

Resumo

Os processos de Markov são processos estocásticos com inúmeras aplicações: filas de espera, a modelação de transmissão de características genéticas, simulação de fenómenos físicos e muitos outros menos conhecidos.

Em algumas aplicações, tem todo o interesse saber qual o comportamento assintótico do sistema. Será mostrado que, em alguns casos, isto pode ser previsto através da chamada matriz das probabilidades de transição e dos seus vectores e valores próprios.

Em dimensão pequena e com os métodos computacionais actualmente existentes é, em geral, relativamente fácil e pouco dispendioso (em termos de tempo e de memória computacional) determinar os vectores e valores próprios associados a uma matriz de transição. No entanto quando a dimensão é elevada o caso modifica-se. Serão aqui estudados alguns métodos adequados a dimensões grandes.

Um dos objectivos será responder às questões: como determinar o comportamento limite do sistema? Quais os métodos a usar? Em que condições? No entanto, o objectivo principal desta tese será comparar diferentes métodos para a determinação dos valores próprios de maior módulo (e respectivos vectores próprios). Ver-se-á que estes pares próprios (valor-vector) permitem responder a algumas das questões formuladas anteriormente. Para tal determinação é interessante recorrer a métodos de projecção, como será visto adiante. Depois de introduzidas todas as bases teóricas para ser possível entender quer as cadeias de Markov, quer os métodos de projecção, serão vistos em mais detalhe dois representantes deste tipo de métodos: o método de Arnoldi e o método das iterações simultâneas. Por fim, serão aplicadas algumas rotinas que implementam versões destes métodos a um conjunto de matrizes de teste, procedendo-se no fim à análise dos resultados obtidos.

Abstract

Markov processes are stochastic processes with many applications, such as: queuing models, models of transmission of genetic characteristics, simulation of physical phenomena and many others not so well known.

In some of these applications the asymptotic behaviour of the system plays a fundamental role. It will be shown in this work that, in some cases, such behaviour can be predicted using the so-called transition probability matrix as well as its eigenvalues and eigenvectors.

In small dimensions it is, usually, relatively easy and computationally cheap to use available computational methods to determine the eigenvalues and eigenvectors of a transition matrix. However, as the dimension increases, the situation becomes completely different. This work will focus on methods well suited for large dimensions.

One of the goals of this work is to answer to the following questions: How can one determine the limiting behaviour of the system? Which methods can be used? In which conditions can they be applied?

Nevertheless the main goal of this thesis will be the comparison between different methods for the determination of the dominant eigenvalues (as well as the associated eigenvectors). It will be shown that such pairs (eigenvalue-eigenvector) allow us to answer some of the previously posed questions. In the determination of such pairs, the so-called projection methods will be particularly useful, as will be seen further on.

After introducing all theoretical background needed for the understanding of Markov chains and projection methods, two specific projection methods will be studied in detail: Arnoldi's method and Simultaneous Iteration method. Finally, some routines implementing versions of these methods will be applied to a number of test matrices, and an analysis of the results will follow.