Os resultados destes ensaios apresentam-se na tabela 7.7 e o comportamento mecânico, tensão-deformação, está representado no gráfico 7.5.

Provete	Tensão de Rotura [MPa]	Deformação Máxima	Módulo de Elasticidade [GPa]
75F10C1	1023	0.0388	37
75F10C2	902	0.0385	40
75F10C3	984	0.0382	39
Média	970	0.0385	39
Variação Média	12.5 %	1.6 %	7.7 %

Tabela 7.7 - Resultados dos ensaios de flexão para a série 75F10C.

Como se pode constatar da observação do gráfico 7.5 e da tabela 7.7, a variação é relativamente baixa para a deformação máxima e módulo de elasticidade, mas é significativa para a tensão de rotura. O provete 75F10C2 apresenta um desvio mais assinalável, como tal, apenas deveriam ser considerados os provetes 75F10C1 e 75F10C3, a partir dos quais se obteriam os seguintes valores médios e correspondente variação:

Tensão de rotura:	1004 MPa	Variação: 3.9%
Deformação máxima:	0.0385	Variação: 1.6%
Módulo de elasticidade:	38 GPa	Variação: 5.3%

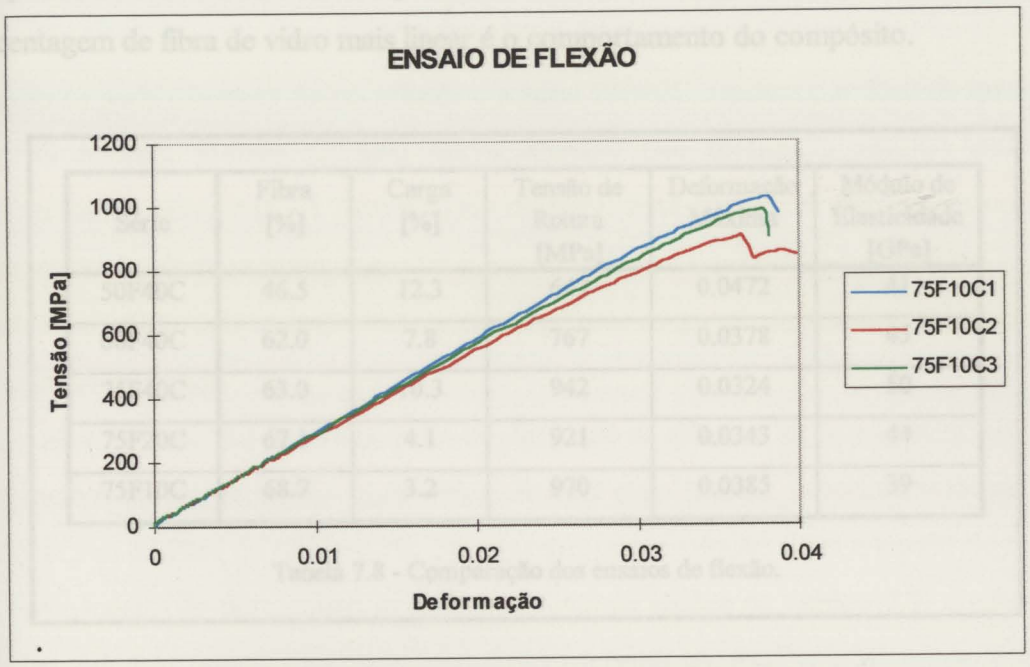


Gráfico 7.5 - Ensaio de flexão da série 75F10C

7.2.2 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Na tabela 7.8 apresentam-se os resultados médios, calculados para os três provetes de cada série, das características mecânicas obtidas dos ensaios de flexão para cada uma das séries e no gráfico 7.6 estão representados os seus comportamentos mecânicos, tensão-deformação. Para a representação gráfica (gráfico 7.6) foram escolhidos, de cada série, os comportamentos dos provetes que mais se aproximam dos valores médios da série respectiva. Na legenda do gráfico 7.6 é indicado qual o provete escolhido para a representação de cada série.

Como se pode constatar dos ensaios de flexão, os produtos obtidos pelo processo de pultrusão apresentam um comportamento praticamente linear até à rotura, só se verifica praticamente comportamento elástico e como tal o comportamento plástico não tem registo assinalável. Este facto deve-se ao comportamento das fibras ser totalmente linear elástico e só a matriz apresenta comportamento plástico. Como a percentagem de fibra-

de-vidro é bastante significativa, característica do processo de pultrusão, prevalece o comportamento desta. Tal facto, pode ser observado do gráfico 7.6, quanto maior a percentagem de fibra de vidro mais linear é o comportamento do compósito.

Série	Fibra [%]	Carga [%]	Tensão de Rotura [MPa]	Deformação Máxima	Módulo de Elasticidade [GPa]
50F40C	46.5	12.3	647	0.0472	41
60F40C	62.0	7.8	767	0.0378	45
75F40C	63.0	10.3	942	0.0324	50
75F20C	67.1	4.1	921	0.0343	44
75F10C	68.7	3.2	970	0.0385	39

Tabela 7.8 - Comparação dos ensaios de flexão.

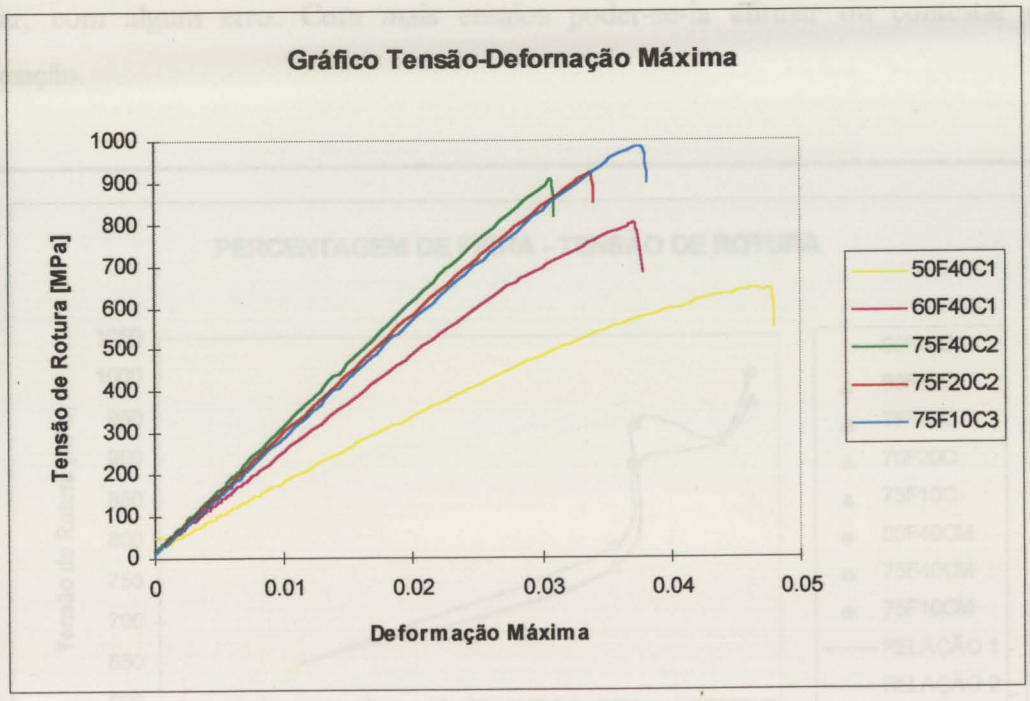


Gráfico 7.6 - Comparação dos ensaios de flexão

Os gráficos 7.7 a 7.9 representam a relação entre a percentagem de fibra e as propriedades mecânicas. Nestes gráficos a *Relação 1* e os pontos representados por triângulos (Δ), referem-se aos valores médios obtidos dos três provetes ensaiados, enquanto a *Relação 2* e os pontos representados por circulo (•) representam os valores

médios a partir dos dois provetes mais representativos, isto é, foi eliminado o ensaio do provete que tinha valores bastantes diferentes dos outros dois ensaios, para a mesma série.

Como se pode observar destas relações, a série 75F40C, encontra-se fora de qualquer possível relação, através de uma curva simples, que traduza a relação entre as características mecânicas e a percentagem de fibra. Este facto está relacionado com os fenómenos já referidos atrás, que são a irregularidade na percentagem de fibra e uma possível má mistura da resina, onde a percentagem de carga não estava bem misturada na formulação da resina.

Se a série 75F40C for ignorada, pode-se dizer que as relações serão exponenciais, mas para melhor afirmação seriam necessários efectuar mais ensaios, nomeadamente entre a percentagem de fibra de 46.5 a 62%. No entanto, para a relação entre a tensão de rotura e a percentagem de fibra, como se pode constatar da análise do gráfico 7.7, a relação é exponencial, mas pouco acentuada, que poderá mesmo ter tendência para uma relação linear, com algum erro. Com mais ensaios poder-se-ia afirmar ou contestar esta afirmação.

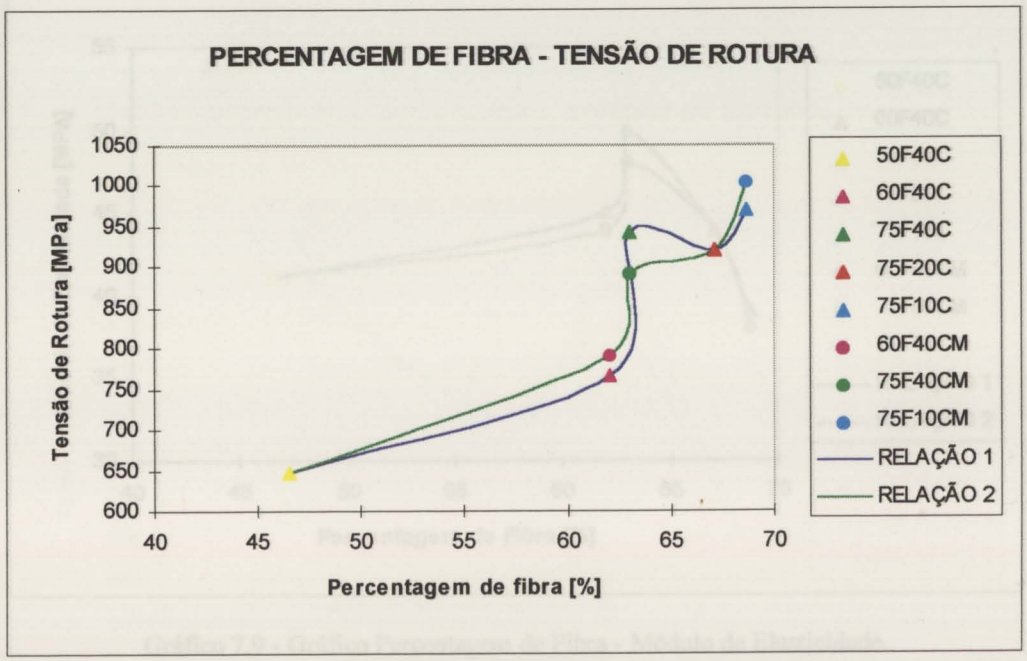


Gráfico 7.7 - Gráfico Percentagem de Fibra - Tensão de Rotura.

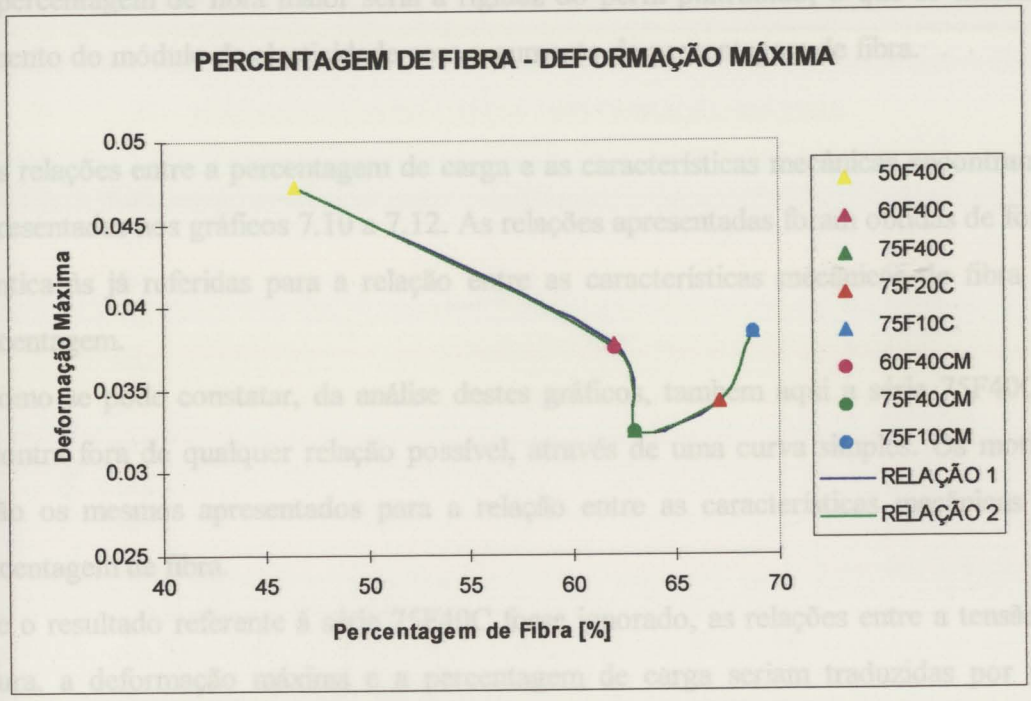


Gráfico 7.8 - Gráfico Percentagem de Fibra - Deformação Máxima.

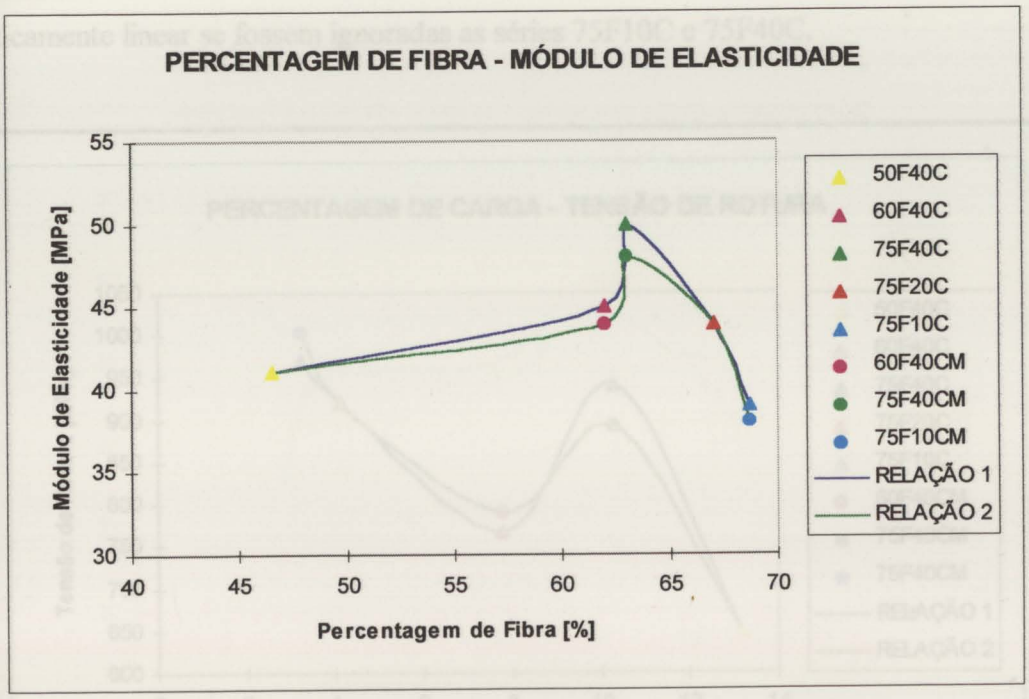


Gráfico 7.9 - Gráfico Percentagem de Fibra - Módulo de Elasticidade.

O gráfico 7.9 que mostra a relação entre o módulo de elasticidade e a percentagem de fibra, apresenta um comportamento estranho, pois seria de esperar que com o aumento

da percentagem de fibra maior seria a rigidez do perfil pultrudido, o que se traduz no aumento do módulo de elasticidade com o aumento da percentagem de fibra.

As relações entre a percentagem de carga e as características mecânicas encontram-se representadas nos gráficos 7.10 a 7.12. As relações apresentadas foram obtidas de forma idêntica às já referidas para a relação entre as características mecânicas de fibra e a percentagem.

Como se pode constatar, da análise destes gráficos, também aqui a série 75F40C se encontra fora de qualquer relação possível, através de uma curva simples. Os motivos serão os mesmos apresentados para a relação entre as características mecânicas e a percentagem de fibra.

Se o resultado referente à série 75F40C fosse ignorado, as relações entre a tensão de rotura, a deformação máxima e a percentagem de carga seriam traduzidas por uma relação praticamente linear, mas para se poder efectuar esta afirmação serão necessários mais ensaios e com mais séries com diferentes percentagens de fibra e de carga. A relação entre o modulo de elasticidade e a percentagem de carga também seria praticamente linear se fossem ignoradas as séries 75F10C e 75F40C.

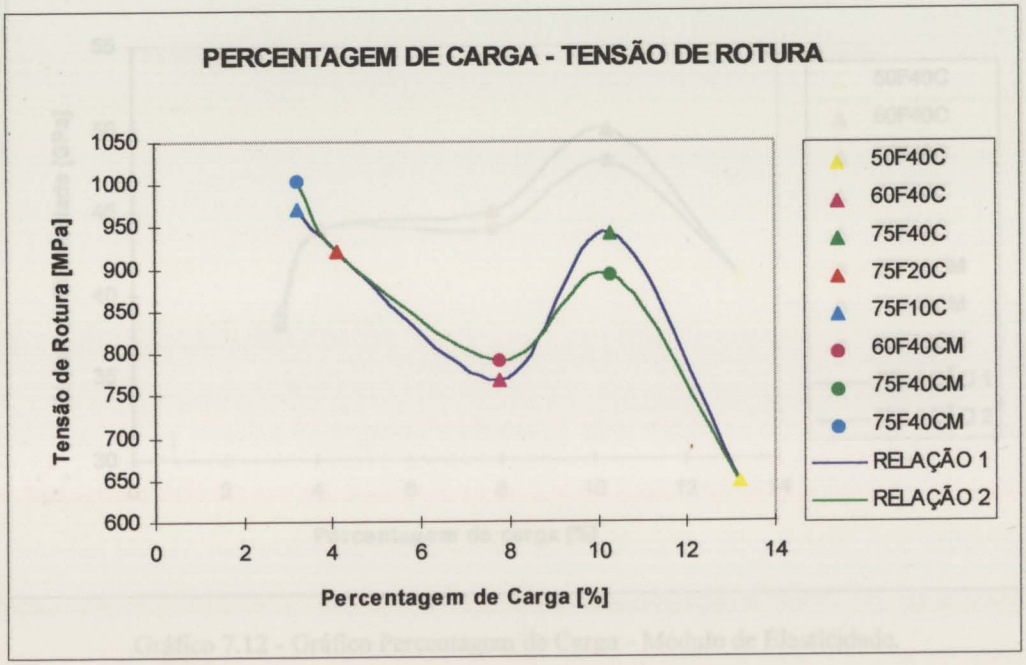


Gráfico 7.10 - Gráfico Percentagem de Carga - Tensão de Rotura.

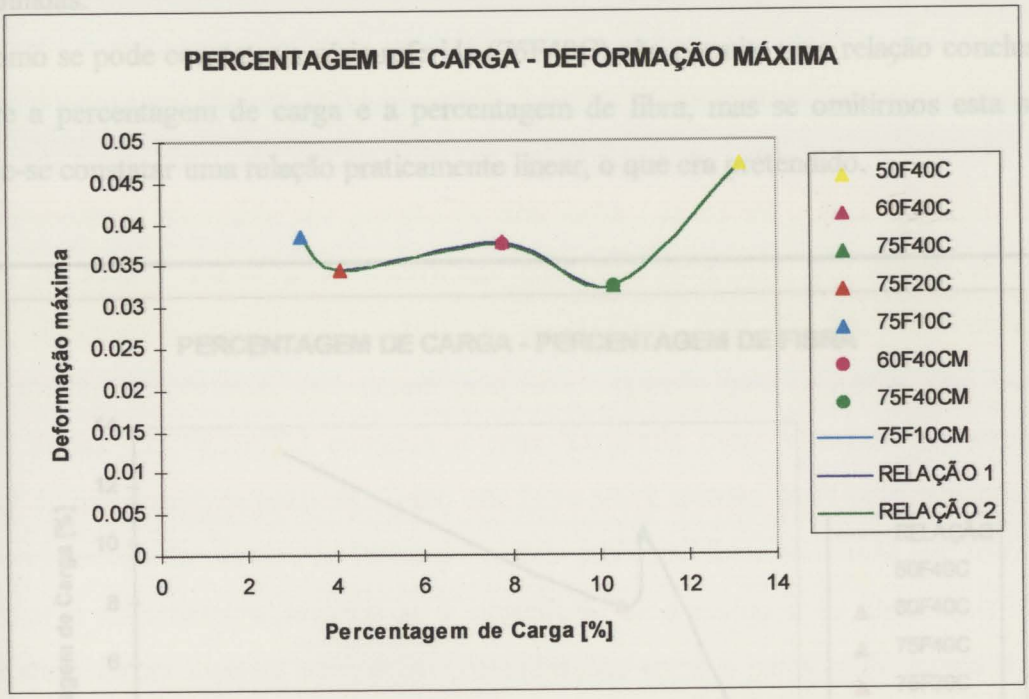


Gráfico 7.11 - Gráfico Percentagem de Carga - Deformação Máxima.

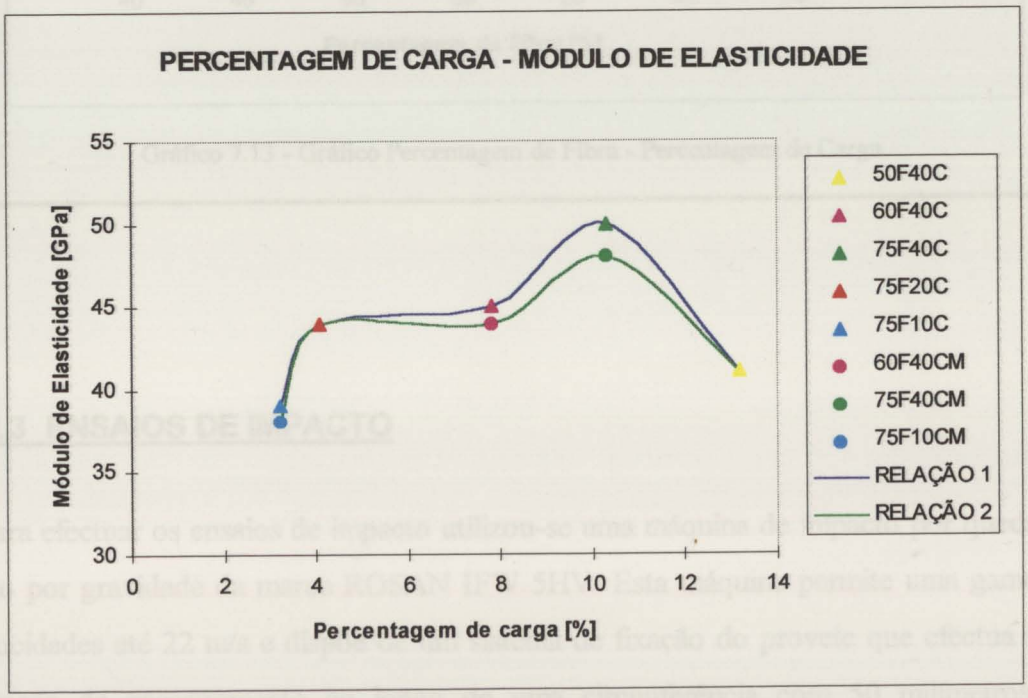


Gráfico 7.12 - Gráfico Percentagem de Carga - Módulo de Elasticidade.

O gráfico 7.13 mostra a relação entre a percentagem de fibra e a percentagem de carga escolhidas.

Como se pode constatar a série referida (75F40C) não permite uma relação conclusiva entre a percentagem de carga e a percentagem de fibra, mas se omitirmos esta série pode-se constatar uma relação praticamente linear, o que era pretendido.

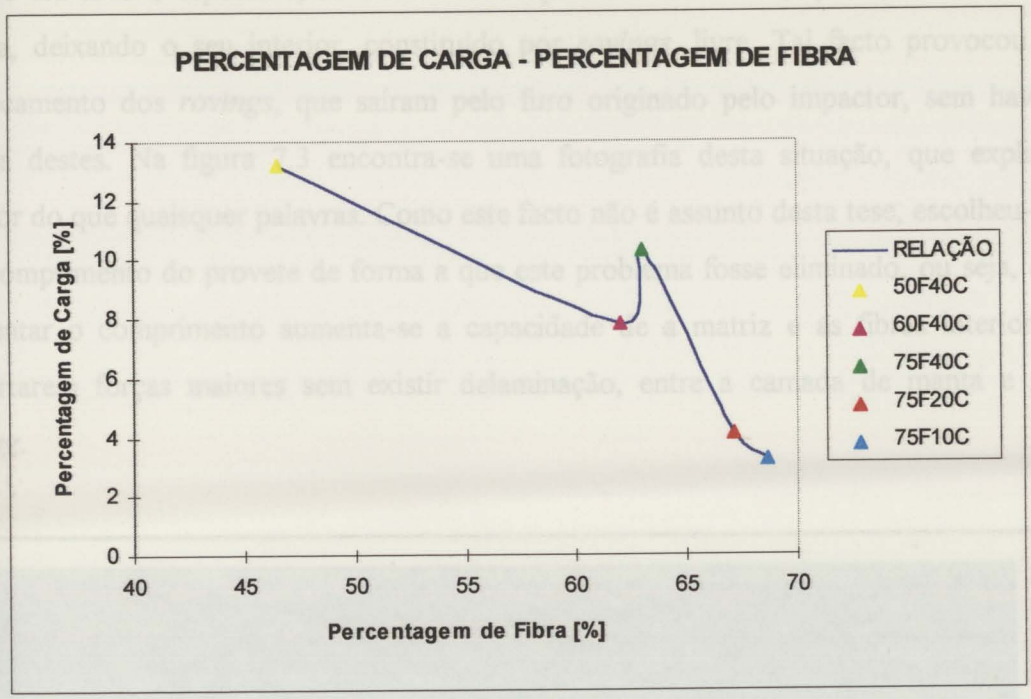


Gráfico 7.13 - Gráfico Percentagem de Fibra - Percentagem de Carga.

7.2.3 ENSAIOS DE IMPACTO

Para efectuar os ensaios de impacto utilizou-se uma máquina de impacto por queda de peso por gravidade da marca ROSAN IFW 5HV. Esta máquina permite uma gama de velocidades até 22 m/s e dispõe de um sistema de fixação do provete que efectua uma situação de encastramento ao longo de uma circunferência com 50 milímetros de diâmetro. O sistema consiste no aperto de dois anéis circulares com o diâmetro indicado, um deles é fixo à base da máquina e o outro está fixo a um braço de suporte que efectua o aperto contra o primeiro (situação de encastramento) através de força pneumática.

Para tal, o corte dos provetes não necessita de nenhuma geometria em especial, basta que tenha as dimensões suficientes para encastrar o provete, uma placa de 60x60 milímetros é suficiente. Assim, a própria barra de pultrusão, com 80 milímetros de largura é suficiente. Quanto ao comprimento bastaria 60 milímetros para que a fixação fosse adequada. Isto na prática não se verificou, uma vez que o sistema de encastramento é efectuado por pressão de dois anéis - como tal o encastramento não ocorre em toda a espessura, só ocorre nas superfícies exteriores, que apenas contém manta, deixando o seu interior, constituído por *rovings*, livre. Tal facto provocou o deslocamento dos *rovings*, que saíram pelo furo originado pelo impactor, sem haver rotura destes. Na figura 7.3 encontra-se uma fotografia desta situação, que explica melhor do que quaisquer palavras. Como este facto não é assunto desta tese, escolheu-se um comprimento do provete de forma a que este problema fosse eliminado, ou seja, ao aumentar o comprimento aumenta-se a capacidade de a matriz e as fibras interiores suportarem forças maiores sem existir delaminação, entre a camada de manta e de *roving*.

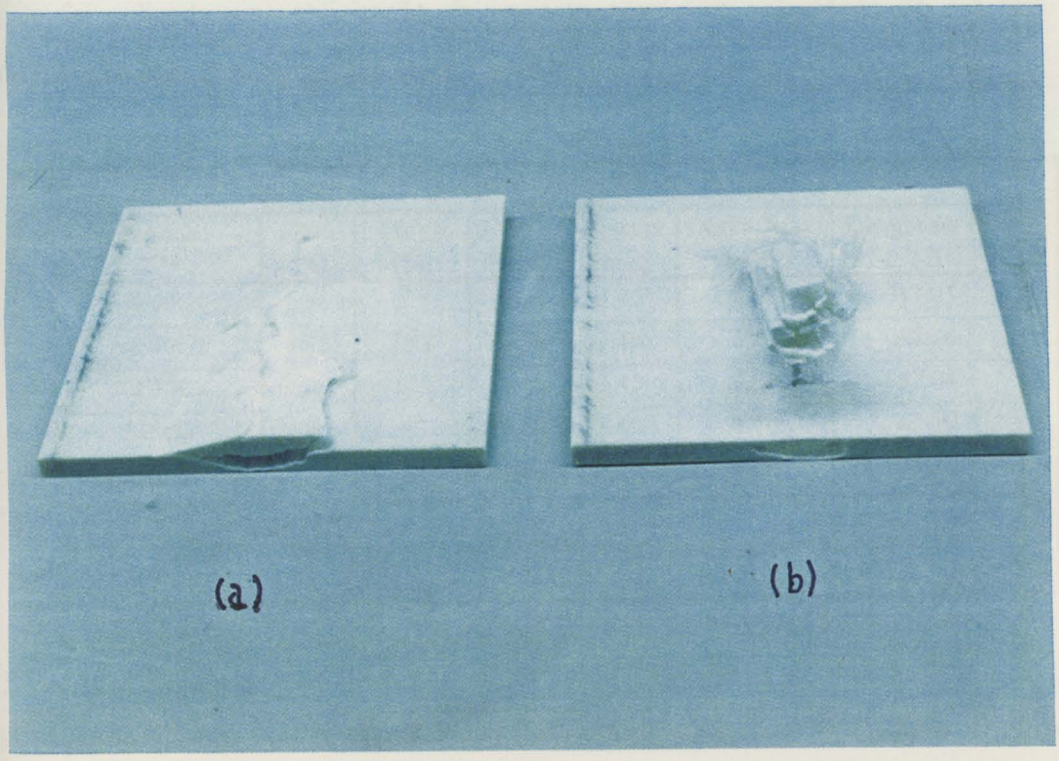


Figura 7.3 - Provetes sujeitos a impacto sem rotura dos *rovings*.

Para os ensaios de impacto utilizaram-se as mesmas cinco séries de provetes definidas para os ensaios de flexão. Para cada série foram aplicadas três situações de velocidade de impacto, uma a 3.5 m/s, outra a 3 m/s e por último 2.5 m/s, para uma massa do impactor de 7.756 Kg. A razão de não escolher velocidades superiores prende-se com o facto de aparecer a delaminação já referida, o que traria fenómenos indesejáveis para este estudo. Assim, as velocidades seleccionadas são um compromisso entre o comprimento do provete e velocidade.

Para cada uma destas situações foram ensaiados três provetes e os resultados obtidos são apresentados nos pontos seguintes.

7.2.3.1 SÉRIE 50F40C1-3

Na tabela 7.9 apresentam-se os resultados para os provetes 50F40C1 a 50F40C3, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.5 m/s. No gráfico 7.14 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
50F40C1	46.5	13.2	15.23	3.45	8.88	47.01
50F40C2			16.30	3.46	8.70	47.24
50F40C3			16.10	3.45	9.01	47.04
Média			15.88	3.45	8.86	47.10
Variação Média			6.7%	0.2%	3.5%	0.5%

Tabela 7.9 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 50F40C1-3.

Da análise da tabela 7.9 e do gráfico 7.14, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série. O facto de o ensaio não se iniciar no instante t=0 s, é devido ao sistema que detecta o inicio do ensaio (*"trigger"*) não estar bem afinado e como tal começa a registar os valores da força antes de se iniciar o ensaio. Este facto apenas tem importância para o registo do deslocamento, pois o registo é efectuado a partir do momento em que o *trigger* detecta a passagem do

impactor e como tal regista o ponto de deslocamento zero, quando o impactor ainda tem caminho a percorrer. Assim é registado um deslocamento superior ao realmente existente, daí o exagerado deslocamento do centro da placa. Estes valores foram mesmo assim considerados, mas saliente-se que a interpretação dos resultados onde esteja representado o deslocamento deve ser cuidada.

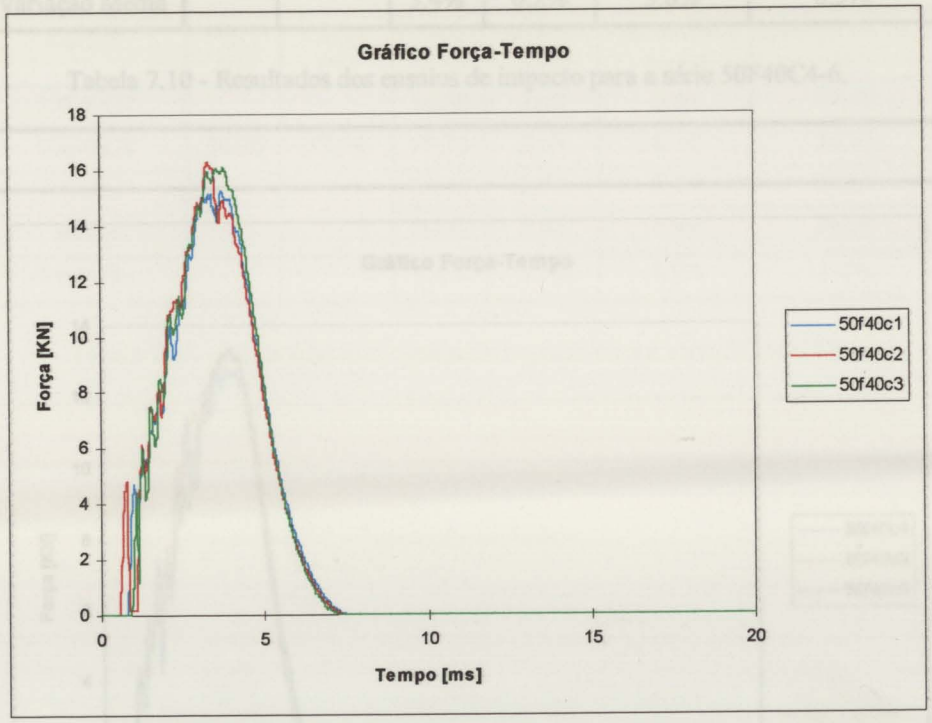


Gráfico 7.14 - Ensaio de impacto da série 50F40C1-3.

7.2.3.2 SÉRIE 50F40C4-6

Na tabela 7.10 apresentam-se os resultados para os provetes 50F40C4 a 50F40C6, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.0 m/s. No gráfico 7.15 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
50F40C4	46.50	13.20	12.90	2.97	7.71	35.00
50F40C5			13.35	2.97	7.66	34.85
50F40C6			13.34	2.98	7.94	35.01
Média			13.20	2.97	7.77	34.95
Variação Média			3.4%	0.2%	3.6%	0.5%

Tabela 7.10 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 50F40C4-6.

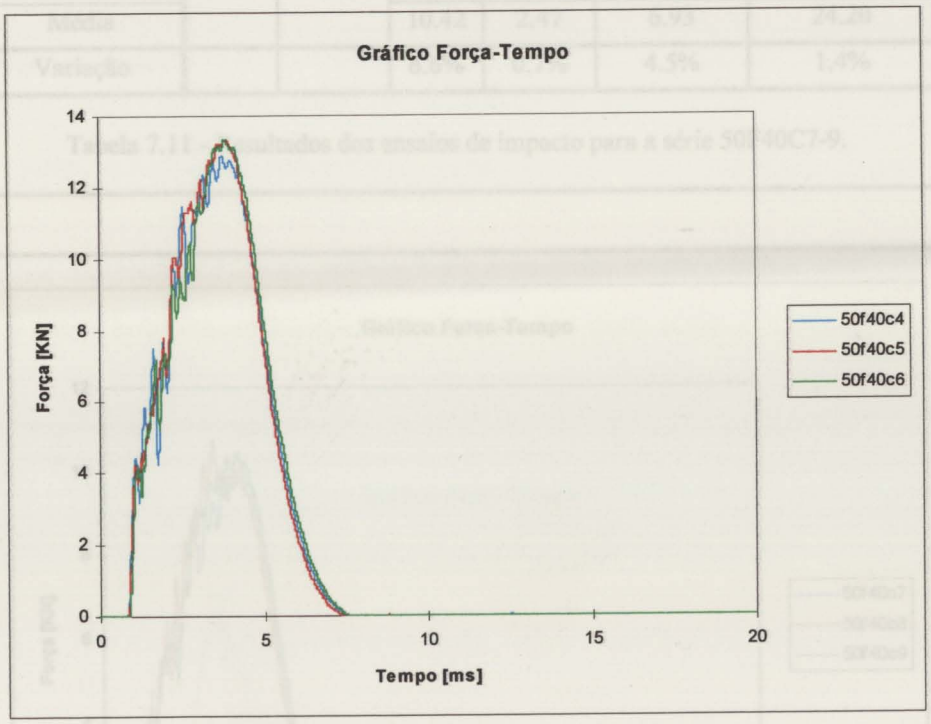


Gráfico 7.15 - Ensaio de impacto da série 50F40C4-6.

Da análise da tabela 7.10 e do gráfico 7.15, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

7.2.3.3 SÉRIE 50F40C7-9

Na tabela 7.11 apresentam-se os resultados para os provetes 50F40C7 a 50F40C9, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 2.5 m/s. No gráfico 7.16 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
50F40C7	46.50	13.20	10.06	2.48	7.09	24.40
50F40C8			10.75	2.47	6.78	24.13
50F40C9			10.45	2.46	6.94	24.06
Média			10.42	2.47	6.93	24.20
Variação			6.6%	0.7%	4.5%	1.4%

Tabela 7.11 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 50F40C7-9.

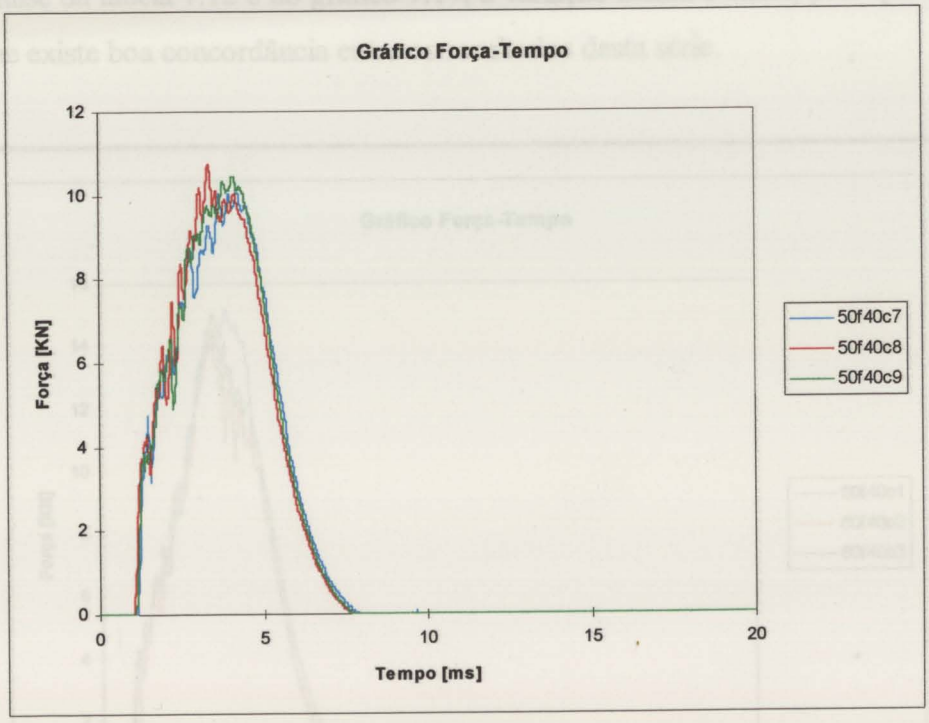


Gráfico 7.16 - Ensaio de impacto da série 50F40C7-9.

Da análise da tabela 7.11 e do gráfico 7.16, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

7.2.3.4 SÉRIE 60F40C1-3

Na tabela 7.12 apresentam-se os resultados para os provetes 60F40C1 a 60F40C3, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.5 m/s. No gráfico 7.17 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
60F40C1	62.00	7.80	15.16	3.46	9.38	47.27
60F40C2			14.50	3.45	9.64	47.04
60F40C3			15.02	3.45	9.43	47.03
Média			14.89	3.45	9.48	47.11
Variação Média			4.5%	0.3%	2.8%	0.5%

Tabela 7.12 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 60F40C1-3.

Da análise da tabela 7.12 e do gráfico 7.17, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

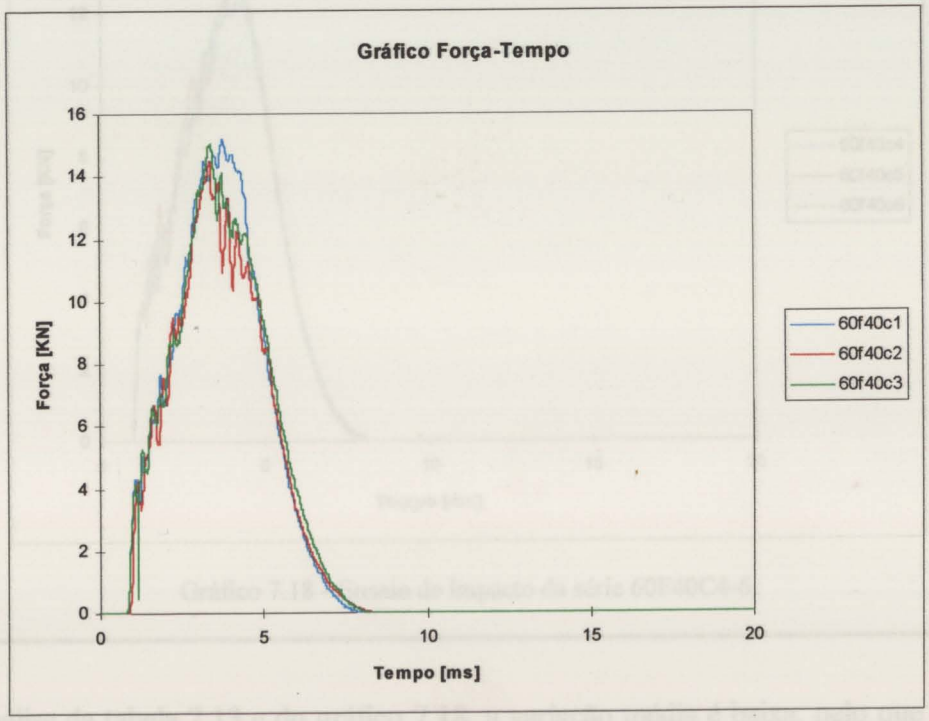


Gráfico 7.17 - Ensaio de impacto da série 60F40C1-3.

7.2.3.5 SÉRIE 60F40C4-6

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
60F40C4	62.00	7.80	12.34	2.98	8.43	35.03
60F40C5			12.72	2.98	8.44	35.03
60F40C6			12.97	2.97	8.52	34.89
Média			12.68	2.97	8.46	34.99
Variação Média			4.9%	0.2%	1.0%	0.4%

Tabela 7.13 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 60F40C4-6.

Na tabela 7.13 apresentam-se os resultados para os provetes 60F40C4 a 60F40C6, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.0 m/s. No gráfico 7.18 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

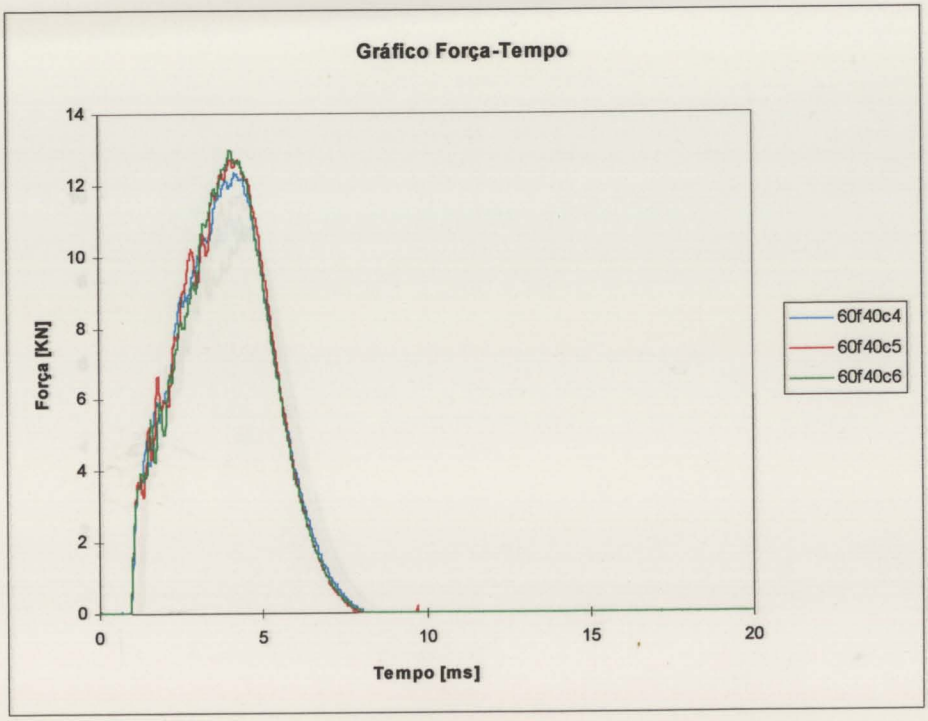


Gráfico 7.18 - Ensaio de impacto da série 60F40C4-6.

Da análise da tabela 7.13 e do gráfico 7.18, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

7.2.3.6 SÉRIE 60F40C7-9

Na tabela 7.14 apresentam-se os resultados para os provetes 60F40C7 a 60F40C9, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 2.5 m/s. No gráfico 7.19 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
60F40C7	62.00	7.80	9.56	2.48	7.51	24.43
60F40C8			10.05	2.48	7.23	24.33
60F40C9			9.23	2.48	7.58	24.34
Média			9.61	2.48	7.44	24.37
Variação Média			8.6%	0.2%	4.7%	0.4%

Tabela 7.14 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 60F40C7-9.

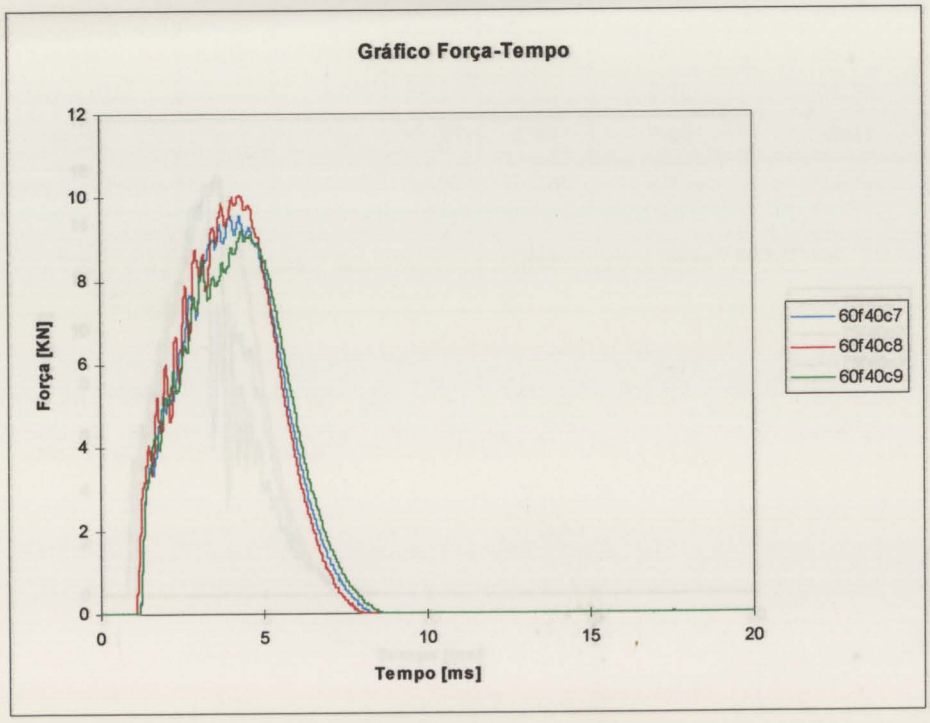


Gráfico 7.19 - Ensaio de impacto da série 60F40C7-9.

Da análise da tabela 7.14 e do gráfico 7.19, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

7.2.3.7 SÉRIE 75F40C1-3

Na tabela 7.15 apresentam-se os resultados para os provetes 75F40C1 a 75F40C3, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.5 m/s. No gráfico 7.20 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
75F40C1	63.00	10.30	15.40	3.46	8.51	47.21
75F40C2			15.87	3.46	8.60	47.23
75F40C3			15.87	3.46	8.52	47.23
Média			15.71	3.46	8.54	47.22
Variação Média			3.0%	0.0%	1.0%	0.1%

Tabela 7.15 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 75F40C1-3.

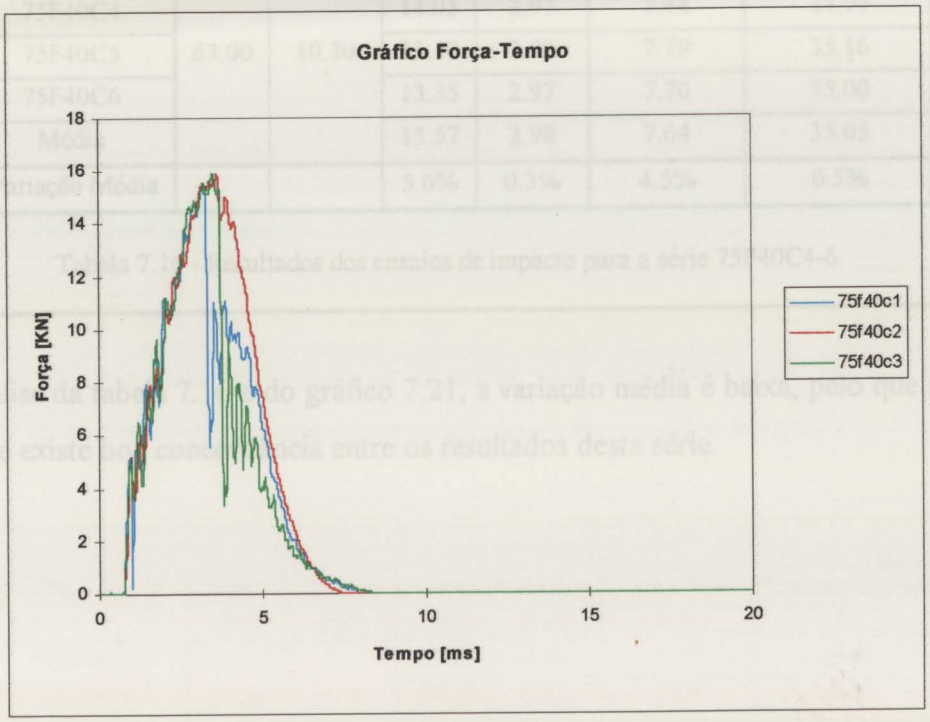


Gráfico 7.20 - Ensaio de impacto da série 75F40C1-3.

Da análise da tabela 7.15 e do gráfico 7.20, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série, apesar da

irregularidade do comportamento dos provetes 75F40C1 e 75F40C3. este fenómeno deve-se a uma diminuição da resistência dos provetes, que pode ser devida ao inicio do processo de delaminação referido anteriormente.

7.2.3.8 SÉRIE 75F40C4-6

Na tabela 7.16 apresentam-se os resultados para os provetes 75F40C4 a 75F40C6, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.0 m/s. No gráfico 7.21 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
75F40C4	63.00	10.30	14.05	2.97	7.44	34.99
75F40C5			13.30	2.98	7.79	35.16
75F40C6			13.35	2.97	7.70	35.00
Média			13.57	2.98	7.64	35.05
Variação Média			5.6%	0.3%	4.5%	0.5%

Tabela 7.16 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 75F40C4-6.

Da análise da tabela 7.16 e do gráfico 7.21, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

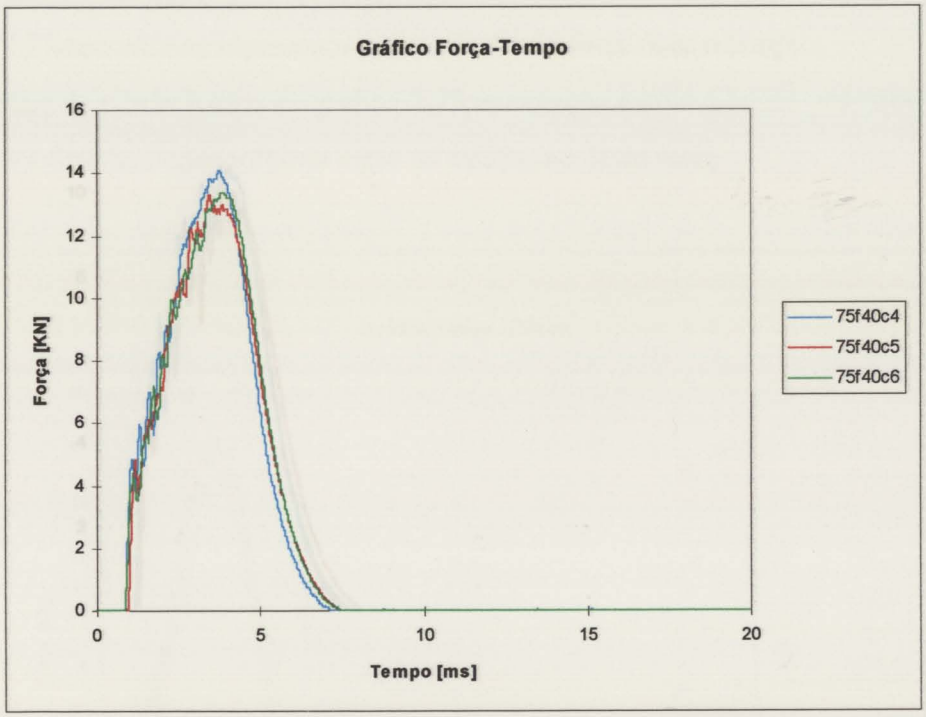


Gráfico 7.21 - Ensaio de impacto da série 75F40C4-6.

7.2.3.9 SÉRIE 75F40C7-9

Na tabela 7.17 apresentam-se os resultados para os provetes 75F40C7 a 75F40C9, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 2.5 m/s. No gráfico 7.22 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
75F40C7	63.00	10.30	10.67	2.49	6.78	24.48
75F40C8			10.26	2.48	7.21	24.42
75F40C9			10.23	2.47	6.87	24.22
Média			10.39	2.48	6.95	24.37
Variação Média			4.3%	0.5%	6.3%	1.1%

Tabela 7.17 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 75F40C7-9.

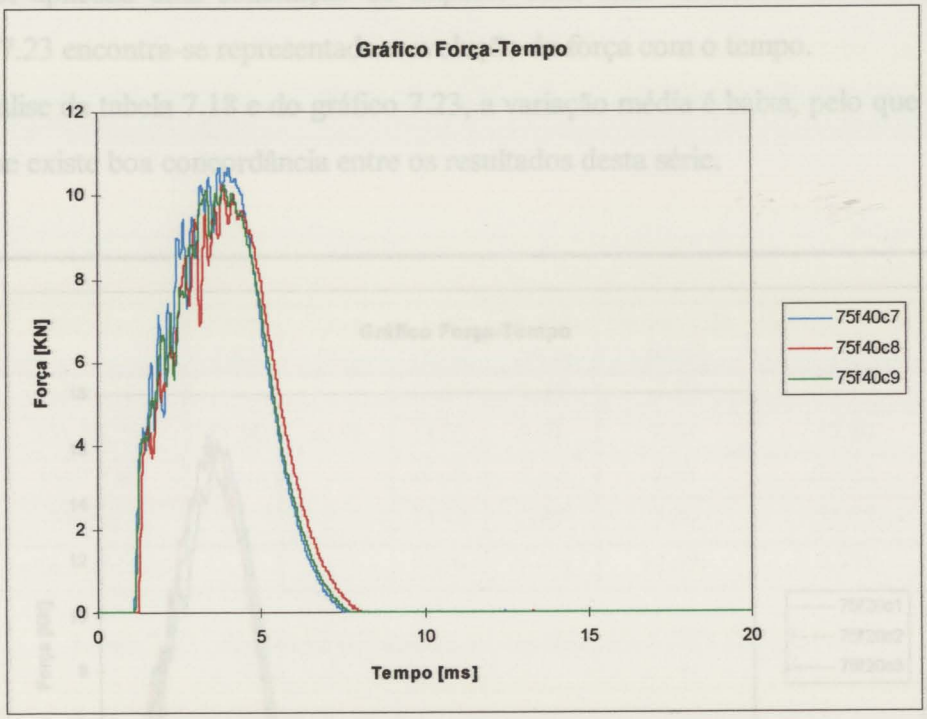


Gráfico 7.22 - Ensaio de impacto da série 75F40C7-9.

Da análise da tabela 7.17 e do gráfico 7.22, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

7.2.3.10 SÉRIE 75F20C1-3

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
75F20C1	67.10	4.10	16.51	3.43	8.83	46.56
75F20C2			16.14	3.42	8.67	46.31
75F20C3			15.44	3.43	9.17	46.33
Média			16.03	3.43	8.89	46.40
Variação Média			6.7%	0.3%	5.6%	0.5%

Tabela 7.18 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 75F20C1-3.

Na tabela 7.18 apresentam-se os resultados para os provetes 75F20C1 a 75F20C3, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.5 m/s. No gráfico 7.23 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Da análise da tabela 7.18 e do gráfico 7.23, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

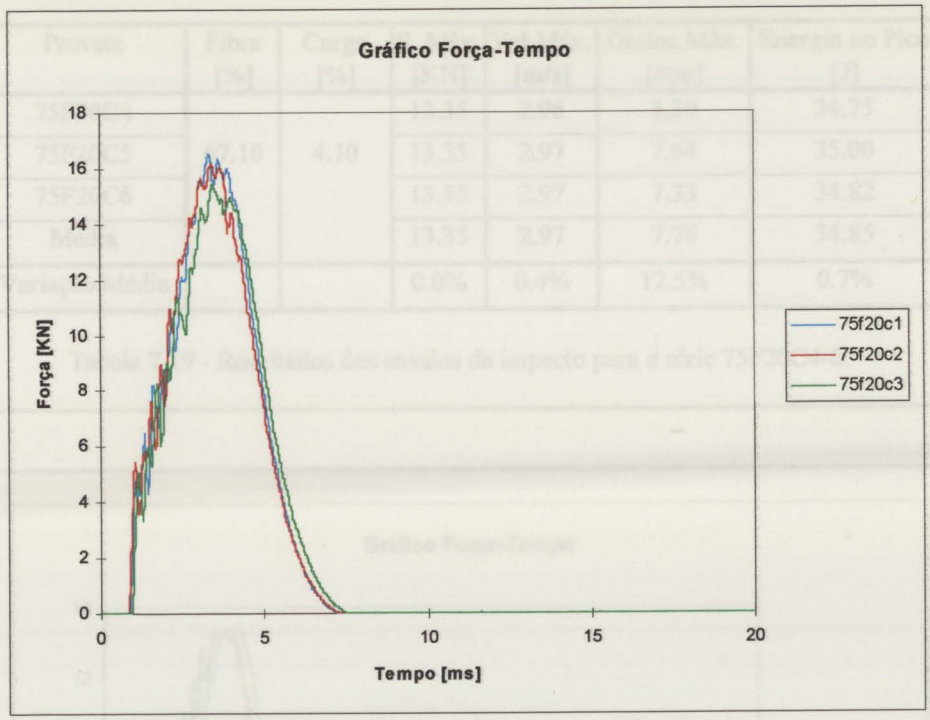


Gráfico 7.23 - Ensaio de impacto da série 75F20C1-3.

7.2.3.11 SÉRIE 75F20C4-6

Na tabela 7.19 apresentam-se os resultados para os provetes 75F20C4 a 75F20C6, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.0 m/s. No gráfico 7.24 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Da análise da tabela 7.15 e do gráfico 7.20, a variação média é em geral baixa, excepto para o deslocamento máximo, que apresenta uma variação média significativa. Este facto está relacionado com o atraso que se verificou no sistema de medida do deslocamento,

isto é, da análise do gráfico 7.20 verifica-se que o ensaio referente ao provete 75F20C4 tem inicio de registo da força com atraso em relação aos outros dois ensaios, o que se traduz na medida do deslocamento superior ao realmente existente, como já referido anteriormente. Assim, pode-se dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
75F20C4	67.10	4.10	13.35	2.96	8.30	34.75
75F20C5			13.35	2.97	7.64	35.00
75F20C6			13.35	2.97	7.33	34.82
Média			13.35	2.97	7.76	34.85
Variação Média			0.0%	0.4%	12.5%	0.7%

Tabela 7.19 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 75F20C4-6.

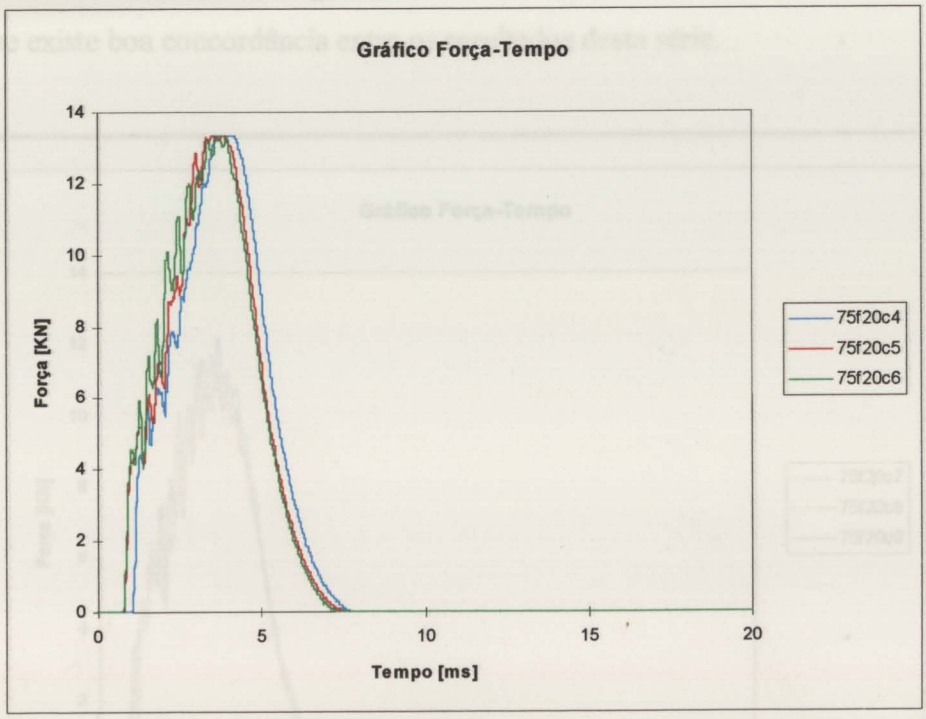


Gráfico 7.24 - Ensaio de impacto da série 75F20C4-6.

7.2.3.12 SÉRIE 75F20C7-9

Na tabela 7.20 apresentam-se os resultados para os provetes 75F20C7 a 75F20C9, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 2.5 m/s. No gráfico 7.25 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
75F20C7	67.10	4.10	12.17	2.47	6.40	24.20
75F20C8			11.42	2.48	6.21	24.27
75F20C9			11.69	2.47	6.22	24.28
Média			11.76	2.47	6.27	24.25
Variação Média			6.4%	0.2%	3.0%	0.3%

Tabela 7.20 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 75F20C7-9.

Da análise da tabela 7.20 e do gráfico 7.25, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

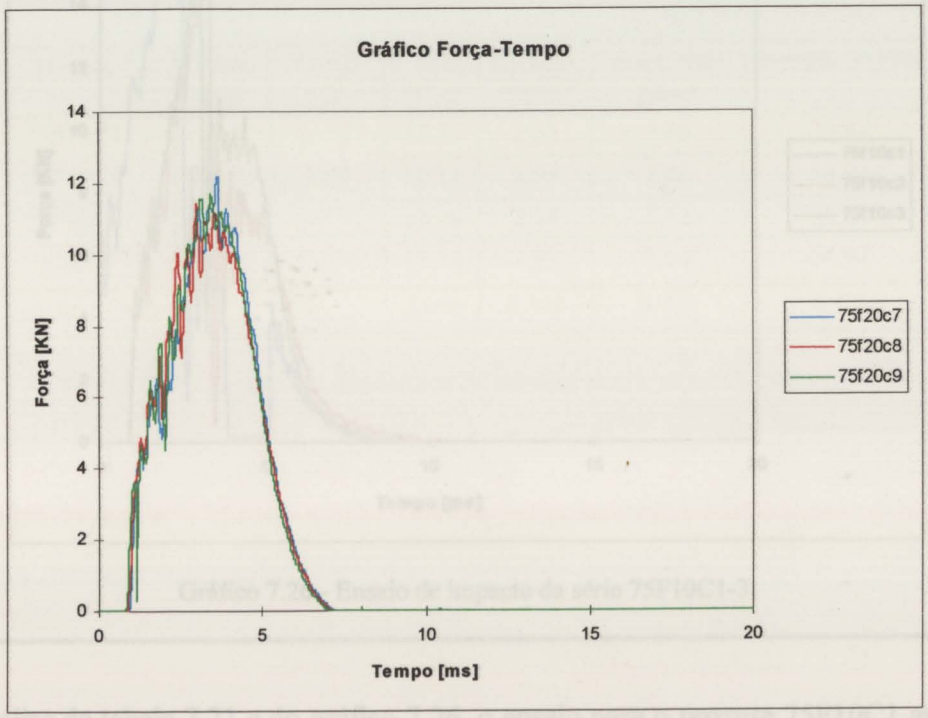


Gráfico 7.25 - Ensaio de impacto da série 75F20C7-9.

7.2.3.13 SÉRIE 75F10C1-3

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
75F10C1	68.70	3.20	15.31	3.42	4.84	46.02
75F10C2			14.81	3.42	9.03	46.28
75F10C3			15.12	3.43	8.89	46.50
Média			15.08	3.42	7.59	46.27
Variação Média			3.3%	0.5%	55.3%	1.0%

Tabela 7.21 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 75F10C1-3.

Na tabela 7.21 apresentam-se os resultados para os provetes 75F10C1 a 75F10C3, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.5 m/s. No gráfico 7.26 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

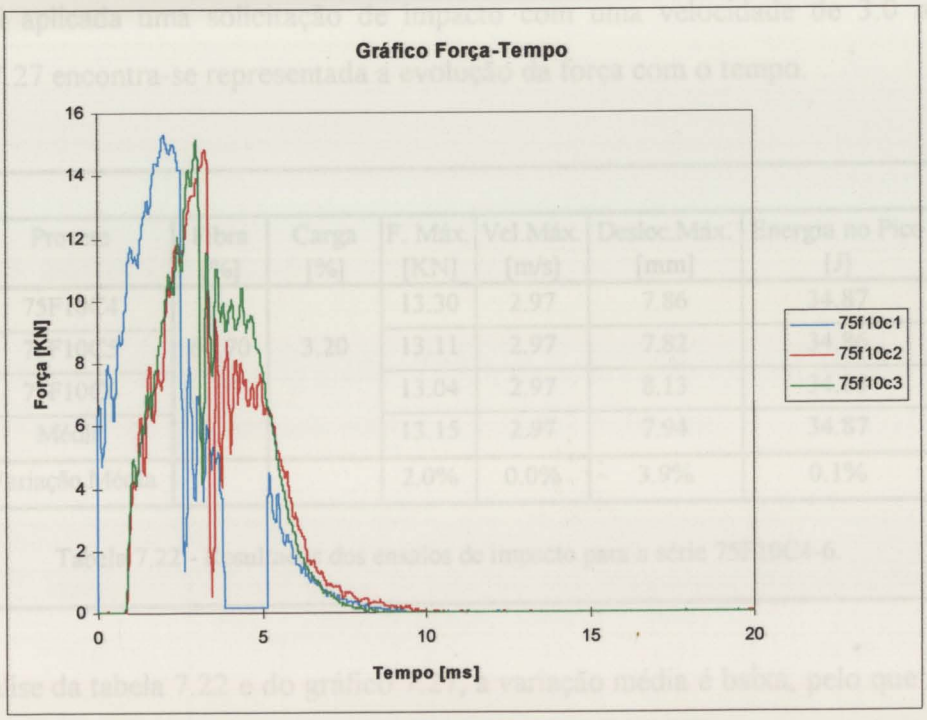


Gráfico 7.26 - Ensaio de impacto da série 75F10C1-3.

Da análise da tabela 7.21 e do gráfico 7.26, o ensaio para o provete 75F10C1 apresenta uma força de cerca de 6.5 KN no inicio do ensaio, o que leva a concluir que também

aqui houve problemas com o *trigger* da máquina, pois só começou a detectar o deslocamento depois do impactor ter entrado em contacto com o provete.

Os outros dois provetes não apresentam este problema, mas apresentam comportamento bastante irregular a partir dos 4 ms. Este facto deve-se à possível existência de delaminação entre as camadas de manta e de *roving*, mas não é o caso apresentado na figura 7.3, pois não é visível tal dano.

Os ensaios referentes a esta série deveriam ser repetidos, mas até à conclusão deste trabalho não houve disponibilidade da máquina, pelo que serão utilizados estes valores.

7.2.3.14 SÉRIE 75F10C4-6

Na tabela 7.22 apresentam-se os resultados para os provetes 75F10C4 a 75F10C6, aos quais foi aplicada uma solicitação de impacto com uma velocidade de 3.0 m/s. No gráfico 7.27 encontra-se representada a evolução da força com o tempo.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
75F10C4	68.70	3.20	13.30	2.97	7.86	34.87
75F10C5			13.11	2.97	7.82	34.86
75F10C6			13.04	2.97	8.13	34.88
Média			13.15	2.97	7.94	34.87
Variação Média			2.0%	0.0%	3.9%	0.1%

Tabela 7.22 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 75F10C4-6.

Da análise da tabela 7.22 e do gráfico 7.27, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

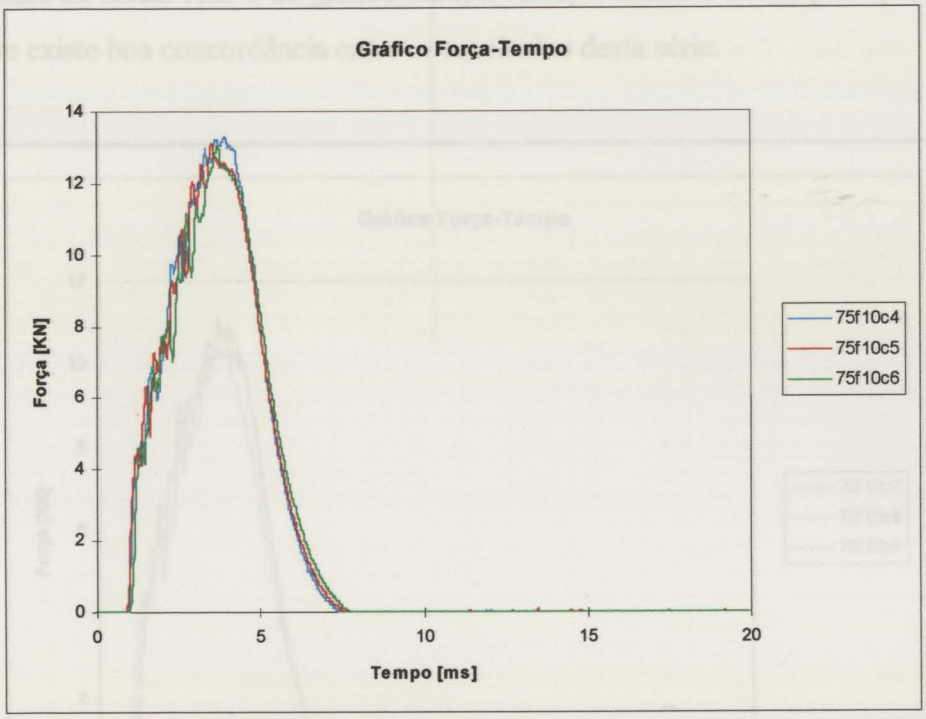


Gráfico 7.27 - Ensaio de impacto da série 75F10C4-6.

7.2.3.15 SÉRIE 75F10C7-9

Da análise da tabela 7.23 e do gráfico 7.28, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

Provete	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	Vel.Máx. [m/s]	Desloc.Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
75F10C7	68.70	3.20	10.44	2.48	6.51	24.37
75F10C8			10.82	2.48	6.91	24.32
75F10C9			11.10	2.47	6.78	24.23
Média			10.79	2.48	6.73	24.31
Variação			6.2%	0.3%	6.0%	0.6%

Tabela 7.23 - Resultados dos ensaios de impacto para a série 75F10C7-9.

Da análise da tabela 7.23 e do gráfico 7.28, a variação média é baixa, pelo que se pode dizer que existe boa concordância entre os resultados desta série.

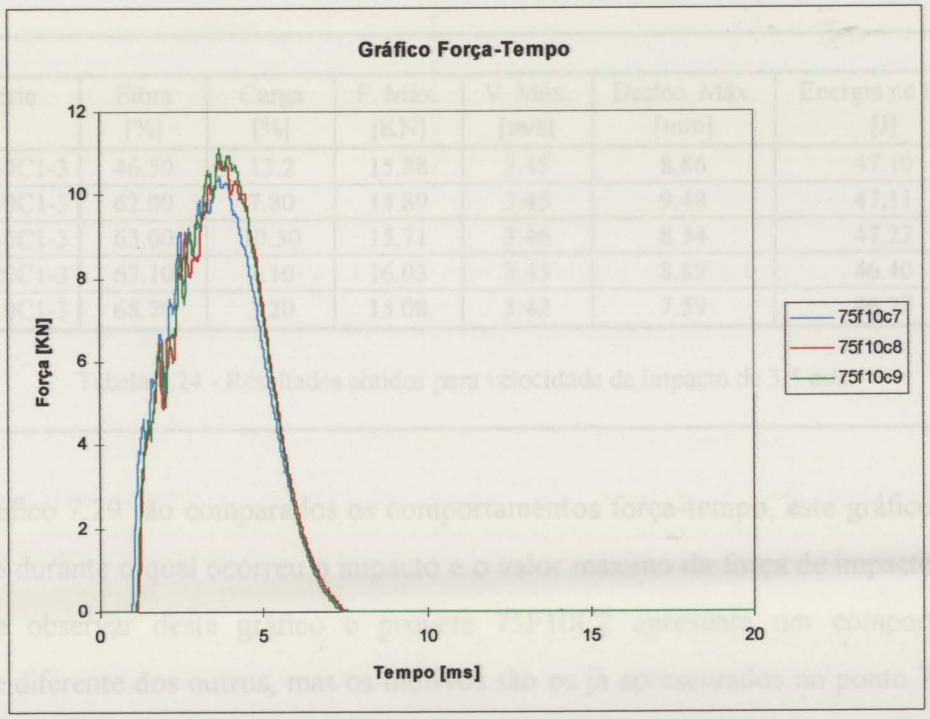


Gráfico 7.28 - Ensaio de impacto da série 75F10C7-9.

7.2.4 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Os resultados das cinco séries serão comparados para cada uma das velocidades de impacto ensaiadas, ou seja, para a velocidade de impacto de 3.5, 3.0 e 2.5 m/s.

7.2.4.1 VELOCIDADE DE IMPACTO DE 3.5 M/S.

Na tabela 7.24 são mostrados os resultados médios obtidos para a velocidade de 3.5 m/s das cinco séries de provetes. Nos gráficos 7.29 a 7.35 são comparados os

comportamentos ao impacto das mesmas séries. Para representar o comportamento ao impacto foi escolhido o provete que apresentava o comportamento mais próximo dos valores médios de cada série.

Série	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	V. Máx. [m/s]	Desloc. Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
50F40C1-3	46.50	13.2	15.88	3.45	8.86	47.10
60F40C1-3	62.00	7.80	14.89	3.45	9.48	47.11
75F40C1-3	63.00	10.30	15.71	3.46	8.54	47.22
75F20C1-3	67.10	4.10	16.03	3.43	8.89	46.40
75F10C1-3	68.70	3.20	15.08	3.42	7.59	46.27

Tabela 7.24 - Resultados obtidos para velocidade de impacto de 3.5 m/s.

No gráfico 7.29 são comparados os comportamentos força-tempo, este gráfico mostra o tempo durante o qual ocorreu o impacto e o valor máximo da força de impacto. Como se pode observar deste gráfico o provete 75F10C2 apresenta um comportamento bastante diferente dos outros, mas os motivos são os já apresentados no ponto 7.2.3.13. Os restantes resultados apresentam comportamentos bastantes idênticos.

No gráfico 7.30 são comparados os comportamentos velocidade-tempo, este gráfico mostra a evolução da velocidade de impacto com o tempo. Saliente-se neste gráfico a diminuição da velocidade até o valor de zero, que corresponde à força máxima, e depois atinge valores negativos. Isto deve-se ao "recoxete" do impactor, que é no sentido contrário ao de impacto. A velocidade em cada instante é calculada pela integração da aceleração ao longo do tempo. A aceleração é calculada pela força dividida pela massa do impactor. A integração é efectuada utilizando a regra trapezoidal, como se indica [1]:

$$v_i = v_{i-1} + t\left[g - (f_i - f_{i-1}) / (2m)\right]$$

onde

v_i é a velocidade no instante i,

t é o período de tempo,

f_i é a força no instante i,

g é a aceleração gravítica e

m é a massa do impactor.

No gráfico 7.31 são comparados os comportamentos deslocamento transversal-tempo, este gráfico mostra a evolução do deslocamento no centro da placa (ponto de impacto) com o tempo. O deslocamento negativo neste gráfico é devido ao movimento de "recoxete" do impactor (movimento ascendente). Os provetes 60F40C3 e 75F40C2 apresentam comportamentos significativamente diferentes dos restantes, sendo este último pelos motivos já apresentados. Este deslocamento é calculado a partir da velocidade calculada em cada instante, como se indica [1]:

$$d_i = d_{i-1} + tv_{i-1}$$

onde d_i é o deslocamento no instante i e os restantes parâmetros são os já referidos atrás.

No gráfico 7.32 são comparados os comportamentos energia-tempo. . Como se pode observar deste gráfico o provete 75F10C2 apresenta um comportamento bastante diferente dos outros, mas os motivos são os já apresentados no ponto 7.2.3.13. Os restantes resultados apresentam comportamentos bastantes idênticos.

Este gráfico mostra a absorção da energia, pelo provete, ao longo do tempo, que é calculada por integração da força ao longo do deslocamento, como se indica [1]:

$$e_i = e_{i-1} + (d_i - d_{i-1})(f_i - f_{i-1})/2$$

onde e_i é a energia absorvida no instante i.

No gráfico 7.33 são comparados os comportamentos força-deslocamento transversal, este gráfico mostra a relação entre a força de impacto e o deslocamento transversal do ponto de impacto. Também aqui o provete 75F40C2, apresenta um comportamento bastante diferentes dos restantes, apresentando os outros comportamentos bastante próximos.

No gráfico 7.34 são comparados os comportamentos velocidade-deslocamento transversal, este gráfico mostra a evolução do impactor e o deslocamento transversal do ponto de impacto. Também aqui o provete 75F40C2, apresenta um comportamento bastante diferentes dos restantes, apresentando os outros comportamentos bastante próximos.

No gráfico 7.35 são comparados os comportamentos energia-deslocamento transversal, este gráfico mostra a relação da absorção de energia e o deslocamento transversal do ponto de impacto. Os provetes 60F40C3 e 75F40C2 apresentam comportamentos significativamente diferentes dos restantes, sendo este último pelos motivos já apresentados

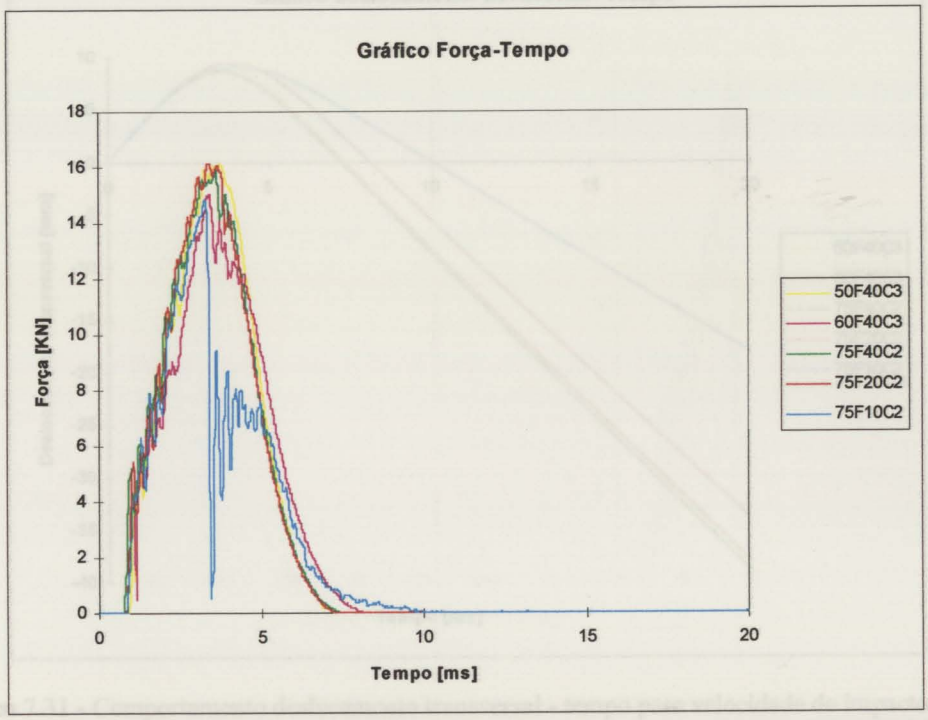


Gráfico 7.29 - Comportamento força-tempo para velocidade de impacto de 3.5 m/s.

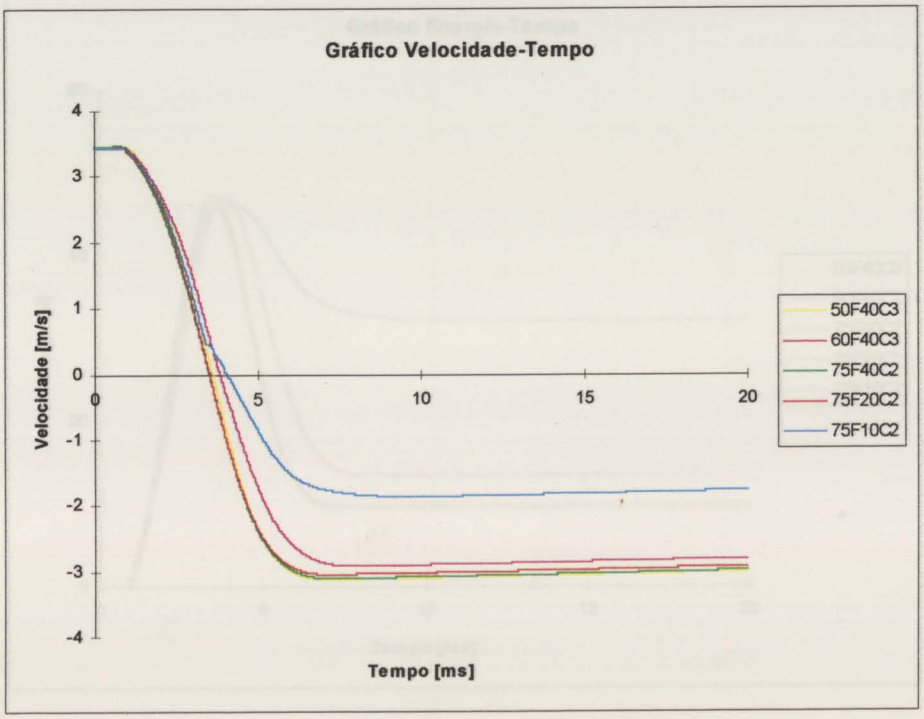


Gráfico 7.30 - Comportamento velocidade - tempo para velocidade de impacto de 3.5 m/s.

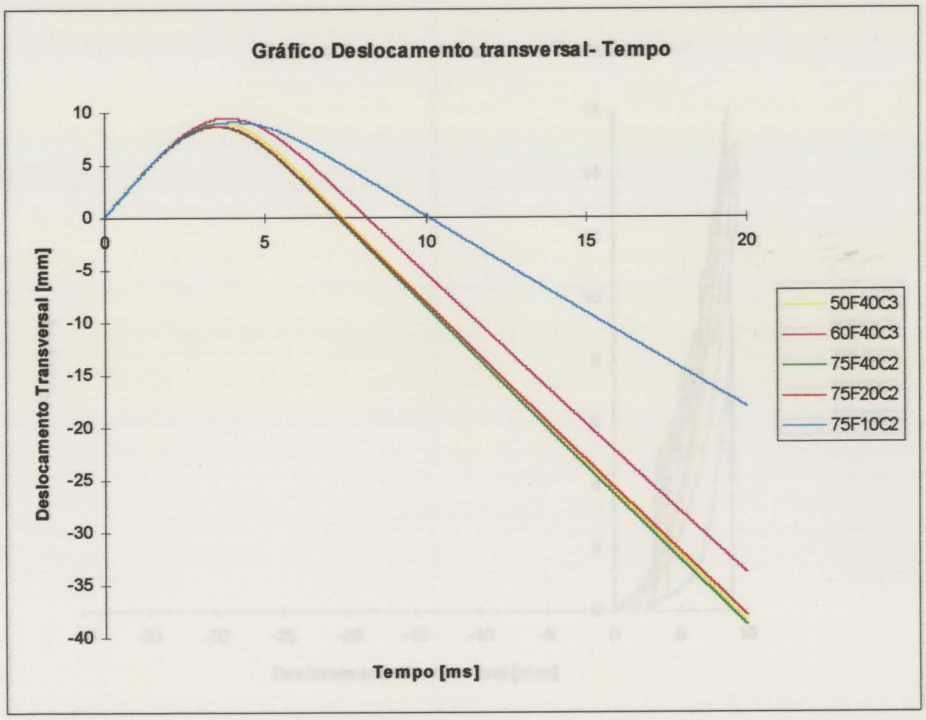


Gráfico 7.31 - Comportamento deslocamento transversal - tempo para velocidade de impacto de 3.5 m/s.

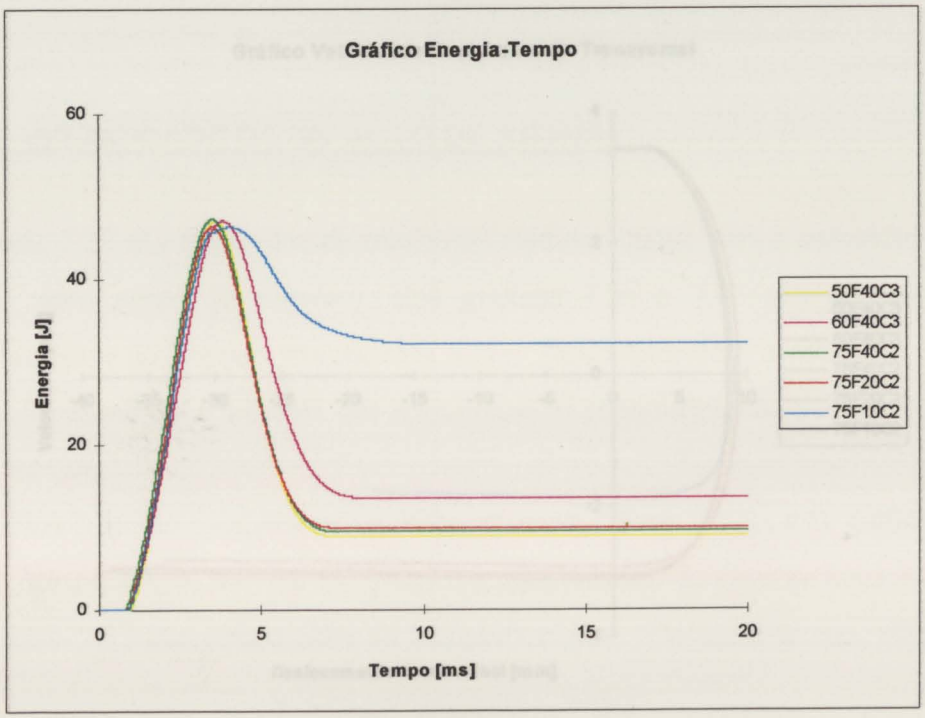


Gráfico 7.32 - Comportamento energia-tempo para velocidade de impacto de 3.5 m/s.

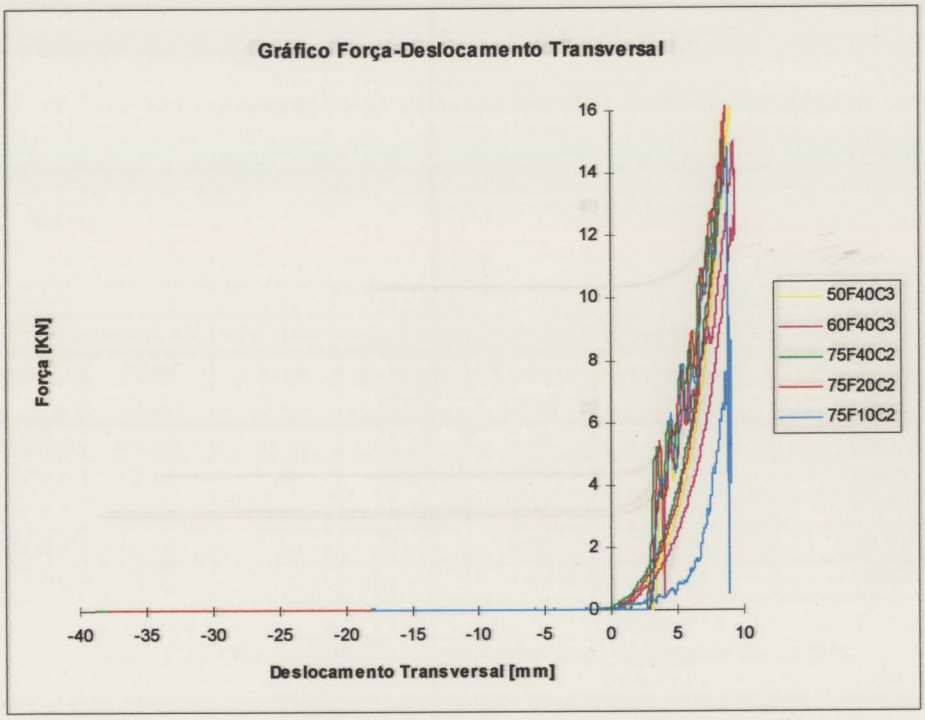


Gráfico 7.33 - Comportamento força -deslocamento transversal para velocidade de impacto de 3.5 m/s.

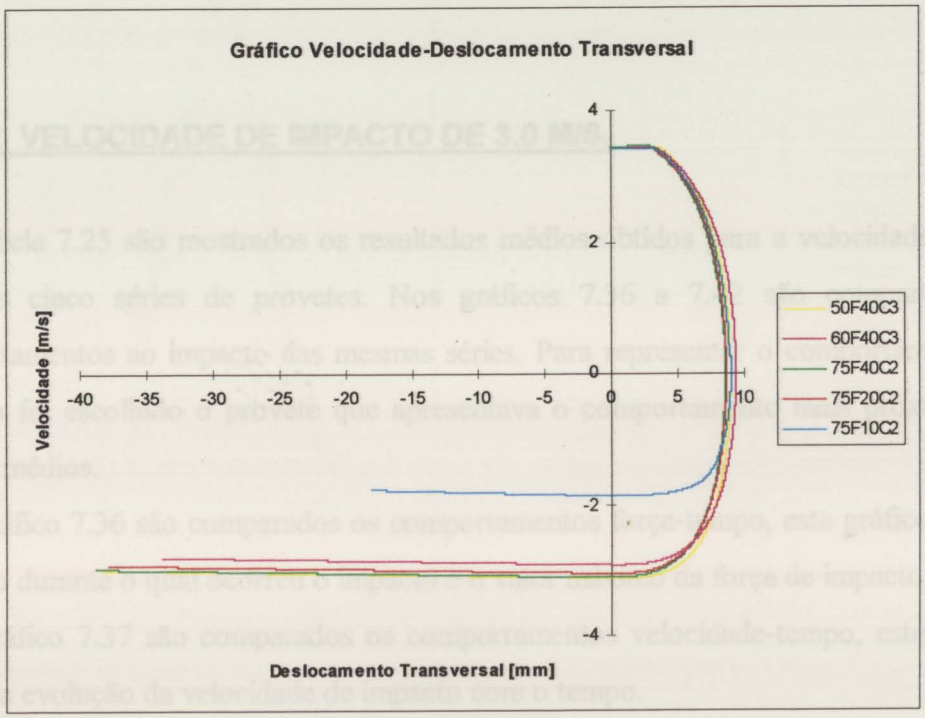


Gráfico 7.34 - Comportamento velocidade - deslocamento transversal para velocidade de 3.5 m/s.

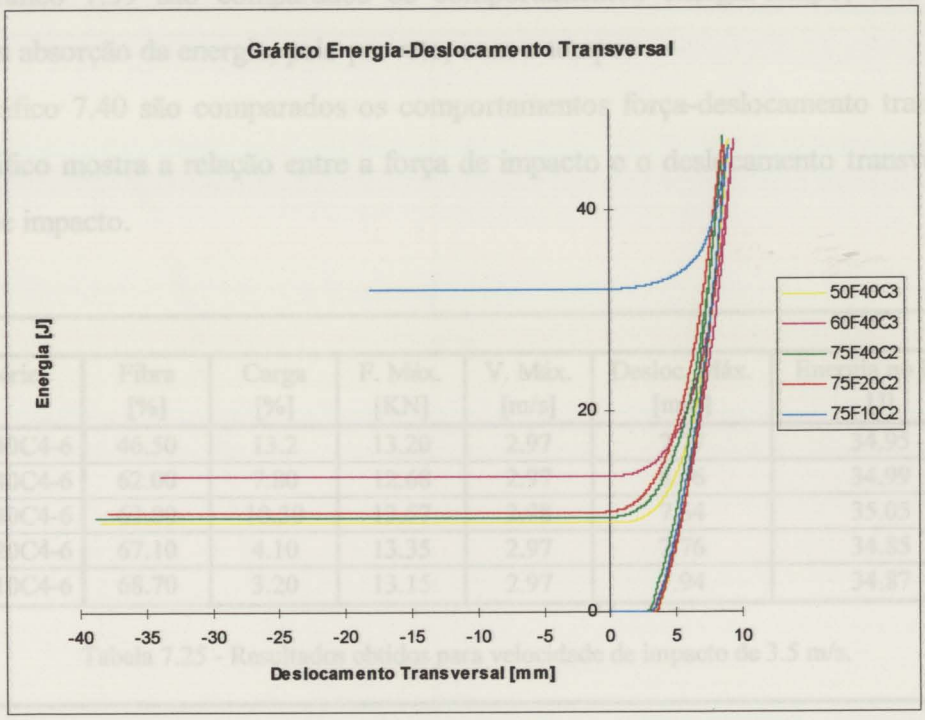


Gráfico 7.35 - Comportamento energia - deslocamento transversal para velocidade de impacto de 3.5 m/s.

7.2.4.2 VELOCIDADE DE IMPACTO DE 3.0 M/S.

Na tabela 7.25 são mostrados os resultados médios obtidos para a velocidade de 3.0 m/s das cinco séries de provetes. Nos gráficos 7.36 a 7.42 são comparados os comportamentos ao impacto das mesmas séries. Para representar o comportamento ao impacto foi escolhido o provete que apresentava o comportamento mais próximo dos valores médios.

No gráfico 7.36 são comparados os comportamentos força-tempo, este gráfico mostra o tempo durante o qual ocorreu o impacto e o valor máximo da força de impacto.

No gráfico 7.37 são comparados os comportamentos velocidade-tempo, este gráfico mostra a evolução da velocidade de impacto com o tempo.

No gráfico 7.38 são comparados os comportamentos deslocamento transversal-tempo, este gráfico mostra a evolução do deslocamento no centro da placa (ponto de impacto) com o tempo.

No gráfico 7.39 são comparados os comportamentos energia-tempo, este gráfico mostra a absorção da energia, pelo provete, com o tempo.

No gráfico 7.40 são comparados os comportamentos força-deslocamento transversal, este gráfico mostra a relação entre a força de impacto e o deslocamento transversal do ponto de impacto.

Série	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	V. Máx. [m/s]	Desloc. Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
50F40C4-6	46.50	13.2	13.20	2.97	7.77	34.95
60F40C4-6	62.00	7.80	12.68	2.97	8.46	34.99
75F40C4-6	63.00	10.30	13.57	2.98	7.64	35.05
75F20C4-6	67.10	4.10	13.35	2.97	7.76	34.85
75F10C4-6	68.70	3.20	13.15	2.97	7.94	34.87

Tabela 7.25 - Resultados obtidos para velocidade de impacto de 3.5 m/s.

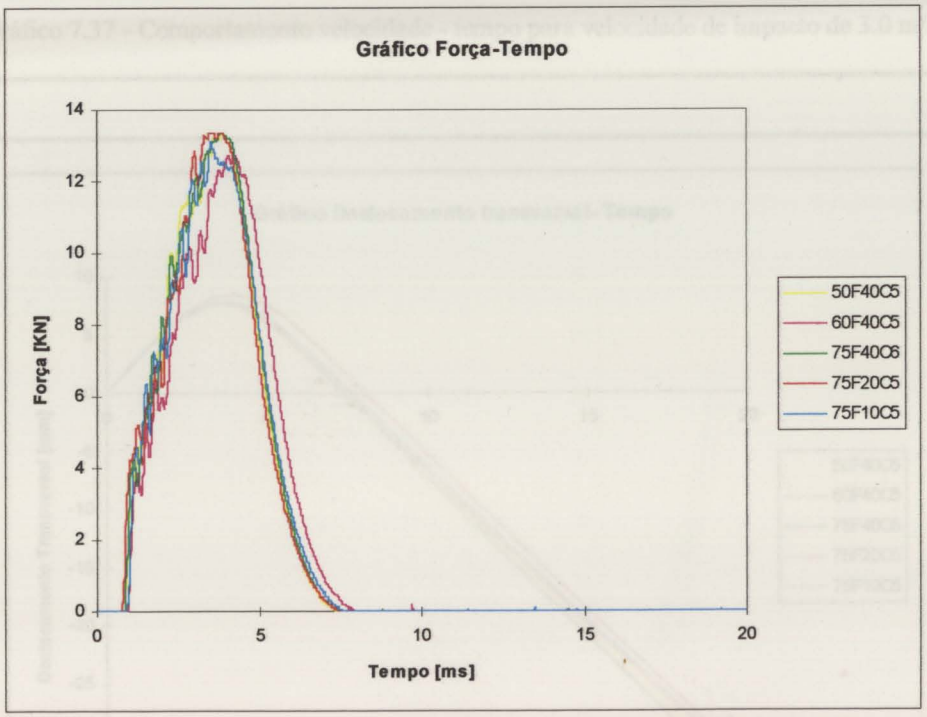


Gráfico 7.36 - Comportamento força - tempo para velocidade de impacto de 3.0 m/s.

No gráfico 7.41 são comparados os comportamentos velocidade-deslocamento transversal, este gráfico mostra a evolução do impactor e o deslocamento transversal do ponto de impacto.

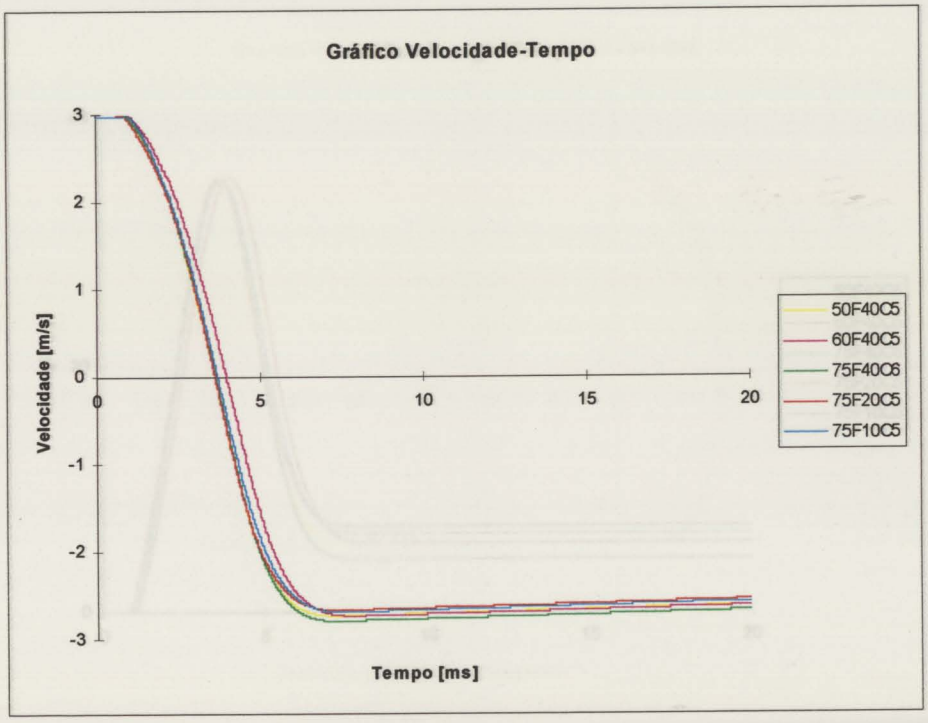


Gráfico 7.37 - Comportamento velocidade - tempo para velocidade de impacto de 3.0 m/s.

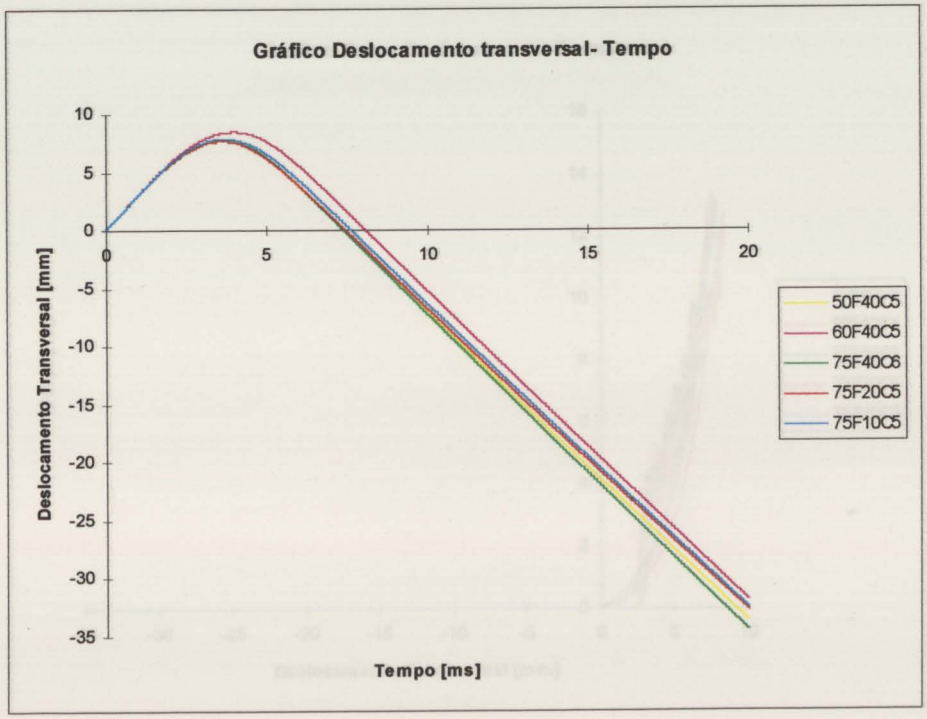


Gráfico 7.38 - Comportamento deslocamento transversal - tempo para velocidade de impacto de 3.0 m/s.

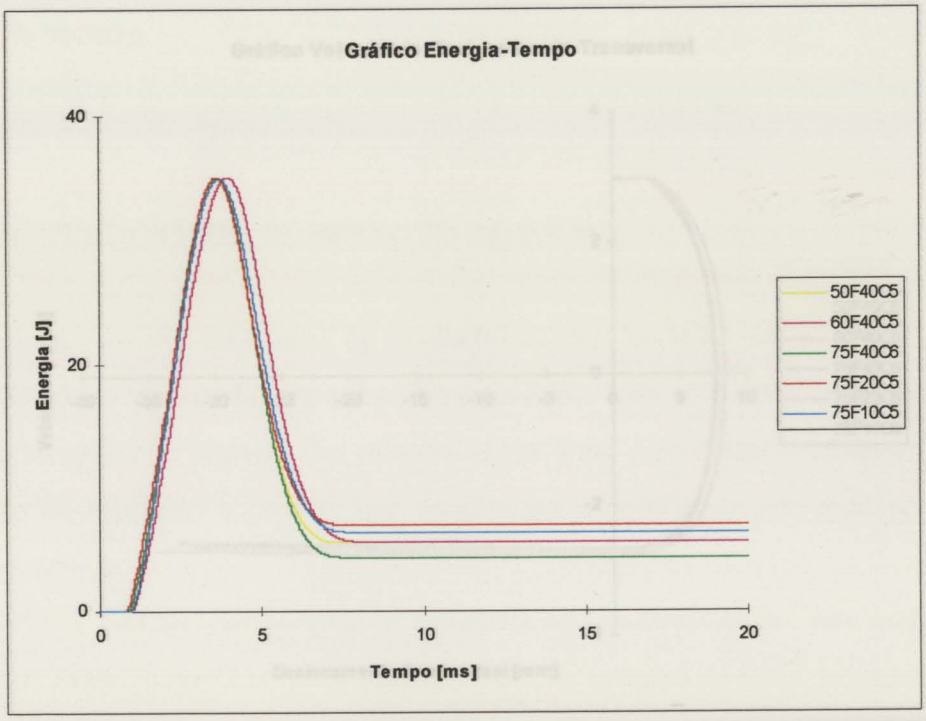


Gráfico 7.39 - Comportamento energia - tempo para velocidade de impacto de 3.0 m/s.

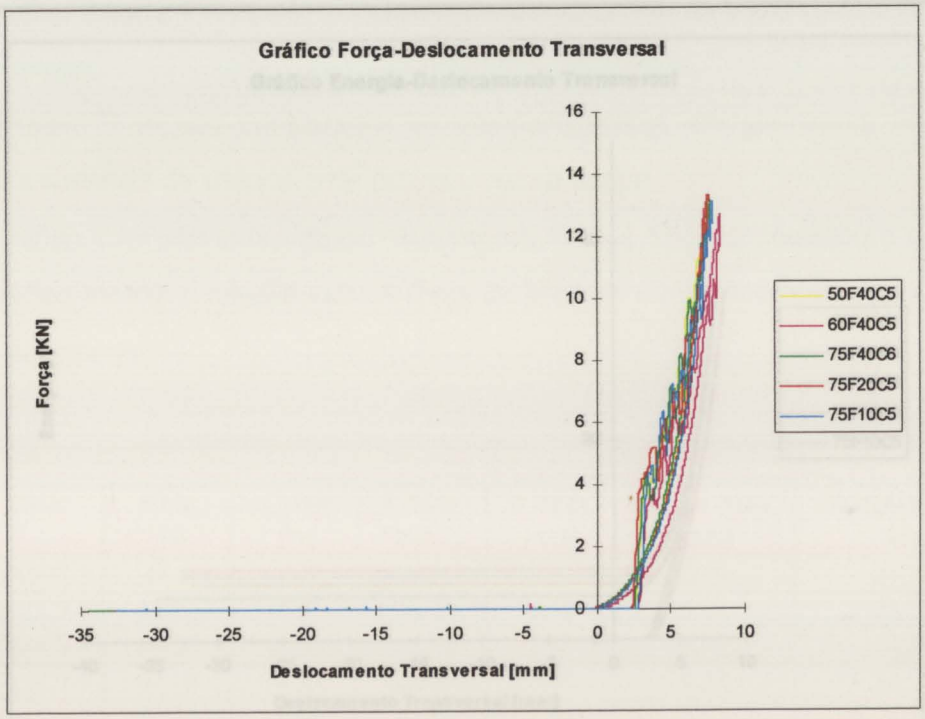


Gráfico 7.40 - Comportamento força - deslocamento transversal para velocidade de impacto de 3.0 m/s.

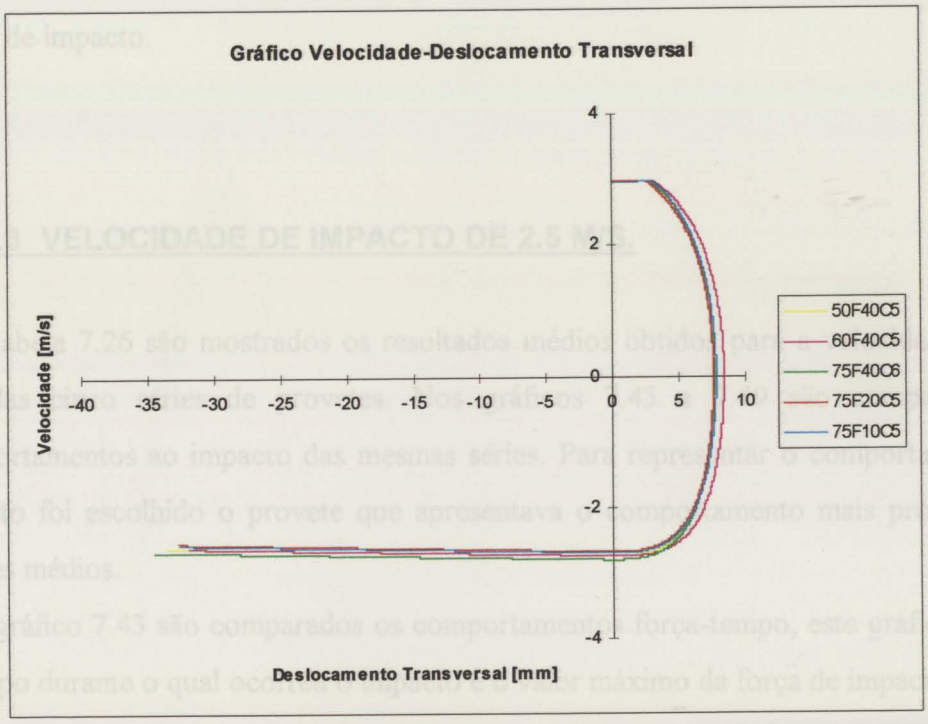


Gráfico 7.41 -Comportamento velocidade - deslocamento transversal para velocidade de impacto de 3.0 m/s.

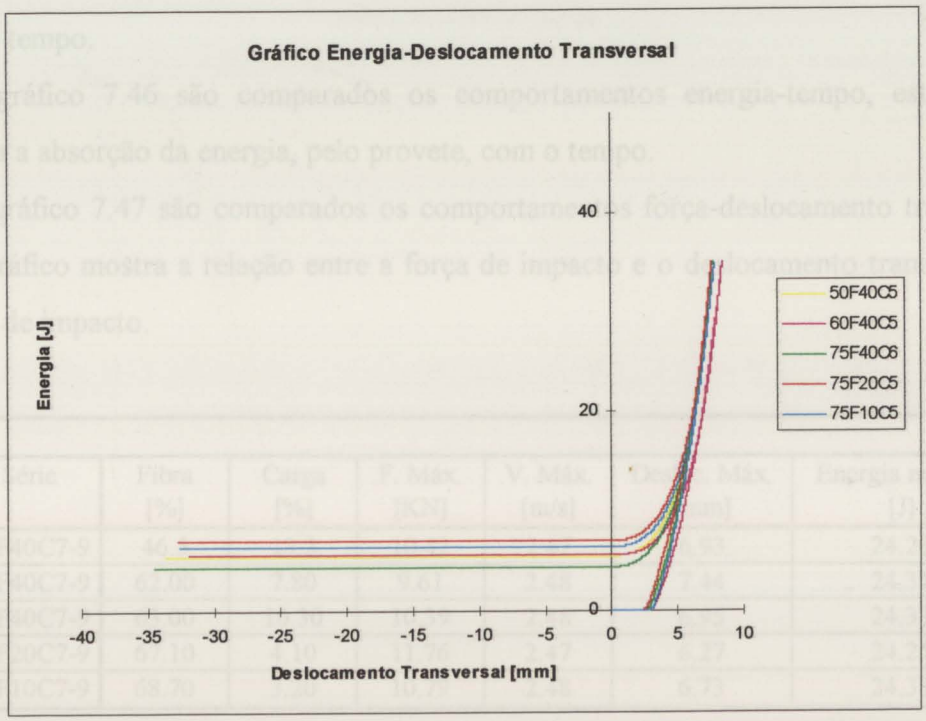


Gráfico 7.42 - Comportamento energia - deslocamento transversal para velocidade de 3.0 m/s.

No gráfico 7.42 são comparados os comportamentos energia-deslocamento transversal, este gráfico mostra a relação da absorção de energia e o deslocamento transversal do ponto de impacto.

7.2.4.3 VELOCIDADE DE IMPACTO DE 2.5 M/S.

Na tabela 7.26 são mostrados os resultados médios obtidos para a velocidade de 2.5 m/s das cinco séries de provetes. Nos gráficos 7.43 a 7.49 são comparados os comportamentos ao impacto das mesmas séries. Para representar o comportamento ao impacto foi escolhido o provete que apresentava o comportamento mais próximo dos valores médios.

No gráfico 7.43 são comparados os comportamentos força-tempo, este gráfico mostra o tempo durante o qual ocorreu o impacto e o valor máximo da força de impacto.

No gráfico 7.44 são comparados os comportamentos velocidade-tempo, este gráfico mostra a evolução da velocidade de impacto com o tempo.

No gráfico 7.45 são comparados os comportamentos deslocamento transversal-tempo, este gráfico mostra a evolução do deslocamento no centro da placa (ponto de impacto) com o tempo.

No gráfico 7.46 são comparados os comportamentos energia-tempo, este gráfico mostra a absorção da energia, pelo provete, com o tempo.

No gráfico 7.47 são comparados os comportamentos força-deslocamento transversal, este gráfico mostra a relação entre a força de impacto e o deslocamento transversal do ponto de impacto.

Série	Fibra [%]	Carga [%]	F. Máx. [KN]	V. Máx. [m/s]	Desloc. Máx. [mm]	Energia no Pico [J]
50F40C7-9	46.5	13.2	10.42	2.47	6.93	24.20
60F40C7-9	62.00	7.80	9.61	2.48	7.44	24.37
75F40C7-9	63.00	10.30	10.39	2.48	6.95	24.37
75F20C7-9	67.10	4.10	11.76	2.47	6.27	24.25
75F10C7-9	68.70	3.20	10.79	2.48	6.73	24.31

Tabela 7.26 - Resultados obtidos para velocidade de impacto de 3.5 m/s.

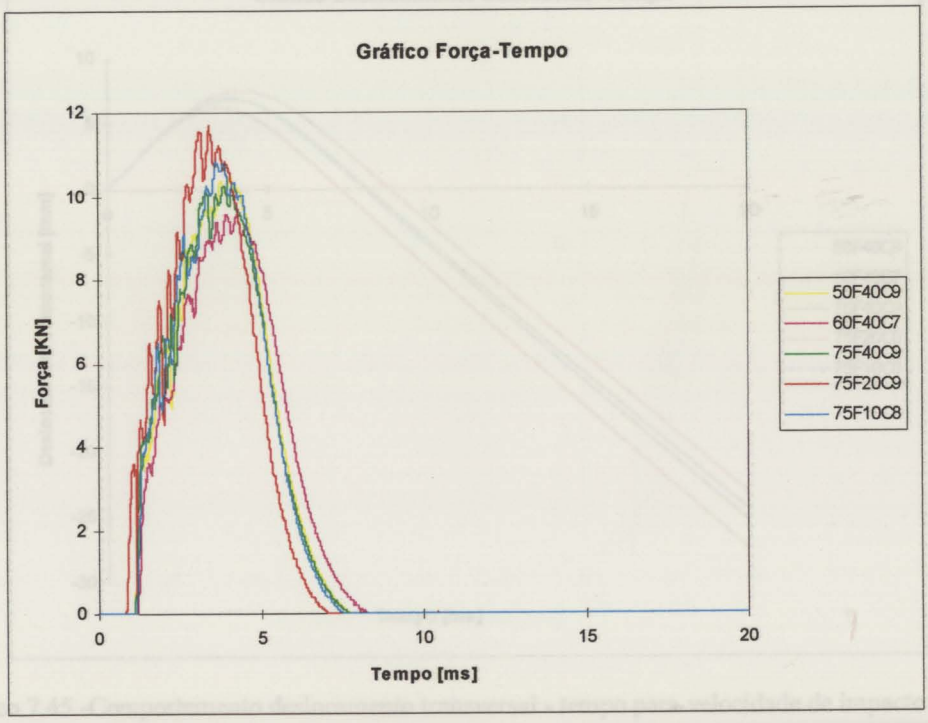


Gráfico 7.43 - Comportamento força velocidade para velocidade de impacto de 2.5 m/s.

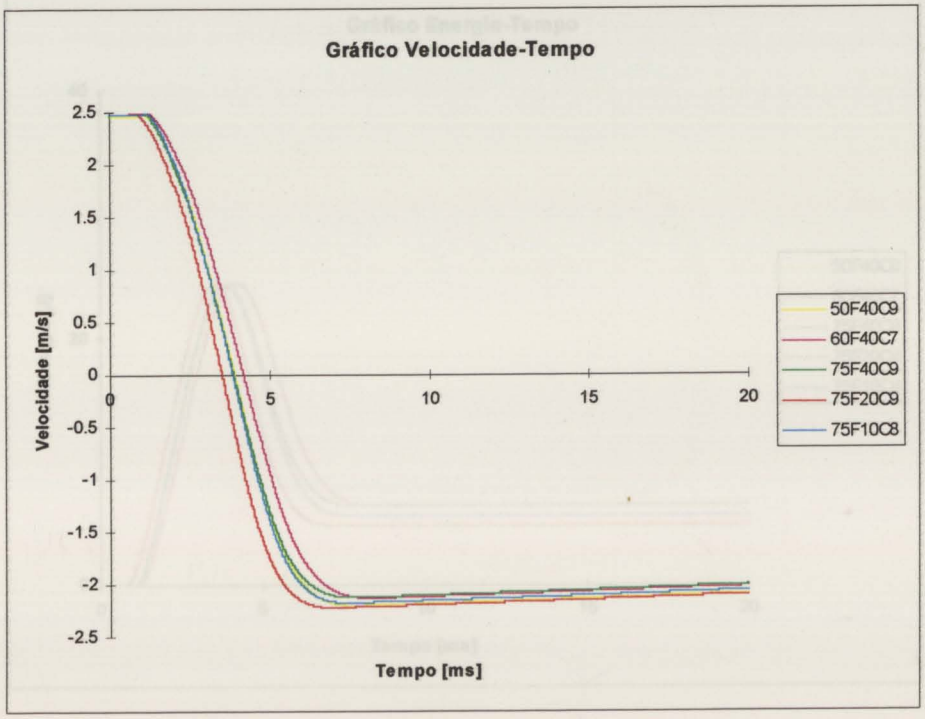


Gráfico 7.44 - Comportamento velocidade - tempo para velocidade de impacto de 2.5 m/s.

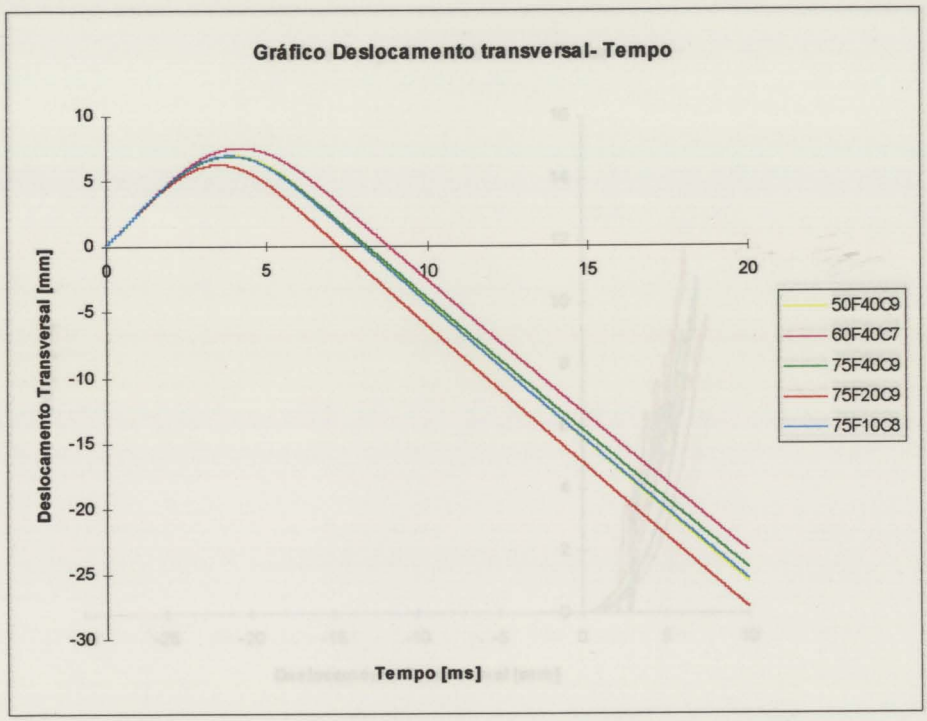


Gráfico 7.45 -Comportamento deslocamento transversal - tempo para velocidade de impacto de 2.5 m/s.

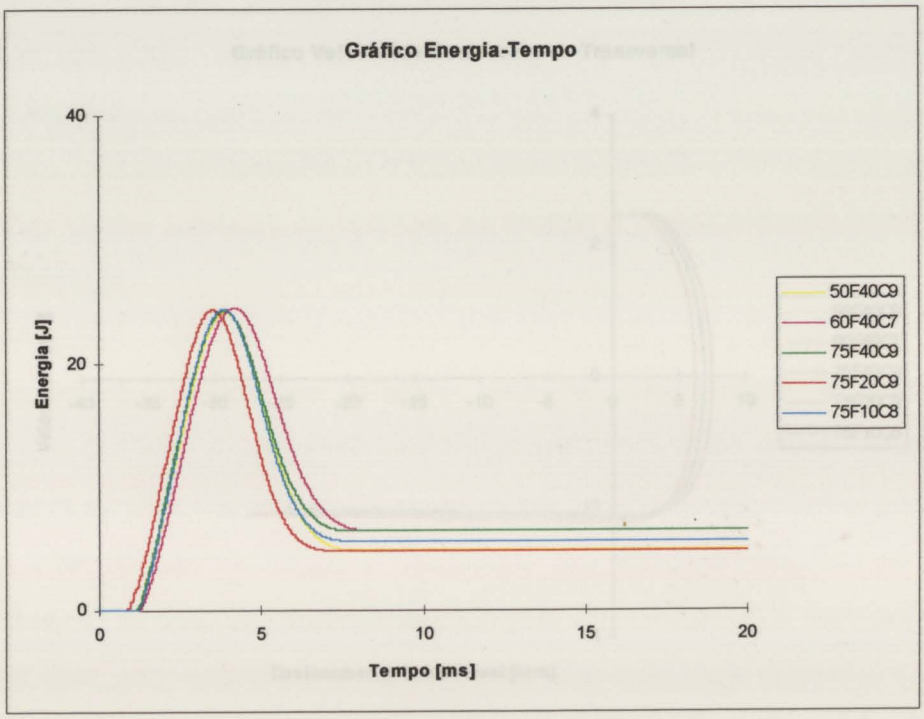


Gráfico 7.46 - Comportamento energia - tempo para velocidade de impacto de 2.5 m/s.

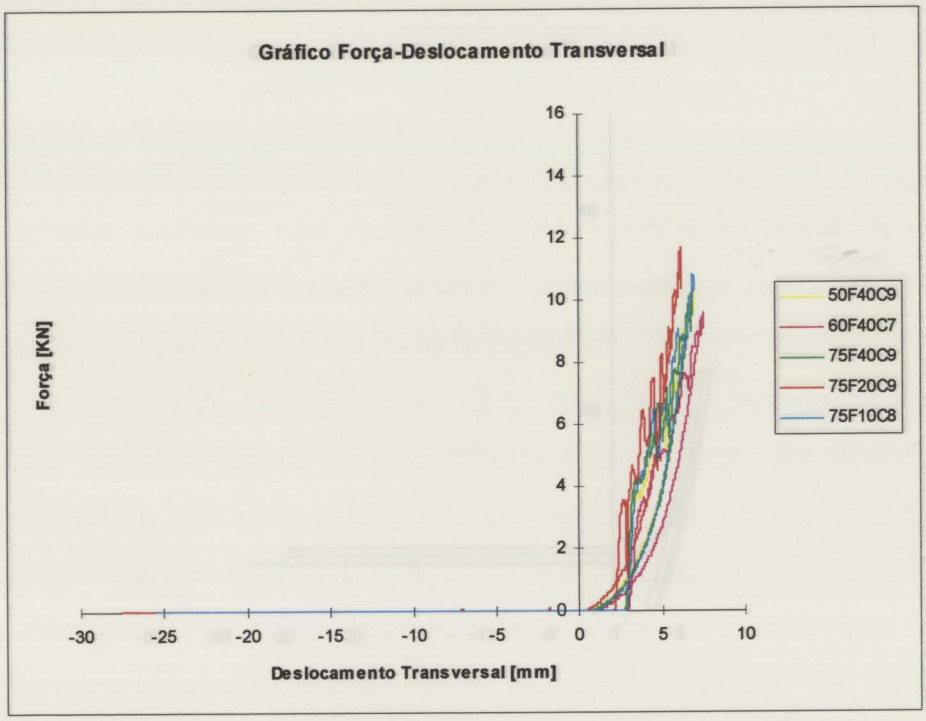


Gráfico 7.47 - Comportamento força - deslocamento transversal para velocidade de impacto de 2.5 m/s.

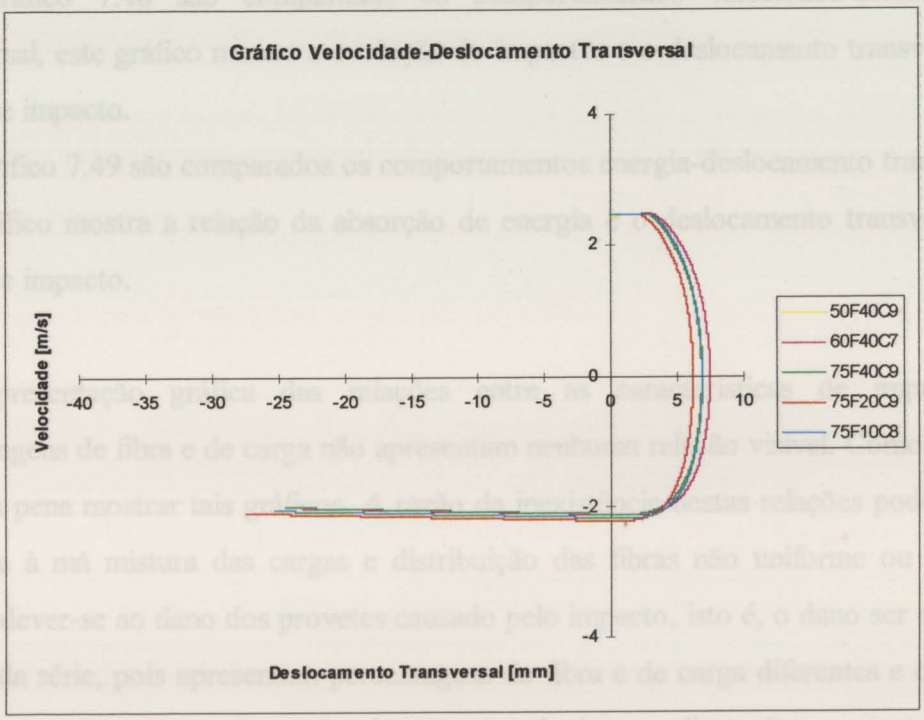


Gráfico 7.48 - Comportamento velocidade - deslocamento transversal para velocidade de impacto de 2.5 m/s.

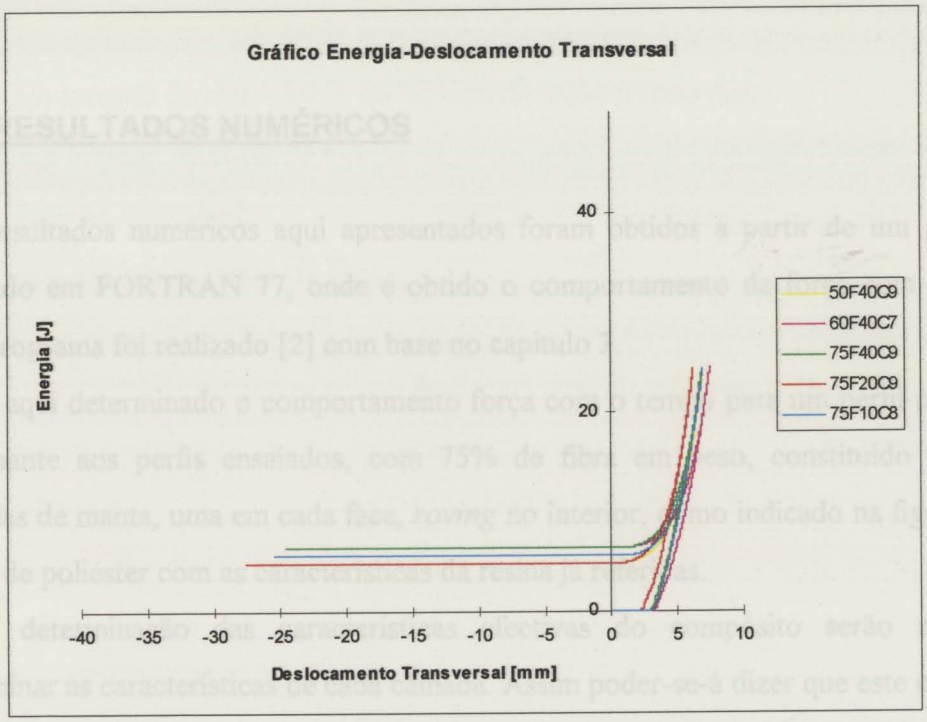


Gráfico 7.49 Comportamento energia - deslocamento transversal para velocidade de impacto de 2.5 m/s.

No gráfico 7.48 são comparados os comportamentos velocidade-deslocamento transversal, este gráfico mostra a evolução do impactor e o deslocamento transversal do ponto de impacto.

No gráfico 7.49 são comparados os comportamentos energia-deslocamento transversal, este gráfico mostra a relação da absorção de energia e o deslocamento transversal do ponto de impacto.

A representação gráfica das relações entre as características de impacto as percentagens de fibra e de carga não apresentam nenhuma relação visível. Como tal, não valerá a pena mostrar tais gráficos. A razão da inexistência destas relações pode ficar a dever-se à má mistura das cargas e distribuição das fibras não uniforme ou também poderá dever-se ao dano dos provetes causado pelo impacto, isto é, o dano ser diferente para cada série, pois apresentam percentagens de fibra e de carga diferentes e como tal também o dano causado pelo impacto poderá ter dimensões, orientações e comportamentos diferentes. Este facto não é contabilizado nos ensaios de impacto. Este assunto não é tema deste trabalho, pelo que não será abordado este problema.

7.3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados numéricos aqui apresentados foram obtidos a partir de um programa realizado em FORTRAN 77, onde é obtido o comportamento da força com o tempo. Este programa foi realizado [2] com base no capitulo 3.

Será aqui determinado o comportamento força com o tempo para um perfil pultrudido semelhante aos perfis ensaiados, com 75% de fibra em peso, constituído por duas camadas de manta, uma em cada face, *roving* no interior, como indicado na figura 7.1, e resina de poliéster com as características da resina já referidas.

Para determinação das características efectivas do compósito serão necessário determinar as características de cada camada. Assim poder-se-á dizer que este compósito é constituído por três camadas, sendo duas constituídas por manta de filamentos contínuos, uma em cada face e uma camada unidireccional (*roving*), entre as camadas de manta.

Propriedades da camada unidireccional

Segundo [3] os módulos de elasticidade longitudinal, E_l, transversal, E_t, e módulo de corte, G_{lt}, são dados por:

$$E_l = E_f V_f + E_m\left(1 - V_f\right)$$

$$E_t = E_m\left[\frac{1}{\left(1 - V_f\right) + \frac{E_m}{E_{f_t}} V_f}\right]$$

$$G_{lt} = G_m\left[\frac{1}{\left(1 - V_f\right) + \frac{G_m}{G_{f_{lt}}} V_f}\right]$$

onde

E_f é o modulo de elasticidade à tracção da fibra (73 GPa, segundo o fabricante),

V_f é a fracção volúmica de fibra,

E_m é o modulo de elasticidade è atracção da resina (3.5 GPa, segundo o fabricante),

E_{flt} é o módulo de elasticidade da fibra na direcção transversal,

G_m é o módulo de corte da matriz, $G_m = E_m / (2(1+\upsilon))$ (ν é o coeficiente de Poisson da resina),

G_{flt} é o módulo de corte da fibra.

A transformação da percentagem em peso para fracção volúmica é dada por [4]:

$$\varphi = \frac{\beta \rho_r}{\rho_f - (\rho_f - \rho_r)\beta}$$

onde

φ é a percentagem volúmica de fibra,

β é a percentagem em peso da fibra,

ρ_r é a densidade da resina (1.2 Kg/m^3) e

ρ_f é a densidade da fibra de vidro (2.6 Kg/m^3).

Assim para 75% de fibra em peso corresponde a fracção volúmica de 58%, obtém-se os seguintes valores:

E_l=43.81 GPa, E_t=2.18 GPa, G_{lt}=3.03 GPa

Como se pode constatar da comparação do módulo de elasticidade longitudinal aqui apresentado com os apresentados na tabela 7.8, a série de provetes que apresenta o módulo de elasticidade mais próximo deste é a série 75F20C, que tem 67.1 % de percentagem em peso de fibra. Por esta razão, pode-se por em dúvida os ensaios de determinação de teores, pois os resultados estão bastante próximos, para esta diferença de percentagem de fibra de vidro. No entanto não deve ser esquecido que a lei das misturas é um método aproximado.

Os coeficientes de Poisson são dados por[5]:

$$\upsilon_{lt} = V_f \upsilon_f + (1 - V_f)\upsilon_m$$

$$\upsilon_{tl} = \upsilon_{lt} \frac{E_t}{E_l}$$

onde v_f e v_m são os coeficientes de Poisson da fibra (0.25) e da matriz (0.33), respectivamente. Os resultados são os seguintes:

v_{lt}=0.284 v_{tl}=0.014

Propriedades da camada de manta

A manta de filamentos contínuos é considerada como um material isotrópico. Neste caso os módulos de elasticidade longitudinal e transversal. Segundo [5], a lei das misturas pode ser modificada para outros materiais, que não os unidireccionais, e tem a forma

$$E_k = E_f V_f \beta + E_m (1 - V_f)$$

onde β é o factor de eficiência das fibras, que para o caso da manta é igual a 0.2. Assim, obtém-se para a camada de manta

E_k=10.054 GPa

Segundo [3] o valor do coeficiente de Poisson para este caso é de 0.3.

Propriedades do compósito

Segundo [6] uma camada de manta impregnada com resina de viniléster tem espessura de 0.5 mm. Como as características mecânicas do poliéster e do viniléster não são muito diferentes (o mesmo não se pode dizer da resistência química), será considerada para o caso do poliéster a mesma espessura.

Para o caso do perfil de pultrusão produzido, barra de 80 mm de largura por 5 de espessura, temos:

espessura total do compósito, e_t=5 mm,

espessura das camadas de manta, e_m=2x.5 =01 mm e

espessura da camada unidireccional (*roving*), e_u=4 mm.

Assim, para este caso, os módulos de elasticidade longitudinal e transversal à flexão, serão dados por:

$$E_x = \frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i^3 E_{i_x})}{\sum_{i=1}^{n} e_i^3}$$

onde x é substituído por l para o caso longitudinal e t para o caso transversal, sendo e_i a espessura da i-ésima camada e E_i o módulo de elasticidade correspondente a essa camada. Os resultados são:

$$E_l=43.291 \qquad E_t=2.301$$

O módulo de corte é dado por:

$$G_{lt} = G_{lt_u}\frac{e_u}{e_t} + G_{lt_m}\frac{e_m}{e_t}$$

onde u refere-se à camada unidireccional e m à camada constituída por manta. Neste caso G_{lt}=3.5 GPa. Os restantes módulos de corte segundo [7] são G_{lz}=G_{tz}=2.18 GPa.

Como aproximação dos coeficientes de Poisson, pois são os factores determinantes do comportamento do compósito, poderão ser utilizadas as seguintes relações:

$$\upsilon_{lt} = \upsilon_{lt_u}\frac{e_u}{e_t} + \upsilon_{lt_m}\frac{e_m}{e_t}$$

$$\upsilon_{tl} = \upsilon_{tl_u}\frac{e_u}{e_t} + \upsilon_{tl_m}\frac{e_m}{e_t}$$

Destas relações obtêm-se os seguintes resultados:

υ_{lt}=0.287 υ_{tl}=0.071

Efectuando os cálculos com estas propriedades verificou-se que a força de impacto máxima apresentava valores demasiadamente elevada quando comparada com os resultados experimentais. É que este modelo não contempla as heterogeneidades do material. Assim e após algumas experiências verificou-se que o material cedia pela direcção mais fraca, o que seria de esperar, só que esse comportamento evidenciava-se em demasia. Para eliminar este problema utilizaram-se as propriedades da direcção mais fraca (perpendicular às fibras), isto é, o comportamento do material está condicionado pelas propriedades nas direcções mais fracas, pois são as primeiras a ceder.

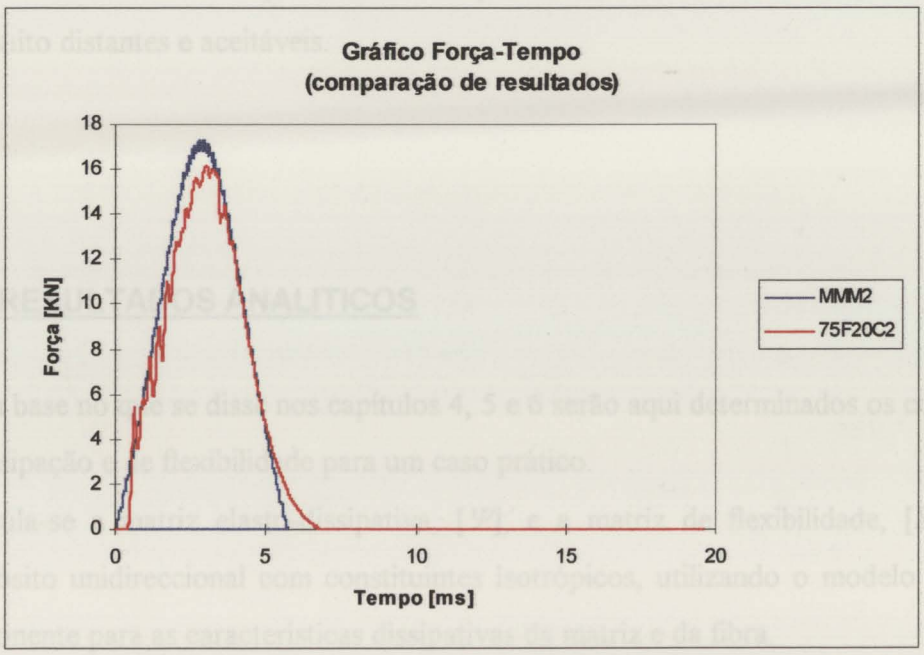


Gráfico 7.50 - Comparação de resultados entre o modelo mola-massa com dois graus de liberdade e o ensaio experimental de impacto da série 75F20C

A velocidade de impacto foi de 3.5 m/s e as características introduzidas no ficheiro de entrada deste programa foram as seguintes:

Impactor

M_i: 7.756 Kg R_i: 10 mm E_i: 200 GPa υ_i: 0.33

Placa

M_p: 18.62 g e_p: 5 mm R_p: 25 mm

E_r=2.301 GPa E_z=2.301 GPa G_r=3.5 GPa G_{zr}=2.18 GPa

υ_r=0.287 υ_{rz}=0.014

No gráfico 7.50 estão apresentados o comportamento força-tempo para este caso (MMM2) e para o provete 75F20C2, que é o provete que apresenta as características mecânicas mais próximas, como já referido.

Como se pode constatar da análise do gráfico 7.50, existe uma boa aproximação entre o comportamento previsto, determinado a partir do modelo mola-massa com dois graus de liberdade e o ensaio experimental. Os valores da força máxima para o modelo mola-massa foi de 17.32 KN e para o ensaio experimental foi de 16.03 Kn, que são valores não muito distantes e aceitáveis.

7.4. RESULTADOS ANALITICOS

Com base no que se disse nos capítulos 4, 5 e 6 serão aqui determinados os coeficientes de dissipação e de flexibilidade para um caso prático.

Calcula-se a matriz elasto-dissipativa, $[\Psi]$, e a matriz de flexibilidade, $[S]$, para o compósito unidireccional com constituintes isotrópicos, utilizando o modelo de um só componente para as características dissipativas da matriz e da fibra.

Para tal considere-se as propriedades dos materiais utilizados na fabricação dos provetes. A fibra de vidro utilizada foi do tipo *E*. As características da matriz e da resina são as apresentadas a seguir:

$$E_f = 73 \text{ GPa}, \quad \upsilon_f = 0.3, \quad \psi_f = 0.018$$

$$E_m = 3.5 \text{ GPa}, \quad \upsilon_m = 0.3, \quad \psi_m = 0.08$$

Os valores de dissipação de energia indicados foram retirados da referência [8]. A percentagem em peso de fibra é de 75% à qual correponde uma fracção volúmica de 58%, como se mostrou no ponto 7.3.

A matriz elasto-dissipativa, para este caso toma forma da equação (5.50) e os seus coeficientes são determinados das expressões (4.48) com base nas expressões (4.42). Assim obtém-se das expressões (4.42)

$$E_1 = 44.97 \text{ GPa} \qquad E_2 = 7.83 \text{ GPa} \qquad G_{13} = G_{12} = 2.75 \text{ GPa}$$

$$\upsilon_{12} = 0.3 \qquad \upsilon_{21} = .05$$

Da expressão (5.48) obtêm-se os parâmetros

$$A = 0.445\text{x}10^{-3} \qquad B = 9.739\text{x}10^{-3}$$

$$C = 25.322\text{x}10^{-3} \qquad D = 0.267\text{x}10^{-3}$$

Então, a matriz dos coeficientes de dissipação para este compósito é

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 0.445 & -0.134 & -0.134 & 0 & 0 & 0 \\ & 9.739 & -12.661 & 0 & 0 & 0 \\ & & 9.739 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 25.322 & 0 & 0 \\ & \textit{sim.} & & & 25.322 & 0 \\ & & & & & 25.322 \end{bmatrix} \text{x}10^{-3}$$

Os factores de dissipação do compósito sujeito a carregamento uniaxial ao longo das fibras, ψ_1^*, transverso, ψ_2^*, e sujeito a corte ideal no plano (x_1, x_2), ψ_6^*, de acordo com as equações (5.36) a (5.40) são iguais a

$$\psi_1^* = 20.03\text{x}10^{-3}, \qquad \psi_2^* = 76.25\text{x}10^{-3}, \qquad \psi_3^* = 76.25\text{x}10^{-3}$$

$$\psi_4^* = 76.25\text{x}10^{-3}, \qquad \psi_5^* = 69.51\text{x}10^{-3}, \qquad \psi_6^* = 69.51\text{x}10^{-3}$$

Saliente-se que G_{23} foi obtido da relação $\psi_6^* / G_{12} = \psi_3^* / G_{23}$ das expressões (5.40), cujo resultado é 3.01 GPa.

Neste caso, a matriz de flexibilidade será [equação (5.41)]

$$[S] = \begin{bmatrix} 2.224 & -0.667 & -3.832 & 0 & 0 & 0 \\ & 12.773 & -3.832 & 0 & 0 & 0 \\ & & 12.773 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 33.211 & 0 & 0 \\ & \textit{sim.} & & & 36.428 & 0 \\ & & & & & 36.428 \end{bmatrix} \text{x}10^{-2}$$

Tendo calculado estas matrizes é então possível determinar o estado de tensão ou deformação no compósito através da lei de Hooke

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$$

A perda de energia para o estado de tensão determinado será dado pela expressão

$$\Delta W = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T [\Psi]\{\sigma\}$$

e a energia elástica será calculada pela expressão

$$W = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T [S]\{\sigma\}$$

7.5. REFERÊNCIAS

[1] Rosan, "Sofware Manual"

[2] Moura, Marcelo F., "Estudo do Comportamento Mecânico dos Materiais Compósitos Sujeitos a Solicitações de Impacto de baixa Velocidade", Provas de Capacidade Cientíca apresentadas à F.E.U.P., 1989.

[3] Gay, Daniel, "Matériaux Composites", 3^{e} édition, Editions Hermes, 1991.

[4] Curso de "Controlo de Qualidade", INEGI, 1993.

[5] Quinn, J. A., "Composites- Design Manual".

[6] Antequera, P., Jiménez, L, Miravete, A, "Los Materiales Compuestos de Fibra de Vidrio".

[7] Broughton, W. R., Lodeiro, M., Sims. G. D., "Experimental Validation of Shear Test Methods for Through-Thickness Properties", ECCM-7, Vol.2, pp.125-130.

[8] Zinoviev, Peter A., Ermakov, Yury E., "Energy Dissipation in Composite Materials", Techomic Publishing Company, 1994.

FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO
BIBLIOTECA
0000011803