



Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

FEUP



Silvestre Taveira Pinho

Simulação do Esmagamento e Absorção de Energia de Estruturas Tubulares em Materiais Compósitos

UNIVERSIDADE DO PORTO
FACULDADE DE ENGENHARIA

**Simulação do Esmagamento e Absorção de Energia
de Estruturas Tubulares em Materiais Compósitos**

Silvestre Taveira Pinho

Licenciado em Engenharia Mecânica
pela Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia

Dissertação submetida para satisfação parcial
dos requisitos do grau de mestre
em
Engenharia Mecânica

Dissertação realizada sob a supervisão de
Professor Doutor Pedro M. P. R. C. Camanho
Professor Doutor Marcelo F. S. F. de Moura
do Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

Porto, Junho de 2002

Simulação do Esmagamento e Absorção de Energia de Estruturas Tubulares em Materiais Compósitos

por

Silvestre Taveira Pinho

Submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
em Junho de 2002, para satisfação parcial dos requisitos na obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Mecânica
na Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia

Resumo

Os componentes tubulares em material compósito têm uma vasta aplicação como elementos de absorção de energia e de protecção de passageiros nas indústrias dos caminhos de ferro, automóvel e aeroespacial. No caso dos mesmos componentes, mas metálicos, são hoje bem conhecidos os mecanismos envolvidos no seu esmagamento e a capacidade de simulação numérica desse esmagamento encontra-se numa fase adulta. Em oposição, a simulação numérica do esmagamento de estruturas compósitas é uma área de investigação mais recente e a capacidade de previsão é ainda limitada. Estas estruturas são normalmente concebidas de modo a que uma zona de esmagamento progrida durante o esmagamento. Durante essa progressão, o componente tubular suporta uma carga aproximadamente constante, cujo valor determina a sua capacidade de absorção de energia. Por este motivo, torna-se importante a capacidade de previsão do valor dessa carga durante o esmagamento. Neste trabalho, é proposto um modelo numérico implícito para a simulação do esmagamento de componentes tubulares. A progressão das macro-fissuras mais relevantes é modelada utilizando elementos de descoesão, com uma formulação em termos de uma relação tracção-deslocamento relativo, com não linearidade geométrica, o que permite contabilizar de forma correcta a energia envolvida na sua progressão. O dano intralaminar é também modelado atendendo às especificidades do material em causa (fibras longas alinhadas/ fibras curtas aleatórias), degradando-se as propriedades elásticas de acordo com os diferentes fenómenos físicos de dano previstos (rotura de fibras/matriz à tracção/compressão). Os resultados obtidos pelos modelos propostos são comparados com resultados experimentais, concluindo-se que estes permitem prever de forma efectiva o valor da Força Média Pós-Esmagamento ou a curva carga-deslocamento durante a iniciação.

Orientadores:

Pedro P. Camanho
Professor Auxiliar

Marcelo F. Moura
Professor Auxiliar

Crush Simulation and Energy Absorption of Composite Tubes

by

Silvestre Taveira Pinho

Submitted to the Department of Mechanical Engineering
and Industrial Management
in June 2002, as partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master in Mechanical Engineering
at the University of Porto, Faculty of Engineering

Abstract

Tubular components in composite material have a vast application as energy absorbers and as passengers protectors in the train, automobile and aerospace industries. In the case of the same components, but metallic, the crash mechanisms are today well-known, and the numerical simulation capability has already reached an advanced stage. By opposition, the numerical simulation of crash in composite structures is an area of more recent investigation and the prediction capability is still limited. These structures are usually conceived so that, in a crash situation, a crushing zone progresses. During that progression, the tubular component supports a load approximately constant, whose value determines its capacity of energy absorption. For this reason the prediction of that load value during the crush is very important. In this work, an implicit numerical model is proposed for the crush simulation of tubular composite components. The progression of the most important macro-cracks is modelled using descohesion elements, with a formulation in terms of a traction-relative displacement relationship, with geometric nonlinearity, allowing to correctly account the energy involved in the progression of those cracks. The intralaminar damage is also modelled taking into account the material specificities (long fibres aligned / random short fibres), being the elastic properties degraded in agreement with the different predicted physical damage phenomena (fibre/matrix failure in traction/compression). The results obtained by the proposed models are compared with experimental ones. It is concluded that the models allow the effective prediction of the mean post crushing load or the load-displacement curve during crush initiation.

Supervisors:

Pedro P. Camanho
Professor

Marcelo F. Moura
Professor

Simulation de l'Écrasement et Absorption d'Énergie de Structures Tubulaires en Matériaux Composites

par

Silvestre Taveira Pinho

Présentée au Département de Génie Mécanique et Gestion Industrielle
en Juin 2002, comme accomplissement partiel des exigences pour le degré de
Maître en Génie Mécanique
Université de Porto, Faculté de Génie

Resumé

Les composantes tubulaires en matériaux composites ont une vaste application comme éléments d'absorption d'énergie et de protection de passagers dans les industries des chemins de fer, automobile et aéronautique. Dans le cas des mêmes composantes, mais métalliques, les mécanismes impliqués dans son écrasement sont aujourd'hui très bien connus et la capacité de simulation numérique de son écrasement a déjà atteint une étape avancée. Par opposition, la simulation numérique de l'écrasement de structures composites est une région d'enquête plus récente et la capacité de prévision est encore limitée. Ces structures sont conçues habituellement afin que, sur une situation d'écrasement, une zone écrasante progresse. Pendant cette progression, les composantes tubulaires supportent une charge de valeur approximativement constante qui détermine sa capacité d'absorption d'énergie. Pour cette raison la capacité de prévision de la valeur de la charge pendant l'écrasement est très importante. Dans ce travail, un modèle numérique implicite est proposé pour la simulation de l'écrasement de composantes composites tubulaires. La progression des macro - fissures les plus importantes est modélisée par l'utilisation d'éléments de descohésion, avec une formulation traction-déplacement relatif, avec non linéarité géométrique, ce qui nous permet d'exprimer correctement l'énergie impliquée dans sa progression. Le dégât intralaminar est aussi modélisé prenant en considération les spécificités du matériel (longues fibres alignées / fibres aléatoires courtes), par la dégradation des propriétés élastiques en concordance avec les différents phénomènes physiques de dégât prévus (échec de la fibre/matrice en traction/compression). Les résultats obtenus par les modèles proposés sont comparés avec les résultats expérimentaux, et il peut être conclu que ceux-ci nous permettent de prévoir efficacement la charge moyenne après- écrasement ou même la courbe charge-déplacement pendant l'initiation de l'écrasement.

Superviseurs:

Pedro P. Camanho
Professeur

Marcelo F. Moura
Professeur

Conteúdo

Resumo	iii
Abstract	v
Resumé	vii
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xxi
Agradecimentos	xxiii
Notação	xxv
1 Introdução	1
2 Esmagamento de componentes em materiais compósitos	7
2.1 Introdução - esmagamento de tubos compósitos	7
2.2 Mecanismos de rotura nos materiais compósitos	12
2.2.1 Rotura da matriz	14
2.2.2 Fractura das fibras	15
2.2.3 Fractura da interface fibra/matriz	15
2.2.4 Delaminação	16
2.3 Mecanismos de dissipação de energia	16
2.4 Velocidade de solitação	18
2.5 Modelação numérica do esmagamento de estruturas em materiais compósitos	20
2.5.1 Comparação entre materiais compósitos e metálicos	24
2.5.2 Utilização de elementos sólidos para a modelação de um elemento de volume representativo	27

2.5.3	Utilização de elementos sólidos para a modelação individual de cada camada	27
2.5.4	Utilização de elementos axissimétricos na modelação individual de cada camada	29
2.5.5	Utilização de elementos de casca para a modelação de toda a parede	30
2.5.6	Utilização de modelos híbridos	31
2.5.7	Esquema de integração	32
2.5.8	Modelos materiais no código Pam-Crash - Mecânica do Dano Contínuo	32
3	Elemento de descoesão com não linearidade geométrica	39
3.1	Introdução	39
3.2	Cinemática do elemento	42
3.3	Lei constitutiva	48
3.3.1	Solicitação em Modo Puro	49
3.3.2	Solicitação em Modo Misto	51
3.3.3	Critério de iniciação em Modo Misto	53
3.3.4	Critério de propagação em Modo Misto	54
3.4	Equações de equilíbrio do elemento	56
3.4.1	Não linearidade geométrica	62
3.4.2	Não linearidade material	71
3.5	Algumas notas	74
3.5.1	Diferenciação da norma de um vector $\mathbf{t}$	74
3.5.2	Diferenciação de um versor $\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}}{\ \mathbf{t}\ }$	75
3.5.3	Transformação de um produto vectorial num produto entre uma matriz e um vector	75
3.5.4	Ordem de grandeza de $\ \mathbf{r}_{,\xi}\ $	76
4	Critérios de rotura	79
4.1	Introdução	79

4.2	Camadas de compósitos de matriz polimérica reforçada com fibras alinhadas	82
4.2.1	Critérios fenomenológicos	82
4.2.2	Critérios não fenomenológicos	87
4.3	Compósitos isotrópicos de matriz polimérica reforçada com fibras curtas aleatórias	92
4.3.1	Critério das deformações máximas	92
4.3.2	Critério das tensões máximas	93
4.3.3	Critério de Mohr-Coulomb	93
4.4	Modelo de dano para camadas com fibras contínuas alinhadas . .	94
4.4.1	Critério de rotura (Hashin)	94
4.4.2	Efeito do dano nas propriedades mecânicas	95
4.5	Modelo de dano para compósitos com fibras curtas aleatórias . . .	97
4.5.1	Critérios de rotura	98
4.5.2	Efeito do dano nas propriedades mecânicas	99
5	Validação do elemento de descoesão com não linearidade geométrica - Ensaios DCB, ENF e MMB	101
5.1	Comparação com uma formulação analítica - Ensaio MMB	101
5.1.1	Objectivos	101
5.1.2	Caracterização sumária do ensaio MMB	102
5.1.3	Considerações gerais	102
5.1.4	Caso estudado	107
5.2	Comparação com resultados experimentais	109
5.2.1	Aplicação de diferentes quocientes G_{II}/G_T	112
6	Simulação do esmagamento de tubos em materiais compósitos	115
6.1	Compósito Carbono/PEEK - fibras longas	116
6.1.1	Elementos tridimensionais, análise implícita	117
6.1.2	Elementos axissimétricos, análise implícita	118
6.1.3	Elementos tridimensionais, análise explícita	120

6.1.4	Elementos axissimétricos, análise explícita	120
6.1.5	Resultados obtidos por Tay (1998)	120
6.1.6	Resultados obtidos pelo modelo proposto	122
6.2	Compósito Vidro/Polyester - fibras curtas	127
6.2.1	Provete tipo 1	132
6.2.2	Provete tipo 2	136
6.2.3	Provete tipo 3	136
6.3	Compósito Vidro/Polyester - fibras longas	140
6.3.1	Ensaio experimental (Abdel-Haq, 1999)	140
6.3.2	Simulações anteriores	141
6.3.3	Resultados obtidos pelo modelo proposto	142
7	Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	153
7.1	Conclusões	153
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	157
	Bibliografia	159

Lista de Figuras

1-1	Veículo automóvel com representação das estruturas destinadas à absorção de energia. Baseado em Mamalis (1998).	3
1-2	Estruturas para absorção de energia. Em <i>a</i>), para um automóvel (chassis); em <i>b</i>), para um avião. Baseado em Mamalis (1998). . .	4
1-3	Ensaio de <i>crash</i> de um veículo automóvel (fotografia da Automotive Safety Engineering Pty Lda.).	4
1-4	Absorção de energia da estrutura inferior (<i>subfloor structure</i>) composta de um helicóptero. Baseado em Farley (1993).	5
1-5	Capacidade de dissipação de energia de diferentes materiais, segundo Ramakrishna (1997).	5
2-1	Representação esquemática dos mecanismos de rotura envolvidos no esmagamento de tubos compósitos sujeitos a cargas axiais. Baseado em Mamalis (1998).	8
2-2	Ilustração dos conceitos de força máxima durante o esmagamento e de Força Média Pós-Esmagamento (<i>mean post-crushing load</i>). .	11
2-3	Exemplo de alguns mecanismos de iniciação (<i>trigger</i>).	11
2-4	Modos de ruína catastróficos de um tubo em material compósito. Baseado em Farley (1993).	13
2-5	Representação de vários mecanismos de rotura existentes nos materiais compósitos. Baseado em Camanho (1999).	14

2-6	Em <i>a</i>), encurvadura de uma placa (delaminada) Carbono/Epóxico $[0^\circ_4/90^\circ_4]$ numa solicitação de compressão após impacto. Em <i>b</i>), progressão da delaminagem devido à solicitação de <i>a</i>). Fonte: de Moura (1995, 2000).	17
2-7	Interação entre mecanismos de dano Intralaminar e Interlaminar, baseado em Camanho (2001).	17
2-8	Exemplo da simulação numérica do esmagamento de um tubo compósito carbono/epóxico (utilização do código explícito Pam-Crash, Deletombe, 2000).	21
2-9	Esmagamento de um elemento cruciforme em material compósito. Comparação entre a deformada do componente real e a malha deformada (utilização do código explícito Pam-Crash, Deletombe, 2000).	22
2-10	Modelo híbrido de um avião. Baseado em (Kindervater, 2000). . .	23
2-11	Ilustração da capacidade actual na simulação do esmagamento de estruturas complexas (Thacker, 1998).	24
2-12	Representação esquemática do modo de esmagamento de um tubo metálico.	25
2-13	Representação de um modelo bifásico, baseada em Coutellier (2000). . .	33
2-14	Modelo de dano do código Pam-Crash, baseado em Coutellier (2000). . .	34
3-1	Elemento de descoesão. A cada ponto P na configuração fechada, correspondem dois pontos P^+ e P^- , nas superfícies superior e inferior, bem como um ponto P^m na superfície média, numa qualquer configuração genérica.	43
3-2	Ilustração dos sistemas de eixos global (x, y, z) e sistema de eixos local (s, t, n) no espaço (x, y, z) , e correspondência com o espaço adimensional (ξ, η, ς)	44
3-3	Representação dos elementos de descoesão de dezoito e de oito nós. . .	45
3-4	Forma da lei constitutiva para modo puro. Baseado em Camanho (2002).	50

3-5	Ilustração do significado dos critérios de iniciação e de propagação em Modo Misto.	54
3-6	Taxa Crítica de Libertação de Energia em Modo Misto (IM7/977-2). Baseado em Camanho (2002).	57
3-7	Taxa Crítica de Libertação de Energia em Modo Misto (AS4/3501-6). Baseado em Camanho (2002).	57
3-8	Taxa Crítica de Libertação de Energia em Modo Misto (AS4/PEEK). Baseado em Camanho (2002).	58
3-9	Forças externas (superficiais, lineares e pontuais) e internas (tracções) actuantes na superfície superior de uma interface.	59
3-10	Representação gráfica (para um caso particular) do significado das parcelas envolvidas na expressão de $d\delta_s$. O símbolo " $\equiv$ " é aqui utilizado com o significado "coincide com" ou "reduz-se a".	61
4-1	Nível de confiança atribuído às teorias de rotura para materiais compósitos, na forma como lidam com os parâmetros indicados, segundo o World-Wide Failure Exercise. Baseado em Hinton (2001).	80
4-2	Critérios de rotura utilizados na Indústria. Baseado em Sun (1996).	81
4-3	Envelope de rotura no plano σ_1 e σ_2 , para uma camada unidireccional de carbono-epóxico, com base nos critérios das Tensões e das Deformações Máximas. Baseado em Palantera (1998).	84
4-4	Envelope de rotura no plano ε_1 e ε_2 , para uma camada unidireccional de carbono-epóxico, com base nos critérios das Tensões e das Deformações Máximas. Baseado em Palantera (1998).	84
4-5	Diferentes modos de rotura da matriz. Baseado em Puck (1995 e 2001).	86
4-6	Diferentes modos de rotura da matriz em função da relação entre σ_2 e σ_{21} . Baseado em (Puck, 2001).	87
4-7	Envelope de rotura no plano σ_1 e σ_2 , para uma camada unidireccional de carbono-epóxico, com base nos critérios de Tsai-Wu ($F_{12}^* = -0.5$ e $F_{12}^* = 0$), Hoffman e Tsai-Hill (Palantera, 1998).	91

4-8	Envelope de rotura no plano ε_1 e ε_2 , para uma camada unidireccional de carbono-epóxico, com base nos critérios de Tsai-Wu ($F_{12}^* = -0.5$ e $F_{12}^* = 0$), Hoffman e Tsai-Hill (Palantera, 1998).	91
5-1	Ensaio MMB. Baseado em Camanho (2002).	102
5-2	Representação de uma placa rectangular com uma fissura junto a um bordo e sujeita a uma carga P	103
5-3	Decomposição da solitação em Modo I e Modo II.	104
5-4	Modelo de elementos finitos do provete MMB.	107
5-5	Comparação de diferentes modelos de elementos finitos com a solução analítica (teoria de vigas) do ensaio MMB.	108
5-6	Capacidade de convergência de diferentes modelos.	110
5-7	Malhas (deformadas) dos modelos de elementos finitos correspondentes aos ensaios DCB, MMB e ENF.	111
5-8	Taxa de libertação de energia em Modo Misto (AS4/PEEK). Fonte: Camanho (2002).	113
5-9	Valores experimentais e numéricos das cargas máximas. (NLG↔ Não Linear Geométrico; LG↔ Linear Geométrico.)	114
6-1	Curva carga / deslocamento para um tubo em material compósito carbono/PEEK, com vinte camadas (Hamada, 1995; Tay, 1998)	117
6-2	Malha e deformada de um modelo de elementos finitos tridimensional implícito (Tay, 1998).	118
6-3	Malha e deformada de um modelo axissimétrico implícito, em que são modeladas 8 sub-pétalas com 3 elementos ao longo da espessura de cada uma (Tay, 1998).	119
6-4	Malha e deformada de um modelo tridimensional explícito, com quatro pétalas e um elemento ao longo da espessura de cada pétala (Tay, 1998).	120

- 6-5 Resultados obtidos por Tay (1998) utilizando diferentes metodologias na simulação do esmagamento de tubos em material composto. Para facilitar a visualização, as altas frequências dos resultados correspondentes aos modelos explícitos foram filtradas. Comparação com os resultados experimentais obtidos por Hamada (1995). 121
- 6-6 Ilustração da sequência de efeitos transitórios durante a iniciação do esmagamento. Podem distinguir-se, por ordem (da esquerda para a direita e de cima para baixo): *a*) a parte elástica; *b*) e *c*) a formação de delaminagens na parede; *d*) e *e*) o esmagamento/corte da parte central da parede e consequente formação de uma cunha de detritos e *f*) progressão estável da zona de esmagamento. . . . 123
- 6-7 Malha de elementos finitos para simular o ensaio realizado por Hamada (1995). 125
- 6-8 Evolução da deformada. É possível identificar a formação (abertura) das pétalas, bem como a progressão da delaminação principal. 126
- 6-9 Visualização dos diferentes tipos de dano (zonas mais escuras) durante o esmagamento. Da esquerda para a direita e de cima para baixo: *a*) fissuração da matriz à tracção; *b*) fissuração da matriz à compressão; *c*) fractura das fibras à tracção e *d*) fractura das fibras à compressão. 127
- 6-10 Curva carga deslocamento obtida para a simulação da progressão do esmagamento de um tubo. O tubo foi inicialmente ensaiado por Hamada (1995) e a simulação do esmagamento foi posteriormente também efectuada por Tay (1998). 128
- 6-11 Influência do valor da penalidade no valor da força média pós-esmagamento obtida e na capacidade de convergência do modelo (comparação com o valor experimental de Hamada (1995)). $K4 \leftrightarrow K = 1E4 \text{ N/mm}^3$; $K5 \leftrightarrow K = 1E5 \text{ N/mm}^3$; $K6 \leftrightarrow K = 1E6 \text{ N/mm}^3$. 129

6-12	Curva experimental obtida por Mamalis (1998) para o Provete tipo 1, de fibra de vidro / polyester, numa solicitação quase estática. .	130
6-13	Curva tensão-deformação para o material dos provetes tipo 1, 2 e 3 testados por Mamalis (1998).	131
6-14	Foto-micrografias da secção AA (ver figura 6-15), ilustrando a sequência da evolução do esmagamento até se atingir o regime estacionário. Baseado em Mamalis (1998).	132
6-15	Tubo esmagado. Fotografias de (Mamalis, 1998). A parede do tubo fotografado é constituída por nove camadas, com uma espessura total de 2.3 mm. Do exterior para o interior, a sequência de empilhamento é $[(90/0/2R_c)/(2R_c/0/90)/R_{c-5}]$, onde a direcção 0° coincide com o eixo do tubo, R_c corresponde à "chopped strand mat" descrita no texto e R_{c-5} representa uma camada equivalente mas mais fina. Em a), podemos ver o aspecto do tubo esmagado visto de frente; em b), podemos observar o mesmo tubo, mas agora visto de cima; em c), é evidenciado um corte da parede (secção AA de a)) onde são apresentados diferentes mecanismos de dano presentes durante o processo de esmagamento.	133
6-16	Em a), malha de elementos finitos utilizada para o Provete tipo 1 de Mamalis (1998). Em b), malha deformada, com visualização do dano (zonas mais escuras; critério de Mohr-Coulomb).	135
6-17	Comparação dos resultados obtidos por (Mamalis, 1998) para o Provete tipo 1 com os resultados numéricos presentes.	135
6-18	Em a), malha de elementos finitos utilizada para o Provete tipo 2 de Mamalis (1998). Em b), malha deformada, com visualização do dano (zonas mais escuras; critério de Mohr-Coulomb).	137
6-19	Comparação dos resultados obtidos por (Mamalis, 1998) para o Provete tipo 2 com os resultados numéricos presentes.	137

6-20	Em <i>a</i>), malha de elementos finitos utilizada para o Provete tipo 3 de Mamalis (1998). Em <i>b</i>), malha deformada, com visualização do dano (zonas mais escuras; critério das Deformações Máximas). . .	139
6-21	Comparação dos resultados obtidos por (Mamalis, 1998) para o Provete tipo 3 com os resultados numéricos presentes.	140
6-22	Representação da geometria do tubo e da superfície actuadora correspondentes ao ensaio efectuado por Abdel-Haq (1999). É utilizado um corte local na parte superior do tubo para evidenciar a secção.	142
6-23	Fotografias do tubo testado por Abdel-Haq <i>et al.</i> (Abdel-Haq, 1999), em diferentes fases do esmagamento. Fonte: (Bonora, 2000). 143	
6-24	Pormenor do esmagamento da aresta interior-superior do tubo durante a fase inicial do esmagamento. Fotografia original de (Abdel-Haq, 1999).	143
6-25	Pormenor da delaminação da parede durante o esmagamento. Fotografia original de (Abdel-Haq, 1999).	144
6-26	Curva carga-deslocamento obtida experimentalmente por Abdel-Haq <i>et al.</i> (Abdel-Haq, 1999).	145
6-27	<i>a</i>) Deformada; <i>b</i>) Campo de tensões de compressão. Resultados numéricos obtidos em (Bonora, 2000), correspondentes ao ensaio referido em (Abdel-Haq, 1999).	146
6-28	Curvas carga-deslocamento obtidas por Bonora <i>et al.</i> (Bonora, 2000), correspondentes à simulação numérica do ensaio efectuado por Abdel-Haq <i>et al.</i> (Abdel-Haq, 1999).	146
6-29	Malha (menos refinada) do modelo de simulação numérica correspondente ao ensaio efectuado por Abdel-Haq <i>et al.</i> (Abdel-Haq, 1999).	147
6-30	Malha (menos refinada) deformada do modelo de simulação numérica correspondente ao ensaio efectuado por Abdel-Haq <i>et al.</i> (Abdel-Haq, 1999).	147

6-31	Deformada do modelo de elementos finitos proposto correspondente à simulação numérica do ensaio experimental efectuado por Abdel-Haq <i>et al</i> (Abdel-Haq, 1999).	149
6-32	Deformada do modelo de elementos finitos refinado proposto correspondente à simulação numérica do ensaio experimental efectuado por Abdel-Haq <i>et al.</i> (Abdel-Haq, 1999).	150
6-33	Visualização do campo de tensões de compressão (axial).	151
6-34	Curvas carga-deslocamento obtidas para diferentes coeficientes de atrito, com a malha menos refinada, correspondentes à simulação numérica do ensaio efectuado por Abdel-Haq <i>et al.</i> (Abdel-Haq, 1999).	151
6-35	Curvas carga-deslocamento obtidas para diferentes coeficientes de atrito, com a malha mais refinada, correspondentes à simulação numérica do ensaio efectuado por Abdel-Haq <i>et al.</i> (Abdel-Haq, 1999).	152
6-36	Comparação das curvas carga-deslocamento obtidas com duas malhas diferentes (simulação numérica do ensaio efectuado por Abdel-Haq <i>et al.</i> (Abdel-Haq, 1999)).	152

Lista de Tabelas

3.1	Funções de forma para o elemento de oito nós.	44
3.2	Funções de forma para o elemento de dezoito nós.	45
5.1	Geometria e propriedades mecânicas de um provete MMB em carbono/PEEK.	107
5.2	Propriedades mecânicas do provete de carbono APC2/PEEK. . .	110
5.3	Parâmetros experimentais (Camanho, 2002).	111
5.4	Comprimentos de alavanca c	112
5.5	Relação entre P_M e P_E para diferentes graus de participação dos modos.	112
5.6	Valores experimentais e numéricos das cargas máximas.	113
6.1	Dimensões características dos tubos cilíndricos testados por Hamada (1995) segundo Tay (1998).	116
6.2	Propriedades elásticas do material carbono/PEEK (AS4/APC-2), utilizado por Hamada (1995).	117
6.3	Síntese dos resultados obtidos por Tay (1998).	122
6.4	Tensões de rotura do material carbono/PEEK (AS4/APC-2), baseado em Camanho (2002).	124
6.5	Propriedades da interface do material carbono/PEEK (AS4/APC-2), baseado em Camanho (2002).	124
6.6	Resultados numéricos obtidos e comparação com (Hamada, 1995) e (Tay, 1998).	128

6.7	Dimensões características dos tubos cilíndricos testados por Mamalis (1998).	129
6.8	Resultados dos ensaios realizados por Mamalis (1998).	130
6.9	Propriedades mecânicas relativas ao material fibra de vidro/polyester, correspondentes aos Provete 1, 2 e 3 ensaiados por Mamalis (1998).	131
6.10	Resultados numéricos obtidos e comparação com Mamalis (1998), para o Provete tipo 1.	134
6.11	Resultados numéricos obtidos e comparação com Mamalis (1998), para o Provete tipo 2.	138
6.12	Resultados numéricos obtidos e comparação com Mamalis (1998), para o Provete tipo 3.	139
6.13	Propriedades mecânicas do material fibra de vidro / polyester utilizado por Abdel-Haq (1999).	141
6.14	Taxas Críticas de Libertação de Energia em Modo I e Modo II, para vidro/polyester, segundo Ozdil (1998, 1999).	148
6.15	Resultados numéricos obtidos e comparação com os resultados experimentais de Habdel-Haq <i>et al.</i> (Habdel-Haq, 1999).	148

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Prof. Pedro P. Camanho e Prof. Marcelo F. Moura, os quais pelo apoio que prestaram e envolvimento que tiveram, são na realidade coautores desta tese.

Aos Prof. António Torres Marques e Prof. Paulo Tavares de Castro pelo papel importante que tiveram para que este tema pudesse ser tratado nesta tese e no DEMEGI.

Ao meu actual colega de gabinete e consultor informático, João Tavares; à Luisa, pela ajuda na parte escolar, e a todos os membros da Secção de Desenho Industrial. Em particular ao coordenador da Secção, Eng. Fonseca, pelo empenho tido em que esta tese chegasse a bom termo em tempo útil. Ao Pedro Ribeiro, pelo interesse manifestado, e ao Pedro Areias, pelas muito úteis conversas sobre notação tensorial. Ao Francisco Pires e ao Robertt pela colaboração no acesso à bibliografia consultada.

Aos meus pais, avó e irmãos, pela paciência, apoio e incentivo, aos quais devo a possibilidade de escrever esta tese.

À Mara, ao Octávio e a todos os amigos que se viram privados da minha companhia (e se sentiram com isso prejudicados, espero eu!) nos últimos dois anos.

Finalmente, ao meu carro, com o qual repetidamente tenho feito trabalho experimental (não incluído nesta tese).

Aos meus pais

Notação

C^{PLY}	 rigidez de uma camada unidireccional
a	 comprimento da fissura
a_0	 comprimento inicial da fissura
b	 largura de um provete DCB, MMB ou ENF
C^f	 rigidez da fase "fibra"
C^m	 rigidez da fase "matriz"
C_0^f	 valor inicial da rigidez da fase "fibra"
C_0^m	 valor inicial da rigidez da fase "matriz"
d	... variável de dano no elemento de descoesão, para uma solicitação em Modo Misto
d^f	 dano na fase "fibra"
d^m	 dano na fase "matriz"
d_1	 valor característico da variável de dano no modelo de Coutellier (2000); variável de dano no modelo de Johnson (2001)
d_u	 valor característico da variável de dano no modelo de Coutellier (2000)
d_2	 variável de dano no modelo de Johnson (2001)
d_{12}	 variável de dano no modelo de Johnson (2001)

d_i	dano para um solicitação em Modo "i" (elemento de descoesão)
D	 tensor da lei constitutiva do elemento de descoesão
D_{sr}	 componente sr do tensor da lei constitutiva do elemento de descoesão
D	 variável de dano
$D_i^{t/c}$	 variável de dano i (tracção/compressão)
$\bar{D}$	 diâmetro médio de um tubo
E_0	 módulo de elasticidade inicial
E_i	 módulo de elasticidade na direcção principal i
E_{res}	 módulo de elasticidade da resina
$f^{p\pm}$	.. força pontual que actua num ponto da superfície superior/inferior de um elemento de descoesão
$f_i^{p\pm}$	 força pontual que actua num ponto da superfície superior/inferior de um elemento de descoesão, em coordenadas globais, segundo o grau de liberdade i
$f^{l\pm}$	 força por unidade de comprimento que actua num ponto da superfície superior/inferior de um elemento de descoesão
$f_i^{l\pm}$	 força por unidade de comprimento que actua num ponto da superfície superior/inferior de um elemento de descoesão, em coordenadas globais, segundo o grau de liberdade i
$f^{s\pm}$	 força por unidade de área que actua num ponto da superfície superior/inferior de um elemento de descoesão
$f_i^{s\pm}$	 força por unidade de área que actua num ponto da superfície superior/inferior de um elemento de descoesão, em coordenadas globais, segundo o grau de liberdade i

f_{ki}	força que actua no nó k de um elemento de descoesão, em coordenadas globais, segundo o grau de liberdade i .
f	função representativa de um critério de rotura
$f_f^{t/c}$	função representativa de um critério de rotura para as fibras, à tracção/compressão
$f_m^{t/c}$	função representativa de um critério de rotura para a matriz, à tracção/compressão
F_i, F_{ij}	coeficientes nos critérios de rotura quadráticos (espaço das tensões).
F_{12}^*	coeficientes de interacção no critério de rotura de Tsai-Wu
$F(\delta^m - \delta^{m \max})$	função de carregamento (elemento de descoesão)
G_{12}	módulo de corte no plano das direcções principais 1 e 2
G	Taxa de Libertação de Energia
G_I, G_{II}, G_{III}	Taxa de Libertação de Energia em Modo I, II e III respectivamente
$G_{IC}, G_{IIC}, G_{IIIC}$...	Taxa Crítica de Libertação de Energia em Modo I, II e III respectivamente
h	espessura de um provete DCB, MMB ou ENF
I_F	momento estático de segunda ordem
I_H	momento estático de segunda ordem
K_{kizv}	matriz de rigidez de um elemento de descoesão
K_{kizv}^T	matriz de rigidez tangente de um elemento de descoesão
K	penalidade (elemento de descoesão)
l	metade do comprimento de um provete DCB/MMB/ENF

l_t	 comprimento de um tubo
L	 comprimento típico de um elemento
L_i	 comprimento típico de um elemento segundo a dimensão i
N	 valor limite das tracções para uma solicitação em Modo I
N	..funções de forma utilizadas nos elementos de descoesão, definidas no plano adimensional (ξ, η)
N_k	 função de forma utilizada nos elementos de descoesão, definida no plano adimensional (ξ, η) , associada ao nó k ; de salientar que, em cada ponto, a função de forma relativa a um nó, e a função de forma relativa ao nó que lhe é homólogo têm o mesmo valor
$\bar{N}_k$	 função de forma <i>complementar</i> , utilizada nos elementos de descoesão, definida no plano adimensional (ξ, η) , associada ao nó k ; estas funções de forma <i>complementares</i> são definidas a partir das funções de forma N_k do seguinte modo: para a superfície superior, $\bar{N}_k = N_k$ enquanto para a superfície inferior, $\bar{N}_k = -N_k$; estas funções de forma <i>complementares</i> revelam-se úteis na interpolação do afastamento entre pontos homólogos
P	 carga (força)
P_M	 carga a meio vão
P_E	 carga na extremidade
P_I	 carga em Modo I
P_{II}	 carga em Modo II
$P^\pm$	 ponto da superfície superior/inferior de um elemento de descoesão
P^m	 ponto da superfície média de um elemento de descoesão

$\mathbf{r}$	.. posição de um ponto da superfície média de um elemento de descoesão, em cada momento e em coordenadas espaciais globais;
r_i	 coordenada global i de um ponto da superfície média de um elemento de descoesão (num dado instante);
S_σ, S_ϵ	 tensão/deformação de corte limite (no plano da camada)
S_{ij}	 tensão de corte limite no plano ij
S	 valor limite das tracções para uma solicitação em Modo II
t	 tempo
t_r	 espessura da resina
t_p	 espessura da parede de um tubo
T	 valor limite das tracções para uma solicitação em Modo III
$\mathbf{u}^\pm$	 deslocamento, em coordenadas globais, de um ponto da superfície superior/inferior de um elemento de descoesão
$u_i^\pm$	.. deslocamento de um ponto da superfície superior/inferior de um elemento de descoesão, em coordenadas globais, segundo o grau de liberdade i
u_{ki}	 deslocamento do nó k de um elemento de descoesão, em coordenadas globais, segundo o grau de liberdade i
v	 deslocamento
v_I	 deslocamento em Modo I
v_{II}	 deslocamento em Modo II
v_{LP}	 deslocamento no ponto de aplicação da carga
$\mathbf{v}^\xi$	 vector paralelo à direcção $\eta = c^{te}$ (elemento de descoesão)
$\mathbf{v}^\eta$	 vector paralelo à direcção $\xi = c^{te}$ (elemento de descoesão)

- $\mathbf{v}^s$ versor paralelo à direcção $\eta = c^{te}$ (elemento de descoesão)
- $\mathbf{v}^n$ versor perpendicular ao plano $\xi_o\eta$ (elemento de descoesão)
- $\mathbf{v}^t$ versor perpendicular a $\mathbf{v}^s$ e a $\mathbf{v}^n$ ($\mathbf{v}^t = \mathbf{v}^n \times \mathbf{v}^s$) (elemento de descoesão)
- $\mathbf{x}$.. posição de um ponto da superfície inicial de um elemento de descoesão, em coordenadas espaciais globais
- x_{ki} coordenada espacial global inicial do nó k de um elemento de descoesão segundo o grau de liberdade i
- $X^{t/c}, X_\epsilon^{t/c}$ tensão/deformação de rotura normal à tracção/compressão (na direcção principal 1 do plano da camada)
- $Y^{t/c}, Y_\epsilon^{t/c}$ tensão/deformação de rotura normal à tracção/compressão (na direcção principal 2 do plano da camada)
- Y_1, Y_2, Y_{12} forças conjugadas
- $Z^{t/c}$.. tensão de rotura normal à tracção/compressão (na direcção perpendicular ao plano da camada)
- α parâmetro do critério da potência
- β grau de participação dos Modos
- δ .. afastamento entre dois pontos homólogos de um elemento de descoesão, em coordenadas locais
- δ^m afastamento em Modo Misto
- δ^{shear} afastamento em corte
- δ_i^0 valor do afastamento correspondente à iniciação do dano, em Modo "i"
- δ_i^f .. valor do afastamento correspondente à propagação do dano, em Modo "i"

$\delta_i^{\max}$. valor máximo do afastamento até um dado instante para uma solicitação em Modo "i" puro

$\delta^{m\max}$ valor máximo do afastamento até um dado instante para uma solicitação em Modo Misto

δ_s afastamento entre dois pontos homólogos de um elemento de descoesão, segundo o grau de liberdade local s

$\bar{\delta}$ *delta de Kronecker*

$\bar{\delta}_{ij}$ componente ij do *delta de Kronecker*

Δ .afastamento entre dois pontos homólogos de um elemento de descoesão, em coordenadas globais

Δ_i afastamento entre dois pontos homólogos de um elemento de descoesão, segundo o grau de liberdade global i

ε_{ij} componente ij do tensor das deformações

ε tensor das deformações

ε_i deformação segundo a direcção principal i ; valor característico da deformação no modelo de Coutellier (2000)

ε_1 valor característico da deformação no modelo de Coutellier (2000)

ε_u valor característico da deformação no modelo de Coutellier (2000)

$\varepsilon_{shear}^{\max}$ deformação de corte máxima

ζ eixo no espaço adimensional (ξ, η, ζ)

η parâmetro do critério B-K; eixo no espaço adimensional (ξ, η, ζ)

κ grau de participação dos Modos

μ coeficiente de atrito

ν		coeficiente de Poisson
ν_{ij}		coeficiente de Poisson no plano ij
ξ		eixo no espaço adimensional (ξ, η, ζ)
θ		tensor de transformação
θ_{si}		componente si tensor de transformação
ρ		massa volúmica
σ		tensor das tensões
σ_{ij}		componente ij do tensor das tensões
σ_i		tensão segundo a direcção principal i
τ		tensor das tracções
τ_s		componente s do tensor das tracções
$\tau^{\max}$		tensão de corte máxima
τ_I^u		valor limite das tracções para uma solicitação em Modo I
τ_{II}^u		valor limite das tracções para uma solicitação em Modo II
Υ		tempo

Índices

c		compressão
f		modo de rotura relativo às fibras
i, j, p, v, w		graus de liberdade relativos a coordenadas globais (elemento de descoesão)
k, y, z		nós (elemento de descoesão)

m	 modo de rotura relativo à matriz
P_i	 direcção principal i
r, s	.. graus de liberdade relativos a coordenadas locais (elemento de descoesão)
t	 tracção
$1, 2, 3$	...referencial principal material ($1 \equiv$ direcção das fibras (numa camada de um laminado); $2 \equiv$ direcção perpendicular às fibras (no plano da camada de um laminado); $3 \equiv$ direcção perpendicular à camada).

Capítulo 1

Introdução

As estruturas em materiais compósitos têm vindo a ter uma utilização crescente na indústria automóvel, caminhos de ferro e aeroespacial (Haug, 1993; Tay, 1998; Johnson, 1999, 2001; Prsa, 2000; Manten, 2000; Deletombe, 2000; Coutellier, 2000). A justificação para este facto passa pela seguinte evidência: os materiais compósitos combinam excelentes propriedades mecânicas com baixa massa volúmica. Acresce ainda o facto de que as excelentes propriedades mecânicas específicas¹ podem ser "esculpidas", por forma a otimizar a orientação da máxima resistência do material de uma dada estrutura para uma dada solicitação. De facto, o material é muitas vezes por si só uma sub-estrutura. Por outro lado, o desenvolvimento dos processos de fabrico associados a estes materiais, permite, cada vez mais, a sua utilização em aplicações onde se exigem quer elevadas cadências de produção, quer elevada fiabilidade. Todos estes factores combinados, aos que acrescem razões de ordem ambiental (no caso de compósitos de fibra natural), justificam as aplicações dos materiais compósitos como elementos estruturais na indústria automóvel, caminhos de ferro e aeroespacial.

Os estudos sobre a viabilidade de estruturas resistentes em materiais compósitos, nomeadamente tubulares, na indústria automóvel e aeroespacial são numerosos. Muitos dos estudos estão relacionados com o desempenho de sub-estruturas compósitas do tipo viga. Podem-se citar estudos sobre a dissipação

¹Propriedades (mecânicas) por unidade de massa.

de energia e comportamento ao esmagamento (*crashworthiness*) de estruturas tubulares polyester/vidro (Mamalis, 1998); sobre o efeito de um impacto lateral na resistência ao esmagamento em tubos de compósito entrançado (*braided*) híbridos (Karbhari, 1999); sobre a possibilidade de perfis em "I" de compósito de fibra de vidro entrançado poderem vir a ser utilizados como elementos absorvedores de energia em automóveis (Hamada, 1997); sobre o esmagamento de tubos de compósito de fibra de carbono, sujeitos a carregamentos não axiais (Han, 2000); sobre o efeito da estrutura da pré-forma na capacidade de dissipação de energia de estruturas tubulares fabricadas por RTM (Karbhari, 1997). Por outro lado, Prsa (2000) divulgou recentemente os resultados de um projecto que visa a substituição de uma carroçaria em aço por uma outra híbrida. Nesse projecto, conseguiu-se uma **redução de peso de 67%** em relação às soluções actuais, mantendo a rigidez, resistência ao esmagamento e integridade do habitáculo das soluções actuais. Tromp *et al.* (Tromp, 2001) comprovaram experimentalmente a adequação, mesmo em caso de embate, de uma estrutura compósita para a plataforma inferior de um Kart. Por outro lado, Manten *et al.* (Manten, 2000) defendem a viabilidade económica do uso de termoplásticos avançados numa progressiva substituição do alumínio na indústria aeronáutica.

A utilização crescente de estruturas em materiais compósitos na indústria automóvel ou aeroespacial obriga portanto a um estudo rigoroso do seu comportamento em situações de embate, do seu comportamento durante o esmagamento e da sua capacidade de dissipação de energia. As figuras 1-1, 1-2 e 1-3 evidenciam o papel das estruturas destinadas à absorção de energia nas indústrias automóvel e aeronáutica. A figura 1-4 exemplifica o uso de materiais compósitos para a absorção de energia na estrutura inferior (*subfloor structure*) de um helicóptero, tirando partido da sua maior capacidade de absorção de energia por unidade de massa (figura 1-5).

No caso de um veículo, e sob um ponto de vista de engenharia, chamamos resistência ao esmagamento (*crashworthiness*) à sua capacidade de evitar ferimentos aos ocupantes no decorrer duma colisão. A importância deste tema na indústria

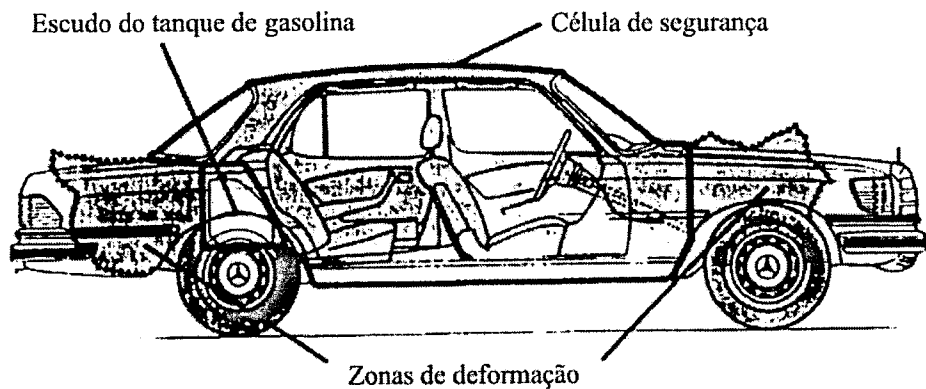


Figura 1-1: Veículo automóvel com representação das estruturas destinadas à absorção de energia. Baseado em Mamalis (1998).

dos transportes a da defesa fez com que se impusesse recentemente enquanto disciplina científica própria. Actualmente, são feitos ensaios experimentais simulando colisões, de novos conceitos em material compósito em fuselagens para a indústria aeronáutica; simultaneamente, são dispendidos esforços na capacidade de previsão numérica do comportamento dos materiais, com vista à validação de modelos que no futuro venham a substituir os dispendiosos ensaios experimentais (Jackson, 1999; Fleming, 2000; Billings, 2001; Freund, 2001; Kindervater, 1998).

A utilização dos materiais compósitos como elementos estruturais em meios de transporte levanta a questão do seu comportamento em caso de impacto: quanta energia pode uma estrutura em material compósito dissipar e quais os mecanismos de absorção de energia nos materiais compósitos? Verifica-se que os mecanismos de dissipação de energia nos materiais compósitos são muito diferentes dos que ocorrem nos metais (Deletombe, 2000; Mamalis, 1988), e que os materiais compósitos podem absorver mais energia específica² que os metais (Ramakrishna, 1997; Tay, 1998). As capacidades de absorção de energia de diferentes materiais metálicos/compósitos são apresentadas na figura 1-5.

As estruturas, em particular as tubulares, em materiais compósitos avançados, têm sido utilizadas como elementos de absorção de energia na indústria dos trans-

²Energia por unidade de massa.

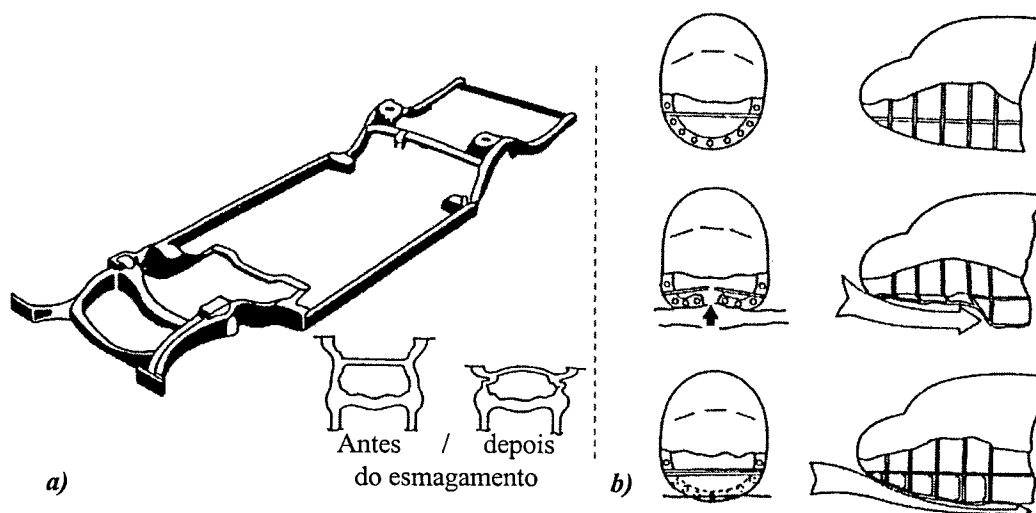


Figura 1-2: Estruturas para absorção de energia. Em a), para um automóvel (chassis); em b), para um avião. Baseado em Mamalis (1998).

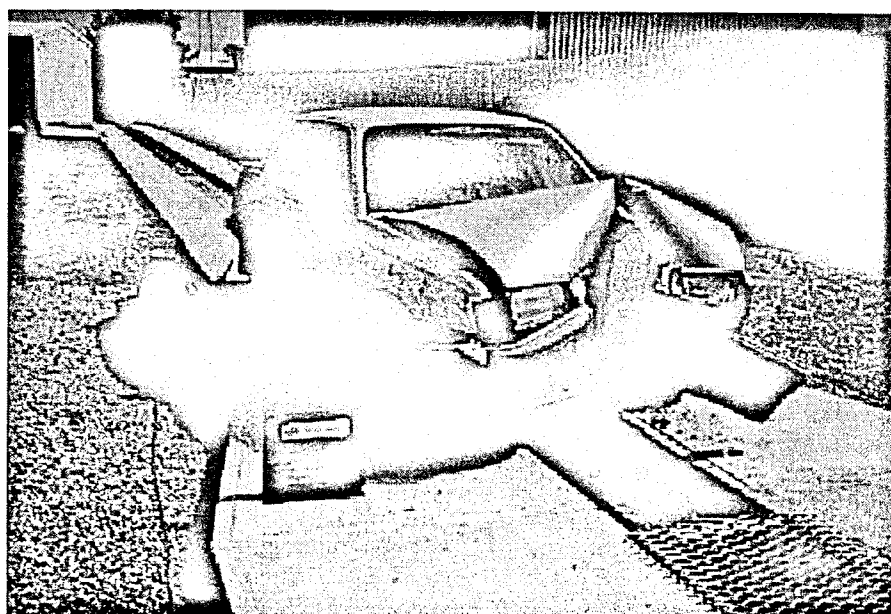


Figura 1-3: Ensaio de *crash* de um veículo automotivo (fotografia da Automotive Safety Engineering Pty Lda.).

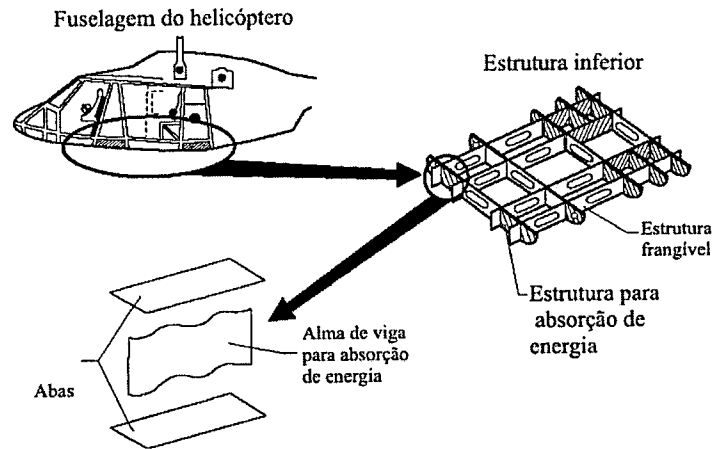


Figura 1-4: Absorção de energia da estrutura inferior (*subfloor structure*) composta de um helicóptero. Baseado em Farley (1993).

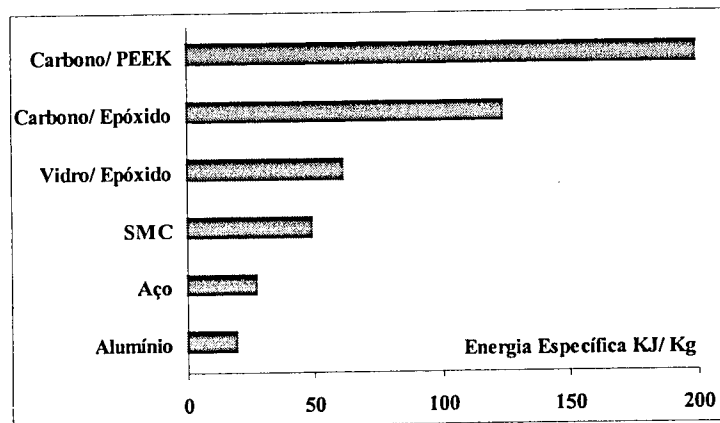


Figura 1-5: Capacidade de dissipação de energia de diferentes materiais, segundo Ramakrishna (1997).

portes. Tendo em conta todas as variáveis associadas a estas estruturas (tipo de resina/fibra, sequência de empilhamento, geometria do componente), a avaliação da capacidade de absorção de energia deste tipo de estruturas utilizando ensaios experimentais torna-se extremamente dispendiosa. O objectivo deste trabalho é o de desenvolver modelos numéricos para a simulação do esmagamento de estruturas tubulares em materiais compósitos. A metodologia seguida para atingir este objectivo começa por uma revisão bibliográfica apresentada no capítulo 2. No capítulo 3 é apresentada a formulação de um elemento de descoesão introduzindo não linearidade geométrica. No capítulo 4 são apresentados vários critérios de rotura para materiais compósitos. No capítulo 5 é feita uma primeira validação do elemento de descoesão proposto, comparando-se as previsões que resultam da sua utilização com resultados experimentais e analíticos. No capítulo 6, o modelo proposto é utilizado na simulação do esmagamento de tubos em materiais compósitos, comparando-se os resultados obtidos com resultados experimentais, bem como com resultados numéricos. No capítulo 7 são apresentadas as principais conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Esmagamento de componentes em materiais compósitos

Este capítulo faz uma descrição dos mecanismos envolvidos na dissipação de energia durante o esmagamento de componentes estruturais simples, baseada num estudo da literatura. Os mecanismos físicos envolvidos no esmagamento desses componentes são identificados e caracterizados.

2.1 Introdução - esmagamento de tubos compósitos

Existem numerosos estudos experimentais tratando o assunto da dissipação de energia específica de tubos circulares compósitos por compressão axial centrada (Mamalis, 1998; Tay, 1998; Abdel-Haq, 1998; Rahman, 2000; Bonora, 2000; Karbhari, 1999). Esses estudos mostram que os tubos têm o seu desempenho maximizado quando não se verifica qualquer tipo de instabilidade (encurvadura global por varejamento e instabilidade localizada nas paredes). Isto é, os tubos vêm o seu desempenho maximizado quando as condições geométricas, o material e a carga são tais que a ruína do tubo é caracterizada pela progressão de uma zona destrutiva de dimensão aproximadamente constante. Essa zona destrutiva localiza-se junto da extremidade solicitada (ver figura 2-1), e é caracterizada pela

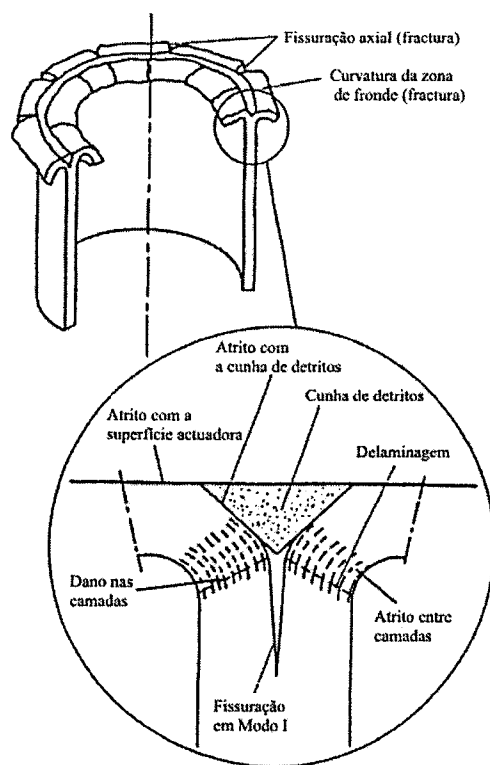


Figura 2-1: Representação esquemática dos mecanismos de rotura envolvidos no esmagamento de tubos compósitos sujeitos a cargas axiais. Baseado em Mamalis (1998).

abertura de um conjunto de "pétalas" ou "folhas", fazendo lembrar a copa de uma palmeira; por este motivo, esta zona denomina-se zona de fronde¹ (*frond zone*).

Durante o esmagamento, as paredes do tubo fissuram axialmente e delaminam circunferencialmente. Esta é uma característica dos tubos de material compósito laminado (e não só), onde as zonas ricas em resina entre as camadas diferentemente orientadas formam naturalmente superfícies débeis, ideais para a propagação da delaminação. De entre as delaminações circunferenciais, distingue-se pela sua maior dimensão uma localizada sensivelmente a meio da parede, a que se chama **delaminação principal**. Dos dois lados da delaminação principal, o material forma feixes de fibra ou **pétalas**. Essas pétalas separam-se umas

¹Do latim *fronde*, que significa « folhagem ».

das outras essencialmente devido a esforços de corte, enquanto a delaminação principal progride em *Modo I*.

O esmagamento do material provoca uma **cunha de detritos** (*debris wedge*) imediatamente atrás da frente de delaminação principal na parede. Esta cunha de detritos permanece com um tamanho aproximadamente constante durante um processo de esmagamento (*crush*) estável, sugerindo que se tenha formado a partir do processo de esmagamento inicial (Mamalis, 1998). O atrito tem um papel importante nas regiões entre as superfícies de pétalas adjacentes, entre as superfícies das pétalas e a superfície colíson, bem como entre as pétalas e a cunha de detritos (Mamalis, 1998). Fissuras intralaminares são também encontradas nas pétalas, formando-se imediatamente na sua raiz. Finalmente, também a rotura de fibras tem lugar junto à raiz das pétalas, onde os esforços de flexão provocam tensões elevadas.

Pode-se desde já notar que as considerações precedentes constituem um grande desafio ao objectivo de desenvolver um modelo físico, matemático e/ou numérico preciso do processo de esmagamento. Desde logo, o modelo deverá ser simultaneamente não linear no que diz respeito à geometria, ao material e às condições fronteira (i.e. à sua variação durante o esmagamento). O problema envolve grandes deslocamentos, deformações, contacto entre superfícies e atrito. Os critérios de rotura para diferentes modos de ruína (delaminação em Modo I, Modo II e Modo Misto; fissuração intralaminar; fractura de fibras) e comportamento pós iniciação do dano devem estar embutidos no modelo. Por outro lado, entre a geometria virgem da estrutura (tubo) e a progressão estabilizada da zona de esmagamento, existe uma importante alteração. Concretamente, a sucessão dos vários estados transitórios é responsável pela **introdução da cunha de detritos** (ver figura 2-1). Os principais fenómenos físicos responsáveis pelo processo de esmagamento e consequente dissipação de energia, que devem portanto ser modelados cuidadosamente, são (Haug, 1993; Mamalis, 1998; Tay, 1998):

- a propagação de uma delaminação principal, sensivelmente a meio da espessura e que progride paralelamente à superfície da parede do tubo;

- a delaminação entre camadas diferentemente orientadas, essencialmente em Modo II;
- a fissuração axial da parede, responsável pela formação das pétalas e do aspecto de fronde (juntamente com a delaminação das diferentes camadas);
- a fissuração intralaminar da matriz;
- a rotura das fibras;
- o contacto entre superfícies e o atrito.

O resultado da combinação de todos os fenómenos anteriores é uma curva carga-deslocamento como a representada (esquemáticamente) na figura 2-2. Dessa curva, os parâmetros mais importantes a reter são:

- a **força máxima**, que encontra correspondência na aceleração máxima a que os eventuais ocupantes de um veículo possam estar sujeitos. Esta aceleração máxima é a grande responsável pelos ferimentos que possam ser provocados. Este valor é altamente influenciado pela possível existência dos denominados **mecanismos de iniciação** (*trigger mechanisms*). Os mecanismos de iniciação são alterações à geometria do tubo (componente ou estrutura em geral), na zona de contacto com a superfície actuadora. Essa alteração tem por objectivo facilitar o processo de iniciação do esmagamento e atingir o regime "estacionário" mais rapidamente sem a ocorrência prévia de elevados picos de força. A figura 2-3 mostra alguns exemplos de mecanismos de iniciação;
- a **Força Média Pós-Esmagamento** (*mean post-crushing load*), que é o valor que permite caracterizar um dado tubo (ou estrutura em geral) na sua capacidade para dissipar energia de forma estável durante o esmagamento.

No que diz respeito ao projectista, o seu objectivo é o de dispor o material de tal forma que essa zona destrutiva progrida de forma estável, que a energia absorvida seja tão elevada quanto possível, e que uma força elevada (Força

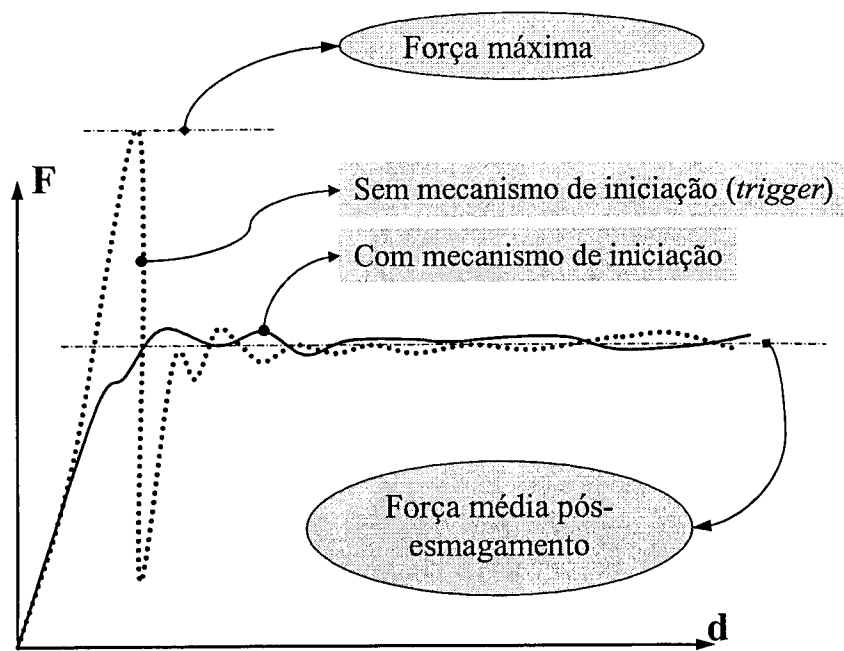


Figura 2-2: Ilustração dos conceitos de força máxima durante o esmagamento e de Força Média Pós-Esmagamento (*mean post-crushing load*).

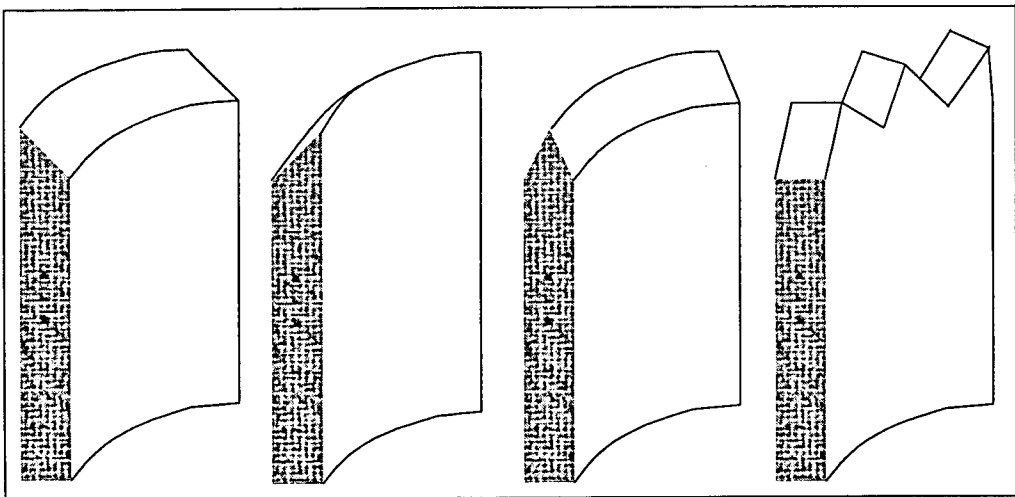


Figura 2-3: Exemplo de alguns mecanismos de iniciação (*trigger*).

Média Pós-Esmagamento) se mantenha aproximadamente constante durante a progressão do esmagamento da zona de fronde. Para além disso, a formação da zona de fronde deverá ser feita de forma *suave*, evitando que se originem picos de força, que poderiam induzir encurvadura e/ou afectar a funcionalidade do tubo enquanto dispositivo de dissipação de energia e de protecção de equipamentos ou pessoas. Se estas condições forem satisfeitas, o componente terá uma elevada capacidade de dissipação de energia específica. Por outras palavras, deverão ser evitados os modos de rotura catastróficos possíveis. No seu trabalho, Farley (1993) caracteriza três tipos diferentes de rotura catastrófica de tubos em material compósito. O primeiro (ver figura 2-4), designado por **corte transverso** (*transverse shearing*), pode ocorrer em materiais com elevado módulo e baixa deformação à rotura (reforço de carbono). É caracterizado pela formação de um "rendilhado" junto à zona de transferência de carga, de modo que esta deixa de ser uniforme. O segundo (ver figura 2-4), designado por **flexão do laminado** (*laminar bending*), é característico em situações de baixa tenacidade da matriz. Neste caso, a fissuração da matriz faz-se com mais facilidade e a zona de fronde apresenta um raio de curvatura elevado. Em consequência, a progressão do esmagamento é possível sem ocorrer fractura de fibras pelo que a energia absorvida é baixa. O terceiro caso (ver figura 2-4) designa-se por **encurvadura local** (*local buckling*). Este modo de rotura catastrófica é passível de ocorrer em materiais com considerável ductilidade, como aqueles com reforço de aramida². A encurvadura localizada provoca a coalescência e crescimento de delaminagens e consequente rotura catastrófica.

2.2 Mecanismos de rotura nos materiais compósitos

A complexidade inerente à natureza física dos materiais compósitos tem como consequência a complexidade do respectivo comportamento mecânico, em par-

²A aramida é normalmente referida pela designação comercial Kevlar.

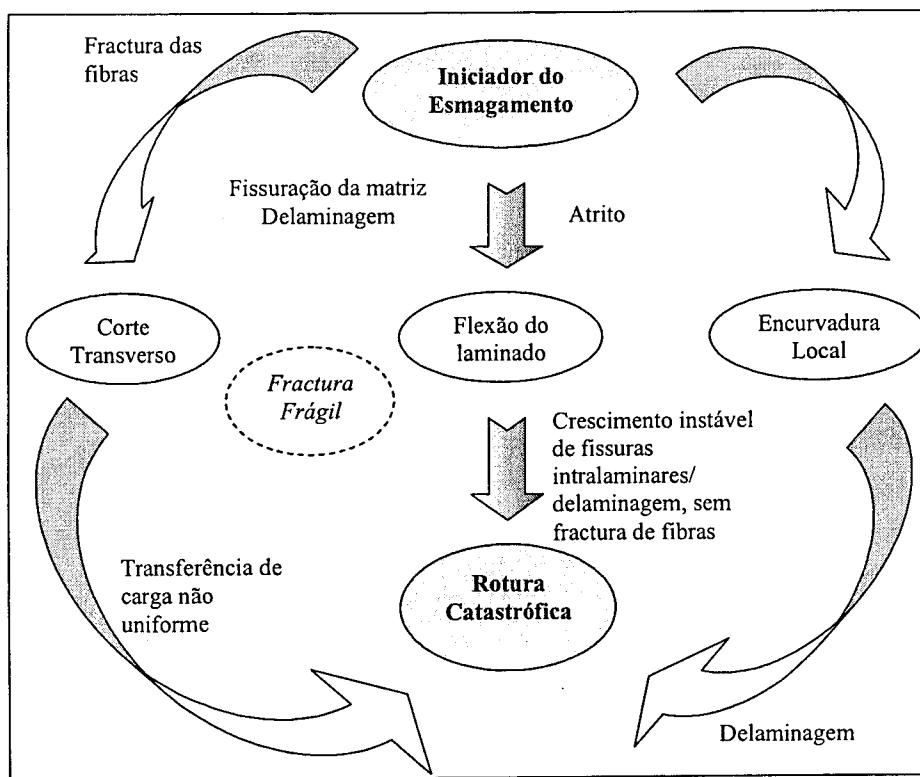


Figura 2-4: Modos de ruína catastróficos de um tubo em material compósito. Baseado em Farley (1993).

ticular dos modos de dissipação de energia. Essa complexidade, associada à sua tradicionalmente pequena aplicação na vida do dia-a-dia³, fazem com que os critérios de dimensionamento dos materiais compósitos, no que diz respeito à sua vida segura (*safe life*), avaria segura (*fail safe*) e dissipação de energia em situação de esmagamento/colisão (*crashworthiness*), sejam assuntos com os quais os investigadores se começaram a preocupar apenas há relativamente pouco tempo (Haug, 1993; Deletombe, 2000). O método dos elementos finitos, as soluções empíricas, a Mecânica da Fractura, a teoria do dano, os meios experimentais, bem como o desenvolvimento dos meios computacionais nos últimos anos contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de previsão do comportamento, dano e ruína de estruturas complexas em materiais compósitos. Ao contrário dos

³Em aplicações exigentes.

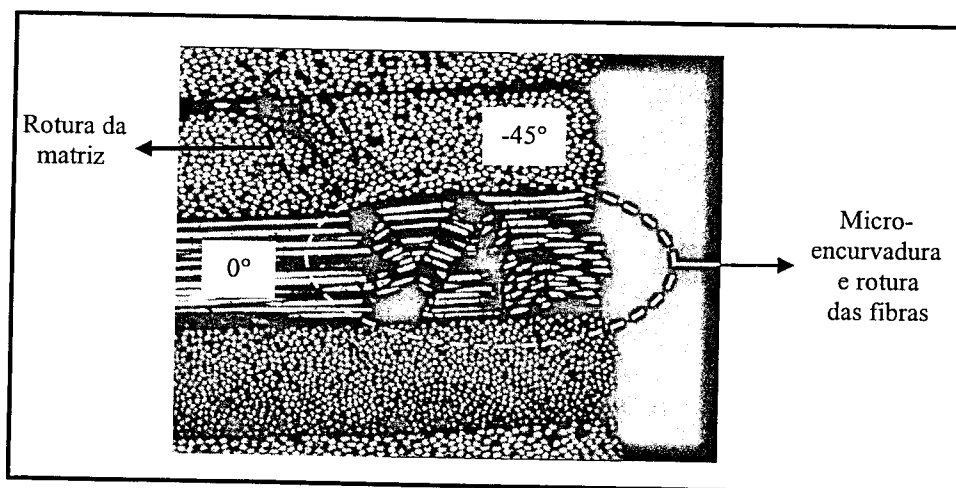


Figura 2-5: Representação de vários mecanismos de rotura existentes nos materiais compósitos. Baseado em Camanho (1999).

materiais metálicos, os compósitos são caracterizados pela existência de diferentes mecanismos de rotura (ver a figura 2-5), que são analisados de seguida.

2.2.1 Rotura da matriz

O dano na matriz, em materiais compósitos laminados reforçados com fibras longas, pode ocorrer na forma de zonas extensas, não-confinadas, tal como no caso das fendas que fissuram as camadas (*splitting cracks*) e as fendas transversais (*transverse cracks*). Este tipo de dano pode ser tratado de acordo com a Mecânica da Fractura Linear Elástica, à escala de cada camada. Existem ainda as fendas interlaminares de delaminação (*interlaminar delamination cracks*) que podem ser entendidas como uma situação de rotura da matriz. Por outro lado, o dano na matriz pode também existir a escalas menores, como no caso das *micro-fissuras* junto a uma zona de concentração de tensões, provocada eventualmente por um entalhe. Essas micro-fissuras são sub-críticas para a ruína, já que aparecem bem antes de se dar a rotura da primeira fibra. De facto, pode observar-se que se trata de dano confinado na forma de uma pequena rede de micro-fissuras que se encontra delimitado pelas camadas adjacentes no empilhamento. Pelo facto

das fibras não estarem partidas, esta forma de dano fica confinada numa região, e esta rede sub-crítica de micro-fissuras pode ser tratada utilizando modelos materiais com possibilidade de modelação da fractura (*fracturing model materials*) e amaciamento por deformação (*strain softening*) (Haug, 1993). Mais recentemente, Johnson *et al.* (2001) utilizaram um modelo elasto-plástico, conjugado com um modelo de dano contínuo (*continuum damage-mechanics*) para a modelação conjunta da rotura da matriz e das fibras em compósitos laminados tecidos (*fabric-reinforced composite laminates*).

2.2.2 Fractura das fibras

A fractura das fibras, em materiais compósitos laminados reforçados com fibras longas, pode ocorrer como fractura (*i*) por tracção, onde as fibras da camada mais solicitada na direcção destas vão romper em tracção, havendo a distinguir o caso de regiões não perturbadas e regiões junto a zonas de concentração de tensões, como um entalhe. As fibras também podem colapsar (*ii*) por compressão. Neste caso, existe normalmente um mecanismo de iniciação como a *micro-encurvadura* das fibras, possibilitado pela rede de fendas sub-críticas da matriz e também pela fractura em tracção do lado à tracção das fibras encurvadas (Haug, 1993). Enquanto a rotura em regiões não perturbadas de fibras perfeitamente alinhadas pode levar à ruína imediata do componente ou estrutura, a nucleação da fractura de fibras junto a regiões de concentração de tensões necessita de crescer e dispersar-se até ocupar um certo *volume característico*, momento em que se dará a fractura local por coalescência da fractura das diferentes fibras. Este tipo de ruína pode ser estudado aplicando as técnicas da *Mecânica do Dano*, que pode descrever o comportamento que antecede a ruína final (Johnson, 1999, 2001; Haug, 1993).

2.2.3 Fractura da interface fibra/matriz

A ruína da interface entre a fibra e a matriz, que consiste na separação física das duas fases (*debonding*), com o frequente arrastamento das fibras (*fibre pullout*),

pode dever-se à rotura das fibras e/ou da matriz (Haug, 1993). Devido ao atrito durante o arrastamento das fibras, a ruína da interface acrescenta uma componente dissipativa quase-plástica à lei constitutiva do material (Haug, 1993).

2.2.4 Delaminagem

Este mecanismo de dano, típico dos materiais compósitos laminados, é responsável por uma grande parte da ruína de estruturas em materiais compósitos avançados. De forma simples, trata-se da "descolagem" das camadas de reforço devida à presença de tensões interlaminares localizadas normalmente em discontinuidades geométricas. Dado que na generalidade das aplicações, as estruturas em material compósito são estruturas de parede fina, sujeitas a esforços de flexão e em alguns casos compressão, essa "descoesão" tem normalmente um efeito catastrófico na redução das propriedades. A figura 2-6 mostra a progressão de uma delaminagem em resultado de uma solicitação de compressão após impacto. Na realidade, essa descolagem resulta da rotura da fina camada de resina entre duas camadas de reforço consecutivas. Essa descolagem pode acontecer devido à solicitação em si, num material *são*, devido às tensões interlaminares, mas também se pode dever à presença de outras formas de dano intralaminar. A interacção entre dano intralaminar e interlaminar encontra-se representada na figura 2-7.

2.3 Mecanismos de dissipação de energia

Os mecanismos de rotura, na sua generalidade, são responsáveis por grande parte da dissipação de energia durante o esmagamento. Mamalis (1998) conclui que, no esmagamento de tubos cilíndricos de polyester/fibra de vidro correspondentes aos ensaios que efectuou, 40% da energia dissipada é relativa ao dano nas camadas (fissuração da matriz/ rotura das fibras), 7% é devida à delaminagem das pétalas e 3% devida à fissuração axial, ou seja, os diferentes mecanismos de dano são responsáveis por cerca de 50% da dissipação da energia. Existe, portanto, um outro mecanismo dissipativo associado ao esmagamento de estruturas

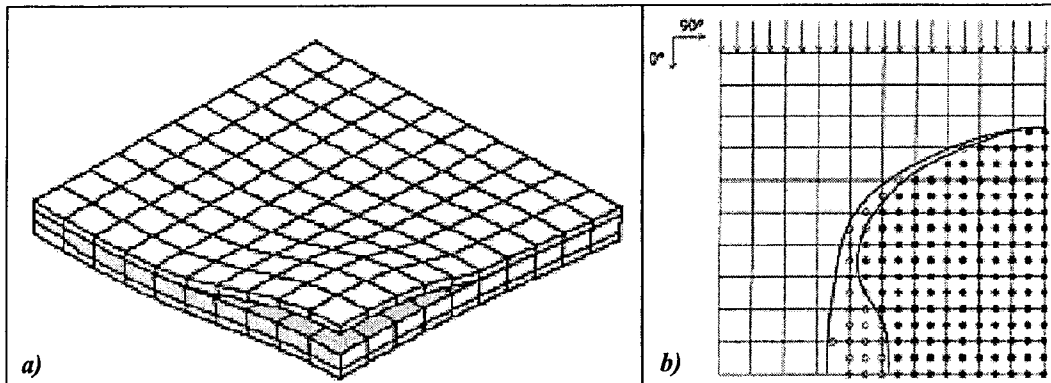


Figura 2-6: Em *a*), encurvadura de uma placa (delaminada) Carbono/Epóxico $[0^\circ_4/90^\circ_4]$ numa solicitação de compressão após impacto. Em *b*), progressão da delaminação devido à solicitação de *a*). Fonte: de Moura (1995, 2000).

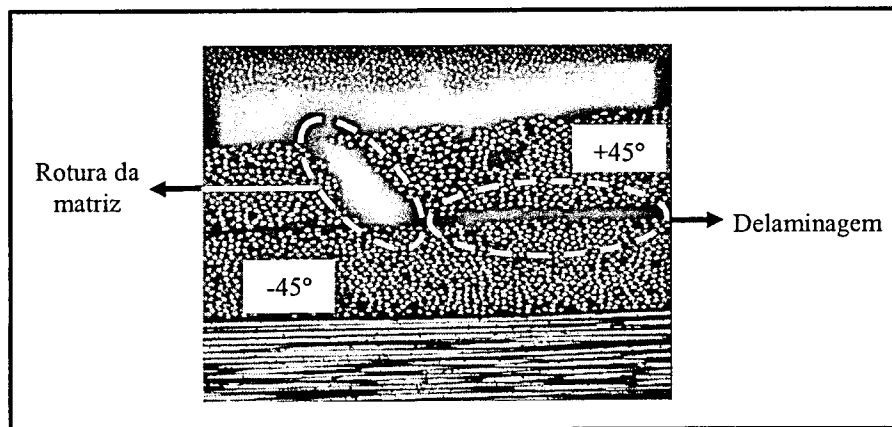


Figura 2-7: Interação entre mecanismos de dano Intralaminar e Interlaminar, baseado em Camanho (2001).

em materiais compósitos extremamente importante na capacidade de dissipação de energia. De facto, Mamalis (1998) depreendeu nos seus ensaios que o atrito entre a superfície actuante e as frondes, bem como o atrito entre as frondes e a cunha de detritos eram no seu conjunto responsáveis pelos restantes 50% da energia absorvida.

2.4 Velocidade de solicitação

O papel da velocidade de solicitação no esmagamento é duplo: por um lado, velocidades de solicitação elevadas provocam grandes acelerações no material, originando forças de inércia; por outro lado, várias propriedades mecânicas dos materiais envolvidos e das respectivas interfaces são dependentes da velocidade do processo (Mamalis, 1998; Haug, 1993). No que diz respeito às forças de inércia, a conjugação (i) da elevada rigidez dos materiais compósitos (e consequentes elevadas forças elásticas, para um dado deslocamento imposto) com (ii) a baixa densidade típica destes materiais (e consequentes baixas forças de inércia, para a gama de acelerações médias resultantes da forma como o deslocamento é imposto), faz com que a relação entre forças elásticas e forças de inércia seja tal que estas últimas possam geralmente, sem grande erro, ser desprezadas (Mamalis, 1998). Relativamente à influência da velocidade de solicitação nas propriedades mecânicas, a situação é bem diferente. Os parâmetros que mais variam são, por exemplo no caso de compósitos vidro/polyester (Mamalis, 1998), os *coeficientes de atrito* (coeficientes de atrito compósito/compósito e coeficiente de atrito compósito/actuador). Como foi referido, a energia dissipada por atrito nestes materiais é de cerca de 50% da totalidade da energia dissipada durante o esmagamento. Por outro lado, os coeficientes de atrito entre os casos de uma solicitação estática e dinâmica podem variar numa amplitude também de cerca de 50%. A influência em termos de energia específica absorvida pode rondar os 15%, sendo que é absorvida mais energia na situação dinâmica (Mamalis, 1998). Segundo o trabalho experimental desenvolvido por Mamalis (1998), para compósitos vidro/

polyester, apenas os coeficientes de atrito variam significativamente com a velocidade de solicitação. Outras propriedades, como a tenacidade, também são susceptíveis de variar. No entanto, o seu efeito em termos de energia absorvida é insignificante, em comparação com aquele provocado pela variação das propriedades de atrito. As implicações da variação do valor das propriedades mecânicas vão para além de alterar o valor da energia absorvida. Com efeito, existem, no esmagamento de uma estrutura em material compósito, diferentes mecanismos de dissipação de energia. Cada um desses mecanismos é caracterizado, em cada elemento de volume do componente sujeito ao esmagamento e em cada instante, por uma energia necessária ao seu desencadeamento, ou, o que é equivalente, por uma energia que é libertada se ele se desencadear. Assim, a actuação de um determinado mecanismo de dissipação de energia depende do campo de tensões, deformações ou deslocamentos existente. Logo, um mecanismo de dissipação de energia pode ou não tornar-se activo dependendo do valor de outras propriedades materiais/geométricas que não intervêm directamente nesse mecanismo (de dissipação de energia). A conclusão importante a tirar é que a alteração do valor das propriedades mecânicas pode alterar os mecanismos de dissipação de energia activos. A dependência dos mecanismos de dissipação de energia presentes durante o esmagamento, com a velocidade de solicitação, foi observada experimentalmente por Farley (1993), para compósitos de carbono/epóxico.

Exemplo: *Considere-se o caso do esmagamento de um tubo em carbono/epóxico, com as fibras alinhadas com o eixo do tubo e com uma geometria tal que é promovida a progressão estável da zona de fronde. A essa progressão estável, está associada uma elevada energia absorvida. Um dos mecanismos de absorção de energia presentes, relevante para este exemplo, é a rotura de fibras. A energia absorvida pela rotura de fibras depende naturalmente da tensão de rotura das fibras e da sua adesão à matriz. No entanto, verifica-se que a tenacidade da matriz tem um papel crítico, no desencadeamento ou não desse processo de absorção de energia. De facto, se a tenacidade for muito baixa, a fissuração axial da parede irá progredir tanto que o raio*

de curvatura das fibras na zona de fronde será elevado, podendo estas não romper. Este facto foi observado experimentalmente por Farley (1993). Em resumo, o valor de uma propriedade (neste caso a tenacidade da matriz) é determinante no desencadeamento de um processo de absorção de energia no qual não participa directamente.

2.5 Modelação numérica do esmagamento de estruturas em materiais compósitos

Devido ao progressivo melhoramento das capacidades de cálculo, a indústria aeronáutica (bem como a automóvel) considera, agora e cada vez mais, a utilização da simulação de colisões para o estudo da capacidade de dissipação de energia e do comportamento durante o esmagamento das novas estruturas em materiais compósitos. Assim, a simulação numérica é cada vez mais utilizada no desenvolvimento dos seus produtos (Deletombe, 2000). As aplicações da modelação numérica do esmagamento de estruturas em materiais compósitos parecem tender em duas direcções opostas (Charlier, 1991). Por um lado, existe a tendência de manter modelos completos de estruturas complexas e acrescentar cada vez mais pormenores (por exemplo, na indústria automóvel, acrescentar o pára-choques, as rodas, a bateria, a caixa da direcção,...) de modo a melhorar a qualidade dos resultados obtidos. Por outro lado, existe também uma tendência inversa, que tende para a formulação de modelos suficientemente simples, que sejam facilmente manipuláveis nas fases iniciais do projecto. A figura 2-8 mostra um exemplo de um modelo de elementos finitos explícito para a simulação da fase estacionária do esmagamento de um componente compósito simples, efectuado por Deletombe *et al.* (Deletombe, 2000). É notória, no gráfico que consta do lado direito da figura 2-8, a dificuldade que constitui prever a Força Média Pós-Esmagamento mesmo em casos simples. A figura 2-9 mostra uma aplicação do mesmo código explícito (Pam-Crash, 1992) a uma situação já mais complexa. É notável o nível de deformação da malha que é possível atingir com esta formu-

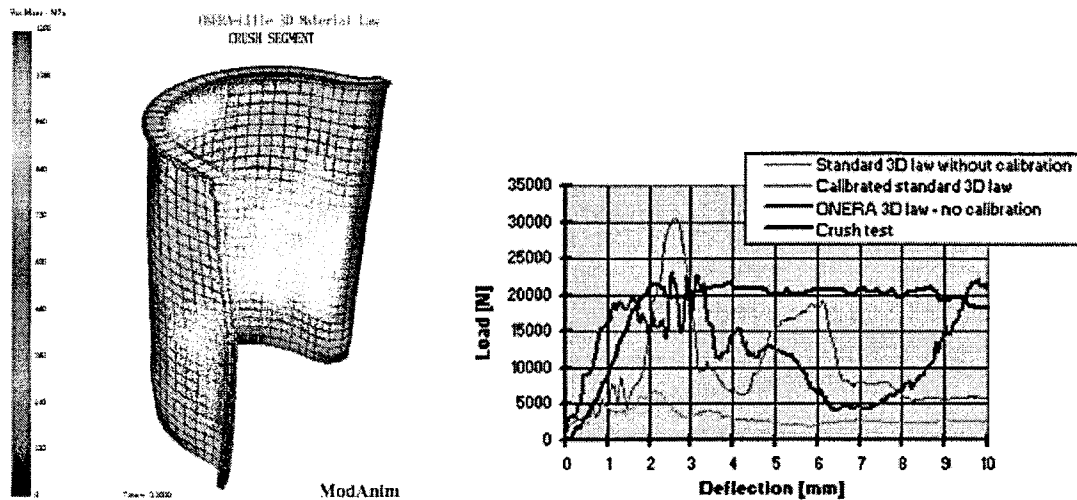


Figura 2-8: Exemplo da simulação numérica do esmagamento de um tubo composto carbono/epóxico (utilização do código explícito Pam-Crash, Deletombe, 2000).

lação. Pela análise dos vários sucessos conseguidos com as formulações explícitas, Jonhson (2001) conclui que estas formulações têm enormes vantagens sobre as tradicionais formulações implícitas, em problemas de *crashworthiness*. Tal é justificado pela sua maior robustez nas situações onde a não linearidade é elevada, particularmente quando existem problemas de contacto importantes.

Na modelação numérica do esmagamento (*crush*) de estruturas em materiais compósitos, surgem duas abordagens diferentes. A primeira, pelo método dos elementos finitos, é já bem aceite na indústria automóvel. As simulações efectuadas permitem concluir que modelos geometricamente bem pormenorizados com modelos materiais adequados originam bons resultados. Estas simulações são no entanto caras em termos computacionais. A maior vantagem do método dos elementos finitos é ser um método "completamente predictivo". No entanto, há ainda muito trabalho a fazer no que diz respeito à modelação de materiais não *standard* (Kindervater, 1998). A segunda possibilidade consiste nas **técnicas híbridas**. Estas técnicas consistem na modelação de estruturas complexas, na qual cada elemento estrutural dessa estrutura (por exemplo um

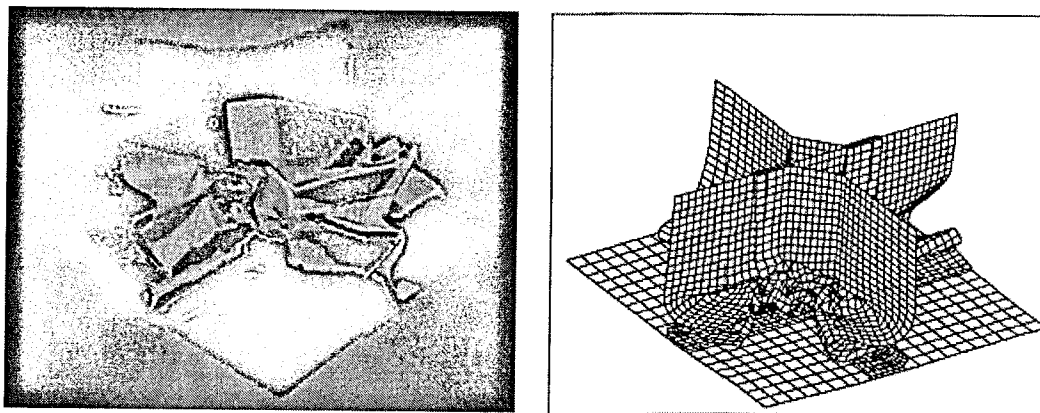


Figura 2-9: Esmagamento de um elemento cruciforme em material compósito. Comparação entre a deformada do componente real e a malha deformada (utilização do código explícito Pam-Crash, Deletombe, 2000).

tubo) é representado por um *elemento mais simples* (no caso do tubo, um elemento unidimensional). Esse elemento mais simples é então caracterizado por uma *lei constitutiva não linear equivalente* (ainda no caso do tubo, trata-se de um elemento de mola não linear), e de uma *massa pontual equivalente*. A estrutura assim discretizada pode ser modelada matematicamente originando um sistema de equações não lineares que pode ser resolvido numericamente. Como é evidente, as leis constitutivas equivalentes carecem de determinação independente (por via experimental ou numérica - modelos de elementos finitos). Por outro lado, o nível e forma de discretização podem ser variáveis. Tradicionalmente, estas técnicas têm sido bastante utilizadas na indústria aeronáutica. Os modelos são geometricamente bastante simples, pelo que permitem que sejam modelados por exemplo aviões inteiros com baixos custos computacionais (ver figura 2-10). Por outro lado, é necessário realizar bastantes ensaios experimentais de modo a conhecer as propriedades de sub-componentes a introduzir no código, para além de ser necessária muita experiência para ganhar sensibilidade para a forma como discretizar a estrutura de maneira a obter deles bons resultados (Kindervater, 1998).

Existem várias possibilidades para a modelação de estruturas compósitas de

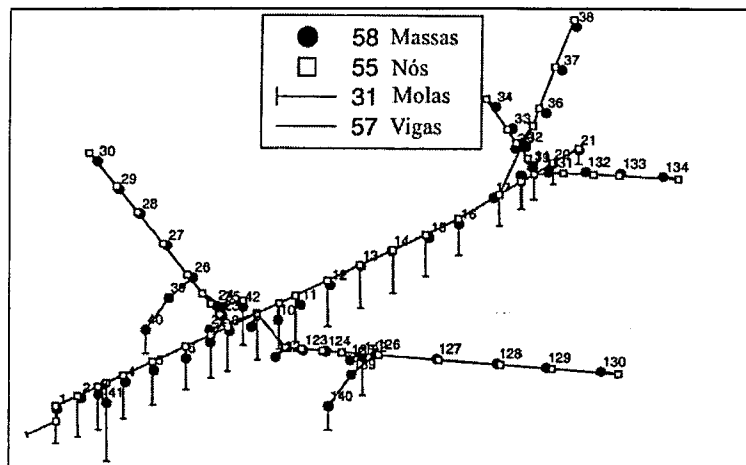


Figura 2-10: Modelo híbrido de um avião. Baseado em (Kindervater, 2000).

parede fina. Essas várias possibilidades podem preencher todo um campo com diferentes níveis de abstração ou de discretização. Ao nível de discretização maior corresponde naturalmente a modelação individual de cada fibra, a respectiva interface com a matriz e esta última. Como nível de discretização intermédio, pode-se considerar a homogeneização de cada camada, no caso de um laminado, mas sem deixar de considerar o comportamento individual de cada camada, que se encontra ligada às adjacentes por uma interface de resina. Se se continuar a diminuir o nível de discretização, pode-se considerar o comportamento global de uma parede (de um tubo) em material compósito, utilizando uma lei constitutiva "homogeneizadora" para toda a espessura (no regime elástico, corresponde à teoria de placas e cascas laminadas - ver por exemplo Chia, 1980). O nível de discretização menor corresponde a considerar o comportamento global de sub-estruturas. Por exemplo, o comportamento de um tubo de secção circular pode ser caracterizado através de um modelo unidimensional desse tubo, como se de uma mola com uma determinada lei constitutiva equivalente se tratasse.

Para cada nível de discretização referido, uma ou várias abordagens pelo método dos elementos finitos podem ser utilizadas para modelar o comportamento dos materiais compósitos.

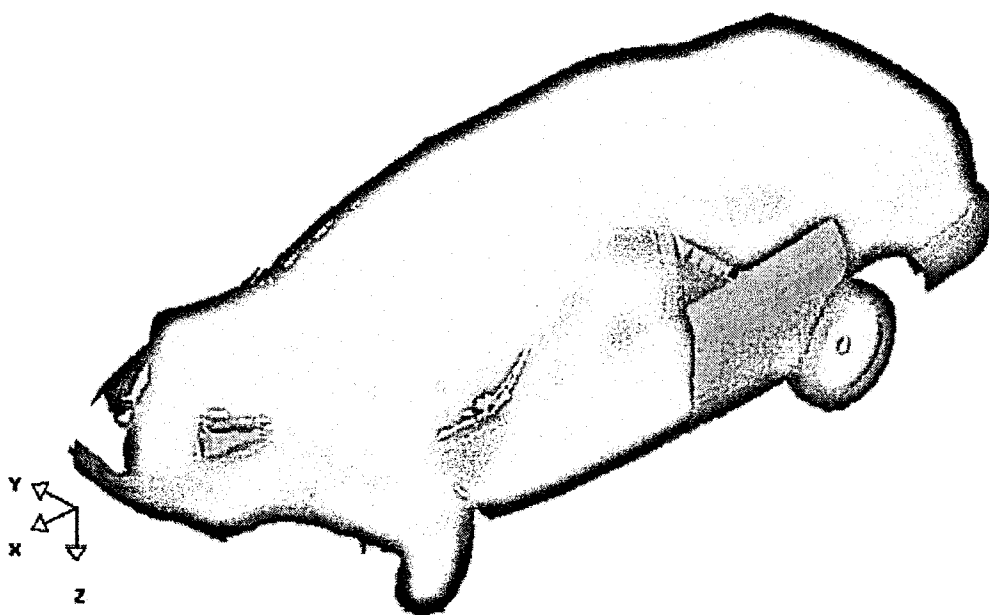


Figura 2-11: Ilustração da capacidade actual na simulação do esmagamento de estruturas complexas (Thacker, 1998).

2.5.1 Comparação entre materiais compósitos e metálicos

As técnicas numéricas de simulação do esmagamento de estruturas metálicas tipo casca (visco-) elasto-plástica já atingiram uma considerável maturidade industrial (ver figura 2-11). Todavia, as técnicas numéricas de simulação do esmagamento de estruturas, previsão da capacidade de carga e dissipação de energia dos componentes feitos em material compósito estão bem menos estabelecidas (Haug, 1993; Tay, 1998). A razão para isso encontra-se *(i)* na utilização muito mais recente destes tipos de materiais na indústria automóvel e aeroespacial, *(ii)* na relativa inexperiência na capacidade da previsão do comportamento do dano nos componentes em material compósito, bem como *(iii)* na substancial maior complexidade dos materiais compósitos relativamente aos metálicos (no que se refere à anisotropia, heterogeneidade, quantidade e complexidade dos mecanismos de dano envolvidos).

Em oposição aos metais, particularmente ao aço, os materiais compósitos

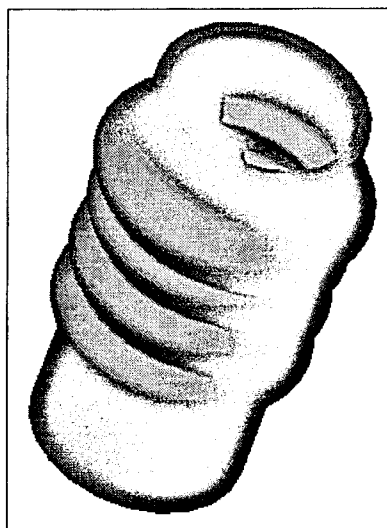


Figura 2-12: Representação esquemática do modo de esmagamento de um tubo metálico.

são *heterogêneos*, sendo constituídos por pelo menos duas fases diferentes: a *fibra* e a *matriz*. Os compósitos tendem a *desintegrar-se* ao absorver energia. Essa energia é absorvida essencialmente pela fractura das fibras e da matriz, o que pode destruir completamente a integridade estrutural das paredes e dos componentes. Em oposição, as estruturas metálicas raramente fracturam quando sujeitas a solicitações de impacto⁴ e mantêm a sua integridade estrutural, mesmo após a dissipação de energia plástica devida a grandes deformações plásticas (ver figura 2-12 na página 25), encurvadura e dobragem (Haug, 1993; Johnson, 1999). No entanto, a capacidade de dissipação de energia específica de vários tipos de materiais compósitos supera a dos materiais metálicos (figura 1-5).

Os materiais compósitos, mesmo quando obtidos a partir da mesma fibra e matriz, podem ser empilhados (*lay-up*) de diferentes modos e diferir assim: (i) na fracção volúmica de fibra; (ii) fibras orientadas segundo uma dada direcção ou aleatórias; (iii) uma só camada ou empilhamento de várias camadas; (iv) fibras tecidas, empilhadas ou não em várias camadas; (v) com ou sem fibras tecidas na direcção transversal ao plano do empilhamento (*stitch*); (vi) tecidos tridi-

⁴À temperatura ambiente.

mensionais; (vii) construção *sandwich* (com núcleo de ninho de abelha ou de espuma), entre outros. Finalmente, os materiais compósitos podem ser *hibridizados*, i.e., podem conter vários tipos de fibras, obtendo-se por exemplo misturas carbono-epóxico com aramida-epóxico e vidro-epóxico, ou outras. Estes *compósitos híbridos* podem ainda ser de natureza diferente no que diz respeito (i) à forma na qual se encontra presente um determinado tipo de fibra e (ii) à natureza da *hibridização*. Assim, em relação à forma na qual se encontra presente um determinado tipo de fibra, pode-se distinguir a sua presença sobre a forma de fibras curtas, fibras longas ou tecidos (*pré-formas*). Em relação à natureza da *hibridização*, pode-se distinguir os casos em que cada camada é de um só tipo de fibra, sendo que camadas diferentes podem ter reforços (fibras) de natureza diferente, e a situação em que em cada camada existe mais que um tipo de fibra, por exemplo carbono/aramida.

A micro-escala da construção da parede em material compósito (note-se que a espessura de uma camada é de cerca de 0.1 a 0.2 mm) torna impossível aos meios computacionais actuais estabelecer e resolver modelos detalhados, com elevados níveis de discretização, que representem estruturas grandes e complexas e simultaneamente tenham em atenção os pormenores físicos dos mecanismos de dano nas paredes em material compósito. A dimensão típica das cascas usadas em simulações globais de estruturas metálicas ronda os 5 mm × 5 mm, havendo ainda zonas mais refinadas. Os modelos desse tipo atingem facilmente os 60000 elementos e a solução continua a ser computacionalmente exequível (Haug, 1993). As malhas dos modelos globais de estruturas em materiais compósitos deverão ser, por questões de exequibilidade computacional, da mesma dimensão na macro-escala da parede. Ao simular o esmagamento global de uma estrutura, as propriedades mecânicas e de ruína equivalentes de elementos de casca devem portanto ser avaliados na macro-escala da parede (Haug, 1993). Como já foi referido, essas propriedades podem ser obtidas quer por via numérica (através de modelos mais detalhados) ou por via experimental. Qualquer que seja o meio, o objectivo é o de reproduzir tubos simples de secção circular ou outra, placas,

elementos representativos e sujeitá-los a carregamentos de esmagamento axiais e laterais. A partir dos resultados das simulações/experiências, inferir-se-á a curva carga/deslocamento respectiva e poder-se-á proceder à simulação do comportamento da estrutura.

2.5.2 Utilização de elementos sólidos para a modelação de um elemento de volume representativo

Um elemento representativo de um laminado ou de uma camada deste pode ser modelada por elementos sólidos. Os elevados custos computacionais desta alternativa são evidentes. Ainda assim, este nível de discretização poderá ser utilizado na análise de elementos de volume representativos de um laminado, ou de uma camada deste, podendo por exemplo fornecer informação sobre a localização e densidade de microfissuras na matriz que resultem de um dado carregamento, e poderá ser utilizado para a calibração das propriedades elásticas da camada, de modelos de dano ou do modo de deformação por corte (*scissoring*) dos tecidos (Beard, 2000; Tan, 1989, 1993; Nuismer, 1988).

2.5.3 Utilização de elementos sólidos para a modelação individual de cada camada

Cada camada de um laminado em material compósito pode ser modelada por uma ou várias camadas de elementos sólidos, por exemplo elementos paralelepípedos. De modo a poder prever a descoesão entre as diferentes camadas do laminado, deve ser prestada atenção à ligação entre camadas adjacentes. Essa ligação pode ser materializada (i) por ligações elásticas nó a nó, sendo a ligação feita por exemplo com elementos de mola (ver, por exemplo, Tay, 1998; Abdel-Haq, 1999; Rahman, 2000; Bonora, 2000); ou (ii) utilizando elementos de descoesão (também designados por elementos de interface). Esta última abordagem é computacionalmente mais pesada mas tem a vantagem de permitir introduzir de forma eficiente os conceitos da Mecânica da Fractura para a propagação das delaminagens, per-

mitindo uma reprodução muito rigorosa da sua progressão, em situações de Modo I, Modo II e também Modo Misto (I e II).

Por causa do seu elevado custo computacional, modelos tão detalhados quanto este não são hoje ainda viáveis para a modelação de estruturas complexas (tais como a frente de um automóvel, por exemplo). Ainda assim, esses modelos têm potencialidades na determinação, durante a fase de projecto de componentes, (i) de picos de força existentes durante a fase de formação da zona de fronde e (ii) da Força Média Pós-Esmagamento, i.e., durante a progressão estabilizada da zona de fronde (Haug, 1993). O projectista pode então comparar diferentes soluções, no que diz respeito (i) à sequência de empilhamento, (ii) ao mecanismo de iniciação (ou de gatilho), (iii) à geometria da secção do componente (circular, quadrada, diferentes raios de curvatura) e (iv) ao efeito de defeitos de processamento, entre outros. Se esses modelos não forem realizados, deverão ser executados numerosos ensaios experimentais numa fase precoce do projecto, com reflexos económicos e de celeridade da fase de projecto evidentes. Por outro lado, os resultados de simulação do comportamento das paredes em material compósito, com discretização ao nível de cada camada, podem ser utilizados para obter propriedades elásticas e inelásticas (de ruína) equivalentes, utilizadas depois para calibrar elementos de casca. Esses elementos de casca poderão então simular o comportamento de estruturas mais complexas. A utilização deste procedimento, que envolve (i) o conhecimento das propriedades elásticas das camadas, (ii) o conhecimento do modelo de dano adequado para uma camada de um dado material, (iii) o conhecimento do comportamento da interface entre camadas e (iv) a utilização de métodos numéricos que permitam chegar às soluções, possibilita que os ensaios experimentais sejam remetidos praticamente para a fase de construção de um protótipo (Johnson, 1999).

2.5.4 Utilização de elementos axissimétricos na modelação individual de cada camada

O processo de esmagamento de um tubo em material compósito não é um processo axissimétrico. No entanto, pode ser razoável, em determinadas circunstâncias, esperar obter bons resultados através da utilização de elementos axissimétricos. Começemos por considerar o caso do esmagamento de um tubo metálico de parede fina. O tubo colapsa normalmente por instabilidade e dobragem das paredes (figura 2-12). Durante esse processo, não há geralmente a progressão de qualquer fissura axial, e a descrição do fenómeno físico assume um eixo de simetria coincidente com eixo de revolução do tubo. A situação de esmagamento de um tubo em material compósito é no entanto bem diferente (rever a figura 2-1). O tubo colapsa pela progressão de uma zona de esmagamento localizado (zona de fronde). Nessa zona de fronde, são formadas pétalas em resultado (i) da delaminação da parede e (ii) da progressão de fissuras axiais. Ora, esse segundo factor (a progressão das fissuras axiais) faz com que o processo não seja axissimétrico no caso dos materiais compósitos. Ainda assim, se repararmos que (i) a transmissão de carga entre o tubo e a superfície actuadora é feita através das pétalas, (ii) a forma da solicitação das pétalas faz com que as tensões circunferenciais sejam de ordem de grandeza inferior às tensões longitudinais e (iii) a utilização de elementos finitos axissimétricos com um modelo de dano intralaminar que degrade as propriedades mecânicas também é passível de originar tensões baixas/nulas na direcção circunferencial, então, é de esperar que o modelo axissimétrico reproduza com aproximação o processo de esmagamento real. Este tipo de modelo não considera de forma exacta a energia absorvida pela propagação das fissuras axiais. No entanto, como vimos, Mamalis (1998) conclui que a energia associada a essa propagação é baixa, relativamente à dos outros processos envolvidos. Resumindo, a utilização de elementos axissimétricos tem como principal vantagem o menor custo computacional envolvido, e como desvantagens (i) a aproximação que lhe está implícita bem como (ii) a falta de flexibilidade no que diz respeito aos tipos de problemas que é possível tratar. Beard *et al.* (Beard, 2000) con-

seguem com este tipo de elementos e o software ABAQUS (Abaqus, 2000) uma boa concordância com os resultados experimentais para o esmagamento de tubos cilíndricos tecidos (*braided*).

2.5.5 Utilização de elementos de casca para a modelação de toda a parede

Ao utilizar elementos de casca, estamos a representar todo o empilhamento das dife-

rentes camadas da parede por um único elemento. No entanto, tem-se que distinguir as situações (*i*) em que se utilizam propriedades homogeneizadas ao longo da espessura, e que resultam das propriedades de cada camada (casca monocamada); (*ii*) em que se considera a existência das diferentes camadas ao longo da espessura, sendo que cada uma delas possui uma lei constitutiva própria (casca multicamada); e (*iii*) em que estamos perante uma estrutura caracterizada por ter um núcleo de espessura muito maior que as peles e com propriedades mecânicas geralmente inferiores (estrutura *sandwich*).

Casca monocamada

As propriedades de uma casca monocamada (*monolayered shell*) são definidas por homogeneização das propriedades da parede compósita (multicamada) que existe na realidade. As propriedades mecânicas equivalentes podem ser determinadas directamente por ensaios experimentais ou por modelos detalhados com elementos tridimensionais ou casca multicamada (conforme referido de seguida).

Casca multicamada

Uma casca multicamada (*multilayered shell*) consiste numa sobreposição de diferentes camadas, cada uma delas com diferentes propriedades e diferentemente orientadas. O modelo material de cada camada pode prever a existência de um meio bifásico com matriz (resina) e reforço (fibras), sendo o respectivo modelo

de dano capaz de distinguir entre diversos mecanismos de ruína em diferentes camadas. Johnson *et al.* (Johnson, 1999, 2001) utilizam uma pilha de elementos de casca, em que cada elemento simula uma camada. Os elementos são ligados ao longo da espessura através de restrições nodais e interfaces em contacto (*contact interfaces*). Para a propagação das delaminagens, são utilizados os conceitos de Taxa de Libertação de Energia, da Mecânica da Fractura, com base no trabalho de Alfano *et al.* (ver por exemplo Alfano, 2001).

Estrutura sandwich

Cascas feitas de estrutura sandwich podem ser representadas por um modelo casca - elemento tridimensional - casca. Assim, cada *pele* da estrutura sandwich pode ser representada por um elemento de casca (monocamada ou multicamada), e o núcleo pode ser representado por elementos tridimensionais (eventualmente paralelepípedicos), com propriedades mecânicas ortotrópicas (caso da generalidade dos núcleos em ninho de abelha) ou isotrópicas (caso da generalidade dos núcleos de espuma) (Haug, 1993).

2.5.6 Utilização de modelos híbridos

Os modelos híbridos, como no código KRASH (DRI/KRASH, 1996) usam uma modelação semi-empírica utilizando massas concentradas, molas com leis constitutivas não lineares, bem como elementos de viga para a representação de estruturas completas. Este tipo de abordagem tradicionalmente recai muito sobre dados experimentais, relativos ao comportamento individual de cada elemento da estrutura (Fasanella, 2001). Existem ainda assim exemplos de aplicações bem sucedidas deste procedimento na simulação do esmagamento em aviões (Freund, 2001; Kindervater, 1998, 2000). A figura 2-10 (na página 23) mostra como este tipo de abordagem pode ser utilizado para a modelação completa de um avião. Note-se no entanto que o comportamento individual de cada elemento da estrutura poderá, em alguns casos, ser inferido por meio de modelações numéricas mais detalhadas de sub-componentes isolados, como as já referidas.

2.5.7 Esquema de integração

Os problemas de esmagamento de materiais compósitos têm como características fundamentais, à semelhança daquilo que acontece nos metais, (i) a sua grande dimensão - em termos numéricos; (ii) os grandes deslocamentos, deformações e consequentes elevada não linearidade e distorção dos elementos.

A elevada não linearidade tem como consequência fundamental a dificuldade de convergência de um **esquema de integração implícito**, para além dos custos computacionais relacionados com a construção e inversão da matriz de rigidez global da estrutura (Johnson, 2001, Tay, 1998). Quanto ao **esquema de integração explícito**, este importa custos computacionais menores, já que a matriz de rigidez global da estrutura nunca chega a ser toda construída simultaneamente, e muito menos invertida. No entanto, os resultados obtidos por esquemas de integração explícito são muito mais dependentes da malha (*mesh-sensitive*) que os implícitos, para além de necessitarem incrementos de tempo muito pequenos para convergirem. Além do mais, a grandeza do incremento de tempo necessário para se obter convergência nos métodos explícitos é função da rigidez do sistema. No entanto, na presença de dano, esta varia continuamente. Logo, o incremento de tempo necessário para a convergência ser garantida varia ao longo da análise.

Assim, os esquemas de integração implícitos revelam-se particularmente adequados para o estudo detalhado, com elevado nível de abstração, de elementos de volume representativos e de componentes simples, enquanto os esquemas de integração explícitos se revelam mais adequados para a análise de componentes mais complexos e de estruturas inteiras.

2.5.8 Modelos materiais no código Pam-Crash - Mecânica do Dano Contínuo

Vários autores utilizam no seu trabalho o código explícito Pam-Crash para a simulação de estruturas automóveis e aeronáuticas (elementos cruciformes, estrutura inferior (*subfloor-box*) de um helicóptero,...) em situações de colapso a

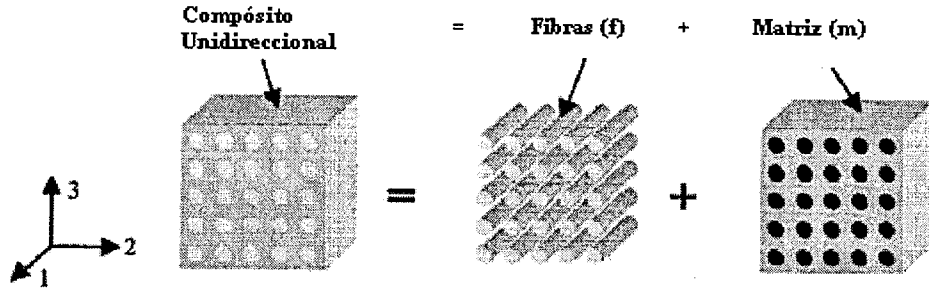


Figura 2-13: Representação de um modelo bifásico, baseada em Coutellier (2000).

diferentes velocidades (Coutellier, 2000; Deletombe, 2000; Johnson, 1999, 2001; Kindervater, 2000; McCarthy, 2000). Os autores referem a importância da inclusão de modelos de comportamento material relativos a cada material que se pretenda simular. A possibilidade de progressão do dano correspondente aos diferentes modos de rotura deve estar embutida no código. Johnson *et al.* (Johnson, 1999) enfatizam o desafio da Mecânica do Dano Contínuo (*Continuum Damage-Mechanics*) em desenvolver modelos que sejam passíveis de ser implementados, e que utilizem parâmetros experimentais que sejam passíveis de ser determinados facilmente.

Modelo de Dano Contínuo para compósitos unidireccionais com base num critério de deformações

O conceito de *Mecânica do Dano Contínuo* pode ser melhor compreendido se se começar por definir o conceito de material "bifásico". Um modelo material "bifásico" (figura 2-13) permite que sejam atribuídas às *fibras* e à *matriz* de camadas **unidireccionais** diferentes propriedades de rigidez e resistência. Assim, pode-se modelar o dano separadamente em cada fase, por meio de uma redução da rigidez, de acordo com:

$$\begin{aligned} C^{PLY} &= C^f + C^m, & C^f &= C_0^f (1 - d^f) \\ & & C^m &= C_0^m (1 - d^m). \end{aligned} \quad (2.1)$$

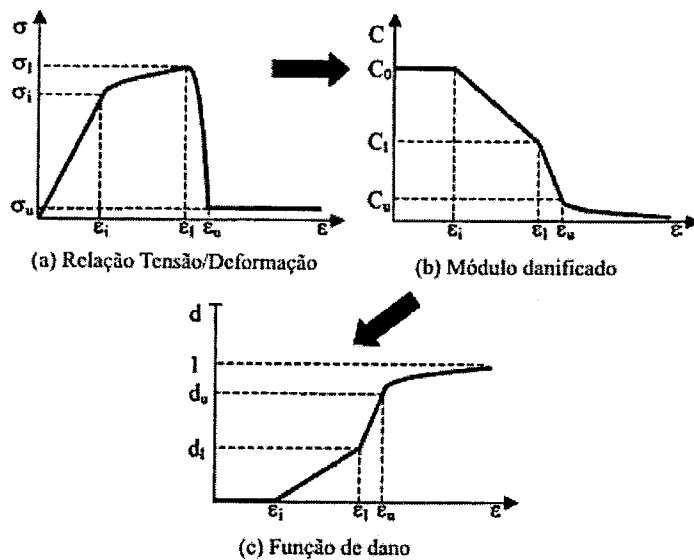


Figura 2-14: Modelo de dano do código Pam-Crash, baseado em Coutellier (2000).

Na expressão anterior, C^f e C^m representam a rigidez da fase "fibra" e da fase "matriz", com valor inicial C_0^f e C_0^m . Ainda, d^f e d^m são variáveis escalares de dano (que variam de 0 a 1) também para as fibras e a matriz respectivamente. C^{PLY} representa a rigidez da camada. O dano na matriz é dividido em dano devido ao **primeiro invariante do tensor das deformações** e dano devido ao **segundo invariante de tensor das deformações de desvio**. O dano total da matriz é a soma dos dois danos anteriores. O dano nas fibras é devido apenas à deformação numa dimensão.

A calibração do modelo (figura 2-14) consiste em atribuir os valores da rigidez inicial (C_0^f , C_0^m) e depois calibrar a evolução das duas variáveis de dano d^f e d^m . Essa calibração é feita recorrendo a simulações com um só elemento. Curvas tensão-deformação idealizadas, tais como a da figura 2-14, são geradas definindo os valores ϵ_i , ϵ_1 , ϵ_u bem como os valores de dano d_1 e d_u . Tal é feito para ambos os tipos de dano. Esta forma bilinear do dano leva a que a relação tensão-deformação seja representada por duas parábolas, conforme as equações seguintes.

(i) Para $\varepsilon_i < \varepsilon < \varepsilon_1$:

$$\sigma = E_0 \varepsilon \left(1 - \frac{d_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_i} (\varepsilon - \varepsilon_i) \right). \quad (2.2)$$

(ii) Para $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_u$:

$$\sigma = E_0 \varepsilon \left(1 - d_1 - \frac{d_u - d_1}{\varepsilon_u - \varepsilon_1} (\varepsilon - \varepsilon_1) \right). \quad (2.3)$$

Para além de d_u , o dano tende assintoticamente para 1, enquanto a tensão "residual" permanece constante.

(iii) Para $\varepsilon > \varepsilon_u$:

$$\sigma = E_0 \varepsilon_u (1 - d_u). \quad (2.4)$$

Com cinco parâmetros para cada um dos três tipos de dano, a serem definidos tanto em tracção como em compressão, há um total de trinta parâmetros a serem definidos para caracterizar o dano. Métodos de calibração experimental para obter esses parâmetros são apresentados nos manuais do código PAM-CRASH (Pam-Crash, 1992).

Modelo de Dano Contínuo para compósitos laminados reforçados com tecidos, com base nas taxas de libertação de energia de dano

Vários autores utilizam o modelo material existente no código Pam-Crash, para a modelação de compósitos laminados reforçados com tecidos (*fabric-reinforced composite laminates*). Na sua formulação, Johnson *et al.* (Johnson, 1999) utilizam uma versão degenerada do modelo bifásico para modelar os tecidos⁵. Johnson *et al.* (Johnson, 1999) assumem uma única função de dano, a qual degrada todas as componentes da matriz de rigidez igualmente. Essa variável de dano é controlada com base num critério de deformações. Johnson *et al.* concluem nesse trabalho que conseguem prever os modos de rotura com boa aproximação.

⁵A fracção volúmica de fibra é igualada a zero e o compósito é modelado como um simples material ortotrópico, sem se poder distinguir entre dano na matriz e nas fibras.

No entanto, referem que o nível de força, e portanto a energia dissipada, estão frequentemente abaixo dos resultados experimentais. Mais tarde, Johnson *et al.* (Johnson, 2001) apresentam uma formulação de um elemento de casca para compósitos laminados reforçados com tecidos em que são utilizadas três variáveis de dano. A relação constitutiva assumida é do tipo

$$\epsilon = S\sigma \quad (2.5)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1(1-d_1)} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2(1-d_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}(1-d_{12})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

onde estão introduzidos as três variáveis de dano d_1 , d_2 e d_{12} . Seguindo o trabalho de Ladevéze (1994), Johnson *et al.* (Johnson, 2001) apresentam o conceito de *forças conjugadas* (*conjugate forces*), também designadas por *taxas de libertação de energia de dano*⁶ (*damage energy release rates*) como sendo as forças motrizes (*driving forces*) para a ocorrência de dano no material. Para uma lei constitutiva como aquela expressa na equação 2.6, as *forças conjugadas* tomam a forma (Johnson, 2001):

$$Y_1 = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1(1-d_1)^2}, \quad (2.7)$$

$$Y_2 = \frac{\sigma_{22}^2}{2E_2(1-d_2)^2} \text{ e } \quad (2.8)$$

$$Y_{12} = \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}(1-d_{12})^2}. \quad (2.9)$$

⁶Não confundir com *Taxa de Libertação de Energia*.

Finalmente assume-se que as variáveis de dano são funções das *forças conjugadas*, da forma

$$d_1 = f_1(Y_1, Y_2, Y_{12}), \quad (2.10)$$

$$d_2 = f_2(Y_1, Y_2, Y_{12}) \text{ e} \quad (2.11)$$

$$d_{12} = f_{12}(Y_1, Y_2, Y_{12}). \quad (2.12)$$

As seis equações 2.7 a 2.12 permitem determinar as seis variáveis Y_1 , Y_2 , Y_{12} , d_1 , d_2 e d_{12} desde que se conheça a forma explícita das funções f_1 , f_2 e f_{12} . Essa determinação é feita por Johnson *et al.* (Johnson, 2001) admitindo algumas hipóteses simplificativas (que reduzem as funções anteriores a funções lineares desacopladas - do tipo $d_i = f_i^{lin.}(Y_i)$). Os parâmetros necessários são então determinados por calibração, recorrendo a dados experimentais.

Johnson *et al.* (Johnson, 2001) aplicam este modelo para simular o dano intralaminar no impacto de alta velocidade de uma esfera de aço numa placa laminada reforçada com tecido em carbono/epóxico, obtendo boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais.

McCarthy *et al.* (McCarthy, 2001) apresentam uma análise detalhada do esmagamento da estrutura inferior de um helicóptero em compósitos laminados reforçados com tecidos. A análise numérica é feita recorrendo ao código explícito Pam-Crash (1992), utilizando o modelo material homogeneizado. Os resultados são comparados com os resultados experimentais. McCarthy *et al.* concluem nesse trabalho que os resultados das simulações, utilizando apenas os resultados de ensaios de provetes, conseguem prever globalmente o comportamento do componente durante o ensaio. No entanto, McCarthy *et al.* acrescentam que algo mais é necessário para melhorar a correspondência entre o ensaio do componente e a simulação. Como resultado desse seu trabalho, McCarthy *et al.* inferem que a calibração das propriedades pós-rotura é essencial para obter bons resultados. A importância do papel do atrito é também salientada, bem como a pertinência da sensibilidade dos resultados à malha utilizada.

Kindervater *et al.* (Kindervater, 2000) utilizam a mesma metodologia numa análise local/global. O desempenho de sub-componentes críticos de um avião é analisada pelo método exposto (no que diz respeito aos componentes compósitos), e a estrutura (avião) completa é analisada com um método híbrido (DRY/KRASH, 1996).

Capítulo 3

Elemento de descoesão com não linearidade geométrica

3.1 Introdução

Durante o esmagamento, os materiais compósitos desenvolvem vários tipos de fissuras, desde a microfissuração da matriz à fissuração completa das paredes finas de estruturas (eventualmente tubulares) passando pela delaminagem entre camadas diferentemente orientadas. Essa fissuração é caracterizada pela existência de uma zona de processo¹ (*process zone*). Estes mecanismos de rotura têm uma particularidade importante: durante o seu desenvolvimento, **a energia é dissipada por unidade de área**, na formação de novas superfícies.

Por outro lado, se se pensar num elemento finito genérico (tridimensional, de casca, Estado Plano de Tensão, axissimétrico), ou mais concretamente na sua equação de equilíbrio,

$$\int_{\text{Volume}} \dots d\text{Volume} \mathbf{u} - \mathbf{f} = 0, \quad (3.1)$$

torna-se evidente que a contabilização da energia é um processo **volumétrico**: a

¹Uma zona de processo é uma zona de pequenas dimensões, caracterizadas pela presença de elevados gradientes de tensões, e onde se desenvolve o processo de rotura.

energia dissipada num meio bidimensional é nula. Assim, estes elementos tornam-se incapazes de, por si só, modelar correctamente os fenómenos de dissipação de energia localizados existentes nos materiais compósitos². Uma das principais evidências e consequências deste facto é o problema da dependência dos resultados obtidos com a malha de elementos finitos utilizada (de Borst, 2001).

A simulação do esmagamento de estruturas de parede fina em materiais compósitos implica então a possibilidade de se conseguir modelar adequadamente a descoesão que existe (i) entre as camadas diferentemente orientadas de um empilhamento e (ii) durante a fissuração axial da parede. Este problema tem sido tratado por alguns autores utilizando elementos de mola, com leis constitutivas apropriadas, para estabelecer a ligação entre diferentes elementos de um modelo (Tay, 1998; Abdel-Haq, 1999; Bonora, 2000). Esta abordagem apresenta como principal vantagem a sua simplicidade e facilidade de convergência. No entanto, esta abordagem apresenta algumas desvantagens:

- (i) A utilização de elementos de mola não permite distinguir entre os diferentes *Modos* de carregamento. De facto, o elemento de mola liga dois nós de dois elementos (eventualmente sólidos) diferentes. A força que é estabelecida entre esses nós (dos dois elementos sólidos) depende da grandeza do afastamento entre eles. Com elementos de mola, não é possível projectar esse deslocamento segundo diferentes direcções (normal ou de corte). Logo, a contabilização correcta da energia de descoesão, que pressupõe o conhecimento do Modo de descoesão não pode ser conseguida.
- (ii) Para uma contabilização correcta da energia de descoesão, a lei constitutiva do elemento de mola deverá depender da área de integração associada aos nós dos elementos sólidos a que está ligada a mola. Como é evidente, essas áreas deverão ser iguais. Logo, os elementos de mola devem ser calibrados para cada malha de elementos finitos utilizada e existem restrições para a geometria dos elementos sólidos a serem ligados por elementos de mola.

²A não ser que a lei constitutiva entre em consideração com as dimensões do elemento.

(iii) A utilização de elementos de mola obriga a uma utilização conjunta com um algoritmo de contacto entre as superfícies ligadas.

A abordagem seguida neste trabalho consiste na utilização de **elementos de descoesão**. Os elementos de descoesão são elementos caracterizados pela existência de duas superfícies. As *tracções*³ entre essas superfícies são motivadas pelo seu movimento relativo (*afastamento*). Assim, a consideração de uma superfície de contacto permite, simultaneamente,

- (i) distinguir entre movimentos relativos *de corte* e *normais*, ou seja, entre Modo I, Modo II ou III, ou ainda Modo Misto;
- (ii) contabilizar correctamente a energia de descoesão, independentemente das dimensões dos elementos envolvidos. De facto, a existência de uma superfície de contacto permite a definição de uma lei constitutiva em termos de relação *tracção/deslocamento* relativo que é, portanto, independente da dimensão dos elementos; e
- (iii) a consideração do contacto directamente através da própria lei constitutiva.

Por outro lado, a utilização de elementos de descoesão com as suas enormes vantagens no que diz respeito ao rigor da modelação acarreta alguns inconvenientes. As dificuldades de convergência, sobretudo para modelos progressivamente mais complexos, nem sempre são fáceis de ultrapassar. Ainda assim, no domínio onde é possível obter convergência durante deslocamentos e deformações suficientemente grandes, os elementos de descoesão revelam-se *um instrumento precioso na modelação precisa da delaminação e fissuração dos materiais compostos*.

O elemento formulado baseia-se em trabalhos anteriores (de Moura, 1996, 1997; Gonçalves, 2000; Camanho, 2001A, 2001B, 2002). De forma a lidar com

³Não confundir com estado de *tracção*. Sendo *interface* um meio bidimensional, deve-se utilizar o conceito de *tracção* (tensor de primeira ordem) e não de *tensão* (tensor de segunda ordem, adequado a meios tridimensionais).

os grandes deslocamentos e rotações que ocorrem no esmagamento de estruturas tubulares em materiais compósitos, é implementada uma versão não linear geométrica neste trabalho. O elemento proposto é utilizado na simulação de delaminagens e fissuras axiais. A formulação é implementada como uma ABAQUS USER SUBROUTINE (Abaqus, 2000), para elementos de 18 nós e 8 nós.

3.2 Cinemática do elemento

No elemento de descoesão (ver figura 3-1), para cada ponto P na configuração fechada (frequentemente correspondente à configuração inicial) correspondem dois pontos, P^- e P^+ numa outra qualquer configuração genérica. Esses dois pontos designam-se por *pontos homólogos*. A cada par de pontos homólogos, corresponde um ponto médio P^m definido por

$$\mathbf{P}^m = \frac{\mathbf{P}^- + \mathbf{P}^+}{2}. \quad (3.2)$$

O conjunto de todos os pontos P^m relativos a um elemento define a sua superfície média (Ortiz, 1999; Allix, 1999). Assim, se se designar por $\mathbf{r}$ o vector posição de um ponto da superfície média, por $\mathbf{x}$ o vector posição do ponto correspondente da superfície inicial do elemento, por $\mathbf{u}^+$ e $\mathbf{u}^-$ os deslocamentos das superfícies (consideradas) superior e inferior, tem-se então a seguinte relação que define a superfície média:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-), \quad (3.3)$$

ou, para a coordenada global i ,

$$r_i = x_i + \frac{1}{2}(u_i^- + u_i^+). \quad (3.4)$$

O afastamento entre os pontos $\mathbf{P}^+$ e $\mathbf{P}^-$ é,

$$\Delta = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \quad (3.5)$$

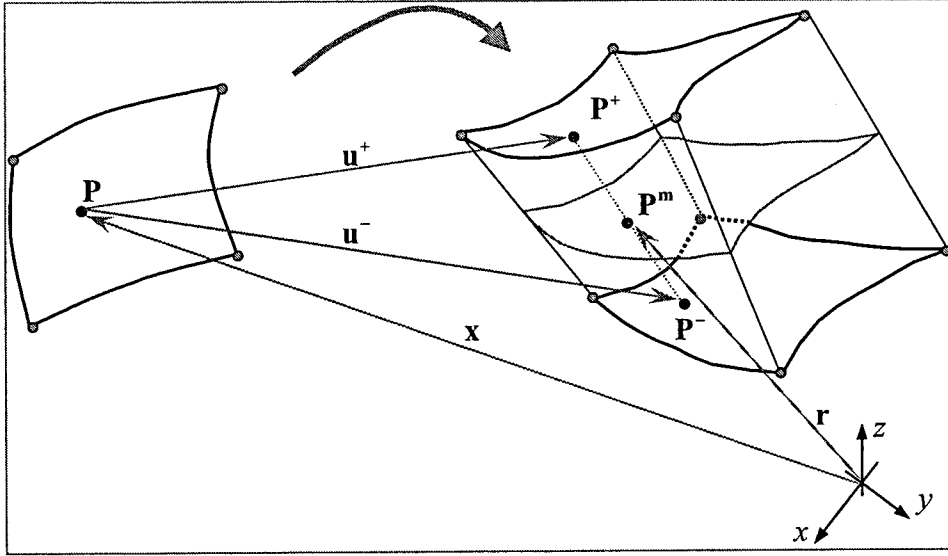


Figura 3-1: Elemento de descoesão. A cada ponto P na configuração fechada, correspondem dois pontos P^+ e P^- , nas superfícies superior e inferior, bem como um ponto P^m na superfície média, numa qualquer configuração genérica.

e também para a coordenadas global i :

$$\Delta_i = u_i^+ - u_i^-, \quad (3.6)$$

sendo u_i^+ o deslocamento de um ponto da superfície (considerada) superior e u_i^- o deslocamento de um ponto da superfície (considerada) inferior, para o grau de liberdade global i .

Para prosseguir, tem-se de relacionar o deslocamento em cada ponto de cada face do elemento com o deslocamento dos nós dessa face. Para isso, consideram-se as funções de forma N_k definidas num espaço adimensional (ξ, η, ζ) , sendo este definido de tal modo que a superfície média do elemento exista sobre o seu plano (ξ, η) , de acordo com a forma e dimensões indicadas na figura 3-2. Para estabelecer a correspondência entre o espaço (x, y, z) e o espaço (ξ, η, ζ) , utilizam-se as mesmas funções de forma N . Está-se, pois, a considerar um elemento isoparamétrico. Por outro lado, consideram-se funções de forma do tipo Lagrangeano. As funções de forma para os elementos de oito e de dezoito nós

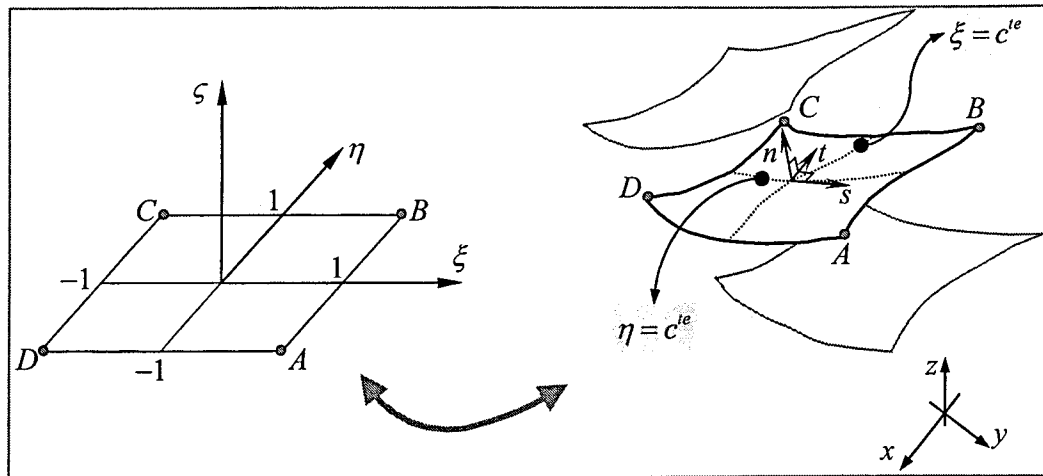


Figura 3-2: Ilustração dos sistemas de eixos global (x, y, z) e sistema de eixos local (s, t, n) no espaço (x, y, z) , e correspondência com o espaço adimensional (ξ, η, ζ) .

(ver figuras 3-2 e 3-3) estão indicadas nas tabelas 3.1 e 3.2 respectivamente.

O deslocamento dos pontos da superfície inferior pode ser obtido por interpolação do deslocamento dos nós da respectiva superfície:

$$u_i^- = N_k u_{ki} \quad k = \{\text{nós da superfície inferior}\}, \quad (3.7)$$

sendo o mesmo válido para a superfície superior:

$$u_i^+ = N_k u_{ki} \quad k = \{\text{nós da superfície superior}\}. \quad (3.8)$$

Tabela 3.1: Funções de forma para o elemento de oito nós.

$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$	$N_5 = N_1$
$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$	$N_6 = N_2$
$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$	$N_7 = N_3$
$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$	$N_8 = N_4$

Posto isto, o afastamento entre pontos homólogos segundo a coordenada global

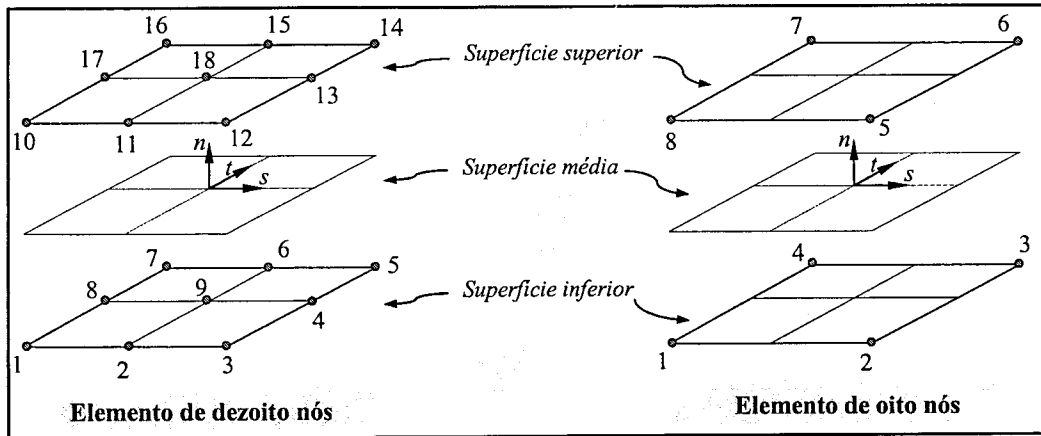


Figura 3-3: Representação dos elementos de descoesão de dezoito e de oito nós.

Tabela 3.2: Funções de forma para o elemento de dezoito nós.

Nós	Funções de forma
1, 3, 5, 7	$N_k = \frac{1}{4} (\xi^2 + \xi \xi_k) (\eta^2 + \eta \eta_k)$
2, 4, 6, 8	$N_k = \frac{1}{2} \xi_k^2 (\xi^2 + \xi \xi_k) (1 - \eta^2) + \frac{1}{2} \eta_k^2 (\eta^2 + \eta \eta_k) (1 - \xi^2)$
9	$N_k = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)$
10 a 18	$N_k = N_{k-9}$

i pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \Delta_i &= u_i^+ - u_i^- \\ &= \bar{N}_k u_{ki} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ou,

$$\Delta = \bar{N} \mathbf{u}. \quad (3.10)$$

com

$$\bar{N}_k = \begin{cases} -N_k & \Leftarrow k \in \{\text{nós da superfície inferior}\} \\ N_k & \Leftarrow k \in \{\text{nós da superfície superior}\} \end{cases}. \quad (3.11)$$

O elemento de descoesão está de um modo geral associado à presença e eventual crescimento de fissuras. Neste tema, tratado na **Mecânica da Fractura**, é frequente denominarem-se os diferentes tipos de solicitação por **Modos**. A cada Modo corresponde uma determinada orientação relativa entre a solicitação e o

plano (superfície) onde esteja contida a extremidade da fissura.

Por este motivo, no elemento de descoesão, é mais interessante exprimir-se o afastamento entre pontos homólogos em termos de

- (i) uma separação/aproximação na perpendicular ao plano tangente à superfície média (no ponto da superfície média correspondente), e
- (ii) um escorregamento no mesmo plano tangente.

Defina-se então um referencial ortonormado local (relembrar a figura 3-2), no qual se possa de seguida exprimir o afastamento de pontos homólogos do elemento. Os três eixos do referencial local são definidos do seguinte modo (acompanhar na figura 3-2):

Primeiro eixo (s): segundo a direcção definida por $\eta = c^{te}$, e tomando para sentido positivo o sentido a que correspondem valores de ξ crescentes.

Segundo eixo (t): segundo a direcção definida pela perpendicular a $\eta = c^{te}$ no plano tangente à superfície média naquele ponto, e tomando para sentido positivo o sentido a que correspondem valores de η crescentes,

Terceiro eixo (n): segundo a direcção perpendicular ao plano tangente à superfície média naquele ponto, e tomando para sentido positivo o sentido definido pelos valores de ζ crescentes.

Note-se que como o referencial $o\xi\eta\zeta$ é um referencial directo, então também o é o referencial que se acaba de definir. Simples considerações geométricas levam às seguintes definições para os versores do sistema de eixos:

$$\mathbf{v}^s = \frac{\mathbf{v}^\xi}{\|\mathbf{v}^\xi\|}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{v}^n = \frac{\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} \text{ e} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{v}^t = \mathbf{v}^n \times \mathbf{v}^s, \quad (3.14)$$

em que

$$\mathbf{v}^\xi = \mathbf{r}_{,\xi} \quad \text{e} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{v}^\eta = \mathbf{r}_{,\eta}. \quad (3.16)$$

Designa-se por δ o afastamento expresso no sistema de eixos que acabámos de definir. Então, simples considerações geométricas levam a:

$$\delta_1 = v_i^s \Delta_i, \quad (3.17)$$

$$\delta_2 = v_i^t \Delta_i \quad \text{e} \quad (3.18)$$

$$\delta_3 = v_i^n \Delta_i. \quad (3.19)$$

Alternativamente, pode-se escrever de forma mais compacta⁴ que

$$\delta_s = \theta_{si} \Delta_i, \quad (3.20)$$

em que θ_{si} é o tensor que exprime a transformação de coordenadas globais para coordenadas locais. Tem-se então:

$$\theta_{1i} = v_i^s, \quad (3.21)$$

$$\theta_{2i} = v_i^t, \quad (3.22)$$

$$\theta_{3i} = v_i^n \quad (3.23)$$

e

$$\delta = \theta \Delta. \quad (3.24)$$

Pelo que foi exposto, o afastamento em coordenadas locais pode ser expresso em

⁴Não confundir o índice 's' com o versor do sistema de eixos local, também designado por 's'.

função dos deslocamentos nodais:

$$\begin{aligned}
 \delta_s &= \theta_{si} \Delta_i \\
 &= \underbrace{\theta_{si} \bar{N}_k}_{B_{sik}} u_{ki} = \\
 &= B_{sik} u_{ki}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Define-se assim o tensor B_{sik} , que estabelece a relação entre (i) o afastamento entre pontos homólogos em coordenadas locais e (ii) os deslocamentos nodais que lhe deram origem:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\theta} \bar{\mathbf{N}} \tag{3.26}$$

ou

$$B_{sik} = \theta_{si} \bar{N}_k. \tag{3.27}$$

3.3 Lei constitutiva

Conhecido o deslocamento relativo entre dois pontos homólogos e em coordenadas locais do elemento, a determinação das tracções actuantes é feita recorrendo ao tensor $\mathbf{D}$ através da relação

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D} \boldsymbol{\delta}, \tag{3.28}$$

ou

$$\tau_s = D_{sr} \delta_r. \tag{3.29}$$

O comportamento mecânico do elemento depende pois da lei constitutiva utilizada. Neste trabalho, é utilizada uma lei constitutiva bilinear, conforme a figura 3-4. Para solicitações envolvendo apenas um único Modo (I, II ou III), a tracção τ_s aumenta com o afastamento δ_i até um valor máximo N , S ou T (conforme o modo) correspondente ao afastamento δ_i^0 . A tracção τ_s decresce depois até ao valor zero, o que acontece para um afastamento δ_i^f . Para situações em que o afastamento δ_i nunca tenha excedido o valor δ_i^0 , o elemento está a trabalhar em

regime elástico, e o seu comportamento pode por exemplo representar o comportamento elástico da camada rica em resina que existe entre duas camadas contíguas de compósito. Por isso, a rigidez associada a esta fase é normalmente calculada a partir do módulo de elasticidade da resina e a espessura da camada de resina:

$$K = \frac{E_{res}}{t_r}. \quad (3.30)$$

3.3.1 Solicitação em Modo Puro

Numa solicitação em **Modo Puro**, quando a tracção (eventualmente numa camada rica em resina) atinge um valor crítico (N , S ou T consoante o modo, ver figura 3-4), começam a surgir os primeiros pontos de nucleação de dano (*crazes*) e as primeiras micro-fissuras. O deslocamento relativo correspondente é:

$$\delta_1^0 = \frac{S}{K}, \quad (3.31)$$

$$\delta_2^0 = \frac{T}{K} \text{ e} \quad (3.32)$$

$$\delta_3^0 = \frac{N}{K}. \quad (3.33)$$

A partir deste momento, a tracção só pode diminuir. Se o deslocamento relativo aumentar, o dano propagar-se-á e a tracção decresce. Se o deslocamento relativo diminuir, a tracção diminuirá proporcionalmente à diminuição do deslocamento relativo - o dano criado é irreversível. Durante o aumento do deslocamento relativo entre pontos homólogos, dá-se um fenómeno de dissipação de energia. Quando a um ponto P^m da superfície média (relembrar a figura 3-1, na página 43) corresponder um deslocamento relativo δ_i^f , o ponto em questão terá perdido, por um lado, toda a sua capacidade de dissipação de energia e, por outro, só poderão voltar a existir esforços de compressão entre as faces do elemento nesse ponto. Ou seja, foram criadas duas superfícies livres novas. Assim, sendo G_{IC} , G_{IIC} e G_{IIIC} as Taxas Críticas de Libertação de Energia por unidade

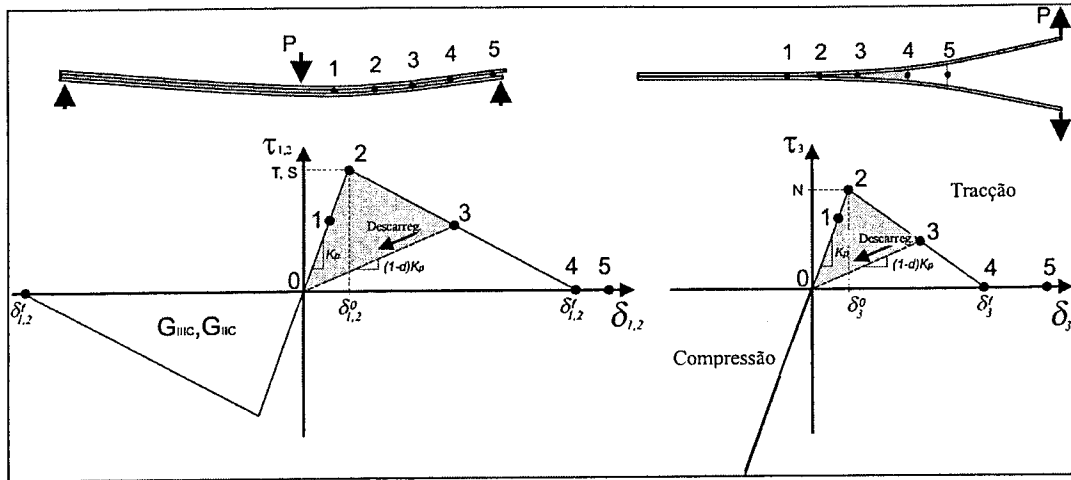


Figura 3-4: Forma da lei constitutiva para modo puro. Baseado em Camanho (2002).

de área de superfície livre criada, vem:

$$\int_0^{\delta_1^f} \tau_1 d\delta_1 = G_{IIC}, \quad (3.34)$$

$$\int_0^{\delta_2^f} \tau_2 d\delta_2 = G_{IIIIC} \text{ e} \quad (3.35)$$

$$\int_0^{\delta_3^f} \tau_3 d\delta_3 = G_{IC}. \quad (3.36)$$

Logo, podem determinar-se os deslocamentos δ_i^f através de:

$$\delta_1^f = \frac{2G_{IIC}}{S}, \quad (3.37)$$

$$\delta_2^f = \frac{2G_{IIIIC}}{T} \text{ e} \quad (3.38)$$

$$\delta_3^f = \frac{2G_{IC}}{N}. \quad (3.39)$$

Matematicamente, a lei constitutiva descrita, válida para quando existe a

actuação de apenas um dos Modos isoladamente, pode ser expressa por:

$$\tau_i = \begin{cases} K\delta_i \Leftarrow \delta_i^{\max} \leq \delta_i^0 \\ (1 - d_i) K\delta_i \Leftarrow \delta_i^0 < \delta_i^{\max} \leq \delta_i^f \quad (\text{um só Modo}) \\ 0 \Leftarrow \delta_i^{\max} \leq \delta_i^f \end{cases} \quad (3.40)$$

a que no caso do Modo I acresce a equação adicional seguinte para prevenir a interpenetração:

$$\tau_3 = K\delta_3 \Leftarrow \delta_3 \leq 0. \quad (3.41)$$

com

$$d_i = \frac{\delta_i^f (\delta_i^{\max} - \delta_i^0)}{\delta_i^{\max} (\delta_i^f - \delta_i^0)} \quad (3.42)$$

e, em cada instante t , o afastamento máximo segundo o grau de liberdade i ($\delta_i^{\max}(t)$) é:

$$\delta_i^{\max}(t) = \begin{cases} \max \{|\delta_i(\Upsilon)|\}, i = 1, 2 & (\text{Modos II e III}) \\ \max \{\langle \delta_3(\Upsilon) \rangle\}, i = 3 & (\text{Modo I}) \end{cases}, \Upsilon \leq t \quad (3.43)$$

O operador $\langle \cdot \rangle$ que consta na equação 3.43 tem o significado

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 \Leftarrow x \leq 0 \\ 1 \Leftarrow x > 0 \end{cases}, \quad (3.44)$$

onde x representa um número real qualquer. No caso de actuar mais do que um modo simultaneamente, então o dano iniciar-se-á mesmo antes de que se atinja alguma das tracções limite (N , S ou T) individualmente.

3.3.2 Solicitação em Modo Misto

No caso de uma situação de carregamento em **Modo Misto**, deve-se em primeiro lugar definir o deslocamento em modo misto δ^m da seguinte forma (figura 3-5):

$$\delta^m = \sqrt{(\delta_1)^2 + (\delta_2)^2 + \langle \delta_3 \rangle^2} = \sqrt{(\delta^{shear})^2 + \langle \delta_3 \rangle^2}. \quad (3.45)$$

Na expressão anterior (equação 3.45), consta a grandeza do deslocamento relativo de corte que se define como

$$\delta^{shear} = \sqrt{(\delta_1)^2 + (\delta_2)^2}. \quad (3.46)$$

Ainda de acordo com a figura 3-5, a lei constitutiva a utilizar é da forma:

$$\tau_i = \begin{cases} K \delta_i \Leftarrow \delta^{m \max} \leq \delta^{m0} \\ (1-d) K \delta_i \Leftarrow \delta^{m0} < \delta^{m \max} \leq \delta^{mf} \quad (\text{Modo Misto}) \\ 0 \Leftarrow \delta^{mf} \leq \delta^{m \max} \end{cases} \quad (3.47)$$

com

$$d = \frac{\delta^{mf} (\delta^{m \max} - \delta^{m0})}{\delta^{m \max} (\delta^{mf} - \delta^{m0})}, \quad d \in [0, 1] \quad (3.48)$$

e em cada instante t , o afastamento máximo em modo misto ($\delta^{m \max}(t)$) é:

$$\delta^{m \max}(t) = \max \{ |\delta^m(\Upsilon)|, \tau \leq \Upsilon \} \quad (3.49)$$

a que acresce a equação adicional seguinte para prevenir a interpenetração:

$$\tau_3 = K \delta_3 \Leftarrow \delta_3 \leq 0. \quad (3.50)$$

Nessa lei constitutiva, o coeficiente δ^{m0} depende do *critério de iniciação em Modo Misto* adoptado, enquanto o coeficiente δ^{mf} depende do *critério de propagação em Modo Misto* adoptado. Esses critérios vão permitir obter os deslocamentos δ^{m0} e δ^{mf} a partir da relação entre a participação de cada Modo e das propriedades do material (a título de exemplo, vejam-se as equações 3.55, 3.60 e 3.62).

A lei constitutiva, expressa pelas equações 3.47 e 3.50, permite obter o tensor D_{sr} da lei constitutiva

$$\tau_s = D_{sr} \delta_r \quad (3.51)$$

de uma forma condensada numa única expressão:

$$D_{sr} = \begin{cases} \bar{\delta}_{sr} K \Leftarrow \delta^{m \max} \leq \delta^{m0} \\ (1-d)K\bar{\delta}_{sr} + K\bar{\delta}_{s3}\bar{\delta}_{3r}\frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3}d \Leftarrow \delta^{m0} < \delta^{m \max} \leq \delta^{mf} \\ \bar{\delta}_{s3}\bar{\delta}_{3r}\frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3}K \Leftarrow \delta^{mf} \leq \delta^{m \max} \end{cases} \quad (3.52)$$

Note-se que foi feito uso do operador $\langle \cdot \rangle$ anteriormente definido para embutir a condição de não-interpenetração na expressão de D_{sr} (equação 3.52). O quociente $\frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3}$ vale '1' apenas quando há interpenetração. Por outro lado também foi usado o operador de kronecker $\bar{\delta}_{ij}$.

3.3.3 Critério de iniciação em Modo Misto

O critério que permite prever a iniciação da delaminação da camada rica em resina numa situação de solicitação em Modo Misto é denominado **critério de iniciação**. Neste trabalho é utilizado o critério quadrático seguinte, conhecido por "Critério Quadrático de Delaminação", que já demonstrou conduzir a resultados em acordo com dados experimentais (de Moura, 1996; Camanho, 2001A; Dávila, 2001):

$$\left(\frac{\tau_1}{S}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{T}\right)^2 + \left(\frac{\langle \tau_3 \rangle}{N}\right)^2 = 1. \quad (3.53)$$

Dado que as tracções são função dos deslocamentos relativos, então o critério precedente pode ser expresso em termos de deslocamentos relativos. Se se definir ainda a relação entre o grau de participação dos diferentes modos (para $\delta_3 > 0$) como sendo β :

$$\beta = \frac{\delta^{shear}}{\delta_3}, \quad \delta_3 > 0 \quad (3.54)$$

e se assumir $S = T$, pode-se chegar, utilizando as equações 3.47-3.54 ao seguinte critério de iniciação, equivalente ao primeiro, mas expresso em termos de deslo-

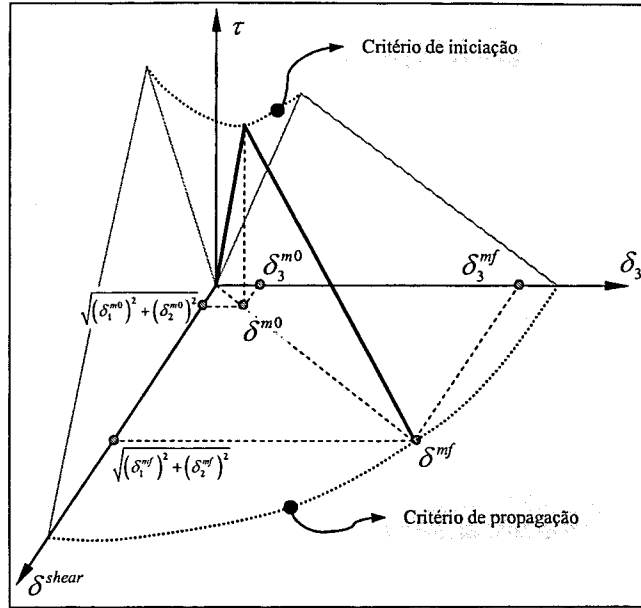


Figura 3-5: Ilustração do significado dos critérios de iniciação e de propagação em Modo Misto.

camentos relativos (ver figura 3-5):

$$\delta^{m0} = \begin{cases} \delta_3^0 \delta_1^0 \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{(\delta_1^0)^2 + (\beta \delta_3^0)^2}} \Leftarrow \delta_3 > 0 \\ \delta_1^0 \Leftarrow \delta_3 \leq 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

De notar que, na equação 3.55, $\delta_1^0 = \delta_1^0 = \delta^{shear 0} = \frac{S}{K} = \frac{T}{K}$.

3.3.4 Critério de propagação em Modo Misto

Uma vez definido o comportamento do elemento em Modo Misto até à iniciação, torna-se necessário definir o comportamento do elemento também em Modo Misto mas agora durante a fase de propagação do dano. Assim, note-se que numa situação de solicitação em modo misto, a Taxa de Libertação de Energia correspon-

dente ao momento em que se atinge a descoesão é, para cada Modo,

$$G_I = \int_0^{\delta_3^{mf}} \tau_3 d\delta_3, \quad (3.56)$$

$$G_{II} = \int_0^{\delta_2^{mf}} \tau_1 d\delta_1 \quad e \quad (3.57)$$

$$G_{III} = \int_0^{\delta_1^{mf}} \tau_2 d\delta_2. \quad (3.58)$$

As expressões anteriores (equações 3.56, 3.57 e 3.58) podem exprimir as Taxas de Libertação de Energia em função do deslocamento relativo em Modo Misto, através do uso da lei constitutiva apropriada (equação 3.47). Essas expressões, quando substituídas na expressão de um critério de propagação adequado (a um dado material) fornecem uma expressão para δ^{mf} .

O **critério da potência** é estabelecido em termos de uma interacção entre as Taxas de Libertação de Energia:

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}} \right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}} \right)^\alpha = 1. \quad (3.59)$$

No caso da existência de Modo III, pode-se substituir na equação anterior (equação 3.59) G_{II} por $G_{shear} = G_{II} + G_{III}$. A fundamentação para este procedimento baseia-se no trabalho de Li *at al.* (Li, 2000A, 2000B), e deve-se ao facto de não existirem ensaios experimentais para avaliar G_{IIC} . Consequentemente, não existe nenhum critério de propagação que inclua G_{IIC} .

Se se fizer $\alpha = 1$ (na equação 3.59), tem-se um *critério linear*, que se revela adequado por exemplo para resinas termoplásticas do tipo PEEK (Camanho, 2001A). Por outro lado, são obtidos bons resultados para resinas termoen-durecíveis epóxicas fazendo $\alpha = 2$, transformando pois o critério da potência num *critério quadrático* (Camanho, 2001A).

A aplicação da lei constitutiva (equações 3.52 e 3.51) nas definições das Taxas de Libertação de Energia correspondentes à descoesão em Modo Misto (equações 3.56, 3.57 e 3.58) e posterior substituição na equação do critério da potência

(equação 3.59) resulta em:

$$\delta^{mf} = \begin{cases} \frac{2(1+\beta^2)}{K\delta^{m0}} \left[\left(\frac{1}{G_{IC}} \right)^\alpha + \left(\frac{\beta^2}{G_{IIC}} \right)^\alpha \right]^{-1/\alpha} \Leftarrow \delta_3 > 0 \\ \sqrt{(\delta_1^f)^2 + (\delta_2^f)^2} \Leftarrow \delta_3 \leq 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

O critério **B-K** (Benzeggagh e Kenane) utiliza mais um parâmetro η (obtido experimentalmente) para descrever o comportamento em Modo Misto, mas consegue, por outro lado, uma melhor concordância com os dados experimentais:

$$G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \left(\frac{G_{II}}{G_I + G_{II}} \right)^\eta = G_I + G_{II}. \quad (3.61)$$

A aplicação deste critério (equação 3.61) à lei constitutiva (equações 3.52 e 3.51) e definição das Taxas de Libertação de Energia correspondentes à descoesão em Modo Misto (equações 3.56, 3.57 e 3.58) resulta em (considerando ainda $S = T$):

$$\delta^{mf} = \begin{cases} \frac{2}{K\delta^{m0}} \left[G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2} \right)^\eta \right] \Leftarrow \delta_3 > 0 \\ \sqrt{(\delta_1^f)^2 + (\delta_2^f)^2} \Leftarrow \delta_3 \leq 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

As figuras 3-6, 3-7 e 3-8 exemplificam a aplicação dos critérios apresentados a três compósitos utilizando três resinas diferentes: resina epóxida tenaz (IM7/977-2), resina epóxida frágil (AS4/3501-69) e a uma resina termoplástica (AS4/PEEK). Nesses três casos, o critério B-K conduz a melhores resultados.

3.4 Equações de equilíbrio do elemento

Considere-se um meio bidimensional (mais propriamente uma **interface**), onde podem actuar forças por unidade de superfície⁵ ($f_i^{s\pm}$), por unidade de comprimento ($f_i^{l\pm}$) e pontuais ($f_i^{p\pm}$) nas suas superfícies *inferior* e *superior*, conforme mostra a figura 3-9. Em consequência das forças referidas, cada ponto de cada

⁵O sinal "+" para a superfície *superior* e o sinal "-" para a superfície *inferior*.

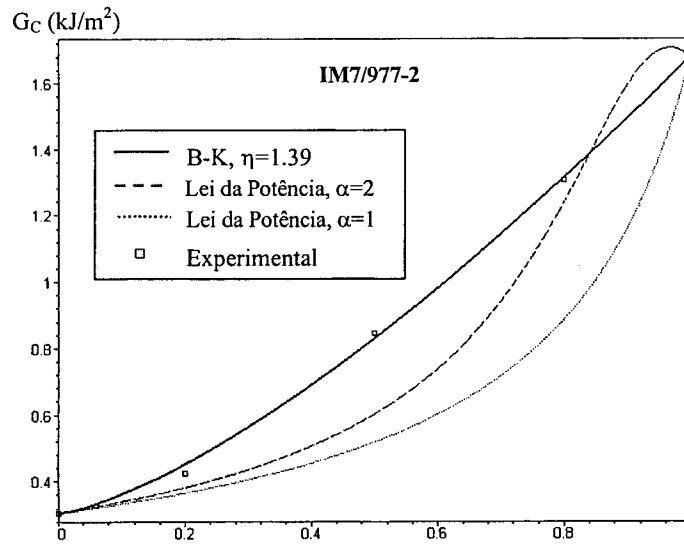


Figura 3-6: Taxa Crítica de Liberação de Energia em Modo Misto (IM7/977-2). Baseado em Camanho (2002).

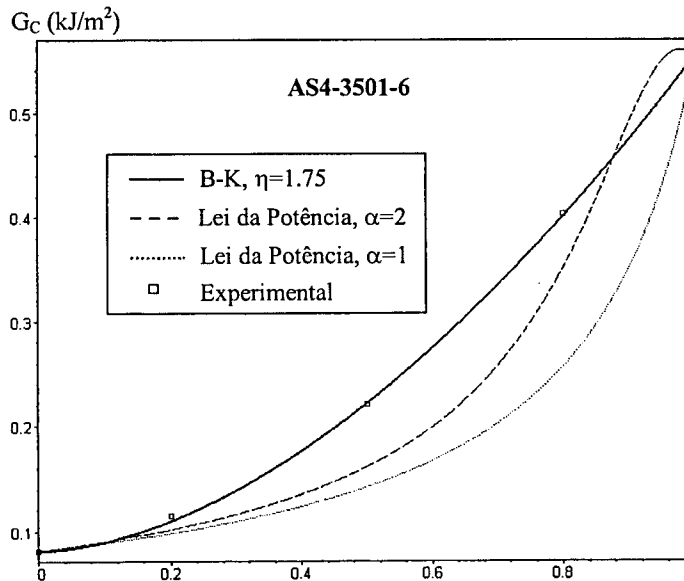


Figura 3-7: Taxa Crítica de Liberação de Energia em Modo Misto (AS4/3501-6). Baseado em Camanho (2002).

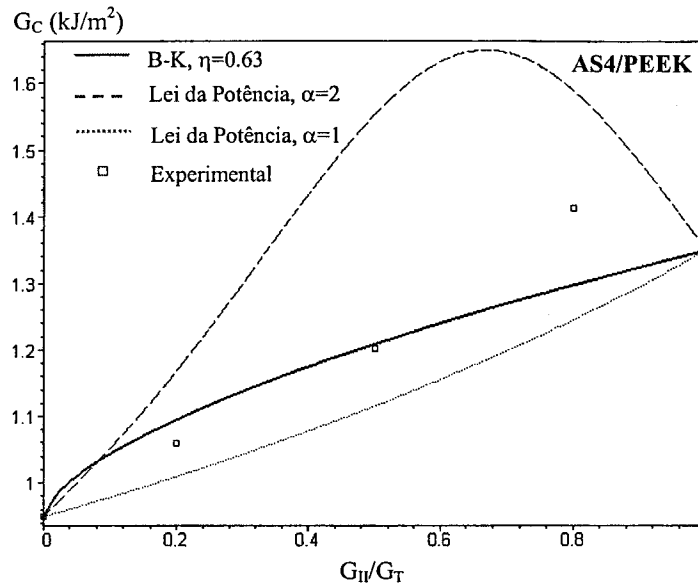


Figura 3-8: Taxa Crítica de Libertação de Energia em Modo Misto (AS4/PEEK). Baseado em Camanho (2002).

superfície (inferior/superior) da interface vai deslocar-se, pelo que actua sobre essas superfícies um campo de deslocamentos $u_i^{\pm 6}$. Finalmente, esse campo de deslocamentos é responsável pelo aparecimento de *tracções* na interface, entre cada par de pontos homólogos (P^+ e P^-); as *tracções* são forças por unidade de área.

Com o objectivo de determinar a configuração de equilíbrio da interface perante a situação anterior, admita-se que o campo de deslocamentos anterior é afectado por uma perturbação ou variação⁷ $du_i^{\pm}$. (Uma variação de um campo consiste num outro campo contínuo que respeita as condições de fronteira essenciais ou geométricas, i.e., aquelas em que a variável de campo tem valores prescritos (Bathe, 1996). Nesse caso, por um lado, os pontos de aplicação das forças $f_i^{(s, l, e p) \pm}$ actuantes na superfície superior (inferior) deslocam-se de $du_i^{\pm}$. Por outro lado, os pontos de aplicação das *tracções* (τ_s) que se verificam na interface

⁶Ver a nota anterior.

⁷Aqui, $du_i^{\pm}$ não é um diferencial total. Não é no entanto utilizada a designação usual $\delta u_i^{\pm}$ para evitar confusões com o afastamento entre pontos homólogos segundo a dimensão i .

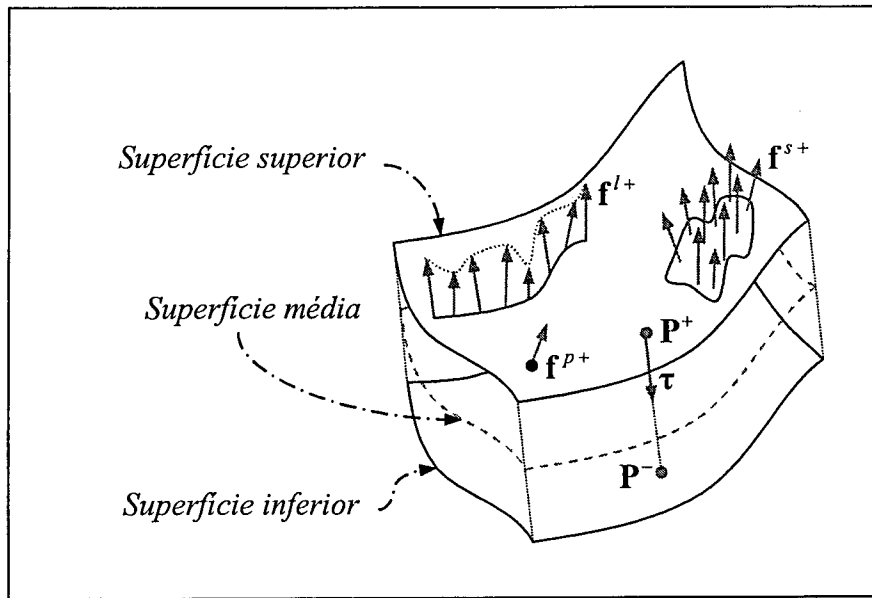


Figura 3-9: Forças externas (superficiais, lineares e pontuais) e internas (tracções) actuantes na superfície superior de uma interface.

sofrem uma perturbação (ou variação) no seu afastamento de um valor⁸ $d\delta_s$. A aplicação do princípio dos trabalhos virtuais a esse meio bidimensional (interface), onde se supõe a variação $du_i^\pm$ da variável de campo $u_i^\pm$ conduz então à seguinte equação:

$$\int_A \tau_s d\delta_s dA - \int_A f_i^{s\pm} du_i^\pm dA - \int_L f_i^{l\pm} du_i^\pm dL - \sum f_i^{p\pm} du_i^\pm = 0. \quad (3.63)$$

O integral da equação anterior (3.63) pode estender-se à área inicial ou à área actual da interface (i.e. da sua superfície média). Se os deslocamentos forem pequenos, essa distinção não é muito relevante e pode tomar-se a área inicial como sendo "representativa" da área da interface em cada instante. Quando os deslocamentos são maiores, torna-se necessário distinguir entre a área inicial e a área actual da interface. Nesta análise, considera-se que os deslocamentos envolvidos podem ser consideráveis e que, como tal, se torna necessário considerar em cada instante a área actual. Trata-se portanto de uma formulação Lagrangeana

⁸Ver a nota anterior.

actualizada.

Se se considerar que o meio bidimensional em questão é um elemento de descoesão, então a equação anterior (3.63), após discretização, pode ser transformada na seguinte:

$$\int_A \tau_s d\delta_s dA - f_{ki} du_{ki} = 0, \quad (3.64)$$

onde f_{ki} são as forças nodais equivalentes às forças aplicadas. Recordando que o deslocamento relativo entre pontos homólogos é dado por $\delta_s = B_{spy} u_{yp}$, vem para a sua variação devida à variação do campo de deslocamentos ($\mathbf{u}^\pm$) segundo o grau de liberdade ki :

$$\begin{aligned} d\delta_s &= \frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} du_{ki} u_{yp} + B_{spy} \frac{\partial u_{yp}}{\partial u_{ki}} du_{ki} \\ &= \left(\frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} + B_{spy} \bar{\delta}_{yk} \bar{\delta}_{pi} \right) du_{ki} \\ &= \left(\frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} + B_{sik} \right) du_{ki}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Note-se na expressão anterior que a variação du_{ki} do grau de liberdade ki vai influenciar o deslocamento relativo entre pontos homólogos de duas formas distintas. Por um lado, du_{ki} vai provocar uma alteração da orientação da superfície média do elemento, pelo que haverá que actualizar as projecções dos deslocamentos relativos já existentes. Daí a componente $d\delta_s^{rot.} = \frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} du_{ki}$. A figura 3-10 ilustra a rotação desse deslocamento relativo para um caso particular (direcções i e s paralelas antes da variação du_{ki} e $s = 3$; superfícies inferior e superior também paralelas antes da variação du_{ki}). Por outro lado, sendo ele próprio um deslocamento de um dos nós, du_{ki} vai também afectar o deslocamento relativo através de $d\delta_s^{ext.} = B_{sik} du_{ki}$. Posto isto, a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais resulta em

$$\int_A D_{sr} B_{rvz} u_{zv} \left(\frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} + B_{sik} \right) dA du_{ki} - f_{ki} du_{ki} = 0. \quad (3.66)$$

Dado que a perturbação escolhida é, dentro de certas condições, arbitrária, então

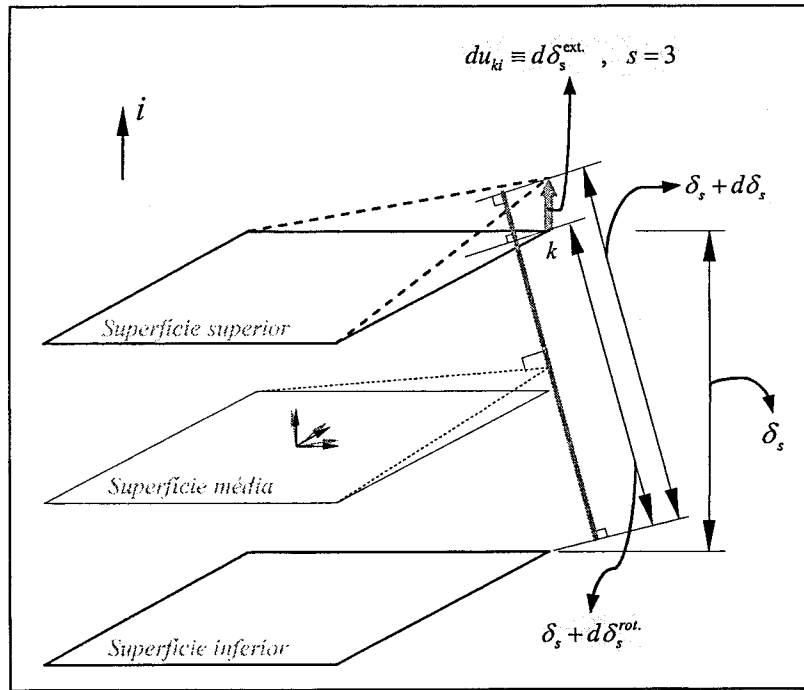


Figura 3-10: Representação gráfica (para um caso particular) do significado das parcelas envolvidas na expressão de $d\delta_s$. O símbolo " $\equiv$ " é aqui utilizado com o significado "coincide com" ou "reduz-se a".

a consideração sucessiva da variação individual de cada um dos graus de liberdade permite anular o termo du_{ki} , originando:

$$\int_A D_{sr} B_{rvz} u_{zv} \left(\frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} + B_{sik} \right) dA - f_{ki} = 0. \quad (3.67)$$

Note-se que dA representa o diferencial da área da superfície média do elemento na configuração actual. Se designarmos por dA_0 o diferencial da área (da superfície média do elemento) no plano $o\xi\eta$, teremos a relação

$$dA = \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\| dA_0. \quad (3.68)$$

Se se definir o seguinte tensor de rigidez

$$K_{kizv} = \int_A D_{sr} B_{rvz} \left(\frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} + B_{sik} \right) dA, \quad (3.69)$$

pode-se escrever simplesmente

$$K_{kizv}u_{zv} = f_{ki}. \quad (3.70)$$

O problema formulado (equação 3.70) é claramente não linear (com não linearidade geométrica e material). Assim, e devido à sua complexidade, deverá ser geralmente tratado recorrendo a métodos incrementais e iterativos. Os métodos de **Newton-Raphson** e **Riks** são exemplos dos referidos métodos. Para utilizar um método incremental e iterativo, é importante⁹ conhecer-se a *matriz de rigidez tangente*. Esta é definida a partir da diferenciação da equação anterior (equação 3.70)

$$K_{kizv}^T du_{zv} = df_{ki} \quad (3.71)$$

em que nem du_{zv} nem df_{ki} são diferenciais totais. A matriz de rigidez tangente K_{kizv}^T é então dada por

$$\begin{aligned} K_{kizv}^T &= \frac{\partial (K_{kixj}u_{xj})}{\partial u_{zv}} = \frac{\partial K_{kixj}}{\partial u_{zv}}u_{xj} + K_{kizv} \\ &= K_{kizv} + \\ &\quad + \int_A \frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}} B_{rjx} \left(\frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} + B_{sik} \right) \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\| dA_0 u_{xj} + \\ &\quad + \int_A D_{sr} \frac{\partial B_{rjx}}{\partial u_{zv}} \left(\frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} + B_{sik} \right) \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\| dA_0 u_{xj} + \\ &\quad + \int_A D_{sr} B_{rjx} \left(\frac{\partial^2 B_{spy}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} u_{yp} + \frac{\partial B_{szv}}{\partial u_{ki}} + \frac{\partial B_{sik}}{\partial u_{zv}} \right) \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\| dA_0 u_{xj} + \\ &\quad + \int_A D_{sr} B_{rjx} \left(\frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} + B_{sik} \right) \frac{\partial \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}{\partial u_{zv}} dA_0 u_{xj}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.4.1 Não linearidade geométrica

Importa agora calcular uma expressão geral para o termo $\frac{\partial B_{sik}}{\partial u_{zv}}$ que consta na expressão das forças internas e de K_{kizv}^T . Dada a expressão de B_{sik} ($B_{sik} = \theta_{si} \bar{N}_k$),

⁹Ou mesmo necessário, consoante o método.

é imediato constatar que

$$\frac{\partial B_{sik}}{\partial u_{zv}} = \frac{\partial \theta_{si}}{\partial u_{zv}} \bar{N}_k. \quad (3.73)$$

O problema consiste portanto em determinar $\frac{\partial \theta_{si}}{\partial u_{zv}}$. Recorde-se que o tensor de transformação θ_{si} é definida como (rever equações 3.21 e 3.23):

$$\theta_{1i} = v_i^s; \quad \theta_{2i} = v_i^t; \quad \theta_{3i} = v_i^n \quad (3.74)$$

com os versores do sistema de eixos ortornormado local definidos por (rever equações 3.12 a 3.14):

$$\mathbf{v}^s = \frac{\mathbf{v}^\xi}{\|\mathbf{v}^\xi\|}; \quad \mathbf{v}^n = \frac{\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}; \quad \mathbf{v}^t = \mathbf{v}^n \times \mathbf{v}^s \quad (3.75)$$

e com os vectores tangentes às linhas $\eta = c^{te}$ e $\xi = c^{te}$ definidos como (rever equações 3.15 a 3.16)

$$\mathbf{v}^\xi = \mathbf{r}_{,\xi}; \quad \mathbf{v}^\eta = \mathbf{r}_{,\eta}. \quad (3.76)$$

Na expressão anterior, $\mathbf{r}$ representa o vector posição de um ponto da superfície média do elemento. Conforme já sabemos, a sua coordenada global i é dada por (equação 3.4):

$$r_i = \frac{1}{2} N_k (x_{ki} + u_{ki}). \quad (3.77)$$

Determinação de $\frac{\partial \theta_{1i}}{\partial u_{zv}}$

Facilmente se constata então que a variação da coordenada i , de um ponto da superfície média, com a coordenada ξ do espaço adimensional $o\xi\eta\zeta$, é dada por

$$r_{i,\xi} = \frac{1}{2} N_{k,\xi} (x_{ki} + u_{ki}) \quad (3.78)$$

e o respectivo acréscimo é

$$dr_{i,\xi} = \frac{1}{2} N_{k,\xi} du_{ki}. \quad (3.79)$$

Assim, o acréscimo sofrido pelo versor $\mathbf{v}^s$, segundo a coordenada i , motivado pela variação du_{zv} dos graus de liberdade zv é¹⁰:

$$\begin{aligned} dv_i^s &= d\left(\frac{r_{i,\xi}}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|}(\bar{\delta}_{iv} - v_i^s v_v^s) dr_{i,\xi} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|}(\bar{\delta}_{iv} - v_i^s v_v^s) \frac{1}{2} N_{z,\xi} du_{zv} \end{aligned} \quad (3.80)$$

e finalmente:

$$\frac{\partial \theta_{1i}}{\partial u_{zv}} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|}(\bar{\delta}_{iv} - v_i^s v_v^s) \frac{1}{2} N_{z,\xi}. \quad (3.81)$$

Determinação de $\frac{\partial \theta_{3i}}{\partial u_{zv}}$

Vai-se agora determinar uma expressão para $\frac{\partial \theta_{3i}}{\partial u_{zv}}$. Considere-se a definição de $\mathbf{v}^n$ (equação 3.13),

$$\mathbf{v}^n = \frac{\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}. \quad (3.82)$$

Pode-se obter, após diferenciar a expressão anterior, o acréscimo sofrido pelo versor $\mathbf{v}^n$, segundo a coordenada i , motivado pela variação du_{zv} dos graus de liberdade zv ¹¹:

$$\begin{aligned} dv_i^n &= \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}(\bar{\delta}_{ij} - v_i^n v_j^n) \left((d\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta)_j + (\mathbf{v}^\xi \times d\mathbf{v}^\eta)_j \right) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}(\bar{\delta}_{ij} - v_i^n v_j^n) \left(-(\mathbf{v}^\eta \times d\mathbf{v}^\xi)_j + (\mathbf{v}^\xi \times d\mathbf{v}^\eta)_j \right) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}(\bar{\delta}_{ij} - v_i^n v_j^n) \left(-(\Omega(\mathbf{v}^\eta) d\mathbf{v}^\xi)_j + (\Omega(\mathbf{v}^\xi) \times d\mathbf{v}^\eta)_j \right) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}(\bar{\delta}_{ij} - v_i^n v_j^n) \left(-\Omega_{jv}(\mathbf{v}^\eta) dv_v^\xi + \Omega_{jv}(\mathbf{v}^\xi) dv_v^\eta \right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Relembrando a equação 3.79, obtida a partir das equações 3.76 a 3.78, vem

$$dv_v^\xi = dr_{v,\xi} = \frac{1}{2} N_{z,\xi} du_{zv} \quad \text{e} \quad (3.84)$$

$$dv_v^\eta = dr_{v,\eta} = \frac{1}{2} N_{z,\eta} du_{zv}. \quad (3.85)$$

¹⁰Para mais detalhes, ver a secção de notas (página 74).

¹¹ Ω_{jv} está definido na secção de notas (página 75).

Pode-se então escrever:

$$dv_i^n = \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} (\bar{\delta}_{ij} - v_i^n v_j^n) \frac{1}{2} (-\Omega_{jv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{jv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}) du_{zv}. \quad (3.86)$$

Logo, tem-se finalmente uma expressão para $\frac{\partial \theta_{3i}}{\partial u_{zv}}$:

$$\frac{\partial \theta_{3i}}{\partial u_{zv}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} (\bar{\delta}_{ij} - v_i^n v_j^n) \frac{1}{2} (-\Omega_{jv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{jv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}). \quad (3.87)$$

Determinação de $\frac{\partial \theta_{2i}}{\partial u_{zv}}$

Falta agora apenas determinar $\frac{\partial \theta_{2i}}{\partial u_{zv}}$. Considerando a definição de $\mathbf{v}^t$ aqui repetida

$$\mathbf{v}^t = \mathbf{v}^n \times \mathbf{v}^s, \quad (3.88)$$

tem-se, após diferenciar:

$$\begin{aligned} d\mathbf{v}^t &= d\mathbf{v}^n \times \mathbf{v}^s + \mathbf{v}^n \times d\mathbf{v}^s \\ &= -\mathbf{v}^s \times d\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times d\mathbf{v}^s \\ &= -\Omega(\mathbf{v}^s) d\mathbf{v}^n + \Omega(\mathbf{v}^n) d\mathbf{v}^s \end{aligned} \quad (3.89)$$

ou

$$\begin{aligned} dv_i^t &= -\Omega_{ij}(\mathbf{v}^s) dv_j^n + \Omega_{ij}(\mathbf{v}^n) dv_j^s \\ &= \left[-\Omega_{ij}(\mathbf{v}^s) \frac{\partial \theta_{3j}}{\partial u_{zv}} + \Omega_{ij}(\mathbf{v}^n) \frac{\partial \theta_{1j}}{\partial u_{zv}} \right] du_{zv}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Finalmente, a expressão para $\frac{\partial \theta_{2i}}{\partial u_{zv}}$ é:

$$\frac{\partial \theta_{2i}}{\partial u_{zv}} = -\Omega_{ij}(\mathbf{v}^s) \frac{\partial \theta_{3j}}{\partial u_{zv}} + \Omega_{ip}(\mathbf{v}^n) \frac{\partial \theta_{1j}}{\partial u_{zv}}. \quad (3.91)$$

Determinação de $\frac{\partial \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}{\partial u_{zv}}$

O cálculo de $\frac{\partial \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}{\partial u_{zv}}$ pode ser feito atendendo a que

$$\begin{aligned} d \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\| &= \frac{\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} d(\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta) \\ &= \mathbf{v}^\eta (-\Omega(\mathbf{v}^\eta) d\mathbf{v}^\xi + \Omega(\mathbf{v}^\xi) d\mathbf{v}^\eta) \\ &= \frac{1}{2} v_p^\eta (-\Omega_{pv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}) du_{zv}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Logo $\frac{\partial \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}{\partial u_{zv}}$ é dado por:

$$\frac{\partial \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|}{\partial u_{zv}} = \frac{1}{2} v_p^\eta (-\Omega_{pv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}). \quad (3.93)$$

Determinação de $\frac{\partial^2 B_{spy}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}}$

A obtenção de uma expressão para $\frac{\partial^2 B_{spy}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}}$ é trivial se se conhecer a expressão para $\frac{\partial^2 \theta_{sp}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}}$ já que

$$\frac{\partial^2 B_{spy}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} = \frac{\partial^2 \theta_{sp}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} \bar{N}_y.$$

Pode-se então proceder à determinação de uma expressão para $\frac{\partial^2 \theta_{sp}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}}$, considerando sucessivamente diferentes valores do índice s :

Para o índice $s = 1$:

Sabe-se que $\frac{\partial v_p^s}{\partial u_{zv}}$ pode ser expresso por

$$\frac{\partial v_p^s}{\partial u_{zv}} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|} (\bar{\delta}_{pv} - v_p^s v_v^s) \frac{1}{2} N_{z,\xi}. \quad (3.94)$$

Logo, $\frac{\partial^2 v_p^s}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}}$ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_p^s}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} &= \frac{\partial (1/\|\mathbf{r}_{,\xi}\|)}{\partial u_{ki}} (\bar{\delta}_{pv} - v_p^s v_v^s) \frac{1}{2} N_{z,\xi} + \\ &+ \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|} \left(-\frac{\partial v_p^s}{\partial u_{ki}} v_v^s - v_p^s \frac{\partial v_v^s}{\partial u_{ki}} \right) \frac{1}{2} N_{z,\xi} \\ &= -\frac{1}{2} v_i^s N_{k,\xi} \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|} \frac{\partial v_p^s}{\partial u_{zv}} + \\ &+ \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|} \left(-\frac{\partial v_p^s}{\partial u_{ki}} v_v^s - v_p^s \frac{\partial v_v^s}{\partial u_{ki}} \right) \frac{1}{2} N_{z,\xi}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_{1p}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} &= -\frac{1}{2} v_i^s N_{k,\xi} \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|} \frac{\partial v_p^s}{\partial u_{zv}} + \\ &+ \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|} \left(-\frac{\partial v_p^s}{\partial u_{ki}} v_v^s - v_p^s \frac{\partial v_v^s}{\partial u_{ki}} \right) \frac{1}{2} N_{z,\xi}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Para o índice $s = 3$:

Sabe-se que $\frac{\partial v_p^n}{\partial u_{zv}}$ pode ser expresso por

$$\frac{\partial v_p^n}{\partial u_{zv}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} (\bar{\delta}_{pv} - v_p^n v_v^n) \frac{1}{2} [-\Omega_{pv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}]. \quad (3.97)$$

Logo, $\frac{\partial^2 v_p^n}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}}$ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_p^n}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} &= \frac{\partial (1/\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|)}{\partial u_{ki}} (\bar{\delta}_{pv} - v_p^n v_v^n) \frac{1}{2} [-\Omega_{pv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}] + \\ &+ \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\partial (v_p^n v_v^n)}{\partial u_{ki}} [-\Omega_{pv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}] + \\ &+ \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} (\bar{\delta}_{pv} - v_p^n v_v^n) \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\eta)}{\partial v_j^\eta} \frac{\partial v_j^\eta}{\partial u_{ki}} N_{z,\xi} + \frac{\partial \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\xi)}{\partial v_j^\xi} \frac{\partial v_j^\xi}{\partial u_{ki}} N_{z,\eta} \right] \end{aligned} \quad (3.98)$$

e simplificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_p^n}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} &= -\frac{\partial \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\| / \partial u_{ki}}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|^2} \|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\| \frac{\partial v_p^n}{\partial u_{zv}} - \\ &\quad -\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} \left(\frac{\partial v_p^n}{\partial u_{ki}} v_v^n + v_p^n \frac{\partial v_v^n}{\partial u_{ki}} \right) [-\Omega_{pv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}] + \\ &\quad + \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} (\bar{\delta}_{pv} - v_p^n v_v^n) \frac{1}{2} \left[-\bar{\Omega}_{pvj} \frac{\partial v_j^\eta}{\partial u_{ki}} N_{z,\xi} + \bar{\Omega}_{pvj} \frac{\partial v_j^\xi}{\partial u_{ki}} N_{z,\eta} \right] \end{aligned} \quad (3.99)$$

continuando, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_p^n}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} v_j^n (-\Omega_{ji}(\mathbf{v}^\eta) N_{k,\xi} + \Omega_{ji}(\mathbf{v}^\xi) N_{k,\eta}) \frac{\partial v_p^n}{\partial u_{zv}} - \\ &\quad -\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} \left(\frac{\partial v_p^n}{\partial u_{ki}} v_v^n + v_p^n \frac{\partial v_v^n}{\partial u_{ki}} \right) [-\Omega_{pv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}] + \\ &\quad + \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} (\bar{\delta}_{pv} - v_p^n v_v^n) \frac{1}{2} \left[-\bar{\Omega}_{pvj} \frac{\partial v_j^\eta}{\partial u_{ki}} N_{z,\xi} + \bar{\Omega}_{pvj} \frac{\partial v_j^\xi}{\partial u_{ki}} N_{z,\eta} \right] \end{aligned} \quad (3.100)$$

e pode-se escrever finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_{3p}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} v_j^n (-\Omega_{ji}(\mathbf{v}^\eta) N_{k,\xi} + \Omega_{ji}(\mathbf{v}^\xi) N_{k,\eta}) \frac{\partial v_p^n}{\partial u_{zv}} - \\ &\quad -\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} \left(\frac{\partial v_p^n}{\partial u_{ki}} v_v^n + v_p^n \frac{\partial v_v^n}{\partial u_{ki}} \right) [-\Omega_{pv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{pv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}] + \\ &\quad + \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} (\bar{\delta}_{pv} - v_p^n v_v^n) \frac{1}{2} \left[-\bar{\Omega}_{pvj} \frac{\partial v_j^\eta}{\partial u_{ki}} N_{z,\xi} + \bar{\Omega}_{pvj} \frac{\partial v_j^\xi}{\partial u_{ki}} N_{z,\eta} \right]. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Para o índice $s = 2$:

Sabe-se que $\frac{\partial v_p^t}{\partial u_{zv}}$ pode ser expresso por

$$\frac{\partial v_p^t}{\partial u_{zv}} = -\Omega_{pj}(\mathbf{v}^s) \frac{\partial v_j^n}{\partial u_{zv}} + \Omega_{pj}(\mathbf{v}^n) \frac{\partial v_j^s}{\partial u_{zv}}. \quad (3.102)$$

Logo $\frac{\partial^2 v_p^t}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}}$ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_p^t}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} &= -\frac{\partial \Omega_{pj}(\mathbf{v}^s)}{\partial v_w^s} \frac{\partial v_w^s}{\partial u_{ki}} \frac{\partial v_j^n}{\partial u_{zv}} - \Omega_{pj}(\mathbf{v}^s) \frac{\partial^2 v_j^n}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} + \\ &\quad + \frac{\partial \Omega_{pj}(\mathbf{v}^n)}{\partial v_w^n} \frac{\partial v_w^n}{\partial u_{ki}} \frac{\partial v_j^s}{\partial u_{zv}} + \Omega_{pj}(\mathbf{v}^n) \frac{\partial^2 v_j^s}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} \end{aligned} \quad (3.103)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_{2p}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} = & -\frac{\partial \Omega_{pj}(\mathbf{v}^s)}{\partial v_w^s} \frac{\partial v_w^s}{\partial u_{ki}} \frac{\partial v_j^n}{\partial u_{zv}} - \Omega_{pj}(\mathbf{v}^s) \frac{\partial^2 v_j^n}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} + \\ & + \frac{\partial \Omega_{pj}(\mathbf{v}^n)}{\partial v_w^n} \frac{\partial v_w^n}{\partial u_{ki}} \frac{\partial v_j^s}{\partial u_{zv}} + \Omega_{pj}(\mathbf{v}^n) \frac{\partial^2 v_j^s}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Simplificações

Recordem-se as expressões de $\frac{\partial \theta_{si}}{\partial u_{zv}}$ (equações 3.81, 3.87 e 3.91):

$$\frac{\partial \theta_{1i}}{\partial u_{zv}} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|} (\bar{\delta}_{iv} - v_i^s v_v^s) \frac{1}{2} N_{z,\xi}, \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial \theta_{3i}}{\partial u_{zv}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} (\bar{\delta}_{ij} - v_i^n v_j^n) \frac{1}{2} (-\Omega_{jv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{jv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta}), \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial \theta_{2i}}{\partial u_{zv}} = -\Omega_{ij}(\mathbf{v}^s) \frac{\partial \theta_{3j}}{\partial u_{zv}} + \Omega_{ip}(\mathbf{v}^n) \frac{\partial \theta_{1j}}{\partial u_{zv}}. \quad (3.107)$$

Essas expressões foram calculadas por $\frac{\partial \theta_{si}}{\partial u_{zv}}$ figurar nas expressões das forças internas (equações 3.69 e 3.70) e da matriz de rigidez tangente (equação 3.72) na forma

$$\frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} = \frac{\partial \theta_{sp}}{\partial u_{ki}} \Delta_p. \quad (3.108)$$

Facilmente se pode concluir que se verificam as ordens de grandeza seguintes¹²:

$$\|\mathbf{r}_{,\xi}\| = o\left(\frac{L}{2}\right); \quad \|\mathbf{r}_{,\eta}\| = o\left(\frac{L}{2}\right); \quad \|\mathbf{v}^\xi\| = o\left(\frac{L}{2}\right); \quad \|\mathbf{v}^\eta\| = o\left(\frac{L}{2}\right) \quad (3.109)$$

em que L representa o comprimento típico do elemento. A expressão

$$\frac{(-\Omega_{jv}(\mathbf{v}^\eta) N_{z,\xi} + \Omega_{jv}(\mathbf{v}^\xi) N_{z,\eta})}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} \quad (3.110)$$

¹²Ver secção de notas (página 76).

constante na equação 3.106 tem a seguinte ordem de grandeza:

$$\frac{(-\Omega_{jv}(\mathbf{v}^\eta)N_{z,\xi} + \Omega_{jv}(\mathbf{v}^\xi)N_{z,\eta})}{\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|} = \frac{o(-\Omega_{jv}(\mathbf{v}^\eta)N_{z,\xi} + \Omega_{jv}(\mathbf{v}^\xi)N_{z,\eta})}{o(\|\mathbf{v}^\xi \times \mathbf{v}^\eta\|)} = o\left(\frac{2L}{4L^2}\right) = o\left(\frac{1}{2L}\right). \quad (3.111)$$

Assim, pode-se escrever de forma simplificada que

$$\frac{\partial \theta_{si}}{\partial u_{zv}} = o\left(\frac{1}{4L}\right). \quad (3.112)$$

Finalmente, se chega à seguinte ordem de grandeza para $\frac{\partial \theta_{sp}}{\partial u_{ki}} \Delta_p$ constante na equação 3.108:

$$\frac{\partial B_{sipy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} = o\left(\frac{\|\Delta\|}{4L}\right). \quad (3.113)$$

Em relação a $\frac{\partial^2 B_{sipy}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}}$, facilmente se deduz das expressões correspondentes que

$$\frac{\partial^2 B_{sipy}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} u_{yp} = o\left(\frac{\|\Delta\|}{8L^2}\right). \quad (3.114)$$

Existem duas situações diferentes a analisar. A primeira em que o elemento de descoesão ainda não cedeu, e a segunda, em que o elemento de descoesão cedeu e já nenhuma força une as suas duas superfícies ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$).

Na primeira situação, em que o elemento de descoesão não cedeu, os deslocamentos relativos são, para a generalidade dos materiais compósitos, $\|\Delta\| = o(1E - 5\text{ mm})$. Como, de um modo geral, $L \geq o(0.1\text{ mm})$, os termos que incluem as derivadas anteriores ($\frac{\partial B_{sipy}}{\partial u_{ki}} u_{yp}$ e $\frac{\partial^2 B_{sipy}}{\partial u_{ki} \partial u_{zv}} u_{yp}$) podem pois ser desprezados, mesmo para malhas muito refinadas. Na segunda situação, em que o elemento já cedeu, os termos anteriores deixam de ser tão pequenos. No entanto, nesse caso toda a matriz de rigidez é nula ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$). Assim, também neste caso não interessa calcular os seus valores. Resumindo, conclui-se que não é necessário (para a generalidade dos materiais compósitos) incluir as parcelas em que intervêm os termos anteriores no cálculo das forças internas. Ainda, a matriz tangente pode ser simplificada, desprezando-se as mesmas parcelas. Estas conclusões são im-

portantes, já que permitem reduzir substancialmente o tempo de cálculo. A este respeito, pode-se ainda acrescentar que Goyal *et al.* (Goyal, 2002) referem obter melhor convergência nos seus modelos quando, na fase de propagação do dano, igualam a zero os termos da matriz de rigidez do elemento.

Como observação adicional, salienta-se que uma análise semelhante à que foi feita sobre os termos e parcelas intervenientes nas equações de equilíbrio poderia ter sido feita sobre $d\delta_s$. De facto, recordando a figura 3-10, pode-se escrever

$$d\delta_s = d\delta_s^{\text{rot.}} + d\delta_s^{\text{ext.}} \quad (3.115)$$

com

$$d\delta_s^{\text{rot.}} = \frac{\partial B_{spy}}{\partial u_{ki}} u_{yp} du_{ki} \quad (3.116)$$

e

$$d\delta_s^{\text{ext.}} = B_{sik} du_{ki}, \quad (3.117)$$

a mesma análise sobre as ordens de grandeza teria mostrado que

$$\frac{\|d\delta^{\text{rot.}}\|}{\|d\delta^{\text{ext.}}\|} = o\left(\frac{\|\Delta\|}{4L}\right). \quad (3.118)$$

Desprezar directamente o termo $d\delta^{\text{rot.}}$ teria tido o mesmo efeito que a análise anterior na matriz tangente e no vector de forças nodais.

3.4.2 Não linearidade material

Recorde-se a expressão de D_{sr} :

$$D_{sr} = \begin{cases} \bar{\delta}_{sr} K \Leftarrow \delta^{m \max} \leq \delta^{m0} \\ (1-d)K\bar{\delta}_{sr} + K\bar{\delta}_{s3}\bar{\delta}_{3r} \frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3} d \Leftarrow \delta^{m0} < \delta^{m \max} \leq \delta^{mf} \\ \bar{\delta}_{s3}\bar{\delta}_{3r} \frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3} K \Leftarrow \delta^{mf} \leq \delta^{m \max} \end{cases} \quad (3.119)$$

com

$$d = \frac{\delta^{mf} (\delta^{m \max} - \delta^{m0})}{\delta^{m \max} (\delta^{mf} - \delta^{m0})}. \quad (3.120)$$

Numa das parcelas da expressão da matriz de rigidez tangente (recordar a equação 3.72), consta o termo $\frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}}$. Vai-se procurar então obter uma expressão para $\frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}}$.

(i) *Fase elástica:* $\delta^{m \max} \leq \delta^{m0}$

Nesta fase, resulta directamente da primeira linha da expressão de D_{sr} (equação 3.119) que

$$\frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}} = 0 \Leftarrow \delta^{m \max} \leq \delta^{m0}. \quad (3.121)$$

(ii) *Fase de propagação do dano:* $\delta^{m0} < \delta^{m \max} \leq \delta^{mf}$

Nesta fase, consideramos a segunda linha da expressão de D_{sr} (equação 3.119) que se escreve

$$D_{sr} = (1 - d)K\bar{\delta}_{sr} + K\bar{\delta}_{s3}\bar{\delta}_{3r}\frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3}d \Leftarrow \delta^{m0} < \delta^{m \max} \leq \delta^{mf}. \quad (3.122)$$

Nesta situação, D_{sr} vai depender dos deslocamentos u_{zv} por causa da presença da variável de dano d . Assim, aplicando a regra da diferenciação em cadeia, tem-se que

$$\frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}} = \frac{\partial D_{sr}}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \delta^{m \max}} \frac{\partial \delta^{m \max}}{\partial \delta^m} \frac{\partial \delta^m}{\partial \delta_w} \frac{\partial \delta_w}{\partial u_{zv}} \Leftarrow \delta^{m0} < \delta^{m \max} \leq \delta^{mf}, \quad (3.123)$$

em que (a partir da equação 3.122)

$$\frac{\partial D_{sr}}{\partial d} = -K \left(\bar{\delta}_{sr} + \bar{\delta}_{s3}\bar{\delta}_{3r}\frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3} \right) \quad (3.124)$$

e a partir da equação 3.120

$$\frac{\partial d}{\partial \delta^{m \max}} = \frac{\delta^{mf} \delta^{m0}}{(\delta^{m \max})^2 (\delta^{mf} - \delta^{m0})}. \quad (3.125)$$

Considerando a definição de $\delta^{m \max}$ (equação 3.49), a derivada do deslocamento máximo em modo misto $\delta^{m \max}$ em relação ao deslocamento (actual) em modo

misto δ^m é igual a uma *função de carregamento*

$$\frac{\partial \delta^{m \max}}{\partial \delta^m} = F(\delta^m - \delta^{m \max}). \quad (3.126)$$

Na expressão anterior (equação 3.126), $F(\delta^m - \delta^{m \max})$ representa a *função de carregamento* que é definida da seguinte forma:

$$F(\delta^m - \delta^{m \max}) = \frac{\langle \delta^m - \delta^{m \max} \rangle}{\delta^m - \delta^{m \max}}. \quad (3.127)$$

Continuando, resulta da definição de δ^m (equação 3.45) que

$$\frac{\partial \delta^m}{\partial \delta_w} = \frac{\delta_w}{\delta^m} \Psi_w^*(\delta_3). \quad (3.128)$$

em que, atendendo à definição de δ^m , $\Psi_w^*(\delta_3)$ deve respeitar a condição:

$$\Psi_w^*(\delta_3) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \delta_3 \leq 0 \wedge w = 3 \\ 1 & \Leftarrow \text{nas restantes situações} \end{cases}. \quad (3.129)$$

Uma expressão possível para $\Psi_w^*(\delta_3)$ é

$$\Psi_w^*(\delta_3) = 1 - \bar{\delta}_{3w} \frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3}. \quad (3.130)$$

Continuando, pode-se concluir da definição do tensor B_{wvz} (equação 3.25) que

$$\frac{\partial \delta_w}{\partial u_{zv}} = B_{wvz}. \quad (3.131)$$

Assim, pode-se finalmente definir a seguinte expressão para $\frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}} &= -K \left(\bar{\delta}_{sr} + \bar{\delta}_{s3} \bar{\delta}_{3r} \frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3} \right) \frac{\delta^m f \delta^{m0}}{(\delta^{m \max})^2 (\delta^{mf} - \delta^{m0})} \times \\ &\quad \times F(\delta^m - \delta^{m \max}) \frac{\delta_w}{\delta^m} \Psi_w^*(\delta_3) B_{wvz} \\ &\Leftarrow \delta^{m0} < \delta^{m \max} \leq \delta^{mf} \end{aligned} \quad (3.132)$$

Na expressão anterior (3.132), os factores $\left(\bar{\delta}_{sr} + \bar{\delta}_{s3}\bar{\delta}_{3r}\frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3}\right)$ e $\Psi_w^*(\delta_3)$ podem ser condensados num só ($\Psi_{wrs}(\delta_3)$), resultando para $\frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}}$ na situação de propagação do dano ($\delta^{m0} < \delta^{m\max} \leq \delta^{mf}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}} &= -K \frac{\delta^{mf} \delta^{m0}}{(\delta^{m\max})^2 (\delta^{mf} - \delta^{m0})} F(\delta^m - \delta^{m\max}) \frac{\delta_w}{\delta^m} \Psi_{wrs}(\delta_3) B_{wvz} \\ &\Leftarrow (\delta^{m0} < \delta^{m\max} \leq \delta^{mf}) \end{aligned} \quad (3.133)$$

em que $\Psi_{wrs}(\delta_3)$ é

$$\Psi_{wrs}(\delta_3) = \left(1 - \bar{\delta}_{3w} \frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3}\right) \left(\bar{\delta}_{sr} + \bar{\delta}_{s3}\bar{\delta}_{3r} \frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3}\right). \quad (3.134)$$

(iii) Fase de descoesão: $\delta^{mf} \leq \delta^{m\max}$

Nesta situação, pode-se concluir directamente da terceira linha da expressão de D_{sr} (equação 3.119) que

$$\frac{\partial D_{sr}}{\partial u_{zv}} = 0 \Leftarrow \delta^{mf} \leq \delta^{m\max}. \quad (3.135)$$

3.5 Algumas notas

3.5.1 Diferenciação da norma de um vector $\mathbf{t}$

$$\begin{aligned} d(\|\mathbf{t}\|) &= d(\sqrt{t_i t_i}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 t_i dt_i}{\sqrt{t_i t_i}} \\ &= \frac{t_i}{\|\mathbf{t}\|} dt_i. \end{aligned} \quad (3.136)$$

3.5.2 Diferenciação de um versor $\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}$

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{t_i}{\|\mathbf{t}\|}\right) &= \frac{dt_i \|\mathbf{t}\| - t_i \left(\frac{t_j}{\|\mathbf{t}\|} dt_j\right)}{\|\mathbf{t}\|^2} = \\
 &= \frac{dt_i - \left(\frac{t_i}{\|\mathbf{t}\|} \frac{t_j}{\|\mathbf{t}\|} dt_j\right)}{\|\mathbf{t}\|} \\
 &= \frac{1}{\|\mathbf{t}\|} \left(\bar{\delta}_{ij} - \frac{t_i}{\|\mathbf{t}\|} \frac{t_j}{\|\mathbf{t}\|}\right) dt_j \\
 &= \frac{1}{\|\mathbf{t}\|} (\bar{\delta}_{ij} - \hat{t}_i \hat{t}_j) dt_j.
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

3.5.3 Transformação de um produto vectorial num produto entre uma matriz e um vector

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \times \mathbf{d} &= \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} v_2 d_3 - d_2 v_3 \\ v_3 d_1 - v_1 d_3 \\ v_1 d_2 - d_1 v_2 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \\
 &= \Omega(\mathbf{v}) \mathbf{d},
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

logo,

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{d})_i = \Omega_{ij}(\mathbf{v}) d_j. \tag{3.139}$$

Por outro lado, se se definir

$$\bar{\Omega}_{ijw} = \frac{\partial \Omega_{ij}(\mathbf{d})}{\partial d_w}, \quad (3.140)$$

tem-se:

$$\bar{\Omega}_{ij1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \bar{\Omega}_{ij2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{\Omega}_{ij3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.141)$$

3.5.4 Ordem de grandeza de $\|\mathbf{r}_{i,\xi}\|$

Considere-se por simplicidade o elemento de descoesão de 8 nós. Para este elemento (ver tabela 3.1, na página 44),

$$N_{k,\xi} = \pm \frac{1}{4}. \quad (3.142)$$

Assim,

$$\begin{aligned} r_{i,\xi} &= \frac{1}{2} N_{k,\xi} (x_{ki} + u_{ki}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{4} \right) (x_{1i} + u_{1i}) + \left(\frac{1}{4} \right) (x_{2i} + u_{2i}) + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{4} \right) (x_{7i} + u_{7i}) + \left(-\frac{1}{4} \right) (x_{8i} + u_{8i}) \right] \\ &= \frac{1}{8} [(x_{2i} + u_{2i}) - (x_{1i} + u_{1i}) + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \underbrace{(x_{7i} + u_{7i}) - (x_{8i} + u_{8i})}_{o(\bullet)=L_i}] . \end{aligned} \quad (3.143)$$

Logo,

$$r_{i,\xi} = o\left(\frac{L_i}{2}\right), \quad (3.144)$$

sendo L_i a projecção do comprimento característico do elemento na direcção i . Facilmente concluimos então que

$$\|\mathbf{r}_{,\xi}\| = o\left(\frac{L}{2}\right). \quad (3.145)$$

Capítulo 4

Critérios de rotura

4.1 Introdução

Num recente exercício mundial, destinado a estabelecer qual o estado da arte dos critérios de rotura para materiais compósitos reforçados com fibras (World-Wide Failure Exercise, Hinton, 2001), foram comparados 15 critérios diferentes. Procurou utilizar-se cada um dos critérios na previsão da rotura num determinado número de casos particulares. A título de exemplo, verificou-se num dos casos testados, em que se sucediam três fases distintas na rotura (fissuração transversal da matriz/rotura da matriz; fissuração (*splitting*) longitudinal (na direcção das fibras) e rotura das fibras por tracção¹), que mais de **75%** das teorias não foram capazes de prever a fissuração longitudinal. Ainda nesse mesmo caso, quase todas as teorias subestimaram a rotura da matriz, e a generalidade das mesmas conseguiu prever bastante bem a rotura final das fibras. As principais conclusões do estudo realizado encontram-se qualitativamente representadas na figura 4-1.

Por outro lado, existe um hiato entre o estado da arte sobre os critérios de rotura em materiais compósitos e aqueles que, por razões históricas e/ou pela sua simplicidade são utilizados na Indústria. A figura 4-2 mostra o nível de utilização actual dos critérios de rotura existentes, por parte da Indústria. Pode-se concluir

¹Tensões (tensor de segunda ordem) de tracção. Não confundir com as *tracções* (tensor de primeira ordem).

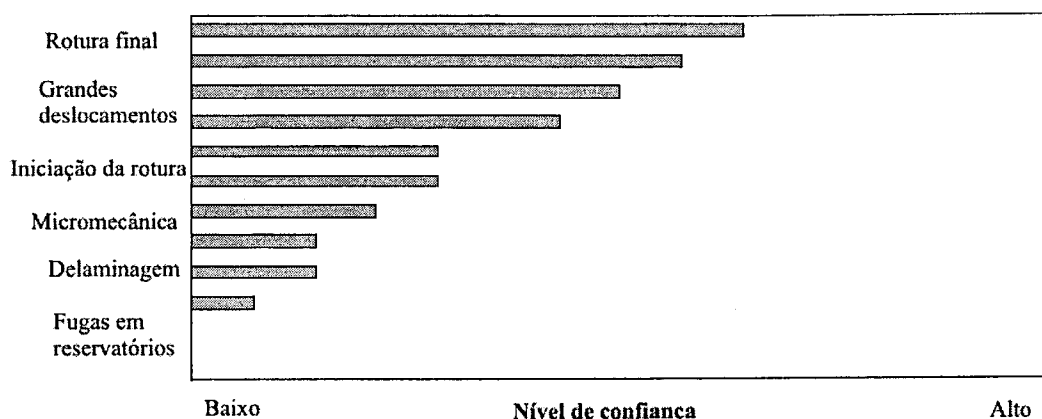


Figura 4-1: Nível de confiança atribuído às teorias de rotura para materiais compósitos, na forma como lidam com os parâmetros indicados, segundo o World-Wide Failure Exercise. Baseado em Hinton (2001).

da análise conjunta das figuras 4-1 e 4-2 que ainda existe trabalho a ser feito, tanto no que diz respeito ao desenvolvimento de critérios de rotura mais robustos (na sua capacidade de previsão e distinção entre os diferentes modos de rotura) como no que diz respeito à transferência desses critérios para uma utilização industrial.

No caso do esmagamento de componentes em material compósito, a capacidade de distinção entre os diferentes modos de rotura assume um papel particularmente importante. Tal deve-se ao facto de que as análises a efectuar devem prosseguir para além da fase de iniciação do dano. Com efeito, após a detecção de um determinado tipo de dano, as propriedades mecânicas devem ser reduzidas de acordo com o tipo de dano previsto de modo a que a análise possa continuar. No final de uma análise, um ou mais tipos de dano podem ter ocorrido em cada ponto do material.

A resistência de materiais ou de sistemas materiais, sujeitos a um carregamento multiaxial pode portanto ser prevista com base em diferentes *critérios de rotura*. Os critérios de rotura relacionam a resistência do material, definida a partir de casos simples de carga, com o estado genérico de tensão-deformação devido a um carregamento multiaxial. Tipicamente, os critérios de rotura são apresentados como expressões matemáticas denominadas *funções do critério de rotura*

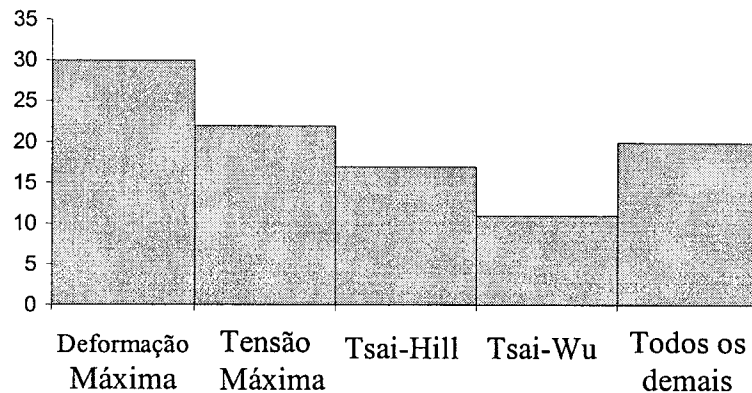


Figura 4-2: Critérios de rotura utilizados na Indústria. Baseado em Sun (1996).

(f). As **funções do critério de rotura** são definidas de tal forma que, quando nenhuma carga é aplicada, a função tem o valor "0". O valor "1" corresponde à rotura do material (ou sistema material).

Este capítulo descreve os critérios de rotura frequentemente utilizados em materiais compósitos de matriz polimérica reforçados com fibras. Neste texto, serão utilizados valores absolutos para a resistência (tensão de rotura) à compressão. Por outras palavras, às tensões de rotura à compressão X_c e Y_c , bem como às deformações de rotura à compressão X_{ec} e Y_{ec} correspondem valores positivos.

Os critérios de rotura para materiais compósitos podem ser classificados em:

- (i) **Critérios de rotura associados aos modos de rotura, ou *fenomenológicos*** - quando o critério de rotura considera a natureza heterogênea do material e prevê a possibilidade de ocorrência de cada um dos *Modos de rotura* separadamente (critério da tensão máxima, da deformação máxima, Hashin, Hashin-Rotem e Puck).
- (ii) **Critérios de rotura não associados aos modos de rotura, ou *não fenomenológicos*** - quando o critério de rotura apenas pretende prever se há ou não rotura, sem esclarecer qual o *Modo* segundo o qual o material

rompe, e impossibilitando portanto a previsão dos efeitos da rotura nas propriedades mecânicas (critérios polinomiais, em particular os quadráticos: Tsai-Wu, Tsai-Hill, Azzi-Tsai, Hoffman e Chamis).

Alternativamente, os critérios de rotura para estes materiais também podem ser divididos em três grupos (Palantera, 1998): (i) condições independentes - (tensão máxima e deformação máxima); (ii) critérios quadráticos (Tsai-Wu, Hoffman, Tsai-Hill e Chamis); e (iii) critérios parcialmente interactivos (Puck simples, Puck modificado e Hashin). Nas denominadas *condições independentes*, é assumido que as componentes das tensões ou das deformações no referencial principal não interagem no mecanismo de rotura. Nos *critérios totalmente interactivos*, todas as componentes do tensor das tensões e do tensor das deformações são combinadas numa expressão. Muitos dos critérios tradicionalmente utilizados em compósitos reforçados com fibra pertencem a um subconjunto dos critérios totalmente interactivos denominados *critérios quadráticos*. A forma genérica de um critério quadrático pode ser expressa por um polinómio do segundo grau. *Condições independentes* e *critérios interactivos* podem ser combinados de modo a permitir que haja diferentes formulações para diferentes modos de rotura. Estes tipos de critérios são por vezes denominados por *critérios parcialmente interactivos*.

4.2 Camadas de compósitos de matriz polimérica reforçada com fibras alinhadas

4.2.1 Critérios fenomenológicos

Critérios da deformação e da tensão máximas

No critério da deformação máxima, os quocientes entre as *deformações instaladas* e as *deformações de rotura* são comparados no referencial principal (associado às direcções principais do material) da camada. A rotura das fibras é considerada comparando o valor da deformação segundo a sua direcção (ϵ_1) com

o valor limite respectivo (X_ϵ), independentemente do valor da deformação na direcção perpendicular (ϵ_2). Em relação à rotura da matriz, sucede o mesmo. A função do critério de rotura pode ser escrita como:

$$f = \max \left(\left| \frac{\epsilon_1}{X_\epsilon} \right|, \left| \frac{\epsilon_2}{Y_\epsilon} \right|, \left| \frac{\epsilon_{12}}{S_\epsilon} \right| \right) \quad (4.1)$$

com

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \geq 0 &\Rightarrow X_\epsilon = X_{\epsilon t}; & \epsilon_1 < 0 &\Rightarrow X_\epsilon = X_{\epsilon c} \\ \epsilon_2 \geq 0 &\Rightarrow Y_\epsilon = Y_{\epsilon t}; & \epsilon_2 < 0 &\Rightarrow Y_\epsilon = Y_{\epsilon c}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

No critério da tensão máxima, os quocientes entre as *tensões instaladas* e as *tensões de rotura* são comparadas no referencial principal da camada. A função do critério de rotura pode ser escrita como:

$$f = \max \left(\left| \frac{\sigma_1}{X} \right|, \left| \frac{\sigma_2}{Y} \right|, \left| \frac{\sigma_{12}}{S_\sigma} \right| \right) \quad (4.3)$$

com

$$\begin{aligned} \sigma_1 \geq 0 &\Rightarrow X = X_t; & \sigma_1 < 0 &\Rightarrow X = X_c \\ \sigma_2 \geq 0 &\Rightarrow Y = Y_t; & \sigma_2 < 0 &\Rightarrow Y = Y_c. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Os envelopes da rotura prevista pelos critérios da deformação e tensão máximas podem ser observados nas figuras 4-3 e 4-4, no espaço das tensões e das deformações, respectivamente.

Critério de Hashin-Rotem

Os critérios que se seguem foram desenvolvidos para camadas reforçadas com fibras unidireccionais. É assumido que as fibras estão alinhadas com o eixo 1.

No critério de Hashin-Rotem (Hashin, 1973), a rotura devida a solicitações

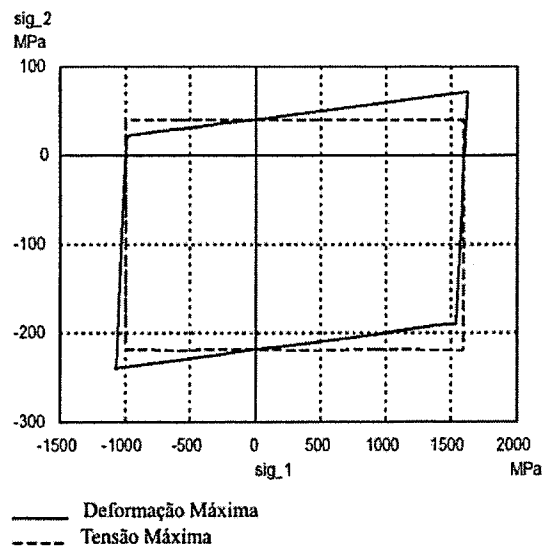


Figura 4-3: Envelope de rotura no plano σ_1 e σ_2 , para uma camada unidirecional de carbono-epóxico, com base nos critérios das Tensões e das Deformações Máximas. Baseado em Palantera (1998).

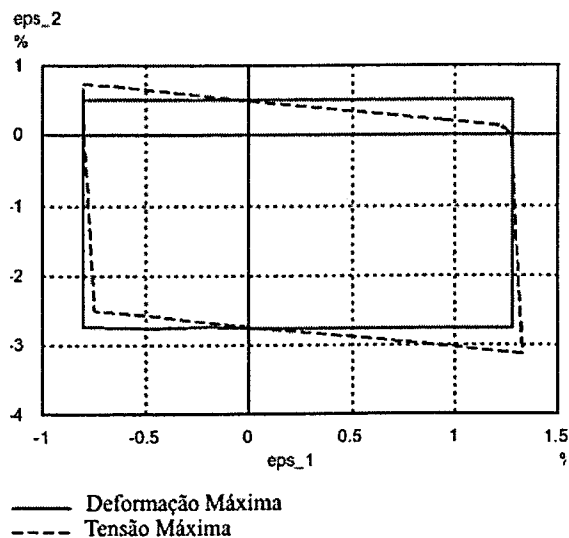


Figura 4-4: Envelope de rotura no plano ϵ_1 e ϵ_2 , para uma camada unidirecional de carbono-epóxico, com base nos critérios das Tensões e das Deformações Máximas. Baseado em Palantera (1998).

axiais e o modo de rotura da matriz devida a cargas transversas e de corte são consideradas separadamente. A severidade do estado de tensão na direcção das fibras é previsto com uma condição de tensão máxima:

$$f_f = \left| \frac{\sigma_1}{X} \right|. \quad (4.5)$$

A rotura da matriz é prevista utilizando a expressão

$$f_m = \left(\frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_\sigma} \right)^2. \quad (4.6)$$

Nas equações 4.5 e 4.6, podem ser utilizadas tensões de rotura por tracção ou por compressão, de acordo com a expressão:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \geq 0 &\Rightarrow X = X_t; & \sigma_1 < 0 &\Rightarrow X = X_c \\ \sigma_2 \geq 0 &\Rightarrow Y = Y_t; & \sigma_2 < 0 &\Rightarrow Y = Y_c. \end{aligned} \quad (4.7)$$

É então previsto que a rotura ocorra quando f_f ou f_m atingem o valor 1. Assim, a função do critério de rotura é definida como

$$f = \max(f_f, f_m). \quad (4.8)$$

Critério de Puck

O critério de Puck, na sua versão inicial, coincide com o critério de Hashin-Rotem excepto na condição para rotura da matriz, que toma a forma:

$$f_m = \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{12}^2}{S_\sigma^2} + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_2. \quad (4.9)$$

Após a apresentação deste critério, Puck continuou o seu trabalho e desenvolveu recentemente (Puck, 1995, 1998, 2001, 2002A, 2002B) um critério mais elaborado, em que se distinguem três tipos diferentes de modos de rotura para a matriz (figuras 4-5 e 4-6). Nesses trabalhos, Puck define o conceito de *plano de acção*,

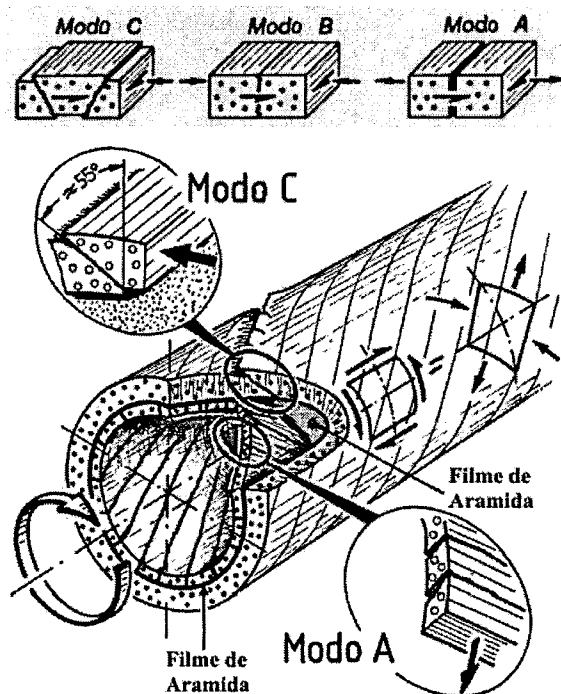


Figura 4-5: Diferentes modos de rotura da matriz. Baseado em Puck (1995 e 2001).

plano onde potencialmente se vai dar a rotura da matriz.

CrITÉrio de Hashin

No **crITÉrio de Hashin** (Hashin, 1973, 1980), a severidade da sollicitação de tracção na direcção das fibras é prevista pela expressão:

$$f_f^t = \left(\frac{\sigma_1}{X_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_\sigma} \right)^2, \quad \sigma_1 \geq 0. \quad (4.10)$$

Sob uma sollicitação de compressão na direcção das fibras, a rotura é prevista por uma condição diferente:

$$f_f^c = \frac{-\sigma_1}{X_c}, \quad \sigma_1 < 0. \quad (4.11)$$

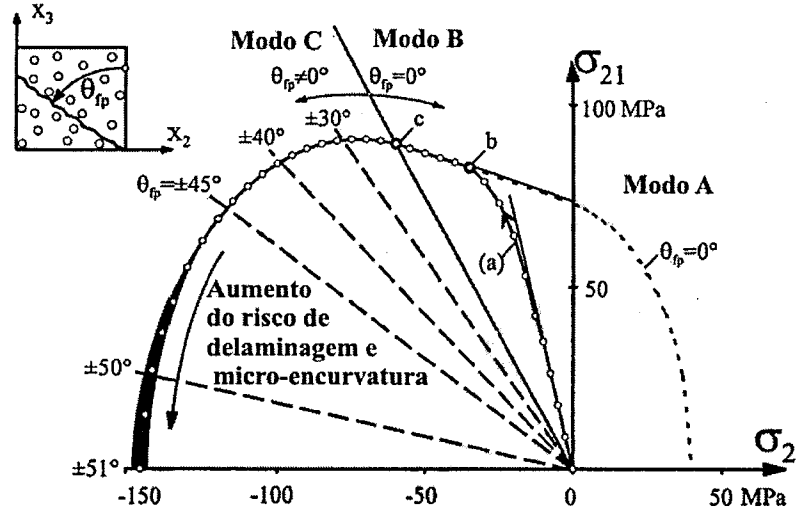


Figura 4-6: Diferentes modos de rotura da matriz em função da relação entre σ_2 e σ_{21} . Baseado em (Puck, 2001).

No caso de uma solicitação transversal de tracção, eventualmente com corte, a expressão para prever a rotura da matriz é:

$$f_m^t = \left(\frac{\sigma_2}{Y_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_\sigma} \right)^2, \quad \sigma_2 \geq 0. \quad (4.12)$$

Quando a solicitação transversal é de compressão, é usada uma expressão um pouco mais complexa:

$$f_m^c = \left(\frac{\sigma_2}{2S_\sigma} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_\sigma} \right)^2 + \left[\left(\frac{Y_c}{2S_\sigma} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_2}{Y_c}, \quad \sigma_2 < 0. \quad (4.13)$$

Finalmente, é seleccionado, de entre os modos anteriores, aquele que é mais severo:

$$f = \max(f_f^t, f_f^c, f_m^t, f_m^c). \quad (4.14)$$

4.2.2 Critérios não fenomenológicos

Os critérios não fenomenológicos assumem geralmente a forma de polinómios, em particular quadráticos. No espaço das tensões, considerando um estado plano de

tensão, o polinómio é da forma (Liu, 1996):

$$f = F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\sigma_{12}. \quad (4.15)$$

Os coeficientes F_{ii} e F_i são determinados de modo que a função do critério de rotura seja igual a 1 quando é instalado um estado de tensão unidireccional correspondente à tensão de rotura do material.

Critério de Tsai-Wu

No critério de Tsai-Wu (Tsai, 1971), os coeficientes F têm os valores:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{X_t X_c}, & F_1 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \\ F_{22} &= \frac{1}{Y_t Y_c}, & F_2 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \\ F_{66} &= \frac{1}{S_\sigma^2} \text{ e } & F_6 &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

pelo que o critério pode ser escrito na seguinte forma:

$$f = \frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{12}^2}{S_\sigma^2} + \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2. \quad (4.17)$$

O coeficiente F_{12} não pode ser obtido directamente das tensões de rotura em estados de tensão uniaxiais. Em rigor, deveria ser determinado a partir de ensaios biaxiais. Na prática, é muitas vezes dado na forma de um coeficiente de interacção adimensional (Palantera, 1998):

$$F_{12}^* = \frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11}F_{22}}} \quad (4.18)$$

pelo que

$$F_{12} = \frac{F_{12}^*}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}. \quad (4.19)$$

Para assegurar que o critério delimita uma superfície de rotura fechada, o valor de F_{12}^* deve estar compreendido no intervalo $-1 < F_{12}^* < 1$. No entanto, a gama

de valores à qual corresponde um comportamento material com significado físico é mais restrita. O valor frequentemente utilizado $F_{12}^* = \frac{1}{2}$ corresponde a um "estado de von Mises generalizado".

Nota Sobre o Critério de Tsai-Wu: *Suponha-se um estado de tensão biaxial de tracção de tal modo que*

$$\sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{22} = \alpha\sigma \quad \text{e} \quad \sigma_{12} = 0, \quad \text{com } \alpha \text{ e } \sigma > 0. \quad (4.20)$$

A função do critério de rotura exprime-se neste caso da seguinte forma:

$$f = \frac{\sigma^2}{X_t X_c} + \frac{\alpha^2 \sigma^2}{Y_t Y_c} + \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \alpha \sigma + 2F_{12} \alpha \sigma^2. \quad (4.21)$$

Repare-se que o estado a que a placa está sujeita é de tracção, e no entanto, a função do critério de rotura (Tsai-Wu) depende do valor das tensões de rotura à compressão. Este é um aspecto criticável deste critério.

Critério de Hoffman

O critério de Hoffman (Hoffman, 1967) é equivalente ao critério de Tsai-Wu (Tsai, 1971), excepto no que diz respeito ao coeficiente F_{12} que é substituído por $F_{12} = -\frac{1}{2} \cdot F_{11}$. Assim, para este critério, os coeficientes F são:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{X_t X_c}, & F_1 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, & F_{12} &= -\frac{1}{2X_t X_c}, \\ F_{22} &= \frac{1}{Y_t Y_c}, & F_2 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \\ F_{66} &= \frac{1}{S_\sigma^2} \quad \text{e} & F_6 &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pode ser notado que, para camadas tendo o mesmo comportamento nas direcções principais (i.e. $X_t = Y_t$; $X_c = Y_c$), o critério de Hoffman é idêntico ao de Tsai-Wu com o valor do coeficiente de interacção $F_{12}^* = -\frac{1}{2}$. Por outro lado, para camadas unidireccionais com grandes diferenças de resistência nas direcções principais, o

critério de Hoffman leva a resultados próximos dos do critério de Tsai-Wu com coeficiente $F_{12}^* = 0$. Tal pode ser visto nas figuras 4-7 e 4-8.

Critério de Tsai-Hill

No critério de Tsai-Hill (Tsai, 1965), os coeficientes F podem ser determinados quer com as tensões de rotura à tracção, quer com as tensões de rotura à compressão, dependendo da solicitação. Assim, os coeficientes são:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{X^2}, & F_1 &= 0, & F_{12} &= -\frac{1}{2X^2}, \\ F_{22} &= \frac{1}{Y^2}, & F_2 &= 0, \\ F_{66} &= \frac{1}{S_\sigma^2} \text{ e } & F_6 &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde os valores de X e Y são

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\geq 0 \Rightarrow X = X_t; & \sigma_1 < 0 \Rightarrow X = X_c \\ \sigma_2 &\geq 0 \Rightarrow Y = Y_t; & \sigma_2 < 0 \Rightarrow Y = Y_c. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Assim, a função do critério de rotura de Tsai-Hill pode ser escrita na forma:

$$f = \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_\sigma}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2}. \quad (4.25)$$

Nas figuras 4-7 e 4-8, o critério de Tsai-Hill é comparado aos outros critérios quadráticos.

Critério de Chamis

No critério de Chamis (Chamis, 1969), os coeficientes F podem ser determinados quer com as tensões de rotura à tracção, quer com as tensões de rotura à compressão, dependendo da solicitação (tal como no critério de Tsai-Hill). Assim,

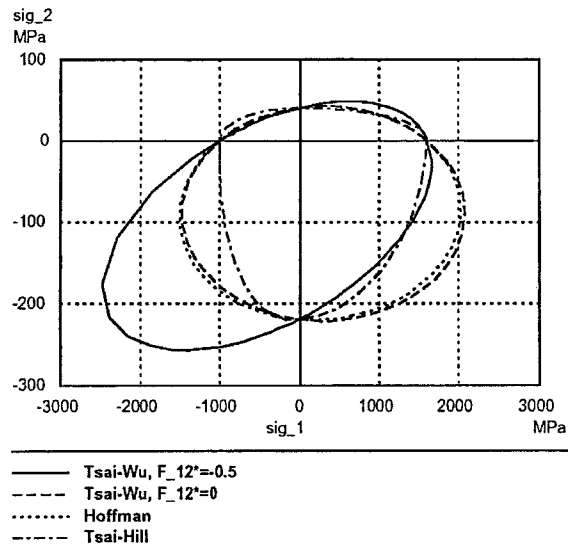


Figura 4-7: Envelope de rotura no plano σ_1 e σ_2 , para uma camada unidireccional de carbono-epóxico, com base nos critérios de Tsai-Wu ($F_{12}^* = -0.5$ e $F_{12}^* = 0$), Hoffman e Tsai-Hill (Palantera, 1998).

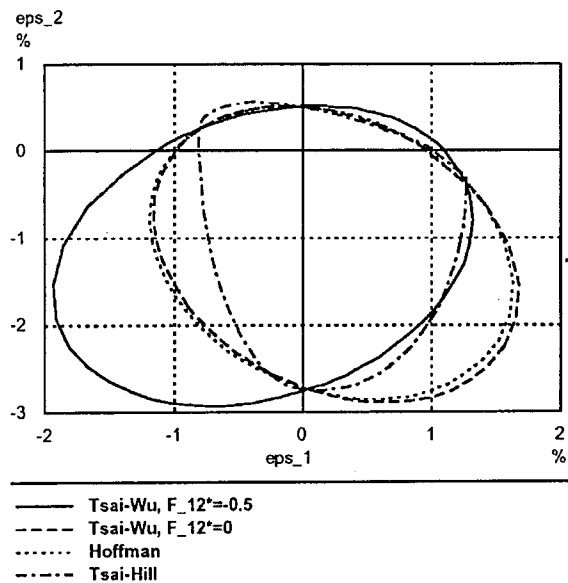


Figura 4-8: Envelope de rotura no plano ε_1 e ε_2 , para uma camada unidireccional de carbono-epóxico, com base nos critérios de Tsai-Wu ($F_{12}^* = -0.5$ e $F_{12}^* = 0$), Hoffman e Tsai-Hill (Palantera, 1998).

os coeficientes são:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{X^2}, & F_1 &= 0, & F_{12} &= -\frac{K_{12}}{2XY}, \\ F_{22} &= \frac{1}{Y^2}, & F_2 &= 0, \\ F_{66} &= \frac{1}{S_\sigma^2} \text{ e } & F_6 &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde os valores de X e Y são

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\geq 0 \Rightarrow X = X_t; & \sigma_1 < 0 \Rightarrow X = X_c \\ \sigma_2 &\geq 0 \Rightarrow Y = Y_t; & \sigma_2 < 0 \Rightarrow Y = Y_c \end{aligned} \quad (4.27)$$

e K_{12} é um parâmetro dependente do material. Assim, a função do critério de rotura de Chamis pode ser escrita na forma:

$$f = \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_\sigma}\right)^2 - \frac{K_{12}}{XY}\sigma_1\sigma_2. \quad (4.28)$$

4.3 Compósitos isotrópicos de matriz polimérica reforçada com fibras curtas aleatórias

4.3.1 Critério das deformações máximas

Para o caso de compósitos isotrópicos (no plano da camada), as deformações principais e a deformação de corte máxima têm de ser determinadas primeiro. As deformações principais são

$$\varepsilon_{P1,P2} = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{2} (1 - \nu) (\sigma_1 + \sigma_2) \pm (1 + \nu) \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_{12}^2} \right) \quad (4.29)$$

e a deformação de corte máxima é

$$\varepsilon_{shear}^{\max} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_{12}^2}. \quad (4.30)$$

O valor da função do critério de rotura é então calculado de acordo com a equação 4.31:

$$f = \max \left(\frac{\langle \varepsilon_{P1} \rangle}{X_{\varepsilon t}}, \frac{\langle -\varepsilon_{P2} \rangle}{X_{\varepsilon c}}, \left| \frac{\varepsilon_{shear}^{\max}}{S_{\varepsilon}} \right| \right). \quad (4.31)$$

4.3.2 Critério das tensões máximas

Tal como no critério das deformações máximas, camadas de um compósito que sejam isotrópicas (no plano destas) têm de ser consideradas separadamente. As tensões principais σ_{P1} e σ_{P2} do estado plano de tensão são determinadas de acordo com

$$\sigma_{P1,P2} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (4.32)$$

e a tensão de corte máxima de acordo com

$$\tau^{\max} = \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (4.33)$$

As equações 4.3 - 4.4 são então aplicadas para calcular o valor da função do critério de rotura.

$$f = \max \left(\frac{\langle \sigma_{P1} \rangle}{X_t}, \frac{\langle -\sigma_{P2} \rangle}{X_c}, \left| \frac{\tau^{\max}}{S_{\sigma}} \right| \right) \quad (4.34)$$

4.3.3 Critério de Mohr-Coulomb

Tal como no critério das tensões máximas, no critério de Mohr-Coulomb, as tensões principais σ_{P1} e σ_{P2} do estado plano de tensão devem ser determinadas de acordo com a equação 4.32. A função do critério de rotura é então expressa

$$f = \frac{\langle \sigma_{P1} \rangle}{X_t} + \frac{\langle -\sigma_{P2} \rangle}{X_c} \quad (4.35)$$

4.4 Modelo de dano para camadas com fibras contínuas alinhadas

Quando o dano é detectado, o comportamento do material deve ser alterado de acordo com o tipo de dano previsto, i.e., as propriedades elásticas são *degradadas*. Essa alteração deve, por um lado, ser o mais representativa possível da degradação que cada propriedade mecânica sofre em materiais reais. As vias para essa correspondência passam por exemplo pela experimental (Deletombe, 2000; McCarthy, 2001) e por modelos micromecânicos (Nuismer, 1988; Tan, 1989, 1993). Por outro lado, a formulação e resolução de modelos numéricos exige que as reduções de rigidez não sejam demasiado elevadas ou demasiado abruptas. Existe pois muitas vezes, sobretudo nos problemas mais complexos, um compromisso entre modelos menos fidedignos que permitam obter resultados aproximados, e modelos mais fidedignos que podem eventualmente não fornecer resultados de todo.

O modelo aqui apresentado, formulado por Camanho *et al.* (Camanho, 2000), é baseado no critério de rotura de Hashin (Hashin, 1980) bem como nos modelos micromecânicos de Tan *et al.* (Nuismer, 1988; Tan, 1989, 1993; Laws, 1983). Assume-se que o efeito do dano na rigidez do material pode ser representado utilizando variáveis de estado. Na implementação numérica deste tipo de abordagem, é assumido que o dano num elemento tem influência nesse elemento apenas, i.e., a redução de rigidez associada com a rotura num ponto é confinada apenas a esse ponto. Por outro lado, o dano detectado num incremento apenas vai afectar as propriedades mecânicas no incremento seguinte.

4.4.1 Critério de rotura (Hashin)

O critério de Hashin pode ser apresentado para um estado de tensão tridimensional (Hashin, 1980), resultando:

Rotura das fibras por tracção

$$f_f^t = \left(\frac{\sigma_1}{X_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12} + \sigma_{13}}{S_\sigma} \right)^2, \quad \sigma_1 \geq 0 \quad (4.36)$$

Rotura das fibras por compressão

$$f_f^c = \frac{-\sigma_1}{X_c}, \quad \sigma_1 < 0 \quad (4.37)$$

Fissuração da matriz por tracção

$$f_m^t = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{Y_t} \right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 - \sigma_2 \sigma_3}{S_\sigma^2}, \quad \sigma_2 + \sigma_3 \geq 0 \quad (4.38)$$

Fissuração da matriz por compressão

$$f_m^c = \left(\frac{\sigma_2}{2S_\sigma} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_\sigma} \right)^2 + \left[\left(\frac{Y_c}{2S_\sigma} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_2}{Y_c}, \quad \sigma_2 + \sigma_3 < 0 \quad (4.39)$$

Previsão final da rotura

$$f = \max(f_f^t, f_f^c, f_m^t, f_m^c) \quad (4.40)$$

4.4.2 Efeito do dano nas propriedades mecânicas

Fissuração da matriz por tracção

Quando a fissuração da matriz por tracção é detectada (equações 4.38 e 4.40), algumas das propriedades mecânicas do material vão ser degradadas enquanto outras poderão não ser afectadas. Por exemplo, é imediato concluir que a rigidez transversal (essencialmente determinada pela matriz) vai diminuir, enquanto a rigidez na direcção das fibras (essencialmente determinada por estas, desde que a consistência do compósito seja garantida) não é significativamente afectada. No entanto, não é por um lado evidente para cada propriedade mecânica, se esta se vai degradar ou não, e não é por outro lado evidente como quantificar essa diminuição do valor das propriedades.

Uma solução passa por desenvolver modelos micromecânicos, com a distinção entre a matriz e as fibras, e introduzir nesse modelo uma dada densidade de fissuras na primeira. Esses modelos são úteis para ajudar a compreender quais as propriedades mecânicas que são afectadas por um dado modo de rotura. Com base num modelo micromecânico bidimensional, Tan *et al.* (Tan, 1989; Nuismer, 1988) concluíram que E_2 e G_{12} eram bastante degradados pela presença de fissuras transversais na matriz, passando, em determinadas condições, a 20% do seu valor original. Concluíram também que as outras propriedades (no plano) não eram significativamente influenciadas pela presença da fissuração da matriz.

Laws *et al.* (Laws, 1983) desenvolveram um modelo tridimensional para prever a perda de rigidez associada à fissuração da matriz. Concluíram que E_1 , E_3 , G_{13} , ν_{12} , ν_{13} , ν_{31} e ν_{32} são praticamente independentes da densidade de fissuras na matriz, enquanto E_2 , G_{12} , G_{23} , ν_{21} e ν_{23} são significativamente reduzidos pela presença da fissuração na matriz.

Com base nos resultados anteriores, Camanho *et al.* (Camanho, 2000) propõem a degradação de propriedades seguinte:

$$E_2^d = D_2^t E_2, \quad (4.41)$$

$$G_{12}^d = D_4^t G_{12} \quad \text{e} \quad (4.42)$$

$$G_{23}^d = D_4^t G_{23}. \quad (4.43)$$

As variáveis de estado D_2^t e D_4^t , vão degradar as propriedades originais E_2 , G_{12} e G_{23} , passando estas a tomar o valor E_2^d , G_{12}^d e G_{23}^d respectivamente.

Rotura das fibras por tracção

De modo a determinar a redução de rigidez associada com a fractura das fibras por tracção, D_1^t , Tan *et al.* (1989) efectuaram um estudo paramétrico, recorrendo ao método dos elementos finitos, e compararam os resultados obtidos com resultados experimentais. Deste modo, concluíram que o valor $D_1^t = 0.07$ conduzia à melhor concordância com os resultados experimentais. Este valor foi posteriormente

usado por Camanho *et al.* (Camanho, 2000). Assim, o módulo de elasticidade na direcção das fibras é alterado da forma seguinte:

$$E_1^d = D_1^t E_1. \quad (4.44)$$

Fissuração da matriz por compressão

Usando um procedimento semelhante ao utilizado para determinar D_1^t , Tan *et al.* (Tan, 1993) concluíram que, para um material carbono/epóxico, $D_2^c = D_4^c = 0.4$. Deste modo, as propriedades do material passam a valer:

$$E_2^d = D_2^c E_2, \quad (4.45)$$

$$G_{12}^d = D_4^c G_{12} \quad \text{e} \quad (4.46)$$

$$G_{23}^d = D_4^c G_{23}. \quad (4.47)$$

Rotura das fibras por compressão

Continuando o mesmo procedimento, Tan *et al.* (Tan, 1993) concluíram que, para o mesmo laminado carbono epóxico, $D_1^t = 0.07$. Esse valor foi mais tarde usado por Camanho *et al.* (Camanho, 2000). Assim, o módulo de elasticidade na direcção das fibras é alterado da forma seguinte:

$$E_1^d = D_1^c E_1. \quad (4.48)$$

4.5 Modelo de dano para compósitos com fibras curtas aleatórias

A rotura em materiais compósitos de matriz polimérica reforçados com fibras curtas dispostas aleatoriamente pode ser feito recorrendo aos critérios das tensões e deformações máximas, já apresentados, bem como ao critério de Mohr-Coulomb também já apresentado.

A degradação das propriedades, uma vez que o critério de rotura é satisfeito,

deve, por um lado, ser realista, i.e., provocar uma redução das propriedades que se coadune com aquilo que é verificado experimentalmente. Por outro lado, numa análise implícita pelo método dos elementos finitos, existem restrições à amplitude da redução nas propriedades uma vez que tal redução pode provocar problemas de convergência. Tay (1998) refere que na simulação do esmagamento de um tubo, com base num modelo bidimensional com elementos axissimétricos, não conseguiu obter convergência quando a redução da rigidez era de mais de 50%. Jonhson (1999) refere que a instabilidade numérica é demasiado acentuada para reduções de rigidez de mais de 90%.

São de seguida apresentados três modelos de dano baseados nas versões tridimensionais dos critérios das tensões e deformações máximas bem como do critério de Mohr-Coulomb. O comportamento do material pós-rotura constitui uma questão muito pertinente. De facto, a redução da rigidez não pode, por um lado, ser demasiado drástica, e, por outro, não abundam na literatura dados sólidos que nos permitam calibrar os modelos de dano. A alternativa seguida neste caso foi a de reduzir a rigidez, em cada ponto onde a rotura fosse detectada, a uma determinada fracção do seu valor original. Nos componentes simulados neste trabalho, conseguiu-se obter ainda convergência para reduções de rigidez de até 90%.

4.5.1 Critérios de rotura

Critério das deformações máximas

$$f = \max \left(\frac{\langle \varepsilon_{P1} \rangle}{X_{\varepsilon t}}, \frac{\langle -\varepsilon_{P3} \rangle}{X_{\varepsilon c}}, \left| \frac{\varepsilon_{shear}^{\max}}{S_{\varepsilon}} \right| \right) \quad (4.49)$$

Critério das tensões máximas

$$f = \max \left(\frac{\langle \sigma_{P1} \rangle}{X_t}, \frac{\langle -\sigma_{P3} \rangle}{X_c}, \left| \frac{\tau^{\max}}{S_{\sigma}} \right| \right) \quad (4.50)$$

Critério de Mohr-Coulomb

$$f = \frac{\langle \sigma_{P1} \rangle}{X_t} + \frac{\langle -\sigma_{P3} \rangle}{X_c} \quad (4.51)$$

4.5.2 Efeito do dano nas propriedades mecânicas

Logo que o critério de rotura seja verificado, as propriedades elásticas passam a ser

$$E^d = DE \quad (4.52)$$

$$G^d = DG \quad (4.53)$$

em que a variável de dano D deve, em rigor, ser obtida por calibração para cada material. Nesta tese, foram usados os valores $D = 0.1$ e $D = 0.15$.

Capítulo 5

Validação do elemento de descoesão com não linearidade geométrica - Ensaios DCB, ENF e MMB

5.1 Comparação com uma formulação analítica - Ensaio MMB

5.1.1 Objectivos

Nesta secção, o elemento de descoesão é aplicado a uma situação típica de um ensaio MMB (Mixed Mode Bending (Reeder, 1991; ASTM, 2001)) e é feita uma comparação com a respectiva solução analítica. De seguida, é feita uma aplicação a várias situações de Modo Puro e Modo Misto, comparando-se os resultados numéricos com os experimentais. O objectivo é o de obter uma primeira validação da formulação não linear geométrica proposta. Pretende-se também verificar se o novo termo que surge no cálculo das forças nodais em consequência da actualização da superfície média é desprezável.

Assim, a secção principia com uma apresentação sumária do ensaio MMB.



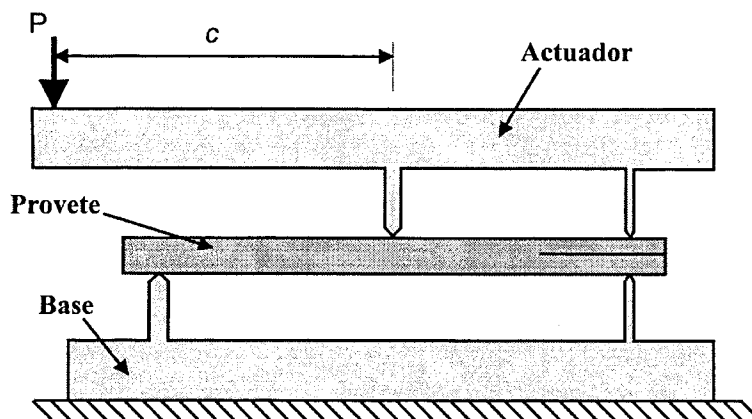


Figura 5-1: Ensaio MMB. Baseado em Camanho (2002).

Continua depois com uma descrição analítica dos resultados que são esperados, utilizando a teoria de vigas. São então apresentados e comparados os resultados com e sem actualização da superfície média. De seguida, são apresentadas várias situações de Modo Misto em que se comparam os resultados numéricos e experimentais.

5.1.2 Caracterização sumária do ensaio MMB

O teste mais utilizado para a caracterização da fractura em modo misto é o ensaio MMB. A geometria do provete, bem como o carregamento a que é sujeito são apresentados na figura 5-1. O ensaio MMB (Modo Misto) pode identificar-se como uma combinação do ensaio DCB (Double Cantilever Beam - Modo I) e ENF (End Notch Flexure - Modo II).

O valor do comprimento c (figura 5-1) pode ser utilizado para alterar a relação entre a contribuição dos Modos I e II durante o carregamento.

5.1.3 Considerações gerais

Da Mecânica da Fractura, sabe-se que para uma placa de espessura b , contendo uma fissura de comprimento a , sujeita a uma carga P perpendicular à fissura, conforme mostra a figura 5-2, a Taxa de Libertação de Energia, G , motivada pelo

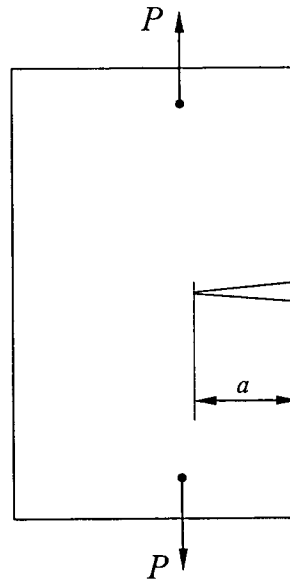


Figura 5-2: Representação de uma placa rectangular com uma fissura junto a um bordo e sujeita a uma carga P .

crescimento da fissura, pode ser expressa como

$$G = \frac{P^2}{2b} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (5.1)$$

onde C representa a *compliance* da placa. Se a fissura não se propagar, o deslocamento v , no ponto de aplicação da carga P , é-lhe proporcional, sendo C a constante de proporcionalidade:

$$v = CP. \quad (5.2)$$

Logo, a equação 5.1 pode ser escrita na forma seguinte:

$$G = \frac{P^2}{2b} \frac{\partial v}{\partial a}. \quad (5.3)$$

Foque-se agora a atenção na representação do provete MMB das figuras 5-1 e 5-3. A relação entre o carregamento a meio vão, P_M , bem como o carregamento

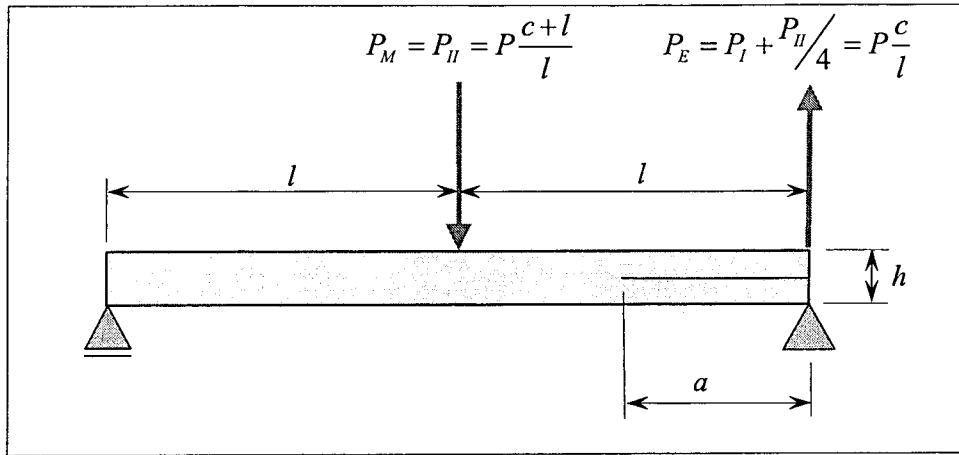


Figura 5-3: Decomposição da solicitação em Modo I e Modo II.

na extremidade do provete, P_E , com a carga aplicada, P , é:

$$P_M = P \left(\frac{c+l}{l} \right) \quad \text{e} \quad (5.4)$$

$$P_E = P \frac{c}{l}. \quad (5.5)$$

Aplicando o princípio da sobreposição, pode-se facilmente concluir que o carregamento em Modo I é:

$$P_I = \frac{3c-l}{4l} P \quad (5.6)$$

e o carregamento em Modo II é:

$$P_{II} = \frac{c+l}{l} P. \quad (5.7)$$

Vai-se designar por v_I o deslocamento provocado por P_I no seu ponto de aplicação e por v_{II} o deslocamento provocado por P_{II} no seu ponto de aplicação (a meio vão). Pode ser demonstrado (utilizando a teoria das vigas e o princípio dos trabalhos virtuais; para uma dedução completa consultar Mi, 1996) que o deslocamento v_I é dado por

$$v_I = \frac{2P_I a^3}{3EI_H} \quad (5.8)$$

e o deslocamento v_{II} é dado por

$$v_{II} = \frac{P_{II}(2l^3 + 3a^3)}{12EI_F}, \quad a < l \quad (5.9)$$

com os momentos estáticos de segunda ordem I_F e I_H definidos como

$$I_F = \frac{bh^3}{12} \text{ e } I_H = \frac{I_F}{8} \quad (5.10)$$

sendo h a altura do provete. A hipótese $a < l$ foi assumida na dedução da equação 5.9. Finalmente, a teoria de vigas também permite concluir (Mi, 1996) que o deslocamento total a meio vão, v_M , é dado por:

$$v_M = \frac{1}{4}v_I + v_{II}, \quad a < l. \quad (5.11)$$

Uma vez conhecidas as expressões para o deslocamento, pode-se aplicar a relação 5.3 para obter as correspondentes Taxas de Libertação de Energia. Tem-se pois,

$$G_I = \frac{P_I^2}{2b} \frac{\partial \frac{v_I}{P_I}}{\partial a} = \frac{P_I^2 a^2}{bEI_H} \quad (5.12)$$

e

$$G_{II} = \frac{P_{II}^2}{2b} \frac{\partial \frac{v_{II}}{P_{II}}}{\partial a} = \frac{3P_{II}^2 a^2}{8bEI_F}. \quad (5.13)$$

As forças P_I e P_{II} que figuram nas expressões 5.12 e 5.13 são função da geometria do provete e da força P aplicada, conforme é determinado pelas equações 5.6 e 5.7. Assim, enquanto as Taxas de Libertação de Energia dependem da força aplicada, a relação entre G_I e G_{II} (o quociente $\kappa = G_I/G_{II}$) é independente da força aplicada, e também do comprimento a da fissura:

$$\kappa = \frac{G_I}{G_{II}} = \frac{4}{3} \left(\frac{3c-l}{c+l} \right)^2. \quad (5.14)$$

As equações 5.12 e 5.13, juntamente com um critério de delaminação em Modo Misto, permitem obter o comprimento da fissura em propagação. Assim, se se

designarem por G_{IC} e G_{IIC} as Taxas Críticas de Libertação de Energia, e se adoptar como critério de delaminação

$$\frac{G_I}{G_{IC}} + \frac{G_{II}}{G_{IIC}} = 1 \quad (5.15)$$

chega-se, após substituição das equações 5.12 e 5.13 em 5.15 a:

$$\frac{P_I^2 a^2}{bEI_H G_{IC}} + \frac{3P_{II}^2 a^2}{8bEI_F G_{IIC}} = 1 \quad (5.16)$$

ou

$$a = \sqrt{\frac{bEI_F}{\frac{8P_I^2}{G_{IC}} + \frac{3P_{II}^2}{8G_{IIC}}}}, \quad a < l. \quad (5.17)$$

Relembra-se que a validade da expressão acabada de deduzir está restringida pela de 5.9, i.e., $a < l$. Por outro lado, corresponde à aplicação de um determinado critério de propagação em modo misto, que pode não ser o mais adequado para determinados materiais.

A informação disponível do ensaio MMB é geralmente a relação carga / deslocamento do ponto de aplicação da carga (ver figura 5-1). Assim, torna-se agora necessário relacionar o deslocamento do ponto de aplicação da carga, que se designa por v_{LP} , com os deslocamentos v_I e v_{II} (Reeder, 2000; Camanho, 2002):

$$v_{LP} = \left(\frac{3c-l}{4l}\right) v_I + \left(\frac{c+l}{l}\right) v_{II}. \quad (5.18)$$

Assim, a substituição das equações que definem v_I , v_{II} e v_M (equações 5.8, 5.9 e 5.11 respectivamente) na equação que define o deslocamento v_{LP} (equação 5.11) resulta em (Camanho, 2002)

$$v_{LP} = \left(\frac{3c-l}{4l}\right) v_I + \left(\frac{c+l}{l}\right) \left(v_M + \frac{1}{4}v_I\right), \quad a < l. \quad (5.19)$$

A equação anterior (5.19) permite relacionar os deslocamentos obtidos nas simulações efectuadas (v_I e v_M) com o deslocamento registado nos ensaios experi-

Tabela 5.1: Geometria e propriedades mecânicas de um provete MMB em carbono/PEEK.

Geometria (mm)		Propriedades da interface		Propriedades das camadas	
l	50	K	$1E6 \text{ N/mm}^3$	E	$1.5E5 \text{ N/mm}^2$
a	30	G_{IC}	0.28 N/mm	ν	0.33
h	3	G_{IIC}	1.42 N/mm		
b	10	τ_{Iu}	30 N/mm^2		
c	43.7	τ_{IIu}	40 N/mm^2		

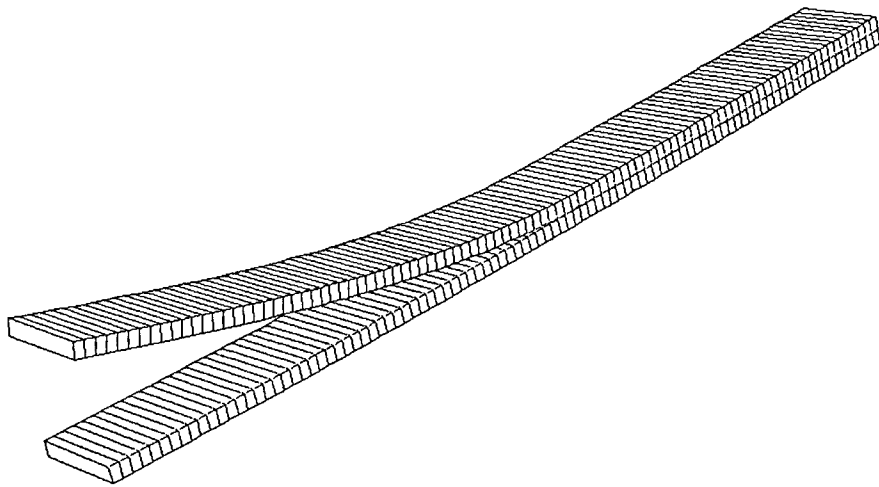


Figura 5-4: Modelo de elementos finitos do provete MMB.

mentais (v_{LP}), e tem a validade restringida a $a < l$.

5.1.4 Caso estudado

É simulado um provete com propriedades típicas de um compósito carbono/PEEK, com a geometria e propriedades mecânicas que constam da tabela 5.1.

O provete é simulado recorrendo a 200 elementos sólidos de oito nós e a 100 elementos de interface. É utilizado um elemento apenas ao longo da largura b do provete. A espessura h do provete é modelada recorrendo a 2 elementos. Ao longo do comprimento, existem 100 elementos de tamanho uniforme. A malha do modelo de elementos finitos pode ser observado na figura 5-4.

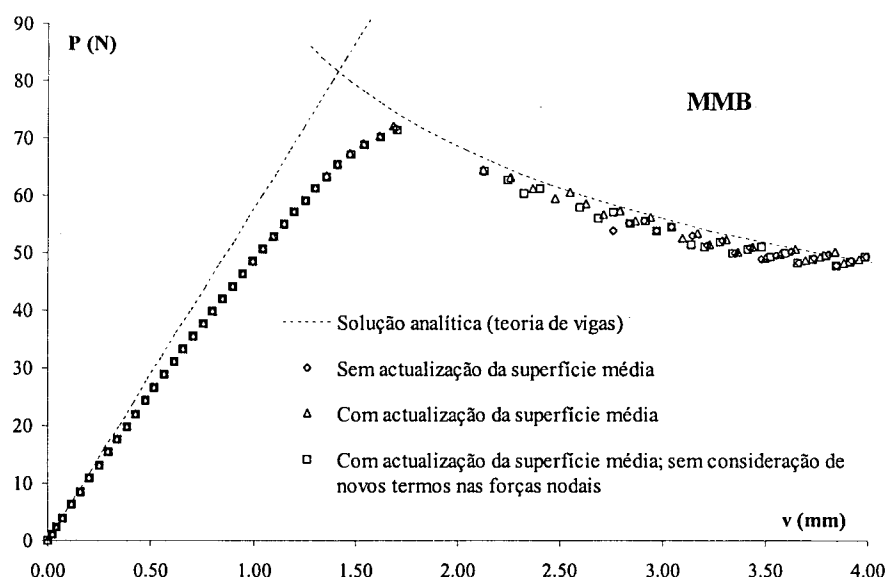


Figura 5-5: Comparação de diferentes modelos de elementos finitos com a solução analítica (teoria de vigas) do ensaio MMB.

Na figura 5-5, é representada a curva da carga aplicada (P) *versus* deslocamento na extremidade superior esquerda do provete (v). Conforme pode ser observado, os resultados numéricos concordam bem com os analíticos. Por outro lado, pode-se concluir que, para este caso em que não existem grandes rotações, existe uma boa concordância entre as análises *com* e *sem* actualização da superfície média. É de salientar que a rotação que aqui se refere como sendo pequena é a rotação na zona coesiva. De facto, as rotações na extremidade do provete chegam aos 6.5° (para $v = 4\text{mm}$). No entanto, apenas junto à extremidade da fissura (*zona de processo*), onde os elementos de descoesão estão em processo de abertura ou fechados, é que é relevante qual é a orientação da superfície média do elemento (ou do provete MMB). Também se torna evidente que o termo adicional que traduz o efeito que a actualização da superfície média provoca na expressão das forças nodais é desprezável.

No que diz respeito à capacidade de convergência, a figura 5-6 evidencia o número de iterações que cada modelo necessitou (i.e., número de iterações acumuladas desde o início do carregamento) até atingir uma determinada *carga cor-*

rente. (Entende-se aqui por *carga corrente* a variável usualmente designada nas análises não lineares por *tempo* em análises com forças impostas, e que representa o quociente entre o valor da força num dado momento e o valor para o qual a análise deve parar. É pois uma medida da fase do ensaio em que o provete se encontra.) Na figura 5-6, LG corresponde a "Linear Geométrico" e NLG corresponde a "Não Linear Geométrico" (i.e. com actualização da superfície média). Comparando os dois modelos não linear geométricos, verifica-se que, antes do ponto correspondente à carga máxima, o número de iterações é similar. Quando se ultrapassa esse ponto, o modelo simplificado converge num menor número de iterações. No entanto, refira-se que Goyal (2002) conclui que obtém melhor convergência igualando a zero os termos da matriz de rigidez do elemento de descoação, durante a fase de propagação. De qualquer modo, pode-se concluir que a fase de propagação é uma fase caracterizada por uma acentuada dificuldade de convergência, quando comparada com a parte elástica; as diferenças entre os dois modelos não lineares na fase de propagação é de menor importância, quando comparada com a diferença que existe, para qualquer um deles, entre a fase elástica e a de propagação. No que diz respeito ao modelo linear geométrico, pode-se ver na figura 5-6 que o número de iterações de que necessitou até ao final do processo se encontra entre os dois casos anteriores. Finalmente, note-se que a comparação do número de iterações para os diferentes modelos contribui para caracterizar a sua robustez, no que se refere à capacidade de convergência. No entanto, as conclusões sobre o tempo de análise (tempo de CPU ou do utilizador) estão sujeitas a mais restrições. De facto, enquanto a duração de uma iteração com o modelo linear geométrico ou com o não linear simplificado é semelhante, a duração de cada iteração no terceiro modelo é consideravelmente maior.

5.2 Comparação com resultados experimentais

Uma das principais vantagens do ensaio MMB consiste no facto de que o provete a utilizar é o mesmo que é utilizado nos ensaios DCB, e o grau de participação

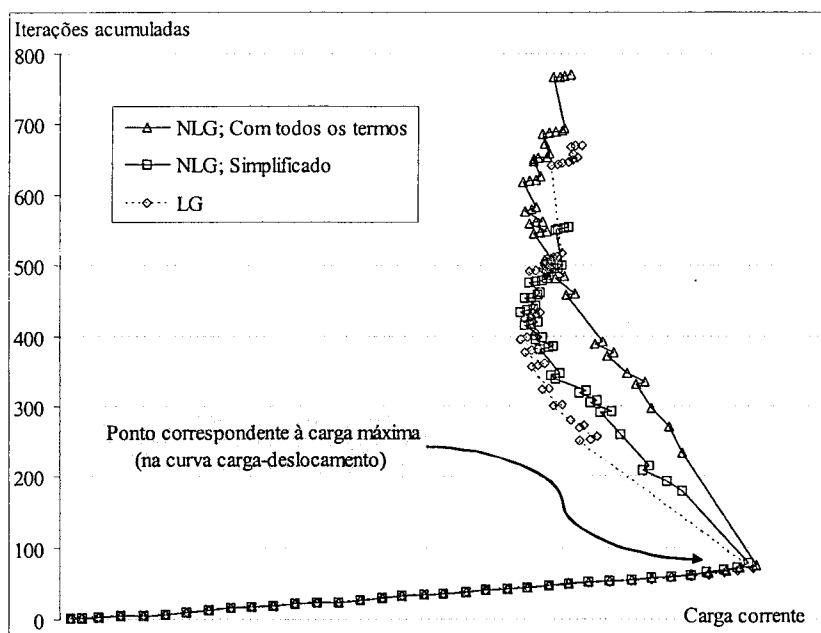


Figura 5-6: Capacidade de convergência de diferentes modelos.

Tabela 5.2: Propriedades mecânicas do provete de carbono APC2/PEEK.

E_{11}	$E_{22} = E_{33}$	$G_{12} = G_{13}$	G_{23}	$\nu_{12} = \nu_{13}$
122.7 GPa	10.1 GPa	5.5 GPa	3.7 GPa	0.25
ν_{23}	G_{IC}	G_{IIC}	T	S
0.45	0.969 kJ/m ²	1.719 kJ/m ²	80 MPa	100 MPa

de cada um dos modos pode ser variado facilmente, alterando o comprimento c (rever a figura 5-1). O elemento de descoesão, na sua formulação de 8 nós, é utilizado para simular ensaios DCB, ENF e MMB, com provetes feitos do material compósito carbono AS4/PEEK (tabela 5.2). Os provetes testados e simulados têm 102 mm de comprimento, 25.4 mm de largura, e com espessura igual a 2×1.56 mm. Para a penalidade, é utilizado o valor $K = 10^6$ N/mm³.

Os ensaios experimentais foram efectuados para diferentes valores da relação G_{II}/G_T , variando portanto do Modo I puro ao Modo II puro. O comprimento inicial da fissura pré-existente nos provetes (a_0) e as Taxas Críticas de Libertação de Energia em Modo Misto, obtidas experimentalmente, constam da tabela 5.3.

Tabela 5.3: Parâmetros experimentais (Camanho, 2002).

G_{II}/G_T	0% (DCB)	20%	50%	80%	100% (ENF)
G_C (kJ/m ²)	0.969	1.103	1.131	1.376	1.719
a_o (mm)	32.9	33.7	34.1	31.4	39.3

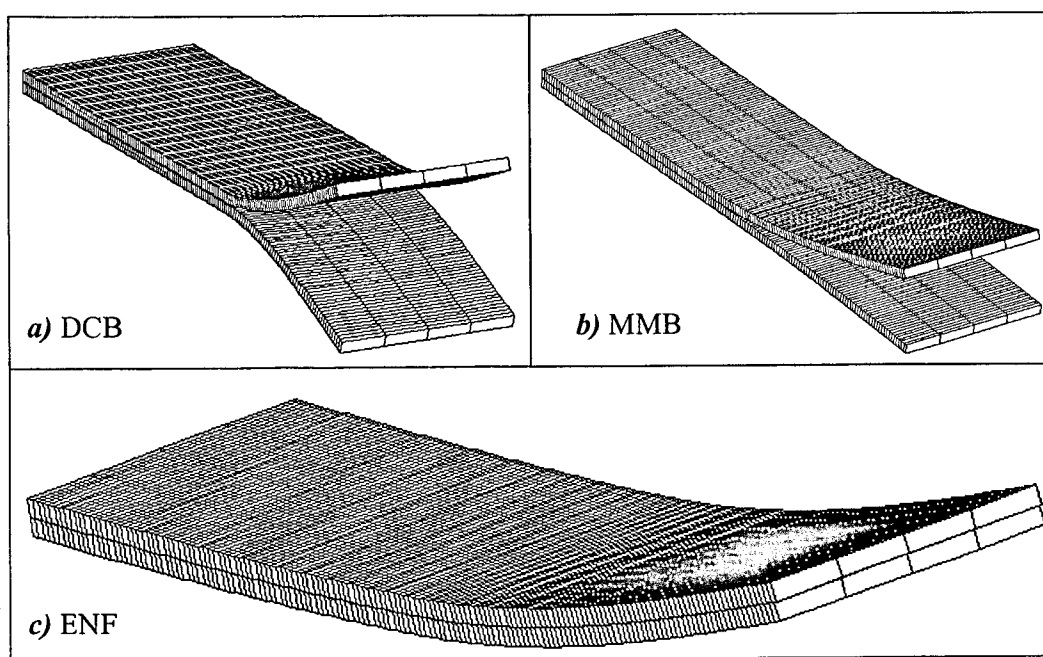


Figura 5-7: Malhas (deformadas) dos modelos de elementos finitos correspondentes aos ensaios DCB, MMB e ENF.

Os modelos utilizados para os provetes ENF e MMB utilizam 150 elementos de descoesão de 8 nós ao longo do comprimento do provete e 4 elementos de descoesão ao longo da largura. A delaminação inicial é simulada utilizando elementos de descoesão abertos, evitando-se assim a interpenetração que resultaria nos ensaios ENF e MMB. A malha do modelo do provete DCB é um pouco menos refinada, contando apenas com 102 elementos de descoesão ao longo do comprimento. As malhas dos modelos podem ser observadas na figura 5-7.

Tabela 5.4: Comprimentos de alavanca c .

G_{II}/G_T	20%	50%	80%
c (analítico, mm)	109.4	44.4	28.4
c (experimental, mm)	97.4	42.2	27.6

Tabela 5.5: Relação entre P_M e P_E para diferentes graus de participação dos modos.

G_{II}/G_T	20%	50%	80%
P_M/P_E	1.46	2.14	2.79

5.2.1 Aplicação de diferentes quocientes G_{II}/G_T

Os diferentes quocientes G_{II}/G_T são conseguidos variando as cargas aplicadas no centro e no meio do provete. A partir da equação 5.14, pode-se escrever que

$$c = \frac{l \left(\frac{1}{2} \sqrt{3 \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)} + 1 \right)}{3 - \frac{1}{2} \sqrt{3 \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)}}. \quad (5.20)$$

Para cada grau de participação dos Modos, o comprimento c obtido pela equação 5.20 é comparado com aquele que foi utilizado na prática, na tabela 5.4. A partir das equações 5.4, 5.5 e 5.20, pode-se concluir que a relação entre a carga a meio vão e a carga na extremidade deve ser

$$\frac{P_M}{P_E} = 8 \frac{6\kappa + \sqrt{3\kappa(1-\kappa)}}{3 + 9\kappa + 8\sqrt{3\kappa(1-\kappa)}}. \quad (5.21)$$

A relação entre a carga a meio vão e na extremidade para os diferentes graus de participação dos modos pode ser obtida utilizando a equação 5.21, e é apresentada na tabela 5.5.

Os resultados experimentais obtidos são apresentados na figura 5-8. A utilização do método dos mínimos quadrados para determinar o parâmetro experimental η do critério B-K permite obter $\eta = 0.63$ (Camanho, 2002).

A figura 5-9 e a tabela 5.6 mostram os resultados obtidos numericamente utilizando o elemento de descoesão **sem** e **com** não linearidade geométrica, bem como a respectiva comparação com os resultados experimentais. De notar que,

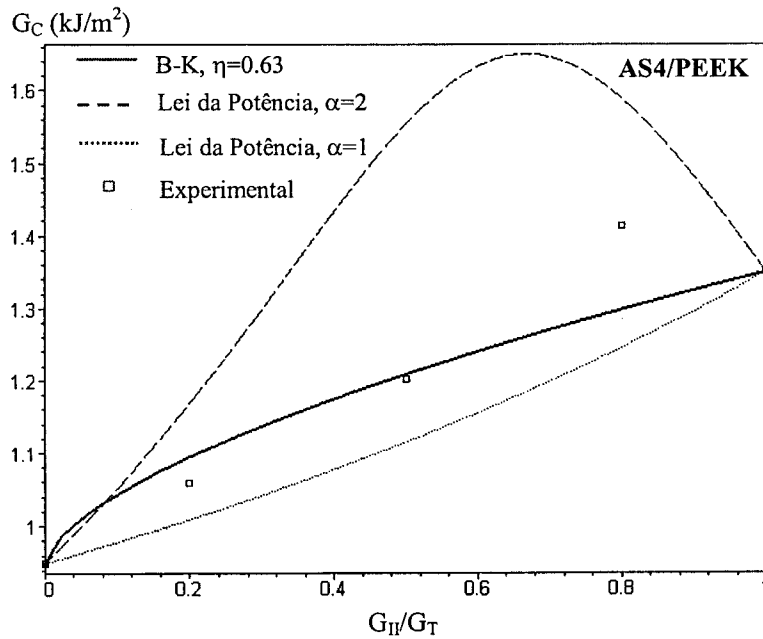


Figura 5-8: Taxa de libertação de energia em Modo Misto (AS4/PEEK). Fonte: Camanho (2002).

no caso em que não se calculam as parcelas da matriz tangente e das forças nodais que se provou (no capítulo 3) poderem ser desprezadas, a actualização da superfície média não aumenta significativamente o tempo de cálculo.

Tabela 5.6: Valores experimentais e numéricos das cargas máximas.

G_{II}/G_T	$P_{\max}$ (N) experimental	$P_{\max}$ (N) numérico, s/ act. (LG)	erro (%) act. (LG)	$P_{\max}$ (N) numérico, c/ act. (NLG)	erro (%) act. (NLG)
0% (DCB)	147.11	153.27	4.2	151.29	2.8
20%	108.09	86.95	-19.6	99.95	-7.5
50%	275.35	236.60	-14.1	245.87	-10.7
80%	518.66	479.86	-7.5	469.15	-9.6
100% (ENF)	733.96	695.94	-5.2	696.98	-5.0

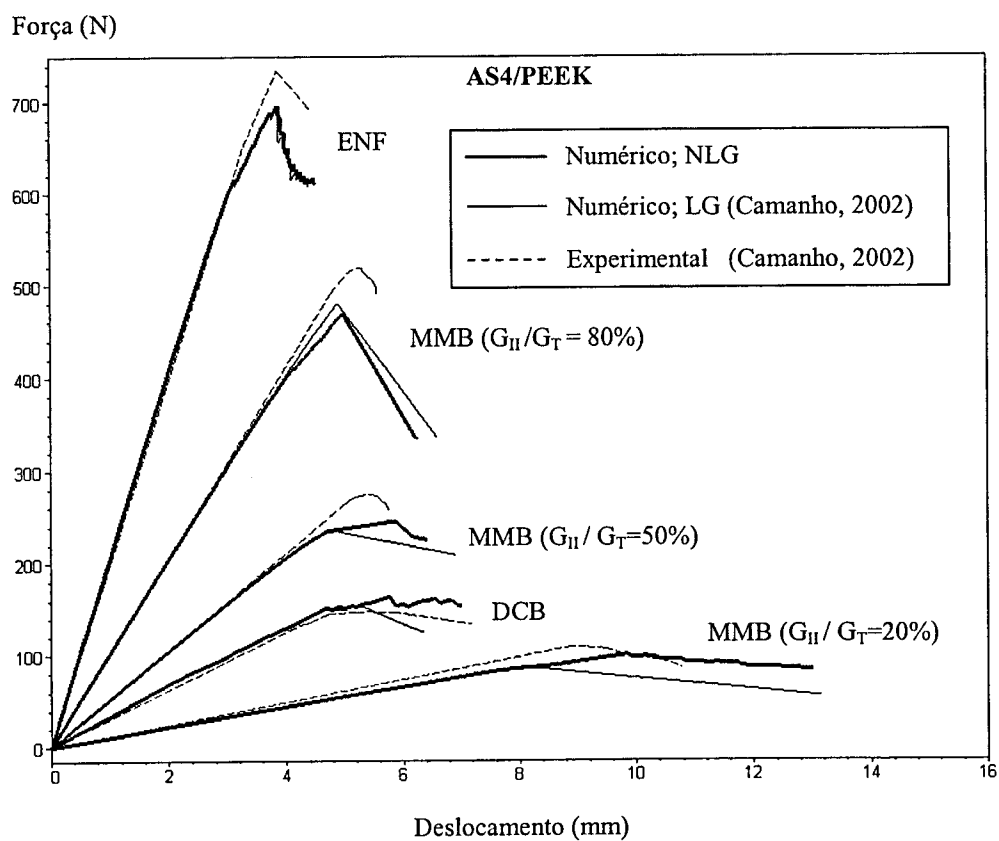


Figura 5-9: Valores experimentais e numéricos das cargas máximas. (NLG↔ Não Linear Geométrico; LG↔ Linear Geométrico.)

Capítulo 6

Simulação do esmagamento de tubos em materiais compósitos

Neste capítulo, são modelados cinco casos de esmagamento de estruturas tubulares simples. Esses casos correspondem a ensaios experimentais e/ou simulações numéricas cujos resultados se encontram publicados na literatura. As modelações efectuadas neste capítulo fazem uso dos elementos de descoesão já apresentados para modelar as delaminagens principais e a fissuração axial das paredes, bem como de modelos de dano intralaminares apropriados (também já apresentados). Apesar de existirem numerosos trabalhos experimentais que visam caracterizar o esmagamento de tubos em materiais compósitos, são relativamente poucos os estudos numéricos sobre o assunto. No que diz respeito aos trabalhos experimentais, geralmente não existe uma caracterização exaustiva das propriedades mecânicas envolvidas. Em particular, raramente é atribuída importância à tenacidade do compósito, mais especificamente às Taxas Críticas de Libertação de Energia (G_{IC} , G_{IIC}) (Tay, 1998). No entanto, a Taxa Crítica de Libertação de Energia é um parâmetro essencial na modelação do esmagamento de um componente em material compósito. Isto é verdade porque a dissipação de energia por progressão de fissuras - seja a microfissuração da matriz ou a fissuração completa das paredes finas de estruturas (eventualmente tubulares), passando pela delaminação entre camadas diferentemente orientadas é responsável por grande parte da energia

Tabela 6.1: Dimensões características dos tubos cilíndricos testados por Hamada (1995) segundo Tay (1998).

Diâmetro médio, $\bar{D}$ (mm)	Espessura da parede, t_p (mm)
55	2.66

absorvida e condiciona o processo como o esmagamento progride. Nos exemplos que se seguem, nem sempre se encontram na literatura os valores de todas as propriedades mecânicas relevantes, nomeadamente a Taxa Crítica de Libertação de Energia. Nesses casos, são tomados valores típicos para os materiais em causa.

6.1 Compósito Carbono/PEEK - fibras longas

Tay (1998), utilizando um trabalho experimental realizado por Hamada *et al.* (Hamada, 1995), procurou estabelecer uma comparação entre as diferentes metodologias utilizadas para a simulação do esmagamento de tubos em materiais compósitos. Assim, comparou os resultados obtidos através da utilização de:

- (i) Modelos implícitos com não linearidade geométrica e
 - (i.1) elementos tridimensionais
 - (i.2) elementos axissimétricos.
- (ii) Modelos explícitos com não linearidade geométrica e
 - (ii.1) elementos tridimensionais
 - (ii.2) elementos axissimétricos.

O trabalho experimental realizado por Hamada *et al.* (1995) consistiu no esmagamento de tubos cilíndricos. O material utilizado foi um compósito de fibra de carbono/PEEK (AS4/APC-2) com 20 camadas, estando as fibras alinhadas com o eixo do cilindro. O diâmetro médio do tubo é 55 mm e a espessura da parede é 2.66 mm. O mecanismo de iniciação utilizado foi um chanfro de 45° numa extremidade. O esmagamento foi realizado em condições quase-estáticas com uma velocidade de esmagamento de 1mm/min. As propriedades mecânicas e geométricas do tubo encontram-se nas tabelas 6.1 e 6.2. Na figura 6-1, pode ser vista a curva carga deslocamento obtida por Hamada *et al.* (Hamada, 1995).

Tabela 6.2: Propriedades elásticas do material carbono/PEEK (AS4/APC-2), utilizado por Hamada (1995).

E_{11} (GPa)	$E_{22} = E_{33}$ (GPa)	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	G_{23} (GPa)
139	10	0.26	0.03	4.5	1.3

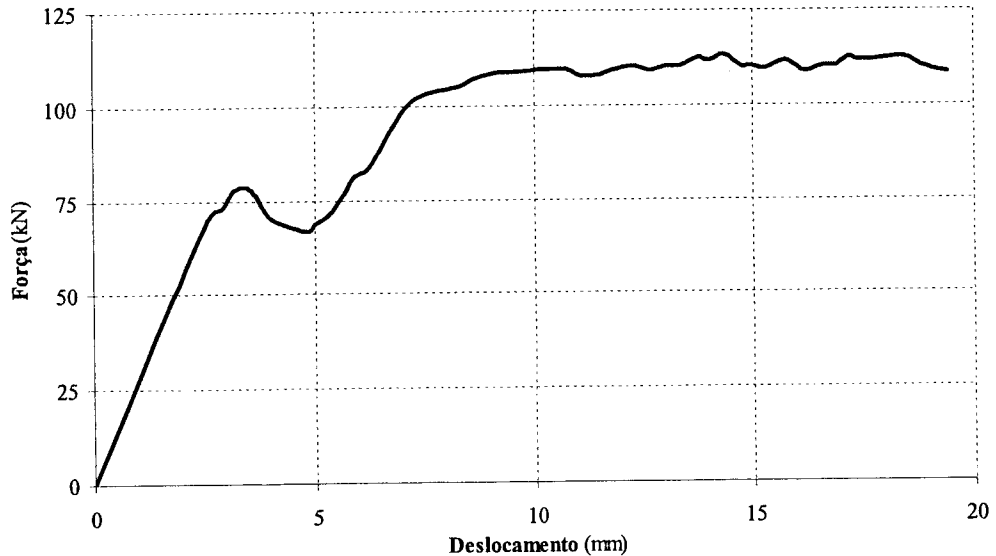


Figura 6-1: Curva carga / deslocamento para um tubo em material compósito carbono/PEEK, com vinte camadas (Hamada, 1995; Tay, 1998)

6.1.1 Elementos tridimensionais, análise implícita

Na sua análise, Tay (1998) aproveitou o conhecimento experimental (Hamada, 1995) de que o tubo fendia em doze porções aproximadamente iguais. Essas porções (pétalas), transmitem a carga da superfície actuante para o tubo e estão sujeitas essencialmente a esforços de flexão. Tirando partido da simetria, Tay (1998) simulou apenas um dozeavos do tubo. A superfície actuante foi modelada como uma superfície rígida. Para iniciar a abertura da delaminação principal¹ Tay (1998) definiu uma pequena cunha de 90° na superfície actuante. Foram consideradas condições de fronteiras invariáveis ao longo do processo de esmagamento, não se simulando então o crescimento da fenda que corresponde à aber-

¹Designa-se aqui por delaminação principal aquela que divide a parede do tubo em duas partes.

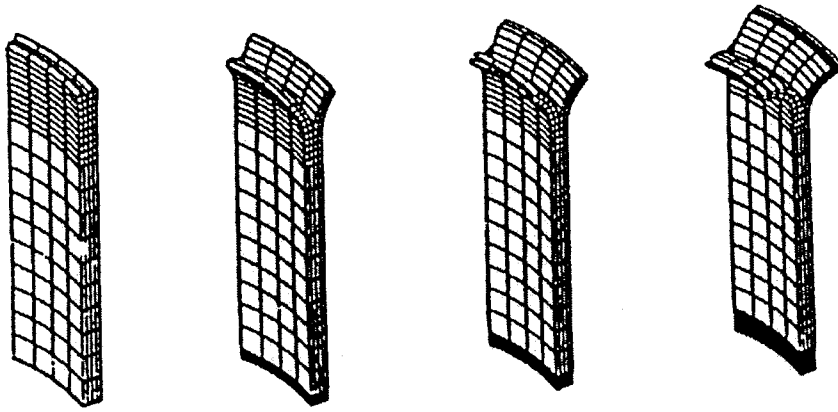


Figura 6-2: Malha e deformada de um modelo de elementos finitos tridimensional implícito (Tay, 1998).

tura progressiva das pétalas. Foram então definidas superfícies de contacto entre a superfície rígida e a parte superior do cilindro, bem como entre as diferentes camadas. Por razões de esforço computacional, Tay (1998) apenas modelou quatro camadas de elementos paralelepípedicos de vinte nós (Figura 6-2). Os nós em contacto de camadas consecutivas foram ligados entre eles na fase inicial do esmagamento. Tal implica (Tay, 1998) que um par de nós típico tem os mesmos graus de liberdade nessa fase. Uma força limite de tracção e de corte foi definida para cada par de nós. Uma vez atingida uma dessas forças, os nós eram separados. O valor dessas forças foi relacionado por Tay (1998) com as dimensões dos elementos utilizados e com as tensões de rotura à tracção e ao corte do compósito (Tay (1998) considerou $X_t = 100$ MPa e $S_\sigma = 70$ MPa). O atrito não foi considerado. Nesta análise, Tay (1998) não faz qualquer referência à forma como o dano nas camadas foi simulado, nem se o foi.

6.1.2 Elementos axissimétricos, análise implícita

Tay (1998) considerou que uma análise semelhante à anterior, em que não se simula a fissuração axial, não necessita de ser feita com elementos tridimensionais. Sendo o estado de tensão em cada pétala próximo do estado axissimétrico,

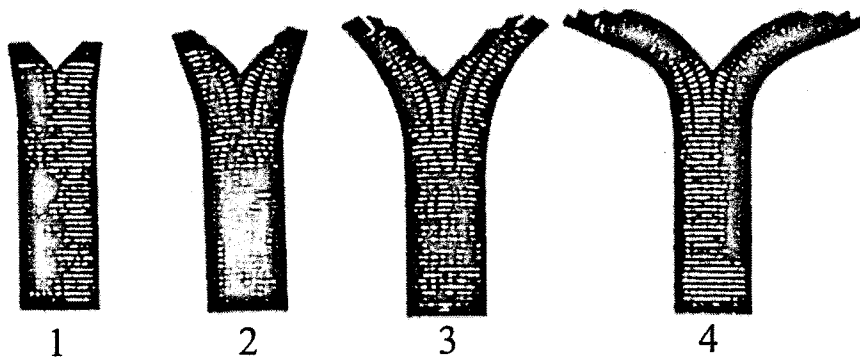


Figura 6-3: Malha e deformada de um modelo axissimétrico implícito, em que são modeladas 8 sub-pétalas com 3 elementos ao longo da espessura de cada uma (Tay, 1998).

Tay (1998) criou um modelo baseado em elementos axissimétricos. Estes têm a vantagem evidente de exigirem um esforço computacional menor. No entanto, Tay (1998) refere que a utilização de elementos axissimétricos leva a esforços circunferenciais muito grandes. Tay (1998) sugere então que uma simulação mais fidedigna resultará da consideração de que, quando as tensões de rotura do material são excedidas, a rigidez deste é diminuída, considerando-se ter havido rotura. Tay (1998) refere que a escolha do valor da redução na rigidez deve ser feita com particular cuidado de modo a evitar problemas numéricos. Refere ainda que o modelo não foi capaz de convergir para reduções de rigidez superiores a 50%. O modelo de elementos finitos (figura 6-3) continha 24 elementos ao longo da espessura. Tay (1998) experimentou diferentes combinações. Em primeiro lugar, simulou a separação da parede em quatro sub-pétalas (ao longo da espessura), sendo que cada sub-pétala tinha seis elementos ao longo da espessura. Foram também simuladas a formação de seis sub-pétalas (com quatro elementos ao longo da espessura) e de oito sub-pétalas (com três camadas ao longo da espessura). Tay (1998) conclui que os resultados obtidos não variam muito com o número de sub-pétalas simuladas, e que não parece haver motivação para a simulação da cada sub-pétala individualmente.

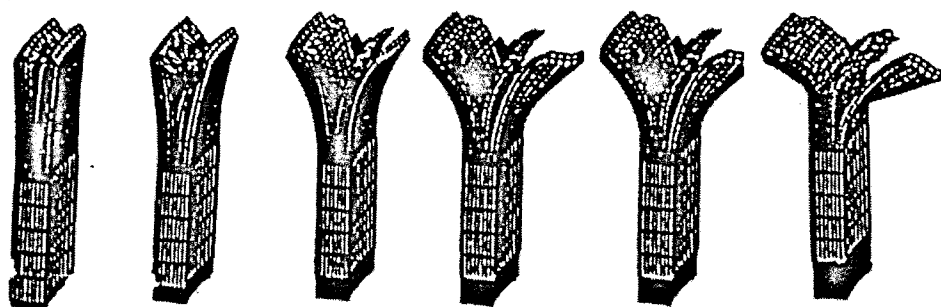


Figura 6-4: Malha e deformada de um modelo tridimensional explícito, com quatro pétalas e um elemento ao longo da espessura de cada pétala (Tay, 1998).

6.1.3 Elementos tridimensionais, análise explícita

Tay (1998) criou também um modelo com elementos paralelepípedos de oito nós. Foi modelada a fissuração da parede em quatro partes (sub-pétalas), com dois elementos ao longo da espessura de cada sub-pétala (figura 6-4). O modelo foi analisado recorrendo ao ABAQUS Explicit (análise explícita). Também não é feita qualquer referência ao modelo de dano eventualmente utilizado.

6.1.4 Elementos axissimétricos, análise explícita

Tay (1998) analisou ainda um modelo explícito com elementos axissimétricos. O modelo era constituído por quatro pétalas, sendo cada pétala constituída por quatro elementos ao longo da espessura. Não é feita nenhuma referência ao modelo de dano utilizado.

6.1.5 Resultados obtidos por Tay (1998)

Os resultados obtidos por Tay (1998) encontram-se representados na figura 6-5, onde são confrontados com a curva experimental de Hamada (1995).

Verifica-se, por parte dos diferentes modelos propostos por Tay, uma sobreavaliação da rigidez inicial do compósito. À primeira vista, tal pode parecer extremamente grosseiro. No entanto, Tay (1998) simulou o esmagamento de um tubo com apenas cerca de 40 mm de comprimento. Os seus resultados

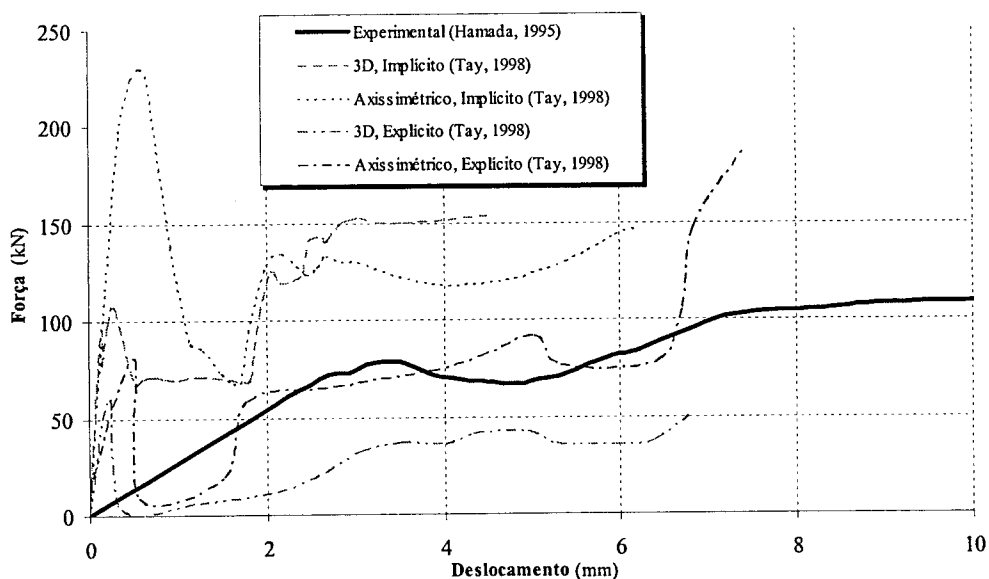


Figura 6-5: Resultados obtidos por Tay (1998) utilizando diferentes metodologias na simulação do esmagamento de tubos em material compósito. Para facilitar a visualização, as altas frequências dos resultados correspondentes aos modelos explícitos foram filtradas. Comparação com os resultados experimentais obtidos por Hamada (1995).

não incluem portanto, no deslocamento, a parte correspondente a uma eventual compressão/encurvadura da parede. Por outro lado, e mais importante, não se pode pretender que modelos como os apresentados por Tay simulem toda a sequência de processos transitórios que ocorrem desde o início do carregamento e até se atingir uma situação de esmagamento "estacionária". A sequência referida encontra-se esquematizada na figura 6-6. Não parece razoável pretendermos que um único modelo implícito de elementos finitos consiga "atravessar" toda a fase de iniciação, em que a geometria do problema se altera completamente, e produza depois bons resultados na fase de propagação estável. Prestando atenção às malhas de Tay (ver figuras 6-2, 6-3 e 6-4), percebemos que foi claramente sua opção ignorar a fase de iniciação e modelar apenas (i.e. atingir) a fase de esmagamento estável. A razão de ser deste procedimento deve-se essencialmente ao facto de que um dos principais interesses deste tipo de simulações tem a ver com a previsão da força estável de esmagamento. Na realidade, é nessa fase que grande parte da

Tabela 6.3: Síntese dos resultados obtidos por Tay (1998).

Caso	Carga média pós-esmagamento $\bar{P}$ (kN)	Erro
Experimental (Hamada, 1995)	110.7	—
Modelo 3D implícito (Tay, 1998)	149.5	35.1%
Modelo Axissimétrico implícito (Tay, 1998)	129.6	17.1%
Modelo 3D explícito (Tay, 1998)	40.3	−63.6%
Modelo axissimétrico explícito (Tay, 1998)	não existe um valor estabilizado	—

energia é absorvida.

Assim, a tabela 6.3 sintetiza quantitativamente os resultados obtidos por Tay, no que se refere à previsão da força estável de esmagamento.

6.1.6 Resultados obtidos pelo modelo proposto

Os modelos propostos destinam-se à modelação do caso ensaiado por Hamada *et al.* (Hamada, 1995) e mais tarde simulado por Tay (1998). No entanto, os modelos possíveis para simular o ensaio de Hamada *et al.* (Hamada, 1995) dividem-se em dois conjuntos: o primeiro, que visa simular as condições de propagação estável do esmagamento; e o segundo, que visa prever eventuais picos de forças durante a iniciação. Pela sua relevância em termos de absorção de energia, o modelo desenvolvido neste trabalho vai debruçar-se sobre a propagação estável do esmagamento. Algumas propriedades mecânicas, necessárias para a utilização dos modelos propostos, não são no entanto fornecidas por Hamada *et al.* (Hamada, 1995) nem utilizadas por Tay (1998). Assim, para esses casos, foram utilizadas as propriedades típicas do material em causa, conforme as tabelas 6.4 e 6.5. De notar que se trata do mesmo material já utilizado no ensaio MMB, no capítulo anterior.

Foi desenvolvido um modelo tridimensional em que se pretende simular a abertura do cilindro em várias pétalas e abertura da parede a meio, bem como o dano nas camadas (rotura da matriz por tracção /compressão, fractura das fibras por tracção e microencurvadura das mesmas). Utilizando a informação ex-

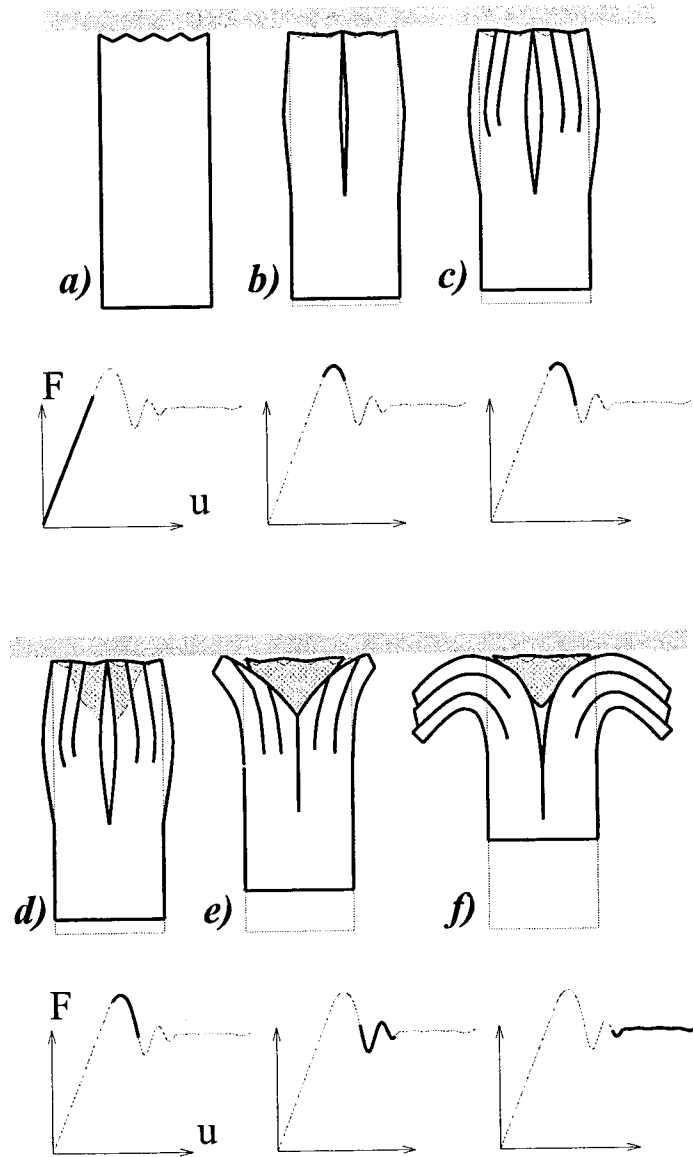


Figura 6-6: Ilustração da sequência de efeitos transitórios durante a iniciação do esmagamento. Podem distinguir-se, por ordem (da esquerda para a direita e de cima para baixo): a) a parte elástica; b) e c) a formação de delaminagens na parede; d) e e) o esmagamento/corte da parte central da parede e consequente formação de uma cunha de detritos e f) progressão estável da zona de esmagamento.

Tabela 6.4: Tensões de rotura do material carbono/PEEK (AS4/APC-2), baseado em Camanho (2002).

X_t	X_c	Y_t	Y_c	S_{12}	$Z_{t/c} = S_{13} = S_{23}$
(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
2070	2070	90	160	115	90

Tabela 6.5: Propriedades da interface do material carbono/PEEK (AS4/APC-2), baseado em Camanho (2002).

Propriedades da interface		
K	(N/mm ³)	1E6
G_{IC}	(N/mm)	0.28
G_{IIC}	(N/mm)	1.42
τ_I^u	(N/mm ²)	30
T	(N/mm ²)	40

perimental de que o cilindro se divide em doze pétalas aproximadamente iguais, apenas foi modelado um dozeavos do cilindro, correspondente a metade de duas pétalas adjacentes (ver figura 6-7). Na fronteira entre as duas pétalas que se prevê que se venham a formar, são colocados elementos de descoesão, de modo a se poder simular a sua formação e crescimento. Entre a metade interior e exterior da parede são também colocados elementos de descoesão, de modo a que a progressão da delaminação principal possa ser simulada. Por outro lado, é utilizado um modelo de dano nas camadas que aplica o critério de Hashin, conforme descrito no capítulo 4. No que diz respeito à geometria, o modelo inclui já a cunha de detritos que resulta da fase de iniciação, bem como a curvatura das camadas correspondente. Neste exemplo, foram utilizados 2 elementos sólidos de 27 nós ao longo da espessura da parede, e 2 elementos do mesmo tipo ao longo da profundidade de cada meia pétala. Ao longo da altura, o modelo tem um total de 20 elementos. A figura 6-7 representa essa malha bem como a superfície actuadora, na configuração não deformada. A malha contém 160 elementos sólidos de 27 nós e 50 elementos de descoesão de 18 nós (exceptuando a superfície rígida).

O modelo fica completo definindo as condições de fronteira e o carregamento. No que diz respeito às condições de fronteira, a base do cilindro foi fixa e foram aplicadas condições de simetria apropriadas à parte central de cada pétala. (A

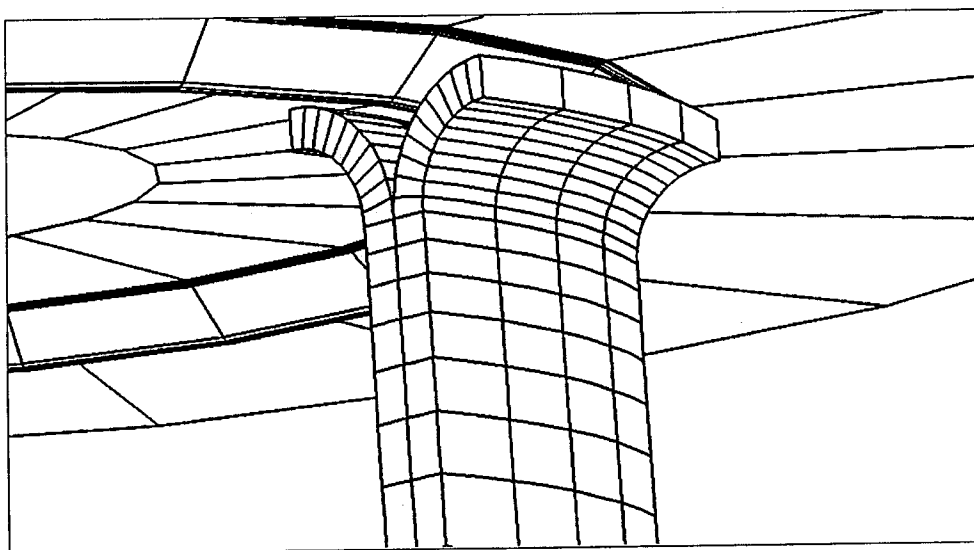


Figura 6-7: Malha de elementos finitos para simular o ensaio realizado por Hamada (1995).

parte central de cada pétala, correspondem duas extremidades (dois planos) na malha de elementos finitos. A cada nó contido em cada um desses planos, foi aplicada uma condição de simetria relativamente a esse plano.) Em relação ao carregamento, foi imposto um deslocamento vertical descendente da superfície vertical (definida como uma superfície rígida). A figura 6-8 permite observar a evolução da deformada com o tempo.

Durante a deformação, para além da propagação de fissuras, também existe nucleação e propagação de dano nas camadas. A figura 6-9 mostra, para um dado instante, a distribuição dos diferentes tipos de dano nas camadas.

Os gráficos das figuras 6-10 e 6-11 bem como a tabela 6.6 ilustram a relação carga deslocamento obtida. No primeiro gráfico (figura 6-10), são comparados os resultados obtidos por Tay (1998) e pelo modelo presente com a Força Média Pós-Esmagamento² obtida por Hamada (1995). No modelo presente, são considerados dois comprimentos diferentes para o tubo ($l_t = 40$ mm e $l_t = 100$ mm).

²A Força Média Pós-Esmagamento, neste caso e também nos que se seguem, é calculada como sendo a força média a partir do ponto onde a curva carga-deslocamento estabiliza. Inevitavelmente, existe alguma subjectividade associada à determinação desse ponto.

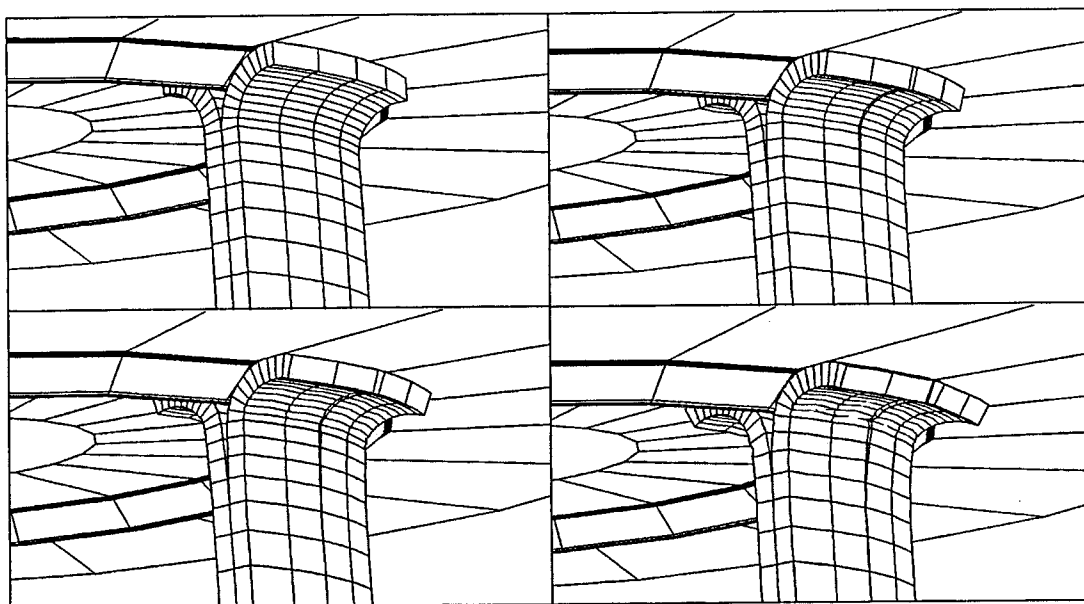


Figura 6-8: Evolução da deformada. É possível identificar a formação (abertura) das pétalas, bem como a progressão da delaminação principal.

Pode concluir-se que o valor da Força Média Pós-Esmagamento não é alterada pelo comprimento do tubo modelado. No segundo gráfico (figura 6-11), a penalidade³ foi alterada de $K = 1\text{E}6 \text{ N/mm}^3$ para $K = 1\text{E}5 \text{ N/mm}^3$ e $K = 1\text{E}4 \text{ N/mm}^3$. É de salientar que a alteração do valor da penalidade não altera o valor da energia absorvida pelo elemento de descoesão e que esta é determinada pelas Taxas Críticas de Libertação de Energia. Por outro lado, comprova-se que esta redução é benéfica para convergência do processo numérico.

Conclui-se que a previsão do valor da Força Média Pós-Esmagamento é muito boa, pese embora o facto de não se conseguir convergência no regime "estacionário" durante um intervalo de deslocamento tão grande quanto seria desejável.

³Parâmetro K relativo aos elementos de descoesão que relaciona o afastamento entre pontos homólogos com as tracções existentes, no regime elástico.

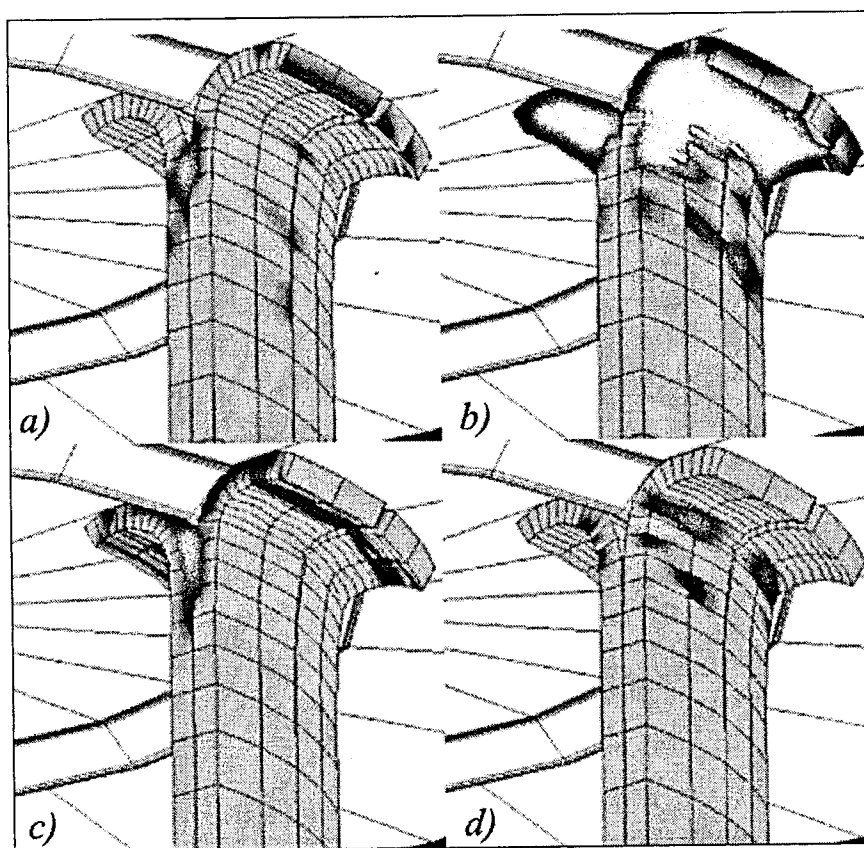


Figura 6-9: Visualização dos diferentes tipos de dano (zonas mais escuras) durante o esmagamento. Da esquerda para a direita e de cima para baixo: a) fissuração da matriz à tracção; b) fissuração da matriz à compressão; c) fractura das fibras à tracção e d) fractura das fibras à compressão.

6.2 Compósito Vidro/Polyester - fibras curtas

Mamalis (1998) desenvolveu um vasto trabalho experimental no esmagamento de tubos cilíndricos. O material utilizado foi um compósito de fibra de vidro/polyester. O reforço de fibra de vidro é constituído por *chopped strand mat* com fibras de $9\ \mu\text{m}$ de diâmetro, comprimento de 50 mm, com orientação aleatória e massa por unidade de superfície $0.8\ \text{g}/\text{mm}^2$. Os tubos foram fabricados por *hand lay-up* (deposição manual), enrolando a manta de fibra de vidro num mandril de madeira em rotação, enquanto eram impregnados com resina polyester. O compósito resultante ficou com 72% de fracção mássica de fibra de vidro, e massa volúmica de $1.37\ \text{g}/\text{cm}^3$.

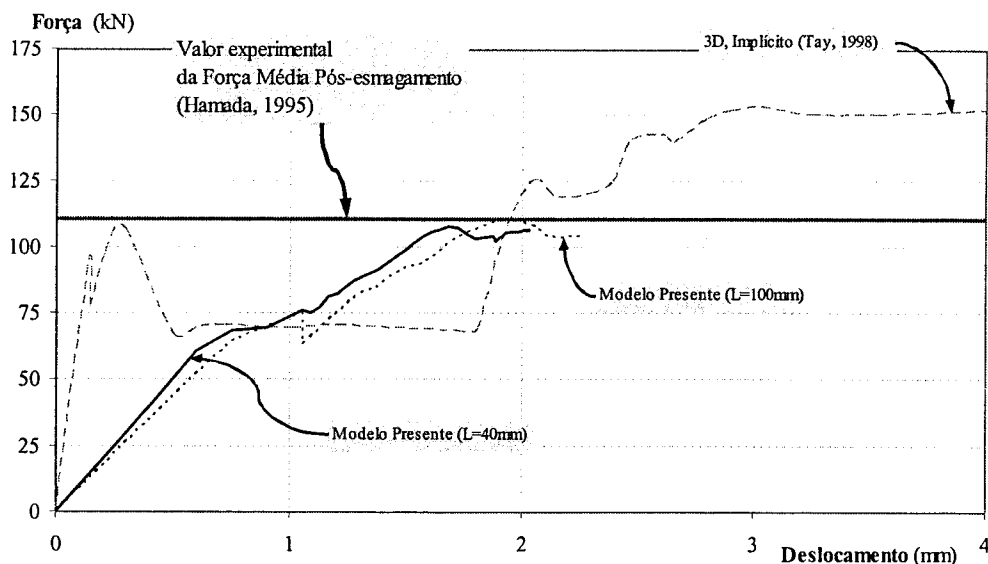


Figura 6-10: Curva carga deslocamento obtida para a simulação da progressão do esmagamento de um tubo. O tubo foi inicialmente ensaiado por Hamada (1995) e a simulação do esmagamento foi posteriormente também efectuada por Tay (1998).

Tabela 6.6: Resultados numéricos obtidos e comparação com (Hamada, 1995) e (Tay, 1998).

Caso	Carga média pós-esmagamento $\bar{P}$ (kN)	Erro
Experimental (Hamada, 1995)	110.7	—
Modelo 3D implícito (Tay, 1998)	149.5	35.1%
Modelo Presente		
($l_t = 40$ mm; $K = 1E6$ N/mm ³)	104.6	-5.5%
Modelo Presente		
($l_t = 100$ mm; $K = 1E6$ N/mm ³)	103.9	-6.1%
Modelo Presente		
($l_t = 40$ mm; $K = 1E5$ N/mm ³)	109.1	-1.4%
Modelo Presente		
($l_t = 40$ mm; $K = 1E4$ N/mm ³)	117.6	6.2%

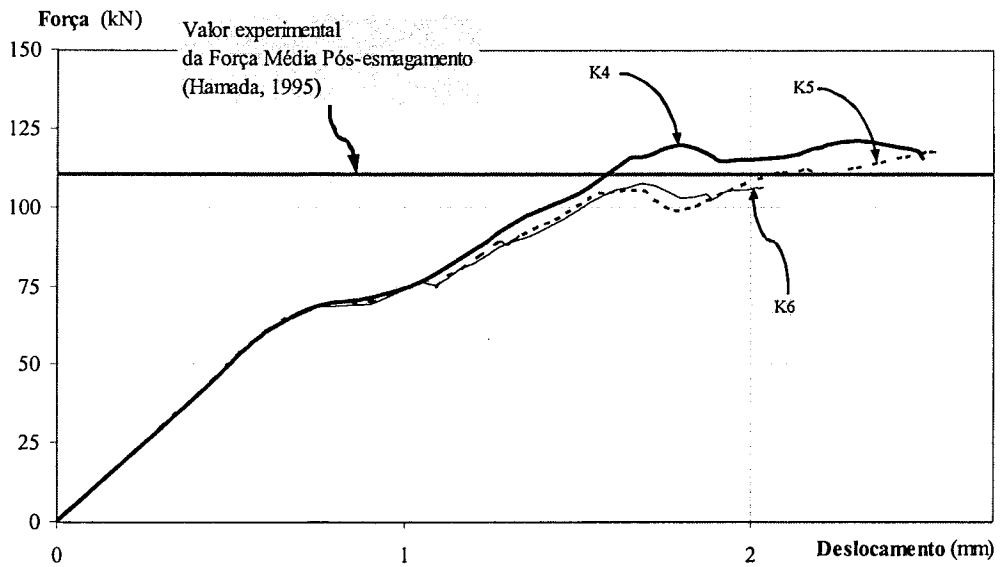


Figura 6-11: Influência do valor da penalidade no valor da força média pós-esmagamento obtida e na capacidade de convergência do modelo (comparação com o valor experimental de Hamada (1995)). $K4 \leftrightarrow K = 1E4 \text{ N/mm}^3$; $K5 \leftrightarrow K = 1E5 \text{ N/mm}^3$; $K6 \leftrightarrow K = 1E6 \text{ N/mm}^3$.

Na tabela 6.7 indicam-se as dimensões de três provetes diferentes, enquanto na tabela 6.8 é indicada a Carga Média Pós-Esmagamento (*mean post-crushing load*) para os mesmos provetes. A forma da curva carga-deslocamento para o provete 1 pode ser observada na figura 6-12.

Mamalis (1998) não faz nenhuma referência a um eventual mecanismo de iniciação. Por outro lado, o pico de forças na fase inicial do esmagamento (figura 6-12) sugere que não tenha havido nenhum. O esmagamento foi realizado em

Tabela 6.7: Dimensões características dos tubos cilíndricos testados por Mamalis (1998).

Proвете tipo	1	2	3
Nº. de camadas	3	4	5
Espessura t_p (mm)	3.4	4.4	5.7
Comprimento l_t (mm)	102.3	107.3	106.0
Diâmetro médio D (mm)	55.0	57.0	61.2
t_p/D	0.059	0.078	0.093
l_t/D	1.81	1.82	1.73

Tabela 6.8: Resultados dos ensaios realizados por Mamalis (1998).

Provete nº	Carga Média Pós-Esmagamento $\bar{P}$ (kN)
1	33.5
2	41.6
3	62.4

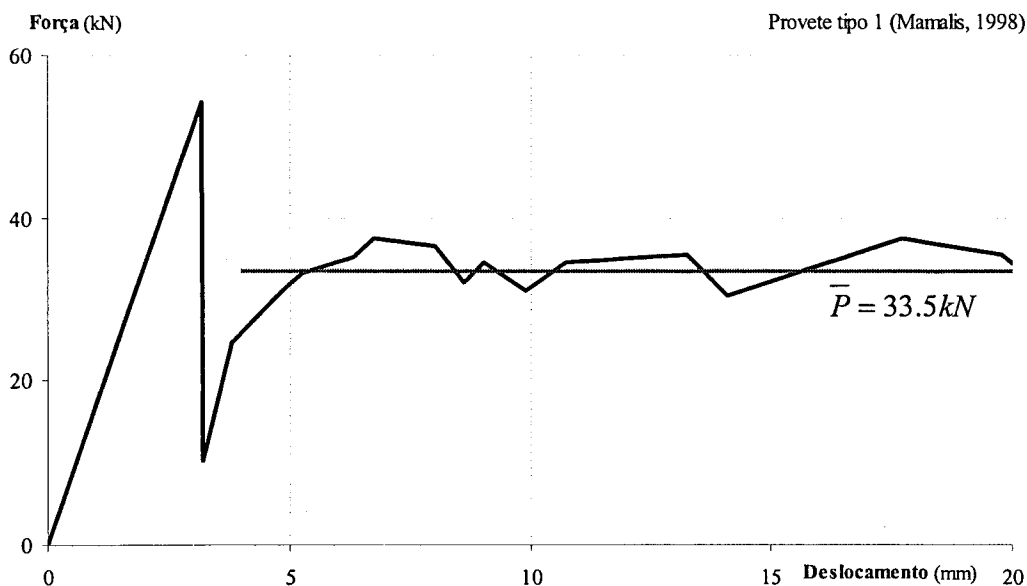


Figura 6-12: Curva experimental obtida por Mamalis (1998) para o Provete tipo 1, de fibra de vidro / polyester, numa solicitação quase estática.

condições quase-estáticas com uma velocidade de esmagamento de 10 mm/min. O material foi ainda testado à tracção por Mamalis (1998), tendo-se registado a curva da figura 6-13. Com base nessa curva, podem ser inferidos o módulo de elasticidade bem como a tensão de rotura à tracção, conforme indicado na tabela 6.9. Essa tabela (tabela 6.9) contém ainda o valor das Taxas Críticas de Libertação de Energia, fornecidas por Mamalis (1998) bem como o valor da penalidade utilizado.

As figuras 6-14 a) a f), registadas por Mamalis (1998), mostram a evolução do esmagamento, enquanto a figura 6-15 evidencia a forma da parede do tubo no regime de esmagamento "estacionário". Nas simulações efectuadas, foram

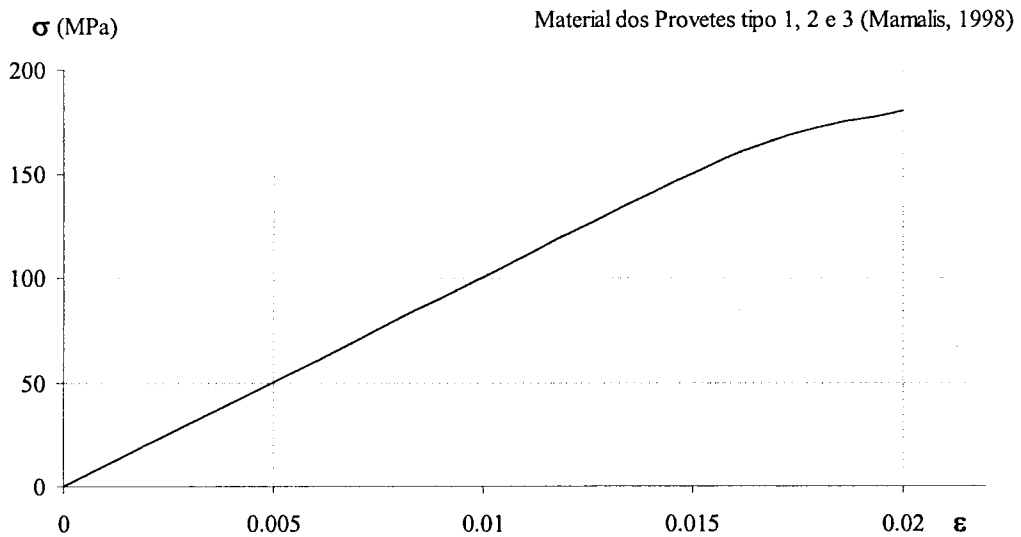


Figura 6-13: Curva tensão-deformação para o material dos provates tipo 1, 2 e 3 testados por Mamalis (1998).

Tabela 6.9: Propriedades mecânicas relativas ao material fibra de vidro/polyester, correspondentes aos Provates 1, 2 e 3 ensaiados por Mamalis (1998).

E (GPa)	X_t (MPa)	G_{IC} (kJ/m ²) (Delaminagem)	G_{IC} (kJ/m ²) (Parede)	K N/mm ³
9	180	0.11	0.2	1E6

considerados várias situações. Estas situações diferem

- (i) no critério de rotura, onde foram considerados o critério de **Mohr-Coulomb**, o critério das **Tensões Máximas** e o critério das **Deformações Máximas**; na realidade, não se tem à partida qualquer motivo para pensar que o comportamento do material em causa é melhor representado por qualquer delas relativamente às restantes;
- (ii) na influência do dano nas propriedades mecânicas, onde foram considerados valores de rigidez residual de 10% e de 15%; na realidade, também não dispomos de dados experimentais para conhecer a rigidez residual; no entanto, como é evidente e foi verificado por Tay (1998) e Jonhson (1999), existem limitações quanto à magnitude da redução de rigidez, por questões

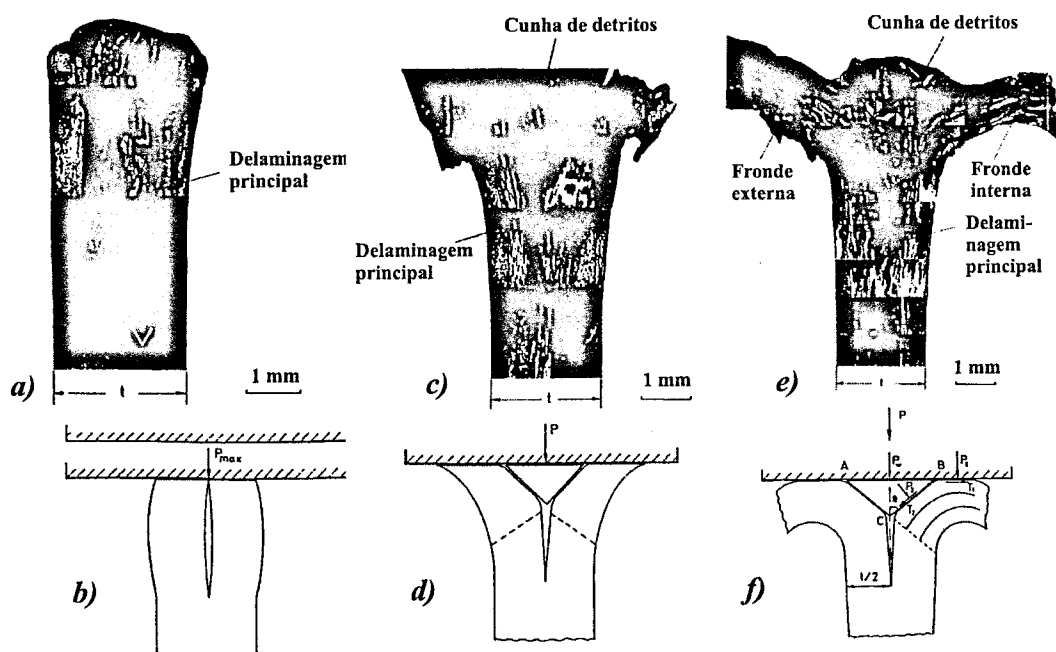


Figura 6-14: Foto-micrografias da secção AA (ver figura 6-15), ilustrando a sequência da evolução do esmagamento até se atingir o regime estacionário. Baseado em Mamalis (1998).

numéricas.

Conforme sugerido por Mamalis (1998), o material foi considerado isotrópico. Com base em valores típicos das propriedades para estes materiais, a tensão de rotura à compressão foi considerada dupla da tensão de rotura à tracção e o coeficiente de Poisson foi tomado como $\nu = 0.33$.

6.2.1 Provete tipo 1

O modelo numérico inclui já a cunha de detritos que resulta da fase de iniciação, bem como a curvatura das camadas correspondente. Neste exemplo, foram utilizados dois elementos sólidos de 27 nós ao longo da espessura da parede, e dois elementos do mesmo tipo ao longo da profundidade de cada meia pétala. Ao longo da altura, o modelo tem um total de 20 elementos. A figura 6-16 representa essa malha bem como a superfície actuadora na configuração não deformada. A

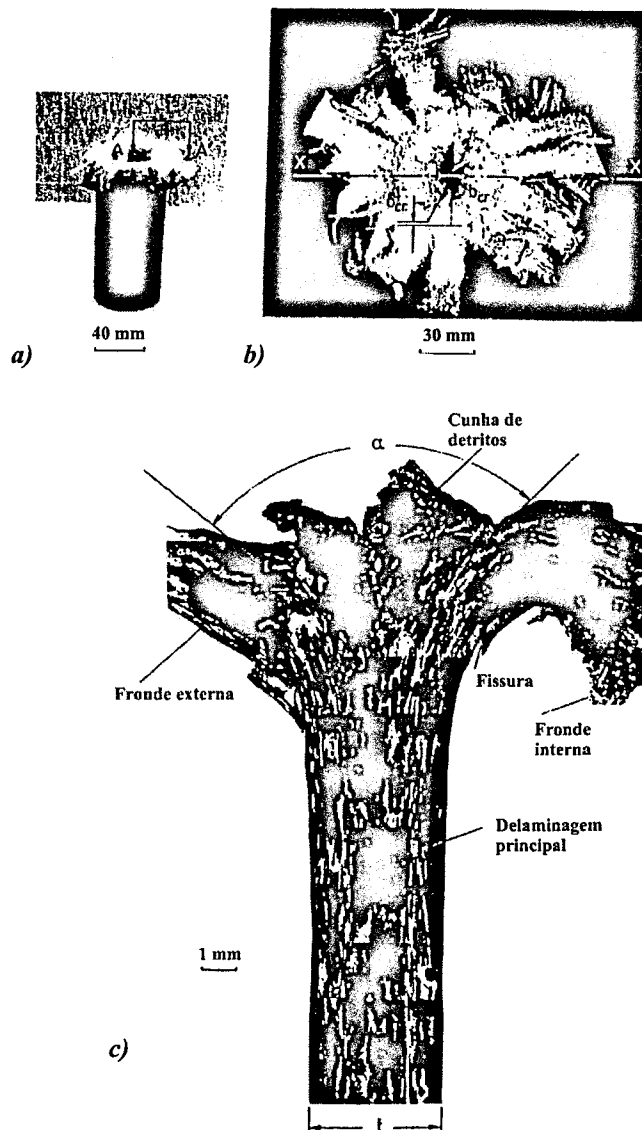


Figura 6-15: Tubo esmagado. Fotografias de (Mamalis, 1998). A parede do tubo fotografado é constituída por nove camadas, com uma espessura total de 2.3 mm. Do exterior para o interior, a sequência de empilhamento é $[(90/0/2R_c)/(2R_c/0/90)/R_{c-5}]$, onde a direcção 0° coincide com o eixo do tubo, R_c corresponde à "chopped strand mat" descrita no texto e R_{c-5} representa uma camada equivalente mas mais fina. Em a), podemos ver o aspecto do tubo esmagado visto de frente; em b), podemos observar o mesmo tubo, mas agora visto de cima; em c), é evidenciado um corte da parede (secção AA de a)) onde são apresentados diferentes mecanismos de dano presentes durante o processo de esmagamento.

malha contém 160 elementos sólidos de 27 nós e 50 elementos de descoesão de 18 nós (exceptuando a superfície rígida). São comparados três critérios de rotura diferentes: o critério de Mohr-Coulomb, o critério das Tensões Máximas e o critério das Deformações Máximas. O valor da rigidez residual, isto é, após se ter dado a rotura, foi considerada como sendo 10% da inicial. Para os critérios de Mohr-Coulomb e das Deformações Máximas, em que a convergência em regime "estacionário" foi relativamente limitada, foi considerado também o caso de uma rigidez residual de 15%. Na realidade, não existe nenhuma razão específica para esses valores em particular. A rigidez do material após se dar a rotura deveria, em rigor, ser obtida a partir de calibrações com resultados experimentais. No entanto, sabe-se que a rigidez após se dar a rotura é baixa, e por outro lado verifica-se que para uma rigidez residual inferior a 10% o modelo encontra graves dificuldades em convergir. Os resultados obtidos são apresentados na figura 6-17 e na tabela 6.10, onde "M-C" corresponde a "Critério de Mohr-Coulomb"; "T" corresponde a "Critério das Tensões Máximas"; "D" corresponde a "Critério das Deformações Máximas"; "10%" corresponde a "Rigidez Residual igual a 10% da Rigidez Inicial" e "15%" corresponde a "Rigidez Residual igual a 15% da Rigidez Inicial". Verifica-se que se conseguiu prever a Força Média Pós-Esmagamento com bastante rigor e que qualquer um dos três critérios considerados permitem, neste caso, obter resultados igualmente bons.

Tabela 6.10: Resultados numéricos obtidos e comparação com Mamalis (1998), para o Provete tipo 1.

Caso	Carga média pós-esmagamento, $\bar{P}$ (kN)	Erro
Experimental, Provete tipo 1 (Mamalis, 1998)	33.5	—
M-C, 10%	34.5	2.8%
M-C, 15%	36.1	7.7%
T, 10%	34.8	3.9%
D, 10%	29.3	-12.6%
D, 15%	31.6	-5.6%

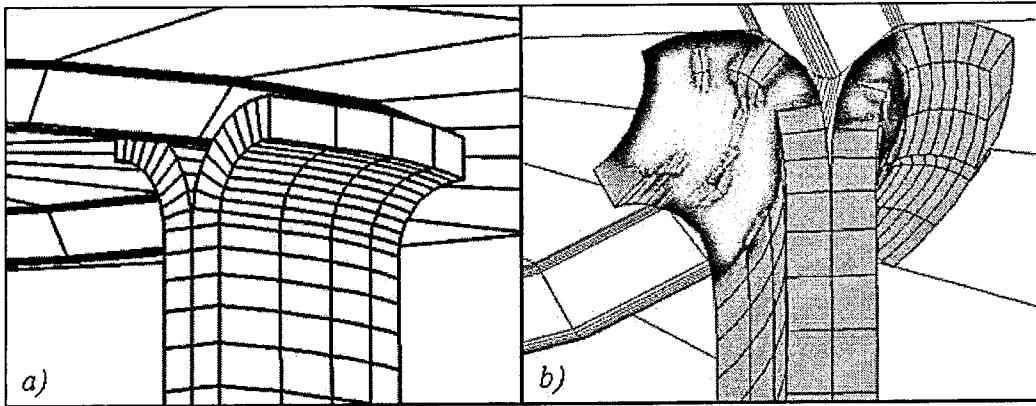


Figura 6-16: Em *a*), malha de elementos finitos utilizada para o Provete tipo 1 de Mamalis (1998). Em *b*), malha deformada, com visualização do dano (zonas mais escuras; critério de Mohr-Coulomb).

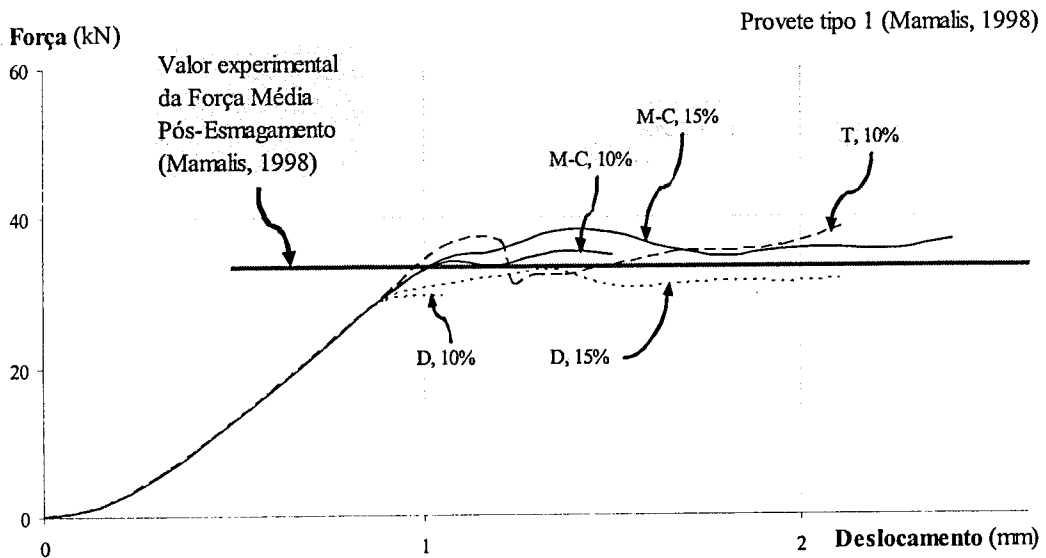


Figura 6-17: Comparação dos resultados obtidos por (Mamalis, 1998) para o Provete tipo 1 com os resultados numéricos presentes.

6.2.2 Provete tipo 2

O segundo tipo de provetes ensaiados por Mamalis (Mamalis, 1998) é o provete tipo 2. Este difere do provete tipo 1 no diâmetro e espessura (ver tabela 6.7). O modelo numérico para este caso inclui já a cunha de detritos que resulta da fase de iniciação, bem como a curvatura das camadas correspondente. Neste exemplo, foram utilizados dois elementos sólidos de 27 nós ao longo da espessura da parede, e dois elementos do mesmo tipo ao longo da profundidade de cada meia pétala. Ao longo da altura, o modelo tem um total de 20 elementos. A figura 6-18 representa essa malha bem como a superfície actuadora, na configuração não-deformada. A malha contém 160 elementos sólidos de 27 nós e 50 elementos de descoesão de 18 nós (exceptuando a superfície rígida). São também neste caso comparados os três critérios de rotura de Mohr-Coulomb, das Tensões Máximas e das Deformações Máximas. O valor da rigidez residual é considerado como sendo 10% da rigidez inicial. Para o critério de Mohr-Coulomb, a penalidade foi ainda alterada de $K = 1E6 \text{ N/mm}^3$ para $K = 1E5 \text{ N/mm}^3$, tendo-se verificado que a Força Média Pós-Esmagamento não vem com isso significativamente alterada. Note-se que a alteração do valor da penalidade não altera o valor da energia absorvida pelo elementos de descoesão, e que esta é determinada pelas Taxas Críticas de Libertação de Energia. Os resultados obtidos são apresentados na figura 6-19 e na tabela 6.11, onde "M-C" corresponde a "Critério de Mohr-Coulomb"; "T" corresponde a "Critério das Tensões Máximas"; "D" corresponde a "Critério das Deformações Máximas"; "K5" corresponde a " $K = 1E5 \text{ N/mm}^3$ "; "K6" corresponde a " $K = 1E6 \text{ N/mm}^3$ ". Os resultados obtidos não são neste caso tão bons quanto os anteriores, mas a Força Média Pós-Esmagamento continua a ser prevista com uma boa aproximação.

6.2.3 Provete tipo 3

O modelo numérico inclui já a cunha de detritos que resulta da fase de iniciação, bem como a curvatura das camadas correspondente. Neste exemplo, foram

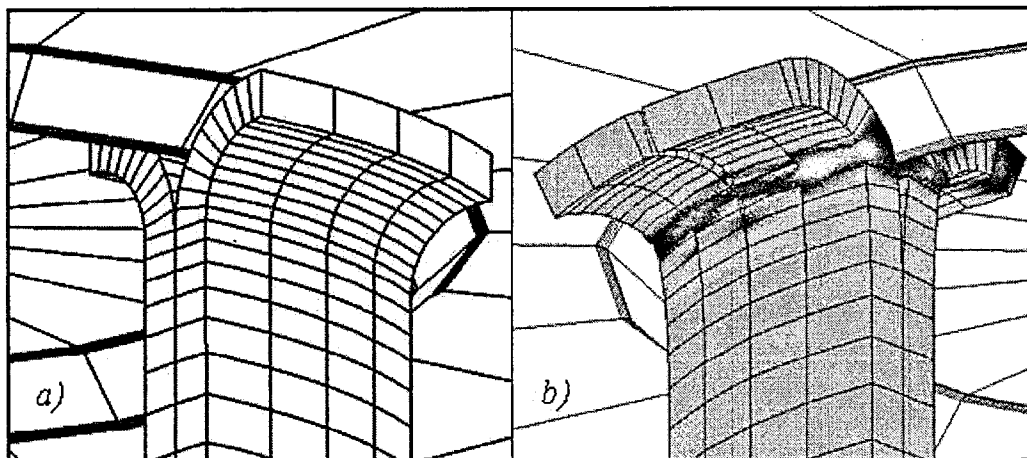


Figura 6-18: Em *a*), malha de elementos finitos utilizada para o Provete tipo 2 de Mamalis (1998). Em *b*), malha deformada, com visualização do dano (zonas mais escuras; critério de Mohr-Coulomb).

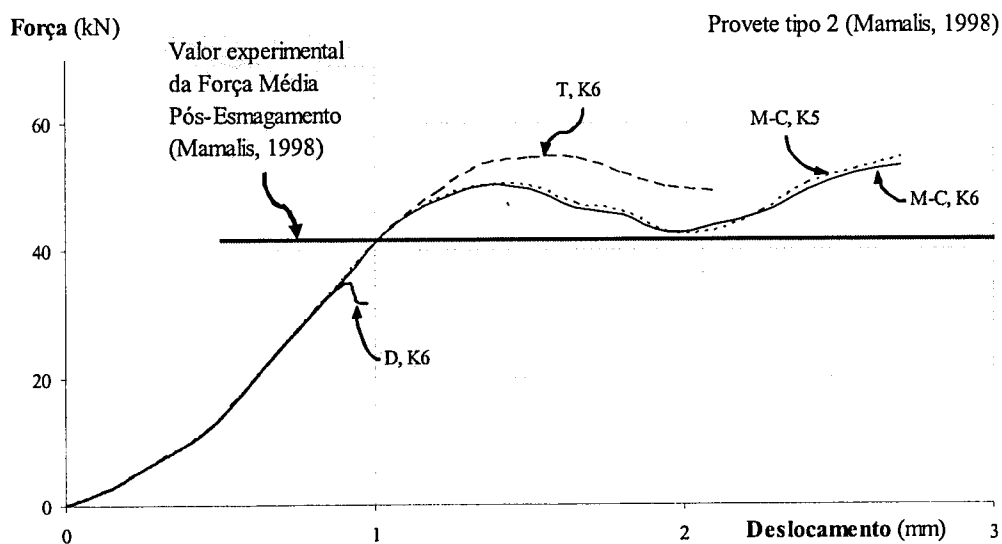


Figura 6-19: Comparação dos resultados obtidos por (Mamalis, 1998) para o Provete tipo 2 com os resultados numéricos presentes.

Tabela 6.11: Resultados numéricos obtidos e comparação com Mamalis (1998), para o Provete tipo 2.

Caso	Carga média pós-esmagamento, $\bar{P}$ (kN)	Erro
Experimental, Provete tipo 2 (Mamalis, 1998)	41.6	—
M-C, K5	48.2	15.9%
M-C, K6	47.8	15.0%
T, K6	52.0	24.9%
D, K6	32.8	-21.2%

utilizados dois elementos sólidos de 27 nós ao longo da espessura da parede, e dois elementos do mesmo tipo ao longo da profundidade de cada meia pétala. Ao longo da altura, o modelo tem um total de 20 elementos. A figura 6-20 representa essa malha bem como a superfície actuadora na configuração não deformada. A malha contém 120 elementos sólidos de 27 nós e 50 elementos de descoesão de 18 nós (exceptuando a superfície rígida). São também neste caso comparados os três critérios de rotura de Mohr-Coulomb, das Tensões Máximas e das Deformações Máximas. O valor da rigidez residual é considerado como sendo 10% da rigidez inicial. Foram considerados três valores de penalidade: $K = 1\text{E}6 \text{ N/mm}^3$, $K = 1\text{E}5 \text{ N/mm}^3$ e $K = 1\text{E}4 \text{ N/mm}^3$, tendo-se verificado que a Força Média Pós-Esmagamento não vem com isso significativamente alterada, ao contrário da capacidade de convergência que melhora com a diminuição da penalidade. Para o critério de Mohr-Coulomb, o valor das tracções limite para a fissuração longitudinal da parede foi ainda alterada para apenas 10 MPa, tendo-se verificado que a Força Média Pós-Esmagamento não vem com isso significativamente afectada. Note-se também aqui que a alteração do valor das tracções limite não altera o valor da energia absorvida pelo elemento de descoesão, já que esta é determinada pelas Taxas Críticas de Libertação de Energia. Verifica-se no entanto que a capacidade de convergência melhorou com a diminuição das tracções limite. Os resultados obtidos são apresentados na figura 6-21 e na tabela 6.12, onde "M-C" corresponde a "Critério de Mohr-Coulomb"; "T" corresponde a "Critério das Tensões Máximas"; "D" corresponde a "Critério das Deformações Máximas";

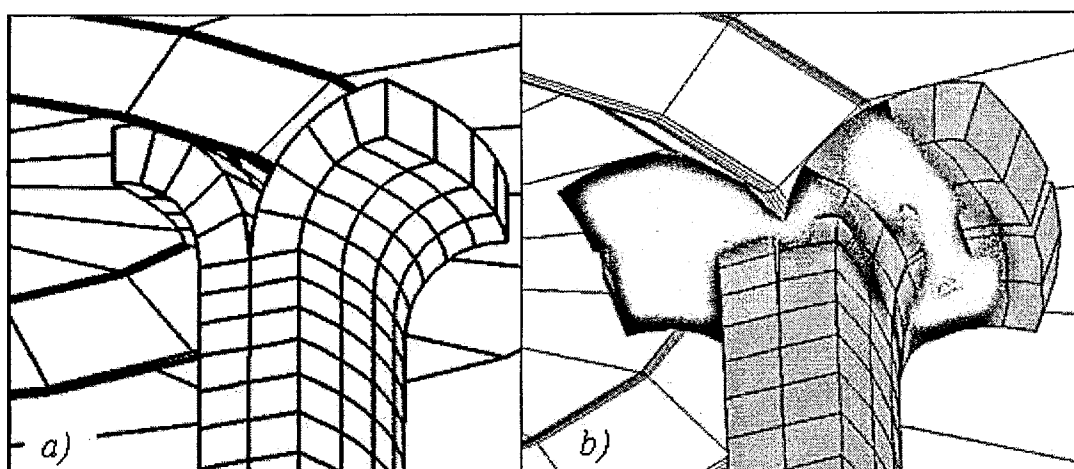


Figura 6-20: Em *a*), malha de elementos finitos utilizada para o Provete tipo 3 de Mamalis (1998). Em *b*), malha deformada, com visualização do dano (zonas mais escuras; critério das Deformações Máximas).

"K4" corresponde a " $K = 1E4 \text{ N/mm}^3$ "; "K5" corresponde a " $K = 1E5 \text{ N/mm}^3$ "; "K6" corresponde a " $K = 1E6 \text{ N/mm}^3$ " e "S10" corresponde a "Tracções Limite $S = T = N = 10 \text{ MPa}$ ". Os resultados obtidos neste caso parecem ser melhores para o critério de Mohr-Coulomb que para os critérios das Tensões Máximas e das Deformações Máximas.

Tabela 6.12: Resultados numéricos obtidos e comparação com Mamalis (1998), para o Provete tipo 3.

Caso	Carga média pós-esmagamento, $\bar{P}$ (kN)	Erro
Experim., Provete tipo 3 (Mamalis, 1998)	62.4	—
M-C, K4	66.3	6.2%
M-C, K5	66.9	7.3%
M-C, K6	64.6	3.5%
M-C, K6, S10	66.0	5.8%
T, K5	73.4	17.7%
T, K6	70.9	13.7%
D, K5	55.9	-10.5%
D, K6	56.1	-10.1%

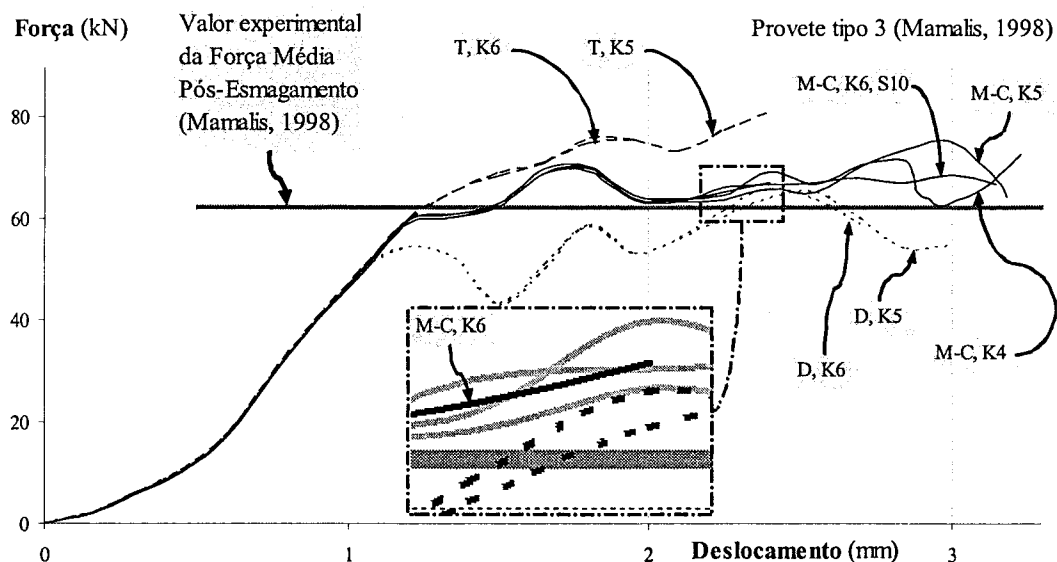


Figura 6-21: Comparação dos resultados obtidos por (Mamalis, 1998) para o Provet tipo 3 com os resultados numéricos presentes.

6.3 Compósito Vidro/Polyester - fibras longas

6.3.1 Ensaio experimental (Abdel-Haq, 1999)

Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999) efectuaram ensaios de esmagamento de tubos pultrudidos de fibra de vidro/polyester. As propriedades mecânicas, fornecidas pelo fabricante, constam da tabela 6.13. Abdel-Haq *et al.* não referem propriedades adicionais, como as Taxas Críticas de Libertação de Energia, e não referem a existência de quaisquer ensaios com vista à determinação do coeficiente de atrito entre o tubo compósito e o actuador. A figura 6-22 mostra a geometria do tubo e do actuador utilizados no ensaio. O comprimento do tubo testado é 204 mm, sendo o diâmetro interior 44 mm e a espessura da parede 3 mm. A superfície actuante tem uma geometria tal que o tubo é virado para fora. O raio de concordância da superfície actuadora é de 12 mm.

Conforme se pode ver na figura 6-23, o tubo abriu em seis pétalas aproximadamente iguais durante o esmagamento. A frágil aresta interior-superior foi parcialmente esmagada (figura 6-24), e, numa fase mais avançada do esmagamento,

Tabela 6.13: Propriedades mecânicas do material fibra de vidro / polyester utilizado por Abdel-Haq (1999).

Propriedade do material	Valor
X_t (MPa)	204
Y_t (MPa)	48
E_{1t} (GPa)	17
E_{2t} (GPa)	5.4
X_c (MPa)	204
Y_c (MPa)	102
E_{1c} (GPa)	17
E_{2c} (GPa)	6.8
S_{12} (MPa)	50
G_{12} (GPa)	2.9
ν	0.33
ρ (Kg/m ³)	1900

mento, a parede delaminou sensivelmente a meio (figura 6-25). A curva carga-deslocamento que Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999) obtiveram pode ser vista na figura 6-26.

6.3.2 Simulações anteriores

O ensaio experimental descrito foi mais tarde aproveitado por Bonora *et al.* (Bonora, 2000). No seu trabalho, Bonora *et al.* recorreram a elementos de casca e modelaram metade de duas pétalas adjacentes, tirando partido da simetria existente. A abertura das duas pétalas adjacentes foi conseguida recorrendo a elementos de mola interpostos criteriosamente entre os elementos de casca, no local de abertura da fissura. Cada elemento de mola foi calibrado com base no método da extensão virtual da fenda (*virtual crack extension method*) conforme proposto por Helen (1975). Bonora *et al.* referem que cada elemento de mola foi individualmente calibrado. A Taxa Crítica de Libertação de Energia (em Modo I, G_{IC}) foi artificialmente considerada crescente durante a progressão do esmagamento (ou da fissura), de modo a ajustar a curva carga-deslocamento obtida com a dos ensaios experimentais. A formação (iniciação) das fissuras foi simulada através de um critério de tensões. Quando o critério de iniciação é satisfeito, o

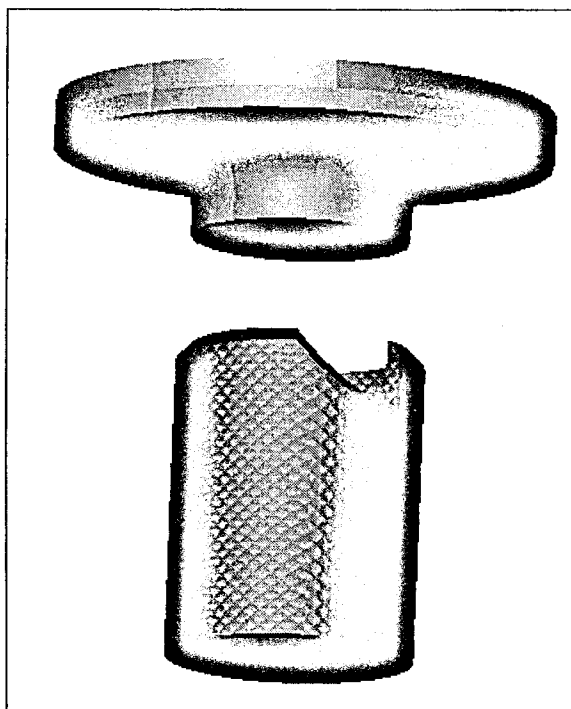


Figura 6-22: Representação da geometria do tubo e da superfície actuadora correspondentes ao ensaio efectuado por Abdel-Haq (1999). É utilizado um corte local na parte superior do tubo para evidenciar a secção.

modelo "remove" (num único incremento) alguns elementos junto à superfície do actuador, iniciando a fissuração. Bonora *et al.* referem que este procedimento acarreta problemas de estabilidade e convergência, já que a energia de deformação correspondente a esses elementos não é redistribuída. Embora sem os caracterizar completamente, Bonora *et al.* apresentam resultados para dois mecanismos de atrito diferentes. É concluído (Bonora, 2000) que o modelo formulado é capaz de reproduzir as principais características do tubo (deformada, distribuição de tensões) durante o esmagamento (ver figura 6-27 e comparar com a figura 6-23). As curvas carga-deslocamento obtidas encontram-se na figura 6-28.

6.3.3 Resultados obtidos pelo modelo proposto

No que diz respeito à validação de um modelo de simulação numérica do esmagamento de componentes em materiais compósitos, este caso é bastante interessante

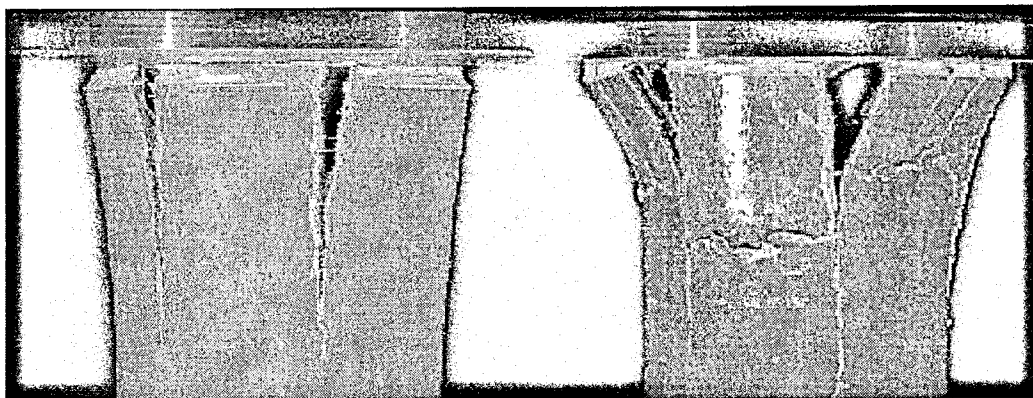


Figura 6-23: Fotografias do tubo testado por Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999), em diferentes fases do esmagamento. Fonte: (Bonora, 2000).

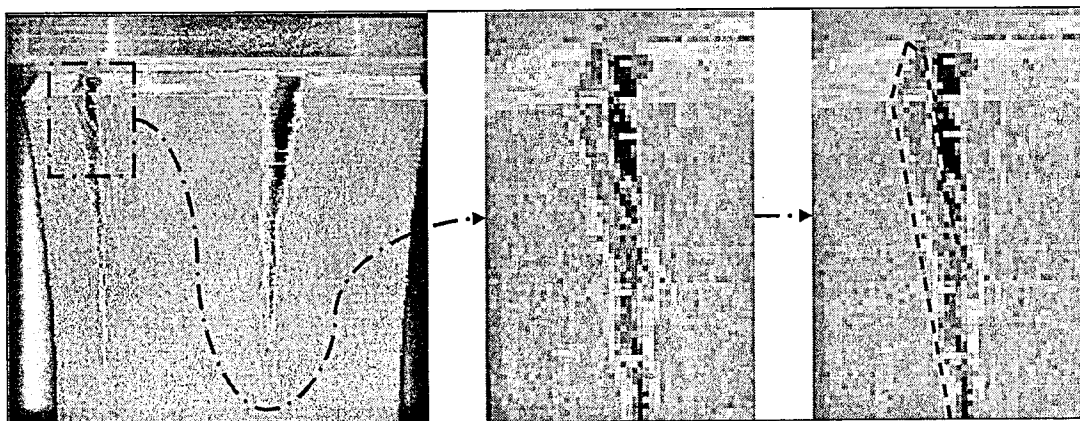


Figura 6-24: Pormenor do esmagamento da aresta interior-superior do tubo durante a fase inicial do esmagamento. Fotografia original de (Abdel-Haq, 1999).

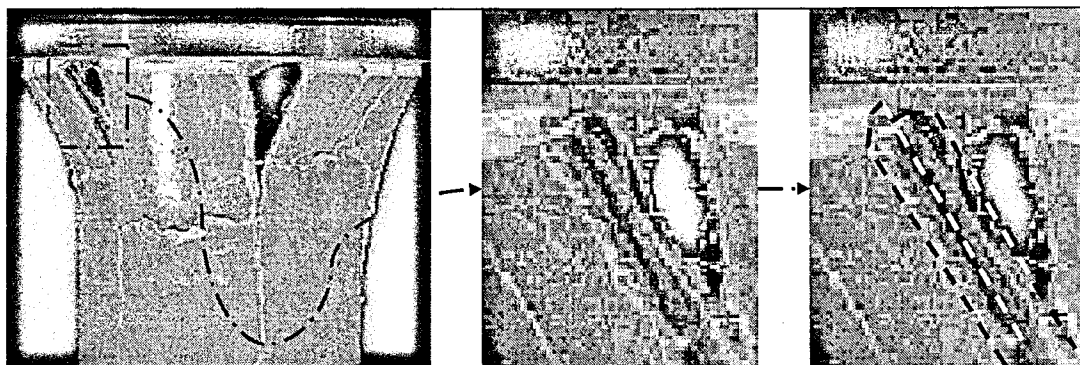


Figura 6-25: Pormenor da delaminação da parede durante o esmagamento. Fotografia original de (Abdel-Haq, 1999).

já que as alterações na morfologia do tubo na fase de iniciação são pequenas. Este facto permite simular com um único modelo de elementos finitos a progressão do esmagamento desde o início deste. A geometria do modelo de elementos finitos que construímos consiste num cilindro de 50 mm de comprimento, diâmetro e espessura conforme Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999). O mecanismo de iniciação utilizado é no entanto ligeiramente diferente, com o objectivo de contabilizar o esmagamento junto da aresta superior-interior do tubo na fase inicial do esmagamento (rever figura 6-24). Esse esmagamento da "frágil" aresta interior-superior não deve envolver, pelas suas reduzidas dimensões, a dissipação de grandes quantidades de energia; no entanto, o seu esmagamento seria numericamente muito complicado de modelar. A opção seguida consiste em considerar que a geometria do tubo é conforme a representada na figura 6-29.

Neste trabalho, foram criadas duas malhas de elementos finitos, diferindo no refinamento. A primeira, menos refinada, contém 104 elementos sólidos de 27 nós e 78 elementos de descoesão de 18 nós (excluindo a superfície rígida). Tirando partido da simetria, apenas se modelaram metade de duas pétalas adjacentes. Esta primeira malha pode ser vista na figura 6-29, numa versão não deformada, bem como nas figuras 6-30 e 6-31 numa versão deformada. A segunda malha, mais refinada, contém 368 elementos sólidos de 27 nós e 230 elementos de descoesão de 18 nós (excluindo a superfície rígida). Esta segunda malha pode ser vista na

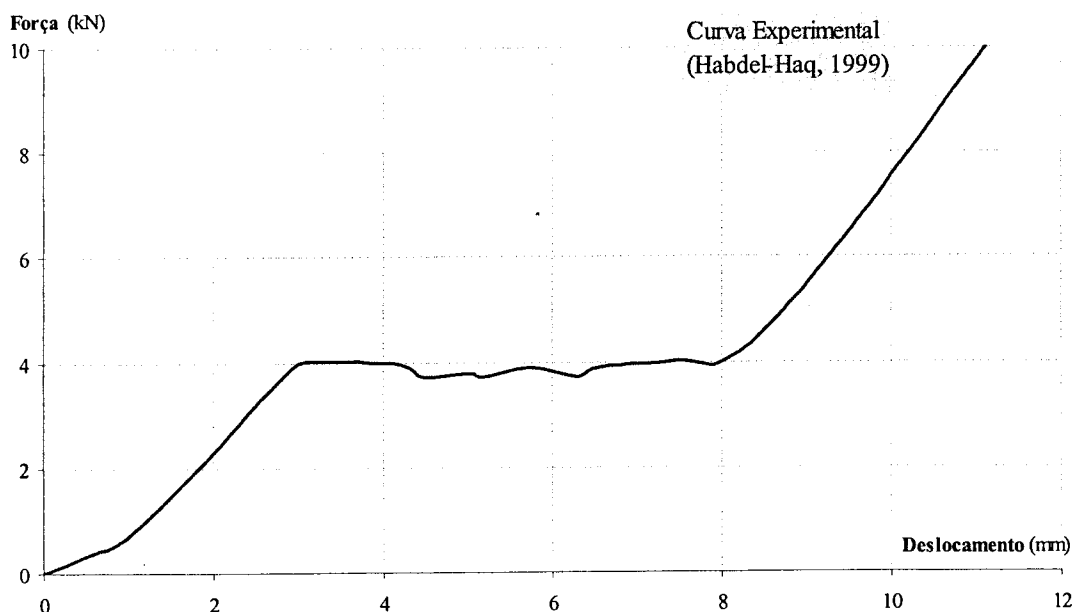


Figura 6-26: Curva carga-deslocamento obtida experimentalmente por Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999).

figura 6-32 numa versão deformada. As propriedades mecânicas consideradas são as que constam da tabela 6.13 (Abdel-Haq, 1999). Para as Taxas Críticas de Libertação de Energia dos elementos de descoesão, foram considerados os valores que constam da tabela 6.14 (Ozdil, 1998, 1999). Dada a experiência anterior neste trabalho, a penalidade foi tomada como $K = 1E5 \text{ N/mm}^3$. O valor do coeficiente de atrito considerado baseia-se no trabalho de Mamalis (1998). Nesse trabalho, Mamalis efectuou vários ensaios experimentais com vista à obtenção dos coeficientes de atrito compósito/actuador mecânico, obtendo valores na gama 0.3 - 0.7. Neste trabalho, foram efectuadas várias simulações com valores $\mu = 0.4$, 0.5 e 0.6. No que diz respeito ao dano nas camadas, foi utilizado o modelo de Hashin, já descrito anteriormente (capítulo 4).

As figuras 6-30, 6-31 e 6-32 permitem visualizar a formação das pétalas (i.e. a formação da fissura axial) de modo semelhante ao que sucedeu nos ensaios experimentais (comparar com a figura 6-23). Nas figuras 6-31 e 6-32, pode-se ver em detalhe a progressão de uma delaminação em Modo II, a meio da parede. Essa

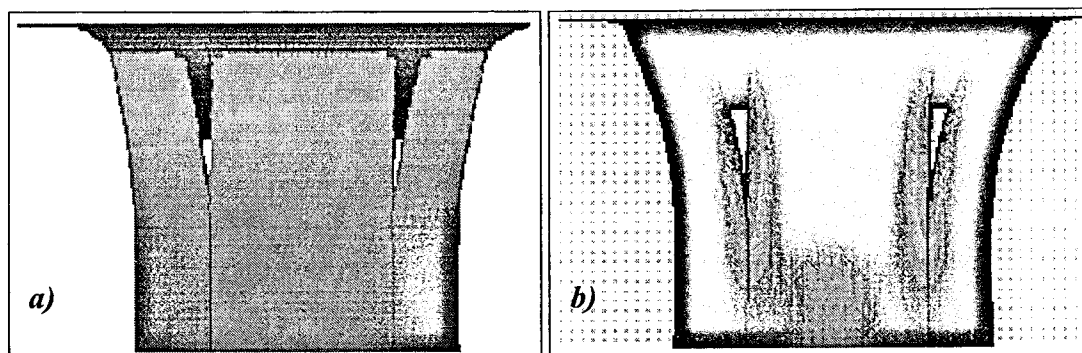


Figura 6-27: a) Deformada; b) Campo de tensões de compressão. Resultados numéricos obtidos em (Bonora, 2000), correspondentes ao ensaio referido em (Abdel-Haq, 1999).

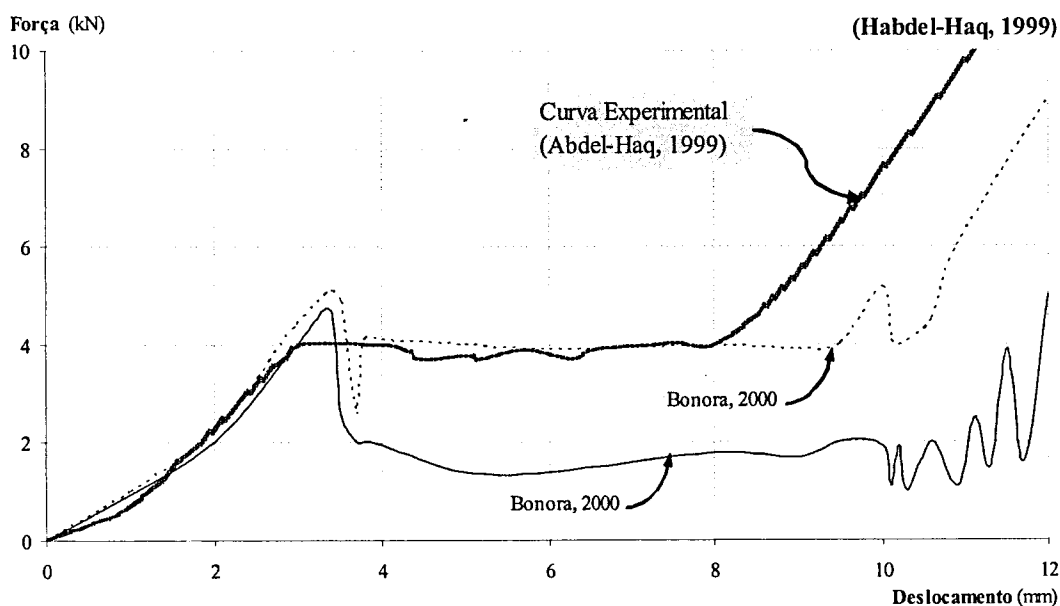


Figura 6-28: Curvas carga-deslocamento obtidas por Bonora *et al.* (Bonora, 2000), correspondentes à simulação numérica do ensaio efectuado por Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999).

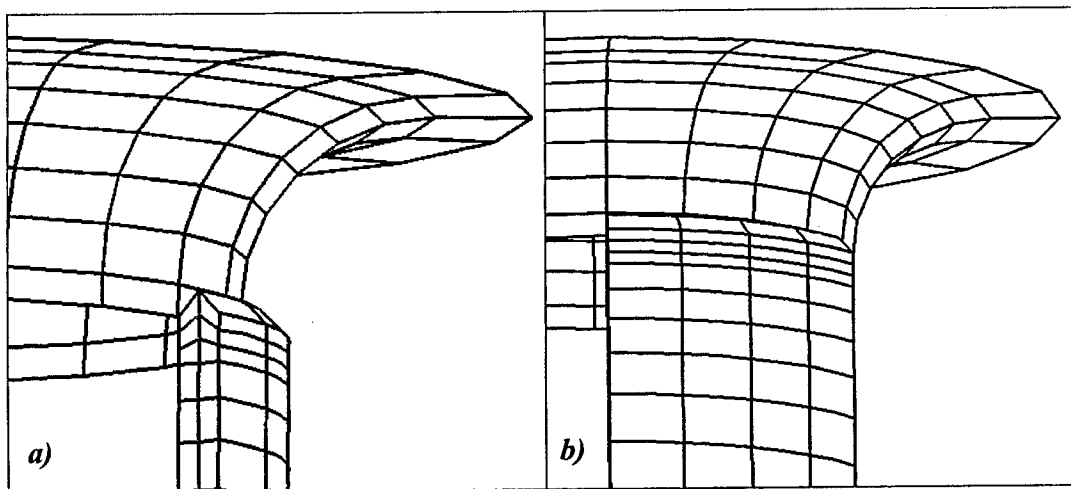


Figura 6-29: Malha (menos refinada) do modelo de simulação numérica correspondente ao ensaio efectuado por Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999).

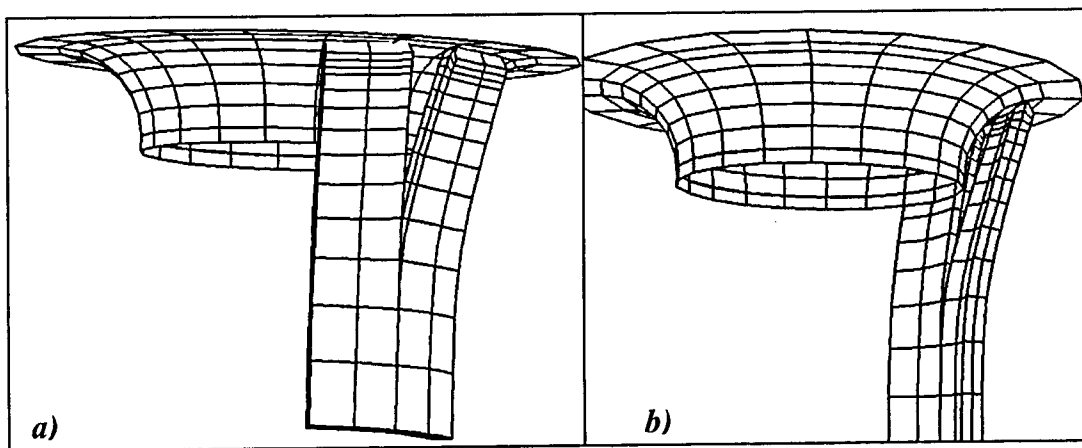


Figura 6-30: Malha (menos refinada) deformada do modelo de simulação numérica correspondente ao ensaio efectuado por Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999).

Tabela 6.14: Taxas Críticas de Libertação de Energia em Modo I e Modo II, para vidro/polyester, segundo Ozdil (1998, 1999).

Propriedade do material	Valor
G_{IC} (kJ/m ²)	200
G_{IIC} (kJ/m ²)	500

delaminação também ocorreu no teste experimental, como é visível na figura 6-25. Sob o ponto de vista numérico, é interessante notar que os elementos de descoesão que permitiram simular essa delaminação se encontram rodados relativamente à sua orientação inicial, e no entanto o contacto sem interpenetração entre as duas partes delaminadas continua a ser conseguido, graças à implementação de uma formulação não linear geométrica nos elementos de descoesão. Finalmente, na figura 6-33 pode-se visualizar o campo de tensões de compressão, a comparar com o mesmo, mas obtido por Bonora *et al.* (Bonora, 2000), figura 6-27. Pode-se pois concluir que os principais fenómenos físicos presentes durante o esmagamento foram reproduzidos pelo modelo.

Tabela 6.15: Resultados numéricos obtidos e comparação com os resultados experimentais de Habel-Haq *et al.* (Habel-Haq, 1999).

Caso	Carga média pós-esmagamento, $\bar{P}$ (kN)	Erro
Experimental (Abdel-Haq, 1999)	3.86	—
$\mu = 0.4$	3.09	−19.9%
$\mu = 0.5$	3.31	−14.3%
$\mu = 0.6$	3.67	−4.8%
$\mu = 0.4$, Refin.	2.79	−27.6%
$\mu = 0.5$, Refin.	3.11	−19.4%
$\mu = 0.6$, Refin.	3.34	−13.4%

Nas figuras 6-34, 6-35 e 6-36, podem observar-se as várias curvas carga-deslocamento obtidas. A figura 6-34 evidencia os resultados obtidos com os diferentes coeficientes de atrito com a malha menos refinada, enquanto a figura 6-35 evidencia os resultados obtidos com a malha mais refinada. Na figura 6-36 pode-se comparar as curvas obtidas para o coeficiente de atrito $\mu = 0.5$ para as duas malhas. A forma geral da curva carga-deslocamento é capturada pela totalidade

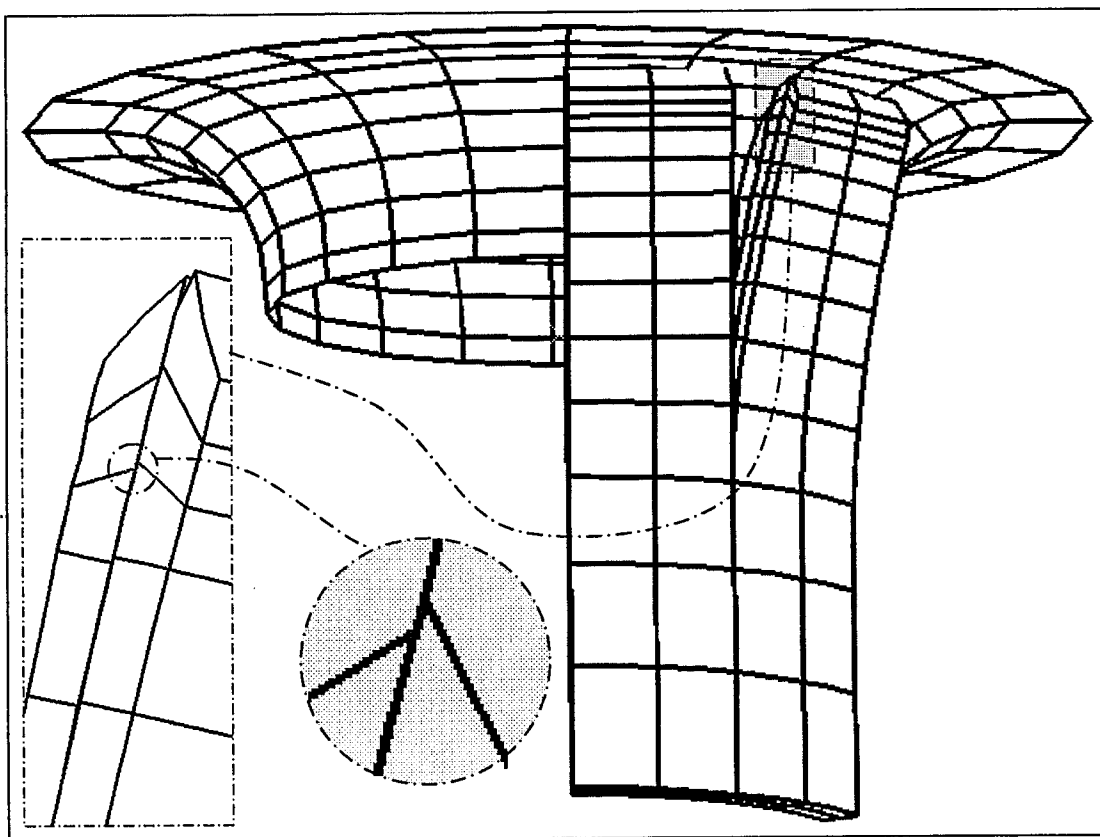


Figura 6-31: Deformada do modelo de elementos finitos proposto correspondente à simulação numérica do ensaio experimental efectuado por Abdel-Haq *et al* (Abdel-Haq, 1999).

dos modelos: aumento aproximadamente linear da carga com o deslocamento até cerca dos 3 mm de deslocamento; formação de um patamar aproximadamente constante até cerca dos 8 mm de deslocamento e subida acentuada a partir daí. A tabela 6.15 permite comparar de forma quantitativa o erro cometido no valor previsto da força de esmagamento⁴ durante o patamar que ocorre entre os 3 mm e os 8 mm. Conclui-se que a forma da curva e a força média durante o patamar referido são bastante influenciados pelo coeficiente de atrito. No que diz respeito à força média, o erro obtido é menor para o maior valor de coeficiente de atrito

⁴Neste caso, não se trata exactamente de uma Força Média Pós-Esmagamento, já que a força de esmagamento vai aumentar a partir dos 8 mm de deslocamento. (Este aumento corresponde ao momento em que a parte superior do tubo atinge a parte horizontal da superfície actuadora e as pétalas são obrigadas a dobrar.)

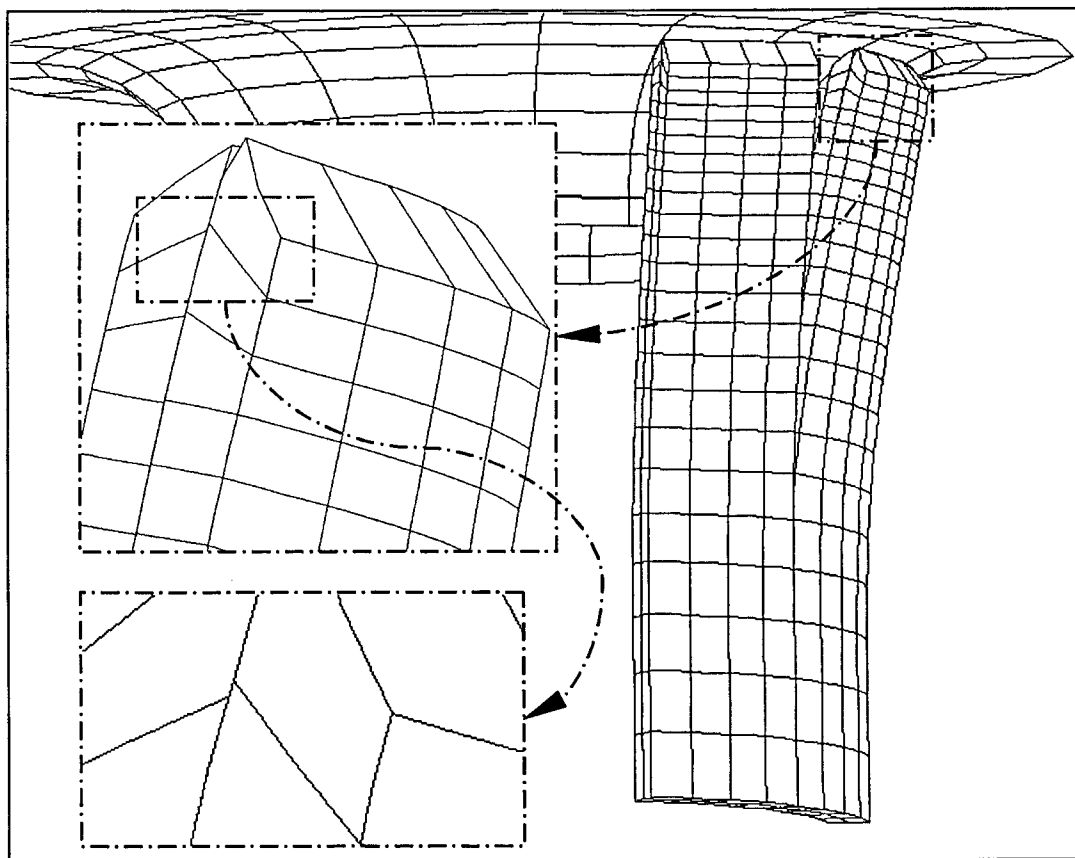


Figura 6-32: Deformada do modelo de elementos finitos refinado proposto correspondente à simulação numérica do ensaio experimental efectuado por Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999).

utilizado. Recorda-se que a importância do atrito na absorção de energia de estruturas tubulares já havia sido observada por Mamalis (1998).

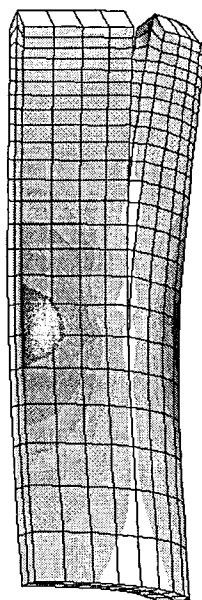


Figura 6-33: Visualização do campo de tensões de compressão (axial).

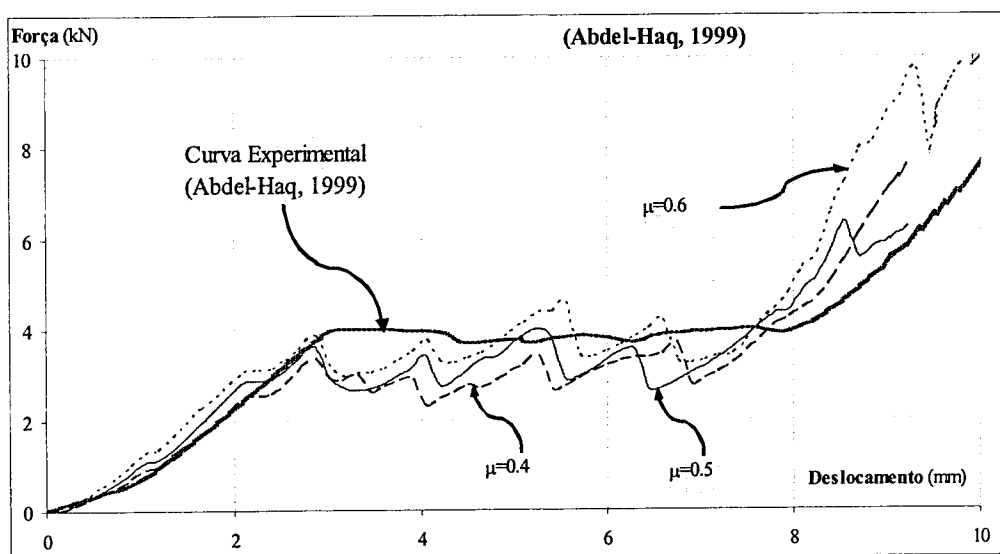


Figura 6-34: Curvas carga-deslocamento obtidas para diferentes coeficientes de atrito, com a malha menos refinada, correspondentes à simulação numérica do ensaio efectuado por Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999).

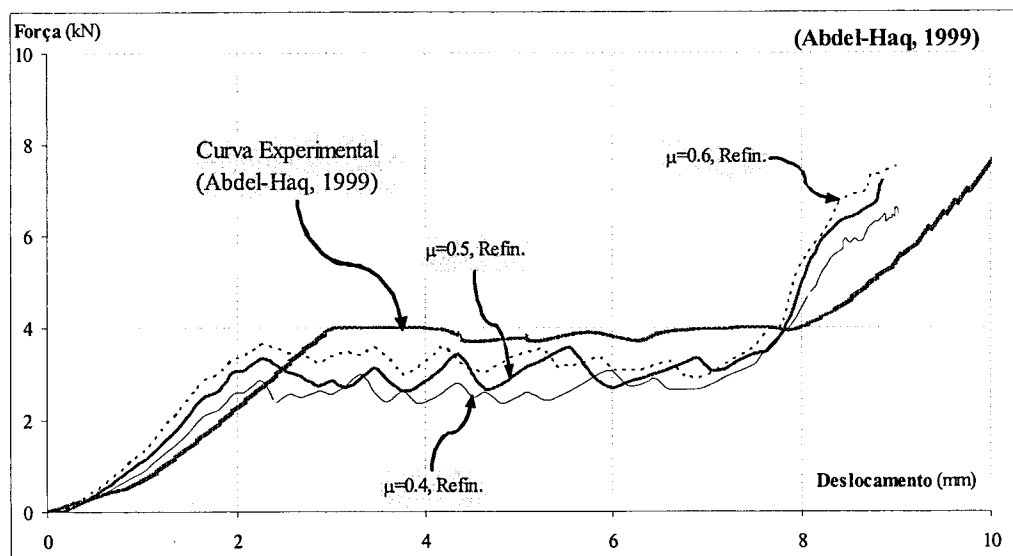


Figura 6-35: Curvas carga-deslocamento obtidas para diferentes coeficientes de atrito, com a malha mais refinada, correspondentes à simulação numérica do ensaio efectuado por Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999).

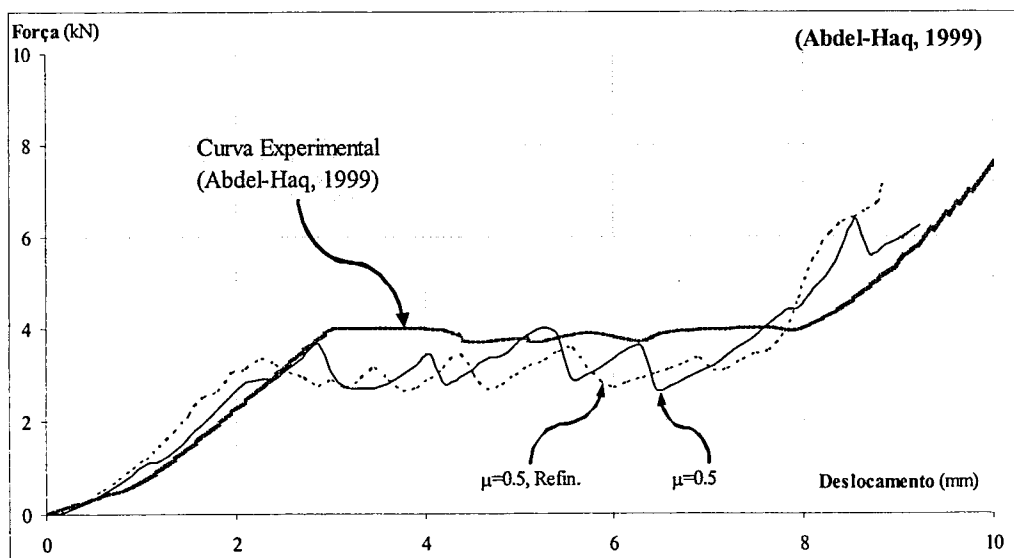


Figura 6-36: Comparação das curvas carga-deslocamento obtidas com duas malhas diferentes (simulação numérica do ensaio efectuado por Abdel-Haq *et al.* (Abdel-Haq, 1999)).

Capítulo 7

Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

7.1 Conclusões

O esmagamento de componentes em materiais compósitos constitui um fenómeno fisicamente complexo. Para este facto, contribuem diversos factores, entre os quais se destacam:

- (i) a grande diferença de escala entre as dimensões das camadas das paredes e do componente como um todo;
- (ii) os grandes deslocamentos envolvidos, que obrigam à actualização da geometria durante a análise;
- (iii) os diferentes mecanismos de dano presentes e a elevada não linearidade material que lhes estão associados, que muito comprometem a convergência dos métodos numéricos (implícitos) utilizados na sua análise;
- (iv) as profundas alterações geométricas que ocorrem na zona de esmagamento (ou zona de fronde), que poderão impedir que o mesmo modelo possa ser utilizado em toda a fase de iniciação (em que se forma a zona de esmagamento) e também na fase de propagação;

(v) o contacto e o atrito.

De entre as diferentes *abordagens* possíveis para a modelação numérica do esmagamento, aquela que é seguida neste trabalho resulta de uma série de *opções* que condicionam os resultados obtidos. A respeito dessas opções, existe um compromisso entre a qualidade dos resultados que se podem obter e a complexidade dos componentes ou estruturas que se conseguem modelar. Por exemplo, os componentes modelados que constam das figuras 2-9 e 2-11 são bastante complexos. A sua modelação terá sido possível essencialmente porque se utilizaram métodos explícitos. Caso se tivessem utilizados métodos implícitos, provavelmente não se teria conseguido obter convergência e, conseqüentemente, quaisquer resultados. No entanto, o compromisso entre a complexidade das estruturas modeladas e a qualidade dos resultados obtidos é evidente: a utilização dos métodos explícitos, mesmo em casos mais simples como os das figuras 2-8 e 6-5 conduz a resultados nem sempre muito bons. De um modo geral, na análise das diferentes abordagens disponíveis, e dentro destas as diferentes possibilidades que existem, é necessário seguir por um determinado caminho. No entanto, muitas vezes, a uma opção razoável correspondem também alternativas igualmente razoáveis. No final, as restrições associadas a cada uma das opções tomadas reduzem o leque de aplicações do modelo final formulado. Para que esse modelo final tenha utilidade, é importante que cada opção seja tomada em consonância com as demais opções, tendo por objectivo um fim concreto. Por outras palavras, as diversas opções tomadas na construção de um modelo, ou seja o rumo seguido na abordagem, não devem comprometer a aplicabilidade desse modelo específico a um fim concreto. No caso deste trabalho, procurou-se modelar o comportamento durante o esmagamento de estruturas ou componentes tubulares, pela importância da sua aplicação como elementos de absorção de energia nas indústrias dos caminhos de ferro, automóvel e aeroespacial. Durante o esmagamento, o componente tubular suporta uma determinada carga de compressão aproximadamente constante, cujo valor determina a sua capacidade de absorção de energia e que é importante prever. As opções seguidas neste trabalho foram no sentido de se poder pre-

ver, com o máximo de rigor possível, essa Carga Média Pós-Esmagamento para componentes tubulares. No entanto, o rigor da abordagem, no que se refere aos fenómenos físicos presentes durante o esmagamento, implica uma dificuldade de convergência que compromete a sua aplicação a componentes mais complexos. Assim, a abordagem seguida neste trabalho consistiu em:

- (i) modelar a progressão das macro-fissuras mais relevantes (delaminação principal e fissuração axial da parede) utilizando elementos de descoesão, com uma formulação em termos de uma relação tracção-deslocamento relativo, introduzindo uma formulação não linear geométrica, o que permite contabilizar de forma correcta a energia envolvida na progressão das macro-fissuras;
- (ii) utilizar um modelo de dano intralaminar (adequado para cada tipo de material em causa) para simular a degradação das propriedades mecânicas causada pelos diferentes fenómenos físicos de dano (rotura de fibras/ matriz à tracção/ compressão);
- (iii) optar por uma análise implícita¹, o que permite que as equações de equilíbrio sejam resolvidas de forma correcta, e não partindo do princípio de que à configuração do incremento anterior corresponde uma situação de equilíbrio.

As dificuldades na implementação do modelo que se propõe resultam essencialmente de dois factores, com natureza diferente: (i) por um lado, nem sempre os ensaios experimentais publicados especificam o valor de grandezas importantes durante o esmagamento, como o coeficiente de atrito ou a Taxa Crítica de Libertação de Energia. Por outro lado (ii), a elevada não linearidade associada aos elementos de descoesão e aos modelos de dano fazem com que a convergência dos modelos numéricos seja limitada.

¹Na realidade, o efeito do dano intralaminar é considerado de forma explícita, já que o dano detectado com base em critérios de tensões no final de um (pequeno) incremento apenas vai alterar as propriedades mecânicas no incremento seguinte.

O modelo proposto foi utilizado para prever a Carga Média Pós-Esmagamento de estruturas tubulares compósitas. Para esses casos, a transformação geométrica que a parede do tubo sofre na fase inicial do esmagamento foi directamente incluída na geometria inicial. Foram considerados diferentes materiais (Carbono/Epóxido, Carbono/PEEK e Vidro/Polyester) e diferentes arquitecturas do reforço (fibras longas alinhadas e fibras curtas aleatórias). Para o tubo Carbono/Epóxido (fibras longas alinhadas), a Carga Média Pós-Esmagamento foi prevista com um erro máximo de $\pm 6\%$. Para o caso dos vários tubos de Vidro/Polyester (fibras curtas aleatórias), foram comparados vários critérios de rotura, tendo-se conseguido prever sempre a Carga Média Pós-Esmagamento com um erro de ordem de grandeza inferior a 20% quando comparada com resultados experimentais. Para o critério que se revelou mais adequado (critério de Mohr-Coulomb), o erro foi em dois casos inferior a 8% (e noutro de 16%). Deve-se referir que o erro obtido resulta da combinação de vários factores: valores das propriedades introduzidas (*rubbish-in*, *rubbish-out*), simplificações implícitas no modelo (por exemplo, não são modeladas todas as interfaces ao longo da parede do tubo) e finalmente a discretização.

Para uma situação particular, o modelo proposto foi utilizado na iniciação e progressão do esmagamento de um tubo Carbono/PEEK. Para esta situação, conseguiu-se prever a forma global da curva carga-deslocamento de forma muito satisfatória. Ainda neste caso, o valor do coeficiente de atrito era desconhecido. Foi então estudada a influência do seu valor na curva carga-deslocamento. Verificou-se por um lado que este não altera a forma global da curva, mas por outro lado o valor médio da força aumenta com o aumento do coeficiente de atrito. O último efeito já tinha sido sugerido por Mamalis (1998).

Após este trabalho, pode-se concluir que o modelo proposto se revela particularmente adequado à simulação do esmagamento de estruturas tubulares, conseguindo prever-se com bastante rigor o valor da Carga Média Pós-Esmagamento para diferentes casos. A dependência da malha utilizada é muito pequena, o que se compreende pela formulação em termos de tracção- deslocamento relativo dos

elementos de descoesão. Em relação aos elementos de descoesão pôde verificar-se que, desde que a Taxa Crítica de Libertação de Energia seja correcta, os resultados obtidos não são severamente afectados por pequenas alterações no valor da penalidade ou das tracções limite. Por outro lado, a utilização de um método implícito juntamente com modelos de dano das camadas e elementos de descoesão constitui uma enorme limitação à capacidade de convergência de modelos deste tipo. Os bons resultados que se obtêm com este modelo no esmagamento de componentes simples podem no entanto ser mais difíceis de obter em componentes mais complexos. Ainda assim, os resultados obtidos na simulalação do esmagamento deste tipo de componentes podem ser utilizados

- (i) directamente, no projecto de componentes tubulares que são utilizados de facto na Indústria automóvel (Mamalis, 1998) ou aeronáutica (Farley, 1993; Deletombe, 2000); ou
- (ii) em estruturas complexas constituídas por um conjunto de sub-componentes tubulares mais simples. Neste caso, o modelo proposto pode ser utilizado para calibrar as leis constitutivas dos sub-componentes mais simples, possibilitando a posterior análise da estrutura mais complexa através de um método híbrido.

Resumindo, o modelo proposto neste trabalho revela ser bastante eficiente e fiável numa gama concreta de aplicações de particular relevância prática.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

A principal restrição do modelo formulado consiste na limitação dos casos em que é conseguida convergência. Assim, as várias sugestões apresentadas vão essencialmente no caminho de melhorar essa capacidade de convergência em casos mais complexos, e assim alargar o leque de possíveis aplicações.

- (i) Uma das fontes de dificuldades de convergência do modelo utilizado encontra-se na formulação bilinear da lei constitutiva do elemento de descoesão. Essa

forma bilinear representa um processo simples (e fisicamente bastante rigoroso) de modelar a propagação de uma fissura. No entanto, sob o ponto de vista numérico, essa forma bilinear levanta enormes dificuldades quando se atinge o vértice que caracteriza a iniciação do dano. Outras leis (parabólicas, função seno, Needleman, entre outras) poderiam ser implementadas com o fim de melhorar a convergência, pese embora o facto de aumentarem o tempo de cada iteração. (Para uma discussão de diferentes leis para a descoesão, consultar (Crisfield, 1997).) Por outro lado, poderia combinar-se esta abordagem com uma pesquisa exaustiva dos métodos numéricos de resolução de sistemas de equações não lineares, no sentido de melhorar a convergência.

- (ii) Na análise do esmagamento de estruturas mais complexas, os métodos explícitos acabam por ser inevitáveis. O elemento de descoesão, cuja formulação foi apresentada neste trabalho, pode perfeitamente ser implementado num código explícito. No caso da simulação do esmagamento de estruturas envolvendo diferentes componentes unidos por diferentes processos de ligação, o elemento de descoesão pode ainda encontrar aplicação na modelação dessas ligações. Por outro lado, o elemento de descoesão apresentado pode ser utilizado numa formulação unidimensional, de modo a ser usado em conjugação com elementos de estado plano de tensão ou deformação.



Bibliografia

- (Abaqus, 2000) "ABAQUS Users Manual – Version 6.1.", Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 2000
- (Abdel-Haq, 1999) Abdel-Haq, M., Broggiato, G. B. e Newaz, G. M., "Constrain Effects on Energy Absorption in Unidirectional PMC Tubes", Journal of Composite Materials, Vol. 33, No. 9, 1999
- (Alfano, 2001) Alfano, G. e Crisfield, M. A., "Finite Element Interface Models for the Delamination Analysis of Laminated Composites: Mechanical and Computational Issues, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, pp 1701-1736, 2001
- (Allix, 1999) Allix, O. e Corigliano, A., "Geometrical and Interfacial Non-linearities in the Analysis of Delamination in Composites", International Journal of Solids and Structures, Vol. 36, pp. 2189-2216, 1999
- (ASTM, 2001) Test Method D6671-01, "Standard Test Method for Mixed Mode I-Mode II Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber Reinforced Polymer Matrix Composites", AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS, West Conshohocken, PA, U.S.A, 2001
- (Azzi, 1965) Azzi, V. D. e Tsai, S. W., "Anisotropic Strength of Composites", Experimental Mechanics, pp. 293-288, 1965

- (Bathe, 1996) Bathe, K. J., "Finite Element Procedures", Prentice-Hall, Inc, 1996
- (Beard, 2000) Beard, S. e Chang, F. K., "Design of Braided Composites for Energy Absorption", 15th Conference of the American Society for Composites, Texas, 2000
- (Billings, 2001) Billings, M. D., Fasanella, E. L. e Kellas, S., "Impact Test and Simulation of Energy Absorbing Concepts for Earth Entry Vehicles", 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, Seattle, 2001
- (Bonora, 2000) Bonora, N., Testa, L. e Newaz, G., "FEM Simulation of Failure Modes in Composite Tubes for Automotive Crush Energy Absorption", 15th Conference of the American Society for Composites, Texas, 2000
- (de Borst, 2001) de Borst, R., "Some Recent Issues in Computational Failure Mechanics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 52, pp. 63-95, 2001
- (Camanho, 1999) Camanho, P. P., "Application of Numerical Methods to the Strength Prediction of Mechanically Fastened Joints in Composite Laminates", PhD Thesis, Imperial College of Science and Technology, University of London, U.K., 1999
- (Camanho, 2000) Camanho, P. P. e Matthews, F. L., "A Progressive Damage Model for Mechanically Fastened Joints in Composite Laminates", Journal of Composite Materials, Vol. 33, pp. 2248-2280, 2000
- (Camanho, 2001A) Camanho, P. P., Dávila, C. G. e Ambur, D. R., "Numerical Simulation of Delamination Growth in Composite Materials", NASA/ TP-2001-211041, 2001

- (Camanho, 2001B) Camanho, P. P. e de Moura, M. F., "Simulation of Interlaminar Damage Using Decohesion Elements", 13th International Conference on Composite Materials, Beijing, China, 2001
- (Camanho, 2002) Camanho, P. P. e Dávila, C. G. "Mixed-mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials", NASA-TM-2002-211737, 2002
- (Chamis, 1969) Chamis, C. C., "Failure Criteria for Filamentary Composites", Composite Materials: Testing and Design, STP 460, ASTM, Philadelphia, pp. 448-464, 1969
- (Charlier, 1991) Charlier, H., Lasry, D., Châlons, P., Petitjean, A. e Haug, E., "Industrial Crashworthiness Simulation with PAM-CRASHTM", StruCoMe'91 Conference, Paris, 1991
- (Chia, 1980) Chia, C.-Y., "Nonlinear Analysis of Plates", McGraw-Hill, Inc., 1980
- (Coutellier, 2000) Coutellier, D. e Rozycki, P., "Multi-Layered Multi-Material Finite Element for Crashworthiness Studies", Composites: Part A, Vol. 31, pp. 841-851, 2000
- (Crisfield, 1997) Crisfield, M. A., Hellweg, H. B., e Davies, G. A., "Failure Analysis of Composite Structures Using Interface Elements", Proceedings of the NAFEMS Conference on Application of Finite Elements to Composite Materials, Vol. 1-4, London, U.K., 1997
- (Dávila, 2001) Dávila, C. G., Camanho, P. P. e de Moura, M. F., "Mixed-Mode Decohesion Elements for Analyses of Progressive Delamination", 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, Seattle, 2001

- (Deletombe, 2000) Deletombe, E., Delsart, D., Kohlgruber, D. e Johnson, A., "Improvement of Numerical Methods for Crash Analysis in Future Composite Aircraft Design", Aerospace Science Technology, Vol. 4, pp. 189-199, 2000
- (DRI/KRASH, 1996) DRI/KRASH Version 9601 - Users Manual, Dynamic Response Inc., Sherman Oaks, California, USA, January, 1996
- (Farley, 1993) Farley, G. L., "Relationship Between Mechanical Property and Energy Absorption Trends for Composite Tubes", Vehicle Structures Directorate, U. S. Army Research Laboratory, Langley Research Center, NASA TP-3284, ARL-TR-29, 1993
- (Fasanella, 2001) Fasanella, E. L. e Jackson, K. E., "Crash Simulation of a Boeing 737 Fuselage Section Vertical Drop Test", 3rd International KRASH Users' Seminar, Tempe, 2001
- (Flemming, 2000) Flemming, D. C. e Fasanella, E. L., "Modeling the Crushing of a Scaled Composite Fuselage Subfloor Structure, 15th Conference of the American Society for Composites, Texas, 2000
- (Freund, 2001) Freund, D. e McKisack, D. R., "Business Jet Crash Landing Analysis", 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, Seattle, 2001
- (Gonçalves, 2000) Gonçalves, J. P., de Moura, M. F. S. F., de Castro, P. M. S. T. e Marques, A. T., "Interface Element Including Point-to-Surface Constraints for Three-Dimensional Problems with Damage Propagation", Engineering Computations, Vol 17, Nº. 4, pp. 28-47, 2000
- (Goyal, 2002) Goyal, V. K. e Johnson, E. R., "An Irreversible Constitutive Law for Modeling the Delamination Process Using Interface Ele-

ments", 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 2002

- (Hamada, 1995) Hamada, H. e Ramakrishna, "Scaling Effects in the Energy Absorption of Carbon-fiber/PEEK Composite Tubes", Composites Science and Technology, Vol. 55, pp. 211-221, 1995
- (Hamada, 1997) Hamada, H., "Can Braided Composites Be Used for Crushing Elements in Cars?", ICCM11 - 11th International Conference on Composite Materials, Gold Coast, 1997
- (Han, 2000) Han, Y., Yee, A. Y., Li, V. C. e Wang, H., Kikuchi, N., Wu, H. C., Agaram, V. and Nusholtz, G., "Axial and Off-Axis Static Crushing of Triaxially Braided Carbon FRP Composite Square Tubes", 15th Conference of the American Society for Composites, Texas, 2000
- (Hashin, 1973) Hashin, Z. e Rotem, A., "A Fatigue Failure Criterion for Fibre Reinforced Materials", Journal of Composite Materials, Vol. 7, pp. 448-464, 1973
- (Hashin, 1980) Hashin, Z., "Failure Criteria for Unidirectional Fibre Composites", Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, pp. 329-334, 1980
- (Haug, 1993) Haug, E. e de Rouvray, A., "Crash Response of Composite Structures", chapter in "Structural Crashworthiness and Failure", Proceedings of the Third International Symposium on Structural Crashworthiness and Failure, University of Liverpool, 1993
- (Hellen, 1975) Hellen, T.K., "On the Method of Virtual Crack Extensions", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, pp.187-207, 1975.

- (Hinton, 2001) Hinton, M. J., Kaddour, A. S. e Soden, P. D., "Predicting Failure in Fibre Composites: Lessons Learned From the World-Wide Failure Exercise", 13th Interantional Conference on Composite Materials, Beijing, China, 2001
- (Hoffman, 1967) Hoffman, O., "The Brittle Strenght of Orthotropic Materials", Journal of Composite Materials, Vol. 1, pp. 200-206, 1967
- (Jackson, 1999) Jackson, K. E. e Fasanella, E. L., "Crashworthy Evaluation of a 1/5-Scale Model Composite Fuselage Concept, NASA/TM-1999-209132 ARL-MR-441, 1999
- (Johnson, 1999) Johnson, A. e Pickett, A. K., "Impact and Crash Modeling of Composite Structures: A challenge for Damage Mechanics", European Conference on Computational Mechanics, ECCM'99, Munich, 1999
- (Johnson, 2001) Johnson, A. F., Pickett, A. K., Rozycki, P., "Computational Methods for Predicting Impact Damage in Composite Structures", Composite Science and Technology, Vol. 61, pp. 2183-2192, 2001
- (Karbhari, 1997) Karbhari, V. M. e Haller, J., "Effects of Preform Structure on Progressive Crush Characteristics od Flange-Stiffened Tubular Elements", Composite Structures, N°. 1, 99, pp. 81-96, 1997
- (Karbhari, 1999) Karbhari, V. M. e Haller, J. E., Falzon, P. K., Herszberg, I., "Post-Impact Crush of Hybrid Braided Composite Tubes", International Journal of Impact Engineering, Vol. 22, pp. 419-433, 1999
- (Kindervater, 1998) Kindervater, C. M., Kohlgruber, D. e Lutzenburger, M., "Crash Simulation Methodologies for Aircraft Structures Used within European Crashworthiness Research", FAA International Aircraft Fire and Cabin Safety Research Conference, Atlantic City, New Jersey, 1998

- (Kindervater, 2000) Kindervater, C. M., Johnson, A. F., Kohlgrüber, D., Lützenburger e M., Pentecôte, N., "Crash and Impact Simulation of Aircraft Structures", European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000, Barcelona, 2000
- (Ladevéze, 1994) Ladevéze, P., "Inelastic Strains and Damage", capítulo Quatro de "Damage Mechanics of Composite Materials", Composite Materials Series, 9. Amsterdam: Elsevier, 1994
- (Laws, 1983) Laws, N., Dvorak, G. J. e Hejazi, M., "Stiffness Changes in Unidirectional Composites Caused by Crack Systems", Mechanics of Materials, Vol. 2, pp. 123-137, 1983
- (Li, 2000A) Li, J. e J. K. Sen., "Analysis of Frame-to-Skin Joint Pull-Off Tests and Prediction of the Delamination Failure", 42nd AIAA/ ASME/ ASCE/ AHS/ ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference (Seattle, WA, U.S.A.), 2000
- (Li, 2000B) Li, J., "Three-Dimensional Effects in the Prediction of Flange Delamination in Composite Skin-Stringer Pull-Off Specimens", 15th Conference of the American Society for Composites (Texas, U.S.A.), pp. 983-90, 2000
- (Liu, 1998) Liu, K.-S. e Tsai, W., "A Progressive Quadratic Failure Criterion for a Laminate", Composites Science and Technology, Vol. 58, pp. 1023-1032, 1998
- (Manten, 2000) Manten, D. R. e Bergsma, O. K., "Modern Applications of Thermoplastic Composites", 15th Conference of the American Society for Composites, Texas, 2000

- (McCarthy, 2001) McCarthy, M. A. e Wigggenraad, J. M., "Numerical Investigation of a Crash Test of a Composite Helicopter Subfloor Structure", *Composite Structures*, Vol. 51, pp 345-359, 2001
- (Mi, 1996) Mi, Y. e Crisfield, M. A., "Analytical Derivation of Load/ Displacement relationship for the DCB and MMB and Proof of the FEA Formulation", Internal Report, Department of Aeronautics, Imperial College, London, April 1996
- (de Moura, 1995) de Moura, M. F. S. F., "Modelos de Previsão do Comportamento Mecânico de Materiais Compósitos de Carbono-Epóxico Sujeitos a Impacto de Baixa Velocidade e da sua Resistência Residual à Compressão Após Impacto", tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1995
- (de Moura, 1996) de Moura, M. F. S. F., Gonçalves, J. P., Marques, A. T. e de Castro, P. T., "Elemento Finito Isoparamétrico de Interface para Problemas Tridimensionais", *Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo e Diseño en Ingeniería*, Vol. 14, pp. 447-466, 1996
- (de Moura, 1997) de Moura, M. F. S. F., Gonçalves, J. P., Marques, A. T., e de Castro, P. T., "Modeling Compression Failure after Low Velocity Impact on Laminated Composites Using Interface Elements", *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, pp. 1462-1479, 1997
- (de Moura, 2000) de Moura, M. F. S. F., Gonçalves, J. P., Marques, A. T., e de Castro, P. T., "Prediction of Compressive Strength of Carbon-Epoxy Laminates Containing Delaminations by Using a Mixed-Mode Damage Model", *Composite Structures*, Vol. 50, pp. 151-157, 2000
- (Nuismer, 1988) Nuismer, R. J. e Tan, S. C., "Constitutive Relations of a Cracked Composite Lamina", *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, pp. 306-321, April 1988

- (Ortiz, 1999) Ortiz, M. e Pandolfi, A., "Finite-Deformation Irreversible Cohesive Elements for Three-Dimensional Crack-Propagation Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 44, pp. 1267-1282, 1999
- (Ozdil, 1998) Ozdil, F., Carlsson, L. A., "Beam Analysis of Angle-ply End-notched Flexure Specimens", Composites Science and Technology, Vol. 58, pp.1929-1938, 1998
- (Ozdil, 1999) Ozdil, F., Carlsson, L. A., "Beam Analysis of Angle-ply Laminate DCB Specimens", Composites Science and Technology, Vol. 59, pp.305-315, 1999
- (Palantera, 1998) Palantera, M. e Karjalainen, J. P., "Theoretical Background of ESAComp Analyses / Chapter 3 - Failure Criteria", Version 1.0, March 1998
- (Pam Crash, 1992) Pam Crash - ESI Group Software Product Company. Theory Manual, 1992
- (Prsa, 2000) Prsa, J., "PNGV Hybrid Material Automotive Body Structure Development", 15th Conference of the American Society for Composites, Texas, 2000
- (Puck, 1995) Puck, A., "Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten, Modelle für die Praxis", Hanser, 1995
- (Puck, 2001) Puck, A. e Schurmannb, H., "Failure Analysis of FRP Laminates by Means of Physically Based Phenomenological Models", Composites Science and Technology, In Press, Uncorrected Proof, Available online (www.science-direct.com) 4 December 2001

- (Puck, 2002A) Puck, A., Kopp, J. e Knops, M., "Guidelines for the Determination of the Parameters in Puck's Action Plane Strength Criterion", Composites Science and Technology Vol. 62, pp. 371-378, 2002
- (Puck, 2002B) Puck, A., Kopp, J. e Knops, M., "Errata to 'Guidelines for the Determination of the Parameters in Puck's Action Plane Strength Criterion' ", Composites Science and Technology Vol. 62, pp. 371-378, 2002
- (Qiu, 2001) Qiu, Y., Crisfield, M. A. e Alfano, G., "An Interface Element Formulation for the Simulation of Delamination with Buckling", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 68, pp. 1755-1776, 2001
- (Rahman, 2000) Rahman, M. T. e Newaz, G. M., "Effect of Impact Damage on Energy Absorption in Cylindrical PMC Tubes", 15th Conference of the American Society for Composites, Texas, 2000
- (Ramakrishna, 1997) Ramakrishna, S., "Microstructural Design of Composite Materials for Crashworthy Structural Applications", Materials & Design, Vol. 18, pp. 167-173, 1997
- (Reeder, 1991) Reeder, J. R. e J. H. Crews, "Nonlinear Analysis and Redesign of the Mixed-Mode Bending Delamination Test", NASA TM 102777, 1991
- (Reeder, 2000) Reeder, J. R., "Refinements to the Mixed-Mode Bending Test for Delamination Toughness", Proceedings of the 15th Conference of the American Society for Composites, Texas, U.S.A, 2000.
- (Sun, 1996) Sun, C. T., Quinn, B. J., Tao, J. e Oplinger, D. W., "Comparative Evaluation of Failure Analysis Methods for Composite Laminates", NASA, DOT/FAA/AR-95/109, 1996

- (Tan, 1993) Tan, S. C., e Perez, J., "Progressive Failure of Laminated Composites with a Hole under Compressive Loading", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 12, pp. 1043-1057, 1993
- (Tan, 1989) Tan, S. C. e Nuismer, R. J., "A Theory for Progressive Matrix Cracking in Composite Laminates", *Journal of Composite Materials*, Vol. 23, pp 1029-1047, October 1989
- (Tay, 1998) Tay, T. E., Lee, K. H., Ramakrishna, S. and Shen, F., "Modelling the Crushing Behaviour of Composite Tubes", *Key Engineering Materials*, pp. 777-790, 1998
- (Thacker, 1998) Thacker, J. G., Reagan, S. W., Pellettiere, J. A., Pilkey, W. D., Crandall, J. R. e Sieveka, E. M., "Experiences During Development of a Dynamic Crash Response Automobile Model", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 30, pp. 279-295, 1998.
- (Tromp, 2001) Tromp, E. e Brouwer, W. D., "Composites in Primary Structures: Endurable and Crash Resistant Bottom Platform for a Go-Kart", ICCM13 - 13th International Conference on Composite Materials, Beijing, China, 2001
- (Tsai, 1965) Tsai, S. W., "Strength Characteristics of Composite Materials", NASA CR-224, 1965
- (Tsai, 1971) Tsai, S. W., e Wu, E. M., "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials", *Journal of Composite Materials*, Vol. 5, pp. 58-80, 1971