

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Modelos de Distribuição de Riqueza

Ricardo Coelho

Licenciado em Física pela Faculdade de Ciências da
Universidade do Porto

*Dissertação submetida para satisfação parcial dos
requisitos do grau de mestre em
Métodos Computacionais em Ciências e Engenharia*

*Dissertação realizada sob a supervisão da
Professora Doutora Maria Augusta Santos,
do Departamento de Física
da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto*

Dezembro de 2004

Prefácio

Esta dissertação tenta mostrar todo o trabalho realizado no projecto do Mestrado de Métodos Computacionais em Ciências e Engenharia, sobre um novo ramo muito vasto da Física, que é a Econofísica. O trabalho tem sido elaborado no Centro de Física do Porto, com a orientação da Prof. Dra. Maria Augusta Santos, para a qual vai o meu agradecimento. Gostava de agradecer as discussões que tive com o Prof. Dr. José Fernando Mendes, principalmente sobre o tópico de redes complexas, com o Prof. Dr. Zoltan Neda, sobre a ideia do Modelo Hierárquico de Famílias e com o Dr. José Ramasco, sobre as várias técnicas computacionais que permitiram desenvolver os programas com maior eficácia, e sobre as técnicas estatísticas relacionadas com correlações. Também não gostava de esquecer o Centro de Física do Porto e todos os seus membros, pela contribuição para novas ideias sobre o trabalho futuro e pelos meios que me permitiram usar para efectuar todo o meu trabalho. Por fim, gostava de agradecer ao Prof. Peter Richmond pelos dados disponibilizados para o estudo de distribuições no Reino Unido e à Direcção Geral dos Impostos - DGCI, que teve a amabilidade de nos disponibilizar várias estatísticas das declarações do IRS para Portugal.

Conteúdo

Sumário	1
Abstract	3
1 Introdução	5
2 Distribuições e índices económicos	11
2.1 Distribuição log-normal	11
2.2 Distribuição em lei de potência	12
2.3 Distribuição de Gibbs	13
2.4 Distribuição Gamma	13
2.5 Curva de Lorenz e índice de Gini	13
3 Dados Reais de Distribuição de Riqueza	15
3.1 Exemplos anteriormente estudados	16
3.2 Caso Português	17
3.3 Outros casos	20
3.4 Comentário	23
4 Modelo Económico de Extremos - CEMM	25
4.1 Características do CEMM	25
4.2 Dinâmica do modelo	26
4.2.1 Caso Local	26
4.2.2 Caso Global	26
4.2.3 Rede Binomial	27
4.3 Resultados da Distribuição de Riqueza	28
4.4 Dependência no tipo de rede	30
4.5 Comentário	31

5	Modelo Hierárquico de Famílias	33
5.1	Motivação	33
5.2	Dados iniciais	34
5.3	Algoritmo	34
5.3.1	Escolha de forma preferencial	35
5.4	Resultados	35
5.4.1	Distribuição de Riqueza	36
5.4.2	Distribuição de conectividade	37
5.4.3	Correlações	37
5.5	Comentário	38
6	Conclusões e Trabalho Futuro	43
	Bibliografia	45

Sumário

A Econofísica é uma área da Física bastante recente, em que se aplicam técnicas de Física Estatística ao estudo de modelos económicos. Neste trabalho vamos-nos centrar nas distribuições de riqueza, tanto a nível de estudo de dados reais, como ao nível do estudo de modelos capazes de reproduzir esses mesmos dados reais. Analisámos valores reais de distribuições de rendimento individual para Portugal e Reino Unido, e distribuição de riqueza estimada a partir de dados de heranças para o Reino Unido. Abordámos um modelo de Economia conservativa, com uma dinâmica de extremos, para diferentes tipos de redes sociais. Apresentámos um novo modelo, que tenta simular as trocas de riqueza numa escala de tempo de vários anos, relativo à formação de famílias e trocas de riqueza através de heranças. Neste modelo, a rede de interações entre agentes é criada pela dinâmica das trocas de riqueza, evoluindo ao longo do tempo. Analisámos também as propriedades estatísticas das redes geradas e a relação entre as características da rede e a distribuição de riqueza.

Abstract

Econophysics is a new branch of Physics, that applies Statistical Physics techniques to the study of economical models. In this work, we focus on the study of wealth distributions, both from real data and from models that are able to reproduce that data. We analyze personal income data from Portugal and United Kingdom, as well as personal wealth data estimated from inheritance tax in United Kingdom. We study a conservative economic model, with an extremal dynamics, for different kinds of the agents social network. We also present a new model, that tries to simulate the trade in a time scale of many years, related with the formation of families and wealth exchange due to inheritance.

Capítulo 1

Introdução

Os físicos têm nos últimos tempos explorado domínios que lhes eram completamente alheios há anos atrás. Vários destes estudos referem-se a Sistemas Complexos, tais como os sistemas sociais e económicos. É neste último domínio que se vai centrar o nosso trabalho, mais precisamente na Econofísica, nome derivado do estudo, através de métodos e modelos de Física Estatística e Complexidade, da análise de dados económicos e financeiros. Nos últimos anos, com o crescimento dos computadores e com a informatização de quase todos os sistemas mundiais, grandes quantidades de dados em formato digital, relativos a sistemas económicos e financeiros, ficaram ao alcance dos investigadores. Os físicos envolveram-se neste estudo tanto através da análise dos dados, recorrendo a técnicas estabelecidas em Física Estatística, como à construção de modelos que permitam interpretá-los.

As aplicações da Física à Economia já vêm de há mais de 100 anos. Vilfredo Pareto, um economista social italiano, escreveu um livro sobre Economia [23], cujo objectivo era transformar a Economia numa Ciência Física. Através da análise de dados de distribuição de riqueza de vários países, Pareto descobriu que todos os países seguiam a mesma distribuição, em lei de potência, com o mesmo expoente, aproximadamente 1.5, que passou então a ser designado como índice de Pareto.

Mas há 100 anos atrás os dados não seriam tão correctos como hoje os podemos encontrar, por isso é que físicos de vários países tentaram verificar com dados mais recentes, se esta lei de Pareto ocorria mesmo para todos os países. E o que se viu até agora é que para quase todos os dados disponíveis há uma zona da distribuição de riqueza (a zona dos mais ricos) que segue esta lei, enquanto que a zona relativa às classes baixa e média segue leis diferentes para os vários países ou para anos diferentes. Também foi verificado que o expoente de Pareto não era igual para todos os países e mesmo para o mesmo país poderia variar ao longo do tempo.

Mas a Econofísica não é só o estudo de distribuições de riqueza. Os estudos na área da Econofísica podem ser divididos em três grupos fundamentais.

O primeiro, e talvez o de maior relevo, é relacionado com os mercados bolsistas. Referimos que talvez seja o de maior relevo por ser aquele que implica risco e por ser relacionado com movimentações de grandes quantidades de dinheiro. Recorrendo ao estudo de séries temporais de mercados bolsistas, de movimentações nos mercados a curto e a longo prazo, são elaborados modelos que se espera possam permitir, de alguma forma, prever e explicar movimentações futuras. As principais características do comportamento dos mercados financeiros podem ser reproduzidas com modelos tão simples quanto o (modelo) do *Jogo Minoritário*, em que vários agentes apostam num determinado lado (0 ou 1) e ganham pontos se ficarem do lado com menos apostas. O mais importante deste modelo é o estudo da interacção de um número elevado de agentes que compra ou vende conforme as suas estratégias e conforme a capacidade de memória do que aconteceu no passado. Este modelo tem variantes que continuam a ser estudadas por grupos de físicos, e por vezes, com certos parâmetros ajustáveis é capaz de explicar certas oscilações em bolsas. Alguns físicos dizem que através dos seus modelos já conseguiram prever quedas nas bolsas, e outros têm mesmo empresas especializadas em investimento em mercados financeiros! Recentemente foi descoberto que a distribuição das variações dos preços no mercado é dada por uma lei de potência, truncada por uma lei exponencial para escalas de tempo pequenas (menores do que um dia), e que parece mais uma distribuição Gaussiana para escalas de tempo maiores (da ordem de meses). Mas nem sempre isto acontece, o que não permitiu ainda construir uma espécie de modelo universal sobre os mercados bolsistas.

O segundo grupo, é relacionado com o estudo da distribuição de tamanho de empresas, distribuição do producto interno bruto dos países, distribuição de riqueza e/ou rendimento dos indivíduos, ou seja, o estudo de distribuição de “riqueza” de diferentes grupos, que podem ser pessoas, empresas, países, etc. Para além da análise de dados já referida anteriormente, há também estudos de modelos que tentam explicar como se dão as interacções responsáveis pela geração da “riqueza”. Com base no modelo é possível decidir o que deve ser modificado se se pretender alterar a distribuição encontrada, por exemplo de modo a que a distribuição de riqueza seja o mais igualitária possível.

O terceiro grupo de assuntos tem a ver com a análise de redes económicas. Através de dados relativos a redes económicas, podemos estudar como foram criadas essas redes, que tipo de redes são e como podem variar os resultados dos nossos modelos económicos quando alteramos o tipo de rede que serve de substracto aos modelos.

O nosso trabalho vai incidir no segundo e terceiro destes grupos.

Uma abordagem de aprendizagem à Econofísica poderá ser feita com mais pormenor nos livros de R. Mantegna e E. Stanley [21], J.-P. Bouchaud e Marc Potters [6], nos artigos de revisão de V. M. Yakovenko [37] e Y. Wang et al. [35] e no forum da Econofísica [39].

Modelos económicos de agentes

O trabalho fundamental consiste em criar modelos que reproduzam situações reais. Estes modelos de interacções económicas necessitam ter um número elevado de agentes, uma determinada riqueza distribuída por cada um desses agentes e uma regra de interacção entre agentes, que dá a dinâmica da riqueza individual. As regras de interacção têm geralmente parâmetros que variam com os modelos.

Certos autores utilizam dinâmicas de extremos, em que o agente escolhido para a troca é sempre o mais pobre que troca com outro escolhido conforme as regras de cada modelo [18, 24, 25]. No capítulo 4 são apresentados estudos de modelos deste tipo.

Outros autores utilizam dinâmicas do tipo Monte-Carlo, em que o par de agentes que vão interagir são escolhidos de forma aleatória. Esta dinâmica, que é a mais utilizada, também é a que melhor se assemelha à realidade, e a que produz resultados mais parecidos com as análises de dados reais. No capítulo 5 o modelo estudado é deste tipo. Vários exemplos desta dinâmica apenas se diferenciam pela regra de interacção entre os agentes que são escolhidos. Em certos casos, os agentes apenas trocam parte da sua riqueza, ou seja, adicionamos uma espécie de “aversão ao risco” ou tendência para a poupança [7, 19, 27, 28], que tanto pode ser igual para todos os agentes, como pode ser aleatória segundo vários tipos de distribuição desse factor de risco. Noutros casos, de acordo com algumas das regras, o agente mais pobre de um par ficará com parte do dinheiro do outro [28] ou o agente mais rico do par fica com uma parte [20].

Quase sempre a riqueza total do sistema é conservada ao longo do tempo [7, 12, 27, 28], mas há casos em que isto não acontece, por vezes a riqueza total diminui [20], outras vezes aumenta [30] e outras vezes tanto pode aumentar como diminuir, é apenas conservada em média [10, 28]. A questão do sistema ser conservativo pode levantar algumas dúvidas, mas como alguns autores justificam, em escalas de tempo pequenas não parece ser muito importante a variação ocorrida no total da riqueza. Se for considerado que há uma grande variação, correcções devidas à inflação podem ser necessárias. A principal justificação para o uso de economias conservadas é a facilidade em tratar analiticamente os modelos.

Normalmente o número total de agentes também é conservado, mesmo que estes tenham riqueza negativa (estejam em débito) [12]; outras vezes, quando um agente passa a ter riqueza igual ou menor que zero, deixa de interagir com os restantes [20].

As interacções podem não ocorrer só com outros agentes, mas também com uma espécie de macro-sistema. É o que acontece no modelo de Das et al. [9] em que as trocas ocorrem a nível microcópico (com outros agentes) e a nível macrocópico, entre os agentes mais ricos e várias empresas ou entidades.

Além dos termos de interacção, são por vezes incluídos processos estocásticos multiplicativos

como factor fundamental de evolução de riqueza dos indivíduos, como se de uma aleatoriedade do mercado ou dos investimentos se tratasse. Os principais modelos a incluir estes processos foram o de Solomon-Richmond [31] e o de Bouchaud-Mézard [5]. Neste último modelo, bastante simples, os autores conseguem prever distribuições em lei de potência para o caso de as trocas se efectuarem numa rede completamente ligada (tipo campo-médio) e também encontram distribuições do tipo log-normal no caso de a rede ser completamente desligada (agentes independentes), ou seja, se só existirem fenómenos estocásticos multiplicativos. No mesmo trabalho os autores incluem outros factores importantes no estudo da evolução de riqueza, como por exemplo as taxas: uma taxa sobre o rendimento dos indivíduos, que é uma taxa sobre aquilo que os agentes vão ganhando ao longo do tempo e uma taxa sobre o capital que é uma taxa sobre a riqueza que o agente possui naquele determinado momento. Algo bastante importante que os autores deste trabalho conseguem mostrar é que as taxas sobre o rendimento e as trocas entre agentes tendem a reduzir as desigualdades, enquanto que as taxas sobre o capital, por vezes podem não ser taxas verdadeiramente sociais. A partir deste modelo, muitos outros foram pensados, em que por exemplo o que variou foi o tipo de rede em que as interacções ocorriam [17, 33], ou em vez de processos estocásticos multiplicativos se incluíam processos estocásticos aditivos [10].

Um das principais contribuições da Física nestes estudos decorre da utilização de modelos introduzidos para o estudo de outros fenómenos. Um dos casos é o estudo dos meios granulares. Um dos modelos mais conhecidos neste contexto foi o Gás Ideal de Meios Granulares, que descreve um meio granular como um gás de moléculas que colidem aleatoriamente e perdem parte da sua energia aquando da colisão. Vários autores utilizaram este mesmo modelo para descreverem um conjunto de agentes, do qual se escolhiam pares aleatoriamente e de seguida eles interagiam [7, 27, 30].

Uma das originalidades da contribuição dos físicos para o estudo de modelos económicos está na introdução de conceitos como escalonamento, universalidade, sistemas desordenados e sistemas auto-organizados, que provaram ser de grande utilidade noutros campos.

Redes económicas

Em contextos sociais, frequentemente temos a sensação de que vivemos num “pequeno mundo”. Experimentalmente, foi descoberto que escolhendo duas quaisquer pessoas dos E.U.A., aleatoriamente, a cadeia mais curta que as une (distância mínima média entre duas pessoas) é composta por um número muito pequeno de pessoas intermediárias (6 em média). Uma rede em que o comprimento da menor cadeia que liga dois vértices é muito menor que o número total de vértices da rede, é genericamente designada por *Pequeno Mundo*.

A noção de rede tem tomado um valor central nos nossos dias: a Internet e a WWW têm alterado as nossas vidas; a nossa existência é baseada em várias redes biológicas; estamos envolvidos em várias redes de relações sociais e económicas. Por isso, vários estudos têm ocorrido ultimamente por parte de físicos, sobre as características das redes reais: a WWW, as redes eléctricas, as redes de colaboração de autores, as redes de palavras, as redes neuronais, as redes de jogadores de futebol, e muitas outras. As principais características de uma rede são: o grau de conectividade, que é o número de ligações de cada nodo; o coeficiente de agregação (*clustering*), que é o número de triângulos que uma rede possui, ou seja, o número de ligações que os nodos vizinhos de um sítio têm entre si; a distância mínima média entre nodos, ou seja, o número mínimo de ligações que é preciso percorrer para se chegar de um nodo a outro.

O estudo das redes económicas também tem permitido desenvolver novos conceitos na Econofísica tanto através de estudos de redes de negócios, como por exemplo redes de empresas, como através do estudo das redes sociais que servem de substracto aos modelos económicos estudados.

No caso do estudo das redes de empresas, um factor importante a ter em conta é que critério vamos usar para dizer que duas empresas estão ligadas. Por exemplo, Souma et al. [34] estudaram uma rede de empresas, em que estas tinham uma ligação se por acaso estivessem ligadas ao mesmo banco. Mas outros exemplos existem sobre a construção deste tipo de redes.

No nosso trabalho, podemos ver que tanto a estrutura da rede como a dinâmica da mesma são um factor importante para a caracterização das distribuições de riqueza estudadas.

Destacamos o livro de S. N. Dorogovtsev e J. F. F. Mendes [11], para uma melhor abordagem ao conceito de redes complexas e efeitos de *Pequeno Mundo*.

Organização da dissertação

Após esta breve introdução aos temas que foram investigados, no capítulo 2 fazemos uma pequena introdução a alguns conceitos e ferramentas matemáticas que serão utilizados durante todo o trabalho. No capítulo seguinte (3), realizamos um estudo sobre as distribuições de riqueza com base em dados reais de Portugal e de outros países. Os estudos de modelos económicos de trocas de riqueza são tratados nos capítulos 4 e 5. E por fim apresentamos uma conclusão sobre o trabalho realizado e indicamos pistas de trabalho futuro.

Capítulo 2

Distribuições e índices económicos

Vários tipos de distribuição e de índices económicos irão ser tratados ao longo deste trabalho. Por esse motivo, resolvemos incluir este capítulo em que tentámos apresentar todas essas distribuições e todos os índices que normalmente são estudados por este ramo da Física.

As distribuições mais frequentes são a distribuição log-normal, a distribuição de Gibbs ou exponencial, a distribuição Gamma e a lei de potência. Os índices que normalmente são utilizados para caracterizar as distribuições são o expoente de Pareto, o índice de Gibrat e o índice de Gini.

As curvas de Lorenz também costumam ser utilizadas para o estudo das desigualdades.

2.1 Distribuição log-normal

Uma distribuição bastante popular na Finança Matemática é a distribuição **log-normal**. Definir X como uma variável aleatória log-normal, significa dizer que $\log X$ é normal ou Gaussiana. A distribuição é definida da seguinte maneira:

$$P_{LN}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\log^2(x/x_0)}{2\sigma^2}\right) \quad (2.1)$$

em que o índice de Gibrat é dado por: $\beta = 1/\sqrt{2\sigma^2}$.

Define-se momentos de uma distribuição como a média das potências de X :

$$m_n = \langle x^n \rangle = \int x^n P(x) dx$$

Do ponto de vista teórico, os momentos têm uma importância grande, porque se prova que o conhecimento dos momentos é equivalente ao conhecimento da distribuição. É por vezes conveniente introduzir a noção de função característica da função de distribuição:

$$\hat{P}(z) = \int e^{izx} P(x) dx$$

Os momentos, podem assim ser obtidos através de derivadas sucessivas da função característica em $z = 0$:

$$m_n = (-i)^n \frac{d^n}{dz^n} \hat{P}(z) \Big|_{z=0}$$

Com o logaritmo da função característica, podemos definir os cumulantes:

$$c_n = (-i)^n \frac{d^n}{dz^n} \ln \hat{P}(z) \Big|_{z=0}$$

O cumulante c_n é uma combinação polinomial dos momentos m_p com $p \leq n$. Por exemplo, $c_2 = m_2 - m^2 = \sigma^2$, m é a média e σ é o desvio padrão. Por vezes normalizam-se os cumulantes para obtermos quantidades adimensionais, designadas por cumulantes normalizados: $\lambda_n = c_n/\sigma^n$. Duas destas quantidades têm propriedades muito importantes. É o caso do terceiro e quarto cumulantes normalizados, também designados por *skewness* (ζ) e *kurtosis* (κ), respectivamente.

$$\begin{aligned} \zeta &= \lambda_3 = \frac{\langle (x - m)^3 \rangle}{\sigma^3} \\ \kappa &= \lambda_4 = \frac{\langle (x - m)^4 \rangle}{\sigma^4} - 3 \end{aligned}$$

Uma das importâncias dos cumulantes é a informação que podemos retirar dos seus valores para a análise das distribuições. Por exemplo, uma distribuição gaussiana é caracterizada pelo facto de todos os cumulantes com ordem superior a 2 serem nulos. A *kurtosis* (κ) pode ser vista como a distância entre uma distribuição $P(x)$ e uma gaussiana, ou seja, mede o excesso de probabilidade nas caudas. A *skewness* (ζ) mede a assimetria da distribuição.

Os momentos da distribuição log-normal são dados por [6]:

$$m_n = x_0^n \exp\left(\frac{n^2 \sigma^2}{2}\right) \quad (2.2)$$

enquanto que a *skewness* (ζ) e a *kurtosis* (κ) são respectivamente:

$$\zeta = \frac{e^{3\sigma^2} - 3e^{\sigma^2} + 2}{(e^{\sigma^2} - 1)^{3/2}} \quad (2.3)$$

$$\kappa = \frac{e^{6\sigma^2} - 4e^{3\sigma^2} + 6e^{\sigma^2} - 3}{(e^{\sigma^2} - 1)^2 - 3} \quad (2.4)$$

2.2 Distribuição em lei de potência

Um dos primeiros estudos, do ponto de vista estatístico, sobre as riquezas individuais em economias estáveis, mostrou que as distribuições cumulativas de riqueza seguiam, na zona de maior riqueza, leis de potência para diferentes países, apenas se diferenciando no expoente da distribuição [23]. Desde essa altura, as leis de potência em Economia ficaram também conhecidas

como distribuições de Pareto:

$$P_{>}(w) \propto w^{-\alpha} \quad (2.5)$$

em que neste caso, $P_{>}(w)$ é o número de pessoas com riqueza w , ou superior, e α é o expoente de Pareto. Quanto menor for o expoente, maior é a desigualdade na distribuição de riqueza.

2.3 Distribuição de Gibbs

Alguns autores [12] afirmaram que num sistema económico fechado, a quantidade total de riqueza é conservada. Logo no equilíbrio a probabilidade de distribuição de riqueza deve ser dada por uma lei de Boltzmann-Gibbs:

$$P(w) = Ce^{-w/T} \quad (2.6)$$

em que w é a riqueza e T é uma “temperatura” equivalente ao valor médio de riqueza por agente. Das condições:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P(w)dw &= 1 \\ \int_0^{\infty} wP(w)dw &= W/N \end{aligned}$$

em que W é a quantidade total de riqueza e N é o número total de agentes, podemos concluir que $C = 1/T$ e $T = W/N$.

2.4 Distribuição Gamma

A distribuição Gamma não é tão comum como as outras, mas em certos resultados é verificada. Esta distribuição é parecida com a exponencial para valores de w muito elevados:

$$P(w) = Cw^{\eta}e^{-w/T} \quad (2.7)$$

em que η e T são dois parâmetros.

2.5 Curva de Lorenz e índice de Gini

As desigualdades de distribuição da riqueza podem ser bem estudadas através de duas quantidades. Uma delas é a curva de Lorenz que é dada por:

$$L(\nu) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\nu} wP(w)dw$$

e mede a fracção de riqueza total que é atribuída aos 100ν por cento mais pobres da sociedade ($\nu \in [0, 1]$), em que $\rho = \int_0^1 P(w)dw$ e $P(w)$ é uma função densidade de probabilidade de riqueza w .

Outra quantidade é o índice de *Gini* que é dado por:

$$\begin{aligned} G &= \frac{\int_0^1 (\nu - L(\nu))d\nu}{\int_0^1 \nu d\nu} \\ &= 1 - 2 \int_0^1 L(\nu)d\nu \end{aligned} \tag{2.8}$$

e que toma valores entre 0 por cento (igualdade perfeita) e 100 por cento (desigualdade perfeita). Quanto mais próxima da recta de igualdade perfeita estiver a curva de Lorenz, mais igualitário é o sistema económico.

Capítulo 3

Dados Reais de Distribuição de Riqueza

A interacção entre diferentes grupos, como a troca, cooperação ou competição, é um aspecto importante na Economia. Como resulta das interacções, a distribuição de riqueza é uma informação bastante importante para o estudo das próprias interacções. Por isso, é necessário o estudo das distribuições de “riqueza”, e aqui riqueza pode ser entendido como o Produto Interno Bruto (**PIB**) para um país, o número de funcionários, vendas ou capital de uma empresa, e o salário ou rendimento de uma pessoa.

Não é fácil descrever a riqueza dos indivíduos, principalmente porque temos que tomar em atenção bens como casas, carros, joias, obras de arte, dinheiro investido e todo o dinheiro que é transaccionado pelos indivíduos e que lhes permite viver o dia-a-dia. Sem dúvida que as classes mais pobres, apenas dispõem de uma percentagem mínima de riqueza que lhes serve apenas para sobreviver, enquanto que as outras podem tentar investir parte da sua riqueza. Por isso, a distribuição de riqueza que normalmente é dada empiricamente por estudos de salários ou quantidade de transações efectuadas estará muito mais de acordo com a realidade para as classes mais baixas, do que para as classes mais altas.

Entender a distribuição de riqueza tem sido um problema clássico de economia, desde que, Vilfredo Pareto descobriu que a zona de maior riqueza segue uma distribuição em lei de potência. O estudo das distribuições ao longo dos anos tem mostrado que para qualquer uma, a cauda da zona de maior riqueza é uma lei de potência, embora com expoente variável de país para país e de ano para ano. No entanto, para a zona de menor riqueza, ainda não é possível descrever uma lei universal para a distribuição. Por vezes, é uma distribuição de Gibbs (exponencial), outras vezes é uma distribuição log-normal e também ocorre ser uma distribuição Gamma.

O nosso estudo vai centrar-se na distribuição de rendimento de dados obtidos para Portugal

[38], e para outros países desenvolvidos [40, 41].

3.1 Exemplos anteriormente estudados

Vários estudos já foram feitos sobre dados reais de riqueza, rendimento, salários, valores de heranças, de forma a se poder tirar conclusões sobre como variam estas distribuições de país para país e que factores podem originar essas variações.

Para os Estados Unidos da América vários estudos foram já efectuados até ao momento: para 1935-1936 a distribuição cumulativa de rendimento pessoal tinha uma cauda para os 1% mais ricos em lei de potência com um expoente de Pareto, $\alpha = 1.63$, enquanto que o resto da distribuição era dado por uma log-normal [22]; para 1980 e 1989 a distribuição cumulativa de rendimento para os 1% mais ricos é dada por leis de potência com os expoentes 2.2 e 1.63, respectivamente [29]; para 1993 e 1996 a distribuição do rendimento individual é dada por uma exponencial [13]; para 1997 o estudo do imposto sobre o rendimento mostra uma zona exponencial para rendimento menor que 100 k\$ e uma lei de potência para os 3% mais ricos, sendo o valor do índice de Gini para estes dados de 0.5 [15]; para o mesmo ano (1997) o estudo da riqueza mostra que para 90% da população a distribuição pode ser dada por uma distribuição de Gibbs, e que para os 10% mais ricos por uma lei de potência com $\alpha = 1.6$ [7]; para 1998 podemos ver uma distribuição de rendimento com lei de potência para os 5% mais ricos com expoente $\alpha = 1.7$ e uma distribuição exponencial para os 95% restantes; para 2001 o estudo do rendimento mostra uma distribuição Gamma para a zona de classes pobre e média (aproximadamente 99% da população) da seguinte forma $p(w) = 0.48w^{0.57} \exp(-0.03w)$ [29]; para 2002 a distribuição de rendimento semanal tanto pode ser modelada por uma distribuição log-normal como por uma função de Boltzmann [36].

Para o Reino Unido os estudos já efectuados até ao momento: de 1992-2000 o rendimento baixo e médio pode ser modelado tanto por uma distribuição log-normal como por uma função de Boltzmann [36]; para 1996 e 1998-1999 a distribuição de riqueza tem uma lei de potência na cauda para 1% da população mais rica de valor $\alpha = 1.85$ [29]; para o mesmo ano (1996) outro estudo baseado nas taxas sobre as heranças (imposto sucessório) mostra que acima dos 100 k£ podemos ver uma lei de potência com expoente de Pareto $\alpha = 1.9$ e abaixo dos 100 k£ podemos ver uma distribuição exponencial com valor médio igual a 59.6 k£ [14].

Para o Japão também muitos estudos já foram efectuados devido à elevada quantidade de dados disponíveis: de 1887-1998 o estudo da distribuição de rendimento mostra lei de potência na zona mais rica com o expoente de Pareto médio igual a 2.0 e a oscilar entre 1.3 e 2.6 [32]; de 1955-1998 a distribuição de rendimento mostra uma zona log-normal com valor de índice de Gibrat que oscila entre 2.2 e 3.1 e índice de Pareto entre 1.3 e 2.6 [32]; para 1998 o rendimento

mostra uma zona log-normal para 99% da população com valor médio $x_0 = 4 \times 10^6$ yen e índice de Gibrat igual a 2.68; para os 1% da população mais ricos pode-se ver uma lei de potência com expoente de Pareto $\alpha = 2.06$ [32]; para o mesmo ano (1998) outros estudos mostram que, tanto para a distribuição de rendimento como para a distribuição do imposto sobre o rendimento, existe uma lei de potência na zona mais rica com expoente de Pareto igual a 1.98 e 2.5, respectivamente, enquanto que no resto da distribuição se pode ver uma log-normal [2]; para 2000 o estudo da distribuição de riqueza mostra uma lei de potência para os 10% mais ricos com o valor do expoente de Pareto igual a 2.0.

Para outros países também há estudos efectuados, mas não para uma variedade de anos tão grande: para a Austrália de 1993-1997 o rendimento anual foi estudado e podemos ver uma zona log-normal e uma zona em lei de potência com expoente de Pareto entre 2.2 e 2.6 [10]; para a Itália entre 1977-2002 um estudo do rendimento e riqueza mostra que 99% da população é descrita por uma distribuição log-normal enquanto que 1% dos mais ricos é descrita por uma lei de potência com expoente de Pareto variando entre 2.09-3.45 [8].

Um estudo elaborado para vários países em diferentes anos, mostrou algo diferente dos anteriores, ou seja, uma distribuição em lei de potência na zona dos mais ricos mas também o mesmo tipo de distribuição na zona dos mais pobres. Os exemplos foram: Estados Unidos da América para 1997, Canadá para 1996, Sri Lanka para 1981 e Boémia para 1933 [26].

Outro estudo também um pouco diferente, mas que mostra distribuições do mesmo tipo, foi o realizado através da análise do tamanho de várias empresas europeias e onde se pode ver também uma distribuição em lei de potência do tipo Pareto-Zipf, porque o expoente é de ordem 1 [16].

Um trabalho sobre o estudo da distribuição de riqueza através do tamanho da habitação, apresenta uma nova forma de interpretar estas distribuições. Para uma civilização do Antigo Egipto (Akhetaten), Abul-Magd [1] conseguiu, através da área das casas, descrever a distribuição de riqueza dos seus habitantes, na qual observou também uma distribuição em lei de potência para a zona dos mais ricos com um expoente de Pareto de 1.59.

3.2 Caso Português

O nosso estudo tem como objectivo tentar perceber se a distribuição cumulativa de riqueza em Portugal também segue uma lei de potência, na cauda da distribuição, e com que expoente de Pareto e para além disso, que tipo de distribuição podemos encontrar nas outras zonas de riqueza. Os dados relativos a Portugal foram retirados de uma tabela de estatísticas de declarações de impostos [38] cedida pela Direcção Geral dos Impostos - DGCI. Os dados referem-se a 3 anos consecutivos, 1998-2000, e estão organizados em 20 escalões. O nosso tratamento dos dados

apenas se deveu à passagem dos vários escalões a uma distribuição cumulativa dos rendimentos, como se pode ver pela Figura 3.1.

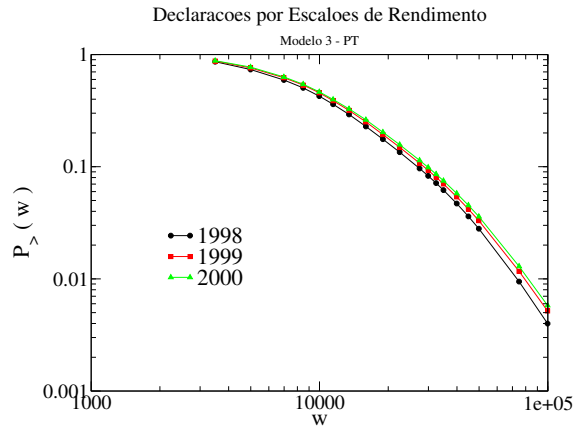


Figura 3.1: Distribuição cumulativa de rendimento para Portugal durante 3 anos consecutivos, em que os valores de w são dados em euros.

Tentámos elaborar vários ajustes aos dados que nos foram fornecidos, tendo concluído que o melhor ajuste se obtém usando uma função Gamma e uma lei de potência com os seguintes valores: para 1998 (Figura 3.2), $\alpha = 2.46$, $\eta = 0.02$ e $T = 10000$; para 1999 (Figura 3.3), $\alpha = 2.35$, $\eta = 0.025$ e $T = 10000$; para 2000 (Figura 3.4), $\alpha = 2.30$, $\eta = 0.028$ e $T = 10000$. Estes parâmetros são os que se encontram nas equações (2.5) e (2.7).

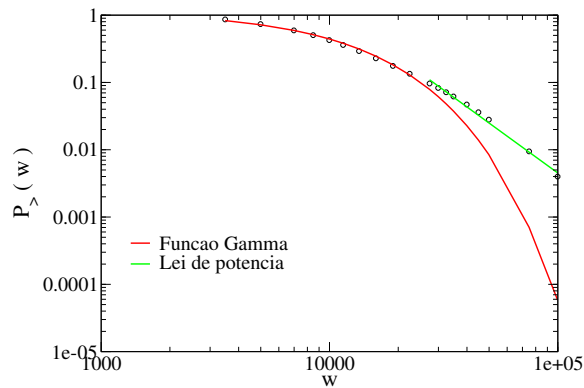


Figura 3.2: Distribuição cumulativa de rendimento para Portugal, em 1998, com o respectivo ajuste para cada zona de rendimento. Os valores de w são dados em euros.

Tal como se viu para outros casos, também no caso Português a zona de Pareto se ajusta

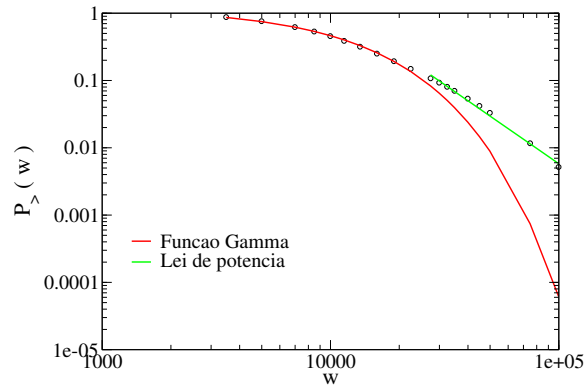


Figura 3.3: Distribuição cumulativa de rendimento para Portugal, em 1999, com o respectivo ajuste para cada zona de rendimento. Os valores de w são dados em euros.

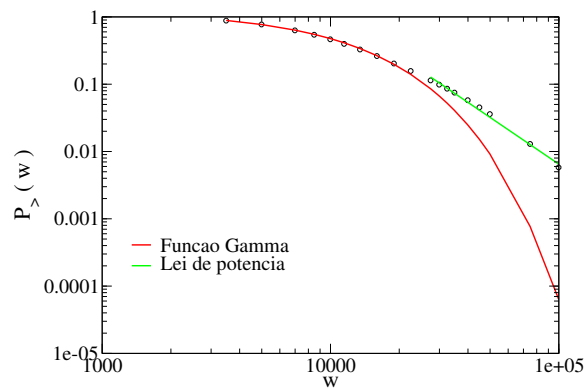


Figura 3.4: Distribuição cumulativa de rendimento para Portugal, em 2000, com o respectivo ajuste para cada zona de rendimento. Os valores de w são dados em euros.

aos 10% mais ricos.

Outro estudo que fizemos com estes valores das declarações de impostos é relacionado com a desigualdade de riqueza. Para isso, estudamos as curvas de Lorenz e índice de Gini para os mesmos anos (Figura 3.5).

Também temos exemplos de algumas curvas de Lorenz e índices de *Gini* (Figura 3.6) para vários países que recentemente se juntaram à União Europeia. Estes exemplos foram retirados dos indicadores mundiais, referidos anteriormente [40]. Como não sabemos a fonte para cada um dos países, talvez seja difícil a comparação com os dados relativos a Portugal, visto que estes se referem a declarações de rendimentos e os outros podem ter como base de estudo uma fonte

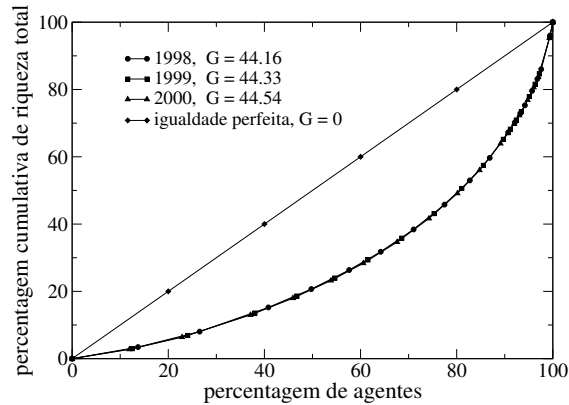


Figura 3.5: Curvas de Lorenz e índice de *Gini* para dados relativos à distribuição de rendimento em Portugal para 1998-2000.

completamente diferente.

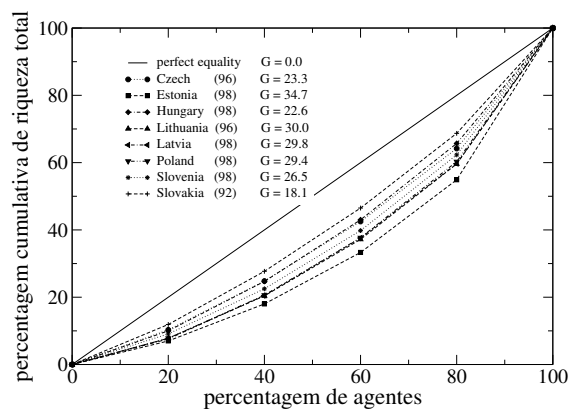


Figura 3.6: Curvas de Lorenz e índice de *Gini* para dados relativos à distribuição de riqueza em vários países que aderiram recentemente à União Europeia.

3.3 Outros casos

Para além dos dados portugueses conseguimos obter outros dados sobre rendimento e riqueza, tanto em pesquisa na internet, como através de outros investigadores que nos cederam parte dos seus dados.

Um dos exemplos é um estudo do rendimento semanal para o Reino Unido para vários anos (desde 1992 até 2002), tanto da distribuição da riqueza, como da distribuição cumulativa da

mesma.

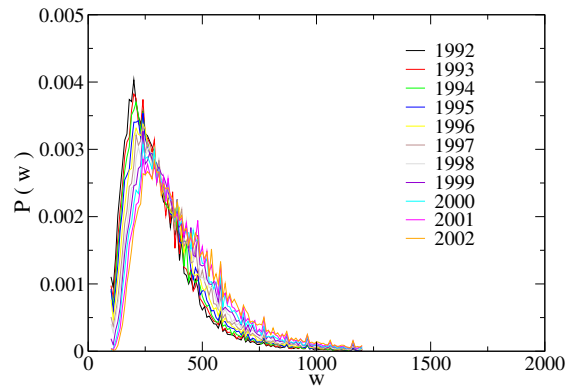


Figura 3.7: Distribuição de rendimento semanal no Reino Unido para vários anos consecutivos desde 1992 até 2002. O valor de w é dado em libras.

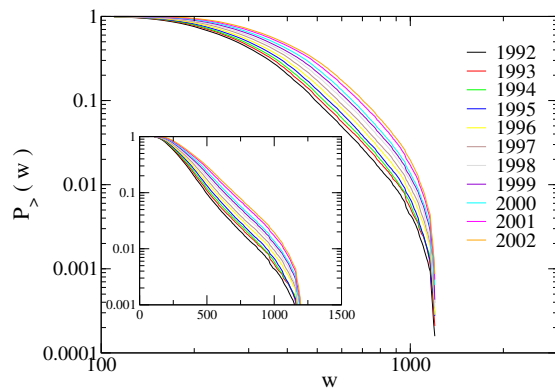


Figura 3.8: Distribuição cumulativa do rendimento semanal no Reino Unido para vários anos consecutivos desde 1992 até 2002. O valor de w é dado em libras. Na janela mais pequena podemos ver uma representação log-normal dos mesmos dados, notando que em certas zonas da distribuição se pode ver partes lineares, que nos levam a concluir que há zonas que podem ser representadas por uma distribuição exponencial.

Para o ano específico de 2002 fizemos uma análise sobre que tipo de distribuição podemos encontrar, e tanto para a distribuição de rendimento, como para a distribuição cumulativa, podemos ver que uma distribuição exponencial se ajusta bastante bem a certas zonas do nosso gráfico (Figuras 3.9 e 3.10).

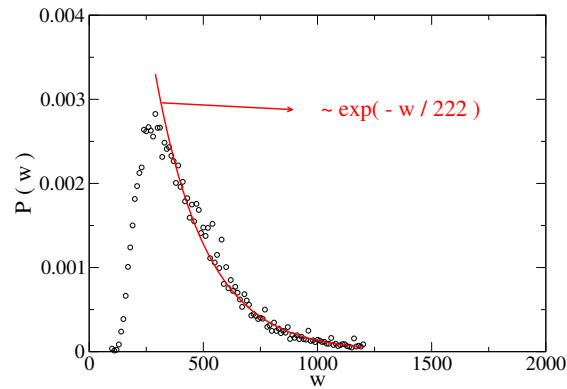


Figura 3.9: Distribuição de rendimento semanal no Reino Unido para o ano de 2002. Podemos ver o melhor ajuste a uma certa zona da curva, dada por uma distribuição exponencial.

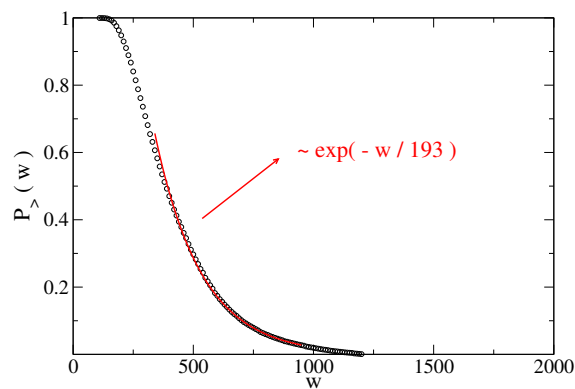


Figura 3.10: Distribuição cumulativa de rendimento semanal no Reino Unido para o ano de 2002. Podemos ver o melhor ajuste a uma certa zona da curva, dada também por uma distribuição exponencial, como seria de esperar.

Outros dados que conseguimos adquirir sobre distribuição de riqueza, foram obtidos na internet no sítio da *Inland Revenue* [41]. Estes dados foram retirados da análise do imposto sucessório, taxa sobre as heranças. Ou seja, como não é fácil medir a riqueza dos indivíduos, tentaram elaborar uma tabela através das declarações de riqueza das pessoas quando morrem, e dessa forma extrapolaram para o resto da população do Reino Unido. Os dados referem-se a dois anos consecutivos, 2000-2001. A representação das distribuições cumulativas encontra-se nas Figuras 3.11 e 3.12, respectivamente.

Como se pode ver, também para estes dados conseguimos ver uma distribuição exponencial

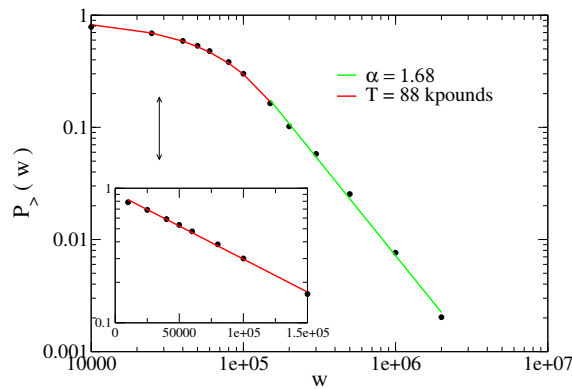


Figura 3.11: Distribuição cumulativa de riqueza através de dados de heranças no Reino Unido para o ano de 2000. O ajuste à parte inicial da curva encontra-se na caixa mais pequena.

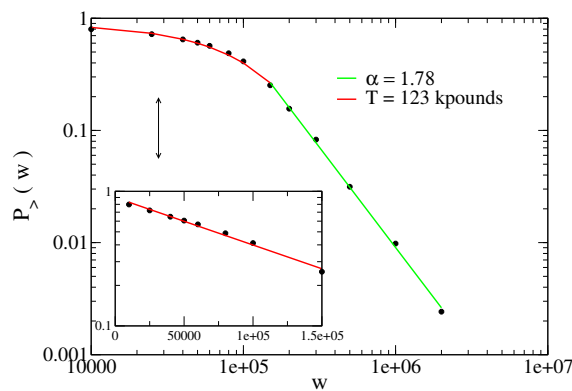


Figura 3.12: Distribuição cumulativa de riqueza através de dados de heranças no Reino Unido para o ano de 2001. O ajuste à parte inicial da curva encontra-se na caixa mais pequena.

para a zona da classe mais baixa e classe média, e uma distribuição em lei de potência para a zona de classe alta.

3.4 Comentário

Embora os dados disponíveis para Portugal sejam escassos, o caso português assemelha-se aos outros países. Na zona dos mais pobres podemos considerar uma distribuição Gamma e nos 10% mais ricos uma lei de potência. Devido ao número tão pequeno de pontos é sempre muito difícil elaborar ajustes. Se representámos a primeira parte das nossas distribuições por uma

função Gamma, também poderíamos ter representado por uma exponencial, em que o ajuste não estaria completamente mal. Mesmo a zona de lei de potência, poderia ser ajustada por outro tipo de distribuição. Este é um dos erros que pode ocorrer na análise de dados quando eles são tão escassos.

Através do valor do expoente de Pareto (α) e do índice de Gini, parece haver, ao longo dos 3 anos estudados uma ligeira tendência para o aumento da desigualdade.

Para o Reino Unido, os dados analisados mostram uma distribuição exponencial, e no caso dos dados relativos às heranças podemos ver leis de potência na zona dos 10% mais ricos.

Para todas as análises efectuadas, o valor do expoente de Pareto encontra-se dentro do intervalo normalmente indicado pelos outros trabalhos, 1.5-2.5.

Capítulo 4

Modelo Económico de Extremos - CEMM

Por vezes, o estudo dos modelos económicos implica o estudo das Redes Complexas nas quais as transacções ocorrem. Para tal, é necessário saber como se formam estas redes, e que diferenças existem no estudo de diversas dinâmicas em vários tipos de redes.

Neste capítulo vamos estudar um modelo muito simples aplicado numa rede estática (que não tem qualquer tipo de evolução ao longo do tempo).

Vamos começar por explicar um modelo de trocas conservativas, idealizado por Pianegonda et al. [24]. Mostraremos os resultados obtidos para a distribuição de riqueza, tanto para o modelo unidimensional, como para o modelo aplicado numa rede binomial e faremos um breve comentário ao modelo em si, de acordo com o que nos parece ser a realidade numa sociedade de agentes em interacção.

4.1 Características do CEMM

CEMM são as iniciais para *Conservative Exchange Market Model*, ou seja Modelo de Mercado de Trocas Conservativas. As principais características deste modelo são: o sistema auto-organizar-se num estado crítico que maximiza a condição económica de cada participante; as trocas entre agentes ocorrerem de uma forma conservativa, sem perdas ou ganhos de riqueza total do sistema; não ter parâmetros. Estes mecanismos levam-nos a uma distribuição de riqueza exponencial em que um número muito pequeno de agentes ricos estão estáveis no tempo, e todos os outros se encontram acima de um certo limiar de riqueza.

Embora pareça mais realista modelar uma economia não conservativa, podemos sempre pensar que estamos a tratar de um ambiente com recursos finitos. E será a partir do estudo de uma economia conservativa, que podemos partir para a análise de algo mais abrangente, em que

a riqueza não será conservada, como já tinha sido apresentado na introdução.

4.2 Dinâmica do modelo

Este modelo é caracterizado por uma rede, em que cada sítio representa um agente. No início, distribuimos riqueza pelos agentes segundo uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1[$. O processo desenrola-se por uma dinâmica de extremos, ou seja, o agente mais pobre (agente com valor de riqueza menor) é escolhido de forma a poder melhorar o seu rendimento, de acordo com uma dinâmica do tipo Bak-Sneppen [3].

Em cada passo de tempo, o agente mais pobre vai realizar interacções com outros agentes. Estas interacções vão-se realizar da seguinte forma: como o agente mais pobre sente uma pressão para melhorar a sua condição, ele irá fazer tudo para melhorar a sua vida, por isso, vamos gerar um novo valor de riqueza para este agente, extraído de uma distribuição uniforme, também de intervalo $[0, 1[$. A riqueza que é ganha (ou perdida) por este agente será à custa dos seus vizinhos, e será igualmente dividida por todos os seus vizinhos próximos. Agentes com valor negativo de riqueza são permitidos, embora não permaneçam durante muito tempo nessa situação, porque desse modo quase de certeza que serão o agente com valor de riqueza mais baixo, e assim terão a sua chance de melhorar a sua condição no passo de tempo seguinte.

Podemos considerar mais que um tipo de rede de interacções neste modelo. Analisámos um caso local e um caso global e também fizemos o estudo do modelo numa rede binomial.

4.2.1 Caso Local

Considerando o modelo local, que consiste numa rede unidimensional com N vértices, cada vértice representando um agente, se escolhermos um agente que se encontra no vértice i da rede, os seus vizinhos serão os agentes que se encontram nas posições $i - 1$ e $i + 1$, ou seja, cada agente tem dois vizinhos devido a condições fronteira periódicas (anel unidimensional). Ao escolhermos o agente com menor riqueza (w_{min}), e depois de gerar um novo valor de riqueza para esse agente (w_{new}), temos que actualizar o valor de riqueza dos seus dois agentes vizinhos. O valor que cada vizinho perde, ou recebe, é dado por: $\Delta = (w_{new} - w_{min})/2$, conforme Δ seja positivo, ou negativo. Depois de actualizar as novas riquezas do agente mais pobre e dos seus vizinhos, a dinâmica segue, escolhendo o agente mais pobre para o instante $t + 1$.

4.2.2 Caso Global

No modelo global, a dinâmica difere da anterior devido à escolha dos vizinhos: o agente i troca com dois quaisquer dos restantes agentes (tipo campo médio). Esta versão do modelo é do tipo

economia global, pois quaisquer dois agentes têm uma probabilidade de interagirem diferente de zero, ao contrário do que acontecia no modelo local.

4.2.3 Rede Binomial

Ao simular este modelo numa rede aleatória, as diferenças no algoritmo são mínimas. No início construímos a nossa rede segundo o modelo de Erdős-Rényi, em que consideramos apenas o número de nodos da rede (N) e o valor da conectividade¹ média (\bar{k}) da mesma. Assim criámos uma rede com N nodos, cada um conectado com k outros aleatoriamente (com probabilidade p). Estas redes apenas têm um parâmetro independente, por exemplo \bar{k} :

$$\bar{k} = pN$$

Os nodos encontram-se inicialmente desligados e serão ligados escolhendo pares de nodos aleatoriamente. Para isso, começamos por escolher um par de nodos e geramos um número aleatório (p_i) entre $[0, 1[$, se: $p_i < p$ então os dois nodos ligam, e de seguida varremos todos os pares de nodos para ver quais ligam com quais. Desta forma originamos redes com distribuição binomial de conectividades do tipo:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

como se pode ver pela Figura 4.1.

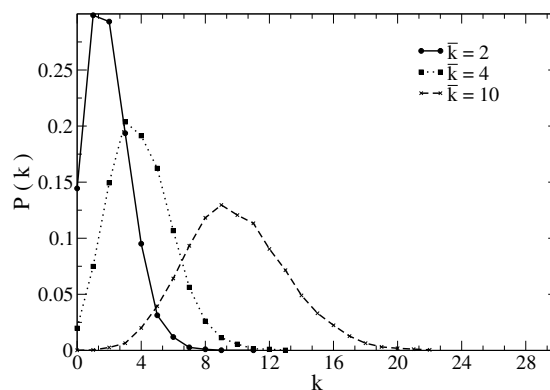


Figura 4.1: Distribuição das conectividades dos nodos ($P(k)$) para diferentes conectividades médias, \bar{k}

¹Conectividade é o número de ligações de um determinado nodo.

A rede pode ser caracterizada através da matriz de adjacência, que é uma matriz de 0 e 1's, em que os 1's representam as ligações entre um par de vértices.

A dinâmica do modelo só difere porque agora o agente mais pobre, em vez de trocar com dois vizinhos ou dois agentes escolhidos aleatoriamente, irá trocar com os seus primeiros vizinhos da rede, e o valor da troca (Δ) irá ser: $\Delta = (w_{new} - w_{min})/k_{min}$, em que k_{min} o número de vizinhos do agente mais pobre. Caso existam agentes com conectividade nula, eles nunca entrarão nas interações ao longo da simulação, e também não serão considerados para o estudo da distribuição de riqueza, consideramos que estes agentes sem ligações não pertencem à sociedade que queremos analisar. Os agentes com conectividade igual a 1 apenas trocam com o seu vizinho.

4.3 Resultados da Distribuição de Riqueza

Todas as simulações deste modelo ocorreram até atingirmos o estado estacionário. Para isso calculámos o valor do desvio da riqueza, $\langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2$ e parámos a simulação depois deste valor estabilizar. Isso ocorreu para valores de 10^3 transacções médias por agente.

As simulações deste sistema mostram que, no estado estacionário, quase todos os agentes se auto-organizam com riquezas acima de um certo valor mínimo de riqueza, e acima desse valor a distribuição de riqueza é Gaussiana. A maior parte dos agentes encontra-se no que se poderá chamar de uma “classe média”.

Como podemos ver na Figura 4.2, nas simulações efectuadas para o modelo local, para um sistema com 10000 agentes (10^3 transacções médias por agente e para 1000 médias deste estado final), obtemos uma curva normalizada, com o valor mínimo de riqueza muito próximo do valor 0.4, e com uma distribuição segundo uma cauda Gaussiana a partir desse valor dada por:

$$P(w) = C \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.1)$$

em que $\sigma = 0.2334$.

Os valores para o mesmo modelo, publicados anteriormente por Pianegonda et al. [25], mas apenas com $N = 1000$ agentes são bastante próximos dos nossos: $\sigma = 0.228$ e o limiar de pobreza perto de $w \simeq 0.4$.

No modelo global, o nosso sistema também é de 10000 agentes e os estudos da distribuição também ocorrem para o estado estacionário (após 10^3 transacções por agente e para 1000 médias desse estado). Como se pode ver pela Figura 4.3 o valor mínimo de riqueza da nossa distribuição está próximo de 0.2 e a distribuição a partir desse valor também é dada por uma distribuição do tipo da do caso local (equação 4.1), mas com $\sigma = 0.5813$.

Os valores publicados por Pianegonda et al. [25] para este modelo, mas com apenas $N = 1000$ agentes, são também bastante aproximados dos nossos: $\sigma = 0.567$ e o limiar de pobreza

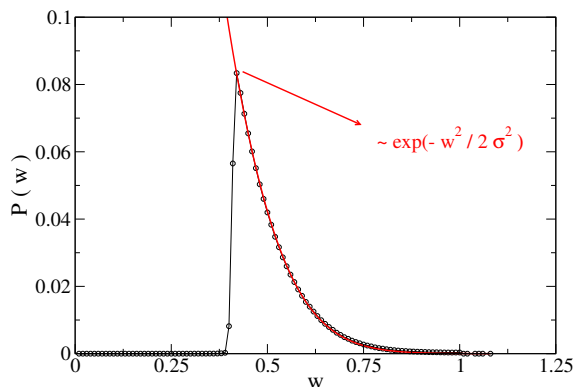


Figura 4.2: Simulação de uma economia local, para $N = 10000$ agentes. O gráfico representa a distribuição de riqueza dos N agentes no estado estacionário (que é atingido após 10^3 transacções médias por agente). Os valores referem-se a 1000 médias do estado final. A curva a cheio representa o melhor ajuste à distribuição representada, que é dada por uma distribuição segundo uma cauda Gaussiana.

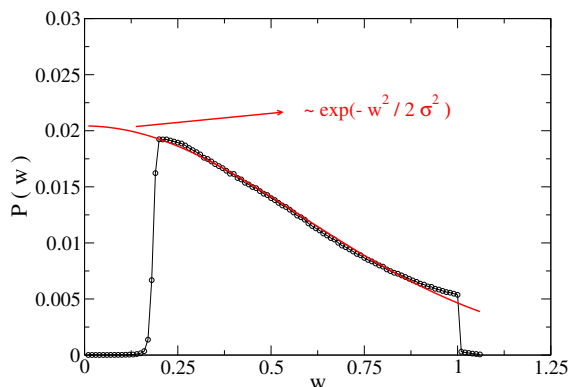


Figura 4.3: Simulação de uma economia global (tipo campo médio), para $N = 10000$ agentes. O gráfico representa a distribuição de riqueza dos N agentes no estado estacionário (que é atingido para 10^3 transacções por agente). Os valores referem-se a 1000 médias do estado final. A curva a cheio representa o melhor ajuste à distribuição representada, que é dada por uma distribuição segundo uma cauda Gaussiana.

perto de $w \simeq 0.2$.

Uma diferença bastante acentuada entre os resultados dos modelos local e global é a distribuição de agentes na classe média. Como se pode ver pelo gráfico do modelo global, a classe

média está melhor distribuída (é mais alargada), enquanto que no modelo local, há bastantes mais agentes na zona mais pobre da sociedade, embora com uma pobreza superior aos mais pobres do modelo global.

Estas características mostram que o sistema tende para um estado estacionário de auto-organização crítica, tal como em fenómenos físicos como as avalanches em pilhas de areia [4]. A comparação com este tipo de fenómenos físicos tem todo o interesse, porque a dinâmica que governa o modelo tem as suas semelhanças. Ou seja, no caso local, quando os vizinhos do agente que se encontra no vértice i lhe dão uma parte da sua riqueza, a probabilidade de o agente com menor riqueza no passo de tempo seguinte ser um destes vizinhos, é muito grande. Desta maneira, durante vários passos de tempo, é provável que as transacções ocorram sempre com os mesmos agentes, como se de uma avalanche se tratasse, nessa zona da rede.

Neste modelo a distribuição de riqueza não exhibe leis de potência. Uma das razões deve-se ao facto de a troca entre agentes, não depender da riqueza de nenhum dos dois, logo não existem processos estocásticos multiplicativos, que poderiam permitir o aparecimento das tais caudas em lei de potência.

4.4 Dependência no tipo de rede

Iremos comparar os nossos resultados com valores já referidos por outros autores [18]. Como podemos ver na Figura 4.4, com as simulações efectuadas para o modelo na rede (10000 agentes, 10^3 transacções médias por agente e 100 médias deste estado final), obtemos uma curva normalizada, com o valor mínimo de riqueza muito próximo do valor 0.25, e com uma distribuição segundo uma cauda Gaussiana a partir desse valor, mas só para conectividade média igual ou superior a $\bar{k} = 6$. Para valores inferiores a este, a rede tem muitos agentes que não têm qualquer vizinho, ou só têm um vizinho, o que faz com que, quando um agente é pobre e só tem um vizinho, ao ser escolhido para trocar com o seu vizinho permanecerá durante vários passos em trocas sucessivas com o seu vizinho, não permitindo que o sistema se auto-organize de forma a maximizar o comportamento de todos os agentes. Ou seja, haverá sempre agentes que ficam de fora do jogo.

Como seria de esperar, o valor mínimo da riqueza está entre os valores já encontrados para o caso local e para o caso global, e é aproximadamente $w \simeq 0.25$.

Na Figura 4.5, podemos ver os valores das várias distribuições para o caso do modelo na rede, de acordo com a equação (4.1). Como podemos ver, os valores da variância aumentam com a conectividade da rede, o que também acontecia com os resultados de Pianegonda et al. [18].

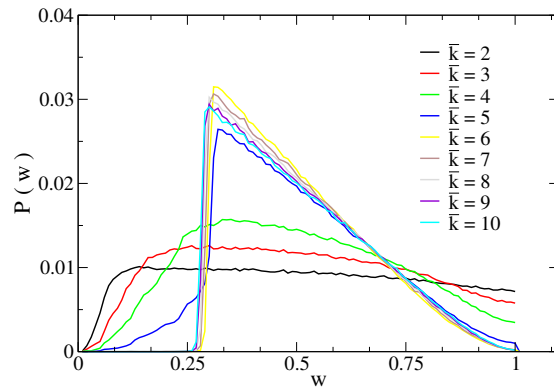


Figura 4.4: Simulação de uma economia numa rede binomial (dinâmica de extremos), para $N = 10000$ agentes e \bar{k} entre 2 e 10. O gráfico representa a distribuição de riqueza dos N agentes no estado estacionário (que é atingido para 10^3 transações por agente). Os valores referem-se a 100 médias do estado final.

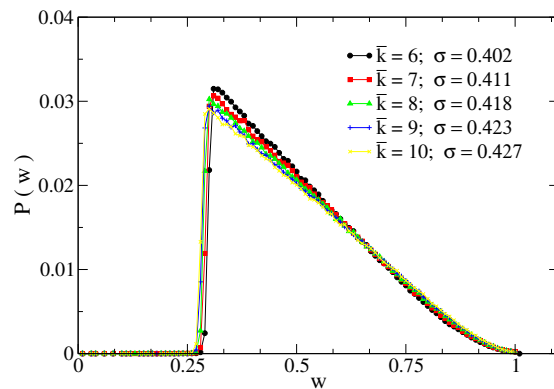


Figura 4.5: Distribuição de riqueza para o modelo na rede, com os valores do melhor ajuste a distribuição dada pela equação (4.1).

4.5 Comentário

A variância da distribuição Gaussiana aumenta do modelo local para o global e também com a conectividade da rede. Os valores da variância para a rede estão entre os valores dos casos local e global. Ambos os valores estão de acordo com estudos anteriores.

Tanto no caso local como no caso global conseguimos ver agentes com riqueza superior a $w = 1$. No caso da rede binomial isso já não é tão frequente. Ou seja, no caso da rede não há

tanta possibilidade para os agentes mais ricos de enriquecerem ainda mais.

Numa rede dinâmica, as ligações variam ao longo do tempo de acordo com as transacções efectuadas. Em vez de utilizarmos uma rede “congelada”, modelamos a rede de acordo com algumas regras. Este tipo de rede está mais de acordo com a realidade, porque no nosso dia-a-dia estamos sempre a criar e a quebrar ligações com outros, dependentes de vários factores. No nosso caso, a criação e quebra de ligações irá estar relacionada com os valores de riqueza dos agentes, de modo que torne possível aos agentes mais pobres a escolha de ligação aos agentes mais ricos, e também que seja possível aos agentes mais ricos quebrar ligações que não lhes tragam vantagens, como acontece na realidade. Este será um modelo para pôr em prática no futuro. O modelo de rede dinâmica poderia trazer vantagens ao nosso estudo, pois poderia ultrapassar o problema de agentes que não têm quaisquer vizinhos e assim permanecem até ao final ou de agentes com poucos vizinhos, que poderiam sempre alterar os seus vizinhos e o número destes.

Esta dinâmica não parece ser a mais realista, porque nem sempre numa sociedade o agente mais pobre tem a possibilidade de melhorar a sua condição. Podemos ver neste modelo, que se isso fosse possível, as assimetrias na nossa sociedade seriam menores. Por outro lado o papel dos mais ricos na economia aparece menosprezado neste modelo.

Capítulo 5

Modelo Hierárquico de Famílias

Neste capítulo propomos e estudamos um modelo conservativo de troca de riqueza, em que os mecanismos fundamentais de transferência de riqueza são a herança e os custos sociais associados à criação de uma nova família. A novidade deste modelo é que a rede familiar não é estática, a sua estrutura emerge da dinâmica da riqueza. Começando com um dado tipo de rede, hierárquica, evolui-se para uma rede com características de Poissoniana. Realizámos várias simulações de Monte Carlo até atingirmos o estado estacionário e podermos estudar características de distribuição de riqueza e da estrutura da rede nesse estado. Para certos parâmetros do nosso sistema os resultados relativos à distribuição de riqueza encontram-se de acordo com dados empíricos anteriormente apresentados, pelo que cremos que o modelo é realista.

Vamos começar por explicar a motivação deste modelo, seguindo-se uma breve apresentação das condições iniciais e dos parâmetros do sistema, o algoritmo utilizado para gerar a evolução do sistema e alguns dos resultados analisados.

5.1 Motivação

Neste modelo tentámos recriar a formação de famílias através de uma dinâmica que nos permite evoluir a rede social de interacções entre famílias. O modelo baseia-se na necessidade de existirem dois nodos para poderem criar um novo nodo, ou seja, imaginando um casamento, será necessária a união de duas famílias para a criação da nova família. Mas para as duas famílias serem capazes disso, terão que ter um mínimo de recursos financeiros para comportar esse casamento, e também terão que ajudar a nova família no começo de vida. Logo, a nova família receberá uma percentagem de riqueza dos seus “pais” que também terão que repartir o tal mínimo de recursos com a sociedade, como se de um pagamento se tratasse para a criação da nova família, ou seja, despesas sociais inerentes à criação da nova família.

5.2 Dados iniciais

A nossa rede social (económica) é criada com N nodos (famílias), nos quais distribuímos um dado valor de riqueza, retirado aleatoriamente de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1[$. As ligações iniciais da rede são do tipo árvore hierárquica, ou seja, cada família tem uma ligação superior (pai) e duas inferiores (filhos), exceptuando o nodo 1 que tem apenas duas ligações (os filhos), e todos os nodos que se vão encontrar na base (aproximadamente $N/2$ nodos) que têm apenas uma ligação (o pai), como se pode ver pela Figura 5.1.

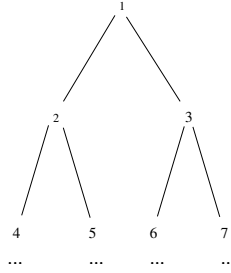


Figura 5.1: Estrutura inicial da rede.

As nossas simulações ocorrem para várias gerações de famílias (passos de Monte Carlo), depois de estabelecidos os parâmetros iniciais do nosso sistema, que são: $P1$, a percentagem de riqueza dada por uma família à nova família a ser criada; W_{min} , o valor de riqueza mínimo necessário para poder criar uma nova família e que é distribuído por 100 famílias da nossa rede, escolhidas preferencialmente como as famílias mais ricas. O número suficiente de passos de Monte Carlo é alcançado quando o sistema atingir o estado estacionário.

5.3 Algoritmo

O nosso modelo irá evoluir ao longo do tempo através de uma dinâmica que irá ser explicada de seguida.

Para cada passo de tempo, escolhemos o nodo (família) mais velho (começando pelo número 1, depois o 2, o 3, e assim por diante), fazendo-o “morrer”. Morrer, no nosso modelo, significa desligar todas as ligações deste nodo e dividir a sua riqueza pelos nodos (famílias) ligados a ele (herdeiros). Se por acaso, essa família não tiver nenhuma ligação, irá dividir a sua riqueza por 100 famílias da sociedade, de forma preferencial, escolhendo as famílias mais ricas.

De seguida, iremos criar uma nova família. Como esta nova família vai ser criada no nodo da rede em que anteriormente tínhamos “morto” uma família, por vezes falamos de “renascimento”, embora nenhuma das características da antiga família transite para a nova, a não ser o seu índice na rede, e isso apenas por uma razão de conveniência. Começamos por escolher duas

famílias aleatoriamente que irão criar esta nova. A única condição que impomos a estas famílias é elas terem um mínimo de riqueza (W_{min}) para poderem criar a nova família. Esse valor mínimo de riqueza é retirado às duas famílias e dividido igualmente por 100 famílias da sociedade preferencialmente escolhidas de acordo com a sua riqueza. A ideia é que para criar uma nova família, haverá certos custos sociais, e como normalmente as famílias com mais riqueza também são as que têm mais negócios, serão as indicadas para receberem estes custos de criação.

Mas também é necessário dar alguma riqueza inicial a esta nova família para ela poder ter um bom início de vida; deste modo, as duas famílias que a originaram irão dar-lhe uma percentagem ($P1$) da sua riqueza sobrança.

Tudo isto refere-se a um passo de tempo no nosso modelo. De seguida, escolhemos o seguinte nodo mais velho e percorremos os mesmos passos, até voltarmos de novo ao nodo 1. Quando isso acontecer dizemos que executamos um passo de Monte Carlo (MCS).

5.3.1 Escolha de forma preferencial

Quando uma família não tem ligações, ou quando as famílias têm que pagar um valor mínimo da sua riqueza à sociedade (W_{min}), estes valores são divididos preferencialmente por 100 famílias, escolhendo as mais ricas.

A escolha é feita segundo um método em que somamos os valores das riquezas de todas as famílias (por ordem numérica do nodo), excepto das que estão a dividir o dinheiro, e originamos uma espécie de “camadas” de riqueza, desde $W = 0$ até $W = W_{total}$. De seguida, geramos um número aleatório entre 0 e W_{total} e vemos a que camada corresponde, logo a que nodo, e escolhemos a família que se encontra nesse nodo. Dessa forma as famílias com maior riqueza têm uma maior probabilidade de serem escolhidas, porque a sua “camada” é mais extensa. Mas todas as famílias poderão ser escolhidos, porque a probabilidade é sempre superior a zero.

5.4 Resultados

No nosso estudo obtivemos vários tipos de resultados para o estudo estatístico tanto das distribuições de riqueza como da rede gerada. Os parâmetros que podíamos variar no nosso sistema eram o número total de famílias (N), o valor mínimo de riqueza (W_{min}) para criar uma nova família e a percentagem ($P1$) que as famílias dão àquela que estão a criar para começo de vida. Resolvemos usar um valor elevado e constante de número de famílias: $N = 10^4$. Quanto aos outros dois parâmetros variámo-los da seguinte forma: $P1$ poderia ser igual a 0.1, 0.3, 0.5 e 0.7; W_{min} podia tomar os valores 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 e 0.95.

5.4.1 Distribuição de Riqueza

Para um valor de W_{min} constante, vemos como varia a distribuição de riqueza. Tomando valores baixos de riqueza mínima para criar uma família, não há grandes variações nas distribuições (Figura 5.2), mas quando este valor é elevado, nota-se que as distribuições na zona dos mais ricos tendem a diferenciar-se (Figura 5.3).

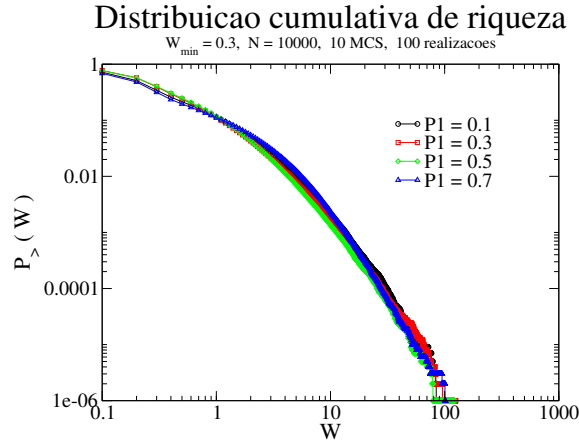


Figura 5.2: Distribuição cumulativa de riqueza para um valor de W_{min} igual a 0.3, e para vários valores de $P1$.

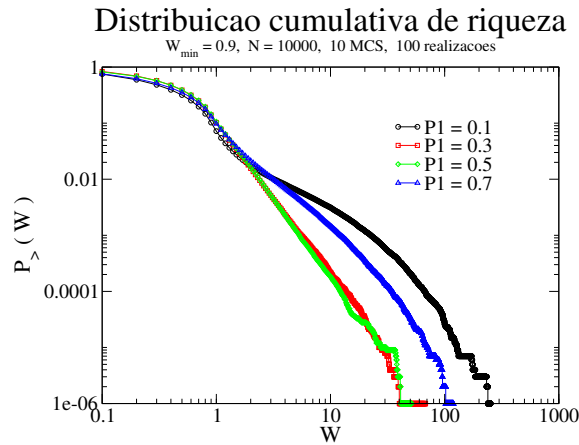


Figura 5.3: Distribuição cumulativa de riqueza para um valor de W_{min} igual a 0.9, e para vários valores de $P1$.

Quando mantemos o valor de $P1$ constante e variamos W_{min} , podemos ver como varia a distribuição, principalmente o expoente de Pareto para a zona de maior riqueza (Figura 5.4).

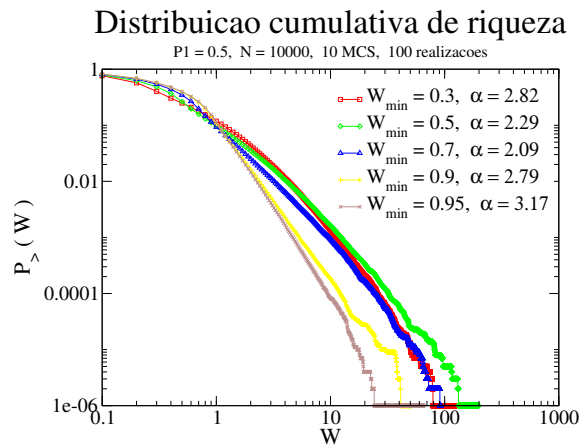


Figura 5.4: Distribuição cumulativa de riqueza para um valor de $P1$ igual a 0.5, e para vários valores de W_{\min} e expoente de Pareto respectivo. Este valor foi calculado para a zona linear que podemos ver em cada uma das curvas do gráfico.

5.4.2 Distribuição de conectividade

Para os mesmos valores utilizados anteriormente para o estudo da distribuição de riqueza, podemos ver como varia a conectividade da rede para os vários parâmetros. Os gráficos (Figuras 5.5, 5.6 e 5.7) foram apresentados numa escala log-normal, para podermos ver que na cauda das distribuições, parece não ser difícil identificar uma certa linearidade, que nos permite concluir que as redes têm uma zona exponencial, na distribuição das conectividades, para os valores de k elevados. Tentámos ajustar uma curva Poissoniana às nossas distribuições, mas o ajuste não era correcto.

5.4.3 Correlações

Procurámos estudar as correlações entre a riqueza de um nodo e a dos seus vizinhos, entre a conectividade de um nodo e a dos seus vizinhos e entre riqueza e conectividade.

Para estudar a correlação entre a riqueza de um nodo e a dos seus vizinhos, calculámos para cada nodo a riqueza média dos seus vizinhos e representamos esses valores em função da riqueza do nodo. Nas Figuras 5.8, 5.9 e 5.10 mostram-se alguns exemplos de como estão relacionadas as riquezas dos vizinhos.

Para as correlações entre a conectividade de um nodo e a dos seus vizinhos, calculámos para cada nodo a conectividade média dos seus vizinhos e representamos esses valores em função da conectividade do nodo (Figuras 5.11, 5.12 e 5.13).

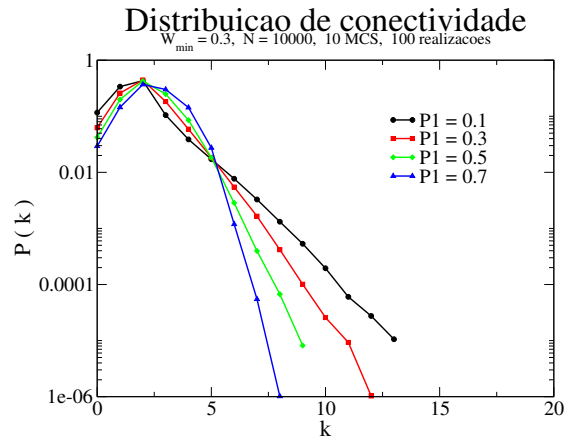


Figura 5.5: Distribuição de conectividade para um valor de W_{min} constante igual a 0.3, e para vários valores de $P1$.

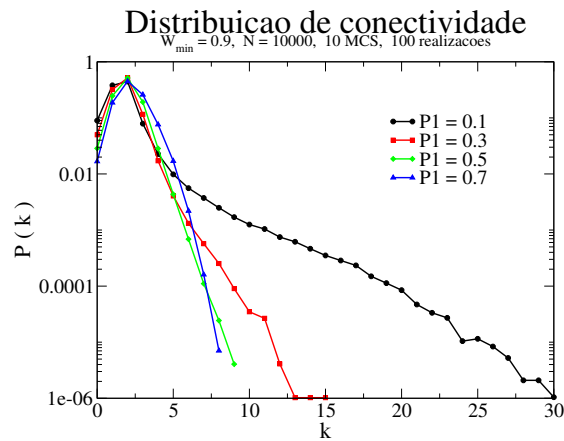


Figura 5.6: Distribuição de conectividade para um valor de W_{min} constante igual a 0.9, e para vários valores de $P1$.

5.5 Comentário

Para um valor de $P1$ fixo, podemos ver que quanto maior é o limite mínimo (W_{min}) para as famílias poderem criar mais ligações (filhos), menor é o expoente de Pareto, logo significa que a riqueza fica distribuída de forma mais equalitária.

O número de ligações por nodo é em média 2, mas podemos ver que quanto maior for o valor da percentagem a deixar aos filhos ($P1$), menor a possibilidade de conseguir ainda mais filhos. Quando este valor é pequeno, há famílias com muitas ligações (até 30) como podemos ver na Figura 5.6.

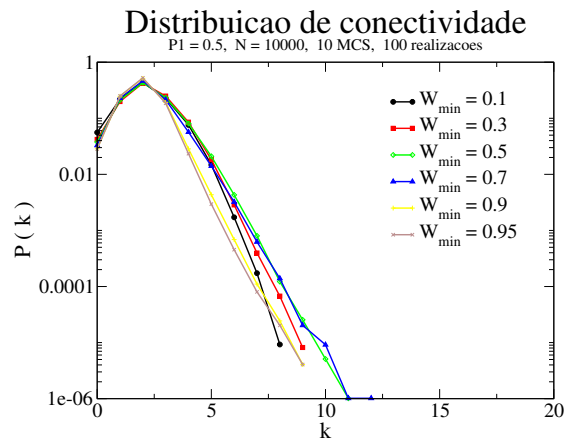


Figura 5.7: Distribuição de conectividade para um valor de $P1$ constante igual a 0.5, e para vários valores de W_{min} .

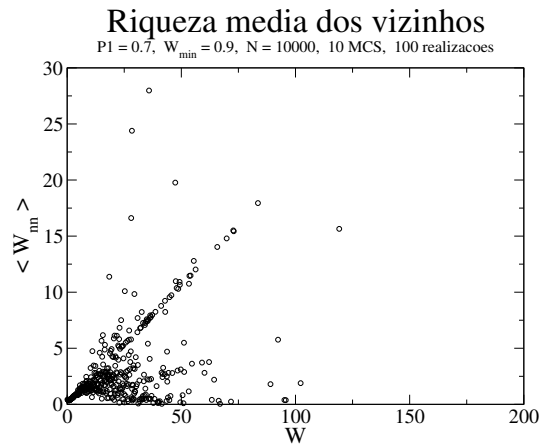


Figura 5.8: Riqueza média dos vizinhos em função de escalões de riqueza, para $W_{min} = 0.9$ e $P1 = 0.7$.

O estudo da riqueza dos vizinhos sugere que as famílias ricas estão ligadas a famílias também ricas parecendo haver uma tendência para uma relação linear entre a riqueza de uma família e a dos seus “filhos” ou “pais”. Quando o preço a pagar para criar uma família (W_{min}) é elevado as famílias com mais ligações estão ligadas a famílias com muitas ligações também. Se o preço é baixo não há qualquer tipo de correlação nas conectividades dos vizinhos (Figura 5.13).

Não apresentámos o estudo relativo às correlações de riqueza e conectividade por faltar fazer uma análise mais criteriosa aos resultados, mas podemos ver que as famílias ricas têm muitas ligações e que conseguem criar muitas famílias com riqueza elevada.

Quando a percentagem, que uma família paga aos seus filhos para o seu início de vida, é

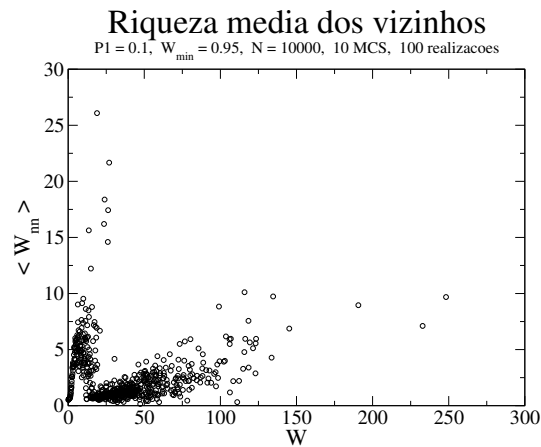


Figura 5.9: Riqueza média dos vizinhos em função de escalões de riqueza, para $W_{min} = 0.95$ e $P1 = 0.1$.

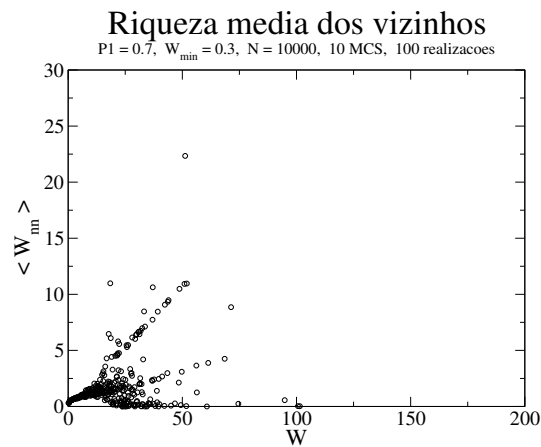


Figura 5.10: Riqueza média dos vizinhos em função de escalões de riqueza, para $W_{min} = 0.3$ e $P1 = 0.7$.

elevada, então o número de filhos é muito reduzido, porque após criar um filho essa família vai deixar de ser rica, e assim não terá grande possibilidade de criar mais filhos.

Podemos caracterizar as redes criadas neste modelo como rede tipo “assortativo”, uma vez que a conectividade dos vizinhos é função crescente de conectividade do nodo.

Os resultados obtidos traduzem genericamente as tendências que são observadas na sociedade pelo que o modelo parece ser uma descrição realista.

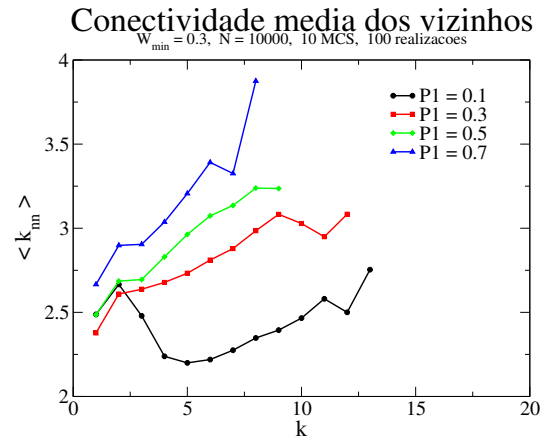


Figura 5.11: Conectividade média dos vizinhos em função da conectividade do nodo, para $W_{min} = 0.3$ e $P1$ variável.

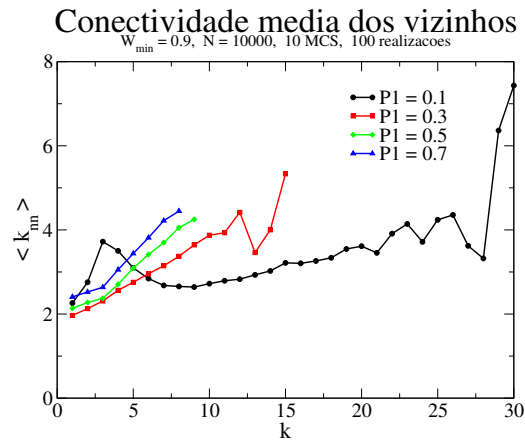


Figura 5.12: Conectividade média dos vizinhos em função da conectividade do nodo, para $W_{min} = 0.9$ e $P1$ variável.

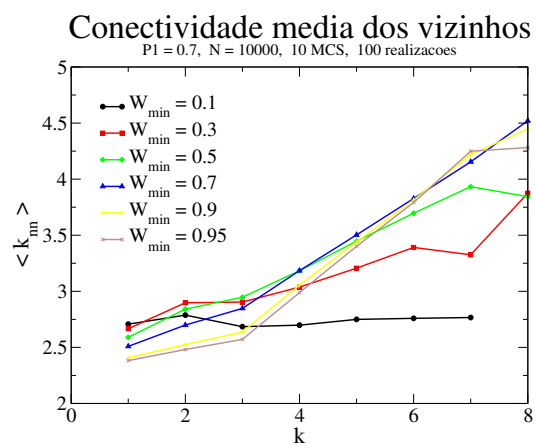


Figura 5.13: Conectividade média dos vizinhos em função da conectividade do nodo, para $P1 = 0.7$ e W_{min} variável.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalho Futuro

Embora a Econofísica seja uma área muito vasta, o nosso trabalho centrou-se no estudo de distribuições de riqueza, tanto ao nível de análise de dados reais, como através de simulações de modelos que tentam, de alguma forma, representar a realidade económica de uma sociedade. Analisámos as distribuições de rendimento para dados reais de Portugal e do Reino Unido e uma outra forma de distribuições de riqueza através de dados relativos ao imposto sucessório no Reino Unido. Estudámos dois tipos de modelos simulados: um com uma dinâmica de extremos numa rede estática, e outro com uma dinâmica do tipo Monte-Carlo numa rede dinâmica. O modelo com dinâmica de Monte-Carlo tentou reproduzir a formação de famílias através de regras de criação de família e divisão de heranças.

Os dados reais foram obtidos através de dados acessíveis na internet ou através de pedidos, tanto a outros investigadores, como a instituições governamentais. Os dados relativos a Portugal foram baseados em declarações de IRS e não nos facilitaram a análise, devido ao número pequeno de escalões representado nessas tabelas, e ao facto de as declarações de IRS em Portugal não serem a melhor forma de medir a riqueza, em particular na zona dos mais ricos! A estes dados conseguimos ajustar uma função Gamma na zona média e uma lei de potência na zona dos 10% mais ricos, tal como acontece para dados de outros países. Dos dados portugueses podemos concluir que, ao longo dos 3 anos (1998-2000) estudados, a desigualdade entre ricos e pobres aumentou ligeiramente, porque os expoentes de Pareto diminuíram e os índices de Gini aumentaram.

Os dados do Reino Unido relativos a rendimento não nos trouxeram grandes novidades, pois eram ajustáveis por uma distribuição exponencial para a zona média. Os dados relativos ao imposto sucessório, têm uma zona de distribuição exponencial e outra em lei de potência, com valores 1.68 e 1.78, respectivamente para os dois anos estudados (2000-2001). Os dados relativos a tabelas do imposto sucessório são importantes para comparar com os valores do nosso modelo de hierarquia de famílias, devido à dinâmica de divisão de heranças. Seria interessante obter

tabelas do imposto sucessório para Portugal e tentar comparar com os valores estudados para o Reino Unido.

O modelo de extremos, que já tinha sido bastante estudado por outros autores, foi apenas modificado no tipo de rede que serve de substracto à dinâmica. Adoptámos redes binomiais com valores de conectividade média diferentes, para podermos ver se variando a conectividade, poderíamos passar de um caso local para um caso global, e vimos que os valores estão de acordo com o que esperávamos. O problema deste modelo é que nos parece pouco realista, e os resultados em termos de distribuição de riqueza não são comparáveis com dados reais.

O modelo de dinâmica de Monte-Carlo implementado por nós, teve a particularidade de ser uma ideia nova, na qual tanto há dinâmica na troca de riqueza, como na construção da rede estando as duas acopladas. Neste modelo tentamos simular a formação de famílias, criação de filhos e custos sociais que daí advêm. Os resultados de distribuição de riqueza encontram-se de acordo com resultados de dados reais para vários países. No nosso caso, podemos ver uma distribuição em lei de potência para a zona dos mais ricos, com valores do expoente de Pareto de aproximadamente 2.0-3.5. O tipo de redes criada nesta formação de família ainda não foi completamente estudado e a relação entre a rede e a distribuição de riqueza gerada requer também mais alguma investigação. Será um bom ponto de partida para trabalho futuro.

Uma outra questão que valerá a pena estudar é a implementação da dinâmica de extremos numa rede em evolução.

Bibliografia

- [1] Abul-Magd, A. Y., Phys. Rev. E **66**, 057104 (2002)
- [2] Aoyama, H., Nagahara, Y., Okazaki, M. P., Souma, W., Takayasu, H. and Takayasu, M., Fractals **8**, 293 (2000)
- [3] Bak, P. and Sneppen, K., Phys. Rev. Lett. **71**, 4083 (1993)
- [4] Bak, P., *How nature works: The science of self-organized criticality*. Oxford University Press, Oxford (1997)
- [5] Bouchaud, J.-P. and Mézard, M., Physica A **282**, 536 (2000)
- [6] Bouchaud, J.-P. and Potters, M., *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, Cambridge (2003)
- [7] Chatterjee, A., Chakrabarti, B. K. and Manna, S. S., Physica Scripta **T106** 36 (2003)
- [8] Clementi, F. and Gallegati, M., preprint cond-mat/0408067
- [9] Das, A. and Yarlagadda, S., preprint cond-mat/0310343
- [10] Di Matteo, T., Aste, T. and Hyde, T., preprint cond-mat/0310544
- [11] Dorogovtsev, S. N. and Mendes, J. F. F., *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford University Press, Oxford (2003)
- [12] Dragulescu, A. and Yakovenko, V. M., Eur. Phys. J. B **17**, 723 (2000)
- [13] Dragulescu, A. and Yakovenko, V. M., Eur. Phys. J. B **20**, 585 (2001)
- [14] Dragulescu, A. and Yakovenko, V. M., Physica A **299**, 213 (2001)
- [15] Dragulescu, A. and Yakovenko, V. M., preprint cond-mat/0211175
- [16] Fujiwara, Y., Di Guilmi, C., Aoyama, H., Gallegati, M. and Souma, W., Physica A **335**, 197 (2004)

- [17] Garlaschelli, D. and Loffredo, M. I., *Physica A* **338**, 113 (2004)
- [18] Iglesias, J. R., Gonçalves, S., Pianegonda, S., Vega, J. L. and Abramson, G., *Physica A* **327**, 12 (2003)
- [19] Iglesias, J. R., Gonçalves, S., Abramson, G. and Vega, J. L., *Physica A* **342**, 186 (2004)
- [20] Ispolatov, S., Krapivsky, P. L. and Redner, S., *Eur. Phys. J. B* **2**, 267 (1998)
- [21] Mantegna, R. N. and Stanley, H. E., *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge (2001)
- [22] Montroll, E. W. and Shlesinger, M. F., *J. Stat. Phys.* **32**, 209 (1983)
- [23] Pareto, V., *Cours d'économie politique*, Vol. 2, Macmillan, Paris (1897)
- [24] Pianegonda, S., Iglesias, J. R., Abramson, G. and Vega, J. L., *Physica A* **322**, 667 (2003)
- [25] Pianegonda, S. and Iglesias, J. R., *Physica A* **342**, 193 (2004)
- [26] Reed, W. J., *Physica A* **319**, 469 (2003)
- [27] Repetowicz, P., Hutzler, S. and Richmond, P., preprint cond-mat/0407770
- [28] Scafetta, N., Picozzi, S. and West, B. J., *Physica D* **193**, 338 (2004)
- [29] Scafetta, N., Picozzi, S. and West, B. J., *Quantitative Finance* **4**, 353 (2004)
- [30] Slanina, F., *Phys. Rev. E* **69** 046102 (2004)
- [31] Solomon, S. and Richmond, P., *Physica A* **299**, 188 (2001)
- [32] Souma, W., *Fractals* **9**, 463 (2001)
- [33] Souma, W., Fujiwara, Y. and Aoyama, H., preprint cond-mat/0108482
- [34] Souma, W., Fujiwara, Y. and Aoyama, H., *Physica A* **324**, 396 (2003)
- [35] Wang, Y., Wu, J. and Di, Z., preprint cond-mat/0401025
- [36] Willis, G. and Mimkes, J., *Evidence for the Independence of Waged and Unwaged Income, Evidence for Boltzmann Distributions in Waged Income, and the Outlines of a Coherent Theory*. Microeconomics 0408001, Economics Working Paper Archive at WUSTL.
- [37] Yakovenko, V. M., preprint cond-mat/0302270

- [38] Estatísticas das Declarações do IRS - Modelo 3, Exercícios de 1998 a 2000, Junho de 2002, Direcção de Serviços do IRS
- [39] [http : //www.unifr.ch/econophysics](http://www.unifr.ch/econophysics)
- [40] [http : //www.worldbank.org/poverty/data/2_8wdi2002.pdf](http://www.worldbank.org/poverty/data/2_8wdi2002.pdf)
- [41] [http : //www.inlandrevenue.gov.uk/](http://www.inlandrevenue.gov.uk/)